Valószínűségszámítás 1. jegyzet matematikusoknak és fizikusoknak

Balázs Márton[1] és Tóth Bálint[1]

[1]Budapesti Műszaki és Gazdaságtudományi Egyetem

Ez a jegyzet egy bevezető Valószínűségszámítás kurzus jegyzete, elsőrosban matematikus és fizikus BSc hallgatóknak készült. Egyelőre a főbb elméleti alapok ismertetésére és néhány alap-példára terjed ki, a példák és a gyakorló feladatsorok terjedelme erősen korlátozott. A célja elsősorban praktikus és hasznos ismeretek, módszerek átadása, de hangsúlyt kap a precizitás és a matematikai alapozás is, melyeken elindulva befogadhatóvá válnak a további valószínűségszámítás és sztochasztikus folyamatok, vagy statisztika irányú ismeretek is.

Kulcsszavak: Valószínűségszámítás, valószínűség, feltételes valószínűség, Bayes tétel, függetlenség, valószínűségi változó, eloszlás, eloszlástranszformáció, Poisson folyamat, együttes eloszlás, várható érték, Centrális határeloszlástétel, Nagy számok törvénye

Előszó

Ez a jegyzet elsősorban a Budapesti Műszaki és Gazdaságtudományi Egyetem matematikus és fizikus BSc képzés Valószínűségszámítás 1. kurzus hallgatóinak készült. Egyelőre a főbb elméleti alapok ismertetésére és néhány alap-példára terjed ki, a példák és a gyakorló feladatsorok terjedelme erősen korlátozott. Ez a jegyzet *semmiképp sem helyettesíti az előadásokat és a gyakorlatokat*, inkább azok mellé ad egy kis segítséget.

Ez a jegyzet jelentős részben Sheldon Ross könyvén, valamint Tóth Bálint kéziratos jegyzetén illetve feladatsorain (lásd alább) alapul. Az anyag felépítése, sorrendisége főként az előbbit követi. Sok helyen azonban részletesebb leírást adtunk a matematikai háttérről, egyes tételeket vagy jelenségeket mélyebben tárgyaltunk. Ezekben az esetekben főként Tóth Bálint jegyzetére támaszkodtunk. Példákért és feladatokért szintén vegyesen fordultunk a két műhöz, illetve rajtuk kívül más forrásokhoz is.

Köszönetet mondunk Ferenci Tamásnak, Komjáthy Júliának, Ráth Balázsnak, Szabolcs Barnabásnak, Szász Domokosnak, Tóth Imre Péternek és Valkó Benedeknek akik segédanyagokkal, sok hasznos észrevétellel, illetve a feladatok kidolgozásában voltak segítségünkre a jegyzet írása során.

Felhasznált irodalom:

- S. Ross: *A First Course in Probability* hetedik kiadás, Pearson and Prentice Hall, 1976-2006

- Tóth B.: *Valószínűségszámítás I.*, feladatsorok és kéziratos jegyzet, Budapesti Műszaki és Gazdaságtudományi Egyetem

- G. Grimmett: *One Thousand Exercises in Probability*, Oxford University Press, USA, 2001

- A. M. Iaglom, I. M. Iaglom: *Probleme Neelementare Tratate Elementar*, második kiadás, Editura tehnică, Bukarest

- B. A. Szevasztyanov, V. P. Csisztyakov, A. M. Zubkov: *Valószínűségelméleti feladatok*, Tankönyvkiadó, Budapest, 1987

- Bognár J.-né, Mogyoródi J., Prékopa A., Rényi A., Szász D.: *Valószínűségszámítási feladatgyűjtemény*, második kiadás, Tankönyvkiadó, Budapest, 1974

A jegyzettel kapcsolatos észrevételeket várják a szerzők: `balazs@math.bme.hu`, `balint@math.bme.hu`.

Tartalomjegyzék

1. fejezet

Kombinatorikai összefoglaló

1.1. Leszámlálások

A valószínűségszámítási problémákban gyakran előkerülnek leszámlálási feladatok, ezért egy rövid kombinatorikai összefoglalóval kezdünk a témakörben. A *leszámlálások alapelve* a következő, rendkívül egyszerű megállapítás:

> Ha egy kísérlet n féle eredménnyel végződhet,
> és ettől függetlenül egy másik kísérletnek m féle kimenetele lehetséges,
> akkor együttesen $n \cdot m$ féle kimenetel lehetséges.

A valószínűségszámítás véletlen kísérletekkel foglalkozik. Ezek lehetséges kimeneteleit egy halmazzal, Ω-val modellezzük. A fenti megállapítás formálisan a következőképp írható át. Legyen Ω_1 az első, Ω_2 a második kísérlet kimeneteleinek halmaza, és tegyük fel, hogy a lehetséges kimenetelek száma, $|\Omega_1| = n$, illetve $|\Omega_2| = m$ véges. Ekkor a két kísérletet együtt az

$$\Omega := \Omega_1 \times \Omega_2 = \{(\omega_1, \omega_2) \, : \, \omega_1 \in \Omega_1, \; \omega_2 \in \Omega_2\}$$

rendezett párok halmaza modellezi. A leszámlálás alapelve pedig az $|\Omega| = |\Omega_1| \cdot |\Omega_2|$ alakot ölti.

A leszámlálások során fontos megkülönböztetni a következő kísérleteket:

- **Permutáció:** egy H halmaz elemeinek sorba rendezése.
  - **Ismétlés nélküli permutáció:** A $H = \{h_1, h_2, \ldots, h_n\}$ véges halmaz elemeit mind különbözőnek tekintve kísérletünk az elemek sorba rendezése. Azaz:

    $$\Omega = \{H \text{ összes elemének minden lehetséges sorrendje}\}; \quad |\Omega| = n!.$$

    n elemnek tehát n *faktoriális*, $n! = 1 \cdot 2 \cdots n$ ismétlés nélküli permutációja van. Ezt legegyszerűbben úgy láthatjuk be, hogy az első helyre n elem közül, ezután a második helyre a maradék $n-1$ elem közül, stb., az utolsó előtti helyre 2 elem közül, az utolsó helyre már csak egy elem közül választhatunk, majd alkalmazzuk a leszámlálások alapelvét. Definíció szerint $0! := 1$.

1.1. Példa *Egy lóversenyen 7 versenyző indul. Ekkor*

$$\Omega = \{\textit{minden lehetséges beérkezési sorrend}\}, \ |\Omega| = 7! = 5040.$$

- **Ismétléses permutáció:** A H halmaz elemeit nem mind tekintjük különbözőnek. A legegyszerűbb ún. *multihalmazok*ról beszélni:

$$H = \{h_1, \dots, h_1, h_2, \dots, h_2, \dots, h_r, \dots, h_r\},$$

ahol h_1 n_1-szer, h_2 n_2-ször, ..., h_r n_r-szer szerepel H-ban. Ekkor H elemszáma $|H| = n = n_1 + n_2 + \cdots + n_r$. Kísérletünk ismét minden elem sorba rendezése anélkül, hogy adott i-re h_i-k között különbséget tennénk:

$$\begin{gathered} \Omega = \{H \text{ összes elemének minden lehetséges sorrendje}\}; \\ |\Omega| = \binom{n}{n_1\, n_2\, \dots\, n_r} = \frac{n!}{n_1! \cdot n_2! \cdots n_r!}. \end{gathered} \tag{1.1}$$

Ennek belátásához képzeljük el, hogy H mind az n eleme megkülönböztethető, ez $n!$ különböző ismétlés nélküli permutációhoz vezetne. Ezek között azonban Ω minden egyes ismétléses permutációját többször is megszámoltuk: annyiszor, ahányszor az adott i-re azonosnak tekintendő h_i elemeket egymás között permutáltuk. Ez $i = 1$-re $n_1!$, $i = 2$-re $n_2!$, stb., $i = r$-re $n_r!$ permutáció. A leszámlálás alapelve szerint tehát így minden egyes ismétléses permutáció $n_1! \cdot n_2! \cdots n_r!$-szor fordul elő, ezért ennyivel elosztjuk az ismétlés nélküli permutációk számát. A jobb oldalon szereplő hányados *multinomiális együttható* néven ismert, ennek okát lásd később.

1.2. Példa *Az $M, I, S, S, I, S, S, I, P, P, I$ betűkből* $\frac{11!}{1!\cdot 4!\cdot 4!\cdot 2!} = 34650$ *különböző szó írható fel, ha minden betűt pontosan egyszer használunk fel.*

- **Variáció:** egy H halmaz elemei egy részének sorrendben történő kiválasztása (azaz kiválasztás, és a kiválasztott elemek sorba rendezése).

  - **Ismétlés nélküli variáció:** A $H = \{h_1, h_2, \dots, h_n\}$ véges halmaz elemeit mind különbözőnek tekintve kísérletünk k elem kiválasztása, és azok sorba rendezése. Azaz

$$\begin{gathered} \Omega = \{H \text{ elemeiből képzett } k \text{ hosszú szavak}\}; \\ |\Omega| = \frac{n!}{(n-k)!} = n \cdot (n-1) \cdots (n-k+1). \end{gathered} \tag{1.2}$$

A k hosszú szavakat előállíthatjuk úgy, hogy H permutációiban az első k elemet tekintjük. Egy adott szó ekkor annyiszor szerepel, ahány sorrendben a mögötte következő $n-k$ elemet permutálni tudjuk. Ezért $n!$-ban minden ismétléses variációt $(n-k)!$-szor számoltunk meg. A szorzat alak is értelmezhető kombinatorikai alapon: az első helyre n elemet írhatunk, a másodikra $n-1$-et, stb., a k-dikra $n-k+1$-et.

1.3. Példa *Egy lóversenyen 7 versenyző indul, és legyen*

$$\Omega = \{\textit{minden lehetséges első három helyezés}\}$$

(tegyük fel, hogy döntetlen nem lehetséges). Ekkor $|\Omega| = \frac{7!}{(7-3)!} = 7\cdot 6\cdot 5 = 210.$

- **Ismétléses variáció:** Kísérletünk a

$$H = \{h_1, \ldots, h_1, h_2, \ldots, h_2, \ldots, h_r, \ldots, h_r\}$$

multihalmaz k elemének kiválasztása, és azok sorba rendezése. Az általános tárgyalás itt túl bonyolult, mi most egyszerűsítő feltételt teszünk: a multiplicitások mind nagyobbak vagy egyenlők k-val, azaz $n_1, n_2, \ldots, n_r \geq k$. Ez biztosítja, hogy sosem fogyunk ki az elemekből, akár egy adott típusú elemmel is végigrakhatjuk a k hosszú szavunkat.

$$\Omega = \{H \text{ elemeiből képzett } k \text{ hosszú szavak}\}; \qquad |\Omega| = r^k,$$

hiszen mind a k helyre szabadon választhatunk egy típust 1-től r-ig.

1.4. Példa *A magyar rendszámok hárombetűs első részét* $26^3 = 17576$ *féleképpen választhatjuk meg, ebben persze lesz néhány nem szalonképes is. (Az ékezet nélküli ABC (Q-val, X-szel, W-vel együtt) 26 betűt tartalmaz.)*

1.5. Példa (Maxwell-Boltzmann eloszlás) *k darab megkülönböztethető golyót r urnába szintén r^k féleképpen helyezhetünk el.*

- **Kombináció:** egy H halmaz elemei egy részének sorrend nélküli kiválasztása (azaz kiválasztás, sorba rendezés nélkül).

  - **Ismétlés nélküli kombináció:** Egy n elemű H halmazból k elemet sorrend nélkül kiválasztunk.

$$\Omega = \{E \subseteq H \,:\, |E| = k\}; \quad |\Omega| = \binom{n}{k} = \binom{n}{n-k} = \frac{n!}{k!\cdot(n-k)!}.$$

A jobb oldalon a *binomiális együtthatók* a kiválasztott elemek permutációinak $k!$ számszorosában különböznek az ismétlés nélküli variációk (1.2) számától. Ez a szorzó pontosan a kiválasztott elemek sorrendjének tekintéséért / nem tekintéséért felelős.

1.6. Példa *Egy 30 fős évfolyamból* $\binom{30}{5}$ *féleképp lehet egy 5 fős bizottságot kiválasztani.*

A k elem kiválasztásával az n elemet két részre osztottuk: amiket kiválasztunk, és amiket nem. Ha r darab, $n_1, n_2, \ldots, n_r$ nagyságú részhalmazba ($n_1 + n_2 + \cdots + n_r = n$) akarjuk osztani az elemeket sorrendre való tekintet nélkül, ezt

$$\frac{n!}{n_1! \cdot n_2! \cdots n_r!} = \binom{n}{n_1\, n_2 \ldots n_r}$$

féleképpen tehetjük meg. Az (1.1) multinomiális együtthatók tehát a binomiális együttható általánosításai.

1.7. Példa *Találjuk meg az 1-1 értelmű leképezést* n *különböző elem* $n_1, \ldots, n_r$ *nagyságú csoportokba osztása és az ismétléses permutációnál szereplő* H *multihalmaz sorrendjei között!*

– **Ismétléses kombináció:** Kísérletünk a

$$H = \{h_1, \ldots, h_1, h_2, \ldots, h_2, \ldots, h_r, \ldots, h_r\}$$

multihalmaz k elemének kiválasztása, ezúttal sorrendre való tekintet nélkül. Ismét egyszerűsítő feltételt teszünk: a multiplicitások mind nagyobbak vagy egyenlők k-val, azaz $n_1, n_2, \ldots, n_r \geq k$. Ez biztosítja, hogy sosem fogyunk ki az elemekből, akár egy adott típusú elemet is választhatunk k-szor. A kísérlet eredménye az, hogy adott típusra hány választásunk esett, ezért

$$\Omega = \{(e_1, e_2, \ldots, e_r) : e_i \geq 0\ (1 \leq i \leq r),\ \sum_{i=1}^{r} e_i = k\};$$

$$|\Omega| = \binom{r+k-1}{k} = \binom{r+k-1}{r-1}.$$

A binomiális együttható értelmezéséhez először vegyük észre, hogy a kísérlet ekvivalens a következővel, ha a választásainkat egyforma golyókkal, a típusokat pedig különböző urnákkal helyettesítjük:

1.8. Példa (Bose-Einstein eloszlás) k *darab megkülönböztethetetlen golyót* r *urnába szintén*
$\binom{r+k-1}{k}$ *féleképpen helyezhetünk el.*

Ebben a példában képzeljük el, hogy az urnákat sorba rendeztük, így közöttük létrejött $r-1$ darab válaszfal. A kísérlet minden egyes elrendezés megfelel a k darab egyforma golyó, és az r urna közötti $r-1$ darab egyforma válaszfal egy sorrendjének. Az ismétléses permutációknál láttuk, hogy ezekből a sorrendekből épp $\binom{r+k-1}{k}$ darab létezik.

1.9. Példa *Négyféle süteményből egy 12-es tálca* $\binom{4+12-1}{12} = 455$ *féleképpen rendelhető. Ha minden süteményből legalább egyet szeretnénk, akkor ezeket először megrendeljük, azután a négyféle süteményből tetszőlegesen még 8-at rendelünk; ezt* $\binom{4+8-1}{8} = 165$ *féleképpen tehetjük meg.*

1.2. A binomiális és multinomiális együtthatók

Egy pozitív egész szám faktoriálisa $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots n$, és $0! := 1$. Ezek segítségével a binomiális együttható

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k} = \begin{cases} \dfrac{n!}{k! \cdot (n-k)!}, & \text{ha } 0 \le k \le n \text{ egész,} \\ 0, & \text{ha } k < 0 \text{ vagy } k > n \text{ egész.} \end{cases} \tag{1.3}$$

(Lehetséges nem egész értékekre is definiálni az együtthatókat, nekünk nem lesz rá szükségünk.) Speciálisan $\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1$.

1.10. Tétel (Pascal azonosság) *Legyenek* $1 \le n$ *és* k *egész számok, ekkor*

$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}.$$

Bizonyítás. A faktoriálisok mellett az $1 \le k \le n$ esetben (a $k = 0$ eset triviális) kombinatorikusan is érvelhetünk: n elemből k-t kiválaszthatunk úgy, hogy az első elemet kiválasztjuk, és a maradék $n-1$ elemből $k-1$ darabot választunk (jobboldal első tag), vagy az első elemet nem választjuk ki (jobboldal második tag). □

1.11. Tétel (Newton binomiális tétele) *Bármely* $x,\ y \in \mathbb{R}$ *és* $n \ge 1$ *esetén*

$$(x+y)^n = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} \cdot x^i \cdot y^{n-i}.$$

Kombinatorikus bizonyítás. A bal oldali szorzatot kiírva látjuk, hogy minden $0 \le i \le n$-re megjelenik az $x^i \cdot y^{n-i}$ kifejezés, annyiszor, ahány féleképpen az n zárójelből ki tudjuk jelölni azt az i darabot, ahonnan az x-et fogjuk választani (a maradék $n-i$-ből majd y-t választjuk). Ez magyarázza a binomiális együtthatót. □

Indukciós bizonyítás. $n = 1$-re az állítás triviális. Tegyük fel, hogy a tétel igaz $n-1$-re. Ekkor

$$(x+y)^n = (x+y) \cdot \sum_{i=0}^{n-1} \binom{n-1}{i} \cdot x^i \cdot y^{n-i-1} =$$

$$= \sum_{i=0}^{n-1} \binom{n-1}{i} \cdot x^{i+1} \cdot y^{n-i-1} + \sum_{i=0}^{n-1} \binom{n-1}{i} \cdot x^i \cdot y^{n-i} =$$

az első szummában $k = i + 1$, a másodikban $k = i$ helyettesítéssel:

$$= \sum_{k=1}^{n} \binom{n-1}{k-1} \cdot x^k \cdot y^{n-k} + \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k} \cdot x^k \cdot y^{n-k} =$$

$$= \sum_{k=1}^{n-1} \left[\binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k} \right] \cdot x^k \cdot y^{n-k} + x^n + y^n =$$

Pascal szerint:

$$= \sum_{k=1}^{n-1} \binom{n}{k} \cdot x^k \cdot y^{n-k} + x^n + y^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \cdot x^k \cdot y^{n-k}. \qquad \square$$

A binomiális tétel kombinatorikai bizonyításához hasonlóan könnyen belátható a multinomiális tétel:

1.12. Tétel (Multinomiális tétel) *Legyenek x_1, x_2, …, x_r valós számok, $n \geq 1$ egész. Ekkor*

$$(x_1 + x_2 + \cdots + x_r)^n = \sum_{\substack{n_1, \ldots, n_r \geq 0 \\ n_1 + \cdots + n_r = n}} \binom{n}{n_1\, n_2 \ldots n_r} \cdot x_1^{n_1} \cdot x_2^{n_2} \cdots x_r^{n_r}.$$

1.3. Feladatok

1.1. János, Jakab, József és Jenő egy együttest alkotnak, mely négy hangszeren játszik. Ha mindegyikük tud mind a négy hangszeren játszani, hányféle elrendezés lehetséges? És ha János és Jakab mind a négy hangszeren játszhat, de József és Jenő mindketten csak dobolni és zongorázni tudnak?

1.2. (a) Hányféleképpen ülhet le egy sorban három lány és három fiú?

(b) Hányféleképpen ülhet le egy sorban három lány és három fiú, hogy ha a lányok egymás mellett ülnek, és a fiúk is egymás mellett ülnek?

(c) És ha csak a fiúk kell, hogy egymás mellett üljenek?

(d) Hányféleképpen ülhetnek le, ha azonos neműek nem ülhetnek egymás mellé?

1.3. Egy tánciskolába 10 hölgy és 12 úriember jár. Ha 5 hölgyet és 5 úriembert kell kiválasztanunk és párba rendeznünk, hányféle elrendezés lehetséges?

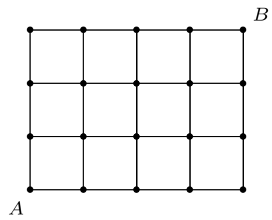
1.4. Egy társaság 8 nőből és 6 férfiból áll. Belőlük kell egy 3 nőből és 3 férfiból álló bizottságot alakítanunk. Hányféle különböző bizottság lehetséges, ha

(a) a férfiak közül 2 nem hajlandó egy bizottságban dolgozni,

(b) a nők közül 2 nem hajlandó egy bizottságban dolgozni,

(c) egy nő és egy férfi nem hajlandó egy bizottságban dolgozni?

1.5. Az alábbi rácson hányféleképpen lehet A-ból B-be eljutni csak jobbra vagy felfelé lépésekkel?



1.6. Egy árverésen 5 műgyűjtő vásárolt összesen 4 Dalit, 5 van Goghot, és 6 Picassót. Ha egy tudósító csak annyit jegyez fel, hogy melyik gyűjtő hány Dalit, van Goghot, és Picassót vásárolt, akkor hányféle különböző feljegyzés születhet?

1.7. Hányféleképpen lehet 8 azonos iskolatáblát elosztani 4 iskola között? És ha minden iskola legalább egy táblát kap?

1.8. n ember közül egy k tagú bizottságot szeretnénk kiválasztani, melynek egyik tagja a bizottság elnöke lesz.

(a) Tekintsük a bizottságot, majd az elnökét, és érveljünk, hogy $\binom{n}{k} k$ lehetőségünk van.

(b) Tekintsük a bizottság nem-elnök tagjait, majd válasszuk meg melléjük az elnököt. Érveljünk, hogy $\binom{n}{k-1} (n-k+1)$ lehetőségünk van.

(c) Tekintsük először az elnököt, majd a bizottság nem-elnök tagjait, és érveljünk, hogy erre $n \binom{n-1}{k-1}$ lehetőségünk van.

(d) Vonjuk le a tanulságot:

$$\binom{n}{k} k = \binom{n}{k-1} (n-k+1) = n \binom{n-1}{k-1}.$$

Bizonyítsuk be az egyenlőségeket analitikusan is.

1.9. (a) Tekintsük a következő kombinatorikus azonosságot:

$$\sum_{k=1}^{n} k \binom{n}{k} = n \cdot 2^{n-1}.$$

Adjunk egy *részletes* kombinatorikai érvelést a fenti egyenlőség igaz voltára oly módon, hogy n emberből kiválasztunk egy tetszőleges létszámú bizottságot és annak elnökét, illetve az elnököt és hozzá a bizottságot.

(b) Ellenőrizzük a

$$\sum_{k=1}^{n} k^2 \binom{n}{k} = n(n+1) \cdot 2^{n-2}$$

azonosságot $n = 1, 2, 3, 4$ esetén. Ismét adjunk *részletes* kombinatorikai érvelést az azonosságra: n emberből válasszunk egy tetszőleges méretű bizottságot, annak elnökét és titkárát (ez a kettő lehet egy személy is), illetve

- válasszunk egy elnököt, aki egyben a titkár is lesz, majd a bizottság többi tagját,
- válasszunk egy elnököt, egy tőle különböző titkárt, majd a bizottság többi tagját.

(c) A fentiekhez hasonlóan mutassuk meg, hogy

$$\sum_{k=1}^{n} k^3 \binom{n}{k} = n^2(n+3) \cdot 2^{n-3}.$$

1.10. Íme Fermat kombinatorikus azonossága:

$$\binom{n}{k} = \sum_{i=k}^{n} \binom{i-1}{k-1} \qquad n \geq k.$$

Adjunk kombinatorikai bizonyítást az azonosságra. (Hány olyan részhalmaza van n elemnek, amelyben az i-dik a legnagyobb sorszámú elem?)

1.11. Hány olyan, pozitív egész elemekből álló $x_1, x_2, \ldots, x_k$ vektor létezik, melynek mindegyik eleme 1 és n között van, és $x_1 < x_2 < \cdots < x_k$?

1.12. Hány különböző r-edrendű parciális deriváltja van egy n változós sima függvénynek?

2. fejezet

A valószínűségszámítás alapjai

2.1. Eseménytér és események

A valószínűségszámítás véletlen kimenetelű kísérletekkel foglalkozik. E lehetséges kimeneteleket egy halmazzal, az Ω *eseménytérrel* modellezzük. Az események Ω bizonyos részhalmazai lesznek. Ha Ω egy véges vagy megszámlálhatóan végtelen halmaz, akkor gond nélkül tekinthetjük minden részhalmazát. Ha viszont Ω nem megszámlálhatóan végtelen, akkor a mértékelmélet segít eligazodni a részhalmazai között. Alább néhány elemi mértékelméleti fogalom is következik, melyeket a valószínűség definiálásához felhasználunk. Néhány alap-definíciónál mélyebben nem megyünk bele a mértékelmélet kérdéseibe.

2.1. Definíció *Legyen $\mathcal{F}$ az Ω részhalmazainak egy halmaza, azaz $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{P}(\Omega)$. Ekkor $\mathcal{F}$ egy σ-*algebra*, ha*

- *$\Omega \in \mathcal{F}$, azaz a teljes eseménytér az eleme,*
- *$\forall E \in \mathcal{F}$-re $E^c := \Omega - E \in \mathcal{F}$, azaz komplementumképzésre zárt,*
- *minden $E_1, E_2, \ldots$ megszámlálható darab $\mathcal{F}$-beli halmazra $\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i \in \mathcal{F}$, azaz megszámlálható unióképzésre zárt.*

Ezentúl $\mathcal{F}$ mindig egy σ-algebrát jelöl Ω-n. Véges vagy megszámlálható Ω-kra szinte kivétel nélkül $\mathcal{F} = \mathcal{P}(\Omega) =$ az Ω *hatványhalmaza*, vagyis az összes részhalmazainak halmaza. Ha $\Omega = \mathbb{R}$, vagy $\mathbb{R}$ egy intervalluma, akkor azon általában a szokásos Borel σ-algebrát tekintjük. A σ-algebrák rejtelmeiben ezen a szinten nem kell elmélyednünk, mindössze az alábbi egyszerű tényeket fogjuk használni. A definícióból következik, hogy

- minden $E_1, E_2, \ldots, E_n$ véges darab $\mathcal{F}$-beli halmazra $\bigcup_{i=1}^{n} E_i \in \mathcal{F}$, azaz $\mathcal{F}$ véges unióképzésre is zárt,

- megszámlálhatóan végtelen vagy véges metszetképzésre is zárt,
- $\emptyset \in \mathcal{F}$, azaz az üreshalmaz benne van.

2.2. Definíció *Egy* $\{E_i\}_{i=1}^{\infty}$ $\mathcal{F}$*-beli halmazrendszer* növekvő*, ha minden* $i \geq 1$*-re* $E_i \subseteq E_{i+1}$*. Ekkor* $E_i = \bigcup_{j=1}^{i} E_j$*, és definiáljuk a* $\lim_{i\to\infty} E_i = \bigcup_{i=1}^{\infty} E_i$ *limeszt. A* σ*-algebra tulajdonságai miatt ez a limesz is a* σ*-algebra eleme lesz. Hasonlóan, egy* $\{E_i\}_{i=1}^{\infty}$ $\mathcal{F}$*-beli halmazrendszer* csökkenő*, ha minden* $i \geq 1$*-re* $E_i \supseteq E_{i+1}$*. Ekkor* $E_i = \bigcap_{j=1}^{i} E_j$*, és definiáljuk a* $\lim_{i\to\infty} E_i = \bigcap_{i=1}^{\infty} E_i$ *limeszt, mely szintén a* σ*-algebra eleme lesz.*

Az absztrakt definíció után tekintsünk néhány példát:

1. **Kísérlet:** Fog-e ma esni az eső?
   - Az eseménytér két elemű: $\Omega = \{\text{e, n}\}$.
   - Egy esemény, hogy igen, fog esni ma: $E = \{\text{e}\}$.
2. **Kísérlet:** Lóverseny 7 versenyzővel.
   - Az eseménytér a befutók sorrendje (a befutási időkre most nem vagyunk kíváncsiak):
     $\Omega = \{\{1, 2, \ldots, 7\} \text{ permutációi}\}$.
   - Egy esemény, hogy az 5-ös számú ló nyert, és a 2-es számú a második:
     $E = \{\text{az } 5, 2\text{-vel kezdődő permutációk}\}$.
   - Egy másik esemény, hogy a 6-os számú ló nyert:
     $F = \{\text{a 6-tal kezdődő permutációk}\}$.
3. **Kísérlet:** Két érmével dobunk.
   - Az eseménytér a két dobás kimeneteleiből álló rendezett párok halmaza:
     $$\Omega = \{(\text{F, F}), (\text{F, I}), (\text{I, F}), (\text{I, I})\}.$$
   - Egy esemény, hogy a két érmével különbözőt dobtunk:
     $$E = \{(\text{F, I}), (\text{I, F})\}.$$
   - Egy másik esemény, hogy mindkétszer fejet dobtunk: $F = \{(\text{F, F})\}$.
4. **Kísérlet:** Két dobókockával dobunk.

- Az eseménytér a két kocka által mutatott számokból álló rendezett párok halmaza:
  $\Omega = \{(i, j) : i, j = 1, 2, \ldots, 6\}$.
- Egy esemény, hogy az összeg 4: $E = \{(1, 3), (2, 2), (3, 1)\}$.
- Egy másik esemény, hogy a két kocka azonos számot mutat: $F = \{(i, i) : i = 1, 2, \ldots, 6\}$.

5. **Kísérlet:** Egy kockával addig dobunk, amíg hatosunk lesz.

   - Az eseménytér azon sorozatok száma, melyek $n \geq 0$ darab 1-től 5-ig terjedő egész szám után egy 6-ossal végződnek. Vegyük észre, hogy ez egy (megszámlálhatóan) végtelen nagy eseménytér.
   - Egy esemény, hogy négyest dobtunk először, és harmadikra lett meg a hatos: $E = \{(4, k, 6) : k = 1, 2, \ldots, 5\}$.

6. **Kísérlet:** Egy eszköz élettartamát tekintjük, mondjuk években mérve.

   - Az eseménytér a nem negatív valós számok: $\Omega = [0, \infty)$, (nem megszámlálhatóan) végtelen nagy.
   - Egy esemény, hogy az eszközünk élettartama 5 év, vagy annál több volt: $E = [5, \infty)$.
   - Egy másik esemény, hogy az eszköz már nem volt használható a 6. születésnapján: $F = [0, 6)$.

Ha $E, F \subseteq \Omega$ események, akkor képezhetjük az uniójukat vagy a metszetüket is:

$$E + F := E \cup F = \{E \textbf{ vagy } F \text{ megtörtént (vagy akár mindkettő)}\},$$
$$EF := E \cap F = \{E \textbf{ és } F \text{ is megtörtént}\}.$$

A 2. kísérletben $E \cup F =$ {5-ös számú ló nyert, és a 2-es számú a második, **vagy** a 6-os számú ló nyert}. $E \cap F = \emptyset$, a *lehetetlen esemény.*

A 3. kísérletben $E \cup F = \{(\text{F, F}), (\text{F, I}), (\text{I, F})\}$ ={mindkét dobás fej **vagy** a két dobás különböző}={legalább egy fejet dobtunk}.

A 4. kísérletben

$$\begin{aligned} E \cap F &= \{\text{az összeg négy, } \textbf{és} \text{ ugyanazt dobtuk}\} \\ &= \{(2, 2)\} = \{\text{mindkét dobás kettő}\}. \end{aligned}$$

A 6. kísérletben $E \cap F = [5, 6)$ ={az eszköz élettartama 5 vagy több év, **és** kevesebb, mint 6 év}. $E \cup F = [0, \infty) = \Omega$, hiszen mindenképp igaz, hogy legalább 5 év, **vagy** kevesebb, mint 6 év az élettartam.

A fentiek általánosításaként ha E_1, E_2, ... események véges vagy megszámlálhatóan végtelen sorozata, akkor

$$\bigcup_i E_i = \{\textbf{legalább az egyik } E_i \text{ esemény bekövetkezett}\},$$
$$\bigcap_i E_i = \{\textbf{mindegyik } E_i \text{ esemény bekövetkezett}\}.$$

2.3. Definíció *Ha E és F események, és $E \cap F = \emptyset =$ a lehetetlen esemény, akkor azt mondjuk, hogy E és F* egymást (kölcsönösen) kizáró események*. E_1, E_2, ... véges vagy megszámlálhatóan végtelen sok esemény* kölcsönösen kizáróak*, ha $E_i \cap E_j = \emptyset$ minden $i \neq j$ esetén.*

Ha $E \subseteq F$, akkor E bekövetkezése maga után vonja F bekövetkezését is. Például egy kockával dobva {1-est dobunk}⊆{páratlan számot dobunk}.

Következzen néhány halmazelméleti azonosság uniókra és metszetekre vonatkozólag:

Kommutativitás:	$E \cup F = F \cup E$
	$E \cap F = F \cap E$
Asszociativitás:	$E \cup (F \cup G) = (E \cup F) \cup G = E \cup F \cup G$
	$E \cap (F \cap G) = (E \cap F) \cap G = E \cap F \cap G$
Disztributivitás:	$(E \cup F) \cap G = (E \cap G) \cup (F \cap G)$
	$(E \cap F) \cup G = (E \cup G) \cap (F \cup G)$
De Morgan szabály:	$\left(\bigcup_i E_i\right)^c = \bigcap_i E_i^c$
	$\left(\bigcap_i E_i\right)^c = \bigcup_i E_i^c$

ahol i felvehet véges vagy megszámlálhatóan végtelen sok értéket.

2.2. A valószínűség

A valószínűség a fent bevezetett események előfordulásáról hivatott mondani valamit, olyannyira, hogy van, ahol kísérletekben előforduló relatív gyakorisággal definiálják. Mi itt inkább egy matematikai modellt állítunk fel, szintén a mértékelmélet segítségével.

2.4. Definíció *Egy $\mathbf{P} : \mathcal{F} \to \mathbb{R}$ halmazfüggvényt* valószínűségnek *vagy* valószínűségi mértéknek *nevezünk, ha*

- **nem negatív:**
$$\mathbf{P}\{E\} \geq 0 \qquad \forall E \in \mathcal{F},$$

- **megszámlálhatóan additív** *(azaz σ-additív)*: *minden* $E_1, E_2, \dots$ *véges sok vagy megszámlálhatóan végtelen darab* **kölcsönösen kizáró** *eseményre*

$$\mathbf{P}\Big\{\bigcup_i E_i\Big\} = \sum_i \mathbf{P}\{E_i\}, \tag{2.1}$$

- **1-re normált:**

$$\mathbf{P}\{\Omega\} = 1.$$

Ekkor az $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ *hármast* valószínűségi mezőnek *nevezzük.*

Rendkívül fontos megjegyezni, hogy (2.1) általában csak kizáró eseményekre igaz. $\mathbf{P}$ ezután mindig valószínűséget fog jelölni, sokszor nem fogjuk expliciten kiírni az Ω eseményteret és az $\mathcal{F}$ σ-algebrát. Néhány egyszerű állítás:

2.5. Állítás *Minden* $E \in \mathcal{F}$ *eseményre* $\mathbf{P}\{E^c\} = 1 - \mathbf{P}\{E\}$.

Bizonyítás. E és E^c kizáró események, és $E \cup E^c = \Omega$, ezért $\mathbf{P}\{E\} + \mathbf{P}\{E^c\} = \mathbf{P}\{\Omega\} = 1$. □

2.6. Következmény $\mathbf{P}\{\emptyset\} = 0$.

2.7. Következmény *Minden* $E \in \mathcal{F}$ *eseményre* $0 \le \mathbf{P}\{E\} \le 1$.

2.8. Állítás (szita formula két eseményre) *Minden* $E, F \in \mathcal{F}$ *eseményre*

$$\mathbf{P}\{E \cup F\} = \mathbf{P}\{E\} + \mathbf{P}\{F\} - \mathbf{P}\{E \cap F\}.$$

Bizonyítás. A bizonyításhoz azt az egyszerű tényt használjuk ki, hogy E és $F - E$ kizáró események, és az uniójuk épp $E \cup F$. Ezért

$$\mathbf{P}\{E \cup F\} = \mathbf{P}\{E \cup (F - E)\} = \mathbf{P}\{E\} + \mathbf{P}\{F - E\}.$$

Másfelől $F - E$ és $F \cap E$ is kizáró események, melyek uniója F-et adja:

$$\mathbf{P}\{F\} = \mathbf{P}\{(F - E) \cup (F \cap E)\} = \mathbf{P}\{F - E\} + \mathbf{P}\{F \cap E\}.$$

E két formula együtt adja az állítás bizonyítását. □

2.9. Következmény *Ha* $E \subseteq F$ *események, akkor* $\mathbf{P}\{F - E\} = \mathbf{P}\{F\} - \mathbf{P}\{E\}$.

2.10. Következmény *Ha* $E \subseteq F$ *események, akkor* $\mathbf{P}\{E\} \le \mathbf{P}\{F\}$.

Például annak valószínűsége, hogy egy szabályos kockával 1-et dobok, $\mathbf{P}\{1\} = 1/6$. Ez az esemény része annak az eseménynek, hogy páratlant dobok (ez utóbbi következik az előbbiből), melynek valószínűsége $\mathbf{P}\{1, 3, 5\} = \mathbf{P}\{1\} + \mathbf{P}\{3\} + \mathbf{P}\{5\} = 1/2 \geq 1/6$.

A továbbiakban azzal foglalkozunk, hogy (2.1) mennyire nem igaz, ha véges sok eseményt tekintünk, melyek nem kizáróak.

2.11. Következmény (Boole egyenlőtlenség) *Tetszőleges $E_1, E_2, \ldots, E_n$ eseményekre*

$$\mathbf{P}\Big\{\bigcup_{i=1}^{n} E_i\Big\} \leq \sum_{i=1}^{n} \mathbf{P}\{E_i\}.$$

Bizonyítás. Két eseményre a fenti szita formula mutatja az egyenlőtlenséget, több eseményre pedig szintén a fenti szita formulát induktívan használhatjuk. □

Alább egy fontos azonosság, amely pontosan megmondja, hogy mi történik (2.1) helyett, ha véges sok eseményünk van. A tételt valószínűségekre mondjuk ki, de felírható leszámlálásokra vagy egyéb mértékekre is.

2.12. Tétel (szita formula) *Legyenek $E_1, E_2, \ldots, E_n$ tetszőleges események. Ekkor*

$$\begin{aligned}
\mathbf{P}\{E_1 \cup E_2 \cup \cdots \cup E_n\} =& \\
&= \sum_{1 \leq i \leq n} \mathbf{P}\{E_i\} - \sum_{1 \leq i_1 < i_2 \leq n} \mathbf{P}\{E_{i_1} \cap E_{i_2}\} + \\
&+ \sum_{1 \leq i_1 < i_2 < i_3 \leq n} \mathbf{P}\{E_{i_1} \cap E_{i_2} \cap E_{i_3}\} - \cdots + (-1)^{n+1} \mathbf{P}\{E_1 \cap E_2 \cap \cdots \cap E_n\}.
\end{aligned}$$

Intuitíve nem nehéz megérteni a formulát: a valószínűségek összegével kétszer számoltuk a kettős metszeteket, pedig az unióban csak egyszer szerepelnek. Ezért a második szummával kivonjuk a kettős metszetek valószínűségeinek összegét. (Figyeljük meg, hogy $\{E_{i_1} \cap E_{i_2} : 1 \leq i_1 < i_2 \leq n\}$ minden kettős metszetet pontosan egyszer tartalmaz.) Sajnos ezzel minden hármas metszetet először háromszor számoltunk, majd háromszor ki is vontunk, pedig az unióban egyszer kellene szerepelniük. Ezért a harmadik szummában az összes hármas metszet valószínűségét visszaadjuk. Ekkor viszont megint gond van a négyes metszetekkel, stb.

Ha megszámlálhatóan sok elemi eseményünk van, akkor lényegében leszámlálásokkal belátható a tétel. Az általános esetre is ez a módszer kiterjeszthető a tételben szereplő események megfelelő metszeteit tekintve. Mi itt egy másfajta bizonyítást közlünk.

Bizonyítás. Induktívan fogunk érvelni, a bizonyítást $n = 2$ esetére fent láttuk. Tegyük fel, hogy a formula igaz n-re, megmutatjuk, hogy igaz $n + 1$-re is. Először alkalmazzuk a formulát két eseményre, majd a metszet disztributivitását:

$$\begin{aligned}
&\mathbf{P}\{E_1 \cup E_2 \cup \cdots \cup E_n \cup E_{n+1}\} = \\
&\quad = \mathbf{P}\{(E_1 \cup E_2 \cup \cdots \cup E_n) \cup E_{n+1}\} = \\
&\quad = \mathbf{P}\{E_1 \cup E_2 \cup \cdots \cup E_n\} + \mathbf{P}\{E_{n+1}\} - \mathbf{P}\{(E_1 \cup E_2 \cup \cdots \cup E_n) \cap E_{n+1}\} = \\
&\quad = \mathbf{P}\{E_1 \cup E_2 \cup \cdots \cup E_n\} + \mathbf{P}\{E_{n+1}\} - \\
&\qquad\qquad - \mathbf{P}\{(E_1 \cap E_{n+1}) \cup (E_2 \cap E_{n+1}) \cup \cdots \cup (E_n \cap E_{n+1})\}.
\end{aligned}$$

Az első és az utolsó tag egy-egy n-es unió, melyekre feltettük az állítás igaz voltát. Ezért

$$\mathbf{P}\{E_1 \cup E_2 \cup \cdots \cup E_n \cup E_{n+1}\} =$$

$$= \sum_{1 \le i \le n} \mathbf{P}\{E_i\} - \tag{2.2}$$

$$- \sum_{1 \le i_1 < i_2 \le n} \mathbf{P}\{E_{i_1} \cap E_{i_2}\} + \tag{2.3}$$

$$+ \sum_{1 \le i_1 < i_2 < i_3 \le n} \mathbf{P}\{E_{i_1} \cap E_{i_2} \cap E_{i_3}\} - \tag{2.4}$$

$$- \cdots + (-1)^{n+1} \mathbf{P}\{E_1 \cap E_2 \cap \cdots \cap E_n\} + \tag{2.5}$$

$$+ \mathbf{P}\{E_{n+1}\} - \tag{2.6}$$

$$- \sum_{1 \le i \le n} \mathbf{P}\{E_i \cap E_{n+1}\} + \tag{2.7}$$

$$+ \sum_{1 \le i_1 < i_2 \le n} \mathbf{P}\{E_{i_1} \cap E_{i_2} \cap E_{n+1}\} - \tag{2.8}$$

$$- \cdots - (-1)^n \sum_{1 \le i_1 < i_2 < \cdots < i_{n-1} \le n} \mathbf{P}\{E_{i_1} \cap E_{i_2} \cap \cdots \cap Ei_{n-1} \cap E_{n+1}\} - \tag{2.9}$$

$$- (-1)^{n+1} \mathbf{P}\{E_1 \cap E_2 \cap \cdots \cap E_n \cap E_{n+1}\}. \tag{2.10}$$

Itt (2.2) és (2.6) összeadják az összes esemény valószínűségét 1-től $n+1$-ig. (2.3) tartalmazza az összes kétszeres metszet valószínűségét 1-től n-ig, és (2.7) az összes kétszeres metszetet, ahol a magasabbik index épp $n+1$-el egyenlő. Ez a két szumma tehát kiadja az összes kétszeres metszet valószínűségét 1-től $n+1$-ig. Hasonlóan (2.4) tartalmazza az összes háromszoros metszet valószínűségét 1-től n-ig, és (2.8) az összes háromszoros metszetet, ahol a legmagasabb index épp $n+1$-el egyenlő. Ezek tehát kiadják a háromszoros valószínűség metszeteket 1-től $n+1$-ig. Ez folytatódik (2.5)-ig és (2.9)-ig, melyek együtt kiadják az összes n-szeres metszet valószínűséget 1-től $n+1$-ig. Végül az utolsó tagot leírjuk, így

$$
\begin{aligned}
&\mathbf{P}\{E_1 \cup E_2 \cup \cdots \cup E_{n+1}\} = \\
&\qquad = \sum_{1 \le i \le n+1} \mathbf{P}\{E_i\} - \sum_{1 \le i_1 < i_2 \le n+1} \mathbf{P}\{E_{i_1} \cap E_{i_2}\} + \\
&\qquad + \sum_{1 \le i_1 < i_2 < i_3 \le n+1} \mathbf{P}\{E_{i_1} \cap E_{i_2} \cap E_{i_3}\} - \\
&\qquad - \cdots + (-1)^{n+1} \sum_{1 \le i_1 < i_2 < \cdots < i_n \le n+1} \mathbf{P}\{E_{i_1} \cap E_{i_2} \cap \cdots \cap E_{i_n}\} + \\
&\qquad + (-1)^{n+2} \mathbf{P}\{E_1 \cap E_2 \cap \cdots \cap E_{n+1}\},
\end{aligned}
$$

mely igazolja az állítást $n + 1$-re. □

2.13. Következmény *A szita formula jobb oldala alternál abban az értelemben, hogy a jobb oldal első szummája nagyobb egyenlő, mint a bal oldalon az unió valószínűsége. Az első két szumma különbsége kisebb egyenlő, mint a bal oldal. Az első három szumma a jobb oldal előjeleivel megint nagyobb egyenlő, mint a bal oldal, s.í.t.*

Bizonyítás. Ennek az állításnak az igaz volta szintén induktív módon a tétel bizonyítása során követhető. □

2.14. Példa *A sportklubban*

36 tag teniszezik,	*22 tag teniszezik és fallabdázik,*
28 tag fallabdázik,	*12 tag teniszezik és ping-pongozik,*
18 tag ping-pongozik,	*9 tag fallabdázik és ping-pongozik,*

4 tag teniszezik, fallabdázik és ping-pongozik.

Hányan játsszák a fenti sportok közül legalább az egyiket?

Hogy valószínűséget csináljunk a kérdésből, legyen a klubnak N tagja, és véletlenül válasszunk egy tagot. (Az eseménytér tehát N elemű, és mindegyik elemnek $1/N$ a valószínűsége.) Definiáljuk a következő eseményeket:

$$
\begin{aligned}
T &= \{\text{a választott tag teniszezik}\} \\
F &= \{\text{a választott tag fallabdázik}\} \\
P &= \{\text{a választott tag ping-pongozik}\}.
\end{aligned}
$$

Kiszámoljuk annak valószínűségét, hogy a véletlenül választott tag legalább az egyik játékot játssza, ez a fenti események uniójának valószínűsége lesz. Ehhez Venn-diagrammokat használhatunk (kis számú unióra jól használhatók), vagy szita formulát:

$$
\begin{aligned}
\mathbf{P}\{T \cup F \cup P\} &= \mathbf{P}\{T\} + \mathbf{P}\{F\} + \mathbf{P}\{P\} - \\
&\quad - \mathbf{P}\{T \cap F\} - \mathbf{P}\{T \cap P\} - \mathbf{P}\{F \cap P\} + \mathbf{P}\{T \cap F \cap P\} = \\
&= \frac{36}{N} + \frac{28}{N} + \frac{18}{N} - \frac{22}{N} - \frac{12}{N} - \frac{9}{N} + \frac{4}{N} = \frac{43}{N}.
\end{aligned}
$$

A válasz tehát 43 tag. Itt is látható, hogy az események valószínűségeinek összege ($82/N$) felülbecsli a végeredményt, míg ez az összeg mínusz a kétszeres metszetek valószínűségeinek összege ($39/N$) alulbecsli azt.

Végül pedig egy analitikusabb jellegű tulajdonság. Idézzük fel a növekvő illetve csökkenő események 2.2. definícióját.

2.15. Állítás (a valószínűség folytonossága) *Legyen* $\{E_i\}_i$ *növekvő vagy csökkenő eseményrendszer. Ekkor a bal oldali limesz alább létezik, és*

$$\lim_{i\to\infty} \mathbf{P}\{E_i\} = \mathbf{P}\{\lim_{i\to\infty} E_i\}.$$

Bizonyítás. Először a növekvő eseményrendszer esetét tekintsük. Legyen ekkor

$$F_1 := E_1, \qquad F_i := E_i - E_{i-1} \qquad i > 1.$$

Ezek az események egymást kölcsönösen kizárják, és

$$\bigcup_{j=1}^{i} F_j = \bigcup_{j=1}^{i} E_j = E_i \qquad \text{és} \qquad \bigcup_{j=1}^{\infty} F_j = \bigcup_{j=1}^{\infty} E_j = \lim_{j\to\infty} E_j.$$

Így

$$\lim_{i\to\infty} \mathbf{P}\{E_i\} = \lim_{i\to\infty} \mathbf{P}\Big\{\bigcup_{j=1}^{i} F_j\Big\} = \lim_{i\to\infty} \sum_{j=1}^{i} \mathbf{P}\{F_j\} = \sum_{j=1}^{\infty} \mathbf{P}\{F_j\} =$$
$$= \mathbf{P}\Big\{\bigcup_{j=1}^{\infty} F_j\Big\} = \mathbf{P}\{\lim_{j\to\infty} E_j\}.$$

Csökkenő események esetén $\{E_i^c\}_i$ egy növekvő eseményrendszer, és

$$\lim_{i\to\infty} \mathbf{P}\{E_i\} = 1 - \lim_{i\to\infty} \mathbf{P}\{E_i^c\} = 1 - \mathbf{P}\{\lim_{i\to\infty} E_i^c\} = 1 - \mathbf{P}\Big\{\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i^c\Big\} =$$
$$= 1 - \mathbf{P}\Big\{\Big(\bigcap_{i=1}^{\infty} E_i\Big)^c\Big\} = \mathbf{P}\Big\{\bigcap_{i=1}^{\infty} E_i\Big\} = \mathbf{P}\{\lim_{i\to\infty} E_i\}.$$

□

2.3. Egyenlő valószínűségű események

Ha az eseménytér véges, akkor

$$\Omega = \{\omega_1,\, \omega_2,\, \dots \omega_N\}$$

elemei az *elemi események*. Gyakran előfordul, hogy egy kísérletnek véges sok kimenetele van, és mindegyik ugyanolyan valószínű. Ha egy E esemény k darab ilyet tartalmaz, akkor

$$\mathbf{P}\{E\} = \frac{|E|}{|\Omega|} = \frac{k}{N}.$$

Fontos, hogy

- azt az eseményteret használjuk, melyben az események valóban egyenlő valószínűek,
- ugyanazt a leszámlálási módot (pl. sorrendben vagy sorrend nélkül) használjuk $|E|$ és $|\Omega|$ megállapításához.

2.16. Példa *Két szabályos kockával dobva mi a valószínűsége, hogy a két dobott szám összege 7 lesz?*

Két szabályos kocka dobásának 36 féle ugyanolyan valószínűségű kimenetele lehetséges. Ezek közül hatnál ((1, 6), (2, 5), …, (6, 1)) lesz az összeg 7, ezért a válasz 6/36=1/6.

Hibás válasz lenne, ha azt mondanánk, hogy a 2, 3, …, 12 számok bármelyike előfordulhat összegként, ezért $\Omega = \{2, 3, \dots, 12\}$, és a hibás válasz $|\{7\}|/|\{\Omega\}| = 1/11$. Ezek a kimenetelek ugyanis nem egyenlő valószínűségűek.

Egy valószínűségszámítási problémát sokszor többféleképpen is meg lehet közelíteni. Tipikus kettősség, hogy egy leszámlálást sorrendre való tekintettel, vagy anélkül végzünk:

2.17. Példa *Egy urnában 6 piros és 5 kék golyó van. Véletlenül hármat húzva (visszatevés nélkül) mi a valószínűsége, hogy pontosan egy piros és két kék golyót húzunk?*

- **A húzásokat sorrendben tekintve:** Az eseménytér a 11 golyó 3-variációinak halmaza, hiszen a 11-ből 3-at szeretnénk sorrendben kiválasztani. Ezt $|\Omega| = 11 \cdot 10 \cdot 9$ féleképpen tehetjük meg. Sorrendben húzva három különböző módon húzhatunk pontosan egy piros és két kék golyót:

  - piros-kék-kék: $6 \cdot 5 \cdot 4$,
  - kék-piros-kék: $5 \cdot 6 \cdot 4$,
  - kék-kék-piros: $5 \cdot 4 \cdot 6$.

  Ez összesen $3 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4$ elemi esemény, ezért a válasz $\frac{3 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4}{11 \cdot 10 \cdot 9} = \frac{4}{11}$.

- **A húzásokat sorrend nélkül tekintve:** Az eseménytér most a 11 golyó 3-kombinációinak halmaza, vagyis 11 golyóból 3-at sorrend nélkül választunk. Ekkor $|\Omega| = \binom{11}{3}$. Sorrend nélkül pedig egy piros és két kék golyót $\binom{6}{1} \cdot \binom{5}{2}$ féleképp húzhatunk. Ezért a válasz

$$\frac{\binom{6}{1} \cdot \binom{5}{2}}{\binom{11}{3}} = \frac{\frac{6!}{1! \cdot 5!} \cdot \frac{5!}{2! \cdot 3!}}{\frac{11!}{3! \cdot 8!}} = \frac{6! \cdot 5! \cdot 3! \cdot 8!}{11! \cdot 5! \cdot 2! \cdot 3!} = \frac{6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3}{11 \cdot 10 \cdot 9} = \frac{4}{11}.$$

Vigyázzunk, hogy a két módszert **ne keverjük,** nehogy a hibás $3 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4/\binom{11}{3}$ vagy pedig a szintén hibás $\binom{6}{1} \cdot \binom{5}{2}/[11 \cdot 10 \cdot 9]$ jöjjön ki (az első még kettőnél is nagyobb!).

Szintén **hibás** megoldást ad, ha megkülönböztethetetlen golyókkal próbálunk dolgozni. Ekkor tekintenénk a $H = \{\mathrm{p,p,p,p,p,p,k,k,k,k,k}\}$ multihalmazt, és ennek 3-ismétléses kombinációit. Ilyenekből $\binom{3+2-1}{3}$ van, melyek közül egy esetén lesz egy piros és két kék golyónk. A hibás válaszunk tehát $1/\binom{3+2-1}{3} = 1/4$ lenne. Gyanús, hogy ebben a hibás megoldásban az 5 és a 6 szám nem is szerepelt, pedig az eredménynek illene függenie attól, hogy mennyi piros és kék golyó van az urnában. Megint az történik, hogy ezek az ismétléses kombinációk nem egyforma valószínűségűek, sokkal nehezebb ugyanis pl. 3 kék golyót választani ($5 \cdot 4 \cdot 3/(11 \cdot 10 \cdot 9) = 2/33$ valószínűséggel), mint egy pirosat és két kéket ($4/11$ valószínűséggel).

A következő arra szép példa, hogy egy feladatra sokféleképpen rá lehet nézni.

2.18. Példa *Egy urnában van n golyó, melyek közül egy piros, a többi fekete. Véletlenszerűen húzunk k darabot (visszatevés nélkül). Mi a valószínűsége, hogy a piros golyót is kihúztuk?*

1. megoldás: sorrend nélküli golyó-halmazokat, azaz kombinációkat tekintve $|\Omega| = \binom{n}{k}$ féleképp húzhatunk k golyót. Azok a kombinációk, melyekben a piros golyó is benne van $\binom{1}{1} \cdot \binom{n-1}{k-1}$-en vannak, ezért a válasz
$$\frac{\binom{1}{1} \cdot \binom{n-1}{k-1}}{\binom{n}{k}} = \frac{(n-1)! \cdot k! \cdot (n-k)!}{n! \cdot (k-1)! \cdot (n-k)!} = \frac{k}{n}.$$

2. megoldás: legyen E_i az az esemény, hogy az i-dik húzásra a piros golyót húztuk, $i = 1, 2\ \ldots, k$. Ezek nyilván kizáró események, és mivel minden golyónak egyforma esélye van az i-dik húzásnál sorra kerülnie, $\mathbf{P}\{E_i\} = 1/n$. A keresett esemény éppen az E_i események uniója, hiszen pontosan akkor húzzuk ki a piros golyót, ha legalább az egyik E_i esemény bekövetkezik. A válasz tehát
$$\mathbf{P}\Big\{\bigcup_{i=1}^{k} E_i\Big\} = \sum_{i=1}^{k} \mathbf{P}\{E_i\} = \sum_{i=1}^{k} \frac{1}{n} = \frac{k}{n}.$$

3. megoldás: a kísérletet kissé kibővítve tekintsük eseménytérnek az n golyó összes lehetséges permutációját, és a húzásokra úgy gondolunk, hogy a véletlen permutáció első k tagját kihúzzuk. Ekkor a piros golyónak egyforma esélye van a véletlen permutáció bármelyik helyére kerülnie, és pontosan akkor lesz kihúzva, ha az első k hely valamelyikére kerül. Ennek esélye k/n.

Az "egyszer sem", vagy "legalább egyszer" típusú kérdéseknél néha a szita formula ad hasznos segítséget:

2.19. Példa *10 házaspárt véletlenszerűen leültetnek egy kerek asztalhoz. Mi a valószínűsége, hogy egy férj sem ül a felesége mellett?*

Legyen E_i az az esemény, hogy az i-dik házaspár egymás mellett ül, $i = 1, 2, \ldots, 10$. A kérdés annak valószínűsége, hogy ezen események egyike sem következik be:

$$\mathbf{P}\Big\{\bigcap_{i=1}^{10} E_i^c\Big\} = \mathbf{P}\Big\{\Big(\bigcup_{i=1}^{10} E_i\Big)^c\Big\} = 1 - \mathbf{P}\Big\{\bigcup_{i=1}^{10} E_i\Big\}.$$

Mivel az E_i események nem kizáróak, a szita formulát kell alkalmaznunk:

$$\begin{aligned}\mathbf{P}\Big\{\bigcap_{i=1}^{10} E_i^c\Big\} &= 1 - \sum_{1\le i\le 10} \mathbf{P}\{E_i\} + \sum_{1\le i_1<i_2\le 10} \mathbf{P}\{E_{i_1}\cap E_{i_2}\} - \\ &\quad - \sum_{1\le i_1<i_2<i_3\le 10} \mathbf{P}\{E_{i_1}\cap E_{i_2}\cap E_{i_3}\} + \cdots + \mathbf{P}\{E_1\cap E_2\cap\cdots\cap E_{10}\}.\end{aligned} \tag{2.11}$$

A szimmetriából következik, hogy adott $1 \le k \le 10$-ra minden k-s metszet valószínűsége egyforma, így megegyezik $\mathbf{P}\{E_1 \cap \cdots \cap E_k\}$-val. Ha megszámoljuk, hány egyke, pár, hármas, stb. valószínűség szerepel a fenti szummákban, arra jutunk, hogy

$$\begin{aligned}\mathbf{P}\Big\{\bigcap_{i=1}^{10} E_i^c\Big\} &= \binom{10}{0} - \binom{10}{1}\mathbf{P}\{E_1\} + \binom{10}{2}\mathbf{P}\{E_1\cap E_2\} - \binom{10}{3}\mathbf{P}\{E_1\cap E_2\cap E_3\} + \\ &\quad + \cdots + \binom{10}{10}\mathbf{P}\{E_1\cap E_2\cap\cdots\cap E_{10}\} = \\ &= \binom{10}{0} + \sum_{k=1}^{10}(-1)^k\binom{10}{k}\mathbf{P}\{E_1\cap\cdots\cap E_k\}.\end{aligned} \tag{2.12}$$

A valószínűség kiszámolásához először vegyük észre, hogy a 20 ember a kerekasztal körül $|\Omega| = 19!$ féleképpen foglalhat helyet (kerekasztalok körül általában nem tudjuk merre van észak, csak a résztvevők egymáshoz képesti relatív helyzete számít), és a feladat szerint mindegyik ilyen kör-permutáció egyenlő valószínű. Az $E_1 \cap \cdots \cap E_k$ esemény azt jelenti, hogy az első k férj a felesége mellett ül, a többi házaspár vagy együtt ül, vagy nem. Ennek valószínűségét megkapjuk, ha leszámoljuk ez hány kör-permutációban történik meg. Ehhez az első k házaspárt egy-egy blokknak tekintjük, melyen belül két lehetőség van: férj a feleségtől óramutató járása felé vagy azzal ellentétesen ül, ez tehát a blokkokon belül összesen 2^k lehetőség. A k darab ilyen blokk mellett $20 - 2k$ további résztvevő ül az asztalhoz, ez összesen $k + 20 - 2k = 20 - k$ objektum. Ezek relatív sorrendjeinek száma a kerekasztal körül $(20 - k - 1)! = (19 - k)!$. Az $E_1 \cap \cdots \cap E_k$

esemény tehát $(19-k)!\cdot 2^k$ féleképp történhet meg, ezért

$$\mathbf{P}\Big\{\bigcap_{i=1}^{10} E_i^c\Big\} = \binom{10}{0} + \sum_{k=1}^{10}(-1)^k\binom{10}{k}\frac{(19-k)!\cdot 2^k}{19!} =$$
$$= \frac{10!}{19!}\sum_{k=0}^{10}\frac{(-2)^k\cdot(19-k)!}{k!\cdot(10-k)!} \simeq 0.34.$$

2.4. Feladatok

2.1. Egy 100 000 lakosú városban három újság jelenik meg: I, II, és III. A városlakók következő aránya olvassa az egyes újságokat:

I: 10%	I és II: 8%	I és II és III: 1%
II: 30%	I és III: 2%	
III: 5%	II és III: 4%	

(Azaz például 8000 ember olvassa az I és II újságokat (közülük 1000 a III újságot is).)

(a) Határozzuk meg hányan nem olvassák a fenti újságok egyikét sem.

(b) Hányan olvasnak pontosan egy újságot?

(c) Hányan olvasnak legalább kettő újságot?

(d) Ha I és III reggeli újságok és II egy esti újság, akkor hányan olvasnak legalább egy reggeli újságot plusz egy esti újságot?

(e) Hányan olvasnak pontosan egy reggeli újságot plusz egy esti újságot?

2.2. (a) Legyen A és B két esemény. Bizonyítsuk be, hogy

$$\text{ha } \mathbf{P}\{A\} \geq 0.8 \text{ és } \mathbf{P}\{B\} \geq 0.5, \text{ akkor } \mathbf{P}\{A\cap B\} \geq 0.3.$$

(b) Bizonyítsuk be, hogy tetszőleges $A_1, A_2, \ldots, A_n$ eseményekre fennáll a következő egyenlőtlenség:

$$\mathbf{P}\{A_1\cap A_2\cap\cdots\cap A_n\} \geq \mathbf{P}\{A_1\} + \mathbf{P}\{A_2\} + \cdots + \mathbf{P}\{A_n\} - (n-1).$$

2.3. n golyót helyezünk véletlen módon k urnába. Mi a valószínűsége, hogy *pontosan* egy urna marad üres, ha

(a) a golyók megkülönböztethetőek,

(b) a golyók megkülönböztethetetlenek?

2.4. (Elcserélt kalapok) Egy n tagú férfitársaság vacsorázni ment egy étterembe. Kalapjaikat a ruhatárban hagyták. Vacsora és borozgatás után kalapjaikat teljesen véletlenszerűen vitték el a ruhatárból. Mi a valószínűsége annak, hogy a társaságnak legalább egy tagja a saját kalapját vitte haza? Számoljuk ki e valószínűség határértékét az $n \to \infty$ limeszben.
Elszántabbaknak: Számoljuk ki annak az eseménynek a valószínűségét, hogy pontosan k ember megy haza a saját kalapjával a fején. Mi az $n \to \infty$ határérték?

2.5. 8 bástyát véletlenszerűen elhelyezünk a sakktáblán. Mi a valószínűsége, hogy egyik sem üti a másikat (azaz semelyik sor és semelyik oszlop nem tartalmaz egynél több bástyát)?

2.6. Egy közösségben 20 család van: 4 családban egy gyerek van, 8 családban kettő, 5 családban három, 2 családban négy, 1 családban öt.

(a) Ha egy családot véletlenszerűen kiválasztunk, mi a valószínűsége, hogy abban a családban i gyerek van, $i = 1, 2, 3, 4, 5$?

(b) Ha egy gyereket véletlenszerűen kiválasztunk, mi a valószínűsége, hogy ő egy i gyerekes családból jött, $i = 1, 2, 3, 4, 5$?

2.7. Két szabályos kockával dobva mi a valószínűsége, hogy a második többet mutat, mint az első?

2.8. Egy urnában 3 piros és 7 fekete golyó van. A és B visszatevés nélkül felváltva húznak az urnából egészen addig, amikor először piros golyó kerül elő. Ha A húzott először, mi a valószínűsége, hogy ő húz először piros golyót?

2.9. Egy erdőben 20 őz lakik, közülük 5 meg van jelölve. Ha véletlenszerűen 4-et befognak, mi a valószínűsége, hogy a befogottak közül pontosan 2 megjelölt lesz?

2.10. Egy kisvárosban pontosan négy TV-szerelő dolgozik. Egy napon négyen hívnak szerelőt. Mi a valószínűsége, hogy pontosan i szerelő kap hívást $i = 1, 2, 3, 4$?

2.11. Egy kisvárosban n TV-szerelő dolgozik. Egy napon k helyre hívnak szerelőt. Mi a valószínűsége, hogy pontosan i szerelő kap hívást $i = 1, 2, \ldots, n$?

2.12. Öt ember, név szerint A, B, C, D, E, egy sorba ülnek véletlenszerűen. Mi a valószínűsége, hogy A és B között pontosan i ember ül, $i = 0, 1, 2, 3$?

2.13. Jelölje f_n azt a számot, ahány n hosszú fej-írás sorozat van úgy, hogy nincs bennük egymás utáni két fej. Jelölje P_n ennek az eseménynek a valószínűségét szabályos érmedobás esetén.

(a) Mutassuk meg, hogy $n \geq 2$-re $f_n = f_{n-1} + f_{n-2}$, ahol $f_0 = 1, f_1 = 2$. (Hány ilyen sorozat indul fejjel, és hány írással?)

(b) Határozzuk meg P_n-t f_n segítségével, és ezek alapján számoljuk ki P_{10} értékét.

2.14. Egy urnában van 5 piros, 6 fehér, és 7 kék golyó. Ötöt visszatevés nélkül húzva mi a valószínűsége, hogy mindhárom színű golyót húztunk?

2.15. Anna, Bori és Cili egyforma erejű ping-pong játékosok. A következő módon játszanak: Anna és Bori mérik először össze az erejüket. Ezután a vesztes kiáll és a várakozó Cili áll be a helyére, hogy összemérje tudását az előző nyertessel… Minden egyes meccs után a vesztes átadja a helyét a várakozónak. Folytatják ezt mindaddig, amíg valamelyikük kétszer egymasután nem nyer és a körmérkőzés győztesévé van kikiáltva. Írjuk le a körmérkőzés eseményterét. Az n páros csata után véget érő sorozatok valószínűsége legyen 2^{-n}. (Miért?) Mi a valószínűsége annak, hogy Anna, ill. Bori, ill. Cili nyeri a körmérkőzést?

2.16. Mi a valószínűsége, hogy egy n tagú társaságban nincs közös születésnap? (Milyen feltevésekkel éltünk?) Számoljuk ki a numerikus értékeket $n = 10,\ 20,\ 30,\ 40,\ 50$ esetén.

2.17. Számoljuk ki a póker különböző értékelhető konfigurációinak valószínűségeit. Azaz: 52 kártyából
$(\clubsuit, \diamondsuit, \heartsuit, \spadesuit\ :\ 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, J, D, K, A)$ véletlenszerűen kiválasztunk ötöt. Mi annak a valószínűsége, hogy egy párunk, két párunk, drillünk, sorunk, fullunk, pókerünk, royal flushünk van?

2.18. Bridge-ben négy játékos kap 13-13-13-13 kártyát. Mi a valószínűsége, hogy az összes treff egy játékoshoz kerül?

2.19. Bridge-ben mi a valószínűsége, hogy a négy ász négy különböző játékoshoz kerül?

2.20. (Fermi-Dirac eloszlás) k golyót véletlenszerűen elosztunk $n \geq k$ urnába úgy, hogy mindegyik urnába legfeljebb egy kerülhet. (Ez lesz hosszú idő után az eloszlás, ha n, körben elhelyezett urnában k golyó közül minden másodpercben egyet véletlenszerűen kisorsolunk, és azt az óramutató irányába eső szomszéd urnába áthelyezzük, amennyiben az üres. Ha nem üres, akkor nem csinálunk semmit.) Határozzuk meg annak valószínűségét, hogy az első urnában van golyó.

2.21. (Maxwell-Boltzmann eloszlás) k megkülönböztethető golyót véletlenszerűen elosztunk n urnába. (Ez lesz hosszú idő után az eloszlás, ha n, körben elhelyezett urnában k golyó közül minden másodpercben egyet véletlenszerűen kisorsolunk, és azt az óramutató irányába eső szomszéd urnába áthelyezzük.) Határozzuk meg annak valószínűségét, hogy az első urnában i golyó van, $i = 0,\ 1,\ \ldots,\ k$.

2.22. (Bose-Einstein eloszlás) k megkülönböztethetetlen golyót véletlenszerűen elosztunk n urnába. (Ez lesz hosszú idő után az eloszlás, ha n, körben elhelyezett urna közül minden másodpercben egyet véletlenszerűen kisorsolunk, és egy abban levő golyót – ha van – az óramutató irányába eső szomszéd urnába áthelyezzük.) Határozzuk meg annak valószínűségét, hogy az első urnában i golyó van, $i = 0, 1, \ldots, k$.

2.23. Az előző három feladatban tekintsük az n, $k \to \infty$ átmenetet úgy, hogy $k/n \to \lambda$. Mutassuk meg, hogy a kapott valószínűségek limesze

- $\mathbf{P}\{\text{van golyó az 1. urnában}\} \to \lambda$ (Fermi-Dirac),
- $\mathbf{P}\{i \text{ golyó van az 1. urnában}\} \to \frac{\lambda^i}{i!} \cdot \mathrm{e}^{-\lambda}, \qquad i \geq 0$ (Maxwell-Boltzmann),
- $\mathbf{P}\{i \text{ golyó van az 1. urnában}\} \to \left(\frac{\lambda}{1+\lambda}\right)^i \cdot \frac{1}{1+\lambda}, \qquad i \geq 0$ (Bose-Einstein).

2.24. Egy lineáris rendszer n sorba állított antennából áll, és akkor működik, ha nincs két szomszédos hibás antenna. Ha az n közül m meghibásodott, de nem tudjuk melyik m, mi az esélye, hogy a rendszer működik?

2.25. Egy focicsapat 20 védőből és 20 támadóból áll. Egy hotelben véletlenszerűen 20 darab 2 ágyas szobában helyezik el a csapatot. Mi a valószínűsége, hogy pontosan $2i$ támadó-védő páros lesz, $i = 0, 1, \ldots, 10$?

2.26. Egy szekrényben n pár cipő van. Véletlenszerűen kiválasztunk $2r$ cipőt ($2r \leq n$). Mi a valószínűsége annak, hogy a kiválasztott cipők között

(a) nincsen teljes pár,

(b) pontosan egy teljes pár van,

(c) pontosan két teljes pár van?

3. fejezet

Feltételes valószínűség

3.1. A feltételes valószínűség fogalma

Hogy legyen először egy képünk a feltételes valószínűségről, egy példával indítunk.

3.1. Példa *Két szabályos kockával dobva mi a valószínűsége, hogy a dobott számok összege 8? És ha tudjuk, hogy az első kocka ötöt mutat?*

Legyen E az az esemény, hogy a számok összege 8. Ez ötféleképp történhet meg a 36 egyforma valószínű kimenetelből, ezért $\mathbf{P}\{E\} = 5/36$. Ha viszont tudjuk, hogy az első kocka ötöt mutat, akkor módosulnak az esélyek. Ekkor ugyanis E pontosan akkor következik be, ha a második kocka hármasra jön ki. Ennek esélye pedig $1/6$.

Legyen F az az esemény, hogy az első kocka ötöt mutat. Amit most kiszámoltunk, az az *E esemény F-re vett feltételes valószínűsége*. Az eljárás az volt, hogy az F-et úgy tekintettük, mint egy *redukált eseményteret*, azaz a világunkat leszűkítettük F-re, és megkérdeztük, hogy F-en belül milyen eséllyel következik be E is: pontosan akkor, ha a második kocka hármast mutat.

Íme egy másik megközelítés: keressük, hogy amikor F bekövetkezik, akkor mennyire valószínű, hogy E is bekövetkezik, azaz hogyan aránylik $E \cap F$ valószínűsége F valószínűségéhez. Mivel $E \cap F = \{(5, 3)\}$, $\mathbf{P}\{E \cap F\} = |E \cap F|/|\Omega| = 1/36$, és a feltételes valószínűség

$$\frac{\mathbf{P}\{E \cap F\}}{\mathbf{P}\{F\}} = \frac{1/36}{1/6} = 1/6.$$

3.2. Definíció *Legyen F egy pozitív valószínűségű esemény. Az E* esemény *F*-re vett feltételes valószínűsége

$$\mathbf{P}\{E \,|\, F\} := \frac{\mathbf{P}\{E \cap F\}}{\mathbf{P}\{F\}}.$$

Amennyiben a valószínűségre egyfajta relatív gyakoriságként gondolunk (ezt a felfogást a következő fejezetben igazoljuk majd), akkor azt kell megkérdeznünk, hogy $N >>$

1 kísérlet során azon eseteknek, amikor az F esemény bekövetkezik, hányad részében következik be E is. A válasz pedig körülbelül

$$\frac{N \cdot \mathbf{P}\{E \cap F\}}{N \cdot \mathbf{P}\{F\}} = \frac{\mathbf{P}\{E \cap F\}}{\mathbf{P}\{F\}} = \mathbf{P}\{E \,|\, F\}.$$

3.3. Állítás *Legyen* $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ *egy valószínűségi mező, és* $F \in \mathcal{F}$ *egy pozitív valószínűségű esemény. Ekkor* $\mathbf{P}\{\cdot \,|\, F\}$ *egy valószínűségi mérték, azaz:*

- $\mathbf{P}\{\cdot \,|\, F\} \,:\, \mathcal{F} \to \mathbb{R}$ *egy halmazfüggvény, mely*
- **nem negatív:**
$$\mathbf{P}\{E \,|\, F\} \geq 0 \qquad \forall E \in \mathcal{F},$$
- **megszámlálhatóan additív** *(azaz σ-additív)***:** *minden* E_1, E_2, … *véges sok vagy megszámlálhatóan végtelen darab* **kölcsönösen kizáró** *eseményre*
$$\mathbf{P}\Big\{\bigcup_i E_i \,\Big|\, F\Big\} = \sum_i \mathbf{P}\{E_i \,|\, F\},$$
- **1-re normált:**
$$\mathbf{P}\{\Omega \,|\, F\} = 1.$$

Rendkívül **fontos** megjegyezni, hogy F végig rögzített a fenti állításban. Amint a feltételt megváltoztatjuk, a feltételes valószínűség egészen meglepő dolgokra képes!

Bizonyítás. Az, hogy a feltételes valószínűség nemnegatív halmazfüggvény, triviálisan következik a definícióból. A megszámlálható additivitás is könnyű, csak azt kell észrevenni, hogy $\{E_i \cap F\}_i$ is kizáró eseményrendszer:

$$\mathbf{P}\Big\{\bigcup_i E_i \,\Big|\, F\Big\} = \frac{\mathbf{P}\big\{\big(\bigcup_i E_i\big) \cap F\big\}}{\mathbf{P}\{F\}} =$$
$$= \frac{\mathbf{P}\big\{\bigcup_i (E_i \cap F)\big\}}{\mathbf{P}\{F\}} = \frac{\sum_i \mathbf{P}\{E_i \cap F\}}{\mathbf{P}\{F\}} = \sum_i \mathbf{P}\{E_i \,|\, F\}.$$

Az 1-re normáltság sem nehéz:

$$\mathbf{P}\{\Omega \,|\, F\} = \frac{\mathbf{P}\{\Omega \cap F\}}{\mathbf{P}\{F\}} = \frac{\mathbf{P}\{F\}}{\mathbf{P}\{F\}} = 1.$$

□

3.4. Következmény *A 2.2. fejezetben felsorolt összes tulajdonság igaz* $\mathbf{P}\{\cdot \,|\, F\}$*-re,* amíg az F eseményt nem változtatjuk.

3.5. Példa *Egy ládában*

- *5 jó égő van, melyek egy hónapnál tovább bírják az üzemet,*
- *10 erősen használt égő van, ezek 2 nap múlva kiégnek,*
- *10 már kiégett égő van.*

Egy égőt találomra választva és kipróbálva az felgyullad. Mi a valószínűsége, hogy egy hét után is működik majd?

Legyen E az az esemény, hogy az égő egy hét után is működik, F pedig az, hogy felgyullad. A kérdés a feltételes valószínűség:

$$\mathbf{P}\{E \,|\, F\} = \frac{\mathbf{P}\{E \cap F\}}{\mathbf{P}\{F\}} = \frac{\mathbf{P}\{E\}}{\mathbf{P}\{F\}} = \frac{5/25}{15/25} = \frac{1}{3},$$

mivel $E \subseteq F$ és így $E \cap F = E$.

Redukált eseménytérrel is dolgozhatunk: F bekövetkezése azt jelenti, hogy egyenlő eséllyel húztunk az alábbi égők közül:

- 5 jó égő melyek egy hónapnál tovább bírják az üzemet,
- 10 erősen használt égő, ezek 2 nap múlva kiégnek.

Ekkor annak esélye, hogy egy hét múlva is ég az égő, $\mathbf{P}\{E \,|\, F\} = 5/15 = 1/3$.

3.6. Példa *Kovácsné és Szabóné is két-két gyermeket terveznek. Elmondják még azt is, hogy egyszerre csak egy gyerekkel fognak sétálni. Kovácsné hozzáfűzi, hogy ha a két gyerek közül lesz fiú, ő biztosan a fiúval sétál majd, Szabónénak nincsenek hasonló elvei. Pár évvel később tudomásunkra jut, hogy mindketten két-két gyereket szültek, és látjuk Kovácsnét egy fiúgyerekével sétálni. Mi a valószínűsége, hogy a másik gyereke is fiú? Szabónét is látjuk egy fiúgyerekével sétálni. Nála mi a valószínűsége, hogy a másik gyereke is fiú?*

Próbáljunk Kovácsné esetében redukált eseménytérrel dolgozni. Kovácsné pontosan akkor viszi egy fiát sétálni, ha két gyermeke közül legalább egy fiú. Ezért kérdésünk így hangzik:

$$\begin{aligned} &\mathbf{P}\{\text{mindkét gyerek fiú} \,|\, \text{Kovácsné fiával sétál}\} = \\ &= \mathbf{P}\{\text{mindkét gyerek fiú} \,|\, \text{legalább az egyik gyereke fiú}\} = \,? \end{aligned} \tag{3.1}$$

Ha a fiú-lány születéseket tekintjük, akkor az eseménytér Kovácsné esetében

$$\Omega = \{(\text{f, f}),\ (\text{f, l}),\ (\text{l, f}),\ (\text{l, l})\},$$

és ezek mindegyike egyformán valószínű. A redukált eseménytér

$$F = \{\text{legalább az egyik gyerek fiú}\} = \{(\mathrm{f}, \mathrm{f}),\ (\mathrm{f}, \mathrm{l}),\ (\mathrm{l}, \mathrm{f})\},$$

ezek közül egy esetben lesz a másik gyerek is fiú, a válasz tehát 1/3.

Nézzük most Szabóné esetét. Egyrészt logikusnak tűnik, hogy az egyik gyermek neme nincs semmi hatással a másikéra, ezért ha Szabónét fiával látjuk sétálni, attól még mindig $1/2-1/2$ valószínűséggel lesz a másik gyermek fiú vagy lány. Másfelől a Kovácsné esetére elmondott okoskodás is jónak tűnik. Hol van tehát az igazság? Az ellentmondás akkor oldódik fel, ha alaposan szemügyre vesszük (3.1)-et. Most

$$\{\text{Szabóné fiával sétál}\} \subseteq \{\text{legalább az egyik gyereke fiú}\},$$

de a két esemény nem lesz ugyanaz. Megtörténhet ugyanis, hogy Szabónénak egy fia és egy lánya született, és a lányt viszi sétálni. Ez a kis apróság jelentősen megváltoztatja a feltételes valószínűséget. A helyzet annyival bonyolultabb Kovácsné eseténél, hogy Szabóné választási lehetőségeit is figyelembe kell vennünk. Az eseménytér így a következő lesz:

$$\Omega = \{(\boxed{\mathrm{f}}, \mathrm{f}),\ (\mathrm{f}, \boxed{\mathrm{f}}),\ (\boxed{\mathrm{f}}, \mathrm{l}),\ (\mathrm{f}, \boxed{\mathrm{l}}),\ (\boxed{\mathrm{l}}, \mathrm{f}),\ (\mathrm{l}, \boxed{\mathrm{f}}),\ (\boxed{\mathrm{l}}, \mathrm{l}),\ (\mathrm{l}, \boxed{\mathrm{l}})\},$$

keretben Szabóné választása a sétára. Ezek az elemi események mind egyenlő valószínűségűek (itt feltesszük, hogy Szabóné a két gyerek közül egyforma eséllyel választ), és a redukált eseménytér

$$F = \{(\boxed{\mathrm{f}}, \mathrm{f}),\ (\mathrm{f}, \boxed{\mathrm{f}}),\ (\boxed{\mathrm{f}}, \mathrm{l}),\ (\mathrm{l}, \boxed{\mathrm{f}})\},$$

a négy elemből kettőben van fiútestvér, így a válasz $2/4 = 1/2$.

Mindezek után viszont most azt kellene megértenünk, hogy ugyanez az érvelés miért *nem* adja a hibás 1/2 választ Kovácsné esetében. Kovácsné esetén az eseménytér

$$\Omega = \{(\boxed{\mathrm{f}}, \mathrm{f}),\ (\mathrm{f}, \boxed{\mathrm{f}}),\ (\boxed{\mathrm{f}}, \mathrm{l}),\ (\mathrm{l}, \boxed{\mathrm{f}}),\ (\boxed{\mathrm{l}}, \mathrm{l}),\ (\mathrm{l}, \boxed{\mathrm{l}})\},$$

azonban ezek nem egyenlő valószínűségű események:

$$\mathbf{P}\{(\boxed{\mathrm{f}}, \mathrm{f})\} = \mathbf{P}\{(\mathrm{f}, \boxed{\mathrm{f}})\} = \mathbf{P}\{(\boxed{\mathrm{l}}, \mathrm{l})\} = \mathbf{P}\{(\mathrm{l}, \boxed{\mathrm{l}})\} = \frac{1}{8},$$
$$\mathbf{P}\{(\boxed{\mathrm{f}}, \mathrm{l})\} = \mathbf{P}\{(\mathrm{l}, \boxed{\mathrm{f}})\} = \frac{1}{4}.$$

Ezért az

$$F = \{(\boxed{\mathrm{f}}, \mathrm{f}),\ (\mathrm{f}, \boxed{\mathrm{f}}),\ (\boxed{\mathrm{f}}, \mathrm{l}),\ (\mathrm{l}, \boxed{\mathrm{f}})\}$$

redukált eseménytér sem egyenlő valószínűségű eseményeket tartalmaz. Kovácsné esetén tehát ez a részletes érvelés helyesen így hangzik:

$$\begin{aligned}
&\mathbf{P}\{\text{mindkét gyerek fiú} \,|\, \text{Kovácsné fiával sétál}\}\\
&\qquad= \frac{\mathbf{P}\{\text{mindkét gyerek fiú és Kovácsné fiával sétál}\}}{\mathbf{P}\{\text{Kovácsné fiával sétál}\}} =\\
&\qquad= \frac{\mathbf{P}\{(\boxed{\text{f}},\, \text{f}),\ (\text{f},\, \boxed{\text{f}})\}}{\mathbf{P}\{(\boxed{\text{f}},\, \text{f}),\ (\text{f},\, \boxed{\text{f}}),\ (\boxed{\text{f}},\, \text{l}),\ (\text{l},\, \boxed{\text{f}})\}} =\\
&\qquad= \frac{1/8 + 1/8}{1/8 + 1/8 + 1/4 + 1/4} = \frac{1}{3}.
\end{aligned}$$

3.7. Állítás (szorzási szabály) *Legyenek $E_1, \dots E_n$ olyan események, hogy $\mathbf{P}\{E_1 \cap \dots \cap E_{n-1}\} > 0$. Ekkor*

$$\begin{aligned}
&\mathbf{P}\{E_1 \cap \dots \cap E_n\} =\\
&\qquad= \mathbf{P}\{E_1\} \cdot \mathbf{P}\{E_2 \,|\, E_1\} \cdot \mathbf{P}\{E_3 \,|\, E_1 \cap E_2\} \cdots \mathbf{P}\{E_n \,|\, E_1 \cap \dots \cap E_{n-1}\}.
\end{aligned}$$

Bizonyítás. Az állítás feltétele biztosítja, hogy a feltételes valószínűségek értelmesek. Definíciójukat beírva az egyenlőség azonnal következik. □

3.8. Példa *Oldjuk meg a 2.19 feladatot (mi a valószínűsége, hogy bridge-ben a négy ász négy különböző játékoshoz kerül?) a szorzási szabállyal.*

Legyen E_1 az az esemény, hogy a treff ász valahova kerül. (Ez egy kacifántos megfogalmazása annak, hogy $E_1 = \Omega$.) Legyen E_2 az az esemény, hogy a treff ász és a pikk ász különböző játékosokhoz kerülnek. Legyen E_3 az az esemény, hogy a treff, a pikk, és a kör ász mind különböző játékosokhoz kerülnek. Végül legyen E_4 az az esemény, hogy a treff, a pikk, a kör, és a káró ász mind különböző játékosokhoz kerülnek. Ekkor E_4 valószínűségére vagyunk kíváncsiak. Mivel $E_4 \subseteq E_3 \subseteq E_2 \subseteq E_1$, ezért a válasz

$$\begin{aligned}
\mathbf{P}\{E_4\} &= \mathbf{P}\{E_1 \cap E_2 \cap E_3 \cap E_4\} =\\
&= \mathbf{P}\{E_1\} \cdot \mathbf{P}\{E_2 \,|\, E_1\} \cdot \mathbf{P}\{E_3 \,|\, E_1 \cap E_2\} \cdot \mathbf{P}\{E_4 \,|\, E_1 \cap E_2 \cap E_3\} =\\
&= \frac{52}{52} \cdot \frac{39}{51} \cdot \frac{26}{50} \cdot \frac{13}{49} \simeq 0.105.
\end{aligned}$$

A 2.19 feladatban helyesen kiszámolt kombinatorikai formula is erre a szorzatra egyszerűsíthető.

3.9. Példa (urnamodellek) *Egy urnában van a fehér és b fekete golyó. Egymás után húzunk golyókat, és mindig visszateszünk* $\left\{\begin{array}{ll} 1 + c & \textit{db azonos} \\ d & \textit{db ellenkező} \end{array}\right\}$ *színű golyót. Néhány nevezetes eset:*

- $c = d = 0$: *visszatevéses húzások;*
- $c = -1,\ d = 0$: *visszatevés nélküli húzások;*
- $c > 0,\ d = 0$: *Pólya modell;*
- $c = -1,\ d = 1$: *Ehrenfest modell (kutya-bolha modell: egy fehér és egy fekete kutya áll egymás mellett, közöttük átugrálnak a bolhák; az egyes színű golyók száma a megfelelő kutyán élősködők létszámával azonosítható).*

Mi a valószínűsége, hogy három húzással sorrendben fekete, fehér, fekete golyót húzunk?

A szorzási szabállyal a válasz

$$\frac{b}{a+b} \cdot \frac{a+d}{a+b+c+d} \cdot \frac{b+c+d}{a+b+2c+2d},$$

ha végiggondoljuk, hogy az egyes húzások után mennyi fehér és fekete golyó van az urnában.

3.2. Bayes tétel

A teljes valószínűség tétele és a Bayes tétel akkor lesz hasznos, ha bizonyos feltételes valószínűségek adottak, vagy könnyen számolhatók.

3.10. Tétel (Teljes valószínűség tétele egy eseménnyel) *Legyenek E és F események, és $1 > \mathbf{P}\{F\} > 0$, ekkor*

$$\mathbf{P}\{E\} = \mathbf{P}\{E \mid F\} \cdot \mathbf{P}\{F\} + \mathbf{P}\{E \mid F^c\} \cdot \mathbf{P}\{F^c\}.$$

Bizonyítás. A tétel azon egyszerű megfigyelés következménye, hogy $E \cap F$ és $E \cap F^c$ kizáró események, és $E = (E \cap F) \cup (E \cap F^c)$, ezért

$$\begin{aligned}\mathbf{P}\{E\} &= \mathbf{P}\{(E \cap F) \cup (E \cap F^c)\} = \mathbf{P}\{E \cap F\} + \mathbf{P}\{E \cap F^c\} = \\ &= \mathbf{P}\{E \mid F\} \cdot \mathbf{P}\{F\} + \mathbf{P}\{E \mid F^c\} \cdot \mathbf{P}\{F^c\}.\end{aligned}$$ □

3.11. Példa *Egy biztosító két csoportba osztja az autóvezető ügyfeleit:*

- *a jó vezetők alkotják az ügyfelek 70%-át, ők minden évben 0.2 valószínűséggel okoznak balesetet,*
- *a rossz vezetők alkotják az ügyfelek 30%-át, ők minden évben 0.4 valószínűséggel okoznak balesetet.*

Ha elfogadjuk a biztosító álláspontját (ezután elfogadjuk), mi a valószínűsége, hogy a biztosító egy ügyfele balesetet okoz 2009-ben?

A B_{2009} esemény legyen az, hogy az ügyfél balesetet okoz 2009-ben, J pedig az, hogy az ügyfél jó vezető. Ekkor

$$\begin{aligned}\mathbf{P}\{B_{2009}\} &= \mathbf{P}\{B_{2009}\,|\,J\}\cdot\mathbf{P}\{J\}+\mathbf{P}\{B_{2009}\,|\,J^c\}\cdot\mathbf{P}\{J^c\} = \\ &= 0.2\cdot 0.7+0.4\cdot 0.3 = 0.26.\end{aligned}$$

Egy esemény és a komplementuma helyett teljes valószínűséget több eseménnyel is használhatunk.

3.12. Definíció $\{F_i\}_i$ *véges vagy megszámlálhatóan végtelen sok eseményt* teljes eseményrendszernek *nevezünk, ha* Ω *egy partícióját alkotják, azaz*

$$F_i\cap F_j=\emptyset \qquad \textit{ha } i\neq j, \qquad\qquad \textit{és} \qquad\qquad \bigcup_i F_i=\Omega.$$

3.13. Tétel (Teljes valószínűség tétele) *Legyen* E *egy esemény, és* $\{F_i\}_i$ *egy teljes eseményrendszer pozitív valószínűségű eseményekkel. Ekkor*

$$\mathbf{P}\{E\}=\sum_i \mathbf{P}\{E\,|\,F_i\}\cdot\mathbf{P}\{F_i\}.$$

Bizonyítás. Mint az előző tételnél, azt kell kihasználni, hogy $\{E\cap F_i\}_i$ az E esemény egy partícióját alkotják:

$$\mathbf{P}\{E\}=\mathbf{P}\Big\{\bigcup_i(E\cap F_i)\Big\}=\sum_i\mathbf{P}\{E\cap F_i\}=\sum_i\mathbf{P}\{E\,|\,F_i\}\cdot\mathbf{P}\{F_i\}. \qquad \square$$

A teljes valószínűséget a következő tételben is használjuk, mely a feltételes valószínűségben a kérdéses esemény és a feltétel felcserélését teszi lehetővé:

3.14. Tétel (Bayes tétel) *Legyenek* E *és* F *események,* $0<\mathbf{P}\{E\}$, $0<\mathbf{P}\{F\}<1$. *Ekkor*

$$\mathbf{P}\{F\,|\,E\}=\frac{\mathbf{P}\{E\,|\,F\}\cdot\mathbf{P}\{F\}}{\mathbf{P}\{E\,|\,F\}\cdot\mathbf{P}\{F\}+\mathbf{P}\{E\,|\,F^c\}\cdot\mathbf{P}\{F^c\}}.$$

Legyen $\{F_i\}_i$ *egy teljes eseményrendszer pozitív valószínűségű eseményekkel. Ekkor az eseményrendszer minden* i *indexére*

$$\mathbf{P}\{F_i\,|\,E\}=\frac{\mathbf{P}\{E\,|\,F_i\}\cdot\mathbf{P}\{F_i\}}{\sum_j\mathbf{P}\{E\,|\,F_j\}\cdot\mathbf{P}\{F_j\}}.$$

Bizonyítás. A bizonyítás azonnal következik a feltételes valószínűség definíciójából és a teljes valószínűség tételéből. □

Figyeljük meg, hogy a tétel lehetőséget ad $\mathbf{P}\{F \mid E\}$ (illetve $\mathbf{P}\{F_i \mid E\}$) kiszámítására a fordított feltételes valószínűségek ismeretében.

3.15. Példa *A fenti biztosító egy ügyfele balesetet csinált 2007-ben. Mi a valószínűsége, hogy ő jó vezető?*

A Bayes tétel alapján a fentiekhez hasonló B_{2007} és J eseményekkel

$$\begin{aligned}\mathbf{P}\{J \mid B_{2007}\} &= \frac{\mathbf{P}\{B_{2007} \mid J\} \cdot \mathbf{P}\{J\}}{\mathbf{P}\{B_{2007} \mid J\} \cdot \mathbf{P}\{J\} + \mathbf{P}\{B_{2007} \mid J^c\} \cdot \mathbf{P}\{J^c\}} = \\ &= \frac{0.2 \cdot 0.7}{0.2 \cdot 0.7 + 0.4 \cdot 0.3} \simeq 0.54.\end{aligned}$$

(A nevező értékét egyébként a 3.11. példában már kiszámoltuk.)

3.16. Példa *Három elítélt, A, B és C tudomására jut, hogy egyiküket kivégzik, a másik kettő viszont kiszabadul. Viszont hogy melyikük milyen sorsra jut, az titkos. A odamegy a börtönőrhöz (aki tudja a titkot), és azt mondja: „Mondj nekem B és C közül egy nevet, aki kiszabadul. Mivel ilyet mindenképpen tudsz mondani, ezzel nem adsz át nekem semmilyen információt az én esélyeimről." Erre a börtönőr: „Nem mondok, mert most 1/3 esélyed van a kivégzésre, de ha tudnád, hogy például B kiszabadul, akkor az esélyed felmenne 1/2-re, és ezt ugye te sem akarhatod." Melyiküknek van igaza?*

Gondoljuk át először a helyzetet. A börtönőr nyilván B-t vagy C-t mond. A helyében melyik választ szeretnénk jobban? A szimmetria miatt nyilván teljesen mindegy, így a börtönőr válasza nem befolyásolhatja A esélyeit, A-nak van tehát igaza.

Hol a hiba a börtönőr érvelésében, mely így hangzik:

$$\begin{aligned}\mathbf{P}\{A\text{-t kivégzik} \mid B \text{ kiszabadul}\} &= \frac{\mathbf{P}\{A\text{-t kivégzik és } B \text{ kiszabadul}\}}{\mathbf{P}\{B \text{ kiszabadul}\}} = \\ &= \frac{1/3}{2/3} = \frac{1}{2}?\end{aligned}$$

A fenti formula helyes, a válasz azonban hibás. Ugyanis a formulában rossz kérdést tettünk fel. A börtönőr ilyen irányú válasza esetén ugyanis A nem azt tudja, hogy B kiszabadul, hanem azt, hogy *a börtönőr azt mondja, hogy* B kiszabadul. Természetesen az előbbi következik az utóbbiból:

$$\{\text{a börtönőr azt mondja, hogy } B \text{ kiszabadul}\} \subseteq \{B \text{ kiszabadul}\},$$

de a két esemény nem ugyanaz. Ez az apróság alaposan megváltoztatja a feltételes valószínűséget. Legyen

$$E := \{\text{a börtönőr azt mondja, hogy } B \text{ kiszabadul}\}, \qquad F := \{A\text{-t kivégzik}\}.$$

Ekkor természetes feltevés, hogy az őr $1/2 - 1/2$ valószínűséggel tippel, ha teheti[1], ezért $\mathbf{P}\{E \mid F\} = 1/2$. Ha pedig A kiszabadul, akkor megint $1/2 - 1/2$ a valószínűsége, hogy B vagy C szabadul ki vele együtt, ezért $\mathbf{P}\{E \mid F^c\} = 1/2$. A Bayes tétel szerint tehát

$$\begin{aligned}
&\mathbf{P}\{A\text{-t kivégzik} \mid \text{az őr szerint } B \text{ kiszabadul}\}\\
&\qquad = \mathbf{P}\{F \mid E\} = \frac{\mathbf{P}\{E \mid F\} \cdot \mathbf{P}\{F\}}{\mathbf{P}\{E \mid F\} \cdot \mathbf{P}\{F\} + \mathbf{P}\{E \mid F^c\} \cdot \mathbf{P}\{F^c\}} =\\
&\qquad = \frac{1/2 \cdot 1/3}{1/2 \cdot 1/3 + 1/2 \cdot 2/3} = \frac{1}{3}.
\end{aligned}$$

Az esély arányok, mint például „2:1 az esélye, hogy ma eső lesz”, a feltételes valószínűség számolásában is hasznosak. A kijelentés szerint

$$\mathbf{P}\{\text{eső}\}/\mathbf{P}\{\{\text{eső}\}^c\} = 2/1,$$

azaz $2/3$ eséllyel eső lesz, $1/3$ eséllyel nem lesz. Lássuk ezen a nyelven hogyan változtatja meg egy E esemény esélyeit egy új F bizonyíték felmerülése:

$$\frac{\mathbf{P}\{E \mid F\}}{\mathbf{P}\{E^c \mid F\}} = \frac{\mathbf{P}\{E \cap F\}/\mathbf{P}\{F\}}{\mathbf{P}\{E^c \cap F\}/\mathbf{P}\{F\}} = \frac{\mathbf{P}\{F \mid E\} \cdot \mathbf{P}\{E\}}{\mathbf{P}\{F \mid E^c\} \cdot \mathbf{P}\{E^c\}} = \frac{\mathbf{P}\{E\}}{\mathbf{P}\{E^c\}} \cdot \frac{\mathbf{P}\{F \mid E\}}{\mathbf{P}\{F \mid E^c\}}.$$

A formulának szemléletes jelentése van: az új F bizonyíték mellett nőnek E esélyei, ha az új bizonyíték valószínűbb E esetén, mint E^c esetén.

3.17. Példa *A felügyelő 60%-ig biztos benne, hogy a bűncselekményt a gyanúsított követte el. A gyanúsított balkezes (a népesség 10%-a balkezes). A nyomozás során egyszer csak kiderül, hogy a bűncselekmény elkövetője 99% eséllyel balkezes. Most mennyire lehet biztos a felügyelő a gyanúsított bűnösségében?*

A feladat nehézségét az okozza, hogy milyen eseményeket tekintsünk, illetve melyeket kezeljünk új bizonyítékként. A megfogalmazás sugallja, hogy az

$$\{\text{az elkövető balkezes}\}$$

eseményt tekintsük új bizonyítékként. Ezzel azonban hamar komoly nehézségekbe szaladnánk, ehelyett sokkal célravezetőbb az

$$F = \{\text{a gyanúsított balkezes}\}$$

[1] Amennyiben ez nem így lenne, akkor az őr valóban információt adna át A-nak, és ez valóban módosítana A esélyein.

eseményt tekintenünk. Ezt ugyanis biztosan tudjuk, és a kérdés az, hogy ezt feltéve mi a valószínűsége, hogy a gyanúsított bűnös (továbbiakban E esemény). A feladat alapján $\mathbf{P}\{F \mid E\} = 0.99$, $\mathbf{P}\{F \mid E^c\} = 0.1$, ezért a fentiek szerint

$$\frac{\mathbf{P}\{E \mid F\}}{\mathbf{P}\{E^c \mid F\}} = \frac{\mathbf{P}\{E\}}{\mathbf{P}\{E^c\}} \cdot \frac{\mathbf{P}\{F \mid E\}}{\mathbf{P}\{F \mid E^c\}} = \frac{0.6}{0.4} \cdot \frac{0.99}{0.1} = 14.85,$$

vagyis $\mathbf{P}\{E \mid F\} = 14.85/[14.85 + 1] \simeq 0.94$, azaz a felügyelő most 94%-ig lehet biztos a dolgában.

3.3. Függetlenség

A világban sokszor előfordul, hogy egy esemény nem befolyásolja egy másik esemény előfordulásának esélyeit. Ezt fogja meg az alábbi definíció:

3.18. Definíció *Az E és F események* függetlenek, *ha*

$$\mathbf{P}\{E \cap F\} = \mathbf{P}\{E\} \cdot \mathbf{P}\{F\}.$$

Az események függetlensége és a kölcsönösen kizáró tulajdonság teljesen más fogalmak, ne keverjük őket. A definíciót indokolja az az észrevétel, hogy $\mathbf{P}\{F\} > 0$ esetén E és F pontosan akkor függetlenek, ha

$$\mathbf{P}\{E \mid F\} = \frac{\mathbf{P}\{E \cap F\}}{\mathbf{P}\{F\}} = \frac{\mathbf{P}\{E\} \cdot \mathbf{P}\{F\}}{\mathbf{P}\{F\}} = \mathbf{P}\{E\},$$

azaz E valószínűségét nem befolyásolja az F esemény.

3.19. Állítás *Ha E és F függetlenek, akkor E és F^c is.*

Bizonyítás. Mivel $E = (E \cap F) \cup (E \cap F^c)$, és a két metszet egymást kizárja,

$$\mathbf{P}\{E \cap F^c\} = \mathbf{P}\{E\} - \mathbf{P}\{E \cap F\} = \mathbf{P}\{E\} - \mathbf{P}\{E\} \cdot \mathbf{P}\{F\} = \mathbf{P}\{E\} \cdot \mathbf{P}\{F^c\}. \qquad \square$$

A függetlenség tényállása néha teljesen nyilvánvaló a probléma megfogalmazásából. Máskor viszont meglepetésszerűen jön elő, és sokszor nehezen bizonyítható.

3.20. Példa *Két kockával dobunk, legyenek*

$$\begin{aligned} E_1 &:= \{\textit{a dobások összege } 6\},\\ E_2 &:= \{\textit{a dobások összege } 7\},\\ F &:= \{\textit{az első kocka 3-at mutat}\}. \end{aligned}$$

Függetlenek-e E_1 és F? Az $E_1 \cap F$ esemény egyetlen módon fordulhat elő, valószínűsége $1/36$. E_1 ötféleképp állhat elő, és F valószínűsége nyilván $1/6$. Ezért

$$\mathbf{P}\{E_1 \cap F\} = \frac{1}{36} \neq \frac{5}{36} \cdot \frac{1}{6} = \mathbf{P}\{E_1\} \cdot \mathbf{P}\{F\},$$

a válasz tehát nem. E_2 viszont hatféleképp valósulhat meg, ezért meglepő módon E_2 és F függetlenek lesznek:

$$\mathbf{P}\{E_2 \cap F\} = \frac{1}{36} = \frac{6}{36} \cdot \frac{1}{6} = \mathbf{P}\{E_2\} \cdot \mathbf{P}\{F\}.$$

3.21. Példa *Két kockával dobunk, legyenek*

$$\begin{aligned} E &:= \{\text{a dobások összege } 7\}, \\ F &:= \{\text{az első kocka 3-at mutat,}\} \\ G &:= \{\text{a második kocka 4-et mutat.}\} \end{aligned}$$

Függetlenek-e ezek az események?

A fentiekben láttuk, hogy E és F függetlenek. Hasonlóan E és G is függetlenek, F és G pedig a feladat megfogalmazásából nyilvánvalóan függetlenek. Az események tehát *páronként függetlenek*. Viszont bármelyik két esemény együttes bekövetkezéséből következik a harmadik esemény. Ezért ez a három esemény nem lehet független egymástól.

3.22. Definíció *Az E_1, E_2, ..., E_n események* (teljesen) függetlenek*, ha bármely $2 \leq k \leq n$ elemű $i_1 \neq i_2 \neq \cdots \neq i_k$ indexhalmazra*

$$\mathbf{P}\{E_{i_1} \cap E_{i_2} \cap \cdots \cap E_{i_k}\} = \mathbf{P}\{E_{i_1}\} \cdot \mathbf{P}\{E_{i_2}\} \cdots \mathbf{P}\{E_{i_k}\}.$$

Az E_1, E_2, megszámlálhatóan végtelen sok esemény (teljesen) független*, ha bármely $2 \leq k$ elemű $i_1 \neq i_2 \neq \cdots \neq i_k$ indexhalmazra*

$$\mathbf{P}\{E_{i_1} \cap E_{i_2} \cap \cdots \cap E_{i_k}\} = \mathbf{P}\{E_{i_1}\} \cdot \mathbf{P}\{E_{i_2}\} \cdots \mathbf{P}\{E_{i_k}\}.$$

A páronkénti függetlenség tehát szükséges, de nem elégséges a teljes függetlenséghez. Az előbbi példában

$$\mathbf{P}\{E \cap F \cap G\} = \frac{1}{36} \neq \frac{6}{36} \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} = \mathbf{P}\{E\} \cdot \mathbf{P}\{F\} \cdot \mathbf{P}\{G\},$$

a három esemény tehát nem független.

Legyenek az E_1, E_2, ..., F_1, F_2, ... események teljesen függetlenek. Ekkor bármely, az E_i eseményekből halmazműveletekkel képzett esemény független lesz bármely, az F_i

eseményekből képzett eseménytől. Például ha E, F, G függetlenek, akkor E és $F \cup G$ is függetlenek. Ugyanis

$$\begin{aligned}
\mathbf{P}\{E \cap (F \cup G)\} &= \mathbf{P}\{(E \cap F) \cup (E \cap G)\} = \\
&= \mathbf{P}\{E \cap F\} + \mathbf{P}\{E \cap G\} - \mathbf{P}\{E \cap F \cap G\} = \\
&= \mathbf{P}\{E\} \cdot \mathbf{P}\{F\} + \mathbf{P}\{E\} \cdot \mathbf{P}\{G\} - \mathbf{P}\{E\} \cdot \mathbf{P}\{F\} \cdot \mathbf{P}\{G\} = \\
&= \mathbf{P}\{E\} \cdot (\mathbf{P}\{F\} + \mathbf{P}\{G\} - \mathbf{P}\{F\} \cdot \mathbf{P}\{G\}) = \\
&= \mathbf{P}\{E\} \cdot (\mathbf{P}\{F\} + \mathbf{P}\{G\} - \mathbf{P}\{F \cap G\}) = \\
&= \mathbf{P}\{E\} \cdot \mathbf{P}\{F \cup G\}.
\end{aligned}$$

3.23. Példa *n független próbát teszünk, melyek mindegyikének eredménye siker $0 < p < 1$ valószínűséggel, vagy kudarc $1 - p$ valószínűséggel.*

1. *Mi a valószínűsége, hogy n kísérlet mindegyike sikerül?*
2. *Mi a valószínűsége, hogy n kísérlet közül legalább egy sikerül?*
3. *Mi a valószínűsége, hogy n kísérlet közül pontosan k sikerül?*
4. *Végtelen sok kísérletet végezve mi a valószínűsége, hogy mindegyik sikerül?*
5. *Végtelen sok kísérletet végezve mi a valószínűsége, hogy legalább egy sikerül?*

1. A függetlenség miatt a valószínűségek szorzódnak, a válasz p^n.
2. Legalább egy sikerül pontosan akkor, ha nem igaz az, hogy mindegyik kudarcot vall, így a válasz $1 - (1 - p)^n$.
3. Az *első* k sikerül, majd a maradék $n - k$ nem sikerül $p^k \cdot (1 - p)^{n-k}$ valószínűséggel. Azonban ez csak egy lehetőség az $\binom{n}{k}$ különböző (egymást kizáró) kimenetelből, melyben k darab siker és $n - k$ darab kudarc történik valamilyen sorrendben. A válasz tehát $\binom{n}{k} \cdot p^k \cdot (1 - p)^{n-k}$.
4. Legyen E_i az az esemény, hogy az első i kísérlet mind sikerül. Ezek csökkenő események, és $\lim_{i\to\infty} E_i = \bigcap_{i=1}^{\infty} E_i$ éppen azt jelenti, hogy az összes kísérlet sikerül. Ezért a válasz
$$\mathbf{P}\{\lim_{i\to\infty} E_i\} = \lim_{i\to\infty} \mathbf{P}\{E_i\} = \lim_{i\to\infty} p^i = 0.$$
5. Legyen F_i az az esemény, hogy az első i kísérlet közül legalább egy sikerül. Ezek növekvő események, és $\lim_{i\to\infty} F_i = \bigcup_{i=1}^{\infty} F_i$ éppen azt jelenti, hogy az összes kísérlet közül legalább egy sikerül. Ezért a válasz
$$\mathbf{P}\{\lim_{i\to\infty} F_i\} = \lim_{i\to\infty} \mathbf{P}\{F_i\} = \lim_{i\to\infty} [1 - (1 - p)^i] = 1.$$

Bebizonyítottuk tehát Murphy törvényét: ami elromolhat, az el is romlik.

3.24. Példa (egy számelméleti példa) *A Riemann ζ függvény a következő függvény:*

$$\zeta\ :\ (1,\,\infty)\to\mathbb{R}^+,\qquad s\mapsto\zeta(s)=\sum_{n=1}^{\infty}n^{-s}.$$

Adjunk valószínűségszámítási bizonyítást az

$$\zeta(s)=\prod_{r\ \text{prím}}\frac{1}{1-r^{-s}}$$

Euler-formulára.

Legyen X egy véletlen szám, melyre

$$\mathbf{P}\{X=n\}=\frac{n^{-s}}{\zeta(s)},\qquad n\geq 1.$$

(Nyilvánvaló, hogy $\{X=n\}_{n=1}^{\infty}$ egymást kizáró események, így az ezekből felépített valószínűségi mezőn egy teljes eseményrendszert alkotnak. A fenti valószínűségek ezzel konzisztensek, mivel $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\mathbf{P}\{X=n\}=1$, így egy *eloszlást* határoznak meg; ezzel a következő fejezetben foglalkozunk.) Minden r prímre definiáljuk az

$$E_r=\{X\text{ osztható }r\text{-el}\}$$

eseményeket. Ekkor, ha r_i-k különböző prímszámok,

$$\mathbf{P}\{E_r\}=\mathbf{P}\Big\{\bigcup_{k=1}^{\infty}\{X=k\cdot r\}\Big\}=\sum_{k=1}^{\infty}\mathbf{P}\{X=k\cdot r\}=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(kr)^{-s}}{\zeta(s)}=r^{-s},$$

$$\begin{aligned}\mathbf{P}\{E_{r_1}\cap\dots\cap E_{r_n}\}&=\mathbf{P}\Big\{\bigcup_{k=1}^{\infty}\{X=k\cdot r_1\cdots r_n\}\Big\}=\sum_{k=1}^{\infty}\mathbf{P}\{X=k\cdot r_1\cdots r_n\}=\\&=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(kr_1\cdots r_n)^{-s}}{\zeta(s)}=r_1^{-s}\cdots r_n^{-s},\end{aligned}$$

vagyis az $\{E_r\}_{r\ \text{prím}}$ események teljesen függetlenek. Ezért, felhasználva a valószínűség folytonosságát,

$$\begin{aligned}\frac{1}{\zeta(s)}&=\mathbf{P}\{X=1\}=\mathbf{P}\{X\text{ nem osztható prímmel}\}=\\&=\mathbf{P}\Big\{\bigcap_{r\ \text{prím}}E_r^c\Big\}=\prod_{r\ \text{prím}}\mathbf{P}\{E_r^c\}=\prod_{r\ \text{prím}}(1-r^{-s}).\end{aligned}$$

3.4. A feltételes feltételes valószínűség

Ebben a részben választ keresünk arra, hogy hogyan lehet a feltételes valószínűséget újra megfeltételezni, és hogy mindez mire jó. Legyen F egy pozitív valószínűségű esemény, és definiáljuk a

$$\mathbf{Q}\{\cdot\} := \mathbf{P}\{\cdot \,|\, F\}$$

halmazfüggvényt. A 3.3. állítás szerint ez egy jól viselkedő valószínűség. Ezért egy olyan G eseménnyel, melyre $\mathbf{Q}\{G\} > 0$, tekinthetjük a $\mathbf{Q}$ feltételes valószínűséget:

$$\mathbf{Q}\{E \,|\, G\} = \frac{\mathbf{Q}\{E \cap G\}}{\mathbf{Q}\{G\}} = \frac{\mathbf{P}\{E \cap G \,|\, F\}}{\mathbf{P}\{G \,|\, F\}} = \frac{\mathbf{P}\{E \cap G \cap F\}/\mathbf{P}\{F\}}{\mathbf{P}\{G \cap F\}/\mathbf{P}\{F\}} = \mathbf{P}\{E \,|\, F \cap G\}.$$

Azaz a $\mathbf{P}\{\cdot \,|\, F\}$ feltételes valószínűséget még egyszer megfeltételezve az újabb G feltételt egyszerűen F mellé írhatjuk.

Mivel $\mathbf{Q}$ egy jólnevelt valószínűség, igaz rá többek közt a teljes valószínűség tétele (itt most két eseményre mondjuk ki):

$$\begin{aligned}\mathbf{Q}\{E\} &= \mathbf{Q}\{E \,|\, G\} \cdot \mathbf{Q}\{G\} + \mathbf{Q}\{E \,|\, G^c\} \cdot \mathbf{Q}\{G^c\}\\ \mathbf{P}\{E \,|\, F\} &= \mathbf{P}\{E \,|\, F \cap G\} \cdot \mathbf{P}\{G \,|\, F\} + \mathbf{P}\{E \,|\, F \cap G^c\} \cdot \mathbf{P}\{G^c \,|\, F\}.\end{aligned}$$

Gyakran előfordul, hogy $\mathbf{P}\{E \,|\, F \cap G\}$ kifejezéséből elhagyhatjuk F-et:

3.25. Definíció *Az E és F események G-re nézve* feltételesen függetlenek, *ha*

$$\mathbf{P}\{E \cap F \,|\, G\} = \mathbf{P}\{E \,|\, G\} \cdot \mathbf{P}\{F \,|\, G\}.$$

Ekkor a fentiek szerint

$$\mathbf{P}\{E \,|\, F \cap G\} = \frac{\mathbf{P}\{E \cap F \,|\, G\}}{\mathbf{P}\{F \,|\, G\}} = \mathbf{P}\{E \,|\, G\}.$$

3.26. Példa *A 3.11. példában egy ügyfél balesetet okozott 2007-ben. Mi a valószínűsége, hogy balesetet okoz 2009-ben is?*

A példa jelöléseivel és az új fegyverrel

$$\mathbf{P}\{B_{2009} \,|\, B_{2007}\} = \mathbf{P}\{B_{2009} \,|\, B_{2007} \cap J\} \cdot \mathbf{P}\{J \,|\, B_{2007}\} + \mathbf{P}\{B_{2009} \,|\, B_{2007} \cap J^c\} \cdot \mathbf{P}\{J^c \,|\, B_{2007}\}.$$

A jó-rossz vezető kitétel szerint a jó vezető minden évben az előző évektől függetlenül 0.2 valószínűséggel okoz balesetet, a rossz vezető 0.4 valószínűséggel. Ez pontosan azt jelenti, hogy B_{2009} és B_{2007} feltételesen függetlenek, feltéve akár J-t, akár J^c-t. Ezért a számolás így alakul:

$$\mathbf{P}\{B_{2009} \,|\, B_{2007}\} = \mathbf{P}\{B_{2009} \,|\, J\} \cdot \mathbf{P}\{J \,|\, B_{2007}\} + \mathbf{P}\{B_{2009} \,|\, J^c\} \cdot \mathbf{P}\{J^c \,|\, B_{2007}\}.$$

Felhasználva a példában megadottakat és a 3.15. példa eredményét

$$\mathbf{P}\{B_{2009} \mid B_{2007}\} \simeq 0.2 \cdot 0.54 + 0.4 \cdot (1 - 0.54) = 0.292.$$

A 3.11. példa szerint $\mathbf{P}\{B_{2009}\} = 0.26$, egy baleset okozása tehát valószínűbbé teszi ($\simeq 0.292$), hogy következő évben is balesetet okoz az ügyfél, hiszen ekkor már nagyobb eséllyel rossz vezető. B_{2009} **és** B_{2007} **tehát nem függetlenek, csak feltételesen függetlenek** akár J-t, akár J^c-t feltéve.

3.5. Feladatok

3.1. Egy kétgyermekes családban mekkora az esélye annak, hogy mindkét gyerek lány, ha az idősebbik lány?

3.2. (a) Én kétgyerekes családból származom. Mi a valószínűsége, hogy a testvérem lány?

(b) A király kétgyerekes családból származik. Mi a valószínűsége, hogy a testvére lány?

3.3. Egy diáknak nyáron kell letennie három vizsgáját, az elsőt júniusban. Ha az első sikerül, akkor leteheti a másodikat júliusban. Ha az is sikerül, akkor a harmadik vizsga szeptemberben következhet. Ha viszont bármelyik vizsgán megbukik, akkor nem teheti le a további vizsgákat sem. Az első vizsgán 0.9 valószínűséggel megy át. Feltéve, hogy az első vizsga sikeres volt, a másodikon a diák 0.8 valószínűséggel megy át, és feltéve, hogy ez is sikerült, a harmadikon 0.7 valószínűséggel.

(a) Mi a valószínűsége, hogy a diák mindhárom vizsgáját teljesíti?

(b) Feltéve, hogy nem sikerült mindhárom vizsgán átmenni, mi a valószínűsége, hogy a diák a második vizsgán bukott meg?

3.4. Egy közösségben a családok 36 százalékának van kutyája, és a kutyás családok 22 százalékának van még macskája is. Emellett tudjuk, hogy összesen a családok 30 százalékának van macskája.

(a) Mi a valószínűsége annak, hogy egy véletlenszerűen kiválasztott családnak van kutyája is és macskája is;

(b) Mi a feltételes valószínűsége annak, hogy egy véletlenszerűen kiválasztott családnak van kutyája, ha van macskája?

3.5. A nemdohányzó terápián részt vett nők 48 százaléka és a férfiak 37 százaléka tudta megállni a dohányzást legalább egy évig. Ezeknek az embereknek ünnepséget rendeztek az év végén. Ha a terápián a férfiak aránya 62 százalék volt,

(a) az ünnepségen milyen volt a nők aránya;

(b) a terápiára járt emberek mekkora hányada vett részt a partin (feltéve, hogy mindenki elment, aki leszokott)?

3.6. Egy főiskolán a hallgatók 52 százaléka nő, a hallgatók 5 százaléka számítástudományra szakosodott. A főiskola hallgatóinak 2 százaléka számítástudományra szakosodott nő. Számoljuk ki a feltételes valószínűségét annak, hogy egy véletlenszerűen kiválasztott hallgató

(a) nő, ha számítástudományra szakosodott;

(b) számítástudományra szakosodott, ha nő.

3.7. 500 dolgozó házaspárt megkérdeztek az éves keresetükről és az alábbi eredményeket kapták: Ha véletlenszerűen választunk egy párt,

	Férj	
Feleség	Kevesebb, mint 4 mFt	Több, mint 4mFt
Kevesebb, mint 4mFt	212	198
Több, mint 4mFt	36	54

(a) mi a valószínűsége annak, hogy a férj 4mFt-nál kevesebbet keres;

(b) mi a feltételes valószínűsége annak, hogy a feleség 4mFt-nál többet keres, feltéve, hogy a férj is 4mFt-nál többet keres;

(c) mi a feltételes valószínűsége annak, hogy a feleség 4mFt-nál többet keres, ha a férj 4mFt-nál kevesebbet keres?

3.8. Egy piros, egy kék, és egy sárga szabályos kockával dobunk. Legyen az általuk mutatott három szám rendre P, K, S.

(a) Mi a valószínűsége, hogy mindhárom dobás különböző?

(b) Feltéve, hogy mindhárom dobás különböző, mi a valószínűsége, hogy $P < K < S$?

(c) Mennyi $\mathbf{P}\{P < K < S\}$?

3.9. Az első urnában 2 fehér és 4 piros golyó, a másodikban 1 fehér és 1 piros golyó van. Az első urnából egy véletlenszerűen húzott golyót átrakunk a második urnába, majd a második urnából húzunk egy golyót.

(a) Mi annak a valószínűsége, hogy a második urnából húzott golyó fehér?

(b) Mi a feltételes valószínűsége annak, hogy az átrakott golyó fehér volt, feltéve, hogy a második urnából fehér golyót húztunk ki?

3.10. Két golyó mindegyike egymástól függetlenül 1/2-1/2 valószínűséggel feketére vagy aranyszínűre lett festve, majd egy urnába helyezték őket.

(a) Tegyük fel, hogy tudomásunkra jut, hogy az aranyszínű festéket használták, azaz legalább az egyik golyó aranyszínű lett. Ekkor mi a feltételes valószínűsége, hogy mindkét golyó aranyszínű?

(b) Most tegyük fel, hogy az urna megbillent, az egyik golyó kigurult belőle, és azt látjuk, hogy ez a golyó aranyszínű. Ekkor mi a valószínűsége, hogy mindkét golyó aranyszínű?

Magyarázzuk meg a válaszunkat.

3.11. A következő eljárást javasolták egy 100 000 fős város 50 év feletti lakosságának megbecslésére: „Az utcán menve folyamatosan számold, hogy a szembe jövő emberek hány százaléka van 50 felett. Csináld ezt pár napig, majd a kapott eredményt 100 000-rel beszorozva kapod a becslést." Kommentáljuk a módszert.
Tipp: legyen p az 50 év feletti emberek aránya, emellett jelölje rendre α_1 és α_2 azt, hogy az 50 év alattiak és az 50 év felettiek az idő mekkora hányadában vannak az utcán. Milyen mennyiséget ad a javasolt becslés? Mikor lesz ez a mennyiség körülbelül p?

3.12. Egy cég összes dolgozója autóval jár munkába és a cég parkolójában parkol. A cég szeretné megbecsülni az egy autóra jutó munkások átlagos számát. Az alábbi két módszer közül melyik vezet célra? Magyarázzuk meg a válaszunkat.

(a) Véletlenszerűen válasszunk ki n dolgozót, nézzük meg hány ember ült azokban az autókban melyekkel ők jöttek, és vegyük az így kapott n szám átlagát.

(b) Véletlenszerűen válasszunk ki n autót a parkoló autók közül, nézzük meg hány ember ült bennük, és vegyük az így kapott n szám átlagát.

3.13. Egy dobozban 15 teniszlabda van, közülük 9 labdával még nem játszottunk. 3 labdát véletlen módon kiveszünk, játszunk vele, majd visszatesszük a dobozba. Ezután újra véletlenszerűen kiveszünk 3 labdát a dobozból. Mekkora a valószínűsége annak, hogy a kihúzott labdák közül még eggyel sem játszottunk?

3.14. Réka most esett át egy esetleges rákos daganatra végzett biopszián. Mivel nem akarta rosszul érezni magát a családdal a hétvégén, nem akarta a biopsziával kapcsolatos esetleges rossz híreket megkapni. Azonban ha az orvosa csak akkor hívta volna fel, ha jóhírt tudott volna közölni, akkor a hívás elmaradásából rögtön tudta volna Réka, hogy rosszak a leletek. Így, valószínűségszámítás-hallgató révén Réka azt kérte az orvostól, hogy dobjon fel egy pénzérmét, és az esetleges jóhírt csak akkor közölje, ha fej lesz az eredmény. Ha viszont az eredmény írás, akkor az orvos egyáltalán ne telefonáljon. Így a doktor akkor sem feltétlenül hívta fel Rékát, ha jóhírt tudott volna közölni, viszont az sem automatikusan rossz hír, ha az orvos nem telefonál. Legyen α a valószínűsége annak, hogy a daganat rákos, és β a feltételes valószínűsége annak, hogy a daganat rákos, ha a doktor nem hívta.

(a) Melyiknek kell nagyobbnak lennie α-nak, vagy β-nak?

(b) Találjuk meg β-t α függvényében, és így igazoljuk az (a) részben adott választ!

3.15. A szigort az angolok *rigour*nak, az amerikaiak *rigor*nak írják. Egy párizsi hotelben megszállt ember egy levélben leírja ezt a szót, és a szó betűiből egyet véletlenszerűen kiválasztva magánhangzót kapunk. Ha a hotelben megszállt emberek 40 százaléka angol és 60 százaléka amerikai, mekkora az esélye annak, hogy a levél írója angol?

3.16. Három szakács, A, B és C, egy speciális süteményt sütnek, melyek azonban sajnos rendre 0.02, 0.03, 0.05 valószínűséggel nem kelnek meg rendesen a három szakács keze alatt. Az étteremben ahol dolgoznak, A süti a sütemények 50%-át, B a 30%-át, C pedig a 20%-át. A rossz sütemények hány százalékát sütötte A?

3.17. A férfiaknál a leggyakrabban előforduló ráktípus a prosztatarák. A prosztatarák diagnosztizálására az orvosok egy olyan tesztet futtatnak le, ahol a PSA (prostate specific antigen) protein szintjét mérik meg, ugyanis ez a protein csak a prosztatában termelődik. Bár a PSA szintekkel diagnosztizálható a rák, a teszt közismerten megbízhatatlan. Körülbelül 0,135 annak a valószínűsége, hogy egy nemrákos embernél megemelkedett PSA szintet mérjenek, és ez a valószínűség 0,268-ra emelkedik, ha az embernek rákja van. Ha más tényezők alapján az orvos kezdetben 70 százalékban biztos, hogy egy páciensnek prosztatarákja van, mekkora a feltételes valószínűsége, hogy rákos, feltéve, hogy

(a) a teszt megemelkedett PSA szintet mutatott;

(b) a teszt nem mutatott megemelkedett PSA szintet.

Ismételjük meg az előző számolást úgy, hogy az orvos kezdetben 30 százalék esélyt ad annak, hogy a páciens prosztatarákos.

3.18. Tegyük fel, hogy egy biztosítótársaság az ügyfeleket három csoportba sorolja: kis rizikójúak, átlagosak, rizikósak. A tapasztalat azt mutatja, hogy annak esélye, hogy egy ügyfél egy adott évben balesetet szenved rendre 0.05, 0.15, 0.30, aszerint, hogy melyik csoportba tartozik. Ha az ügyfelek 20%-a kis rizikójú, 50%-a átlagos, és 30%-a rizikós, hány százalékuknak lesz balesete 2009-ben? Ha egy ügyfélnek nem volt balesete 2007-ben, mi a valószínűsége, hogy kis rizikójú, átlagos, rizikós?

3.19. Egy alkalmazott a felettesétől új állásához kért egy ajánlólevelet. Úgy becsüli, hogy 80 százalék esélye van arra, hogy megkapja az állást, ha erős ajánlást kap, 40 százalék esélye van, ha közepesen jó, és 10 százalék esélye van, ha gyenge ajánlást kap. Ezenkívül azt gondolja, hogy annak az esélye, hogy erős, közepes vagy gyenge ajánlást kap rendre $0,7$, $0,2$ és $0,1$.

(a) Mennyire lehet biztos abban, hogy megkapja az új állást?

(b) Feltéve, hogy megkapja az állást, milyen valószínűséggel kaphatott erős, közepes vagy gyenge ajánlást?

(c) Feltéve, hogy nem kapja meg az állást, milyen valószínűséggel kaphatott erős, közepes vagy gyenge ajánlást?

3.20. Egy középiskolás lány idegesen várja az e-mailt arról, hogy felvették-e vagy sem. Úgy gondolja, hogy annak a feltételes valószínűsége, hogy felveszik ill. elutasítják, annak függvényében, hogy a következő hét valamely napján levelet kap, a következőképpen alakul: A lány gondolja, hogy $0,6$ annak a valószínűsége, hogy felveszik.

Nap	$\mathbf{P}$(levelet kap|felveszik)	$\mathbf{P}$(levelet kap|elutasítják)
Hétfő	$0,15$	$0,05$
Kedd	$0,20$	$0,10$
Szerda	$0,25$	$0,10$
Csütörtök	$0,15$	$0,15$
Péntek	$0,10$	$0,20$

(a) Mi a valószínűsége annak, hogy hétfőn megkapja a levelet?

(b) Mi a feltételes valószínűsége annak, hogy kedden megkapja a levelet, feltéve, hogy hétfőn nem kapta meg?

(c) Amennyiben szerdáig nem kap levelet, mi a feltételes valószínűsége, hogy felveszik?

(d) Mi a feltételes valószínűsége annak, hogy felveszik, ha csütörtökön megjön a levél?

(e) Mi annak a feltételes valószínűsége, hogy felveszik, ha nem jön levél a héten?

3.21. Döntsük el, hogy a következő leírásokra illő matematikai modellekben az E és F események függetlenek-e. Indokoljuk meg a választ!

(a) E az az esemény, hogy egy üzletasszonynak kék szeme van, és F az az esemény, hogy a titkárnőjének kék szeme van.

(b) E az az esemény, hogy egy professzornak autója van, és F az az esemény, hogy benne van a telefonkönyvben.

(c) E az az esemény, hogy egy férfi 183 cm magas, F az az esemény, hogy 90 kg fölött van a súlya.

(d) E az az esemény, hogy egy nő az USA-ban él, F az az esemény, hogy a nyugati félgömbön él.

(e) E az az esemény, hogy holnap esni fog, F az az esemény, hogy holnap után esni fog.

3.22. Egy első- és másodévesek által látogatott tárgyat 4 elsőéves fiú, 6 elsőéves lány, 6 másodéves fiú vett fel. Hány másodéves lány vette fel a tárgyat, ha tudjuk, hogy egy, a tárgy hallgatói közül véletlenül választott hallgató neme és évfolyama független egymástól?

3.23. Tegyük fel, hogy szabályos fej-írás dobást szeretnénk generálni, de csak egy cinkelt érme áll rendelkezésünkre, amely általunk ismeretlen p valószínűséggel mutat fejet. Tekintsük a következő eljárást.

(a) Feldobjuk az érmét.

(b) Megint feldobjuk az érmét.

(c) Ha mindkét dobás eredménye fej, vagy mindkét dobás eredménye írás, akkor újrakezdjük az első lépéssel.

(d) Ha viszont a két dobás eredménye különböző, akkor az utolsó eredmény lesz az algoritmus kimenete.

(a) Mutassuk meg, hogy az algoritmus egyforma valószínűséggel szolgáltat fejet vagy írást.

(b) Lehetne-e úgy egyszerűsíteni az eljárást, hogy addig dobjuk az érmét, amíg két egymást követő dobás különböző lesz, és az utolsó dobást tekintjük?

3.24. Az ember szemszínét egy darab génpár határozza meg. Ha mindkettő gén a kék szemet kódolja, akkor az adott embernek kék lesz a szeme, ha mindkettő a barna szemet, akkor barna lesz a szeme. Ha viszont az egyik kék, a másik barna szemet kódol, akkor az embernek barna lesz a szeme. (Emiatt mondjuk azt, hogy a barna szem génje dominálja a kék szem génjét.) Egy újszülött egymástól függetlenül kap mindkét szülőjétől egy-egy szemszín-gént, és az a gén, amit egy szülőtől kap, azonos valószínűséggel lehet a szülő egyik vagy másik génje. Tegyük fel, hogy Béla és mindkét szülője barna szemű, de a húga kék szemű.

(a) Mi a valószínűsége annak, hogy Bélának van kékszem-génje?

(b) Tegyük fel, hogy Béla felesége kékszemű. Mi a valószínűsége annak, hogy az első gyerekük kékszemű lesz?

(c) Ha az első gyereke Bélának barna szemű, mi a valószínűsége annak, hogy a következő gyerekük szintén barna szemű lesz?

3.25. Egy igaz-hamis kérdést tettek fel egy férj és feleség csapatnak egy vetélkedőn. Mind a férj, mind a feleség egymástól függetlenül, p valószínűséggel tudja a helyes választ a kérdésre. Az alábbiak közül melyik a jobb stratégia a pár számára?

(a) Válasszák ki, melyikünk válaszolja meg a kérdést, vagy

(b) előbb mindketten gondolják át a kérdést, és ha a válaszuk különböző, dobjanak fel egy pénzérmét, hogy meghatározzák, melyik fél válaszoljon a kérdésre.

3.26. Egy bizonyos fajnak csak 5 különböző génpárja van, amit mi az angol abc első 5 betűjével fogunk jelölni. Mind az öt gén két formában tud megjelenni, az egyik formát kisbetűvel, a másikat nagybetűvel jelöljük. A nagybetű fogja jelölni a domináns gént, abban az értelemben, hogy egy xX típusú génpár esetében az X gén fog kifejeződni, azaz fizikailag megjelenni. Például, ha X a barna, x a kék szem génje, akkor egy XX vagy xX génnel rendelkező egyed barna, egy xx génnel rendelkező kék szemű lesz. Egy egyed teljes fizikai megjelenését fenotípusnak, genetikai felépítését genotípusnak nevezzük. (Így 2 egyed, a következő genotípusokkal: aA, bB, cc, dD, ee; AA, BB, cc, DD, ee azonos fenotípusúak lesznek, A, B, c, D, e lesz a fenotípusuk.) Párosodásnál mindkét résztvevő egyed az összes génpárhoz saját génpárja egyik tagjával járul hozzá, véletlenszerűen. Feltesszük, hogy egy egyed minden géntípushoz való hozzájárulása egymástól és a másik egyed hozzájárulásától független. Ha egy aA, bB, cC, dD, eE és egy aa, bB, cc, Dd, ee genotípusú párosodik, mi a valószínűsége annak, hogy az utód (i) fenotípusra ill. (ii) genotípusra nézve

(a) lemásolja az első szülőt;

(b) lemásolja a második szülőt;

(c) mindkét szülőt lemásolja;

(d) egyik szülőt se másolja le?

3.27. 50 százalék az esélye, hogy a királynő hordozza a hemofíliáért felelős gént. Ha hordozó, akkor mindegyik hercegnek 50-50 százalék az esélye arra, hogy hemofíliás legyen. Ha a királynő három fia nem hemofíliás, mekkora az esélye annak, hogy a királynő hordozó? Ha születik egy negyedik herceg is, mekkora az esélye annak, hogy hemofíliás lesz?

3.28. A és B felváltva dobnak egy pár dobókockával egészen addig, amíg A a két kockán összesen 9-et dob, vagy B a két kockán összesen 6-ot dob. Találjuk meg annak valószínűségét, hogy az utolsó dobást A végzi, ha A kezdett.

3.29. Egy n elemű halmazból az A és B véletlen részhalmazokat egymástól függetlenül egyenletes eloszlással választjuk ki a 2^n lehetséges részhalmaz közül.

(a) Mutassuk meg, hogy $\mathbf{P}\{A \subseteq B\} = \left(\frac{3}{4}\right)^n$. (*Tipp: tekintsük az eredeti halmaz minden egyes elemét.*)

(b) Mutassuk meg, hogy $\mathbf{P}\{A \cap B = \emptyset\} = \left(\frac{3}{4}\right)^n$.

3.30. (a) Egy urnában n fehér és m fekete golyó van. A golyókat addig húzzuk az urnából véletlenszerűen, mígnem csak ugyanolyan színű golyók maradnak benn. Mutassuk meg, hogy $\frac{n}{n+m}$ valószínűséggel a végén mindegyik golyó fehér. *Tipp: képzeljük el, hogy a kísérlet addig folytatódik, amíg az összes golyót ki nem húztuk, és tekintsük az utolsó kihúzott golyót.*

(b) Egy halastóban 3 különböző halfaj él: a Vörös, a Kék és a Zöld. A Vörösből v, a Kékből k, a Zöldből z darab él a tóban. Tegyük fel, hogy véletlen sorrendben kihorgásszuk a halakat a tóból (azaz minden, még a tóban maradt hal azonos valószínűséggel akad horogra egy próbálkozás során). Mi a valószínűsége annak, hogy a tóban a Vörös halfaj hal ki először? *Tipp: írjuk $\mathbf{P}(V)$-t $\mathbf{P}(V) = \mathbf{P}(VKZ) + \mathbf{P}(VZK)$ alakba, és számoljuk ki a jobboldali valószínűségeket, az utolsónak kihaló faj szerint feltételesen bontva.*

3.31. Egy szabályos érmét kétszer feldobunk. Legyen A az az esemény, hogy az első dobás eredménye fej, B az az esemény, hogy a második dobás eredménye fej, és C az az esemény, hogy a két dobás eredménye egyezik. Mutassuk meg, hogy A, B és C páronként függetlenek, de nem függetlenek.

3.32. Tegyük fel, hogy egy végtelenül gazdag ellenféllel játszunk hazárdjátékot, és minden körben rendre p és $1-p$ valószínűséggel nyerünk, vagy vesztünk 1 egységet. Mutassuk meg, hogy a csődbemenés valószínűsége

$$\begin{array}{ll} 1 & \text{ha } p \leq \frac{1}{2} \\ \left(\frac{1-p}{p}\right)^i & \text{ha } p > \frac{1}{2}, \end{array}$$

ahol i a kezdeti tőkénk.

3.33. Az időjárás-előrejelzés egyszerű modelljeként tegyük fel, hogy az idő vagy esős, vagy napos, és p annak a valószínűsége, hogy holnap ugyanolyan lesz mint ma, a korábbi napoktól függetlenül. Ha az idő napos január elsején, legyen P_n annak valószínűsége, hogy n nap múlva szintén napos. Mutassuk meg, hogy P_n kielégíti a

$$P_n = (2p-1)P_{n-1} + (1-p), \qquad n \geq 1; \qquad P_0 = 1$$

rekurziót. Bizonyítsuk be, hogy $P_n = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}(2p-1)^n$ minden $n \geq 0$ esetén.

3.34. Egy zsákban a fehér és b fekete golyó van. A golyókat a következő módszer szerint húzzuk:

(a) Egy golyót húzunk véletlenszerűen és eldobjuk,

(b) egy második golyót is húzunk. Ha a most húzott golyó más színű, mint az előbb húzott golyó, visszatesszük a zsákba, és folytatjuk az 1-es ponttól. Ha azonos színű, akkor kidobjuk, és folytatjuk a 2-es ponttól.

Más szóval a golyókat addig húzzuk és dobjuk ki, ameddig azonos színű golyókat sikerül húzni. Amint egy különböző színűt húztunk, visszatesszük a zsákba és újrakezdjük a húzást. Jelölje $P_{a,b}$ annak a valószínűséget, hogy a zsákban az utolsó golyó fehér. Bizonyítsuk be, hogy $P_{a,b} = \frac{1}{2}$! *Tipp: $k = a + b$-re vonatkozó indukcióval bizonyítsunk.*

3.35. (Pólya urna) Egy urnában kezdetben 1 piros és 1 kék golyó van. Minden lépésben kihúzunk egy véletlen módon választott golyót és visszateszünk két ugyanolyan színű golyót. (például, ha az első húzásnál piros golyót húztunk, akkor a második húzásnál 2 piros és 1 kék golyó lesz az urnában). Mutassuk meg indukcióval, hogy $\frac{1}{n+1}$ annak a valószínűsége, hogy pontosan i piros golyó lesz az urnában n húzás után, $1 \leq i \leq n + 1$.

3.36. Az α kockának 4 piros és 2 fehér, míg a β kockának 2 piros és 4 fehér lapja van. Feldobunk egy érmét. Ha fej a dobás eredménye, akkor a továbbiakban az α kockát használjuk, ha pedig írás akkor a β-t. Az így kiválasztott kockával egymásután n-szer dobunk.

(a) Mi annak a valószínűsége, hogy a k-adik dobásnál az eredmény piros? ($k = 1, 2, \ldots, n$)

(b) Feltéve, hogy mind az első $k - 1$ kockadobás eredménye piros, mi annak a valószínűsége, hogy a k-adik dobás eredménye is piros lesz? ($k = 1, 2, \ldots, n$)

3.37. (A Négy Hazudós) Aladár, Béla, Cili és Dömötör hazudósak: átlagosan az esetek 2/3-ában hazudnak mind a négyen, egymástól függetlenül, véletlenszerűen.
Aladár azt állítja, hogy Béla tagadja, hogy Cili azt mondta, hogy Dömötör hazudott.
Mi a valószínűsége annak, hogy Dömötör igazat mondott?
(Feltételezzük, hogy Aladár tudja, hogy mit mondott Béla, Béla tudja, hogy mit mondott Cili, Cili tudja, hogy mit mondott Dömötör. Továbbá, hogy Cili azt is el tudja dönteni, hogy Dömötör hazudott-e vagy sem.)

3.38. Egy vadász 30 méter távolságban felfedez egy rókát és rálő. Ha a róka ezt túléli, akkor 10 m/s sebességgel próbál menekülni. A vadász 3 másodpercenként újratölt és lő a rókára, mindaddig, amíg meg nem öli, vagy (szerencsés esetben) a róka el

nem tűnik a látóhatáron. A vadász találati valószínűsége a távolság négyzetével fordítottan arányos, a következő képlet szerint $\mathbf{P}$(a vadász eltalálja az x méter távolságban levő rókát)$= 675x^{-2}$ ($x \geq 30$). Ha találat is éri a rókát, nem biztos, hogy fatális: az egyes találatokat (függetlenül azok számától) a róka 1/4 valószínűséggel túléli. Mi a valószínűsége annak, hogy a róka túléli ezt a kellemetlen kalandot?
Megjegyzés: A feladatot nyilván matematikusok találták ki matematikus diákoknak. Miért <u>rossz</u> <u>modellje</u> ez a rókavadászatnak?

3.39. Adott egy (végtelen térfogatú) urnánk és végtelen sok $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$ elemeivel számozott golyónk. Az urna eredetileg üres. Éjfél előtt egy perccel fogjuk az $1, 2, \dots, 10$ számú golyókat, behelyezzük őket az urnába, az urnát jól összerázzuk, majd véletlenszerűen kihúzunk az urnából egy golyót, amit elhajítunk. Éjfél előtt fél perccel fogjuk a $11, 12, \dots, 20$ számú golyókat, behelyezzük őket is az urnába, az urnát jól összerázzuk, majd véletlenszerűen kihúzunk az urnából egy golyót, amit elhajítunk. ...... Éjfél előtt 2^{-n} perccel fogjuk az $10n + 1, 10n + 2, \dots, 10(n + 1)$ számú golyókat, behelyezzük őket is az urnába, az urnát jól összerázzuk, majd véletlenszerűen kihúzunk az urnából egy golyót, amit elhajítunk. És ezt így folytatjuk éjfélig.
Bizonyítandó, hogy éjfélkor az urna 1 valószínűséggel üres lesz.

3.40. Válasszunk találomra egy számot az $\{1, 2, 3, \dots, n\}$ halmazból, egyenletes eloszlással. Jelölje A_p azt az eseményt, hogy a kiválasztott szám a p prím számmal osztható.

(a) Mutassuk meg, hogy ha $p_1, p_2, \dots, p_k$ prímek és az n szám osztható $p_1, p_2, \dots,$ p_k-val, akkor az $A_{p_1}, A_{p_2}, \dots, A_{p_k}$ események (teljesen) függetlenek.

(b) Jelöljük C_n-el azt az eseményt, hogy a véletlenszerűen kiválasztott szám n-hez relatív prím. Bizonyítsuk be, hogy

$$\mathbf{P}(C_n) = \prod_{p \text{ prím},\ p|n} \left(1 - \frac{1}{p}\right).$$

3.41. Iszákos Iván a nap 2/3 részét kocsmában tölti. Mivel a faluban 5 kocsma van, és Iván nem válogatós, azonos eséllyel tartózkodik bármelyikben. Egyszer elindulunk, hogy megkeressük. Négy kocsmát már végigjártunk, de nem találtuk. Mi a valószínűsége annak, hogy az ötödikben ott lesz?

3.42. A Magyar Etikett Intézet felmérése szerint Magyarországon a fiúk két kategóriába oszthatóak: 2/3-uk udvarias, 1/3-uk udvariatlan. Az udvarias fiúk az esetek 90%-ában engedik előre a lányokat az ajtóban, az udvariatlanok viszont csak az esetek 20%-ában. Láttam, hogy Jancsi előre engedte Juliskát, Jutkát viszont nem.

(a) Mennyi annak a valószínűsége, hogy Jancsi az udvariatlan kategóriába tartozik?

(b) Mennyi annak a valószínűsége, hogy ezek után Jancsi Erzsit is előre fogja engedni?

3.43. Sárkányföldön az n fejű sárkány

$$p_n = \binom{6}{n-1} \cdot 0.7^{n-1} \cdot 0.3^{7-n}$$

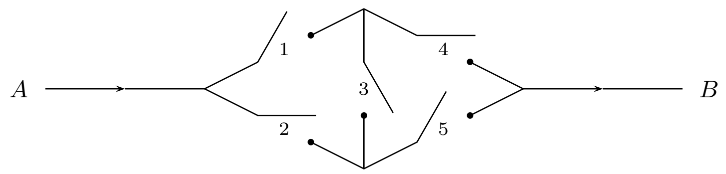
valószínűséggel fordul elő ($n = 1, 2, \ldots, 7$). Egy sárkány fejeinek levágása veszélyes művelet: az ember minden fejét egymástól függetlenül 90% eséllyel tudja levágni, és ha ez nem sikerül, akkor a sárkány megeszi az embert.

(a) Elém kerül egy sárkány, de a nagy ködben nem látom, hogy hányfejű. Mi az esélye, hogy túlélem a találkozást?

(b) Tegyük fel, hogy épp most vágtam le a hatodik fejét, de még mindig nem látom, hogy maradt-e feje. Ilyen helyzetből mekkora valószínűséggel élem túl a harcot?

(c) Csata után találkozom a cimborámmal, aki szintén legyőzött egy sárkányt. Ezt figyelembe véve mi a valószínűsége, hogy hétfejűvel volt dolga?

3.44. Alább egy áramkör, ahol mindegyik kapcsoló egymástól függetlenül $1/2 - 1/2$ valószínűséggel van nyitva vagy zárva.



Mi a valószínűsége, hogy A-tól B-ig áram folyhat ezen az áramkörön? Válaszoljunk számolás nélkül (is), szimmetriák segítségével!

4. fejezet

Diszkrét valószínűségi változók

4.1. A súlyfüggvény

Egy véletlen kísérletnek sokszor van valami számszerű kimenetele. Ezt fogja meg a következő definíció:

4.1. Definíció *Tekintsük az* $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ *valószínűségi mezőt. Egy* $X : \Omega \to \mathbb{R}$ *(esetleg* $\Omega \to \mathbb{C}$*) mérhető függvényt* valószínűségi változónak *nevezünk.*

Egy ilyen függvény tehát elemi eseményekhez számokat rendel. Az absztrakt definíción túl a valószínűségi változóra általában egyszerűbb úgy gondolni, mint egy véletlen számra, és sokszor csak nagybetűkkel jelöljük majd őket (pl. a definícióban szereplőt csak X-el).

Egy valószínűségi változó kapcsán az első kérdés mindig az, hogy milyen lehetséges értékei vannak. Ebből a szempontból a legegyszerűbb esettel kezdünk:

4.2. Definíció *Egy valószínűségi változót* diszkrétnek *nevezünk, ha véges sok vagy megszámlálhatóan végtelen sok értéket vehet fel.*

Hacsak máshogy ki nem írjuk, az X diszkrét valószínűségi változó lehetséges értékeinek halmazát $\{x_i\}_i$-vel fogjuk jelölni, ahol $i = 1, 2, \ldots, n$, ha a valószínűségi változó n értéket vehet fel, vagy $i = 1, 2, \ldots$ ha megszámlálhatóan végtelen sok értéket vehet fel.

4.3. Példa *Három szabályos érmét dobva legyen X a kapott fejek száma. Ekkor*

$$X = \begin{cases} 0, & \binom{3}{0} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^0 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{1}{8} \text{ valószínűséggel,} \\ 1, & \binom{3}{1} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^1 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{3}{8} \text{ valószínűséggel,} \\ 2, & \binom{3}{2} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^1 = \frac{3}{8} \text{ valószínűséggel,} \\ 3, & \binom{3}{3} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^3 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^0 = \frac{1}{8} \text{ valószínűséggel.} \end{cases}$$

A diszkrét valószínűségi változót a különböző értékeinek valószínűségeivel jellemezhetjük:

4.4. Definíció *A diszkrét valószínűségi változó* eloszlása *vagy* (valószínűségi) súlyfüggvénye *egy $p : \mathbb{R} \to [0, 1]$ függvény, melynek értékei*

$$\begin{aligned} p(x_i) &= \mathbf{P}\{X = x_i\}, && \text{és} \\ p(x) &= 0, && \text{ha } x \neq x_1, x_2, \ldots. \end{aligned}$$

A második egyenletet sokszor magától értetődőnek tekintjük és nem írjuk ki külön. Mivel az $\{X = x_i\}_i$ események teljes eseményrendszert alkotnak, minden súlyfüggvényre igaz, hogy

$$p(x) \geq 0, \qquad \sum_i p(x_i) = 1. \tag{4.1}$$

Megfordítva, bármely $p : \mathbb{R} \to [0, 1]$ függvényhez, mely egy megszámlálható $\{x_i\}_i$ halmazzal (4.1)-t kielégíti, létezik valószínűségi változó, mely az x_i értékeket veheti fel, és p a súlyfüggvénye.

4.5. Példa *Legyen $\lambda > 0$ valós. Milyen c érték mellett lesz*

$$p(i) = c \cdot \frac{\lambda^i}{i!}, \qquad i = 0, 1, 2, \ldots$$

egy súlyfüggvény? Ebben az esetben számoljuk ki a $\mathbf{P}\{X = 0\}$ és a $\mathbf{P}\{X > 2\}$ valószínűségeket.

A megadott p függvény $c > 0$ esetén nemnegatív, csak az egyre összegződést kell ellenőriznünk:

$$\sum_{i=0}^{\infty} p(i) = c \cdot \sum_{i=0}^{\infty} \frac{\lambda^i}{i!} = c \cdot \mathrm{e}^{\lambda} = 1,$$

amiből $c = \mathrm{e}^{-\lambda}$. Ezért

$$\mathbf{P}\{X = 0\} = p(0) = \mathrm{e}^{-\lambda} \cdot \frac{\lambda^0}{0!} = \mathrm{e}^{-\lambda}, \qquad \text{és}$$

$$\mathbf{P}\{X > 2\} = 1 - \mathbf{P}\{X \le 2\} = 1 - \mathbf{P}\Big\{\bigcup_{i=0}^{2}\{X = i\}\Big\} = 1 - \sum_{i=0}^{2}\mathbf{P}\{X = i\} =$$

$$= 1 - \sum_{i=0}^{2} p(i) = 1 - \sum_{i=0}^{2} \mathrm{e}^{-\lambda} \cdot \frac{\lambda^i}{i!} = 1 - \mathrm{e}^{-\lambda} \cdot \Big(1 + \lambda + \frac{\lambda^2}{2}\Big).$$

Figyeljük meg, hogy a komplementumképzéssel el tudtunk kerülni egy végtelen szummázást.

Az eloszlások legfontosabb jellemzői a várható érték és a szórás. Mielőtt a tárgyalásukra rátérünk, itt egy, a súlyfüggvényhez közvetlenebbül kapcsolódó mennyiség:

4.6. Definíció *Az X valószínűségi változó* módusza *a legvalószínűbb értéke, vagyis az az x_i érték, melyre $p(x_i)$ maximális.*

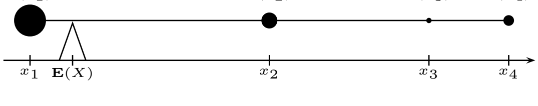
Könnyen látható, hogy ilyen x_i mindig létezik, viszont nem mindig egyértelmű.

4.2. Várható érték, szórás

4.7. Definíció *Legyen X egy diszkrét valószínűségi változó. Ha a súlyfüggvénye olyan, hogy $\sum_i |x_i| \cdot p(x_i) = \infty$, akkor azt mondjuk, hogy* nem létezik várható értéke. *Ellenkező esetben X* várható értéke

$$\mathbf{E}(X) = \sum_i x_i \cdot p(x_i).$$

A várható érték nem más, mint egy súlyozott átlag. A valószínűség relatív gyakoriság felfogását elfogadva könnyen meggyőzhetjük magunkat, hogy sok kísérletet elvégezve és a kapott véletlen értékeket kiátlagolva körülbelül $\mathbf{E}(X)$-et kapunk (annál pontosabban, minél több kísérletet végeztünk). Végül pedig az is nyilvánvaló, hogy a súlytalan rúdra x_1, x_2, ... helyeken rögzített $p(x_1)$, $p(x_2)$, ... súlyokból álló rendszer:



tömege 1, és tömegközéppontjának helye $\mathbf{E}(X)$. A várható érték és a módusz általános esetben nem esik egybe, ne keverjük őket.

4.8. Példa *Legyen X egy szabályos dobókocka dobásával kapott szám. Mi a várható értéke?*

Mivel $p(i) = 1/6$, $i = 1, 2, \ldots, 6$,

$$\mathbf{E}(X) = \sum_{i=1}^{6} i \cdot p(i) = \sum_{i=1}^{6} i \cdot \frac{1}{6} = \frac{7}{2}.$$

Mint látjuk, a várható érték nem feltétlenül egy lehetséges értéke X-nek.

4.9. Definíció *Legyen E egy esemény. Az ő* indikátorváltozója

$$I_E = \begin{cases} 1, & \text{ha } E \text{ bekövetkezik,} \\ 0, & \text{ha } E^c \text{ következik be.} \end{cases}$$

4.10. Példa *Határozzuk meg egy indikátorváltozó várható értékét.*

$$\mathbf{E}(I_E) = 0 \cdot \mathbf{P}\{I_E = 0\} + 1 \cdot \mathbf{P}\{I_E = 1\} = \mathbf{P}\{I_E = 1\} = \mathbf{P}\{E\}.$$

4.11. Állítás (valószínűségi változó függvényének várható értéke) *Legyen X egy diszkrét valószínűségi változó, és g egy $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvény. Ekkor*

$$\mathbf{E}[g(X)] = \sum_i g(x_i) \cdot p(x_i),$$

amennyiben ez az összeg létezik.

Bizonyítás. $Y := g(X)$ egy diszkrét valószínűségi változó, $\{y_j\}_j = \{g(x_i)\}_i$ lehetséges értékekkel. Ezért, amennyiben létezik,

$$\begin{aligned}
\mathbf{E}[g(X)] = \mathbf{E}(Y) = \sum_j y_j \cdot \mathbf{P}\{Y = y_j\} = \sum_j y_j \cdot \mathbf{P}\Big\{ \bigcup_{i\,:\,g(x_i)=y_j} \{X = x_i\} \Big\} = \\
= \sum_j y_j \sum_{i\,:\,g(x_i)=y_j} \mathbf{P}\{X = x_i\} = \sum_j y_j \sum_{i\,:\,g(x_i)=y_j} p(x_i) = \\
= \sum_j \sum_{i\,:\,g(x_i)=y_j} y_j p(x_i) = \sum_j \sum_{i\,:\,g(x_i)=y_j} g(x_i) p(x_i) = \sum_i g(x_i) p(x_i).
\end{aligned}$$

□

4.12. Következmény (a várható érték linearitása, első verzió) *Legyenek a, b rögzített valós számok, X pedig egy diszkrét valószínűségi változó véges várható értékkel. Ekkor*

$$\mathbf{E}(aX + b) = a \cdot \mathbf{E}(X) + b.$$

Szóban kifejezve: a várható érték felcserélhető az affin transzformációkkal.

Bizonyítás.

$$\mathbf{E}(aX+b) = \sum_i (ax_i+b)\cdot p(x_i) = a\cdot\sum_i x_i\cdot p_i + b\cdot\sum_i p(x_i) = a\cdot\mathbf{E}(X)+b. \qquad \square$$

Egy valószínűségi változó hatványfüggvényeinek várható értékei annyira fontosak, hogy külön nevük is van:

4.13. Definíció *Amennyiben létezik, egy X valószínűségi változó* n-edik momentuma $\mathbf{E}(X^n)$*, és* n-edik abszolút momentuma $\mathbf{E}(|X|^n)$*. A továbbiakban gyakran csak* $\mathbf{E}X^n$*-t írunk* $\mathbf{E}(X^n)$ *helyett, vagy* $\mathbf{E}|X|^n$*-t* $\mathbf{E}(|X|^n)$ *helyett.*

Nagyon **fontos**, hogy általában $\mathbf{E}(g(X))$ és $g(\mathbf{E}(X))$ különböző mennyiségek. Így például degenerált esetektől eltekintve $\mathbf{E}X^n \neq (\mathbf{E}X)^n$, ha $n\neq 1$.

A várható érték a valószínűségi változó átlagos értékét jellemzi. Talán a következő legjellemzőbb információ annak mérőszáma, hogy a változó mennyire szokott eltérni a várható értékétől. Ennek legegyszerűbb mérőszáma $\mathbf{E}|X-\mathbf{E}(X)|$ lenne. Az abszolút érték miatt azonban ennek kezelése nehézkes. Hasznosabbnak bizonyult a következő definíció:

4.14. Definíció *Amennyiben létezik, egy valószínűségi változó* szórásnégyzete

$$\mathbf{D}^2(X) := \mathbf{E}\big[(X-\mathbf{E}(X))^2\big],$$

szórása

$$\mathbf{D}(X) := \sqrt{\mathbf{E}\big[(X-\mathbf{E}(X))^2\big]}.$$

A gyökvonás mindig lehetséges, mert *a szórásnégyzet sosem negatív.* Itt most részletesen zárójeleztük a mennyiségeket, de gyakran csak $\mathbf{D}^2X = \mathbf{E}(X-\mathbf{E}X)^2$-t fogunk írni. Ahogy feljebb is megjegyeztük,

$$\mathbf{D}^2X = \mathbf{E}(X-\mathbf{E}X)^2 \neq (\mathbf{E}(X-\mathbf{E}X))^2 = 0, \qquad \text{és}$$
$$\mathbf{D}X = \sqrt{\mathbf{E}(X-\mathbf{E}X)^2} \neq \mathbf{E}\sqrt{(X-\mathbf{E}X)^2}.$$

Figyeljük meg, hogy $\mathbf{D}^2X$ épp a várható értéknél mutatott súlytalan rúdra x_1, x_2, … helyeken rögzített $p(x_1)$, $p(x_2)$, … súlyokból álló rendszer tömegközéppontra vonatkoztatott tehetetlenségi nyomatékával egyezik meg.

4.15. Példa *Legyen*

$$W=0; \qquad Y = \begin{cases} 1, & \frac{1}{2} \text{ valószínűséggel,}\\ -1, & \frac{1}{2} \text{ valószínűséggel;}\end{cases}$$
$$Z = \begin{cases} 100, & \frac{1}{2} \text{ valószínűséggel,}\\ -100, & \frac{1}{2} \text{ valószínűséggel.}\end{cases}$$

Ekkor $\mathbf{E}W = \mathbf{E}Y = \mathbf{E}Z = 0$, *és* $W - \mathbf{E}W = 0$, $Y - \mathbf{E}Y = \pm 1$, $Z - \mathbf{E}Z = \pm 100$, *így* $\mathbf{D}W = 0$, $\mathbf{D}Y = 1$, $\mathbf{D}Z = 100$. *Itt tehát jól látjuk, hogy a szórás azt méri mennyire tér el a valószínűségi változó a várható értékétől.*

A következő egyszerű formula gyakran célravezetőbb a szórás számolásához, mint a definíció.

4.16. Állítás *Amennyiben létezik, egy valószínűségi változó szórásnégyzete átírható a*

$$\mathbf{D}^2X = \mathbf{E}X^2 - (\mathbf{E}X)^2$$

alakba.

Bizonyítás. A bizonyításhoz a várható érték linearitását használjuk (pontosabban egy picivel többet, de ez pontosan ugyanúgy bizonyítható).

$$\begin{aligned}\mathbf{D}^2X &= \mathbf{E}(X - \mathbf{E}X)^2 = \mathbf{E}\big[X^2 - 2X\mathbf{E}X + (\mathbf{E}X)^2\big] = \\ &= \mathbf{E}X^2 - 2\mathbf{E}X \cdot \mathbf{E}X + (\mathbf{E}X)^2 = \mathbf{E}X^2 - (\mathbf{E}X)^2.\end{aligned}$$

□

4.17. Következmény

$$\mathbf{E}X^2 \geq (\mathbf{E}X)^2,$$

a Jensen-egyenlőtlenség *speciális esete (és a* Cauchy-Schwarz egyenlőtlenségé *(7.24. állítás) is).*

4.18. Példa *Legyen X egy szabályos dobókocka dobásával kapott szám. Mi a szórása?*

Először a második momentumot számoljuk:

$$\mathbf{E}X^2 = \sum_{i=1}^{6} i^2 p(i) = \sum_{i=1}^{6} i^2 \frac{1}{6} = \frac{91}{6}.$$

Ezért

$$\mathbf{D}X = \sqrt{\mathbf{E}X^2 - (\mathbf{E}X)^2} = \sqrt{\frac{91}{6} - \left(\frac{7}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{35}{12}} \simeq 1.71.$$

A dobókocka tehát várhatóan 3.5-öt mutat, és ettől körülbelül 1.71-el szokott eltérni.

4.19. Példa *Határozzuk meg egy indikátorváltozó szórásnégyzetét.*

Először vegyük észre, hogy az I_E indikátor csak 0 vagy 1 értéket vehet fel, ezért $I_E = I_E^2$. Ezért erre a speciális valószínűségi változóra

$$\mathbf{D}^2 I_E = \mathbf{E}I_E^2 - (\mathbf{E}I_E)^2 = \mathbf{E}I_E - (\mathbf{E}I_E)^2 = \mathbf{P}\{E\} - \mathbf{P}\{E\}^2 = \mathbf{P}\{E\} \cdot (1 - \mathbf{P}\{E\}).$$

4.20. Állítás (a szórás NEMlinearitása) *Legyenek a és b rögzített valós számok. Ekkor*

$$\mathbf{D}^2(aX+b) = a^2 \cdot \mathbf{D}^2 X, \qquad \textit{azaz} \qquad \mathbf{D}(aX+b) = |a| \cdot \mathbf{D}X.$$

Bizonyítás. Definíció és a várható érték linearitása szerint

$$\begin{aligned}\mathbf{D}^2(aX+b) &= \mathbf{E}[aX+b-\mathbf{E}(aX+b)]^2 = \mathbf{E}[aX-a\mathbf{E}X]^2 = \\ &= \mathbf{E}\big(a^2 \cdot [X-\mathbf{E}X]^2\big) = a^2 \cdot \mathbf{E}[X-\mathbf{E}X]^2 = a^2 \cdot \mathbf{D}^2 X.\end{aligned}$$

□

4.3. A binomiális eloszlás

A következőkben néhány alapvetően fontos diszkrét valószínűségi változó-típust tárgyalunk. Ezek közül az első a binomiális eloszlás:

4.21. Definíció *Egymás után n darab független kísérletet végzünk, melyek mindegyike p valószínűséggel sikerül, $1-p$ valószínűséggel nem sikerül. Legyen X a sikeres kísérletek száma. Ekkor X* binomiális eloszlású, *amit $X \sim Binom(n, p)$-vel fogunk jelölni. Az $n = 1$ speciális esetben egyetlen kísérlet indikátorváltozójáról van szó, melyet ebben a az esetben* Bernoulli *vagy* bináris eloszlásúnak *is neveznek.*

A binomiális eloszlás súlyfüggvényét a 3.23. példában már meghatároztuk:

4.22. Állítás *Legyen $X \sim Binom(n, p)$. Ekkor X súlyfüggvénye*

$$p(i) = \mathbf{P}\{X = i\} = \binom{n}{i} p^i (1-p)^{n-i}, \qquad i = 0, 1, \ldots, n.$$

Megjegyezzük, hogy ez a formula minden egész i-re igaz, mert (1.3) értelmében a binomiális együttható nullát ad a fentiektől eltérő esetekben. A (4.1) tulajdonságot a a binomiális tétel (1.11. tétel) biztosítja.

4.23. Példa *Egy barkácsbolt 10-es csomagokban árusítja a csavarokat, melyek egymástól függetlenül 0.01 valószínűséggel hibásak. A bolt garanciát vállal arra, hogy egy csomagban legfeljebb egy hibás csavar van. A dobozok hány százaléka nem felel meg a garanciának?*

A feladat szerint a hibás csavarok száma egy dobozban $X \sim \mathrm{Binom}(n, p)$. A válasz tehát

$$\begin{aligned}\mathbf{P}\{X \geq 2\} &= 1 - \mathbf{P}\{X = 0\} - \mathbf{P}\{X = 1\} = \\ &= 1 - \binom{10}{0} \cdot 0.01^0 \cdot 0.99^{10} - \binom{10}{1} \cdot 0.01^1 \cdot 0.99^9 \simeq 0.0043,\end{aligned}$$

vagyis a dobozok körülbelül 4 ezreléke nem felel meg a garanciának.

4.24. Állítás *Legyen $X \sim Binom(n, p)$. Ekkor*

$$\mathbf{E}X = np \qquad \textit{és} \qquad \mathbf{D}^2 X = np(1-p).$$

Bizonyítás. A sok lehetséges módszer közül itt egy sok különböző helyzetben alkalmazhatót mutatunk be. A feladat az

$$\mathbf{E}X = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} i \cdot p^i (1-p)^{n-i}$$

összeg meghatározása. Ennek céljából i-t $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} t^i|_{t=1}$ alakba írjuk, hiszen $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} t^i = i \cdot t^{i-1}$, tehát $t = 1$ helyettesítéssel i-t kapunk. Felhasználva a derivált linearitását és a binomiális tételt,

$$\begin{aligned}
\mathbf{E}X &= \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} t^i|_{t=1} \cdot p^i (1-p)^{n-i} = \\
&= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \Big(\sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} t^i \cdot p^i (1-p)^{n-i} \Big) \Big|_{t=1} = \\
&= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} (tp + 1 - p)^n |_{t=1} = n(tp + 1 - p)^{n-1} \cdot p|_{t=1} = np.
\end{aligned}$$

A szórásnégyzethez második momentumra lesz szükségünk. A fenti trükköt most az $i(i-1) = \frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2} t^i|_{t=1}$ formában tudjuk alkalmazni. Így

$$\begin{aligned}
\mathbf{E}[X(X-1)] &= \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} i(i-1) \cdot p^i (1-p)^{n-i} = \\
&= \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} \frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2} t^i|_{t=1} \cdot p^i (1-p)^{n-i} = \\
&= \frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2} \Big(\sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} t^i \cdot p^i (1-p)^{n-i} \Big) \Big|_{t=1} = \\
&= \frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2} (tp + 1 - p)^n |_{t=1} = \\
&= n(n-1)(tp + 1 - p)^{n-2} \cdot p^2|_{t=1} = n(n-1)p^2.
\end{aligned}$$

Ezért

$$\begin{aligned}
\mathbf{D}^2 X &= \mathbf{E}X^2 - (\mathbf{E}X)^2 = \mathbf{E}(X^2 - X) + \mathbf{E}X - (\mathbf{E}X)^2 = \\
&= \mathbf{E}[X(X-1)] + \mathbf{E}X - (\mathbf{E}X)^2 = n(n-1)p^2 + np - (np)^2 = np(1-p).
\end{aligned}$$

A második egyenlőségnél egy, a 4.12. következményhez hasonlóan ellenőrizhető linearitási tulajdonságot használtunk fel. □

4.25. Állítás *Az n, p paraméterű binomiális eloszlás módusza $\lfloor (n+1)p \rfloor$ (alsó egészrész). Amennyiben $(n+1)p$ egész szám, akkor $(n+1)p-1$ és $(n+1)p$ egyaránt móduszok.*

Bizonyítás. Hogy ne keverjük a p paraméterrel, a súlyfügvényt p_X-el fogjuk jelölni. Legyen $0 < i \le n$, ekkor

$$\frac{p_X(i)}{p_X(i-1)} = \frac{\binom{n}{i} p^i (1-p)^{n-i}}{\binom{n}{i-1} p^{i-1} (1-p)^{n-i+1}} = \frac{(n-i+1)p}{i(1-p)}. \tag{4.2}$$

Ezért az alábbi egyenlőtlenségek ekvivalensek:

$$\begin{aligned} p_X(i) &\ge p_X(i-1) \\ \frac{p_X(i)}{p_X(i-1)} &\ge 1 \\ \frac{(n-i+1)p}{i(1-p)} &\ge 1 \\ (n+1)p &\ge i \\ \lfloor (n+1)p \rfloor &\ge i. \end{aligned}$$

Ezért $p_X(i)$ addig növekszik, amíg i el nem éri $\lfloor (n+1)p \rfloor$-t, ezután csökkenni kezd. A levezetésből az is látszik, hogy $p_X(i) = p_X(i-1)$ pontosan akkor teljesülhet, ha $i = (n+1)p$ (aminek az is feltétele, hogy $(n+1)p$ egész legyen), ilyenkor két módusz van. □

A következő tétel megalapozza a valószínűség relatív gyakoriság értelmezését. Végezzünk n darab független kísérletet, melyek mindegyike p valószínűséggel sikerül, $1-p$ valószínűséggel nem sikerül, a sikeres kísérletek számát X-el jelöljük, így $X \sim \text{Binom}(n, p)$. A sikeres kísérletek relatív gyakorisága X/n, és a tétel pontosan azt mondja, hogy sok kísérletet végezve ez nagy valószínűséggel közel van az egyes kísérletek sikereinek p valószínűségéhez:

4.26. Tétel (Bernoulli nagy számok törvénye) *Legyen $0 < p < 1$ rögzített, és adott n mellett $X \sim Binom(n, p)$. Ekkor minden $\varepsilon > 0$-ra*

$$\lim_{n\to\infty} \mathbf{P}\Big\{ \Big| \frac{X}{n} - p \Big| > \varepsilon \Big\} = 0.$$

A Nagy számok törvénye különböző körülmények között, több verzióban is bizonyítható, a jegyzet vége felé lesz szó ennek a tételnek általánosításairól (8.7. tétel).

Bizonyítás. Az egyszerűség kedvéért a bizonyítás során a $q = 1-p$ rövidítést használjuk. Legyenek $r \ge (n+1)p$ és $k \ge 1$ egészek. Ekkor (4.2)-t folytatva a súlyfüggvény értékek hányadosára

$$\frac{p_X(r+k)}{p_X(r+k-1)} = \frac{n-r-k+1}{r+k} \cdot \frac{p}{q} \le \frac{n-r}{r+k} \cdot \frac{p}{q} \le \frac{n-r}{r} \cdot \frac{p}{q} =: K.$$

Az itt definiált K szám kisebb egynél, mivel

$$K = \Big(\frac{n}{r} - 1\Big) \cdot \frac{p}{q} \le \Big(\frac{n}{(n+1)p} - 1\Big) \cdot \frac{p}{q} = \frac{n - np - p}{(n+1)p} \cdot \frac{p}{q} <$$
$$< \frac{n - np + 1 - p}{(n+1)p} \cdot \frac{p}{q} = \frac{(n+1) \cdot (1-p)}{(n+1)p} \cdot \frac{p}{q} = 1.$$

Ezt felhasználva

$$\begin{aligned}
\mathbf{P}\{X \ge r\} &= \sum_{k=0}^{n-r} p_X(r+k) = \\
&= \sum_{k=0}^{n-r} p_X(r) \cdot \underbrace{\frac{p_X(r+1)}{p_X(r)} \cdot \frac{p_X(r+2)}{p_X(r+1)} \cdots \frac{p_X(r+k)}{p_X(r+k-1)}}_{k \text{ darab}} \le \\
&\le \sum_{k=0}^{n-r} p_X(r) \cdot K^k = p_X(r) \cdot \frac{1 - K^{n-r+1}}{1-K} \le \frac{p_X(r)}{1-K}.
\end{aligned}$$

Következik $p_X(r)$ becslése, melyhez a 4.25. állítást használjuk. A feltevésünk szerint $r \ge (n+1)p$, ezért $r \ge \lfloor (n+1)p \rfloor$, tehát $\lfloor (n+1)p \rfloor$ és r között a súlyfüggvény csökkenő. Így minden $\lfloor (n+1)p \rfloor \le i \le r$ esetén $p_X(r) \le p_X(i)$, ezért egy viszonylag durva becsléssel

$$\begin{aligned}
1 &= \sum_{i=0}^{n} p_X(i) \ge \sum_{i=\lfloor (n+1)p \rfloor}^{r} p_X(i) \ge \sum_{i=\lfloor (n+1)p \rfloor}^{r} p_X(r) = \\
&= \big(r - \lfloor (n+1)p \rfloor + 1\big) \cdot p_X(r) \ge \\
&\ge \big(r - (n+1)p + 1\big) \cdot p_X(r) \ge (r - np) \cdot p_X(r), \text{ azaz} \\
p_X(r) &\le \frac{1}{r - np}.
\end{aligned}$$

Ezt és K definícióját felhasználva folytathatjuk a valószínűség becslését:

$$\mathbf{P}\{X \ge r\} \le \frac{1}{r - np} \cdot \frac{1}{1 - \frac{n-r}{r} \cdot \frac{p}{q}} = \frac{rq}{(r - np)^2}.$$

Adott ε és p mellett elég nagy n-re $n\varepsilon > p$ már teljesül, és ekkor élhetünk az $r = \lceil np + n\varepsilon \rceil$ (felső egészrész) választással a fenti becslésben, tehát

$$\begin{aligned}
\mathbf{P}\Big\{\frac{X}{n} - p > \varepsilon\Big\} &= \mathbf{P}\{X > np + n\varepsilon\} \le \mathbf{P}\{X \ge \lceil np + n\varepsilon \rceil\} \le \\
&\le \frac{\lceil np + n\varepsilon \rceil q}{\big(\lceil np + n\varepsilon \rceil - np\big)^2} \le \frac{(np + n\varepsilon + 1)q}{n^2\varepsilon^2} = \frac{pq}{\varepsilon^2 n} + \frac{q}{\varepsilon n} + \frac{q}{\varepsilon^2 n^2}.
\end{aligned}$$

A bizonyítás befejezéséhez szükségünk van X alsó becslésére is. Ehhez vegyük észre, hogy $Y := n - X$, a sikertelen kísérletek száma $\sim \mathrm{Binom}(n, q)$. Ezért az eddigiek alapján

$$\begin{aligned}\mathbf{P}\Big\{\frac{X}{n} - p < -\varepsilon\Big\} = \mathbf{P}\Big\{\frac{n-Y}{n} - p < -\varepsilon\Big\} = \mathbf{P}\Big\{\frac{-Y}{n} + 1 - p < -\varepsilon\Big\} = \\ = \mathbf{P}\Big\{\frac{Y}{n} - q > \varepsilon\Big\} = \frac{pq}{\varepsilon^2 n} + \frac{p}{\varepsilon n} + \frac{p}{\varepsilon^2 n^2}.\end{aligned}$$

Végül tehát

$$\begin{aligned}\mathbf{P}\Big\{\Big|\frac{X}{n} - p\Big| > \varepsilon\Big\} \le \mathbf{P}\Big\{\frac{X}{n} - p > \varepsilon\Big\} + \mathbf{P}\Big\{\frac{X}{n} - p < -\varepsilon\Big\} \le \\ \le \frac{2pq}{\varepsilon^2 n} + \frac{1}{\varepsilon n} + \frac{1}{\varepsilon^2 n^2} \le \frac{1}{2\varepsilon^2 n} + \frac{1}{\varepsilon n} + \frac{1}{\varepsilon^2 n^2},\end{aligned} \tag{4.3}$$

ahol a legutolsó lépésben kihasználtuk, hogy $pq = p(1-p)$ nem lehet nagyobb 1/4-nél.□

Vegyük észre, hogy a tételnél többet bizonyítottunk: bármely $\varepsilon > p/n$-re (4.3) igaz. Ha például $\varepsilon = \varepsilon(n)$ n-nek függvénye, és elég lassan csökken ahhoz, hogy $\varepsilon(n) \cdot \sqrt{n} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \infty$, még mindig igaz lesz, hogy

$$\mathbf{P}\Big\{\Big|\frac{X}{n} - p\Big| > \varepsilon(n)\Big\} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Alkalmazásként bebizonyítjuk Weierstrass approximációs tételét:

4.27. Tétel (Weierstrass approximációs tétel) *Legyen $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ folytonos függvény. Ekkor minden $\varepsilon > 0$-hoz létezik $n < \infty$ és $B_n(x)$ n-edfokú polinom, hogy*

$$\sup_{0\le x\le 1} |f(x) - B_n(x)| < \varepsilon.$$

Bizonyítás. Adott $x \in [0, 1]$-hez legyen $X \sim \mathrm{Binom}(n, x)$, és definiáljuk a

$$B_n(x) := \mathbf{E}\Big[f\Big(\frac{X}{n}\Big)\Big] = \sum_{i=0}^{n} f\Big(\frac{i}{n}\Big)\binom{n}{i}(1-x)^{n-i}x^i$$

x-ben n-edfokú *Bernstein-polinomot.* f folytonos egy zárt intervallumon, ezért korlátos, és a Heine tétel alapján egyenletesen is folytonos. Ezért $\varepsilon/2$-höz van olyan $\delta > 0$, hogy $|f(x) - f(y)| \le \varepsilon/2$ minden $0 \le x, y \le 1$, $|x - y| \le \delta$ esetén. Ezzel a δ-val

$$\begin{aligned}\big|f(x) - B_n(x)\big| = \big|f(x) - \mathbf{E}\big[f(X/n)\big]\big| = \big|\mathbf{E}\big[f(x) - f(X/n)\big]\big| \le \\ \le \big|\mathbf{E}\big[(f(x) - f(X/n)) \cdot \mathbf{1}\{|x - X/n| > \delta\}\big]\big| + \\ + \big|\mathbf{E}\big[(f(x) - f(X/n)) \cdot \mathbf{1}\{|x - X/n| \le \delta\}\big]\big| \le \\ \le 2M \cdot \mathbf{P}\{|x - X/n| > \delta\} + \varepsilon/2,\end{aligned}$$

ahol az utolsó lépésben az első tagban f-et a $[0, 1]$-en felvett M maximumával becsültük, a második tagban pedig az egyenletes folytonosságot használtuk és azt, hogy az indikátor sosem nagyobb 1-nél. Most (4.3)-at használva kapjuk, hogy

$$\bigl|f(x) - B_n(x)\bigr| \le 2M\Bigl[\frac{1}{2\delta^2 n} + \frac{1}{\delta n} + \frac{1}{\delta^2 n^2}\Bigr] + \varepsilon/2.$$

Adott ε-hoz és a hozzá választott δ-hoz van olyan nagy n, hogy a jobb oldal ε-nál kisebb legyen, ami bizonyítja a tételt. □

4.4. A Poisson eloszlás

4.28. Definíció *Legyen $\lambda > 0$ rögzített. Az X valószínűségi változó* Poisson eloszlású λ paraméterrel *($X \sim Poi(\lambda)$), ha nemnegatív egész értékeket vehet fel, és*

$$\mathbf{P}\{X = i\} = p(i) = \frac{\lambda^i}{i!} \cdot \mathrm{e}^{-\lambda}, \qquad i = 0,\, 1, .\, 2,\, \ldots$$

E függvény súlyfüggvény voltát a 4.5. példában már láttuk.

A Poisson eloszlás létjogosultságát javarészt az alábbi tétel adja:

4.29. Tétel (a binomiális eloszlás Poisson approximációja) *Legyen λ rögzített, és minden n-re $Y_n \sim Binom(n, p(n))$, ahol a $p = p(n)$ paraméter olyan, hogy $n \cdot p(n) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \lambda$. Ekkor Y_n eloszlása a $Poi(\lambda)$ eloszláshoz tart: minden $i \ge 0$-ra*

$$\lim_{n\to\infty} \mathbf{P}\{Y_n = i\} = \frac{\lambda^i}{i!} \cdot \mathrm{e}^{-\lambda}.$$

Bizonyítás. A rövidség kedvéért $p(n)$ hasát elhagyjuk.

$$\mathbf{P}\{Y_n = i\} = \binom{n}{i} \cdot p^i (1-p)^{n-i} = \frac{1}{i!} \cdot [np] \cdot [(n-1)p] \cdots [(n-i+1)p] \cdot \frac{(1-p)^n}{(1-p)^i}.$$

A szögletes zárójelekben szereplő tagokból i darab van, és mindegyik λ-hoz tart. A tört számlálója

$$(1-p)^n = \Bigl(1 - \frac{1}{1/p}\Bigr)^n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \mathrm{e}^{-\lambda}$$

az ismert

$$\lim_{n\to\infty} \Bigl(1 + \frac{1}{b_n}\Bigr)^{a_n} = \mathrm{e}^c, \qquad \text{amennyiben} \qquad a_n \to \infty,\ b_n \to \infty,\ \frac{a_n}{b_n} \to c$$

összefüggés miatt. A tört nevezője pedig 1-hez tart, mivel $p \to 0$ és i rögzített. □

A tétel feltételei azt jelentik, hogy egymástól független, nagy számú de igen valószínűtlen kísérletet végzünk. A kísérletek száma és a valószínűtlenség úgy viszonyulnak egymáshoz, hogy várhatóan $\mathbf{E}Y_n = n \cdot p(n) \simeq \lambda$ darab sikeres kísérletünk lesz. Ekkor a sikeres kísérletek száma Poi(λ) eloszlással közelíthető. Megjegyezzük, hogy a tételnek általánosításai is vannak arra az esetre, amikor a kísérletek gyengén függenek egymástól, és/vagy nem egyforma (de pici) valószínűségűek.

4.30. Állítás *Legyen $X \sim Poi(\lambda)$. Ekkor*

$$\mathbf{E}X = \mathbf{D}^2 X = \lambda.$$

Bizonyítás. A Poisson eloszlás k-adik *faktoriális momentumát* könnyen számolhatjuk:

$$\begin{aligned}\mathbf{E}[X \cdot (X-1) \cdots (X-k+1)] &= \sum_{i=0}^{\infty} i \cdot (i-1) \cdots (i-k+1) \cdot \frac{\lambda^i}{i!} \cdot \mathrm{e}^{-\lambda} = \\ &= \sum_{i=k}^{\infty} i \cdot (i-1) \cdots (i-k+1) \cdot \frac{\lambda^i}{i!} \cdot \mathrm{e}^{-\lambda} = \\ &= \sum_{i=k}^{\infty} \frac{\lambda^i}{(i-k)!} \cdot \mathrm{e}^{-\lambda} = \lambda^k \sum_{j=0}^{\infty} \frac{\lambda^j}{j!} \cdot \mathrm{e}^{-\lambda} = \lambda^k.\end{aligned}$$

Ezért $\mathbf{E}X = \lambda$, és

$$\mathbf{D}^2 X = \mathbf{E}X^2 - (\mathbf{E}X)^2 = \mathbf{E}[X(X-1)] + \mathbf{E}X - (\mathbf{E}X)^2 = \lambda^2 + \lambda - \lambda^2 = \lambda. \qquad \square$$

A Poisson approximációs tétel alapján ez az eredmény nem meglepő, hiszen ha $Y_n \sim$ Binom(n, p), ahol $np \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \lambda$, akkor $\mathbf{E}Y_n = np \to \lambda$ és $\mathbf{D}^2 Y_n = np(1-p) \to \lambda$. A binomiális eloszlásnál megismert módszerrel könnyen bizonyítható, és szintén nem meglepő, hogy

4.31. Állítás *A Poi(λ) eloszlás módusza $\lfloor \lambda \rfloor$. Amennyiben λ egész, akkor λ és $\lambda - 1$ egyaránt móduszok.*

4.32. Példa *Szintén a Poisson approximációs tétel alapján Poisson eloszlással igen jól közelíthetők a következő valószínűségi változók:*

- *Sajtóhibák száma egy oldalon: minden betű pici valószínűséggel van elgépelve, de a több ezer betű közül várhatóan néhány esetben azért lesz hiba.*
- *Egy nagyváros 100 év feletti lakosainak száma. A sok lakó kis eséllyel éri meg a 100 éves kort.*
- *Egy telefonos ügyfélszolgálatra egy nap befutó hívások száma. A szolgáltatónak sok ügyfele van, akik mind pici valószínűséggel telefonálnak egy adott napon.*

- *Egy postahivatal ügyfeleinek száma egy napon.*

4.33. Példa *Egy könyvben oldalanként átlagosan 1/2 sajtóhuba van. Mi a valószínűsége, hogy a következő oldalon legalább három lesz?*

Az egy oldalon levő sajtóhibák X száma Poisson eloszlású, és tudjuk, hogy $\mathbf{E}X = \lambda = 1/2$. A válasz tehát

$$\mathbf{P}\{X \geq 3\} = 1 - \mathbf{P}\{X \leq 2\} = 1 - \mathbf{P}\{X = 0\} - \mathbf{P}\{X = 1\} - \mathbf{P}\{X = 2\} =$$
$$= 1 - \frac{(1/2)^0}{0!} \cdot \mathrm{e}^{-1/2} - \frac{(1/2)^1}{1!} \cdot \mathrm{e}^{-1/2} - \frac{(1/2)^2}{2!} \cdot \mathrm{e}^{-1/2} \simeq 0.014.$$

A Poisson approximáció a valószínűségi változó kis értékeinek valószínűségeire $n \simeq 10$ körül kezd a gyakorlatban működni.

4.34. Példa *Egy dobozban 10 csavar van, melyek mindegyike 0.1 valószínűséggel hibás, egymástól függetlenül. Mi a valószínűsége, hogy a dobozban legfeljebb egy hibás csavar lesz?*

Legyen X a hibás csavarok száma, ekkor $X \sim \mathrm{Binom}(n,\, p)$. Az egzakt válasz

$$\mathbf{P}\{X \leq 1\} = \binom{10}{0} \cdot 0.1^0 \cdot 0.9^{10} + \binom{10}{1} \cdot 0.1^1 \cdot 0.9^9 \simeq 0.7361.$$

Poisson approximációval $\lambda = np = 10 \cdot 0.1 = 1$ paraméterrel ugyanerre a kérdésre a

$$\mathbf{P}\{X \leq 1\} \simeq \frac{1^0}{0!} \cdot \mathrm{e}^{-1} + \frac{1^1}{1!} \cdot \mathrm{e}^{-1} \simeq 0.7358$$

választ kapjuk.

4.5. A Poisson folyamat

A Poisson folyamat definiálásához szükségünk lesz a következő fogalomra:

4.35. Definíció *Egy $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvény h-ban kis ordo h^k azaz $g(h) = \mathfrak{o}(h^k)$ amikor $h \to 0$, hogyha*

$$\lim_{h \to 0} \frac{g(h)}{h^k} = 0.$$

Például $h^2 = \mathfrak{o}(h)$, de $h \neq \mathfrak{o}(h)$, és $\sqrt{h} \neq \mathfrak{o}(h)$. Egy függvény h-ban $\mathfrak{o}(1)$ amikor $h \to 0$ pontosan akkor, ha nullához tart nullában.

Ebben a részben időben lezajló véletlen eseményeket fogunk tekinteni.

4.36. Definíció (Poisson folyamat) *Legyen $\lambda > 0$ rögzített, és tekintsünk időben bekövetkező véletlen eseményeket, melyekre*

1. *adott h hosszúságú időintervallumban egy esemény bekövetkezésének valószínűsége $\lambda \cdot h + \mathfrak{o}(h)$;*
2. *adott h hosszúságú időintervallumban kettő vagy több esemény bekövetkezésének valószínűsége $\mathfrak{o}(h)$;*
3. *diszjunkt időintervallumokban bekövetkező események száma független valószínűségi változók.*

Ekkor az események beérkezése egy Poisson(λ) folyamat *szerint történik.*

A Poisson folyamat egy viszonylag természetes definíciója olyan eseményeknek, melyek időben függetlenül, valamilyen sűrűséggel történnek.

4.37. Állítás *A Poisson(λ) folyamatban egy adott t hosszúságú intervallumban bekövetkező események $N(t)$ száma Poi($\lambda \cdot t$) eloszlású.*

Bizonyítás. Az általános eset helyett mi egy picivel kevesebbet bizonyítunk: feltesszük, hogy a folyamat időben homogén, azaz annak valószínűsége, hogy egy h hosszúságú intervallumba i darab esemény kerül független attól, hogy hol van a h hosszúságú intervallumunk.

Osszuk fel a t hosszúságú intervallumot n darab t/n hosszúságú kis intervallumra, és definiáljuk $i = 1, 2, \ldots, n$-re az

$$\begin{aligned} E_i &= \{\text{az } i. \text{ pici intervallum legalább 2 eseményt tartalmaz}\}, \\ F_i &= \{\text{az } i. \text{ pici intervallum pontosan 1 eseményt tartalmaz}\} \end{aligned}$$

eseményeket. Ekkor

$$\mathbf{P}\{N(t) = k\} = \mathbf{P}\Big\{\{N(t) = k\} \cap \Big(\bigcup_{i=1}^{n} E_i\Big)\Big\} + \mathbf{P}\Big\{\{N(t) = k\} \cap \Big(\bigcup_{i=1}^{n} E_i\Big)^c\Big\}.$$

Az első tag eltűnik az $n \to \infty$ határátmenetben:

$$\mathbf{P}\Big\{\{N(t) = k\} \cap \Big(\bigcup_{i=1}^{n} E_i\Big)\Big\} \le \mathbf{P}\Big\{\bigcup_{i=1}^{n} E_i\Big\} \le \sum_{i=1}^{n} \mathbf{P}\{E_i\} = \sum_{i=1}^{n} \mathfrak{o}\Big(\frac{t}{n}\Big) = \mathfrak{o}(t) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0. \tag{4.4}$$

A második tagot feltételes valószínűséggel kezeljük:

$$\mathbf{P}\Big\{\{N(t) = k\} \cap \Big(\bigcup_{i=1}^{n} E_i\Big)^c\Big\} = \mathbf{P}\Big\{\{N(t) = k\} \,\Big|\, \Big(\bigcup_{i=1}^{n} E_i\Big)^c\Big\} \cdot \mathbf{P}\Big\{\Big(\bigcup_{i=1}^{n} E_i\Big)^c\Big\}. \tag{4.5}$$

A feltétel azt jelenti, hogy mindegyik pici intervallum 0 vagy 1 eseményt tartalmaz. Mivel az intervallumokban található események száma független, e feltétel mellett annak valószínűsége, hogy egy adott intervallum 1 eseményt tartalmaz:

$$p := \mathbf{P}\Big\{F_j \,\Big|\, \Big(\bigcup_{i=1}^{n} E_i\Big)^c\Big\} = \mathbf{P}\{F_j \,|\, E_j^c\} = \frac{\mathbf{P}\{F_j\}}{\mathbf{P}\{E_j^c\}} = \frac{\lambda \cdot t/n + \mathfrak{o}(t/n)}{1 - \mathfrak{o}(t/n)}.$$

A feltétel mellett annak valószínűsége, hogy egy adott intervallum 0 eseményt tartalmaz (ez pont az $E_j^c - F_j$ esemény):

$$\mathbf{P}\Big\{E_j^c - F_j \,\Big|\, \Big(\bigcup_{i=1}^{n} E_i\Big)^c\Big\} = \mathbf{P}\Big\{E_j^c \,\Big|\, \Big(\bigcup_{i=1}^{n} E_i\Big)^c\Big\} - \mathbf{P}\Big\{F_j \,\Big|\, \Big(\bigcup_{i=1}^{n} E_i\Big)^c\Big\} = 1 - p.$$

Feltételünk mellett az F_j események még mindig függetlenek. Ezzel beláttuk, hogy a feltétel mellett $N(t)$ vagyis azon pici intervallumok száma, melyekben pontosan egy esemény van, Binom$(n,\, p)$ eloszlású a fent definiált p-vel. Mivel

$$np = n \cdot \frac{\lambda \cdot t/n + \mathfrak{o}(t/n)}{1 - \mathfrak{o}(t/n)} = \frac{\lambda t + \mathfrak{o}(t)}{1 - \mathfrak{o}(t/n)} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \lambda t,$$

a (4.5)-beli feltételes valószínűség egy Poisson valószínűséghez tart:

$$\lim_{n\to\infty} \mathbf{P}\Big\{\{N(t) = k\} \,\Big|\, \Big(\bigcup_{i=1}^{n} E_i\Big)^c\Big\} = \frac{(\lambda t)^k}{k!} \cdot \mathrm{e}^{-\lambda t}.$$

Végül (4.4) alapján a (4.5) jobb oldalán található

$$\mathbf{P}\Big\{\Big(\bigcup_{i=1}^{n} E_i\Big)^c\Big\} = 1 - \mathbf{P}\Big\{\bigcup_{i=1}^{n} E_i\Big\}$$

valószínűség egyhez tart. A különböző tagokat összeszedve

$$\mathbf{P}\{N(t) = k\} = \lim_{n\to\infty} \mathbf{P}\{N(t) = k\} = \frac{(\lambda t)^k}{k!} \cdot \mathrm{e}^{-\lambda t}$$

hiszen a bal oldal nem tartalmazott n-et. □

A Poisson folyamatnak sok egyéb szép definiáló és származtatott tulajdonsága van, melyeket itt most nem részletezünk. Ez a folyamat központi jelentőségű a sztochasztikus folyamatok elméletében. A Poisson folyamat és a megfelelő Poisson eloszlás több dimenzióra is kiterjeszthető.

4.38. Példa *Poisson folyamattal jól modellezhetők többek közt*

- *legalább adott erősségű földrengések előfordulása;*
- *radioaktív sugárzások részecskéinek becsapódása egy detektorba;*
- *esőcseppek becsapódása egy járólapra;*
- *fák elhelyezkedése az erdőben (síkbeli Poisson folyamat);*
- *látható csillagok elhelyezkedése az égbolton.*

4.39. Példa *Egy városban átlagosan 2 (nem túl erős) földrengés történik hetente.*

1. *Mi a valószínűsége, hogy a következő két hétben legalább 3 földrengés lesz?*
2. *Mi a valószínűsége, hogy t-nél többet kell várni a következő földrengésre?*

A feladat alapján a földrengések $\lambda = 2$ paraméterű Poisson folyamat szerint történnek, hiszen $N(1) \sim \mathrm{Poi}(1 \cdot \lambda)$ alapján $\mathbf{E}N(1) = \lambda = 2$.

(1) Tudjuk, hogy a következő két hétben $N(2) \sim \mathrm{Poi}(2 \cdot 2)$ darab földrengés lesz, így

$$\begin{aligned}\mathbf{P}\{N(2) \geq 3\} &= 1 - \mathbf{P}\{N(2) = 0\} - \mathbf{P}\{N(2) = 1\} - \mathbf{P}\{N(2) = 2\} = \\ &= 1 - \frac{4^0}{0!} \cdot \mathrm{e}^{-4} - \frac{4^1}{1!} \cdot \mathrm{e}^{-4} - \frac{4^2}{2!} \cdot \mathrm{e}^{-4} \simeq 0.76.\end{aligned}$$

(2) Legyen T a következő földrengésig eltelt idő. Ekkor

$$\mathbf{P}\{T > t\} = \mathbf{P}\{N(t) = 0\} = \mathrm{e}^{-\lambda t} = \mathrm{e}^{-2t}.$$

4.6. A geometriai eloszlás

4.40. Definíció *Független kísérleteket végzünk, melyek mindegyike p valószínűséggel sikerül. Legyen X annak a kísérletnek a sorszáma, amelyik először sikerül. Ekkor X* geometriai eloszlású p paraméterrel *($X \sim$ Geom(p)).*

(Ez az "optimista" geometriai eloszlás definíciója, a "pesszimista" geometriai változó a kudarcokat számolja az első siker előtt, tehát eggyel kevesebb, mint az "optimista" változó.) Nyilvánvaló a következő állítás:

4.41. Állítás *Ha $X \sim$ Geom(p), akkor*

$$\mathbf{P}\{X = n\} = p(n) = (1-p)^{n-1} \cdot p, \qquad n = 1, 2, \ldots$$

A geometriai sor összegzésével könnyen látható, hogy ez valóban súlyfüggvény.

4.42. Állítás *Legyen $X \sim Geom(p)$, és $k \geq 1$ egész. Ekkor*

$$\mathbf{P}\{X \geq k\} = (1-p)^{k-1}.$$

Bizonyítás. A $\sum_{n=k}^{\infty}(1-p)^{n-1} \cdot p$ geometriai sor összegzésén kívül ez onnan is jól látható, hogy a jobb oldal annak valószínűsége, hogy az első $k-1$ kísérlet mind kudarcot vall. Ez pedig pontosan az az esemény, hogy az első sikerhez legalább k kísérlet szükséges. □

A geometriai eloszlás egy érdekes tulajdonsága a következő:

4.43. Állítás *A geometriai eloszlás* örökifjú*, azaz ha $X \sim Geom(p)$, akkor minden $k \geq 1$, $n \geq 0$-ra*

$$\mathbf{P}\{X \geq n+k \,|\, X > n\} = \mathbf{P}\{X \geq k\}.$$

Szóban: feltéve, hogy az első sikeres kísérletre n-nél többet kell várni, annak valószínűsége, hogy n után még legalább k kísérletet kell várni ugyanaz, mint ha legelölről kezdenénk a kísérletsorozatot. Az állítás nem azt mondja, hogy $\mathbf{P}\{X \geq n+k\}$ egyenlő lenne $\mathbf{P}\{X \geq k\}$-el, ez nyilvánvalóan értelmetlen volna!

Bizonyítás. A geometriai eloszlás jelentéséből nyilvánvaló, de az előző állításból is könnyen adódik:

$$\mathbf{P}\{X \geq n+k \,|\, X > n\} = \frac{\mathbf{P}\{X \geq n+k\}}{\mathbf{P}\{X > n\}} = \frac{(1-p)^{n+k-1}}{(1-p)^n} = (1-p)^{k-1} = \mathbf{P}\{X \geq k\}.$$

□

4.44. Állítás *Legyen $X \sim Geom(p)$, ekkor*

$$\mathbf{E}X = \frac{1}{p}, \qquad \text{és} \qquad \mathbf{D}^2X = \frac{1-p}{p^2}.$$

Bizonyítás. Ismét a faktoriális momentumokat könnyű számolni:

$$n \cdot (n-1) \cdots (n-k+1) = \frac{\mathrm{d}^k}{\mathrm{d}t^k} t^n \Big|_{t=1},$$

így $0 < tp < 1$ esetén

$$\begin{aligned}
\mathbf{E}[X\cdot(X-1)\cdots(X-k+1)] &= \sum_{n=1}^{\infty} n\cdot(n-1)\cdots(n-k+1)\cdot(1-p)^{n-1}\cdot p = \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} n\cdot(n-1)\cdots(n-k+1)\cdot(1-p)^{n-1}\cdot p = \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\mathrm{d}^k}{\mathrm{d}t^k} t^n\Big|_{t=1}\cdot(1-p)^{n-1}\cdot p = \\
&= \frac{\mathrm{d}^k}{\mathrm{d}t^k}\Big(\sum_{n=0}^{\infty} t^n\cdot(1-p)^{n-1}\cdot p\Big)\Big|_{t=1} = \\
&= \frac{\mathrm{d}^k}{\mathrm{d}t^k}\Big(\frac{p}{1-p}\cdot\frac{1}{1-t(1-p)}\Big)\Big|_{t=1} = \\
&= k!\cdot p\cdot(1-p)^{k-1}\frac{1}{[1-t(1-p)]^{k+1}}\Big|_{t=1} \\
&= k!\cdot\frac{(1-p)^{k-1}}{p^k}.
\end{aligned}$$

Ebből $\mathbf{E}X = 1/p$ és

$$\mathbf{D}^2X = \mathbf{E}X^2 - (\mathbf{E}X)^2 = \mathbf{E}[X(X-1)] + \mathbf{E}X - (\mathbf{E}X)^2 = 2\frac{1-p}{p^2} + \frac{1}{p} - \frac{1}{p^2} = \frac{1-p}{p^2}.$$

□

4.45. Példa *Egy urnában van N fehér és M fekete golyó. Visszatevéssel húzunk amíg az első fehér golyó a kezünkbe akad. Mi a valószínűsége, hogy k-szor húzunk? Mi a húzásaink számának várható értéke?*

Mivel a golyókat húzások után visszatesszük, minden húzásnál $p = N/[N+M]$ eséllyel húzunk fehér golyót, az előző húzásoktól függetlenül. Az első fehér golyó húzásának az ideje Geom(p)=Geom($\frac{N}{N+M}$) eloszlású, így annak valószínűsége, hogy k-szor húzunk

$$\Big(\frac{M}{N+M}\Big)^{k-1}\cdot\frac{N}{N+M},$$

és várhatóan $1/p = [N+M]/N$ húzás szükséges.

Röviden kitérünk még két nevezetes diszkrét eloszlásra:

4.7. A negatív binomiális eloszlás

4.46. Definíció *Független kísérleteket végzünk, melyek mindegyike p valószínűséggel sikerül. Legyen X az ahhoz szükséges húzások száma, hogy az r-edik sikeres kísérletet lássuk. Ekkor X* negatív binomiális eloszlású *p* és *r* paraméterekkel *($X \sim Neg.bin(p, r)$).*

4.47. Állítás *Legyen $X \sim Neg.bin(p, r)$, ekkor súlyfüggvénye*

$$\mathbf{P}\{X = n\} = p(n) = \binom{n-1}{r-1} \cdot p^r \cdot (1-p)^{n-r}, \qquad n = r,\, r+1,\, \dots .$$

Bizonyítás. Az az esemény, hogy az n-edik kísérlet hozza az r-dik sikert pontosan azt jelenti, hogy az első $n-1$ kísérletből $r-1$ sikerült (ez egy binomiális valószínűség), majd az n. kísérlet is sikeres lett (ennek valószínűsége p). Ez alapján a súlyfüggvény fenti alakja adódik. □

Megjegyezzük, hogy az X negatív binomiális valószínűségi változó az r-edik sikerre való várakozás ideje. Mint ilyen, várakozási idők összegeként is felfogható: legyen Y_1 az első sikerre való várakozás ideje. Legyen Y_i a várakozási idő az i-dik és az $i-1$-dik siker között, $2 \le i \le r$. Ekkor $X = Y_1 + Y_2 + \dots + Y_r$, és az Y_i valószínűségi változók egymástól független (bár ezt a tulajdonságot csak később definiáljuk) geometriai eloszlásúak. Ebből a szemszögből nem meglepő, bár csak később fogjuk látni a pontos okát (7.10. és 7.22. példák), hogy

4.48. Állítás *Legyen ($X \sim Neg.bin(p, r)$). Ekkor*

$$\mathbf{E}X = \frac{r}{p}, \qquad \mathbf{D}^2X = r \cdot \frac{1-p}{p^2}.$$

4.8. A hipergeometriai eloszlás

4.49. Definíció *Az erdő N őze közül m-et megjelöltek. Az N őz közül most befogunk n-et, mindegyiket egyenlő valószínűséggel. Legyen X a megjelölt őzek száma a befogottak között. Ekkor X* hipergeometriai eloszlású.

4.50. Állítás *A hipergeometriai eloszlás súlyfüggvénye*

$$\mathbf{P}\{X = i\} = p(i) = \frac{\binom{m}{i} \cdot \binom{N-m}{n-i}}{\binom{N}{n}} = \frac{\binom{n}{i} \cdot \binom{N-n}{m-i}}{\binom{N}{m}}. \tag{4.6}$$

A súlyfüggvény nulla ott, ahol az őzek valamilyen csoportja (megjelöltek-jelöletlenek ill. befogottak-nem befogottak) negatív lenne, erről a számláló binomiális együtthatói gondoskodnak.

A két alak ekvivalens volta közvetlen számolással, és kombinatorikai érveléssel is bizonyítható: X azt számolja meg, hogy egy N elemű halmaz egy m és egy n méretű véletlen részhalmazának hány közös eleme van. (Gondoljuk meg, hogy X eloszlásának szempontjából ezzel ekvivalens, ha csak az egyik részhalmaz véletlen.) Ezért a súlyfüggvénynek szimmetrikusnak kell lennie az n és m paraméterek felcserélésére. Más szóval befoghatnánk először az n őzet, majd szabadon engedve őket megjelölhetnénk az N őz közül m-et véletlenszerűen; a befogott és megjelölt őzek X számának eloszlása ettől nem változna.

Bizonyítás nélkül közöljük, hogy a fenti paraméterek mellett

$$\mathbf{E}X = \frac{nm}{N}, \qquad \text{és} \qquad \mathbf{D}^2X = \frac{nm}{N} \cdot \Big[\frac{(n-1)(m-1)}{N-1} + 1 - \frac{nm}{N}\Big].$$

A várható értéket azért kiszámoljuk a 7.11. példában.

4.9. Feladatok

4.1. 5 férfit és 5 nőt rangsorolnak egy vizsgán. Tegyük fel, hogy nincs két egyforma pontszám, és mind a 10! elrendezés egyformán valószínű. Legyen X a legjobb nő helyezése (például $X = 1$ azt jelenti, hogy a legjobb vizsgázó egy nő). Határozzuk meg X eloszlását.

4.2. Öt játékos, A, B, C, D, E között véletlenszerűen szétosztjuk a számokat 1-től 5-ig, ismétlődés nélkül. Először A és B mérkőzik: akinek magasabb a száma, továbbjut. Az így továbbjutó most C-vel mérkőzik, azután a közülük továbbjutó D-vel, majd az itt nyertes E-vel. Legyen X az a szám, ahány mérkőzést A nyer. Határozzuk meg X eloszlását.

4.3. Egy családban $n \geq 1$ gyermek αp^n valószínűséggel van, ahol $\alpha \leq (1-p)/p$.

(a) A családok hányadrészében nincs gyermek?

(b) Ha a gyermekek egymástól függetlenül egyforma eséllyel fiúk és lányok, akkor a családok hányadrészében lesz pontosan k fiú (és tetszőleges számú lány)?

4.4. Három kockával dobva, mennyi a valószínűsége annak, hogy a dobott számok összege 10-nél nagyobb?
Megjegyzés: Ez volt a nyerés feltétele a XVII. században divatos "passe dix" játékban.

4.5. Egy ketyere két különböző okból romolhatott el. Az első ok ellenőrzése E_1 forintba kerülne, és ha valóban az a probléma, akkor a javítása J_1 forint. Hasonlóan, a második ok ellenőrzése E_2 forintba kerül, és ha az a probléma, akkor a javítás J_2 forint. (Ha viszont az először ellenőrzött oknál nincs probléma, akkor a másik lehetséges okot először ellenőriznünk kell, majd javítanunk.) Legyen p és $1-p$ annak valószínűségei, hogy a ketyere az első illetve a második okból romlott el. Határozzuk meg, mely E_1, E_2, J_1, J_2, p értékek mellett érdemesebb várhatóan az első okkal kezdeni az ellenőrzést, és melyeknél a második okkal.

4.6. 4 buszon összesen 148 tanuló utazik. Az egyes buszok rendre 40, 33, 25 és 50 tanulót szállítanak. Válasszunk ki véletlenszerűen egy tanulót; ekkor jelölje X azt, hogy hány tanuló utazik azon a buszon, amelyik a kiválasztott tanulót szállítja. Válasszunk véletlenszerűen egy sofőrt. Y jelölje azt, hogy a sofőr buszán hány tanuló utazik.

(a) Mit gondolunk, X vagy Y várható értéke nagyobb? Miért?

(b) Számoljuk ki $\mathbf{E}(X)$-et és $\mathbf{E}(Y)$-t!

(c) Számoljuk ki $\mathbf{D}^2(X)$-et és $\mathbf{D}^2(Y)$-t is!

4.7. Egy nagy felmérés eredményeként kiderült, hogy egy közösségben családonként átlagosan 2.4 gyerek van, a gyerekeknek viszont átlagosan 1.55 testvérük van. Mennyi a családonkénti gyermekszám szórása?

4.8. A és B a következő játékot játssza: A gondol 1-re vagy 2-re, ezt leírja majd B-nek ki kell találnia, melyik számra gondolt A. Ha az A által leírt szám i és B jól tippelt, akkor B i egységet kap A-tól. Ha B melléfog, akkor ő fizet A-nak $\frac{3}{4}$-t. Ha B randomizálja tippjét, azaz p valószínűséggel tippel 1-re és $1-p$ valószínűséggel 2-re, határozzuk meg nyereménye várható értékét, amennyiben

(a) az A által leírt szám az 1,

(b) az A által leírt szám a 2.

Milyen p érték maximalizálja B minimális várható nyereményét, és mi ez a maximin érték? (Figyeljük meg, hogy B várható nyereménye nem csak p-től függ, hanem attól is, hogy mit csinál A.)
Tekintsük most az A játékost. Tegyük fel, hogy ő is randomizálja a döntését, és q valószínűséggel gondol 1-re. Mennyi A várható vesztesége,

(a) ha B 1-re tippel, ill.

(b) ha B 2-re tippel?

Mely q értékkel tudja A minimalizálni a maximális várható veszteségét? Mutassuk meg, hogy A maximális várható veszteségének minimuma egyenlő B minimális várható nyereségének maximumával! Ezt az eredményt hívják minimax tételnek, ami a játékelmélet egyik alapvető eredménye, és általánosan először Neumann János fogalmazta meg. A közös értéket a játék értékének hívják (B számára).

4.9. Egy gép véletlenszerűen választ 1 és 10 közötti számot, amit nekünk kell kitalálni, úgy, hogy kérdéseket teszünk fel, amire a gép igennel vagy nemmel válaszol. Számoljuk ki, várhatóan hány kérdést kell a gépnek feltennünk,

(a) ha csak rákérdezhetünk, azaz azt kérdezzük, hogy „A gondolt szám i?” $i = 1, 2, \dots, 10$, illetve

(b) ha kérdéseinkkel mindig megpróbáljuk megfelezni a fennmaradó lehetséges számok körét.

4.10. (Szentpétervári paradoxon) Egy érmével addig dobunk, míg a fej oldalára nem esik. Ha az n-edik feldobás eredménye fej, akkor a játékos 2^n forintot nyer. Mutassuk meg, hogy a nyeremény várható értéke végtelen!

(a) Megéri-e egy játékért 1 millió forintot fizetni?

(b) Megéri-e játékonként 1 millió forintot fizetni, ha addig játszunk, amíg csak akarunk, és a játék befejezéskor van elszámolás?

4.11. Minden este több különböző meteorológus jósolja meg, mekkora valószínűséggel fog holnap esni az eső. Hogy megítéljük, mennyire jók a meteorológusok, a következőképpen pontozzuk őket: ha egy meteorológus p valószínűséggel jósolt esőt, akkor

$$\begin{array}{ll} 1-(1-p)^2 & \text{pontot kap, ha valóban esik másnap,} \\ 1-p^2 & \text{pontot kap, ha nem esik.} \end{array}$$

Ezek után egy rögzített időszakban mérjük az egyes meteorológusok átlagpontszámát, és a legjobb előrejelző a legmagasabb pontszámot kapott meteorológus lesz. Tegyük fel, hogy az egyik meteorológus tudja ezt, és maximalizálni szeretné átlagát. Ha azt gondolja, hogy p^* valószínűséggel fog esni holnap, mekkora p értéket érdemes jelentenie?

4.12. Legyen $\mathbf{E}(X) = 1$ és $\mathbf{D}^2(X) = 5$, számoljuk ki

(a) $\mathbf{E}(2+X)^2$-t és

(b) $\mathbf{D}^2(4+3X)$-t.

4.13. N egy nemnegatív egész értékű valószínűségi változó. Mutassuk meg, hogy

$$\mathbf{E}(N) = \sum_{i=1}^{\infty} \mathbf{P}\{N \geq i\}.$$

(*Tipp:* $\sum_{i=1}^{\infty} \mathbf{P}\{N \geq i\} = \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{k=i}^{\infty} \mathbf{P}\{N = k\}$. *És most szummacsere!*)

4.14. N egy nemnegatív egész értékű valószínűségi változó. Mutassuk meg, hogy

$$\sum_{i=1}^{\infty} i\mathbf{P}\{N > i\} = \frac{1}{2}\big(\mathbf{E}(N^2) - \mathbf{E}(N)\big).$$

4.15. Egy m családból álló közösségben n_i családban van i gyerek $(\sum_{i=1}^{r} n_i = m)$. Legyen X egy véletlenszerűen választott családban a gyerekek száma. Válasszunk ki véletlenszerűen a $\sum_{i=1}^{r} in_i$ gyerek közül egyet; jelölje Y azt, hogy a kiválasztott gyerek családjában hány gyerek van. Mutassuk meg, hogy $\mathbf{E}(Y) \geq \mathbf{E}(X)$.

4.16. Véletlenszerűen elhelyezünk egy huszárt egy üres sakktáblára. Mennyi a lehetséges lépései számának a várható értéke?

4.17. Tegyük fel, hogy repülés közben egy repülőgép motorjai egymástól (teljesen) függetlenül $1-p$ valószínűséggel hibásodnak meg. Ha egy repülőnek a repüléshez a motorjainak legalább felére van szüksége, milyen p értékekre biztonságosabb egy ötmotoros repülőgép, mint egy hárommotoros?

4.18. 10-szer feldobunk egy hamis pénzérmét, ami p valószínűséggel ad fejet. Ha tudjuk, hogy összesen 6-szor lett fej az eredmény, mi a valószínűsége, hogy az első 3 eredmény rendre

(a) F, I, I (azaz az első fej, a második és a harmadik írás);

(b) I, F, I?

4.19. Egy bulvárlapban oldalanként várhatóan 0.2 nyomtatási hiba van. Mi a valószínűsége annak, hogy a következő oldalon

(a) 0,

(b) 2 vagy több hiba van?

Indokoljuk a választ!

4.20. Egy államban az öngyilkossági ráta 1 öngyilkosság per 100 000 lakos per hónap. Vizsgáljuk meg az állam egy 400 000 lakosú városát!

(a) Mi a valószínűsége annak, hogy egy adott hónapban több, mint 7 ember lesz öngyilkos?

(b) Mi a valószínűsége annak, hogy egy adott évben legalább 2 hónapban lesz több, mint 7 öngyilkosság?

(c) Legyen a mostani hónap az 1., mi a valószínűsége annak, hogy először az i. hónapban lesz több, mint 7 öngyilkosság? ($i \geq 1$)

Milyen feltevésekkel éltünk?

4.21. Legyen X λ paraméterű Poisson eloszlású valószínűségi változó. Mutassuk meg, hogy $\mathbf{P}\{X = i\}$ i növekedésével először nő, majd monoton csökken, a maximumát a $i = \lfloor \lambda \rfloor$-nél veszi fel. (*Tipp: tekintsük* $\mathbf{P}\{X = i\}/\mathbf{P}\{X = i - 1\}$*-et.*)

4.22. Legyen X λ paraméterű Poisson eloszlású valószínűségi változó. Mutassuk meg, hogy

$$\mathbf{P}\{X\text{páros}\} = \frac{1}{2}(1 + \mathrm{e}^{-2\lambda}).$$

4.23. Átlagosan hány mazsolának kell egy sütiben lennie, ha azt kívánjuk elérni, hogy egy véletlenszerűen választott sütiben legalább 0.99 valószínűséggel legyen (legalább egy szem) mazsola?

4.24. Egy erdő átlagos sűrűsége: 16 fa 100 m^2-enként. A fák törzse teljesen szabályos, 20 cm átmérőjű kör alapú henger. Egy puskagolyót lövünk ki célzás nélkül, az erdő szélétől 120 m-re, kifelé az erdőből. Mennyi annak a valószínűsége, hogy eltalálunk egy fatörzset?
(Tekintsünk el attól az apró zavaró tényezőtől, hogy a fák alapköreinek középpontjai min. 20 cm távolságban vannak.)

4.25. Számítsuk ki az $(1 + X)^{-1}$ valószínűségi változó várható értékét a következő esetekben:

(a) ha X $\mathrm{Binom}(n, p)$ eloszlású;

(b) ha X $\mathrm{Poi}(\lambda)$ eloszlású.

(*Tipp: integráljunk valami szépet.*)

4.26. Lovas gátversenyen a lovasok körpályán versenyeznek, és a ló a pályán elhelyezett sok akadály mindegyikét egymástól függetlenül azonos valószínűséggel veri le. Ha 5% annak valószínűsége, hogy a lovas hibátlanul teljesít egy kört, mennyi az esélye, hogy egy körben legfeljebb három akadályt ver le?

4.27. Egy újságkihordó 100 forintért veszi és 150 forintért adja el az újságokat. Az el nem adott lapokat nem vásárolják tőle vissza. Ha az újságokra a napi igény binomiális eloszlású véletlen változó, $n = 10, p = \frac{1}{3}$ értékekkel, körülbelül hány lapot vegyen, ha várható profitját szeretné maximalizálni?

4.28. Tegyük fel, hogy 9 szavazat szükséges ahhoz, hogy egy 12 tagú esküdtszék elítélje a vádlottat. Tegyük fel továbbá, hogy egy esküdt 0.2 valószínűséggel szavaz ártatlannak egy bűnöst, 0.1 valószínűséggel szavaz bűnösnek egy ártatlant. Ha mindegyik esküdt a többitől függetlenül dönt, és a vádlottak 65 százaléka bűnös, mekkora a valószínűsége annak, hogy jól dönt a bíróság? Mekkora hányadát ítélik el a vádlottaknak?

4.29. Hány embert kell meghívnom ahhoz, hogy több, mint 50 százalék legyen annak az esélye, hogy a meghívottak között van olyan, aki velem egy napon született?

4.30. Legyen X Binom(n,p) eloszlású valószínűségi változó. Milyen p értékre lesz maximális $\mathbf{P}\{X = k\}, k = 0, 1, \ldots, n$? Ez arra példa, hogy a statisztikában hogyan becsülik meg p értékét, ha egy Binom(n,p) eloszlású valószínűségi változó megfigyelt értéke k. Ha feltesszük, hogy n ismert, akkor p-t azzal a $\widehat{p}$ értékkel becsüljük, amire $\mathbf{P}\{X = k\}$ maximális. Ezt a módszert hívják maximum likelihood becslésnek.

4.31. Tegyük fel, hogy egy adott időben történt események száma λ paraméterű Poisson valószínűségi változó. Mutassuk meg, hogy ha minden eseményt p valószínűséggel számolunk, függetlenül a többi eseménytől, akkor a megszámolt események száma λp paraméterű Poisson valószínűségi változó! Emellett adjunk intuitív érvelést arra, hogy miért kell ennek így lennie.
Az előzőek alkalmazására példa: Tegyük fel, hogy egy adott terület uránlelőhelyeinek száma Poi(10) eloszlású véletlen változó. Minden lelőhelyet a többitől függetlenül $\frac{1}{50}$ valószínűséggel fedeznek fel. Számoljuk ki annak a valószínűségét, hogy (a) pontosan 1, (b) legalább 1 és (c) legfeljebb 1 lelőhelyet fedeznek fel az adott idő alatt.

4.32. 1000 megkülönböztethető golyót helyezünk véletlenszerűen 10000 dobozba. Mennyi annak a valószínűsége, hogy az első 25 dobozba legalább 4 golyó essék?

4.33. Bizonyítsuk be és értelmezzük a valószínűségszámítás terminusaiban a következő súlyfüggvényekre vonatkozó azonosságokat:

$$\sum_{l=0}^{k} p_{\mathrm{Binom}(n_1,p)}(l) \cdot p_{\mathrm{Binom}(n_2,p)}(k-l) = p_{\mathrm{Binom}(n_1+n_2,p)}(k),$$

$$\sum_{l=0}^{k} p_{\mathrm{Poi}(\lambda_1)}(l) \cdot p_{\mathrm{Poi}(\lambda_2)}(k-l) = p_{\mathrm{Poi}(\lambda_1+\lambda_2)}(k).$$

4.34. A "Kocogj velünk!" mozgalom keretében tavaly futóversenyt rendeztek a Dunakanyarban. A pályát sajnos kullanccsal fertőzött területen át vezették. Kiderült, hogy a versenyzők közül 300-an találtak magukban egy, 75-en pedig két kullancsot. Ennek alapján becsüljük meg, hogy körülbelül hányan indultak a versenyen!

4.35. Egy nőnek n kulcsa van, közülük csak az egyik nyitja a lakását.

(a) Mi a valószínűsége annak, hogy a k-adik próbálkozásra nyílik ki az ajtó, ha a nő mindig véletlenszerűen választ kulcsot, és ha egy kulcs nem nyitja az ajtót, akkor félrerakja?

(b) Mi van akkor, ha a nő nem teszi félre a rossz kulcsokat?

(c) Határozzuk meg a próbálkozások számának várható értékét mindkét esetben.

4.36. Egy urnában 4 piros és 4 kék golyó van. Véletlenszerűen kiválasztunk 4 golyót. Ha 2 közülük piros és 2 kék, akkor megállunk. Különben visszarakjuk a golyókat az urnába és újra választunk 4 golyót. Az egészet mindaddig folytatjuk, amíg 4 húzott golyóból pontosan 2 piros lesz. Mi a valószínűsége, hogy pontosan n-szer húzunk?

4.37. Mutassuk meg, hogy a (4.6)-ban definiált hipergeometriai súlyfüggvény adott i-re az $\binom{n}{i} \cdot p^i \cdot (1-p)^{n-i}$ binomiális súlyfüggvényhez tart, amennyiben $N \to \infty$, $m \to \infty$ úgy, hogy $\frac{m}{N} \to p$.

4.38. Ketten céllövésben versenyeznek, a két versenyző p_1, illetve p_2 valószínűséggel ér el találatot ($p_1 < p_2$). Az ügyetlenebb kezd, majd felváltva lőnek. Aki először talál, az nyer.

(a) Mennyi a valószínűsége annak, hogy az ügyesebb nyer?

(b) Mennyi a játék várható időtartama, ha percenként egy lövést végeznek?

(c) A várható időtartam azonnal adódik, ha $p_1 = p_2$ (miért?). Ellenőrizzük le, hogy az előző kérdésre adott válaszunk ebben az esetben az, ami azonnal adódik.

4.39. Az árokugró versenyfutás szabályai a következők: A futópálya egyenes, és van rajta végtelen sok egyforma árok. Két egyforma képességű versenyző méri össze az erejét árokfutásból, akik fej fej mellett futnak. Egy versenyző egymás után át próbálja ugrani az árkokat, végül egyszer túl kicsit ugrik és beleesik valamelyikbe. Tegyük fel, hogy egy versenyző sohasem fárad el, és az árkokat egymástól függetlenül, egyenként 2^{-L} valószínűséggel tudja átugorni, ahol L az árok hossza. Ha az egyikük beleesett egy árokba, akkor véget ért a verseny.

(a) Mutassuk meg, hogy a döntetlen valószínűsége pontosan akkor kisebb ε-nál, ha

$$L < \log_2 \left(\frac{1+\varepsilon}{1-\varepsilon} \right)$$

teljesül.

(b) Ha döntetlen, akkor visszaküldjük őket a startvonalhoz és újra kezdődik a verseny. Ezt ismételjük egészen addig, amíg győztest nem hirdethetünk. Mekkora legyen L, ha a versenyzők ugrásainak számának várható értékét akarjuk minimalizálni?

4.40. Egy szabályos pénzérmét addig dobunk fel, míg 10 alkalommal fej nem lesz az eredmény. Legyen X az eddig dobott írások száma. Határozzuk meg X eloszlását.

4.41. Legyen X valószínűségi változó várható értéke μ, szórásnégyzete σ^2, és legyen g egy "szép" függvény. Mutassuk meg, hogy

$$\mathbf{E}(g(X)) \approx g(\mu) + \frac{g''(\mu)}{2}\sigma^2.$$

Mikor lesz jó ez a közelítés? (*Tipp: fejtsük g-t μ körül 3 tagig Taylor sorba, és hanyagoljuk el a megmaradó részt!*)

4.42. Legyen X egy λ átlagú Poisson eloszlású valószínűségi változó. Mutassuk meg, hogy ha λ nem túl kicsi, akkor

$$\mathbf{D}^2(\sqrt{X}) \approx 0.25.$$

Lepődjünk meg. (*Tipp: használjuk fel az előző feladatot $\mathbf{E}(\sqrt{X})$ közelítésére!*)

4.43. Egy országban a házaspárok az első fiúig vállalnak gyereket. Mi a nemek eloszlása ebben az országban? Igaz-e, hogy az egy családban született gyerekek neme független egymástól?

5. fejezet

Folytonos valószínűségi változók

5.1. Eloszlások általában

A 4.1. definícióban láttuk mi az, hogy valószínűségi változó. Eddig a diszkrét esettel foglalkoztunk, melyet a súlyfüggvénnyel írtunk le. Általánosabb esetben az alábbi objektumot használhatjuk.

5.1. Definíció *Egy X valószínűségi változó* eloszlásfüggvénye *az*

$$F : \mathbb{R} \to [0, 1] \qquad ; \qquad x \mapsto F(x) = \mathbf{P}\{X < x\}$$

függvény. (Tőlünk nyugatra általános az $F(x) = \mathbf{P}\{X \le x\}$ definíció, mi a fenti, nálunk és tőlünk keletre érvényes definíciót használjuk.)

Először is leszögezzük, hogy az eloszlásfüggvény egy fix függvény, nem véletlen objektum, nem függhet az X valószínűségi változó értékétől. Másodszor pedig vegyük észre, hogy F minden, az X valószínűségeivel kapcsolatos információt tartalmaz, hiszen bármely $a < b \in \mathbb{R}$-re

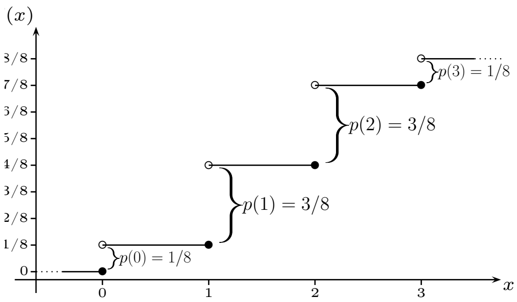
$$\mathbf{P}\{X \in [a, b)\} = \mathbf{P}\{\{X < b\} - \{X < a\}\} = \mathbf{P}\{X < b\} - \mathbf{P}\{X < a\} = F(b) - F(a),$$

és ilyen intervallumokkal készült megszámlálható uniók és metszetek segítségével $\mathbb{R}$ minden Borel mérhető részébe esés valószínűsége kifejezhető.

Egy p súlyfüggvényű diszkrét valószínűségi változó esetén

$$F(x) = \sum_{i\,:\,x_i < x} p(x_i).$$

5.2. Példa *Legyen X a fejek száma, ha egy szabályos érmét háromszor feldobunk. Ekkor $p(0) = 1/8$, $p(1) = 3/8$, $p(2) = 3/8$, $p(3) = 1/8$, és p nulla minden más helyen. X eloszlásfüggvénye*



A definícióból könnyen látható, hogy

5.3. Állítás *Egy diszkrét valószínűségi változó eloszlásfüggvénye balról folytonos, szakaszonként konstans, monoton növekvő. Az ugrásainak helyei a valószínűségi változó lehetséges értékei, és az ugrás nagysága a súlyfüggvény azon a helyen felvett értékével egyenlő.*

Fontosak az általános (azaz nem feltétlenül diszkrét eloszláshoz tartozó) eloszlásfüggvény alábbi definiáló tulajdonságai:

5.4. Állítás *Legyen F az X valószínűségi változó eloszlásfüggvénye. Ekkor*

1. *F (gyakran nem szigorúan) monoton növekvő,*
2. $\lim\limits_{x\to\infty} F(x) = 1,$
3. $\lim\limits_{x\to-\infty} F(x) = 0,$
4. *F balról folytonos.*

Fordítva, minden, a fenti tulajdonságokkal rendelkező F függvényhez létezik olyan valószínűségi változó, hogy annak F az eloszlásfüggvénye.

Bizonyítás. Csak az eloszlásfüggvény fenti tulajdonságait bizonyítjuk.

1. Legyen $x < y$ két rögzített valós. Ekkor a 2.10. következmény szerint $\{X < x\} \subseteq \{X < y\}$, így $F(x) = \mathbf{P}\{X < x\} \leq \mathbf{P}\{X < y\} = F(y)$.

2. F monotonitása és a 2.15. állítás miatt

$$\begin{aligned}\lim_{x\to\infty} F(x) = \lim_{n\to\infty} F(n) = \lim_{n\to\infty} \mathbf{P}\{X < n\} = \\ = \mathbf{P}\{\lim_{n\to\infty}\{X < n\}\} = \mathbf{P}\Big\{\bigcup_{n>0}\{X < n\}\Big\} = \mathbf{P}\{\Omega\} = 1.\end{aligned}$$

3. Hasonlóan,

$$\lim_{x\to-\infty} F(x) = \lim_{n\to-\infty} F(n) = \lim_{n\to-\infty} \mathbf{P}\{X < n\} = \mathbf{P}\{\lim_{n\to-\infty}\{X < n\}\} =$$
$$= \mathbf{P}\Big\{\bigcap_{n<0}\{X < n\}\Big\} = \mathbf{P}\{\emptyset\} = 0.$$

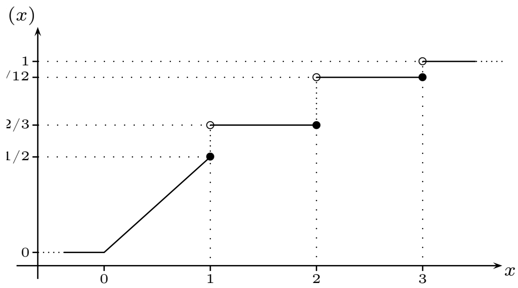
4. Legyen $y \in \mathbb{R}$ rögzített. Ekkor ismét F monotonitását és a 2.15. állítást használva

$$\lim_{x\nearrow y} F(x) = \lim_{n\to\infty} F\Big(y - \frac{1}{n}\Big) = \lim_{n\to\infty} \mathbf{P}\Big\{X < y - \frac{1}{n}\Big\} =$$
$$= \mathbf{P}\Big\{\lim_{n\to\infty}\Big\{X < y - \frac{1}{n}\Big\}\Big\} =$$
$$= \mathbf{P}\Big\{\bigcup_{n>0}\Big\{X < y - \frac{1}{n}\Big\}\Big\} = \mathbf{P}\{X < y\} = F(y).$$

□

5.5. Példa *Legyen az X valószínűségi változó eloszlásfüggvénye*

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x \le 0, \\ x/2, & 0 < x \le 1, \\ 2/3, & 1 < x \le 2, \\ 11/12, & 2 < x \le 3, \\ 1, & 3 < x. \end{cases}$$



Ekkor

$$\mathbf{P}\{X < 3\} = F(3) = \frac{11}{12},$$
$$\mathbf{P}\{X \le 3\} = \lim_{x\searrow 3} F(x) = 1,$$
$$\mathbf{P}\{X = 3\} = \lim_{x\searrow 3} F(x) - F(3) = \frac{1}{12},$$
$$\mathbf{P}\Big\{X \ge \frac{1}{2}\Big\} = \mathbf{P}\Big\{X > \frac{1}{2}\Big\} = \frac{3}{4},$$
$$\mathbf{P}\{2 \le X < 4\} = F(4) - F(2) = 1 - \frac{2}{3} = \frac{1}{3},$$
$$\mathbf{P}\{2 < X \le 4\} = \mathbf{P}\{2 \le X < 4\} + \mathbf{P}\{X = 4\} - \mathbf{P}\{X = 2\} =$$
$$= \frac{1}{3} + 0 - \Big(\frac{11}{12} - \frac{2}{3}\Big) = \frac{1}{12}.$$

Bizonyítás nélkül említjük Lebesgue felbontási tételét:

5.6. Tétel (Lebesgue felbontási tétel) *Legyen F egy eloszlásfüggvény. Ekkor*

$$F = F_{abszolút\ folytonos} + F_{diszkrét} + F_{szinguláris},$$

ahol

- $F_{abszolút\ folytonos}$ *egy* abszolút folytonos *függvény, azaz létezik egy $h \geq 0$ függvény, hogy*
$$F_{abszolút\ folytonos}(a) = \int_{-\infty}^{a} h(x)\,\mathrm{d}x;$$
- $F_{diszkrét}$ *egy balról folytonos (nem szigorúan) növekvő lépcsősfüggvény;*
- $F_{szinguláris}$ *egy folytonos, de Lebesgue mértékre szinguláris (nem szigorúan) növekvő függvény, azaz olyan függvény, melynek deriváltja Lebesgue majdnem mindenütt nulla (például a Cantor függvény, melyet a*
$$G(x) = \begin{cases} \frac{3}{2}x, & 0 \leq x \leq \frac{1}{3}, \\ \frac{1}{2}, & \frac{1}{3} \leq x \leq \frac{2}{3}, \\ \frac{3}{2}x - \frac{1}{2}, & \frac{2}{3} \leq x \leq 1 \end{cases}$$
függvény végtelenszer önmagával vett iteráltjaként kapunk).

Az egyes komponensek önmagukban általában nem eloszlásfüggvények. Az előbbi példában

$$F_{\text{abszolút folytonos}}(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0, \\ x/2, & 0 \leq x \leq 1, \\ 1/2, & 1 \leq x, \end{cases}$$

$$F_{\text{diszkrét}}(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 1, \\ 1/6, & 1 < x \leq 2, \\ 5/12, & 2 < x \leq 3, \\ 1/2, & 3 < x, \end{cases}$$

$$F_{\text{szinguláris}} \equiv 0.$$

Diszkrétnek neveztük azt a valószínűségi változót, melynek eloszlásfüggvényében csak diszkrét komponens van. Szinguláris eloszlásokkal itt nem foglalkozunk.

5.2. A folytonos eloszlások

5.7. Definíció *Egy X valószínűségi változó* (abszolút) folytonos*, ha eloszlásfüggvényének csak abszolút folytonos komponense van, azaz létezik $f \geq 0$ függvény, melyre*

$$F(a) = \int_{-\infty}^{a} f(x)\,\mathrm{d}x \qquad (\forall a \in \mathbb{R}). \tag{5.1}$$

Ekkor az f függvényt az X valószínűségi változó sűrűségfüggvényének *nevezzük.*

Ebben a fejezetben csak folytonos eloszlásokkal foglalkozunk. A definícióból nyilvánvaló, hogy minden f sűrűségfüggvényre

$$f(x) \geq 0, \qquad \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,\mathrm{d}x = 1. \tag{5.2}$$

Fordítva, bármely, a fenti két tulajdonsággal rendelkező függvény sűrűségfüggvény, és van egy neki megfelelő valószínűségi változó. A definícióból szintén következnek az alábbi egyszerű állítások:

5.8. Állítás *Bármely $B \subseteq \mathbb{R}$ Borel-mérhető halmazra*

$$\begin{aligned} \mathbf{P}\{X \in B\} &= \int_B f(x)\,\mathrm{d}x. \qquad \textit{Speciálisan} \\ \mathbf{P}\{X = a\} &= \int_{\{a\}} f(x)\,\mathrm{d}x = 0 \qquad (\forall a \in \mathbb{R}). \end{aligned} \tag{5.3}$$

Látjuk tehát, hogy bármilyen fix értéket a folytonos valószínűségi változó egy valószínűséggel *nem* vesz fel. Helyette halmazokba (pl. intervallumokba) esés valószínűségeiről van értelme beszélni. A sűrűségfüggvény szemléletes jelentését adja, hogy

$$\mathbf{P}\{X \in [a,\, a+\varepsilon)\} = \int_{a}^{a+\varepsilon} f(x)\,\mathrm{d}x \simeq f(a)\cdot\varepsilon, \tag{5.4}$$

ha ε pici. A sűrűségfüggvény az a helyen tehát azt mondja meg, mennyire sűrűn esnek X értékei az a szám környezetébe.

5.9. Állítás *Folytonos eloszlás esetén F majdnem mindenütt differenciálható, és*

$$f(a) = \frac{\mathrm{d}F(a)}{\mathrm{d}a} \qquad (\textit{m.m. } a \in \mathbb{R}).$$

A diszkrét eset alapján nem meglepő a várható érték alábbi definíciója:

5.10. Definíció *Legyen X egy folytonos valószínűségi változó f sűrűségfüggvénnyel. Ekkor X várható értéke*

$$\mathbf{E}X = \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot f(x)\,\mathrm{d}x,$$

amennyiben létezik.

Fontos megkülönböztetni azt az esetet, amikor a várható érték nem létezik (negatív és pozitív irányban is felrobban az integrál), és azt, amikor létezik, de nem véges (csak az egyik irányban robban fel az integrál). Az alábbi esetben például biztosan létezik a várható érték, de nem biztos, hogy véges:

5.11. Állítás *Legyen $Y \geq 0$ folytonos valószínűségi változó. Ekkor*

$$\mathbf{E}Y = \int_0^{\infty} \mathbf{P}\{Y > y\}\,\mathrm{d}y.$$

Bizonyítás. Jelöljük f-el Y sűrűségfüggvényét. Ekkor

$$\begin{aligned}\int_0^{\infty} \mathbf{P}\{Y > y\}\,\mathrm{d}y &= \int_0^{\infty}\int_y^{\infty} f(x)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_0^{\infty} f(x)\int_0^{x}\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x = \\ &= \int_0^{\infty} f(x)\cdot x\,\mathrm{d}x = \mathbf{E}Y.\end{aligned}$$

□

5.12. Állítás (függvény várható értéke) *Legyen X egy folytonos valószínűségi változó, és g egy függvény. Ekkor az alábbi egyenlőség két oldala egyszerre létezik, és ez esetben*

$$\mathbf{E}g(X) = \int_{-\infty}^{\infty} g(x)\cdot f(x)\,\mathrm{d}x.$$ [1]

Bizonyítás. Először egy $g \geq 0$ függvényre

$$\begin{aligned}\mathbf{E}g(X) &= \int_0^{\infty} \mathbf{P}\{g(X) > y\}\,\mathrm{d}y = \int_0^{\infty}\int_{x\,:\,g(x)>y} f(x)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \\ &= \int_{x\,:\,g(x)>0} f(x)\int_0^{g(x)}\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x = \int_{x\,:\,g(x)>0} f(x)\cdot g(x)\,\mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\cdot g(x)\,\mathrm{d}x.\end{aligned}$$

Általános g függvény előáll mint a pozitív és a negatív részeinek (mindkettő nemnegatív) különbsége, és a szokásos definíció szerint[1]

$$\mathbf{E}g(X) = \mathbf{E}\big(g^+(X)\big) - \mathbf{E}\big(g^-(X)\big).$$

[1] Szigorúan szólva nem is mindig tudjuk $\mathbf{E}g(X)$-et értelmezni, hiszen előfordulhat, hogy $g(X)$ nem tisztán diszkrét vagy nem tisztán folytonos valószínűségi változó. Ekkor is megvannak az eszközök a várható érték definiálására, és ami ebben a bizonyításban szerepel ilyenkor is működik.

Ez a kifejezés pontosan akkor értelmes, ha a különbség legalább egyik tagja véges. Ekkor

$$\begin{aligned}\mathbf{E}g(X) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\cdot g^{+}(x)\,\mathrm{d}x - \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\cdot g^{-}(x)\,\mathrm{d}x = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\cdot \big(g^{+}(x)-g^{-}(x)\big)\,\mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\cdot g(x)\,\mathrm{d}x.\end{aligned}$$

□

Az állítás következményeként a 4.2. fejezetben megismert általános definíciók és tulajdonságok a folytonos esetben is érvényben maradnak, azaz amennyiben léteznek,

$$\mathbf{E}(aX+b) = a\cdot \mathbf{E}X + b; \tag{5.5}$$

$$\mathbf{D}^2X := \mathbf{E}(X-\mathbf{E}X)^2 = \mathbf{E}X^2 - (\mathbf{E}X)^2 \geq 0;$$

$$\mathbf{D}X := \sqrt{\mathbf{E}(X-\mathbf{E}X)^2};$$

$$\mathbf{D}^2(aX+b) = a^2\cdot \mathbf{D}^2X; \tag{5.6}$$

$$\mathbf{D}(aX+b) = |a|\cdot \mathbf{D}X.$$

Végezetül definiáljuk az eloszlások néhány további, általánosan használt jellemzőjét. Ezek segítségével hasznos és egyszerű információkat kaphatunk egy eloszlásról, mely önmagában egy meglehetősen bonyolult objektum lehet. Az alábbi mennyiségek egy részét már korábbról ismerjük, de érdemes itt még egyszer felsorolni őket.

5.13. Definíció (eloszlások főbb jellemzői)

- *Várható érték:* $\mathbf{E}X = \begin{cases} \sum_i x_i\cdot p(x_i) & \textit{(diszkrét)} \\ \int_{-\infty}^{\infty} x\cdot f(x)\,\mathrm{d}x & \textit{(folytonos)}\end{cases}.$
- *Szórás:* $\mathbf{D}X = \sqrt{\mathbf{E}(X-\mathbf{E}X)^2}$.
- Medián *(nem mindig egyértelmű, és nem is mindig létezik!):* $\operatorname{med} F := F^{-1}(1/2)$ *az a szám, melytől balra is, jobbra is a valószínűség fele esik:* $F(\operatorname{med} F) = \mathbf{P}\{X < \operatorname{med} F\} = 1/2$.
- *Az* r-kvantilis *(nem mindig egyértelmű, és nem is mindig létezik!):* $Q(r) := F^{-1}(r)$ *az a szám, melytől balra* r*, jobbra* $1-r$ *valószínűség esik:* $F(Q(r)) = \mathbf{P}\{X < Q(r)\} = r$.
- *A* módusz *(ez sem mindig egyértelmű): a szám, ahol a* $\left\{\begin{matrix}\textit{súlyfüggvény}\\ \textit{sűrűségfüggvény}\end{matrix}\right\}$ *maximális.*

Fontos megjegyezni, hogy általános esetben a várható érték, a medián és a módusz nem esnek egybe.

Az alábbiakban három nevezetes folytonos eloszlással és tulajdonságaikkal foglalkozunk.

5.3. Az egyenletes eloszlás

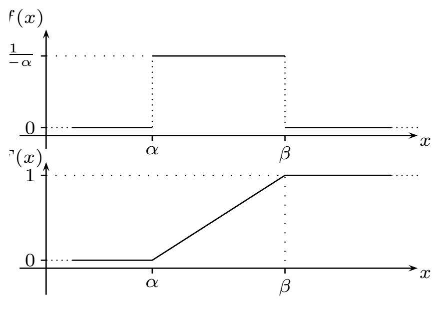
Az (α, β) intervallumon szeretnénk egy olyan, természetes eloszlást definiálni, mely szerint X mindenhova "egyenlő valószínűséggel" esik. Mivel minden adott érték valószínűsége nulla, ezt a kívánságunkat a sűrűségfüggvény segítségével tudjuk megfogalmazni. (5.4) alapján nem meglepő, hogy az egyenletes eloszlást konstans sűrűséggel definiáljuk:

5.14. Definíció *Legyenek $\alpha < \beta$ valós számok. Azt mondjuk, hogy X* egyenletes eloszlású az (α, β) intervallumon *($X \sim E(\alpha, \beta)$), ha sűrűségfüggvénye*

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{\beta - \alpha}, & \text{ha } x \in (\alpha, \beta), \\ 0, & \text{egyébként.} \end{cases}$$

A konstans értéke (5.2) alapján adódik. Az (5.1) összefüggés szerint

$$F(x) = \begin{cases} 0, & \text{ha } x \le \alpha, \\ \dfrac{x - \alpha}{\beta - \alpha}, & \text{ha } \alpha \le x \le \beta, \\ 1, & \text{ha } \beta \le x. \end{cases}$$



(5.3) alapján pedig $\alpha \le a < b \le \beta$ esetén

$$\mathbf{P}\{X \in (a, b)\} = \frac{b - a}{\beta - \alpha},$$

azaz egy intervallumba (általánosabban: egy mérhető halmazba) esés valószínűsége kizárólag az intervallum hosszának (illetve a halmaz Lebesgue-mértékének) és az (α, β) intervallum hosszának aránya.

5.15. Állítás (az egyenletes eloszlás várható értéke, szórása) *Legyen $X \sim E(\alpha, \beta)$. Ekkor*

$$\mathbf{E}X = \frac{\alpha+\beta}{2}, \qquad \mathbf{D}^2X = \frac{(\beta-\alpha)^2}{12}.$$

A várható érték az eloszlás szimmetriájából nyilvánvaló, de integrálással is könnyen adódik. Mivel (5.6) szerint a szórásnégyzet nem érzékeny az eltolásokra, és négyzetes mennyiség, az sem meglepő, hogy kizárólag az intervallum hosszától függ, és attól is négyzetesen. A 12-ért kell kicsit dolgozni.

Bizonyítás. Az 5.12. állítás szerint

$$\mathbf{E}X^2 = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 \cdot f(x)\,\mathrm{d}x = \int_{\alpha}^{\beta} \frac{x^2}{\beta-\alpha}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{3} \cdot \frac{\beta^3-\alpha^3}{\beta-\alpha} = \frac{\beta^2+\alpha\beta+\alpha^2}{3},$$

így

$$\mathbf{D}^2X = \mathbf{E}X^2 - (\mathbf{E}X)^2 = \frac{\beta^2+\alpha\beta+\alpha^2}{3} - \frac{(\alpha+\beta)^2}{4} = \frac{\beta^2-2\alpha\beta+\alpha^2}{12} = \frac{(\beta-\alpha)^2}{12}. \qquad \square$$

5.4. A normális eloszlás

A normális eloszlás bevezetéséhez először egy kis integrálásra lesz szükség.

5.16. Állítás *Legyenek $\mu \in \mathbb{R}$, $\sigma > 0$ valós paraméterek. Ekkor*

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}\cdot\sigma} \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}\,\mathrm{d}x = 1.$$

Bizonyítás. Legyen I a kérdéses integrál. Az $y = [x-\mu]/\sigma$ helyettesítéssel

$$I = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\cdot\sigma} \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{-\frac{y^2}{2}}\,\mathrm{d}y.$$

Az integrandus primitív függvénye nem áll elő az elemi függvényekből zárt alakban, viszont a teljes valós számegyenesre vett integrált ki tudjuk számolni az alábbi trükkel.

$$I^2 = \Big(\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{-\frac{y^2}{2}}\,\mathrm{d}y\Big) \cdot \Big(\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{-\frac{z^2}{2}}\,\mathrm{d}z\Big) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{-\frac{y^2+z^2}{2}}\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z.$$

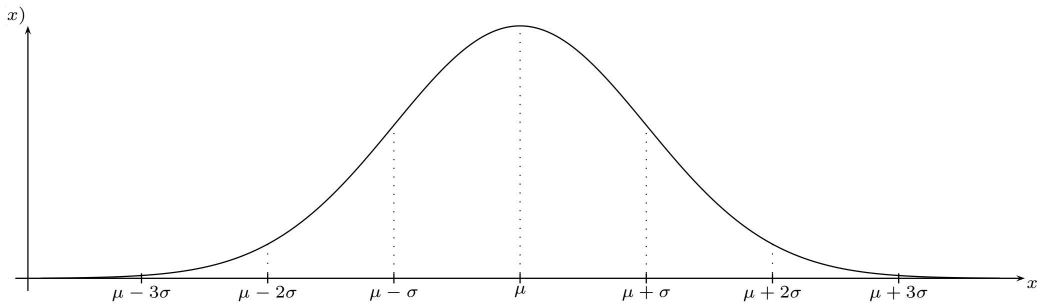
Bevezetve a polárkoordinátákat: $y = r\cos\theta$, $z = r\sin\theta$, $\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z = r\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta$,

$$I^2 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi}\int_0^{\infty} \mathrm{e}^{-\frac{r^2}{2}}\, r\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta = \Big[-\mathrm{e}^{-\frac{r^2}{2}}\Big]_0^{\infty} = 1.$$

Ebből az állítás következik, tekintve, hogy $I > 0$. $\square$

5.17. Definíció *Legyenek $\mu \in \mathbb{R}$, $\sigma > 0$ valós paraméterek. Az X valószínűségi változó* normális (avagy Gauss) eloszlású μ és σ^2 paraméterekkel *($X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$), ha sűrűségfüggvénye*

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi} \cdot \sigma} \cdot \mathrm{e}^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} \qquad (x \in \mathbb{R}).$$



5.18. Definíció *A $\mu = 0$, $\sigma^2 = 1$ esetét, azaz a $\mathcal{N}(0, 1)$ eloszlást* standard *normális eloszlásnak nevezzük. Ennek sűrűségfüggvényét φ-vel, eloszlásfüggvényét Φ-vel jelöljük:*

$$\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \mathrm{e}^{-x^2/2}, \qquad \Phi(x) = \int_{-\infty}^{x} \varphi(y)\,\mathrm{d}y = \int_{-\infty}^{x} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \mathrm{e}^{-y^2/2}\,\mathrm{d}y \quad (x \in \mathbb{R}).$$

A Φ függvénynek nincs elemi függvényekkel kifejezhető zárt alakja. Helyette értékét táblázatokból (vagy táblázatkezelőkből, haladóbb számológépekből) tudhatjuk meg:

$\Phi(z)$

z	**0.00**	**0.01**	**0.02**	**0.03**	**0.04**	**0.05**	**0.06**	**0.07**	**0.08**	**0.09**
0.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199	0.5239	0.5279	0.5319	0.5359
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636	0.5675	0.5714	0.5753
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	0.6026	0.6064	0.6103	0.6141
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406	0.6443	0.6480	0.6517
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736	0.6772	0.6808	0.6844	0.6879
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7123	0.7157	0.7190	0.7224
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422	0.7454	0.7486	0.7517	0.7549
0.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7704	0.7734	0.7764	0.7794	0.7823	0.7852
0.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023	0.8051	0.8078	0.8106	0.8133
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289	0.8315	0.8340	0.8365	0.8389
1.0	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8531	0.8554	0.8577	0.8599	0.8621
1.1	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729	0.8749	0.8770	0.8790	0.8810	0.8830
1.2	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925	0.8944	0.8962	0.8980	0.8997	0.9015
1.3	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082	0.9099	0.9115	0.9131	0.9147	0.9162	0.9177
1.4	0.9192	0.9207	0.9222	0.9236	0.9251	0.9265	0.9279	0.9292	0.9306	0.9319
1.5	0.9332	0.9345	0.9357	0.9370	0.9382	0.9394	0.9406	0.9418	0.9429	0.9441
1.6	0.9452	0.9463	0.9474	0.9484	0.9495	0.9505	0.9515	0.9525	0.9535	0.9545
1.7	0.9554	0.9564	0.9573	0.9582	0.9591	0.9599	0.9608	0.9616	0.9625	0.9633
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686	0.9693	0.9699	0.9706
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.9750	0.9756	0.9761	0.9767
2.0	0.9772	0.9778	0.9783	0.9788	0.9793	0.9798	0.9803	0.9808	0.9812	0.9817
2.1	0.9821	0.9826	0.9830	0.9834	0.9838	0.9842	0.9846	0.9850	0.9854	0.9857
2.2	0.9861	0.9864	0.9868	0.9871	0.9875	0.9878	0.9881	0.9884	0.9887	0.9890
2.3	0.9893	0.9896	0.9898	0.9901	0.9904	0.9906	0.9909	0.9911	0.9913	0.9916
2.4	0.9918	0.9920	0.9922	0.9925	0.9927	0.9929	0.9931	0.9932	0.9934	0.9936
2.5	0.9938	0.9940	0.9941	0.9943	0.9945	0.9946	0.9948	0.9949	0.9951	0.9952
2.6	0.9953	0.9955	0.9956	0.9957	0.9959	0.9960	0.9961	0.9962	0.9963	0.9964
2.7	0.9965	0.9966	0.9967	0.9968	0.9969	0.9970	0.9971	0.9972	0.9973	0.9974
2.8	0.9974	0.9975	0.9976	0.9977	0.9977	0.9978	0.9979	0.9979	0.9980	0.9981
2.9	0.9981	0.9982	0.9982	0.9983	0.9984	0.9984	0.9985	0.9985	0.9986	0.9986
3.0	0.9987	0.9987	0.9987	0.9988	0.9988	0.9989	0.9989	0.9989	0.9990	0.9990
3.1	0.9990	0.9991	0.9991	0.9991	0.9992	0.9992	0.9992	0.9992	0.9993	0.9993
3.2	0.9993	0.9993	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9995	0.9995	0.9995
3.3	0.9995	0.9995	0.9995	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9997
3.4	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9998
3.5	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998
3.6	0.9998	0.9998	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999
3.7	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999
3.8	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999
3.9	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000

Ebben a táblázatban z értéke az első tizedes jegyig a sort, a második tizedes jegy az oszlopot jelöli ki. Például $\Phi(1.14) \simeq 0.8729$. A táblázatban csak pozitív z-re szerepelnek Φ értékei. Az ok:

5.19. Állítás *Minden $z \in \mathbb{R}$-re*

$$\Phi(-z) = 1 - \Phi(z).$$

Bizonyítás. A standard normális eloszlás szimmetrikus: ha $X \sim \mathcal{N}(0, 1)$, akkor X és $-X$ azonos eloszlású. Ezért

$$\Phi(-z) = \mathbf{P}\{X < -z\} = \mathbf{P}\{-X > z\} = \mathbf{P}\{X > z\} = 1 - \Phi(z). \qquad \square$$

Az általános normális eloszlás számolásához szükségünk van még a következő tulajdonságra:

5.20. Állítás *Legyen* $X \sim \mathcal{N}(\mu,\, \sigma^2)$*, és* $\alpha,\, \beta \in \mathbb{R}$ *rögzített számok. Ekkor* $\alpha X + \beta \sim \mathcal{N}(\alpha\mu + \beta,\, \alpha^2\sigma^2)$.

Bizonyítás. Pozitív α-ra bizonyítunk, az ellenkező eset hasonlóan működik. Tekintsük a transzformált $Y = \alpha X + \beta$ változó eloszlásfüggvényét:

$$F_Y(y) = \mathbf{P}\{Y < y\} = \mathbf{P}\{\alpha X + \beta < y\} = \mathbf{P}\Big\{X < \frac{y-\beta}{\alpha}\Big\} = F_X\Big(\frac{y-\beta}{\alpha}\Big).$$

Ezt differenciálva

$$\begin{aligned} f_Y(y) &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y} F_X\Big(\frac{y-\beta}{\alpha}\Big) = f_X\Big(\frac{y-\beta}{\alpha}\Big) \cdot \frac{1}{\alpha} = \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma} \exp\Bigg(-\frac{\Big(\frac{y-\beta}{\alpha} - \mu\Big)^2}{2\sigma^2}\Bigg) \cdot \frac{1}{\alpha} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\alpha\sigma} \mathrm{e}^{-\frac{(y-(\alpha\mu+\beta))^2}{2(\alpha\sigma)^2}}, \end{aligned}$$

amiből az állítás következik. □

5.21. Következmény *Legyen* $X \sim \mathcal{N}(\mu,\, \sigma^2)$*. Ekkor* $\alpha = 1/\sigma$ *és* $\beta = -\mu/\sigma$ *választással* $Y := [X - \mu]/\sigma \sim \mathcal{N}(0,\, 1)$ *(ezt a transzformációt* standardizálásnak *nevezik). Ezt felhasználva* X *eloszlásfüggvénye*

$$F_X(x) = \mathbf{P}\{X < x\} = \mathbf{P}\Big\{\frac{X-\mu}{\sigma} < \frac{x-\mu}{\sigma}\Big\} = \Phi\Big(\frac{x-\mu}{\sigma}\Big). \tag{5.7}$$

Az alábbiak tisztázzák a μ és σ paraméterek jelentését.

5.22. Állítás *Legyen* $X \sim \mathcal{N}(\mu,\, \sigma^2)$*. Ekkor* $\mathbf{E}X = \mu$ *és* $\mathbf{D}X = \sigma$.

Bizonyítás. Az $y := [x - \mu]/\sigma$ változócserével

$$\mathbf{E}X = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma} \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot \mathrm{e}^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} (\sigma y + \mu) \cdot \mathrm{e}^{-y^2/2}\,\mathrm{d}y.$$

Mivel y páratlan és $\mathrm{e}^{-y^2/2}$ páros, (valamint a szorzatuk integrálható), az összeg első tagjának integrálja nulla. A második tag pedig a standard normális sűrűségfüggvény integráljának μ-szöröse, azaz μ. A szórás számolásához ugyanezt a változócserét használjuk:

$$\mathbf{D}^2X = \mathbf{E}(X - \mathbf{E}X)^2 = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma} \int_{-\infty}^{\infty} (x-\mu)^2 \cdot \mathrm{e}^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}\,\mathrm{d}x = \frac{\sigma^2}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} y^2 \cdot \mathrm{e}^{-y^2/2}\,\mathrm{d}y.$$

Parciális integrálással

$$\mathbf{D}^2X = \frac{\sigma^2}{\sqrt{2\pi}} \Big[-y \cdot \mathrm{e}^{-y^2/2}\Big]_{-\infty}^{\infty} + \frac{\sigma^2}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{-y^2/2}\,\mathrm{d}y = \sigma^2.$$

□

Most már (5.5) és (5.6) értelmében világossá vált, hogy az 5.20. állításban miért pont $\alpha\mu + \beta$ és $\alpha^2\sigma^2$ lettek az új paraméterek. Az állítás tartalmi része nem is ebben rejlik, hanem abban, hogy egy normális valószínűségi változó affin transzformáltja még mindig normális. Szintén értelmet nyert az $X \mapsto [X - \mu]/\sigma$ standardizálás lényege: a várható érték levonása és a szórással való elosztás után X-ből egy nulla várható értékű és egy szórású változót csináltunk. Vegyük észre továbbá azt is, hogy az (5.7) valószínűség csak attól függ, hogy x hány szórásnyira (σ) van a várható értéktől (μ).

5.23. Példa *Legyen X normális eloszlású 3 várható értékkel és 2 szórással. Mi a valószínűsége, hogy X pozitív?*

A példa szerint $X \sim \mathcal{N}(3, 4)$, így $[X - 3]/2 \sim \mathcal{N}(0, 1)$ és

$$\mathbf{P}\{X > 0\} = \mathbf{P}\Big\{\frac{X-3}{2} > \frac{0-3}{2}\Big\} = 1 - \Phi(-1.5) = 1 - \big[1 - \Phi(1.5)\big] = \Phi(1.5) \simeq 0.9332.$$

A normális eloszlás definíciója és alaptulajdonságai után most rátérünk arra, hogy miért is fontos eloszlás. A következőkben a *Stirling formula* segítségével bebizonyítjuk a valószínűségszámítás egyik legjelentősebb tételét, a *DeMoivre-Laplace tételt.* A tétel azt fogja állítani, hogy alkalmas (és a Poisson approximációtól különböző!) átskálázással a binomiális eloszlás normális eloszláshoz tart. A Stirling formula a faktoriálisok közelítéséről szól, és a binomiális együtthatók becslésében vesszük majd hasznát.

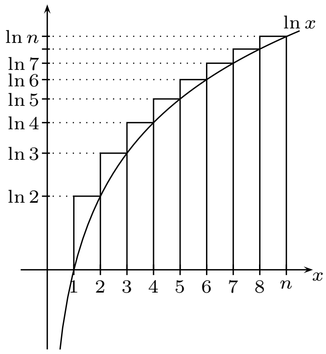
5.24. Tétel (Stirling-formula) *Nagy egész n-ekre*

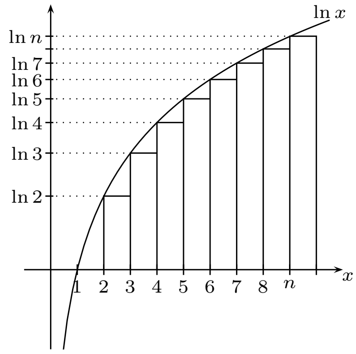
$$n! \simeq \frac{n^n}{e^n} \cdot \sqrt{2\pi n}, \qquad \textit{azaz precízebben } \forall n > 0\textit{-ra} \qquad 1 < \frac{n!}{\frac{n^n}{e^n} \cdot \sqrt{2\pi n}} < e^{\frac{1}{12n}}.$$

A hányadost becslő hibatag nagy n-ekre körülbelül $1 + \frac{1}{12n}$ szerint alakul.

Bizonyítás. A bizonyításból π értéke még nem fog kijönni, ahhoz a DeMoivre-Laplace tételt is fel fogjuk használni. $n!$ logaritmusát véve $\ln n! = \sum\limits_{k=1}^{n} \ln k$. Először egy intuitív kép következik arról, hogy miért csináljuk amit alább csinálni fogunk. Az alábbi ábrákon látható területek összehasonlításából

$$\int_0^n \ln x \, dx \le \sum_{k=1}^{n} \ln k \le \int_1^{n+1} \ln x \, dx :$$





Az integrálokat elvégezve kapjuk, hogy

$$n \ln n - n \leq \ln n! \leq (n+1)\ln(n+1) - n.$$

E két határ közé lőjük be a becslésünket, az $(n+1/2)\ln n - n$ kifejezést. Legyen ugyanis

$$d_n = \ln n! - \left[\left(n + \frac{1}{2}\right)\ln n - n\right],$$

belátjuk, hogy

- d_n monoton csökkenő, így van egy d határértéke,
- minden n-re $d < d_n < d + \frac{1}{12n}$ is igaz.

Ekkor

$$\mathrm{e}^d < \mathrm{e}^{d_n} = \frac{n!}{\frac{n^{n+1/2}}{\mathrm{e}^n}} < \mathrm{e}^d \cdot \mathrm{e}^{\frac{1}{12n}}, \text{ vagyis}$$

$$1 < \frac{n!}{\frac{n^n}{\mathrm{e}^n} \cdot \sqrt{2\widehat{\pi} n}} < \mathrm{e}^{\frac{1}{12n}}$$

valamely ismeretlen $\widehat{\pi}$ konstanssal.

A fentiek belátásához tehát d_n „csökkeményét” felírva

$$\begin{aligned} d_n - d_{n+1} &= -\ln(n+1) - \left(n + \frac{1}{2}\right)\ln n + \left(n + \frac{3}{2}\right)\ln(n+1) - 1 = \\ &= \left(n + \frac{1}{2}\right)\ln\frac{n+1}{n} - 1 = \left(n + \frac{1}{2}\right)\ln\frac{1 + \frac{1}{2n+1}}{1 - \frac{1}{2n+1}} - 1 = \\ &= \frac{1}{2t}\ln\frac{1+t}{1-t} - 1 = \frac{1}{2t}\big[\ln(1+t) - \ln(1-t)\big] - 1, \end{aligned}$$

ahol bevezettük a $t = 1/[2n+1]$ új változót. Az

$$\frac{1}{1-t} = \sum_{k=0}^{\infty} t^k$$

geometriai sorösszegképlet határozatlan integrálásából és a $t = 0$ helyettesítési értékek ellenőrzéséből könnyen kapjuk $\ln(1-t)$ Taylor-sorát:

$$\ln(1-t) = -\sum_{k=1}^{\infty} \frac{t^k}{k}, \qquad \text{amiből} \qquad \ln(1+t) = -\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{t^k}{k}$$

is adódik. Ezt felhasználva

$$d_n - d_{n+1} = \frac{1}{2t} \sum_{k=1}^{\infty} \left(1 - (-1)^k\right) \cdot \frac{t^k}{k} - 1 = \frac{1}{t} \sum_{\ell=0}^{\infty} \frac{t^{2\ell+1}}{2\ell+1} - 1 = \frac{1}{t} \sum_{\ell=1}^{\infty} \frac{t^{2\ell+1}}{2\ell+1},$$

ami mutatja, hogy d_n csökkenő, ezért van limesze, d. Másfelől a jobb oldali szummát tovább becsülve

$$\begin{aligned} d_n - d_{n+1} &< \sum_{\ell=1}^{\infty} \frac{t^{2\ell}}{3} = \frac{1}{3} \cdot \frac{t^2}{1-t^2} = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{(2n+1)^2 - 1} = \\ &= \frac{1}{12} \cdot \frac{1}{n^2+n} = \frac{1}{12} \cdot \frac{1}{n} - \frac{1}{12} \cdot \frac{1}{n+1}, \end{aligned}$$

amiből viszont $d_n - \frac{1}{12n}$ növekvő. Ezért

$$\begin{aligned} d_n - d &= \lim_{m\to\infty} (d_n - d_m) = \lim_{m\to\infty} \left(d_n - \frac{1}{12n} - d_m + \frac{1}{12m} + \frac{1}{12n} - \frac{1}{12m}\right) < \\ &< \frac{1}{12n} - \lim_{m\to\infty} \frac{1}{12m} = \frac{1}{12n}. \end{aligned}$$

□

Legyen most $X \sim \mathrm{Binom}(n, p)$, p rögzített, és n tartson végtelenhez. (Ez lényegesen különbözik a Poisson approximációtól (4.29. tétel), ahol p is n-el fordított arányban nullához tartott.) Az alábbiakban a $q = 1-p$ rövidítést fogjuk használni. A standardizált

$$\frac{X - \mathbf{E}X}{\mathbf{D}X} = \frac{X - np}{\sqrt{npq}}$$

binomiális változó várható értéke nulla, szórása egy. A DeMoivre Laplace tétel azt állítja, hogy ahogy $n \to \infty$, a standardizált binomiális változó eloszlása a standard normális eloszláshoz konvergál. Mivel a binomiális változó diszkrét, a normális pedig folytonos, már az sem nyilvánvaló, hogy hogyan lehet egy ilyen állítást precízen megfogalmazni.

Tekintsük először a binomiális X valószínűségi változó súlyfüggvényét. Mivel X egész értékű, természetes lépés, hogy a k számot a $[k-1/2,\ k+1/2)$ intervallummal azonosítsuk:

$$p_X(k) = \mathbf{P}\{X = k\} = \mathbf{P}\Big\{k - \frac{1}{2} \le X < k + \frac{1}{2}\Big\} =$$
$$= \mathbf{P}\Big\{\frac{k - 1/2 - np}{\sqrt{npq}} \le \frac{X - np}{\sqrt{npq}} < \frac{k + 1/2 - np}{\sqrt{npq}}\Big\}.$$

Az átskálázott intervallum hossza a jobb oldalon $1/\sqrt{npq}$, ami nullához tart. Az (5.4) összefüggés alapján most már meg tudjuk fogalmazni mit jelent az, hogy a standardizált binomiális változó eloszlása a normális eloszláshoz tart: a fenti képlet alapján nagy n-re

$$p_X(k) = \mathbf{P}\Big\{\frac{k - 1/2 - np}{\sqrt{npq}} \le \frac{X - np}{\sqrt{npq}} < \frac{k + 1/2 - np}{\sqrt{npq}}\Big\} \simeq \varphi\Big(\frac{k - np}{\sqrt{npq}}\Big) \cdot \frac{1}{\sqrt{npq}},$$

ahol φ a standard normális sűrűségfüggvény. Ezt mondja ki precíz formában a DeMoivre-Laplace tétel:

5.25. Tétel (DeMoivre-Laplace) *Legyen $X \sim Binom(n, p)$, ahol p rögzített. Legyen továbbá A_n nem csökkenő és olyan, hogy $\lim_{n\to\infty} A_n/n^{1/6} = 0$. Ekkor*

$$\max_{|k-np|<\sqrt{n}\cdot A_n} \left| \frac{p_X(k)\cdot\sqrt{npq}}{\varphi\Big(\frac{k-np}{\sqrt{npq}}\Big)} - 1 \right| = \mathcal{O}\Big(\frac{A_n^3}{\sqrt{n}}\Big),$$

azaz a bal oldal $A_n^3/\sqrt{n}$-el osztva n-ben korlátos marad.

Bizonyítás. A tétel következménye lesz, hogy a $\widehat{\pi}$ konstans értéke π, ezt nem tesszük fel előre. A binomiális súlyfüggvényt a Stirling-formulával közelítve

$$\begin{aligned}
p_X(k) &= \frac{n!\cdot p^k\cdot q^{n-k}}{k!\cdot(n-k)!} = \\
&= \frac{n^n\cdot p^k\cdot q^{n-k}}{k^k\cdot(n-k)^{n-k}}\cdot\frac{\sqrt{2\widehat{\pi}n}}{\sqrt{2\widehat{\pi}k}\cdot\sqrt{2\widehat{\pi}(n-k)}}\cdot\Big(1+\mathcal{O}\Big(\frac{1}{n}\Big)\Big) = \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\widehat{\pi}npq}}\cdot\frac{1}{\left(\frac{n-k}{nq}\right)^{n-k}\left(\frac{k}{np}\right)^{k}}\cdot\frac{1}{\left(\frac{n-k}{nq}\right)^{1/2}\left(\frac{k}{np}\right)^{1/2}}\cdot \\
&\quad\cdot\Big(1+\mathcal{O}\Big(\frac{1}{n}\Big)\Big) = \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\widehat{\pi}npq}}\cdot\underbrace{\frac{1}{\left(1-\frac{k-np}{nq}\right)^{n-k}\left(1+\frac{k-np}{np}\right)^{k}}}_{(I)}\cdot\underbrace{\frac{1}{\left(1-\frac{k-np}{nq}\right)^{1/2}\left(1+\frac{k-np}{np}\right)^{1/2}}}_{(II)}\cdot \\
&\quad\cdot\Big(1+\mathcal{O}\Big(\frac{1}{n}\Big)\Big).
\end{aligned}$$

Ennek az átírásnak az az előnye, hogy a max feltétele szerint $[k-np]/n < A_n/\sqrt{n}$, ami tart nullához. Ezért az (I) tag logaritmusát véve és másodrendig sorfejtve

$$\begin{aligned}
\ln(I) &= (k-n)\cdot\ln\Big(1-\frac{k-np}{nq}\Big) - k\cdot\ln\Big(1+\frac{k-np}{np}\Big) = \\
&= -(k-n)\cdot\frac{k-np}{nq} - k\cdot\frac{k-np}{np} - \frac{1}{2}\cdot(k-n)\cdot\Big(\frac{k-np}{nq}\Big)^2 + \\
&\quad + \frac{1}{2}\cdot k\cdot\Big(\frac{k-np}{np}\Big)^2 + \mathcal{O}\Big(\frac{A_n^3}{\sqrt{n}^3}\Big)\cdot n = \\
&= \frac{(n-k)p-kq}{npq}\cdot(k-np) + \frac{(n-k)p^2+kq^2}{2n^2p^2q^2}\cdot(k-np)^2 + \mathcal{O}\Big(\frac{A_n^3}{\sqrt{n}}\Big) = \\
&= \frac{np-k\overbrace{(p+q)}^{1}}{npq}\cdot(k-np) + \frac{np^2-k(p-q)\overbrace{(p+q)}^{1}}{2n^2p^2q^2}\cdot(k-np)^2 + \\
&\quad + \mathcal{O}\Big(\frac{A_n^3}{\sqrt{n}}\Big) = \\
&= \frac{-2npq+np^2-k(p-q)}{2n^2p^2q^2}\cdot(k-np)^2 + \mathcal{O}\Big(\frac{A_n^3}{\sqrt{n}}\Big) = \\
&= \frac{-npq+np(p-q)-k(p-q)}{2n^2p^2q^2}\cdot(k-np)^2 + \mathcal{O}\Big(\frac{A_n^3}{\sqrt{n}}\Big) = \\
&= -\frac{(k-np)^2}{2npq} - \frac{(p-q)(k-np)^3}{2n^2p^2q^2} + \mathcal{O}\Big(\frac{A_n^3}{\sqrt{n}}\Big) = \\
&= -\frac{(k-np)^2}{2npq} + \mathcal{O}\Big(\frac{A_n^3}{\sqrt{n}}\Big),
\end{aligned}$$

mert a második tag szintén $\mathcal{O}(A_n^3/\sqrt{n})$. Újra exponenciálist véve arra jutunk, hogy

$$(I) = \mathrm{e}^{-\frac{(k-np)^2}{2npq}}\cdot\Big(1+\mathcal{O}\Big(\frac{A_n^3}{\sqrt{n}}\Big)\Big).$$

A (II) tagban csak nulladrendű sorfejtést tekintünk, elsőrendű hibataggal:

$$(II) = 1+\mathcal{O}\Big(\frac{A_n}{\sqrt{n}}\Big).$$

A részleteket összerakva

$$
\begin{aligned}
p_X(k) &= \frac{1}{\sqrt{2\widehat{\pi} npq}} \cdot \mathrm{e}^{-\frac{(k-np)^2}{2npq}} \cdot \Big(1 + \mathcal{O}\Big(\frac{A_n^3}{\sqrt{n}}\Big)\Big) \cdot \Big(1 + \mathcal{O}\Big(\frac{A_n}{\sqrt{n}}\Big)\Big) \cdot \\
&\cdot \Big(1 + \mathcal{O}\Big(\frac{1}{n}\Big)\Big) = \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\widehat{\pi} npq}} \cdot \mathrm{e}^{-\frac{(k-np)^2}{2npq}} \cdot \Big(1 + \mathcal{O}\Big(\frac{A_n^3}{\sqrt{n}}\Big) + \mathcal{O}\Big(\frac{A_n}{\sqrt{n}}\Big) + \mathcal{O}\Big(\frac{1}{n}\Big)\Big) = \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\widehat{\pi} npq}} \cdot \mathrm{e}^{-\frac{(k-np)^2}{2npq}} \cdot \Big(1 + \mathcal{O}\Big(\frac{A_n^3}{\sqrt{n}}\Big)\Big)
\end{aligned}
$$

a legnagyobb hibatagot kiválasztva. $\square$

A DeMoivre-Laplace tételben súlyfüggvény illetve sűrűségfüggvény szerepel, azaz egy *lokális határeloszlástételről* van szó. Figyeljük meg, hogy finom aszimptotika és hibatag is szerepel a tételben. Az eloszlásfüggvényekről szóló verzió a *globális határeloszlástétel*:

5.26. Tétel (a DeMoivre-Laplace tétel globális alakja) *Legyen p rögzített, és $X \sim Binom(n, p)$. Ekkor minden fix $a < b$ valósra*

$$\lim_{n\to\infty} \mathbf{P}\Big\{a \le \frac{X - np}{\sqrt{npq}} < b\Big\} = \Phi(b) - \Phi(a).$$

Bizonyítás. A háromszög-egyenlőtlenség segítségével

$$
\begin{aligned}
&\Big|\mathbf{P}\Big\{a \le \frac{X - np}{\sqrt{npq}} < b\Big\} - \big(\Phi(b) - \Phi(a)\big)\Big| \le \\
&\qquad \le \Big|\sum_{k=\lceil a\sqrt{npq}+np\rceil}^{\lceil b\sqrt{npq}-1+np\rceil} p_X(k) - \int_a^b \varphi(x)\,\mathrm{d}x\Big| \le \\
&\qquad \le \Big|\sum_{k=\lceil a\sqrt{npq}+np\rceil}^{\lceil b\sqrt{npq}-1+np\rceil} \Big(p_X(k) - \frac{1}{\sqrt{npq}} \cdot \varphi\Big(\frac{k-np}{\sqrt{npq}}\Big)\Big)\Big| + \\
&\qquad + \Big|\sum_{k=\lceil a\sqrt{npq}+np\rceil}^{\lceil b\sqrt{npq}-1+np\rceil} \frac{1}{\sqrt{npq}} \cdot \varphi\Big(\frac{k-np}{\sqrt{npq}}\Big) - \int_a^b \varphi(x)\,\mathrm{d}x\Big|.
\end{aligned}
\tag{5.8}
$$

A második tag a φ függvény integráljának illetve Riemann közelítő összegének különbsége, nullához tart. Az első taghoz legyen $c > \max(b\sqrt{pq},\, a\sqrt{pq})$. A DeMoivre-Laplace tételt átírva

$$\max_{|k-np|<c\sqrt{n}} \Big| p_X(k) - \frac{1}{\sqrt{npq}} \cdot \varphi\Big(\frac{k-np}{\sqrt{npq}}\Big) \Big| =$$
$$= \max_{|k-np|<c\sqrt{n}} \Bigg| \frac{p_X(k)\cdot\sqrt{npq}}{\varphi\Big(\frac{k-np}{\sqrt{npq}}\Big)} - 1 \Bigg| \cdot \frac{1}{\sqrt{npq}} \cdot \varphi\Big(\frac{k-np}{\sqrt{npq}}\Big) \le$$
$$\le \mathcal{O}\Big(\frac{1}{\sqrt{n}}\Big) \cdot \frac{1}{\sqrt{2\widehat{\pi} npq}} = \mathcal{O}\Big(\frac{1}{n}\Big)$$

minden, (5.8)-ban szereplő k esetén. Mivel az összegben $\mathcal{O}(\sqrt{n})$ darab tag szerepel, ezek a hibák felösszegezve is csak $\mathcal{O}(1/\sqrt{n})$ nagyságrendűek.

Ezzel a globális tételt bebizonyítottuk a $\varphi(x) = (1/\sqrt{2\widehat{\pi}}) \cdot \mathrm{e}^{-x^2/2}$ sűrűségfüggvényre. A tétel állításából viszont az is látszik, hogy ez a φ egy valódi sűrűségfüggvény, amiből $\widehat{\pi} = \pi$. $\square$

Megjegyezzük, hogy a globális tétel speciális esete az ún. *centrális határeloszlástételnek* (8.9. tétel).

5.27. Példa *Egy tanfolyam ideális mérete 150 fő. A tanfolyamra felvettek 30%-a iratkozik be, egymától függetlenül, ezért a szervezők 450 főt vesznek fel. Mi a valószínűsége, hogy 150-nél többen iratkoznak be?*

A beiratkozottak száma $X \sim \mathrm{Binom}(450,\, 0.3)$. A globális tétel segítségével ($np = 135$, $\sqrt{npq} \simeq 9.72$)

$$\mathbf{P}\{X > 150\} = \mathbf{P}\{X > 150.5\} \simeq \mathbf{P}\Big\{\frac{X-135}{9.72} > \frac{150.5-135}{9.72}\Big\} \simeq$$
$$\simeq 1 - \Phi\Big(\frac{150.5-135}{9.72}\Big) \simeq 1 - \Phi(1.59) \simeq 0.0559.$$

5.28. Példa *Egy szabályos érmét 40-szer feldobva mi a valószínűsége, hogy pontosan 20 fejet dobunk?*

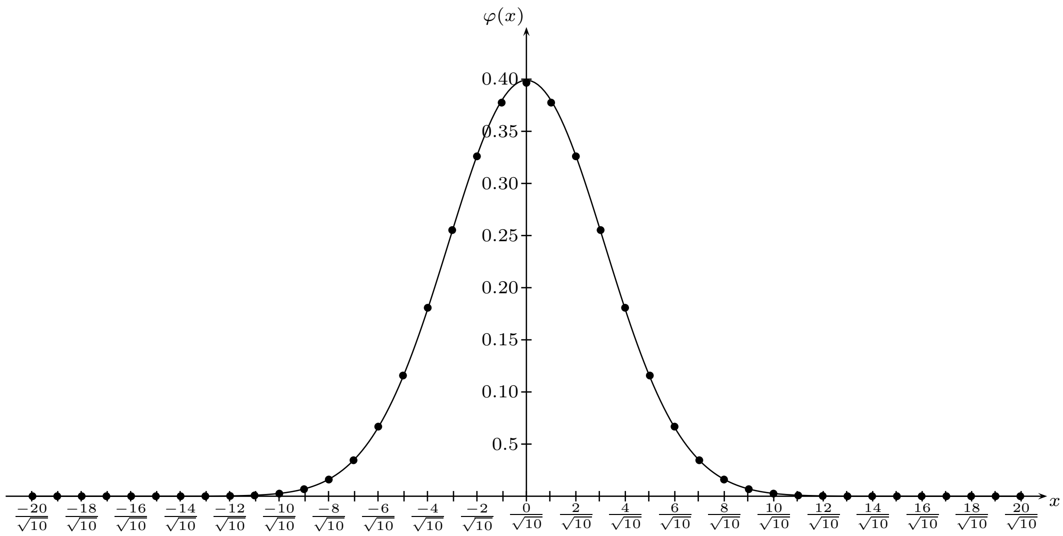
A kérdésre a válasz $\binom{40}{20} \cdot (1/2)^{40} \simeq 0.1254$. Közelítő megoldást kaphatunk a Stirling-formula használatával, a DeMoivre-Laplace tétel lokális alakjával, és a globális alakkal is. Ezek közül a Stirling-formula numerikusan még igényesebb lenne, mint a precíz súlyfüggvény. A lokális tétellel

$$p(20) \simeq \frac{1}{\sqrt{npq}} \cdot \varphi\Big(\frac{20-np}{\sqrt{npq}}\Big) = \frac{1}{\sqrt{20\pi}}\mathrm{e}^0 \simeq 0.1262.$$

A globális tétellel (X a dobott fejek száma)

$$\begin{aligned}
\mathbf{P}\{X=20\} &= \mathbf{P}\{19.5 \le X < 20.5\} = \\
&= \mathbf{P}\Big\{\frac{19.5-np}{\sqrt{npq}} \le \frac{X-np}{\sqrt{npq}} < \frac{20.5-np}{\sqrt{npq}}\Big\} = \\
&= \mathbf{P}\Big\{-\frac{0.5}{\sqrt{10}} \le \frac{X-20}{\sqrt{10}} < \frac{0.5}{\sqrt{10}}\Big\} \simeq \\
&\simeq \Phi\Big(\frac{0.5}{\sqrt{10}}\Big) - \Phi\Big(-\frac{0.5}{\sqrt{10}}\Big) = \\
&= 2\Phi\Big(\frac{0.5}{\sqrt{10}}\Big) - 1 \simeq 0.1256.
\end{aligned}$$

Alább a példához ($n=40$, $p=1/2$) kapcsolódó grafikonok: vonallal a standard normális sűrűségfüggvény (a nevező a lokális tételben), pontokkal ábrázolva a $\sqrt{npq}=\sqrt{10}$-szerese annak a valószínűségnek, hogy a binomiális változó $\sqrt{npq}\cdot x+np=\sqrt{10}\cdot x+20$ értéket vesz fel amikor ez az érték egész (számláló a lokális tételben). Az eltérés alig észrevehető.

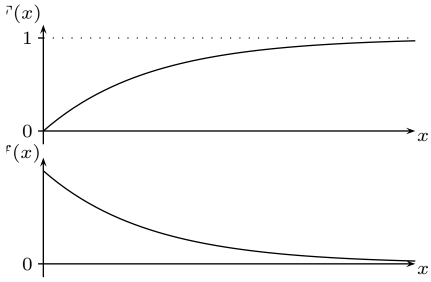


5.5. Az exponenciális eloszlás

A 4.39. példában láttuk, hogy a Poisson(λ) folyamatban az első eseményig eltelt idő $e^{-\lambda t}$ valószínűséggel nagyobb t-nél. Ez a véletlen idő *exponenciális eloszlású*:

5.29. Definíció *Legyen $\lambda > 0$. Az X valószínűségi változó* exponenciális eloszlású λ paraméterrel *($X \sim Exp(\lambda)$), ha eloszlás- illetve sűrűségfüggvénye*

$$F(x) = \begin{cases} 0, & \text{ha } x \leq 0, \\ 1 - \mathrm{e}^{-\lambda x}, & \text{ha } x \geq 0, \end{cases} \qquad f(x) = \begin{cases} 0, & \text{ha } x \leq 0, \\ \lambda \mathrm{e}^{-\lambda x}, & \text{ha } x \geq 0. \end{cases}$$



Az exponenciális eloszlás tehát várakozási időként, élettartamként szokott előkerülni.

5.30. Állítás (az exponenciális eloszlás várható értéke, szórása) *Legyen $X \sim Exp(\lambda)$. Ekkor* $\mathbf{E}X = \mathbf{D}X = 1/\lambda$.

Bizonyítás. Parciális integrálással

$$\begin{aligned} \mathbf{E}X &= \int_0^\infty x\lambda \mathrm{e}^{-\lambda x}\,\mathrm{d}x = \left[-x\mathrm{e}^{-\lambda x}\right]_0^\infty + \int_0^\infty \mathrm{e}^{-\lambda x}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{\lambda}, \\ \mathbf{E}X^2 &= \int_0^\infty x^2\lambda \mathrm{e}^{-\lambda x}\,\mathrm{d}x = \left[-x^2\mathrm{e}^{-\lambda x}\right]_0^\infty + \int_0^\infty 2x\mathrm{e}^{-\lambda x}\,\mathrm{d}x = \\ &= \frac{2}{\lambda} \cdot \int_0^\infty x\lambda\mathrm{e}^{-\lambda x}\,\mathrm{d}x = \frac{2}{\lambda} \cdot \mathbf{E}X = \frac{2}{\lambda^2}. \end{aligned}$$

Ebből $\mathbf{D}^2X = \mathbf{E}X^2 - (\mathbf{E}X)^2 = 2/\lambda^2 - 1/\lambda^2 = 1/\lambda^2$. □

Az exponenciális eloszlás a geometriai eloszlás folytonos megfelelője abban az értelemben, hogy a 4.43. állításhoz hasonlóan örökifjú:

5.31. Állítás *Az exponenciális eloszlás az egyetlen folytonos nemnegatív* örökifjú *eloszlás, azaz ha $X > 0$ folytonos eloszlású, akkor $X \sim Exp(\lambda)$ pontosan akkor, ha minden t, $s \geq 0$-ra*

$$\mathbf{P}\{X \geq t + s \mid X \geq t\} = \mathbf{P}\{X \geq s\}.$$

Szóban: feltéve, hogy a várakozási idő t vagy annál több, annak valószínűsége, hogy t után még legalább s időt kell várni ugyanaz, mint ha legelölről kezdenénk a várakozást. Az állítás nem azt mondja, hogy $\mathbf{P}\{X \geq t + s\}$ egyenlő lenne $\mathbf{P}\{X \geq s\}$-el, ez nyilvánvalóan értelmetlen volna!

Bizonyítás. Tegyük fel, hogy X folytonos és örökifjú valószínűségi változó. Legyen ($t > 0$) és $g(t) = \mathbf{P}\{X \geq t\}$, ez egy folytonos, csökkenő, pozitív függvény. Az örökifjúság szerint

$$\begin{aligned}
\mathbf{P}\{X \geq t+s \,|\, X \geq t\} &= \mathbf{P}\{X \geq s\} \\
\frac{\mathbf{P}\{\{X \geq t+s\} \cap \{X \geq t\}\}}{\mathbf{P}\{X \geq t\}} &= \mathbf{P}\{X \geq s\} \\
\frac{\mathbf{P}\{X \geq t+s\}}{\mathbf{P}\{X \geq t\}} &= \mathbf{P}\{X \geq s\} \\
\frac{g(t+s)}{g(t)} &= g(s) \\
g(t+s) &= g(t) \cdot g(s).
\end{aligned}$$

Az alábbiakban ezt rekurzívan használjuk. Legyen n, m pozitív egész.

$$\begin{aligned}
g(m) &= g(m) \\
g\underbrace{\Big(\frac{m}{n} + \cdots + \frac{m}{n}\Big)}_{n \text{ darab}} &= g(\underbrace{1 + \cdots + 1}_{m \text{ darab}}) \\
\Big[g\Big(\frac{m}{n}\Big)\Big]^n &= [g(1)]^m \\
g\Big(\frac{m}{n}\Big) &= [g(1)]^{m/n} = \mathrm{e}^{-\lambda m/n}
\end{aligned}$$

egy alkalmasan választott λ-val. Azaz $g(r) = \mathrm{e}^{-\lambda r}$ minden racionális $r \in \mathbb{Q}^+$-ra. Mivel g monoton, ezért $g(t) = \mathrm{e}^{-\lambda t}$ minden $t > 0$ valósra, azaz $X \sim \mathrm{Exp}(\lambda)$. $\square$

5.32. Példa *Tegyük fel, hogy egy telefonfülkében a hívások hossza exponenciális eloszlású, 10 perc várható értékkel. Ha egy foglalt fülkéhez érek, mi a valószínűsége, hogy 10 percnél többet, de 20 percnél kevesebbet kell várnom? (Feltesszük, hogy mások nem várnak a fülkére.)*

Minden más eloszlás esetén a válaszhoz azt is kellene tudnunk, hogy mióta foglalt a telefonfülke. Azonban az örökifjú exponenciális eloszlás esetén erre nincs szükség, a hátralevő várakozási idő az előzményektől függetlenül exponenciális eloszlású. A paramétert a várható értékből határozzuk meg: $\mathbf{E}X = 1/\lambda = 10$, ezért $\lambda = 1/10$ (1/perc). A válasz tehát

$$\mathbf{P}\{10 \leq X < 20\} = F(20) - F(10) = 1 - \mathrm{e}^{-\frac{1}{10}\cdot 20} - [1 - \mathrm{e}^{-\frac{1}{10}\cdot 10}] = \mathrm{e}^{-1} - \mathrm{e}^{-2}.$$

Az örökifjúsággal kapcsolatban a Poisson folyamatnak további érdekes tulajdonságai vannak, például az események között eltelt idők független (definíció a következő fejezetben) exponenciális eloszlásúak.

5.6. Eloszlástranszformációk

Legyen X egy valószínűségi változó, és $Y = g(X)$ egy függvénye. A diszkrét esetben viszonylag egyszerű, hogy mi lesz Y eloszlása. A folytonos esetben láttunk már egy példát az 5.20. állításban. Mivel a sűrűségfüggvény transzformációja nem teljesen nyilvánvaló, érdemes kicsit közelebbről megvizsgálni a kérdést. Először két példával kezdünk, majd egy általánosabb állítás következik. Az igazán lényeges a példák sémája:

5.33. Példa *Legyen X egy folytonos valószínűségi változó f_X sűrűségfüggvénnyel. Határozzuk meg X^2 sűrűségfüggvényét.*

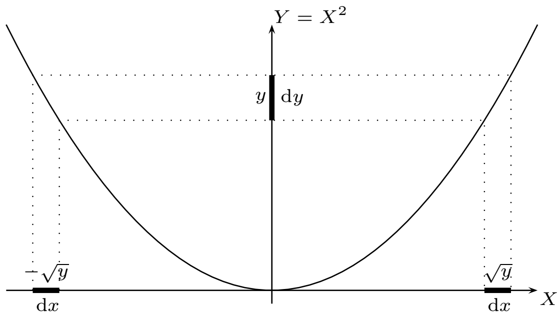
Kezdjük az eloszlásfüggvénnyel, legyen $y > 0$ ($y \le 0$ esetén a sűrűségfüggvény triviálisan nulla).

$$F_Y(y) = \mathbf{P}\{Y < y\} = \mathbf{P}\{X^2 < y\} = \mathbf{P}\{-\sqrt{y} < X < \sqrt{y}\} = F_X(\sqrt{y}) - F_X(-\sqrt{y}).$$

Ezt differenciálva

$$f_Y(y) = F_X'(\sqrt{y}) \cdot \frac{1}{2\sqrt{y}} + F_X'(-\sqrt{y}) \cdot \frac{1}{2\sqrt{y}} = f_X(\sqrt{y}) \cdot \frac{1}{2\sqrt{y}} + f_X(-\sqrt{y}) \cdot \frac{1}{2\sqrt{y}}.$$

Ennek a formulának szemléletes jelentést adhatunk, ha ábrázoljuk a transzformációt:



és az előző sort megszorozzuk egy pici $\mathrm{d}y$-nal. Ekkor az előző sor és (5.4) értelmében

$$\begin{aligned}\mathbf{P}\{Y \in [y,\, y + \mathrm{d}y)\} &\simeq f_Y(y)\,\mathrm{d}y = f_X(\sqrt{y}) \cdot \frac{1}{2\sqrt{y}}\,\mathrm{d}y + f_X(-\sqrt{y}) \cdot \frac{1}{2\sqrt{y}}\,\mathrm{d}y \simeq \\ &\simeq f_X(\sqrt{y}) \cdot \mathrm{d}x + f_X(-\sqrt{y}) \cdot \mathrm{d}x \simeq \\ &\simeq \mathbf{P}\{X \in [\sqrt{y},\, \sqrt{y} + \mathrm{d}x)\} + \mathbf{P}\{X \in [-\sqrt{y},\, -\sqrt{y} + \mathrm{d}x)\},\end{aligned}$$

ahol differenciálással kapjuk, hogy $\mathrm{d}x \simeq \frac{1}{2\sqrt{y}}\,\mathrm{d}y$.

5.34. Példa *Egy végtelen asztal origója fölött 1 méterrel elhelyeztek egy véletlen (de nem felfelé) irányba világító zseblámpát. Milyen eloszlású a fényfolt helye az asztalon?*

Legyen $\Theta \sim \mathrm{E}(-\pi/2, \pi/2)$ a lámpa függőlegessel bezárt szöge, egyenletes eloszlással. A fényfolt helye ekkor $X = \operatorname{tg}\Theta$. Ennek eloszlás- és sűrűségfüggvénye egy $x \in \mathbb{R}$ helyen

$$\begin{aligned}
F_X(x) &= \mathbf{P}\{X < x\} = \mathbf{P}\{\operatorname{tg}\Theta < x\} = \mathbf{P}\{\Theta < \operatorname{arc\,tg} x\} = \\
&= F_\Theta(\operatorname{arc\,tg} x) = \frac{\operatorname{arc\,tg} x - (-\pi/2)}{\pi/2 - (-\pi/2)} = \frac{1}{\pi}\operatorname{arc\,tg} x + \frac{1}{2}, \\
f_X(x) &= \frac{1}{\pi} \cdot \frac{1}{1+x^2}.
\end{aligned}$$

X eloszlása egy nevezetes eloszlás, a *standard Cauchy* névre hallgat (nem lenne standard, ha nem az origó fölött lenne a lámpa, vagy nem 1 méter magasan).

Látható, hogy a g függvény invertálására van szükség egy egyenlőtlenségen belül, ezzel mindig óvatosan kell bánni. Az általános állítást is csak monoton, nemnulla deriváltú függvényekkel fogalmazzuk meg, bár lehetne általánosabban is:

5.35. Állítás *Legyen X egy folytonos valószínűségi változó f_X sűrűségfüggvénnyel, és g egy folytonosan differenciálható függvény, sehol sem nulla g' deriválttal. Ekkor g szigorúan monoton, és az $Y = g(X)$ valószínűségi változó sűrűségfüggvénye*

$$f_Y(y) = \frac{f_X\big(g^{-1}(y)\big)}{\big|g'\big(g^{-1}(y)\big)\big|}.$$

Bizonyítás. Feltesszük, hogy mindenhol $g' > 0$, az ellenkező eset hasonlóan működik. Sémánk szerint

$$\begin{aligned}
F_Y(y) &= \mathbf{P}\{Y < y\} = \mathbf{P}\{g(X) < y\} = \mathbf{P}\big\{X < g^{-1}(y)\big\} = F_X\big(g^{-1}(y)\big), \\
f_Y(y) &= f_X\big(g^{-1}(y)\big) \cdot \big[g^{-1}(y)\big]' = \frac{f_X\big(g^{-1}(y)\big)}{g'\big(g^{-1}(y)\big)}.
\end{aligned}$$

□

5.7. Feladatok

5.1. Tegyük fel, hogy X eloszlásfüggvénye, F a következőképpen adott:

$$F(b) = \begin{cases} 0 & \text{ha } b < 0 \\ \dfrac{b}{4} & \text{ha } 0 \le b \le 1 \\ \dfrac{1}{2} + \dfrac{b-1}{4} & \text{ha } 1 < b \le 2 \\ \dfrac{11}{12} & \text{ha } 2 < b \le 3 \\ 1 & \text{ha } 3 < b \end{cases}$$

(a) Számoljuk ki $\mathbf{P}\{X = i\}$-t, $i = 1, 2, 3$.

(b) Mennyi $\mathbf{P}\{\frac{1}{2} < X < \frac{3}{2}\}$?

5.2. (a) Egy rendszer egy eredeti és egy pót egységből áll, így a teljes rendszer a bekapcsolástól számítva X hónapig működik. Határozzuk meg X várható értékét, és annak valószínűségét, hogy a rendszer legalább 5 hónapig működik, ha X sűrűségfüggvénye:

$$f(x) = \begin{cases} Cx\mathrm{e}^{-x/2} & \text{ha } x > 0, \\ 0 & \text{ha } x \leq 0. \end{cases}$$

(b) Legyen

$$f(x) = \begin{cases} C(2x - x^3) & \text{ha } 0 < x < \dfrac{5}{2}, \\ 0 & \text{különben,} \end{cases}$$

és

$$g(x) = \begin{cases} C(2x - x^2) & \text{ha } 0 < x < \dfrac{5}{2}, \\ 0 & \text{különben.} \end{cases}$$

Lehet-e f ill. g sűrűségfüggvény? Ha igen, határozzuk meg C-t és az f ill. g által meghatározott eloszlások várhatóértékét!

(c) Milyen α és c értékekre lesz eloszlásfüggvény a következő függvény?

$$F(x) = \exp(-ce^{-\alpha x})$$

5.3. Egy benzinkút hetente egyszer kap benzint. Hogyha a heti eladás (ezer literben mérve) egy valószínűségi változó

$$f(x) = \begin{cases} 5(1 - x)^4, & \text{ha } 0 < x < 1, \\ 0, & \text{egyébként} \end{cases}$$

sűrűségfüggvénnyel, akkor mekkora méretű tartály szükséges ahhoz, hogy egy adott héten a benzinkút 0.01-nél kisebb valószínűséggel fogyjon ki a benzinből?

5.4. Tudjuk, hogy minden Y nemnegatív valószínűségi változóra

$$\mathbf{E}(Y) = \int_0^\infty \mathbf{P}\{Y > t\}\,\mathrm{d}t.$$

Mutassuk meg, hogy egy X nemnegatív valószínűségi változóra

$$\mathbf{E}(X^n) = \int_0^\infty nx^{n-1}\mathbf{P}\{X > x\}\,\mathrm{d}x$$

teljesül. (*Tipp: kezdjük azzal, hogy*

$$\mathbf{E}(X^n) = \int_0^\infty \mathbf{P}\{X^n > t\}\,\mathrm{d}t,$$

majd cseréljünk változót ($t := x^n$).)

5.5. Legyen $F(x)$ *folytonos* eloszlásfüggvény, és $F(0) = 0$. Mutassuk meg, hogy

$$G(x) := \begin{cases} 0, & \text{ha } -\infty < x \le 1, \\ F(x) - F(x^{-1}), & \text{ha } 1 < x < \infty \end{cases}$$

is eloszlásfüggvény. Adjunk valószínűségszámítási értelmet a fenti formulának.

5.6. Konstruálható-e olyan folytonos $g : [0,\, 1] \to [0,\, \infty)$ függvény, amelyre $\int_0^1 g(x)\,\mathrm{d}x = 1$, $\int_0^1 x \cdot g(x)\,\mathrm{d}x = a$, $\int_0^1 x^2 \cdot g(x)\,\mathrm{d}x = a^2$?

5.7. Számoljuk ki $\mathbf{E}(X)$ értékét, ha X sűrűségfüggvénye

(a) $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{4} x\mathrm{e}^{-x/2} & \text{, ha } x > 0, \\ 0 & \text{, egyébként;} \end{cases}$

(b) $f(x) = \begin{cases} c(1 - x^2) & \text{, ha } -1 < x < 1, \\ 0 & \text{, egyébként;} \end{cases}$

(c) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{5}{x^2} & \text{, ha } x > 5, \\ 0 & \text{, egyébként.} \end{cases}$

5.8. Mutassuk meg, hogy

$$\mathbf{E}(Y) = \int_0^\infty \mathbf{P}\{Y > y\}\,\mathrm{d}y - \int_0^\infty \mathbf{P}\{Y < -y\}\,\mathrm{d}y.$$

(*Tipp: mutassuk meg, hogy*

$$\int_0^\infty \mathbf{P}\{Y < -y\}\,\mathrm{d}y = -\int_{-\infty}^0 x f_Y(x)\,\mathrm{d}x$$
$$\int_0^\infty \mathbf{P}\{Y > y\}\,\mathrm{d}y = \int_0^\infty x f_Y(x)\,\mathrm{d}x. \qquad)$$

5.9. X-et akkor mondjuk Y-nál *sztochasztikusan nagyobb*nak, ha minden t-re

$$\mathbf{P}\{X > t\} \geq \mathbf{P}\{Y > t\}$$

teljesül (jelölés: $X \geq_{\mathrm{st}} Y$). Mutassuk meg, hogy ha $X \geq_{\mathrm{st}} Y$, akkor $\mathbf{E}(X) \geq \mathbf{E}(Y)$ amennyiben

(a) X és Y nemnegatív valószínűségi változók,

(b) X és Y tetszőleges valószínűségi változók. (*Tipp: írjuk X-et $X = X^+ - X^-$ alakba, ahol*

$$X^+ = \begin{cases} X & \textit{ha } X \geq 0, \\ 0 & \textit{ha } X < 0, \end{cases} \qquad X^- = \begin{cases} 0 & \textit{ha } X \geq 0, \\ -X & \textit{ha } X < 0. \end{cases}$$

Hasonlóan, Y-t is írjuk $Y = Y^+ - Y^-$ alakba, majd használjuk az (a) részt.)

(c) Mutassuk meg, hogy X pontosan akkor sztochasztikusan nagyobb, mint Y, ha

$$\mathbf{E}(f(X)) \geq \mathbf{E}(f(Y))$$

minden f növekvő függvényre. (*Tipp: ha $X \geq_{st} Y$, mutassuk meg, hogy $f(X) \geq_{st} f(Y)$, majd alkalmazzuk a fentieket. Fordítva, adott t-hez találjunk egy megfelelő növekvő függvényt, melyre $\mathbf{E}(f(X)) \geq \mathbf{E}(f(Y))$-ből $\mathbf{P}\{X > t\} \geq \mathbf{P}\{Y > t\}$ következik.*)

5.10. A felé a vonatok 15 percenként indulnak 7:00-tól kezdve, míg B felé 15 percenként indulnak 7:05-től kezdve.

(a) Ha egy utas 7:00 és 8:00 közötti egyenletes eloszlású időben érkezik az állomásra, majd felszáll arra a vonatra amelyik hamarabb indul, az esetek hányadrészében megy A felé, és hányadrészében B felé?

(b) És ha az utas 7:10 és 8:10 közötti egyenletes eloszlású időben érkezik az állomásra?

5.11. Egy busz A és B városok között jár, mely városok 100 kilométerre vannak egymástól. Ha a busz lerobban, akkor azt egyenletes eloszlású helyen teszi a két város közötti úton. Pillanatnyilag egy buszszerviz található az A városban, egy a B városban, és egy a két város között félúton. Egy javaslat szerint ehelyett gazdaságosabb lenne a három szervizt az A várostól 25, 50, és 75 kilométerre elhelyezni. Egyetértünk-e a javaslattal? Miért? Mi lenne a szervizek legjobb elhelyezése? Milyen értelemben?

5.12. Tegyük fel, hogy X normális eloszlású, 5 várható értékkel. Ha $\mathbf{P}\{X > 9\} = 0.2$, közelítőleg mennyi X szórásnégyzete?

5.13. Tegyük fel, hogy a 25 éves fiatalemberek magassága centiméterben mérve normális eloszlású, $\mu = 180$ és $\sigma^2 = 169$ paraméterekkel. A 25 éves fiatalemberek hány százaléka magasabb 2 méternél? A két méteres klub tagjainak hány százaléka magasabb 2 méter 10 cm-nél?

5.14. Egy gyár két fajta érmét gyárt: egy igazságosat, és egy hamisat ami 55% eséllyel mutat fejet. Van egy ilyen érménk, de nem tudjuk igazságos-e vagy pedig hamis. Ennek eldöntésére a következő statisztikai tesztet hajtjuk végre: feldobjuk az érmét 1000-szer, ha legalább 525-ször fejet mutat, akkor hamisnak nyilvánítjuk, ha 525-nél kevesebb fej lesz a dobások között, akkor az érmét igazságosnak tekintjük. Mi a valószínűsége, hogy a tesztünk téved abban az esetben, ha az érme igazságos volt? És ha hamis volt?

5.15. Mutassuk meg, hogy $\Gamma(\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi}$. (*Tipp:* $\Gamma(\frac{1}{2}) = \int_0^\infty \mathrm{e}^{-x} x^{-\frac{1}{2}} dx$. *Helyettesítsünk* $y = \sqrt{2x}$*-et és hasonlítsuk össze az így kapott kifejezést a normális eloszlással!*)

5.16. Számoljuk ki a normális eloszlás alább definiált "abszolút momentumait" (φ a standard normális sűrűség):

$$A_k := \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(y)|y|^k \,\mathrm{d}y, \qquad k = 1, 2, 3, \ldots$$

(*Tipp: páros* $k = 2\ell$*-re számoljuk ki és használjuk a következő kifejezést:*

$$\frac{d^\ell}{d\lambda^\ell} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\lambda y^2/2} \,\mathrm{d}y \bigg|_{\lambda=1}.$$

Páratlan $k = 2\ell + 1$*-re hajtsuk végre a* $z = y^2$ *változócserét az* A_k*-t definiáló integrálban.*)

5.17. Legyen X nulla várható értékű és σ szórású, normális eloszlású valószínűségi változó. Bizonyítsuk be, hogy tetszőleges $x > 0$ esetén fennállnak a következő egyenlőtlenségek:

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-(x^2/2\sigma^2)} \left(\frac{\sigma}{x} - \frac{\sigma^3}{x^3} \right) \quad < \quad \mathbf{P}\{X > x\} \quad < \quad \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-(x^2/2\sigma^2)} \frac{\sigma}{x}.$$

(*Tipp: differenciáljuk az egyenlőtlenség-lánc mindhárom tagját és hasonlítsuk össze a deriváltakat.*)

5.18. Egy nagyváros lakosságának *általunk ismeretlen* p hányada dohányzik. Ezt a p hányadot akarjuk közelítőleg meghatározni egy mintában megfigyelt relatív gyakorisággal, a következő módon: megkérdezünk n véletlenszerűen kiválasztott lakost és megállapítjuk, hogy ezek között k állítja, hogy dohányzik. A NSZT-ből tudjuk, hogy ha n elég nagy, akkor az empirikusan megfigyelt $p' := k/n$ relatív gyakoriság igen nagy valószínűséggel jól közelíti az igazi p hányadot. Milyen nagynak kell n-et választanunk, ha azt akarjuk elérni, hogy az empirikusan megfigyelt p' relatív gyakoriság legalább 0.95 valószínűséggel 0.005 hibahatáron belül közelítse a valódi (ismeretlen) p hányadot? Más szóval: határozzuk meg azt a legkisebb n_0 természetes számot, amelyre igaz, hogy bármely $p \in (0,1)$-re és $n \geq n_0$-ra

$$\mathbf{P}\{|p' - p| \leq 0.005\} \geq 0.95.$$

5.19. Van két egyforma biztosítótársaság, egyenként tízezer ügyféllel. A 2007-es év elején minden ügyfél befizet a biztosítójának ötvenezer forintot, és az év folyamán minden ügyfél egymástól függetlenül $\frac{1}{3}$ valószínűséggel nyújt be kárigényt, amely minden esetben 150 ezer forintos. Mindkét biztosítótársaságnak van ezen felül 5 millió forint félretett pénze az előző évről. Egy biztosítótársaság csődbe megy, ha nem tudja kifizetni a beérkező kárigényeket. Érdemes-e egyesülnie a két biztosítótársaságnak? Legyen p_1 annak a valószínűsége, hogy a két biztosítótársaság közül legalább egy tönkremegy, és p_2 annak a valószínűsége, hogy az egyesült biztosítótársaság tönkremegy. Határozzuk meg p_1 és p_2 (közelítő) értékét, és vonjuk le a következtetést!

5.20. (A Poisson eloszlás normális approximációja.) Bizonyítsuk be, hogy $\lambda \to \infty$-re

$$\sqrt{\lambda} \cdot p_{\mathrm{Poi}(\lambda)}(\lfloor \lambda + x\sqrt{\lambda} \rfloor) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp(-x^2/2) + \mathcal{O}(\lambda^{-1/2}),$$

és a hibatag egyenletesen kicsi, ha x egy korlátos halmazban marad. Következményként lássuk be, hogy

$$\sum_{\lambda+\alpha\sqrt{\lambda}<k<\lambda+\beta\sqrt{\lambda}} p_{\mathrm{Poi}(\lambda)}(k) \to \int_\alpha^\beta \varphi(y)\,\mathrm{d}y = \Phi(\beta) - \Phi(\alpha)$$

amint $\lambda \to \infty$.

5.21. Egy F eloszlású folytonos valószínűségi változó mediánja az az m, amelyre $F(m) = \frac{1}{2}$. Azaz egy valószínűségi változó ugyanakkora valószínűséggel kisebb, mint a mediánja, mint amekkora valószínűséggel nagyobb. Keressük meg a X mediánját, ha X eloszlása:

(a) az $(a,\, b)$ intervallumon egyenletes eloszlás;

(b) normális eloszlás, μ és σ^2 paraméterekkel;

(c) λ rátájú exponenciális eloszlás.

5.22. Egy f sűrűségű folytonos valószínűségi változó módusza az az x, amelyre $f(x)$ maximális. Számoljuk ki X móduszát, ha X eloszlása:

(a) egyenletes az (a, b) intervallumon;

(b) normális, μ és σ^2 paraméterekkel;

(c) λ rátájú exponenciális.

5.23. Nem tudom hol a metrókijárat a megállóban ahová megyek, ezért egyenletes eloszlásúként gondolok rá. Hova érdemes szállnom a metrón (előre, középre, hátra, stb.)? Miért?

5.24. A binomiális eloszlás normális approximációjának felhasználásával számoljuk ki a következő kifejezés numerikus közelítését:

$$\binom{3600}{2376} \cdot 0.64^{2376} \cdot 0.36^{1224}.$$

5.25. Határozzuk meg $R = A\sin(\Theta)$ eloszlását, ahol A egy rögzített konstans, és Θ egyenletes eloszlású $(-\pi/2, \pi/2)$-n. (*Az ilyen valószínűségi változók ballisztikánál jönnek elő: a v sebességgel α szögben kilőtt lövedék $R = \frac{v^2}{g} \cdot \sin(2\alpha)$ távolságban ér földet.*)

5.26. (a) Legyen X λ paraméterű exponenciális eloszlású valószínűségi változó, és $c > 0$. Mutassuk meg, hogy cX szintén exponenciális eloszlású, λ/c paraméterrel.

(b) Most legyen X sűrűségfüggvénye $f(x)$. Mi az $Y = aX+b$ valószínűségi változó sűrűségfüggvénye?

(c) Most legyen X standard Cauchy eloszlású valószínűségi változó. Mutassuk meg, hogy $1/X$ is standard Cauchy eloszlású! Egy standard Cauchy eloszlású valószínűségi változó sűrűségfüggvénye:

$$f(x) = \frac{1}{\pi(1+x^2)} \qquad -\infty < x < \infty.$$

5.27. (a) Legyen X normális eloszlású μ várható értékkel és σ szórással. Határozzuk meg $Y = \mathrm{e}^X$ sűrűségfüggvényét. (Y *eloszlását lognormálisnak nevezik.*)

(b) Mutassuk meg, lehetőleg számolás nélkül, hogy ekkor CY^α eloszlása szintén lognormális $\mu' = \alpha\mu + \log C$ és $\sigma'^2 = \alpha^2\sigma^2$ paraméterekkel. (*Tipp: tudjuk, hogy $Y = \mathrm{e}^X$, ahol X normális. Írjuk fel CY^α-t e^Z alakban, találjuk meg a kapcsolatot X és Z között, és használjuk tudásunkat a normális valószínűségi változó affin transzformáltjairól.*)

(c) Valamely homokfajta részecskéi gömb alakúak, melyeknek átmérője (milliméterben mérve) log-normális eloszlású, $m = -0.5$ és $\sigma := 0.3$ paraméterekkel. Az egész homokmennyiség hány *súlyszázaléka* áll 0.5 mm-nél kisebb átmérőjű szemcsékből?

5.28. Legyen ξ az X pont távolsága a sík (1, 1) koordinátájú pontjától, ha

(a) X-et az x-tengely [0, 1] intervallumán véletlenszerűen választjuk;

(b) X-et az x-tengely [0, 2] intervallumán véletlenszerűen választjuk.

A két esetben határozzuk meg a ξ valószínűségi változó sűrűségfüggvényét.

5.29. Legyen X egyenletes eloszlású a $[-3, 4]$ intervallumon, és legyen $\Psi(x) = |x - 1| + |x + 1|$. Határozzuk meg az $Y = \Psi(X)$ valószínűségi változó $G(y)$ eloszlásfüggvényét. Abszolút folytonos eloszlású-e Y? Adjuk meg a G eloszlásfüggvény Lebesgue-féle felbontását diszkrét, abszolút folytonos és folytonos de szinguláris eloszlásfüggvények összegére.

5.30. Egy rádió élettartama években mérve exponenciális eloszlású, $\lambda = 1/8$ paraméterrel. Ha Józsi vesz egy ilyen típusú használt rádiót, mi a valószínűsége, hogy a következő nyolc évben végig működni fog?

5.31. Legyen X folytonos eloszlású valószínűségi változó, F eloszlásfüggvénnyel. Legyen $Y = F(X)$. Mutassuk meg, hogy Y valószínűségi változó egyenletes eloszlású a (0, 1) intervallumon.

5.32. Egy ℓ hosszúságú ropit találomra választott pontban ketté törünk. Mi az így keletkezett darabok közül a rövidebbiknek az eloszlása?

5.33. Benford eloszlása azt a jelenséget írja le, hogy a valóságban sok mennyiség (pl. fizikai konstansok, fizetések, részvényárak) bizonyos korlátok között skála-invariánsan viselkedik. Legyenek $0 < a < b$ valós számok, ekkor a precíz állítás az, hogy X *Benford eloszlású*, ha folytonos, majdnem biztosan $a \le X < b$, és minden $a < z < b$-re

$$\mathbf{P}\{z \le X < \alpha z\} \text{ független } z\text{-től, amíg } 1 < \alpha < b/z.$$

(Azaz ha pl. $a \le 1$ és $b \ge 4$, akkor X ugyanolyan eséllyel van 1 és 2 között, mint 2 és 4 között.)

(a) Írjuk fel a fenti megállapítást az X változó eloszlásfüggvényének segítségével.

(b) Differenciáljuk az a)-ban kapott egyenletet z szerint, és vonjuk le a tanulságot: X sűrűségfüggvénye C/x alakú ($a \le x < b$). Határozzuk meg C értékét.

(c) Határozzuk meg X eloszlásfüggvényét.

(d) Mostantól rögzítjük $a = 1$ értékét. Legyen $b = 10^n$ (n pozitív egész), mutassuk meg, hogy X értéke első számjegyének eloszlása nem függ n-től.

(e) Ezért most már b-t is lerögzítjük: legyen $a = 1$ és $b = 10$. Határozzuk meg a

$$\mathbf{P}\{X \text{ értéke az } i \text{ számjeggyel kezdődik}\}, \qquad i = 1, 2, \ldots, 9$$

valószínűségeket.

6. fejezet

Együttes eloszlások

6.1. Együttes eloszlások alapfogalmai

Ebben a fejezetben azt vizsgáljuk, hogyan kezelhető több valószínűségi változó együttes viselkedése. Legtöbbször két változót tekintünk, de minden általánosítható tetszőleges számú (akár megszámlálhatóan végtelen sok) valószínűségi változóra. Ezt néha meg is tesszük majd.

Legyenek X és Y valószínűségi változók. Az alapvető objektum, mely leírja az ő valószínűségbeli viselkedésüket, a következő:

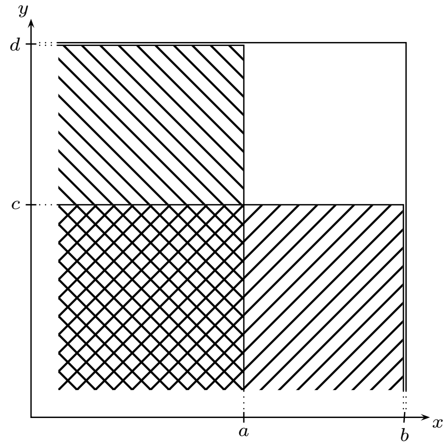
6.1. Definíció *Az X és Y valószínűségi változók* együttes eloszlásfüggvénye

$$F(x,\, y) := \mathbf{P}\{X < x,\ Y < y\}.$$

Ez a függvény minden értelmes kérdésre tudja a választ X és Y eloszlásával kapcsolatban. Legyenek ugyanis $a < b$ és $c < d$ valós számok. Ekkor

$$\mathbf{P}\{a \le X < b,\ c \le Y < d\} = F(b,\, d) - F(a,\, d) - F(b,\, c) + F(a,\, c), \tag{6.1}$$

ami szépen látszik az alábbi ábrából, miután észrevettük, hogy $F(x,\, y)$ az $(x,\, y)$ pontba eltolt harmadik (vagyis bal alsó) síknegyedbe esés valószínűsége. Az ábrán a jobb felső, nem satírozott téglalapba esés valószínűségét keressük, melyet pontosan a fenti kombinációval tudunk harmadik síknegyed-valószínűségekkel kifejezni:



Ha valaki formálisabb levezetést szeretne, az először alkalmazhatja a halmazok egyszerű tulajdonságait:

$$
\begin{aligned}
&\{a \le X < b,\ c \le Y < d\} = \\
&\qquad = \{X \ge a\} \cap \{X < b\} \cap \{Y \ge c\} \cap \{Y < d\} = \\
&\qquad = \big(\{X \ge a\} \cap \{Y < d\}\big) \cap \big(\{Y \ge c\} \cap \{X < b\}\big) = \\
&\qquad = \big((\{X \ge a\} \cap \{Y < d\}) \cup (\{Y \ge d\} \cap \{Y < d\})\big) \cap \\
&\qquad\quad \cap \big((\{X \ge b\} \cap \{X < b\}) \cup (\{Y \ge c\} \cap \{X < b\})\big) = \\
&\qquad = \{X < b\} \cap \{Y < d\} \cap \big(\{X \ge a\} \cup \{Y \ge d\}\big) \cap \big(\{X \ge b\} \cup \{Y \ge c\}\big) = \\
&\qquad = \{X < b\} \cap \{Y < d\} \cap \big(\{X < a\} \cap \{Y < d\}\big)^c \cap \big(\{X < b\} \cap \{Y < c\}\big)^c = \\
&\qquad = \big(\{X < b\} \cap \{Y < d\}\big) \cap \\
&\qquad\quad \cap \Big[\big(\{X < a\} \cap \{Y < d\}\big) \cup \big(\{X < b\} \cap \{Y < c\}\big)\Big]^c = \\
&\qquad = \big(\{X < b\} \cap \{Y < d\}\big) - \\
&\qquad\quad - \Big[\big(\{X < a\} \cap \{Y < d\}\big) \cup \big(\{X < b\} \cap \{Y < c\}\big)\Big].
\end{aligned}
$$

Mivel a kivont halmaz része az előző halmaznak, a szita formula szerint

$$
\begin{aligned}
&\mathbf{P}\{a \le X < b,\ c \le Y < d\} = \\
&\qquad = \mathbf{P}\big\{\{X < b\} \cap \{Y < d\}\big\} - \\
&\qquad\quad - \mathbf{P}\Big\{\big(\{X < a\} \cap \{Y < d\}\big) \cup \big(\{X < b\} \cap \{Y < c\}\big)\Big\} = \\
&\qquad = \mathbf{P}\big\{\{X < b\} \cap \{Y < d\}\big\} - \\
&\qquad\qquad - \Big[\mathbf{P}\big\{\{X < a\} \cap \{Y < d\}\big\} + \mathbf{P}\big\{\{X < b\} \cap \{Y < c\}\big\} - \\
&\qquad\quad - \mathbf{P}\big\{\{X < a\} \cap \{Y < c\}\big\}\Big] = \\
&\qquad = F(b,\, d) - F(a,\, d) - F(b,\, c) + F(a,\, c).
\end{aligned}
$$

Ezután a téglalapok által generált σ-algebra tetszőleges elemének, azaz minden mérhető halmaznak a valószínűsége meghatározható F segítségével. Mint ez az előbbi, biztosan nemnegatív kifejezésből is látható, nem triviálisak azok a tulajdonságok, melyek garantálják egy kétváltozós F függvény eloszlásfüggvény voltát (6.5 feladat), még több változóra pedig még bonyolultabb a helyzet.

Az együttes eloszlásokkal kapcsolatban az egyik alapkérdés, hogy önmagában az egyik valószínűségi változó eloszlása milyen lesz:

6.2. Definíció *Az X valószínűségi változó* marginális eloszlásfüggvénye *(*marginális eloszlása, peremeloszlása*)*

$$F_X(x) := \mathbf{P}\{X < x\}.$$

Itt tehát Y értékét teljesen figyelmen kívül hagyjuk. Hasonló a definíciója az Y marginális eloszlásának, amikor X értékét hagyjuk figyelmen kívül.

6.3. Állítás *A marginális eloszlásfüggvények a következőképpen fejezhetők ki az együttes eloszlással:*

$$F_X(x) = \lim_{y\to\infty} F(x,\, y), \qquad F_Y(y) = \lim_{x\to\infty} F(x,\, y).$$

Rendkívül fontos megjegyezni, hogy a marginális eloszlások nem adnak elegendő információt, azokból nem állítható vissza az együttes eloszlás.

Bizonyítás. Az $\{Y < n\}$ események n-ben növekvőek, és $\lim\limits_{n\to\infty}\{Y < n\} = \bigcup\limits_{n>0}\{Y < n\} = \Omega$. Ezért

$$\begin{aligned}F_X(x) = \mathbf{P}\{X < x\} = \mathbf{P}\big\{\{X < x\} \cap \lim_{n\to\infty}\{Y < n\}\big\} &= \\ = \mathbf{P}\big\{\lim_{n\to\infty}(\{X < x\} \cap \{Y < n\})\big\} &= \\ = \lim_{n\to\infty}\mathbf{P}\big\{\{X < x\} \cap \{Y < n\}\big\} &= \lim_{y\to\infty} F(x,\, y),\end{aligned}$$

mert a két esemény metszete is növekvő n-ben, végül pedig valós y-ra is áttérhetünk a limeszképzésben az F változónkénti monotonitása miatt. $\square$

6.4. Definíció *Az $(X,\, Y)$ pár* diszkrét eloszlású*, ha csak megszámlálhatóan sok értéket vehet fel. Ezek az egy dimenzióban is használt jelöléssel $X = x_1,\, x_2,\, \ldots$ és $Y = y_1,\, y_2,\, \ldots$. A teljes valószínűség tétele alapján ekkor a* marginális súlyfüggvények

$$p_X(x) = \mathbf{P}\{X = x\} = \sum_j \mathbf{P}\{X = x,\ Y = y_j\} = \sum_j p(x,\, y_j),$$
$$p_Y(y) = \mathbf{P}\{Y = y\} = \sum_i \mathbf{P}\{X = x_i,\ Y = y\} = \sum_i p(x_i,\, y).$$

A fentiekből nyilvánvaló, hogy

6.5. Állítás *A közös súlyfüggvényt az összes lehetséges értékre felösszegezve*

$$\sum_{i,\,j} p(x_i,\, y_j) = 1.$$

Fordítva, egy p kétváltozós nemnegatív függvény, mely csak megszámlálhatóan sok pontban nem nulla, és az ott felvett értékeinek összege 1, egy közös súlyfüggvény, és van neki megfelelő kétdimenziós diszkrét valószínűségi változó.

6.6. Példa *Egy urnában 3 piros, 4 fehér, 5 fekete golyó van. Visszatevés nélkül húzva 3 golyót, legyen X a húzott piros golyók száma, Y a húzott fehér golyók száma. Határozzuk meg az együttes eloszlásukat.*

Ezt a diszkrét eloszlást legegyszerűbben egy táblázattal tudjuk megadni, melynek elemei a közös $p(i,\, j)$ súlyfüggvény értékei. A szélső oszlopban illetve az alsó sorban a sorok illetve oszlopok összegzésével kapott marginális súlyfüggvény is szerepel, a példa élvezeti értékét emeli, ha ellenőrzésképpen néhány összeget közülük kipötyögünk a számológépen.

$Y\backslash X$	**0**	**1**	**2**	**3**	$p_Y(\cdot)$
0	$\frac{\binom{5}{3}}{\binom{12}{3}}$	$\frac{\binom{3}{1}\cdot\binom{5}{2}}{\binom{12}{3}}$	$\frac{\binom{3}{2}\cdot\binom{5}{1}}{\binom{12}{3}}$	$\frac{1}{\binom{12}{3}}$	$\to \sum = \frac{\binom{8}{3}}{\binom{12}{3}}$
1	$\frac{\binom{4}{1}\cdot\binom{5}{2}}{\binom{12}{3}}$	$\frac{\binom{4}{1}\cdot\binom{3}{1}\cdot\binom{5}{1}}{\binom{12}{3}}$	$\frac{\binom{4}{1}\cdot\binom{3}{2}}{\binom{12}{3}}$	0	$\to \sum = \frac{\binom{4}{1}\cdot\binom{8}{2}}{\binom{12}{3}}$
2	$\frac{\binom{4}{2}\cdot\binom{5}{1}}{\binom{12}{3}}$	$\frac{\binom{4}{2}\cdot\binom{3}{1}}{\binom{12}{3}}$	0	0	$\to \sum = \frac{\binom{4}{2}\cdot\binom{8}{1}}{\binom{12}{3}}$
3	$\frac{\binom{4}{3}}{\binom{12}{3}}$	0	0	0	$\to \sum = \frac{\binom{4}{3}}{\binom{12}{3}}$
$p_X(\cdot)$	$\overset{\downarrow}{\sum} = \frac{\binom{9}{3}}{\binom{12}{3}}$	$\overset{\downarrow}{\sum} = \frac{\binom{3}{1}\cdot\binom{9}{2}}{\binom{12}{3}}$	$\overset{\downarrow}{\sum} = \frac{\binom{3}{2}\cdot\binom{9}{1}}{\binom{12}{3}}$	$\overset{\downarrow}{\sum} = \frac{1}{\binom{12}{3}}$	$\to \overset{\downarrow}{\sum} = 1$

Több változóra példa az alábbi:

6.7. Példa (a multinomiális (vagy polinomiális) eloszlás) *Tegyük fel, hogy n független kísérlet mindegyike r féle eredménnyel végződhet, $p_1,\, p_2,\, \dots,\, p_r$ valószínűségekkel. Ekkor X_i legyen az i kimenetelek száma, $i = 1,\, 2,\, \dots,\, r$. Az $\{X_i\}_{i=1}^r$ változók együttes eloszlását* multinomiális (vagy polinomiális) eloszlásnak *hívják, és az együttes súlyfüggvény*

$$p(n_1,\, n_2,\, \dots,\, n_r) = \mathbf{P}\{X_1 = n_1,\; X_2 = n_2,\; \dots,\; X_r = n_r\} =$$
$$= \binom{n}{n_1\; n_2\; \dots\; n_r} \cdot p_1^{n_1} p_2^{n_2} \dots p_r^{n_r},$$

ha $n_1,\, n_2,\, \dots,\, n_r \ge 0$, és $n_1 + n_2 + \dots n_r = n$.

Ennek a függvénynek a súlyfüggvény voltát az 1.12. multinomiális tétel mutatja.

6.8. Definíció *Az* (X, Y) *pár* együttesen folytonos eloszlású, *ha létezik egy* f *kétváltozós* sűrűségfüggvény, *hogy minden* $C \subseteq \mathbb{R}^2$ *mérhető halmazra*

$$\mathbf{P}\{(X, Y) \in C\} = \iint_C f(x, y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y.$$

Fontos megjegyezni, hogy az együttes folytonossághoz nem elegendő, ha marginálisan folytonosak a valószínűségi változók. Például legyen $X = Y \sim \mathrm{E}(0, 1)$, melynek eloszlása egy egyenesre van koncentrálva, így biztosan nincs közös sűrűségfüggvény. A definícióból néhány egyszerű állítás azonnal következik együttesen folytonos eloszlásokra:

6.9. Állítás *Minden* $A, B \subseteq \mathbb{R}$ *mérhetőre*

$$\mathbf{P}\{X \in A,\ Y \in B\} = \int_A \int_B f(x, y)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x.$$

Speciális esetként a sűrűségfüggvény szemléletes jelentését láthatjuk a

$$\mathbf{P}\{X \in (a, a+\varepsilon),\ Y \in (b, b+\delta)\} = \int_a^{a+\varepsilon} \int_b^{b+\delta} f(x, y)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x \simeq f(a, b) \cdot \varepsilon\delta$$

közelítésből. Szintén speciális esetként

6.10. Állítás

$$F(a, b) = \mathbf{P}\{X < a,\ Y < b\} = \int_{-\infty}^{a} \int_{-\infty}^{b} f(x, y)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x, \qquad \textit{amiből}$$

$$f(a, b) = \frac{\partial^2 F(a, b)}{\partial a\,\partial b} = \frac{\partial^2 F(a, b)}{\partial b\,\partial a}.$$

6.11. Állítás *Az* X *illetve* Y *változók* marginális sűrűségfüggvénye

$$f_X(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y)\,\mathrm{d}y \qquad \textit{illetve} \qquad f_Y(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y)\,\mathrm{d}x.$$

Bizonyítás. Minden $A \subseteq \mathbb{R}$ mérhetőre

$$\mathbf{P}\{X \in A\} = \mathbf{P}\{X \in A,\ Y \in \mathbb{R}\} = \int_A \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x,$$

amit összehasonlítva a marginális sűrűségfüggvény

$$\mathbf{P}\{X \in A\} = \int_A f_X(x)\,\mathrm{d}x$$

definíciójával az állítás adódik. □

6.12. Példa *Legyen az X és Y valószínűségi változók közös sűrűségfüggvénye*

$$f(x,\,y)=\begin{cases}\mathrm{e}^{-x/y}\cdot\mathrm{e}^{-y}/y, & \text{ha } x,\,y>0,\\ 0, & \text{egyébként.}\end{cases}$$

Határozzuk meg Y marginális eloszlását.

Legyen $y>0$, mert ellenkező esetben a marginális sűrűség biztosan nulla. A fentiek szerint

$$f_Y(y)=\int_{-\infty}^{\infty}f(x,\,y)\,\mathrm{d}x=\int_0^{\infty}\mathrm{e}^{-x/y}\cdot\mathrm{e}^{-y}/y\,\mathrm{d}x=\mathrm{e}^{-y}.$$

Ezért $Y\sim\mathrm{Exp}(1)$, marginális eloszlásfüggvénye $F_Y(y)=1-\mathrm{e}^{-y}$ pozitív y-ra, és nulla negatív y-ra. Figyeljük meg, hogy X marginális eloszlásának meghatározása jóval bajosabb volna.

6.2. Eloszlástranszformációk

Többdimenzióban eloszlástranszformációra többféle lehetőségünk van. Ha az $(X_1,\,X_2)$ pár egy $Z=g(X_1,\,X_2)$ $\mathbb{R}$-be menő függvényének eloszlását keressük, gyakran érdemes az eloszlásfüggvény definíciója alapján dolgozni:

$$F_Z(z)=\mathbf{P}\{Z<z\}=\mathbf{P}\{g(X_1,\,X_2)<z\}=\iint_{(x_1,\,x_2)\,:\,g(x_1,\,x_2)<z}f(x_1,\,x_2)\,\mathrm{d}x_1\,\mathrm{d}x_2,\quad(6.2)$$

majd az integrálás elvégzése után, amennyiben F_Z differenciálható, Z f_Z sűrűségfüggvényét differenciálással kaphatjuk. Erre fogunk példát látni a 6.4. alfejezetben.

Ha az $(X_1,\,X_2)$ párnak egy $\mathbb{R}^2$-be menő,

$$(Y_1,\,Y_2)=\big(g_1(X_1,\,X_2),\,g_2(X_1,\,X_2)\big)$$

függvényével van dolgunk, akkor is dolgozhatunk a definíciók szerint. Az egyszerűség kedvéért vektoros jelölést használunk:

$$\begin{aligned}F_{\underline{Y}}(\underline{y})&=\mathbf{P}\{Y_1<y_1,\;Y_2<y_2\}=\mathbf{P}\{g_1(X_1,\,X_2)<y_1,\;g_2(X_1,\,X_2)<y_2\}=\\&=\iint_{(x_1,\,x_2)\,:\,g_1(x_1,\,x_2)<y_1,\;g_2(x_1,\,x_2)<y_2}f_{\underline{X}}(x_1,\,x_2)\,\mathrm{d}x_1\,\mathrm{d}x_2.\end{aligned}\quad(6.3)$$

Amennyiben létezik a második vegyesderivált, akkor ebből ezek után sűrűségfüggvényt is kaphatunk.

Ha $\underline{g}$ kellően szép, akkor a fentiek automatizálhatók is:

6.13. Állítás (kétdimenziós sűrűségtranszformáció) *Legyen $\underline{g}:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$ függvény, mely*

- *kölcsönösen egyértelmű,*
- *folytonos parciális deriváltakkal rendelkezik,*
- *Jacobi determinánsa* $|\underline{\underline{J}}| = \begin{vmatrix} \partial g_1/\partial x_1 & \partial g_1/\partial x_2 \\ \partial g_2/\partial x_1 & \partial g_2/\partial x_2 \end{vmatrix} \neq 0$ $\mathbb{R}^2$*-n.*

Ekkor $\underline{g}$ *invertálható, az* $\underline{Y} := \underline{g}(\underline{X})$ *transzformált valószínűségi változó abszolút folytonos, és sűrűségfüggvénye*

$$f_{\underline{Y}}(\underline{y}) = f_{\underline{X}}\big(\underline{g}^{-1}(\underline{y})\big) \cdot |\underline{\underline{J}}|^{-1},$$

ahol az utolsó tag a Jacobi determináns abszolút értékének reciproka (az $\underline{x} = \underline{g}^{-1}(\underline{y})$ *helyen).*

Hasonlítsuk ezt össze az egy dimenziós 5.35. állítással.

Bizonyítás. A (6.3) egyenletet folytatva egy $\underline{a} := \underline{g}(\underline{x})$ kétdimenziós változócserével

$$F_{\underline{Y}}(\underline{y}) = \iint_{a_1 < y_1,\ a_2 < y_2} f_{\underline{X}}\big(g^{-1}(\underline{a})\big) \cdot |\underline{\underline{J}}|^{-1}\, \mathrm{d}a_1\, \mathrm{d}a_2 =$$
$$= \int_{-\infty}^{y_1} \int_{-\infty}^{y_2} f_{\underline{X}}\big(g^{-1}(\underline{a})\big) \cdot |\underline{\underline{J}}|^{-1}\, \mathrm{d}a_1\, \mathrm{d}a_2,$$

amiből differenciálással

$$f_{\underline{Y}}(\underline{y}) = \frac{\partial^2 F_{\underline{Y}}(y_1, y_2)}{\partial y_1\, \partial y_2} = f_{\underline{X}}\big(g^{-1}(\underline{y})\big) \cdot |\underline{\underline{J}}|^{-1}.$$

□

Többdimenziós eloszlástranszformációra szép példa lesz a 6.21. állítás a következő alfejezetben.

6.3. Független valószínűségi változók

6.14. Definíció *Az* $X_1, X_2, \dots, X_n$ *valószínűségi változók* független*, ha a hozzájuk marginálisan kötődő események függetlenek, azaz tetszőleges* $A_1, A_2, \dots, A_n$ *mérhető* $\mathbb{R}$*-beli halmazokra*

$$\mathbf{P}\{X_1 \in A_1,\ X_2 \in A_2,\ \dots\ X_n \in A_n\} = \mathbf{P}\{X_1 \in A_1\} \cdot \mathbf{P}\{X_2 \in A_2\} \cdots \mathbf{P}\{X_n \in A_n\}.$$

Megszámlálhatóan végtelen sok valószínűségi változó független*, ha minden véges kollekciójuk független az előbbi értelemben. A* f.a.e.v.v. *rövidítés* ***f****üggetlen* ***a****zonos* ***e****loszlású* ***v****alószínűségi* ***v****áltozókat jelöl. (Angolul:* i.i.d.=***i****ndependent* ***i****dentically* ***d****istributed.)*

A szorzási szabály (3.7. állítás) következményeként a függetlenséghez elég ellenőrizni, hogy

- X_2 független X_1-től,
- X_3 független (X_1, X_2)-től,
- X_4 független (X_1, X_2, X_3)-tól,
- ...

A továbbiakban itt is főként két valószínűségi változó esetével fogunk foglalkozni, de minden általánosodik megszámlálható darab változóra.

6.15. Állítás *X és Y függetlensége*

1. *ekvivalens azzal, hogy eloszlásfüggvényük faktorizálódik:*
$$F(x, y) = F_X(x) \cdot F_Y(y) \qquad (x, y \in \mathbb{R});$$
2. *diszkrét esetben ekvivalens azzal, hogy súlyfüggvényük faktorizálódik:*
$$p(x, y) = p_X(x) \cdot p_Y(y) \qquad (x, y \in \mathbb{R});$$
3. *diszkrét esetben ekvivalens azzal, hogy súlyfüggvényük szorzat alakban írható:*
$$p(x, y) = h(x) \cdot g(y) \qquad (x, y \in \mathbb{R});$$
4. *együttesen folytonos esetben ekvivalens azzal, hogy sűrűségfüggvényük faktorizálódik:*
$$f(x, y) = f_X(x) \cdot f_Y(y) \qquad (x, y \in \mathbb{R});$$
5. *együttesen folytonos esetben ekvivalens azzal, hogy sűrűségfüggvényük szorzat alakban írható:*
$$f(x, y) = h(x) \cdot g(y) \qquad (x, y \in \mathbb{R}).$$

Bizonyítás. Az, hogy a függetlenségből az 1.3 állítások következnek, triviális. Visszafelé:

1. Legyen $a < b$ és $c < d$. Ekkor, lásd (6.1),
$$\begin{aligned}
&\mathbf{P}\{a \le X < b,\ c \le Y < d\} = \\
&\qquad = F(b, d) - F(a, d) - F(b, c) + F(a, c) = \\
&\qquad = F_X(b) \cdot F_Y(d) - F_X(a) \cdot F_Y(d) - F_X(b) \cdot F_Y(c) + F_X(a) \cdot F_Y(c) = \\
&\qquad = \big(F_X(b) - F_X(a)\big) \cdot \big(F_Y(d) - F_Y(c)\big) = \\
&\qquad = \mathbf{P}\{a \le X < b\} \cdot \mathbf{P}\{c \le Y < d\}.
\end{aligned}$$
Intervallumokra tehát megvan a függetlenség definiáló tulajdonsága, innen a szokásos mértékelméleti kiterjesztéssel minden mérhető halmazra is belátható.

2. Legyenek $A,\, B \subseteq \mathbb{R}$. A szokásos jelölésekkel

$$\begin{aligned}\mathbf{P}\{X \in A,\ Y \in B\} &= \sum_{i\,:\,x_i \in A} \sum_{j\,:\,y_j \in B} p(x_i,\, y_j) = \\ &= \sum_{i\,:\,x_i \in A} \sum_{j\,:\,y_j \in B} p_X(x_i) \cdot p_Y(y_j) = \\ &= \Big(\sum_{i\,:\,x_i \in A} p_X(x_i)\Big) \cdot \Big(\sum_{j\,:\,y_j \in B} p_Y(y_j)\Big) = \\ &= \mathbf{P}\{X \in A\} \cdot \mathbf{P}\{Y \in B\}.\end{aligned}$$

3. A közös súlyfüggvény összegezhetősége miatt $\sum\limits_i h(x_i) = C$ véges és nem nulla. Ezzel a konstanssal

$$p_Y(y) = \sum_i p(x_i,\, y) = \sum_i h(x_i) \cdot g(y) = C \cdot g(y),$$

amiből $\sum\limits_j g(y_j) = 1/C$ is következik, ezért

$$p_X(x) = \sum_j p(x,\, y_j) = \sum_j h(x) \cdot g(y_j) = \frac{h(x)}{C},$$

tehát

$$p(x,\, y) = h(x) \cdot g(y) = \frac{h(x)}{C} \cdot C\, g(y) = p_X(x) \cdot p_Y(y),$$

ami 2. szerint a függetlenséggel ekvivalens.

4. Ha X és Y együttesen folytonosak és függetlenek, akkor

$$\begin{aligned}f(x,\, y) &= \frac{\partial^2}{\partial x\, \partial y} F(x,\, y) = \frac{\partial^2}{\partial x\, \partial y} F_X(x) \cdot F_Y(y) = \\ &= \frac{\partial}{\partial x} F_X(x) \cdot \frac{\partial}{\partial y} F_Y(y) = f_X(x) \cdot f_Y(y).\end{aligned}$$

Fordítva, ha $f(x,\, y) = f_X(x) \cdot f_Y(y)$, akkor A és B mérhetőkre

$$\begin{aligned}\mathbf{P}\{X \in A,\ Y \in B\} &= \int_A \int_B f(x,\, y)\, \mathrm{d}y\, \mathrm{d}x = \\ &= \int_A \int_B f_X(x) \cdot f_Y(y)\, \mathrm{d}y\, \mathrm{d}x = \\ &= \Big(\int_A f_X(x)\, \mathrm{d}x\Big) \cdot \Big(\int_B f_Y(y)\, \mathrm{d}y\Big) = \\ &= \mathbf{P}\{X \in A\} \cdot \mathbf{P}\{Y \in B\}.\end{aligned}$$

5. Ugyanúgy bizonyítható 4.-ből, mint 3. 2.-ből. $\square$

A fentiek következménye, hogy a marginális eloszlások ismerete plusz a függetlenség egyértelműen meghatározza a valószínűségi változók együttes eloszlását.

6.16. Példa (a Poisson eloszlás (folyamat) címkézése) *Tegyük fel, hogy az emberek λ paraméterű Poisson folyamat szerint érkeznek a postára, és mindegyikük p valószínűséggel férfi, $1-p$ valószínűséggel nő, egymástól függetlenül. Ekkor az első órában érkező emberek össz-száma $\sim$ Poi(λ) eloszlású, és a 4.31 feladatban már láthattuk, hogy a férfiak száma az első órában $= X \sim$ Poi(λp). Természetesen ugyanígy a nők száma az első órában $= Y \sim$ Poi$(\lambda(1-p))$. Most mindezek mellett azt is megmutatjuk, hogy X és Y függetlenek (!).*

A közös súlyfüggvény meghatározásához egy fura feltétellel egészítjük ki a valószínűséget. Mivel ez a feltétel következik a valószínűségben szereplő eseményből, ez nem jelent majd megszorítást. Legyenek $i,\, j \geq 0$ egészek.

$$\begin{aligned} p(i,\, j) &= \mathbf{P}\{X = i,\ Y = j\} = \\ &= \mathbf{P}\{X = i,\ Y = j \,|\, X + Y = i + j\} \cdot \mathbf{P}\{X + Y = i + j\}. \end{aligned}$$

Tudjuk, hogy az emberek össz-száma $= X + Y \sim \mathrm{Poi}(\lambda)$, és a feltételek szerint adott számú ember mellett a férfiak száma binomiális: $X \,|\, X + Y = n \sim \mathrm{Binom}(n,\, p)$. (A kedélyek felkavarása végett ezt még így is írhatjuk: $X \,|\, X + Y \sim \mathrm{Binom}(X + Y,\, p)$, ugyanis itt $X+Y$ feltételezésével beszélünk, tehát $X+Y$ nem véletlen.) Ezt felhasználva folytatjuk a számolást:

$$p(i,\, j) = \binom{i+j}{i} \cdot p^i \cdot (1-p)^j \cdot \frac{\lambda^{i+j}}{(i+j)!} \cdot \mathrm{e}^{-\lambda} = p^i \cdot (1-p)^j \cdot \frac{\lambda^{i+j}}{i! \cdot j!} \cdot \mathrm{e}^{-\lambda}.$$

Ebben a pillanatban készen vagyunk, hiszen ez egy szorzatfüggvény, tehát X és Y függetlenek, a marginális eloszlásokat pedig már a 4.31 feladatból tudjuk. Azért befejezzük a számolást. Annyi maradt hátra, hogy a 6.15. állítás 3. pontjából átlépjünk a 2. pont szerinti alakba. Ehhez csak a konstansokat kell ügyesen csoportosítanunk:

$$\begin{aligned} p(i,\, j) &= \frac{(\lambda p)^i}{i!}\, \mathrm{e}^{-\lambda p} \cdot \frac{(\lambda(1-p))^j}{j!}\, \mathrm{e}^{-\lambda(1-p)} = \\ &= p_{\mathrm{Poi}(\lambda p)}(i) \cdot p_{\mathrm{Poi}(\lambda(1-p))}(j) = p_X(i) \cdot p_Y(j). \end{aligned}$$

A jelenség a Poisson folyamat szintjén is létezik: a definíció alapján meggyőzhetjük magunkat, hogy ha egy Poisson(λ) folyamat eseményeit mindentől függetlenül p valószínűséggel kékre és $1-p$ valószínűséggel pirosra színezzük, akkor a kék és a piros folyamat egymástól független Poisson(λp) illetve Poisson$(\lambda(1-p))$ folyamatok lesznek.

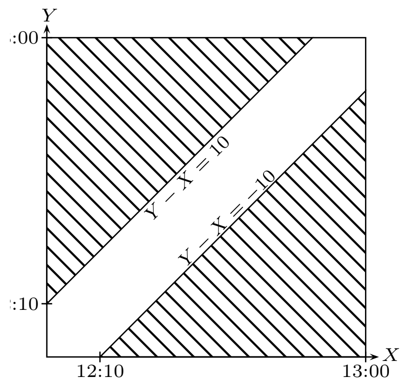
Legyenek $X \sim \mathrm{E}(a,\, b)$ és $Y \sim \mathrm{E}(c,\, d)$ független egyenletes eloszlásúak. Ekkor sűrűségfüggvényük konstans ($= 1/(b-a)$ illetve $1/(d-c)$) a megfelelő intervallumon, ezért közös sűrűségfüggvényük is egy konstans az intervallumok szorzatán. Másképpen az együttes sűrűségfüggvény ebben az esetben az $(a,\, b) \times (c,\, d)$ téglalapon a téglalap területének reciproka. Az $(X,\, Y)$ pár tehát ekkor egyenletes eloszlású a téglalapon:

6.17. Definíció *A sík egy mérhető, véges és pozitív Lebesgue-mértékű C halmazán konstans, azon kívül nulla sűrűségű eloszlást* egyenletesnek *nevezzük a C-n. A sűrűségfüggvény ekkor szükségképpen $1/|C|$, ahol $|C|$-n a C halmaz kétdimenziós Lebesgue-mértékét értjük. Emiatt egy $A \subseteq C$ mérhető halmazba esés valószínűsége $= |A|/|C|$, vagyis a területek aránya.*

Kétdimenziós egyenletes (vagy két egydimenziós független egyenletes) eloszlás esetén mindig az első feladat egy megfelelő ábra készítése.

6.18. Példa *Jancsi és Juliska egymástól függetlenül 12:00 és 13:00 között véletlenszerűen érkeznek a megbeszélt találkahelyre. Mi a valószínűsége, hogy az első odaérő 10 percnél többet vár a másodikra?*

Egyéb információ hiányában feltehetjük, hogy Jancsi és Juliska X illetve Y érkezési idejei f.a.e. E(12:00, 13:00) valószínűségi változók. A közös eloszlás tehát egyenletes a (12:00, 13:00)$\times$(12:00, 13:00) négyzeten. A kérdéses $\{|X-Y| > 10\}$ eseményt ábrázolva:



A kétdimenziós egyenletes eloszlás szerint az esemény valószínűsége az esemény és a teljes négyzet területeinek aránya, vagyis $2 \cdot \frac{50^2}{2}/60^2 = 25/36$. A feladatot persze meg lehetne oldani kétdimenziós integrálással is (ezzel lényegében meghatározva a fenti háromszögek területét).

6.19. Példa *Legyen az X és Y valószínűségi változók együttes sűrűségfüggvénye*

$$f(x,\, y) = \begin{cases} 24xy, & \text{ha } 0 < x < 1, \quad 0 < y < 1, \quad 0 < x + y < 1, \\ 0, & \text{egyébként.} \end{cases}$$

Függetlenek-e a változók?

Ugyan első ránézésre a sűrűségfüggvény szorzat alakúnak tűnhet, ám a feltételekkel együtt

$$f(x,\, y) = 24xy \cdot \mathbf{1}\{0 < x < 1\} \cdot \mathbf{1}\{0 < y < 1\} \cdot \mathbf{1}\{0 < x + y < 1\}$$

nem szorzat alakú az utolsó indikátor miatt. Független valószínűségi változók szükségképpen szorzathalmazra vannak koncentrálva, e példa feltételeiben pedig egy nem szorzat alakú halmaz (egy háromszög) szerepel. X és Y tehát *nem* függetlenek.

Az eddigiek és az alábbiak is triviális módon általánosíthatók több valószínűségi változó esetére. A következő definíciót eleve d dimenzióban érdemes bevezetni.

6.20. Definíció *Legyen* $\underline{\underline{A}}$ *egy* $d \times d$ *pozitív definit szimmetrikus valós mátrix (azaz minden* $\underline{x} \in \mathbb{R}^d$*-re* $\underline{x}^T \underline{\underline{A}}\, \underline{x} > 0$*), és* $\underline{m} \in \mathbb{R}$ *egy rögzített vektor. Az* $\underline{X} \in \mathbb{R}^d$ *valószínűségi változó vektor* együttes normális (avagy Gauss) eloszlású, *ha sűrűségfüggvénye*

$$f(\underline{x}) = \frac{\sqrt{\det \underline{\underline{A}}}}{\sqrt{2\pi}^d} \cdot \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}(\underline{x}-\underline{m})^T \underline{\underline{A}}(\underline{x}-\underline{m})} \qquad (\underline{x} \in \mathbb{R}^d). \tag{6.4}$$

Megjegyezzük, hogy az $\underline{\underline{A}}$ mátrixnak nagyon kézzelfogható jelentést fogunk adni a 7.18. állításban. Ez az eloszlás önmagában is fontos, ráadásul szép példa többdimenziós eloszlástranszformációkra is:

6.21. Állítás *A* d *dimenziós normális eloszlás* d *darab f.a.e. standard normális valószínűségi változó affin transzformáltjaként áll elő.*

Bizonyítás. A definícióban szereplő jelölésekkel az $\underline{\underline{A}}$ mátrix szimmetrikus, ezért sajátértékei valósak, és választható d darab $\underline{v}^{(1)}, \underline{v}^{(2)}, \ldots, \underline{v}^{(d)}$ sajátvektor, melyek ortonormált bázist alkotnak. A belőlük mint oszlopvektorokból összeállított $\underline{\underline{P}}$ ortogonális mátrix diagonalizálja $\underline{\underline{A}}$-t:

$$\underline{\underline{P}}^{-1}\, \underline{\underline{A}}\, \underline{\underline{P}} = \underline{\underline{D}} = \begin{pmatrix} \lambda^{(1)} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda^{(2)} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \lambda^{(3)} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \lambda^{(d)} \end{pmatrix}.$$

$\underline{\underline{A}}$ pozitív definitsége miatt a sajátértékek pozitívak, így vehetjük a $\sqrt{\underline{\underline{D}}}$ diagonális mátrixot, melynek főátlójában a sajátértékek gyökei ülnek. Definiáljuk a

$$\underline{g} : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d, \qquad \underline{x} \mapsto \underline{g}(\underline{x}) = \sqrt{\underline{\underline{D}}}\, \underline{\underline{P}}^{-1}(\underline{x} - \underline{m})$$

affin transzformációt ($\underline{m}$-el való eltolást, a $\{\underline{v}^{(i)}\}_i$ bázis szerinti forgatást, majd különböző irányokba való különböző nyújtásokat).

$$\underline{\underline{A}} = \underline{\underline{P}}\,\underline{\underline{D}}\,\underline{\underline{P}}^{-1} = \big(\underline{\underline{P}}^{-1}\big)^T \sqrt{\underline{\underline{D}}}\sqrt{\underline{\underline{D}}}\,\underline{\underline{P}}^{-1} = \big(\sqrt{\underline{\underline{D}}}\,\underline{\underline{P}}^{-1}\big)^T \sqrt{\underline{\underline{D}}}\,\underline{\underline{P}}^{-1}$$

miatt (6.4) így is írható:

$$f_{\underline{X}}(\underline{x}) = \frac{\sqrt{\det \underline{\underline{D}}}}{\sqrt{2\pi}^d} \cdot \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}(\underline{g}(\underline{x}))^T \cdot \underline{g}(\underline{x})}.$$

A $\underline{g}$ függvény kielégíti a 6.13. állítás feltételeit, és Jacobi determinánsa

$$\det \sqrt{\underline{\underline{D}}} \cdot \det \underline{\underline{P}}^{(-1)} = \pm \det \sqrt{\underline{\underline{D}}} = \pm \sqrt{\det \underline{\underline{D}}},$$

így az $\underline{Y} := \underline{g}(\underline{X})$ változó sűrűségfüggvénye

$$f_{\underline{Y}}(\underline{y}) = f_{\underline{X}}\big(\underline{g}^{-1}(\underline{y})\big) \cdot |\underline{\underline{J}}|^{-1} = \frac{\sqrt{\det \underline{\underline{D}}}}{\sqrt{2\pi}^d} \cdot \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}(\underline{g}(\underline{g}^{-1}(\underline{y})))^T \cdot \underline{g}(\underline{g}^{-1}(\underline{y}))} \cdot \left(\sqrt{\det \underline{\underline{D}}}\right)^{-1} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}^d} \cdot \mathrm{e}^{-\frac{1}{2} \cdot \underline{y}^T \cdot \underline{y}} = \prod_{i=1}^{d} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \mathrm{e}^{-y_i^2/2},$$

ami pontosan azt jelenti, hogy az $\underline{Y} = (Y_1, Y_2, \ldots, Y_d)$ valószínűségi változók f.a.e. $\mathcal{N}(0, 1)$ eloszlásúak. Mivel

$$\underline{X} = \underline{g}^{-1}(\underline{Y}) = \underline{\underline{P}}\, \underline{\underline{D}}^{-1/2} \underline{Y} + \underline{m},$$

az állítás be van bizonyítva. □

Az állítás fordítva is igaz:

6.22. Állítás *d darab f.a.e. standard normális valószínűségi változó minden nem nulla Jacobi determinánsú affin transzformáltja d dimenziós együttes normális eloszlású lesz.*

Bizonyítás. A 6.13. transzformációs allításba behelyettesítve a f.a.e. standard normálisokat könnyedén felfedezzük az együttes normális sűrűségfüggvényt benne az affin transzformációból származtatott $\underline{\underline{A}}$ pozitív definit szimmetrikus mátrixszal és $\underline{m}$ vektorral. □

6.23. Állítás *A f.a.e. $\mathcal{N}(0, \sigma^2)$ valószínűségi változók együttes eloszlása forgásszimmetrikus.*

Bizonyítás. Ekkor $\underline{m} = \underline{0}$ és $\underline{\underline{A}}$ az egységmátrix $1/\sigma^2$-szerese, ezért bármilyen

$$\underline{g} : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d, \qquad \underline{x} \mapsto \underline{g}(\underline{x}) = \underline{\underline{P}}^{-1}\underline{x}$$

ortogonális transzformációra

$$f_{\underline{Y}}(\underline{y}) = f_{\underline{X}}\big(\underline{g}^{-1}(\underline{y})\big) \cdot |\underline{\underline{J}}|^{-1} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}^d \sigma^d} \cdot \mathrm{e}^{-\frac{1}{2\sigma^2}(\underline{\underline{P}}\,\underline{y})^T \cdot (\underline{\underline{P}}\,\underline{y})} \cdot 1^{-1} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}^d \sigma^d} \cdot \mathrm{e}^{-\frac{1}{2\sigma^2}\underline{y}^T \cdot \underline{y}}$$

még mindig a $\mathcal{N}(0, \sigma^2)$ sűrűségfüggvények szorzata. □

6.4. Független valószínűségi változók összegei

Az alábbiakban X és Y független valószínűségi változókat aduk össze, és kíváncsiak vagyunk $X+Y$ eloszlására. Ez egyúttal példaként szolgál kétdimenzióból egy dimenzióba menő eloszlástranszformációra is. Először egész értékű változókat tekintünk, az általános diszkrét eset technikai bonyodalmakkal, de elvileg hasonlóan tárgyalható. A következő állítás a teljes valószínűség tétele alapján egyszerűen következik.

6.24. Állítás *Legyenek X és Y független, egész értékű valószínűségi változók p_X és p_Y marginális súlyfüggvényekkel. Ekkor $X+Y$ súlyfüggvénye*

$$p_{X+Y}(k) = \sum_{i=-\infty}^{\infty} p_X(k-i) \cdot p_Y(i).$$

Ezt a formulát *diszkrét konvolúciónak* hívják.

Bizonyítás.

$$\begin{aligned} p_{X+Y}(k) = \mathbf{P}\{X+Y=k\} &= \sum_{i=-\infty}^{\infty} \mathbf{P}\{X+Y=k,\ Y=i\} = \\ = \sum_{i=-\infty}^{\infty} \mathbf{P}\{X=k-i,\ Y=i\} &= \sum_{i=-\infty}^{\infty} p_X(k-i) \cdot p_Y(i). \end{aligned}$$

□

6.25. Következmény *Legyenek $X \sim Poi(\lambda)$ és $Y \sim Poi(\mu)$ független valószínűségi változók. Ekkor $X+Y \sim Poi(\lambda+\mu)$.*

Bizonyítás. Legyen $k \geq 0$, ellenkező esetben az összeg súlyfüggvénye nulla.

$$\begin{aligned} p_{X+Y}(k) = \sum_{i=-\infty}^{\infty} p_X(k-i) \cdot p_Y(i) &= \sum_{i=0}^{k} \frac{\lambda^{k-i}}{(k-i)!} e^{-\lambda} \cdot \frac{\mu^i}{i!} e^{-\mu} = \\ = \frac{1}{k!} \sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} \cdot \lambda^{k-i} \cdot \mu^i \cdot e^{-(\lambda+\mu)} &= \frac{(\lambda+\mu)^k}{k!} e^{-(\lambda+\mu)} \end{aligned}$$

Newton binomiális tétele (1.11. tétel) alapján. □

6.26. Következmény *Legyenek $X \sim Binom(n, p)$ és $Y \sim Binom(m, p)$ független valószínűségi változók. Ekkor $X+Y \sim Binom(n+m, p)$.*

Fontos, hogy X és Y eloszlásában a p paraméter megegyezett, különben az állítás nem igaz.

Bizonyítás. A binomiális eloszlás jelentése alapján az állítás nyilvánvaló. A konvolúciós képlet egy kombinatorikai azonosságra vezet:

$$\begin{aligned}
p_{X+Y}(k) &= \sum_{i=0}^{k} \binom{n}{k-i} p^{k-i}(1-p)^{n-k+i} \cdot \binom{m}{i} p^{i}(1-p)^{m-i} = \\
&= p^k \cdot (1-p)^{m+n-k} \sum_{i=0}^{k} \binom{n}{k-i} \cdot \binom{m}{i}.
\end{aligned}$$

A $\sum\limits_{i=0}^{k} \binom{n}{k-i} \cdot \binom{m}{i} = \binom{n+m}{k}$ azonosság a hipergeometriai eloszlás (4.49. definíció) eloszlás voltával ekvivalens. Kombinatorikai úton is belátható: a bal oldal megszámolja, hányféleképpen választhatunk ki n kék és m piros golyó közül valahány kéket és valahány pirosat, hogy összesen k darabot válasszunk. A jobb oldal annak száma, ahányféleképpen $m+n$ golyóból k darabot ki tudunk választani. □

Független folytonos valószínűségi változók összegeihez célszerűbb először (6.2) segítségével az összeg eloszlásfüggvényét tekinteni:

$$\begin{aligned}
F_{X+Y}(a) = \mathbf{P}\{X+Y<a\} &= \iint_{x+y<a} f(x,\, y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \\
&= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{a-y} f_X(x)\cdot f_Y(y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_{-\infty}^{\infty} F_X(a-y)\cdot f_Y(y)\,\mathrm{d}y.
\end{aligned}$$

Ezt a formulát hívják az *eloszlásfüggvények konvolúciójának.* Differenciálással kapjuk, hogy

6.27. Állítás *Ha X és Y folytonos és független valószínűségi változók, akkor*

$$f_{X+Y}(a) = \int_{-\infty}^{\infty} f_X(a-y)\cdot f_Y(y)\,\mathrm{d}y,$$

mely formula a sűrűségfüggvények konvolúciója *nevet viseli.*

6.28. Példa *Határozzuk meg két független, $E(0,\, 1)$ valószínűségi változó összegének sűrűségfüggvényét.*

Független egyenletes valószínűségi változók esetén mindig érdemes az eloszlásfüggvényt ábra segítségével keresni, ez ebben az esetben is célravezető. Mi most ehelyett az előző állítást alkalmazzuk. A két változó marginális sűrűségfüggvénye $f_X(z) = f_Y(z) = \mathbf{1}\{0 < z < 1\}$. Ezért $a \in (0,\, 2)$ esetén (az összeg sűrűségfüggvénye nulla egyébként)

$$\begin{aligned}
f_{X+Y}(a) &= \int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{1}\{0 < a-y < 1\}\cdot \mathbf{1}\{0<y<1\}\,\mathrm{d}y = \\
&= \int_{(a-1)\vee 0}^{a\wedge 1} 1\,\mathrm{d}y = \begin{cases} a, & \text{ha } 0<a<1, \\ 2-a, & \text{ha } 1<a<2. \end{cases}
\end{aligned}$$

Két független egyenletes eloszlású változó összege tehát *nem* egyenletes. Független normálisok összege viszont normális:

6.29. Állítás *Legyenek* $X \sim \mathcal{N}(\mu_x,\, \sigma_x^2)$ *és* $Y \sim \mathcal{N}(\mu_y,\, \sigma_y^2)$ *függetlenek. Ekkor* $X + Y \sim \mathcal{N}(\mu_x + \mu_y,\, \sigma_x^2 + \sigma_y^2)$.

Bizonyítás. Első lépésben a $\mu_x = \mu_y = 0$ esetre bizonyítunk. Az összeg sűrűségfüggvénye

$$\begin{aligned} f_{X+Y}(a) &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma_x} \mathrm{e}^{-\frac{(a-y)^2}{2\sigma_x^2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma_y} \mathrm{e}^{-\frac{y^2}{2\sigma_y^2}}\,\mathrm{d}y = \\ &= \frac{1}{2\pi\sigma_x\sigma_y} \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}\left[\frac{(a-y)^2}{\sigma_x^2} + \frac{y^2}{\sigma_y^2}\right]}\,\mathrm{d}y. \end{aligned}$$

A stratégia az lesz, hogy a szögletes zárójelből teljes négyzetet csinálunk, melynek segítségével az integrált el tudjuk majd végezni.

$$\begin{aligned} \frac{(a-y)^2}{\sigma_x^2} + \frac{y^2}{\sigma_y^2} &= \frac{y^2}{\sigma_x^2} + \frac{y^2}{\sigma_y^2} - 2\,\frac{ay}{\sigma_x^2} + \frac{a^2}{\sigma_x^2} = \frac{\sigma_x^2 + \sigma_y^2}{\sigma_x^2\sigma_y^2} \cdot y^2 - 2\,\frac{a}{\sigma_x^2} \cdot y + \frac{a^2}{\sigma_x^2} = \\ &= \frac{\sigma_x^2 + \sigma_y^2}{\sigma_x^2\sigma_y^2} \cdot \Big(y^2 - 2\,a\,\frac{\sigma_y^2}{\sigma_x^2 + \sigma_y^2} \cdot y\Big) + \frac{a^2}{\sigma_x^2} = \\ &= \frac{\sigma_x^2 + \sigma_y^2}{\sigma_x^2\sigma_y^2} \cdot \Big(y - a\,\frac{\sigma_y^2}{\sigma_x^2 + \sigma_y^2}\Big)^2 - \frac{\sigma_x^2 + \sigma_y^2}{\sigma_x^2\sigma_y^2} \cdot a^2\,\frac{\sigma_y^4}{(\sigma_x^2 + \sigma_y^2)^2} + \frac{a^2}{\sigma_x^2} = \\ &= \frac{\sigma_x^2 + \sigma_y^2}{\sigma_x^2\sigma_y^2} \cdot \Big(y - a\,\frac{\sigma_y^2}{\sigma_x^2 + \sigma_y^2}\Big)^2 + a^2 \cdot \frac{-\sigma_y^2 + \sigma_x^2 + \sigma_y^2}{(\sigma_x^2 + \sigma_y^2)\sigma_x^2} = \\ &= \frac{\sigma_x^2 + \sigma_y^2}{\sigma_x^2\sigma_y^2} \cdot \Big(y - a\,\frac{\sigma_y^2}{\sigma_x^2 + \sigma_y^2}\Big)^2 + \frac{a^2}{\sigma_x^2 + \sigma_y^2}. \end{aligned}$$

Ezért bevezetve a $z = \frac{\sqrt{\sigma_x^2 + \sigma_y^2}}{\sigma_x\sigma_y} \cdot \Big(y - a\,\frac{\sigma_y^2}{\sigma_x^2 + \sigma_y^2}\Big)$ integrálási változót,

$$f_{X+Y}(a) = \frac{1}{2\pi\sqrt{\sigma_x^2 + \sigma_y^2}} \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{-z^2/2}\,\mathrm{d}z \cdot \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}\frac{a^2}{\sigma_x^2 + \sigma_y^2}} = \frac{1}{\sqrt{2\pi(\sigma_x^2 + \sigma_y^2)}} \cdot \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}\frac{a^2}{\sigma_x^2 + \sigma_y^2}}.$$

Ez mutatja, hogy $X + Y \sim \mathcal{N}(0,\, \sigma_x^2 + \sigma_y^2)$. Általános esetben pedig a következő felbontással élünk:

$$X + Y = \underbrace{\underbrace{X - \mu_x}_{\sim\mathcal{N}(0,\,\sigma_x^2)} + \underbrace{Y - \mu_y}_{\sim\mathcal{N}(0,\,\sigma_y^2)}}_{\sim\mathcal{N}(0,\,\sigma_x^2 + \sigma_y^2)} + \mu_x + \mu_y \sim \mathcal{N}(\mu_x + \mu_y,\, \sigma_x^2 + \sigma_y^2).$$

□

Az állításból természetesen az is következik, hogy $X - Y \sim \mathcal{N}(\mu_x - \mu_y,\, \sigma_x^2 + \sigma_y^2)$ (a szórásnégyzetek még mindig összeadódnak!).

6.30. Példa *Egy kosárlabdacsapat $n_A = 26$ játékot játszik A osztályú csapat ellen, $n_B = 18$ játékot pedig B osztályú csapat ellen. Az A osztályú csapatok ellen a nyerés valószínűsége játékonként függetlenül $p_A = 0.4$, a B osztályú csapatok ellen $p_B = 0.7$. Mi a valószínűsége, hogy csapatunk összesen 25 vagy több játékot nyer? Mi a valószínűsége, hogy többször nyer A osztályú csapat ellen, mint B osztályú csapat ellen?*

Az A osztályú csapatok ellen nyert játékok száma $= X \sim \mathrm{Binom}(n_A,\, p_A)$, a B osztályúak ellen nyert játékok száma $= Y \sim \mathrm{Binom}(n_B,\, p_B)$, és ezek a változók függetlenek. A gond az, hogy $p_A \neq p_B$ miatt ezek összege nem lesz binomiális. A játékok száma viszont elég nagy ahhoz, hogy a DeMoivre-Laplace közelítés működni kezdjen, azaz közelítőleg

$$\frac{X - n_A p_A}{\sqrt{n_A p_A(1-p_A)}} \sim \mathcal{N}(0,\,1) \qquad \text{és} \qquad \frac{Y - n_B p_B}{\sqrt{n_B p_B(1-p_B)}} \sim \mathcal{N}(0,\,1).$$

Ezért egy egyelőre ismeretlen C konstanssal normáljuk a centrált változókat:

$$\begin{aligned}
&\mathbf{P}\{X + Y \geq 25\} = \\
&\quad = \mathbf{P}\{X + Y \geq 24.5\} = \\
&\quad = \mathbf{P}\Big\{\frac{X - n_A p_A}{C} + \frac{Y - n_B p_B}{C} \geq \frac{24.5 - n_A p_A - n_B p_B}{C}\Big\} = \\
&\quad = \mathbf{P}\Big\{\underbrace{\underbrace{\underbrace{\frac{X - n_A p_A}{\sqrt{n_A p_A(1-p_A)}}}_{\sim\mathcal{N}(0,\,1)} \cdot \frac{\sqrt{n_A p_A(1-p_A)}}{C}}_{\sim\mathcal{N}(0,\, n_A p_A(1-p_A)/C^2)} + \underbrace{\underbrace{\frac{Y - n_B p_B}{\sqrt{n_B p_B(1-p_B)}}}_{\sim\mathcal{N}(0,\,1)} \cdot \frac{\sqrt{n_B p_B(1-p_B)}}{C}}_{\sim\mathcal{N}(0,\, n_B p_B(1-p_B)/C^2)}}_{\sim\mathcal{N}(0,\, [n_A p_A(1-p_A) + n_B p_B(1-p_B)]/C^2)} \geq \\
&\qquad \geq \frac{24.5 - n_A p_A - n_B p_B}{C}\Big\}.
\end{aligned}$$

Ebből az okoskodásból látjuk, hogy

$$C = \sqrt{n_A p_A(1-p_A) + n_B p_B(1-p_B)}$$

lesz célravezető, hiszen ekkor az egész baloldal körülbelül standard normálisként viselkedik. Eközben a DeMoivre-Laplace közelítés akkor marad érvényben, ha a $\sqrt{n_A p_A(1-p_A)}/C$ és $\sqrt{n_B p_B(1-p_B)}/C$ szorzók nem túl nagyok $\sqrt{n_A p_A(1-p_A)}$-hoz illetve $\sqrt{n_B p_B(1-p_B)}$-hez képest, azaz $\sqrt{n_A p_A(1-p_A)}$ és $\sqrt{n_B p_B(1-p_B)}$ nem térnek el nagyságrendben egymáshoz képest. Esetünkben e két szám körülbelül 2.50 és 1.94. (Ezek persze intuitív érvelések, egzakt állításokhoz a hibatagok becslése volna szükséges.) Tehát ezzel a C választással

$$\begin{aligned}\mathbf{P}\{X+Y\ge 25\}&\simeq 1-\Phi\Big(\frac{24.5-n_Ap_A-n_Bp_B}{C}\Big)=\\&=1-\Phi\Big(\frac{24.5-n_Ap_A-n_Bp_B}{\sqrt{n_Ap_A(1-p_A)+n_Bp_B(1-p_B)}}\Big)\simeq\\&\simeq 1-\Phi(0.474)\simeq 0.32.\end{aligned}$$

Hasonlóan, annak valószínűsége, hogy A osztályú csapat ellen több siker születik, mint B osztályú ellen

$$\begin{aligned}&\mathbf{P}\{X-Y>0\}=\\&\quad=\mathbf{P}\{X-Y\ge 0.5\}=\\&\quad=\mathbf{P}\Big\{\frac{X-n_Ap_A}{C}-\frac{Y-n_Bp_B}{C}\ge\frac{0.5-n_Ap_A+n_Bp_B}{C}\Big\}=\\&\quad=\mathbf{P}\Big\{\underbrace{\underbrace{\underbrace{\frac{X-n_Ap_A}{\sqrt{n_Ap_A(1-p_A)}}}_{\sim\mathcal{N}(0,1)}\cdot\frac{\sqrt{n_Ap_A(1-p_A)}}{C}}_{\sim\mathcal{N}(0,\,n_Ap_A(1-p_A)/C^2)}-\underbrace{\underbrace{\frac{Y-n_Bp_B}{\sqrt{n_Bp_B(1-p_B)}}}_{\sim\mathcal{N}(0,1)}\cdot\frac{\sqrt{n_Bp_B(1-p_B)}}{C}}_{\sim\mathcal{N}(0,\,n_Bp_B(1-p_B)/C^2)}}_{\sim\mathcal{N}(0,\,[n_Ap_A(1-p_A)+n_Bp_B(1-p_B)]/C^2)}\ge\\&\qquad\ge\frac{0.5-n_Ap_A+n_Bp_B}{C}\Big\},\end{aligned}$$

ezért ugyanazt a C normálást használhatjuk, mint az előbb, és

$$\begin{aligned}\mathbf{P}\{X-Y>0\}&\simeq 1-\Phi\Big(\frac{0.5-n_Ap_A+n_Bp_B}{\sqrt{n_Ap_A(1-p_A)+n_Bp_B(1-p_B)}}\Big)\simeq\\&\simeq 1-\Phi(0.853)\simeq 0.20.\end{aligned}$$

6.5. Feltételes eloszlások

Ebben a részben X és Y együttes eloszlásának ismeretében azt a kérdést tesszük fel, mit mondhatunk az egyik változó eloszlásáról feltéve, hogy tudjuk a másik értékét. Először az egyszerűbb, diszkrét esettel kezdünk.

6.31. Definíció *Legyenek X és Y diszkrét valószínűségi változók, és y olyan, hogy $p_Y(y)=\mathbf{P}\{Y=y\}>0$. Ekkor X* feltételes súlyfüggvénye az $Y=y$ feltétel mellett *a következő függvény:*

$$x\mapsto p_{X\,|\,Y}(x\,|\,y):=\mathbf{P}\{X=x\,|\,Y=y\}=\frac{p(x,\,y)}{p_Y(y)}.$$

Ahogy a feltételes valószínűség is egy jólnevelt valószínűség volt, a feltételes súlyfüggvény is egy jólnevelt súlyfüggvény minden *rögzített* y esetén. Azaz minden, amit súlyfüggvényekkel kapcsolatban definiáltunk és tapasztaltunk érvényes $p_{X\,|\,Y}(\cdot\,|\,y)$-ra is. A definícióból nyilvánvaló, hogy X és Y pontosan akkor függetlenek, ha $p_{X\,|\,Y}(x\,|\,y) = p_X(x)$ minden x-re és y-ra ahol a feltételes súlyfüggvénynek értelme van.

6.32. Példa *Legyen X és Y együttes súlyfüggvénye*

$X \backslash Y$	**0**	**1**
0	*0.4*	*0.2*
1	*0.1*	*0.3*

Határozzuk meg X feltételes eloszlását az $Y = 0$ feltétel mellett.

$$p_{X\,|\,Y}(0\,|\,0) = \frac{p(0,\,0)}{p_Y(0)} = \frac{p(0,\,0)}{p(0,\,0) + p(1,\,0)} = \frac{0.4}{0.4 + 0.1} = \frac{4}{5},$$
$$p_{X\,|\,Y}(1\,|\,0) = \frac{p(1,\,0)}{p_Y(0)} = \frac{p(1,\,0)}{p(0,\,0) + p(1,\,0)} = \frac{0.1}{0.4 + 0.1} = \frac{1}{5}.$$

Az együttesen folytonos esetben kis technikai problémát okoz az, hogy az $\{Y = y\}$ esemény minden y-ra nulla valószínűségű. Tegyük fel, hogy Y f_Y marginális sűrűségfüggvénye folytonos y-ban, és $f_Y(y) > 0$. Ekkor minden $\varepsilon > 0$-ra

$$\mathbf{P}\{X < x\,|\,Y \in [y,\, y+\varepsilon)\} = \frac{\mathbf{P}\{X < x,\; Y \in [y,\, y+\varepsilon)\}}{\mathbf{P}\{Y \in [y,\, y+\varepsilon)\}} = \frac{F(x,\, y+\varepsilon) - F(x,\, y)}{F_Y(y+\varepsilon) - F_Y(y)} =$$
$$= \frac{[F(x,\, y+\varepsilon) - F(x,\, y)]/\varepsilon}{[F_Y(y+\varepsilon) - F_Y(y)]/\varepsilon} \underset{\varepsilon \searrow 0}{\longrightarrow} \frac{\partial F(x,\, y)/\partial y}{f_Y(y)},$$

és negatív ε-ra is hasonló érvelés igaz. Sikerült tehát megtalálnunk az $\{Y = y\}$ eseményre való feltételes valószínűség egy értelmes definícióját:

6.33. Definíció *Legyenek X és Y együttesen folytonos valószínűségi változók, f_Y folytonos y-ban, és $f_Y(y) > 0$. Ekkor X* feltételes eloszlásfüggvénye *az $\{Y = y\}$ feltétel mellett*

$$F_{X\,|\,Y}(x\,|\,y) := \lim_{\varepsilon \searrow 0} \mathbf{P}\{X < x\,|\,Y \in [y,\, y+\varepsilon)\} = \frac{\partial F(x,\, y)/\partial y}{f_Y(y)}.$$

Ezt differenciálva X feltételes sűrűségfüggvénye *az $\{Y = y\}$ feltétel mellett*

$$f_{X\,|\,Y}(x\,|\,y) := \frac{\partial^2 F(x,\, y)/[\partial x\, \partial y]}{f_Y(y)} = \frac{f(x,\, y)}{f_Y(y)}.$$

Ahogy azt már megszoktuk, rögzített y mellett $F_{X\,|\,Y}(\cdot\,|\,y)$ illetve $f_{X\,|\,Y}(\cdot\,|\,y)$ jólnevelt eloszlás- illetve sűrűségfüggvény, minden igaz rájuk amit eddig eloszlás- illetve sűrűségfüggvényekről tudunk. A definícióból nyilvánvaló, hogy X és Y pontosan akkor függetlenek, ha $F_{X\,|\,Y}(x\,|\,y) = F_X(x)$ illetve $f_{X\,|\,Y}(x\,|\,y) = f_X(x)$ minden x-re és y-ra ahol ennek értelme van.

6.34. Példa *A 6.12. példában látott együttes eloszlás esetén határozzuk meg X feltételes eloszlását az $Y = y$ feltétel mellett ($y > 0$).*

A hivatkozott példában már kiderítettük, hogy marginálisan $Y \sim \mathrm{Exp}(1)$. A fentiek szerint $x > 0$ esetén

$$f_{X\,|\,Y}(x\,|\,y) = \frac{f(x,\,y)}{f_Y(y)} = \frac{\mathrm{e}^{-x/y}\cdot \mathrm{e}^{-y}/y}{\mathrm{e}^{-y}} = \frac{1}{y}\cdot \mathrm{e}^{-x/y},$$

és nulla az $x \le 0$ esetben. Ebben felismerhetjük az $\mathrm{Exp}(\frac{1}{y})$ eloszlást, tehát $X\,|\,Y = y \sim \mathrm{Exp}(\frac{1}{y})$, avagy a kedélyek borzolásának céljából $X\,|\,Y \sim \mathrm{Exp}(\frac{1}{Y})$.

6.35. Példa *Legyen $X \sim E(0,\,1)$, és $Y\,|\,X = x \sim E(0,\,x)$, ha $0 < x < 1$. Határozzuk meg Y marginális sűrűségét, és $X\,|\,Y = y$ feltételes sűrűségfüggvényét.*

Vegyük észre, hogy a megadott marginális és feltételes eloszlások egyértelműen meghatározzák X és Y közös eloszlását. Először a közös sűrűségfüggvény:

$$f(x,\,y) = f_{Y\,|\,X}(y\,|\,x)\cdot f_X(x) = \frac{1}{x}\cdot 1, \qquad \text{ha } 0 < y < x < 1$$

(és nulla egyébként). Szó sincs tehát arról, hogy a közös eloszlás egyenletes lenne a háromszögön. Y marginális sűrűségfüggvénye: legyen $0 < y < 1$, ekkor

$$f_Y(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x,\,y)\,\mathrm{d}x = \int_y^1 \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x = -\ln y, \qquad \text{és 0 egyébként.}$$

Ez elszáll 0-ban, vagyis Y szeret a nulla közelében tartózkodni. Most pedig a keresett feltételes sűrűségfüggvény következik. Legyen $0 < y < x < 1$, ekkor

$$f_{X\,|\,Y}(x\,|\,y) = \frac{f(x,\,y)}{f_Y(y)} = \frac{1/x}{-\ln y}.$$

Ez a feltételes sűrűség nem értelmes, ha $y \notin (0,\,1)$, és nulla, ha $y \in (0,\,1)$, de $x \notin (y,\,1)$. Adott y mellett tehát X feltételes eloszlása is érdekesen alakul, közel sem egyenletes.

Végezetül érdekességképpen tekintsünk egy vegyes esetet. Legyen N egy egész értékű, X pedig egy folytonos valószínűségi változó. Legyen x egy olyan pont, melyben f_X folytonos és pozitív, n pedig olyan, hogy $p_N(n) > 0$. A következő objektumokat lehet definiálni:

- N feltételes súlyfüggvénye az $X = x$ feltétel mellett:

$$p_{N\,|\,X}(n\,|\,x) := \lim_{\varepsilon\searrow 0} \frac{\mathbf{P}\{N = n,\ X \in (x,\, x+\varepsilon)\}}{\mathbf{P}\{X \in (x,\, x+\varepsilon)\}} = \lim_{\varepsilon\searrow 0} \frac{\mathbf{P}\{N = n,\ X \in (x-\varepsilon,\, x)\}}{\mathbf{P}\{X \in (x-\varepsilon,\, x)\}},$$

  amennyiben a két limesz egyezik.

- X feltételes eloszlásfüggvénye az $N = n$ feltétel mellett:

$$F_{X\,|\,N}(x\,|\,n) = \frac{\mathbf{P}\{X < x,\ N = n\}}{\mathbf{P}\{N = n\}}.$$

- X feltételes sűrűségfüggvénye az $N = n$ feltétel mellett:

$$\begin{aligned} f_{X\,|\,N}(x\,|\,n) &= \lim_{\varepsilon\searrow 0} \frac{F_{X\,|\,N}(x+\varepsilon\,|\,n) - F_{X\,|\,N}(x\,|\,n)}{\varepsilon} = \\ &= \lim_{\varepsilon\searrow 0} \frac{\mathbf{P}\{N = n,\ X \in [x,\, x+\varepsilon)\}/\varepsilon}{\mathbf{P}\{N = n\}} = \\ &= \lim_{\varepsilon\searrow 0} \frac{\mathbf{P}\{N = n\,|\,X \in [x,\, x+\varepsilon)\}}{\mathbf{P}\{N = n\}} \cdot \frac{\mathbf{P}\{X \in [x,\, x+\varepsilon)\}}{\varepsilon} = \\ &= \frac{p_{N\,|\,X}(n\,|\,x)}{p_N(n)} \cdot f_X(x), \end{aligned} \tag{6.5}$$

  amennyiben a másik irányú limesz ezzel egyezik, és a feltételes súlyfüggvény is létezik.

Az utolsó egyenletet a feltételes eloszlásfüggvény deriváltjaként kaptuk, ezért azt felintegrálva egyet kapunk, vagyis

$$1 = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{p_{N\,|\,X}(n\,|\,x)}{p_N(n)} \cdot f_X(x)\,\mathrm{d}x$$

$$p_N(n) = \int_{-\infty}^{\infty} p_{N\,|\,X}(n\,|\,x) \cdot f_X(x)\,\mathrm{d}x. \tag{6.6}$$

Ezt az összefüggést később, a 7.3. alfejezetben is megkapjuk majd. Ennek segítségével (6.5) így írható:

$$f_{X\,|\,N}(x\,|\,n) = \frac{p_{N\,|\,X}(n\,|\,x) \cdot f_X(x)}{\int\limits_{-\infty}^{\infty} p_{N\,|\,X}(n\,|\,\widehat{x}) \cdot f_X(\widehat{x})\,\mathrm{d}\widehat{x}}.$$

Amit itt kaptunk, az a Bayes tétel folytonos változata, hasonlítsuk össze az eredeti 3.14. tétellel.

6.6. Feladatok

6.1. Két szabályos kockával dobunk. Határozzuk meg X és Y együttes súlyfüggvényét, ha

(a) X a dobott számok maximuma, Y a két dobott érték összege;

(b) X az első kocka eredménye, Y a dobott számok maximuma;

(c) rendre X, Y a dobott számok minimuma, ill. maximuma.

6.2. Legyenek X és Y független, p paraméterű geometriai eloszlású valószínűségi változók. (Azaz: $\mathbf{P}\{X = i,\, Y = j\} = (1-p)^{i-1} \cdot p \cdot (1-p)^{j-1} \cdot p,\ i,\, j > 0.$)

(a) Sejtsük meg $\mathbf{P}\{X = i \,|\, X + Y = n\}$ értékét. (*Tipp: tegyük fel, hogy egy cinkelt érmét dobunk fel, egymás után sokszor. Az érme p valószínűséggel ad fejet. Ha a második fej az n-edik feldobásnál jön, mi az első fej bekövetkezése idejének eloszlása?*)

(b) Igazoljuk (a)-beli eredményünket számolással. (*Tipp: ugye még emlékszünk mi független geometriai várakozási idők összegének az eloszlása?*)

6.3. Egy ropit két, egymástól függetlenül és egyenletes eloszlással kiválasztott pontban eltörünk.

(a) Mennyi a valószínűsége annak, hogy az így nyert három darabból háromszöget alkothatunk?

(b) Mennyi a valószínűsége annak, hogy az így nyert három darab mindegyike rövidebb mint az $a \in [\ell/3,\, \ell]$ rögzített szám? (ℓ a ropi hossza.)

6.4. Válasszunk egy pontot egyenletes eloszlással egy egyenlő oldalú háromszög belsejében, mely háromszögnek minden oldala 1 hosszúságú. Jelölje ξ e pontnak a távolságát a háromszög legközelebbi oldalától. Határozzuk meg a ξ valószínűségi változó eloszlás- és sűrűségfüggvényét.

6.5. Együttes eloszlásfüggvény-e a következő két függvény ($x,\, y \in \mathbb{R}$)?

$$F(x, y) = \exp(-e^{-(x+y)}), \qquad G(x, y) = \exp(-e^{-x} - e^{-y}).$$

6.6. Legyenek $X_1,\ X_2,\ X_3,\ X_4,\ X_5$ független azonos eloszlású valószínűségi változók, közös eloszlásfüggvényük legyen F, sűrűségfüggvényük legyen f, továbbá legyen

$$I = \mathbf{P}\{X_1 < X_2 < X_3 < X_4 < X_5\}.$$

(a) Mutassuk meg, hogy I nem függ F-től. (*Tipp: Írjuk át I-t ötös integrállá, és alkalmazzuk az $u_i = F(x_i),\ i = 1, \ldots, 5$ változócserét.*)

(b) Számoljuk ki I értékét!

(c) Adjunk szemléletes magyarázatot az előző pontban kapott eredményre!

6.7. Az A, B és C pontokat válasszuk véletlenszerűen, egyenletes eloszlással és egymástól függetlenül egy kör kerületén. Mennyi a valószínűsége annak, hogy az ABC háromszög hegyesszögű?

6.8. Három űrhajó leszáll a Marsra, egymástól függetlenül, egyenletes eloszlással választott pontokra. Két űrhajó akkor tud *közvetlen* rádió kapcsolatba lépni egymással, ha a Mars középpontjából induló helyzetvektoraik hegyesszöget zárnak be egymással. Bizonyítsuk be, hogy annak a valószínűsége, hogy bármely két űrhajó kommunikálni tud egymással (szükség esetén a harmadik űrhajó közvetítésével) $(\pi + 2)/(4\pi)$.

6.9. (a) A $[0, 1]$ intervallumban jelöljünk ki találomra (azaz: egymástól függetlenül és egyenletes eloszlással) három pontot. Határozzuk meg a középső pont abszcisszájának az eloszlásfüggvényét.

(b) A $[0, 1]$ intervallumban jelöljünk ki találomra (azaz: egymástól függetlenül és egyenletes eloszlással) n pontot. Határozzuk meg a k-adik pont abszcisszájának az eloszlásfüggvényét.

6.10. Válasszunk az egységnégyzetben véletlenszerűen (egyenletes eloszlással) egy pontot. Jelölje ξ e pontnak a négyzet legközelebbi csúcsától való távolságát. Határozzuk meg a ξ valószínűségi változó eloszlásának sűrűségfüggvényét.

6.11. Legyen $X \sim \text{Exp}(\lambda)$. Határozzuk meg a $\mathbf{P}\{\lfloor X \rfloor = n,\ X - \lfloor X \rfloor < x\}$ valószínűséget, ahol $\lfloor X \rfloor$ az alsó egészrészt jelöli. Igaz-e, hogy $\lfloor X \rfloor$ és $X - \lfloor X \rfloor$ függetlenek?

6.12. (Buffon tű probléma) Egy $l < 1$ cm hosszú tűt dobunk véletlenszerűen egy 1 cm vonaltávolságú vonalazott lapra. Mi a valószínűsége, hogy a tű átmetsz egy vonalat?

6.13. Az ún. Monte Carlo-integrálás lényege a következő: legyen az egyszerűség kedvéért $f : [0, 1] \to [0, 1]$ folytonos függvény, és az

$$I = \int_0^1 f(x)\mathrm{d}x$$

integrál értékét becsüljük. Ha U és V két független $[0, 1]$ intervallumon egyenletes eloszlású valószínűségi változó, akkor az (U, V) pár a $[0, 1]^2$ egységnégyzet egy véletlen pontját adja. Függetlenül generálva n véletlen pontot az egységnégyzetben, jelölje X_n azon pontok számát, amelyek az f függvény grafikonja alá estek, vagyis amelyekre $V < f(U)$. Ekkor I becslését az X_n/n hányados adja. Mekkorának válasszuk n értékét, ha azt szeretnénk, hogy az $f(x) = x^2$ függvényre alkalmazva a Monte Carlo-integrálás módszerét, legfeljebb 0.02 valószínűséggel kapjunk 0.1-nél nagyobb hibát?

6.14. A patikába egy óra alatt betérő emberek száma Poisson eloszlású $\lambda = 10$ paraméterrel. Számoljuk ki annak feltételes valószínűségét, hogy legfeljebb 3 férfi tért be, feltéve, hogy 10 nő tért be a patikába abban az órában. Milyen feltevésekkel éltünk?

6.15. Egy férfi és egy nő találkozót beszélt meg 12:30-ra. Ha a férfi 12:15 és 12:45 között egyenletes eloszlású időben érkezik, és tőle függetlenül a nő 12:00 és 13:00 között egyenletes eloszlású időben érkezik,

(a) határozzuk meg annak valószínűségét, hogy aki először érkezik, 5 percnél kevesebbet vár.

(b) Mi a valószínűsége, hogy a férfi érkezik elsőnek?

6.16. n pontot függetlenül egyenletesen elosztunk egy kör kerületén, és szeretnénk meghatározni annak valószínűségét, hogy mind egy félkörbe esnek (vagyis annak valószínűségét, hogy van egy olyan, a kör középpontján átmenő egyenes, melynek az összes pont az egyik oldalán van). Jelölje $P_1, P_2, \ldots, P_n$ a pontokat. Legyen A az az esemény, hogy az összes pont egy félkörbe esik, és A_i az az esemény, hogy az összes pont abba a félkörbe esik, amely P_i-től indul az óramutató járásával egyező irányban, $i = 1, 2, \ldots, n$.

(a) Fejezzük ki A-t az A_i-k segítségével.

(b) Igaz-e, hogy az A_i-k kölcsönösen kizáróak?

(c) Határozzuk meg $\mathbf{P}\{A\}$-t.

(d) Most válaszoljuk meg a következő kérdést: ha egy *körlapon* egymástól függetlenül n pontot egyenletes eloszlással elhelyezünk, mi a valószínűsége, hogy a kör középpontja benne lesz a pontok konvex kombinációiként előálló halmazban?

6.17. Az X és Y valószínűségi változók közös sűrűségfüggvénye

$$f(x, y) = \begin{cases} x\mathrm{e}^{-(x+y)}, & \text{ha } x > 0,\ y > 0, \\ 0, & \text{egyébként.} \end{cases}$$

Független-e X és Y? És ha a közös sűrűség

$$f(x, y) = \begin{cases} 2, & \text{ha } 0 < y < 1,\ 0 < x < y, \\ 0, & \text{egyébként?} \end{cases}$$

6.18. (a) Legyenek $X \sim \mathrm{E}(0,\,1)$, és $Y \sim \mathrm{Exp}(1)$ függetlenek. Határozzuk meg $X+Y$ eloszlását.

(b) Legyenek $X \sim \mathrm{E}(0,\,1)$, és $Y \sim \mathrm{Exp}(1)$ függetlenek. Határozzuk meg X/Y eloszlását.

(c) Legyenek $X \sim \mathrm{Exp}(\lambda)$, és $Y \sim \mathrm{Exp}(\mu)$ függetlenek. Határozzuk meg X/Y eloszlását, és a $\mathbf{P}\{X < Y\}$ valószínűséget.

(d) Legyen X és Y két független λ paraméterű exponenciális eloszlású valószínűségi változó. Bizonyítsuk be, hogy az $U := X+Y$ és $V := X/(X+Y)$ valószínűségi változók függetlenek.

6.19. (a) Legyen X és Y a két koordinátája annak a pontnak, melyet az origó középpontú, 1 sugarú körlapon egyenletesen választottunk. (Azaz: a közös sűrűségfüggvény $f(x,\,y) = 1/\pi$, ha $x^2+y^2 \le 1$.) Határozzuk meg az $R = \sqrt{X^2+Y^2}$ és a $\Theta = \operatorname{arc\,tg} Y/X$ valószínűségi változók közös sűrűségfüggvényét.

(b) Legyen U_1, U_2 két független egyenletes eloszlású valószínűségi változó a $[0,1]$-en. Bizonyítsuk be, hogy ha $X = \sqrt{-2\ln U_1}\cos(2\pi U_2)$ és $Y = \sqrt{-2\ln U_1}\sin(2\pi U_2)$, akkor az (X,Y) pár kétdimenziós normális eloszlású.

6.20. Mutassuk meg *számolással*, hogy ha X_i, $i = 1,\,\ldots,\,n$ független azonos eloszlású geometriai valószínűségi változók, akkor $X_1+\cdots+X_n$ negatív binomiális eloszlású. Használjunk indukciót. (A valószínűségszámítási érvelést már láttuk előadáson.)

6.21. Legyen $\underline{X} = (X_1,\,X_2,\,X_3)$ háromdimenziós véletlen vektor, amelynek komponensei független $\mathcal{N}(0,1)$ eloszlásúak. Definiáljuk a következő változókat:

$$\varrho := \sqrt{X_1^2+X_2^2+X_3^2}, \qquad \xi_i := X_i/\varrho, \qquad i = 1,2,3.$$

(a) Határozzuk meg ϱ sűrűségfüggvényét.

(b) Bizonyítsuk be, hogy ϱ és a $\underline{\xi} = (\xi_1,\,\xi_2,\,\xi_3)$ vektorváltozó egymástól függetlenek, továbbá azt, hogy a $\underline{\xi}$ véletlen vektor egyenletes eloszlású az egységgömb felszínén.

6.22. Legyenek X és Y független $\mathcal{N}(0,1)$. illetve $\mathcal{N}(0,4)$ eloszlású valószínűségi változók és M egy véletlenszerűen kiválasztott pont az $\mathbb{R}^2$ síkon, melynek koordinátái $(X;\,Y)$. Határozzuk meg a következő események valószínűségét:

(a) $M \in \{(x,\,y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, |x| \le 1,\ |y| \le 2\}$,

(b) $M \in \{(x,\,y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, 0 \le x \le 2,\ |y| \le 2\}$,

(c) $M \in \{(x,\,y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, 0 \le x \le 2,\ 0 \le y \le 4\}$,

(d) $M \in \{(x,\,y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, x+y \le 0,\ |x| \le 1,\ y \ge -2\}$,

(e) $M \in \{(x,\, y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, x^2 + (y^2/4) \leq 1\}$,

(f) $M \in \{(x,\, y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, x^2 + (y^2/4) \leq c^2\}$.

6.23. Egy ember vonattal és távolsági autóbusszal utazik a munkahelyére. *Menetrend szerint* a vonat 7:30-kor érkezik, a busz pedig 7:37-kor indul. Az átszállás két percet vesz igénybe. Ám a vonat valódi érkezési ideje *normális eloszlású* valószínűségi változó melynek várható értéke 7:30-kor van és szórása 4 perc. Az autóbusz valódi indulási ideje a vonat érkezésétől független, szintén normális eloszlású valószínűségi változó, melynek várható értéke 7:37-kor van, szórása pedig 3 perc. Mennyi annak a valószínűsége, hogy emberünk a hét öt munkanapja közül legfeljebb egy alkalommal késse le a buszcsatlakozást?

6.24. Legyenek X, Y és Z független, azonos $\mathrm{Geom}(p)$ eloszlású valószínűségi változók.

(a) Számítsuk ki a következő valószínűségeket:

$$\mathbf{P}\{X = Y\}, \qquad \mathbf{P}\{X \geq 2Y\}, \qquad \mathbf{P}\{X + Y \leq Z\}.$$

(b) Legyen $U := \min\{X,\, Y\}$ és $V := X - Y$. Bizonyítsuk be, hogy U és V függetlenek.

6.25. Egy mentő oda-vissza megy egy L hosszú úton. Egy bizonyos pillanatban baleset történik az út egy egyenletes eloszlással vett pontján. (Azaz a baleset távolsága az út egyik végétől a $(0,\, L)$-en egyenletes eloszlású valószínűségi változó.) Feltéve, hogy a hely, ahol a mentő a baleset időpontjában jár, a baleset helyétől független és szintén egyenletes eloszlású, számoljuk ki a mentő és a baleset távolságának eloszlását.

6.26. Legyen U a $(0,\, 2\pi)$-n egyenletes eloszlású, Z pedig 1 paraméterű exponenciális valószínűségi változó; Z és U függetlenek. Mutassuk meg, hogy

$$X = \sqrt{2Z}\cos U$$
$$Y = \sqrt{2Z}\sin U$$

független, standard normális változók.

6.27. X és Y együttes sűrűségfüggvénye

$$f(x,\, y) = \frac{1}{x^2 y^2}, \quad x \geq 1, \quad y \geq 1.$$

(a) Számoljuk ki $U = XY$, $V = X/Y$ együttes sűrűségét!

(b) Mik a marginális sűrűségek?

6.28. Legyenek X és Y független standard normális eloszlásúak. Határozzuk meg az $U = X$, $V = X/Y$ pár együttes eloszlását. Ennek alapján mutassuk meg, hogy X/Y Cauchy eloszlású.

6.29. Bizonyítsuk be, hogy ha $F(x)$ eloszlásfüggvény, akkor bármely rögzített $h > 0$-ra az alább értelmezett $G_1(x)$ és $G_2(x)$ is eloszlásfüggvény.

$$G_1(x) := \frac{1}{h}\int_x^{x+h} F(y)\,\mathrm{d}y, \qquad G_2(x) := \frac{1}{2h}\int_{x-h}^{x+h} F(y)\,\mathrm{d}y.$$

Adjunk valószínűségszámítási értelmet a fenti formuláknak.

6.30. Egy téglalap oldalainak hossza legyen 1 illetve a. A két szemközti 1 hosszú oldalon egymástól függetlenül és egyenletes eloszlással kijelölünk egy-egy véletlen pontot. Jelölje X e pontok távolságát. Meghatározandó X sűrűségfüggvénye.

6.31. Legyen X $\mathcal{N}(0, 1)$ eloszlású valószínűségi változó és $Y := \operatorname{sign}(1 - |X|) \cdot X$.

(a) Határozzuk meg az Y valószínűségi változó eloszlását.

(b) $Z := X + Y$ eloszlása normális-e?

6.32. Móricka, ha túrázni megy, minden lépésnél – az előzményektől függetlenül – valamekkora (kicsi) valószínűséggel hasraesik és megüti a térdét, illetve valamekkora (kicsi) valószínűséggel hanyatt esik és megüti a könyökét. Egy 10 kilométeres túrán átlagosan 3-szor szokta megütni a térdét és 2-szer a könyökét. Legfeljebb milyen hosszú túrára engedheti el az anyukája, ha azt akarja, hogy $\frac{2}{3}$ valószínűséggel térd- és könyöksérülés nélkül járja meg?

6.33. Legyen X és Y két független egyenletes eloszlású valószínűségi változó a $[0, 1]$ intervallumon. Határozzuk meg az XY szorzatként előálló új változó sűrűségfüggvényét.

6.34. Két dobókockával dobunk, legyen X a nagyobb, Y a kisebb dobott szám. Számoljuk ki Y feltételes súlyfüggvényét, az $X = i$, $i = 1, 2, \ldots, 6$ feltétel mellett. Független egymástól X és Y? Miért?

6.35. (a) X és Y együttes sűrűségfüggvénye

$$f(x, y) = c\left(x^2 - y^2\right)\mathrm{e}^{-x} \qquad 0 \le x < \infty,\ -x \le y \le x.$$

Mi Y feltételes eloszlása, $X = x$ feltétel mellett?

(b) Legyenek X, Y és Z független valószínűségi változók. Legyen X ill. Y eloszlásfüggvénye $F(x)$, ill. $G(x)$, és legyen $\mathbf{P}\{Z = 1\} = p = 1 - \mathbf{P}\{Z = 0\}$. Határozzuk meg a következő valószínűségi változók eloszlásfüggvényeit:

$$\begin{aligned} T &:= ZX + (1 - Z)Y, \\ U &:= ZX + (1 - Z)\max\{X, Y\}, \\ V &:= ZX + (1 - Z)\min\{X, Y\}. \end{aligned}$$

6.36. Legyenek X és Y független, $\mathrm{Poi}(\lambda)$ illetve $\mathrm{Poi}(\mu)$ eloszlású valószínűségi változók. Bizonyítsuk be, hogy $X + Y$ *ismeretében* X *feltételes eloszlása binomiális,* azaz

$$p_{X\,|\,X+Y}(k\,|\,n) = \mathbf{P}\{X = k\,|\,X + Y = n\} = \binom{n}{k}\left(\frac{\lambda}{\lambda+\mu}\right)^{k}\left(\frac{\mu}{\lambda+\mu}\right)^{n-k}.$$

7. fejezet

A várható érték tulajdonságai

7.1. Összegek várható értékei

Ebben a fejezetben a várható érték, különösen összegek várható értékeinek szebbnél szebb tulajdonságaival ismerkedünk. Az egyszerűség végett feltesszük, hogy minden alábbi várható érték, szórásnégyzet, kovariancia létezik és véges. Először egy egyszerű monotonitás tulajdonság:

7.1. Állítás *Legyenek $a < b$ valós számok, legyen X valószínűségi változó, és tegyük fel, hogy X eloszlása az $[a,\, b]$ intervallumra koncentrált, azaz $\mathbf{P}\{a \le X \le b\} = 1$. Ekkor $a \le \mathbf{E}X \le b$.*

Bizonyítás. Diszkrét esetre bizonyítunk, a folytonos eset is hasonló, és persze az állítás általánosan igaz. X lehetséges x_i értékei mind az $[a,\, b]$ intervallumba esnek, $p(x_i)$-k pedig nemnegatívak, ezért

$$\begin{aligned}\mathbf{E}X &= \sum_i x_i p(x_i) \le \sum_i b p(x_i) = b, \qquad \text{és}\\ \mathbf{E}X &= \sum_i x_i p(x_i) \ge \sum_i a p(x_i) = a.\end{aligned}$$

□

A továbbiakban mint korábban is, általában két valószínűségi változóval fogalmazzuk meg a mondanivalónkat, de minden triviálisan általánosítható véges sok (sőt legtöbbször megszámlálhatóan végtelen darab) változóra is. Íme hogyan kell kétváltozós függvény várható értékét számolni:

7.2. Állítás *Legyenek X és Y valószínűségi változók, és g egy kétváltozós függvény. Ekkor*

$$\mathbf{E}g(X,\, Y) = \begin{cases} \displaystyle\iint g(x,\, y)\, f(x,\, y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y, & \text{ha } X \text{ és } Y \text{ együttesen folytonosak,}\\ \displaystyle\sum_{i,j} g(x_i,\, y_j)\, p(x_i,\, y_j), & \text{ha } X \text{ és } Y \text{ diszkrétek.}\end{cases}$$

Itt a kettős integrál $\mathbb{R}^2$-n, illetve a szummázás a valószínűségi változók összes x_i és y_j értékére történik.

Bizonyítás. A folytonos esetre bizonyítunk, a diszkrét eset hasonlóan működik. Először tegyük fel, hogy $g(X, Y) \geq 0$. Lényegében az 5.12. állítást (és lábjegyzetét) fogjuk megismételni.

$$\mathbf{E}g(X, Y) = \int_0^\infty \mathbf{P}\{g(X, Y) > t\}\,\mathrm{d}t = \int_0^\infty \iint_{x,\,y\,:\,g(x,y)>t} f(x, y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}t =$$
$$= \iint_{\mathbb{R}^2} \int_0^{g(x,y)} f(x, y)\,\mathrm{d}t\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \iint_{\mathbb{R}^2} g(x, y)\,f(x, y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y.$$

Ezután általános g-kre ugyanúgy haladunk, mint az 5.12. állításban. □

Az integrálás illetve az összegzés linearitásából ezért:

7.3. Következmény *Tetszőleges X és Y valószínűségi változókra*

$$\mathbf{E}(X + Y) = \mathbf{E}X + \mathbf{E}Y, \qquad \mathbf{E}(X - Y) = \mathbf{E}X - \mathbf{E}Y.$$

Figyeljük meg, hogy ehhez az állításhoz *nem* kellett feltennünk a valószínűségi változók függetlenségét.

7.4. Következmény *Legyenek X és Y valószínűségi változók, melyekre egy valószínűséggel (azaz* majdnem biztosan, m.b.*) teljesül, hogy $X \leq Y$. Ekkor $\mathbf{E}X \leq \mathbf{E}Y$.*

Bizonyítás. A feltétel szerint az $Y - X$ valószínűségi változó m.b. nemnegatív, így a 7.1. állítás szerint $0 \leq \mathbf{E}(Y - X) = \mathbf{E}Y - \mathbf{E}X$. □

Ezek az egyszerű állítások sok rendkívül hasznos tulajdonsághoz vezetnek.

7.5. Példa (empírikus várható érték) *Legyenek $X_1, X_2, \ldots, X_n$ azonos eloszlású valószínűségi változók $-\infty < \mu < \infty$ várható értékkel. Gondoljunk ezekre a változókra úgy, mint azonos mérések sorozatára. (Ekkor természetes feltevés, hogy változóink függetlenek is, de ebben a példában még erre a feltevésre sincs szükség.) A mért értékek* empírikus várható értéke *egyszerűen a valószínűségi változók átlaga, $\bar{X} := \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n X_i$. Ekkor nem meglepő módon*

$$\mathbf{E}\bar{X} = \mathbf{E}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n X_i = \frac{1}{n}\mathbf{E}\sum_{i=1}^n X_i = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n \mathbf{E}X_i = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n \mu = \mu.$$

7.6. Példa *Legyenek* $A_1, A_2, \ldots, A_n$ *események, és* X_i *az* A_i *esemény indikátora. Ekkor* $X := \sum_{i=1}^{n} X_i$ *megszámolja, hogy az események közül mennyi következett be. Ezért* $A_1, A_2, \ldots, A_n$ *közül várhatóan*

$$\mathbf{E}X = \mathbf{E}\sum_{i=1}^{n} X_i = \sum_{i=1}^{n} \mathbf{E}X_i = \sum_{i=1}^{n} \mathbf{P}\{A_i\}$$

darab következik be.

A Boole egyenlőtlenséget már láttuk a 2.11. következményben. Íme egy indikátoros bizonyítás:

7.7. Példa (Boole egyenlőtlenség) *Legyenek* $A_1, A_2, \ldots, A_n$ *események,* X_i *az* A_i *esemény indikátora,*

$$X := \sum_{i=1}^{n} X_i, \qquad \textit{és} \qquad Y := \begin{cases} 1, & \textit{ha } X \geq 1, \\ 0, & \textit{ha } X = 0. \end{cases}$$

Ekkor $Y = 1$ *pontosan akkor, ha legalább az egyik* A_i *bekövetkezik, azaz* $Y = \mathbf{1}\Big\{\bigcup_{i=1}^{n} A_i\Big\}$*. Ráadásul* $Y \leq X$*, így*

$$\mathbf{P}\Big\{\bigcup_{i=1}^{n} A_i\Big\} = \mathbf{E}Y \leq \mathbf{E}X = \mathbf{E}\sum_{i=1}^{n} X_i = \sum_{i=1}^{n} \mathbf{E}X_i = \sum_{i=1}^{n} \mathbf{P}\{A_i\}.$$

Lényegében Fubini tételéből következik, hogy a várható érték ilyen értelmű linearitása megszámlálhatóan sok valószínűségi változóra is biztosan érvényben marad, ha

- a valószínűségi változók nemnegatívak, vagy
- $\sum_{i=1}^{\infty} \mathbf{E}|X_i| < \infty$.

7.8. Példa *Legyen* N *egy nemnegatív egész valószínűségi változó, és*

$$X_i := \begin{cases} 1, & \textit{ha } N \geq i, \\ 0, & \textit{ha } N < i. \end{cases}$$

Ekkor

$$\sum_{i=1}^{\infty} X_i = \sum_{i=1}^{N} X_i + \sum_{i=N+1}^{\infty} X_i = \sum_{i=1}^{N} 1 + \sum_{i=N+1}^{\infty} 0 = N,$$

$$\mathbf{E}\sum_{i=1}^{\infty} X_i = \sum_{i=1}^{\infty} \mathbf{E}X_i = \sum_{i=1}^{\infty} \mathbf{P}\{N \geq i\} = \mathbf{E}N.$$

Ez utóbbi egyenlőség éppen a 4.13 feladat eredménye.

7.9. Példa (a binomiális eloszlás) *Tegyük fel, hogy n független kísérletet végzünk, melyek mindegyike p valószínűséggel sikerül, egymástól függetlenül. Legyen*

$$X_i = \begin{cases} 1, & \text{ha az } i. \text{ kísérlet sikerül,} \\ 0, & \text{ha az } i. \text{ kísérlet nem sikerül.} \end{cases}$$

Ekkor

$$X := \sum_{i=1}^{n} X_i \sim Binom(n,\, p)$$

a sikeres kísérletek száma. X várható értéke pedig

$$\mathbf{E}X := \mathbf{E}\sum_{i=1}^{n} X_i = \sum_{i=1}^{n} \mathbf{E}X_i = \sum_{i=1}^{n} p = np.$$

Hasonlítsuk össze ezt a számolást a 4.24. állítás bizonyításával.

7.10. Példa (a negatív binomiális eloszlás) *Legyen $X \sim Neg.bin(p,\, r)$, ahogy a 4.7. fejezetben definiáltuk. Ott azt is megállapítottuk, hogy $X = Y_1 + Y_2 + \cdots + Y_r$, ahol az Y_i változók egymástól független Geom(p) eloszlásúak. Ezért*

$$\mathbf{E}X = \mathbf{E}(Y_1 + Y_2 + \cdots + Y_r) = \mathbf{E}Y_1 + \mathbf{E}Y_2 + \cdots + \mathbf{E}Y_r = \frac{1}{p} + \frac{1}{p} + \cdots + \frac{1}{p} = \frac{r}{p}.$$

Ezzel a 4.48. állítás első felét bebizonyítottuk.

7.11. Példa (a hipergeometriai eloszlás) *Idézzük fel a 4.49. definíciót. Legyen*

$$X_i = \begin{cases} 1, & \text{ha az } i. \text{ befogott őz meg van jelölve,} \\ 0, & \text{ha az } i. \text{ befogott őz nincs megjelölve,} \end{cases} \qquad i = 1,\, 2,\, \ldots,\, n.$$

Ekkor $\mathbf{E}X_i = m/N$, és a befogott megjelölt őzek száma, $X = \sum_{i=1}^{n} X_i$ hipergeometriai eloszlású, várható értéke

$$\mathbf{E}X = \mathbf{E}\sum_{i=1}^{n} X_i = \sum_{i=1}^{n} \mathbf{E}X_i = \frac{nm}{N}.$$

A szimmetriát szem előtt tartva lehet máshogyan is:

$$Y_j = \begin{cases} 1, & \text{ha a } j. \text{ megjelölt őzet befogjuk,} \\ 0, & \text{ha a } j. \text{ megjelölt őzet nem fogjuk be,} \end{cases} \qquad j = 1,\, 2,\, \ldots,\, m.$$

Ekkor $\mathbf{E}Y_j = n/N$, és a befogott megjelölt őzek száma, $X = \sum_{j=1}^{m} Y_j$ hipergeometriai eloszlású, várható értéke

$$\mathbf{E}X = \mathbf{E}\sum_{j=1}^{m} Y_j = \sum_{j=1}^{m} \mathbf{E}Y_j = \frac{nm}{N}.$$

7.2. Kovariancia, szórás

Ebben a részben a függetlenség és a várható értékek kapcsolatát vizsgáljuk.

7.12. Állítás *Legyenek X és Y* független *valószínűségi változók. Ekkor minden g és h függvényre (melyre az alábbi várható értékek léteznek)*

$$\mathbf{E}\big(g(X) \cdot h(Y)\big) = \mathbf{E}g(X) \cdot \mathbf{E}h(Y).$$

Bizonyítás. Ismét a folytonos esetre bizonyítunk, de az állítás minden valószínűségi változóra igaz:

$$\begin{aligned}
\mathbf{E}\big(g(X) \cdot h(Y)\big) &= \iint_{\mathbb{R}^2} g(x) \cdot h(y) \cdot f(x,\, y) \,\mathrm{d}x \,\mathrm{d}y = \\
&= \iint_{\mathbb{R}^2} g(x) \cdot h(y) \cdot f_X(x) \cdot f_Y(y) \,\mathrm{d}x \,\mathrm{d}y = \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} g(x) \cdot f_X(x) \,\mathrm{d}x \cdot \int_{-\infty}^{\infty} h(y) \cdot f_Y(y) \,\mathrm{d}y = \\
&= \mathbf{E}g(X) \cdot \mathbf{E}h(Y).
\end{aligned}$$

□

7.13. Definíció *Az X és Y valószínűségi változók* kovarianciája

$$\mathbf{Cov}(X,\, Y) = \mathbf{E}[(X - \mathbf{E}X) \cdot (Y - \mathbf{E}Y)].$$

7.14. Állítás *A kovariancia ekvivalens alakja* $\mathbf{Cov}(X,\, Y) = \mathbf{E}XY - \mathbf{E}X \cdot \mathbf{E}Y$.

Bizonyítás.

$$\begin{aligned}
\mathbf{Cov}(X,\, Y) &= \mathbf{E}[(X - \mathbf{E}X) \cdot (Y - \mathbf{E}Y)] = \\
&= \mathbf{E}[X \cdot Y] - \mathbf{E}[X \cdot \mathbf{E}Y] - \mathbf{E}[(\mathbf{E}X) \cdot Y] + \mathbf{E}[\mathbf{E}X \cdot \mathbf{E}Y] = \\
&= \mathbf{E}[X \cdot Y] - \mathbf{E}X \cdot \mathbf{E}Y - \mathbf{E}X \cdot \mathbf{E}Y + \mathbf{E}X \cdot \mathbf{E}Y = \\
&= \mathbf{E}XY - \mathbf{E}X \cdot \mathbf{E}Y.
\end{aligned}$$

□

Hasonlítsuk össze ezt a két alakot a szórásnégyzet 4.14. definíciójával, illetve hasonló ekvivalens alakjával. A fentiekből következik, hogy független változók kovarianciája nulla, ugyanis ekkor

$$\mathbf{Cov}(X,\, Y) = \mathbf{E}[(X - \mathbf{E}X) \cdot (Y - \mathbf{E}Y)] = \mathbf{E}(X - \mathbf{E}X) \cdot \mathbf{E}(Y - \mathbf{E}Y) = 0 \cdot 0 = 0.$$

Ennek megfordítottja viszont nem igaz:

7.15. Példa *Legyen*

$$X := \begin{cases} -1, \ \frac{1}{3} \ \textit{valószínűséggel,} \\ 0, \ \frac{1}{3} \ \textit{valószínűséggel,} \\ 1, \ \frac{1}{3} \ \textit{valószínűséggel,} \end{cases} \qquad Y := \begin{cases} 0, \ \textit{ha } X \neq 0, \\ 1, \ \textit{ha } X = 0. \end{cases}$$

Ekkor $X \cdot Y = 0$ és $\mathbf{E}X = 0$, ezért $\mathbf{Cov}(X, Y) = 0$, de a változók nyilvánvalóan nem függetlenek.

7.16. Állítás *A kovariancia egy*

- *pozitív szemidefinit:* $\mathbf{Cov}(X, X) = \mathbf{D}^2 X \geq 0$,
- *szimmetrikus:* $\mathbf{Cov}(X, Y) = \mathbf{Cov}(Y, X)$,
- *bilineáris:* $\mathbf{Cov}\Big(\sum_i a_i X_i + b, \sum_j c_j Y_j + d\Big) = \\ = \sum_{i,j} a_i c_j \mathbf{Cov}(X_i, Y_j)$

leképezés (a_i, b, c_j, d rögzített valós számok). A bilinearitás (igazából „biaffinitás”-nak kellene neveznünk) megértéséhez azt kell észrevennünk, hogy bármilyen valószínűségi változónak egy rögzített számmal vett kovarianciája nulla.

Amennyiben a konstans valószínűségi változókat az azonosan nulla valószínűségi változóval azonosítjuk, akkor a valószínűségi változók így kapott vektorterén a kovariancia egy *skalárszorzás*. Ez nem is annyira meglepő, ha a definíciót az $\mathbf{E}[(X - \mathbf{E}X) \cdot (Y - \mathbf{E}Y)] = \mathbf{E}\widetilde{X}\widetilde{Y}$ alakba írjuk a *centrált* $\widetilde{X} := X - \mathbf{E}X$ és $\widetilde{Y}$ valószínűségi változók segítségével. Ez az alak ugyanis $\widetilde{X}$ és $\widetilde{Y}$ $L^2(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$-skalárszorzata.

Bizonyítás. Az első két tulajdonság triviális,a várható érték linearitása alapján a harmadik sem nehéz:

$$\begin{aligned} &\mathbf{Cov}\Big(\sum_i a_i X_i + b, \sum_j c_j Y_j + d\Big) \\ &\qquad = \mathbf{E}\Big[\Big(\sum_i a_i X_i + b - \mathbf{E}\Big(\sum_i a_i X_i + b\Big)\Big) \cdot \\ &\qquad\quad \cdot \Big(\sum_j c_j Y_j + d - \mathbf{E}\Big(\sum_j c_j Y_j + d\Big)\Big)\Big] = \\ &\qquad = \mathbf{E}\Big[\Big(\sum_i a_i (X_i - \mathbf{E}X_i)\Big) \cdot \Big(\sum_j c_j (Y_j - \mathbf{E}Y_j)\Big)\Big] = \sum_{i,j} a_i c_j \mathbf{Cov}(X_i, Y_j). \end{aligned}$$

□

7.17. Definíció *Legyenek $X_1, X_2, \ldots, X_n$ valószínűségi változók. Az ő* kovarianciamátrixuk *a*

$$C_{ij} := \mathbf{Cov}(X_i, X_j)$$

elemekből álló $\underline{\underline{C}}$ mátrix ($1 \le i, j \le n$).

A fentiek szerint ez a mátrix szimmetrikus, főátlójában a szórásnégyzetek állnak. Legyen $\underline{a}$ egy rögzített vektor, ekkor

$$\begin{aligned}\underline{a}^T \underline{\underline{C}}\, \underline{a} &= \sum_{i,j} a_i \mathbf{Cov}(X_i, X_j) a_j = \\ &= \mathbf{Cov}\Big(\sum_i a_i X_i, \sum_j a_j X_j\Big) = \mathbf{D}^2\Big(\sum_i a_i X_i\Big) \ge 0,\end{aligned}$$

ami azt mutatja, hogy *a kovarianciamátrix pozitív szemidefinit.*

7.18. Állítás *A 6.20. definícióban szereplő $\underline{X}$ együttes normális vektor kovarianciamátrixa éppen $\underline{\underline{A}}^{-1}$.*

Bizonyítás. A definíciót követő állításban láttuk, hogy $\underline{X} = \underline{\underline{P}}\,\underline{\underline{D}}^{-1/2}\underline{Y} + \underline{m}$, ahol $\underline{\underline{P}}$ ortogonális mátrix, $\underline{\underline{D}} = \underline{\underline{P}}^{-1}\underline{\underline{A}}\,\underline{\underline{P}}$, és $\underline{Y}$ f.a.e. standard normális változók. A kovarianciamátrix eltolás-invariáns, ezért $\underline{m}$-et azonnal el is felejtjük. A mátrix i, j-dik eleme

$$\begin{aligned}C_{ij} = \mathbf{Cov}(X_i, X_j) = \mathbf{Cov}\Big(\sum_{k,\ell} P_{ik}(\underline{\underline{D}}^{-1/2})_{k\ell} Y_\ell, \sum_{m,h} P_{jm}(\underline{\underline{D}}^{-1/2})_{mh} Y_h\Big) &= \\ = \sum_{k,\ell,m,h} P_{ik}(\underline{\underline{D}}^{-1/2})_{k\ell} P_{jm}(\underline{\underline{D}}^{-1/2})_{mh} \mathbf{Cov}(Y_\ell, Y_h) &= \\ = \sum_{k,\ell,m,h} P_{ik}(\underline{\underline{D}}^{-1/2})_{k\ell} P_{jm}(\underline{\underline{D}}^{-1/2})_{mh} \delta_{\ell h} &= \\ = \sum_{k,\ell,m} P_{ik}(\underline{\underline{D}}^{-1/2})_{k\ell} P_{jm}(\underline{\underline{D}}^{-1/2})_{m\ell} &= \\ = \sum_{k,\ell,m} P_{ik}(\underline{\underline{D}}^{-1/2})_{k\ell} (\underline{\underline{D}}^{-1/2})_{\ell m} (\underline{\underline{P}}^{-1})_{mj} &= \\ = \big(\underline{\underline{P}}\,\underline{\underline{D}}^{-1}\underline{\underline{P}}^{-1}\big)_{ij} = \big((\underline{\underline{P}}\,\underline{\underline{D}}\,\underline{\underline{P}}^{-1})^{-1}\big)_{ij} = \big(\underline{\underline{A}}^{-1}\big)_{ij}&,\end{aligned}$$

□

ahol $\delta_{h\ell} = \mathbf{1}\{h = \ell\}$ a Kronecker delta.

7.19. Állítás *Legyenek $X_1, X_2, \ldots, X_n$ valószínűségi változók. Ekkor*

$$\mathbf{D}^2 \sum_{i=1}^n X_i = \sum_{i=1}^n \mathbf{D}^2 X_i + 2 \sum_{1 \le i < j \le n} \mathbf{Cov}(X_i, X_j).$$

Speciálisan, független *valószínűségi változók összegének szórásnégyzete összeadódik.*

Bizonyítás. A fenti tulajdonságok alapján

$$\begin{aligned}\mathbf{D}^2\sum_{i=1}^{n}X_i &= \mathbf{Cov}\Big(\sum_{i=1}^{n}X_i,\,\sum_{j=1}^{n}X_j\Big) = \sum_{i,j=1}^{n}\mathbf{Cov}(X_i,\,X_j) = \\ &= \sum_{i=1}^{n}\mathbf{Cov}(X_i,\,X_i) + \sum_{i\neq j}\mathbf{Cov}(X_i,\,X_j) = \\ &= \sum_{i=1}^{n}\mathbf{D}^2X_i + \sum_{i<j}\mathbf{Cov}(X_i,\,X_j) + \sum_{i>j}\mathbf{Cov}(X_i,\,X_j) = \\ &= \sum_{i=1}^{n}\mathbf{D}^2X_i + 2\sum_{1\le i<j\le n}\mathbf{Cov}(X_i,\,X_j).\end{aligned}$$

□

Megjegyezzük, hogy *független* valószínűségi változók különbségének szórásnégyzete is összeadódik, hiszen

$$\begin{aligned}\mathbf{D}^2(X-Y) &= \mathbf{D}^2(X+(-Y)) = \\ &= \mathbf{D}^2X + \mathbf{D}^2(-Y) + 2\mathbf{Cov}(X,\,-Y) = \mathbf{D}^2X + \mathbf{D}^2Y + 2\cdot 0.\end{aligned}$$

7.20. Példa (empírikus szórásnégyzet) *Legyenek* $X_1,\,X_2,\,\ldots,\,X_n$ *f.a.e. valószínűségi változók* μ *várható értékkel és* σ^2 *szórásnégyzettel. Először ránézünk a 7.5. példában definiált empírikus várható érték szórásnégyzetére:*

$$\mathbf{D}^2\bar{X} = \mathbf{D}^2\Big(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i\Big) = \frac{1}{n^2}\mathbf{D}^2\Big(\sum_{i=1}^{n}X_i\Big) = \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n}\mathbf{D}^2X_i = \frac{1}{n^2}\cdot n\sigma^2 = \frac{\sigma^2}{n}.$$

Függetlenség esetén tehát az empírikus várható érték (avagy a minták átlaga) egyre kevésbé fluktuál, ezért szeretjük.

Most definiáljuk az empírikus szórásnégyzetet*:*

$$S^2 := \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\bar{X})^2.$$

Ekkor ugyanis $\mathbf{E}S^2 = \sigma^2$*, és azt várjuk, hogy ezen érték körül* S^2 *is egyre kevésbé fluktuál.*

A várható érték kiszámításához először vegyük észre, hogy $\mathbf{E}(X_i - \bar{X}) = \mathbf{E}X_i - \mathbf{E}\bar{X} = \mu - \mu = 0$, ezért

$$\begin{aligned}\mathbf{E}(X_i - \bar{X})^2 = \mathbf{D}^2(X_i - \bar{X}) = \mathbf{D}^2\Big(X_i - \frac{1}{n}\sum_j X_j\Big) &= \\ = \mathbf{D}^2\Big(\frac{n-1}{n}X_i - \frac{1}{n}\sum_{j\neq i} X_j\Big) &= \\ = \mathbf{D}^2\Big(\frac{n-1}{n}X_i\Big) + \mathbf{D}^2\Big(\frac{1}{n}\sum_{j\neq i} X_j\Big) &= \\ = \frac{(n-1)^2}{n^2}\mathbf{D}^2X_i + \frac{1}{n^2}\sum_{j\neq i}\mathbf{D}^2X_j &= \\ = \frac{(n-1)^2}{n^2}\sigma^2 + \frac{n-1}{n^2}\sigma^2 = \frac{n-1}{n}\sigma^2.&\end{aligned}$$

Ezért

$$\mathbf{E}S^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^n \mathbf{E}(X_i - \bar{X})^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^n \frac{n-1}{n}\sigma^2 = \sigma^2.$$

7.21. Példa (a binomiális eloszlás szórásnégyzete) *A 7.9. példában előállítottuk az $X \sim Binom(n, p)$ változót f.a.e. indikátorok összegeként. Ennek alapján a szórásnégyzetét könnyű kiszámolni:*

$$\mathbf{D}^2X = \mathbf{D}^2\sum_{i=1}^n X_i = \sum_{i=1}^n \mathbf{D}^2X_i = \sum_{i=1}^n p(1-p) = np(1-p).$$

7.22. Példa (a negatív binomiális eloszlás szórásnégyzete) *A 7.10. példát folytatva, ha $X \sim Neg.bin(p, r)$,*

$$\mathbf{D}^2X = \mathbf{D}^2(Y_1 + Y_2 + \cdots + Y_r) = \mathbf{D}^2Y_1 + \mathbf{D}^2Y_2 + \cdots + \mathbf{D}^2Y_r = r\cdot\frac{1-p}{p^2}.$$

7.23. Példa (elcserélt kalapok) *A 2.4 feladatban tekintettünk egy n tagú férfitársaságot, akik vacsorázni mentek egy étterembe, kalapjaikat a ruhatárban hagyták, majd vacsora és borozgatás után kalapjaikat teljesen véletlenszerűen viszik el a ruhatárból. Legyen X azon férfiak száma, akik a saját kalapjukkal a fejükön távoznak az étteremből. Határozzuk meg X várható értékét és szórását.*

Definiáljuk az X_i változót mint annak indikátorát, hogy Mr. i a saját kalapjával távozik, $i = 1, 2, \ldots, n$. Ennek az eseménynek a valószínűsége $1/n$, és $X = \sum_{i=1}^{n} X_i$, ezért

$$\mathbf{E}X = \mathbf{E}\sum_{i=1}^{n} X_i = \sum_{i=1}^{n} \mathbf{E}X_i = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{n} = 1, \text{ és}$$

$$\mathbf{D}^2 X = \mathbf{D}^2 \sum_{i=1}^{n} X_i = \sum_{i=1}^{n} \mathbf{D}^2 X_i + 2 \sum_{1 \le i < j \le n} \mathbf{Cov}(X_i, X_j).$$

Az X_i indikátorok szórásnégyzete $\mathbf{D}^2 X_i = \frac{1}{n}(1 - \frac{1}{n})$. Mivel a változók nem függetlenek, kovarianciájuk ($i \neq j$):

$$\begin{aligned}\mathbf{Cov}(X_i, X_j) &= \mathbf{E}X_i X_j - \mathbf{E}X_i \cdot \mathbf{E}X_j = \\ &= \mathbf{P}\{\text{Mr. } i \text{ és Mr. } j \text{ saját kalappal távoznak}\} - \frac{1}{n} \cdot \frac{1}{n} = \\ &= \frac{1}{n(n-1)} - \frac{1}{n^2} = \frac{1}{n^2(n-1)},\end{aligned}$$

az indexektől függetlenül. A $\sum_{1 \le i < j \le n}$ szummázás $\binom{n}{2}$ darab tagot jelent, így

$$\mathbf{D}^2 X = n \cdot \frac{1}{n}\Big(1 - \frac{1}{n}\Big) + 2\binom{n}{2}\frac{1}{n^2(n-1)} = 1.$$

Az alábbiakban a skalárszorzás-képet erősítendő, bebizonyítjuk a lineáris algebrából már jól ismert egyenlőtlenséget:

7.24. Állítás (Cauchy-Schwarz egyenlőtlenség**)** *Minden X és Y valószínűségi változóra*

$$|\mathbf{E}XY| \le \sqrt{\mathbf{E}X^2} \cdot \sqrt{\mathbf{E}Y^2},$$

és pontosan akkor áll egyenlőség, ha Y m.b. az X számszorosa.

Bizonyítás. A bizonyításhoz vegyük észre, hogy

$$\begin{aligned}0 \le \mathbf{E}\Big(\frac{X}{\sqrt{\mathbf{E}X^2}} \pm \frac{Y}{\sqrt{\mathbf{E}Y^2}}\Big)^2 &= \mathbf{E}\Big(\frac{X^2}{\mathbf{E}X^2}\Big) + \mathbf{E}\Big(\frac{Y^2}{\mathbf{E}Y^2}\Big) \pm 2\mathbf{E}\frac{XY}{\sqrt{\mathbf{E}X^2} \cdot \sqrt{\mathbf{E}Y^2}} = \\ &= 2 \pm 2\frac{\mathbf{E}XY}{\sqrt{\mathbf{E}X^2} \cdot \sqrt{\mathbf{E}Y^2}}.\end{aligned}$$

A $+$ esetben $\mathbf{E}XY \ge -\sqrt{\mathbf{E}X^2} \cdot \sqrt{\mathbf{E}Y^2}$, a $-$ esetben $\mathbf{E}XY \le \sqrt{\mathbf{E}X^2} \cdot \sqrt{\mathbf{E}Y^2}$ következik. Az is látszik, hogy $\mathbf{E}XY = \mp\sqrt{\mathbf{E}X^2} \cdot \sqrt{\mathbf{E}Y^2}$ pontosan akkor teljesül, ha

$$\frac{X}{\sqrt{\mathbf{E}X^2}} \pm \frac{Y}{\sqrt{\mathbf{E}Y^2}} = 0 \qquad \text{azaz} \qquad X = \mp Y \cdot \frac{\sqrt{\mathbf{E}X^2}}{\sqrt{\mathbf{E}Y^2}} \qquad \text{m.b.},$$

ami pontosan akkor történik, ha Y m.b. az X számszorosa. □

7.25. Következmény *Az egyenlőtlenséget az $|X|$ és $|Y|$ változókra alkalmazva*

$$\mathbf{E}|XY| \leq \sqrt{\mathbf{E}X^2} \cdot \sqrt{\mathbf{E}Y^2}.$$

7.26. Definíció *Az X és Y valószínűségi változók* korrelációja

$$\mathbf{Corr}(X, Y) = \varrho(X, Y) := \frac{\mathbf{Cov}(X, Y)}{\mathbf{D}X \cdot \mathbf{D}Y}.$$

7.27. Következmény *Bármely két változóra $\varrho(X, Y) \in [-1, 1]$, és a ± 1 értékek pontosan akkor fordulnak elő, ha Y az X-nek affin függvénye m.b.*

Bizonyítás. Vegyük észre, hogy az $\widetilde{X} = X - \mathbf{E}X$ és $\widetilde{Y} = Y - \mathbf{E}Y$ változók segítségével

$$\varrho(X, Y) = \frac{\mathbf{E}\widetilde{X}\widetilde{Y}}{\sqrt{\mathbf{E}\widetilde{X}^2} \cdot \sqrt{\mathbf{E}\widetilde{Y}^2}},$$

innen az állítás a Cauchy-Schwarz egyenlőtlenségből következik. Az állítás második feléhez még azt kell látni, hogy

$$Y = aX + b \text{ valamely } b\text{-re} \qquad \Leftrightarrow \qquad \widetilde{X} = a\widetilde{Y}.$$ □

Ha két valószínűségi változó pozitívan korrelált, az intuitívan azt jelenti, hogy tipikusan az egyik szeret nagyobb lenni akkor, amikor a másik is nagyobb. Negatívan korrelált valószínűségi változók közül az egyik tipikusan akkor szeret nagyobb lenni, amikor a másik kisebb értékeket vesz fel. Ez a végletekig (azaz egyetlen egyenesig a síkon) fokozódik amikor $\varrho(X, Y) = \pm 1$. Ne feledjük, hogy a korreláció(ban szereplő összes mennyiség) eltolás-invariáns, vagyis bármely rögzített vektorral arrébb toljuk az (X, Y) valószínűségi változó vektorunkat, a korreláció nem változik.

7.3. Feltételes várható érték

7.28. Definíció *Tekintsük az X és Y diszkrét vagy együttesen folytonos valószínűségi változókat, és legyen y olyan, hogy $p_Y(y) > 0$ illetve $f_Y(y) > 0$ és f_Y folytonos y-ban. Ekkor a 6.5. részben definiált $p_{X\,|\,Y}(\cdot\,|\,y)$ feltételes súlyfüggvény jólnevelt súlyfüggvény, illetve az $f_{X\,|\,Y}(\cdot\,|\,y)$ feltételes sűrűségfüggvény jólnevelt sűrűségfüggvény. Tekinthetjük tehát az*

$$\mathbf{E}(X\,|\,Y = y) := \begin{cases} \displaystyle\sum_i x_i \cdot p_{X\,|\,Y}(x_i\,|\,y), & \textit{(diszkrét eset)} \\ \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} x \cdot f_{X\,|\,Y}(x\,|\,y)\,\mathrm{d}x, & \textit{(folytonos eset)} \end{cases}$$

feltételes várható értéket *(amennyiben létezik; ezt a továbbiakban fel fogjuk tenni).*

7.29. Példa *Legyen $X \sim Binom(n, p)$ és $Y \sim Binom(m, p)$ függetlenek. Határozzuk meg $\mathbf{E}(X \,|\, X+Y=k)$ értékét.*

Először a feltételes súlyfüggvényt számoljuk ki, amihez felidézzük, hogy $X+Y \sim \mathrm{Binom}(n+m, p)$:

$$\begin{aligned}
p_{X\,|\,X+Y}(i\,|\,k) = \mathbf{P}\{X=i\,|\,X+Y=k\} &= \frac{\mathbf{P}\{X=i,\ X+Y=k\}}{\mathbf{P}\{X+Y=k\}} = \\
&= \frac{\mathbf{P}\{X=i,\ Y=k-i\}}{\mathbf{P}\{X+Y=k\}} = \\
&= \frac{\mathbf{P}\{X=i\}\cdot\mathbf{P}\{Y=k-i\}}{\mathbf{P}\{X+Y=k\}} = \\
&= \frac{\binom{n}{i}p^i(1-p)^{n-i}\cdot\binom{m}{k-i}p^{k-i}(1-p)^{m-k+i}}{\binom{n+m}{k}p^k(1-p)^{n+m-k}} = \frac{\binom{n}{i}\cdot\binom{m}{k-i}}{\binom{n+m}{k}}.
\end{aligned}$$

X feltételes eloszlása tehát az $X+Y=k$ feltétel mellett hipergeometriai, várható értéke a 7.11. állítás szerint $k\cdot\frac{n}{n+m}$, azaz a várható érték k-t pont olyan arányban osztja, mint n $n+m$-et. Fontos tanulság, hogy általában X és $X+Y$ *nem* függetlenek, ha X és Y azok voltak.

7.30. Példa *A 6.12. példában definiált együttes eloszlás Y marginális eloszlását és az $X\,|\,Y=y \sim Exp(\frac{1}{y})$ (avagy $X\,|\,Y \sim Exp(\frac{1}{Y})$) feltételes eloszlást meghatároztuk a 6.34. példában. Ennek alapján $\mathbf{E}(X\,|\,Y=y)=y$. A kedélyek borzolásának céljából ezt úgy is írhatjuk, hogy $\mathbf{E}(X\,|\,Y)=Y$.*

A feltételes várható érték nagyon hasznos tud lenni, ha két lépcsőben adott az információ, azaz tudjuk egy valószínűségi változó eloszlását, és egy másik valószínűségi változó feltételes eloszlását az előző változó adott értéke mellett. Az erre vonatkozó állítást előkészítendő a következő definíciót illetve megjegyzést tesszük:

- A $G(y) := \mathbf{E}(X\,|\,Y=y)$ mennyiség az y függvénye, egy pillanatra $G(y)$-nak nevezzük. Legyen $\mathbf{E}(X\,|\,Y) := G(Y)$ az Y-nak ugyanez a függvénye; ehhez hasonló megjegyzésekkel már korábban borzoltuk a kedélyeket. Mint ilyen, $\mathbf{E}(X\,|\,Y)$ tehát maga is egy valószínűségi változó.

- Legyenek g és h függvények. Ekkor feltéve Y-t, Y nem véletlen. Ezt a triviális tényt kicsit kifejtve nagyon hasznos tulajdonságot kapunk:

$$\begin{aligned}
\mathbf{E}(g(X)\cdot h(Y)\,|\,Y=y) &= \mathbf{E}(g(X)\cdot h(y)\,|\,Y=y) = \\
&= h(y)\cdot\mathbf{E}(g(X)\,|\,Y=y), \qquad \text{azaz} \\
\mathbf{E}(g(X)\cdot h(Y)\,|\,Y) &= h(Y)\cdot\mathbf{E}(g(X)\,|\,Y),
\end{aligned}$$

mely utóbbi továbbra is Y-nak függvénye.

A hasznos állítás tehát:

7.31. Állítás (toronyszabály) *Legyenek X és Y valószínűségi változók, g egy kétváltozós függvény. Ekkor*

$$\mathbf{E}g(X,\,Y) = \mathbf{E}\mathbf{E}(g(X,\,Y)\,|\,Y),$$

ahol tehát a külső várható érték az $\mathbf{E}(g(X,\,Y)\,|\,Y)$ Y-tól függő valószínűségi változó várható értéke.

Bizonyítás. Együttesen folytonos esetre bizonyítunk, a diszkrét eset hasonlóan megy, természetesen az állítás teljes általánosságban igaz. Definícióink szerint

$$\begin{aligned}
\mathbf{E}\mathbf{E}(g(X,\,Y)\,|\,Y) &= \int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{E}(g(X,\,Y)\,|\,Y=y)\cdot f_Y(y)\,\mathrm{d}y = \\
&= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} g(x,\,y)\cdot f_{X\,|\,Y}(x\,|\,y)\,\mathrm{d}x\cdot f_Y(y)\,\mathrm{d}y = \\
&= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} g(x,\,y)\cdot f_{X\,|\,Y}(x\,|\,y) f_Y(y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \\
&= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} g(x,\,y)\cdot f(x,\,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \mathbf{E}g(X,\,Y).
\end{aligned}$$

□

7.32. Példa *Egy bányász eltévedt a bányában, és egy olyan teremben találja magát, ahol három ajtó van:*

- *Az első ajtó egy alagúton át három órányi út után a szabadba vezet.*
- *A második ajtó egy alagúton keresztül öt órányi út után a harmadik ajtóban, azaz ugyanebben a teremben végződik.*
- *A harmadik ajtón kimenve az előbbi alagúton fordítva kell végigmenni, és ebben az irányban az út hét óráig tart. A harmadik ajtón kimenve tehát hét óra után ismét ugyanebben a teremben találja magát a pórul járt bányász.*

A fáradt bányász először és minden további alkalommal amikor a terembe érkezik függetlenül azonos eséllyel választ egy ajtót magának. Határozzuk meg, hogy várhatóan hány óra múlva jut ki a bányából.

Legyen X a kijutás ideje, és Y az először választott ajtó száma. Ekkor

$$\begin{aligned}
\mathbf{E}X = \mathbf{E}\mathbf{E}(X\,|\,Y) &= \mathbf{E}(X\,|\,Y=1)\cdot\mathbf{P}\{Y=1\} + \mathbf{E}(X\,|\,Y=2)\cdot\mathbf{P}\{Y=2\} + \\
&\quad + \mathbf{E}(X\,|\,Y=3)\cdot\mathbf{P}\{Y=3\} = \\
&= 3\cdot\frac{1}{3} + (\mathbf{E}X+5)\cdot\frac{1}{3} + (\mathbf{E}X+7)\cdot\frac{1}{3},
\end{aligned}$$

hiszen például a kettes ajtót választva főhősünk öt óra bolyongás után ugyanott tart, mint a túra legelején. Ezt az egyszerű egyenletet $\mathbf{E}X$-re megoldva a válasz 15 óra.

Szokták a toronyszabályt teljes valószínűség tételének is nevezni (az eredeti verziót lásd a 3.13. szám alatt), ugyanis

7.33. Következmény *Legyen X egy valószínűségi változó, A egy esemény, $I = \mathbf{1}\{A\}$ pedig az indikátora. Ekkor*

$$\mathbf{P}\{A\} = \mathbf{E}I = \mathbf{E}\mathbf{E}(I \,|\, X) = \mathbf{E}\mathbf{P}\{A \,|\, X\},$$

ahol $\mathbf{P}\{A \,|\, X\}$ definiálása a fentiekhez hasonlóan történik. Ha X diszkrét x_i lehetséges értékekkel, akkor ezt a sort kifejtve

$$\mathbf{P}\{A\} = \sum_i \mathbf{P}\{A \,|\, X = x_i\} \cdot p_X(x_i).$$

Ha pedig X folytonos, akkor

$$\mathbf{P}\{A\} = \int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{P}\{A \,|\, X = x\} \cdot f_X(x)\,\mathrm{d}x.$$

7.34. Példa *Legyen N egy egész értékű, X pedig egy folytonos valószínűségi változó. Az előbbi megfontolás alapján*

$$\begin{aligned} p_N(n) = \mathbf{P}\{N = n\} &= \int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{P}\{N = n \,|\, X = x\} \cdot f_X(x)\,\mathrm{d}x = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} p_{N \,|\, X}(n \,|\, x) \cdot f_X(x)\,\mathrm{d}x, \end{aligned}$$

mely összefüggést (6.6) szám alatt már megkaptuk.

A toronyszabályhoz hasonló formula szórásnégyzetekre is létezik.

7.35. Definíció *A* feltételes szórásnégyzet *ugyanúgy van definiálva, mint a hagyományos szórásnégyzet, csak mindenhol feltételes várható értéket kell használni:*

$$\mathbf{D}^2(X \,|\, Y) = \mathbf{E}\big[(X - \mathbf{E}(X \,|\, Y))^2 \,|\, Y\big] = \mathbf{E}(X^2 \,|\, Y) - \big[\mathbf{E}(X \,|\, Y)\big]^2.$$

ő is tehát Y-nak függvénye, és mint ilyen, egy valószínűségi változó.

7.36. Állítás (feltételes szórásnégyzet formula)

$$\mathbf{D}^2 X = \mathbf{E}\mathbf{D}^2(X \,|\, Y) + \mathbf{D}^2\mathbf{E}(X \,|\, Y).$$

Szóban könnyebb: a szórásnégyzet megegyezik a feltételes szórásnégyzet várható értékének és a feltételes várható érték szórásnégyzetének összegével.

Ennek a formulának kovarianciákra érvényes változatát lásd a 7.32 feladatban.

Bizonyítás.

$$
\begin{aligned}
\mathbf{D}^2 X &= \mathbf{E}X^2 - [\mathbf{E}X]^2 = \mathbf{E}\mathbf{E}(X^2 \,|\, Y) - [\mathbf{E}\mathbf{E}(X \,|\, Y)]^2 = \\
&= \mathbf{E}\big(\mathbf{E}(X^2 \,|\, Y) - [\mathbf{E}(X \,|\, Y)]^2\big) + \mathbf{E}[\mathbf{E}(X \,|\, Y)]^2 - [\mathbf{E}\mathbf{E}(X \,|\, Y)]^2 = \\
&= \mathbf{E}\mathbf{D}^2(X \,|\, Y) + \mathbf{D}^2\mathbf{E}(X \,|\, Y).
\end{aligned}
$$

□

7.37. Példa *Egy (eredetileg üres) vonat indulási ideje a Keletiből $T \sim E(0, t)$ eloszlású. Ettől függetlenül a 0 időpillanattól kezdve Poisson(λ) folyamat szerint érkeznek az utasok a vonathoz, aki T előtt érkezik, az felszáll a vonatra. Legyen N a vonaton utazók száma. Határozzuk meg N várható értékét és szórásnégyzetét.*

A megadott információk (és a Poisson folyamat tulajdonságai) alapján tudjuk, hogy $T \sim \mathrm{E}(0, t)$, és $N \,|\, T \sim \mathrm{Poi}(\lambda T)$. Adja magát, hogy toronyszabályt illetve feltételes szórásnégyzet formulát kell használni:

$$
\begin{aligned}
\mathbf{E}N &= \mathbf{E}\mathbf{E}(N \,|\, T) = \mathbf{E}(\lambda T) = \lambda \mathbf{E}T = \lambda \frac{t}{2}, \qquad \text{és} \\
\mathbf{D}^2 N &= \mathbf{E}\mathbf{D}^2(N \,|\, T) + \mathbf{D}^2\mathbf{E}(N \,|\, T) = \\
&= \mathbf{E}(\lambda T) + \mathbf{D}^2(\lambda T) = \lambda \mathbf{E}T + \lambda^2 \mathbf{D}^2 T = \lambda \frac{t}{2} + \lambda^2 \frac{t^2}{12}.
\end{aligned}
$$

A második sor szépen mutatja, hogy az utasszám fluktuációi két okra vezethetők vissza: az első tag azért van, mert az utasáramlás Poisson folyamata maga is fluktuál, és ennek mértéke persze arányos az indulási idő $\mathbf{E}T$ várható értékével. A második tag pedig az indulási idő fluktuációja miatt keletkezett.

7.38. Példa (véletlen tagszámú összegek) *Egy boltban egy nap N ember vásárol, és az i. vásárló X_i összeget költ. Tegyük fel, hogy N, X_1, X_2, … függetlenek, és az X_i változók azonos eloszlásúak μ várható értékkel és σ^2 szórásnégyzettel. Határozzuk meg a boltban egy nap elköltött pénz várható értékét és szórásnégyzetét.*

A boltban elköltött pénz $X = \sum_{i=1}^{N} X_i$, egy véletlen tagszámú összeg. Az alábbiakban alaposan kihasználjuk, hogy N-et feltéve N nem véletlen, így a feltételes várható érték felcserél az N-ig vett szummázással:

$$
\begin{aligned}
\mathbf{E}X &= \mathbf{E}\sum_{i=1}^{N} X_i = \mathbf{E}\mathbf{E}\Big(\sum_{i=1}^{N} X_i \,\Big|\, N\Big) = \mathbf{E}\sum_{i=1}^{N} \mathbf{E}(X_i \,|\, N) = \\
&= \mathbf{E}\sum_{i=1}^{N} \mathbf{E}X_i = \mathbf{E}\sum_{i=1}^{N} \mu = \mathbf{E}(N\mu) = \mu \cdot \mathbf{E}N,
\end{aligned}
$$

ahol N és az X_i-k függetlenségét is használtuk. (Ehhez a részhez igazából az X_i-k egymás közötti függetlensége nem is kellett.) Az ehhez hasonló azonosságok általánosabb esetekben Wald azonosság néven ismertek.

A szórásnégyzethez N és az X_i-k (egymás közötti) függetlensége (is) kell ahhoz, hogy a feltételes szórásnégyzet felcseréljen az összegzéssel:

$$\begin{aligned}
\mathbf{D}^2 X &= \mathbf{D}^2 \sum_{i=1}^{N} X_i = \mathbf{E}\mathbf{D}^2\Big(\sum_{i=1}^{N} X_i \,\Big|\, N\Big) + \mathbf{D}^2\mathbf{E}\Big(\sum_{i=1}^{N} X_i \,\Big|\, N\Big) = \\
&= \mathbf{E}\sum_{i=1}^{N} \mathbf{D}^2(X_i \,|\, N) + \mathbf{D}^2 \sum_{i=1}^{N} \mathbf{E}(X_i \,|\, N) = \mathbf{E}\sum_{i=1}^{N} \mathbf{D}^2 X_i + \mathbf{D}^2 \sum_{i=1}^{N} \mathbf{E} X_i = \\
&= \mathbf{E}\sum_{i=1}^{N} \sigma^2 + \mathbf{D}^2 \sum_{i=1}^{N} \mu = \mathbf{E}(N\sigma^2) + \mathbf{D}^2(N\mu) = \sigma^2 \cdot \mathbf{E}N + \mu^2 \cdot \mathbf{D}^2 N.
\end{aligned}$$

Az összeg fluktuációinak ismét két része van: az első az egyes vásárlók tételeinek fluktuációiból, a második a vásárlók számának fluktuációiból jön.

7.39. Példa *Tekintsük a 6.35. példában szereplő kétdimenziós eloszlást. Határozzuk meg az* $\mathbf{E}Y$, $\mathbf{D}^2 Y$, $\mathbf{E}(X \,|\, Y)$ *mennyiségeket.*

Először a definíció szerint, felhasználva a példában kiszámolt marginális eloszlást:

$$\begin{aligned}
\mathbf{E}Y &= \int_{-\infty}^{\infty} y f_Y(y)\,\mathrm{d}y = \int_0^1 -y\ln y\,\mathrm{d}y = \Big[-\frac{y^2}{2}\ln y\Big]_0^1 + \int_0^1 \frac{y}{2}\,\mathrm{d}y = \frac{1}{4}, \\
\mathbf{E}Y^2 &= \int_{-\infty}^{\infty} y^2 f_Y(y)\,\mathrm{d}y = \int_0^1 -y^2\ln y\,\mathrm{d}y = \Big[-\frac{y^3}{3}\ln y\Big]_0^1 + \int_0^1 \frac{y^2}{3}\,\mathrm{d}y = \frac{1}{9}, \\
\mathbf{D}^2 Y &= \frac{1}{9} - \frac{1}{4^2} = \frac{7}{144}.
\end{aligned}$$

Most pedig toronyszabállyal, felhasználva a megadott $Y \,|\, X \sim \mathrm{E}(0,\, X)$ feltételes eloszlást:

$$\begin{aligned}
\mathbf{E}Y &= \mathbf{E}\mathbf{E}(Y \,|\, X) = \mathbf{E}\frac{X}{2} = \frac{1}{2}\cdot \mathbf{E}X = \frac{1}{4}, \\
\mathbf{D}^2 Y &= \mathbf{E}\mathbf{D}^2(Y \,|\, X) + \mathbf{D}^2\mathbf{E}(Y \,|\, X) = \mathbf{E}\frac{X^2}{12} + \mathbf{D}^2\frac{X}{2} = \\
&= \frac{1}{12}\cdot(\mathbf{D}^2 X + [\mathbf{E}X]^2) + \frac{1}{4}\mathbf{D}^2 X = \frac{1}{12}\cdot\Big(\frac{1}{12} + \frac{1}{2^2}\Big) + \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{12} = \frac{7}{144}.
\end{aligned}$$

Az utolsó kérdésre a korábban kiszámolt feltételes eloszlás segítségével $0 < y < 1$ esetén

$$\begin{aligned}
\mathbf{E}(X \,|\, Y = y) &= \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot f_{X \,|\, Y}(x \,|\, y)\,\mathrm{d}x = \int_y^1 x \cdot \frac{1/x}{-\ln y}\,\mathrm{d}x = \frac{y-1}{\ln y}, \qquad \text{azaz} \\
\mathbf{E}(X \,|\, Y) &= \frac{Y-1}{\ln Y}.
\end{aligned}$$

Az eloszlás megadását tekintve érdekes, hogy $Y \to 0$ esetén ez is nullához tart, az kevésbé meglepő, hogy $Y \to 1$-re 1-hez tart. Ellenőrzésképp

$$\mathbf{E}X = \mathbf{E}\mathbf{E}(X \mid Y) = \mathbf{E}\Big(\frac{Y-1}{\ln Y}\Big) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{y-1}{\ln y} \cdot f_Y(y)\,\mathrm{d}y = \\ = \int_0^1 \frac{y-1}{\ln y} \cdot (-\ln y)\,\mathrm{d}y = \frac{1}{2},$$

ahogy annak lennie is kell $X \sim \mathrm{E}(0,\,1)$ miatt.

Végül azt vizsgáljuk – először általában, aztán feltételesen –, hogy mi lehet a legjobb tippünk egy X valószínűségi változó értékére. A tippet jelölje c, amit akkor mondhatunk jónak, ha $X - c$ pici. Természetesen ez egy véletlen mennyiség, ezért ezt kicsit még pontosítanunk kellene. Az első ötlet, hogy keressük azt a c-t, melyre $\mathbf{E}|X - c|$ minimális. Az Olvasó bebizonyíthatja, hogy ez a c épp a medián (5.13. definíció). A négyzet szintén nemnegatív, és az abszolút értéknél jobban kezelhető. Ezért a továbbiakban keressük azt a c számot, melyre $\mathbf{E}(X - c)^2$ minimális. Az alábbi tétel a tehetetlenségi nyomatékkal kapcsolatban mechanikából már ismerős lehet:

7.40. Tétel („Steiner” tétel) *Legyen X valószínűségi változó, ekkor*

$$\mathbf{E}(X - c)^2 = \mathbf{D}^2X + (c - \mathbf{E}X)^2.$$

Bizonyítás.

$$\begin{aligned}\mathbf{E}(X - c)^2 &= \mathbf{E}\big((X - \mathbf{E}X) + (\mathbf{E}X - c)\big)^2 = \\ &= \mathbf{E}(X - \mathbf{E}X)^2 + \mathbf{E}(\mathbf{E}X - c)^2 + \mathbf{E}\big(2(X - \mathbf{E}X)\cdot(\mathbf{E}X - c)\big) = \\ &= \mathbf{D}^2X + \mathbf{E}(c - \mathbf{E}X)^2 + 2(\mathbf{E}X - c)\cdot\mathbf{E}(X - \mathbf{E}X) = \\ &= \mathbf{D}^2X + \mathbf{E}(c - \mathbf{E}X)^2 + 0.\end{aligned}$$

□

7.41. Következmény *Az X valószínűségi változó legkisebb várható négyzetes eltérése a várható értékétől van, és pontosan a szórásnégyzettel egyezik.*

Most ugyanezt a kérdést vizsgáljuk feltételes eloszlásokra. X és Y két valószínűségi változó esetén adott Y értéke, mely részleges információt hordoz(hat) X-ről. Kérdés, hogy Y ismeretében mi a legjobb tippünk X értékére. A tipp tehát ezúttal $c(Y)$, Y függvénye. Keressük azt a $c(Y)$ függvényt, melyre adott Y mellett az

$$\mathbf{E}\big((X - c(Y))^2 \mid Y\big)$$

feltételesen várható négyzetes eltérés minimális. Mivel a feltételes várható érték egy jólnevelt várható érték, a fentiek ismétlésével kapjuk, hogy az optimális tipp $c(Y) = \mathbf{E}(X \mid Y)$, és az ettől feltételesen várható négyzetes eltérés épp $\mathbf{D}^2(X \mid Y)$, a feltételes szórásnégyzet.

7.42. Példa *Egy hálózaton egy $S \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ jelet küldenek. A hálózat zajos, ezért feltéve, hogy $S = s$ a küldött jel, $R \,|\, S = s \sim \mathcal{N}(s, 1)$ eloszlású az R kapott jel. Mi a legjobb tippünk a küldött jel értékére, ha $R = r$ a kapott jel?*

Meg kell határoznunk $\mathbf{E}(S \,|\, R = r)$ értékét, melyhez szükségünk lesz az $S \,|\, R = r$ feltételes eloszlásra. A sűrűségfüggvényt számoljuk:

$$f_{S\,|\,R}(s\,|\,r) = \frac{f(s,\, r)}{f_R(r)} = \frac{f_{R\,|\,S}(r\,|\,s) \cdot f_S(s)}{f_R(r)} = \frac{1}{f_R(r)} \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \mathrm{e}^{-(r-s)^2/2} \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma} \mathrm{e}^{-(s-\mu)^2/2\sigma^2}.$$

Kis munkával $f_R(r)$ is kiszámolható lenne, azonban erre nincs szükség, ha csak a fenti sűrűségfüggvény s-függését akarjuk tudni. Az exponensben szereplőket a $-1/2$ szorzótól eltekintve kibontjuk:

$$\begin{aligned}(r-s)^2 + \frac{(s-\mu)^2}{\sigma^2} &= r^2 - 2rs + s^2 + \frac{s^2}{\sigma^2} - 2\frac{s\mu}{\sigma^2} + \frac{\mu^2}{\sigma^2} = \\ &= \frac{\sigma^2+1}{\sigma^2} \cdot \Big(s - r \cdot \frac{\sigma^2}{\sigma^2+1} - \frac{\mu}{\sigma^2+1}\Big)^2 + C(r),\end{aligned}$$

ahol $C(r)$ már nem függ s-től. Mivel $f_R(r)$ sem függ s-től, ebből már következik, hogy

$$\begin{aligned} S \,|\, R = r &\sim \mathcal{N}\Big(r \cdot \frac{\sigma^2}{\sigma^2+1} + \mu \cdot \frac{1}{\sigma^2+1},\, \frac{\sigma^2}{\sigma^2+1}\Big), \qquad \text{ezért} \\ \mathbf{E}(S \,|\, R = r) &= r \cdot \frac{\sigma^2}{\sigma^2+1} + \mu \cdot \frac{1}{\sigma^2+1}\end{aligned}$$

a legjobb tipp. Ez a kapott r értéknek és az átlagosan küldött μ értéknek egy súlyozott átlaga. Ha σ nagy, azaz a zaj sokkal kisebb a küldött érték szórásánál, akkor főleg r-et kell figyelembe venni, ha viszont σ pici, azaz a zaj relatíve nagy, akkor alig számít a kapott érték, és a legjobb tippet μ körül kell keresni.

7.4. Momentumgeneráló függvény

A momentumgeneráló függvény a Laplace- és Fourier transzformáltak rokona, és a családi hagyományokat ápolván nagyon sok rendkívül hasznos dologra használható.

7.43. Definíció *Az X valószínűségi változó* momentumgeneráló függvénye

$$M(t) := \mathbf{E}\mathrm{e}^{tX}.$$

Mivel $\mathrm{e}^{tX} \ge 0$, ez mindenhol létezik, de nem szükségképpen véges. Mi fel fogjuk tenni, hogy $M(t)$ korlátos a nulla egy nyílt környezetén:

$$\exists \varepsilon,\, K > 0 \quad : \quad \forall t \in (-\varepsilon,\, \varepsilon) \qquad M(t) < K.$$

7.44. Állítás

$$M(0) = 1, \qquad \textit{és} \qquad M^{[n]}(0) = \mathbf{E}X^n,$$

ahol $M^{[n]}(0)$ az M n-dik deriváltját jelöli a nullában ($n \in \mathbb{N}$). Innen a "momentumgeneráló" elnevezés.

Bizonyítás. A részletek mellőzésével megemlítjük, hogy dominált konvergencia tétellel belátható, hogy a nulla egy környezetén a várható érték felcserélhető a t szerinti deriválással. Így

$$M^{[n]}(t) = \mathbf{E}\Big(\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}t^n}\mathrm{e}^{tX}\Big) = \mathbf{E}\big(X^n \cdot \mathrm{e}^{tX}\big),$$

majd $t = 0$-t véve az állítás következik. □

7.45. Példa (a binomiális eloszlás) *Legyen $X \sim Binom(n, p)$.*

$$M(t) = \mathbf{E}\mathrm{e}^{tX} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \mathrm{e}^{tk} p^k (1-p)^{n-k} = \big(\mathrm{e}^t p + 1 - p\big)^n$$

a binomiális tétel alapján. Innen

$$\begin{aligned}
M(0) &= (p + 1 - p)^n = 1, \\
\mathbf{E}X = M'(0) &= np\mathrm{e}^t\big(\mathrm{e}^t p + 1 - p\big)^{n-1}\big|_{t=0} = np, \\
\mathbf{E}X^2 = M''(0) &= np\mathrm{e}^t\big(\mathrm{e}^t p + 1 - p\big)^{n-1} + n(n-1)p^2\mathrm{e}^{2t}\big(\mathrm{e}^t p + 1 - p\big)^{n-2}\big|_{t=0} = \\
&= np + n(n-1)p^2,
\end{aligned}$$

amiből $\mathbf{D}^2 X = np(1-p)$ adódik.

7.46. Példa (a Poisson eloszlás) *Legyen $X \sim Poi(\lambda)$.*

$$\begin{aligned}
M(t) = \mathbf{E}\mathrm{e}^{tX} &= \sum_{i=0}^{\infty} \mathrm{e}^{ti} \frac{\lambda^i}{i!} \cdot \mathrm{e}^{-\lambda} = \mathrm{e}^{\lambda(\mathrm{e}^t - 1)}, \\
M(0) &= \mathrm{e}^{\lambda(\mathrm{e}^0 - 1)} = 1, \\
\mathbf{E}X = M'(0) &= \lambda\mathrm{e}^t \cdot \mathrm{e}^{\lambda(\mathrm{e}^t - 1)}\big|_{t=0} = \lambda, \\
\mathbf{E}X^2 = M''(0) &= \lambda\mathrm{e}^t \cdot \mathrm{e}^{\lambda(\mathrm{e}^t - 1)} + \lambda^2\mathrm{e}^{2t} \cdot \mathrm{e}^{\lambda(\mathrm{e}^t - 1)}\big|_{t=0} = \lambda + \lambda^2,
\end{aligned}$$

innen $\mathbf{D}^2 X = \lambda$.

7.47. Példa (az exponenciális eloszlás) *Legyen* $X \sim Exp(\lambda)$. *A momentumgeneráló függvény ekkor csak* $t < \lambda$ *esetén lesz véges:*

$$\begin{aligned} M(t) &= \mathbf{E}\mathrm{e}^{tX} = \int_0^\infty \mathrm{e}^{tx}\lambda\mathrm{e}^{-\lambda x}\,\mathrm{d}x = \frac{\lambda}{\lambda - t}, \\ M(0) &= \frac{\lambda}{\lambda - 0} = 1, \\ \mathbf{E}X = M'(0) &= \frac{\lambda}{(\lambda - t)^2}\bigg|_{t=0} = \frac{1}{\lambda}, \\ \mathbf{E}X^2 = M''(0) &= \frac{2\lambda}{(\lambda - t)^3}\bigg|_{t=0} = \frac{2}{\lambda^2}, \end{aligned}$$

innen $\mathbf{D}^2X = 1/\lambda^2$.

7.48. Példa (a normális eloszlás) *Először legyen* $Z \sim \mathcal{N}(0,\,1)$.

$$M_{\mathcal{N}(0,\,1)}(t) = \mathbf{E}\mathrm{e}^{tZ} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{tz}\mathrm{e}^{-z^2/2}\,\mathrm{d}z = \frac{\mathrm{e}^{t^2/2}}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{-(z-t)^2/2}\,\mathrm{d}z = \mathrm{e}^{t^2/2}.$$

Most a normális eloszlás transzformációját felhasználva legyen $X \sim \mathcal{N}(\mu,\,\sigma^2)$, *tehát* $\frac{X-\mu}{\sigma} \sim \mathcal{N}(0,\,1)$,

$$\begin{aligned} M_{\mathcal{N}(\mu,\,\sigma^2)}(t) &= \mathbf{E}\mathrm{e}^{tX} = \mathbf{E}\Big(\mathrm{e}^{\sigma t\cdot\frac{X-\mu}{\sigma}}\Big)\cdot\mathrm{e}^{\mu t} = M_{\mathcal{N}(0,\,1)}(\sigma t)\cdot\mathrm{e}^{\mu t} = \mathrm{e}^{\sigma^2t^2/2+\mu t}, \\ M_{\mathcal{N}(\mu,\,\sigma^2)}(0) &= \mathrm{e}^{\sigma^2 0^2/2+\mu 0} = 1, \\ \mathbf{E}X = M'_{\mathcal{N}(\mu,\,\sigma^2)}(0) &= (\sigma^2 t + \mu)\mathrm{e}^{\sigma^2t^2/2+\mu t}\Big|_{t=0} = \mu, \\ \mathbf{E}X^2 = M''_{\mathcal{N}(\mu,\,\sigma^2)}(0) &= \sigma^2\mathrm{e}^{\sigma^2t^2/2+\mu t} + (\sigma^2 t + \mu)^2\mathrm{e}^{\sigma^2t^2/2+\mu t}\Big|_{t=0} = \sigma^2 + \mu^2, \end{aligned}$$

amiből $\mathbf{D}^2X = \sigma^2$.

7.49. Állítás *Ha* X *és* Y *valószínűségi változók függetlenek, akkor az* $X+Y$ *valószínűségi változó momentumgeneráló függvénye faktorizálódik:*

$$M_{X+Y}(t) = \mathbf{E}\mathrm{e}^{t(X+Y)} = \mathbf{E}\Big(\mathrm{e}^{tX}\mathrm{e}^{tY}\Big) = \mathbf{E}\mathrm{e}^{tX}\cdot\mathbf{E}\mathrm{e}^{tY} = M_X(t)\cdot M_Y(t).$$

Bizonyítás nélkül közöljük a következő tételt:

7.50. Tétel *A momentumgeneráló függvény a nulla egy nyílt környezetén egyértelműen meghatározza az eloszlást. Azaz ha* $M_X(t)$ *az* X *valószínűségi változó momentumgeneráló függvénye,* $M_Y(t)$ *az* Y *valószínűségi változó momentumgeneráló függvénye, és* $M_X(t) = M_Y(t) < \infty$ *a nulla egy tetszőleges nyílt környezetén, akkor* X *és* Y *eloszlása megegyezik.*

Az a deriváltakon keresztül mindenesetre világos, hogy ekkor X és Y összes momentuma megegyezik.

7.51. Következmény *Legyenek $X \sim Binom(n,\, p)$, $Y \sim Binom(m,\, p)$ függetlenek. Ekkor $X + Y \sim Binom(n + m,\, p)$.*

Ugyanis

$$M_{X+Y}(t) = M_X(t) \cdot M_Y(t) = \left(\mathrm{e}^t p + 1 - p\right)^n \cdot \left(\mathrm{e}^t p + 1 - p\right)^m = \left(\mathrm{e}^t p + 1 - p\right)^{n+m},$$

ami a $\mathrm{Binom}(n + m,\, p)$ eloszlás momentumgeneráló függvénye, így szükségképpen $X + Y \sim \mathrm{Binom}(n + m,\, p)$.

7.52. Következmény *Legyenek $X \sim Poi(\lambda)$ és $Y \sim Poi(\mu)$ függetlenek. Ekkor $X + Y \sim Poi(\lambda + \mu)$.*

Ugyanis

$$M_{X+Y}(t) = M_X(t) \cdot M_Y(t) = \mathrm{e}^{\lambda(\mathrm{e}^t - 1)} \cdot \mathrm{e}^{\mu(\mathrm{e}^t - 1)} = \mathrm{e}^{(\lambda+\mu)(\mathrm{e}^t - 1)}.$$

7.53. Következmény *Legyenek $X \sim \mathcal{N}(\mu_1,\, \sigma_1^2)$, $Y \sim \mathcal{N}(\mu_2,\, \sigma_2^2)$ függetlenek. Ekkor $X + Y \sim \mathcal{N}(\mu_1 + \mu_2,\, \sigma_1^2 + \sigma_2^2)$.*

Mert

$$M_{X+Y}(t) = M_X(t) \cdot M_Y(t) = \mathrm{e}^{\sigma_1^2 t^2/2 + \mu_1 t} \cdot \mathrm{e}^{\sigma_2^2 t^2/2 + \mu_2 t} = \mathrm{e}^{(\sigma_1^2 + \sigma_2^2) t^2/2 + (\mu_1 + \mu_2) t}.$$

Hasonlítsuk ezt össze a 6.29. állítás bizonyításával.

Momentumgeneráló függvények többdimenzióban is használhatók.

7.54. Definíció *Legyenek $X_1,\, X_2,\, \dots,\, X_n$ valószínűségi változók. Az* együttes momentumgeneráló függvényük

$$M(t_1,\, t_2,\, \dots,\, t_n) := \mathbf{E}\mathrm{e}^{t_1 X_1 + t_2 X_2 + \dots + t_n X_n} = \mathbf{E}\mathrm{e}^{\underline{t}^T \cdot \underline{X}}$$

vektoros jelöléssel.

A marginális momentumgeneráló függvények ebből triviális módon származnak:

$$\begin{aligned} M_{X_i}(t_i) &= \mathbf{E}\mathrm{e}^{t_i X_i} = \mathbf{E}\mathrm{e}^{0X_1 + 0X_2 + \dots + 0X_{i-1} + t_i X_i + 0X_{i+1} + \dots + 0X_n} = \\ &= M(0,\, 0,\, \dots,\, 0,\, t_i,\, 0,\, \dots,\, 0). \end{aligned}$$

A korábban látott egyértelműség itt is megmarad: az együttes momentumgeneráló függvény ismerete a $\underline{0}$ egy nyílt környezetén egyértelműen meghatározza az együttes eloszlást. Ezért

7.55. Állítás *Az $X_1, X_2, \ldots, X_n$ valószínűségi változók pontosan akkor függetlenek, ha momentumgeneráló függvényük faktorizálódik a nulla egy környezetén:*

$$M(t_1, t_2, \ldots, t_n) = M_{X_1}(t_1) \cdot M_{X_2}(t_2) \cdots M_{X_n}(t_n).$$

Illusztrációként megismételjük a 6.16. példát momentumgeneráló függvényekkel.

7.56. Példa (a Poisson eloszlás (folyamat) címkézése) *Tegyük fel, hogy az emberek λ paraméterű Poisson folyamat szerint érkeznek a postára, és mindegyikük p valószínűséggel férfi, $1-p$ valószínűséggel nő, egymástól függetlenül. Ekkor az első órában érkező emberek össz-száma $\sim Poi(\lambda)$ eloszlású. Megmutatjuk, hogy a férfiak száma az első órában $= X \sim Poi(\lambda p)$, a nők száma az első órában $= Y \sim Poi(\lambda(1-p))$; X és Y függetlenek.*

A megadott információk alapján a következőket tudjuk: $X+Y \sim \mathrm{Poi}(\lambda)$; $X \,|\, X+Y \sim \mathrm{Binom}(X+Y,\, p)$. Ezért a közös momentumgeneráló függvényt toronyszabállyal számoljuk ki:

$$\begin{aligned} M(t,\, s) &= \mathbf{E}\big(\mathrm{e}^{tX+sY}\big) = \mathbf{E}\mathbf{E}\big(\mathrm{e}^{tX+sY} \,|\, X+Y\big) = \\ &= \mathbf{E}\mathbf{E}\big(\mathrm{e}^{s(X+Y)}\mathrm{e}^{(t-s)X} \,|\, X+Y\big) = \mathbf{E}\big[\mathrm{e}^{s(X+Y)}\mathbf{E}\big(\mathrm{e}^{(t-s)X} \,|\, X+Y\big)\big], \end{aligned}$$

hiszen $X+Y$ feltételével $X+Y$ nem véletlen. Mivel X feltételes eloszlása binomiális, a 7.45. példában számoltak alapján

$$\begin{aligned} \mathbf{E}\big(\mathrm{e}^{(t-s)X} \,|\, X+Y\big) &= M_{\mathrm{Binom}(X+Y,\, p)}(t-s) = \\ &= \big(\mathrm{e}^{t-s}p + 1 - p\big)^{X+Y} = \mathrm{e}^{\ln(\mathrm{e}^{t-s}p+1-p)\cdot(X+Y)}. \end{aligned}$$

Ezt visszahelyettesítve

$$M(t,\, s) = \mathbf{E}\big[\mathrm{e}^{[s+\ln(\mathrm{e}^{t-s}p+1-p)]\cdot(X+Y)}\big].$$

Vegyük észre, hogy ez itt épp $X+Y$ momentumgeneráló függvénye az $[s+\ln(\mathrm{e}^{t-s}p+1-p)]$ helyen. Ezért, felhasználva, hogy $X+Y \sim \mathrm{Poi}(\lambda)$ (7.46. példa),

$$\begin{aligned} M(t,\, s) &= M_{\mathrm{Poi}(\lambda)}\big(s + \ln(\mathrm{e}^{t-s}p + 1 - p)\big) = \exp\big(\lambda(\mathrm{e}^{s+\ln(\mathrm{e}^{t-s}p+1-p)} - 1)\big) = \\ &= \mathrm{e}^{\lambda[\mathrm{e}^{s}(\mathrm{e}^{t-s}p+1-p)-1]} = \mathrm{e}^{\lambda p(\mathrm{e}^{t}-1)} \cdot \mathrm{e}^{\lambda(1-p)(\mathrm{e}^{s}-1)} = \\ &= M_{\mathrm{Poi}(\lambda p)}(t) \cdot M_{\mathrm{Poi}(\lambda(1-p))}(s). \end{aligned}$$

Mivel ez egy $\mathrm{Poi}(\lambda p)$ illetve egy $\mathrm{Poi}(\lambda(1-p))$ momentumgeneráló függvény szorzata, X és Y együttes eloszlása szükségképpen független $\mathrm{Poi}(\lambda p)$ illetve $\mathrm{Poi}(\lambda(1-p))$.

7.5. Feladatok

7.1. A $J = \int\limits_0^1 g(x)\,\mathrm{d}x$ integrál kiszámításához (ahol $0 \le g(x) \le 1$) a következő ún. Monte Carlo-módszert használhatjuk: legyen X és Y két független egyenletes eloszlású valószínűségi változó a $[0,1]$ intervallumon. Legyen $U = \mathbf{1}(Y \le g(X))$, vagyis U értéke 1, ha $Y \le g(X)$, egyébként 0, továbbá $V = g(X)$, és $W = \frac{1}{2}(g(X) + g(1 - X))$. Mutassuk meg, hogy $\mathbf{E}(U) = \mathbf{E}(V) = \mathbf{E}(W) = J$, illetve $\mathbf{D}(W) \le \mathbf{D}(V) \le \mathbf{D}(U)$, vagyis J-nek W a három közül a leghatásosabb becslése. (*Tipp: Használjuk a Cauchy-Schwarz-egyenlőtlenséget.*)

7.2. Legyen $(X;\,Y)$ kétdimenziós normális eloszlású $(0;\,0)$ várható értékkel és $\begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$ kovarianciamátrixszal. Határozzuk meg annak az eseménynek a valószínűségét, hogy az $(X,\,Y)$ koordinátájú véletlen pont a

$$(0;\,3),\ \ (4;\,0),\ \ (1.8;\,5.4),\ \ (5.8;\,2.4)$$

csúcsú téglalapba esik.

7.3. Legyen $(X;\,Y)$ kétdimenziós normális eloszlású $(0;\,0)$ várható értékkel és $\begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$ kovarianciamátrixszal. Határozzuk meg annak a valószínűségét, hogy az $(X;\,Y)$ koordinátájú véletlen pont beleesik az

(a) $\{(x,\,y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, 2 \le \sqrt{x^2 + y^2} \le 3\}$ körgyűrűbe;

(b) $\{(x,\,y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, 2 \le \min(|x|,\,|y|) \le \max(|x|,\,|y|) \le 3\}$ tartományba;

(c) $\{(x,\,y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, 2 \le |x| + |y| \le 3\}$ tartományba.

7.4. Szindbádnak egyszer megadatott, hogy N háremhölgy közül kiválassza a legszebbet a következő játékszabály szerint: az N háremhölgy egyenként vonult el előtte, azok valamelyikét kellett kiválasztania. A már elvonultak nem hívhatók vissza és azokról, akik még nem vonultak el, semmit sem tudott. Feltételezzük, hogy a háremhölgyeknek jól definiált szépségfokozatuk van: van egy legszebb, egy második legszebb, egy harmadik legszebb, és végül a legkevésbé szép közöttük. Továbbá azt is feltételezzük, hogy véletlen sorrendben vonulnak el Szindbád előtt: mind az $N!$ lehetséges sorrendjük egyformán valószínű.

Szindbád a következő stratégiát választotta: k hölgyet hagyott elvonulni, majd ezután kiválasztotta azt, amelyik szebb volt az összes előtte már elvonultnál (és ha ilyen hölgy nem akad, akkor Szindbád magányosan távozik). Mi a valószínűsége annak, hogy ezzel a módszerrel valóban a legszebb háremhölgyet választotta?

Határozzuk meg azt a k-t, amely mellett a fenti stratégia optimális $N \to \infty$ határesetben, és a stratégiához tartozó valószínűséget is. (*Tipp: használjunk teljes valószínűség tételt aszerint, hogy a legszebb hölgy hanyadikként jön(ne) el Szindbád előtt.*)

7.5. Az előző feladatban leírt feltételek mellett jelölje X_n azt, hogy a sorban n-edik hölgy hányadik legszebb az első n hölgy közül. Például ha az egymás utáni hölgyek egyre szebbek, akkor a sorozat 1, 1, ..., 1 lesz, ha egyre csúnyábbak, akkor 1, 2, 3, ..., N. Bizonyítsuk be, hogy az X_1, X_2, ..., X_N valószínűségi változók teljesen függetlenek.

7.6. Egymástól függetlenül N ember érkezik egy üzleti vacsorára. Amikor megérkezik, minden ember körülnéz, hogy van-e a már megjelentek között barátja, majd vagy odaül az egyik barátjának az asztalához, vagy egy üres asztalhoz ül, ha nem érkezett meg még egy barátja sem. Ha bármely két ember mindentől függetlenül p valószínűséggel barátja egymásnak, számoljuk ki az elfoglalt asztalok várható számát! (*Tipp: legyen X_i annak az indikátora, hogy az i-edik megérkező üres asztalhoz ül. (Azaz $X_i = 1$, ha üres asztalhoz ül, és $X_i = 0$, ha nem.)*)

7.7. Véletlenszerűen sorbanáll n férfi és n nő.

(a) Mennyi azon férfiak várható száma, akik mellett (azaz előtt vagy mögött) nő áll a sorban?

(b) Mennyi lenne a válasz, ha nem sorbanállnának, hanem egy kerekasztal köré ülnének le?

7.8. Adott egy 100 emberből álló csoport.

(a) Mennyi azon napok várható száma, amikor legalább 3 embernek van közülük születésnapja?

(b) Várhatóan hány olyan nap van egy évben, amikor közülük valakinek születésnapja van?

7.9. Legyen $X_1, X_2, \dots$ független azonos eloszlású folytonos valószínűségi változók sorozata, legyen $N \geq 2$ olyan, hogy

$$X_1 \geq X_2 \geq \cdots \geq X_{N-1} < X_N.$$

Azaz az N-edik az első tagja a sorozatnak, ahol a sorozat növekvővé válik. Mutassuk meg, hogy $\mathbf{E}(N) = \mathrm{e}$! (*Tipp: érdemes először kiszámolni $\mathbf{P}\{N \geq n\}$-t.*)

7.10. (a) Legyenek X és Y független, nemnegatív értékű folytonos valószínűségi változók, melyekre $\mathbf{E}X < \infty$ és $\mathbf{E}Y < \infty$. Bizonyítsuk be, hogy

$$\mathbf{E}\min\{X, Y\} = \int_0^\infty \mathbf{P}\{X \geq t\} \cdot \mathbf{P}\{Y \geq t\} \; \mathrm{d}t.$$

(b) Általánosítsuk az előbbi összefüggést tetszőleges k darab független, nemnegatív értékű folytonos $X_1, X_2, \ldots X_k$ valószínűségi változóra, melyekről feltesszük, hogy véges a várható értékük:

$$\mathbf{E}\min\{X_1, X_2, \ldots, X_k\} = \int_0^\infty \prod_{j=1}^{k} \mathbf{P}\{X_j \geq t\} \; \mathrm{d}t.$$

(c) Az a) kérdés feltételei mellett bizonyítsuk be, hogy

$$\mathbf{E}\max\{X, Y\} = \int_0^\infty [1 - \mathbf{P}\{X \leq t\} \cdot \mathbf{P}\{Y \leq t\}] \; \mathrm{d}t.$$

(d) Legyenek $X_1, X_2, \ldots X_k$ független, $(0, 1)$-en egyenletes eloszlású valószínűségi változók. Határozzuk meg az

$$\mathbf{E}\min\{X_1, X_2, \ldots, X_k\}, \qquad \mathbf{E}\max\{X_1, X_2, \ldots, X_k\}$$

várható értékeket.

7.11. n-szer feldobunk egy p valószínűséggel fejet adó érmét. Számoljuk ki az $1, 2, \ldots, k$ hosszú csupa fej részsorozatok várható számát! $(1 \leq k \leq n)$

7.12. Legyenek $X_1, X_2, \ldots, X_n$ független és azonos eloszlású folytonos valószínűségi változók. Azt mondjuk, hogy egy rekord érték tűnik fel j-kor $(j \leq n)$, ha $X_j \geq X_i$ minden $1 \leq i \leq j$ esetén. Mutassuk meg, hogy

(a) $\mathbf{E}[\text{rekord értékek száma}] = \sum\limits_{j=1}^{n} \frac{1}{j}$,

(b) $\mathbf{D}^2[\text{rekord értékek száma}] = \sum\limits_{j=1}^{n} \frac{j-1}{j^2}$.

(*Tipp: hogyan függ az* $\{X_i$ *rekord érték*$\}$ *esemény az* $\{X_j$ *rekord érték*$\}$ *eseménytől?*)

7.13. Legyenek X és Y független azonos eloszlású nemnegatív valószínűségi változók. $\mathbf{E}\frac{X}{X+Y} =?$

7.14. Három próbálkozási lehetőségünk van, mindegyik próbálkozás azonos valószínűséggel sikeres, de nem szükségképpen függetlenek, pont a függőségükkel lehet trükközni. Jelölje X a sikeres próbálkozások számát. Ha tudjuk, hogy $\mathbf{E}(X) = 1.8$,

(a) mennyi $\mathbf{P}\{X = 3\}$ lehetséges legnagyobb értéke?

(b) mennyi $\mathbf{P}\{X = 3\}$ lehetséges legkisebb értéke?

Mindkét esetben találjunk ki egy valószínűségi forgatókönyvet, aminek eredménye $\mathbf{P}\{X = 3\}$, és ez az érték a lehető legnagyobb/legkisebb. (*Tipp: a b) rész megoldását kezdhetjük úgy is, hogy legyen U a $(0, 1)$-en egyenletes valószínűségi változó, majd definiáljuk a próbálkozásokat U-val kifejezve.*)

7.15. Egy kisváros négyzet alakú, mely négyzet oldalai 3 kilométer hosszúak. A város (0, 0) középpontjában van a kórház, és a város utcái négyzetháló-szerűek. Ezért ha a város (x, y) pontján történik egy baleset, a mentőnek $|x| + |y|$ távolságot kell megtennie a balesettől a kórházig. Ha egy baleset a városon belül egyenletes eloszlású helyen következik be, számoljuk ki a betegszállítás várható hosszát.

7.16. Tegyük fel, hogy A és B mindketten egymástól függetlenül kiválasztanak 10 tárgyból 3-at. Mennyi azon tárgyak várható száma

(a) amelyeket mindketten kiválasztottak;

(b) amelyet egyikük sem választott ki?

7.17. Egy normál 52 lapos kártyapakliból egymás után húzunk lapokat. Ha az első kártya egy (bármilyen színű) ász, vagy a második kártya egy kettes, vagy a harmadik egy hármas, stb. …, vagy a tizenharmadik egy király, vagy a tizennegyedik egy ász, stb., azt mondjuk, hogy találatunk van. Addig húzzuk a talonból a lapokat, amíg az el nem fogy. Számoljuk ki a találatok várható számát!

7.18. Várhatóan hányszor kell dobni egy szabályos, hatoldalú dobókockával ahhoz, hogy mindegyik számot legalább egyszer kidobjuk?

7.19. (a) Határozzuk meg az ötös lottó találatok számának várható értékét egy találomra kitöltött szelvény esetén.

(b) Számítsuk ki az ötös lottó sorsoláson kihúzott legnagyobb, illetve legkisebb szám várható értékét.

7.20. Egy $l < 1$ cm hosszú tűt dobunk véletlenszerűen egy 1 cm vonaltávolságú négyzethálóra. Határozzuk meg a ledobott tű által átmetszett háló-vonalak számának várható értékét. (Használjuk fel Buffon tű problémájának megoldását (6.12 feladat).)

7.21. Egy r sugarú gömb felszínére ejtünk egy $2r\pi$-nél rövidebb cérnaszál-hurkot. Mutassuk meg, hogy van a gömbnek olyan fele, melynek felszíne teljesen tartalmazza a cérnaszál-hurkot.

7.22. (a) Ha $\mathbf{E}(X) = 1$ és $\mathbf{D}^2(X) = 5$, határozzuk meg $\mathbf{E}[(2+X)^2]$ és $\mathbf{D}^2(4+3X)$ értékét.

(b) Legyenek X és Y független azonos eloszlású valószínűségi változók μ várható értékkel és σ szórással. Számoljuk ki $\mathbf{E}[(X-Y)^2]$ értékét.

7.23. 10 házaspár ül le véletlen elhelyezéssel egy kerekasztalhoz. Számítsuk ki

(a) a várhatóértékét,

(b) a szórásnégyzetét

annak, hogy hány férj ült a felesége mellé.

7.24. (a) Legyen X az a szám, ahányszor 1-est látunk, Y az a szám, ahányszor 2-est látunk ha n-szer dobunk egy szabályos kockával. Számoljuk ki e két valószínűségi változó korrelációs együtthatóját.

(b) Egy dobókockát kétszer feldobunk. Legyen X a dobások összege, és Y az első dobás mínusz a második dobás. Számoljuk ki $\mathbf{Cov}(X, Y)$-t. Függetlenek-e X és Y?

7.25. X és Y együttes sűrűségfüggvénye

$$f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{1}{y}\,\mathrm{e}^{-(y+x/y)}, & \text{ha } x > 0,\ y > 0, \\ 0, & \text{egyébként.} \end{cases}$$

(a) Határozzuk meg $\mathbf{E}(X)$ és $\mathbf{E}(Y)$ értékét, valamint mutassuk meg, hogy $\mathbf{Cov}(X, Y) = 1$.

(b) Számoljuk ki $\mathbf{E}(X^2|Y=y)$-t is.

(*Tipp:* *7.30. példa.*)

7.26. Egy *gráf* *csúcsok*ból, és a csúcsokat összekötő *élek*ből áll. Tekintsünk egy gráfot, melynek n csúcsát 1-től n-ig megszámoztuk, és tegyük fel, hogy mind az $\binom{n}{2}$ csúcspár között egymástól függetlenül van él p valószínűséggel, és nincs él $1-p$ valószínűséggel. (Ezt hívják Erdős-Rényi véletlen gráfnak.) Az i csúcs D_i *fokszáma* az i csúcsból kiinduló élek száma.

(a) Mi a D_i véletlen szám eloszlása?

(b) Határozzuk meg a D_i és D_j változók $\varrho(D_i, D_j)$ korrelációs együtthatóját. (*Tipp: definiáljuk X_i-t mint az i-ből induló, de nem j-be érkező élek számát, és I_{ij}-t mint az i és j közötti él meglétének indikátorát. Fejezzük ki D_i-t és D_j-t az X_i, X_j, és I_{ij} változókkal, ezután számoljunk korrelációt.*)

7.27. Egy liftbe a földszinten belépő emberek száma Poisson eloszlású valószínűségi változó, 10 várható értékkel. n emelet van és minden ember egymástól függetlenül, azonos valószínűséggel száll ki az n emelet bármelyikén. Számoljuk ki, várhatóan hányszor áll meg a lift, míg az utolsó utast is kirakja.

7.28. Egy ember autóbaleseteinek száma egy adott évben λ paraméterű Poisson eloszlású valószínűségi változó. Ez a λ paraméter minden embernél más és más, a népesség 60 százalékánál 2, 40 százalékánál 3. Ha véletlenül kiválasztunk egy embert, mi a valószínűsége annak, hogy

(a) nem történt vele baleset,

(b) pontosan 3 balesetet szenvedett egy adott évben?

(c) Mi a feltételes valószínűsége, hogy pontosan 3 balesetet szenvedett egy adott évben, feltéve, hogy előző évben nem történt vele baleset?

(d) Ismételjük meg az előzőeket, ha az x-nél kisebb λ paraméterrel rendelkező emberek aránya a népességben $1 - \mathrm{e}^{-x}$.

7.29. Legyenek $X_1, X_2, \ldots, X_n$ független és azonos eloszlású valószínűségi változók. Határozzuk meg

$$\mathbf{E}(X_1 \mid X_1 + X_2 + \cdots + X_n = x)$$

értékét. (*Tipp:* $\mathbf{E}(X_1 + X_2 + \cdots + X_n \mid X_1 + X_2 + \cdots + X_n = x)$.)

7.30. Legyen X standard normális eloszlású, és I X-től független, $\mathbf{P}\{I = 1\} = \mathbf{P}\{I = 0\} = 1/2$ eloszlással. Definiáljuk a következő valószínűségi változót:

$$Y := \begin{cases} X, & \text{ha } I = 1, \\ -X, & \text{ha } I = 0. \end{cases}$$

Azaz: Y (X-től függetlenül) egyenlő eséllyel lesz X vagy $-X$.

(a) Független-e X és Y?

(b) Független-e I és Y?

(c) Mutassuk meg, hogy Y standard normális eloszlású.

(d) Mutassuk meg, hogy $\mathbf{Cov}(X, Y) = 0$.

7.31. Az $(X, Y) \in \mathbb{R}^2$ valószínűségi vektorváltozó legyen kétdimenziós normális eloszlású $\underline{m} = (-1, 1)$ várhatóérték-vektorral és $\underline{\underline{C}} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$ kovarianciamátrixszal. Számítsuk ki a $\mathbf{P}\{X \geq -1,\ Y \geq 1\}$ valószínűséget! (*Tipp:* $\underline{\underline{C}} = \underline{\underline{B}}^2$*, ahol* $\underline{\underline{B}} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$.)

7.32. (Feltételes kovariancia formula.) X és Y feltételes kovarianciája Z-t feltéve

$$\mathbf{Cov}(X, Y \mid Z) = \mathbf{E}\big[\big(X - \mathbf{E}(X \mid Z)\big) \cdot \big(Y - \mathbf{E}(Y \mid Z)\big) \mid Z\big].$$

(a) Mutassuk meg, hogy

$$\mathbf{Cov}(X, Y \mid Z) = \mathbf{E}(XY \mid Z) - \mathbf{E}(X \mid Z) \cdot \mathbf{E}(Y \mid Z)$$

(b) Bizonyítsuk be a feltételes kovariancia formulát:

$$\mathbf{Cov}(X, Y) = \mathbf{E}[\mathbf{Cov}(X, Y \mid Z)] + \mathbf{Cov}[\mathbf{E}(X \mid Z), \mathbf{E}(Y \mid Z)]$$

(c) Legyen most az előző képletben $X = Y$; és így megkapjuk a feltételes szórásnégyzet formulát.

7.33. Tudjuk, hogy feltéve Y értékét, X_1 és X_2 függetlenek Y várható értékkel. Mutassuk meg, hogy ekkor $\mathbf{Cov}(X_1, X_2) = \mathbf{D}^2 Y$.

7.34. Hamis érmével dobunk, melynél a *fej* valószínűsége p, az *írásé* pedig $q = 1 - p$. Jelöljük X-szel és Y-nal az első, illetve a második tiszta (fej vagy írás) sorozat hosszát. (Pl. ha dobássorozatunk $FFFIIF\ldots$, akkor $X = 3$, $Y = 2$; ha pedig dobássorozatunk $IFFI\ldots$, akkor $X = 1$, $Y = 2\ldots$) Határozzuk meg a következő mennyiségeket: $\mathbf{E}X$, $\mathbf{E}Y$, $\mathbf{E}X^2$, $\mathbf{E}Y^2$, $\mathbf{D}^2X$, $\mathbf{D}^2Y$, $\mathbf{Cov}(X, Y)$. (*Tipp: használjuk a toronyszabályt, illetve a feltételes szórásnégyzet / kovariancia formulát.*)

7.35. Egy négyzetrácsos papírra egy tintapaca csöppen. Mekkora a valószínűsége, hogy a paca nem metszi a vonalakat, ha azok fél centire vannak egymástól, a tintafolt sugara pedig egyenletes eloszlású a $[0\,\mathrm{cm}, 1/3\,\mathrm{cm}]$ intervallumon?

7.36. Legyenek $X_1, X_2, \ldots$ független azonos eloszlású valószínűségi változók μ várható értékkel és σ szórással, és legyen $Y_n = X_n + X_{n+1} + X_{n+2}$. Határozzuk meg $\mathbf{Cov}(Y_n, Y_{n+j})$ értékét minden $j \geq 0$-ra.

7.37. Ha X_1, X_2, X_3, X_4 páronként korrelálatlan valószínűségi változók 0 várható értékkel és 1 szórással, számoljuk ki

(a) $X_1 + X_2$ és $X_2 + X_3$;

(b) $X_1 + X_2$ és $X_3 + X_4$

korrelációs együtthatóját.

7.38. Tekintsük a következő kockajátékot: Két kockával dobunk, ha az összeg 7, akkor vége a játéknak, nem nyerünk semmit. Ha az összeg nem 7, akkor választhatunk, hogy megállunk, és megnyerjük a kidobott összeget, vagy elölről kezdjük a játékot. Az i stratégiánk legyen az, hogy akkor állunk meg, amikor legalább i-t dobtunk ($i = 2, \ldots, 12$). Számoljuk ki a különböző stratégiáinkhoz tartozó várható nyereményeket! Milyen i-t válasszunk, ha várhatóan a legtöbbet szeretnénk nyerni? (*Tipp: Jelölje X_i a nyereményünket, amennyiben az i stratégiát játsszuk. $\mathbf{E}(X_i)$-t az első dobott összeg szerinti esetrebontással érdemes kiszámolni.*)

7.39. Legyen $Y \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$, és $X \mid Y \sim \mathcal{N}(Y, 1)$.

(a) Mutassuk meg, hogy az (X, Y) pár együttes eloszlása ugyanaz, mint az $(Y + Z, Y)$ páré, ahol Z egy Y-tól független standard normális valószínűségi változó.

(b) Ennek segítségével mutassuk meg, hogy az X, Y pár kétdimenziós normális eloszlású (6.20. definíció).

(c) Számítsuk ki az $\mathbf{E}X$, $\mathbf{D}^2X$, $\mathbf{Corr}(X, Y)$ mennyiségeket.

(d) Határozzuk meg $\mathbf{E}(Y \mid X = x)$ értékét.

(e) Mi Y feltételes eloszlása az $X = x$ feltétel mellett?

7.40. A 7.42. példában S jelölte az elküldött jelet, és R a fogadott jelet.

(a) Számoljuk ki $\mathbf{E}(R)$-t.

(b) Számoljuk ki $\mathbf{D}^2(R)$-t.

(c) Normális eloszlású-e R?

(d) Számoljuk ki $\mathbf{Cov}(R, S)$-t.

7.41. Két készpénzt tartalmazó boríték van előttünk az asztalon. Az egyiket ki kell nyitnunk, hogy megnézzük, mennyi pénz van benne, majd válaszhatunk, hogy elfogadjuk, vagy a kinyitatlan borítékban levő pénzt kérjük. Melyik lehetőséget válasszuk? Van-e jobb stratégia annál, mint elfogadni az első borítékban levő pénzt? Jelölje A és B ($A < B$) a borítékokban levő pénzt. Ha taktikánk az, hogy véletlenszerűen kinyitunk egy borítékot, majd a benne levő pénzt zsebre tesszük, akkor várható nyereményünk $(A+B)/2$. Tekintsük a következő stratégiát: legyen $F(\cdot)$ tetszőleges folytonos eloszlásfüggvény. Ha a kinyitott borítékban x pénz van, akkor azt $F(x)$ valószínűséggel fogadjuk el, és $1 - F(x)$ valószínűséggel kérjük a zárt borítékban levő pénzt.

(a) Mutassuk meg, hogy ezzel a második stratégiával a várható nyereményünk nagyobb-egyenlő, mint $(A+B)/2$. (*Tipp: Bontsunk esetekre aszerint, hogy a felnyitott borítékban A vagy B pénz van.*)

(b) Most tekintsük azt a stratégiát, hogy lerögzítünk egy fix x értéket és csak akkor fogadjuk el az első borítékban levő pénzt, ha az több, mint x (x-stratégia). Mutassuk meg, hogy az x-stratégiát játszva bármely x-re a várható nyeremény legalább $(A+B)/2$ és szigorúan több, mint $(A+B)/2$, ha x A és B közé esik.

(c) Legyen X folytonos valószínűségi változó a teljes $\mathbb{R}$-en, és tekintsük a következő stratégiát: Először generáljuk X értékét, majd a kapott X értékkel játsszuk a (b) pontban szereplő x-stratégiát. Mutassuk meg, hogy ennek a stratégiának a várható értéke szintén nagyobb, mint $(A+B)/2$.

7.42. Legyenek X és Y független valószínűségi változók közös μ várható értékkel, de különböző σ_X és σ_Y szórásokkal. μ értékét nem tudjuk, és egy mintavétel alapján az X és Y súlyozott átlagával szeretnénk becsülni. Azaz: μ értékére a $\lambda X+(1-\lambda)Y$ becslést fogjuk adni, valamilyen λ paraméterrel. Hogyan válasszuk λ-t, hogy a becslésünk szórása minimális legyen? Miért érdemes ezt a λ-t használnunk?

7.43. Ha $Y = aX + b$, mutassuk meg, hogy

$$\mathbf{Corr}(X, Y) = \begin{cases} +1 & \text{ha } a > 0, \\ -1 & \text{ha } a < 0. \end{cases}$$

7.44. Legyenek X és Y olyan valószínűségi változók, amelyek csak két értéket vehetnek fel. ($\mathrm{Ran}(X) = \{x_1, x_2\}$, $\mathrm{Ran}(Y) = \{y_1, y_2\}$.) Bizonyítsuk be, hogy ha $\mathbf{E}(XY) = \mathbf{E}(X)\mathbf{E}(Y)$ (azaz: X és Y korrelálatlanok), akkor X és Y függetlenek is. (A korrelálatlanság általában nem implikálja a függetlenséget!)

7.45. (a) Legyen X valószínűségi változó nulla várható értékkel, és legyen a egy valós szám. Mutassuk meg, hogy $\mathbf{E}|X + a| \geq |a|$.

(b) Legyenek X és Y független valószínűségi változók nulla várható értékkel. Mutassuk meg, hogy $\mathbf{E}|X + Y| \geq \mathbf{E}|X|$.

7.46. Egy hibátlan érmével dobunk négyszer. Jelölje X illetve Y a dobott *fej*ek illetve *írás*ok számát. Számoljuk ki a $Z := XY$ valószínűségi változó várható értékét és szórását.

7.47. Egy hibátlan kockával dobunk tízszer. Jelölje X azt a számot, ahányszor páros dobást páratlan követ. Mennyi X várható értéke és szórása?

7.48. Tíz ember beszáll egy liftbe a földszinten. Egymástól függetlenül választanak célállomást az épület tizenkét emelete közül, egyenletes eloszlással. Határozzuk meg a lift megállásai számának várható értékét és szórásnégyzetét.

7.49. Egy urnában a darab fehér és b darab piros golyó van. Visszatevés nélkül addig húzunk, amíg fehér golyót nem találunk. Mennyi az addig kihúzott piros golyók számának várható értéke és szórásnégyzete?

7.50. Legyen az (X, Y) pont egyenletes eloszlású az $(1, 1)$ középpontú, 1 sugarú körön. Mennyi $\mathbf{Cov}(X, Y)$?

7.51. Legyen az (X, Y) pont egyenletes eloszlású a $(-1, 0)$, $(0, 0)$, $(0, -1)$ pontok által meghatározott háromszögben.

(a) Mi lesz az (X, Y) kétdimenziós eloszlás kovarianciamátrixa?

(b) Legyen $Z = X + 2Y$. Mi lesz az (X, Z) kétdimenziós eloszlás kovarianciamátrixa?

7.52. Egy X m.b. pozitív valószínűségi változót *lognormális eloszlás*únak nevezzük μ és σ^2 paraméterrel (lásd 5.27 feladat), ha $\ln(X)$ normális eloszlású μ várhatóértékkel és σ^2 szórásnégyzettel. A momentumgeneráló függvény segítségével határozzuk meg X várhatóértékét és szórásnégyzetét.

7.53. Legyen X momentumgeneráló függvénye $M(t)$, és legyen $\Psi(t) = \ln M(t)$. Mutassuk meg, hogy

$$\Psi(t)|_{t=0} = 0, \qquad \Psi'(t)|_{t=0} = \mathbf{E}(X), \qquad \Psi''(t)|_{t=0} = \mathbf{D}^2(X).$$

7.54. Határozzuk meg a $\mathrm{Geom}(p)$ és $\mathrm{E}(\alpha, \beta)$ eloszlások momentumgeneráló függvényét.

7.55. Hogyan határozhatjuk meg $\mathbf{Cov}(X, Y)$-t X és Y együttes momentumgeneráló függvényéből?

8. fejezet

Két fontos tétel

Ebben a fejezetben az eddigiek felhasználásával két fontos tételkört vizsgálunk f.a.e.v.v.-k összegeivel kapcsolatban.

8.1. Nagy számok gyenge törvénye

A valószínűséget absztrakt definícióval vezettük be. A Bernoulli nagy számok törvényében (4.26. tétel) már láttuk, hogy az absztrakt definíciónak van valami köze a relatív gyakoriságokhoz. Ebben a fejezetben ezt a gondolatot visszük tovább: indikátorok mellett immár általános független valószínűségi változók átlagáról is tudunk majd mondani valamit. Ehhez két segédtételre lesz szükségünk.

8.1. Állítás (Markov-egyenlőtlenség) *Legyen X nemnegatív valószínűségi változó. Ekkor minden $a > 0$ számra*

$$\mathbf{P}\{X \geq a\} \leq \frac{\mathbf{E}X}{a}.$$

Természetesen ez az állítás akkor ér valamit, ha $a > \mathbf{E}X$.

Bizonyítás. Legyen

$$Y = \begin{cases} 1, & \text{ha } X \geq a, \\ 0, & \text{ha } X < a. \end{cases}$$

Ekkor

$$X \geq aY, \qquad \text{azaz} \qquad \mathbf{E}X \geq \mathbf{E}aY = a\mathbf{E}Y = a\mathbf{P}\{X \geq a\}. \qquad \square$$

Figyeljük meg, hogy az egyenlőtlenség nagyon általános, X-ről csak annyit kell tudnunk, hogy véges a várható értéke. Cserében viszonylag gyenge korlátról van szó. Szintén nagyon általános és viszonylag gyenge a

8.2. Állítás (Csebisev-egyenlőtlenség) *Legyen X valószínűségi változó véges μ várható értékkel és szórásnégyzettel. Ekkor minden $b > 0$ számra*

$$\mathbf{P}\{|X-\mu| \geq b\} \leq \frac{\mathbf{D}^2 X}{b^2}.$$

Ez az állítás is csak $b > \mathbf{D}X$ esetén hasznos.

Bizonyítás. Az $(X-\mu)^2$ valószínűségi változó nemnegatív, erre fogjuk alkalmazni a Markov-egyenlőtlenséget:

$$\mathbf{P}\{|X-\mu| \geq b\} = \mathbf{P}\big\{(X-\mu)^2 \geq b^2\big\} \leq \frac{\mathbf{E}(X-\mu)^2}{b^2} = \frac{\mathbf{D}^2 X}{b^2}. \qquad \square$$

Következik egy példa az egyenlőtlenségek általánosságára:

8.3. Példa *Egy gyárban naponta átlagosan 50 ketyerét gyártanak. Mit tudunk mondani annak valószínűségéről, hogy holnap 75 vagy több ketyere készül?*

A Markov-egyenlőtlenség segítségével ($X =$ a holnap legyártott ketyerék száma)

$$\mathbf{P}\{X \geq 75\} \leq \frac{\mathbf{E}X}{75} = \frac{50}{75} = \frac{2}{3}.$$

8.4. Példa *Egy gyárban naponta átlagosan 50 ketyerét gyártanak, és a ketyerék számának szórása 5. Mit tudunk mondani annak valószínűségéről, hogy holnap 40-nél több, de 60-nál kevesebb ketyere készül?*

Legyen X a holnap gyártott ketyerék száma, $\mu = \mathbf{E}X = 50$, $\mathbf{D}X = 5$. A Csebisev-egyenlőtlenség szerint

$$\begin{aligned}\mathbf{P}\{40 < X < 60\} &= \mathbf{P}\{-10 < X-\mu < 10\} = \mathbf{P}\{|X-\mu| < 10\} = \\ &= 1 - \mathbf{P}\{|X-\mu| \geq 10\} \geq 1 - \frac{\mathbf{D}^2 X}{10^2} = 1 - \frac{25}{10^2} = \frac{3}{4}.\end{aligned}$$

Most pedig két példa az egyenlőtlenségek gyengeségére:

8.5. Példa *Legyen $X \sim E(0, 10)$. Ekkor $\mu = 5$ és $\mathbf{D}^2 X = 10^2/12$, és a Csebisev-egyenlőtlenség szerint*

$$\mathbf{P}\{|X-5| \geq 4\} \leq \frac{\mathbf{D}^2 X}{4^2} = \frac{10^2}{12 \cdot 4^2} = \frac{25}{48} \simeq 0.52.$$

Az igazság pedig

$$\mathbf{P}\{|X-5| \geq 4\} = \mathbf{P}\{X \leq 1\} + \mathbf{P}\{X \geq 9\} = \frac{1}{10} + \frac{1}{10} = 0.2.$$

8.6. Példa *Legyen* $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$*. A Csebisev-egyenlőtlenség alapján*

$$\mathbf{P}\{|X-\mu| \geq 2\sigma\} \leq \frac{\mathbf{D}^2 X}{(2\sigma)^2} = \frac{\sigma^2}{4\sigma^2} = 0.25,$$

pedig

$$\begin{aligned}\mathbf{P}\{|X-\mu| \geq 2\sigma\} = \mathbf{P}\Big\{\frac{X-\mu}{\sigma} \leq -2\Big\} + \mathbf{P}\Big\{\frac{X-\mu}{\sigma} \geq 2\Big\} = \\ = \Phi(-2) + 1 - \Phi(2) = 2 - 2\Phi(2) \simeq 0.0456.\end{aligned}$$

A Csebisev-egyenlőtlenség a Markov-egyenlőtlenség alkalmazása volt X egy ügyesen választott függvényére. Ehhez a várható érték mellett X szórására is szükségünk volt. Alább a Markov-egyenlőtlenség egy másik turbózása, melyhez a momentumgeneráló függvény kell, de néha meglepően erős tud lenni. Legyen X valószínűségi változó M momentumgeneráló függvénnyel. Ekkor minden c-re és minden λ, $\gamma > 0$-ra

$$\begin{aligned}\mathbf{P}\{X \geq c\} &= \mathbf{P}\big\{\mathrm{e}^{\lambda X} \geq \mathrm{e}^{\lambda c}\big\} \leq \frac{\mathbf{E}\mathrm{e}^{\lambda X}}{\mathrm{e}^{\lambda c}} = \mathrm{e}^{-\lambda c} M(\lambda),\\ \mathbf{P}\{X \leq c\} &= \mathbf{P}\big\{\mathrm{e}^{-\gamma X} \geq \mathrm{e}^{-\gamma c}\big\} \leq \frac{\mathbf{E}\mathrm{e}^{-\gamma X}}{\mathrm{e}^{-\gamma c}} = \mathrm{e}^{\gamma c} M(-\gamma).\end{aligned}$$

Mivel ez minden λ, $\gamma > 0$-ra igaz, M ismeretében szabad optimalizálni a jobboldalakat λ-ban illetve γ-ban.

8.7. Tétel (Nagy számok gyenge törvénye (NSzGyT)) *Legyenek* $X_1, X_2, \ldots$ *f.a.e. valószínűségi változók véges* μ *várható értékkel. Ekkor az átlaguk valószínűségben tart* μ*-höz, azaz minden* $\varepsilon > 0$*-ra*

$$\mathbf{P}\Big\{\Big|\frac{X_1 + X_2 + \cdots + X_n}{n} - \mu\Big| > \varepsilon\Big\} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0.$$

(Angolul: *WLLN*=**W**eak **L**aw of **L**arge **N**umbers.)

Bizonyítás. Egy kicsit kevesebbet bizonyítunk, nevezetesen feltesszük, hogy a valószínűségi változók σ szórása is véges. Az átlagról (vagy empírikus várható értékről) láttuk már, hogy várható értéke μ (7.5. példa) és szórásnégyzete σ^2/n (7.20. példa). Ezért a valószínűséget Csebisev egyenlőtlenséggel becsüljük:

$$\mathbf{P}\Big\{\Big|\frac{X_1 + X_2 + \cdots + X_n}{n} - \mu\Big| > \varepsilon\Big\} = \mathbf{P}\big\{\big|\bar{X} - \mu\big| > \varepsilon\big\} \leq \frac{\mathbf{D}^2 \bar{X}}{\varepsilon^2} = \frac{\sigma^2}{n\varepsilon^2} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0. \qquad \square$$

A binomiális eloszlás 7.9. példában látott előállítása alapján világos, hogy ez a NSzGyT a 4.26. Bernoulli nagy számok törvényének általánosítása (bár ott a bizonyításból több is kijött).

8.2. Centrális határeloszlástétel

A NSzGyT egy első információt ad arról, hogy f.a.e.v.v.-k átlaga közel van a változók várható értékéhez. Egy második közelítés lesz most annak vizsgálata, hogy mennyire van közel. Azt már a NSzGyT-ből tudjuk, hogy ez az eltérés n-nél kisebb kell, hogy legyen. Vizsgálatainkhoz momentumgeneráló függvényeket fogunk használni, és szükségünk lesz az alábbi analitikus állításra, melyet bizonyítás nélkül közlünk:

8.8. Állítás *Tegyük fel, hogy a Z_n valószínűségi változó-sorozat M_{Z_n} momentumgeneráló függvényei a nulla egy nyílt környezetén pontonként konvergálnak egy Z valószínűségi változó M_Z momentumgeneráló függvényéhez. Ekkor a megfelelő F_{Z_n} eloszlásfüggvények is konvergálnak Z F_Z eloszlásfüggvényéhez minden olyan pontban, ahol ez utóbbi folytonos.*

8.9. Tétel (Centrális határeloszlástétel (CHT)) *Legyenek X_1, X_2, … f.a.e. valószínűségi változók véges μ várható értékkel és σ^2 szórásnégyzettel. Ekkor a normált összeg eloszlásban tart a standard normális eloszláshoz, azaz minden $a \in \mathbb{R}$-re*

$$\mathbf{P}\Big\{\frac{X_1 + X_2 + \cdots + X_n - n\mu}{\sqrt{n}\,\sigma} < a\Big\} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \Phi(a).$$

(Angolul: *CLT*= **C**entral **L**imit **T**heorem.) Figyeljük meg, hogy a valószínűségben az összegből az összeg várható értékét vontuk le, majd az összeg szórásával osztottunk, hiszen

$$\mathbf{D}^2(X_1 + X_2 + \cdots + X_n) = \mathbf{D}^2 X_1 + \mathbf{D}^2 X_2 + \cdots + \mathbf{D}^2 X_n = n\sigma^2,$$

így a tört várható értéke nulla és szórása egy. A binomiális eloszlás 7.9. példában látott előállítása alapján az is világos, hogy ez a tétel az 5.26. DeMoivre-Laplace globális tétel általánosítása.

Bizonyítás. Ismét kicsit kevesebbet bizonyítunk: feltesszük, hogy az összeadandók momentumgeneráló függvényei – az azonos eloszlás miatt ugyanaz az M függvény – is végesek a nulla egy nyílt környezetén. Első lépésben feltesszük, hogy $\mu = 0$, $\sigma^2 = 1$. Ekkor a $\sum\limits_{i=1}^n X_i/\sqrt{n}$ összeget vizsgáljuk. A stratégia az, hogy megmutatjuk, hogy a momentumgeneráló függvénye pontonként a standard normális eloszlás momentumgeneráló függvényéhez tart.

$$M_{\sum\limits_{i=1}^n X_i/\sqrt{n}}(t) = \mathbf{E}\mathrm{e}^{t\sum\limits_{i=1}^n X_i/\sqrt{n}} = \mathbf{E}\prod_{i=1}^n \mathrm{e}^{tX_i/\sqrt{n}} =$$

$$= \prod_{i=1}^n \mathbf{E}\mathrm{e}^{(t/\sqrt{n})X_i} = \prod_{i=1}^n M\Big(\frac{t}{\sqrt{n}}\Big) = \Big[M\Big(\frac{t}{\sqrt{n}}\Big)\Big]^n.$$

Ennek logaritmusát tekintjük majd, ezért bevezetjük a $\Psi(x) := \ln M(x)$ függvényt. Mivel $t/\sqrt{n}$ pici, a függvényt sorfejtjük nulla körül:

$$\Psi(x) = \Psi(0) + \Psi'(0) \cdot x + \Psi''(0) \cdot \frac{x^2}{2} + \mathcal{O}(x^3).$$

A 7.53 feladat pont az első három tagról szólt, ezért

$$\Psi(x) = 0 + \mathbf{E}X \cdot x + \mathbf{D}^2 X \cdot \frac{x^2}{2} + \mathcal{O}(x^3) = 0 + 0 \cdot x + 1 \cdot \frac{x^2}{2} + \mathcal{O}(x^3).$$

Ennek segítségével

$$\ln M_{\sum\limits_{i=1}^{n} X_i/\sqrt{n}}(t) = n \ln M\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right) = n\Psi\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right) = n \cdot \frac{t^2}{2n} + n\mathcal{O}\left(\frac{t^3}{n^{3/2}}\right) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \frac{t^2}{2},$$

azaz

$$M_{\sum\limits_{i=1}^{n} X_i/\sqrt{n}}(t) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \mathrm{e}^{t^2/2},$$

amivel az előző állítás miatt a $\mu = 0$, $\sigma^2 = 1$ esetben kész vagyunk, hiszen a jobb oldalon a standard normális eloszlás momentumgeneráló függvénye szerepel (7.48. példa).

Általános μ és σ^2 értékek esetén

$$\frac{X_1 + X_2 + \cdots + X_n - n\mu}{\sqrt{n}\,\sigma} = \frac{\frac{X_1-\mu}{\sigma} + \frac{X_2-\mu}{\sigma} + \cdots + \frac{X_n-\mu}{\sigma}}{\sqrt{n}},$$

ahol az $\frac{X_i-\mu}{\sigma}$ változók függetlenek és azonos eloszlásúak nulla várható értékkel és egy szórásnégyzettel, ezért az eddigiek alapján a tört eloszlásban a standard normális eloszláshoz tart. □

Természetesen felmerül a kérdés, hogy hol kezdődik az az n-tartomány, ahol a gyakorlatban már praktikusan használható a CHT. A hibatagot elméletileg becsli a Berry-Esséen tétel. A gyakorlatban az e tétel által jelzettnél sokszor jóval kisebb n is elegendő; a minimális n érték függ az elérni kívánt pontosságtól, és az összeadandók eloszlásától is. A legtöbb esetben egy-két tucat valószínűségi változóra a CHT már praktikusan használható közelítést ad.

8.10. Példa *Egy csillagász egy μ távolságra levő objektum távolságát méri. Méréseinek eredményei f.a.e.v.v.-k μ várható értékkel és 2 fényév szórással. Hányszor kell mérnie, hogy az átlag legalább 0.5 fényév pontos legyen legalább 95% valószínűséggel?*

Jelöljük a mérések eredményeit X_i-vel, $i = 1, \dots, n$. Az n mérés átlagát szeretnénk μ-höz közel tudni:

$$\begin{aligned}
0.95 \le \mathbf{P}\Big\{\Big|\frac{X_1 + X_2 + \dots + X_n}{n} - \mu\Big| \le 0.5\Big\} &= \\
= \mathbf{P}\Big\{\Big|\frac{X_1 + X_2 + \dots + X_n - n\mu}{2\sqrt{n}}\Big| \le \frac{0.5\sqrt{n}}{2}\Big\} &= \\
= \mathbf{P}\Big\{-\frac{\sqrt{n}}{4} \le \frac{X_1 + X_2 + \dots + X_n - n\mu}{2\sqrt{n}} \le \frac{\sqrt{n}}{4}\Big\}&.
\end{aligned}$$

Ebben a valószínűségben már az összeg normált változata áll, és feltesszük, hogy kell annyit mérni, hogy a CHT már jó közelítést adjon. Ekkor a jobb oldali valószínűség a standard normális eloszlásfüggvénnyel közelíthető:

$$\begin{aligned}
0.95 &\lesssim \Phi\Big(\frac{\sqrt{n}}{4}\Big) - \Phi\Big(-\frac{\sqrt{n}}{4}\Big) = 2\Phi\Big(\frac{\sqrt{n}}{4}\Big) - 1 \\
0.975 &\lesssim \Phi\Big(\frac{\sqrt{n}}{4}\Big) \\
1.96 &\lesssim \frac{\sqrt{n}}{4} \\
61.5 &\lesssim n,
\end{aligned}$$

azaz 62 mérés szükséges.

Lássuk hányszor mér a csillagász, ha nem ismeri a CHT-t, csupán Csebisev-egyenlőtlenséggel próbál boldogulni. Ekkor, mivel az átlag várható értéke μ és szórásnégyzete $2^2/n = 4/n$,

$$\begin{aligned}
&\mathbf{P}\Big\{\Big|\frac{X_1 + X_2 + \dots + X_n}{n} - \mu\Big| \le 0.5\Big\} = \\
&\qquad = 1 - \mathbf{P}\Big\{\Big|\frac{X_1 + X_2 + \dots + X_n}{n} - \mu\Big| > 0.5\Big\} \ge 1 - \frac{4/n}{0.5^2} = 1 - \frac{16}{n}.
\end{aligned}$$

Elég ezért azt biztosítani, hogy $1 - 16/n \ge 0.95$ legyen, azaz $n \ge 320$. Megéri tehát valószínűségszámítást tanulni.

8.11. Példa (a Poisson eloszlás normális közelítése) *Tegyük fel, hogy egy tanfolyamra jelentkező diákok száma Poi(100) eloszlású. Becsüljük meg annak valószínűségét, hogy 120-nál többen akarnak beiratkozni.*

A 120 tagú szummákat kerülendő, CHT-t próbálunk alkalmazni. A probléma csak az, hogy nyomát sem látni független valószínűségi változók összegeinek. Itt jön segítségünkre a Poisson eloszlás tulajdonsága, mely szerint független Poisson valószínűségi változók összege is Poisson. Azaz ha $X \sim \text{Poi}(100)$ a jelentkezők száma, és $X_1, X_2, \dots, X_{100}$ f.a.e.

Poi(1) eloszlásúak, akkor $\sum_{i=1}^{100} X_i \sim \mathrm{Poi}(100)$. Erre az összegre viszont alkalmazhatjuk a CHT-t ($\mathbf{E}X_i = 1$, $\mathbf{D}^2X_i = 1$):

$$\begin{aligned}\mathbf{P}\{X > 120\} &= \mathbf{P}\Big\{\sum_{i=1}^{100} X_i > 120\Big\} = \mathbf{P}\Big\{\sum_{i=1}^{100} X_i > 120.5\Big\} = \\ &= \mathbf{P}\Bigg\{\frac{\sum_{i=1}^{100} X_i - 100\cdot 1}{\sqrt{100}\cdot 1} > \frac{120.5 - 100\cdot 1}{\sqrt{100}\cdot 1}\Bigg\} \simeq \\ &\simeq 1 - \Phi(2.05) \simeq 0.0202.\end{aligned}$$

Ahogy a DeMoivre-Laplace tételnél is láttuk, amíg X-re egész értékűként gondolunk, addig az, hogy 120 vagy 120.5 a korlát nem számít, viszont a közelítés pontosabb lesz, ha minden egészt egy egy hosszúságú intervallummal helyettesítünk.

8.3. Nagy számok erős törvénye

Ebben az alfejezetben egy kis ízelítőt adunk bizonyos haladóbb valószínűségszámítási módszerekből, a Nagy számok törvényének egy erősebb verzióját fogjuk tárgyalni. A NSzGyT-ben szereplő valószínűségbeli konvergenciánál vannak erősebb konvergenciafogalmak (innen a "gyenge" jelző). A teljesség igénye nélkül bemutatjuk az ebben a részben tárgyalandó, ún. erős konvergencia fogalmát:

$$\mathbf{P}\Big\{\frac{X_1 + X_2 + \cdots + X_n}{n} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \mu\Big\} = 1.$$

A konvergenciatípusokról itt csak annyit említünk meg, hogy lehet valószínűségi változók olyan Y_n sorozatát konstruálni, melyre a gyenge konvergencia: $\forall\varepsilon > 0 \quad \mathbf{P}\{Y_n > \varepsilon\} \to 0$ teljesül, de az erős konvergencia nem teljesül: $\mathbf{P}\{Y_n \to 0\} \neq 1$.

Az erős konvergencia bizonyításához események végtelen sorozatait fogjuk tekinteni. Legyenek A_1, A_2, … események. Ekkor az $\bigcup_{k=n}^{\infty} A_k$, $n = 1, 2, \ldots$ események n-ben csökkenők, hiszen ahogy n nő, egyre kevesebb A_k-nak vesszük az unióját. A 2.2. definíció szerint vehetjük ennek a csökkenő rendszernek a limeszét:

$$\lim_{n\to\infty} \bigcup_{k=n}^{\infty} A_k = \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{k=n}^{\infty} A_k.$$

8.12. Definíció *Az analízisből vett analógiával ezt a limeszt az A_k események* limsup*jának nevezik:*

$$\limsup_{n\to\infty} A_n = \lim_{n\to\infty} \bigcup_{k=n}^{\infty} A_k = \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{k=n}^{\infty} A_k.$$

Az unió azt jelenti, hogy n-nél magasabb indexű A esemény is megtörténik. A metszet azt jelenti, hogy ez minden n-re igaz. Azaz $\limsup\limits_{n\to\infty} A_n$ *az az esemény, hogy az A_k-k közül* végtelen sok megtörténik. *Szokták ezt úgy is mondani, hogy A_k* végtelen gyakran megtörténik.

Ennek valószínűségéről szólnak a Borel-Cantelli lemmák:

8.13. Tétel (Borel-Cantelli lemmák) *Legyenek A_1, A_2, … események.*

1. *Ha* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \mathbf{P}\{A_n\} < \infty$, *akkor* $\mathbf{P}\big\{\limsup\limits_{n\to\infty} A_n\big\} = 0$, *azaz m.b. csak véges sok A_k következik be.*

2. *Ha az A_1, A_2, … események függetlenek, és* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \mathbf{P}\{A_n\} = \infty$, *akkor* $\mathbf{P}\big\{\limsup\limits_{n\to\infty} A_n\big\} = 1$, *azaz m.b. végtelen sok A_k bekövetkezik.*

Figyeljük meg, hogy az első lemmához még a függetlenség sem kellett.

Bizonyítás. 1.

$$\mathbf{P}\big\{\limsup_{n\to\infty} A_n\big\} = \mathbf{P}\Big\{\lim_{n\to\infty} \bigcup_{k=n}^{\infty} A_k\Big\} = \\ = \lim_{n\to\infty} \mathbf{P}\Big\{\bigcup_{k=n}^{\infty} A_k\Big\} \le \lim_{n\to\infty} \sum_{k=n}^{\infty} \mathbf{P}\{A_k\} = 0.$$

2. A De Morgan szabály szerint

$$\mathbf{P}\big\{\limsup_{n\to\infty} A_n\big\} = \mathbf{P}\Big\{\bigcap_{n=1}^{\infty}\bigcup_{k=n}^{\infty} A_k\Big\} = \\ = 1 - \mathbf{P}\Big\{\Big(\bigcap_{n=1}^{\infty}\bigcup_{k=n}^{\infty} A_k\Big)^c\Big\} = 1 - \mathbf{P}\Big\{\bigcup_{n=1}^{\infty}\bigcap_{k=n}^{\infty} A_k^c\Big\}.$$

A $\bigcap\limits_{k=n}^{\infty} A_k^c$ események n-ben növekvőek, hiszen egyre kevesebb A_k^c-t kell metszeni. Ezért az uniójuk egyben a limeszük is. Ezt, és a függetlenséget használjuk most:

$$\mathbf{P}\big\{\limsup_{n\to\infty} A_n\big\} = 1 - \mathbf{P}\Big\{\lim_{n\to\infty}\bigcap_{k=n}^{\infty} A_k^c\Big\} = 1 - \lim_{n\to\infty}\mathbf{P}\Big\{\bigcap_{k=n}^{\infty} A_k^c\Big\} = \\ = 1 - \lim_{n\to\infty}\prod_{k=n}^{\infty}(1-\mathbf{P}\{A_k\}) \ge 1 - \lim_{n\to\infty}\prod_{k=n}^{\infty} \mathrm{e}^{-\mathbf{P}\{A_k\}} = \\ = 1 - \lim_{n\to\infty} \mathrm{e}^{-\sum\limits_{k=n}^{\infty}\mathbf{P}\{A_k\}} = 1.$$

□

Most bebizonyítjuk a Nagy számok erős törvényét, mely az átlag erős konvergenciáját állítja:

8.14. Tétel (Nagy számok erős törvénye (NSzET)) *Legyenek X_1, X_2, … f.a.e. valószínűségi változók véges μ várható értékkel. Ekkor az átlaguk m.b. konvergál μ-höz, azaz*

$$\mathbf{P}\Big\{\frac{X_1+X_2+\cdots+X_n}{n}\underset{n\to\infty}{\longrightarrow}\mu\Big\}=1.$$

(Angolul: *SLLN*=**S**trong **L**aw of **L**arge **N**umbers.)

Bizonyítás. Ismét kicsit kevesebbet bizonyítunk: feltesszük, hogy az X_i-k negyedik momentuma is véges. Legyen

$$S_n=\sum_{i=1}^n X_i,\qquad \text{azaz}\qquad S_n^4=\Big(\sum_{i=1}^n X_i\Big)\cdot\Big(\sum_{j=1}^n X_j\Big)\cdot\Big(\sum_{k=1}^n X_k\Big)\cdot\Big(\sum_{\ell=1}^n X_\ell\Big).$$

Az alábbiakban megvizsgáljuk, hogy kibontás után milyen típusú tagok szerepelnek ebben a négyes szorzatban. i, j, k, ℓ alább mind különböző indexeket fog jelölni.

- $X_iX_jX_kX_\ell$ típusú tag (mind a négy X különböző indexű): $\binom{n}{4}$ féleképp jelölhetjük ki, hogy melyik négy index szerepeljen a szorzatban. Ha ez megvan, meg kell határoznunk, hogy ez a négy index melyik fenti zárójelekből jön össze, ez 4! lehetőség.
- $X_i^2X_jX_k$ típusú tag (egy index duplán szerepel, két másik pedig szimplán): $n\cdot\binom{n-1}{2}$ féleképp választhatjuk ki először a dupla indexet, majd a maradék $n-1$ közül a két szimpla indexet. Utána $\binom{4}{2}\cdot 2$ féleképp választjuk ki azt a két zárójelet, ahonnan a dupla index jön, majd a maradék kettő sorrendjét.
- $X_i^2X_j^2$ típusú tag (két index duplán szerepel): $\binom{n}{2}$ féleképp választhatjuk ki a két indexet, ezután ki kell választanunk, melyik két zárójelből jön az első: $\binom{4}{2}$ lehetőség.
- $X_i^3X_j$ típusú tag (egy index triplán, egy szimplán szerepel): $n\cdot(n-1)$ féle választás a két indexre, majd $\binom{4}{3}$ lehetőség a három zárójel kiválasztására, melyekből a tripla index származik.
- X_i^4 típusú tag (egy darab index négyszer): n lehetőség az index kiválasztására.

Mivel a valószínűségi változók azonos eloszlásúak, a várható érték alatt nem számít, melyik konkrét indexek szerepelnek. Kizárólag a fenti típusok számítanak. Így

$$\begin{aligned}\mathbf{E}S_n^4=\binom{n}{4}\cdot 4!\cdot\mathbf{E}(X_1X_2X_3X_4)+n\cdot\binom{n-1}{2}\cdot\binom{4}{2}\cdot 2\cdot\mathbf{E}(X_1^2X_2X_3)+\\+\binom{n}{2}\cdot\binom{4}{2}\cdot\mathbf{E}(X_1^2X_2^2)+n\cdot(n-1)\cdot\binom{4}{3}\cdot\mathbf{E}(X_1^3X_2)+n\cdot\mathbf{E}(X_1^4).\end{aligned}$$

Most teszünk egy egyszerűsítő feltevést, amit később könnyen el tudunk majd hagyni: legyen $\mu = 0$. Ekkor a függetlenség miatt

$$\begin{aligned}
\mathbf{E}(X_1X_2X_3X_4) &= \mathbf{E}X_1 \cdot \mathbf{E}X_2 \cdot \mathbf{E}X_3 \cdot \mathbf{E}X_4 = 0 \cdot 0 \cdot 0 \cdot 0 = 0,\\
\mathbf{E}(X_1^2X_2X_3) &= \mathbf{E}X_1^2 \cdot \mathbf{E}X_2 \cdot \mathbf{E}X_3 = \mathbf{E}X_1^2 \cdot 0 \cdot 0 = 0,\\
\mathbf{E}(X_1^3X_2) &= \mathbf{E}X_1^3 \cdot \mathbf{E}X_2 = \mathbf{E}X_1^3 \cdot 0 = 0.
\end{aligned}$$

Marad két tag:

$$\mathbf{E}S_n^4 = \binom{n}{2} \cdot \binom{4}{2} \cdot \mathbf{E}(X_1^2X_2^2) + n \cdot \mathbf{E}(X_1^4) \le Cn^2$$

valamely C konstanssal, melyben a kombinatorikai faktorok és ezek a várható értékek szerepelnek. Legyen most $m > 0$ egész, és

$$A_n^m := \Big\{\Big|\frac{S_n}{n}\Big| > \frac{1}{m}\Big\}.$$

Ekkor egy turbo-Markov egyenlőtlenséggel

$$\mathbf{P}\{A_n^m\} = \Big\{\frac{S_n^4}{n^4} > \frac{1}{m^4}\Big\} \le \frac{\mathbf{E}\big(S_n^4/n^4\big)}{1/m^4} = \frac{\mathbf{E}\big(S_n^4\big) \cdot m^4}{n^4} \le \frac{Cn^2 \cdot m^4}{n^4} = \frac{C \cdot m^4}{n^2}.$$

Mivel ez minden rögzített m mellett n-ben összegezhető, a Borel-Cantelli 1. lemma alapján

$$B^m := \limsup_{n\to\infty} A_n^m \quad \text{-re} \qquad \mathbf{P}\{B^m\} = 0.$$

A B^m esemény azt jelenti, hogy végtelen sok n-re lesz $|S_n/n| > 1/m$. S_n/n viszont pontosan akkor konvergál nullához, ha minden m esetén csak véges sok n értékre lesz $|S_n/n| > 1/m$. Ezért

$$\begin{aligned}
\mathbf{P}\Big\{\lim_{n\to\infty}\frac{S_n}{n} = 0\Big\} &= \mathbf{P}\Big\{\bigcap_{m=1}^{\infty}(B^m)^c\Big\} =\\
&= 1 - \mathbf{P}\Big\{\bigcup_{m=1}^{\infty} B^m\Big\} \ge 1 - \sum_{m=1}^{\infty}\mathbf{P}\{B^m\} = 1 - \sum_{m=1}^{\infty} 0 = 1.
\end{aligned}$$

Így a $\mu = 0$ esetben kész vagyunk. Amennyiben $\mu \ne 0$,

$$\frac{X_1 + X_2 + \cdots + X_n}{n} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \mu \quad \Leftrightarrow \quad \frac{(X_1 - \mu) + (X_2 - \mu) + \cdots + (X_n - \mu)}{n} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0,$$

így az előző esetet alkalmazva az $X_i - \mu$ nulla várható értékű változókra bebizonyítottuk a tételt. $\square$

8.4. Feladatok

8.1. Egy kockát folyamatosan feldobunk addig, amíg a dobások összege meghaladja a 300-at. Becsüljük meg annak valószínűségét, hogy legalább 80 dobásra van ehhez szükség.

8.2. Adott 100 égőnk, melyek élettartama egymástól független exponenciális eloszlású, 5 óra várható értékkel. Tegyük fel, hogy az égőket egymás után használjuk, azonnal kicserélve azt, amelyik kiégett. Becsüljük meg annak valószínűségét, hogy 525 óra után még van működő égőnk.

8.3. Az előző feladatban most tegyük fel, hogy minden égő kicserélése független, a (0, 0.5) intervallumon egyenletes eloszlású ideig tart. Becsüljük meg most annak valószínűségét, hogy 550 óra elteltével már az összes égő kiégett.

8.4. Feldobunk egy érmét hatvanszor, jelölje a fejek számát X. Adjunk felső becslést a $\mathbf{P}\{|X-30| \geq 20\}$ valószínűségre a Csebisev-egyenlőtlenség segítségével! Jobb becslés is adható az exponenciális Markov-egyenlőtlenség segítségével:

(a) Legyen $Y_\beta = \mathrm{e}^{\beta X}$, ahol $0 < \beta$. Lássuk be, hogy $\mathbf{E}Y_\beta = 2^{-60}(1+\mathrm{e}^\beta)^{60}$.

(b) Adjunk felső becslést a $\mathbf{P}\{X \geq 50\}$ valószínűségre olymódon, hogy a Markov-egyenlőtlenséget alkalmazzuk az Y_β nemnegatív valószínűségi változóra.

(c) Keressük meg azt a β-t, amelyikre az előbbi becslés a legélesebb. (A feladat visszavezethető az $f(\beta) = \ln(1+\mathrm{e}^\beta) - \frac{5}{6}\beta$ konvex függvény minimalizálására.)

(d) Lássuk be, hogy $\mathbf{P}\{|X-30| \geq 20\} \leq 2 \cdot 3^{60} \cdot 5^{-50} < 10^{-6}$.

8.5. 50 számot egészre kerekítünk, majd összeadjuk őket. Tegyük fel, hogy a kerekítés minden számnál független, $\mathrm{E}(-0.5, 0.5)$ eloszlású. Becsüljük meg annak valószínűségét, hogy kerekítés után összeadva több, mint 3-mal különbözik az eredmény a valódi összegtől.

8.6. Egy bizonyos tárgy vizsgáján a diákok pontszámának átlaga 74 pont, és szórása 14 pont. Az első vizsgát 25-en, a második vizsgát 64-en írják meg.

(a) Becsüljük meg annak valószínűségét, hogy az első vizsgán az átlag pontszám meghaladja a 80-at.

(b) Becsüljük meg annak valószínűségét, hogy a második vizsgán az átlag pontszám meghaladja a 80-at.

(c) Becsüljük meg annak valószínűségét, hogy a második vizsga átlag pontszáma több, mint 2.2 ponttal meghaladja az első vizsga átlag pontszámát.

(d) Becsüljük meg annak valószínűségét, hogy az első vizsga átlag pontszáma több, mint 2.2 ponttal meghaladja a második vizsga átlag pontszámát.

8.7. Legyen $\{Z_n\}_{n=1}^{\infty}$ egy valószínűségi változó-sorozat, mely valószínűségben konvergál egy c számhoz (azaz: minden $\varepsilon > 0$ esetén $\lim_{n\to\infty} \mathbf{P}\{|Z_n - c| > \varepsilon\} = 0$). Mutassuk meg, hogy minden korlátos, folytonos g függvényre a $\{g(Z_n)\}$ valószínűségi változó sorozat L^1-*ben* $g(c)$-*hez konvergál*, azaz $\lim_{n\to\infty} \mathbf{E}\big(g(Z_n)\big) = g(c)$.

8.8. Egy szabályos kockával 100-szor dobunk, az i. dobás eredménye X_i. Becsüljük meg a

$$\mathbf{P}\Big\{\prod_{i=1}^{100} X_i \le a^{100}\Big\}$$

valószínűséget, $1 < a < 6$ esetén.

8.9. A roulette-keréken 18 piros, 18 fekete, és 1 zöld mező van. Egy játékos egymás után egy - egy petákot tesz fel pirosra, és a petákja mellé egy másikat is nyer, ha piros mezőre érkezik a golyó. Ha viszont a golyó fekete vagy zöld mezőre ér, akkor a játékos elveszti a petákját. Bizonyítandó, hogy egyhez tart annak valószínűsége, hogy játékosunk az n. játék után összesen pénzt veszít.

8.10. Tegyük fel, hogy az A gyárban a napi termelés várható értéke 20, szórása 3, míg a B gyárban a napi termelés várható értéke 18, szórása 6, és a két gyár egymástól függetlenül dolgozik. Becsüljük le annak valószínűségét, hogy holnap a B gyár többet termel, mint az A gyár. *Tipp: Használjuk a következő, egyoldalú Csebisev egyenlőtlenséget: ha Z egy nulla várható értékű valószínűségi változó, akkor minden $a > 0$, $b > 0$-ra*

$$\mathbf{P}\{Z \ge a\} = \mathbf{P}\{Z + b \ge a + b\} \le \mathbf{P}\{(Z + b)^2 \ge (a + b)^2\}.$$

A jobb oldalra alkalmazzunk egy Markov-egyenlőtlenséget, majd jöhet egy Steiner tétel, végül minimalizáljunk b-ben.

8.11. Egy eszköz bizonyos komponensének élettartama egy valószínűségi változó

$$f(x) = 2x, \qquad \text{ha} \qquad 0 < x < 1$$

sűrűségfüggvénnyel. Amint egy ilyen komponens elromlik, azonnal kicserélik egy újra. Legyen S_n az a pillanat, amikor az n. komponens elromlik. A meghibásodások hosszútávú rátája

$$r := \lim_{n\to\infty} \frac{n}{S_n}.$$

Bizonyítsuk be, hogy ez m.b. létezik, és határozzuk meg az értékét.

8.12. Egy ketyere kijavítása két lépésben történik. Ezek időigénye egymástól független, és exponenciális eloszlású 12 illetve 18 perc várható értékkel.

(a) Becsüljük meg annak valószínűségét, hogy egy szerelő 8 óra alatt 20 ketyerét meg tud javítani.

(b) Hány ketyerét tud egy szerelő 95%-nál nagyobb valószínűséggel megjavítani 8 óra alatt?

8.13. Legyenek X_1, X_2, ... nemnegatív f.a.e.v.v.-k. Mit mondhatunk a mértani közepük határértékéről,

$$\lim_{n\to\infty}\Big(\prod_{i=1}^{n} X_i\Big)^{1/n} \quad \text{-ről?}$$

8.14. (a) Bizonyítandó, hogy a Markov-egyenlőtlenség **éles**, a következő értelemben: *rögzítve* a $0 < m \le \lambda$ számokat, létezik olyan nemnegatív X valószínűségi változó, melynek várható értéke $\mathbf{E}X = m$ és melyre a Markov-egyenlőtlenség 'telítődik': $\mathbf{P}\{X \ge \lambda\} = m/\lambda$.

(b) Bizonyítandó, hogy a Markov-egyenlőtlenség **nem éles**, a következő értelemben: rögzített nemnegatív X valószínűségi változóra, melynek várható értéke véges, $\lim\limits_{\lambda\to\infty} \lambda\mathbf{P}\{X \ge \lambda\}/\mathbf{E}X = 0$.

8.15. Legyenek $X_1, X_2, \ldots, X_n, \ldots$ független és azonos eloszlású nemnegatív és nem elfajult valószínűségi változók. (Azaz: feltesszük, hogy $1 = \mathbf{P}\{X_i \ge 0\} \ge \mathbf{P}\{X_i > 0\} > 0$.) Bizonyítsuk be, hogy bármely $x \ge 0$-ra a következő végtelen összeg konvergens:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\mathbf{P}\Big\{\sum_{i=1}^{n} X_i < x\Big\} < \infty.$$

8.16. *A normális fluktuációk igazi nagyságrendjének megsejtése:* Legyenek $X_1, X_2, \ldots, X_n, \ldots$ független és azonos eloszlású valószínűségi változók, melyeknek várható értéke $\mathbf{E}X_i = 0$ és szórásnégyzete $\mathbf{D}^2X_i = \sigma^2 < \infty$. Legyen $S_n := \sum\limits_{i=1}^{n} X_i$. A NSzGyT azt mondja ki, hogy rögzített $\delta > 0$ mellett

$$\lim_{n\to\infty}\mathbf{P}\big\{|S_n|/n > \delta\big\} = 0.$$

Bizonyítsuk be a következő (lényegesen erősebb) állítást: bármely ∞-hez tartó b_n számsorozattal, rögzített $\delta > 0$ mellett

$$\lim_{n\to\infty}\mathbf{P}\big(|S_n|/(b_n\sqrt{n}) > \delta\big) = 0.$$

8.17. *Monte Carlo integrálás.* Legyen $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ mérhető, négyzetesen integrálható függvény. Jelöljük: $I := \int\limits_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x$, $J := \int\limits_0^1 |f(x)|^2\,\mathrm{d}x$. Legyenek $U_1, U_2, \ldots$ független és azonos $\mathrm{E}(0, 1)$ egyenletes eloszlású valószínűségi változók és $I_n := \big(f(U_1) + f(U_2) + \cdots + f(U_n)\big)/n$.

(a) Bizonyítsuk be, hogy $I_n \to I$ valószínűségben.

(b) Csebisev-egyenlőtlenség segítségével becsüljük meg a $\mathbf{P}\big\{|I_n - I| > a/\sqrt{n}\big\}$ valószínűségeket ($a > 0$ rögzített, $n \to \infty$).

8.18. Legyen $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ korlátos és négyszer folytonosan differenciálható függvény. Határozzuk meg a következő határértéket:

$$\lim_{n\to\infty} n \int_0^1 \int_0^1 \cdots \int_0^1 \big\{ f\big((x_1 + x_2 + \cdots + x_n)/n\big) - f\big(1/2\big) \big\}\, \mathrm{d}x_1\, \mathrm{d}x_2 \ldots \mathrm{d}x_n.$$

Tárgymutató