

Problemen für Physik I und II

Aufgabensammlung für die Studenten der Fakultäten für
Elektrotechnik, Informatik und Maschinenbau

László Kocsányi, Patrik Gádoros

31. August 2013

Inhalt

1	Mechanik	2
1.1	Kinematik	2
1.2	Dynamik	6
2	Elektromagnetismus	20
2.1	Elektrostatik	20
2.2	Magnetismus	36

1. Mechanik

1.1 Kinematik

M-1) Aufgabe

Ihr Zug hat den letzten Bahnhof genau vor fünf Minuten verlassen, als Sie einen gegenüber fahrenden Güterzug wahrnehmen. Sie stellen fest, dass die 50 Wagen (inklusive Lokomotiv) innerhalb von 15 Sekunden vorbeirasen. Sie wissen, dass die Züge zum gleichen Zeitpunkt vor 6 Minuten von den benachbarten Bahnhöfen losgefahren sind. Bestimmen Sie die Entfernung der benachbarten Bahnhöfe, wenn die Wagen und der Lokomotiv von dem Güterzug etwa 15 m lang sind und die Geschwindigkeiten der Züge konstant genommen werden können!

Lösung Sei d die Gesamtentfernung der Bahnhöfe, s_1 und s_2 die Entfernung der Bahnhöfe von dem Treffpunkt.

$$s_1 = 300 [s] v_1 \quad s_2 = 300 [s] v_2 \\ d = 300 (v_1 + v_2)$$

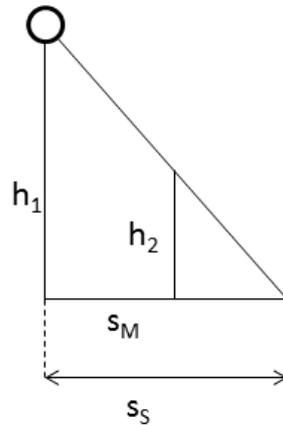
$$L = 50 \cdot 15 = 750m \quad \Delta t = 15s \rightarrow v_1 + v_2 = \frac{L}{\Delta t} = 50m/s$$

$$\text{Der Abstand der Bahnhöfe } d = t (v_1 + v_2) = \boxed{15km}$$

M-2) Aufgabe

Ein Mensch, dessen Grösse h_2 ist, bewegt sich mit einer konstanten Geschwindigkeit von c unter einer Lampe, die sich in der Höhe von h_1 befindet. Mit welcher Geschwindigkeit bewegt sich der Endpunkt des Schattens des Menschen auf der Erde?

Lösung



$$\frac{h_1 - h_2}{h_1} = \frac{s_M}{s_S} = \frac{v_m \Delta t}{v_s \Delta t}$$

$$\frac{h_1 - h_2}{h_1} = \frac{c}{v_s}$$

$$v_s = \frac{h_1}{h_1 - h_2} \cdot c$$

M-3) Aufgabe

Ein Auto und ein 20m lange Lastwagen fahren mit der konstanten Geschwindigkeit von $90 \frac{km}{h}$ auf einer zweispurigen Landstrasse so, dass das Auto sich hinter dem Laster in einem Abstand von 30m befindet. Der Autofahrer kann plötzlich eine 500m lange freie Strecke einsehen, und entscheidet den Laster zu überholen. Zuerst beschleunigt er auf $v = 110 \frac{km}{h}$ mit $a = 1,5 \frac{m}{s^2}$ Beschleunigung, dann fährt mit konstanter Geschwindigkeit und nach der Überholung, in einem Abstand von 30m vor dem Lastwagen schert er wieder ein. Wie lang waren die überholzeit und der überholweg, wenn der Laster in der ganzen Zeit mit konstanter Geschwindigkeit sich bewegt hat? War das Manöver gefahrlos?

Lösung

$$v_1 = 90 \frac{km}{h} = 25 \frac{m}{s} \quad a = 1,3 \frac{m}{s^2}$$
$$v_2 = 110 \frac{km}{h} = 30,56 \frac{m}{s} \quad \Delta s = 2 \cdot 30 + 20 = 80m$$

$$\Delta t_1 = \frac{v_2 - v_1}{a} = 3,7s$$

$$s_L = \Delta t_1 v_1 + \Delta t_2 v_1$$

$$s_P = \Delta t_1 v_1 + \frac{1}{2} a \Delta t_1^2 + \Delta t_2 v_2$$

$$\Delta t_1 v_1 + \Delta t_2 v_1 = \Delta t_1 v_1 + \frac{1}{2} a \Delta t_1^2 + \Delta t_2 v_2 - \Delta s$$

$$\Delta t_2 (v_2 - v_1) = \Delta s - \frac{1}{2} a \Delta t_1^2$$

$$\Delta t_2 \cdot 5,55 = 80 - \frac{1}{2} \cdot 1,5 \cdot 3,7^2 = 69,74 \rightarrow \Delta t_2 = 12,56s$$

$$\boxed{\Delta t = 16s} \rightarrow \Delta s_p = 16 \cdot 25 + 80 = 480 < 500 \rightarrow \boxed{\text{sicher}}$$

M-4) Aufgabe

Ein Massenpunkt bewegt sich mit konstanter Beschleunigung der X-Achse entlang. Im Ursprung war seine Geschwindigkeit $5 \frac{cm}{s}$. Von dem Ursprung bis zu 12cm braucht er 3s. Wie groß ist die konstante Beschleunigung?

Ergebnis

$$\boxed{a = -0,67 \frac{cm}{s^2}}$$

M-5) Aufgabe

Die Beschleunigung einer linearen Bewegung ist in Abhängigkeit der Raumkoordinate x angegeben: $a(x)$! Bestimmen Sie die Raumabhängigkeit der Geschwindigkeit! Nehmen wir als Beispiel $a(x) = kx^3$ mit der Anfangsbedingung von $v(x_0) = v_0$!

Lösung

$$\begin{aligned} a &= \frac{dv}{dt} = \frac{dv}{dx} \frac{dx}{dt} = \frac{dv}{dx} v \\ \int_{x_0}^x a dx &= \int_{v_0}^v v dv \\ k \frac{x^4}{4} - k \frac{x_0^4}{4} &= \frac{1}{2} v^2 - \frac{1}{2} v_0^2 \\ v(x) &= \sqrt{\frac{1}{2} x^4 - \frac{1}{2} x_0^4 + v_0^2} \end{aligned}$$

M-6) Aufgabe

Zwei Körper werden aus einer Höhe von 10m in dergleichen Zeitpunkt, mit dergleichen Anfangsgeschwindigkeiten von $v_0 = 5 \frac{m}{s}$ weggeworfen. Der erste senkrecht aufwärts, der zweite senkrecht abwärts. Man berechne

- Zeitfunktion der Entfernung der Körper,
- die Zeiten bis zum Auftreffen auf den Boden.

Ergebnis

M-7) Aufgabe

Die lineare Beschleunigung eines Massenpunktes wächst mit der Zeit gleichförmig an, und in der ersten 5 Sekunden steigt sie von dem Nullwert auf den Wert von $5 \frac{m}{s^2}$. Wie groß ist die Geschwindigkeit des Massenpunktes nach Ablauf von 10s? Welche Strecke legt er in dieser Zeit zurück, wenn er sich in $t = 0$ in Ruhe befand?

Ergebnis

M-8) Aufgabe

Bei einem Schrägwurf beträgt die Anfangsgeschwindigkeit des punktierten Körpers $\mathbf{v}_0 = v_{0,x} \mathbf{i} + v_{0,y} \mathbf{j}$. Bestimme die Schußweite und die maximale Schußhöhe wenn die Achsen des Bezugssystems waagrecht (x) und senkrecht (y) aufgenommen worden sind, und der Wurf findet im Ursprung statt. Gebe das Endergebnis an, wenn \mathbf{v}_0 durch ihre Grösse (v_0) und durch ihren Neigungswinkel (ϕ_0) relativ zu der X-Achse angegeben wurde. Der Luftwiderstand und die Erdkrümmung kann vernachlässigt werden.

Lösung

M-9) Aufgabe

Bestimme $x(t)$, $y(t)$, $|\mathbf{v}(t)|$, $a_T(t)$ und $a_N(t)$ für ein Schrägwurf mit der Anfangsgeschwindigkeit von v_0 , wenn die Achsen des Bezugssystems waagrecht (x) und senkrecht (y) aufgenommen worden sind, und der Wurf findet im Ursprung statt. Der Luftwiderstand und die Erdkrümmung kann vernachlässigt werden.

Ergebnis

M-10) Aufgabe

Die Umdrehungszahl des Plattenspielers ist in einer Minute 45. Auf der Platte, von der Rotationsachse 5cm entfernt befindet sich ein punkartiges Schmutzfleck, der an die Platte sich fest angeklebt hat. Bestimme die Geschwindigkeit und die Beschleunigung des Fleckes!

Lösung

$$\begin{aligned}n &= U = \frac{45}{60} \frac{1}{s} = \frac{3}{4} \frac{1}{s} \\ \omega &= 2\pi n = 4,71 \frac{1}{s} \\ v_r \omega &= \boxed{0,24 \frac{m}{s}} \quad a = \frac{v^2}{r} = \frac{0,24^2}{0,05} = \boxed{1,15 \frac{m}{s^2}}\end{aligned}$$

1.2 Dynamik

M-11) Aufgabe

Von dem $H = 500m$ hohen Dach eines Wolkenkratzers wurde eine Bombe mit der Masse von $m = 40kg$ fallen gelassen. Nach $h = 300m$ freien Fall hat sich die Bombe in zwei Teilen explodiert. Das kleinere Teil, dessen Masse $m_1 = 15kg$ war, hat die Stelle der Explosion waagrecht, mit $v_{1x} = 100 \frac{m}{s}$ verlassen. Wo fällt das andere Teil auf den Boden?

Lösung

Die Bewegung der Bombe kann auf Drei Etape verteilt werden. Das erste ist ein freier Fall von dem Dach zu der Explosionsstelle. Das Zweite ist die Explosion daselbst, dabei die Impulserhaltung zur Lösung führt, und das Dritte ist ein Schrägwurf aus dieser Stelle. Die Endgeschwindigkeiten der einzelner Etape sind die Anfangsgeschwindigkeiten der Folgenden, abgesehen davon können die Drei Bewegungen voneinander unabhängig diskutiert werden.

Teil 1: freier Fall

$$v_y = \sqrt{2gh} = 77,5 \frac{m}{s}$$

Teil 2: Explosion

$$\begin{array}{ll} \text{X-Richtung:} & m_1 v_{1x} = -m_2 v_{2x} & v_{2x} = -\frac{m_1}{m_2} v_{1x} = -60 \frac{m}{s} \\ \text{Y-Richtung:} & m v_y = m_1 v_{1y} + m_2 v_{2y} & v_{1y} = 0 \rightarrow v_{2y} = \frac{m}{m_2} v_y = 124 \frac{m}{s} \end{array}$$

Teil 3: Schrägwurf

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} g \Delta t^2 + v_{2y} t_2 &= H - h \\ \Delta t^2 + \frac{2v_{2y}}{g} \Delta t - \frac{2(H-h)}{g} &= 0 \\ \Delta t = \frac{-\frac{2v_{2y}}{g} \pm \sqrt{\left(\frac{2v_{2y}}{g}\right)^2 + 4\frac{2(H-h)}{g}}}{2} &= \frac{-24,8 \pm 27,8}{2} = \begin{cases} -26,3s & \text{Negativ} \\ 1,5 & \text{reelle Lösung} \end{cases} \\ \Delta t &= 1,5s \end{aligned}$$

Einschlagort des kleineren Teiles ist:

$$s_2 = v_{2x} \Delta t = \boxed{90\text{m}}$$

M-12) Aufgabe

Bestimme beim Abschuss die Mindestgeschwindigkeit einer Kanonenkugel, die den Mond erreichen sollte (z.B. Jules Verne: Von der Erde zum Mond)! Der Luftwiderstand und die Erdrotation sollen außer Sicht gelassen

Ergebnis

$$\text{Die Mindestgeschwindigkeit ist } \boxed{v_0 \geq 11885 \frac{m}{s}}$$

M-13) Aufgabe

Bestimme die Höhe der geostationären Satelliten über der Meershöhe! Wie groß ist die theoretische Abschussgeschwindigkeit, wenn der Abschuss bei dem Äquator stattfindet?

Lösung

Geostationäre Bahn:

$$m\omega^2 r = \gamma \frac{mM_E}{r_B^2} \rightarrow r_B^3 = \frac{\gamma M_E}{\omega^2}, \text{ und}$$

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 1 \text{Tag} = 24 \cdot 3600 \text{ [s]} \rightarrow \omega = \frac{2\pi}{24 \cdot 3600} = 7,2 \cdot 10^{-5} \frac{1}{s}$$

$$r_B = \sqrt[3]{\frac{\gamma M_E}{\omega^2}} = 42500 \text{ km}$$

Die Höhe der Bahn ist deshalb $\boxed{36000 \text{ km}}$ über der Meereshöhe ($h = r_B - R_E$). Die underlineAbschussgeschwindigkeit kann mithilfe der Erhaltung der mechanischen Energie bestimmt werden. Beim Abschuss ist die Energie:

$$E = \frac{1}{2}mv_0^2 + \frac{1}{2}m\omega^2 R_E^2 - \frac{\gamma m M_E}{R_E}$$

Auf der Bahn ist:

$$E = \frac{1}{2}m\omega^2 r_B^2 - \frac{\gamma m M_E}{r_B}$$

$$\frac{1}{2}mv_0^2 = \frac{1}{2}m\omega^2 r_B^2 + \gamma m M_E \left(\frac{1}{R_E} - \frac{1}{r_B} \right) - \frac{1}{2}m\omega^2 R_E^2$$

$$v_0 = \sqrt{\omega^2 (r_B^2 - R_E^2) + 2\gamma M_E \left(\frac{1}{R_E} - \frac{1}{r_B} \right)} \approx \boxed{10^4 \frac{m}{s}}$$

M-14) Aufgabe

Ein Rennwagen der Masse von 800kg bewegt sich in einer Kurve, deren Radius 50m ist. Auf einer 100m langen Strecke beschleunigt sich von $100 \frac{km}{h}$ auf $150 \frac{km}{h}$ Geschwindigkeit gleichmäßig. Bestimme die Haftreibungskraft zwischen Rad und Boden dort, wo die Geschwindigkeit gerade $125 \frac{km}{h}$ ist! Bestimme den minimalen Haftreibungskoeffizient zwischen Boden und Reifen, der die rutschfreien Bewegung des Autos während der ganzen Strecke sichert.

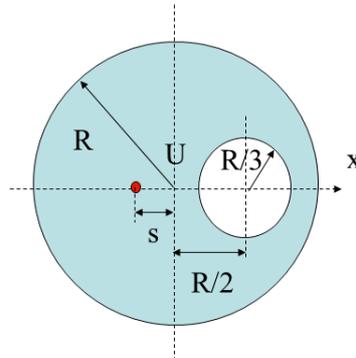
Ergebnis

Die Haftreibung ist $\boxed{F_H = 19280 \text{ N}}$, der minimale Haftreibungskoeffizient ist $\boxed{\mu \approx 3,5}$.

M-15) Aufgabe

Aus einem homogenen kreisförmigen Blech mit dem Radius von R wurde gemäß

der Abbildung ein Kreis (mit dem Radius von $R/3$) ausgeschnitten. Bestimmen Sie die Lage des Schwerpunkts relativ zum Mittelpunkt des Bleches!



Lösung

Nehmen wir zwei Teile:

- die ausgeschnittenen Kreisplatte mit dem Radius von $\frac{R}{3}$, deren Schwerpunkt ist in $\frac{R}{2}$, und deren Masse ist $M_K = \rho \frac{R^2\pi}{9}$;
- und der übriggebliebene Teil, dessen Schwerpunkt ist in $x = -s$, und dessen Masse ist: $M_R = \rho \left(R^2\pi - \frac{R^2\pi}{9} \right) = \rho \frac{8R^2\pi}{9}$

Durch Vereinigung wird der Schwerpunkt in U fallen. Deswegen:

$$\begin{aligned}
 M_K \frac{R}{2} &= M_R s \\
 \rho \frac{R^3\pi}{18} &= \rho \frac{8R^2\pi}{9} s \\
 \frac{R}{18} &= \frac{16}{18} s \\
 s &= \frac{1}{16} R
 \end{aligned}$$

Also der Schwerpunkt der übriggebliebenen Blechplatte ist in $x = -\frac{1}{16}R$

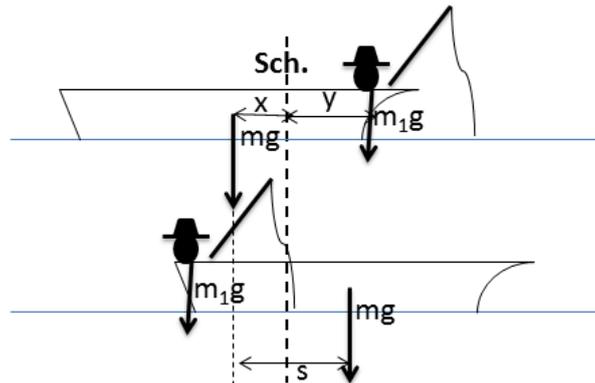
M-16) Aufgabe

Ein Angler sitzt in der Spitze seines Bootes, dessen Länge $l = 8m$ ist. Plötzlich geht er zu der Rückseite seines Bootes. Bestimme die neue Lage des Bootes relativ zu der Position am Anfang, wenn die Masse des Anglers ist $m_1 = 90kg$, und die von

dem Boot (ohne Angler) $m = 120\text{kg}$. Die Reibungskräfte sollen unberücksichtigt bleiben.

Lösung

Der Schwerpunkt des Systems (Angler + Boot) bleibt während der Bewegung am Ort. Vorher $m_1x = my$



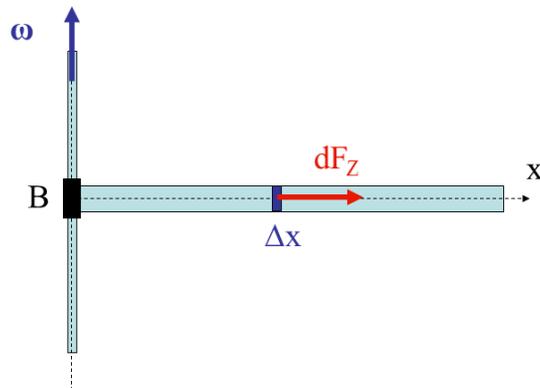
Nach dem Positionswechsel ist das Boot nun mit s Abstand weggeschwommen. Für das neue Gleichgewicht:

$$\begin{aligned}
 m_1(s - x) &= m(l - y - s) \\
 (m_1 + m)s &= ml + m_1x - my && \text{aber } m_1x = my \\
 s &= \frac{m}{m + m_1}l = \boxed{3,42\text{m}}
 \end{aligned}$$

M-17) Aufgabe

Eine homogene gerade Alustange der Dichte $8\frac{\text{g}}{\text{cm}^3}$ und der Länge $l = 1\text{m}$ dreht sich mit einer Winkelgeschwindigkeit ω um einer festen Achse, die durch einen Endpunkt der Stange geht und senkrecht zur Stange gerichtet ist. Welchen Höchstwert darf die Winkelgeschwindigkeit dieser Drehung annehmen, wenn die höchstzulässige

Spannung der Befestigung auf der Achse ist $1000 \frac{N}{cm^2}$ beträgt?



Lösung

Die Gesamtkraft, die in Längsrichtung der Stange angreift, ist der Summe der Zentrifugalkräfte gleich, die mit der Entfernung von der Achse steigen.

$$dF = \Delta m c \omega^2 = \rho A \Delta x \omega^2 x$$

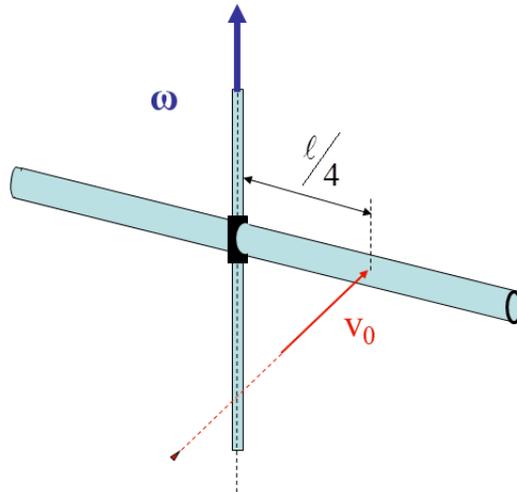
$$F = \rho A \omega^2 \int_0^l x dx = \rho A \omega^2 \frac{l^2}{2}$$

$$\frac{F}{A} = \rho \omega^2 \frac{l^2}{2} \rightarrow \omega = \sqrt{\frac{2 F}{\rho A}} = \boxed{50 \frac{1}{s}}$$

M-18) Aufgabe

Eine homogene Holzstange (Länge $l = 1m$ und Masse $m = 1kg$) kann sich in einer waagerechten Ebene, um eine senkrechte Mittelpunktsachse frei drehen. Die am Anfang ruhende Stange wird durch ein Geschoß der Masse $m_1 = 0,01kg$ mit der Geschwindigkeit von bei $v_0 = 100 \frac{m}{s}$ ein Viertel seiner Länge getroffen. Das Geschoß bleibt in der Stange stecken und durch den Stoß wird die Stange in Rotationsbe-

wegung gebracht. Bestimmen Sie die Winkelgeschwindigkeit!

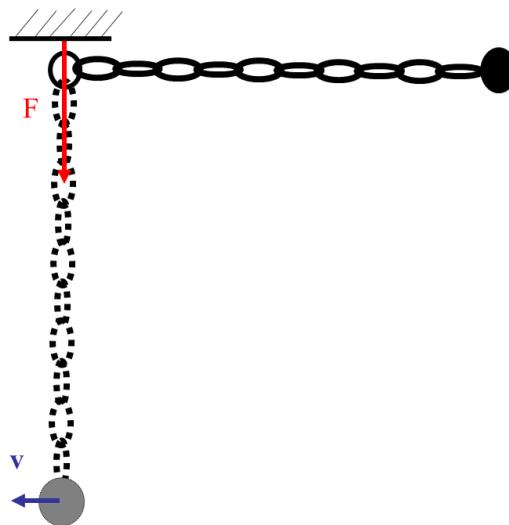


Ergebnis

$$\boxed{1 \frac{1}{s}}$$

M-19) Aufgabe

Auf einer Kette der Masse von $M = 126\text{kg}$ und der Länge von $l = 5\text{m}$ ist eine Stahlkugel der Masse von $m = 58\text{kg}$ aufgehängt worden. Von der horizontalen, gespannten Lage wird die Kette mit dem Gewicht losgelassen. Mit welcher Geschwindigkeit bewegt sich die Kugel durch ihre tiefste Position? Wie groß ist in diesem Moment die Kraft, die die Aufhängung belastet?



Lösung

Die Lösung kommt gerade aus der Energieerhaltung:

$$m l g + M \frac{l}{2} g = \frac{1}{2} m v^2 + \frac{1}{2} \Theta \omega^2 \quad \text{Da } \Theta = \frac{1}{3} M l^2, \text{ und } \omega = \frac{v}{l} \text{ ist.}$$
$$l g \left(m + \frac{M}{2} \right) = \frac{1}{2} \left(m + \frac{M}{3} \right) v^2$$
$$v = \sqrt{2 l g \frac{m + \frac{M}{2}}{m + \frac{M}{3}}} = \boxed{11 \frac{m}{s}}$$

Die Kraft ist

$$F = (M + m) g + F_{CP}^{Kette} + F_{CP}^{Kugel}$$
$$F_{CP}^{Kugel} = m a_{CP} = m \frac{v^2}{l}$$
$$F_{CP}^{Kette} = \int_0^l \frac{M}{l} a_{CP}(r) dr = \frac{M}{l} \omega^2 \int_0^l r dr = \frac{M}{l} \left(\frac{v}{l} \right)^2 \frac{l^2}{2} = \frac{1}{2} M \frac{v^2}{l}$$
$$F = (M + m) g + \left(\frac{M}{2} + m \right) \frac{v^2}{l} = \boxed{4768 \text{ N}}$$

M-20) Aufgabe

Ein ballistisches Pendel der Masse von 20kg wird durch ein Geschoss auf die Höhe von $h=20\text{cm}$ ausgelenkt. Bestimmen Sie die Geschwindigkeit der 0.05kg schweren Kugel, wenn sie im Bremskörper des Pendels stecken bleibt!

Lösung

Die Bewegung besteht aus zwei Teilen: der Einschlag des Geschosses in den Pendel (Impulserhaltung) und danach eine Pendelbewegung (Energieerhaltung). Die Geschwindigkeit des geschosses kann aus den Bewegungsteilen umgekehrt bestimmt werden.

Impulserhaltung:

$$m v_0 = (M + m) v \rightarrow v_0 = \frac{M + m}{m} v \approx \frac{M}{m} v$$

Aus der Energieerhaltung:

$$v = \sqrt{2gh}$$

Am Endeffekt ist:

$$v_0 \approx \frac{M}{m} \sqrt{2gh} = \boxed{800 \frac{m}{s}}$$

M-21) Aufgabe

Eine Hohlkugel mit dem Außendurchmesser $d_1 = 0,2m$, dem Innendurchmesser $d_2 = 0,18m$ und der Masse $m = 0,25kg$, bewegt sich auf einer schiefen Ebene ($\phi = 30^\circ$). Bestimmen Sie die Geschwindigkeit des Schwerpunktes der Kugel nach Durchlaufen der Strecke $s=10m$,

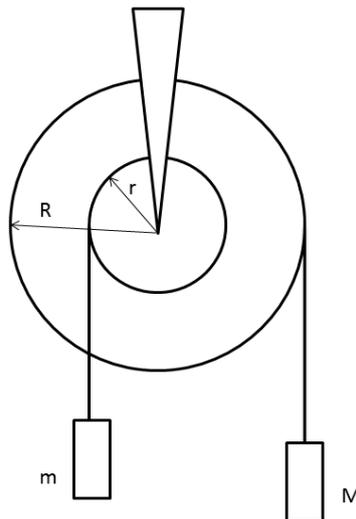
- a) wenn sie ohne jeglicher Rutschbewegung unter dem Einfluss ihres Eigengewichts rein rollt;
- b) wenn Sie eine reibungslos verlaufenden reinen Rutschbewegung durchführt!

Lösung

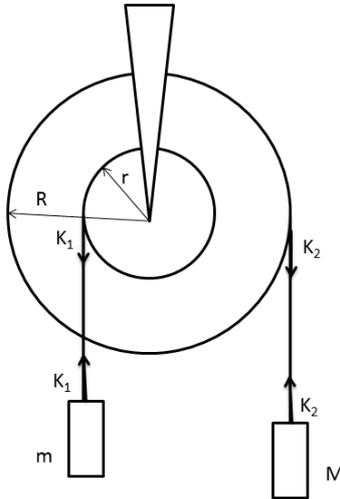
- a)
- b)

M-22) Aufgabe

In der Abbildung gezeigte Rolle wurde durch die Befestigung von zwei Vollzylinder erzeugt, und besitzt ein Trägheitsmoment von Θ . Auf dem Mantel des kleineren Zylinder (r) wurde eine Schnur aufgespult und ein Gewicht (m) daraufgehängt. Auf die Schnur, die auf dem Mantel des größeren Zylinders (R) aufgespult wurde, hängt ein anderes Gewicht (M), wobei $M > m$. Bestimme die Winkelbeschleunigung der Rolle, die Beschleunigungen der Gewichte und die in der Seilen auftretenden Kräfte.



Lösung



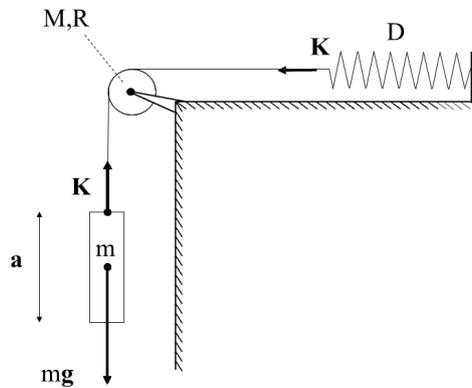
$$\begin{aligned}Ma_1 &= Mg - K_1 \\K_1 R - K_2 r &= \Theta \beta \\K_2 - mg &= ma_2 \\a_1 &= \beta R \\a_2 &= \beta r\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\Theta \beta &= MgR - M\beta R^2 - m\beta r^2 - mgr \\ \beta (\Theta + MR^2 + mr^2) &= (MR - mr)g \\ \beta &= \frac{MR - mr}{\Theta + MR^2 + mr^2}g \\ a_1 &= \frac{MR - mr}{\Theta + MR^2 + mr^2}gR \\ K_1 &= MgR \frac{MR - mr}{\Theta + MR^2 + mr^2} - Mg\end{aligned}$$

M-23) Aufgabe

Die Rolle - gemäß der Abbildung - kann sich frei rotieren. Ihre Masse ist M , der Radius ist R . Auf ein Seil, das auf einer Feder (Federkonstante: D) befestigt und über dem Mantel der Rolle durchgeführt worden ist, hängt ein Gewicht der Masse m . Zeigen Sie, daß das Gewicht - nach Auslenkung von dem Gleichgewicht -

harmonische Schwingung ausübt, falls das Seil auf der Rolle nicht rutschen kann!
Bestimmen Sie die Periode!



Lösung

$$E_{Kin} + E_{Pot} + E_{Feder} = \text{Konst.}$$

$$E_{Kin} = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}\Theta\omega^2 = \frac{1}{2}\left(m + \frac{\Theta}{R^2}\right)\dot{x}^2 \quad E_{Pot} = -mgh \quad E_{feder} = \frac{1}{2}Dx^2$$

$$\frac{1}{2}\left(m + \frac{\Theta}{R^2}\right)\dot{x}^2 + \frac{1}{2}Dx^2 - mgx = \text{Konst.} \quad / \frac{d}{dt} \frac{1}{2}\left(m + \frac{\Theta}{R^2}\right)2\dot{x}\ddot{x} + \frac{1}{2}D2x\dot{x} - mg\dot{x} = 0$$

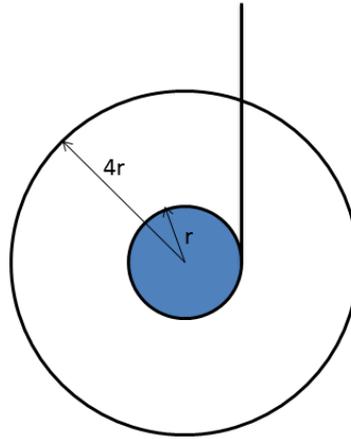
$$\frac{1}{2}\left(m + \frac{\Theta}{R^2}\right)\ddot{x} + Dx - mg = 0$$

Ist die Differentialgleichung der harmonischen Schwingung mit der Kreisfrequenz
von $\omega = \sqrt{\frac{D}{m + \frac{\Theta}{R^2}}}$

M-24) Aufgabe

Auf eine, zwischen zwei Scheiben befestigte Spindel ist eine Schnur aufgewickelt. Die so entstandene Doppelrolle (Yo-Yo) rollt auf der Schnur herab. Der Radius der Spindel (r) ist ein Viertel von dem der Scheiben (R). Die Masse der Scheiben ist jeweils M, die Masse der Spindel ist vernachlässigbar. Beschreiben Sie die Bewegung

des Yo-Yo ($\beta = ?$; $a = ?$)! Bestimmen Sie die Seilkraft!



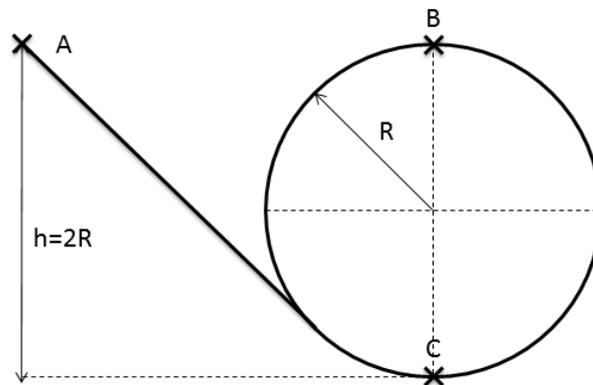
Ergebnis

Die Beschleunigung ist $a = \frac{1}{3}g$ → die Winkelbeschleunigung ist $\beta = \frac{g}{3r}$, mittlerweile die Seilkraft $K = \frac{2}{3}mg$.

M-25) Aufgabe

Ein Körper startet mit Anfangsgeschwindigkeit von vom Punkte A, die in der Höhe $h=2R$ liegt – gemäß der Abbildung – auf einer reibungsfreien Looping –Gleitbahn.

- Wie groß soll v_0 gewählt werden um zu erreichen, dass der Körper in B nicht herunterfällt?
- Bei welcher h/R Quotient ist diese Bedingung für gesichert?
- Bestimme die Geschwindigkeit in B!
- Bestimme die Druckkraft in C, wenn die Masse des Körpers ist m .



Lösung

a)

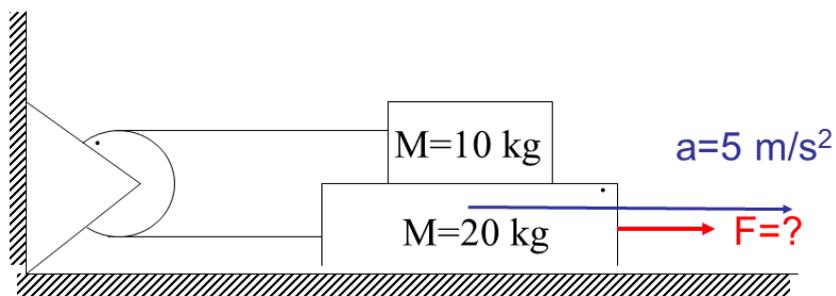
b) $h \geq \frac{5}{2}R$

c) $v_B \geq \sqrt{gR}$

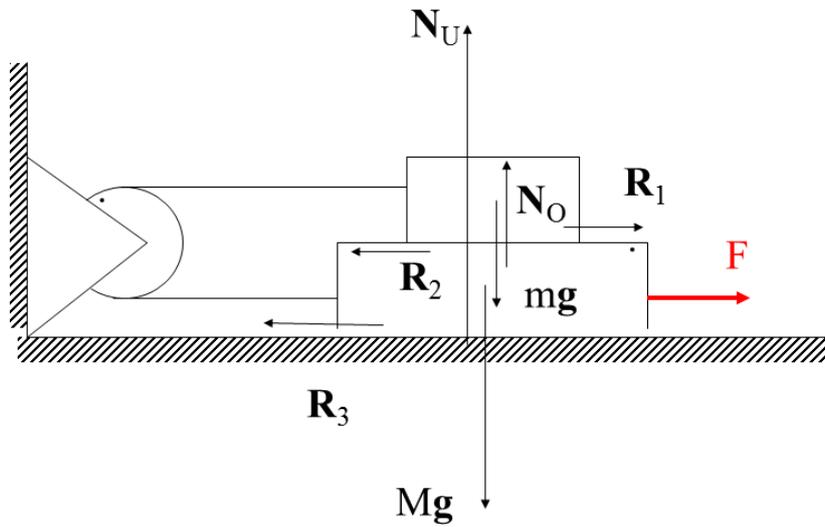
d)

M-26) Aufgabe

In der Abbildung abgezeichneter Anordnung bewegt sich der untere Körper mit $5 \frac{m}{s^2}$ Beschleunigung nach rechts. Die Masse der Rolle und die Reibung der Schnur auf der Rolle sind vernachlässigbar, die Gleitreibungskoeffizient sowohl zwischen den beiden Körper, als auch zwischen dem unteren Körper und dem Boden ist $\mu = 0,2$. Bestimmen Sie die nötige F Ziehkraft und die Kräfte, die sich im Seil bildet!



Lösung



$$Ma = F - R_3 - R_2 - S$$

$$ma = S - R_1$$

Die drei Reibungskräfte sind:

$$R_1 = \mu(M + m) \quad R_2 = \mu mg \quad R_3 = \mu mg$$

Die zwei Bewegungsgleichungen zugerechnet und die Reibungskräfte eingesetzt:

$$(M + m)a = F - \mu(M + 3m)g$$

$$F = (M + m)a + \mu(M + 3m)g = \boxed{250\text{N}}$$

Und die Seilkraft ist $S = ma + \mu mg = \boxed{70\text{N}}$

2. Elektromagnetismus

2.1 Elektrostatik

E-1) Aufgabe

Die potentielle Energie eines Feldes entspricht $W = 20x^2 - 60z^2$ (J) Bestimme die Kraft als Funktion des Ortes und deren Wert im Punkt $\mathbf{r} = (3, 3, 5)$

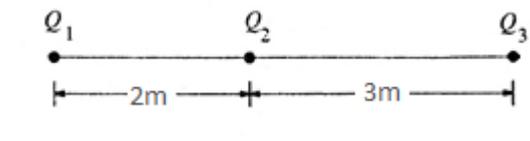
Lösung:

$$\mathbf{F} = -\nabla W = -40x\mathbf{i} + 120z\mathbf{k}$$

$$\mathbf{F}(\mathbf{r}) = -120\mathbf{i} + 600\mathbf{k}$$

E-2) Aufgabe

Drei Ladungen von $10\mu\text{C}$ werden in eine Linie gestellt, so dass die Abstände der benachbarten Ladungen 2m und 3m sind. Wie groß ist die Kraft, die auf die rechte Ladung wirkt?



Lösung:

$$F = F_{1,3} + F_{2,3} = \frac{Q^2}{4\pi\epsilon_0} \cdot \left(\frac{1}{(r_{1,2} + r_{2,3})^2} + \frac{1}{r_{2,3}^2} \right) = \boxed{0,136 \text{ N}}$$

E-3) Aufgabe

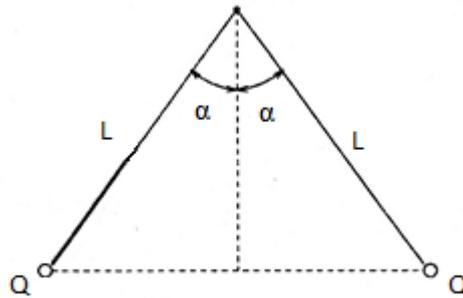
Die Ecken eines Sechsecks von 1m Seitenlänge werden auf 300nC Ladung aufgeladen. Wie stark ist das elektrische Feld in der Mitte des Sechsecks?

Ergebnis

$$\boxed{E=0}$$

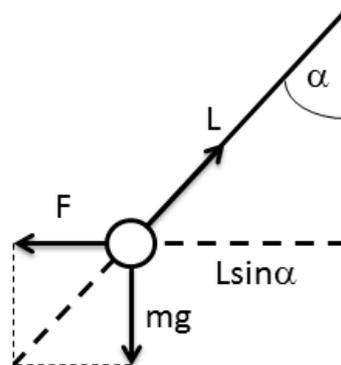
E-4) Aufgabe

Zwei Kugeln hängen an zwei Fäden mit gemeinsamen Befestigungspunkt. Sei das Gewicht der Kugeln $m = 0,5\text{kg}$, die Länge der Fäden $L = 1\text{m}$. Wie groß ist die Ladung der Kugeln, wenn sie eine gleiche Ladungsmenge besitzen und der Winkel der Fäden zum Senkrechten $\alpha = 30^\circ$ ist?



Lösung

$$F = mg \tan \alpha = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{Q^2}{(2L \sin \alpha)^2}$$



$$Q = q\sqrt{4\pi\epsilon_0 mg \tan \alpha (2L \sin \alpha)^2} = \boxed{17,7\mu\text{C}}$$

E-5) Aufgabe

In einem Millikanschem Experiment ist die Entfernung der Platten 1cm , die Span-

nung zwischen ihnen 1V, die Masse eines Öltropfens $3,2 \cdot 10^{-12}g$. Er Schwebt zwischen zwei waagerechten Platten. Wie groß ist die Ladung des Tropfens? Wie viele Elektronenladungen entspricht sie?

Lösung

$$E = \frac{U}{d} = 10^5 \frac{V}{m}$$

$$mg = qE$$

$$q = \frac{mg}{E} = \boxed{3,2 \cdot 10^{-19}C} \left(g = 10 \frac{m}{s^2} \right)$$

$$q = 2e$$

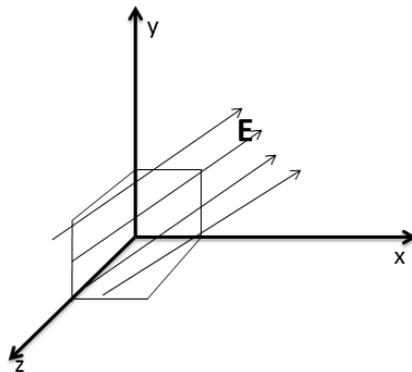
E-6) Aufgabe

Das elektrische Feld ist $\mathbf{E} = 100 (\mathbf{i} + \mathbf{j}) \left[\frac{V}{m} \right]$. Wie groß ist der elektrische Fluss an einem Teil von $1cm^2$ Oberfläche,

- das in der xy, xz, yz Ebene liegt?
- an der ganzen Oberfläche eines Zylinders von 1m Länge und 0,1m Radius, dessen Achse in der XY Ebene liegt und 45° mit der X-Achse einschließt?

Lösung

- Der Normalvektor für die XY Ebene zeigt in richtung z, und ist senkrecht zum Feld. Deshalb ist der Fluss im ersten Fall $\boxed{\Phi_{XY} = 0}$.

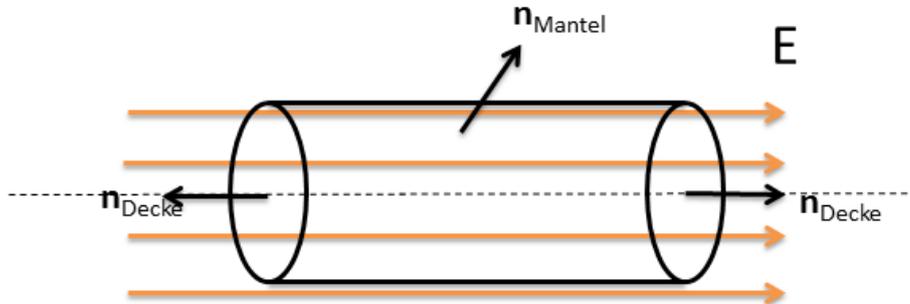


Der Normalvektor für die Oberfläche im XZ Ebene ist $\mathbf{n}_{xz} = 10^{-4} \mathbf{j} [m^2]$, deshalb ist der Skalarprodukt:

$$\Phi_{XZ} = \mathbf{n}_{xz} \cdot \mathbf{E} = 100 (\mathbf{i} + \mathbf{j}) \cdot 10^{-4} \mathbf{j} = \boxed{0,01 \text{ Vm}}$$

YZ Ebene ist der gleiche Fall, also der Fluss ist $\boxed{\Phi_{YZ} = 0,01 \text{ Vm}}$.

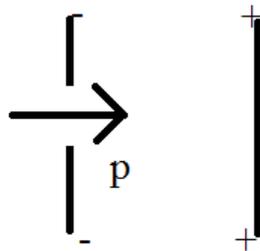
b) Der Zylinder kann auf drei Oberflächen aufgeteilt werden.



Die Achse des Mantels ist mit dem Feld parallel, der Normalvektor zeigt immer nach Aussen, also zu dem feld immer Senkrecht. Der Fluss auf dem Mantel ist deshalb 0. Die Normalvektoren der zwei Decken haben die gleiche Größe, sind mit dem Feld parallel, jedoch zeigen genau in entgegengesetzten Richtungen, deshalb löschen sie einander aus. Am Endeffekt ist der Gesamtfluss $\Phi_{Zylinder} = 0$.

E-7) Aufgabe

Die Spannung zwischen zwei parallelen, ebenen Metallplatten in 10cm Abstand ist 120V. Durch ein Loch auf der Negativen Platte treten Protonen mit 6000km/s Geschwindigkeit in das Feld ein. Bis welche Entfernung können sie die Positive Platte annähern?



Lösung

$$a = \frac{q}{m} E = \frac{q}{m} \frac{U}{d}$$

$$s = \frac{v^2}{2a} = \frac{v^2 m}{2qU} d = 8,5 \text{ cm}$$

Die Elektronen können zwischen den Platten $s = 8,5 \text{ cm}$ zurücklegen, also die Positive Platte bis 1,5cm annähern.

E-8) Aufgabe

Es gibt 3 Punktladungen von $q_1 = -5\mu C$, $q_2 = 5\mu C$ und $q_3 = 10\mu C$ in den Ecken eines regelmäßigen Dreiecks von $a = 0,5m$ Seitenlänge. Rechne die potentielle Energie der Ladungsanordnung aus.

Lösung

Legen wir die Ladungen Eine nach den Anderen in den ursprünglich leeren Raum ein bis die obige Anordnung entsteht, und beobachten wir die Veränderung des elektrischen Feldes und die von uns geleistete Arbeit während des Verfahrens! Dem Energiesatz laut entspricht diese Arbeit die Energie der Ladungsanordnung. Die erste Ladung trifft kein elektrisches Feld, deshalb müssen wir keine Arbeit leisten. Um die Zweite in seinen Ort zu legen müssen wir das Feld der ersten Ladung bezwingen. So entsteht eine Energie der zweiten Ladung im Feld der Ersten ($W_{1,2}$). Mit der dritten Ladung müssen wir die erste zwei bezwingen ($W_{(1+2),3}$), aber dies kann durch das Prinzip der Superposition in zwei Separatin Felder und Arbeiten zerlegt werden ($W_{1,3} + W_{2,3}$).

$$\begin{aligned} W = W_{1,2} + W_{1,3} + W_{2,3} &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1 q_2}{a} + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1 q_3}{a} + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_2 q_3}{a} = \\ &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} (q_1 q_2 + q_1 q_3 + q_2 q_3) = \boxed{-0,45J} \end{aligned}$$

Bemerkung zum Ergebnis:

Im allgemeinen Fall (für N Ladungen) ergibt diese Logik:

$$W = \sum_{i=1}^{N-1} \sum_{j=i+1}^N W_{i,j} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{i=1}^{N-1} \sum_{j=i+1}^N \frac{q_i q_j}{r_{ij}}$$

Da offensichtlich $W_{1,2} = W_{2,1}$ können wir diese Summe vereinfachen:

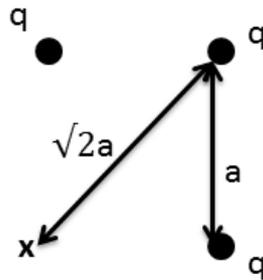
$$W = \sum_{i=1}^{N-1} \sum_{j=i+1}^N W_{i,j} = \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^N W_{i,j} = \frac{1}{2} \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{i,j=1}^N \frac{q_i q_j}{r_{ij}}$$

Die $\frac{1}{2}$ kommt daraus, dass alle Energieglieder zweimal (in Form von $W_{1,2}$ und $W_{2,1}$ in Anspruch genommen wurden.

E-9) Aufgabe

Drei Ladungen von $10\mu C$ werden an drei Ecken eines Vierecks von $a = 20cm$ Seitenlänge gestellt. Bestimme das Potential an der vierten Ecke.

Lösung



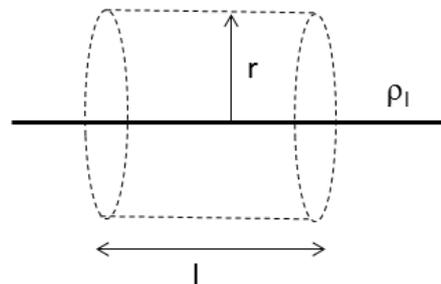
$$U = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{2}{a} + \frac{1}{\sqrt{2}a} \right) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{a} \left(2 + \frac{\sqrt{2}}{2} \right) = \boxed{1,2 \text{ MV}}$$

E-10) Aufgabe

Wie stark ist das elektrische Feld eines unendlich langen Fadens von ρ_l [C/cm] Ladungsdichte?

Lösung

- Mit dem Gauss Gesetz

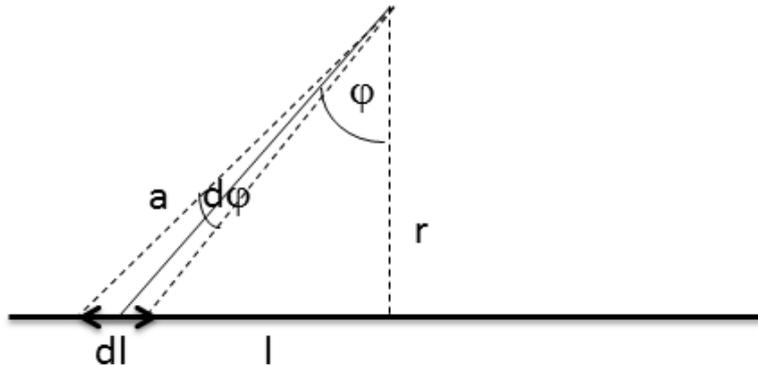


$$\oint \mathbf{E} d\mathbf{A} = \frac{Q}{\epsilon_0}$$

$$E 2r\pi l = \frac{\rho_l l}{\epsilon_0}$$

$$E = \frac{\rho_l}{2r\pi\epsilon_0}$$

- Mit dem Coulombschen Gesetz



$$dE = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\rho_l dl}{a^2}$$

$$a = \frac{r}{\cos \varphi}$$

$$l = r \tan \varphi \rightarrow \frac{dl}{d\varphi} = \frac{r}{\cos^2 \varphi} \rightarrow dl = \frac{r}{\cos^2 \varphi} d\varphi$$

Die Radialkomponente (r)

$$dE_r = dE \cos \varphi = \frac{\rho_l}{4\pi\epsilon_0} \cos \varphi d\varphi$$

$$E_r = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\rho_l}{4\pi\epsilon_0 r} \cos \varphi d\varphi = \frac{\rho_l}{4\pi\epsilon_0 r} [\sin \varphi]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\rho_l}{2r\pi\epsilon_0}$$

Die tangentielle Komponente

$$dE_\varphi = dE \sin \varphi = \frac{\rho_l}{4\pi\epsilon_0 r} \sin \varphi d\varphi$$

$$E_\varphi = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\rho_l}{4\pi\epsilon_0 r} \sin \varphi d\varphi = \frac{\rho_l}{4\pi\epsilon_0 r} [-\cos \varphi]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} = 0$$

E-11) Aufgabe

Eine Metallkugel von 50cm Radius steht an einem isolierenden Stab so, dass alle Wirkungen von der Umwelt können vernachlässigt werden. Sie wird so aufgeladen, dass das elektrische Feld an der Oberfläche $E = 10 \frac{MV}{m}$ stark ist. Bestimme das Potential der Kugel.

Lösung

$$E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{R^2}$$
$$U = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{R} = ER = \boxed{5\text{MV}}$$

E-12) Aufgabe

Es gibt zwei große, ebene Metallplatten in $d = 1\text{m}$ Abstand voneinander. Bestimme das elektrische Feld und die oberflächliche Ladungsdichte, wenn die Spannung $U = 200\text{V}$ ist.

Lösung

$$E = \frac{U}{d}$$
$$\rho_A = \epsilon_0 E = \frac{\epsilon_0 U}{d} = \boxed{1,77 \frac{\text{nC}}{\text{m}^2}}$$

E-13) Aufgabe

Wie viele Ladung wird in einem Kondensator von $C = 50\mu\text{F}$ an $U = 90\text{V}$ Spannung gelagert?

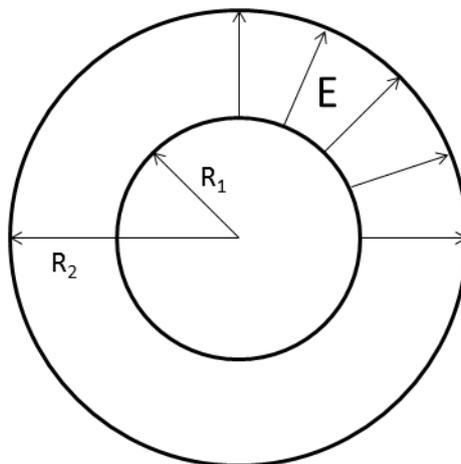
Lösung

$$Q = CU = \boxed{4,5\text{mC}}$$

E-14) Aufgabe

Ein Kugelkondensator besteht aus einer Metallkugel (Radius R_1) und einer damit konzentrischen Metallschale (Radius R_2). Wie groß ist seine Kapazität?

Lösung



$$E(r) = \begin{cases} \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{r^2} & R_1 \leq r \leq R_2 \\ 0 & \text{ansonsten} \end{cases}$$

$$U = \int_{R_1}^{R_2} E(r) dr = \left[\frac{-1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{r} \right]_{R_1}^{R_2} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{R_2 - R_1}{R_1 R_2}$$

$$C = \frac{Q}{U} = \frac{Q}{\frac{Q(R_2 - R_1)}{4\pi\epsilon_0 R_1 R_2}} = 4\pi\epsilon_0 \frac{R_1 R_2}{R_2 - R_1}$$

E-15) Aufgabe

Bestimme die potentielle Energie einer aufgeladenen Metallkugel von Radius R und Ladung Q .

Lösung

$$U = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{R}$$

$$W = \frac{1}{2} Q U = \frac{1}{8\pi\epsilon_0} \frac{Q^2}{R}$$

E-16) Aufgabe

Ein Elektronenstrahl wird an einer Metallprobe fokussiert. Mit welcher Geschwindigkeit müssen die Elektronen in den Raum um der Probe eintreten, wenn dort eine Bremsspannung von $U = 10V$ herrscht?

Lösung

$$\frac{1}{2} m v^2 = q U \rightarrow v = \sqrt{\frac{2qU}{m}} = \boxed{1875 \frac{km}{s}}$$

E-17) Aufgabe

Im Bohrschen Modell des Wasserstoffatoms kreiselt das Elektron an einer Kreisbahn von $r = 0,053nm$ um den Kern. Wie groß ist die Geschwindigkeit des Elektrons? Bestimme die Ionisierungsenergie.

Lösung

$$qE = m a_{cp}$$

$$\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q^2}{r^2} = m \frac{v^2}{r} \rightarrow v = \sqrt{\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q^2}{r m}} = \boxed{2,2 \cdot 10^6 \frac{m}{s}}$$

$$W = \Delta W_{Pot} + \Delta W_{Kin} = qU - \frac{1}{2} m v^2 = \frac{q^2}{4\pi\epsilon_0 r} - \frac{1}{2} \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q^2}{r} = \frac{q^2}{8\pi\epsilon_0 r} =$$

$$= \boxed{2,15 \cdot 10^{-18} J = 13,4 eV}$$

E-18) Aufgabe

Der Radius einer Metallkugel die an einem isolierenden Faden hängt ist 10cm. Wie groß ist ihre Kapazität?

Lösung

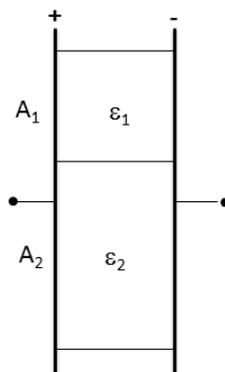
$$U = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{R}$$
$$C = \frac{Q}{U} = 4\pi\epsilon_0 R$$

Bemerkung Diesem ergebnis entspricht einem Kugelkondensator ($C_K = 4\pi\epsilon_0 \frac{R_2 R_1}{R_2 - R_1}$, siehe Aufgabe E-14)) mit der äusseren Elektrode im Unendlichen.

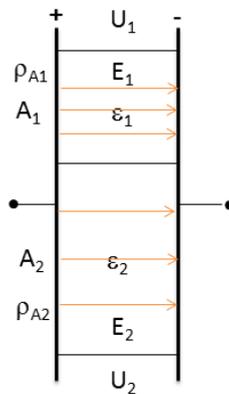
$$\lim_{R_2 \rightarrow \infty} C_K = \lim_{R_2 \rightarrow \infty} 4\pi\epsilon_0 \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right) = 4\pi\epsilon_0 R_1 = C$$

E-19) Aufgabe

Wie groß ist die Kapazität eines Kondensators (Oberfläche A), der mit zwei Substanzen von unterschiedlichen Dielektrizitätskonstanten (ϵ_1 und ϵ_2) auf der folgenden Weise (parallel) gefüllt ist? Die Oberflächen der Dielektrikumplatten sind A_1 und A_2 .



Lösung



$$U_1 = U_2 = U$$

$$\left. \begin{array}{l} E_1 = \frac{U_1}{d} \\ E_2 = \frac{U_2}{d} \end{array} \right\} E_1 = E_2 = E$$

Dem Gauss Gesetz zufolge $D_1 = \rho_{A1}$ und $D_2 = \rho_{A2}$ deshalb:

$$D_1 A_1 + D_2 A_2 = Q$$

$$\epsilon_1 E A_1 + \epsilon_2 E A_2 = Q$$

$$\frac{\epsilon_1 A_1 U}{d} + \frac{\epsilon_2 A_2 U}{d} = Q$$

$$C = \frac{Q}{U} = \frac{\epsilon_1 A_1}{d} + \frac{\epsilon_2 A_2}{d}$$

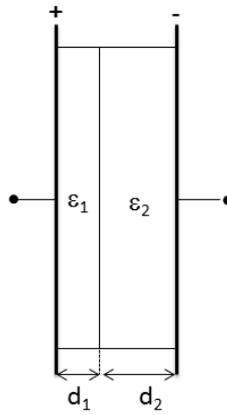
Bemerkung

Diese Kapazität entspricht eine Serienschaltung von zwei Kondensatoren von A_1 und A_2 Oberflächen und ϵ_1 und ϵ_2 Dielektrizitätskonstanten.

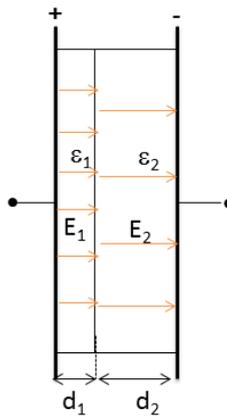
E-20) Aufgabe

Was ist die Kapazität eines Kondensators (A), der mit zwei Substanzen von unterschiedlichen Dielektrizitätskonstanten (ϵ_1 und ϵ_2) auf der folgenden Weise (seriell)

gefüllt ist?



Lösung



$$DA = Q$$
$$E_1 = \frac{D}{\epsilon_1} = \frac{Q}{\epsilon_1 A} \quad E_2 = \frac{D}{\epsilon_2} = \frac{Q}{\epsilon_2 A}$$
$$\frac{Q}{\epsilon_1 A} d_1 + \frac{Q}{\epsilon_2 A} d_2 = U$$
$$C = \frac{Q}{U} = \frac{1}{\frac{d_1}{\epsilon_1 A} + \frac{d_2}{\epsilon_2 A}} = \frac{A \epsilon_1 \epsilon_2}{\epsilon_1 d_2 + \epsilon_2 d_1}$$

E-21) Aufgabe

Ein Kondensator von C Kapazität ist an den Polen einer Batterie von U Spannung gesteckt. Wie verändert sich die Kapazität, Ladung und Energiegehalt des Kondensators, wenn er mit einem Substanz von ϵ_r relativer Dielektrizitätskonstante gefüllt wird. (Ursprünglich war er mit Luft gefüllt.)

Lösung

$$C_0 = \frac{\epsilon_0 A}{d} \quad C = \frac{\epsilon_r \epsilon_0 A}{d} = \epsilon_r C_0$$

$$C_0 = \frac{\epsilon_0 A}{d} \quad C = \frac{\epsilon_r \epsilon_0 A}{d} = \epsilon_r C_0$$

$$Q = CU = \epsilon_r C_0 U = \epsilon_r Q_0$$

$$W = \frac{1}{2} CU^2 = \frac{1}{2} \epsilon_r C_0 U^2 = \epsilon_r W_0$$

E-22) Aufgabe

Wie stark ist das elektrische Feld eines homogen geladenen, isolierten, unendlich langen Zylinders von Radius R und Ladungsdichte ρ_V

- a) innerhalb des Zylinders?
- b) außerhalb des Zylinders?

Lösung

E-23) Aufgabe

Es gibt 8 gleiche (Kugelförmige) Quecksilbertropfen von Radius R und Ladung Q . Wie große Arbeit muss man leisten um sie zu vereinigen?

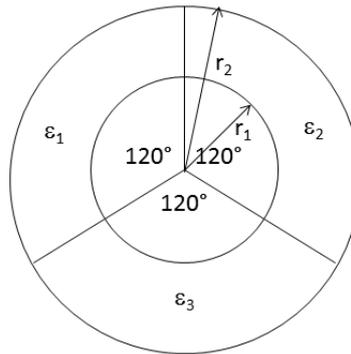
Lösung

Energie einzelner Kugel:	$W_{Kugel} = \frac{1}{8\pi\epsilon_0} \frac{Q^2}{R}$
Energie vor der Vereinigung:	$W_0 = 8W_{Kugel} = \frac{1}{\pi\epsilon_0} \frac{Q^2}{R}$
Energie nach der Vereinigung:	$W = \frac{1}{8\pi\epsilon_0} \frac{(8Q)^2}{2R} = \frac{4Q^2}{\pi\epsilon_0 R}$
	$\Delta W = \frac{3Q^2}{\pi\epsilon_0 R}$

E-24) Aufgabe

Ein Zylinderkondensator besteht aus zwei coaxialen zylindrischen Elektroden von Länge l , Radien r_1 und r_2 .

- a) Wie groß ist seine Kapazität?
- b) Sei er mit 3 verschiedenen Dielektrika (Dielektrizitätskonstanten ϵ_1 , ϵ_2 und ϵ_3) gefüllt, so dass jeder Dielektrikum ein Drittel des Raums zwischen den Elektroden besetzt, und sie ganz symmetrisch angeordnet sind. Wie groß ist die Kapazität in diesem Fall?



Lösung

- a) Ohne Dielektrikum: $Q = 2r\pi l \rho_A$

$$\Phi = E 2r\pi l = \frac{Q}{\epsilon_0} = \frac{2r_1\pi l}{\epsilon_0} \rho_A$$

$$U = \frac{\rho_A r_1}{\epsilon_0} \ln r = \frac{Q}{2\pi l \epsilon_0} \ln r$$

$$U_C = \frac{\rho_A r_1}{\epsilon_0} (\ln r_2 - \ln r_1) = \frac{\rho_A r_1}{\epsilon_0} \ln \frac{r_2}{r_1} = \frac{Q}{2\pi l \epsilon_0} \ln \frac{r_2}{r_1}$$

$$C = \frac{Q}{U} = \frac{2\pi l \epsilon_0}{\ln \frac{r_2}{r_1}}$$

b) Mit Dielektrika $E_1 = E_2 = E_3 = E$

$$Q = \frac{2}{3} r_1 \pi l (D_1(r_1) + D_2(r_1) + D_3(r_1)) = \frac{2}{3} r_1 \pi l (\epsilon_1 + \epsilon_2 + \epsilon_3) E(r_1)$$

$$E(r_1) = \frac{3Q}{2r_1 \pi l (\epsilon_1 + \epsilon_2 + \epsilon_3)}$$

$$E(r) = \frac{3Q}{2\pi l (\epsilon_1 + \epsilon_2 + \epsilon_3) r}$$

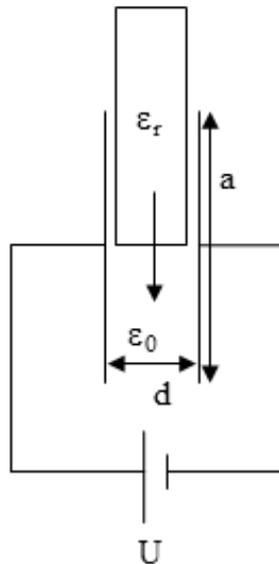
$$U = \frac{3Q}{2\pi l (\epsilon_1 + \epsilon_2 + \epsilon_3)} \ln r$$

$$U_C = \frac{3Q}{2\pi l (\epsilon_1 + \epsilon_2 + \epsilon_3)} \ln \frac{r_2}{r_1}$$

$$C = \frac{Q}{U} = \frac{2\pi l (\epsilon_1 + \epsilon_2 + \epsilon_3)}{3 \ln \frac{r_2}{r_1}}$$

E-25) Aufgabe

Ein Kondensator aus quadratischen Metallplatten (Oberfläche $A=a \cdot a$) wird an eine Batterie von U Spannung geschaltet. Wie große Kraft muss man bezwingen um eine Dielektrikumplatte (von ϵ_r relativer Dielektrizitätskonstante) zwischen die Elektroden einzuschieben?



Lösung

$$W_0 = \frac{1}{2} C_0 U^2 = \frac{\epsilon_0 A}{2d} U^2$$
$$W(x) = \epsilon_0 \frac{a(a-x)}{2d} U^2 + \epsilon_0 \epsilon_r \frac{ax}{2d} U^2 = \frac{\epsilon_0 a}{2d} (a + (\epsilon_r - 1)x)$$
$$F = \frac{dW}{dx} = \frac{\epsilon_0 (\epsilon_r - 1) a}{2d} U^2$$

E-26) Aufgabe

Ein Wassertropfen (R Radius, ρ Dichte) wird auf U Spannung geladen. Wie großes externes elektrisches Feld ist nötig um den Tropfen schweben zu lassen?

Lösung

$$U = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{R}$$
$$QE = mg$$
$$4\pi\epsilon_0 R U E = \frac{4}{3} R^3 \pi \rho$$
$$E = \frac{R^2 \rho}{3\epsilon_0 U}$$

E-27) Aufgabe

Ein Kugelkondensator besteht aus zwei konzentrischen, zylindrischen Elektroden von Radien r_1 und r_3 . Der Raum zwischen den Elektroden ist mit 2 konzentrisch angeordneten Dielektrika (Dielektrizitätskonstanten ϵ_1 und ϵ_2) ausgefüllt, der Radius der Oberfläche zwischen den Dielektrika ist r_2 . Wie groß ist die Kapazität?

Lösung

$$\begin{aligned}D(r) &= \frac{1}{4\pi} \frac{Q}{r^2} \\E_1 &= \frac{D}{\epsilon_1} = \frac{1}{4\pi\epsilon_1} \frac{Q}{r^2} && r_1 < r < r_2 \\E_2 &= \frac{D}{\epsilon_2} = \frac{1}{4\pi\epsilon_2} \frac{Q}{r^2} && r_2 < r < r_3 \\U &= - \int_{r_1}^{r_3} E(r) \, dr = - \int_{r_1}^{r_2} E_1(r) \, dr - \int_{r_2}^{r_3} E_2(r) \, dr = \\&= \frac{Q}{4\pi\epsilon_1} \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right) + \frac{Q}{4\pi\epsilon_2} \left(\frac{1}{r_2} - \frac{1}{r_3} \right) = \\&= \frac{Q}{4\pi} \frac{\epsilon_2 r_2 r_3 + (\epsilon_1 - \epsilon_2) r_1 r_3 - \epsilon_1 r_1 r_2}{\epsilon_1 \epsilon_2 r_1 r_2 r_3} \\C &= \frac{Q}{U} = \frac{4\pi\epsilon_1\epsilon_2 r_1 r_2 r_3}{\epsilon_2 r_2 r_3 + (\epsilon_1 - \epsilon_2) r_1 r_3 - \epsilon_1 r_1 r_2}\end{aligned}$$

2.2 Magnetismus

E-28) Aufgabe