

Kísérleti fizika 1.

Vankó Péter

2013

Előszó

Ez a könyv elsősorban a BME elsőéves fizikus hallgatói számára készült, a Kísérleti fizika 1. előadás anyagát dolgozza fel. Néhol részletesebb, mint az előadott tananyag: kiegészítéseket, magyarázatokat, további példákat is tartalmaz. Sok külső (internetes) hivatkozás is található benne: egyrészt a *Fizipédia* [1] kísérleti videóira, amelyeken az előadásokon bemutatott, a tananyag részét képező kísérletek láthatók, másrészt a tananyagban szereplő tudósok életrajzaira, valamint a tananyaghoz kapcsolódó, természetben megfigyelhető jelenségekre, érdekes műszaki és hétköznapi alkalmazásokra. Ugyanakkor a tankönyv nem pótolja az előadásokat: az előszóban megmagyarázott fogalmakat, a lépésről-lépésre levezetett összefüggéseket és különösen a valóságban megfigyelhető és kipróbálható kísérleteket.

A tankönyv tárgya a klasszikus mechanika – jelenségek, tapasztalatok, kísérletek felől megközelítve. A könyv első része a tömegponttól a folyadékokig egyre bonyolultabb rendszerek mozgását vizsgálja, miközben bevezeti és „körüljárja” az alapvető fizikai mennyiségeket és azok mértékegységeit, megfogalmazza, értelmezi és alkalmazza a mechanika legfontosabb törvényeit. A második rész részletesebben foglalkozik a rezgésekkel és a hullámokkal, hiszen ezek az alapvető mozgásformák a fizika szinte minden területén előfordulnak, és a mechanikai rezgések és hullámok kapcsán megismert leírásmódok és eredmények máshol is alkalmazhatók. A könyv nemcsak fizikus hallgatóknak, hanem minden érdeklődőnek (akár középiskolásnak is) ajánlható, aki legalább elemi ismeretekkel rendelkezik a vektor-, differenciál- és integrálszámítás terén.

A könyvben tárgyalt tananyag egy négy féléves kísérleti fizika kurzus első része, folytatása a Kísérleti fizika 2. és 3., valamint a Kísérleti Magfizika [2][3][4]. A tárgyakhoz szorosan kapcsolódó gyakorlati és laboratóriumi tárgyak tananyaga a kísérleti videókhoz hasonlóan a Fizipédián található [1].

A Kísérleti fizika 1. tárgy tematikáját *Tóth András* dolgozta ki, és az előadásokhoz jegyzetet („kibővített óravázlat”-ot) is készített. A szerző ennek alapján kezdte tanítani a tárgyat 2008-ban, és a tankönyv megírásakor is sokszor támaszkodott az ő munkájára, amiért köszönettel tartozik.

A könyv a TÁMOP-4.1.2.A/1-11/1-2011-0064 pályázat keretében készült.

I. rész

1. fejezet

Tömegpont kinematikája – alapfogalmak

1.1. Bevezetés

Amikor *Max Planck* egyetemi tanulmányai előtt 1874-ben tanácsot kért *Philipp von Jolly* müncheni fizikaprofesszortól, akkor Jolly megpróbálta lebeszélni arról, hogy *fizikát* tanuljon: „... [a fizika] rövidesen fel fogja venni végleges, stabil alakját. Meglehet, hogy egyik vagy másik sarokban még akad egy-egy porszem, vagy kis buborék, amelyet még meg kell vizsgálni. . .” [9] Szerencsére Planck nem fogadta meg a tanácsot, és jó negyedszázaddal később az új fizika – jelentős részben az ő közreműködésével – alapvetően megváltoztatta a tudományos világképet. De a fizika a relativitáselmélet és a kvantummechanika megszületésével se lett „befejezett” tudomány, ma is rengeteg nyitott, megválaszolásra váró kérdés van. Ráadásul azóta egyre jobban elmosódnak a határok a korábban különálló természettudományok között: ma már a kémia és a biológia elképzelhetetlen a fizika nélkül, de a fizikai modelleket például a gazdaságtanban és a társadalomtudományokban is használják. A fizika kutatási területét éppen ezért ma már nagyon nehéz behatárolni.

A fizikai leírásmód alapvető jellemzője az összefüggések *matematikai* megfogalmazása, és az *elméletek* szigorú *kísérleti* ellenőrzése. Hosszútávon csak az az elmélet válhat elfogadottá, amelyet több, egymástól független, megismételhető és ellenőrizhető kísérlet igazol. Ha pedig a kísérleti tapasztalat ellentmond egy – bármilyen tetszetős – elméletnek, akkor azt megfelelően módosítani kell (vagy el kell vetni).

Az elméleti és kísérleti fizika kölcsönösen egymásra épül: a kísérleti tapasztalatok, mérési eredmények alapján születnek elméletek, az új elméletek viszont új kísérleti technikákat alapoznak meg, és teljesen új jelenségeket jósolhatnak meg – amelyek létét aztán kísérletileg bizonyítani (vagy cáfolni) lehet. Az elektromágneses hullámok létrejöttére például *James Clerk Maxwell* 1864-ben megszületett elmélete alapján lehetett következtetni, de a rádióhullámokat kísérletileg csak jó húsz évvel később, 1886-ban mutatta ki *Heinrich*

Hertz. Hasonló példa az elektron antirészecskéjének, a pozitronnak a felfedezése, aminek létét először *Paul Dirac* jósolta meg elméleti megfontolások alapján, és csak négy évvel később találta meg *Carl David Anderson*. Az ilyen sikeres jóslatok nyilván megerősítik egy-egy elmélet tekintélyét. De tulajdonképpen a technika eredményei is mind az elmélet bizonyítékai: a Holdra nem lehetett volna próbálgatásokkal vagy véletlenül eljutni (mint Verne regényében), hanem pontosan előre ki kellett számolni, meg kellett „jóslni” minden egyes apró részletet.

Leon Ledermann, Nobel-díjas kísérleti fizikus az „Az isteni a-tom” című könyvében azt írja: „Kísérleti fizikus: Olyan fizikus, aki kísérleteket végez. Elméleti fizikus: Olyan fizikus, aki nem végez kísérleteket.” [10] A fizikusok többsége szakosodik: vagy elméleti vagy kísérleti fizikus lesz. Természetesen az elméletek megalkotásához is szükség van a kísérleti technikák ismeretére, és egy kísérleti fizikusnak is sokat segít az elmélyült elméleti tudás.

A *Kísérleti fizika* a mi esetünkben azonban nemcsak azt jelenti, hogy az előadáson kísérleteket mutatunk be. Sokkal inkább azt, hogy a fizikai fogalmakat és összefüggéseket a megfigyelhető jelenségek, kísérleti tapasztalatok és mérések felől közelítjük meg, „járjuk körül”, és írjuk le. Természetesen eközben megfogalmazzunk elméleteket, levezetéseket és számításokat is végzünk, de az eredményeinket folyamatosan összevetjük azokkal a tapasztalatokkal, amelyeket a kísérleteken kívül a természetben és a hétköznapi életben szerezhethetünk. Ezt a megismerési, megértési folyamatot segítik az órai *demonstrációs kísérletek*, és a következő öt félévben a *Fizika laboratórium* tárgyak keretében végzett *mérések*. Később pedig erre a tudásra épül az *Elméleti fizika* tárgyak tananyaga is.

1.1.1. Modellalkotás

A valóság végtelenül összetett, minden mindennel összefügg. A középiskolai feladatokban gyakran szereplő „Hanyagoljuk el a légellenállást!”, „A sűrűlódás elhanyagolható.” mondatok azért félrevezetőek, mert azt sugallják, hogy minden más hatást viszont figyelembe kell, és figyelembe lehet venni. Valójában az elhanyagolandó effektusok listája végtelen hosszú, helyette azt a néhány kölcsönhatást kell megtalálni, amelyeket mindenképp számításba kell venni a feladat megoldásakor.

A *mechanika* a testek mozgását vizsgálja. A könyvünkben tárgyalt *klasszikus, newtoni mechanika* csak a „nem túl gyors”, „nem túl nagy” és „nem túl kicsi” testek mozgásával foglalkozik. (A fénysebességhez közeli sebességű mozgásoknál a *speciális relativitáselméletre*, a kozmikus méretek esetében az *általános relativitáselméletre* van szükség, a mikrovilágban pedig már csak a *kvantummechanika* segítségével lehet leírni a mozgásokat.) Azonban ez a feladat is sokszor reménytelenül bonyolult lehet: például a Föld légkörének vagy a tengereknek a mozgását nagy számítógépes apparátussal is nehéz leírni. De egy sokkal kisebb test, egy autó mozgásának vizsgálata se egyszerű, ha nemcsak az autó *haladó mozgását*, hanem az összes alkatrész *forgását, rezgését, deformációját, az áramló*

levegővel való kölcsönhatását is le akarjuk írni. Ugyanakkor, ha valaki csak arra kíváncsi, hogy az autó éppen merre jár, vagy hogy mekkora erőre van szükség a felgyorsításához, akkor a leírás sokkal egyszerűbb lehet.

A fizikában a testek leírására különböző *modelleket* használunk, melyek a test tulajdonságai közül csak néhányat vesznek figyelembe, és ennek megfelelően a mozgását is leegyszerűsítve írják le. Ez az egyszerűsítés elkerülhetetlen, hiszen anélkül a leírás kezelhetetlenül bonyolult lenne. Ugyanakkor egy-egy mozgás leírásakor sokszor nincs is szükség részletesebb modellre. Ha például a Föld Nap körüli keringését vizsgáljuk, akkor a földi mozgások teljesen érdektelenek számunkra, és első közelítésben még a Föld kiterjedését, forgását se kell figyelembe vennünk. Ilyenkor a Földet – nagy mérete, és bonyolult felépítése ellenére – egyetlen, tömeggel rendelkező pontként kezelhetjük. A *tömegpont*, vagy *pontszerű test* a testek legegyszerűbb modellje, segítségével értelemszerűen csak a test haladó mozgása írható le.

Ha a Naprendszer bolygóinak mozgását tanulmányozzuk, akkor az tömegpontok rendszereként kezelhető. Bár ebben az esetben a tömegpontok kis száma miatt a *pontrendszer* minden tagjának mozgása külön-külön is leírható, hasznos lehet az egész rendszert összességében leíró fogalmakat is bevezetni. Egy köbméter levegő 10^{25} nagyságrendű molekulájának mozgását viszont már képtelenség az egyes molekulák mozgását követve leírni, ekkor már csak a pontrendszer egészéről tehetünk megállapításokat, az egyes molekulák mozgását csak statisztikai módszerekkel jellemezhetjük.

A valóságos testeknek kiterjedése is van, és bonyolultabb mozgásokra is képesek, mint a pontszerű testek. A szilárd testek – ha nem érik nagy erőhatások – jó közelítéssel megtartják alakjukat. Ezt a tulajdonságot idealizálja a *merev test* modell, amely figyelembe veszi a test kiterjedését, de azt deformálhatatlannak, alakváltozásra képtelennek, „merevnek” tekinti. A merev test modellel már jól leírható a testek (sokszor meglehetősen bonyolult) forgómozgása is.

A valóságban azonban a legmerevebb, legszilárdabb testek is deformálhatók: kis mértékben egy vastag márványlap is meggörbül, benyomódik egy könyv súlya alatt, amit megfelelő eszközökkel (például a felületéről visszaverődő fény sugar segítségével) detektálni és mérni lehet. A *deformálható test* modell leírja a testek alakváltozását is, amely a szilárd testek *rugalmas* alakváltozásától a folyadékok és gázok mozgásáig nagyon sokféle lehet. A deformálható testekben kialakulhatnak bonyolult, összetett mozgásformák is, mint például az *áramlások* vagy a *mechanikai hullámok*.

A mozgások vizsgálata több szinten lehetséges. A *kinematika* csak a mozgás leírására vállalkozik: Mikor, hol (és milyen helyzetben) van a test? Milyen a pályája? Hogyan mozog? Ezekre a kérdésekre válaszol – anélkül, hogy a mozgás okaival foglalkozna.

A *dinamika* a mozgás és a mozgást befolyásoló hatások (erők, forgatónyomatékok) közötti kapcsolatot tárgyalja. Milyen külső hatásokra van szükség egy adott mozgáshoz? Milyen mozgás alakul ki adott külső hatások (és ismert kezdeti feltételek) esetén? A dinamika speciális esete a *statika*, ami a testek nyugalmanak feltételeit vizsgálja.

A mozgások leírását olyan mennyiségek bevezetése segíti, amelyekre – bizonyos feltételek teljesülése esetén – *megmaradási törvények* fogalmazhatók meg. Ilyen például az *impulzus*, a *perdület* és a (mechanikai) *energia*. Ezek segítségével a vizsgált rendszerről sokszor a fellépő hatások részletes ismerete nélkül is fontos megállapításokat tehetünk.

A könyv két részre tagolódik. Az *első részben* a pontszerű testek kinematikájától kezdve haladunk a bonyolultabb modellek és összetettebb leírások felé: a tömegpont dinamikáján, a pontrendszeren, a megmaradási törvények felírásán, a merev és rugalmas testeken keresztül egészen a folyadékok és gázok áramlásáig.

A *második részben* részletesebben foglalkozunk a rezgőmozgással és a mechanikai hullámokkal. A rezgések és a hullámok a természet legalapvetőbb mozgásformái, amelyeknek fontos szerepük van a fizika szinte minden területén (elektromágnesesség, optika, kvantummechanika). A mechanikai hullámoknál jól megfigyelhető a legtöbb hullámjelenség, bevezethetők a hullámok leírására használt fogalmak és matematikai módszerek, amelyek később jól használhatók lesznek más hullámjelenségek vizsgálatánál is.

1.1.2. Fizikai mennyiségek

A fizikai mennyiségek egy része *skaláris*, melyeket egyértelműen kifejez a nagyságuk. Ilyen például az idő, a tömeg, a munka vagy a nyomás. A skaláris mennyiségeket dőlt betűkkel jelöljük: t , m , W , p .

Sok fizikai mennyiség viszont *vektorok* segítségével írható le, ezeknek nagyságuk és irányuk is fontos. *Vektoriális* mennyiség például az elmozdulás, a sebesség, az erő vagy a szögsebesség. A vektoriális mennyiségeket nyomtatásban vastag, álló betűkkel vagy felül nyíllal szokás jelölni: $\Delta \mathbf{r}$, \mathbf{v} , \mathbf{F} , $\boldsymbol{\omega}$, illetve $\vec{\Delta r}$, \vec{v} , \vec{F} , $\vec{\omega}$. (Kézírásban felül nyíllal vagy aláhúzást használunk.) Az A.1 függelékben röviden összefoglaljuk a legalapvetőbb vektorműveleteket.

A levezetések és számítások során elemi szinten használni fogjuk a differenciál- és integrálszámítást is. A matematikának ez a területe a newtoni mechanikával együtt született meg és alakult ki (elsősorban *Newton* és *Leibnitz* munkásságának köszönhetően), így az alapfogalmakat a kinematikai alapfogalmakkal együtt fogjuk ismertetni. Az alapos és részletes tárgyalásra az *Analízis* tárgy keretében kerül majd sor, itt csak a legszükségesebb módszereket ismertetjük, a matematikai precizitás igénye nélkül. A deriválás és integrálás legegyszerűbb szabályai az A.2 és A.3 függelékben találhatóak.

Fizikai mennyiségek számszerű megadásához *mértékegységekre* van szükség. Egy-egy mennyiség mértékegységének a megválasztása – bár részben történeti okokra vezethető vissza – szorosan összefügg az adott mennyiség mérés technikájával, a mérések hibájával is. Ezért az alapvető mennyiségek mértékegységeiről az azokat megalapozó törvények kapcsán fogunk beszélni. Bár a fizikusok körében időnként még használatos a CGS mértékegységrendszer is, de ebben a könyvben (néhány régebbi mértékegységen kívül) csak az SI mértékegységeket fogjuk bevezetni és használni.

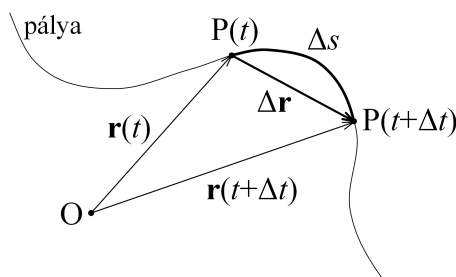
1.2. Kinematikai alapfogalmak

A tömegpont kinematikája lényegében arra a kérdésre keres választ: a pontszerűnek tekintett test *mikor, hol* található? Ezt legegyszerűbben úgy írhatjuk le, ha megadjuk a test helyzetét egy tetszőlegesen megválasztott vonatkoztatási ponthoz viszonyítva az idő függvényében, azaz megadjuk az $\mathbf{r}(t)$ függvényt. Itt \mathbf{r} az O vonatkoztatási pontból (az origóból) a test helyéhez mutató vektor, az úgynevezett helyvektor. Az $\mathbf{r}(t)$ függvény tehát egy olyan vektorfüggvény, amely egy skalár mennyiséghez vektort rendel.

Azt már a bevezetőben tisztáztuk, hogy a pontszerű test nem feltétlenül kicsi. (Az fontos, hogy az alakja, kiterjedése ne befolyásolja azt a mozgását, amit le akarunk írni.) Ugyanakkor mérete általában sokkal kisebb, mint a mozgására jellemző távolságok, így annak nincs nagy jelentősége, hogy a test melyik pontjának helyét írjuk le. A későbbiekben pontrendszerek, kiterjedt testek esetében gyakran a *tömegközéppont* lesz az a kiválasztott pont, amelynek a mozgását – mint egy tömegpontét – leírjuk.

1.2.1. Pálya, elmozdulás, út

A pontszerű test által érintett pontok halmaza a *pálya* (1.1 ábra). A pálya általános esetben egy térgörbe. Speciális mozgások a síkmozgások, amikor a pálya egy síkgörbe. Vizsgálataink során gyakran találkozunk kör, parabola és ellipszis alakú pályával (például körmozgás, hajítások, bolygómozgás). A legegyszerűbb mozgás pályája egyenes, illetve egy egyenes szakasz.



1.1. ábra. Pálya, elmozdulás, út

A test helyvektora minden időpillanatban a pályának ahhoz a pontjához mutat, ahol a test éppen tartózkodik. Az $\mathbf{r}(t)$ helyvektor t és $t + \Delta t$ időpontok közötti megváltozása az *elmozdulás vektor*:

$$\Delta \mathbf{r} = \mathbf{r}(t + \Delta t) - \mathbf{r}(t).$$

Miközben a test elmozdul, befutja a pálya egy darabját. A Δt idő alatt befutott pályadarab hossza a Δs út. Az út – az elmozdulással szemben – skaláris mennyiség, és általában a nagysága is eltér az elmozdulás nagyságától: $\Delta s \geq |\Delta \mathbf{r}|$.

A test helyvektora – megfelelő *koordináta-rendszer* választásával – megadható koordinátái segítségével is. Leggyakrabban a *Descartes-féle* derékszögű koordináta-rendszert használjuk, de a vizsgált problémának megfelelően gyakran érdemes más, például gömbi vagy hengerkoordinátákat használni.

Derékszögű koordinátákkal az $\mathbf{r}(t)$ helyvektort

$$\mathbf{r}(t) = x(t)\mathbf{i} + y(t)\mathbf{j} + z(t)\mathbf{k}$$

alakban írhatjuk fel, ahol $x(t)$, $y(t)$ és $z(t)$ a helyvektor koordinátái, az \mathbf{i} , \mathbf{j} és \mathbf{k} (egymásra merőleges, jobbsodrású rendszert alkotó) egységvektorok pedig a koordináta-rendszer bázisvektorai (lásd az [A.1](#) függelékben). Az elmozdulásvektor szintén megadható koordinátái segítségével:

$$\begin{aligned} \Delta\mathbf{r} &= \mathbf{r}(t + \Delta t) - \mathbf{r}(t) = \\ &= x(t + \Delta t)\mathbf{i} + y(t + \Delta t)\mathbf{j} + z(t + \Delta t)\mathbf{k} - [x(t)\mathbf{i} + y(t)\mathbf{j} + z(t)\mathbf{k}] = \\ &= [x(t + \Delta t) - x(t)]\mathbf{i} + [y(t + \Delta t) - y(t)]\mathbf{j} + [z(t + \Delta t) - z(t)]\mathbf{k} = \\ &= \Delta x\mathbf{i} + \Delta y\mathbf{j} + \Delta z\mathbf{k}. \end{aligned}$$

Az út kifejezése bonyolultabb (lásd [1.2.5](#)), de kicsiny elmozdulás esetén, azaz ha $\Delta t \rightarrow 0$, akkor

$$\Delta s \approx |\Delta\mathbf{r}| = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2 + \Delta z^2}.$$

1.2.2. Sebesség, differenciálszámítás

A pálya megadja a mozgás geometriáját, de semmit nem mond a mozgás időbeli lefolyásáról. A mozgás „gyorsaságát” a hétköznapi életből is ismert *sebesség* jellemzi. A körülöttünk lévő tárgyak sebességét és a saját sebességünket – bizonyos határok között – közvetlenül érzékeljük, ami nélkülözhetetlen a mozgásunk koordinálásához, mozgó tárgyak elkapásához, vagy éppen az összeütközés elkerüléséhez.

A fizikában gyakran átveszünk a hétköznapi életből fogalmakat, de a fogalmak jelentése nem mindig egyezik meg teljesen a tudományban és a hétköznapi életben. (Például a *munka* a hétköznapi értelemben sokkal tágabb fogalom, mint a fizikában.) A fizikai mennyiséget a hétköznapi fogalommal szemben egyértelműen meg kell határozni. A sebesség fogalma különösen érdekes ebből a szempontból, hiszen meghatározása a matematika egy új területének megszületésével kapcsolódott össze.

A pillanatnyi sebesség

A sebesség vektoriális mennyiség. Az *átlagsebességet* az elmozdulásvektor és az elmozduláshoz szükséges idő hányadosaként definiálhatjuk:

$$\mathbf{v}_{\text{átl}} = \frac{\Delta\mathbf{r}}{\Delta t} = \frac{\mathbf{r}(t + \Delta t) - \mathbf{r}(t)}{\Delta t}.$$

Ha a Δt időtartamot egyre kisebbre választjuk, akkor egyre részletesebb információt kapunk a tömegpont sebességének változásáról. A *pillanatnyi sebesség* fogalmához úgy juthatunk el, ha a Δt időtartamot minden határon túl csökkentjük. A sebesség pillanatnyi értékét a t időpillanatban egy *határérték* segítségével határozhatjuk meg:

$$\mathbf{v}(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \mathbf{r}}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\mathbf{r}(t + \Delta t) - \mathbf{r}(t)}{\Delta t}.$$

A $\frac{\Delta \mathbf{r}}{\Delta t}$ *differenciahányados* határértékét *differenciálhányadosnak* nevezzük, és $\frac{d\mathbf{r}}{dt}$ -vel jelöljük. Ezzel a jelöléssel a pillanatnyi sebesség:

$$\mathbf{v}(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \mathbf{r}}{\Delta t} = \frac{d\mathbf{r}(t)}{dt}. \quad (1.1)$$

Differenciálszámítás, deriváltfüggvény

Ezzel a definícióval az $\mathbf{r}(t)$ függvényhez egy másik, $\mathbf{v}(t)$ függvényt rendelünk, amely megadja az eredeti függvény *változási sebességét*. A sebességhez (azaz a helyvektor változási sebességéhez) hasonlóan megadható bármely más – skaláris, vagy vektoriális – mennyiség változási sebessége is. Ez az eljárás a *differenciálszámítás*, a változási sebességet leíró függvényt pedig *deriváltfüggvénynek* nevezzük. Algebrai alakban megadott függvényeknél a deriváltfüggvény megállapításához nem szükséges határérték-számítást végezni: a deriváltfüggvény egyszerű *deriválási szabályokkal* megkapható (A.2 függelék).

Sebességkomponensek

A deriválási szabályok alapján a vektoriális mennyiségeket komponensenként deriválhatjuk. A sebességvektor eszerint:

$$\mathbf{v}(t) = \frac{d\mathbf{r}(t)}{dt} = \frac{d[x(t)\mathbf{i} + y(t)\mathbf{j} + z(t)\mathbf{k}]}{dt} = \frac{dx(t)}{dt}\mathbf{i} + \frac{dy(t)}{dt}\mathbf{j} + \frac{dz(t)}{dt}\mathbf{k}$$

(hiszen tagonként deriválhatunk, és az \mathbf{i} , \mathbf{j} , \mathbf{k} egységvektorok időben állandók). A

$$v_x(t) = \frac{dx(t)}{dt}$$

$$v_y(t) = \frac{dy(t)}{dt}$$

$$v_z(t) = \frac{dz(t)}{dt}$$

skalár mennyiségek a sebességvektor koordinátái.

A sebesség nagysága a komponensek nagyságából meghatározható:

$$v = |\mathbf{v}| = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2}.$$

A sebességvektor iránya

A $\Delta t \rightarrow 0$ határesetben $|\Delta \mathbf{r}| \rightarrow \Delta s$, azaz $|\mathbf{dr}| = ds$. Így a sebességvektor nagysága:

$$v(t) = |\mathbf{v}(t)| = \left| \frac{\mathbf{dr}}{dt} \right| = \frac{|\mathbf{dr}|}{dt} = \frac{ds}{dt}. \quad (1.2)$$

A sebességvektort megadó differenciálhányadost formálisan $\frac{ds}{ds}$ -sel bővítve a

$$\mathbf{v}(t) = \frac{\mathbf{dr}}{dt} = \frac{\mathbf{dr}}{ds} \frac{ds}{dt} = v(t) \mathbf{u}_t \quad (1.3)$$

kifejezés adódik, ahol az

$$\mathbf{u}_t = \frac{\mathbf{dr}}{ds} = \frac{\mathbf{dr}}{|\mathbf{dr}|}$$

vektor a pálya érintője irányába mutató (érintőirányú vagy *tangenciális*) egységvektor.

A sebességvektor tehát – a tapasztalattal egyezően – a pálya érintője irányába mutat, csak tangenciális komponense van.

1.2.3. Gyorsulás

A mozgások dinamikai leírásában kiemelkedő szerepe van a *gyorsulás* fogalmának. A gyorsulásvektor a sebességvektor változási sebessége. Az *átlagos gyorsulást* a sebességvektor megváltozásából számíthatjuk:

$$\mathbf{a}_{\text{átl}} = \frac{\Delta \mathbf{v}}{\Delta t},$$

a *pillanatnyi gyorsulást* pedig a pillanatnyi sebesség (1.1) képletéhez hasonlóan definiálhatjuk:

$$\mathbf{a}(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \mathbf{v}}{\Delta t} = \frac{d\mathbf{v}(t)}{dt}.$$

Mivel a sebesség már egy másik mennyiség, a helyvektor deriváltja, a gyorsulásvektor felírható a helyvektor idő szerinti *második deriváltjaként* is:

$$\mathbf{a}(t) = \frac{d\mathbf{v}(t)}{dt} = \frac{d^2 \mathbf{r}(t)}{dt^2}. \quad (1.4)$$

Ehhez hasonlóan lehet a gyorsulás változási sebességéről (és annak a változási sebességéről, stb.) beszélni, tehát a helyvektor idő szerinti harmadik (negyedik, stb.) deriváltját felírni, de ezek a mennyiségek sokkal kevésbé fontosak, így külön nevük, jelölésük sincsen.

Az idő szerinti deriválást szokás a mennyiség fölé írt ponttal (a második deriváltat két ponttal) is jelölni:

$$\begin{aligned} \mathbf{v} &= \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \dot{\mathbf{r}} \\ \mathbf{a} &= \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \dot{\mathbf{v}} = \frac{d^2 \mathbf{r}}{dt^2} = \ddot{\mathbf{r}}. \end{aligned}$$

Gyorsuláskomponensek

A sebességvektorhoz hasonlóan a gyorsulásvektor is felírható komponensenként:

$$\mathbf{a}(t) = \frac{d^2\mathbf{r}(t)}{dt^2} = \frac{d^2[x(t)\mathbf{i} + y(t)\mathbf{j} + z(t)\mathbf{k}]}{dt^2} = \frac{d^2x(t)}{dt^2}\mathbf{i} + \frac{d^2y(t)}{dt^2}\mathbf{j} + \frac{d^2z(t)}{dt^2}\mathbf{k}.$$

A sebességhez hasonlóan megadhatók a gyorsulásvektor koordinátái:

$$\begin{aligned}a_x(t) &= \frac{dv_x(t)}{dt} = \frac{d^2x(t)}{dt^2} \\a_y(t) &= \frac{dv_y(t)}{dt} = \frac{d^2y(t)}{dt^2} \\a_z(t) &= \frac{dv_z(t)}{dt} = \frac{d^2z(t)}{dt^2},\end{aligned}$$

és a gyorsulásvektor nagysága is:

$$a = |\mathbf{a}| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}.$$

A gyorsulásvektor iránya

Vizsgáljuk meg a gyorsulásvektor irányát egy általános (gyorsuló, görbe vonalú) mozgás esetében! Az (1.3) összefüggés szerint a sebességvektor

$$\mathbf{v}(t) = v(t)\mathbf{u}_t(t)$$

alakban írható. Behelyettesítve ezt a gyorsulás (1.4) definiáló egyenletébe, és alkalmazva a szorzat deriválására vonatkozó szabályt a gyorsulásra a következő kifejezés adódik:

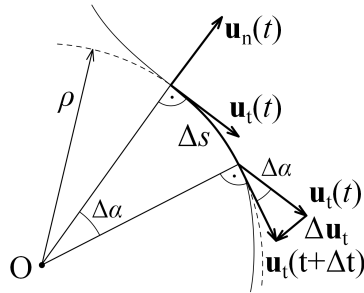
$$\mathbf{a}(t) = \frac{d\mathbf{v}(t)}{dt} = \frac{d[v(t)\mathbf{u}_t(t)]}{dt} = \frac{dv(t)}{dt}\mathbf{u}_t(t) + v(t)\frac{d\mathbf{u}_t(t)}{dt}. \quad (1.5)$$

Az első tag a pálya érintőjének irányába mutat, nagysága a sebesség nagyságának idő szerinti deriváltja. Ha a sebesség nagysága nem állandó, akkor ez a tag nem nulla. A második tagban az \mathbf{u}_t egységvektor idő szerinti deriváltja szerepel. Ha a pálya nem egyenes, akkor a tangenciális \mathbf{u}_t egységvektor *irány*a változik az idő függvényében, és akkor ez a tag sem nulla.

Az \mathbf{u}_t egységvektor idő szerinti deriváltját az 1.2 ábra alapján számíthatjuk ki. Az egységvektor megváltozása egy kicsiny Δt idő alatt:

$$\Delta\mathbf{u}_t \approx -\Delta\alpha\mathbf{u}_n,$$

ahol \mathbf{u}_n a pálya (pillanatnyi) *simulósík*jában fekvő, a pálya érintőjére merőleges (*normális*) egységvektor, $\Delta\alpha$ pedig az a kicsiny szög, amellyel az \mathbf{u}_t egységvektor elfordult Δt idő alatt.



1.2. ábra. A tangenciális egységvektor megváltozása

Eközben a tömegpont által megtett út:

$$\Delta s \approx \rho \Delta \alpha,$$

ahol ρ a pálya (pillanatnyi) *simulókörének* sugara. Ebből kifejezve:

$$\Delta \alpha \approx \frac{\Delta s}{\rho},$$

ezt behelyettesítve $\Delta \mathbf{u}_t$ kifejezésébe:

$$\Delta \mathbf{u}_t \approx -\Delta \alpha \mathbf{u}_n \approx -\frac{\Delta s}{\rho} \mathbf{u}_n.$$

Ennek alapján a tangenciális egységvektor idő szerinti deriváltja:

$$\frac{d\mathbf{u}_t(t)}{dt} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \mathbf{u}_t}{\Delta t} = -\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} \frac{1}{\rho} \mathbf{u}_n = -\frac{v}{\rho} \mathbf{u}_n,$$

amit beírva az (1.5) egyenletbe az

$$\mathbf{a}(t) = \frac{dv}{dt} \mathbf{u}_t - \frac{v^2}{\rho} \mathbf{u}_n \quad (1.6)$$

összefüggést kapjuk.

Tehát a gyorsulásvektornak – szemben a sebességvektorral – általában normális és tangenciális komponense is van:

$$a_t = \frac{dv}{dt}$$

$$a_n = -\frac{v^2}{\rho}.$$

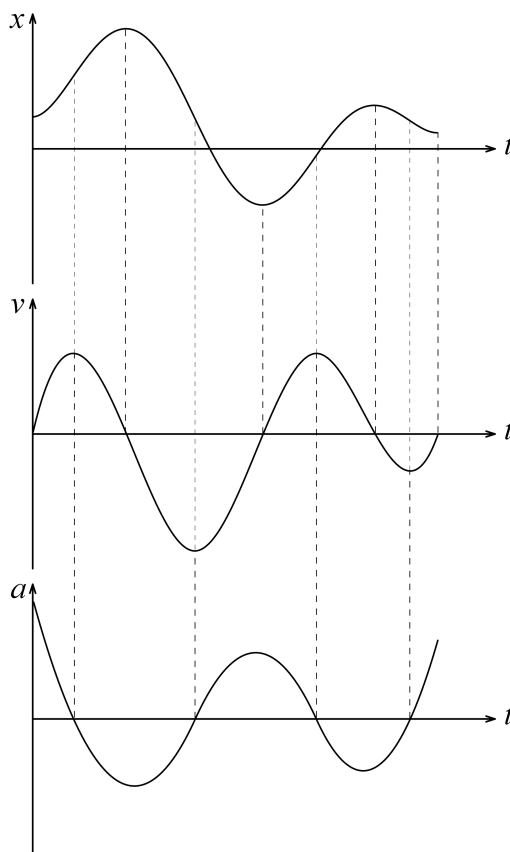
1.2.4. A függvény és deriváltfüggvény grafikus kapcsolata

Az 1.3 ábrán egy egyenesvonalú mozgás hely–idő, sebesség–idő és gyorsulás–idő grafikonja látható. Figyeljük meg a függvények kapcsolatát!

Amikor a függvény *növekszik*, a deriváltfüggvénye pozitív lesz, amikor *csökken*, akkor pedig negatív. Ha például a gyorsulás pozitív, a sebességfüggvény növekszik: pozitív sebesség esetén a test gyorsul – negatív sebesség esetén lassul (abszolút értéke csökken). Minél meredekebb a függvény, annál nagyobb a deriváltfüggvény abszolút értéke.

Amikor a deriváltfüggvény előjelet vált, az eredeti függvénynek *szélsőértéke* (maximuma vagy minimuma) van. Ezt a függvényanalízis ismerete nélkül, szemlélet alapján is beláthatjuk: ha a test sebessége pozitívból negatívba vált, azaz „visszafordul”, akkor közben egy pillanatra megáll, a helyzetének pedig maximuma lesz.

Érdekes a második derivált (gyorsulás) és az eredeti függvény (hely) kapcsolata is: a második derivált előjele határozza meg, hogy az eredeti függvény alulról konvex vagy konkáv-e. Például pozitív gyorsulás esetén a helyfüggvény (alulról) konvex.



1.3. ábra. Elmozdulás-, sebesség- és gyorsulásfüggvény

1.2.5. Integrálszámítás

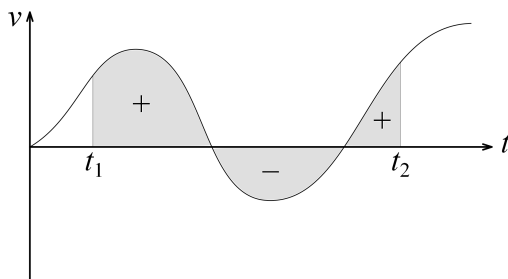
Differenciálszámítással a hely–idő függvényből meghatározható a sebesség–idő és a gyorsulás–idő függvény. Most vizsgáljuk meg azt, hogy a sebességfüggvény ismeretében hogyan határozható meg a test helyzete (majd ehhez hasonlóan: gyorsulásának ismeretében a sebessége). Tekintsünk először egy egyenesvonalú mozgást, ahol az elmozdulást és a sebességet is skalár mennyiségek jellemzik.

Ha a test állandó v sebességgel mozog, akkor elmozdulása Δt idő alatt $\Delta x = v\Delta t$. (Ez a sebesség definíciójából következik.) A sebesség–idő grafikon ilyenkor egy vízszintes szakasz, az elmozdulás pedig éppen a szakasz alatti téglalap területe. (Ha a sebesség negatív, akkor a szakasz feletti területet negatívnak tekintjük.)

Ha a test sebessége változik az idő függvényében, akkor a mozgást kis időtartamokra oszthatjuk, kiszámíthatjuk az egyes kis elmozdulásokat, és azokat összegezzük. A számítás úgy pontosítható, hogy a felosztást finomítjuk. A felosztást minden határon túl finomítva:

$$\Delta x = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \sum_{t_1}^{t_2} v(t)\Delta t = \int_{t_1}^{t_2} v(t)dt.$$

Ez a kifejezés a $v(t)$ függvény idő szerinti *határozott integrálja* a (t_1, t_2) időintervallumon. A határozott integrál értéke a görbe alatti (előjeles) terület (1.4 ábra).



1.4. ábra. A sebességfüggvény alatti terület

Egyszerűbb esetekben az összegzést és a határérték-számítást nem kell elvégezni: a határozott integrál a táblázatokból megkereshető *primitív függvény* ismeretében meghatározható (A.3). A határozott integrál azonban csak az elmozdulást adja meg a vizsgált időtartam alatt. A test helyzetének meghatározásához szükség van a *kezdeti feltételekre*, jelen esetben a test helyének ismeretére a vizsgált mozgás kezdetén. Ha a test helyzete a $t = 0$ időpontban $x(0) = x_0$, akkor a hely–idő függvény:

$$x(t) = x_0 + \int_0^t v(\tau)d\tau.$$

Ehhez teljesen hasonlóan határozható meg a gyorsulás–idő függvény ismeretében a sebesség–idő függvény, majd abból a hely–idő függvény is:

$$\begin{aligned}
 v(t) &= v_0 + \int_0^t a(\tau) d\tau \\
 x(t) &= x_0 + \int_0^t v(\tau) d\tau = x_0 + v_0 t + \int_0^t \int_0^t a(\tau) d\tau^2,
 \end{aligned}
 \tag{1.7}$$

ahol v_0 a test sebessége a $t = 0$ pillanatban.

Ha a mozgás nem egyenesvonalú, akkor helyét, sebességét, gyorsulását vektorok írják le. A gyorsulás, a sebesség és a helyvektor időfüggvénye közötti kapcsolatot ekkor is az (1.7) integrálokhoz hasonlóan írhatjuk fel:

$$\begin{aligned}
 \mathbf{v}(t) &= \mathbf{v}_0 + \int_0^t \mathbf{a}(\tau) d\tau \\
 \mathbf{r}(t) &= \mathbf{r}_0 + \int_0^t \mathbf{v}(\tau) d\tau = \mathbf{r}_0 + \mathbf{v}_0 t + \int_0^t \int_0^t \mathbf{a}(\tau) d\tau^2.
 \end{aligned}
 \tag{1.8}$$

A vektorok integrálását a deriváláshoz hasonlóan komponensenként végezhetjük el (példák az 1.3 szakaszban).

Az út meghatározása

Görbevonalú mozgásnál a test által megtett út szintén integrálszámítással határozható meg. Az (1.2) összefüggés alapján $ds = v dt$ (ahol v a sebességvektor abszolút értéke), és így a t_1 és t_2 időpillanatok között befutott út:

$$s = \int_{t_1}^{t_2} v dt.$$

1.3. Különböző mozgások kinematikai leírása

Egyenesvonalú egyenletesen gyorsuló mozgás

Válasszuk a koordináta-rendszer x -tengelyét párhuzamosan a mozgással:

$$\begin{aligned}a(t) &= a \\v(t) &= v_0 + \int_0^t a(\tau) d\tau = v_0 + at \\x(t) &= x_0 + \int_0^t v(\tau) d\tau = x_0 + v_0 t + \frac{a}{2} t^2.\end{aligned}$$

Harmonikus rezgőmozgás

Harmonikus rezgőmozgásnál a test kitérése az idő szinuszos függvénye:

$$x(t) = A \sin(\omega t + \varphi).$$

A sebességet és a gyorsulást deriválással határozhatjuk meg:

$$\begin{aligned}v(t) &= \dot{x}(t) = A\omega \cos(\omega t + \varphi) \\a(t) &= \dot{v}(t) = \ddot{x}(t) = -A\omega^2 \sin(\omega t + \varphi).\end{aligned}$$

Vegyük észre, hogy $a(t) = -\omega^2 x(t)$, azaz a gyorsulás arányos a kitéréssel (és az arányossági tényező negatív).

Ferde hajítás

Mozogjon a test az xy síkban, és legyen y függőleges. Induljon a test a $(0, h)$ pontból a vízszinteshez képest α szögben, v sebességgel. Ekkor

$$\begin{aligned}x_0 &= 0, & v_{x0} &= v \cos \alpha, & a_x &= 0, \\y_0 &= h, & v_{y0} &= v \sin \alpha, & a_y &= -g.\end{aligned}$$

Ezek alapján a sebesség- és a helykoordináták integrálással meghatározhatók:

$$\begin{aligned}v_x(t) &= v_{x0} + \int_0^t a_x(\tau) d\tau = v \cos \alpha \\v_y(t) &= v_{y0} + \int_0^t a_y(\tau) d\tau = v \sin \alpha - gt,\end{aligned}$$

$$x(t) = x_0 + \int_0^t v_x(\tau) d\tau = v \cos \alpha t$$

$$y(t) = y_0 + \int_0^t v_y(\tau) d\tau = h + v \sin \alpha t - \frac{g}{2} t^2.$$

A test akkor éri el a pálya legmagasabb pontját, amikor $v_y(t) = 0$:

$$v \sin \alpha - g t_{\max} = 0 \Rightarrow t_{\max} = \frac{v}{g} \sin \alpha \Rightarrow y_{\max} = y(t_{\max}) = h + \frac{v^2}{2g} \sin^2 \alpha.$$

A földet érés időpontját az $y(t) = 0$ egyenlet határozza meg:

$$h + v \sin \alpha t_f - \frac{g}{2} t_f^2 = 0 \Rightarrow t_f = \frac{v \sin \alpha + \sqrt{v^2 \sin^2 \alpha + 2gh}}{g}.$$

$h = 0$ esetén az eredmény egyszerűbb:

$$t_f = \frac{2v}{g} \sin \alpha \Rightarrow x_f = x(t_f) = \frac{2v^2}{g} \sin \alpha \cos \alpha = \frac{v^2}{g} \sin 2\alpha.$$

Rögzített v esetén ez akkor maximális, ha $\sin 2\alpha = 1$, azaz $\alpha = 45^\circ$.

A pálya egyenletét $x(t)$ és $y(t)$ kifejezéséből t kiküszöbölésével kaphatjuk meg:

$$y(x) = h + \operatorname{tg} \alpha \cdot x - \frac{g}{2v^2 \cos^2 \alpha} x^2,$$

tehát a pálya egy lefelé nyitott parabolaív.

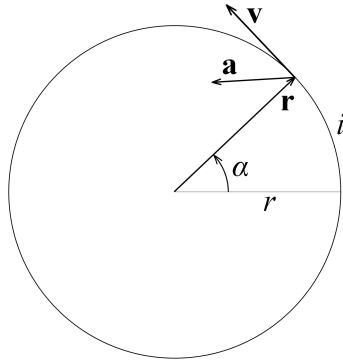
Körmozgás

Körmozgás esetén a pálya egy r sugarú körív. A test \mathbf{v} sebességvektora az (1.3) kifejezésnek megfelelően érintőirányú (tangenciális), az \mathbf{a} gyorsulásnak pedig általános esetben az (1.6) kifejezésnek megfelelően tangenciális és normális komponense is van:

$$a_t = \frac{dv}{dt}$$

$$a_n = -\frac{v^2}{r}.$$

Az első (tangenciális) komponens csak gyorsuló vagy lassuló körmozgásnál jelentkezik, amikor változik a sebesség nagysága. A második (normális) komponens viszont egyenes körmozgásnál is fellép, amikor a sebesség nagysága állandó. Ez a komponens a kör középpontja felé mutat, és *centripetális gyorsulásnak* nevezzük.



1.5. ábra. Körmozgás

A körmozgást végző test helyzetét megadhatjuk egy kiválasztott irányhoz viszonyított (radiánban mért) *forgásszöggel* is (1.5 ábra). Az $\alpha(t)$ függvény egyértelműen jellemzi a tömegpont helyzetét. A forgásszög kifejezhető a test által befutott i ív (út) és a körpálya sugara segítségével:

$$\alpha = \frac{i}{r}.$$

Az α forgásszög változási sebessége, az ω *szögsebesség*, a sebességhez hasonlóan definiálható:

$$\omega = \frac{d\alpha}{dt} = \frac{1}{r} \frac{di}{dt} = \frac{v}{r}.$$

Nem egyenletes körmozgásnál $\omega(t)$ is változik, változási sebessége a β szöggyorsulás:

$$\beta = \frac{d\omega}{dt} = \frac{d^2\alpha}{dt^2}.$$

ω és β segítségével a gyorsuláskomponensek más alakokban is felírhatók:

$$a_t = \frac{dv}{dt} = \frac{d\omega}{dt} r = \beta r$$

$$a_{cp} = -\frac{v^2}{r} = -v\omega = -\omega^2 r.$$

Az egyenletes körmozgás jellemzésére használható még a T periódusidő (egy teljes kör befutásának ideje) és az f fordulatszám (egy időegység alatti fordulatok száma) is. Könnyen belátható, hogy

$$T = \frac{2\pi}{\omega} \quad \text{és} \quad f = \frac{1}{T} = \frac{\omega}{2\pi}.$$

2. fejezet

A dinamika alapjai

A kinematika leírja a mozgásokat (pontoszerű test esetében például megadja, hogy a test mikor hol van), de nem foglalkozik a mozgás okaival. A testek mozgását más testekkel való kölcsönhatásaik határozzák meg. A testet érő hatások és a test mozgása közötti kapcsolatot vizsgálja a *dinamika*.

Az ókori elképzelés szerint egy test mozgásához folyamatos külső hatás szükséges. A hétköznapi tapasztalat is ezt látszik megerősíteni: Vízszintes talajon folytonosan húzni kell egy szánkót, különben megáll. A biciklit is folyamatosan hajtani kell a vízszintes úton ahhoz, hogy egyenletes sebességgel haladjon.

Ha azonban jobban megvizsgáljuk ezeket az eseteket, akkor észrevehetjük, hogy a hétköznapi életben a testek mozgását legtöbbször a súrlódás és a közegellenállás akadályozza, és nekünk csak emiatt, ezek kiegyenlítése érdekében kell folyamatosan erőt kifejtenünk.

Kísérlet: Légpárnás sín

A légpárnás sínen megfigyelhetjük egy test mozgását közel erőmentes körülmények között. A sínen apró lyukak sorakoznak, amelyekbe egy kompresszor levegőt fúj. A kiáramló levegő kicsit megemeli a sínre helyezett testet, így az lényegében súrlódásmentesen mozoghat.

Ha a sínt gondosan vízszintesre állítjuk, akkor a ráhelyezett test nyugalomban marad. Ha viszont a testet meglökjük, akkor – további külső hatás nélkül – egyenletesen mozogni fog. Ha a sín végeire rugót helyezünk, akkor a mozgás sokáig fennmarad: a test a sín két vége között ide-oda mozog. (Természetesen a csekély légellenállás és a rugók energiavesztesége miatt a test idővel a légpárnás sínen is megáll.)

Hasonló látványban lehet részünk egy rendező-pályaudvaron, ahol a meglökött vagonok – a nagyon kicsiny gördülési ellenállásnak köszönhetően – sokáig közel egyenletes sebességgel mozognak a vízszintes pályán. ♦

A tapasztalat szerint egy test mozgásához nincs szükség külső hatásra. A magára hagyott, más testekkel nem kölcsönható test egyenesvonalú egyenletes mozgást végez. A külső hatásra – az ókori felfogással szemben – nem a mozgás fenntartásához, hanem a mozgásállapot megváltoztatásához van szükség.

2.1. Kölcsönhatások, az erő fogalma, erőmérés

Egymással kapcsolatba kerülő testek között különböző *kölcsönhatások* lehetnek. A „kölcsönhatás” szó azt fejezi ki, hogy a két test kölcsönösen hat egymásra. A mechanikában a testek közötti kölcsönhatásokat leíró mennyiség az *erő*. Az erő vektoriális mennyiség: a kölcsönhatás nagyságát és irányát is megadja.

Egy kiterjedt, deformálható testre ható erő megváltoztathatja a test mozgásállapotát és alakját is. Az erő mérésére mindkét hatás felhasználható. Mi a következőkben az erőt az általa létrehozott alakváltozás (deformáció) alapján fogjuk mérni, de lehet olyan erőmérőt is készíteni, amely az erő mozgásállapot-változtató hatásán alapul: például egy tenisz szerva közben fellépő erő nagyságára következtethetünk a teniszlabda sebességváltozásából.

Hogyan készítsünk erőmérőt? Erő hatására minden test kisebb-nagyobb mértékben deformálódik. A mérések megismételhetősége érdekében célszerű olyan testet választani, amely a mérendő erő hatására *rugalmas* alakváltozást szenved (az erőhatás megszűnése után visszanyeri eredeti alakját). Szintén célszerű olyan testet választani, melynek alakváltozása jó közelítéssel *lineáris* (az erővel arányos). Szerencsére a legtöbb rugalmas anyag kis alakváltozások esetén így viselkedik.

A megfelelő test kiválasztása után az erőmérőhöz *skálát* kell készíteni: meg kell mérni a test alakváltozását ismert erők hatására. Az így kalibrált eszközzel már mérhetjük ismeretlen erők nagyságát.

Ilyen mérőeszköz a jól ismert rugós erőmérő, ahol a deformáció elég nagy, szabad szemmel is könnyen leolvasható. A gyakorlatban használt erőmérőknél a deformáció sokszor alig láthatóan kicsi, és azt elektromos vagy optikai módszerekkel mérik.

2.2. Newton-törvények

A Newton-törvények a klasszikus mechanika alaptörvényei. Megfogalmazásuk a gravitációs erőtvénnyel (2.3 szakasz) együtt *Newton* [12] érdeme, aki egyrészt *Galilei* [13] kísérleti eredményei, másrészt *Kepler* [14] tapasztalati törvényei alapján írta fel az összefüggéseket. Bár a XX. században kiderült, hogy nagyon nagy (fénysebességhez közeli) sebességek és nagyon kicsi (atomi) méretek esetében a Newton-törvények nem írják le helyesen a természetet, hétköznapi méretek és nem túl nagy sebességek esetében továbbra is a természettudományos és műszaki számítások alapvető összefüggései.

2.2.1. Newton II. törvénye, a tehetetlen tömeg

A tapasztalat szerint egy test gyorsulása arányos a testre ható erővel, és a gyorsulás iránya megegyezik az erő irányával:

$$\mathbf{a} \sim \mathbf{F}.$$

Az erő és a gyorsulás hányadosa az adott testre jellemző mennyiség, amely kifejezi, hogy a test mennyire „áll ellen” a gyorsításnak. Ez a hányados a test *tehetetlen tömege*, vagy tehetetlensége:

$$m = \frac{F}{a}.$$

Átrendezve és vektoros alakban írva:

$$\mathbf{F} = m\mathbf{a}. \quad (2.1)$$

Ez Newton II. törvénye (mai megfogalmazásban – Newton az impulzusváltozással írta fel, lásd a 2.2.2 szakaszt).

Kísérlet: Tehetelenség

Fonálra felfüggesztett fahengert az aljára erősített ugyanolyan vastag fonállal lefelé húzzuk. Ha az alsó fonalat lassan, de egyre nagyobb erővel húzzuk, akkor a felső fonál szakad el, mert rá a húzóerő és a henger súlyának összege hat. Ha viszont az alsó fonalat hirtelen, nagy erővel megrántjuk, vagyis a fahengert nagy gyorsulással akarjuk mozgatni, akkor a fahenger tehetetlensége miatt az alsó fonál szakad el. (Videó: [Tehetlenség I. \[7\]](#))

Lehet-e az ember fején kalapáccsal diót törni úgy, hogy az ne fájjon? Igen, ha a dió alá egy nagy tömegű (nagy tehetetlenségű) tárgyat rakunk.

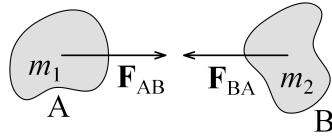
Pezsgősüveget egymásra helyezett fakorongokra állítunk. Ha a fakorongokat hirtelen kiütjük, az üveg – tehetetlensége miatt – alig mozdul el vízszintesen. (Videó: [Tehetlenség II. \[7\]](#)) ♦

2.2.2. Newton III. törvénye, az impulzus

Az erő mindig párkölsönhatás, amely mindig kölcsönható partnerek között lép fel. Ha egy A test hat egy B testre, akkor *szükségszerűen* a B test is hat az A testre. A két erőhatás azonos nagyságú, párhuzamos irányú és ellentétes irányítottágú (2.1 ábra). Képlettel megfogalmazva:

$$\mathbf{F}_{AB} = -\mathbf{F}_{BA}. \quad (2.2)$$

Ez Newton III. törvénye (vagy más néven a *hatás-ellenhatás* törvénye).



2.1. ábra. Newton III. törvénye

Ha a két test csak egymással van kölcsönhatásban, akkor (2.1) alapján:

$$\mathbf{F}_{AB} = m_1 \mathbf{a}_1 \quad \text{és} \quad \mathbf{F}_{BA} = m_2 \mathbf{a}_2 .$$

Ezt behelyettesítve a (2.2) összefüggésbe:

$$m_1 \mathbf{a}_1 = -m_2 \mathbf{a}_2 ,$$

rendezve és átalakítva:

$$\begin{aligned} m_1 \mathbf{a}_1 + m_2 \mathbf{a}_2 &= 0 \\ m_1 \frac{d\mathbf{v}_1}{dt} + m_2 \frac{d\mathbf{v}_2}{dt} &= 0 \\ \frac{d(m_1 \mathbf{v}_1 + m_2 \mathbf{v}_2)}{dt} &= 0 . \end{aligned}$$

Ebből következik, hogy

$$m_1 \mathbf{v}_1 + m_2 \mathbf{v}_2 = \text{állandó} .$$

A tömeg és a sebességvektor szorzatát *impulzusnak* (lendületnek, mozgásmennyiségnek) nevezzük. Az impulzus vektoriális mennyiség:

$$p = m\mathbf{v} . \tag{2.3}$$

Evvel a jelöléssel a két testre

$$\mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2 = \text{állandó} .$$

Ez az *impulzusmegmaradás tétele* két testre. (Természetesen csak akkor teljesül, ha a két test csak egymással van kölcsönhatásban, más erő nem hat rájuk.)

Kísérlet: Hatás-ellenhatás törvénye

Két szembeállított, egymás felé gurulni képes gördeszkán álló két ember egy kötélt két végét fogva egymást el akarja húzni. Bármilyen módon húzzák egymást (csak az egyik húz, a másik csak tartja a kötelet, vagy mindketten húzzák a másikat) mindkét gördeszka körülbelül ugyanúgy elmozdul.

Légpárnás sínre helyezett két test közé összenyomott, cérnaszállal összekötött rugót erősítünk. A cérnaszálát elégetve a rugó mindkét testet meglöki. Ha az egyik kocsi tömege nagyobb, mint a másiké, akkor ez a kocsi lassabban indul el. Kezdetben a két test összes lendülete nulla, ezért a cérnaszál elégetése után is nullának kell maradnia, hiszen nem hat külső erő a testekre.

Egy kifeszített vízszintes drótszálla kis kampókkal szódapatront akasztunk, majd a patront kiszúrjuk. A széndioxid gáz nagy sebességgel kiáramlik a patronból, a patron pedig ellenkező irányban végigcsúszik a dróton. ♦

Az impulzus segítségével Newton II. törvényét más alakban is felírhatjuk:

$$\mathbf{F} = m\mathbf{a} = m \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{d(m\mathbf{v})}{dt} = \frac{d\mathbf{p}}{dt},$$

$$\mathbf{F} = \frac{d\mathbf{p}}{dt}. \quad (2.4)$$

Newton a II. törvénynek ezt a alakját fogalmazta meg. Érdekes, hogy – szemben a (2.1) formával – ez az összefüggés a speciális relativitáselméletben is igaz marad.

2.2.3. Az erőhatások függetlensége

Eddig csak olyan eseteket vizsgáltunk, hogy egy testre csak egyetlen erő hat, az gyorsítja. Ha egy testre egyidejűleg több erő is hat, akkor a tapasztalat szerint a test úgy mozog, mintha az egyes erők külön-külön gyorsítanák a testet, és ezek a gyorsulások (vektoriálisan) összeadódnak:

$$\mathbf{a} = \sum_i \mathbf{a}_i = \sum_i \frac{\mathbf{F}_i}{m} = \frac{1}{m} \sum_i \mathbf{F}_i.$$

Ez az erőhatások függetlenségének elve vagy Newton IV. törvénye. Ennek alapján:

$$\sum_i \mathbf{F}_i = m \sum_i \mathbf{a}_i = m\mathbf{a},$$

$$\sum \mathbf{F} = m\mathbf{a}. \quad (2.5)$$

Ez Newton II. törvényének általánosabb megfogalmazása, ha a testre több erő is hat. A $\sum \mathbf{F}$ kifejezést *eredő erő*nek nevezzük. Az, hogy az erők egymástól függetlenül fejtik ki hatásukat, azzal egyenértékű, hogy az erők vektorként viselkednek, vektorként összegezhetőek, ugyanúgy, mint a gyorsulások.

Kísérlet: Erőhatások függetlensége

Ha az erők más erőktől függetlenül fejtik ki hatásukat egy testre, akkor a különböző hatásokra bekövetkező mozgások is egymástól függetlenül mennek végbe. Két egyforma golyó egyikét vízszintesen elhajítva, a másikat pedig ugyanakkor elejtve, a két golyó egyszerre koppan a talajon. A golyók függőleges irányú mozgása ugyanúgy megy végbe, függetlenül attól, hogy az egyik vízszintesen is mozog.

Két azonos magasságban elhelyezett csigán egy fonalat vezetünk át, és a fonál egyik végére 3 egységnyi, a másik végére 4 egységnyi, a közepére pedig 5 egységnyi tömeget erősítünk. A testeket elengedve, azok beállnak egy egyensúlyi helyzetbe, amelyben a két csiga közti kötélszakasz a középső súlynál megtörik. Bármilyen kezdő állapotból hagyjuk magára a rendszert, a két csiga közti kötélszakasz két része egymással derékszöveget zár be. A középső testre ható 5 egységnyi nehézségi erőt a két – 3, illetve 4 egységnyi – fonálerő csak akkor egyensúlyozhatja ki, ha – a Pitagorasz-tételnek megfelelően – egymásra merőlegesek. Tehát az erők vektorként összegződnek. ♦

2.2.4. Newton I. törvénye, az inerciarendszer fogalma

Ha egy testre nem hat erő, vagy a rá ható erők eredője nulla, akkor Newton II. törvénye, (2.5) alapján:

$$\sum \mathbf{F} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \mathbf{a} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \mathbf{v} = \text{állandó} . \quad (2.6)$$

Ez Newton I. törvénye: Ha egy testre nem hat erő, vagy a rá ható erők eredője nulla, akkor a test egyenesvonalú egyenletes mozgást végez, vagy nyugalomban marad.

Nyugalomban? Mihez képest? Most már mindenképp meg kell vizsgálnunk azt a kérdést, amivel eddig nem foglalkoztunk: egy test mozgását különböző vonatkoztatási rendszerekben írhatjuk le, és más-más vonatkoztatási rendszerből nézve a test mozgása is különböző lesz.

Megfigyelés: Fékező vagy kanyarodó busz

Fékező vagy kanyarodó buszon állva azt tapasztaljuk, hogy hirtelen, látszólag minden ok nélkül előre esünk, vagy oldalt dőlünk, tehát – a buszhoz képest – gyorsulunk. Ez ellentmondani látszik Newton I. törvényének, hiszen annak ellenére gyorsulunk, hogy nem hat ránk külső erő.

Ugyanakkor az utcán álló megfigyelő azt tapasztalja, hogy mi egyenesvonalú egyenletes mozgást végzünk, a busz viszont – a rá ható erők hatására – gyorsul (fékező vagy kanyarodik). Az utcán álló megfigyelő tehát érvényesnek látja Newton I. törvényét. ♦

A két megfigyelő más-más vonatkoztatási rendszerből írja le a mozgást. Azt a vonatkoztatási rendszert, amelyben teljesül Newton I. törvénye (azaz egy test, amelyre nem hat erő, egyenesvonalú egyenletes mozgást végez, vagy nyugalomban van) *inerciarendszernek* nevezzük. Newton I. törvénye tehát az inerciarendszer definíciója. A Newton-törvények (eredeti formájukban) csak inerciarendszerekben érvényesek.

A forgó Földhöz rögzített vonatkoztatási rendszer nem inerciarendszer, de sok esetben jó közelítéssel inerciarendszernek tekinthető (és így a Newton-törvényeket legtöbbször eredeti formájukban használhatjuk). Jobb közelítéssel inerciarendszer a Föld középpontjához rögzített, de a Földdel együtt nem forgó vonatkoztatási rendszer. Még jobb közelítés a Naphoz vagy más csillagokhoz rögzített vonatkoztatási rendszer.

A 3.1 szakaszban be fogjuk látni, hogy egy inerciarendszerhez képest egyenesvonalú egyenletes mozgást végző vonatkoztatási rendszer szintén inerciarendszer.

2.3. Gravitációs kölcsönhatás, súlyos tömeg

A *gravitáció*, a Föld vonzása alapvető hétköznapi tapasztalatunk. Egy elejtett test – ha a közegellenállás nem számottevő – egyenletesen gyorsuló mozgással mozog a Föld felé. Galilei megfigyelte, hogy minden test azonos g gyorsulással esik – természetesen megint csak akkor, ha a közegellenállás elhanyagolható.

Megfigyelés: Kepler-törvények

Kepler *Tycho Brahe* [15] hatalmas mennyiségű csillagászati megfigyelése alapján tapasztalati törvényeket fogalmazott meg a bolygók és holdak mozgásáról. Ezek a *Kepler-törvények*.

Kepler I. törvénye A bolygók (holdak) ellipszis pályán keringenek a Nap (anyabolygó) körül. A Nap (anyabolygó) az ellipszis egyik fókuszában van.

Kepler II. törvénye Egy bolygóhoz (holdhoz) húzott vezérsugár azonos idő alatt azonos területet sűrol.

Kepler III. törvénye A Naprendszerben a bolygópályák fél nagytengelyének köbei úgy aránylanak egymáshoz, mint a keringési idők négyzetei. (Ha egy bolygó körül több hold kering, akkor a holdpályák fél nagytengelyének köbei úgy aránylanak egymáshoz, mint a keringési idők négyzetei.) ♦

Newton felismerte, hogy egy test szabadesése és a bolygók, holdak mozgása ugyanarra az okra, az *általános tömegvonzásra* vezethető vissza.

A gravitációs erő arányos a kölcsönhatásban részt vevő testek tömegével. Erre abból lehet következtetni, hogy a tapasztalat szerint minden szabadon eső test egyforma gyorsulással gyorsul.

Az erő távolságfüggésére Newton csillagászati megfigyelések alapján következtetett. Kepler III. törvénye alapján – az ellipszispályákat körpályával közelítve – a bolygók centripetális gyorsulása fordítva arányos a Naptól mért távolságuk négyzetével, és így a gravitációs erő is a kölcsönható testek távolságának négyzetével fordítottan arányos. Hasonló következtetésre juthatunk, ha egy földfelszínhez közel szabadon eső test gyorsulását és a Föld körül keringő Hold centripetális gyorsulását vetjük össze a testeknek a Föld középpontjától mért távolságával.

Megfigyelés: Szabadon eső test és a Hold gyorsulása

A szabadon eső test *g nehézségi gyorsulása* könnyen megmérhető. A nehézségi gyorsulás értéke a Föld forgása, alakja és inhomogén tömegeloszlása miatt kis mértékben függ a mérés helyétől. Közelítő számításunkhoz tekintsünk el a Föld forgásának hatásától (ezzel részletesen fogunk foglalkozni a 3.5 szakaszban), ekkor egy felszínhez közel szabadon eső test a Föld gravitációs vonzásának hatására $a_1 \approx g = 9,81 \text{ m/s}^2$ gyorsulással mozog, miközben távolsága a Föld középpontjától a Föld sugarával egyezik meg: $r_1 = R_F \approx 6,37 \cdot 10^6 \text{ m}$.

A Hold keringési ideje (sziderikus hónap) $T_H = 27,32$ nap, az átlagos Hold-Föld távolság pedig $R_H = 384$ ezer km (B.2). A Hold jó közelítéssel körpályán kering, így centripetális gyorsulása $a_2 \approx 4\pi^2 R_H / T_H^2 = 2,72 \cdot 10^{-3} \text{ m/s}^2$, távolsága $r_2 \approx 3,84 \cdot 10^8 \text{ m}$.

Összevetve az adatokat $a_1/a_2 \approx 3600$ és $r_1/r_2 \approx 1/60$, azaz a gyorsulás – és így a gravitációs erő – fordítva arányos a távolság négyzetével. ♦

Ezek alapján *Newton gravitációs törvénye*:

$$\mathbf{F} = -\gamma \frac{m_1 m_2}{r^2} \cdot \frac{\mathbf{r}}{r}, \quad (2.7)$$

ahol m_1 és m_2 a kölcsönható testek *súlyos* vagy *gravitáló tömege*, r a testek távolsága, γ pedig később meghatározandó állandó. Az erő minden esetben vonzó, a testeket összekötő egyenes irányában hat.

2.3.1. Súlyos és tehetetlen tömeg

A *tömeg* két, egymástól független fizikai törvényben is megjelent. Newton II. törvényében (2.1) a *tehetetlen* tömeg fejezi ki, hogy a test mennyire „áll ellen” a gyorsítóerőnek. A gravitációs törvényben (2.7) a *súlyos* tömeg fejezi ki a test „gravitáló képességét”. Egyáltalán nem magától értetődő, hogy ez a kétféle tömeg ugyanaz a fizikai mennyiség.

Tekintsük egyelőre a két mennyiséget egymástól függetlennek, és jelöljük a tehetetlen tömeget m_t -vel, a súlyos tömeget m_s -sel.

Ekkor Newton II. törvénye:

$$F = k_1 m_t a ,$$

ahol k_1 a mértékegységek megválasztástól függő állandó. Hasonlóan, a gravitációs törvény:

$$F = k_2 \frac{m_{s1} m_{s2}}{r^2} ,$$

ahol k_2 szintén a mértékegységek megválasztástól függő állandó.

A tapasztalat azt sejteti, hogy a súlyos és tehetetlen tömeg *arányos* egymással, azaz ha egy testnek kétszer akkora a tehetetlensége (kétszer akkora a tehetetlen tömege), mint egy másiknak, akkor a gravitációs kölcsönhatásban is kétszer akkora erővel vesz részt (kétszer akkora a súlyos tömege), mint a másik testnek:

$$m_t \sim m_s .$$

Ezt támasztja alá az a tapasztalat, hogy a Föld egy adott helyén minden szabadon eső test ugyanakkora gyorsulással mozog. Egy m_s súlyos és m_t tehetetlen tömegű testre szabadesés közben csak a Föld gravitációs ereje hat (a Föld forgásának hatását most is elhanyagoljuk). Így Newton II. törvénye és a gravitációs törvény alapján:

$$k_1 m_t a = F = k_2 m_s \frac{m_{Fs}}{R_F^2} .$$

Ebből a test gyorsulása:

$$a = \frac{m_s}{m_t} \cdot \frac{k_2 m_{Fs}}{k_1 R_F^2} ,$$

ami viszont a tapasztalat szerint minden testre ugyanakkora (g). Mivel a második törtben csupa állandó szerepel, ebből az következik, hogy az első tört is minden test esetében ugyanakkora, azaz a kétféle tömeg – a nehézségi gyorsulás mérésének pontosságával – arányos egymással.

A kétféle tömeg arányosságát később *Eötvös Loránd* [16] igazolta sokkal nagyobb pontossággal. Eredményére *Einstein* is hivatkozott az általános relativitáselméletben. Az *Eötvös-inga* elvét a 3.5 szakaszban tárgyaljuk.

A k_1 és k_2 állandók értékei a mértékegységrendszer megválasztásától függenek.

2.3.2. Mértékegységek

A mértékegységek meghatározásánál fontos szempont, hogy a definícióhoz tartozó mérési eljárás minél pontosabb legyen, és ne legyen helyhez kötött, azaz megfelelő eszközökkel bárhol (akár a Földön kívül is) elvégezhető legyen. Ugyanakkor a ma használt mértékegységek megválasztásában szerepe van a hagyománynak is. A következőkben áttekintjük az alapvető mechanikai mennyiségek SI egységét és néhány korábbi mértékegységét.

Idő

Az idő hagyományos mértékegységei a természetes ciklusokon (periodikus természeti jelenségeken) alapulnak. Ilyen az év (évszakok változása), a hónap (a Hold-fázisok változása) és a nap (napszakok változása). A kisebb egységeket ezek felosztásával kaphatjuk (1 nap 24 óra, 1 óra 3600 másodperc).

Ehhez azonban pontosan meg kell határozni, hogy milyen hosszú időtartam egy nap. A Föld az állócsillagokhoz képest $23^{\text{h}} 56' 4''$ alatt fordul körbe a tengelye körül (*csillag-nap*). A napok hossza (a Nap két delelése közt eltelt idő, *Nap-nap*) azonban ennél valamivel hosszabb, hiszen a Föld kering a Nap körül, így a Földnek egy teljes fordulatnál kicsit többet kell forognia a következő delelésig. A Föld ellipszis pályája és tengelyferdesége miatt ennek mértéke, és így a nap hossza, az év során kismértékben (néhány másodperccel) változik. Ezek a kis eltérések összeadódnak, emiatt a nap delelése az év folyamán az egyenletesen járó órákhoz képest ± 15 perccel ingadozik (időegyenlet, lásd [Tér és idő \[6\]](#)) Így a 24 órás nap az *átlagos Nap-nap* hossza.

Ugyanakkor a napok hossza a Föld forgásának lassulása és kis változásai miatt is folyamatosan változik. Ezért szükségessé vált egy jól definiált, a Földtől független másodperc-etalon választása: 1967 óta egy másodperc (s) az alapállapotú cézium-133 atom két hiperfinom energiaszintje közötti átmenetnek megfelelő sugárzás 9 192 631 770 periódusának időtartama, amit atomórák segítségével lehet mérni.

Távolság

A hagyományos távolságegységek emberi testrészek (ujj, láb, stb.) méretéhez igazodtak. A kereskedelem fejlődésével a mindenhol kicsit különböző egységek zavaróvá váltak. A *metrikus* mértékegység-rendszerben az 1 méteres távolságot a Párizson átmenő délkör 1/40 000 000 részeként határozták meg. Ennek mérése alapján készült el a párizsi méter-etalon: egy platina-irídium rúd, amelyen két vonás távolsága 1 méter.

A ma elvárható mérési pontosságnak az etalon pontossága már nem felel meg. Másrészt a távolságokat egyre inkább időmérésre vezetik vissza (azt az időt mérik, amely alatt a fény vagy más elektromágneses hullám befutja a mérendő távolságot).

Bay Zoltán [17] kezdeményezésére 1983 óta a méter egységet a másodperc egységre vezetik vissza: 1 méter (m) az a távolság, amit a fény vákuumban 1/299 792 458 s idő alatt befut. Ezzel a vákuumbeli fénysebesség a továbbiakban nem mérendő mennyiség, hanem definíció szerint:

$$c = 299\,792\,458 \text{ m/s}.$$

Sebesség, gyorsulás

A sebesség és a gyorsulás SI mértékegysége (m/s, m/s²) a méterből és a másodpercből származtatott mértékegység. (A km/h sebesség egység csak a hétköznapi életben használatos.)

Tömeg

A tömeg egységének definiálására még nincs elfogadott modern módszer. 1 kilogramm (kg) a Párizsban őrzött platina-irídium kilogramm-etalon tömege, amely 1 dm^3 4°C -os víz tömegével egyenlő. Az előtagok használatakor zavaró, hogy nem a gramm (g), hanem a kilogramm (kg) az alapegység.

Erő

Az erő két alapvető összefüggésben, Newton II. törvényében és a gravitációs törvényben is szerepel:

$$F = k_1 m a$$
$$F = k_2 \frac{m_1 m_2}{r^2}.$$

A két állandó közül az egyiket szabadon rögzíthetjük, és ezzel meghatározhatjuk az erő mértékegységét – a másikat viszont ezután mérésrel kell meghatározni.

Az erő régi mértékegységéhez (kilopond) a Föld gravitációs erejét használták. Egy nyugalomban lévő m tömegű test súlya (a Föld forgásának hatását megint elhanyagolva) a rá ható gravitációs erővel egyenlő:

$$G = \frac{k_2 m_F}{R_F^2} m.$$

A $k_2 m_F / R_F^2$ állandót egységnyinek választva 1 kilopond (kp) éppen egy 1 kg tömegű test súlya (Párizsban). (1 g súlya pedig 1 p, 1 pond.)

Az SI mértékegység-rendszerben a k_1 állandó értékét egységnyinek választjuk, így Newton II. törvénye a (2.1) alakot veszi fel:

$$\mathbf{F} = m \mathbf{a}.$$

Eszerint az erő SI mértékegysége, a newton (N) a tömeg és a gyorsulás mértékegységéből származtatható:

$$1 \text{ N} = 1 \text{ kg} \cdot 1 \text{ m/s}^2 = 1 \text{ kg m/s}^2.$$

A gravitációs törvény így

$$\mathbf{F} = -\gamma \frac{m_1 m_2}{r^2} \cdot \frac{\mathbf{r}}{r}$$

alakú, ahol γ (k_2) értékét meg kell mérni. A test súlyának ismerete ebben nem segít, mert a Föld tömegét nem ismerjük. (Éppen a gravitációs állandó ismeretében tudjuk majd meghatározni.) A γ gravitációs állandót két kisméretű test között fellépő nagyon kicsi vonzóerő megméréseivel kell meghatározni. A mérést először *Cavendish* [18] végezte el: torziós inga segítségével mérte két néhány kg tömegű, egymástól kb. 10 cm távolságra lévő ólomdarab közt fellépő erőt.

A gravitációs állandó értéke

$$\gamma = 6,6725 \cdot 10^{-11} \text{ N m}^2/\text{kg}^2.$$

Egy test súlya (a Föld forgását még mindig elhanyagolva) körülbelül megegyezik a rá ható gravitációs erővel:

$$mg \approx \gamma \frac{mm_{\text{F}}}{R_{\text{F}}^2}.$$

A γ gravitációs állandó, a $g \approx 9,81 \text{ m/s}^2$ nehézségi gyorsulás és a Föld $R_{\text{F}} \approx 6370 \text{ km}$ átlagos sugarának ismeretében – utóbbit a Nap látszólagos helyzetének mérésével már az ókoriak megmérték – meghatározható a Föld tömege és átlagos sűrűsége:

$$M_{\text{F}} \approx \frac{gR_{\text{F}}^2}{\gamma} \approx 6 \cdot 10^{24} \text{ kg},$$
$$\rho_{\text{F}} = \frac{m_{\text{F}}}{V_{\text{F}}} = \frac{m_{\text{F}}}{\frac{4}{3}R_{\text{F}}^3\pi} \approx 5,5 \text{ kg/dm}^3.$$

2.4. Különböző kölcsönhatások

A következőkben áttekintjük a mechanika feladatokban előforduló kölcsönhatásokat.

Nehézségi erő

Minden testre hat a Föld gravitációs vonzása. A *nehézségi erő* a Föld forgása miatt kicsit eltér ettől (ezt részletesen megvizsgáljuk a 3.5.1 szakaszban).

A nehézségi erő nagysága mg , iránya függőlegesen lefelé mutat. (A függőleges irányt épp a nehézségi erő iránya definiálja.) Nagysága és iránya nem függ más erőktől, a nehézségi erő *szabad erő*.

A nehézségi erő *térfogati erő*: egy kiterjedt test teljes térfogatában, minden részére elosztva hat. Számításoknál viszont úgy vehetjük figyelembe, mintha koncentráltan a test *tömegközéppontjában* hatna (5.1 szakasz).

Nyomóerő

A szilárd testek nem hatolhatnak egymásba: ezt a közvetlenül érintkező testek felülete közt fellépő *nyomóerő* akadályozza meg.

A nyomóerő merőleges az érintkező felületre, és ahogy neve is mutatja, mindig nyomó irányú. A nyomóerő egy *kényszererő*: nagyságát a testekre ható egyéb erők határozzák meg a kényszerfeltétel (a testek nem hatolhatnak egymásba) alapján.

A nyomóerő *felületi erő*: kiterjedt testek esetén a teljes érintkező felületen elosztva hat. Ha egyetlen erővel akarjuk helyettesíteni, akkor a kényszerfeltételeknél a test forgására, az erő *forogatónyomatékára* is figyelniünk kell (6.2 szakasz).

Kötélerő

A *kötélerő* vagy *fonálerő* szintén kényszererő. Ha két testet egy kötélen kapcsolunk egymáshoz, akkor a testek nem távolodhatnak el tetszőlegesen egymástól – ez a kényszerfeltétel. A kötélerő párhuzamos a kötéllel, és mindig húzó irányú. Nagyságát, a nyomóerőhöz hasonlóan, a testekre ható erők határozzák meg a kényszerfeltétel alapján.

Súrlódás

Egymáshoz nyomódó felületek között a felületre merőleges nyomóerőn kívül a felülettel párhuzamos erő is hathat. Ez az erő a *súrlódás*. A súrlódási erő oka a felületek közti adhézió, valamint a felületek egyenetlensége. Megkülönböztetünk *nyugalmi* (vagy *tapadási*) és *mozgási* (vagy *csúszási*) súrlódást.

A nyugalmi súrlódásnál a két test egymáshoz képest nyugalomban van. Ilyenkor a súrlódási erő nagysága és iránya olyan, hogy a két test egymáshoz képesti nyugalmát lehetőleg fenntartsa. Ugyanakkor a súrlódási erő nem lehet bármilyen nagy:

$$F_S \leq \mu_0 F_N,$$

ahol F_S a súrlódási erő, F_N a felületek közti nyomóerő, μ_0 pedig a testek anyagától és a felületek minőségétől függő *tapadási súrlódási együttható*.

Mozgási súrlódásnál a két test egymáshoz képest mozog. Ekkor a súrlódási erő iránya olyan, hogy a két test egymáshoz képesti mozgását akadályozza, tehát a relatív sebességgel ellentétes irányú. Nagysága:

$$F_S = \mu F_N,$$

ahol μ a *csúszási súrlódási együttható*. Általában $\mu \leq \mu_0$.

A súrlódás jelensége nagyon bonyolult, nagyon sok tényező befolyásolja. A súrlódási együtthatók jelentősen megváltozhatnak például a felületek szennyeződésétől (olaj, víz, stb.). Ugyanakkor a felületek nagysága és a testek egymáshoz képesti sebessége csak kis mértékben befolyásolja a fellépő erőt, így azt egyszerűbb feladatokban általában ezektől függetlennek tekintjük.

Közegellenállás

Gázokban és folyadékokban mozgó testek kölcsönhatásban vannak az őket körülvevő közeggel. A fellépő erők a mozgás irányára merőlegesek is lehetnek (lásd a 8.4 szakaszt), de itt most csak a mozgást akadályozó erőről, a *közegellenállásról* beszélünk.

Kisebb sebességeknél a közegellenállás fő oka a közeg viszkozitása: ilyenkor a fellépő erő a test (közeghez viszonyított) sebességével arányos: $F \approx v$. *Nagyobb sebességeknél* a közegben kialakuló örvények okozzák a közegellenállást, ilyenkor az erő a sebesség négyzetével arányos: $F \approx v^2$. Az erő mindkét esetben a közeghez viszonyított sebességgel ellentétes irányú.

Rugóerő

Rugalmas testekben a deformáció hatására olyan erő lép fel, amely ellentétes irányú a deformációt létrehozó erővel (7. fejezet). *Kis deformáció* esetén a legtöbb anyagnál az erő arányos a deformáció mértékével. (Ezt felhasználtuk az erő mérésénél is, lásd a 2.1 szakaszban.)

A rugalmas testben a deformáció hatására fellépő, a deformáció irányával ellentétes irányú erő a *rugóerő*. Ha teljesül a linearitás feltétele, akkor

$$F_r = -Dx, \quad (2.8)$$

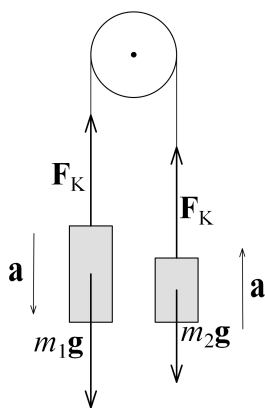
ahol F_r a rugóerő, x a rugó deformációja, D pedig a *direkciós erő* (ami nevével ellentétben N/m mértékegységű, a rugóra jellemző mennyiség, szokták *rugóállandónak* is nevezni).

2.5. A mozgásegyenlet alkalmazása

A dinamika feladatok megoldásának általános menete: megkeressük a testekre ható erőket, felírjuk a mozgásegyenleteket és a kényszerfeltételeket megadó összefüggéseket, az egyenletek megoldásával meghatározzuk a testek gyorsulását, majd végül a gyorsulásokból és a kezdeti feltételekből a kinematika összefüggései alapján meghatározzuk a test sebességének és helyvektorának időfüggését.

Két test csigán átvett kötél

Két testet *könnyű, súrlódásmentes* csigán átvett *elhanyagolható tömegű, nyújthatatlan* kötéllel kötjük össze, és a rendszert nyugalmi helyzetben magára hagyjuk (2.2 ábra).



2.2. ábra. Két test csigán átvett kötél

Mit jelentenek a szövegben szereplő kiemelt szavak? A csiga könnyű és súrlódásmentes: így forgatásához elhanyagolhatóan kicsi erő szükséges, tehát a csiga két oldalán ugyanakkora a kötélerő. A kötélnél elhanyagolható tömegű: a rá ható nehézségi erőt elhanyagolhatjuk, és gyorsításához se szükséges erő. A kötélnél nyújthatatlan: így a két test elmozdulása egyforma nagyságú (bár ellentétes irányú), és emiatt sebességük és gyorsulásuk nagysága is megegyezik.

Ezek alapján berajzoltuk az ábrára a testekre ható erőket és a testek gyorsulásának irányát ($m_1 > m_2$ feltételezéssel), majd ennek megfelelően felírhatjuk a testekre vonatkozó mozgásegyenleteket:

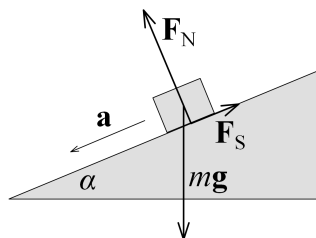
$$\begin{aligned} m_1 a &= m_1 g - F_K \\ m_2 a &= F_K - m_2 g . \end{aligned}$$

Az egyenletrendszer megoldása:

$$\begin{aligned} a &= \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} g \\ F_K &= \frac{2m_1 m_2}{m_1 + m_2} g . \end{aligned}$$

Lejtő súrlódással

A 2.3 ábrán látható, α hajlásszögű lejtő és a rá helyezett m tömegű test közötti súrlódási együttható μ . A testet nyugalmi helyzetben a lejtőre helyezzük.



2.3. ábra. Lejtő súrlódással

A testre a nehézségi erő, a nyomóerő és a súrlódási erő hat. Célszerű az erőket lejtőre merőleges és lejtővel párhuzamos komponensekre bontani. A test nem mozoghat a lejtőre merőleges irányban, így a lejtőre merőleges erők eredője nulla (kényszerfeltétel):

$$F_N = mg \cos \alpha .$$

A testet a lejtőirányú erők gyorsítják. A gyorsulás irányát vegyük fel a lejtővel párhuzamosan lefelé pozitívnak! Ekkor a mozgásegyenlet:

$$ma = mg \sin \alpha - F_S .$$

A súrlódási erő nagysága attól függ, hogy a test megcsúszik-e. Tegyük fel, hogy igen! (Ezt a végén majd ellenőriznünk kell!) Ekkor:

$$F_S = \mu F_N.$$

Az egyenletrendszer megoldása:

$$a = (\sin \alpha - \mu \cos \alpha) g.$$

Az eredmény nem lehet negatív, hiszen a test nem indulhat el magától felfelé. Ebből a paraméterekre a

$$\mu \leq \operatorname{tg} \alpha$$

feltétel adódik. Ha a súrlódási együttható nagyobb, akkor a test nem csúszik meg, gyorsulása nulla lesz, nyugalomban marad. Akkor viszont a csúszási súrlódásra vonatkozó egyenlőség helyett a tapadási súrlódásra vonatkozó egyenlőtlenséget kell felírunk, és a feladatot így megoldanunk. Ezt az olvasóra bízunk.

Sok esetben azonban a testekre ható erők a test sebességétől vagy helyzetétől is függenek – amelyeket viszont csak a mozgásegyenletek megoldása után tudnánk meghatározni. Ilyen esetben a mozgásegyenlet felírása *differenciálegyenlethez* vezet, azaz olyan függvényegyenlethez, amelyben az ismeretlen függvény és annak deriváltjai is szerepelnek. Erre példa a közegellenállással eső test mozgása.

Esés közegellenállással

A nyugalmi helyzetből elengedett testre a nehézségi erőn kívül hat az azzal ellentétes irányú közegellenállás. Ha a test sűrűsége összemérhető a közeg sűrűségével, akkor a közeg felhajtóerejét is figyelembe kell venni, azt le kell vonni a nehézségi erőből. A test mozgásegyenlete (a felhajtóerőt most elhanyagolva):

$$ma = mg - F_K.$$

Az F_K közegellenállási erő azonban függ a test közeghez viszonyított sebességétől. Tegyük fel, hogy az erő arányos a sebességgel (viszkózus fékezés):

$$F_K = kv.$$

Ezt behelyettesítve a mozgásegyenlet:

$$ma = mg - kv. \tag{2.9}$$

Azonban az egyenletben a és v is időben változó mennyiségek! A két mennyiség azonban nem független:

$$a = \frac{dv}{dt},$$

amit behelyettesítve a mozgásegyenletbe (és m -mel átosztva) a következő *differenciálegyenletet* kapjuk:

$$\frac{dv(t)}{dt} = g - \frac{k}{m}v(t), \quad v(0) = 0.$$

A differenciálegyenlet megoldásához a differenciálhányadost formálisan törtként kezeljük, és az egyenletet úgy rendezzük át, hogy az egyik oldalon csak v , a másik oldalon csak t szerepeljen (v mellől a (t) változó kiírását az áttekinthetőség kedvéért elhagyjuk):

$$\frac{dv}{g - \frac{k}{m}v} = dt.$$

Mindkét oldalt integráljuk:

$$\int_0^v \frac{1}{g - \frac{k}{m}v} dv = \int_0^t dt,$$

az integrálást elvégezve:

$$\left[-\frac{m}{k} \ln \left(g - \frac{k}{m}v \right) \right]_0^v = [t]_0^t,$$

majd az integrálási határokat behelyettesítve:

$$-\frac{m}{k} \ln \left(1 - \frac{k}{mg}v \right) = t.$$

Az egyenletből v -t kifejezve:

$$v(t) = \frac{mg}{k} \left(1 - e^{-\frac{k}{m}t} \right) = v_{\max} \left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}} \right),$$

ahol

$$v_{\max} = \frac{mg}{k} \quad \text{és} \quad \tau = \frac{m}{k}.$$

Látható, hogy v hosszú idő után egy állandósult v_{\max} értékhez tart. (Az állandósult sebesség értékét a (2.9) mozgásegyenletből közvetlenül is megkaphatjuk az $a = 0$ helyettesítéssel.)

A test gyorsulása és elmozdulása $v(t)$ deriválásával, illetve integrálásával már könnyen megkapható:

$$a(t) = \frac{dv(t)}{dt} = ge^{-\frac{k}{m}t} = ge^{-\frac{t}{\tau}}$$

$$x(t) = \int_0^t v(t)dt = \frac{mg}{k}t + \frac{m^2g}{k^2} \left(e^{-\frac{k}{m}t} - 1 \right) = v_{\max} (t - \tau) + v_{\max}\tau e^{-\frac{t}{\tau}}.$$

Ha a közegellenállási erő a sebesség négyzetével arányos (turbulens áramlás), akkor a differenciálegyenlet hasonlóan felírható és megoldható, de más időfüggvényeket kapunk. (Természetesen a sebesség ekkor is egy állandósult értékhez tart.) Ennek végigszámolását az olvasóra bízjuk. Ha az integrálás nehézséget okoz, használjon internetes segítséget!

Más feladatokban azt keressük, hogy milyen erők szükségesek ahhoz, hogy a test a megadott pályán, a megadott módon mozogjon. Nézzünk erre is néhány példát!

Geostacionárius pálya

A távközlési műholdaknak olyan pályán kell mozognia, hogy a forgó Földhöz viszonyítva nyugalomban legyenek, és így rögzített parabolaantennákkal lehessen a műholdakra jeleket küldeni, és azokról jeleket fogadni. Ebből következően a pálya az Egyenlítő síkjában lévő körpálya, és a műhold keringési ideje megegyezik a Föld (állócsillagokhoz viszonyított) forgási idejével. Ez a *geostacionárius* pálya. Milyen magasan keringenek ezek a műholdak?

A Föld gravitációs terében mozgó m tömegű test mozgásegyenlete:

$$m\mathbf{a} = -\gamma \frac{mm_F}{r^3} \mathbf{r},$$

ahol m_F a Föld tömege. A mozgásegyenlet általános megoldása kúpszelet (kör, ellipszis, parabola vagy hiperbola) alakú pálya [11].

A körpálya speciális esetében a mozgásegyenlet skalár alakban írható, a test gyorsulása a centripetális gyorsulás:

$$m\omega_F^2 r = \gamma \frac{mm_F}{r^2},$$

ahol $\omega_F = 2\pi/T_F$ a körmozgás – és így egyben a Föld forgásának – szögsebessége, r a körpálya keresett sugara. Ebből

$$r^3 = \frac{\gamma m_F}{\omega_F^2} \approx \frac{gr_F^2}{\omega_F^2},$$

ahol felhasználtuk, hogy $\gamma m_F \approx gr_F^2$ (r_F a Föld sugara).

A pálya sugara az adatok ($T_F = 23^h 56' 4'' = 86154$ s és $r_F = 6,37 \cdot 10^6$ m) behelyettesítésével

$$r \approx \sqrt[3]{\frac{gr_F^2}{\omega_F^2}} = 4,2 \cdot 10^7 \text{ m} \approx 6,6r_F.$$

Ebből a geostacionárius pálya magassága $h = r - r_F \approx 35800$ km.

Harmonikus rezgőmozgás

A harmonikus rezgőmozgást végző test kitérése az idő függvényében:

$$x(t) = A \sin(\omega t + \varphi) .$$

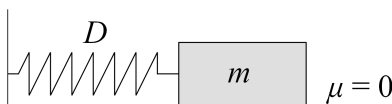
Ebből a gyorsulása kétszeri deriválással:

$$a(t) = -A\omega^2 \sin(\omega t + \varphi) .$$

Felírva Newton II. törvényét:

$$F(t) = ma(t) = -Am\omega^2 \sin(\omega t + \varphi) = -m\omega^2 x(t) = -Dx(t) ,$$

tehát a harmonikus rezgőmozgáshoz a kitéréssel arányos, azaz *lineáris visszatérítő* erőre van szükség.



2.4. ábra. Rugóhoz rögzített test

Láttuk, hogy – nem túl nagy deformáció esetén – a rugóerő ilyen. Ha egy m tömegű testet a 2.4 ábrán látható módon egy D direkciós erejű rugóhoz rögzítünk (a test és a talaj között a súrlódás elhanyagolható), akkor a mozgásegyenlet:

$$ma = -Dx ,$$

az egyenletet nullára rendezve, bevezetve az $\omega^2 = D/m$ jelölést, valamint felhasználva, hogy a gyorsulás az elmozdulás idő szerinti második deriváltja, a következő differenciálegyenletet kapjuk:

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \omega^2 x = 0 .$$

Ennek a differenciálegyenletnek *általános* megoldása a feladat legelején felírt

$$x(t) = A \sin(\omega t + \varphi)$$

időfüggvény. Mint láttuk ω értékét a fizikai rendszer paramétereit (m és D), az A amplitúdó és a φ kezdőfázis értékét viszont a *kezdeti feltételek* (a test helyzete és sebessége a $t = 0$ időpillanatban) határozzák meg.

Kanyarodás és fékezés

Vízszintes úton haladó járműre (a közegellenálláson kívül, amivel ebben a feladatban most nem foglalkozunk) vízszintes irányban csak a kerekek és a talaj közti tapadási súrlódási erő hat. A függőleges irányban ható nehézségi erő és a talaj nyomóereje kiegyenlíti egymást ($F_N = mg$). Gyorsításkor a talaj által kifejtett F_S súrlódási erő gyorsítja, fékezés-kor ez az erő lassítja a járművet. Kanyarodáskor a súrlódási erő biztosítja a centripetális gyorsulást (és egyenletes, egyenesvonalú haladáskor a súrlódási erő egyenlíti ki a közegellenállási erőt).

Vizsgáljuk most meg azt a kényes esetet, amikor kanyarban kell fékezni! Az r sugarú kanyarban v sebességgel mozgó m tömegű jármű mozgásegyenlete:

$$m\mathbf{a} = \mathbf{F}_S,$$

a gyorsulásvektor a centripetális és a tangenciális gyorsulás eredője:

$$\mathbf{a} = \mathbf{a}_{\text{cp}} + \mathbf{a}_t.$$

A két komponens merőleges, így:

$$a = \sqrt{a_{\text{cp}}^2 + a_t^2},$$

ahol $a_{\text{cp}} = v^2/r$.

A tapadás (és a jármű irányíthatóságának) feltétele:

$$F_S \leq \mu F_N = \mu mg,$$

ebből:

$$\begin{aligned} ma &\leq \mu mg \\ a &\leq \mu g \\ a_{\text{cp}}^2 + a_t^2 &\leq \mu^2 g^2 \\ |a_t| &\leq \sqrt{\mu^2 g^2 - \frac{v^4}{r^2}}. \end{aligned}$$

Az utolsó kifejezés megadja a maximális lassulást, amivel még megcsúszás nélkül fékezni lehet a járművet. Az első tag az útviszonyoktól és a gumi minőségétől függ, a második a sebességtől és a kanyar „élességétől”. Ha nagyon gyorsan érkezünk a kanyarba, akkor a gyök alatt negatív érték lesz: ilyenkor a kanyarban egyáltalán nem tudunk fékezni, sőt a kanyart se tudjuk „bevenni”. Tehát már a kanyar előtt le kell fékezni annyira, hogy a kanyarban szükség esetén még fékezni is tudjunk.

Még kritikusabb a helyzet, ha a kanyarodó út lejt is, és emiatt a jármű fékezés nélkül folyamatosan gyorsul. Ennek az esetnek a vizsgálatát az olvasóra bízunk.

3. fejezet

Mozgások leírása különböző vonatkoztatási rendszerekben

A 2.2.4 szakaszban már láttuk, hogy különböző vonatkoztatási rendszerekből nézve a testek mozgása különbözőnek látszik. A következőkben megvizsgáljuk a mozgások leírását különböző vonatkoztatási rendszerekben. A vonatkoztatási rendszerek közül különösen fontosak az *inerciarendszerek*, hiszen ezekben a rendszerekben alkalmazhatók a Newton-törvények. Így a különböző vonatkoztatási rendszereket egy általunk választott inerciarendszerhez viszonyítjuk. Először két egymáshoz képest egyenesvonalú egyenletes mozgást végző vonatkoztatási rendszert, majd egymáshoz képest gyorsuló (egyenesvonalú gyorsuló mozgást végző és forgó) rendszereket fogunk vizsgálni.

3.1. Galilei-transzformáció

Tekintsünk egy K vonatkoztatási rendszert, amely inerciarendszer, és egy hozzá képest egyenesvonalú egyenletes mozgást végző K' rendszert (3.1 ábra).

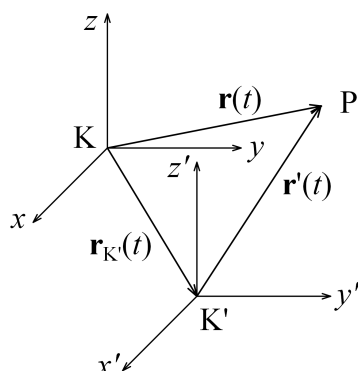
A K rendszerben legyen egy P pontba mutató helyvektor $\mathbf{r}(t)$, a K' rendszerben az ugyanebbe a pontba mutató helyvektor pedig $\mathbf{r}'(t)$. A K' rendszer origójának helyvektora a K rendszerben $\mathbf{r}_{K'}(t)$. Mivel K' egyenesvonalú egyenletes mozgást végez K -hoz képest, ezért:

$$\mathbf{r}_{K'}(t) = \mathbf{w}t + \mathbf{r}_0,$$

ahol \mathbf{w} K' sebességvektora K -hoz képest, \mathbf{r}_0 pedig K' origójának helyvektora K -ban a $t = 0$ időpillanatban.

A két rendszerben felírt helyvektor közötti kapcsolat a *Galilei-transzformáció*:

$$\mathbf{r}(t) = \mathbf{r}'(t) + \mathbf{r}_{K'}(t) = \mathbf{r}'(t) + \mathbf{w}t + \mathbf{r}_0. \quad (3.1)$$



3.1. ábra. Transzformáció két vonatkoztatási rendszer között

Mindkét vonatkoztatási rendszerben felírhatjuk a P pont Descartes-koordinátáit is. Válasszuk a két rendszerben a koordináta-tengelyeket a 3.1 ábrán látható módon egymással párhuzamosan! (Az egymáshoz képest elforgatott koordinátatengelyek közti transzformáció tisztán geometriai probléma, amivel itt most nem foglalkozunk.) Ekkor a Galilei-transzformáció koordinátákkal felírt alakja:

$$\begin{aligned}x &= x' + w_x t + x_0 \\y &= y' + w_y t + y_0 \\z &= z' + w_z t + z_0,\end{aligned}\tag{3.2}$$

ahol w_x , w_y és w_z , illetve x_0 , y_0 és z_0 \mathbf{w} , illetve \mathbf{r}_0 koordinátái.

A (3.1) kifejezést idő szerint kétszer deriválva kapjuk:

$$\begin{aligned}\mathbf{v}(t) &= \mathbf{v}'(t) + \mathbf{w} \\ \mathbf{a}(t) &= \mathbf{a}'(t),\end{aligned}\tag{3.3}$$

ahol $\mathbf{v}(t)$ és $\mathbf{v}'(t)$, illetve $\mathbf{a}(t)$ és $\mathbf{a}'(t)$ a P pont sebessége illetve gyorsulása a K és a K' vonatkoztatási rendszerben.

Írjuk fel a K inerciarendszerben Newton II. törvényét:

$$m\mathbf{a} = \mathbf{F}_e,$$

ahol \mathbf{F}_e a testre ható eredő erő. A testre ható erők függetlenek a vonatkoztatási rendszertől, és (3.3) szerint a gyorsulások megegyeznek a két rendszerben, így:

$$m\mathbf{a}' = \mathbf{F}_e,$$

azaz Newton II. törvénye a K' rendszerben is teljesül.

A *Galilei-féle relativitás elve* kimondja, hogy a jelenségeket leíró törvények az egymáshoz képest egyenesvonalú egyenletes mozgást végző vonatkoztatási rendszerekben ugyanolyanok. Ha a K rendszer inerciarendszer, akkor a hozzá képest egyenesvonalú egyenletes mozgást végző K' rendszer is inerciarendszer.

3.2. Lorentz-transzformáció

Ha egy c sebességű fényjelet (vagy más elektromágneses hullámot) vizsgálunk két különböző, egymáshoz képest egyenesvonalú egyenletes mozgást végző vonatkoztatási rendszerből, akkor a Galilei-transzformáció (3.3) összefüggése szerint $\mathbf{c} = \mathbf{c}' + \mathbf{w}$, azaz $\mathbf{c} \neq \mathbf{c}'$, a fény sebessége a két rendszerben különböző lenne. Kísérleti tapasztalatok (például a Michelson-Morley kísérlet [19]) szerint viszont a fény vákuumban bármely inerciarendszerben ugyanakkora sebességgel terjed.

Eszerint a Galilei-transzformáció összhangban van a mechanika Newton-törvényeivel, de ellentmondásban van az elektromágneses hullámokat leíró *Maxwell-egyenletekkel*.

A *Lorentz-transzformáció* kielégíti a $c' = c$ feltételt (a fény bármely inerciarendszerben ugyanakkora sebességgel terjed), összhangban van a Maxwell-egyenletekkel. Ha az egyszerűség kedvéért a koordináta-rendszerek relatív sebessége párhuzamos az x -tengellyel ($w_x = w$), valamint $\mathbf{r}_0 = 0$, akkor a Lorentz-transzformáció koordinátákkal felírt alakja:

$$\begin{aligned} x &= \frac{x' + wt}{\sqrt{1 - \frac{w^2}{c^2}}} \\ y &= y' \\ z &= z' \\ t &= \frac{t' + \frac{w}{c^2}x}{\sqrt{1 - \frac{w^2}{c^2}}}. \end{aligned} \tag{3.4}$$

Emlékeztetőül a (3.2) Galilei-transzformáció ugyanilyen feltételekkel:

$$\begin{aligned} x &= x' + wt \\ y &= y' \\ z &= z' \\ t &= t'. \end{aligned}$$

A klasszikus szemléletnek a legfurcsább a Lorentz-transzformáció utolsó összefüggése: a két vonatkoztatási rendszerben másképp telik az idő! A Lorentz-transzformáció összhangban van a Maxwell-egyenletekkel, de ellentmondásban van a Newton-törvényekkel. A *speciális relativitáselmélet*ben mások a mechanika törvényei.

A korrespondencia-elv szerint azonban az új elméletnek határesetben vissza kell adnia a régit. [20]. Ha $w \ll c$, akkor a Lorentz-transzformáció és a Galilei-transzformáció jó közelítéssel megegyezik, így nem túl nagy sebességek esetén továbbra is használhatjuk a Newton-törvényeket.

3.3. Gyorsuló vonatkoztatási rendszer

A 3.1 szakaszhoz hasonlóan tekintsünk ismét egy K vonatkoztatási rendszert, amely inerciarendszer, de most a K' rendszer hozzá képest \mathbf{a}_0 gyorsulással, egyenesvonalú egyenletesen gyorsuló mozgással mozogjon. A 3.1 ábrának megfelelően most is felírhatjuk a K és K' rendszer közötti (3.1) transzformációs összefüggést:

$$\mathbf{r}(t) = \mathbf{r}'(t) + \mathbf{r}_{K'}(t).$$

Ezt idő szerint kétszer deriválva azonban más eredményt kapunk:

$$\begin{aligned}\mathbf{v}(t) &= \mathbf{v}'(t) + \mathbf{w}(t) \\ \mathbf{a}(t) &= \mathbf{a}'(t) + \mathbf{a}_0,\end{aligned}$$

hiszen most $\mathbf{w}(t) = \mathbf{a}_0 t + \mathbf{w}_0$ nem állandó.

Rendezzük át a gyorsulások közti összefüggést:

$$\mathbf{a}' = \mathbf{a} - \mathbf{a}_0,$$

és szorozzuk meg a pontszerű test m tömegével:

$$m\mathbf{a}' = m\mathbf{a} - m\mathbf{a}_0.$$

Használjuk fel, hogy a K inerciarendszerben teljesül Newton II. törvénye:

$$m\mathbf{a} = \mathbf{F}_e,$$

ahol \mathbf{F}_e a tömegpontra ható eredő erő. Ezt beírva:

$$m\mathbf{a}' = \mathbf{F}_e - m\mathbf{a}_0, \tag{3.5}$$

azaz a K' rendszerben nem teljesülnek a Newton-törvények, a K' rendszer nem inerciarendszer.

Ahhoz, hogy a Newton-törvényeket mégis használhassuk, vezessünk be egy *fiktív*, nem valódi (nem testek közti kölcsönhatásból származó)

$$\mathbf{F}_t = -m\mathbf{a}_0$$

tehetetlenségi erőt! Ezt behelyettesítve a (3.5) kifejezésbe:

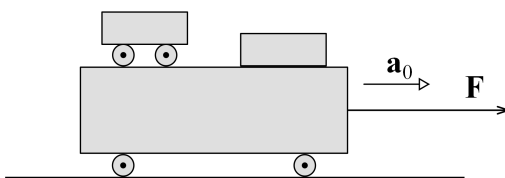
$$m\mathbf{a}' = \mathbf{F}_e + \mathbf{F}_t = \mathbf{F}'_e.$$

Így tehát formálisan teljesül Newton II. törvénye, csak az \mathbf{F}'_e eredő erőbe a *valódi* (kölcsönhatásokból származó) erőkön kívül az $\mathbf{F}_t = -m\mathbf{a}_0$ tehetetlenségi erőt is bele kell számítani.

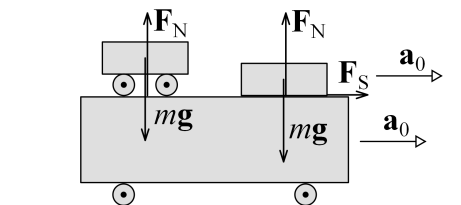
Mozgások leírása gyorsuló rendszerben

Ugyanazt a dinamikai feladatot különböző vonatkoztatási rendszerekben is megoldhatjuk. Sokszor kényelmesebb egy gyorsuló rendszer (nem inerciarendszer) használata – ilyenkor azonban a valódi, kölcsönhatásból származó erőkön kívül a tehetetlenségi erőket is figyelembe kell venni. Lássunk egy példát!

Egy kocsira két m tömegű testet helyezünk: az egyik kerekeken szabadon gurulhat, a másik viszont súrlódó felülettel érintkezik a kocsival (3.2 ábra). A kocsi az \mathbf{F} erő hatására \mathbf{a}_0 gyorsulással jobbra gyorsulva mozog. Ha az erő nem túl nagy, akkor a súrlódó test a tapadó súrlódás miatt a kocsival együtt mozog, a kerekeken guruló viszont tehetetlensége miatt legurul a kocsiról. Írjuk le a kis testek mozgását a talajhoz rögzített inerciarendszerből és a kocsinhoz rögzített gyorsuló vonatkoztatási rendszerből is!



3.2. ábra. Gyorsuló kiskocsira helyezett testek



3.3. ábra. A mozgás leírása inerciarendszerben

Leírás inerciarendszerben: a 3.3 ábrán berajzoltuk a kis testekre ható (valódi) erőket.

A kerekeken guruló kis testre csak függőleges erők hatnak (az mg nehézségi erő és az \mathbf{F}_N nyomóerő), ezek eredője nulla, $F_N = mg$, így a test Newton I. törvénye értelmében nyugalomban marad – miközben a kocsi jobbra gyorsulva elmozdul alóla.

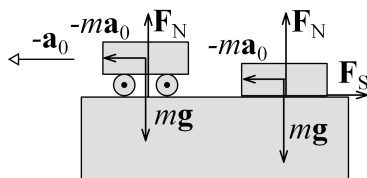
A súrlódó testre az előbbi erőkön kívül az \mathbf{F}_S tapadási súrlódási erő is hatni fog. Az erő nagysága és iránya olyan, hogy a két test relatív nyugalma megmaradjon, azaz ez a test is \mathbf{a}_0 gyorsulással jobbra gyorsuljon. Felírva a Newton-törvényeket és a kényszerfeltételeket:

$$F_S = ma = ma_0$$

$$F_N = mg$$

$$F_S \leq \mu F_N.$$

Ha a súrlódási erő *elég nagy*, illetve a kocsi nem gyorsul *túl nagy* gyorsulással, akkor $a_0 \leq \mu g$, és teljesül a tapadás feltétele.



3.4. ábra. A mozgás leírása gyorsuló rendszerben

Leírás gyorsuló vonatkoztatási rendszerben: a 3.4 ábrán a kis testekre ható valódi erőkön kívül berajzoltuk a $-ma_0$ tehetetlenségi erőket is.

A kereken guruló kis testre az egymást kiegyenlítő függőleges erőkön kívül a vízszintes $-ma_0$ tehetetlenségi erő hat. Felírva Newton II. törvényét:

$$ma = -ma_0,$$

azaz $a = -a_0$, a test balra gyorsulva legurul a (vonatkoztatási rendszerünkben álló) kocsiról.

A súrlódó testre vízszintes irányban a tehetetlenségi erő és a tapadási súrlódási erő hat. Ez utóbbi olyan nagyságú és irányú, hogy megőrizze a test nyugalomát. Felírva mindkét komponensre Newton I. törvényét és a tapadás feltételét:

$$\begin{aligned} F_S &= ma_0 \\ F_N &= mg \\ F_S &\leq \mu F_N. \end{aligned}$$

Ha $\mu \geq a_0/g$, akkor a tapadás feltétele teljesül, és a test vonatkoztatási rendszerünkben nyugalomban marad.

Láthatjuk, hogy mindkét rendszerben a tapasztalattal megegyező eredményt kaptunk, a mozgást – más-más nézőpontból – mindkét esetben helyesen leírtuk.

3.3.1. Súly és súlytalanság

A *súly* – a magyar terminológiában legelterjedtebb meghatározás szerint – az az erő, amivel egy test az alátámasztását nyomja, vagy a felfüggesztését húzza.

Ha egy testet ráakasztunk egy rugós erőmérőre, akkor az a test súlyát mutatja. Mit is mér valójában? Azt az erőt, amit a test kifejt az erőmérőre. Ennek nagysága azonban Newton III. törvénye miatt megegyezik az erőmérő által a testre kifejtett erővel. *Ha* a test nyugalomban van, *akkor* a rá ható erők eredője nulla, így az erőmérő által a testre

kifejtett erő megegyezik a testre ható nehézségi erővel. Így *ebben az esetben* az erőmérő végeredményben a testre ható nehézségi erőt méri.

Megfigyelés: Súlymérés liftben

Egy fürdőszobai mérleggel együtt szálljunk be egy liftbe, és álljunk rá a mérlegre! Az álló liftben a mérleg – az előző meghatározásnak megfelelően – a súlyunkat mutatja.

Indítsuk el a liftet felfelé! A lift egy darabig felfelé gyorsul, és eközben a mérleg nagyobb súlyt mutat. Egy idő után a lift eléri állandósult sebességét, és ezután egyenletesen mozog: ekkor a mérleg ismét az eredeti súlyunkat mutatja. A végén a lift (felfelé) lassít, ami lefelé mutató gyorsulás, eközben a mérleg kisebb súlyt mutat. Megállás után ismét az eredeti súlyunkat méri.

Most utazzunk lefelé! Először (lefelé) gyorsul a lift, a súlyunk ismét kisebb. Az egyenletes haladás alatt a mérleg a súlyunkat ismét az eredeti értéknek méri. Végül (lefelé) lassul a lift, ami fölfelé mutató gyorsulás, és így a mérleg ismét többet mutat. ♦

Kívülről, inerciarendszerből megfigyelve a liftezést, azt látjuk, hogy a liftben utazóra a lefelé mutató mg nehézségi erő és a mérleg felfelé mutató F_N nyomóereje hat, az utast a két erő eredője gyorsítja. Amikor a lift áll, vagy egyenletesen mozog, a két erő eredője nulla, a mérleg $F_N = mg$ értéket mutat. Amikor a lift gyorsulása felfelé mutat (a lift felfelé gyorsul, vagy lefelé fékez), akkor a nyomóerő nagyobb a nehézségi erőnél, a mérleg nagyobb súlyt mutat: $F_N = m(g + a)$. Amikor viszont a lift gyorsulása lefelé mutat (felfelé lassít vagy lefelé gyorsul), akkor a nehézségi erő nagyobb, mint a nyomóerő, a mérleg kisebb súlyt mér: $F_N = m(g - a)$.

Kívülről, de a lifttel együtt gyorsuló vonatkoztatási rendszerből nézve azt látjuk, hogy az utasra az mg nehézségi erőn kívül a (gyorsulás irányától függő) $\pm ma$ tehetetlenségi erő is hat, és a mérleg a két erő eredőjével, $m(g \pm a)$ erővel tart egyensúlyt.

Belülről, a liftből megfigyelve (ami hol inerciarendszer, hol gyorsuló vonatkoztatási rendszer) viszont csak azt érzékeljük, hogy a súlyunk hol kisebb, hol nagyobb. A zárt liften belüli méréssel nem tudjuk eldönteni, hogy ezt a változást a lift változó gyorsulása, vagy a nehézségi erő változása okozza-e. A gravitációs erő és a tehetetlenségi erő is térfogati erő, mindkettő arányos a test tömegével: méréssel nem tudunk különbséget tenni a kettő között. Ez a kísérleti tapasztalat alapozza meg az *általános relativitáselméletet*.

Ha a lift g gyorsulással mozog lefelé (szabadon esne), akkor a mérlegre egyáltalán nem hatna nyomóerő, a súlyunk nulla lenne. Ez a *súlytalanság* állapota. Földi körülmények között ezt csak rövid ideig lehet érzékelni, például vidámparkokban lévő vagy tudományos célból épült ejtőtornyokban. A Föld körül kikapcsolt hajtóművel keringő űrhajókon és az űrállomásokon folyamatosan súlytalanság van, hiszen ezek a járművek folyamatosan szabadon esnek, a nehézségi gyorsulás lokális értékével megegyező gyorsulással gyorsulnak a Föld felé.

3.4. Forgó vonatkoztatási rendszer

A következőkben olyan vonatkoztatási rendszereket vizsgálunk, melyek egy inercia-rendszerhez képest forognak. Ehhez először bevezetünk néhány új fogalmat, és bebizonyítunk egy később többször is felhasznált segédtételt.

Az 1.3 szakaszban, a körmozgásról szóló részben bevezettük a szögsebesség és a szöggyorsulás fogalmát. Ezekre alapozva vezessük be az ezeknek a mennyiségeknek megfelelő vektorokat!

A $d\varphi$ elemi elfordulás vektor nagysága az elemi elfordulás (radiánban mért) szöge, iránya a forgás tengelye, irányítottága pedig olyan, hogy a vektor csúcsa felől nézve a forgás pozitív (óra járásával ellentétes) legyen. Ehhez hasonlóan definiálhatjuk az

$$\boldsymbol{\omega} = \frac{d\varphi}{dt}$$

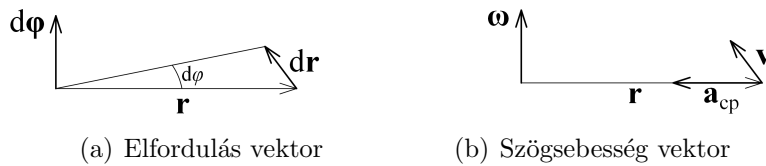
szögsebesség vektort és a

$$\boldsymbol{\beta} = \frac{d\boldsymbol{\omega}}{dt} = \frac{d^2\varphi}{dt^2}$$

szöggyorsulás vektort.

Ezekkel a vektoriális mennyiségekkel *vektoriális szorzat* segítségével felírhatjuk egy körpályán mozgó test sebességét és gyorsulását. (A vektoriális szorzat szabályai az A.1 függelékben.) A 3.5(a) ábráról leolvasható, hogy az \mathbf{r} helyvektorú pont elemi elmozdulása

$$d\mathbf{r} = d\varphi \times \mathbf{r}.$$



(a) Elfordulás vektor (b) Szögsebesség vektor

3.5. ábra. Elfordulás és szögsebesség vektor

Ezt a kifejezést idő szerint kétszer deriválva felírhatjuk a pont sebességét és tangenciális gyorsulását:

$$\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \frac{d\varphi}{dt} \times \mathbf{r} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}$$

$$\mathbf{a}_t = \frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} = \frac{d^2\varphi}{dt^2} \times \mathbf{r} = \boldsymbol{\beta} \times \mathbf{r}.$$

A 3.5(b) ábráról az is leolvasható, hogy az $a_{cp} = \omega v$ nagyságú centripetális gyorsulás szintén felírható vektoriális szorzat alakban:

$$\mathbf{a}_{cp} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v} = \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}) .$$

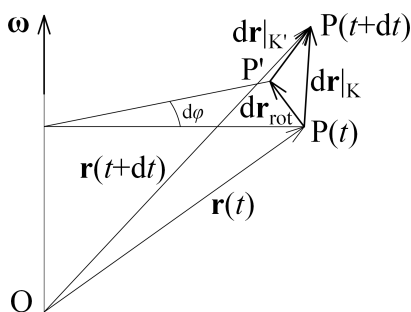
Segédttétel

Vegyünk egy K és egy K' koordináta-rendszert, ahol a két rendszer origója megegyezik, és K' $\boldsymbol{\omega}$ szögsebességgel forog K -hoz képest. Bebizonyítjuk, hogy egy tetszőleges \mathbf{r} vektorra igaz a következő összefüggés:

$$\left. \frac{d\mathbf{r}}{dt} \right|_K = \left. \frac{d\mathbf{r}}{dt} \right|_{K'} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r} , \quad (3.6)$$

ahol a K és K' indexek a K , illetve K' rendszerben vett deriváltakat jelölik. A bizonyítást az egyszerűség kedvéért csak origóból kiinduló (hely)vektorra végezzük el, de könnyen belátható bármely vektorra.

A 3.6 ábrán látható a P pont a t és a $t + dt$ időpontban. Mivel a két koordináta-rendszer origója megegyezik $\mathbf{r}(t) = \mathbf{r}'(t)$ és $\mathbf{r}(t + dt) = \mathbf{r}'(t + dt)$.



3.6. ábra. Segédttétel

A pont elemi elmozdulása a K rendszerben a $d\mathbf{r}|_K$ vektor. Miközben a pont elmozdul, a K' rendszer elfordul a K rendszerhez képest $d\varphi$ szöggel, és a P pont eredeti helye a P' helyre kerül. Így a K' rendszerből nézve a pont elemi elmozdulása a $d\mathbf{r}|_{K'}$ vektor. Az ábráról leolvasható, hogy

$$d\mathbf{r}|_K = d\mathbf{r}|_{K'} + d\mathbf{r}_{rot} ,$$

ahol $d\mathbf{r}_{rot} = d\boldsymbol{\varphi} \times \mathbf{r}$ a K' rendszer elfordulásából származó elemi elmozdulás.

Az egyenlőség mindkét oldalát elosztva dt -vel:

$$\left. \frac{d\mathbf{r}}{dt} \right|_K = \left. \frac{d\mathbf{r}}{dt} \right|_{K'} + \frac{d\boldsymbol{\varphi}}{dt} \times \mathbf{r} ,$$

és – mivel $\boldsymbol{\varphi}$ idő szerinti deriváltja $\boldsymbol{\omega}$ – ezzel a (3.6) segédttételt bebizonyítottuk.

3.4.1. Tehetetlenségi erők forgó rendszerben

Legyen K inerciarendszer, a K' vonatkoztatási rendszer forogjon $\boldsymbol{\omega}$ pillanatnyi szögsebességgel K -hoz képest, és a két rendszer origója essen egybe.

Mivel K és K' origója megegyezik, egy tetszőleges P pont helyvektora is megegyezik a két rendszerben: $\mathbf{r} = \mathbf{r}'$. A helyvektor deriválásával fejezzük ki a P pont sebességét a K rendszerben, majd használjuk fel a (3.6) segédtételt:

$$\mathbf{v} = \left. \frac{d\mathbf{r}}{dt} \right|_K = \left. \frac{d\mathbf{r}'}{dt} \right|_K = \left. \frac{d\mathbf{r}'}{dt} \right|_{K'} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r} = \mathbf{v}' + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}'.$$

Itt felhasználtuk, hogy \mathbf{r}' idő szerinti deriváltja a K' rendszerben \mathbf{v}' .

A sebesség kifejezésének újbóli deriválásával írjuk fel a P pont gyorsulását. Alkalmazzuk a szorzat deriválási szabályát (A.2 függelék), valamint többször is a (3.6) segédtételt:

$$\begin{aligned} \mathbf{a} &= \left. \frac{d\mathbf{v}}{dt} \right|_K = \left. \frac{d\mathbf{v}'}{dt} \right|_K + \left. \frac{d(\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}')}{dt} \right|_K = \\ &= \left. \frac{d\mathbf{v}'}{dt} \right|_K + \left. \frac{d\boldsymbol{\omega}}{dt} \right|_K \times \mathbf{r}' + \boldsymbol{\omega} \times \left. \frac{d\mathbf{r}'}{dt} \right|_K = \\ &= \left. \frac{d\mathbf{v}'}{dt} \right|_{K'} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}' + \frac{d\boldsymbol{\omega}}{dt} \times \mathbf{r}' + \boldsymbol{\omega} \times \left(\left. \frac{d\mathbf{r}'}{dt} \right|_{K'} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}' \right) = \\ &= \left. \frac{d\mathbf{v}'}{dt} \right|_{K'} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}' + \frac{d\boldsymbol{\omega}}{dt} \times \mathbf{r}' + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}' + \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}') = \\ &= \mathbf{a}' + 2\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}' + \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}') + \frac{d\boldsymbol{\omega}}{dt} \times \mathbf{r}'. \end{aligned} \quad (3.7)$$

Itt felhasználtuk, hogy \mathbf{r}' , illetve \mathbf{v}' idő szerinti deriváltja a K' rendszerben \mathbf{v}' , illetve \mathbf{a}' . Ezenkívül $\boldsymbol{\omega}$ deriváltja mellől elhagytuk a vonatkoztatási rendszerre utaló jelet, hiszen $\boldsymbol{\omega}$ deriváltja mindkét rendszerben ugyanakkora.

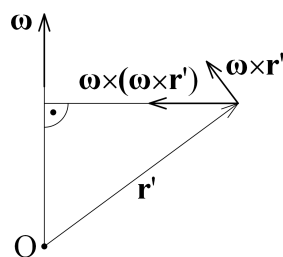
Vizsgáljuk meg a (3.7) kifejezés utolsó sorában szereplő gyorsulástagokat!

Az első tag, \mathbf{a}' a P pont K' rendszerben megfigyelt gyorsulása.

Az $\boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}') = \mathbf{a}_{cp}$ tag a *centripetális gyorsulás* (lásd a 3.7 ábrát). Ez a gyorsulástag minden esetben megjelenik, ha a P pont nem esik a forgástengelyre.

A $2\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}' = \mathbf{a}_C$ tag a *Coriolis-gyorsulás*. Ez a gyorsulástag csak akkor jelenik meg, ha a P pont a K' rendszerhez képest mozog ($\mathbf{v}' \neq 0$), és sebessége nem párhuzamos a forgástengellyel ($\mathbf{v}' \nparallel \boldsymbol{\omega}$).

Az utolsó tag az *Euler-féle gyorsulás*. Ez a tag csak akkor jelentkezik, ha a vonatkoztatási rendszer szögsebessége változik. Ezzel az esettel és így az Euler-féle gyorsulással a továbbiakban nem foglalkozunk.



3.7. ábra. Centripetális gyorsulás

Rendezzük át a (3.7) kifejezés utolsó sorát (elhagyva az Euler-féle gyorsulást), és szorozzuk meg az egyenletet a tömegpont m tömegével:

$$m\mathbf{a}' = m\mathbf{a} - 2m\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}' - m\boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}') .$$

Inerciarendszerben

$$m\mathbf{a} = \mathbf{F}_e ,$$

amit behelyettesítve:

$$m\mathbf{a}' = \mathbf{F}_e - 2m\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}' - m\boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}') . \quad (3.8)$$

Nem meglepő, hogy a forgó vonatkoztatási rendszerben nem teljesül Newton II. törvénye. Ahhoz, hogy a Newton-törvényeket mégis használhassuk, a gyorsuló vonatkoztatási rendszerhez hasonlóan vezessünk be *fiktív* (nem valódi, nem kölcsönhatásból származó) tehetetlenségi erőket, az

$$\mathbf{F}_{cf} = -m\boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}')$$

centrifugális erőt és az

$$\mathbf{F}_C = -2m\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}'$$

Coriolis-erőt. Ezeket behelyettesítve a (3.8) egyenletbe

$$m\mathbf{a}' = \mathbf{F}_e + \mathbf{F}_{cf} + \mathbf{F}_C = \mathbf{F}'_e ,$$

tehát formálisan ismét teljesül Newton II. törvénye. Az \mathbf{F}'_e eredő erőbe a *valódi* (kölcsönhatásból származó) erőkön kívül az \mathbf{F}_{cf} és \mathbf{F}_C tehetetlenségi erőket is bele kell számítani.

Ha a K' rendszer a forgómozgáson kívül gyorsuló haladó mozgást is végez a K rendszerhez képest, akkor az \mathbf{F}'_e eredő erőhöz ezeken kívül a korábban bevezetett $\mathbf{F}_t = -m\mathbf{a}_0$ tehetetlenségi erőt is hozzá kell adni.

3.5. Centrifugális erő és Coriolis-erő körülöttünk

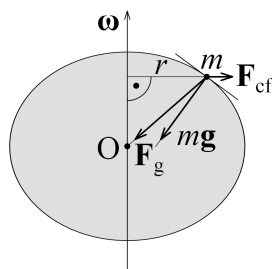
A Föld forog, és így a (legtöbbször használt) Földhöz rögzített vonatkoztatási rendszer nem inerciarendszer. A Föld forgása lassú (szögsebessége $\omega_F = 2\pi/T_F \approx 7,3 \cdot 10^{-5}$ 1/s), így *jó közelítéssel* inerciarendszernek tekinthető, azonban néhány fontos és érdekes jelenség éppen a Föld forgásának következménye.

A következőkben néhány olyan esetet vizsgálunk meg, ahol – a forgó vonatkoztatási rendszerben – centrifugális erő vagy Coriolis-erő „lép fel”.

3.5.1. Centrifugális erő

Gravitációs erő – Nehézségi erő

A Földhöz rögzített (forgó) vonatkoztatási rendszerben minden test esetében figyelembe kell venni a centrifugális erőt. A centrifugális erő a gravitációs kölcsönhatáshoz hasonlóan térfogati erő, arányos a test tömegével, és nem függ a test mozgásállapotától. A 2.4 szakaszban bevezetett *nehézségi erő* a gravitációs erő és a centrifugális erő eredője.



3.8. ábra. Nehézségi erő

A 3.8 ábrán látható, a Föld felszínén nyugvó, m tömegű pontra hat a Föld \mathbf{F}_g gravitációs ereje, amely a Föld középpontja felé mutat, és nagysága

$$F_g = \gamma \frac{mm_F}{r_F^2},$$

valamint – a forgó vonatkoztatási rendszerben – az \mathbf{F}_{cf} centrifugális erő, amely a forgástengelyre merőleges, és nagysága

$$F_{cf} = m\omega^2 r.$$

A két erő eredője az $m\mathbf{g}$ nehézségi erő, amely így (a sarkokat és az egyenlítőt kivéve) nem a Föld középpontja felé mutat, és nagysága (a sarkokat kivéve) eltér a gravitációs erőtől. A nehézségi erő – definíció szerint – függőleges irányú. Az erre merőleges irány a vízszintes, amely (ha az egész Földet tenger borítaná) a Föld érintősíkjába esik. Ebből következik a Föld lapult forgási ellipszoid alakja (a 3.8 ábrán eltűlőzve).

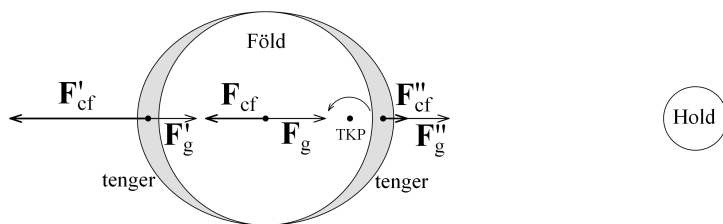
Eötvös-kísérlet

A forgó Földön egy testre ható nehézségi erő a test *súlyos tömegével* arányos gravitációs erő és a test *tehetetlen tömegével* arányos centrifugális erő eredője. Ha a test helyzetét kicsit megváltoztatjuk, a két erőkomponens iránya és nagysága másképp változik. Ez az alapja az *Eötvös-kísérletnek* [21], amellyel Eötvös Loránd a tehetetlen és súlyos tömeg arányosságát $5 \cdot 10^{-9}$ pontossággal igazolta.

A kísérleti eszköz egy nagyon gondosan elkészített torziós inga: egy század milliméter átmérőjű platinaszálra függesztett vízszintes rúd végeire azonos tömegű, de különböző anyagú testeket rögzítettek. Az inga kicsiny elfordulása a rúdra szerelt tükör segítségével detektálható. Amennyiben a testek súlyos és tehetetlen tömege nem lenne arányos, az ingára forgatónyomaték hatna, és a torziós szál elcsavarodna. (Az egyensúlyi állapot ismeretlen, így az elcsavarodást az egész eszköz 180° -os elforgatása után lehetne megfigyelni.) Az *Eötvös-inga* [22] továbbfejlesztett változatával (az egyik test egy fonálra függesztve a másiknál alacsonyabb helyzetben van) a gravitációs gyorsulás helyfüggése nagyon pontosan mérhető. Használták földalatti kőolaj- és gázmezők kutatására is (hiszen azoknak kisebb a sűrűsége és így a gravitációs vonzása). Érzékenysége jellemző, hogy sikerült kimutatni a Gellért-hegy tömegvonzását és így megmérni a hegy tömegét.

Árapály jelenség

Az árapály jelenség köztudottan a Hold (és a Nap) vonzásának következménye. Azt azonban nehezebb megérteni, hogy nemcsak a Föld Hold felé néző oldalán, hanem az átellenes oldalon is magasabb a vízszint (és így a Föld forgása miatt egy adott helyen naponta kétszer van dagály).



3.9. ábra. A Hold keringésével együtt forgó rendszer

A jelenséget érdemes a Hold keringésével együtt forgó (és a Föld-Hold rendszerrel együtt mozgó) vonatkoztatási rendszerben leírni (3.9 ábra). A rendszer a közös tömegközéppont (TKP) körül forog, ami a tömeg- és távolságviszonyok miatt a Föld belsejébe esik (lásd 5.1 szakasz). A Földre ebben a rendszerben a Hold \mathbf{F}_g gravitációs vonzása és az \mathbf{F}_{cf} centrifugális erő hat. A két erő eredője nulla, hiszen ebben a vonatkoztatási rendszerben a Föld (és a Hold is) nyugalomban van.

A Holddal átellenes oldalon nagyobb F'_{cf} centrifugális erő és kisebb F'_g gravitációs erő hat, hiszen a centrifugális erő a forgástengelytől távolodva nő, a gravitációs erő pedig a vonzó testtől távolodva csökken. Így ott egy kifelé mutató eredő erő lesz, ami dagályt okoz. A Hold felé néző oldalon az F''_g gravitációs erő és az F''_{cf} centrifugális erő is a Hold felé mutat, így az eredőjük ott is dagályt okoz.

A Föld forgása miatt a két dagályhullám naponta körbejárja a Földet. A kontinensek miatt a hullám haladása nem akadálytalan, így a dagály a Holdhoz képest késve, és a különböző helyeken nagyon eltérő magassággal jelentkezik.

A Holdhoz hasonlóan a Nap is árapályt okoz, amit ugyanígy, a Föld keringésével együtt forgó rendszerben lehet leírni. Teliholdkor és újholdkor a két hatás erősíti egymást, így ilyenkor magasabb a dagály, az első és utolsó negyedben viszont gyengítik egymást, így a dagály alacsonyabb.

Centrifugális erő a hétköznapi életben

Sok hétköznapi jelenség leírható inerciarendszerből és forgó vonatkoztatási rendszerből is. Vizsgáljuk meg a háztartási centrifuga és a kanyarodó autó esetét!

A centrifuga működése inerciarendszerből: a ruha a dob falának nyomóereje miatt befelé gyorsul, és így körpályán mozog. A lyukakon kilépő vízre nem hat erő, és így egyenesvonalú mozgással elhagyja a dobot.

Ugyanez forgó vonatkoztatási rendszerben: A ruhára hat a dob falának nyomóereje és a centrifugális erő. A két erő kiegyenlíti egymást, így a ruha ebben a rendszerben nyugalomban van. A lyukakon kilépő vízre csak a centrifugális erő hat, így az kifelé gyorsulva távozik.

A kanyarodó autóra inerciarendszerben a talaj tapadási súrlódása hat, ami a kanyar középpontja felé gyorsítja, így az autó körpályán halad. Az autó utasainak centripetális gyorsulását a külső oldal nyomóereje okozza, az tartja őket körpályán.

A kanyarodó autóval együtt forgó vonatkoztatási rendszerben az autóra a talaj tapadási súrlódási erején kívül a centrifugális erő hat. A két erő eredője nulla, hiszen ebben a rendszerben az autó nyugalomban van. Az utasokat ebben a rendszerben a centrifugális erő nyomja az autó külső oldalához, ezt az ott fellépő nyomóerő egyenlíti ki, és így az utasok ebben a rendszerben nyugalomban vannak.

Kísérlet: Centrifugális erő

A videókon [7] több kísérlet is látható a centrifugális erő demonstrálására. (Természetesen a jelenségek inerciarendszerben is leírhatók: akkor a kényyszererők okozzák a centripetális gyorsulást, és tartják a testeket körpályán.)

A geoid modell rugalmas lemezekből kialakított gömb. Ha a modellt megforgatjuk, a centrifugális erő hatására lapult forgási ellipszoid alakja lesz – hasonlóan a Földhöz. (**Geoid modell**)

A centrifugál regulátort a gőzgépek fordulatszámának szabályozására használták. A fordulatszám növekedésekor a nagyobb centrifugális erő kifelé mozgatja a röpsúlyokat, amelyek csuklós karok segítségével csökkentik a gépbe jutó gőz mennyiségét, és így a fordulatszámot. (**Centrifugál regulátor**)

Forgó rendszerben rugós erőmérővel a centrifugális erő közvetlenül mérhető. (**Erőmérő**)

A centrifugális erő a tömeg nagyságától és a test forgástengelytől mért távolságától is függ. Megfelelő beállításnál a kis és nagy tömegű testek egyensúlyban lehetnek. (**Kis tömeg – nagy tömeg**)

Nagy fordulatszámú centrifugákat az iparban is használnak különböző folyadékok vagy gázok szétválasztására. A centrifugál szeparátorban gyors forgatás esetén a higany az üveggömb egyenlítőjénél lesz. (**Centrifugál szeparátor**) ♦

3.5.2. Coriolis-erő

A Coriolis-erő csak a forgó rendszerhez képest mozgó testek esetében lép fel, nagysága és iránya függ a test (vonatkoztatási rendszerhez viszonyított) sebességétől is. A Föld forgása miatt fellépő Coriolis-erőt így nem lehet olyan egyszerűen figyelembe venni, mint ahogy a centrifugális erőt „beolvasztottuk” a nehézségi erőbe. A Föld lassú forgása miatt nem túl nagy sebességű testek esetében a Coriolis-erő kicsi, és legtöbb esetben elhanyagolhatjuk. Hatása elsősorban nagy méretek (például tenger- és légáramlatok), valamint nagy sebességek (például lövedékek) esetében jelentős.

Foucault-inga

A *Foucault-inga* [23] egy gondosan felfüggesztett, nagy periódusidejű és kis csillapítású inga, amely segítségével kimutatható a Föld forgása. Az eredeti kísérletet Foucault a párizsi Panthéonban mutatta be 1851-ben. A kitérített és magára hagyott inga lengési síkja lassan elfordul.

A jelenséget inerciarendszerekből nézve úgy magyarázhatjuk, hogy az inga síkja nem változik, és közben a Föld „kifordul” alóla. Forgó vonatkoztatási rendszerben pedig a sebességre merőleges Coriolis-erő téríti el az ingatestet az eredeti lengési síkból.

A Foucault-inga a sarkokon éppen egy nap alatt fordul teljesen körbe, az Egyenlítőn viszont egyáltalán nem térül el a síkja.

Eötvös-effektus

Szintén a Coriolis-erővel magyarázható, hogy a keletről nyugatra mozgó testek súlya nő, a nyugatról keletre haladóké pedig csökken. Ha egy kiegyensúlyozott kis mérleget

függőleges tengelye körül megforgatunk, akkor a mérleg két oldalának súlya felváltva nagyobb és kisebb lesz, attól függően, hogy éppen nyugat vagy kelet felé mozognak. Megfelelő fordulatszám esetén ez a kicsi, de periodikusan fellépő erőpár rezonanciába kerül a kis mérleg sajátfrekvenciájával, és ekkor a jelenség jól megfigyelhető.

Ez az effektus az egyenlítőn a legerősebb, a sarkokon viszont nem lép fel.

Kísérlet: Coriolis-erő

Forgó, bekormozott lapon a centrifugális erő hatására kiguruló golyó görbe nyomot hagy. Az eltérés iránya a forgás irányától függ. (Videó [7]) ♦

Megfigyelés: Coriolis-szoba

A Coriolis-erőt saját magunk is megtapasztalhatjuk a *Csodák palotájában* kipróbálható *Coriolis-szobában*. A forgó szobában ülve labdát guríthatunk vagy dobálhatunk, amely – a forgó rendszerből megfigyelve – a Coriolis-erő hatására nem egyenes vonalban mozog. Ugyanakkor a külső megfigyelő azt látja, hogy a labda egyenesen halad, de a szoba elfordul alatta. ♦

Szelek, tengeráramlatok, folyók

A Coriolis-erőnek meghatározó szerepe van a globális szelek és tengeráramlatok kialakulásában. A nyomáskülönbségek miatt mozgó légtömegek a Coriolis-erő hatására eltérülnek, és hatalmas forgó rendszerek, úgynevezett ciklonok alakulnak ki. A ciklonban az alacsony nyomású középpont felé meginduló levegő az eltérítő erő miatt végül nem a nyomásváltozás (nyomásgradiens) irányába, hanem arra közel merőlegesen, jó közelítéssel az állandó nyomású helyeket összekötő vonalak (izobárok) mentén mozog. Az északi féltekén a Coriolis-erő mindig a haladási irányhoz viszonyítva jobbra téríti el a mozgó közeget, így a ciklonban kialakuló forgás mindig az óramutató járásával ellentétes. A déli féltekén balra térül el a mozgó levegő, és így a forgásirány az óramutató járásával megegyező irányú. A Coriolis-erőnek fontos szerepe van a trópusokon a felszín közelében kelet felől fújó passzát szelek és a nagy magasságban a Földet körülérő nyugati irányú futóáramlások (jetek) kialakulásában is.

A hőmérséklet- és a sókoncentráció-különbségek, valamint a szél és az árapály hatására a tengerekben is létrejönnek áramlások. A Coriolis-erő a tengeráramlatok mozgását is befolyásolja, haladási irányukat eltéríti.

A tengeráramlásokhoz hasonlóan a folyókra is hat a Coriolis-erő: az északi féltekén a folyók erősebben alámoszák a jobb partjukat. Emiatt a Dunakanyar után a hegyek közül kilépő Duna a folyószabályozás előtt folyamatosan vándorolt nyugatra: ezt mutatják a folyó vándorlása után visszamaradt kiskunsági homokdombok és a jobb parton Érdtől Paksig látható leszakadó löszfalak.

4. fejezet

Munka és energia

A *munka* és az *energia* két egymással szoros kapcsolatban álló mennyiség. Az energiát szokás munkavégző képességként meghatározni, tehát a munka fogalmára visszavezetni. De lehet fordítva is: a munkát definiálhatjuk az energiaátadás *egyik* lehetséges módjaként. A modern fizikában az energia az alapvetőbb fogalom. Mi azonban – a klasszikus mechanikában szokásos módon – a munka fogalmának (fizikában használatos) definiálásával kezdjük, és ebből fogunk eljutni az energia fogalmához.

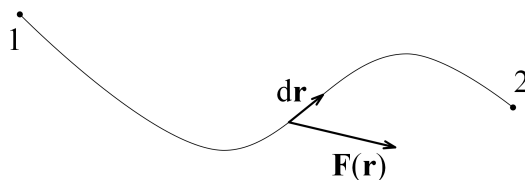
Egy \mathbf{F} erő által egy tömegponton végzett elemi munka az erő és a tömegpont $d\mathbf{r}$ elemi elmozdulásának *skaláris szorzata* (lásd az [A.1](#) függelék):

$$dW = \mathbf{F} d\mathbf{r} .$$

Az erő által végzett teljes munkát úgy kapjuk meg, hogy az elemi munkát integráljuk a test pályája mentén ([4.1](#) ábra):

$$W_{12} = \int_1^2 dW = \int_1^2 \mathbf{F}(\mathbf{r}) d\mathbf{r} . \quad (4.1)$$

A munka tehát az erő *vonalminti integrálja*.

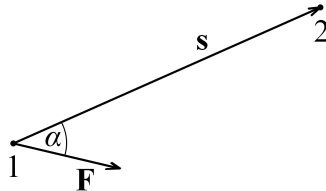


4.1. ábra. A munka az erő vonalminti integrálja

Speciális esetben, ha a pálya egyenesvonalú, és az erő a pálya mentén végig állandó:

$$W = \mathbf{F}\mathbf{s} = Fs \cos \alpha,$$

ahol α az \mathbf{F} erő és az \mathbf{s} elmozdulásvektor által bezárt szög (4.2 ábra).



4.2. ábra. Állandó erő munkája egyenesvonalú elmozdulás esetén

A skaláris szorzat tulajdonságaiból látható, hogy ha a tömegpont nem mozdul el, vagy mozgása merőleges az erőre, akkor nincs munkavégzés. Ha pedig az α szög tompaszög (vagy \mathbf{F} és \mathbf{s} egymással ellentétes irányú), akkor a munkavégzés negatív.

4.1. Mozgási energia, munkatétel

Legyen egy m tömegű pontszerű testre ható erők eredője \mathbf{F}_e . A (4.1) összefüggés alapján az eredő erő munkája:

$$W_e = \int_1^2 \mathbf{F}_e d\mathbf{r}. \quad (4.2)$$

Ugyanakkor Newton II. törvénye szerint

$$\mathbf{F}_e = m\mathbf{a} = m \frac{d\mathbf{v}}{dt},$$

valamint a sebesség definíciója alapján

$$d\mathbf{r} = \mathbf{v} dt.$$

Ezeket behelyettesítve a (4.2) kifejezésbe, majd az idő szerinti integrálról a sebesség szerinti integrálra áttérve, és az integrálást elvégezve:

$$W_e = \int_1^2 \mathbf{F}_e d\mathbf{r} = \int_{t_1}^{t_2} m \frac{d\mathbf{v}}{dt} \mathbf{v} dt = m \int_{v_1}^{v_2} \mathbf{v} d\mathbf{v} = m \left[\frac{1}{2} \mathbf{v}^2 \right]_{v_1}^{v_2} = \frac{1}{2} m v_2^2 - \frac{1}{2} m v_1^2. \quad (4.3)$$

Látható, hogy ez a *gyorsítási munka* független az úttól és a gyorsítás idejétől – a test tömegén kívül csak a kezdő és végsebességtől függ. Az eredményben szereplő

$$E_m = \frac{1}{2}mv^2 \quad (4.4)$$

kifejezést a tömegpont *mozgási energiájának* nevezzük.

Az *energia* kifejezést abban az értelemben használhatjuk, hogy az m tömegű, v sebességű test E_m munkát végezne, miközben megállna, tehát ekkora munkavégző képességgel rendelkezik. Ez az energia a test *mozgásállapotából* következik.

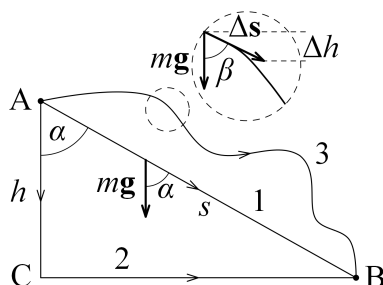
A mozgási energia segítségével a (4.2) összefüggést röviden leírhatjuk:

$$W_e = \Delta E_m, \quad (4.5)$$

azaz az eredő erő munkája (vagy a tömegpontra ható összes erő munkáinak összege) megegyezik a test mozgási energiájának megváltozásával. Ez a *munkatétel* (tömegpontra megfogalmazva).

4.2. Konzervatív erőtér, helyzeti energia

Számítsuk ki a nehézségi erő által végzett munkát, miközben egy m tömegű test különböző útvonalakon az A pontból a B pontba mozog (4.3 ábra).



4.3. ábra. A nehézségi erő munkája

Az 1-es útvonalon az elmozdulás egyenesvonalú, a munka egyszerűen kiszámítható:

$$W_{AB_1} = mgs \cos \alpha = mgh.$$

A 2-es útvonal két részre bontható: az AC szakaszon az erő és az elmozdulás párhuzamos, a CB szakaszon viszont merőleges egymásra. Ennek alapján:

$$W_{AB_2} = mgh + 0 = mgh.$$

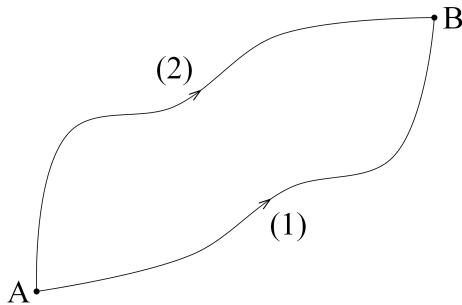
A 3-as útvonalat kis darabokra bontjuk (lásd a 4.3 ábra kinagyított részét), és a munkát az egyes kis szakaszokon végzett munka összegeként számítjuk ki:

$$W_{AB_3} = \sum mg\Delta s = \sum mg\Delta s \cos \beta = \sum mg\Delta h = mg \sum \Delta h = mgh.$$

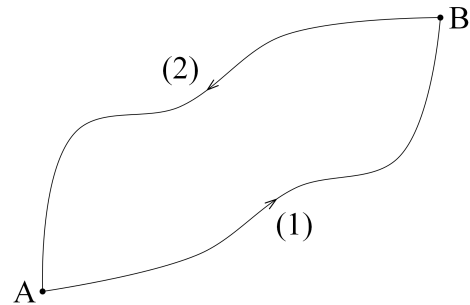
Látható, hogy a nehézségi erő munkája független az út választásától.

Egy $\mathbf{F}(\mathbf{r})$ erőteret *konzervatívnak* nevezünk, ha az \mathbf{F} erő által végzett munka csak az elmozdulás kezdő és végpontjától függ, az útvonaltól független (4.4(a) ábra):

$$\int_{\underset{(1)}{A}}^B \mathbf{F}(\mathbf{r})d\mathbf{r} = \int_{\underset{(2)}{A}}^B \mathbf{F}(\mathbf{r})d\mathbf{r}.$$



(a) A munkavégzés független az útvonaltól



(b) Zárt görbén a munkavégzés nulla

4.4. ábra. Konzervatív erőter

Ezzel egyenértékű definíció, hogy ha az útvonal kezdő és végpontja megegyezik (a görbe zárt), akkor a konzervatív erőter által végzett munka nulla (4.4(b) ábra):

$$\oint_g \mathbf{F}(\mathbf{r})d\mathbf{r} = \int_{\underset{(1)}{A}}^B \mathbf{F}(\mathbf{r})d\mathbf{r} + \int_{\underset{(2)}{B}}^A \mathbf{F}(\mathbf{r})d\mathbf{r} = \int_{\underset{(1)}{A}}^B \mathbf{F}(\mathbf{r})d\mathbf{r} - \int_{\underset{(2)}{A}}^B \mathbf{F}(\mathbf{r})d\mathbf{r} = 0.$$

Itt felhasználtuk, hogy a kezdő és végpont felcserélése esetén egy adott útvonalon végzett munka -1 -szeresére változik.

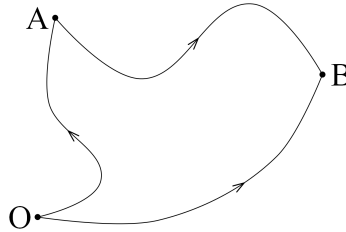
Ha az $\mathbf{F}_k(\mathbf{r})$ erőter konzervatív, és kiválasztunk egy tetszőleges O kezdőpontot, akkor minden P ponthoz hozzárendelhetünk egy *helyzeti* (vagy *potenciális*) *energiát*:

$$E_h(P) = -W_{kOP} = - \int_O^P \mathbf{F}_k(\mathbf{r})d\mathbf{r}. \quad (4.6)$$

A helyzeti energia a test *helyzetéből* adódó *munkavégző képesség*, hiszen a helyzeti energia egyenlő azzal a munkával, amit a konzervatív erőter végezne, ha a test a P pontból az O kezdőpontba mozogna.

A helyzeti energia függ az O kezdőpont választásától, azonban a *megváltozása* – miközben a test egy A pontból egy B pontba mozog – nem (4.5 ábra):

$$\begin{aligned} \Delta E_{hAB} &= E_h(B) - E_h(A) = - \int_O^B \mathbf{F}_k d\mathbf{r} - \left(- \int_O^A \mathbf{F}_k d\mathbf{r} \right) = \\ &= - \left(\int_O^A \mathbf{F}_k d\mathbf{r} + \int_A^B \mathbf{F}_k d\mathbf{r} \right) + \int_O^A \mathbf{F}_k d\mathbf{r} = - \int_A^B \mathbf{F}_k d\mathbf{r} = -W_{kAB}. \end{aligned}$$



4.5. ábra. A helyzeti energia megváltozása független az O pont választásától

Gravitációs erőter

A Föld a középpontjától r távolságra lévő m tömegű testre

$$F = -\gamma \frac{mm_F}{r^2}$$

gravitációs erővel hat. Az erő radiális (sugárirányú), a Föld középpontja felé mutat (erre utal a – előjel) és csak \mathbf{r} nagyságától függ.

Ha a test egy gömbfelületen mozog, akkor a munkavégzés nulla (hiszen az elmozdulás és az erő merőleges egymásra), így az erőter által végzett munka csak a radiális elmozdulástól (a 4.6(a) ábrán látható r_1 és r_2 távolságoktól) függ.

Egy tetszőleges útvonal a 4.6(b) ábrán látható módon felbontható kicsiny radiális (sugárirányú) és tangenciális (érintőirányú) szakaszokra. Így a gravitációs erőter munkája tetszőleges, az A pontból a B pontba vezető útvonal esetén megegyezik az A' pontból a B pontba vezető egyenesvonalú (radiális) elmozdulás közben végzett munkával.



(a) Munkavégzés csak radiális elmozduláskor (b) Felbontás radiális és tangenciális szakaszokra történik

4.6. ábra. Konzervatív erőté

A gravitációs erőté tehát konzervatív, így bármely pontban kiszámíthatjuk a test egy kiválasztott ponthoz viszonyított helyzeti energiáját, ami csak az r távolság függvénye:

$$\begin{aligned}
 E_h(r) &= - \int_{r_0}^r F dr = - \int_{r_0}^r -\gamma \frac{mm_F}{r^2} dr = \gamma mm_F \int_{r_0}^r \frac{1}{r^2} dr = \\
 &= -\gamma mm_F \left[\frac{1}{r} \right]_{r_0}^r = -\gamma mm_F \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r_0} \right).
 \end{aligned}$$

$r_0 = \infty$ választással (a kezdőpontot a Földtől végtelen távol választjuk) a helyzeti energia kifejezése egyszerűsödik:

$$E_h(r) = -\gamma mm_F \frac{1}{r}. \quad (4.7)$$

A Föld közelében a gravitációs erő nem túl nagy távolságokon belül állandó, és jó közelítéssel megegyezik a nehézségi erővel:

$$F = -mg.$$

A helyzeti energia csak a h magasságtól függ:

$$E_h(h) = - \int_{h_0}^h -mg dh = mg(h - h_0).$$

$h_0 = 0$ választással:

$$E_h(h) = mgh.$$

Rugalmas helyzeti energia

Egy megnyújtott vagy összenyomott rugóban a (2.8) összefüggés szerint

$$F = -Dx$$

erő ébred. Ahhoz, hogy a kezdetben deformálatlan rugót megnyújtsuk (vagy összenyomjuk), munkát kell végeznünk. Így a megnyújtott rugóban – a felemelt testhez hasonlóan – energia tárolódik, a deformált rugónak (rugalmas) helyzeti energiája van. A helyzeti energiáját a gravitációs helyzeti energiához hasonlóan számolhatjuk ki:

$$E_h(x) = - \int_0^x F(x) dx = - \int_0^x -Dx dx = D \int_0^x x dx = \frac{1}{2} Dx^2. \quad (4.8)$$

4.2.1. Egyensúlyi helyzetek

Ha ismerjük az $\mathbf{F}(\mathbf{r})$ erőteret, akkor a (4.6) összefüggés alapján meg tudjuk határozni a hely függvényében az $E_h(\mathbf{r})$ helyzeti energiát. Meghatározható-e az $E_h(\mathbf{r})$ helyzeti energia ismeretében az erőter?

Először vizsgáljunk egydimenziós esetet. Ekkor egy elemi dx elmozdulás esetén a helyzeti energia elemi megváltozása:

$$dE_h = -F_x dx.$$

A helyzeti energia elemi megváltozása kifejezhető a hely szerinti deriváltjával is:

$$dE_h = \frac{dE_h}{dx} dx.$$

A két kifejezést egyenlővé téve, és dx -szel egyszerűsítve:

$$F_x = -\frac{dE_h}{dx},$$

azaz az erő a helyzeti energia hely szerinti deriváltjának -1 -szerese.

Három dimenzióban a helyzeti energia elemi megváltozása

$$dE_h = -\mathbf{F}d\mathbf{r} = -(F_x dx + F_y dy + F_z dz).$$

A helyzeti energia elemi megváltozása most is felírható deriváltak segítségével, de most E_h x , y és z függvénye, így *parciális deriváltakra* van szükség. Egy többváltozós függvény valamelyik változója szerinti parciális deriváltját úgy kell meghatározni, hogy miközben a kiválasztott változó szerint deriválunk, a többi változót állandónak tekintjük. A parciális deriválást a deriválás d jele helyett ∂ jellel jelöljük. Eszerint:

$$dE_h = \frac{\partial E_h}{\partial x} dx + \frac{\partial E_h}{\partial y} dy + \frac{\partial E_h}{\partial z} dz.$$

A két kifejezést ismét egyenlővé téve megkapjuk az erő komponenseit:

$$\begin{aligned} F_x &= -\frac{\partial E_h}{\partial x} \\ F_y &= -\frac{\partial E_h}{\partial y} \\ F_z &= -\frac{\partial E_h}{\partial z}. \end{aligned}$$

Ugyanez vektoros alakban felírva:

$$\mathbf{F} = -\left(\frac{\partial E_h}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial E_h}{\partial y}\mathbf{j} + \frac{\partial E_h}{\partial z}\mathbf{k}\right) = -\nabla E_h, \quad (4.9)$$

ahol ∇ a *gradiens* jele.

Az egyensúly feltétele, hogy a testre ható erők eredője nulla legyen. Ha egy testre csak konzervatív erők hatnak, akkor ez a (4.9) összefüggés szerint egyenértékű azzal, hogy a helyzeti energia hely szerinti parciális deriváltjai nullák. A deriváltak viszont ott tűnnek el, ahol a függvénynek szélsőértéke van.

Eszerint konzervatív erőterben egy test egyensúlyának feltétele, hogy a helyzeti energiájának *szélsőértéke* legyen. Könnyen belátható, hogy ha a szélsőérték *minimum*, akkor az egyensúly *stabil*, míg ha a szélsőérték *maximum*, akkor *instabil*.

Feladatok megoldásánál azért előnyös a helyzeti energiával dolgozni, mert az *skalár* mennyiség, és így könnyebben kezelhető, mint az *erővektorok*.

4.3. Mechanikai energia

Egy testre általában konzervatív és nem konzervatív erők is hatnak. A testre ható eredő erőt bontsuk fel ennek megfelelően:

$$\mathbf{F}_e = \mathbf{F}_k + \mathbf{F}_{nk}.$$

Ezután a (4.5) összefüggés alapján írjuk fel ismét egy test mozgási energiájának megváltozását:

$$\Delta E_m = W_e = \int_1^2 \mathbf{F}_e d\mathbf{r} = \int_1^2 (\mathbf{F}_k + \mathbf{F}_{nk}) d\mathbf{r} = \int_1^2 \mathbf{F}_k d\mathbf{r} + \int_1^2 \mathbf{F}_{nk} d\mathbf{r} = -\Delta E_h + W_{nk},$$

ahol felhasználtuk a helyzeti energia (4.6) definiáló összefüggését.

Az egyenletet átrendezve

$$\Delta E_m + \Delta E_h = W_{nk}.$$

A mozgási és a helyzeti energia összegét *mechanikai energiának* nevezzük:

$$E = E_m + E_h .$$

Ezt felhasználva felírhatjuk a *munkatétel* másik lehetséges alakját:

$$\Delta E = W_{\text{nk}} . \quad (4.10)$$

A (4.5) egyenlettel szemben itt az egyenlet bal oldalán a teljes mechanikai energia megváltozása áll, ugyanakkor a jobb oldalon csak a *nem konzervatív* erők munkája szerepel. A konzervatív erők munkáját nem szabad hozzáadni, hiszen azt már a helyzeti energiával figyelembe vettük.

A (4.10) munkatételből következik, hogy ha nincsenek nem konzervatív erők, vagy a nem konzervatív erők munkája nulla, akkor a tömegpont mechanikai energiája nem változik, állandó:

$$W_{\text{nk}} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad E = \text{állandó} . \quad (4.11)$$

Ez a mechanikai energia megmaradásának törvénye tömegpontra. (A törvényt több testre, általánosabb formában is meg fogjuk fogalmazni az 5.3 szakaszban.)

Figyeljünk arra, hogy itt is, mint minden *megmaradási tétel*ben, az adott mennyiség megmaradásának *feltétele* van! Esetünkben: a test mechanikai energiája *csak akkor* állandó, *ha* a nem konzervatív erők munkája nulla.

5. fejezet

Pontrendszerek – megmaradási tételek

A tömegpont a valóságos testek legegyszerűbb modellje. Nem veszi figyelembe, hogy a testeknek kiterjedése, alakja van. Azonban mielőtt kiterjedéssel rendelkező testeket íránk le, érdemes a több (akár nagyon sok) pontszerű testből álló rendszerekkel, a *pontrendszerekkel* foglalkoznunk. Az itt megfogalmazott törvények nemcsak szabadon mozgó tömegpontokból álló rendszerek (mint például egy bolygórendszer vagy egy gáz) esetében hasznosak, hanem például a merev testek leírásánál is: azok is felfoghatók végtelen sok elemi tömegpontból álló pontrendszerekként.

Azt, hogy mely testek tartoznak egy pontrendszerhez, önkényesen eldönthetjük. Ezt általában az adott probléma határozza meg. A tömegpontok száma a két testből álló rendszerektől (pl. Föld-Hold rendszer) a 10^{25} nagyságrendű részecskéből álló gázokig terjedhet.

A pontrendszer teljes leírásához meg kell(ene) adnunk a pontrendszerhez tartozó n tömegpont $m_1, m_2, \dots, m_i, \dots, m_n$ tömegét, valamint az összes tömegpont helyét az idő függvényében: $\mathbf{r}_1(t), \mathbf{r}_2(t), \dots, \mathbf{r}_i(t), \dots, \mathbf{r}_n(t)$. Ugyanakkor sokszor elegendő információ a rendszerről, ha néhány átfogó, az egész rendszerre jellemző tulajdonságát ismerjük. A következőkben néhány ilyen fogalmat és mennyiséget ismerünk meg.

Eközben ebben a fejezetben megfogalmazunk megmaradási törvényeket is: az impulzus, a perdület és a mechanikai energia megmaradásának tételét. Ezeknek az univerzális összefüggéseknek (más megmaradási tételekkel együtt, mint például a tömeg vagy a töltés megmaradás törvénye) központi szerepe van a fizikában és más természettudományokban is.

5.1. A tömegközéppont

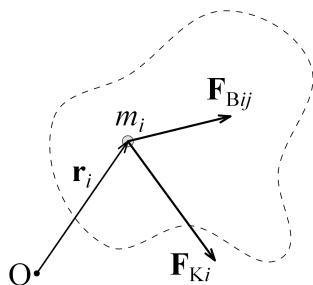
A pontrendszer teljes tömege az egyes tömegpontok tömegének összege:

$$m = \sum_{i=1}^n m_i.$$

A pontrendszer jellemző adata a *tömegközéppont* (TKP) helye. A tömegközéppontba mutató helyvektor az egyes tömegpontokba mutató helyvektorok tömeggel súlyozott számtani középértéke:

$$\mathbf{r}_{\text{TKP}} = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^n m_i \mathbf{r}_i. \quad (5.1)$$

A pontrendszerben lévő tömegpontok kölcsönhatásban állhatnak egymással és a pontrendszeren kívüli testekkel is. Egy tömegpontra a pontrendszer más tagjai által kifejtett erőket *belső erők*nek nevezzük. Az m_i tömegpontra az m_j tömegpont által kifejtett (belső) erő \mathbf{F}_{Bij} . A pontrendszeren kívüli testek által kifejtett erők a *külső erők*. Az m_i tömegpontra ható külső erők eredője \mathbf{F}_{Ki} (5.1 ábra).



5.1. ábra. Belső és külső erők a pontrendszerben

Írjuk fel a pontrendszer minden pontjára a (2.5) mozgásegyenletet (Newton II. törvényét, összesen n egyenletet):

$$m_i \mathbf{a}_i = \mathbf{F}_{Ki} + \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n \mathbf{F}_{Bij},$$

majd adjuk össze az egyenleteket:

$$\sum_{i=1}^n m_i \mathbf{a}_i = \sum_{i=1}^n \mathbf{F}_{Ki} + \sum_{i=1}^n \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n \mathbf{F}_{Bij}.$$

A kettős szumma értéke nulla, mert Newton III. törvénye (2.2) miatt

$$\mathbf{F}_{Bij} = -\mathbf{F}_{Bji},$$

és ezek az erők az összegzésben páronként kiejtik egymást. Ezt felhasználva, valamint az összes külső erő eredőjét \mathbf{F}_K -val jelölve:

$$\sum_{i=1}^n m_i \mathbf{a}_i = \mathbf{F}_K.$$

Az egyenlet bal oldalát a gyorsulás (1.4) és a tömegközéppont (5.1) definícióját felhasználva átalakítjuk:

$$\sum_{i=1}^n m_i \mathbf{a}_i = \sum_{i=1}^n m_i \frac{d^2 \mathbf{r}_i}{dt^2} = \frac{d^2}{dt^2} \left(\sum_{i=1}^n m_i \mathbf{r}_i \right) = \frac{d^2 (m \mathbf{r}_{\text{TKP}})}{dt^2} = m \frac{d^2 \mathbf{r}_{\text{TKP}}}{dt^2} = m \mathbf{a}_{\text{TKP}}.$$

Az átalakítás közben kihasználtuk, hogy a szummázás és a deriválás sorrendje felcserélhető, hiszen a szummázás egy összeadás, és deriválni tagonként lehet.

A két kifejezést egyenlővé téve megkapjuk az úgynevezett *tömegközépponti tételt*:

$$m \mathbf{a}_{\text{TKP}} = \mathbf{F}_K, \quad (5.2)$$

azaz a pontrendszer tömegközéppontja úgy mozog, mintha a rendszer egész tömege a tömegközéppontban összpontosulna, és erre hatna a *külső* erők eredője.

5.2. Pontrendszer impulzusa – az impulzusmegmaradás tétele

A pontrendszer teljes impulzusa (lendülete) az egyes tömegpontok impulzusának összege. Ezt felírva, és felhasználva az impulzus (2.3), a sebesség (1.1) és a tömegközéppont (5.1) definícióját, a pontrendszer összimpulzusa:

$$\begin{aligned} \mathbf{p} &= \sum_{i=1}^n \mathbf{p}_i = \sum_{i=1}^n m_i \mathbf{v}_i = \sum_{i=1}^n m_i \frac{d\mathbf{r}_i}{dt} = \frac{d}{dt} \left(\sum_{i=1}^n m_i \mathbf{r}_i \right) = \\ &= \frac{d(m \mathbf{r}_{\text{TKP}})}{dt} = m \frac{d\mathbf{r}_{\text{TKP}}}{dt} = m \mathbf{v}_{\text{TKP}}. \end{aligned} \quad (5.3)$$

Ismét kihasználtuk, hogy a szummázás és a deriválás sorrendje felcserélhető. A tömegközéppont tehát megint úgy viselkedik, mintha a pontrendszer teljes tömege benne összpontosulna: a pontrendszer teljes impulzusa a pontrendszer össztömegének és a tömegközéppont sebességének szorzata.

Az (5.3) kifejezést idő szerint deriválva, és felhasználva az (5.2) tömegközépponti tételt

$$\frac{d\mathbf{p}}{dt} = \frac{d(m\mathbf{v}_{\text{TKP}})}{dt} = m \frac{d\mathbf{v}_{\text{TKP}}}{dt} = m\mathbf{a}_{\text{TKP}} = \mathbf{F}_K, \quad (5.4)$$

azaz a pontrendszer impulzusának idő szerinti deriváltja egyenlő a külső erők eredőjével.

Ha a pontrendszerre nem hatnak külső erők, vagy a külső erők eredője nulla, akkor a pontrendszer teljes impulzusa állandó:

$$\mathbf{F}_K = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \mathbf{p} = \sum_{i=1}^n m_i \mathbf{v}_i = \text{állandó}. \quad (5.5)$$

Ez az *impulzusmegmaradás törvénye* pontrendszerre.

Fontos megjegyezni, hogy a rendszer teljes impulzusa független a belső erőktől, az összipulzust belső erők nem változtathatják meg.

5.3. Pontrendszer energiája – a mechanikai energia megmaradásának tétele

Írjuk fel minden tömegpontra a (4.5) munkatételt, és adjuk össze az egyenleteket:

$$\begin{aligned} W_i &= \Delta E_{mi} && (n \text{ egyenlet}) \\ W &= \Delta E_m && (\text{összeadva}) \end{aligned}$$

A jobb oldalon a pontrendszer teljes mozgási energiájának megváltozása, míg a bal oldalon a pontrendszeren végzett összes munka áll. Ez utóbbit bontsuk fel egyrészt belső (B) és külső (K), másrészt konzervatív (k) és nem konzervatív (nk) erők által végzett munkákra:

$$W = W_{Bk} + W_{Kk} + W_{Bnk} + W_{Knk}.$$

A konzervatív erők munkáját a helyzeti energia (4.6) definíciója alapján helyettesíthetjük:

$$\begin{aligned} W_{Bk} &= -\Delta E_{hB} \\ W_{Kk} &= -\Delta E_{hK}, \end{aligned}$$

ahol E_{hB} a pontrendszeren belüli kölcsönhatásokhoz tartozó helyzeti energia (ilyen például egy bolygórendszerrel az égitestek közötti gravitációs helyzeti energia vagy egy valódi gázban a molekulák közötti vonzóerőből származó helyzeti energia), míg E_{hK} a külső kölcsönhatásokhoz tartozó helyzeti energia (például egy gáz molekuláinak gravitációs helyzeti energiája).

Mindezt behelyettesítve és átrendezve:

$$W_{\text{Bnk}} + W_{\text{Knk}} = \Delta E_{\text{m}} + \Delta E_{\text{hB}} + \Delta E_{\text{hK}},$$

majd bevezetve a pontrendszer teljes mechanikai energiájára az

$$E = E_{\text{m}} + E_{\text{hB}} + E_{\text{hK}}$$

jelölést, a pontrendszer energiaviszonyaira a következő összefüggést kapjuk:

$$\Delta E = W_{\text{Bnk}} + W_{\text{Knk}}. \quad (5.6)$$

Ha a pontrendszerben nincsen se külső, se belső nem konzervatív munkavégzés (vagy a munkavégzések összege nulla), akkor a pontrendszer teljes mechanikai energiája nem változik, állandó:

$$W_{\text{Bnk}} + W_{\text{Knk}} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad E = \text{állandó}. \quad (5.7)$$

Ez a *mechanikai energia megmaradás törvénye* pontrendszerre.

Fontos különbség az impulzusmegmaradás törvényéhez képest, hogy a rendszer teljes mechanikai energiáját nemcsak külső, hanem *belső* nem konzervatív erők munkája is meg tudja változtatni. (Például a pontrendszerhez tartozó testek közti súrlódás csökkentheti, vagy egy belső kémiai folyamat növelheti azt.)

5.3.1. Belső energia

A pontrendszer teljes mozgási energiája a rendszerhez tartozó tömegpontok mozgási energiájának összege:

$$E_{\text{m}} = \sum_{i=1}^n \frac{1}{2} m_i v_i^2.$$

Sok esetben érdemes a pontrendszert a pontrendszer tömegközéppontjával együtt mozgó (a tömegközépponthez rögzített) vonatkoztatási rendszerben vizsgálni. Ha ebben a K' rendszerben az m_i tömegpont sebessége \mathbf{v}'_i , akkor a Galilei-transzformáció (3.3) összefüggése alapján

$$\mathbf{v}_i = \mathbf{v}'_i + \mathbf{v}_{\text{TKP}}.$$

Ezt behelyettesítve a mozgási energia kifejezésébe, és azt rendezve:

$$\begin{aligned} E_{\text{m}} &= \sum_{i=1}^n \frac{1}{2} m_i (\mathbf{v}'_i + \mathbf{v}_{\text{TKP}})^2 = \sum_{i=1}^n \frac{1}{2} m_i v_i'^2 + \sum_{i=1}^n m_i \mathbf{v}'_i \mathbf{v}_{\text{TKP}} + \sum_{i=1}^n \frac{1}{2} m_i v_{\text{TKP}}^2 = \\ &= \frac{1}{2} m v_{\text{TKP}}^2 + \sum_{i=1}^n \frac{1}{2} m_i v_i'^2 + \mathbf{v}_{\text{TKP}} \sum_{i=1}^n m_i \mathbf{v}'_i. \end{aligned}$$

A kifejezés utolsó tagja nulla, mert a szumma éppen a tömegközéppont impulzusát adja meg a tömegközépponti rendszerben, ami értelemszerűen nulla. A megmaradó két tag közül az első épp akkora, mintha a pontrendszer teljes tömege a tömegközéppontban lenne, és annak sebességével mozogna. A másik tag viszont a tömegpontok tömegközépponthoz képesti mozgásából származik.

Az eredményből az is látszik, hogy a pontrendszer teljes mozgási energiája a tömegközépponti rendszerben minimális, de – az összimpulzussal ellentétben – általában nem nulla.

A pontrendszer teljes mechanikai energiája a mozgási energia és a helyzeti energiák (belső és külső) összege:

$$E = \frac{1}{2}mv_{\text{TKP}}^2 + \sum_{i=1}^n \frac{1}{2}m_i v_i'^2 + E_{\text{hB}} + E_{\text{hK}}.$$

A tömegpontok tömegközépponthoz viszonyított mozgásából származó mozgási energia és a pontrendszeren belüli kölcsönhatásokból eredő helyzeti energia összege a pontrendszer *belső energiája*:

$$E_{\text{B}} = \sum_{i=1}^n \frac{1}{2}m_i v_i'^2 + E_{\text{hB}}. \quad (5.8)$$

Ez a megkülönböztetés hasznos például a gázok leírásánál. A belső energia függ a részecskék sebességétől és a köztük lévő kölcsönhatásoktól, ugyanakkor egy tartályban lévő gáz belső energiája nem változik meg attól, ha a tartályt egy autóban szállítjuk, vagy felvisszük az emeletre.

5.4. A perdület

A *perdület* vagy *impulzuszórány* az impulzushoz hasonlóan fontos mennyiség a fizikában. A középiskolai tananyagban általában csak a forgó merev test perdületéről esik szó. A perdület azonban egyetlen tömegpontra is definiálható, vektoriális mennyiség.

Egy m tömegpont perdülete (a vonatkoztatási rendszer O kezdőpontjára vonatkoztatva) a test helyvektorának és impulzusának *vektoriális szorzata* (lásd az [A.1](#) függelék):

$$\mathbf{N} = \mathbf{r} \times \mathbf{p} = \mathbf{r} \times (m\mathbf{v}) = m\mathbf{r} \times \mathbf{v}. \quad (5.9)$$

Deriváljuk idő szerint az [\(5.9\)](#) kifejezést:

$$\frac{d\mathbf{N}}{dt} = \frac{d(\mathbf{r} \times \mathbf{p})}{dt} = \frac{d\mathbf{r}}{dt} \times \mathbf{p} + \mathbf{r} \times \frac{d\mathbf{p}}{dt} = \mathbf{v} \times \mathbf{p} + \mathbf{r} \times \mathbf{F}. \quad (5.10)$$

Felhasználtuk a szorzat deriválására vonatkozó szabályt (lásd az [A.2](#) függelék), a sebesség [\(1.1\)](#) definícióját és Newton II. törvényének impulzussal felírt [\(2.4\)](#) alakját. \mathbf{F} a tömegpontra ható *eredő* erő.

Az eredmény első tagja nulla, hiszen $\mathbf{v} \parallel \mathbf{p}$, és párhuzamos vektorok vektoriális szorzata nulla. A második tag az \mathbf{F} erő *forogatónyomatéka*, az erő támadáspontjához mutató helyvektor és az erő vektoriális szorzata (az erő *momentuma*):

$$\mathbf{M} = \mathbf{r} \times \mathbf{F}. \quad (5.11)$$

Az (5.10) kifejezésből tehát végül a tömegpont perdülete és a tömegpontra ható eredő forogatónyomaték között fennálló alapvető összefüggést kapjuk meg:

$$\frac{d\mathbf{N}}{dt} = \mathbf{M}. \quad (5.12)$$

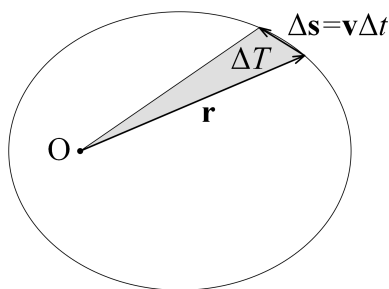
Az összefüggés párhuzamba vonható a tömegpont impulzusa és a tömegpontra ható erő közötti (2.4) összefüggéssel (Newton II. törvénye impulzussal megfogalmazva).

Ha a tömegpontra nem hat forogatónyomaték, akkor perdülete állandó. Ez a *perdületmegmaradás törvénye* tömegpontra. (Pontrendszerre az 5.5 szakaszban általánosítjuk.)

Kepler II. törvénye

Egy bolygóra (a többi bolygó csekély zavaró hatásától eltekintve) csak a Nap gravitációs vonzása hat. Ez az erő úgynevezett *centrális erő*: mindig egy adott O pont (a Nap középpontja) felé mutat. Emiatt a bolygóra ható (O pontra vonatkozó) forogatónyomaték nulla, és így a bolygó (O pontra vonatkozó) perdülete állandó:

$$\mathbf{F} \parallel \mathbf{r} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{M} = 0 \quad \Rightarrow \quad \mathbf{N} = \text{állandó}.$$



5.2. ábra. Kepler II. törvénye

Az 5.2 ábrán bejelöltük azt a területet, amelyet a bolygóhoz húzott vezérsugár egy rögzített Δt idő alatt „súrol”. Kis Δt esetén a terület jó közelítéssel a háromszög területe:

$$\Delta T = \frac{1}{2} |\mathbf{r} \times \Delta \mathbf{s}| = \frac{\Delta t}{2m} |\mathbf{r} \times (m\mathbf{v})| = \frac{\Delta t}{2m} N.$$

A Δt idő alatt súrolt terület tehát arányos a perdülettel, így azzal együtt időben *állandó*. Ez éppen Kepler II. törvénye (2.3 szakasz), amely a perdületmegmaradás következménye.

5.5. Pontrendszer perdülete – a perdületmegmaradás tétele

A pontrendszer tagjaira a belső és a külső erők is forgatónyomatékkal hatnak. Az m_i pontra ható forgatónyomatékok:

$$\mathbf{M}_{Bi} = \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n \mathbf{M}_{Bij} = \mathbf{r}_i \times \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n \mathbf{F}_{Bij}$$

$$\mathbf{M}_{Ki} = \mathbf{r}_i \times \mathbf{F}_{Ki}.$$

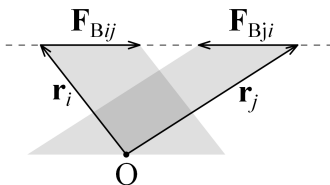
Írjuk fel a pontrendszer minden tagjára az (5.12) összefüggést, és az egyenleteket adjuk össze:

$$\frac{d\mathbf{N}}{dt} = \sum_{i=1}^n \frac{d\mathbf{N}_i}{dt} = \sum_{i=1}^n \mathbf{M}_i = \sum_{i=1}^n (\mathbf{M}_{Bi} + \mathbf{M}_{Ki}) = \sum_{i=1}^n \left(\mathbf{r}_i \times \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n \mathbf{F}_{Bij} \right) + \sum_{i=1}^n \mathbf{M}_{Ki}.$$

Az eredmény első tagja nulla, mert

$$\mathbf{r}_i \times \mathbf{F}_{Bij} = -\mathbf{r}_j \times \mathbf{F}_{Bji},$$

és ezek a forgatónyomatékok a kettős szummázáskor páronként kiejtik egymást.



5.3. ábra. A forgatónyomaték párok kiejtik egymást

A forgatónyomatékok egyenlősége nem olyan nyilvánvaló, mint az erők esetében. Az 5.3 ábrán az egyes erők forgatónyomatékának nagysága a paralelogrammák területével egyenlő, irányuk pedig az ábra síkjára merőleges, és egymással ellentétes. A két paralelogramma területe megegyezik, hiszen Newton III. törvénye miatt a két erő azonos nagyságú, ellentétes, és hatásvonaluk is megegyezik (és így a paralelogrammák alapja és magassága is egyenlő).

Legyen a külső erők forgatónyomatékának összege

$$\mathbf{M}_K = \sum_{i=1}^n \mathbf{M}_{Ki} = \sum_{i=1}^n (\mathbf{r}_i \times \mathbf{F}_{Ki}).$$

Ezt beírva:

$$\frac{d\mathbf{N}}{dt} = \mathbf{M}_K, \quad (5.13)$$

azaz a pontrendszer perdületének idő szerinti deriváltja egyenlő a külső erők forgatónyomatékának eredőjével.

Ha a pontrendszerre nem hat külső erő forgatónyomatéka, vagy a külső erők forgatónyomatékának eredője nulla, akkor a pontrendszer teljes perdülete állandó:

$$\mathbf{M}_K = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \mathbf{N} = \sum_{i=1}^n (m_i \mathbf{r}_i \times \mathbf{v}_i) = \text{állandó}. \quad (5.14)$$

Ez a *perdületmegmaradás törvénye* pontrendszerre.

Vegyük észre, hogy a rendszer teljes perdülete – az impulzushoz hasonlóan, és a mechanikai energiától eltérően – független a belső erőktől, az összperdületet a belső erők forgatónyomatéka nem változtathatja meg.

6. fejezet

Merev testek mozgása

6.1. A merev test modell

Az eddigiekben a testeket a lehető legegyszerűbben, tömegpontként írtuk le. Ez a modell azonban semmit se mond a testek méretéről, alakjáról és bonyolultabb mozgásformáiról. A *merev test* a valódi testek bonyolultabb modellje: figyelembe veszi, hogy a testnek alakja, kiterjedése, tömegeloszlása is van. Ugyanakkor a testek deformációjával ebben a modellben sem foglalkozunk: úgy tekintjük, hogy az alakja – a valóságos testekkel szemben – nem változhat. Ezt úgy is megfogalmazhatjuk, hogy a merev test bármely két pontjának egymáshoz viszonyított távolsága időben állandó.

A merev test helyzetét három (nem egy egyenesen fekvő) pontjának helyzete egyértelműen meghatározza. (Ha csak egy pontját rögzítenénk, akkor körülötte szabadon foroghatna. Ha egy másik pontot is rögzítünk, akkor már csak a két pontot összekötő egyenes körül fordulhat el. Egy harmadik, az összekötő egyenesen kívüli pont rögzítése már semmilyen mozgást nem enged meg.)

Egyetlen pont megadása térben *három* független paraméter (például három derékszögű koordináta) rögzítését jelenti. Ezt szokás úgy is megfogalmazni, hogy a tömegpont *szabadsági fokainak száma* $f = 3$. Három pont megadásához tehát kilenc adat szükséges. Ezek azonban a merev test esetében nem függetlenek egymástól, hiszen a három pont közötti három távolság adott, nem változhat! Így a merev test szabadsági fokainak száma $f = 9 - 3 = 6$, azaz a test helyzete *hat* független adattal jellemezhető.

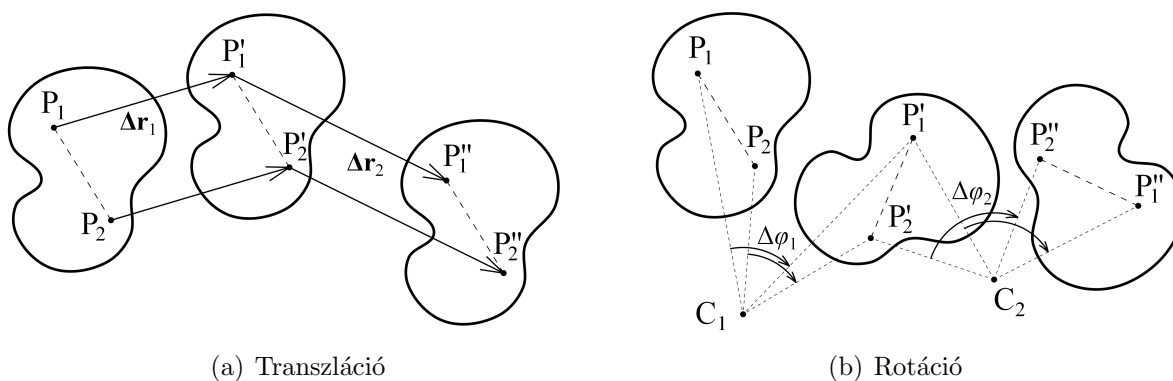
Ha a test nem mozoghat teljesen szabadon, akkor a szabadsági fokok száma a kényszerektől függően csökkenhet. Például egy rögzített felületen gördülő golyó szabadsági fokainak száma $f = 5$, mert középpontjának távolsága a felülettől nem változhat. A *pörgettyű* egyetlen pontja rögzített, körülötte teljesen szabadon foroghat, így szabadsági fokainak száma $f = 3$. A rögzített tengely körül forgó merev test szabadsági fokainak száma viszont mindössze $f = 1$.

6.1.1. Haladó és forgómozgás

A merev test általános mozgása nagyon bonyolult lehet, azonban mindig leírható elemi elmozdulások és elfordulások egymásutánjaként.

A haladó mozgás, más néven *transzláció* esetében a merev test minden pontjának ugyanakkora az elmozdulása (6.1(a) ábra). Ezért a merev test transzlációja leírható bármely pontjának transzlációjaként: ugyanúgy kezelhető, mint egyetlen tömegpont.

A forgómozgás, más néven *rotáció* esetében egy pillanatnyi forgástengely (két dimenzióban forgáscentrum) körül fordul el a test (6.1(b) ábra). Minden pontjának ugyanakkora a szögelfordulása. A forgástengely (forgáscentrum) azonban a mozgás során általában változik (három dimenzióban nemcsak a helye, hanem az iránya is).



6.1. ábra. Transzláció és rotáció

A merev test tetszőleges mozgása leírható elemi transzlációk és rotációk egymásutánjaként. Ennek bizonyításaként vizsgáljuk egy merev test tetszőleges P_i pontjának helyvektorát a K koordináta-rendszer mellett a test tetszőleges C pontjához rögzített K^C koordináta-rendszerben is. Ekkor a helyvektorok között felírható az

$$\mathbf{r}_i = \mathbf{r}_C + \mathbf{r}_i^C$$

összefüggés, ahol \mathbf{r}_i és \mathbf{r}_i^C a P pont helyvektora a K , illetve a K^C koordináta-rendszerben, \mathbf{r}_C pedig a C pont helyvektora a K rendszerben. Ha a P pont elmozdul, akkor elemi elmozdulása szintén felírható

$$d\mathbf{r}_i = d\mathbf{r}_C + d\mathbf{r}_i^C$$

alakban. A P pont távolsága a C ponttól azonban nem változhat (hiszen mindkettő a merev test egy-egy pontja), így az \mathbf{r}_i^C vektor csak foroghat. Ekkor viszont elemi megváltozása felírható a $d\varphi$ elemi szögelfordulás vektor segítségével:

$$d\mathbf{r}_i^C = d\varphi \times \mathbf{r}_i^C.$$

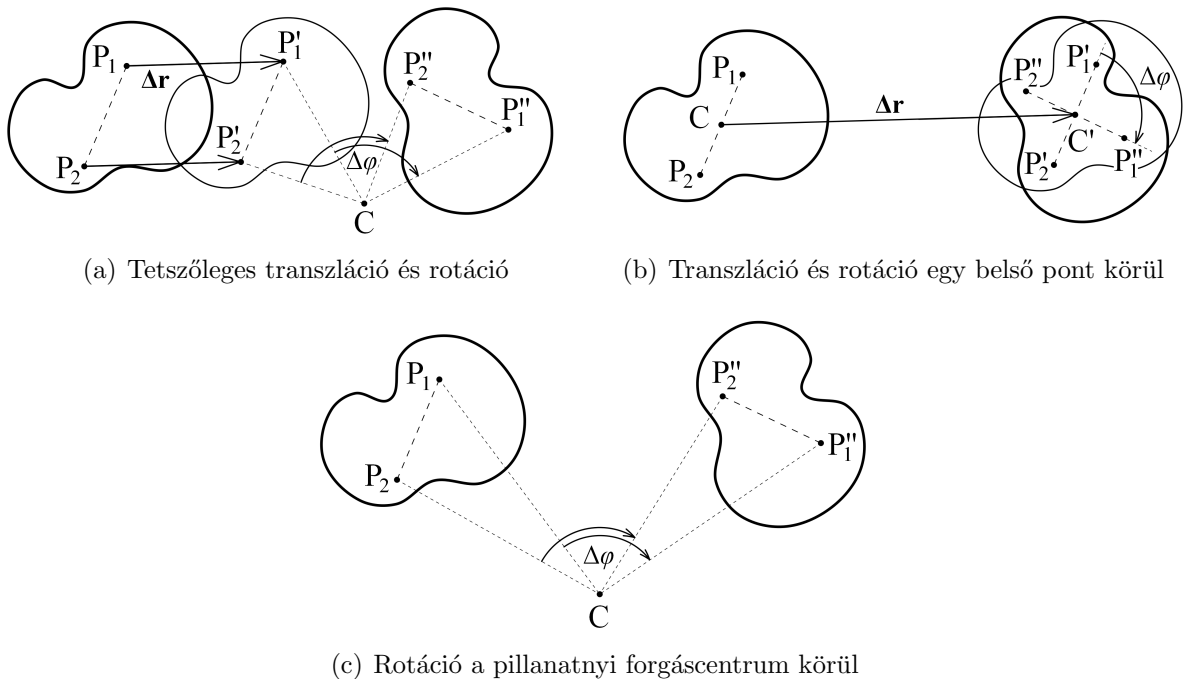
Ezt beírva az előző egyenletbe megkapjuk, hogy

$$d\mathbf{r}_i = d\mathbf{r}_C + d\boldsymbol{\varphi} \times \mathbf{r}_i^C,$$

azaz a merev test elemi elmozdulása valóban felbontható a C pont elemi translációjára és a test C pont körüli elemi rotációjára. Mivel általános esetben a $d\boldsymbol{\varphi}$ vektor iránya változik a mozgás során, a felbontást csak elemi mozgásokra lehet elvégezni.

A C pont megválasztása tetszőleges. A 6.2(a) és 6.2(b) ábrákon két különböző felbontás látható. Később látni fogjuk, hogy a forgás középpontjának sokszor hasznos a tömegközéppontot választani. Ilyenkor tehát a merev test mozgását a tömegközéppont haladó mozgásának és a tömegközéppont körüli forgómozgásnak a szuperpozíciójaként írjuk le.

A 6.2(c) ábrán látható, hogy síkmozgás esetén – a tiszta translációt kivéve – mindig található olyan C pont, hogy az elemi mozgás tisztán rotációként írható le. Feladatok megoldásánál ez is sokszor hasznos választás. Az elfordulás középpontja a *pillanatnyi forgáscentrum*. Természetesen a mozgás során általában ez is változik.



6.2. ábra. Mozgás felbontása translációra és rotációra

6.1.2. A merev test mint pontrendszer

A merev test felfogható speciális pontrendszerként, így alkalmazhatjuk rá a pontrendszerekre megfogalmazott törvényeket és összefüggéseket.

Ha a merev testet kicsi ΔV_i térfogatú darabokra osztjuk, akkor teljes térfogata és tömege:

$$V = \sum_i \Delta V_i \quad \text{és} \quad \sum_i \Delta m_i = \sum_i \rho_i \Delta V_i,$$

ahol ρ_i az i . kis darab (átlagos) sűrűsége. Finomítva a felbontást a tömeg az

$$m = \int_V \rho(\mathbf{r}) dV$$

térfogati integrállal adható meg. Homogén test esetében természetesen $m = \rho V$.

A merev test tömegközéppontjába mutató helyvektort a pontrendszereknél megismert definíció alapján ugyanígy térfogati integrálokkal írhatjuk fel:

$$\mathbf{r}_{\text{TKP}} = \frac{\int_V \mathbf{r} \rho(\mathbf{r}) dV}{\int_V \rho(\mathbf{r}) dV} = \frac{1}{m} \int_V \mathbf{r} \rho(\mathbf{r}) dV.$$

6.2. Merev testek statikája

A merev test akkor lehet egyensúlyban, ha impulzusa és perdülete se változik. Így a pontrendszerekre levezetett (5.5) és (5.14) megmaradási tételek alapján az egyensúly feltétele:

$$\sum \mathbf{F} = 0 \quad \text{és} \quad \sum \mathbf{M} = 0. \quad (6.1)$$

(A külső erőkre utaló K indexet elhagyjuk, hiszen itt eleve csak a külső erőkkel foglalkozunk. A belső erők – amelyek egyben tartják a testet – munkát se végeznek, hiszen a merev testen belül nincs relatív elmozdulás.)

A forgatónyomatékok összege egy tetszőleges P pontra vonatkoztatva:

$$\sum_i \mathbf{M}_i^P = \sum_i \mathbf{r}_i^P \times \mathbf{F}_i,$$

egy másik tetszőleges Q pontra vonatkoztatva pedig:

$$\sum_i \mathbf{M}_i^Q = \sum_i \mathbf{r}_i^Q \times \mathbf{F}_i = \sum_i (\mathbf{r}_i^P + \mathbf{r}_Q^P) \times \mathbf{F}_i = \sum_i \mathbf{r}_i^P \times \mathbf{F}_i + \mathbf{r}_{PQ} \times \sum_i \mathbf{F}_i,$$

ahol \mathbf{r}_Q^P a Q pontból a P pontba mutató vektor. Látható, hogy

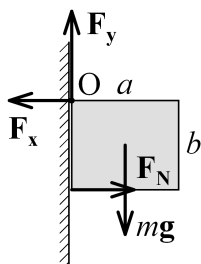
$$\sum \mathbf{F} = 0 \quad \Rightarrow \quad \sum \mathbf{M}^Q = \sum \mathbf{M}^P,$$

azaz ha az erők eredője 0, akkor a forgatónyomatékokat bármely pontra felírhatjuk, ugyanazt az eredményt kapjuk.

6.2.1. Statikai feladatok

Falra erősített polc

Egy szöggel a falra akasztott polcra ható erők a 6.3 ábrán láthatók.



6.3. ábra. Falra szerelt polc egyensúlya

A testre ható nehézségi erő miatt a szögnyél nyilván fel kell lépnie egy függőleges tartóerőnek, a forgatónyomaték-egyensúly miatt viszont egy húzóerő is hat a szögre. A vízszintes erők egyensúlyát a polc alján fellépő nyomóerő biztosítja. Alkalmazva a (6.1) egyenleteket (a forgatónyomatékokat az O felfüggesztési pontra felírva):

$$\begin{aligned}F_y &= mg \\F_x &= F_N \\mg \frac{a}{2} &= F_N b.\end{aligned}$$

Ebből

$$F_x = F_N = mg \frac{a}{2b},$$

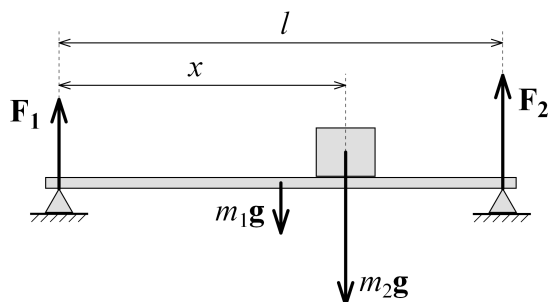
azaz a szögre ható húzóerő (ami kitépheti a szöveget a falból) annál nagyobb, minél szélesebb és minél alacsonyabb a polc. Így b növelésével ez az erő csökkenthető.

Kéttámaszú tartó

A kéttámaszú tartó a 6.4 ábrán látható. Az m_1 tömegű deszka két, egymástól l távolságra lévő pontban van alátámasztva. A deszkára a nehézségi erőn kívül a ráhelyezett tárgy súlya és a két támaszban fellépő tartóerő hat.

Írjuk fel a függőleges erők és a forgatónyomatékok egyensúlyát! A forgatónyomatékokat a baloldali támaszpontra vonatkoztatjuk (így a forgatónyomaték-egyenletben csak az egyik ismeretlen erő szerepel):

$$\begin{aligned}m_1 g + m_2 g &= F_1 + F_2 \\m_1 g \frac{l}{2} + m_2 g x &= F_2 l.\end{aligned}$$



6.4. ábra. Kéttámaszú tartó

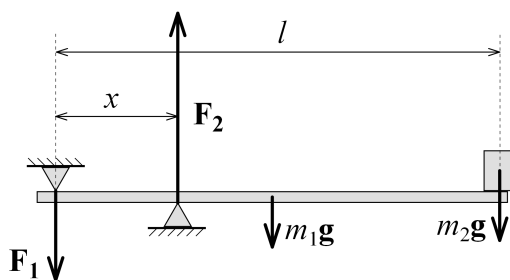
A második egyenletből közvetlenül adódik F_2 , és ezt beírva az első egyenletbe adódik F_1 is:

$$F_1 = \frac{1}{2}m_1g + \left(1 - \frac{x}{l}\right)m_2g$$

$$F_2 = \frac{1}{2}m_1g + \frac{x}{l}m_2g.$$

Látható, hogy ha a tárgy a középponttól jobbra van ($x > l/2$), akkor – a szemlélettel egyezően – a jobb oldali tartót nyomja nagyobb erő ($F_2 > F_1$).

A trambulín esetében (6.5 ábra) teljesen hasonlóan felírhatók és megoldhatók az egyenletek.



6.5. ábra. Trambulín

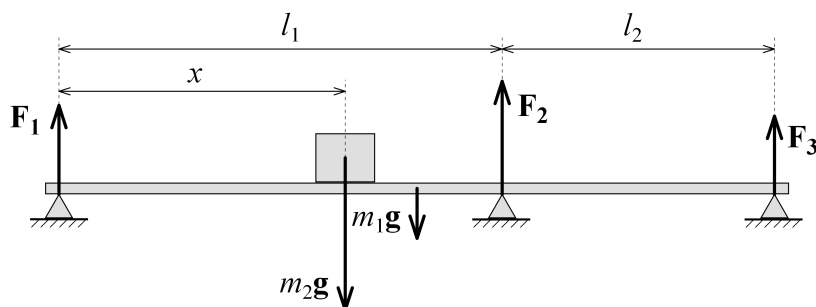
$$F_1 = \left(\frac{l}{2x} - 1\right)m_1g + \left(\frac{l}{x} - 1\right)m_2g$$

$$F_2 = \frac{l}{2x}m_1g + \frac{l}{x}m_2g$$

Most az egyik tartóerő lefelé mutat. Ha a két támasz közötti x távolság sokkal kisebb, mint a deszka l hossza, akkor a támaszoknál kis terhelés esetén is meglehetősen nagy erők léphetnek fel.

Háromtámaszú tartó

A háromtámaszú tartónál (6.6 ábra) a deszkát három ponton támasztjuk alá.



6.6. ábra. Háromtámaszú tartó

Írjuk fel az előző feladathoz hasonlóan a függőleges erők és a forgatónyomatékok egyensúlyát! A forgatónyomatékokat most is a baloldali támaszpontra vonatkoztatjuk:

$$m_1g + m_2g = F_1 + F_2 + F_3$$

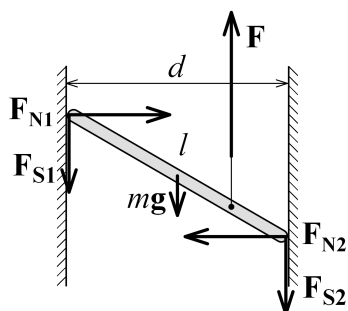
$$m_1g \frac{l_1 + l_2}{2} + m_2gx = F_2l_1 + F_3(l_1 + l_2).$$

Most is csak két egyenletünk van, de három ismeretlenünk! A feladatnak így végtelen sok megoldása van, az elrendezés – a merev test modell használatával – *statikailag határozatlan*. Valóban, merev deszka esetén, ha a középső tartót *egy egészen kicsit* lejjebb vinnénk, akkor a deszka nem is érne hozzá, és így erő se hatna rá. Ez a feladat tehát a merev test modell korlátait mutatja.

A feladatot csak akkor lehetne megoldani, ha figyelembe vennénk a test deformációját. A valóságban, ha a középső tartót kivesszük, a deszka – rugalmas testként – behajlik. A középső tartóerőt az alapján lehet meghatározni, hogy mekkora erő hatására lesz a behajlás nulla.

Befeszülés

Érdekes statikai feladat látható a 6.7 ábrán. Az egymástól d távolságra lévő két függőleges fal közé $l > d$ hosszúságú, m tömegű rudat teszünk. A rúd és a fal között μ a tapadási súrlódási együttható. A rudat a jobb falhoz közelebbi negyedénél egy fonállal, függőleges F erővel próbáljuk felfelé kihúzni. Mekkora erő kell ehhez?



6.7. ábra. Befeszülés

Vizsgáljuk azt, hogy mekkora F erő esetén lehet még egyensúly! Írjuk fel most is az erők és a forgatónyomatékok egyensúlyát! A forgatónyomatékokat a rúd közepére vonatkoztatjuk. Felírjuk mindkét oldalon a tapadás feltételét is:

$$\begin{aligned}
 F_{N1} &= F_{N2} \\
 F &= mg + F_{S1} + F_{S2} \\
 F \frac{d}{4} &= (F_{N1} + F_{N2}) \frac{\sqrt{l^2 - d^2}}{2} + (F_{S2} - F_{S1}) \frac{d}{2} \\
 F_{S1} &\leq \mu F_{N1} \\
 F_{S2} &\leq \mu F_{N2}.
 \end{aligned}$$

A feladat most is határozatlan (a két tapadó súrlódás miatt), de ha feltételezzük, hogy $F_{N1} = F_{N2} = F_N$ miatt $F_{S1} = F_{S2} = F_S$ is igaz, akkor megoldható:

$$\begin{aligned}
 F_S &= \frac{F - mg}{2} \\
 F_N &= \frac{Fd}{4\sqrt{l^2 - d^2}}.
 \end{aligned}$$

Felírva és átrendezve az $F_S \leq \mu F_N$ feltételt a következő egyenlőtlenséget kapjuk:

$$F \left(\mu d - 2\sqrt{l^2 - d^2} \right) \geq -2mg\sqrt{l^2 - d^2}.$$

Ha $2\sqrt{l^2 - d^2} < \mu d$ (azaz l csak kicsit nagyobb, mint d), F tetszőlegesen nagy lehet:

$$F \geq \frac{-2mg\sqrt{l^2 - d^2}}{\mu d - 2\sqrt{l^2 - d^2}}.$$

Ez a *befeszülés* jelensége: hiába növeljük F értékét, a forgatónyomaték-egyensúly miatt egyre nagyobb lesz a nyomóerő, és így a súrlódási erő is. Tehát semekkora erővel sem tudjuk kihúzni a rudat! Természetesen, ez csak addig igaz, amíg a test merev testnek tekinthető. Ha az erő nagyon nagy, akkor a test deformálódik, vagy eltörik.

6.3. Rögzített tengely körüli forgás

A merev test haladó mozgása leírható mint egyetlen pontjának (például tömegközéppontjának) mozgása, így a merev test haladó mozgásának dinamikája megegyezik a pontszerű test dinamikájával. A továbbiakban ezért csak a merev test forgásával foglalkozunk.

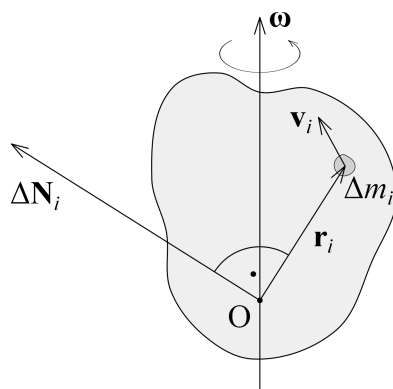
A merev testek forgásának alapegyenletét a pontrendszerekre levezetett (5.13) összefüggés alapján írhatjuk fel:

$$\frac{d\mathbf{N}}{dt} = \mathbf{M}. \quad (6.2)$$

(A külső forgatónyomatékokra utaló κ indexet ismét elhagyjuk, hiszen a merev testnél eleve csak a külső erőkkel és forgatónyomatékokkal foglalkozunk.)

A merev test forgómozgása nagyon bonyolult lehet, hiszen nemcsak a forgás szögsebessége, hanem a forgástengely iránya is változhat. Először a legegyszerűbb esettel, a rögzített tengely körüli forgással foglalkozunk. A tengely csapágyazásában fellépő erők és forgatónyomatékok megakadályozzák a test haladó mozgását és a forgástengely megváltozását is.

6.3.1. A merev test perdülete



6.8. ábra. Rögzített tengely körül forgó merev test perdülete

A 6.8 ábrán látható merev test kicsiny Δm_i tömegű darabjához az \mathbf{r}_i helyvektor mutat. Az egész test $\boldsymbol{\omega}$ szögsebességgel forog, így a Δm_i tömegpont sebessége:

$$\mathbf{v}_i = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_i,$$

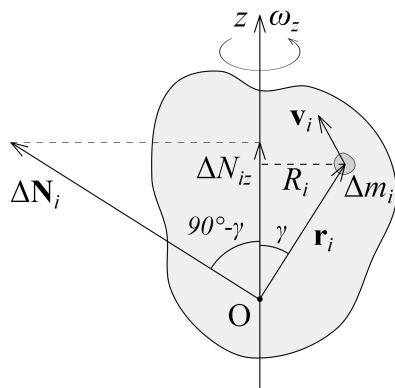
perdülete pedig:

$$\Delta \mathbf{N}_i = \mathbf{r}_i \times \Delta \mathbf{p}_i = \Delta m_i \mathbf{r}_i \times \mathbf{v}_i = \Delta m_i \mathbf{r}_i \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_i).$$

A $\mathbf{v}_i = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_i$ vektor merőleges az ábra síkjára, így $\Delta \mathbf{N}_i$ az ábra síkjában van, és mivel merőleges az \mathbf{r}_i vektorra, (általában) nem a forgástengely irányába mutat. Az egész test perdületét a kicsiny darabok perdületvektorainak összege adja:

$$\mathbf{N} \approx \sum_i \Delta \mathbf{N}_i,$$

ezért a merev test perdületvektora – szimmetrikus vagy gondosan kiegyenlített tömegeloszlású testek kivételével – általában szintén nem a forgástengely irányába mutat. A perdületvektor a testtel együtt forog, így általános esetben állandó szögsebesség esetén se állandó, folyamatosan változik az iránya. Az ehhez szükséges (tengelyre merőleges irányú) forgatónyomatékok rögzített tengely esetén a csapágyakban fellépő erők biztosítják, amelyekkel egyelőre nem kívánunk foglalkozni, ezért most csak a perdület *forgástengellyel párhuzamos komponensét* vizsgáljuk.



6.9. ábra. A perdület tengely irányú komponense

Legyen a forgástengely a koordináta-rendszerünk z -tengelye. Ekkor $|\boldsymbol{\omega}| = \omega = \omega_z$. A 6.9 ábra alapján:

$$v_i = |\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_i| = \omega_z r_i \sin \gamma = R_i \omega_z,$$

ahol R_i a Δm_i tömegpont távolsága a z -tengelytől. \mathbf{r}_i és \mathbf{v}_i merőlegesek egymásra, így:

$$\Delta N_i = \Delta m_i |\mathbf{r}_i \times \mathbf{v}_i| = \Delta m_i r_i v_i = \Delta m_i r_i R_i \omega_z$$

és

$$\Delta N_{iz} = \Delta N_i \cos(90^\circ - \gamma) = \Delta N_i \sin \gamma = \Delta m_i R_i^2 \omega_z.$$

A merev test perdületének tengelyirányú komponensét a kicsiny darabok tengelyirányú perdületének összegzésével kapjuk:

$$N_z \approx \sum_i \Delta N_{iz} = \omega_z \sum_i \Delta m_i R_i^2.$$

A felbontás minden határon túli finomításakor ($\Delta m_i \rightarrow 0$) a szummázás helyett integrált írhatunk:

$$N_z = \omega_z \int_V \rho(\mathbf{r}) R^2 dV.$$

A tengelyirányú perdület tehát arányos a szögsebességgel:

$$N_z = \Theta_z \omega_z, \quad (6.3)$$

ahol a Θ_z arányossági tényező, amely csak a test forgástengely körüli tömegeloszlásától függ, a test z -tengelyre vonatkoztatott *tehetetlenségi nyomatéka*:

$$\Theta_z \approx \sum_i \Delta m_i R_i^2,$$

illetve

$$\Theta_z = \int_V \rho(\mathbf{r}) R^2 dV. \quad (6.4)$$

A (6.2) és a (6.3) egyenletek alapján:

$$M_z = \frac{dN_z}{dt} = \frac{d(\Theta_z \omega_z)}{dt} = \Theta_z \frac{d\omega_z}{dt} = \Theta_z \beta_z. \quad (6.5)$$

(Itt felhasználtuk, hogy a merev test tehetetlenségi nyomatéka időben állandó.)

Ha a testre nem hat z -irányú forgatónyomaték, akkor a test z -irányú perdülete nem változik, időben állandó:

$$M_z = 0 \quad \Leftrightarrow \quad N_z = \Theta_z \omega_z = \text{állandó}. \quad (6.6)$$

Kísérlet: Forgószék

A videókon [7] látható forgószékes kísérletekben a forgó rendszer nem egy merev test, de a kísérletek jól szemléltetik a perdület megmaradását.

A kísérleti alany beül a forgószékbe, súlyzókat vesz a kezébe, és karjait, lábait kezdetben kinyújtja. Ebben a testtartásban lassan megforgatjuk, majd magára hagyjuk. Amikor a súlyzókat és a lábait magához húzza, forgása felgyorsul. Ha újra kinyújtja, a forgás ismét lelassul (**Perdület megmaradás I.**).

Ezután a nyugalomba lévő kísérletező kezébe megpörgetett, függőleges tengelyű biciklikereket adunk. Ekkor semmi nem történik. Amikor viszont a biciklikerek tengelyét 180° -kal elforgatja, a forgószék forogni kezd. A tengely visszaforgatásakor a szék ismét megáll (**Perdület megmaradás II.**).

Végül a kísérleti alany nyugalmi helyzetben egy szintén nem forgó biciklikereket vesz a kezébe. Amikor a függőleges tengelyű biciklikereket megpörgeti, a forgószelek az ellenkező irányba kezd forogni. A kerék lefékezésekor a szék ismét megáll (**Perdület megmaradás III.**).

Magyarázat: A kis súrlódásnak köszönhetően a forgószelekből, a kísérletezőből és a súlyzókból, illetve a biciklikerekből álló rendszerre alig hat (függőleges irányú) külső forgatónyomaték, így perdületének (függőleges komponense) közel állandó. Az első kísérletben a kar és a láb behúzásakor lecsökken a rendszer tehetetlenségi nyomatéka, és emiatt a (6.6) összefüggésnek megfelelően megnő a szögsebessége. A második és harmadik kísérletben a biciklikerek perdületének megváltoztatásakor a forgószelek perdülete ezzel ellentétesen változik, hogy a rendszer teljes perdülete állandó maradjon. ♦

6.3.2. A tehetetlenségi nyomaték meghatározása

Egyetlen tömegpont tehetetlenségi nyomatéka:

$$\Theta = mr^2,$$

ahol r az m tömegű tömegpont távolsága a tengelytől. Több tömegpontból álló test esetében a tehetetlenségi nyomaték összegzéssel határozható meg:

$$\Theta = \sum m_i r_i^2,$$

ahol r_i az m_i tömegpont távolsága a tengelytől.

Egy tetszőleges merev test adott tengelyre vonatkoztatott tehetetlenségi nyomatéka a (6.4) definiáló képlet alapján számítható ki. Homogén testek esetében a ρ sűrűség nem függ a helytől, és így az integrál elé kiemelhető:

$$\Theta = \rho \int_V r^2 dV.$$

Az integrálban r a dV térfogatelem távolsága a kiválasztott tengelytől.

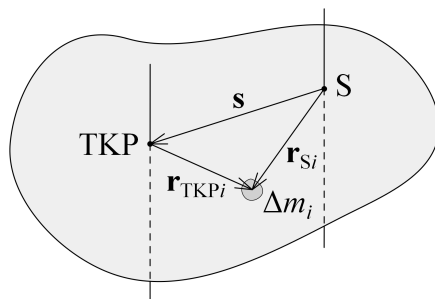
Példaképp határozzuk meg egy homogén, tömör henger tehetetlenségi nyomatékát a szimmetriatengelyére vonatkoztatva! Az integrálásnál az R sugarú, h magasságú, ρ sűrűségű, $m = \rho h R^2 \pi$ tömegű hengert dr vastagságú, $dV = 2r\pi h dr$ térfogatú hengergyűrűkre bontjuk fel:

$$\Theta = \rho \int_V r^2 dV = \rho \int_0^R r^2 \cdot 2r\pi h dr = 2\pi\rho h \int_0^R r^3 dr = 2\pi\rho h \frac{R^4}{4} = \frac{1}{2}\rho h R^2 \pi \cdot R^2 = \frac{1}{2}mR^2.$$

Egyszerűbb testek szimmetriatengelyre vonatkoztatott tehetetlenségi nyomatéka táblázatokban is megtalálható [24].

Steiner-tétel

Ha ismert egy test tehetetlenségi nyomatéka egy *tömegközéppontján* átmenő tengelyre vonatkozóan, akkor könnyen meghatározható a tehetetlenségi nyomaték bármely más, az adott tengellyel párhuzamos tengelyre vonatkozóan is. Mivel a tehetetlenségi nyomaték meghatározásánál csak a tengelytől mért távolságok számítanak, elég egy (a tengelyekre merőleges) síkidomot vizsgálnunk.



6.10. ábra. Steiner-tétel

A 6.10 ábra alapján a merev test Δm_i darabjának tehetetlenségi nyomatéka a tömegközépponton átmenő tengelyre vonatkoztatva:

$$\Delta\Theta_{\text{TKP}i} = \Delta m_i r_{\text{TKP}i}^2,$$

egy tetszőleges S ponton átmenő, az előzővel párhuzamos tengelyre vonatkoztatva pedig:

$$\Delta\Theta_{S_i} = \Delta m_i r_{S_i}^2 = \Delta m_i (\mathbf{s} + \mathbf{r}_{\text{TKP}i})^2 = \Delta m_i (s^2 + 2\mathbf{s}\mathbf{r}_{\text{TKP}i} + r_{\text{TKP}i}^2).$$

Az S ponton átmenő tengelyre vonatkoztatott tehetetlenségi nyomaték az egyes darabok tehetetlenségi nyomatékának összegzésével írható fel:

$$\Theta_S = \sum_i \Delta\Theta_{S_i} = s^2 \sum_i \Delta m_i + 2\mathbf{s} \sum_i \Delta m_i \mathbf{r}_{\text{TKP}i} + \sum_i \Delta m_i r_{\text{TKP}i}^2.$$

Az első tagban a szummázás a test tömegét adja meg, a harmadik tag pedig éppen a test tehetetlenségi nyomatéka a tömegközéppontra vonatkoztatva. A második tag nulla, hiszen az összegzés éppen a tömegközéppontból a tömegközéppontba mutató helyvektor m -szeresét adja. Ennek alapján már felírhatjuk a *Steiner-tételt*:

$$\Theta_S = m s^2 + \Theta_{\text{TKP}}. \quad (6.7)$$

Az összefüggés csak párhuzamos tengelyekre vonatkozó tehetetlenségi nyomatékok meghatározására használható! Különböző irányú tengelyekre vonatkozó tehetetlenségi nyomatékok kapcsolatáról a 6.5.1 szakaszban lesz szó.

A Steiner-tételből az is következik, hogy adott irányú tengelyek közül a tömegközépponton átmenő tengelyre vonatkoztatva minimális a tehetetlenségi nyomaték.

6.3.3. Forgó merev test mozgási energiája

A forgó merev test mozgási energiáját szokás „forgási energiá”-nak is nevezni, de – mint hamarosan látni fogjuk – ezzel a kifejezéssel óvatosan kell bánni.

A forgó merev test mozgási energiáját a pontrendszereknél megismert módon, a Δm_i kicsiny tömegelemek mozgási energiájának összegzésével határozhatjuk meg. A tengely körül forgó merev test egyes pontjainak sebessége azonban nem független, kifejezhető a forgás ω szögsebességével és a kicsiny tömeg tengelytől mért R_i távolságával:

$$v_i = \omega R_i .$$

Ezt és a tehetetlenségi nyomaték (6.4) definiáló képletét felhasználva a rögzített tengely körül forgó test mozgási energiája (a „forgási energia”):

$$E_m = \sum_i \frac{1}{2} \Delta m_i v_i^2 = \sum_i \frac{1}{2} \Delta m_i \omega^2 R_i^2 = \frac{1}{2} \omega^2 \sum_i \Delta m_i R_i^2 = \frac{1}{2} \Theta \omega^2 . \quad (6.8)$$

Ha a test haladó és forgómozgást is végez, akkor szokás a mozgási energiát a „haladó mozgási energia” és a „forgási energia” összegeként felírni. Ez azonban csak bizonyos speciális esetekben jogos, általános esetben azonban nem!

Mint korábban láttuk, egy merev test mozgása (a tiszta translációt kivéve) bármely pillanatban végtelen sok módon bontható fel haladó és forgó mozgás összegére. Írjuk le a mozgást teljesen általánosan úgy, hogy a test egy kiválasztott (tetszőleges) O pontja körül forog ω szögsebességgel, miközben az O pont \mathbf{v}_0 sebességgel mozog a vonatkoztatási rendszerhez képest.

Ekkor a test O-hoz viszonyított \mathbf{r}_i helyvektorú pontja $\mathbf{v}_i = \mathbf{v}_0 + \omega \times \mathbf{r}_i$ sebességgel mozog a vonatkoztatási rendszerhez viszonyítva. A mozgási energiát most is a pontrendszereknél megismert módon, a Δm_i kicsiny tömegelemek mozgási energiájának összegzésével határozhatjuk meg:

$$\begin{aligned} E_m &= \sum_i \frac{1}{2} \Delta m_i (\mathbf{v}_0 + \omega \times \mathbf{r}_i)^2 = \sum_i \frac{1}{2} \Delta m_i [v_0^2 + 2\mathbf{v}_0 (\omega \times \mathbf{r}_i) + (\omega \times \mathbf{r}_i)^2] = \\ &= \sum_i \frac{1}{2} \Delta m_i v_0^2 + \sum_i \Delta m_i \mathbf{v}_0 (\omega \times \mathbf{r}_i) + \sum_i \frac{1}{2} \Delta m_i (\omega \times \mathbf{r}_i)^2 . \end{aligned}$$

Az első tag:

$$\sum_i \frac{1}{2} \Delta m_i v_0^2 = \frac{1}{2} m v_0^2 .$$

A második tagot a vektorok vegyes szorzatára érvényes azonosság (A.1 függelék) és a tömegközéppont definíciójának felhasználásával alakíthatjuk át:

$$\sum_i \Delta m_i \mathbf{v}_0 (\omega \times \mathbf{r}_i) = \sum_i \Delta m_i \mathbf{r}_i (\mathbf{v}_0 \times \omega) = m \mathbf{r}_{\text{TKP}} (\mathbf{v}_0 \times \omega) .$$

A harmadik tagban a 6.9 ábra alapján felhasználjuk az $|\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_i| = R_i \omega$ azonosságot, valamint a tehetetlenségi nyomaték definiáló képletét, így:

$$\sum_i \frac{1}{2} \Delta m_i (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_i)^2 = \frac{1}{2} \sum_i \Delta m_i R_i^2 \omega^2 = \frac{1}{2} \Theta_O \omega^2,$$

ahol Θ_O az O ponton átmenő, $\boldsymbol{\omega}$ vektorral párhuzamos tengelyre vonatkozó tehetetlenségi nyomaték.

Ezeket behelyettesítve a haladó és forgó mozgást is végző test mozgási energiája:

$$E_m = \frac{1}{2} m v_0^2 + m \mathbf{r}_{\text{TKP}} (\mathbf{v}_0 \times \boldsymbol{\omega}) + \frac{1}{2} \Theta_O \omega^2.$$

Az első tag a „haladó mozgási energia”, mintha az egész test pontszerű testként az O pont \mathbf{v}_0 sebességével haladna. A harmadik tag a „forgási energia” – ω szögsebességgel és az O-ra vonatkoztatott tehetetlenségi nyomatékkal számolva. Azonban van egy középső „vegyes”, a haladó és a forgómozgást is tartalmazó tag is, ami általános esetben nem nulla!

Eszerint általában nem bontható fel a mozgási energia „haladó mozgási” és „forgási” tagra. Vizsgáljuk meg, hogy milyen esetekben jogos mégis ez az eljárás, azaz mikor lesz a középső tag nulla!

Vektorok vegyes szorzata összesen hét esetben lesz 0: ha valamelyik vektor nullvektor, ha bármely két vektor párhuzamos, vagy ha a három vektor egy síkban fekszik (komplanáris). Nézzük sorban, mit jelent ez a mi esetünkben!

Ha $\mathbf{r}_{\text{TKP}} = 0$, akkor az O pont a test tömegközéppontja. Tehát ha a mozgást a tömegközéppont haladó mozgására és a merev test tömegközéppont körüli forgómozgására bontjuk fel, akkor a mozgási energia valóban számítható a haladó és forgó mozgási energia összegeként. Legtöbbször ezt a felbontást használjuk

Ha $\mathbf{v}_0 = 0$, akkor az O pont a *pillanatnyi forgáscentrum*. Ilyenkor a mozgást tiszta forgómozgásként írjuk le, és a mozgási energia megegyezik az O-ra vonatkoztatott forgási energiával. Sok esetben célszerű ez a választás is. (Az O pont általában nem a tömegközéppont, az O-ra vonatkoztatott tehetetlenségi nyomatékot a Steiner-tétel segítségével lehet meghatározni.)

Ha $\boldsymbol{\omega} = 0$, akkor a test nem forog, csak haladó mozgást végez. Mozgási energiája a test tömegéből és bármely pontjának sebességéből kiszámítható.

Ha $\mathbf{r}_{\text{TKP}} \parallel \boldsymbol{\omega}$, akkor a tömegközéppont rajta van a forgástengelyen. A tömegközéppont is \mathbf{v}_0 sebességgel halad, a felbontás ugyanúgy jogos, mint az első esetben.

Ha $\mathbf{v}_0 \parallel \boldsymbol{\omega}$, akkor a merev test csavarmozgást végez. Érdekes módon ilyenkor is eltűnik a középső tag, és jogos a felbontás.

A maradék két lehetőségnek, tehát ha $\mathbf{r}_{\text{TKP}} \parallel \mathbf{v}_0$, vagy ha a három vektor egy síkban van, nincs ilyen szemléletes jelentése, mindenesetre a középső tag ilyenkor is 0.

Minden más esetben viszont számolni kell a középső „vegyes” taggal is!

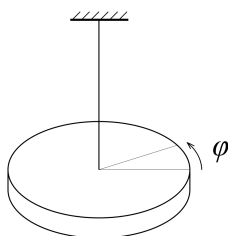
6.4. A merev test síkmozgása

A merev test síkmozgásakor a szögsebességvektor merőleges a haladó mozgás irányára, és így a test minden pontja síkban mozog.

6.4.1. Ingamozgás

Torziós inga

A torziós inga egy rugalmas szátra akasztott merev test, amely függőleges tengely körül elfordulhat (6.11 ábra).



6.11. ábra. Torziós inga

Az elfordulás hatására a szálaban visszatérítő nyomaték lép fel (okairól a 7.2.2 szakaszban lesz szó):

$$M = -D^* \varphi .$$

A D^* állandó neve direkciós nyomaték, mértékegysége Nm.

Felhasználva a forgómozgás (6.5) alapegyenletét, a forgatónyomaték:

$$M = \Theta \beta = \Theta \frac{d^2 \varphi}{dt^2} ,$$

ahol Θ a merev test tehetetlenségi nyomatéka a felfüggesztés tengelyére vonatkoztatva.

A két kifejezésből Θ -val való osztás után megkapjuk a torziós inga mozgásegyenletét:

$$\frac{d^2 \varphi}{dt^2} = -\frac{D^*}{\Theta} \varphi .$$

A mozgásegyenlet ugyanolyan, mint a harmonikus rezgés mozgásegyenlete, így a megoldása is ugyanolyan:

$$\varphi(t) = \varphi_0 \sin(\omega t + \alpha) ,$$

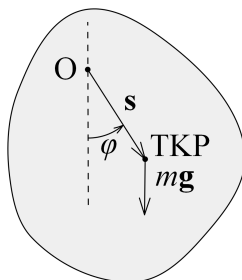
ahol

$$\omega = \sqrt{\frac{D^*}{\Theta}}$$

a torziós rezgés körfrekvenciája. A φ_0 maximális kitérés és az α kezdőfázis a kezdeti feltételektől függ.

Fizikai inga

A fizikai inga egy súlypontja felett felfüggesztett merev test, amely szabadon elfordulhat egy vízszintes tengely körül (videó[8]).



6.12. ábra. Fizikai inga

Ha az ingát kitérítjük egyensúlyi helyzetéből, akkor a nehézségi erő hatására egy

$$\mathbf{M} = \mathbf{s} \times m\mathbf{g}$$

visszatérítő nyomaték lép fel. A 6.12 ábráról leolvasható, hogy

$$M = -mgs \sin \varphi.$$

Ugyanakkor a forgómozgás alapegyenlete szerint

$$M = \Theta_O \beta = \Theta_O \frac{d^2 \varphi}{dt^2},$$

ahol Θ_O az O ponton átmenő tengelyre vonatkoztatott tehetetlenségi nyomaték. Ebből felírhatjuk a fizikai inga mozgásegyenletét:

$$\frac{d^2 \varphi}{dt^2} = -\frac{mgs}{\Theta_O} \sin \varphi$$

A differenciálegyenlet nemlineáris, de kis kitérés esetén alkalmazhatjuk a $\sin \varphi \approx \varphi$ közelítést, amivel már az előző feladathoz hasonló differenciálegyenletet kapunk:

$$\frac{d^2 \varphi}{dt^2} = -\frac{mgs}{\Theta_O} \varphi,$$

melynek megoldása ismét szinuszos rezgés:

$$\varphi(t) = \varphi_0 \sin(\omega t + \alpha),$$

A rezgés körfrekvenciája:

$$\omega = \sqrt{\frac{mgs}{\Theta_O}} = \sqrt{\frac{mgs}{\Theta_{\text{TKP}} + ms^2}}.$$

Matematikai inga

A matematikai inga vagy fonálinga egy vékony l hosszúságú fonálra akasztott m tömegű tömegpont. A matematikai ingát vizsgálhatjuk a fizikai inga speciális eseteként is, ekkor $s = l$ és $\Theta_O = ml^2$. Ebből a matematikai inga lengésének körfrekvenciája:

$$\omega = \sqrt{\frac{mgl}{ml^2}} = \sqrt{\frac{g}{l}},$$

periódusideje pedig:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}.$$

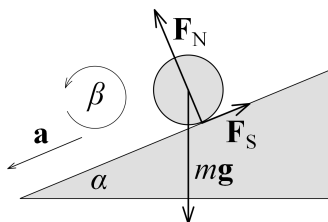
A lengésidő független a test tömegétől. Az eredmény a közelítés miatt itt is csak kis kitérésekre igaz.

6.4.2. Gördülés

A tisztán gördülő merev test mindenkor érintkezési pontja nyugalomban van ahhoz a testhez viszonyítva, amin gördül. Így a felületek között tapadási súrlódás lép fel, a test haladó és forgó mozgása pedig nem független egymástól.

Gördülés lejtőn

Vizsgáljuk meg a 6.13 ábrán látható lejtőn legördülő test mozgását!



6.13. ábra. Lejtőn legördülő test

Válasszuk meg az ábrán látható módon a gyorsulás és a szöggyorsulás pozitív irányát! Írjuk fel a lejtőre merőleges erők egyensúlyát, a lejtőirányú mozgásra Newton II. törvényét, valamint a forgómozgás alapegyenletét:

$$\begin{aligned}F_{\perp} &= mg \cos \alpha - F_N = 0 \\F_{\parallel} &= mg \sin \alpha - F_S = ma \\M &= F_S r = \Theta \beta.\end{aligned}$$

Ha feltételezzük, hogy a test tisztán gördül, akkor a gyorsulás és a szöggyorsulás nem független egymástól:

$$a = r\beta.$$

A tiszta gördülés feltétele, hogy

$$F_S \leq \mu F_N.$$

A forgástest tehetetlenségi nyomatéka legyen:

$$\Theta = kmr^2,$$

ahol k a test alakjától függő állandó (tömör hengerre $1/2$, tömör gömbre $2/5$).

Az egyenletrendszer megoldása:

$$\begin{aligned} F_S &= \frac{\Theta\beta}{r} = kma \\ mg \sin \alpha &= ma + F_S = ma(k+1) \\ a &= \frac{mg \sin \alpha}{m(k+1)} = \frac{g \sin \alpha}{1+k} \\ \beta &= \frac{a}{r} = \frac{g \sin \alpha}{r(k+1)}. \end{aligned}$$

A gyorsulás értéke nem függ a sugártól, de függ k -től, azaz a test alakjától ([Videó \[7\]](#)).

A tiszta gördülés feltétele, hogy teljesüljön a tapadási súrlódás egyenlőtlensége:

$$\begin{aligned} F_S = kma &= \frac{kmg \sin \alpha}{1+k} \leq \mu F_N = \mu mg \cos \alpha, \\ \mu &\geq \frac{\operatorname{tg} \alpha}{1+1/k}. \end{aligned} \tag{6.9}$$

Csúszás és gördülés

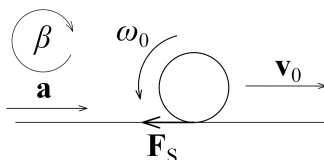
Ha a tiszta gördülés (6.9) feltétele nem teljesül, akkor a test csúszni és forogni fog. Ilyenkor a és β függetlenek egymástól, és a csúszási súrlódás összefüggését kell használni:

$$\begin{aligned} a &\neq r\beta \\ F_S &= \mu F_N. \end{aligned}$$

(Feltesszük, hogy a tapadási és csúszási súrlódási együttható megegyezik.) Az egyenletrendszert ekkor ezek figyelembevételével kell megoldani:

$$\begin{aligned} F_S &= \mu F_N = \mu mg \cos \alpha \\ ma &= mg \sin \alpha - F_S = mg(\sin \alpha - \mu \cos \alpha) \\ a &= g(\sin \alpha - \mu \cos \alpha) \\ \Theta\beta &= F_S r = \mu mgr \cos \alpha \\ \beta &= \frac{\mu mgr \cos \alpha}{\Theta} = \frac{\mu g \cos \alpha}{kr}. \end{aligned}$$

Vizsgáljunk meg egy másik érdekes kísérletet is, ahol a kezdetben csúszva forgó („kaporó” vagy „köszörülő”) test végül megtapad, és tisztán gördül tovább!



6.14. ábra. Csúszva forgó pingponglabda

Egy pingponglabdát ügyesen ki lehet úgy pöckölni, hogy kezdetben éppen haladási irányával szemben, negatív irányban pörögjön ($\omega_0 < 0$, lásd a 6.14 ábrát). Ekkor a pingponglabda és a talaj között fellépő csúszási súrlódási erő negatív gyorsulást, viszont pozitív szöggyorsulást hoz létre:

$$ma = -F_S = -\mu mg$$

$$a = -\mu g$$

$$\Theta\beta = F_S r = \mu mgr$$

$$\beta = \frac{3\mu g}{2r}.$$

(A gömbhéj tehetetlenségi nyomatéka $\Theta = \frac{2}{3}mr^2$.)

Ez az állapot addig áll fent, amíg meg nem tapad, azaz amíg nem teljesül, hogy

$$v(t) = r\omega(t)$$

$$v_0 + at = r(\omega_0 + \beta t)$$

$$v_0 - \mu gt = r\omega_0 + \frac{3}{2}\mu gt$$

$$t = \frac{2}{5} \frac{v_0 - r\omega_0}{\mu g}.$$

Ekkor a test megtapad, a mozgás tiszta gördüléssé válik, sebessége:

$$v(t) = v_0 + at = \frac{3}{5}v_0 + \frac{2}{5}r\omega_0.$$

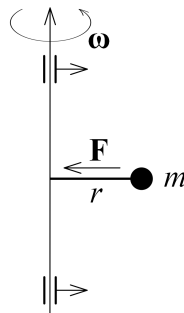
Mivel $\omega_0 < 0$, a megtapadáskor a sebesség megfelelő (elég gyorsan pörgő) indítás esetén negatív is lehet. Tehát ha

$$|\omega_0| > \frac{3}{2r}v_0,$$

akkor az elpöckölt pingponglabda megtapadás után visszagurul hozzánk.

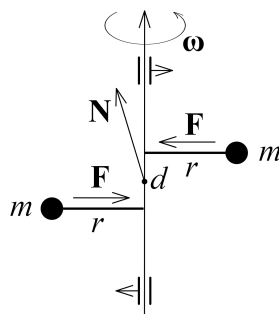
6.5. Szabad forgás

A 6.3 szakaszban a rögzített tengely körüli forgást vizsgáltuk. Akkor csak a perdület tengelyirányú komponensével foglalkoztunk, és megemlítettük, hogy az erre merőleges perdületkomponensek változásait a tengely forgatónyomatéka biztosítja. Mielőtt áttérnénk a szabad tengelyek tárgyalására, vizsgáljuk meg, milyen erőhatások érik a test forgása miatt a tengelyt! Ez a probléma a gyakorlatban is fontos, emiatt kell a kerekeket kiegyensúlyozni.



6.15. ábra. Statikusan kiegyensúlyozatlan forgó test

A 6.15 ábrán látható test a statikusan kiegyensúlyozatlan forgó test modellje. Itt a tengely nem megy át a test tömegközéppontján. Ha a test forog, a tömegpont körpályán tartásához $F = m\omega^2 r$ erőre van szükség, amit a csapágyak fejtenek ki. A test forgásával együtt változik a csapágyakra ható erő iránya, ami a csapágyak gyors tönkremenetelét okozhatja. Ezt a hibát könnyen fel lehet ismerni, ha a tengelyt vízszintes helyzetben tartjuk: ekkor a test a stabil egyensúly körül fizikai ingaként lengéseket végez.



6.16. ábra. Dinamikusan kiegyensúlyozatlan forgó test

A 6.16 ábrán látható test a dinamikusan kiegyensúlyozatlan forgó test modellje. Itt a tengely átmegy a test tömegközéppontján, de a test tömegeloszlása nem szimmetrikus.

Ha a test forog, a tömegpontok körpályán tartásához $M = Fd = m\omega^2 rd$ forgatónyomatékre van szükség, amit a csapágyak fejtenek ki. A forgatónyomaték hatására változik a test perdülete is: a perdületvektor a testtel együtt forog, egy kúppalást mentén mozog (nagysága állandó, de iránya folyamatosan változik). A test forgásával együtt most is változik a csapágyakra ható erő iránya, ami szintén a csapágyak tönkremeneteléhez vezethet. Ezt a kiegyensúlyozatlanságot nem lehet statikus vizsgálattal észrevenni, a testet meg kell forgatni a felismeréséhez. Ez történik a gumiszerelő műhelyekben: a kereket megpörgetik, az erőhatásokat mérik, és a kereket a felnire rögzített kis tömegek segítségével statikusan és dinamikusan is kiegyensúlyozzák.

6.5.1. A perdület és a szögsebesség általános kapcsolata

A 6.3.1 szakasz alapján a merev test Δm_i tömegpontjának perdülete egy tetszőlegesen kiválasztott pontra vonatkozóan:

$$\Delta \mathbf{N}_i = \mathbf{r}_i \times \Delta \mathbf{p}_i = \Delta m_i \mathbf{r}_i \times \mathbf{v}_i = \Delta m_i \mathbf{r}_i \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_i) .$$

Most azonban a perdületvektorra vagyunk kíváncsiak, nem csak a tengelyirányú komponensére, és a szögsebességvektor iránya is tetszőleges lehet. A Δm_i tömegponthoz mutató \mathbf{r}_i helyvektor és az $\boldsymbol{\omega}$ szögsebességvektor felírható Descartes-koordináták segítségével:

$$\mathbf{r}_i = x_i \mathbf{i} + y_i \mathbf{j} + z_i \mathbf{k} ,$$

$$\boldsymbol{\omega} = \omega_x \mathbf{i} + \omega_y \mathbf{j} + \omega_z \mathbf{k} .$$

A vektoriális szorzatot az A.1 függelékben leírt módon fejezhetjük ki a koordináták segítségével:

$$\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_i = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \omega_x & \omega_y & \omega_z \\ x_i & y_i & z_i \end{vmatrix} = (\omega_y z_i - \omega_z y_i) \mathbf{i} + (\omega_z x_i - \omega_x z_i) \mathbf{j} + (\omega_x y_i - \omega_y x_i) \mathbf{k} .$$

Ugyanígy:

$$\begin{aligned} \mathbf{r}_i \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_i) &= \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ x_i & y_i & z_i \\ \omega_y z_i - \omega_z y_i & \omega_z x_i - \omega_x z_i & \omega_x y_i - \omega_y x_i \end{vmatrix} = \\ &= [y_i (\omega_x y_i - \omega_y x_i) - z_i (\omega_z x_i - \omega_x z_i)] \mathbf{i} + \\ &+ [z_i (\omega_y z_i - \omega_z y_i) - x_i (\omega_x y_i - \omega_y x_i)] \mathbf{j} + \\ &+ [x_i (\omega_z x_i - \omega_x z_i) - y_i (\omega_y z_i - \omega_z y_i)] \mathbf{k} = \\ &= [\omega_x (y_i^2 + z_i^2) - \omega_y x_i y_i - \omega_z x_i z_i] \mathbf{i} + \\ &+ [-\omega_x x_i y_i + \omega_y (x_i^2 + z_i^2) - \omega_z y_i z_i] \mathbf{j} + \\ &+ [-\omega_x x_i z_i - \omega_y y_i z_i + \omega_z (x_i^2 + y_i^2)] \mathbf{k} . \end{aligned}$$

A merev test teljes perdületvektorát az elemi perdületvektorok összegzésével kapjuk meg:

$$\mathbf{N} = \sum_i \Delta \mathbf{N}_i = \sum_i \Delta m_i \mathbf{r}_i \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_i) .$$

Ennek alapján a merev test perdületének Descartes-koordinátái:

$$\begin{aligned} N_x &= \omega_x \sum_i \Delta m_i (y_i^2 + z_i^2) + \omega_y \sum_i -\Delta m_i x_i y_i + \omega_z \sum_i -\Delta m_i x_i z_i \\ N_y &= \omega_x \sum_i -\Delta m_i x_i y_i + \omega_y \sum_i \Delta m_i (x_i^2 + z_i^2) + \omega_z \sum_i -\Delta m_i y_i z_i \\ N_z &= \omega_x \sum_i -\Delta m_i x_i z_i + \omega_y \sum_i -\Delta m_i y_i z_i + \omega_z \sum_i \Delta m_i (x_i^2 + y_i^2) . \end{aligned}$$

A négyzetes tagokat tartalmazó összegek éppen a merev test x -, y - és z -tengelyre vonatkozó tehetetlenségi nyomatékai:

$$\begin{aligned} \Theta_{xx} &= \sum_i \Delta m_i (y_i^2 + z_i^2) \\ \Theta_{yy} &= \sum_i \Delta m_i (x_i^2 + z_i^2) \\ \Theta_{zz} &= \sum_i \Delta m_i (x_i^2 + y_i^2) , \end{aligned}$$

a vegyes szorzatok összegei pedig az úgynevezett *deviációs nyomatékok*, melyeket a tehetetlenségi nyomatékhoz hasonlóan a test koordinátatengelyekhez viszonyított tömegeloszlása határoz meg:

$$\begin{aligned} \Theta_{xy} &= \Theta_{yx} = \sum_i -\Delta m_i x_i y_i \\ \Theta_{xz} &= \Theta_{zx} = \sum_i -\Delta m_i x_i z_i \\ \Theta_{yz} &= \Theta_{zy} = \sum_i -\Delta m_i y_i z_i . \end{aligned}$$

Ezekkel a jelölésekkel:

$$\begin{aligned} N_x &= \Theta_{xx}\omega_x + \Theta_{xy}\omega_y + \Theta_{xz}\omega_z \\ N_y &= \Theta_{yx}\omega_x + \Theta_{yy}\omega_y + \Theta_{yz}\omega_z \\ N_z &= \Theta_{zx}\omega_x + \Theta_{zy}\omega_y + \Theta_{zz}\omega_z , \end{aligned} \tag{6.10}$$

vagy röviden:

$$\mathbf{N} = \boldsymbol{\Theta}\boldsymbol{\omega} ,$$

ahol Θ a merev test *tehetetlenségi tenzora*:

$$\Theta = \begin{vmatrix} \Theta_{xx} & \Theta_{xy} & \Theta_{xz} \\ \Theta_{yx} & \Theta_{yy} & \Theta_{yz} \\ \Theta_{zx} & \Theta_{zy} & \Theta_{zz} \end{vmatrix}.$$

A tehetetlenségi tenzor meghatároz egy *tehetetlenségi ellipszoidot*, melynek segítségével a merev test tehetetlenségi nyomatóka bármely, a kiválasztott ponton átmenő nyomatóra vonatkozóan meghatározható [11].

6.5.2. Szabad tengelyek

A (6.10) kifejezésekből látható, hogy a perdületvektor általában nem párhuzamos a szögsebességvektorral, és az egyes perdület-koordináták az összes sebesség-koordinátától függenek. Ugyanakkor minden test esetében lehet találni egy olyan koordináta-rendszert, ahol a tehetetlenségi tenzor diagonális lesz, azaz a főátlón kívüli elemek (a deviációs nyomatók) nullává válnak. Ezeket a tengelyeket a test *főtehetetlenségi tengelyeinek* nevezzük.

A főtehetetlenségi tengelyek a tehetetlenségi ellipszoid tengelyei. A főtehetetlenségi tengelyekhez általában három különböző főtehetetlenségi nyomatók tartozik (egy maximális, egy minimális és egy közbülső). Speciális esetekben a tehetetlenségi ellipszoid (lapult vagy nyújtott) forgási ellipszoid, illetve gömb. Ilyenkor két vagy három főtehetetlenségi nyomatók megegyezik.

Főtehetetlenségi rendszerben a (6.10) kifejezések egyszerűbbé válnak:

$$\begin{aligned} N_x &= \Theta_{xx}\omega_x \\ N_y &= \Theta_{yy}\omega_y \\ N_z &= \Theta_{zz}\omega_z. \end{aligned} \tag{6.11}$$

Ha a test valamelyik főtehetetlenségi tengelye körül forog, akkor a perdülete párhuzamos lesz a szögsebességgel. Például, ha $\boldsymbol{\omega} = \omega_z \mathbf{k}$, akkor $\omega_x = \omega_y = 0$, $N_x = N_y = 0$, és $N_z = \Theta_{zz}\omega_z$, azaz $\mathbf{N} = \Theta_{zz}\boldsymbol{\omega}$. Ilyenkor állandó szögsebességvektor esetén a perdületvektor is állandó, nincs szükség a csapágyak által kifejtett forgatónyomatókra, a merev test akár rögzített tengely nélkül is egyenletesen foroghat. Az ilyen forgást *szabad tengely* körüli forgásnak nevezzük.

Szabad tengely eszerint csak tömegközépponton átmenő főtehetetlenségi tengely lehet. Ha a tengely nem menne át a tömegközépponton, akkor szükség lenne egy külső erőre, ha pedig nem főtehetetlenségi tengely körül forogna, akkor egy külső forgatónyomatókra (lásd 6.5 szakasz 6.15 és 6.16 ábra). Stabil forgás csak a maximális vagy minimális tehetetlenségi nyomatókú tengely körül alakulhat ki (a maximális tehetetlenségi nyomatókú tengely stabilabb).

Kísérlet: Szabad tengely

Ez utóbbi állítást igazolja a videókon [7] látható következő két kísérlet.

Egy hosszúkás fa téglatestet (melynek egyik oldala sokkal hosszabb, mint a másik kettő) a legkisebb lapja közepén csuklósan felfüggesztünk egy dróra, majd a felfüggesztő drótot megforgatjuk. Kezdetben a test függőleges helyzetben, a hosszú oldalával párhuzamos tengely körül forog (így van tömegközéppontja a legalacsonyabban), de a szögsebességet növelve hirtelen vízszintes helyzetbe ugrik át, és a legrövidebb oldallal párhuzamos szimmetriatengely körül forog tovább (Szabad tengely I.).

Ezután hurok alakú kerékpárláncot függesztünk fel egy dróra. A drótot megforgatva a lánc kezdetben függőlegesen lógva, összecukódva forog. A szögsebesség növelésekor hirtelen vízszintes helyzetbe ugrik át, és a hurok a forgástengelyre merőleges síkú körré tágul, melynek középpontján megy át a forgástengely (Szabad tengely II.).

Magyarázat: Kezdetben mindkét test a legalacsonyabb helyzeti energiájú állapotban van, és a legkisebb tehetetlenségi nyomatékú főtehetetlenségi tengelye körül forog. Nagyobb szögsebességen a legnagyobb tehetetlenségi nyomatékú (tömegközépponton átmenő) tengely körüli forgás válik stabillá (annak ellenére, hogy így a tömegközéppont magasabbra kerül). ♦

Ha egy test mindhárom főtehetetlenségi nyomatéka egyenlő (tehetetlenségi ellipszoidja gömb), akkor bármely tömegközépponton átmenő tengelye körül szabadon foroghat. Ilyen a gömbön kívül például a kocka és a többi szabályos test is.

6.6. Erőmentes, szimmetrikus pörgettyű

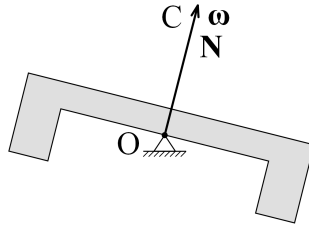
A pörgettyű olyan merev test, amely egy rögzített pontja körül foroghat. A pörgettyűmozgás általános esetben nagyon bonyolult. Mi csak a *szimmetrikus* pörgettyűk néhány speciális mozgását vizsgáljuk: ekkor a test tehetetlenségi ellipszoidja forgásszimmetrikus, a test két főtehetetlenségi nyomatéka megegyezik.

A pörgettyűt *erőmentesnek* nevezzük, ha nem hat rá külső erő és forgatónyomaték (illetve a ráható erők és forgatónyomatékok eredője nulla):

$$\mathbf{F} = 0 \quad \text{és} \quad \mathbf{M} = 0.$$

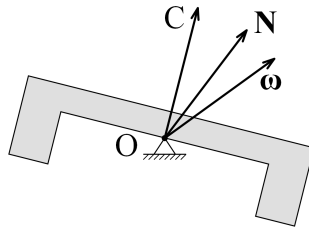
Földi körülmények között ez legegyszerűbben úgy érhető el, hogy egy merev testet a tömegközéppontjában támasztunk alá (6.17 ábra). Forgassuk meg az erőmentes, szimmetrikus pörgettyűt a szimmetriatengelye körül! Ez egy szabad forgás, hiszen a test az O tömegközépponton átmenő C főtehetetlenségi tengely körül forog. Ilyenkor:

$$\mathbf{N} = \Theta \boldsymbol{\omega} \quad \text{és} \quad \mathbf{N} \parallel \boldsymbol{\omega} \parallel \mathbf{C}.$$



6.17. ábra. Szabadon forgó erőmentes, szimmetrikus pörgettyű

Ezután rövid külső erőhatással billentsük ki egyensúlyi állapotából a forgó testet, majd hagyjuk újra magára. Ekkor a test szimmetriatengelye, perdületvektora és szögsebességvektora már nem fog egy egyenesbe esni (6.18 ábra). A lökés megváltoztatta a test perdületét, de az erőhatás megszűnte után az új perdület már megmarad. A test szimmetriatengelye és a szögsebességvektor viszont időben változó lesz.



6.18. ábra. Egyensúlyából kibillentett erőmentes, szimmetrikus pörgettyű

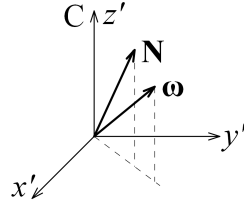
Vizsgáljuk a testhez rögzített K' rendszerben a mozgást! A K' rendszerben vegyük fel az x' , y' és z' koordináta-tengelyeket úgy, hogy z' a forgásszimmetria tengelyével essen egybe. Ekkor x' , y' és z' főtehetetlenségi tengelyek, és így (6.11) szerint:

$$\begin{aligned} N_{x'} &= \Theta_{x'} \omega_{x'} \\ N_{y'} &= \Theta_{y'} \omega_{y'} \\ N_{z'} &= \Theta_{z'} \omega_{z'} . \end{aligned}$$

A forgásszimmetria miatt $\Theta_{x'} = \Theta_{y'}$, és legyen $\Theta_{z'} > \Theta_{x'} = \Theta_{y'}$. Használjuk a $\Theta_{z'} = \Theta_{\max}$ és a $\Theta_{x'} = \Theta_{y'} = \Theta_{\min}$ jelöléseket. Ezekkel:

$$\begin{aligned} N_{x'} &= \Theta_{\min} \omega_{x'} \\ N_{y'} &= \Theta_{\min} \omega_{y'} \\ N_{z'} &= \Theta_{\max} \omega_{z'} , \end{aligned} \tag{6.12}$$

amiből az következik, hogy $z' = C$, \mathbf{N} és $\boldsymbol{\omega}$ egy síkban vannak (6.19 ábra).



6.19. ábra. Vektorok a testhez rögzített koordináta-rendszerben

Alkalmazzuk az egymáshoz képest forgó koordináta-rendszerekben végzett idő szerinti deriváltakra vonatkozó (3.6) segédtételt a perdületvektorra:

$$\left. \frac{d\mathbf{N}}{dt} \right|_K = \left. \frac{d\mathbf{N}}{dt} \right|_{K'} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{N}.$$

De a pörgettyű erőmentes, emiatt a K rendszerben a perdületvektor állandó:

$$\left. \frac{d\mathbf{N}}{dt} \right|_K = \mathbf{M} = 0,$$

amiből:

$$\begin{aligned} \left. \frac{d\mathbf{N}}{dt} \right|_{K'} &= -\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{N} = - \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \omega_{x'} & \omega_{y'} & \omega_{z'} \\ N_{x'} & N_{y'} & N_{z'} \end{vmatrix} = \\ &= -(\omega_{y'} N_{z'} - \omega_{z'} N_{y'}) \mathbf{i} - (\omega_{z'} N_{x'} - \omega_{x'} N_{z'}) \mathbf{j} - (\omega_{x'} N_{y'} - \omega_{y'} N_{x'}) \mathbf{k} = \quad (6.13) \\ &= -(\omega_{y'} \Theta_{\max} \omega_{z'} - \omega_{z'} \Theta_{\min} \omega_{y'}) \mathbf{i} - (\omega_{z'} \Theta_{\min} \omega_{x'} - \omega_{x'} \Theta_{\max} \omega_{z'}) \mathbf{j} - \\ &\quad - (\omega_{x'} \Theta_{\min} \omega_{y'} - \omega_{y'} \Theta_{\min} \omega_{x'}) \mathbf{k} = \\ &= -\omega_{y'} \omega_{z'} (\Theta_{\max} - \Theta_{\min}) \mathbf{i} + \omega_{x'} \omega_{z'} (\Theta_{\max} - \Theta_{\min}) \mathbf{j}. \end{aligned}$$

Látható, hogy (a pörgettyű szimmetriája miatt) a derivált z' -irányú komponense nulla, azaz a perdület z' -irányú komponense – és (6.12) alapján vele együtt a szögsebesség z' -irányú komponense is – állandó:

$$\left. \frac{dN_{z'}}{dt} \right|_{K'} = 0 \quad \Rightarrow \quad N_{z'} = \text{állandó} \quad \text{és} \quad \omega_{z'} = \frac{N_{z'}}{\Theta_{\max}} = \text{állandó}.$$

Ennek alapján, valamint (6.12)-t és (6.13) x' - és y' -irányú komponensekre adott kifejezését felhasználva:

$$\begin{aligned} \left. \frac{d\omega_{x'}}{dt} \right|_{K'} &= \frac{1}{\Theta_{\min}} \left. \frac{dN_{x'}}{dt} \right|_{K'} = -\frac{\Theta_{\max} - \Theta_{\min}}{\Theta_{\min}} \omega_{z'} \omega_{y'} = -\Omega_N \omega_{y'} \\ \left. \frac{d\omega_{y'}}{dt} \right|_{K'} &= \frac{1}{\Theta_{\min}} \left. \frac{dN_{y'}}{dt} \right|_{K'} = +\frac{\Theta_{\max} - \Theta_{\min}}{\Theta_{\min}} \omega_{z'} \omega_{x'} = +\Omega_N \omega_{x'}, \end{aligned}$$

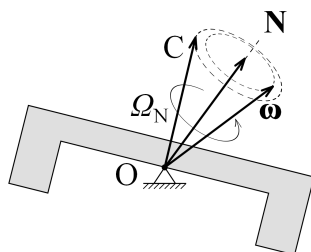
ahol bevezettük az

$$\Omega_N = \frac{\Theta_{\max} - \Theta_{\min}}{\Theta_{\min}} \omega_{z'}$$

jelölést. Ez egy csatolt differenciálegyenlet $\omega_{x'}$ -re és $\omega_{y'}$ -re, melynek megoldása:

$$\begin{aligned}\omega_{x'} &= \omega_{xy} \cos(\Omega_N t + \varphi) \\ \omega_{y'} &= \omega_{xy} \sin(\Omega_N t + \varphi) .\end{aligned}$$

Eszerint K' -ben a szögsebességvektor – és vele együtt a perdületvektor is – Ω_N szögsebességgel forog a $z' = C$ szimmetriatengely körül. (A megoldás helyessége behelyettesítéssel ellenőrizhető.)



6.20. ábra. Nutáció

A K inerciarendszerben viszont a perdületvektor állandó, így K -ban a szögsebességvektor és a test szimmetriatengelye forog a perdületvektor körül közös

$$\Omega_N = \frac{\Theta_{\max} - \Theta_{\min}}{\Theta_{\min}} \omega_{z'} \approx \frac{\Theta_{\max} - \Theta_{\min}}{\Theta_{\min}} \omega$$

szögsebességgel (6.20 ábra). A jelenség neve *nutáció*, Ω_N a nutáció szögsebessége.

6.6.1. A Föld nutációja

A Föld lapult forgási ellipszoid, amely szimmetriatengelye körül forog. Azonban különböző hatások miatt van egy kicsiny nutációja: a forgástengely mozog a Földhöz képest (és így a földrajzi északi és déli sark pontos helye is kismértékben változik). Becsüljük meg a nutáció periódusidejét!

A Föld egyenlítői és poláris sugarai (B.2 függelék):

$$R_e \approx 6378 \text{ km} \quad \text{és} \quad R_p \approx 6357 \text{ km} .$$

A főtehetetlenségi nyomatékok körülbelüli becslése (homogén testtel számolva):

$$\Theta_{\max} \approx \frac{2}{5} m R_e^2 \quad \text{és} \quad \Theta_{\min} \approx \frac{1}{5} m (R_e^2 + R_p^2) ,$$

amiből

$$\frac{\Theta_{\max} - \Theta_{\min}}{\Theta_{\min}} \approx \frac{1}{300}.$$

A Föld szögsebessége:

$$\omega_{z'} \approx \omega = \frac{2\pi}{1 \text{ nap}},$$

és így a nutáció periódusideje:

$$T_N = \frac{2\pi}{\Omega_N} = \frac{\Theta_{\min}}{\Theta_{\max} - \Theta_{\min}} \frac{2\pi}{\omega_{z'}} \approx 300 \text{ nap}.$$

Az eredmény (Euler-féle periódus) csak nagyságrendben egyezik a tapasztalattal, a valóságban a *Chandler-féle periódus* – a Föld rugalmas alakváltozásai miatt – kb. 430 nap [25].

6.6.2. Giroszkóp, stabilizálás forgással

A szabad tengely körül forgó merev test külső forgatónyomaték hiányában megtartja forgástengelyét. Ezt a legkülönbözőbb helyeken használják. Néhány példa:

Alkalmazás: Giroszkóp

Cardano-féle felfüggesztéssel elérhető, hogy az erőmentes pörgettyű a felfüggesztéshez képest tetszőlegesen elfordulhat [26]. Ez az eszköz a *giroszkóp*. A szimmetriatengelye körül nagy sebességgel megforgatott giroszkóp akkor is megtartja forgásirányát, ha a felfüggesztés közben elfordul. Ilyen módon lehet repülőgépeken, hajókon, egyenetlen terepen mozgó járműveken *mesterséges horizontot* létrehozni [27]. ♦

Alkalmazás: Diszkosz, frizbi, gerely

A gyors forgás stabilizálja a diszkosz, a frizbi és a gerely térbeli irányát. Forgás nélkül mindhárom eszköz „imbolyogva” repülne. A forgásnak köszönhetően a testek sokáig megőrzik az eldobáskori szöghelyzetüket, így az aerodinamikai felhajtóerő repülésük során végig emeli őket, és ezáltal sokkal messzebbre repülnek, mint forgás nélkül. Mindhárom sporteszközt az eldobáskor pörgetik meg (más-más technikával): a diszkoszt és a frizbit a körlapjukra merőleges (maximális tehetetlenségi nyomatékú), a gerelyt pedig a hossz tengelyével párhuzamos (minimális tehetetlenségi nyomatékú) tengelye körül. ♦

Alkalmazás: Lövedékek

A lövedékek esetében a forgás általi stabilizálás nemcsak a nagyobb lőtávolságot, hanem a pontosabb célzást is szolgálja. A stabil helyzetű lövedék pályája sokkal pontosabban meghatározható. A lövedékeket a fegyver csövében lévő huzagolás (csavarodó vájat) hozza forgásba a haladási iránnyal párhuzamos tengelye körül. ♦

6.7. Súlyos, szimmetrikus, gyors pörgettyű

Ha a pörgettyűt nem a súlypontjában, hanem az alatt támasztjuk alá, akkor – az instabil egyensúlyi helyzet kivételével – a pörgettyűre a nehézségi erő forgatónyomatékot fejt ki. Általában, ha egy pörgettyűre külső forgatónyomaték hat, akkor *súlyos pörgettyű*nek nevezzük. Jól ismert súlyos pörgettyű a *búgócsiga* (vagy modern változata, a *beyblade*). Ha a búgócsigát nyugalmi helyzetben lerakjuk a földre, eldől. Ha azonban előtte gyors forgásba hozzuk, akkor nem dől el, hanem a forgástengelye egy kúppalást mentén lassan körbejár. Ez a mozgás a *precesszió*.

Kísérlet: Pörgettyű

A [videón](#) [7] látható pörgettyű tömegközéppontjának helye változtatható: lehet az alátámasztás felett vagy alatt, de akár éppen az alátámasztási pontban is. Az utóbbi esetben erőmentes pörgettyűt kapunk (amelyen megfigyelhető a nutáció jelensége).

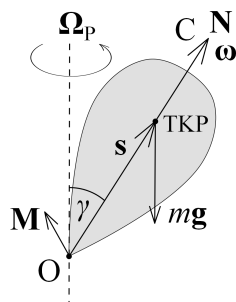
Ha az alátámasztási pont nem esik egybe a tömegközépponttal, akkor a gyorsan forgó pörgettyű tengelye a függőleges irány körül lassan körbefordul, *precesszál*. A precesszió iránya függ a pörgettyű forgásirányától és az alátámasztás helyétől (tömegközéppont alatt vagy felett).

A precesszió szögsebessége (szemben a nutációval) *fordítva arányos* a pörgettyű szögsebességével, ezért a súrlódási veszteségek miatt lassan fékeződő pörgettyű egyre gyorsabban precesszál. Végül mozgása látszólag rendezetlenné válik, majd (ha a tömegközéppontja alatt van megtámasztva) ledől.

Hasonló kísérlet végezhető egy felfüggesztett biciklikerekkel is ([videó](#) [7]). ♦

A következőkben a súlyos, szimmetrikus, *gyors* pörgettyű mozgását tanulmányozzuk. A „gyors” azt jelenti, hogy a pörgettyű szögsebessége sokkal nagyobb, mint a precesszió szögsebessége. Emiatt a pörgettyű perdületvektorában elhanyagolható a precessziós szögsebességből származó járulék. Ráadásul a pörgettyűt főtengelye körül forgatjuk meg, így szögsebessége és perdülete is párhuzamos lesz a szimmetriatengellyel:

$$\omega \gg \Omega_P \quad \Rightarrow \quad \mathbf{N} \approx \Theta \omega \quad \Rightarrow \quad \mathbf{N} \parallel \omega \parallel \mathbf{C}.$$



6.21. ábra. Súlyos, szimmetrikus, gyors pörgettyű

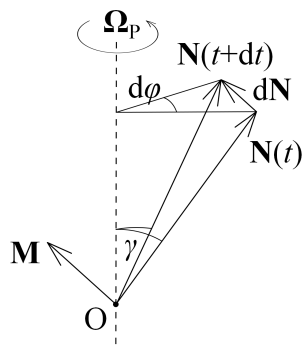
A pörgettyűre a nehézségi erő forgatónyomatéka hat (6.21 ábra):

$$\mathbf{M} = \mathbf{s} \times m\mathbf{g}, \quad M = mgs \sin \gamma.$$

A forgatónyomaték-vektor vízszintes irányú (merőleges az ábra síkjára, befelé mutat), így a perdületvektor *megváltozása* is vízszintes lesz. A (6.2) összefüggés alapján :

$$d\mathbf{N} = \mathbf{M}dt.$$

Tehát a gyorsan forgó pörgettyű – várakozásunkkal ellentétben – nem feldől, hanem függőleges tengely körül körbefordul.



6.22. ábra. Precesszió - a perdületvektor elfordulása

A 6.22 ábra alapján a perdületvektor változásának nagysága kicsiny idő alatt:

$$dN = N \sin \gamma d\varphi,$$

másrészt a forgatónyomatékkal kifejezve:

$$dN = \mathbf{M}dt = mgs \sin \gamma dt.$$

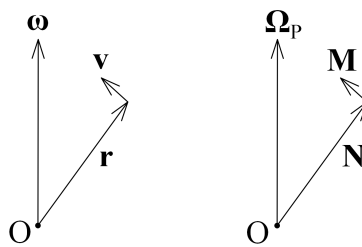
A két kifejezést egyenlővé téve:

$$N \sin \gamma d\varphi = mgs \sin \gamma dt ,$$

amiből a precesszió szögsebessége:

$$\Omega_P = \frac{d\varphi}{dt} = \frac{mgs}{N} = \frac{mgs}{\Theta\omega} .$$

Láthatjuk, hogy a precesszió szögsebessége valóban fordítottan arányos a pörgettyű szögsebességével, valamint független a pörgettyű dőlésszögétől.



6.23. ábra. Analógia két vektoriális szorzat között

A perdület, a forgatónyomaték és a precesszió szögsebessége is vektoriális mennyiségek. A vektorok közti kapcsolatot könnyen felírhatjuk a 6.23 ábrán látható ω - \mathbf{r} - \mathbf{v} és Ω_P - \mathbf{N} - \mathbf{M} vektorhármassok között megfigyelhető analógia alapján. A baloldali ábrán az \mathbf{r} vektor ω szögsebességgel forog a függőleges tengely körül. \mathbf{v} kétféleképp is kifejezhető:

$$\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{r}}{dt}$$

$$\mathbf{v} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r} .$$

A jobboldali ábrán ezzel analóg módon \mathbf{N} vektor forog Ω_P szögsebességgel a függőleges tengely körül. Ahogy \mathbf{v} a forgó \mathbf{r} vektor idő szerinti deriváltja, ugyanúgy \mathbf{M} a forgó \mathbf{N} vektor idő szerinti deriváltjával egyenlő. Az analógia miatt tehát \mathbf{M} is kifejezhető kétféleképp:

$$\mathbf{M} = \frac{d\mathbf{N}}{dt}$$

$$\mathbf{M} = \boldsymbol{\Omega}_P \times \mathbf{N} .$$

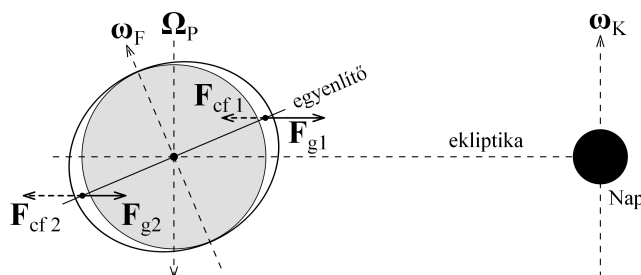
Az \mathbf{N} perdületű pörgettyű tehát $\mathbf{M} = \boldsymbol{\Omega}_P \times \mathbf{N}$ forgatónyomaték hatására fog $\boldsymbol{\Omega}_P$ szögsebességgel precesszálni.

Eredményeink csak addig igazak, amíg fennáll az $\omega \gg \Omega_P$ feltétel. A lassú pörgettyű mozgásának leírása sokkal bonyolultabb.

A súlyos pörgettyű precessziójára nutáció is szuperponálódhat.

6.7.1. A Föld precessiója

A Föld jó közelítéssel lapult forgási ellipszoid alakú. Szimmetriatengelye – egyben legnagyobb tehetetlenségi nyomatékú főtehetetlenségi tengelye – körül forog, amely az ekliptika (a Föld keringési síkja) normálisával $23,5^\circ$ -os szöget zár be (B.2). A Nap forgatónyomatékot fejt ki a Földre, amely a forgástengelyt be szeretné forgatni az ekliptikára merőleges irányba. A Föld azonban forog, és így a forgástengely precesszálni fog.



6.24. ábra. A Föld precessióját okozó erőpár

A forgatónyomaték okát legegyszerűbben a Föld *keringésével* együtt forgó koordináta-rendszerben vizsgálhatjuk. Ebben a rendszerben a jó közelítéssel r sugarú körpályán mozgó Föld nyugalomban van, tehát a rá ható gravitációs erő és centrifugális erő megegyeznek:

$$\gamma \frac{m_F m_N}{r^2} = m_F \omega_K^2 r \quad F_g = F_{cf}.$$

Ha a lapult forgási ellipszoidot a 6.24 ábrán látható módon egy gömbre és egy azt övező vékony „övre” bontjuk, és az övet – nagyon leegyszerűsítve – két tömegközépponttal helyettesítjük, akkor az ezekre ható gravitációs és centrifugális erő már különböző lesz:

$$\begin{aligned} \gamma \frac{m_1 m_N}{r_1^2} &> m_1 \omega_K^2 r_1 & F_{g1} &> F_{cf1} \\ \gamma \frac{m_2 m_N}{r_2^2} &< m_2 \omega_K^2 r_2 & F_{g2} &< F_{cf2}, \end{aligned}$$

hiszen $r_1 < r < r_2$.

Ez az erőpár a rajz síkjára merőleges (befelé mutató) forgatónyomatékot okoz, amely a forgó Földet (a keringéssel ellentétes irányú) kb. 26000 év periódusidejű precesszióra kényszeríti (B.2). Emiatt az északi sark látszólagos helye a csillagos égen elmozdul, a Sarkcsillag csak a jelenkorban van az égi pólus közelében. A precesszió miatt elmozdul a tavaszpont is, így az állatövi jegyek az ókor óta már egy hónappal eltolódtak.

A Hold-pálya precessiója

A Földhöz hasonlóan a Hold-pálya is precesszál. A Hold keringési síkja körülbelül 5° -os szöveget zár be az ekliptikával. (Ezért nincs minden hónapban Nap- és Holdfogyatkozás.) A Nap a pálya tengelyét be szeretné forgatni az ekliptikára merőleges irányba, de ehelyett a Hold-pálya – az előzőekkel teljesen analóg módon – precesszálni fog. A fogyatkozások lehetséges időpontját – a Föld és a Hold keringési idejével együtt – ez a 18,6 éves periódusidejű precesszió határozza meg (B.2).

6.7.2. Pörgettyűnyomaték

Ahhoz, hogy egy pörgettyű precesszáljon, külső forgatónyomatékra van szükség. Ekkor viszont a pörgettyű ezzel ellentétes forgatónyomatékot fejt ki a környezetére. Ezt a forgatónyomatékot *pörgettyűnyomaték*nak nevezzük:

$$\mathbf{M}^* = -\mathbf{M} = -\boldsymbol{\Omega}_P \times \mathbf{N} = \mathbf{N} \times \boldsymbol{\Omega}_P .$$

Gyorsan forgó testek esetében ez meglehetősen nagy – és váratlan irányú – erőhatásokat okozhat. Ezt figyelhetjük meg, amikor a kezünkben tartott megpörgetett biciklikerek tengelyét megpróbáljuk elforgatni (videó [7]).

A kerékpározás fizikája

Széles körben elterjedt nézet, hogy azért lehet biciklizni, mert a forgó kerék stabilizálja a kerékpárt, a kerék perdülete miatt a kerékpár „nem tud felborulni”. Ez így egyáltalán nem igaz (hiszen akkor kanyarodni se lehetne a biciklivel). Biciklizés közben azért nem borulunk fel, mert a kerékpár úgy van felépítve, hogy ha valamelyik irányba dőlni kezd, akkor a kormány abba az irányba elfordul, és a bicikli „alákanyarodik” a dőlésnek, ami megakadályozza a dőlést. (A bicikli kanyarodásával együtt forgó koordináta-rendszerből nézve a centrifugális erő ellensúlyozza a dőlést.)

Ebben az alákanyarodásban szerepe van a pörgettyűnyomatéknek *is*: ha például a bicikli jobbra dől ($\boldsymbol{\Omega}_P$ előre mutat), és a kerék előre forog (\mathbf{N} balra mutat), akkor a kormányra $\mathbf{M}^* = \mathbf{N} \times \boldsymbol{\Omega}_P$, azaz függőlegesen lefelé mutató pörgettyűnyomaték fog hatni, amely azt jobbra forgatja.

Ez a hatás azonban csak segíti a kerékpár egyensúlyát biztosító fő hatást: az első villa kialakítása miatt a kormány tengelyének egyenese a kerék érintkezési pontja előtt metszi a talajt, így ha a bicikli oldalra dől, a talaj nyomóereje szintén megfelelő irányú forgatónyomatékot fejt ki a kormányra. Ezt sima talajon akár álló helyzetben is ki lehet próbálni: a nyeregnél megfogott, és finoman eldöntött bicikli kormányra elfordul – pedig ekkor biztos nem lép fel pörgettyűnyomaték.

7. fejezet

Szilárd testek alakváltozása

A merev test modell figyelembe veszi, hogy a testnek kiterjedése, alakja van, és így a haladó mozgáson kívül egy test foroghat is. A modellben azonban a testek alakja – a valóságos testekkel szemben – állandó, nem változhat. Ez a leírás folyadékok és gázok leírásánál nyilvánvalóan nem használható, de szilárd testeknél sem mindig elégséges.

Szilárd testek esetében is gyakran figyelembe kell vennünk a testek *alakváltozását*, *deformációját*. A II. részben a rezgések és mechanikai hullámok tárgyalása lehetetlen a szilárd testek *rugalmas* alakváltozásának figyelembevétel nélkül. De a merev test modell már a 6.2.1 szakaszban sem volt alkalmas a háromtámaszú tartó statikájának leírására, és a 2.4 szakaszban, a rugóerő bevezetésekor is a testek deformációjára hivatkoztunk.

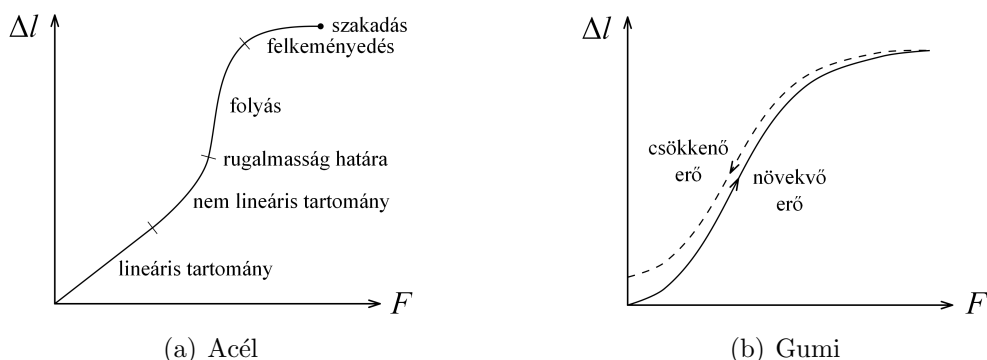
A deformálható testek közül ebben a fejezetben az alakkal rendelkező *szilárd* testekkel foglalkozunk. (A folyadékok és gázok mechanikáját a következő, 8. fejezetben tárgyaljuk.)

A deformáció leírása lehetséges *atomi* szinten, ahol a testre ható erők és a test alakváltozása közti kapcsolatot a testet felépítő atomok és molekulák közötti kölcsönhatásokból vezetjük le. A másik, általunk is használt *fenomenologikus* leírási mód a szilárd testet folytonos (kontinuum) anyagnak tekinti, és nem foglalkozik az atomos felépítéssel.

További egyszerűsítés, hogy csak *homogén*, *izotrop* anyagokkal foglalkozunk, azaz az anyag tulajdonságai helytől és iránytól függetlenek.

A testek alakváltozása nagyon bonyolult lehet: általános esetben a test kicsiny térfogatelemeire ható *térfogati* és *felületi* erők figyelembevételével fel kell írni minden egyes térfogatelem mozgásegyenletét, majd ezeket a differenciálegyenleteket meg kell oldani. Ezzel az *elméleti rugalmasságtan* foglalkozik. Mi csak egyensúlyi állapotokat vizsgálunk, és a testre ható térfogati erőket (például a nehézségi erőt) a felületi erők mellett legtöbbször elhanyagoljuk. A testre ható felületi erők lehetnek a felületre merőlegesek (*húzó-* és *nyomóerő*), valamint a felülettel párhuzamosak (*nyíróerő*).

Egy szilárd test deformációja lehet *rugalmas* vagy *képlékeny*. Rugalmas alakváltozás esetén a test a deformáló erő megszűnte után visszanyeri eredeti alakját és méretét, a képlékeny alakváltozás viszont (legalább részben) maradandó.



7.1. ábra. Acél és gumi nyúlási görbéje

A 7.1(a) ábrán egy acél huzal megnyúlását vázoltuk a húzóerő függvényében. Látható, hogy a deformáció csak kezdetben rugalmas, majd az erő növelésével az anyag „megfolyik”, azaz jelentős mértékben és maradandóan megnyúlik, majd „felkeményedik”, és végül elszakad. Azt is megfigyelhetjük, hogy a megnyúlás csak a rugalmas tartomány elején *lineáris* a húzóerővel.

A 7.1(b) ábra egy gumiszál megnyúlását ábrázolja a húzóerő függvényében. Látható, hogy itt lényegében nincs lineáris szakasz, és a görbének *hiszterézise* is van, azaz a gumiszál az erő megszűnte után nem húzódik össze (rögtön) az eredeti hosszára.

Hooke-törvény

A legtöbb anyag esetében azonban, ha a deformáció nem túl nagy, az alakváltozás jó közelítéssel arányos a deformációt létrehozó erővel. Ez a tapasztalati összefüggés a *Hooke-törvény*. Például a 7.1(a) ábrán, egy acélhuzal nyújtásakor, a „lineáris tartományban” $\Delta l \sim F$. A következőkben csak rugalmas és kismértékű, lineáris deformációkat tárgyalunk.

7.1. Elemi deformációk

A testek deformációja általában bonyolult, összetett: a test méretei és alakja is változhat. A bonyolult deformációk is összetehetők azonban néhány elemi deformációból. Ezek a *lineáris nyújtás* (és összenyomás) a vele együtt járó *haránt összehúzódással* (kítágulással), a térfogati *kompreszió* és a *nyírás*. A következőkben először ezeket az elemi deformációkat tekintjük át, majd megmutatjuk, hogy két, gyakorlati szempontból is fontos összetett alakváltozás, a *hajlítás* és a *csavarás*, visszavezethető ezekre.

7.1.1. Nyújtás és összenyomás (lineáris)

Vizsgáljuk egy kezdetben l hosszúságú, A keresztmetszetű rugalmas test lineáris megnyúlását (illetve összenyomódását). A tapasztalat szerint kis deformáció esetén a test Δl hosszváltozása arányos az F húzóerővel (illetve nyomóerővel):

$$\Delta l \sim F.$$

Ezen kívül könnyű belátni, hogy

$$\Delta l \sim l \quad \text{és} \quad \Delta l \sim \frac{1}{A}.$$

(Kétszer olyan hosszú test mindkét fele ugyanannyival nyúlik meg, így megnyúlása is kétszeres lesz, illetve kétszeres keresztmetszetnél az erő fele hat az eredeti keresztmetszetű részre, amely – a linearitás miatt – fele akkora megnyúlást okoz.)

A három arányosságot összefoglalva:

$$\Delta l \sim \frac{Fl}{A},$$

és átrendezve:

$$\frac{\Delta l}{l} \sim \frac{F}{A}.$$

Vezessük be az

$$\varepsilon = \frac{\Delta l}{l}$$

relatív megnyúlást (illetve összenyomódást), amely dimenziótlan mennyiség, valamint a

$$\sigma = \frac{F}{A}$$

húzófeszültséget (illetve *nyomófeszültséget*), amely az egységnyi felületre eső, felületre *merőleges* irányú erő, mértékegysége a nyomáshoz hasonlóan pascal ($1 \text{ Pa} = 1 \text{ N/m}^2$).

Ezeket behelyettesítve:

$$\varepsilon \sim \sigma,$$

és az arányosságot arányossági tényezővel kifejezve:

$$\varepsilon = \frac{1}{E}\sigma,$$

illetve:

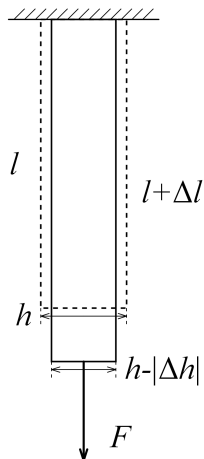
$$\sigma = E\varepsilon, \tag{7.1}$$

ahol az E *Young-modulus* az anyagra jellemző állandó.

Az acél Young-modulusa: $E_{\text{acél}} \approx 2 \cdot 10^{11} \text{ Pa} = 200 \text{ GPa}$ (B.3 függelék).

7.1.2. Haránt összehúzódás

A tapasztalat szerint miközben egy test megnyúlik, haránt irányban összehúzódik (illetve összenyomás esetén haránt irányban kitágul).



7.2. ábra. Haránt összehúzódás

A 7.2 ábrán egy nyújtatlan állapotban l hosszúságú, h szélességű négyzetes hasábot ábrázoltunk. A test F erő hatására Δl -lel megnyúlik, de eközben haránt irányban összehúzódik $|\Delta h|$ értékkel.

A haránt irányú méretváltozás arányos az eredeti haránt irányú mérettel és a relatív hosszváltozással:

$$\Delta h = -\mu h \frac{\Delta l}{l}.$$

A negatív előjel arra utal, hogy nyújtásnál haránt összehúzódás, összenyomásnál haránt kitágulás fordul elő. A μ dimenziótlan, anyagra jellemző állandó a *Poisson-szám*.

Átrendezve és az ε relatív hosszváltozást beírva:

$$\frac{\Delta h}{h} = -\mu \varepsilon. \quad (7.2)$$

A test eredeti térfogata:

$$V = lh^2,$$

a megnyújtás és haránt összehúzódás után pedig:

$$V + \Delta V = (l + \Delta l)(h + \Delta h)^2.$$

Írjuk fel a térfogatváltozást, majd hanyagoljuk el az ε -ban másod- és harmadrendű tagokat! Ha a testre húzóerő hat, és megnyúlik, akkor a térfogatváltozás nem lehet negatív:

$$\begin{aligned}\Delta V &= (l + \Delta l)(h + \Delta h)^2 - lh^2 = lh^2 [(1 + \varepsilon)(1 - \mu\varepsilon)^2 - 1] \approx \\ &\approx lh^2(1 + \varepsilon - 2\mu\varepsilon - 1) = V\varepsilon(1 - 2\mu) \geq 0.\end{aligned}$$

Eszerint a Poisson-számra teljesülnie kell a következő feltételnek:

$$0 \leq \mu \leq \frac{1}{2}. \quad (7.3)$$

Az acél Poisson-száma: $\mu_{\text{acél}} \approx 0,3$ (B.3 függelék).

A levezetés alapján a (7.1) összefüggés felhasználásával felírhatjuk a lineáris nyújtásnál fellépő relatív térfogatváltozást is:

$$\frac{\Delta V}{V} = \varepsilon(1 - 2\mu) = \frac{1 - 2\mu}{E} \sigma. \quad (7.4)$$

7.1.3. Kompresszió

A 7.1.1 és a 7.1.2 szakaszokban a *lineáris* nyújtással és összenyomással foglalkoztunk. Egy másik fontos deformáció a *térfogati összenyomás* vagy *kompresszió*, amikor a testet minden irányból azonos nyomó feszültség éri. (Ezt legegyszerűbben úgy lehet elérni, hogy a testet folyadékba vagy gázba tesszük, és azt nyomjuk össze.)

Kompresszió esetén a nyomófeszültség helyett szokás a $p = -\sigma$ többletnyomást használni. (σ a nyújtás esetén pozitív, összenyomáskor negatív.)

A relatív térfogatváltozás a tapasztalat szerint arányos a többletnyomással:

$$\frac{\Delta V}{V} = -\frac{1}{K} p. \quad (7.5)$$

A negatív előjel arra utal, hogy pozitív többletnyomás esetén a térfogat csökken. A K anyagra jellemző állandó a *kompressziómodulus*, mértékegysége szintén pascal (Pa). (Szokás a reciprokát, a $\kappa = 1/K$ *kompresszibilitást* is használni.)

K értéke azonban nem független a korábbi rugalmas anyagállandóktól. A térfogati összenyomás (kis deformáció esetén) felfogható három lineáris összenyomás szuperpozíciójaként, így a térfogatváltozás a lineáris összenyomásnál fellépő térfogatváltozás háromszorosa. A (7.4) összefüggés alapján, $\sigma = -p$ helyettesítéssel, kompresszió esetén a relatív térfogatváltozás:

$$\frac{\Delta V}{V} = -3 \frac{1 - 2\mu}{E} p.$$

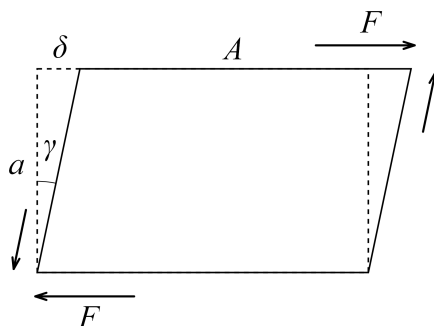
Az eredményt összevetve a (7.5) egyenlőséggel:

$$K = \frac{E}{3(1 - 2\mu)}. \quad (7.6)$$

Az acél kompressziómodulusa: $K_{\text{acél}} \approx 1,6 \cdot 10^{11} \text{ Pa} = 160 \text{ GPa}$ (B.3 függelék).

7.1.4. Nyírás

A *nyírás*nál a testre nem a felületre merőleges, hanem a felülettel párhuzamos erő hat (7.3 ábra). Ahhoz azonban, hogy a test egyensúlyban maradjon, a függőleges oldalakra is kell hatnia egy ellentétes irányú forgatónyomatékot adó erőpárnak. Nyírásnál nem a test mérete, hanem az alakja változik meg.



7.3. ábra. Nyírás

Kis deformáció esetén itt is teljesül a Hooke-törvény:

$$\delta \sim F.$$

A nyújtáshoz hasonlóan könnyen beláthatjuk, hogy

$$\delta \sim a \quad \text{és} \quad \delta \sim \frac{1}{A}.$$

A három arányosságot összefoglalva és átrendezve:

$$\frac{\delta}{a} \sim \frac{F}{A}.$$

Vezessük be a 7.3 ábra jelöléseinek megfelelően a dimenziótlan

$$\gamma = \frac{\delta}{a}$$

nyírási szöget, és a

$$\tau = \frac{F}{A}$$

nyírófeszültséget, amely az egységnyi felületre eső, felülettel *párhuzamos* irányú erő. (A felületre merőleges húzó- és nyomófeszültségtől a jelöléssel is megkülönböztetjük, mértékegysége szintén pascal.)

Ezekkel a jelölésekkel:

$$\gamma \sim \tau,$$

illetve

$$\tau = G\gamma, \quad (7.7)$$

ahol a G nyírási modulus az anyagra jellemző újabb állandó.

A G nyírási modulus szintén nem független a többi rugalmas anyagállandótól. A Young-modulussal és a Poisson-számmal kifejezve (levezetés nélkül):

$$G = \frac{E}{2(1 + \mu)}. \quad (7.8)$$

Figyelembe véve a (7.3) egyenlőtlenségeket:

$$\frac{E}{3} \leq G \leq \frac{E}{2}.$$

Az acél nyírási modulusa: $G_{\text{acél}} \approx 8 \cdot 10^{10} \text{ Pa} = 80 \text{ GPa}$ (B.3 függelék).

7.1.5. Rugalmas energia

A rugalmas test deformációjakor a deformáló erő munkát végez, amely a testben *rugalmas energiát* halmoz fel. Az erőhatás megszűntekor a test visszanyeri eredeti alakját, és eközben a benne tárolt rugalmas energiával azonos nagyságú munkavégzésre képes.

Nyújtáskor (és összenyomáskor) a $\Delta l = y$ megnyúlás elemi dy megváltozásakor a deformáló erő által végzett elemi munka:

$$dW = Fdy = \frac{EA}{l} y dy.$$

Ezt integrálva a teljes munka, és így a rugalmas energia:

$$E_r = W = \frac{EA}{l} \int_0^{\Delta l} y dy = \frac{1}{2} \frac{EA}{l} (\Delta l)^2 = \frac{1}{2} EA l \left(\frac{\Delta l}{l} \right)^2 = \frac{1}{2} EV \varepsilon^2.$$

A rugalmas energia sűrűsége:

$$w_r = \frac{E_r}{V} = \frac{1}{2} E \varepsilon^2 = \frac{1}{2E} \sigma^2 = \frac{1}{2} \sigma \varepsilon. \quad (7.9)$$

A nyírásnál a rugalmas energia ehhez teljesen hasonlóan:

$$E_r = \frac{1}{2} GV \gamma^2,$$

a rugalmas energia sűrűsége pedig:

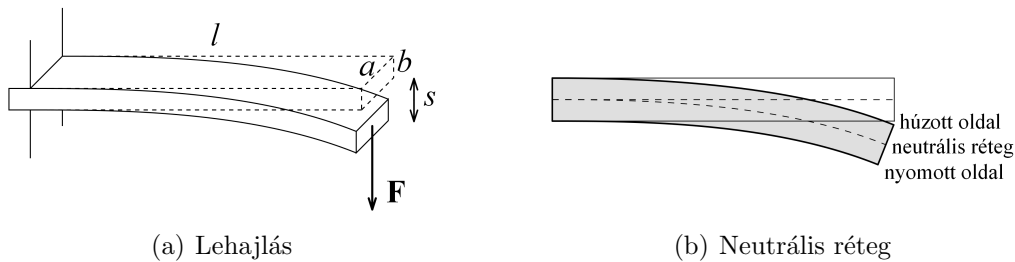
$$w_r = \frac{E_r}{V} = \frac{1}{2} G \gamma^2 = \frac{1}{2G} \tau^2 = \frac{1}{2} \tau \gamma. \quad (7.10)$$

7.2. Összetett deformációk

7.2.1. Hajlítás

A 7.4(a) ábrán egy egyik végén befogott, másik végén pedig \mathbf{F} (koncentrált) erővel lehajlított rúd látható. A rúd hossza l , szélessége a , vastagsága b . Kérdés az s lehajlás.

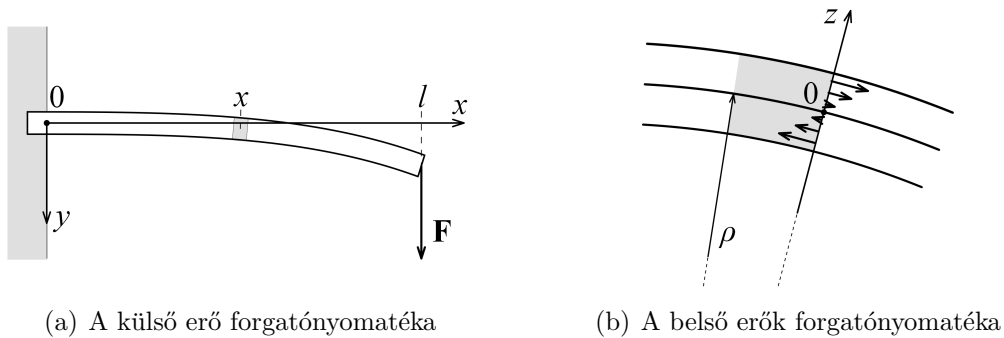
A *hajlítás* visszavezethető lineáris húzásra és nyomásra. A 7.4(b) ábrán látható, hogy a meghajlított rúd felső oldala megnyúlik (*húzott oldal*), alsó oldala pedig megrövidül (*nyomott oldal*). A két tartományt egy deformálatlan, *neutrális réteg* választja el egymástól.



7.4. ábra. Rúd lehajlása

A rugalmas test minden részére teljesülni kell az erők és forgatónyomatékok egyensúlyának. A 7.5(a) ábra alapján a külső erő forgatónyomatéka a rúd befogástól x távolságra lévő darabjára:

$$M = F(l - x). \quad (7.11)$$



7.5. ábra. Forgatónyomaték egyensúly a lehajló rúdban

Ezzel a külső forgatónyomatékkal a rúd belsejében fellépő húzó- és nyomófeszültségek forgatónyomatéka tart egyensúlyt. A belső forgatónyomatékokat az

$$M = \int_A \sigma z dA$$

integrállal lehet meghatározni, ahol az A terület a rúd keresztmetszete, z pedig a neutrális rétegtől mért távolság (7.5(b) ábra).

A húzó- és nyomófeszültséget a (7.1) összefüggés alapján írhatjuk fel:

$$\sigma = E\varepsilon = E\frac{z}{\rho},$$

ahol ρ a rúd (a neutrális réteg) *görbületi sugara*. A görbületi sugár a rúd (a neutrális réteg) alakját leíró $y(x)$ görbe segítségével fejezhető ki, kis deformáció esetén:

$$\frac{1}{\rho} = \frac{d^2y}{dx^2}.$$

Behelyettesítve σ értékét az integrálba:

$$M = \int_A \frac{E}{\rho} z^2 dA = \frac{E}{\rho} \int_A z^2 dA = \frac{EI}{\rho}, \quad (7.12)$$

ahol

$$I = \int_A z^2 dA \quad (7.13)$$

a rúd keresztmetszetét jellemző *másodrendű nyomaték*. [28]

A (7.12) egyenletből kifejezve $1/\rho$ értékét, és M helyére behelyettesítve a (7.11) külső forgatónyomaték értékét:

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{1}{\rho} = \frac{M}{EI} = \frac{F}{EI}(l-x),$$

majd a differenciálegyenletet kiintegrálva:

$$y(x) = \iint_0^x \frac{F}{EI}(l-x) dx^2 = \frac{F}{EI} \left[l\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{6} \right]_0^x = \frac{F}{EI} \left(l\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{6} \right). \quad (7.14)$$

A rúd végének lehajlása:

$$s = y(l) = \frac{F}{EI} \left(l\frac{l^2}{2} - \frac{l^3}{6} \right) = \frac{Fl^3}{3EI}. \quad (7.15)$$

A 7.4(a) ábrán látható téglalap keresztmetszetű rúd másodrendű nyomatéka a (7.13) definíció alapján:

$$I = \int_A z^2 dA = \int_{-b/2}^{b/2} az^2 dz \frac{a}{3} [z^3]_{-b/2}^{b/2} = \frac{ab^3}{12},$$

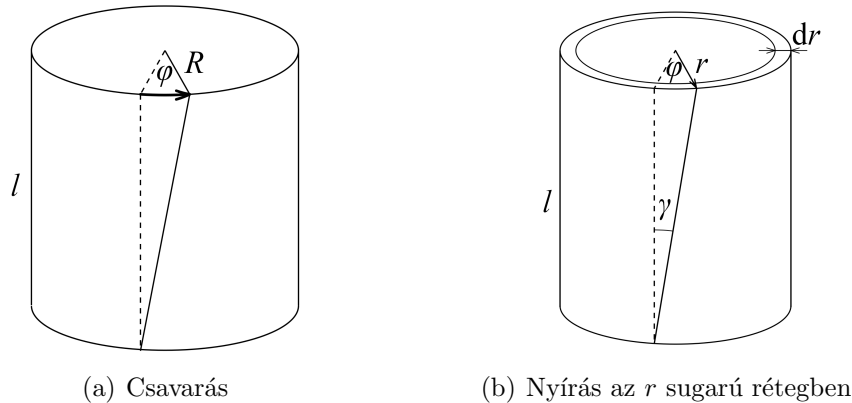
lehajlása pedig:

$$s = \frac{4}{E} \frac{l^3}{ab^3} F.$$

Figyelemreméltó, hogy a lehajlás a hosszának és a vastagság reciprokának is a köbével arányos.

7.2.2. Csavarás

Már korábban, a torziós ingánál (6.4.1 szakasz) találkoztunk az elcsavart szálaban ébredő forgatónyomatékkal. Vizsgáljuk meg, mekkora forgatónyomaték ébred egy R sugarú, l hosszúságú hengeres testben (például egy körkeresztmetszetű rugalmas szálaban), ha a két végét egymáshoz képest φ szöggel elforgatjuk (7.6(a) ábra).



7.6. ábra. Hengeres test csavarása

A csavarás hatására a henger alaplappal párhuzamos rétegei nyíródnak egymáshoz képest. A nyírási szög függ a szimmetriatengelytől mért távolságtól. Válasszunk ki egy r sugarú dr vastagságú réteget. A 7.6(b) ábra alapján a nyírási szög:

$$\gamma = \frac{r\varphi}{l}.$$

A (7.7) összefüggés alapján a nyírófeszültség:

$$\tau = G\gamma = \frac{r\varphi G}{l},$$

a kis körgyűrűn fellépő elemi forgatónyomaték pedig:

$$dM = r dF = r \tau dA = \tau 2r^2 \pi dr = \frac{2r^3 \pi \varphi G}{l} dr.$$

A kifejezés kiintegrálásával megkapjuk a csavaró forgatónyomatékokat:

$$M = \int_0^R \frac{2\pi \varphi G}{l} r^3 dr = \frac{\pi G R^4}{2l} \varphi. \quad (7.16)$$

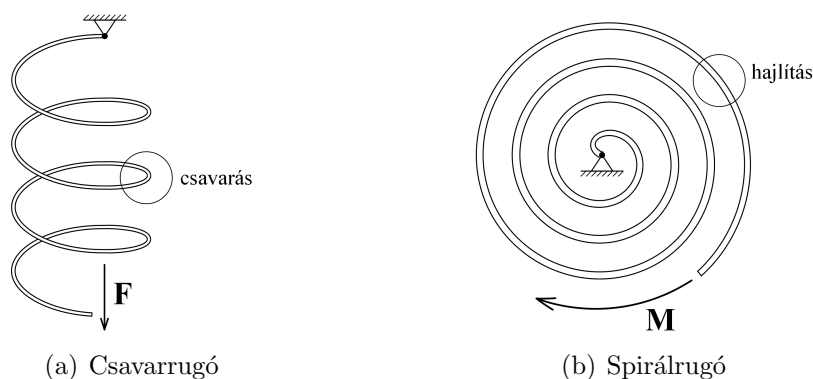
A kifejezésben φ együtthatója a már korábban bevezetett direkciós nyomaték (6.4.1 szakasz):

$$D^* = \frac{\pi G R^4}{2l}.$$

Látható, hogy D^* a sugár negyedik hatványával arányos, így vékony szálak esetében nagyon kicsi lehet. Ezen alapulnak a nagy érzékenyséű torziós mérések, mint a Cavendish-kísérlet (2.3.2 szakasz, [18]) vagy az Eötvös-inga (3.5.1 szakasz, [22]).

Csavarrugó és spirálrugó

Érdekes összehasonlítani a gyakran használt csavarrugót és spirálrugót.



7.7. ábra. Csavarrugó és spirálrugó deformációja

A *csavarrugót* (7.7(a) ábra) az \mathbf{F} erő nyújtja meg lineárisan, de közben a rugó szála mégis csavarodik, és így a rugó működésében a nyírófeszültségnek és a G nyírási modulusnak van szerepe.

A *spirálrugó* (7.7(b) ábra) viszont az \mathbf{M} forgatónyomaték hatására „tekeredik”, de közben a rugó lemeze mégis hajlik. Így a rugóban húzó- és nyomófeszültség ébred, deformációja leírásához az E Young-modulusra van szükség.

8. fejezet

Folyadékok és gázok

A folyadékokban és a gázokban egyensúlyi helyzetben nincsenek nyíróerők, így a folyadékoknak és a gázoknak nincs saját alakjuk, azt az edény vagy a tartály alakja határozza meg. Ugyanakkor ha a folyadék vagy a gáz részei egymáshoz viszonyítva mozognak, akkor az egymáshoz képest elmozduló részek között fellép nyíróerő, amely akadályozza a relatív mozgást. Ez a jelenség a *belső súrlódás*, amellyel a 8.3.2 szakaszban fogunk foglalkozni.

A folyadékok és a gázok sok szempontból hasonlóan viselkednek, azonban van néhány lényeges különbség. Alapvető különbség, hogy a folyadékoknak, szemben a gázokkal, van szabad felszíne, így a felületi jelenségek (8.2 szakasz) csak folyadékoknál értelmezhetők. A folyadékok kompresszibilitása kicsi (kompressziómodulusuk nagy), azaz gyakorlatilag összenyomhatatlanok – ezzel szemben a gázok könnyen összenyomhatók. Ezzel összefüggésben a folyadékok sűrűsége azonos körülmények között nagyobb, mint a gázoké: a víz sűrűsége körülbelül három nagyságrenddel nagyobb, mint a levegőé (szobahőmérsékleten és normál légköri nyomáson). A folyadékok tulajdonságai is függenek a hőmérséklettől, de ez a függés általában sokkal kisebb, mint a gázok esetében. A folyadékok és a gázok közti különbségek azonban a *kritikus pont* közelében megszűnnek.

A különbségek ellenére sokszor együtt tárgyaljuk a folyadékok és a gázok viselkedését, ilyenkor „a folyadékok és a gázok” helyett a rövidebb „közeg” kifejezést fogjuk használni.

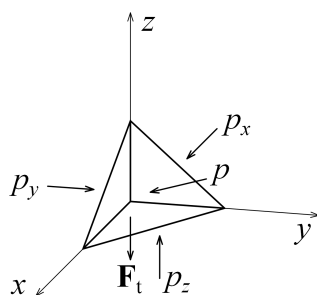
A folyadékok és a gázok mozgásának általános leírása a deformálható szilárd testekhez hasonlóan nagyon bonyolult. A következőkben csak néhány speciális esettel fogunk foglalkozni. A 8.1 szakaszban a folyadékok és a gázok egyensúlyát vizsgáljuk. A fizikának ezek a területei a gyakorlatban legfontosabb folyadék és gáz, a víz és a levegő nevéből *hidrosztatika*, illetve *aerosztatika*. A folyadékok esetében a felületi jelenségek is befolyásolhatják az egyensúlyt, a 8.2 szakaszban röviden ezeket tárgyaljuk. Ezután a 8.3 szakaszban a súrlódásmentes és súrlódásos áramlások néhány alapvető törvényével ismerkedünk meg, majd befejezésképp a közeghez képest mozgó testekre ható erőkkel foglalkozunk (8.4 szakasz).

8.1. Hidrosztatika

Ebben a fejezetben a legtöbb megállapítás a folyadékokra és a gázokra is igaz (tehát hidrosztatika és aerosztatika is egyben), azonban fogunk néhány speciális, csak folyadékokkal vagy csak gázokkal kapcsolatos esetet is vizsgálni, például a forgó folyadékok felszínét, úszási egyensúlyi helyzeteket vagy a légkör súlyát.

Nyomás irányfüggetlensége

A 8.1 ábrán egy tetraéder alakú folyadék-rész látható, melynek három lapja egy-egy koordináta-síkra illeszkedik, a negyedik pedig általános helyzetű.



8.1. ábra. Nyomás irányfüggetlensége

A kiválasztott részre felületi és térfogati erők hatnak. A felületi erők csak nyomóerők lehetnek, hiszen egyensúlyi helyzetben nem léphetnek fel a közegben nyíróerők. Az \mathbf{F}_t térfogati erő példánkban a nehézségi erő (de lehetne más, tömeggel arányos erő is, például tehetetlenségi erők). Ezek szerint a testre ható erők:

$$\begin{aligned}\mathbf{F}_x &= p_x \frac{\Delta y \Delta z}{2} \mathbf{i} \\ \mathbf{F}_y &= p_y \frac{\Delta z \Delta x}{2} \mathbf{j} \\ \mathbf{F}_z &= p_z \frac{\Delta x \Delta y}{2} \mathbf{k} \\ \mathbf{F} &= p \Delta \mathbf{A} \\ \mathbf{F}_t &= -\rho \frac{\Delta x \Delta y \Delta z}{6} g \mathbf{k},\end{aligned}$$

ahol \mathbf{F}_x , \mathbf{F}_y , \mathbf{F}_z és \mathbf{F} az egyes lapokra ható felületi erők, p_x , p_y , p_z és p az egyes irányokba ható nyomás, $\Delta \mathbf{A}$ az általános helyzetű oldal felületelem vektora, ρ a közeg sűrűsége és g a nehézségi gyorsulás.

A felületelem vektort kifejezhetjük a háromszög két oldalára fektetett vektorok vektoriális szorzatával (hiszen a vektoriális szorzat merőleges a két vektor által kifeszített síkra, nagysága pedig a vektorok által kifeszített paralelogramma területe, A.1 függelék):

$$\Delta \mathbf{A} = \frac{(\Delta z \mathbf{k} - \Delta x \mathbf{i}) \times (\Delta y \mathbf{j} - \Delta x \mathbf{i})}{2} = -\frac{1}{2}(\Delta z \Delta y \mathbf{i} + \Delta z \Delta x \mathbf{j} + \Delta x \Delta y \mathbf{k}).$$

Egyensúlyban az erők eredője nulla. Ezt felírva, és az egyenletet rendezve:

$$(p_x - p) \frac{\Delta y \Delta z}{2} \mathbf{i} + (p_y - p) \frac{\Delta x \Delta z}{2} \mathbf{j} + (p_z - p) \frac{\Delta x \Delta y}{2} \mathbf{k} - \rho g \frac{\Delta x \Delta y \Delta z}{6} \mathbf{k} = 0.$$

Ha $\Delta x \rightarrow 0$, $\Delta y \rightarrow 0$, $\Delta z \rightarrow 0$, akkor az utolsó tag gyorsabban tart nullához, így elhanyagoljuk. A baloldal csak akkor lehet nulla, ha minden komponense nulla, azaz:

$$\begin{aligned} p_x - p &= 0 \\ p_y - p &= 0 \\ p_z - p &= 0, \end{aligned}$$

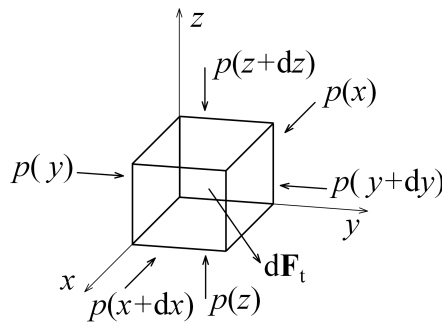
tehát $p_x = p_y = p_z = p$, azaz a nyomás iránytól független, skaláris mennyiség.

8.1.1. Nyomásgradiens, hidrosztatikai nyomás

A 8.2 ábrán egy téglatest alakú folyadékdarab látható. A nyomás – mint beláttuk – irányfüggetlen, de értéke a hely függvénye: $p(x, y, z)$. A kiválasztott darabra a felületi erőkön kívül a $d\mathbf{F}_t$ térfogati erő hat. Egyensúlyban a folyadékdarabra ható erők eredője nulla:

$$d\mathbf{F}_f + d\mathbf{F}_t = 0,$$

ahol $d\mathbf{F}_f$ a felületi erők eredője.



8.2. ábra. Nyomásgradiens

Írjuk fel a felületi erők eredőjének komponenseit:

$$dF_{fx} = p(x)dydz - p(x + dx)dydz = -[p(x + dx) - p(x)] dydz = -\frac{\partial p(x, y, z)}{\partial x}dV$$

$$dF_{fy} = p(y)dx dz - p(y + dy)dx dz = -[p(y + dy) - p(y)] dx dz = -\frac{\partial p(x, y, z)}{\partial y}dV$$

$$dF_{fz} = p(z)dx dy - p(z + dz)dx dy = -[p(z + dz) - p(z)] dx dy = -\frac{\partial p(x, y, z)}{\partial z}dV.$$

Az egyensúly miatt:

$$d\mathbf{F}_t = -d\mathbf{F}_f = \left[\frac{\partial p(x, y, z)}{\partial x} \mathbf{i} + \frac{\partial p(x, y, z)}{\partial y} \mathbf{j} + \frac{\partial p(x, y, z)}{\partial z} \mathbf{k} \right] dV = \nabla p dV,$$

ahol ∇ (*nabla*) a gradiens jele. dV -vel átosztva:

$$\nabla p = \frac{d\mathbf{F}_t}{dV}, \quad (8.1)$$

azaz a nyomásgradiens megegyezik az egységnyi térfogatra ható térfogati erővel.

Pascal-törvény

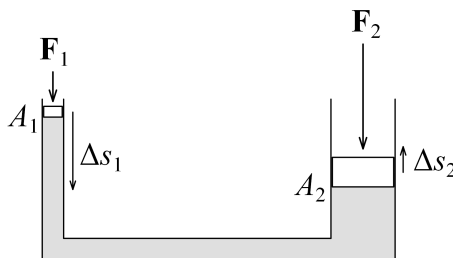
Ha nem hatnak térfogati erők, vagy a térfogati erők elhanyagolhatók a felületi erők mellett, akkor:

$$\nabla p = 0 \quad \Leftrightarrow \quad p = \text{állandó}. \quad (8.2)$$

Ez a *Pascal-törvény*: a nyomás a folyadék teljes térfogatában megegyezik, a folyadékban „akadálytalanul továbbterjed”.

Alkalmazás: Hidrosztatikus erőátvitel

Ezen az elven működnek a hidraulikus emelők, prések és fékek.



8.3. ábra. Hidraulikus gép vázlat

A berendezések elvi vázlata a 8.3 ábrán látható. Az A_1 keresztmetszetű dugattyút F_1 erővel nyomjuk, elmozdulása Δs_1 . Ennek hatására a munkahengerben az A_2 keresztmetszetű dugattyú F_2 erő ellenében Δs_2 -vel mozdul el. A Pascal-törvény miatt:

$$\frac{F_1}{A_1} = p = \frac{F_2}{A_2}.$$

Látható, hogy a keresztmetszetek megfelelő megválasztásával kis F_1 erővel is nagy erő fejthető ki a munkahenger dugattyújával. Ugyanakkor a munkahenger dugattyújának elmozdulása az erővel fordított arányban változik (a folyadék összenyomhatatlansága miatt $A_1\Delta s_1 = \Delta V = A_2\Delta s_2$), így a munkavégzés a két oldalon megegyezik:

$$F_1\Delta s_1 = W = F_2\Delta s_2,$$

a hidraulikus gép is *egyszerű gép*. ♦

Nem teljesül a Pascal-törvény a folyadékokhoz sok szempontból hasonlóan viselkedő *granulált anyagokban* (például a száraz homokban). Bár ezek az anyagok is átönthetők egyik edényből a másikba, folyadékokhoz hasonlóan mozoghatnak (mint például a homokórában), de a granulált anyagokban a folyadékokkal ellentétben vannak nyíróerők, és így bizonyos határok között saját alakjukat is megtartják.

Hidrosztatikai nyomás

Ha a folyadékra a nehézségi erő hat, akkor az elemi folyadékra ható térfogati erő:

$$d\mathbf{F}_t = -\rho g dV \mathbf{k}.$$

Összevetve a (8.1) egyenlettel

$$\frac{\partial p}{\partial x} = \frac{\partial p}{\partial y} = 0,$$

azaz $p(x, y, z) = p(z)$ egyváltozós függvény, és

$$\frac{dp}{dz} = -\rho g.$$

Ha ρ és g a vizsgált térfogatban állandónak tekinthető, akkor a változókat szétválasztva, és a differenciálegyenletet kiintegrálva:

$$\begin{aligned} dp &= -\rho g dz \\ p(z) &= p_0 - \rho g z, \end{aligned}$$

ahol p_0 a $z = 0$ helyen lévő nyomás.

Ha a $z = 0$ értéket a folyadék felszínéhez választjuk, és bevezetjük a $h = -z$ jelölést (h a mélység a folyadék felszíne alatt), akkor:

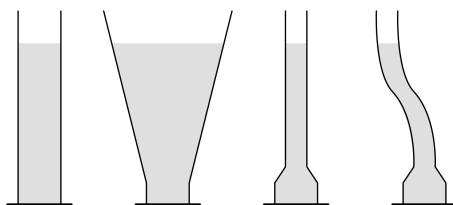
$$p(h) = p_0 + \rho gh. \quad (8.3)$$

A $p_h = \rho gh$ tag a *hidrosztatikai nyomás*, p_0 pedig a folyadékra kívülről ható nyomás.

A (8.3) összefüggés gázokra is érvényes, ha a vizsgált tartományban a gáz sűrűsége és a nehézségi gyorsulás állandónak tekinthető. Ekkor *aerosztatikai nyomás* a neve.

Kísérlet: Hidrosztatikai paradoxon

A 8.4 ábrán látható különböző alakú csövek alja ugyanakkora keresztmetszetű. A kísérletben az edényekbe lassan vizet töltünk, miközben a csövek alja egy mérleg tányérjához illeszkedik. Ha a hidrosztatikai nyomásból származó nyomóerő elér egy bizonyos határértéket, a mérleg lebillen, és a víz kifolyik.



8.4. ábra. Hidrosztatikai paradoxon

Azt várnánk, hogy a mérleg mindig azonos súlyú (azaz azonos térfogatú) víz beöntésekor billen le. Ezzel szemben a lebillenés mindig azonos *magasságú* vízoszlopnál történik. Ez a *hidrosztatikai paradoxon*: miért elég a mérleg lebillentéséhez a harmadik cső esetében sokkal kevesebb víz, mint az első, vagy a második cső esetében?

Ha a folyadékra ható erőket vizsgáljuk, akkor az első csőben a folyadékra a mérleg tányérja által kifejtett tartóerő:

$$F = p_h A = \rho gh A = \rho g V = mg,$$

megegyezik a folyadékra ható nehézségi erővel. (A p_0 légnyomásból származó tagot figyelmen kívül hagyjuk, mert alulról és felülről is hat a folyadékra, és így az eredő erőből kiesik.)

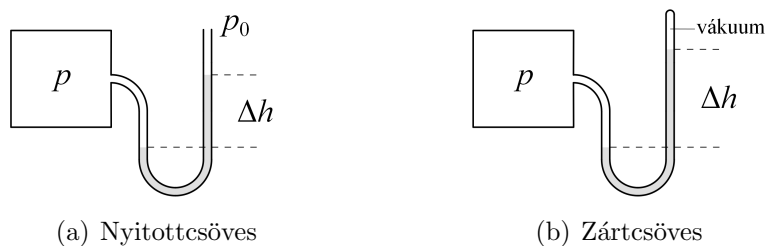
A többi csőben a mérleg tányérja által kifejtett tartóerő ugyanakkora (hiszen a hidrosztatikai nyomás ugyanakkora vízoszlop esetében ugyanakkora), a folyadék súlya azonban más (kisebb vagy nagyobb). Hogyan lehet mégis egyensúly?

A *paradoxon feloldása*: a folyadék nyomja az edény falát, és így az edény fala is erővel hat a folyadékra. Az első csőben ezek az erők mindenhol vízszintesek, és az eredőjük nulla. A többi csőben viszont a falak nyomóerejének lesz függőleges komponense is, amelyek részben megtartják (vagy éppen lenyomják) a folyadékot. ♦

Alkalmazás: Nyomásmérés

Ha egy U-alakú, mindkét végén nyitott csőbe folyadékot öntünk, akkor a két csőben a folyadékszint azonos magasságban lesz („közlekedőedény”). Ha a cső két végén más-más külső nyomás van, akkor a két folyadékszint elmozdul egymáshoz képest, a nyomáskülönbséget a hidrosztatikai nyomáskülönbség egyenlíti ki. A szintkülönbség mérésével (a folyadék sűrűségének és a nehézségi gyorsulásnak az ismeretében) a nyomáskülönbség mérhető:

$$\Delta p = \rho g \Delta h .$$



8.5. ábra. U-csöves nyomásmérők

A 8.5(a) ábrán látható *nyitottcsöves* nyomásmérő a bezárt gáz és a külső légnyomás különbségét méri. A *zártcsöves* nyomásmérőben a folyadék által elzárt térrészben vákuum (pontosabban csak a folyadék kisnyomású gőze) van, így a nyomásmérő abszolút nyomást mér (8.5(b) ábra). ♦

Légnyomás

A *légnyomás* a levegő súlyából származik. (A légkör sűrűsége azonban nem állandó, erősen függ a nyomástól és a hőmérséklettől is, így a nyomás helyfüggésének meghatározása bonyolultabb.) Ugyanakkor ez a megállapítás lehetővé teszi a légkör m_1 tömegének meghatározását.

A légkör vastagsága néhányszor tíz kilométer, ebben a tartományban a g nehézségi gyorsulás jó közelítéssel állandónak tekinthető. A légkör súlyát a Föld felszíne tartja meg, amely akkora erővel nyomja a légkört, mint a légkör a felszint. Ebből:

$$m_1 g = p_0 A_F,$$

ahol p_0 a légnyomás a Föld felszínén, A_F pedig a Föld felszíne – mindkettő ismert érték. Rendezve, és a numerikus adatokat behelyettesítve:

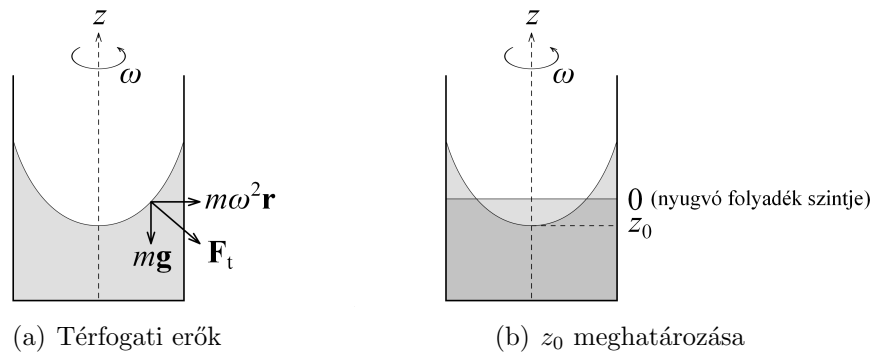
$$m_1 = \frac{p_0 A_F}{g} \approx \frac{10^5 \text{ Pa} \cdot 5 \cdot 10^{14} \text{ m}^2}{10 \text{ m/s}^2} = 5 \cdot 10^{18} \text{ kg}.$$

Ez hatalmas tömeg, de a Föld teljes tömegének kevesebb, mint egy milliomod része.

Forgó folyadék felszíne

Egyensúlyi állapotban a folyadék felszíne a nyíróerők hiánya miatt merőleges a rá ható térfogati erőkre. Emiatt *vízszintes* a nyugvó folyadék felszíne.

Gyorsuló koordináta-rendszerben a nehézségi erőn kívül tehetetlenségi erők is hatnak, a folyadék felszínének mindenhol a lokális térfogati erők eredőjére kell merőlegesnek lennie. A világoceán felszíne ezért forgási ellipszoid alakú: mindenhol merőleges a nehézségi erőre (a gravitációs erő és a Föld forgásából származó centrifugális erő eredőjére).



8.6. ábra. Forgó folyadék felszíne

A 8.6(a) ábrán egy forgó hengeres edényben lévő folyadék látható. Az edénnyel együtt forgó koordináta-rendszerből nézve a folyadékfelszín kicsiny m tömegű darabjára az mg nehézségi erő és az $m\omega^2 r$ centrifugális erő hat. Az eredő \mathbf{F}_t erő merőleges a felület alakját leíró görbe érintőjére. Felhasználva, hogy az érintő iránytangense a $z(r)$ függvény r szerinti deriváltja:

$$\frac{dz}{dr} = \text{tg } \alpha = \frac{F_{\text{cf}}}{F_g} = \frac{\omega^2 r}{g}.$$

A változókat szétválasztva, és mindkét oldalt kiintegrálva:

$$dz = \frac{\omega^2}{g} r dr$$

$$z = \frac{\omega^2}{2g} r^2 + z_0.$$

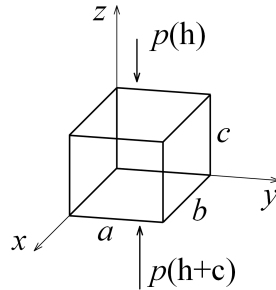
A folyadékfelszín tehát forgási paraboloid alakú. z_0 a forgási paraboloid csúcspontjának koordinátája, amit a térfogat állandósága alapján lehet meghatározni (8.6(b) ábra):

$$\Delta V = \int_0^R z(r) 2r \pi dr = \int_0^R \left(\frac{\omega^2}{2g} r^2 + z_0 \right) 2r \pi dr = \frac{\omega^2 \pi}{4g} R^4 + z_0 \pi R^2 = 0,$$

$$z_0 = -\frac{\omega^2 R^2}{4g}.$$

8.1.2. Felhajtóerő

Ha a folyadékba vagy gázba szilárd testet helyezünk, akkor arra a közeg minden oldalról nyomóerővel hat. Ha a közegben van hidrosztatikai nyomás, akkor a különböző irányokból ható erők eredője nem nulla. Ez az erő a *felhajtóerő*.



8.7. ábra. Felhajtóerő

A 8.7 ábrán látható téglatestre ható vízszintes nyomóerők a szimmetria miatt kiegyenlítik egymást, a függőleges erők eredője adja a felhajtóerőt (más alakú testekre a számítás bonyolultabb, de lényegében ugyanígy elvégezhető):

$$F_f = [p(h+c) - p(h)] ab = \rho_k g cab = \rho_k V g = m_k g, \quad (8.4)$$

ahol ρ_k a közeg sűrűsége, V a test térfogata és m_k a *kiszorított* folyadék vagy gáz tömege.

A felhajtóerő megegyezik a kiszorított folyadék vagy gáz súlyával. Ez *Arkhimédész törvénye* [29].

Jegyezzük meg azonban, hogy ez csak akkor igaz, ha a közeg(ek) teljesen körülveszi(k) a testet. Ha például a test az edény alján fekszik, és a (nem nedvesítő) folyadék nem jut alá, akkor nem lesz felhajtóerő.

Szintén fontos, hogy a felhajtóerőhöz hidrosztatikai nyomás kell, ahhoz viszont térfogati erő szükséges. Súlytalanságban (az űrállomáson, vagy egy szabadon eső folyadékban) nincsen felhajtóerő. Ha viszont a közeg gyorsul, akkor a felhajtóerő iránya módosul az eredő térfogati erő irányának megfelelően.

Kísérlet: A levegő felhajtóereje

Zárt, vékony falú, üreges üveggömböt fémsúlyokkal kiegyensúlyozunk egy mérlegen. A mérleget üvegbúra alá helyezzük, és a búra alól a levegőt kiszivattyúzzuk. A mérleg egyensúlya felborul, az üveggömb lebillen, mert megszűnik a felhajtóerő (ami a nagy térfogatú üveggömbre nagyobb, mint a kis térfogatú fémsúlyra).

A levegő óvatos beengedése után az egyensúly helyreáll. ♦

Úszás és lebegés

Ha a testre ható felhajtóerő nagyobb, mint a test súlya, akkor a test egészen addig felfelé mozog, amíg részben kiemelkedik a folyadékból. Ez az *úszás*. Az egyensúlyi helyzetben:

$$\rho_t g V = F_f = \rho_k g V_m,$$

ahol ρ_t a test sűrűsége és V_m a test folyadékba merülő részének térfogata.

Nyilván $V_m < V$, így az úszás feltétele, hogy $\rho_t < \rho_k$, azaz a test (átlagos) sűrűsége kisebb legyen a közeg sűrűségénél.

Ha a test és a közeg sűrűsége pontosan megegyezik, akkor a test a közegben bárhol egyensúlyban lehet. Ez a *lebegés* állapota. Mivel a sűrűségek változnak a hőmérséklettel, a lebegés általában nem stabil. Ahhoz hogy egy test huzamosabb ideig lebegjen, finoman szabályozni kell az átlagos sűrűségét (tengeralattjáróknál víz be- vagy kiszivattyúzásával, hőlégballonoknál a fűtés változtatásával, héliumos ballonoknál gáz kiengedésével vagy ballaszt súly kidobásával).

Ha a test átlagos sűrűsége nagyobb a közeg sűrűségénél, akkor a test *lesüllyed*, és csak a közeg alján lévő szilárd felülethez nyomódva kerül egyensúlyba.

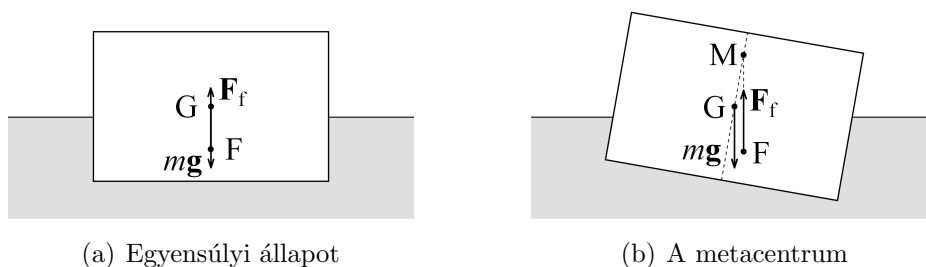
Úszási egyensúlyok

Az úszás feltételéből még nem következik, hogy a test milyen helyzetben úszik. Ez a közeg és a test átlagos sűrűségén kívül a test alakjától és a tömegeloszlásától is függ, és meghatározása általában bonyolult.

A hajók esetében a stabil úszási egyensúly alapvető követelmény, hiszen ha felborul, víz jut a hajó belsejébe, átlagos sűrűsége nagyobb lesz a víznél, és elsüllyed.

A hajó úszási egyensúlyát nyilvánvalóan biztosítja, ha a nehézségi erő támadáspontja (a hajó tömegközéppontja) lejjebb van, mint a felhajtóerő támadáspontja (a kiszorított víz tömegközéppontja). Ekkor a hajó megbillenésekor a nehézségi erőből és a felhajtóerőből álló erőpár a megbillenéssel ellentétes irányú forgatónyomatéket fejt ki, és ezzel a hajó egyensúlyát helyreállítja. Ez az eset azonban csak a tókesúlyos vitorlásoknál fordul elő, ahol a tókesúly miatt a tömegközéppont mélyre kerül.

Más hajóknál – a csónakoktól a legnagyobb tengeri hajókig – a hajó tömegközéppontja (G) magasabban helyezkedik el, mint a kiszorított víz tömegközéppontja (F). Ebből arra következtethetnénk, hogy a hajó úszási egyensúlya instabil, hiszen a legkisebb kibillenés hatására olyan forgatónyomaték jelentkezne, amely a hajót tovább billenti, és végül felborítja (8.8(a) ábra).



8.8. ábra. Hajó egyensúlya

A kiszorított víz tömegközéppontja azonban nincs a hajóhoz rögzítve, függ a hajó úszási helyzetétől. Megfelelően kialakított hajótest esetében a hajó billenésekor a kiszorított víz tömegközéppontja úgy mozdul el a hajóhoz képest, hogy a forgatónyomatéka a hajót visszabillentse egyensúlyi állapotába. A hajó szimmetriatengelyének és a kiszorított víz mindenkorai tömegközéppontján átmenő függőleges egyenesnek a metszéspontja a *metacentrum* (M). A 8.8(b) ábráról látható, hogy ha a hajó metacentruma a tömegközéppont fölött van, akkor a hajó stabil (minél magasabban van, annál stabilabb). [30]

8.2. Felületi jelenségek

A folyadékok felülete különleges, az eddigiekkel nem megmagyarázható jelenségeket mutat. Ezek közül mutatnak be néhányat a következő kísérletek:

Kísérlet: Felületi jelenségek

Ha egy alumínium pénzét vagy egy borotvapengét óvatosan vízfelületre helyezünk, a testek annak ellenére úsznak, hogy sűrűségük nagyobb a víznél.

Közelről nézve azt is láthatjuk, hogy az úszó testek mellett a víz felülete benyomódik – hasonlóan viselkedik, mint egy vékony rugalmas hártya.

Ha egy merev drótkeretre mosogatószeres oldatból hártyát feszítünk, annak teljes felülete – a peremfeltételek által megengedett lehetőségeken belül – minimális lesz.

Ha a kifeszített folyadékhártyát egy laza cérnaszál két részre osztja, és az egyik részt kilyukasztjuk, akkor a másik rész összehúzódik, a cérna pedig körív alakban megfeszül.

Szívószál végére fújtt szappanbuborék gömb alakú lesz (adott térfogat esetén a gömbnek minimális a felülete). Ha a szívószál másik végét szabadon hagyjuk, a buborék összehúzódik, és a levegő kiáramlik.

Ha vízbe különböző átmérőjű üvegcsöveket merítünk, akkor a vékony csövekben a víz magasabbra emelkedik: minél vékonyabb a cső, annál magasabbra.



További hétköznapi tapasztalat, hogy a folyadékok gyakran nem terülnek szét teljesen, hanem cseppeket alkotnak – annak ellenére, hogy így nagyobb a folyadék (gravitációs) helyzeti energiája.

A jelenségek oka a folyadék belsejében fellépő erő, a *kohézió*, amely a folyadékot egyben tartja, a folyadék felületén lévő folyadékreszekre pedig befelé ható erőt fejt ki. Ez az erő a folyadék felületét csökkenteni igyekszik, amit úgy is leírhatunk, hogy a folyadék felületében – a rugalmas hártyákhoz hasonlóan – egy a felület síkjában ható, összehúzó feszültség lép fel. Ez a jelenség a *felületi feszültség*.

Ha egy téglalap alakú keret egyik oldala szabadon elmozdulhat, akkor a keretre kifeszített folyadékhártya a szabadon mozgó részre \mathbf{F}_h erőt fejt ki (8.9(a) ábra). Az ezzel egyensúlyt tartó \mathbf{F} erő mérhető. A tapasztalat szerint az erő arányos az elmozduló oldal l hosszával (de független a hártya területétől és vastagságától):

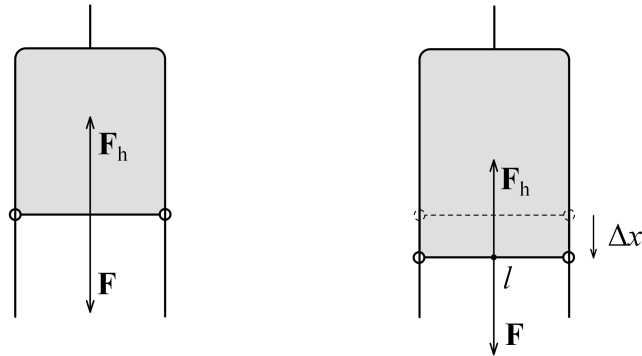
$$F_h = 2l\sigma,$$

ahol σ a folyadékra jellemző (hőmérséklettől függő) állandó, a *felületi feszültség*. (A 2-es szorzó azért szerepel az összefüggésben, mert a hártya mindkét felületén fellép húzóerő.)

A felületi feszültség tehát a folyadékfelület egységnyi hosszúságú vonaldarabjában fellépő felületi erő:

$$\sigma = \frac{dF_f}{dl}. \quad (8.5)$$

Mértékegysége a definiáló összefüggés alapján N/m.



(a) Hártya húzóereje

(b) A felületi energia növelése

8.9. ábra. Folyadék-hártya

Ha a felületet meg akarjuk növelni, akkor munkát kell végeznünk, amely a *felületi energia* növelésére fordítódik. Eszerint a felületi energia megváltozása (8.9(b) ábra):

$$\Delta E_f = -\Delta W_f = F_f \Delta x = 2\sigma l \Delta x = \sigma \Delta A,$$

ahol $\Delta A = 2l\Delta x$ a felület megváltozása (a 2-es szorzó a két oldal miatt van).

Ennek alapján σ az egységnyi folyadékfelületre jutó felületi energia:

$$\sigma = \frac{dE_f}{dA}. \quad (8.6)$$

(Az ebből a definícióból adódó J/m^2 mértékegység megegyezik a korábban megkapott N/m mértékegységgel.)

A felületi feszültség nemcsak a folyadéktól, hanem a vele határos másik közeg (gáz vagy folyadék) megválasztásától is függ. A táblázatokban legtöbbször a saját gőzével egyensúlyban lévő folyadék felületi feszültségét adják meg (de ez csak kicsit tér el a levegővel határos folyadéokra vonatkozó értéktől). A víz felületi feszültsége szobahőmérsékleten $\sigma = 0,072 \text{ N/m}$ (B.3 függelék).

Eötvös-szabály

A felületi feszültség függ a hőmérséklettől. Egy folyadék saját gőzére vonatkozó felületi feszültségének hőmérsékletfüggését jó közelítéssel az *Eötvös-szabály* írja le. [31]

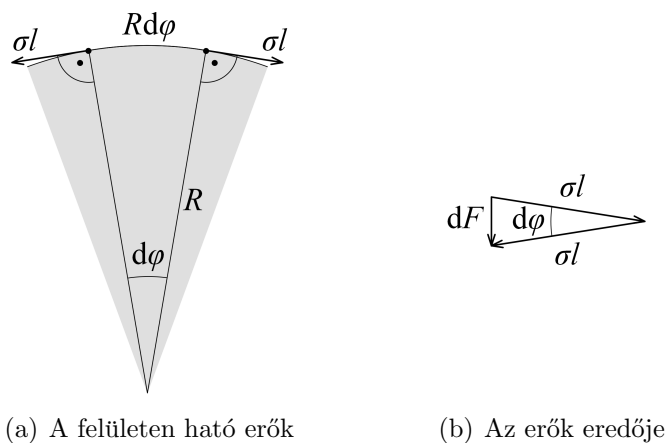
A tapasztalati összefüggés szerint a felületi feszültség a hőmérséklettel csökken, annak lineáris függvénye, és a *kritikus hőmérsékleten* eltűnik:

$$\sigma V_m^{2/3} = k(T_k - T), \quad (8.7)$$

ahol V_m a folyadék moláris térfogata, T_k az anyag kritikus hőmérséklete, és k egy legtöbb folyadékra érvényes állandó ($k \approx 2,1 \cdot 10^{-7} \text{ JK}^{-1} \text{ mol}^{-2/3}$).

Görbületi nyomás

Görbült felület esetén a felületi feszültségből származó erő járulékos nyomást hoz létre a folyadékban. A 8.10(a) ábrán egy egy irányban (hengeresen) görbült folyadékfelület darabja látható. Az ábrába berajzoltuk a felület ábra síkjára merőleges l hosszúságú darabjára ható erőket. R a felület görbületi sugara, $d\varphi$ a kis felületdarabhoz tartozó középponti szög.



8.10. ábra. Görbületi nyomás

Ha a $d\varphi$ szög kicsi, a két erő eredője:

$$dF = \sigma l d\varphi,$$

és az eredő erő az ív középpontja felé mutat (8.10(b)). Az ebből származó *görbületi nyomás*:

$$p_g = \frac{dF}{dA} = \frac{\sigma l d\varphi}{l R d\varphi} = \frac{\sigma}{R}.$$

Ha a felület nem csak egy irányban görbült, akkor mindig található két *fő görbületi sugár*: R_1 és R_2 . Ezek a minimális és a maximális görbülethez tartoznak. (A *görbület* a görbületi sugár reciproka.) A görbületi sugár domború folyadékfelületnél pozitív, homorú felületnél negatív, sík felületnél pedig végtelen. Az előző gondolatmenethez hasonlóan belátható, hogy a görbületi nyomás kifejezhető a két fő görbületi sugár segítségével:

$$p_g = \sigma \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right). \quad (8.8)$$

Gömbnél $R_1 = R_2 = R$, és így:

$$p_g = \frac{2\sigma}{R}.$$

Egy buborék belsejében mindkét folyadékfelszín létrehoz görbületi nyomást, így ekkor:

$$p_g = \frac{4\sigma}{R}.$$

Szabad (nem buborékká záródó) folyadékhártya két oldalán azonos a nyomás, $p_g = 0$, azaz a felület teljes görbülete nulla. Ilyen felület a sík mellett a *nyeregfelület* is, ahol a két görbületi sugár egyenlő nagyságú, de ellentétes előjelű.

A buborékban kialakuló görbületi nyomást másképp is levezethetjük. Növeljük egy kicsit (ΔR értékkel) a buborék sugarát, és írjuk fel a munkatételt. A térfogatnöveléshez szükséges munka:

$$W = p_g \Delta V = p_g A \Delta R = p_g 4R^2 \pi \Delta R,$$

a buborék felületi energiájának megváltozása pedig:

$$\begin{aligned} E_f &= \sigma \Delta A = 2\sigma [4\pi(R + \Delta R)^2 - 4\pi R^2] = 8\sigma\pi (R^2 + 2R\Delta R + \Delta R^2 - R^2) \approx \\ &\approx 16\sigma\pi R \Delta R. \end{aligned}$$

Ezek alapján:

$$\begin{aligned} W &= \Delta E_f \\ p_g 4R^2 \pi \Delta R &= 16\sigma\pi R \Delta R \\ p_g &= \frac{4\sigma}{R}, \end{aligned}$$

a korábbi eredményünkkel megegyezően.

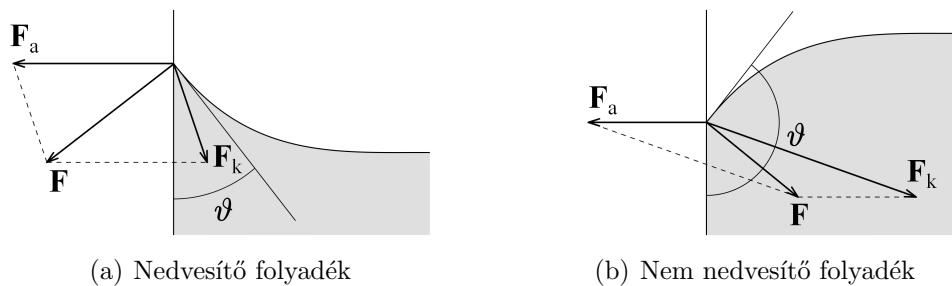
8.2.1. Kapilláris jelenségek

A folyadék és egy szilárd anyag (vagy két folyadék) érintkezésénél újabb érdekes jelenségek figyelhetők meg. Ezek közül a leglátványosabb, ahogy a folyadék egy vékony csőben (*kapillárisban*) viselkedik, innen a jelenségkör neve.

Illeszkedési szög

A tapasztalat szerint a folyadék felszíne a szilárd testtel való érintkezés közelében elgörbül. Bizonyos esetekben – például víz és tiszta üveg – a folyadék „felkúszik” az edény falára, a folyadék *nedvesíti* a felületet. Más esetekben viszont – például higany és üveg, vagy víz és viaszos üveg – a folyadékfelület lefelé görbül, a folyadék ekkor *nem nedvesítő*. (Láthatjuk, hogy a nedvesítés nem a folyadék tulajdonsága, hanem a folyadékra és a szilárd felületre együtt vonatkozik.)

A folyadékfelület érintőjének a fallal bezárt szöge a ϑ *illeszkedési szög*, amely nedvesítés esetén hegyesszög (8.11(a) ábra), nem nedvesítő esetben pedig tompaszög (8.11(b) ábra). Tökéletes nedvesítés esetén $\vartheta = 0$.

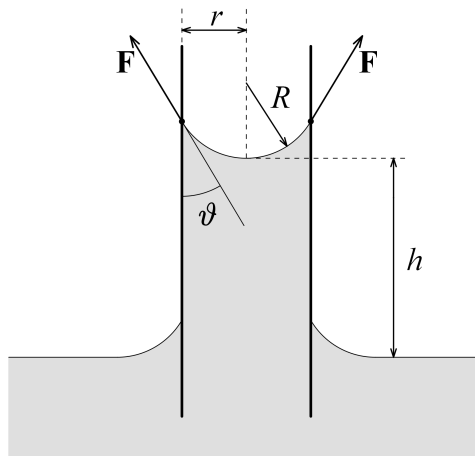


8.11. ábra. Illeszkedési szög

Az illeszkedési szöget – ahogy az ábrákon is látszik – a folyadékban belüli összetartó erő (kohézió), valamint a folyadék és a szilárd felület közötti vonzó erő, az *adhézió* egyensúlya alakítja ki. Az eredő erőnek merőlegesnek kell lennie a folyadék felületére. Mindkét erő vonzó, tehát a nem nedvesítő folyadékok esetében sincs arról szó, hogy a felület taszítaná a folyadékot (csak ilyenkor a kohézió erősebb, mint az adhézió).

Kapilláris emelkedés

Vékony csövekben (kapillárisokban) a nedvesítő folyadék jól láthatóan (és jól mérhetően) magasabbra emelkedik, mint a csövön kívül. Nem nedvesítő folyadékok esetében pedig lesüllyed a folyadékszint a kapillárisban.



8.12. ábra. Kapilláris emelkedés

A kapilláris emelkedés nagyságát kétféle megfontolással is meghatározhatjuk: erők, illetve nyomások egyensúlyát felírva.

Az első gondolatmenet szerint a folyadékfelület peremén fellépő erők tartanak egyensúlyt a folyadékoszlop súlyával (8.12 ábra):

$$2r\pi\sigma \cos \vartheta = r^2\pi h\rho g,$$

amiből

$$h = \frac{2\sigma \cos \vartheta}{\rho g r}. \quad (8.9)$$

A másik megfontolás szerint a (negatív) görbületi nyomás egyenlíti ki a folyadékoszlop $p_h = \rho g h$ hidrosztatikai nyomását. A folyadékfelszín görbületi sugara a 8.12 ábra alapján:

$$R = \frac{r}{\cos \vartheta},$$

és így a görbületi nyomás:

$$p_g = -\frac{2\sigma}{R} = -\frac{2\sigma \cos \vartheta}{r}.$$

Ezt behelyettesítve a $p_g + p_h = 0$ összefüggésbe a kapilláris emelkedésre újra a (8.9) összefüggést kapjuk.

Megfigyelés: Magas fák vízháztartása

A legmagasabb fák több mint száz méter magasak. Érdekes kérdés, hogy milyen erő juttatja fel a talajból a vizet a fa csúcsáig. A 100 m magas vízoszlophoz tartozó hidrosztatikai nyomás 1 MPa, a légköri nyomás tízszerese!

Ennek a nyomásnak kisebb részét a gyökérben kialakuló *ozmózisnyomás* hozza létre. (Az ozmózisnyomás a talajban lévő és a növényben lévő sóoldatok koncentrációkülönbsége miatt jön létre.) A nagyobb részéért viszont a fa levelein lévő kapillárisokban kialakuló görbületi nyomás felel. A víz folyamatos párolgása miatt a pórusokban a folyadékfelszín homorú lesz, és így negatív görbületi nyomás alakul ki.

A (8.9) összefüggés alapján (tökéletes nedvesítést feltételezve) az adatokat behelyettesítve $0,1 \mu\text{m}$ nagyságrendű pórusméretet kapunk. (Ez csak egy nagyságrendi becslés, a valóságban a pórusok nem kör keresztmetszetűek, ráadásul méretüket a növény változtatni tudja.)

Külön érdekesség, hogy a (negatív) görbületi nyomás abszolút értéke nagyobb a légköri nyomásnál, és így a folyadék belsejében negatív nyomás alakul ki. Nagyméretű csövekben vagy szennyeződés jelenlétében ilyenkor buborékok alakulnának ki, és a folyadékoszlop elszakadna. (Ezért nem lehet szívókúttal 10 méternél mélyebb kútból vizet felszívni.) A növény belsejében lévő vékony kapillárisokban viszont a folyadékoszlop összefüggő maradhat, és így a levelek pórusaiban kialakuló görbületi nyomás a fa tetejéig is felszívhatja a gyökerekből a vizet. ♦

8.3. Folyadékok és gázok áramlása

Az áramlások leírásának egyik lehetséges módja, hogy a közeg kicsiny részeinek mozgását – pontrendszerként – leírjuk. Ennél egyszerűbb eljárás, ha nem foglalkozunk az egyes anyagrészek mozgásának nyomon követésével, hanem az áramló közeg jellemzőit (sebesség, nyomás, sűrűség) adjuk meg a hely és az idő függvényében.

A folyadékok áramlásával a *hidrodinamika*, a gázok áramlásával az *aerodinamika* foglalkozik. A folyadékok és a gázok áramlása sok szempontból hasonló, ha a sebességek és a hőmérséklet változások nem túl nagyok, és a gáz sűrűsége közel állandónak tekinthető.

Sebességtér, áramvonalak

A közeg áramlása egyértelműen leírható a *sebességtér*, azaz a $\mathbf{v}(\mathbf{r}, t)$ általában időben változó vektor-vektor függvény (vektortér) megadásával.

A sebességteret szemléletessé tehetjük az *áramvonalak* segítségével. Az áramvonalak olyan görbék, melyek iránya minden pontban megegyezik a közeg sebességvektorának irányával, és sűrűségük arányos a sebesség nagyságával.

Időben változó sebességtér esetén az áramvonalak is folyamatosan változnak. Időben állandó (*stacionárius*) áramlás esetén az áramvonalak időben állandók, és ilyenkor a közeg részecskéi valóban az áramvonalak mentén (azokkal párhuzamosan) mozognak.

Fizikatörténeti érdekesség, hogy a folyadékok áramlásának leírására felépített matematikai apparátust és nyelvezetet később más vektorterek, például az elektromos és mágneses terek leírásához is felhasználták. Ezért beszélünk „forrásos” és „örvénymentes” elektrosztatikus térről, vagy „forrásmentes” és „örvényes” mágneses mezőről. Külön furcsaság, hogy miközben a folyadékok áramlása kikerült a középiskolai tananyagból, ezek az eredetileg az áramlásokra vonatkozó kifejezések az elektromágneses terekre vonatkoztatva, átvitt értelemben továbbra is szerepelnek benne.

Kísérlet: Pohl-féle áramvonal készülék

Az áramvonalak jól szemléltethetők a *Pohl-féle áramvonal készülékkel*. Az eszközben két függőleges, átlátszó, párhuzamos lap között víz áramlik, melybe kicsiny nyílásokon keresztül festett, színes vizet vezetünk. Ha az áramlás nem túl gyors, a szintelen és színes csíkok egymás mellett mozognak, és kirajzolják az áramlási képet, az áramvonalakat. A készülékkel tanulmányozható az áramlási kép különböző akadályok körül. ♦

Stacionárius áramlás esetén a $\mathbf{v}(\mathbf{r})$ sebességtér független az időtől. Ekkor érdemes bevezetni az *áramcső* fogalmát. Az áramcső az áramlási térben egy kis zárt görbén átmenő áramvonalak által kialakított képzeletbeli cső, melyben a közeg úgy mozog, hogy sehol nem hatol át a cső „falán”, nincsen arra merőleges sebességkomponense. Egy merev falú cső természetesen egyben áramcső is (ha az áramlás stacionárius), de a fogalom más esetekben is hasznos.

Tömegáram-sűrűség

Egy áramcső valamely (tetszőleges) keresztmetszetén időegység alatt átáramló tömeg a *tömegáram-erősség*:

$$I_m = \frac{dm}{dt}.$$

Az egységnyi (áramlásra merőleges) felületre eső tömegáram a *tömegáram-sűrűség*:

$$j_m = \frac{dI_m}{dA},$$

melynek mértékegysége $\text{kg s}^{-1}\text{m}^{-2}$. A tömegáram-sűrűség a közeg v sebességével áll kapcsolatban. Egy elemi felületen dt idő alatt átáramló térfogat:

$$dV = dA v dt,$$

amiből az elemi felületen átáramló tömegáram-erősség:

$$dI_m = \frac{\rho dV}{dt} = \rho dA v,$$

ahol ρ a közeg sűrűsége. Ebből a tömegáram-sűrűség:

$$j_m = \frac{dI_m}{dA} = \rho v.$$

A tömegáram-sűrűség vektoriális mennyiség, iránya az áramlás irányába mutat, a sebességgel párhuzamos:

$$\mathbf{j}_m = \rho \mathbf{v}. \quad (8.10)$$

Ennek alapján a tömegáram-erősség az áramcső keresztmetszetén elvégzett felületi integrállal határozható meg:

$$I_m = \int_A \rho \mathbf{v} d\mathbf{A} = \rho \int_A \mathbf{v} d\mathbf{A}. \quad (8.11)$$

(A második forma akkor érvényes, ha ρ állandó.)

A mennyiségek teljes analógiában vannak a középiskolából ismert I (elektromos) áramerősséggel („töltésáram-erősség”) és a \mathbf{j} áramsűrűséggel („töltésáram-sűrűség”) azzal a különbséggel, hogy ott az áramló mennyiség nem a tömeg, hanem a töltés.

Az áramlások különböző szempontok szerint csoportosíthatók.

Ahogy láttuk, lehetnek időben változók vagy időben állandók (stacionáriusak). Mi elsősorban az utóbbival foglalkozunk.

A közeg lehet összenyomható vagy *összenyomhatatlan*. Ez utóbbi azt jelenti, hogy a közeg sűrűsége jó közelítéssel állandó: $\rho = \text{állandó}$. A levegő kb. 10 m/s sebességig tekinthető összenyomhatatlannak.

Az áramló folyadékokban és gázokban – szemben a nyugvó közeggel – fellépnek belső nyíró feszültségek, amelyek a közeg *belső súrlódását* okozzák. Sok esetben azonban a belső súrlódási erők elhanyagolhatók más erők mellett, és az áramlás jó közelítéssel leírható ezek figyelembevétele nélkül. Az ilyen idealizált áramlást *súrlódásmentesnek* nevezzük. Ezzel szemben a valódi áramlások *súrlódásosak*.

Ha az áramlás nem túl gyors, lehet *lamináris* (réteges). Ekkor a közeg részei egymással párhuzamosan (rétegekben) mozognak, az áramlás lehet stacionárius. Nagyobb sebességeken az áramlás *turbulens* (örvényes) lesz. Ilyenkor a rétegek összekeverednek, az áramvonalak időben változnak, örvények alakulnak ki.

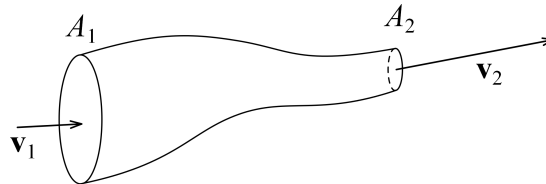
8.3.1. Súrlódásmentes áramlás

Súrlódásmentes áramlás esetében elhanyagolható a közegen belül a disszipáció, így érvényesül a mechanikai energia megmaradása, illetve a rendszer energiáját csak külső erők munkája változtatja meg. Azonban mielőtt megfogalmazzuk a mechanikai energia megmaradásának áramló folyadékokra vonatkozó alakját, egy másik – nem csak a súrlódásmentes áramlásokra igaz – összefüggést írunk fel, amely szintén egy megmaradási tétel, az anyag- vagy *tömegmegmaradás* következménye.

Kontinuitási egyenlet

Stacionárius áramlás esetében az anyag nem lép át az áramcső falán. Ha az áramlás közben nem is keletkezik (és nem is semmisül meg) anyag – azaz az áramlási tér forrásmentes –, akkor az áramcsőbe belépő és az onnan kilépő tömegáram-erősség megegyezik:

$$I_{m1} = I_{m2} .$$



8.13. ábra. Kontinuitási egyenlet

A (8.11) összefüggés alapján a 8.13 ábra jelöléseivel

$$\int_{A_1} \rho \mathbf{v} d\mathbf{A} = \int_{A_2} \rho \mathbf{v} d\mathbf{A}.$$

Ha a felületek merőlegesek a sebességre ($d\mathbf{A} \parallel \mathbf{v}$), akkor a vektorok helyett azok nagyságával számolhatunk. Ha ezen kívül ρ és v a cső keresztmetszete mentén állandó, akkor az integrál helyett egyszerű szorzás áll:

$$\rho_1 v_1 A_1 = \rho_2 v_2 A_2.$$

Ha a közeg összenyomhatatlan, és $\rho_1 = \rho_2 = \rho$, akkor a kifejezés tovább egyszerűsödik:

$$v_1 A_1 = v_2 A_2,$$

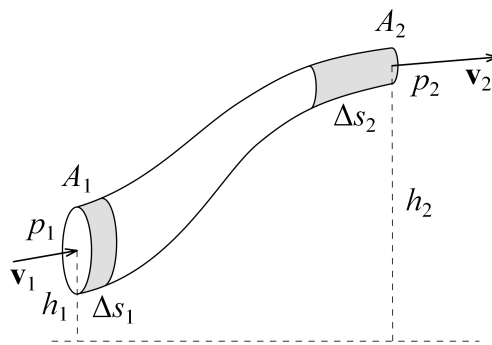
vagy másképp:

$$vA = \text{állandó}. \quad (8.12)$$

Ez a *kontinuitási egyenlet*, amely a tömegmegmaradás törvényének speciális esete áramlásokra. Az $I_V = vA$ mennyiség a térfogatáram-erősség (időegység alatt átáramló térfogat), amit folyók, patakok esetében *vízhozamnak* neveznek (mértékegysége m^3/s).

Bernoulli-törvény

A következő levezetésben feltételezzük, hogy az áramlás sűrűségmentes, stacionárius (időben állandó), és a közeg összenyomhatatlan ($\rho = \text{állandó}$). Azt is feltételezzük, hogy az áramcső vékony, és a közeg sebessége az áramcső keresztmetszetén belül állandó.



8.14. ábra. Bernoulli-törvény

Írjuk fel a (4.10) munkatételt az áramcsőben mozgó közegre, miközben az egy kicsit elmozdul! A jelölések a 8.14 ábrán láthatók.

A belépéskor és a kilépéskor a környezet végez munkát a közegen:

$$\begin{aligned}\Delta W_1 &= F_1 s_1 = p_1 A_1 \Delta s_1 = p_1 \Delta V \\ \Delta W_2 &= -F_2 s_2 = -p_2 A_2 \Delta s_2 = -p_2 \Delta V.\end{aligned}$$

Itt felhasználtuk, hogy a (8.12) kontinuitási egyenlet miatt $A_1 \Delta s_1 = \Delta V = A_2 \Delta s_2$.

A helyzeti és a mozgási energia megváltozása:

$$\begin{aligned}\Delta E_h &= \rho \Delta V g (h_2 - h_1) \\ \Delta E_m &= \frac{1}{2} \rho \Delta V (v_2^2 - v_1^2).\end{aligned}$$

Felírva a (4.10) munkatételt:

$$\Delta W_1 + \Delta W_2 = \Delta W = \Delta E = \Delta E_h + \Delta E_m,$$

behelyettesítve a fenti értékeket:

$$(p_1 - p_2) \Delta V = \rho \Delta V g (h_2 - h_1) + \frac{1}{2} \rho \Delta V (v_2^2 - v_1^2),$$

ΔV -vel egyszerűsítve, és az azonos indexű tagokat egy oldalra rendezve:

$$p_1 + \frac{1}{2} \rho v_1^2 + \rho g h_1 = p_2 + \frac{1}{2} \rho v_2^2 + \rho g h_2,$$

vagy másképp:

$$p + \frac{1}{2} \rho v^2 + \rho g h = \text{állandó}. \quad (8.13)$$

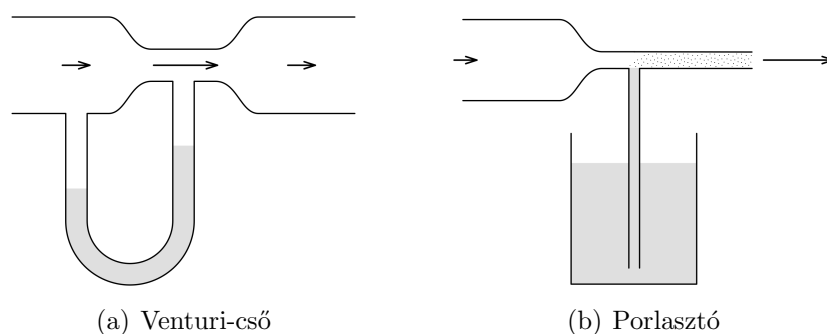
Ez a *Bernoulli-törvény*, amely a mechanikai energia megmaradásának speciális esete áramlásokra. [32] Hangsúlyozzuk, hogy a törvény csak összenyomhatatlan közeg sűrűdásmentes, stacionárius áramlására igaz, vékony áramcső esetén.

A nyomás és a sebesség közti kapcsolat még szembeötlőbb, ha $h_1 \approx h_2$, azaz a helyzeti energia változás elhanyagolható a többi tag mellett. Ekkor látszik, hogy ahol az áramlás gyorsabb, ott a nyomás kisebb:

$$v_2 > v_1 \quad \Rightarrow \quad p_2 < p_1.$$

Még érdekesebb eredményre jutunk, ha felhasználjuk a (8.12) kontinuitási egyenletet is, amely szerint a sebesség fordítva arányos az áramcső keresztmetszetével. Ebből az következik, hogy ahol a keresztmetszet kicsi, ott a nyomás is kicsi lesz, és fordítva, a nagy keresztmetszetű helyeken a nyomás is nagyobb:

$$A_2 < A_1 \quad \Rightarrow \quad p_2 < p_1.$$



8.15. ábra. A szűkületben lecsökken a nyomás

Ez az eredmény nagyon meglepő, hiszen azt várhatnánk, hogy az áramló közeg épp a kis keresztmetszetű helyeken „torlódik össze”, és így épp ott lesz nagyobb nyomása. Jobban belegondolva azonban megérthetjük, hogy a kontinuitási egyenlet miatt épp a szűkebb helyeken kell gyorsabban áramlania a közegnek, a felgyorsításához pedig nyomásmáskülönbség kell, azaz a nyomásnak a szűkület előtti nagyobb keresztmetszetű részen nagyobbak kell lennie, mint a szűkületben.

Ezen az elven működik a 8.15(a) ábrán látható *Venturi-cső*, amellyel a kialakuló nyomásmáskülönbség alapján az áramló közeg sebessége mérhető. A *porlasztó* (vízpermetező, karburátor, 8.15(b) ábra) működésének alapja szintén a szűkületben létrejövő nyomáscsökkenés, amely felszívja a folyadékot a függőleges csövön, amit a nagy sebességű levegő azonnal apró cseppekre porlaszt.

A Bernoulli-törvénynek van szerepe sok más jelenség mellett az érszűkület és értágulat kialakulásában is. Az érszűkületnél – amit elsősorban a dohányzás okoz – a vér felgyorsul, nyomása lecsökken, és így a környező szövetek még jobban összenyomják az eret, ami végül teljesen elzáródhat. Hasonlóan, az értágulatban a vér lelassul, nyomása megnő, így az ér még jobban kitágul, és ha nem elég rugalmas, elpattanhat.

Kísérlet: Aerodinamikai paradoxon

Ha egy tölcsér kiszélesedő részébe pingponglabdát helyezünk, és a tölcsér nyakába belefújunk, a labda nem repül ki, hanem beszorul a tölcsérbe.

Magyarázat: A nyakban és a labda mellett gyorsabb a levegő, így nyomása kisebb, mint a kiszélesedő részben, így az ottani nagyobb nyomás benyomja a labdát.

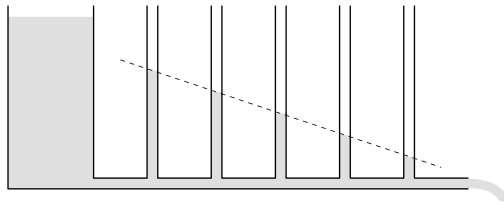
Két párhuzamos, függőleges lap közé befújunk. A lapok a várakozással ellentétben nem távolodnak, hanem egymás felé mozdulnak.

Magyarázat: A lapok között áramló levegőnek nagyobb a sebessége, és így kisebb a nyomása, mint a lapokon kívül.

Az összeérő lapok teljesen elzárhatják a levegő útját. Ezzel viszont megszűnik a levegő áramlása és a nyomáskülönbség is, ezért a lapok visszafelé mozognak, eredeti egyensúlyi helyzetük felé. Ekkor újra megindul a levegő áramlása, és a lapok ismét egymás felé mozognak. A folyamat eredményeképp a lap rezegni kezd. Ezt az elvet használják ki a fúvós hangszerek egy részben használt *nyelvsípok* (10.9.2 szakasz). ♦

8.3.2. Súrlódásos áramlás

A valódi folyadékokban az egymáshoz képest elmozduló részek között nyírófeszültség lép fel, amely a relatív sebességet csökkenteni igyekszik. Ez a jelenség a *belső súrlódás*, a belső súrlódásos folyadékot vagy gázt *viszkózus* közegnek nevezzük. A belső súrlódás disszipatív erő, emiatt csökken a közeg mechanikai energiája – a (8.13) Bernoulli-egyenlet nem érvényes.



8.16. ábra. Nyomáscsökkenés viszkózus folyadékban

A 8.16 ábrán látható kísérlet mutatja, hogy a vízszintes csőben – amely állandó keresztmetszetű, és így a folyadék sebessége is állandó benne – a hely függvényében változik, csökken a nyomás. Ez azt jelenti, hogy a valódi folyadékok és gázok esetében állandó keresztmetszetű csőben is nyomáskülönbségre van szükség az áramlás fenntartásához.

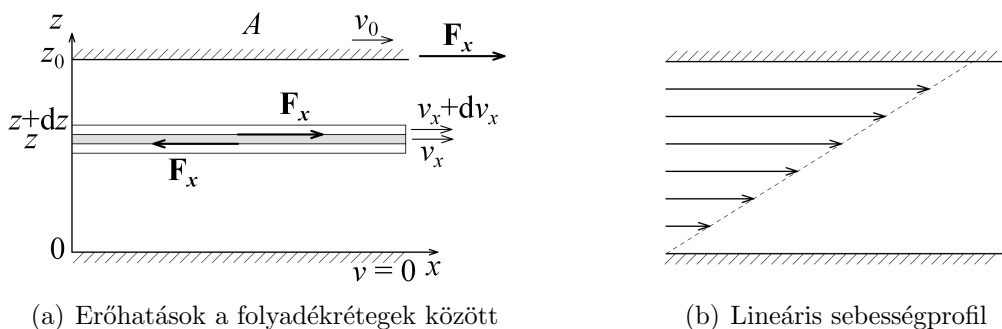
Newton-féle súrlódási törvény

A belső súrlódás törvényszerűségeinek felírásához vizsgáljuk a 8.17(a) ábrán látható elrendezést. A folyadék két egymással párhuzamos, a távolságukhoz viszonyítva nagyon nagy méretű, vízszintes sík felület között helyezkedik el. A sík lapok felülete A , távolsága z_0 . Az xy síkban elhelyezkedő alsó lapot rögzítjük, míg a felső lapot x irányban v_0 állandó sebességgel mozgatjuk, amihez – a folyadék belső súrlódása miatt – F_x erőre van szükség.

A tapasztalat szerint, ha a mozgás nem túl gyors, akkor a felső lap mozgatásához szükséges erő arányos a v_0 sebességgel és a felületek A nagyságával, valamint fordítva arányos a felületek z_0 távolságával:

$$F_x = \eta \frac{v_0}{z_0} A, \quad (8.14)$$

ahol η a közegre jellemző (hőmérsékletfüggő) együttható, a közeg *viszkózitása*. A viszkozitás mértékegysége az összefüggés alapján Pas.



8.17. ábra. Newton-féle súrlódási törvény

A belső súrlódás nem a folyadék és a felületek, hanem az egymáshoz képest mozgó folyadékrétegek között lép fel. A folyadék tapad a szilárd felületekhez – tehát a legalsó folyadékréteg áll, a legfelső a felülettel együtt v_0 sebességgel mozog. Nem túl nagy sebesség esetén a lemezek között *lamináris* (réteges) áramlás alakul ki, azaz a közeg v_x sebessége csak a z koordinátától függ.

Egy kiválasztott rétegre a felette és az alatta lévő réteg által kifejtett nyíróerő hat. Mivel a folyadékréteg nem gyorsul (az áramlás időben állandó, stacionárius), a két erő azonos nagyságú. Eszerint a folyadékon belül mindenhol ugyanakkorra F_x nyíróerő hat. Mivel a (8.14) összefüggés bármilyen z távolságra igaz, felírhatjuk dz távolságra is:

$$F_x = \eta \frac{dv_x}{dz} A.$$

A kifejezést átrendezve

$$\tau_x = \frac{F_x}{A} = \eta \frac{dv_x}{dz}, \quad (8.15)$$

azaz a nyírófeszültség arányos a sebességgradienssel. Ez a *Newton-féle súrlódási törvény*. Mivel a sebességgradiens a közegen belül állandó:

$$\frac{dv_x}{dz} = \frac{v_0}{z_0},$$

a sebesség változása z irányban a folyadékon belül lineáris (8.17(b) ábra):

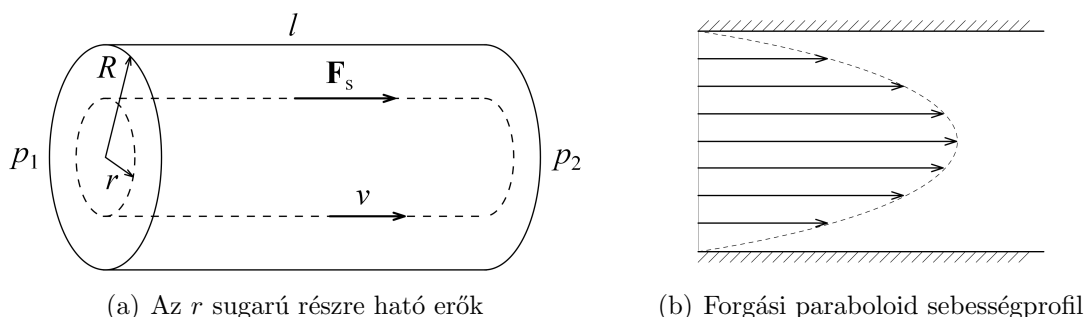
$$v_x(z) = \frac{v_0}{z_0} z. \quad (8.16)$$

A (8.15) összefüggés nem minden közegre érvényes. Azokat, amelyekre teljesül, *newtoni folyadékoknak* nevezik – ilyen a legtöbb egyszerű folyadék és gáz. Ugyanakkor például a kolloid-oldatok *nem-newtoni folyadékok*, amelyekben a viszkozitás nem állandó,

hanem függ a nyírófeszültségtől. Ezek a folyadékok meglepő tulajdonságokkal rendelkeznek: például egy étkezési keményítóből készült sűrű oldaton ugrálni lehet – mint egy kicsit képlékeny, de szilárd felületen –, de ha lassan mozog, vagy áll valaki rajta, akkor belesüllyed, mint egy nagy viszkozitású folyadékba. [33]

Hagen-Poiseuille-törvény

Nem túl nagy sebesség esetén egy kör keresztmetszetű csőben is lamináris (réteges) áramlás alakul ki. A hengersizmetria miatt a rétegek hengergyűrű alakúak, a közeg sebessége csak a gyűrű sugarától függ. Határozzuk meg a sebességprofil és az áramláshoz szükséges nyomáskülönbséget!



8.18. ábra. Áramlás csőben

A 8.18(a) ábra alapján felírhatjuk egy l hosszúságú, R sugarú cső belsejében lévő r sugarú folyadék részre ható erőket. A folyadék részre a cső végein lévő külső nyomás és a környező folyadék belső súrlódása hat. A folyadék sebessége állandó (stacionárius áramlás), így az erők eredője nulla:

$$p_1 r^2 \pi - p_2 r^2 \pi + F_s = 0. \quad (8.17)$$

A súrlódási erőt a (8.15) összefüggés alapján írhatjuk fel:

$$F_s = \tau A = \eta \frac{dv}{dr} 2r\pi l,$$

ahol $A = 2r\pi l$ a hengerpalást felülete, ahol a nyíróerő fellép. A súrlódási erő természetesen negatív, hiszen a sebesség a cső közepén a legnagyobb (a fal mentén pedig nulla), és így a sebességgradiens negatív.

A súrlódási erő kifejezését behelyettesítve a (8.17) egyenletbe, az egyenletet rendezve,

a változókat szétválasztva, és kiintegrálva:

$$\begin{aligned}\frac{dv}{dr} &= -\frac{p_1 - p_2}{2l\eta}r \\ dv &= -\frac{p_1 - p_2}{2l\eta}r dr \\ v(r) &= -\frac{p_1 - p_2}{4l\eta}r^2 + C.\end{aligned}$$

A C integrálási állandót a $v(R) = 0$ peremfeltételből kaphatjuk meg (a cső falánál a sebesség nulla):

$$C = \frac{p_1 - p_2}{4l\eta}R^2.$$

Ezt behelyettesítve a csőben áramló folyadék sebessége a sugár függvényében:

$$v(r) = \frac{p_1 - p_2}{4l\eta} (R^2 - r^2), \quad (8.18)$$

a maximális sebesség pedig:

$$v_{\max} = v(0) = \frac{p_1 - p_2}{4l\eta}R^2.$$

A sebességprofil forgási paraboloid alakú (8.18(b) ábra).

A csövön időegységenként átáramló folyadékmennyiséget (a tömegáram-erősséget) a sebességeloszlásból a (8.11) összefüggés alapján határozhatjuk meg:

$$\begin{aligned}I_m &= \rho \int_0^R v(r) 2r \pi dr = \frac{\pi \rho (p_1 - p_2)}{2l\eta} \int_0^R (R^2 - r^2) r dr = \\ &= \frac{\pi \rho (p_1 - p_2)}{2l\eta} \left(\frac{R^4}{2} - \frac{R^4}{4} \right) = \frac{\pi \rho}{8l\eta} (p_1 - p_2) R^4.\end{aligned} \quad (8.19)$$

Ez a *Hagen-Poiseuille-törvény*. [34]

Az időegységenként átáramló térfogat (térfogatáram-erősség):

$$I_V = \frac{I_m}{\rho} = \frac{\pi}{8l\eta} (p_1 - p_2) R^4,$$

amiből a közeg átlagos sebessége:

$$v_{\text{átl}} = \frac{I_V}{A} = \frac{I_V}{R^2 \pi} = \frac{p_1 - p_2}{8l\eta} R^2 = \frac{v_{\max}}{2}.$$

A jelenség analóg a vezetéken folyó elektromos árammal (azzal a különbséggel, hogy – egyenáram esetén – az elektromos áramsűrűség a vezeték keresztmetszetén mindenhol ugyanakkora). Az elektromos áramerősség megfelelője a térfogatáram-erősség, az elektromos feszültségnek a nyomáskülönbség. Ennek alapján a cső viszkózus ellenállása:

$$\frac{p_1 - p_2}{I_V} = \frac{8l\eta}{\pi R^4}.$$

Az ellenállás egyenesen arányos a cső hosszával és a viszkozitással, és fordítva arányos a cső sugarának – az elektromos ellenállástól eltérően – *negyedik* hatványával.

Turbulens áramlás

Ha a közeg sebességét növeljük, a tapasztalat szerint egy bizonyos sebesség felett a lamináris áramlásban zavarok keletkeznek, az áramvonalak hullámosak és időben változóak lesznek, örvények alakulnak ki. Az ilyen áramlás már nem lamináris, hanem *turbulens*. A határsebesség függ a közeg viszkozitásától, sűrűségétől és a geometriai adatoktól (például a cső sugarától) is. Ezekből az adatokból egy dimenziótlan mennyiség képezhető, a *Reynolds-szám* [35]

$$Re = \frac{\rho r v}{\eta}. \quad (8.20)$$

A *hasonlósági elmélet* szerint két áramlás akkor lesz hasonló, ha a Reynolds-számuk megegyezik. Hengeres csőben $Re \gtrsim 1200$ érték esetén válik az áramlás turbulenssé.

Turbulens áramlás esetén a cső ellenállása jelentősen nagyobb lesz, mint lamináris áramlásnál. A cső fala mellett egy vékony határreteg alakul ki, ahol a folyadék sebessége gyorsan változik, és az áramlás erősen örvényes.

8.4. Közegekben mozgó testre ható erők

A 2.4 és a 2.5 szakaszokban már foglalkoztunk a *közegellenállás* jelenségével. Láttuk, hogy a sebességtől függően a közegellenállási erő a sebességgel vagy a sebesség négyzetével arányos is lehet. A következőkben áttekintjük a folyadékban vagy gázban mozgó testekre ható erőhatásokat.

A relativitás elve értelmében csak a test és a közeg relatív sebessége számít, ezért gyakran álló testekről és a testekhez képest mozgó, áramló közegről fogunk beszélni.

Stokes-törvény

Aránylag kicsi ($Re \leq 1200$) sebességek esetén a közeg az áramlás útjába helyezett test körül laminárisan áramlik. Ilyenkor a közegellenállás oka a közeg belső súrlódása, így a közegellenállási erő arányos a viszkozitással és a sebességgel. Az áramvonalaképzés azonban

bonyolult, a differenciálegyenletek nemlineárisak, csak közelítésekkel (vagy numerikusan) oldhatók meg.

Gömb alakú test esetében, ha a sebesség nagyon kicsi ($Re < 1$), és a testet körbevevő közeg sokkal nagyobb a testnél, a közegellenállási erő:

$$F_k = 6\pi\eta r v, \quad (8.21)$$

ahol r a gömb sugara, v pedig a sebessége a közeghez képest.

Ez az összefüggés a *Stokes-törvény*. [36]

Ha a $Re < 1$ feltétel nem teljesül, vagy a közeg nem nagyon nagy kiterjedésű (például a test egy folyadékkal telt csőben mozog), akkor a kifejezést módosítani kell.

Közegellenállás örvényes áramlásoknál

Nagyobb sebességeken a test körüli áramlás turbulenssé válik, a test mögött örvények alakulnak ki. A közegellenállást ekkor (elsősorban) az örvények okozzák, ezért az erő nagyságát nagyban befolyásolja a test alakja, mégpedig elsősorban nem a homlokfelületen, hanem az áramlás kilépésénél. A közegellenállási erő létrejöttét többféleképp is megérthetjük.

Az egyik magyarázat, hogy a test mögötti örvényekben felgyorsul a közeg áramlása, ezért lecsökken a nyomása, és a fékezőerő ebből a nyomáskülönbségből származik. A (8.13) Bernoulli-egyenlet alapján a közegellenállási erő becslése:

$$F_k = \Delta p A \sim \frac{1}{2} \rho v^2 A,$$

ahol ρ a közeg sűrűsége, A a test mozgásirányra merőleges keresztmetszete, v pedig a közeghez viszonyított sebessége. A közegellenállási erő képlete így:

$$F_k = \frac{1}{2} c \rho A v^2, \quad (8.22)$$

ahol c a test alakjától függő dimenziótlan *alak-ellenállási tényező*.

A másik megfontolás energetikai: a test mögött a közeg az örvényekben forogni kezd, a forgási energiát a közegellenállási erő munkája fedezi. Miközben a test Δs utat megtesz $\Delta V \sim A \Delta s$ térfogatú örvényt hagy maga mögött. Ennek alapján az erő:

$$F_k = \frac{\Delta W}{\Delta s} \sim \frac{\frac{1}{2} \rho v^2 \Delta V}{\Delta s} = \frac{1}{2} \rho v^2 A,$$

a korábbi eredményünkkel megegyezően.

Az alak-ellenállási tényezőt mérésekkel határozzák meg. Értéke néhány századtól (áramvonalas csepp alak) kb. 1,5-ig (homorú félgömbhéj) terjed, gömb esetén 0,47.

A testek közegellenállását, a kialakuló áramlási képet és az örvényeket számításokon kívül kísérletekkel is vizsgálják. Erre a célra szélcsatornákat építenek, ahol a vizsgált

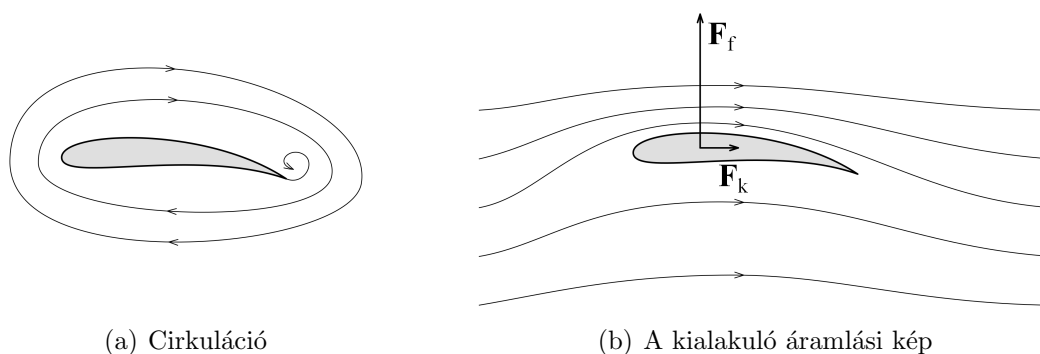
test áll, és a levegő mozog. Nagy testek (például repülőgépek) esetében először kicsinyített modelleken végeznek méréseket olyan körülmények között, hogy a Reynolds-szám megegyezzen. A kicsinyítésnek határt szab, hogy a méret csökkentésével a sebességet növelni kell (hiszen a Reynolds-számban a kettő szorzata áll), és a levegő aerodinamikai tulajdonságai nagy sebességen lényegesen megváltoznak.

Az örvények keletkezése nem csak a közegellenállás miatt érdekes. Nagy sebességeknél az örvények nem szimmetrikusan, hanem felváltva egyik és másik oldalról válnak le. Ez a *Kármán-féle örvénysor*. [37] [38] Emiatt lobog a zászló, és emiatt adnak hangot a kifeszített vezetékek. Az erős szélben kialakuló örvények okozták a Tacoma-híd híres rezonanciakatasztrófáját is. [39]

Aerodinamikai felhajtóerő

A folyadékban vagy gázban mozgó testre azonban általában nem csak a sebességgel ellentétes irányú erő hathat. A mozgás irányára merőleges erőhatások közül az egyik legfontosabb az *aerodinamikai felhajtóerő*, amely a repülőgépek szárnyára hat, és a repülőgépet felemeli. Az erő létrejöttét a szárny speciális alakja okozza. A bonyolult számítások helyett itt is csak szemléletes magyarázatot adunk a jelenségre.

A szárny speciális, aszimmetrikus alakja miatt a szárny végénél egy óramutató járásával ellentétes irányú örvény alakul ki. A perdületmegmaradás tétele miatt a szárny körül egy ellentétes irányú, az óramutató járásával megegyező irányú zárt áramlás, úgynevezett *cirkuláció* keletkezik (8.19(a) ábra). Ez az áramlás szuperponálódik a szárny haladó mozgásából adódó áramlással, így a szárny felett a sebességek összeadódnak, alatta pedig kivonódnak (8.19(b) ábra). Az emelőerőt a szárny feletti nagyobb sebesség miatt kialakuló nyomáscsökkenés okozza.



8.19. ábra. Aerodinamikai felhajtóerő

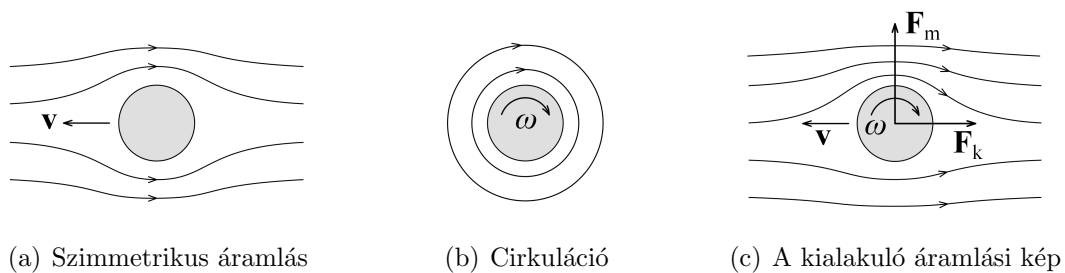
A szárnyra az \mathbf{F}_f aerodinamikai felhajtóerőn kívül természetesen hat a közegellenállás is (\mathbf{F}_k). Motoros repülőgépeknél ezt a motor hajtóereje ellensúlyozza. Vitorlázó

repülőgépeknél a gép süllyedése fedezi a közegellenállás miatt elvesző energiát, így a felhajtóerő és a közegellenállási erő hányadosa határozza meg azt a *siklási szöget*, amellyel nyugalomban lévő levegőben a gép ereszkedik.

Magnus-effektus

Hasonlóképp magyarázható a haladó és forgómozgást végző testekre ható oldalirányú (a mozgás irányára merőleges) erő is.

Ha egy szimmetrikus test nem forog, körülötte szimmetrikus áramvonalkép alakul ki (8.20(a) ábra). Ha a test forog, a felületéhez tapadó közeg vele együtt forogni kezd, és a test körül cirkuláció alakul ki (8.20(b) ábra). A haladó és forgómozgást végző test esetében ez a két áramlás szuperponálódik, és így a test egyik oldalán nagyobb, a másik oldalán kisebb sebesség alakul ki (8.20(c) ábra). Az eltérő sebességből adódó nyomáskülönbség miatt oldalirányú erő lép fel. Ez a *Magnus-effektus*. [40]



8.20. ábra. Magnus-effektus

A Magnus-effektus miatt egy függőleges tengelye körül megpörgetett labdára oldalirányú erők hatnak, amely a labdát kitéríti pályasíkjából. Ezért lehet például szögletből közvetlenül gólt rúgni. Ha a labda vízszintes tengely körül forog, akkor a Magnus-effektus miatt függőleges irányban hat egy járulékos erő, amely a röppályát meghosszabbítja, vagy éppen lerövidíti.

A Magnus-effektus fontos a forgó lövedékek mozgásánál is, a pályaszámításnál ezt is figyelembe kell venni. Épültek olyan „vitorlás” hajók is, melyek a Magnus-effektust hasznosítják: a hajókon nagy, forgó hengerek állnak, melyeken megfelelő forgásirány esetén az oldalszél hatására előre mutató erőhatás ébred.

II. rész

9. fejezet

Rezgések

A könyv első részében a pontszerű testektől a folyadékokig egyre bonyolultabb modellekkel írtuk le a mozgásokat. A második részben ezeket a leírásmódokat használva részletesebben foglalkozunk a mechanikai rezgésekkel és hullámokkal. Ezek a mozgásformák alapvetők a természetben, az itt megismert fogalmak, leírásmódok és matematikai módszerek jól használhatók lesznek más rezgések és hullámjelenségek vizsgálatánál is.

Rezgésnek nevezünk tágabb értelemben minden olyan jelenséget, ahol valamilyen mennyiség egy tartományon belül ingadozik. A mechanikai rezgések mellett ilyen például a váltakozó feszültség és áram, az elektromos és mágneses mező az elektromágneses hullámban, a napi vagy éves hőmérséklet-ingadozás, vagy a fizikán kívüli területekről például a tőzsdei árfolyamok változása.

9.1. Harmonikus rezgések

A rezgés időbeli lefolyása nem feltétlenül *periodikus*, legtöbbször a többé-kevésbé periodikus jelenségek is idővel *csillapodnak*, az időjárási adatok vagy árfolyamok sok tényezőtől befolyásolt változása pedig nyilvánvalóan *aperiodikus*. Azonban meglepő módon egészen egyszerű mechanikai rendszerek is mozoghatnak „szabálytalanul”, ilyen például a kaotikus kettős inga ([videó \[8\]\[41\]](#))

Egy periodikus rezgést is általában bonyolult függvény jellemez. A különböző periodikus függvények közül azonban elméleti és gyakorlati szempontból is kiemelkednek a *harmonikus* (azaz szinuszos vagy koszinuszos) függvények. Jelentőségüket egyrészt az adja, hogy a legegyszerűbb rezgő rendszerek mozgását ilyen függvények írják le, másrészt harmonikus függvények összegeként, illetve integráljaként bármely periodikus, illetve aperiodikus függvény előállítható (lásd a [9.2](#) szakaszt). Ezért a továbbiakban elsősorban *harmonikus rezgésekkel* foglalkozunk, azaz olyan rezgésekkel, melyek időbeli változását harmonikus függvény írja le.

9.1.1. Szabad rezgés

Sokféleképp létrehozhatunk (jó közelítéssel) szabad harmonikus mechanikai rezgést. Az egyik legegyszerűbb lehetőség, ha egy felfüggesztett rugóra egy testet akasztunk, és azt kitérítjük nyugalmi helyzetéből (9.1(a) ábra). A test kitérés-ideje függvénye:

$$x(t) = A \sin(\omega_0 t + \varphi) . \quad (9.1)$$

A kifejezésben az A *amplitúdó* a test maximális kitérését adja meg az egyensúlyi helyzethez képest. A szinusz függvény argumentuma (a zárójelben lévő dimenziótlan kifejezés) a rezgés *fázisa*. Az ω_0 *körfrekvencia* a mozgás időbeli szaporaságát jellemzi. Mértékegysége 1/s, és azt adja meg, hogy időegységenként mennyit változik a fázis. A φ *kezdőfázis* a fázis értéke a $t = 0$ időpillanatban.

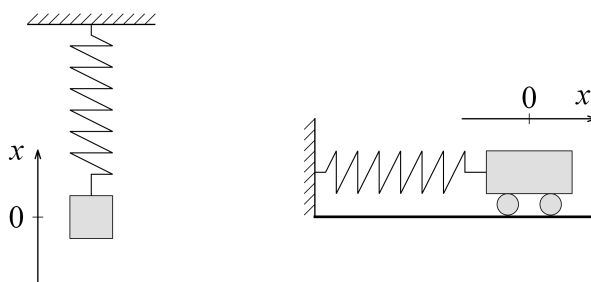
Minden szabad harmonikus rezgést ilyen függvénnyel írhatunk le, csak a különböző jelenségeknél a kitérés helyett más mennyiség áll, például a torziós rezgéseknél szögkitérés, az elektromos rezgéseknél feszültség vagy áramerősség, és így tovább.

A rezgés időbeli lefolyását jellemzi a körfrekvencián kívül a *periódusidő* (T_0) és ennek reciproka, a *frekvencia* (f_0) is. Egy teljes periódus alatt a fázis 2π -vel változik, így:

$$T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0} \quad \text{és} \quad f_0 = \frac{1}{T_0} = \frac{\omega_0}{2\pi} .$$

A frekvencia mértékegysége a definíció alapján szintén 1/s, de azért, hogy megkülönböztessük a körfrekvenciától, szokás helyette a hertz (Hz) jelölés használata.

Egy másik példája a szabad harmonikus rezgésnek a 9.1(b) ábrán látható. Itt a jól csapágyazott kiskocsira vízszintes irányban csak a rugó ereje hat, így a mozgás dinamikai leírása különösen egyszerű.



(a) Rugóra akasztott test (b) Jól csapágyazott kiskocsi

9.1. ábra. Szabad harmonikus rezgés

További példák: harmonikus torziós rezgések a 6.4.1 szakaszban tárgyalt ingamozgások, ahol a szögkitérés az idő harmonikus függvénye.

Elektromos példa a hálózati feszültség: az erőmű generátoraiban a homogén mágneses térben forgó tekercsekben szinuszosan változó feszültség indukálódik:

$$U(t) = \hat{U} \sin(\omega_0 t + \varphi) .$$

Kísérlet: Rezgőmozgás grafikonja, körmozgás és rezgőmozgás

Harmonikus rezgőmozgást végeznek egy egyik végén befogott, vízszintesen megrezgetett rugalmas pálca pontjai is. Ha a pálca szabad végéhez fémtűt rögzítünk, és alatta egy kormozott üveglapot mozgatunk egyenletes sebességgel a rezgésre merőleges irányban, akkor a tű felrajzolja a (9.1) kitérés–idő függvény grafikonját. A grafikonról leolvasható a rezgés amplitúdója, és az üveglap sebességének ismeretében a rezgés periódusideje is.

Egy A hosszúságú rúd egyik végére kis gömböt rögzítünk. A rudat ω_0 szögsebességgel forgatjuk a másik vége körül, így a kis gömb A sugarú pályán egyenletes körmozgást végez. Ha a mozgást a körpálya síkjában párhuzamos fénynyalábbal kivetítjük, akkor a kis gömb árnyéka A amplitúdójú, ω_0 körfrekvenciájú harmonikus rezgőmozgást végez. Ez a kísérlet jól szemlélteti a körmozgás és a rezgőmozgás közötti kapcsolatot, és megmagyarázza a *körfrekvencia* szó eredetét is. ♦

A (9.1) kifejezést matematikailag többféle alakban is leírhatjuk. Szinuszfüggvény helyett használhatunk koszinuszfüggvényt is:

$$x(t) = A \cos(\omega_0 t + \varphi') ,$$

ahol $\varphi' = \varphi - \pi/2$. Átalakíthatjuk a kifejezést a szögfüggvények azonosságait felhasználva egy szinusz- és egy koszinuszfüggvény összegére is:

$$\begin{aligned} x(t) &= A \sin(\omega_0 t + \varphi) = A \cos \varphi \sin \omega_0 t + A \sin \varphi \cos \omega_0 t = \\ &= A_1 \sin \omega_0 t + A_2 \cos \omega_0 t . \end{aligned}$$

Bonyolultabb feladatoknál hasznos a *komplex írásmód*. Felhasználjuk, hogy a komplex számok körében

$$e^{i\alpha} = \cos \alpha + i \sin \alpha .$$

A szabad rezgés komplex időfüggvénye:

$$x^*(t) = A e^{i(\omega_0 t + \varphi)} , \tag{9.2}$$

melynek valós része megadja a (valós) kitérés–idő függvényt (koszinuszos alakban):

$$x(t) = \operatorname{Re} [x^*(t)] = A \cos(\omega_0 t + \varphi) .$$

Szabad rezgés kinematikája

Ahogy azt az 1.3 szakaszban láttuk, a rezgőmozgás sebessége és gyorsulása a (9.1) kifejezésből idő szerinti deriválással megkapható:

$$\begin{aligned}x(t) &= A \sin(\omega_0 t + \varphi) \\v_x(t) &= \frac{dx(t)}{dt} = A\omega_0 \cos(\omega_0 t + \varphi) \\a_x(t) &= \frac{dv_x(t)}{dt} = \frac{d^2x(t)}{dt^2} = -A\omega_0^2 \sin(\omega_0 t + \varphi) = -\omega_0^2 x(t).\end{aligned}$$

Ennek alapján egy m tömegű, harmonikus rezgőmozgást végző testre ható erő:

$$F_x = ma_x = -m\omega_0^2 x,$$

ahol $m\omega_0^2$ egy állandó. Tehát a harmonikus rezgőmozgáshoz *lineáris* (a kitéréssel arányos) visszatérítő erőre van szükség, ahogy ezt már a 2.5 szakaszban is megfogalmaztuk.

Szabad rezgés dinamikája

A 9.1(b) ábrán lévő elrendezésben a kiskocsira vízszintes irányban csak a rugóerő hat (a függőleges erők eredője pedig nulla), így a testre ható erők eredője arányos a test x elmozdulásával (és az arányossági tényező negatív):

$$F_x = -Dx.$$

A mozgásegyenlet:

$$F_x = ma_x = m \frac{d^2x}{dt^2},$$

behelyettesítve az erőt, m -mel elosztva és nullára rendezve:

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{D}{m}x = 0.$$

Felhasználva, hogy x együtthatója pozitív, vezessük be a következő jelölést:

$$\frac{D}{m} = \omega_0^2 > 0,$$

és ezt helyettesítsük be az egyenletbe:

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \omega_0^2 x = 0. \quad (9.3)$$

Ennek a *másodfokú homogén lineáris differenciálegyenletnek* az általános megoldása a (9.1) időfüggvény:

$$x(t) = A \sin(\omega_0 t + \varphi),$$

ahol

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{D}{m}}$$

a rezgő rendszer fizikai paramétereit által meghatározott állandó, A és φ viszont a mozgás *kezdeti feltételeitől*, azaz $x(0)$ és $v_x(0)$ értékétől függ.

Fonálinga

A fonálinga, vagy *matematikai inga* egy l hosszúságú vékony, nyújthatatlan fonálra kötött m tömegű pontszerű test (6.4.1 szakasz). Ha az ingát függőleges egyensúlyi helyzetéből α szöggel kitérítjük, a testre ható tangenciális (érintőirányú) visszatérítő erő:

$$F_t = -mg \sin \alpha,$$

a tangenciális gyorsulás:

$$a_t = \beta l = \frac{d^2\alpha}{dt^2} l.$$

Felírva az $F_t = ma_t$ mozgásegyenletet, azt egyszerűsítve és nullára rendezve:

$$\frac{d^2\alpha}{dt^2} + \frac{g}{l} \sin \alpha = 0.$$

Ez egy nemlineáris differenciálegyenlet, amelyet csak numerikusan vagy közelítésekkel oldhatunk meg. Ha α kicsi, akkor használhatjuk a következő közelítést:

$$\alpha \ll 1 \quad \Rightarrow \quad \sin \alpha \approx \alpha,$$

amit behelyettesítve a differenciálegyenletbe az lineárisává válik:

$$\frac{d^2\alpha}{dt^2} + \frac{g}{l} \alpha = 0.$$

Vezessük be itt is a

$$\frac{g}{l} = \omega_0^2$$

jelölést, ezzel:

$$\frac{d^2\alpha}{dt^2} + \omega_0^2 \alpha = 0.$$

Ez a differenciálegyenlet ugyanolyan alakú, mint a (9.3) differenciálegyenlet (csak x helyett α a változó), így megoldása is ugyanolyan alakú:

$$\alpha(t) = \alpha_{\max} \sin(\omega_0 t + \varphi),$$

ahol a körfrekvencia:

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{g}{l}},$$

a rendszer paramétereitől (az inga hosszától és a nehézségi gyorsulástól) függő állandó, az α_{\max} amplitúdó és a φ kezdőfázis pedig a kezdeti feltételektől függő értékek (videó [8]).

A rezgő rendszer energiaviszonyai

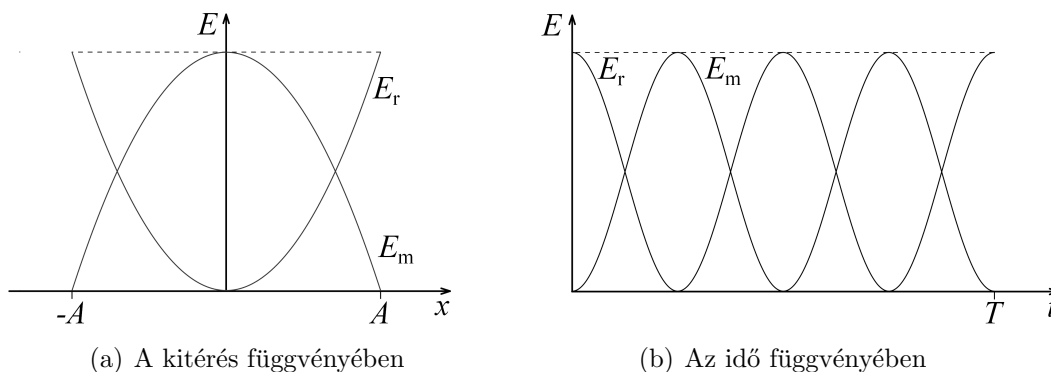
Vizsgáljuk a 9.1(b) ábrán látható rezgő rendszer energiaviszonyait! A kiskocsi vízszintesen mozog, ezért gravitációs helyzeti energiája állandó (választhatjuk nullának). A rendszernek így csak rugalmas helyzeti energiája és mozgási energiája van. A teljes mechanikai energia ezek összege:

$$E(t) = \frac{1}{2}D [x(t)]^2 + \frac{1}{2}m [v_x(t)]^2 = \frac{1}{2}DA^2 \sin^2(\omega_0 t + \varphi) + \frac{1}{2}mA^2\omega_0^2 \cos^2(\omega_0 t + \varphi) .$$

Felhasználva az $m\omega_0^2 = D$ összefüggést:

$$E(t) = \frac{1}{2}DA^2 [\sin^2(\omega_0 t + \varphi) + \cos^2(\omega_0 t + \varphi)] = \frac{1}{2}DA^2 .$$

A teljes mechanikai energia tehát időben állandó. Az energia a rezgés folyamán folyamatosan adódik át ide-oda a mozgási energia és a rugalmas helyzeti energia között. A 9.2(a) ábrán a kitérés, a 9.2(b) ábrán az idő függvényében ábrázoltuk a két energiatagot ($\varphi = 0$).



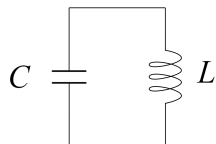
9.2. ábra. A rezgő rendszer energiaviszonyai

Megjegyezzük, hogy a 9.1(a) ábrán látható rezgő rendszer dinamikai és energetikai szempontból is bonyolultabb, hiszen itt a mozgásegyenletnél a nehézségi erőt, illetve az energiamérlegnél a gravitációs helyzeti energiát is figyelembe kell venni. Könnyen belátható azonban, hogy a dinamikai egyenletek változatlanok lesznek, ha az $x = 0$ helyet nem a nyújtatlan állapotnál, hanem az egyensúlyi helyzetnél választjuk meg (ahol viszont a rugó a testre ható nehézségi erő miatt már meg van nyúlva). Ehhez hasonlóan könnyen belátható, hogy ha a gravitációs helyzeti energia nullszintjét megfelelően választjuk, akkor a teljes helyzeti energia (a gravitációs és a rugalmas helyzeti energiák összege) kifejezése szintén változatlan marad. (Ellenkező esetben megjelenik egy konstans tag, amely az energia időbeli állandóságán természetesen nem változtat.)

A feladat részletes végiggondolását az olvasóra bízunk.

Analógia: elektromos rezgőkör

A szabad mechanikai rezgéssel analóg áramkör egy tekercsből és kondenzátorból álló csillapítatlan rezgőkör (9.3 ábra).



9.3. ábra. Csillapítatlan elektromos rezgőkör

A két áramköri elem feszültségének összege nulla (huroktörvény), áramuk megegyezik (csomóponti törvény). Ezt és az áramköri elemeket leíró összefüggéseket felhasználva:

$$U_L = L \frac{dI}{dt}$$
$$I = C \frac{dU_C}{dt} = -C \frac{dU_L}{dt} = -CL \frac{d^2 I}{dt^2}.$$

Átrendezve, és bevezetve az

$$\frac{1}{LC} = \omega_0^2$$

jelölést:

$$\frac{d^2 I}{dt^2} + \omega_0^2 I = 0.$$

Ismét a (9.3) egyenlettel azonos alakú differenciálegyenletet kaptunk (csak most I a változó), tehát a megoldás is azonos alakú:

$$I(t) = \hat{I} \sin(\omega_0 t + \varphi)$$
$$U_C(t) = -U_L(t) = -L \frac{dI}{dt} = -L \hat{I} \omega_0 \cos(\omega_0 t + \varphi) = -\hat{U} \cos(\omega_0 t + \varphi),$$

ahol

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{1}{LC}}$$

ismét a rezgő rendszer (az áramköri elemek) adatai által meghatározott állandó, \hat{I} és φ pedig a kezdeti feltételektől függő értékek.

Az elektromos rezgőkör teljes elektromágneses energiája a tekercsben kialakuló mágneses tér és a kondenzátorban kialakuló elektromos tér energiájának összege:

$$E(t) = \frac{1}{2} L [I(t)]^2 + \frac{1}{2} C [U_C(t)]^2 = \frac{1}{2} L \hat{I}^2 \sin^2(\omega_0 t + \varphi) + \frac{1}{2} C L^2 \hat{I}^2 \omega_0^2 \cos^2(\omega_0 t + \varphi).$$

Felhasználva a $CL\omega_0^2 = 1$ összefüggést

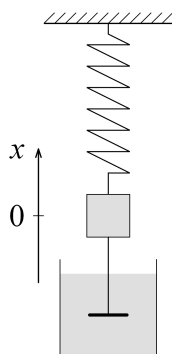
$$E(t) = \frac{1}{2}L\hat{I}^2 [\sin^2(\omega_0 t + \varphi) + \cos^2(\omega_0 t + \varphi)] = \frac{1}{2}L\hat{I}^2,$$

azaz a teljes energia a mechanikai rezgő rendszerhez hasonlóan időben állandó.

9.1.2. Csillapított rezgés

Egy magára hagyott rezgés amplitúdója folyamatosan csökken, majd a rezgés megszűnik. A disszipáció oka lehet a mozgó testre ható közegellenállás vagy súrlódás, de ha ezeket kiküszöböljük, akkor is lesz veszteség a rugó anyagában. (Egy anyag se tökéletesen rugalmas, a deformációs görbének mindig van valamekkora kicsiny hiszterézise, melynek területe éppen a deformációs munka.)

A következőkben – matematikai egyszerűsége miatt – csak olyan csillapítással foglalkozunk, ahol a disszipatív erő a test sebességével arányos. Ahogy láttuk, ilyen a viszkózus közegellenállás (8.4 szakasz), de szintén sebességgel arányos fékezőerőt eredményez egy mozgó mágnes által keltett örvényáram is. A csillapított rezgés egyszerű modellje látható a 9.4 ábrán.



9.4. ábra. Csillapított rezgés

A szabad rezgés mozgásegyenlete kiegészül a sebességgel arányos csillapító erővel:

$$ma = -Dx - kv,$$

ahol k a csillapítás erősségét jellemző állandó. A gyorsulást és a sebességet deriváltakkal kifejezve, a tömeggel átosztva, és az egyenletet nullára rendezve:

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{k}{m} \frac{dx}{dt} + \frac{D}{m}x = 0.$$

Vezessük be a következő jelöléseket:

$$\frac{D}{m} = \omega_0^2 \quad \text{és} \quad \frac{k}{m} = 2\beta.$$

ω_0 már ismerős – ez a csillapítatlan rezgő rendszer sajátkörfrekvenciája (ilyen körfrekvenciával rezegne a rendszer, ha nem lenne csillapítás). β a *csillapítási tényező*, mértékegysége ω_0 -hoz hasonlóan $1/s$, és k -hoz hasonlóan szintén a csillapítás erősségét mutatja.

Ezeket a helyettesítéseket beírva megkapjuk a csillapított rezgés differenciálegyenletét:

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 2\beta \frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = 0. \quad (9.4)$$

Ez a (9.3) egyenlethez hasonlóan másodrendű homogén lineáris differenciálegyenlet, de itt a változó első deriváltja is előfordul.

Az ilyen differenciálegyenletek megoldásait

$$x(t) = e^{\lambda t}$$

alakban keressük, ahol λ komplex szám. Helyettesítsük be a próbafüggvényt a differenciálegyenletbe:

$$\lambda^2 e^{\lambda t} + 2\beta \lambda e^{\lambda t} + \omega_0^2 e^{\lambda t} = 0,$$

és egyszerűsítsünk a

$$e^{\lambda t} \neq 0$$

tényezővel. Így már a differenciálegyenlet helyett egy közönséges másodfokú egyenletet kapunk a próbafüggvény kitevőjében szereplő λ komplex mennyiségre:

$$\lambda^2 + 2\beta\lambda + \omega_0^2 = 0.$$

Ennek megoldása a másodfokú egyenlet megoldóképlete alapján:

$$\lambda_{1,2} = \frac{-2\beta \pm \sqrt{4\beta^2 - 4\omega_0^2}}{2} = -\beta \pm \sqrt{\beta^2 - \omega_0^2}.$$

Láthatjuk, hogy az egyenlet megoldása teljesen más lesz, attól függően, hogy a β csillapítási tényező és az ω_0 csillapítatlan sajátkörfrekvencia közül melyik nagyobb. Három esetet különböztetünk meg:

$$\begin{array}{ll} \beta > \omega_0 & \text{nagy csillapítás,} \\ \beta = \omega_0 & \text{határeset,} \\ \beta < \omega_0 & \text{kis csillapítás.} \end{array}$$

Túlsillapított rezgés

Nagy csillapítás esetén, ha $\beta > \omega_0$, a másodfokú egyenletnek két valós megoldása van:

$$\lambda_1 = -\beta - \sqrt{\beta^2 - \omega_0^2}$$
$$\lambda_2 = -\beta + \sqrt{\beta^2 - \omega_0^2}.$$

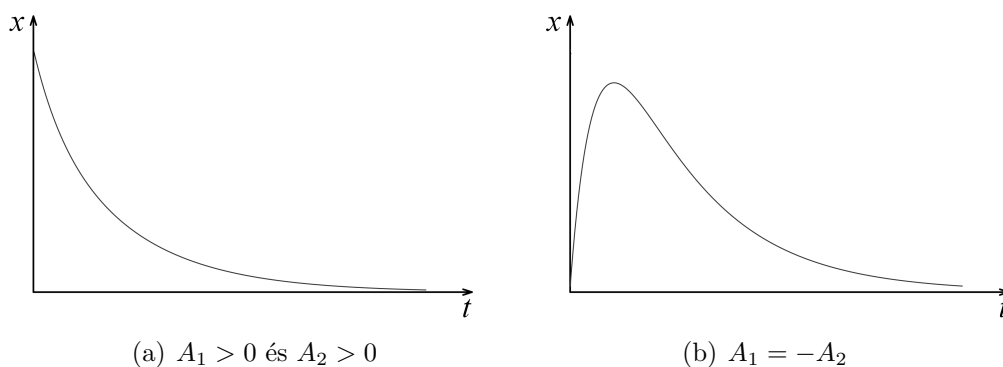
A mozgást leíró idő függvényt a két próbafüggvény *lineáris kombinációjaként* kapjuk meg. Ennek felírásához vezessük be a β_1 és β_2 pozitív mennyiségeket:

$$\beta_1 = -\lambda_1 = \beta + \sqrt{\beta^2 - \omega_0^2} > 0$$
$$\beta_2 = -\lambda_2 = \beta - \sqrt{\beta^2 - \omega_0^2} > 0,$$

amelyeket felhasználva a kitérés-idő függvény:

$$x(t) = A_1 e^{-\beta_1 t} + A_2 e^{-\beta_2 t}. \quad (9.5)$$

β_1 és β_2 a rendszer paramétereitől függő állandók, A_1 és A_2 értékét viszont a kezdeti feltételek határozzák meg.



9.5. ábra. Túlsillapított rezgés

A **9.5(a)** ábrán látható esetben a testet kitérítjük, és nyugalmi helyzetében elengedjük. Ilyenkor $A_1 > 0$ és $A_2 > 0$, a mozgás két exponenciális lecsengés összege. A **9.5(b)** ábrán látható esetben az egyensúlyi helyzetben lévő testet valamekkora kezdősebességgel meglökjük. Ekkor $A_1 = -A_2$.

Figyeljük meg, hogy egyik esetben sem jön létre valódi rezgés (a test nem lendül át az egyensúlyi helyzeten). Ezért nevezzük ezt az esetet *túlsillapított rezgésnek*.

Aperiodikus határeset

Ha $\beta = \omega_0$, akkor az egyenletnek csak egy megoldása van:

$$\lambda_1 = \lambda_2 = -\beta.$$

Ilyenkor a differenciálegyenlet megoldásában a próbafüggvény t -szere is megjelenik (ennek helyességéről visszahelyettesítéssel lehet meggyőződni), a megoldás ismét két tag lineáris kombinációja:

$$x(t) = A_1 e^{-\beta t} + A_2 t e^{-\beta t}. \quad (9.6)$$

Itt A_1 és A_2 ismét a kezdeti feltételektől függő állandók (az utóbbi mértékegysége m/s).

Ez a határeset választja el a túlcillapított rezgést a tényleges csillapított rezgőmozgástól, ezért nevezzük *aperiodikus* határesetnek.

Csillapított rezgés

Ha a csillapítás nem túl nagy, $\beta < \omega_0$, akkor a másodfokú egyenletnek két komplex gyöke van:

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= -\beta + i\sqrt{\omega_0^2 - \beta^2} = -\beta + i\omega' \\ \lambda_2 &= -\beta - i\sqrt{\omega_0^2 - \beta^2} = -\beta - i\omega', \end{aligned}$$

ahol i a képzetes egység, és

$$\omega' = \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}, \quad (9.7)$$

a csillapított rezgés körfrekvenciája.

A megoldás most is a két próbafüggvény lineáris kombinációja:

$$x(t) = A_1 e^{\lambda_1 t} + A_2 e^{\lambda_2 t},$$

ahol A_1 és A_2 kezdeti feltételektől függő komplex értékek. Az időfüggvénynek azonban – értelemszerűen – valósnak kell lennie.

Helyettesítsük be λ_1 és λ_2 értékét, és alakítsuk át a kifejezést a trigonometrikus függvények és a képzetes hatványok közti kapcsolat felhasználásával:

$$\begin{aligned} x(t) &= A_1 e^{(-\beta+i\omega')t} + A_2 e^{(-\beta-i\omega')t} = e^{-\beta t} (A_1 e^{i\omega' t} + A_2 e^{-i\omega' t}) = \\ &= e^{-\beta t} \left[\frac{A_1 + A_2}{2} (e^{i\omega' t} + e^{-i\omega' t}) + \frac{A_1 - A_2}{2} (e^{i\omega' t} - e^{-i\omega' t}) \right] = \\ &= e^{-\beta t} \left[(A_1 + A_2) \frac{e^{i\omega' t} + e^{-i\omega' t}}{2} + i(A_1 - A_2) \frac{e^{i\omega' t} - e^{-i\omega' t}}{2i} \right] = \\ &= e^{-\beta t} [A_3 \cos \omega' t + A_4 \sin \omega' t] = A_0 e^{-\beta t} \sin(\omega' t + \varphi). \end{aligned}$$

Az $A_3 = A_1 + A_2$ és az $A_4 = i(A_1 - A_2)$ értékek már valós számok.

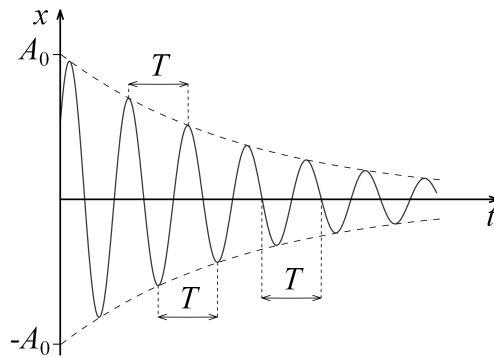
A csillapított rezgés időfüggvénye tehát:

$$x(t) = A_0 e^{-\beta t} \sin(\omega' t + \varphi), \quad (9.8)$$

ahol

$$\omega' = \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}, \quad \omega_0 = \sqrt{\frac{D}{m}} \quad \text{és} \quad \beta = \frac{k}{2m}.$$

Az A_0 és φ értékeket most is a kezdeti feltételekből kell meghatározni.



9.6. ábra. Csillapított rezgés kitérés-idő függvénye

A 9.6 ábrán látható egy csillapított rezgés kitérés-idő grafikonja. A függvény – különösen kis csillapításnál – felfogható úgy, mint egy időben lassan csökkenő amplitúdójú, ω' körfrekvenciájú harmonikus rezgés. A kitérés-idő függvény *burkolói* az exponenciálisan lecsengő $A_0 e^{-\beta t}$ és $-A_0 e^{-\beta t}$ függvények (az ábrán szaggatott vonalak).

Figyeljünk arra, hogy miközben az amplitúdó csökken, a periódusidő nem változik! A maximumok és minimumok is $T = 2\pi/\omega'$ időnként, a zérushelyek $T/2$ időnként követik egymást. (Ugyanakkor a szélsőértékek nem két zérushely közt félidőben vannak.)

A csillapított rezgés energiaviszonyai

Láttuk, hogy a csillapodás jellegét β és ω_0 viszonya határozza meg. A csillapítás erősségét ezen kívül szokás jellemezni a dimenziótlan *csillapítási hányadossal*:

$$K = \frac{x(t)}{x(t+T)} = e^{\beta T},$$

és ennek természetes alapú logaritmusával, a *logaritmikus dekrementummal*:

$$\Lambda = \ln K = \beta T.$$

A csillapódó rendszer teljes mechanikai energiája a disszipáció miatt csökken:

$$E(t) = \frac{1}{2}D[A(t)]^2 = \frac{1}{2}DA_0^2e^{-2\beta t} = E_0e^{-2\beta t}.$$

Ennek alapján:

$$\frac{dE}{dt} = -2\beta E,$$

a fázis 1 rad megváltozás alatti energiaváltozás abszolút értéke (kis csillapításnál):

$$|\Delta E_{1\text{ rad}}| = \frac{T}{2\pi} \frac{dE}{dt} = \frac{1}{\omega'} 2\beta E \approx \frac{2\beta}{\omega_0} E.$$

Ennek alapján bevezetjük a szintén dimenziótlan *jósági tényező* fogalmát:

$$Q = \frac{E}{|\Delta E_{1\text{ rad}}|} = \frac{\omega_0}{2\beta}. \quad (9.9)$$

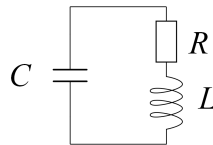
(A név arra utal, hogy bizonyos esetekben – például elektromos rezgőköröknél – az a *jó*, ha a csillapítás kicsi.)

Elektromos rezgőkörökben elsősorban a vezeték ohmos ellenállása okozza a csillapítást (9.7 ábra). Az elektromágneses energia az ellenálláson keletkező Joule-hő formájában disszipálódik.

Ha a csillapítatlan LC-körhöz hasonlóan felírjuk az áramkör egyenleteit, akkor a (9.4) összefüggéssel analóg differenciálegyenletet kapunk. Ebből következően a probléma megoldása is analóg a csillapított mechanikai rezgésre kapott megoldással. A csillapított elektromos rezgőkörnél:

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{1}{LC}} \quad \text{és} \quad \beta = \frac{R}{2L}.$$

Nagy frekvencián a Joule-hő mellett a sugárzási veszteség is számottevő: az energia elektromágneses sugárzás formájában távozik.



9.7. ábra. Csillapított elektromos rezgőkör

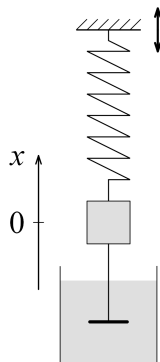
9.1.3. Kényszerrezgés, rezonancia

Ha azt szeretnénk, hogy a rezgés a csillapítás ellenére sokáig fennmaradjon, akkor az elvesző energiát folyamatosan pótolni kell.

Megfigyelés: Hintázás

Hintázáskor kisgyerekeknel a földön álló szülő lökdösi a hintát. Később megtanul az ember hintázni, ráérez arra, hogyan kell a hintát „hajtani”. A felsőtest és a lábak mozgásával akár növelni is lehet a lengés amplitúdóját. Ahhoz azonban, hogy ez sikerüljön, nem elég össze-vissza rugdosni: a mozdulatokat megfelelő *frekvenciával* és megfelelő *fázisban* kell végezni. ♦

Különböző rezgő rendszerek energiapótlása sokféleképp megvalósítható. A 9.8 ábrán látható egyszerű modellben az energia pótlását úgy biztosítjuk, hogy a rugó felső végét periodikusan, időben szinuszos függvény szerint fel-le mozgatjuk, és ezzel a testre – a rugón keresztül – időben szinuszosan változó erőt fejtünk ki. A jelenség neve *kényszerrezgés*, mert – mint látni fogjuk – állandósult állapotban a külső erő „rákényszeríti” a saját frekvenciáját a rendszerre.



9.8. ábra. Kényszerrezgés

A testre ható kényszererő

$$F_k = F_0 \sin \omega t ,$$

ahol F_0 a maximális kényszererő, ω pedig a kényszer körfrekvenciája. (Ehhez a rugó felső végét F_0/D amplitúdóval kell mozgatni.) A kezdőfázist az egyszerűség kedvéért nullának választottuk.

A mozgásegyenletet könnyen felírhatjuk, ha a csillapított rezgés mozgásegyenletét kiegészítjük ezzel a taggal:

$$ma = -Dx - kv + F_0 \sin \omega t .$$

A gyorsulást és a sebességet ismét deriváltakkal kifejezve, m -mel átosztva, és rendezve:

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{k}{m} \frac{dx}{dt} + \frac{D}{m}x = \frac{F_0}{m} \sin \omega t.$$

Használjuk a részben már korábban bevezetett jelöléseket:

$$\frac{D}{m} = \omega_0^2, \quad \frac{k}{m} = 2\beta \quad \text{és} \quad \frac{F_0}{m} = f_0.$$

Ezeket beírva a kényszerregést végző test differenciálegyenlete:

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 2\beta \frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = f_0 \sin \omega t. \quad (9.10)$$

Ez egy *inhomogén* differenciálegyenlet, melynek általános megoldását úgy kaphatjuk meg, hogy a hozzá tartozó homogén differenciálegyenlet általános megoldásához hozzáadjuk az inhomogén differenciálegyenlet egy (*partikuláris*) megoldását.

A homogén differenciálegyenlet a csillapított rezgés (9.4) differenciálegyenlete, ennek megoldását már ismerjük. Mivel ez a tag idővel elhal, *tranziens* (átmeneti) tagnak nevezzük:

$$x_T(t) = A_0 e^{-\beta t} \sin(\omega' t + \varphi_0), \quad (9.11)$$

ahol

$$\omega' = \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2},$$

A_0 és φ_0 pedig a kezdeti feltételektől függő állandók.

Az *állandósult* rezgés körfrekvenciája a tapasztalat szerint megegyezik a kényszererő ω körfrekvenciájával, ezért az állandósult tagot a következő alakban keressük:

$$x_{\hat{A}}(t) = A \sin(\omega t - \varphi), \quad (9.12)$$

ahol A és φ értékét (az állandósult rezgés amplitúdóját és a kényszerhez viszonyított fáziskülönbségét) kell meghatároznunk.

A (9.10) egyenlet teljes megoldása a tranziens és az állandósult tag összege:

$$x(t) = x_T(t) + x_{\hat{A}}(t).$$

Fejessük ki a (9.12) próbafüggvény idő szerinti deriváltjait:

$$\begin{aligned} \frac{dx_{\hat{A}}}{dt} &= A\omega \cos(\omega t - \varphi) \\ \frac{d^2x_{\hat{A}}}{dt^2} &= -A\omega^2 \sin(\omega t - \varphi), \end{aligned}$$

és helyettesítsük be a (9.10) differenciálegyenletbe:

$$-A\omega^2 \sin(\omega t - \varphi) + 2\beta A\omega \cos(\omega t - \varphi) + \omega_0^2 A \sin(\omega t - \varphi) = f_0 \sin \omega t.$$

A függvényegyenletet rendezve és a trigonometrikus kifejezéseket felbontva:

$$A(\omega_0^2 - \omega^2)(\sin \omega t \cos \varphi - \cos \omega t \sin \varphi) + 2\beta A\omega(\cos \omega t \cos \varphi + \sin \omega t \sin \varphi) = f_0 \sin \omega t,$$

majd az egyenletet nullára rendezve:

$$\begin{aligned} & [A(\omega_0^2 - \omega^2) \cos \varphi + 2\beta A\omega \sin \varphi - f_0] \sin \omega t + \\ & + [-A(\omega_0^2 - \omega^2) \sin \varphi + 2\beta A\omega \cos \varphi] \cos \omega t = 0. \end{aligned} \quad (9.13)$$

A függvényegyenlet csak akkor teljesülhet minden időpillanatban, ha a (9.13) egyenletben $\sin \omega t$ és $\cos \omega t$ együtthatói is nullák, azaz:

$$\begin{aligned} A(\omega_0^2 - \omega^2) \cos \varphi + 2\beta A\omega \sin \varphi &= f_0 \\ -A(\omega_0^2 - \omega^2) \sin \varphi + 2\beta A\omega \cos \varphi &= 0. \end{aligned}$$

Ez már egy közönséges kétismeretlenes egyenletrendszer A -ra és φ -re.

A két egyenletet négyzetre emelve:

$$\begin{aligned} A^2(\omega_0^2 - \omega^2)^2 \cos^2 \varphi + 4\beta\omega A^2(\omega_0^2 - \omega^2) \cos \varphi \sin \varphi + 4\beta^2 A^2 \omega^2 \sin^2 \varphi &= f_0^2 \\ A^2(\omega_0^2 - \omega^2)^2 \sin^2 \varphi - 4\beta\omega A^2(\omega_0^2 - \omega^2) \cos \varphi \sin \varphi + 4\beta^2 A^2 \omega^2 \cos^2 \varphi &= 0, \end{aligned}$$

majd az egyenleteket összeadva:

$$A^2(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\beta^2 A^2 \omega^2 = f_0^2,$$

amiből az állandósult rezgés amplitúdója:

$$A = \frac{f_0}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\beta^2 \omega^2}}. \quad (9.14)$$

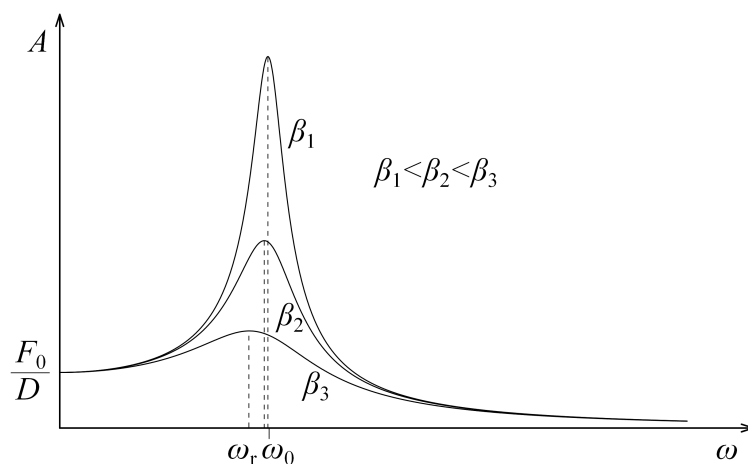
A második egyenletből

$$A(\omega_0^2 - \omega^2) \sin \varphi = 2\beta A\omega \cos \varphi,$$

amiből a rezgőrendszer fáziskésése a kényszerhez viszonyítva:

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{2\beta\omega}{\omega_0^2 - \omega^2}, \quad \varphi = \operatorname{arctg} \frac{2\beta\omega}{\omega_0^2 - \omega^2}. \quad (9.15)$$

Jegyezzük meg, hogy A és φ nem függ a kezdeti feltételektől! Értéküket a rezgőrendszer és a kényszer paraméterei határozzák meg.



9.9. ábra. Rezonanciagörbék

Amplitúdórezonancia

A 9.9 ábrán a (9.14) kifejezés alapján az állandósult rezgés A amplitúdóját ábrázoltuk a kényszer ω frekvenciájának függvényében, különböző β csillapítási tényezők esetén.

Nagyon kicsi (közel nulla) frekvencián:

$$A(0) = \frac{f_0}{\omega_0^2} = \frac{F_0}{D},$$

azaz a rezgő test amplitúdója megegyezik azzal az amplitúdóval, amivel a rugó tetejét mozgatjuk.

Nagyon nagy frekvencián:

$$A(\infty) = \lim_{\omega \rightarrow \infty} A(\omega) = 0.$$

A kettő között viszont a rezgés amplitúdója – különösen kis csillapítás esetén – sokkal nagyobb lehet a kényszer amplitúdójánál. Ez a *rezonancia* jelensége.

A rezonancia nagyon fontos a fizika számos területén és a gyakorlati életben is. Nagyon sok eszköz működésének az alapja, ugyanakkor a nagyon nagyra váló amplitúdó veszélyes is lehet. Néhány ezzel kapcsolatos jelenséget a 9.1.4 szakaszban ismertetünk.

Az a körfrekvencia, ahol az amplitúdó maximális, a *rezonanciakörfrekvencia*. Az ω_r rezonanciakörfrekvencia meghatározásához deriváljuk az $A(\omega)$ függvényt ω szerint, és a deriváltat tegyük egyenlővé nullával:

$$\frac{dA(\omega)}{d\omega} = -\frac{1}{2} \frac{f_0}{\left[(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\beta^2\omega^2 \right]^{\frac{3}{2}}} \left[-4(\omega_0^2 - \omega^2)\omega + 8\beta^2\omega \right] = 0.$$

A kifejezés akkor nulla, ha az utolsó tényező nulla:

$$8\beta^2\omega = 4(\omega_0^2 - \omega^2)\omega.$$

Egyszerűsítve $\omega \neq 0$ -val, és az egyenletet rendezve:

$$\begin{aligned} 2\beta^2 &= \omega_0^2 - \omega^2, \\ \omega^2 &= \omega_0^2 - 2\beta^2, \end{aligned}$$

amiből a rezonanciakörfrekvencia:

$$\omega_r = \sqrt{\omega_0^2 - 2\beta^2}. \quad (9.16)$$

Ezt szokás *amplitúdórezonanciának* nevezni (mert ezen a körfrekvencián az amplitúdó maximális). Látható, hogy a rezonanciakörfrekvencia nem egyezik meg a rendszer csillapítatlan sajátkörfrekvenciájával, de ha a β csillapítási tényező tart nullához, akkor a rezonanciakörfrekvencia is tart ω_0 -hoz.

A gyakorlati életben a körfrekvencia helyett a frekvencia használatos. Az $f_0 = \omega_0/2\pi$ frekvencia a rendszer csillapítatlan *sajátfrekvenciája*, az $f_r = \omega_r/2\pi$ pedig a *rezonanciafrekvencia*. Nagyon gyenge csillapításnál $f_r \approx f_0$.

A maximális amplitúdót már könnyen megkaphatjuk, ha ω_r értékét behelyettesítjük a (9.14) függvénybe:

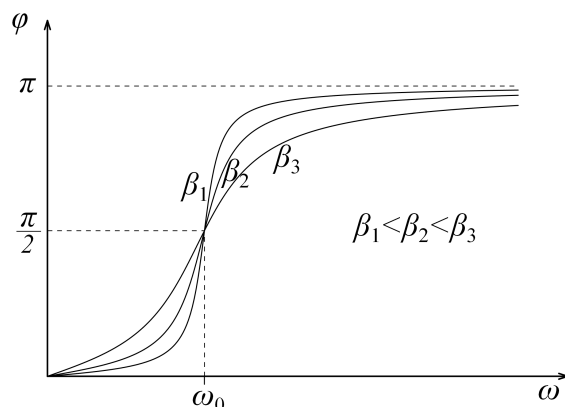
$$A_r = A(\omega_r) = \frac{f_0}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega_0^2 + 2\beta^2)^2 + 4\beta^2\omega_0^2 - 8\beta^4}} = \frac{f_0}{2\beta\sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}} = \frac{f_0}{2\beta\omega'}.$$

Ha $\beta^2 \ll \omega_0^2$ (kis csillapítás esetén) $\omega' \approx \omega_0$, és így:

$$A_r \approx \frac{f_0}{2\beta\omega_0}. \quad (9.17)$$

A maximális amplitúdó várakozásunknak megfelelően annál nagyobb, minél kisebb a csillapítási tényező, minél gyengébb a csillapítás. Ha egyáltalán nem lenne csillapítás ($\beta = 0$), akkor a (9.17) kifejezés alapján az amplitúdó végtelenné válna. Ne felejtjük el azonban, hogy az egyenletek felírásánál használt modell (például a lineáris erőtvény) csak kis deformációkra érvényes. Ha az amplitúdó nagyon nagy, a kifejezések érvényüket veszítik. Határt szab az amplitúdó növekedésének a rendszer szilárdsága is: bizonyos határok felett a rendszert alkotó elemek elszakadnak, eltörnek. Ez a *rezonanciakatasztrófa*, amelyre szintén látunk majd példát a 9.1.4 szakaszban.

Erős csillapításnál viszont (ha $2\beta^2 > \omega_0^2$) egyáltalán nincs rezonancia, az $A(\omega)$ függvény monoton csökken.



9.10. ábra. A kényszerrezgés fázisviszonyai

A 9.10 ábrán az állandósult rezgés és a kényszer közötti φ fáziskülönbséget ábrázoltuk a kényszer ω frekvenciájának függvényében, különböző β csillapítási tényezők esetén.

Nagyon kicsi (közel nulla) frekvencián

$$\varphi(0) = 0,$$

a test a kényszerrel azonos fázisban mozog.

Ha $\omega = \omega_0$, a fáziskülönbség:

$$\varphi(\omega_0) = \frac{\pi}{2},$$

azaz a rezgő test $\pi/2$ -vel (90° -kal, negyed periódussal) késik a kényszerhez képest.

Nagyon nagy frekvencián

$$\varphi(\infty) = \lim_{\omega \rightarrow \infty} \varphi(\omega) = \pi,$$

azaz a test ellentétesen mozog, mint a kényszer.

Sebességrezonancia

A rezgő test sebessége az állandósult állapotban:

$$v_x(t) = A\omega \cos(\omega t - \varphi) = v_{\max} \cos(\omega t - \varphi).$$

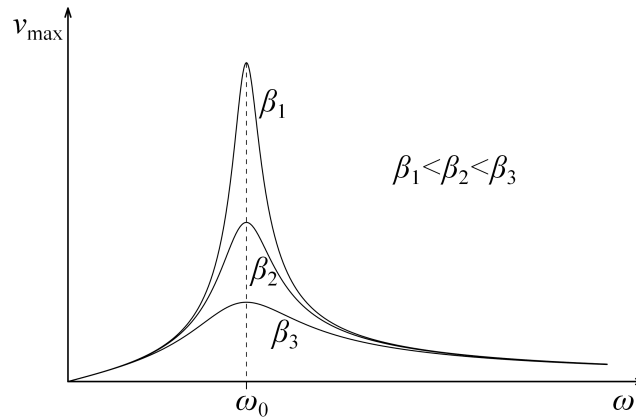
A v_{\max} sebességamplitúdó függése a kényszer körfrekvenciájától:

$$v_{\max}(\omega) = A(\omega)\omega = \frac{f_0\omega}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\beta^2\omega^2}} = \frac{f_0}{\sqrt{\frac{(\omega_0^2 - \omega^2)^2}{\omega^2} + 4\beta^2}}. \quad (9.18)$$

A kifejezés akkor maximális, ha a nevezőben a gyök alatti első tag nulla, azaz ha a kényszer körfrekvenciája megegyezik a rendszer csillapítatlan sajátkörfrekvenciájával, $\omega = \omega_0$. Ez az úgynevezett *sebességrezonancia* (ahol a sebességamplitúdó maximális).

A sebességamplitúdó maximális értéke:

$$v_r = \frac{f_0}{2\beta}. \quad (9.19)$$



9.11. ábra. Sebességamplitúdó

A 9.11 ábrán a (9.18) kifejezés alapján a v_{\max} sebességamplitúdót ábráztuk a kényszer ω frekvenciájának függvényében, különböző β csillapítási tényezők esetén. Figyeljük meg, hogy egészen kicsi (közel nulla) frekvencián a sebességamplitúdó – az amplitúdóval szemben – nulla.

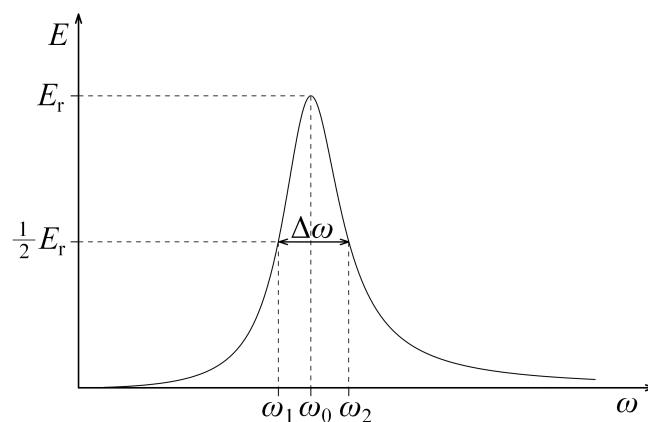
A kényszerrezgés energiaviszonyai

A rezgő rendszer mechanikai energiája:

$$E(\omega) = \frac{1}{2}mv_{\max}^2(\omega) = \frac{mf_0^2\omega^2}{2[(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\beta^2\omega^2]} = \frac{F_0^2\omega^2}{2m[(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\beta^2\omega^2]}, \quad (9.20)$$

maximális értékét az $\omega = \omega_0$ körfrekvencián veszi fel:

$$E_r = E(\omega_0) = \frac{F_0^2\omega_0^2}{8m\beta^2\omega_0^2} = \frac{F_0^2}{8m\beta^2}. \quad (9.21)$$



9.12. ábra. Félértékszélesség

A 9.12 ábrán a rendszer mechanikai energiáját ábrázoltuk a kényszer körfrekvencia függvényében. A görbe alakja a csillapítástól függ, minél gyengébb a csillapítás, annál „csúcsosabb” a görbe. A csúcsosságot matematikailag a *félértékszélességgel* lehet jellemezni. Ahogy az ábrán látszik, az ω_1 és ω_2 körfrekvenciánál a rendszer energiája a maximális érték fele. A $\Delta\omega = \omega_2 - \omega_1$ érték a félértékszélesség. Határozzuk meg az értékét!

Ehhez keressük meg, mekkora körfrekvenciákon lesz az energia a maximális érték fele:

$$E(\omega) = \frac{1}{2} E_r.$$

Behelyettesítve a (9.20) és (9.21) kifejezéseket, és az egyenletet rendezve:

$$\begin{aligned} \frac{F_0^2 \omega^2}{2m \left[(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\beta^2 \omega^2 \right]} &= \frac{1}{2} \cdot \frac{F_0^2}{8m\beta^2}, \\ 8\beta^2 \omega^2 &= (\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\beta^2 \omega^2, \\ 4\beta^2 \omega^2 &= (\omega_0^2 - \omega^2)^2, \\ 2\beta\omega &= |\omega_0^2 - \omega^2|, \\ \omega^2 \pm 2\beta\omega - \omega_0^2 &= 0. \end{aligned}$$

Az egyenlet pozitív gyökei:

$$\omega_{1,2} = \frac{\pm 2\beta + \sqrt{4\beta^2 + 4\omega_0^2}}{2} = \pm\beta + \sqrt{\omega_0^2 + \beta^2},$$

ezek kis csillapítás ($\beta^2 \ll \omega_0^2$) esetén egyszerűsödnek:

$$\omega_{1,2} \approx \omega_0 \pm \beta.$$

Ebből a félértékszélesség (kis csillapítás esetén):

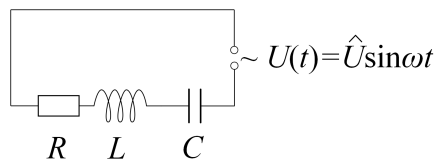
$$\Delta\omega = \omega_2 - \omega_1 = 2\beta = \frac{k}{m}. \quad (9.22)$$

Az eredményt összevetve a jósági tényező (9.9) definíciójával:

$$Q = \frac{\omega_0}{2\beta} = \frac{\omega_0}{\Delta\omega}. \quad (9.23)$$

Gerjesztett elektromos rezgőkör

A kényszerrezgés elektromos megfelelője a szinuszos váltakozó feszültséggel gerjesztett RLC-rezgőkör (9.13 ábra). A kör áramára a (9.10) összefüggéssel analóg differenciálegyenletet írhatunk fel, így annak megoldása is a mechanikai rezgéssel analóg lesz. Az állandósult tag a gerjesztő feszültséggel (a kényszerrel) azonos frekvenciájú. A kör árama az $\omega = \omega_0$ körfrekvencián lesz maximális, ahol a kör komplex ellenállása minimális: $Z(\omega_0) = R$. A maximális áram nagysága az R ohmos ellenállással (a csillapítással) fordítva arányos. A feladat részletes végigszámolását az olvasóra bízunk.



9.13. ábra. RLC-rezgőkör

9.1.4. Rezonanciakísérletek

Kísérlet: Különböző erősségű csillapítás

A 9.4 ábrán látható elrendezés könnyen megvalósítható. A csillapítás erőssége változtatható a vízbe merülő korong nagyságának változtatásával.

Ha a korong nem merül a vízbe, a csillapítás nagyon kicsi, a rendszer közel szabad rezgést végez.

Ha a kisebb korong vízbe merül, akkor jól láthatóan erősebb a csillapítás. Kialakul rezgés, de az sokkal gyorsabban megszűnik.

Ha a korongot nagyobbra cseréljük, akkor a rendszer túlcillapítottá válik. Ilyenkor nem alakul ki rezgés, a kitérített test lassan visszatér egyensúlyi állapotába. ♦

Kísérlet: Kényszerrezgés függőleges rugón

A kísérleti rendszerben egy golyó két rugó közt végezhet függőleges rezgőmozgást ([videó \[8\]](#)). A csillapítást egy a rugóhoz nyomható drótvilla biztosítja. A gerjesztést a rugó alsó végének periodikus mozgásával hozzuk létre (egy változtatható fordulatszámú motor, áttétel és excenter segítségével).

Kényszer nélkül a golyót kitérítve és elengedve gyengén csillapított rezgőmozgást látunk ([videó \[8\]](#)). Ezután a kényszert bekapcsolva a gerjesztés frekvenciáját egész kis értéktől folyamatosan növeljük.

Kis frekvencián a sárga golyó a gerjesztéssel azonos fázisban, kis amplitúdóval mozog. A motor fordulatszámát növelve a golyó egyre nagyobb amplitúdóval rezeg, majd a rezonanciafrekvencia közelében az amplitúdó olyan nagyra válik, hogy a rugó menetei már összeérnek. (Ilyenkor már biztosan nem lineáris a rendszer.)

A kényszer frekvenciáját tovább növelve a rezgés amplitúdója csökken. Nagy frekvencián egész kicsivé válik, és a rezgés fázisa jól láthatóan a gerjesztéssel ellentétes. ([videó \[8\]](#)) ♦

Kísérlet: Pohl-féle készülék

Ebben a kísérletben a rezgő rendszer egy torziós inga. A sebességgel arányos csillapítást egy elektromágnes által az ingatestben keltett örvényáramok hozzák létre. A csillapítás erőssége az elektromágnes áramának változtatásával szabályozható. A gerjesztést itt is egy változtatható fordulatszámú motor biztosítja egy excenter segítségével.

Csillapítás és gerjesztés nélkül a rendszer lényegében szabad rezgéseket végez, a csillapítás nagyon kicsi. A sajátfrekvenciát a rendszer adatai (az ingatest tehetetlenségi nyomatéka és a spirálrugó direkciós nyomatéka) határozzák meg. ([videó \[8\]](#))

Az elektromágnesre egyre nagyobb feszültséget kapcsolva folyamatosan növelhetjük a csillapítási tényezőt. Először csillapított rezgéseket láthatunk, majd a csillapítást növelve elérjük az aperiodikus határesetet. Ilyenkor már nem alakul ki rezgés, a kitérített inga lengés nélkül visszatér az egyensúlyi állapotba. Tovább növelve a tekercsre kapcsolt feszültséget a rendszer túlcillapítottá válik: egyre lassabban tér vissza az egyensúlyi állapotba. ([videó \[8\]](#))

Csökkentsük a csillapítást, és kapcsoljuk be a kényszert. A gerjesztés frekvenciáját az előző kísérlethez hasonlóan most is kis frekvenciáról indulva folyamatosan növeljük. A készüléken nagyon jól megfigyelhető a rezgő rendszer és a kényszer közötti fáziskülönbség.

Várakozásainknak megfelelően kis frekvencián a kényszer és az inga azonos fázisban mozog. A rezonanciafrekvencián az amplitúdó nagyon megnő, az inga fázisa pedig éppen negyed periódussal késik a gerjesztéshez képest. A frekvenciát tovább növelve az amplitúdó csökken, a fáziskésés pedig növekszik: nagy frekvencián az inga már csak egész kis amplitúdóval mozog, és fázisa a kényszerrel ellentétes. (videó [8]) ♦

Alkalmazás: Órák

A különböző órák működésében alapvető szerepe van a rezonanciának. Az időt a legtöbb órában egy jól meghatározott sajátfrekvenciájú rendszer rezgéseinek leszámolásával mérjük. Az elkerülhetetlen csillapítás miatt azonban a rendszer energiáját folyamatosan pótolni kell. Az energiapótlás akkor a leghatékonyabb, ha a rezgő rendszert a sajátfrekvenciával megegyező frekvenciával gerjesztjük. Ezt a különböző szerkezetű órákban más-más módon megvalósított szabályozószervezettel érik el.

Mechanikus órákban (ingaóra, mechanikus karóra) a sajátfrekvenciát az inga vagy a billegő (torziós inga) határozza meg. Az energiát súlyok, illetve egy spirálrugó biztosítja. A megfelelő frekvenciájú gerjesztést és a lengések „számolását” a *gátszerkezet* biztosítja. [43]

A kvarcórákban a sajátfrekvenciát meghatározó rezgő test egy néhány milliméteres hangvilla alakú kvarckristály. A kvarckristály *piezoelektromos* anyag: a mechanika deformáció hatására felületén elektromos töltések jelennek meg, elektromos tér hatására pedig deformálódik. Ilyen módon egyrészt a mechanikai rezgés elektromos jelekké alakítható, másrészt a kristály rezgése elektromos rezgéssel gerjeszthető. Az energiát gombelem, a rezgések leszámolását és a megfelelő frekvenciájú és fázisú gerjesztést egy elektronikus visszacsatolás biztosítja. [44] ♦

Megfigyelés: Rezonanciakatasztrófa

Az egyik legismertebb rezonanciakatasztrófa a 8.4 szakaszban már említett Tacoma-híd összeomlása volt. A periodikus kényszert az egyenletes, erős szélben a hídról leszakadó örvények okozták, amelyek szerencsétlen módon megegyeztek a függőhíd (egyik) sajátfrekvenciájával. Emiatt a rezgés amplitúdója folyamatosan növekedett, ami végül a híd leszakadásához vezetett. [39] ♦

9.2. Rezgések összetevése és felbontása

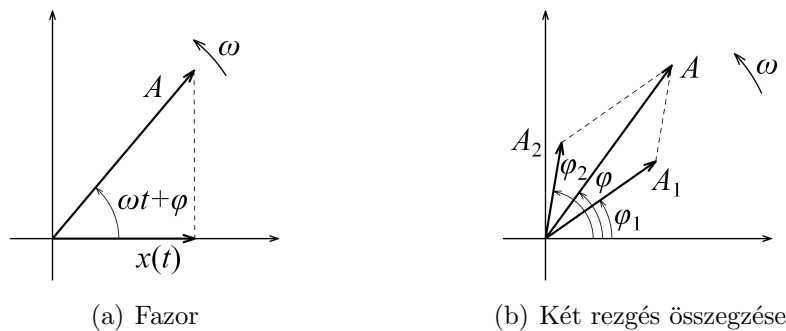
Lineáris rendszerekben érvényes a *szuperpozíció elve*, azaz ha a rendszert több hatás éri, akkor a kialakuló mozgás az egyes hatások által keltett mozgások összege. Nem túl nagy kitérés esetén a rezgő rendszereket lineáris differenciálegyenletek írják le, így rezgéseket egyszerűen összegezhethetünk, illetve felbonthatunk. Ezt alkalmaztuk már például a kényszerrezgés esetében, ahol a megoldást a tranziens tag és az állandósult tag összegeként állítottuk elő.

Egyirányú rezgések összetevése

Ha két azonos irányú rezgést szuperponálunk, akkor a kitérés-idő függvények egyszerűen összeadódnak. Harmonikus függvények összegzése szemléletesen vizsgálható az úgynevezett *forgóvektoros* módszerrel. A 9.14(a) ábrán látható A hosszúságú vektor ω szögsebességgel forog, vízszintes vetülete:

$$x(t) = A \cos(\omega t + \varphi),$$

azaz egy A amplitúdójú, ω körfrekvenciájú harmonikus rezgés. A vektor iránya kifejezi a rezgés *fázisát*, ezért szokás *fazornak* is nevezni.



9.14. ábra. Forgóvektoros módszer

Ha két azonos frekvenciájú rezgést összegezzük, akkor a két vektor azonos szögsebességgel forog. Vizsgáljuk a mozgást a vektorokkal együtt forgó koordináta-rendszerben (9.14(b) ábra). Az egyes rezgések amplitúdóját és kezdőfázisát a két forgóvektor jellemzi, az eredő rezgés forgóvektora ezek vektoriális összege. Az eredő rezgés amplitúdója és kezdőfázisa ebből könnyen kifejezhető (a számítás elvégzését az olvasóra bízunk):

$$A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2 \cos(\varphi_2 - \varphi_1)}$$

$$\varphi = \operatorname{arctg} \frac{A_1 \sin \varphi_1 + A_2 \sin \varphi_2}{A_1 \cos \varphi_1 + A_2 \cos \varphi_2}. \quad (9.24)$$

Számítás nélkül is látható, hogy az eredő amplitúdóra teljesül:

$$|A_1 - A_2| \leq A \leq A_1 + A_2 .$$

Az amplitúdó tényleges nagysága a fázisviszonyoktól függ: ha a két rezgés fázisa megegyezik, akkor az amplitúdó maximális, ha pedig ellentétes, akkor minimális (egyenlő amplitúdók esetén nulla) lesz.

Ha a szuperponált rezgések körfrekvenciái különböznek, akkor a két rezgés relatív fázisa folyamatosan változik, és így az eredő vektor hossza is periodikusan változni fog a minimális és maximális érték között. Ez különösen látványos, ha a két körfrekvencia csak kicsit tér el egymástól.

Vizsgáljuk meg azt a speciális esetet, amikor a két amplitúdó megegyezik:

$$\begin{aligned} x_1(t) &= A \cos \omega_1 t \\ x_2(t) &= A \cos \omega_2 t . \end{aligned}$$

(A kezdőfázisokat nullának választottuk: kezdjük az időmérést akkor, amikor a két rezgés fázisa éppen egyenlő.) A két rezgés szuperpozíciója:

$$x(t) = x_1(t) + x_2(t) = A (\cos \omega_1 t + \cos \omega_2 t) = 2A \cos \frac{\omega_1 - \omega_2}{2} t \cdot \cos \frac{\omega_1 + \omega_2}{2} t .$$

Ha a két körfrekvencia csak kicsit tér el egymástól:

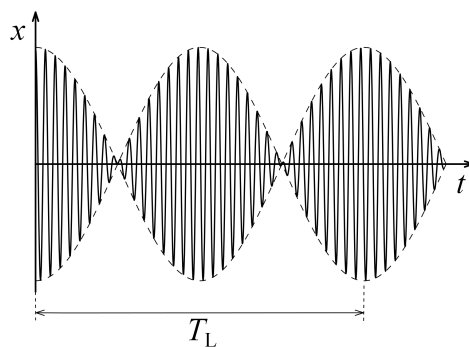
$$\begin{aligned} |\omega_1 - \omega_2| &\ll \omega_1 + \omega_2 , \\ \frac{\omega_1 + \omega_2}{2} &= \omega \approx \omega_1 \approx \omega_2 , \\ \frac{\omega_1 - \omega_2}{2} &= \omega_L \ll \omega . \end{aligned}$$

Ezekkel a jelölésekkel a függvény:

$$x(t) = 2A \cos \omega_L t \cdot \cos \omega t . \quad (9.25)$$

A kialakuló rezgés felfogható egy lassan változó amplitúdójú harmonikus rezgésnek, ahol az amplitúdó nagysága szintén harmonikus függvény szerint változik. A függvény grafikonja a 9.15 ábrán látható. A jelenség neve *lebegés*. A lebegés periódusideje és frekvenciája:

$$T_L = \frac{2\pi}{\omega_L} \quad \text{és} \quad f_L = \frac{1}{T_L} = \frac{\omega_L}{2\pi} = \frac{f_1 - f_2}{2} .$$



9.15. ábra. Lebegés

Kísérlet: Lebegés

Két egyforma hangvilla egyikét a szárára szerelt kicsiny nehezék mozgatósával kismértékben elhangoljuk. A két külön-külön megszólaltatott hangvilla hangja között nem lehet meghallani a különbséget, ha azonban egyszerre szólaltatjuk meg, akkor periodikusan erősödő és gyengülő hangot hallunk. Ez a lebegés. Az erősödések frekvenciája a két frekvencia különbsége (a lebegési frekvencia kétszerese, hiszen egy lebegési perióduson belül kétszer maximális az amplitúdó). Segítségével nagyon pontosan egymáshoz lehet hangolni hangszereket: ha a két frekvencia megegyezik, a lebegés megszűnik. ♦

Merőleges rezgések összetevése

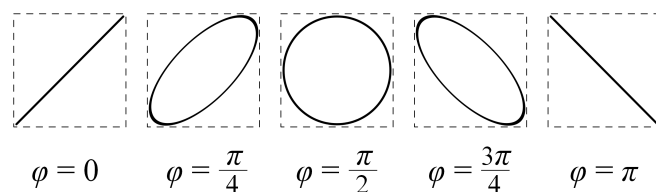
Azonos frekvenciájú, egymásra merőleges rezgések szuperpozíciója jól szemléltethető egy fonálingával: az inga ugyanúgy mozog az x és az y irányban kitérítve is. Ha az ingát mindkét irányban kitérítjük vagy meglökjük, akkor a két mozgás egyszerre történik, az ingatest az xy síkban fog mozogni:

$$\begin{aligned}x(t) &= A_1 \cos \omega t \\y(t) &= A_2 \cos(\omega t + \varphi).\end{aligned}$$

A kialakuló pálya általános esetben egy ellipszis.

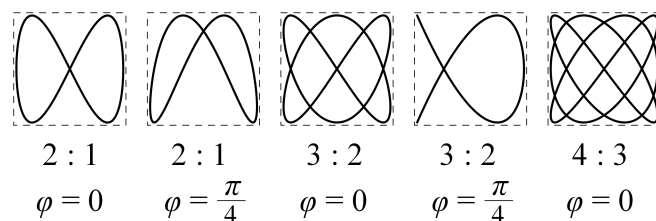
A 9.16 ábrán $A_1 = A_2$ esetben látható a pálya a fáziskülönbség néhány különböző értéke esetén. Azonos (és ellentétes) fázis esetén a mozgás egy 45° -os egyenes, $\pi/2$ (és $3\pi/2$) fáziskülönbség esetén kör, egyéb esetekben pedig egy ferde tengelyű ellipszis.

Merőleges rezgések összetevését kényelmesebben tanulmányozhatjuk egy *oszcilloszkóp* képernyőjén. Az oszcilloszkópban az elektronsugár vízszintes és függőleges eltérítését két különböző elektromos jel vezérli. Az elektronsugár kirajzolja a két merőleges rezgés szuperpozíciójaként kialakuló pályát.



9.16. ábra. Két azonos frekvenciájú merőleges rezgés szuperpozíciója

Ha a két merőleges rezgés frekvenciája különböző, akkor a kialakuló pálya bonyolult lesz. Általános esetben az elektronsugár az amplitúdók által meghatározott téglalap egészét bejárja, így a mozgásból semmit nem látunk.



9.17. ábra. Lissajous-görbék

Ha a frekvenciák aránya kis egész számok arányával egyezik meg, akkor az ábra leegyszerűsödik. A 9.17 ábrán látható *Lissajous-görbék* alakja a frekvenciaaránytól és a fáziskülönbségtől függ. (A frekvenciaarány általában kicsit eltér az ideálistól, így a fáziskülönbség lassan változik, ami a görbék látványos mozgását eredményezi.) [42]

Rezgések felbontása

Ha egy függvény periodikus (periódusideje $T = 2\pi/\omega$), akkor felírható harmonikus függvények végtelen soraként:

$$x(t) = A_0 + \sum_{i=1}^{\infty} A_i \sin(i\omega t + \varphi_i) = A_0 + \sum_{i=1}^{\infty} (B_i \sin i\omega t + C_i \cos i\omega t) , \quad (9.26)$$

ahol az A_0 , A_i és φ_i , illetve a B_i és C_i együtthatók egyértelműen meghatározhatók. Ez a *Fourier-sor*. [45] A sorban szereplő harmonikus függvények frekvenciái a vizsgált periodikus függvény frekvenciájával azonosak (alap harmonikus), valamint ennek egész számú többszörösei (felharmonikusok). Az együtthatók megadják a függvény *Fourier-spektrumát*, azaz megmutatják, hogy melyik felharmonikus milyen amplitúdóval (és fázissal) vesz részt a függvény felépítésében. A spektrum periodikus függvény esetében csak diszkrét értékeknél (ω egész számú többszöröseinél) értelmezett.

Ha a függvény nem periodikus, akkor a frekvenciaspektrum folytonos, a függvény végtelen sor helyett integrállal írható fel. Az együtthatókat szokás komplex alakban megadni (ami kifejezi az amplitúdót és a fázist is), az integrált is ilyen alakban írjuk fel:

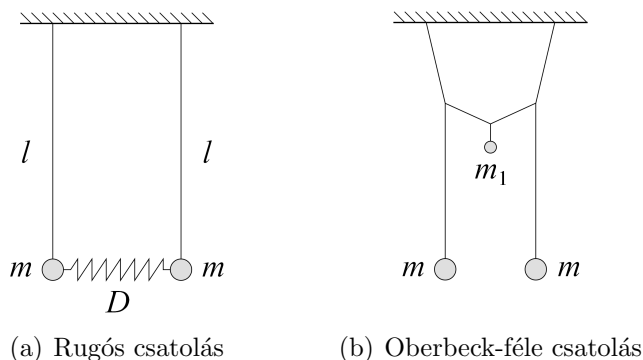
$$x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega)e^{i\omega t} d\omega, \quad (9.27)$$

ahol az $F(\omega)$ függvény a (komplex) frekvenciaspektrum, i pedig a képzetes egység.

A frekvenciaspektrumot az időfüggvényből a *Fourier-transzformáció* segítségével lehet előállítani. [46] Véges sok mérési pontból álló függvény Fourier-transzformációjához a legtöbb adatkezelő programban rendelkezésre állnak numerikus eszközök (FFT: Fast Fourier Transform).

9.3. Csatolt rezgések

Ha két vagy több rezgő rendszer között kölcsönhatás van, akkor csatolt rezgésekről beszélünk. Ilyen rendszer például a 9.18(a) ábrán látható csatolt inga, ahol két egyforma fonálingát egy rugó köt össze. A csatolás azonban nagyon sokféle lehet: a 9.18(b) ábrán látható *Oberbeck-féle* ingánál rugó helyett egy fonálra akasztott kis test biztosítja a csatolást [47]. Újabb rugó közbeiktatásával csatolhatjuk rugók között függőlegesen mozgó testek rezgését is, a *Wilberforce-féle* ingában pedig maga a csavarrugó hoz létre csatolást a függőleges rezgés és a torziós rezgés között (mindkét kísérletről részletesebben a 9.3 szakasz végén). További érdekes példa a kvarcóra, ahol a piezoelektromos hatás csatolja a mechanikai és az elektromos rezgést.



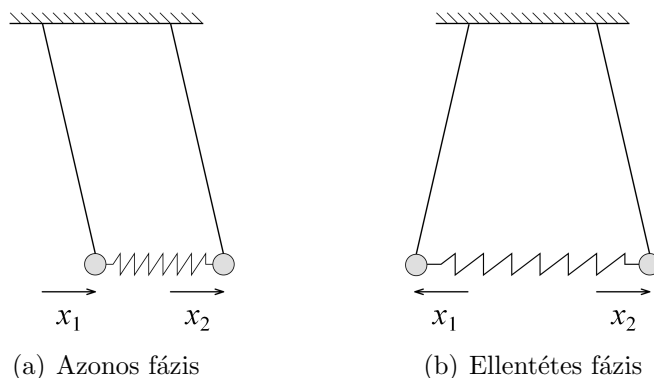
9.18. ábra. Csatolt ingák

Kísérlet: Csatolt ingák

A kísérletben két egyforma ingát egy gyenge rugó kapcsol össze. Térítsük ki az egyik ingát, és engedjük el – miközben a másik nyugalomban marad. Megfigyelhetjük, hogy a lengő inga a gyenge csatoláson keresztül mozgásba hozza a másik ingát, amely egyre nagyobb amplitúdóval leng. Eközben a kitérített inga rezgésének amplitúdója folyamatosan csökken, míg végül teljesen megáll. Ekkor a szerepek felcserélődnek, a csatoláson keresztül megmozgatott inga lengésének amplitúdója újra csökken, a másiké pedig ismét növekszik. Egészen addig, amíg ismét az eredetileg kitérített inga leng maximális amplitúdóval, a másik pedig megáll, és az egész kezdődik előlről (videó [8]).

A csatolt ingákat azonban másképp is el lehet indítani. Ha a két ingát azonos irányban, azonos amplitúdóval térítjük ki és engedjük el, akkor a csatoló rugó mindvégig változatlan hosszúságú marad. Ekkor a két inga azonos amplitúdóval és azonos fázisban, egymástól függetlenül leng a csatolatlan inga periódusidejével (videó [8]).

Ha az ingákat azonos amplitúdóval, de ellentétes irányban térítjük ki, akkor a két inga ismét egyforma és állandó amplitúdóval, de ellentétes fázisban leng. A periódusidő érezhetően kisebb, mint az előző esetben (videó [8]). ♦



9.19. ábra. Csatolt ingák normálrezgései

A 9.19(a) és 9.19(b) ábrákon csatolt inga két, a kísérleti videókon is látható speciális mozgása (normálrezgése) látható. Az egyik esetben a két inga azonos fázisban leng ($x_1 = x_2$), így a rugó végig nyújtatlan (olyan, mintha ott se lenne). Ekkor a rezgés körfrekvenciája megegyezik a fonálinga körfrekvenciájával:

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{g}{l}}.$$

A második esetben a két inga ellentétes fázisban leng ($x_1 = -x_2$). Ekkor a szimmetria miatt a rugó középpontja nyugalomban van, mindkét inga harmonikus rezgőmozgást végez (azonos frekvenciával és amplitúdóval, de ellentétes fázisban). A rezgés körfrekvenciája ekkor a $2D$ direkciós erejű félrugók miatt nagyobb, mint az előző esetben:

$$\omega_2 = \sqrt{\frac{g}{l} + \frac{2D}{m}}.$$

Látni fogjuk, hogy a csatolt ingák általános mozgása előállítható ennek a két normálrezgésnek a lineáris kombinációjaként.

A csatolt ingák mozgásegyenletének felírásához felhasználjuk a fonálinga (kis kitérésekre levezetett) mozgásegyenletét:

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = -m \frac{g}{l} x.$$

A csatolt ingákra ezen kívül a rugóerő hat:

$$\begin{aligned} F_1 &= D(x_2 - x_1) \\ F_2 &= -F_1 = -D(x_2 - x_1). \end{aligned}$$

Ezek alapján a mozgásegyenlet:

$$\begin{aligned} \frac{d^2 x_1}{dt^2} &= -\frac{g}{l} x_1 + \frac{D}{m} (x_2 - x_1) \\ \frac{d^2 x_2}{dt^2} &= -\frac{g}{l} x_2 - \frac{D}{m} (x_2 - x_1) \end{aligned} \tag{9.28}$$

Ez egy (másodrendű homogén lineáris) csatolt differenciálegyenlet-rendszer, hiszen mindkét változó mindkét egyenletben szerepel.

A megoldáshoz adjuk össze és vonjuk ki a két egyenletet:

$$\begin{aligned} \frac{d^2 (x_1 + x_2)}{dt^2} &= -\frac{g}{l} (x_1 + x_2) \\ \frac{d^2 (x_1 - x_2)}{dt^2} &= -\left(\frac{g}{l} + \frac{2D}{m}\right) (x_1 - x_2). \end{aligned}$$

Vezessünk be új változókat:

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 &= y_1 \\ x_1 - x_2 &= y_2, \end{aligned}$$

ezeket behelyettesítve már két közönséges (nem csatolt) differenciálegyenletet kapunk:

$$\begin{aligned} \frac{d^2 y_1}{dt^2} + \frac{g}{l} y_1 &= 0 \\ \frac{d^2 y_2}{dt^2} + \left(\frac{g}{l} + \frac{2D}{m}\right) y_2 &= 0. \end{aligned}$$

Ezek megoldását már ismerjük. A szokásos jelöléssel:

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{g}{l}} \quad \text{és} \quad \omega_2 = \sqrt{\frac{g}{l} + \frac{2D}{m}},$$

$$y_1(t) = 2A_1 \cos(\omega_1 t + \varphi_1)$$

$$y_2(t) = 2A_2 \cos(\omega_2 t + \varphi_2) .$$

Ebből az ingák mozgását leíró időfüggvényeket már könnyen megkaphatjuk:

$$x_1 = \frac{y_1 + y_2}{2}$$

$$x_2 = \frac{y_1 - y_2}{2} ,$$

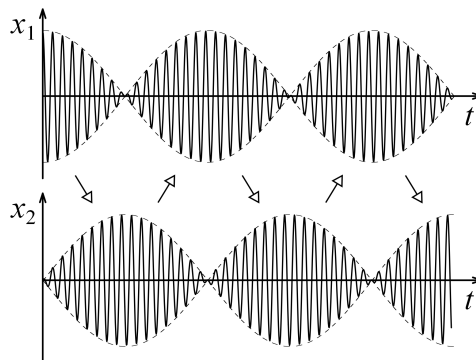
$$x_1(t) = A_1 \cos(\omega_1 t + \varphi_1) + A_2 \cos(\omega_2 t + \varphi_2)$$

$$x_2(t) = A_1 \cos(\omega_1 t + \varphi_1) - A_2 \cos(\omega_2 t + \varphi_2) . \quad (9.29)$$

Az ω_1 és ω_2 körfrekvenciákat a rendszer fizikai felépítése határozza meg, az A_1 , A_2 , φ_1 és φ_2 paraméterek viszont a kezdeti feltételektől függenek (két kezdeti kitérés és két kezdeti sebesség, összesen négy szabadsági fok).

Ha $A_2 = 0$, akkor a két test együtt mozog (első normálrezgés), ha $A_1 = 0$, akkor pedig tükörszimmetrikusan (második normálrezgés). Általános esetben a mozgás a két normálrezgés lineáris kombinációja.

A 9.20 ábrán az $A_1 = A_2$ esetet ábrázoltuk gyenge csatolás esetében. Látható, hogy mindkét inga mozgása lebegés, de a burkológörbék negyedperiódussal el vannak tolva egymáshoz képest.



9.20. ábra. Csatolt ingák mozgása

Kezdetben az első inga leng maximális amplitúdóval, a második áll. A lebegés első negyed periódusában az első inga amplitúdója folyamatosan csökken, energiát ad át a másik ingának, amely egyre nagyobb amplitúdóval mozog. Negyed periódus után az első inga megáll, és a második leng maximális amplitúdóval. Ekkor a szerepek felcserélődnek, és negyedperióduson keresztül a második inga ad át energiát az elsőnek. (Az energiaátadás irányát a nyilak jelzik.)

A csatolt rezgésekben tehát két különböző periódusidővel történik energiaátadás. Egyrészt az egyes rezgéseken belül a mozgási és helyzeti energia alakul át kölcsönösen egymásba a rezgés egy periódusa alatt kétszer, másrészt a csatolt rezgések között cserélődik ki a teljes mechanikai energia a lebegés periódusideje alatt oda-vissza kétszer.

Kísérlet: Csatolt rezgések

A [videón](#) [8] bemutatott kísérletben két golyó mozoghat függőleges irányban kifeszített rugók között. A csatolást a golyók közötti (gyengébb) rugó biztosítja.

Megfelelő indítással a golyók együtt vagy egymással ellentétesen mozoghatnak – ez a két normálrezgés. Megfigyelhető, hogy a rezgés frekvenciája a második esetben nagyobb.

Ha a csatolt rezgő rendszert a korábban megismert módon motor és excenter segítségével egyre nagyobb frekvenciával gerjesztjük, akkor először a kisebb frekvenciájú (együtt mozgó) normálrezgés kerül rezonanciahelyzetbe, és nő meg az amplitúdója. A frekvenciát tovább növelve az amplitúdó először csökken, majd újra nőni kezd, de ekkor már a második (ellentétesen mozgó) normálrezgés gerjesztődik. ♦

Kísérlet: Wilberforce-inga

A Wilberforce-féle inga egy laza csavarrugóra rögzített merev test, melynek tehetetlenségi nyomatékát – állandó tömeg mellett – állítócsavarok segítségével változtatni lehet. Az inga függőleges irányú rezgőmozgást és torziós rezgést is végez. A két rezgési mód között a csavarrugó hoz létre csatolást: hosszváltoztatás hatására kicsit elcsavarodik, és fordítva, csavarás hatására megváltozik a hossza. A tehetetlenségi nyomaték megfelelő beállításával a kétféle rezgés periódusideje egyenlővé tehető, ilyenkor nagyon jól megfigyelhető a két módus között kialakuló lebegés ([videó](#) [8][48]). ♦

10. fejezet

Mechanikai hullámok

A hullámjelenségek alapvetők a természetben, a fizika szinte minden területén találkozunk velük. Ebben a fejezetben elsősorban a mechanikai hullámokkal foglalkozunk, de az itt megismert jelenségek, alkalmazott leírásmódok és levezetett összefüggések más (például elektromágneses, kvantummechanikai) hullámok megértésénél is hasznosak.

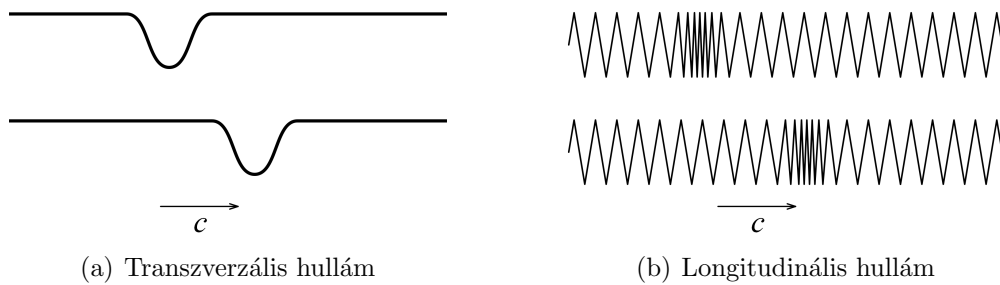
A mechanikai hullám egy *zavar* tovaterjedése valamilyen *közegben*. A közeg és a zavar jellege alapján többféleképpen osztályozhatjuk a hullámokat, sokféle hullámjelenséget vizsgálhatunk. Azonban a hullámok legtöbb alapvető tulajdonsága, viselkedése bármely hullámra egyformán tárgyalható.

A közeg kiterjedése alapján beszélhetünk egy-, két- és háromdimenziós hullámokról. Egydimenziós hullám például egy rugalmas kötélén terjedő zavar, kétdimenziósak a víz felszíni hullámai vagy egy rugalmas hártyán kialakuló hullámok, háromdimenziós hullám általában a hang (és az elektromágneses hullámok, így a fény is).

Három dimenzióban homogén, izotrop közegben egy pontszerű forrásból kiinduló zavar sugár irányban, gömbszimmetrikusan terjed: a *hullámfrontok* gömbfelületek (az azonos fázisú pontok gömbfelületeken helyezkednek el). Ezt *gömbhullámnak* nevezzük. Hasonlóan, ha a hullámfrontok hengerfelületek vagy síkok, akkor *hengerhullámról*, illetve *síkhullámról* beszélünk. (Két dimenzióban ugyanígy *körhullámok* és *egyenes hullámok* vannak.) A hullámforrástól távol egy gömbhullám kis darabja is síkhullámnak tekinthető, ahol a terjedési irány a hullámfront síkjára merőleges egyenes (és így megfelelő koordináta-rendszer választásával egydimenziós hullámként írható le).

A zavar egy mechanikai hullámban a közeg pontjainak valamilyen irányú elmozdulása. Ha az egyes pontok elmozdulása merőleges a terjedési irányra, akkor *transzverzális* hullámról beszélünk, ha az elmozdulás és a terjedési irány párhuzamos, akkor a hullám *longitudinális*. A 10.1(a) ábrán példaként egy rugalmas kötélén terjedő transzverzális hullámot, a 10.1(b) ábrán pedig egy csavarrugón terjedő longitudinális hullámot látunk.

A zavar időbeli lefolyása szerint a hullám lehet *harmonikus* vagy nem harmonikus. A nem harmonikus hullámok – a rezgésekhez hasonlóan – felírhatók harmonikus hullámok eredőjeként, ezért elsősorban harmonikus hullámokkal fogunk foglalkozni.



10.1. ábra. Különböző hullámok

10.1. Hullámfüggvény

Vizsgáljunk először egy síkhullámot, amely az x -tengellyel párhuzamos irányban terjed. A zavar forrása legyen az $x = 0$ helyen, a zavar időfüggését az $f(t)$ függvény adja meg. A $\Psi(x, t)$ hullámfüggvény megadja a közegben tovaterjedő zavar értékét a hely és az idő függvényében. A zavar forrásának helyén:

$$\Psi(0, t) = f(t).$$

Ha a zavar az x -tengely mentén pozitív irányba c sebességgel terjed, akkor x távolságra x/c késéssel fog megérkezni. Tehát – feltételezve, hogy a zavar a terjedés közben nem gyengül – az x helyen a hullámfüggvény egy adott pillanatban olyan lesz, mint a zavar forrásánál x/c idővel korábban:

$$\Psi_{\rightarrow}(x, t) = f\left(t - \frac{x}{c}\right). \quad (10.1)$$

Ha a zavar negatív irányba terjed, akkor a képletben módosul az előjel:

$$\Psi_{\leftarrow}(x, t) = f\left(t + \frac{x}{c}\right).$$

A c terjedési sebesség a közeg és – bizonyos esetekben – a zavar tulajdonságaitól függ. A terjedési sebességet később néhány közegre ki fogjuk számítani (10.2 és 10.6 szakaszok), a terjedési sebesség frekvenciafüggésének következményeivel pedig a következő, 10.1.1 szakaszban foglalkozunk.

A hullámfüggvény mechanikai hullámoknál legtöbbször a közeg pontjainak kitérését adja meg, de lehet szögelfordulás, nyomásváltozás vagy más jellemző paraméter is. (Elektromágneses hullámoknál a hullámfüggvény az elektromos térerősség vagy a mágneses indukció vektor értékét adja meg, a kvantummechanikai hullámfüggvény pedig komplex érték.)

Harmonikus síkhullám

Legyen a zavar harmonikus függvény:

$$f(t) = A \cos(\omega t + \alpha),$$

ekkor a zavarterjedés egy *harmonikus síkhullám*:

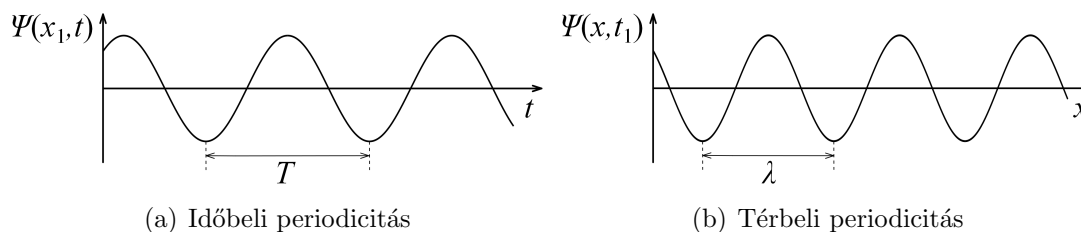
$$\Psi(x, t) = A \cos \left[\omega \left(t - \frac{x}{c} \right) + \alpha \right]. \quad (10.2)$$

A hullámfüggvény kétváltozós függvény. Ha az egyik változót rögzítjük, akkor a másik változó függvényében ábrázolhatjuk. A 10.2(a) ábrán az $x = x_1$ helyen ábrázoltuk a hullámfüggvényt az idő függvényében. Harmonikus függvényt kapunk, melynek (időbeli) periódusa a *periódusidő*:

$$T = \frac{2\pi}{\omega}.$$

A 10.2(b) ábrán a $t = t_1$ időpillanatban ábrázoltuk az hullámfüggvényt a hely függvényében. Most is harmonikus függvényt kapunk, melynek (térbeli) periódusa a *hullámhossz*:

$$\lambda = 2\pi \frac{c}{\omega} = cT.$$



10.2. ábra. A hullámfüggvény rögzített helyen és időben

A koszinusz függvény argumentuma a hullám *fázisa*:

$$\varphi = \omega \left(t - \frac{x}{c} \right) + \alpha.$$

Egy adott fázishelyzet elmozdulás-idő függvénye ennek alapján:

$$x(t) = ct - \frac{c(\varphi - \alpha)}{\omega},$$

amiből a *fázissebesség*:

$$c = \frac{dx}{dt}.$$

A fázissebesség megegyezik a zavar terjedési sebességével.

A hullám időbeli viselkedését a T periódusidő mellett az $f = 1/T$ frekvencia és az ω körfrekvencia is jellemzi:

$$\omega = \frac{2\pi}{T}.$$

Ehhez hasonlóan a hullám térbeli jellemzésére bevezetjük a k hullámszámot:

$$k = \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{\omega}{c}, \quad (10.3)$$

melynek mértékegysége $1/\text{m}$.

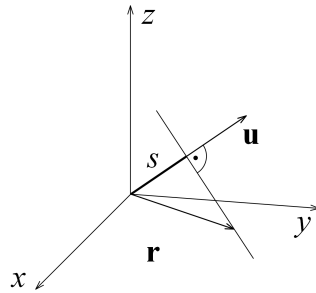
Ezt behelyettesítve a (10.2) összefüggésbe megkapjuk az egydimenziós harmonikus síkhullám hullámfüggvényének leginkább használt alakját:

$$\Psi(x, t) = A \cos(\omega t - kx + \alpha). \quad (10.4)$$

Térbeli síkhullám

Ha a hullám egy háromdimenziós közegben terjed, akkor a hullámfüggvény az \mathbf{r} helyvektor és a t idő függvénye: $\Psi(\mathbf{r}, t)$. Jelölje az \mathbf{u} egységvektor a síkhullám terjedési irányát. Ekkor a hullámfrontok az \mathbf{u} vektorra merőleges síkok. A hullám fázisát egy tetszőleges \mathbf{r} helyvektorral megadott helyen az adott ponton átmenő sík és az origó távolsága szabja meg (10.3 ábra):

$$s = \mathbf{ur}.$$



10.3. ábra. Térbeli síkhullám

Ezt a távolságot behelyettesítve a (10.4) kifejezésbe:

$$\Psi(\mathbf{r}, t) = A \cos(\omega t - ks + \alpha) = A \cos(\omega t - \mathbf{kur} + \alpha).$$

Vezessük be a $\mathbf{k} = k\mathbf{u}$ hullámszámvektort, melynek nagysága k , iránya pedig a hullám terjedési iránya. Evvel a térbeli harmonikus síkhullám hullámfüggvénye:

$$\Psi(\mathbf{r}, t) = A \cos(\omega t - \mathbf{kr} + \alpha). \quad (10.5)$$

Gömbhullám

Gömbhullámok esetében a hullám terjedési iránya mindig sugárirányú ($\mathbf{k} \parallel \mathbf{r}$), így a két vektor skalárszorzata az abszolút értékük szorzatával egyenlő. Ennek alapján a gömbhullám hullámfüggvénye:

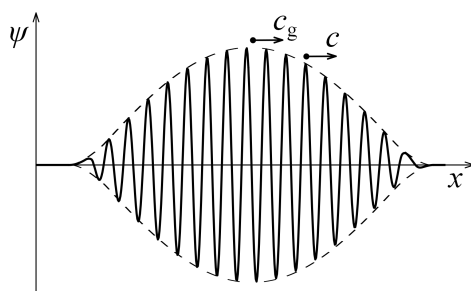
$$\Psi(\mathbf{r}, t) = A(r) \cos(\omega t - kr + \alpha), \quad (10.6)$$

ahol a hullám amplitúdója az r sugár függvényében változik. A 10.2.1 szakaszban energetikai megfontolással meg fogjuk mutatni, hogy az amplitúdó helyfüggése:

$$A(r) = \frac{A_0}{r}.$$

10.1.1. Csoportsebesség, diszperzió

A valódi hullámok soha nem végtelen hosszú, szigorúan harmonikus függvények, sokkal inkább a 10.4 ábrán látható hosszabb vagy rövidebb *hullámcsomagok*. Ahogy korábban láttuk (9.2 szakasz) egy ilyen nem periodikus függvény is felépíthető harmonikus függvények szuperpozíciójaként.



10.4. ábra. Hullámcsomag, csoportsebesség

A problémát az okozza, hogy a hullámok terjedési sebessége sok esetben függ a frekvenciától: $c = c(\omega)$. Ez a *diszperzió* jelensége. Ilyenkor a hullámcsomag más sebességgel halad, mint a csomagot felépítő harmonikus hullámok. A hullámcsomag burkolójának sebessége a c_g *csoportsebesség*, míg a harmonikus összetevők sebessége a korábban megismert c fázissebesség.

A jelenséget a következőkben egy nagyon egyszerű modellel vizsgáljuk. A 9.2 szakaszban láttuk, hogy két közeli frekvenciájú rezgés szuperpozíciójaként lebegés alakul ki, amely hasonlít a hullámcsomaghoz. Így a hullámcsomagot első közelítésben két harmonikus hullám összegeként állítjuk elő:

$$\begin{aligned} \Psi_1(x, t) &= A \cos(\omega t - kx) \\ \Psi_2(x, t) &= A \cos(\omega' t - k'x), \end{aligned}$$

ahol

$$\begin{aligned}\omega' &= \omega + \Delta\omega, & \Delta\omega &\ll \omega, & \omega' &\approx \omega, \\ k' &= k + \Delta k, & \Delta k &\ll k, & k' &\approx k.\end{aligned}$$

A kialakuló hullám hullámfüggvénye a két harmonikus hullám hullámfüggvényének összege, amelyet a trigonometrikus függvények azonosságaival átalakítunk:

$$\begin{aligned}\Psi(x, t) &= \Psi_1(x, t) + \Psi_2(x, t) = 2A \cos \frac{(\omega' - \omega)t - (k' - k)x}{2} \cos \frac{(\omega' + \omega)t - (k' + k)x}{2} \approx \\ &\approx 2A \cos \left(\frac{\Delta\omega}{2}t - \frac{\Delta k}{2}x \right) \cos(\omega t - kx) = A(x, t) \cos(\omega t - kx).\end{aligned}$$

A kialakuló hullám lényegében egy harmonikus függvény, melynek azonban amplitúdója változik a hely és idő függvényében. Az $A(x, t)$ függvény a hullámfüggvény (egyik) burkolója, amely viszont maga is egy harmonikus hullámfüggvény:

$$A(x, t) = 2A \cos \left(\frac{\Delta\omega}{2}t - \frac{\Delta k}{2}x \right).$$

Ennek a hullámnak a fázissebessége a (10.3) kifejezés alapján a körfrekvenciájának és a hullámszámának a hányadosa. A burkoló fázissebessége azonban éppen a hullámcsomag keresett csoportsebessége:

$$c_g = \frac{\frac{\Delta\omega}{2}}{\frac{\Delta k}{2}} = \frac{\Delta\omega}{\Delta k}.$$

A hullámcsomag burkolója tehát c_g sebességgel halad, miközben a hullámcsomagot alkotó hullámok általában ettől eltérő c sebességgel haladnak. Eszerint a hullám a hullámcsomagon belül is mozog.

Ha egyszerű modellünktől eltérően nem csak két hullámot szuperponálunk, hanem végtelen sokat, akkor a differenciahányados helyett differenciáhányadost írhatunk. Így a csoportsebesség:

$$c_g = \frac{d\omega}{dk}. \quad (10.7)$$

A kifejezést átalakíthatjuk, ha felhasználjuk a körfrekvencia, a hullámszám és a fázissebesség közti kapcsolatot:

$$\begin{aligned}\omega &= kc(k) \\ c_g &= \frac{d(kc)}{dk} = c + k \frac{dc}{dk}.\end{aligned}$$

A gyakorlatban a hullámszám helyett a hullám jellemzésére gyakran inkább a hullámhosszt használjuk. Az áttéréshez írjuk fel:

$$k = \frac{2\pi}{\lambda}$$

$$\frac{dk}{d\lambda} = -\frac{2\pi}{\lambda^2}$$

$$dk = -\frac{2\pi}{\lambda^2}d\lambda.$$

Ezeket behelyettesítve a csoportsebesség képletébe:

$$c_g = c - \lambda \frac{dc}{d\lambda}. \quad (10.8)$$

A diszperzió léte és jellege a deriválttól függ. *Normális diszperzióról* beszélünk, ha

$$\frac{dc}{d\lambda} > 0, \quad c_g < c,$$

anomális diszperzióról, ha

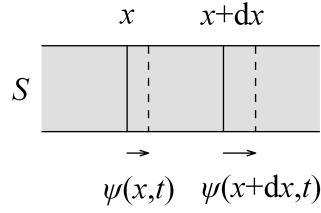
$$\frac{dc}{d\lambda} < 0, \quad c_g > c.$$

Amennyiben a derivált 0, azaz a sebesség nem függ a hullámhossztól (és a frekvenciától), akkor nincs diszperzió, a csoportsebesség megegyezik a fázissebességgel.

A hétköznapi életben mindhárom esetre látunk példát. A hanghullámoknál és a vákuumban terjedő elektromágneses hullámoknál nincs diszperzió. Ha azonban a fény valamilyen közegben terjed, akkor a hullámhossz növelésével nő a fény közegbeli sebessége, azaz normális diszperzió lép fel. Emiatt lehet felbontani prizmával a fehér fényt összetevőire, és ez okozza az optikai rendszerek színhibáját. A víz felszínén kialakuló hullámok bonyolult jelenségek, melyek kialakulásában a nehézségi erőnek és a felületi feszültségnek is szerepe van. (Nagy hullámoknál a nehézségi erő, kicsi, néhány milliméteres hullámoknál a felületi feszültség dominál.) Mindkét esetben van diszperzió: a nehézségi hullámoknál normális, a kapilláris hullámoknál anomális diszperziót figyelhetünk meg.

10.2. Hullámterjedés rugalmas rúdban

A mechanikai hullámok sokféle közegben terjedhetnek. Elsőként vizsgáljunk egy rugalmas rúdban terjedő longitudinális síkhullámot. A 10.5 ábrán látható a rúd egy darabja. A keresztmetszetet most S jelöli (A a hullám amplitúdója), a hullám az x -tengely irányában terjed. Mivel a hullám longitudinális, a közeg pontjainak elmozdulása is ezzel párhuzamos irányú, ezt adja meg a $\Psi(x, t)$ hullámfüggvény.



10.5. ábra. Longitudinális hullám rugalmas rúdban

Az ábrán bejelöltük a rúd x és $x + dx$ közötti kicsiny darabját. A kis darab határainak elmozdulását a hullámfüggvény adja meg: $\Psi(x, t)$ és $\Psi(x + dx, t)$. Erre a kis darabra írjuk fel Newton II. törvényét:

$$dF = dma .$$

A kis darabra ható erőt a rúd rugalmas tulajdonságaiból határozzuk meg. A (7.1) összefüggés alapján a rúdban fellépő húzóerő:

$$F = SE\varepsilon ,$$

ahol E a rúd anyagának Young-modulusa, ε pedig a relatív megnyúlás:

$$\varepsilon = \frac{dl}{l} = \frac{\Psi(x + dx, t) - \Psi(x, t)}{dx} = \frac{\partial\Psi(x, t)}{\partial x} ,$$

a hullámfüggvény x szerinti *parciális deriváltja*. Ezt felhasználva a húzóerő:

$$F(x, t) = SE\varepsilon(x, t) = SE \frac{\partial\Psi(x, t)}{\partial x} ,$$

a kis darabra ható erő pedig:

$$dF = F(x + dx, t) - F(x, t) = \frac{\partial F(x, t)}{\partial x} dx = SE \frac{\partial^2\Psi(x, t)}{\partial x^2} dx .$$

A kis darab gyorsulása a hullámfüggvény t szerinti második parciális deriváltja:

$$a = \frac{\partial^2\Psi(x, t)}{\partial t^2} ,$$

a kis darab tömege pedig meghatározható a rúd ρ sűrűségének ismeretében:

$$dm = \rho S dx .$$

Mindezt behelyettesítve a mozgásegyenletbe, az egyenletet $S dx$ -szel egyszerűsítve, és rendezve megkapjuk a rugalmas rúdban terjedő longitudinális hullám *hullámegyenletét*:

$$\frac{E}{\rho} \frac{\partial^2\Psi(x, t)}{\partial x^2} = \frac{\partial^2\Psi(x, t)}{\partial t^2} . \quad (10.9)$$

A hullámegyenlet egy másodrendű lineáris parciális differenciálegyenlet, amelynek sok lehetséges megoldása van. Ezek közül keressük most a harmonikus haladóhullámú megoldást a következő alakban:

$$\Psi(x, t) = A \cos(\omega t \mp kx + \alpha).$$

A \mp előjel arra utal, hogy a hullám pozitív és negatív irányba is terjedhet. A próbafüggvényt behelyettesítve a differenciálegyenletbe, és a deriválásokat elvégezve:

$$-\frac{E}{\rho} A k^2 \cos(\omega t \mp kx + \alpha) = -A \omega^2 \cos(\omega t \mp kx + \alpha).$$

Az egyenlőségnek minden helyen és időpillanatban teljesülni kell, ebből:

$$\frac{E}{\rho} k^2 = \omega^2.$$

Felhasználva a (10.3) kifejezést:

$$\frac{E}{\rho} = \frac{\omega^2}{k^2} = c^2.$$

A rúdban terjedő haladóhullám sebességének nagysága tehát a rúd Young-modulusától és sűrűségétől függ:

$$c = \sqrt{\frac{E}{\rho}}. \quad (10.10)$$

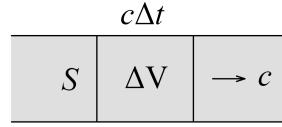
Ezt behelyettesítve a (10.9) hullámegyenletbe megkapjuk az egydimenziós hullámegyenlet – mint később látni fogjuk – általános alakját:

$$c^2 \frac{\partial^2 \Psi(x, t)}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 \Psi(x, t)}{\partial t^2}. \quad (10.11)$$

A hullám körfrekvenciáját, amplitúdóját és kezdőfázisát a peremfeltételek (a rúd végét érő hatás) határozza meg. Általános esetben a megoldás különböző körfrekvenciájú, amplitúdójú, kezdőfázisú és *irányú* hullámok szuperpozíciója. Ezzel később, a 10.7 szakaszban még foglalkozunk.

10.2.1. Energiaterjedés hullámban

A közegben terjedő hullámnak energiája van, a hullámterjedés egyben *energiaterjedés* is. Ezt igazolja a **videón** [8] látható kísérlet, de a hétköznapi életben is számtalan jelenség kapcsán tapasztaljuk: a Napból érkező elektromágneses sugárzás melegíti a Földet, a hanghullámok megrezegtetik a dobhártyánkat, a vizeken kialakuló erős hullámvás pusztító erejű lehet, és így tovább. Határozzuk meg a rugalmas rúdban terjedő longitudinális harmonikus haladóhullám által szállított energiát!



10.6. ábra. Energiaterjedés

Az energiaáramlást a 8.3 szakaszban tárgyalt tömegáramláshoz hasonlóan jellemezhetjük. A Φ *energiaáram* egy kiválasztott felületen időegységenként áthaladó energia:

$$\Phi = \frac{dW}{dt}, \quad (10.12)$$

ahol az energiát most W -vel jelöljük (E a Young-modulus). Δt idő alatt a rúd egy keresztmetszetén áthaladó energia (10.6 ábra):

$$\Delta W = w\Delta V = wSc\Delta t,$$

ahol w az *energiasűrűség*, a közeg egységnyi térfogatában található (mechanikai) energia. Ennek alapján az energiaáram a rúdban:

$$\Phi = wSc.$$

Az egységnyi felületen áthaladó energiaáram az *energiaáram-sűrűség*, amit a hullámok esetében *intenzitásnak* nevezünk, és I -vel jelöljük. Mértékegysége: W/m^2 . Az eddigiek alapján a hullám intenzitása:

$$I = \frac{\Phi}{S} = wc. \quad (10.13)$$

Többdimenziós közegben az intenzitás a tömegáram-sűrűséghez hasonlóan vektoriális mennyiség. Ekkor az összefüggések így módosulnak:

$$\mathbf{I} = w\mathbf{c} \quad \text{és} \quad \Phi = \int_S \mathbf{I} d\mathbf{S}.$$

A rugalmas rúdban terjedő longitudinális hullám energiasűrűségének meghatározásához írjuk fel egy ΔV térfogatban a teljes mechanikai energiát, azaz a mozgási és rugalmas helyzeti energia összegét. A mozgási energia:

$$\Delta W_m = \frac{1}{2}\Delta mv^2 = \frac{1}{2}\rho \left(\frac{\partial\Psi}{\partial t}\right)^2 \Delta V,$$

a rugalmas helyzeti energia pedig (felhasználva, hogy (10.10) alapján $E = \rho c^2$):

$$\Delta W_h = \frac{1}{2}E\varepsilon^2\Delta V = \frac{1}{2}E \left(\frac{\partial\Psi}{\partial x}\right)^2 \Delta V = \frac{1}{2}\rho c^2 \left(\frac{\partial\Psi}{\partial x}\right)^2 \Delta V.$$

A teljes mechanikai energia:

$$\Delta W = \Delta W_m + \Delta W_h = \frac{1}{2}\rho \left[\left(\frac{\partial \Psi}{\partial t} \right)^2 + c^2 \left(\frac{\partial \Psi}{\partial x} \right)^2 \right] \Delta V,$$

az energiasűrűség pedig:

$$w = \frac{\Delta W}{\Delta V} = \frac{1}{2}\rho \left[\left(\frac{\partial \Psi}{\partial t} \right)^2 + c^2 \left(\frac{\partial \Psi}{\partial x} \right)^2 \right]. \quad (10.14)$$

Ha a rúdon harmonikus haladóhullám terjed, akkor a hullámfüggvény:

$$\Psi(x, t) = A \cos(\omega t - kx + \alpha).$$

A függvényt beírva a (10.14) kifejezésbe, és felhasználva, hogy (10.3) alapján $c^2 k^2 = \omega^2$:

$$\begin{aligned} w(x, t) &= \frac{1}{2}\rho [A^2\omega^2 \sin^2(\omega t - kx + \alpha) + c^2 A^2 k^2 \sin^2(\omega t - kx + \alpha)] = \\ &= \rho A^2 \omega^2 \sin^2(\omega t - kx + \alpha), \end{aligned} \quad (10.15)$$

azaz az energiasűrűség adott helyen az *idő*, adott időpillanatban pedig a *hely* periodikus függvénye.

Az intenzitás meghatározásához az átlagos energiasűrűségre van szükségünk:

$$w = \bar{w}(x, t) = \frac{1}{T} \int_0^T w(x, t) dt = \frac{1}{T} \rho A^2 \omega^2 \int_0^T \sin^2(\omega t - kx + \alpha) dt = \frac{1}{2} \rho A^2 \omega^2. \quad (10.16)$$

Ennek alapján az energiaáram:

$$\Phi = \frac{1}{2} \rho A^2 \omega^2 c S, \quad (10.17)$$

az intenzitás pedig:

$$I = \frac{1}{2} \rho A^2 \omega^2 c. \quad (10.18)$$

Fontos eredményünk, hogy az intenzitás az amplitúdó négyzetével arányos:

$$I \sim A^2. \quad (10.19)$$

Az intenzitás helyfüggése

Gömbhullám esetén a pontforrásból kiinduló teljes energiaáram egyre nagyobb felületen oszlik el, így az intenzitás a távolság növekedésével akkor is csökken, ha nincsen semmilyen veszteség.

A gömb felülete:

$$S = 4r^2\pi,$$

így az intenzitás fordítva arányos a sugár négyzetével:

$$I \sim \frac{1}{r^2},$$

amiből viszont a (10.19) összefüggés alapján az amplitúdó a sugárral fordítottan arányos (ahogy azt a 10.1 szakaszban már megemlítettük):

$$A \sim \frac{1}{r}.$$

A közegben haladva a csillapítás miatt általában a síkhullám is gyengül. Az intenzitásváltozás arányos az intenzitással és a megtett távolsággal:

$$dI = I(x + dx) - I(x) = -\mu I dx,$$

ahol μ egy közegtől (és a hullám jellemzőitől) függő állandó. A differenciálegyenletet rendezve és megoldva:

$$\begin{aligned}\frac{dI}{I} &= -\mu dx \\ \ln \frac{I}{I_0} &= -\mu x \\ I &= I_0 e^{-\mu x},\end{aligned}$$

tehát a síkhullám intenzitása homogén közegben a távolsággal exponenciálisan csökken.

10.3. Polarizáció

A transzverzális hullámoknál a közeg pontjainak elmozdulása merőleges a terjedési irányra, ez azonban nem határozza meg egyértelműen a rezgés irányát: általános esetben az egyes pontok kitérésének (vagy a hullámfüggvény által leírt más vektoriális mennyiségnek) az iránya véletlenszerűen bármilyen, a terjedésre merőleges irány lehet. Az ilyen hullámot *polarizálatlan* hullámnak nevezzük.

Abban az esetben, ha ez az irány valamilyen szabályszerűséget követ, *polarizált* hullámról beszélünk. A *síkban* vagy *lineárisan polarizált* hullámban a kitérés (vagy az ennek megfelelő vektoriális mennyiség) iránya egy síkban van, ez a hullám rezgési síkja. A *církulárisan polarizált* hullámban a rezgés iránya egyenletes sebességgel forog, az *elliptikusan polarizált* hullámban pedig ezzel együtt az amplitúdója is periodikusan változik.

Ha egy polarizálatlan hullám megfelelő eszközön halad át, akkor lineárisan polarizálható, azaz kiválasztható valamilyen rezgési irány, amelyet az eszköz átenged, míg a többi elnyeli. Az ilyen eszköz, amelyet *polarizátornak* nevezünk, tényleges megvalósítása nagyban függ a hullám jellegétől.

Kísérlet: Rugalmas kötélen terjedő hullám polarizációja

Feszítsünk ki egy rugalmas kötelet, és gerjesszünk a kötélen egyik végén hullámot egy kar körbeforgatásával: így cirkulárisan polarizált hullámot kapunk, amely a kötélen végighalad.

Esetünkben a polarizátor egy keskeny rés, amely csak a réssel párhuzamos rezgéskomponenseket engedi tovább. Így a résen áthaladó hullám már lineárisan polarizált lesz. Rezgési síkje megegyezik a polarizátor rezgési síkjával (a rés irányával), a polarizátor forgatásával együtt a lineárisan polarizált hullám rezgési síkje is elfordul.

Ha a kötelet egy másik, az előzővel megegyező réssel is közrefogjuk, akkor a kialakuló hullámot az határozza meg, hogy a két polarizátor rezgési síkje egymással milyen szöget zár be. Ha a második rés párhuzamos az elsővel, akkor ezen a hullám akadálytalanul áthalad. Ha a második rést lassan elforgatjuk az elsőhöz képest, akkor az áthaladó hullám amplitúdója csökken, merőleges állás esetében pedig a hullám teljesen elnyelődik. Mivel ilyen módon a második polarizátorral megvizsgálható a beérkező polarizált hullám iránya, azt szokás *analizátor*nak is nevezni. (Videó [8]) ♦

Az analizátoron áthaladó hullám intenzitását könnyen kifejezhetjük. Bontsuk fel a belépő, lineárisan polarizált A_0 amplitúdójú hullámot az analizátor rezgési síkjával párhuzamos, és arra merőleges komponensekre. Az analizátoron csak a párhuzamos komponens halad keresztül, ennek amplitúdója:

$$A = A_0 \cos \alpha ,$$

ahol α a lineárisan polarizált hullám (az első polarizátor) rezgési síkje és az analizátor (a második polarizátor) rezgési síkje közti szög. A (10.19) összefüggés szerint az intenzitás az amplitúdó négyzetével arányos, így az analizátoron áthaladó hullám intenzitása:

$$I = I_0 \cos^2 \alpha ,$$

ahol I_0 a belépő hullám intenzitása. Így a két polarizátor valamelyikének forgatásával szabályozható az áthaladó hullám intenzitása, ami különösen az optikában hasznos.

Ha a két polarizátor egymásra merőleges ($\alpha = \pi/2$), akkor – a tapasztalattal megegyezően – a hullám teljesen kioltódik. Érdekes kérdés, hogy mi történik, ha két egymásra merőleges irányú polarizátor közé egy harmadikat is helyezünk, és azt lassan forgatjuk. Elhamarkodottan azt gondolhatnánk, hogy a két merőleges polarizátor már minden komponenst „kiszűrt”, így a harmadik behelyezése már semmit nem változtathat. A tapasztalat azonban mást mutat! A jelenség végiggondolását az olvasóra bízunk.

Longitudinális hullámoknál a rezgés iránya egyértelműen meghatározott, ezért ilyen hullámoknál nem figyelhető meg polarizáció. A polarizáció jelensége egyértelműen bizonyítja, hogy egy hullám transzverzális.

10.4. Hullámok visszaverődése és törése

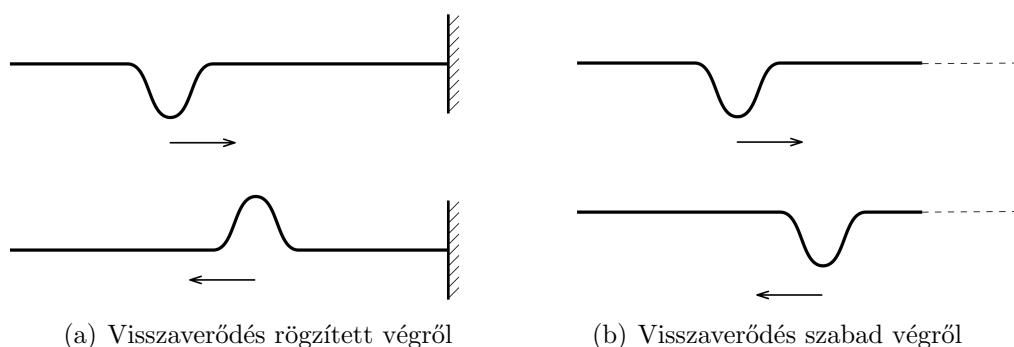
A hullámok leírásakor eddig végtelen nagy, homogén közeget feltételeztünk. A tapasztalat szerint, ha egy hullám a közeg határához érkezik, akkor onnan részben *visszaverődik*, részben pedig – legtöbbször irányát megváltoztatva, *megettörve* – továbbhalad a másik közegben.

Az irányváltoztatáson kívül visszaverődéskor megváltozhat a hullám fázisa, töréskor pedig megváltozik a terjedési sebessége és a hullámhossza is. Transzverzális hullámoknál mindkét esetben változhat a hullám polarizációja. A visszaverődés és törés során a mechanikai és elektromágneses hullámok részben különbözően viselkednek, itt elsősorban a közös, általánosan fellépő jelenségekkel foglalkozunk.

A visszaverődés és a törés jól ismert, könnyen megfigyelhető jelenség az optikában. A mechanikai hullámok közül kísérletileg legegyszerűbb rugalmas kötélen keltett transzverzális hullámokat és vízfelületen keltett felületi hullámokat vizsgálni. (A víz felületi hullámaival kapcsolatban megjegyezzük, hogy részletes leírásuk meglehetősen bonyolult: a víz összenyomhatatlansága miatt nem lehetnek se transzverzális, se longitudinális hullámok. A víz részecskéi zárt pályákon: körökön, ellipsziseken mozognak. [49])

Kísérlet: Rugalmas kötélen haladó hullám visszaverődése

Ha egy rugalmas kötélen hullámot indítunk el, az a kötél végéről visszaverődik. Ha a kötél vége rögzített, akkor a visszaverődő hullám kitérése ellentétes előjelű (10.7(a) ábra), azaz a visszaverődésnél π fázisugrás lép fel. (Szinuszos hullámnál a -1 -gyel való szorzás egyenértékű egy π nagyságú fázisugrással.)



10.7. ábra. Rugalmas kötélen haladó hullám visszaverődése

Ha a hullám szabad (lazán rögzített) kötélvégéről verődik vissza, akkor nincs fázisugrás (10.7(b) ábra). ♦

Kísérlet: Felületi hullámok visszaverődése és törése hullámkádban

A *hullámkád* egy átlátszó fenekű lapos edény, amelybe néhány milliméteres vízréteget öntünk. A vízben keltett felületi hullámok kivetítéssel láthatóvá tehetőek. Az edény széle úgy van kiképezve, hogy ne verje vissza a hullámokat. A hullámok terjedési sebességét a vízmélység változtatásával lehet szabályozni. Rezgő hullámkeltőkkel lehet változtatható frekvenciájú körhullámokat vagy egyenes hullámokat létrehozni. (Videó: Hullám keltés **II.** és **IV.** [8]) Ezekben a kísérletekben egyenes hullámok visszaverődését és törését vizsgáljuk.

Ha az egyenes hullámok sík felületnek ütköznek, akkor a visszaverődő hullámok is egyenes hullámok lesznek (**videó**). Jól megfigyelhető, hogy a *beesési szög* (a beeső hullám terjedési iránya és a beesési merőleges által bezárt szög) megegyezik a *visszaverődési szöggel* (a visszavert hullám terjedési iránya és a beesési merőleges által bezárt szöggel). Ha a hullámok görbült felületnek ütköznek, minden pontban más irányba verődnek vissza. A következő két videón jól látszik, hogy a **homorú** felület összegyűjti, a **domború** pedig szétszórja a hullámot. [8]

Ha a hullámkádba egy vékony lemezt fektetünk, akkor a lemez felett kisebb lesz a vízmélység. A lap szélét elérő egyenes hullámnak emiatt lecsökken a terjedési sebessége, és ezzel együtt a hullámhossza is. Ha az egyenes hullám nem merőleges irányban érkezik a határfelülethez, akkor az iránya is megváltozik, a hullám megtörik (**videó**). Megfigyelhető, hogy ebben az esetben a *törési szög* (a megtört hullám terjedési iránya és a beesési merőleges által bezárt szög) kisebb a beesési szögnél. A további videókon látható, hogy egy **domború lencse** alakú lemez összegyűjti, egy **homorú lencse** alakú pedig szétszórja a hullámot. [8] ♦

A kísérleti tapasztalatok magyarázatára, valamint a visszaverődés és a törés törvényszerűségeinek levezetésére több lehetőség is kínálkozik. A levezetést két tapasztalati tényeken alapuló elv, a *Huygens-elv* és a *Fermat-elv* alapján, valamint a (10.5) hullámfüggvény segítségével is elvégezzük.

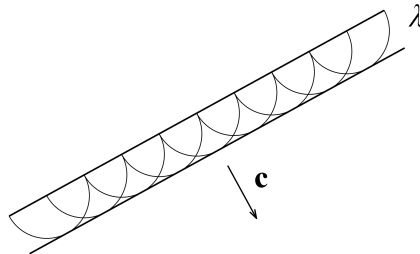
10.4.1. Huygens-elv

A *Huygens-elv* alapja az a tapasztalat, hogy egy kicsiny, pontszerű nyíláson áthaladó hullám a nyílás mögött úgy terjed tovább, mintha egy pontforrásból kiinduló gömbhullám (két dimenzióban körhullám) volna. Ez az *elhajlás* jelensége, amellyel a 10.5.1 szakaszban részletesebben fogunk foglalkozni.

A Huygens-elv ennek alapján a következő két állítást fogalmazza meg:

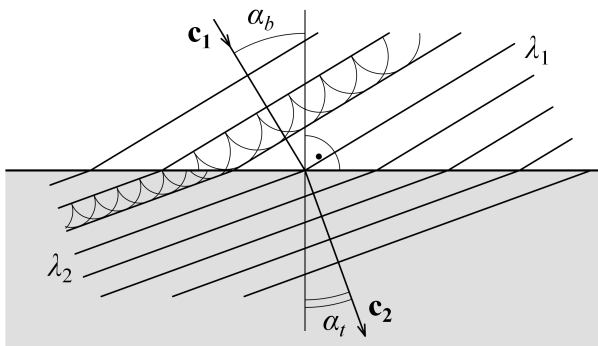
- egy hullámfront minden pontjából elemi gömbhullámok indulnak ki,
- a kialakuló új hullámfront az elemi gömbhullámok közös *burkolófelülete*. [50]

Homogén közegben egy síkhullám a 10.8 ábrán látható szerkesztés alapján síkhullámként tejed tovább: T periódusidővel később éppen λ hullámhosszúság távolságra kapjuk meg az új hullámfrontot.

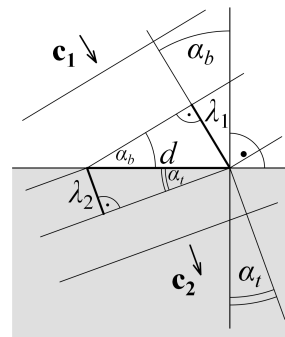


10.8. ábra. Hullámterjedés homogén közegben

Ha a síkhullám két különböző közeg határfelületéhez érkezik, akkor az elemi hullámok a két közegben más-más sebességgel terjednek. A 10.9(a) ábrán látható módon a homogén közeghez hasonlóan megszerkeszthetjük az új hullámfrontokat. T idő alatt a hullám az 1-es és 2-es közegben a megfelelő λ_1 és λ_2 hullámhosszúságú utat teszi meg. (A visszavert hullámokat az áttekinthetőség érdekében nem rajzoltuk be.)



(a) Hullámfrontok megszerkesztése



(b) Snellius-Descartes-törvény levezetése

10.9. ábra. Törés a Huygens-elv alapján

A beesési és a törési szög közötti kapcsolatot a 10.9(b) ábra alapján írhatjuk fel. A kis derékszögű háromszögekben:

$$\begin{aligned}\lambda_1 &= d \sin \alpha_b \\ \lambda_2 &= d \sin \alpha_t.\end{aligned}$$

Mivel a hullám frekvenciája mindenhol ugyanakkora, a hullámhossz az egyes közegekben arányos a közegbeli hullámterjedési sebességgel. Ennek alapján a törési törvény:

$$\frac{\sin \alpha_b}{\sin \alpha_t} = \frac{\lambda_1}{\lambda_2} = \frac{c_1}{c_2} = n_{2,1}. \quad (10.20)$$

Ez a *Snellius-Descartes-törvény*, az $n_{2,1}$ dimenziótlan mennyiséget pedig szokás a 2-es közeg 1-es közegre vonatkoztatott *törésmutatójának* nevezni. [51]

Ha $c_2 < c_1$, akkor $n_{2,1} > 1$, és $\alpha_t < \alpha_b$. Ilyenkor a beeső hullám részben megtörve belép a másik közegbe, részben pedig visszaverődik.

Ha $c_2 > c_1$, akkor $n_{2,1} < 1$, és $\alpha_t > \alpha_b$. Ilyenkor a (10.20) összefüggés alapján

$$\sin \alpha_t = \frac{\sin \alpha_b}{n_{2,1}} \leq 1.$$

Ha $\sin \alpha_b > n_{2,1}$, akkor $\sin \alpha_t > 1$ adódik, α_t -re nem kapunk eredményt. Ez a *teljes visszaverődés* jelensége: a hullám nem tud átlépni a másik közegbe, visszaverődik.

A visszaverődő hullámfrontok a 10.9(a) ábrához hasonló módon megszerkeszthetők. (Ilyenkor a beeső és a visszavert hullámok ugyanabban a féltérben vannak, amitől az ábra nehezebben áttekinthető.) A számítás gondolatmenete is hasonló, de most a beeső és a visszavert hullám sebessége megegyezik, amiből a visszaverődés törvénye:

$$\alpha_v = \alpha_b. \quad (10.21)$$

10.4.2. Fermat-elv

A Fermat-elv szerint a hullám a tér rögzített A és B pontja között azon a pályán halad, amelyen a hullámterjedés idejének *szélsőértéke* (általában minimuma) van. [52]

Egy elemi ds út megtételéhez szükséges idő:

$$dt = \frac{1}{c} ds,$$

ahol c a hullám helyfüggő terjedési sebessége. Azt a pályát keressük, amelyen

$$\tau_{AB} = \int_A^B \frac{1}{c} ds = \text{extrémum}.$$

Az ilyen problémák megoldásával a *variációszámítás* foglalkozik.

Homogén közegben $c = \text{állandó}$, így:

$$\tau_{AB} = \frac{1}{c} \int_A^B ds = \frac{1}{c} s,$$

amely akkor minimális, ha az útvonal az AB szakasz, azaz ha a hullám – a tapasztalattal egyezően – egyenes vonalban terjed.

Vizsgáljuk a törés jelenségét a Fermat-elv segítségével! A 10.10 ábrán látható módon legyen az A pont az 1-es, a B pont a 2-es közegben. A hullám mindkét homogén közegben egyenes vonalban terjed, így csak azt kell meghatároznunk, hol lépi át a közeghatárt. A hullámterjedéshez szükséges idő:

$$\tau_{AB} = \frac{s_1}{c_1} + \frac{s_2}{c_2} = \frac{\sqrt{a^2 + (x - x_A)^2}}{c_1} + \frac{\sqrt{b^2 + (x_B - x)^2}}{c_2}.$$

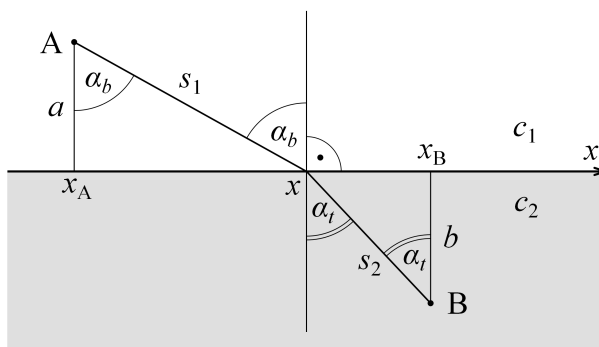
Ennek a kifejezésnek a minimumát keressük, ha x értékét változtatjuk. Ehhez τ_{AB} x -szerinti deriváltját kell felírunk, és annak zérushelyét megkeresnünk:

$$\frac{d\tau_{AB}}{dx} = \frac{1}{2c_1} \frac{2(x - x_A)}{\sqrt{a^2 + (x - x_A)^2}} - \frac{1}{2c_2} \frac{2(x_B - x)}{\sqrt{b^2 + (x_B - x)^2}} = 0,$$

2-vel egyszerűsítve, és a törtet szögfüggvényekkel kifejezve:

$$\begin{aligned} \frac{\sin \alpha_b}{c_1} - \frac{\sin \alpha_t}{c_2} &= 0 \\ \frac{\sin \alpha_b}{\sin \alpha_t} &= \frac{c_1}{c_2}, \end{aligned}$$

azaz a (10.20) kifejezéssel megegyező eredményre jutottunk.

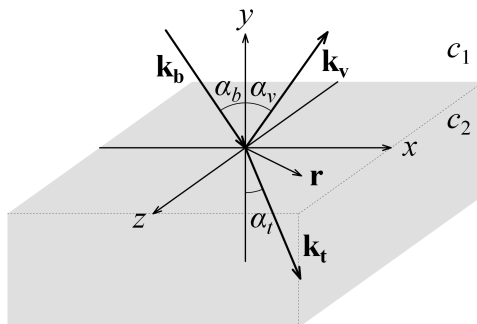


10.10. ábra. Törés a Fermat-elv alapján

A visszaverődés törvényének levezetése a Fermat-elvvel egyszerű geometriafeladat, de a $c_1 = c_2$ helyettesítéssel is azonnal adódik a (10.21) kifejezéssel egyező $\alpha_v = \alpha_b$ eredmény.

10.4.3. Levezetés a hullámfüggvény segítségével

Vegyük fel a koordináta-rendszerünket úgy, hogy a beeső hullám \mathbf{k}_b hullámszámvektora az xy -síkbán, a közeghatár az xz -síkbán legyen (10.11 ábra). Így a határfelület pontjaihoz mutató \mathbf{r} helyvektor is az xz -síkbán van. A visszavert és megtört hullámok \mathbf{k}_v és \mathbf{k}_t hullámszámvektoraira nem teszünk semmilyen megkötést.



10.11. ábra. Visszaverődés és törés levezetése a hullámfüggvény segítségével

Írjuk fel a (10.5) kifejezés alapján a beeső, a visszavert és a megtört hullám hullámfüggvényét a közeghatáron:

$$\begin{aligned}\Psi_b(\mathbf{r}, t) &= A_b \cos(\omega t - \mathbf{k}_b \mathbf{r}) \\ \Psi_v(\mathbf{r}, t) &= A_v \cos(\omega t - \mathbf{k}_v \mathbf{r}) \\ \Psi_t(\mathbf{r}, t) &= A_t \cos(\omega t - \mathbf{k}_t \mathbf{r}) .\end{aligned}$$

Az 1-es közegben a beeső és a visszavert hullám hullámfüggvényének összege, a 2-es közegben a megtört hullám hullámfüggvénye írja le mozgást. A határfelületen a két értéknek meg kell egyeznie:

$$\Psi_b(\mathbf{r}, t) + \Psi_v(\mathbf{r}, t) = \Psi_t(\mathbf{r}, t) . \quad (10.22)$$

Ez csak úgy teljesülhet minden \mathbf{r} helyen és t időpillanatban, ha a három koszinuszos függvény fázisa megegyezik, amiből a következő egyenlet adódik:

$$\mathbf{k}_b \mathbf{r} = \mathbf{k}_v \mathbf{r} = \mathbf{k}_t \mathbf{r} . \quad (10.23)$$

Írjuk fel az egyenletben szereplő vektorokat koordinátáik segítségével:

$$\begin{aligned}\mathbf{r} & \text{ } xz\text{-síkbán} & (x, 0, z) \\ \mathbf{k}_b & \text{ } xy\text{-síkbán} & (k_{bx}, k_{by}, 0) \\ \mathbf{k}_v & \text{ tetszőleges} & (k_{vx}, k_{vy}, k_{vz}) \\ \mathbf{k}_t & \text{ tetszőleges} & (k_{tx}, k_{ty}, k_{tz}) .\end{aligned}$$

A (10.23) egyenletben a skaláris szorzatokat a vektorok koordinátaival kifejezve (A.1 függelék):

$$k_{bx}x = k_{vx}x + k_{vz}z = k_{tx}x + k_{tz}z.$$

Az egyenletek csak akkor teljesülnek minden x és z értékre, ha az x és z komponensekre külön-külön is igazak. A z komponensekre:

$$k_{vz} = k_{tz} = 0,$$

tehát \mathbf{k}_b és \mathbf{k}_t az xy -síkban, azaz a \mathbf{k}_b vektor és a beesési merőleges által kifeszített síkban helyezkedik el (a három hullámszámvektor és a beesési merőleges komplanáris). Az x komponensekre:

$$k_{bx} = k_{vx} = k_{tx}.$$

Válasszuk szét a visszaverődésre és a törésre vonatkozó egyenleteket, és a vektorkomponenseket fejezzük ki a 10.11 ábra alapján szögfüggvények segítségével:

$$\begin{aligned} |\mathbf{k}_b| \sin \alpha_b &= |\mathbf{k}_v| \sin \alpha_v \\ |\mathbf{k}_b| \sin \alpha_b &= |\mathbf{k}_t| \sin \alpha_t. \end{aligned}$$

A (10.3) kifejezés alapján:

$$\begin{aligned} |\mathbf{k}_b| &= |\mathbf{k}_v| = \frac{\omega}{c_1} \\ |\mathbf{k}_t| &= \frac{\omega}{c_2}, \end{aligned}$$

és ezt behelyettesítve:

$$\begin{aligned} \frac{\omega}{c_1} \sin \alpha_b &= \frac{\omega}{c_1} \sin \alpha_v \\ \frac{\omega}{c_1} \sin \alpha_b &= \frac{\omega}{c_2} \sin \alpha_t, \end{aligned}$$

amiből a visszaverődés és törés (10.21) és (10.20) törvényei már közvetlenül adódnak:

$$\begin{aligned} \alpha_v &= \alpha_b \\ \frac{\sin \alpha_b}{\sin \alpha_t} &= \frac{c_1}{c_2} = n_{2,1}. \end{aligned}$$

A hullámfüggvény alapján nemcsak a visszavert és megtört hullámok irányát, hanem intenzitásukat is meg lehet határozni. A következőkben csak merőlegesen beeső longitudinális hullámok intenzitásviszonyait elemezzük. (Transzverzális hullámok esetében a hullám polarizációja is befolyásolja az eredményt, ezzel részletesebben az optika foglalkozik. [53])

Az intenzitások meghatározásához írjunk fel két egyenletet! A határfelületen az amplitúdókra a (10.22) és (10.23) összefüggések alapján:

$$A_b + A_v = A_t, \quad (10.24)$$

az intenzitásokra pedig az energiamegmaradás miatt (merőleges beesés esetén):

$$I_b - I_v = I_t. \quad (10.25)$$

A (10.18) összefüggés alapján az intenzitások kifejezhetők:

$$\begin{aligned} I_b &= \frac{1}{2} \rho_1 \omega^2 A_b^2 c_1 \\ I_v &= \frac{1}{2} \rho_1 \omega^2 A_v^2 c_1 \\ I_t &= \frac{1}{2} \rho_2 \omega^2 A_t^2 c_2, \end{aligned} \quad (10.26)$$

ahol ρ_1 és ρ_2 az 1-es és 2-es közeg sűrűsége.

A (10.26) kifejezéseket behelyettesítve a (10.25) egyenletbe és átalakítva:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \rho_1 c_1 \omega^2 (A_b^2 - A_v^2) &= \frac{1}{2} \rho_2 c_2 \omega^2 A_t^2 \\ \rho_1 c_1 (A_b - A_v)(A_b + A_v) &= \rho_2 c_2 A_t^2. \end{aligned}$$

A (10.24) egyenlet szerint $A_t = A_b + A_v$, ezt behelyettesítve, majd egyszerűsítve:

$$\rho_1 c_1 (A_b - A_v) = \rho_2 c_2 (A_b + A_v).$$

Az egyenletet megoldva először A_v , majd (10.24) felhasználásával A_t kifejezhető:

$$\begin{aligned} A_v &= \frac{\rho_1 c_1 - \rho_2 c_2}{\rho_1 c_1 + \rho_2 c_2} A_b \\ A_t &= \frac{2\rho_1 c_1}{\rho_1 c_1 + \rho_2 c_2} A_b. \end{aligned}$$

A (10.26) kifejezések alapján:

$$\begin{aligned} \frac{I_v}{I_b} &= \frac{A_v^2}{A_b^2} \\ \frac{I_t}{I_b} &= \frac{\rho_2 c_2 A_t^2}{\rho_1 c_1 A_b^2}, \end{aligned}$$

ennek felhasználásával a visszavert és megtört hullám intenzitása:

$$I_v = \frac{(\rho_1 c_1 - \rho_2 c_2)^2}{(\rho_1 c_1 + \rho_2 c_2)^2} I_b$$

$$I_t = \frac{4\rho_1 c_1 \rho_2 c_2}{(\rho_1 c_1 + \rho_2 c_2)^2} I_b .$$
(10.27)

Figyeljük meg, hogy ha $\rho_1 c_1$ és $\rho_2 c_2$ közel egyenlő, akkor alig van visszaverődés, ha viszont az egyik sokkal nagyobb, mint a másik, akkor a hullám szinte teljes egészében visszaverődik.

10.5. Interferencia

A közegben általában egyszerre több hullám is terjed (különböző hullámforrásból származó vagy ugyanabból a hullámforrásból induló, részben visszavert, megtört hullámok). Ha a hullámot leíró egyenletek lineárisak (vagy – kis amplitúdó esetén – lineáris egyenletekkel közelíthetők), akkor kialakuló hullámkép az egyes hullámok *szuperpozíciója*:

$$\Psi(\mathbf{r}, t) = \sum_i \Psi_i(\mathbf{r}, t) .$$

A hullámok egy adott helyen és adott pillanatban erősíthetik, gyengíthetik vagy kioltathatják egymást. Tágabb értelemben ezt a jelenséget nevezzük interferenciának. Az *interferencia* kifejezést szűkebb értelemben akkor használjuk, ha a szuperpozíció következtében kialakuló erősítések, gyengítések vagy kioltások *megfigyelhetők* (hallhatók, láthatók), azaz térben és időben nem túl gyorsan változnak. (A napfényben vagy egy lámpa fényében például egymástól független atomi hullámforrások sokaságának a fénye szuperponálódik, melyek véletlenszerűen erősítik vagy gyengítik egymást, és így interferencia nem, vagy csak nagyon korlátozottan figyelhető meg.)

Két gömbhullám interferenciája

Vizsgáljuk meg azt az egyszerű esetet, amikor két pontforrás azonos frekvenciájú gömbhullámokat kelt (nem feltétlen azonos fázisban). Az egyes hullámforrások által elindított hullámok hullámfüggvényei (a hullámok amplitúdójának csökkenését figyelmen kívül hagyva):

$$\Psi_1(\mathbf{r}, t) = A_1 \cos(\omega t - kr)$$

$$\Psi_2(\mathbf{r}, t) = A_2 \cos(\omega t - kr + \alpha) .$$

A hullámforrásoktól r_1 illetve r_2 távolságra lévő P pontban megfigyelhető hullámot a két hullám összege adja meg:

$$\Psi(P, t) = \Psi_1(r_1, t) + \Psi_2(r_2, t) .$$

Behelyettesítve a hullámfüggvényeket:

$$\Psi(P, t) = A_1 \cos(\omega t - kr_1) + A_2 \cos(\omega t - kr_2 + \alpha) = A \cos(\omega t + \varphi),$$

ahol A és φ értéke a hullámok paramétereiből kifejezhető. A P pontban megfigyelhető hullám amplitúdója a (9.24) kifejezés alapján:

$$A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2 \cos(kr_1 - kr_2 + \alpha)}.$$

Az amplitúdó akkor maximális, akkor van *erősítés*, ha

$$kr_1 - kr_2 + \alpha = 2n\pi \quad (n \in \mathbb{Z}) \quad \text{ekkor } A = A_1 + A_2,$$

és akkor minimális, akkor van *gyengítés*, ha

$$kr_1 - kr_2 + \alpha = (2n + 1)\pi \quad (n \in \mathbb{Z}) \quad \text{ekkor } A = |A_1 - A_2|.$$

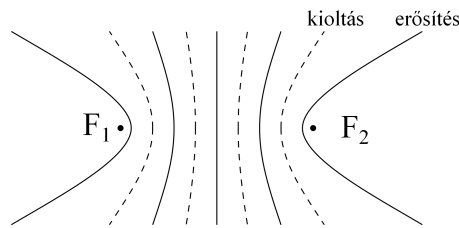
Ha $A_1 = A_2$, akkor a két hullám bizonyos helyeken nemcsak gyengíti, hanem ki is oltja egymást. Ha ezen kívül $\alpha = 0$ (a két hullámforrás azonos fázisban bocsát ki hullámokat), akkor az erősítés feltétele:

$$k(r_1 - r_2) = 2n\pi, \quad \Delta s = r_1 - r_2 = \frac{2n\pi}{k} = n\lambda \quad (n \in \mathbb{Z}), \quad (10.28)$$

tehát a hullámok ott erősítik egymást, ahol a Δs *útkülönbség* (a két hullámforrástól mért távolság különbsége) a hullámhossz egész számú többszöröse. Ehhez hasonlóan a kioltás feltétele:

$$k(r_1 - r_2) = (2n + 1)\pi, \quad \Delta s = r_1 - r_2 = \frac{(2n + 1)\pi}{k} = (2n + 1)\frac{\lambda}{2} \quad (n \in \mathbb{Z}),$$

azaz az útkülönbség a félhullámhossz páratlan számú többszöröse.



10.12. ábra. Erősítési és kioltási helyek két azonos fázisú pontforrás körül

A fenti feltételek alapján az erősítések és kioltások a síkban hiperbolaíveken helyezkednek el, melyek fókuszai a hullámforrások (10.12 ábra, [Hullámkeltés V.](#) videó [8]). A két hullámforrást összekötő szakasz felezőmerőlegese mindig erősítési hely, kioltás viszont csak akkor jön létre, ha a hullámforrások távolsága nagyobb, mint a hullámhossz fele. Térben az erősítési és kioltási helyek forgási hiperboloid felületeken helyezkednek el.

Koherencia

A hullám intenzitása arányos az amplitúdó négyzetével ($I \sim A^2$), így az eredő hullám intenzitása:

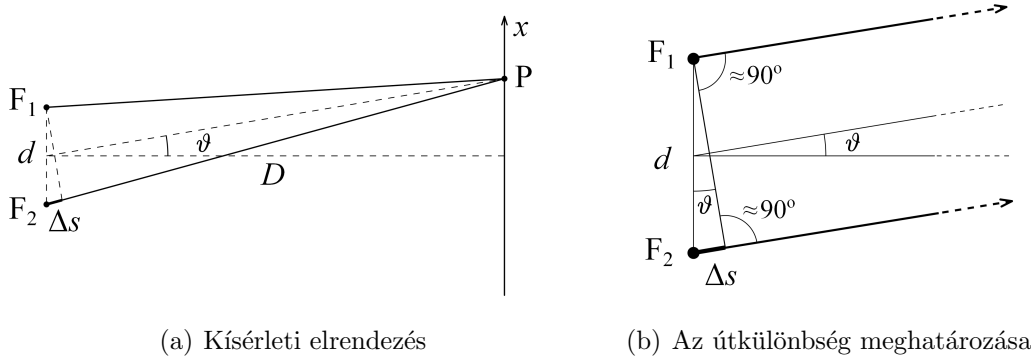
$$I = I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1 I_2} \cos(k\Delta s + \alpha). \quad (10.29)$$

Az első két tag mindig pozitív, ezek a két szuperponálódó hullám intenzitásának az összegét adják. Az intenzitás helyfüggése, az erősítés, gyengítés vagy kioltás a harmadik, úgynevezett *interferencia tag* következménye.

Ha a két forrás közötti α fáziskülönbség időben állandó, akkor a két hullámot *koherensnek* nevezzük. Ilyenkor az intenzitás a hely függvénye, az interferencia „hallható”, „látható”, megfigyelhető. Ha viszont α időben változik, akkor a kifejezés utolsó, helyfüggő tagja időben kiátlagolódik, időátlagban nullát ad, és így az intenzitás mindenhol a két intenzitás összege lesz, interferenciát pedig nem figyelhetünk meg.

Intenzitáseloszlás a hullámforrásoktól távol

Vizsgáljuk két pontszerű hullámforrás intenzitáseloszlását az azonos intenzitású és fázisú forrásoktól távol, a forrásokat összekötő szakasszal párhuzamos egyenes mentén.



10.13. ábra. Interferencia a hullámforrástól távol

A 10.13(a) ábra alapján a P pont koordinátája:

$$x = D \operatorname{tg} \vartheta \approx D\vartheta, \quad (10.30)$$

hiszen $x \ll D$ miatt alkalmazhatjuk a kis szögekre érvényes $\operatorname{tg} \vartheta \approx \vartheta$ közelítést.

A 10.13(b) ábra alapján a két hullám közötti útkülönbség a $\sin \vartheta \approx \vartheta$ közelítés és a (10.30) kifejezés felhasználásával:

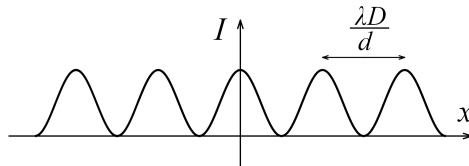
$$\Delta s = d \sin \vartheta \approx d\vartheta \approx x \frac{d}{D}. \quad (10.31)$$

Maximális erősítést a (10.28) összefüggés alapján akkor kapunk, ha

$$\Delta s = n\lambda, \quad x = n \frac{\lambda D}{d} \quad (n \in \mathbb{Z}).$$

Az intenzitáseloszlás a (10.29) kifejezés alapján írhatjuk fel, felhasználva, hogy a két forrás intenzitása egyenlő ($I_1 = I_2 = I_0$):

$$\begin{aligned} I(x) &= I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1 I_2} \cos k\Delta s = 2I_0 (1 + \cos k\Delta s) = \\ &= 2I_0 \left(1 + \cos kx \frac{d}{D} \right) = 2I_0 \left(1 + \cos \frac{2\pi dx}{\lambda D} \right) = 4I_0 \cos^2 \frac{\pi dx}{\lambda D}. \end{aligned}$$

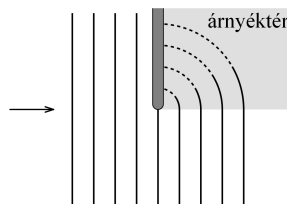


10.14. ábra. Intenzitáseloszlás a pontforrásoktól távol

Az intenzitáseloszlás a 10.14 ábrán látható. A maximumok távolsága $\lambda D/d$, ennek mérésével – d és D ismeretében – a hullámhossz meghatározható.

10.5.1. Elhajlás, Huygens-Fresnel-elv

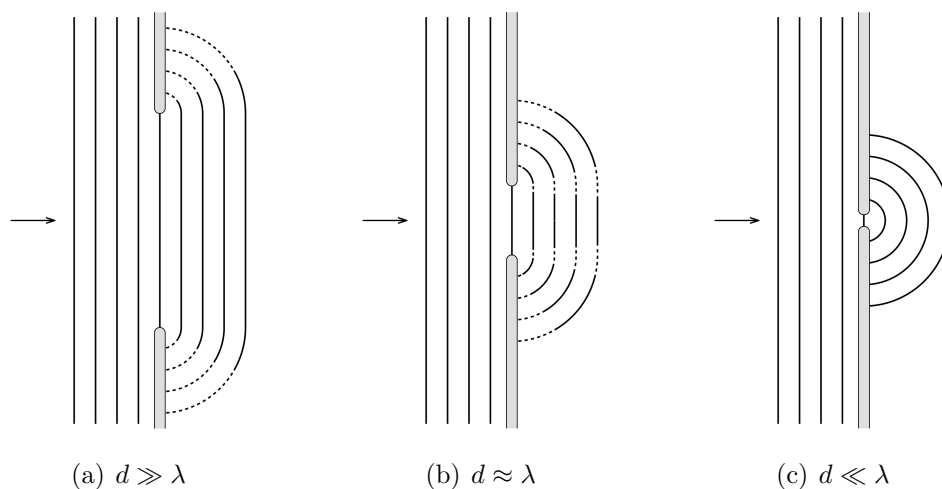
Homogén közegben a síkhullámok hullámfrontjai párhuzamosak, a hullám terjedési iránya a hullámfrontokra merőleges egyenes. Ha azonban a hullám egy akadályhoz érkezik, akkor nemcsak egyenesen halad tovább, hanem behatol az akadály mögötti árnyéktérbe is (10.15 ábra, [Hullám elhajlása I.](#) videó [8]). Ez a *hullámelhajlás*, vagy más néven *diffrakció* jelensége.



10.15. ábra. Elhajlás akadály szélén

Sok esetben – különösen az optikában – nagyon nehéz azt biztosítani, hogy két hullámforrásból azonos fázisban induljanak hullámok. Az elhajlás jelenségét felhasználva azonban úgy is létre lehet hozni két azonos fázisú gömbhullámot, hogy egy síkhullámot két kicsiny nyíláson engedünk át: ekkor a nyílásokon áthaladó hullámok a nyílás mögötti térrészben szétterülnek (ahogy ezt már a 10.4.1 szakaszban, a *Huygens-elv* kapcsán megemlítettük).

A 10.16 ábrán és a *Hullám elhajlása II.* kísérleti videón [8] síkhullámok különböző szélességű (az ábra síkjára merőleges) réseken haladnak át. Ha a rés d szélessége sokkal nagyobb, mint a λ hullámhossz, akkor a hullámfront nagy része egyenesen halad tovább – a rés szélein azonban az elhajlás miatt ekkor is behatol az árnyéktérbe (10.16(a) ábra). Ha viszont a rés sokkal kisebb a hullámhossznál, akkor a rés mögött a hullám teljesen szétterül: keskeny rés esetén hengerhullámot, pontszerű nyílás esetén gömbhullámot, két-dimenziós esetben körhullámot kapunk (10.16(c) ábra). A köztes esetben, ha a rés mérete és a hullámhossz összemérhető, akkor a résen áthaladó hullámban az interferencia miatt bizonyos irányokban erősítések, más irányokban gyengítések alakulnak ki (10.16(b) ábra).

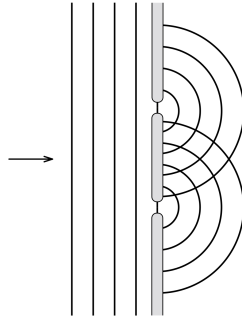


10.16. ábra. Elhajlás különböző szélességű réseken

Az elhajlási és interferenciajelenségeket a Huygens-elv segítségével már nem lehet értelmezni, mert a „közös burkolófelület” fogalma nem veszi figyelembe az elemi hullámok intenzitás- és fázisviszonyait. Emiatt a Huygens által megfogalmazott elvet több mint száz évvel később *Fresnel* módosította. [50]

A *Huygens-Fresnel elv* a következő két állítást fogalmazza meg:

- egy hullámfront minden pontjából elemi gömbhullámok indulnak ki,
- a kialakuló új hullámfrontot az elemi gömbhullámok *interferenciája* adja meg.



10.17. ábra. Elhajlás két résen

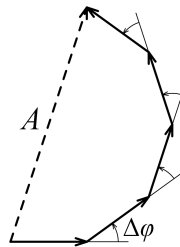
A 10.17 ábrán a síkhullámok két, a hullámhosszhoz képest keskeny résen haladnak át. A rések mögött ugyanolyan hullámkép alakul ki, mintha két azonos frekvenciájú és azonos fázisú hullámforrás keltette volna. (Young-féle kétréses kísérlet. [54]) A **Hullám elhajlása III.** hullámkadas kísérletet bemutató videón az is jól megfigyelhető, hogy a két résen áthaladó hullámok ugyanolyan interferenciaképet hoznak létre, mint két pontforrás. [8]

Elhajlás és interferencia több résen

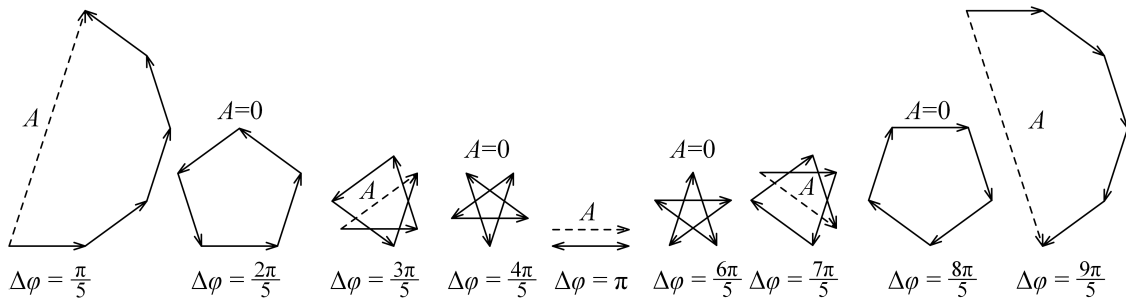
Kettőnél több (keskeny) rés esetén az interferenciaképet legegyszerűbben a 9.2 szakaszban megismert fázorokkal (forgóvektoros módszerrel) lehet meghatározni. A fáziskülönbség két, egymástól d távolságra lévő résből induló, ϑ szögben haladó hullám között a (10.31) kifejezés alapján:

$$\Delta\varphi = 2\pi \frac{\Delta s}{\lambda} \approx 2\pi \frac{d\vartheta}{\lambda}. \quad (10.32)$$

Az eredő hullám A amplitúdóját a résektől távol az egyes résekből induló hullámokat jellemző fázorok összege adja (10.18 ábra). Ha a fáziskülönbség $\Delta\varphi = 2n\pi$ ($n \in \mathbb{Z}$), akkor a vektorok egy egyenesbe esnek, és így eredőjük maximális lesz. Ezekhez a fáziskülönbségekhez tartoznak az intenzitáseloszlás *főmaximumai* (10.20(a) ábra).



10.18. ábra. Az eredő amplitúdó szerkesztése ($N = 5$ rés, $\Delta\varphi = \pi/5$)



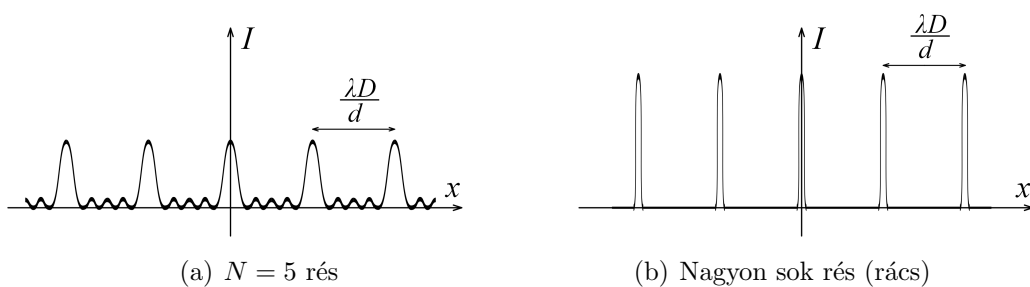
10.19. ábra. Az eredő amplitúdó különböző fáziskülönbségek esetén ($N = 5$ rés)

A 10.19 ábrán látható a fázorábra a szomszédos rések közötti $\Delta\varphi$ fáziskülönbség néhány értékénél ($N = 5$ rés esetén). Látható, hogy az eredő amplitúdó $N - 1$ esetben nulla: ilyenkor a hullámok kioltják egymást. A kioltások között az amplitúdónak $N - 2$ lokális maximuma van: ezekhez tartoznak az intenzitáseloszlás *mellékmaximumai*.

A 10.20(a) ábra mutatja az intenzitáseloszlást a résektől $D \gg d$ távolságra lévő x tengelyen. (A kísérleti elrendezés ugyanolyan, mint a 10.13(a) ábrán.) A főmaximumok távolsága a (10.30) és a (10.32) összefüggések alapján a kétréses esethez hasonlóan:

$$\Delta x = \frac{\lambda D}{d}.$$

A rések N számának növelésével a főmaximumok egyre keskenyebbek, a mellékmaximumok pedig egyre laposabbak lesznek. A 10.20(b) ábra mutatja az intenzitáseloszlást nagyon sok rés esetén: a mellékmaximumok teljesen eltűnnek, a főmaximumok pedig élesé válnak. Az optikában a sok párhuzamos résből álló rendszert *optikai rácsnak* nevezik.



10.20. ábra. Intenzitáseloszlás a résektől távol

Ha a rések szélessége összemérhető a távolságukkal, akkor az intenzitáseloszlás meghatározása fázorokkal bonyolultabb. Általános esetben a 9.2 szakaszban megismert Fourier-transzformációval lehet elvégezni a számítást. [55]

10.5.2. Interferencia visszaverődéskor

Vizsgáljunk egy egydimenziós hullámot, amely a közeg határáról visszaverődik, és a visszaverődő hullám interferál a beeső hullámmal. Legyen a hullámterjedés az x -tengellyel párhuzamos, vegyük fel a koordinátatengely kezdőpontját a közeghatárnál, és terjedjen a beeső hullám negatív irányba. Ekkor a beeső és a visszavert hullám hullámfüggvénye:

$$\begin{aligned}\Psi_{\leftarrow}(x, t) &= A \sin(\omega t + kx) \\ \Psi_{\rightarrow}(x, t) &= A' \sin(\omega t - kx + \alpha),\end{aligned}$$

a kialakuló hullám pedig a két hullám szuperpozíciója:

$$\Psi(x, t) = \Psi_{\leftarrow}(x, t) + \Psi_{\rightarrow}(x, t).$$

Először meg kell határoznunk a visszavert hullám A' amplitúdóját és α kezdőfázisát. Ha a közeghatár rögzített, akkor ott nem lehet kitérés, az eredő hullámfüggvény mindig nulla:

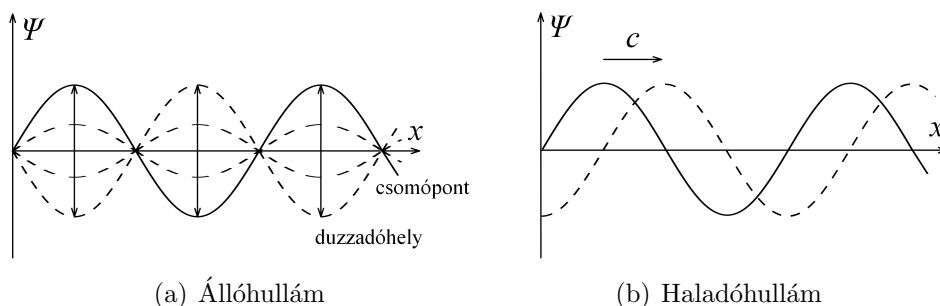
$$\Psi(0, t) \equiv 0,$$

amiből $A' = A$ és $\alpha = \pi$ adódik. (A π fáziskülönbség egyenértékű a negatív előjellel.)

Ennek alapján az eredő hullám (trigonometrikus átalakításokkal):

$$\Psi(x, t) = A [\sin(\omega t + kx) - \sin(\omega t - kx)] = 2A \sin kx \cos \omega t. \quad (10.33)$$

A kialakuló hullámformát *állóhullámnak* nevezzük. Az állóhullám egész másképp viselkedik, mint az eddig vizsgált *haladó hullámok*: meghatározott helyeken, a *csomópontokban*, a közeg kitérése mindig nulla, míg más helyeken különböző amplitúdójú rezgést végez. A rezgés amplitúdója a *duzzadóhelyeken* a legnagyobb. Az állóhullám és a haladóhullám közötti különbség jól megfigyelhető a 10.21 ábrán. Az állóhullámokkal a 10.7 szakaszban foglalkozunk részletesebben.



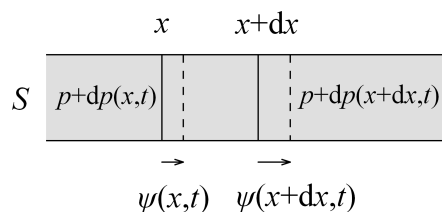
10.21. ábra. Egydimenziós álló- és haladóhullám

10.6. Hullámterjedés különböző közegekben

A 10.2 szakaszban rugalmas rúdban vizsgáltuk a hullámterjedést. Ebben a részben gázban terjedő longitudinális síkhullámokra és megfeszített rugalmas húron terjedő transzverzális hullámokra vezetjük le a hullámegyenletet, majd ezek alapján felírjuk a hullámegyenlet általános alakját.

Hullámterjedés gázban

A 10.22 ábrán a rúdhoz hasonlóan felrajzoltuk a gáz kicsiny, S keresztmetszetű darabját. Az x -tengely irányába terjedő síkhullámot vizsgálunk, így a probléma a rugalmas rúdhoz hasonlóan egydimenziós. A hullámfüggvény ebben az esetben is a közeg elmozdulását adja meg, ami a longitudinális hullámban szintén x irányú. A vizsgált közeg egy nyugalmi állapotában p nyomású, ρ sűrűségű gáz, amelyben a hullám terjedésekor az adiabatikus összenyomódás miatt egy helytől és időtől függő $dp(x, t)$ nyomástöbblet keletkezik.



10.22. ábra. Longitudinális síkhullám terjedése gázban

Írjuk fel most is a közeg x és $x + dx$ közötti kicsiny darabjára Newton II.törvényét:

$$dF = dma .$$

A kis darabra ható erőt a gáz rugalmas tulajdonságai alapján határozzuk meg. A gázban nyomástöbblet hatására fellépő erő:

$$F(x, t) = -Sdp(x, t) . \quad (10.34)$$

A hullámterjedés közben a gáz összenyomódása gyorsan történik, és a gáz rossz hővezető, így nincs idő hőcserére, az állapotváltozás *adiabatikus*. Adiabatikus változás esetén ideális gázban:

$$pV^\kappa = \text{állandó} ,$$

ahol κ a fajhőhányados. Az egyenlet mindkét oldalát V szerint deriválva:

$$\frac{dp}{dV}V^\kappa + p\kappa V^{\kappa-1} = 0 ,$$

amit átrendezve:

$$dp = -\kappa p \frac{dV}{V}. \quad (10.35)$$

A kis darab térfogata:

$$V = Sdx,$$

a térfogat megváltozása pedig:

$$dV = Sd\Psi = S \frac{\partial\Psi(x,t)}{\partial x} dx.$$

Mindezt behelyettesítve a (10.35), majd a (10.34) kifejezésekbe:

$$dp(x,t) = -\kappa p \frac{\partial\Psi(x,t)}{\partial x} \quad (10.36)$$

$$F(x,t) = S\kappa p \frac{\partial\Psi(x,t)}{\partial x}, \quad (10.37)$$

amiből a kis darabra ható erő:

$$dF = \frac{\partial F(x,t)}{\partial x} dx = S\kappa p \frac{\partial^2\Psi}{\partial x^2} dx.$$

A kis darab tömege és gyorsulása a 10.2 szakaszhoz hasonlóan:

$$dm = \rho S dx$$

$$a = \frac{\partial^2\Psi(x,t)}{\partial t^2}.$$

Végül mindezt behelyettesítve a mozgásegyenletbe, az egyenletet Sdx -szel egyszerűsítve, és rendezve megkapjuk a gázban terjedő longitudinális hullám hullámegyenletét:

$$\frac{\kappa p}{\rho} \frac{\partial^2\Psi(x,t)}{\partial x^2} = \frac{\partial^2\Psi(x,t)}{\partial t^2}. \quad (10.38)$$

Az egyenlet ugyanolyan alakú, mint a rugalmas húrra felírt (10.9) hullámegyenlet, csak az állandó más. A 10.2 szakaszban megmutattuk, hogy ez a konstans a közegben terjedő haladóhullám sebességének a négyzete. Eszerint a gázban terjedő hullám sebessége:

$$c = \sqrt{\frac{\kappa p}{\rho}} = \sqrt{\frac{K}{\rho}}, \quad (10.39)$$

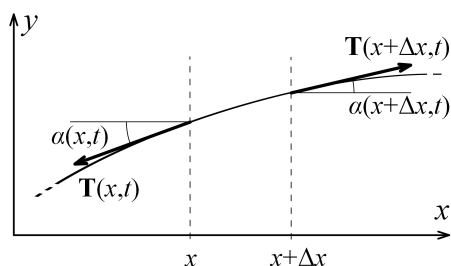
ahol $K = \kappa p$ a kompressziómodulus. A kifejezést az ideális gáz állapotegyenletének felhasználásával átalakítva:

$$c = \sqrt{\frac{\kappa RT}{M}}.$$

(R az egyetemes gázállandó, T a gáz abszolút hőmérséklete, M pedig a moláris tömege.)

Transzverzális hullám megfeszített rugalmas húrban

A 10.23 ábrán a megfeszített húr kicsiny darabját rajzoltuk fel. A hullám az x -tengely irányában terjed, a húr kitérése pedig y -irányú: $y = \Psi(x, t)$. A húr a $\mathbf{T}(x, t)$ erő feszíti, amely az x -tengellyel $\alpha(x, t)$ szöget zár be.



10.23. ábra. Transzverzális hullám terjedése rugalmas húron

A húr kicsiny, x és $x + \Delta x$ közötti darabjára a mozgásegyenlet:

$$dF_y = dma_y.$$

Az y -irányú erő:

$$\begin{aligned} dF_y &= T_y(x + \Delta x) - T_y(x) = T \{ \sin [\alpha(x + \Delta x, t)] - \sin [\alpha(x, t)] \} \approx \\ &\approx T \{ \operatorname{tg} [\alpha(x + \Delta x, t)] - \operatorname{tg} [\alpha(x, t)] \} = T \frac{\partial \operatorname{tg} \alpha}{\partial x} dx, \end{aligned}$$

ahol felhasználtuk, hogy $\alpha \ll 1$ miatt a \mathbf{T} feszítőerő nagysága közel állandó és használható a $\sin \alpha \approx \operatorname{tg} \alpha$ közelítés. A húr alakját az $y(x)$ függvény írja le, így a $\operatorname{tg} \alpha$ meredekség kifejezhető a hullámfüggvény x szerinti parciális deriváltjaként:

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\partial \Psi(x, t)}{\partial x},$$

amit behelyettesítve az erő kifejezésébe:

$$dF_y = T \frac{\partial^2 \Psi(x, t)}{\partial x^2} dx.$$

A húr kicsiny darabjának tömege és gyorsulása:

$$\begin{aligned} dm &= \rho S dl \approx \rho S dx \\ a_y &= \frac{\partial^2 \Psi(x, t)}{\partial t^2}. \end{aligned}$$

A kifejezéseket behelyettesítve a mozgásegyenletbe, dx -szel egyszerűsítve, és rendezve megkapjuk a húron terjedő transzverzális hullám hullámegyenletét:

$$\frac{T}{\rho S} \frac{\partial^2 \Psi(x, t)}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 \Psi(x, t)}{\partial t^2}. \quad (10.40)$$

Az egyenlet ismét ugyanolyan alakú, mint a (10.9) és a (10.38) hullámegyenletek. Ennek alapján a húron haladó transzverzális hullám sebessége:

$$c = \sqrt{\frac{T}{\rho S}} = \sqrt{\frac{T}{\mu}}, \quad (10.41)$$

ahol $\mu = \rho S$ a húr hosszegységre eső tömege (*lineáris sűrűsége*).

10.6.1. A hullámegyenlet általános alakja

Három különböző közegben meghatározva a hullámegyenletet, mindig (10.11) alakú differenciálegyenletet kaptunk, ez az *egydimenziós hullámegyenlet* általános alakja:

$$c^2 \frac{\partial^2 \Psi(x, t)}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 \Psi(x, t)}{\partial t^2}. \quad (10.42)$$

A különböző közegekben c^2 értéke a közeg tulajdonságaitól függ:

$$\begin{aligned} c^2 &= \frac{E}{\rho} && \text{longitudinális hullám rúdban,} \\ c^2 &= \frac{\kappa p}{\rho} && \text{longitudinális hullám gázban,} \\ c^2 &= \frac{T}{\mu} && \text{transzverzális hullám húron.} \end{aligned}$$

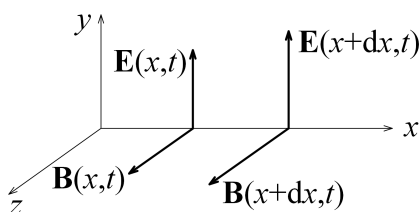
Három dimenzióban a hullámfüggvény az $\mathbf{r}(x, y, z)$ helyvektor és a t idő függvénye: $\Psi(\mathbf{r}, t) = \Psi(x, y, z, t)$. A differenciálegyenlet bal oldala ennek megfelelően kiegészül az x és y szerinti parciális deriváltakkal is. A *háromdimenziós hullámegyenlet*:

$$c^2 \left[\frac{\partial^2 \Psi(\mathbf{r}, t)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Psi(\mathbf{r}, t)}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \Psi(\mathbf{r}, t)}{\partial z^2} \right] = \frac{\partial^2 \Psi(\mathbf{r}, t)}{\partial t^2}. \quad (10.43)$$

A 10.2 szakaszban megmutattuk, hogy a (10.4) hullámfüggvény kielégíti az egydimenziós hullámegyenletet (ebből kaptuk meg, hogy a hullámegyenletben szereplő konstans a haladóhullám sebességének négyzete). Ehhez hasonlóan, a differenciálegyenletbe való behelyettesítéssel megmutatható, hogy a térbeli síkhullám (10.5) és a gömbhullám (10.6) hullámfüggvényei kielégítik a (10.43) háromdimenziós hullámegyenletet. A levezetést az olvasóra bízuk.

Elektromágneses hullám vákuumban

Érdekeséggként – nagyon leegyszerűsítve – megmutatjuk, hogy a *Maxwell-egyenletek* alapján a vákuumban terjedő elektromágneses hullámokra is (10.42) alakú differenciál-egyenlet adódik. Vizsgáljunk egy x -tengely irányában terjedő lineárisan polarizált elektromágneses síkhullámot: az elektromos térerősség vektora az y -, a mágneses indukció vektora a z -tengely irányába mutat (10.24 ábra).

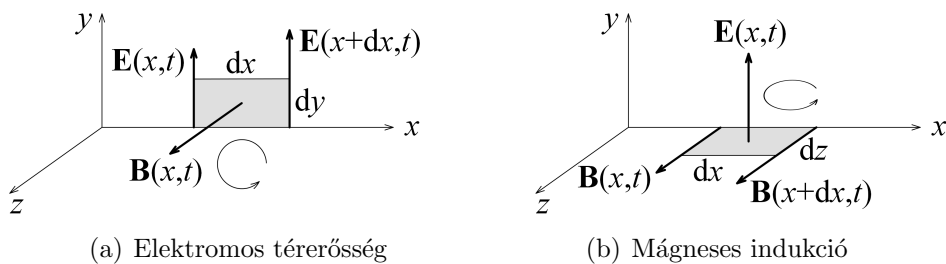


10.24. ábra. Vektorok az x irányban terjedő polarizált elektromágneses síkhullámban

Vákuumban (ahol nem kell figyelembe vennünk az anyag elektromos és mágneses tulajdonságait, és töltések, áramok sincsenek) a Maxwell-egyenletek leegyszerűsödnek. A levezetéshez csak a harmadik és negyedik Maxwell-egyenletre van szükségünk [56]:

$$\oint_g \mathbf{E} ds = -\frac{d}{dt} \int_A \mathbf{B} d\mathbf{A} \quad (10.44)$$

$$\oint_g \mathbf{B} ds = \mu_0 \varepsilon_0 \frac{d}{dt} \int_A \mathbf{E} d\mathbf{A} . \quad (10.45)$$



10.25. ábra. Vázlat a körintegrálokhoz

A (10.44) egyenletet a 10.25(a) ábrán látható kis téglalpra felírva:

$$\begin{aligned} [E(x + dx) - E(x)] dy &= -\frac{\partial B}{\partial t} dx dy \\ \frac{\partial E}{\partial x} &= -\frac{\partial B}{\partial t}, \end{aligned}$$

majd az egyenlet mindkét oldalát x szerint deriválva:

$$\frac{\partial^2 E}{\partial x^2} = -\frac{\partial^2 B}{\partial t \partial x}. \quad (10.46)$$

Hasonlóan, a (10.45) egyenlet és a 10.25(b) ábra alapján:

$$\begin{aligned} -[B(x + dx) - B(x)] dz &= \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial E}{\partial t} dx dz \\ -\frac{\partial B}{\partial x} &= \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial E}{\partial t}, \end{aligned}$$

majd az egyenlet mindkét oldalát t szerint deriválva:

$$-\frac{\partial^2 B}{\partial x \partial t} = \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial^2 E}{\partial t^2}. \quad (10.47)$$

Ha egy függvényt egymás után több változója szerint deriválunk parciálisan, akkor az eredmény nem függ a deriválások sorrendjétől. Ennek alapján:

$$\frac{\partial^2 B}{\partial t \partial x} = \frac{\partial^2 B}{\partial x \partial t}.$$

Ennek felhasználásával a (10.46) és (10.47) egyenleteket egybevetve:

$$\frac{\partial^2 E}{\partial x^2} = -\frac{\partial^2 B}{\partial t \partial x} = -\frac{\partial^2 B}{\partial x \partial t} = \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial^2 E}{\partial t^2}.$$

Az egyenletet $\mu_0 \varepsilon_0$ -al átosztva megkapjuk az elektromágneses hullám egydimenziós hullámegyenletét:

$$\frac{1}{\mu_0 \varepsilon_0} \frac{\partial^2 E}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 E}{\partial t^2}. \quad (10.48)$$

Az egyenlet ismét ugyanolyan alakú, mint az eddigi hullámegyenletek. Ennek alapján az elektromágneses hullám sebessége vákuumban (a vákuumbeli *fénysebesség*):

$$c = \sqrt{\frac{1}{\mu_0 \varepsilon_0}}. \quad (10.49)$$

10.7. Állóhullámok

A 10.5.2 szakaszban láttuk, hogy haladóhullámok interferenciájából állóhullámok alakulhatnak ki. Keressük most a (10.42) egydimenziós hullámegyenlet állóhullámú megoldásait a következő alakban:

$$\Psi(x, t) = \varphi(x) \cos(\omega t + \alpha), \quad (10.50)$$

ahol a $\varphi(x)$ csak helytől függő tényező egyelőre ismeretlen.

Helyettesítsük be a (10.50) függvényt a (10.42) differenciálegyenletbe, és végezzük el a parciális deriválásokat:

$$c^2 \frac{d^2 \varphi(x)}{dx^2} \cos(\omega t + \alpha) = -\varphi(x) \omega^2 \cos(\omega t + \alpha).$$

Az egyenletet rendezve:

$$c^2 \left[\frac{d^2 \varphi(x)}{dx^2} + \frac{\omega^2}{c^2} \varphi(x) \right] \cos(\omega t + \alpha) = 0,$$

ami csak akkor teljesülhet bármely t időpillanatban, ha a szögletes zárójelben lévő tényező nulla. Felhasználva az $\omega/c = k$ összefüggést is:

$$\frac{d^2 \varphi(x)}{dx^2} + k^2 \varphi(x) = 0. \quad (10.51)$$

Ez az egyenlet pontosan olyan, mint a harmonikus rezgőmozgás differenciálegyenlete (csak itt t helyett x a változó), így az általános megoldása is ugyanolyan:

$$\varphi(x) = A \sin(kx + \beta). \quad (10.52)$$

A megoldást beírva a (10.50) próbafüggvénybe a hullámegyenlet általános állóhullámú megoldását kapjuk:

$$\Psi(x, t) = A \sin(kx + \beta) \cos(\omega t + \alpha). \quad (10.53)$$

Konkrét esetekben a megoldást az általános megoldásból a *peremfeltételek* figyelembevételével kaphatjuk meg. Nézzünk néhány, a gyakorlati életben is fontos példát!

Állóhullám megfeszített húron

Vizsgáljunk egy L hosszúságú megfeszített húron kialakuló transzverzális állóhullámokat. A húr legyen párhuzamos az x -tengellyel, és egyik vége legyen a koordináta-rendszer kezdőpontjában. A határfeltétel az, hogy a húr mindkét vége rögzített, kitérésük minden pillanatban nulla (csomópont):

$$\Psi(0, t) = \Psi(L, t) \equiv 0,$$

ami csak akkor teljesülhet minden időpillanatban, ha

$$\varphi(0) = \varphi(L) = 0.$$

A hullámfüggvény helyfüggő tényezője a (10.52) függvény:

$$\varphi(x) = A \sin(kx + \beta).$$

A $\varphi(0) = 0$ feltétel alapján $\beta = 0$. Ezt felhasználva a $\varphi(L) = 0$ feltétel szerint:

$$\begin{aligned} \varphi(L) &= A \sin kL = 0 \\ kL &= n\pi \quad (n \in \mathbb{N}^+) \\ k_n &= n \frac{\pi}{L} \quad (n \in \mathbb{N}^+). \end{aligned}$$

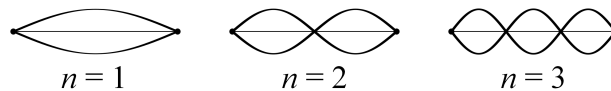
A hullámszám tehát csak meghatározott, diszkrét értékeket vehet fel! Az n index jelöli az egyes megoldásokat. A hullámszám meghatározza az állóhullám hullámhosszát, körfrekvenciáját és frekvenciáját is:

$$\begin{aligned} \lambda_n &= \frac{2\pi}{k_n} = \frac{1}{n} 2L \quad (n \in \mathbb{N}^+) \\ \omega_n &= k_n c = n \frac{\pi c}{L} \quad (n \in \mathbb{N}^+) \\ \nu_n &= \frac{\omega_n}{2\pi} = n \frac{c}{2L} \quad (n \in \mathbb{N}^+). \end{aligned} \tag{10.54}$$

A húron tehát csak meghatározott frekvenciájú állóhullámok alakulhatnak ki, a lehetséges frekvenciák a ν_1 *alapfrekvencia* egész számú többszörösei. Az alapfrekvencia a húr hosszától és a haladóhullámok terjedési sebességétől függ – ez utóbbit viszont a húr lineáris sűrűsége és a húrt feszítő erő határozza meg (10.6 szakasz). Mindezek alapján a lehetséges állóhullámok hullámfüggvényei:

$$\Psi_n(x, t) = A_n \sin(k_n x) \cos(\omega_n t + \alpha_n) = A_n \sin\left(n \frac{\pi}{L} x\right) \cos\left(n \frac{\pi c}{L} t + \alpha_n\right),$$

ahol az A_n , α_n állandók a kezdeti feltételektől függenek ($n \in \mathbb{N}^+$). A húron kialakuló hullám általános esetben ezeknek az állóhullámoknak a szuperpozíciója.



10.26. ábra. Állóhullámkép húron ($n = 1, 2, 3$)

A 10.26 ábrán az $n = 1, 2, 3$ értékekhez tartozó állóhullámkép látható. A húron mindig n félhullám, n duzzadóhely és a húr végein kívül $n - 1$ csomópont alakul ki.

Kísérlet: Állóhullámok csavarrugón

A videón látható kísérletben vízszintesen kifeszített csavarrugó egyik végét rögzítjük, másik végén változtatható fordulatszámú motorral kis amplitúdójú (cirkulárisan polarizált) *transzverzális* hullámokat indítunk (**Transzverzális állóhullámok csavarrugón** [8]). A rugón a végpontokról visszaverődő hullámok bonyolult interferenciája látható. A motor fordulatszámát – és ezzel a hullám frekvenciáját – folyamatosan növeljük: a (10.54) összefüggés által megengedett legalacsonyabb frekvencia elérésekor a hullám amplitúdója megnövekszik, és a rugón – középen egy duzzadóhellyel – állóhullám alakul ki ($n = 1$). A frekvencia további növelésekor a hullám először ismét rendezetlenné válik, majd az $n = 2$ értékhez tartozó frekvencia elérésekor újból stabil állóhullám alakul ki (két duzzadóhellyel és középen csomóponttal). A frekvencia további növelésével sorban előállíthatók az $n = 3, 4, \dots$ értékhez tartozó állóhullám alakzatok is.

A másik kísérletben a kifeszített rugón *longitudinális* hullámokat gerjesztünk (**Longitudinális állóhullámok csavarrugón** [8]). A frekvencia növelésekor, az előző kísérlethez hasonlóan, sorban jelennek meg az állóhullám alakzatok – egyre rövidebb hullámhosszal. A longitudinális hullám megfigyelése nehezebb, mint a transzverzális hullámé, de a videón jól látható, hogy a csomópontokban a rugó nyugalomban van, a duzzadóhelyeken pedig a nagy amplitúdójú, gyors rezgés miatt elmosódik a kép. ♦

Állóhullám egyik végén zárt légoszlopban

L hosszúságú, egyik végén zárt, másik végén nyitott csőben levegő van. A levegőoszlopban longitudinális állóhullámokat keltünk. A zárt végnél a húrhoz hasonlóan csomópont alakul ki, a nyitott végen viszont nem csomópont, hanem duzzadóhely lesz. (Érdekességként jegyezzük meg, hogy a (10.36) kifejezés alapján a légoszlopban a *nyomástöbblet* éppen a duzzadóhelyeken nulla, a csomópontokban pedig maximális.) A határfeltételek ennek alapján:

$$\begin{aligned}\varphi(0) &= 0 \\ \varphi(L) &= A.\end{aligned}$$

Az első feltétel alapján ismét $\beta = 0$. Ezt felhasználva a második feltétel szerint:

$$\begin{aligned}\varphi(L) &= A \sin kL = A \\ kL &= (2n - 1) \frac{\pi}{2} \quad (n \in \mathbb{N}^+) \\ k_n &= (2n - 1) \frac{\pi}{2L} \quad (n \in \mathbb{N}^+).\end{aligned}$$

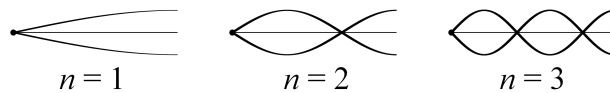
A hullámszám tehát ismét csak meghatározott, diszkrét értékeket vehet fel. A hullámhossz, a körfrekvencia és a frekvencia ennek alapján:

$$\begin{aligned}\lambda_n &= \frac{2\pi}{k_n} = \frac{1}{2n-1}4L & (n \in \mathbb{N}^+) \\ \omega_n &= k_n c = (2n-1)\frac{\pi c}{2L} & (n \in \mathbb{N}^+) \\ \nu_n &= \frac{\omega_n}{2\pi} = (2n-1)\frac{c}{4L} & (n \in \mathbb{N}^+).\end{aligned}\tag{10.55}$$

A közegben tehát most is csak meghatározott frekvenciájú állóhullámok alakulhatnak ki, de ebben az esetben a lehetséges frekvenciák a ν_1 alapfrekvencia *páratlan* számú többszörösei. Az alapfrekvencia a levegőoszlop hosszától és a haladóhullámok terjedési sebességétől függ – ez utóbbit ebben az esetben a levegő hőmérséklete és összetétele (például páratartalma) határozza meg (10.6 szakasz). A lehetséges állóhullámok hullámfüggvényei:

$$\Psi_n(x, t) = A_n \sin(k_n x) \cos(\omega_n t + \alpha_n) = A_n \sin\left[(2n-1)\frac{\pi}{2L}x\right] \cos\left[(2n-1)\frac{\pi c}{2L}t + \alpha_n\right],$$

az A_n , α_n állandók ismét a kezdeti feltételektől függenek ($n \in \mathbb{N}^+$). A 10.27 ábrán látható grafikonok az $n = 1, 2, 3$ értékekhez tartozó állóhullámoknál ábrázolják a hullámfüggvényt (a légoszloppal párhuzamos kitérést) a hely függvényében. Mindig $2n - 1$ negyedhullám, n duzzadóhely és a légoszlop zárt végén kívül $n - 1$ csomópont alakul ki.



10.27. ábra. Állóhullámkép egyik végén zárt légoszlopban ($n = 1, 2, 3$)

Kísérlet: Rezgő acéllemezek

A 10.27 ábrán láthatóhoz hasonló állóhullám alakzatokat figyelhetünk meg egyik végükön rögzített rugalmas lemezeken is. A videón látható kísérletben különböző hosszúságú acéllemezeket egy váltakozó feszültséggel rezgésbe hozható rúdhoz rögzítünk (**Állóhullámok acéllemezek**en [8]). A gerjesztés frekvenciáját növelve mindig az a lemez kezd rezegni, amelyik rezonanciába kerül a rezgéskeltővel, azaz amelyiken megfelelő frekvenciájú állóhullámok tudnak kialakulni.

Először az $n = 1$ értéknek megfelelő (egy negyedhullámból álló) mintázatok alakulnak ki, legelsőként a leghosszabb lemezen, majd sorban az egyre rövidebbeken. A frekvenciát tovább növelve a lemezek sorban megjelennek az $n = 2$ értékhez tartozó, három negyedhullámból álló alakzatok is.

Egy másik kísérletben zárt, kör alakú acélgyűrűn hozunk létre ugyanígy állóhullámokat (Állóhullámok körgyűrűn [8]). Ekkor a lemezen kialakuló állóhullámkép a megfeszített húron kialakuló mintázatokhoz hasonlít (10.26 ábra): rezonancia mindig akkor alakul ki, amikor a gyűrű kerülete egész számú ($n = 1, 2, 3, \dots$) félhullám hosszával egyezik meg. ♦

Állóhullám mindkét végén nyitott légoszlopban

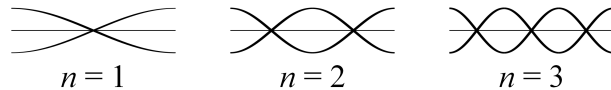
Ha egy L hosszúságú légoszlop mindkét vége nyitott, akkor mindkét végén duzzadóhely alakul ki. Ekkor a határfeltételek:

$$\varphi(0) = \varphi(L) = A.$$

Ennek alapján a (10.52) függvényben $\beta = \pi/2$, de a hullámszáma, hullámhossza, körfrekvenciára és frekvenciára ugyanazok az értékek adódnak, mint a mindkét végén rögzített húr esetében. A lehetséges frekvenciák ismét a ν_1 alaphérfrekvencia egész számú többszörösei. A hullámfüggvények:

$$\Psi_n(x, t) = A_n \sin\left(k_n x + \frac{\pi}{2}\right) \cos(\omega_n t + \alpha_n) = A_n \sin\left(n \frac{\pi}{L} x + \frac{\pi}{2}\right) \cos\left(n \frac{\pi c}{L} t + \alpha_n\right),$$

az A_n, α_n állandókat szintén a kezdeti feltételek határozzák meg ($n \in \mathbb{N}^+$). A 10.28 ábra grafikonjain ismét a hullámfüggvény látható a hely függvényében ($n = 1, 2, 3$). Mindig n félhullám, $n + 1$ duzzadóhely és n csomópont alakul ki.



10.28. ábra. Állóhullámkép mindkét végén nyitott légoszlopban ($n = 1, 2, 3$)

Kísérlet: Sípok

A sípokban és más fúvós hangszerekben a légoszlopban kialakuló állóhullámok frekvenciája határozza meg a megszólaló hangmagasságot (erről részletesebben a 10.9.2 szakaszban lesz szó). A kísérletünkben szereplő egyszerű síp egyik vége mindig nyitott: itt hozzuk létre befújással a rezgéseket.

Először a másik vég szintén nyitott: ekkor a sípban a 10.28 ábrának megfelelő állóhullámok alakulnak ki. Gyenge fújással a (10.54) képlet szerinti alaphérfrekvencia szólaltatható meg:

$$\nu_1 = \frac{c}{2L}.$$

Erősebb fújással felerősödnek a *felharmonikusok*, amelyek ebben az esetben az alaphfrekvencia *egész számú többszörösei*.

Ha a síp szabad végét befogjuk, akkor az állóhullám alakzatok már a 10.27 ábrának megfelelőek lesznek, és az alaphfrekvencia a (10.55) kifejezés alapján:

$$\nu'_1 = \frac{c}{4L} = \frac{\nu_1}{2},$$

azaz az előző frekvencia fele. A megszólaló hang jól hallhatóan, körülbelül egy oktávval mélyebb lesz. (Azért nem pontosan egy oktávval, mert a szabad vég nem pontosan a cső végénél van. Ennek az az oka, hogy a síp keresztmetszete nem nulla.) Erős fújás esetén a zárt sípban is felerősödnek a felharmonikusok, melyek ebben az esetben az alaphfrekvencia *páratlan számú többszörösei*. ♦

Két-és háromdimenziós állóhullámok

Rugalmas lemezeken és hártványon (a hangszerek közül például a cintányéron és a dobokon) kétdimenziós állóhullámok alakulnak ki. Két dimenzióban a duzzadóhelyeket *csomóvonalak* választják el egymástól.

Kísérlet: Chladni-féle porábrák

Közepén befogott rugalmas lemezre sót vagy finom szemcsés homokot szórunk, majd a lemezt rezgéseltővel (vagy hegedűvonóval) rezgésbe hozzuk. A lemezre szórt por a csomóvonalakon gyűlik össze, így azokat szépen kirajzolja. Ezek a *Chladni-féle porábrák*. Különböző frekvenciájú rezgetéssel (illetve megfelelő helyen végighúzott hegedűvonóval) különböző rezgési módusok és így különböző mintázatok hozhatók létre.

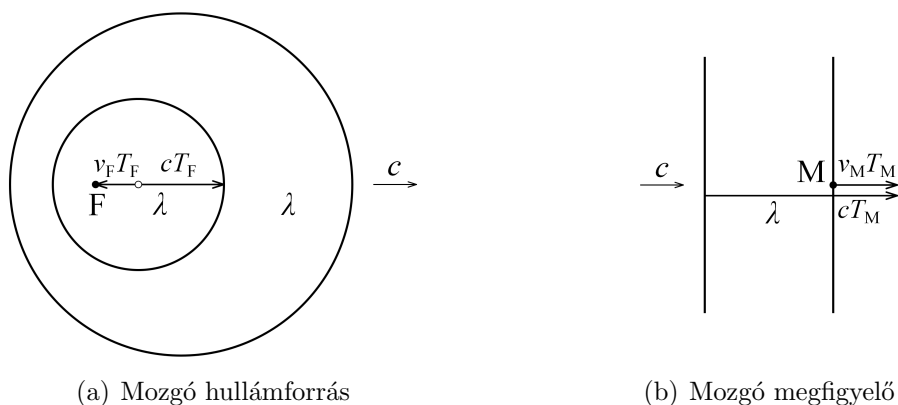
A videókon kör alakú (I.) és négyzet alakú (II.) lemezzel is láthatjuk a kísérletet. [8] ♦

Háromdimenziós állóhullámok figyelhetők meg a mikrohullámú sütőben. A sütő fémháza úgy van méretezve, hogy az eszközben alkalmazott, mikrohullámú tartományba eső elektromágneses hullámokra (szokásos frekvencia: 2,45 GHz, hullámhossz: 12,2 cm) rezonáljon, és így állóhullámok alakuljanak ki. [57] A sütő belsejében a duzzadóhelyeken maximális a térerősség, a *csomósíkok* mentén viszont nulla (ezért kell a sütőbe rakott ételt az egyenletes melegedés érdekében forgatni).

10.8. Doppler-effektus

Ha a hullámforrás és a megfigyelő egymáshoz képest mozog, akkor a megfigyelő a hullámforrás frekvenciájától eltérő frekvenciájú hullámot érzékel. Ez a hétköznapi életben is megfigyelhető jelenség a *Doppler-effektus*. [58]

Vizsgáljuk azt az egyszerű esetet, amikor a forrás és a megfigyelő egy egyenes mentén mozog. Írjuk le a jelenséget a hullámterjedés közegéhez rögzített vonatkoztatási rendszerben. Legyen a forrás sebessége v_F , a megfigyelőé v_M , és tekintsük mindkettőt akkor pozitívnak, ha egymástól távolodnak. A hullám terjedési sebessége c . Bocsásson ki a forrás ν_F frekvenciájú hullámot.



10.29. ábra. Doppler-effektus

A 10.29(a) ábráról leolvasható a mozgó forrásból induló hullámok hullámhossza:

$$\lambda = cT_F + v_F T_F = (c + v_F) T_F, \quad (10.56)$$

ahol $T_F = 1/\nu_F$ a hullámforrás rezgésének periódusideje.

Ezek a hullámfrontok c sebességgel terjednek a közegben, majd elérik a mozgó megfigyelőt. Két hullámfront megérkezése között T_M idő (a megfigyelő által érzékelt rezgés periódusideje) telik el – ekközben a megfigyelő is mozog. A 10.29(b) ábra alapján:

$$\lambda + v_M T_M = cT_M.$$

Ezt rendezve, és a (10.56) eredményt behelyettesítve:

$$T_M = \frac{\lambda}{c - v_M} = \frac{c + v_F}{c - v_M} T_F,$$

amiből a megfigyelő által érzékelt $\nu_M = 1/T_M$ frekvencia:

$$\nu_M = \frac{c - v_M}{c + v_F} \nu_F. \quad (10.57)$$

Az eredmény *diszkutálása*:

Csak akkor kapunk fizikailag értelmezhető eredményt, ha $v_M < c$ (ellenkező esetben a hullám nem éri el a megfigyelőt) és $-v_F < c$ (ellenkező esetben *hangrobbanás* lesz – erről bővebben a következő, 10.8 szakaszban).

Ha $|v_M| \ll c$ és $|v_F| \ll c$, akkor a (10.57) kifejezést átalakíthatjuk, *közelíthetjük*:

$$\nu_M = \frac{1 - \frac{v_M}{c}}{1 + \frac{v_F}{c}} \nu_F \approx \left(1 - \frac{v_M + v_F}{c}\right) \nu_F = \left(1 - \frac{v}{c}\right) \nu_F, \quad (10.58)$$

ahol $v = v_F + v_M$ a forrás és a megfigyelő relatív sebessége.

Ha a hullámforrás és a megfigyelő egymástól távolodnak ($v > 0$), a megfigyelő kisebb, ha egymáshoz közelednek ($v < 0$), nagyobb frekvenciát észlel, mint a forrás frekvenciája. (Hang esetében tehát távolodáskor mélyebb, közeledéskor magasabb hangot hall.)

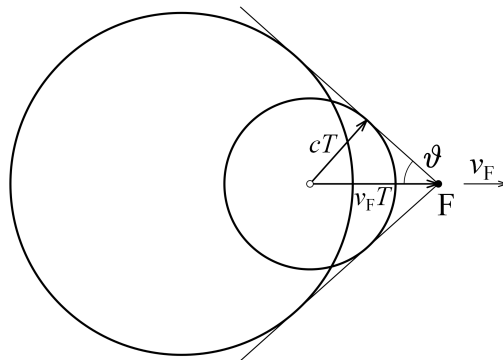
Hangrobbanás

Ha a hullámforrás sebessége nagyobb, mint a hullám terjedési sebessége, akkor a forrás „lehagyja” a hullámot, a hullám csak egy kúpon (az úgynevezett *Mach-kúpon*) belül érzékelhető. A Mach-kúp félnyílásszöge a 10.30 ábra alapján:

$$\sin \vartheta = \frac{c}{v_F}.$$

A hangforrás sebességének és a hullám terjedési sebességének hányadosa a szuperszonikus repülésben is használt *Mach-szám* [59]:

$$M = \frac{v_F}{c}.$$



10.30. ábra. Mach-kúp

Relativisztikus Doppler-effektus

A Doppler-effektus nemcsak hang (mechanikai hullámok), hanem fény (elektromágneses hullámok) esetében is megfigyelhető. Erre a legismertebb példa a távoli (és így nagy sebességgel távolodó) csillagok színeképeinek *vörös eltolódása*.

Ha a forrás vagy a megfigyelő sebessége összemérhető a fénysebességgel, akkor a jelenséget a speciális relativitáselmélet alapján kell leírni. Ha a fény vákuumban terjed, akkor nincs kitüntetett vonatkoztatási rendszer (szemben a hanghullámokkal, ahol a hullámterjedés közege egy kitüntetett vonatkoztatási rendszer), és csak a forrás és a megfigyelő egymáshoz viszonyított, relatív sebessége számít.

Ennek ellenére, írjuk le a jelenséget egy tetszőleges vonatkoztatási rendszerben, amelyben – a klasszikus esethez hasonlóan – a forrás és a megfigyelő is (egy egyenes mentén) mozog. Legyen ebben a K vonatkoztatási rendszerben a forrás sebessége v_F , a megfigyelőé v_M . A fény terjedési sebessége bármely vonatkoztatási rendszerben c . Bocsásson ki a forrás a *saját vonatkoztatási rendszerében* ν_F frekvenciájú, $T_F = 1/\nu_F$ periódusidejű hullámot.

A periódusidőt a K rendszerben nagyobbának érzékeljük (ez az *idődilatáció* jelensége):

$$T_F^K = \frac{T_F}{\sqrt{1 - \frac{v_F^2}{c^2}}}.$$

(A K felső index jelöli, hogy a mennyiséget a K rendszerben mérjük.)

Ezután a klasszikus esethez hasonlóan:

$$\begin{aligned}\lambda^K &= (c + v_F) T_F^K \\ T_M^K &= \frac{\lambda^K}{c - v_M},\end{aligned}$$

majd ebből a megfigyelő által érzékelt periódusidő a saját vonatkoztatási rendszerében (ismét az idődilatáció összefüggését használva):

$$T_M = T_M^K \sqrt{1 - \frac{v_M^2}{c^2}}.$$

Végül mindezt behelyettesítve a megfigyelő által érzékelt frekvencia (természetesen szintén a saját vonatkoztatási rendszerében):

$$\nu_M = \frac{c - v_M}{c + v_F} \frac{\sqrt{1 - \frac{v_F^2}{c^2}}}{\sqrt{1 - \frac{v_M^2}{c^2}}} \nu_F.$$

Relativisztikus esetben a K rendszerben v_F sebességgel mozgó forrás és v_M sebességgel mozgó megfigyelő egymáshoz viszonyított relatív sebessége:

$$v = \frac{v_F + v_M}{1 + \frac{v_F v_M}{c^2}}.$$

Ezt felhasználva a kifejezés hosszú alakítás után egyszerűbb alakra hozható:

$$\nu_M = \sqrt{\frac{c-v}{c+v}} \nu_F. \quad (10.59)$$

Láthatjuk, hogy az eredmény – a klasszikus esettel szemben – valóban csak a forrás és a megfigyelő relatív sebességétől függ.

Ha a testek relatív sebessége sokkal kisebb a fénysebességnél ($v \ll c$), akkor a (10.59) kifejezést is közelíthetjük:

$$\nu_M = \sqrt{\frac{1-\frac{v}{c}}{1+\frac{v}{c}}} \nu_F \approx \sqrt{\left(1-\frac{v}{c}\right)^2} \nu_F = \left(1-\frac{v}{c}\right) \nu_F.$$

Az eredmény – ahogy vártuk – megegyezik a (10.58) klasszikus közelítő eredménnyel.

10.9. Befejezés

Befejezésként – a szorosan vett tananyagot már kívül – nézzünk néhány hullámjelenséget, melyek fontosak a hétköznapi életben.

10.9.1. Ultrahangos orvosi diagnosztika

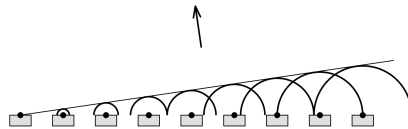
Az ultrahangos orvosi diagnosztika egy képalkotó eljárás: az emberi testben részben elnyelődő, részben visszaverődő ultrahang segítségével a szervezet belsejében lévő szövetekről, a szív működéséről, illetve a magzatról és a magzat szerveiről nyerhető információ – alapvetően káros mellékhatások nélkül [60].

Az *ultrahang* az emberi fül számára hallható hangoknál magasabb frekvenciájú mechanikai hullám ($\nu > 20$ kHz). Diagnosztikai célokra 2-18 MHz-es ultrahangot használnak. Az ultrahang a testben körülbelül 1500 m/s sebességgel halad, így ehhez a frekvenciatartományhoz 1-0,1 mm-es hullámhossz tartozik. A nagyobb frekvencia (kisebb hullámhossz) előnye a jobb térbeli felbontás – a képalkotással csak a hullámhossznál nagyobb részletek különböztethetők meg –, a kisebbé a nagyobb behatolási mélység.

Az ultrahangok keltésére és érzékelésére *piezoelektromos kristályokat* használnak, a kristály egyben hangforrás és érzékelő is. Az eszközt a bőrre helyezik, a felületek között a jó hangvezetést egy vízalapú gél biztosítja. A kibocsátott ultrahangimpulzusok a testben a szövethatárokról különböző mértékben visszaverődnek. A visszaverődött hangimpulzusokat az érzékelő elektromos jellé alakítja, amit számítógép dolgoz fel.

Az ultrahangforrás egyszerre csak egy irányba bocsát ki jelet, és csak ebből az irányból érkezik válaszjel is. A kép úgy alakul ki, hogy az ultrahangnyaláb végigpásztázza a vizsgálandó területet. A pásztázás (szkenelés) elve jól ismert a régi katódsugárcsőes televíziókból, monitorokból és oszcilloszkópokból: ott az elektronsugár pásztázza soronként végig a képernyőt, és így alakul ki a kép.

Az ultrahangnyaláb mozgatója a kristály mechanikai forgatása helyett a hullámok interferenciájával is megvalósítható: a forrás egyetlen piezoelektromos kristály helyett sok apró kristályból áll, a hullámfront az elemi források hullámainak szuperpozíciójaként jön létre. Ha az elemi hullámforrásokból azonos fázisban indul a hang, a kialakuló hullámfrontok a felülettel párhuzamosak lesznek, és így a hullám erre merőlegesen halad. Ha azonban a szomszédos elemi hullámforrásokból egy kicsiny fáziskülönbséggel indulnak a hullámok, akkor a kialakuló hullámfront (és így a nyaláb iránya) már más lesz (10.31 ábra).



10.31. ábra. Hullám irányítása a fáziskülönbség változtatásával

A mélységi információt, azt hogy honnan verődik vissza a hang, elsősorban a visszazérkező impulzus késéséből lehet meghatározni. A testet felépítő szövetek többsége nagy víztartalmú, ezért a hang terjedési sebessége lényegében mindenhol megegyezik a sós vízben mért hangsebességgel, és így az időkééséből a mélység kiszámítható. Ezen kívül a jobb felbontás érdekében a kibocsátott ultrahang nyalábot a vizsgálandó mélységnek megfelelően fókuszálják. A nyaláb fókuszálása – a pásztázáshoz hasonlóan – az elemi hullámforrások megfelelő fáziskülönbségével érhető el. Így a fókusz távolság folyamatosan változtatható, különböző mélységből nyerhető éles kép.

A pásztázás és a mélységi információ alapján a test belsejében lévő szövethatárok és egyéb objektumok helye már meghatározható, ebből a számítógép segítségével már háromdimenziós képeket lehet készíteni. A magzatokról készült ultrahangos képek jól ismertek. Ugyanakkor a képek értelmezéséhez, az egyes elváltozások vagy szövetsérülések felismeréséhez a technikán kívül a szakorvosi tapasztalatra is feltétlenül szükség van.

Ha a hullám mozgó felületről verődik vissza, akkor a visszavert hullámnak a Dopplereffektus miatt megváltozik a frekvenciája. A jelenség a 10.8 szakaszban tárgyalt (mozgó forrás és megfigyelő) esethez hasonlóan írható le. A frekvenciaeltolódásból meghatározható a visszaverő felület sebessége (a sebesség felületre merőleges komponense). Ezen az elven működik a *Doppler-echokardiográfia* [61], amellyel a szívben vagy nagyobb erekben az áramló vér sebessége meghatározható. Az ultrahang visszaverődik a vér alakos összetevőiről, és frekvenciája a vér sebességétől függő mértékben megváltozik. A vér sebességét a más esetekben fekete-fehér ultrahangos képen színezéssel jelölik, így a kép színei alapján látható, hogy hol nagyon gyors (például a szívbillentyű tökéletlen záródásánál kialakuló visszaáramlás és örvénylés miatt), illetve hol nagyon lassú (például elzáródás miatt) a vér áramlása.

10.9.2. Zene és fizika

A hang (szűkebb értelemben) az emberi fül számára érzékelhető, 20 Hz és 20 kHz közötti frekvenciájú longitudinális mechanikai hullám. Terjedési sebessége levegőben, szobahőmérsékleten körülbelül 340 m/s. A hullám fizikai paraméterei közül az intenzitás a *hangerősséggel*, a frekvencia a *hangmagassággal* áll kapcsolatban.

Hangerősség

Az emberi fül tág határok között képes érzékelni a hangerősséget. Az érzékelés közelítőleg *logaritmikus*: a hangerősség az intenzitás logaritmusával arányos. A hangerősség számszerűsítésére a decibel (dB) skála használatos, melynek eredeti meghatározása:

$$L = 10 \lg \frac{I}{I_0}, \quad (10.60)$$

ahol $I_0 = 10^{-12} \text{ W/m}^2$ egy referencia intenzitás, az úgynevezett *hallásküszöb* (a leghalkabb hang, amit még hallani lehet). A fájdalomküszöb körülbelül 130 dB, ez 10 W/m^2 hangintenzitásnak felel meg. A decibel skálát újabban nem az intenzitással, hanem a p_s *hangnyomással* (a 10.6 szakaszban megismert $dp(x, t)$ nyomástöbblet négyzetes középértékével) fejezik ki. A hangnyomás arányos az amplitúdóval, így az intenzitás arányos a hangnyomás négyzetével ($I \sim A^2 \sim p_s^2$), amit behelyettesítve a (10.60) kifejezésbe:

$$L = 10 \lg \frac{I}{I_0} = 10 \lg \frac{p_s^2}{p_{s0}^2} = 20 \lg \frac{p_s}{p_{s0}},$$

ahol $p_{s0} = 20 \mu\text{Pa}$ a hallásküszöbhez tartozó hangnyomás levegőben. [62]

Az emberi fül nem egyformán érzékeny a különböző frekvenciájú hangokra (1 kHz körüli frekvenciákon a legérzékenyebb), ezt veszi figyelembe a *phon skála*. [63]

Hangmagasság

A hangmagasságot szintén logaritmikusan érzékeljük: egy hangköz nagysága nem a frekvenciák különbségétől, hanem azok arányától függ. A kétszeres frekvenciához tartozó hangköz az *oktáv*, tehát egy hangköz nagysága oktávban kifejezve:

$$\log_2 \frac{\nu}{\nu_0}.$$

Az emberi fül által érzékelt hangtartomány tehát $\log_2 1000 \approx 10$ oktáv.

A zenei hangok és a frekvencia közötti kapcsolatot az a' (normál zenei A hang) frekvenciájának definiálása rögzíti. Az úgynevezett kamarahang a zenetörténet folyamán többször változott, a ma elfogadott érték 440 Hz.

Az európai fül számára egy hangköz akkor *konszonáns* (akkor hangzik „szépen”), ha a két frekvencia aránya kis egész számok hányadosaként írható fel. Ezen alapulnak a *diatonikus* hangsorok, amelyekben a szomszédos hangok frekvenciáinak aránya $9/8$, $10/9$ (nagy és kis egész hang) vagy $16/15$ (nagy félhang). Két diatonikus skála hangjai, azok relatív frekvenciái és hangközei a **10.1** és **10.2** táblázatokban láthatók.

c	d	e	f	g	a	h	c'
1	$\frac{9}{8}$	$\frac{10}{9}$	$\frac{16}{15}$	$\frac{9}{8}$	$\frac{10}{9}$	$\frac{9}{8}$	$\frac{16}{15}$
	$\frac{9}{8}$	$\frac{5}{4}$	$\frac{4}{3}$	$\frac{3}{2}$	$\frac{5}{3}$	$\frac{15}{8}$	2

10.1. táblázat. A C-dúr skála hangjai, relatív frekvenciái és hangközei

c	d	esz	f	g	asz	b	c'
1	$\frac{9}{8}$	$\frac{16}{15}$	$\frac{10}{9}$	$\frac{9}{8}$	$\frac{16}{15}$	$\frac{9}{8}$	$\frac{10}{9}$
	$\frac{9}{8}$	$\frac{6}{5}$	$\frac{4}{3}$	$\frac{3}{2}$	$\frac{8}{5}$	$\frac{9}{5}$	2

10.2. táblázat. A c-mol skála hangjai, relatív frekvenciái és hangközei

A *kromatikus* skálában az egész hangközöket újabb félhangok osztják fel (a $25/24$ és $27/25$ frekvenciaarányok a kis félhangok), és így 12 hangból álló skála alakul ki. A különböző hangnemekben így a hangközök bonyolult rendszere alakul ki, amely bizonyos hangszerek (például a zongora) hangolását nagyon nehézkessé teszik. Ezt a problémát oldja meg a *temperált* skála, ahol az oktáv 12 hangköze egyforma:

$$\frac{\nu}{\nu_0} = \sqrt[12]{2}.$$

Az így hangolt hangszeren bármilyen hangnemben lehet játszani – viszont a hangközök nem teljesen konszonánsok. A temperált és a diatonikus skálák összehasonlítása a **10.3** táblázatban látható. A relatív frekvenciák három tizedesre kerekített értékek. Jól látható, hogy az eltérés kicsi – a nagyon jó hallásúakat kivéve szinte észrevehetetlen.

c	cisz	d	disz	e	f	fisz	g	gisz	a	b	h	c'
	desz		esz			gesz		asz				
1	1,059	1,122	1,189	1,26	1,335	1,414	1,498	1,587	1,682	1,782	1,888	2
1		1,125		1,25	1,333		1,5		1,667		1,875	2
1		1,125	1,2		1,333		1,5	1,6		1,8		2

10.3. táblázat. A temperált, a C-dúr és a c-moll skála összehasonlítása

Az *akkord*ban egy skála több konszonáns hangja egyszerre szólal meg.

Hangszín

A természetes hangokban legtöbbször több különböző frekvenciájú szinuszos hullám keveredik. A legalacsonyabb *alaphang* mellett megjelennek a többszörös frekvenciájú *felharmonikusok*. A hang *hangszínét* a felharmonikusok amplitúdóinak aránya határozza meg. A hangszín különböztet meg két különböző (azonos hangmagasságon, azonos hosszúsággal kimondott) magánhangzót, és részben a hangszín alapján lehet megkülönböztetni két hangszer vagy két ember (azonos hangmagasságú) hangját is. (A hangnak ezen kívül sok más jellemzője is van – például a hangerősség időbeli változása: a hang felfutása, kitartása és lecsengése – amelyek szintén segítik a megkülönböztetést.)

A kevert hang spektrális felbontását Fourier-transzformációval lehet elvégezni (9.2 szakasz [46]).

Hangszerek

A *húros hangszerek* hangmagasságát a húrokon kialakuló állóhullámok határozzák meg – ezt a rezgést veszi át, erősíti fel és sugározza ki a hangszer teste. A húr alapfrekvenciája a húr hosszától, lineáris sűrűségétől és a húrt feszítő erőtől függ (10.7 szakasz).

A rezgéskeltés történhet pengetéssel, a húr megütésével vagy vonóval. Ez utóbbi esetben fontos szerepe van annak, hogy a gyantázott vonó és a húr közötti tapadási és csúszási súrlódási együttható jelentősen eltér egymástól, és így a vonó folyamatos végighúzásakor a megcsúszások és megtapadások sorozata a húrt rezgésbe hozza.

A játék közben különböző hangmagasságok megszólaltatásához vagy a húr rezgő hosszát kell változtatni (lefogással), vagy pedig minden hanghoz külön húrra van szükség (mint például a zongorában vagy a hárfán).

A hangszerek hangolása a húrok feszítőerejének finom változtatásával lehetséges.

A *fúvós hangszerek* hangmagasságát a légoszlopban kialakuló állóhullámok határozzák meg. A frekvencia a cső hosszától és a hang terjedési sebességétől függ (10.7 szakasz).

A rezgéskeltés különböző módokon történhet. Az *éksípok*ban (például a furulyában) az áramló levegő egy éknek ütközik, és az ék két oldalán leváló örvények keltik a rezgést. A *nyelvsípok* (például a klarinét) működésének alapja a 8.3.1 szakaszban megismert aerodinamikai paradoxon: a hangszerben lévő kis nyelv a gyorsan áramló levegő lecsökkenő nyomása miatt periodikusan elzárja a levegő útját, és ezzel hoz létre rezgéseket. A *trombita* mindkét típustól különbözik: a zenész a szájával hozza létre a rezgéseket.

A különböző magasságú hangok megszólaltatásához a cső hosszát kell változtatni: ez történhet a csövön lévő lyukak befogásával (például a furulyán), a cső hosszának folyamatos változtatásával (a harsonában) vagy különböző hosszúságú csőszakaszok betoldásával (a trombitában). A hangmagasságot befolyásolni lehet a befújás erősségével is: erős befújással megszólaltathatók a felharmonikusok. Az orgonában minden hangmagassághoz (és hangszínhez) külön síp tartozik.

A fúvós hangszerek hangolása nehezebb: a hangsebesség tudatos változtatására (mint a húros hangszereknél a húr feszítésével) nincs lehetőség. Ugyanakkor a levegő hőmérsékletének és páratartalmának változásakor megváltozik a hangsebesség – és így a hangszer hangmagassága is.

10.9.3. Fény és hang

Információink döntő többségéhez *látás* és *hallás* útján, *fény* és *hang* segítségével jutunk. Mindkettő hullámjelenség – sok hasonlósággal és különbséggel.

Nyilvánvaló különbség, hogy a hang longitudinális mechanikai hullám, a fény transzverzális elektromágneses hullám. A fény sebessége közel hat nagyságrenddel nagyobb a hang terjedési sebességénél. A hallható hang frekvenciája 20 Hz és 20 kHz között van, amihez levegőben néhány centimétertől tíz-húsz méterig terjedő hullámhossz tartozik. A látható fény hullámhossza ezzel szemben 400 nm és 800 nm közé esik (a határok nem élesek), aminek 10^{14} Hz nagyságrendű frekvencia felel meg.

A hullám amplitúdója és intenzitása meghatározza a hang és a fény erősségét. Az emberi érzékelés mindkét esetben sok nagyságrendet fog át, és logaritmikus (10.9.2 szakasz).

A hullám frekvenciája a hang esetében a hang magasságát, a fény esetében a fény színét határozza meg. Fontos különbség van a több különböző frekvenciájú hullámból álló hang és fény érzékelésében is. A *hang* esetében az akkordokat a jó fülű ember fel tudja bontani összetevőire, a hangszín alapján pedig meg lehet különböztetni a tiszta szinuszos hangot a felharmonikusokat tartalmazó kevert hangtól. A kevert *fényt* viszont szemünk nem képes összetevőire bontani. Ugyanaz a szín többféleképp is kikeverhető szinuszos (monokromatikus) összetevőkből, és ezek között a szemünkkel nem tudunk különbséget tenni. Bizonyos színek lehetnek keverték vagy monokromatikusak is (például egy sárga fény lehet monokromatikus, de lehet vörös és zöld fény keveréke is), más színek viszont (mint a bíbor vagy a fehér) csak különböző frekvenciájú hullámok keverékeként állíthatók elő. [64]

A látás és a hallás fizikája rengeteg további érdekes kérdést vet fel, de ezek tárgyalása már túlmutat a könyv határain.

Függelék

A. függelék

Matematikai segédlet

A.1. Vektorok, vektorműveletek

Vektor abszolút értéke

A vektor abszolút értéke (hossza) skalár mennyiség, jelölése: $|\mathbf{a}| = a$.

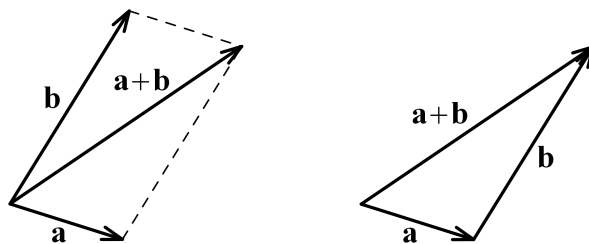
Vektorok szorzása skalárral

$\lambda \mathbf{a} \parallel \mathbf{a}$ és $|\lambda \mathbf{a}| = |\lambda| a$. Ha $\lambda < 0$, akkor $\lambda \mathbf{a}$ ellentétes irányítottságú, mint \mathbf{a} .

A $-\mathbf{a}$ vektor az \mathbf{a} vektor ellentettje: hosszuk azonos, párhuzamosak, de ellentétes irányítottságúak.

Vektorok összeadása

Az $\mathbf{a} + \mathbf{b}$ vektorösszeget az [A.1](#) ábrán látható módokon kaphatjuk meg. A második módszer több vektor összeadására is alkalmas.

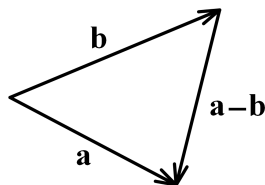


A.1. ábra. Vektorok összeadása

A háromszög-egyenlőtlenségből következően $|\mathbf{a} + \mathbf{b}| \leq a + b$.

Vektorok kivonása

Két vektor különbségét vissza lehet vezetni a vektorok összeadására is: $\mathbf{a} - \mathbf{b} = \mathbf{a} + (-\mathbf{b})$. A különbségvektor azonban az A.2 ábra alapján könnyebben is megkapható.



A.2. ábra. Vektorok kivonása

Ellenőrzés: $\mathbf{b} + (\mathbf{a} - \mathbf{b}) = \mathbf{a}$

Vektorok skaláris szorzata

Az \mathbf{a} és \mathbf{b} vektorok skaláris szorzata: $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = ab \cos \gamma$, ahol γ az \mathbf{a} és \mathbf{b} vektorok által bezárt szög.

Látható, hogy $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = 0 \Leftrightarrow \mathbf{a} \perp \mathbf{b}$.

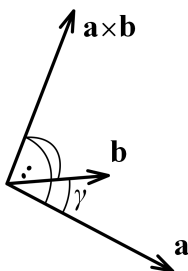
Vektorok vektoriális szorzata

Az \mathbf{a} és \mathbf{b} vektorok vektoriális szorzata az $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ vektor, amelyet a következők definiálnak:

$|\mathbf{a} \times \mathbf{b}| = ab \sin \gamma$, ahol γ az \mathbf{a} és \mathbf{b} által bezárt szög,

$\mathbf{a} \times \mathbf{b} \perp \mathbf{a}$ és $\mathbf{a} \times \mathbf{b} \perp \mathbf{b}$, valamint

\mathbf{a} , \mathbf{b} és $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ jobbsodrású rendszert alkot (A.3 ábra).



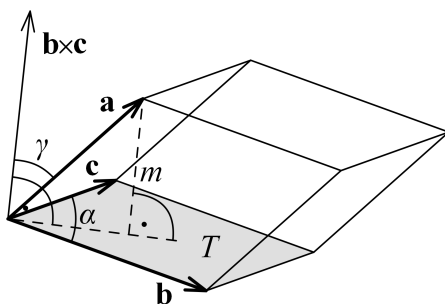
A.3. ábra. Vektoriális szorzat

A vektoriális szorzat nem kommutatív! $\mathbf{a} \times \mathbf{b} = -\mathbf{b} \times \mathbf{a}$.

Vektorok vegyes szorzata

$\mathbf{a}(\mathbf{b} \times \mathbf{c})$ az \mathbf{a} , \mathbf{b} és \mathbf{c} vektorok vegyes szorzata. A vegyes szorzat skaláris mennyiség, amely a három vektor által kifeszített paralelepipedon előjeles térfogatát adja meg (akkor pozitív, ha \mathbf{a} , \mathbf{b} és \mathbf{c} jobbsodrású rendszert alkot).

Az A.4 ábrán látható szürke paralelogramma területe $T = |\mathbf{b} \times \mathbf{c}| = bc \sin \alpha$. A $\mathbf{b} \times \mathbf{c}$ vektor merőleges a paralelogrammára. Így $\mathbf{a}(\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = aT \cos \gamma = Tm$ (hiszen $a \cos \gamma = m$), ami épp a test térfogata.



A.4. ábra. Vektorok vegyes szorzata

Ebből következően $\mathbf{a}(\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = \mathbf{b}(\mathbf{c} \times \mathbf{a}) = \mathbf{c}(\mathbf{a} \times \mathbf{b})$.

Vektorok felbontása komponensekre, koordináták

Egy tetszőleges \mathbf{a} vektor *egyértelműen* felírható három (nem egy síkban fekvő) vektor lineáris kombinációjaként: $\mathbf{a} = a_1\mathbf{b}_1 + a_2\mathbf{b}_2 + a_3\mathbf{b}_3$, ahol a \mathbf{b}_1 , \mathbf{b}_2 , \mathbf{b}_3 vektorokat bázisnak nevezzük.

Az $\mathbf{a}_1 = a_1\mathbf{b}_1$, $\mathbf{a}_2 = a_2\mathbf{b}_2$, $\mathbf{a}_3 = a_3\mathbf{b}_3$ vektorok az \mathbf{a} vektor *komponensei*, az a_1 , a_2 , a_3 skalárok pedig a vektor *koordinátái* az adott bázison.

Legtöbbször a *Descartes-féle* derékszögű koordináta-rendszert meghatározó, három egymásra merőleges egységvektorból álló bázist használjuk:

$$|\mathbf{i}| = |\mathbf{j}| = |\mathbf{k}| = 1,$$

$$\mathbf{i} \perp \mathbf{j}, \mathbf{j} \perp \mathbf{k}, \mathbf{k} \perp \mathbf{i} \text{ és}$$

\mathbf{i} , \mathbf{j} , \mathbf{k} jobbsodrású rendszert alkot.

Ekkor az \mathbf{a} vektor $\mathbf{a} = a_x\mathbf{i} + a_y\mathbf{j} + a_z\mathbf{k}$ alakban írható. Az $\mathbf{a}_x = a_x\mathbf{i}$, $\mathbf{a}_y = a_y\mathbf{j}$ és $\mathbf{a}_z = a_z\mathbf{k}$ vektorok az \mathbf{a} vektor x -, y - és z -irányú komponensei, a_x , a_y és a_z pedig a vektor x -, y - és z -koordinátái.

A szintén gyakran használt henger és gömbi koordináta-rendszerekben a bázis lokális (a hely függvényében változik). Rövid összefoglaló – további hivatkozásokkal – a kiegészítő jegyzet *Tér és idő* fejezetében [6].

Vektorműveletek derékszögű koordinátákkal

A vektorműveletek derékszögű koordináták segítségével egyszerűen elvégezhetők (más koordináta-rendszerekben a számítások bonyolultabbak).

Vektor abszolút értéke:

$$|\mathbf{a}| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2},$$

vektor szorzása skalárral:

$$\mathbf{b} = \lambda \mathbf{a} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} b_x = \lambda a_x \\ b_y = \lambda a_y \\ b_z = \lambda a_z \end{cases},$$

vektorok összeadása és kivonása:

$$\mathbf{c} = \mathbf{a} \pm \mathbf{b} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} c_x = a_x \pm b_x \\ c_y = a_y \pm b_y \\ c_z = a_z \pm b_z \end{cases},$$

vektorok skaláris szorzata:

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z,$$

vektorok vektoriális szorzata:

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix} = (a_y b_z - a_z b_y) \mathbf{i} + (a_z b_x - a_x b_z) \mathbf{j} + (a_x b_y - a_y b_x) \mathbf{k}.$$

A.2. Deriválási szabályok

Derivált függvény definíciója:

$$f'(x) = \frac{df(x)}{dx} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}.$$

Elemi függvények deriváltja:

$$c' = 0$$

$$(x^n)' = nx^{n-1}$$

$$(e^x)' = e^x$$

$$(\ln x)' = \frac{1}{x}$$

$$(\sin x)' = \cos x$$

$$(\cos x)' = -\sin x$$

Deriválási szabályok:

$$\begin{aligned}
 [cf(x)]' &= cf'(x) \\
 [f(x) \pm g(x)]' &= f'(x) \pm g'(x) \\
 [f(x)g(x)]' &= f'(x)g(x) + f(x)g'(x) \\
 \left[\frac{f(x)}{g(x)}\right]' &= \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{[g(x)]^2} \\
 \{f[g(x)]\}' &= f'(g)g'(x) && \text{(láncszabály)} \\
 [f^{-1}(x)]' &= \frac{1}{f'[f^{-1}(x)]} && \text{(inverz függvény deriváltja)}
 \end{aligned}$$

Néhány példa a szabályok alkalmazására:

$$\begin{aligned}
 (\operatorname{tg} x)' &= \left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)' = \frac{\cos x \cos x - \sin x(-\sin x)}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x} && \text{(tört deriváltja)} \\
 [\sin(2x^2 + 3)]' &= 4x \cos(2x^2 + 3) && \text{(láncszabály)} \\
 (\operatorname{arctg} x)' &= \frac{1}{\operatorname{tg}'(\operatorname{arctg} x)} = \cos^2(\operatorname{arctg} x) = \frac{1}{1+x^2} && \text{(inverz függvény)}
 \end{aligned}$$

Vektor deriváltja

A deriválási szabályok vektorokra is alkalmazhatók.

$$\frac{d\mathbf{a}(t)}{dt} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\mathbf{a}(t + \Delta t) - \mathbf{a}(t)}{\Delta t}.$$

Deriválás komponensenként:

$$\frac{d\mathbf{a}}{dt} = \frac{d(a_x \mathbf{i} + a_y \mathbf{j} + a_z \mathbf{k})}{dt} = \frac{da_x}{dt} \mathbf{i} + \frac{da_y}{dt} \mathbf{j} + \frac{da_z}{dt} \mathbf{k}.$$

Vektorszorzatok deriváltja:

$$\begin{aligned}
 \frac{d(\lambda \mathbf{a})}{dt} &= \frac{d\lambda}{dt} \mathbf{a} + \lambda \frac{d\mathbf{a}}{dt} \\
 \frac{d(\mathbf{a}\mathbf{b})}{dt} &= \frac{d\mathbf{a}}{dt} \mathbf{b} + \mathbf{a} \frac{d\mathbf{b}}{dt} \\
 \frac{d(\mathbf{a} \times \mathbf{b})}{dt} &= \frac{d\mathbf{a}}{dt} \times \mathbf{b} + \mathbf{a} \times \frac{d\mathbf{b}}{dt} \\
 \frac{d[\mathbf{a}(\mathbf{b} \times \mathbf{c})]}{dt} &= \frac{d\mathbf{a}}{dt} (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) + \mathbf{a} \left(\frac{d\mathbf{b}}{dt} \times \mathbf{c} + \mathbf{b} \times \frac{d\mathbf{c}}{dt} \right)
 \end{aligned}$$

A.3. Integrálás

Határozott integrál definíciója:

$$I = \int_a^b f(x) dx = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \sum_a^b f(x) \Delta x.$$

Határozatlan integrál:

$$\Phi = \int f(x) dx = F(x) + C,$$

ahol $F(x)$ az $f(x)$ függvény *primitív függvénye*, amelyre teljesül, hogy $F'(x) = f(x)$. A C integrálási állandó egy tetszőleges konstans (amelyet konkrét esetekben a peremfeltételek határoznak meg).

Határozott integrál meghatározása a primitív függvény segítségével:

$$I = \int_a^b f(x) dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a).$$

Elemi függvények integrálja:

$$\begin{aligned} \int c dx &= cx + C \\ \int x^n dx &= \frac{1}{n+1} x^{n+1} + C && n \neq -1 \\ \int \frac{1}{x} dx &= \ln x + C \\ \int e^x dx &= e^x + C \\ \int \sin x dx &= -\cos x + C \\ \int \cos x dx &= \sin x + C \end{aligned}$$

B. függelék

Fizikai állandók és adatok

B.1. Fizikai állandók

fénysebesség	$c = 299792458 \text{ ms}^{-1}$	(definíció szerint)
gravitációs állandó	$\gamma = 6,67 \cdot 10^{-11} \text{ Nm}^2\text{kg}^{-2}$	
nehézségi gyorsulás	$g = 9,81 \text{ ms}^{-2}$	(Budapesten)

B.2. A Föld, a Hold és a Nap adatai

A Föld adatai [65]:

átlagos sugár	$R_F = 6373 \text{ km}$	
egyenlítői sugár	$R_e = 6378 \text{ km}$	
poláris sugár	$R_p = 6357 \text{ km}$	
lapultság	$f_F = 0,00335$	
tömeg	$m_F = 5,974 \cdot 10^{24} \text{ kg}$	
átlagos sűrűség	$\rho_F = 5515 \text{ kgm}^{-3}$	
sziderikus forgási periódus	$T_F = 23^{\text{h}} 56' 4''$	(csillag-nap)
forgási szögsebesség	$\omega_F = 7,292 \cdot 10^{-5} \text{ s}^{-1}$	($= 2\pi/T_F$)
tengelyferdeség	$\varepsilon = 23,5^\circ$	
átlagos Nap-távolság	$R_{NF} = 149,6 \text{ millió km}$	(csillagászati egység)
Nap-közel	$R_{ph} = 147,1 \text{ millió km}$	(perihélium)
Nap-távol	$R_{ah} = 152,1 \text{ millió km}$	(aphélium)
pályaexcentricitás	$e_F = 0,0167$	
sziderikus keringési idő	$T_k = 365,256 \text{ nap}$	(sziderikus év)
keringési szögsebesség	$\omega_k = 1,991 \cdot 10^{-7} \text{ s}^{-1}$	($= 2\pi/T_k$)
tropikus év	$T_{tr} = 365,242 \text{ nap}$	
precesszió periódusideje	$T_P = 26 \text{ ezer év}$	

A Hold adatai [66]:

átlagos sugár	$R_H = 1737 \text{ km}$	(= $0,273R_F$)
lapultság	$f_H = 0,00125$	
tömeg	$m_H = 7,35 \cdot 10^{22} \text{ kg}$	(= $0,0123m_F$)
átlagos sűrűség	$\rho_H = 3346 \text{ kgm}^{-3}$	
sziderikus forgási periódus	$T_H = 27,32 \text{ nap}$	(kötött forgás)
átlagos Föld-távolság	$R_{FH} = 384,4 \text{ ezer km}$	(= $60,3R_F$)
Föld-közel	$R_{pg} = 363 \text{ ezer km}$	(perigee)
Föld-távol	$R_{ag} = 405 \text{ ezer km}$	(apogee)
pályaexcentricitás	$e_H = 0,0167$	
sziderikus keringési idő	$T_H = 27,32 \text{ nap}$	(sziderikus hónap)
keringési szögsebesség	$\omega_H = 2,662 \cdot 10^{-6} \text{ s}^{-1}$	(= $2\pi/T_H$)
szinodikus hónap	$T_{sy} = 29,53 \text{ nap}$	
inklináció	$i = 5,15^\circ$	(az ekliptikához)
pályasík precessziója	$T_{pp} = 18,6 \text{ év}$	
látszólagos átmérő	$\delta_H = 29,3' - 34,1'$	

A Nap néhány adata [67]:

átlagos sugár	$R_N = 696,3 \text{ ezer km}$	(= $109,3R_F$)
tömeg	$m_N = 1.989 \cdot 10^{30} \text{ kg}$	(= $3,33 \cdot 10^5 m_F$)
átlagos sűrűség	$\rho_N = 1408 \text{ kgm}^{-3}$	
látszólagos átmérő	$\delta_N = 31,6' - 32,7'$	

B.3. Táblázatok

Az acél rugalmasságtani adatai [68]:

Young-modulus	$E \approx 2 \cdot 10^{11} \text{ Pa}$	(= 200 GPa)
nyírési modulus	$G \approx 8 \cdot 10^{10} \text{ Pa}$	(= 80 GPa)
Poisson-szám	$\mu \approx 0,3$	
kompressziómodulus	$K \approx 1,6 \cdot 10^{11} \text{ Pa}$	(= 160 GPa)
rugalmasság határa	$\sigma_{rug} \approx 5 \cdot 10^8 \text{ Pa}$	(rozsdamentes acél)
szakítószilárdság	$\sigma_{szak} \approx 9 \cdot 10^8 \text{ Pa}$	(rozsdamentes acél)

A víz ρ sűrűsége, σ felületi feszültsége és η viszkozitása a t hőmérséklet függvényében:

t °C	ρ kg/m ³	σ mN/m	η mPas	t °C	ρ kg/m ³	σ mN/m	η mPas
1	999,87	75,49	1,792	21	998,02	72,38	0,981
2	999,93	75,34	1,731	22	997,80	72,23	0,958
3	999,99	75,04	1,619	23	997,57	72,08	0,936
4	1000,00	74,89	1,567	24	997,32	71,93	0,914
5	999,99	74,75	1,519	25	997,07	71,78	0,894
6	999,97	74,60	1,473	26	996,81	71,63	0,874
7	999,93	74,45	1,428	27	996,54	71,48	0,855
8	999,88	74,30	1,386	28	996,26	71,33	0,836
9	999,81	74,15	1,346	29	995,97	71,18	0,818
10	999,73	74,01	1,308	30	995,67	71,03	0,801
11	999,63	73,86	1,271	35	994,06	70,29	0,723
12	999,52	73,71	1,236	40	992,24	69,54	0,656
13	999,40	73,56	1,203	45	990,25	68,6	0,599
14	999,27	73,41	1,171	50	988,07	67,8	0,549
15	999,13	73,26	1,140	55	985,73	66,9	0,506
16	999,13	73,12	1,111	60	983,24	66,0	0,469
17	998,62	72,82	1,056	65	980,59	65,1	0,436
19	998,43	72,67	1,030	70	977,81	64,2	0,406
20	998,23	72,53	1,005	75	974,89	63,3	0,380
				80	971,83	62,3	0,357
				85	968,65		0,336
				90	965,34		0,317

Tárgymutató

- aerodinamikai paradoxon, 141
Arkhimédész törvénye, 127
Bernoulli-törvény, 139
centrifugális-erő, 50, 51, 106, 107, 126
Chandler-féle periódus, 102
Coriolis-erő, 50, 54
Doppler-effektus, 225
Eötvös-effektus, 54
Eötvös-inga, 52
Eötvös-szabály, 131
Euler-féle gyorsulás, 49
Euler-féle periódus, 102
fénysebesség, 29, 42, 218
Fermat-elv, 200
Föld, 27, 31, 51, 52, 54, 101, 106, 126, 241
Foucault-inga, 54
Fourier-sor, 178
Fourier-transzformáció, 179, 211, 232
Galilei-transzformáció, 40, 69
geostacionárius pálya, 37
Hagen-Poiseuille-törvény, 144
hidrosztatikai paradoxon, 124
Hold, 27, 52, 107, 242
Hooke-törvény, 109, 113
Huygens-elv, 198
Huygens-Fresnel-elv, 209
impulzusmegmaradás tétele, 23, 68
Kármán-féle örvénysor, 148
Kepler-törvények, 26, 71
kompressziómodulus, 112, 214, 242
kontinuitási egyenlet, 138
Lissajous-görbék, 178
Lorentz-transzformáció, 42
Mach-szám, 226
Magnus-effektus, 149
Maxwell-egyenletek, 42, 217
mechanikai energia megmaradás tétele, 64, 69, 140
Nap, 26, 52, 71, 106, 107, 242
Newton-féle gravitációs törvény, 27
Newton-féle súrlódási törvény, 142
Newton-törvények, 21, 22, 24, 25, 40, 42, 43
nyírási modulus, 114, 118, 242
Pascal-törvény, 122
perdületmegmaradás tétele, 71, 73
Poisson-szám, 111, 242
Reynolds-szám, 146, 148
Snellius-Descartes-törvény, 200
Steiner-tétel, 86, 88
Stokes-törvény, 146
tömegközépponti tétel, 67
Wilberforce-inga, 183
Young-modulus, 110, 118, 191, 242

Irodalomjegyzék

- [1] Fizipédia: a BME TTK Fizikai Intézet által üzemeltetett oktatási portál
<http://fizipedia.bme.hu/>
- [2] Koppa Pál: Kísérleti fizika 2.
- [3] Ujsághy Orsolya: Kísérleti fizika 3.
- [4] Sükösd Csaba: Kísérleti magfizika
- [5] Információk a *Kísérleti fizika 1.* tárgyhoz
http://fizipedia.bme.hu/index.php/Kísérleti_fizika_1.
- [6] Vankó Péter: Kiegészítő tananyag a Fizipédián
(http://fizipedia.bme.hu/index.php/Kiegeszito_tananyag)
 - 1. Tér és idő
 - 2. Mozgás és megjelenítése
 - 3. Megmaradási törvények a mechanikában
 - 4. Rezgések
 - 5. Rend és rendetlenség
 - 6. Hideg-meleg
- [7] Härtlein Károly: Kísérleti videók a Fizipédián – Mechanika kísérletek
(http://fizipedia.bme.hu/index.php/Mechanika_kísérletek)
 - Tehetlenség I.
 - Tehetlenség II.
 - Geoid modell
 - Centrifugál regulátor
 - Erőmérő
 - Kis tömeg – nagy tömeg
 - Centrifugál szeparátor
 - Coriolis-pályán
 - Perdület megmaradás I.
 - Perdület megmaradás II.

Perdület megmaradás III.
Perdület megmaradás IV.
Tehetlenségi nyomaték (lejtőn leguruló testek)
Szabad tengely I.
Szabad tengely II.
Pörgettyű vizsgálatok
Perdület megmaradás V. (biciklikerek precessziója)
Perdület megmaradás VI. (pörgettyűnyomaték)

- [8] Härtlein Károly: Kísérleti videók a Fizipédián – Rezgés- és hullámtan kísérletek (http://fizipedia.bme.hu/index.php/Hullámtan_kísérletek)

Fizikai inga
Kaotikus kettős inga
Matematikai inga
Szabad rezgés I. (rezgés függőleges rugón)
Csillapított rezgés I.
Kényszerrezgés I.
Szabad rezgés II. (Pohl-féle készülék)
Csillapított rezgés II.
Kényszerrezgés II.
Csatolt ingák I.
Csatolt ingák II.
Csatolt ingák III.
Csatolt rezgések
Wilberforce-inga
Hullám terjedése (energiaterjedés hullámban)
Hullámok polarizálása
Hullámkeltés II. (hullámkádban)
Hullámkeltés IV.
Hullám visszaverődése I. (egyenes felületről)
Hullám visszaverődése II. (homorú felületről)
Hullám visszaverődése III. (domború felületről)
Hullám törése I. (egyenes felületen)
Hullám törése II. (domború lencsén)
Hullám törése III. (homorú lencsén)
Hullámkeltés V. (két pontforrás interferenciája)
Hullám elhajlása I.
Hullám elhajlása II.
Hullám elhajlása III.
Transzverzális állóhullámok csavarrugón
Longitudinális állóhullámok csavarrugón

Mechanikai rezonancia I. (állóhullámok acéllemezeken)
Állóhullámok körgyűrűn
Chladni-féle porábrák I.
Chladni-féle porábrák II.

- [9] Max Planck: A relatívtól az abszolútig
in: Max Planck: Válogatott tanulmányok
Gondolat, Budapest, 1965.
- [10] Leon Ledermann: Az isteni a-tom – Mi a kérdés, ha a válasz a világegyetem?
Typotech, Budapest, 1995.
- [11] Budó Ágoston: Mechanika
Nemzeti Tankönyvkiadó, Budapest, 1979
- [12] Wikipedia: Isaac Newton http://en.wikipedia.org/wiki/Isaac_Newton
- [13] Wikipedia: Galileo Galilei http://en.wikipedia.org/wiki/Galileo_Galilei
- [14] Wikipedia: Johannes Kepler http://en.wikipedia.org/wiki/Johannes_Kepler
- [15] Wikipedia: Tycho Brahe http://en.wikipedia.org/wiki/Tycho_Brahe
- [16] Wikipédia: Eötvös Loránd http://hu.wikipedia.org/wiki/Eötvös_Loránd
- [17] Wikipédia: Bay Zoltán http://hu.wikipedia.org/wiki/Bay_Zoltán
- [18] Wikipedia: Henry Cavendish http://en.wikipedia.org/wiki/Henry_Cavendish
- [19] Wikipedia: Michelson–Morley experiment
http://en.wikipedia.org/wiki/Michelson-Morley_experiment
- [20] Wikipedia: Correspondence principle
http://en.wikipedia.org/wiki/Correspondence_principle
- [21] Wikipedia: Eötvös experiment
http://en.wikipedia.org/wiki/Eötvös_experiment
- [22] Wikipédia: Eötvös inga <http://hu.wikipedia.org/wiki/Eötvös-inga>
- [23] Wikipedia: Foucault pendulum
http://en.wikipedia.org/wiki/Foucault_pendulum
- [24] Wikipedia: List of moments of inertia
http://en.wikipedia.org/wiki/List_of_moments_of_inertia

- [25] Wikipedia: Chandler wobble http://en.wikipedia.org/wiki/Chandler_wobble
- [26] Wikipedia: Gimbal <http://en.wikipedia.org/wiki/Gimbal>
- [27] Wikipedia: Attitude indicator
http://en.wikipedia.org/wiki/Attitude_indicator
- [28] Wikipedia: List of area moments of inertia
http://en.wikipedia.org/wiki/List_of_area_moments_of_inertia
- [29] Wikipedia: Archimedes <http://en.wikipedia.org/wiki/Archimedes>
- [30] Wikipedia: Metacentric height
http://en.wikipedia.org/wiki/Metacentric_height
- [31] Wikipedia: Eötvös rule http://en.wikipedia.org/wiki/Eötvös_rule
- [32] Wikipedia: Daniel Bernoulli http://en.wikipedia.org/wiki/Daniel_Bernoulli
- [33] Wikipedia: Non-Newtonian fluid
http://en.wikipedia.org/wiki/Non-Newtonian_fluid
- [34] Wikipedia: Hagen–Poiseuille equation
http://en.wikipedia.org/wiki/Hagen-Poiseuille_equation
- [35] Wikipedia: Reynolds number http://en.wikipedia.org/wiki/Reynolds_number
- [36] Wikipedi: George Gabriel Stokes
http://en.wikipedia.org/wiki/George_Gabriel_Stokes
- [37] Wikipédia: Kármán Tódor http://hu.wikipedia.org/wiki/Kármán_Tódor
- [38] Wikipedia: Kármán vortex street
http://en.wikipedia.org/wiki/Kármán_vortex_street
- [39] Wikipedia: Tacoma Narrows Bridge (1940)
[http://en.wikipedia.org/wiki/Tacoma_Narrows_Bridge_\(1940\)](http://en.wikipedia.org/wiki/Tacoma_Narrows_Bridge_(1940))
- [40] Wikipedia: Magnus effect http://en.wikipedia.org/wiki/Magnus_effect
- [41] Fizipédia: Kaotikus kettős inga vizsgálata V-scope-pal
http://fizipedia.bme.hu/index.php/Kaotikus_inga_V-scope-pal
- [42] Wikipedia: Lissajous curve http://en.wikipedia.org/wiki/Lissajous_curve
- [43] Wikipedia: Escapement <http://en.wikipedia.org/wiki/Escapement>

- [44] Wikipedia: Quartz clock http://en.wikipedia.org/wiki/Quartz_clock
- [45] Wikipedia: Fourier series http://en.wikipedia.org/wiki/Fourier_series
- [46] Wikipedia: Fourier transform
https://en.wikipedia.org/wiki/Fourier_transform
- [47] Fizipédia: Csatolt ingák vizsgálata V-scope-pal
http://fizipedia.bme.hu/index.php/Csatolt_ingák_V-scope-pal
- [48] Wikipedia: Wilberforce pendulum
http://en.wikipedia.org/wiki/Wilberforce_pendulum
- [49] Wikipedia: Airy wave theory http://en.wikipedia.org/wiki/Airy_wave_theory
- [50] Wikipedia: Huygens-Fresnel principle
http://en.wikipedia.org/wiki/Huygens-Fresnel_principle
- [51] Wikipedia: Snell's law http://en.wikipedia.org/wiki/Snell's_law
- [52] Wikipedia: Fermat's principle
http://en.wikipedia.org/wiki/Fermat's_principle
- [53] Wikipedia: Fresnel equations
http://en.wikipedia.org/wiki/Fresnel_equations
- [54] Wikipedia: Young's interference experiment
http://en.wikipedia.org/wiki/Young's_interference_experiment
- [55] P. Vankó: An Experimental Problem of a Competition Discussed in a Secondary School Workshop
Physics Competitions **6** no1 pp45-57 (2004)
<http://mono.eik.bme.hu/~vanko/wfphc/CompetitionProblemSchool.pdf>
- [56] Wikipedia: Maxwell's equations
http://en.wikipedia.org/wiki/Maxwell's_equations
- [57] Wikipedia: Dielectric heating
http://en.wikipedia.org/wiki/Dielectric_heating
- [58] Wikipedia: Doppler effect http://en.wikipedia.org/wiki/Doppler_effect
- [59] Wikipedia: Mach number http://en.wikipedia.org/wiki/Mach_number
- [60] Wikipedia: Medical ultrasonography
http://en.wikipedia.org/wiki/Medical_ultrasonography

- [61] Wikipedia: Doppler echocardiography
http://en.wikipedia.org/wiki/Doppler_echocardiography
- [62] Wikipedia: Sound pressure http://en.wikipedia.org/wiki/Sound_pressure
- [63] Wikipedia: Loudness <http://en.wikipedia.org/wiki/Loudness>
- [64] Wikipedia: Color <http://en.wikipedia.org/wiki/Color>
- [65] Wikipedia: Earth <http://en.wikipedia.org/wiki/Earth>
- [66] Wikipedia: Moon <http://en.wikipedia.org/wiki/Moon>
- [67] Wikipedia: Sun <http://en.wikipedia.org/wiki/Sun>
- [68] Wikipedia: Elastic modulus http://en.wikipedia.org/wiki/Elastic_modulus

Tartalomjegyzék

Előszó	1
I.	2
1. Tömegpont kinematikája – alapfogalmak	3
1.1. Bevezetés	3
1.1.1. Modellalkotás	4
1.1.2. Fizikai mennyiségek	6
1.2. Kinematikai alapfogalmak	7
1.2.1. Pálya, elmozdulás, út	7
1.2.2. Sebesség, differenciálszámítás	8
1.2.3. Gyorsulás	10
1.2.4. A függvény és deriváltfüggvény grafikus kapcsolata	13
1.2.5. Integrálszámítás	13
1.3. Különböző mozgások kinematikai leírása	16
2. A dinamika alapjai	20
2.1. Kölcsönhatások, az erő fogalma, erőmérés	21
2.2. Newton-törvények	21
2.2.1. Newton II. törvénye, a tehetetlen tömeg	22
2.2.2. Newton III. törvénye, az impulzus	22
2.2.3. Az erőhatások függetlensége	24
2.2.4. Newton I. törvénye, az inerciarendszer fogalma	25
2.3. Gravitációs kölcsönhatás, súlyos tömeg	26
2.3.1. Súlyos és tehetetlen tömeg	27
2.3.2. Mértékegységek	28
2.4. Különböző kölcsönhatások	31
2.5. A mozgásegyenlet alkalmazása	33

3. Mozgások leírása különböző vonatkoztatási rendszerekben	40
3.1. Galilei-transzformáció	40
3.2. Lorentz-transzformáció	42
3.3. Gyorsuló vonatkoztatási rendszer	43
3.3.1. Súly és súlytalanság	45
3.4. Forgó vonatkoztatási rendszer	47
3.4.1. Tehetetlenségi erők forgó rendszerben	49
3.5. Centrifugális erő és Coriolis-erő körülöttünk	51
3.5.1. Centrifugális erő	51
3.5.2. Coriolis-erő	54
4. Munka és energia	56
4.1. Mozgási energia, munkatétel	57
4.2. Konzervatív erőter, helyzeti energia	58
4.2.1. Egyensúlyi helyzetek	62
4.3. Mechanikai energia	63
5. Pontrendszerek – megmaradási tételek	65
5.1. A tömegközéppont	66
5.2. Pontrendszer impulzusa – az impulzusmegmaradás tétele	67
5.3. Pontrendszer energiája – a mechanikai energia megmaradásának tétele	68
5.3.1. Belső energia	69
5.4. A perdület	70
5.5. Pontrendszer perdülete – a perdületmegmaradás tétele	72
6. Merev testek mozgása	74
6.1. A merev test modell	74
6.1.1. Haladó és forgómozgás	75
6.1.2. A merev test mint pontrendszer	76
6.2. Merev testek statikája	77
6.2.1. Statikai feladatok	78
6.3. Rögzített tengely körüli forgás	82
6.3.1. A merev test perdülete	82
6.3.2. A tehetetlenségi nyomaték meghatározása	85
6.3.3. Forgó merev test mozgási energiája	87
6.4. A merev test síkmozgása	89
6.4.1. Ingamozgás	89
6.4.2. Gördülés	91
6.5. Szabad forgás	94
6.5.1. A perdület és a szögsebesség általános kapcsolata	95
6.5.2. Szabad tengelyek	97

6.6.	Erőmentes, szimmetrikus pörgettyű	98
6.6.1.	A Föld nutációja	101
6.6.2.	Giroszkóp, stabilizálás forgással	102
6.7.	Súlyos, szimmetrikus, gyors pörgettyű	103
6.7.1.	A Föld precessiója	106
6.7.2.	Pörgettyűnyomaték	107
7.	Szilárd testek alakváltozása	108
7.1.	Elemi deformációk	109
7.1.1.	Nyújtás és összenyomás (lineáris)	110
7.1.2.	Haránt összehúzódás	111
7.1.3.	Kompresszió	112
7.1.4.	Nyírás	113
7.1.5.	Rugalmas energia	114
7.2.	Összetett deformációk	115
7.2.1.	Hajlítás	115
7.2.2.	Csavarás	117
8.	Folyadékok és gázok	119
8.1.	Hidrosztatika	120
8.1.1.	Nyomásgradiens, hidrosztatikai nyomás	121
8.1.2.	Felhajtóerő	127
8.2.	Felületi jelenségek	129
8.2.1.	Kapilláris jelenségek	133
8.3.	Folyadékok és gázok áramlása	136
8.3.1.	Súrlódásmentes áramlás	138
8.3.2.	Súrlódásos áramlás	142
8.4.	Közegekben mozgó testre ható erők	146
II.		150
9.	Rezgések	151
9.1.	Harmonikus rezgések	151
9.1.1.	Szabad rezgés	152
9.1.2.	Csillapított rezgés	158
9.1.3.	Kényszerrezgés, rezonancia	164
9.1.4.	Rezonanciakísérletek	172
9.2.	Rezgések összetevése és felbontása	175
9.3.	Csatolt rezgések	179

10. Mechanikai hullámok	184
10.1. Hullámfüggvény	185
10.1.1. Csoportsebesség, diszperzió	188
10.2. Hullámterjedés rugalmas rúdban	190
10.2.1. Energiaterjedés hullámban	192
10.3. Polarizáció	195
10.4. Hullámok visszaverődése és törése	197
10.4.1. Huygens-elv	198
10.4.2. Fermat-elv	200
10.4.3. Levezetés a hullámfüggvény segítségével	202
10.5. Interferencia	205
10.5.1. Elhajlás, Huygens-Fresnel-elv	208
10.5.2. Interferencia visszaverődéskor	212
10.6. Hullámterjedés különböző közegekben	213
10.6.1. A hullámegyenlet általános alakja	216
10.7. Állóhullámok	219
10.8. Doppler-effektus	225
10.9. Befejezés	228
10.9.1. Ultrahangos orvosi diagnosztika	228
10.9.2. Zene és fizika	230
10.9.3. Fény és hang	233
Függelék	235
A. Matematikai segédlet	235
A.1. Vektorok, vektorműveletek	235
A.2. Deriválási szabályok	238
A.3. Integrálás	240
B. Fizikai állandók és adatok	241
B.1. Fizikai állandók	241
B.2. A Föld, a Hold és a Nap adatai	241
B.3. Táblázatok	242
Tárgymutató	244
Irodalomjegyzék	244