M Ű E G Y E T E M 1 7 8 2

TYPOTEX

Gyurkovics Éva

# Optimális irányítások

2011

Ismertető
Tartalomjegyzék
Pályázati támogatás
Gondozó

Szakmai vezető
Lektor
Technikai szerkesztő
Copyright

A jegyzet az alkalmazott matematikus, továbbá a mechatronikai mérnök hallgatók MSC képzéséhez készült oktatási segédletként. Az alapfogalmakat ismertető és néhány alkalmazási példa modelljét bemutató bevezető fejezet után a második fejezet a lineáris rendszerek néhány alapvető tulajdonságát tárgyalja. A harmadik fejezet az optimális vezérlések létezésével és az optimum szükséges feltételével foglakozik. A negyedik fejezet tárgya a dinamikus programozás, megadva az optimumnak mind a szükséges, mind az elégséges feltételeit. A jegyzet az optimalitás és stabilitás kapcsolatának tárgyalásával zárul, kitérve a csúszó időhorizont módszer, valamint a mintavételezett rendszerek néhány eredményére. Minden fejezet végén az alkalmazási készséget és a téma megértését elősegítő feladatok találhatók.

**Kulcsszavak:** Irányítási rendszerek, lineáris rendszerek, irányíthatóság, megfigyelhetőség, stabilizálhatóság, kanonikus alakok, állapotmegfigyelő, realizáció, optimális vezérlés, Pontrjagin-féle maximumelv, dinamikus programozás, Hamilton–Jacobi–Bellman-egyenlet, Lineáris kvadratikus feladat, stabilitás, csúszó időhorizont módszer, mintavételezett rendszerek.

*Támogatás:*
Készült a TÁMOP-4.1.2-08/2/A/KMR-2009-0028 számú, a „Természettudományos (matematika és fizika) képzés a műszaki és informatikai felsőoktatásban” című projekt keretében.

ÚJ SZÉCHENYI TERV

*Készült:*
a BME TTK Matematika Intézet gondozásában

*Szakmai felelős vezető:*
Ferenczi Miklós

*Lektorálta:*
Takács Tibor

*Az elektronikus kiadást előkészítette:*
Busai Ágota

*Címlap grafikai terve:*
Csépány Gergely László, Tóth Norbert

*ISBN:* 978-963-279-455-6

# Tartalomjegyzék


**1. Bevezetés** **7**
1.1. Alapfogalmak . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 7
1.2. Példák . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 12
1.2.1. Fordított inga . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 12
1.2.2. Merev test szögsebessége . . . . . . . . . . . . . . . . . 14
1.2.3. Elektromos RLC áramkör . . . . . . . . . . . . . . . . 15
1.2.4. A nemzetgazdaság egy egyszerű modellje . . . . . . . . 16
1.2.5. Egyszerűsített készletgazdálkodási modell . . . . . . . . 17
1.2.6. Zárt gazdaság egy modellje . . . . . . . . . . . . . . . . 18
1.3. Statikus optimalizálás . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 20
1.4. Feladatok az 1. fejezethez . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 27

**2. Lineáris rendszerek** **29**
2.1. Linearizálás . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 29
2.2. Differenciál- és differenciaegyenlet rendszerek . . . . . . . . . 33
2.3. Lineáris rendszerek irányíthatósága . . . . . . . . . . . . . . 35
2.4. Ekvivalenciák és kanonikus alakok . . . . . . . . . . . . . . . 42
2.4.1. Lineárisan ekvivalens rendszerek . . . . . . . . . . . . . 42
2.4.2. Feedback ekvivalens rendszerek . . . . . . . . . . . . . 45
2.5. Stabilizálhatóság, póluselhelyezés . . . . . . . . . . . . . . . 52
2.6. Lineáris rendszerek megfigyelhetősége . . . . . . . . . . . . . 57
2.7. Állapotmegfigyelők, szeparációs elv . . . . . . . . . . . . . . 61
2.8. Lineáris rendszerek struktúrája . . . . . . . . . . . . . . . . 67
2.9. Realizáció, minimális realizáció . . . . . . . . . . . . . . . . 71
2.10. Feladatok a 2. fejezethez . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 80

**3. Optimális vezérlések** **87**
3.1. Optimális vezérlések létezése . . . . . . . . . . . . . . . . . . 88
3.1.1. A célfüggvény korlátossága alulról . . . . . . . . . . . . 88
3.1.2. Egzisztencia tétel speciális vezérlési osztályokra . . . . 90
3.1.3. Egzisztencia tétel konvexitási feltétel mellett . . . . . . 90

3.2. A Pontrjagin-féle maximumelv . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 96
3.3. A transzverzalitási feltétel . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 107
3.4. Feladatok a 3. fejezethez . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 113

**4. Dinamikus programozás 119**
4.1. Az optimális irányítási feladat . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 119
4.2. Véges rendszerek . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 121
4.3. Általános rendszerek . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 124
4.4. Dinamikus programozási- és HJB egyenlet . . . . . . . . . . . 127
4.5. Az optimalitás szükséges feltétele . . . . . . . . . . . . . . . . . 129
4.6. Az optimalitás elegendő feltétele . . . . . . . . . . . . . . . . . . 130
4.7. Diszkrét idejű feladatok . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 134
4.8. Lineáris kvadratikus feladatok . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 135
4.9. Pályakövetés . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 140
4.10. Feladatok a 4. fejezethez . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 144

**5. Optimalitás és stabilitás kapcsolata 147**
5.1. Stabilitás és Ljapunov direkt módszere . . . . . . . . . . . . . . 147
5.2. Stabilitás és optimalitás . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 153
5.3. LQ feladatok - végtelen intervallum . . . . . . . . . . . . . . . . 155
5.4. A csúszó időhorizont módszer . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 166
5.5. Mintavételezett rendszerek . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 173
5.5.1. KDE kezdetiérték feladatainak numerikus megoldása . 175
5.5.2. Egzakt és közelítő diszkrét idejű modell meghatározása 175
5.5.3. Többszörös mintavételezett rendszerek késleltetéssel . . 178
5.6. Feladatok a 5. fejezethez . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 180

**6. Függelék 183**

# Ábrák jegyzéke

1.1. Fordított inga . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 12
1.2. Erők és elmozdulások a fordított ingán . . . . . . . . . . . . . . 13
1.3. RLC kör . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 16
1.4. Egy egyenlőséggel adott korlátozó feltétel . . . . . . . . . . . . . 24
1.5. Csak a $g_1(u)$ feltétel aktív az $u^*$-ban . . . . . . . . . . . . . . 25
1.6. Mindkét feltétel aktív az $u^*$-ban . . . . . . . . . . . . . . . . . . 26
1.7. Az 1.2. példa megoldásának geometriai szemléltetése . . . . . 26

2.1. Állapotmegfigyelő . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 62
2.2. Diszkrét idejű állapotmegfigyelő . . . . . . . . . . . . . . . . . . 64
2.3. Rendszer és dinamikus kompenzátor . . . . . . . . . . . . . . . 66

3.1. Általánosított sebességvektorok . . . . . . . . . . . . . . . . . . 91
3.2. Az optimalizálási feladat átfogalmazásának szemléltetése . . . 98
3.3. Átkapcsolási görbék és trajektóriák . . . . . . . . . . . . . . . . 104
3.4. A transzverzalitási feltétel szemléltetése . . . . . . . . . . . . . 108

4.1. Vázlat az Optimalitási elvhez . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 121

5.1. Vázlat Ljapunov I. tételének bizonyításához. . . . . . . . . . . 149
5.2. Vázlat Ljapunov II. tételének bizonyításához. . . . . . . . . . . 150
5.3. Csúszó időhorizont módszer sémája . . . . . . . . . . . . . . . . 168
5.4. Mintavételezett rendszerek általános konfigurációja. . . . . . . 173
5.5. Az algoritmus sémája. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 179

# 1. fejezet

# Bevezetés

## 1.1. Alapfogalmak

Ahhoz, hogy ennek a tantárgynak a témájáról beszéljünk, meg kell mondanunk, hogy mit értünk irányítási rendszeren. *Rendszer* alatt a valós világnak egy elkülöníthető, egységnek tekinthető részét értjük. A valós világnak a rendszeren kívüli része a rendszer *környezete*. A rendszer és környezete kölcsönösen hat egymásra: a környezet rendszerre gyakorolt hatását *input*nak, a rendszernek a környezetre gyakorolt hatását *output*nak nevezzük.

Egy jelenség tanulmányozása során nagyon sok területen nem közvetlenül a jelenséget, hanem annak egy modelljét vizsgáljuk. A modell a vizsgálat tárgyának egy olyan - nagyon gyakran matematikai terminológiával megadott - reprezentációja, amelytől azt várjuk, hogy a vizsgálat tárgyának lényeges vonásaival rendelkezzék. Azt reméljük, hogy a modellen végzett manipulációk segítségével a modellezett jelenségről új ismereteket nyerhetünk azok nélkül a veszélyek, költségek és kényelmetlenségek nélkül, amit a valóságos jelenségen végzett műveletek okoznának. Az irányítási rendszerek elméletében mindig a rendszer matematikai modelljével foglalkozunk, és rendszerről beszélvén, az alatt mindig a rendszer matematikai modelljét értjük.

*Az irányítási rendszerek elmélete input/output jelenségek tanulmányozásával és irányításával foglalkozik.*

A hangsúly ezen jelenségek dinamikus viselkedésének vizsgálatán van, vagyis azon, hogy a jellemzők hogyan változnak az időben. A cél többféle lehet: olyan irányítási rendszert szeretnénk tervezni, amely előírt tulajdonságokkal rendelkezik, vagy adott irányítási rendszerhez olyan irányítási függvényt szeretnénk megadni, amely a rendszer „stabil" viselkedését eredményezi, átviszi a rendszert egy megadott állapotból egy másik megadott állapotba, sőt, ezt valamilyen szempontból a lehető legkedvezőbb módon valósítja meg. Nézzük meg, hogy egy input/output rendszer leírása és a hozzá kapcsolódó *optimális irányítási feladat* megfogalmazása milyen elemeket tartalmaz.

**Az objektum dinamikája**

Tegyük fel, hogy a vizsgált objektum viselkedése minden egyes $t$ időpillanatban teljesen leírható az $x_1(t)$, ..., $x_n(t)$ paraméterekkel. Az $x(t) = (x_1(t), \ ..., \ x_n(t))^T$ vektort az objektum *állapotvektorá*nak nevezzük. Itt, és a jegyzetben mindenütt a $^T$ („T” felső indexben) a transzponálás jele. Az állapotvektorok lehetséges értékeinek halmazát $\mathcal{X}$-szel jelöljük: $\mathcal{X} \subset \mathbb{R}^n$. Megjegyezzük, hogy gyakran $\mathcal{X} = \mathbb{R}^n$, más esetekben viszont $\mathcal{X}$ lehet az $\mathbb{R}^n$ egy valódi részhalmaza. Állapottér alatt az $\mathcal{X}$ halmazt fogjuk érteni.

Tegyük fel, hogy a környezetnek az objektumra gyakorolt hatása minden $t$ időpillanatban számszerűen az $u_1(t)$, ..., $u_m(t)$ paraméterekkel jellemezhető. Az $u(t) = (u_1(t), \ ..., \ u_m(t))^T$ vektort *input*nak vagy *irányítási vektor*nak nevezzük, de használjuk a *vezérlés* elnevezést is. Ezeket az elnevezéseket többnyire szinonimáknak tekinthetjük, a vezérlés vagy irányítás kifejezés csak akkor használható, ha az illető paraméter értékét meghatározhatjuk. Ha azonban a környezeti hatás nem befolyásolható adottság, akkor csak inputról vagy bemeneti jelről szokás beszélni. Az input vektor lehetséges értékeinek halmazát $\mathcal{U}$-val jelöljük: $\mathcal{U} \subset \mathbb{R}^m$; lehetséges, hogy $\mathcal{U} = \mathbb{R}^m$, de az a tipikus, hogy $\mathcal{U}$ valódi részhalmaza $\mathbb{R}^m$-nek.

Tegyük fel, hogy az objektum környezetére gyakorolt hatása minden $t$ időpillanatban az $y_1(t)$, ..., $y_p(t)$ paraméterekkel adható meg számszerűen: az $y(t) = (y_1(t), \ ..., \ y_p(t))^T$ vektort *output*nak, vagy *megfigyelési vektor*nak nevezzük.

Az *idő* felfogására két lehetőségünk van: ha a vizsgált objektumra csak meghatározott időközönként lehet hatni, és az objektum is csak (ugyanolyan) meghatározott időközönként hat a környezetére, akkor az időt célszerű ezen diszkrét időpontokból állónak tekinteni és ezeket az időpontokat egész számokkal megadni. Ha viszont a rendszer működése folyamatos, tehát mind az input, mind az állapot, mind pedig az output bármilyen időpillanatban változhat, akkor az időt folytonosnak tekinthetjük és valós számokkal adhatjuk meg. Az első esetben *diszkrét idejű*, a másodikban *folytonos idejű* rendszerekről beszélünk, és azt mondjuk, hogy $t \in \mathbb{Z}$ illetve $t \in \mathbb{R}$, ahol $\mathbb{Z}$ az egész számok, $\mathbb{R}$ pedig a valós számok halmazát jelöli. Megállapodunk abban, hogy az $\mathcal{I} = \left(\underline{t}, \overline{t}\right)$ időintervallum folytonos idejű rendszerek esetén szokásos módon a $\underline{t} < t < \overline{t}$, $t \in \mathbb{R}$ nyílt intervallumot jelenti, míg diszkrét idejű rendszerek esetén az olyan $t \in \mathbb{Z}$ egész számok halmazát, amelyekre $\underline{t} < t < \overline{t}$.

Feltételezzük, hogy *folytonos idejű rendszer dinamikája* egy

$$\dot{x}(t) = f(t, x(t), u(t)), \qquad t \in \mathcal{I} \subset \mathbb{R} \tag{1.1}$$

közönséges differenciálegyenlet rendszerrel, *diszkrét idejű rendszer dinamikája* pedig egy

$$x(t+1) = f(t, x(t), u(t)), \qquad t \in \mathcal{I} \subset \mathbb{Z} \tag{1.2}$$

differenciaegyenlet rendszerrel adható meg, ahol

$$f : \mathcal{I} \times \mathcal{X} \times \mathcal{U} \longrightarrow \mathbb{R}^n$$

folytonos függvény (az (1.1) esetében a második (vektor)változójában folytonosan differenciálható). Feltételezzük továbbá, hogy az output az

$$y(t) = h(t, x(t), u(t))$$

függvénnyel írható le, ahol $h : \mathcal{I} \times \mathcal{X} \times \mathcal{U} \longrightarrow \mathbb{R}^p$.

Felhívjuk a figyelmet arra, hogy az (1.1), illetve az (1.2) voltaképpen egyenletrendszerek egy seregét jelenti: attól függően, hogy milyen $u(t)$ értéket helyettesítünk a jobb oldalon álló $f(t, x(t), .)$ kifejezésben a pont helyére, különböző differenciál-, illetve differenciaegyenleteket kapunk. Így ezen egyenlet esetén mindig valamilyen konkrét input függvényhez tartozó megoldásról beszélünk.

### Megengedett irányítások $\Delta$ osztálya

A valóságos objektumok esetén a vezérlési célú beavatkozás lehetőségei nem korlátlanok. Ez a korlát részben a vezérlés értékére, részben a vezérlés változtatására vonatkozik. A vezérlés lehetséges értékeinek halmaza az $\mathcal{U} \subset \mathbb{R}^m$, ami a vezérléselméletben gyakran korlátos és zárt halmaz, tehát a felhasználható vezérlésre az egyik kikötés az, hogy

$$u(t) \in \mathcal{U}$$

teljesüljön.

Ezenkívül meg kell mondanunk, hogy az $u(.)$ *vezérlési függvény* milyen függvényosztályba tartozzék: lehet a szakaszonként konstans, szakaszonként folytonos, mérhető, folytonos és szakaszonként folytonosan differenciálható, stb. függvények osztálya.

Ha jelezni szeretnénk, hogy milyen típusú függvénykapcsolat megengedett, akkor használni fogjuk az alábbi jelöléseket.

a) Adott $L > 0$ állandó esetén $\Delta^L$ azon függvények osztálya, amelyek az egész értelmezési tartományukon Lipschitz feltételnek tesznek eleget:

$$\|u(t) - u(s)\| \leq L\,|t - s|\,.$$

b) Adott $r \geq 0$ egész szám esetén $\Delta^r$ azon függvények osztálya, amelyek szakaszonként konstansok, és a szakadási helyek maximális száma $r$.

c) $\Delta^m$ jelöli a mérhető függvényekből álló megengedett vezérlések halmazát (a mérhető függvények definícióját lásd a Függelékben).

Ha hangsúlyozni akarjuk, hogy mi a vezérlési függvény értelmezési intervalluma, akkor használni fogjuk a $\Delta(t_0, t_1)$ jelölést. Bizonyos esetekben különböző intervallumokon értelmezett irányításokat is meg kell engednünk (változó időtartam melletti feladatok); ilyenkor általában a

$$\Delta = \bigcup_{t_1 \geq t_0} \Delta(t_0, t_1)$$

függvényosztályt tekintjük a megengedett vezérlések osztályának.

A vezérlés megadásának két típusát különböztetjük meg:

(i) program szerinti vezérlés, vagy másként, vezérlés nyílt hurokkal (open - loop control);

(ii) visszacsatolással megadott vezérlés, vagy másként, vezérlés zárt hurokkal (closed - loop, vagy feedback control).

Az (i) esetben a vezérlést előzetes számítások, vagy program alapján megadjuk minden egyes $t$ időpontban, $u : t \to u(t)$ alakban az idő függvényeként. Az (ii) esetben viszont a vezérlést a rendszer állapotának (és az időnek) a függvényeként határozzuk meg, más szóval megadunk egy $\phi : (t, x) \in \mathcal{I} \times \mathcal{X} \to \phi(t, x) \in \mathcal{U}$ függvényt, és vezérlésként a $t$ időpillanatban az $u(t) = \phi(t, x(t))$ vektort alkalmazzuk. A visszacsatolással megadott vezérlésnek nagy előnye, hogy ha - például valamilyen külső hatásra - a rendszer trajektóriája eltér a „tervezettől”, akkor ez a függvény „automatikusan” ehhez az állapothoz határozza meg a megfelelő vezérlési vektort.

### A rendszer kezdő- és végállapota

Tegyük fel, hogy adott a $t_0$ kezdeti időpont és a *megengedett kezdőállapotok* $\mathcal{M}_0 \subset \mathbb{R}^n$ *halmaza.* A vezérlés célja, hogy az objektumot úgy irányítsuk, hogy az valamilyen $t_1$ időpillanatban eljusson a *megengedett végállapotok* $\mathcal{M}_1 \subset \mathbb{R}^n$ (szintén adott) *halmazá*ba. Ez alatt azt értjük, hogy meg kell adnunk egy olyan megengedett $u(.) \in \Delta(t_0, t_1)$ vezérlést, amely esetén az (1.1), illetve (1.2) rendszer egy $u(.)$-hoz tartozó $x(.)$ megoldására teljesülnek az

$$x(t_0) \in \mathcal{M}_0 \qquad \text{és} \qquad x(t_1) \in \mathcal{M}_1$$

peremfeltételek. Az egyértelműség kedvéért gyakran fel kell tüntetnünk, hogy egy szóban forgó megoldás melyik vezérléshez és milyen kezdeti feltételhez tartozik. Ilyenkor élni fogunk az $x\,(.; t_0, x_0, u)$ jelöléssel, ami azon differenciál- illetve differenciaegyenlet megoldását jelenti, amelyet az (1.1)-ből, illetve (1.2)-ből az $u$ megengedett vezérlés behelyettesítésével kaptunk, és amely kielégíti az $x\,(t_0; t_0, x_0, u) = x_0$ kezdeti feltételt. Egy $(\xi\,(.)\,, u\,(.))$ *folyamat* alatt egy olyan függvénypárt értünk, amelyek egy közös $[t_0, t_1)$ intervallumon vannak értelmezve, az $u \in \Delta\,(t_0, t_1)$ és $\xi\,(t) = x\,(t; t_0, x_0, u)\,,$ ha $t \in [t_0, t_1)\,.$

**Minőségi kritérium, vagy célfüggvény**

A kitűzött célt megvalósító (általában végtelen sok) vezérlés között úgy teszünk különbséget, hogy minden $(\xi(.), u(.))$ folyamathoz hozzárendelünk egy valós számot:

$$J : (\xi(.), u(.)) \to J(\xi(.), u(.)) \in \mathbb{R}.$$

Az ebben a jegyzetben tekintett legáltalánosabb célfüggvény folytonos idejű rendszerre vonatkozóan a

$$J(\xi(.), u(.)) = \int_{t_0}^{t_1} f_0(t, \xi(t), u(t))dt + G(\xi(t_1)),$$

illetve diszkrét idejű rendszerre vonatkozóan a

$$J(\xi(.), u(.)) = \sum_{t=t_0}^{t_1-1} f_0(t, \xi(t), u(t)) + G(\xi(t_1))$$

kifejezéssel adjuk meg, ahol $f_0 : \mathcal{I} \times \mathcal{X} \times \mathcal{U} \to \mathbb{R}$ és $G : \mathcal{X} \to \mathbb{R}$ adott folytonos függvények. Két folyamat közül azt tekintjük „jobbnak”, amelyhez a $J$ kisebb értéket rendel.

Megjegyezzük, hogy ha $\mathcal{M}_0 = \{x_0\}\,,$ akkor az $u(.)$ egyértelműen meghatározza az (1.1), illetve (1.2) megoldását, így a célfüggvény értékét is. Ilyenkor $J(\xi(.), u(.))$ helyett az egyszerűbb $J(u(.))$ jelölést használjuk.

Ha $G = 0,\ f_0 \neq 0$, akkor *Lagrange feladat*ról, ha $G \neq 0,\ f_0 = 0$, akkor *Mayer feladat*ról, ha pedig $G \neq 0,\ f_0 \neq 0$, akkor *Bolza feladat*ról szokás beszélni.

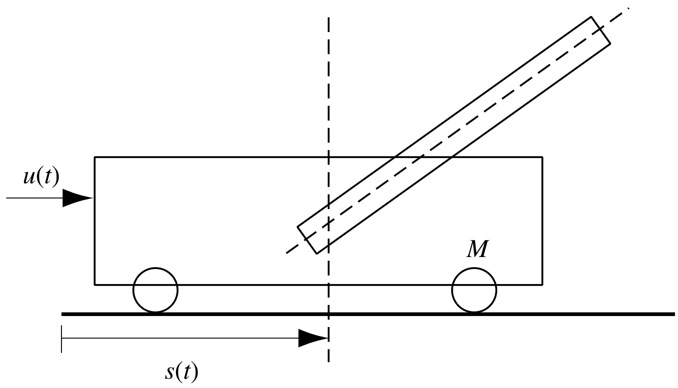
Ezek után megfogalmazhatjuk az *optimális irányítások elméletének alapfeladatát*:

*Keresendő egy olyan $u^* \in \Delta$ megengedett vezérlés és a neki megfelelő $\xi^*$ trajektória,ami $\mathcal{M}_0$-ból $\mathcal{M}_1$-be vezet olyan módon, hogy a $J$ a lehető legkisebb értéket veszi fel:*

$$J(\xi^*(.), u^*(.)) = \min \{J(\xi(.), u(.)) : \quad \xi(t) = x(t, t_0, x_0, u) \quad \xi(t_0) \in \mathcal{M}_0, \quad \xi(t_1) \in \mathcal{M}_1, \quad u(.) \in \Delta\,(t_0, t_1)\}$$

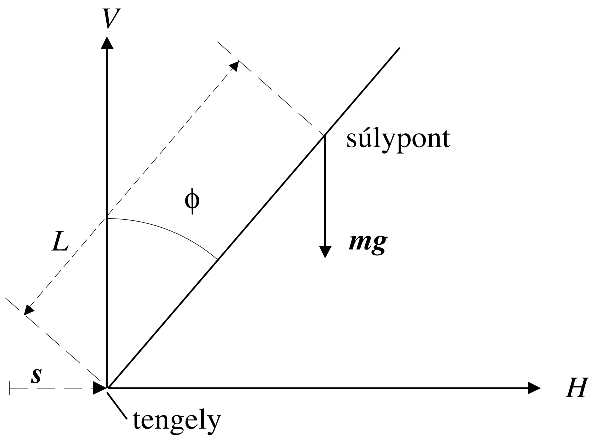
## 1.2. Példák

### 1.2.1. Fordított inga




1.1. ábra. Fordított inga

Tekintsük az 1.1. ábrán látható fordított ingát. Az inga tengelye egy kis kocsira van erősítve, amelyet vízszintes irányban egy olyan motor mozgat, amely a $t$ időpillanatban $u(t)$ erővel hat a kocsira. Legyen a kocsi tömege $M$, az inga tömege $m$, az inga súlypontjának a tengelytől mért távolsága $L$, a súlypontra vonatkoztatott tehetetlenségi nyomatéka pedig $\Theta$. A tengely vizszintes elmozdulását a $t$ időpillanatban jelöljük $s(t)$-vel, az inga függőleges tengelytől való elhajlását pedig $\phi(t)$-vel. Ebben a rendszerben a következő erők lépnek fel: az $mg$ nehézségi erő az inga súlypontjában, egy $H(t)$ vízszintes irányú, és egy $V(t)$ függőleges irányú reakcióerő az inga tengelyénél és a motor által kifejtett $u(t)$ erő, amit irányítási paraméternek fogunk tekinteni. (lásd 1.2 ábra)




1.2. ábra. Erők és elmozdulások a fordított ingán

A rendszer mozgását az alábbi differenciálegyenlet rendszer írja le:

$$m\frac{d^2}{dt^2}(s + L\sin\phi) = H,$$

$$m\frac{d^2}{dt^2}(L\cos\phi) = V - mg,$$

$$\Theta\frac{d^2}{dt^2}\phi = LV\sin\phi - LH\cos\phi,$$

$$M\frac{d^2}{dt^2}s = u - H - \mu\frac{d}{dt}s,$$

ahol $\mu$ a súrlódási együttható (a súrlódást csak a kocsi mozgásánál vesszük figyelembe). Ha az inga hossza $2L$, és a tömegeloszlása egyenletes, akkor a súlypontra vonatkozó tehetetlenségi nyomatéka

$$\Theta = \frac{m}{2L}\int_{-L}^{L} s^2 ds = \frac{mL^2}{3}.$$

A kijelölt differenciálások elvégzése után a $V$ és $H$ kiküszöbölhető a fenti egyenletekből. Ekkor a $\Theta$ fenti értékét behelyettesítve az alábbi egyenletrendszert kapjuk:

$$\frac{4L}{3}\ddot{\phi} - g\sin\phi + \ddot{s}\cos\phi = 0,$$

$$(M + m)\ddot{s} + mL(\ddot{\phi}\cos\phi - \dot{\phi}^2\sin\phi) + \mu\dot{s} = u.$$

Innen $(\ddot{\phi}, \ddot{s})$ kifejezhető az alábbi módon:

$$\ddot{\phi} = \frac{(M+m)\, g \sin\phi - \cos\phi \left( u - \mu\dot{s} + mL\dot{\phi}^2 \sin\phi \right)}{\frac{4L}{3}(M+m) - mL(\cos\phi)^2},$$

$$\ddot{s} = \frac{\frac{4L}{3}\left( u - \mu\dot{s} + mL\dot{\phi}^2 \sin\phi \right) - mLg\cos\phi\sin\phi}{\frac{4L}{3}(M+m) - mL(\cos\phi)^2}.$$

Az $x = (\phi, \dot{\phi}, s, \dot{s})^T$ új ismeretlen vektor függvény bevezetésével a fordított inga mozgását egy

$$\dot{x} = f(x, u)$$

alakú egyenletrendszerrel írhatjuk le.

Tegyük fel, hogy az inga tengelyének $s(t)$ elmozdulását és az ingának a függőleges helyzettől való $\phi(t)$ elfordulását tudjuk mérni. Ekkor a megfigyelést, vagy outputot jelentő $y$ függvényre $y_1 = s, \qquad y_2 = \phi$.

### 1.2.2. Merev test szögsebessége

Tekintsünk egy merev testet, amely a tehetetlenségi térben súlypontja körül forog. Válasszuk a test fő tehetetlenségi tengelyeit koordináta tengelyeknek, és jelöljük $\omega_1,\ \omega_2,\ \omega_3$-mal a test szögsebességének megfelelő komponenseit, $I_1,\ I_2,\ I_3$-mal pedig a test fő tehetetlenségi momentumait. Feltesszük, hogy a test vezérlése érdekében forgatónyomatékkal tudunk rá hatni: $u_1,\ u_2,\ u_3$-mal. A test mozgását az $\mathbb{R}^3$ fázistérben az Euler egyenletek írják le, tehát

$$\begin{aligned} I_1\dot{\omega}_1(t) &= (I_2 - I_3)\omega_2(t)\omega_3(t) + b_1u_1(t), \\ I_2\dot{\omega}_2(t) &= (I_3 - I_1)\omega_3(t)\omega_1(t) + b_2u_2(t), \\ I_3\dot{\omega}_3(t) &= (I_1 - I_2)\omega_1(t)\omega_2(t) + b_3u_3(t), \end{aligned} \tag{1.3}$$

ahol $b_1,\ b_2,\ b_3$ pozitív konstansok.

Attól függően, hogy a vezérlési hatást milyen módon érjük el, a megengedett irányítások értékére különböző típusú korlátozás írható elő. Például feltehetjük, hogy a következő két eset valamelyike teljesül.

1. Feltesszük, hogy mindhárom tengelyhez tartozik egy-egy „hajtóműpár”, amelyek egymástól függetlenül képesek korlátos nagyságú forgatónyomaték kifejtésére. Normalizálással elérhetjük, hogy ez a korlát 1 legyen, vagyis azt kötjük ki, hogy $|\ u_i(t)\ | \leq 1$ legyen $i = 1, 2, 3$-ra. Ekkor $\mathcal{U} = \{u \in \mathbb{R}^3 : |u_i|\ \leq 1\}$.

2. Feltesszük, hogy a test egyetlen „hajtómű-párral” van felszerelve, amely azonban a testhez képest tetszőleges szögbe beállítható. Ekkor az irányításra az $\| u(t) \|^2 = u_1^2(t) + u_2^2(t) + u_3^2(t) \leq 1$ korlátozást tehetjük, tehát ekkor az $\mathcal{U}$ az $\mathbb{R}^3$ origó körüli egységgömbje.

Tekintsük most a vezérlésre vonatkozóan az 1. esetet, és határozzunk meg olyan vezérlést, amely véges idő alatt a test szögsebességét megadott nagyság alá csökkenti. Közelebbről, ezt a *vezérlést állapot visszacsatolás*sal szeretnénk meghatározni.

Tudjuk, hogy a rendszer kinetikus energiája

$$E(t) = \frac{1}{2}(I_1\omega_1^2(t) + I_2\omega_2^2(t) + I_3\omega_3^2(t))$$

alakban adható meg. Vegyük ennek a deriváltját az (1.3) egyenlet $\omega(.)$ megoldása mentén:

$$\begin{aligned}\dot{E}(t) &= I_1\omega_1(t)\dot{\omega}_1(t) + I_2\omega_2(t)\dot{\omega}_2(t) + I_3\omega_3(t)\dot{\omega}_3(t) = \\ &= b_1\omega_1(t)u_1(t) + b_2\omega_2(t)u_2(t) + b_3\omega_3(t)u_3(t).\end{aligned}$$

Határozzuk meg az irányítás $u_i(t)$ komponensét az

$$u_i(t) = -\frac{1}{2}\frac{\alpha}{b_i}I_i\omega_i(t), \qquad i = 1, 2, 3$$

egyenlőséggel, ahol az $\alpha$ pozitív számot úgy választjuk, hogy mindazon $\omega_i$(t) értékekre, amelyek a mozgás során felléphetnek, teljesüljön - az előírástól függően - az $| u_i(t) | \leq 1$ vagy az $\|u(t)\| \leq 1$ feltétel. Ekkor

$$\dot{E}(t) = -\alpha E(t),$$

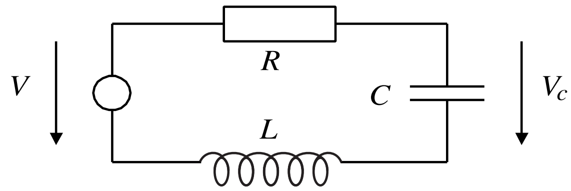
amelynek az általános megoldása $E(t) = E_0 e^{-\alpha t}$ alakban adható meg, tehát $E(t) \to 0$, ha $t \to \infty$. Ez csak úgy lehetséges, ha $\omega_i(t) \to 0$, $t \to 0$ esetén, vagyis a szögsebesség nagysága véges idő alatt a megadott érték alá csökken.

### 1.2.3. Elektromos RLC áramkör

Tekintsük az ábrán látható áramkört, ami $R$ értékű ellenállásból, $C$ kapacitású kondenzátorból és $L$ induktivitású tekercsből áll. Az áramkör egy $V(t)$ feszültségű feszültségforrásra van kapcsolva. Tegyük fel, hogy a kondenzátoron eső $V_C(t)$ feszültséget mérjük.

Ha $V_R$, $V_C$, $V_L$ jelöli az ellenálláson, a kondenzátoron és a tekercsen leeső feszültséget, akkor

$$V_R = RI, \qquad I = C\frac{dV_C}{dt}, \qquad V_L = L\frac{dI}{dt},$$




1.3. ábra. RLC kör

ahol $I$ az áramerősséget jelöli. Kirchoff törvényei szerint $V = V_R + V_C + V_L$, ezért

$$\frac{dI}{dt} = \frac{1}{L}(V - RI - V_C),$$
$$\frac{dV_C}{dt} = \frac{1}{C}I.$$

Bevezetve az $u = V, \qquad y = V_C$ és

$$x = \begin{pmatrix} I \\ V_C \end{pmatrix}, \qquad A = \begin{pmatrix} -\frac{R}{L} & -\frac{1}{L} \\ \frac{1}{C} & 0 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} \frac{1}{L} \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad C = (0, 1)$$

jelöléseket, az $RLC$ körnek, mint irányítási megfigyelési rendszernek az alábbi matematikai modelljét kapjuk:

$$\dot{x} = Ax + Bu, \qquad y = Cx.$$

### 1.2.4. A nemzetgazdaság egy egyszerű modellje

Vegyük egy ország gazdaságának alábbi, nagyon erősen leegyszerűsített modelljét. Jelölje a $k$-dik évben a nemzeti jövedelmet $y(k)$, a fogyasztási kiadásokat $c\,(k)$, a beruházások értékét $i(k)$, a kormányzati kiadásokat pedig $u\,(k)$. A modell felírásához az alábbi feltevéseket tesszük:

- $y(k) = c(k) + i(k) + u(k)$;
- a fogyasztási kiadások az előző év nemzeti jövedelmének fix hányadával egyenlők: $c(k) = my(k-1)$, ahol $0 < m \leq 1$ rögzített;
- a $k$-dik év beruházása arányos a fogyasztási kiadásoknak a $(k-1)$-dik évről a $k$-dik évre történt megváltozásával: $i(k) = \mu(c(k) - c(k-1))$, ahol $\mu$ egy pozitív arányossági tényező.

A nemzetgazdaság fejlődése ennek alapján az

$$i(k+1) - \mu c(k+1) = -\mu c(k),$$

$$c\,(k+1) = m(i(k) - \mu c(k)) + m(1+\mu)c(k) + mu(k)$$

egyenletekkel írható le. Ha bevezetjük az $x(k) = (x_1(k), x_2(k))^T$ állapotvektort az $x_1(k) = i(k) - \mu c(k)$ és $x_2(k) = c(k)$ definícióval, akkor a rendszer állapotegyenlete

$$\begin{pmatrix} x_1(k+1) \\ x_2(k+1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -\mu \\ m & m(1+\mu) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ m \end{pmatrix} u(k),$$
$$k \in \{k_0, k_0+1, ...\} \subset \mathbb{Z}$$

összefüggésekkel, output egyenlete pedig az

$$y(k) = \begin{pmatrix} 1 & 1+\mu \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \end{pmatrix} + u(k)$$

összefüggéssel adható meg.

Látjuk, hogy a modell jelen esetben egy állandó együtthatójú, lineáris, diszkrét-idejű rendszer.

### 1.2.5. Egyszerűsített készletgazdálkodási modell

Az alábbiakban egy olyan modellt ismertetünk, amelyben az input a „környezetnek" a döntéshozataltól független hatása, míg a döntéshozatal a rendszer bizonyos paramétereit befolyásolhatja.

A termelők az áruikat általában a raktáron keresztül értékesítik, ami egy puffer szerepét tölti be a termelés és a jelentkező igények között.

Jelölje a $t$-dik időintervallumban a készlet szintjét $I(t)$ a termelés szintjét $P(t)$, a fogyasztás szintjét $C(t)$, a fogyasztási szint egy számított értékét $A(t)$ és a megkívánt készletszintet $D(t)$. Ekkor

$$I(t) = I(t-1) + P(t) - C(t). \tag{1.4}$$

Legyen

$$A(t) = \left(1 - \frac{1}{T_1}\right) A(t-1) + \frac{1}{T_1} C(t), \tag{1.5}$$

ahol az $\frac{1}{T_1}$ „simító" konstans a múltbeli információk fontosságát fejezi ki. A megkívánt készletszint legyen arányos a simított fogyasztással:

$$D(t) = KA(t-1), \tag{1.6}$$

ahol a $K$ konstans egy döntési paraméter, amely azt fejezi ki, hogy hány időintervallumra elegendő készlet van a raktáron az előző időintervallum simított fogyasztásához viszonyítva. Végül a termelési szintet megszabó összefüggés legyen

$$P(t) = \frac{D(t) - I(t-1)}{T_2} + A(t-1), \tag{1.7}$$

ahol $T_2$ konstans azt fejezi ki, hogy hány időintervallum alatt áll be a készlet a megkívánt szintre az adott simított fogyasztási érték esetén. Az (1.6) és (1.7) összefüggéseket (1.4)-be helyettesítve az

$$\begin{aligned} I(t) &= I\,(t-1) + \frac{KA\,(t-1) - I\,(t-1)}{T_2} + A\,(t-1) - C\,(t) = \\ &= \left(1 - \frac{1}{T_2}\right) I(t-1) + \left(\frac{K}{T_2} + 1\right) A(t-1) - C(t) \end{aligned} \tag{1.8}$$

egyenletet kapjuk.

Bevezetve az $x_1(t) = I(t), \quad x_2(t) = A(t), \quad u(t-1) = C(t), \quad y(t) = I(t)$ jelöléseket, az (1.8), (1.5) egyenletek a standard alakú

$$\begin{aligned} x(t) &= Ax(t-1) + Bu(t-1) \\ y(t-1) &= Cx(t-1) \end{aligned}$$

input-output rendszert adják, ahol

$$A = \begin{pmatrix} 1 - \frac{1}{T_2} & \frac{K}{T_2} + 1 \\ 0 & 1 - \frac{1}{T_1} \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -1 \\ \frac{1}{T_1} \end{pmatrix}, \quad C = (1, 0).$$

Vegyük észre, hogy ebben a modellben az (1.4) egyenlet egy egyszerű megmaradási törvényt fejez ki, míg az (1.5), (1.6), és (1.7) összefüggések - beleértve a bennük szereplő konstansokat is - döntés eredményei.

### 1.2.6. Zárt gazdaság egy modellje

Az alábbi összefüggések egy zárt gazdaság diszkrét időpontokban megadott fejlődését írják le:

$$\begin{aligned} Y(t+1) &= Y(t) + \alpha(C(Y(t)) + I(Y(t), R(t), K(t)) + \\ &\qquad + P^{-1}(t)G(t) - Y(t)), && (1.9) \\ R(t+1) &= R(t) + \beta(L(Y(t), R(t)) - P^{-1}(t)M(t)), && (1.10) \\ K(t+1) &= K(t) + I(Y(t), R(t), K(t)), && (1.11) \\ Y(t) &= F(N(t), K(t)), && (1.12) \\ N(t) &= H(W(t), P(t), K(t)), && (1.13) \end{aligned}$$

Ebben a modellben a benne szereplő mennyiségeknek a következő jelentést tulajdonítjuk:

$Y$: output
$C$: fogyasztás
$I$: beruházás
$R$: nominális kamatláb
$L$: pénzigény
$K$: tőkeállomány
$P$: árindex
$G$: nominális kormányzati kiadás
$M$: nominális pénzállomány
$N$: munkaerő igény
$W$: nominális bérszínvonal
$\alpha, \beta$: pozitív konstansok.

Bizonyos gazdasági jellemzők időbeli változását leíró összefüggésekből akkor kapunk egy irányítási - megfigyelési modellt, ha megkülönböztetjük az irányítási-, az állapot- és az output változókat. (Ebben a szövegkörnyezetben szokták az irányítási változókat eszközváltozóknak, az output változókat pedig célváltozóknak is nevezni). Tekintsük a $G$-t és az $M$-t irányítási változóknak, az $Y$-t és a $P$-t célváltozóknak. Tegyük fel, hogy $W$ egy adott függvény. Legyen $Y$, $R$ és $K$ az állapotváltozó. A standard alak megadásához át kell alakítanunk az (1.9) - (1.13) egyenleteket. Jelölje $(\overline{Y}, \overline{R}, \overline{K}, \overline{G}, \overline{M}, \overline{N}, \overline{P})$ az (1.9) - (1.13) egy partikuláris egyensúlyi megoldását. Ekkor $\overline{N} = H(\overline{W}, \overline{P}, \overline{K})$ teljesül, és ha

$$\left.\frac{\partial H}{\partial P}\right|_{\overline{W},\overline{P},\overline{K}} \neq 0,$$

akkor az implicitfüggvény tétel értelmében $P$ lokálisan kifejezhető az $N, K$, és $W$ függvényeként, mondjuk

$$P = \widetilde{H}(W, N, K)$$

alakban, amelyre $\overline{P} = \widetilde{H}(\overline{W}, \overline{N}, \overline{K})$. Hasonlóan az

$$Y = F(N, K)$$

összefüggésből, amely fennáll az $(\overline{Y}, \overline{N}, \overline{K})$ értékekre, kifejezhető lokálisan az $N$ változó, $N = \widetilde{F}(Y, K)$ alakban, feltéve, hogy

$$\left.\frac{\partial F}{\partial N}\right|_{(\overline{N},\overline{K})} \neq 0.$$

így

$$P = \widetilde{H}(W, \widetilde{F}(Y, K), K).$$

Ezt behelyettesítve az (1.9) - (1.11) egyenletekbe, az

$$\begin{cases} Y(t+1) = f_1(W(t), Y(t), R(t), K(t), G(t)) \\ R(t+1) = f_2(W(t), Y(t), R(t), K(t), M(t)) \\ K(t+1) = f_3(Y(t), R(t), K(t)) \end{cases} \tag{1.14}$$

$$\begin{cases} Y(t) = Y(t) \\ P(t) = \widetilde{H}(W(t), \widetilde{F}(Y(t), K(t)), K(t)) \end{cases} \tag{1.15}$$

modellhez jutunk, amely a fenti egyensúlyi helyzet egy környezetében írja le a vizsgált folyamatot. Vegyük észre, hogy ebben az esetben az állapottér nem lehet a teljes $\mathbb{R}^3$, hanem csak annak egy (szigorú) részhalmaza. Az $f_1, f_2, f_3$ függvények definíciójából az is világos, hogy (1.14), (1.15) „lényegesen” nemlineáris, ami akkor sem kerülhető el, ha a $C, I, L$ függvényeket nagyon egyszerűnek tételezzük fel.

A jegyzetben különböző témakörök kapcsán ezekre a példákra részben még visszatérünk.

## 1.3. Statikus optimalizálás

A bevezető fejezet zárásaként olyan optimalizálási problémákkal foglalkozunk, amelyekben az idő nem játszik szerepet, a célfüggvény egy $m$-változós valós értékű függvény, és a függvény minimumát kell meghatározni az $\mathbb{R}^m$ egy megadott részhalmazán. A témakör kitűnő és részletes ismertetését az olvasó megtalálja az ehhez a ponthoz alapul szolgáló [10] és [14] hivatkozásokban.

> *A feladat megfogalmazása:*
>
> *Legyen $U \subset \mathbb{R}^m$ adott halmaz, $F : U \to \mathbb{R}$ adott függvény. Keresendő(k) az $U$ halmaznak azon $u^*$ eleme(i), amely(ek)re*
>
> $$F(u^*) = \min_{u \in U} F(u).$$

Ha egy $W : U \to \mathbb{R}$ függvény maximumát kell meghatározni, akkor azt az $F(u) = -W(u)$ definícióval a minimalizálási feladatra vezethetjük vissza.

1.1. DEFINÍCIÓ. Azt mondjuk, hogy az $u^* \in U$ pont az $F$ függvény globális minimuma, ha

$$F(u^*) \leq F(u), \quad \forall u \in U\text{-ra.}$$

A feladat megoldhatóságára elegendő feltételt ad a korábbi tanulmányaink során megismert

1.1. TÉTEL. (WEIERSTRASS TÉTEL). *Ha $U \subset \mathbb{R}^m$ korlátos és zárt, és az $F$ függvény folytonos az $U$-n, akkor létezik olyan $u^*, u^{**} \in U$, hogy*

$$F(u^*) \leq F(u) \leq F(u^{**}), \quad \forall u \in U\text{-ra,}$$

*vagyis $F$ felveszi minimumát és maximumát az $U$-n.*

Ez a „létezési" tétel természetesen semmiféle felvilágosítást nem ad arról, hogy a minimumot (illetve maximumot) hogyan lehet megtalálni. Globális minimum meghatározására a lokális minimumok kiszámításán keresztül vezet az út, ezért a továbbiakban olyan feltételekkel foglalkozunk, amelyek a lokális minimumok meghatározását teszik lehetővé.

1.2. DEFINÍCIÓ. Azt mondjuk, hogy az $u^* \in U$ pont az $F$ függvény lokális minimuma, ha létezik olyan $\delta$ sugarú, $u^*$ középpontú $B_\delta(u^*)$ gömb, hogy

$$F(u^*) \leq F(u), \quad \forall u \in U \cap \mathcal{B}_\delta(u^*)\text{-ra.}$$

Ha $U = \mathbb{R}^m$, (illetve, ha $U$ nyílt halmaz), akkor lényegében korlátozás nélküli optimalizálásról van szó, és a korábbi tanulmányokból ismert szükséges, illetve elégséges feltételeket használhatjuk (kétváltozós esetre lásd pl. [13] 310-320. oldal, $n$-változós esetre lásd pl. [2] 67-74. oldal). A továbbiakban feltesszük, hogy az $U$ halmaz a következő alakban adott:

$$U = \{u \in \mathbb{R}^m : h_j(u) = 0, \ \ j = 1, ..., p, \quad g_i(u) \geq 0, \quad i = 1, ..., q\}. \tag{1.16}$$

Megjegyezzük, hogy $q = 0$ (illetve $p = 0$) esetén úgy tekintjük, hogy az egyenlőtlenség (illetve egyenlőség) típusú feltételek hiányoznak. Világos, hogy bármely egyenlőség típusú feltétel helyettesíthető 2 darab egyenlőtlenség típusúval:

$$h_{j_0}(u) = 0 \Leftrightarrow g_{i_1}(u) = h_{j_0}(u) \geq 0 \text{ és } g_{i_2}(u) = -h_{j_0}(u) \geq 0.$$

így elegendő volna csak azt az esetet vizsgálni, amikor az $U$-t meghatározó feltételek mind egyenlőtlenség típusúak (formálisan $p = 0$ eset). Minthogy azonban gyakran előfordul, hogy csak egyenlőség típusú feltételek szerepelnek a feladatban, megtartjuk a fenti leírást. A továbbiakban egy tetszőleges $m$-változós differenciálható $f$ függvény gradiens vektorára a

$$\frac{\partial f}{\partial u} = \left(\frac{\partial f}{\partial u_1}, ..., \frac{\partial f}{\partial u_m}\right)^T$$

jelölést használjuk.

Ahhoz, hogy az optimum szükséges feltételét kimondhassuk, szükségünk lesz egy regularitási feltételre, amelyet a gyakorlati ellenőrizhetőség szempontját figyelembe véve az alábbi módon fogalmazunk meg.

1.3. Definíció. Tegyük fel, hogy az (1.16)-ban szereplő $h_j$ és $g_i$ függvények folytonosan differenciálhatók. Azt mondjuk, hogy a regularitási feltétel teljesül az $u_0 \in U$ pontban, ha a

$$\begin{aligned} &\frac{\partial h_j}{\partial u}(u_0), \quad j = 1, ..., p, \\ &\frac{\partial g_i}{\partial u}(u_0), \quad i \in \mathcal{I}(u_0) = \{i : g_i(u_0) = 0, \ i = 1, ..., m\} \end{aligned}$$

vektorok lineárisan függetlenek.

Itt $\mathcal{I}(u_0)$ azokat az $i$ indexeket tartalmazza, amelyekre $g_i(u_0) \geq 0$ feltétel egyenlőséggel teljesül. Ilyenkor azt mondjuk, hogy az $i$-dik feltétel aktív az $u_0$-ban. Ha pedig $g_i(u_0) > 0$, akkor az $i$-dik feltételt inaktívnak nevezzük.

Vezessük be a kitűzött feladat *Lagrange-függvény*ét az

$$L(u, \mu, \lambda) = F(u) + \sum_{j=1}^{p} \mu_j h_j(u) - \sum_{i=1}^{q} \lambda_i g_i(u), \quad u \in \mathbb{R}^m, \ \ \mu \in \mathbb{R}^p, \ \ \lambda \in \mathbb{R}^q$$

definícióval. Vegyük észre, hogy itt az eredeti $F$ függvény $m$ darab változója mellett még a korlátozó feltételek számának megfelelő $p + q$ darab új változót vezettünk be. Ezeket a $\mu_j$ és $\lambda_i$ változókat szokás *Lagrange-multiplikátorok*nak nevezni.

1.2. TÉTEL. *Tegyük fel, hogy a feladat kitűzésében szereplő $F$, $h_j$, $j = 1, ..., p$ és $g_i$, $i = 1, .., q$ függvények folytonosan differenciálhatók, $u^* \in U$ az $U$ halmaz reguláris pontja és az $F$ függvény lokális minimuma. Ekkor létezik olyan $\mu^* \in R^p$ és $\lambda^* \in R^q$, hogy*

$$\frac{\partial L}{\partial u}(u^*, \mu^*, \lambda^*) = 0 \tag{1.17}$$

$$\lambda_i^* \geq 0 \tag{1.18}$$

$$\lambda_i^* g_i^*(u^*) = 0, \quad i = 1, ..., q \tag{1.19}$$

*feltételek teljesülnek.*

A tétel bizonyítása megtalálható [10]-ben.

A feltételek szemléletes geometriai tartalmára nézzünk két speciális esetet.

1. Eset. Tegyük fel, hogy $p = 1$, $q = 0$ (vagyis egyetlen egyenlőség típusú feltétel adott). Ekkor az (1.18) és (1.19) feltételek nem szerepelnek, az (1.17) feltétel pedig

$$\frac{\partial L}{\partial u}(u^*, \mu^*, \lambda^*) = \frac{\partial F}{\partial u}(u^*) + \mu_1^* \frac{\partial h_1}{\partial u}(u^*) = 0$$

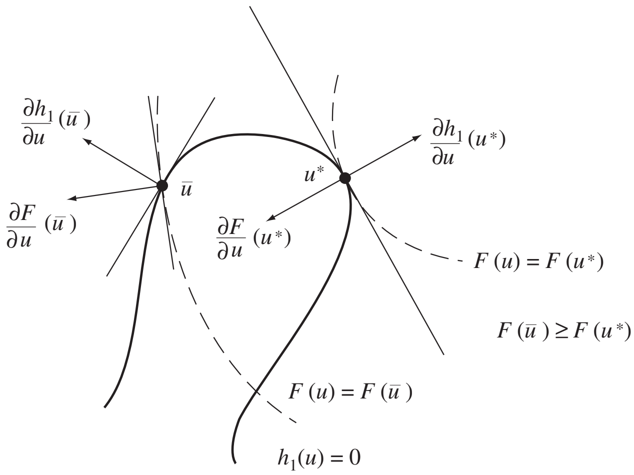
alakban adható meg, ami azt fejezi ki, hogy az $F$ függvény gradiense merőleges a $h_1(u) = 0$ felület $u^*$-hoz tartozó érintősíkjára (lásd az 1.4. ábrát).

2. Eset. Tegyük fel, hogy $p = 0$, $q = 2$ (vagyis $U$-t 2 db egyenlőtlenség típusú feltétel határozza meg). Ekkor az (1.17) feltétel

$$\frac{\partial L}{\partial u}(u^*, \mu^*, \lambda^*) = \frac{\partial F}{\partial u}(u^*) - \lambda_1^* \frac{\partial g_1}{\partial u}(u^*) - \lambda_2^* \frac{\partial g_2}{\partial u}(u^*) = 0$$

alakban írható fel. Az (1.19) feltételből az következik, hogy ha valamelyik $i$-re $g_i(u^*) > 0$ (vagyis ez a feltétel inaktív), akkor a megfelelő $\lambda_i^* = 0$. így, ha például csak a $g_1$ által meghatározott feltétel aktív, akkor az $F$ és $g_1$ függvények $u^*$-beli gradiense párhuzamos (lásd az 1.5. ábrát).

Ha viszont $u^*$-ban mindkét feltétel aktív, akkor $\frac{\partial F}{\partial u}(u^*)$ előáll a $g_1$ és a $g_2$ függvény $u^*$-beli gradiensének nemnegatív együtthatós lineáris kombinációjaként (lásd az 1.6. ábrát).




1.4. ábra. Egy egyenlőséggel adott korlátozó feltétel

Az 1.2. Tétel alkalmazására két kidolgozott példát mutatunk.

*1.1. Példa.* Legyen $m = 2$, $F(u_1, u_2) = u_1^2 + u_2^2$, $p = 1$, $q = 0$ és $h_1(u) = h(u_1, u_2) = u_1^2 + u_1 u_2 + u_2^2 - 5$. Keressük az $F$ minimumát a $h(u_1, u_2) = 0$ korlátozó feltétel mellett. (Ez geometriailag azt jelenti, hogy a $h(u_1, u_2) = 0$ ellipszis origóhoz legközelebbi pontját keressük.)

*Megoldás.* Vegyük az

$$L(u, \mu) = u_1^2 + u_2^2 + \mu(u_1^2 + u_1 u_2 + u_2^2 - 5)$$

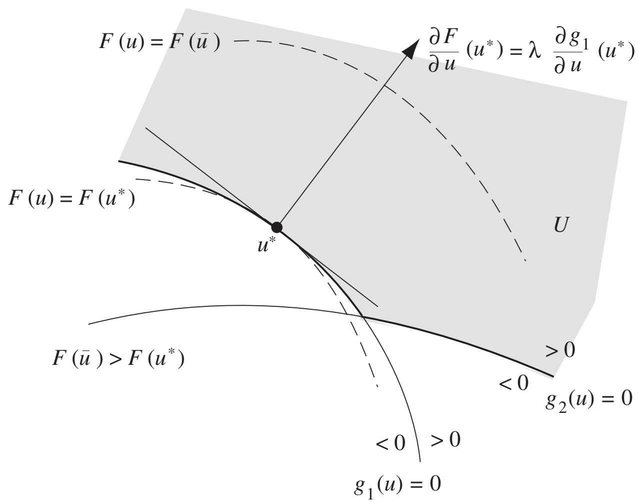
Lagrange-függvényt, és alkalmazzuk az 1.2. Tételt! Az (1.17) a

$$\frac{\partial L}{\partial u_1}(u, \mu) = 2u_1 + \mu(2u_1 + u_2) = 0 \tag{1.20}$$
$$\frac{\partial L}{\partial u_2}(u, \mu) = 2u_2 + \mu(u_1 + 2u_2) = 0 \tag{1.21}$$

egyenleteket szolgáltatja, amihez még hozzávesszük a feltételbeli egyenletet:

$$u_1^2 + u_1 u_2 + u_2^2 - 5 = 0. \tag{1.22}$$

így az $u_1, u_2, \mu$ ismeretlenekre 3 db egyenletet kapunk. Világos, hogy a $\mu = 0$ nem ad megoldást, tehát csak $\mu \neq 0$ lehet. Az (1.20)-at megszorozva $u_2$-vel, (1.21)-et pedig $u_1$-gyel, és a kapott egyenlőségeket egymásból kivonva azt kapjuk, hogy $u_1^2 = u_2^2$, vagyis $u_1 = \pm u_2$. Az $u_1 = u_2$-t behelyettesítve (1.22)-be, azt kapjuk, hogy $u_1 = \pm\sqrt{5/3}$, az $u_1 = -u_2$ esetben pedig $u_1 =$




1.5. ábra. Csak a $g_1(u)$ feltétel aktív az $u^*$-ban

$\pm\sqrt{5}$. Az $F$ lehetséges feltételes szélsőértékhelyeit az így megkapott 4 pont alkotja. Minthogy a $h(u_1, u_2) = 0$, azaz az (1.22) egyenletnek eleget tevő pontok halmaza egy ellipszis, tehát korlátos és zárt. A Weierstrass tételből (1.1. Tétel) következik, hogy az $F$ itt felveszi minimumát és maximumát. $F$ kiértékelésével megállapíthatjuk, hogy

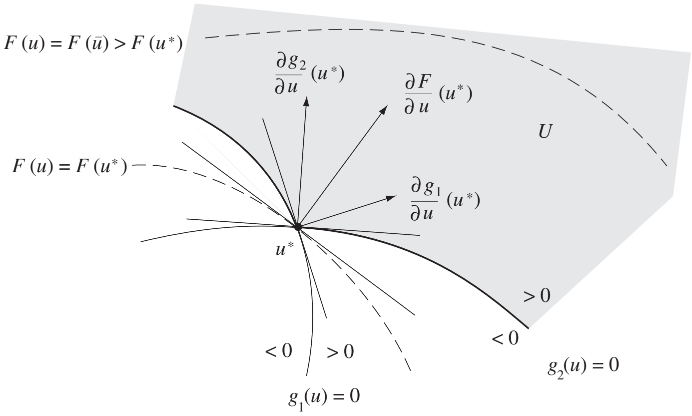
$$\left(\sqrt{\frac{5}{3}}, \sqrt{\frac{5}{3}}\right) \quad \text{és} \quad \left(-\sqrt{\frac{5}{3}}, -\sqrt{\frac{5}{3}}\right)$$

az $F$ függvény globális feltételes minimumhelyét adja $F(u^*) = 10/3$ minimális értékkel.

*1.2. Példa.* Legyen $m = 2$, $F(u_1, u_2) = u_1^2 + u_2^2$, $p = 0$, $q = 1$ és $g_1(u) = g(u_1, u_2) = u_1 + u_2 - 1$, és keressük $F$ minimumát a $g(u_1, u_2) \geq 0$ félsíkon.

*Megoldás.* Ekkor

$$L(u, \lambda) = u_1^2 + u_2^2 - \lambda(u_1 + u_2 - 1)$$

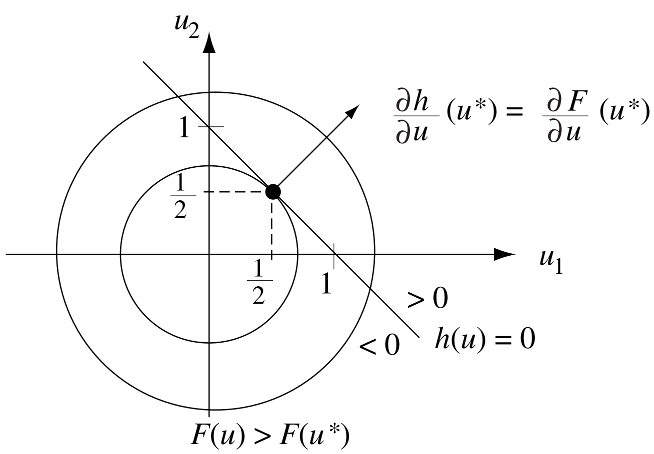



1.6. ábra. Mindkét feltétel aktív az $u^*$-ban

a feladat Lagrange függvénye, az (1.17), (1.18), illetve (1.19) feltétel pedig a

$$\frac{\partial L}{\partial u_1}(u,\lambda) = 2u_1 - \lambda = 0$$
$$\frac{\partial L}{\partial u_2}(u,\lambda) = 2u_2 - \lambda = 0$$
$$\lambda \geq 0$$
$$\lambda(u_1 + u_2 - 1) = 0$$

alakot ölti. Két esetet különböztetünk meg:




1.7. ábra. Az 1.2. példa megoldásának geometriai szemléltetése

a) A korlátozás inaktív, vagyis $g(u_1, u_2) > 0$ a minimumhelyen. Ekkor (1.19) miatt $\lambda = 0$ kellene legyen, ami azt jelentené, hogy $u_1 = u_2 = 0$, ekkor viszont $g(u_1, u_2) < 0$ volna, tehát ez nem lehetséges.

b) A korlátozás aktív, vagyis $g(u_1, u_2) = 0$ a minimumhelyen. Ekkor az első két egyenletből kiküszöbölve $\lambda$-t, azt kapjuk, hogy $u_1 = u_2$, így $u_1^* = u_2^* = 1/2$ adódik. Ekkor $\lambda^* = 1$ teljesíti az előírt feltételeket, vagyis az egyetlen lehetséges lokális minimumhely $P(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$. Geometriai szemléletből következik, hogy ez valóban feltételes minimum (lásd az 1.7. ábrát).

Bonyolultabb esetekben annak eldöntéséhez, hogy az 1.2. Tétel feltételeit kielégítő $u^*$, $\mu^*$, $\nu^*$ feltételes minimumot ad -e, szükség lehet megfelelő elégséges feltételek vizsgálatára. Ez azonban meghaladja ennek a jegyzetnek a kereteit, az érdeklődő olvasó a téma részletes ismertetését pl. [10] irodalomban találhatja meg.

## 1.4. Feladatok az 1. fejezethez

*1.1. Feladat.* írjuk fel a fordított inga irányítási megfigyelési rendszerének

$$\dot{x} = f(x, u), \qquad y = h(x, u)$$

modelljét megadó $f$ és $h$ függvényeket! Adjuk meg, hogy a modellben melyek az állapot, input, és output változók és mi a fizikai jelentésük!

*1.2. Feladat.* Tegyük fel, hogy a fordított ingánál a $\mu$ súrlódási együttható elhanyagolhatóan kicsiny. írjuk fel a modellt a súrlódás elhanyagolásával!

*1.3. Feladat.* Tegyük fel, hogy a fordított ingánál $m \ll M$. írjuk fel a modellt az inga tömegének elhanyagolásával! Mit kapunk, ha most az $x = (s, \dot{s}, s + \frac{4}{3}\phi, \dot{s} + \frac{4}{3}\dot{\phi})$ definícióval vezetünk be új ismeretlen függvényeket? Adjuk meg, hogy ebben a modellben melyek az állapot, input, és output változók és mi a fizikai jelentésük!

*1.4. Feladat.* Tömegpont mozgása gravitációs erőtérben. Egy műhold $v$ sebességgel mozog a Föld gravitációs erőterében. A műhold tömege $m_h$, a Föld tömege $m_f$. A műholdra gavitációs erőn kívül egy sugár irányú $F_r$ és egy érintő irányú $F_\varphi$ erővel lehet rá hatni. A gravitációs erő sugár irányú, a Föld felé mutat és nagysága

$$F_g = G\frac{m_f m_h}{r^2},$$

ahol $G$ a gravitációs állandó. Newton 2. törvénye alapján mutassuk meg, hogy a műhold mozgásegyenlete az $(r, \varphi)$ polárkoordináta rendszerben

$$m_h\left(\ddot{r} - r\dot{\varphi}^2\right) = F_r - G\frac{m_f m_h}{r^2}, \qquad m_h\left(2\dot{\varphi}\dot{r} + r\ddot{\varphi}\right) = F_\varphi.$$

*Útmutatás.* A sugár irányú egységvektor $a_1 = (\cos\varphi, \sin\varphi)^T$, az érintő irányú egységvektor pedig $a_2 = (-\sin\varphi, \cos\varphi)^T$. írjuk fel az $(\ddot{x}, \ddot{y})^T$ vektort az $a_1$, $a_2$ vektorok koordinátarendszerében!

*1.5. Feladat.* Válasszuk az előző feladatban szereplő műhold tömegét egységnyinek, és hozzuk a fenti mozgásegyenletet explicit alakra!

Mutassuk meg, hogy $F_r = 0$ és $F_\varphi = 0$ mellett

$$r(t) = \rho, \qquad \varphi(t) = \omega t$$

megoldása lesz a kapott egyenletrendszernek, feltéve, hogy $\rho^3\omega^2 = Gm_f$.

Válasszuk állapotváltozónak az $x_1 = r - \rho$, $x_2 = \dot{r}$, $x_3 = \rho(\varphi - \omega t)$, $x_4 = \rho(\dot{\varphi} - \omega)$, irányítási változóknak pedig az $u_1 = F_r$, $u_2 = F_\varphi$ mennyiséget, és írjuk a rendszer állapotegyenletét $\dot{x} = f(x, u)$ alakban! Mutassuk meg, hogy a kapott rendszernek az $x = 0$, $u = 0$ egyensúlyi helyzete. Mi lesz a megfigyelési függvény, ha a Föld-műhold távolságot mérjük?

*1.6. Feladat.* Oldjuk meg az alábbi feltételes minimumkeresési feladatot!

$$\begin{aligned} &F(x, y) = 3x^2 - 4xy + y^2 \\ &g_1(x, y) = y - x - 1, \quad g_2(x, y) = 1 - x, \\ &\qquad U = \{(x, y) : \quad g_1(x, y) \geq 0, \quad g_2(x, y) \geq 0\}. \end{aligned}$$

Rajzoljuk fel az $(x, y)$ koordinátarendszerben az $U$ halmazt, alkalmazzuk az 1.2. Tételt a *lehetséges* lokális feltételes minimum megkeresésére! Állapítsuk meg a *tanult* ismereteink alapján, hogy lokális feltételes minimumot kaptunk-e!

*1.7. Feladat.* Határozzuk meg a legnagyobb térfogatú, koordináta tengelyekkel párhuzamos élű téglatestet, amely az

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

ellipszoidban található.

# 2. fejezet

# Lineáris rendszerek

## 2.1. Linearizálás

Ebben a fejezetben az

$$\dot{x}(t) = A(t)x(t) + B(t)u(t) \qquad t \in \mathcal{I} = \left(\underline{t}, \overline{t}\right) \subset \mathbb{R}, \tag{2.1}$$
$$y(t) = C(t)\, x(t) + D(t)\, u(t) \tag{2.2}$$

lineáris differenciálegyenlet- és az

$$x(t+1) = A(t)x(t) + B(t)u(t) \qquad t \in \mathcal{I} = \left(\underline{t}, \overline{t}\right) \subset \mathbb{Z}, \tag{2.3}$$
$$y(t) = C(t)\, x(t) + D(t)\, u(t) \tag{2.4}$$

lineáris differenciaegyenlet rendszerrel leírt irányítási rendszerek néhány tulajdonságával fogunk foglalkozni. Itt $x(t) \in \mathbb{R}^n$ az állapot, $u(t) \in \mathbb{R}^m$ az irányítás, $y(t) \in \mathbb{R}^p$ a megfigyelés vektora. Feltételezzük, hogy a folytonos idejű rendszerben előforduló mátrixfüggvények folytonosak, és $A$, $B$ elemei az értelmezési tartományuk bármely véges részintervallumán integrálhatók. A lineáris rendszerek jelentőségét két dolog adja. Ezek egyike az egyszerűség: lineáris rendszerek vizsgálata lényegesen könnyebb, mint a nemlineárisoké. Ez különösen így van, ha a (2.1)-(2.4) egyenletekben szereplő mátrixok időtől függetlenek. A másik ok az, hogy sok rendszer „majdnem" lineáris, vagy legalábbis bizonyos tartományokban jól közelíthető lineáris rendszerekkel. Ha a modellben szereplő $f$ és $h$ függvények elég simák, akkor a rendszer lokálisan - vagyis valamely megoldása egy környezetében - linearizálható. Fogalmazzuk ezt meg pontosabban az

$$\dot{x}(t) = f(t, x(t), u(t)), \qquad t \in \mathcal{I} \subset \mathbb{R}, \tag{2.5}$$
$$y(t) = h(t, x(t), u(t)) \tag{2.6}$$

folytonosidejű nemlineáris rendszerre, ahol szintén $x(t) \in \mathbb{R}^n$, $u(t) \in \mathbb{R}^m$, $y(t) \in \mathbb{R}^p$, $f$ és $h$ az $x$ és $u$ vátozóban elegendően sokszor folytonosan differenciálható függvények. Tekintsünk egy rögzített $x(t_0) = x_0$ kezdőértéket és egy $u \in \Delta\left(t_0, \bar{t}\right)$ megengedett vezérlést. Jelölje $\xi(t) = x(t; t_0, x_0, u)$ a (2.5) rendszer $u(.)$ vezérlés melletti, $\xi(t_0) = x(t_0; t_0, x_0, u) = x_0$ kezdeti feltételt kielégítő megoldását. Legyen $z_0 \in \mathbb{R}^n, (u+v) \in \Delta\left(t_0, \bar{t}\right)$ és

$$\zeta(t) = x(t; t_0, x_0 + z_0, u + v).$$

A feltételünk szerint $f$-re alkalmazható a Taylor-formula:

$$\begin{aligned} f(t, \zeta(t), u(t) + v(t)) = f(t, \xi(t), u(t)) + \\ + \frac{\partial f}{\partial x}(t, \xi(t), u(t))(\zeta(t) - \xi(t)) + \\ + \frac{\partial f}{\partial u}(t, \xi(t), u(t)) v(t) + \text{ magasabbrendű tagok}, \end{aligned}$$

ahol

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \cdots & \ddots & \cdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n} \end{pmatrix}; \qquad \frac{\partial f}{\partial u} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial u_1} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial u_m} \\ \cdots & \ddots & \cdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial u_1} & \cdots & \frac{\partial f_n}{\partial u_m} \end{pmatrix}.$$

A $\xi$ és $\zeta$ definícióját figyelembe véve azt kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}(\zeta(t) - \xi(t)) = \frac{\partial f}{\partial x}(t, \xi(t), u(t))(\zeta(t) - \xi(t)) + \\ + \frac{\partial f}{\partial u}(t, \xi(t), u(t)) v(t) + \text{ magasabbrendű tagok}. \end{aligned}$$

Ha a fenti egyenletben a magasabbrendű tagokat elhanyagoljuk, akkor az

$$A(t) = \frac{\partial f}{\partial x}(t, \xi(t), u(t)), \qquad B(t) = \frac{\partial f}{\partial u}(t, \xi(t), u(t))$$

definícióval a

$$\dot{z}(t) = A(t) z(t) + B(t) v(t), \qquad z(t_0) = z_0 \tag{2.7}$$

lineáris rendszerhez jutunk. Minthogy a fenti meggondolásokban csak az $f$ függvény és deriváltjai játszottak szerepet, a diszkrét idejű nemlineáris rendszert a fentiekkel teljesen analóg módon linearizálhatjuk valamely megoldás körül.

A (2.6) output függvényt hasonlóképpen linearizálhatjuk a $\xi(.)$ és $u(.)$ körül:

$$\begin{aligned} h(t,\zeta(t),u(t)+v(t)) = h(t,\xi(t),u(t)) + \\ +\frac{\partial h}{\partial x}(t,\xi(t),u(t))(\zeta(t)-\xi(t)) + \\ +\frac{\partial h}{\partial u}(t,\xi(t),u(t))v(t) + \text{ magasabbrendű tagok}, \end{aligned}$$

ahol most

$$\frac{\partial h}{\partial x} = \begin{pmatrix} \frac{\partial h_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial h_1}{\partial x_n} \\ \cdots & \ddots & \cdots \\ \frac{\partial h_p}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial h_p}{\partial x_n} \end{pmatrix}, \qquad \frac{\partial h}{\partial u} = \begin{pmatrix} \frac{\partial h_1}{\partial u_1} & \cdots & \frac{\partial h_1}{\partial u_m} \\ \cdots & \ddots & \cdots \\ \frac{\partial h_p}{\partial u_1} & \cdots & \frac{\partial h_p}{\partial u_m} \end{pmatrix}.$$

Ha tehát az

$$\eta(t) = h(t,\xi(t),u(t)) \text{ és } \mu(t) = h(t,\zeta(t),u(t)+v(t)),$$

akkor a fenti sorfejtést alkalmazva azt kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} \mu(t)-\eta(t) = \frac{\partial h}{\partial x}(t,\xi(t),u(t))(\zeta(t)-\xi(t)) + \frac{\partial h}{\partial u}(t,\xi(t),u(t))v(t) + \\ + \text{ magasabbrendű tagok}, \end{aligned}$$

majd a magasabbrendű tagokat elhanyagolva a $C(t) = \frac{\partial h}{\partial x}(t,\xi(t),u(t))$ és $D(t) = \frac{\partial h}{\partial u}(t,\xi(t),u(t))$ definícióval az

$$y(t) = C(t)z(t) + D(t)v(t) \tag{2.8}$$

lineáris megfigyelést csatolhatjuk a (2.7)-hez.

*2.1. Példa.* (fordított inga folytatása). Az 1.2.1 Példában láttuk, hogy a fordított inga mozgása a

$$\begin{cases} \frac{4L}{3}\ddot{\phi} - g\sin\phi + \ddot{s}\cos\phi = 0 \\ (M+m)\ddot{s} + mL\left(\ddot{\phi}\cos\phi - \dot{\phi}^2\sin\phi\right) + \mu\dot{s} = u \end{cases} \tag{2.9}$$

egyenletrendszerrel írható le, amit átírhatunk egy 4 egyenletből álló explicit elsőrendű (2.5) típusú differenciálegyenlet rendszerré, amelyben az $x = \left(\phi,\dot{\phi},s,\dot{s}\right)^T$ vektor jelenti az állapotváltozót. Ezután linearizálhatjuk a kapott egyenletrendszert az $x(t)\equiv 0$, $u(t)\equiv 0$ megoldása körül. Megtehetjük azonban azt is, hogy a (2.9) egyenletet linearizáljuk a

$$\phi(t) = \dot{\phi}(t) = s(t) = \dot{s}(t) \equiv 0, \qquad u(t) \equiv 0$$

megoldás körül. Ez a

$$\begin{aligned} &\tfrac{4L}{3}\ddot{\phi} - g\phi + \ddot{s} = 0 \\ &(M+m)\,\ddot{s} + mL\ddot{\phi} + \mu\dot{s} = u \end{aligned} \tag{2.10}$$

lineáris implicit differenciálegyenlet rendszerre vezet, amely az

$$x = \left(\phi, \dot{\phi}, s, \dot{s}\right)^T$$

változókra a

$$\frac{dx}{dt} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ a_{21} & 0 & 0 & a_{24} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ a_{41} & 0 & 0 & a_{44} \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} 0 \\ b_2 \\ 0 \\ b_4 \end{pmatrix} u \tag{2.11}$$

lineáris rendszerrel ekvivalens, ahol

$$\begin{aligned} a_{21} &= \frac{3g\,(M+m)}{L\,(4M+m)}\,, & a_{24} &= \frac{3\mu}{L(4M+m)}\,, & b_2 &= \frac{-3}{L\,(4M+m)}\,, \\ a_{41} &= \frac{-3gm}{4M+m}\,, & a_{44} &= \frac{-4\mu}{4M+m}\,, & b_4 &= \frac{4}{4M+m}\,. \end{aligned} \tag{2.12}$$

Megjegyezzük, hogy ha a $\mu$ súrlódási együttható elhanyagolhatóan kicsi, akkor $a_{24} = a_{44} = 0$-t vehetünk.

Ha az $s$ és $\phi$ mennyiségeket mérjük, akkor az output függvény azonnal lineáris:

$$y = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} x.$$

*2.2. Példa. (Zárt gazdaság egy modelljének folytatása).* Tekintsük az 1.2.6. Példában szereplő (1.9)-(1.13) rendszernek az $\left(\overline{Y}, \overline{R}, \overline{K}, \overline{G}, \overline{M}, \overline{N}, \overline{P}\right)$ egyensúlyi helyzete körüli linearizálását. Az előző példához hasonlóan most is az eredeti (implicit) rendszerből indulunk ki, és az implicit egyenletek linearizálása után hozzuk a modellt (2.3)-(2.4) alakra. A rövidebb írásmód kedvéért egy függvénynek valamely változója szerinti parciális deriváltját úgy jelöljük, hogy a függvény jele mellé indexbe tesszük a szóbanforgó változó jelét, és az argumentumokat elhagyjuk, megállapodva abban, hogy minden parciális deriváltat az egyensúlyi helyzet koordinátáira kell kiszámítani, tehát

$$I_Y := \frac{\partial I}{\partial Y}\left(\overline{Y}, \overline{R}, \overline{K}\right), \quad I_R := \frac{\partial I}{\partial R}\left(\overline{Y}, \overline{R}, \overline{K}\right), \quad \text{... stb.}$$

Jelöljük az egyensúlyi helyzettől való eltérés koordinátáit kisbetűkkel:

$$\begin{aligned} &y := Y - \overline{Y}, \quad r := R - \overline{R}, \;\; k := K - \overline{K}, \; g := G - \overline{G}, \\ &m := M - \overline{M}, \; n := N - \overline{N}, \; p := P - \overline{P}, \;\; w := W - \overline{W}. \end{aligned}$$

(Figyelem, itt $n$, $m$, $p$ nem dimenziókat jelent!) Foglalkozzunk először az (1.12) - (1.13) egyenletekkel:

$$
\begin{aligned}
y(t) &= F(N(t)\,, K(t)) - F\left(\overline{N}, \overline{K}\right) \approx F_N n(t) + F_K k(t)\,,\\
n(t) &= H(W(t)\,, P(t)\,, K(t)) - H\left(\overline{W}, \overline{P}, \overline{K}\right) \approx H_W w(t) + H_P p(t) + H_K k(t)\,.
\end{aligned}
$$

A magasabbrendű tagok elhanyagolása után a fenti kifejezésben $\approx$ helyett egyenlőséget írunk, kiküszöböljük az $n$ változót, és $p$-t kifejezzük $y, k$ és $w$ segítségével. Ekkor azt kapjuk, hogy

$$
y\,(t) = y\,(t)\,, \tag{2.13}
$$

$$
p\,(t) = \frac{1}{H_P F_N} y\,(t) - \left(\frac{F_K}{H_P F_N} + \frac{H_K}{H_P}\right) k\,(t) - \frac{H_W}{H_P} w\,(t)\,. \tag{2.14}
$$

Hasonlóan járunk el az (1.9)-(1.11) egyenletekkel; a (2.14) felhasználásával a következő lineáris differenciaegyenlet-rendszert kapjuk:

$$
\begin{aligned}
y\,(t+1) = {} & \left(1 + \alpha\left(C_Y + I_Y - \frac{\overline{G}}{\overline{P}^2}\frac{1}{H_P F_N} - 1\right)\right) y\,(t) + \alpha I_R r\,(t) + \\
& + \alpha\left[I_K + \frac{\overline{G}}{\overline{P}^2}\left(\frac{F_K}{H_P F_N} + \frac{H_K}{H_P}\right)\right] k\,(t) + \frac{\alpha}{\overline{P}} g\,(t) + \alpha\frac{\overline{G}}{\overline{P}^2}\frac{H_W}{H_P} w\,(t)
\end{aligned} \tag{2.15}
$$

$$
\begin{aligned}
r\,(t+1) = {} & \beta\left(L_Y + \frac{\overline{M}}{\overline{P}^2}\frac{1}{H_P F_N}\right) y\,(t) + (1 + \beta L_R)\, r\,(t) - \\
& - \beta\frac{\overline{M}}{\overline{P}^2}\left(\frac{F_K}{H_P F_N} + \frac{H_K}{H_P}\right) k\,(t) - \frac{\beta}{\overline{P}} m\,(t) - \beta\frac{\overline{M}}{\overline{P}^2}\frac{H_W}{H_P} w\,(t)
\end{aligned} \tag{2.16}
$$

$$
k\,(t+1) = I_Y y\,(t) + I_R r\,(t) + (1 + I_K)\, k\,(t)\,. \tag{2.17}
$$

## 2.2. Differenciál- és differenciaegyenlet rendszerek

Tekintsük először a (2.1) rendszert és legyen ebben a fejezetben

$$
\begin{aligned}
\Delta &= \bigcup_{\underline{t} < t_1 < t_2 < \overline{t}} \Delta\,[t_1, t_2]\,,\\
\Delta\,(t_1, t_2) &:= \{u\,(.) : u\,(.) \text{ szakaszonként folytonos, korlátos}\\
&\qquad \text{és } u\,(t) \in \mathbb{R}^m, t \in [t_1, t_2]\}\,.
\end{aligned}
$$

Egy megengedett $u$ irányítás behelyettesítése után kapott egyenlet megoldásán egy olyan $x\,(.)$ függvényt értünk, ami véges sok hely kivételével folytonosan differenciálható és szintén véges sok hely kivételével kielégíti a megfelelő differenciálegyenletet. Tudjuk, hogy ha rögzítünk egy

$$
x\,(t_0) = x_0 \tag{2.18}
$$

kezdeti feltételt, akkor a (rögzített $u \in \Delta(t_1, t_2)$, és $t_0 \in (t_1, t_2)$ melletti) (2.1), (2.18) feladatnak létezik egyetlen megoldása a $(t_1, t_2)$ intervallumon, amely az

$$x(t) = \phi(t, t_0) x_0 + \int_{t_0}^{t} \phi(t, \tau) B(\tau) u(\tau) d\tau \tag{2.19}$$

Cauchy formulával adható meg, ahol $\phi(.,.) : \mathcal{I} \times \mathcal{I} \to \mathbb{R}^{n \times n}$ a homogén egyenlet *alapmátrixa*: bármely rögzített $\tau \in \mathcal{I}$- re

$$\frac{d}{dt}\phi(t, \tau) = A(t) \phi(t, \tau), \quad t \in \mathcal{I},$$

és

$$\phi(\tau, \tau) = \mathcal{I}.$$

A $\phi$ alapmátrix alábbi tulajdonságaira lesz szükségünk (ld. [6]):

(i) $\phi(t, \tau)$ invertálható minden $t, \tau \in \mathcal{I}$-re;

(ii) $\phi(t, \tau) = \phi(t, s) \phi(s, \tau)$;

(iii) $\phi(t, \tau) = \phi(\tau, t)^{-1}$;

(iv) ha $A$ konstans, akkor

$$\phi(t, \tau) = e^{(t-\tau)A} := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} A^k (t - \tau)^k;$$

(v) ha $X(.) : \mathcal{I} \to \mathbb{R}^{n \times n}$ tetszőleges olyan mátrixfüggvény, amelyre $\frac{d}{dt}X(t) = A(t)X(t)$, és létezik az $X(\tau)^{-1}$, akkor

$$\phi(t, \tau) = X(t) X(\tau)^{-1}.$$

Foglalkozzunk most a lineáris differenciaegyenlet rendszerek megoldásával. Tekintsük először a homogén

$$x(t+1) = A(t) x(t), \qquad t \in \mathcal{I} \subset \mathbb{Z} \tag{2.20}$$

differenciaegyenletet az

$$x(t_0) = x_0, \qquad t_0 \in \mathcal{I}, \qquad x_0 \in \mathbb{R}^n$$

kezdeti feltétellel. Ennek megoldását

$$x(t) = \phi(t, t_0) x_0, \qquad t \geq t_0$$

alakban adhatjuk meg, ahol

$$\phi(t,\tau) = \begin{cases} A(t-1)\,A(t-2)\ldots A(\tau)\,, & \text{ha } t > \tau, \\ I, & \text{ha } t = \tau, \end{cases}$$

az alapmátrix. Az alapmátrix kielégíti a

$$\phi(t+1,\tau) = A(t)\,\phi(t,\tau) \qquad\qquad t \geq \tau, \quad \phi(\tau,\tau) = I$$

mátrix differenciaegyenletet és rendelkezik a fenti (ii) tulajdonsággal. Ha az $A(.)$ konstans, akkor

$$\phi(t,\tau) = A^{t-\tau} \qquad\qquad\qquad t \geq \tau.$$

Vegyük észre, hogy $\phi$ nem feltétlenül invertálható, ami azzal függ össze, hogy a (2.20) nem feltétlenül jóldefiniált az időben visszafelé haladva.

Az

$$x(t+1) = A(t)\,x(t) + B(t)\,u(t)\,, \qquad x(t_0) = x_0$$

feladat megoldása tetszőleges rögzített $u \in \Delta\left(t_0, \bar{t}\right)$ esetén

$$x(t) = \phi(t,t_0)\,x_0 + \sum_{j=t_0}^{t-1} \phi(t,j+1)\,B(j)\,u(j)\,, \qquad t > t_0 \tag{2.21}$$

alakban adható meg.

## 2.3. Lineáris rendszerek irányíthatósága

Rendszerek irányíthatóságával kapcsolatban több, egymástól némileg eltérő fogalom ismeretes. Az alábbiakban arra keresünk választ, hogy milyen feltételek biztosítják azt, hogy egy megadott időintervallumon a rendszer egy teszőleges állapotból átvihető legyen egy tetszőleges másik állapotba.

2.1. Definíció. A (2.1), illetve (2.3) rendszert teljesen irányíthatónak nevezzük a $[t_0,t_1]$ intervallumon, ha tetszőleges $x_0, x_1 \in \mathbb{R}^n$ párhoz létezik olyan megengedett $u \in \Delta(t_0,t_1)$ irányítás, hogy az $u$ irányítással tekintett (2.1), illetve (2.3) rendszer $x(t_0) = x_0$ kezdeti feltételt kielégítő megoldására $x(t_1) = x_1$.

2.1. TÉTEL. *A (2.1), illetve (2.3) rendszer akkor és csak akkor teljesen irányítható a* $[t_0,t_1]$ *intervallumon, ha a*

$$W(t_0,t_1) = \int_{t_0}^{t_1} \phi(t_1,s)\, B(s)\, B(s)^T\, \phi(t_1,s)^T\, ds,$$

*illetve a*

$$W(t_0,t_1) = \sum_{j=t_0}^{t_1-1} \phi(t_1,j+1)\, B(j)\, B(j)^T\, \phi(t_1,j+1)^T$$

*mátrix pozitív definit.*

*Bizonyítás. Szükségesség.* Vegyük észre először is, hogy a $W(t_0,t_1)$ mátrix mind a folytonos, mind pedig a diszkrét idejű rendszerek esetén pozitív szemidefinit, függetlenül attól, hogy milyen $A(.)$ és $B(.)$ mátrixfüggvények szerepelnek a (2.1), illetve (2.3) egyenletben. Valóban, tetszőleges $\xi \in \mathbb{R}^n$ esetén folytonos idejű rendszerre

$$\xi^T W(t_0,t_1)\xi = \int_{t_0}^{t_1} \left\| B(s)^T \phi(t_1,s)^T \xi \right\|^2 ds, \tag{2.22}$$

illetve diszkrét idejű rendszerre

$$\xi^T W(t_0,t_1)\xi = \sum_{j=t_0}^{t_1-1} \left\| B(j)^T \phi(t_1,j+1)^T \xi \right\|^2. \tag{2.23}$$

Minthogy (2.22) jobb oldalán az integrandus, (2.23) jobb oldalán pedig az összeg minden tagja nem negatív, láthatjuk, hogy $\xi^T W(t_0,t_1)\xi \geq 0$ mindig teljesül.

A szükségességet indirekt úton látjuk be. Tegyük fel, hogy a rendszer teljesen irányítható, de a $W(t_0,t_1)$ ennek ellenére nem pozitív definit. A fentiek szerint ekkor van olyan $\xi \in \mathbb{R}^n$, $\xi \neq 0$, hogy

$$\xi^T W(t_0,t_1)\xi = 0.$$

Folytonos idejű rendszerek esetén a $W(t_0,t_1)$ definíciójából az következik, hogy

$$\int_{t_0}^{t_1} \left\| B(s)^T \phi(t_1, s)^T \xi \right\|^2 ds = 0,$$

ami az integrandus nemnegativitása folytán csak úgy lehet, ha majdnem minden $s \in [t_0,t_1]$-re

$$B(s)^T \phi(t_1, s)^T \xi = 0. \tag{2.24}$$

Minthogy a rendszer teljesen irányítható, az $x_0 = \phi(t_1, t_0)^{-1}\xi$ és $x_1 = 0$ állapotokhoz is van olyan $u_0$ vezérlés, ami $x_0$-t $x_1$-be viszi a $[t_0, t_1]$ intervallumon, tehát

$$0 = \phi(t_1, t_0)\phi(t_1, t_0)^{-1}\xi + \int_{t_0}^{t_1} \phi(t_1, s)B(s)u_0(s)ds.$$

Szorozzuk meg ezt az egyenlőséget balról $\xi^T$-vel. A (2.24) összefüggés alapján ebből azt kapjuk, hogy $\xi^T\xi = 0$, ami ellentmond annak, hogy $\xi \neq 0$.

Diszkrét idejű rendszerek esetén a bizonyítás teljesen analóg: a $W(t_0, t_1)$ definíciójából az következik, hogy

$$\sum_{j=t_0}^{t_1-1} \left\| B(j)^T \phi(t_1, j+1)^T \xi \right\|^2 = 0,$$

ami a tagok nemnegativitása folytán csak úgy lehet, ha minden $j \in [t_0,t_1)$-re

$$B(j)^T \phi(t_1, j+1)^T \xi = 0. \tag{2.25}$$

Minthogy a rendszer teljesen irányítható, ezért tetszőleges $x_0$-hoz és $x_1 = \xi + \phi(t_1, t_0) x_0$-hoz is van olyan $u_0 \in \Delta(t_0, t_1)$ vezérlés, ami átviszi $x_0$-t $x_1$-be; ebből következik, hogy

$$\xi = x_1 - \phi(t_1, t_0) x_0 = \sum_{j=t_0}^{t_1-1} \phi(t_1, j+1) B(j) u_0(j).$$

Szorozzuk meg ezt az egyenlőséget balról $\xi^T$-vel. A (2.25) összefüggés alapján ebből azt kapjuk, hogy $\xi^T\xi = 0$, ami ellentmond annak, hogy $\xi \neq 0$.

*Elegendőség.* Tegyük fel, hogy $W(t_0, t_1)$ pozitív definit, és legyen $x_0, x_1 \in \mathbb{R}^n$ tetszőleges. Definiáljuk az $u^*$ irányítást a $[t_0, t_1)$ intervallumon folytonos idejű rendszerek esetén az

$$u^*(t) = -B(t)^T \phi(t_1, t)^T W(t_0, t_1)^{-1}(\phi(t_1, t_0) x_0 - x_1)$$

egyenlőséggel. Ekkor a (2.19) Cauchy formula alapján azt kapjuk, hogy a (2.1) rendszer $u^*$ irányításhoz és $x(t_0) = x_0$ kezdeti feltételhez tartozó $x^*$ megoldására

$$x^*(t_1) = \phi(t_1, t_0)x_0 - \int_{t_0}^{t_1} \phi(t_1, s)B(s)B(s)^T \phi(t_1, s)^T ds \times$$
$$\times W(t_0, t_1)^{-1}(\phi(t_1, t_0)x_0 - x_1) = x_1.$$

Diszkrét idejű rendszer esetén

$$u^*(t) = -B(t)^T \phi(t_1, t+1)^T W(t_0, t_1)^{-1}(\phi(t_1, t_0)x_0 - x_1)$$

definícióval a (2.21) formula alapján azt kapjuk, hogy a (2.3) rendszer $u^*$ irányításhoz és $x(t_0) = x_0$ kezdeti feltételhez tartozó $x^*$ megoldására

$$x^*(t_1) = \phi(t_1, t_0)x_0 - \sum_{j=t_0}^{t_1-1} \phi(t_1, j+1)B(j)B(j)^T \phi(t_1, j+1)^T \times$$
$$\times W(t_0, t_1)^{-1}(\phi(t_1, t_0)x_0 - x_1) = x_1. \square$$

2.1. KÖVETKEZMÉNY. (KALMAN-FÉLE RANGFELTÉTEL). *Az*

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t), \qquad u(t) \in \mathbb{R}^n \tag{2.26}$$

*időinvariáns rendszer akkor és csak akkor teljesen irányítható, bármilyen is a* $[t_0, t_1]$ *intervallum* $(t_0 < t_1)$*, ha*

$$rang\left[B, AB, ..., A^{n-1}B\right] = n.$$

*Az*

$$x(t+1) = Ax(t) + Bu(t), \qquad u(t) \in \mathbb{R}^m \tag{2.27}$$

*rendszer akkor és csak akkor teljesen irányítható a* $k \geq n$ *hosszúságú* $[t_0, t_1]$ *intervallumon, ha*

$$rang\left[B, AB, ..., A^{n-1}B\right] = n.$$

*Bizonyítás. Szükségesség.* Tegyük fel, hogy a (2.26), illetve a (2.27) teljesen irányítható, ami a 2.1. Tétel szerint azt jelenti, hogy a $W(t_0, t_1)$ pozitív definit, és mégis

$$rang\left[B, AB, ..., A^{n-1}B\right] < n.$$

Ekkor létezik olyan $v \in \mathbb{R}^n$, $v \neq 0$, hogy

$$v^T \left[B, AB, ..., A^{n-1}B\right] = 0,$$

tehát

$$v^T B = v^T AB = ... = v^T A^{n-1} B = 0. \tag{2.28}$$

A Cayley-Hamilton tétel szerint az $A$ kielégíti a karakterisztikus egyenletét, vagyis

$$A^n = c_1 A^{n-1} + c_2 A^{n-2} + ... + c_n I, \tag{2.29}$$

ahol a $c_i$-k megfelelő konstansok. Szorozzuk meg (2.29)-et balról $v^T$-vel, jobbról $B$-vel, akkor a (2.28) összefüggés értelmében azt kapjuk, hogy

$$v^T A^n B = 0,$$

majd analóg módon eljárva, matematikai indukcióval belátjuk, hogy

$$v^T A^{n+\ell} B = 0, \qquad \ell = 1, 2, ... \quad .$$

Folytonos idejű rendszerek esetén ebből az következik, hogy

$$v^T e^{tA} B = v^T \left(I + At + ... + \frac{t^n}{n!} A^n + ...\right) B = 0$$

minden $t$-re. Minthogy most

$$\phi(t, s) = e^{(t-s)A},$$

ezért

$$v^T \left( \int_{t_0}^{t_1} e^{(t_1-s)A} BB^T e^{(t_1-s)A^T} ds \right) v = 0,$$

tehát $W(t_0, t_1)$ nem lenne pozitív definit. Diszkrét idejű rendszer esetén viszont

$$\phi(t, s) = A^{t-s},$$

ezért

$$v^T \sum_{j=t_0}^{t_1-1} A^{t_1-j-1} BB^T \left(A^{t_1-j-1}\right)^T v = 0,$$

tehát $W(t_0, t_1)$ nem lenne pozitív definit.

*Elegendőség.* Tegyük fel, hogy a rangfeltétel teljesül, de $W(t_0, t_1)$ nem pozitív definit. Láttuk, hogy folytonos idejű rendszernél ekkor majdnem minden $s \in [t_0, t_1]$-re

$$\xi^T \phi(t_1, s) B(s) = 0,$$

ami most azt jelenti, hogy

$$\xi^T e^{(t_1-s)A} B \equiv 0, \qquad s \in [t_0, t_1]. \tag{2.30}$$

Speciálisan $s = t_1$-re azt kapjuk, hogy $\xi^T B = 0$. Differenciáljuk ismételten (2.30)-at, majd vegyük a deriváltakat $s = t_1$-re, akkor a

$$\xi^T B = \xi^T AB = ... = \xi^T A^{n-1} B = 0$$

egyenlőségekhez jutunk, ami ellentmond a feltevésünknek.

Diszkrét idejű rendszerre viszont abból, hogy $W(t_0, t_1)$ nem pozitív definit, az következik, hogy minden $j \in [t_0, t_1)$-re

$$\xi^T \phi\,(t_1, j+1)\, B\,(j) = 0,$$

vagyis $\xi^T A^{t_1-j-1} B = 0$. Speciálisan $j = t_1 - 1, t_1 - 2, ..., t_1 - n$ -re ez azt jelenti, hogy

$$\xi^T B = \xi^T AB = ... = \xi^T A^{n-1} B = 0,$$

ami ellentmond a feltevésünknek. □

A fenti eredmények alkalmazását illusztráljuk a következő példával.

*2.3. Példa. (Fordított inga linearizált modellje).* Vizsgáljuk meg a 2.1. Példában kapott (2.11) rendszer irányíthatóságát, amelyre

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1\,0\,0 \\ a_{21} & 0\,0\,0 \\ 0 & 0\,0\,1 \\ a_{41} & 0\,0\,0 \end{pmatrix}; \qquad B = \begin{pmatrix} 0 \\ b_2 \\ 0 \\ b_4 \end{pmatrix}$$

és az $a_{21}$, $a_{41}$, $b_2$, $b_4$ a (2.12) képletekkel meghatározott, nem zérus számok, és a súrlódástól eltekintettünk. Ekkor

$$[B, AB, A^2B, A^3B] = \begin{bmatrix} 0 & b_2 & 0 & a_{21}b_2 \\ b_2 & 0 & a_{21}b_2 & 0 \\ 0 & b_4 & 0 & a_{41}b_2 \\ b_4 & 0 & a_{41}b_2 & 0 \end{bmatrix} =: S,$$

és $\det S = b_2^4 \left(a_{41} - \frac{b_4}{b_2} a_{21}\right)^2 = b_2^4 g^2 \neq 0$, tehát a rangfeltétel teljesül, így a 2.1. Következmény értelmében a fordított inga linearizálásával kapott rendszer teljesen irányítható tetszőleges pozitív hosszúságú intervallumon.

*2.4. Példa. (Zárt gazdaság linearizált modellje).* A 2.2. Példában láttuk, hogy a zárt gazdaság általunk vizsgált, linearizált modellje a (2.15)-(2.17) egyenletekkel adható meg, ahol az $A$ és $B$ mátrixok az alábbi szerkezetűek:

$$B = \begin{pmatrix} \frac{\alpha}{P} & 0 \\ 0 & -\frac{\beta}{P} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad A = \begin{pmatrix} * & * & * \\ * & * & * \\ I_Y & I_R & 1+I_K \end{pmatrix}.$$

Minthogy $\alpha$ és $\beta$ pozitív konstansok, $B$ rangja ezzel együtt a Kalman-féle mátrix rangja is legalább 2.

$$\left[B, AB, A^2B\right] = \begin{bmatrix} \frac{\alpha}{P} & 0 & * & * & \\ 0 & -\frac{\beta}{P} & * & * & * \\ 0 & 0 & \frac{\alpha I_Y}{P} & -\frac{\beta I_R}{P} & \end{bmatrix}.$$

Ennek a mátrixnak a rangja 3, ha $I_Y \neq 0$, vagy $I_R \neq 0$ (tehát, ha a valós beruházás az egyensúlyi helyzetben érzékeny a névleges kamatláb és/vagy a valós output változására, ami ésszerű feltételnek tekinthető).A 2.1. Következmény értelmében ezen modell szerint a gazdaság tetszőleges, legalább 2 egység hosszúságú időintervallumon teljesen irányítható a monetáris és fiskális politika, mint eszközváltozó segítségével.

A Kalman-féle rangfeltétellel ekvivalens feltételt fogalmaz meg az alábbi tétel.

2.2. Tétel. (Hautus-féle rangfeltétel). *Legyen $A \in \mathbb{R}^{n\times n}, B \in \mathbb{R}^{n\times m}$. Ekkor az alábbi két feltétel ekvivalens:*
*(i) rang $(B, AB, ..., A^{n-1}B) = n$;*
*(ii) rang $(A - \lambda I, B) = n$ az $A$ mátrix minden $\lambda$ sajátértékére.*

*Bizonyítás.* (i) $\Longrightarrow$ (ii). Tegyük fel, hogy (i) teljesül, mégis van olyan $y \neq 0$ vektor, hogy $y^TA = \lambda y^T$ és $y^TB = 0$, vagyis azt, hogy (ii) nem teljesül. Ekkor azonban az is igaz, hogy $y^TA^iB = 0, \quad i = 0, 1, ..., n-1$, ami ellentmond (i)-nek.

(ii) $\Longrightarrow$ (i). Ismét indirekt úton bizonyítunk: feltesszük, hogy (ii) teljesül, mégis rang $(B, AB, ..., A^{n-1}B) < n$. Ekkor van olyan $y \neq 0$ vektor, hogy

$$y^TA^iB = 0, \qquad i = 0, 1, ..., n-1,$$

így

$$y^T\left(c_{n-1}A^{n-1} + c_{n-2}A^{n-2} + ... + c_1A + c_0I\right)B = 0 \tag{2.31}$$

is teljesül a $c_0, c_1, \ldots, c_{n-1}$ számok bármilyen megválasztása esetén. Legyen $\psi$ a legkisebb fokszámú olyan nem azonosan zérus polinom, amelyre $y^T\psi(A) = 0$. Ilyen polinom biztosan van, mert például az $A$ karakterisztikus polinomja ilyen, így a $\psi$ polinom $d$ fokszámára teljesül az $1 \leq d \leq n$ feltétel. A $\psi$ polinom tetszőleges $\lambda$ gyökére teljesül, hogy $\psi(z) = (z-\lambda) f(z)$, ahol $f(z)$ egy $(d-1)$-edfokú polinom. Legyen $x^T := y^T f(A)$; $x \neq 0$, mert $\psi$ a legkisebb fokszámú olyan polinom volt, amelyre $y^T\psi(A) = 0$ teljesül. Másrészt $0 = y^T\psi(A) = y^T f(A)(A-\lambda I) = x^T(A-\lambda I)$, a (2.31) miatt pedig $0 = y^T f(A)B = x^T B$, ami ellentmond a feltevésünknek. □

*2.1. Megjegyzés.* Ha $\lambda$ nem sajátértéke az $A$ mátrixnak, akkor $\det(A-\lambda I) \neq 0$, tehát az (ii) feltétel automatikusan teljesül.

## 2.4. Ekvivalenciák és kanonikus alakok

Az irányíthatóság fogalmát geometriai úton definiáltuk, így a rendszerek irányíthatósága nem függhet a választott koordináta-rendszertől. Ennek a következményeivel főként az időinvariáns rendszerekkel kapcsolatban fogunk foglalkozni.

### 2.4.1. Lineárisan ekvivalens rendszerek

2.2. Definíció. Az

$$\dot{x}(t) = \overline{A}x(t) + \overline{B}u(t),$$

illetve

$$x(t+1) = \overline{A}x(t) + \overline{B}u(t),$$

és

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t),$$

illetve

$$x(t+1) = Ax(t) + Bu(t)$$

időinvariáns rendszereket lineárisan ekvivalensnek nevezzük, ha létezik olyan invertálható $P$ mátrix, hogy

$$\overline{A} = PAP^{-1}, \qquad \overline{B} = PB.$$

A linerárisan ekvivalens rendszerek tehát ugyanazt a fizikai rendszert írják le az $n$-dimenziós tér különböző koordinátarendszereiben. Az irányíthatóság tulajdonsága invariáns a koordináta-transzformációra vonatkozóan, hiszen

$$\left[\overline{B}, \overline{AB}, ..., \overline{A}^{n-1}\overline{B}\right] = P\left[B, AP^{-1}PB, ..., A^{n-1}P^{-1}PB\right]$$

és a $P$ mátrix rangja $n$, ezért az előző egyenlőségben a zárójelben szereplő mátrixok rangja megegyezik.

Láttuk, hogy az irányíthatóság feltétele lineáris időinvariáns folytonos és diszkrét idejű rendszerekre ugyanaz, így ha irányíthatóságról beszélünk, nem szükséges megkülönböztetni a kétféle típusú rendszert, hanem elegendő csak az $(A, B)$ pár által meghatározott rendszerről beszéni.

2.3. Tétel. *Legyen $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, és $B \in \mathbb{R}^{n\times 1}$, továbbá*

$$\Gamma = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \ddots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n\times n}, \qquad \overline{B} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \dots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n},$$

$$M = \begin{pmatrix} \alpha_{n-1} \\ \alpha_{n-2} \\ \dots \\ \alpha_1 \\ \alpha_0 \end{pmatrix}, \qquad \overline{C} = (1, 0, ..., 0) \in \mathbb{R}^{1\times n}.$$

*Az $(A, B)$ pár által meghatározott lineáris rendszer akkor és csak akkor lineárisan ekvivalens egy $(\overline{A}, \overline{B})$ rendszerrel, ahol $\overline{A} = \Gamma + M\overline{C}$, ha teljesen irányítható.*

*Bizonyítás.* Az $\left(\overline{A}, \overline{B}\right)$ pár teljesen irányítható, mert

$$\left(\overline{B}, \overline{AB}, ..., \overline{A}^{n-1}\overline{B}\right) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \ddots & \dots \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix},$$

tehát a Kalman-féle rangfeltétel teljesül. Mivel a lineárisan ekvivalens rendszerek egyidejűleg teljesen irányíthatók, ezzel a feltétel szükségességét beláttuk.

Tegyük fel, hogy az $(A, B)$ pár teljesen irányítható. Vegyük a

$$P = \left(A^{n-1}B, A^{n-2}B, ..., AB, B\right), \qquad P \in \mathbb{R}^{n\times n}$$

mátrixot. A rangfeltétel miatt $P$ nemszinguláris. Legyen

$$\overline{A} = P^{-1}AP, \qquad \text{és} \qquad \overline{B} = P^{-1}B.$$

Mutassuk meg, hogy $\overline{A}$ és $\overline{B}$ a tételben meghatározott alakú! Valóban, $\overline{B}$ a $P\overline{B} = B$ lineáris egyenletrendszer egyértelműen meghatározott megoldása, ami éppen $\overline{B} = (0, ..., 0, 1)^T$. Tekintsük az $A$ mátrix karakterisztikus polinomját:

$$\varphi_A(\lambda) = \det\left(sI - A\right) = s^n - \alpha_{n-1}s^{n-1} - ... - \alpha_1 s - \alpha_0.$$

vegyük az $M = (\alpha_{n-1}, ..., \alpha_1, \alpha_0)^T$ vektort, és legyen

$$\overline{A} = \Gamma + M\overline{C}.$$

Ekkor $AP = P\overline{A}$, ugyanis

$$AP = (A^nB, ..., AB),$$

és

$$P\overline{A} = P\Gamma + PM\overline{C} = \left(\sum_{j=0}^{n-1}\alpha_j A^j B,\ A^{n-1}B,\ ...,\ AB\right).$$

A Cayley-Hamilton tétel értelmében $A^n = \sum_{j=0}^{n-1}\alpha_j A^j$, ezzel a tételt bizonyítottuk. □

2.2. Következmény. *Az $(A, B)$ pár akkor és csak akkor teljesen irányítható, ha lineárisan ekvivalens egy $\left(\widetilde{A}, \overline{B}\right)$ rendszerrel, ahol*

$$\widetilde{A} = \Gamma + \overline{B}N, \qquad N = (a_0,\ ...,\ a_{n-1}),$$

$\overline{B}$ és $\Gamma$ a 2.3. Tételben adott.

*Bizonyítás.* Közvetlen számolással ellenőrizhetjük, hogy $\left(\widetilde{A}, \overline{B}\right)$ teljesen irányítható, így a fenti tétel értelmében lineárisan ekvivalens egy $\left(\overline{A}, \overline{B}\right)$ alakú rendszerrel. Az $(A, B)$ akkor és csak akkor teljesen irányítható, ha lineárisan ekvivalens egy $\left(\overline{A}, \overline{B}\right)$ rendszerrel, így $(A, B)$ akkor és csak akkor teljesen irányítható, ha lineárisan ekvivalens egy $\left(\widetilde{A}, \overline{B}\right)$ rendszerrel. □

*2.2. Megjegyzés.* Ismeretes (vagy könnyen belátható), hogy az

$$\widetilde{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \ddots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ a_0 & a_1 & a_2 & \dots & a_{n-1} \end{pmatrix}$$

mátrix karakterisztikus polinomja

$$\varphi_{\widetilde{A}}(\lambda) = \lambda^n - a_{n-1}\lambda^{n-1} - a_1\lambda - a_0,$$

tehát az $M$ mátrix $(i, 1)$ és az $N$ mátrix $(1, n-i+1)$ eleme azonos kell, hogy legyen az $(A, B)$-vel ekvivalens kétféle alakban. Ezeket az elemeket az $A$ mátrix egyértelműen meghatározza a $\det(\lambda I - A) = \varphi_A(\lambda)$ karakterisztikus polinom együtthatói által. A 2.3. Tételben adott $(\overline{A}, \overline{B})$ párral meghatározott rendszert az $(A, B)$ párhoz tartozó rendszer *irányítható kanonikus alak*jának, míg az $(\widetilde{A}, \overline{B})$ párral meghatározott rendszert az $(A, B)$ pár *irányítási kanonikus alak*jának nevezzük.

*2.3. Megjegyzés.* A 2.3. Tételből és a 2.2. Következményből láthatjuk, hogy az $n$-dimenziós állapotterű és egy bemenetű, teljesen irányítható lineáris időinvariáns rendszer leírható $n$ darab paraméterrel, csupán a koordinátarendszert kell alkalmasan megválasztani. Mi több, ez az $n$ paraméter az egymással lineárisan ekvivalens rendszerekre ugyanaz, tehát a rendszer invariánsának tekinthető. A későbbiekben látni fogjuk, hogy ez az alak egy gyakorati szempontból fontos feladat (a póluselhelyezési feladat) megoldhatóságának elvi alapját adja.

Nézzük meg, hogyan általánosítható a fenti fogalom és a fenti eredmény több-bemenetű ($m > 1$) rendszerre!

### 2.4.2. Feedback ekvivalens rendszerek

2.3. DEFINÍCIÓ. Legyen $A, \overline{A} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ és $B, \overline{B} \in \mathbb{R}^{n\times m}$. Azt mondjuk, hogy az $(A, B)$ és az $(\overline{A}, \overline{B})$ mátrixpárokkal jellemzett lineáris rendszerek *feedback ekvivalens*ek, ha létezik olyan $P \in \mathbb{R}^{n\times n}$ és $V \in \mathbb{R}^{m\times m}$ invertálható mátrix és $F \in \mathbb{R}^{m\times n}$ mátrix, hogy

$$P^{-1}(A + BF)P = \overline{A} \quad \text{és} \quad P^{-1}BV = \overline{B}.$$

A feedback ekvivalenciát az alábbi módon jelöljük:

$$(A, B) \equiv (\overline{A}, \overline{B}).$$

A feedback ekvivalencia megfelel egy-egy bázistranszformációnak az állapot- és az irányítási térben, és egy $u = Fx + u'$ feedback transzformációnak, ahol $u'$ az új irányítási változó.

Könnyen ellenőrízhetjük, hogy a „$\equiv$” reláció valóban ekvivalenciareláció, valamint ha $(A, B) \equiv (\overline{A}, \overline{B})$, akkor az $(A, B)$ pár akkor és csak akkor teljesen irányítható, ha az $(\overline{A}, \overline{B})$ pár is az (lásd a 2.17. Feladatot).

2.4. Definíció. Pozitív egész számoknak egy $\kappa = (\kappa_1, ..., \kappa_r)$ sorozatát az $n$ *felbontás*ának nevezzük, ha

$$\kappa_1 \geq \kappa_2 \geq ... \geq \kappa_r$$

és

$$\kappa_1 + \kappa_2 + ... + \kappa_r = n.$$

Az $n$ minden felbontásához hozzárendelhetjük az $(A_\kappa, B_\kappa)$ mátrixpárt, ahol

$$A_\kappa = \begin{pmatrix} \Gamma_{\kappa_1} & 0 & ... & 0 \\ 0 & \Gamma_{\kappa_2} & ... & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & ... & \Gamma_{\kappa_r} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n\times n}, \tag{2.32}$$

$$B_\kappa = \begin{pmatrix} b_{\kappa_1} & 0 & ... & 0 & 0 & ... & 0 \\ 0 & b_{\kappa_2} & ... & 0 & 0 & ... & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & ... & b_{\kappa_r} & 0 & ... & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n\times m}, \tag{2.33}$$

$$\Gamma_{\kappa_j} \in \mathbb{R}^{\kappa_j \times \kappa_j}, \qquad b_{\kappa_j} \in \mathbb{R}^{\kappa_j \times 1},$$

és

$$\Gamma_{\kappa_j} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & ... & 0 \\ 0 & 0 & 1 & ... & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & ... & 1 \\ 0 & 0 & 0 & ... & 0 \end{pmatrix}, \quad b_{\kappa_j} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}. \tag{2.34}$$

Azt mondjuk, hogy az $(A_\kappa, B_\kappa)$ pár *Brunovsky-féle kanonikus alak*ú.

Az $n$ bármely $\kappa$ felbontása esetén az $(A_\kappa, B_\kappa)$ pár teljesen irányítható. Világos, hogy

$$rang B_\kappa = r \leq m.$$

Láttuk, hogy $m = 1$ esetén tetszőleges teljesen irányítható $(A, B)$ rendszer lineárisan ekvivalens egy, a 2.2. Következményben meghatározott $(\widetilde{A}, \overline{B})$ rendszerrel, vagyis létezik olyan invertálható $\widetilde{P}$ mátrix, hogy $\widetilde{P}^{-1}A\widetilde{P} = \widetilde{A} = \Gamma + \overline{B}N$ és $\widetilde{P}^{-1}B = \overline{B}$. Ha az $F$ mátrixot az $F = -N\widetilde{P}^{-1}$ egyenlőségnek megfelelően választjuk, akkor a

$$\widetilde{P}^{-1}(A + BF)\widetilde{P} = \widetilde{P}^{-1}A\widetilde{P} - \widetilde{P}^{-1}BN = \Gamma + \overline{B}N - \overline{B}N = \Gamma$$

összefüggésből látható, hogy az egybemenetelű teljesen irányítható rendszer feedback-ekvivalens az $(A_\kappa, B_\kappa)$ rendszerrel, ahol $\kappa = \kappa_1 = n$.

Célunk annak bemutatása, hogy tetszőleges teljesen irányítható $(A, B)$ rendszer feedback ekvivalens egy egyértelműen meghatározott Brunovsky-féle kanonikus rendszerrel.

Először nézzük meg azt, hogy hogyan lehet megkonstruálni az $n$ egy olyan $\kappa$ felbontását, amely bármely két feedback ekvivalens rendszer esetében ugyanaz.

Rögzítsünk egy tetszőleges teljesen irányítható $(A, B)$ párt, és írjuk fel a Kalman-féle rangfeltételben szereplő mátrixot oszloponként. így a

$$b^1, \ldots, b^m, Ab^1, \ldots, Ab^m, \ldots, A^{n-1}b^1, \ldots, A^{n-1}b^m$$

vektorsorozatot kapjuk, ahol $b^j$ jelöli a $B$ mátrix $j$. oszlopvektorát. Ebben a sorozatban egy vektort *függő*nek nevezünk, ha kifejezhető a sorozatban előtte álló vektorok lineáris kombinációjaként, különben az illető vektort *független*nek nevezzük. Megmutatható, hogy ha az $A^ib^j$ vektor függő, akkor az $A^{i+1}b^j$ vektor is az. Rendezzük el a fenti vektorokat a

$$\begin{array}{llll} b^1 & b^2 & \ldots & b^m \\ Ab^1 & Ab^2 & \ldots & Ab^m \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A^{n-1}b^1 & A^{n-1}b^2 & \ldots & A^{n-1}b^m \end{array} \tag{2.35}$$

táblázatba. Legyen $\lambda_i$ a fenti táblázat $i$. sorában található, fenti értelemben független vektorok száma. Ha $rang B = r$, akkor $\lambda_1 = r$, és $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \ldots \geq \lambda_s$, ahol $s$ az utolsó olyan sor indexe, ahol legalább egy független vektor található. Mivel az $(A, B)$ pár teljesen irányítható, ezért $\lambda_1 + \lambda_2 + \ldots + \lambda_s = n$. így a $(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_s)$ az $n$ egy felbontását adja, amit az $(A, B)$ pár egyértelműen meghatároz, és amelyet $\lambda(A, B)$-vel jelölünk. Megmutatható, hogy ha $(A, B) \equiv (\widetilde{A}, \widetilde{B})$, akkor $\lambda(A, B) = \lambda(\widetilde{A}, \widetilde{B})$ (lásd a 2.18.. Feladatot).

2.5. DEFINÍCIÓ. Az $n$ egy adott $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_s)$ felbontásának *konjugáltja* alatt pozitív egész számok olyan $\lambda' = (\lambda'_1, \lambda'_2, ..., \lambda'_{s'})$ együttesét értjük, ahol $\lambda'_i$ megadja a $\lambda$ felbontás $i$-nél nem kisebb elemeinek számát.

A konjugált definíciójából következik, hogy $s' = \lambda_1 = r$, $\lambda'_1 \geq \lambda'_2 \geq ... \geq \lambda'_{s'}$ és $\lambda'_1 + \lambda'_2 + ... + \lambda'_{s'} = n$, tehát $\lambda'$ szintén az $n$ egy felbontását adja. A $\lambda$ és $\lambda'$ közötti kapcsolat megértését segíti a 0 és 1 számokból álló, úgynevezett Young-táblázat, amely azzal a tulajdonsággal rendelkezik, hogy ha egy eleme 0, akkor sem tőle jobbra, sem alatta nem fordulhat elő az 1 szám, és nincsen csak 0-t tartalmazó sora és oszlopa. Az $n$ egy adott $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_s)$ felbontásához rendeljük hozzá az $s \times \lambda_1$ méretű Young-táblázatot, amelynek első sorába $\lambda_1$ darab egyest írunk, második sorába (az első oszloptól kezdődően) $\lambda_2$ darab egyest, és így tovább. Például az $n = 4$ szám $(2, 1, 1)$ felbontásához az alábbi táblázatot rendeljük:

$$\begin{matrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \\ 1 & 0 \, . \end{matrix}$$

Megfordítva, egy pontosan $n$ db egyest tartalmazó Young-táblázat az $n$ egyetlen felbontásából származik.

Észrevesszük, hogy $\lambda$ felbontás Young-táblázatának első oszlopa pontosan annyi darab egyest tartalmaz, ahány egynél nem kisebb eleme van $\lambda$-nak, a második oszlopa annyit, ahány eleme nem kisebb mint 2, és így tovább. Tehát a $\lambda$ Young-táblázatának transzponáltja éppen a $\lambda'$ konjugált Young-táblázatát adja. Ebből következik, hogy $\lambda'' = \lambda$, így $\lambda'$ egyértelműen meghatározza $\lambda$-t.

2.6. DEFINÍCIÓ. Az $(A, B)$ teljesen irányítható pár $\kappa(A, B)$ *irányíthatósági indexe* a $\kappa_1, ..., \kappa_r$ elemek $\kappa = (\kappa_1, ..., \kappa_r)$ együttese, amely az $n$ szám $\lambda(A, B)$ felbontásának konjugáltja.

Mivel teljesen irányítható feedback ekvivalens rendszerek esetén $\lambda(A, B) = \lambda(\widetilde{A}, \widetilde{B})$, ezért irányíthatósági indexeik is megegyeznek. Igazolhatjuk azt is, hogy az $n$ bármely $\widetilde{\kappa}$ felbontása esetén

$$\kappa(A_{\widetilde{\kappa}}, B_{\widetilde{\kappa}}) = \widetilde{\kappa}. \tag{2.36}$$

**2.4. Tétel.** *Tetszőleges teljesen irányítható $(A, B)$ párhoz létezik az $n$-nek egy olyan egyértelműen meghatározott $\kappa$ felbontása, hogy $(A, B) \equiv (A_\kappa, B_\kappa)$.*

*Bizonyítás.* Legyen $\kappa'$ és $\kappa''$ az $n$ két tetszőleges felbontása. Ha $(A, B) \equiv (A_{\kappa'}, B_{\kappa'})$ és $(A, B) \equiv (A_{\kappa''}, B_{\kappa''})$, akkor

$$\kappa' = \kappa(A_{\kappa'}, B_{\kappa'}) = \kappa(A, B) = \kappa(A_{\kappa''}, B_{\kappa''}) = \kappa'',$$

ami a $\kappa$ egyértelműségét mutatja. Lássuk be, hogy van olyan $\kappa$, amelyre $(A, B) \equiv (A_\kappa, B_\kappa)$. Ezt a feedback ekvivalencia definíciójában szereplő transzformációk lépésről lépésre történő megkonstruálásával mutatjuk meg. Vegyük a $B$ mátrix oszlopainak olyan permutációját, hogy a (2.35) táblázat oszlopaiban található független vektorok száma nem-növekvő legyen (vagyis a $V$ most egy permutációs mátrix, $P = I$, $F = 0$). Jelöljük $BV$-t továbbra is $B$-vel, oszlopait pedig $b^j$-vel. Legyen továbbra is $r = rang\, B$. Minthogy az előbbi permutáció eredményeként a $B$ első $r$ oszlopa tartalmazza a lineárisan független oszlopokat, $j > r$ esetén $b^j$ kifejezhető az első $r$ oszlop lineáris kombinációjaként:

$$b^j = \sum_{i=1}^{r} \alpha_{ji} b^i.$$

Az

$$u = \overline{V}\overline{u}$$

definícióval vezessünk be új irányítási változót, ahol

$$\overline{V} = \begin{pmatrix} I_r & \overline{V}_{12} \\ 0 & -I_{m-r} \end{pmatrix}, \quad \text{és } \overline{V}_{12} = \begin{pmatrix} \alpha_{r+1,1} & \dots & \alpha_{m,1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_{r+1,r} & \dots & \alpha_{m,r} \end{pmatrix}.$$

Ekkor $Bu = B\overline{V}\overline{u}$ és $B\overline{V} = (b^1, ..., b^r, 0, ..., 0)$. A $B\overline{V}$ mátrixot továbbra is $B$-vel jelöljük, és a továbbiakban feltesszük, hogy

$$B = (b^1, ..., b^r, 0, ..., 0). \tag{2.37}$$

Jelölje a (2.35) táblázat $i$-dik oszlopában található független vektorok számát $\kappa_i$. Ekkor a

$$b^1, ..., A^{\kappa_1 - 1} b^1, b^2, ..., A^{\kappa_2 - 1} b^2, ...., b^1, ..., A^{\kappa_r - 1} b^r \tag{2.38}$$

vektorok az $\mathbb{R}^n$ egy bázisát alkotják. A függőség definíciója alapján tudjuk, hogy bármely $j$-re megadható az alábbi lineáris kombináció

$$A^{\kappa_j} b^j + \sum_{l<j} \alpha_{jlo} A^{\kappa_j} b^l = -\sum_{l=1}^{r} \sum_{k=1}^{\kappa_j} \alpha_{jlk} A^{\kappa_j - k} b^l. \tag{2.39}$$

(Ez azt fejezi ki, hogy $A^{\kappa_j} b^j$ megadható az őt megelőző vektorok lineáris kombinációjaként.) Alkalmazzunk az irányítási változók terében egy újabb koordináta-transzformációt, amelynek eredményeként egy $\widetilde{B} = B\widetilde{V}$ mátrixot kapunk

$$\widetilde{b}^j := b^j + \sum_{l<j} \alpha_{jlo} b^l \;, \qquad 1 \le j \le r$$

oszlopokkal, miközben az utolsó $m-r$ (csupa 0 oszlopot) változatlanul hagytuk. Visszanevezzük $\widetilde{B}$-t ismét $B$-re, így a (2.39) az alábbi alakba írható:

$$A^{\kappa_j} b^j + \sum_{l=1}^{r} \sum_{k=1}^{\kappa_j} \alpha_{jlk} A^{\kappa_j - k} b^l = 0 \tag{2.40}$$

(ahol persze az $\alpha_{jlk}$ együtthatók az előbbiektől különböznek). Minden $j = 1, ..., r$ és $s = 1, ..., \kappa_j$ értékre nézve vezessük be az $e_{js}$ jelölést az alábbi vektorra:

$$e_{js} := A^{s-1} b^j + \sum_{l=1}^{r} \sum_{k=1}^{s-1} \alpha_{jlk} A^{(s-1)-k} b^l.$$

(Az „üres szumma” $=0$ konvenció alapján $c_{j1} = b^j$, $j = 1, ..., r$.) írjuk az így definiált vektorokat

$$e_{11}, e_{21}, ..., e_{r1}; e_{12}, e_{22}, ...$$

sorrendbe. Ha ezt összehasonlítjuk az $\mathbb{R}^n$ bázisát alkotó (2.38)-beli vektorokkal, amit most

$$b^1, b^2, ..., b^r; Ab^1, Ab^2, ...$$

sorrendben írunk fel, láthatjuk, hogy az $e_{js}$ vektorokat „egység-háromszög” típusú lineáris kombinációval kaphatjuk a fenti sorrendben felírt bázisvektorokból. így az $e_{js}$ ($j = 1, ..., r;\ s = 1, ..., \kappa_j$) vektorok lineárisan függetlenek (és így szintén az $\mathbb{R}^n$ bázisát alkotják). Tekintsük most a

$$P = \left[e_{1\kappa_1}, e_{1(\kappa_1-1)}, ..., e_{11}, e_{2\kappa_2}, e_{2(\kappa_2-1)}, ..., e_{21}, ..., e_{r\kappa_r}, e_{r(\kappa_r-1)}, ..., e_{r1}\right]$$

mátrixot, ami a fentiek értelmében invertálható. Legyen

$$\widetilde{A} = P^{-1} A P, \quad \widetilde{B} = P^{-1} B,$$

és írjuk az $\widetilde{A}$ mátrixot a $\kappa = (\kappa_1, ..., \kappa_r)$ felbontásnak megfelelő blokkosított alakba:

$$\widetilde{A} = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & \dots & A_{1r} \\ A_{21} & A_{22} & \dots & A_{2r} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{r1} & A_{r2} & \dots & A_{rr} \end{pmatrix}.$$

A $P\widetilde{A} = AP$ egyenlőség két oldalán szereplő mátrixok oszlopait összehasonlítva igazolhatjuk, hogy az $\widetilde{A}$ fődiagonálisában szereplő $A_{ii}$ blokkok

$$A_{ii} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ * & * & * & \dots & * \end{pmatrix}$$

alakúak, míg a fődiagonálison kívüli $A_{ij}$ blokkok $(i \neq j)$

$$A_{ij} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ * & * & * & \dots & * \end{pmatrix}$$

alakúak, ahol csak a csillagok helyén állhatnak nullától különböző számok. Ehhez azt kell belátnunk, hogy $s < \kappa_j$ esetén

$$Ae_{js} = e_{j(s+1)} - \sum_{l=1}^{r} \alpha_{jls} b^l,$$

míg a (2.40) figyelembe vételével $s = \kappa_j$-re azt kapjuk, hogy

$$Ae_{j\kappa_j} = -\sum_{l=1}^{r} \alpha_{jl\kappa_j} b^l.$$

Másrészt a $\widetilde{B}$ mátrix a $P\widetilde{B} = B$ mátrixegyenlet egyértelmű megoldása, amiből közvetlenül következik, hogy

$$\widetilde{B} = B_\kappa,$$

ahol a $B_\kappa$-t a (2.33), (2.34) képletekkel határoztuk meg. (Emlékeztetünk rá, hogy a $B$ mátrix az irányítási vektorok terében végrehajtott koordinátatranszformációk eredményeként alakult ki, és a (2.37) képletnek megfelelő alakú!)

Eddig tehát azt kaptuk, hogy a kiindulási rendszer lineárisan ekvivalens az $(\widetilde{A}, \widetilde{B})$ alakú rendszerrel, ami alakját tekintve az 1-bemenetű $(m = 1)$ rendszerek irányítási kanonikus alakjával analóg. Az $m = 1$ esettel ellentétben azonban a 0-tól és 1-től különböző elemeket az eredeti $(A, B)$ pár nem határozza meg egyértelműen, így az $(\widetilde{A}, \widetilde{B})$ párt nem tekinthetjük kanonikus alaknak. Az $(A_\kappa, B_\kappa)$ kanonikus alakot megkaphatjuk $(\widetilde{A}, \widetilde{B})$-ból úgy, hogy az $\widetilde{A} \to \widetilde{A} + \widetilde{B}\widetilde{F}$ feedback transzformációt alkalmazzuk, ahol az $\widetilde{F}$ mátrixba az $\widetilde{A}$ mátrix csillaggal jelölt elemeit gyűjtjük össze ellentétes előjellel. □

## 2.5. Stabilizálhatóság, póluselhelyezés

A teljes irányíthatóság fentiekben megismert fogalma azt fejezi ki, hogy adott intervallumon a rendszer tetszőleges kezdőállapotból tetszőleges végállapotba - így az origóba is - átvihető megengedett vezérléssel. Ennél kevesebbet követelünk akkor, ha azt várjuk, hogy megadható legyen olyan visszacsatolás, amely mellett bárhonnan indulva a rendszer állapota az origóba tartson.

2.7. Definíció. Az időinvariáns lineáris

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t), \tag{2.41}$$

illetve

$$x(t+1) = Ax(t) + Bu(t) \tag{2.42}$$

rendszert stabilizálhatónak nevezük, ha létezik egy olyan, az állapottól lineárisan függő $u(.) = Dx(.)$ vezérlés, hogy az

$$\dot{x}(t) = (A + BD)x(t),$$

illetve

$$x(t+1) = (A + BD)x(t)$$

rendszer aszimptotikusan stabilis.

A (2.41) rendszer tehát akkor és csak akkor stabilizálható, ha létezik olyan $D \in \mathbb{R}^{m\times n}$ mátrix, hogy az $(A + BD)$ mátrix minden sajátértéke negatív valós részű. A (2.42) rendszer pedig akkor és csak akkor stabilizálható, ha az $(A + BD)$ mátrix minden sajátértéke abszolút értékben kisebb, mint 1.

A stabilizálhatóság szintén független a koordináta rendszer választásától, tehát csak a rendszerre jellemző tulajdonság. Valóban, ha $(A, B)$ és $\left(\overline{A}, \overline{B}\right)$

lineárisan ekvivalens rendszerek , amelyekre $\overline{A} = PAP^{-1}$, $\overline{B} = PB$, és $(A, B)$ stabilizálható, akkor $\left(\overline{A}, \overline{B}\right)$ is az, hiszen

$$P(A + BD)P^{-1} = \overline{A} + \overline{BD}, \qquad \left(\overline{D} = DP^{-1}\right),$$

ezért az $A + BD$ és az $\overline{A} + \overline{BD}$ mátrixok sajátértékei megegyeznek.

Egy $(A, B)$ párral meghatározott rendszer biztosan stabilizálható, ha megoldható az alábbi feladat.

*A póluselhelyezés feladata*: adott $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ és $B \in \mathbb{R}^{n\times m}$ mátrixokhoz és egy tetszőlegesen megadott $p(\lambda) = \lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \ldots + a_0$ $n$-edfokú valós együtthatós polinomhoz keresendő egy olyan $D \in \mathbb{R}^{m\times n}$ mátrix, hogy $\det(\lambda I - (A + BD)) = p(\lambda)$.

*2.4. Megjegyzés.* Mivel hasonló mátrixok karakterisztikus polinomjai megegyeznek, a fenti meggondolásból azonnal következik az is hogy lineárisan ekvivalens rendszerekre a póluselhelyezés feladatának megoldhatósága is egyidejűleg teljesül. Analóg állítás igaz feedback ekvivalens rendszerekre is: tegyük fel, hogy $(A, B) \equiv (\overline{A}, \overline{B})$, és $P$, $V$, $F$ a feeadback ekvivalencia 2.3. Definíciójában szereplő mátrixok, ekkor $p(\lambda) = \det(\lambda I - (\overline{A} + \overline{BD}))$ egyenlőségből következik, hogy $D = F + V\overline{D}P^{-1}$ definíció mellett $p(\lambda) = \det(\lambda I - (A + BD))$ is teljesül.

**2.5. Tétel.** *A póluselhelyezés feladata akkor és csak akkor oldható meg, ha az $(A, B)$ pár teljesen irányítható.*

*Bizonyítás. Szükségesség.* Tegyük fel, hogy a póluselhelyezés feladata megoldható, mégis az $(A, B)$ pár nem teljesen irányítható. Legyen $L_1 \subset \mathbb{R}^n$ az az altér, amelyet a $(B, AB, \ldots, A^{n-1}B)$ oszlopvektorai feszítenek ki. A feltevés miatt $\dim L_1 < n$. Az $L_1$ altér $A$-invariáns, ami azt jelenti, hogy ha $x \in L_1$, akkor $Ax \in L_1$ szintén teljesül. Az $x \in L_1$ ugyanis azt jelenti, hogy vannak olyan $v_1, \ldots, v_n \in \mathbb{R}^m$ vektorok, hogy $x = Bv_1 + \ldots + A^{n-1}Bv_n$. Ezért

$$Ax = ABv_1 + \ldots + A^{n-1}Bv_{n-1} + A^nBv_n.$$

A Cayley-Hamilton tétel miatt bizonyos $\overline{v}_1, \ldots, \overline{v}_n$ vektorokra $Ax = B\overline{v}_1 + \ldots + A^{n-1}B\overline{v}_n$ is teljesül. Legyen $L_2 \subset \mathbb{R}^n$ az $L_1$ egy kiegészítő altere, tehát olyan, hogy $\mathbb{R}^n = L_1 \oplus L_2$, és válasszunk egy-egy bázist $L_1$-ben és $L_2$-ben. Legyen $\mathbb{R}^n$-ben egy új bázis rendre az $L_1$ és az $L_2$ bázisvektoraival meghatározva. Ebben a koordinátarendszerben az $A$-ból és $B$-ből kapott $\widetilde{A}$, és $\widetilde{B}$ mátrixok

$$\widetilde{A} = \begin{pmatrix} \widetilde{A}_{11} & \widetilde{A}_{12} \\ 0 & \widetilde{A}_{22} \end{pmatrix}, \qquad \widetilde{B} = \begin{pmatrix} \widetilde{B}_1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

alakúak, ahol $\widetilde{A}_{11} \in \mathbb{R}^{n_1 \times n_1}$, $\quad \widetilde{B}_1 \in \mathbb{R}^{n_1 \times m}$, $\quad n_1 = \dim L_1$. Ha $D = (D_1 \; D_2) \in \mathbb{R}^{m \times n}$ tetszőleges, akkor

$$\begin{aligned}
&\det\left(\lambda I - \left(\widetilde{A} + \widetilde{B} D\right)\right) = \\
&\quad = \det\left(\lambda \begin{pmatrix} I_{n_1} & 0 \\ 0 & I_{n_2} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \widetilde{A}_{11} + \widetilde{B}_1 D_1 & \widetilde{A}_{12} + \widetilde{B}_1 D_2 \\ 0 & \widetilde{A}_{22} \end{pmatrix}\right) \\
&\quad = \det\left(\lambda I_{n_1} - \left(\widetilde{A}_{11} + \widetilde{B}_1 D_1\right)\right) \det\left(\lambda I_{n_2} - \widetilde{A}_{22}\right),
\end{aligned}$$

tehát az $\widetilde{A} + \widetilde{B} D$ mátrix $n_2$ darab sajátértéke ugyanaz, mint az $\widetilde{A}_{22}$ mátrixé. Mivel hasonló mátrixok sajátértékei megegyeznek, ezzel beláttuk, hogy az $A$ mátrixnak $n_2$ darab sajátértéke nem változtatható meg visszacsatolással. Ez az ellentmondás lezárja a bizonyítás első részét.

*Elegendőség.* Tegyük fel, hogy az $(A, B)$ pár teljesen irányítható $\kappa = (\kappa_1, ..., \kappa_r)$ irányíthatósági indexekkel. A 2.4. Megjegyzés értelmében elegendő az állítást a (2.33), (2.34) összefüggésekkel meghatározott Brunovsky-féle kanonikus alakban adott rendszerekre belátni, ezért a továbbiakban feltételezzük, hogy $A = A_\kappa,\ B = B_\kappa$.

Tekintsük először az $m = 1$ esetet, és legyen $p(\lambda) = \lambda^n - a_{n-1}\lambda^{n-1} - ... - a_0$ alakban megadva. Legyen a $D_\kappa \in \mathbb{R}^{1 \times m}$ mátrix

$$D_\kappa = \begin{pmatrix} a_0 & a_1 & \cdots & a_{n-1} \end{pmatrix}.$$

Ekkor $\det(\lambda I - (A_\kappa + B_\kappa D_\kappa)) = p(\lambda)$.

Vizsgáljuk ezek után az általános esetet, és mutassuk meg, hogy $m > 1$ esetén a feladat visszavezethető az egybemenetű esetre. Továbbra is feltételezzük, hogy $(A, B)$ Brunovsky-féle kanonikus alakban adott. Azt fogjuk megmutatni, hogy van olyan $F_1 \in \mathbb{R}^{m \times n}$ mátrix és $v \in \mathbb{R}^m$ vektor, hogy az $\widetilde{A} = A + BF_1$, $\widetilde{b} = Bv$ egyenlőségekkel megadott $(\widetilde{A}, \widetilde{b})$ egybemenetű rendszer teljesen irányítható. Az előbbiekben már beláttuk, hogy létezik egy olyan $\mathbb{R}^{1 \times n}$-beli mátrix, amire most a $\widetilde{d}$ jelölést használjuk, hogy az $\widetilde{A} + \widetilde{b}\widetilde{d}$ mátrix karakterisztikus polinomja éppen a megadott $p(\lambda)$. Ekkor a $D = F_1 + v\widetilde{d}$ mátrix megfelel, hiszen

$$A + BD = (A + BF_1) + (Bv)\widetilde{d}.$$

A célunk az, hogy - alkalmasan választott $v \in \mathbb{R}^n$ mellett - megkonstruáljunk egy $x_1, ..., x_n \in \mathbb{R}^n$ lineárisan független vektorokból álló sorozatot, amelyre

$$x_1 = Bv,\ x_i = Ax_{i-1} + Bu_{i-1},\ i = 2, ..., n \tag{2.43}$$

teljesül valamilyen $u_1, ..., u_{n-1}$ vektorokkal. Ha ez sikerül, és az $F_1$ mátrixot úgy választjuk, hogy

$$F_1 x_j = u_j, \quad j = 1, ..., n-1, \quad F_1 x_n = w, \quad w \text{ tetszőleges} \tag{2.44}$$

legyen, akkor az $x_i = (A + BF_1)x_{i-1}$ egyenlőség is teljesül, ha $i = 2, ..., n$, ezért a $\widetilde{b} = x_1$, $\widetilde{A} = A + BF_1$ mellett azt kapjuk, hogy

$$rang(\widetilde{b}, \widetilde{A}\widetilde{b}, ..., \widetilde{A}^{n-1}\widetilde{b}) = rang(x_1, x_2, ..., x_n) = n,$$

vagyis az $(\widetilde{A}, \widetilde{b})$ pár valóban teljesen irányítható.

Az, hogy a (2.44) egyenletek egyértelműen meghatározzák $F_1$-et, közvetlenül következik $x_1, ...x_n$ lineáris függetlenségéből. Ha ugyanis

$$X = \begin{pmatrix} x_1^T \\ \vdots \\ x_n^T \end{pmatrix}, \qquad U = \begin{pmatrix} u_1^T \\ \vdots \\ u_{n-1}^T \\ w^T \end{pmatrix}$$

jelöléseket alkalmazzuk, akkor a (2.43) egyenletrendszer ekvivalens az

$$XF_1^T = U$$

lineáris mátrixegyenlettel, amelynek egyértelmű megoldása $F_1^T = X^{-1}U$ alakban megadható.

Elegendő tehát azt megmutatni, hogy hogyan adható meg egy alkalmas $v$, továbbá olyan $u_1, ..., u_{n-1}$ sorozat, hogy a (2.43) összefüggések lineárisan független $x_1, ..., x_n$ vektorokat eredményezzenek. A felvetésünk értelmében $(A, B) = (A_\kappa, B_\kappa)$. Minthogy az alábbi számolásban a mátrixelemek konkrét értékei fontosak, a hangsúly kedvéért ismét az $(A_\kappa, B_\kappa)$ jelölést alkalmazzuk.

Legyen a $v$ vektor a

$$v_j = \begin{cases} 1, & \text{ha } j = r, \\ 0, & \text{ha } j \neq r, \end{cases} \quad j = 1, ..., m$$

összefüggésekkel meghatározva. Ekkor $x_1 = B_\kappa v = e_n$, ahol $e_n$ az $n$-edik egységvektor.

Válasszuk az $u_1, ..., u_{n-1}$ vektorokat az alábbi módon:

$$(u_1, ..., u_{n-1}) = \begin{pmatrix} 0 \cdots 0 & 0 & 0 \cdots 0 & \cdots & 1 & 0 \cdots 0 \\ \vdots \ddots \vdots & \vdots & \vdots \ddots \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \ddots \vdots \\ & 1 & & & & \\ 0 \cdots 0 & 0 & 0 \cdots 0 & \cdots & 0 & 0 \cdots 0 \end{pmatrix}.$$
$$\underbrace{\qquad}_{\kappa_r - 1 \text{ db}} \qquad \underbrace{\qquad}_{\kappa_{r-1} - 1 \text{ db}} \qquad \underbrace{\qquad}_{\kappa_1 - 1 \text{ db}}$$

(Itt az 1 szám az $u_{\kappa_r}$-ben az $r-1$-dik komponensként szerepel, majd - 0 vektorok közbeiktatása után - lépcsőzetesen felmegy az első komponensig.) Ezeket rendre behelyettesítve az $x_{i+1} = A_\kappa x_i + B_\kappa u_i$ összefüggésbe, az $x_2 = e_{n-1}, ..., x_n = e_1$ vektorokat kapjuk, amelyek nyilvánvalóan lineárisan függetlenek.

Ezzel a bizonyítást befejeztük. □

*2.5. Megjegyzés.* A bizonyítás $m > 1$ esetén is nagyon egyszerű abban a speciális esetben, ha a megadott $p(\lambda)$ polinom felírható $p(\lambda) = p_{\kappa_1}(\lambda) ... p_{\kappa_r}(\lambda)$ szorzat alakjában, ahol $p_{\kappa_i}(\lambda) = \lambda^{\kappa_i} - a_{i,\kappa_i-1}\lambda^{\kappa_i-1} - ... - a_{i,1}\lambda - a_{i,0}$ valós együtthatós, $\kappa_i$ fokszámú polinom. Ez biztosan igaz, ha az előírt polinomnak minden gyöke valós, (vagy ha $r = 1$ ). Valóban, legyen a $D_\kappa$ mátrix

$$D_\kappa = \begin{pmatrix} a_{10} & \cdots & a_{1(\kappa_1-1)} & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & a_{20} & \cdots & a_{2(\kappa_2-1)} & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & a_{\kappa_r 0} & \cdots & a_{\kappa_r(\kappa_r-1)} \end{pmatrix}.$$

Ekkor $\det(\lambda I - (A_\kappa + B_\kappa D_\kappa)) = p(\lambda)$.

*2.6. Megjegyzés.* Ha a póluselhelyezés feladata megoldható, akkor az $u = Dx$ visszacsatolt vezérléssel az $\dot{x}(t) = (A + BD)x(t)$, illetve $x(t+1) = (A + BD)x(t)$ rendszer együtthatómátrixának a sajátértékeit lényegében tetszőleges módon előírhatjuk (azt kell csupán kikötni, hogy komplex sajátértékek csak konjugált párokban fordulhatnak elő).

*2.7. Megjegyzés.* A 2.5. Tétel 2. állításának bizonyítása ugyan konstruktív, de a gyakorlati számítás során egyszerűbben is eljárhatunk, amint azt az alábbi példa megoldása során láthatjuk. Hangsúlyozzuk, hogy a hatékony numerikus kiszámításra - például a MATLAB eszköztárban - más, az előzőeknél bonyolultabb algoritmust használnak.

*2.5. Példa. (Fordított inga folytatása).* Tekintsük ismét a fordított inga modelljének lineáris közelítését elhanyagolható surlódás mellett. Láttuk, hogy ez a rendszer teljesen irányítható, így a fentiek miatt stabilizálható is, sőt a póluselhelyezés feladata is megoldható. A meghatározottság kedvéért tekintsük ezt a rendszert a $M = 0.98\ kg$, $m = 0.08\ kg$, $L = 0.312\ m$, $g = 10\ m/\sec^2$ adatokkal. Ekkor

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 25 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -0.6 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 0 \\ -2.4 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Mivel $\det(\lambda I - A) = \lambda^4 - 25\lambda^2$, ez a rendszer instabil, hiszen $A$ sajátértékei $5, -5, 0$ (kétszeres). Tegyük fel, hogy egy olyan $D = (d_1, d_2, d_3, d_4)$ visszacsatolást szeretnénk meghatározni, hogy az $A + BD$ mátrix sajátértékei $-1, -2$ és $-2 \pm i$ legyenek, tehát az előírt polinom legyen $p(\lambda) = (\lambda+1)(\lambda+2)(\lambda^2+4\lambda+5) = \lambda^4 + 7\lambda^3 + 19\lambda^2 + 23\lambda + 10$. így $D$-re vonatkozóan a

$$\det(\lambda I - (A + BD)) = p(\lambda)$$

feltételt írhatjuk fel, amiből azt kapjuk, hogy

$$\det \begin{pmatrix} \lambda & -1 & 0 & 0 \\ -25 + 2.4d_1 & \lambda + 2.4d_2 & 2.4d_3 & 2.4d_4 \\ 0 & 0 & \lambda & -1 \\ 0.6 - d_1 & -d_2 & -d_3 & \lambda - d_4 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{aligned} &= \lambda^4 + (2.4d_2 - d_4)\lambda^3 + (-d_3 - 25 + 2.4d_1)\lambda^2 \\ &\qquad + (25d_4 - 1.44d_4)\lambda + (25d_3 - 1.44d_3) = \\ &= \lambda^4 + 7\lambda^3 + 19\lambda^2 + 23\lambda + 10. \end{aligned}$$

Innen

$$d_3 = \frac{10}{23.56},\ d_4 = \frac{23}{23.56},\ d_1 = \frac{1}{2.4}\left(44 + \frac{10}{23.56}\right),\ d_2 = \frac{1}{24}\left(7 + \frac{23}{23.56}\right).$$

## 2.6. Lineáris rendszerek megfigyelhetősége

Rendszerek megfigyelhetősége alatt egy olyan tulajdonságot értünk, amely lehetővé teszi, hogy meghatározzuk a rendszer állapotát annak alapján, hogy valamilyen intervallumon ismerjük a bemenő és kimenő jeleket. Most tehát arra leszünk kiváncsiak, hogy meghatározható-e az ismeretlen $x(t_0) = x_0$ állapot az

$$\dot{x}(t) = A(t)\,x(t) + B(t)\,u(t), \qquad (2.45)$$

$$y(t) = C(t)\,x(t), \qquad t \in \mathcal{I} \subset \mathbb{R} \qquad (2.46)$$

illetve az

$$x(t+1) = A(t)\,x(t) + B(t)\,u(t), \qquad (2.47)$$

$$y(t) = C(t)\,x(t), \qquad t \in \mathcal{I} \subset \mathbb{Z} \qquad (2.48)$$

irányítási-megfigyelési rendszerhez, ha ismert az $u \in \Delta(t_0, t_1)$ vezérlés és az $y : [t_0, t_1] \to \mathbb{R}^p$ megfigyelés. Természetesen az elmondottakon kívül ismertek a rendszert leíró $A$, $B$, $C$ mátrixfüggvények, amelyekre $A(t) \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $B(t) \in \mathbb{R}^{n\times m}$, $C(t) \in \mathbb{R}^{p\times n}$.

**2.8. Definíció.** A (2.45), (2.46) illetve (2.47), (2.48) irányítási-megfigyelési rendszert teljesen megfigyelhetőnek nevezzük a $[t_0, t_1]$ intervallumon, ha az ismeretlen kezdőállapot (egyértelműen) meghatározható az $u$ és $y$ függvények ismeretében.

*2.8. Megjegyzés.* A megfigyelhetőség vizsgálatánál elegendő az $u(t) \equiv 0$ esetre szorítkozni, vagyis az

$$\dot{x}(t) = A(t)\, x(t), \quad y(t) = C(t)\, x(t), \tag{2.49}$$

illetve

$$x(t+1) = A(t)\, x(t), \quad y(t) = C(t)\, x(t) \tag{2.50}$$

rendszert tekinteni. Ha ugyanis az $u$ tetszőleges vezérlés, akkor (2.45), (2.46) esetén a Cauchy formula szerint

$$y(t) = C(t) \left[ \phi(t, t_0)\, x_0 + \int_{t_0}^{t} \phi(t, s)\, B(s)\, u(s)\, ds \right],$$

ahol a zárójelben szereplő második tag ismert függvény, tehát az $y$ helyett tekinthetjük az

$$\widetilde{y}(t) = y(t) - C(t) \int_{t_0}^{t} \phi(t, s)\, B(s)\, u(s)\, ds$$

megfigyelést. Diszkrét idejű rendszer esetén teljesen analóg meggondolásokkal kapjuk az állítást. A továbbiakban ezért a (2.49), illetve (2.50) rendszer megfigyelhetőségével fogunk foglalkozni.

*2.9. Megjegyzés.* A 2.8. Definíció megfogalmazható volna másképp is: egy lineáris rendszer akkor és csak akkor megfigyelhető egy adott intervallumon, ha különböző kezdőállapotokhoz különböző megfigyelési függvények tartoznak, ami ekvivalens azzal, hogy az $y(t) \equiv 0, t \in [t_0, t_1]$ akkor és csak akkor teljesül, ha $x_0 = 0$.

**2.6. Tétel.** *A (2.49), illetve (2.50) rendszer akkor és csak akkor teljesen megfigyelhető a* $[t_0, t_1]$ *intervallumon, ha az*

$$M(t_0, t_1) = \int_{t_0}^{t_1} \phi(s, t_0)^T C(s)^T C(s) \phi(s, t_0)\, ds$$

*illetve az*

$$M(t_0, t_1) = \sum_{j=t_0}^{t_1-1} \phi(j, t_0)^T C(j)^T C(j) \phi(j, t_0)$$

*mátrix pozitív definit.*

*Bizonyítás.* Vegyük észre, hogy $M(t_0, t_1)$ mindig pozitív szemidefinit. Tetszőleges $\tau \in [t_0, t_1]$-re

$$y(\tau) = C(\tau) \phi(\tau, t_0) x_0.$$

Szorozzuk meg ezen egyenlőség mindkét oldalát a $\phi(\tau, t_0)^T C(\tau)^T$ mátrixszal, és integráljuk $t_0$-tól $t_1$-ig, illetve összegezzük $t_0$-tól $t_1 - 1$-ig; ekkor

$$M(t_0, t_1)x_0 = \begin{cases} \int_{t_0}^{t_1} \phi(s, t_0)^T C(s)^T y(s) ds, \\ \sum_{j=t_0}^{t_1-1} \phi(j, t_0)^T C(j)^T y(j), \end{cases}$$

ami egy lineáris egyenletrendszer az $x_0$ ismeretlenre vonatkozóan. Ha az $M(t_0, t_1)$ pozitív definit, akkor abból, hogy $y(t) \equiv 0$, nyilván következik, hogy $x_0 = 0$, vagyis a rendszer teljesen megfigyelhető. Fordítva, tegyük fel, hogy abból, hogy $y(t) \equiv 0$, következik, hogy $x_0 = 0$. Ez azt jelenti, hogy a fenti homogén lineáris egyenletrendszer megoldása egyértelmű, ami ekvivalens azzal, hogy $\det M(t_0, t_1) \neq 0$.

Minthogy definíciója miatt $M(t_0, t_1)$ biztosan pozitív szemidefinit, ebből az következik, hogy $M(t_0, t_1)$ pozitív definit. □

**2.3. Következmény.** *Ha* $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $C \in \mathbb{R}^{p \times n}$, *akkor az*

$$\dot{x}(t) = Ax(t), \qquad y(t) = Cx(t),$$

*illetve az*

$$x(t+1) = Ax(t), \quad y(t) = Cx(t)$$

*időinvariáns lineáris megfigyelési rendszer akkor és csak akkor teljesen megfigyelhető bármilyen pozitív hosszúságú, illetve legalább $n$ hosszúságú $[t_0, t_1]$ intervallumon, ha*

$$rang\left[C^T, A^T C^T, ..., \left(A^T\right)^{n-1} C^T\right] = n.$$

*Bizonyítás.* A bizonyítás teljesen analóg a 2.1. Következménnyel, ezért ennek átgondolását az olvasóra bízzuk. □

*2.6. Példa. (Fordított inga folytatása).* A 2.1. Példában láttuk, hogy a fordított ingát beállító rendszer mozgásását lineáris közelítésben a (2.11) differenciálegyenlet rendszerrel írhatjuk le. Tegyük fel, hogy az ingának a függőleges iránytól való $\phi(t)$ elhajlásának a mérése alapján szeretnénk az irányítást megvalósítani. Ez azt jelenti, hogy az $y(t) = x_1(t)$ a megfigyelt változó, vagyis $C = (1, 0, 0, 0, )$. A (2.11) képletben megadott $A$ mátrix felhasználásával kiszámíthatjuk, hogy

$$\left[C^T, A^T C^T, \left(A^T\right)^2 C^T, \left(A^T\right)^3 C^T\right] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & a_{21} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & a_{21} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Ennek a mátrixnak a rangja 2, tehát a szögeltérés alapján a rendszer nem megfigyelhető. Tegyük fel, hogy mérjük a szögeltérést és a kocsi helyzetét is, vagyis

$$\begin{bmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \\ x_4(t) \end{bmatrix} =: C_1 x(t)$$

változókat. Ekkor

$$\left[C_1^T, A^T C_1^T, \left(A^T\right)^2 C_1^T, \left(A^T\right)^3 C_1^T\right] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \\ 0 & 1 & 0 & 0 & * \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \end{bmatrix},$$

ahol az első négy oszlop lineárisan független, ezért a továbbiakat már nem is számítjuk ki. így ez a rendszer már teljesen megfigyelhető.

*2.7. Példa. (Zárt gazdaság egy modelljének folytatása).* A 2.2. Példában kiszámítottuk a zárt gazdaság 1.2.6 Példabeli modelljének lineáris közelítését. A (2.13) és (2.14) alapján $y$ és $p + \frac{H_W}{H_P}w$ a mért változók, tehát

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ c_{21} & 0 & c_{23} \end{pmatrix}, \quad c_{21} = \frac{1}{H_P F_N}, \quad c_{23} = -\left(\frac{F_K}{H_P F_N} + \frac{H_K}{H_P}\right).$$

A megfigyelhetőség vizsgálatához elegendő lesz azt tudnunk, hogy az $A$ és $C$ mátrix bizonyos elemeinek milyen az előjele. Abból következően, hogy az eredeti modellben $F_N, F_K, H_P, H_K$ biztosan pozitív, míg $I_R$ biztosan negatív, az $A$ mátrixban $a_{12} = \alpha I_R$, ezért $a_{12} < 0$, $c_{23} < 0$. Tehát

$$rang\left(C^T, A^T C^T, \left(A^T\right)^2 C^T\right) = rang\begin{pmatrix} 1 & c_{21} & * & * & \\ 0 & 0 & a_{12} & * & \dots \\ 0 & c_{23} & * & * & \end{pmatrix} = 3,$$

ami azt jelenti, hogy a rendszer teljesen megfigyelhető.

## 2.7. Állapotmegfigyelők, szeparációs elv

Tegyük fel, hogy adott egy lineáris, időinvariáns irányítási - megfigyelési rendszer. Ha az irányítást egy $u = Kx$ alakú (statikus) visszacsatolással szeretnénk meghatározni, akkor ennek megvalósításához minden időpillanatban rendelkezésre kellene állnia az $x(t)$ állapotnak. Mivel azonban csak az $y(t) = Cx(t)$ megfigyelés hozzáférhető, ezért egy $u = \widetilde{D}y$ alakú (szintén statikus) visszacsatolással kellene a rendszerben bizonyos követelményeket (például stabilizálást, póluselhelyezést) teljesíteni. Ez az igény eléggé nehezen teljesíthetőnek látszik. Gondoljunk csak arra, hogy ha az irányításnak is, és a megfigyelésnek is a dimenziója 1 (azaz $m = p = 1$), akkor a $\widetilde{D}$ egyetlen szám, ezért nem várható, hogy a $\widetilde{D}$ megválasztásával az $A + B\widetilde{D}C$ összes sajátértékét megfelelő módon befolyásolni tudjuk. Valójában az $u = \widetilde{D}y$ statikus visszacsatolás $\min\{n, m + p - 1\}$ sajátérték kezelését teszi lehetővé. A fentiekben vázolt nehézség kiküszöbölése érdekében folyamodunk a dinamikus visszacsatoláshoz, ami a következőt jelenti. Szeretnénk megkonstruálni egy olyan, megfigyelőnek nevezett rendszert, amelynek a bemenete az eredeti rendszer bemeneti és kimeneti függvénye, kimenete pedig tetszőleges kezdőállapot esetén az eredeti rendszer állapotához tart. A két rendszer kapcsolatát szimbolikusan a 2.1. ábra szemlélteti.

2.9. DEFINÍCIÓ. Legyen az

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \qquad y(t) = Cx(t), \tag{2.51}$$

illetve az

$$x(t+1) = Ax(t) + Bu(t) \quad y(t) = Cx(t) \tag{2.52}$$

adott rendszer. A

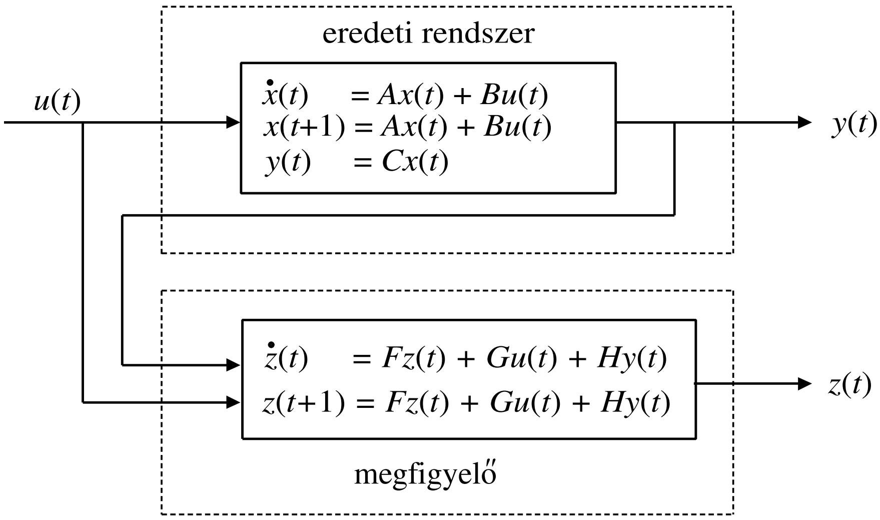
$$\dot{z}(t) = Fz(t) + Gu(t) + Hy(t), \tag{2.53}$$

illetve a

$$z(t+1) = Fz(t) + Gu(t) + Hy(t) \tag{2.54}$$

rendszert a (2.51), illetve (2.52) rendszerre vonatkozó állapotmegfigyelőnek nevezzük, ha bármilyen $x_0, z_0 \in \mathbb{R}^n$ kezdőállapotok, és bármilyen megengedett $u(.)$ irányítás esetén a (2.51) és (2.53) illetve a (2.52) és (2.54) megfelelő $x(.)$ és $z(.)$ megoldására teljesül, hogy

$$z(t) - x(t) \to 0, \qquad \text{ha } t \to \infty.$$




2.1. ábra. Állapotmegfigyelő

Az állapotmegfigyelő egy olyan rendszer - konkrét berendezés, vagy akár egy számítógépes program - amelynek az állapotvektora minden időpillanatban rendelkezésre áll.

Matematikai szempontból az állapotmegfigyelő konstruálása az $F, G, H$ mátrixok meghatározását jelenti. Végezzük el a számolásokat diszkrét rendszerre. A folytonos idejű rendszerekre teljesen analóg módon kaphatjuk meg az eredményt.

A megfigyelés

$$e(t) := z(t) - x(t)$$

hibája eleget tesz az

$$\begin{aligned} e(t+1) &= z(t+1) - x(t+1) = \\ &= F(e(t) + x(t)) + Gu(t) + HCx(t) - Ax(t) - Bu(t) = \\ &= Fe(t) + (F - A + HC)x(t) + (G - B)u(t) \end{aligned} \tag{2.55}$$

differenciaegyenletnek. Ha az $F$ és $G$ mátrixot úgy választjuk, hogy $F = A - HC$ és $G = B$, akkor a (2.55) jobb oldala nem függ az $x(t)$-től és az $u(t)$-től, így a kérdés arra redukálódik, hogy megválasztható-e a $H$ úgy, hogy az

$$e(t+1) = (A - HC)\, e(t)$$

rendszer aszimptotikusan stabilis legyen. Mivel az $F$ és az $F^T$ sajátértékei ugyanazok, ezért az előbbi kérdést úgy is fogalmazhatjuk, hogy megadható-e a $H^T$ mátrix úgy, hogy az $F^T = A^T - C^T H^T$ összes sajátértéke egynél kisebb abszolút értékű legyen, vagy - ami még jobb - sajátértékei megegyezzenek az általunk előírtakkal. Látjuk, hogy ez nem más, mint az $\left(A^T, C^T\right)$ párra vonatkozó stabilizálási, illetve póluselhelyezési feladat. A 2.5. Tétel és a 2.6. Megjegyzés értelmében ez a feladat biztosan megoldható, ha az $\left(A^T, C^T\right)$ pár teljesen irányítható, vagyis ha az $(A, C)$ pár teljesen megfigyelhető.

Az állapotmegfigyelő tehát

$$z(t+1) = (A - HC)\, z(t) + Bu(t) + Hy(t)\,.$$

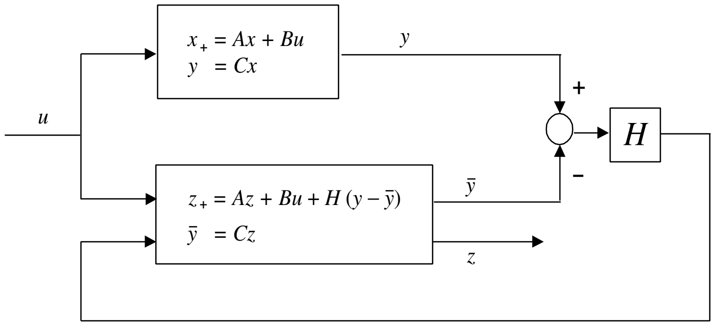
Ezt felírhatjuk a

$$z(t+1) = Az(t) + Bu(t) + H(y(t) - \overline{y}(t))$$

alakban is, ahol $\overline{y}(t) = Cz(t)$ és szemléltethetjük a 2.2. ábrával.

*2.8. Példa. (Fordított inga folytatása).* Tegyük fel, hogy csak a kocsi pozicióját mérjük, így az $A$ és $C$ mátrix az alábbi:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1\,0\,0 \\ 25 & 0\,0\,0 \\ 0 & 0\,0\,1 \\ -0.6 & 0\,0\,0 \end{pmatrix}, \qquad C = \begin{pmatrix} 0\,0\,1\,0 \end{pmatrix}.$$




2.2. ábra. Diszkrét idejű állapotmegfigyelő

Ekkor

$$\left(C^T, A^TC^T, \left(A^T\right)^2 C^T, \left(A^T\right)^3 C^T\right)^T = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -0.6 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -0.6 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

amelynek a rangja 4.

Tegyük fel, hogy olyan állapotmegfigyelőt akarunk konstruálni, amelyre az $(A - HC)$ sajátértékei: $\lambda_1 = \lambda_2 = -1$, és $\lambda_{3,4} = -1 \pm i$. Ez azt jelenti, hogy olyan $H = (h_1, h_2, h_3, h_4)^T$ mátrixot kell meghatározni, amelyre

$$\det\left(\lambda I - (A - HC)\right) = \det \begin{pmatrix} \lambda & -1 & h_1 & 0 \\ -25 & \lambda & h_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda + h_3 & -1 \\ 0.6 & 0 & h_4 & \lambda \end{pmatrix} =$$

$$= (\lambda + 1)^2 (\lambda + 1 - i)(\lambda + 1 + i) = \lambda^4 + 4\lambda^3 + 7\lambda^2 + 6\lambda + 2.$$

A fenti determinánst kifejtve, ebből azt kapjuk, hogy

$$\lambda^4 + h_3\lambda^3 + (-25 + h_4)\lambda^2 + (-25h_3 - 0.6h_1)\lambda + (-0.6h_2 - 25h_4) = \lambda^4 + 4\lambda^3 + 7\lambda^2 + 6\lambda + 2,$$

amelynek

$$h_3 = 4, \quad h_4 = 32, \quad h_1 = -\frac{106}{0.6}, \quad h_2 = -\frac{802}{0.6}$$

a megoldása. A megfigyelő tehát

$$\dot{z}(t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & \frac{1060}{6} & 0 \\ 25 & 0 & \frac{8020}{6} & 0 \\ 0 & 0 & -4 & 1 \\ -0.6 & 0 & -32 & 0 \end{pmatrix} z(t) + \begin{pmatrix} 0 \\ -2.4 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} u(t) + \begin{pmatrix} -\frac{1060}{6} \\ -\frac{8020}{6} \\ 4 \\ 32 \end{pmatrix} y(t).$$

A kérdés ezek után az, hogy az állapotmegfigyelő $z(.)$ megoldása segítségével tudunk-e stabilizáló visszacsatolást megadni az eredeti rendszerhez. Tegyük fel, hogy $D$ olyan mátrix, hogy az $u(t) = Dx(t)$ vezérlés mellett az eredeti rendszer aszimptotikusan stabilis. Cseréljük ki az $x(t)$-t az állapotmegfigyelő által adott $z(t)$-re, vagyis alkalmazzuk az

$$u(t) = Dz(t)$$

visszacsatolást! Ekkor az alábbi zárt rendszert kapjuk:

$$\begin{bmatrix} x(t+1) \\ z(t+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & BD \\ HC & F+GD \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(t) \\ z(t) \end{bmatrix}. \tag{2.56}$$

Tekintsük az

$$\begin{bmatrix} x \\ z \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} x \\ z-x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ e \end{bmatrix}$$

koordináta-transzformációt, amelyet az $\begin{bmatrix} I & 0 \\ -I & I \end{bmatrix}$ mátrix valósít meg, ahol $I \in \mathbb{R}^{n\times n}$ az egységmátrix. Az új koordinátarendszerben a (2.56) differenciaegyenlet együtthatómátrixa egyenlő lesz az

$$\begin{bmatrix} I & 0 \\ -I & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A & BD \\ HC & F+GD \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I & 0 \\ I & I \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A+BD & BD \\ 0 & A-HC \end{bmatrix}$$

mátrixszal, amelynek a sajátértékei egybeesnek az $A+BD$ és az $A-HC$ sajátértékeivel. A kapott eredményeket az alábbi tételben foglalhatjuk össze.

2.7. TÉTEL. *Tegyük fel, hogy a (2.51), illetve (2.52) rendszer teljesen irányítható és teljesen megfigyelhető. Legyen $\varphi$ $2n$-edfokú tetszőleges, valós együtthatós stabilis polinom. Ekkor léteznek olyan $D \in \mathbb{R}^{m\times n}$ és $H \in \mathbb{R}^{n\times p}$ mátrixok, hogy a*

$$\dot{z}(t) = (A-HC)z(t) + Bu(t) + Hy(t) \tag{2.57}$$

*illetve az*

$$z(t+1) = (A-HC)z(t) + Bu(t) + Hy(t) \tag{2.58}$$

*állapotmegfigyelő a (2.51) illetve (2.52) rendszerhez, és az*

$$\begin{bmatrix} \dot{x}(t) \\ \dot{e}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A+BD & BD \\ 0 & A-HC \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(t) \\ e(t) \end{bmatrix} \tag{2.59}$$

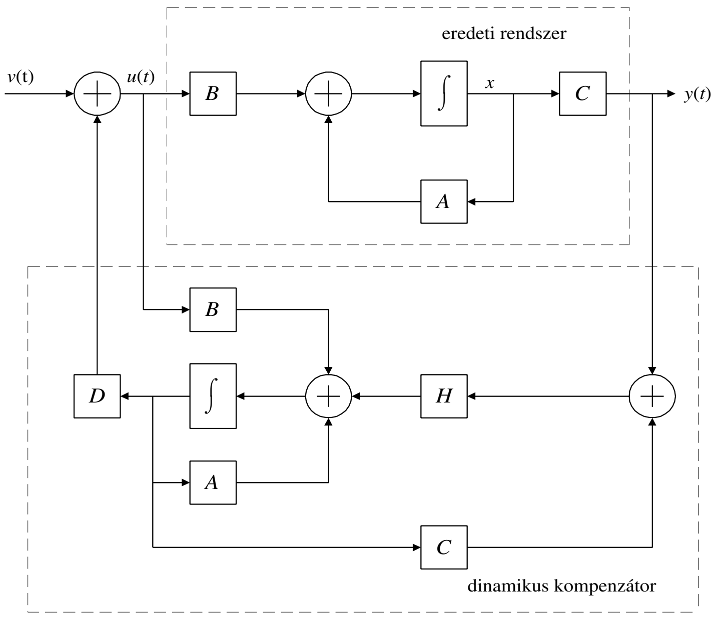
*illetve az*

$$\begin{bmatrix} x(t+1) \\ e(t+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A+BD & BD \\ 0 & A-HC \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(t) \\ e(t) \end{bmatrix} \tag{2.60}$$

*rendszer aszimptotikusan stabilis, miközben az*

$$\begin{bmatrix} A+BD & BD \\ 0 & A-HC \end{bmatrix} \tag{2.61}$$

*mátrix sajátértékei megegyeznek a* $\varphi(z) = 0$ *gyökeivel.*




2.3. ábra. Rendszer és dinamikus kompenzátor

*2.10. Megjegyzés.* Felhívjuk a figyelmet a következő tényre: a fenti tétel értelmében a (2.61) mátrix sajátértékeit az $(A + BD)$ és $(A - HC)$ mátrixok sajátértékeinek együttese adja. Tehát a (2.59) illetve (2.60) teljes rendszer sajátértékei ugyanazok, mint amit a stabilizáló visszacsatolás és az állapotmegfigyelő konstruálásakor kapunk. Amikor a visszacsatolt vezérléssel ellátott eredeti rendszert és az állapotmegfigyelőt összekapcsoltuk, akkor a részrendszerek sajátértékei nem interferálnak. Ezt az elvet nevezik *szeparációs elv*nek. Fontos hangsúlyozni, hogy ha a szeparációs elv érvényes (amint ez a lineáris rendszerek esetén igaz), akkor a stabilizáló visszacsatolás és az állapotmegfigyelő kiszámítása egymástól függetlenül végezhető. Nemlineáris rendszerek esetében azonban ez sajnos általában nem teljesül.

Az eredeti rendszerből, állapotmegfigyelőből és visszacsatolásból álló teljes rendszert a 2.3. ábrával szemléltethetjük (folytonos idejű rendszerekre). A szaggatott vonallal körülvett két alrendszerből a felső az eredeti rendszer, az alsó pedig a visszacsatolással összekapcsolt állapotmegfigyelő, amit *dinamikus kompenzátor*nak is szoktak nevezni.

## 2.8. Lineáris rendszerek struktúrája

Láttuk, hogy a lineáris időinvariáns rendszerek legfontosabb minőségi jellemzői függetlenek a koordinátarendszer megválasztásától, sőt azt kell mondanunk, hogy a rendszerre jellemzőnek csak olyan tulajdonságot tekinthetünk, ami koordinátatranszfomációra invariáns. Mivel ugyanazon lineáris időinvariáns rendszer modellje különböző koordinátarendszerekben különböző alakot ölthet, a koordinátarendszer alkalmas megválasztásával elérhetjük, hogy az egyenletek valamilyen szempontból kedvező alakúak legyenek. Ebben a pontban olyan koordinátarendszert fogunk bevezetni, amelyben a rendszerünk irányíthatósági és megfigyelhetőségi struktúrája válik láthatóvá: négy különálló alteret fogunk tudni megkülönböztetni (ezek bármelyike persze hiányozhat) a rendszer irányíthatósági és megfigyelhetőségi viszonyainak megfelelően.

Láttuk, hogy lineáris koordináta transzformáció szempontjából semmi különbség nincs a folytonos és a diszkrét idejű rendszerek között, ezért az alábbiakban egyszerűen csak az $(A, B, C)$ mátrixok által meghatározott lineáris irányítási-megfigyelési rendszerről fogunk beszélni; eredményeink mindkét szóban forgó rendszerre érvényesek.

2.8. Tétel. *Legyenek $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $B \in \mathbb{R}^{n\times m}$, $C \in \mathbb{R}^{p\times n}$ tetszőleges mátrixok. Az $(A, B, C)$ mátrixok által meghatározott rendszer lineárisan ekvivalens egy $\left(\widetilde{A}, \widetilde{B}, \widetilde{C}\right)$ mátrixokkal meghatározott rendszerrel, amelyben*

$$\widetilde{A} = \begin{pmatrix} \widetilde{A}_{11} & \widetilde{A}_{12} & \widetilde{A}_{13} & \widetilde{A}_{14} \\ 0 & \widetilde{A}_{22} & 0 & \widetilde{A}_{24} \\ 0 & 0 & \widetilde{A}_{33} & \widetilde{A}_{34} \\ 0 & 0 & 0 & \widetilde{A}_{44} \end{pmatrix}, \quad \widetilde{B} = \begin{pmatrix} \widetilde{B}_1 \\ \widetilde{B}_2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \widetilde{C} = \begin{pmatrix} 0 & \widetilde{C}_2 & 0 & \widetilde{C}_4 \end{pmatrix}$$

*az $\widetilde{A}_{ij}$ blokk $n_i \times n_j$, a $\widetilde{B}_i$ blokk $n_i \times m$, a $\widetilde{C}_j$ blokk $p \times n_j$ méretű, $0 \le n_i \le n$, $\quad i = 1, 2, 3, 4$, $\quad n_1 + n_2 + n_3 + n_4 = n$, és* *az* $\left(\begin{pmatrix}\widetilde{A}_{11} & \widetilde{A}_{12}\\ 0 & \widetilde{A}_{22}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\widetilde{B}_1\\ \widetilde{B}_2\end{pmatrix}\right)$ *rendszer teljesen irányítható,*

*az* $\left(\begin{pmatrix}\widetilde{A}_{33} & \widetilde{A}_{34}\\ 0 & \widetilde{A}_{44}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\ 0\end{pmatrix}\right)$ *rendszer teljesen irányíthatatlan;*

*az* $\left(\begin{pmatrix}\widetilde{A}_{22} & \widetilde{A}_{24}\\ 0 & \widetilde{A}_{44}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\widetilde{C}_2 & \widetilde{C}_4\end{pmatrix}\right)$ *rendszer teljesen megfigyelhető,*

*az* $\left(\begin{pmatrix}\widetilde{A}_{11} & \widetilde{A}_{13}\\ 0 & \widetilde{A}_{33}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & 0\end{pmatrix}\right)$ *rendszer teljesen megfigyelhetetlen;*

*az* $\left(\widetilde{A}_{22}, \widetilde{B}_2, \widetilde{C}_2\right)$ *rendszer teljesen irányítható és teljesen megfigyelhető.*

*Bizonyítás.* Tekintsük a

$$\mathcal{B} := \left[B\ AB\ ...\ A^{n-1}B\right]$$

és

$$\mathcal{C} := \left[C^T\ A^TC^T\ ...\ A^{(n-1)T}C^T\right]$$

mátrixokat, legyen $X$ a $\mathcal{B}$ oszlopvektorai által kifeszített altér $\mathbb{R}^n$-ben, $Y$ pedig a $\mathcal{C}$ oszlopvektor-terére merőleges vektorok tere $\mathbb{R}^n$-ben. Röviden ezt úgy írhatjuk, hogy

$$X = Range\,(\mathcal{B}) \subset \mathbb{R}^n \quad \text{és} \qquad Y = Ker\left(\mathcal{C}^T\right) \subset \mathbb{R}^n,$$

ahol $Range\,(\mathcal{B})$ olyan $\mathbb{R}^n$-beli vektorok összességét jelenti, amelyek előállnak $\mathcal{B}w$ alakban, $Ker\left(\mathcal{C}^T\right)$ pedig olyan, szintén $\mathbb{R}^n$-beli $w$ vektorok összessége, amelyekre $\mathcal{C}^Tw = 0$.

A 2.5. Tétel bizonyításában már láttuk, hogy $X$, amit ott $L_1$-gyel jelöltünk, invariáns az $A$-ra, vagyis $AX \subset A$.

Lássuk be most, hogy $Y$ is invariáns $A$-ra, vagyis $Y \supset AY$. Legyen $v \in Y$, mutassuk meg, hogy $Av \in Y$. A $v \in Y$ azt jelenti, hogy

$$Cv = CAv = ... = CA^{n-1}v = 0,$$

tehát

$$C\,(Av) = ... = CA^{n-2}\,(Av) = 0$$

nyilvánvalóan igaz. A kérdés csak az, hogy

$$CA^{n-1}(Av) = 0 \tag{2.62}$$

teljesül-e. Mivel azonban $A^n$ kifejezhető $I, A, ..., A^{n-1}$ lineáris kombinációjával:

$$A^n = \alpha_1 A^{n-1} + \alpha_2 A^{n-2} + ... + \alpha_n I,$$

ezért a (2.62) egyenlőség is fennáll, tehát $Av \in Y$ valóban teljesül. Tekintsük az $X \cap Y$-t. Ez altér $\mathbb{R}^n$-ben; legyen $a_1, ..., a_{n_1}$ egy bázisa. Legyen továbbá az $X$ altér bázisa $a_1, ..., a_{n_1}, b_1, ..., b_{n_2}$, az $Y$ altér bázisa pedig $a_1, ..., a_{n_1}, c_1, ..., c_{n_3}$. Az

$$a_1, ..., a_{n_1}, b_1, ..., b_{n_2}, c_1, ..., c_{n_3}$$

vektorok az $X$ és $Y$ összegének, az $X+Y = \{w \in \mathbb{R}^n : w = x + y,\ x \in X,\ y \in Y\}$ altérnek egy bázisát alkotják. Egészítsük ki ezeket egy $\mathbb{R}^n$-beli bázissá a $d_1, ..., d_{n_4}$ vektorokkal. Ekkor $n_1 + n_2 + n_3 + n_4 = n$, és $\mathbb{R}^n$-t négy altér direkt összegére bontottuk.

Definiáljunk egy $P$ mátrixot úgy, hogy

$$P^{-1} = (a_1, ..., a_{n_1}, b_1, ..., b_{n_2}, c_1, ..., c_{n_3}, d_1, ..., d_{n_4}),$$

és legyen $P$ a keresett koordináta transzformáció mátrixa: $\widetilde{x} = Px$. Jelölje $P$ sorvektorait

$$\alpha_1^T, ..., \alpha_{n_1}^T, \beta_1^T, ..., \beta_{n_2}^T, \gamma_1^T, ..., \gamma_{n_3}^T, \delta_1^T, ..., \delta_{n_4}^T.$$

A $PP^{-1} = I$ egyenlőséget felírhatjuk blokkonként; így egyebek mellett azt kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} &\beta_i^T a_j = 0, \quad \beta_i^T c_j = 0, \quad \gamma_i^T a_j = 0, \quad \gamma_i^T b_j = 0, \\ &\delta_i^T a_j = 0, \quad \delta_i^T b_j = 0, \quad \delta_i^T c_j = 0, \end{aligned} \tag{2.63}$$

az $i$ és $j$ minden lehetséges értékére. Az alterek invarianciája miatt az

$Aa_j$ az $a_1, ..., a_{n_1}$;

$Ab_j$ az $a_1, ..., a_{n_1}, b_1, ..., b_{n_2}$;

$Ac_j$ az $a_1, ..., a_{n_1}, c_1, ..., c_{n_3}$

vektorok lineáris kombinációjaként állítható elő. így a (2.63)-ból az következik, hogy

$$\begin{aligned} &\beta_i^T Aa_j = 0, \quad \beta_i^T Ac_j = 0, \quad \gamma_i^T Aa_j = 0, \quad \gamma_i^T Ab_j = 0, \\ &\delta_i^T Aa_j = 0, \quad \delta_i^T Ab_j = 0, \quad \delta_i^T Ac_j = 0. \end{aligned}$$

Tekintsük az $\widetilde{A} := PAP^{-1}$ szorzatot particionált alakban; a fentiek értelmében ez a következőképpen néz ki:

$$\begin{bmatrix} \overline{\alpha}^T \\ \overline{\beta}^T \\ \overline{\gamma}^T \\ \overline{\delta}^T \end{bmatrix} \left(A\overline{a}, A\overline{b}, A\overline{c}, A\overline{d}\right) = \begin{bmatrix} \widetilde{A}_{11} & \widetilde{A}_{12} & \widetilde{A}_{13} & \widetilde{A}_{14} \\ 0 & \widetilde{A}_{22} & 0 & \widetilde{A}_{24} \\ 0 & 0 & \widetilde{A}_{33} & \widetilde{A}_{34} \\ 0 & 0 & 0 & \widetilde{A}_{44} \end{bmatrix}.$$

Itt az $\overline{a}$, illetve $\overline{\alpha}^T$ olyan mátrixokat jelölnek, amelyeket az $a_i$ oszlopvektorok egymás mellé, illetve az $\overline{\alpha}_i^T$ sorvektorok egymás alá írásával kaptunk. A $\overline{b}, \overline{\beta}$ stb. jelentése analóg. Hasonlóan, legyen

$$\widetilde{B} := PB,$$

ami a (2.63) összefüggések miatt

$$\widetilde{B} = \begin{bmatrix} \widetilde{B}_1 \\ \widetilde{B}_2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

alakú. Ugyanakkor

$$Cx = CP^{-1}Px = \widetilde{C}\widetilde{x}.$$

Mivel $C$ sorait $Y$-beli vektorokkal szorozva 0-t kapunk, ezért

$$\widetilde{C} = C\left[\overline{a}, \overline{b}, \overline{c}, \overline{d}\right] = \left[0, \widetilde{C}_2, 0, \widetilde{C}_4\right].$$

Lássuk be ezek után, hogy az

$$\overline{A} = \begin{bmatrix} \widetilde{A}_{11} & \widetilde{A}_{12} \\ 0 & \widetilde{A}_{22} \end{bmatrix}, \qquad \overline{B} = \begin{bmatrix} \widetilde{B}_1 \\ \widetilde{B}_2 \end{bmatrix}$$

mátrixokkal meghatározott rendszer teljesen irányítható. Ugyanis a $\mathcal{B}$ és a

$$\widetilde{\mathcal{B}} := P\mathcal{B} = \left[\widetilde{B}\ \widetilde{A}\widetilde{B}\ \dots\ \widetilde{A}^{(n-1)}\widetilde{B}\right]$$

lineárisan független oszlopainak száma egyaránt $n_1 + n_2$, ugyanennyi a lineárisan független sorok száma is, és

$$\widetilde{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} \overline{B} & \overline{AB} & \dots & \overline{A}^{(n-1)}\overline{B} \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}.$$

A Cayley-Hamilton tételt most $\overline{A}$-ra alkalmazva, a fentiek alapján megállapíthatjuk, hogy

$$rang\left[\overline{B}\;\overline{A}\overline{B}\;...\;\overline{A}^{(n_1+n_2-1)}\overline{B}\right]=n_1+n_2,$$

ami éppen a bizonyítandó állítással ekvivalens. Teljesen hasonló megfontolással kapjuk meg azt is, hogy az $Y$-ra merőleges vektorok alterén az

$$\overset{\approx}{A}=\begin{bmatrix}\widetilde{A}_{22} & \widetilde{A}_{24}\\ 0 & \widetilde{A}_{44}\end{bmatrix}, \qquad \overset{\approx}{C}=\begin{bmatrix}\widetilde{C}_2 & \widetilde{C}_4\end{bmatrix}$$

mátrixokkal meghatározott rendszer teljesen megfigyelhető, vagy hogy a $b_1,...,b_{n_2}$ által kifeszített altéren az $\widetilde{A}_{22}$, $\widetilde{B}_2$, $\widetilde{C}_2$ mátrixokkal meghatározott irányítási-megfigyelési rendszer teljesen irányítható és teljesen megfigyelhető. □

## 2.9. Realizáció, minimális realizáció

Irányítási rendszerek tervezésénél általában nem abból indulunk ki, hogy adott egy rendszer, lineáris esetben például az $A$, $B$, $C$, $D$ mátrixokkal, hanem abból, hogy a rendszer bemenete és kimenete között meghatározott kapcsolatnak kell fennállnia, más szóval adott a rendszer input-output viselkedése. Nézzük meg közelebbről, mit jelent az input-output viselkedés megadása folytonos idejű lineáris rendszerek esetén. Tekintsük az

$$\dot{x}\,(t)=A\,(t)\,x(t)+B\,(t)\,u(t), \tag{2.64}$$

$$y\,(t)=C\,(t)\,x(t)+D\,(t)\,u(t), \qquad t\in(-\infty,\infty) \tag{2.65}$$

lineáris irányítási-megfigyelési rendszert, ahol most - az eddigiektől eltérően - az $y$ megfigyelési függvény függhet az $u$ irányítástól is. Ekkor az $x\,(t_0)=x_0$ kezdőállapotnak és az $u\,(.)$ inputnak megfelelő output

$$y\,(t)=C\,(t)\,\Phi\,(t,t_0)\,x_0+\int\limits_{t_0}^{t}C\,(t)\,\Phi\,(t,s)\,B\,(s)\,u\,(s)\,ds+D\,(t)\,u\,(t)\,.$$

Ha most a rendszer input-output kapcsolatára vagyunk kiváncsiak, akkor elegendő az $x_0=0$ kezdőállapotra szorítkozni, hiszen a fenti kifejezésben az első tag független az $u$ inputtól.

Definiáljuk az $\mathcal{S}:(-\infty,\infty)\times(-\infty,\infty)\to\mathbb{R}^{p\times m}$ mátrixfüggvényt az

$$\mathcal{S}(t,s)=C\,(t)\,\Phi\,(t,s)\,B\,(s) \tag{2.66}$$

egyenlőséggel és tegyük fel, hogy $u(s) \equiv 0,\ \ s < t_{0.}$ Ekkor az output

$$y(t) = (\mathcal{F}u)(t) = \int_{-\infty}^{t} \mathcal{S}(t,s)\, u(s)\, ds + D(t)\, u(t) \tag{2.67}$$

alakban adható meg, ahol az $\mathcal{F}$ egy lineáris operátor, $\mathcal{F} : PC_+(\mathbb{R}^m) \to PC_+(\mathbb{R}^p)$ és $PC_+\left(\mathbb{R}^k\right)$ az olyan függvények összességét jelöli, amelyeknek mind a $k$ komponense szakaszonként folytonos és azonosan zérus, ha $t < t_0$. A rendszer input-output kapcsolatát tehát ez az $\mathcal{F}$ operátor adja meg; a (2.67) alakot szokás a rendszer *külső leírás*ának is nevezni, mivel az input függvény közvetlenül az output függvénnyel áll kapcsolatban, a rendszer („belső") állapota nem szerepel benne.

Lehet-e valamilyen konkrét fizikai jelentést adni a fentiekben definiált $\mathcal{S}$ mátrixnak? Ennek a kérdésnek a megválaszolásához tegyük fel, hogy $D(t) \equiv 0$, és lépjünk ki abból a függvényosztályból, amit az eddigiekben irányításként megengedtünk. Legyen $t_0 \leq t_1 < t$ és

$$u(t) = \delta(t - t_1)\, e_i, \tag{2.68}$$

ahol $e_i$ az $i$-dik bázis egységvektor $\mathbb{R}^m$-ben, $\delta$ az úgynevezett *delta-függvény,* amit a

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t - t_1)\, \varphi(t)\, dt = \varphi(t_1) \qquad\qquad \varphi \in C(-\infty, \infty)$$

egyenlőséggel jellemezhetünk. (Látjuk, hogy a $t \to \delta(t)$ delta-függvény nem valódi függvény, hanem úgynevezett disztribúció. Heurisztikusan úgy képzelhetjük el, mint a

$$\varphi_n(t) = \begin{cases} \frac{n}{2}, & \text{ha} \quad |t| < \frac{1}{n}, \\ 0, & \text{ha} \quad |t| \geq \frac{1}{n} \end{cases}$$

függvénysorozat „határértékét".)

A (2.68) inputnak megfelelő output

$$y(t) = \int_{-\infty}^{t} \mathcal{S}(t,s)\, \delta(s - t_1)\, e_i ds = (\mathcal{S}(t, t_1) \quad \text{mátrix} \ \ i\text{-dik oszlopa}) \, .$$

Az $\mathcal{S}(t, t_1)$ mátrix oszlopait tehát a rendszer impulzus alakú inputra adott válaszaiként interpretálhatjuk. Az $\mathcal{S}$ mátrixot a rendszer *impulzus-válasz mátrix*ának, vagy *súlymátrix*ának nevezzük.

2.10. DEFINÍCIÓ. Azt mondjuk, hogy a (2.64)-(2.65) rendszer az $\mathcal{S}$ mátrix-függvény *realizációja*, ha a (2.64)-(2.65) súlymátrixa éppen $\mathcal{S}$.

2.9. TÉTEL. *Egy adott $\mathcal{S}(.,.)$ mátrixfüggvény akkor és csak akkor realizálható egy (2.64)-(2.65) lineáris rendszerrel, ha létezik egy*

$$\mathcal{S}(t,s) = H_1(t)\, H_2(s), \qquad \text{minden } \ t,\ s \in (-\infty, \infty) \tag{2.69}$$

*alakú felbontása, ahol $H_1$ és $H_2$ véges dimenziójú mátrixfüggvények.*

*Bizonyítás.* Mutassuk meg először, hogy a tétel feltétele elégséges, vagyis tegyük fel, hogy a (2.69) faktorizáció létezik. Tekintsük az alábbi (degenerált) realizációt:

$$\dot{x}(t) = H_2(t)\, u(t), \qquad y(t) = H_1(t)\, x(t).$$

Itt az input-output kapcsolat

$$\begin{aligned} y(t) &= H_1(t) \int_{t_0}^{t} H_2(s)\, u(s)\, ds = \int_{-\infty}^{t} H_1(t)\, H_2(s)\, u(s)\, ds \\ &= \int_{-\infty}^{t} \mathcal{S}(t,s)\, u(s)\, ds \end{aligned}$$

alakban adható meg, ahol a korábbiakkal megegyezően most is feltételeztük, hogy $u(s) \equiv 0$, ha $s < t_0$.

A szükségesség belátásához tekintsük a (2.64)-(2.65) rendszer (2.66)-ban megadott $\mathcal{S}$ súlymátrixát és vegyünk egy teteszőleges (rögzített) $t_1 \in \mathbb{R}$ értéket. A $\Phi$ alapmátrix ismert tulajdonsága alapján

$$\mathcal{S}(t,s) = C(t)\,\Phi(t,s)\, B(s) = C(t)\,\Phi(t,t_1)\,\Phi(t_1,s)\, B(s) = H_1(t)\, H_2(s),$$

ahol a

$$H_1(t) = C(t)\,\Phi(t,t_1), \qquad H_2(s) = \Phi(t_1,s)\, B(s)$$

definícióval éltünk. □

Vizsgáljuk a továbbiakban az

$$\dot{x}\,(t) = Ax(t) + Bu(t), \tag{2.70}$$
$$y\,(t) = Cx(t) + Du(t) \tag{2.71}$$

időinvariáns lineáris irányítási megfigyelési rendszer input-output viselkedését. Erre

$$y\,(t) = \int\limits_0^t Ce^{(t-s)}Bu\,(s)\,ds + Du\,(t)\,, \tag{2.72}$$

vagyis

$$\mathcal{S}\,(t,s) = Ce^{(t-s)A}B.$$

Látjuk, hogy most $\mathcal{S}\,(t,s)$ csak a $t-s$ különbségtől függ. Vezessük be ezért az

$$\mathcal{S}_a\,(t) = Ce^{tA}B$$

jelölést. így

$$\mathcal{S}\,(t,s) = \mathcal{S}_a\,(t-s)\,.$$

Minthogy a (2.72)-ben konvolúciós tipusú integrál szerepel, célszerű a Laplace transzformáció alkalmazása.

Egy $f : [0,\infty) \to \mathbb{R}$ szakaszonként folytonos függvény $\mathcal{L}\,(f)$ Laplace transzformáltján a

$$z \in D \subset \mathbb{C} \to \mathcal{L}\,(f)\,(z) = \int\limits_0^\infty f\,(t)\,e^{-zt}dt$$

(komplex) függvényt értjük, feltéve természetesen, hogy a definícióban szereplő integrál konvergens. Ha $|f\,(t)| \le Me^{bt}$ $(b \in \mathbb{R})$, akkor ez igaz, ha $Re\,z > b$, tehát $\mathcal{L}\,(f)$ értelmezési tartománya legalább a $Re\,z > b$ komplex félsík.

Vezessük be az

$$X\,(z) = \mathcal{L}\,(x)\,(z)\,, \quad Y\,(z) = \mathcal{L}\,(y)\,(z)\,,$$
$$U\,(z) = \mathcal{L}\,(u)\,(z)\,, \quad \mathcal{T}_0\,(z) = \mathcal{L}\,(\mathcal{S}_a)\,(z)$$

jelöléseket, ahol a Laplace transzformációt elemenként alkalmazzuk. Ekkor a (2.72)-ből azt kapjuk, hogy

$$Y\,(z) = (\mathcal{T}_0\,(z) + D)\,U\,(z)\,.$$

A $\mathcal{T}_0$ mátrixot legegyszerűbben úgy számíthatjuk ki, hogy a Laplace transzformációt a (2.70), (2.71) rendszerre alkalmazzuk $D = 0$ mellett és kifejezzük az $Y$ -t:

$$\begin{aligned} zX(z) &= AX(z) + BU(z), \\ Y(z) &= CX(z). \end{aligned}$$

(itt már figyelembe vettük az $x_0 = 0$ megállapodást!) Ekkor

$$Y(z) = C(zI - A)^{-1} BU(z),$$

tehát

$$\mathcal{T}_0(z) = C(zI - A)^{-1} B.$$

A $\mathcal{T}(z) = \mathcal{T}_0(z) + D$ mátrixot a (2.70)-(2.71) időinvariáns lineáris rendszer *átviteli mátrix*ának vagy *transzfermátrix*ának nevezzük.

Ha arra vagyunk kiváncsiak, hogy egy megadott mátrixfüggvényt mikor lehet lineáris időinvariáns rendszerrel realizálni, először meg kell néznünk, hogy $\mathcal{S}_a$ illetve $\mathcal{T}_0$ elemei milyen függvények. Tudjuk, hogy az $e^{tA}$ mátrix elemei

$$t^k e^{\alpha t} \cos(\beta t) \qquad \text{és} \qquad t^k e^{\alpha t} \sin(\beta t) \tag{2.73}$$

típusú kifejezések lineáris kombinációi, ahol $\alpha$, $\beta$ valós számok az $A$ mátrix $\lambda$ sajátértékének valós és képzetes részei, a $k$ nemnegatív egész szám, ami kisebb, mint $\lambda$ multiplicitása. Ebből következik, hogy az $\mathcal{S}_a(t) = Ce^{tA}B$ elemei szintén (2.73) típusú kifejezések véges lineáris kombinációi. Az ilyen függvényeket *valós kvázipolinom*nak fogjuk nevezni.

Mit mondhatunk a $\mathcal{T}_0$ mátrix elemeiről? Az inverz mátrixról tanultak alapján tudjuk, hogy a $(zI - A)^{-1}$ elemeit megkaphatjuk úgy, hogy a $(zI - A)$ adjungált mátrixának megfelelő elemét osztjuk a $\det(zI - A)$ -val. Mivel az adjungált mátrix minden eleme a $z$ komplex változónak legfeljebb $(n-1)$-edfokú, $\det(zI - A)$ pedig $n$-edfokú polinomja, ezért a $(zI - A)^{-1}$ - ezzel együtt a $\mathcal{T}_0(.)$ - elemei a $z$ racionális törtfüggvényei, amelyekben a nevező fokszáma nagyobb, mint a számláló fokszáma, vagyis valódi racionális törtfüggvények.

**2.10. Tétel.** *Az $\mathcal{S}_a : (-\infty, \infty) \to \mathbb{R}^{p\times m}$ illetve a $\mathcal{T}_0 : \Lambda \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}^{p\times m}$ mátrixfüggvény akkor és csak akkor realizálható egy (2.70)-(2.71) alakú lineáris időinvariáns rendszerrel, amelyben $D = 0$, ha elemei valós kvázipolinomok, illetve valódi racionális törtfüggvények.*

*Bizonyítás.* A Laplace transzformáció elemi tulajdonságait felhasználva beláthatjuk, hogy

$$\mathcal{L}\left(t^k e^{\alpha t}\cos(\beta t)\right) = (-1)^k \frac{d^k}{dz^k}\left[\frac{z-\alpha}{(z-\alpha)^2+\beta^2}\right],$$
$$\mathcal{L}\left(t^k e^{\alpha t}\sin(\beta t)\right) = (-1)^k \frac{d^k}{dz^k}\left[\frac{\beta}{(z-\alpha)^2+\beta^2}\right],$$

és

$$\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{z}\right] = 1,$$
$$\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{z^\ell}{(z-\alpha)^k}\right] = \frac{d^\ell}{dz^\ell}\left[\frac{t^{k-1}}{(k-1)!}e^{at}\right], \qquad a\in\mathbb{C},\ k\geq 1,\ 0\leq \ell < k.$$

A fenti formulák alapján világos, hogy bármely kvázipolinomhoz a Laplace-transzformáció egy valódi racionális törtfüggvényt rendel. Parciális törtekre bontás után azt is látjuk, hogy az inverz Laplace transzformáció a valódi racionális törtfüggvényekhez kvázipolinomokat rendel. Ezért elegendő a tétel $\mathcal{T}_0$-ra vonatkozó állítását belátni.

Azt már tudjuk, hogy tetszőleges (2.70)-(2.71) időinvariáns lineáris rendszer transzfermátrixának elemei valódi racionális törtfüggvények. Most azt fogjuk belátni, hogy ha az $R : \Lambda \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}^{p\times m}$ elemei valódi racionális törtfüggvények, akkor léteznek olyan $C \in \mathbb{R}^{p\times n}$, $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ és $B \in \mathbb{R}^{n\times m}$ mátrixok, hogy

$$C\left(zI-A\right)^{-1}B = R\left(z\right). \tag{2.74}$$

A bizonyításunk konstruktív lesz: $R$ elemei segítségével konkrétan felírjuk a fenti azonosságnak eleget tevő $A$, $B$, $C$ mátrixokat. Jelölje $\varphi(.)$ az $r_{ij}(.)$ elemek nevezőinek (1 főegyütthatójú) legkisebb közös többszörösét, $q$ pedig a $\varphi(.)$ fokszámát. Ekkor a $\varphi R$ mátrixfüggvény átalakítható a

$$\varphi(z)\,R(z) = \left(R_{q-1}z^{q-1} + \ldots + R_1 z + R_0\right)$$

alakba, ahol $R_i \in \mathbb{R}^{p\times m}$, $i = 0, 1, ..., q-1$, adott mátrixok. Legyen $\varphi(z) = z^q + a_{q-1}z^{q-1} + \ldots + a_1 z + a_0$, $0_m$ az $m\times m$-es zérusmátrix, $I_m$ az $m\times m$-es egységmátrix. Definiáljuk az $A$, $B$, $C$ mátrixokat az alábbi módon:

$$A = \begin{pmatrix} 0_m & I_m & 0_m & \dots & 0_m \\ 0_m & 0_m & I_m & \dots & 0_m \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0_m & 0_m & 0_m & \dots & I_m \\ -a_0 I_m & -a_1 I_m & -a_2 I_m & \dots & -a_{q-1} I_m \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{qm \times qm},$$

$$B = \begin{pmatrix} 0_m \\ 0_m \\ \vdots \\ 0_m \\ I_m \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{qm \times m}$$

és

$$C = [R_0, R_1, \dots, R_{q-2}, R_{q-1}] \in \mathbb{R}^{p \times qm}.$$

Azt kell ellenőriznünk, hogy ezekre a mátrixokra teljesül-e a (2.74) azonosság.

Először is észrevesszük, hogy a $(zI - A)^{-1} B$ mátix kielégíti a $(zI - A) X = B$ lineáris mátrixegyenletet. Particionáljuk az $X$ mátrixot is $m \times m$ méretű $X_i$ blokkokra ($i = 1, 2, \dots, q$) és írjuk fel ezt az egyenletet blokkonként! Ez nem más, mint

$$\begin{pmatrix} zX_1 \\ zX_2 \\ \vdots \\ zX_{q-1} \\ zX_q \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0_m & I_m & 0_m & \dots & 0_m \\ 0_m & 0_m & I_m & \dots & 0_m \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0_m & 0_m & 0_m & \dots & I_m \\ -a_0 I_m & -a_1 I_m & -a_2 I_m & \dots & -a_{q-1} I_m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \\ \vdots \\ X_{q-1} \\ X_q \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0_m \\ 0_m \\ \vdots \\ 0_m \\ I_m \end{pmatrix}$$

tehát

$$X_{i+1} = zX_i = \dots = z^i X_1, \qquad i = 1, \dots, q-1, \tag{2.75}$$

és

$$zX_q + a_{q-1} X_q + \dots + a_1 X_2 + a_0 X_1 = I_m. \tag{2.76}$$

Behelyettesítve (2.75)-öt (2.76)-ba, azt kapjuk, hogy

$$\left(z^q + a_{q-1} z^{q-1} + \dots + a_1 z + a_0\right) X_1 = I_m,$$

vagyis $X_1 = \frac{1}{\varphi(z)} I_m$. Másrészt $CX$-re (a $C$ és $X$ definícióját és a (2.75) összefüggéseket felhasználva) ennek alapján azt kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} C (zI - A)^{-1} B &= (R_0 X_1 + R_1 X_2 + \dots + R_{q-1} X_q) = \\ &= \frac{1}{\varphi(z)} \left(R_0 + zR_1 + \dots + z^{q-1} R_{q-1}\right) = R(z) . \ \square \end{aligned}$$

*2.11. Megjegyzés.* Az előbbi tétel bizonyításában megkonstruált $(A, B, C)$ mátrixok segítségével meghatározott (2.70)-(2.71) rendszert szokás standard irányítható realizációnak is nevezni. Ezt a terminológiát az indokolja, hogy - amint azt könnyen ellenőrízhetjük - az $A$, $B$ mátrixokra teljesül a Kalman-féle rangfeltétel, tehát (2.70) teljesen irányítható.

*2.12. Megjegyzés.* Ha a (2.70)-(2.71) rendszerben $D \neq 0$, akkor $\mathcal{T}(z) = \mathcal{T}_0(z) + D$, tehát elemei olyan racionális törtfüggvények, amelyben a számláló fokszáma kisebb vagy egyenlő a nevező fokszámánál. Másrészt az ilyen típusú mátrixfüggvények felbonthatók egy konstans mátrix és egy valódi racionális törtfüggvényekből álló mátrix összegére. Ennek figyelembe vételével a tétel második állítása értelemszerűen kiterjeszthető a $D \neq 0$ esetre.

Láttuk, hogy egy adott súlymátrix, illetve átviteli mátrix realizációja nem egyértelmű, hiszen például a lineárisan ekvivalens rendszerekre ezek a mátrixok megegyeznek. Sőt, adott súlymátrix realizációiban az állapottér dimenziója felülről nem korlátos. Ha ugyanis (2.64)-(2.65) $(D(t) \equiv 0)$ egy $\mathcal{S}$ mátrixfüggvény realizációja, akkor az

$$\begin{pmatrix} \dot{x}(t) \\ \dot{\overline{x}}(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A(t) & 0 \\ 0 & \overline{A}(t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x(t) \\ \overline{x}(t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} B(t) \\ \overline{B}(t) \end{pmatrix} u(t)$$

$$y(t) = \begin{pmatrix} C(t) & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x(t) \\ \overline{x}(t) \end{pmatrix}$$

rendszernek szintén $\mathcal{S}$ a súlymátrixa, bárhogyan adtuk is meg az $\overline{A}$, $\overline{B}$ mátrixokat.

**2.11. Definíció.** A (2.64)-(2.65) realizáció minimális, ha az $\mathcal{S}$, illetve $\mathcal{T}$ bármely más realizációjában az állapottér dimenziója nem kisebb, mint (2.64)-(2.65)-ben.

A kérdés ezek után az, hogy egy realizációról hogyan dönthetjük el azt, hogy minimális-e, vagy sem. Erre ad választ időinvariáns rendszerek esetén az alábbi tétel.

**2.11. Tétel.** *Egy (2.70)-(2.71) $(D = 0)$ realizáció akkor és csak akkor minimális, ha egyidejűleg teljesen irányítható és teljesen megfigyelhető.*

*Bizonyítás.* Tegyük fel, hogy a (2.70)-(2.71) rendszer az $\mathcal{S}$ súlymátrix, illetve a $\mathcal{T}_0$ transzfer mátrix realizációja. A 2.8. Tétel szerint a (2.70)-(2.71) rendszer lineárisan ekvivalens az ott megadott, és az $\left(\widetilde{A}, \widetilde{B}, \widetilde{C}\right)$ mátrixokkal meghatározott rendszerrel, tehát az utóbbi szintén az $\mathcal{S}$, illetve $\mathcal{T}_0$ realizációja. Egyszerű szorzással ellenőrízhetjük, hogy

$$\left(zI-\widetilde{A}\right)^{-1}=\begin{pmatrix} \left(zI_{n_1}-\widetilde{A}_{11}\right)^{-1} & * & * & * \\ 0 & \left(zI_{n_2}-\widetilde{A}_{22}\right)^{-1} & * & * \\ 0 & 0 & \left(zI_{n_3}-\widetilde{A}_{33}\right)^{-1} & * \\ 0 & 0 & 0 & \left(zI_{n_4}-\widetilde{A}_{44}\right)^{-1} \end{pmatrix}$$

ahol a csillagok helyén megfelelő méretű mátrixok állnak, amelyeknek a konkrét értéke érdektelen számunkra. Ebből következik, hogy

$$\mathcal{T}_0\left(z\right)=\widetilde{C}\left(zI-\widetilde{A}\right)^{-1}\widetilde{B}=\widetilde{C}_2\left(zI_{n_2}-\widetilde{A}_{22}\right)^{-1}\widetilde{B}_2,$$

tehát, ha a (2.70)-(2.71) realizáció nem teljesen irányítható, vagy nem teljesen megfigyelhető, akkor megadható egy olyan rendszer, amelynek a transzfer mátrixa ugyanaz, és az állapotterének dimenziója kisebb mint a (2.70)-(2.71) rendszeré.

Fordítva, tegyük fel, hogy a (2.70)-(2.71) és az $\left(\overline{A},\ \overline{B},\ \overline{C}\right)$ mátrixokkal meghatározott rendszer is az $\mathcal{S}$ súlymátrix realizációja. Legyen $(A,\ B,\ C)$ az első rendszerben, $\left(\overline{A},\ \overline{B},\ \overline{C}\right)$ pedig a második rendszerben szereplő mátrixhármas, ahol $A\in\mathbb{R}^{n\times n}$, $\overline{A}\in\mathbb{R}^{\overline{n}\times\overline{n}}$ és $\overline{n}<n$. Be kell látni, hogy ekkor a (2.70)-(2.71) vagy nem teljesen irányítható, vagy nem teljesen megfigyelhető. A feltevésünk értelmében

$$\mathcal{S}\left(t\right)=Ce^{tA}B=\overline{C}e^{t\overline{A}}\overline{B},\quad \text{minden}\quad t\geq 0\text{-ra},$$

amiből következik, hogy

$$Ce^{(t-s)A}B=\overline{C}e^{(t-s)\overline{A}}\overline{B}$$

is fennáll minden $t$ és $s$-re. Szorozzuk meg ezt az egyenlőséget balról az $\exp\left(tA^T\right)C^T$ mátrixszal, jobbról pedig a $B^T\exp\left(-sA^T\right)$ mátrixszal. Ekkor azt kapjuk, hogy

$$e^{tA^T}C^TCe^{tA}e^{-sA}BB^Te^{-sA^T}=e^{tA^T}\overline{C}^T\overline{C}e^{t\overline{A}}e^{-s\overline{A}}\overline{B}B^Te^{-sA^T}.$$

Integráljuk mindkét oldalt a $0\leq s\leq t_1,\ \ 0\leq t\leq t_1,$ négyzeten, és vegyük figyelembe a $W\left(0,t_1\right)$ irányíthatósági és az $M\left(0,t_1\right)$ megfigyelhetőségi mátrix definícióját. Ekkor azt kapjuk, hogy

$$M\left(0,t_1\right)e^{-t_1A}W\left(0,t_1\right)e^{-t_1A^T}=\int\limits_0^{t_1}e^{tA^T}C^T\overline{C}e^{t\overline{A}}dt\int\limits_0^{t_1}e^{-s\overline{A}}\overline{B}B^Te^{-sA^T}ds.$$

Vegyük észre, hogy a jobb oldalon az első integrál egy $n \times \overline{n}$, a második integrál pedig egy $\overline{n} \times n$ méretű mátrixot szolgáltat. így mindkét mátrixnak, valamint a szorzatuknak a rangja is legfeljebb $\overline{n}$, hiszen feltettük, hogy $\overline{n} < n$. Ebből következik, hogy a baloldalon szereplő mátrix rangja is legfeljebb $\overline{n}$, és mivel $e^{-t_1 A}$ rangja $n$, ezért vagy az $M(0, t_1)$, vagy a $W(0, t_1)$ rangja kisebb, mint $n$. Ezzel a tételt bebizonyítottuk. $\square$

## 2.10. Feladatok a 2. fejezethez

*2.1. Feladat.* A (2.15)-(2.17) differenciaegyenletek jobb oldalán szereplő mennyiségek felhasználásával vezessük be az $x(t) = (y(t), r(t), k(t))^T$, $u(t) = (g(t), m(t))^T$, $y(t) = (y(t), p(t))^T$ állapot-, irányítási- és megfigyelési változókat, és írjuk fel a (2.3), (2.4) egyenletekben szereplő $A, B, C$ mátrixokat! Minek köszönhető, hogy most a linearizált rendszerben az együttható mátrixok konstansok?

*2.2. Feladat.* Linearizáljuk az 1.2.2 Példában szereplő, merev test szögsebességének vezérlését leíró modellt az $\omega(t) \equiv 0$ és $u(t) \equiv 0$ egyensúlyi helyzet körül!

*2.3. Feladat.* Tekintsük az

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= u x_1 + x_2^2 - x_1 - 1 \\ y &= x_1^2 \end{aligned}$$

rendszert. a) Mutassuk meg, hogy ha $u(t) = \sin t$, akkor $x_1(t) = \sin t$ és $x_2(t) = \cos t$ kielégíti a fenti differenciálegyenletet! b) Linearizáljuk az állapot- és megfigyelési egyenletet ezen megoldás körül és írjuk fel az eredményt mátrixos alakban!

*2.4. Feladat.* Tekintsük az

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= -x_1 - x_2^2 + u \\ y &= x_1 \end{aligned}$$

rendszert. Mutassuk meg, hogy $u(t) = \cos^2(t)$ esetén $x_1(t) = \sin t$, $x_2(t) = \cos t$ a fenti differenciálegyenlet egy megoldását adja. Linearizáljuk az állapot- és megfigyelési egyenletet ezen megoldás körül és írjuk fel az eredményt mátrixos alakban! Időinvariáns-e a kapott rendszer?

*2.5. Feladat.* Tekintsük az

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2-t \\ \frac{1}{t} & \frac{1}{t}-1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, \qquad t>0$$

homogén lineáris differenciálegyenletet. Mutassuk meg, hogy alapmátrixa az alábbi:

$$\Phi(t,s) = \begin{pmatrix} t^2 & t-1 \\ t & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{s} & \frac{1-s}{s} \\ -1 & s \end{pmatrix}.$$

*2.6. Feladat.* Tekintsük az

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{2}{t^2} & \frac{2}{t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, \qquad t>0$$

homogén lineáris differenciálegyenletet. Mutassuk meg, hogy alapmátrixa az alábbi:

$$\Phi(t,s) = \begin{pmatrix} t & t^2 \\ 1 & 2t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{2}{s} & -1 \\ -\frac{1}{s^2} & \frac{1}{s} \end{pmatrix}.$$

*2.7. Feladat.* Tekintsük az

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -e^{3t} \\ 0 & -5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, \qquad t \in \mathbb{R}$$

homogén lineáris differenciálegyenletet. Mutassuk meg, hogy alapmátrixa az alábbi:

$$\Phi(t,s) = \begin{pmatrix} e^{-t} & e^{-2t} \\ 0 & e^{-5t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{s} & -e^{4s} \\ 0 & e^{5s} \end{pmatrix}.$$

*2.8. Feladat.* Tekintsük az

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{2}{t} & \cos t \\ 0 & -\frac{2}{t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, \qquad t>0$$

homogén lineáris differenciálegyenletet. Mutassuk meg, hogy alapmátrixa az alábbi:

$$\Phi(t,s) = \begin{pmatrix} \frac{1}{t^2} & \frac{1}{t^2}\sin t \\ 0 & \frac{1}{t^2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} s^2 & -s^2 \sin s \\ 0 & s^2 \end{pmatrix}.$$

*2.9. Feladat.* Legyen az $\dot{x} = A(t)\,x + B(t)\,u$ rendszerben

$$A(t) = \begin{pmatrix} 1 & 2-t \\ \frac{1}{t} & \frac{1}{t}-1 \end{pmatrix}, \qquad B(t) = \begin{pmatrix} t^2+t \\ t \end{pmatrix}, \qquad t>0.$$

Igazoljuk, hogy ez a rendszer teljesen irányítható tetszőleges $[t_0, t_1]$ intervallumon, ahol $0 < t_0 < t_1$!

*2.10. Feladat.* Legyen az $\dot{x}= A(t)\,x + B(t)\,u$ rendszerben

$$A(t) = \begin{pmatrix} 1 & 2-t \\ \frac{1}{t} & \frac{1}{t}-1 \end{pmatrix}, \qquad B(t) = \begin{pmatrix} t^2 \\ t \end{pmatrix}, \qquad t > 0.$$

Igazoljuk, hogy ez a rendszer nem teljesen irányítható semmilyen $[t_0, t_1]$ $(0 < t_0 < t_1)$ intervallumon sem!

*2.11. Feladat.* Legyen az $\dot{x}= A(t)\,x + B(t)\,u$ rendszerben

$$A(t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{2}{t^2} & \frac{2}{t} \end{pmatrix}, \qquad B(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{t^2} \end{pmatrix}, \qquad t > 0.$$

Igazoljuk, hogy ez a rendszer teljesen irányítható a $[t_0, t_1]$ intervallumon, ahol $0 < t_0 < t_1$!

*2.12. Feladat.* Legyen az $\dot{x}= A(t)\,x + B(t)\,u$ rendszerben

$$A(t) = \begin{pmatrix} -\frac{2}{t} & \cos t \\ 0 & -\frac{2}{t} \end{pmatrix}, \qquad B(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{t^2} \end{pmatrix}.$$

Igazoljuk, hogy ez a rendszer teljesen irányítható a $\left[\frac{\pi}{2}, \pi\right]$ intervallumon!

*2.13. Feladat.* Igazoljuk, hogy az 1.2.3 Példában szereplő RLC kör teljesen irányítható bármely pozitív hosszúságú intervallumon!

*2.14. Feladat.* A tömegpont gravitációs térbeli mozgását leíró egyenlet linearizálásával az alábbi egyenletet kapjuk:

$$\dot{x}= Ax + Bu$$

rendszer, ahol

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 3\omega^2 & 0 & 0 & 2\omega \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -2\omega & 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

Igazoljuk, hogy ez a rendszer teljesen irányítható bármely pozitív hosszúságú időintervallumon. Mit mondhatunk, ha

a) csak a sugár irányú $u_1$,

b) csak az érintő irányú $u_2$ vezérlés működik?

*2.15. Feladat.* Tegyük fel, hogy az $(A, B)$ párral jellemzett lineáris rendszer teljesen irányítható, és tegyük fel, hogy egy $K \in \mathbb{R}^{m\times n}$ mátrix segítségével az $u$ irányítást $u = Ky + v$ alakban határozzuk meg, ahol a $v$ egy „új" irányítás. A Hautus feltétel segítségével mutassuk meg, hogy az $(A + BK, B)$ párral jellemezhető rendszer szintén teljesen irányítható.

*2.16. Feladat.* Igazoljuk, hogy az 1.2.5 Példában szereplő modell teljesen irányítható bármely, legalább 2 egység hosszúságú időintervallumon!

*2.17. Feladat.* Mutassuk meg, hogy

1. a 2.3. Definícióban megadott „≡” reláció ekvivalenciareláció;
2. ha $(A,B) \equiv (\overline{A},\overline{B})$, akkor az $(A,B)$ pár akkor és csak akkor teljesen irányítható, ha az $(\overline{A},\overline{B})$ pár az!

   *Útmutatás.* Igazoljuk, hogy $rang(B, AB, ..., A^{n-1}B) = rang(B,(A + BF)B, ..., (A + BF)^{n-1}B)$.

*2.18. Feladat.* Igazoljuk, hogy ha $(A,B) \equiv (\widetilde{A},\widetilde{B})$, akkor $\lambda(A,B) = \lambda(\widetilde{A},\widetilde{B})$!

*Útmutatás.* Mutassuk meg, hogy minden $k$-ra $(0 \le k \le n-1)$ a $(B, AB, ..., A^k B)$ mátrix rangja nem változik a $B \to BV$, $A \to PAP^{-1}$, $A \to A + BF$ transzformációk egyikének alkalmazásánál sem.

*2.19. Feladat.* Teljesen megfigyelhető-e az $\dot{x} = A(t)\,x$, $y = C(t)\,x$ rendszer a $[t_0, t_1]$ $(t_0 < t_1)$ intervallumon, ha

$$A(t) = \begin{pmatrix} -1 & -e^{3t} \\ 0 & -5 \end{pmatrix}, \qquad C(t) = \left(e^t, e^{4t}\right).$$

*2.20. Feladat.* Tekintsük azt a rendszert, amelyben az $m_1$, $m_2$ és $m_3$ tömegpontok egy egyenes mentén helyezkednek el, és amelyben az $m_1$ és $m_2$ tömegpontot egy $k_{12}$ merevségű, az $m_2$ és $m_3$ tömegpontot egy $k_{23}$ merevségű rugó köti össze. Az $m_i$ tömegpont helyzetét megadó koordináta legyen $z_i$. Tegyük fel, hogy csak az 1. tömegpont $z_1$ helyzete mérhető. Teljesen megfigyelhető-e ez a rendszer? A mozgásegyenlet:

$$\begin{aligned} m_1\,\ddot{z}_1(t) &= k_{12}\left(z_2(t) - z_1(t) - c_{12}\right), \\ m_2\,\ddot{z}_2(t) &= -k_{12}\left(z_2(t) - z_1(t) - c_{12}\right) + k_{23}\left(z_3(t) - z_2(t) - c_{23}\right), \\ m_3\,\ddot{z}_3(t) &= k_{23}\left(z_3(t) - z_2(t) - c_{23}\right). \end{aligned}$$

*2.21. Feladat.* Határozzunk meg az

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= -x_2, \\ \dot{x}_2 &= x_1 + u, \\ y &= x_1 \end{aligned}$$

rendszerhez állapotmegfigyelőt és olyan visszacsatolást, hogy a kapott zárt rendszer sajátértékei $\{-1,-2,-3,-4\}$ legyenek. írjuk fel a zárt rendszert az $(x,e)$ koordinátákkal!

*2.22. Feladat.* A 2.6. és a 2.8. Példa eredményeit felhasználva, írjuk fel a fordított inga linearizált modelljét a dinamikus kompenzátorával!

*2.23. Feladat.* Legyen

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 & -3 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & -3 & -3 \\ 0 & 2 & 0 & -4 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

1. Mutassuk meg, hogy a rendszer nem teljesen irányítható és nem teljesen megfigyelhető!
2. Mutassuk meg, hogy a $\mathcal{B}$ mátrix oszlopvektor terének egy bázisa $(1,1,0,1)^T$ és $(1,0,1,0)^T$, az $(1,1,0,1)^T$ és $(0,1,-1,0)^T$ pedig a $Ker\left(\mathcal{C}^T\right)$ egy bázisa! (Jelöléseket lásd a 2.8. Tétel bizonyításában.)
3. Mutassuk meg, hogy

$$a_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad b_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad c_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad d_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

   az $\mathbb{R}^4$-nek egy olyan bázisa, amit az említett bizonyításban bevezettünk!
4. Számítsuk ki az $\left(\widetilde{A}, \widetilde{B}, \widetilde{C}\right)$ mátrixokat a fenti koordinátarendszernek megfelelően!
5. Az eredmények felhasználásával állapítsuk meg, hogy stabilizálható-e az $(A, B)$ rendszer!
6. Tud-e állapotmegfigyelőt konstruálni az $(A, B, C)$ rendszerhez?

*2.24. Feladat.* Legyen

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 2 & 5 \\ 3 & -1 & 0 & 3 \\ -2 & -1 & -2 & -2 \\ -6 & -3 & -2 & -7 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

1. Mutassuk meg, hogy a rendszer nem teljesen irányítható és nem teljesen megfigyelhető!
2. Mutassuk meg, hogy a $\mathcal{B}$ mátrix oszlopvektor terének és a $\mathcal{C}^T$ mátrix magterének egy bázisa $(1,0,0,-1)^T$ és $(1,1,-1,-1)^T$. (Jelöléseket lásd a 2.8. Tétel bizonyításában.)

3. Mutassuk meg, hogy

$$a_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad a_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad d_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad d_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

   az $\mathbb{R}^4$-nek egy olyan bázisa, amit az említett bizonyításban bevezettünk.

4. Számítsuk ki az $\left(\widetilde{A}, \widetilde{B}, \widetilde{C}\right)$ mátrixokat a fenti koordinátarendszernek megfelelően. Jellemezzük a rendszer struktúráját!

*2.25. Feladat.* Mutassuk meg, hogy olyan lineáris rendszerekre, amelyekre $D(t)$ nem azonosan 0, az impulzus-válasz mátrix $\mathcal{S}(t,s) + D(t)\,\delta(s-t)$ alakban adható meg (vagyis ekkor az impulzus-válasz mátrix sem valódi függvény).

*2.26. Feladat.* Mutassuk meg, hogy lineárisan ekvivalens rendszerek súlymátrixai, illetve transzfermátrixai egyenlők!

# 3. fejezet

# Optimális vezérlések

A célunk ebben a fejezetben néhány olyan tétel megfogalmazása, amely elegendő feltételt ad az optimális vezérlés *létezésére.* Később foglakozni fogunk az optimalitás *szükséges* feltételével, és az optimalitás *elegendő* feltételével is. Hogy megértsük, hogy a fent említett feltételektől mit várhatunk, idézzük fel az 1.3. pontban vizsgált minimalizálási feladatot. Legyen adott az $F : U \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ függvény, amelynek a minimumát keressük. Tudjuk, hogy ha $U$ korlátos és zárt halmaz, és $F$ folytonos, akkor $F$-nek van minimumhelye $U$-ban, tehát ez elegendő feltétel az optimális megoldás létezésére (lásd az 1.1. Tételt). Ez azonban semmiféle felvilágosítást nem ad arra vonatkozóan, hogy hogyan kereshetjük meg az optimumot. Ha viszont az $F$ függvény differenciálható az $U$ tartományon, amelynek az $u^*$ *belső* pontja, akkor az $u^*$ csak akkor lehet szélsőértékhely, ha $\mathrm{grad} F \mid_{x^*}= 0$, ez tehát a szélsőérték szükséges feltétele. Ha pedig $F$ kétszer folytonosan differenciálható, és a fentieken túl még az is igaz, hogy az a $H$ mátrix, amelynek az elemei a $h_{ij} = F''_{x_i x_j} \mid_{x^*}, \ \ i, j = 1, 2, ..., m$ számok, pozitív definit, akkor az $u^*$ lokális minimumhely, vagyis ez utóbbi a szélsőérték egy elegendő feltételét jelenti.

Ebben a fejezetben csak folytonos idejű rendszerekkel foglalkozunk, és az optimalitás szükséges feltételeként a Pontrjagin-féle maximumelvet és a transzverzalitási feltételt fogalmazzuk meg. Így az optimális vezérlést program szerinti vagy nyílt hurokkal történő vezérlésként tudjuk meghatározni egy közönséges differenciálegyenlet rendszerre vonatkozó peremérték feladat megoldása segítségével. A negyedik fejezetben a dinamikus programozás alkalmazásával az optimalitás szükséges és elégséges feltételét adjuk meg mind folytonos, mind diszkrét idejű rendszerekre a Hamilton-Jacobi-Bellman, illetve a dinamikus programozási egyenlet segítségével. Ez a megközelítés az optimális vezérlést visszacsatolás alakjában szolgáltatja. A megoldandó feladat azonban egy nemlineáris parciális differenciálegyenlet, amelynél a megoldás létezése meglehetősen szigorú feltételek mellett igaz, és a megoldás kiszámítása is lényegesen nehezebb, mint az előző módszer peremérték feladatáé.

Azt mondhatjuk, hogy logikailag a létezés kérdése elsődleges jelentőségű, hiszen minek keresünk olyan dolgot, ami nincs, ezért elsőként az optimális vezérlés létezésének kérdését vizsgáljuk. Mindvégig azt fogjuk feltételezni, hogy $\mathcal{X} = \mathbb{R}^n$.

## 3.1. Optimális vezérlések létezése

### 3.1.1. A célfüggvény korlátossága alulról

Legyen adott az $\mathcal{I} = (\underline{t}, \overline{t})$ alapintervallum, az $\mathcal{U} \subset \mathbb{R}^m$, $\mathcal{M}_0, \mathcal{M}_1 \subset \mathbb{R}^n$ halmazok, $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$, $f_0 : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ és $G : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, függvények és a megengedett vezérlések egy $\Delta$ halmaza.

A következő feladatot fogjuk vizsgálni:

$$\dot{x}(t) = f(t, x(t), u(t)), \quad t \in \mathcal{I},\ u(t) \in \mathcal{U},\ x(t) \in \mathbb{R}^n \tag{3.1}$$

$$x(t_0) = x_0 \in \mathcal{M}_0, \quad t_0 \in \mathcal{I} \text{ rögzített}, \tag{3.2}$$

$$x(t_1) \in \mathcal{M}_1, \quad t_1 \in \mathcal{I} \text{ nem rögzített}, \tag{3.3}$$

$$J(\xi(.), u(.)) = G(\xi(t_1)) + \int_{t_0}^{t_1} f_0(t, \xi(t), u(t))dt \to \min_{u \in \Delta}, \tag{3.4}$$

ahol $\xi(.)$ a (3.1) - (3.2) kezdetiérték feladat $u(.)$ vezérlés melletti megoldása. A feladat adataira vonatkozóan az alábbi feltevést tesszük.

**3.1. Feltétel.** Az $\mathcal{I} = (\underline{t}, \overline{t})$ intervallum véges hosszúságú, az $f$, $f_0$ és $G$ függvények folytonosak, $f$ és $f_0$ a második (vektor)változójában folytonosan differenciálható, az $\mathcal{U}$, $\mathcal{M}_0$, $\mathcal{M}_1$ halmazok kompaktak.

Egy $\overline{u}(.) \in \Delta$ vezérlést *eredményes*nek nevezünk, ha a (3.1) neki megfelelő trajektóriája teljesíti a (3.2) és (3.3) peremfeltételeket.

**3.2. Feltétel.** A megadott megengedett vezérlésosztály mellett létezik eredményes vezérlés.

**3.3. Feltétel.** Létezik olyan $b > 0$ szám, hogy minden eredményes $\xi(.)$ trajektóriára teljesül a

$$\|\xi(t)\| \leq b, \quad t \in [t_0, t_1]$$

feltétel, vagyis az eredményes trajektóriák egyenletesen korlátosak.

A minimalizálás feladata akkor tartalmas, ha a célfüggvény alulról korlátos. Ezt biztosítja az alábbi lemma.

3.1. LEMMA. *Tegyük fel, hogy a 3.1.–3.3. Feltételek teljesülnek. Ekkor a célfüggvény az eredményes folyamatok (nem üres) halmazán alulról korlátos, és megadható az eredményes folyamatnak egy olyan* $\{\xi_k(.), u_k(.)\}_{k=1}^{\infty}$ *sorozata, hogy*

$$\lim_{k\to\infty} J(\xi_k(.), u_k(.)) = \inf_{u(.)\in\Delta_e} J(\xi(.), u(.)) > -\infty. \tag{3.5}$$

*Bizonyítás.* Azt, hogy a célfüggvény alulról korlátos az eredményes folyamatok halmazán, a következőképpen láthatjuk be. Jelölje

$$S_\alpha(0) = \{y \in \mathbb{R}^n : \|y\| \le \alpha\},$$

vagyis az $\mathbb{R}^n$ tér origó körüli $\alpha$ sugarú gömbjét. Az $\mathcal{U}$ kompakt lévén korlátos, tehát van olyan $r > 0$ szám, hogy $\mathcal{U} \subset S_r(0)$. A 3.3. Feltételből következik, hogy $\xi(t) \in S_b(0)$ bármely eredményes $\xi(.)$ trajektóriára az értelmezési tartományának bármely $t \in [t_0, t_1]$ pontjában. Így tehát bármely eredményes folyamat esetén $(t, \xi(t), u(t)) \in \Omega := [\underline{t}, \bar{t}] \times S_b(0) \times S_r(0)$. Minthogy $f_0$ a feltevés értelmében folytonos, az $\Omega$ halmaz pedig kompakt, Weierstrass tételének értelmében van olyan $\mu \in \mathbb{R}$, hogy $f_0(t, x, u) \ge \mu$, ha $(t, x, u) \in \Omega$. Másrészt $\mathcal{M}_1$ kompakt és $G$ folytonos, így van olyan $\nu \in \mathbb{R}$, hogy $G(x) \ge \nu$ minden $x \in \mathcal{M}_1$-re. Ezért

$$J(\xi(.), u(.)) = G(\xi(t_1)) + \int_{t_0}^{t_1} f_0(t, \xi(t), u(t))dt \ge \nu + \mu(t_1 - t_0).$$

Viszont

$$\mu(t_1 - t_0) \ge \begin{cases} 0, & \text{ha } \mu \ge 0, \\ \mu(\bar{t} - \underline{t}), & \text{ha } \mu < 0, \end{cases}$$

így van olyan $c \in \mathbb{R}$, hogy

$$\inf_{u(.)\in\Delta_e} J(\xi(.), u(.)) = c.$$

A (3.5) ezután közvetlenül következik a legnagyobb alsó korlát definíciójából, hiszen tetszőleges $k \ge 1$ esetén a $c + \frac{1}{k}$ már nem alsó korlát, vagyis van olyan $(\xi_k(.), u_k(.))$ eredményes folyamat, hogy

$$c + \frac{1}{k} \ge J(\xi_k(.), u_k(.)) \ge c,$$

amiből a lemma állítása nyilvánvaló. □

### 3.1.2. Egzisztencia tétel speciális vezérlési osztályokra

Az előző pontban kitűzött feladat megoldásának létezését két speciális megengedett vezérlésosztály, a $\Delta^L$ valamint a $\Delta^r$ esetén, $\mathcal{M}_0 = \{x_0\}$, $\mathcal{M}_1 = \{x_1\}$ mellett vizsgáljuk.

3.1. TÉTEL. *Legyen a megengedett vezérlések halmaza $\Delta^L$ vagy $\Delta^r$ (adott $L > 0$ és $r \geq 0$ egész mellett), és tegyük fel, hogy a 3.1.–3.3. Feltételek teljesülnek. Ekkor létezik optimális vezérlés.*

*Bizonyítás.* *(Vázlat)* A tétel bizonyításának első lépése a 3.1. Lemma alkalmazása.

A bizonyítás második lépéseként be kell látni, hogy az említett lemmában szereplő $\{\xi_k(.), u_k(.)\}_{k=1}^{\infty}$ sorozatból kiválasztható olyan részsorozat, hogy

$$\begin{aligned} &u_k(t) \to u^*(t), \\ &\xi_k(t) \to \xi^*(t), \qquad t \in [t_0, t_1^*], \end{aligned}$$

$u^* \in \Delta^L$, illetve $\Delta^r$, és $\xi^*(.)$ az $u^*(.)$-nak megfelelő eredményes trajektória. A részletek megtalálhatók például a [6] 88-90. oldalán. $\square$

### 3.1.3. Egzisztencia tétel konvexitási feltétel mellett

Vezessük be a $(t, x) \in \mathcal{I} \times \mathbb{R}^n$ pontban az *általánosított sebességvektorok* $\widehat{V}(t, x) \subset \mathbb{R}^{n+1}$ halmazát a

$$\widehat{V}(t,x) = \left\{ \begin{bmatrix} f_0(t,x,u) \\ f(t,x,u) \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{n+1} : u \in \mathcal{U}) \right\} \tag{3.6}$$

definícióval. (Tehát minden egyes rögzített $(t, x)$-hez vesszük azt a halmazt, amit az $(f_0(t, x, u),\ f(t, x, u))^T$ vektorok végpontjai befutnak, miközben az $u$ befutja az $\mathcal{U}$ halmaz pontjait.) Nézzük meg néhány példán, hogy mi is ez a halmaz tulajdonképpen.

*3.1. Példa.* a) Nézzük az $n = 1,\ m = 1,\ \dot{x}(t) = \sqrt{|u(t)|}, \mathcal{U} = [-1, 1]$, $J(x(.), u(.)) = \int\limits_0^{t_1} \sqrt{|u(s)|}x(s)ds$ feladatot. Ekkor

$$\widehat{V}(t,x) = \left\{ \begin{bmatrix} \sqrt{|v|}x \\ \sqrt{|v|} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2 : -1 \leq v \leq 1) \right\}.$$

(Lásd 3.1 a) ábrát.)

b) Legyen $n = 1$, $m = 1$, $\dot{x}(t) = u(t)$, $\mathcal{U} = [-1,1]$, $J(x(.), u(.)) = \int\limits_0^{t_1} u^2(t)dt$ . Ekkor

$$\widehat{V}(t,x) = \left\{ \begin{bmatrix} v^2 \\ v \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2 : -1 \le v \le 1) \right\}.$$

(Lásd 3.1 b) ábrát.)

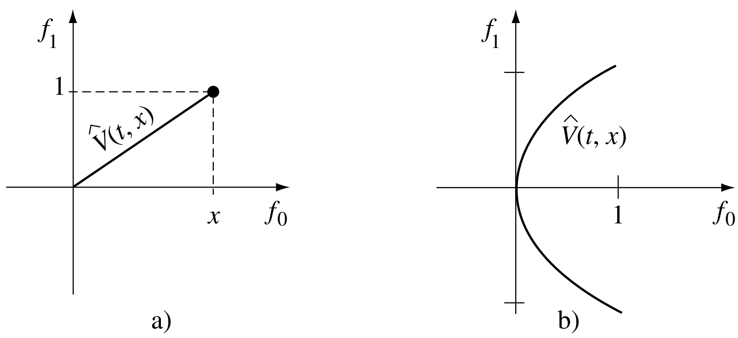
c) Legyen

$$f(t,x,u) = a(t,x) + B(t,x)u,$$
$$f_0(t,x,u) = a_0(t,x) + B_0(t,x)u,$$

ahol $a(.,.) : (\underline{t}, \bar{t}) \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, $a_0(.,.) : (\underline{t}, \bar{t}) \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^1$, $B(.,.) : (\underline{t}, \bar{t}) \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^{n \times m}$ és $B_0(.,.) : (\underline{t}, \bar{t}) \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^{1 \times m}$ típusú függvények. Ekkor az általánosított sebességvektorok halmaza az alábbi:

$$\widehat{V}(t,x) = \left\{ \begin{bmatrix} a_0(t,x) + B_0(t,x)u \\ a(t,x) + B(t,x)u \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{n+1} : u \in \mathcal{U}) \right\}.$$

Ha $\mathcal{U}$ konvex minden $t \in \mathcal{I}$-re, akkor ez a halmaz is konvex (lásd a 3.1. feladatot).




3.1. ábra. Általánosított sebességvektorok

Ebben a példában az a) és c) esetben a $\widehat{V}(t,x)$ halmazok konvexek, míg a b) esetben nem.

*3.1. Megjegyzés.* Mi indokolja a $\widehat{V}(t,x)$ halmazra az általánosított sebesség elnevezést? Tudjuk, hogy az $\dot{x}(t)$ derivált az állapotvektor $t$ időpontbeli sebességét jelenti, ami a (3.1) egyenlet alapján $f(t,x(t),u(t))$-vel egyenlő. Ha most rögzítünk egy $t \in \mathcal{I}$ időpontot, valamint egy $x \in \mathbb{R}^n$ állapot- és $u \in \mathbb{R}^m$ irányítási vektort, akkor $f(t,x,u)$ adja a megfelelő állapotvektor sebességét. Végigfuttatva $u$-t az $\mathcal{U}$ halmazon, megkapjuk a $(t,x)$-ben lehetséges sebességvektorok halmazát. Ha most az állapotteret kibővítjük egy további komponens hozzávételével, mégpedig úgy, hogy a „nulladik koordinátaként” az $f_0(t,x,u)$ értéket tekintjük, akkor éppen a $\widehat{V}(t,x)$ halmaz elemeit kapjuk. Látni fogjuk a 3.2. pontban, hogy ez a nulladik koordináta bizonyos értelemben a célfüggvény változási sebességével hozható kapcsolatba. Ez a magyarázata az „általánosított sebességvektor” elnevezésnek.

3.2. Tétel. *Legyen a megengedett vezérlések halmaza $\Delta^m$, tegyük fel, hogy a 3.1.–3.3. Feltételek teljesülnek, és az általánosított sebességek (3.6) összefüggéssel meghatározott $\widehat{V}(t,x)$ hamaza konvex.*

*Ekkor létezik optimális vezérlés.*

*Bizonyítás.* *(Vázlat)* A bizonyítás lényegében 3 lépésből áll. Első lépésként alkalmazzuk ismét a 3.1. Lemmát a (3.5) összefüggést kielégítő $\{\xi_k(.), u_k(.)\}_{k=1}^{\infty}$ eredményes folyamat meghatározására.

Második lépésként meg kell mutatni, hogy a $\{\xi_k(.)\}$ sorozatból kiválasztható egy olyan részsorozat, amely konvergál egy $\xi^*(.) : [t_0, t_1^*] \to \mathbb{R}^n$ függvényhez.

Harmadik lépésként be kell bizonyítani, hogy van olyan $u^*(.)$ megengedett vezérlés, hogy $\xi^*(.)$ éppen ennek megfelelő eredményes trajektória. □

A 2. és 3. lépések végrehajtása nem teljesen egyszerű, ezért itt azt mellőzzük. A részletes bizonyítás megtalálható a [6] 91-95. oldalán, vagy az [5] 4.2. fejezetében.

*3.2. Megjegyzés.* Az eredményes trajektóriák egyenletes korlátossága bebizonyítható, ha az alábbi két feltétel bármelyike teljesül minden $(t,x,u) \in [\underline{t}, \bar{t}] \times \mathbb{R}^n \times S_R(0)$ esetén:

$$(a) \qquad \|f(t,x,u)\|_1 \le \alpha \|x\|_1 + \beta, \qquad \left(\|x\|_1 = \sum_{j=1}^{n} |x_j|\right);$$

$$(b) \qquad \left|x^T f(t,x,u)\right| \le \alpha \|x\|^2 + \beta, \qquad \left(\|x\|^2 = x^T x\right).$$

(Lásd 3.3. és 3.4. feladatot!)

*3.3. Megjegyzés.* A 3.1. és 3.2. Tétel érvényben marad akkor is, ha $t_0$ időpont nem rögzített, illetve ha mind a $t_0$, mind pedig a $t_1$ időpont rögzített, és a szóban forgó tétel összes többi feltétele teljesül valamilyen $[t_0, t_1]$ illetve a $[t_0, t_1]$ intervallumon.

*3.4. Megjegyzés.* Az optimális vezérlési feladatot a fenti megfogalmazásban egy előre adott $\mathcal{I}$ véges intervallumon tekintettük. Ha ezt a megkötést el akarjuk hagyni, akkor valamilyen más feltétellel kell gondoskodnunk arról, hogy a $[t_0, t_1]$ intervallum korlátos maradjon. Például, ha $t_0$ rögzített, és $t_1$-ről csak azt tesszük fel, hogy $t_1 \geq t_0$, akkor az $f_0(t, x, u) \geq y(t)$ feltétel megfelelő, ha $y(.)$ olyan függvény, hogy $\int_{t_0}^{\infty} y(t)dt = \infty$. Legyen ugyanis $u(.) \in \Delta\,(t_0, t_1)$ tetszőleges eredményes vezérlés, és legyen $\overline{J} = J(\xi(.), u(.))$ a neki megfelelő célfüggvény érték. Jelöljön $\overline{g}$ egy olyan számot, amelyre $\overline{g} \leq G(x)$ minden $x \in \mathcal{M}_1$ -re. Legyen továbbá $T \geq t_0$ tetszőleges olyan szám, amelyre $\int_{t_0}^{T} y(t)dt > \overline{J} - \overline{g}$. Ekkor elegendő a $[t_0, T]$ intervallumot tekinteni, hiszen minden olyan vezérlésre, amelynek értelmezési tartománya a $[t_0, T]$ intervallumot tartalmazza, a célfüggvény értéke nagyobb, mint $\overline{J}$, tehát biztosan nem optimális.

Így például az időoptimum feladatoknál, amikor

$$J(\xi(.), u(.)) = \int_{t_0}^{t_1} dt = t_1 - t_0,$$

és $t_1$-et éppen a célpont elérése határozza meg, a $(\underline{t}, \overline{t})$ véges intervallum előzetes (nem természetes) rögzítésére nincs szükség. (A 3.5. feladat azt illusztrálja, hogy általában nem tekinthetünk el az alapintervallum véges hosszúságú rögzítésétől.)

*3.5. Megjegyzés.* A 3.2. Tétel általánosabb kitűzésű feladatra is megfogalmazható. Megengedhető ugyanis, hogy $\mathcal{M}_0$ és $\mathcal{M}_1$ az időtől, $\mathcal{U}$ pedig a helytől és az időtől is függjön, pontosabban, $\mathcal{M}_i : \mathcal{I} \to \Omega(\mathbb{R}^n), \quad i = 0, 1,$ és $\mathcal{U} : \mathcal{I} \times \mathbb{R}^n \to \Omega(\mathbb{R}^m)$ folytonos leképezések legyenek (ahol $\Omega(\mathbb{R}^m)$ az $\mathbb{R}^m$ összes nemüres kompakt részhalmazának az összességét jelöli Hausdorff-metrikával). Ezenkívül a célfüggvényben megengedhetünk egy

$$\max_{t \in [t_0, t_1]} |h(x(t))|$$

alakú additív tagot, ahol $h : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ folytonos függvény.

Nézzünk most egy kidolgozott példát a 3.2. Tétel alkalmazására.

*3.2. Példa. (Merev test szögsebességének időoptimális vezérlése).* Vizsgáljuk az 1.2. Példában leírt rendszer adott kezdőállapotból az origóba történő időoptimális vezérlésének létezését! (Emlékeztetünk rá, hogy a rendszer állapotát a szögsebesség 3 koordinátája írja le, így az origóba történő vezérlés azt jelenti, hogy a test forgását megállítjuk.)

*Megoldás.* Az egyszerűség kedvéért tegyük fel, hogy az 1.2. Példában, az (1.3) egyenletekben szereplő $b_i$ konstansok 1-gyel egyenlők, vagyis a mozgásegyenletek

$$\begin{aligned} I_1\dot{\omega}_1(t) &= (I_2 - I_3)\omega_2(t)\omega_3(t) + u_1(t), \\ I_2\dot{\omega}_2(t) &= (I_3 - I_1)\omega_3(t)\omega_1(t) + u_2(t), \\ I_3\dot{\omega}_3(t) &= (I_1 - I_2)\omega_1(t)\omega_2(t) + u_3(t), \end{aligned} \tag{3.7}$$

alakúak. Legyen a kezdőállapot $\omega(0) = (\omega_{01}, \omega_{02}, \omega_{03})^T$, a cél pedig az $\omega(t_1) = (0, 0, 0)^T$. A vezérlésekre most is kétféle korlátozó halmazt vizsgálunk:

$$\begin{aligned} &\text{(a) eset}: \quad \mathcal{U}_1 = \left\{u \in \mathbb{R}^3 : u_1^2 + u_2^2 + u_3^2 \le 1\right\} \\ &\text{(b) eset}: \quad \mathcal{U}_2 = \left\{u \in \mathbb{R}^3 : |u_i| \le 1,\ i = 1, 2, 3\right\}. \end{aligned}$$

Legyen

$$E(t) = \frac{1}{2}\left[I_1\omega_1^2(t) + I_2\omega_2^2(t) + I_3\omega_3^2(t)\right],$$

és

$$\alpha = \min\left\{\frac{1}{\sqrt{I_1}}, \frac{1}{\sqrt{I_2}}, \frac{1}{\sqrt{I_3}}\right\}.$$

Definiáljuk a vezérléseket $\omega(t) \ne 0$ esetén az

$$u_i(t) = -\frac{1}{2}\frac{\alpha I_i\omega_i(t)}{\sqrt{E(t)}}, \qquad i = 1, 2, 3$$

visszacsatolással, ha pedig $\omega(t) = 0$, akkor legyen $u(t) = 0$. Nyilvánvaló, hogy ez a vezérlés az (a) eset korlátozásának eleget tesz. Mivel pedig $I_i\omega_i^2 \le (I_1\omega_1^2 + I_2\omega_2^2 + I_3\omega_3^2)$, és

$$|u_i(t)| \le \frac{1}{2}\frac{\sqrt{I_i}\,|\omega_i(t)|}{\sqrt{E(t)}} \le \frac{\sqrt{2}}{2} < 1,$$

ezért a fenti vezérlés mindkét esetben megengedett. Helyettesítsük be ezt a vezérlést a (3.7) egyenletekbe, és differenciáljuk az $E(.)$ függvényt a kapott egyenletrendszer megoldása mentén! Ekkor

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}E(t) &= -\frac{1}{2}\alpha\frac{[I_1\omega_1^2(t) + I_2\omega_2^2(t) + I_3\omega_3^2(t)]}{\sqrt{E(t)}} = \\ &= -\alpha\sqrt{E(t)}. \end{aligned}$$

Vezessünk be még egy függvényt a

$$W(t) = \sqrt{E(t)}$$

egyenlőséggel. Minthogy

$$\frac{d}{dt}\sqrt{E(t)} = \frac{1}{2}\frac{\frac{d}{dt}E(t)}{\sqrt{E(t)}}, \tag{3.8}$$

ezért a $W$ függvényre a

$$\frac{d}{dt}W(t) = -\frac{1}{2}\alpha$$

differenciálegyenletnek kell teljesülnie, aminek a megoldása

$$W(t) = -\frac{1}{2}\alpha t + W(0).$$

Látható, hogy $W(\tau) = 0$, ha $\tau = 2W(0)/\alpha$, amiből az következik, hogy $E(\tau) = 0$, vagyis mind az (a), mind a (b) esetben a rendszer megengedett vezérléssel átvihető az origóba véges idő alatt, tehát az eredményes vezérlések halmaza nem üres.

Lássuk be, hogy az eredményes trajektóriák egyenletesen korlátosak! Legyen $u(.)$ tetszőleges megengedett vezérlés, és becsüljük az $E(.)$ függvény deriváltját a (3.7) rendszerre vonatkozóan:

$$\begin{aligned}
\left|\frac{d}{dt}E(t)\right| &\le |\omega_1(t)u_1(t)| + |\omega_2(t)u_2(t)| + |\omega_3(t)u_3(t)| \\
&\le |\omega_1(t)| + |\omega_2(t)| + |\omega_3(t)| \\
&\le \sqrt{2\left(\frac{1}{I_1} + \frac{1}{I_2} + \frac{1}{I_3}\right)}\sqrt{E(t)} = \lambda\sqrt{E(t)},
\end{aligned}$$

ahol $\lambda = \sqrt{2\left(\frac{1}{I_1} + \frac{1}{I_2} + \frac{1}{I_3}\right)}$. Ebből következik, hogy $\frac{d}{dt}\sqrt{E(t)} \le \frac{1}{2}\lambda$, hiszen láttuk, hogy (3.8) teljesül. Ezért az $E(.)$ függvényre tetszőleges megengedett vezérlés és tetszőleges rögzített $[0, T]$ intervallum esetén azt kapjuk, hogy

$$E(t) \le \left(\lambda\frac{t}{2} + \sqrt{E(0)}\right)^2 \le \left(\lambda\frac{T}{2} + \sqrt{E(0)}\right)^2,$$

mivel pedig az $E(t)$ az $\omega_i(t)$ koordinátáknak kvadratikus függvénye, ez egyúttal a trajektóriák egyenletes korlátosságát is maga után vonja.

Minthogy erre a feladatra az általánosított sebességvektorok $\widehat{V}(t, \omega)$ halmaza a 3.1. Példa c) részének értelmében konvex, ezért a 3.2. Tételből és a 3.4. Megjegyzésből következik, hogy bármely $\omega_0$ kezdőállapothoz létezik időoptimális vezérlés.

## 3.2. A Pontrjagin-féle maximumelv

**Rögzített végpontú, időinvariáns rendszer optimalizálása változó időtartam esetén**

Tekintsük az

$$\dot{x}(t) = f(x(t), u(t)), \quad t \in \mathcal{I} = (\underline{t}, \overline{t}) \subset \mathbb{R} \tag{3.9}$$

nemlineáris időinvariáns irányítási rendszert, ahol $x(t) \in \mathbb{R}^n$, $u(t) \in \mathbb{R}^m$, $f : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ folytonos és az első (vektor)változójában folytonosan differenciálható. Legyen $t_0 \in \mathcal{I}$ a rögzített kezdő időpont, és legyen $x^0 \in \mathbb{R}^n$ a megadott kezdőállapot, $x^1 \in \mathbb{R}^n$ pedig a szintén megadott célállapot. (Az a $t_1$ időpont, amikor az $x^1$ pontba el kell jutni, nincs előre meghatározva.) Legyen $\mathcal{U} \subset \mathbb{R}^m$ adott kompakt halmaz. A megengedett irányítások $\Delta$ halmaza most is $\Delta = \cup_{t_0 \leq t_1} \Delta(t_0, t_1)$ alakban adott, ahol

$$\Delta(t_0, t_1) = \{u(.) : \, u(.) \text{ mérhető és } u(t) \in \mathcal{U}, \, t_0 \leq t \leq t_1\}.$$

Egy $u$ megengedett irányítást *eredményes*nek nevezünk, ha a (3.9) egyenletnek létezik $x(t_0) = x^0$ és $x(t_1) = x^1$ peremfeltételeket kielégítő megoldása. Jelöljük az összes eredményes irányítás halmazát $\Delta_e$-vel. Világos, hogy az eredményes $(\xi(.), u(.))$ folyamatot teljesen meghatározza az $u(.)$ vezérlés, ezért minőségét jellemezhetjük egy, csak az $u$-tól függő funkcionállal. Rendeljük hozzá az $u(.)$ vezérléshez a

$$J(u(.)) = \int_{t_0}^{t_1} f_0(\xi(t), u(t))dt$$

célfüggvényt, ahol $f_0 : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ folytonos és az első (vektor)változójában folytonosan differenciálható függvény, $\xi(.)$ a (3.9) differenciálegyenlet $u(.)$-hoz tartozó, $x(t_0) = x^0$ kezdeti feltételt kielégítő megoldása.

*Keresendő egy olyan $u^*(.) \in \Delta_e$ eredményes vezérlés, amelyre minden $u(.) \in \Delta_e$ esetén*

$$J(u^*(.)) \leq J(u(.)).$$

*Az $u^*(.)$ ekkor optimális.*

Mielőtt az optimum szükséges feltételét adó Pontrjagin-féle maximumelvet megfogalmaznánk, szükségünk lesz néhány jelölésre. Adott $u(.)$ vezérléshez és a (3.9) neki megfelelő $\xi(.)$ megoldásához vezessünk be egy új $x_0(.)$

függvényt az

$$x_0(t) = \int_{t_0}^{t} f_0(\xi(s), u(s))ds$$

definícióval. Ekkor $x_0(.)$ majdnem minden $t$-re differenciálható,

$$\dot{x}_0(t) = f_0(x(t), u(t))$$

és

$$x_0(t_0) = 0, \quad x_0(t_1) = J(u(.)).$$

Egészítsük ki az eredeti változókat és differenciálegyenleteket ezzel az új változóval és differenciálegyenlettel: legyen $\widehat{x}(.) = (x_0(.), x^T(.))^T$, $\widehat{f}(\widehat{x}, u) = (f_0(x, u), f^T(x, u))^T$, és tekintsük a

$$\frac{d}{dt}\widehat{x}(t) = \widehat{f}(\widehat{x}(t), u(t)), \quad \widehat{x}(t_0) = \begin{pmatrix} 0 \\ x^0 \end{pmatrix} = \widehat{x}^0 \tag{3.10}$$

kezdetiérték feladatot. Vegyük ehhez $\widehat{\mathcal{M}}_1$ célhalmazként $\mathbb{R}^{n+1}$-ben a $(0, x^1)$ pontba állított, az $x_0$ tengellyel párhuzamos egyenest:

$$\widehat{\mathcal{M}}_1 = \left\{ \begin{pmatrix} x_0 \\ x^1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n+1} : x_0 \in \mathbb{R} \text{ tetszőleges, } x^1 \in \mathbb{R}^n \text{ adott} \right\}.$$

Az eredeti optimalizálási feladatot tehát úgy fogalmazhatjuk át, hogy keresendő egy olyan megengedett vezérlés, amelyhez a (3.10) megoldása a $\widehat{\mathcal{M}}_1$ halmazban végződik, mégpedig a lehető legkisebb $x_0$ koordinátájú pontban. A 3.2 ábra egy $n = 2$ dimenziós feladatra szemlélteti a három dimenzióra történő kiegészítést.

Adott $u(.) \in \Delta$ vezérlés esetén vegyük a (3.10) linearizált egyenletét a (3.10) megfelelő $\widehat{\xi}(.)$ megoldása körül (lásd a 2.1 pontot):

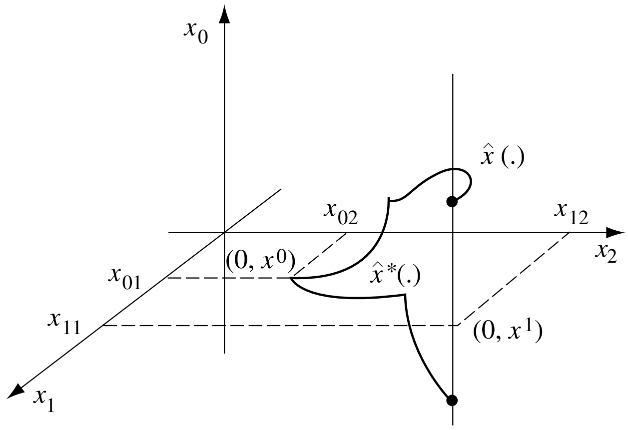
$$\frac{d}{dt}\widehat{y}(t) = \widehat{f}_{\widehat{x}}(\widehat{\xi}(t), u(t))y(t),$$

ahol

$$\widehat{f}_{\widehat{x}}(\widehat{\xi}(t), u(t)) = \begin{pmatrix} 0 & \frac{\partial f_0}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_0}{\partial x_n} \\ 0 & \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & \frac{\partial f_n}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n} \end{pmatrix}_{|(\widehat{\xi}(t), u(t))}. \tag{3.11}$$

Tekintsük ennek az adjungált differenciálegyenletét:

$$\frac{d}{dt}\widehat{\psi}(t) = -\widehat{f}_{\widehat{x}}^T(\widehat{\xi}(t), u(t))\widehat{\psi}(t), \tag{3.12}$$




3.2. ábra. Az optimalizálási feladat átfogalmazásának szemléltetése

vagy részletesen kiírva,

$$\begin{aligned}
\dot{\psi}_0(t) &= 0,\\
\dot{\psi}_i(t) &= -\sum_{j=0}^{n} \frac{\partial f_j}{\partial x_i}(x(t), u(t))\psi_j(t), \qquad\qquad i = 1, ..., n,
\end{aligned}$$

ami egy nemautonóm lineáris differenciálegyenlet a $\widehat{\psi}(.) = (\psi_0(.), \psi^T(.))^T$ függvényre vonatkozóan.

Definiáljunk még két további függvényt, mégpedig a $\mathcal{H} : \mathbb{R}^{n+1} \times \mathbb{R}^{n+1} \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ és az $\mathcal{M} : \mathbb{R}^{n+1} \times \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}$ függvényeket a

$$\begin{aligned}
\mathcal{H}(\widehat{\psi}, \widehat{x}, u) &= \psi_0 f_0(x, u) + \psi_1 f_1(x, u) + ... + \psi_n f_n(x, u),\\
\mathcal{M}(\widehat{\psi}, \widehat{x}) &= \max_{u \in \mathcal{U}} \mathcal{H}(\widehat{\psi}, \widehat{x}, u)
\end{aligned}$$

egyenlőséggel.

*3.6. Megjegyzés.* A $\mathcal{H}$ segítségével a (3.10) és (3.12) differenciálegyenleteket összefoglalhatjuk egy Hamilton-típusú

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\widehat{x}(t) &= \mathrm{grad}_{\widehat{\psi}} \mathcal{H}(\widehat{\psi}(t), \widehat{x}(t), u(t)) = \left(\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \psi_0}, \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \psi_1}, ..., \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \psi_n}\right)^T_{|(\widehat{\psi}(t), \widehat{x}(t), u(t))}\\
\frac{d}{dt}\widehat{\psi}(t) &= -\mathrm{grad}_{\widehat{x}} \mathcal{H}(\widehat{\psi}(t), \widehat{x}(t), u(t)) = -\left(\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial x_0}, \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial x_1}, ..., \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial x_n}\right)^T_{|(\widehat{\psi}(t), \widehat{x}(t), u(t))}
\end{aligned}$$

differeciálegyenlet-rendszerben. (Hamilton-típusú egyenletek gyakran fordulnak elő a mechanikában.) A $\mathcal{H}$ függvényt a rendszer *Hamilton-függvény*ének fogjuk nevezni.

3.1. DEFINÍCIÓ. Azt mondjuk, hogy egy $(\widehat{\xi}(.), u(.))$ folyamat kielégíti a *Pontrjagin-féle maximumelv*et, ha a (3.12) adjungált rendszernek létezik olyan *nemtriviális* $\widehat{\psi}(.)$ megoldása, hogy

(*i*) $\mathcal{H}(\widehat{\psi}(t), \widehat{\xi}(t), u(t)) = \mathcal{M}(\widehat{\psi}(t), \widehat{\xi}(t))$, majdnem minden $t \in [t_0, t_1]$-re;

(*ii*) $\mathcal{M}(\widehat{\psi}(t), \widehat{\xi}(t)) \equiv 0$, minden $t \in [t_0, t_1]$-re;

(*iii*) $\psi_0(t) \equiv \psi_0(t_0) \leq 0$, minden $t \in [t_0, t_1]$-re.

*3.7. Megjegyzés.* Észrevesszük, hogy a $\mathcal{H}$ függvény - és vele együtt az $\mathcal{M}$ függvény - nem függ az $x_0$ változótól, ezért az $(\widehat{\xi}(.), u(.))$ folyamat helyett tekinthetjük az $(\xi(.), u(.))$ folyamatot is, és beszélhetünk arról, hogy ez *utóbbi folyamat* eleget tesz a Pontrjagin-féle maximumelvnek.

3.3. TÉTEL. *Tegyük fel, hogy $u^*(.) \in \Delta_e$ optimális irányítás $[t_0, t_1^*]$ értelmezési tartománnyal, és $\xi^*(.)$ neki megfelelő trajektória, tehát*

$$\dot{\xi}^*(t) = f(\xi^*(t), u^*(t)), \ \xi^*(t_0) = x^0, \ \xi^*(t_1^*) = x^1. \tag{3.13}$$

*Ekkor az $(\xi^*(.), u^*(.))$ folyamat kielégíti a Pontrjagin-féle maximumelvet.*

A tétel bizonyítása meglehetősen bonyolult. Az érdeklődő olvasó megtalálja pl. a [9] 101-145. oldalán, vagy a [6] 134-146. oldalán.

Ha a (3.9) rendszerre vonatkozóan az *időoptimum* feladatot tekintjük, akkor a maximumelv némileg egyszerűbb formában is megfogalmazható. Legyen ugyanis a célfunkcionál

$$J(u(.)) = \int_{t_0}^{t_1} 1 dt = t_1 - t_0,$$

vagyis $f_0(x, u) \equiv 1$. Vezessük be a $\mathcal{H}$ és $\mathcal{M}$ helyett a $H : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ és $M : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ függvényeket a

$$\begin{aligned} H(\psi, x, u) &= \psi_1 f_1(x, u) + \ldots + \psi_n f_n(x, u), \\ M(\psi, x) &= \max_{u \in \mathcal{U}} H(\psi, x, u) \end{aligned}$$

egyenlőséggel.

Adott $u(.) \in \Delta$ és a (3.9) neki megfelelő $\xi(.)$ megoldásához tekintsük a (3.9) linearizált egyenletének adjungáltját:

$$\dot{\psi}(t) = -f_x^T(\xi(t), u(t))\psi(t), \tag{3.14}$$

vagy részletesen kiírva

$$\dot{\psi}_i(t) = -\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f_j}{\partial x_i}(\xi(t), u(t))\psi_j(t), \qquad i = 1, ..., n.$$

3.2. DEFINÍCIÓ. Azt mondjuk, hogy az $(\xi(.), u(.))$ folyamat kielégíti az *időoptimumra vonatkozó Pontrjagin-féle maximumelv*et, ha a (3.14) adjungált rendszernek létezik olyan nemtriviális $\psi(.)$ megoldása, hogy

$(i)$ $H(\psi(t), \xi(t), u(t)) = M(\psi(t), \xi(t))$, majdnem minden $t \in [t_0, t_1]$-re;

$(ii)$ $M(\psi(t), \xi(t)) \equiv M(\psi(t_1), \xi(t_1)) \geq 0$, minden $t \in [t_0, t_1]$-re.

3.1. KÖVETKEZMÉNY. *Tegyük fel, hogy az $u^*(.)$ időoptimális vezérlés a $[t_0, t_1^*]$ intervallumon, $\xi^*(.)$ pedig neki megfelelő trajektória, tehát a (3.13) teljesül. Ekkor a $(\xi^*(.), u^*(.))$ folyamat kielégíti az időoptimumra vonatkozó Pontrjagin-féle maximumelvet.*

*Bizonyítás.* Mivel most $f_0(x, u) \equiv 1$, ezért

$$\mathcal{H}(\widehat{\psi}, \widehat{x}, u) = \psi_0 + H(\psi, x, u),$$

és

$$\mathcal{M}(\widehat{\psi}, \widehat{x}) = \max_{u \in \mathcal{U}} (\psi_0 + H(\psi, x, u)) = \psi_0 + M(\psi, x).$$

Ebből következik, hogy a 3.2. Definíció $(i)$ feltétele a $(\xi^*(.), u^*(.))$ folyamatra pontosan akkor teljesül, amikor a 3.1. Definíció $(i)$ feltétele. Mivel pedig a 3.3. Tétel szerint az is igaz, hogy minden $t \in [t_0, t_1^*]$-ra

$$0 \equiv \mathcal{M}(\widehat{\psi}^*(t), \widehat{\xi}^*(t)) = \psi_0 + M(\psi^*(t), \xi^*(t)),$$

és $\psi_0 \leq 0$, ebből következik, hogy a 3.2. Definíció $(ii)$ feltétele is teljesül. □

*3.8. Megjegyzés.* Érdemes megnézni, hogy mit ad a 3.1. Következmény lineáris időoptimum feladat esetén. Ha $f(x,u) = Ax + Bu$, akkor $f_x(x,u) = A$, ezért a (3.14) adjungált rendszer sem az állapottól, sem az irányítástól nem függ, hanem az alábbi egyszerű alakban adható meg:

$$\dot{\psi} = -A^T\psi, \quad \psi(t_0) = \psi^0,$$

amelynek a megoldása a $\psi^0$ paraméter függvényében kiszámítható. Az $M$ függvényt meghatározó összefüggés most a következő:

$$\max_{u\in\mathcal{U}} H(\psi, x, u) = \max_{u\in\mathcal{U}}(\psi^T Ax + \psi^T Bu) = \psi^T Ax + \max_{u\in\mathcal{U}} \psi^T Bu.$$

Meg kell tehát keresni a

$$\psi(t)^T Bu(t) = \max_{v\in\mathcal{U}}(\psi^T(t)Bv), \quad t \geq t_0$$

feltételnek eleget tevő $u(.)$ vezérléseket. (Lehet, hogy ennek megoldása nem egyértelmű.) Ezután minden $u(.)$ vezérléshez meg kell határozni az

$$\dot{x} = Ax + Bu(t), \quad x(t_0) = x^0$$

$\xi(.)$ megoldását és ellenőrízni kell, hogy valamilyen $t_1$-re teljesül-e a $\xi(t_1) = x^1$ egyenlőség. Ha a válasz igenlő, akkor a $(\xi(.), u(.))$ folyamat optimális *lehet* a $(t_0, t_1)$ intervallumon, ellenkező esetben biztosan nem az.

*3.9. Megjegyzés.* Nézzük meg, hogy hogyan alkalmazhatjuk a maximumelvet az $\widehat{x}^0$ pontban kezdődő és az $\widehat{\mathcal{M}}_1$ egyenesen végződő trajektóriák és a nekik megfelelő vezérlések közül azoknak a kiválasztására, amelyek a maximumelvben szereplő összes feltételeknek eleget tesznek! Ismeretlen a $t_1$ időpont, az $m$ darab $u_j(.)$, az $n+1$ darab $x_i(.)$ és az $n+1$ darab $\psi_k(.)$ függvény. Adott $\widehat{\xi}(t)$ és $\widehat{\psi}(t)$ esetén a 3.1. Definíció $(i)$ feltétele majdnem minden $t$-re meghatározza az $m$ komponensből álló $u(t)$ vektort (esetleg nem egyértelműen). Marad tehát $2n+2$ ismeretlen függvény és a $t_1$ skalár paraméter. Az ismeretlen függvényekre rendelkezésre áll $2n+2$ darab differenciálegyenlet, amelyek $2n+2$ kezdeti feltétel megadása esetén egyértelműen meghatározzák a megoldást. Nekünk azonban csak $n+1$ kezdeti feltétel és $n$ végfeltétel áll rendelkezésünkre, mégpedig $\widehat{x}(t_0) = \widehat{x}_0$ és $x(t_1) = x^1$. Mivel azonban a $\psi_j(.)$ függvények és az összes feltétel is csak egy pozitív konstans szorzó erejéig meghatározottak (hiszen a $\mathcal{H}$ függvény a $\widehat{\psi}$-nak homogén függvénye), ezért a $2n+2$ skalár paraméterből egy nem lényeges. Az ismeretlen $t_1$ paraméter meghatározására felhasználhatjuk az $\mathcal{M}(\widehat{\psi}(t_1), \widehat{\xi}(t_1)) = 0$ egyenletet. Végső soron tehát ugyanannyi egyenletünk van, mint amennyi ismeretlenünk, ezért várható, hogy csak különálló, izolált trajektóriák vannak, amelyek az $x^0$ és $x^1$ pontokat összekötik, és amelyek a maximumelv összes feltételet kielégítik.

Látjuk, hogy nem tudunk olyan lépésről-lépésre haladó eljárást mutatni, amely a maximumelv alapján elvezetne az optimális megoldáshoz. Ha azonban az $(i)$ maximum feltételből ki tudjuk fejezni az $u$-t a $\widehat{\psi}$ és $x$ függvényeként, vagyis ha meg tudunk adni egy olyan $u(x, \widehat{\psi})$ értéket, amelyre

$$\mathcal{H}(\widehat{\psi}, \widehat{x}, u(x, \widehat{\psi})) = \mathcal{M}(\widehat{\psi}, \widehat{x}),$$

akkor ezt behelyettesítve a (3.10)-be és a (3.14)-be, és figyelembe véve az $x(t_1) = x^1$ és $\mathcal{M}(\widehat{\psi}(t_1), \widehat{x}(t_1)) = 0$ egyenleteket, az alábbi peremérték feladathoz jutunk:

$$\begin{aligned}
\dot{x}_i(t) &= f_i(x(t), u(x(t), \widehat{\psi}(t))),\\
\dot{\psi}_i(t) &= -\sum_{j=0}^{n} \frac{\partial f_j}{\partial x_i}(x(t), u(x(t), \widehat{\psi}(t)))\psi_j(t),\\
x_i(t_0) &= x_i^0,\ x_i(t_1) = x_i^1, \qquad i = 1, \dots, n,\\
\psi_0(t) &= -1 \text{ vagy } 0,\ \mathcal{M}(\widehat{\psi}(t_1), x(t_1)) = 0.
\end{aligned}$$

Itt már figyelembe vettük azt is, hogy $\mathcal{M}$ nem függ $x_0$-tól. Egy ilyen peremérték feladat megoldása lényegesen nehezebb feladat mind elvi, mind gyakorlati szempontból, mint egy kezdetiérték feladaté, éppen ezért fokozottabban igaz rá, hogy megoldása többnyire csak numerikus úton reményteljes.

Jelentősen egyszerűbb a helyzet, ha a fenti peremérték feladatot vissza tudjuk vezetni kezdetiérték feladatra.

Nézzünk most néhány egyszerű, kidolgozott példát a maximumelv alkalmazására.

*3.3. Példa.* Tekintsük az alábbi feladatot:

$$\begin{aligned}
\dot{x}_1 &= x_2,\\
\dot{x}_2 &= -x_1 + u, \quad \mathcal{U} = [-1, 1], \quad x^0 = \begin{pmatrix} x_{10} \\ x_{20} \end{pmatrix}, \quad x^1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

és azt vizsgáljuk, hogyan juthatunk el leggyorsabban az $x^0$-ból az $x^1$-be.

*Megoldás.* Az időoptimum feladathoz tartozó $H$ Hamilton függvény az alábbi:

$$H(\psi, x, u) = \psi_1 x_2 - \psi_2 x_1 + \psi_2 u.$$

Ennek maximuma $u \in [-1, 1]$-re az

$$M(\psi, x) = \psi_1 x_2 - \psi_2 x_1 + |\psi_2|,$$

ami az $u = sgn\ \psi_2$ mellett realizálódik. A $\psi$ adjungált változókra a

$$\dot{\psi}_1 = \psi_2, \quad \dot{\psi}_2 = -\psi_1$$

egyenletet kapjuk. Vegyük ennek a $\psi(0) = (\cos\alpha, \sin\alpha)$ kezdeti feltételt kielégítő megoldását:

$$\begin{pmatrix} \psi_1(t) \\ \psi_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos t & \sin t \\ -\sin t & \cos t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\alpha \\ \sin\alpha \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\alpha - t) \\ \sin(\alpha - t) \end{pmatrix}.$$

(Minthogy $\|\psi(t)\| \neq 0$ kell legyen, és a $\psi(.)$ csak egy pozitív konstans szorzó erejéig meghatározott, az általánosság megszorítása nélkül $\psi(0)$ választható 1 normájúnak.)

Az $u = sgn(\sin(\alpha - t))$ összefüggésből következően a vezérlés felváltva $+1$ és $-1$ értéket vesz fel $\pi$ hosszúságú intervallumokon, az első és az utolsó részintervallum kivételével, amelyek lehetnek rövidebbek.

Ha egy $[t_0, t_1]$ intervallumon $u(t) \equiv 1$, akkor a megoldandó differenciálegyenlet rendszer

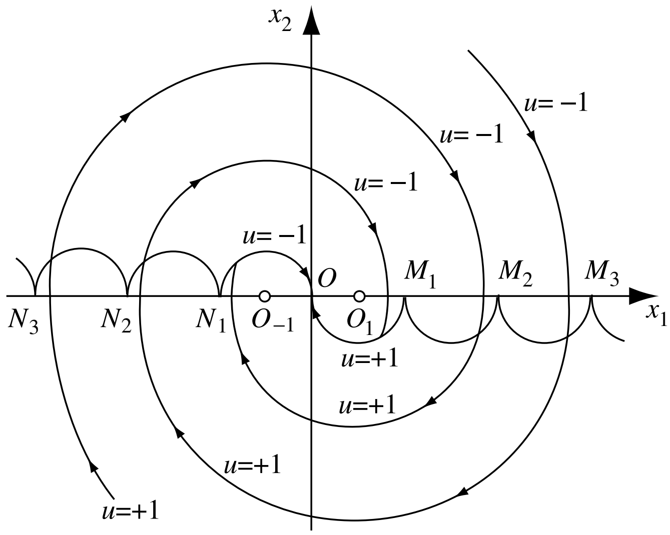
$$\dot{x}_1 = x_2, \quad \dot{x}_2 = -x_1 + 1. \tag{3.15}$$

Vezessük be az $y_1 = x_1 - 1,\ \ y_2 = x_2$ új változókat. Ekkor az $\dot{y}_1 = y_2,\ \dot{y}_2 = -y_1$ egyenletet kapjuk, amelynek megoldása

$$y_1(t) = R\cos(\gamma - t), \ \ y_2(t) = R\sin(\gamma - t)$$

alakban adható meg, tehát a trajektóriák az $[y_1, y_2]$ síkban origó körüli $R$ sugarú körök, amelyeken a fázispont az óramutató járásával megegyező irányban mozog. Az $y_1$ és $y_2$ definíciójából következik, hogy a (3.15) trajektóriái az $[x_1, x_2]$ síkban szintén az óramutató járásával megegyezően befutott $R$ sugarú körök, amelyeknek a középpontja az $(1, 0)$ koordinátájú $O_1$ pont. Analóg meggondolással azt kapjuk, hogy az $u(t) \equiv -1$ vezérlésnek megfelelő differenciálegyenlet trajektóriái $O_{-1} = (-1, 0)$ középpontú, $R$ sugarú, az óramutató járásával megegyező irányban befutott körök.

Észrevesszük, hogy mindkét körsereg esetén kizárólag az 1 sugarú kör megy át az origón. Minthogy a záróintervallum hossza kisebb, vagy egyenlő $\pi$, ezért $+1$ vezérléssel az $O_1$ középpontú 1 sugarú kör $x_1$ tengely alatti $OM_1$ ívének pontjaiból, míg $-1$ vezérléssel az $O_{-1}$ középpontú, 1 sugarú kör $x_1$ tengely feletti $N_1O$ ívének pontjaiból pontjaiból lehet időoptimálisan elérni az origót. Az $OM_1$ körív pontjait egy legfeljebb $\pi$ hosszúságú intervallumon $-1$ értéket felvevő vezérléssel lehet az időre optimálisan elérni, így a $-1$ vezérlést azon pontok esetében kell alkalmazni, amelyek az $O_{-1}$ pont körüli $R = 3$ sugarú kör felső íve alatt, és az $N_2N_1,\ \ N_1O$, és $OM_1$ körívek felett helyezkednek el. Az $N_2N_1$, körívet az $OM_1$ körív $O_{-1}$ körüli, $\pi$ szöggel való




3.3. ábra. Átkapcsolási görbék és trajektóriák

elforgatásával kaptuk. Ha viszont az $N_1O$ körívet forgatjuk el $O_1$ körül $-\pi$ szöggel, megkapjuk az $M_1M_2$ körívet, így időoptimálisan az $O_1$ körüli $R = 3$ sugarú kör alsó íve felett, és az $N_1O$, $OM_1$, és $M_1M_2$ körívek alatti pontokból lehet elérni az $N_1O$ körívet. Ezt a meggondolást folytathatva belátható, hogy az időoptimális vezérlés az ábra $N_3N_2N_1OM_1M_2M_3$ ív felett és az $N_3N_2N_1O$ görbe pontjaiban $-1$-gyel, míg az $N_3N_2N_1OM_1M_2M_3$ ív alatt és az $OM_1M_2M_3$ görbe pontjaiban $+1$-gyel lesz egyenlő.

A Pontrjagin-féle maximumelv tehát (véges sok időpont kivételével) egyértelműen meghatározza azt a vezérlést, amely időoptimális lehet. (A fenti megfontolásokban a vezérlés jobbról való folytonosságának megkövetelésével a vezérlést minden pontban egyértelművé tettük.) A 3.2. Tételből és a 3.4. Megjegyzésből következik, hogy optimális vezérlés létezik, tehát a megtalált vezérlés valóban optimális.

*3.4. Példa. (Merev test szögsebességének vezérlése).* Térjünk vissza az 1.2. és 3.2. Példában vizsgált feladathoz, és keressük az

$$\begin{aligned} I_1\dot{\omega}_1(t) &= (I_2 - I_3)\omega_2(t)\omega_3 + u_1(t), \\ I_2\dot{\omega}_2(t) &= (I_3 - I_1)\omega_3(t)\omega_1 + u_2(t), \\ I_3\dot{\omega}_3(t) &= (I_1 - I_2)\omega_1(t)\omega_2 + u_3(t) \end{aligned} \tag{3.16}$$

differenciálegyenletekkel leírt rendszer $\omega(0) = (\omega_{01}, \omega_{02}, \omega_{03})^T$ kezdőállapotához az origóba történő időoptimális irányítást, miközben a megengedett irányítások értékeiket vagy az

$$\mathcal{U}_1 = \{u \in \mathbb{R}^3 : \; u_1^2 + u_2^2 + u_3^2 \le 1\}, \qquad ((a) \text{ eset})$$

vagy az

$$\mathcal{U}_2 = \{u \in \mathbb{R}^3 : \; |u_i| \le 1, \, i = 1, 2, 3\}, \qquad ((b) \text{ eset})$$

halmazból veszik.

A rövidebb írás kedvéért bevezetünk néhány jelölést. Legyen

$$\begin{aligned} w_k(t) &= I_k \omega_k(t), \qquad k = 1, 2, 3, \\ L_1 &= 1/I_3 - 1/I_2, \qquad L_2 = 1/I_1 - 1/I_3, \qquad L_3 = 1/I_2 - 1/I_1. \end{aligned}$$

Ezekkel a jelölésekkel a (3.16) egyenlet a

$$\begin{aligned} \dot{w}_1(t) &= L_1 w_2(t) w_3(t) + u_1(t), \\ \dot{w}_2(t) &= L_2 w_3(t) w_1(t) + u_2(t), \\ \dot{w}_3(t) &= L_3 w_1(t) w_2(t) + u_3(t) \end{aligned} \tag{3.17}$$

alakot ölti. Ennek a rendszernek a Hamilton függvénye

$$\begin{aligned} H(\psi, x, u) = L_1 w_2 w_3 \psi_1 + L_2 w_3 w_1 \psi_2 + L_3 w_1 w_2 \psi_3 + \\ + u_1 \psi_1 + u_2 \psi_2 + u_3 \psi_3, \end{aligned}$$

az adjungált egyenlete pedig

$$\begin{aligned} \dot{\psi}_1(t) &= -L_2 w_3(t) \psi_2(t) - L_3 w_2(t) \psi_3(t), \\ \dot{\psi}_2(t) &= -L_1 w_3(t) \psi_1(t) - L_3 w_1(t) \psi_3(t), \\ \dot{\psi}_3(t) &= -L_1 w_2(t) \psi_1(t) - L_2 w_1(t) \psi_2(t) \end{aligned} \tag{3.18}$$

alakú.

Tekintsük először az (a) esetet. Ekkor

$$\max_{u \in \mathcal{U}_1} H(\psi, x, u) = M(\psi, w) = L_1 w_2 w_3 \psi_1 + L_2 w_3 w_1 \psi_2 + L_3 w_1 w_2 \psi_3 + \|\psi\|,$$

ahol

$$\|\psi\| = \sqrt{(\psi_1)^2 + (\psi_2)^2 + (\psi_3)^2},$$

és a maximum az egyértelműen meghatározott

$$u_i = v_i(\psi) = \frac{\psi_i}{\|\psi\|}, \qquad i = 1, 2, 3$$

értéknél realizálódik. Behelyettesítve az $u_i(t) = v_i(\psi(t))$ vezérlést a (3.17) differenciálegyenlet-rendszerbe, és hozzávéve a (3.18) differenciálegyenletet, valamint az

$$\begin{aligned} w_1(0) &= I_1\omega_{01}, & w_1(t_1^*) &= 0, \\ w_2(0) &= I_2\omega_{02}, & w_2(t_1^*) &= 0, \\ w_3(0) &= I_3\omega_{03}, & w_3(t_1^*) &= 0, \end{aligned}$$

és az

$$M(\psi_0, w(0)) = M(\psi(t_1^*), 0)$$

feltételi egyenleteket, akkor ezzel megkapjuk a megoldandó peremérték feladatot. Az egyenletek speciális alakja itt lehetővé teszi, hogy ennél tovább menjünk, és megadjuk az optimális vezérlést állapot-visszacsatolás alakjában. Keressük a $\psi(.)$ függvényt

$$\psi_i(t) = -w_i(t)/\left\|w(t)\right\|$$

alakban, ekkor a fentiek értelmében

$$u_i(t) = v_i(\psi(t)) = -w_i(t)/\left\|w(t)\right\|.$$

Ha ezt helyettesítjük be a (3.17) differenciálegyenletbe, akkor a $w(.)$ függvényre egy kezdetiérték feladatot kell megoldani. Behelyettesítéssel ellenőrizhetjük, hogy a fenti $\psi(.)$ függvény ekkor kielégíti a (3.18) rendszert. Az is könnyen látható, hogy ekkor $M(\psi(t), w(t)) \equiv 1$. Meg kell még mutatni, hogy a kapott kezdetiérték feladat megoldására a végfeltétel is teljesül valamilyen $t_1^*$ időpontban. Ezt beláthatjuk úgy, hogy kiszámítjuk a $\|w(.)\|$ függvény deriváltját a (3.17) felhasználásával. Erre azt kapjuk, hogy

$$\frac{d}{dt}\left\|w(t)\right\| = -1,$$

ezért a $t_1^* = \|w(0)\|$ időpontban $w(t_1^*) = 0$. így az időoptimum feladat megoldását egy kezdetiérték feladat megoldására vezettük vissza.

A (b) esetben

$$\max_{u\in U_2} H(\psi, x, u) = M(\psi, x) = L_1 w_2 w_3 \psi_1 + L_2 w_3 w_1 \psi_2 + L_3 w_1 w_2 \psi_3 + \left\|\psi\right\|_1,$$

ahol

$$\left\|\psi\right\|_1 = |\psi_1| + |\psi_2| + |\psi_3|.$$

A maximumot szolgáltató $u(.)$ az

$$u_i(t) \begin{cases} = 1, & \text{ha } \psi_i(t) > 0, \\ = -1, & \text{ha } \psi_i(t) < 0, \\ \in [-1, 1], & \text{ha } \psi_i(t) = 0 \end{cases}$$

összefügéssel adható meg. A megoldás részletes elemzésére nem térünk ki, az $I_1 = I_2$ speciális esetre az megtalálható az [5] 503-506. oldalán.

## 3.3. A transzverzalitási feltétel

**Mozgó végpontú időinvariáns rendszer optimalizálása változó időtartammal**

Változtassuk meg az előző paragrafusban tárgyalt optimalizálási feladat kitűzésében az előírt kezdő- és célállapotot egy-egy $\mathbb{R}^n$-beli halmazra.

Tekintsük tehát most is az

$$\dot{x}(t) = f(x(t), u(t)), \quad t \in \mathcal{I} = (\underline{t}, \overline{t}) \subset \mathbb{R},$$

azaz a (3.9) nemlineáris időinvariáns irányítási rendszert, ahol $x(.)$, $u(.)$ és $f$ ugyanolyan, mint az előző paragrafusban. A megengedett irányítások $\Delta$ halmaza is legyen változatlan. Legyen adott az $\mathcal{M}_0 \subset \mathbb{R}^n$ és $\mathcal{M}_1 \subset \mathbb{R}^n$ halmaz, valamint a $t_0 \in (\underline{t}, \overline{t})$ kezdési időpont. Olyan megengedett irányításokat keresünk, amelyek mellett a (3.9) egyenletnek van olyan $x(.)$ megoldása, amelyre

$$x(t_0) \in \mathcal{M}_0 \qquad \text{és} \qquad x(t_1) \in \mathcal{M}_1$$

teljesül. Itt a $t_1$ időpont nincs előre megadva, hanem a célhalmaz elérése határozza meg. Az olyan vezérléseket, amelyekre a fenti követelmény teljesül, eredményes vezérléseknek fogjuk nevezni, és a halmazukat $\Delta_e$-vel jelöljük. A (3.9) megfelelő megoldásai az eredményes trajektóriák. Az eredményes $(\xi(.), u(.))$ folyamathoz rendeljük hozzá a

$$J(\xi(.), u(.)) = \int_{t_0}^{t_1} f_0(\xi(t), u(t))dt$$

célfüggvényt, ahol $f_0$ is ugyanolyan tulajdonságú, mint az előző paragrafusban. Részletesebben tehát csak az $\mathcal{M}_0$ es $\mathcal{M}_1$ megadásáról érdemes szólnunk. Tegyük fel, hogy $\mathcal{M}_0$ és $\mathcal{M}_1$ $r_0$-, illetve $r_1$-dimenziós sokaságok, amelyeket a $g_0 : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^{n-r_0}$, illetve $g_1 : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^{n-r_1}$ folytonosan differenciálható függvények segítségével definiálunk:

$$\mathcal{M}_j = \{x \in \mathbb{R}^n : g_{j,k}(x_1, ..., x_n) = 0, \ k = 1, ..., n - r_j\}, \qquad j = 0, 1.$$

Feltételezzük, hogy minden $x \in \mathbb{R}^n$-re

$$\operatorname{rang} \left.\frac{\partial g_0}{\partial x}\right|_x = n - r_0, \qquad \text{és} \qquad \operatorname{rang} \left.\frac{\partial g_1}{\partial x}\right|_x = n - r_1,$$

ahol

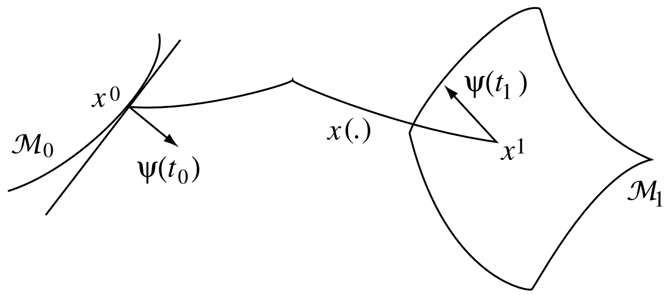
$$\left.\frac{\partial g_j}{\partial x}\right|_x = \left.\begin{pmatrix} \frac{\partial g_{j1}}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial g_{j1}}{\partial x_n} \\ \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial g_{j,n-r_j}}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial g_{j,n-r_j}}{\partial x_n} \end{pmatrix}\right|_x, \qquad j = 0, 1.$$

Az eredményes trajektóriára tehát a

$$g_0(\xi(t_0)) = 0 \qquad \text{és} \qquad g_1(\xi(t_1)) = 0$$

egyenleteknek kell teljesülni.

Ha ismernénk a trajektória $x(t_0) = x^0$ kezdő- és $x(t_1) = x^1$ végpontját, akkor rögzített végpontú feladatról volna szó, és akkor az optimum szükséges feltételét a 3.3. Tétel értelmében a 3.1. Definícióban megfogalmazott Pontrjagin-féle maximumelv adná. Ha tehát $(\xi^*(.), u^*(.))$ optimális pár, akkor ez optimális a $\xi^*(t_0) = x^{0*}$, $\xi^*(t_1^*) = x^{1*}$ végpontokkal meghatározott feladat esetében is, ezért az előbb említett maximumelv érvényben marad. Az optimális trajektória persze nem kezdődhet az $\mathcal{M}_0$, illetve nem végződhet az $\mathcal{M}_1$ akármelyik pontjában. A rájuk vonatkozó feltételt a transzverzalitási feltétel szolgáltatja.




3.4. ábra. A transzverzalitási feltétel szemléltetése

3.3. Definíció. Legyen $(\xi(.), u(.))$ az $\mathcal{M}_0$ és $\mathcal{M}_1$ sokaságokat összekötő irányítási folyamat, vagyis legyen $\xi(t_0) = x^0 \in \mathcal{M}_0$ és $\xi(t_1) = x^1 \in \mathcal{M}_1$. Legyen továbbá $\widehat{\psi}(.)$ az előző paragrafusban megadott (3.14) adjungált differenciálegyenlet nemtriviális megoldása. Azt mondjuk, hogy a $\widehat{\psi}(t_j)$ vektor kielégíti a transzverzalitási feltételt a trajektória $\xi(t_j)$ végpontjában ($j = 0, 1$), ha a $\psi(t_j) = (\psi_1(t_j), ..., \psi_n(t_j))^T$ vektor ortogonális az $\mathcal{M}_j$ sokaság $\xi(t_j)$ pontbeli érintősíkjára, tehát ha létezik olyan $\alpha_j \in \mathbb{R}^{n-r_j}$ vektor, hogy

$$\psi^T(t_j) = \left( \left. \frac{\partial g_j}{\partial x} \right|_{x(t_j)} \right)^T \alpha_j, \qquad j = 0, 1.$$

Ezek után megfogalmazhatjuk a mozgó végpontú feladat megoldására a szükséges feltételt.

3.4. Tétel. *Tegyük fel, hogy az $u^*(.) \in \Delta_e$ optimális irányítás $[t_0, t_1^*]$ értelmezési tartománnyal és $\xi^*(.)$ neki megfelelő trajektória, tehát*

$$\dot{\xi}^*(t) = f(\xi^*(t), u^*(t)), \quad \xi^*(t_0) \in \mathcal{M}_0, \quad \xi^*(t_1^*) \in \mathcal{M}_1.$$

*Ekkor az $(\xi^*(.), u^*(.))$ folyamat kielégíti a Pontrjagin-féle maximumelvet, és a (3.14) adjungált egyenlet $\widehat{\psi}^*(.)$ megoldása megválasztható úgy, hogy a $\xi^*(.)$ trajektória $\xi^*(t_0)$ és $\xi^*(t_1^*)$ végpontjaiban a $\widehat{\psi}^*(t_0)$ es $\widehat{\psi}^*(t_1^*)$ vektorokra teljesül a transzverzalitási feltétel.*

*3.10. Megjegyzés.* Vizsgáljuk meg, hogy a 3.3. Tétel elegendő információt tartalmaz-e ahhoz, hogy várhatóan csak izolált trajektóriák legyenek, amelyek összekötik az $\mathcal{M}_0$ és $\mathcal{M}_1$ sokaságokat, és amelyek eleget tesznek a fenti tételnek. A 3.9. Megjegyzésben foglaltakhoz hasonlóan most is eljuthatunk oda, hogy ha az $u$ a maximum feltételből kifejezhető az $x$ és $\widehat{\psi}$ függvényeként, akkor $2n$ darab differenciálegyenletet tudunk felírni a $2n$ darab ismeretlen $\psi(.)$ és $x(.)$ függvényre. Az $x(t_j) \in \mathcal{M}_j$, $j = 0, 1$ feltételek összesen $2n - (r_0 + r_1)$ peremfeltételt szolgáltatnak. A transzverzalitási feltétel felírásában $2n$ egyenlet szerepel. Ezek az egyenletek azonban $2n - (r_0 + r_1)$ szabad paramétert tartalmaznak, végső soron tehát $2n - [2n - (r_0 + r_1)] = r_0 + r_1$ feltételt adnak. Így $2n$ differenciálegyenletet és $2n$ peremfeltételt tudunk felírni. Mivel az egyik perem (a $t_1$) nem adott, a hiányzó feltételt a korábbiakhoz hasonlóan megkapjuk az $\mathcal{M}(\widehat{\psi}(t_1), \widehat{x}(t_1)) = 0$ egyenlőségből (ld. a 3.1. Definíció (ii) feltételét).

*3.11. Megjegyzés.* Mozgó végpontú időoptimum feladat esetén megfogalmazható a 3.1. Következménnyel analóg állítás, ami durván úgy fogalmazható, hogy az időoptimális $(\xi^*(.), u^*(.))$ folyamatnak ki kell elégítenie az időoptimumra vonatkozó maximumelvet, mégpedig az adjungált egyenlet megoldásának olyan választása mellett, hogy arra a transzverzalitási feltétel teljesül.

Nézzünk most egy kidolgozott példát a transzverzalitási feltétel alkalmazására.

*3.5. Példa.* Tekintsük az alábbi feladatot ($n = 2$, $m = 1$):

$$\begin{aligned} \dot{x}_1(t) &= x_2(t), \\ \dot{x}_2(t) &= u(t), \qquad U = [-2, 2], \\ \mathcal{M}_0 &= \{0\}, \\ \mathcal{M}_1 &= \{x \in R^2 : g_1(x) = x_1 - x_2 - 1/2 = 0\}, \\ J(u(.)) &= \int_0^{t_1} u^2(t)dt. \end{aligned} \tag{3.19}$$

*Megoldás.* Ebben az esetben az adjungált rendszer

$$\begin{aligned} \dot{\psi}_0(t) &= 0, \\ \dot{\psi}_1(t) &= 0, \\ \dot{\psi}_2(t) &= -\psi_1(t), \end{aligned}$$

amelynek a $\widehat{\psi}(t_0) = \widehat{\psi}^0$ kezdeti feltételt kielégítő megoldása

$$\begin{aligned} \psi_0(t) &= \psi_{00}, \\ \psi_1(t) &= \psi_{01}, \\ \psi_2(t) &= \psi_{02} - \psi_{01}(t - t_0) \end{aligned} \tag{3.20}$$

alakban adható meg. A rendszer Hamilton-függvénye

$$\mathcal{H}(\widehat{\psi}, \widehat{x}, u) = \psi_0 u^2 + \psi_1 x_2 + \psi_2 u.$$

A transzverzalitási feltétel azt mondja, hogy lennie kell egy olyan $\alpha$ számnak, amelyre

$$\begin{pmatrix} \psi_1(t_1^*) \\ \psi_2(t_1^*) \end{pmatrix} = \alpha \mathrm{grad} g_1(x(t_1^*)) = \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Ebből az következik, hogy $\psi_1(t_1^*) = -\psi_2(t_1^*)$, tehát

$$\psi_{01} = \psi_{01} t_1^* - \psi_{02}. \tag{3.21}$$

Most meg kell vizsgálnunk, hogy a $\widehat{\psi}^0$ vektor milyen választása mellett kapunk a 3.4. Tétel összes feltételét kielégítő megoldást.

1. eset: $\psi_{00} = 0$. Ekkor

$$\begin{aligned} \mathcal{M}(\widehat{\psi}(t), \widehat{x}(t)) &= \max_{u \in [-2,2]} \mathcal{H}(\widehat{\psi}(t), \widehat{x}(t), u) = \\ &= \max_{u \in [-2,2]} (\psi_1(t) x_2(t) + \psi_2(t) u(t)) = \\ &= \psi_1(t) x_2(t) + 2 \left| \psi_2(t) \right|, \end{aligned}$$

ahol a maximumot az $u(t) = 2\ sgn\psi_2(t)$ függvény szolgáltatja. Tegyük fel, hogy egy $(0,\tau)$ intervallumon $\psi_2(t) > 0$ (vagyis most $t_0 = 0$, $\psi_{02} \geq 0$, $\psi_{01} \leq 0$ és $\psi^0 \neq 0$). Ekkor ezen az intervallumon $u(t) \equiv 2$. Ha ezt behelyettesítjük a (3.19) egyenletbe, akkor az $x(0) = 0$ kezdeti feltételt kielégítő megoldás az

$$x_1(t) = t^2,\ x_2(t) = 2t$$

függvény. A maximumelv (ii) feltétele miatt

$$0 \equiv \mathcal{M}(\widehat{\psi}(t), \widehat{x}(t)) = 2\psi_{01}t + 2\left|\psi_2(t)\right|,$$

aminek speciálisan $t = 0$-ra is teljesülni kell. Ebből az következik, hogy $\psi_{02} = 0$, tehát az $u(.)$ nem vált előjelet. Másrészt $\psi^0 \neq 0$ miatt $\psi_{01} < 0$. A végpontban a transzverzalitási feltétel a (3.21) relációból következően csak $t_1^* = 1$ értékre lehet igaz. A $t \in [0,1]$-re azonban a $(t^2, 2t)$ görbe nem metszi az $\mathcal{M}_1$ halmazt. Ha azt feltételezzük, hogy $\psi_2(t) < 0$ valamilyen $(0,\tau)$ intervallumon, akkor $u(t) \equiv -2$ vezérlést kell alkalmazni, ami az $x(t) = (-t^2, -2t)^T$ trajektóriát adja. A 3.1. Definíció (ii) feltételéből $t = 0$ esetén most is azt kapjuk, hogy $\psi_{02} = 0$, ezért az előbbiekkel megegyezően a transzverzalitási feltétel csak a $t_1^* = 1$ értéknél teljesülhet. A $(-1,-2)$ pont azonban nincs rajta az $\mathcal{M}_1$ halmazon. Ez az ellentmondás mutatja, hogy az a $\widehat{\psi}^0$, amelyre $\psi_{00} = 0$, nem felel meg a 3.4. Tétel követelményeinek.
2. eset: $\psi_{00} < 0$. Feltehetjük, hogy $\psi_{00} = -1$. Ekkor

$$\begin{aligned}\mathcal{H}(\widehat{\psi}(t), \widehat{x}(t), u) &= \psi_{01}x_2(t) + \psi_2(t)u - u^2 = \\ &= \psi_{01}x_2(t) - (u - \psi_2(t)/2)^2 + (\psi_2(t))^2/4,\end{aligned}$$

amely maximumát olyan $u$-ra veszi fel, amelyre az $(u - \psi_2(t)/2)^2$ kifejezés a $[-2,2]$ intervallumon minimális. Ebből azt kapjuk, hogy

$$u(t) = \begin{cases} 2 & \text{ha} \quad \psi_2(t) > 4, \\ \frac{\psi_2(t)}{2} & \text{ha}\ -4 \leq \psi_2(t) \leq 4, \\ -2 & \text{ha} \quad \psi_2(t) < -4. \end{cases} \tag{3.22}$$

Láttuk, hogy a $\psi_2(.)$ függvény képe egy egyenes, ezért legfeljebb három olyan intervallum lehetséges, ahol az $u(.)$ más-más képlettel adható meg. Nézzük meg először, hogy lehet-e $t_0 = 0$-nál $\psi_{02} < -4$. Ekkor valamilyen $[0,\tau]$ intervallumon $\psi_2(t) < -4$, tehát ott $u(t) \equiv -2$. Ehhez az irányításhoz az

$$x_1(t) = -t^2, \quad x_2(t) = -2t$$

trajektória tartozik. A maximumelv (ii) feltétele szerint

$$0 \equiv \mathcal{M}(\widehat{\psi}(t), \widehat{x}(t)) = -2\psi_{02} - 4,$$

ami csak $\psi_{02} = -2$-re teljesülne. Ebből következően az optimális irányítás nem kezdődhet $u(t) = -2$-vel. Teljesen analóg számolassal kapjuk, hogy a $\psi_2(t) > 4$ választás sem ad megoldást, vagyis az optimális vezérlés $u(t) = 2$-vel sem kezdődhet. Tegyük fel most, hogy valamilyen $[0, \tau]$ szakaszon $-4 \leq \psi_2(t) \leq 4$. Ekkor a (3.20) és (3.22) összefüggések értelmében

$$u(t) = \frac{-\psi_{01}t + \psi_{02}}{2},$$

a megfelelő trajektória pedig

$$x_1(t) = -\frac{\psi_{01}}{12}t^3 + \frac{\psi_{02}}{4}t^2,$$
$$x_2(t) = -\frac{\psi_{01}}{4}t^2 + \frac{\psi_{02}}{2}t.$$

A fenti függvényekkel a maximumelv (ii) feltétele azt adja, hogy

$$0 \equiv \mathcal{M}(\widehat{\psi}(t), \widehat{x}(t)) = -\frac{(\psi_{01})^2}{4}t^2 + \frac{\psi_{01}\psi_{02}}{2}t + \\ + \frac{(\psi_{01})^2}{4}t^2 - \frac{\psi_{01}\psi_{02}}{2}t + \frac{(\psi_{02})^2}{4},$$

ami csak a $\psi_{02} = 0$-ra teljesül. Az 1. eset tárgyalása során láttuk, hogy ekkor a transzverzalitási feltételből az következik, hogy $t_1^* = 1$. Az $\mathcal{M}_1$ halmaz elérését jelentő $x_1(1) - x_2(1) = 1/2$ egyenletből a $\psi_{01} = 3$ kezdőértéket kapjuk. A maximumelvnek és a transzverzalitási feltételnek így egyetlen $(x(.), u(.))$ folyamat tesz csak eleget, mégpedig az

$$x_1(t) = -\frac{1}{4}t^3,\ x_2(t) = -\frac{3}{4}t^2,\ u(t) = -\frac{3}{2}t,\ t \in [0, 1].$$

Ehhez a folyamathoz a

$$J(u(.)) = \int_0^1 \left(-\frac{3}{2}t\right)^2 dt = \frac{3}{4}$$

célfüggvény érték tartozik. Ha tudnánk, hogy optimális vezérlés létezik, akkor azt is tudnánk, hogy éppen a most megkapott vezérlés az. A 3.2.Tételből ez sajnos nem következik, mivel a

$$\widehat{V}(x,t) = \left\{ \begin{pmatrix} f_0(t,x,u) \\ f(t,x,u) \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 : \begin{array}{l} f_0(t,x,u) = u^2,\ f_1(t,x,u) = x_2, \\ f_2(t,x,u) = u, \quad -2 \leq u \leq 2 \end{array} \right\}$$

halmaz nem konvex. Ismeretes azonban az előző fejezetben ismertetettnél általánosabb egzisztencia tétel is, amelynek alapján megállapítható, hogy ennek a feladatnak van optimális megoldása, tehát a fent megkapott folyamat valóban optimális.

## 3.4. Feladatok a 3. fejezethez

*3.1. Feladat.* a.) Legyen

$$f(t,x,u) = a(t,x) + B(t,x)u,$$
$$f_0(t,x,u) = a_0(t,x) + B_0(t,x)u,$$

ahol $a(.,.) : (\underline{t},\overline{t}) \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, $a_0(.,.) : (\underline{t},\overline{t}) \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^1$, $B(.,.) : (\underline{t},\overline{t}) \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^{n\times m}$ és $B_0(.,.) : (\underline{t},\overline{t}) \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^{1\times m}$ típusú függvények. Ekkor az általánosított sebességvektorok halmaza az alábbi:

$$\widehat{V}(t,x) = \left\{ \begin{bmatrix} a_0(t,x) + B_0(t,x)u \\ a(t,x) + B(t,x)u \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{n+1} : u \in \mathcal{U} \right\}.$$

Mutassuk meg, hogy ha $\mathcal{U}$ konvex, akkor ez a halmaz is konvex bármely rögzített $(t,x)$ esetén.

b.) Vázoljuk a $\widehat{V}(0,(2,1))$ halmazt, ha $\mathcal{U} = [-1,1]$

$$f(t,x,u) = \begin{pmatrix} -x_2^2 + u \\ u \end{pmatrix}$$
$$f_0(t,x,u) = u^2$$

Konvex-e ez a $\widehat{V}(0,(2,1))$ halmaz?

*3.2. Feladat.* Tegyük fel, hogy az $u,\ \kappa : [0,T] \to [0,\infty)$ folytonos függvények és a $K > 0$ konstans kielégíti az

$$u(t) \leq K + \int_0^t \kappa(s)u(s)ds$$

egyenlőtlenséget minden $t \in [0,T]$ esetén. Mutassuk meg, hogy ekkor teljesül az úgynevezett Gronwall egyenlőtlenség:

$$u(t) \leq K \exp\left( \int_0^t \kappa(s)ds \right) \quad !$$

*3.3. Feladat.* Mutassuk meg, hogy ha minden $(t,x,u) \in \left[\underline{t},\overline{t}\right] \times \mathbb{R}^n \times S_R(0)$ esetén

$$\|f(t,x,u)\|_1 \leq \alpha \|x\|_1 + \beta,$$

ahol $\|x\|_1 = \sum_{j=1}^n |x|_j$ és $S_R(0) = \{u \in \mathbb{R}^m : \|u\| \leq R\}$, akkor az

$$\begin{aligned} \dot{x} &= f(t,x,u(t)), \qquad & u(t) \in S_R(0),\ t_0,t \in \left[\underline{t},\overline{t}\right] \\ x(t_0) &= x_0, & x_0 \in \mathbb{R}^n \text{ rögzített} \end{aligned}$$

feladat $x(.)$ megoldására teljesül az alábbi becslés:

$$\|x(t)\|_1 \leq (\|x_0\|_1 + \beta(\bar{t} - \underline{t}))e^{\alpha(\bar{t}-\underline{t})}$$

Hogyan kapcsolódik ez az eredmény a tanult egzisztencia tételekhez?

*3.4. Feladat.* Mutassuk meg, hogy ha minden $(t, x, u) \in [\underline{t}, \bar{t}] \times \mathbb{R}^n \times S_R(0)$ esetén

$$\left|x^T f(t, x, u)\right| \leq \alpha \|x\|^2 + \beta,$$

ahol $\|x\| = \sqrt{x^T x}$, és $S_R(0) = \{u \in \mathbb{R}^m : \|u\| \leq R\}$, akkor az

$$\begin{aligned} \dot{x} &= f(t, x, u(t)), \qquad & u(t) &\in S_R(0),\ t_0, t \in [\underline{t}, \bar{t}] \\ x(t_0) &= x_0, & x_0 &\in \mathbb{R}^n \text{ rögzített} \end{aligned}$$

feladat $x(.)$ megoldására teljesül az alábbi becslés:

$$\|x(t)\|^2 \leq (\|x_0\|^2 + 2\beta(\bar{t} - \underline{t}))e^{2\alpha(\bar{t}-\underline{t})}$$

Hogyan kapcsolódik ez az eredmény a tanult egzisztencia tételekhez?

*3.5. Feladat.* Tekintsük az alábbi feladatot:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2, \\ \dot{x}_2 &= u, \end{aligned} \quad \mathcal{M}_0 = \left\{\begin{pmatrix} p_0 \\ 0 \end{pmatrix}\right\},\ p_0 < 0, \quad \mathcal{M}_1 = \left\{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right\}, \quad \mathcal{U} = [-1, 1],$$

$$J(u(.)) = \int_0^{t_1} |u(t)|\, dt \longrightarrow \min$$

Mutassuk meg, hogy

a.) tetszőlegesen kicsi $\alpha > 0$ -ra az

$$u_\alpha(t) = \begin{cases} +1, & \text{ha } 0 \leq t \leq \alpha, \\ 0, & \text{ha } \alpha < t < \frac{|p_0|}{\alpha}, \\ -1 & \text{ha } \frac{|p_0|}{\alpha} \leq t \leq \frac{|p_0|}{\alpha} + \alpha \end{cases}$$

vezérlés eredményes;

b.) a neki megfelelő célfüggvényérték $J(u_\alpha(.)) = 2\alpha$;

c.) az $\inf J(u(.)) = 0$ !

- Milyen $u(.)$ mellett lesz $J(u(.)) = 0$?
- Ez az $u(.)$ eredményes vezérlés?
- Milyen feltétel nem teljesül az egzisztencia tételben?

*3.6. Feladat.* Tekintsük az alábbi feladatot ($n = 2,\ m = 1,\ t_0 = 0$):

$$\begin{aligned}\dot{x}_1(t) &= 1,\\ \dot{x}_2(t) &= (x_2(t)+1)^2 u(t),\end{aligned}$$

$$\mathcal{M}_0 = \left\{ \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}, \quad \mathcal{M}_1 = \left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}, \quad \mathcal{U} = [-1, 1],$$

$$J(u(.)) = \int_0^{t_1} f_0(t, x(t), u(t)) dt,$$

ahol

$$f_0(t, x, u) = \begin{cases} 1, & \text{ha} \quad x_2 < 0, \\ (x_2+1)^{-2}, & \text{ha} \quad x_2 \geq 0. \end{cases}$$

a.) Mutassuk meg, hogy minden eredményes vezérlés értelmezési tartománya a $[0, 2]$ intervallum!

b.) Számítsuk ki a $0 < \alpha < 1$ paraméter melletti

$$u_\alpha(t) = \begin{cases} \alpha, & \text{ha } \ 0 \leq t \leq 1, \\ -\alpha & \text{ha } \ 1 < t \leq 2 \end{cases}$$

vezérléshez tartozó trajektóriát és vázoljuk $x_2(.)$ grafikonját különböző $\alpha$-k mellett!

c.) Mutassuk meg, hogy a célfüggvény értéke

$$J(x_\alpha(.), u_\alpha(.)) = \frac{2}{3\alpha}(1 - (1-\alpha)^3).$$

Számítsuk ki ennek határértékét $\alpha \to 1$ (balról) esetén!

d.) Milyen függvényt kapunk, ha a $\lim\limits_{\alpha \to 1_-} x_{2\alpha}(t)$ határértéket nézzük? A kapott függvény $u_1(.)$-hez tartozó trajaktória-e a $[0, 2]$ intervallumon, tehát $u_1(.)$ eredményes vezérlés-e?

e.) Mutassuk meg, hogy bármely eredményes vezérlésre $J(u(.)) > \frac{2}{3}$ ! Mi következik ebből? Milyen feltétel nem teljesül az egzisztencia tételben?

*3.7. Feladat.* Legyen

$$\underline{\dot{x}} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \underline{u}, \quad \underline{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, \quad \underline{u} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}$$

$$\mathcal{M}_0 = \left\{ \begin{matrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{matrix} \right\}, \quad \mathcal{M}_1 = \left\{ \begin{matrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{matrix} \right\}, \quad \mathcal{U} = S_1(0),$$

$$J(u(.)) = \int_0^{t_1} \left\{ \|x(t)\| + (1 - \|u(t)\|^2)^2 \right\} dt,$$

és $\Delta$ az $\|u(t)\| \leq 1$ feltételt kielégítő mérhető függvények osztálya.

a.) Mutassuk meg, hogy az eredményes vezérlések értelmezési tartománya a $[0, 1]$ intervallum!

b.) Mutassuk meg, hogy bármely eredményes vezérlés esetén $J(u(.)) \geq \frac{1}{3}$ !

c.) Mutassuk meg, hogy az $\left\{\underline{u}^{(k)}(t)\right\}_{k=1}^{\infty} = \left\{ \begin{pmatrix} \sin 2\pi kt \\ \cos 2\pi kt \end{pmatrix} \right\}_{k=1}^{\infty}$ vezérléssorozat minimalizáló sorozat, és $\lim_{k\to\infty} J(u^{(k)}(.)) = \frac{1}{3} = \inf J(u(.))$!

d.) Mutassuk meg, hogy nincsen olyan eredményes vezérlés, amelyre $J(u(.)) = \frac{1}{3}$ teljesülne! Magyarázzuk meg, miért nem alkalmazhatjuk az egzisztencia tételt!

*3.8. Feladat.* (Nemlineáris oszcillátor) Tekintsük az

$$\begin{aligned} \ddot{x} + f(x, \dot{x})\dot{x} + g(x) = u, \qquad & x(t) \in \mathbb{R}^1, \quad u(t) \in [-1, 1], \\ x(0) = p_0, \qquad & \dot{x}(0) = q_0, \quad x(t_1) = 0, \ \dot{x}(t_1) = 0, \end{aligned}$$

egyenletekkel megadott rendszert, amelyhez időoptimális vezérlést keresünk (vagyis $J(u(.)) = \int_0^{t_1} 1dt$ ). Tegyük fel, hogy $f$ és $g$ folytonosan differenciálható függvények, amelyekre teljesülnek az alábbi feltételek: $f(x, y) > 0$ minden $x, y \in \mathbb{R}^1$ -re, $xg(x) > 0$ minden nem zérus $x \in \mathbb{R}^1$ -re, és $\lim_{|x|\to\infty} G(x) = \infty$, ahol $G(x) = \int_0^x g(s)ds$.

a.) írjuk át a feladatot az $x_1$, $x_2$ változók kétdimenziós állapotterére! Ismertnek tételezzük fel (irányíthatósági megfontolásokkal megmutatható), hogy a rendszer tetszőleges $(p_0, q_0)^T$ kezdőállapotból az origóba irányítható valamilyen $[0, t_1]$ intervallumon.

b.) Vizsgáljuk az eredményes trajektóriákat a $[0, t_1 + 1]$ intervallumon! Legyen
$$V(x_1, x_2) = G(x_1) + x_2^2/2$$
egyenlőséggel értelmezve! Mutassuk meg, hogy ez a függvény az origó kivételével mindenhol pozitív, és számítsuk ki a $\frac{d}{dt}V(x_1(t), x_2(t))$ deriváltat az állapotegyenlet tetszőleges, megengedett vezérléshez tartozó trajektóriája mentén! Mutassuk meg, hogy $\frac{d}{dt}V(x_1(t), x_2(t)) \leq V(x_1(t), x_2(t)) + 1$. Hogyan következik ebből a
$$V(x_1(t), x_2(t)) \leq (V(p_0, q_0) + 1)e^{t_1+1}$$
becslés a $[0, t_1 + 1]$ intervallumon? Ezt a becslést felhasználva mutassuk meg, hogy
$$|x_2(t)| \leq \sqrt{2(V(p_0, q_0) + 1)e^{t_1+1}}$$
és
$$|x_1(t)| \leq |p_0| + (t_1 + 1)\left(\sqrt{2(V(p_0, q_0) + 1)e^{t_1+1}}\right)$$
teljesül minden $t \in [0, t_1 + 1]$! Mit jelent ez az egzisztencia tétel szempontjából?

c.) Mit kell még belátni ahhoz, hogy az optimális irányítás létezését garantálhassuk? Teljesül-e ez a feltétel?

*3.9. Feladat.* Oldjuk meg az alábbi időoptimális optimális irányítási feladatot!

$$\dot{x} = x^2 + u, \qquad x(0) = 0, \qquad x(t_1) = 1, \qquad U = [-1, 1],$$
$$J(u(.)) = \int_0^{t_1} dt = t_1 \longrightarrow \min .$$

*3.10. Feladat.* Oldjuk meg az alábbi időoptimális optimális irányítási feladatot!

$$\ddot{x} = u, x(0) = -4, \dot{x}(0) = 0, x(t_1) = 0, \dot{x}(t_1) = 0, U = [-1, 1],$$
$$J(u(.)) = \int_0^{t_1} dt = t_1 \longrightarrow \min .$$

*3.11. Feladat.* Tekintsük a nemlineáris oszcillátor időoptimális irányításának feladatát (lásd a 3.8. feladatot). Mutassuk meg, hogy a Pontrjagin-féle maximum-elv tetszőleges $(p_0, q_0)$ kezdőpont esetén véges sok időpont kivételével egyértelműen meghatározza az optimális vezérlést, és az rendelkezik az alábbi tulajdonságokkal:

Megadható egy $k$ egész szám és $k+1$ darab $\tau_i$ $(i=0,...,k)$ érték úgy, hogy
$0=\tau_0<\tau_1<...<\tau_k=t_1^*$;
$u^*(t)=+1$ vagy $-1$, ha $t\in(\tau_{i-1},\tau_i)$, $i=1,...,k$;
$u(t)u(s)=-1$, ha $t\in(\tau_{i-1},\tau_i)$, $s\in(\tau_i,\tau_{i+1})$, $i=1,...,k-1$.

*3.12. Feladat.* Oldjuk meg az alábbi időoptimális optimális irányítási feladatot!

$$\begin{aligned}
\dot{x}_1 &= x_2+u_1, \quad U=\left\{\begin{pmatrix}u_1\\u_2\end{pmatrix}\in\mathbb{R}^2 : u_1^2+u_2^2\le 1\right\},\\
\dot{x}_2 &= -x_1+u_2,\ \mathcal{M}_0=\left\{\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}\in\mathbb{R}^2 : x_1^2+x_2^2=1\right\},\\
&\mathcal{M}_1=\left\{\begin{pmatrix}2\\0\end{pmatrix}\right\},\\
J(\xi(.),u(.)) &= \int_0^{t_1} dt = t_1 \longrightarrow \min .
\end{aligned}$$

# 4. fejezet

# Dinamikus programozás

Az előző fejezetben az optimum szükséges feltételét megfogalmazó, - az optimális irányítások elméletének egyik alapvető - eredményével, a Pontrjagin-féle maximumelvvel foglalkoztunk, ami a Lagrange multiplikátorok módszerével analóg, annak egyáltalán nem triviális, igen mély általánosítása.

Ebben a fejezetben egy másik megközelítéssel, a dinamikus programozás módszerével ismerkedünk meg.

## 4.1. Az optimális irányítási feladat

Legyen $\sum$ az a rendszer, amelynek mozgását az

$$\dot{x}(t) = f(t, x(t), u(t)), \qquad t \in (\underline{t}, \bar{t}) \subset \mathbb{R} \tag{4.1}$$

differenciálegyenlet-rendszer, illetve az

$$x(t+1) = f(t, x(t), u(t)), \qquad t \in (\underline{t}, \bar{t}) \subset \mathbb{Z} \tag{4.2}$$

differenciaegyenlet-rendszer írja le, ahol

$$x(t) \in \mathcal{X} \subset \mathbb{R}^n, \quad u(t) \in \mathcal{U} \subset \mathbb{R}^m, \quad f : (\underline{t}, \bar{t}) \times \mathcal{X} \times \mathcal{U} \to \mathbb{R}^n$$

és legyen

$$x(t_0) = x_0 \tag{4.3}$$

a rendszer kezdőállapota. Adott $[t_0, t_1]$ intervallum esetén a $\sum$ rendszer által meghatározott $(\xi, u)$ folyamat alatt egy olyan párt értünk, amelynek második tagja egy $u : [t_0, t_1) \to \mathcal{U}$ megengedett vezérlés, első tagja pedig a (4.1) illetve (4.2) egyenletrendszer $u$ melletti, (4.3) kezdeti feltételt kielégítő megoldása: $\xi(.) = x(., t_0, x_0, u)$ . Feltételezzük, hogy az $x_0$ kezdőállapot a $\mathcal{X}$

állapottér tetszőleges, de rögzített eleme, az $x(t_1)$ végállapot „szabad”, vagyis $\mathcal{M}_0 = \{x_0\}, \mathcal{M}_1 = \mathcal{X}$.

A $\sum$ rendszer által meghatározott $(\xi, u)$ folyamathoz hozzárendeljük az 1.1. pontban definiált $J$ célfüggvényt. Minthogy adott $u$ és $(t_0, x_0)$ meghatározza a $\xi(.)$ trajektóriát, $J$-t tekinthetjük a $t_0, t_1, x_0$ és $u$ függvényének, vagyis vehetjük a célfüggvényt

$$J(t_0, t_1, x_0, u) = \mathcal{Q}(t_0, t_1, x_0, u) + G(\xi(t_1)) \tag{4.4}$$

alakban megadottnak, ahol a (4.1) rendszer esetén

$$\mathcal{Q}(t_0, t_1, x_0, u) = \int_{t_0}^{t_1} f_0(t, \xi(t), u(t))\, dt, \tag{4.5}$$

a (4.2) rendszer esetén

$$\mathcal{Q}(t_0, t_1, x_0, u) = \sum_{t=t_0}^{t_1-1} f_0(t, \xi(t), u(t)). \tag{4.6}$$

Itt $f_0 : (\underline{t}, \bar{t}) \times \mathcal{X} \times \mathcal{U} \to \mathbb{R}_+$ és $G : \mathcal{X} \to \mathbb{R}_+$ adott függvények. Az optimális irányítás feladata a következőképpen fogalmazható meg:

*Adott $\sum$ rendszer, $t_0 < t_1$ időpontok, $x_0$ kezdőállapot, valamint $\mathcal{Q}$ és $G$ költségfüggvények esetén keresendő egy olyan megengedett $u \in \Delta(t_0, t_1)$ vezérlés, amely minimalizálja a $J(t_0, t_1, x_0, u) = \mathcal{Q}(t_0, t_1, x_0, u) + G(\xi(t_1))$ célfüggvényt.*

A dinamikus programozás módszere szempontjából alapvető jelentőségű, hogy a $\mathcal{Q}$ költségfüggvényre bármely $t_1 \leq t_2 \leq t_3$ időpont-hármasra a

$$\begin{aligned} \mathcal{Q}\left(t_1, t_3, x_0, u|_{[t_1,t_3)}\right) &= \mathcal{Q}\left(t_1, t_2, x_0, u|_{[t_1,t_2)}\right) + \\ &+ \mathcal{Q}\left(t_2, t_3, x\left(t_2; t_1, x_0, u|_{[t_1,t_2)}\right), u|_{[t_2,t_3)}\right) \end{aligned} \tag{4.7}$$

additivitási tulajdonság érvényes.

A fenti additivitási tulajdonság alapján lehet belátni az *Optimalitási elv* érvényességét, ami lényegében azt mondja ki, hogy optimális trajektória tetszőleges „végső” darabja is optimális. Pontosabban megfogalmazva: ha $(\xi^*(.), u^*(.))$ optimális folyamat a $J(t_0, t_1, x_0, u)$ célfüggvényre vonatkozóan, és ha $\delta > 0$ olyan, hogy $t_0 < t_0 + \delta \leq t_1$, akkor az

$$\left(x^*\left(.; t_0 + \delta, \xi^*(t_0 + \delta), u^*_{[t_0+\delta,t_1)}\right), u^*|_{[t_0+\delta,t_1)}\right)$$

szintén optimális pár a

$$J\left(t_0+\delta, t_1, \xi^*(t_0+\delta), u\right)$$

célfüggvényre vonatkozóan. Ha nem így volna, akkor lenne egy $\widetilde{u}\in\Delta(t_0+\delta, t_1)$ irányítás, amelyre

$$J\left(t_0+\delta, t_1, \xi^*\left(t_0+\delta\right), \widetilde{u}\right) < J\left(t_0+\delta, t_1, \xi^*\left(t_0+\delta,\right), u^*|_{[t_0+\delta, t_1)}\right).$$

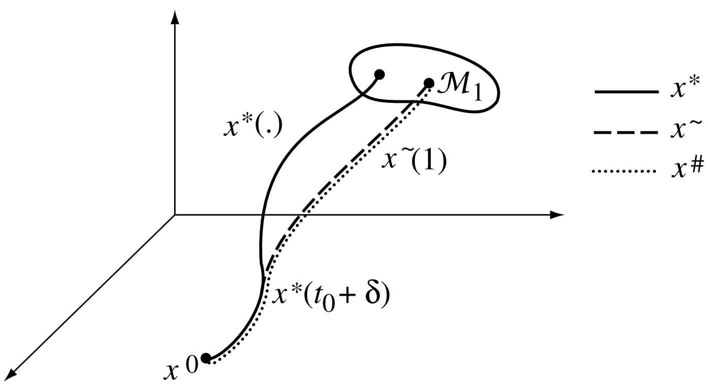
De az $u|_{[t_0,t_0+\delta)}$ és $\widetilde{u}$ összefűzéseként, más szóval konkatenációjaként előálló

$$u^{\#}(s)=\begin{cases} u^*(s), \; s\in[t_0, t_0+\delta), \\ \widetilde{u}(s), \;\; s\in[t_0+\delta, t_1) \end{cases}$$

vezérlés szintén megengedett és

$$\begin{aligned} J\left(t_0, t_1, x_0, u^{\#}\right) = \mathcal{Q}\left(t_0, t_0+\delta, x_0, u^*|_{[t_0,t_0+\delta)}\right) + \\ + J\left(t_0+\delta, t_1, \xi^*\left(t_0+\delta\right), \widetilde{u}\right) < J\left(t_0, t_1, x_0, u^*\right), \end{aligned}$$

vagyis $u^*$ nem lenne optimális.




4.1. ábra. Vázlat az Optimalitási elvhez

## 4.2. Véges rendszerek

A dinamikus programozás módszerét legkönnyebben véges rendszerek esetén érthetjük meg, ezért először ezt ismertetjük. Tegyük fel, hogy mind az $\mathcal{X}$ állapottér, mind az $\mathcal{U}$ irányítási halmaz véges sok elemből áll, mégpedig

$$N := card(\mathcal{X}), \qquad M := card(\mathcal{U}),$$

ahol $card(\mathcal{Z})$ a $\mathcal{Z}$ halmaz számosságát, vagyis elemeinek a számát jelöli. Legyen

$$k = t_1 - t_0 \in \mathbb{Z},$$

és legyen $f(t, x, u) \in \mathcal{X}$ minden $(t, x, u) \in [t_0, t_1] \times \mathcal{X} \times \mathcal{U}$-ra. Minthogy véges problémáról van szó, a $J(t_0, t_1, x_0, u)$ függvény minimuma megtalálható azzal a naiv módszerrel, hogy az $u \in \Delta(t_0, t_1)$ vezérléseket $k$ elemű

$$u_1,\ u_2,\ \ldots,\ u_k$$

sorozatnak fogjuk fel, és kiszámítjuk az összes lehetséges ilyen sorozathoz az $x_0$-ból kiinduló trajektóriákat és a megfelelő célfüggvény értékeket. Minthogy $M^k$ különböző vezérlési sorozat létezik, ez az eljárás

$$kM^k$$

$f$ és $f_0$ függvénykiértékelést tesz szükségessé (és valamennyi $G$ kiszámítási és összehasonlítási műveletet).

Egy másik lehetőséget kínál az alábbi megfontolás. Időben $t_1$-től $t_0-$ig visszafelé haladva, induktív módon konstruáljuk meg a

$$V : [t_0, t_1] \times \mathcal{X} \to \mathbb{R}_+$$

és

$$K : [t_0, t_1] \times \mathcal{X} \to \mathcal{U}$$

függvényeket, amelyeket rendre *Bellman függvény*nek vagy *értékfüggvény*nek és *optimális visszacsatolás*nak fogunk nevezni. A konstrukció az alábbi követelménynek kell, hogy eleget tegyen:

1. Minden $s \in [t_0, t_1]$ -re és $x \in \mathcal{X}$ -re
$$V(s, x) = \min_{u \in \Delta[s, t_1)} J(s, t_1, x, u). \tag{4.8}$$

2. Minden $s \in [t_0, t_1]$ és minden $x \in \mathcal{X}$ esetén, ha $\xi$ a
$$\begin{aligned} \xi(\ell+1) &= f(\ell, \xi(\ell), K(\ell, \xi(\ell))), \qquad \ell = s, s+1, ..., t_1 - 1 \\ \xi(s) &= x \end{aligned} \tag{4.9}$$
differenciaegyenlet-rendszer megoldása, és ha
$$u^*(\ell) := K(\ell, \xi(\ell)) \tag{4.10}$$
definícióval élünk, akkor ez a vezérlés megadja az $(s, x)$-ből induló optimalizálási feladat megoldását, vagyis
$$V(s, x) = J(s, t_1, x, u^*). \tag{4.11}$$

Nyilvánvaló, hogy ha ezeket a függvényeket megadtuk, akkor ezzel az eredeti optimalizálási feladatot is megoldottuk, sőt nemcsak azt, hanem minden más kezdőérték esetén is a megfelelő optimalizálási feladatot.

## A $V$ és $K$ függvények meghatározása

Definiáljuk először a

$$V(t_1, x) = G(x)$$

peremfeltételt, ami nyilvánvalóan teljesíti a (4.8) követelményt. Tegyük fel, hogy a fenti követelményeknek eleget tevő $V$-t, illetve $K$-t már ismerjük minden olyan $(s, x)$ párra, amelyre $t < s \leq t_1$, illetve $x \in \mathcal{X}$. A $V$ és $K$ definícióját ezek után kiterjesztjük az összes $(t, x)$ párra a következőképpen. Legyen

$$V(t, x) = \min_{u \in \mathcal{U}} \{f_0(t, x, u) + V(t+1, f(t, x, u))\}, \tag{4.12}$$

és legyen $v^* \in \mathcal{U}$ egy tetszőleges olyan elem, amelyen a minimum a fenti kifejezésben eléretik. Definiáljuk $K$-t a

$$K(t, x) = v^*$$

egyenlőséggel.

Megmutatjuk, hogy ezekkel a definíciókkal $V$ és $K$ továbbra is kielégíti az 1. és a 2. követelményt. Legyen $u^0 \in \Delta[t, t_1)$ optimális a $(t, x)$ indulóértékekre vonatkozóan:

$$J\left(t, t_1, x, u^0\right) = \min_{u \in \Delta[t, t_1)} J(t, t_1, x, u). \tag{4.13}$$

A célfüggvény additivitási tulajdonsága miatt

$$J\left(t, t_1, x, u^0\right) = f_0\left(t, x, u^0(t)\right) + J\left(t+1, t_1, f\left(t, x, u^0(t)\right), u^1\right), \tag{4.14}$$

ahol $u^1$ az $u^0$ leszűkítése a $[t+1, t_1)$ intervallumra. A dinamikus programozás alapelve, az Optimalitási elv szerint az $u^1$ optimális a $[t+1, t_1)$ intervallumon az $x(t+1) = f(t, x, u^0(t))$ kezdőpontból kiindulva, vagyis az indukciós feltevés értelmében

$$J\left(t+1, t_1, f\left(t, x, u^0(t)\right), u^1\right) = V\left(t+1, f\left(t, x, u^0(t)\right)\right). \tag{4.15}$$

A (4.12), (4.15) és (4.14) összefüggésekből az következik, hogy

$$\begin{aligned}\min_{u \in \Delta[t, t_1)} J(t, t_1, x, u) = J\left(t, t_1, x, u^0\right) = \\ = f_0\left(t, x, u^0(t)\right) + V\left(t+1, f(t, x, u^0(t)\right) \geq V(t, x).\end{aligned}$$

Megmutatjuk, hogy ebben az egyenlőtlenségben az egyenlőség érvényes. Ehhez elegendő belátni, hogy $K$ fenti definíciójával az $s = t$ kezdőpontra a (4.11) teljesül. Legyen $u^*$ a (4.10)-nek megfelelő, és írjuk fel $u^*$-t az

$u^*(t) = K(t,x) = v^*$ és egy $u^1|_{[t+1,t_1)}$ konkatenációjaként. Az indukciós feltevés értelmében $u^1|_{[t+1,t_1)}$ az $f(t,x,u^*(t))$ pontból kiindulva optimális, minthogy $u^1|_{[t+1,t_1)}$ -t a (4.9)-(4.10) definiálta. Ezért érvényes a (4.15), vagyis

$$\begin{aligned} J(t,t_1,x,u^*(.)) &= f_0(t,x,v^*) + V(t+1, f(t,x,v^*)) = \\ &= \min_{u\in\mathcal{U}} \{f_0(t,x,u) + V(t+1, f(t,x,u))\} = V(t,x), \end{aligned}$$

tehát (4.11) valóban teljesül.

Tanulságos összehasonlítani a dinamikus programozási eljárás alkalmazásához szükséges számítási ráfordításokat a naiv megoldáshoz szükségessel. Dinamikus programozási módszer mellett minden egyes $t \in [t_0, t_1)$ időpontra és $x \in \mathcal{X}$ állapotra megoldandó a (4.12) minimalizálási feladat. Ehhez lényegében $2M$ függvénykiértékelést kell végezni, az összes időpontot és állapotot figyelembe véve $kN$-szer. Itt tehát a szükséges műveletigény

$$\mathcal{O}(kNM),$$

szemben a naiv megközelítés

$$\mathcal{O}(kM^k)$$

műveletigényével. ($N = 100$, $M = 10$, és $k = 20$ esetén $kNM = 2 \cdot 10^4$, míg $kM^k = 2 \cdot 10^{21}$. Az óriási különbséget jól érzékelteti, hogy ha egy függvényszámítás $0.5 \cdot 10^{-6}$ másodpercig tart, akkor a dinamikus programozással az eredményt mintegy egyszázad másodperc, míg a másik módszerrel több mint 6 millió év alatt kapnánk meg.) A fenti összehasonlításban eltekintettünk attól a gyakorlatban korántsem elhanyagolható körülménytől, hogy a dinamikus programozás során szükség van a közbülső eredmények tárolására, ami meglehetősen nagy tárkapacitást tehet szükségessé. Meg kell jegyezni még, hogy nagy $N$ és $k$ esetén, ami gyakorlati feladatoknál eléggé tipikus, a számítások kivitelezése dinamikus programozási módszerrel is meglehetősen költséges, esetenként irreális lehet.

## 4.3. Általános rendszerek

Tekintsük most a 4.1. pontban kitűzött feladatot.

4.1. DEFINÍCIÓ. Tekintsük a (4.1) vagy a (4.2) egyenletekkel leírt rendszert, és legyen adott $t \in [t_0, t_1]$ esetén $J(t,t_1,x,u)$ a (4.4), (4.5) vagy (4.4), (4.6) formulával értelmezett, hozzárendelt célfüggvény. A $V : [t_0, t_1] \times \mathcal{X} \to \mathbb{R}_+$,

$$V(t, x) = \inf_{u \in \Delta(t, t_1)} J(t, t_1, x, u)$$

függvényt az optimális irányítási feladat *Bellman függvény*ének vagy *értékfüggvény*ének nevezzük.

*4.1. Megjegyzés.* Ha a feladat kitűzéséhez egy $x(t_1) \in \mathcal{M}_1 \subset \mathcal{X}$ követelmény is hozzátartozik, akkor lehetséges, hogy bizonyos $(t, x)$ kezdőértékekhez nincs olyan megengedett irányítás, amivel a fenti követelmény teljesül. Ilyenkor a $V$ függvény értékhalmazát a $+\infty$ 'értékkel' kibővítjük és megállapodunk a $V(t, x) = +\infty$ definícióban, ha $(t, x)$-re nincs megfelelő vezérlés.

*4.2. Megjegyzés.* Észrevesszük, hogy $V(t_1, x) = G(x)$ minden $x \in \mathcal{X}$-re.

4.1. Feltétel. Minden $(t, x)$ párhoz létezik olyan $u^* \in \Delta(t, t_1)$ vezérlés, hogy $V(t, x) = J(t, t_1, x, u^*)$.

Az olyan $u^*$ vezérlést amelyre a 4.1. Feltétel teljesül, *optimális*nak fogjuk nevezni.

4.1. Lemma. *A 4.1. pontban megfogalmazott optimális irányítási feladat az alábbi tulajdonságokkal rendelkezik. Bármely olyan $t, s$ értékre, amelyekre $t_0 \le t \le s \le t_1$, és bármely $\overline{x} \in \mathcal{X}$-re*

1. *tetszőleges $u \in \Delta(t_0, t_1)$ esetén*

$$V(t, \overline{x}) \le \mathcal{Q}(t, s, \overline{x}, u) + V(s, x(s; t, \overline{x}, u)); \tag{4.16}$$

2. *ha a 4.1. Feltétel teljesül, akkor*

$$V(t, \overline{x}) = \mathcal{Q}(t, s, \overline{x}, u^*) + V(s, x(s; t, \overline{x}, u^*)) \tag{4.17}$$

*bármely $u^*$ optimális vezérlésre.*

*Ebből következik, hogy*

$$V(t, \overline{x}) = \min_{u \in \Delta(t, s)} \{\mathcal{Q}(t, s, \overline{x}, u) + V(s, x(s; t, \overline{x}, u))\}. \tag{4.18}$$

*Bizonyítás.* Legyen $t, s, \overline{x}, u$ tetszőlegesen megadott, és vegyünk egy tetszőleges $\varepsilon > 0$ számot. Mutassuk meg, hogy

$$V(t, \overline{x}) \leq \mathcal{Q}(t, s, \overline{x}, u) + V(s, x(s; t, \overline{x}, u)) + \varepsilon. \tag{4.19}$$

A $V$ definíciója szerint létezik olyan $v \in \Delta(s, t_1)$ vezérlés, hogy

$$J(s, t_1, x(s; t, \overline{x}, u), v) \leq V(s, x(s; t, \overline{x}, u)) + \varepsilon.$$

Legyen $\overline{u}$ az $u|_{[t,s)}$ és $v$ konkatenációja. Minthogy $\overline{u} \in \Delta(t, t_1)$, ezért

$$V(t, \overline{x}) \leq J(t, t_1, \overline{x}, \overline{u}) = \mathcal{Q}(t, s, \overline{x}, u) + J(s, t_1, x(s; t, \overline{x}, u), v),$$

így a (4.19) a fentiek alapján következik. Mivel $\varepsilon$ tetszőleges volt, ezzel a (4.16)-ot beláttuk. A lemma második állítása nem más, mint az *Optimalitási elv.* □

Az alábbi lemma a *Verifikációs elv*et fogalmazza meg: ha egy $V$ függvény és $u$ vezérlés eleget tesz a lemma feltételeinek, akkor az $u$ optimális vezérlés, $V$ pedig a Bellman függvény.

4.2. Lemma. *Tekintsük a 4.1. pontban megfogalmazott optimális irányítási feladatot. Tegyük fel, hogy egy*

$$\widetilde{V} : [t_0, t_1] \times \mathcal{X} \to \mathbb{R}_+$$

*függvény rendelkezik a következő tulajdonságokkal:*

1. *minden olyan $t, s$ értékre, amelyre $t_0 \leq t \leq s \leq t_1$, és minden $\overline{x} \in \mathcal{X}$-re*

$$\widetilde{V}(t, \overline{x}) \leq \mathcal{Q}(t, s, \overline{x}, u) + \widetilde{V}(s, x(s; t, \overline{x}, u))$$

   *bármely $u \in \Delta(t, s)$-re;*

2. *minden olyan $t, s$ értékre, amelyre $t_0 \leq t \leq s \leq t_1$, és minden $\overline{x} \in \mathcal{X}$-re létezik olyan $\widetilde{u} \in \Delta(t, s)$, hogy*

$$\widetilde{V}(t, \overline{x}) = \mathcal{Q}(t, s, \overline{x}, \widetilde{u}) + V(s, x(s; t, \overline{x}, \widetilde{u}));$$

3. *minden $\overline{x} \in \mathcal{X}$-re teljesül a*

$$\widetilde{V}(t_1, \overline{x}) = G(\overline{x})$$

   *peremfeltétel.*

*Ekkor a 4.1. Feltétel teljesül, és $V = \widetilde{V}$.*

*Bizonyítás.* Rögzítsünk egy tetszőleges $(t, \overline{x})$ párt. Az 1. tulajdonság speciális eseteként, a 3. tulajdonság felhasználásával azt kapjuk, hogy

$$\widetilde{V}(t, \overline{x}) \leq \mathcal{Q}(t, t_1, \overline{x}, u) + G(x(t_1; t, \overline{x}, u)).$$

Hasonlóan, a 2. tulajdonságból azt kapjuk, hogy létezik olyan $\widetilde{u} \in \Delta(t, t_1)$, hogy

$$\widetilde{V}(t, \overline{x}) = J(t, t_1, \overline{x}, \widetilde{u}),$$

tehát a $\widetilde{V}$ szükségképpen a Bellman függvény és a 4.1. Feltétel teljesül. □

## 4.4. Dinamikus programozási- és HJB egyenlet

Ebben a részben azt a célt tűzzük magunk elé, hogy olyan egyenleteket vezessünk be, amelyekből az optimális irányítási feladat megoldása kiszámítható. Ennek során heurisztikus megfontolásokkal élünk, majd később megvizsgáljuk azokat a feltételeket, amelyek mellett a meggondolásaink egzakttá tehetők.

Ha a diszkrét idejű rendszerre vonatkozó optimalizálási feladattal van dolgunk, akkor a helyzet egyszerű: a (4.18) egyenlet $s = t + 1$ esetén a természetes peremfeltétellel a

$$\begin{aligned} V(t, x) &= \min_{u \in \mathcal{U}} \{ f_0(t, x, u) + V(t+1, f(t, x, u)) \}, \\ V(t_1, x) &= G(x) \end{aligned} \tag{4.20}$$

diszkrét idejű Hamilton-Jacobi-Bellman egyenletet adja, amit inkább *dinamikus programozási egyenlet*nek szokás nevezni[1].

Ennek segítségével a lehetséges optimális vezérlés $t = t_1$-ből kiindulva, és időben visszafelé haladva, lépésről-lépésre meghatározható.

Vizsgáljuk ezután a folytonos idejű (4.1) rendszerre vonatkozó, (4.4)-(4.5) célfüggvénnyel megfogalmazott optimális irányítási feladatot, és tegyük fel, hogy a 4.1. Feltétel teljesül. A (4.17) egyenlőség most azt jelenti, hogy bármely, a $(t, \overline{x})$ kezdőfeltételekhez tartozó $u^*$ optimális vezérlésre

$$V(t, \overline{x}) = \int_t^s f_0(\tau, x(\tau; t, \overline{x}, u^*), u^*(\tau))\, d\tau + V(s, x(s; t, \overline{x}, u^*))$$

teljesül bármely $t \leq s \leq t_1$ esetén. Tegyük fel, hogy az $u^*$ függvény folytonos! Korábbi tanulmányainkból tudjuk, hogy az integrálfüggvény differenciálható, ha az integrandus folytonos, tehát az

$$s \to V(s, x(s; t, \overline{x}, u^*))$$

[1] Rövidítve (DPE)-vel fogunk rá hivatkozni

függvény differenciálható és

$$\frac{d}{ds}V\left(s,x\left(s;t,\overline{x},u^{*}\right)\right)=-f_{0}\left(s,x\left(s;t,\overline{x},u^{*}\right),u^{*}\left(s\right)\right)$$

minden $s$-re. Ha még az is igaz, hogy a $V$ függvény totálisan deriválható, akkor a láncszabály alapján ebből azt kapjuk ($s$ helyett $t$ jelölést használva), hogy

$$V_{t}\left(t,x\right)=-f_{0}\left(t,x,u^{*}\left(t\right)\right)-V_{x}\left(t,x\right)f\left(t,x,u^{*}\left(t\right)\right). \tag{4.21}$$

(Itt és a továbbiakban a hagyományoknak megfelelően a

$$V_t(t,x)=\left.\frac{\partial V}{\partial t}\right|_{(t,x)},\ V_x(t,x)=\left.\left(\frac{\partial V}{\partial x_1},...,\frac{\partial V}{\partial x_n}\right)\right|_{(t,x)}$$

jelölést használjuk, és a gradiens vektort sorvektornak tekintjük.) Vegyünk most egy tetszőleges megengedett $v$ irányítást és egy neki megfelelő $x$ trajektóriát. Ezen trajektória mentén a (4.16) egyenlőtlenség azt adja, hogy minden $t_0 \le t \le s \le t_1$ esetén

$$-\mathcal{Q}\left(t,s,\overline{x},v\right)\le V\left(s,x\left(s;t,\overline{x},v\right)\right)-V\left(t,\overline{x}\right),$$

amely $t = s$ esetén egyenlőséggel teljesül. Írjuk be a $\mathcal{Q}$ definícióját, $s > t$ esetén osszuk el ezt az egyenlőtlenséget $(s - t)$-vel:

$$-\frac{1}{s-t}\int_t^s f_0\left(\tau,x\left(\tau;t,\overline{x},v\right),v\left(\tau\right)\right)d\tau\le\frac{1}{s-t}(V\left(s,x\left(s;t,\overline{x},v\right)\right)-V(t,\overline{x})).$$

Ebből $s \to t$ határátmenettel és átrendezéssel azt kapjuk, hogy

$$V_{t}\left(t,x\right)\geq-f_{0}\left(t,x,v\left(t\right)\right)-V_{x}\left(t,x\right)f\left(t,x,v\left(t\right)\right), \tag{4.22}$$

feltéve természetesen most is a $V$ függvény totális deriválhatóságát. Ha tehát a 4.1. Feltétel teljesül és a Bellman függvény elegendően sima, akkor a (4.21) és (4.22) a természetes peremfeltétellel a

$$\begin{aligned}V_{t}\left(t,x\right)&=-\min_{u\in\mathcal{U}}\left\{f_{0}\left(t,x,u\right)+V_{x}\left(t,x\right)f\left(t,x,u\right)\right\}, \\ V\left(t_{1},x\right)&=G(x)\end{aligned} \tag{4.23}$$

parciális differenciálegyenletre vezet, amit *Hamilton-Jacobi-Bellman-egyenlet*nek nevezünk[2]. (A fenti heurisztikus meggondolásokat az alábbi bizonyításokban tesszük precízzé.)

[2] Rövidítve (HJB)-vel fogunk rá hivatkozni

## 4.5. Az optimalitás szükséges feltétele

Ebben a pontban azzal fogunk foglalkozni, hogy pontosan megfogalmazzuk azokat a feltételeket, amelyek mellett a Hamilton-Jacobi-Bellman-egyenlet folytonos idejű rendszerek esetén az optimalitás szükséges feltételét szolgáltatja.

4.2. Definíció. Tekintsük a (4.1), (4.4)-(4.5) folytonos idejű optimális irányítási feladatot. Azt mondjuk, hogy ennek a feladatnak *van sima megoldása*, ha

1. a $V$ Bellman függvény folytonosan differenciálható $[t_0, t_1] \times \mathcal{X}$-en, és
2. minden $(t, x) \in [t_0, t_1] \times \mathcal{X}$-hez van olyan folytonos $u \in \Delta(t, t_1)$, hogy
$$V(t, x) = J(t, t_1, x, u).$$

Speciálisan, a 4.1. Feltétel teljesül.

4.1. Tétel. *Tegyük fel, hogy a (4.1), (4.4)-(4.5) optimális irányítási feladatnak van sima megoldása. Ekkor*
*(i) a $V$ Bellman függvény minden $(t, x) \in (t_0, t_1) \times \mathcal{X}$ pontban kielégíti a (4.23) egyenletet;*
*(ii) ha $(x^*, u^*)$ optimális folyamat, és $u^*$ folytonos, akkor tetszőleges*
$$(t, x) = (t, x^*(t, t_0, x_0, u^*))$$
*pontban a (HJB) egyenlet jobboldalán a minimum $u^*(t)$-ben felvétetik.*

*Bizonyítás.* A $V(t_1, x) = G(x)$ peremfeltétel a $V$ definíciójából következik. Minthogy a feltétel szerint most $V$ mindenütt folytonosan differenciálható, a (4.21) teljesül minden $(t, x)$ pontban tetszőleges folytonos optimális irányításnak megfelelő trajektória mentén. A tétel első állítása tehát igaz, ha bármely $(t, x) \in [t_0, t_1] \times \mathcal{X}$ pont előfordul optimális trajektórián. Ez azonban közvetlen következménye annak a feltételnek, hogy a feladatnak van sima megoldása. Ahhoz, hogy a tétel második állítását belássuk, elegendő megmutatni, hogy

$$V_t(t, x) + V_x(t, x) f(t, x, u) + f_0(t, x, u) \geq 0 \tag{4.24}$$

minden $u \in \mathcal{U}$ és minden $(t, x) \in [t_0, t_1] \times \mathcal{X}$ esetén. Tekintsünk egy tetszőleges $(t, \overline{x}) \in [t_0, t_1] \times \mathcal{X}$ és $\overline{u} \in \mathcal{U}$ értéket, és tetszőleges $\varepsilon > 0$ esetén legyen $u_\varepsilon \in \Delta(t, t+\varepsilon)$ az $u_\varepsilon(s) = \overline{u}, \quad s \in [t, t+\varepsilon]$ egyenlőséggel értelmezve. A (4.16) egyenlőtlenség szerint

$$\varphi(\varepsilon) := V(t+\varepsilon, x(t+\varepsilon; t, \overline{x}, u_\varepsilon)) - V(t, \overline{x}) + \\ + \int_t^{t+\varepsilon} f_0(s, x(s; t, \overline{x}, u_\varepsilon), u_\varepsilon(s))ds \geq 0. \tag{4.25}$$

Világos, hogy $\lim\limits_{\varepsilon \to 0} \varphi(\varepsilon) = 0$. Legyen tehát $\varphi(0) = 0$. A feltevéseink szerint a $\varphi(\varepsilon)$ differenciálható 0-ban (jobbról), így a (4.25)-ből következik, hogy $\varphi'(0) \geq 0$, és így (4.24) érvényes. □

*4.3. Megjegyzés.* A 4.1. Tétel az optimum szükséges feltételét fejezi ki abban az esetben, amikor az optimális irányítási feladatnak van sima megoldása.

## 4.6. Az optimalitás elegendő feltétele

Nézzük meg, hogy a (HJB) egyenlet segítségével megadható-e és hogyan az optimum elegendő feltétele! A legkevezőbb eset, ha a (HJB) egyenletben a minimum egyértelműen meghatározott minden $(t, x)$ pontban, bármilyen is a $V_x$ vektor. Vezessük be a

$$\mathcal{H} : [t_0, t_1] \times \mathcal{X} \times \mathcal{U} \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$$

függvényt a

$$\mathcal{H}(t, x, u, \lambda) = f_0(t, x, u) + \lambda^T f(t, x, u)$$

definícióval. Az előbb említett eset annak felel meg, hogy a

$$\min_{u \in \mathcal{U}} \mathcal{H}(t, x, u, \lambda)$$

feladatnak létezik egyértelmű $u^*$ megoldása minden rögzített $(t, x, \lambda)$ mellett. Minthogy ennek alapján a vezérlést egy visszacsatolással szeretnénk megadni, az az eset érdekes számunkra, amikor ez az egyértelműen meghatározott minimum folytonosan függ a $(t, x, \lambda)$ értékektől, vagyis amikor megadható egy

$$\alpha : [t_0, t_1] \times \mathcal{X} \times \mathbb{R}^n \to \mathcal{U} \tag{4.26}$$

folytonos függvény úgy, hogy

$$\min_{u \in \mathcal{U}} \mathcal{H}(t, x, u, \lambda) = \mathcal{H}(t, x, \alpha(t, x, \lambda), \lambda) \tag{4.27}$$

és

$$f_0(t,x,\alpha(t,x,\lambda)) + \lambda^T f(t,x,\alpha(t,x,\lambda)) < f_0(t,x,v) + \lambda^T f(t,x,v) \quad (4.28)$$

teljesül minden

$$(t,x,\lambda) \in [t_0,t_1] \times \mathcal{X} \times \mathbb{R}^n, \quad \text{és} \qquad v \in \mathcal{U}, \quad v \neq \alpha(t,x,\lambda)$$

esetén. Tudjuk, hogy egy differenciálegyenlet jobb oldalának a folytonossága nem biztosítja, hogy a megoldás egy előre megadott intervallumon létezzék. Ezért szükségünk lesz egy további definícióra.

4.3. Definíció. Legyen $\sum$ a (4.1) vagy (4.2) egyenlettel megadott rendszer, és legyen $\mathcal{I} \subset (\underline{t}, \overline{t})$ egy megadott intervallum. A

$$k : \mathcal{I} \times \mathcal{X} \to \mathcal{U}$$

függvényt *megengedett visszacsatolás*nak nevezzük *az $\mathcal{I}$ intervallumon*, ha minden $\widetilde{t} \in \mathcal{I}$ és $\widetilde{x} \in \mathcal{X}$ -re létezik egy egyértelműen meghatározott $(\xi(.), u(.))$ folyamat az $\mathcal{I}_{\widetilde{t}} := \mathcal{I} \cap \{t \geq \widetilde{t}\}$ intervallumon úgy, hogy $\xi(t) = x(t; \widetilde{t}, \widetilde{x}, u)$ és

$$u(t) = k(t, \xi(t))$$

majdnem minden $t \in \mathcal{I}_{\widetilde{t}}$ -ra. Ekkor azt mondjuk, hogy a fenti $u(.)$ a $(\widetilde{t}, \widetilde{x})$*-ból induló visszacsatolt vezérlés*.

Az alábbi példa azt mutatja, hogy a fenti definícióban szereplő $k$ függvényről és $\mathcal{I}$ intervallumról „ránézésre” nem könnyű eldönteni, hogy megengedett visszacsatolás-e.

*4.1. Példa.* Az $\dot{x} = u$ rendszerre a $k(t,x) = x$ megengedett visszacsatolás az $\mathcal{I} = [0,\infty)$ intervallumon, viszont a $k(t,x) = x^2$ nem megengedett az $\mathcal{I} = [0,2]$-n, mivel az $\dot{x} = x^2, \quad x(0) = 1$ feladatnak nincs megoldása a $[0,2]$-n, mert az $x(t) = \frac{1}{1-t}$ megoldás csak a $[0,1)$ intervallumon van értelmezve, és nem folytatható az $[1,2]$-re.

4.2. Tétel. *Tegyük fel, hogy a (4.1), (4.4)-(4.5) optimális irányítási feladatra*

- *létezik egy, a (4.26)-(4.28) feltételeknek eleget tevő folytonos $\alpha$ függvény;*

- *létezik egy folytonosan differenciálható* $V : [t_0, t_1] \times \mathcal{X} \to \mathbb{R}_+$ *függvény, amelyre a*
$$k(t,x) := \alpha\left(t, x, V_x^T(t,x)\right)$$
*megengedett visszacsatolás a* $[t_0, t_1)$ *intervallumon, és amely kielégíti a (HJB) egyenletet:*
$$V_t(t,x) + f_0(t,x,k(t,x)) + V_x(t,x)\, f(t,x,k(t,x)) = 0, \qquad (t,x) \in (t_0,t_1) \times \mathcal{X}, \tag{4.29}$$
$$V(t_1, x) = G(x). \tag{4.30}$$

*Ekkor az optimalizálási feladatnak van sima megoldása,* $V$ *a Bellman függvény, és minden* $\left(\bar{t}, \bar{x}\right) \in [t_0, t_1] \times \mathcal{X}$*-ra a* $\left(\bar{t}, \bar{x}\right)$*-ból induló visszacsatolt vezérlés a* $\left(\bar{t}, \bar{x}\right)$ *kezdeti feltételhez tartozó egyértelműen meghatározott optimális vezérlés.*

*Bizonyítás.* Válasszunk két tetszőleges $t, s$ értéket, amelyre $t_0 < t < s < t_1$, és egy tetszőleges $\overline{x} \in \mathcal{X}$ pontot. Legyen $v$ a $(t, \overline{x})$-ból induló visszacsatolt vezérlés a $[t, s]$-en, és legyen $u \in \Delta(t,s)$ tetszőleges. Legyen $\xi(\tau) := x(\tau; t, \overline{x}, u)$ és tekintsük a
$$B(\tau) := V(\tau, \xi(\tau)), \qquad \tau \in [t, s]$$
függvényt. A $B(.)$ majdnem mindenütt differenciálható, és deriváltja
$$B'(\tau) := V_t(\tau, \xi(\tau)) + V_x(\tau, \xi(\tau))\, f(\tau, \xi(\tau), u(\tau)).$$
Minthogy $V$ kielégíti a (HJB) egyenletet, ezért
$$B'(\tau) = V_x(\tau, \xi(\tau)) \left(f(\tau, \xi(\tau), u(\tau)) - f(\tau, \xi(\tau), k(\tau, \xi(\tau)))\right) - \\ - f_0(\tau, \xi(\tau), k(\tau, \xi(\tau))).$$
A (4.26)-(4.28)-ból és $k$ definíciójából az következik, hogy
$$V_x(\tau, \xi(\tau)) \left(f(\tau, \xi(\tau), u(\tau)) - f(\tau, \xi(\tau), k(\tau, \xi(\tau)))\right) \geq \\ \geq f_0(\tau, \xi(\tau), k(\tau, \xi(\tau))) - f_0(\tau, \xi(\tau), u(\tau)),$$
ezért
$$B'(\tau) \geq -f_0(\tau, \xi(\tau), u(\tau))$$

és itt $u(\tau) = v(\tau)$ esetén egyenlőség áll fenn. Ezt az egyenlőtlenséget $t$-től $s$-ig integrálva azt kapjuk, hogy

$$V(s, \xi(s)) - V(t, \overline{x}) \geq -\int_t^s f_0(\tau, \xi(\tau), u(\tau))\, d\tau,$$

ahol ismét csak egyenlőség áll fenn, ha $u = v$. Ez $t$-ben és $s$-ben folytonos, így teljesül $t = t_0$ és $s = t_1$ esetén is. A $V$ függvényre tehát teljesülnek a verifikációs lemma feltételei, amiből az következik, hogy $v$ valóban optimális a $(t, \overline{x})$ kezdőpontra vonatkozóan, és folytonos is, mivel $\alpha$ folytonos.

Végül az optimális vezérlés egyértelműségének bizonyításához tegyük fel, hogy $u$ pozitív mértékű halmazon különbözik $v$-től. Ekkor a (4.28)-ból következően ezen a halmazon

$$B'(\tau) > -f_0(\tau, \xi(\tau), u(\tau)),$$

ezért

$$V(t, \overline{x}) < \int_t^s f_0(\tau, \xi(\tau), u(\tau))\, d\tau + V(s, \xi(s)) \leq J(t, t_1, \overline{x}, u),$$

vagyis $u$ nem lehet optimális. □

*4.4. Megjegyzés.* Abban a speciális esetben, amikor

$$\begin{aligned} \mathcal{U} &= \mathbb{R}^m, \\ f(t, x, u) &= A(t, x) + B(t, x)\, u, \\ f_0(t, x, u) &= u^T R(t, x)\, u + Q(t, x), \end{aligned}$$

ahol $A : (\underline{t}, \overline{t}) \times \mathcal{X} \to \mathbb{R}^n$, $B : (\underline{t}, \overline{t}) \times \mathcal{X} \to \mathbb{R}^{n \times m}$, $R : (\underline{t}, \overline{t}) \times \mathcal{X} \to \mathbb{R}^{m \times m}$, $Q : (\underline{t}, \overline{t}) \times \mathcal{X} \to \mathbb{R}_+$ folytonosan differenciálható függvények és $R(t, x)$ pozitív definit minden $(t, x)$-re, a 4.2. Tétel feltételei között megkövetelt tulajdonságú $\alpha$ függvény biztosan létezik. Ekkor ugyanis

$$\begin{aligned} &\min_{u \in \mathbb{R}^m} \mathcal{H}(t, x, u, \lambda) = \\ &\quad = \min_{u \in \mathbb{R}^m} \left( \lambda^T A(t, x) + \lambda^T B(t, x)\, u + Q(t, x) + u^T R(t, x)\, u \right) \\ &\quad = \lambda^T A(t, x) + Q(t, x) + \min_{u \in \mathbb{R}^m} \left( \lambda^T B(t, x)\, u + u^T R(t, x)\, u \right). \end{aligned}$$

Mivel

$$\begin{aligned} \lambda^T B u + u^T R u = {} & \left( u + \frac{1}{2} R^{-1} B^T \lambda \right)^T R \left( u + \frac{1}{2} R^{-1} B^T \lambda \right) - \\ & \frac{1}{4} \lambda^T B R^{-1} B^T \lambda, \end{aligned}$$

ezért a Hamilton függvény minimuma az egyértelműen meghatározott

$$\alpha(t,x,\lambda) := -\frac{1}{2}R(t,x)^{-1}B(t,x)^T\lambda$$

értéknél van, és ez a feltevéseink miatt folytonos (valójában differenciálható) minden $(t,x,\lambda)$-ra.

## 4.7. Diszkrét idejű feladatok

Fogalmazzuk meg ezután a diszkrét idejű (4.2), (4.4), (4.6) optimális irányítási feladatra vonatkozó, 4.1. és 4.2. Tétellel analóg eredményeket.

4.3. Tétel. *Tekintsük a (4.2), (4.4), (4.6) diszkrét idejű optimális irányítási feladatot. Tegyük fel, hogy adott egy $V:[t_0,t_1]\times\mathcal{X}\to\mathbb{R}_+$ függvény és egy $k:[t_0,t_1]\times\mathcal{X}\to\mathcal{U}$ megengedett visszacsatolás úgy, hogy*

$$f_0(t,x,k(t,x))+V(t+1,f(t,x,k(t,x)))<f_0(t,x,u)+V(t+1,f(t,x,u)) \tag{4.31}$$

*teljesül minden $x\in\mathcal{X},t\in[t_0,t_1)$ és olyan $u\in\mathcal{U}$ esetén, amelyre $u\neq k(t,x)$. Ekkor az alábbi két állítás ekvivalens:*

*(i) Az optimális irányítási feladatnak bármely kezdőállapot mellett létezik egyetlen megoldása, $V$ a Bellman függvény, és az optimális irányítás a $k$ függvénnyel meghatározott visszacsatolt vezérlés.*

*(ii) $V$ kielégíti a (4.20) dinamikus programozási egyenletet, ami ezesetben*

$$\begin{aligned}V(t,x)&=f_0(t,x,k(t,x))+V(t+1,f(t,x,k(t,x))), \quad (4.32)\\ V(t_1,x)&=G(x)\end{aligned}$$

*alakban adható meg.*

*Bizonyítás.* Láttuk, hogy ha az első állítás teljesül, akkor a (4.20) is teljesül, ami most a (4.31) miatt valóban (4.32) alakú, tehát az elsőből valóban következik a második állítás. Megfordítva, tegyük fel most, hogy igaz az (ii) állítás. Válasszunk egy tetszőleges $(t,s)$ párt, amelyre $t_0\le t<s\le t_1$, és egy $\overline{x}\in\mathcal{X}$-t, és mutassuk meg, hogy $V$ eleget tesz a verifikációs lemma feltételeinek. Legyen $v$ a $(t,\overline{x})$-ból induló visszacsatolt vezérlés és legyen $u\in\Delta(t,s)$ tetszőleges. Vezessük be a $\xi(\ell)=x(\ell;t,\overline{x},u)$ jelölést $\ell\in[t,s)$-re. Ha $s=t+1$, akkor az állításunk közvetlenül következik a (4.31) és (4.32)

feltételekből. Tegyük fel, hogy az állítást beláttuk $s = t + \ell$-re ($\ell \geq 1$), és lássuk be most $s = t + \ell + 1$-re. Mivel

$$\begin{aligned}
&V(t+\ell, \xi(t+\ell)) = \\
&\quad = f_0(t+\ell, \xi(t+\ell), k(t+\ell, \xi(t+\ell))) + \\
&\quad +V(t+\ell+1, f(t+\ell, \xi(t+\ell), k(t+\ell, \xi(t+\ell)))) \leq \\
&\quad \leq f_0(t+\ell, \xi(t+\ell), u(t+\ell)) + V(t+\ell+1, \xi(t+\ell+1)),
\end{aligned}$$

ezért

$$V(t, \overline{x}) \leq \mathcal{Q}\left(t, t+\ell+1, \overline{x}, u|_{[t,t+\ell+1)}\right) + V(t+\ell+1, \xi(t+\ell+1)),$$

és itt egyenlőség pontosan akkor teljesül, ha $u(\ell) = v(\ell)$ minden $\ell \in [t, s]$-re. A verifikációs lemmából következik, hogy optimális vezérlés létezik, és hogy $V$ éppen a Bellman függvény. Ebből azt is látjuk, hogy $v$ valóban optimális vezérlés. Az optimális vezérlés egyértelműsége a (4.31) közvetlen következménye. Tegyük fel ugyanis, hogy $u \neq v$ és legyen mondjuk $\ell^*$ a legkisebb olyan érték, amelyre $u(\ell^*) \neq v(\ell^*)$. Ekkor $x(\ell; t, \overline{x}, v) = \xi(\ell)$, ha $t \leq \ell \leq \ell^*$, így

$$\begin{aligned}
V(t, \overline{x}) &= \mathcal{Q}\left(t, \ell^*, \overline{x}, v|_{[t,\ell^*)}\right) + f_0(\ell^*, \xi(\ell^*), v(\ell^*)) \\
&+ V(\ell^*+1, f(l^*, \xi(\ell^*), v(l^*))) < \\
&< \mathcal{Q}\left(t, \ell^*+1, \overline{x}, u|_{[t,\ell^*+1)}\right) + V(\ell^*+1, \xi(\ell^*+1)) \leq \\
&\leq J(t, t_1, \overline{x}, u). \ \square
\end{aligned}$$

## 4.8. Lineáris kvadratikus feladatok

Tekintsük először a folytonos idejű lineáris

$$\dot{x} = A(t)x + B(t)u \qquad t \in \left(\underline{t}, \overline{t}\right) \subset \mathbb{R} \tag{4.33}$$

rendszert, ahol $\mathcal{X} = \mathbb{R}^n$, $\mathcal{U} = \mathbb{R}^m$ és feltételezzük, hogy $A$ és $B$ megfelelő méretű folytonosan differenciálható mátrixfüggvények. Tekintsük ehhez az

$$f_0(t, x, u) = u^T R(t) u + x^T Q(t) x \qquad \text{és} \qquad G(x) = x^T S x \tag{4.34}$$

függvényekkel meghatározott (4.4), (4.5) célfüggvényt, ahol

- $R$ illetve $Q$ folytonosan differenciálható függvényekből álló $m \times m$, illetve $n \times n$ méretű, szimmetrikus mátrix, $S$ pedig $n \times n$ méretű, szimmetrikus konstans mátrix;

- $R(t)$ minden $t$-re pozitív definit;
- $Q(t)$ minden $t$-re pozitív szemidefinit;
- $S$ pozitív szemidefinit.

Ez a 4.4. Megjegyzésben tárgyalt feladat speciális esete. Az ottani eredmények alkalmazásával felírhatjuk a (4.23) HJB egyenletet:

$$\begin{aligned} V_t(t,x) &= \frac{1}{4} V_x(t,x)\, B(t)\, R(t)^{-1} B(t)^T V_x(t,x)^T \\ &\quad - x^T Q(t)\, x - V_x(t,x)\, A(t) x, \\ V(t_1,x) &= x^T S x. \end{aligned} \tag{4.35}$$

Mivel a végfeltétel $x$-ben kvadratikus, és $x$-ben kvadratikus $V(t,x)$ esetén $V_x(t,x)$ lineáris lévén, (4.35) mindkét oldala szintén kvadratikus $x$-ben, várható, hogy ha (4.35)-nek van megoldása, akkor az $V(t,x) = x^T P(t)\, x$ alakú.

4.4. TÉTEL. *Tekintsük a fentiekben megfogalmazott lineáris - kvadratikus feladatot a $[t_0,t_1]$ $(t_0 < t_1)$ intervallumon. Tegyük fel, hogy $P : [t_0,t_1] \to \mathbb{R}^{n\times n}$ szimmetrikus, folytonosan differenciálható mátrixfüggvény és legyen*

$$V(t,x) = x^T P(t)\, x, \qquad x \in \mathbb{R}^n,\ t \in [t_0,t_1].$$

*Ekkor az alábbi két állítás ekvivalens:*

*(i) P kielégíti a*

$$\begin{aligned} \dot{P} &= PB(t)\, R(t)^{-1} B(t)^T P - A(t)^T P \\ &\quad - PA(t) - Q(t), \\ P(t_1) &= S \end{aligned} \tag{4.36}$$

mátrix Riccati differenciálegyenletet[3]*;*

*(ii) a lineáris - kvadratikus optimalizálási feladatnak van sima megoldása, V a Bellman függvény, és minden $(\bar{t},\bar{x}) \in [t_0,t_1] \times \mathbb{R}^n$ esetén a $(\bar{t},\bar{x})$ párhoz tartozó egyetlen optimális vezérlés a*

$$k(t,x) := -R(t)^{-1} B(t)^T P(t)\, x$$

*függvénnyel meghatározott, $(\bar{t},\bar{x})$-ból induló visszacsatolt vezérlés.*

*Továbbá, a feladat kitűzésében szereplő feltételek mellett a (RDE)-nek létezik egyetlen megoldása a teljes $[t_0,t_1]$ intervallumon.*

[3] Erre (RDE) rövidítéssel fogunk hivatkozni

*Bizonyítás.* A tétel első része közvetlenül következik a 4.1. és 4.2. Tételből, ha belátjuk, hogy a tételben definiált $V$ függvény akkor és csak akkor elégíti ki a (HJB) egyenletet, ha $P$ a (RDE) megoldása. Mivel

$$V_x(t,x) = 2P(t)\,x$$

és

$$x^T PAx = \left(x^T PAx\right)^T = x^T A^T Px,$$

ezért a (4.35) alapján $P$-re a

$$\begin{aligned} x^T \dot{P}(t)\,x = x^T \Big[ & P(t)\,B(t)\,R(t)^{-1}\,B(t)^T\,P(t) \\ & -A(t)^T\,P(t) - P(t)\,A(t) - Q(t) \Big]\,x \\ x^T P(t_1)\,x = x^T Sx & \end{aligned}$$

egyenletet kapjuk. Mivel $\dot{P}$ és a fenti szögletes zárójelben álló mátrix is szimmetrikus, ez csak úgy teljesülhet minden $x$-re és $t$-re, ha maguk a mátrixok is megegyeznek.

A tétel második részének bizonyításához csak azt kell belátnunk, hogy a (RDE) megoldása a teljes intervallumra folytatható. A közönséges differenciálegyenletek elméletéből ugyanis tudjuk, hogy a (RDE)-nek van egy (maximális) megoldása valamely $(\tau, t_1]$ intervallumon, és $\tau \geq t_0$ csak úgy lehet, ha a $P$ megoldás valamelyik $p_{ij}(t)$ eleme nem korlátos, ha $t \to \tau_+$. Mutassuk meg, hogy ez lehetetlen. Tegyük fel tehát, hogy egy fenti tulajdonságú $\tau \geq t_0$ létezik, és válasszunk egy $\tau < t < t_1$ értéket. A $[t, t_1]$ intervallumon alkalmazhatjuk a tétel első részének állítását: eszerint $V(s,x) = x^T P(s)\,x$ a feladat Bellman függvénye ezen az intervallumon. Vegyünk egy tetszőleges $\overline{x}$ értéket; ekkor

$$\begin{aligned} & 0 \leq V(t,\overline{x}) \leq J(t, t_1, \overline{x}, 0) = \\ & \quad \overline{x}^T \phi(t_1,t)^T \left\{ \int_t^{t_1} \phi(s,t_1)^T\,Q(s)\,\phi(s,t_1)\,ds \right\} \phi(t_1,t)\,\overline{x}, \end{aligned}$$

ahol $\phi$ az $\dot{x} = A(t)\,x$ alapmátrixa. Minthogy mind $\phi(t_1,t)$, mind pedig a kapcsos zárójelben szereplő mátrixok egyenletesen korlátosak, ha $t \in [\tau, t_1]$, ezért létezik egy olyan ($t$-től független) $K$ konstans, hogy

$$0 \leq \overline{x}^T P(t)\,\overline{x} \leq K \parallel \overline{x} \parallel^2$$

teljesül minden $(t,\overline{x}) \in (\tau, t_1] \times \mathbb{R}^n$-re. Az $\overline{x} = e_i$ ($e_{ik} = 0$, ha $i \neq k$ és $e_{ik} = 1$) választással innen azt kapjuk, hogy $0 \leq p_{ii}(t) \leq K$, $\overline{x} = e_i + e_j$ választással pedig, hogy $0 \leq p_{ii}(t) + p_{jj}(t) + 2p_{ij}(t) \leq 2K$; tehát a $P$-nek minden eleme korlátos a $(\tau, t_1]$ intervallumon. Ez az ellentmondás mutatja, hogy $\tau < t_0$. $\square$

Vizsgáljuk meg ezek után az alábbi diszkrét idejű lineáris-kvadratikus feladatot. Legyen a rendszer az

$$x(t+1) = A(t)\,x(t) + B(t)\,u(t), \qquad t \in \left(\underline{t}, \overline{t}\right) \subset \mathbb{Z}, \tag{4.37}$$

ahol most is $\mathcal{X} = \mathbb{R}^n$, $\mathcal{U} = \mathbb{R}^m$ és $A$, $B$ megfelelő méretű mátrixfüggvények. Legyen a (4.4), (4.6) célfüggvény a (4.34) függvényekkel megadva, ahol most a $Q$, $R$ függvényekre tett simasági követelményt természetesen elhagyjuk, viszont az összes további feltételt továbbra is megköveteljük. A (4.24) dinamikus programozási egyenletre és a 4.3. Tételre támaszkodva szeretnénk a fenti optimális irányítási feladat megoldását meghatározni. Az eddigi tapasztalatokra támaszkodva (vagy a folytonos idejű rendszereknél végzettekkel analóg meggondolások után) a Bellman függvényt kereshetjük a szimmetrikus $P$ mátrixfüggvény segítségével definiált

$$V(t,x) = x^T P(t)\,x$$

kvadratikus alakban. A dinamikus programozási egyenlet alkalmazásához az alábbi minimalizálási feladatot kell megoldani:

$$\min_{u \in \mathbb{R}^n} \left\{ x^T Q x + u^T R u + (Ax+Bu)^T P\,(Ax+Bu) \right\},$$

ahol a rövidség kedvéért a $Q$, $R$, $A$ és $B$ függvények $t$ és a $P$ függvény $t+1$ argumentumát elhagytuk. A kijelölt műveletek elvégzése után a kapcsos zárójelben álló kifejezést teljes négyzetté egészítjük ki:

$$\begin{aligned}
&\{\ldots\} = \\
&= \left\{x^T Q x + u^T R u + x^T A^T P A x + x^T A^T P B u + u^T B^T P A x + u^T B^T P B u\right\} \\
&= \left\{ x^T \left[Q + A^T P A\right] x + \left(u + \left(R + B^T P B\right)^{-1} B^T P A x\right)^T \left(R + B^T P B\right) \times \right. \\
&\quad \left. \left(u + \left(R + B^T P B\right)^{-1} B^T P A x\right) - x^T A^T P B \left(R + B^T P B\right)^{-1} B^T P A x \right\},
\end{aligned}$$

feltéve természetesen, hogy az $R + B^T P B$ mátrix invertálható. Ennek a kifejezésnek $u$ szerinti minimuma az egyértelműen meghatározott

$$u^* = k(t,x) = -\left(R(t) + B(t)^T P(t+1)\,B(t)\right)^{-1} B(t)^T P(t+1)\,A(t)\,x$$

vektoron vétetik fel és erre a (DPE) a következő alakot ölti:

$$x^T P(t)\,x = x^T \left[A(t)^T P(t+1)\,A(t) + Q(t) - A(t)^T P(t+1)\,B(t) \times \right.$$

$$\left(R(t)+B(t)^T P(t+1)B(t)\right)^{-1} B(t)^T P(t+1)A(t)\Big]\, x$$

amihez az

$$x^T P(t_1)\, x = x^T S x$$

végfeltétel csatlakozik. Mivel a fenti egyenleteknek minden $x$-re (és minden $t \in [t_0, t_1)$-re) teljesülni kell, ezért

$$\begin{aligned} P(t) &= A(t)^T P(t+1)A(t) + Q(t) - A(t)^T P(t+1)B(t) \times \\ &\quad \left(R(t)+B(t)^T P(t+1)B(t)\right)^{-1} B(t)^T P(t+1)A(t) \quad (4.38) \\ P(t_1) &= S \end{aligned}$$

diszkrét idejű mátrix Riccati egyenletet kapjuk[4]. Megfogalmazhatjuk a 4.4. Tétellel analóg eredményt a diszkrét idejű lineáris-kvadratikus feladatokra:

**4.5. Tétel.** *Tekintsük a fentiekben megfogalmazott diszkrét idejű lineáris-kvadratikus feladatot a $[t_0, t_1]$ intervallumon ($t_0 < t_1$). Tegyük fel, hogy $P : [t_0, t_1] \to \mathbb{R}^{n\times n}$ szimmetrikus mátrixfüggvény, és legyen*

$$V(t,x) = x^T P(t)\, x, \qquad x \in \mathbb{R}^n,\ t \in [t_0, t_1].$$

*Ekkor az alábbi két állítás ekvivalens:*

*(i) $P$ a (DRE) diszkrét idejű mátrix Riccati egyenlet megoldása a $[t_0, t_1]$ intervallumon.*

*(ii) A diszkrét idejű lineáris-kvadratikus feladatnak van megoldása, $V$ a Bellman függvény, és minden $(\bar{t}, \bar{x}) \in [t_0, t_1] \times \mathbb{R}^n$ esetén a $(\bar{t}, \bar{x})$ párhoz tartozó egyetlen optimális vezérlés a*

$$k(t,x) = -\left(R(t)+B(t)^T P(t+1)B(t)\right)^{-1} B(t)^T P(t+1)A(t)\, x$$

*függvénnyel meghatározott, $(\bar{t}, \bar{x})$-ból kiinduló visszacsatolt vezérlés.*

*Továbbá a feladat kitűzésében szereplő feltételek mellett a (DRE) diszkrét idejű Riccati egyenletnek létezik egyetlen megoldása a teljes $[t_0, t_1]$ intervallumon.*

*Bizonyítás.* A két állítás ekvivalenciája a 4.3. Tétel és a fenti megfontolások közvetlen következménye. Csak azt kell még megmutatnunk, hogy a

[4] Erre az egyenletre a (DRE) jelöléssel hivatkozunk.

(DRE)-nek létezik egyetlen megoldása a teljes $[t_0, t_1]$ intervallumon. A $t_1$-től visszafelé haladó indukcióval belátjuk, hogy minden

$$t \in [t_0, t_1)\text{-re a } \left(R(t) + B(t)^T P(t+1) B(t)\right)$$

mátrix invertálható és $P(t)$ szimmetrikus és pozitív szemidefinit. Valóban, $t = t_1 - 1$-re $P(t+1) = P(t_1) = S$ pozitív szemidefinit és így a szóban forgó mátrix invertálható. $P(t_1 - 1)$ a (DRE) megoldása, így szimmetrikus, és a tétel első fele miatt

$$x^T P(t_1 - 1)\, x = \inf_u J(t_1 - 1, t_1, x, u) \geq 0.$$

Tegyük fel, hogy az állítást beláttuk $t = t_1 - \ell + 1$-ig, ekkor $t = t_1 - \ell$-re analóg meggondolással adódik az eredmény. □

## 4.9. Pályakövetés

Gyakran merül fel az a feladat, hogy keressünk egy olyan vezérlést, aminek alkalmazása esetén a rendszer outputja egy megadott referenciapályát követ. Ezt a feladatot részletesen lineáris rendszerekre vonatkozóan tárgyaljuk, de bevezetésként teszünk néhány megjegyzést az általános esetre is. Tekintsük a (4.1), vagy (4.2) rendszert az

$$y(t) = h(x(t)), \qquad t \in \left(\underline{t}, \overline{t}\right)$$

outputtal, ahol $t \in \mathbb{R}$, vagy $t \in \mathbb{Z}$, és legyen

$$r : \left(\underline{t}, \overline{t}\right) \to \mathbb{R}^p$$

adott függvény. Legyen $\mathcal{Q}$ a költségfüggvénynek a $(\xi(.), u(.))$ folyamattól **és** az $r$ referenciapályától függő része, amely az 4.1. pontban megfogalmazott értelemben additív, és ami a $(t_0, t_1, \overline{x}, u, r)$ argumentumoktól függ; a $\mathcal{Q}$ tipikusan a $t \to (y(t) - r(t))$ eltérés függvénye, ahol $y$ az $\overline{x}$ kezdőértékhez és az $u \in \Delta(t_0, t_1)$ vezérléshez tartozó output.

A *pályakövetés*(angol terminológiával „tracking") *feladata* a következő: minimalizálandó a

$$J(t_0, t_1, \overline{x}, u, r) = \mathcal{Q}(t_0, t_1, \overline{x}, u, r) + G(x(t_1; t_0, \overline{x}, u))$$

költségfüggvény tetszőlegesen adott $t_0$, $t_1$, $\overline{x}$ értékek és $r$ referenciapálya mellett az összes megengedett $u$ irányításra vonatkozóan.

A pályakövetés feladata természetesen visszavezethető ugyanazon rendszerre vonatkozó standard optimális irányítási feladatra úgy, hogy minden egyes rögzített $r$ referenciapályához egy új

$$\widetilde{J}\left(t_0,t_1,\overline{x},u\right):=J\left(t_0,t_1,\overline{x},u,r|_{[t_0,t_1]}\right)$$

költségfüggvényt tekintünk. Ennek a megközelítésnek az a hátránya, hogy rendszerint nem őrzi meg az eredeti megfogalmazásban esetleg meglévő olyan strukturális sajátosságokat, mint például a célfüggvény kvadratikussága, amelyek a feladat egyszerű megoldását segíthetnék. Egy másik lehetőség, hogy az eredetivel ekvivalens új célfüggvényt úgy vezetünk be, hogy az egy megnövelt méretű $\widetilde{\sum}$ rendszerhez tartozzék. Ezt a módszert részletesen a diszkrét idejű lienáris rendszerekre dolgozzuk ki kvadratikus célfüggvény mellett. Folytonos idejű rendszerekre vonatkozó eredmények megtalálhatók a [11]-ben. Tekintsük az

$$x\left(t+1\right)=A\left(t\right)x\left(t\right)+B\left(t\right)u\left(t\right),\quad y\left(t\right)=C\left(t\right)x\left(t\right),\quad t\in\left(\underline{t},\overline{t}\right)\subset\mathbb{Z}\tag{4.39}$$

rendszert a

$$\begin{aligned}J\left(t_0,t_1,x_0,u,r\right)=&\sum_{t=t_0}^{t_{1-1}}\left[\varepsilon\left(t\right)^T Q\left(t\right)\varepsilon\left(t\right)+u\left(t\right)^T R\left(t\right)u\left(t\right)\right]\\&+\varepsilon\left(t_1\right)^T S\varepsilon\left(t_1\right)\end{aligned}\tag{4.40}$$

célfüggvénnyel, ahol

$$\varepsilon\left(t\right)=C\left(t\right)\xi\left(t\right)-r\left(t\right)$$

a *pályakövetés hibája* és $\xi\left(t\right)=x\left(t;t_0,x_0,u\right)$. Az $S$, $Q$, $R$ mátrixokra analóg feltételeket kötünk ki, mint a 4.8. pontban: $S$ konstans, az $R:\left(\underline{t},\overline{t}\right)\to\mathbb{R}^{m\times m}$, $Q:\left(\underline{t},\overline{t}\right)\to\mathbb{R}^{p\times p}$ szimmetrikus mátrixok, $R\left(t\right)$ pozitív definit, $Q\left(t\right)$ pozitív szemidefinit minden $t$-re, és $S$ szintén pozitív szemidefinit.

Keressük tehát $J$ minimumát adott $r$ referenciapálya és $\left(t_0,x_0\right)$ kezdőérték mellett az összes lehetséges megengedett irányításra vonatkozóan. Észrevesszük, hogy $r\left(t\right)\equiv 0$ esetén ez nem más, mint a standard lineáris-kvadratikus irányítási feladat, amelyben a $Q$ mátrix szerepét a $C(t)^T Q(t)\,C(t)$ mátrix játsza.

Rögzítsük az $r$ referencia pályát a $\left[t_0,t_1\right]$ intervallumon, és tekintsük az (output nélküli)

$$\widetilde{x}\left(t+1\right)=\widetilde{A}\left(t\right)\widetilde{x}\left(t\right)+\widetilde{B}\left(t\right)u\left(t\right),\qquad t\in\left[t_0,t_1\right]\subset\mathbb{Z}\tag{4.41}$$

rendszert, ahol

$$\widetilde{A}\left(t\right)=\begin{pmatrix}A\left(t\right)&0\\0&1\end{pmatrix}\in\mathbb{R}^{(n+1)\times(n+1)},\qquad\widetilde{B}\left(t\right)=\begin{pmatrix}B\left(t\right)\\0\end{pmatrix}\in\mathbb{R}^{(n+1)\times m}.$$

Vezessük be a

$$\widetilde{J}\left(t_0,t_1,\widetilde{x}_0,u\right)=\sum_{t=t_0}^{t_1-1}\left[\widetilde{\xi}\left(t\right)^T\widetilde{Q}\left(t\right)\widetilde{\xi}\left(t\right)+u\left(t\right)^T R\left(t\right)u\left(t\right)\right]+\widetilde{\xi}\left(t_1\right)^T S\widetilde{\xi}\left(t_1\right)$$

új célfüggvényt, ahol

$$\widetilde{x}_0=\begin{pmatrix}x_0\\1\end{pmatrix}\in\mathbb{R}^{n+1},\qquad \widetilde{\xi}\left(t\right)=\widetilde{x}\left(t;t_0,\widetilde{x}_0,u\right)$$

és

$$\widetilde{Q}=\begin{pmatrix}C^TQC & -C^TQr\\ -r^TQC & r^TQr\end{pmatrix},\qquad \widetilde{S}=\begin{pmatrix}C\left(t_1\right)^T SC\left(t_1\right) & -C\left(t_1\right)^T Sr\left(t_1\right)\\ -r\left(t_1\right)^T SC\left(t_1\right) & r\left(t_1\right)^T Sr\left(t_1\right)\end{pmatrix}$$

mindkettő $(n+1)\times(n+1)$méretű. Egyszerű számolással ellenőrízhető, hogy a fenti definíciókkal

$$\widetilde{J}\left(t_0,t_1,\widetilde{x}_0,u\right)=J\left(t_0,t_1,x_0,u,r\right)$$

teljesül minden $x_0,u,r$ esetén. Vegyük észre, hogy az új költségfüggvényben szereplő $\widetilde{Q}$ súlymátrix időtől függő lett még akkor is, ha az eredeti $Q$ konstans mátrixként volt megadva. Ugyanakkor az új súlymátrixok teljesítik a lineáris-kvadratikus feladat kitűzésekor megfogalmazott feltételeket, így $\widetilde{Q}\left(t\right)$ és $\widetilde{S}$ továbbra is pozitív szemidefinit mátrixok; például

$$\begin{pmatrix}z^T & a\end{pmatrix}\widetilde{Q}\left(t\right)\begin{pmatrix}z\\a\end{pmatrix}=\left(C\left(t\right)^T z-ar\left(t\right)\right)^T Q\left(t\right)\left(C\left(t\right)z-ar\left(t\right)\right)\geq 0$$

minden $z\in\mathbb{R}^n$ és $a\in\mathbb{R}$ esetén. Ha minimalizáljuk a $\widetilde{J}$ célfüggvényt a (4.41) rendszerre vonatkozóan az $\widetilde{x}_0=\left(x_0^T,1\right)^T$ kezdőállapotból kiindulva, akkor megkapjuk a pályakövetés feladatának a megoldását. A $\widetilde{J}$ minimumának meghatározására alkalmazzuk a 4.8 pont eredményeit. Legyen $\widetilde{P}$ a

$$\begin{aligned}\widetilde{P}\left(t\right)&=\widetilde{A}\left(t\right)^T\widetilde{P}\left(t+1\right)\widetilde{A}\left(t\right)+\widetilde{Q}\left(t\right)-\widetilde{A}\left(t\right)^T\widetilde{P}\left(t+1\right)\widetilde{B}\left(t\right)\times\\&\qquad\left[R\left(t\right)+\widetilde{B}\left(t\right)^T\widetilde{P}\left(t+1\right)\widetilde{B}\left(t\right)\right]^{-1}\widetilde{B}\left(t\right)^T\widetilde{P}\left(t+1\right)\widetilde{A}\left(t\right)\\\widetilde{P}\left(t_1\right)&=\widetilde{S}\end{aligned}$$

diszkrét idejű Riccati egyenlet megoldása a $[t_0,t_1]$ intervallumon, és particionáljuk ezt a $\widetilde{P}$ -t az alábbi módon:

$$\widetilde{P}=\begin{pmatrix}P & p\\ p^T & \pi\end{pmatrix},$$

ahol $P(t) \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $p(t) \in \mathbb{R}^n$, $\pi(t) \in \mathbb{R}$. Ezekre a mennyiségekre a

$$\begin{aligned} P(t) &= A(t)^T P(t+1) A(t) + C(t)^T Q(t) C(t) - \qquad (4.42) \\ &- A(t)^T P(t+1)B(t)[R(t)+B(t)^T P(t+1)B(t)]^{-1}B(t)^T P(t+1)A(t), \\ p(t) &= A(t)^T p(t+1) - C(t)^T Q(t) r(t) - \qquad (4.43) \\ &- A(t)^T P(t+1)B(t)[R(t)+B(t)^T P(t+1)B(t)]^{-1}B(t)^T p(t+1), \\ \pi(t) &= \pi(t+1) + r(t)' Q(t) r(t) - \qquad (4.44) \\ &- p(t+1)^T B(t)[R(t)+B(t)^T P(t+1)B(t)]^{-1}B(t)^T p(t+1), \\ P(t_1) &= C(t_1)^T S C(t_1); \quad p(t_1) = -C(t_1)^T S r(t_1); \quad \pi(t_1) = r(t_1)^T S r(t_1) \qquad (4.45) \end{aligned}$$

rekurzióknak kell teljesülniük. Mivel a $\widetilde{J}$ minimumát adó optimális irányítás

$$u^*(t) = -\left[R(t) + \widetilde{B}(t)^T \widetilde{P}(t+1)\widetilde{B}(t)\right]^{-1} \widetilde{B}(t)^T \widetilde{P}(t+1)\widetilde{A}(t)\widetilde{x}(t)$$

formulával határozható meg, ezért

$$u^*(t) = -[R(t) + B(t)P(t+1)B(t)]^{-1}B(t)^T(P(t+1)A(t)x(t) + p(t+1)). \qquad (4.46)$$

A célfüggvény minimuma:

$$V(t_0, x_0) = x_0^T P(t_0) x_0 + 2x_0 p(t_0) + \pi(t_0). \qquad (4.47)$$

A fenti elemzés eredményeit a következő tételben foglalhatjuk össze.

4.6. TÉTEL. *Tekintsük a (4.39), (4.40) képletekkel meghatározott pályakövetési feladatot, amelyre a fent kirótt feltételek teljesülnek. Ekkor a (4.42) (DRE) -nek a (4.45)-ben szereplő végfeltételekkel létezik megoldása a teljes* $[t_0, t_1]$*-n. Tetszőleges* $r$ *referenciapálya és tetszőleges* $x_0$ *kezdőállapot esetén az optimális vezérlés a (4.46), az optimális célfüggvény érték pedig (4.47) formulákkal határozható meg, ahol* $p$ *és* $\pi$ *a (4.43) és (4.44) rekurzió eredménye a (4.45)-ben szereplő végfeltétel mellett, és ahol* $x(.)$ *az*

$$F(t) = A(t) - B(t)\left[R(t) + B(t)^T P(t+1) B(t)\right]^{-1} B(t)^T P(t+1) A(t)$$

$$g(t) = -B(t)\left[R(t) + B(t)^T P(t+1) B(t)\right]^{-1} B(t)^T p(t+1)$$

*jelölésekkel az*

$$\begin{aligned} x(t+1) &= F(t)x(t) + g(t), \\ x(t_0) &= x_0 \end{aligned}$$

*megoldása.*

## 4.10. Feladatok a 4. fejezethez

*4.1. Feladat.* Mutassuk meg, hogy a (4.7) additivitási tulajdonság érvényes mind a folytonos, mind pedig diszkrét idejű optimális irányítási feladat esetén!

*4.2. Feladat.* Legyen $\mathcal{X} = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, $\mathcal{U} = \{0, 1, 2, 3, 4\}$, az $f$ és $f_0$ függvények pedig az alábbi értéktáblázattal adottak:

| | $f(x,u)$ | | | | | $f_0(x,u)$ | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | u=0 | u=1 | u=2 | u=3 | u=4 | u=0 | u=1 | u=2 | u=3 | u=4 |
| x=1 | 1 | 5 | 1 | 4 | 2 | 0 | 1 | 0 | 2 | 3 |
| x=2 | 2 | 2 | 3 | 5 | 1 | 0 | 0 | 5 | 9 | 3 |
| x=3 | 3 | 4 | 2 | 3 | 5 | 0 | 7 | 5 | 0 | 6 |
| x=4 | 4 | 3 | 5 | 1 | 4 | 0 | 7 | 8 | 2 | 0 |
| x=5 | 5 | 1 | 4 | 2 | 3 | 0 | 1 | 8 | 9 | 6 |

Minimalizáljuk a

$$G(x_3) + \sum_{k=0}^{2} f_0(x_k, u_k), \qquad \text{ahol } G(x) = \begin{cases} 0, & \text{ha } x = 3, \\ 10, & \text{ha } x \neq 3. \end{cases}$$

célfüggvényt! (Ábrázoljuk az átmeneteket egy 5 csúcspontú gráfon, az élekre írjuk rá az átmenetek költségeit!) Adjuk meg az optimális célfüggvényértéket, vezérlést és trajektóriát, ha $x_0 = 1$ a kezdőállapot!

*4.3. Feladat.* Legyen $\mathcal{X} = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, $\mathcal{U} = \{0, 1, 2, 3\}$, az $f$ és $f_0$ függvények pedig az alábbi értéktáblázattal adottak:

| | $f(x,u)$ | | | | $f_0(x,u)$ | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | u=0 | u=1 | u=2 | u=3 | u=0 | u=1 | u=2 | u=3 |
| x=1 | 1 | 6 | 4 | 3 | 5 | 1 | 1 | 3 |
| x=2 | 2 | 1 | 5 | 3 | 0 | 9 | 3 | 1 |
| x=3 | 3 | 2 | 1 | 4 | 1 | 5 | 10 | 1 |
| x=4 | 4 | 5 | 1 | 3 | 5 | 10 | 1 | 1 |
| x=5 | 5 | 4 | 2 | 6 | 10 | 1 | 1 | 5 |
| x=6 | 6 | 1 | 5 | 5 | 1 | 1 | 5 | 10 |

Minimalizáljuk a

$$G(x_3) + \sum_{k=0}^{2} f_0(x_k, u_k), \qquad \text{ahol } G(x) = 10(x-1)$$

célfüggvényt! (Ábrázoljuk az átmeneteket egy 6 csúcspontú gráfon, az élekre írjuk rá az átmenetek költségeit!) Adjuk meg az optimális célfüggvényértéket, vezérlést és trajektóriát, ha $x_0 = 4$ a kezdőállapot!

*4.4. Feladat.*

$$x_{k+1} = 2x_k + 2u_k, \qquad x_k \in \mathbb{R}, \qquad u_k \in \mathbb{R},$$
$$x_0 \text{ adott, tetszőleges}$$
$$J(0,2,x_0,u) = G(x_2) + \sum_{k=0}^{1} u_k^2 \longmapsto \min \qquad G(x) = \frac{1}{2}x^2.$$

*4.5. Feladat.*

$$x_{k+1} = 2x_k + u_k, \qquad x_k \in \mathbf{R}, \qquad \mathbf{u_k} \in \mathbf{R},$$
$$x_0 \text{ adott, tetszőleges}$$
$$J(0,2,x_0,u) = G(x_2) + \sum_{k=0}^{1} u_k^2 \longmapsto \min \qquad G(x) = ax^2, \qquad a > 0.$$

*4.6. Feladat.* Legyen

$$\dot{x} = x + u, \qquad x(0) = x_0,$$
$$J(0,t_1,x_0,u) = gx^2(t_1) + \int_0^{t_1} (x^2(t) + u^2(t))dt \to \min$$

ahol $g \geq 0,\ x(t) \in \mathbb{R},\ u(t) \in \mathbb{R}$.

a) Írjuk fel a feladathoz tartozó Hamilton-Jacobi-Bellman egyenletet!

b) Keressük a Hamilton-Jacobi-Bellman egyenlet megoldását $V(t,x) = p(t)x^2$ alakban! Milyen egyenletet kapunk $p$-re?

c) Hogyan viselkednek a $p$-re kapott egyenlet megoldásai a $g$ paraméter függvényében?

d) Mutassuk meg, hogy $p(t)$ az alábbi implicit alakban adható meg:

$$t_1 - t = \begin{cases} \frac{1}{2\sqrt{2}}\left(\ln\left(\frac{g-(1+\sqrt{2})}{g-(1-\sqrt{2})}\right) - \ln\left(\frac{p(t)-(1+\sqrt{2})}{p(t)-(1-\sqrt{2})}\right)\right), & \text{ha } g > 1+\sqrt{2}, \\ \frac{1}{2\sqrt{2}}\left(\ln\left(\frac{(1+\sqrt{2})-g}{g-(1-\sqrt{2})}\right) - \ln\left(\frac{(1+\sqrt{2})-p(t)}{p(t)-(1-\sqrt{2})}\right)\right), & \text{ha } 0 \leq g < 1+\sqrt{2}. \end{cases}$$

Fejezzük ki ebből $p(t)$ értéket!

e) Mutassuk meg, hogy $g = 1+2\sqrt{2}$ és $t_1 = 1/(2\sqrt{2})$ esetén a célfüggvény optimális értéke

$$V(t,x) = \frac{3(1+\sqrt{2})e - (1-\sqrt{2})}{3e-1}x^2 \ \ !$$

*4.7. Feladat.* Tekintsük (4.37) helyett az

$$x(t+1) = A(t)\,x(t) + B(t)\,u(t) + c(t)\,, \qquad t \in \left(\underline{t}, \overline{t}\right) \subset \mathbb{Z}$$

rendszert ugyanazon célfüggvénnyel, mint előbb. Az $\overline{x} = \begin{pmatrix} x \\ 1 \end{pmatrix}$ új változó bevezetésével vezessük vissza a feladatot (4.37) alakra, és mutassuk meg, hogy az optimális vezérlést a

$$k_c(t,x) = k(t,x) - \Big(R(t) + B(t)^T P(t+1)\,B(t)\Big)^{-1} B(t)^T P(t+1)\,c(t) \\ + p(t+1)$$

függvénnyel határozhatjuk meg, a Bellman függvény pedig

$$V(t,x) = x^T P(t)\,x + 2p(t)^T x + \pi(t)\,,$$

ahol a $P$ mátrix a (DRE) megoldása, a $p$ vektorfüggvény, továbbá a $\pi$ skalárfüggvény $P$ felhasználásával az alábbi rekurzióval számolható:

$$\begin{aligned} p(t) &= A(t)^T\left(P(t+1)\,c(t) + p(t+1)\right) - A(t)^T P(t+1)\,B(t) \times \\ &\quad \Big(B(t)^T P(t+1)\,B(t) + R(t)\Big)^{-1} B(t)^T \left(P(t+1)\,c(t) + p(t+1)\right) \\ \pi(t) &= \pi(t+1) + c(t)^T P(t+1)\,c(t) + 2p(t+1)^T c(t) - \\ &\quad \left(P(t+1)\,c(t) + p(t+1)\right)^T B(t) \times \\ &\quad \Big(B(t)^T P(t+1)\,B(t) + R(t)\Big)^{-1} \left(P(t+1)\,c(t) + p(t+1)\right) \\ p(t_1) &= 0, \qquad \pi(t_1) = 0. \end{aligned}$$

# 5. fejezet

# Optimalitás és stabilitás kapcsolata

## 5.1. Stabilitás és Ljapunov direkt módszere

Ebben a pontban felidézünk néhány, korábbi tanulmányainkból ismerős fogalmat és tételt, amelyekre a továbbiakban szükségünk lesz.

Tekintsük az

$$\dot{x} = f(x) \tag{5.1}$$

autonóm differenciálegyenlet rendszert, ahol $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, folytonosan differenciálható, $f(0) = 0$, amelynek tehát $x(t) \equiv 0$ megoldása. Ekkor azt mondjuk, hogy az (5.1)-nek az $a = 0$ egyensúlyi helyzete!

5.1. DEFINÍCIÓ. Az (5.1) differenciálegyenlet rendszer $x(t) \equiv 0$ megoldását (vagyis az $a = 0$ egyensúlyi helyzetét) Ljapunov értelemben stabilisnak nevezzük, ha

1. $\exists \rho > 0$, hogy ha $\|x_0\| < \rho$, akkor $x(.; x_0) : [0, \infty) \to \mathbb{R}^n$,
2. $\forall \varepsilon > 0$-hoz $\exists \delta : 0 < \delta < \rho$, hogy ha $\|x_0\| < \delta$, akkor $x(t; x_0) < \varepsilon \;\; \forall t \geq 0$-ra.

5.2. DEFINÍCIÓ. Az (5.1) differenciálegyenlet rendszer $x(t) \equiv 0$ megoldása (vagyis az $a = 0$ egyensúlyi helyzet) aszimptotikusan stabilis, ha

1. Ljapunov értelemben stabilis, és

2. létezik olyan $\eta : 0 < \eta < \rho$, hogy ha $\|x_0\| < \eta$, akkor

$$x(t; x_0) \to 0, \quad \text{ha } t \to \infty. \tag{5.2}$$

Az (5.1) differenciálegyenlet rendszer $x(t) \equiv 0$ megoldása globálisan aszimptotikusan stabilis, ha (5.2) minden $x_0 \in \mathbb{R}^n$-re teljesül.

5.3. Definíció. A $V : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ függvényt pozitív definitnek nevezzük, ha $V(x) > 0$ minden nemzérus $x \in \mathbb{R}^n$ vektorra teljesül.
A $V$ függvényt pozitív szemidefinitnek nevezzük, ha $V(x) \geq 0$ minden $x \in \mathbb{R}^n$ vektorra teljesül.
A $V$ függvényt radiálisan nemkorlátosnak nevezzük, ha $V(x) \to \infty$, $\|x\| \to \infty$ esetén.

Legyen $V : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ folytonosan differenciálható, és legyen $x(.) : [0, \infty) \to \mathbb{R}^n$ az (5.1) differenciálegyenlet rendszer egy megoldása. Ekkor a $t \in [0, \infty) \to V(x(t))$ (egyváltozós) függvény folytonosan differenciálható és a derivált számolható a láncszabály szerint:

$$\frac{d}{dt} V(x(t)) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial V}{\partial x_i}(x(t)) \dot{x}_i(t) = V_x'(x(t)) f(x(t)).$$

Ennek alapján értelmezhető egy $\dot{V}$-tal jelölt függvény a *megoldástól függetlenül*:

$$\begin{aligned} \dot{V} &: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}, \\ \dot{V}(x) &= V_x'(x) f(x). \end{aligned}$$

5.1. Tétel. (Ljapunov I. tétele). *Tegyük fel, hogy az (5.1) differenciálegyenlet rendszerhez létezik egy $V : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ folytonosan differenciálható függvény, ami pozitív definit, $V(0) = 0$, és a $-\dot{V}$ függvény pozitív szemidefinit. Ekkor az (5.1) differenciálegyenlet rendszer $x(t) \equiv 0$ megoldása stabilis Ljapunov értelemben.*

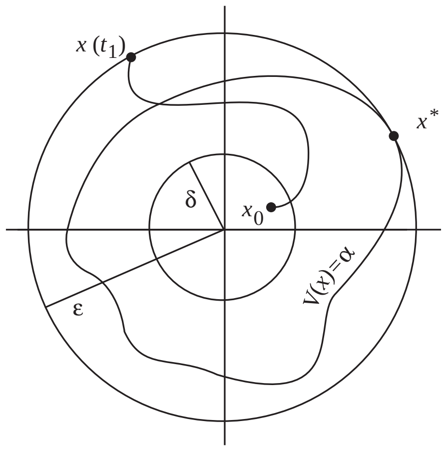
*Bizonyítás.* Legyen $\varepsilon > 0$ tetszőleges, és jelöljük az origó körüli $\varepsilon$ sugarú gömbfelületet $S_\varepsilon$-nal, vagyis legyen

$$S_\varepsilon = \{x \in \mathbb{R}^n : \|x\| = \varepsilon\} .$$

$S_\varepsilon$ nyilvánvalóan kompakt halmaz, így a Weierstrass tételből következik, hogy létezik olyan $x^* \in S_\varepsilon$, hogy

$$\inf_{x \in S_\varepsilon} V(x) = V(x^*) =: \alpha > 0.$$

Mivel a $V(0) = 0$, $V$ folytonossága miatt ebből következik, hogy az így meghatározott pozitív $\alpha$-hoz létezik olyan $\delta$, $0 < \delta < \varepsilon$, hogy $\|x\| < \delta$ esetén $V(x) < \alpha$. Válasszunk egy tetszőleges $x_0$-t, amire $\|x_0\| < \delta$, és tekintsük a $t \to x(t; x_0)$ megoldást. Meg kell mutatni, hogy $x(.; x_0)$ minden $t \geq 0$-ra értelmezett, és $\|x(t; x_0)\| < \varepsilon$. Tegyük fel, hogy nem így van; ekkor $x(0; x_0) = x_0$ és $\|x_0\| < \varepsilon$ miatt az indirekt feltétel csak úgy valósulhat meg, hogy létezik olyan $t_1 > 0$, amelyre $\|x(t; x_0)\| < \varepsilon$, ha $t \in [0, t_1)$ és $\|x(t_1; x_0)\| = \varepsilon$. (Ld. 5.1 ábrát.)



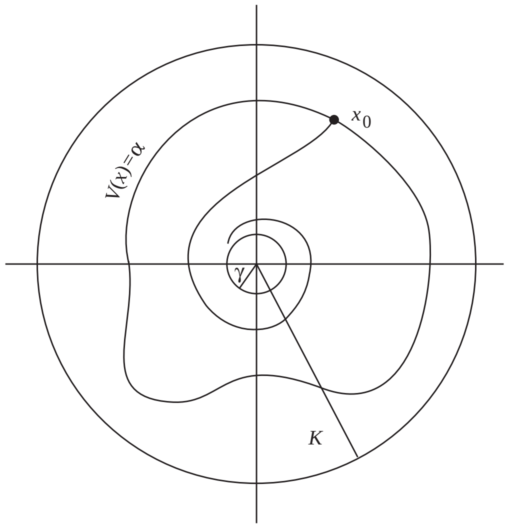

5.1. ábra. Vázlat Ljapunov I. tételének bizonyításához.

Tekintsük a $v(t) = V(x(t; x_0))$ egyváltozós függvényt. A feltétel szerint $\frac{dv}{dt}(t) \leq 0$ minden $t \in [0, t_1)$ esetén, vagyis $v(.)$ monoton nem növekvő. De $\alpha > V(x_0) \geq V(x(t_1)) \geq \alpha$, ami ellentmondás. Ebből következik, hogy az $x(.; x_0)$ minden $t \geq 0$-ra értelmezett, és benne marad a $\mathcal{B}_\varepsilon(0) = \{x \in \mathbb{R}^n : \|x_0\| < \varepsilon\}$ halmazban. $\square$

5.2. Tétel. (Ljapunov II. tétele). *Tegyük fel, hogy az (5.1) differenciálegyenlet rendszerhez létezik egy $V$ folytonosan differenciálható, pozitív definit, radiálisan nemkorlátos függvény, $V(0) = 0$, és a $\dot{V}$ függvény negatív definit, vagyis a $-\dot{V}$ függvény pozitív definit. Ekkor az (5.1) differenciálegyenlet rendszer $x(t) \equiv 0$ megoldása globálisan aszimptotikusan stabilis Ljapunov értelemben.*

*Bizonyítás.* Ljapunov I. tételéből következik, hogy $x(t) \equiv 0$ Ljapunov stabilis.

Tekintsünk egy tetszőleges $x_0 \in \mathbb{R}^n$-t, és mutassuk meg, hogy $x(.; x_0)$ minden $t \geq 0$-ra értelmezett, és $x(t; x_0) \to 0$, ha $t \to \infty$. Tekintsük a $\{x : V(x) \leq \alpha\} = \Omega_\alpha$ halmazt, ahol $\alpha = V(x_0)$. Ekkor létezik olyan $K > 0$, amelyre $\|x\| \leq K$, ha $x \in \Omega_\alpha$ (mert $V$ radiálisan nemkorlátos). Legyen $v$ most is az 5.1. Tétel bizonyításában bevezetett, $v(t) = V(x(t; x_0))$ egyenlőséggel értelmezett függvény. Mivel $\dot{V}$ negatív definit, $v(.)$ monoton nem növekvő, ebből következik, hogy $x(t; x_0) \in \Omega_\alpha$ minden olyan $t \geq 0$-ra, amire $x(.; x_0)$ értelemzett. Az $\Omega_\alpha$ korlátossága miatt $x(.; x_0)$ minden $t$-re értelmezett.




5.2. ábra. Vázlat Ljapunov II. tételének bizonyításához.

Abból, hogy $v(.)$ monoton nem növekvő és alulról korlátos, az következik, hogy létezik a $\lim_{t\to\infty} v(t) = \beta$ határérték. Tegyük fel, hogy $\beta > 0$. Ekkor létezik olyan $\gamma > 0$, amelyre $\|x(t;x_0)\| \geq \gamma$ minden $t \geq 0$-ra, mert különben volna olyan $t_k \to \infty$ sorozat, hogy $\|x(t_k;x_0)\| \to 0$, ha $k \to \infty$, így $v(t_k) \to 0$ teljesülne, ami ellentmond annak, hogy $\beta > 0$. (lásd 5.2 ábrát.) Legyen

$$\delta := \min_{\gamma \leq \|x\| \leq K} (-\dot{V}(x)) > 0.$$

Ebből következik, hogy

$$\frac{d}{dt} v(t) \leq -\delta,$$

eszerint pedig $0 \leq v(t) \leq v(0) - \delta t \to -\infty$, ami lehetetlen, tehát $\beta = 0$ kell legyen. Akkor viszont $x(t;x_0) \to 0$. □

*5.1. Megjegyzés.* A fenti tétel állítása érvényben marad akkor is, ha a $\dot{V}$-ról csak azt kötjük ki, hogy negatív szemidefinit, és $\dot{V}(x(t))$ nem azonosan nulla egyetlen pozitív hosszúságú intervallumon sem.

Foglalkozzunk végül a diszkrét idejű autonóm rendszer egyensúlyi helyzetének aszimptotikus stabilitásával.

Tekintsük a

$$\begin{aligned} x(t+1) &= f(x(t)), \qquad t = 0, 1, \ldots \\ x(0) &= x_0 \end{aligned} \tag{5.3}$$

diszkrét idejű autonóm rendszert, ahol $f(0) = 0$.

Az $a \in \mathbb{R}^n$ az (5.3) egyensúlyi helyzete, ha $x_0 = a$ esetén $x(t) \equiv a$ az (5.3) megoldása. Legyen $\mathcal{A} \subset \mathbb{R}^n$, $0 \in \mathcal{A}$

5.4. DEFINÍCIÓ. Azt mondjuk, hogy az (5.3) $a = 0$ egyensúlyi helyzete aszimptotikusan stabilis $\mathcal{A}$ attraktivitási tartománnyal, ha

1. az $\mathcal{A}$ halmaz pozitívan invariáns, vagyis ha $x_0 \in \mathcal{A}$, akkor az (5.3) $x(.)$ megoldására $x(t) \in \mathcal{A}$ teljesül minden $t \in \mathbb{N}$-re;

2. bármely $\varepsilon > 0$-hoz van olyan $\delta > 0$, hogy ha $\|x_0\| < \delta$, és $x_0 \in \mathcal{A}$, akkor $\|x(t)\| < \varepsilon$ minden $t \in \mathbb{N}$-re;

3. ha $x_0 \in \mathcal{A}$, akkor az (5.3) $x(.)$ megoldására

$$\lim_{t \to \infty} x(t) = 0.$$

Az alábbi tételben használni fogjuk a $\mathcal{K}$ és $\mathcal{K}_\infty$ függvényosztályokat. Az $\alpha \in \mathcal{K}$, ha $\alpha : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ szigorúan monoton növekvő, folytonos és $\alpha(0) = 0$. Az $\alpha \in \mathcal{K}_\infty$, ha $\alpha \in \mathcal{K}$ és $\alpha(t) \to \infty$, ha $t \to \infty$.

5.3. TÉTEL. *Tegyük fel, hogy*

*(a)* $\mathcal{A} \subset \mathbb{R}^n$ *halmaz, amelyre* $0 \in \mathcal{A}$, *pozitívan invariáns;*

*(b) a* $V : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ *függvényre* $\alpha_1,\ \alpha_2 \in \mathcal{K}_\infty$, $\alpha_3 \in \mathcal{K}$ *függvényekkel minden* $x \in \mathcal{A}$ *esetén teljesülnek az*

$$\alpha_1(\|x\|) \le V(x) \le \alpha_2(\|x\|) \tag{5.4}$$
$$V(f(x)) - V(x) \le -\alpha_3(\|x\|) \tag{5.5}$$

*egyenlőtlenségek.*

*Ekkor az (5.3) a* $= 0$ *egyensúlyi helyzete aszimptotikusan stabilis* $\mathcal{A}$ *attraktivitási tartománnyal.*

*Bizonyítás.* A definíció 1. követelménye a tétel $(a)$ feltétele szerint teljesül. Lássuk be a 2. követelmény teljesülését! Legyen $\varepsilon > 0$ tetszőleges, és legyen $\delta = \alpha_2^{-1}(\alpha_1(\varepsilon))$. Tekintsünk egy $\overline{x} \in \mathcal{A}$ pontot, amelyre $\|\overline{x}\| < \delta$. Alkalmazzuk a szokásos $\xi(t) = x(t; 0, \overline{x})$ jelölést. Az $\mathcal{A}$ invarianciájából következik, hogy $\xi(t) \in \mathcal{A}$, az (5.5) egyenlőtlenségből pedig az következik, hogy $V(\xi(t)) < V(\overline{x})$ minden $t \in \mathbb{N}$-re. A $\delta$ választásából és az (5.4) egyenlőtlenségből az következik, hogy

$$\alpha_1(\|\xi(t)\|) \le V(\xi(t)) < V(\overline{x}) \le \alpha_2(\|\overline{x}\|) \le \alpha_1(\varepsilon),$$

ami az $\alpha_1$ szigorú monotonitása miatt azt jelenti, hogy

$$\|\xi(t)\| < \varepsilon \qquad \text{minden } t \in \mathbb{N}\text{-re.}$$

A definíció 3. követelményét indirekt úton bizonyítjuk: tegyük fel, hogy valamely $t_k \in \mathbb{N}$ ($t_k \to \infty$, ha $k \to \infty$) sorozatra

$$\lim_{k\to\infty} \|\xi(t_k)\| \ge \beta > 0.$$

Ekkor bármely $k$ esetén

$$\begin{aligned}
0 \le V(\xi(t_k)) &= V(\xi(t_k)) - V(\xi(t_k - 1)) + V(\xi(t_k - 1)) - + \ldots \\
&\quad + V(\xi(1)) - V(\xi(0)) + V(\overline{x}) \le \\
&\le -\sum_{l=0}^{t_k-1} \alpha_3(\|\xi(l)\|) + V(\overline{x}) \le -\sum_{j=0}^{k-1} \alpha_3(\|\xi(t_j)\|) + V(\overline{x}) \le -k\alpha_3(\beta) + V(\overline{x}).
\end{aligned}$$

Mivel $V(\overline{x})/\alpha_3(\beta) < k$ esetén a jobb oldal negatív, az indirekt feltevés ellentmondásra vezetett, amivel a tétel állításának érvényességét bebizonyítottuk. □

## 5.2. Stabilitás és optimalitás

Tekintsük az

$$\begin{aligned} \dot{x} &= f(x,u), \qquad (5.6) \\ x(0) &= x_0 \end{aligned}$$

$\mathcal{X} = \mathbb{R}^n$ irányítási rendszert, ahol $f : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ folytonosan differenciálható, és $f(0,0) = 0$. A megengedett vezérlések halmaza legyen a $\Delta : t \in [0,\infty) \to u(t) \in \mathcal{U} \subset \mathbb{R}^m$ mérhető függvények osztálya, amelyekre még az a követelmény is teljesül, hogy bármely $x_0$-ra $\xi(t) = x(t; 0, x_0, u(.)) \to 0$, ha $t \to \infty$.

Legyen a minimalizálandó célfüggvény

$$J(x_0, u(.)) = \int_0^\infty f_0(\xi(t), u(t))dt, \qquad (5.7)$$

ahol $f_0 : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ folytonosan differenciálható, $f_0(x,u) \geq 0 \quad \forall(x,u)$-ra, és $f_0(0,0) = 0$.

Tegyük fel, hogy a $V : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ függvény folytonosan differenciálható, $V(0) = 0$, és vezessük be a következő jelölést:

$$\dot{V}(x,u) = V_x^{'}(x) f(x,u).$$

**5.4. Tétel.** *Tegyük fel, hogy*

$$\dot{V}(x,u) + f_0(x,u) \geq 0, \quad \forall u \in \mathcal{U},\ x \in \mathbb{R}^n, \qquad (5.8)$$

*és* $(\xi^*(.), u^*(.))$ *olyan megengedett folyamat, hogy*

$$\dot{V}(\xi^*(t), u^*(t)) + f_0(\xi^*(t), u^*(t)) = 0 \qquad (5.9)$$

*majdnem minden* $t \geq 0$*-ra. Ekkor*

$$V(x_0) = J(x_0, u^*(.)) = \min_{u \in \Delta} J(x_0, u(.))$$

*az optimális költség, és* $u^*(.)$ *optimális vezérlés.*

*Bizonyítás.* a.) Legyen $v \in \Delta$ tetszőleges, $\xi_v(.)$ a megfelelő trajektória. Ekkor az (5.8) figyelembevételével

$$\frac{d}{dt}V(\xi_v(t)) = \dot{V}(\xi_v(t), v(t)) \geq -f_0(\xi_v(t), v(t)).$$

Az egyenlőtlenséget integrálva, majd rendezve azt kapjuk, hogy

$$V(x_0) \leq V(\xi_v(T)) + \int_0^T f_0(\xi_v(t), v(t))dt.$$

Minthogy $v \in \Delta$, a $\Delta$ értelmezéséből következik, hogy $\lim_{T\to\infty} \xi_v(T) = 0$, tehát $\lim_{T\to\infty} V(\xi_v(T)) = 0$ is teljesül. Másrészt

$$\lim_{T\to\infty} \int_0^T f_0(\xi_v(t), v(t))dt = J(x_0, v(.)),$$

ezért $V(x_0) \leq J(x_0, v(.))$ minden $v \in \Delta$ és $x_0 \in \mathbb{R}^n$ esetén.

b.) Alkalmazzuk ugyanezt a technikát $(\xi^*(.), u^*(.))$-ra, és használjuk az (5.9) feltételt! Ekkor azt kapjuk, hogy

$$V(x_0) = V(\xi^*(T)) + \int_0^T f_0(\xi^*(t), u^*(t))dt,$$

amiből határátmenettel a $V(x_0) = J(x_0, u^*(.))$ egyenlőséghez jutunk, ha itt is figyelembe vesszük, hogy $u^* \in \Delta$ miatt $\xi^*(T) \to 0$, ha $T \to \infty$.

c.) Ebből következik, hogy

$$V(x_0) = J(x_0, u^*(.)) \leq J(x_0, v(.)) \quad \forall v \in \Delta\text{-re},$$

ami megfelel a tételbeli állításnak. □

5.1. Következmény. *Tegyük fel, hogy $k : \mathbb{R}^n \to \mathcal{U}$ olyan, hogy*

$$\dot{V}(x, k(x)) + f_0(x, k(x)) = \min_{u\in\mathcal{U}} \left\{ \dot{V}(x, u) + f_0(x, u) \right\} = 0 \tag{5.10}$$

*és a $(\xi^*(.), u^*(.))$ folyamat, amit a $k(.)$ visszacsatolás definiál, megengedett (vagyis $u^*(.) \in \Delta$). Ekkor $V(x_0)$ az optimális célfüggvényérték, és $u^*(.)$ az optimális irányítás.*

Vegyük észre, hogy (5.10) a következő alakú:

$$\boxed{V_x'(x)f(x,k(x)) + f_0(x,k(x)) = \min_{u\in\mathcal{U}} \left\{V_x'(x)f(x,u) + f_0(x,u)\right\} = 0.}$$

Ezt az egyenletet *stacionárius Hamilton-Jacobi-Bellman egyenlet*nek (SHJB) nevezzük.

5.5. Tétel. *Tegyük fel, hogy*

1. *$k : \mathbb{R}^n \to \mathcal{U}$ lokálisan Lipschitz folytonos, és kielégíti a (SHJB) egyenletet egy $V$ folytonosan differenciálható függvénnyel és $f(0,k(0)) = 0$;*
2. *$V(x) > 0$, ha $x \neq 0$, $f_0(x,u) > 0$, ha $x \neq 0$ (bármely $u$-ra), és $V$ radiálisan nem korlátos.*

*Ekkor $\forall x_0 \in \mathbb{R}^n$-re az*

$$\dot{x} = f(x,k(x)), \quad x(0) = x_0 \tag{5.11}$$

*kezdetiérték feladatnak létezik egyetlen $\xi^*(.)$ megoldása a $[0,\infty)$ intervallumon, $u^*(t) = k(\xi^*(t))$ az optimális vezérlés, $V(x_0)$ az optimális célfüggvény érték, és $x(t) \equiv 0$ az (5.11) globálisan aszimptotikusan stabilis megoldása $V$ Ljapunov függvénnyel.*

*Bizonyítás.* $k$ lokális Lipschitz folytonosságából következik, hogy létezik lokális megoldás, és az egyértelmű. Másrészt

$$\frac{d}{dt}V(x(t)) = \dot{V}(x(t),k(x(t))) = -f_0(x(t),k(x(t))) < 0, \quad \text{ha } x(t) \neq 0,$$

amiből következik, hogy $V$ kielégíti Ljapunov II. tételének feltételeit. Eszerint a megoldás folytatható $[0,\infty)$-ig, $x(t) \equiv 0$ aszimptotikusan stabilis, és $\xi^*(t) \underset{t\to\infty}{\to} 0$. Ebből már következik, hogy $u^*(.)$ megengedett. így az optimalitásra vonatkozó állítás következik a fentiekből. □

## 5.3. Lineáris kvadratikus feladatok - végtelen intervallum

Az alábbiakban a 4.8. pontban tekintett feladathoz hasonló problémával fogunk foglalkozni: lineáris irányítási rendszert tekintünk kvadratikus célfüggvénnyel. Az egyszerűség kedvéért feltesszük, hogy a rendszer *időinvariáns* és a célfüggvényben szereplő mátrixok is állandók. Az alapvető különbség a 4.8 ponthoz képest az, hogy az 5.2 ponttal megegyezően a folyamat időtartama most végtelen, közelebbről a $t_1 = +\infty$ esetet tekintjük. Az időinvariancia miatt az általánosság megszorítása nélkül feltehetjük, hogy a kezdési időpont a $t_0 = 0$.

A feladat a következő.

Tekintsük az

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t), \qquad x(0) = x_0 \tag{5.12}$$

illetve

$$x(t+1) = Ax(t) + Bu(t), \qquad x(0) = x_0 \tag{5.13}$$

egyenlettel leírt rendszert. A megengedett vezérlések $\Delta(0,\infty)$ halmaza legyen az $u : t \in [0,\infty) \to \mathcal{U} = \mathbb{R}^m$ (folytonos idejű esetben mérhető) függvények osztálya, amelyekre még az a követelmény is teljesül, hogy bármely $x_0 \in \mathbb{R}^n$ esetén $\xi(t) = x(t; x_0, u(.)) \to 0$, ha $t \to \infty$. Tetszőlegesen megadott $x_0$ kezdőállapot esetén keresendő egy olyan $u \in \Delta(0,\infty)$ vezérlés, hogy a

$$J(x_0, u) = \int_0^\infty \left\{ \xi(t)^T Q \xi(t) + u(t)^T R u(t) \right\} dt \tag{5.14}$$

illetve a

$$J(x_0, u) = \sum_{t=0}^{\infty} \left\{ \xi(t)^T Q \xi(t) + u(t)^T R u(t) \right\} \tag{5.15}$$

célfüggvény a lehető legkisebb értéket vegye fel, ahol $\xi(t) = x(t; 0, x_0, u)$ az (5.12), illetve (5.13) $u(.)$ melletti megoldása.

Most is feltételezzük, hogy $Q$ és $R$ szimmetrikus, $Q$ pozitív szemidefinit, $R$ pedig pozitív definit mátrix.

A kitűzött feladat akkor tartalmas, ha az (5.14) képletben szereplő improprius integrál, illetve az (5.15) végtelen sor legalább bizonyos vezérlésekre konvergens (véges értékeket vesz fel). Ez a magyarázata annak, hogy a megengedett vezérléseket a fentiekben látott módon definiáltuk.

Foglalkozzunk először a folytonos idejű (5.12), (5.14) feladattal. Emlékeztetünk rá, hogy egy állandó együtthatós $\dot{x} = Ax$ homogén lineáris egyenletrendszer $x(t) \equiv 0$ (és ezzel együtt bármely más) megoldása akkor és csak akkor aszimptotikusan stabilis, ha az $A$ mátrix minden sajátértékének valós része negatív, vagyis, ha $Re(\lambda_i(A)) < 0$. Az ilyen mátrixokat szokás *stabilis (vagy Hurwitz) mátrix*oknak is nevezni. Az alábbi feltétellel azt fogjuk elérni, hogy a megengedett vezérlések hamaza nem üres.

**5.1. Feltétel.** Az $(A, B)$ pár stabilizálható, vagyis létezik olyan $D \in \mathbb{R}^{m \times n}$ mátrix, hogy az $(A + BD)$ mátrix stabilis.

A lineáris algebrából ismert, hogy szimmetrikus és pozitív szemidefinit $Q$ mátrixhoz megadható egy olyan $C \in \mathbb{R}^{p \times n}$ mátrix, hogy $Q = C^T C$, ahol $p = rang\ Q$.

**5.2. Feltétel.** Az $(A, C)$ pár teljesen megfigyelhető olyan $C \in \mathbb{R}^{p \times n}$ mátrixszal, amelyre $Q = C^T C$, és $rang\ Q = rang\ C = p$.

**5.6. Tétel. (folytonos idejű feladat).** *Tegyük fel, hogy az (5.12), (5.14) feladatban szereplő mátrixokra a megfogalmazásban szereplő kikötéseken túlmenően az 5.1. és 5.2. Feltétel is teljesül. Ekkor az*

$$A^T P + PA + Q - PBR^{-1} B^T P = 0 \tag{5.16}$$

(folytonos idejű) algebrai Riccati-egyenlet*nek létezik egyetlen pozitív definit szimmetrikus $P$ megoldása. Az (5.12), (5.14) feladatnak van sima megoldása,*

$$V(x) = x^T P x \tag{5.17}$$

*a Bellman függvény, a*

$$k(x) = -R^{-1} B^T P x \tag{5.18}$$

*függvénnyel meghatározott, $x_0$-ból induló visszacsatolt vezérlés az egyértelműen meghatározott optimális vezérlés. Az eredményül kapott*

$$\dot{x}(t) = (A - BK)\, x(t) \tag{5.19}$$

*visszacsatolt rendszer a $K := R^{-1} B^T P$ mátrixszal aszimptotikusan stabilis.*

*5.2. Megjegyzés.* Felhívjuk a figyelmet arra, hogy a tétel állítása csak az (5.16) pozitív definit megoldásának egyértelműségét (és létezését) mondja ki; az (5.16)-nak lehet más megoldása is, de az nem pozitív definit.

*Bizonyítás.* A bizonyítás két fő lépésből áll. Az első lépés gondolatmenete hasonló az 5.4. Tétel bizonyításához, míg a második lépés lényegében lemmák egy sorozatából áll.

1. Tegyük fel, hogy az (5.16) algebrai Riccati-egyenletnek létezik szimmetrikus pozitív definit $P$ megoldása, és az (5.18) képlettel meghatározott

visszacsatolás eredményeként kapott (5.19) zárt rendszer aszimptotikusan stabilis. Legyen $u^*$ az $x_0$-ból kiinduló visszacsatolt vezérlés, vagyis $K = R^{-1}B^TP$ jelöléssel

$$\dot{x}(t) = (A - BK)\,x(t)\,, \qquad x(0) = x_0 \tag{5.20}$$

és

$$u^*(t) = -Kx(t)\,. \tag{5.21}$$

Lássuk be, hogy ekkor

$$J(x_0, u^*(.)) = x_0^T P x_0 \le J(x_0, u(.)),$$

bármely megengedett $u(.)$ vezérlés esetén. Legyen $(\xi^*(.), u^*(.))$ az (5.20), (5.21) megoldásaként kapott folyamat, és vegyük a $t \in [0, \infty) \to V(\xi^*(t))$ függvényt! Ez a függvény a definíciója folytán differenciálható, és

$$\begin{aligned}
&\frac{d}{dt}V(\xi^*(t)) = V_x(\xi^*(t))(A - BK)\xi^*(t) = \\
&= \xi^*(t)^T((A - BK)^T P + P(A - BK))\xi^*(t) = \\
&= \xi^*(t)^T(A^T P + PA - K^T B^T P - PBK)\xi^*(t) = \\
&= -\xi^*(t)^T Q \xi^*(t) - u^*(t)^T R u^*(t).
\end{aligned}$$

Integráljuk mindkét oldalt 0-tól $\bar{t}$-ig:

$$V(\xi^*(\bar{t})) - V(x_0) = -\int_0^{\bar{t}} (\xi^*(t)^T Q \xi^*(t) + u^*(t)^T R u^*(t))dt.$$

Minthogy a feltevés értelmében $\xi^*(\bar{t}) \to 0$, ha $\bar{t} \to \infty$, ezért $V(\xi^*(\bar{t})) \to 0$ is igaz, ha $\bar{t} \to \infty$. így az előző egyenlőségben a jobb oldalon álló improprius integrál is konvergens, és $J(x_0, u^*(.))$-hoz tart. Így a $\bar{t} \to \infty$ határátmenettel azt kapjuk, hogy

$$V(x_0) = J(x_0, u^*(.)).$$

Legyen most $u(.)$ egy tetszőleges megengedett vezérlés, és legyen $\xi(.)$ a neki megfelelő, $x_0$ kezdőponthoz tartozó trajektória. Végezzük el az alábbi számolást!

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}V(\xi(t)) = \xi(t)^T(A^T P + PA)\xi(t) + 2u(t)^T B^T P \xi(t) \pm \\
\pm \xi(t)^T Q \xi(t) \pm u(t)^T R u(t).
\end{aligned}$$

A jobb oldalon szereplő alábbi két tagra teljes négyzetté kiegészítéssel azt kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} u(t)^T R u(t) + 2u(t)^T B^T P \xi(t) = \\ = (u(t) + R^{-1} B^T P \xi(t))^T R\,(u(t) + R^{-1} B^T P \xi(t)) - \\ - \xi(t)^T P B R^{-1} B^T P \xi(t). \end{aligned} \tag{5.22}$$

Ezt visszahelyettesítjük a $\frac{d}{dt}V(\xi(t))$-re kapott egyenlőségbe, majd felhasználjuk, hogy $P$ kielégíti az (5.16) algebrai Riccati-egyenletet, így azt kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}V(\xi(t)) = -\xi(t)^T Q \xi(t) - u(t)^T R u(t) + \\ + (u(t) + R^{-1} B^T P \xi(t))^T R (u(t) + R^{-1} B^T P \xi(t)). \end{aligned}$$

Itt az utolsó tag pozitív, ha $u(t) \neq R^{-1} B^T P \xi(t)$, ezért

$$\frac{d}{dt}V(\xi(t)) \geq -\xi(t)^T Q \xi(t) - u(t)^T R u(t),$$

és az egyenlőtlenség szigorú a fenti esetben. Integráljuk mindkét oldalt 0-tól $\bar{t}$-ig:

$$V(\xi(\bar{t})) - V(x_0) \geq -\int_0^{\bar{t}} (\xi(t)^T Q \xi(t) + u(t)^T R u(t)) dt.$$

Mivel $u(.)$ megengedett vezérlés, $\bar{t} \to \infty$ esetén $\xi(\bar{t}) \to 0$, ezért a fenti egyenlőtlenség átrendezésével és $\bar{t} \to \infty$ határátmenettel azt kapjuk, hogy

$$V(x_0) \leq J(x_0, u(.)).$$

Ezzel a bizonyítás első részét befejeztük.

2. Annak belátásához, hogy az (5.16) algebrai Riccati-egyenletnek létezik egyetlen pozitív definit $P$ megoldása, és az (5.18) képlettel meghatározott visszacsatolás eredményeként kapott (5.19) zárt rendszer aszimptotikusan stabilis, szükségünk lesz néhány lemmára.

**5.1. Lemma.** *Tegyük fel, hogy a szimmetrikus és pozitív szemidefinit $Q = C^TC$ mátrixra teljesül az 5.2. Feltétel. Ekkor az*

$$A^TP + PA = -Q \tag{5.23}$$

*úgynevezett* algebrai Ljapunov egyenlet *$P$ szimmetrikus megoldása akkor és csak akkor pozitív definit, ha az $A$ stabilis mátrix. Ha $A$ stabilis mátrix, akkor az (5.23) $P$ megoldása egyértelmű bármely szimmetrikus $Q$ mátrix esetén.*

*Bizonyítás. Elegendőség* Legyen $P$ egy olyan szimmetrikus mátrix, amelyre

$$A^TP + PA = 0. \tag{5.24}$$

Ekkor az $S(t) = e^{tA^T}Pe^{tA}$ mátrixra érvényes a

$$\frac{d}{dt}S(t) = e^{tA^T}(A^TP + PA)e^{tA} \equiv 0$$

azonosság. Ebből következik, hogy $S(t)$ konstans, mivel pedig $S(0) = P$, ez azt jelenti, hogy $S(t) \equiv P$. Ha $A$ stabilis mátrix, akkor $S$ értelmezése miatt $S(t) \to 0$, ha $t \to \infty$, így $P = 0$. A szimmetrikus mátrixok körében az (5.24) összefüggés $n(n+1)/2$ homogén lineáris egyenletet jelent a $P$ mátrix $n(n+1)/2$ ismeretlen elemére vonatkozóan (itt $n(n-1)/2$ egyenlet a szimmetria miatt kétszer szerepel). Ebből következik (lásd [1]), hogy az (5.23) inhomogén lineáris egyenletrendszernek létezik egyértelmű megoldása a szimmetrikus mátrixok körében. Ezt a megoldást explicit módon fel tudjuk írni:

$$P = \int_0^\infty e^{tA^T}Qe^{tA}dt.$$

Az itt megadott $P$ mátrix valóban megoldás, mert

$$\begin{aligned} A^TP + PA &= \int_0^\infty e^{tA^T}[A^TQ + QA]e^{tA}dt = \\ &= \int_0^\infty \frac{d}{dt}[e^{tA^T}Qe^{tA}]dt = \lim_{t_1\to\infty} e^{t_1A^T}Qe^{t_1A} - Q = -Q. \end{aligned}$$

Lássuk be, hogy $P$ pozitív definit! Legyen $t_1 > 0$, $x \in \mathbb{R}^n$, $x \neq 0$ tetszőleges. Ekkor

$$x^TPx = \int_0^\infty x^Te^{tA^T}Qe^{tA}xdt = \int_0^{t_1} \left\|Ce^{tA}x\right\|^2 dt + \int_{t_1}^\infty \left\|Ce^{tA}x\right\|^2 dt.$$

A jobb oldalon az első tag nem más, mint $x^T M(0,t_1)x$, ahol $M(0,t_1)$ a megfigyelhetőségi Gram-mátrix, ami az $(A,C)$ teljes megfigyelhetősége miatt pozitív definit, a második tag pedig biztosan nem negatív, tehát $x^T Px > 0$ teljesül minden $x \neq 0$ vektorra.

*Szükségesség* Tegyük fel, hogy a P szimmetrikus pozitív definit mátrix kielégíti az (5.23) egyenletet. Tekintsük a

$$V(x) = x^T Px$$

Ljapunov függvényt az $\dot{x}(t) = Ax(t)$ differenciálegyenlethez. Ennek a differenciálegyenlet megoldása mentén vett deriváltja

$$\frac{d}{dt}V(x(t)) = x_0^T e^{tA^T}[A^T P + PA]e^{tA}x_0 = -\left\|Ce^{tA}x_0\right\|^2 \leq 0.$$

A megfigyelhetőség feltételéből következik, hogy $x_0 \neq 0$ esetén ez nem lehet azonosan zérus egyetlen pozitív hosszúsúgú intervallumon sem. Az 5.1. Megjegyzés értelmében ebből következik, hogy $A$ stabilis mátrix. □

5.2. Lemma. *Legyenek az $A, B, C, R$ mátrixok a korábbiakkal megegyező jelentésűek, miközben az $R > 0$, az $(A,C)$ pár teljesen megfigyelhető, és tegyük fel, hogy a $K, P, S$ mátrixok kielégítik az alábbi feltételeket:*

*(i) $P \in \mathbb{R}^{n\times n}$ szimmetrikus, $S \in \mathbb{R}^{n\times n}$ szimmetrikus és pozitív szemidefinit mátrixok, valamint $K \in \mathbb{R}^{m\times n}$ mátrix;*

*(ii) fennáll az*

$$(A - BK)^T P + P(A - BK) = -(K^T RK + C^T C + S) \tag{5.25}$$

*egyenlet.*

*Ekkor az $(A - BK)$ mátrix akkor és csak akkor stabilis mátrix, ha $P$ pozitív definit és ezesetben $P$ az (5.25) egyenletnek egyértelmű megoldása.*

*Bizonyítás.* Az (5.25) egyenlet jobb oldalán egy szimmetrikus és pozitív szemidefinit mátrix $(-1)$-szerese áll, ezért az $\widetilde{C}^T\widetilde{C}$ alakban faktorizálható. Ha belátjuk, hogy feltételeink mellett $\left(A - BK, \widetilde{C}\right)$ teljesen megfigyelhető, akkor az 5.1. Lemmából következik az állításunk. Az $S \geq 0$, $R > 0$ feltételekből következik, hogy ezek a mátrixok $S = S_1^T S_1$, $R = R_1^T R_1$ alakban faktorizálhatók és det $(R_1) \neq 0$. Ezt felhasználva közvetlenül igazolható, hogy

$$K^T R K^T + C^T C + S = \widetilde{C}^T \widetilde{C} = \left( K^T R_1^T \ S_1^T \ C^T \right) \begin{pmatrix} R_1 K \\ S_1 \\ C \end{pmatrix}.$$

Ezután indukciós meggondolással bebizonyítható, hogy ha

$$rang \left( C^T,\ A^T C^T,\ ...,\ A^{T\,(n-1)} C^T \right) = n,$$

akkor

$$rang \left( \widetilde{C}^T, (A - BK)^T \widetilde{C}^T, ..., (A - BK)^{T\,(n-1)} \widetilde{C}^T \right) = n,$$

ahol $\widetilde{C}^T = \left( K^T R_1^T, S_1^T, C^T \right)$. □

5.3. Lemma. *Tegyük fel, hogy az $(A, C)$ pár teljesen megfigyelhető. Ekkor az (5.16) algebrai Riccati-egyenlet bármely $P$ megoldása invertálható.*

*Bizonyítás.* Tegyük fel, hogy van olyan $\xi \in \mathbb{R}^n$, $\xi \neq 0$, hogy $P\xi = 0$. Szorozzuk meg az (5.16) mindkét oldalát balról $\xi^T$-vel, jobbról pedig $\xi$-vel, ekkor azt kapjuk, hogy $\xi^T C^T C \xi = 0$, ami azt jelenti, hogy $C\xi = 0$. Ha most (5.16)-ot jobbról szorozzuk $\xi$-vel, azt kapjuk, hogy $PA\xi = 0$. Az előbbi megfontolásokat megismételve $\xi$ helyett $A\xi$-vel, megállapíthatjuk, hogy $CA\xi = 0$, és $PA^2\xi = 0$. Folytatva ezt az eljárást, belátjuk, hogy a $P\xi = 0$ összefüggésből az következik, hogy $C\xi = 0$, $CA\xi = 0, ...,$ $CA^{n-1}\xi = 0$, vagyis

$$\xi^T \left( C^T,\ A^T C^T,\ ...,\ (A^T)^{n-1} C^T \right) = 0.$$

Ez azt jelenti, hogy a zárójelben álló mátrix sorai lineárisan összefüggők, ami a jól ismert Kalman-feltétel értelmében ellentmond az $(A, C)$ pár teljes megfigyelhetőségének (lásd a 2.3. Következményt). Ezért a $P\xi = 0$ egyenlet csak a $\xi = 0$ vektorra teljesülhet, tehát $P$ invertálható. □

5.4. Lemma. *Tegyük fel, hogy az $(A, C)$ pár teljesen megfigyelhető, $P$ az (5.16) algebrai Riccati-egyenlet szimmetrikus megoldása, és legyen $K = R^{-1} B^T P$. Ekkor az $A - BK$ akkor és csak akkor stabilis mátrix, ha $P$ pozitív definit.*

*Bizonyítás.* Ha $P$ és $K$ a lemmában megadottak, akkor

$$(A - BK)^T P + P(A - BK) = A^T P + PA - PBR^{-1}B^T P - PBK = \\ = -Q - K^T RK,$$

ezért $S = 0$ szereposztással alkalmazható az 5.3. Lemma. □

Az (5.16) algebrai Riccati-egyenlet szimmetrikus és pozitív definit megoldásának létezését konstruktív úton bizonyítjuk: megadunk egy iterációs eljárást, amelyről megmutatjuk, hogy az (5.16) megkívánt tulajdonságú megoldásához konvergál. Tegyük fel, hogy az $(A, B)$ pár stabilizálható. Az előbbi bizonyításban láttuk, hogy (5.16) ekvivalens a következő egyenlettel:

$$\begin{cases} K = R^{-1}B^T P, \\ (A - BK)^T P + P(A - BK) = -Q - K^T RK. \end{cases}$$

*Algoritmus. (Kleinmann-féle iterációs algoritmus).*
*0. lépés* Válasszuk meg a $K_1$ mátrixot úgy, hogy $A - BK_1$ stabilis mátrix legyen. (Az $(A, B)$ pár stabilizálhatósága miatt ez lehetséges.)
*i. lépés* Ha ismerünk egy $K_i$ mátrixot, amelyre $A - BK_i$ stabilis mátrix, akkor keressük meg azt a $P_i$ szimmetrikus mátrixot, amelyre

$$(A - BK_i)^T P_i + P_i(A - BK_i) = -Q - K_i^T RK_i, \tag{5.26}$$

és definiáljuk a $K_{i+1}$ mátrixot a

$$K_{i+1} = R^{-1}B^T P_i \tag{5.27}$$

egyenlőséggel.

Ennek az iterációnak az eredményeként egy $K_1$, $K_2$, ... és egy $P_1$, $P_2$, ... mátrixsorozatot kapunk, feltéve, hogy az eljárás minden lépése végrehajtható.

5.5. Lemma. *Tegyük fel, hogy teljesül az 5.1. és 5.2. Feltétel. Ekkor a Kleinmann iteráció jól definiált abban az értelemben, hogy az (5.26) egyenletrendszernek minden lépésben létezik egyetlen szimmetrikus megoldása, ami pozitív definit, és az (5.27) egyenlőséggel definiált $K_{i+1}$ olyan, hogy az $(A - BK_{i+1})$ stabilis mátrix.*

*Bizonyítás.* Tegyük fel, hogy az i-dik lépés kezdetén az $(A - BK_i)$ stabilis mátrix. (Ez az $i = 1$ esetén igaz.) Az 5.2. Lemmából következően az (5.27) egyenletrendszernek létezik szimmetrikus pozitív definit megoldása, és az egyértelmű. Azt kell csak belátni, hogy az (5.27) egyenlőséggel definiált $K_{i+1}$ esetén az $(A - BK_{i+1})$ ismét stabilis mátrix lesz. Viszont

$$
\begin{aligned}
&(A - BK_{i+1})^T P_i + P_i(A - BK_{i+1}) = \\
&= (A - BK_i)^T P_i + P_i(A - BK_i) + (K_i - K_{i+1})^T B^T P_i + P_i B(K_i - K_{i+1}) = \\
&= -Q - K_i^T R K_i - (K_{i+1} - K_i)^T R K_{i+1} - K_{i+1}^T R(K_{i+1} - K_i) = \\
&= -Q - (K_{i+1} - K_i)^T R(K_{i+1} - K_i) - K_{i+1}^T R K_{i+1},
\end{aligned}
$$

így ismét az 5.2. Lemmát alkalmazhatjuk, $S = (K_{i+1} - K_i)^T R(K_{i+1} - K_i)$ szereposztással: ennek értelmében a $P_i$ pozitív definitségéből következik, hogy $A - BK_{i+1}$ stabilis mátrix. □

5.6. Lemma. *Tegyük fel, hogy teljesül az (5.1.) és (5.2.) Feltétel. Ekkor tetszőleges olyan $K_1$ esetén, ami eleget tesz a 0. lépés követelményeinek, a $\{K_i\}$ és $\{P_i\}$ sorozatok konvergensek, mégpedig $K_i \to K$, $P_i \to P$, ha $i \to \infty$, ahol $P$ pozitív definit, szimmetrikus, és eleget tesz az (5.16) egyenletnek, az $(A - BK)$ pedig stabilis mátrix.*

*Bizonyítás.* Tekintsük az (5.26) egyenletet $i$ helyett $(i + 1)$-re:

$$
(A - BK_{i+1})^T P_{i+1} - P_{i+1}(A - BK_{i+1}) = -Q - K_{i+1}^T R K_{i+1}.
$$

Szorozzuk meg ezt az egyenletet $(-\lambda)$-val, és adjuk hozzá az előző bizonyításban kapott

$$
\begin{aligned}
(A - BK_{i+1})^T P_i + P_i(A - BK_{i+1}) &= \\
= -Q - (K_{i+1} - K_i)^T R(K_{i+1} - K_i) - K_{i+1}^T R K_{i+1}&
\end{aligned}
$$

egyenlethez. Vezessük be az $\widetilde{R} := (1 - \lambda)R$, $\widetilde{Q} := (1 - \lambda)Q$ jelöléseket, amelyek $\lambda < 1$ esetén ugyanolyan tulajdonságúak, mint az $R$, illetve a $Q$. Az eredményül kapott

$$
\begin{aligned}
(A - BK_{i+1})^T (P_i - \lambda P_{i+1}) + (P_i - \lambda P_{i+1})(A - BK_{i+1}) &= \\
= -\widetilde{Q} - K_{i+1}^T \widetilde{R} K_{i+1} - (K_{i+1} - K_i)^T R(K_{i+1} - K_i)&
\end{aligned}
$$

egyenlőségből az 5.2. Lemma alkalmazásával most azt állapíthatjuk meg, hogy a $P_i - \lambda P_{i+1}$ mátrix pozitív definit minden $(\lambda < 1)$-re. Ebből $\lambda \to 1$

határátmenettel az következik, hogy a $P_i - P_{i+1}$ mátrix pozitív szemidefinit, tehát

$$x^T P_i x \geq x^T P_{i+1} x > 0.$$

Speciálisan, az $x = e_k$ ($e_k \in \mathbb{R}^n$ a $k$-adik egységvektor, $k = 1, ..., n$) választással ez azt jelenti, hogy a $\left\{p_{kk}^{(i)}\right\}_{i=1}^{\infty}$ sorozat monoton nem nő, és alulról korlátos, tehát a $P_i$ fődiagonálisában álló elemek konvergensek. Másrészt, ha $x = e_k + e_l$, ($k \neq l$, $k, l = 1, ..., n$), akkor a fenti reláció megfelel a

$$p_{kk}^{(i)} + 2p_{kl}^{(i)} + p_{ll}^{(i)} \geq p_{kk}^{(i+1)} + 2p_{kl}^{(i+1)} + p_{ll}^{(i+1)} > 0$$

összefüggésnek, amiből - a $\left\{p_{kk}^{(i)}\right\}$, $\left\{p_{ll}^{(i)}\right\}$ konvergenciáját is figyelembe véve - következik a $\left\{p_{kl}^{(i)}\right\}_{i=1}^{\infty}$ sorozat konvergenciája. tehát a $\{P_i\}_{i=1}^{\infty}$ mátrixsorozat, és vele együtt a $\{K_i\}_{i=1}^{\infty}$ mátrixsorozat is konvergens. Legyen a határérték $P$, illetve $K$. Világos, hogy $P$ szimmetrikus és pozitív szemidefinit, és a $(P, K)$ pár eleget tesz az (5.16) algebrai Riccati-egyenletnek. Az 5.3. Lemma szerint a $P$ invertálható, tehát pozitív definit is. Végül az 5.4. Lemmából következik, hogy az $(A - BK)$ stabilis mátrix. □

A diszkrét idejű feladat megoldását az alábbi tétel adja, amelyet nem bizonyítunk.

5.7. Tétel. (diszkrét idejű feladat). *Tegyük fel, hogy az (5.13), (5.15) feladatban szereplő mátrixokra a feladat megfogalmazásában szereplő kikötéseken túlmenően az 5.1. és 5.2. Feltétel is teljesül. Ekkor az*

$$A^T PA - P + Q - A^T PB \left(B^T PB + R\right)^{-1} B^T PA = 0$$

*(diszkrét idejű) algebrai Riccati-egyenletnek létezik egyetlen pozitív definit szimmetrikus $P$ megoldása. Az (5.13), (5.15) feladatra*

$$V(x) = x^T Px$$

*a Bellman függvény, a*

$$k(x) = -\left(B^T PB + R\right)^{-1} B^T PAx$$

*függvénnyel meghatározott, $(0, x_0)$-ból induló visszacsatolt vezérlés az egyértelműen meghatározott optimális vezérlés. Az eredményül kapott*

$$x(t+1) = (A - BK)\, x(t)$$

*visszacsatolt rendszer a $K := \left(B^T PB + R\right)^{-1} B^T PA$ mátrixszal aszimptotikusan stabilis.*

## 5.4. A csúszó időhorizont módszer

*„Model predictive control is the only advanced control technology that has made substantial impact on industrial control problems."*

D.Q. Mayne, European J. Control, 2001

Ebben a pontban egy rövid áttekintést adunk egy, rendszerek stabilizálására szolgáló módszerről, ami kb. az utolsó 20 évben alakult ki, és napjainkban is intenzív kutatás tárgya. Ezt a módszert szokás csúszó időhorizont módszernek vagy „model pedictive control"-ak is nevezni. Az előzőekben láttuk, hogy egy végtelen időhorizonton tekintett megfelelő optimális irányítási feladat megoldása lehetőséget ad stabilizáló visszacsatolás kiszámítására. A gyakorlati megvalósítás során azonban több nehézség is felmerülhet:

Nemlineáris rendszerek esetén a stacionárius HJB egyenletet kellett megoldani, ami egy nemlineáris parciális differenciálegyenlet. Ennek megoldása (még közelítő numerikus eljárással is) nehéz, sőt a sima megoldás létezése is problematikus.

Lineáris időinvariáns rendszerek esetén az LQ feladat megoldása teljesen rutin jellegű, ha az $\mathcal{U} = \mathbb{R}^m$, de nem alkalmazható, ha $\mathcal{U}$ valódi részhalmaza $\mathbb{R}^m$-nek. A nehézségek fokozottan jelentkeznek, ha a rendszer nemlineáris, és $\mathcal{X} \subset \mathbb{R}^n$, $\mathcal{U} \subset \mathbb{R}^m$ valódi részhalmazok. A csúszó időhorizont módszer annak köszönheti széleskörű alkalmazását, hogy képes az állapotra és a vezérlésre vonatkozó korlátozások kezelésére, ami a gyakorlatban nagyon fontos.

Gyakorlati alkalmazás szempontjából szintén nehezebb a dolgunk, ha a rendszer lineáris ugyan, de az együtthatók időtől függőek.

A csúszó időhorizont módszer (erre az NMPC betűszóval szoktak hivatkozni, ami a Nonlinear Model Predictiv Control rövidítése) lényege abban áll, hogy egy darab végtelen időintervallumon tekintett optimalizálási feladat helyett véges időintervallumon tekintett optimalizálási feladatok egy *sorozatát* oldjuk meg.

Az alapgondolathoz az ötletet az „emberi színjáték" adja, amelynek szereplői a következők:

- cél,
- korlátok,
- előre megtervezett optimális stratégia,
- tervezési időhorizont ($T_p$),
- lépésköz, mielőtt a dolgokat felülvizsgálnánk, vagyis egy kontroll horizont ($T_c$).

Fogalmazzuk ezt meg matematikai terminológiával!

Tekintsük az alábbi rendszert:

$$\dot{x}(t) = f(x(t), u(t)), \quad x(0) = x_0, \quad t \in [0, \infty) \subset \mathbb{R} \tag{5.28}$$

vagy

$$x(t+1) = f(x(t), u(t)), \quad x(0) = x_0, \quad t \in [0, \infty) \cap \mathbb{Z} \tag{5.29}$$

ahol $f : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \mapsto \mathbb{R}^n$ és $f(0, 0) = 0$.

$$x(t) \in \mathcal{X}, \quad u(t) \in \mathcal{U}, \quad t \geq 0, \tag{5.30}$$

$$0 \in int\,\mathcal{X}, \quad 0 \in int\mathcal{U}.$$

Itt $int\mathcal{Y}$ az $\mathcal{Y}$ belső pontjainak halmazát jelöli.

A korábbiakhoz hasonlóan az (5.28) vagy (5.29) egyenlet egy adott $u(.)$ megengedett vezérléshez és $x(t_0) = x_0$ kezdeti feltételhez tartozó megoldását jelölje $\xi(.) = x(.; t_0, x_0, u)$. Tekintsük a

$$J(t_0, t_1, u, x_0) = G(\xi(t_1)) + \mathcal{Q}(t_0, t_1, u, x_0), \tag{5.31}$$

$$\mathcal{Q}(t_0, t_1, u, x_0) = \int_{t_0}^{t_1} f_0\left(\xi(t), u\left(t\right)\right) dt \tag{5.32}$$

$$\mathcal{Q}(t_0, t_1, u, x_0) = \sum_{t=t_0}^{t_1-1} f_0\left(\xi(t), u\left(t\right)\right) \tag{5.33}$$

célfüggvényt, ahol

$$f_0 : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \mapsto \mathbb{R}_+\,, \qquad G : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}_+\,,$$

$f_0(0, 0) = 0$, $G(0) = 0$, továbbá van olyan $\alpha_1 \in \mathcal{K}_\infty$, hogy $f_0(x, u) > \alpha_1(\|x\|)$ minden $(x, u) \neq (0, 0)$ esetén (ez a kikötés enyhíthető), és az összes előforduló függvények elegendően simák. Legyen $\mathcal{M}_1 = \mathcal{X}_f \subset \mathbb{R}^n$ adott halmaz, amelyre $0 \in \mathcal{X}_f$, és vegyük hozzá a feladat kitűzéséhez a

$$\xi(t_1) \in \mathcal{X}_f \tag{5.34}$$

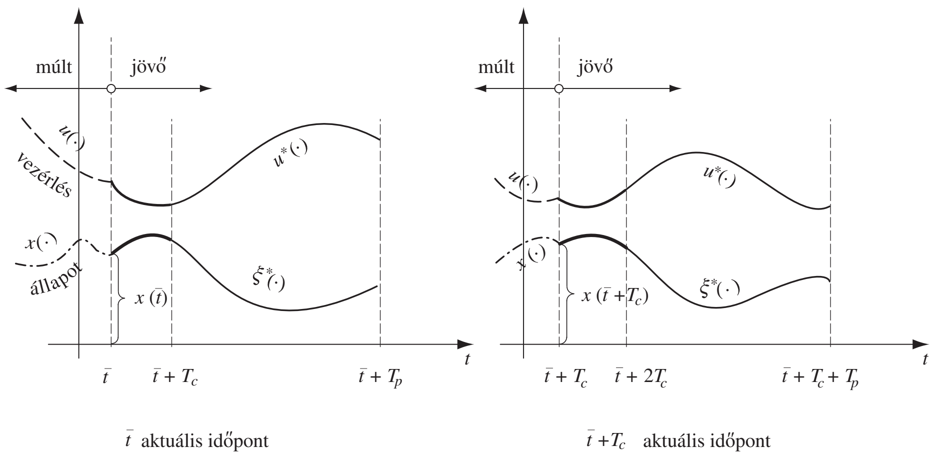
végállapotra vonatkozó korlátozást.

Hivatkozzunk $P\left(t_0, t_1, x_0\right)$ problémaként a $J$ célfüggvény (5.28), illetve (5.29), valamint (5.30) és (5.34) feltételek melletti minimalizálásának feladatára.

A csúszó időhorizont módszer esetén ilyen feladatok sorozatát fogjuk megoldani a következő módon.

Válasszunk egy $T_p$ tervezési időhorizontot és $T_c$ lépésközt.
Legyen $\bar{t}$ az aktuális időpont, $\overline{x} = x(\bar{t})$ az aktuális állapot.
Megoldandó a $P(\bar{t}, \bar{t} + T_p, \overline{x})$ probléma.
Tegyük fel, hogy megoldásként az $u^* : [\bar{t}, \bar{t} + T_p] \to \mathcal{U}$ optimális vezérlést kapjuk.
Alkalmazzuk a $[\bar{t}, \bar{t} + T_c)$ intervallumon az $u^*(.)$ vezérlést.
Az eredmény: $x^*(\bar{t} + T_c; \bar{t}, \overline{x}, u^*) = \xi^*(\bar{t} + T_c)$
Ismételjük meg az eljárást $\overline{x} = \xi^*(\bar{t} + T_c)$ kezdőállapottal.

Az algoritmust sematikusan az 5.3 ábra szemlélteti.




5.3. ábra. Csúszó időhorizont módszer sémája

Minthogy a $P(\bar{t}, \bar{t} + T_p, \overline{x})$ probléma időinvariáns, helyette minden egyes $\bar{t}$ időpillanatban tekinthetjük a $P(0, T_p, \overline{x})$ problémát. Észrevesszük azt is, hogy $u^*(.)$ függ az $x(\bar{t})$-tól, így az alkalmazott vezérlés (tágabb értelemben) egy visszacsatolt vezérlés.

Ahhoz, hogy ez az eljárás olyan rendszert eredményezzen, ami (legalább lokálisan) aszimptotikusan stabilis az origó körül (röviden (LAS)), a feladat paraméterei nem választhatók akárhogy. Mit tudunk befolyásolni? A $T_p$ és $T_c$ időtartamok mellett a

$\mathcal{X}_f$ - végállapot korlátozást,
$G$ - megválasztható függvényt,
$f_0$ - megválasztható függvényt.

A választástól függően a csúszó időhorizont módszer különböző változataihoz jutunk.

Ismerkedjünk meg először a diszkrét idejű esetre a módszer egy változatával!

### Bolza-típusú csúszó időhorizont módszer diszkrét idejű rendszerekre

Foglalkozzunk az (5.29) és az (5.31), (5.33) összefüggésekkel meghatározott feladattal.

Válasszuk a $T_c = 1$ értéket a kontroll horizontnak és a $T_p = T \in \mathbb{N}$ egész számot tervezési horizontnak. A rögzített $T > 0$ mellett a $\bar{t}$ aktuális időpillanatban az $\bar{x} = x(\bar{t})$ állapotra megoldjuk a

$$P(0, T, \bar{x})$$

problémát, amelynek a megoldására a következő jelölést alkalmazzuk: $u^*(.) = \hat{u}(.;\bar{x})$; legyen

$$u(\bar{t}) = \hat{u}(0;\bar{x}) \qquad \text{és} \qquad v(\bar{x}) = \hat{u}(0;\bar{x}).$$

Eredményül kapjuk az

$$x(t+1) = f(x(t), v(x(t))), \qquad t \in \mathbb{N} \tag{5.35}$$

zárt rendszert. Az $f_0$ függvényre tett kikötésből következik, hogy $v(0) = 0$, így az origó az (5.35) egyensúlyi helyzete.

A feladat megfogalmazásában szereplő kikötéseken túlmenően elvárjuk az alábbi feltételek teljesülését.

**5.3. Feltétel.** Létezik olyan $\eta > 0$, hogy

$$\mathcal{G}_\eta = \{x \in \mathbb{R}^n : \ G(x) < \eta\} \subset \mathcal{X},$$

és minden $x \in \mathcal{G}_\eta$ esetén van olyan $\kappa(x) \in \mathcal{U}$, hogy

$$G(x) \geq f_0(x, \kappa(x)) + G(f(x, \kappa(x))).$$

Válasszuk a végállapotok korlátozó halmazát

$$\mathcal{X}_f = \mathcal{G}_\eta$$

összefüggés szerint!

*5.3. Megjegyzés.* Az 5.3. Feltétel miatt a $\mathcal{X}_f = \mathcal{G}_\eta$ halmaz pozitívan invariáns, hiszen ha $x \in \mathcal{G}_\eta$, akkor $f(x, \kappa(x)) \in \mathcal{G}_\eta$, mivel $f_0(x, \kappa(x)) \geq 0$ minden $x \in \mathcal{G}_\eta$-ra teljesül.

5.5. DEFINÍCIÓ. A $[t_1, t_2)$ intervallumon az $x$ állapothoz eredményes vezérlések halmazát az alábbi egyenlőséggel értelmezzük:

$$\Delta_e(t_1, t_2, x) = \{u(.) : \ u(i) \in \mathcal{U}, \ \xi(i) \in \mathcal{X}, \ \text{és } \xi(t_2) \in \mathcal{G}_\eta\}.$$

Jelölje $\mathcal{N}(T)$ a

$$\mathcal{N}(T) = \{x \in \mathcal{X} : \ \Delta_e(0, T, x) \neq \emptyset\}$$

halmazt. Az 5.3. Megjegyzés alapján világos, hogy $\mathcal{N}(T) \supset \mathcal{G}_\eta$.

5.4. Feltétel. Minden $x \in \mathcal{N}(T)$ kezdőállapot esetén a $P(0, T, x)$ problémának létezik egyetlen $\hat{u}(., x)$ megoldása, és a $\hat{V}(x) = J(0, T, x, \hat{u})$ függvényhez létezik egy olyan $\alpha_2 \in \mathcal{K}_\infty$, hogy $\hat{V}(x) \leq \alpha_2(\|x\|)$.

5.8. TÉTEL. *Tegyük fel, hogy az 5.3. és 5.4. Feltétel teljesül. Ekkor az (5.35) egyenlet $x(t) \equiv 0$ megoldása lokálisan aszimptotikusan stabilis egy olyan $\mathcal{A}$ attraktivitási tartománnyal, amelyre $\mathcal{A} \supseteq \mathcal{N}(T) \supset \mathcal{G}_\eta$.*

*Bizonyítás.* Lássuk be először, hogy az $\mathcal{N}(T)$ halmaz pozitívan invariáns. Legyen $x \in \mathcal{N}(T)$, és $\{\hat{u}(0, x), ..., \hat{u}(T-1, x)\}$ a megfelelő optimális vezérléssorozat, $\hat{\xi}(.)$ a megfelelő optimális trajektória. Mivel $v(x) = \hat{u}(0, x)$, az $\hat{\xi}(1) = f(x, v(x))$ egyenlőség is igaz. Mivel pedig $\hat{\xi}(T) \in \mathcal{G}_\eta$ és az 5.3. Feltétel teljesül, az $\tilde{u}(.)$ vezérlés, amelyet az $\tilde{u}(t) = \hat{u}(t+1, x)$, ha $t = 0, ..., T-2$, és $\tilde{u}(T-1) = \kappa(\hat{\xi}(T))$ összefüggések definiálnak, eredményes lesz, tehát $\tilde{u} \in \Delta_e(0, T, \hat{\xi}(1))$, így $f(x, v(x)) \in \mathcal{N}(T)$.

Mutassuk meg, hogy a $\hat{V}$ függvény eleget tesz az 5.3. Tétel $(b)$ feltételének. Mivel $\hat{V}(x) = J(0, T, x, \hat{u}) \geq f_0(x, \hat{u}(0, x)) \geq \alpha_1(\|x\|)$, az (5.4) bal oldali egyenlőtlensége teljesül. Az 5.4. Feltételben kikötöttük a jobb oldali egyenlőtlenség teljesülését is, így csak azt kell belátni, hogy egy alkalmas $\alpha_3 \in \mathcal{K}$ függvénnyel a

$$\hat{V}(f(x, v(x)) - \hat{V}(x) \leq \alpha_3(\|x\|) \tag{5.36}$$

egyenlőség is teljesül. Mivel $\tilde{u} \in \Delta_e(0, T, \hat{\xi}(1))$, ezért

$$\begin{aligned}\hat{V}(f(x, v(x))) \le J(0, T, \hat{\xi}(1), \tilde{u}(.)) &= \\ &= \sum_{i=0}^{T-2} f_0(\hat{\xi}(i+1), \hat{u}(i+1, x)) + f_0(\hat{\xi}(T), \kappa(\hat{\xi}(T))) + \\ &\quad + G(f(\hat{\xi}(T), \kappa(\hat{\xi}(T))) \pm G(\hat{\xi}(T)) \pm f_0(x, \hat{u}(0, x)) = \\ &= \hat{V}(x) + G(f(\hat{\xi}(T), \kappa(\hat{\xi}(T))) - G(\hat{\xi}(T)) + \\ &\quad + f_0(\hat{\xi}(T), \kappa(\hat{\xi}(T))) - f_0(x, \hat{u}(0, x)).\end{aligned}$$

Átrendezve és felhasználva az 5.3. Feltételt ($x$ helyett $\hat{\xi}(T)$-re), azt kapjuk, hogy

$$\hat{V}(f(x, v(x)) - \hat{V}(x) \le -f_0(x, \hat{u}(0, x)),$$

amiből látható, hogy $\alpha_3 = \alpha_1$ választással az (5.36) teljesül. Ez azt jelenti, hogy $\hat{V}$ Lyapunov függvény $x^+ = f(x, v(x))$-re egy $\mathcal{A} \supset \mathcal{N}(T)$ tartományon. □

**Bolza-típusú csúszó időhorizont módszer folytonos idejű rendszerekre**

Foglalkozzunk az (5.28) és az (5.31), (5.32) összefüggések által meghatározott feladattal.

Válasszuk a $T_c = 0$ értéket a kontroll horizontnak. Ez annak az idealizált esetnek felel meg, amikor minden egyes időpillatban újra kiszámoljuk az optimális vezérlést és annak a kezdő időpillanathoz tartozó értékét alkalmazzuk. A $T_p = T \in \mathbb{R}$ számot pedig tekintsük a tervezési horizontnak. A rögzített $T > 0$ mellett a $\bar{t}$ aktuális időpillanatban az $\overline{x} = x(\bar{t})$ állapotra megoldjuk a

$$P(0, T, \overline{x})$$

problémát, amelynek a megoldására a következő jelölést alkalmazzuk: $u^*(.) = \hat{u}(.; \overline{x})$; legyen

$$u(\bar{t}) = \hat{u}(0; \overline{x}) \quad \text{és} \quad v(\overline{x}) = \hat{u}(0; \overline{x}).$$

Eredményül kapjuk az

$$\dot{x}(t) = f(x(t), v(x(t))) \tag{5.37}$$

zárt rendszert. Az $f_0$-ra tett kikötésből most is következik, hogy az origó az (5.37) egyensúlyi helyzete.

A $G$, $f_0$ és $f$ függvényekről feltesszük, hogy kielégítik az alábbi feltételt.

5.5. Feltétel. Létezik olyan $\eta > 0$, hogy

$$\mathcal{G}_\eta = \{x \in \mathbb{R}^n : \; G(x) < \eta\} \subset \mathcal{X},$$

és minden $x \in \mathcal{G}_\eta$ esetén van olyan $\kappa(x) \in \mathcal{U}$ , hogy

$$0 \geq \{f_0(x, \kappa(x)) + \nabla G(x) f(x, \kappa(x))\}\,.$$

Válasszuk a végállapotok korlátozó halmazát $\mathcal{X}_f = \mathcal{G}_\eta$ összefüggés szerint!

5.6. DEFINÍCIÓ. A $[t_1, t_2)$ intervallumon az $x$ állapothoz eredményes vezérlések halmazát az alábbi egyenlőséggel értelmezzük:

$$\Delta_e(t_1, t_2, x) = \{u(.) : \; u(t) \in \mathcal{U}, \; \xi(t) \in \mathcal{X}, \; \text{és } \xi(t_2) \in \mathcal{G}_\eta\}.$$

Jelölje $\mathcal{N}(T)$ a

$$\mathcal{N}(T) = \{x \in \mathcal{X} : \; \Delta_e(0, T, x) \neq \emptyset\}$$

halmazt.

5.6. Feltétel. Minden $x \in \mathcal{N}(T)$ esetén a $P(0, T, x)$ problémának létezik egyetlen $\hat{u}(., x)$ optimális megoldása, a probléma $V : [0, T] \times \mathcal{N}(T) \to \mathbb{R}$ Bellman függvénye folytonosan differenciálható, az $\hat{u}(., x)$ jobbról folytonos a $t = 0$-ban és $\hat{u}(0, .)$ szintén folytonos.

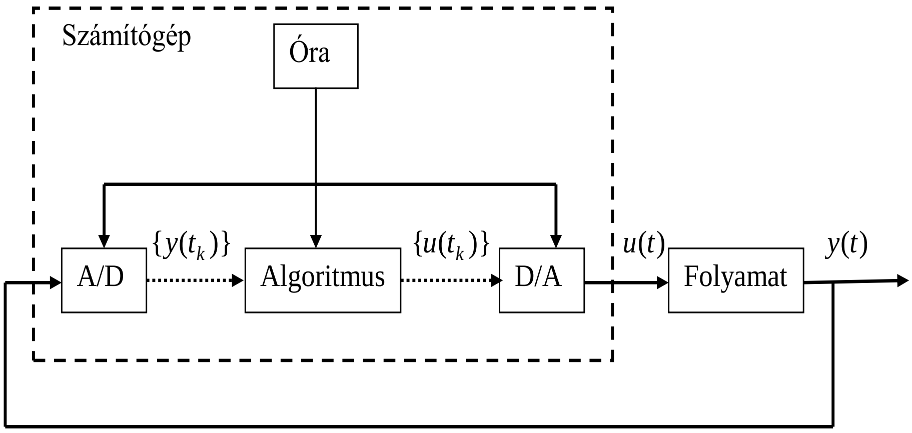
5.9. TÉTEL. *Tegyük fel, hogy az 5.5.–5.6. Feltételek teljesülnek. Ekkor az (5.37) egyenlet $x(t) \equiv 0$ megoldása lokálisan aszimptotikusan stabilis egy olyan $\mathcal{A}$ attraktivitási tartománnyal, amelyre egy alkalmas $\eta' > 0$-val $\mathcal{A} \supset \{x : \; V(0, x) < \eta'\} \supset \mathcal{G}_\eta$.*

*5.4. Megjegyzés.* Globális aszimptoikus stabilitás biztosítása is lehetséges további feltételek kikötésével.

*5.5. Megjegyzés.* A módszernek számos különböző változata létezik, amelyek az optimalizálási feladat adatainak megválasztásában különböznek.

## 5.5. Mintavételezett rendszerek

Mintavételezett rendszerek vizsgálatát az indokolja, hogy a vezérlések kiszámítása és implementálása az esetek igen nagy részében számítógép alkalmazásával történik. Ilyenkor a valóságos folytonos idejű rendszerre tipikusan egy diszkrét idejű visszacsatolási algoritmust alkalmazunk. Ha egy folytonos idejű rendszerre diszkrét idejű környezetben működő digitális vezérlést alkamazunk, akkor mintavételezett irányítási rendszerről beszélhetünk. Ilyen rendszerek általános sémáját mutatja be az 5.4 ábra. Ezen az ábrán a folyamat outputja az $y(t)$ *folytonos idejű* jel. Ezt a jelet egy (A/D) analóg-digitális konverter alakítja át digitális jellé a $t_k$ mintavételezési időpontban. Az irányítási algoritmus az $\{y(t_k)\}$ átalakított jelből kiszámítja a megfelelő $\{u(t_k)\}$ vezérlést, amelyet egy (D/A) digitális-analóg konverter alakít folytonos idejű jellé. Ennek legegyszerűbb módja az, hogy a vezérlést konstansnak tartja a konverziós időpontok között. Így azt mondhatjuk, hogy a mintavételezési időpontok között a rendszer program szerinti (vagyis open-loop) vezérléssel működik, hiszen a vezérlés konstans lévén, független az éppen aktuális $y(t)$ jeltől. A számítógép szekvenciálisan dolgozza fel a beérkező jeleket. Természetesen minden egyes művelet bizonyos időt igényel, amit a tervezésnél tekintetbe kell venni.




5.4. ábra. Mintavételezett rendszerek általános konfigurációja.

Jelölje

$$0 = t_0 < t_1 < ... < t_k < ...$$

mintavételezési időpontokat, ahol feltételezzük, hogy egy $\tau_c > 0$ adott értékkel $t_k = k\tau_c$, és tekintsük az

$$u(t) = u_k, \quad \text{ha} \quad t \in [t_k, t_{k+1}), \; (k = 0, 1, ...)$$

vezérlést.

Az $u_k$ kiszámítására többféle módszer ismeretes.

a.) **Emuláció**. Egyik lehetőség az, hogy a folytonos idejű modell alapján folytonos idejű visszacsatolást tervezünk, amelyet a diszkrét időpontokban végrehajtott mérések alapján kiértékelünk. A módszer sikerességének alapvető feltétele, hogy a $\tau_c$ mintavételezési periódust tetszőlegesen kicsinek tudjuk választani. Ebből ered a módszer egyik hátránya: a hardverfeltételek gyakran nem teszik lehetővé, hogy a $\tau_c$-t elegendően kicsinek választhassuk, ami a stabilitás elvesztéséhez vezethet. További problémát okozhat, hogy egy nemlineáris modell esetén a pontos megoldást nem ismerjük, így a közelítés hibája olyan perturbációt okoz, amire már a tervezésnek tekintettel kell lennie.

b.) **Direkt diszkrét idejű tervezés.** A másik lehetőség digitális vezérlések tervezésére a folytonos idejű folyamatnak diszkrét idejű modellel történő helyettesítése. A tapasztalat azt mutatja, hogy a diszkrét idejű modell direkt alkalmazása a vezérlés tervezésénél gyakran jobb eredményt szolgáltat, mint az emuláció. Ennek a módszernek is hátránya azonban, hogy nem veszi tekintetbe a valós folytonos idejű folyamat és a diszkrét idejű modell közötti különbséget.

c.) **Diszkrét idejű tervezés közelítő diszkrét idejű modell alapján.** Nemlineáris rendszerek esetén a pontos diszkrét idejű modell kiszámításához egy közönséges differenciálegyenlethez tartozó kezdetiérték feladatot kell analitikusan megoldani, ami az esetek döntő többségében nem lehetséges. Helyette valamilyen közelítő módszer segítségével tudunk egy közelítő megoldást megkeresni. Az ilyen közelítő módszerekkel szemben alapvető követelmény, hogy a számítási ráfordítás növelésével a pontos megoldáshoz konvergáló közelítéseket kapjunk. Ezzel a tulajdonsággal a gyakorlatban alkalmazott módszerek rendelkeznek. Előfordulhat azonban, hogy egy konvergens numerikus módszerrel származtatott közelítő diszkrét idejű modellhez kiszámított stabilizáló vezérlés az eredeti, folytonos idejű modellt destabilizálja. Mielőtt ennek pontosabb kifejtésére rátérnénk, beszéljünk egy keveset a közönséges differenciálegyenletek (KDE) kezdetiértékfeladatainak numerikus megoldásáról.

### 5.5.1. KDE kezdetiérték feladatainak numerikus megoldása

Tekintsük az

$$\dot{x}(t) = f(t, x(t)), \quad x(t_0) = x_0, \quad t \in [t_0, T], \quad f : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n \qquad (5.38)$$

feladatot, és legyen $t_0 < t_1 < ... < t_M = T$ a $[t_0, T]$ intervallum egy egyenletes felosztása, vagyis legyen $h = \frac{T-t_0}{M}$, és $t_i = t_0 + ih$. Az (5.38) közelítő numerikus megoldása alatt egy olyan $\{y_i\}_{i=0}^{M}$ vektorsorozatot értünk, amelytől azt várjuk, hogy az $x(t_i) - y_i$ hiba kicsi legyen. Hogyan lehet ilyen $y_i$ értékeket kiszámítani? A legegyszerűbb ötletet az adja, hogy a differenciálhányadost egy differenciahányadossal közelítjük:

$$\frac{x(t_{i+1}) - x(t_i)}{h} \sim \dot{x}(t_i) = f(t_i, x(t_i)).$$

Ha itt a közelítő egyenlőség helyett egyenlőséget, $x(t_j)$ helyett pedig $y_j$-t veszünk, átrendezéssel máris eljutunk a jól ismert explicit Euler módszer képletéhez:

$$y_{i+1} = y_i + hf(t_i, y_i).$$

Mivel $x(t_0) = x_0$ adott, $y_0 = x_0$ kiindulással a fenti képlet megadja az $y_1, y_2, ..., y_M$ kiszámítási szabályát. Bebizonyítható, hogy ha $f$ lokális Lipschitz feltételnek tesz eleget, akkor

$$\lim_{M\to\infty} \max_{0\le i\le M} \|x(t_i) - y_i\| = 0.$$

Megjegyezzük, hogy ismeretesek az Euler módszernél lényegesen hatékonyabb numerikus eljárások, amelyekre igaz az, hogy az osztópontok számának növelésével a pontos megoldás értékeihez konvergáló közelítő sorozatot szolgáltatnak. Az érdeklődő olvasó hasznos ismereteket találhat például a [12], vagy [7] könyvekben.

### 5.5.2. Egzakt és közelítő diszkrét idejű modell meghatározása

Legyen adott a $\tau_c > 0$ paraméter és egy tetszőleges, szakaszonként konstans $u(.)$ vezérlés, amelyre

$$u(t) = u_k, \quad t \in [k\tau_c, (k+1)\tau_c).$$

Az $x_0$ értékből kiindulva, tekintsük az

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = f(x(t), u_k), & t \in [k\tau_c, (k+1)\tau_c] \\ x(k\tau_c) = x_k, & k = 0, 1, ... \end{cases} \qquad (5.39)$$

kezdetiérték feladatot. Megfelelő feltételek mellett ennek létezik egyetlen megoldása, ami az egész $[k\tau_c, (k+1)\tau_c]$ intervallumon értelmezve van: $\xi(t) = x(t; k\tau_c, x_k, u_k)$. Az

$$F^E_{\tau_c}(x_k, u_k) = \xi((k+1)\tau_c)$$

definícióval az

$$x_{k+1} = F^E_{\tau_c}(x_k, u_k), \quad x_0 \text{ adott}, \quad k = 0, 1, ... \tag{5.40}$$

egzakt diszkrét idejű modellhez jutunk.

Az (5.39) kezdetiérték feladat megoldására alkalmazzunk egy $h = \tau_c/M$ lépésközű numerikus eljárást, amely az $y^k_0 = x_k$ értékből kiindulva kiszámítja az $y^k_1, ..., y^k_M$, közelítő értékeket. Az

$$F^A_{\tau_c,h}(x_k, u_k) = y^k_M$$

definícióval megkapjuk az

$$x_{k+1} = F^A_{\tau_c,h}(x_k, u_k), \quad x_0 \text{ adott}, \quad k = 0, 1, ... \tag{5.41}$$

közelítő diszkrét idejű modellt. Ha $M = 1$, akkor persze $h = \tau_c$, így az (5.41) egyetlen paraméterrel jellemezhető, ezért egyszerűbben leírható. Megjegyezzük azonban, hogy a 2 független paraméter megléte elméleti szempontból lényegesen könnyebben vizsgálható rendszert eredményez.

A közelítő diszkrét idejű rendszer felhasználásával különböző célból és különböző módszerekkel lehet vezérléseket kiszámítani. Mi most csak arra korlátozzuk a figyelmünket, hogy a csúszó időhorizont módszerre egy olyan algoritmust ismertessünk, ami tekintetbe veszi a mérések és számítások okozta időkésleltetést, valamint a modell közelítéséből eredő hibát.

Azt gondolhatnánk, hogy az (5.41) modelltől elegendő megkövetelni, hogy az (5.40) és az (5.41) joboldalának eltérése, vagyis a $\left\| F^E_{\tau_c}(x, u) - F^A_{\tau_c,h}(x, u) \right\|$ mennyiség kicsi legyen, és akkor az (5.41) alapján kiszámolt vezérlés „jó” lesz az (5.39) rendszerhez is. Hogy ez nem így van, mutatja az alábbi példa.

*5.1. Példa.* Tekintsük az

$$\dot{x}_1 = x_2, \quad \dot{x}_2 = u$$

rendszert az $u(t) = u_k$, ha $t \in [k\tau_c, (k+1)\tau_c)$, szakaszonként konstans vezérléssel. Egyszerű számolással ellenőrizhetjük, hogy az egzakt diszkrét idejű modell az alábbi:

$$\begin{aligned} x_{1,k+1} &= x_{1,k} + \tau_c x_{2,k} + \frac{\tau_c^2}{2} u_k, \\ x_{2,k+1} &= x_{2,k} + \tau_c u_k. \end{aligned} \tag{5.42}$$

Az Euler módszerrel számolt közelítő diszkrét idejű modell $h = \tau_c$ mellett az

$$\begin{aligned} x_{1,k+1} &= x_{1,k} + \tau_c x_{2,k}, \\ x_{2,k+1} &= x_{2,k} + \tau_c u_k \end{aligned} \tag{5.43}$$

alakban adható meg. Számoljunk ki az (5.43) rendszerhez egy stabilizáló visszacsatolást a csúszó időhorizont módszerrel, az alábbi célfüggvény figyelembe vételével:

$$J_{\tau_c}(x_0, u(.)) = x_2^T G x_2 + \sum_{k=0}^{1} (x_k^T Q_{\tau_c} x_k + u_k^T R_{\tau_c} u_k),$$

ahol $G = 0,\ R_{\tau_c} = \tau_c^2,\ Q_{\tau_c} = \begin{pmatrix} 17/\tau_c^2 & 4/\tau_c \\ 4/\tau_c & 1 \end{pmatrix}$. Ez a

$$v_{\tau_c}^A(x_k) = -\frac{2}{\tau_c^2} x_{1,k} - \frac{5}{2\tau_c} x_{2,k} \tag{5.44}$$

visszacsatolást szolgáltatja, amely az

$$\begin{aligned} x_{1,k+1} &= x_{1,k} + \tau_c x_{2,k}, \\ x_{2,k+1} &= -\frac{2}{\tau_c} x_{1,k} - \frac{3}{2} x_{2,k} \end{aligned}$$

közelítő zárt rendszert eredményezi. Az együtthatómátrix sajátértékeire $|\lambda_1| = |\lambda_2| = \sqrt{2}/2 < 1$, tehát a közelítő zárt rendszer aszimptotikusan stablis az origó körül a $\tau_c$ *paraméter választásától függetlenül.* Ugyanakkor ez a visszacsatolás az

$$\begin{aligned} x_{1,k+1} &= -\frac{\tau_c}{4} x_{2,k}, \\ x_{2,k+1} &= -\frac{2}{\tau_c} x_{1,k} - \frac{3}{2} x_{2,k} \end{aligned}$$

egzakt zárt rendszert adja, amelynek az egyik pólusa $-1,78078$ *minden* $\tau_c$ *esetén*, így ez a rendszer nem stabilis.

Itt a bajt az okozta, hogy az (5.44) nem egyenletesen korlátos $\tau_c$-ben, hanem tetszőleges rögzített $x \neq 0$ esetén $\left|v_{\tau_c}^A(x)\right| \to \infty$, ha $\tau_c \to 0$.

Ez a példa arra figyelmeztet bennünket, hogy megfelelő feltételek kikötésével biztosítani kell a hasonló helyzetek elkerülését. Az ezzel kapcsolatos technikai részleteket mellőzzük, helyette egy olyan algoritmust ismertetünk, ami - megfelelő feltételek mellett - stabilis rendszert eredményez még számítások okozta késleltetések esetén is.

### 5.5.3. Többszörös mintavételezett rendszerek késleltetéssel

Az alábbiakban két dolog figyelembevételére készülünk. Az egyik az, hogy hogyan vehető tekintetbe az a pozitív időtartam, ami alatt az $y(t_k)$ outputból az (A/D) konverzió, bizonyos számítások, valamint a (D/A) konverzió után megkapjuk az alkalmazandó $u(.)$ vezérlést. Világos, hogy a valóságban a $t_k$ időpontbeli állapot a visszacsatoláson keresztül, csak a fenti késés után hat a rendszerre. Egyszerű számpéldával megmutatható, hogy a késleltetés nem kellően gondos kezelése instabil zárt rendszert eredményezhet még akkor is, ha ez a késleltetés tetszőlegesen kicsi. A másik dolog, amit figyelembe szeretnénk venni, az az, hogy a mérések gyakorisága és a vezérlésben tekintett mintavételezési periódus nem feltétlenül kell, hogy megegyezzék, hanem lehetséges, hogy az előző az utóbbinak többszöröse.

Tegyük fel, hogy az állapot mérése a $j\tau^m, \quad j = 0, 1, ...$ időpontokban történik, és legyen

$$y_j = x(j\tau^m), \quad j = 0, 1, ...$$

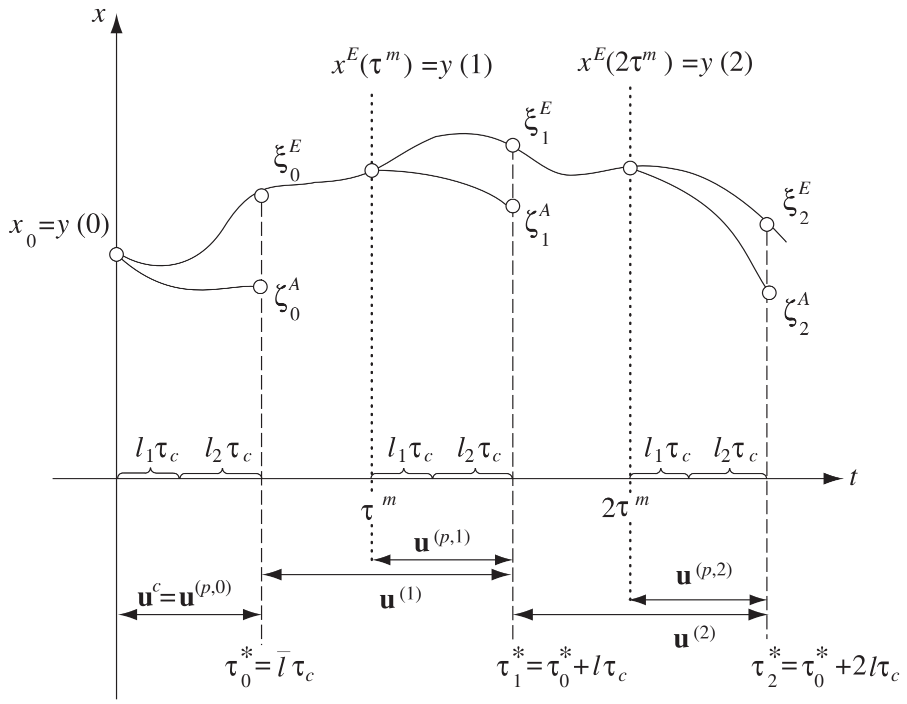
a mérés eredménye, ahol $\tau^m$ jelöli a mérési periódust. A korábbiakhoz hasonlóan jelöljük $\tau_c$-vel azon szakaszok hosszát, amelyeken a vezérlés konstans értékű, és tegyük fel, hogy

$$\tau^m = \ell\tau_c$$

ahol $\ell > 0$ egész szám. Tegyük fel továbbá, hogy az $y_j$ mérési érték $\ell_1\tau_c$ idő múltán lesz elérhető a számoláshoz, ami viszont $\ell_2\tau_c$ időt vesz igénybe, ahol $\ell_1$, $\ell_2$ nemnegatív egészek és $\ell \geq \ell_1 + \ell_2 =: \overline{\ell}$. Világos, hogy a $\left[0, \overline{\ell}\tau_c\right]$ időintervallumon csak egy előre meghatározott $\underline{\mathbf{u}}^c = \left\{u_0^c, u_1^c, ..., u_{\overline{\ell}-1}^c\right\}$ vezérlést tudunk alkalmazni (pl. az azonosan nulla vezérlést). A $j$-dik mérés alapján kiszámított „új" vezérlés csak a $j\tau^m + \overline{\ell}\tau_c$ időpont után áll rendelkezésre, így a $[j\tau^m, j\tau^m + \overline{\ell}\tau_c)$ intervallumon a „régi" vezérlést tudjuk csak alkalmazni. Minthogy az egzakt trajektóriát nem ismerjük, a $\xi_j^E$ egzakt állapot helyett a közelítő modellből becsült $\zeta_j^A$ közelítés alapján végezhetjük a vezérlés számítását.

A vezérlés kiszámítására az előző pontban megismert diszkrét idejű csúszó időhorizont módszert fogjuk alkalmazni egy megválasztandó $T_p = T \in \mathbb{N}$ diszkrét idejű tervezési időhorizonttal. A minimalizálási problémára $P_{\tau_c,h}^A(0, T, x_0^A)$ jelöléssel hivatkozunk, ahol az $x_0^A$ helyére az éppen alkalmazandó kezdőállapotot írjuk. Diszkrét idejű kontroll horizontnak az $\ell$ értéket fogjuk tekinteni, tehát most a $T_c := \ell$ választással élünk.

Vezessük be a $\tau_j^* := j\tau^m + \overline{\ell}\tau_c$ jelölést $j = 0, 1, ....$




5.5. ábra. Az algoritmus sémája.

Az algoritmus a következő.

*Algoritmus.*
Válasszunk egy $T$ (diszkrét) időhorizont hosszúságot, legyen $j=0$, $\tau_{-1}^*=0$, és legyen $\underline{\mathbf{u}}^{(0)}=\underline{\mathbf{u}}^{(p,0)}=\underline{\mathbf{u}}^{(c)}=\left\{u_0^c,...,u_{\bar{\ell}-1}^c\right\}$. Mérjük az $y(0)=x_0$ kezdőállapotot.

*j. lépés.*

1.) Alkalmazzuk az $\underline{\mathbf{u}}^{(j)}$ vezérlést az egzakt rendszerre a $\left[\tau_{j-1}^*,\tau_j^*\right]$ intervallumon.

2.) Számítsuk ki a közelítő diszkrét idejű modell alapján a $\tau_j^*$ időpontbeli állapot $\zeta_j^A=x^A(\bar{\ell};y(j),\underline{\mathbf{u}}^{(p,j)})$ becslését.

3.) Számítsuk ki a $P_{\tau_c,h}^A(0,T,\zeta_j^A)$ probléma $\underline{\mathbf{u}}^*=\left\{u_0^*,...,u_{T-1}^*\right\}$ optimális megoldását. Legyen $\underline{\mathbf{u}}^{(j+1)}=\left\{u_0^*,...,u_{\ell-1}^*\right\}$ és $\underline{\mathbf{u}}^{(p,j+1)}=\left\{u_{\ell-\bar{\ell}}^*,...,u_{\ell-1}^*\right\}$.

4.) Legyen $j=j+1$.

Az algoritmus sémája az 5.5 ábrán látható.

Bebizonyítható, hogy reálisan elvárható feltételek mellett a fenti algoritmus olyan rendszet szolgáltat, amely a $\xi_0^E$, $\zeta_0^A$ kezdőállapotokra vonatkozóan *praktikusan aszimptotikusan stabilis.* Ezt úgy kell érteni, hogy tetszőleges $r_0 > 0$ számhoz megadható olyan $h^* > 0$, hogy ha az approximációban használt $h$ lépésközre teljesül a $0 < h \leq h^*$ feltétel, akkor a szóban forgó rendszer az origó körüli $r_0$ sugarú gömb körül aszimptotikusan stabilis.

A feltételek pontos megfogalmazása és a bizonyítás meghaladja ennek a jegyzetnek a kereteit.

## 5.6. Feladatok a 5. fejezethez

*5.1. Feladat.* Igazoljuk, hogy a végtelen időintervallumon tekintett lineáris kvadratikus feladatra a (SHJB) egyenletből éppen az algebrai Riccati egyenletet kapjuk!

*5.2. Feladat.* Tekintsük az

$$\begin{aligned}
\dot{x}_1 &= -2x_1 + x_2 \\
\dot{x}_2 &= \phantom{-2}x_1 - 2x_2 \\
\dot{x}_3 &= \phantom{-2x_1 + {}} x_2 - 2x_3 + u \\
J(x_0, u) &= \int_0^\infty \{u^2(t) + 10x_1^2(t) - 4x_1(t)x_2(t) \\
&\quad -2x_1(t)x_3(t) + 9x_2^2(t) + 8x_2(t)x_3(t) + 21x_3^2(t)\}dt \longmapsto \min
\end{aligned}$$

feladatot!

a) Mutassuk meg, hogy a $K_1 = [0;\ 1;\ 3]$ mátrix megfelel a Kleinmann iteráció 0-dik lépésében!

b) Tegyünk egy lépést a Kleinmann iterációval a $P_1$ és a $K_2$ meghatározására!

*5.3. Feladat.* Tekintsük az

$$\begin{aligned}
\dot{x}_1 &= -2x_1 - x_2 \\
\dot{x}_2 &= \phantom{-}5x_1 + 2x_2 \phantom{{}+x_3} + u \\
\dot{x}_3 &= \phantom{-}5x_1 + 4x_2 + x_3 + u \\
J(x_0, u) &= \int_0^\infty \{u^2(t) + 15x_1^2(t) - 10x_1(t)x_2(t) \\
&\quad -20x_1(t)x_3(t) + 9x_2^2(t) + 4x_2(t)x_3(t) + 16x_3^2(t)\}dt \longmapsto \min
\end{aligned}$$

feladatot!

a) Mutassuk meg, hogy a $K_1 = [5;\ 3;\ 2]$, mátrix megfelel a Kleinmann iteráció 0-dik lépésében!

b) Tegyünk egy lépést a Kleinmann iterációval a $P_1$ és a $K_2$ meghatározására!

*5.4. Feladat.* Tekintsük az

$$\begin{aligned}
\dot{x}_1 &= -2x_1 + x_2, \qquad \dot{x}_2 = x_1 - 2x_2, \qquad \dot{x}_3 = x_2 - 2x_3 + u \\
J(x_0, u) &= \int_0^\infty \{u^2(t) + 10x_1^2(t) - 4x_1(t)x_2(t) - 2x_1(t)x_3(t) \\
&\quad + 9x_2^2(t) + 8x_2(t)x_3(t) + 21x_3^2(t)\}dt \longmapsto \min
\end{aligned}$$

feladatot! Mutassuk meg, hogy a célfüggvény optimális értéke

$$V(x_0) = 3x_{10}^2 + 2x_{10}x_{20} + 3x_{20}^2 + 2x_{20}x_{30} + 3x_{30}^2,$$

és adjuk meg az optimális visszacsatolást!

# 6. fejezet

# Függelék

Legyen $I \subset \mathbb{R}$ adott intervallum. A $J \subset I$ részhalmazt *zérus mértékű*nek nevezzük, ha bármely $\varepsilon > 0$-hoz létezik megszámlálhatóan végtelen sok $i_1, i_2, ..., i_n, ...$ részintervallum, amelyeknek az összhosszúságára $\sum_{k=1}^{\infty} \mathrm{mes}(i_k) < \varepsilon$ teljesül, és $\bigcup_{k=1}^{\infty} i_k \supset J$.

Ha valamilyen tulajdonság az $I$ intervallumon egy zérusmértékű halmaz kivételével teljesül, akkor azt mondjuk, hogy *majdnem mindenütt* teljesül.

Két függvényt $f, g : J \subset I \to \mathbb{R}^k$ *majdnem mindenütt egyenlő*nek nevezzük, ha a $\{t \in J : f(t) \neq g(t)\}$ halmaz zérus mértékű.

Legyen $\{f_i\}_{i=0}^{\infty}$, $f_i : J \to \mathbb{R}^k$ adott függvénysorozat, és $f : J \to \mathbb{R}^k$ szintén adott. Azt mondjuk, hogy $\{f_i\}_{i=0}^{\infty}$ *majdnem mindenütt $f$-hez konvergál* (a $J$ halmazon), jelben $f_i \to f$ (m.m.), ha a $\{t \in J : f_i(t) \to f(t)\}$ halmaz zérus mértékű.

Egy $g : I \to \mathbb{R}^k$ függvényt *szakaszonként konstans*nak nevezzük, ha létezik az $I$-nek egy olyan $i_1, ..., i_s$ véges felbontása, hogy $g$ konstans minden egyes $i_l$ részintervallumon (itt $\cup i_l = I$, és $i_j \cap i_l = \emptyset$, ha $j \neq l$.).

Az $f : J \subset I \to \mathbb{R}^k$ *mérhető függvény*, ha létezik szakaszonként konstans függvényeknek egy olyan $\{f_l\}_{l=0}^{\infty}$ sorozata, amely majdnem mindenütt $f$-hez konvergál.

# Irodalomjegyzék

[1] Farkas M., Matematika. III. kötet, (040798), Tankönyvkiadó, Budapest, 1990.

[2] Farkas M., Matematika. V. kötet, (040800), Tankönyvkiadó, Budapest, 1990.

[3] Gyurkovics É., Irányításelmélet. BME egyetemi jegyzet J 4-1085, Tankönyvkiadó, Budapest, 1991.

[4] Kósa A., Optimumszámítási modellek. Műszaki Könyvkiadó, Budapest, 1979.

[5] E. B. Lee, L. Markus, Foundations of optimal control theory. Wiley, New York, 1967.

[6] J. Macki, A. Strauss, Introduction to optimal control theory. Springer, New York, 1982.

[7] Móricz F., Differenciálegyenletek numerikus módszerei. Polygon könyvkiadó, Szeged, 1998.

[8] Y. Murata, Optimal control methods for linear discrete-time economic systems. Springer Verlag, New York, 1982.

[9] L. Sz. Pontrjagin, V. G. Boltjanszkij, R. V. Gamkrelidze, E. F. Miscsenko, Optimális folyamatok elmélete. Közgazdasági és Jogi Könyvkiadó, Budapest, 1968.

[10] Rapcsák T., Nemlineáris optimalizálás. 2007. http://www.oplab.sztaki.hu/tanszek/download/nemlinopt.pdf

[11] E. D. Sontag, Mathematical Control Theory. Springer, New York, 1998.

[12] Stoyan G., Takó G., Numerikus módszerek II. ELTE - Typotex, Budapest, 1995.

[13] G. B. Thomas, M. D. Weir, J. Hass, F. R. Giordano, Thomas-féle KALKULUS 3. Typotex, Budapest, 2007.

[14] T. L. Vincent, W. J. Grantham, Nonlinear and Optimal Control Systems. John Wiley & Sons, New York, 1997.