

Tartalomjegyzék

1. Motivációs példák	3
1.1. A geometriai sor egy különös ábrázolása és kibontása	4
1.2. Geometriai sor egy tábla szelvényes csokoládéban	6
1.3. A halmazelmélet viharos születése: a Cantor halmaz	8
1.4. A Sierpinski szőnyeg (carpet)	15
1.5. A Koch görbe	19
1.6. Körülöttünk levő önhasznló halmazok	22
1.7. A pitagorasz tétel legegyszerűbb bizonyítása	27
1.8. Milyen hosszú a norvég tengerpart?	29
1.9. DNS lánc különös ábrája egy négyzetben	33
1.10. Megmérhetetlen mintázatok	38
1.11. Káotikussá váló sorozatok	46
1.12. Információt hordozó káotikus dinamika	52
1.13. Egy képtömörítő eljárás a számítógépes grafikában.	54
1.14. Fraktálnövekedés.	65
2. Az elmélet	69
2.1. Halmazok hasonlósága	70
2.2. Önhasznló és önaffin halmazok	70
2.3. Iterált függvényrendszer (IFS)	71
2.4. Kontraktív függvények (leképezések)	75
2.5. Az attraktor „érdekes” részhalmazai	78
2.6. Halmazok távolsága	82
2.7. Egymásba skatulyázott halmazok távolsága	86
2.8. Kontraktív halmazfüggvény	88
2.9. Halmazok uniójának távolsága	89
2.10. Távolság (<i>metrika</i>) és határérték	90
2.11. Iterált függvényrendszerek (folytatás)	95
2.12. Fraktáldimenzió, boxdimenzió	98

3. Függelék	101
3.1. Előismeretek.	102
3.2. Feladatmegoldások.	110

Fraktálgeometria

Ez a jegyzet fraktálokról és a matematika egy fontos tételének, a kontraktív leképezések elvének különböző változatairól szól. Tárgyalásunk során a matematika olyan területeire jutunk majd amelynek eredményei első pillanatban hihetetlennek tűnnek, ellentétben látszanak a „józan ésszel”. Meg fogjuk mutatni ezeknek az eredményeknek néhány alkalmazását az informatika, biológia, geodézia és számítógépes grafika területén. Ezzel példákat szeretnénk adni a matematikai modellalkotás folyamatára.

A jegyzet tizennégy ilyen példával indul és csak ezután térünk rá az elmélet kérdéseire. A megfelelő, késsel jelzett, hívószóra kattintva, már a példák tanulmányozása során is lehetőségünk van áttérni a példával kapcsolatos elméletre. 49 feladat ad interaktív vonást a jegyzetnek és egy külön fejezetben, a feladatok megoldását is megtalálhatja az Olvasó.

A kb. 140 oldal első fejezete a motivációs példákat tartalmazza. A második fejezete fraktálgeometria alapvető fogalmait és tételeit dolgozza fel egy hagyományos stílusban. Végül a harmadik fejezet a feladatok megoldásához ad útmutatót és kitekintést a fraktálokkal kapcsolatos távolabbi problémákra.

1. fejezet

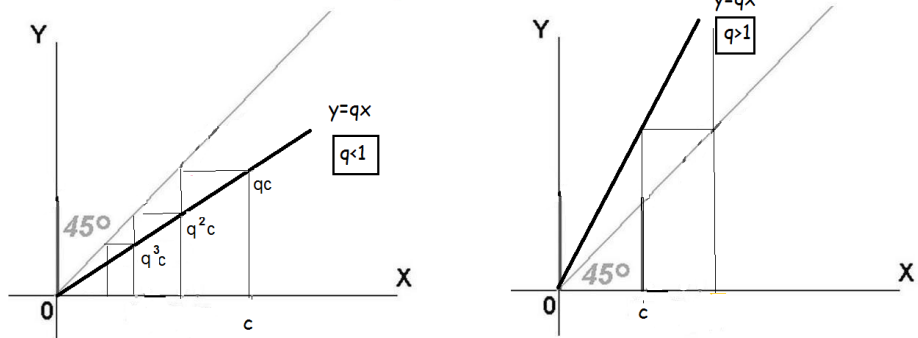
Motivációs példák

1.1. A geometriai sor egy különös ábrázolása és kibontása

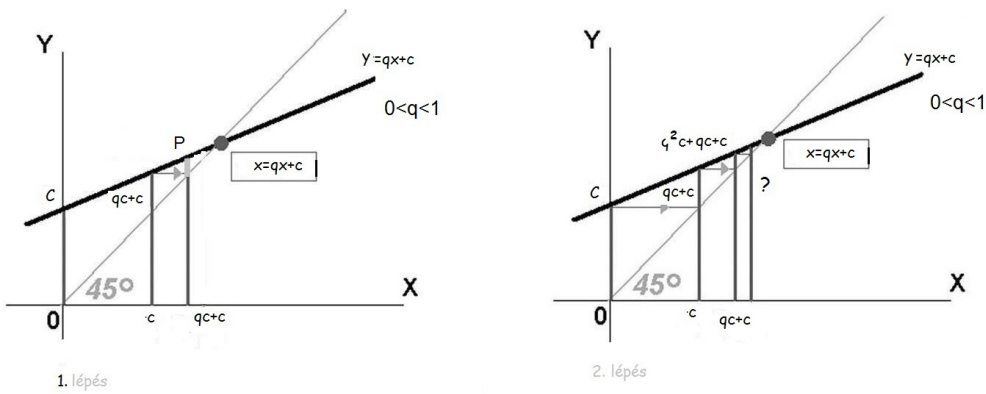
Egy geometriai sorozat természetes felírása a

$$x_{n+1} = qx_n \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad x_0 = c \quad (1.1)$$

rekurzív sorozat. Hiszen geometriai sorozatot akkor kapunk, ha egy c számot mindig ugyanazzal a q számmal újra meg újra megszorozunk és az (1.1) formula pontosan ezt fejezi ki. Az 1.1 ábrán az (1.1) sorozatnak egy geometriai szerkesztését látjuk .



1.1. ábra.



1.2. ábra.

Rögtön felvetődik a kérdés:

Milyen sorozatot kapunk akkor, ha az ábra szerkesztését egy TET-SZŐLEGES egyenessel végezzük?

Ekkor az (1.1) helyébe

$$x_{n+1} = qx_n + c \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad x_0 = 0 \quad (1.2)$$

lép és a szerkesztés az (1.1) geometriai sorozat *részletösszegeinek a sorozatát* jeleníti meg (1.2. ábra.)

Az 1.2. ábrából leolvasható a q hányadosú és c kezdetű (végtelen) geometriai sor összege $0 < q < 1$ esetén. Az (1.1) geometriai sorozat *részletösszegeinek a sorozatát* megjelenítő lépcsők az $y = qx + c$ és az $y = x$ egyenesek metszéspontjába „futnak be”. Ebből arra következtetünk, hogy a (végtelen) geometriai sor összege ekkor az

$$x = qx + c \quad (1.3)$$

egyenlet x megoldása.

Az ábrából leolvasottak matematikai bizonyítása.

A fenti gondolatmenet a szemlélet alapján nyilvánvalónak tűnik. Ha azonban *bizonyítani* is akarjuk azt amit a szemlélet alapján megállapítottunk, akkor a következőképpen járhatunk el.

Az (1.2) rekurzív formulát (összefüggést) kibontva

$$\begin{aligned} x_1 &= qx_0 + c \\ x_2 &= qx_1 + c = q(qx_0 + c) + c = q^2x_0 + qc + c; \\ x_3 &= qx_2 + c = q(q^2x_0 + qc + c) + c = q^3x_0 + q^2c + qc + c; \end{aligned}$$

teljes indukcióval

$$x_n = q^n x_0 + q^{n-1}c + q^{n-2}c + \dots + qc + c \quad (n = 1, 2, \dots) \quad (1.4)$$

és esetünkben $x_0 = 0$.

Ezzel *igazoltuk* hogy az (1.2) rekurzív formulával adott sorozat n -edik eleme a c kezdetű, q hányadosú geometriai sor n -edik részletösszege.

Ezután azt igazoljuk, hogy ha $0 < q < 1$, akkor a (végtelen) geometriai sor összege, az (1.3) egyenlet megoldása

$$x = \frac{c}{1-q}.$$

Ugyanis ha $x_0 = 0$ akkor

$$\frac{c}{1-q} - x_n = \frac{c}{1-q} - (q^{n-1}c + q^{n-2}c + \dots + qc + c)$$

és közös nevezőre hozva

$$\frac{c}{1-q} - (q^{n-1}c + q^{n-2}c + \dots + qc + c) = \frac{q^n c}{1-q}. \quad (1.5)$$

A jobboldal a nullához tart ha $n \rightarrow \infty$.

A továbbiakban az (1.4) formulát a

$$q^{n-1}c + q^{n-2}c + \dots + qc + c = \sum_{k=0}^{n-1} q^k c. \quad (1.6)$$

tömörebb formában írjuk.

MEGJEGYZÉS. Az (1.5) megfelelő átrendezésével az n-edik részletösszeg ismert formuláját is megkapjuk

$$\sum_{k=0}^{n-1} q^k c = \frac{c}{1-q} - \frac{q^n c}{1-q} = \frac{1-q^n}{1-q} c.$$

1.2. Geometriai sor egy tábla szelvényes csokoládében

Egy csokoládét úgy reklámoz a gyártója, hogy minden csokoládészelethez mellékel egy szelvényt, amelyből bizonyos mennyiséget összegyűjtve, az összegyűjtött szelvényekért még egy csokoládészeletet kapunk. Egy csokoládészelet ára 100 Ft és tíz szelvényért kapunk még egy csokoládét. *Mennyibe kerül nekünk egy szelet csokoládé?*

Ha egy szelet csokoládé c forintba kerül nekünk és egy szelvény s forintot ér akkor nyilván

$$c + s = 100 \quad (1.7)$$

és mivel tíz szelvényért kapunk egy csokoládét, amelyhez egy újabb szelvény tartozik, ezért

$$10s = c + s \quad (1.8)$$

Az (1.7), (1.8) egyenletrendszerből $c = 90$, $s = 10$.

Mi köze van ennek az egyszerű csokoládé példának a geometriai sorokhoz?

Az (1.8) szerint, egy szelvény 0.1 csokoládét meg 0.1 szelvényt ér. Így a 0.1 szelvény 0.01 csokoládét meg 0.01 szelvényt ér. *Tovább folytatva ezzel a gondolatmenettel:* a 0.01 szelvény értéke 0.001 csokoládé meg 0.001 szelvény. *És így tovább a végtelenségig* (1.3. ábra).

A matematika nyelvén ez így írható

$$s = 0.1c + 0.1s = 0.1c + 0.1(0.1c + 0.1s) = 0.1c + 0.1(0.1c + 0.1(0.1c + 0.1s))$$

összegezve

$$s = 0.1c + 0.1^2c + 0.1^3c + 0.1^3s$$

és teljes indukcióval

$$s = 0.1c + 0.1^2c + \dots + 0.1^n c + 0.1^n s \quad n = 1, 2, \dots \quad (1.9)$$

Az (1.9) alapján, a szelvény s értéke a $0.1c$ kezdetű, 0.1 hányadosú végtelen geometriai sor összege

$$s = 0.1c + 0.1^2c + \dots + 0.1^n c \dots$$

mivel $0.1^n s \rightarrow 0$.

1.2.1. Feladat *Hogyan alakul az (1.9) formula, ha a csokoládé ára 185 Ft és 12 szelvény kell egy újabb csokoládéhoz?*

1.2.2. Feladat *Fogalmazzuk meg a csokoládé példával hogy a c kezdetű és q hányadosú geometriai sor összege*

$$\frac{c}{1 - q}$$



1.3. ábra.

1.2.3. Feladat Vizsgáljuk meg, hogyan alakul az (1.2) rekurzív sorozat határértéke, amikor $x_0 \neq 0$.

1.3. A halmazelmélet viharos születése: a Cantor halmaz

Legyen \mathcal{M} egy véges sok elemből álló halmaz (továbbiakban *véges halmaz*). Azt, hogy \mathcal{M} hány elemből áll, úgy határozzuk meg, hogy párba állítjuk az

\mathcal{M} halmaz elemeit a természetes számokkal, vagyis megszámloljuk őket. Ha azt akarjuk tudni, hogy két véges halmaz \mathcal{A} és \mathcal{B} közül melyik a nagyobb, akkor nyilván elegendő a \mathcal{A} és \mathcal{B} elmeinek a párba állítása. Felesleges hogy a halmazokat külön-külön megszámloljuk. Ha a párba állítás után valamelyik halmaznak, mondjuk a \mathcal{B} halmaznak, maradnak pár nélkül elemei, akkor a \mathcal{B} halmaz a nagyobb.

Azt is mondjuk ekkor, hogy a \mathcal{B} halmaz **számossága** nagyobb.

Ezt a természetes eljárást *végtelen sok elemből álló halmazokra* alkalmazta Georg Cantor német matematikus a 19. század utolsó évtizedeiben és ezzel nagy vihart kavart tudós kortársai körében mivel ezzel nagyon furcsa, képtelenségnek tűnő eredményekre jutott.

A (triadikus) Cantor halmaz a legegyszerűbb olyan halmaz, amelyen ezek a furcsa, hihehetetlennek tűnő tulajdonságok megfigyelhetők.

A Cantor halmaz legegyszerűbben a következőképpen szerkeszthető. Vegyünk egy egyenesszakaszt, vegyük például a $[0, 1]$ zárt intervallumot. Töröljük az intervallum középső harmadát, a $(\frac{1}{3}, \frac{2}{3})$ nyílt intervallumot. Ezután a fennmaradó két egyenesszakasznak is töröljük a középső harmadát, az $(\frac{1}{9}, \frac{2}{9})$ és a $(\frac{7}{9}, \frac{8}{9})$ nyílt intervallumot és ezt az eljárást folytassuk a megmaradó egyenesszakaszokkal a „végtelenségig”. Az eljárás végterméke a (triadikus) \mathcal{C} Cantor halmaz (1.4. ábra).

Egy pontosabb leírása ennek:

Legyen \mathcal{C}_1 a $[0, 1] - (\frac{1}{3}, \frac{2}{3})$ zárt halmaz, vagyis a $[0, 1]$ középső harmadának, a $(\frac{1}{3}, \frac{2}{3})$ nyílt intervallumnak a törlése után kapott halmaz.

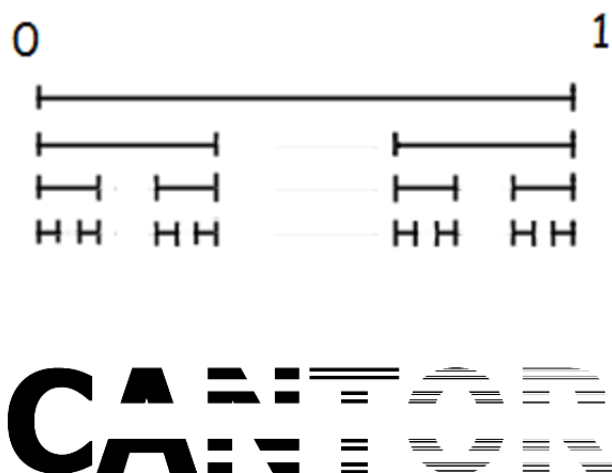
1.3.1. Definíció ((Triadikus) Cantor halmaz) A (triadikus) \mathcal{C} Cantor halmaz a „töröljük a középső nyílt harmadát mindegyik zárt intervallumnak” szabály ismétlésével kapott \mathcal{C}_n ($n = 1, 2, \dots$) halmazok közös része

$$\mathcal{C} = \bigcap_{n=1}^{\infty} \mathcal{C}_n.$$

A \mathcal{C} halmaznak a következő tulajdonsága van:

1. a Cantor halmaz hossza csak 0 lehet.
2. a Cantor halmaz számossága megegyezik a $[0, 1]$ számosságával.
3. Ha a $[0, \frac{1}{3}] \cap \mathcal{C}$ vagy a $[\frac{2}{3}, 1] \cap \mathcal{C}$ halmazt háromszorosára nagyítjuk, akkor megkapjuk az egész \mathcal{C} Cantor halmazt.

Így a \mathcal{C} Cantor halmaz, hozzá hasonló $[\frac{2}{3}, 1] \cap \mathcal{C}$ és a $[0, \frac{1}{3}] \cap \mathcal{C}$ halmazok uniója (egyesítése). Ezta tulajdonságot *önhasonlóságnak* nevezzük.



1.4. ábra.

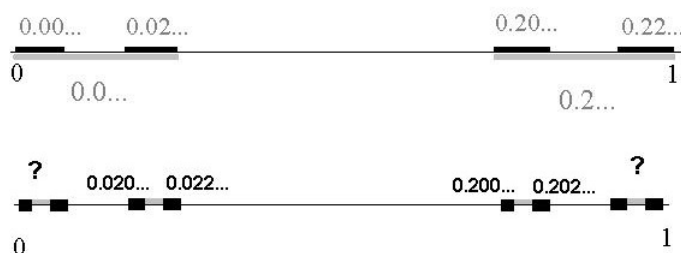
Elsősorban a **2.** állítás az, ami hihetetlennek tűnik, ami elképesztő volt Georg Cantor kortársai, a 19. századvég matematikusai számára. Hogyan lehetséges az, hogy egy halmaz számossága ugyanannyi, mint egy nagyon kicsi részének a számossága?! Georg Cantornak a már említett párbaállításon alapuló magyarázatát is valamiféle szemfényvesztésnek tekintették.

Bizonyítás (1). Nyilvánvaló, hiszen az eljárás minden lépésében a halmaz egyharmadát töröljük és így a megmaradó intervallumok hossza elegendően sok lépés után tetszőlegesen kicsivé válik. Pontosabban, az n -edik lépés után a megmaradó zárt intervallumok (uniojának) hossza $(\frac{2}{3})^n$ amely bármely pozitív számnál kisebbé válik ha n elég nagy.

Bizonyítás (2). A Cantor halmaz itt ismertetett, egyszerű szerkesztése egy geometriai konstrukció. Megadhatjuk azonban a Cantor halmazt egy aritmetikai konstrukcióval is. Irjuk fel a $[0, 1]$ intervallum minden elemét triadikus tört alakban (három számrendszerben). A Cantor halmaz szerkesztésében az első lépés ekkor azt jelenti, hogy mindazokat a pontokat (törteket) távolítjuk el amelyek triadikus alakjában a törtjel után 1 áll.

A második lépésben mindazokat a pontokat (törteket) töröljük amelyek triadikus alakjában a törtjel utáni második jegy 1 (1.5. ábra).

A geometriai szerkesztés mellett a \mathcal{C} Cantor halmaz a következő aritmetikai eljárással is előállítható:



a két szürke intervallum az első iteráció eredménye
a két fekete intervallum a második iteráció eredménye

1.5. ábra.

A szerkesztés n -edik lépésében mindazokat a pontokat (törteket) töröljük amelyek triadikus alakjában a törtjel utáni n -edik jegy 1 ($n = 1, 2, \dots$)

Megmutatjuk, hogy a $[0, 1]$ intervallumnak ugyanazt a részhalmazát kapjuk, mint amikor rekurzív módon, töröljük a zárt intervallumoknak középső nyílt harmadát.

Azok a triadikus törtek, amelyeket az első lépésben töröltünk, pontosan a $(\frac{1}{3}, \frac{2}{3})$ intervallum. A második lépésben töröltük a $0.01\dots$ és $0.21\dots$ triadikus törteket. Ezek pontosan a $(\frac{1}{3^2}, \frac{2}{3^2})$ és $(\frac{2}{3} + \frac{1}{3^2}, \frac{2}{3} + \frac{2}{3^2})$ intervallumok pontjai.

Az n -edik lépés után töröljük azokat a maradék pontokat, amelyek triadikus tört alakjában 1 áll az $n + 1$ -edik helyen. Pontosabban, mindazokat a triadikus törteket töröljük, amelyek $n + 1$ -edik jegye 1 és az első n helyen csakis 0 és 2 áll. Az első ilyen intervallum $(\frac{1}{3^{n+1}}, \frac{2}{3^{n+1}})$, amely a $[0, \frac{1}{3^n}]$ középső nyílt harmada. A többi bentmaradó-törleendő pár ezeknek a translációja (eltoltja).

MEGJEGYZÉS. Azokat a tizedestörteket, amelyekben egy adott jegytől csupa nulla áll, kétféle módon lehet felírni. Például, 0.01 és $0.00999\dots$ ugyan-

az a tizedesszám. Ez a jólismert tulajdonság triadikus törtekre is áll. Például, a 0.1 és $0.0222\dots$, 0.01 és $0.00222\dots$, 0.001 és $0.000222\dots$, triadikus tört pároknak a $[0, 1]$ intervallum ugyanazon pontja felel meg. A \mathcal{C} Cantor halmaz aritmetikai előállításában ezek a pontok is szerepelnek (természetesen a 0 és 2 számjegyekkel felírt formában).

Ezután ha felírjuk a Cantor halmaz pontjait triadikus tört alakjában és a $[0, 1]$ pontjait bináris tört alakban (kettes számrendszerben), akkor rögtön láthatjuk, hogy hogyan tudjuk őket párba állítani. Mivel a Cantor halmazba pontosan azok a pontok tartoznak, amelyek triadikus alakja csakis 0 és 2 számjegyet tartalmaz, a párba állítás a következő egyszerű szabály szerint történhet:

Cseréljük le az $x \in \mathcal{C}$ triadikus alakjában a 2 számjegyeket 1 -re. Az így kapott bináris tört lesz az x párja

(Például, ha $x = 0,2202|_3$, akkor a párja a $0,1101$ bináris tört. Tizedestörtekben kifejezve, a $0,47419\dots$ párja $0,8125$.)

Bizonyítás (3). *A $[0, 1]$ első harmadának triadikus tört alakja $0,0\dots$, vagyis mindazon pontok halmaza, amelyek triadikus tört alakjában a törtjel után 0 van, hiszen ezek a \mathcal{C} mindazon pontjai amelyek egyharmadnál kisebbek. A \mathcal{C} mindazon pontjai amelyek kétharmadnál nagyobbak az összes $0,2\dots$ alakú triadikus törtek, vagyis mindazon pontok halmaza, amelyek triadikus tört alakjában a törtjel után 2 van.*

Ha a \mathcal{C} $0,0\dots$ alakú pontjait hárommal szorozzuk akkor megkapjuk a \mathcal{C} összes pontját.

Ha a \mathcal{C} $0,2\dots$ alakú pontjaiból levonunk kétharmadot, akkor a \mathcal{C} $0,0\dots$ alakú pontjait kapjuk.

1.3.1. Feladat *Módosítsuk a Cantor halmaz szerkesztését úgy, hogy $\frac{1}{3}$ helyett mindig a megmaradó zárt intervallumok középső (nyílt) $\frac{1}{2}$ részét töröljük és ezt ismételjük újra meg újra. Legyen az így kapott halmazok sorozata \mathcal{C}_n^* ($n = 1, 2, \dots$).*

Mennyi lehet ekkor az \mathcal{C}_n^ ($n = 1, 2, \dots$) halmazok közös részének hossza?*

1.3.2. Feladat *Módosítsuk a Cantor halmaz szerkesztését úgy, hogy $\frac{1}{3}$ helyett mindig a megmaradó zárt intervallumok középső (nyílt) $\frac{1}{1000}$ részét töröljük és ezt ismételjük újra meg újra. Legyen az így kapott halmazok sorozata \mathcal{C}_n^{**} ($n = 1, 2, \dots$).*

*Mennyi lehet ekkor az \mathcal{C}_n^{**} ($n = 1, 2, \dots$) halmazok közös részének hossza?*

1.3.3. Feladat Tudunk-e olyan kis $\frac{1}{N}$ számot mondani, hogy ha mindig a megmaradó zárt intervallumok középső (nyílt) $\frac{1}{N}$ részét töröljük és ezt ismételjük újra meg újra, akkor pozitív lesz a megmaradó halmazok közös részének a hossza?

Egy másik eljárás a Cantor halmaz szerkesztésére.

Legyen

$$F_1(x) = \frac{1}{3}x, \quad F_2(x) = \frac{1}{3}x + \frac{2}{3} \quad (x \in R). \quad (1.10)$$

Alkalmazzuk a $[0, 1]$ pontjaira az F_1 majd az F_2 függvényt. Az így kapott halmazok egyesítése \mathcal{C}_1 , vagyis az a halmaz, amelyet a $(\frac{1}{3}, \frac{2}{3})$ nyílt intervallum törlésével kapunk.

A \mathcal{C}_{n+1} $n = 1, 2, \dots$ halmazt úgy kapjuk, hogy a \mathcal{C}_n halmazra alkalmazzuk az F_1 majd az F_2 függvényt, majd az így kapott halmazokat egyesítjük.

Állítás. A \mathcal{C}_n $n = 1, 2, \dots$ halmazok közös része

$$\mathcal{C} = \bigcap_{n=1}^{\infty} \mathcal{C}_n$$

a (triadikus) \mathcal{C} Cantor halmaz lesz.

1.3.4. Feladat Igazoljuk az állítást.

1.3.5. Feladat Irjunk fel olyan $F_1, F_2: R \rightarrow R$ függvénpárt, hogy a szerkesztés eredménye a

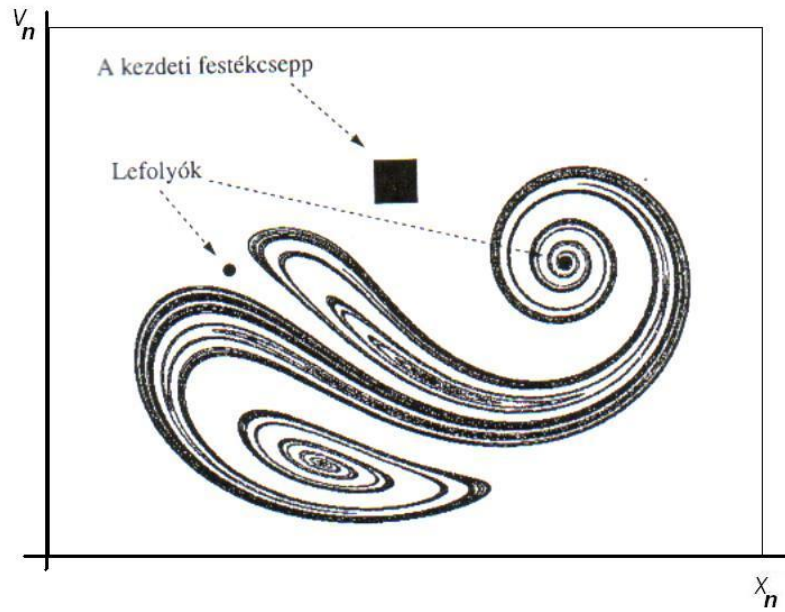
$$\mathcal{C}^{**} = \bigcap_{n=1}^{\infty} \mathcal{C}_n^{**}$$

halmaz legyen.

Ha egyharmad helyett az intervallumok $p\%$ -át töröljük, ekkor is Cantor halmaznak nevezzük a kapott halmazt.

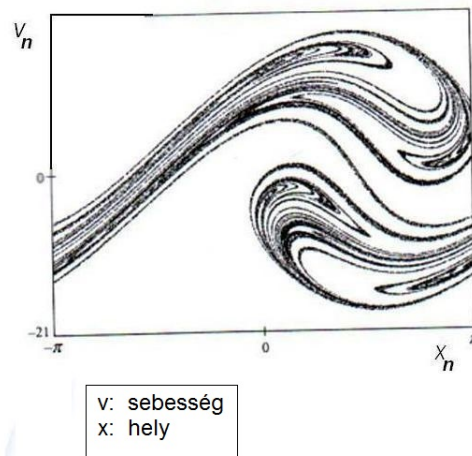
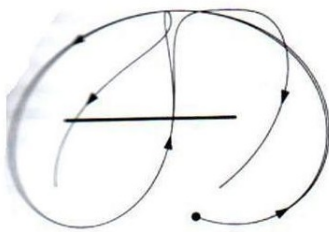
Cantor halmazok számos helyen fordulnak elő a természetben és a matematikai modellalkotásban. (1.6., 1.7., 1.8. ábra).

Szennyeződések sodródása



1.6. ábra.

"Rezegtetett" inga mozgása



1.7. ábra.



a szaturnusz bolygó gyűrűi

1.8. ábra.

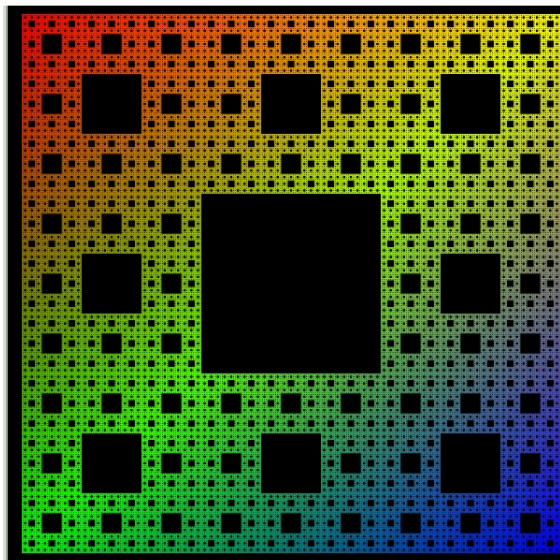
1.4. A Sierpinski szőnyeg (carpet)

Az egységnégyzetet, a $[0, 1] \times [0, 1]$ halmazt felosztjuk 3×3 egyenlő négyzetre és töröljük a középső $\frac{1}{3} \times \frac{1}{3}$ nyílt négyzetlapot, majd ugyanezt tesszük a maradék nyolc négyzettel újra meg újra. Az így kapott \mathcal{S}_n $n = 1, 2, \dots$ halmazok közös része az \mathcal{S} Sierpinski szőnyeg (carpet) (1.9. ábra).

Az \mathcal{S} halmaznak a Cantor halmazhoz hasonló tulajdonságai vannak:

1. a Sierpinski szőnyeg területe csak 0 lehet.
2. a Sierpinski szőnyeg számossága megegyezik a $[0, 1] \times [0, 1]$ számosságával.
3. Ha a $[0, \frac{1}{3}] \times [0, \frac{1}{3}] \cap \mathcal{S}$ halmazt lineárisan a háromszorosára nagyítjuk, akkor megkapjuk az egész Sierpinski szőnyeget. Az \mathcal{S} Sierpinski szőnyeg nyolc egyharmad méretű Sierpinski szőnyeg egyesítése.

A Sierpinski szőnyeg a Cantor halmaz kétdimenziós analógiájának is tekinthető. A Sierpinski szőnyeg, éppúgy mint a Cantor halmaz, határtalanul nagyítható. Ez azt jelenti, hogy nagyításkor egyre több és több részlet bukkan fel és így a halmaz egyre lyukacsosabbnak látszik. Pontosabban, bármilyen kis $d > 0$ számot adunk meg, a Sierpinski szőnyeg tartalmaz egy legfeljebb d átmérőjű Sierpinski szőnyeget.



1.9. ábra.

A nagyítást csupán bizonyos mélységig tudjuk elvégezni, amely függ a felület (például a számítógép képernyője) felbontó képességétől. Ha azonban a nagyítás közben az iterációt is folytatjuk és e két művelet szinkronban van, akkor a nagyítást bármennyig folytathatjuk és szemlélhetjük ezt a jelenséget.

A Sierpinski szőnyeg egy másik szerkesztése.

Legyen \mathcal{S}_0 a $[0, 1] \times [0, 1]$ egységnégyzet és

F_1 : Skálaváltoztatás (zsugorítás) $\frac{1}{3}$ faktossal.

F_2 : Skálaváltoztatás (zsugorítás) $\frac{1}{3}$ faktossal és eltolás $(\frac{1}{3}, 0)$ vektorral.

F_3 : Skálaváltoztatás (zsugorítás) $\frac{1}{3}$ faktossal és eltolás $(\frac{2}{3}, 0)$ vektorral.

F_4 : Skálaváltoztatás (zsugorítás) $\frac{1}{3}$ faktossal és eltolás $(0, \frac{1}{3})$ vektorral.

F_5 : Skálaváltoztatás (zsugorítás) $\frac{1}{3}$ faktossal és eltolás $(0, \frac{2}{3})$ vektorral.

F_6 : Skálaváltoztatás (zsugorítás) $\frac{1}{3}$ faktossal és eltolás $(\frac{1}{3}, \frac{2}{3})$ vektorral.

F_7 : Skálaváltoztatás (zsugorítás) $\frac{1}{3}$ faktossal és eltolás $(\frac{2}{3}, \frac{1}{3})$ vektorral.

F_8 : Skálaváltoztatás (zsugorítás) $\frac{1}{3}$ faktossal és eltolás $(\frac{2}{3}, \frac{2}{3})$ vektorral.

Az $\{F_i; i = 1, 2, \dots, 8\}$ leképezések (függvények) mátrix alakban

$$\begin{aligned}
F_1(x) &= \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \\
F_2(x) &= \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ 0 \end{pmatrix} \\
F_3(x) &= \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{2}{3} \\ 0 \end{pmatrix} \\
F_4(x) &= \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{3} \end{pmatrix} \\
F_5(x) &= \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{2}{3} \end{pmatrix} \\
F_6(x) &= \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} \end{pmatrix} \\
F_7(x) &= \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} \end{pmatrix} \\
F_8(x) &= \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} \end{pmatrix}
\end{aligned} \tag{1.11}$$

A \mathcal{S}_{n+1} $n = 0, 1, \dots$ halmazt úgy kapjuk, hogy a \mathcal{S}_n halmazra alkalmazzuk az $\{F_k \mid k = 1, \dots, 8\}$ függvényeket, majd az így kapott halmazokat egyesítjük.

Állítás. A \mathcal{S}_n $n = 1, 2, \dots$ halmazok közös része

$$\mathcal{S} = \bigcap_{n=1}^{\infty} \mathcal{S}_n$$

lesz a Sierpinski szőnyeg.

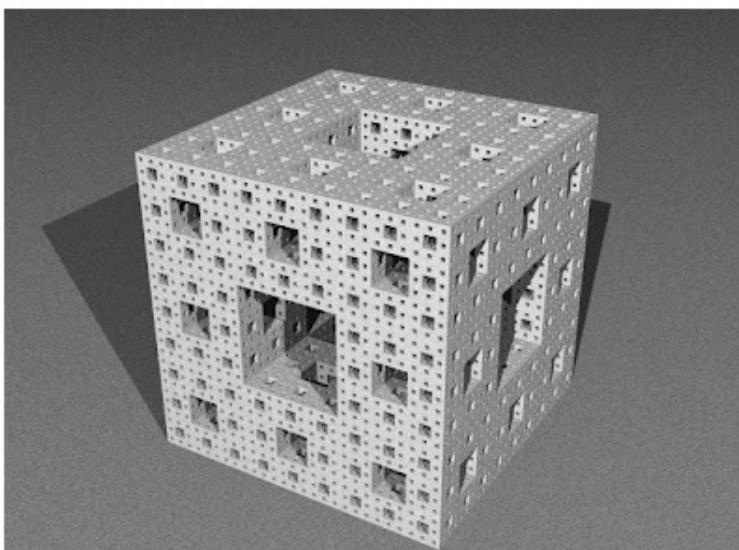
Ennek a másik szerkesztésnek az az előnye, hogy ha az egységnyezet helyett egy másik halmazból indulunk ki, a végeredmény ugyanaz lesz. A bizonyítást a **kontraktív leképezések tétele** fogja megadni.

1.4.1. Feladat Igazoljuk a Sierpinski szőnyeg 1-3 tulajdonságát. (Hint.: írjuk fel a $[0, 1] \times [0, 1]$ pontjait triadikus koordinátákkal.)

1.4.2. Feladat Igazoljuk a Sierpinski szőnyeg szerkesztését az (1.1) függvényrendszerrel.

1.4.3. Feladat *A Cantor halmaznak van térbeli megfelelője is (1.10. ábra). Ezt Menger szivacsnak is nevezik. Menger szivacs a következő végtelen rekurzív eljárással keletkezik. Egy kockát az oldalélek harmadolásával 27 egyenlő részre vágunk, és töröljük annak a hét kockának a belső pontjait, amelyeknek nincsen közös pontja a kocka élével. Az eljárás második lépésében ugyanezt csináljuk a megmaradt 20 kockával és ezt folytatjuk „a végtelenségig”. Éppúgy, mint a Cantor halmaznál, vagy a Sierpinski szőnyegnél, az eljárással kapott egymásba skatulyázott halmazok közös része a Menger szivacs.*

A Menger szivacs milyen metszete lesz Sierpinski szőnyeg? Milyen metszete lesz Cantor halmaz?

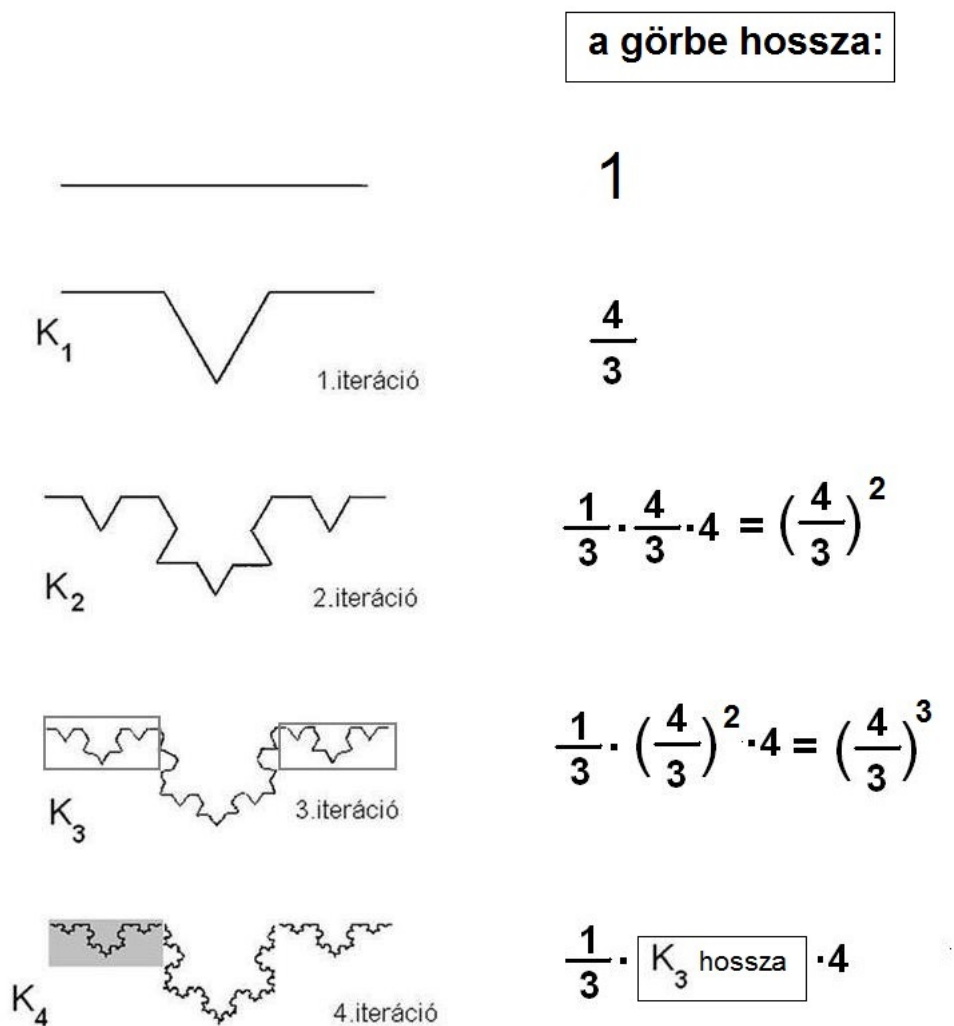


1.10. ábra.

Vegyük sorra a Cantor halmaz és a Sierpinski szőnyeg 1-3 tulajdonságát. Keressünk hasonló tulajdonságokat a Menger szivacs esetére.

1.5. A Koch görbe

(Egy poligon, amelynek bármilyen kis átmérőjű része végtelen hosszúságú)



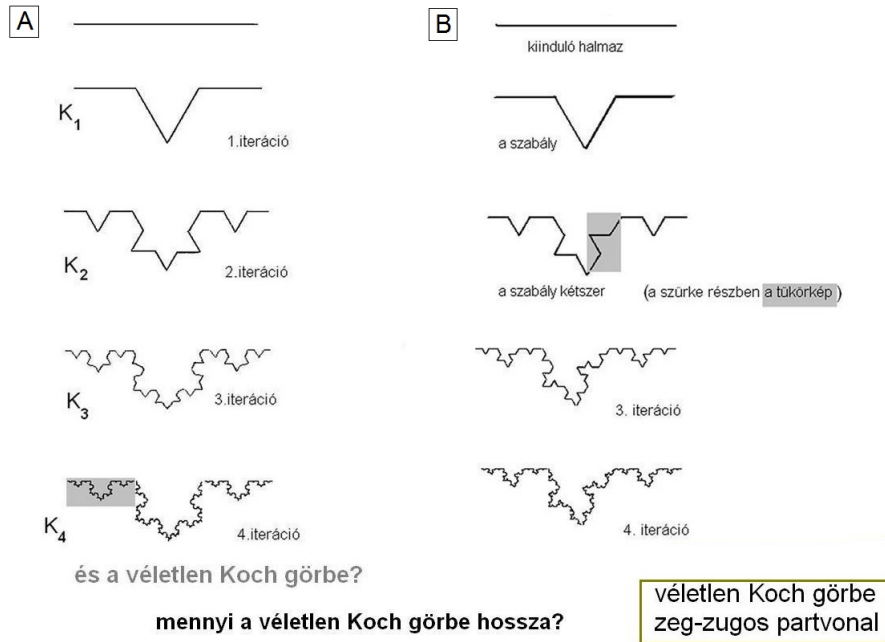
1.11. ábra.

A kezdő halmaz ezúttal is a $[0, 1]$ intervallum és a $\{\mathcal{K}_n \ n = 1, 2, \dots\}$ sorozat első eleme az 1.11. ábrán látható \mathcal{K}_1 poligon (törtvonal). Ezután

a $\{\mathcal{K}_n \ n = 2, \dots\}$ halmazokat úgy kapjuk, hogy a \mathcal{K}_{n-1} minden egyenesét

lecseréljük a \mathcal{K}_{n-1} negyedére skálázott (kicsinyített) változatával.

A szerkesztésből következik, hogy a Koch görbe négy negyedére skálázott (kicsinyített) Koch görbe egyesítése. Ha az 1.12/a. ábrán a szürke részt négyszeresére nagyítjuk, akkor is megkapjuk az egész Koch görbét. Vagyis *a Koch görbe önhasonló.*

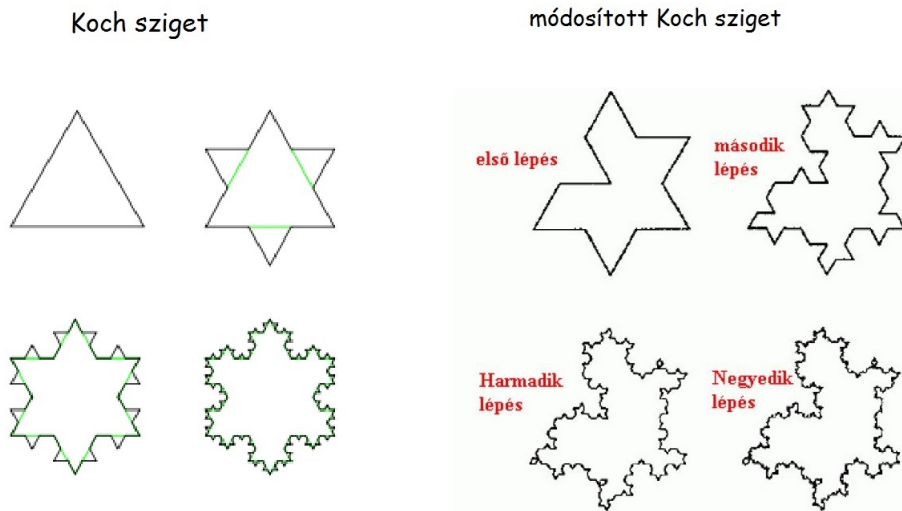


1.12. ábra.

A $\{\mathcal{K}_n \ n = 1, 2, \dots\}$ poligonok hossza tetszőlegesen nagy lesz ha elég messze megyünk a sorozatban. Ugyanis minden csere után a poligon hossza $\frac{4}{3}$ -szor nagyobb lesz. Vegyük észre, hogy a $\{\mathcal{K}_n \ n = 1, 2, \dots\}$ görbék *akármilyen kis átmérőjű szakaszának a hossza is tetszőlegesen nagy lesz.*

Az 1.12/B .ábrán egy olyan sorozatot mutatunk, amelyben a Koch görbére vezető sorozatot kissé módosítottuk. Az egyenesszakaszokat olykor NEM a \mathcal{K}_1 poligonnal, hanem annak a *tükörképével* helyettesítettük. Ez első ízben a 2. iteráció szürkével fedett részében válik láthatóvá. Ilyen módosításokkal különböző zeg-zugos görbék, például tengerpartvonalak modellezhetők. Példa erre az amikor minden lépésnél *véletlenszerűen* alkalmazzuk a generátor helyett a tükörképét.

Ha egyenesszakasz helyett, egy egyenlőoldalú háromszögből indulunk, akkor



1.13. ábra.

az 1.11. ábra szerkesztése egy zárt görbére, a *Koch szigetre* vezet (1.13. ábra).

A Koch görbe egy másik szerkesztése.

Az 1.11. ábrán látható \mathcal{K}_1 poligon (törtvonal) a következő lépésekben szerkeszthető

F_1 : vegyük az egyenesszakasz harmadát

F_2 : az egyenesszakasz harmadát forgassuk el 60° -al és toljuk előre egyharmaddal

F_3 : az egyenesszakasz harmadát forgassuk el 120° -al és toljuk előre egyharmaddal

F_4 : az egyenesszakasz harmadát toljuk előre kétharmaddal

A \mathcal{K}_1 poligon a fentiek egyesítése lesz

$$\mathcal{K}_1 = F_1([0, 1]) \cup F_2([0, 1]) \cup F_3([0, 1]) \cup F_4([0, 1]) = \bigcup_{k=1}^4 F_k([0, 1]). \quad (1.12)$$

A \mathcal{K}_2 poligont úgy kapjuk, hogy az (1.12) formulát alkalmazzuk a \mathcal{K}_1 -re

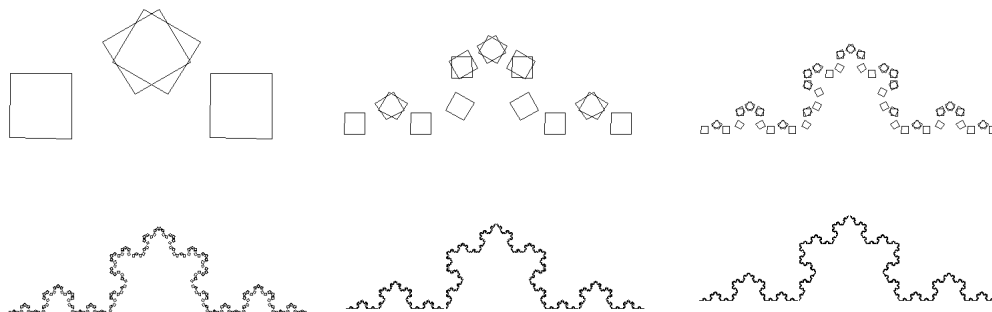
$$\mathcal{K}_2 = F_1(\mathcal{K}_1) \cup F_2(\mathcal{K}_1) \cup F_3(\mathcal{K}_1) \cup F_4(\mathcal{K}_1) = \bigcup_{k=1}^4 F_k(\mathcal{K}_1).$$

Hasonlóan kapjuk a K_n $n = 2, 3 \dots$ sorozat további részét:

A K_n poligont úgy kapjuk, hogy az (1.12) formulát alkalmazzuk a K_{n-1} -re

$$K_n = F_1(K_{n-1}) \cup F_2(K_{n-1}) \cup F_3(K_{n-1}) \cup F_4(K_{n-1}) = \bigcup_{k=1}^4 F_k(K_{n-1}).$$

Ennek a másik szerkesztésnek az az előnye, hogy ha az egyenesszakasz helyett egy másik halmazból indulunk ki, a végeredmény ugyanaz lesz (1.14. ábra). A bizonyítást a **kontraktív leképezések tétele** fogja megadni.



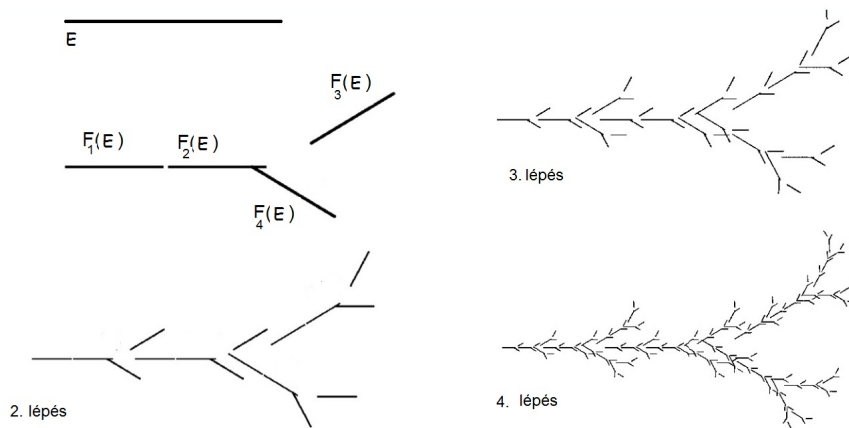
1.14. ábra.

1.6. Körülöttünk levő önhasonló halmazok

Határtalanul nagyítható faág.

Az 1.15. ábra azt mutatja, hogyan állítható elő egy faág képe egyszerű geometriai szabályok ismétlésével. Ekkor F_1, F_2, F_3, F_4 négy olyan transzformáció, amely az eredeti ábra lineáris méretét a 0.4-szeresére változtatja, majd az ábrán látható módon, különböző mértékben eltolja illetve elforgatja. Eme négy szabály uniójának (egyesítésének) ismétlésével alakul ki a faág.

Az ábrán egy egyenesszakaszból indultunk ki. De a fenti algoritmussal, *bármely halmazból indítva*, 7-8 lépés után egy faág képét kapjuk.



1.15. ábra.

1.6.1. Feladat Írjuk fel az F_1, F_2, F_3, F_4 leképezéseket (függvényeket) mátrix alakban.

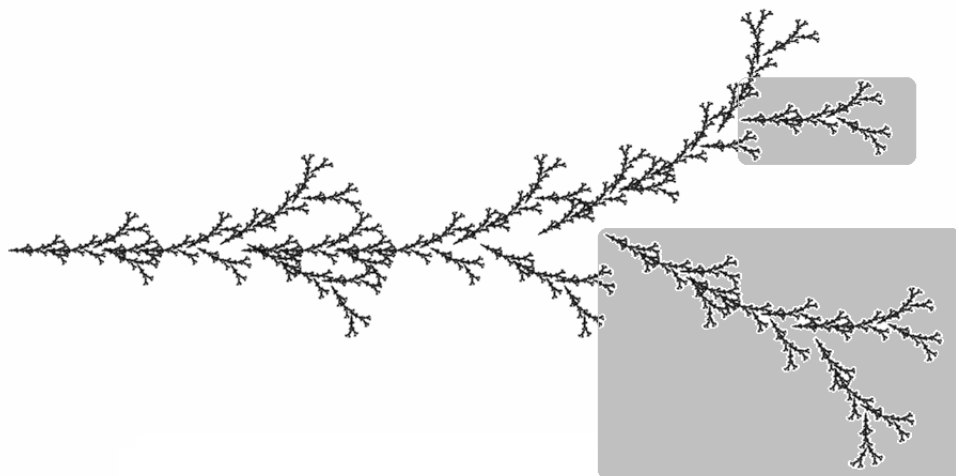
A faág szerkesztése egy 1.4 egység hosszú törtvonalból indul és minden lépésnél 1.4-szer lesz hosszabb a törtvonal. A poligon (törtvonal) hossza bármely M számnál is nagyobb lesz, ha elég messze megyünk a sorozatban. A szerkesztett halmaz *önhasonló* vagyis a faággal hasonló faágak uniója (1.16. ábra) és három elemi geometriai szabály, skála változtatás, eltolás és elforgatás ismételt alkalmazásával jön létre.

Egy *valódi* faág NEM önhasonló, NEM növekszik a végtelenségig és teljesen más dinamikával fejlődik, mint az 1.15. ábrán látható halmaz. Mégis, az 1.15. és az 1.16. ábrán látható halmazt egy faág képeinek tekintjük.

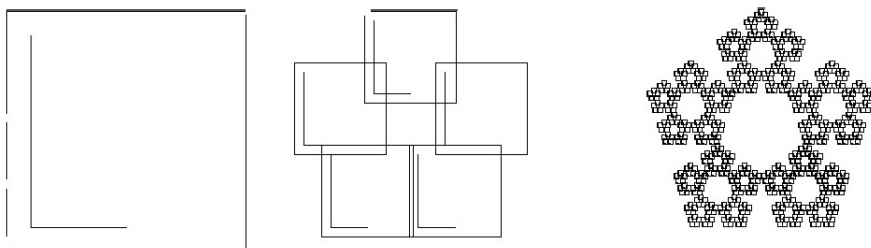
Az ábrák és egy *valódi faág* kapcsolata szemléletesen mutatja azt hogy egy természettudományos jelenség és annak matematikai modellje milyen kapcsolatban állnak egymással. A természet nem a matematika nyelvén beszél, ahogyan azt Gallilei gondolta, hanem fordítva, a matematikai (természettudományos) modellek azok, amelyekkel tájékozódunk a világban.

Rozetta ablak.

Az 1.17. ábra egy rozetta ablak szerkesztését mutatja. Az induló halmaz egy négyzet és a második ábrából leolvasható az öt leképezés, amely uniójának iterációjával (a szabályt újra meg újra ismételve), kapjuk a harmadik ábrát, a rozetta ablakot.



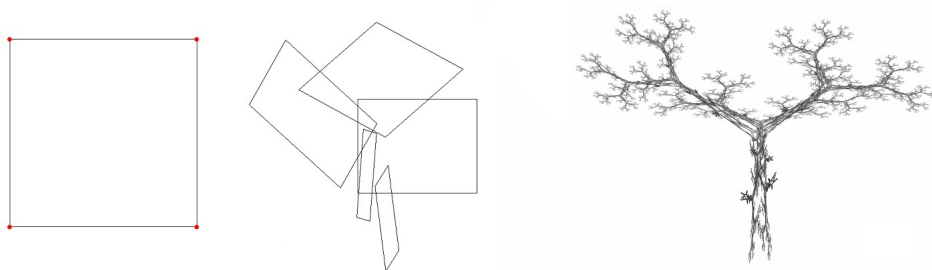
1.16. ábra.



1.17. ábra.

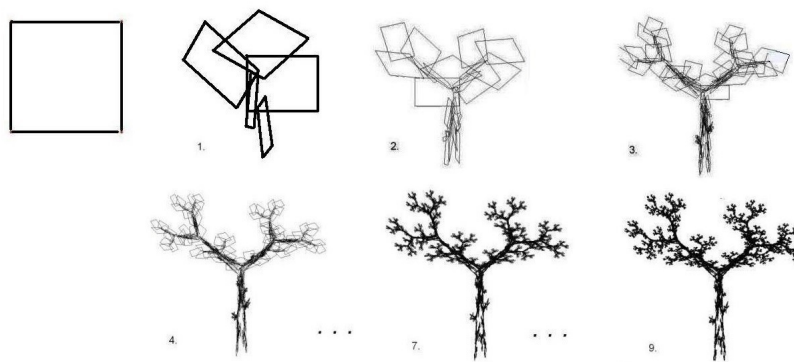
Önaffin fa.

Az 1.18. és az 1.19. ábrán látható fa a következő öt szabály (függvény, leképezés) egyesítése (unioja)



1.18. ábra.

hogyan készül? (képekben)



1.19. ábra.

$$F_1(x) = \begin{pmatrix} 0.1950 & -0.4880 \\ 0.3440 & 0.4430 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 333 \\ 183 \end{pmatrix}$$

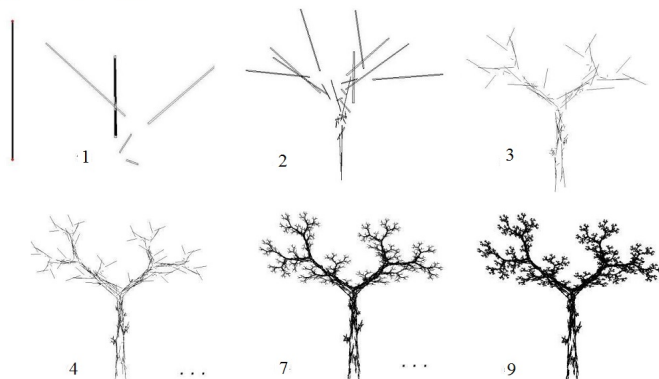
$$F_2(x) = \begin{pmatrix} 0.4620 & 0.4140 \\ -0.2520 & 0.3610 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 186 \\ 426 \end{pmatrix}$$

$$F_3(x) = \begin{pmatrix} -0.0580 & -0.0700 \\ 0.4530 & -0.1110 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 450 \\ 72 \end{pmatrix}$$

$$F_4(x) = \begin{pmatrix} -0.0350 & 0.0700 \\ -0.4690 & -0.0220 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 366 \\ 372 \end{pmatrix}$$

$$F_5(x) = \begin{pmatrix} -0.6370 & 0.0000 \\ 0.0000 & 0.5010 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 642 \\ 186 \end{pmatrix}$$

négyzet helyett egyenesből indítva...



1.20. ábra.

Az ábrán itt is csupán az első lépés (iteráció) eredményét és az eljárás végtermékét, az ábrán látható fát mutatjuk meg. Itt egy négyzetből indítunk és 7-8 iteráció után már megfelelő közelítést kapjuk a végterméknek.

Azok a megállapítások, amelyeket a határtalanul nagyítható faág és egy valószínű faág kapcsolatára tettünk, az önaffin fára is vonatkozik.

Csillár

A következő függvények uniójából egy csillárra emlékeztető alakzat állítható elő:

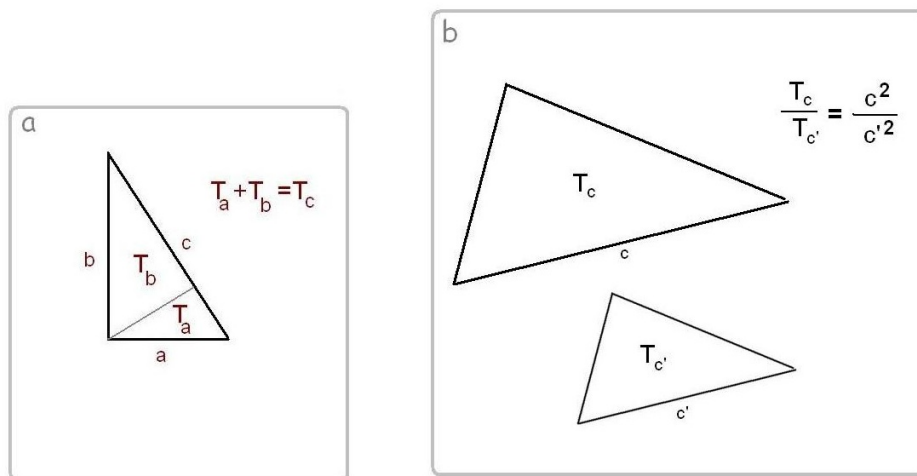
$$\begin{aligned}
 F_1(x) &= \begin{pmatrix} 0.3 & 0 \\ 0 & 0.3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \\
 F_2(x) &= \begin{pmatrix} 0.3 & 0 \\ 0 & 0.3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 100 \\ 0 \end{pmatrix} \\
 F_3(x) &= \begin{pmatrix} 0.3 & 0 \\ 0 & 0.3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 100 \end{pmatrix} \\
 F_4(x) &= \begin{pmatrix} 0.3 & 0 \\ 0 & 0.3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 50 \\ 50 \end{pmatrix} \\
 F_5(x) &= \begin{pmatrix} 0.3 & 0 \\ 0 & 0.3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 100 \\ 100 \end{pmatrix} \\
 F_6(x) &= \begin{pmatrix} 0.6 & 0 \\ 0 & 0.6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 150 \\ 150 \end{pmatrix}.
 \end{aligned}$$

A faág, fa, ablak és csillár képeit az iterációs szabály és csupán $N \times 6$ paraméter (számadat) teljesen meghatározza. (N a mátrixfüggvények száma.)

Ezzel képtömörítést érünk el, mivel itt $N \times 6$ számadat meghatároz több ezer képpontot.

1.7. A pitagorasz tétel legegyszerűbb bizonyítása

Egy derékszögű háromszög önhasznó. A c átfogóhoz tartozó m_c magasság két, a háromszöggel hasonló háromszögre bontja a derékszögű háromszöget. Ha a háromszög oldalait r -szeresre változtatjuk, akkor területe az r^2 -szeresére változik (1.21. ábra).



1.21. ábra.

Csupán ebből a két tulajdonságból már igazolható a pitagorasz tétel. A matematika nyelvén ez a két tulajdonság

$$T_1 + T_2 = T_3 \quad (1.13)$$

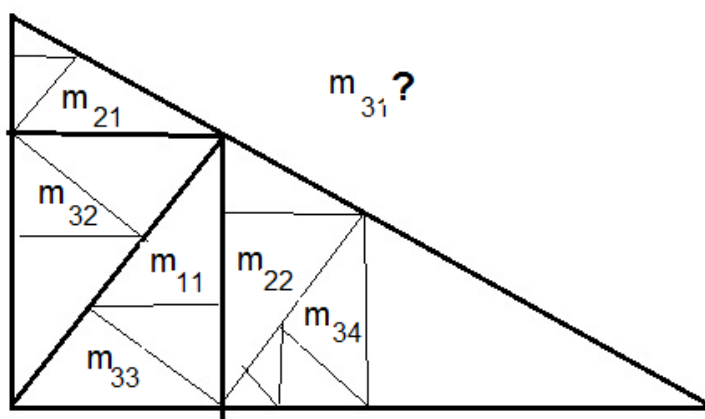
$$\frac{T_1}{T_3} = \frac{a^2}{c^2} \quad , \quad \frac{T_2}{T_3} = \frac{b^2}{c^2} \quad (1.14)$$

Az (1.13) és az (1.14) összevetésével

$$\frac{a^2}{c^2} + \frac{b^2}{c^2} = 1$$

ami, c^2 -el átszorozva, már a pitagorasz tétel.

1.7.1. Feladat Legyen a derékszögű háromszög c átfogójához tartozó magasság $m_c = m_{11}$. Az m_{11} magassággal nyert derékszögű háromszögek átfogóhoz tartozó magasságai legyenek m_{21} és m_{22} . Az m_{21} és m_{22} magasságokkal nyert derékszögű háromszögek átfogóhoz tartozó magasságai legyenek m_{31} , m_{32} , m_{33} és m_{34} (1.22. ábra).



1.22. ábra.

A rekurzív módon így folytatott szerkesztés k -adik lépésében kapott i -edik háromszög magassága legyen m_{ki} és a k -adik lépésében kapott háromszögek száma legyen s_k .

1. Mennyi lesz

$$\sum_{i=1}^{s_k} m_{ki} \quad \sum_{i=1}^{s_k} m_{ki}^2 ?$$

2. Mennyi lesz

$$\sum_{k=1}^{\infty} \sum_{i=1}^{s_k} m_{ki} \quad \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{i=1}^{s_k} m_{ki}^2 ?$$

1.8. Milyen hosszú a norvég tengerpart?

Lewis Fry Richardson a huszadik század első felének polihisztora volt, fizikus, meteorológus, matematikus és pszichológus egyszemélyben. Az első világháború nyomasztó élményei után a háborúk okait vizsgálta és úgy gondolta, hogy két ország között egy hosszú határvonal nagyobb esélyt ad egy háborús konfliktus kirobbantására, mint egy rövidebb határ. Ezért kapcsolatot próbált létesíteni két ország közötti határvonal hosszúsága és az országok közötti háborús konfliktusok között. Ebéli vizsgálatai során meglepetéssel tapasztalta hogy a különböző országok hivatalaiban *ugyanaz a határvonal különböző hosszúsággal van feljegyezve*. Például Portugália és Spanyolország határvonala 987 kilométer volt az egyik ország és 1214 kilométer volt a másik ország földhivatalában. Csupán a nagyon zezugos határvonalaknál tapasztalt ilyen eltérést. Kanada és az Egyesült Államok határvonala, amely nagyrészt egyenesvonalú, ugyanolyan adattal szerepelt mindkét ország földhivatalában. Richardson javaslatot is tett egy robosztusabb mérési eljárásra zezugos határ vagy partvonalak esetére. *Richardson észrevételeit és javaslatát kétséggel fogadta a tudományos világ majd az ügy feledésbe is merült.*

Mandelbrot, a fraktálmélet atyja és névadója emelte ki a feledésből Richardson észrevételeit a „How Long is the Coast of Britain?” c. 1967-ben megjelent írásában ahol a nagyon zezugos vonalakat, mint amilyen Norvégia partvonala, törtdimenziós görbéknek nevezte.

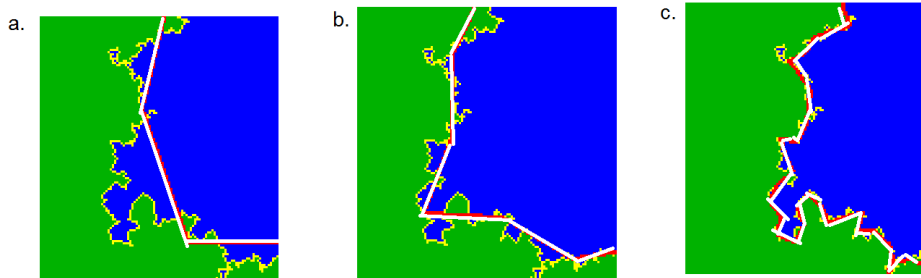
Ahhoz hogy megértsük a zezugos partvonalak mérésére szolgáló Mandelbrot-Richardson koncepciót, meg kell ismernünk a partvonal hagyományos mérését, amely az **ívhossz definíciójára** épül.

A partvonal szokásos mérése úgy történik hogy háromszögelési pontokat jelölnek ki a partvonalon és ezek távolságaiból építik fel a partvonal hosszát. Ha az i -edik és $i + 1$ -edik háromszögelési pont távolsága $L(i)$ és a megméréendő partvonal k háromszögelési pontot tartalmaz, akkor a partvonal hosszának a

$$\sum_{i=1}^{k-1} L(i) \tag{1.15}$$

összeget tekintik. Ez összhangban van az **ívhossz definíciójával** és az (1.15) összeg jól közelíti a partvonal hosszát ha újabb háromszögelési pontok felvételével ez az összeg alig változik. Ezt illusztrálja az 1.23. ábra, ahol az (1.15) összeg már nem változik lényegesen ha az 1.23/C. ábrán újabb háromszögelési pontokat veszünk fel.

Ha a szokásos skálán végzett háromszögelési eljárásakor, újabb háromszögelési pontok felvételével az (1.15) összeg jelentősen növekszik, ekkor csődöt mond ez az eljárás.



1.23. ábra.

Richardson javaslata az volt, hogy ekkor (1.15) helyett az

$$\sum_{i=1}^{k-1} L(i)^s \quad s > 1. \quad (1.16)$$

összeget tekintjük. Zeg-zugos partvonal esetén, amikor újabb háromszögelési pontok felvételével az (1.15) összeg jelentősen változik, azzal a *legkisebb* $s > 1$ értékkel adjuk meg a partvonal méretét, amikor az (1.16) már alig változik újabb háromszögelési pontok felvételével.

Az (1.15) képletet tudjuk értelmezni: (1.15) megadja a beírt poligon hosszát, amikor a beírt poligon már alig különbözik a görbétől, ami jelen esetben a megméréndő partvonal. *Node mit jelent az s az (1.16) képletben?* És hogyan tudjuk az s értékét meghatározni?

A Richardson-Mandelbrot eljárás matematikai háttere.

Vannak görbék amelyeknek nincsen ívhosszuk. Ez az *ív hossz definíciója* alapján azt jelenti, hogy bármilyen nagy M számot adunk meg, van olyan beírt poligon, amelynek hossza nagyobb mint M . Ekkor

$$\lim_{r \rightarrow 0} N(r)r = \infty \quad (1.17)$$

ahol $N(r)$ a beírt poligon poligon éleinek a száma. Azt is mondjuk ekkor, hogy a görbe ívhossza végtelen.

Ha a görbe ívhossza végtelen, akkor tekintjük az $N(r)r^s$ értékeket. Ha $r < 1$ és $1 \leq s' < s''$ akkor

$$N(r)r^{s'} > N(r)r^{s''}.$$

Ezért *lehetséges* olyan $s > 1$ hogy $N(r)r^s$ konvergens ha $r \rightarrow 0$ vagyis

$$\lim_{r \rightarrow 0} N(r)r^s = c \quad (0 < c < \infty \quad s > 1) \quad (1.18)$$

A legkisebb s érték amelyre (1.18) érvényes a *görbe dimenziója*.

Legyen

$$L(r, s) = N(r)r^s$$

ekkor

$$\log L(r, s) = \log N + s \log r \quad (1.19)$$

és ha (1.18) érvényes, akkor

$$s = \lim_{r \rightarrow 0} \frac{\log N}{-\log r}. \quad (1.20)$$

Ezzel megadtunk egy *formulát* az s meghatározására.

1.8.1. Feladat *Igazoljuk, hogy legfeljebb egy olyan s van amelyre (1.18) érvényes.*

Ha a \mathcal{G}_1 görbe s_1 dimenziója nagyobb mint a \mathcal{G}_2 görbe s_2 dimenziója, akkor *elegetően kis r mellett*, a \mathcal{G}_2 görbe r élű húrpoligonja éleinek száma, $N_2 - 1$, nagyobb mint a \mathcal{G}_1 görbe ugyanolyan r élű húrpoligonja éleinek száma, $N_1 - 1$. Így, *ugyanazon r mellett*, a \mathcal{G}_2 görbe húrpoligonja hosszabb mint a \mathcal{G}_1 görbe húrpoligonja.

Ezt úgy is kifejezhetjük, hogy nagyobb s esetén, a beírt poligonok hossza, $r \rightarrow 0$ esetén, „gyorsabban” tart a végtelenhez.

A Richardson-Mandelbrot eljárást úgy összegezzük, hogy amikor egy görbe ívhossza végtelen, akkor a görbe nagyságát azzal mérjük, hogy az (1.17) milyen gyorsan tart a végtelenhez.

Azt is mondhatjuk, hogy a görbe dimenziója annak zeg-zugosságát méri. Amikor az ívhossz nem mérhető, akkor a görbe dimenziója egy $s \in [1, 2]$ érték és nagyobb s esetén a görbe zeg-zugosabb képet mutat. Ezt úgy is szokták kifejezni, hogy ekkor nagyobb a görbe komplexitása.

Az s törtdimenzió alkalmazása a geodéziában.

Térképek készítésénél a következő szerepe lehet a törtdimenzióknak. Ha egy kisebb léptékű térkép alapján egy *nagyobb léptékűt* készítünk, akkor a térkép vonalai „megrövidülnek”. Egy partvonal kisméretű öblei, a rövid, éles kanyarok egy folyónál eltűnhetnek a nagyobb léptékű térképen. A vonalhossz megváltozásának a mértékét, vagyis a térkép pontosságának a mértékét, ekkor a törtdimenzió adja (*Miért?*). Ha az s közel van az 1-hez, akkor vonalhosszak megváltozása kicsi, nem jelentős.

A véletlen Koch görbék modellként szolgálnak a zezugos partvonalaknak. A legtöbb zezugos partvonalhoz szerkeszthető olyan véletlen Koch görbe, ahol a partvonal menetével adott törvényszerűség szerint olykor a \mathcal{K}_1 poligonnal, olykor a tükörképével cseréljük le az egyenesszakaszokat.

A partvonal és a véletlen Koch görbe modell kapcsolata analóg azzal, amilyen egy valódi faág és a határtalanul nagyítható faág kapcsolata.

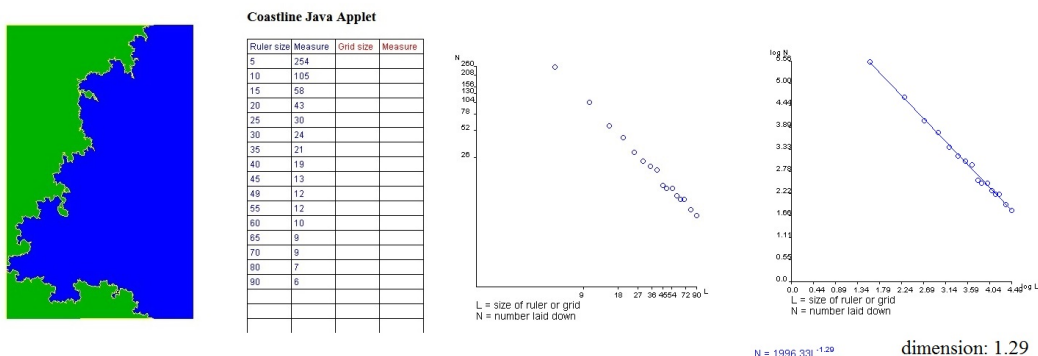
A dimenzió grafikus meghatározása.

A gyakorlatban legtöbbször nem az (1.20) formulával, hanem egy *geometriai eljárással* határozzák meg s értékét.

Az r, N kordinátarendszerben felvesszünk egy $r_n \rightarrow 0$ sorozathoz tartozó

$$[\log N, -\log r] \tag{1.21}$$

pontsorozatot. Ha az (1.20) határérték létezik, akkor a nullához közeli r értékekhez tartozó pontok egy olyan egyenes mentén sorakoznak, amelynek meredeksége s (1.24. ábra).



1.24. ábra.

1.8.2. Feladat Határozzuk meg a Koch görbe dimenzióját.

1.8.3. Feladat Határozzuk meg a faág dimenzióját.

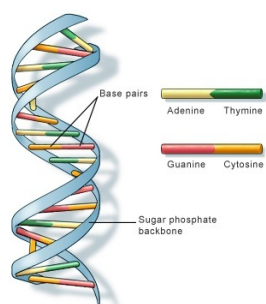
1.8.4. Feladat Melyik igaz és melyik hamis a következő állítások közül:

1. A Koch görbe és a Koch sziget dimenziója megegyezik.
2. Ha a Koch szigetet három egyenlő részre vágjuk, akkor mindegyik rész dimenziója megegyezik az egész Koch sziget dimenziójával.

1.8.5. Feladat Igazoljuk, hogy ha $s > 1$ akkor a beírt poligonok hossza tetszőlegesen nagy lehet ha $r \rightarrow 0$.

1.9. DNS lánc különös ábrája egy négyzetben

Az öröklődési információk egységes módon DNS (DNA) láncok formájában vannak tárolva az élőlények sejtjeiben. A DNS négyféle nukleinsav (*nucleic acid*) nagyon hosszú láncolatából áll és ebben a láncban a nevük kezdőbetűjével g, c, a és t betűkkel jelöljük meg a helyüket (1.25. ábra).



```

Reind  TTTTACGGT GAAACTGGG ATGGCTCAT ACACAGTTA TAGTTCTTT GGTATTGTT TTCATGGAT AACGGTGGTA 150
Bdiv   TTTTACGGT GAAACTGGG ATGGCTCAT ACACAGTTA TAGTTCTTT GGTATTGTT TTCATGGAT AACGGTGGTA

Reind  ATTGTAGGC TAATACAAGT TCGAGGCCTT TTGGCGCGT TTATTAGTTC TAAACCATC CCTTTTGGT TTGCGTCAAT 230
Bdiv   ATTGTAGGC TAATACAAGT TCGAGGCCTT TTGGCGCGT TTATTAGTTC TAAACCATC CCTTTTGGT TTGCGTCAAT

Reind  CATAATNAAC TTGCGAATCG CAATTTTTG CGATGGACCA TTCAGTTTC TGACCTATCA GCTTGACGGT AGSSTATFSG 310
Bdiv   CATAATNAAC TTGCGAATCG CAATTTTTG CGATGGACCA TTCAGTTTC TGACCTATCA GCTTGACGGT AGSSTATFSG

Reind  CCTACCGAGG CAGCAGGGG TAACGGGGAA TTAGGTTTCG ATTCCGGAGA GGGAGCTGGA GAAACGGCTA CCACATCCAA 390
Bdiv   CCTACCGAGG CAGCAGGGG TAACGGGGAA TTAGGTTTCG ATTCCGGAGA GGGAGCTGGA GAAACGGCTA CCACATCCAA

Reind  GGAAGGCAGC AGGCGCCGAA ATTACCANT CCTGACACAG GGAGGTAGTG ACAAGAAATA ACAATACAGG GCAATTTGCT 470
Bdiv   GGAAGGCAGC AGGCGCCGAA ATTACCANT CCTGACACAG GGAGGTAGTG ACAAGAAATA ACAATACAGG GCAATTTGCT

Reind  TGTAAATGGA ATGATGGTCA CCTAAACCT CACCAGAGTA ACAATTGGAG GGCAGTCTG GTGCCAGAGC CCGAGTAAAT 550
Bdiv   TGTAAATGGA ATGATGGTCA CCTAAACCT CACCAGAGTA ACAATTGGAG GGCAGTCTG GTGCCAGAGC CCGAGTAAAT

Reind  TCGAGCTCCA ATAGGTATA TTAACCTGT TGCAGTAAA AGCTCGTAG TGAATTTTT GCGTGTGTT ANATTGACT 630
Bdiv   TCGAGCTCCA ATAGGTATA TTAACCTGT TGCAGTAAA AGCTCGTAG TGAATTTTT GCGTGTGTT ANATTGACT

Reind  GATGTCGAGA TTGCACCTCG CTTTTGGAT TTTCCTTTT TTACTTTGAG AAATTAGAG TGITTCAGC AGACTTTGT 710
Bdiv   GATGTCGAGA TTGCACCTCG CTTTTGGAT TTTCCTTTT TTACTTTGAG AAATTAGAG TGITTCAGC AGACTTTGT

Reind  CTTGATACT TCAAGTGGG ATAATAGAT AGGACTTGG TGTATTTTG TTGTTTGTG AACCTTAGTA ATGTTAATA 790
Bdiv   CTTGATACT TCAAGTGGG ATAATAGAT AGGACTTGG TGTATTTTG TTGTTTGTG AACCTTAGTA ATGTTAATA

Reind  GGAACGGTGG GGGGCAATCG TATTAACTG TCGAGGTTGA AATCTTAGA TTCTTAAG ACCACTACT CCGAAGCAT 870
Bdiv   GGAACGGTGG GGGGCAATCG TATTAACTG TCGAGGTTGA AATCTTAGA TTCTTAAG ACCACTACT CCGAAGCAT

Reind  TTCCCRAGGA CTTTTTCAAT AATCAGAAC GAAGTTAGG GGRATGAGA GGRATGAGA CCGTGTAGT CCTAACCAT 950
Bdiv   TTCCCRAGGA CTTTTTCAAT AATCAGAAC GAAGTTAGG GGRATGAGA GGRATGAGA CCGTGTAGT CCTAACCAT

Reind  AACATCCCG ACTAGGATG GAGGTCGTC ATTTTTGGA CTCCTCAGC ACCCTGAGG AATCAGAT CTTGGGTC 1030
Bdiv   AACATCCCG ACTAGGATG GAGGTCGTC ATTTTTGGA CTCCTCAGC ACCCTGAGG AATCAGAT CTTGGGTC
    
```

1.25. ábra.

A DNS-ben tárolt információt ezen nukleinsavaknak a sorrendje határozza meg. Vagyis az, hogy a lánc milyen szavakból áll és ezek a szavak hol és milyen sűrűn helyezkednek el a láncban, adja meg az öröklődési információkat. Igény van arra, hogy ezt a nagyon hosszú láncot *egyetlen pillantással áttekinthető képpé* alakítsuk, ahol vizuálisan és szignifikáns módon jelennek meg a szavak eloszlásának jellegzetességei. (Ez az igény a GENBANKi 1.25. ábrára rátekintve nagyon is nyilvánvaló.)

A legkisebb egység amelynek már jelentése van hárombetűs (ilyen a GTA, CAG). Ilyenek a kodonok, amelyeknek fontos szerepük van a sejtek működésében alapvető szerepet játszó fehérje szintézisben.

Vannak olyan 4-8 betűből álló szavak, amelyek a DNS lánc olyan szakaszait jelölik, amelyekhez olyan enzimek kötődnek, amelyek felismerik az idegen DNS-t és megakadályozzák, hogy beépüljön a láncba. A DNS lánc ilyen szakaszainak (szavainak) a hiánya idegen DNS beépülését és ezzel idegen vírus behatolását teszi lehetővé a szervezetbe. A DNS lánc ilyen funkciót betöltő szakaszainak (*recognition site*) ismeretére szükség van akkor is, amikor éppen a behatolás megakadályozását kell megakadályozni, például génmanipuláció esetén.

Csupán ez a két példa is mutatja, hogy milyen fontosak azok az információk, amelyek arról szólnak, hogy a DNS láncból mely szakaszok hiányoznak vagy akár csak szignifikánsan alulreprezentáltak.

H. J. Jeffrey az Illinoisi Egyetem professzora 1990-ben egy gyorsan áttekinthető geometriai modellt javasolt hiányzó DNS szakaszok felkutatására, amelyet később mások DNS láncok általánosabb vizsgálataira is kiterjesztettek. H.J. Jeffrey *DNS láncsal vezérelt káoszjátéknak* nevezte el módszerét.

A történet azzal kezdődik, hogy H. J. Jeffrey és néhány munkatársa meglepően tapasztalta, hogy ha egy négyzet sarkait a DNS lánc betűivel jelöli és a DNS láncokhoz egy igen egyszerű szabály szerint pontsorozatot rendel, akkor érdekes mintázatok alakulnak ki a négyzet belsejében (1.26. és 1.27. ábra). Felvetődött a kérdés: van-e valami könnyen felismerhető kapcsolat a mintázat és a DNS lánc szerkezete között?

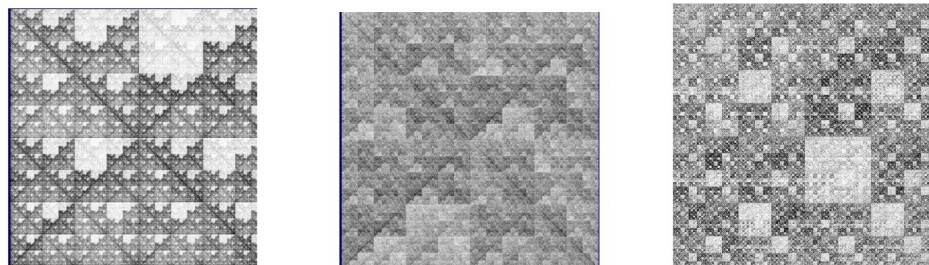
A DNS lánchoz tartozó mintázat szerkesztése a következő. A zárt egység-négyzet négy csúcsához rendeljük az a, g, t és c betűket, a négyféle nukleinsav kezdőbetűt. A modell (szerkesztés) minden

$$\sigma_1\sigma_2 \dots \sigma_n \quad \sigma_i \in \{a, g, t, c\}$$

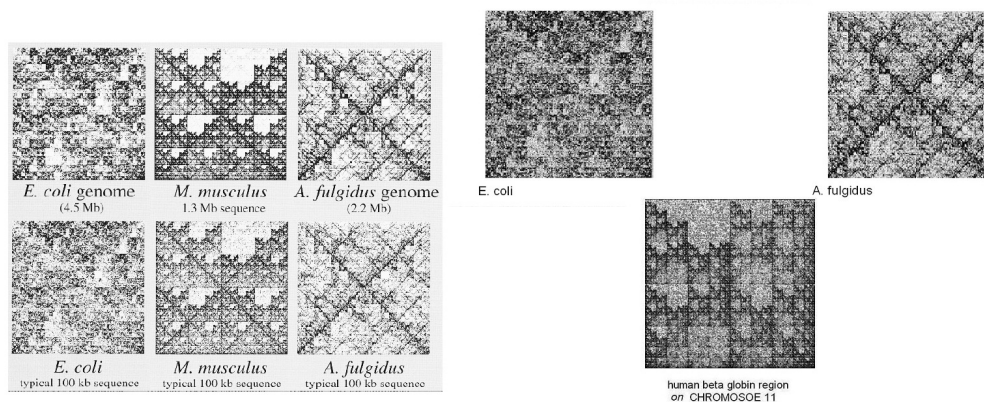
szóhoz egy n -elemű $\{P_k; k = 1, 2, \dots, n\}$ pontsorozatot rendel hozzá a következő *rekurzív* módon: (1.28. ábra)

P_1 az $[\theta, \sigma_1]$ egyenesszakasz felező pontja, ahol θ az egység-négyzet középpontja. A

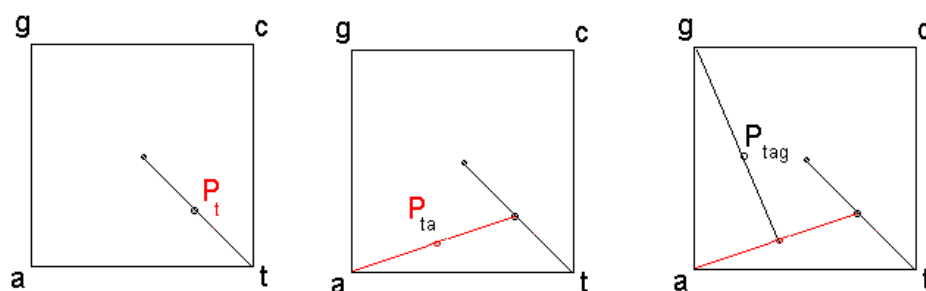
$$P_k; k = 2, 3, \dots, n$$



1.26. ábra.



1.27. ábra.



1.28. ábra.

pontok a $[P_{k-1}, \sigma_k]$ egyenesszakaszok felező pontjai.

Használni fogjuk a következő részletesebb jelölést is

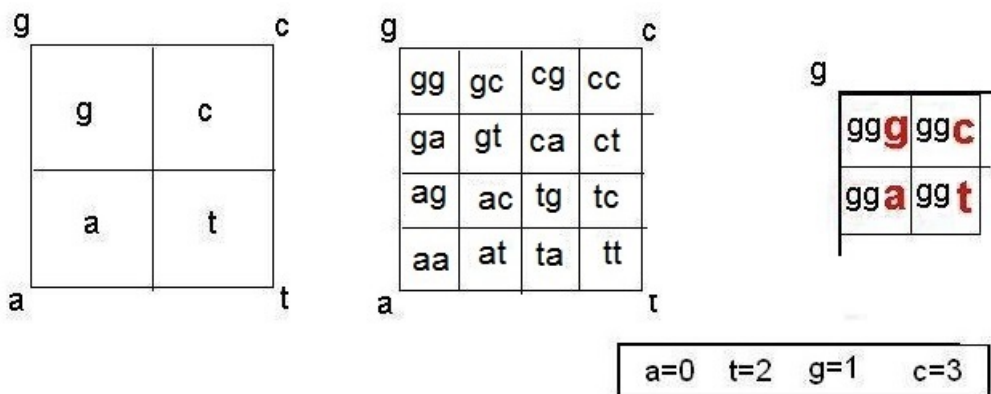
$$P_k = P_{\sigma_1 \sigma_2 \dots \sigma_k}.$$

Igy minden a $\{a, g, t, c\}$ ABC-vel alkotott n hosszú szónak megfelel n pont az egységnégyzetben. Nagyon hosszú szavakat, a DNS lánc tízezres nagyságrendű szakaszait így ábrázolva, előfordul hogy (majdnem) üres foltok maradnak az egységnégyzetben. Ebben az esetben „bizonyos szavak” nem, vagy alig fordulnak elő a többtízezres hosszúságú láncban. Ekkor érdekes ez a szerkesztés (matematikai modell).

Az 1.26. és az 1.27. ábrákon a káoszjáték végeredményét látjuk spec. DNS láncok esetén. A (majdnem) fehér foltok DNS szakaszok hiányát jelzik és a szürke egyre sötétebb árnyalatai a területre tömörült pontok sűrűségét (gyakoriságot) jelzik.

Az 1.27. ábra azt is jelzi, hogy viszonylag rövid szakasz a DNS láncból már jellemzi a szavak eloszlását, a majdnem, vagy teljesen hiányzó szavakat. A 100 kilobit anyagból készült káoszjáték képe majdnem megegyezik a 2.2 Megabit anyagból készült képpel.

Hogyan lehet a kapott halmaz üres foltjaiból meghatározni a hiányzó szavakat?



1.29. ábra.

Például az 1.29. ábrán látható szerkesztéssel. A k hosszú láncok egy $2^k \times 2^k$ négyzetrácsban foglalnak helyet és a következő rekurzív módon szerkesztjük őket:

$k = 1$: az ABC betűi négy 2^{-1} oldalú négyzetben foglalnak helyet.

$k - 1 \rightarrow k$: A $k - 1$ hosszú szavak táblázatában lineárisan felezünk minden négyzetet és az így kapott négy négyzetben a következő k hosszú szavak foglalnak majd helyet. Ha a négyzetben

$$\sigma_{k-1} \dots \sigma_2 \sigma_1 \quad \sigma_i \in \{a, g, t, c\}$$

volt, akkor a négy új négyzethez

$$\begin{pmatrix} 1 \sigma(k-1) \dots \sigma_2 \sigma_1 & 3 \sigma(k-1) \dots \sigma_2 \sigma_1 \\ 0 \sigma(k-1) \dots \sigma_2 \sigma_1 & 2 \sigma(k-1) \dots \sigma_2 \sigma_1 \end{pmatrix}$$

k hosszú szavak tartoznak. (1.29. ábra ha $k = 1, 2, 3$).

Ezzel a szerkesztéssel egy $\delta = 2^{-n}$ méretű δ -hálón elhelyeztük az összes n -hosszú szót. Ezt a DNS lánc képére, az 1.28. ábra szerinti szerkesztéssel kapott pontsorozatra helyezve meghatározhatók azok a *legfeljebb* n hosszú szavak, amelyek hiányoznak vagy csupán alulreprezentáltak a láncban.

1.9.1. Feladat *Igazoljuk azt az eljárást, amellyel a kapott mintázatból meghatározzuk a DNS láncból hiányzó szavakat.*

1.9.2. Feladat *Milyen halmazzt kapunk, ha egy egyenlőszárú derékszögű háromszög A, B, C csúcaival végezzük a káoszjátékot?*

1.9.3. Feladat *Milyen halmazzt kapunk, ha egy tetszőleges háromszög A, B, C csúcaival végezzük el a szerkesztést?*

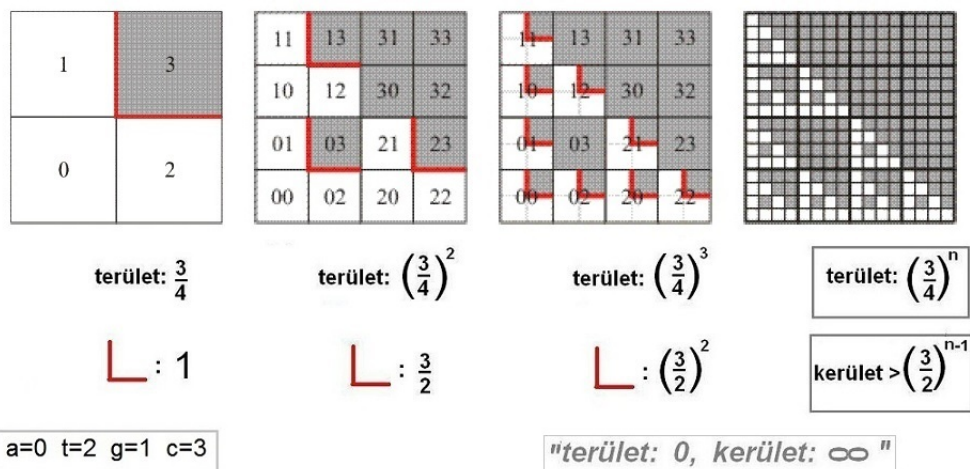
1.10. Megmérhetetlen mintázatok

H. J. Jeffrey és munkatársainak érdeklődését az keltette fel, hogy az igen egyszerű szerkesztési szabályból komplex, bonyolult mintázatok alakulnak ki. Mi a közös vonásuk ezeknek a mintázatoknak?

Egymással hasonló üres foltok tömege van a mintázatban a legkülönbözőbb méretekben. Nagyításkor egyre több egymással hasonló halmaz, üres folt, bukkan fel a mintázatban. Ha kiemelünk egy üres foltot, akkor bármilyen kis ε pozitív számhoz találunk ehhez a folttal hasonló foltot, amelynek az átmérője kisebb mint ε . Azt mondjuk ekkor hogy a mintázat (halmaz) határtalanul nagyítható.

Mennyi az egyre szaporodó üres foltok összterülete? Dacára annak, hogy az üres foltok mérete a különböző mintázatokban egymástól különbözőnek látszik, az üres foltok összterülete tetszőleges pontossággal megközelíti a négyzet területét ha a szerkesztést egyre tovább visszük. Vagyis a szerkesztéssel kapott ponthalmaz területe csak nulla lehet.

töröljük a **3** jelet tartalmazó összes négyzetet (rekurzív módon)



1.30. ábra.

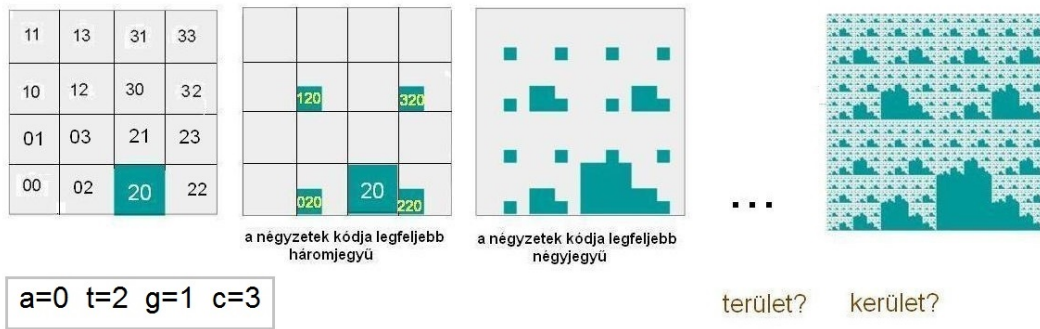
Az elmondottakat két példán illusztráljuk és igazoljuk. Tekintsük az 1.29. ábra kódolt négyzethálóját. Minden négyzethálóból töröljük azokat a négyzeteket amelyekhez tartozó szó a „g” jelet tartalmazza (1.30. ábra). Legyen \mathcal{S}_n ($n = 1, 2, \dots$) a $2^n \times 2^n$ négyzethálóban a „g” jelet tartalmazó szavak

törlésével kapott halmaz és

$$\mathcal{S} = \bigcap_{n=1}^{\infty} \mathcal{S}_n.$$

Ekkor \mathcal{S}_n területe $(\frac{3}{4})^n$ és a kerülete legalább $(\frac{3}{2})^n$. Ezért \mathcal{S} területe csak 0 lehet és a kerülete minden pozitív M számnál nagyobb kell hogy legyen. Ez utóbbira azt mondjuk, hogy a kerülete ∞ .

minden olyan négyzet törölve, amelynek kódjában a 20 szerepel:



1.31. ábra.

Most töröljük azokat azokat a négyzeteket az 1.29. ábra négyzethálóján, amelyekhez tartozó szó az „ta” jelet tartalmazza (1.31. ábra). Ezeket a szavakat *tiltott szónak* fogjuk nevezni. Legyen \mathcal{S}_n^* ($n = 2, \dots$) a $2^n \times 2^n$ négyzethálóban az „ta” jelet tartalmazó szavak törlésével kapott halmaz és

$$\mathcal{S}^* = \bigcap_{n=2}^{\infty} \mathcal{S}_n^*.$$

Hogyan alakul az \mathcal{S}_n^* $n = 1, 2, \dots$ sorozat területe és kerülete?

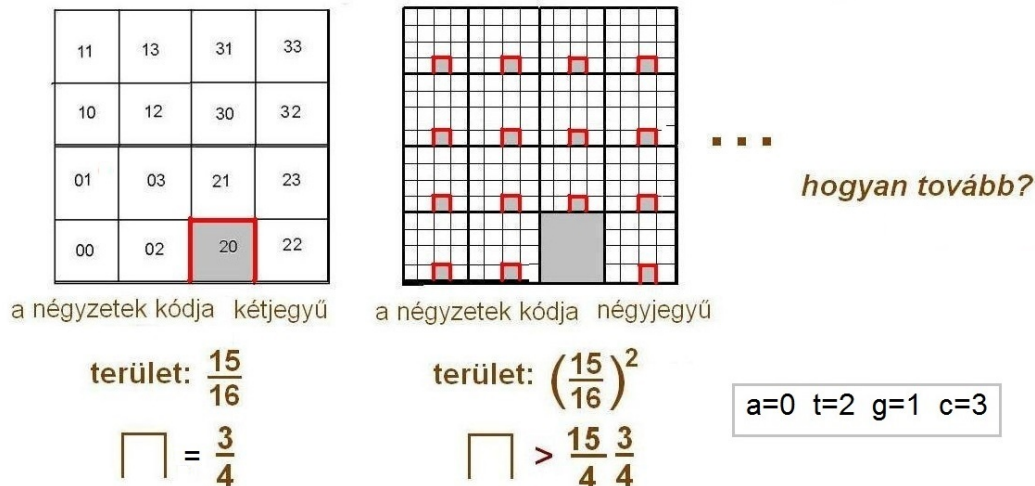
A \mathcal{S}^* területe nagyobb, kerülete pedig kisebb mint az \mathcal{S} halmaznak. Megmutatjuk, hogy itt is a „terület 0, kerület ∞ ” eset áll fenn.

Ellentétben az előző példával, itt az \mathcal{S}_n^* halmazok egyre csökkenő területei NEM alkotnak geometriai sorozatot. Viszont ha csupán azokat a négyzeteket töröljük, amelyek kódja „ta”-ra *végződik*, akkor a páros indexű halmazok területei egy $\frac{15}{16}$ hányadosú geometriai sorozatot alkotnak.

Ennek igazolása a 1.32. ábra alapján. Az \mathcal{S}_2^* halmazt úgy kapjuk, hogy az 1.29. ábrán a $2^2 \times 2^2$ négyzethálóból töröljük a „ta” szóhoz tartozó négyzetet. Ezután megmarad a t, a, g, c négyzet tizenöt-tizenhatod része.

A következő lépésben a megmaradó halmazból töröljük azokat a négyzeteket, amelyek kódja 4-jelű és a kód „ta”-ra *végződik*. ilyen négyzetből 15 van. Ennek alapján a megmarad a t, a, g, c négyzet

először csak azokat a négyzeteket töröljük, amelyek kódja **20-ra végződik**



1.32. ábra.

$$\left(\frac{15}{16}\right)^2 \text{ része, mivel } 1 - \frac{1}{16} - \frac{15}{16^2} = \left(\frac{15}{16}\right)^2$$

Ezt a gondolatmenetet megismételve, teljes indukcióval belátható, hogy az eljárás n -edik lépése után, miután töröltük azokat a négyzeteket, amelyek kódja $2n$ hosszúságú és utolsó két betűje „ta”, a t, a, g, c négyzet

$$\left(\frac{15}{16}\right)^n$$

része marad meg.

Érdeemes megemlíteni az elmondottak egy geometriai leírását. A fenti eljárást úgy szemléltethetjük, hogy miután rögzítettük a ta négyzetének törlése után megmaradó 15 négyzetet, a rekurzív lépés azt jelenti, hogy a 15 négyzet mindegyikét lecseréljük a megmaradt halmaz lineárisan egynegyedére kicsinyített másával ($n = 2$ eset az 1.32. ábrán).

Hasonló gondolatmenettel igazolhatjuk, hogy a \mathcal{H}_k halmazok kerülete

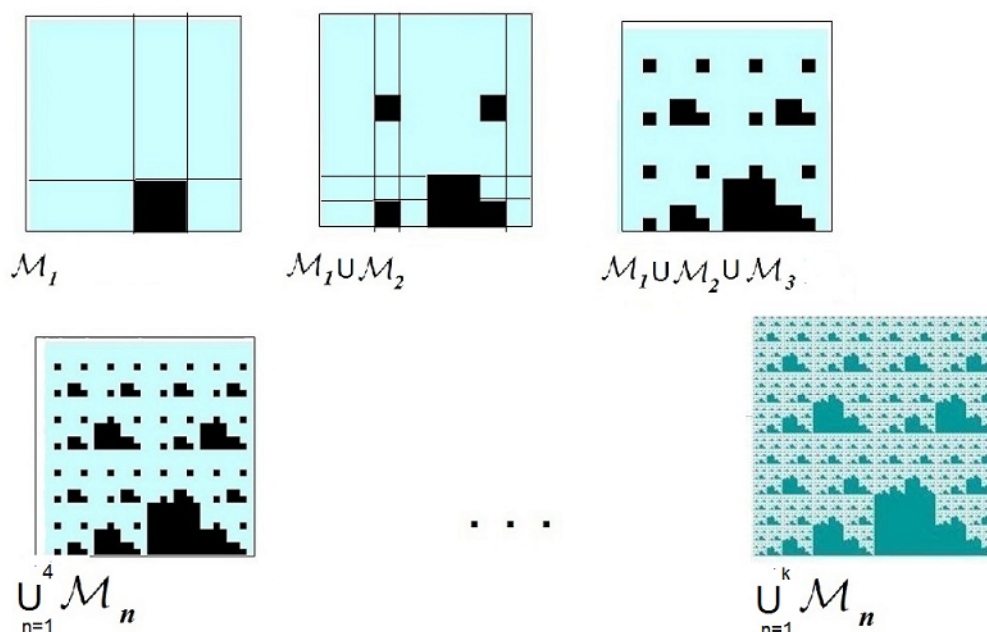
$$K_n > \frac{3}{4} \left(\frac{15}{4}\right)^n. \quad (1.22)$$

Az \mathcal{S}^* szerkesztése.

Először a \mathcal{S}^* komplementer halmazát szerkesztjük meg a négyzetben. Vagyis mindazon pontok halmazát, amelyek kódja tartalmazza a ta szót.

A ta négyzetéhez pontosan azok a szavak tartoznak amelyek prefixe (kezdő betűi) ta . Azok a pontok, amelyeknek a kódjában a második helytől áll az ta tiltott szó, az \bullet -a szavakhoz tartozó négyzetek pontjai, ahol \bullet helyén az a, c, g, t betűk valamelyike áll. Ezeket a négyzeteket a $2^3 \times 2^3$ négyzethálóban jelöljük ki.

Azokat a pontokat, amelyek kódjában az n -edik helytől szerepel ta , rekurzív módon kapjuk. Ezek $n + 1$ hosszú tiltott szavakhoz tartozó négyzetek pontjai. Mindazon négyzetek, amelyek kódja \clubsuit -a alakú, ahol \clubsuit egy $n - 1$ hosszú tiltott szó. Ezeket a négyzeteket a $2^{n+1} \times 2^{n+1}$ négyzethálóban jelöljük ki.



1.33. ábra.

A mondottak alapján, az \mathcal{S}^* komplementer halmazának a szerkesztése: (1.33. ábra)

$\mathcal{M}_1 = ta$ négyzete

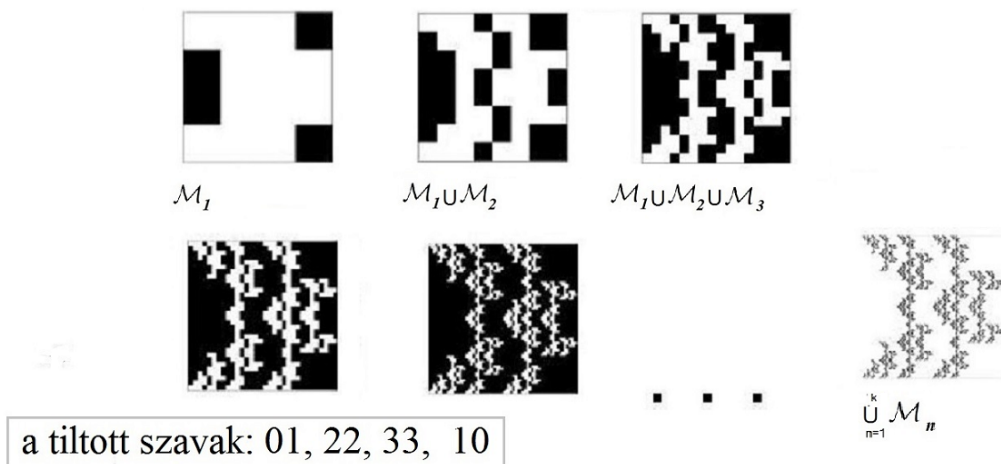
$\mathcal{M}_{n+1} (n = 1, 2, \dots)$: a \mathcal{M}_n mintázatot a g, a, t, c csúcsokba vetítjük és képezük a négy halmaz és az \mathcal{M}_n unioját.

Az \mathcal{S}^* komplementer halmaza, az \mathcal{M}_n halmazok unioja

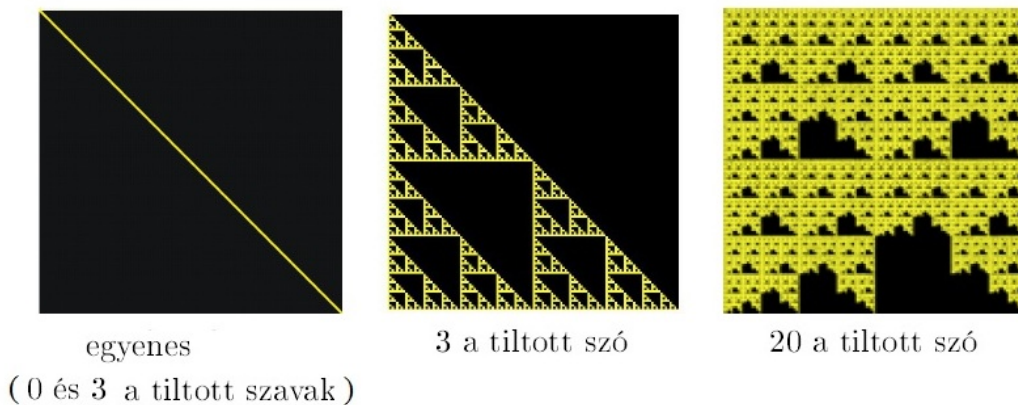
$$\bigcup_{n=1}^{\infty} \mathcal{M}_n$$

Figyeljük meg azt, ahogyan a szerkesztés folyamán kialakulnak az egyre kisebb átmérőjű, egymással hasonló halmazok.

Egy másik példa az \mathcal{S}^* komplementer halmazának a szerkesztésére az 1.34. ábra amikor több tiltott szó szerepel.

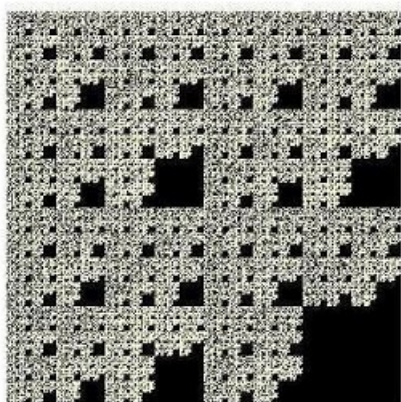


1.34. ábra.

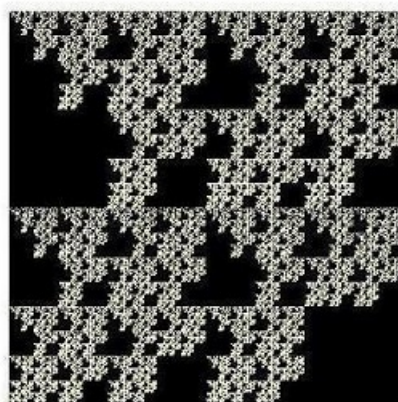


1.35. ábra.

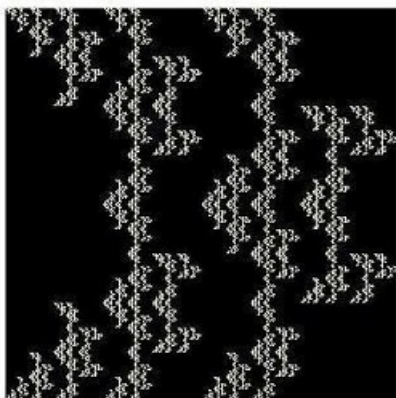
1.10.1. Feladat Töröljük a $2^n \times 2^n$ hálózathálóból azokat a négyzeteket, amelyekhez tartozó szó tartalmazza az 1.35 és 1.36. ábrák alatti szavakat. Legyen a $2^n \times 2^n$



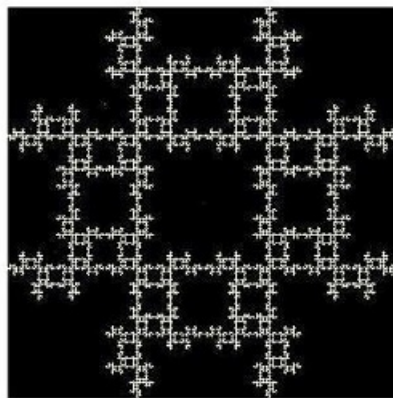
22



10, 22



10, 22, 33, 01



00, 11, 22, 33

1.36. ábra.

hálózatból ezután kapott halmaz \mathcal{S}_n^ . Igazoljuk, hogy a*

$$\mathcal{S}^* = \bigcap \mathcal{S}_k^*$$

halmaz területe csak nulla lehet. Mennyi lehet az \mathcal{S}^ kerülete?*

1.10.2. Feladat *Adjunk meg olyan tiltott szavakat, amelyhez tartozó \mathcal{S}^* halmaznak területe nem nulla. Ha a tiltott szó agctt, akkor is nulla lehet csak az \mathcal{S}^* területe?*

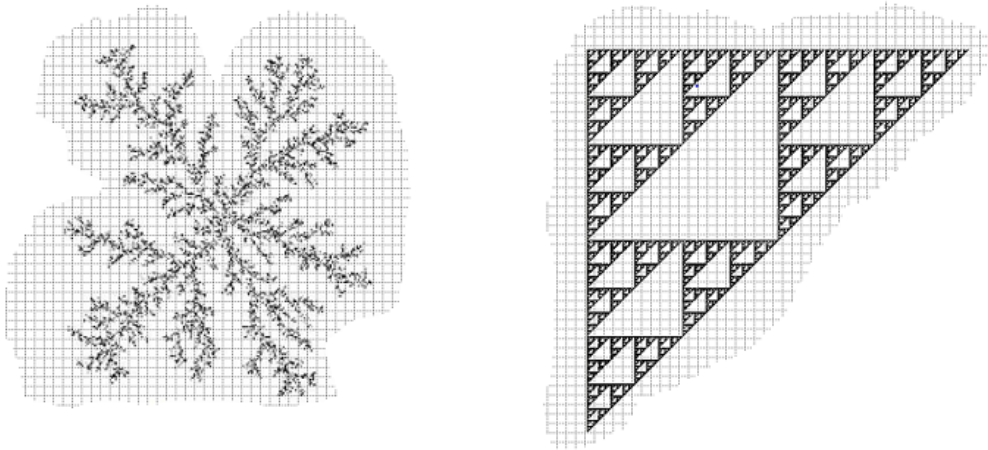
1.10.3. Feladat *Igazoljuk az (1.22) egyenlőtlenséget.*

Hogyan tudjuk méret szerint osztályozni (megmérni) a „terület 0, kerület végtelen” tulajdonságú halmazokat?

Hasonlóan a „megmérhetetlen” partvonal esetéhez, keressük azt az s értéket amelyre

$$\lim_{r \rightarrow 0} N(r)r^s = c \quad (0 < c < \infty)$$

azonban itt $N(r)$ a halmazt lefedő r élű négyzetrács négyzeteinek a száma (1.37. ábra).



1.37. ábra.

A „megmérhetetlen” partvonal esetéhez hasonlóan, ha

$$L(r, s) = N(r)r^s$$

akkor

$$\log L(r, s) = \log N + s \log r$$

és ha $0 < L(r, s) < \infty$ akkor

$$s = \lim_{r \rightarrow 0} \frac{\log N(r)}{-\log r}.$$

Az így kapott s a halmaz *boxdimenziója*.

Az s meghatározására hasonló *grafikus eljárás* van, mint a partvonal esetén:

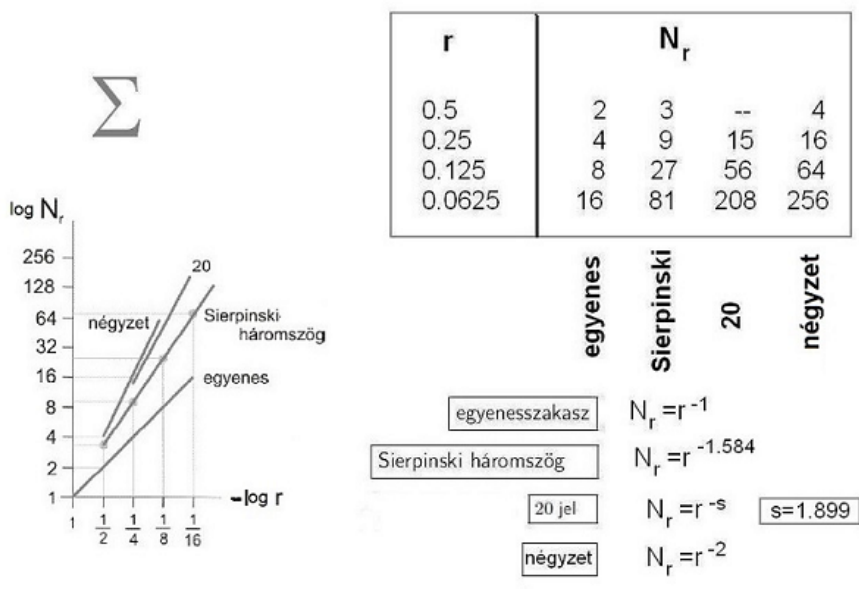
Az (L, r) koordinárendszerben a $(\log L, \log r)$ pontok, kis r esetén, egy olyan egyenesre illeszkednek, amelynek meredeksége s (1.30. ábra)

Mit mér a boxdimenzió?

Az elmondottakból következik hogy az s box-dimenzió az $N_r \rightarrow \infty$ sebességét méri. Pontosabban, egy eléggé sűrű négyzetrácsból, nagyobb s boxdimenzió mellett, több négyzet szükséges a halmaz lefedéséhez, mint kisebb s mellett. Nagyobb s esetén N_r rohamosabban növekszik, ha r közeledik a nullához, mint kisebb s esetén. Ez akkor is érvényes, ha a halmazok területe nulla.

Egy kevésbé matematikus válasz arra, hogy mit mér a boxdimenzió. Egy halmazt adott felbontás mellett tudunk csak megfigyelni. A számítógép képernyőjén megjelenő kép megfigyelésének a képernyő pixelmérete, egy „valóságos” tárgy megfigyelésének pedig a szemünk felbontóképessége szab határt. Legyen h -átmérőjű az a legkisebb objektum, amelyet megfigyelni tudunk. Ez a nullához nagyon közeli érték. Így az elmondottak alapján nagyobb s mellett több lesz a halmazt lefedő h élű négyzetek N_h száma és így több ilyen négyzetet tudunk megfigyelni mint kisebb s boxdimenzió esetén. Így valóban nagyobbknak látjuk a halmazt. Ez akkor is érvényes, amikor $s < 2$, vagyis a halmaz területe nulla. Ezzel méret szerint is különbséget tudunk tenni olyan halmazok között is, amelyek mindegyikének területe nulla.

Az elmondottak illusztrálására az 1.38. ábrán néhány eddig megismert halmaz N_r értékeinek és boxdimenziójának alakulását mutatjuk.



1.38. ábra.

1.10.4. Feladat *Mennyi a Cantor halmaz dimenziója?*

1.10.5. Feladat *Melyik igaz és melyik hamis a következő állítások közül:*

- 1. Ha két halmazt egyesítünk, akkor az egyesített halmaz dimenziója a két halmaz dimenziója közül a kisebbik lesz.*
- 2. Ha két halmazt egyesítünk, akkor az egyesített halmaz dimenziója a két halmaz dimenziója közül a nagyobbik lesz.*
- 3. Ha két halmazt egyesítünk, akkor az egyesített halmaz dimenziója a halmazok dimenzióinak összege.*

1.10.6. Feladat *Igazoljuk, hogy ha $\mathcal{B} \subset \mathcal{C}$ dimenziója nem lehet nagyobb, mint a \mathcal{C} dimenziója.*

1.10.7. Feladat *Legfeljebb mennyi lehet egy \mathcal{R}^2 síkbeli kompakt halmaz dimenziója?*

1.11. Káotikussá váló sorozatok

Egy geometriai sorozat természetes felírása a

$$x_{n+1} = qx_n \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad x_0 = c \quad (1.23)$$

rekurzív sorozat. Hiszen geometriai sorozatot akkor kapunk, ha egy c számot mindig ugyanazzal a q számmal újra meg újra megszorozunk és az (1.23) formula pontosan ezt fejezi ki. Ha $q < 1$ akkor a sorozat a nullához tart, ha $q > 1$ akkor a sorozat határtalanul növekszik, x_n bármely M számnál nagyobb lesz, ha n elég nagy vagyis elég messze megyünk el az (1.23) geometriai sorozatban.

Hogyan alakul az (1.23) sorozat, $q > 1$ esetén, ha nem engedjük meg, hogy egy adott M értéken túllépjen?

Két természetes módját mutatjuk meg ennek. Az egyik esetben az $x = M$ faltól visszapattannak a sorozat elemeit reprezentáló tömegpontok, a másik esetben a túllépő pontot M egységgel visszataljuk.

Legyen $c \in (0, 1)$, $M = 1$ és $q = 2$.

Az egyik esetben az (1.23) sorozat a következőre változik

$$x_{n+1} = \begin{cases} qx_n & \text{ha } x < 0.5 \\ q(1 - x_n) & \text{ha } x \geq 0.5 \end{cases} \quad (1.24)$$

A másik esetben az (1.23) sorozat így alakul

$$x_{n+1} = \begin{cases} qx_n & \text{ha } x < 0.5 \\ qx_n - 1 & \text{ha } x \geq 0.5 \end{cases} \quad (1.25)$$

Az (1.25) rekurzív formula vizsgálata.

Felírva a sorozat elemeit, egymástól csupán 0.0003 távolságban levő c értékekből indítva, a sorozat első 5 eleme

0.420420	0.420720
0.84084	0.84144
0.68168	0.68288
0.36336	0.36576
0.72672	0.73152
0.45344	0.46304

Első pillantásra nem látunk semmiféle szabályosságot egyik sorozatban sem. Azzal, hogy $x_n > 1$ esetén *visszaléptettük a sorozatot eggyel*, a sorozat elvesztette az (1.23) jellegét.

Most írjuk fel a sorozat elemeit **kettes számrendszerben**, bináris tört alakban. Ekkor a $c = 0.420720$ kezdőértékből indított sorozat így alakul

0.01101011
 0.11010110
 0.10101100
 0.01011000
 0.10110000
 0.01100000

Kettes számrendszerbe írva az (1.25) sorozat elemeit, már kialakul egy szabály: *Az x_n -ből a következő $n + 1$ -edik elemet úgy kapjuk a sorozatban, hogy az x_n jegyeit eggyel hátratóljuk, majd az így kapott szám egész részét töröljük.* ($n = 1, 2, \dots$)

A szabály alkalmazásával igazolni fogjuk hogy az (1.25) sorozatnak a következő különös tulajdonsága van:

Káosz (ergodicitás)

Legyen $c \in (0, 1)$ és $\varepsilon > 0$. Ekkor c minden ε környezetében

1. van olyan c^* , amelyből ki-indulva az (1.25) sorozat egy adott helytől kezdve periodikus;
2. van olyan c^{**}, k pár, hogy a c^{**} -ből indított (1.25) sorozat k -adik eleme egy adott $p \in (0, 1)$ pont tetszőleges δ környezetébe kerül.

Szemléletesen, de kevésbé pontosan a „káotikus (ergodikus)” tulajdonság azt jelenti, hogy egy pont bármilyen kis környezetében, van olyan pont amelyből ki-indulva az (1.25) sorozat periodikus, elemei vissza-visszatérnek a c pontba. És van olyan pont is ugyanebben a környezetben amelyik bejárja a $(0, 1)$ minden környezetét.

Az állítás első, 1. része nyilvánvaló. Hiszen ha a c bináris tört első $k + 1$ jegyét periodikusan folytatjuk, akkor az így kapott c^* a c -nek $\varepsilon = 10^{-k}$ környezetében van.

Az állítás további, 2. részét három példával próbáljuk megvilágítani. Tizedstörtekekkel kezdek, ezeket jobban ismerjük mint a bináris törtteket.

1.11.1 Példa *Legyenek*

$$c = 0.2002995331, \quad \varepsilon = 10^{-3}, \quad p = 0.71033115011, \quad \delta = 10^{-5}, \quad k = 4.$$

Ekkor $c^{**} = 0.20071033831$ a c pontnak az ε környezetében van és a c^{**} -ből induló (1.24) sorozat negyedik eleme, x_4 , benne van a p -nek 10^{-5} környezetében. Ugyanis $|c - c^{**}| < 10^{-3}$ és $|q - x_4| < 10^{-5}$.

1.11.2 Példa *Legyenek*

$$c = 0.11011100101\dots, \quad \varepsilon = 2^{-3}, \quad p = 0.11100011\dots, \quad \delta = 2^{-5}, \quad k = 3.$$

Ekkor $c^{**} = 0.1100111001\dots$ a c pontnak az ε környezetében van és a c^{**} -ből induló (1.25) sorozat negyedik eleme, x_4 , benne van a p -nek 10^{-5} környezetében. Ugyanis $|c - c^{**}| < 2^{-3}$ és $|q - x_4| < 2^{-5}$.

1.11.3 Példa Ha a 0.1001 bináris törtet úgy folytatjuk, hogy mindegyik háromjegyű bináris törtet egymás után hozzá írjuk, akkor az így kapott $2^3.3 + 4$ jegyű bináris törtből induló (1.25) sorozat a $(0, 1)$ minden pontjának $\delta = 2^{-4}$ környezetét bejárja.

1.11.1. Feladat Legyen $c = 0.11000111$, $p = 0.001101$. Adjunk meg egy olyan bináris törtet a c pont 2^{-3} környezetében, hogy onnan indulva a sorozat hatodik eleme a p -nek 2^{-4} környezetébe kerül.

1.11.2. Feladat A példák alapján igazoljuk a káosz (ergodicitás) tulajdonságát.

Az (1.24) rekurzív formula vizsgálata.

Itt is akkor láthatunk szabályosságot ha kettes számrendszerben, bináris tört alakban írjuk fel a számokat. Ekkor, $x < 0.5$ esetén, úgy kapjuk az x_n -ből a következő, $n + 1$ -edik elemet a sorozatban, hogy az x_n jegyeit eggyel hátratuljuk. Ha viszont $x \geq 0.5$, akkor pedig $0 \leftrightarrow 1$ csere után hajtjuk végre ezt az eltolást.

1.11.4 Példa Ha $c = 0.01101011$ akkor az (1.25) sorozat így alakul

0.01101011
0.00101001
0.01010010
0.01011011
...

Az (1.24) sorozat szemléltetése web-diagrammal.

Tekintsük az

$$f(x) = \begin{cases} qx & \text{ha } x < 0.5 \\ q(1-x) & \text{ha } x \geq 0.5 \end{cases} \quad (1.26)$$

függvényt. Az (1.26) függvénnyel a c pontból induló (1.24) rekurzív sorozatot így írhatjuk

$$c, f(c), f^{[2]}(c), \dots, f^{[n]}(c) \dots \quad (1.27)$$

ahol $f^{[2]} = f \circ f$ vagyis az f függvény kompozíciója önmagával és $f^{[n]}$ az f függvény n -szeres kompozíciója.

Az (1.26) függvényt alkalmazva, az 1.39. ábrán látható szerkesztéssel is megkaphatjuk az (1.24) rekurzív sorozatokat. Az 1.39. ábrán $q = 2$.

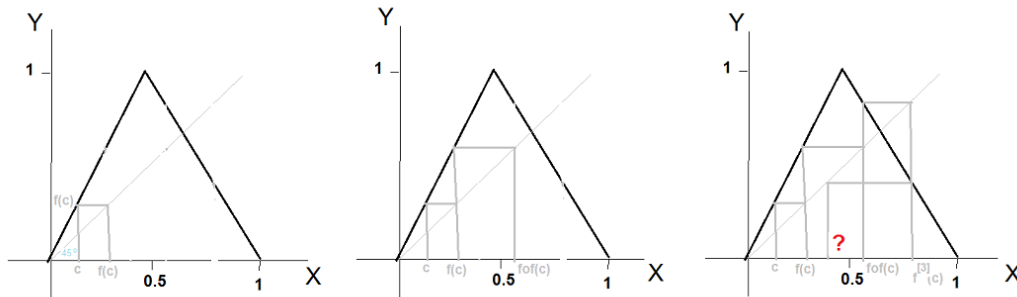
Az (1.27) sorozatot **iterációs sorozatnak** is nevezzük. Azt mondjuk, hogy az

$$(f, [0, 1])$$

pár egy **dinamikus rendszert** határoz meg és (1.27) a dinamikus rendszer c pontból induló pályája.

Egy rekurzív sorozatnak ilyen szerkesztéssel történő előállítását nevezzük web-diagramnak, vagy háló diagramnak.

Az (1.26) függvényeket, grafikonjuk alapján, **sátorfüggvényeknek** is nevezzük.



1.39. ábra.

1.11.3. Feladat Legyen $q = 3$. Írjuk fel az (1.24) sorozat első hat elemét, ha $c = 0.02202022$

triadikus tört alakban (hármasszámrendszerben).

1.11.4. Feladat Legyen $q = 3$. Írjuk fel az (1.24) sorozat első hat elemét, ha $c = 0.02102122$

triadikus tört alakban (hármasszámrendszerben).

1.11.5. Feladat Milyen c kezdőérték mellett lesz az (1.24) sorozat minden eleme a $(0, 1)$ intervallumban?

1.11.6. Feladat Legyen $q = 4$ és $c \in (0, 1)$. Mi a szükséges és elégséges feltétele annak, hogy az (1.24) sorozat elemei a $[0, 1]$ -ben maradjanak?

1.11.7. Feladat Legyen $q = 10$ és $c \in (0, 1)$. Mi a szükséges és elégséges feltétele annak, hogy az (1.24) sorozat elemei a $[0, 1]$ -ben maradjanak?

1.11.8. Feladat Irjunk fel egy olyan $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ (egyváltozós) függvényt, amelynek $c \in (0, 1)$ pontokból induló iterációs sorozata az (1.25) formulával adható meg.

1.11.9. Feladat Vizsgáljuk meg, hogy az (1.25) sorozat káosz (ergodicitás) tulajdonsága érvényes-e az (1.24) sorozatra is.

A pék leképezés

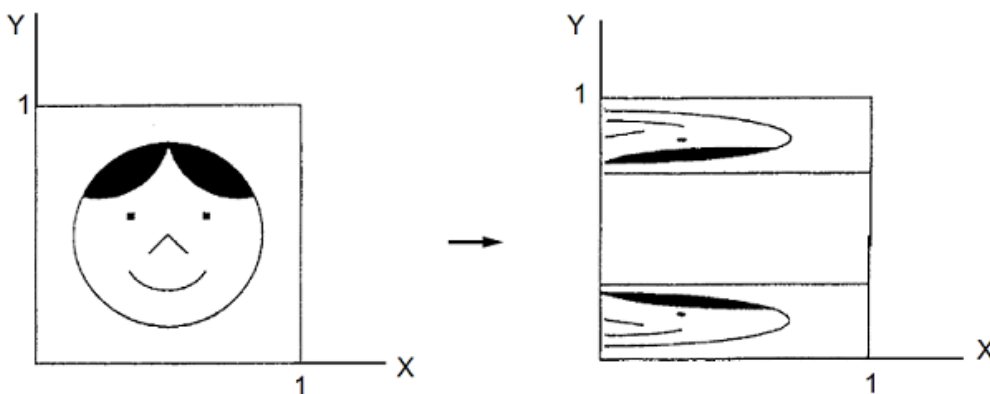
Az előző két szabály kombinációja az

$$F(x, y) = \begin{cases} 2x, \lambda y & \text{ha } x < 0.5 \\ 2(1-x), 1 - \lambda y & \text{ha } x \geq 0.5 \end{cases}$$

$R^2 \rightarrow R^2$ függvény (leképezés) ahol $\lambda \in (0, 1)$. Így az X tengely irányában az előző típusú, az $x = 1$ falba ütköző, az Y tengely irányában pedig Cantor halmaz típusú lesz az \mathcal{E} egységnégyzetből induló

$$\{F^{[n]}(\mathcal{E}) \quad n = 1, 2, \dots\} \quad (1.28)$$

iterációs sorozat \mathcal{A} attraktora. Részletesebben, F az egységnégyzet alsó felét (amikor $x < 0.5$) X irányban duplájára nyújtja és Y irányban összehúzza a λ -szorosára. A kinyújtott rész $x > 1$ részét levágja, majd az egységnégyzet felső széléhez visszahajtja (1.40. ábra). Innen a pék elnevezés hiszen ez a kenyérdagasztás dinamikája amikor $\lambda = 0.5$.



1.40. ábra.

Az (1.28) sorozat egymásba skatulyázott halmazok sorozata, amalyek közös része lesz a dinamika végterméke.

Mivel az X tengely irányában az előző típusú, az $x = 1$ falba ütköző a dinamika, a káosz (ergodicitás) tulajdonság érvényesül a pék leképezés attraktorában. A dagasztási hasonlattal kifejezve, az F iterációi során, az \mathcal{E} négyzetben egy kupacban elhelyezett mazsolák szétszóródnak a végtermék minden részletébe.

1.12. Információt hordozó káotikus dinamika

A sátorfüggvénnyel vezérelt dinamikához, természetes módon, üzeneteket kapcsolhatunk. Legyen

$$x, f(x), f \circ f(x) \dots f^{[n]}(x) \dots$$

az 1.11 (1.26) függvénnyel adott dinamikus rendszer pályája amikor $q = 2$. Ekkor az

$$f^{[n]}(x) < 0.5 \Leftrightarrow 0 \quad f^{[n]}(x) \geq 0.5 \Leftrightarrow 1 \quad (1.29)$$

szabállyal, minden pályához egy (végtelen) bináris kódot rendeltünk.

Egy adott N hosszú

$$a_1 a_2 \dots a_N \quad (1.30)$$

bináris üzenetet szeretnénk továbbítani. Hogyan válasszunk ki egy olyan $x \in (0, 1)$ pontot amelyből induló pálya az (1.30) bináris üzenetet tartalmazza?

Pontosabban, a matematika nyelvén kifejezve, a következő feladatot fogjuk megoldani. Adott egy $a_1 a_2 \dots a_N$ bináris szó és keressük azt az $x \in (0, 1)$ pontot amelynek a kódja

$$x_1 x_2 \dots x_m a_1 a_2 \dots a_N x_{N+m+1} x_{N+m+2} \quad (1.31)$$

vagyis a kód, az m -edik elemétől kezdve, éppen a továbbítandó üzenetet tartalmazza.

Az első lépés a feladat megoldásában: Kiemelni egy olyan $\mathcal{M} \subset (0, 1)$ halmazt, amely elég sűrű $(0, 1)$ -ben. Az „elég sűrű” a következőt jelenti

minden $x \in (0, 1)$ ponthoz van $x' \in \mathcal{M}$ amelyre $|R(x') - R(x)| < \frac{1}{2^m}$
ahol

$$R(x) = \sum_{i=1}^m \frac{x_i}{2^i}$$

és x_i az (1.29) szerint az x -hez rendelt kód i -edik eleme.

Az $R(x)$ bináris törteknek fontos szerepe lesz az üzenetet tartalmazó pálya (trajektória) kiválasztásában.

ALGORITMUS. Tekintsük egy $x \in (0, 1)$ kódjának $m + 1$ -edik betűjét. Ha

$$x_{m+1} = a_1$$

akkor eggyel hátratuljuk a kódot. Ha

$$x_{m+1} \neq a_1$$

vagyis az $x \in (0, 1)$ kódjának $m + 1$ -edik betűje NEM az üzenet kezdőbetűje, akkor

tekintsük a következő $\mathcal{Y} \subset \mathcal{M}$ halmazt

$$\mathcal{Y} = \{x' \in \mathcal{M} \text{ kódjának } m + 1\text{-edik betűje } a_1\}$$

és keressük azt az x'' pontot, amelyre

$$x'' \in \mathcal{Y}, |R(x'') - R(x)| \text{ minimális.}$$

Ekkor az x'' pontra cseréljük az x pontot, majd eggyel hátrátoljuk az x'' kódját.

Ezt az ALGORITMUST N -szer megismételve, az (1.31) kódot kapjuk.

1.12.1. Feladat *Igazoljuk, hogy az ALGORITMUS a kívánt üzenetet állítja elő.*

1.12.2. Feladat *Mi a szerepe az $x \in \mathcal{M}$ ponthoz hozzárendelt $R(x)$ bináris törtnek az üzenet előállításában?*

Miért alkalmas a sátorfüggvény az információ (üzenet) továbbítására?

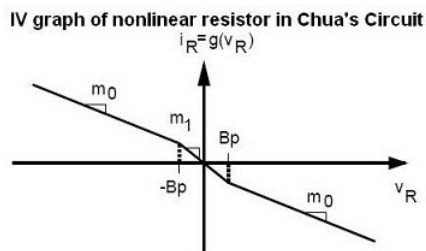
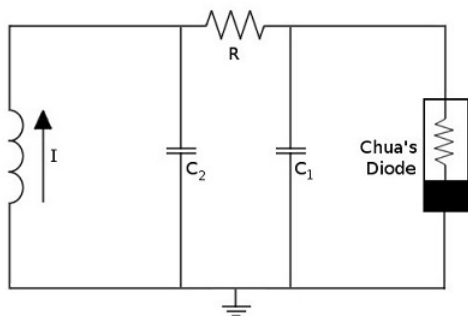
A sátorfüggvénnyel vezérelt dinamika, vagyis minden

$$\{f^n(x); n = 1, 2, \dots\} \quad x \in \mathcal{C} \tag{1.32}$$

sorozat kódja, $q = 2$ mellett, rendelkezik a káosz (ergodicitás) tulajdonsággal. Ez pontosan azt jelenti, hogy bármely (1.32) sorozat kódjának bármilyen kis ε környezetében van (1.31) és így az ALGORITMUS végrehajtható.

A valóságban az átvitel elektronikus úton, a Chua oszcillátorral (rezgőkörrel) történik. A Chua oszcillátor rajza és egyenlete az 1.41. ábrán látható. A differenciálegyenletrendszer minden

$$v_1(t), v_2(t), i_L(t) \tag{1.33}$$



$$C_1 \frac{dv_1}{dt} = \frac{1}{R} (v_2 - v_1) - f(v_1)$$

$$C_2 \frac{dv_2}{dt} = \frac{1}{R} (v_1 - v_2) + i_L$$

$$L \frac{di_L}{dt} = -v_2$$



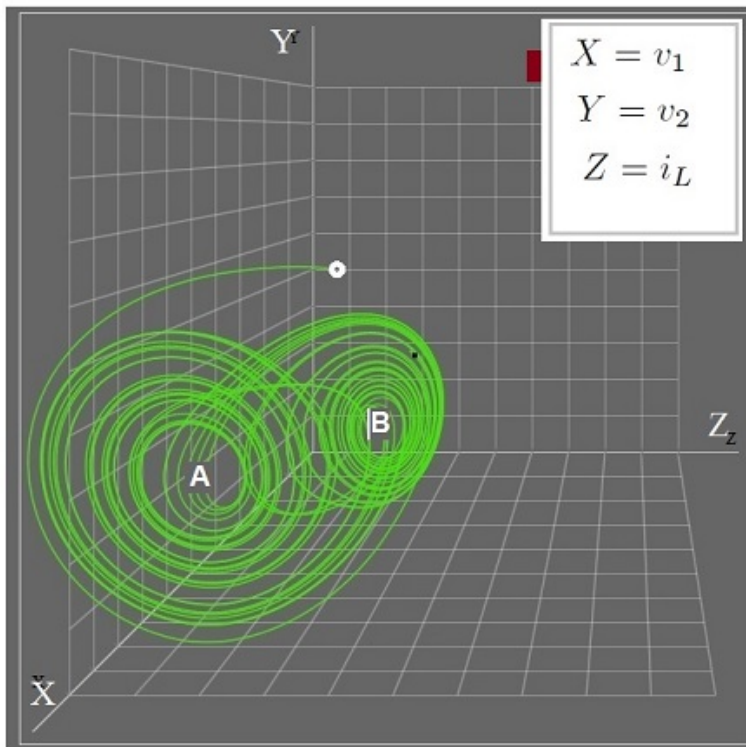
1.41. ábra.

megoldása egy térgörbével ábrázolható. Ez a térgörbe, nagy t paraméter mellett vagy egy ellipszis A középponttal, vagy egy ellipszis B középponttal, vagy az 1.42. ábrán látható görbe, ahol A középpontú és a B középpontú ellipsziseken *váltakozva* halad az (1.33) térgörbe. Információk átvitelére akkor alkalmas az áramkör, amikor az 1.42. ábra alakját veszi fel a megoldásgörbe. Ekkor a differenciálegyenletrendszer minden (1.33) megoldásához hozzárendelhetjük az A, B betűk egy-egy végtelen sorozatát. A káosz tulajdonság itt azt jelenti, hogy az A körüli ellipsziszből, a pálya nagyon kis változtatásával, egy B középpontú pályára jutunk és így az ALGORITMUS végrehajtható.

1.13. Egy képtömörítő eljárás a számítógépes grafikában.

Hogyan lehet egy fényképet néhány mátrixba tömöríteni?

Most egy olyan algoritmust mutatunk, amely egy szürke árnyalatú képet tömörít kb. 1 : 1000 arányban. A tömörített kép gyorsabban továbbítható. Az



1.42. ábra.

eljárás megértését segíti, ha a fényképet egy domborzatnak képzeljük el, úgy hogy minél világosabb egy részlet annál jobban kiemelkedik a kép síkjából. A matematika nyelvén: a fényképet egy $f = f(x, y)$ kétváltozós függvénnyel adjuk meg, amelynek a maximuma 1, ahol a fénykép fehér, és minimuma 0, ott ahol a fénykép fekete (az 1.43. ábra).

Ily módon a fényképet azonosítjuk az $f(x, y)$ kétváltozós függvénnyel. A fénykép rajzolatát, árnyalatait az $f(x, y)$ függvényt ábrázoló felület domborzatával írjuk le (az 1.43. ábra).

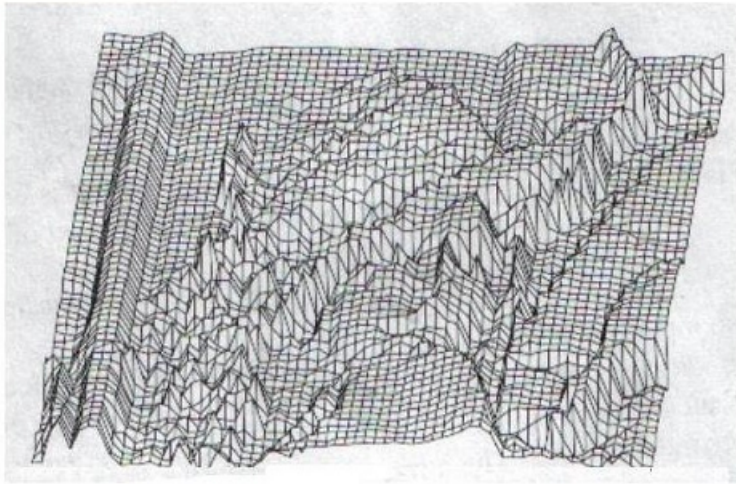
A fényképet (közelítőleg) előállító IFS megszerkesztése azon alapszik, hogy a fénykép különböző részletei, jó közelítéssel, egymásnak affín képei lehetnek (az 1.44(a). ábra). Ilyen részletek bármilyen fényképen fellelhetők.

Ez alatt azt értjük, hogy van olyan affín $R^3 \rightarrow R^3$ (vagyis térbeli) leképezés amely a nagyobbik D_a illetve D_b keret feletti domborzatot a kisebb R_a illetve R_b feletti domborzatba viszi. Természetesen ez csupán megfelelő közelítéssel érhető el. Ilyen affín leképezéseknek az uniója adja majd a W függvényt.

Az „eredeti” IFS modell az R^2 kompakt (korlátos, zárt) halmazaiból alakítja ki a képet. Itt az alaphalmaz egy fénykép részleteiből áll. Ez a matematika

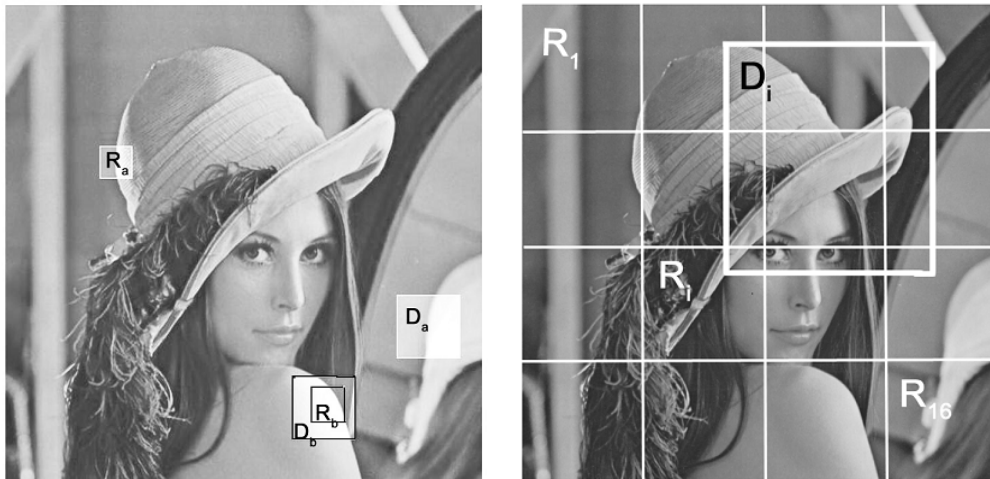
kontraszt változás: skála változtatás (a Z tengely irányában)

fényerő változás: eltolás (a Z tengely irányában)



An $f=f(x,y)$ surface generated from the Lena image

1.43. ábra.



(a)

(b)

1.44. ábra.

nyelvén, kétváltozós függvények halmazát jelenti. Ennek megfelelően, egy tetszőleges $h = h(x, y)$ függvényből induló

$$\{W^{[n]}(h); \quad n = 1, 2, \dots\} \quad (1.34)$$

iterációs sorozat fogja előállítani, megfelelő közelítéssel, a fényképet.

MEGJEGYZÉS. Célszerű a $h(x, y) = C$ konstans függvényből indulni.

Az eljárás (kódolás) egy részletes leírása

1. lépés A fénykép síkját felosztjuk 64×64 egybevágó négyzetre és mindegyik négyzeten megállapítjuk a fénykép átlagos szűrkeségi fokát, amelyhez természetes módon egy $\lambda \in [0, 1]$ számot rendelünk. Az így kapott diszkrétizált (vagyis lépcsősfüggvény) $f = f(x, y)$ fogja reprezentálni a fényképet az eljárás során.

Az $f = f(x, y)$ függvény az lesz, amelynek az értéke a 64×64 négyzet mindegyikén belül állandó, mégpedig λ , az átlagos szűrkeségi foknak megfelelően az

$$n \frac{1}{256} \quad n = 1, 2, \dots, 256$$

értékek egyike.

Legyenek R_i ; $i = 1, 2, \dots, 16$ a fényképre fektetett 4×4 négyzetrács elemei és D_j olyan négyzet a fénykép síkjában amelyek lineáris mérete (oldaléle) az R_i négyzetekének a duplája (1.44(b). ábra). (1024 ilyen négyzet van). Az eljárás következő lépése az lesz, hogy adott R_i -hez keressük azt a D_j -t amely feletti $f(x, y)$ domborzat, megfelelő affin módosítással, elég közel lesz az R_i feletti $f(x, y)$ -hoz.

MEGJEGYZÉSEK.

- (a) Az ismertett eljárás adatai természetesen „nem kötelezőek”. Az első lépésben nem kell ragaszkodni a 64×64 négyzethez, csupán ahhoz, hogy a négyzetekkel diszkrétizált függvényből „felismerhető legyen” $f = f(x, y)$, a második lépésben a D_j négyzetek éle a B_i négyzetekének a duplája legyen és a D_j négyzetek száma a lehetséges ilyen részhalmazok legalább 80 százaléka legyen.

(b) A négyzetháléhoz sem kell ragaszkodni. B_i és a D_j háromszögek is lehetnek és a háló a fénykép részletdús részein sűrűbb is lehet. Ekkor D_j a háromszögháló négyeseiből összeállított elemek.

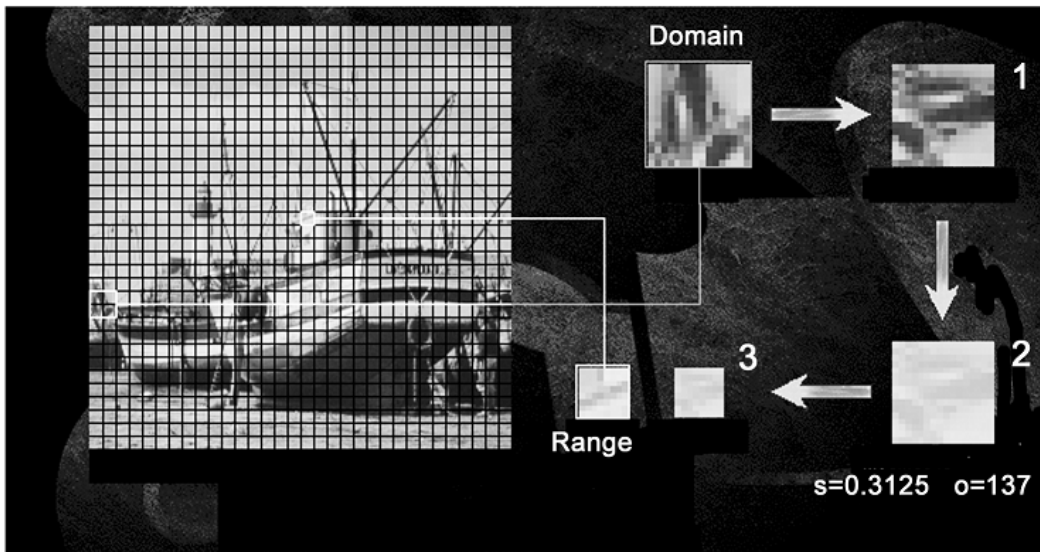
2. lépés Megvizsgáljuk, hogy a $\{D_j; j = 1, 2, \dots, 1024\}$ feletti képrészletek közül, a fenti affin átalakítás után, melyik lesz legközelebb az az első rácsnégyzet, az R_1 feletti képrészlethez. Ez a képrészlet kerül majd az R_1 feletti képrészle helyére a megfelelő affin átalakítás után. Ezután ugyanezt elvégezzük az $\{R_i; i = 2, \dots, 16\}$ négyzetekkel is.

A megfelelő affin átalakítás esetünkben azt jelenti, hogy a $D_j \rightarrow R_i$ cserén kívül, a kép o szürkességi fokát (fényességét) és s kontrasztját megfelelően változtatjuk.



1.45. ábra.

Az eljárás részleteit az 1.45. és az 1.46. ábrák mutatják. A *Domain*, a nagyobbik keretben levő kép kinagyítva. Ezt megfelelően elforgatjuk (1), majd a kép s kontrasztját és o szürkességi fokát úgy módosítjuk, hogy az „alig különbözzék” a *Range*, a kisebbik keretben levő kép kinagyított hasonmásától (2). A kisebbik keretben levő kép helyébe a (2) kerül, line-



1.46. ábra.

árisan fele méretben (2).

Az eljárás lelke ez a 2. lépés. Ezért megadjuk a vázolt képcsere leírását a matematika nyelvén is.

Adott R_i , D_j párhoz tekintsük azt a g_{ij} mátrixfüggvényt (leképezést) amely a D_j négyzetet az R_i négyzetbe viszi. Négy ilyen leképezés létezik. Ha

$$g_{ij}(\mathbf{x}) = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}; \quad \mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \quad (1.35)$$

akkor az (1.35) formulában a 2×2 mátrix a következő négy mátrix egyike

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Ugyanis, a D_j négyzetet, az első esetben, lineárisan a felére csökkentve, megfelelő b vektorral az R_i helyére toljuk. A maradék három esetben pedig még 90° , 180° illetve 270° elforgatást is végzünk.

Ezután annak a leképezésnek a mátrix alakja, amely a D_j feletti domborzatot az R_i feletti domborzatba viszi

$$F_{ij}(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ f(x_1, x_2) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (1.36)$$

Ha a domborzatok cseréje előtt affin átalakítást is végzünk, akkor

$$F_{ij}(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 \\ 0 & 0 & s_{ij} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ f(x_1, x_2) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ o_{ij} \end{pmatrix} \quad \mathbf{x} \in D_j \quad (1.37)$$

Ugyanis, ha az (1.36) formulában 1 helyébe $0 < s_{ij} < 1$ értéket teszünk, akkor a D_j feletti kép kontrasztját csökkentjük (a domborzatot az alapsikra merőlegesen, „Z irányba”, összenyomjuk). Ha a \mathbf{b} oszlopában a 0 helyébe egy $o_{ij} > 0$ értéket teszünk, akkor a fényerőt növeljük (a domborzatot az alapsikra merőlegesen, „Z irányba”, eltoljuk).

Így az F_{ij} függvény a D_j minden \mathbf{x} pontját átviszi az R_i egy meghatározott pontjába és az $f(\mathbf{x})$ függvényértéket, eme képponthez tartozó

$$s_{ij}f(x, y) + o_{ij} \quad (1.38)$$

függvényértékbe viszi.

Mikor alkalmazzuk ezt az (1.37) formulát, vagyis mikor alkalmazzuk a 2. lépésben leírt képcserét?

Akkor, amikor az (1.38), megfelelő s_{ij}, b_{ij} választással, elég közel hozható az R_i feletti képrészlethez (az R_i feletti $f(x, y)$ domborzathoz). Pontosabban, akkor amikor az (1.38) és az R_i felett felület *négyzetes eltérése* egy előre megadott ϵ -nál kisebb. A matematika nyelvén

$$\sum_{(x_1, x_2) \in D_j} (s_{ij}f(x_1, x_2) + o_{ij} - f \circ g_{ij}(x_1, x_2))^2 < \epsilon. \quad (1.39)$$

Jobb eredményt ad az a valamivel hosszabb eljárás, amikor minden olyan D_j közül, amelyre f teljesíti az (1.39) egyenlőtlenséget, kiválasztjuk azt, amelyre az (1.39) baloldala a legkisebb és ezzel a D_j képrészlettel végzük el a cserét.

3. lépés Ha az előző 2. lépésben minden R_i -hez kaptunk F_{ij} leképezést, akkor a következő, 4. lépésben leírt módon összeállítjuk a W leképezést. Ha maradt olyan R_i amelyhez nem találtunk megfelelő F_{ij} -t (vagyis az (1.39) eltérés minden j -re nagyobb, mint a megadott hibakorlát), akkor a 2. lépés eljárását megismételjük a kimaradt négyzeteken feleakkora

lineáris méretű D_j, R_i párokkal.

4. lépés Az (1.37) formulával adott F_{ij} függvényekből összeállítjuk a W leképezést a következőképpen.

W minden f függvényhez hozzárendel egy $W(f)$ függvényt. A $W(f)$ függvényt az R_i tartományokban az F_{ij} függvények határozzák meg. Pontosabban

$$W(f)(R_i) = F_{ij}(f(D_j)); \quad i = 1, 2, \dots \quad (1.40)$$

Ez egy tömör leírása a 2. lépésben megadott eljárásnak. Azt fejezi ki, hogy a $W(f)$ felületnek az R_i feletti részét úgy kapjuk meg, hogy a D_j feletti felületrészre alkalmazzuk az F_{ij} affin leképezést és az így kapott felületrészre cseréli az R_i feletti felületet (ahogyan azt a PÉLDÁBAN láttuk).

Így ezeknek a felületdaraboknak az

$$\bigcup F_{ij}(f(D_j)) \quad (1.41)$$

egyesítése adja egy f felület $W(f)$ képét.

Az (1.40) formulával adott $R_i \leftrightarrow D_j$ csere akkor történik meg, ha $F_{ij}(f(D_j))$ elég közel van $f(R_i)$ -hez. (ld.: (1.39))

Az 1-4 lépésben megadtunk egy IFS-re épülő eljárást szürke árnyalatú képek (fényképek) ezred nagyságrendű tömörítésére.

Ezzel a fénykép továbbításának sebessége arányosan meggyorsult.

A tömörített kép kibontása (dekódolása).

Az 1-4 lépésben leírt eljárás végeredményeként kapott $F_{ij}; i = 1, 2, \dots, N$ függvényekből megszerkesztett

$$\{W^{[n]}(h); \quad n = 1, 2, \dots\} \quad (1.42)$$

iterációs sorozat adja meg a fénykép közelítését. Bármely h induló képpel, a fényképnek ugyanazt az \mathcal{A}^* közelítését állítja elő.

dekódolás



1.47. ábra.

Ezt illusztrálja az [1.47. ábra](#), ahol a Lena arckép dekódolása a „káoszból” látható.

Az iterációs sorozat \mathcal{A}^* végterméke, a kódolt kép, alig különböztethető meg az eredeti képtől. Mégis *lényeges eltérés van közöttük*. Az egyik eltérés az, hogy a kódolt kép *határtalanul nagyítható* az eredeti fénykép viszont nem. A másik eltérés az, hogy a kódolt kép huszad annyi helyen tárolható mint az eredeti fénykép, más szóval, az eljárás ill. az algoritmus kiválasztja a fénykép et meghatározó összinformációknak 5%-át, az $\{F_i; i = 1, 2, \dots, N\}$ szabályok formájában, úgy hogy ebből az 5%-ból már rekonstruálható a kép. Egy ilyen eljárást *adattömörítésnek* nevezünk.

Mit jelent az, hogy egy halmaz határtalanul nagyítható? Ismeretes az, hogy minden fénykép csak egy bizonyos mértékig nagyítható. Nagyításkor a kép egyre „laposabbá” válik, egyre jobban észre vehető hogy a fényképen a valóság nem minden részlete van jelen. Így a bizonyos mértéken túl nagyított képen a részleteknek olyan hiányát vesszük észre amely azt élvezhetetlenné teszi és ez adja meg a nagyíthatóság határát.

Ugyanez a helyzet a *kinyomtatott* kódolt képpel is. Ha azonban a kódolt képet úgy nagyítjuk fel hogy közben az iterációk számát is növeljük, akkor ez nem történik meg. Ugyanis az iterációk számának növelésével a kódolt kép újabb és újabb részletei bukkannak elő, amit csak a képernyő, fotópapír vagy más képhordozó objektum korlátoz. Más szóval, az iterációk megfelelő növelésével társított nagyításkor a kódolt kép felbontása *mindig* a képernyő maximális felbontó képességével azonos.

Miért sikeres az eljárás?

Legelőször is el kell árulnunk végre, hogy milyen értelemben közelíti meg az (1.42) halmaz sorozat a fényképet, vagyis a fényképet az 1.43. ábra szerint reprezentáló f kétváltozós függvényt.

A (korlátos) függvények között egy természetes távolságfogalom

$$d[f, g] = \max\{| f(x, y) - g(x, y) |\}. \quad (1.43)$$

vagyis a *függvénygörbéjük maximális eltérése*. Ezért először azt kell megvizsgálni, hogy az (1.43) távolságban kontraktívok-e az (1.37) formulával adott F_{ij} leképezések.

Adott $(x_1, x_2) \in D_j$ pontban

$$W(f) - W(g) = F_{ij}(f) - F_{ij}(g)$$

és az (1.37) és az (1.38) alapján

$$\max | F_{ij}(f) - F_{ij}(g) | \leq s_{ij} \max | f - g | \quad (x_1, x_2) \in D_j.$$

Ezért

$$d[W(f) - W(g)] = \max_{i,j} | F_{ij}(f) - F_{ij}(g) | \leq sd[f, g]$$

ahol $s = \max_i s_{ij}$.

Ennek alapján, minden F_i (és így W is) kontraktív ebben a távolságban (metrikában) pontosan akkor, ha

$$0 < s_{ij} < 1.$$

Ekkor a **kontraktív leképezések tétele** biztosítja az eljárás sikerét.

A kontraktivitás feltétele,

$$0 < s_{ij} < 1$$

azt jelenti, hogy a kontrasztot csökkentjük. Node mi van akkor, ha a kontrasztot növelni kell? Ha ez utóbbi eset viszonylag ritkán fordul elő akkor még az eljárás konvergens marad. Pontosabban, ha van olyan K , hogy a $\{W^{[n]}(g); \quad n = 1, 2, \dots\}$ halmazokat előállító láncokban minden K hosszúságú kompozíció kontraktív, akkor ez elegendő arra, hogy a $\{W^{[n]}(\mathcal{B}); \quad n = 1, 2, \dots\}$ sorozat konvergens legyen.

Ennek igazolása roppant egyszerű. Arra kell csak gondolni, hogy ekkor az \mathcal{A}^* legfeljebb N^K kontraktív függvényvel alkotott IFS attraktoraként (invariáns halmazaként) áll elő.

Az alapvető eltérés a „klasszikus” IFS és a most tárgyalt képtömörítő eljárásban alkalmazott IFS között a következő:

a „klasszikus” IFS F_i függvényei az \mathcal{A} -t képezik le a vele affin részhalmazokra, vagyis

$$\mathcal{A} = \bigcup_i F_i(\mathcal{A}).$$

Ezzel szemben az F_{ij} függvények az \mathcal{A}^* részeit (a D_j feletti $\mathcal{A}_{D_j}^*$ felületeket) képezik le a vele affin részhalmazokra, vagyis

$$\mathcal{A}^* = \bigcup_i F_{ij}(\mathcal{A}_{D_j}^*).$$

Ezért az eljárással kapható \mathcal{A}^* halmazok „mikro-szerkezete”, a nagyításakor felbukkanó képek sokasága, sokkal változatosabb mint a „klasszikus” IFS-el kapható \mathcal{A} halmazok esetén. Ezt úgy szokták kifejezni, hogy \mathcal{A}^* -nak nagyobb a komplexitása mint \mathcal{A} -nak.

Ne felejtsük el hogy a sok apró technikai részlet mögött itt is a kontraktív leképezések tétele áll. Ennek érvényessége biztosítja, hogy a különböző technikákkal készült eljárások sikerre vezetnek.

Problémát jelenthet a most tárgyalt képtömörítő eljárásban két F_{ij} függvény kompozíciójának az értelmezése. Mivel

$$F_{ij} : D_j \rightarrow R_i$$

vagyis F_{ij} csupán a $D_j \subset R^2$ részhalmazon értelmes. Ezért $F_{ij} \circ F_{km}$ pontosan akkor létezik (értelmes) ha $R_i \cap D_m \neq \emptyset$. Ekkor bármely $\mathcal{H} \subset R^2$ halmazra

$$F_{ij}(\mathcal{H}) = F_{ij}(\mathcal{H} \cap D_j) \quad F_{ij}(\emptyset) = \emptyset.$$

Így, számos kompozíció lánc kimaradhat az iterációk során, amelyben a kontraktív függvények kisebbségben vannak, ami javítja a konvergenciát.

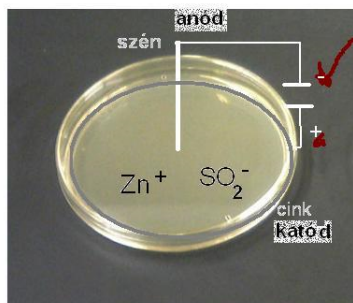
1.14. Fraktálnövekedés.

1. Elektrolízis.

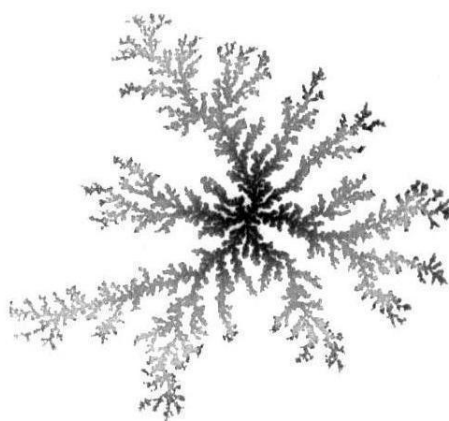
Egy kerek tálkába, amelyben rézsulfát oldat van, elektródákat helyezünk. A katódot a tálka közepe fölé függesztjük, az anódot pedig a csésze peremére helyezzük kör alakban. Az áram bekapcsolásakor a feszültség hatására a katódon réz rakódik le és nem sok idő múlva a katódon kivált réz alakja az 1.48. ábrán látható alakot ölt. Az 1.48. ábra a katód-

DLA modell (diffúzióval meghatározott részecske tömörülés)

elektrolízis.



petri plate (dish)

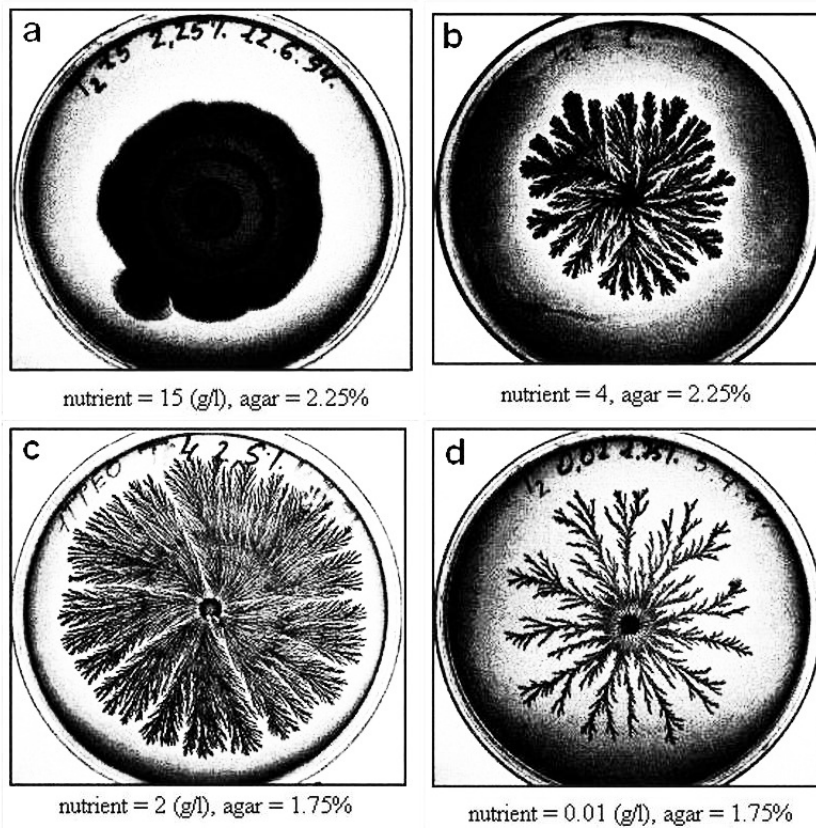


1.48. ábra.

ra merőleges keresztmetszetét mutatja ennek a halmaznak az elektrolízis kezdetétől eltelt elég hosszú idő múlva, miután a formátum „állandósult”. Ha r a katódtól mért távolság és $N(r)$ a legfeljebb r távolságra eső lerakódott réz mennyisége, akkor a $(\log r, \log N(r))$ pontok egy s meredekségű egyenesen vannak jó közelítéssel. Az s értéke, a lerakódott réz eme metszetének a box-dimenziója, akkor lesz lényegesen kisebb a 2-nél, ha az oldat koncentrációja kicsi és az elektródák közötti elektromos feszültség nagy.

2. Baktériumtelepek

Ha egy kerek tálkában (Petri csészében) zselészerű, tápanyagot tartalmazó közeg közepébe baktériumokkal teli folyadékcsepp kerül, akkor ez egy baktériumteleppé növekedik. Ha a zselében a tápanyag jól diffundál, a baktériumok mozgása nincs akadályozva és bőséges tápanyag van, akkor kb. körforma a baktériumtelep. (1.49.a ábra). Ha a tápanyag nem



1.49. ábra.

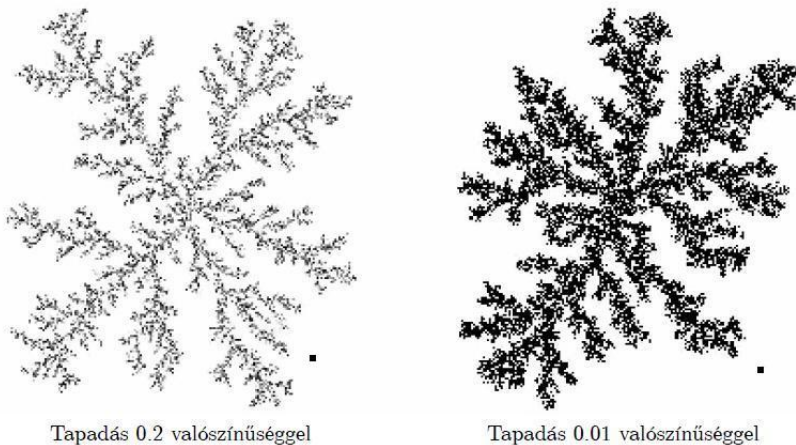
elégéses, akkor a csésze belsejében hamarabb fogy el a tápanyag mint a csésze peremén, hiszen itt van a baktériumok tömege, amíg a csésze széle még érintetlen. Ezért ekkor a csésze belsejében a baktériumok pusztulnak, a telep szélén levő egyedek pedig továbbszaporodnak. A körformájú telep „ujjasodik” (1.49.b ábra). Tovább csökkentve a tápanyagot, az ágak egyre hosszabbak lesznek, a fjordok mélyülnek, a telep „fraktálszerűvé” válik (1.49.c ábra). Az ujjasodás végpontjaiban a baktériumok szaporodásának valószínűsége egyre nagyobb lesz a belső egyedekéhez képest. A telep NEM az átmérő négyzetével, hanem r^s ($0 < s < 2$) „mértékben”

növekszik. Az s dimenzió a nélkülözés (discomfort) méretét mutatja. Nélkülözéskor a telep egyre inkább „fraktálszerű”, az s értéke egyre kisebb lesz.

3. DLA modell (*diffusion limited aggregation*). Egy eléggé sűrű és eléggé nagyméretű négyzetrácson kijelölünk egy négyzetet, ez lesz a DLA magja, majd a rács valamely pontjából elindítunk egy részecske bolyongását. Ez azt jelenti, hogy véletlenszerűen kijelölünk egy a magtól különböző négyzetet a rácson és az minden másodpercben (időegységben) egyenlő valószínűséggel lép egy rácspontot a négy irány valamelyikében. Ez a bolyongás (*Brown mozgás*) addig tart amíg a részecskét reprezentáló négyzet a maghoz jut el. (Egy előre megadott ráctávolságnál közelebb kerül a maghoz). Ekkor a részecske a maghoz tapad. Egy másik befejezése a részecske bolyongásának az, ha a részecskét reprezentáló négyzet a négyzetrács egy perempontját éri el. Ekkor a részecske megsemmisül.

Minden bolyongás végén újabb részecskét indítunk és a mag a hozzá tapadt négyzettel bővül. Ha a bolyongás a maghoz tapadással végződik, akkor a bolyongó részecskét reprezentáló négyzet a hozzá legközelebb álló négyzethez tapad. (1.50. ábra)

számítógépes modell



1.50. ábra.

Szembetűnő hasonlatosságot mutat az 1-3 folyamat. Az elektrolízis folyamán a katódra rakódott réz, a baktériumtelep alakja kedvezőtlen életkörülmények kialakulásakor és a DLA modellben, a számítógépes szimuláció során

kialakult halmaz alakja teljesen hasonló szerkezetű, elegendően hosszú folyamat után.

A dinamika invariáns halmaza hasonló szerkezetű, de ennek különböző okai vannak. A DLA modellben, a maghoz közel jutva, a továbbjutás valószínűsége már NEM azonos minden irányban. A mag irányában a letapadásnak lesz egyre nagyobb valószínűsége. Hasonló a helyzet az elektrolízis esetén a réz lerakódásával. A baktériumtelep esetében, az ujjasodás végpontjaiban a baktériumok szaporodásának valószínűsége egyre nagyobb lesz a belső egyedekéhez képest.

MEGJEGYZÉS. A baktériumtelep alakulásának finomabb vizsgálatában figyelembe szokták venni a chemotaxist, a baktériumok kémiai úton történő információcseréjét is.

2. fejezet

Az elmélet

2.1. Halmazok hasonlósága

Két háromszög \mathcal{B}_1 és \mathcal{B}_2 pontosan akkor hasonló, ha

$$a_1 = ra_2, b_1 = rb_2, c_1 = rc_2 \quad r > 0 \quad (2.1)$$

ahol a_1, b_1, c_1 a \mathcal{B}_1 és a_2, b_2, c_2 a \mathcal{B}_2 háromszög oldalai.

Két halmazt, például két poligont, akkor mondjuk hasonlóknak, ha az egyik halmaz a másik arányosan kicsinyített mása. *Hogyan lehet ezt a matematika nyelvén kifejezni?*

2.1.1. Definíció (hasonlósági leképezés) Egy $F: \mathcal{B}_1 \rightarrow \mathcal{B}_2$ függvény hasonlósági leképezés ha

$$d[F(x), F(y)] = r \cdot d[x, y]$$

ahol d a zárójelben álló két pont távolságát jelenti.

Hasonlósági leképezésre példa az \mathbb{R}^2 síkban az origó körüli elforgatás, eltolás adott vektorral, skála változtatás (arányos nagyítás, kicsinyítés) és ezek kompozíciói.

2.1.2. Definíció Két halmaz, \mathcal{B}_1 és \mathcal{B}_2 hasonló ha van olyan F hasonlósági leképezés amely a \mathcal{B}_1 pontjait a \mathcal{B}_2 pontjaiba viszi. Tömören

$$F(\mathcal{B}_1) = \mathcal{B}_2 \quad (\text{bijection}).$$

Könnyen ellenőrizhetjük, hogy ha (2.1) fennáll, akkor megadható a két háromszöget egymásba vivő F és fordítva, ha van hasonlósági F függvény, amely a \mathcal{B}_1 és \mathcal{B}_2 háromszögeket egymásba viszi, akkor (2.1) fennáll.

2.2. Önhasonló és önaffin halmazok

Egy \mathcal{H} halmaz önhasonló, ha a \mathcal{H} , vele hasonló halmazok uniója (egyesítése). Pontosabban, a matematika nyelvén

$$\mathcal{H} = \bigcup_{k=1}^N F_k(\mathcal{H}) \quad (2.2)$$

ahol F_k ($k = 1, 2, \dots, N$) hasonlósági leképezések (függvények).

2.2.1. Definíció Affin leképezésnek nevezzük a mátrix műveletekkel megadható leképezéseket. Pontosabban, $F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ affin leképezés (függvény), ha

$$F(x) = Ax + b$$

ahol A 2×2 mátrix és b oszlopvektor.

Az **affin leképezések** geometriai jellemzője, hogy paralelogrammát paralelogrammába képeznek le. Így az egységnégyzet affin képe, az A mátrixtól függően, a legkülönbözőbb paralelogramma lehet.

Analóg módon értelmezzünk $F : \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^m$; $n, m = 1, 2, \dots$ affin leképezéseket.

Egy \mathcal{H} halmaz önaffin, ha affin F_k ($k = 1, 2, \dots, N$) függvényekkel érvényes a (2.2).

2.3. Iterált függvényrendszer (IFS)

Iterációnak neveztük azt, amikor egy szabályt újra meg újra ismételtünk. A *matematika nyelvén* ezt úgy is kifejezhetjük, hogy egy f leképezésnek (függvénynek) önmagával való kompozícióit képezzük. Képletben (formulában) kifejezve

f második iterációja (v. iteráltja) $f \circ f$, tömörebb jelöléssel $f^{[2]}$.

f harmadik iterációja (v. iteráltja) $f \circ f \circ f$, tömörebb jelöléssel $f^{[3]}$.

s.i.t. Pontosabban

2.3.1. Definíció Ha \mathcal{H} egy halmaz és $f : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$, vagyis f egy olyan függvény, amely a \mathcal{H} halmazt önmagába képezi le, akkor

$$f^{[0]}(x) = x, \quad f^{[n]}(x) = f \circ f^{[n-1]}(x); \quad x \in \mathcal{H} \quad n = 1, 2, \dots$$

Az $f^{[n]}$ függvényt az f n -edik iteráltjának és az

$$\{f^{[n]}(x); \quad n = 1, 2, \dots\} \tag{2.3}$$

sorozatot pedig az f leképezés $x \in \mathcal{H}$ pontból kituduló iteráció sorozatának, röviden *iteráció sorozatnak* nevezzük.

Iterált függvényrendszernek mondjuk azt amikor párhuzamosan több függvényt iterálunk. Pontosabban

Legyenek $\{F_i; i = 1, 2, \dots, N\}$ $R^2 \rightarrow R^2$ leképezések és \mathcal{B} korlátos, zárt halmaz. A továbbiakban az R^2 euklideszi tér korlátos, zárt halmazait *kompakt halmazoknak* fogjuk nevezni. Legyen

$$F(\mathcal{B}) = \{F(x); x \in \mathcal{B}\} \quad W(\mathcal{B}) = \bigcup_{n=1}^N F_n(\mathcal{B}) \quad \mathcal{B} \subset R^2 \quad (2.4)$$

Szavakban kifejezve, a $W(\mathcal{B})$ halmaz úgy áll elő, hogy az $\{F_i; i = 1, 2, \dots, N\}$ minden függvényével képezzük az $F_i(x)$ függvényértéket minden $x \in \mathcal{B}$ pontban, majd ezeknek vesszük az unióját, egyesítjük az így kapott pontokat.

Iterált függvényrendszer akkor jön létre, ha az (IFS) formulákkal adott szabályt ismételjük újra meg újra.

2.3.2. Definíció *Iterált függvényrendszer a (2.4) formulákkal képezett W iterációinak a sorozata. A*

$$\{W^{[n]}(\mathcal{B}); n = 1, 2, \dots\} \quad (2.5)$$

sorozatot az iterált függvényrendszernek a \mathcal{B} halmazból induló pályája.

Ha \mathcal{B} olyan halmaz, amelyre

$$F_i(\mathcal{B}) \subset \mathcal{B} \quad (2.6)$$

akkor a \mathcal{B} halmazból induló pálya egymásba skatulyázott (*nested*) halmazokból áll

$$W^{[n+1]}(\mathcal{B}) \subseteq W^{[n]}(\mathcal{B}) \quad n = 1, 2, \dots$$

Ekkor a pályák végterméke

$$\mathcal{A} = \bigcap_{n=1}^{\infty} W^{[n]}(\mathcal{B})$$

az iterált függvényrendszer (IFS) *attraktora*.

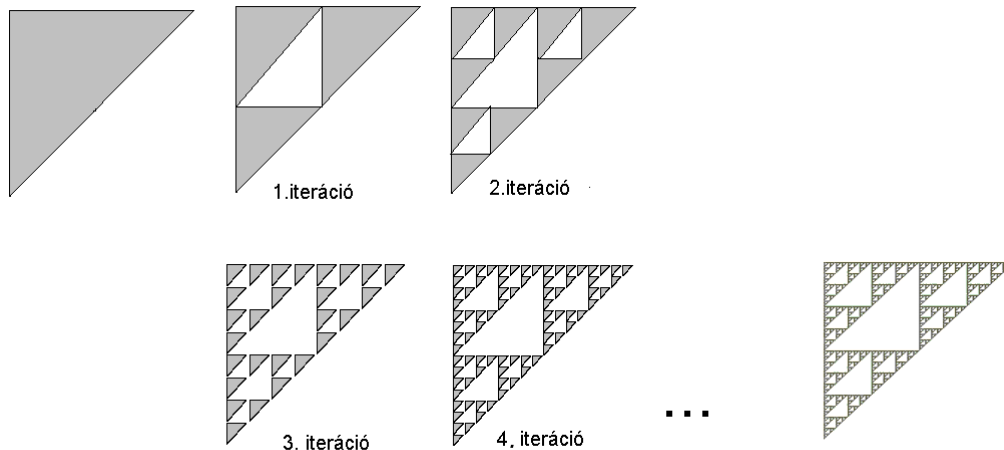
Az $\{F_i; i = 1, 2, \dots, N\}$ leképezésekkel (függvényekkel) meghatározott IFS *invariáns halmaza* \mathcal{A}' , ha

$$W(\mathcal{A}') = \mathcal{A}'.$$

Könnyen ellenőrizhetjük a következőket:

1. Ha \mathcal{A} az IFS attraktora, akkor \mathcal{A} az IFS invariáns halmaza.
2. Az \mathcal{A} invariáns halmaz pontosan akkor önhasznó, ha $\{F_i; i = 1, 2, \dots, N\}$ hasonlósági leképezések.

Sierpinski háromszög, a legismertebb IFS attraktor.



2.1. ábra.

Induljunk ki egy zárt háromszöglaplóból. Az oldalfelezőpontok összekötésével osszuk négy egybevágó részre a háromszöget, majd töröljük a középső *nyílt* háromszöget. Ezt az eljárást folytassuk a megmaradó háromszögekkel „a végtelenségig” (2.1. ábra). Pontosabban, tekintsük a következő szabályt

„minden háromszöget osszunk négy egybevágó részre és a középső (nyílt) háromszöget töröljük”

A (*) szabály ismétlésével, a háromszögből kapott $\{S_n \ n = 1, 2, \dots\}$ egymásba skatulyázott (*nested*) halmazozatot, amelyek közös része

$$S = \bigcap_{k=1}^{\infty} S_k$$

a Sierpinski háromszög.

A Sierpinski háromszöget a következő iterált függvényrendszerrel is megadhatjuk

$$\begin{aligned}F_1(x) &= \begin{pmatrix} 0.5 & 0 \\ 0 & 0.5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0.5a \end{pmatrix} \\F_2(x) &= \begin{pmatrix} 0.5 & 0 \\ 0 & 0.5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0.5a \\ 0 \end{pmatrix} \\F_3(x) &= \begin{pmatrix} 0.5 & 0 \\ 0 & 0.5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \quad x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in R^2\end{aligned}\quad (2.7)$$

2.3.1. Feladat *Vizsgáljuk meg, hol találkoztunk az 1.14 bevezető példában iterált függvényrendszerrel és ezek közül melyek azok amelyek teljesítik a (2) feltételt?*

2.3.2. Feladat *A tizennégy bevezető példában melyek azok az iterált függvényrendszerek, amelyeknek attraktora önhasonló.*

2.3.3. Feladat *Melyik érvényes a következő összefüggések közül*

1. Ha $\mathcal{B} \subset \mathcal{C}$ akkor $F(\mathcal{B}) \subset F(\mathcal{C})$;
2. $F(\mathcal{B} \cup \mathcal{C}) = F(\mathcal{B}) \cup F(\mathcal{C})$.
3. $F(\mathcal{B} \cap \mathcal{C}) = F(\mathcal{B}) \cap F(\mathcal{C})$.

MEGJEGYZÉS. Az 1.-3. összefüggések fontosak lesznek a következőkben, mivel minden $F : R^2 \rightarrow R^2$ függvényt az

$$F(\mathcal{B}) = \{F(x); \quad x \in \mathcal{B}\} \quad (2.8)$$

formulával értelmeztünk (kiterjesztettünk) kompakt \mathcal{B} halmazokra is.

2.4. Kontraktív függvények (leképezések)

Jelölje $d[a, b]$ az $a, b \in \mathbb{R}^2$ pontok távolságát. Ekkor az $F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ függvény kontraktív ha

$$d[F(x), F(y)] < r \cdot d[x, y] \quad x, y \in \mathbb{R}^2 \quad r \in (0, 1) \quad (2.9)$$

Egy kontraktív függvény összehúzza a pontokat. Ha F kontraktív, akkor az $F(x), F(y)$ képpontok távolsága határozottan kisebb mint x és y távolsága.

Kontraktív $\{F_i; i = 1, 2, \dots, N\}$ függvényekhez mindig van kompakt \mathcal{B} amelyre (2.6) teljesül.

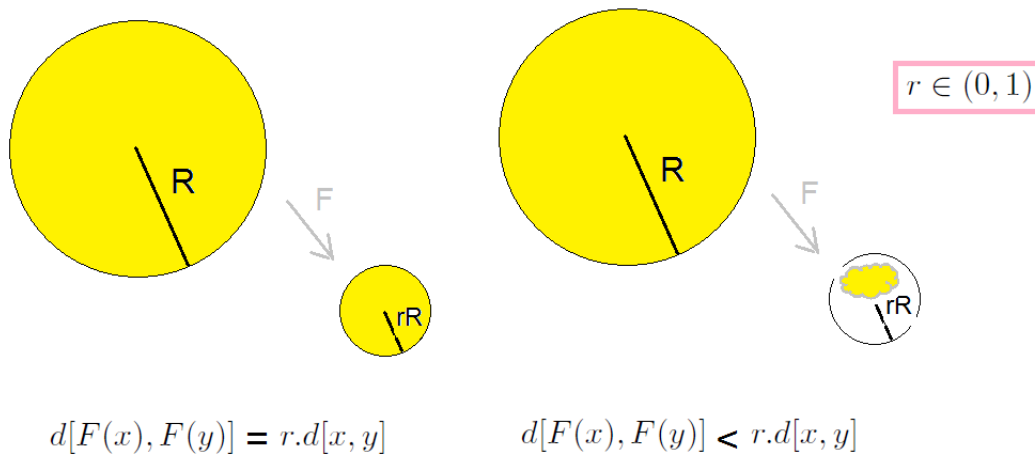
2.4.1. Tétel Ha $F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ kontraktív, akkor

$$F(\mathcal{K}) \subset \mathcal{K} \quad (2.10)$$

ha \mathcal{K} elegendő nagy R sugarú körlap. Pontosabban, (2.10) teljesül ha

$$d[\theta, F(\theta)] + rR < R \quad (2.11)$$

ahol θ a \mathcal{K} középpontja.



2.2. ábra.

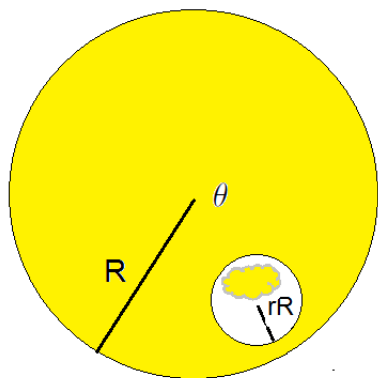
Bizonyítás. Ha (2.9) érvényes akkor az F függvény a θ középpontú, R sugarú \mathcal{K} kört az $F(\theta)$ középpontú, rR sugarú körbe viszi (2.2. ábra). Ha R elég nagy, akkor

$$F(\mathcal{K}) \subset \mathcal{K} \quad (2.12)$$

(2.4. ábra). Ugyanis, R növelésével az rR -sugarú kör lassabban növekszik, mint \mathcal{K} miközben a körök θ és $F(\theta)$ középpontjai változatlanok maradnak. Így, ha kezdetben \mathcal{K} még nem is tartalmazza az $F(\mathcal{K})$ halmazt később, amikor R már elég nagy, tartalmazni fogja. A pontos magyarázat az

$$d[\theta, F(\theta)] + rR < R \quad (2.13)$$

egyenlőtlenségből következik, amely leolvasható a 2.3. ábrából.



ha $d[\theta, F(\theta)] + rR < R$

akkor $F(\mathcal{K}) \subset \mathcal{K}$

\mathcal{K} a körlap

2.3. ábra.

Így az $\{F_i; i = 1, 2, \dots, N\}$ kontraktív leképezés mindegyikéhez található olyan (θ középpontú) \mathcal{K}_i zárt körlap, amelyre (2.12) érvényes. A $\mathcal{K}_i; (i = 1, 2, \dots, N)$ körök megadhatók úgy, hogy a középpontjuk közös legyen. Legyen \mathcal{B} a legnagyobb ilyen körlap. Ekkor

$$F_i(\mathcal{B}) \subset \mathcal{B} \quad i = 1, 2, \dots, N$$

és így megszerkesztettünk egy olyan \mathcal{B} zárt körlapot, amelyre

$$W(\mathcal{B}) = \bigcup_{i=1}^N F_i(\mathcal{B}) \subset \mathcal{B}.$$

Arra az eredményre jutottunk, hogy ha \mathcal{B} a leírt módon szerkesztett zárt körlap, akkor $W(\mathcal{B}) \subset \mathcal{B}$ és így

$$W^{[2]}(\mathcal{B}) = W \circ W(\mathcal{B}) \subset W(\mathcal{B})$$

és teljes indukcióval

$$W^{[n+1]}(\mathcal{B}) \subseteq W^{[n]}(\mathcal{B}) \quad n = 1, 2, \dots \quad (2.14)$$

A 2.14 egymásba skatulyázott (nested) kompakt halmazok közös része \mathcal{A} , egy nem üres kompakt halmaz (Cantor axioma) és ez az IFS modell „végterméke”, az IFS attraktora.

A megfelelően nagy átmérőjű körlapból induló szerkesztést úgy is felfoghatjuk, hogy a \mathcal{K} halmazból egyre finomabb darabokat eltávolítva alakul ki \mathcal{A} . Ekkor $\{W^{[n]}(\mathcal{K}); n = 1, 2, \dots\}$ egyre kisebb átmérőjű halmazok sorozata, amelyek egyre „szorosabban” lefedik az \mathcal{A} halmazt.

A kontraktív leképezések tétele.

Legyen X egy teljes metrikus tér és $f : X \rightarrow X$ kontraktív függvény. Ekkor az

$$\{f^{[n]}(x); n = 1, 2, \dots\}$$

iterációs sorozat konvergens. A határérték független x -től, bármely x értékből indulva ugyanaz lesz a határérték.

Bizonyítás. Ha f kontraktív, akkor

$$d[f(x), f(y)] \leq rd[x, y] \quad x, y \in X \quad r \in (0, 1). \quad (2.15)$$

A (2.15) alapján

$$d[f^{[2]}(x), [f^{[2]}(y)] \leq rd[f(x), f(y)] \leq r^2d[x, y]$$

Teljes indukcióval

$$d[f^{[n]}(x), [f^{[n]}(y)] \leq r^n d[x, y] \quad (2.16)$$

amiből következik, hogy ha az iteráció sorozat konvergens, akkor a határértéke független a kezdőponttól. Bármely pontból indulunk ki, ugyanaz a határérték.

Legyen a (2.16) formulában $y = f(x)$. Ekkor

$$d[f^{[n+1]}(x), f^{[n]}(x)] \leq r^n d[x, f(x)]$$

amiből

$$d[f^{[m]}(x), f^{[n]}(x)] \leq (r^m + r^{m+1} + \dots + r^n)d[x, f(x)] \quad m < n$$

és

$$r^m + r^{m+1} + \dots + r^n < r^m \frac{1}{1-r}.$$

Így a Cauchy konvergencia feltétel teljesül.

2.4.1. Feladat Adjunk meg egy geometriai jellegű bizonyítást a kontraktív leképezés tételére a Tétel alapján.

2.5. Az attraktor „érdekes” részhalmozai

Ha tüzetesebben megszemléljük az önhasonló halmazokat, akkor nagyon kis átmérőjű, az \mathcal{A} -val hasonló halmazok légióját fedezhetjük fel bennük.

Tekintsük például a Koch görbét. A 2.5 bevezető példában megállapítottuk, hogy a Koch görbe négy, harmad akkora Koch görbe uniója. Ám a harmad átmérőjű Koch görbe mindegyike újra négy, harmad akkora Koch görbe uniója. És így tovább a „végtelenségig”. A Koch görbében bármilyen kis átmérőjű Koch görbe felfedezhető és csupán ezekből összerakható a Koch görbe.

Pontosabban kifejezve ezt a gondolatmenetet, minden pozitív egész n -re, a Koch görbe 4^n olyan Koch görbe uniója, amelyek mindegyikének az átmérője az eredeti Koch görbe $\frac{1}{3}^n$ -ed része.

Ugyanez mondható minden önhasonló halmazról, csupán az arányossági tényezők lesznek mások. Például, a Cantor halmaz két harmadakkora Cantor halmaz uniója, amiből következik, hogy a Cantor halmaz összerakható bármilyen kis átmérőjű Cantor halmazokból. A határtalanul nagyítható faágnál 0.4 az arányossági tényező és négy kisebb faág uniója egy nagyobb, de ugyanilyen faág lesz. A csillárnál felváltva 0.25 és 0.5 arányossági tényezőket alkalmazunk.

A matematika nyelvén, formulákkal ez a gondolatmenet így írható le. Rrekurzív módon alkalmazva az önhasonlóság definícióját, az (2.5) formulát és a 2.3.3. feladat 2. esetét

$$\mathcal{A} = \bigcup_{i=1}^N F_i \left(\bigcup_{j=1}^N F_j(\mathcal{A}) \right) = \bigcup_{i=1}^N \bigcup_{j=1}^N F_i \circ F_j(\mathcal{A}) \quad (2.17)$$

Ezzel az eredeti N helyett, az \mathcal{A} -val hasonló N^2 részre bontottuk az \mathcal{A} halmazt. Megismételve a rekurzív helyettesítést

$$\mathcal{A} = \bigcup_{j=1}^N \bigcup_{i=1}^N F_j \circ F_i \left(\bigcup_{k=1}^N F_k(\mathcal{A}) \right) = \bigcup_{k=1}^N \bigcup_{j=1}^N \bigcup_{i=1}^N F_k \circ F_j \circ F_i(\mathcal{A}).$$

Ezzel az \mathcal{A} -val hasonló N^3 részre bontottuk az \mathcal{A} halmazt.

Ujra meg újra alkalmazva ezt az eljárást

$$\mathcal{A} = \bigcup_{\sigma} F_{\sigma_1} \circ \dots \circ F_{\sigma_n}(\mathcal{A}); \quad \sigma_i \in \{1, 2, \dots, K\} \quad (2.18)$$

A (2.18) formula a következőket jelenti: Az $\{F_i; \quad i = 1, 2, \dots, N\}$ függvényekből megalkotjuk az összes n hosszúságú kompozíciót majd az így kapott (N^n számú) függvénynek vesszük az unióját. Ily módon is elő tudjuk állítani az \mathcal{A} -t.

Mekkora az \mathcal{A} halmaz így kapott

$$F_{\sigma_1} \circ \dots \circ F_{\sigma_n}(\mathcal{A}); \quad \sigma_i \in \{1, 2, \dots, K\}.$$

részeinek az átmérője?

Egy \mathcal{H} halmaz átmérője a $\{d[x, y]; \quad x, y \in \mathcal{H}\}$ számhalmaz maximuma. Ez esetünkben annak a két \mathcal{H} -beli pontnak a távolsága, amelyek a legtávolabb vannak egymástól.

Ha F egy hasonlósági leképezés r hasonlósági tényezővel, akkor az $F(\mathcal{A})$ halmaz átmérője az \mathcal{A} átmérőjének r -szerese. Ezt alkalmazva azt kapjuk, hogy az $F_{\sigma_1} \circ \dots \circ F_{\sigma_n}(\mathcal{A})$ átmérője az \mathcal{A} átmérőjének $r_{\sigma_1} \dots r_{\sigma_n}$ -szerese és mivel $0 < r_{\sigma_i} < 1$, ezért $F_{\sigma_1} \circ \dots \circ F_{\sigma_n}(\mathcal{A})$ átmérője tetszőlegesen kicsi lesz ha n elég nagy. (Pontosabban, bármilyen $\varepsilon > 0$ számot adunk meg, van olyan N , hogy az

$$F_{\sigma_1} \circ \dots \circ F_{\sigma_n}(\mathcal{A}); \quad \sigma_i \in \{1, 2, \dots, K\}$$

részek mindegyikének átmérője kisebb mint ε ha $n > N$.)

Az elmondottakból következik

Egy önazonos \mathcal{A} tetszőlegesen kis átmérőjű, \mathcal{A} -val hasonló halmazok uniójaként is előállítható.

Ha $\{F_k; \quad k = 1, 2, \dots, N\}$ affin függvények, vagyis

$$F(x) = Ax + b$$

ahol A egy 2×2 mátrix és b oszlopvektor, akkor is érvényesek az elmondottak. Mivel egy affin leképezés az egységnégyzetet bármely parallelogrammába

képezhet le (3.1. ábra), ezért egy önaffin \mathcal{A} halmaz szerkezete (struktúrája) sokkal változatosabb lehet, mint egy önhasznó \mathcal{A} .

Megadunk egy eljárást az \mathcal{A} érdekes részhalmazainak a felkutatására. Végezzük el a fenti felbontást egy olyan nagy zárt körlappal amelyre érvényes (2.12). Ekkor

$$\{F_{\sigma_1} \circ \dots \circ F_{\sigma_n}(\mathcal{K}) \quad n = 1, 2, \dots\} \quad (2.19)$$

egymásba skatulyázott halmazok, amelyek átmérői tartanak a nullához. Így a közös részük egyetlen $x \in \mathcal{A}$ pontot tartalmaz. Rendeljük hozzá ezen $x \in \mathcal{A}$ ponthoz a

$$\sigma = \sigma_1 \sigma_2 \dots \sigma_n \dots$$

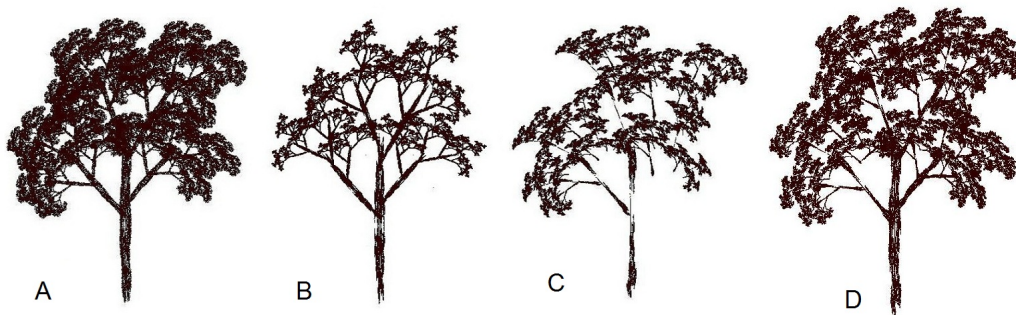
végtelen jelsorozatot (végtelen szót). Ezzel \mathcal{A} minden pontjához hozzárendelünk végtelen jelsorozatot.

Egy ilyen végtelen jelsorozatot *N-jelű kód*nak és az

$$x \in \mathcal{A} \Leftrightarrow \sigma = \sigma_1 \sigma_2 \dots \sigma_n \dots$$

hozzárendelést az \mathcal{A} kódolásának fogunk nevezni.

Az \mathcal{A} attraktor kódolásával, az \mathcal{A} részhalmazainak kijelölésének egy természetes módját adtuk meg. Ha megadunk szavakat és töröljük azokat a pontokat, amelyek kódja ezeket a szavakat tartalmazza, akkor sokszor érdekes \mathcal{A}^* részhalmazokat kapunk.



2.4. ábra.

PÉLDA. A következő hat függvénnyel adott IFS attraktora egy fa benyomását kelti. (2.4.A ábra)

$$F_1(x) = \begin{pmatrix} 0.1950 & -0.4880 \\ 0.3440 & 0.4430 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 333 \\ 183 \end{pmatrix}$$

$$F_2(x) = \begin{pmatrix} 0.4620 & 0.4140 \\ -0.2520 & 0.3610 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 186 \\ 426 \end{pmatrix}$$

$$F_3(x) = \begin{pmatrix} -0.0580 & -0.0700 \\ 0.4530 & -0.1110 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 450 \\ 72 \end{pmatrix}$$

$$F_4(x) = \begin{pmatrix} -0.0350 & 0.0700 \\ -0.4690 & -0.0220 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 366 \\ 372 \end{pmatrix}$$

$$F_5(x) = \begin{pmatrix} -0.6370 & 0.0000 \\ 0.0000 & 0.5010 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 642 \\ 186 \end{pmatrix}$$

Túlságosan dús lombzatát ritkítandó, szavakat (u.n. tiltott szavakat) adunk meg és ezen szavakat tartalmazó láncokhoz tartozó pontokat töröljük az \mathcal{A} attraktorból.

Először töröljük mindazon pontokat, amelyek kódja 11, 22, 33, 44, 55 szavakat tartalmazza. Vagyis azokat a végtelen kompozíció láncokat (és így a hozzá tartozó pontokat) töröljük, amelyekben közvetlenül egymás után szerepel a betű. Ekkor egy nagyon lecsupaszított fát kaptunk (*2.4.B ábra*).

Kísérletezzünk a

15, 21, 22, 24, 25, 31, 32, 34, 45

tiltott szavakkal. Ez már a kellő formát adja (*2.4.C ábra*), viszont ekkor az attraktor megmaradó része széteső. Finomítsuk az eljárást, a fenti szavakhoz tartozó halmazoknak csupán egy részhalmazát töröljük. Legyenek a tiltott szavak

152, 153, 154, 211, 212, 214, 215, 222, 223, 224, 225, 243, 244, 245, 251, 253, 254, 255,

311, 312, 313, 314, 323, 324, 325, 341, 342, 343, 451, 452, 453, 454

Az előző fát kaptuk (*2.4.D ábra*), de ez már tartalmazza a hiányzó részeket.

2.5.1. Feladat *Igazoljuk, hogy az \mathcal{A} kódolása csupán a (2.10) teljesülésétől függ.*

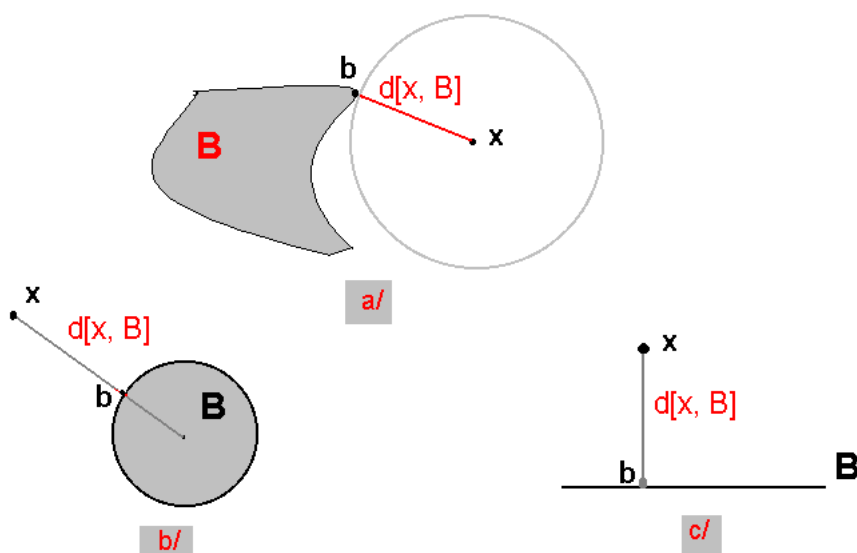
2.6. Halmazok távolsága

A matematika nyelvén hogyan fejezhető ki, hogy két halmaz közel van egymáshoz? A természetes út két halmaz távolságának a fogalmán át vezet. Ha két halmaz távolsága h , akkor a h értéke ad felvilágosítást arról, hogy a két halmaz közel van-e egymáshoz.

A számítógépes grafikában is alkalmazott és legcélszerűbb távolság fogalom arra a formulára épül, amely megadja egy $x \notin \mathcal{B}$ pont és egy \mathcal{B} halmaz távolságát. Ez a formula

$$d[x, \mathcal{B}] = \min\{d[x, b] : b \in \mathcal{B}\}. \quad (2.20)$$

Itt $d[x, b]$ az x és b pont távolságát jelenti és a „min” azt jelenti, hogy annak a b pontnak az x -től mért távolságát tekintjük, amely a \mathcal{B} pontjai közül a legközelebb van x -hez (2.5. ábra).



2.5. ábra.

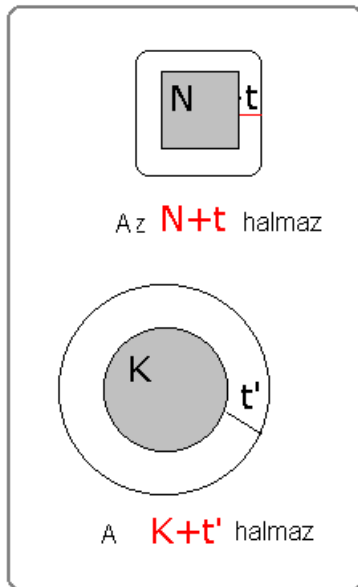
Ha \mathcal{B} egy egyenes, akkor ez a pont az x pontra illeszkedő, a \mathcal{B} -re merőleges egyenes és a \mathcal{B} metszéspontja. Ha \mathcal{B} egy zárt körlap, akkor ez a pont az x , θ pontokra illeszkedő egyenes, ahol θ a kör középpontja (2.5. ábra).

MEGJEGYZÉS. Egy *nyílt* körlapnak nincsen olyan pontja, amely legközelebb van egy a körön kívüli x ponthoz. Bármilyen zárt és korlátos halmaznak viszont van. A továbbiakban csak *korlátos, zárt* (kompakt) *halmazok* lesznek.

A pont-halmaz távolságra épülő új fogalom a t -vel növelt \mathcal{B}

$$\mathcal{B} + t = \{x : d[x, \mathcal{B}] \leq t\}$$

vagyis $\mathcal{B} + t$ azoknak a pontoknak a halmaza amelyek legfeljebb t távolságra vannak \mathcal{B} -től (2.6. ábra).



2.6. ábra.

Figyeljük meg, hogy ha \mathcal{K} egy r sugarú körlap, akkor a $\mathcal{K} + t'$ halmaz egy $r + t'$ sugarú körlap. Ha \mathcal{N} egy négyzet, akkor a tőle legfeljebb t távolságban levő pontok hamaza NEM négyzet.

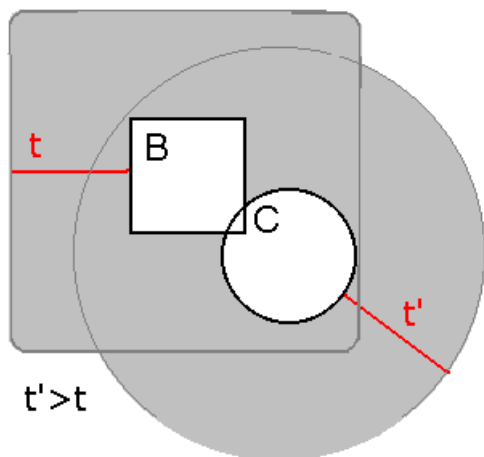
A \mathcal{B} és \mathcal{C} nem üres kompakt halmazok $h[\mathcal{B}, \mathcal{C}]$ (Hausdorff) távolsága az a legkisebb t amelyre

$$\mathcal{C} \subseteq \mathcal{B} + t \quad \mathcal{B} \subseteq \mathcal{C} + t. \quad (2.21)$$

(2.7. ábra). A (2.21) formula informális jelentése, amit a 2.7. ábráról is leolvashatunk, hogy a \mathcal{B} halmazt addig növeljük, amíg $\mathcal{B} + t$ „éppen elnyeli” a \mathcal{C} halmazt, majd ugyanezt tegyük a \mathcal{C} halmazzal. A kapott t értékek közül a nagyobbik lesz a \mathcal{B} és \mathcal{C} halmazok távolsága.

A Hausdorff távolságnak egy másik, *ismertebb*, de kevésbé szemléletes meghatározása is van.

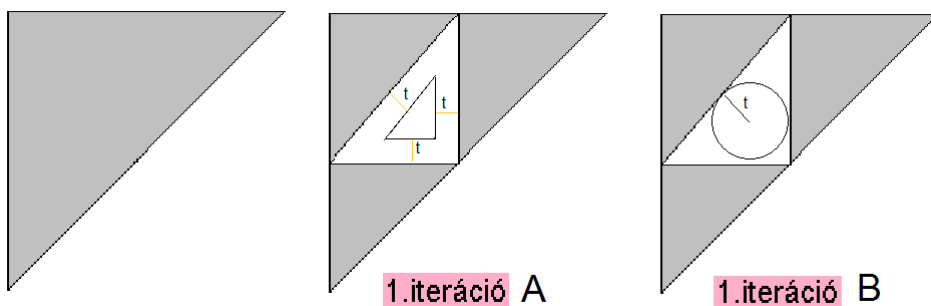
Legyen $d[\mathcal{B}, \mathcal{C}] = \max\{d[x, \mathcal{C}]; x \in \mathcal{B}\}$. Vagyis, legyen x a \mathcal{B} halmaznak az a pontja, amely a legtávolabb van \mathcal{C} -től és $d[\mathcal{B}, \mathcal{C}]$ ennek az x pontnak a \mathcal{C} -től



A körlap és a négyzetlap Hausdorff távolsága t' .

2.7. ábra.

mért távolsága. Ekkor a $d[\mathcal{B}, \mathcal{C}]$ és a $d[\mathcal{C}, \mathcal{B}]$ értékek közül a *nagyobbik* lesz a $h[\mathcal{B}, \mathcal{C}]$.



2.8. ábra.

2.6.1 Példa A Sierpinski háromszögre vezető sorozat (2.1. ábra) első két elemének a távolsága a kivágott háromszög beírt körének sugara: $0.3a$ (2.8.B ábra). Ezután ez a távolság minden iterációnál (lépésnél) feleakkora lesz. Így

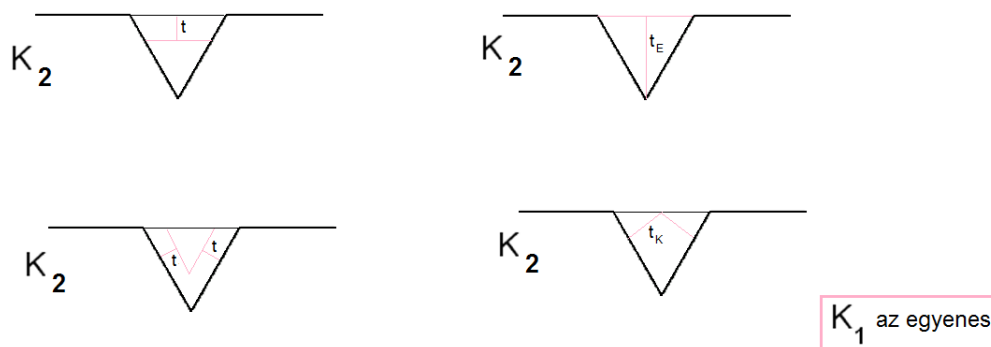
$$h[\mathcal{S}_{n+1}, \mathcal{S}_n] = 0.3a \frac{1}{2^{n+1}}$$

ami rohamosan (exponenciálisan) tart a nullához. Ugyanis, mivel $\mathcal{S}_2 \subset \mathcal{S}_1$ ezért $d[\mathcal{S}_2, \mathcal{S}_1] = 0$ és az \mathcal{S}_1 háromszögnek az \mathcal{S}_2 halmaztól t távolságra levő

pontok a törölt középső háromszögben vannak és t maximális értéke, a törölt középső háromszög beírt körének a sugara.

2.6.2 Példa A Koch görbére vezető sorozat első két elemének a távolsága a háromszög magassága $t_E = \frac{\sqrt{3}}{6}$ (2.9. ábra). Ugyanis

$$d[\mathcal{K}_1, \mathcal{K}_2] = t_K = \frac{1}{3\sqrt{5}} \quad d[\mathcal{K}_2, \mathcal{K}_1] = t_E = \frac{\sqrt{3}}{2.3}$$



2.9. ábra.

Ezután ez a távolság, minden iterációnál (lépésnél) harmad akkora lesz. Így

$$h[\mathcal{K}_{n+1}, \mathcal{K}_n] = \frac{\sqrt{3}}{6} \frac{1}{3^{n+1}}$$

ami rohamosan (exponenciálisan) tart a nullához.

2.6.3 Példa A faágra vezető sorozat (1.15. ábra) első két elemének a távolsága legyen d , amelyet közvetlen méréssel állapíthatunk meg. Ezután, a szerkesztés alapján két szomszédos faág távolsága minden iterációnál az előző 0.4-szerese lesz.

A fenti példák alapján, a hasonlósági leképezésekkel adott iterációs függvényrendszer (IFS) pályáinak a „konvergencia sebességét” az \mathcal{A} invariáns halmazhoz a hasonlósági tényezők határozzák meg.

A $h[\mathcal{B}, \mathcal{C}]$ értéket két okból tekinthetjük a \mathcal{B} és \mathcal{C} távolságának. Az egyik az, hogy megegyezik a vizuális tapasztalattal. Ha a halmazok (ábrák) h távolsága kicsi, akkor alig tudjuk a halmazokat megkülönböztetni egymástól. A másik ok az, hogy h kielégíti a *metrikus axiómákat*, vagyis kielégíti a következő tulajdonságokat

1. $h[\mathcal{B}, \mathcal{C}] \geq 0$ és $h[\mathcal{B}, \mathcal{C}] = 0$ pontosan akkor ha $\mathcal{B} = \mathcal{C}$ (vagyis \mathcal{B} és \mathcal{C} ugyanaz a halmaz);
2. $h[\mathcal{B}, \mathcal{C}] = h[\mathcal{C}, \mathcal{B}]$;
3. Bármely $\mathcal{A}, \mathcal{B}, \mathcal{C}$ mellett $h[\mathcal{A}, \mathcal{B}] + h[\mathcal{B}, \mathcal{C}] \geq h[\mathcal{A}, \mathcal{C}]$.

Ezek közül csupán a **3.**, a *háromszög egyenlőtlenség* az aminek bizonyítása nem nyilvánvaló. A bizonyítás a következő lehet:

Legyen $h[\mathcal{A}, \mathcal{B}] = t_{AB}$ és $h[\mathcal{B}, \mathcal{C}] = t_{BC}$. Ez azt jelenti hogy t_{AB} és t_{BC} az a legkisebb érték amelyre

$$\begin{aligned} \mathcal{A} &\subseteq \mathcal{B} + t_{AB}, & \mathcal{B} &\subseteq \mathcal{A} + t_{AB} \\ \mathcal{B} &\subseteq \mathcal{C} + t_{BC}, & \mathcal{C} &\subseteq \mathcal{B} + t_{BC}. \end{aligned}$$

Az a/ és c/ alapján

$$\mathcal{A} \subseteq \mathcal{C} + t_{BC} + t_{AB};$$

a b/ és d/ alapján

$$\mathcal{C} \subseteq \mathcal{A} + t_{AB} + t_{BC};$$

ami éppen azt jelenti, hogy $h[\mathcal{A}, \mathcal{C}] \leq t_{BC} + t_{AB}$.

2.7. Egymásba skatulyázott halmazok távolsága

A **2.6.** fejezet **2.6.1.** példájában megmutattuk, hogy a Sierpinski háromszöget előállító iterációs sorozat elemei, Hausdorff távolságban, egyre közelebb kerülnek a Sierpinski háromszöghöz, *harmóniában a vizuális tapasztalattal* és ugyanezt mutattuk meg a Koch görbére is a **2.6.2.** példában. A következőkben azt fogjuk megmutatni, hogy kompakt halmazoknak *minden* egymásba skatulyázott (*nested*) sorozata, a Hausdorff távolságban mérve, egyre közelebb kerül a halmazok közös részéhez. Pontosabban, matematikai formulával kifejezve.

2.7.1. Tétel *Ha*

$$\{\mathcal{C}_n; \quad n = 1, 2, \dots\}$$

nem üres kompakt halmazok sorozata,

$$\mathcal{C}_{n+1} \subset \mathcal{C}_n \text{ és } \mathcal{A} = \bigcap_{k=1}^{\infty} \mathcal{C}_k$$

akkor

$$h[\mathcal{A}, \mathcal{C}_n] \rightarrow 0.$$

MEGJEGYZÉSEK.

1. \mathcal{A} nem üres. Ez következik abból, hogy egymásba skatulyázott *kompakt halmazok* közös része nem üres *kompakt halmaz (Cantor axióma)*.
2. A $h[\mathcal{A}, \mathcal{C}_n] \rightarrow 0$ állítás, köznapi szóhasználatnál, azt jelenti hogy \mathcal{C}_n *tetszőlegesen közel* kerül \mathcal{A} -hoz, ha elég messze megyünk a $\{\mathcal{C}_n; n = 1, 2, \dots\}$ sorozatban. (Ez nem ugyanaz, mintha azt mondjuk: „*egyre közelebb* kerül az \mathcal{A} -hoz”.) Így a tétel állítása megegyezik („*harmóniában van*”) a vizuális tapasztalattal.

Bizonyítás. Az \mathcal{A} jelentéséből következik

$$\mathcal{C}_k \supset \mathcal{A} \quad k = 1, 2, \dots$$

Igy csak azt kell bizonyítani, hogy minden $\epsilon > 0$ értékhez van olyan n , hogy ha $k > n$ akkor

$$\mathcal{A} + \epsilon \supset \mathcal{C}_k.$$

Tételezzük fel, hogy az állítás nem igaz. Ez azt jelenti, hogy van olyan t és $\{x_i; i = 1, 2, \dots\}$ sorozat hogy

$$x_i \in \mathcal{C}_i \quad \text{és} \quad x_i \notin \mathcal{A} + t \quad (2.22)$$

Mivel $\{x_i; i = 1, 2, \dots\} \subset \mathcal{C}_1$ (vagyis $\{x_i; i = 1, 2, \dots\}$ korlátos sorozat), ezért a sorozatnak van konvergens részsorozata. Legyen ennek határértéke x . Erre az x határértékre a következőknek kell érvényesnek lenni.

Egyrészt, $x_i \in \mathcal{C}_k$ ha $i > k$, mivel ekkor $\mathcal{C}_i \subset \mathcal{C}_k$. Ezért $x \in \mathcal{C}_k$ mivel \mathcal{C}_k zárt. Ez érvényes minden k -ra és így

$$x \in \bigcap_{k=1}^{\infty} \mathcal{C}_k = \mathcal{A}. \quad (2.23)$$

Másrészt, (2.22) alapján, az $\{x_i; i = 1, 2, \dots\}$ elemei legalább t távolságban vannak \mathcal{A} -tól, ezért

$$x \notin \mathcal{A} + t. \quad (2.24)$$

A (2.23) és (2.24) ellentmond egymásnak. Így a tétel tagadásával ellentmondásra jutottunk. (A tétel igaz az „indirekt bizonyítás elve” alapján.)

2.8. Kontraktív halmazfüggvény

Ha F kontraktív, akkor a (2.8) szerint hozzárendelt halmazfüggvény is kontraktív (a Hausdorff távolságban mérve).

2.8.1. Tétel *Ha F kontraktív függvény r kontraktivitási tényezővel, akkor ez érvényes az F -hez tartozó halmazfüggvényre is, vagyis*

$$h[F(\mathcal{B}), F(\mathcal{C})] \leq r \cdot h[\mathcal{B}, \mathcal{C}]. \quad (2.25)$$

Bizonyítás. 1. lépés. *Hasonlósági F esetén nyilvánvalónak látszik hogy*

$$F(\mathcal{B} + t) \subseteq F(\mathcal{B}) + rt \quad (2.26)$$

hiszen F „hatására” egy halmaz lineárisan az r -szeresére változik és így a \mathcal{B} halmaztól legfeljebb t távolságban levő pontok, az $F(\mathcal{B})$ -től legfeljebb rt távolságba kerülnek.

Bármely kontraktív F -re a (2.26) bizonyítása a következő: ha $x \in F(\mathcal{B} + t)$ akkor van olyan $b \in \mathcal{B}$ és z hogy $x = F(z)$ és $d[z, b] \leq t$ amiből már következik

$$d[x, F(b)] = d[F(z), F(b)] \leq rt$$

vagyis $x \in F(\mathcal{B}) + rt$.

2. lépés. *A (2.25) a következőt jelenti*

$$F(\mathcal{C}) \subset F(\mathcal{B}) + rt \quad \text{és} \quad F(\mathcal{B}) \subset F(\mathcal{C}) + rt \quad (2.27)$$

ahol $t = h[\mathcal{B}, \mathcal{C}]$.

Ha $\mathcal{C} \subset \mathcal{B} + t$ akkor $F(\mathcal{C}) \subset F(\mathcal{B} + t)$, ezért (2.26)-ból következik (2.27) első fele. Ezzel igazoltuk a tételt, hiszen a jobboldali formula bizonyítása ugyanígy történhet.

2.9. Halmazok uniójának távolsága

Mi a kapcsolat a $\{\mathcal{B}_i; i = 1, 2, \dots, N\}$ és $\{\mathcal{C}_i; i = 1, 2, \dots, N\}$ halmazok $h[\mathcal{B}_i, \mathcal{C}_i]$ ($i = 1, 2, \dots, N$) távolsága és az uniójuk

$$h \left[\bigcup_{i=1}^N \mathcal{B}_i, \bigcup_{i=1}^N \mathcal{C}_i \right]$$

távolsága között?

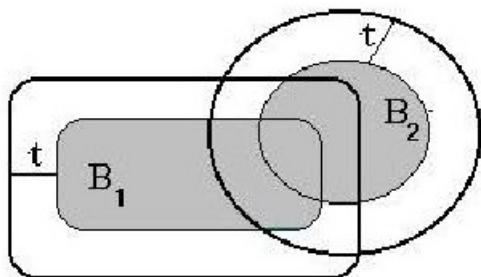
A válasz a következő:

$$h \left[\bigcup_{i=1}^N \mathcal{B}_i, \bigcup_{i=1}^N \mathcal{C}_i \right] \leq \max\{h[\mathcal{B}_i, \mathcal{C}_i]; (i = 1, 2, \dots, N)\} \quad (2.28)$$

vagyis a \mathcal{B}_i ill. \mathcal{C}_i halmazok uniója közötti távolság legfeljebb akkora mint a $h[\mathcal{B}_i, \mathcal{C}_i]$ távolságok közül a legnagyobb.

A (2.28) bizonyítása. A (2.28) egyenlőtlenség abból következik, hogy

$$\bigcup_{i=1}^N [\mathcal{B}_i + t] = \bigcup_{i=1}^N \mathcal{B}_i + t \quad (2.29)$$



$$[\mathcal{B} + t] \cup [\mathcal{C} + t] = [\mathcal{B} \cup \mathcal{C}] + t$$

2.10. ábra.

($N = 2$ -re ld. 2.10. ábrát). Ugyanis, ha

$$h[\mathcal{B}_i, \mathcal{C}_i] = t_i; (i = 1, 2, \dots, N) \text{ es } t = \max\{t_i; i = 1, 2, \dots, N\}$$

akkor

$$\mathcal{B}_i \subseteq \mathcal{C}_i + t \text{ és } \mathcal{C}_i \subseteq \mathcal{B}_i + t \quad i = 1, 2, \dots, N;$$

igy, ha (2.29) érvényes, akkor

$$\bigcup_{i=1}^N \mathcal{B}_i \subseteq \bigcup_{i=1}^N (\mathcal{C}_i + t) = \bigcup_{i=1}^N \mathcal{C}_i + t \text{ és } \bigcup_{i=1}^N \mathcal{C}_i \subseteq \bigcup_{i=1}^N (\mathcal{B}_i + t) = \bigcup_{i=1}^N \mathcal{B}_i + t$$

ami éppen azt jelenti, hogy

$$h \left[\bigcup_{i=1}^N \mathcal{B}_i, \bigcup_{i=1}^N \mathcal{C}_i \right] \leq t.$$

Figyelembe véve a h távolság definícióját, az elmondottakból már következik (2.28).

2.10. Távolság (*metrika*) és határérték

Ha egy halmazban távolság (metrika) van értelmezve, akkor ezzel a *határértéket* is értelmeztük, éppugy, mint a közönséges számsorozatok esetében.

Legyen $\{\mathcal{C}_n; n = 1, 2, \dots\}$ kompakt halmazok végtelen sorozata. Ekkor azt mondjuk, hogy ez a sorozat tart egy kompakt \mathcal{A} halmazhoz, ha a

$$\{h[\mathcal{C}_n, \mathcal{A}]; n = 1, 2, \dots\}$$

(nemnegatív) számsorozat a nullához tart.

Ezt a számsorozatok határértékének a mintájára így jelöljük

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathcal{C}_n = \mathcal{A} \quad \text{vagy} \quad \mathcal{C}_n \rightarrow \mathcal{A}.$$

2.10.1 Példa A Koch görbét előállító

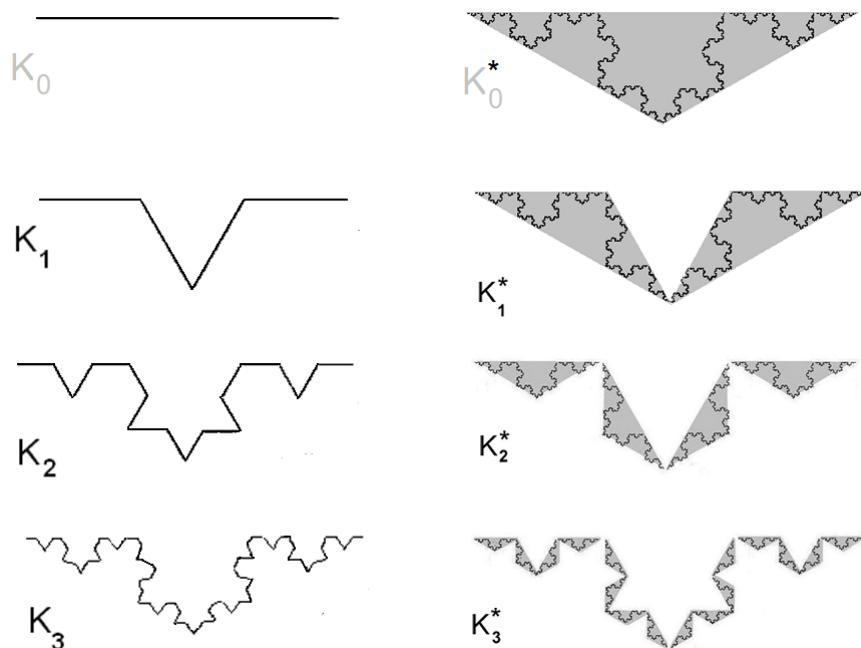
$$\{K_n; n = 1, 2, \dots\}$$

sorozat határértéke

$$\bigcap_{k=1}^{\infty} K_n^* \tag{2.30}$$

Másszóval, a $\{K_n; n = 1, 2, \dots\}$ és a $\{K_n^*; n = 1, 2, \dots\}$ sorozatnak ugyanaz a határértéke (2.11. ábra). Ugyanis a szerkesztésből

$$h[K_1, K_1^*] = \frac{1}{6}$$



2.11. ábra.

és indukcióval

$$h[K_n, K_n^*] = \frac{1}{3^{n-1}} \frac{1}{6}.$$

Másrészt, a $\{K_n^*; n = 1, 2, \dots\}$ sorozat egymásba skatulyázott halmazok sorozata, ezért a határértéke a (2.30).

A metrikából származtatott határérték mindig rendelkezik a számsorozatok határértékének a következő tulajdonságaival.

- a/ legfeljebb egy határérték van.
- b/ részsorozat határértéke ugyanaz.
- c/ ha egy sorozat konvergens akkor korlátos („elfér” egy elegendően nagy sugarú gömbben).

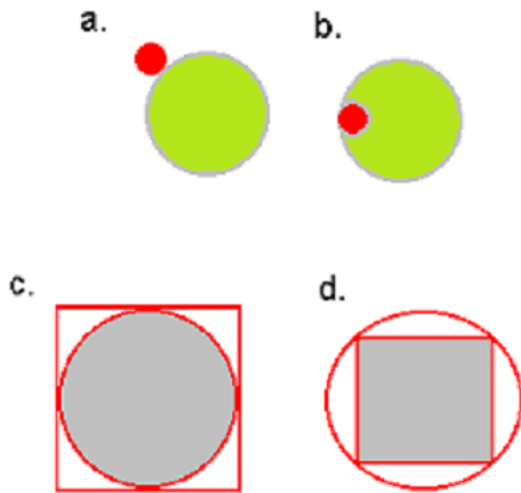
2.10.1. Feladat A 2.12., 2.13.e és a 2.13.f ábrákon adjuk meg a $h[A, \mathcal{B}]$ távolságokat.

Az a/ és b/ ábrán A a sötét és B a szürke.

A c/ és d/ ábrán A a négyzetlap és B a körlap.

Az e/ és f/ ábrán A a fekete halmaz és B a szürke és fekete uniója (egyesítése).

2.10.2. Feladat Legyenek \mathcal{B} és \mathcal{C} koncentrikus körlapok egy ill. egynél kisebb r sugárral. Nyilvánvalóan $\mathcal{C} \subset \mathcal{B}$.



2.12. ábra.

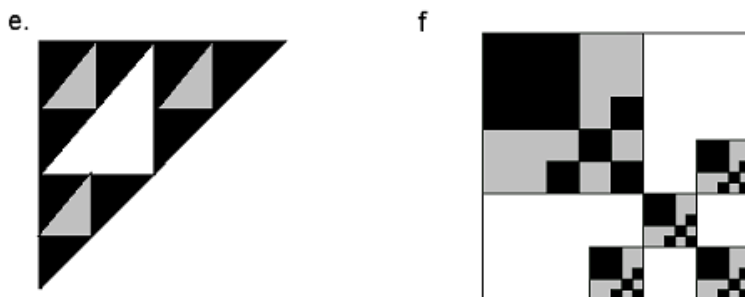
- a/ Adjuk meg az $r \rightarrow h[\mathcal{B}, \mathcal{C}]$ függvényt.
- b/ Adjuk meg az $r \rightarrow h[\mathcal{C}, \mathcal{B} - \mathcal{C}]$ függvényt.

Rajzoljuk meg mindkét függvénygörbét.

2.10.3. Feladat *Hogyan alakul a Sierpinski háromszögre vezető*

$$h[W^{[n]}(\mathcal{B}), W^{[n+1]}(\mathcal{B})] \quad (n = 1, 2, \dots) \quad (2.31)$$

sorozat, ha \mathcal{B} egy egyenlőszárú derékszögű háromszög és hogyan alakul akkor, ha \mathcal{B} ennek a háromszögnek a három csúcspontja?



2.13. ábra.

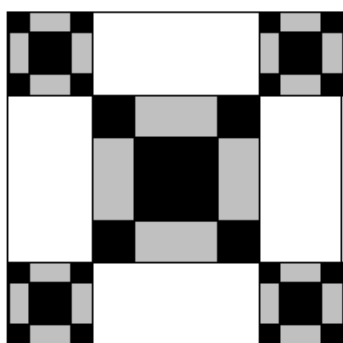
2.10.4. Feladat a/ Adjunk meg egy W leképezést, amely a 2.13. ábrán a fekete halmazba viszi a szürke és fekete halmaz unióját.

b/ Ha a szürke és fekete halmaz uniója \mathcal{B} akkor mennyi

$$h[W^{[n]}(\mathcal{B}), W^{[n+1]}(\mathcal{B})] \quad (n = 1, 2, \dots)?$$

c/ Mi lehet itt az \mathcal{A} ?

2.10.5. Feladat Adjunk meg egy szabályt az B_1, B_2, B_3, \dots sorozat konstrukciójára. (2.14. ábra)



B_1 : a négyzet
 B_2 : a szürke és fekete uniója
 B_3 : a fekete rész

2.14. ábra.

Ezzel a szabállyal folytatva a sorozatot, adjuk meg a $h[B_n, B_{n+1}]$ ($n = 1, 2, \dots$) távolságokat.

Milyen lehet itt az $\mathcal{A} = \bigcap_{n=1}^{\infty} B_n$?

2.10.6. Feladat Vizsgáljuk meg az eddig ismert távolság fogalmak (metrikák) és a Hausdorff távolság (metrika) kapcsolatát. Például

A. Mi a kapcsolat $h[\{x\}, \{y\}]$ és $d[x, y]$ között?

B. Melyik nagyobb, $d[x, \mathcal{B}]$ vagy $h[\{x\}, \mathcal{B}]$?

2.10.7. Feladat a/ Igazoljuk, hogy ha $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{B} \subseteq \mathcal{C}$ akkor $h[\mathcal{A}, \mathcal{B}] \leq h[\mathcal{A}, \mathcal{C}]$ és $h[\mathcal{B}, \mathcal{C}] \leq h[\mathcal{A}, \mathcal{C}]$.

b/ Igaz-e, hogy $h[\mathcal{C}, \mathcal{C} + t] = t$?

2.10.8. Feladat Igazoljuk a 2.9-ben felhasznált

$$\bigcup_{i=1}^N [\mathcal{B}_i + t] = \bigcup_{i=1}^N \mathcal{B}_i + t$$

egyenlőséget. Érvényes ez végtelen sok halmaz esetén is?

2.10.9. Feladat A (2.28) formula általánosítása a

$$h \left[\bigcup_{i=1}^N \mathcal{B}_i, \bigcup_{i=1}^N \mathcal{C}_i \right] \leq \max \{ h[\mathcal{B}_i, \mathcal{C}_j]; \quad (i, j = 1, 2, \dots, N) \}$$

formula. Ad-e ez a (2.28)-nál jobb becslést az uniók közötti h -távolságra?

Egyáltalán, igaz-e ez a formula?

2.10.10. Feladat Nem üres kompakt halmazokra a Hausdorff távolság teljesíti a távolság (metrikus) axiómákat.

Ha a csupán korlátos halmazokat tekintjük, vagyis elhagyjuk a „zárt” feltételt, akkor is érvényesek a metrikus axiómák h -ra?

2.10.11. Feladat A h távolság azt méri hogy vizuálisan („szemrevételezve”) mennyire látszik azonosnak két halmaz. Ha viszont azt akarjuk mérni, hogy milyen hosszú utat kell megtenni ahhoz, hogy pl. a \mathcal{B} halmazból a \mathcal{C} halmazba jussunk el, akkor a

$$\Delta[\mathcal{B}, \mathcal{C}] = \min \{ d[x, y]; \quad x \in \mathcal{B}, \quad y \in \mathcal{C} \}$$

értékkel kell dolgozni. $\Delta[\mathcal{B}, \mathcal{C}]$ nyilván annak a legrövidebb útnak a hosszát adja, amelyen a \mathcal{B} -ből a \mathcal{C} -be juthatunk.

Vizsgáljuk meg, teljesülnek-e a metrikus axiómák (2.6. fejezet 1.-3. alaptulajdonságok) a Δ esetében?

Mi a kapcsolat $\Delta[\{b\}, \mathcal{C}]$ és $d[b, \mathcal{C}]$ között?

2.10.12. Feladat Igaz-e az \cup művelet következő „folytonossága”:

Ha $h[\mathcal{B}_n, \mathcal{B}] \rightarrow 0$ és $h[\mathcal{C}_n, \mathcal{C}] \rightarrow 0$, akkor $h[\mathcal{B}_n \cup \mathcal{C}_n, \mathcal{B} \cup \mathcal{C}] \rightarrow 0$.

2.10.13. Feladat Egy G halmazfüggvényt akkor nevezünk folytonosnak a Hausdorff távolságban (metrikában), ha

$$h[\mathcal{C}_n, \mathcal{C}] \rightarrow 0 \quad h[G(\mathcal{C}_n), G(\mathcal{C})] \rightarrow 0.$$

(vagyis a szokásos def.)

Folytonos-e a $W = \bigcup_{i=1}^N F_i$ függvény?

2.10.14. Feladat Legyenek $\{\mathcal{B}_n; \quad n = 1, 2, \dots\}$ kompakt halmazok és $\{p\}$ az egyetlen p pontból álló halmaz. Vizsgáljuk meg a következők érvényességét:

1. Ha \mathcal{B}_n benne van a p középpontú ϵ sugarú gömbben, akkor $h[\mathcal{B}_n, \{p\}] < \epsilon$.

2. Ha minden $\epsilon > 0$ -hoz van olyan k , hogy $n > k$ esetén \mathcal{B}_n benne van a p középpontú ϵ sugarú gömbbe akkor

$$\lim_{n \rightarrow \infty} h[\mathcal{B}_n, \{p\}] = 0$$

vagyis $\mathcal{B}_n \rightarrow \{p\}$.

3. Ha $\mathcal{B}_n \rightarrow \{p\}$ a Hausdorff távolságban, akkor minden olyan $\{b_n; n = 1, 2, \dots\}$ (pont)sorozat, amelyre $b_n \in \mathcal{B}_n$ a p ponthoz konvergál.

2.11. Iterált függvényrendszerek (folytatás)

A halmazok távolságával és az erre épülő határértékkel jobban kifejezhetők az iterált függvényrendszerek tulajdonságai és választ adhatunk számos nyitva maradt problémára is.

Hogyan viselkedik a

$$\{W^{[n]}(\mathcal{B}); \quad n = 1, 2, \dots\} \quad (2.32)$$

sorozat tetszőleges kompakt \mathcal{B} esetén? Ha $\mathcal{B} = \mathcal{K}$ vagyis \mathcal{B} egy elegendően nagy sugarú körlap, akkor az IFS „végtermékének” az

$$\mathcal{A} = \bigcap_{n=1}^{\infty} W^{[n]}(\mathcal{B}) \quad (2.33)$$

attraktort tekintjük. Mégpedig azért, mert szemmel láthatóan ehez közeledik a kompakt halmazok (2.32) sorozata úgy hogy elegendő nagy n -re

$$W^{[n]}(\mathcal{B}) \quad \text{és} \quad \bigcap_{n=1}^{\infty} W^{[n]}(\mathcal{B})$$

már alig különböztethetők meg egymástól.

A (2.33) formula így fejezhető ki, a 2.7. fejezet alapján, a Hausdorff távolsággal

Egymásba skatulyázott kompakt halmazok sorozata konvergens és a sorozat határértéke a halmazok közös része.

A Hausdorff távolsára épülő határértékkel nemcsak egymásba skatulyázott (*nested*) halmazokkal értelmezhető \mathcal{A}

2.11.1. Tétel A (2.32) sorozat, a Hausdorff távolságban, az \mathcal{A} attraktorhoz konvergál.

Bizonyítás. Ha $\{F_k; k = 1, 2, \dots, N\}$ kontraktív függvények $\{r_k k = 1, 2, \dots\}$ kontraktivitási tényezőkkel, akkor tetszőleges kompakt \mathcal{B} halmazra, a 2.9. fejezetben mondottak alapján

$$h(W(\mathcal{K}), W(\mathcal{B})) < rh(\mathcal{K}, \mathcal{B})$$

ahol

$$r = \max\{r_i \mid i = 1, 2, \dots, N\}.$$

Teljes indukcióval

$$h(W^{[n]}(\mathcal{K}), W^{[n]}(\mathcal{B})) < r^n h(\mathcal{K}, \mathcal{B}).$$

mivel $r^n \rightarrow 0$, ezért a (2.32) sorozat minden kompakt \mathcal{B} halmazra az \mathcal{A} attraktorhoz konvergál.

2.11.3. Tétel Ha $W^{[n]}(\mathcal{B}) \rightarrow \mathcal{A}$ akkor

$$W(\mathcal{A}) = \mathcal{A}. \quad (2.34)$$

Bizonyítás. Ekkor

$$W^{[n+1]}(\mathcal{B}) \rightarrow \mathcal{A} \quad (2.35)$$

hiszen a részsorozat ugyanoda tart. Másrészt,

$$W^{[n+1]}(\mathcal{B}) \rightarrow W(\mathcal{A}) \quad (2.36)$$

mivel $W^{[n+1]}(\mathcal{B}) = W \circ W^{[n]}(\mathcal{B})$ és W folytonos (mivel kontraktív). A (2.35) és (2.36) összehasonlításából következik (2.34).

A (2.34) összefüggés a háttere annak, hogy az \mathcal{A} attraktort az IFS invariáns halmazának is nevezzük.

2.11.5. Tétel Minden IFS-hez pontosan egy invariáns halmaz tartozik.

Bizonyítás. Legyen $\mathcal{A} \neq \mathcal{B}$ és

$$h[W(\mathcal{A}), W(\mathcal{B})] \leq rh[\mathcal{A}, \mathcal{B}] \quad 0 < r < 1 \quad (2.37)$$

és

$$W(\mathcal{A}) = \mathcal{A} \quad \text{és} \quad W(\mathcal{B}) = \mathcal{B}. \quad (2.38)$$

A (2.37) és (2.38) összehasonlításából

$$h[\mathcal{A}, \mathcal{B}] \leq rh[\mathcal{A}, \mathcal{B}]$$

ami csak $h[\mathcal{A}, \mathcal{B}] = 0$ esetben állhat fenn mivel $r < 1$.

2.11.1. Feladat Most már minden eszközünk megvan arra, hogy megvizsgáljuk a 2.1. ábra szerkesztésének és a (2.7) formulákkal adott iterált függvényrendszer kapcsolatát.

2.11.2. Feladat Igazoljuk, hogy az 1.30. ábrán megadott szerkesztés a (2.7) függvényrendszerrel megadott IFS attraktorára, a Sierpinski háromszögre vezet.

2.11.3. Feladat A (2.7) függvényekhez vegyük hozzá az

$$F_4(x) = \begin{pmatrix} 0.5 & 0 \\ 0 & 0.5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0.5a \\ 0.5a \end{pmatrix} \quad (2.39)$$

függvényt. Mi lesz az (F_1, F_2, F_3, F_4) hasonlósági függvényekkel adott iterált függvényrendszernek az attraktora?

2.11.4. Feladat Az 1.28. ábra szerkesztését csupán a g, a, t csúcsokkal végezzük el. Jellemezzük az így kapott halmazt.

2.11.5. Feladat Hogyan módosulnak a (2.7) függvények, ha azt szeretnénk, hogy a függvényekből alkotott IFS attraktora egy tetszőleges háromszögből, a

„minden háromszöget osszunk négy egybevágó részre és a középső (nyílt) háromszöget töröljük”

rekurzív utasításra szerkesztett halmazok határértéke legyen.

2.12. Fraktáldimenzió, boxdimenzió

Az R^2 sík korlátos \mathcal{B} részhalmazának a boxdimenzióját úgy mérjük meg, hogy a \mathcal{B} halmazt lefedjük egy négyzethálóval és megszámloljuk azoknak a négyzetek számát, amelyek éppen lefedik a \mathcal{B} halmazt. Ha a lefedő négyzetek száma N_r , ahol r a négyzetek oldalának a hossza a négyzethálóban, akkor a boxdimenzió a

$$\frac{\log N_r}{-\log r}$$

lesz, amikor r olyan kicsi, hogy a

$$(\log N_\delta, -\log \delta) \quad \delta < r$$

pontok gyakorlatilag egy s meredekségű egyenesen vannak.

Egy másik eljárás, hogy meghatározzuk az

$$s = \lim_{r \rightarrow 0} \frac{\log N_r}{-\log r}$$

értékét. Mindkét esetben s a boxdimenzió.

A *boxdimenzió definíciója* vagyis a boxdimenzió pontos meghatározása a matematika nyelvén a következő.

Egy \mathcal{B} halmaz δ -lefedése legfeljebb δ átmérőjű \mathcal{H}_k ; $k = 1, 2, \dots$ halmazoknak olyan sorozata amelyre

$$\mathcal{B} \subseteq \bigcup_k \mathcal{H}_k.$$

Minden δ -hoz nyilván van olyan δ -lefedés, amely a legkevesebb halmazból áll. Ezt *minimális δ -lefedésnek* nevezzük.

Legyen $N_\delta^*(\mathcal{B})$ a \mathcal{B} halmaz minimális δ -lefedése. Ekkor a \mathcal{B} halmaz boxdimenziója (*capacity dimension, box-counting dimension*)

$$s = \lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{\log N_\delta^*(\mathcal{B})}{-\log \delta}. \quad (2.40)$$

A box-dimenziót *Minkovski* dimenzióknak is nevezik.

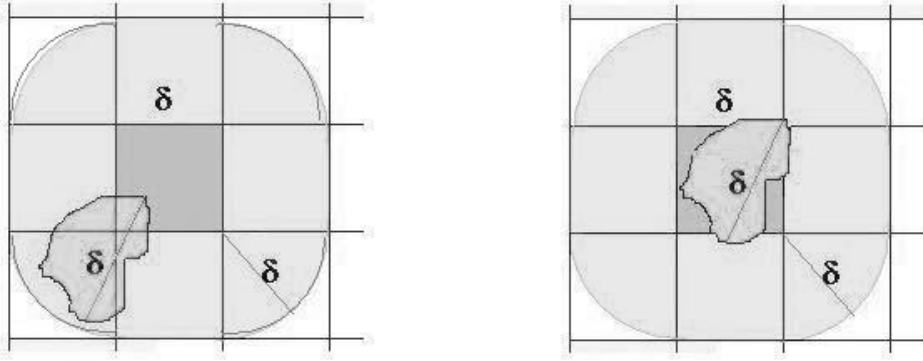
Ez a definíció nemcsak négyzetrács lefedést enged. Ezért nemcsak pontosabb, hanem általánosabbnak is látszik, mint a négyzetrácsos eljárás.

Meg fogjuk mutatni, hogy a négyzetrácsos eljárás ugyanazt az s értéket adja, mint az általánosabb definíció. Ezzel igazoljuk, hogy a boxdimenzió meghatározásánál akár négyzetrácsos, akár más δ -lefedést használunk, ugyanazt az eredményt kapjuk.

Nyilván

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{\log N_{\sqrt{2}\delta}^*(\mathcal{B})}{-\log \sqrt{2}\delta} \leq \lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{\log N_{\delta}}{-\log \sqrt{2}\delta} \quad (2.41)$$

ahol N_{δ} a \mathcal{B} halmzt lefedő négyzetek száma a δ -hálóban. Hiszen a δ -élű négyzethálólóval egy $\sqrt{2}\delta$ -lefedést adunk meg és N_{δ}^* *minimális* lefedés.



2.15. ábra.

Másrészt, és *ez a bizonyítás kulcsa*, ha egy δ -élű \mathcal{N}_{δ} négyzetlap belemetsz egy δ -átmérőjű \mathcal{H}_{δ} halmazba, akkor $\mathcal{N}_{\delta} + \delta$, a δ -val növelt négyzetlap, tartalmazza a \mathcal{H}_{δ} halmzt (2.15. ábra). Így, ha meg tudunk adni N_{δ}^* számú δ átmérőjű halmzt amely lefedi a \mathcal{B} -t, akkor a δ élű négyzethálóból $9N_{\delta}^*$ négyzet már biztosan lefedi.

Ennek alapján

$$\frac{\log N_{\delta}(\mathcal{B})}{-\log \delta} \leq \frac{\log 9 \cdot N_{\delta}^*(\mathcal{B})}{-\log \delta} \quad (2.42)$$

ahol, mint eddig, N_{δ} a négyzetháló azon négyzeteinek a száma, amelyek belemetszenek a \mathcal{B} halmazba.

Ezután a bizonyítás már nyilvánvaló formális számolás. A (2.41) és (2.42) összevetéséből

$$\frac{\log N_{\sqrt{2}\delta}^*(\mathcal{B})}{-\log \delta} \leq \frac{\log N_{\delta}(\mathcal{B})}{-\log \delta} \leq \frac{\log 9 \cdot N_{\delta}^*(\mathcal{B})}{-\log \delta}. \quad (2.43)$$

A (2.43) egyenlőtlenségekből, a rendőr-elv alapján

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{\log N_{\delta}^*(\mathcal{B})}{-\log \delta} = \lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{\log N_{\delta}(\mathcal{B})}{-\log \delta}$$

és ezzel igazoljuk, hogy a (2.40) formulában N_δ értéket téve az N_δ^* helyére ugyanazt az eredményt kapjuk. Valóban

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{\log N_{\sqrt{2}\delta}^*(\mathcal{B})}{-\log \delta} = \lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{\log N_{\sqrt{2}\delta}^*(\mathcal{B})}{-\log \sqrt{2}\delta} \frac{\log \sqrt{2}\delta}{\log \delta} = \lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{\log N_\delta^*(\mathcal{B})}{-\log \delta}.$$

és

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{\log 9 \cdot N_\delta^*(\mathcal{B})}{-\log \delta} = \lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{\log N_\delta^*(\mathcal{B}) + \log 9}{-\log \delta} = \lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{\log N_\delta^*(\mathcal{B})}{-\log \delta}$$

3. fejezet

Függelék

3.1. Előismeretek.

Geometriai szerkesztések és a mátrixalgebra.

A képernyő minden pontját egy

$$\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} \leftrightarrow b_1 i + b_2 j$$

számpárral jelöljük.

Sok esetben a számpárhoz tartozó pontot egy különös helyzetű koordináta-rendszerben ábrázoljuk: b_1 a képernyő balszélétől, b_2 a képernyő felső szélétől mért távolságot jelenti.

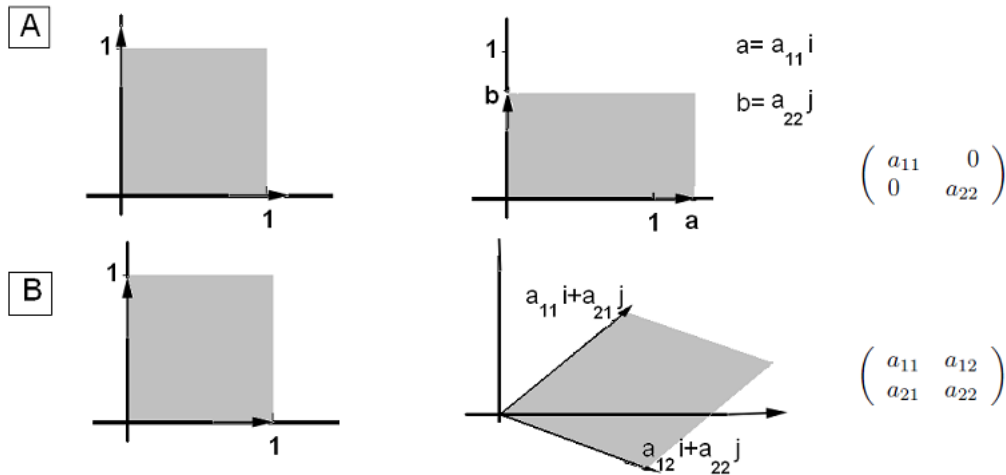
Ha diagonálmátrixal szorzunk, akkor skálaváltoztatás történik.

$$\begin{pmatrix} a_{11} & 0 \\ 0 & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}x_1 \\ a_{22}x_2 \end{pmatrix} \quad (3.1)$$

A (3.1) leképezés

$$x_1 \rightarrow a_{11}x_1 \quad x_2 \rightarrow a_{22}x_2$$

skála változtatást jelent. Diagonálmátrixal szorozva, a $[0, 1] \times [0, 1]$ egységnyezet pontjai a $[0, a_{11}] \times [0, a_{22}]$ téglalap pontjaiba mennek át (3.1.A ábra).



3.1. ábra.

Ha egy tetszőleges invertálható 2×2 mátrixal szorozzuk a $[0, 1] \times [0, 1]$ egységnyezet pontjait, akkor egy paralelogramma pontjait kapjuk. Ez leol-

vasható a következő egyenlőségekből

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \end{pmatrix} \quad (3.2)$$

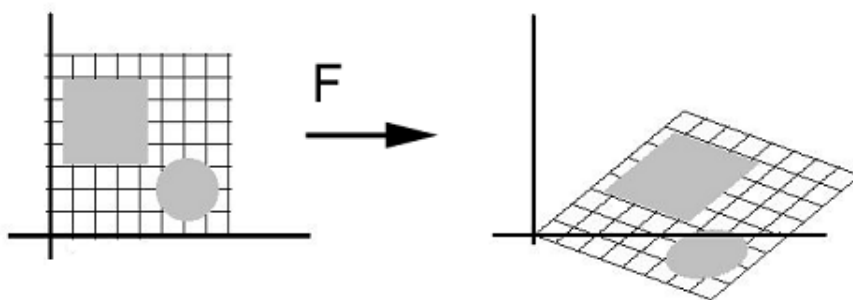
$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = x_1 \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (3.3)$$

affin leképezés jellegét mutatja (a [3.1.B](#) ábra).

Az

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} \\ x_{21} & x_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

affin leképezés jellegét mutatja a [3.2](#) ábra.



3.2. ábra.

Ezek után az eddigi geometriai jellegű feladatokat a mátrixalgebra nyelvén tudjuk megfogalmazni és így számítógépes programcsomaggal (*Mathematica*, *MatLab*) is meg tudjuk azokat oldani.

Ívhossz

Egy görbét a beírt poligonjaival közelítjük meg. Ha elég sok osztópontot veszünk fel a görbén, akkor a beírt poligont alig tudjuk megkülönböztetni a görbétől ([1.23. ábra](#)). Ez a szemlélet az alapja a következő definíciónak.

3.1.1. Definíció Tekintsük a görbe beírt poligonjainak a halmazát. Adjuk meg mindegyik poligonnak a hosszát és tekintsük az így kapott pozitív számokból álló halmaznak a felső határát. Az így kapott számot tekintjük a görbe ívhosszának.

Ha egy beírt poligon osztópontjai között újabb osztópontokat veszünk fel a görbén, akkor az újabb osztópontokra is illeszkedő poligon általában hosszabb lesz (1.23. ábra). Minden beírt poligon hossza legfeljebb akkora, mint az ívhossz, hiszen P_i, P_{i+1} pontokat összekötő egyenes rövidebb mint bármelyik más P_i, P_{i+1} görbe.

Ezen alapul a következő eljárás az ívhossz meghatározására.

Felveszünk a görbén egy húrpoligont. Ezután minden egymásután következő osztópont között egy újabb osztópontot felvéve, az újabb osztópontokra is illeszkedő poligon hosszabb lesz. Megismételve ezt a szerkesztést, a kapott poligonok hossza, egy monoton növekedő számsorozatot alkot. A görbe ívhossza ennek a sorozatnak a határértéke lesz.

Vannak görbék amelyeknek nincs ívhosszuk. Az ívhossz definíciója alapján ez azt jelenti, hogy a beírt poligonok hosszúságainak nincsen felső korlátja, bármilyen nagy M számhoz meg tudunk adni pontokat a görbén úgy, hogy a pontokra illeszkedő (beírt) poligon hosszúsága nagyobb legyen mint M . Ilyen görbék a Koch görbék és ilyen görbékről szólnak az 1.8. fejezetben.

Számosság.

Az $f : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$ egy-egyértelmű (*injective*) leképezés (függvény), ha az \mathcal{A} minden eleméhez az f hozzárendeli a \mathcal{B} egy elemét úgy hogy ha $a \neq b$ akkor $f(a) \neq f(b)$.

Az $f : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$ ráképező (*surjective*) leképezés (függvény), ha

$$f(\mathcal{A}) = \mathcal{B}$$

ahol

$$f(\mathcal{A}) = \{f(x) \mid x \in \mathcal{A}\} \quad f(\mathcal{B}) = \{f(x) \mid x \in \mathcal{B}\}.$$

Az \mathcal{A} és \mathcal{B} halmazoknak megegyezik a számosságuk, ha van $f : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$ egy-egyértelmű, ráképező függvény.

Az \mathcal{B} számossága nagyobb, ha van olyan $f : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$ egy-egyértelmű függvény, amely NEM ráképező.

Az $\{1, 2, \dots\}$ természetes számok halmazának a számosságát *megszámlálhatónak* nevezzük. Egy \mathcal{H} halmaz pontosan akkor *megszámlálható* ha van egy-egy és ráképező $f : \{1, 2, \dots\} \rightarrow \mathcal{H}$ függvény. Így minden végtelen sorozat megszámlálható. Ennek alapján egy megszámlálható halmazról azt is mondjuk, hogy az *sorozatba állítható*.

Minden végtelen halmaznak van megszámlálható részhalmaza. A valós számok halmaza NEM megszámlálható, vagyis a számossága nagyobb, mint a természetes számok $\{1, 2, \dots\}$ halmazának. Ennek klasszikus bizonyítása a következő.

Tételezzük fel, hogy a $[0, 1]$ pontjai megszámlálhatóak. Ekkor elkészíthetjük az egynél kisebb pozitív számok sorozatát. Írjuk fel a sorozat elemeit bináris tört alakban. Szerkesszük meg azt a bináris törtet amelyik az első jelben különbözik a sorozat első elemétől, a második jelben különbözik a sorozat második elemétől s.i.t.

Ezzel egy olyan bináris törtet szerkesztettünk, amely biztosan kimaradt a sorozatból.

Diszkrét dinamikus rendszerek.

Ha bizonyos (általában egyenlő) időközönként megfigyelünk egy folyamatot és a megfigyelés eredményeképpen megadunk egy f szabályt arra, hogy a folyamat hogyan változik, amint az egymás után következő időpontokra térünk át, akkor egy diszkrét dinamikus rendszert adunk meg.

Ha az első megfigyelés eredménye x_1 , akkor a következő megfigyelés eredménye $f(x_1)$ és az egymás után következő megfigyelések eredményét az

$$x_{n+1} = f(x_n); \quad n = 1, 2, \dots \quad x_1 = c. \quad (3.4)$$

(rekurzív) sorozat adja meg. A (3.4) formulával adott iterációs sorozat a diszkrét dinamikus rendszer c -ből kituduló *pályája* (*orbit*). A megfigyelés eredményét adó x_n objektumot a rendszer (n -edik időpontbeli) állapotának nevezzük.

A (3.4) sorozat még így is írható

$$x_{n+1} = f^{[n]}(c) \quad (3.5)$$

ahol $f^{[n]}$ az f n -edik iteráltja.

Összegezve, a *diszkrét dinamikus rendszert* egy (f, \mathcal{D}) pár határoz meg, ahol $\mathcal{D} \subseteq R^n$ és $f : \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{D}$. A dinamikus rendszer a (3.4) pályák összesége.

A diszkrét dinamikus rendszer legfontosabb jellemzői a periódikus ill. fixpontok és azok jellege. Egy diszkrét dinamikus rendszer *fixpontja*

$$x : f(x) = x.$$

Az x fixpont *vonzó* (*attractive*) ha van az x -nek egy olyan \mathcal{U} környezete, hogy

$$\text{ha } x' \in \mathcal{U} \text{ akkor } f^{[n]}(x') \rightarrow x.$$

A maximális ilyen \mathcal{U} az x fixpont *vonzási területe* (*basin*).

Az x fixpont *taszító* (*repelling*) ha van x -nek egy olyan \mathcal{U} környezete, hogy minden $x' \in \mathcal{U}$ ponthoz (természetesen $x' \neq x$) van olyan k hogy $f^{[k]}(x') \notin \mathcal{U}$. Vagyis véges sok lépés után a pálya mindig kikerül ebből a környezetből.

Egy diszkrét dinamikus rendszer *periódikus pontja* x , ha van olyan $n > 1$ hogy

$$f^{[n]}(x) = x. \quad (3.6)$$

Ekkor a pálya *periódusa* az a legkisebb n amelyre (3.6) teljesül. Az x periódikus pont is lehet vonzó vagy taszító aszerint hogy az x vonzó vagy taszító fixpontja az $f^{[n]}$ leképezésnek.

MEGJEGYZÉS. A fixpontot $n = 1$ periódusú (speciális) periódikus pontnak is tekinthetjük.

A fixpont természetes általánosítása az attraktor és a repeller, amelyek speciális invariáns halmazok a dinamikus rendszerben. Egy \mathcal{A} kompakt halmaz *attraktor*, ha $f(\mathcal{A}) = \mathcal{A}$ és van olyan nyílt $\mathcal{U} \subset \mathcal{A}$ halmaz, hogy minden \mathcal{U} -ból induló pálya az \mathcal{A} -hoz konvergál. I.e.

$$d[f^{[n]}(b), \mathcal{A}] \rightarrow 0$$

Egy \mathcal{A} kompakt halmaz *repeller*, ha $f(\mathcal{A}) = \mathcal{A}$ és van olyan nyílt $\mathcal{U} \subset \mathcal{A}$ halmaz, hogy minden $b \in \mathcal{U}$ ponthoz van n amelyre

$$f^{[n]}(b) \notin \mathcal{U} \quad (3.7)$$

Ez azt jelenti, hogy minden $b \in \mathcal{U}$ pontból induló pálya, véges sok lépés után kilép az \mathcal{U} környezetből. Később visszatérhet, de ezután, (3.7) alapján, újra ki kell valamikor lépni a pályának az \mathcal{U} környezetből.

Nagyon sok (f, \mathcal{D}) dinamikus rendszer tartalmaz olyan (f, \mathcal{D}^*) $\mathcal{D}^* \subset \mathcal{D}$ DDR-t, amelynek attraktora/repellere törtdimenziós. Nyilván ez az eset tartozik a fraktálgeometria alkalmazásai körébe. Ekkor az attraktor neve: *különös attraktor* (*strange attractor*).

3.1.1 Példa A geometriai sorról szóló 1.1. fejezet konstrukciója felfogható mint dinamikai rendszer. Ekkor

$$f(x) = ax + b \quad (b > 0) \quad \mathcal{D} = \mathbb{R}.$$

és a diszkrét dinamikus rendszer pályái az

$$x_{n+1} = ax_n + b; \quad x_1 = c \in \mathbb{R}$$

(rekurzív) sorozatok.

A diszkrét dinamikus rendszernek egyetlen fixpontja az

$$x = ax + b$$

egyenlet

$$x = \frac{b}{1-a} \tag{3.8}$$

megoldása ha $a \neq 1$. Ez a fixpont taszító ha $a > 1$ és vonzó ha $a < 1$. A vonzási terület ekkor az egész \mathbb{R} .

A diszkrét dinamikus rendszernek nincs (valódi) periódikus pontja. Ugyanis az

$$x = a^n x + a^{n-1}b + \dots + ab + b$$

egyenlet egyetlen megoldása $n \neq 1$ esetén is (3.8).

Amint azt az 1.1. fejezetben megmutattuk, a $c = 0$ -pontból induló pálya, egy geometriai sor részletösszegeinek a sorozata.

Ha $a = 1$ akkor a diszkrét dinamikus rendszernek nincs fixpontja sem periódikus pontja.

Ha $a = -1$ akkor $x = 0.5$ taszító fixpont és a $[0, 1]$ minden pontja taszító periódikus pont 2 periódussal (miért?).

3.1.2 Példa Az 1.11. fejezetben leírt káotikussá váló sorozatok, egy diszkrét dinamikus rendszernek különös attraktorban végződő pályái. Ekkor $\mathcal{D} = [0, 1]$ és

$$s(x) = \begin{cases} qx & \text{ha } x < 0.5 \\ q(1-x) & \text{ha } x > 0.5 \end{cases}$$

amit sátorfüggvénynek nevezünk. A diszkrét dinamikus rendszer pályáit az

$$x_{n+1} = s(x_n) \quad x_1 = c \in (0, 1)$$

(rekurzív) sorozatok adják meg (1.39. ábra).

Ha $a < 1$ akkor s kontraktív és egyetlen fixpontja $x = 0$, ami természetesen vonzó fixpont amelynek vonzási területe az egész $[0, 1]$ intervallum.

Ha $a = 3$ akkor az $x \neq C$ pontokból induló pályák, véges sok lépés után, kikerülnek a $[0, 1]$ intervallumból. Minden c kezdőponthoz van n hogy $x_n \notin [0, 1]$. A C Cantor halmaz pontjaiból induló pályák mindvégig a C Cantor halmazban maradnak, sőt

$$s(C) = C$$

és a C Cantor halmaz különös repeller. Így a diszkrét dinamikus rendszer fixpontjai

$$p_1 = 0, \quad p_2 = \frac{3}{4}$$

a C Cantor halmaz elemei.

A Cantor halmaz pontjait triadikus tört alakban írva, belátható, hogy c pontosan akkor periódikus pontja az $(s, [0, 1])$ diszkrét dinamikus rendszernek ha $c \in C$ és a c triadikus tört alakja periódikus.

3.1.3 Példa Minden iterált függvényrendszer egy diszkrét dinamikus rendszer amikor \mathcal{D} az R^2 kompakt (zárt, korlátos) részhalmazainak a halmaza és a leképezés

$$f = W = \bigcup_{k=1}^N F_k.$$

A diszkrét dinamikus rendszernek egyetlen fixpontja van. Ez az \mathcal{A} invariáns halmaz, más néven attraktor. Az \mathcal{A} vonzó fixpont.

3.1.4 Példa Az iterált függvényrendszer (IFS), a 2.5. fejezetben leírt kódolás alapján, úgy is megadható, mint a

$$x_{n+1} = F_i(x_n) \quad F_i \in \{F_k; \quad k = 1, 2, \dots, N\} \quad (3.9)$$

pályák összessége. Ekkor a diszkrét dinamikus rendszer attraktora a (3.9) pályák „végpontjaiból” álló \mathcal{A}^* halmaz. Pontosabban, \mathcal{A}^* a 2.5. fejezetben kódolással megadott pontok halmaza.

Adott iterált függvényrendszerből a 2.5. fejezetben leírt kódolás alapján, számos diszkrét dinamikus rendszer szerkeszthető. Mégpedig úgy, hogy megadunk tiltott szavakat, és pontosan azokat a (3.9) pályákat tekintjük, amelyekben tiltott szó nem szerepel.

Ezt illusztrálják a 2.5. fejezet végén a különböző módon megritkított lombosított fákat előállító dinamikai rendszerek.

3.1.1. Feladat Az 1.3. és 1.11. fejezetben mondottak alapján, igazoljuk a 3.1.2. példa állításait.

Számrendszerek.

Ha egy $c \in (0, 1)$ számot *tizedestört* alakban írunk, akkor ez azt jelenti, hogy a számot tíz hatványai szerint írjuk fel. Pontosabban

$$0.a_1a_2\dots a_n\dots = a_1\frac{1}{10} + a_2\left(\frac{1}{10}\right)^2 + \dots a_n\left(\frac{1}{10}\right)^n \dots$$

például

$$0.34776 = 3\frac{1}{10} + 4\left(\frac{1}{10}\right)^2 + 7\left(\frac{1}{10}\right)^3 + 7\left(\frac{1}{10}\right)^4 + 6\left(\frac{1}{10}\right)^5$$

Az a_n tényezők csak $\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ lehetnek, mivel

$$\frac{a}{10} > 1 \quad \text{ha} \quad a \geq 10 \quad \text{és} \quad \frac{a}{10^n} > \frac{1}{10}^{n-1} \quad \text{ha} \quad a \geq 10.$$

Ennek mintájára, felírhatjuk a $c \in (0, 1)$ számot bináris törtben, kettő hatványai szerint

$$c = 0.a_1a_2\dots a_n\dots = a_1\frac{1}{2} + a_2\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \dots a_n\left(\frac{1}{2}\right)^n \dots \quad (3.10)$$

például

$$0.100111 = \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2}\right)^4 + \left(\frac{1}{2}\right)^5 + \left(\frac{1}{2}\right)^6$$

Ekkor a kapott bináris törtben az a_n együttható csak 0 vagy 1, mivel

$$\frac{a}{2} > 1 \quad \text{ha} \quad a \geq 2 \quad \text{és} \quad \frac{a}{2^n} > \frac{1}{2^{n-1}} \quad \text{ha} \quad a \geq 2.$$

A fentiekhez hasonlóan értelmezünk egy triadikus törtet, amből következik, hogy a triadikus tört jelei, a_n ($n = 1, 2, \dots$) csak $\{0, 1, 2\}$ lehet.

Ha egy tizedestörtet tízzel szorzunk, akkor a számjegyeket eggyel előre toljuk. Például,

$$10 * 0.34776 = 3 + 4\frac{1}{10} + 7\left(\frac{1}{10}\right)^2 + 7\left(\frac{1}{10}\right)^3 + 6\left(\frac{1}{10}\right)^4$$

Hasonló szabály érvényes, a (3.10) formula alapján, ha kettővel szorzunk egy bináris törtet, vagy ha hárommal szorzunk egy triadikus törtet.

Figyeljük meg az 1.11. és az 1.12. fejezetekben, hogy számos esetben mennyire előnyös a megszokott tízes számrendszerről a bináris vagy triadikus törtre áttérni.

3.2. Feladatmegoldások.

1. fejezet

1.2.1. Ekkor

$$c + s = 185$$

és

$$12s = c + s \tag{3.11}$$

Számunkra a (3.11) összefüggés az érdekes, ebből alakul majd, rekurzív módon, a geometriai sor. A (3.11) alapján

$$s = \frac{1}{12}(c + s) = \frac{1}{12}\left(c + \left(\frac{1}{12}(c + s)\right)\right) = \frac{1}{12}c + \left(\frac{1}{12}\right)^2c + \left(\frac{1}{12}\right)^2s$$

és teljes indukcióval

$$s = \frac{1}{12}c + \left(\frac{1}{12}\right)^2c + \dots + \left(\frac{1}{12}\right)^nc + \left(\frac{1}{12}\right)^ns \quad n = 1, 2, \dots$$

1.2.2. Ha $q = \frac{1}{k}$ akkor k darab szelvényért kapunk egy csokoládét, ezért

$$ks = c + s$$

amiből

$$s = q \frac{c}{1 - q}. \tag{3.12}$$

Másrészt a rekurzív helyettesítésekkel, ahogyan a 0.2.1 feladat megoldásában,

$$s = qc + q^2c + \dots + q^nc + q^ns \quad n = 1, 2, \dots \tag{3.13}$$

A (3.12) és (3.13) egybevetéséből már következik az összegképlet, mivel $q^ns \rightarrow 0$.

1.2.3. A rekurzív sorozat határértéke *független* x_0 -tól, mivel $q^n x_0 \rightarrow 0$.

1.3.1. Mivel $\mathcal{C}_n^* \subset \mathcal{C}_n$, hiszen most hosszabb intervallumokat törölünk, mint

a Cantor halmaz szerkesztésénél, ezért ekkor is csak nulla lehet a közös rész hossza.

1.3.2. Követve a Cantor halmaznál alkalmazott gondolatmenetet, minden lépésnél az intervallumok összhosszúságának ezrederészét töröljük. Így az n -edik lépésnél megmaradó egyenesszakaszok (intervallumok) hossza 0.999^n ami a nullához tart, mint a (triadikus) Cantor halmaz esetén. A

$$0.999^n \quad n = 1, 2, \dots$$

geometriai sorozat olyan „lassan” tart a nullához, hogy *szerkesztéssel, tapasztalati úton*, nem tudjuk ezt bizonyossá tenni.

1.3.3. NEM tudunk, hiszen bármilyen nagy N esetén, a megmaradó zárt intervallumok hossza egy nullához tartó geometriai sorozat. Ezt is, mint az előző feladat megoldását, szerkesztéssel, tapasztalati úton, NEM tudjuk eldönteni.

1.3.4. A \mathcal{C}_1 halmazt úgy kapjuk, hogy a $[0, 1]$ intervallumnak egyharmadát vesszük, majd ugyanezt kétharmaddal eltoljuk és a két intervallumot egyesítjük. Ekkor nyilván ugyanazt a halmazt kapjuk, mint amikor a $[0, 1]$ intervallumnak töröljük a középső harmadát, az $(\frac{1}{3}, \frac{2}{3})$ nyílt intervallumot.

Ezután teljes indukcióval folytatjuk. Tétélezzük fel, hogy \mathcal{C}_n megegyezik a Cantor halmazra vezető rekurzív szerkesztés n -edik lépése után kapott halmazzal. Vagyis \mathcal{C}_n a $[0, 1]$ azon részhalmaza, amelyből töröltük a középső nyílt harmadát, majd a megmaradó zárt intervallumok középső nyílt harmadát, megismételve ezt addig amíg a törölt intervallumok hossza 3^{-n} lesz. Az

$$\frac{1}{3}\mathcal{C}_n \quad \text{és} \quad \frac{1}{3}\mathcal{C}_n + \frac{2}{3}$$

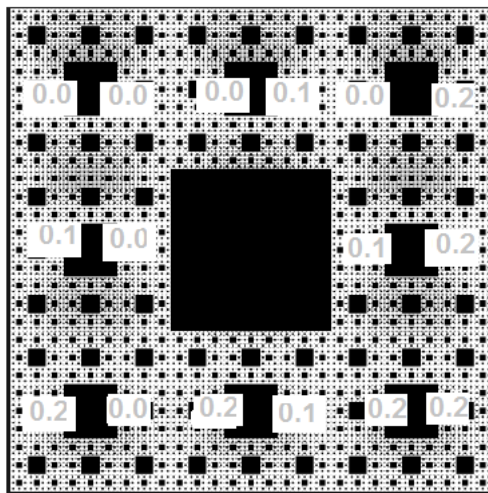
halmazokban ez a struktúra öröklődik, hiszen mindkettő $\frac{1}{3}$ skálaváltozással alakult a \mathcal{C}_n -ből. A két halmaz között éppen az $(\frac{1}{3}, \frac{2}{3})$ intervallum van.

1.3.5.

$$F_1(x) = \frac{999}{2000}x, \quad F_2(x) = \frac{999}{2000}x + \frac{1001}{2000} \quad (x \in R)$$

1.4.1.

1. A Sierpinski szőnyeg rekurzív szerkesztésének minden lépése után a terület nyolc-kilenced része marad meg.
2. A bizonyítás ugyanaz lehet, mint a Cantor halmaz esetén, miután triadikus törtben írtuk fel a pontok koordinátáit.
3. A 3.3. ábrán bejelöltük a Sierpinski szőnyeghez tartozó pontok triadikus koordinátáinak a kezdetét. Pontosabban, megmutattuk hogy milyen a triadikus alakban felírt koordináták első számjegye, a Sierpinski szőnyeg különböző részhalmazán.



3.3. ábra.

Például, a $(0.0, 0.1)$ párral jelölt négyzetben, triadikus törtben, a Sierpinski szőnyeg pontjainak a koordinátái, egyharmad pontossággal, $(0.0, 0.1)$ Figyelembe véve, hogy hárommal szorozva egy **triadikus törtet**, ugyanazt az eredményt kapjuk, mint amikor a triadikus tört jegyeit eggyel hátrahatoljuk, a $(0.0, 0.0)$ párral jelölt négyzet és a Sierpinski szőnyeg metszetét

(közös részét) lineárisan a háromszorosára növelve megkapjuk az egész Sierpinski szőnyeget.

1.4.3. A Menger szivacs minden oldallapja Sierpinski szőnyeg és minden lap és test átlója Cantor halmaz. A Menger szivacs 1-3 tulajdonságának vizsgálatánál követhetjük a Cantor halmaznál és a Sierpinski szőnyegnél követett utat.

A (rekurzív) eljárással kapott halmaz térfogata, minden lépésnél, az előző térfogatának húsz huszonhated része lesz. Ezért a Menger szivacs térfogata csak nulla lehet. A halmazok felülete viszont egyre nő. A végtelenségig?

A Menger szivacs pontjainak térbeli koordinátáit triadikus alakban írva, könnyen válaszolhatunk a maradék két kérdésre is.

1.6.1. *A matematika (mátrixok) nyelvén az F szabály megfogalmazása a következő: Legyen*

$$F_1(x_1, x_2) = \begin{pmatrix} 0.4 & 0 \\ 0 & 0.4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$F_2(x_1, x_2) = \begin{pmatrix} 0.4 & 0 \\ 0 & 0.4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 80 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

$$F_3(x_1, x_2) = \begin{pmatrix} 0.4 \cos 30^\circ & 0.4 \sin 30^\circ \\ -0.4 \sin 30^\circ & 0.4 \cos 30^\circ \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 200 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

$$F_4(x_1, x_2) = \begin{pmatrix} 0.4 \cos(-30)^\circ & 0.4 \sin(-30)^\circ \\ -0.4 \sin(-30)^\circ & 0.4 \cos(-30)^\circ \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 230 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Ekkor F azt jelenti, hogy a fenti négy leképezést egymás után alkalmazzuk az aktuális halmazra, majd az így kapott halmazokat egyesítjük.

1.7.1. Mindegyik m_{ki} egy az $\{a, b, c\}$ háromszöggel hasonló háromszög átfogójához tartozó magassága. Ennek megfelelően

$$m_{21} = m_{11} \frac{a}{c} \quad m_{22} = m_{11} \frac{b}{c}$$

$$m_{31} = m_{21} \frac{a}{c} \quad m_{32} = m_{21} \frac{b}{c} \quad m_{33} = m_{22} \frac{a}{c} \quad m_{34} = m_{22} \frac{b}{c}$$

és nyilvánvalóan

$$m_{11} = \frac{ab}{c}.$$

Az elmondottakból már következik, hogy a feladat megoldása

$$\frac{b}{c} \quad \text{vagy} \quad \frac{a}{c}$$

hányadosú geometriai sorokból könnyen előállítható.

1.8.1. Ha $s' > s$ akkor $\lim_{r \rightarrow 0} N(r)r^{s'} = 0$. Ha $s < s''$ akkor $\lim_{r \rightarrow 0} N(r)r^{s''} = \infty$. Ugyanis, ha $h > 0$ akkor

$$\lim_{r \rightarrow 0} N(r)r^{(s+h)} = \lim_{r \rightarrow 0} N(r)r^s r^h = c \lim_{r \rightarrow 0} r^h = 0$$

és

$$\lim_{r \rightarrow 0} N(r)r^{(s-h)} = \lim_{r \rightarrow 0} N(r)r^s r^{-h} = c \lim_{r \rightarrow 0} r^{-h} = \infty$$

1.8.2. Ha $r = \frac{1}{3}$ akkor

$$\frac{\log N_r}{-\log r} = \frac{\log 4}{-\log \frac{1}{3}} = 1.26 \dots$$

A Koch görbe szerkesztéséből következik: ha az r hosszát egyharmadára vesszük, akkor N_r a négyszeresére nő. Ezért a Koch görbe dimenziója $\frac{\log 4}{\log 3}$

1.8.3. Ha $r = 0.4$, akkor $N_r = 4$ és így ekkor

$$\frac{\log N_r}{-\log r} = \frac{\log 4}{-\log 0.4} = 1.51 \dots$$

A faág szerkesztéséből következik (feltételezve, hogy az iterációk során nem lesznek átfedések), hogy $r = 0.4^n$ nullához tartó sorozattal számolva az ág dimenziója $1.51 \dots$ marad. Mivel a

$$\{0.4^n \quad n = 1, 2, \dots\}$$

sorozat monoton csökkenve tart a nullához, ezért

$$\lim_{r \rightarrow 0} \frac{\log N_r}{-\log r} = 1.51 \dots$$

MEGJEGYZÉS. Az 1.8.2. és az 1.8.3. feladat megoldásához hasonlóan igazolható (végigszámolható) hogy ha az $\{F_k; k = 1, 2, \dots, N\}$ függvények hasonlósági leképezések ugyanazzal az $r \in (0, 1)$ hasonlósági tényezővel, akkor az iterációs sorozat végtermékének dimenziója

$$\frac{\log N}{-\log r}.$$

1.8.5. Ha s a görbe dimenziója, akkor (1.18) alapján

$$\lim_{r \rightarrow 0} N(r)r^s = c \quad (c > 0) \quad (3.14)$$

Ha $s > 1$, akkor

$$N(r)r^s = N(r)r.r^{s-1} \quad (3.15)$$

A (3.14) és (3.15) összevetéséből már következik az állítás, mivel ekkor $r^{s-1} \rightarrow 0$ és ezért (3.14) csak akkor lehet, ha $N(r)r \rightarrow \infty$ ami éppen azt jelenti, hogy a beírt poligonok hossza tetszőlegesen nagy lehet.

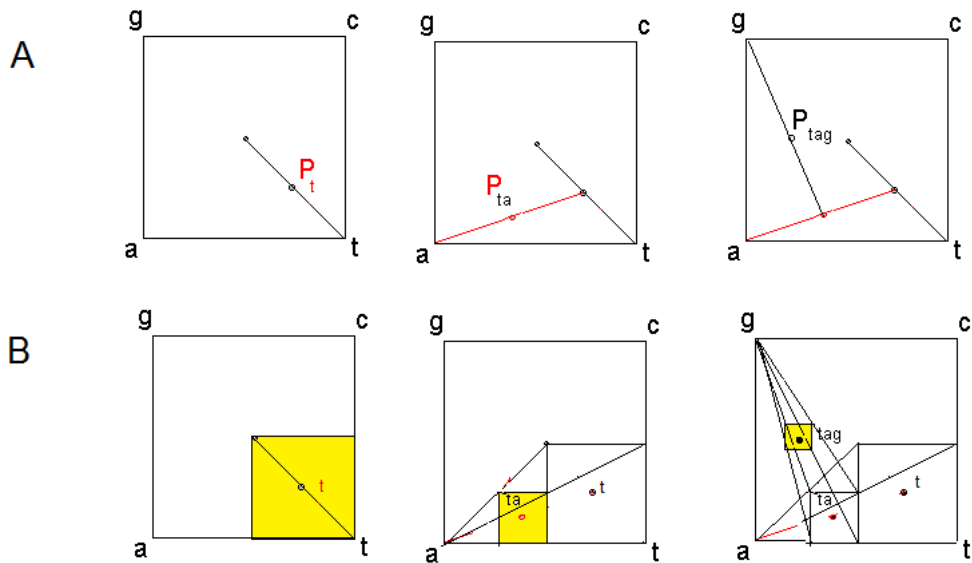
1.9.1. A $[0, 1] \times [0, 1]$ négyzet minden pontjára alkalmazva a szerkesztést, a megszerkesztendő szó négyzetét kapjuk. Ennek igazolása:

Geometriai szerkesztéssel.

Ha a négyzet minden pontjára a t betű szerkesztését alkalmazzuk, akkor a t négyzetét kapjuk. Ha ezután a t négyzetének minden pontjára az a betű szerkesztését alkalmazzuk, akkor a ta négyzetét kapjuk. Hasonlóan folytatva, a tag szóhoz tartozó algoritmus a $[0, 1] \times [0, 1]$ pontjait a tag négyzetébe viszi (3.4. ábra).

Mátrixokkal, egy pontosabb bizonyítás.

A négy csúcshoz tartozó szerkesztés a (2.7) és (2.39) formulákkal adott F_1, F_2, F_3, F_4 mátrix műveletekkel is végrehajtható. Ezután alkalmazzuk a 2.5. fejezetben,



3.4. ábra.

az \mathcal{A} kódolásáról mondottakat. Esetünkben $F_g \circ F_a \circ F_t(\mathcal{A})$ lesz a tag négyzete, amikor

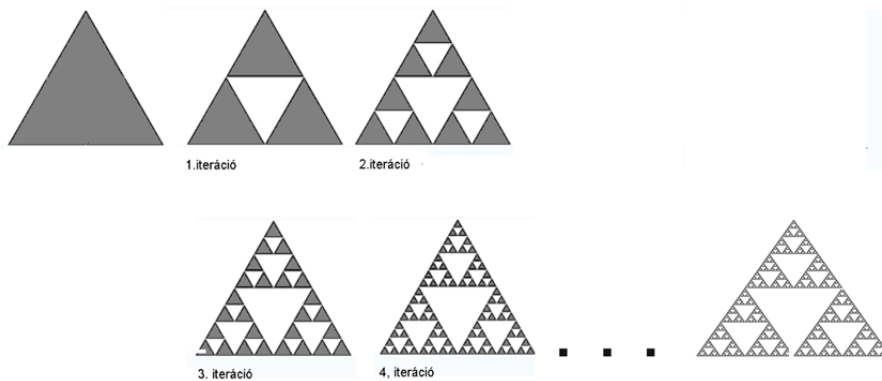
$$\mathcal{A} = [0, 1] \times [0, 1].$$

1.9.2. Az F_1, F_2, F_3 függvényekkel megadott IFS invariáns halmaza a Sierpinski háromszög

1.9.3. Ekkor azt a Sierpinski háromszöget kapjuk, amikor egy tetszőleges háromszögnek töröljük a középső negyedét (3.5. ábra). Ekkor az IFS megadást úgy kapjuk, hogy az 1.9.2. feladat megoldásában szereplő F_1, F_2, F_3 eltolás (*shift*) vektorait megfelelően módosítjuk.

1.10.1. Az \mathcal{S} területe csak nulla lehet, mivel egyetlen tiltott betű esetén is a betűhöz tartozó négyzetek törlése után kapott halmaz, a Sierpinski háromszög területe nulla és hosszabb szavak tiltásával, több négyzetet törölünk.

Több négyzet törlésével, a kerület növekszik.



3.5. ábra.

1.10.2. Igen. A ta eset mintájára bizonyítható, hogy agctt tiltott szó esetén is csakis nulla lehet \mathcal{S}^* területe. Ebből már sejthető hogy NINCSEN ilyen tiltott szó. Bármilyen hosszú tiltott szót adunk meg és csupán azokat a négyzeteket töröljük az egyre sűrűbb $2^n \times 2^n$ négyzethálókból, amelyek kódja a tiltott szóra *végződik*, akkor a megmaradó halmazok területe nullához tartó geometriai sorozatot alkot.

MEGJEGYZÉS. A szavak hosszának növekedésével egyre lassabban tart a sorozat a nullához és kb. 8-10 betűből álló tiltott szó esetén ez a konvergencia, tapasztalati úton már nem érzékelhető.

Ha egy végtelen hosszú szót tiltunk meg, akkor ez a jelenség eltűnik, hiszen minden végtelen kódnak pontosan egy pont felel meg.

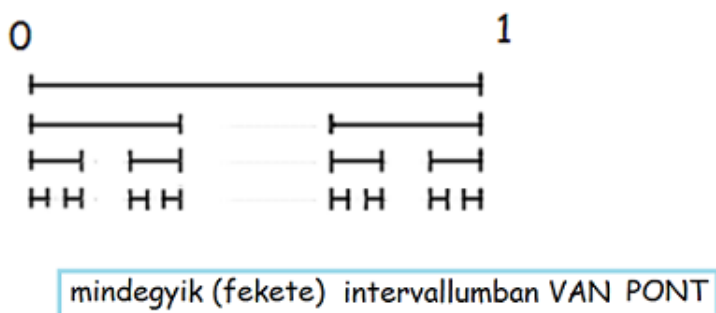
1.10.3. Az **1.32.** ábrából leolvasható és a leolvasottakat teljes indukcióval igazolhatjuk .

1.10.4. A Cantor halmaz szerkesztéséből következik, hogy két egyharmad hosszúságú egyenesszakasz , vagy négy egykilencedhosszúságú egyenesszakasz már lefedi a Cantor halmazt. Ezután r harmadolásával $N(r)$ a duplájára nő. Ennek alapján

$$\frac{\log N(r)}{-\log r} \leq \frac{\log 2^n}{\log 3^n} = \frac{\log 2}{\log 3} = 0.622\dots$$

Így a Cantor halmaz dimenziója legfeljebb $0.622\dots$

A dimenzió nem lehet kisebb mint $0.622\dots$. Vagyis 3^{-n} hosszú egyenes-
szakaszokból legalább 2^{-n} szükséges. Ugyanis, mindegyik megmaradó intervallumban van pontja a Cantor halmaznak, hiszen a Cantor halmaz a megmaradó intervallumok közös része. Másrészt, a Cantor halmaz (geometriai) szerkesztésekor 3^{-n} hosszú nyílt intervallumokat törölünk. Ezért a megmaradó intervallumok távolsága 3^{-n} (3.6. ábra). Így a Cantor halmaz lefedéséhez szükséges a 2^{-n} intervallum.



3.6. ábra.

1.10.5. A három állítás közül legfeljebb egy lehet érvényes. Legyen a két halmaz \mathcal{B} és \mathcal{C} . Ekkor

$$\frac{\log N_B(r) + N_C(r)}{-\log r} \leq \frac{\log 2 \max\{N_B(r), N_C(r)\}}{-\log r}$$

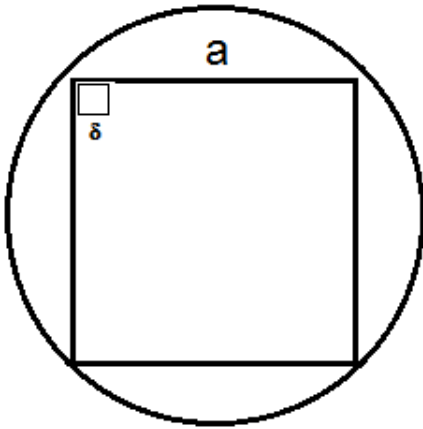
alapján a 2. érvényes.

1.10.6. Ekkor minden δ -ra, a \mathcal{B} halmazt lefedő négyzethálóban N_δ legfeljebb annyi, mint a \mathcal{C} halmazt lefedő négyzethálóban.

1.10.7. Egy kompakt halmaz belefér egy elegendő nagy R sugarú körbe. A körlap dimenziója 2.

Tekintsük a körbe írt négyzetet (3.7. ábra). A négyzetre

$$N_\delta = \left(\frac{a}{\delta}\right)^2$$



3.7. ábra.

és így

$$\frac{\log N_\delta}{-\log \delta} = \frac{2 \log a - 2 \log \delta}{-\log \delta} \implies 2$$

Ennek alapján, az R^2 síkban, egy kompakt (korlátos és zárt) halmaz dimenziója legfeljebb 2.

A mondottakból az is következik, hogy ha egy \mathcal{H} halmaznak van belső pontja, akkor a \mathcal{H} dimenziója 2. ($P \in \mathcal{H}$) belső pont, ha van olyan P középpontú \mathcal{K} körlap amelyre $\mathcal{K} \subset \mathcal{H}$).

Ennek alapján, ha $s \in (1, 2)$ akkor a \mathcal{H} halmaznak nincsen belső pontja. A halmaz bármely P pontjára *bármilyen* kis r sugarú körben van idegen pont is.

1.11.1. A c pont 2^{-3} környezetében van minden bináris tört, amely így kezdődik

$$0.110$$

és a p pont 2^{-4} környezetében van minden bináris tört, amelynek kezdő számjegyei

$$0.0011.$$

A bináris törtnek ilyennek kell lenni

$$0.110c_4c_50011\dots$$

ahol c_4 és c_5 helyén tetszőleges bináris jel állhat.

1.11.2. Az 1.11.1. gondolatmenetét követve, ha

$$2^i < \varepsilon, \quad 2^m < \delta$$

akkor minden bináris tört, amelynek első k számjegye megegyezik a c első k számjegyével és a k -adik helytől pedig m számjegye megegyezik a p első m számjegyével megfelel a káosz II. feltételnek.

Ha a c bináris törtet a k -adik jegyétől periodikusan folytatjuk, akkor az I. feltételnek megfelelő c^* sorozatot kapunk, ha

$$2^{-k} < \varepsilon.$$

1.11.3.

0.22020220
0.02020022 ...
0.20200222 ...
0.20222222 ...
0.2000000 ...

1.11.4.

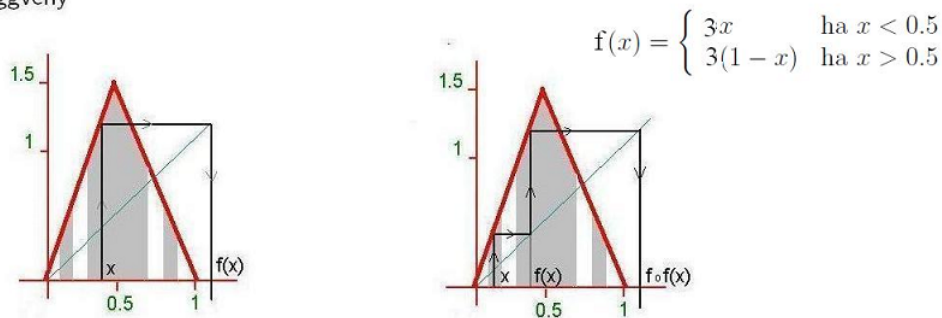
0.21021222 ...
0.12010000
1.02122222 ...
-0.21200000

1.11.5. Ha a c triadikus tört alakja nem tartalmaz 1 jelet, akkor ez öröklődik a sorozat minden elemére. Ekkor a sorozat minden eleme a $(0,1)$ intervallumban van. Ez a képzési szabályból következik.

Ha $c \in (\frac{1}{3}, \frac{2}{3})$ akkor a triadikus tört alakjának első helyén 1 áll és a sorozat következő eleme már kilép a $(0,1)$ intervallumból. Ha először a k -adik helyen áll 1, akkor a sorozat $k+1$ -edik eleme lesz egynél nagyobb.

A mondottakat érdemes szemléltetni a $q=3$ paraméter értékhez tartozó sátorfüggvénnyel, a c -ből induló web-diagrammal. (3.8. ábra).

sátorfüggvény



3.8. ábra.

1.11.6. Pontosán akkor, ha c négyes számrendszerben felírva csupán 0 és 3 jeleket tartalmaz. Ennek igazolására és szemléltetésére, kövessük a 1.11.5 megoldását.

1.11.7. Pontosán akkor, ha c tízes számrendszerben (decimális tört alakban) felírva csupán 0 és 9 jeleket tartalmaz. Ennek igazolására és szemléltetésére, kövessük az 1.11.5. megoldását.

1.11.8. A web-diagram szemléltetés útján igazolható hogy

$$g(x) = \begin{cases} qx & \text{ha } x < 0.5 \\ qx - 1 & \text{ha } x \geq 0.5 \end{cases}$$

egy ilyen, természetes módon adódó függvény.

1.11.9. Az 1. tulajdonság érvényes, hasonlóan, mint az (1.25) sorozatra, hiszen a $0 \leftrightarrow 1$ csere után is periodikus marad a sorozat.

A 2. tulajdonság igazolására követhetjük az 1.11.1. és az 1.11.2. megoldások gondolatmenetét, azzal az eltéréssel, hogy a p pont megfelelő környezetét azután tudjuk figyelembe venni, miután a $0 \leftrightarrow 1$ csere megtörtént.

1.12.1. Az algoritmus, minden lépésben abból áll, hogy lecseréli a küldendő szót egy másikra, ha a soron következő betű nem felel meg az üzenetnek. Ekkor csupán az lehet a probléma, hogy a cserével *előző betűk is* megváltoznak. Miért nem változnak meg ezek a betűk?

Ha két bináris tört eltérése kisebb mint 2^{-m} akkor m hosszú prefixük megegyezik. Az \mathcal{M} halmazt úgy választottuk, hogy minden $x \in (0, 1)$ pont 2^{-m} környezetében legyen pont az \mathcal{M} halmazból.

1.12.2. Azt akarjuk, hogy a lecserélésnél az $n + 1$ -edikbetű és *csakis ez a betű* változzék. Ez pontosan akkor teljesül, ha

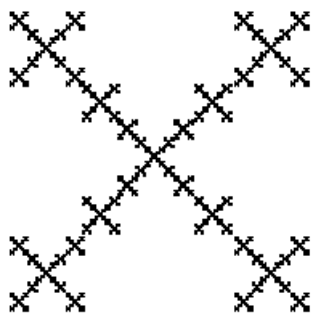
$$x'' \in \mathcal{Y}, |R(x'') - R(x)| < \frac{1}{2^n}$$

Például, ha két tizedestört egymástól legfeljebb egy ezred távolságban van, akkor az első két jelben megegyeznek. Minden bináris tört, amely a 0.1011 bináris törttől kevesebb, mint egynyolcad távolságra van így kezdődik: 0.101.

Így elegendő az x kód helyett, csupán a hozzárendelt $R(x)$ bináris törttel foglalkozni. Továbbá, az \mathcal{Y} elég sűrű a $[0, 1]$ -ben ahhoz, hogy minden x kódhoz van megfelelően közel $x'' \in \mathcal{Y}$.

2. fejezet

2.3.1. A Koch görbe és a faág kivételével minden IFS példában a (2.6) feltételt teljesítő \mathcal{B} halmazból indultunk. A 2.4. fejezetben igazoljuk, hogy minden iterált függvényrendszerhez van olyan \mathcal{B} amely teljesíti a (2.6) feltételt. A Koch görbe előállítására ilyen \mathcal{B} halmaz a 3.9. ábrán a K_0^* szürke háromszög.



3.9. ábra.

Próbáljuk megindokolni, hogy a $\{K_n; n = 1, 2, \dots\}$ és a $\{K_n^*; n = 1, 2, \dots\}$ sorozat „ugyanazt a halmazt állítja elő”.

Érdeemes behatóbban tanulmányozni az 1.13. fejezetben leírt adattömörítő eljárást, mint „deviáns” iterált függvényrendszert.

2.3.3. Az 1. és 2. érvényes minden F függvényre, a 3. csak invertálható függvényekre érvényes.

Az 1. nyilvánvaló.

A 2. bizonyítása: Az 1. alapján

$$F(\mathcal{B}) \subseteq F(\mathcal{B} \cup \mathcal{C})$$

$$F(\mathcal{C}) \subseteq F(\mathcal{B} \cup \mathcal{B})$$

amiből

$$F(\mathcal{B}) \cup F(\mathcal{C}) \subseteq F(\mathcal{B} \cup \mathcal{C})$$

A másik irányban: ha $x \in \mathcal{B} \cup \mathcal{C}$ akkor $F(x) \in F(\mathcal{B})$ vagy $F(x) \in F(\mathcal{C})$, ami éppen azt jelenti, hogy

$$F(x) \in F(\mathcal{B}) \cup F(\mathcal{C})$$

A 3. bizonyítása: az 1. alapján

$$F(\mathcal{B}) \cap F(\mathcal{C}) \subseteq F(\mathcal{B})$$

$$F(\mathcal{B}) \cap F(\mathcal{C}) \subseteq F(\mathcal{C})$$

amiből

$$F(\mathcal{B} \cap \mathcal{C}) \subseteq F(\mathcal{B}) \cap F(\mathcal{C})$$

A másik irányban: Ha $z \in F(\mathcal{B}) \cap F(\mathcal{C})$ akkor van $b \in \mathcal{B}$ amelyre $F(b) = z$ és van $c \in \mathcal{C}$ amelyre $F(c) = z$. Ha F invertálható (ha $b \neq c$ akkor $F(b) \neq F(c)$) akkor $z \in F(\mathcal{B} \cap \mathcal{C})$.

Mi van akkor, ha F nem invertálható?

Ekkor van $b \neq c$ amelyre $F(c) = F(b)$. Legyen

$$\mathcal{B} : b \in \mathcal{B}, \quad c \notin \mathcal{B}$$

$$\mathcal{C} : c \in \mathcal{C}, \quad b \notin \mathcal{C}$$

ekkor $F(b) \in F(\mathcal{B}) \cap F(\mathcal{C})$ de $b \notin \mathcal{C} \cap \mathcal{B}$ és ugyanez mondható c -ről. Arra az eredményre jutottunk, hogy nincsen olyan pontja a $\mathcal{B} \cap \mathcal{C}$ halmaznak amelynek képe az $F(\mathcal{B})$ és az $F(\mathcal{C})$ közös részében van.

Ha kettőnél több olyan pont van amelyeknek képe megegyezik az F leképezésben, hasonló gondolatmenettel igazolható, hogy ekkor vannak halmazok, amelyekre csak

$$F(\mathcal{B} \cap \mathcal{C}) \subset F(\mathcal{B}) \cap F(\mathcal{C})$$

érvényes.

2.4.1. Hajtsuk végre a tétel bizonyítását egyetlen kontraktív F függvénnyel. Ekkor a közös rész egyetlen pont. Ez az iteráció sorozatnak a határértéke bármely x kezdőpontból is indul az iteráció.

a bizonyítás részletesebben. Indítsunk egy x pontból. Azt, hogy egy másik, z pontból is ugyanoda konvergál a sorozat, úgy látjuk be, hogy egy olyan körlapot veszünk, amelynek x aközéppontja és az R sugara olyan nagy, hogy amellett, hogy teljesíti a tétel feltételeit, a belsejében tartalmazza a z pontot.

Hogy a \mathcal{K} zárt körlapok közös pontja a határérték, matematikai formulákkal bizonyítva, a következő. A $\{F^{[n]}(\mathcal{K}) \quad n = 1, 2, \dots\}$ sorozat elemei egymásba skatulyázott halmazok, amelyek átmérője a nullához tart. Legyen p a $\{F^{[n]}(\mathcal{K}) \quad n = 1, 2, \dots\}$ közös pontja és $\varepsilon > 0$. Ha n olyan nagy, hogy $F^{[n]}(\mathcal{K})$ átmérője kisebb mint ε , akkor a sorozat minden

$$\{F^{[m]}(\mathcal{K}) \quad (m > n)\}$$

eleme a p pontnak az ε környezetében van.

2.5.1. Legyen \mathcal{K}_1 és \mathcal{K}_2 két körlap, amelyekre (2.19) egymásba skatulyázott halmazok sorozata. Vegyünk fel egy olyan \mathcal{K} körlapot, amely tartalmazza mindkét körlapot. Ezután könnyű belátni hogy a (2.19) sorozat ugyanoda konvergál, akár a \mathcal{K}_1 akár a \mathcal{K}_2 körlapból indítunk.

2.10.1. Az a/, b/ ábrán legyen a világos kör sugara R , a sötét kör sugara r .

Ekkor az a/ ábrán

$$d[\mathcal{A}, \mathcal{B}] = 2R \quad d[\mathcal{B}, \mathcal{A}] = 2r$$

és így $h[\mathcal{A}, \mathcal{B}] = 2R$.

A b/ ábrán

$$d[\mathcal{A}, \mathcal{B}] = 2R - 2r \quad d[\mathcal{B}, \mathcal{A}] = 0$$

és így $h[\mathcal{A}, \mathcal{B}] = 2R - 2r$.

A c/ és a d/ ábrán a d távolságok egyike nulla.

A c/ ábrán

$$h[\mathcal{A}, \mathcal{B}] = d[\mathcal{B}, \mathcal{A}] = 0.5(d - 2R)$$

a d/ ábrán

$$h[\mathcal{A}, \mathcal{B}] = d[\mathcal{A}, \mathcal{B}] = 0.5(2R - a)$$

ahol a a négyzet oldala, d a négyzet átmérője és R a kör sugara.

Az e/ ábrán a szürke háromszög beírt körének a sugara (3.11 ábra).

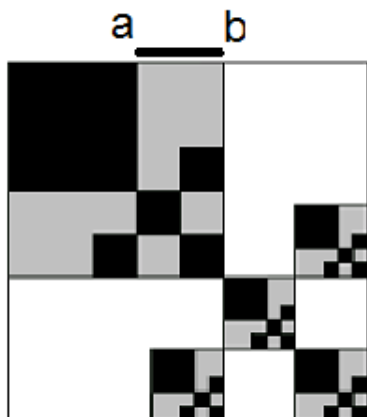
Az f/ ábrán az $[a, b]$ hossza (3.10. ábra).

2.10.2. a/

$$h[\mathcal{B}, \mathcal{C}] = 1 - r$$

. b/

$$h[\mathcal{B}, \mathcal{B} - \mathcal{C}] = \begin{cases} 1 - r & \text{ha } 2r < 1 \\ r & \text{ha } 2r \geq 1 \end{cases} \quad (3.16)$$

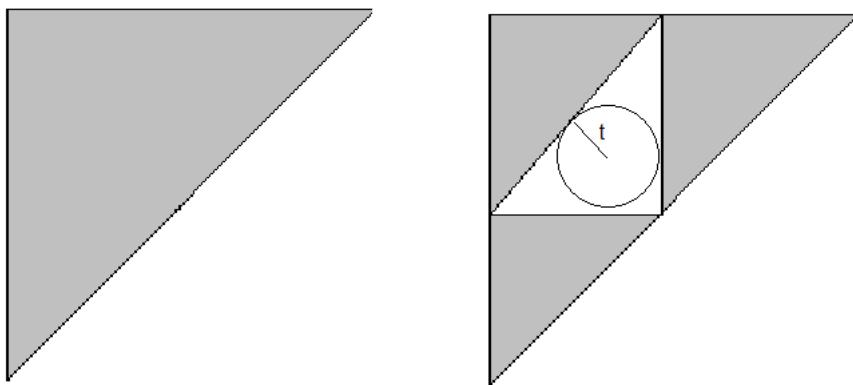


3.10. ábra.

2.10.3. Mindkét esetben

$$h[\mathcal{S}_{n+1}, \mathcal{S}_n] = \text{const.} \frac{1}{2^{n+1}}.$$

A konstans szorzó az egyenlőoldalú háromszög esetén a háromszögbe írt kör sugara (3.11. ábra), a három csúcspont esetén pedig $a\frac{\sqrt{2}}{3}$ (2.10. ábra)



3.11. ábra.

2.10.4. A W öt hasonlósági leképezés uniója

$$F_1(x) = \begin{pmatrix} 0,2 & 0 \\ 0 & 0,2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

$$F_2(x) = \begin{pmatrix} 0,2 & 0 \\ 0 & 0,2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 100 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$F_3(x) = \begin{pmatrix} 0,2 & 0 \\ 0 & 0,2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 100 \end{pmatrix}$$

$$F_4(x) = \begin{pmatrix} 0,2 & 0 \\ 0 & 0,2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 50 \\ 50 \end{pmatrix}$$

$$F_5(x) = \begin{pmatrix} 0,2 & 0 \\ 0 & 0,2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 100 \\ 100 \end{pmatrix}$$

$$F_6(x) = \begin{pmatrix} 0,6 & 0 \\ 0 & 0,6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 150 \\ 150 \end{pmatrix}$$

A sorozat két szomszédos elemének távolsága

$$\left(\frac{3}{5}\right)^n \quad (n = 1, 2, \dots)$$

2.10.5.

$$F_1(x) = \begin{pmatrix} 0,25 & 0 \\ 0 & 0,25 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

$$F_2(x) = \begin{pmatrix} 0,25 & 0 \\ 0 & 0,25 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 100 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$F_3(x) = \begin{pmatrix} 0,25 & 0 \\ 0 & 0,25 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 100 \end{pmatrix}$$

$$F_4(x) = \begin{pmatrix} 0,25 & 0 \\ 0 & 0,25 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 100 \\ 100 \end{pmatrix}$$

$$F_5(x) = \begin{pmatrix} 0,5 & 0 \\ 0 & 0,5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 33 \\ 33 \end{pmatrix}$$

A sorozat két szomszédos elemének távolsága (2.11. ábra)

$$\text{const.} \left(\frac{1}{5}\right)^n \quad (n = 1, 2, \dots)$$

2.10.6.

A. $h[\{x\}, \{y\}] = d[x, y]$.

B. $d[x, \mathcal{B}] \leq h[\{x\}, \mathcal{B}]$. Itt egyenlőség pontosan akkor van, ha \mathcal{B} egy x középpontú körvonal. A. és B. közvetlenül a h definíciójából következik.

2.10.7. Közvetlenül a h definíciójából következik.

2.10.8. Nyilván

$$\mathcal{B}_i + t \subseteq \bigcup_{i=1}^N \mathcal{B}_i + t \quad (i = 1, 2, \dots, N)$$

és így

$$\bigcup_{i=1}^N [\mathcal{B}_i + t] \subseteq \bigcup_{i=1}^N \mathcal{B}_i + t.$$

A másik irány: Ha

$$x \in \bigcup_{i=1}^N \mathcal{B}_i + t \quad (i = 1, 2, \dots, N)$$

akkor a $\{\mathcal{B}_i; \quad i = 1, 2, \dots, N\}$ halmazok között van olyan, legyen ez $\{\mathcal{B}_k$, amelyben van olyan b , amely legfeljebb t távolságban van x -től. Ez pontosan azt jelenti, hogy

$$x \in \mathcal{B}_k + t.$$

és $\mathcal{B}_k + t \subseteq \bigcup_{i=1}^N [\mathcal{B}_i + t]$.

2.10.9. Igaz, mert

$$\max\{h[\mathcal{B}_i, \mathcal{C}_j]; \quad (i, j = 1, 2, \dots, N)\}$$

nagyobb (legalább is nem kisebb) mint a

$$\{h[\mathcal{B}_i, \mathcal{C}_i] \quad (i = 1, 2, \dots, N)\}$$

részhalmoz maximuma.

2.10.10. Nem. Tipikus példák:

1. \mathcal{B} egy zárt körlap és \mathcal{C} ezen körlap belső pontjainak a halmaza.
2. \mathcal{B} a $(0, 1)$ és \mathcal{C} a $c \in (0, 1)$ racionális pontok halmaza.
3. A **1.4.** ábra vagy az **1.5.** ábra halmaz sorozata. Itt

$$\mathcal{B} = \bigcup_{k=1}^{\infty} \mathcal{M}_k$$

$$\mathcal{C} = [0, 1] \times [0, 1]$$

2.10.11. sem az 1. sem a 2. nem teljesül.

$$\Delta[\{b\}, \mathcal{C}] = d[b, \mathcal{C}]$$

2.10.12. Igaz. Alkalmazzuk a **2.9.** fejezetben mondottakat.

2.10.13. Folytonos, mivel F kontraktív és alkalmazzuk a **2.9.** fejezetben mondottakat.

2.10.14. Ekkor minden $b \in \mathcal{B}$ pontra $d[b, p] < \varepsilon$, ezért

$$d[\mathcal{B}, \{p\}] < \varepsilon \quad d[\{p\}, \mathcal{B}] < \varepsilon$$

1., 2. és 3. ebből már könnyen levezethető.

2.11.1. Az induló háromszögből az 1. iterációt úgy is megkaphatjuk, hogy a háromszöget lineárisan a felére csökkentjük, ezt a háromszöget az X és az Y tengely irányába $0.5a$ -val eltoljuk, majd a három háromszöget egyesítjük. Ez éppen

$$F_1(\mathcal{B}) \cup F_2(\mathcal{B}) \cup F_3(\mathcal{B}) \tag{3.17}$$

amikor \mathcal{B} a háromszög.

A középső nyílt háromszög törlése mindig helyettesíthető Az (3.17) leképezéssel. Ezután alkalmazzuk a 2.3. fejezetben található (2.6) összefüggést, amely igazolja az F_i függvényeknek és a halmazunióknak a felcserélhetőségét.

2.11.2. A g betűt tartalmazó szavak törlése, minden lépésnél azt jelenti, hogy minden eddig nem törölt négyzetet lineárisan felezünk és az így kapott négy négyzet közül a jobb felső négyzetet töröljük. Ugyanis az így kapott négyzetek közül pontosan ennek a kódja tartalmaz g betűt. Viszont ez a geometriai művelet ugyanarra az eredményre vezet, mint (3.17), ha \mathcal{B} egy négyzet.

Ezután alkalmazzuk az F_i függvényeknek és a halmazunióknak a felcserélhetőségét, a (2.6) összefüggést és vegyük figyelembe azt, hogy az IFS attraktora független az indító \mathcal{B} halmaztól.

2.11.3. Egy a oldalú négyzet. Ugyanis ez egy invariáns halmaz és pontosan egy invariáns halmaz van.

MEGJEGYZÉS. Induljunk ki a 2.14. ábra szerkesztésében háromszög helyett egy négyzezből. Az ekkor kapott sorozatból már sejthető a feladat megoldása.

2.11.4. A szerkesztés lépései ugyanazt eredményezik, mintha a (2.7) $\{F_i \mid i =$

1, 2, 3} függvényeit felváltva alkalmaznánk a négyzet pontjaira. Ezek, a 2.5. fejezetben mondottak alapján, a Sierpinski háromszög pontjait adják.

2.11.5. A mátrix rész ugyanaz, az eltolás vektorok viszont a háromszög oldalvektorai szerint változnak.

A sátorfüggvények tulajdonságai.

A sátorfüggvény grafikonjából láthatjuk, hogy, ha

$$x \in \left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right)$$

akkor $s(x) \notin [0, 1]$, ha

$$\in \left(\frac{1}{9}, \frac{2}{9}\right) \quad \text{vagy} \quad x \in \left(\frac{7}{9}, \frac{8}{9}\right)$$

akkor a második iteráció kerül ki a $[0, 1]$ intervallumból, vagyis $s^{[2]}(x) \notin [0, 1]$ és sejtethető, hogy a Cantor halmaz szerkesztése során az n -edik lépésben törölt intervallumokból indított pályák az n -edik lépésben kikerülnek a $[0, 1]$ intervallumból.

A bizonyítás a triadikus törtekkel történhet. A 2. fejezetben láttuk, hogy a Cantor halmaz a $[0, 1]$ mindazon pontjaiból áll, amelyeknek triadikus tört alakja csupán 0 és 2 jegyeiből áll. Ha $x \in \mathcal{C}$ és $x < 0.5$, akkor $3x \leq 1$ és a triadikus tört alakja csupán 0 és 2 jegyeiből áll. Ha $x \in \mathcal{C}$ és $x > 0.5$, akkor $3(1 - x) \leq 1$ és a triadikus tört alakja csupán 0 és 2 jegyeiből áll.

Ha $x \notin \mathcal{C}$ akkor a triadikus tört alakjában van 1. Ha ez a triadikus tört első jegye, akkor $x \in \left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right)$. Ha 1 az n -edik helyen áll, akkor $n - 1$ lépés után,

$$s^{n-1}(x) \in \left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right).$$

Az $x \in \mathcal{C}$ bármilyen kis környezetében van olyan z pont, amelynek triadikus tört alakjában van 1 és ezért a z pontból induló pályák véges sok lépés után kikerülnek a környezetből sőt, a $[0, 1]$ -ből is. A z triadikus alakját periódikusan folytatva, $s^{[n]}(z) = z$ és z a környezetben marad, ha n elég nagy.

A fixpontok csakis a \mathcal{C} Cantor halmaz elemei lehetnek, mivel az $x \notin \mathcal{C}$ pontból induló pályák, véges sok lépés után, kilépnek a $[0, 1]$ intervallumból.