Multilineáris és homologikus algebra alkalmazásokkal

Küronya Alex

Jó szerszámmal öröm a munka.

Bevezetés

A multilineáris és homologikus algebra a modern matematika egyik alapvető nagy hatótávolságú eszköze, amely sok matematikus eszköztárához hozzátartozik. A jelen jegyzet ebbe a témakörbe ad egy egyszerű bevezetést, nem törekedve a teljességre, viszont alkalmazkodva a Budapesti Műszaki és Gazdaságtudományi Egyetem matematikusképzésének a sajátosságaihoz.

Példának okáért a homologikus algebrának az alkalmazások szempontjából igen fontos haladóbb fejezeteiről, mint például a spektrális sorozatok vagy a derivált kategóriák elmélete, itt nem ejtünk szót, cserében az ismeretett irodalomban több helyen is előkerülnek.

A jegyzet a szerzőnek a BME Természettudományi Karán tartott „Kommutatív algebra és algebrai geometria”, „Bevezetés az algebrai topológiába”, és „Homologikus algebra” címmel tartott előadásaira, illetve az Albert-Ludwigs-Universität Freiburg egyetemen „Algebra und Geometrie vollständig integrabler Systeme” címel tartott előadásaira alapul, ezenkívül háttérként szolgál BME TTK-n tartott „Multilineáris algebra” és „Haladó lineáris algebra” tárgyakhoz is.

Az ismertetett matematikai anyag mára lényegében kanonikussá vált, ami egyre inkább a prezentációra is vonatkozik, így a szerző hozzájárulása a létező irodalomhoz nem jelentős.

Célközönség és szükséges előismeretek

Noha az alapképzésbe nem szokott beleférni, a multilineáris és homologikus algebra helye rögtön ott lenne a Lineáris Algebra és Algebra I. tantárgyak után. Ennek megfelelően az algebrai anyagot olyan részletességgel tárgyaljuk, hogy az alapképzés egy érdklődő másodéves matematikus hallgatója számára önállóan is megemészthető legyen.

A multilineáris algebra fizikus hallgatók számára megkerülhetetlen, a tenzorkalkulus majd mindegyik elméleti fizikai tárgy szerves része. Ugyan a bevett jelölésrendszereke erősen eltérnek az általunk alkalmazottaktól, ez némi kezdeti átállási befektetés utań nem szabadna, hogy problmémat jelentsen. A jegyzet jelenlegi formájában a fizikában felmerülő igényeknek egyelőre csak egy kisebb részével foglalkozik, azt azonban olyan részletességgel, hogy remélhetőleg egyéni tanulásra is alkalmas.

Az algebrai anyag szempontjából ideális esetben előismeretként a BME TTK-n oktatott 'Lineáris algebra' és 'Algebra I.' tárgyak elvégzését, és a kommutatív gyűrűk feletti modulusok elméletében való enyhe jártasságot teszünk fel. A szinguláris homológiaelmélettel, illetve a szimplektikus geometriával foglalkozó részek emellett feltételeznek topológiai, illetve sokaságelméleti alapismereteket.

Egyes alkalmazásokhoz, példákhoz, megjegyzésekhez szükség lehet komolyabb matematikai érettségre, vagy más szakterületeknek (tipikusan a geometria valamilyen formájának) az ismeretére. Ez a tananyag fősodrát nem érinti.

Ezzel együtt — főleg a fizikai alkalmazások esetében — bátran neki lehet vágni a jegyzetnek pusztán a valós és komplex számtestek feletti lineáris algebra ismeretében.

A jegyzet írása során fontos cél volt, hogy önálló tanulásra alkalmas legyen.

Irodalom

A multilineáris és homologikus algebrának tankönyvszinten is kiterjedt irodalma van, ennek áttekintésével nem is próbálkozunk. Fontosnak tartjuk ugyanakkor, hogy fogódzókat adjunk a további tanulmányokhoz, illetve más megközelítéseket is elérhetővé tegyünk. Igyekeztünk minél több témában ingyenesen hozzáférhető anyagokat is ismertetni.

Az alább ismertetett művek mindegyike jóval tovább eljut a multilineáris és/vagy homologikus algebra tárgyalásában, mint azt a jelen jegyzet keretei lehetővé teszik. A lista természetszerűleg távolról sem teljes, és inkább a szerző ízlését tükrözi mint bármi mást.

Multilineáris Algebra:

- Valter Moretti: Multi-linear algebra, tensors, and spinors in mathematical physics, www.science.unitn.it/∼moretti/tensori.pdf, 2012.
- D. G. Northcott: Multilinear algebra [Nor08].
- Scheja–Storch: Lehrbuch der Algebra. Teil 2. (German) [SS88].
- Tin-Yau Tam: Multilinear Algebra, http://www.auburn.edu/ tamtiny/Multilinear Algebra.pdf, 2011.

Homologikus Algebra:

- Glen Bredon: Topology and geometry [Bre93]
- Brian M. Osborne: Basic homological algebra [Osb00]
- J. J. Rotman: An introduction to homological algebra [Rot09]
- Charles Weibel: An introduction to homological algebra [Wei94]

Spektrális sorozatok és derivált kategóriák:

- Sergei I. Gelfand, Yuri I. Manin: Methods of homological algebra [GM96].

- Joseph Lipman: Notes on derived functors and Grothendieck duality, http://www.math.purdue.edu/~lipman/Duality.pdf.

- Dragan Milicic: Lecture notes on derived categories, http://www.math.utah.edu/~milicic/Eprints/dercat.pdf.

- John McCleary: User's guide to spectral sequences [McC01].

Algebrai topológia:

- Glen Bredon: Topology and geometry [Bre93].

- William Fulton: Algebraic topology. A first course [Ful95].

- Allen Hatcher: Algebraic topology [Hat02], letölthető a szerző honlapjáról: http://www.math.cornell.edu/~hatcher/AT/ATpage.html.

- William S. Massey: A basic course in algebraic topology [Mas91].

- Ralph Stöcker, Heiner Zieschang: Algebraische Topologie [SZ94].

Algebrai geometriai alkalmazások:

- Donu Arapura: Algebraic geomety over the complex numbers [Ara12].

- Andreas Gathmann: Algebraic geometry, http://www.mathematik.uni-kl.de/~gathmann/class/alggeom-2002/main.pdf, 2012.

- Günter Harder: Lectures on algebraic geometry I. [Har08].

- Robin Hartshorne: Algebraic geometry [Har77].

Differenciálgeometriai alkalmazások:

- Brian Conrad: Differential geometry handouts, http://math.stanford.edu/~conrad/diffgeomPage/handouts.html.

- Daniel Huybrechts: Complex geometry [Huy05].

- Joel W. Robbins, Dietmar A. Salamon: Introduction to differential geometry, http://www.math.ethz.ch/~salamon/PREPRINTS/diffgeo.pdf, 2013.

- Wulf Rossmann: Lectures on differential geometry, http://www.courseweb.uottawa.ca/Mat4183/Rossmann_DiffGeo.pdf, 2003.

- Theodore Frankel: The geometry of physics [Fra12]

Szimplektikus geometria:

- Ana Cannas da Silva: Lectures on symplectic geometry [CdS01], letölthető a szerző honlapjáról is: http://www.math.ethz.ch/∼acannas/Papers/lsg.pdf
- Dusa McDuff, Dietmar A. Salamon: Introduction to symplectic topology [MS98]
- Eckhard Meinrenken: Symplectic Geometry http://www.math.toronto.edu/mein/teaching/sympl.pdf

Köszönetnyilvánítás

Köszönet illeti a BME TTK Matematika Intézetét és Rónyai Lajost, illetve az Albert-Ludwigs-Universität Freiburg Matematika Intézetét és Stefan Kebekus-t a munkám támogatásért, és amiért lehetővé tették, hogy a fent említett előadások létrejöjjenek, továbbá Oliver Fabert-et a közös munkáért az „Algebra und Geometrie vollständig integrabler Systeme” című tárgy során.

Legfőképpen pedig szeretném megköszönni a jegyzet lektorának, Mészáros Tamásnak a rendkívül lelkiismeretes munkáját[1]

[1] A jegyzetben maradt esetleges hibákért kizárólag a szerző felelős.

I. rész

Multilineáris algebra

1. fejezet

Alapvető fogalmak

A multilineáris algebra a nevéből is láthatóan vektorterek vagy általánosabban gyűrűk feletti modulusok közötti multilineáris leképezésekkel foglalkozik. Mivel az alkalmazások során a szinguláris homológiaelméletet is szeretnénk tárgyalni, mi itt kommutatív gyűrűk feletti modulusokkal fogunk dolgozni. Ezzel együtt fontos megjegyezni, hogy a legtöbb itt ismertetésre kerülő eredmény valamilyen formában nemkommutatív gyűrűk feletti modulusokra is általánosítható.

A továbbiakban tehát egy R kommutatív gyűrű feletti modulusokkal fogunk foglalkozni.

1.1. Megjegyzés (Multilineáris algebra testek felett) *Abban az esetben, ha a kommutatív algebra feletti munka túlzott általánosságnak tűnik (mint például legtöbb fizikai alkalmazás esetén), a mindenféle veszteség nélkül feltehető, hogy R egy test (akár a valós vagy komplex számtest). Fontos tudnivaló, hogy ekkor minden R-modulus szabad lesz (hiszen minden vektortérnek van bázisa).*

További egyszerűsítést jelent, ha feltesszük, hogy minden vektortér véges dimenziós, ám ekkor már bizonyos alkalmazások (például a kvantumszámítógépes algoritmusok irányában) kiesnek a tárgyalt körből.

1.2. Definíció (Multilineáris leképezés) *Legyen m egy pozitív egész szám, N, illetve $M_1, \ldots, M_m$ pedig R-modulusok. Egy*

$$\phi : M_1 \times \ldots \times M_m \longrightarrow N$$

*függvényt m-*multilineárisnak *(vagy csak egyszerűen* multilineárisnak*) hívunk, ha minden $1 \leq i \leq m$ esetén ϕ-nek az i-edik koordinátára történő megszorítása egy lineáris leképezést ad. Részletesebben: minden $1 \leq i \leq m$ esetén igaz, hogy tetszőleges $v_1 \in M_1, \ldots, v_{i-1} \in M_{i-1}, v_i, v_i' \in M_i, v_{i+1} \in M_{i+1}, \ldots, v_m \in M_m$ elemekre és $r, r' \in R$ gyűrűelemekre teljesül, hogy*

$$\begin{aligned} &\phi(v_1, \ldots, v_{i-1}, rv_i + r'v_i', v_{i+1}, \ldots, v_m) = \\ &r \cdot \phi(v_1, \ldots, v_{i-1}, v_i, v_{i+1}, \ldots, v_m) + r' \cdot \phi(v_1, \ldots, v_{i-1}, v_i', v_{i+1}, \ldots, v_m) \ . \end{aligned}$$

Az $M_1 \times \ldots \times M_m \to N$ multilineáris leképezések R-modulusát $L(M_1, \ldots, M_m; N)$ jelöli.

1.1 Feladat *Ellenőrizzük, hogy $L(M_1, \ldots, M_m; N)$ valóban egy R-modulus.*

1.3. Megjegyzés *Fontos tudnivaló, hogy az $M_1 \times \ldots \times M_m \to N$ R-lineáris leképezések $\mathrm{Hom}_R(M_1 \times \ldots \times M_m, N)$ R-modulusa nem azonos $L(M_1, \ldots, M_m; N)$-nel. Erre többféleképpen is rá lehet világítani.*

A legegyszerűbb talán egy konkrét példa: legyen $R = \mathbb{Z}$, $M_1 = M_2 = \mathbb{Z} \otimes \mathbb{Z}$, $N = \mathbb{Z}$. Ekkor a

$$\begin{array}{rcl} \phi : M_1 \times M_2 & \longrightarrow & N \\ \left(\begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix} \right) & \mapsto & a_1 b_1 + a_2 b_2 \end{array}$$

leképezés 2-multilineáris, de nem lineáris.

Kicsit általánosabban, legyen $\phi \in L(M_1, M_2; N)$ és $\psi \in \mathrm{Hom}_R(M_1 \times M_2, N)$. Ekkor tetszőleges $v_1, v_1' \in M_1$ és $v_2, v_2' \in M_2$ elemekre

$$\begin{aligned} \phi(v_1 + v_1', v_2 + v_2') &= \phi(v_1 + v_1', v_2) + \phi(v_1 + v_1' . v_2') \\ &= \phi(v_1, v_2) + \phi(v_1', v_2) + \phi(v_1, v_2') + \phi(v_1', v_2') \ , \end{aligned}$$

illetve

$$\begin{aligned} \psi(v_1 + v_1', v_2 + v_2') &= \psi(v_1, v_2) + \psi(v_1', v_2') \\ &= \psi(v_1, 0) + \psi(0, v_2) + \psi(v_1', 0) + \psi(0, v_2') \ . \end{aligned}$$

Egy fontos különbség azonnal látszik: mivel $\phi(v_1, *)$ lineáris leképezés a második koordinátában, $\phi(v_1, 0) = 0$, hasonlóképpen $\phi(0, v_2) = 0$. Másrészt $\psi(v_1, 0) = 0$ nem következik, sőt, általában nem is igaz.

1.2 Feladat *Mutassunk olyan $\psi \in \mathrm{Hom}_R(M_1 \times M_2, N)$ és $v_1 \in M_1$ elemeket, amelyekre $\psi(v_1, 0) \neq 0$.*

1.4. Példa (Példák multilineáris leképezésekre) *Az alábbiakban jól ismert példákat hozunk multilineáris leképezésekre. Minden esetben igazoljuk, hogy az adott leképezés valóban multilineáris.*

1. *$\mu : R \times R \to R$, ahol $\mu(r, s) = rs$.*
2. *Legyen $A \in M_{m,n}(R)$ rögzített $m \times n$-es mátrix, $M_1 = R^m$, $M_2 = R^n$. Ekkor a*

   $$\phi(v, w) = v^T A w$$

   hozzárendelés multilineáris.

3. Legyen M tetszőleges R-modulus, $ev : M^* \times M \to R$ a kiértékelés, vagyis $\phi \in M^*$ és $v \in M$ esetén $ev(\phi, v) = \phi(v)$.

4. Tetszőleges M végesen generált R-modulus esetén a determináns mint

$$\det\colon M \times \ldots \times M \longrightarrow R$$

leképezés multilineáris.

1.5. Jelölés *Amennyiben $M_1 = M_2 = \ldots = M_m$, akkor $L(M, \ldots, M; N)$ helyett gyakran írunk $L(M^{(m)}; N)$-et. Hasonlóképpen, ha $\phi \in L(M^{(m)}; N)$, $v \in M$, akkor*

$$\phi(v^{(m)}) \stackrel{def}{=} \phi(v, \ldots, v) \ .$$

1.6. Definíció (Szimmetrikus és alternáló leképezések) *Legyen $\phi \in L(M^{(m)}; N)$ egy multilineáris leképezés. Azt mondjuk, hogy ϕ* szimmetrikus, *ha minden $\sigma \in \mathrm{Sym}^m$ permutáció és minden $v_1, \ldots, v_m \in M$ esetén*

$$\phi(v_{\sigma(1)}, \ldots, v_{\sigma(m)}) = \phi(v_1, \ldots, v_m) \ .$$

A ϕ leképezést alternáló*nak nevezzük, ha tetszőleges $v_1, \ldots, v_m \in M$ elemekre*

$$\phi(v_1, \ldots, v_m) = 0 \ ,$$

amennyiben $v_i = v_j$ valamely $1 \leq i < j \leq m$ indexpárra.

1.3 Feladat *Tegyük fel, hogy char $R \neq 2$. Mutassuk meg, hogy egy $\phi \in L(M^{(m)}; N)$ leképezés pontosan akkor alternáló, ha minden $\sigma \in \mathrm{Sym}^m$ permutációra és tetszőleges $v_1, \ldots, v_m \in M$ elemekre*

$$\phi(v_{\sigma(1)}, \ldots, v_{\sigma(m)}) = \mathrm{sgn}(\sigma) \cdot \phi(v_1, \ldots, v_m) \ .$$

1.7. Megjegyzés Legyenek $M_1, \ldots, M_m$ szabad R-modulusok, $E_i = \{e_{i,\alpha} \mid 1 \leq \alpha \leq d_i\}$ az M_i szabad modulus egy bázisa, ahol d_i jelöli M_i rangját.

Legyen továbbá

$$I \stackrel{\mathrm{def}}{=} I(d_1, \ldots, d_m) \stackrel{\mathrm{def}}{=} \{1, \ldots, d_1\} \times \ldots \times \{1, \ldots, d_m\} \ .$$

Tetszőleges $v_i \in M_i$ elemek egyértelműen írhatók

$$v_i = \sum_{j_i=1}^{d_i} a_{i,j_i} e_{i,j_i}$$

alakba, ahonnan egy tetszőlegesen választott $\psi\colon L(M_1,\dots,M_m;N)$ multilineáris leképezésre

$$\begin{aligned}\psi(v_1,\dots,v_m) &= \psi(\sum_{j_1=1}^{d_1} a_{1,j_1}e_{1,j_1},\dots,\sum_{j_m=1}^{d_m} a_{m,j_m}e_{i,j_m})\\ &= \sum_{j_1=1}^{d_1}\dots\sum_{j_m=1}^{d_m}(a_{1,j_1}\cdot\ldots\cdot a_{m,j_m})\cdot\psi(e_{1,j_1},\dots,e_{m,j_m})\end{aligned}$$

a ψ leképezés multilinearitása miatt. Továbbmenve

$$= \sum_{J\in I(d_1,\dots,d_m)} a_J\psi(e_J)\ ,$$

ahol

$$\begin{aligned} J &\stackrel{\text{def}}{=} (j_1,\dots,j_m)\in I(d_1,\dots,d_m)\ ,\\ a_J &\stackrel{\text{def}}{=} \prod_{i=1}^{m} a_{i,j_i}\ , \text{és}\\ e_J &\stackrel{\text{def}}{=} (e_{1,j_1},\dots,e_{m,j_m})\ .\end{aligned}$$

Látható, hogy a ψ függvényt az $\{e_J \mid J\in I(d_1,\dots,d_m)\}$ elemrendszeren felvett értékei egyértelműen meghatározzák. A következő lépésben igazolni fogjuk, hogy az előbb említett $\{e_J \mid J\in I(d_1,\dots,d_m)\}$ elemrendszeren tetszőlegesen megadott hozzárendeléshez létezik (pontosan egy) multilineáris kiterjesztés.

Jelölje az e_J elem kívánt képét w_J. Ekkor a multilinearitás miatt egy $(v_1,\dots,v_m)$ elemhez, amelyre

$$v_i = \sum_{j_i=1}^{d_i} a_{i,j_i}e_{i,j_i}\ ,$$

szükségképpen a

$$\psi(v_1,\dots,v_m)\stackrel{\text{def}}{=}\sum_{J\in I(d_1,\dots,d_m)} a_J w_J$$

elemet kell hozzárendelni. Ez a függvény multilineáris, hiszen ha $v_i' = \sum_{j_i=1}^{d_i} a'_{i,j_i}e_{i,j_i}$ és

$r \in R$, akkor

$$\begin{aligned}
\psi(v_1, \ldots, v_i + rv_i', \ldots, v_m) &= \sum_{J \in I(d_1,\ldots,d_m)} a_{1,j_1} \cdot \ldots \cdot (a_{i,j_i} + ra_{i,j_i}') \cdot \ldots \cdot a_{m,j_m} \cdot w_J \\
&= \sum_{J \in I(d_1,\ldots,d_m)} a_{1,j_1} \cdot \ldots \cdot a_{i,j_i} \cdot \ldots \cdot a_{m,j_m} \cdot w_J \\
&+ r \cdot \sum_{J \in I(d_1,\ldots,d_m)} a_{1,j_1} \cdot \ldots \cdot a_{i,j_i}' \cdot \ldots \cdot a_{m,j_m} \cdot w_J \\
&= \psi(v_1, \ldots, v_i, \ldots, v_m) + r \cdot \psi(v_1, \ldots, v_i', \ldots, v_m) \ .
\end{aligned}$$

Könnyen látható továbbá, hogy minden $J \in I(d_1, \ldots, d_m)$ esetén

$$\psi(e_J) = w_J \ .$$

Ezzel a ψ függvény létezését igazoltuk.

1.4 Feladat (Multilineáris leképezések és iterált Hom) *Legyenek N, illetve M_1, $\ldots, M_m$ R-modulusok. Igazoljuk, hogy létezik egy természetes*

$$\phi : \mathrm{Hom}_R(M_1, \mathrm{Hom}_R(M_2, \mathrm{Hom}_R(M_3, \ldots, \mathrm{Hom}_R(M_m, N) \ldots))) \simeq L(M_1, \ldots, M_m; N)$$

R-modulusizomorfizmus.

Az alábbiak során egy pár feladatban körvanalazzuk a multilineáris leképezések és a véges-dimenziós normált terek leképezésinek a totális deriváltja közti kapcsolatot. Az egyszerűség kedvéert a valós esetre szorítkozunk. Emlékeztetőnek először a definíció.

1.8. Definíció *Legyenek X és Y véges-dimenziós valós vektorterek, $U \subseteq X$ egy nyílt halmaz. Azt mondjuk, hogy egy $f : U \to Y$ függvény* differenciálható *egy $x \in U$ pontban, ha létezik egy $(Df)(x) : X \to Y$ lineáris leképezés, amelyre*

$$\frac{\|f(x+h) - f(h) - ((Df)(x))(h)\|}{\|h\|} \longrightarrow 0 \quad \textit{amennyiben } h \to 0 \ X\textit{-ben.}$$

1.9. Megjegyzés *Mivel mind X, mind Y véges dimenziósak, a norma választása lényegtelen (bármely két norma ekvivalens egymással). Amennyiben létezik, $(Df)(x)$ egyértelműen meghatározott.*

Amennyiben f differenciálható az U halmazon, a $T_xU = X$ és $T_{f(x)}Y = Y$ kanonikus azonosítások után egy

$$Df : U \to \mathrm{Hom}_{\mathbb{R}}(X, Y)$$

függvényt kapunk. Észrevehető, hogy Df szintén véges-dimenziós normált terek közti függvény, így értelmes kérdés, hogy differenciálható-e. Ha igen, akkor képezhetjük a

$$D(Df) \colon U \to \mathrm{Hom}_{\mathbb{R}}(X, \mathrm{Hom}_{\mathbb{R}}(X, Y))$$

függvényt, ami a második totális deriváltnak egy koordinátafüggetlen leírása.

1.5 Feladat *Mutassuk meg, hogy*

1. *Df pontosan akkor folytonos, ha f C^1 (vagyis minden elsőrendű parciális deriváltja létezik és folytonos);*

2. *f pontosan akkor C^2, ha differenciálható, és Df a C^1 osztályba tartozik.*

3. *Általában, az f függvény C^p valamely $p \geq 1$ egész számra, ha differenciálható, és Df C^{p-1}.*

Vegyük észre, hogy a 1.4 Feladat azonosítása segítségével tekinthetünk a $D^p f$ totális deriváltra úgy, mint egy $L(X, \ldots, X; Y)$ multilineáris leképezésre. A magasabbrendű totális deriváltaknak talán ez a legjobban használható leírása.

1.6 Feladat *Legyen $f : U \to Y$ egy C^p leképezés, $D^p f$ a p-edik totális derivált leképezés. Ekkor $D^p f$ mint multilineáris leképezés szimmetrikus.*

1.10. Megjegyzés (Hesse-forma) *Tekintsük az $Y = \mathbb{R}$ és $p = 2$ esetet, vagyis legyen $f : X \to \mathbb{R}$ egy C^2-leképezés. Rögzítsünk egy $v_1, \ldots, v_n$ bázist X-ben, és a hozzá tartozó $x_1, \ldots, x_n$ koordinátákat X-en. Ekkor egy $x_0 \in U$ pontban $D^2 f(x_0) \in L(X, X; \mathbb{R})$ egy szimmetrikus bilineáris forma, amit az f függvény x_0-beli Hesse-formájának szokás nevezni és $H_f(x_0)$-fel jelöljük.*

Az $x_1, \ldots, x_n$ koordinátákban a H_f bilineáris leképezés mátrixa

$$\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(x_0)\right)_{1,\leq i,j \leq n} .$$

1.11. Megjegyzés (Többdimenziós Taylor-formula) *A magasabbrendű deriváltak mint multilineáris leképezések leírását felhasználhatjuk a többdimenziós Taylor-formula egy jól kezelhető (koordinátamentes) formájának megadására. Az eddigi jelölések megtartásával legyen $f : U \to Y$ egy C^p leképezés,$x_0 \in U$, és $\rho > 0$ úgy, hogy az x_0 középpontú ρ-sugarú nyílt gömb U-ba esik. Ekkor*

$$f(x_0 + h) = \sum_{i=0}^{p} \frac{(D^i f)(x_0)}{i!}(h^{(i)}) + R_{p,x_o}(h) ,$$

ahol

$$R_{p,x_0}(h) = \int_0^1 \frac{(1-t)^{p-1}}{(p-1)!}((D^p f)(x_0 + th) - (D^p f)(x_0))(h^{(p)})dt ,$$

amelyre

$$\|R_{p,x_0}(h)\| \leq C_{p,h,x_0} \cdot \|h\|^p , \lim_{h \to 0} C_{p,h,x_0} = 0$$

és

$$C_{p,h,x_0} = \sup_{t \in [0,1]} \frac{\|(D^p f)(x_0 + th) - (D^p f)(x_0)\|}{p!} .$$

Az állítás bizonyítása sok standard tankönyvben szerepel, ezen túl ld. például [Con].

2. fejezet

Tenzorszorzat

A fejezet célja egy alapvető fontosságú lineáris algebrai konstrukció, a tenzorszorzat megismerése. Lényegét tekintve a tenzorszorzat egy olyan R-modulus, amely multilineáris leképezéseket parametrizál bijektíven.

A multilineáris algebra alkalmazásai szempontjából a tenzorszorzat szerepe felbecsülhetetlen: kitüntetett szerepet játszik jóformán minden algebrai diszciplinában, így például az aritmetrikai és algebra geometriában és a reprezentációelméletben is. Ennek egyik oka, hogy sok geometria operáció, pl. terek szorzata, részvarietások metszete, morfizmus inverz képe, visszahúzás, stb. leírható a tenzorszorzat nyelvén.

2.1. A tenzorszorzat alaptulajdonságai

2.1. Tétel (A tenzorszorzat létezése és egyértelműsége) *Legyenek M és N tetszőleges R-modulusok. Ekkor létezik egy V R-modulus és egy $\pi : M \times N \to V$ R-bilineáris leképezés, amely rendelkezik az alábbi tulajdonsággal: adott T R-modulus és $\psi : M \times N \to T$ R-bilineáris leképezés esetén létezik pontosan egy $\phi : V \to T$ R-lineáris leképezés, amelyre a*

$$\begin{tikzcd} M \times N \arrow[r, "\pi"] \arrow[dr, "\psi"'] & V \arrow[d, "!\phi"] \\ & T \end{tikzcd}$$

diagramm kommutatív, vagyis

$$\phi \circ \pi = \psi \ .$$

A (V, π) pár kanonikus izomorfizmus erejéig egyértelmű, vagyis ha (V', π') egy másik pár a fenti tulajdonsággal, akkor létezik pontosan egy $\nu : V \to V'$ izomorfizmus, amelyre

$$\nu \circ \pi = \pi' \ .$$

2.2. Megjegyzés *A tételben szereplő tulajdonságot a 'tenzorszorzat univerzális tulajdonága' néven tartja számon a matematikai irodalom, szükség esetén a TUT rövidítést használjuk rá.*

2.3. Definíció *Az iménti tételben szereplő V modulus neve* az M és N modulusok R feletti tenzorszorzata, *jele $M \otimes_R N$, amennyiben R a kontextusból nyilvánvaló, csak $M \otimes N$-t írunk.*

Bizonyítás. Először az egyértelműséget látjuk be. Az egyértelműség bizonyítása nagyon jellemző abban az értelemben, hogy sok más univerzális tulajdonsággal definiált objektum unicitása is nagyon hasonló módon látható be. Legyen tehát (V, π) és (V', π') két pár, amelyek rendelkeznek a tenzorszorzatok univerzális tulajdonságával.

Legyen először $T \stackrel{\text{def}}{=} V'$ és $\psi \stackrel{\text{def}}{=} \pi'$ a tétel szereposztásával. Ekkor a TUT alapján létezik pontosan egy $\alpha : V \to V'$ lineáris leképezés, amelyre

$$\alpha \circ \pi = \pi' .$$

Megcserélve V és V' szerepét, legyen most $T \stackrel{\text{def}}{=} V$ és $\psi \stackrel{\text{def}}{=} \pi'$, ismét csak a TUT-át alkalmazva kapjuk, hogy van pontosan egy $\beta : V' \to V$ lineáris leképezés, amelyre

$$\beta \circ \pi' = \pi .$$

Rakjuk össze az imént kapott két kommutatív diagramot:

$$\begin{tikzcd}
M \times N \arrow[r, "\pi"] \arrow[dr, "\pi'"] \arrow[ddr, "\pi"'] & V \arrow[d, "\alpha"] \\
& V' \arrow[d, "\beta"] \\
& V .
\end{tikzcd}$$

Következőként ismét csak a (V, π) párra alkalmazzuk a TUT-t, de most a $T \stackrel{\text{def}}{=} V$ és $\psi \stackrel{\text{def}}{=} \pi$ felállásban:

$$\begin{tikzcd}
M \times N \arrow[r, "\pi"] \arrow[dr, "\pi"'] & V \arrow[d, dashed] \\
& V .
\end{tikzcd}$$

Hangsúlyozzuk, hogy az α és β R-lineáris leképezések egyértelműen meghatározottak. Két olyan leképezést is ismerünk, amely a fenti diagramot kommutatívvá teszi:

$$\mathrm{id}_V : V \longrightarrow V \quad \text{és} \quad \beta \circ \alpha ,$$

amiből a TUT-ban szereplő unicitás miatt

$$\beta \circ \alpha = \mathrm{id}_V \ .$$

A V és V' modulusok szerepét felcserélve kapjuk, hogy

$$\alpha \circ \beta = \mathrm{id}_V \ ,$$

amiből következi, hogy α és β egymás inverzei. Ezzel a tenzorszorzat egyértelműségét beláttuk.

A tenzorszorzat létezését az alábbi konstrukcióval mutatjuk meg: legyen F az $M \times N$ halmazon mint bázison definiált szabad modulus. Amint az jól ismert, F elemei

$$\sum_{(m,n)\in M\times N} a_{(m,n)}(m,n)$$

formális lineáris kombinációk, ahol $m \in M$, $n \in N$, továbbá $a_{(m,n)} \in R$ és véges sok (m,n) pártól eltekintve mindig 0.

Legyen most $K \leq F$ az a részmodulus, amelyet az alábbi elemek generálnak:

$$\begin{array}{rl}
(m+m',n)-(m,n)-(m,n') & \text{minden } m,m' \in M \text{ és } n \in N \text{ esetén,} \\
(m,n+n')-(m,n)-(m,n') & \text{minden } m \in M \text{ és } n,n' \in N \text{ esetén,} \\
(rm,n)-r\cdot(m,n) & \text{minden } m \in M, n \in N \text{ és } r \in R \text{ esetén,} \\
(m,rn)-r\cdot(m,n) & \text{minden } m \in M, n \in N \text{ és } r \in R \text{ esetén.}
\end{array}$$

Legyen $V \stackrel{\mathrm{def}}{=} F/K$, és jelölje $m \otimes n$ az (m,n) F-beli báziselem képét V-ben. Egyfelől az

$$\{m \otimes n \mid m \in M, n \in N\}$$

halmaz generálja V-t, hiszen az F-beli ősképeik generálták F-et, másrészt a K részmodulus definíciója alapján tetszőleges $m,m' \in M$, $n,n' \in N$ és $r \in R$ elemekre

$$\begin{aligned}
(m+m')\otimes n &= m\otimes n + m'\otimes n \ , \\
m\otimes(n+n') &= m\otimes n + m\otimes n' \ , \\
(rm)\otimes n &= r\cdot(m\otimes n) \ , \\
m\otimes(rn) &= r\cdot(m\otimes n) \ .
\end{aligned}$$

Az iméntiek alapján a

$$\begin{aligned}
\pi: \quad M\times N &\longrightarrow V \\
(m,n) &\mapsto m\otimes n
\end{aligned}$$

függvény R-bilineáris.

Tekintsünk egy tetszőleges $\psi : M \times N \to T$ R-bilineáris leképezést, ahol T egy szabadon választott R-modulus. Ekkor a szabad modulusok univerzális tulajdonsága alapján létezik pontosan egy olyan $\rho : F \to T$ R-homomorfizmus, amelyre a

$$\begin{tikzcd} M \times N \arrow[r, hook] \arrow[dr, "\psi"'] & F \arrow[d, "\rho"] \\ & T \end{tikzcd}$$

diagram kommutatív. Mivel ψ feltevés szerint R-bilineáris, eltűnik a K részmodulus fent leírt generátorrendszerének minden elemén, ily módon $K \subseteq \ker \psi$.

Most a mag univerzális tulajdonságát felhasználva létezik pontosan egy $\overline{\rho} : V = F/K \to T$ R-homomorfizmus, amelyre

$$\begin{tikzcd} F \arrow[r] \arrow[dr, "\rho"'] & V = F/K \arrow[d, "\overline{\rho}"] \\ & T \end{tikzcd} ,$$

kommutatív, és ahol a vízszintes nyíl a faktormodulusra történő természetes vetítést jelöli. Az iménti diagramok konkatenációjával kapjuk, hogy létezik egy egyértelműen (univerzális tulajdonságok segítségével) meghatározott $\phi \overset{\text{def}}{=} \overline{\rho}$ R-homomorfizmus, amelyre

$$\phi \circ \pi = \psi \ ,$$

amint azt bizonyítani kellett. $\square$

2.4. Megjegyzés (Szabad modulusok univerzális tulajdonsága) *A szabad modulusok univerzális tulajdonsága alatt az alábbit értjük. Legyen A egy halmaz, F az A halmazon értelmezett szabad modulus, és $\iota : A \to F$ a kanonikus beágyazás, amely minden $a \in A$ elemhez a neki megfelelő F-beli báziselemet rendeli. A szabad modulusok univerzális tulajdonsága alatt az alábbi követelményt értjük: ekkor minden M R-modulushoz és $f : A \to M$ függvényhez létezik pontosan egy olyan $\phi : F \to M$ R-lineáris leképezés, amelyre*

$$f = \phi \circ \iota \ .$$

2.1 Feladat *Igazoljuk, hogy az A halmazon definiált szabad modulus rendelkezik a megfelelő univerzális tulajdonsággal.*

2.5. Megjegyzés *Ha R egy test, akkor minden R-modulus szabad.*

2.6. Megjegyzés *Az $M \otimes_R N$ tenzorszorzat elemei*

$$\sum_{(m,n)\in M\times N} a_{(m,n)} \cdot m \otimes n$$

alakba írhatók, ahol $a_{(m,n)} \in R$, és véges sok kivételtől eltekintve minden együttható nulla. Nagyon fontos tudnivaló, hogy a fenti előállítás távolró sem egyértelmű a generátorelemek közti bilineáris relációk miatt.

Az $M \otimes_R N$ tenzorszorzatot mint R-modulust generálja az összes $m \otimes n$ típusú eleme. Ha $\{m_i \mid i \in I\}$ és $\{n_j \mid j \in J\}$ az M illetve N modulusok egy-egy R feletti generátorrendszere, akkor már a

$$\{m_i \otimes n_j \mid (i,j) \in I \times J\}$$

halmaz generálja $M \otimes_R N$-t.

Fontos következmény, hogy amennyiben M és N végesen generált R-modulusok, akkor $M \otimes_R N$ is az.

2.7. Megjegyzés *Egy nagyon fontos bizonítási technika, hogy elfelejtjük a tenzorszorzat konkrét konstrukcióját, és kizárólag az univerzális tulajdonságát használjuk. Ezzel (a létezésen kívül) minden tulajdonságát be lehet látni, mégha elsőre kissé szokatlannak is tűnhet. A módszert az alábbiakban sok példán és bizonyításon keresztül illusztráljuk.*

2.8. Példa *Elsőként határozzuk meg tetszőleges R gyűrű esetén egy M R-modulusnak a 0 modulussal vett tenzorszorzatát. Ehhez vegyük észre, hogy tetszőleges T R-modulus esetén az egyetlen*

$$M \times 0 \longrightarrow T$$

bilineáris leképezés a nulla leképezés: ti. minden $m \in M$-re

$$f(m,0) = f(m, 0 \cdot 0) = 0 \cdot f(m,0) = 0 \ .$$

Ez alapján az $M \otimes 0$ tenzorszorzat definíciójában szereplő

$$\pi \colon M \times 0 \longrightarrow M \otimes_R 0$$

természetes bilineáris leképezésre $\pi = 0$. Mivel π képe generálja $M \otimes_R 0$-t mint R-modulust, szükségképpen $M \otimes_R 0 = 0$.

2.2 Feladat *Mutassuk meg, hogy tetszőleges R gyűrű, M R-modulus, és $m \in M$ elem esetén $m \otimes 0 = 0$. Keressünk példát arra, hogy az $m \otimes n = 0$ egyenlőségből nem következik, hogy $m = 0$ vagy $n = 0$ lenne.*

2.9. Példa *A tenzorszorzat univerzális tulajdonsága segítségével igazoljuk, hogy minden R gyűrűre*

$$R \otimes_R R \simeq R \ .$$

Azt állítjuk, hogy a

$$\begin{aligned} \pi\colon \quad R \times R &\longrightarrow R \\ (r, r') &\mapsto rr' \end{aligned}$$

R-bilineáris leképezés teljesítit a TUT-át.

Legyen tehát M tetszőleges R-modulus, és $\psi : R \times R \to M$ egy bilineáris leképezés. A TUT szerint igazolnunk kell, hogy létezik pontosan egy olyan $\phi : R \to M$ R-homomorfizmus, amelyre

$$\psi = \phi \circ \pi \ .$$

Az egyértelműség adott, hiszen az iménti reláció tetszőleges $r \in R$ elemre megmondja, hogy

$$\phi(r) = \psi(r, 1) \ .$$

A kérdés annyi, hogy ez a hozzárendelés jóldefiniált-e, illetve, hogy egy R-homomorfizmust ad-e; ennek ellenőrzését az olvasóra hagyjuk.

2.10. Állítás *A szokásos jelöléseinkkel $R \otimes_R M \simeq M$.*

Bizonyítás. A tenzorszorzat univerzális tulajdonságát felhasználva megadunk egy $\phi\colon R \otimes_R M \to R$ R-izomorfizmust, amelyre $\phi(r \otimes m) = rm$ minden $r \in R$ és $m \in M$ esetén.

Ecélból tekintsük a

$$\begin{aligned} \mu\colon R \times M &\longrightarrow M \\ (r, m) &\mapsto rm \end{aligned}$$

R-bilineáris hozzárendelést. A TUT miatt létezik pontosan egy $\phi\colon R \otimes_R M \to M$ R-homomorfizmus, amelyre a

$$\begin{tikzcd} R \times M \arrow[r] \arrow[dr, "\mu"'] & R \otimes_R M \arrow[d, "\phi"] \\ & M \end{tikzcd}$$

diagram kommutatív, vagyis egyebek között

$$\phi(r \otimes m) = rm$$

minden $r \in R$ és $m \in M$ esetén.

Igazoljuk, hogy ϕ valóban izomorfizmus, amelynek

$$\begin{array}{rcl} \psi\colon M & \longrightarrow & R\otimes_R M \\ m & \mapsto & 1\otimes m \end{array}$$

az inverze.

Egyrészt minden $m\in M$ esetén

$$(\phi\circ\psi)(m)=\phi(1\otimes m)=m\ ,$$

vagyis $\phi\circ\psi=\mathrm{id}_M$; másrészt minden $r\in R$ és $m\in M$ esetén

$$(\psi\circ\phi)(r\otimes m)=\psi(rm)=1\otimes(rm)=r\otimes m\ ,$$

ezért $\psi\circ\phi$ és $\mathrm{id}_{R\otimes_R M}$ megegyeznek az $r\otimes m$ alakú elemeken. Mivel ez utóbbiak $R\otimes_R M$ egy generátorrendszerét alkotják, így $\psi\circ\phi=\mathrm{id}_{R\otimes_R M}$, ahogy állítottuk. □

2.3 Feladat *Számoljuk ki az alábbi konkrét esetet a tenzorszorzat definíciójának segítségével. Legyen $R=\mathbb{Z}$, $M=\mathbb{Z}/k\mathbb{Z}$ és $N=\mathbb{Z}/l\mathbb{Z}$, ahol m,l egész számok. Mutassuk meg, hogy*

$$\mathbb{Z}/k\mathbb{Z}\otimes_{\mathbb{Z}}\mathbb{Z}/l\mathbb{Z}\simeq\mathbb{Z}/(k,l)\mathbb{Z}\ ,$$

ahol szokásos módon (k,l) a két egész szám legnagyobb közös osztóját jelöli.

2.4 Feladat *Mutassuk meg, hogy $\mathbb{Q}\otimes_{\mathbb{Z}}\mathbb{Q}/\mathbb{Z}=0$ és $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}\otimes_{\mathbb{Z}}\mathbb{Q}/\mathbb{Z}=0$. Igazoljuk azt is, hogy a*

$$\mathbb{Q}\otimes_{\mathbb{Z}}\mathbb{Q}\longrightarrow\mathbb{Q}$$

kanonikus homomorfizmus izomorfizmus is egyben.

2.11. Megjegyzés *Fontos odafigyelni arra, hogy az $m\otimes n$ jelölés nem egyértelmű, mivel nem tünteti fel, hogy m-re és n-re mint mely modulusok elemére tekintünk. Előfordulhat ugyanis az alábbi kellemetlen szituáció: legyenek $M'\leq M$, $N'\leq N$ részmodulusok, $m\in M'$ és $n\in N'$. Megfelelő választással elérhető, hogy $m\otimes n$ mint $M'\otimes_R N'$-beli elem nem nulla, viszont mint $M\otimes_R N$-beli elem viszont 0.*

Erre a legegyszerűbb példa talán az alábbi: $R=\mathbb{Z}$, $M=\mathbb{Z}$, $M'=2\mathbb{Z}$, $N=N'=\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$. Tekintsük most a „$2\otimes 1$” elemet. Ha $\mathbb{Z}\otimes_{\mathbb{Z}}\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$-beli elemként nézünk rá, akkor

$$2\otimes 1=(2\cdot 1)\otimes 1=1\otimes(2\cdot 1)=1\otimes 0=0\ .$$

Ha viszont $2\otimes 1$-et mint $2\mathbb{Z}\otimes_{\mathbb{Z}}\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$-beli elemet vesszük, akkor nem egyenlő 0-val.

2.5 Feladat *Ellenőrizzük az előző megjegyzés utolsó kijelentését.*

2.12. Lemma *Legyenek* $\{m_i \mid i \in I\} \subseteq M$ *és* $\{n_i \mid i \in I\} \subseteq N$ *véges elemrendszerek, amelyekre* $\sum_{i\in I} m_i \otimes n_j = 0$ *az* $M \otimes_R N$ *R-modulusban. Ekkor léteznek olyan végesen generált* $M' \leq M$ *és* $N' \leq N$ *részmodulusok, hogy* $\{m_i \mid i \in I\} \subseteq M'$, $\{n_i \mid i \in I\} \subseteq N'$, *és*

$$\sum_{i\in I} m_i \otimes n_i = 0 \;\in\; M' \otimes_R N' \ .$$

Bizonyítás. Legyenek tehát $\{m_i \mid i \in I\} \subseteq M$ és $\{n_i \mid i \in I\} \subseteq N$ olyan véges halmazok, amelyekre

$$\sum_{i\in I} m_i \otimes n_i = 0 \;\in\; M \otimes_R N \ .$$

Ekkor a 2.1. Tétel bizonyításának a jelölésével

$$\sum_{i\in I} (m_i, n_i) \in K \ ,$$

ily módon $\sum_{i\in I}(m_i, n_i)$ a K modulus a 2.1. Tételben mutatott generátorainak véges R-lineáris kombinációja, legyen $H \subseteq M \times N$ egy ilyen generátorhalmaz. Jelölje M' a H-beli elemek első koordinátái, N' pedig a H-beli elemek második koordinátái által generált részmodulust M-ben, illetve N-ben. Ekkor automatikusan

$$\sum_{i\in I} m_i \otimes n_i = 0 \;\in\; M' \otimes_R N' \ .$$

□

2.6 Feladat *Legyen R lokális gyűrű, M és N végesen generált R-modulusok. Mutassuk meg, hogy ha* $M \otimes_R N = 0$, *akkor vagy* $M = 0$ *vagy* $N = 0$.

A tenzorszorzat konstrukciója természetesen nem csak két, hanem tetszőleges véges sok tényező esetén definiálható, és rendelkezik az analóg univerzális tulajdonsággal.

2.13. Tétel (Tenzorszorzat létezése és egyértelműsége) *Legyen* $\{M_i \mid i \in I\}$ *R-modulusok egy véges halmaza. Ekkor létezik egy* V *R-modulus, és egy* $\pi : \times_{i\in I} M_i \to V$ *R-multilineáris leképezés, amelyre teljesül az alábbi univerzális tulajdonság: minden* T *R-modulusra és*

$$\psi\colon\ \times_{i\in I} M_i \longrightarrow T$$

R-multilineáris leképezésre létezik pontosan egy $\phi : V \to T$ *R-homomorfizmus, amelyre*

$$\psi = \phi \circ \pi \ .$$

A (V, π) *pár kanonikus izomorfizmus erejéig egyértelmű.*

2.14. Megjegyzés *Az $\{M_i \mid i \in I\}$ modulusok tenzorszorzatának jele*

$$\bigotimes_{i\in I} {}_R M_i \ ,$$

vagy (amennyiben az $1, \ldots, n$ számokkal indexelünk), $M_1 \otimes_R M_2 \otimes_R \ldots \otimes_R M_n$.

2.15. Megjegyzés *A $\pi : \times_{i\in I} M_i \to \bigotimes_{i\in I R} M_i$ természetes leképezés képének elemeit* felbontható tenzorok*nak hívjuk. Mivel ők (ismét csak a 2.1. Tétel bizonyításának a jelölését használva) az F szabad modulus egy bázisának a képei, az $\bigotimes_{i\in I R} M_i$ tenzorszorzat egy generátorrendszerét alkotják.*

Fontos emlékezni rá, hogy általában a felbontható tenzorok nem *alkotnak bázist, nemtriviális lineáris relációk állnak fenn köztük.*

2.16. Megjegyzés *Amennyiben az I indexhalmaz üres, akkor a tenzorszorzatot R-nek definiáljuk.*

A következő eredmény azt mutatja, hogy R-modulusok tenzorszorzata az indexelés mikéntjétől kanonikus izomorfizmus erejéig független.

2.17. Állítás (A tenzorszorzat kommutativitása) *Legyen I egy véges indexhalmaz, $\{M_i \mid i \in I\}$ R-modulusok egy családja, $\sigma : I \to I$ egy önmagára vett bijekció. Ekkor létezik egy*

$$\phi_\sigma \colon \bigotimes_{i\in I} {}_R M_i \longrightarrow \bigotimes_{i\in I} {}_R M_\sigma(i)$$

R-modulus-izomorfizmus, amelyre

$$\phi(m_1 \otimes \ldots \otimes m_r) = m_{\sigma(1)} \otimes \ldots \otimes m_{\sigma(r)}$$

minden felbontható tenzorra.

Bizonyítás. Az állítás gyorsan következik a tenzorszorzat univerzális tulajdonságából. Ti. vegyük észre, hogy a

$$\begin{aligned} \pi_\sigma \colon \ \times_{i\in I} M_i \quad &\longrightarrow \quad \bigotimes_{i\in I} M_{\sigma(i)} \\ \times_{i\in I} m_i \quad &\mapsto \quad \otimes_{i\in I} m_{\sigma(i)} \end{aligned}$$

pár szintén kielégíti a TUT-át, így létezik egy egyértelmű

$$\bigotimes_{i\in I} {}_R M_i \longrightarrow \bigotimes_{i\in I} {}_R M_\sigma(i)$$

R-modulus-izomorfizmus, amely definíció szerint teljesíti a tételben előírt követelményeket. $\square$

2.18. Megjegyzés *Nagyon fontos emlékezni arra, hogy a tenzorszorzat kommutativitása nem jelenti azt, hogy az $a \otimes b$ és $b \otimes a$ elemek megegyeznek. Ez általában nem igaz, még akkor sem, ha R egy vektortér.*

2.19. Megjegyzés (Modulusok tenzorhatványai) *Fontos szerepet játszik az a speciális eset, amikor az $M_1, \ldots, M_r$ modulusok mind egy M modulussal egyenlők. Ekkor az $M^{\otimes r}$ jelölést használjuk.*

2.20. Állítás *Legyen I egy véges indexhalmaz, $\{M_i \mid i \in I\}$ R-modulusok egy családja, T egy R-modulus. Ekkor az alábbi kanonikus leképezés*

$$\begin{aligned} \mathrm{Hom}_R(\bigotimes_{i \in I} M_i, T) &\longrightarrow L(M_i \mid i \in I; T) \\ \phi \qquad &\mapsto \phi \circ \pi \end{aligned}$$

egy R-modulusok közti izomorfizmus.

Bizonyítás. A tenzorszorzat univerzális tulajdonsága alapján a fenti leképezés bijektív. Mivel könnyen láthatóan R-lineáris is, így definíció szerint R-modulusok közti izomorfizmus lesz. □

2.21. Állítás *Legyenek M, N, P R-modulusok. Ekkor léteznek olyan egyértelműen meghatározott R-izomorfizmusok, amelyekre*

$$\mathrm{Hom}_R(M \otimes_R N, P) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}_R(M, \mathrm{Hom}_R(N, P)) \ ,$$

illetve

$$\mathrm{Hom}_R(M \otimes_R N, P) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}_R(N, \mathrm{Hom}_R(M, P)) \ ,$$

amelyekre

$$\phi \mapsto (m \mapsto (n \mapsto \phi(m \otimes n))) \ ,$$

illetve

$$\phi \mapsto (n \mapsto (m \mapsto \phi(m \otimes n))) \ ,$$

teljesül.

Bizonyítás. Az első állítást látjuk be, a második ezzel teljesen azonos módon bizonyítható. Ehhez tekintsük a

$$L_R(M, N; P) \longrightarrow \mathrm{Hom}_R(M, \mathrm{Hom}_R(N, P))$$

kanonikus izomorfizmust, amelyre

$$\Phi \mapsto (m \mapsto (n \mapsto \Phi(m, n))) \ ,$$

és alkalmazzuk az 2.20. Állítást. □

2.22. Állítás *Legyen M egy tetszőleges, F egy szabad R-modulus $\{x_i \mid i \in I\}$ bázissal. Ekkor a*

$$\begin{array}{rcl} \bigoplus_{i\in I} M & \longrightarrow & M \otimes_R F \\ (m_i)_{i\in I} & \mapsto & \sum_{i\in I} m_i \otimes x_i \end{array}$$

leképezés egy R-modulus-izomorfizmus.

Bizonyítás. A direkt összeg univerzális tulajdonságából adódik, hogy a fenti ϕ hozzárendelés valóban jóldefiniált; most megkonstruáljuk az inverzét. Ehhez tekintsük a

$$\begin{array}{rcl} \mu\colon M \times F & \longrightarrow & \bigoplus_{i\in I} M \\ (m, \sum_{i\in I} r_i x_i) & \mapsto & (r_i m)_{i\in I} \end{array}$$

R-bilineáris leképezést. A TUT alapján ekkór létezik pontosan egy $\psi\colon M\otimes_R F \to \oplus_{i\in I} M$ R-homomorfizmus, amelyre az

$$\begin{tikzcd} M \times F \arrow[r] \arrow[dr, "\mu"'] & M \otimes_R F \arrow[d, "\psi"] \\ & \bigoplus_{i\in I} M \end{tikzcd}$$

diagram kommutatív, speciálisan

$$\psi(m \otimes \sum_{i\in I} r_i x_i) = (r_i m)_{i\in I}$$

minden $m \in M$ és $\sum_{i\in I} r_i x_i \in F$ elemre.

Először igazoljuk, hogy $\psi \circ \phi = \mathrm{id}$. Ecélból legyen $(m_i)_{i\in I} \in \oplus_{i\in I} M$ tetszőleges elem. Ekkor

$$\begin{aligned} (\psi\circ\phi)((m_i)_{i\in I}) &= \psi(\sum_{i\in I} m_i \otimes x_i) \\ &= \sum_{i\in I} \psi(m_i \otimes x_i) \\ &= \sum_{i\in I} (\delta_{ij} m_i)_{j\in I} \\ &= (m_i)_{i\in I}\ , \end{aligned}$$

amint azt állítottuk.

A másik irányt a korábban már látott módszerrel bizonyítjuk be, mégpedig úgy, hogy igazoljuk, hogy a $\phi \circ \psi$ és az id leképezések megegyeznek az $M \otimes_R F$ modulusnak az $m \otimes \sum_{i\in I} r_i x_i$ alakú elemekből álló generátorrendszerén. Legyenek tehát $m \in M$ és $\sum_{i\in I} r_i x_i \in F$ tetszőleges elemek. Ekkor

$$\begin{aligned}
(\phi \circ \psi)(m \otimes \sum_{i\in I} r_i x_i) &= \phi(\psi(\sum_{i\in I} m_i \otimes r_i x_i)) \\
&= \phi(\sum_{i\in I} \psi(m_i \otimes r_i x_i)) \\
&= \phi(\sum_{i\in I} (\delta_{ij} r_j m)_{j\in I}) \\
&= \phi((r_i m_i)_{i\in I}) \\
&= \sum_{i\in I} (r_i m) \otimes x_i \\
&= m \otimes \sum_{i\in I} r_i x_i \ .
\end{aligned}$$

Ezzel az állítást beláttuk. □

2.23. Következmény *Legyenek F és G szabad R-modulusok az $\{x_i \mid i \in I\}$, illetve $\{y_j \mid j \in J\}$ bázisokon. Ekkor $F \otimes_R G$ is szabad R-modulus lesz az $\{(x_i, y_j) \mid (i, j) \in I \times J\}$ bázison.*

Bizonyítás. Az, hogy F és G szabad modulusok, ekvivalens azzal, hogy léteznek olyan I és J indexhalmazok, amelyekre

$$F \simeq \bigoplus_{i\in I} R \quad \text{és} \quad G \simeq \bigoplus_{j\in J} R \ .$$

Alkalmazva az 2.22. Állítást az $M = F$, $F = G$ szereposztásban, azt kapjuk, hogy

$$F \otimes_R G \simeq \bigoplus_{j\in J} F = \bigoplus_{j\in J} (\bigoplus_{i\in I} R) \ ,$$

ami láthatóan szintén szabad. A bázisokra vonatkozó állítást az olvasóra hagyjuk. □

A következőkben definiáljuk R-modulus-homomorfizmusok tenzorszorzatát, és megvizsgáljuk egyszerűbb tulajdonságaikat.

2.24. Megjegyzés *Legyen $f_i : M_i \to N_i$ R-lineáris leképezések egy véges halmaza. Ekkor a*

$$\begin{array}{ccc} \bigoplus_{i\in I} M_i & \longrightarrow & \bigotimes_{i\in I} N_i \\ (m_i)_{i\in I} & \mapsto & \otimes_{i\in I} f_i(m_i) \end{array}$$

függvény könnyen ellenőrizhetően R-multilineáris, így a TUT miatt egy

$$\bigotimes_{i\in I} f_i \colon \bigotimes_{i\in I} M_i \longrightarrow \bigotimes_{i\in I} N_i$$

R-homomorfizmust indukál. Ez utóbbit az f_i homomorfizmusok tenzorszorzatának *nevezzük. A konstrukcióból következik, hogy tetszőleges $\otimes_{i\in I} m_i$ felbontható tenzor esetén*

$$(\bigotimes_{i\in I} f_i)(\otimes_{i\in I} m_i) = \otimes_{i\in I} f_i(m_i) \ . \tag{2.1}$$

2.25. Lemma *Legyenek $f_i : M_i \to N_i$, $g_i : N_i \to P_i$ R-lineáris leképezések véges családjai az I indexhalmaz felett. Ekkor teljesülnek az alábbiak:*

1. $\otimes_{i\in I} \mathrm{id}_{M_i} = \mathrm{id}_{\otimes_{i\in I} M_i}$, *és*
2. $(\otimes_{i\in I} g_i) \circ (\otimes_{i\in I} f_i) = \otimes_{i\in I} g_i \circ f_i$.

Bizonyítás. A (2.1) egyenlőség direkt következménye, mivel egy tenzorszorzatból menő R-homomorfizmust a felbontható tenzorok képei egyértelműen meghatároznak. □

2.26. Megjegyzés *Tekintsük az R-modulusok* Mod_R *kategóriáját, és rögzítsünk egy M objektumot benne. Ekkor az a hozzárendelés, amely egy N R-modulushoz a $M \otimes_R N$ modulust, egy $\phi : N \to P$ morfizmushoz pedig a $\mathrm{id}_M \otimes \phi \colon M \otimes_R N \to M \otimes_R P$ morfizmust rendeli, az 2.25. Lemma alapján egy (kovariáns) funktor.*

A modern algebra különböző ágaiban a most definiált $M\otimes_R : \mathrm{Mod}_R \to \mathrm{Mod}_R$ funktor nagyon fontos szerepet játszik.

2.27. Állítás *Legyen $f_i \colon M_i \to N_i$ R-lineáris leképezések egy véges családja,*

$$f \overset{def}{=} \otimes_{i\in I} f_i \ .$$

Ekkor

1. *Ha f_i izomorfizmus minden $i \in I$ esetén, akkor f is izomorfizmus.*
2. *Ha f_i szürjektív minden $i \in I$ esetén, akkor f is szürjektív.*

3. *Ha minden egyes $i \in I$ esetén f_i az M_i modulust N_i egy direkt összeadandójára képezi le, akkor f is az $\otimes_{i\in I} N_i$ egy direkt összeadandójára képezi le a $\otimes_{i\in I} M_i$ modulust.*

4. *Ha R egy test és f_i injektív minden $i \in I$ esetén, akkor f is injektív lesz.*

Bizonyítás. (1) Ha minden f_i izomorfizmus, akkor a 2.25. Lemma segítségével gyorsan igazolható, hogy

$$f \circ \otimes_{i\in I} f_i^{-1} = \mathrm{id} \quad \text{és} \quad \otimes_{i\in I} f_i^{-1} \circ f = \mathrm{id} ,$$

azaz f egy izomorfizmus.
(2) Ha az f_i homomorfizmus szürjektív minden $i \in I$-re, akkor $\operatorname{im} f_i = N_i$ minden $i \in I$ esetén, amiből adódik, hogy minden $\otimes_{i\in I} N_i$-beli felbontható tenzor f képében van. Mivel ez utóbbiak generálják $\otimes_{i\in I} N_i$-t, így ez megegyezik f képével.
(3) Egy $f_i : M_i \to N_i$ homomorfizmus pontosan akkor képezi M_i-t N_i egy direkt összeadandójára, ha létezik olyan $g_i : N_i \to M_i$ R-homomorfizmus, amelyre

$$g_i \circ f_i = \mathrm{id}_{M_i} \ .$$

Feltevés szerint ez minden $i \in I$ esetén teljesül, ahonnan a 2.25. Lemma miatt adódik a keresett állítás.
(4) Közvetlen következménye (3)-nak, mivel minden test feletti vektortér minden alterének van direkt kiegészítője. □

2.7 Feladat *Mutassunk ellenpéldát az összes olyan implikációra, ami nem szerepel a fenti állításban.*

2.28. Állítás (A tenzorszorzat asszociativitása) *Legyen $\{M_i \mid i \in I\}$ R-modulusok egy véges családja,*

$$I = \bigcup_{j\in J} I_j$$

az I indexhalmaz egy partíciója.
Ekkor létezik egy egyértelműen meghatározott

$$\bigotimes_{i\in I} M_i \xrightarrow{\sim} \bigotimes_{j\in J} \left(\bigotimes_{i\in I_j} M_i \right)$$

R-izomorfizmus, amelyre

$$\otimes_{i\in I} m_i \mapsto \otimes_{j\in J} \big(\otimes_{i\in I_j} m_i \big)$$

minden felbontható tenzorra.

Bizonyítás. A bizonyítás most is úgy zajlik, hogy észrevesszük, hogy a

$$\begin{aligned} V &\stackrel{\text{def}}{=} \bigotimes_{j\in J}\left(\bigotimes_{i\in I_j} M_i\right) , \\ \pi &\stackrel{\text{def}}{=} \times_{i\in I} m_i \mapsto \otimes_{j\in J}\big(\otimes_{i\in I_j} m_i\big) \end{aligned}$$

pár is rendelkezik a tenzorszorzat univerzális tulajdonságával, tehát a szokásos tenzorszorzattal kanonikusan izomorf. □

2.29. Következmény *Legyen $\{F_i \mid i\in I\}$ szabad R-modulusok egy véges családja. Ekkor $\otimes_{i\in I} F_i$ szintén szabad R-modulus.*

Ha minden $i\in I$ indexre $\{e_{i,j_i} \mid j_i \in J_i\}$ az F_i szabad modulus egy bázisa, akkor

$$\otimes_{i\in I} e_{i,j_i} \qquad \textit{ahol } (j_i)_{i\in I} \in \prod_{i\in I} J_i \ ,$$

pedig a $\otimes_{i\in I} F_i$ szabad R-modulusnak lesz egy bázisa.

Bizonyítás. Azonnal következik a tenzorszorzat asszociativitásábó, és a tényből, hogy szabad modulusok tenzorszorzata is szabad. □

2.30. Következmény *Az előző Következmény jelöléseivel*

$$\operatorname{rank} \otimes_{i\in I} F_i = \prod_{i\in I} \operatorname{rank} F_i \ .$$

2.31. Megjegyzés (Behelyettesítés mint homomorfizmus) *Tetszőleges M és N R-modulusok esetén automatikusan kapjuk a*

$$\begin{array}{rcl} \operatorname{Hom}_R(M,N) \otimes_R M & \longrightarrow & N \\ f\otimes m & \mapsto & f(m) \end{array}$$

ún. behelyettesítés-homomorfizmust.

2.8 Feladat *Adjunk szükséges és elégséges feltételt arra, hogy egy M R-modulus esetén az*

$$M^* \otimes_R M \longrightarrow R$$

behelyettesítés-homomorfizmus szürjektív legyen.

Egy alapvető fontosságú megfigyelés, hogy a tenzorszorzat tetszőleges direkt összegekkel felcserélhető.

2.32. Állítás *Legyen $\{M_i \in i \in I\}$ R-modulusok egy tetszőleges (nem feltétlenül véges) családja, N egy R-modulus. Ekkor létezik egy természetes*

$$(\bigoplus_{i\in I} M_i) \otimes_R N \xrightarrow{\sim} \bigoplus_{i\in I}(M_i \otimes_R N)$$

izomorfizmus, amelyre

$$((m_i)_{i\in I}) \otimes n \mapsto (m_i \otimes n)_{i\in I}$$

minden $i \in I$,$m_i \in M_i$ és $n \in N$ esetén.

Bizonyítás. Tekintsük a

$$\begin{aligned} \phi\colon (\bigoplus_{i\in I} M_i) \times N &\longrightarrow \bigoplus_{i\in I}(M_i \otimes_R N) \\ (((m_i)_{i\in I}), n) &\mapsto (m_i \otimes n)_{i\in I} \end{aligned}$$

leképezést. A tenzorszorzat bilinearitása miatt ϕ is bilineáris, ezért a TUT alapján indukál egy egyértelműen meghatározott

$$\overline{\phi}\colon (\bigoplus_{i\in I} M_i) \otimes_R N \longrightarrow \bigoplus_{i\in I}(M_i \otimes_R N)$$

R-lineáris leképezést, amelyre

$$((m_i)_{i\in I}) \otimes n \mapsto (m_i \otimes n)_{i\in I} \ .$$

Megkonstruáljuk $\overline{\phi}$ inverzét, amit $\overline{\psi}$-vel jelölünk. Ehhez tetszőleges $i \in I$ esetén tekintsük a

$$\begin{aligned} \psi_i\colon M_i \times N &\longrightarrow (\bigoplus_{i\in I} M_i) \otimes_R N \\ (m_i, n) &\mapsto (0\dots, 0, m_i, 0, \dots, 0) \otimes n \end{aligned}$$

hozzárendelést, amely nem más, mint a

$$M_i \times N \hookrightarrow (\bigoplus_{i\in I} M_i) \times N \longrightarrow (\bigoplus_{i\in I} M_i) \otimes_R N$$

természetes leképezések kompozíciója. Mivel ψ_i láthatóan R-bilineáris, a TUT alapján indukál egy jól meghatározott

$$\overline{\psi_i}\colon M_i \otimes_R N \longrightarrow (\bigoplus_{i\in I} M_i) \otimes_R N$$

R-homomorfizmust, amelyre

$$m_i \otimes n \mapsto (0\ldots,0,m_i,0,\ldots,0)\otimes n\ .$$

A direkt összeg univerzális tulajdonsága alapján (ld. 3.49. Állítás) a $\{\overline{\psi_i} \mid i \in I\}$ család egyértelműen meghatároz egy

$$\overline{\psi}\colon \bigoplus_{i\in I}(M_i \otimes_R N) \longrightarrow (\bigoplus_{i\in I} M_i) \otimes_R N$$

R-lineáris leképezést, amelyre

$$(m_i \otimes n)_{i\in I} \mapsto ((m_i)_{i\in I}) \otimes n$$

minden $i \in I$,$m_i \in M_i$ és $n \in N$ esetén.

A képletekből leolvasható, hogy $\overline{\psi}$ és $\overline{\phi}$ egymás inverzei. □

2.33. Megjegyzés *Ha $\{M_i \mid i \in I\}$ és $\{N_i \mid i \in I\}$ R-modulusok véges halmazai, $\phi_i \in \mathrm{Hom}_R(M_i, N_i)$, akkor a*

$$(\phi_i)_{i\in I} \mapsto \otimes_{i\in I}\phi_i$$

hozzárendelés egy R-multilineáris

$$\prod_{i\in I} \mathrm{Hom}_R(M_i, N_i) \longrightarrow \mathrm{Hom}_R(\otimes_{i\in I}M_i, \otimes_{i\in I}N_i)$$

leképezést ad meg.

2.34. Állítás *Legyenek $\{M_i \mid i \in I\}$ és $\{N_i \mid i \in I\}$ R-modulusok véges családjai, $\phi_i \in \mathrm{Hom}_R(M_i, N_i)$ minden $i \in I$ esetén. Ekkor a*

$$(\phi_i)_{i\in I} \mapsto \otimes_{i\in I}\phi_i$$

hozzárendelés egy

$$\bigotimes_{i\in I} \mathrm{Hom}_R(M_i, N_i) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}_R(\bigotimes_R M_i, \bigotimes_R N_i)$$

homomorfizmust létesít, amely bijektív lesz, amennyiben az össze szereplő R-modulus végesen generált és szabad.

Bizonyítás. Következik az 2.33. Megjegyzésből, a tenzorszorzat univerzális tulajdonságából és a tenzorszorzat asszociativitásából. □

2.35. Következmény *Ha M szabad R-modulus, akkor a kanonikus*

$$M^* \otimes_R M \longrightarrow \mathrm{End}_R(M)$$

homomorfizmus, amelyre $m^* \otimes m \mapsto (m' \mapsto m^*(m')m)$, izomorfizmus.

2.36. Következmény *Legyen $\{F_i \mid i \in I\}$ szabad R-modulusok egy családja, ekkor a*

$$\begin{array}{ccc} \bigotimes_{i\in I} F_i^* & \longrightarrow & (\bigotimes_{i\in I} F_i)^* \\ \otimes_{i\in I}\phi_i & \mapsto & \prod_{i\in I} \phi_i \end{array}$$

kanonikus R-lineáris leképezés bijektív.

2.2. Tenzorszorzat és mátrixok

Konkrét számolásokhoz és számítógépes algoritmusok írásához hasznos tudni, hogy miképpen működik a tenzorszorzat rögzített bázisban megadott lineáris leképezésekre. Ecélból legyenek

$$f\colon F_1 \to F_2 \quad \text{és} \quad g\colon G_1 \to G_2$$

véges rangú szabad modulusok közti R-lineáris leképezések. Rögzítsünk bázisokat a fenti szabad modulusokban:

$$\begin{array}{rcl} F_1 & : & f_1, \dots, f_{m_1} \\ F_2 & : & f_1', \dots, f_{m_2}' \\ G_1 & : & g_1, \dots, g_{n_1} \\ G_2 & : & g_1', \dots, g_{n_2}' \ , \end{array}$$

és legyenek

$$A = (a_{ij})_{1\le i\le m_2, 1\le j\le m_1} \in M_{m_2,m_1} \ ,$$

illetve

$$B = (b_{rs})_{1\le r\le n_2, 1\le s\le n_1} \in M_{n_2,n_1} \ ,$$

az f, illetve g R-lineáris leképezések mátrixai a fenti bázisokban.

Ekkor az $F_1 \otimes_R G_1$ és $F_2 \otimes_R G_2$ modulusok is szabadok az alábbi bázisokkal:

$$\begin{array}{rcl} F_1 \otimes G_1 & : & f_j \otimes g_s \ \text{ ahol } 1 \le j \le m_1 \text{ és } 1 \le s \le n_1, \\ F_2 \otimes G_2 & : & f_i' \otimes g_r' \ \text{ ahol } 1 \le i \le m_2 \text{ és } 1 \le r \le n_2. \end{array}$$

2.37. Állítás *A fenti jelölésekkel az $f \otimes g$ homomorfizmus mátrixa az*

$$\begin{aligned} F_1 \otimes G_1 &: f_j \otimes g_s \;\; \textit{ahol}\; 1 \le j \le m_1 \;\textit{és}\; 1 \le s \le n_1, \\ F_2 \otimes G_2 &: f'_i \otimes g'_r \;\; \textit{ahol}\; 1 \le i \le m_2 \;\textit{és}\; 1 \le r \le n_2. \end{aligned}$$

bázisokban

$$(a_{ij}b_{rs})_{1\le i\le m_2, 1\le j\le m_1, 1\le r\le n_2, 1\le s\le n_1} \in M_{m_2n_2, m_1n_1}(R) \ .$$

Bizonyítás. A bizonyítás egyszerű számolás.

$$\begin{aligned} (f\otimes g)(f_j \otimes g_s) &= f(f_j)\otimes g(g_s) \\ &= (\sum_{1\le i\le m_2} a_{ij} f'_i) \otimes (\sum_{1\le r\le n_2} b_{rs} g'_r) \\ &= \sum_{1\le i\le m_2, 1\le r\le n_2} a_{ij}b_{rs}(f'_i \otimes g'_r) \ . \end{aligned}$$

A leképezések tenzorszorzatának a mátrixa eszerint megegyezik a leképezéseket reprezentálólól matrixok ún. Kronecker-szorzatával.

2.38. Definíció (Mátrixok Kronecker-szorzata) *Az*

$$A \in M_{m_2,m_1}(R) \quad \textit{és} \quad B \in M_{n_2,n_1}(R)$$

mátrixok Kronecker-szorzata *az*

$$A\otimes B \overset{def}{=} (a_{ij}b_{rs}) \in M_{m_2n_2, m_1n_1}$$

mátrix, ahol $1 \le i \le m_2, 1 \le j \le m_1, 1 \le r \le n_2, 1 \le s \le n_1$.

Mátrixok esetén a Kronecker-szorzat a definíció, ami (nem véletlenül) megfelel a hozzájuk tartozó lineáris leképezések tenzorszorzatának a mátrixával.

2.9 Feladat *Igazoljuk, hogy a Kronecker-szorzat egy*

$$M_{m_2,m_1}(R) \otimes_R M_{n_2,n_1}(R) \longrightarrow M_{m_2n_2,m_1n_1}(R)$$

R-modulus-homomorfizmust indukál, ami izomorfizmus.

2.39. Példa *Az illusztráció kedvéért vizsgáljuk meg két darab 2×2-es mátrix Kronecker-szorzatát. Legyenek*

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \quad \textit{és} \quad B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix} \ .$$

Ekkor

$$A \otimes B = \begin{pmatrix} a_{11}b_{11} & a_{12}b_{11} & a_{11}b_{12} & a_{12}b_{12} \\ a_{21}b_{11} & a_{22}b_{11} & a_{21}b_{12} & a_{22}b_{12} \\ a_{11}b_{21} & a_{12}b_{21} & a_{11}b_{22} & a_{12}b_{22} \\ a_{21}b_{21} & a_{22}b_{21} & a_{21}b_{22} & a_{22}b_{22} \end{pmatrix} \ .$$

2.40. Megjegyzés *Ellentétben a szokásos mátrixszorzással bármely két mátrixnak definiáltuk a Kronecker-szorzatát, függetlenül a méreteiktől.*

2.10 Feladat *Határozzuk meg az alábbi mátrixok Kronecker-szorzatait.*

1. $A = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ *és* $B = \begin{pmatrix} 2 & 3 \end{pmatrix}$

2. $A = \begin{pmatrix} a & a^2 \\ a^3 & a^{-1} \end{pmatrix}$ *és* $B = \begin{pmatrix} a & a^3 \\ a^5 & a^7 \end{pmatrix}$.

2.11 Feladat *Döntsük el, hogy a Kronecker-szorzat kommutatív-e.*

2.41. Megjegyzés *Az iménti jelölésekkel az $A \otimes B$ mátrix kétféleképpen is blokkmátrix-alakba írható. Egyrészt*

$$A \otimes B = (a_{ij}B)_{1 \le i \le m_2, 1 \le j \le m_1} \ ,$$

másrészt

$$A \otimes B = (b_{rs}A)_{1 \le r \le n_2, 1 \le s \le n_1} \ .$$

2.12 Feladat *Határozzuk meg tetszőleges $A \in M_m(R)$ mátrix és n pozitív egész esetén az $A \otimes \mathrm{id}_{R^n}$ mátrixot. Adjuk meg a nyomát és a determinánsát.*

2.42. Állítás (Nyom és determináns) *Legyenek F és G m, illetve n-rangú szabad modulusok, $f \in \mathrm{End}_R(F)$, $g \in \mathrm{End}_R(G)$. Ekkor*

$$\mathrm{Tr}(f \otimes g) = \mathrm{Tr}(f) \cdot \mathrm{Tr}(g) \ ,$$

és

$$\det(f \otimes g) = \det(f)^n \cdot \det(g)^m \ .$$

Bizonyítás. A nyomra vonaktozó eredmény gyorsan látszik a 2.41. Megjegyzésből. Rögzítsünk tetszőleges bázisokat az F és G modulusokban, legyenek az f és g leképezések mátrixai A, illetve B. Ekkor a 2.41. az $A \otimes B$ Kronecker-szorzat nyomára az alábbit adja:

$$\mathrm{Tr}(A \otimes B) = \sum_{i=1}^{m} a_{ii} \, \mathrm{Tr}(B) = \mathrm{Tr}(A) \cdot \mathrm{Tr}(B) \ .$$

A determinánsokra vonatkozó állítást az alábbi módon igazolhatjuk. Mivel két endomorfizmus kompozíciójának a determinánsa megegyezik a két determináns szorzatával, továbbá

$$(f \otimes g) = (f \otimes \mathrm{id}_G) \circ (\mathrm{id}_F \otimes g) \ ,$$

ezért elég azt a speciális esetet belátni, amikor f és g közül az egyik endomorfizmus az identitás. Ebben az esetben az 2.41. Megjegyzés szerint $A \otimes \mathrm{id}_G$ és $\mathrm{id}_F \otimes B$ csupa azonos mátrixból álló blokkdiagonális mátrix. A blokkdiagonális mátrixok determinánsára vonatkozó tétel adja a keresett állítást. □

2.3. Algebrák tenzorszorzata

Egy R kommutatív gyűrű feletti algebrák az R-modulusoknak speciális esetei, ahol magán a moduluson még egy multiplikatív műveletet is értelmezünk. Igen nagy szerepet játszanak az algebrai és aritmetikai geometriában, így a tenzorszorzatuk is kitüntetett jelentőségű. Az R-algebrákkal kapcsolatos elemi ismeretekért ld. például [AM69, Chapter 2].

Először idézzük fel a definíciót.

2.43. Definíció *Egy A R-modulust* R-algebrának *hívunk, ha adott rajta egy R-bilineáris $\mu : A \times A \to A$ művelet, amely a modulus-struktúra additív komponensével együtt egy gyűrűt alkot.*

Ha A és B R-algebrák, akkor egy $\phi : A \to B$ függvény R-algebra-homomorfizmus*, ha R-modulus-homomorfizmus és gyűrűhomomorfizmus is egyben.*

2.44. Példa *Egyszerű, de igen hasznos példa egy R-algebrára az n-változós $R[x_1, \ldots, x_n]$ polinomgyűrű, vagy annak tetszőleges faktorgyűrűje.*

Egy másik gyakran előforduló példa egy X halmazon (topologikus téren, differenciálható vagy algebrai sokaságon) értelmezett R-értékű függvények (folytonos függvények, sima függvények, ill. reguláris függvények) halmaza a pontonkénti műveletekkel.

Az előző két példatípusba egyaránt beletartoznak egy K test feletti affin algebrai varietások koordinátagyűrűi.

2.45. Megjegyzés *Kicsit másképpen fogalmazva egy A R-algebra nem más, mint egy $f : R \to A$ gyűrűhomomorfizmus, ahol az R-modulusstruktúrát A-n az*

$$a \cdot b \overset{def}{=} f(a)b$$

hozzárendeléssel értelmezzük. Ebben a kontextusban az f homomorfizmust az A-algebrához tartozó struktúrahomomorfizmus*nak nevezzük.*

Amennyiben $R = K$ test, akkor az f homomorfizmus szükségképpen injektív, így azonosíthatjuk K-t az A-beli képével.

2.46. Megjegyzés *Legyenek $f : R \to A$ és $g : R \to B$ R-algebrák az 2.45. Megjegyzés értelmében. Ekkor rögtön adódik, hogy egy $h : A \to B$ gyűrűhomomorfizmus pontosan akkor lesz R-algebra-homomorfizmus, ha az*

$$\begin{tikzcd} & R \arrow[dl, "f"'] \arrow[dr, "g"] & \\ A \arrow[rr, "h"] & & B \end{tikzcd}$$

diagram kommutatív.

2.13 Feladat *Mutassuk meg, hogy miként tekinthetünk minden gyűrűre mint $\mathbb{Z}$-modulusra.*

2.47. Megjegyzés *Az R-algebrák fogalmát a tenzorszorzat segítségével is átfogalmhazhatjuk. Ha A egy R-algebra, akkor az A-beli szorzás nem más, mint egy*

$$\mu\colon A \times A \longrightarrow A$$

R-homomorfizmus, amire teljesül az asszociativitás, és a multiplikatív egység létezése.

Legyen

$$\widetilde{\mu}\colon A \otimes A \longrightarrow A$$

a tenzorszorzat univerzális tulajdonságából kapott R-homomorfizmus.

A μ szorzás asszociativitása ekvivalens az alábbi diagram kommutativitásával:

$$\begin{tikzcd}
A \otimes (A \otimes A) \arrow[r, "\sim"] \arrow[d, "\mathrm{id}_A \otimes \widetilde{\mu}"'] & (A \otimes A) \otimes A \arrow[d, "\widetilde{\mu} \otimes \mathrm{id}_A"] \\
A \otimes A \arrow[r, "\widetilde{\mu}"] & A
\end{tikzcd} ,$$

ahol a vízszintes felső nyíl az adott tenzorszorzatok közti természetes izomorfizmus (amely az $a \otimes (b \otimes c)$ tenzorhoz az $(a \otimes b) \otimes c$ elemet rendeli).

A μ-re vonatkozó multiplikatív egységelem létezése a szorzásnak az R strukúraleképezésével való felcserélhetőségét jelenti, precízebben az alábbi diagram kommutativitását:

$$\begin{tikzcd}
R \otimes_R A \simeq A \simeq A \otimes_R R \arrow[r, "\mathrm{id}_A \otimes f_A"] \arrow[d, "f_A \otimes \mathrm{id}_A"'] & A \otimes_R A \arrow[d, "\widetilde{\mu}"] \\
A \otimes_R A \arrow[r, "\widetilde{\mu}"] & A
\end{tikzcd} ,$$

ahol f_A a struktúraleképezés, a bal felső sarokban pedig szintén a megfelelő kanonikus izomorfizmusok találhatók.

2.48. Állítás (Algebrák tenzorszorzata) *Legyenek $f_A : R \to A$, $f_B : R \to B$ R-algebrák.*

1. *Az $A \otimes_R B$ R-modulusón az alábbi hozzárendelés:*

$$(a \otimes b) \cdot (a' \otimes b') \overset{def}{=} (aa') \otimes (bb') \quad \text{minden } a, a' \in A \text{ és } b, b' \in B \text{ esetén}$$

   egy R-algebra-struktúrát létesít.

2. *Léteznek kanonikus $\iota_A : A \to A \otimes_R B$ és $\iota_B : B \to A \otimes_R B$ R-algebra-homomorfizmusok, amelyekre*

$$\iota_A(a) = a \otimes 1_B \quad \text{illetve} \quad \iota_B(b) = 1_A \otimes b$$

   minden $a \in A$ és $b \in B$ esetén.

3. Az imént definiált R-algebra-struktúra $A \otimes_R B$-n rendelkezik az alábbi univerzális tulajdonsággal: tetszőleges $f_C : R \to C$ R-algebrára és tetszőleges $\phi : A \to C$ és $\psi : B \to C$ R-algebra-homomorfizmusokra létezik pontosan egy $\alpha : A \otimes_R B \to C$ R-algebra-homomorfizmus, amelyre az alábbi diagram kommutatív:

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "\iota_A"] \arrow[dr, "\phi"'] & A \otimes_R B \arrow[d, "\alpha"] & B \arrow[l, "\iota_B"'] \arrow[dl, "\psi"] \\ & C & \end{tikzcd} .$$

Bizonyítás. (1) Tetszőleges $a \in A$ elem esetén jelölje

$$\begin{aligned} \tau_a \colon A &\longrightarrow A \\ x &\mapsto ax \end{aligned}$$

az a-val való szorzást mint R-lineáris endomorfizmust, hasonlóképpen B elemeire. Amint azt korábban láttuk, tetszőlegesen választott $a \in A$ és $b \in B$ esetén $\tau_a \otimes \tau_b$ egy R-modulus-homomorfizmus $A \otimes_R B$-n.

Könnyen ellenőrizhető, hogy az

$$\begin{aligned} A \times B &\longrightarrow \mathrm{End}_R(A \otimes_R B) \\ (a, b) &\mapsto \tau_a \otimes \tau_b \end{aligned}$$

hozzárendelés R-bilineáris, így egy

$$\tau \colon A \otimes_R B \longrightarrow \mathrm{End}_R(A \otimes_R B)$$

R-homomorfizmust indukál, amelyre teljesül, hogy

$$\tau(a \otimes b) = \tau_a \otimes \tau_b \quad \text{minden } a \in A,\ b \in B \text{ esetén.}$$

Egy pillanatra tekintsük az $a \otimes 1$ és $a' \otimes 1$ tenzorokat. Amennyiben azt szeretnénk, hogy az $A \otimes_R B$-beli szorzás az A- illetve B-belinek kiterjesztése legyen, akkor szükségképpen

$$(a \otimes 1) \otimes (a' \otimes 1) = (aa') \otimes 1$$

kell, hogy legyen (analóg módon B-beli elemekre és $1 \otimes b$ alakú tenzorokra), amit a τ leképezés segítségével úgy írhatunk le, hogy

$$(a \otimes 1) \otimes (a' \otimes 1) = \tau(a \otimes 1)(a' \otimes 1) \ .$$

Ez alapján definiáljuk az $A \otimes_R B$-beli szorzást az alábbi módon: minden $x, y \in A \otimes_R B$ esetén

$$x \cdot y \overset{\text{def}}{=} \tau(x)(y) \ .$$

A kapott művelet a konstrukció alapján R-bilineáris, rögtön látszik, hogy $1_A \otimes 1_B$ multiplikatív egységelem. Az asszociativitást a művelet R-bilineáris volta miatt elegendő felbontható tenzorokra igazolni, ott viszont azonnal adódik az A-beli, illetve B-beli szorzás asszociativitásából.

Ha most $x = a \otimes b$ és $x' = a' \otimes b'$ felbontható tenzorokat tekintünk, akkor

$$x \cdot y = \tau(x)(y) = \tau(a \otimes b)(a' \otimes b') = \tau_a \otimes \tau_b(a' \otimes b') = (aa') \otimes (bb')\ ,$$

vagyis teljesül a kívánt tulajdonság. Ebből viszont az R-bilinearitás miatt minden $x, y \in A \otimes_R B$-re következik.

(2) A keresett $A \to A \otimes_R B$ R-algebra-homomorfizmust az

$$\iota_A \colon A \xrightarrow{\sim} A \otimes_R R \xrightarrow{\mathrm{id}_A \otimes f_B} A \otimes_R B$$

kompozíció adja meg, ahol f_B a B R-algebra struktúraleképezése. Az 2.50. Lemma alapján $\mathrm{id}_A \otimes f_B$ szintén R-algebra-homomorfizmus, így ι_A is az lesz. A

$$\iota_A(a) = a \otimes 1_B$$

tulajdonság definíció szerint teljesül. Az ι_B-re vonaktozó kijelentés analóg módon ellenőrizhető.

(3) Amennyiben egy $\alpha \colon A \otimes_R B \to B$ R-algebra-homomorfizmus rendelkezik az előírt tulajdonságokkal, akkor a bilinearitás és

$$\alpha(a \otimes b) = \alpha((a \otimes 1) \cdot (1 \otimes b)) = \alpha(a \otimes 1) \cdot \alpha(1 \otimes b) = \phi(a) \cdot \psi(b)$$

miatt egyértelműen meghatározott.

Az α leképezést az alábbi módon konstruáljuk meg. Vegyük észre, hogy a

$$\begin{array}{rcl} A \times B & \longrightarrow & C \\ (a, b) & \mapsto & \phi(a) \cdot \psi(b) \end{array}$$

hozzárendelés R-bilineáris, így egy

$$\alpha \colon A \otimes_R B \longrightarrow C$$

R-homomorfizmust indukál, amelyre

$$\alpha(a \otimes b) = \phi(a) \cdot \psi(b) \quad \text{minden } a \in A \text{ és } b \in B \text{ esetén.}$$

Megmutatjuk, hogy α rendelkezik a kívánt tulajdonságokkal.

Először is,

$$\alpha \circ \iota_A = \phi \quad \text{és} \quad \alpha \circ \iota_B = \psi$$

a definíció és α R-linearitása miatt. Szintén a definícióból következik, hogy

$$\alpha(1_A \otimes 1_B) = 1_C \ .$$

Hátra van még, annak igazolása, hogy α multiplikatív. Ezt ismét csak elég felbontható tenzorokra belátni α linearitása miatt. Legyenek tehát $a \otimes b, a' \otimes b' \in A \otimes_R B$. Ekkor

$$\begin{aligned} \alpha((a \otimes b) \cdot (a' \otimes b')) &= \alpha((aa') \otimes (bb')) \\ &= \phi(aa') \cdot \psi(bb') \\ &= \phi(a) \cdot \phi(a') \cdot \psi(b) \cdot \psi(b') \\ &= \phi(a) \cdot \psi(b) \cdot \phi(a') \cdot \psi(b') \\ &= \alpha(a \otimes b) \cdot \alpha(a' \otimes b') \ , \end{aligned}$$

amint azt állítottuk. Ezzel a tételt beláttuk. □

2.49. Megjegyzés *Ha $a_1, \dots, a_r, a'_1, \dots, a'_s \in A$ és $b_1, \dots, b_r, b'_1, \dots, b'_s \in B$ tetszőleges elemek, akkor a bilinearitás miatt*

$$(\sum_{i=1}^{r}(a_i \otimes b_i)) \cdot (\sum_{j=1}^{s}(a'_j \otimes b'_j)) = \sum_{1 \le i \le r, 1 \le j \le s} (a_i a'_j) \otimes (b_i b'_j) \ .$$

Az $A \otimes_R B$ R-algebra struktúrahomomorfizmusa az

$$R \xrightarrow{\sim} R \otimes_R R \xrightarrow{f_A \otimes f_B} A \otimes_R B$$

kompozíció.

2.50. Lemma *Legyenek $\alpha\colon A \to A'$ és $\beta\colon B \to B'$ R-algebra-homomorfizmusok. Ekkor az*

$$\alpha \otimes \beta\colon A \otimes_R B \longrightarrow A' \otimes B'$$

R-modulus-homomorfizmus az imént definiált R-algebra-struktúrákra nézve R-algebra-homomorfizmus is egyben.

Bizonyítás. Mivel $\alpha \otimes \beta$ R-bilineáris, az állítást elég felbontható tenzorokra belátni. Ebben az esetben viszont

$$\begin{aligned} (\alpha \otimes \beta)((a_1 \otimes b_1) \cdot (a_2 \otimes b_2)) &= (\alpha \otimes \beta)((a_1 a_2) \otimes (b_1 b_2)) \\ &= \alpha(a_1 a_2) \otimes \beta(b_1 b_2) \\ &= (\alpha(a_1)\alpha(a_2)) \otimes (\beta(b_1)\beta(b_2)) \\ &= (\alpha(a_1) \otimes \beta(b_1)) \cdot (\alpha(a_2) \otimes \beta(b_2)) \\ &= (\alpha \otimes \beta)(a_1 \otimes b_1) \ \cdot \ (\alpha \otimes \beta)(a_2 \otimes b_2) \ , \end{aligned}$$

ahogy állítottuk. □

2.51. Megjegyzés *Legyenek A, B R-algebrák, jelöljék*

$$\mu_A\colon A\otimes_R A\to A \quad \textit{illetve} \quad \mu_B\colon B\otimes_R B\to B$$

az adott algebrabeli szorzást (egész pontosan az általuk a TUT-án keresztült indukált leképezéseket). Ekkor

$$\mu_{A\otimes B}\colon (A\otimes_R B)\otimes_R (A\otimes_R B)\xrightarrow{\sim}(A\otimes_R A)\otimes_R (B\otimes_R B)\xrightarrow{\mu_A\otimes\mu_B}A\otimes_R B$$

az $A\otimes_R B$ algebrán a 2.48. Állítás bizonyítása során definiált szorzat.

Ezt a megfigyelést a másik irányban is felhasználhatjuk, lehetséges a szorzatot a fenti kompozícióval definiálni.

2.52. Példa *Geometriai szemszögből nézve R-algebrák tenzorszorzata egész pontosan affin R-sémák vagy varietások szorzatának felel meg (ld. [Har77, Section II.3]).*

Kicsit pontosabban, ha X és Y egy K test feletti affin varietások, akkor X, Y és $X\times Y$ koordinátagyűrűi között az alábbi összefüggés áll fenn:

$$K[X\times Y]\simeq K[X]\otimes_K K[Y]\ .$$

2.14 Feladat *Ha V tetszőleges halmaz, $X_1, X_2\subseteq V$, akkor*

$$X_1\cap X_2\simeq (X_1\times X_2)\cap\Delta_V\ ,$$

ahol $\Delta_V\overset{def}{=}\{(v,v)\mid v\in V\}$ a $V\times V$-beli átló, és a keresett bijekciót a

$$\begin{aligned} j\colon V &\longrightarrow \Delta_V\\ x &\mapsto (x,x)\end{aligned}$$

függvény létesíti.

Legyen most V affin algebrai varietás, $X_1, X_2\subseteq V$ algebrai részhalmazok. Az iménti észrevétel segítségével határozzuk meg $X_1\cap X_2$ koordinátagyűrűjét.

2.53. Állítás (Polinom- és félcsoportalgebrák tenzorszorzata) *Legyenek S és T (additívan jelölt) félcsoportok, ahol a félcsoport definíciójába most beleértjük a félcsoportműveletre nézve neutrális elem létezését. Jelölje $A\overset{def}{=}R[S]$ és $B\overset{def}{=}R[T]$ a megfelelő félcsoportalgebákat. Ekkor létezik egy kanonikus*

$$R[S]\otimes_R R[T]\xrightarrow{\sim}R[S\times T]$$

R-algebra-izomorfizmus.

Bizonyítás. Jelöljék $\{e_\sigma \mid \sigma \in S\}$ és $\{e_\tau \mid \tau \in T\}$ az $R[S]$, illetve $R[T]$ félcsoportalgebrák standard bázisait. Ekkor

$$\left\{e_{(\sigma,\tau)} \mid (\sigma,\tau) \in S \times T\right\}$$

az $R[S \times T]$ félcsoportalgebra standard bázisa lesz.

A

$$j_S \colon S \hookrightarrow S \times T \ , \ s \mapsto (s, 1_T)$$

és

$$j_T \colon T \hookrightarrow S \times T \ , \ t \mapsto (1_S, t)$$

kanonikus beágyazások

$$\phi_A \colon R[S] \longrightarrow R[S \times T] \quad \text{és} \quad \phi_B \colon R[T] \longrightarrow R[S \times T]$$

R-algebra-homomorfizmusokat indukálnak. Az algebrák tenzorszorzatának univerzális tulajdonságából következik, hogy létezik pontosan egy olyan

$$\alpha : R[S] \otimes_R R[T] \to R[S \times T]$$

R-algebra-homomorfizmus, amelyre a

$$\begin{tikzcd}
R[S] \arrow[r, "\iota_A"] \arrow[dr, "\phi_A"'] & R[S] \otimes_R R[T] \arrow[d, "\alpha"] & R[T] \arrow[l, "\iota_B"'] \arrow[dl, "\phi_B"] \\
& R[S \times T] &
\end{tikzcd}$$

diagram kommutatív, és $\alpha(e_\sigma \otimes e_\tau) = e_{(\sigma,\tau)}$. Mivel eszerint α az $R[S] \otimes_R R[T]$ szabad modulus egy R-bázisát az $R[S \times T]$ szabad modulus egy bázisába viszi, α szükségképpen egy izomorfizmus. $\square$

2.4. Tenzorszorzat testek felett

Ebben a fejezetben azt a speciális esetet vizsgáljuk, amikor az R gyűrű egy test, ennek megfelelően K-val is fogjuk jelölni. Ez a feltétel különböző következményeket von maga után: például K nullosztómentes (vagyis integritási tartomány), továbbá minden K-modulus szabad.

2.54. Megjegyzés *Nem tesszük fel általánosságban, hogy az előforduló vektorterek véges-dimenziósak.*

2.55. Megjegyzés *Sok esetben elegendő feltenni, hogy R egy integritási tartomány, és M egy (véges rangú) szabad R-modulus.*

Az alábbi állítás igaz tetszőleges gyűrűk feletti szabad modulusokra (ld. 2.29. Következmény), fontossága miatt megismételjük, és adunk rá egy újabb (vektorterekre jellemző) bizonyítást.

2.56. Lemma (Tenzorszorzat bázisa) *Legyenek V és W K feletti véges-dimenziós vektorterek, $\{e_i \mid i \in I\}$ a V vektortér, $\{f_j \mid j \in J\}$ pedig W egy bázisa. Ekkor*

$$\{e_i \otimes e_j \mid i \in I, j \in J\}$$

a $V \otimes_R W$ vektortér egy bázisa lesz.

Bizonyítás. A 2.23. Következmény testek felett. □

2.57. Megjegyzés *A tenzorszorzatok bázisairól szóló állítás a vektorterek dimenziójára vonatkozó megszorítás nélkül is igaz.*

Az első észrevétel egy egyszerűsítési szabály.

2.58. Lemma *Legyenek V,W vektorterek, $v \in V$,$w \in W$. Ekkor $v \otimes w = 0 \in V \otimes_K W$ pontosan akkor, ha $v = 0$ vagy $w = 0$.*

Bizonyítás. A tenzorszorzat alaptulajdonságainál láttuk, hogy ha $v = 0$ vagy $w = 0$, akkor $v \otimes w = 0$.

Megfordítva, tegyük fel, hogy $v \otimes w = 0$. Legyen $\{e_i \mid i \in I\}$ a V vektortér, $\{f_j \mid j \in J\}$ pedig W egy bázisa,

$$v = \sum_{i \in I} \alpha_i e_i \ , \ w = \sum_{j \in J} \beta_j f_j \ ,$$

ahol mindkét esetben majdnem minden együttható nulla. Ekkor

$$v \otimes w = \sum_{(i,j) \in I \times J} \alpha_i \beta_j (e_i \otimes f_j) \ .$$

Amennyiben létezik olyan $i \in I$ és $j \in J$ index, amelyekre $\alpha_i \neq 0$ és $\beta_j \neq 0$, akkor a $v \otimes w \in V \otimes W$ vektornak az $e_i \otimes f_j$ koordinátája nullától különböző, ami ellentmond a kiindulási feltételünknek. Tehát vagy $\alpha_i = 0$ minden $i \in I$-re, vagy $\beta_j = 0$ minden $j \in j$-re. Az első esetben $v = 0$, a másodikban $w = 0$. □

2.59. Megjegyzés (Injektív leképezések szorzata) *Legyenek $\phi : V_1 \to W_1$ és $\psi : V_2 \to W_2$ injektív K-homomorfizmusok. Ekkor amint azt az 2.27. Állításban beláttuk,*

$$\phi \otimes \psi \colon V_1 \otimes V_2 \longrightarrow W_1 \otimes W_2$$

szintén injektív.

Ennek megfelelően, ha $V_1 \subseteq W_1$ és $V_2 \subseteq W_2$ alterek, akkor tekinthetünk $V_1 \otimes V_2$-re úgy, mint $W_1 \otimes W_2$ alterére.

Egy másik speciális tulajdonság az alábbi.

2.60. Lemma *Legyen V egy K-vektortér, $v, w \in V$. Ekkor*

$$v \otimes w = w \otimes v \quad \textit{pontosan akkor, ha} \quad \dim_K \langle v, w \rangle \leq 1 \ .$$

Bizonyítás. Amennyiben $\dim_K \langle v, w \rangle \leq 1$, akkor vagy $v = \alpha w$ alkalmas $\alpha \in K$ konstansra, vagy fordítva. Ekkor

$$v \otimes w = (\alpha w) \otimes w = w \otimes (\alpha w) = w \otimes v \ .$$

A másik irányhoz legyen $\{e_i \mid i \in I\}$ a V vektortér egy bázisa,

$$v = \sum_{i \in I} \alpha_i e_i \quad , \quad w = \sum_{i \in I} \beta_i e_i \ .$$

Ekkor a $v \otimes w = w \otimes v$ egyenlőség koordinátákban az alábbi módon néz ki:

$$\sum_{(i,j) \in I \times I} \alpha_i \beta_j (e_i \otimes e_j) = \sum_{(i,j) \in I \times I} \alpha_i \beta_j (e_j \otimes e_i) \ ,$$

vagyis minden $(i, j) \in I \times I$ esetén

$$\alpha_i \beta_j = \alpha_j \beta_i \ .$$

Ha $v = 0$ vagy $w = 0$, akkor készen vagyunk. Tegyük fel, hogy $v \neq 0$, ekkor van olyan $i_0 \in I$ index, amelyre $\alpha_{i_0} \neq 0$. Az iménti egyenlőségrendszerből ekkor azt kapjuk, hogy minden $j \in J$ választásra

$$\beta_j = \frac{\beta_{i_0}}{\alpha_{i_0}} \alpha_j \ ,$$

vagyis

$$w = \frac{\beta_{i_0}}{\alpha_{i_0}} \cdot v \ .$$

Ezzel az állítást beláttuk. □

2.15 Feladat *Legyenek $V_1, \ldots, V_r$ vektorterek, $v_i, w_i \in V_i$ minden $1 \leq i \leq r$ esetén. Mutassuk meg, hogy amennyiben*

$$v_1 \otimes \cdots \otimes v_r = w_1 \otimes \cdots \otimes w_r \neq 0 \ ,$$

akkor léteznek $\alpha_1, \ldots, \alpha_r \in K$ elemek, amelyekre $\alpha_1 \ldots \alpha_r = 1$, és

$$w_i = \alpha_i v_i \quad \textit{minden } 1 \leq i \leq r \textit{ esetén.}$$

2.61. Lemma *Legyenek V, W vektorterek, $\{v_i \mid i \in I\} \subseteq V$ lineárisan független rendszer, $w_i \in W$ tetszőleges (nem feltétlenül különböző) elemek minden $i \in I$-re. Ha*

$$\sum_{i\in I} v_i \otimes w_i = 0 \ ,$$

akkor $w_i = 0$ minden $i \in I$-re.

Bizonyítás. Az általánosság megszorítása nélkül feltehetjük, hogy $\{v_i \mid i \in I\}$ a V vektortér egy bázisa (ha nem lenne az, egészítsük ki bázissá, és az új elemekhez vegyük a $w_i = 0$ párt). Legyen $\{e_j \mid j \in J\}$ a W vektortér egy bázisa, és

$$w_i = \sum_{j\in J} \alpha_{ij} e_j \quad \text{minden } i \in I \text{ esetén.}$$

Ekkor

$$\begin{aligned} 0 &= \sum_{i\in I} v_i \otimes w_i \\ &= \sum_{i\in I} v_i \otimes (\sum_{j\in J} \alpha_{ij} e_j) \\ &= \sum_{(i,j)\in I\times J} \alpha_{ij}(v_i \otimes e_j) \ . \end{aligned}$$

Mivel a $\{v_i \otimes e_j \mid (i,j) \in I \times J\} \subseteq V \otimes W$ rendszer egy bázis, ezért szükségképpen $\alpha_{ij} = 0$ minden $(i,j) \in I \times J$ esetén. Speciálisan $w_i = 0$ minden $i \in I$-re. □

2.62. Állítás *Legyenek V, W vektorterek, $\{v_i \mid i \in I\} \subseteq V$, $\{w_j \mid j \in J\} \subseteq W$. Ekkor a*

$$\{v_i \otimes w_j \mid (i,j) \in I \times J\} \subseteq V \otimes_K W$$

elemrendszer pontosan akkor lineárisan független/generátorrendszer/bázis $V \otimes_K W$-ben, ha az adott tulajdonság a $\{v_i \mid i \in I\} \subseteq V$ és $\{w_j \mid j \in J\} \subseteq W$ elemrendszerek közül mindkettőre fennáll.

Bizonyítás. (1) Ha $\mathcal{V} \overset{\text{def}}{=} \{v_i \mid i \in I\} \subseteq V$ és $\mathcal{W} \overset{\text{def}}{=} \{w_j \mid j \in J\} \subseteq W$ generátorrendszerek, akkor $\{v_i \otimes w_j \mid (i,j) \in I \times J\} \subseteq V \otimes_K W$ is az lesz, mivel az egyes vektorterek minden eleme előáll $\mathcal{V}$, illetve $\mathcal{W}$ lineáris kombinációiból, amelyeknek a tenzorszorzatai viszont az összes felbontható tenzort megadják. Ez utóbbi halmaz viszont generálja $V \otimes W$-t.
(2) Tegyük fel, hogy például $\mathcal{V}$ lineárisan összefüggő, vagyis vannak olyan $\alpha_i \in K$ elemek , véges sok (de nem az összes) kivételével 0, hogy

$$\sum_{i\in I} \alpha_i v_i = 0 \ .$$

Ekkor tetszőleges $w_j \in W$ esetén

$$\sum_{i\in I} \alpha_i(v_i \otimes w_j) = (\sum_{i\in I} \alpha_i v_i) \otimes w_j = 0 \otimes w_j = 0 \ ,$$

ahol az α_i elemek nem mind nullák, vagyis a $\{v_i \otimes w_j \mid (i,j) \in I \times J\}$ rendszer is lineárisan összefüggő.
(3) Tegyük fel, hogy $\{v_i \otimes w_j \mid (i,j) \in I \times J\} \subseteq V \otimes_K W$ lineárisan függő, vagyis vannak olyan $\alpha_{ij} \in K$ számok, véges sok kivételével mind nulla, hogy

$$\sum_{(i,j)\in I\times J} \alpha_{ij} v_i \otimes w_j = 0 \ .$$

Írjuk a fenti összefüggést az alábbi alakba:

$$\sum_{i\in I} v_i \otimes (\sum_{j\in J} \alpha_{ij} w_j) = 0 \ .$$

Amennyiben $\mathcal{V}$ lineárisan független, akkor a 2.61. Lemma alapján $\sum_{j\in J} \alpha_{ij} w_j = 0$ minden $i \in I$ esetén, tehát $\mathcal{W}$ lineárisan függő (hiszen nem minden $\alpha_{ij} = 0$). Azt kaptuk ezzel, hogy vagy $\mathcal{V}$ vagy $\mathcal{W}$ lineárisan függő halmazok. Ezzel a lineáris függésre vonatkozó állítást beláttuk.
(4) Válasszunk ki $\{w_j \mid j \in J\}$-ből egy lineárisan független rendszert, jelöljük ezt ismét csak $\{w_j \mid j \in J\}$-vel, legyen $v \in V$ tetszőleges, $j_o \in J$ rögzített index (vegyük észre, hogy amennyiben az eddigi tenzorrendszer generátorrendszer volt, akkor az új rendszer is az marad).

Tegyük fel, hogy $\{v_i \otimes w_j \mid (i,j) \in I \times J\} \subseteq V \otimes_K W$ generátorrendszer, ekkor vannak olyan α_{ij} számok, amelyekre

$$v \otimes w_{j_0} = \sum_{(i,j)\in I\times J} \alpha_{ij} v_i \otimes w_j \ .$$

Ekvivalens módon

$$v \otimes w_{j_0} = \sum_{j\in J} (\sum_{i\in I} \alpha_{ij} v_i) \otimes w_j \ ,$$

amiből

$$0 = (v - \sum_{i\in I} \alpha_{ij_0} v_i) \otimes w_{j_0} + \sum_{j\in J\setminus\{j_0\}} (\sum_{i\in I} \alpha_{ij} v_i) \otimes w_j \ .$$

Mivel a $\{w_j \mid j \in J\}$ rendszer lineárisan független, a 2.61. Lemma azt mondja, hogy speciálisan

$$v - \sum_{i\in I} \alpha_{ij_0} v_i = 0 \ ,$$

azaz $\mathcal{V}$ generátorrendszer V-ben. Analóg módon látható be, hogy $\mathcal{W}$ is generálja W-t.$\square$

2.16 Feladat *Legyenek V,W vektorterek, $\{V_i \leq V \mid i \in I\}$, $\{W_j \leq W \mid j \in J\}$ alterek családjai. Igazoljuk, hogy*

$$\bigcap_{(i,j)\in I\times J} V_i \otimes W_j = \left(\bigcap_{i\in I} V_i\right) \otimes \left(\bigcap_{j\in J} W_j\right)$$

mint $V \otimes W$ alterei.

2.17 Feladat *Legyenek V és W vektorterek, $V_1 \leq V$ és $W_1 \leq W$ lineáris alterek. Legyen $z \in V_1 \otimes W_1$, és tegyük fel, hogy $z = \sum_{i=1}^{r} v_i \otimes w_i$, ahol $v_1, \ldots, v_r$, illetve $w_1, \ldots, w_r$ lineárisan független rendszerek.*

Mutassuk meg, hogy $v_1, \ldots, v_r \in V_1$ és $w_1, \ldots, w_r \in W_1$.

2.63. Definíció (Tenzor rangja) *Legyenek V és W K-vektorterek, $t \in V \otimes_K W$. A*

$$\mathrm{rank}(t) \overset{def}{=} \min\left\{ r \in \mathbb{N} \mid t = \sum_{i=1}^{r} v_i \otimes w_i \text{ valamely } v_i \in V,\ w_i \in W \text{ esetén} \right\}$$

invariánst a t tenzor rang*jának nevezzük.*

2.64. Megjegyzés *Egy $t \in V \otimes W$ tenzor rangja pontosan akkor 0, ha $t = 0$. Az 1-rangú tenzorok pontosan a felbontható tenzorok.*

2.65. Állítás *Az iménti jelölésekkel legyen $z = \sum_{i=1}^{r} v_i \otimes w_i \in V \otimes W$ egy tetszőleges tenzor.*

1. *Ha $v_1, \ldots, v_r$ és $w_1, \ldots, w_r$ lineárisan független rendszerek, akkor $r = \mathrm{rank}(z)$.*
2. *Megfordítva, ha $r = \mathrm{rank}(z)$, akkor $v_1, \ldots, v_r$ és $w_1, \ldots, w_r$ egyaránt lineárisan függetlenek.*

Bizonyítás. (1) Amennyiben $r < n = \dim V$, egészítsük ki a $v_1, \ldots, v_r$ rendszert egy $\{v_i \mid i \in I\}$ bázissá. Legyen

$$z = \sum_{i=1}^{r} v_i \otimes w_i = \sum_{j=1}^{s} a_j \otimes b_j \ ,$$

ahol $s = \mathrm{rank}(z)$. Ekkor minden $1 \leq j \leq s$ esetén léteznek egyértelműen meghatározott $\alpha_{jk} \in K$ testelemek, amelyekre

$$a_j = \sum_{k\in I} \alpha_{jk} v_k \ .$$

Ebből következik, hogy

$$\sum_{i=1}^{r} v_i \otimes w_i = z = \sum_{j=1}^{s} (\sum_{k\in I} \alpha_{jk} v_k) \otimes b_j = \sum_{k\in I} v_k \otimes (\sum_{j=1}^{s} \alpha_{jk} b_j) \ ,$$

és így

$$0 = \sum_{k=1}^{r} v_k \otimes (w_k - \sum_{j=1}^{s} \alpha_{jk} b_j) + \sum_{k\in I\setminus\{1,\dots,r\}} v_k \otimes (-\sum_{j=1}^{s} a_{jk} b_j) \ .$$

A 2.61. Lemma szerint ekkor

$$w_k - \sum_{j=1}^{s} \alpha_{jk} b_j \quad = \quad 0 \quad \text{minden } 1 \leq k \leq r \text{ esetén.}$$

Az iménti gyenlőségek azt mutatják, hogy

$$w_1, \dots, w_r \in \langle b_1, \dots, b_s \rangle \ ,$$

amiből a w_i elemek lineáris függetlensége miatt $r \leq s$ következik, másrészt $s = \operatorname{rank}(z)$ miatt $r \geq s$, s így $r = s$.
(2) Indirekte, tegyük fel, hogy $v_1, \dots, v_r$ nem lineárisan független, ekkor valamely eleme kifejezhető a többi lineáris kombinációjaként. Az általánosság megsértése nélkül feltehetjük, hogy ez v_1, vagyis léteznek olyan $\alpha_2, \dots, \alpha_r$ testelemek, amelyekre

$$v_1 = \sum_{j=2}^{r} \alpha_j v_j \ .$$

Ekkor viszont

$$\begin{aligned} z &= \sum_{i=1}^{r} v_i \otimes w_i \\ &= (\sum_{j=2}^{r} \alpha_j v_j) \otimes w_1 + \sum_{j=2}^{r} v_j \otimes w_j \\ &= \sum_{j=2}^{r} v_j \otimes (\alpha_j w_1 + w_j) \ , \end{aligned}$$

ami ellentmond $r = \operatorname{rank}(z)$ minimalitásának. □

2.66. Állítás *Legyenek V_1, V_2, W_1, W_2 K-vektorterek (nem feltétlenül véges-dimenziósak). Ekkor a kanonikus*

$$\begin{array}{rcl} \operatorname{Hom}(V_1, W_1) \otimes \operatorname{Hom}(V_2, W_2) & \xrightarrow{\phi} & \operatorname{Hom}(V_1 \otimes V_2, W_1 \otimes W_2) \\ f \otimes g & \mapsto & f \otimes g \end{array}$$

homomorfizmus injektív.

2.67. Megjegyzés *Vegyük észre, hogy a két oldalon álló $\otimes$-jelek más vektorter közti tenzorszorzatot jelölnek. Ti. a ϕ leképezést az alábbi módon kapjuk: a*

$$\begin{array}{rcl} \mathrm{Hom}(V_1, W_1) \times \mathrm{Hom}(V_2, W_2) & \longrightarrow & \mathrm{Hom}(V_1 \otimes V_2, W_1 \otimes W_2) \\ (f, g) & \mapsto & f \otimes g \end{array}$$

hozzárendelés K-bilineáris, így a TUT alapján egyértelműen meghatároz egy

$$\mathrm{Hom}(V_1, W_1) \otimes \mathrm{Hom}(V_2, W_2) \longrightarrow \mathrm{Hom}(V_1 \otimes V_2, W_1 \otimes W_2)$$

K-lineáris leképezést, ezt jelöltük ϕ-vel.

Amennyiben az előforduló vektorterek véges-dimenziósak, akkor ϕ izomorfizmus, mivel bázist bázisra képez.

Bizonyítás. Legyen $x = \sum_{i=1}^{r} f_i \otimes g_i \in \mathrm{Ker}\,\phi$, ahol feltesszük, hogy az iménti egy minimális hosszúságú előállítás, vagyis $r = \mathrm{rank}(x)$. Legyen $v \in V_1$ olyan vektor, amelyre $f_1(v) \neq 0$. Az általánosság megsértése nélkül feltehetjük, hogy létezik olyan $1 \leq r' \leq r$ index, amelyre

$$f_1(v), \ldots, f_{r'}(v) \ \text{ lineárisan függetlenek,}$$

és

$$f_{r'+1}(v) = \ldots = f_r(v) = 0\ .$$

A feltevés szerint $x \in \mathrm{Ker}\,\phi$, így tetszőleges $u \in V_2$ vektorra

$$0 = \phi(x)(v \otimes u) = (\sum_{i=1}^{r} f_i \otimes g_i)(v \otimes u) = \sum_{i=1}^{r} f_i(v) \otimes g_i(u) = \sum_{i=1}^{r'} f_i(v) \otimes g_i(u)\ .$$

A konstrukciónk alapján $f_1(v), \ldots, f_{r'}(v) \in V_2$ lineárisan függetlenek, amiből $g_1(u) = \cdots = g_{r'}(u) = 0 \in W_1$ következik. Mivel ez minden $u \in V_2$ esetén fennáll, így $g_1 = \cdots = g_{r'} = 0 \in \mathrm{Hom}(V_2, W_2)$, ami ellentmond az $x = \sum_{i=1}^{r} f_i \otimes g_i$ előállítás minimalitásának.$\square$

2.18 Feladat *Legyenek $V_1, \ldots, V_r$ és $W_1, \ldots, W_r$ K-vektorterek, igazoljuk, hogy a*

$$\begin{array}{rcl} \bigotimes_{i=1}^{r} \mathrm{Hom}(V_i, W_i) & \longrightarrow & \mathrm{Hom}(\bigotimes_{i=1}^{r} V_i, \bigotimes_{i=1}^{r} W_i) \\ \bigotimes_{i=1}^{r} V_i^* & \longrightarrow & \left(\bigotimes_{i=1}^{r} V_i \right)^* \end{array}$$

kanonikus leképezések injektívek.

2.19 Feladat *Legyenek V és W K-vektorterek, és tekintsük a*

$$\alpha\colon V\otimes W \longrightarrow \mathrm{Hom}(V^*, W)$$

kanonikus homomorfizmust, amelyre

$$\alpha(v\otimes w)\mapsto (\phi\mapsto \phi(v)w)$$

minden $v\in V$ és $w\in W$ esetén.

Tetszőleges $x\in V\otimes W$ tenzor esetén igazoljuk, hogy

$$\operatorname{rank} x = \operatorname{rank}\alpha(x)\ ,$$

ahol ez utóbbi az $\alpha(x)$ mint lineáris leképezés rangját jelöli a hagyományos értelemben.

2.5. Báziscsere

Gyakran előforduló probléma, hogy adott egy $\phi : R\to S$ gyűrűhomomorfizmus, és R-modulusokon szeretnénk természetes módon S-modulus-struktúrát definiálni, vagy fordítva.

Először legyen N egy S-modulus. Ekkor a megoldás egyszerű: tetszőleges $r\in R$ és $n\in N$ esetén az

$$r\cdot n \stackrel{\text{def}}{=} \phi(r)n$$

hozzárendelés egy R-modulus-struktúrát létesít N-en.

2.68. Megjegyzés *A most ismertetett eljárást az irodalom skalárok megszorítása néven tartja számon. A név abból a speciális esetből származik, amikor $\phi : R\hookrightarrow S$ injektív.*

Fontos fejben tartani, hogy N R-modulus-struktúrája nem csak R-től és S-től, hanem a ϕ homomorfizmustól is függ.

2.20 Feladat *Az iménti jelölésekkel tegyük fel, hogy N egy végesen generált S-modulus. Igazoljuk, hogy N R-modulusként is végesen generált.*

A fordított irányú konstrukcióhoz a tenzorszorzatot fogjuk használni. Legyen $\phi : R\to S$ egy gyűrűhomomorfizmus, M egy R-modulus. A kiindulópont az, hogy az S gyűrű a ϕ homomorfizmussal mint struktúraleképezéssel egy R-algebra lesz. Tekintsük tetszőleges $s\in S$ esetén a

$$\tau_s\in \mathrm{Hom}_R(S,S)\colon t\mapsto st$$

R-algebra-homomorfizmust.

2.69. Lemma *Az iménti jelölésekkel*

$$\begin{array}{rcl}\psi : S & \longrightarrow & \mathrm{Hom}_R(S \otimes_R M, S \otimes_R M) \\ s & \mapsto & \tau_s \otimes \mathrm{id}_M\end{array}$$

egy R-algebra-homomorfizmus, amely egy S-modulus-struktúrát létesít az $S \otimes_R M$ R-moduluson.

Bizonyítás. A tenzorszorzat bilinearitása miatt ψ R-lineáris, azt kell csupán ellenőrizni, hogy gyűrűhomomorfizmus is egyben. Tetszőleges $s, t \in S$ esetén

$$\psi(st) = \tau_{st} \otimes \mathrm{id}_M = (\tau_s \tau_t) \otimes \mathrm{id}_M = (\tau_s \otimes \mathrm{id}_M) \circ (\tau_t \otimes \mathrm{id}_M) = \psi(s) \circ \psi(t) \ ,$$

amint azt vártuk. $\square$

2.70. Megjegyzés *Ha $s, t \in S$ és $m \in M$, akkor a fenti S-modulus-struktúrával*

$$s \cdot (t \otimes m) = (st) \otimes m \ .$$

2.71. Definíció (Skalárok kiterjesztése/Báziscsere) *Legyen $\phi : R \to S$ egy gyűrűhomomorfizmus, M egy R-modulus. Ekkor az $S \otimes_R M$ R-moduluson a*

$$\begin{array}{rcl}\psi : S & \longrightarrow & \mathrm{Hom}_R(S \otimes_R M, S \otimes_R M) \\ s & \mapsto & \tau_s \otimes \mathrm{id}_M\end{array}$$

leképezéssel kapott S-modulusstruktúrát a ϕ mentén történő skalárkiterjesztés*nek nevezzük, és a kapott S-modulust M_ϕ-vel vagy M_S-sel jelöljük.*

2.72. Megjegyzés *Az M_S modulushoz tartozik egy $\iota_M : M \to M_S$ R-modulus-homomorfizmus, amelyre $m \mapsto 1 \otimes m$ minden $m \in M$ esetén.*

2.73. Példa *Egy, a komplex geometria és az elméleti fizika szempontjából igen fontos példa vektorterek komplexifikációja. Legyen V egy $\mathbb{R}$-vektortér, $\mathbb{R} \hookrightarrow \mathbb{C}$ az $1 \mapsto 1 + (0 \cdot i)$ standard beágyazás (ehhez ki kell választanunk az $x^2 + 1$ polinom egy gyökét). Ekkor a V komplexifikáltja a*

$$V_{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \otimes_{\mathbb{R}} V$$

komplex vektortér. A 2.78. Lemma alapján

$$\dim_{\mathbb{C}} V_{\mathbb{C}} = \dim_{\mathbb{R}} V \ ,$$

azonban $\dim_{\mathbb{R}} V_{\mathbb{C}} = 2 \dim_{\mathbb{R}} V$. *Komplex geometriában szokás a $V_{\mathbb{C}}$ komplexifikáltat két* $\dim_{\mathbb{R}} V$*-dimenziós valós altér direkt összegére felbontani (ezek az i-vel való szorzás sajátalterei), ld. a komplex struktúrákról szóló fejezetet, illetve [Huy05].*

2.74. Példa (Lokalizáció) *Egy másik klasszikus példa a lokalizáció, vagy ennek speciális eseteként egy integritási tartomány esetében a hányadostestre való áttérés. Legyen* R *egy kommutatív gyűrű,* $\Sigma \subseteq R$ *egy multiplikatív rendszer,* R_Σ *az* R *gyűrű* Σ *mentén vett lokalizáltja,* M *egy* R*-modulus. Ekkor tekinthetjük a* $\phi : R \to R_\Sigma$ *természetes gyűrűhomomorfizmus mentén történő* $R_\Sigma \otimes_R M$ *skalárkiterjesztést. Az*

$$\begin{array}{rcl} R_\Sigma \otimes_R M & \longrightarrow & M_\Sigma \\ (r/s) \otimes m & \mapsto & (rm)/s \end{array}$$

kanonikus leképezés egy R_Σ*-modulus-izomorfizmus, amelynek* $m/s \mapsto (1/s) \otimes m$ *az inverze.*

2.75. Példa (Ideál szerinti faktorra való áttérés) *Legyen* $I \subseteq R$ *egy ideál,* $\phi : R \to R/I$ *a természetes projekció. Tetszőleges* M R*-modulus esetén*

$$\begin{array}{rcl} M_\phi \overset{def}{=} R/I \otimes_R M & \longrightarrow & M/IM \\ (r+I) \otimes m & \mapsto & rm + IM \end{array}$$

egy R/I*-modulus-izomorfizmus, amelynek* $m + IM \mapsto (1 + I) \otimes m$ *az inverze.*

2.76. Példa (Skalárkiterjesztés polinomokra) *Legyen* R *kommutatív gyűrű,* $P = R[x_1, \ldots, x_n]$ *az* R *feletti* n*-változós polinomgyűrű,* $\phi : R \to S$ *egy gyűrűhomomorfizmus. Ekkor*

$$P_S \overset{def}{=} S \otimes_R (R[x_1, \ldots, x_n]) \overset{\sim}{\longrightarrow} S[x_1, \ldots, x_n] \ ,$$

hiszen a

$$\begin{array}{rcl} S \otimes_R (R[x_1, \ldots, x_n]) & \longrightarrow & S[x_1, \ldots, x_n] \\ s \otimes (\sum\limits_{\alpha \in \mathbb{N}^n} a_\alpha x^\alpha) & \mapsto & s \cdot \sum\limits_{\alpha \in \mathbb{N}^n} \phi(a_\alpha) x^\alpha \end{array}$$

leképezés a P *polinomgyűrű monomokból álló bázisát* $S[x_1, \ldots, x_n]$ *analóg bázisába viszi.*

2.77. Megjegyzés *A báziscsere egy hagyományos alkalmazása a gyűrűkről testekre való áttérés annak érdekében, hogy ki tudjuk használni a test feletti vektorterek igen kedvező tulajdonságait. Erre példa az alábbi állítás bizonyításának gondolatmenete: legyen* R *tetszőleges gyűrű,* $\phi : R^m \to R^n$ *izomorfizmus. Ekkor* $m = n$*.*

Ennek igazolására legyen $\mathfrak{m} \subseteq R$ *egy maximális ideál,* $\pi : R \to K \overset{def}{=} R/\mathfrak{m}$ *a faktortestbe történő természetes vetítés. Belátható, hogy* $\phi \otimes \mathrm{id}_K : R^m \otimes_R K \to R^n \otimes_R K$ *egy* K*-vektorterek közti izomorfizmust indukált, amiből* $m = n$ *adódik.*

2.78. Lemma *Legyen* $\phi : R \to S$ *egy gyűrűhomomorfizmus,* M *egy szabad* R*-modulus* $\{m_i \mid i \in I\}$ *bázissal. Ekkor* M_S *egy szabad* S*-modulus* $\{1 \otimes m_i \mid i \in I\}$ *bázissal.*

Bizonyítás. Vegyük észre, hogy a

$$\begin{array}{rcl} \theta\colon \bigoplus_{i\in I} S & \longrightarrow & S\otimes_R M \\ (s_i)_{i\in I} & \mapsto & \sum_{i\in I} s_i\otimes m_i \end{array}$$

leképezés egy R-modulus-izomorfizmus.

Ha a fentiekre S-modulusként tekintünk, akkor a jobboldal átírható

$$\sum_{i\in I} s_i\otimes m_i = \sum_{i\in I} s_i(1\otimes m_i)$$

alakba, és az így kapott (szintén θ-val jelölet) leképezés S-lineáris.

Mivel θ $\bigoplus_{i\in I} S$ standard bázisát $S\otimes_R M$ egy bázisára képzi, ezért θ egy S-modulus-izomorfizmus is egyben. □

2.79. Állítás (A skalárkiterjesztés univerzális tulajdonsága) *Legyen $\phi : R\to S$ egy gyűrűhomomorfizmus, M egy R-modulus. Ekkor minden $\psi : M\to N$ R-lineáris leképezéshez, ahol N egy S-modulus, létezik pontosan egy S-lineáris $\psi_S : M_S\to N$ leképezés, amelyre a*

$$\begin{tikzcd} M \arrow[r, "\psi"] \arrow[d, "\iota_M"'] & N \\ M_S \arrow[ur, "\psi_S"'] & \end{tikzcd}$$

diagram kommutatív.

Ez a tulajdonság az (M_S,ι_S) párt egyértelműen meghatározza.

2.80. Megjegyzés *A fenti állítás jelöléseivel még az is teljesül, hogy*

$$\operatorname{im}\psi_S = S\cdot\operatorname{im}\psi\ .$$

2.81. Megjegyzés *Az ψ_S leképezést gyakran ψ univerzális kiterjesztésének is nevezik.*

2.82. Megjegyzés *A 2.79. Állítás más formában azt mondja ki, hogy a*

$$\begin{array}{rcl} \operatorname{Hom}_S(M,N) & \longrightarrow & \operatorname{Hom}_R(M,N) \\ \psi & \mapsto & \psi\circ\iota_M \end{array}$$

R-homomorfizmus egy R-izomorfizmus is egyben.

Bizonyítás. Először lássuk be, hogy M_S rendelkezik az előírt univerzális tulajdonsággal. Ehhez tekintsük a

$$\begin{array}{ccc} S \times M & \longrightarrow & N \\ (s,m) & \mapsto & s \cdot \psi(m) \end{array}$$

R-bilineáris leképezést. Ez a tenzorszorzat univerzális tulajdonsága alapján egy

$$\psi_S \colon M_S = S \otimes_R M \longrightarrow N$$

R-lineáris leképezést indukál, amelyre $\psi_S(s \otimes m) = s \cdot \psi(m)$, és így

$$\operatorname{im} \psi_S = S \cdot \operatorname{im} \psi \ .$$

Mivel ι_M képe az M_S S-modulus egy generátorrendszere, ezért ψ_S-t mint függvényt ψ egyértelműen meghatározza. Mivel a konstrukciója alapján ψ_S S-lineáris is egyben, az állítást beláttuk.

Az univerzális tulajdonsághoz tartozó pár kanonikus izomorfizmus erejéig meghatározott (amint azt például a TUT bizonyítása során láttuk). $\square$

2.83. Definíció *Legyen $\phi : R \to S$ egy gyűrűhomomorfizmus, M,N R-modulusok, $f \in \mathrm{Hom}_R(M,N)$. Ekkor az*

$$f_S \overset{def}{=} \mathrm{id}_S \otimes_S f \colon M_S = S \otimes_R M \quad \longrightarrow \quad N_S = S \otimes_R N$$

S-lineáris leképezést f S feletti kiterjesztésének *nevezzük.*

2.21 Feladat *Igazoljuk, hogy f_S valóban S-lineáris (a konstrukcióból csak az R-linearitás automatikus), továbbá, hogy a*

$$\begin{tikzcd} M \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\iota_M"'] & N \arrow[d, "\iota_N"] \\ M_S = S \otimes_R M \arrow[r, "f_S = \mathrm{id}_S \otimes f"] & N_S = S \otimes_R N \end{tikzcd}$$

diagram kommutatív.

2.22 Feladat (Leképezések kiterjesztésének funktoriális tulajdonságai) *Igazoljuk, hogy*

1. *minden M-modulusra* $(\mathrm{id}_M)_S = \mathrm{id}_{M_S}$,
2. *ha $M \xrightarrow{f} N \xrightarrow{g} P$ R-modulusok közti leképezések, akkor* $(g \circ f)_S = g_S \circ f_S$.

2.23 Feladat *Legyen $\phi : R \to S$ egy gyűrűhomomorfizmus, M,N R-modulusok, $f \in \mathrm{Hom}_R(M, N)$. Konstruáljunk kanonikus*

$$(\ker f)_S \longrightarrow \ker f_S \quad \textit{és} \quad (\mathrm{im}\, f)_S \longrightarrow \mathrm{im}\, f_S$$

S-lineáris leképezéseket.

2.24 Feladat *Legyen K egy test, $\phi : K \to S$ gyűrűhomomorfizmus, $f : V \to W$ egy K-vektorterek közti K-lineáris leképezés. Igazoljuk az alábbiakat:*

1. *A $(\ker f)_S \longrightarrow \ker f_S$ kanonikus S-lineáris leképezés izomorfizmus, továbbá ha $\{v_i \mid i \in I\}$ a $\ker f \leq V$ altér egy K-bázisa, akkor $\{1 \otimes v_i \mid i \in I\}$ a $\ker f_S$ altér egy S-bázisa lesz.*

2. *Hasonlóképpen,az $(\mathrm{im}\, f)_S \longrightarrow \mathrm{im}\, f_S$ kanonikus S-lineáris leképezés izomorfizmus, és amennyiben $\{v_i \mid i \in I\}$ az $\mathrm{im}\, f \leq W$ altér egy K-bázisa, akkor $\{1 \otimes v_i \mid i \in I\}$ az $\mathrm{im}\, f_S$ altér egy S-bázisa lesz.*

2.84. Megjegyzés *Legyen ismét csak K egy test, $\phi : K \to S$ mint eddig, V egy K-vektortér, $U \leq V$ egy altér. Ekkor a $j : U \hookrightarrow V$ beágyazás $j_S : U_S \to V_S$ kiterjesztése az iménti feladat alapján szintén injektív, így U_S-t tekinthetjük V_S részmodulusának. Ezzel az értelmezéssel $(\ker f)_S = \ker f_S$ és $(\mathrm{im}\, f)_S = \mathrm{im}\, f_S$.*

2.85. Megjegyzés *A tenzorszorzat képzése felcserélhető a skalárkiterjesztéssel. Pontosabban igaz az alábbi állítás, amelyet nem bizonyítunk (ld. [SS88, Satz 81.6] például): legyen $\phi : R \to S$ egy gyűrűhomomorfizmus, $M_1, \ldots, M_r$ R-modulusok. Ekkor létezik egy kanonikus S-lineáris izomorfizmus*

$$S \otimes_R (\bigotimes_{i=1\, R}^{r} M_i) \xrightarrow{\sim} \bigotimes_{i=1\, S}^{r} S \otimes_R M_i \ ,$$

amelyre

$$1 \otimes (\otimes_{i=1}^{r} m_i) \mapsto \otimes_{i=1}^{r} (1 \otimes m_i) \ .$$

Végül pár szó a skalárkiterjesztésről algebrák esetén. Legyen A egy R-algebra, $\phi : R \to S$ egy gyűrűhomomorfizmus. Ekkor S-t mint R-algebrát tekintve (ϕ-vel mint struktúrahomomorfizmussal), képezhetjük az S és A R-algebrák $S \otimes_R A$ tenzorszorzatát, amely első körben ismét egy R-algebra lesz. Az innen nyert

$$\iota_{A_S} : S \xrightarrow{\sim} S \otimes_R R \xrightarrow{\mathrm{id}_S \otimes \iota_A} S \otimes_R A$$

gyűrűhomomorfizmus adja az $A_S \stackrel{\mathrm{def}}{=} S \otimes_R A$ R-algebrán az S-algebra-struktúrát. Rögtön látszik a definícióból, hogy A_S mint S-modulus megegyezik az A R-modulus ϕ mentén történő skalárkiterjesztésével.

2.86. Állítás (Algebrák skalárkiterjesztésének univerzális tulajdonsága) *Tekintsünk $\phi : R \to S$ egy gyűrűhomomorfizmust, legyen A egy R-algebra. Ekkor minden B S-algebrára és minden $\psi : A \to B$ R-algebra-homomorfizmusra létezik pontosan egy $\psi_S : A_S \to B$ S-algebra-homomorfizmus, amelyre a*

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "\psi"] \arrow[d, "\phi\otimes \mathrm{id}_A"'] & B \\ A_S \arrow[ur, "\psi_S"'] & \end{tikzcd} .$$

diagram kommutatív.

2.25 Feladat *Igazoljuk az iménti állítást.*

2.6. A tenzorszorzat homologikus tulajdonságai

Itt a tenzorszorzatnak az egzakt sorozatokhoz való viszonyát fogjuk elemezni. A homologikus algebra idevágó definíciói a 3 fejezetben találhatók. Emlékeztetőül, modulusok egy

$$\ldots \longrightarrow M_{i-1} \xrightarrow{\phi_{i-1}} M_i \xrightarrow{\phi_i} M_{i+1} \ldots$$

sorozatát egzaktnak nevezzük, ha minden $i \in I$ esetén $\ker \phi_i = \operatorname{im} \phi_{i-1}$.

Az alapvető eredmény ebben a témában az alábbi.

2.87. Állítás (A tenzorszorzat jobbegzaktsága) *Legyen*

$$M' \xrightarrow{\phi} M \xrightarrow{\psi} M'' \longrightarrow 0$$

R-modulusok egy egzakt sorozata, N tetszőleges R-modulus. Ekkor az

$$M' \otimes_R N \xrightarrow{\phi\otimes \mathrm{id}_N} M \otimes_R N \xrightarrow{\psi\otimes \mathrm{id}_N} M'' \otimes_R N \longrightarrow 0$$

sorozat is egzakt.

Bizonyítás. Láttuk, hogy szürjektív leképezések tenzorszorzata is szürjektív, ezért az

$$M' \otimes_R N \xrightarrow{\phi\otimes \mathrm{id}_N} M \otimes_R N \xrightarrow{\psi\otimes \mathrm{id}_N} M'' \otimes_R N \longrightarrow 0$$

sorozat $M'' \otimes_R N$-nél egzakt lesz.

Mivel $\ker \psi = \operatorname{im} \phi$, ezért $\psi \circ \phi = 0$, s így $(\psi \circ \phi) \otimes \mathrm{id}_N = 0$. Ebből viszont

$$(\psi \circ \phi) \otimes \mathrm{id}_N = (\psi \otimes \mathrm{id}_N) \circ (\phi \otimes \mathrm{id}_N)$$

miatt rögtön adódik, hogy $\ker\psi\otimes\mathrm{id}_N \supseteq \mathrm{im}\,\phi\otimes\mathrm{id}_N$.

Hátra van még annak igazolása, hogy $\ker\psi\otimes\mathrm{id}_N \subseteq \mathrm{im}\,\phi\otimes\mathrm{id}_N$, másképpen, hogy a $\psi\otimes\mathrm{id}_N$ által indukált

$$\overline{\beta}\colon M\otimes_R N/\,\mathrm{im}(\phi\otimes\mathrm{id}_N) \longrightarrow M''\otimes_R N$$

leképezés bijektív. Ennek demonstrálására megkonstruáljuk az inverz leképezést. Legyen $m''\in M''$ és $n\in N$ tetszőleges. Mivel ψ feltevés szerint szürjektív, létezik $m\in M$, amelyre $\psi(m)=m''$. Tekintsük a

$$\begin{array}{rcl}\gamma\colon M''\times N & \longrightarrow & M\otimes_R N/\,\mathrm{im}(\phi\otimes\mathrm{id}_N)\\ (m'',n) & \mapsto & \overline{m\otimes n}\end{array}$$

hozzárendelést. Belátjuk, hogy jóldefiniált, vagyis nem függ m'' inverz képének a választásától. Legyen $m_1\in\psi^{-1}(m'')$. Ekkor $\psi(m_1-m)=0$, így $m_1-m\in\ker\psi=\mathrm{im}\,\phi$ (mivel $M_\bullet$ egzakt), tehát

$$m_1\otimes n - m\otimes n = (m_1-m)\otimes n \in \mathrm{im}(\phi\otimes\mathrm{id}_N)\ ,$$

ahogy állítottuk. Ekkor viszont γ indukál egy

$$\overline{\gamma}\colon M''\otimes N \longrightarrow M\otimes N/\,\mathrm{im}(\phi\otimes\mathrm{id}_N)$$

R-homomorfizmust, amelyre

$$m''\otimes n\mapsto \overline{m\otimes n}$$

minden $m''\in M''$ és $n\in N$ esetén. Ezt összevetve a $\overline{\beta}$ leképezéssel láthatjuk, hogy $\overline{\beta}$ és $\overline{\gamma}$ egymás inverzei. □

2.88. Megjegyzés *Fontos tudnivaló, hogy a bizonyítás lényeges módon felhasználta ψ szürjektivitását. Nem igaz általában, hogy ha $M'\to M\to M''$ egzakt sorozat, akkor $M'\otimes N\to M\otimes N\to M''\otimes N$ is az lenne.*

Egy egyszerű példa erre az alábbi: legyen $R=\mathbb{Z}$, és tekintsük a

$$0\to\mathbb{Z}\to\mathbb{Z}$$

egzakt sorozatot, ahol a nemtriviális morfizmus a $\mu_d\colon a\to da$ leképezés, ahol $d>1$ egész szám. Ekkor az $N\overset{def}{=}\mathbb{Z}/d\mathbb{Z}$ választással azt kapjuk, hogy

$$0\longrightarrow \mathbb{Z}/d\mathbb{Z}=\mathbb{Z}\otimes_{\mathbb{Z}}\mathbb{Z}/d\mathbb{Z}\overset{\mu_d\otimes\mathrm{id}}{\longrightarrow}\mathbb{Z}/d\mathbb{Z}=\mathbb{Z}\otimes_{\mathbb{Z}}\mathbb{Z}/d\mathbb{Z}$$

ugyanakkor $\mu_d\otimes\mathrm{id}=0$, tehát a kapott sorozat nem egzakt.

2.89. Megjegyzés *Egy másik, gyors bizonyítást tudunk adni a tenzorszorzat jobbegzaktságára, ha a* Hom*-funktorokkal való kapcsolatát felhasználjuk. Láttuk korábban, a tenzorszorzat és a* Hom*-funktor adjungált funktorok, részletesebben: tetszőleges M, N, P R-modulusokra létezik egy*

$$\mathrm{Hom}_R(M \otimes_R N, P) \simeq \mathrm{Hom}_R(M, \mathrm{Hom}_R(N, P))$$

kanonikus homomorfizmus. Emlékeztetünk továbbá arra is, hogy rögzített M R-modulus esetén a kovariáns Hom*-funktor $N \mapsto \mathrm{Hom}_R(M, N)$ bal-egzakt, a kontravariáns $N \mapsto \mathrm{Hom}_R(N, M)$ funktor jobb-egzakt.*

Jelölje $M_\bullet$ az 2.87. Állításban szereplő egzakt sorozatot. Ekkor a $\mathrm{Hom}_R(N, P)$ R-modulushoz tartozó kontravariáns Hom*-funktor jobb egzakt, ezért azt kapjuk, hogy $\mathrm{Hom}_R(M_\bullet, \mathrm{Hom}_R(N, P$ egzakt sorozat lesz. Azonban*

$$\mathrm{Hom}_R(M_\bullet, \mathrm{Hom}_R(N, P)) \simeq \mathrm{Hom}_R(M_\bullet \otimes_R N, P) \ ,$$

ezért a bal oldalon álló sorozat is egzakt. Mivel ez tetszőleges P R-modulusra teljesül, $M_\bullet \otimes_R N$ is egzakt kell, hogy legyen.

A most ismertetett érvelés jóval általánosabb körülmények között is érvényes: lényegében azt mutatja meg, hogy minden bal-adjungált funktor jobb-egzakt.

2.26 Feladat *Legyenek M és N R-modulusok, $M' \leq M$, $N' \leq N$ részmodulusok. Konstruáljunk meg a kanonikus*

$$(M/M') \otimes (N/N') \simeq (M \otimes N)/(\mathrm{im}(M' \otimes N \to M \otimes N) + \mathrm{im}(M \otimes N' \to M \otimes N))$$

izomorfizmust.

Mivel egy rögzített R-modulussal történő tenzorszorzás általában nem egzakt, az alkalmazások (pl. algebrai topológia, kommutatív algebra és algebrai geometria, stb.) szempontjából kitüntetett jelentőségük van azoknak a modulusoknak, amelyekre ez mégis teljesül.

2.90. Definíció (Lapos modulusok) *Egy M R-modulust* lapos*nak nevezünk, ha a vele való $\otimes_R M$ tenzorszorzás egzakt sorozatokat egzakt sorozatokba visz.*

2.91. Megjegyzés *Könnyen látható, hogy egy modulus laposságát elegendő*

$$0 \to M' \to M \to M'' \to 0$$

rövid egzakt sorozatokon tesztelni.

2.92. Megjegyzés *Mivel egy $0 \to M' \xrightarrow{\phi} M$ sorozat pontosan akkor egzakt, ha ϕ injektív, a lapos modulusok definíciójából és a tenzorszorzat jobb-egzaktságából következik, hogy egy N R-modulus pontosan akkor lesz lapos, ha minden $\phi : M' \to M$ injektív leképezésre $\phi \otimes \mathrm{id}_N : M' \otimes N \to M \otimes N$ is injektív marad.*

2.93. Állítás *Egy N R-modulus pontosan akkor lapos, ha tetszőleges M',M végesen generált modulusok és $\phi : M' \to M$ injektív leképezés esetén $\phi \otimes \mathrm{id}_N : M' \otimes N \to M \otimes N$ szintén injektív.*

Bizonyítás. Láttuk, hogy egy lapos modulussal való tenzorszorzás megőrzi a leképezések injektivitását, így csak az állítás megfordítása van hátra. Legyenek M és M' tetszőleges R-modulusok, $\phi : M' \to M$ egy injektív leképezés. Tegyük fel, hogy

$$z = \sum_{i=1}^{r} m_i' \otimes n_i \in \ker(\phi \otimes \mathrm{id}_N)$$

valamely $m_i' \in M'$ és $n_i \in N$ elemekre, vagyis

$$0 = (\phi \otimes \mathrm{id}_N)(z) = (\phi \otimes \mathrm{id}_N)(\sum_{i=1}^{r} m_i' \otimes n_0) = \sum_{i=1}^{r} \phi(m_i') \otimes n_i \ .$$

Tekintsük az $m_1', \dots, m_r'$ elemek által M'-ben generált $M_0' \leq M'$ részmodulust, ami automatikusan végesen generált, legyen továbbá $M_0 \leq M$, amely tartalmazza M_0'-nek a ϕ által vett képét és amelyre

$$\sum_{i=1}^{r} \phi(m_i') \otimes n_i = 0 \in M_0 \otimes N \ .$$

Ilyen modulus létezik a 2.12. Lemma alapján. Jelölje $z_0 \overset{\mathrm{def}}{=} \sum_{i=1}^{r} m_i' \otimes n_i$ mint $M_0' \otimes N$-beli elemet (ld. ismét 2.11. Megjegyzés). Ekkor $\phi|_{M_0'} : M_0' \to M_0$ végesen generált modulusok közti injektív leképezés, amelyre

$$(\phi|_{M_0'} \otimes \mathrm{id}_N)(z_0) = 0 \ ,$$

amiből az Állításban szereplő feltétel miatt $z_0 = 0$, így $z = 0$ is teljesül, vagyis $\phi \otimes \mathrm{id}_N$ injektív, ezzel N lapos. $\square$

2.27 Feladat *Legyen $\phi : R \to S$ egy gyűrűhomomorfizmus, M egy lapos R-modulus. Igazoljuk, hogy ekkor M_S lapos S-modulus lesz.*

2.28 Feladat *Mutassuk meg, hogy ha M és N lapos R-modulusok, akkor $M \otimes_R N$ is az.*

2.29 Feladat *Legyen $\{M_i \mid i \in I\}$ R-modulusok egy családja. Igazoljuk, hogy*

$$\bigoplus_{i \in I} M_i \ \textit{pontosan akkor lapos, ha } M_i \textit{ lapos minden } i \in I \textit{ esetén.}$$

2.94. Megjegyzés *A tenzorszorzat és direkt összegek felcserélhetőségéből következik, hogy minden szabad modulus lapos.*

2.7. Tenzoralgebrák

Egy rögzített R-modulus tenzorhatványai közti összefüggéseket legegyszerűbben a fokszámozott algebra-struktúra segítségével írhatjuk le.

2.95. Definíció (Tenzoralgebra) *Legyen R tetszőleges gyűrű, M egy R-modulus. Ekkor hozzá tudunk rendelni M-hez egy $T_R(M)$ fokszámozott R-algebrát az alábbi módon: legyen*

$$T_R(M) \overset{def}{=} \bigoplus_{i=0}^{\infty} M^{\otimes i}$$

mint fokszámozott R-modulus, ahol

$$(T_R(M))_i = M^{\otimes i}$$

az $T_R(M)$ algebra i-edfokú homogén része.

A multiplikatív struktúrát a homogén részeken a

$$M^{\otimes i} \otimes M^{\otimes j} \simeq M^{\otimes (i+j)}$$

természetes homomorfizmusok segítségével értelmezzük, az egész gyűrűn pedig a homogén részekről történő bilineáris kiterjesztéssel. A $T_R(M)$-beli szorzásra a $\otimes$ jelet használjuk.

2.30 Feladat *Ellenőrizzük, hogy az említett műveletekkel $T_R(M)$ valóban egy fokszámozott R-algebra.*

2.96. Megjegyzés *Az M modulust kanonikusan azonosíthatjuk a $T_R(M)$ homogén elsőfokú részével. Az így kapott beágyazást $i_M : M \hookrightarrow T_R(M)$ fogja jelölni.*

2.31 Feladat *Mutassuk meg, hogy ha $m = (m_i)_{i \in \mathbb{N}}, n = (n_i)_{i \in \mathbb{N}} \in T_R(M)$, akkor*

$$(m \otimes n)_i = \sum_{j=0}^{i} m_j \otimes n_{i-j} \ .$$

2.97. Megjegyzés *Mivel az $m \in M$ elemek tenzorszorzatai (az ún. felbontható tenzorok) minden $i \geq 0$-ra generálják az $M^{\otimes i}$ tenzorszorzatot mint R-modulust, így generálni fogják $T_R(M)$-et mint algebrát.*

2.32 Feladat *Igazoljuk, hogy ha F szabad R-modulus, akkor $T_R(F)$ egy szabad R-algebra.*

2.98. Állítás (A tenzoralgebrák univerzális tulajdonsága) *Jelöljön R tetszőleges gyűrűt, M egy R-modulust. Ekkor minden A R-algebra és minden $\phi : M \to A$ R-modulus-homomorfizmus esetén létezik pontosan egy $\widetilde{\phi} : T_R(M) \to A$ R-algebra-homomorfizmus, amelyre a*

$$\begin{tikzcd} M \arrow[r, "\phi"] \arrow[d, "i_M"'] & A \\ T_R(M) \arrow[ur, "\widetilde{\phi}"'] & \end{tikzcd}$$

diagram kommutatív.

Amennyiben $A = \oplus_{i=0}^{\infty} A_i$ fokszámozott R-algebra és $\phi(M) \subseteq A_1$, akkor $\widetilde{\phi}$ egy fokszámozott R-algebrák közti homogén homomorfizmus lesz.

Bizonyítás. A $\widetilde{\phi}$ R-algebra-homomorfizmust R-lineáris

$$\phi_i \colon M^{\otimes i} \longrightarrow A$$

leképezések direkt összegeként fogjuk definiálni.

Ha $i = 0$, akkor legyen $\phi_0 : R \to A$ az A R-algebra struktúraleképezése. Amennyiben $i \geq 1$, akkor tekintsük az

$$\begin{array}{rcl} M^i = M \times \cdots \times M & \longrightarrow & A \\ (m_1, \ldots, m_i) & \mapsto & \phi(m_1) \cdot \cdots \cdot \phi(m_i) \end{array}$$

hozzárendelést. Ez láthatóan R-multilineáris, így indukál egy

$$M^{\otimes i} \longrightarrow A$$

R-lineáris leképezést, amelyre

$$m_1 \otimes \cdots \otimes m_i \mapsto \phi(m_1) \cdot \cdots \cdot \phi(m_i)$$

minden $m_1, \ldots, m_i \in M$ esetén. Legyen ez ϕ_i, speciálisan vegyük észre, hogy $\phi_1 = \phi$.

Ekkor $\widetilde{\phi} \stackrel{\text{def}}{=} \oplus_{i \in \mathbb{N}} \phi_i : T_R(M) \to A$ R-modulus-homomorfizmus, amelyre $\widetilde{\phi}_1 = \phi$.

Hátra van még annak igazolása, hogy $\widetilde{\phi}$ gyűrűhomomorfizmus. Mivel $\widetilde{\phi}$ R-multilineáris, ezt elegendő felbontható tenzorokra megmutatni. Legyen $i, j \geq 1$,

$$m = m_1 \otimes \cdots \otimes m_i \quad \text{és} \quad n = n_1 \otimes \cdots \otimes n_j \ .$$

Ekkor

$$\begin{aligned}
\widetilde{\phi}(m \otimes n) &= \widetilde{\phi}((m_1 \otimes \cdots \otimes m_i) \otimes (n_1 \otimes \cdots \otimes n_j)) \\
&= \widetilde{\phi}(m_1 \otimes \cdots \otimes m_i \otimes n_1 \otimes \cdots \otimes n_j) \\
&= \phi_{i+j}(m_1 \otimes \cdots \otimes m_i \otimes n_1 \otimes \cdots \otimes n_j) \\
&= \phi_{i+j}(m_1 \otimes \cdots \otimes m_i \otimes n_1 \otimes \cdots \otimes n_j) \\
&= \phi(m_1) \cdot \cdots \cdot \phi(m_i) \cdot \phi(n_1) \cdot \cdots \cdot \phi(n_j) \\
&= (\phi(m_1) \cdot \cdots \cdot \phi(m_i)) \cdot (\phi(n_1) \cdot \cdots \cdot \phi(n_j)) \\
&= \phi_i(m_1 \otimes \cdots \otimes m_i) \cdot \phi_j(n_1 \otimes \cdots \otimes n_j) \\
&= \widetilde{\phi}(m_1 \otimes \cdots \otimes m_i) \cdot \widetilde{\phi}(n_1 \otimes \cdots \otimes n_j) \ ,
\end{aligned}$$

amint azt kívántuk.

Mivel $\widetilde{\phi}|_M = \phi$ és M generálja $T_R(M)$-et mint R-algebrát, $\widetilde{\phi}$ egyértelműen meghatározott.

A fokszámozott algebrákra vonatkozó állítás rögtön adódik abból, hogy ϕ_i $A_1 \cdot \ldots \cdot A_1$-ből A_i -be képez. □

2.99. Következmény *Legyen F egy szabad R-modulus az $\{e_i \mid i \in I\}$ bázison, A mint fent, és $\{a_i \mid i \in I\}$ A-beli elemek tetszőleges kollekciója. Ekkor létezik pontosan egy $\phi : T_R(F) \to A$ R-algebra-homomorfizmus, amelyre $\phi(e_i) = a_i$ minden $i \in I$ esetén.*

2.100. Megjegyzés *Az iménti Következmény értelmében gondolhatunk $T_R(F)$-re úgy, mint az $\{e_i \mid i \in I\}$ nemkommutatív változó feletti (nemkommutatív) polinomgyűrűre.*

2.101. Állítás *Legyen $\phi : M \to N$ egy R-lineáris leképezés. Ekkor létezik pontosan egy*

$$\widetilde{\phi}\colon T_R(M) \longrightarrow T_R(N)$$

R-algebra-homomorfizmus, amelyre $\widetilde{\phi}|_M = \phi$. A $\widetilde{\phi}$ algebra-homomorfizmus homogén, és

$$\widetilde{\phi}|_{M^{\otimes i}} = \phi \otimes \cdots \otimes \phi \ .$$

2.102. Megjegyzés *A fent konstruált $\widetilde{\phi}$ R-algebra-homomorfizmusra gyakran a $T(\phi)$ jelölést is használják.*

Bizonyítás. Tekintsük az

$$M \xrightarrow{\phi} N \xrightarrow{i_N} T_R(N)$$

kompozíciót, amely egy R-lineáris leképezés a $T_R(N)$ R-algebrába. A tenzoralgebrák univerzális tulajdonsága alapján létezik egy egyértelműen meghatározott

$$\widetilde{\phi}\colon T_R(M) \longrightarrow T_R(N)$$

homogén R-algebra-homomorfizmus, amely $\phi \circ i_N$ kiterjesztése.

A $\widetilde{\phi}|_{M^{\otimes i}}$-re vonaktozó képletet mindkét oldal R-linearitása miatt ismét csak elég felbontható tenzorokra ellenőrizni: tetszőleges $i \geq 1$ és $m_1, \dots, m_i \in M$ esetén

$$\begin{aligned}\widetilde{\phi}(m_1 \otimes \cdots \otimes m_i) &= \widetilde{\phi}(m_1) \cdot \cdots \cdot \widetilde{\phi}(m_i) \\ &= \phi(m_1) \otimes \cdots \otimes \phi(m_i) \\ &= (\phi \otimes \cdots \otimes \phi)(m_1 \otimes \cdots \otimes m_i) \ ,\end{aligned}$$

amint azt állítottuk. □

2.103. Megjegyzés (A tenzoralgebra funktorialitása) *Legyenek $\phi : M \to N$, $\psi : N \to P$ R-modulusok közti homomorfizmusok. Ekkor az 2.101. Állítás miatt*

$$\begin{aligned}T_R(\mathrm{id}_M) &= \mathrm{id}_{T_R(M)} \\ T_R(\psi \circ \phi) &= T_R(\psi) \circ T_R(\phi) \ .\end{aligned}$$

Ezzel beláttuk, hogy T_R egy kovariáns funktort létesít az R-modulusok kategóriájából az R-algebrák kategóriájába.

2.33 Feladat *Legyen $\phi : M \to N$ egy R-modulusok közti homomorfizmus. A homomorfizmusok tenzorszorzatára vonatkozó állítások segítségével igazoljuk az alábbiakat.*

1. *Ha ϕ szürjektív, akkor $T_R(\phi)$ is az.*
2. *Ha ϕ izomorfizmus, akkor $T_R(\phi)$ hasonlóképpen.*
3. *Amennyiben ϕ az M modulust N egy direkt összeadandójára képzi le, akkor az analóg állítás teljesül a tenzoralgebrákra is.*
4. *Ha R egy test, ϕ injektív, akkor $T_R(\phi)$ is az.*

2.34 Feladat *Igazoljuk, hogy a tenzoralgebra képzése felcserélhető a skalárkiterjesztés műveletével.*

2.104. Állítás *Tetszőleges M,N R-modulusok esetén létezik egy*

$$T_R(M \oplus N) \longrightarrow T_R(M) \otimes_R T_R(N)$$

kanonikus homogén R-homomorfizmus, amely szürjektív.

Bizonyítás. Tekintsük a

$$\begin{aligned}\phi \colon M \oplus N &\longrightarrow T_R(M) \otimes_R T_R(N) \\ (m, n) &\mapsto m \otimes 1 + 1 \otimes n\end{aligned}$$

hozzárendelést, ez

$$\phi(r\cdot(m,n))=\phi(rm,rn)=(rm)\otimes 1+1\otimes(rn)=r(m\otimes 1+1\otimes n)=r\cdot\phi(m,n)$$

és

$$\begin{aligned}\phi(m_1+m_2,n_1+n_2) &= (m_1+m_2)\otimes 1+1\otimes(n_1+n_2)\\ &= (m_1\otimes 1+1\otimes n_1)+(m_2\otimes 1+1\otimes n_n)\\ &= \phi(m_1,n_1)+\phi(m_2,n_2)\end{aligned}$$

miatt homogén R-lineáris, ezért létezik egy $\widetilde{\phi}\colon T_R(M\otimes N)\to T_R(M)\otimes_R T_R(N)$ homogén R-algebra kiterjesztése, ez lesz a keresett homomorfizmus. Mivel ϕ képe tartalmazza az összes 1-rangú tenzort, vagyis egy generátorrendszert, ezért $\widetilde{\phi}$ szürjektív. $\square$

2.105. Megjegyzés *Az imént konstruált homomorfizmus az esetek döntő többségében nem injektív. Konkrét példának vizsgáljuk meg az $R=K$ test, $M=N=R$ esetet.*

2.35 Feladat *Legyenek M és N tetszőleges R-modulusok, A egy R-algebra, $\mu: T_R(M)\to A$ és $\nu: T_R(N)\to A$ R-algebra-homomorfizmusok. Mutassuk meg, hogy $T_R(M)$ és $T_R(N)$ természetes módon beágyazhatók $T_R(M\oplus N)$-be mint R-részalgebrák, továbbá, hogy a μ és ν homomorfizmusoknak létezik közös $T_R(M\oplus N)\to A$ kiterjesztése.*

2.106. Definíció (Fokszámozott duális) *Legyen $A_\bullet=\oplus_{d=0}^{\infty}A_d$ fokszámozott R-algebra, amely összefüggő (azaz $A_0=R$) és lokálisan véges (vagyis $\operatorname{rank}_R A_d<\infty$ minden $d\in\mathbb{N}$ esetén). Ekkor $A_\bullet$ fokszámozott duálisa*

$$(A_\bullet)^*\overset{def}{=}\oplus_{d=0}^{\infty}A_d^*\ ,$$

amely szintén egy összefüggő és lokálisan véges fokszámozott R-algebra.

2.107. Megjegyzés (A fokszámozott duális multiplikatív struktúrája) *Megmutatjuk, hogy a fokszámozott duális modulus bizonyos (elég erős feltételek mellett) ellátható természetes módon egy R-algebra-struktuúrával. Ehhez legyen $A_\bullet=\oplus_{d=0}^{\infty}A_d$ egy fokszámozott R-algebra. A szorzás egy $\mu\colon A_\bullet\otimes A_\bullet\to A_\bullet$ homogén R-lineáris leképezés, amelyre*

$$\mu\colon A_d\otimes A_e\longrightarrow A_{d+e}$$

minden d,e természetes szám esetén.

Feltesszük, hogy minden $d,e\in\mathbb{N}$ esetén a $\mu\colon A_d\otimes A_e\to A_{d+e}$ szorzás izomorfizmus.

Az $(A_\bullet)^*$-beli szorzást az alábbi módon származtatjuk: a fokszámozott struktúra miatt elég a

$$\begin{tikzcd}
((A_\bullet)^*)_d \times ((A_\bullet)^*)_e \arrow[r, "\mu^*"] \arrow[d, "="'] & ((A_\bullet)^*)_{d+e} \arrow[d, "="] \\
A_d^* \times A_e^* \arrow[r, "\mu^*"] & A_{d+e}^*
\end{tikzcd}$$

bilineáris leképezéseket, vagyis a

$$\begin{tikzcd}
((A_\bullet)^*)_d \otimes ((A_\bullet)^*)_e \arrow[r, "\mu^*"] \arrow[d, "="'] & ((A_\bullet)^*)_{d+e} \arrow[d, "="] \\
A_d^* \otimes A_e^* \arrow[r, "\mu^*"] & A_{d+e}^*
\end{tikzcd}$$

R-lineáris leképezéseket megadni (itt az egyszerűség kedvéért két külön leképezést is μ^*-gal jelöltünk, bízunk abban, hogy ez nem fog félreértést okozni).

Ez utóbbi az alábbi diagram alapján történik:

$$\mu^* \colon A_d^* \otimes A_e^* \xrightarrow{\sim} (A_d \otimes A_e)^* \xrightarrow{\widetilde{\mu}} A_{d+e}^* ,$$

ahol az első leképezés a tenzorszorzat és a duális képzésének felcserélhetőségéből, a második, $\widetilde{\mu}$-vel jelölt pedig a $\mu\colon A_d \otimes A_e \to A_{d+e}$ R-lineáris leképezésből a visszahúzás segítségével indukált izomorfizmus inverze.

Ezalatt az alábbit értjük: a $\mu\colon A_d \otimes A_e \to A_{d+e}$ leképezés az alábbi diagram alapján

$$\begin{tikzcd}
A_d \otimes A_d \arrow[r, "\mu"] \arrow[dr, "\phi\circ\mu"'] & A_{d+e} \arrow[d, "\phi"] \\
& R
\end{tikzcd}$$

egy

$$\begin{aligned}
\mathrm{Hom}_R(A_{d+e}, R) &\longrightarrow \mathrm{Hom}_R(A_d \otimes A_e, R) \\
\phi &\mapsto \phi \circ \mu
\end{aligned}$$

R-lineáris leképezést indukál, ϕ ún. visszahúzottját. Amennyiben μ izomorfizmus volt, akkor a visszhúzás is, ennek az inverzét jelöljük $\widetilde{\mu}$-vel.

2.108. Megjegyzés *Az illusztráció kedvéért vegyük szemre, hogy mi történik a tenzorszorzat esetében. Először is fontos észrevétel, hogy*

$$\begin{aligned}
(M^d) \otimes (M^e) &\xrightarrow{\sim} M^{d+e} \\
(m_1 \otimes \cdots \otimes m_d) \otimes (n_1 \otimes \cdots \otimes n_e) &\mapsto m_1 \otimes \cdots \otimes m_d \otimes n_1 \otimes \cdots \otimes n_e
\end{aligned}$$

izomorfizmus, tehát teljesülnek a fenti Megjegyzés feltételei.

Ennek megfelelően a szorzást a

$$(M^{\otimes d})^* \otimes (M^{\otimes e})^* \longrightarrow (M^{\otimes d} \otimes M^{\otimes e})^* \longrightarrow (M^{\otimes (d+e)})^*$$

kompozícióval értelmezzük.

Tetszőleges $\phi \in (M^{\otimes d})^*$, $\psi \in (M^{\otimes e})^*$, és $m_1, \ldots, m_d, n_1, \ldots, n_e \in M$ elemek esetén a

$$\phi \cdot \psi \overset{def}{=} \mu^*(\phi, \psi)$$

szorzatot kiértékelve azt kapjuk, hogy

$$\mu^*(\phi \cdot \psi)(m_1, \ldots, m_d, n_1, \ldots, n_e) = \phi(m_1 \otimes \cdots \otimes m_d) \cdot \psi(n_1 \otimes \cdots \otimes n_e) \ .$$

2.109. Megjegyzés *Amennyiben $A_\bullet$ összefüggő, akkor $R^* = R$ miatt $(A_\bullet)^*$ is az lesz; ha $A_\bullet$ lokálisan véges, akkor a fokszámozott duálisa is. Tetszőleges M esetén $T_R(M)$ összefüggő, hiszen az üres halmaz mint indexhalmaz felett vett tenzorszorzat R-rel izomorf. A $T_R(M)$ R-algebra pontosan akkor lesz lokálisan véges, ha M véges rangú R-modulus.*

2.110. Állítás *Legyen M tetszőleges R-modulus. Ekkor létezik egy természetes*

$$T_R(M^*) \longrightarrow T_R(M)^*$$

R-lineáris leképezés. Ha M véges rangú szabad modulus, akkor a természetes leképezés izomorfizmus.

Bizonyítás. A fokszámozott duális definíciója szerint $(T_R(M))^*$ homogén lineáris része pontosan M^*. Amennyiben $\phi_1, \ldots, \phi_d \in M^* = (T_R(M))^*_1$, akkor a fokszámozott duálisbeli szorzat nem más, mint az

$$m_1 \otimes \cdots \otimes m_d \mapsto \phi_1(m_1) \cdot \cdots \cdot \phi_d(m_d)$$

funkcionál, azaz a $\phi_1 \otimes \cdots \otimes \phi_d$ lineáris funkcionál képe a

$$(M^*)^{\otimes d} \longrightarrow (M^{\otimes d})^*$$

természetes leképezésnél. A tenzoralgebra mint fokszámozott gyűrű univerzális tulajdonsága alapján a

$$M^* \hookrightarrow (T_R(M))^*$$

beágyazás egy egyértelműen meghatározott

$$\alpha \colon T_R(M^*) \longrightarrow (T_R(M))^*$$

R-algebra-homomorfizmussá terjed ki, amelyre teljesül, hogy minden $d \in \mathbb{N}$ esetén

$$\alpha(\phi_1 \otimes \cdots \otimes \phi_d) = \alpha(\phi_1) \cdot \cdots \cdot \alpha(\phi_d) = \phi_1 \cdot \ldots \phi_d \ ,$$

vagyis a homogén részeken α megegyezik a $(M^*)^{\otimes d} \longrightarrow (M^{\otimes d})^*$ természetes leképezéssel.

Korábban láttuk, hogy amennyiben M szabad R-modulus, akkor a természetes leképezés bijektív. $\square$

A következő példa alapvető fontosságú a fizika szempontjából.

2.111. Példa (Vegyes tenzorok) *Legyen R tetszőleges gyűrű, M egy R-modulus. A fizikai alkalmazásokban legtöbbször $R = \mathbb{R}$ vagy $R = \mathbb{C}$, és M egy véges dimenziós vektortér. Az M modulus* vegyes tenzoralgebráját *az alábbi módon definiáljuk:*

$$T_R(M^*, M) \overset{def}{=} T_R(M^*) \otimes_R T_R(M) \ ,$$

ahol a jobb oldalon az ún. fokszámozott tenzorszorzat áll (ld. 2.112. Megjegyzés). A tenzorszorzatból örökölt fokszámozott struktúrára

$$T_R(M^*, M)_d = \bigoplus_{m+k=d} T_R^{m,k}(M) \quad \textit{minden } d \geq 0 \textit{ esetén} \ ,$$

ahol

$$T_R^{m,k}(M) \overset{def}{=} ((M^*)^{\otimes m}) \otimes (M^{\otimes k})$$

az ún. m-szeresen kontravariáns és k-szorosan kovariáns tenzorok*, másképpen az* (m, k)-típusú tenzorok R-modulusa.

2.112. Megjegyzés (Fokszámozott tenzorszorzat) *Legyenek $A_\bullet$ és $B_\bullet$ fokszámozott R-algebrák. Megmutatjuk, hogyan lehet az $A_\bullet \otimes B_\bullet$ R-algebrán egy fokszámozott R-algebra-struktúrát definiálni. Minden $d, e \in \mathbb{N}$ esetén*

$$\mu_A \colon A_d \otimes A_e \longrightarrow A_{d+e}$$

és

$$\mu_B \colon B_d \otimes B_e \longrightarrow B_{d+e} \ ,$$

továbbá tetszőleges $a_1 \in A_{d_1}$,$a_2 \in A_{d_2}$ és $b_1 \in B_{e_1}$, $b_2 \in B_{e_2}$ homogén elemekre

$$(a \otimes b) \cdot (a' \otimes b') = (aa') \otimes (bb') \in A_{d_1+d_2} \otimes B_{e_1+e_2}$$

így a

$$(A_\bullet \otimes_R B_\bullet)_d \overset{def}{=} \bigoplus_{m+k=d} A_m \otimes_R B_k$$

definíció egy fokszámozást valósít meg. Az $A_\bullet$ és $B_\bullet$ fokszámozott algebrák fokszámozott tenzorszorzatán az $A_\bullet \otimes B_\bullet$ algebrát értjük a most ismertetett fokszámozással.

2.113. Megjegyzés (Vegyes tenzorok koordinátákban) *Legyen M egy n-rangú szabad R-modulus $e_1, \ldots, e_n$ bázissal. Ekkor M^* szintén n-rangú szabad R-modulus lesz az $e_1^*, \ldots, e_n^*$ duális bázissal, amelyekre*

$$e_i^*(e_j) = \delta_{ij} \quad \textit{minden } 1 \leq i, j \leq n \textit{ esetén.}$$

A fizikus szakirodalomban az e_i^* báziselem helyett e^i-t írnak, mivel lineáris algebráról van szó, a félreértés elkerülhető. Az alkalmazásokkal való konformitás érdekében lokálisan átvesszük ezt a konvenciót.

Ekkor minden $m \in M$ elem egyértelűen felírható

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha^i e_i$$

alakba, ahol $\alpha^i \in R$. Ismét csak a fizikai konvenciót követve, kovariáns tenzorok (vagyis $M^{\otimes d}$ elemei valamely $d \geq 0$ esetén) koordinátáit felső indexekkel látjuk el.

Analóg módon minden $\phi \in M^*$ egyértelműen írható

$$\sum_{j=1}^{n} \alpha_j e^j$$

alakba (kontravariáns tenzorok együtthatóinak alsó indexe van).

Tekintsünk most tetszőleges $p, q \in \mathbb{N}$ esetén egy $x \in T_R^{p,q}(M)$ vegyes tenzort, ez egyértelműen írható

$$x = \sum_{1 \leq i_1, \dots, i_q \leq n, 1 \leq j_1, \dots, j_p \leq n} \alpha_{j_1, \dots, j_p}^{i_1, \dots, i_q} e^{j_1} \otimes \dots \otimes e^{j_p} \otimes e_{i_1} \otimes \dots \otimes e_{i_q}$$

alakba. Ezt röviden a $\left(\alpha_{j_1, \dots, j_p}^{i_1, \dots, i_q}\right)$ formába írjuk, feltéve, hogy ismert a kiindulási bázis.

2.114. Megjegyzés (Vegyes tenzorok koordinátatranszformációi) *Ismét csak a fizika szempontjából igen hasznos vegyes tenzorok koordinátáira vonatkozó bázistranszformációk ismerete. Továbbra is az előző Megjegyzés jelöléseivel dolgozva legyen $f_1, \dots, f_n$ az M modulus egy másik bázisa, a megfelelő duális bázis elemeit jelölje $f^1, \dots, f^n$. Az e_i és f_i bázisok közti transzformációk legyenek*

$$e_k = \sum_{l=1}^{n} \beta_k^l f_l$$

és

$$f_l = \sum_{k=1}^{n} \gamma_l^k e_k \ .$$

Ekkor a duális bázisok közti transzformációkra azt kapjuk, hogy

$$e^i = \sum_{r=1}^{n} \gamma_r^i f^r$$

és

$$f^r = \sum_{i=1}^{n} \beta_i^r e^i$$

az indexek minden lehetséges értékére. Az $x \in T_R^{p,q}(M)$ tenzort az $f_1, \ldots, f_n$ bázisban felírva azt kapjuk, hogy

$$x = \sum_{1 \leq s_1,\ldots,s_q \leq n, 1 \leq r_1,\ldots,r_p \leq n} \epsilon_{r_1,\ldots,r_p}^{s_1,\ldots,s_q} f^{r_1} \otimes \cdots \otimes f^{r_p} \otimes f_{s_1} \otimes \cdots \otimes f_{s_q} \ ,$$

ahonnan behelyettesítéssel

$$\epsilon_{r_1,\ldots,r_p}^{s_1,\ldots,s_q} = \sum_{1 \leq i_1,\ldots,i_q \leq n, 1 \leq j_1,\ldots,j_p \leq n} \alpha_{j_1,\ldots,j_p}^{i_1,\ldots,i_q} \cdot \gamma_{r_1}^{j_1} \cdot \ldots \cdot \gamma_{r_p}^{j_p} \cdot \beta_{i_1}^{s_1} \cdot \ldots \cdot \beta_{i_q}^{s_q} \ .$$

II. rész

Homologikus algebra és algebrai topológia

3. fejezet

A homologikus algebra alapjai

A homologikus algebra az elmúlt ötven évben a matematika sok részén lett nélkülözhetetlen eszköz. Jelentősége abban áll, hogy sok geometria vagy algebrai esetben vezet invariánsokhoz, amelyek sok hasznos tulajdonságukkal nagyban megkönnyítik az adott terület kutatását. A modern geometria (legyen az algebrai, aritmetikai, vagy differenciálgeometria) vagy gyűrűelmélet nem képzelhető el homologikus eszközök nélkül.

A differenciálgeometriával való igen szoros kapcsolatán keresztül az elméleti fizikában is egyre inkább teret hódít a homologikus algebra alkalmazása, ily módon nem csak a matematikusoknak, hanem az elméleti fizika sok területén dolgozó kutatóknak is fontos tudnivaló.

3.1. A homologikus algebra alapvető definíciói

3.1. Definíció (Homológia) *Legyen R tetszőleges gyűrű,*

$$M \xrightarrow{\phi} N \xrightarrow{\psi} P$$

R-modulusok közti leképezések, amelyekre $\operatorname{im}\phi \subseteq \ker\psi$*. Ekkor a*

$$H(\phi, \psi) \stackrel{def}{=} \ker\psi / \operatorname{im}\phi$$

faktormodulust a (ϕ, ψ) pár homológiá*jának nevezzük. Azt mondjuk, hogy az $M \xrightarrow{\phi} N \xrightarrow{\psi} P$ sorozat* egzakt N-nél*, ha $H(\phi, \psi) = 0$.*

3.2. Példa *A homológia előfordulására talán a legegyszerűbb példa a következő: Legyen $M = \mathbb{R}^n$ egy véges-dimenziós valós vektortér, $A, B \in \mathrm{Mat}_n(\mathbb{R})$ pedig két mátrix, amelyre $BA = 0$. Ekkor minden $v \in \mathbb{R}^n$ vektorra $B(Av) = 0$, azonban általában nem lesz igaz, hogy a $Bw = 0$ feltételből következne, hogy létezik olyan $v \in \mathbb{R}^n$, amelyre $w = Av$.*

Annak mértékét, hogy ez milyen 'gyakran' fordul elő, pontosan a $H(A, B)$ homológiatér adja meg.

3.3. Példa *Legyen $\phi : M' \to M$ R-modulusok közti homomorfizmus. Ekkor a*

$$0 \longrightarrow M' \xrightarrow{\phi} M$$

sorozat pontosan akkor egzakt, ha ϕ injektív.

Hasonlóképpen ϕ pontosan akkor szürjektív, ha

$$M' \xrightarrow{\phi} M \longrightarrow 0$$

egzakt.

Ezek alapján ϕ pontosan akkor lesz izomorfizmus, amennyiben a

$$0 \longrightarrow M' \xrightarrow{\phi} M \longrightarrow 0$$

sorozat egzakt.

3.4. Példa (Rövid egzakt sorozat) *Legyenek M',M,M'' R-modulusok, $\phi\colon M' \to M$, $\psi\colon M \to M''$ R-lineáris leképezések, és tekintsük a*

$$0 \longrightarrow M' \xrightarrow{\phi} M \xrightarrow{\psi} M'' \longrightarrow 0 \tag{3.1}$$

sorozatot. Gyorsan ellenőrizhető, hogy pontosan akkor egzakt, ha

1. *ϕ injektív,*
2. $\operatorname{im}\phi = \ker\psi$,
3. *ψ szürjektív.*

Amennyiben (3.1) egzakt, akkor rövid egzakt sorozatnak nevezzük. A rövid egzakt sorozatok számítási szempontbók kitüntetett szerepet játszanak a homologikus algebrában.

3.5. Példa *Legyen $\phi : M \to N$ egy R-modulus-homomorfizmus; ϕ meghatároz egy rövid egzakt sorozatot az alábbi módon:*

$$0 \longrightarrow \ker\phi \longrightarrow M \longrightarrow \operatorname{coker}\phi \longrightarrow 0\ ,$$

ahol az első nemtriviális leképezés ϕ magjának a beágyazása M-be, a második pedig az $M \to \operatorname{coker}\phi = M/\ker\phi$ vetítés.

3.6. Példa *Egy*

$$0 \longrightarrow M' \xrightarrow{\phi} M \xrightarrow{\psi} M'' \longrightarrow 0$$

rövid egzakt sorozatot felhasadó*nak nevezünk, amennyiben léteznek olyan*

$$\alpha\colon M \to M' \quad \text{és} \quad \beta\colon M'' \to M$$

R-homomorfizmusok, amelyekre

$$\alpha \circ \phi = \mathrm{id}_{M'} \quad \text{és} \quad \psi \circ \beta = \mathrm{id}_{M''}\ .$$

Ekkor természetesen $M \simeq M' \oplus M''$.

3.1 Feladat *Adjuk meg $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$-modulusoknak olyan rövid egzakt sorozatát, amely nem felhasadó.*

3.2 Feladat *Mutassuk meg, hogy létezik M és N R-modulusoknak olyan*

$$0 \to M \to M \oplus N \to N \to 0$$

egzakt sorozata, amely nem felhasadó.

Az egzakt sorozatok fogalmának egy rendkívüli módon hasznos gyengítése az alábbi.

3.7. Definíció (Modulusok lánckomplexusa) *Az R gyűrű feletti modulusok egy $M_\bullet$* lánckomplexusa *R-modulusoknak egy, az egész számokkal indexelt M_kn családja, köztük*

$$d_n \colon M_n \longrightarrow M_{n-1}$$

R-lineáris leképezésekkel, az ún. differenciál*okkal úgy, hogy*

$$d_{n-1} \circ d_n = 0 \colon M_n \longrightarrow M_{n-2}$$

minden $n \in \mathbb{Z}$ esetén.

Legyen (M_n, d_n) egy lánckomplexus. Tetszőleges $n \in \mathbb{Z}$ esetén

$$Z_n = Z_n(M_\bullet) \overset{def}{=} \ker d_n$$

*jelöli az $M_\bullet$ komplexus n-*ciklusait*,*

$$B_n = B_n(M_\bullet) \overset{def}{=} \operatorname{im} d_{n+1}$$

*pedig $M_\bullet$ n-*határait.

3.8. Definíció (Komplexusok közti leképezések) *Legyenek (M_n, d_n) és (N_n, e_n) R-modulusokból álló lánckomplexusok. Egy $\phi_\bullet \colon M_\bullet \to N_\bullet$* láncleképezés *vagy* komplexusok közti (homo)morfizmus *R-lineáris leképezések egy olyan*

$$\phi_n \colon M_n \to N_n$$

családja, amelyre

$$\phi_{n-1} \circ d_n = e_n \circ \phi_n$$

minden $n \in \mathbb{Z}$ esetén.

3.9. Megjegyzés *Az iménti definíció jelöléseivel $\phi_\bullet\colon M_\bullet \to N_\bullet$ pontosan akkor láncleképezés, ha a*

$$\begin{tikzcd} M_n \arrow[r, "d_n"] \arrow[d, "\phi_n"'] & M_{n-1} \arrow[d, "\phi_{n-1}"] \\ N_n \arrow[r, "e_n"] & N_{n-1} \end{tikzcd}$$

diagram minden $n \in \mathbb{Z}$ esetén kommutatív.

3.10. Megjegyzés *Ugyan kategóriaelméletből azonnal következik, mégis fontos leszögezni, hogy egy láncleképezést akkor nevezünk izomorfizmusnak, ha létezik kétoldali inverze.*

3.11. Megjegyzés *Egy tetszőleges R gyűrű esetén az R-modulusok lánckomplexusai mint objektumok a láncleképezésekkel mint morfizmusokkal egy kategóriát alkotnak, amelyet* ChMod_R*-rel jelölünk.*

A lánckomplexusok kategóriái a homologikus algebra (és így az összes alkalmazás) számára kulcsfontosságúak. Egyik szerepük az, hogy lehetővé teszik „általánosított R-modulusok" használatát (akármit is jelentsen ez egyelőre) az alábbi módon: minden M R-modulusnak kanonikusan megfeleltethető egy $M^\circ_\bullet$ lánckomplexus:

$$(M^\circ)_n \overset{def}{=} \begin{cases} M & \text{ha } n = 0, \\ 0 & \text{egyébként,} \end{cases}$$

ahol a komplexus differenciálja a nulla leképezés minden $n \in \mathbb{Z}$ esetén. A konstrukció beágyazza az R-modulusok kategóriáját az R feletti lánckomplexusok kategóriájába, így némi joggal tekinthetünk az R-beli lánckomplexusokra mint általánosított R-modulusokra. Ennek a szemléletnek a konzekvens végigviteléből származtatható az ún. derivált kategóriák fogalma.

3.12. Megjegyzés *Ha (M_n, d_n) egy lánckomplexus, akkor mivel $d_{n-1} \circ d_n = 0$ minden $n \in \mathbb{Z}$ esetén teljesül, ezért*

$$0 \le B_n \le Z_n \le M_n \quad \forall n \in \mathbb{Z} \ .$$

3.13. Definíció (Lánckomplexus homológiája) *Legyen (M_n, d_n) egy lánckomplexus. Az $M_\bullet$-hez rendelt n-*edik homológiamodulus*:*

$$H_n(M_\bullet) \overset{def}{=} Z_n(M_\bullet)/B_n(M_\bullet) \ .$$

3.3 Feladat *Tetszőleges $M \in \mathrm{Mod}_R$ esetén ellenőrizzük, hogy a $M^\circ_\bullet$ lánckomplexus homológiája*

$$H_n(M^\circ_\bullet) = \begin{cases} M & \text{ha } n = 0, \\ 0 & \text{egyébként.} \end{cases}$$

3.4 Feladat *Legyen* (M_n, d_n) *az a komplexus, amelyre*

$$M_n = \begin{cases} \mathbb{Z}/4\mathbb{Z} & \text{ha } n \geq 0, \\ 0 & \text{egyébként,} \end{cases}$$

és

$$d_n = \begin{cases} a \mapsto 2a & \text{ha } n > 0, \\ 0 & \text{egyébként.} \end{cases}$$

Határozzuk meg a (M_n, d_n) *lánckomplexus homológiáját.*

3.14. Lemma *Legyen* $\phi_\bullet\colon (M_\bullet, d_\bullet) \to (N_\bullet, e_\bullet)$ *egy lánckomplexusok közti homomorfizmus. Ekkor minden* $n \in \mathbb{Z}$ *esetén* $\phi_\bullet$ *indukál egy*

$$\overline{\phi}_n\colon H_n(M_\bullet) \longrightarrow H_n(N_\bullet)$$

R-homomorfizmust.

Bizonyítás. Legyen $n \in \mathbb{Z}$ szabadon választott. Ahhoz, hogy kapjunk egy jóldefiniált

$$H_n(M_\bullet) = Z_n(M_\bullet)/B_n(M_\bullet) \longrightarrow Z_n(N_\bullet)/B_n(N_\bullet) = H_n(N_\bullet)$$

R-modulus-homomorfizmust, szükséges és elegendő belátni, hogy

$$\phi_n(Z_n(M_\bullet)) \subseteq Z_n(N_\bullet) \quad \text{és} \quad \phi_n(B_n(M_\bullet)) \subseteq B_n(N_\bullet) \ .$$

Ti. ekkor ϕ_n és a $\pi_n\colon Z_n(N_\bullet) \to Z_n(N_\bullet)/B_n(N_\bullet)$ természetes projekciók kompozíciója a faktormodulus univerzális tulajdonsága alapján keresztülfaktorizálható a $Z_n(M_\bullet)/B_n(M_\bullet)$ faktormoduluson, megadva ezzel a keresett $\overline{\phi}_n$ homomorfizmust.

$$\begin{tikzcd}
Z_n(M_\bullet) \arrow[r, "\phi_n"] \arrow[d] & Z_n(N_\bullet) \arrow[d, "\pi_n"] \\
Z_n(M_\bullet)/B_n(M_\bullet) \arrow[r, "\overline{\phi}_n"] & Z_n(N_\bullet)/B_n(N_\bullet)
\end{tikzcd}$$

Az első tartalmazás bizonyításához legyen $m \in Z_n(M_\bullet) = \ker d_n$. Ekkor a lánckomplexus definiáló tulajdonsága szerint

$$0 = \phi_{n-1}(0) = \phi_{n-1}(d_n(m)) = e_n(\phi_n(m)) \ ,$$

vagyis $\phi_n(m) \in \ker e_n = Z_n(N_\bullet)$.

A második tartalmazás igazolásához legyen $m \in B_n(M_\bullet) = \operatorname{im} d_{n+1}$. Ekkor létezik $m' \in M_{n+1}$, amelyre $d_{n+1}(m') = m$. Ismét csak kihasználva a láncleképezések definícióját kapjuk, hogy

$$\phi_n(m) = \phi_n(d_{n+1}(m')) = e_{n+1}(\phi_{n+1}(m')) \in \operatorname{im} e_n = B_n(N_\bullet) \ .$$

Ezzel a lemmát beláttuk. $\square$

3.15. Definíció *Legyen $\phi_\bullet \colon M_\bullet \to N_\bullet$ egy lánckomplexusok közti homomorfizmus. Egy $n \in \mathbb{Z}$ szám esetén az n-edik homológiamodulusokon indukált $\overline{\phi}_n \colon H_n(M_\bullet) \to H_n(N_\bullet)$ leképezést $H_n(\phi_\bullet)$-tel jelöljük.*

3.16. Definíció *Legyen $\phi_\bullet \colon M_\bullet \to N_\bullet$ egy lánchomomorfizmus. Azt mondjuk, hogy $\phi_\bullet$ egy* kvázi-izomorfizmus, *ha minden $n \in \mathbb{Z}$ esetén a*

$$H_n(\phi_\bullet) \colon H_n(M_\bullet) \longrightarrow H_n(N_\bullet)$$

indukált leképezés izomorfizmus.

3.5 Feladat *Jelölje $0_\bullet$ a ChMod_R kategória nullelemét, konkrétabban azt a komplexust, amelyben minden modulus 0, és (ennek megfelelően) minden differenciál a nulla leképezés. Igazoljuk, hogy egy $M_\bullet$ lánckomplexus pontosan akkor egzakt, ha a*

$$0_\bullet \longrightarrow M_\bullet$$

láncleképezés kvázi-izomorfizmus.

3.17. Megjegyzés (Homológia mint funktor) *Tetszőleges rögzített $n \in \mathbb{Z}$ esetén az a hozzárendelés, amely egy $M_\bullet \in \mathrm{ChMod}_R$ komplexushoz a $H_n(M_\bullet)$ R-modulust, egy $\phi_\bullet \colon M_\bullet \to N_\bullet$ láncleképezéshez pedig a $H_n(\phi_\bullet)$ R-lineáris leképezést rendeli, egy*

$$H_n \colon ChMod_R \longrightarrow \mathrm{Mod}_R$$

funktort valósít meg.

3.6 Feladat *Igazoljuk az előző Megjegyzés állítását.*

3.18. Megjegyzés *Vegyük észre, hogy egy $M_\bullet$ lánckomplexus pontosan akkor lesz egzakt sorozat, ha*

$$H_n(M_\bullet) = 0$$

minden $n \in \mathbb{Z}$ esetén.

3.19. Megjegyzés (Komplexusok felaprítása) *Legyen*

$$\ldots \longrightarrow M_{n+1} \xrightarrow{d_{n+1}} M_n \xrightarrow{d_n} M_{n-1} \longrightarrow \ldots$$

R-modulusok egy lánckomplexusa. Minden $d_n : M_n \to M_{n-1}$ esetén tekinthetjük a

$$0 \to \ker d_n \to M_n \to \ker d_{n-1} \to 0$$

sorozatot. Egyszerűen ellenőrizhető, hogy pontosan akkor lesz minden $n \in \mathbb{Z}$ esetén az iménti sorozat egzakt, ha $M_\bullet$ egzakt sorozat.

Az egzakt sorozatokkal való munkát gyakran erősen leegyszerűsíti, ha csak rövid egzakt sorozatokkal kell dolgozni. Az iménti megfigyelés pontosan ezt teszi lehetővé.

3.7 Feladat *Legyen λ egy R-modulusokon értelmezett egész értékű függvény. Azt mondjuk, hogy λ* additív*, ha minden*

$$0 \longrightarrow M' \longrightarrow M \longrightarrow M'' \longrightarrow 0$$

rövid egzakt sorozatra

$$\lambda(M') - \lambda(M) + \lambda(M'') = 0 \ .$$

Igazoljuk, hogy ha

$$0 \longrightarrow M_n \longrightarrow \ldots \longrightarrow M_i \longrightarrow M_{i-1} \longrightarrow \ldots \longrightarrow M_0 \longrightarrow 0$$

tetszőleges egzakt sorozat, akkor

$$\sum_{i=0}^{n} (-1)^i \lambda(M_i) = 0 \ .$$

3.8 Feladat *Legyen $R = K$ test. Igazoljuk, hogy a $V \mapsto \dim_K V$ hozzárendelés egy additív függvény.*

3.9 Feladat *Legyen $R = K$ tetszőleges test, minden $n \in \mathbb{Z}$ esetén legyenek B_n, H_n K-vektorterek. Jelölje*

$$M_n \stackrel{def}{=} B_n \oplus H_n \oplus B_{n-1} \ ,$$

és tekintsük a

$$d_n \colon M_n \twoheadrightarrow B_{n-1} \hookrightarrow M_{n-1}$$

kompozíciót mint differenciált (ahol az első nyíl a természetes vetítés, a második pedig a természetes beágyazás).

1. *Mutassuk meg, hogy (M_n, d_n) valóban egy lánckomplexus.*
2. *Igazoljuk, hogy K-vektorterek tetszőleges lánckomplexusa izomorf egy, a fenti formájú lánckomplexussal.*

Csakúgy mint modulusokkal, lánckomplexusokon is sokfajta műveletet végezhetünk, amelyek nem sok fáradsággal újabb lánckomplexusokat eredményeznek. A homologikus algebra egy központi kérdése, hogy e műveleteket egzakt sorozatokra alkalmazva mikor vezetnek megint csak egzakt sorozatokhoz.

3.20. Definíció (Egzakt funktor) *Egy $\mathcal{F} \colon \mathrm{Mod}_R \to \mathrm{Mod}_R$ funktort* additív*nak nevezünk, ha minden $M, N \in \mathrm{Mod}_R$ esetén*

$$\mathrm{Hom}_R(M, N) \longrightarrow \mathrm{Hom}_R(\mathcal{F}(M), \mathcal{F}(N))$$

egy abel-csoport-homomorfizmus. Egy $\mathcal{F}$ additív funktor egzakt*, ha minden $M_\bullet$ egzakt sorozat esetén az $\mathcal{F}(M_\bullet)$ lánckomplexus is egzakt lesz.*

Egy $\mathcal{F}$ additív funktor balegzakt*, ha minden*

$$0 \longrightarrow M' \xrightarrow{\phi} M \xrightarrow{\psi} M''$$

egzakt sorozatra

$$0 \longrightarrow \mathcal{F}(M') \xrightarrow{\mathcal{F}(\phi)} \mathcal{F}(M) \xrightarrow{\mathcal{F}(\psi)} \mathcal{F}(M'')$$

is egzakt lesz. Analóg módon $\mathcal{F}$-et jobbegzakt*nak nevezzük, ha minden*

$$M' \xrightarrow{\phi} M \xrightarrow{\psi} M'' \longrightarrow 0$$

egzakt sorozatra

$$\mathcal{F}(M') \xrightarrow{\mathcal{F}(\phi)} \mathcal{F}(M) \xrightarrow{\mathcal{F}(\psi)} \mathcal{F}(M'') \longrightarrow 0$$

is egzakt.

3.10 Feladat *Igazoljuk, hogy egy $\mathcal{F} \colon \mathrm{Mod}_R \to \mathrm{Mod}_R$ additív funktor lánckomplexusokat lánckomplexusokba visz.*

3.11 Feladat *Igazoljuk, hogy tetszőleges $M \in \mathrm{Mod}_R$ esetén $\otimes_R M$ mint $\mathrm{Mod}_R \to \mathrm{Mod}_R$ funktor additív, és tetszőleges $\phi \in \mathrm{Hom}_R(N, P)$ homomorfizmus esetén a*

$$\mathrm{Hom}_R(M, \phi) \colon \mathrm{Hom}_R(M, N) \longrightarrow \mathrm{Hom}_R(M, P)$$

hozzárendelés egy R-lineáris leképezés.

3.21. Megjegyzés (Tenzorszorzat jobbegzakt funktor) *A tenzorszorzat tulajdonságainak vizsgálatánál láttuk (2.87. Állítás), hogy ha*

$$M' \xrightarrow{\phi} M \xrightarrow{\psi} M'' \longrightarrow 0$$

R-modulusok egy egzakt sorozata, N tetszőleges R-modulus, akkor az

$$M' \otimes_R N \xrightarrow{\phi \otimes \mathrm{id}_N} M \otimes_R N \xrightarrow{\psi \otimes \mathrm{id}_N} M'' \longrightarrow 0$$

sorozat is egzakt, vagyis $\otimes_R N$ jobbegzakt funktor.

A következőkben megvizsgáljuk, a Hom_R funktorok egzaktságát.

3.22. Megjegyzés (Kovariáns $\mathbf{Hom}_{\boldsymbol{R}}$ funktor) *Legyenek M tetszőleges rögzített R-modulus. Ekkor az a hozzárendelés, amelyre minden $N \in \mathrm{Mod}_R$ esetén*

$$N \mapsto \mathrm{Hom}_R(M, N)$$

és minden $\phi\colon N \to P$ R-lineáris leképezésre

$$\begin{array}{rrcl} \mathrm{Hom}_R(M,\phi)\colon & \mathrm{Hom}_R(M,N) & \longrightarrow & \mathrm{Hom}_R(M,P) \\ & \alpha & \mapsto & \phi\circ\alpha\ , \end{array}$$

egy $\mathrm{Hom}_R(M,\ )\colon \mathrm{Mod}_R \to \mathrm{Mod}_R$ funktort valósít meg. Rövid számolás mutatja, hogy a $\mathrm{Hom}_R(M,\ )$ funktor additív is.

Ennek megfelelően ha $(N_\bullet, d_\bullet)$ R-modulusok egy lánckomplexusa, akkor

$$(\mathrm{Hom}_R(M, N_n), \mathrm{Hom}_R(M, d_n))_{n\in\mathbb{Z}}$$

szintén lánckomplexus lesz.

3.23. Állítás (A kovariáns $\mathbf{Hom}_{\boldsymbol{R}}$-funktor balegzakt) *Legyen $M \in \mathrm{Mod}_R$ tetszőleges R-modulus,*

$$0 \longrightarrow N' \xrightarrow{\phi} N \xrightarrow{\psi} N''$$

egy egzakt sorozat. Ekkor

$$0 \longrightarrow \mathrm{Hom}_R(M,N') \xrightarrow{\mathrm{Hom}_R(M,\phi)} \mathrm{Hom}_R(M,N) \xrightarrow{\mathrm{Hom}_R(M,\psi)} \mathrm{Hom}_R(M,N'')$$

is egzakt.

3.24. Jelölés *Ha $\phi : N \to P$ R-lineáris leképezés, $M \in \mathrm{Mod}_R$, $\alpha \in \mathrm{Hom}_R(M,N)$, akkor jelölje*

$$\phi_*\alpha \overset{def}{=} \mathrm{Hom}_R(M,\phi)(\alpha) \in \mathrm{Hom}_R(M,P)\ .$$

Bizonyítás. Legyen $M \in \mathrm{Mod}_R$ tetszőleges R-modulus, továbbá

$$0 \longrightarrow N' \xrightarrow{\phi} N \xrightarrow{\psi} N''$$

egy egzakt sorozat. Azt fogjuk igazolni, hogy

$$0 \longrightarrow \mathrm{Hom}_R(M,N') \xrightarrow{\mathrm{Hom}_R(M,\phi)} \mathrm{Hom}_R(M,N) \xrightarrow{\mathrm{Hom}_R(M,\psi)} \mathrm{Hom}_R(M,N'')$$

egzakt $\mathrm{Hom}_R(M,N')$-nél és $\mathrm{Hom}_R(M,N)$-nél.

A sorozat $\mathrm{Hom}_R(M,N')$ tagjánál vett egzaktság ekvivalens azzal, hogy a

$$\phi_* = \mathrm{Hom}_R(M,\phi)\colon\ \mathrm{Hom}_R(M,N') \longrightarrow \mathrm{Hom}_R(M,N)$$

leképezés injektív, azaz tetszőleges $\alpha \in \mathrm{Hom}_R(M, N')$ esetén $\alpha = 0$, feltéve, hogy $\phi_*\alpha = 0$. Ez utóbbi viszont rögtön következik ϕ injektivitásából, hiszen $\phi_*\alpha = \phi \circ \alpha$, és minden injektiv leképezés balinvertálható.

A $\mathrm{Hom}_R(M, N)$ tagnál vett egzaktság definíció szerint azt jelenti, hogy

$$\ker \psi_* = \mathrm{im}\, \phi_* \ .$$

Ebből $\mathrm{im}\, \phi_* \subseteq \ker \psi_*$ automatikus, mivel $\mathrm{Hom}_R(M, \ )$ additív funktor, így lánckomplexusokat lánckomplexusokba visz. A fordított irány az alábbi módon látszik: legyen $\alpha \in \ker \psi_*$, vagyis

$$\psi_*\alpha \overset{\text{def}}{=} \psi \circ \alpha = 0 \ .$$

Eszerint tetszőleges $m \in M$ esetén $\psi(\alpha(m)) = 0$. Mivel az eredeti sorozat egzakt N-nél és $\alpha(m) \in \ker \psi$, létezik $n' \in N'$, amelyre $\phi(n') = \alpha(m)$. Tekintsük a

$$\begin{array}{rcl} \beta \colon M & \longrightarrow & N' \\ m & \mapsto & n' \end{array}$$

hozzárendelést. Mivel ϕ feltevés szerint injektív, ezért β jóldefiniált; könnyen ellenőrizhető, hogy β R-lineáris, továbbá a konstrukciója szerint automatikusan

$$\phi_*\beta = \phi \circ \beta = \alpha \ ,$$

vagyis $\alpha \in \mathrm{im}\, \phi_*$. □

3.25. Megjegyzés (Kolánckomplexusok) *Az alábbi jelölésrendszer szintén fontos az alkalmazásokban. Egy* kolánckomplexus *R-modulusoknak egy, az egész számokkal indexelt $M^\bullet$ családja $d^n : M^n \to M^{n+1}$ leképezésekkel ellátva, amelyekre*

$$d^{n+1} \circ d^n = 0 \ .$$

Tetszőleges $n \in \mathbb{Z}$-re

$$Z^n = Z^n(M^\bullet) \overset{def}{=} \ker d^n$$

*jelöli az n-*kociklus*okat,*

$$B^n = B^n(M^\bullet) \overset{def}{=} \mathrm{im}\, d^{n-1}$$

*az n-*kohatár*okat, és*

$$H^n(M^\bullet) \overset{def}{=} Z^n(M^\bullet)/B^n(M^\bullet)$$

*az $M^\bullet$ kolánckomplexus n-*edik kohomológia csoport*ját.*

A kolánckomplexusok közti leképezések és a kvázi-izomorfizmusok definíciója is a lánckomplexusoknál megszokott módon történik.

3.26. Megjegyzés (Lánckomplexusok direkt összege és szorzata) *Ha* $\{M_\bullet^i \mid i \in I\}$ *lánckomplexusok egy családja, akkor a direkt összegét és a direkt szorzatát minden* $n \in \mathbb{Z}$*-re az* n*-edfokú részek direkt összege, illetve direkt szorzata segítségével értelmezzük, ahol a differenciálokat komponensenként értelmezzük.*

3.12 Feladat *Mondjuk ki a komplexusok kategóriájában a direkt összeg és a direkt szorzat univerzális tulajdonságait, és ellenőrizzük, hogy valóban teljesülnek.*

3.13 Feladat *Legyen* $\{M_\bullet^i \mid i \in I\}$ *lánckomplexusok egy tetszőleges családja. Igazoljuk, hogy*

$$H_n(\bigoplus_{i\in I} M_\bullet^i) = \bigoplus_{i\in I} H_n(M_\bullet^i)$$

és

$$H_n(\prod_{i\in I} M_\bullet^i) = \prod_{i\in I} H_n(M_\bullet^i) \ ,$$

vagyis a homológia képzése felcserélhető a direkt összeg vagy szorzat képzésével.

3.27. Definíció (Részkomplexus) *Legyen* $(M_\bullet, d_\bullet)$ *egy lánckomplexus. Egy* $(N_\bullet, d'_\bullet)$ *lánckomplexus* $M_\bullet$ részkomplexus*ának nevezünk, ha*

1. *minden* $n \in \mathbb{Z}$ *esetén* $N_n \leq M_n$ *részmodulus,*
2. *minden* $n \in \mathbb{Z}$ *esetén* $d'_n = d_n|_{N_n}$.

3.14 Feladat *Mutassuk meg, hogy* $(N_\bullet, d'_\bullet)$ *pontosan akkor lesz részkomplexusa* $(M_\bullet, d_\bullet)$*-nek, ha* $N_n \leq M_n$ *minden* $n \in \mathbb{Z}$*-re, továbbá a*

$$\iota \colon N_\bullet \hookrightarrow M_\bullet$$

természetes beágyazás láncleképezés.

3.28. Megjegyzés *Legyen* $(N_\bullet, d'_\bullet)$ *részkomplexusa* $(M_\bullet, d_\bullet)$*-nek. Mivel minden* $n \in \mathbb{Z}$*-re*

$$d_n(N_n) = d'_n(N_n) \subseteq N_{n-1} \ ,$$

ezért a $d_\bullet$ *differenciál minden* $n \in \mathbb{Z}$ *esetén egy*

$$\overline{d}_n \colon M_n/N_n \longrightarrow M_{n-1}/N_{n-1}$$

R*-lineáris leképezést indukál, amellyel az* $(M_n/N_n, \overline{d}_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ *sorozat egy lánckomplexus lesz.*

3.29. Definíció (Faktorkomplexus) *Legyen* $(N_\bullet, d'_\bullet)$ *részkomplexusa* $(M_\bullet, d_\bullet)$*-nek. Az* $(M_n/N_n, \overline{d}_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ *lánckomplexust az* $M_\bullet$ *komlexus* $N_\bullet$*-szerinti* faktor- *vagy* hányadoskomplexus*ának nevezzük.*

3.30. Példa (Csonkítás) *Tetszőleges $M_\bullet$ lánckomplexus és $m \in \mathbb{Z}$ esetén jelölje*

$$(\tau_{\geq m} M_\bullet)_n \stackrel{def}{=} \begin{cases} 0 & \text{ha } n < m, \\ Z_m(M_\bullet) & \text{ha } n = m, \\ M_m & \text{ha } n > m. \end{cases}$$

A $\tau_{\geq m} M_\bullet$ sorozat egy lánckomplexus, amelyet $M_\bullet$ m alatti csonkításának nevezünk.

$$H_n(\tau_{\geq m} M_\bullet) = \begin{cases} 0 & \text{ha } n < m, \\ H_n(M_\bullet) & \text{ha } n \geq m. \end{cases}$$

A

$$\tau_{<m} M_\bullet \stackrel{def}{=} M_\bullet / \tau_{\geq m} M_\bullet$$

hányadoskomplexus neve pedig $M_\bullet$ m feletti csonkítása.

3.15 Feladat *Ellenőrizzük az előző példa minden állítását.*

3.31. Definíció *Egy $\phi_\bullet \colon M_\bullet \to N_\bullet$ R-modulusok komplexusai közti láncleképezés magját, képét, és komagját az alábbi módon definiáljuk:*

$$(\ker \phi_\bullet)_n \stackrel{def}{=} \ker \phi_n \quad \text{és} \quad (d_{\ker \phi_\bullet})_n \stackrel{def}{=} d_n^M|_{\ker \phi_n} \ , \tag{3.2}$$

$$(\operatorname{im} \phi_\bullet)_n \stackrel{def}{=} \operatorname{im} \phi_n \quad \text{és} \quad (d_{\operatorname{im} \phi_\bullet})_n \stackrel{def}{=} d_n^N|_{\operatorname{im} \phi_n} \ , \tag{3.3}$$

$$(\operatorname{coker} \phi_\bullet)_n \stackrel{def}{=} \operatorname{coker} \phi_n \quad \text{és} \quad (d_{\operatorname{coker} \phi_\bullet})_n \stackrel{def}{=} \overline{d}_n^M|_{\operatorname{coker} \phi_n} \ . \tag{3.4}$$

Komplexusok sorozatainak egzaktságát a modulusokkal analóg módon értelmezzük.

3.16 Feladat *Az iménti definíció jelöléseivel igazoljuk, hogy* $\ker \phi_\bullet \leq M_\bullet$ *és* $\operatorname{im} \phi_\bullet \leq N_\bullet$ *részkomplexusok, és* $\operatorname{coker} \phi_\bullet$ *pedig $N_\bullet$-nek az* $\operatorname{im} \phi_\bullet$ *szerinti faktorkomplexusa.*

3.32. Példa *Tetszőleges $M_\bullet$ lánckomplexus esetén $(Z_n(M_\bullet), 0_\bullet) \leq (M_\bullet, d_\bullet)$ részkomplexus.*

3.33. Példa (Eltolás/Shift) *Ha $M_\bullet$ R-modulusok egy lánckomplexusa, $m \in \mathbb{Z}$, akkor $M_\bullet$-nek az m-mel eltolt változatát az alábbi módon definiáljuk:*

$$(M_\bullet[m])_n \stackrel{def}{=} M_{m+n} \ ,$$

és az n-edfokú tag differenciálja $(-1)^m d_{m+n}$ lesz.

Az eltolás értelemszerűen a komplexus homológiát is eltolja:

$$H_n(M_\bullet[m]) = H_{n+m}(M_\bullet) \ .$$

3.34. Megjegyzés (Eltolás mint funktor) *Könnyen építhetünk az eltolásból funktort, amennyiben láncleképezésekre is értelmemezzük. Ezt az alábbi módon szokás megtenni: ha* $\phi_\bullet\colon M_\bullet \to N_\bullet$ *egy láncleképezés, akkor*

$$\phi_\bullet[m]_n \overset{def}{=} \phi_{m+n} \ .$$

Kevés munkával igazolható, hogy $\phi_\bullet[m]$ *szintén láncleképezés, és az* $[m]$ *eltolás egy kovariáns* $\mathrm{ChMod}_R \to \mathrm{ChMod}_R$ *funktor lesz.*

3.17 Feladat *Legyen* $(M_\bullet, d_\bullet)$ *egy lánckomplexus. Ekkor az alábbiak lánckomplexusok rövid egzakt sorozatai lesznek:*

$$0 \longrightarrow Z_\bullet(M_\bullet) \longrightarrow M_\bullet \xrightarrow{d_\bullet} B_\bullet(M_\bullet)[-1] \longrightarrow 0 \ ,$$

és

$$0 \longrightarrow H_\bullet(M_\bullet) \longrightarrow M_\bullet/B_\bullet(M_\bullet) \xrightarrow{d_\bullet} Z_\bullet(M_\bullet) \longrightarrow H_\bullet(M_\bullet)[-1] \longrightarrow 0 \ .$$

A fejezet hátralevő részében az algebrai topológiából megismert homotópia-fogalom algebrai kontextusba történő átültetését ismertetjük.

3.35. Definíció (Lánchomotópia) *Azt mondjuk, hogy egy* $\phi_\bullet\colon M_\bullet \to N_\bullet$ *láncleképezés* nullhomotóp*, ha létezik minden* $n \in \mathbb{Z}$*-re olyan*

$$\sigma_n\colon M_n \longrightarrow N_{n+1}$$

R-lineáris leképezés, amelyekre igaz, hogy

$$\phi_\bullet = d^N_\bullet \sigma_\bullet + \sigma_\bullet d^M_\bullet \ ,$$

vagyis

$$\phi_n = d^N_{n+1} \circ \sigma_n + \sigma_{n-1} \circ d^M_n$$

minden $n \in \mathbb{Z}$ *esetén.*

Ha $\phi_\bullet, \gamma_\bullet\colon M_\bullet \to N_\bullet$ *láncleképezések, akkor azt mondjuk, hogy* $\phi_\bullet$ *és* $\gamma_\bullet$ lánchomotóp, *amennyiben* $\phi_\bullet - \gamma_\bullet$ *nullhomotóp.*

Egy $\phi_\bullet\colon M_\bullet \to N_\bullet$ *láncleképezést* lánchomotópiaekvivalenciá*nak hívunk, ha létezik olyan* $\psi_\bullet\colon N_\bullet \to M_\bullet$ *láncleképezés, hogy* $\psi_\bullet \circ \phi_\bullet$ *és* $\phi_\bullet \circ \psi_\bullet$ *mindketten a megfelelő identitáshoz lánchomotópak.*

Egy $M_\bullet$ *lánckomplexust* felhasadó egzakt komplexus*nak nevezünk, ha* $\mathrm{id}_{M_\bullet}$ *nullhomotóp.*

3.36. Megjegyzés *Az alábbi diagram segít szemléltetni a nullhomotóp leképezések fogalmát:*

$$\begin{tikzcd}
M_{n+1} \arrow[r, "d^M_{n+1}"] \arrow[d, "\phi_{n+1}"'] & M_n \arrow[r, "d^M_n"] \arrow[d, "\phi_n"'] \arrow[dl, "\sigma_n"'] & M_{n-1} \arrow[d, "\phi_{n-1}"'] \arrow[dl, "\sigma_{n_1}"'] \\
N_{n+1} \arrow[r, "d^N_{n+1}"] & N_n \arrow[r, "d^N_n"] & N_{n-1}
\end{tikzcd}$$

3.37. Megjegyzés *Legyenek X és Y topologikus terek. Igazolható, hogy $f, g\colon X \to Y$ homotóp leképezések a szinguláris lánckomplexusokon lánchomotóp leképezéseket indukálnak, továbbá ha $f : X \to Y$ homotópiaekvivalencia, akkor a szinguláris lánckomplexusok között lánchomotópiaekvivalenciát indukál.*

A lánchomotópiák legfontosabb tulajdonsága az alábbi egyszerű megfigyelés.

3.38. Lemma *Legyenek $\phi_\bullet, \psi_\bullet\colon M_\bullet \to N_\bullet$ láncleképezések. Ekkor*

1. *ha $\phi_\bullet$ nullhomotóp, akkor minden $n \in \mathbb{Z}$ esetén a $(\phi_*)_n\colon H_n(M_\bullet) \to H_n(N_\bullet)$ indukált leképezés a 0 leképezés;*

2. *ha ϕ és ψ lánchomotóp, akkor minden $n \in \mathbb{Z}$-re*

$$(\phi_*)_n = (\psi_*)_n\colon H_n(M_\bullet) \longrightarrow H_n(N_\bullet) \ ,$$

vagyis lánchomotóp leképezések által a homológiacsoportokon indukált homomorfizmusok megegyeznek.

Bizonyítás. Először az első állítást igazoljuk. Ehhez tegyük fel, hogy $\phi_\bullet$ nullhomotóp, vagyis léteznek olyan $\sigma_n\colon M_n \to N_{n+1}$ R-lineáris leképezések, amelyekre

$$\phi_n = d_{n+1} \circ \sigma_n + \sigma_{n-1} \circ d_n$$

minden $n \in \mathbb{Z}$ esetén.

Legyen $\alpha \in H_n(M_\bullet)$ tetszőleges, és legyen $x \in Z_n(M_\bullet)$ egy n-ciklus, amelyre $\alpha = [x]$. Ekkor

$$(\phi_*)_n(\alpha) = [\phi_n(x)] = [(d^N_{n+1} \circ \sigma_n + \sigma_{n-1} \circ d^M_n)(x)] = [(d^N_{n+1} \circ \sigma_n)(x)] \ ,$$

hiszen $d^M_n(x) = 0$ mivel x egy n-ciklus. Ebből azonnal következik, hogy $\phi_n(x) = d^N_{n+1}(\sigma_n(x)) \in B_n(N_\bullet)$, így $(\phi_*)_n(\alpha) = 0$.

A második állítás az első direkt következménye. □

Az alábbiakban egy, az alkalmazások szempontjából fontos konstrukciót, az úgynevezett leképezési kúpot, írunk le, legfontosabb tulajdonságaival együtt.

3.39. Példa *Legyen $\phi_\bullet\colon M_\bullet \to N_\bullet$ egy láncleképezés,* $\phi_\bullet$ leképezése kúp*ja egy* $\mathrm{cone}(\phi_\bullet)$-*vel jelölt lánckomplexus, amelyre*

$$\mathrm{cone}(\phi_\bullet)_n \overset{def}{=} M_{n-1} \oplus N_n \ ,$$

és

$$d_n(x, y) \overset{def}{=} (-d^M_{n-1}(x), d^N_n(y) - \phi_n(x))$$

minden $(x, y) \in M_{n-1} \oplus N_n$ esetén.

3.18 Feladat *Igazoljuk a leképezési kúpra vonatkozó alábbi állításokat.*

1. *A leképezési kúp definíciójában szereplő sorozat valóban egy lánckomplexus.*
2. *Tetszőleges $M_\bullet$ lánckomplexus esetén* $\mathrm{cone}(\mathrm{id}_{M_\bullet})$ *felhasadó egzakt.*
3. *Legyen $\phi_\bullet\colon M_\bullet \to N_\bullet$ egy láncleképezés. Ekkor a*

$$0 \longrightarrow M_\bullet \longrightarrow \mathrm{cone}(\phi_\bullet) \longrightarrow N_\bullet[-1] \longrightarrow 0$$

sorozat, ahol az $M_\bullet \longrightarrow \mathrm{cone}(\phi_\bullet)$ leképezést az $x \mapsto (0, x)$ képlettel, a $\mathrm{cone}(\phi_\bullet) \longrightarrow N_\bullet[-1]$ leképezést pedig az $(x, y) \mapsto -x$ formulával adjuk meg, egzakt.

4. *Egy $\phi_\bullet\colon M_\bullet \to N_\bullet$ láncleképezés pontosan akkor kvázi-izomorfizmus, ha a* $\mathrm{cone}(\phi_\bullet)$ *lánckomplexus egzakt.*

3.40. Megjegyzés (Hochschild-kohomológia) *Legyen R tetszőleges gyűrű, ebben a Megjegyzésben nem feltétlenül kommutatív, A egy R-algebra, M pedig egy A-modulus. Jelölje most kivételesen (a szakirodalommal való egyezés érdekében) $C^n(A, M)$ az $A \to M$ n-változós R-multilineáris leképezések R-modulusát. Ezeket A-n értelmezett M-beli n-koláncoknak nevezzük.*

Az n-edik kohatár-homomorfimzust az alábbi módon definiáljuk:

$$\delta^{(n)}\colon C^n(A, M) \longrightarrow C^{n+1}(A, M) \ ,$$

ha $n = 0$, akkor

$$\big(\delta^{(0)}u\big)(x) \overset{def}{=} ux - xu \ ,$$

egyébként pedig (ha $n \geq 1$)

$$\begin{aligned}\big(\delta^{(n)}\Phi\big)(x_1, x_2, \ldots, x_n, x_{n+1}) &\overset{def}{=} x_1\Phi(x_2, \ldots, x_n, x_{n+1}) \\ &+ \sum_{i=1}^{n} (-1)^i \Phi(x_1, \ldots, x_i x_{i+i}, \ldots, x_{n+1}) \\ &+ (-1)^{n+1}\Phi(x_1, \ldots, x_n)x_{n+1} \ .\end{aligned}$$

Az $n \leq 0$ esetben minden modulus és leképezés nulla, továbbá például

$$\begin{aligned}\big(\delta^{(1)}\Phi\big)(x_1, x_2) &= x_1\Phi(x_2) - \Phi(x_1, x_2) + \Phi(x_1)x_2 \ , \\ \big(\delta^{(2)}\Phi\big)(x_1, x_2, x_3) &= x_1\Phi(x_2, x_3) - \Phi(x_1x_2, x_3) + \Phi(x_1, x_2x_3)3\Phi(x_1, x_2)x_3 \ ,\end{aligned}$$

és minden n egész szám esetén

$$\delta^{(n+1)} \circ \delta^{(n)} = 0.$$

Az ily módon definiált komplexus homológiája az ún. Hochschild-kohomológia.

3.2. Hosszú egzakt sorozat

A homologikus algebra valószínűleg legfontosabb elemi eredménye, hogy lánckomplexusok rövid egzakt sorozatához egy ún. hosszú egzakt sorozatot lehet hozzárendelni. Ez a tétel áll számtalan topológiai, geometriai és számelméleti eredmény hátterében, és nagy szerepet játszik abban, hogy a homologikus algebra a modern matematika létfontosságú tartozéka lett.

A hosszú egzakt sorozatról szóló tétel, egy általános módszer, az ún. diagramvadászat következménye, ami lényegében abból áll, hogy elemeket kergetünk körbe kommutatív diagramokban, amíg a kívánt állítást be nem látjuk. A módszerrel sok kommutatív diagramok egzaktságáról szóló eredményt lehet elérni, mi most először egy egyszerűbbet bizonyítunk be. Mivel ez lesz az első komolyabb diagramvadászatunk, igyekszünk a bizonyítást teljes részletességgel bemutatni, később ettől gyakran el fogunk tekinteni.

3.41. Lemma (5-Lemma) *Tekintsük az alábbi kommutatív diagramot, amelyben mindkét sor egzakt.*

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "\phi_1"] \arrow[d, "\alpha"] & B \arrow[r, "\phi_2"] \arrow[d, "\beta"] & C \arrow[r, "\phi_3"] \arrow[d, "\gamma"] & D \arrow[r, "\phi_4"] \arrow[d, "\delta"] & E \arrow[d, "\epsilon"] \\ A' \arrow[r, "\psi_1"] & B' \arrow[r, "\psi_2"] & C' \arrow[r, "\psi_3"] & D' \arrow[r, "\psi_4"] & E' \end{tikzcd}$$

Ekkor

1. *Ha β és δ monomorfizmus és α epimorfizmus, akkor γ monomorfizmus.*
2. *Ha β és δ epimorfizmus és ϵ monomorfizmus, akkor γ epimorfizmus.*
3. *Ha α,β, δ, és ϵ izomorfizmusok, akkor γ is az.*

Bizonyítás. Az első két állítás bizonyítása teljesen analóg módon történik, ezek közül csak az elsőt mutatjuk meg.

Ehhez legyen $c \in C$ tetszőleges elem, amelyre $\gamma(c) = 0$. Célunk az, hogy megmutassuk, $c = 0$, vagyis γ injektív.

Mivel ψ_3 R-lineáris, a $\gamma(c) = 0$ feltételből $\psi_3(\gamma(c)) = 0$ következik. A

$$\begin{tikzcd} C \arrow[r, "\phi_3"] \arrow[d, "\gamma"'] & D \arrow[d, "\delta"] \\ C' \arrow[r, "\psi_3"] & D' \end{tikzcd}$$

diagram kommutativitása miatt

$$0 = \psi_3(\gamma(c)) = (\psi_3 \circ \gamma)(c) = (\delta \circ \phi_3)(c) = \delta(\phi_3(c)) \ .$$

Azonban δ monomorfizmus, vagyis injektív, így $\phi_3(c) = 0$ is következik, másképpen $c \in \ker \phi_3$.

A felső sor egzakt C-nél, így $c \in \operatorname{im} \phi_2 = \ker \phi_3$; ez azt jelenti, hogy létezik $b \in B$ elem, amelyre $\phi_2(b) = c$, ebbő azonnal adódik, hogy $\gamma(\phi_2(b)) = \gamma(c) = 0$.

A

$$\begin{tikzcd} B \arrow[r, "\phi_2"] \arrow[d, "\beta"'] & C \arrow[d, "\gamma"] \\ B' \arrow[r, "\psi_2"] & C' \end{tikzcd}$$

diagram kommutativitása miatt

$$0 = \gamma(\phi_2(b)) = (\gamma \circ \phi_2)(b) = (\psi_2 \circ \beta)(b) = \psi_2(\beta(b)) \ ,$$

amiből $\beta(b) \in \ker \psi_2$ következik. Mivel az alsó sor egzakt B'-nél, $\beta(b) \in \operatorname{im} \psi_1 = \ker \psi_2$, vagyis létezik olyan $a' \in A'$ elem, amelyre $\psi_1(a') = \beta(b)$. Feltevés szerint α szürjektív, ezért létezik olyan $a \in A$ elem, amelyre $\alpha(a) = a'$, és így $\psi_1(\alpha(a)) = \beta(b)$. Kihasználva a

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "\phi_1"] \arrow[d, "\alpha"'] & B \arrow[d, "\beta"] \\ A' \arrow[r, "\psi_1"] & B' \end{tikzcd}$$

diagram kommutativitását kapjuk, hogy

$$\beta(b) = \psi_1(\alpha(a)) = (\psi_1 \circ \alpha)(a) = (\beta \circ \phi_1)(a) = \beta(\phi_1(a)) \ .$$

Csakhogy β feltevés szerint injektív, ezért $b = \phi_1(a)$, amiből

$$c = \phi_2(b) = \phi_2(\phi_1(a)) = 0$$

adódik, mivel a felső sor egzakt, így $\phi_2 \circ \phi_1 = 0$. Ezzel beláttuk, hogy γ injektív.

A harmadik állítás az első kettő kombinációja. $\square$

A most látott módszer segítségével igazoljuk az alábbi állításokat.

3.19 Feladat (3 × 3-lemma) *Tekintsük az alábbi kommutatív diagramot:*

$$\begin{tikzcd} & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & \\ 0 \arrow[r] & A' \arrow[r] \arrow[d] & B' \arrow[r] \arrow[d] & C' \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\ 0 \arrow[r] & A \arrow[r] \arrow[d] & B \arrow[r] \arrow[d] & C \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\ 0 \arrow[r] & A'' \arrow[r] \arrow[d] & B'' \arrow[r] \arrow[d] & C'' \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\ & 0 & 0 & 0 & \end{tikzcd} ,$$

amelyben minden oszlop egzakt. Igazoljuk az alábbiakat.

1. *Ha az alsó két sor egzakt, akkor a felső is.*
2. *Ha a felső két sor egzakt, akkor az alsó is.*

3.42. Tétel (Hosszú egzakt sorozat létezése) *Legyen*

$$0 \to A_\bullet \xrightarrow{f_\bullet} B_\bullet \xrightarrow{g_\bullet} C_\bullet \to 0$$

R-modulusok komplexusainak egy rövid egzakt sorozata. Ekkor létezik egy mindkét irányban végtelen

$$\ldots \xrightarrow{\partial_{\bullet,p}} H_p(A_\bullet) \xrightarrow{H_p(f_\bullet)} H_p(B_\bullet) \xrightarrow{H_p(g_\bullet)} H_p(C_\bullet) \xrightarrow{\partial_{\bullet,p-1}} H_{p-1}(A.) \xrightarrow{H_{p-1}(f_\bullet)} \ldots$$

egzakt sorozat, a fenti rövid egzakt sorozathoz tartozó ún. hosszú egzakt sorozat, amelyben

$$\partial_{\bullet,p}\langle c\rangle \overset{def}{=} \left\langle f^{-1} \circ \partial_p^B \circ g^{-1}(c)\right\rangle$$

3.43. Megjegyzés *A $\partial_\bullet$ homomorfimzus neve* összekötő homomorfimzus.

Bizonyítás. A bizonyítás eszköze a diagramvadászat. Kiindulásként tekintsük az alábbi kommutatív diagramot:

$$\begin{tikzcd}
 & \cdots \arrow[d] & \cdots \arrow[d] & \cdots \arrow[d] & \\
0 \arrow[r] & A_{p+1} \arrow[r, "f_{p+1}"] \arrow[d, "\partial^A_{p+1}"'] & B_{p+1} \arrow[r, "g_{p+1}"] \arrow[d, "\partial^B_{p+1}"'] & C_{p+1} \arrow[r] \arrow[d, "\partial^C_{p+1}"'] & 0 \\
0 \arrow[r] & A_p \arrow[r, "f_p"] \arrow[d, "\partial^A_p"'] & B_p \arrow[r, "g_p"] \arrow[d, "\partial^B_p"'] & C_p \arrow[r] \arrow[d, "\partial^C_p"'] & 0 \\
0 \arrow[r] & A_{p-1} \arrow[r, "f_{p-1}"] \arrow[d, "\partial^A_{p-1}"'] & B_{p-1} \arrow[r, "g_{p-1}"] \arrow[d, "\partial^B_{p-1}"'] & C_{p-1} \arrow[r] \arrow[d, "\partial^C_{p-1}"'] & 0 \\
 & \cdots & \cdots & \cdots &
\end{tikzcd}$$

1. LÉPÉS. Elsőként megkonstruáljuk a

$$\partial_{\bullet,p}\colon H_p(C_\bullet) \to H_{p-1}(A_\bullet)$$

összekötő homomorfizmust. Ecélból legyen

$$\langle c\rangle \in H_p(C_\bullet)$$

tetszőleges, ahol $c \in Z_p(C_\bullet)$, vagyis olyan $c \in C_p$ elem, amelyre $\partial_p^C c = 0$. Mivel a feltételben szereplő sorozat egzakt, ezért g_p szürjektív, s így létezik $b \in B_p$, amelyre $g_p(b) = c$.

Ekkor

$$g_{p-1}\partial_p^B b = \partial_p^C g_p b = \partial_p^C c = 0 \ ,$$

amiből következik, hogy

$$\partial_p^B b \in \operatorname{Ker} g_{p-1} = \operatorname{im} f_{p-1}$$

ismét az egzaktság miatt. Ez utóbbi viszont azzal ekvivalens, hogy létezik $a \in A_{p-1}$, amelyre $f_{p-1}(a) = \partial_p^B b$.

Ekkor

$$f_{p-2}\partial_{p-1}^A a = \partial_{p-1}^B f_{p-1} a = \partial_{p-1}^B \partial_p^B b = 0$$

megint csak a diagram kommutativitását és $B_\bullet$ lánckomplexus voltát felhasználva,

Összefoglalva azt kaptuk, hogy a

$$c \mapsto \left\langle (f^{-1} \circ \partial_p^B \circ g^{-1})(c) \right\rangle \in H_{p-1}(A_\bullet)$$

hozzárendelés jó választás lesz, feltéve, hogy belátjuk, hogy jóldefiniált, vagyis hogy nem függ b választásától. A továbbiakban elsőként ezzel fogunk foglalkozni.

Legyen $b' \in B_p$ egy tetszőleges olyan elem, amelyre $g_p b' = c$, vagyis $g_p(b - b') = 0$, másképpen $b - b' \in \operatorname{Ker} g_p = \operatorname{im} f_p$. Ezek szerint létezik olyan $a' \in A_p$, amelyre $f_p a' = b - b'$. Innen ismét csak a diagram kommutativitása miatt azt kapjuk, hogy

$$f_{p-1}(a - a') = f_{p-1}a - f_{p-1}a' = \partial_p^B b - \partial_p^B b' = \partial_p^B f_p a'' = f_{p-1}\partial_p^A a'' \ .$$

A fenti egyenlőséglánc két szélét megvizsgálva és f_{p-1} injektivitását figyelembe véve arra jutunk, hogy $a - a' = \partial_p^A a'$, vagyis $a \sim a'$, tehát végeredményben $\langle a \rangle = \langle a' \rangle$.

Ebből következően a

$$c \mapsto \left\langle f^{-1}\partial g^{-1}(c) \right\rangle$$

hozzárendelés valóban jóldefiniált.

Tartozunk még a teljességnek azzal, hogy igazoljuk, hogy a fenti leképezés csak $\langle c \rangle$-től, a c elem homológiaosztályától függ. Ennek ellenőrzéséhez legyen

$$c' \overset{\text{def}}{=} c + \partial_{p+1}^C c'' \ ,$$

$$c'' \overset{\text{def}}{=} g_{p+1}(b'') \ ,$$

és legyen továbbá

$$b' \overset{\text{def}}{=} b + \partial_{p+1}^B b'' \ .$$

Ekkor

$$g_p(b') = g_p(b) + g_p\partial_{p+1}^B b'' = c + \partial_{p+1}^c c'' = c' \ ,$$

azonban

$$\partial^B_p b' = \partial^B_p b + \partial^B_p \partial^B_{p+1} b'' = \partial^B_p b \ ,$$

és mivel f_{p-1} injektív, ezért készen vagyunk.

Annak ellenőrzése, hogy $\partial_\bullet$ homomorfizmus, egy egyszerű közvetlen számolás.

2. Lépés. Belátjuk, hogy a kapott sorozat egzakt.

1. Az indukált leképezések funktorialitásából és az adott rövid egzakt sorozat komplexus voltából következik, hogy

$$H_\bullet(g) \circ H_\bullet(f) = H_\bullet(g \circ f) = H_\bullet(0) = 0 \ .$$

2. Ha $\partial b = 0$, akkor definíció szerint

$$\partial_\bullet \left(H_\bullet(g)(\langle b \rangle)\right) = \left\langle f^{-1} \partial b \right\rangle = \langle 0 \rangle \ .$$

3. Ellenőrizzük, hogy $H_\bullet(f) \circ \partial_\bullet = 0$. Legyen $\langle c \rangle \in H_p(C_\bullet)$ és $c \in Z_p(C_\bullet)$. Ekkor

$$\partial_\bullet \langle c \rangle = \left\langle f^{-1} \partial g^{-1}(c) \right\rangle \ ,$$

ezért

$$f_\bullet \partial_\bullet \langle c \rangle = \left\langle f(f^{-1} \partial g^{-1})(c) \right\rangle = \langle \partial g^{-1}(c) \rangle = \langle 0 \rangle \ ,$$

ahogy kívántuk.

4. Megmutatjuk, hogy $\operatorname{Ker} H_\bullet(g) \subseteq \operatorname{im} H_\bullet(f)$. Legyen $H_\bullet(g)(\langle b \rangle) = 0$, ami azzal ekvivalens, hogy létezik $c \in C_\bullet$, amelyre $g(b) = \partial c$. Legyen $b' \in B_\bullet$, amelyre $g(b') = c$. Ekkor

$$g(b - \partial^B b') = g(b) - g(\partial^B b') = \partial^C c - \partial^C \left(g\left(b'\right)\right) = \partial^C c - \partial^C c = 0 \ .$$

Tehát $\langle b \rangle$ reprezentánsát választhatjuk úgy, hogy $g(b) = 0$ legyen. Ekkor viszont van olyan $a \in A_\bullet$, amelyre $f(a) = b$ és $\partial a = 0$ (mivel f injektív és $\partial b = 0$). Azaz valóban

$$\langle b \rangle = f_* \langle a \rangle \ ,$$

amint azt állítottuk.

5. Belátjuk, hogy $\operatorname{Ker} f_\bullet \subseteq \operatorname{im} \partial_\bullet$. Tegyük fel, hogy $f_* \langle a \rangle = 0$. Ekkor $f(a) = \partial b$ valamely $b \in B_\bullet$-re. Legyen $c \overset{\text{def}}{=} g(b)$, erre teljesül, hogy

$$\partial c = \partial g(b) = g \partial(b) = g f(a) = 0 \ .$$

Tehát c egy ciklus, és $\partial_\bullet \langle c \rangle = \langle a \rangle$ a $\partial_\bullet$ homomorfizmus konstrukciója miatt.

6. Végül igazoljuk, hogy $\operatorname{Ker}\partial_\bullet \subseteq \operatorname{im} g_\bullet$. Ehhez tegyük fel, hogy $\partial_\bullet\langle c\rangle = \langle 0\rangle$. Ekkor $\partial_\bullet$ konstrukciója miatt egy olyan $b \in B_\bullet$ elemre, amelyre $g(b) = c$, mindig létezik $a \in A_\bullet$, hogy $f(a) = \partial b$ és a határ, mivel $\partial_\bullet\langle c\rangle = 0$. Legyen tehát $a = \partial a'$. Ekkor

$$\partial f(a') = f(\partial a') = f(a) = \partial b \ ,$$

következésképp $\partial(b - f(a')) = 0$, és

$$g(b - f(a')) = c - 0 = c \ .$$

Az iméntiekből azt kapjuk, hogy

$$g_\bullet\langle b - f(a')\rangle = \langle c\rangle \ ,$$

ahogy arra szükségünk volt.

Ezzel a tételt igazoltuk. $\square$

3.20 Feladat (Mayer–Vietoris-sorozat, algebrai verzió) *Tekintsük az R-modulusokból álló alábbi kommutatív diagramot, amelynek sorai egzaktak:*

$$\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r] & A_n \arrow[r, "i_n"] \arrow[d, "\alpha_n"] & B_n \arrow[r, "p_n"] \arrow[d, "\beta_n"] & C_n \arrow[r, "\partial_n"] \arrow[d, "\gamma_n"] & A_{n-1} \arrow[r, "i_{n-1}"] \arrow[d, "\alpha_{n-1}"] & \cdots \\
\cdots \arrow[r] & A'_n \arrow[r, "j_n"] & B'_n \arrow[r, "q_n"] & C'_n \arrow[r, "\partial'_n"] & A'_{n-1} \arrow[r, "j_{n-1}"] & \cdots
\end{tikzcd}$$

Igazoljuk, hogy ha a γ_n homomorfizmus minden n egész számra bijektív, akkor az alábbi sorozat egzakt:

$$\cdots \longrightarrow A_n \stackrel{(\alpha_n, i_n)}{\longrightarrow} A'_n \oplus B_n \stackrel{j_n - \beta_n}{\longrightarrow} B'_n \stackrel{\partial_n \gamma_n^{-1} q_n}{\longrightarrow} A_{n-1} \longrightarrow \cdots \ .$$

3.21 Feladat (Koszul-kohomológia) *Legyen R tetszőleges gyűrű, $x_1, \ldots, x_n \in R$. Először definiálunk egy szabad R-modulusokból álló $K_\bullet$ komplexust. Ehhez legyen*

$$K_p \stackrel{def}{=} \begin{cases} 0 & \textit{ha } p < 0 \textit{ vagy } p > n, \\ R & \textit{ha } p = 0, \\ \oplus R e_{e_1 \ldots e_p} & \textit{egyébként,} \end{cases}$$

ahol $\oplus R e_{e_1 \ldots e_p}$ a szabad $\binom{n}{p}$-rangú R-modulus

$$\left\{ e_{i_1 \ldots e_p} \mid 1 \le i_1 < \ldots < i_p \le n \right\}$$

bázissal. A

$$d_p \colon K_p \longrightarrow K_{p-1}$$

differenciált az alábbi módon definiáljuk:

$$d(e_{i_1\dots i_p})\stackrel{def}{=}\sum_{r=1}^{p}(-1)^{r-1}x_{i_r}e_{i_1\dots\widehat{i_r}\dots i_p}\ .$$

Ellenőrizzük, hogy a $(K_\bullet, d_\bullet)$ ún. Koszul-komplexus valóban egy komplexus.

3.22 Feladat *Legyenek $A_\bullet$ és $B_\bullet$ R-modulusok láncokomplexusai, $f, g\colon A_\bullet \to B_\bullet$ homotóp lánccleképezések, F egy R-modulusokat R-modulusokba képező additív funktor. Mutassuk meg, hogy $F(f), F(g)\colon F(A_\bullet) \to F(B_\bullet)$ szintén homotóp lánccleképezések.*

3.3. Direkt összegek és szorzatok

Ebben a fejezetben pár fontos és gyakran használt algebrai konstrukciót mutatunk be.

3.44. Definíció (Modulusok direkt összege) *Legyen $\{M_i \mid i \in I\}$ R-modulusok egy tetszőleges családja, a család* direkt összeg*e az az $\oplus_{i\in I}M_i$-vel jelölt R-modulus, amelyre*

$$\bigoplus_{i\in I} M_i = \{(m_i)_{i\in I} \in \times_{i\in I}M_i \mid m_i = 0 \textit{ majdnem minden } i \in I \textit{ esetén}\}$$

mint halmaz, az R-modulus-struktúrát pedig komponensenként értelmezzük.

3.45. Megjegyzés *Tetszőleges $\{M_i \mid i \in I\}$ kollekció esetén minden $i_0 \in I$-re létezik a $\phi_{i_0}\colon\ : M_{i_0} \to \oplus_{i\in I}M_i$ kanonikus beágyazás, amelyre*

$$\begin{array}{rcl} M_{i_0} & \longrightarrow & \bigoplus_{i\in I} M_i \\ m & \mapsto & (m_i)_{i\in I}\ , \end{array}$$

ahol

$$m_i = \begin{cases} m & \textit{ha } i = i_0, \\ 0 & \textit{egyébként.} \end{cases}$$

Egyszerű, de hasznos észrevétel, hogy a ϕ_i homomorfizmusok képei generálják a direkt összeget mint R-modulust.

3.46. Definíció (Modulusok direkt szorzata) *Legyen $\{M_i \mid i \in I\}$ R-modulusok egy tetszőleges családja, a család* direkt szorzat*ának azt a $\prod_{i\in I} M_i$-vel jelölt R-modulust nevezzük , amelyre*

$$\prod_{i\in I} M_i = \times_{i\in I} M_i$$

mint halmaz, az R-modulus-struktúrát pedig komponensenként értelmezzük.

3.47. Megjegyzés *Tetszőleges* $\{M_i \mid i \in I\}$ *család esetén minden* $i_0 \in I$*-re létezik a* $\pi_{i_0} \colon \prod_{i\in I} M_i \to M_{i_0}$ *kanonikus vetítés, amelyre*

$$\pi_{i_0}((m_i)_{i\in I}) = m_{i_0} \ .$$

3.48. Megjegyzés *Ha az* I *indexhalmaz véges, akkor a direkt összeg és a direkt szorzat kanonikusan izomorf egymással. Általában csak annyi igaz, hogy a direkt összeg a direkt szorzatnak egy részmodulusa.*

3.49. Állítás (A direkt összeg univerzális tulajdonsága) *Legyen* $\{M_i \mid i \in I\}$ R*-modulusok egy családja, jelölje* $\phi_i \colon M_i \to \oplus_{i\in I} M_i$ *a kanonikus beágyazást minden* $i \in I$ *esetén. Legyen továbbá* N *tetszőleges* R*-modulus, és minden* $i \in I$*-re* $\psi_i : M_i \to N$ *egy* R*-lineáris leképezés. Ekkor létezik pontosan egy*

$$\sigma \colon \bigoplus_{i\in I} M_i \longrightarrow N$$

R*-lineáris leképezés úgy, hogy minden* $i \in I$*-re a*

$$\begin{tikzcd} M_i \arrow[r, "\phi_i"] \arrow[dr, "\psi_i"'] & \bigoplus_{i\in I} M_i \arrow[d, "\sigma"] \\ & N \end{tikzcd}$$

diagram kommutatív.

Az iménti tulajdonság a direkt összeget kanonikus izomorfizmus erejéig egyértelműen meghatározza.

Bizonyítás. Az egyértelműséghez ld. a tenzorszorzat univerzális tulajdonságánál ismertetett bizonyítást.

Az alábbiakban belátjuk, hogy a direkt szorzat kielégíti az említett univerzális tulajdonságot. Tetszés szerint válasszunk egy $(m_i)_{i\in I}$ elemet a direkt összegből, erre definíció szerint teljesül, hogy $m_i = 0$ legfeljebb véges sok index kivételével. Ezek szerint $\sum_{i\in I} \psi_i(m_i)$ egy véges összeg, legyen

$$\sigma((m_i)_{i\in I}) \overset{\text{def}}{=} \sum_{i\in I} \psi_i(m_i) \ .$$

Gyors (és nagyon egyszerű) ellenőrzés mutatja, hogy $\sigma \colon \oplus_{i\in I} M_i \to N$ egy R-lineáris leképezés, továbbá ha $m \in M_i$, akkor

$$(\sigma \circ \phi_i)(m) = \sigma(\phi_i(m)) = \psi_i(m) \ ,$$

amint azt ígértük. Mivel a ϕ_i morfizmusok képei generálják a direkt szorzatot, a náluk vett kép egyértelműen meghatározza σ morfizmust. Ez utóbbiakat viszont a ψ_i homomorfizmusok rögzítik. $\square$

3.50. Állítás (A direkt szorzat univerzális tulajdonsága) *Legyen $\{M_i \mid i \in I\}$ R-modulusok egy családja a $\pi_i\colon \prod_{i\in I} M_i \to M_i$ természetes vetítésekkel. Ekkor minden N R-modulusra és $\psi_i\colon N \to M_i$ R-lineáris leképezésekre (minden $i \in I$ esetén) létezik pontosan egy olyan $\tau\colon N \to \prod_{i\in I} M_i$ R-homomorfizmus, amelyre a*

$$\begin{tikzcd} \prod_{i\in I} M_i \arrow[r, "\pi_i"] & M_i \\ N \arrow[u, "\tau"] \arrow[ur, "\psi_i"'] & \end{tikzcd}$$

diagram kommutatív.

Ez a tulajdonság a direkt szorzatot egyertélmű izomorfizmus erejéig meghatározza.

Bizonyítás. A τ leképezést a

$$\begin{aligned} N &\longrightarrow \prod_{i\in I} M_i \\ n &\mapsto (\psi_i(n))_{i\in I} \end{aligned}$$

hozzárendelés egyértelműen meghatározza. Minden más tulajdonság rögtön adódik. $\square$

A fenti konstrukciók univerzális tulajdonságai remekül alkalmazhatók arra, hogy a különböző funktorokkal való kapcsolatukat vizsgáljuk.

3.51. Megjegyzés *Korábban láttuk, hogy a tenzorszorzat a direkt összeg képzésével felcserélhető.*

3.52. Állítás (Direkt szorzat és kovariáns Hom) *Legyenek M és $\{N_i \mid i \in I\}$ R-modulusok. Ekkor létezik egy természetes*

$$\phi\colon \operatorname{Hom}_R(M, \prod_{i\in I} N_i) \xrightarrow{\sim} \prod_{i\in I} \operatorname{Hom}_R(M, N_i)$$

izomorfizmus, amelyre

$$f \mapsto (\pi_i \circ f)_{i\in I} \ .$$

Bizonyítás. Tetszőleges $i \in I$-re vegyük a

$$\begin{aligned} \psi_i\colon \operatorname{Hom}_R(M, \prod_{i\in I} N_i) &\longrightarrow \operatorname{Hom}_R(M, N_i) \\ f &\mapsto \pi_i \circ f \end{aligned}$$

hozzárendelést, rövid gondolkodás után látható, hogy ψ_i egy R-lineáris leképezés. Ekkor a direkt szorzat univerzális tulajdonsága miatt létezik pontosan egy

$$\phi\colon \operatorname{Hom}_R(M, \prod_{i\in I} N_i) \longrightarrow \prod_{i\in I} \operatorname{Hom}_R(M, N_i)$$

R-homomorfizmus, amelyre
$$f \mapsto (\pi_i \circ f)_{i \in I} \ ,$$
mint azt állítottuk.

Igazolnunk kell még, hogy ϕ izomorfizmus. Ecélból legyen $(\alpha_i)_{i\in I} \in \prod_{i\in I} \mathrm{Hom}_R(M, N_i)$, ekkor minden $i \in I$-re az $\alpha_i \colon M \to N_i$ komponens egy R-lineáris leképezés. Ismét csak a direkt szorzat univerzális tulajdonságát használva kapjuk, hogy létezik pontosan egy
$$\tau \colon M \longrightarrow \prod_{i\in I} N_i$$
R-homomorfizmus, amelyre $\pi_i \circ \tau = f_i$ minden $i \in I$-re (itt π_i a $\prod_{i\in I} N_i$ direkt szorzathoz tartozó megfelelő vetítés), vagyis $\phi(\tau) = (f_i)_{i\in I}$. Ezzel beláttuk, hogy ϕ bijektív. $\square$

3.53. Állítás (Direkt összeg és kontravariáns Hom) *Legyenek $\{M_i \mid i \in I\}$ és N tetszés szerint választott R-modulusok. Ekkor létezik egy természetes*
$$\psi \colon \ \mathrm{Hom}_R(\bigoplus_{i\in I} M_i, N) \xrightarrow{\sim} \prod_{i\in I} \mathrm{Hom}_R(M_i, N) \ ,$$
amelyre
$$\psi(f) = (f \circ \phi_i)_{i\in I} \ ,$$
ahol $\phi_i \colon M_i \hookrightarrow \oplus_{i\in I} M_i$ a természetes beágyazást jelöli.

Bizonyítás. Nagyon hasonló a direkt szorzat és a kovariáns Hom_R-funktor közti kapcsolatot leíró állítás igazolásához. $\square$

3.54. Megjegyzés *Mivel véges indexhalmaz esetén a direkt összeg és a direkt szorzat kanonikus módon izomorf egymással, ebben az esetben a* Hom_R *funktor mindkét változójában additív.*

4. fejezet

A szinguláris homológiaelmélet elemei

Két X és Y topologikus teret a topológia szempontjából azonosnak, vagyis homeomorfnak tekintünk, ha léteznek olyan $f : X \to Y$ és $g : Y \to X$ folytonos leképezések, amelyekre $g \circ f = \mathrm{id}_X$ és $f \circ g = \mathrm{id}_Y$. A topológia egy fontos feladata olyan (lehetőleg numerikus, de legalábbis diszkrét) invariánsok előállítása, amelyek segítségével eldönthető, hogy két topologikus tér homeomorf-e vagy nem. A gyakorlatban ez a feladat rendkívül nehéznek bizonyul, sokszor az is komoly eredmény, ha két topologikus teret meg tudunk különböztetni egymástól numerikus vagy algebrai invariánsok segítségével.

Egy nagyon hasznos fejlemény az említett irányba egy gyengébb ekvivalenciareláció, a topologikus terek ún. homotóp ekvivalenciájának a bevezetése. Az derül ki, hogy nem túl sok fáradtsággal lehet algebrai invariánsokat konstruálni, amelyek megtartják a homotóp ekvivalenciát, és emellett egy igen gazdag struktúrát eredményeznek. További információért érdemes a szakirodalomhoz [Bre93, Hat02, Mas91, Mun75] vagy az interneten szabadon elérhető jegyzetekhez (pl. [Kur09, War]) fordulni.

Itt két nagyon fontos invariánscsaládot, az ún. homotópia- és homológia-csoportokat fogunk tárgyalni, ebből az elsőt csak nagyon röviden. Ugyan mindkét esetben csoportokat rendelünk hozzá topologikus terekhez (funktoriális módon), a homotópia-csoportok esetén a definíció nagyon egyszerű, azonban konkrét esetekben az invariánsok kiszámítása rendkívül nehéz, tipikusan meghaladja jelenlegi tudásunkat.

A homológiacsoportok — a konkrét esetben szinguláris homológiacsoportok — definiálása már több munkát, speciálisan homologikus algebrai előismereteket igényel, ugyanakkor sok fontos esetben meg tudjuk őket határozni.

A fejezet során először egy nagyon egyszerű bevezetést adunk a homotópiaelméletbe, pár elemi de érdekes alkalmazással, majd áttérünk a fő témára, a szinguláris homológiaelméletre. A topológiában járatos olvasó a homotópiaelméletről szóló részt nyugodt lélekkel kihagyhatja.

4.1. Homotópiaelmélet

4.1. Definíció (Leképezések homotópiája) *Legyenek X, Y topologikus terek, jelölje I a zárt egységintervallumot. Leképezések X-ből Y-ba menő* homotópiája *egy $F\colon X\times I\to Y$ folytonos leképezés. Tetszőleges f és g X-ből Y-ba menő folytonos leképezések esetén azt mondjuk, hogy f homotóp g-vel (jelben: $f\simeq g$) ha létezik olyan $F\colon X\times I\to Y$ homotópia, amelyre*

$$F(x,0)=f(x) \quad \textit{és} \quad F(x,1)=g(x)$$

minden $x\in X$ esetén.

Egy $f\colon X\to Y$ leképezést nullhomotóp*nak hívunk, ha homotóp egy konstans leképezéshez.*

4.2. Megjegyzés (Homotópiák inverze és összefűzése) *Legyenek X és Y topologikus terek, $F\colon X\times I\to Y$ egy homotópia. Ekkor definiálhatjuk F „megfordítását”, amit általában az inverz homotópia néven tartanak számon:*

$$\begin{aligned} \tilde{F}\colon X\times I &\longrightarrow Y \\ (x,t) &\mapsto F(x,1-t)\ . \end{aligned}$$

Ha adottak F és G X-ből Y-ba menő homotópiák úgy, hogy

$$F(x,1)=G(x,0) \quad \textit{minden } x\in X \textit{ esetén,}$$

akkor tekinthetjük a két homotópia ún. összefűzését:

$$\begin{aligned} F\star G\colon X\times I &\longrightarrow Y \\ (x,t) &\mapsto \begin{cases} F(x,2t) & \textit{ha } 0\le t\le \frac{1}{2} \\ G(x,2t-1) & \textit{ha } \frac{1}{2}< t\le 1. \end{cases} \end{aligned}$$

4.1 Feladat *Ellenőrizzük, hogy homotópiák megfordítása és összefűzése valóban homotópiákat eredményez.*

4.3. Megjegyzés (Konstans homotópia) *Egy további fontos konstrukció az ún. konstans homotópia: ha $f\colon X\to Y$ egy folytonos leképezése, akkor a hozzá tartozó C_f konstans homotópia a*

$$C_f(x,t)\overset{def}{=}f(x) \quad \textit{minden } t\in I \textit{ esetén}$$

leképezés.

4.4. Lemma *Leképezések homotópiája ekvivalenciareláció.*

Bizonyítás. Megmutatjuk, hogy a homotópia reflexív, szimmetrikus, és tranzitív. Tetszőleges $f\colon X \to Y$ folytonos leképezésre $f \simeq f$, amint azt például a C_f konstans homotópia mutatja.

Legyenek $f, g\colon X \to Y$ homotóp leképezések, vagyis $f \simeq g$. Ekkor definíció szerint létezik olyan $F\colon X \times I \to Y$ homotópia, amelyre $F(x, 0) = f(x)$ és $F(x, 1) = g(x)$ minden $x \in X$ esetén. Az F homotópia $\tilde{F}$ megfordítása mutatja, hogy $g \simeq f$ is teljesül.

Végül legyenek $f, g, h\colon X \to Y$ leképezések, $f \simeq g$, $g \simeq h$, és legyenek $F, G\colon X \times I \to Y$ homotópiák, amelyek az $f \simeq g$, illetve $g \simeq h$ homotópiarelációkat megvalósítják. Ekkor automatikusan

$$F(x, 1) = g(x) = G(x, 0) \quad \text{minden } x \in X\text{-re },$$

így képezhetjük az $F \star G$ összefűzést. Ez egy X-ből Y-ba menő homotópia lesz, amely megmutatja, hogy $f \simeq h$. □

4.5. Példa *Legyen X tetszőleges topologikus tér, jelölje P az egypontú teret. Ekkor egy $F\colon P \times I \to X$ homotópia nem más, mint egy $\gamma\colon I \to X$ folytonos út.*

4.2 Feladat *Legyenek $f, g\colon X \to Y$ homotóp leképezések, $h : A \to X$, $k : Y \to B$ tetszőleges folytonos függvények. Ellenőrizzük, hogy*

$$k \circ f \simeq k \circ g \quad \textit{és} \quad f \circ h \simeq g \circ h\ .$$

Leképezések homotópiáját az alábbi módon tudjuk topologikus terek közti ekvivalenciareláció konstruálására felhasználni.

4.6. Definíció (Homotóp ekvivalens terek) *Egy $f : X \to Y$ folytonos leképezést* homotópia-ekvivalenciá*nak nevezünk $g : Y \to X$* homotópia-inverz*zel, ha g folytonos függvény, amelyre*

$$g \circ f \simeq \mathrm{id}_X \quad \textit{és} \quad f \circ g \simeq \mathrm{id}_Y\ .$$

Két X és Y topologikus tér homotóp ekvivalens *vagy* azonos homotópia-típusú *(jelben: $X \simeq Y$), ha létezik $f\colon X \to Y$ homotópia-ekvivalencia.*

4.7. Megjegyzés *Homeomorf terek homotóp ekvivalensek, de fordítva nem igaz: nagyon sok topologikus tér (például $\mathbb{R}^n$) homotóp ekvivalens az egypontú térrel, de nem homeomorfak (a konkrét esetben pl. ha $n > 0$).*

Általában egy X topologikus teret összehúzhatónak nevezünk, ha homotóp ekvivalens az egypontú térrel. Ez pontosan akkor fog megtörténni, ha id_X homotóp egy $X \to X$ konstans leképezéssel.

4.3 Feladat *Igazoljuk az előző Megjegyzés állításait, továbbá bizonyítsuk be, hogy minden $X \subseteq \mathbb{R}^n$ konvex halmaz összehúzható.*

4.4 Feladat *Mutassuk meg, hogy topologikus tereken a $\simeq$ reláció ekvivalenciareláció.*

4.8. Példa *Nemtriviális topologikus terek közti homotóp ekvivalenciára gyakran idézett példa, hogy*

$$\mathbb{R}^n \setminus \{0\} \simeq \mathbb{S}^{n-1}$$

ahol $n \geq 1$ természetes szám.

4.9. Definíció (Relatív homotópia) *Legyenek X,Y topologikus terek, $A \subseteq X$ tetszőleges altér. Egy $F\colon X \times I \to Y$ homotópia* relatív A-ra nézve *vagy* megtartja A-t *(jelben: $F \operatorname{rel} A$), ha minden $a \in A$ esetén a*

$$t \mapsto F(a,t)$$

függvény konstans.

4.10. Lemma (Átparaméterezési lemma) *Legyenek $\phi_1, \phi_2\colon (I, \partial I) \to (I, \partial I)$ folytonos függvények, amelyek megegyeznek a $\partial I = \{0,1\}$ halmazon, legyen $F\colon X \times I \to Y$ egy homotópia,*

$$\begin{array}{rcl} G_i\colon X \times I & \longrightarrow & Y \\ (x,t) & \mapsto & F(x, \phi_i(t)) \end{array}$$

$i = 1, 2$ esetén. Ekkor

$$G_1 \simeq G_2 \quad \operatorname{rel} X \times \partial I\ .$$

4.11. Megjegyzés *Az Átparaméterezési lemma ügyes alkalmazásaival beláthatók a homotópiák alábbi tulajdonságai.*

1. *Legyen $F\colon X \times I \to Y$ tetszőleges homotópia, C a megfelelő konstans homotópia. Ekkor*
$$F \star C \simeq F \quad \text{és} \quad C \star F \simeq F \quad \operatorname{rel} X \times \partial I\ .$$
2. *Tetszőleges $F\colon X \times I \to Y$ homotópia esetén*
$$F \star \tilde{F} \simeq C \quad \text{és} \quad \tilde{F} \star F \simeq C \quad \operatorname{rel} X \times \partial I\ ,$$
ahol C mindig a megfelelő konstans homotópiát jelöli.
3. *Legyenek $F, G, H\colon X \times I \to Y$ homotópiák amelyekre létezik $F \star G$ és $G \star H$. Ekkor*
$$F \star (G \star H) \simeq (F \star G) \star H \quad \operatorname{rel} X \times \partial I\ .$$

4.12. Megjegyzés *Nézzük meg, hogy mit ad az előző Megjegyzés abban az esetben, ha $X = P$ egyetlen pontból áll. Amint azt korábban láttuk, egy $F\colon P \times I \to Y$ homotópia nem más, mint egy Y-beli út.*

Vegyük azt a speciális esetet, amikor $F(P,0) = F(P,1)$, jelöljük ezt a pontot $y_0 \in Y$-nal, legyen továbbá C_{y_0} a konstans y_0-beli hurok. Ekkor a 4.11. Megjegyzés állításai azt jelentik, hogy

1. $F \star C_{y_0} \simeq C_{y_0} \star F \simeq F \quad \operatorname{rel} P \times \partial I$,
2. $F \star \tilde{F} \simeq C_{y_0}$ *és* $\tilde{F} \star F \simeq C_{y_0} \quad \operatorname{rel} P \times \partial I$,
3. $F \star (G \star H) \simeq (F \star G) \star H \quad \operatorname{rel} P \times \partial I$,

ahol F, G, H y_0-beli hurkok.

Másképpen: az Y tér y_0-beli hurkainak homotópiaosztályai a konstans homotópiával, a homotópiák megfordításával, és a homotópiák összefűzésével mint műveletekkel egy csoportot alkotnak, az Y tér y_0 bázispontban vett $\pi_1(Y, y_0)$ fundamentális csoport*ját.*

4.13. Tétel *Legyen $f : X \to Y$ folytonos leképezés,*

$$\mathcal{F}_f \overset{def}{=} \{F\colon X \times I \to Y \mid F_0 = F_1 = f\}/\sim$$

ahol $F \sim G$ pontosak akkor, ha $F \simeq G \operatorname{rel} X \times \partial I$. Ekkor az $\mathcal{F}_f$ halmaz a konstans homotópiával, a homotópiák megfordításával, és a homotópiák összefűzésével mint műveletekkel egy csoportot alkot.

Bizonyítás. Következik a 4.11. Megjegyzésből. □

4.14. Megjegyzés *A fundamentális csoport az iménti tétel legegyszerűbb esete. Az f folytonos leképezés választása az y_0 bázispont választásának felel meg.*

4.15. Megjegyzés *Némi munkával belátható, hogy tetszőleges (Y, y_0) bázisponttal ellátott tér esetén a $(\mathbb{S}^n, s_0) \to (Y, y_0)$ folytonos leképezések relatív homotópiaosztályai szintén csoportot alkotnak a 4.13. Tételben említett műveletekre nézve. Ezt a csoportot az (Y, y_0) pár n-edik homotópiacsoportjának nevezzük, jele $\pi_n(Y, y_0)$.*

4.16. Megjegyzés (Gömbök homotópiacsoportjai) *Gömbök homotópiacsoportjainak kiszámítása a XX. század második felében sok matematikust foglalkoztatott, és ugyan sok nagyon nehéz eredmény született, a mai napig végtelen sok homotópiacsoport ismeretlen. Ezzel szemben — amint azt látni fogjuk — gömbök szinguláris homológiacsoportjainak kiszámítása relatíve egyszerű:*

$$H^i(\mathbb{S}^n) = \begin{cases} \mathbb{Z} & \text{ha } i = 0, n \\ 0 & \text{egyébként.} \end{cases}$$

Egy igen fontos eredmény az ún. stabil homotópiacsoportok létezése: $\pi_{n+k}(\mathbb{S}^n)$ független k-tól, ha $n > k+1$. Az elméletrő informatív összefoglalást ad [wik].

Alacsony dimenziókban lényegesen többet tudunk gömbök homotópiacsoportjairól, például

$$\pi_n(\mathbb{S}^1) = 1 \quad \text{ha } n > 1,$$

vagy például $\pi_3(\mathbb{S}^2)$ egy végtelen ciklikus csoport (ld. még [Bre93, Section III.1]).

A továbbiakban visszatérünk a legegyszerűbb nemtriviális eset, a körvonal fundamentális csoportjának vizsgálatára.

4.17. Megjegyzés (A fundamentális csoport mint funktor) *Kevés munkával belátható, hogy π_1 egy funktort definiál a pontozott terek kategóriájából a csoportok kategóriájába. A pontozott topologikus terek kategóriájának objektumai az (X, x_0) párok, ahol X egy topologikus tér, $x_0 \in X$ pedig tetszőleges pont; a kategória morfizmusai olyan $f\colon (X, x_0) \to (Y, y_0)$ folytonos leképezések, amelyekre $f(x_0) = y_0$.*

Már láttuk, hogy a 'fundementális csoport funktor' egy pontozott (X, x_0) térhez egy csoportot rendel hozzá, el kell még döntenünk, hogy miképpen definiáljuk pontozott terek $f\colon (X, x_0) \to (Y, y_0)$ morfizmusain. Ezt a következőképpen szokás megtenni:

$$\begin{array}{rcl} f\colon (X, x_0) \to (Y, y_0) \longmapsto f_* \overset{def}{=} \pi_1(f)\colon \pi_1(X, x_0) & \longrightarrow & \pi_1(Y, y_0) \\ {[\gamma]} & \longmapsto & [f \circ \gamma] \ . \end{array}$$

Az $f \mapsto f_*$ hozzárendelésről még az alábbiakat kell belátni:

1. *$f_*(\mathrm{id}_X) = \mathrm{id}_{\pi_1(X, x_0)}$,*
2. *ha $g\colon (Y, y_0) \to (Z, z_0)$ pontozott terek közti morfizmus, akkor $(g \circ f)_* = g_* \circ f_*$.*

4.5 Feladat *Igazoljuk az előző Megjegyzés bizonyítatlan állításait.*

4.18. Példa *Legyen $X \subseteq \mathbb{R}^n$ konvex halmaz, $x_0 \in X$ tetszőleges. Ekkor bármely két*

$$\gamma_0, \gamma_1\colon (I, \partial I) \to (X, x_0)$$

hurok homotóp az

$$F(s,t) \overset{def}{=} (1-t)\gamma_0(s) + t\gamma_1(s)$$

lineáris homotópián keresztül, s így

$$\pi_1(X, x_0) = 1 \ .$$

Egy fontos tisztázandó kérdés a fundamentális csoportnak a bázisponttól való függése.

4.19. Megjegyzés (Bázisponttól való függés) *Minden hurok és homotópia képe útösszefüggő, ezért $\pi_1(X, x_0)$ meghatározásában csak x_0 útösszefüggőségi komponense játszik szerepet.*

Másképpen fogalmazva különböző útösszefüggőségi komponensekbe tartozó bázispontok szerint számított fundamentális csoportok között nincsen összefüggés.

A másik irányban a legjobb, amit remélhetünk, hogy ha létezik $x_0 \rightsquigarrow x_0'$ út X-ben, akkor találunk valamilyen összefüggést $\pi_1(X, x_0)$ és $\pi_1(X, x_0')$ között. Legyen $h\colon I \to X$ egy $x_0 \rightsquigarrow x_0'$ út, $\tilde{h}\colon I \to X$ pedig a h út mint homotópia megfordítása, azaz $\tilde{h}(t) = h(1-t)$ minden $t \in I$ esetén.

Ha $\gamma\colon (I, \partial I) \to (X, x_0')$ egy x_0' bázispontú hurok, akkor hozzárendelhetjük a

$$\tilde{h} \star (\gamma \star h)\colon (I, \delta I) \to (X, x_0)$$

hurkot.

Mivel

$$\tilde{h} \star (\gamma \star h) \simeq (\tilde{h} \star \gamma) \star h \ ,$$

ezért a $\gamma \mapsto \tilde{h} \star (\gamma \star h)$ megfeleltetés indukál egy

$$\tau_h\colon \pi_1(X, x_0') \longrightarrow \pi_1(X, x_0)$$

függvényt.

4.20. Állítás (Bázisponttól való függetlenség) *Az eddigi jelölések megtartása mellett a*

$$\begin{array}{rcl} \tau_h\colon \pi_1(X, x_0') & \longrightarrow & \pi_1(X, x_0) \\ [\gamma] & \mapsto & [\tilde{h} \star (\gamma \star h)] \end{array}$$

hozzárendelés egy csoportok közti izomorfizmus.

Bizonyítás. Ha $F\colon (I \times I, \partial I \times I) \to (X, x_0')$ egy x_0'-beli hurkok közti relatív homotópia, akkor $(\tilde{h} \times id_I) \star (F \star (h \times id_I))$ egy x_0-beli relatív homotópia a megfelelő hurkok között, tehát τ_h jóldefiniált.

Jól látszik, hogy τ_h a konstans homotópiát a konstans homotópiába viszi, másrészt

$$\begin{array}{rcl} \tau_h[f \star g] & = & [\tilde{h} \star ((f \star g) \star h)] \\ & = & [(\tilde{h} \star f \star h) \star (\tilde{h} \star g \star h)] \\ & = & \tau_h[f] \star \tau_h[g] \ , \end{array}$$

tehát τ_h izomorfizmus.

Észrevehetjük emellett, hogy a fentiek természetes módon teljesülnek a $\tilde{h}$ útból származtatott

$$\tau_{\tilde{h}}\colon \pi_1(X, x_0) \longrightarrow \pi_1(X, x_0')$$

hozzárendelésre is, és gyorsan ellenőrizhető, hogy τ_h inverze éppen $\tau_{\tilde{h}}$ lesz. □

4.21. Megjegyzés *Ha X útösszefüggő, akkor $\pi_1(X, x_0)$ izomorfizmus erejéig független x_0 választásától, így $\pi_1(X, x_0)$ helyett használatos a $\pi_1(X)$ jelölés.*

4.22. Megjegyzés *Jegyezzük meg, hogy a τ_h izomorfia nem kanonikus — azaz függ a h út választásától — tehát a különböző bázispontokhoz tartozó fundamentális csoportok elemeit nem tudjuk általában azonosítani. Ebben az értelemben $\pi_1(X)$ csak mint absztrakt csoport van definiálva, és elemei már nem megfeleltethetők hurkok homotópiaosztályainak.*

Tegyük fel például, hogy $\pi_1(X, x_0)$ egy végtelen ciklikus csoport (additívan jelölve $(\mathbb{Z}, +)$), ennek két generátora van, a +1 és a -1. Ennek megfelelően több lehetséges automorfizmus is van, így további információ hiányában nem lehet eldönteni, hogy $1 \to 1$ vagy $1 \to -1$

Kivételt képeznek a fenti elv alól az egy- és a kételemű csoport, mivel ezekben az esetekben pontosan egy darab automorfizmus létezik.

Topologikus terek egy fontos osztályát képezik azok a terek, amelyek a fundamentális csoport szempontjából a létező legegyszerűbbek.

4.23. Definíció *Egy X topologikus teret* egyszeresen összefüggő*nek nevezünk, ha útösszefüggő, és $\pi_1(X) = 1$.*

4.24. Lemma *Egy X topologikus tér pontosan akkor egyszeresen összefüggő, ha minden $x_0, x_1 \in X$ esetén az $x_0 \rightsquigarrow x_1$ utaknak pontosan egy homotópiaosztálya van.*

Bizonyítás. Ha minden x_0, x_1 pontpárra pontosan egy $x_0 \rightsquigarrow x_1$ homotópiaosztály létezik, akkor ez az $x_1 = x_0$ esetben is így van, azaz $\pi_1(X, x_0) = 1$.

A másik irányhoz legyenek $f, g\colon I \to X$ utak, amelyek x_0-ból x_1-be vezetnek. Ekkor

$$f \simeq f \star (\tilde{g} \star g) \simeq (f \star \tilde{g}) \star g \simeq g \ ,$$

ugyanis $(\tilde{g} \star g)$ homotóp a konstans hurokkal, $(f \star \tilde{g})$ pedig szintén, mivel $\pi_1(X, x_0) = 1$ a feltétel szerint. $\square$

A klasszikus példa olyan térre, amely nem egyszeresen összefüggő, a körvonal. A homotópiacsoportok meghatározásának bonyolultságát mutatja, hogy már ebben az esetben is keményen meg kell küzdeni az eredményért. Ugyan több bizonyítás is létezik, érdemes a körvonal fundamentális csoportjára vonaktozó eredményt mint a fedőterek elméletének egy elemét tekinteni (ld. például [Bre93, Chapter III.] vagy [Kur09], esetleg jóval általánosabb kontextusban [Sza09]).

4.25. Tétel (A körvonal fundamentális csoportja) *Tekintsük a körvonalat mint a komplex számsík részét, vagyis legyen*

$$\mathbb{S}^1 \overset{def}{=} \left\{ z \in \mathbb{C} \mid |z|^2 = 1 \right\} \ ,$$

és vegyük az $1 \in \mathbb{S}^1$ *bázispontot. Ekkor*

$$\begin{array}{rcl} (\mathbb{Z},+) & \longrightarrow & \pi_1(\mathbb{S}^1,1) \\ n & \mapsto & [t \mapsto e^{2\pi int}] \end{array}$$

izomorfizmus.

A bizonyítás ötlete. Az alapgondolat az, hogy a

$$\begin{array}{rcl} p\colon \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{S}^1 \\ t & \mapsto & e^{2\pi it} \end{array}$$

fedőleképezés segítségével összehasonlítjuk az $\mathbb{R}$-beli utakat az $\mathbb{S}^1$-beli hurkokkal.

Tetszőleges n egész szám esetén jelölje

$$\begin{array}{rcl} \omega_n\colon I & \longrightarrow & \mathbb{S}^1 \\ t & \mapsto & e^{2\pi int} \end{array},$$

és

$$\begin{array}{rcl} \tilde{\omega}_n\colon I & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ t & \mapsto & nt \end{array}.$$

Ekkor

$$\omega_n = p \circ \tilde{\omega}_n ,$$

vagyis $\tilde{\omega}_n$ az ω_n hurok egy p mentén történő felemelése.

Tekintsük a

$$\begin{array}{rl} \Phi\colon \mathbb{Z} & \longrightarrow \pi_1(\mathbb{S}^1,1) \\ n & \mapsto [\omega_n = p \circ \tilde{\omega}_n] \end{array}$$

függvényt. Ez jóldefiniált lesz, és egy csoportizomorfizmus is egyben. Ezek az állítások az alábbi topológiai tényeken nyugszanak:

1. *Utak felemelése:* Minden $I \xrightarrow{\gamma} \mathbb{S}^1$, $\gamma(0) = 1 \in \mathbb{S}^1$ útra és minden $\tilde{x}_0 \in p^{-1}(1)$ pontra létezik pontosan egy $\tilde{f}\colon I \to \mathbb{R}$ felemelés, amelyre $\tilde{f}(0) = \tilde{x}_0$.

2. *Homotópiák felemelése:* Minden $F\colon I \times I \to \mathbb{S}^1$ homotópiához, amelyre ($F\big|_{I\times\{0\}} = \{1\}$), és minden $\tilde{x}_0 \in p^{-1}(1)$ ponthoz létezik egyértelműen egy $F'\colon I \times I \to \mathbb{R}$, $F\big|_{I\times\{0\}} = \{\tilde{x}_0\}$ homotópia, az F homotópia ún. felemelése. $\square$

A ténynek, miszerint a körvonal fundamentális csoportja nemtriviális, rengeteg látványos alkalmazása van. Íme egy első példa.

4.26. Definíció *Legyenek $A \subseteq X$ topologikus terek; X-nek A-ra történő* retrakciója *egy $r\colon X \to A$ folytonos leképezés, amelyre $r|_A = id_A$. Ha létezik $X \to A$ retrakció, akkor azt mondjuk, hogy A* az X egy retraktuma.

4.27. Lemma *Legyenek $A \subseteq X$ topologikus terek, $a \in A$, jelölje $j\colon A \hookrightarrow X$ a természetes beágyazást. Ha $A \subseteq X$ az X tér retraktuma, akkor a $j_*\colon \pi_1(A,a) \to \pi_1(X,a)$ csoporthomomorfizmus injektív.*

Bizonyítás. Tegyük fel, hogy létezik $r\colon X \to A$ retrakció, ekkor definíció szerint $r \circ j = \mathrm{id}_A$. A fundamentális csoport funktorialitásából $(r \circ j)_* = (\mathrm{id}_A)_* = id_{\pi_1(A,a)}$ következik, majd ugyanebből az okból

$$\mathrm{id}_{\pi_1(A,a)} = (r \circ j)_* = r_* \circ j_* \ ,$$

azaz j_* injektív. □

4.28. Tétel *Legyen $\mathbb{D}^2$ a kétdimenziós körlemez, $\mathbb{S}^1 \overset{def}{=} \partial\mathbb{D}^2$ pedig a határa. Ekkor nem létezik $\mathbb{D}^2 \to \mathbb{S}^1$ retrakcío.*

Bizonyítás. Gyorsan következik az a 4.27. Lemmából: jelölje $j\colon \mathbb{S}^1 \hookrightarrow \mathbb{D}^2$ a természetes beágyazást. Egy

$$(\mathbb{Z},+) \simeq \pi_1(\mathbb{S}^1,1) \xrightarrow{j_*} \pi_1(\mathbb{D}^2,1) = 1$$

homomorfizmus nem lehet injektív. □

Az alábbi technikai jellegű lemma rejtőzik sok elemi topológiai alkalmazás hátterében (például be lehet látni az algebra alaptételét is a segítségével), mi most a Brouwer-féle fixpont-tétel igazolására fogjuk felhasználni.

4.29. Lemma *Legyen $f\colon \mathbb{S}^1 \to X$ folytonos leképezés. Ekkor az alábbiak ekvivalensek:*

1. *f nullhomotóp;*
2. *f kiterjed egy $g\colon \mathbb{D}^2 \to X$ folytonos leképezéssé;*
3. *az $f_*\colon \pi_1(\mathbb{S}^1,1) \to \pi_1(X,x_0)$ homomorfizmus triviális.*

Bizonyítás. Az ekvivalenciának csak részeit mutatjuk meg, egy teljes bizonyításért ld. például [Kur09, Lemma 8.17]. Először igazoljuk, hogy ha f kiterjed egy $g\colon \mathbb{D}^2 \to X$ folytonos leképezéssé, akkor az $f_*\colon \pi_1(\mathbb{S}^1,1) \to \pi_1(X,x_0)$ homomorfizmus triviális. Ehhez tekintsük a $j\colon \mathbb{S}^1 \hookrightarrow \mathbb{D}^2$ természetes beágyazást, erre $f = g \circ j$, így

$$f_* = (g \circ j)_* = g_* \circ j_*$$

a fundamentális csoport funktorialitása miatt. Azonban a j_* homomorfizmus triviális, így $f_* = g_* \circ j_*$ is az.

Most tegyük fel, hogy az $f_*\colon \pi_1(\mathbb{S}^1, 1) \to \pi_1(X, x_0)$ homomorfizmus triviális, és megmutatjuk, hogy f nullhomotóp. Ecélból tekintsük a $p\colon \mathbb{R} \to \mathbb{S}^1$, $p(s) = e^{2\pi s}$ leképezést, illetve ennek a $p_0 \overset{\text{def}}{=} p|_I$ megszorítását az egységintervallumra. Ez utóbbi egy olyan $[p_0] \in \pi_1(\mathbb{S}^1, 1)$ hurkot ad meg, amelynek a p mentén történő $\mathbb{R}$-beli felemelése egy $0 \rightsquigarrow 1$ út. Legyen $x_0 \overset{\text{def}}{=} f(1)$.

Mivel f_* triviális és $[k \overset{\text{def}}{=} f \circ p_0] = 1 \in \pi_1(X, x_0)$, ezért létezik egy F relatív homotópia k és az x_0 pontbeli konstans homotópia között. Ellenőrizhető, hogy

$$p_0 \times id_I\colon I \times I \to \mathbb{S}^1 \times I$$

egy hányadosleképezés (mivel folytonos, szürjektív és zárt), tehát egy indukál egy $F'\colon \mathbb{S}^1 \times I \to X$ folytonos leképezést, ami egy homotópiát létesít f és a konstans leképezés között. $\square$

4.30. Tétel (Brouwer-féle fixpont-tétel) *Minden $f\colon \mathbb{D}^2 \to \mathbb{D}^2$ folytonos leképezésre létezik $x \in \mathbb{D}^2$ pont, amelyre $f(x) = x$.*

A bizonyításhoz némi előkészületekre lesz szükségünk.

4.31. Definíció Topologikus vektormező*nek hívunk egy $v\colon \mathbb{D}^2 \to \mathbb{R}^2$ folytonos leképezést. Azt mondjuk, hogy v* nemeltűnő*, ha minden $x \in \mathbb{D}^2$-re teljesül, hogy $v(x) \neq 0 \in \mathbb{R}^2$.*

4.32. Lemma *Legyen $v\colon \mathbb{D}^2 \to \mathbb{R}^2$ egy nemeltűnő vektormező. Ekkor léteznek olyan $x, y \in \partial\mathbb{D}^2 = \mathbb{S}^1$ pontok, amelyekre $v(x) = \alpha x$ és $v(y) = \beta y$ valamely $\alpha > 0, \beta < 0$ valós számokra.*

Bizonyítás. Indirekt módon bizonyítjuk az állítást. Ennek megfelelően tegyük fel, hogy minden $y \in \mathbb{S}^1$ esetén $v(y) \neq \beta y$ semmilyen $\beta < 0$ valós szám esetén. Tekintsük a

$$w \overset{\text{def}}{=} v\big|_{\partial\mathbb{D}^2}\colon \mathbb{S}^1 \longrightarrow \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$$

leképezést. Mivel w a konstrukciójánál fogva kiterjed egy $\mathbb{D}^2 \to \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ leképezéssé, ezért w szükségképpen nullhomotóp.

Másfelől viszont $w \simeq j\colon \mathbb{S}^1 \hookrightarrow \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$, az alábbi érvelés alapján: tekintsük a

$$F(x, t) \overset{\text{def}}{=} tx + (1 - t)w(x)$$

folytonos leképezést. Vegyük észre, hogy $F(x,t) \neq 0$. Ez nyilvánvaló a $t = 0, 1$ esetekre, ha pedig $F(x,t) = 0$ valamely $0 < t < 1$ esetén, akkor $tx + (1-t)w(x) = 0$, amiből

$$w(x) = -\frac{t}{1-t}x \ ,$$

viszont $w(x)$ a feltétel szerint sehol sem negatív számszorosa x-nek, tehát $F(x,t)$ valóban sehol sem 0. Ez viszont ellentmond annak, hogy $j \simeq w$ nullhomotóp.

A $v(x) = \alpha x$ $(\alpha > 0)$ esetet ugyanígy kaphatjuk meg, ha kicseréljük v-t $-v$-re. □

Bizonyítás. (Brouwer-féle fixpont-tétel) Indirekte, tegyük fel, hogy minden $x \in \mathbb{D}^2$ esetén $f(x) \neq x$. Ekkor tekinthetjük a

$$v(x) \overset{\text{def}}{=} f(x) - x$$

nemeltűnű topologikus vektormezőt a körlemezen. A 4.32. lemma miatt létezik olyan $x \in \partial\mathbb{D}^2$ és $\alpha > 0$ valós szám, amelyekre teljesül, hogy

$$v(x) = f(x) - x = \alpha x \ .$$

Ekkor viszont

$$f(x) = (1+\alpha)x \notin \mathbb{D}^2 \ ,$$

ami ellentmondás. Ezzel a tételt beláttuk. □

4.2. Homológiaelmélet

Ha x és y két $\mathbb{R}^n$-beli pont, akkor két, x-ből y-ba menő homotóp út együtt gyakran egy kétdimenziós felületdarabka határát adják. Amint azt Stokes tételéből, vagy annak számtalan alacsony-dimenziós klasszikus esetéből láthatjuk, egy peremes sokaság és a határa között érdekes összefüggések vannak. Egy további alkalmazás vonalintegráloknak, illetve komplex kontúrintegráloknak a kiszámítása.

Mi itt az „együtt határolás” intuitív fogalma mentén építünk fel egy alternatív algebrai invariáns rendszert, az ún. szinguláris homológiát. A szinguláris homológia kevésbé finom, mint a homotópiacsoportok, a definíciója valamelyest komplikáltabb, viszont cserébe sokkal könnyebb kiszámolni.

A homológiacsoportok egyik első felbukkanása az ún. szimpliciális homológielmélet, ahol topologikus tereket, sima sokaságokat háromszögelések segítségével próbáltak tanulmányozni. Az, hogy háromszögelések bizonyos numerikus invariánsai pusztán az adott tér topológiájától függenek, már több száz éve ismert. Első nem-triviális megnyilvánulása az alábbi megfigyelés.

4.33. Példa (Euler tétele a síkon) *A $\mathbb{R}^2$ sík tetszőleges véges háromszögelésére*

$$\textit{pontok száma} - \textit{élek száma} + \textit{háromszögek száma} = 2 \ .$$

4.6 Feladat *Határozzuk meg a fenti invaránst (a felület ún. Euler-karakterisztikáját) az $\mathbb{S}^2$ gömbfelület, és az $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$ kétdimenziós tórusz esetén.*

Amint azt említettük, hagyományosan homológiaelméletet háromszögelt topologikus tereken csináltak, azonban célravezetőbb a háromszögek helyett szimplexekből menő leképezéseket, ún. szinguláris szimplexeket használni.

4.34. Definíció *Tekintsük az $\mathbb{R}^{n+1}$ euklideszi teret az $\{e_0, \ldots, e_n\}$ standard bázissal. A* standard n-szimplex*et az alábbi módon definiáljuk:*

$$\Delta_n \stackrel{def}{=} \left\{ \sum_{i=0}^{n} \lambda_i e_i \;\middle|\; \sum_{i=1}^{n} \lambda_i = 1, 0 \leq \lambda_i \leq 1 \right\} .$$

4.35. Megjegyzés *A standard n-szimplex az $\mathbb{R}^{n+1}$-beli standard bázisvektorok konvex burka.*

4.36. Megjegyzés *Az*

$$\mathbb{R}^1 \subseteq \mathbb{R}^2 \subseteq \ldots$$

azonosítással és a standard bázisvektorok azonosításával az $\mathbb{R}^\infty \stackrel{def}{=} \cup_{n=1}^{\infty} \mathbb{R}^n$ végtelen-dimenziós euklideszi térben benne ül az összes standard n-szimplex, így nem függenek a konkrét n-től, ahová a definíció során beágyaztuk őket.

Az alábbiakban definiáljuk a szinguláris homológiaelmélet építőköveit, a szinguláris szimplexeket.

4.37. Definíció (Affin szinguláris szimplex) *Legyenek $v_0, \ldots, v_n \in \mathbb{R}^N$ tetszőleges vektorok, jelölje $[v_0, \ldots, v_n]$ azt a leképezést, amelyre*

$$\begin{aligned} [v_0, \ldots, v_n] \colon \Delta_n &\longrightarrow \mathbb{R}^N \\ \sum_i \lambda_i e_i &\longmapsto \sum_i \lambda_i v_i \ . \end{aligned}$$

A $[v_o, \ldots, v_n]$ leképezést affin szinguláris n-szimplex*nek hívjuk.*

4.38. Megjegyzés $\operatorname{im}[v_0, \ldots, v_n]$ *pontosan a $v_0, \ldots, v_n$ vektorok $\mathbb{R}^N$-beli konvex burka.*

4.39. Megjegyzés *A $v_0, \ldots, v_n$ vektorokról nem tettük fel, hogy lineárisan függetlenek vagy akár különbözők, ezért $[v_0, \ldots, v_n]$ egy esetlegesen elfajuló szimplex, innen a név.*

Speciálisan az is előfordulhat, hogy $v_0 = \cdots = v_n$.

4.40. Definíció *Legyen*

$$[v_0, \ldots, \hat{v}_i, \ldots, v_n] \colon \Delta_{n-1} \to \mathbb{R}^N$$

az a leképezés, amit az i-edik csúcs elhagyásával kapunk.

4.41. Példa *Az* $[e_0,\dots,\hat{e_i},\dots,e_n]\colon \Delta_{n-1}\to\mathbb{R}^N$ *szinguláris szimplex képe definiíció szerint éppen* Δ_{n-1}.

4.42. Definíció *A* $[e_0,\dots,\hat{e_i},\dots,e_n]\colon \Delta_{n-1}\to\Delta_n$ *leképezés neve* i-edik lapleképezés, *és* F_i^n*-nel jelöljük.*

4.43. Megjegyzés *Fontos fejben tartani, hogy az* F_i^n *lapleképezések szintén affin szinguláris szimplexek. Az* F_i^n *lapleképezés képe az* i*-edik csúccsal szemben lévő oldal.*

Az alábbi igen egyszerű megfigyelésen alapul a szinguláris homológiaelmélet lényegi konstrukciója, az ún. szinguláris lánckomplexus.

4.44. Lemma *Legyenek* n *és* $0\le i\le n$ *természetes számok. Az eddigi jelöléseink megtartásával*

$$F_i^n(e_j)=\begin{cases} e_j & \text{ha } j<i,\\ e_{j+1} & \text{ha } j\ge i,\end{cases}$$

továbbá

$$F_j^{n+1}\circ F_i^n=\begin{cases} [e_0,\dots,\hat{e_i},\dots,\hat{e_j},\dots,e_n] & \text{ha } j>i\ ,\\ [e_0,\dots,\hat{e_j},\dots,\widehat{e_{i+1}},\dots,e_n] & \text{ha } i\le j\ .\end{cases}$$

Bizonyítás. Mindkét állítás azonnal következik a lapleképezések definíciójából. □

4.45. Definíció (Szinguláris szimplexek és láncok) *Legyen* X *egy topologikus tér,* $p\ge 0$ *természetes szám. Egy* X*-beli* szinguláris p-szimplex *egy* $\sigma_p\colon\Delta_p\to X$ *folytonos leképezés.*

Jelölje $\Delta_p(X)$ *az* X*-beli szinguláris* p*-szimplexek által generált szabad Abel-csoportot, ennek elemeit szinguláris* p*-láncoknak nevezzük.*

4.46. Megjegyzés *A szabad csoportok definíciója alapján egy* X*-beli szinguláris* p*-lánc nem más, mint* X*-beli szinguláris* p*-szimplexek egy*

$$\sum_{\sigma\ X\text{-beli szinguláris } p\text{-szimplex}} n_\sigma\sigma$$

formális véges összege, ahol $n_\sigma\in\mathbb{Z}$.

4.47. Definíció (Szinguláris szimplex határa) *Legyen* $\sigma\colon\Delta_p\to X$ *szinguláris* p*-szimplex. Ekkor* σ i-edik lapját *az alábbi módon definiáljuk:*

$$\sigma^{(i)}\overset{def}{=}\sigma\circ F_i^p\ .$$

A σ X*-beli szinguláris* p*-szimplex* határa*:*

$$\partial_p\sigma\overset{def}{=}\sum_{i=0}^{p}(-1)^i\sigma^{(i)}\in\Delta_{p-1}(X)\ .$$

4.48. Megjegyzés *Az iménti definícióból természetes módon származik a szinguláris p-lánc határának definíciója. Ha ugyanis* $c = \sum_\sigma n_\sigma \sigma$ *egy* X*-beli p-lánc, akkor legyen*

$$\partial_p c = \partial_p \left(\sum_\sigma n_\sigma \sigma \right) \overset{def}{=} \sum_\sigma n_\sigma (\partial_p \sigma) \ .$$

Ez jóldefiniált, mivel $\Delta_p(X)$ *a szimplexeken vett szabad Abel-csoport, így a*

$$\begin{aligned} \partial_p \colon \{X\text{-}\mathit{beli\ szinguláris\ p\text{-}szimplexek}\} &\longrightarrow \Delta_{p-1}(X) \\ \sigma &\longmapsto \partial_p \sigma \end{aligned}$$

függvény egyértelműen kiterjed egy

$$\partial_p \colon \Delta_p(X) \longrightarrow \Delta_{p-1}(X)$$

abel-csoport homomorfizmussá, ami a szimplexeken vett határleképezés kiterjesztése. Ennek neve a p-edik vagy p-dimenziós határleképezés.

4.49. Megjegyzés *Egy szinguláris szimplex határa szinguláris lánc, egy szinguláris lánc határa viszont szintén szinguláris lánc, ezért sokkal hasznosabb szinguláris láncokkal (vagyis szinguláris szimplexek lineáris kombinációival) dolgozni.*

A következő számolás egyszerű, de a szinguláris homológielmélet szempontjából alapvető fontosságú.

4.50. Állítás *Legyen* $p \geq 1$ *természetes szám,* X *tetszőleges topologikus tér. Ekkor a* $\partial_p \colon \Delta_p(X) \to \Delta_{p-1}(X)$ *és* $\partial_{p+1} \colon \Delta_{p+1}(X) \to \Delta_p(X)$ *határleképezésekre*

$$\partial_p \circ \partial_{p+1} = 0 \ .$$

Bizonyítás. A definíciók használata és közvetlen számolás: tetszőleges X-beli σ szinguláris p-szimplex esetén

$$\begin{aligned}
\partial_p\partial_{p+1}\sigma &= \partial_p\left(\sum_{j=0}^{p+1}(-1)^j\sigma\circ F_j^{p+1}\right)\\
&= \sum_{j=0}^{p+1}(-1)^j\left(\sum_{i=0}^{p}(-1)^i\left(\sigma\circ F_j^{p+1}\right)\circ F_i^p\right)\\
&= \sum_{j=0}^{p+1}\sum_{i=0}^{p}(-1)^{i+j}\sigma\circ\left(F_j^{p+1}\circ F_i^p\right)\\
&= \sum_{0\le i<j\le p+1}(-1)^{i+j}\sigma\circ\left(F_j^{p+1}\circ F_i^p\right)\\
&+ \sum_{0\le j\le i\le p}(-1)^{i+j}\sigma\circ\left(F_j^{p+1}\circ F_i^p\right)\\
&= \sum_{0\le i<j\le p+1}(-1)^{i+j}\sigma\circ[e_0,\dots,\hat{e_i},\dots,\hat{e_j},\dots,e_p]\\
&+ \sum_{0\le j\le i\le p}(-1)^{i+j}\sigma\circ[e_0,\dots,\hat{e_j},\dots,\widehat{e_{i+1}},\dots,e_p]\ .
\end{aligned}$$

Ha a második összegben $i+1$ helyére k-t írunk, akkor formálisan a (-1)-szerese lesz az elsőnek.

Ezzel az állítást beláttuk. $\square$

4.51. Megjegyzés *Legyen $\Delta_p(X)\overset{def}{=}0$, ha $p<0$, hasonlóan $\partial_p\overset{def}{=}0$ minden $p\le 0$ esetén. Ezzel a konvencióval a*

$$\Delta_{p+1}(X)\xrightarrow{\partial_{p+1}}\Delta_p(X)\xrightarrow{\partial_p}\Delta_{p-1}(X)$$

kompozíció minden $p\in\mathbb{Z}$ esetén a nullaleképezés, azaz $\Delta_\bullet(X)$ az ∂_p leképezésekkel mint differenciálokkal $\mathbb{Z}$-modulusok egy lánckomplexusa.

4.52. Definíció (Szinguláris lánckomplexus, ciklusok, és határok) *Az imént definiált $(\Delta_\bullet(X),\partial_\bullet)$ lánckomplexust az X* topologikus tér szinguláris lánckomplexus*ának nevezzük. A homologikus algebrában korábban látott módon*

$$Z_p(X)\overset{def}{=}\operatorname{Ker}\partial_p$$

*elemeit X-*beli p-ciklusok*nak,*

$$B_p(X)\overset{def}{=}\operatorname{im}\partial_{p+1}$$

*elemeit pedig X-*beli p-határok*nak nevezzük.*

4.53. Definíció (Szinguláris homológiacsoportok) *Az X topologikus tér p-edik szinguláris homológiacsoportja*

$$H_p(X;\mathbb{Z}) = H_p(X) \overset{def}{=} Z_p(X)/B_p(X) = \operatorname{Ker}\partial_p / \operatorname{im}\partial_{p+1} \ .$$

4.54. Megjegyzés *Legyenek c_1 és c_2 két X-beli p-lánc. Azt mondjuk, hogy c_1 és c_2* homológok, *ha $c_1 - c_2 = \partial_{p+1} d$ valamely $d \in \Delta_{p+1}(X)$, azaz „együtt határolnak". Egy c ciklus $H_p(X)$-beli ekvivalenciaosztályát $[c]$-vel jelöljük.*

4.55. Példa (Az egypontú tér homológiája) *Számítsuk ki az egy pontból álló P tér homológiacsoportjait.*

Látható, hogy minden $p \geq 0$ esetén pontosan egy P-beli σ_p szinguláris szimplex létezik, ti. amely a standard n-szimplex minden pontját P egyetlen pontjára képezi. Ezért minden $p \geq 0$ esetén a $\Delta_p(P)$ szabad Abel-csoportnak egy generáló eleme van, vagyis $\Delta_p(X) \simeq \mathbb{Z}$.

Eszerint a P tér szinguláris lánckomplexusa az alábbi módon néz ki:

$$\ldots \longrightarrow \mathbb{Z}\sigma_p \xrightarrow{\partial_p} \mathbb{Z}\sigma_{p-1} \xrightarrow{\partial_{p-1}} \longrightarrow \ldots \longrightarrow \mathbb{Z}\sigma_0 \xrightarrow{\partial_0} 0 \longrightarrow 0 \ldots$$

Vizsgáljuk meg a határleképezéseket.

$$\begin{aligned} \partial_p \sigma_p &= \sum_{i=0}^{p} (-1)^i \sigma_p^{(i)} \\ &= \sum_{i=0}^{p} (-1)^i \sigma_{p-1} \\ &= \begin{cases} 0 & \text{ha } 2 \nmid p, \\ \sigma_{p-1} & \text{ha } 2 \mid p, \end{cases} \end{aligned}$$

így

$$\partial_p = \begin{cases} 0 & \text{ha } 2 \nmid p \\ \mathrm{id} & \text{ha } 2 \mid p, \ p \neq 0 \end{cases} .$$

A homológiacsoportokra az alábbi eredmény kapjuk

$$H_p(P) = \begin{cases} 0 & \text{ha } p \neq 0 \\ \mathbb{Z} & \text{ha } p = 0 \end{cases} .$$

Számítsuk ki ezek után egy tetszőleges X topologikus tér nulladik homológiacsoportját; az eredményből látszani fog annak geometriai jelentősége.

Egy X-beli szinguláris 0-szimplex egyértelmű módon azonosítható a leképezés képével, vagyis az X topologikus tér egy pontjával. Észrevehető továbbá, hogy ∂_0 a 0 leképezés.

Tetszőleges $c \in \Delta_0(X)$ lánc, vagyis egy $c = \sum_{x\in X} n_x x$ formális véges összeg esetén legyen

$$\begin{array}{rcl} \epsilon\colon \Delta_0(X) & \to & \mathbb{Z} \\ \displaystyle\sum_{x\in X} n_x x & \mapsto & \displaystyle\sum_{x\in X} n_x \end{array}$$

az ún. *augmentáció.*

Ha σ egy szinguláris 1-szimplex, akkor $\partial_1\sigma = x_1 - x_0$, azaz $\epsilon(\partial_1\sigma) = 0$, vagyis az

$$\begin{array}{rl} \epsilon_*\colon H_0(X) & \to \mathbb{Z} \\ [\sigma] & \to \epsilon(\sigma) \end{array}$$

leképezés egy jóldefiniált Abel-csoport homomorfizmus.

4.56. Állítás *Az iménti jelölésekkel, ha $X \neq \emptyset$ útösszefüggő, akkor $\epsilon_*\colon H_0(X) \to \mathbb{Z}$ izomorfizmus.*

Bizonyítás. Tetszőleges n egész szám és $x \in X$ esetén

$$\epsilon_*(n[x]) = n$$

ezért ϵ_* szürjektív.

Az injektivitás bizonyításához rögzítsünk egy $x_0 \in X$ pontot, és minden X-beli x ponthoz egy $\lambda_x\colon (I,0) \to (X,x_0)$ utat x_0-ból x-be. Ekkor λ_x egy szinguláris 1-szimplex, amelyre $\partial(\lambda_x) = x - x_0$.

Legyen $c = \sum_{x\in X} n_x x$ egy 0-lánc, amelyre $0 = \epsilon_*\langle c\rangle = \sum n_x$, azaz $c \in \operatorname{Ker}\epsilon$. Erre

$$\begin{aligned} c - \partial\left(\sum_{x\in X} n_x\lambda_x\right) &= c - \sum_{x\in X} n_x\partial(\lambda_x) \\ &= \sum_{x\in X} n_x x - \sum_{x\in X} n_x(x - x_0) \\ &= \left(\sum_{x\in X} n_x\right) x_0 \\ &= 0\ , \end{aligned}$$

ahonnan $c = \partial(\sum n_x\lambda_x)$, s így $[c] = 0$, vagyis ϵ_* injektív is egyben. □

4.57. Megjegyzés (Homológia és útösszefüggőségi komponensek) *Mivel minden n természetes számra a standard n-szimplex útösszefüggő, ezért*

$$\Delta_p(X) = \bigoplus_\alpha \Delta_p(X_\alpha)\ ,$$

ahol az X_α alterek az X topologikus tér útösszefüggőségi komonensei.

A korábbiakból következik, hogy a ∂_p operátor felcserélhető a direkt összeg képzésével, ezért minden $p \in \mathbb{Z}$ esetén

$$H_p(X) = \bigoplus_\alpha H_p(X_\alpha) \ ,$$

így a homológiacsoportok kiszámításánál elegendő az adott tér útösszefüggőségi komponenseivel törődni.

4.58. Megjegyzés *Az iménti megállapításainkból tetszőleges X topologikus térre azt kaptuk, hogy $H_0(X)$ mindig $\mathbb{Z}$-k annyi példányának direkt összege, amennyi útösszefüggő komponense van X-nek.*

A következőkben a szinguláris homológiacsoportok funktoriális tulajdonságaival fogunk foglalkozni.

Legyenek X és Y topologikus terek, $f\colon X \to Y$ egy leképezés, $\sigma\colon \Delta_p \to X$ egy szinguláris p-szimplex. Ekkor jól láthatóan

$$f \circ \sigma\colon \Delta_p \to Y \in \Delta_p(Y)$$

egy Y-beli szinguláris p-szimplex. Mivel definíció szerint $\Delta_p(X)$ a X-beli szinguláris p-szimplexeken vett szabad abel csoport, a fenti $f \circ \sigma$ hozzárendelés egyértelműen terjeszthető ki egy

$$f_\Delta\colon \Delta_p(X) \to \Delta_p(Y)$$

homomorfizmussá, amelyre

$$f_\Delta \left(\sum_\sigma n_\sigma \sigma \right) = \sum_\sigma n_\sigma \left(f \circ \sigma \right) \ .$$

Teljesül továbbá az alábbi.

4.59. Állítás *Az iménti jelölésekkel*

$$f_\Delta \circ \partial^X = \partial^Y \circ f_\Delta \ ,$$

vagyis f_Δ egy láncleképezés.

Bizonyítás. Igazolni fogjuk, hogy a

$$\begin{array}{ccc} \Delta_p(X) & \xrightarrow{\partial_p} & \Delta_{p-1}(X) \\ \downarrow{\scriptstyle (f_\Delta)_p} & & \downarrow{\scriptstyle (f_\Delta)_{p-1}} \\ \Delta_p(Y) & \xrightarrow{\partial_p} & \Delta_{p-1}(Y) \end{array}$$

diagram kommutatív; ezt elegendő $\Delta_p(X)$ generátoraira, vagyis például az összes szinguláris p-szimplexre belátni.

Legyen tehát σ egy X-beli szinguláris p-szimplex. Ekkor

$$\begin{aligned} f_\Delta(\partial\sigma) &= f_\Delta\left(\sum_i (-1)^i \sigma^{(i)}\right) \\ &= \sum_i (-1)^i f \circ \sigma^{(i)} \\ &= \sum_i (-1)^i f \circ \left(\sigma \circ F_i^{(p)}\right) \\ &= \sum_i (-1)^i \left(f \circ \sigma\right) \circ F_i^{(p)} \\ &= \sum_i (-1)^i \left(f \circ \sigma\right)^{(i)} \\ &= \partial\left(f_\Delta(\sigma)\right)\ ; \end{aligned}$$

ezzel az állítást beláttuk. □

4.60. Megjegyzés *Először is vegyük észre, hogy amennyiben $f = \mathrm{id}_X : X \to X$, akkor $(f_\Delta)_p = \mathrm{id}_{\Delta_p(X)}$ minden p egész szám esetén.*

Legyenek most

$$X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z$$

folytonos leképezések. Ekkor a függvények kompozíciójának asszociativitásából következik, hogy

$$(g \circ f)_\Delta = g_\Delta \circ f_\Delta\ .$$

Ezek alapján levonhatjuk a következtetést, hogy minden $p \in \mathbb{Z}$ esetén az a hozzárendelés, amely minden X topologikus térhez a $\Delta_p(X)$ abel-csoportot, továbbá minden $f : X \to Y$ folytonos leképezéshez az

$$f_\Delta : \Delta_p(X) \longrightarrow \Delta_p(Y)$$

homomorfizmust rendeli hozzá, egy kovariáns funktor a topologikus terek kategóriájából a (kommutatív) csoportok kategóriájába.

4.61. Következmény *Ha $f : X \to Y$ egy folytonos leképezés, akkor minden p egész számra létezik egy jól definiált*

$$\begin{aligned} f_* : H_p(X) &\to H_p(Y) \\ [c] &\mapsto [f_\Delta(c)] \end{aligned}$$

homomorfizmus. Amennyiben $g : Y \to Z$ egy további folytonos leképezés, akkor

$$(f \circ g)_* = f_* \circ g_* \quad \textit{és} \quad \mathrm{id}_* = \mathrm{id}\ .$$

Bizonyítás. A homologikus algebráról szóló részben láttuk, hogy láncleképezések homomorfizmusokat indukálnak a homológiacsoportokon. Az f_* homomorfizmusok funktoriális tulajdonságai az f_Δ leképezések funktoriális tulajdonságaiból következnek. □

4.62. Következmény *Ha $f\colon X \to Y$ homeomorfizmus, akkor minden p egész számra $f_*\colon H_p(X) \to H_p(Y)$ az identitás.*

4.63. Megjegyzés *Ha X és Y homeomorf terek, akkor tetszőleges $p \in \mathbb{Z}$ esetén már $\Delta_p(X)$ és $\Delta_p(Y)$ is izomorf abel-csoportok, azonban a szinguláris szimplexek csoportjai messze túl nagyok ahhoz, hogy topologikus terek diszkrét invariánsai szempontjából hasznosak legyenek, így ez a megfigyelés nem sokat hoz a konyhára.*

Az alábbiakban a szinguláris homológiához hasonlító más 'homológiaelméleteket' mutatunk be, amelyek a gyakorlatban sokszor hasznosak, és szintén (nem meglepő módon) homologikus algebrára építenek. Ezután axiómákban összefoglaljuk a homológiaelméletekkel kapcsolatos elvárásainkat.

4.64. Példa (Relatív homológia) *Legyen X topologikus tér, $A \subseteq X$ altér, és tekintsük az (X, A) párt (emlékeztetőül: ha (X, A) és (Y, B) két, a fenti értelemben vett pár, akkor egy $f\colon (X, A) \to (Y, B)$ folytonos leképezés nem más, mint egy $f\colon X \to Y$ folytonos leképezés, amelyre $f(A) \subseteq B$).*

A célunk az, hogy kidolgozzunk egy homológiaelméletet, amely topologikus terek párjain van definiálva. Mint látni fogjuk, a szinguláris homológiára építve ez hamar sikerülni fog.

Egy egyszerű megfigyelés, hogy a $j\colon A \hookrightarrow X$ beágyazás minden p egész számra egy

$$(j_\Delta)_p\colon \Delta_p(A) \hookrightarrow \Delta_p(X)$$

beágyazást indukál, amelyek egy $j_\bullet\colon \Delta_\bullet(A) \to \Delta_\bullet(X)$ láncleképezéssé állnak össze.

Legyen

$$\Delta_\bullet(X, A) \quad \overset{def}{=} \Delta_\bullet(X)/\Delta_\bullet(A)$$

a megfelelő faktorkomplexus, és

$$H_p(X, A) \overset{def}{=} H_p(\Delta_\bullet(X, A)) \quad \textit{minden } p \in \mathbb{Z} \textit{ esetén}$$

pedig a $\Delta_\bullet(X, A)$ faktorkomplexus homológiája. A $H_p(X, A) = H_p(X, A; \mathbb{Z})$ csoport neve az (X, A) pár p-edik relatív homológiacsoportja.

Figyeljük meg, hogy a lánckomplexusokból álló

$$0 \to \Delta_\bullet(A) \hookrightarrow \Delta_\bullet(X) \to \Delta_\bullet(X, A) \to 0$$

sorozat egzakt, tehát a 3.42. Tétel értelmében tekinthetjük a hozzárendelt hosszú egzakt sorozatot

$$\dots \xrightarrow{\partial_*} H_p(A) \xrightarrow{f_*} H_p(X) \xrightarrow{g_*} H_p(X,A) \xrightarrow{\partial_*} H_{p-1}(A) \xrightarrow{f_*} \dots$$

amely fontos kapcsolatot létesít az A és X topologikus terek szinguláris homológiacsoportjai, illetve az (X,A) pár relatív homológiacsoportjai között. Ez az összefüggés igen hasznos tud lenni a gyakorlatban, amikor konkrét terek homológiacsoportjait akarjuk meghatározni, vagy esetleg azok nulla/nem-nulla voltát ellenőrizni.

4.65. Megjegyzés *A $\Delta_p(X,A) \overset{def}{=} \Delta_p(X)/\Delta_p(A)$ faktorcsoport izomorf azzal a szabad Abel-csoporttal, amelynek generátorelemei azok az X-beli szinguláris p-szimplexek, melyeknek a képe nincs benne A-ban.*

Ezzel létezik egy $\Delta_\bullet(X,A) \to \Delta_\bullet(X)$ felhasítás, amely azonban nem láncleképezés, tehát nem várható, hogy a homológiacsoportok között leképezéseket indukáljon.

4.66. Példa (Homológia együtthatókkal) *Legyen G egy tetszőleges kommutatív csoport. Megmutatjuk, hogyan tudunk 'G-beli együtthatókkal' homológiaelméletet csinálni. Amennyiben G egy gyűrű, akkor a homológiacsoportok automatikusan G-modulusok is lesznek. Az eddig megszokott $\mathbb{Z}$ mellett igen fontos szerepet játszanak a $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ gyűrűk, illetve a $\mathbb{Q}$,$\mathbb{R}$, és $\mathbb{C}$ testek (ez utóbbiak például komplex sokaságok esetén).*

Ezt fejben tartva tekintsük a

$$\Delta_\bullet(X) \otimes_{\mathbb{Z}} G$$

lánckomplexust a

$$\partial_\bullet \otimes \mathrm{id}_G$$

differenciálokkal.

Emlékeztetőül, $\Delta_p(X) \otimes G$ elemei $\sum n_{\sigma,g}\sigma \otimes g$ alakba írhatók, ahol σ egy szinguláris p-szimplex X-en, g egy G-beli csoportelem, $n_{\sigma,g}$ pedig egész szám.

Legyen

$$H_p(X;G) \overset{def}{=} H_p(\Delta_\bullet(X) \otimes G)\ .$$

az X topologikus tér G-beli együtthatókkal vett p-edik homológiacsoportja.

Ha $A \subseteq X$, akkor

$$0 \to \Delta_\bullet(A) \otimes G \hookrightarrow \Delta_\bullet(X) \otimes G \to \Delta_\bullet(X,A) \otimes G \to 0$$

a $\Delta_\bullet(X,A) \to \Delta_\bullet(X)$ felhasító leképezés létezése miatt egzakt marad, így létezik a megfelelő hosszú egzakt sorozat:

$$\dots \longrightarrow H_p(A;G) \longrightarrow H_p(X;G) \longrightarrow H_p(X,A;G) \longrightarrow H_{p-1}(A;G) \longrightarrow \dots\ .$$

4.67. Példa *Legyen*

$$0 \longrightarrow G' \longrightarrow G \longrightarrow G'' \longrightarrow 0$$

abel-csoportok egy rövid egzakt sorozata. Ekkor a

$$0 \longrightarrow \Delta_\bullet(X) \otimes G' \longrightarrow \Delta_\bullet(X) \otimes G \longrightarrow \Delta_\bullet(X) \otimes G'' \longrightarrow 0$$

sorozat szintén egzakt, ennek megfelelően létezik a hozzá tartozó hosszú egzakt sorozat.

4.68. Példa (Redukált homológia) *Legyen X tetszőleges topologikus tér, $(\Delta_\bullet(X), \partial_\bullet)$ a hozzárendelt szinguláris lánckomplexus. Tekintsük a szintén X-től függő alábbi $C_\bullet$-tal jelölt komplexust: a benne szereplő modulusok legyenek*

$$C_i \overset{def}{=} \begin{cases} \Delta_i(X) & ha\ i \geq 0\ , \\ \mathbb{Z} & ha\ i = -1\ , \\ 0 & ha\ i < -1\ , \end{cases}$$

míg a $C_\bullet$ lánckomplexus $\partial'_\bullet$ differenciáljai legyenek

$$\partial'_i \overset{def}{=} \begin{cases} \partial_i & ha\ i \neq 0\ , \\ \epsilon & ha\ i = 0\ , \end{cases}$$

ahol ϵ az

$$\begin{aligned} \epsilon\colon C_0 &\longrightarrow C_{-1} \\ \sum_i n_i\sigma_i &\mapsto \sum_i n_i \end{aligned}$$

augmentációs homomorfizmus.

A $(C_\bullet, \partial'_\bullet)$ lánckomplexus homológiacsoportjai az X tér redukált homológiacsoportjai*:*

$$\widetilde{H}_i(X;\mathbb{Z}) \overset{def}{=} \widetilde{H}_i(X) \overset{def}{=} H_i(C_\bullet)\ .$$

A definícióból gyorsan látszik, hogy

$$\widetilde{H}_i(X) = \begin{cases} H_i(X) & ha\ i \neq 0\ , \\ \ker(H_0(X) \xrightarrow{\epsilon} H_0(P)) & ha\ i = 0\ . \end{cases}$$

Lényegében az történik, hogy az eredeti homológiacsoportok a nulladik kivételével megmaradnak, a nulladik homológiacsoport generátorainak száma pedig eggyel csökken, amit úgy is értelmezhetünk, hogy az eredeti nulladik homológiacsoportban nem engedünk meg akármilyen együtthatókat, csak azokat, melyek összege nulla.

4.69. Definíció (Aciklikus topologikus tér) *Egy X topologikus teret* aciklikus*nak nevezünk, ha a redukált homológiája triviális, vagyis*

$$\widetilde{H}_\bullet = 0 \ .$$

4.70. Megjegyzés *Az egypontú tér aciklikus, mint ahogy aciklikus minden olyan topologikus tér, amely homotóp ekvivalens az egypontú térrel. Ez utóbbi egy nemtriviális állítás, ld. például [Bre93, Theorem 15.5].*

Az üres halmaz ellenben nem aciklikus, mivel $\widetilde{H}_{-1}(\emptyset) \neq 0$.

4.3. A homológiaelmélet Eilenberg–Steenrod-féle axiómái

Az alkalmazások során a szinguláris (vagy más) homológiaelméletnek tipikusan nem a definícióját, hanem pár lényeges alaptulajdonságát használjuk. Mivel megadható ezeknek egy jól körülírható halmaza, ami a legtöbb célnak megfelel, érdemes egy ilyen 'axiómarendszert' megismerni, hiszen használatával lényegesen leegyszerűsödik a helyzetünk.

Fontos fejben tartani, hogy a korábbiak során nem láttuk be, hogy a szinguláris homológiaelmélet a most következő axiómákat kielégíti, ez egy igen komoly vállalkozás (ld. [Bre93, Chapter 4]).

4.71. Definíció (Homológiaelmélet) *Egy topologikus terek párjain értelmezett* homológiaelmélet *egy funktor, amely az alábbi tulajdonságokkal rendelkezik:*

0. *A homológiaelmélet egy olyan funktor, amely egy (X, A) párhoz egy abel-csoportokból álló $H_\bullet(X, A)$ lánckomplexust rendel. Részletesebben: a homológiaelmélet minden $p \in \mathbb{Z}$ számhoz hozzárendel egy*

   $$H_p(X, A)$$

   abel-csoportot, továbbá minden $f\colon (X, A) \to (Y, B)$ folytonos leképezéshez megad egy

   $$f_\bullet\colon H_\bullet(X, A) \longrightarrow H_\bullet(Y, B)$$

   láncleképezést, továbbá egy

   $$\partial_\bullet\colon H_p(X, A) \to H_{p-1}(A, \emptyset)$$

   funktorok közötti morfizmust.

   Az, hogy $H_\bullet$ egy funktor, a következőt jelenti: egyrészt ha $f\colon (X, A) \to (Y, B)$ és $g\colon (Y, B) \to (Z, C)$ folytonos leképezések, akkor

   $$\begin{aligned} (g \circ f)_\bullet &= g_\bullet \circ f_\bullet \ , \\ id_\bullet &= \mathrm{id} \ , \end{aligned}$$

másrészt $\forall f\colon (X,A) \to (Y,B)$ *esetén a*

$$\begin{tikzcd} H_p(X,A) \arrow[r, "\partial_\bullet"] \arrow[d, "f_\bullet"'] & H_{p-1}(A,\emptyset) \arrow[d, "g_\bullet"] \\ H_p(Y,B) \arrow[r, "\partial_\bullet"] & H_{p-1}(A,\emptyset) \end{tikzcd}$$

diagram kommutatív.

1. (Homotópia-axióma) *Ha* $f, g\colon (X,A) \to (Y,B)$ *két homotóp leképezés, akkor az indukált leképezések a homológián egyenlőek lesznek, vagyis az* $f_\bullet, g_\bullet\colon H_\bullet(X,A) \to H_\bullet(Y,B)$ *leképezésekre* $f_\bullet = g_\bullet$.

2. (Egzaktsági axióma) *Tetszőleges* (X,A) *pár esetén tekintsük az* $i\colon (A,\emptyset) \hookrightarrow (X,\emptyset)$ *és* $j\colon (X,\emptyset) \hookrightarrow (X,A)$ *természetes beágyazásokat. Ekkor a*

$$\cdots \to H_p(A,\emptyset) \xrightarrow{i_\bullet} H_p(X,\emptyset) \xrightarrow{j_\bullet} H_p(X,A) \xrightarrow{\partial_\bullet} H_{p-1}(A,\emptyset) \xrightarrow{i_\bullet} \ldots$$

sorozat egzakt.

3. (Kivágási axióma) *Adott* (X,A) *esetén legyen* $U \subseteq X$ *olyan nyílt halmaz, amelyre* $\bar{U} \subseteq \operatorname{int} A$. *Ekkor a* $k\colon (X-U, A-U) \hookrightarrow (X,A)$ *természetes beágyazás egy*

$$k_\bullet\colon H_\bullet(X-U, A-U) \xrightarrow{\sim} H_\bullet(X,A)$$

izomorfizmust indukál a homológiacsoportokon.

4. (Dimenzió-axióma) *Az egypontú* P *topologikus térre*

$$H_p(P,\emptyset) = 0$$

minden $p \neq 0$ *esetén.*

5. (Additivitási axióma) *Legyen* $X = \coprod_\alpha X_\alpha$ *diszjunkt uniója az* X_α *topologikus tereknek,*

$$i_\alpha\colon (X_\alpha,\emptyset) \hookrightarrow (X,\emptyset)$$

a természetes beágyazások. Ekkor a homológiacsoportokon indukált

$$\oplus_\alpha (i_\alpha)_*\colon \oplus_\alpha H_p(X_\alpha) \longrightarrow H_p(X)$$

leképezés izomorfizmus.

4.72. Definíció (Homológiaelmélet együtthatócsoportja) *Legyen P az egy pontból álló tér; ekkor a*

$$G \overset{def}{=} H_0(P, \emptyset)$$

csoport a $H_\bullet$ homológiaelmélet együtthatócsoportja.

4.73. Megjegyzés *A korábbi számításainkból látszik, hogy a szinguláris homológiaelmélet együtthatócsoportja $\mathbb{Z}$; a $H_\bullet(\Delta_\bullet(X) \otimes_{\mathbb{Z}} G)$ elmélet együtthatócsoportja amint azt várnánk, a G csoport lesz.*

4.74. Megjegyzés *Eddigi munkánk során beláttuk, hogy a szinguláris homológiaelmélet egy funktor, $\partial_\bullet$ egy funktorok közötti morfizmus, amelyre teljesülnek a 4.71. Definíció (2), (4) és (5) kívánalmai. Az (1) és (3) feltételek igazolása lényegesen bonyolultabb, ezzel mi itt nem fogunk foglalkozni, ehelyett inkább az axiómákkal dolgozunk tovább.*

4.75. Állítás *Ha $(X, A) \simeq (Y, B)$, akkor $H_\bullet(X, A) \simeq H_\bullet(Y, B)$.*

Bizonyítás. Legyen $f\colon (X, A) \to (Y, B)$ egy homotópia-ekvivalencia, legyen g az f homotópia-inverze. Ekkor

$$g \circ f \simeq \mathrm{id}_{(X,A)} \Longrightarrow g_\bullet \circ f_\bullet = \mathrm{id} ,$$

illetve

$$f \circ g \simeq \mathrm{id}_{(Y,B)} \Longrightarrow f_\bullet \circ g_\bullet = \mathrm{id}$$

így

$$f_\bullet\colon H_\bullet(X, A) \xrightarrow{\simeq} H_\bullet(Y, B) ,$$

amint azt állítottuk. □

4.7 Feladat *Bizonyítsuk be, hogy ha egy homológiaelméletre teljesülnek az (1)-(4) axiómák, akkor az (5) axióma automatikusan igaz véges unióra.*

4.76. Megjegyzés *Redukált homológiát eddig a szinguláris homológiaelméletre definiáltunk, most megmutatjuk, hogy az Eilenberg–Steenrod axiómák segítségével tetszőleges homológiaelméletre meg tudjuk csinálni.*

Legyen $X \neq \emptyset$ egy topologikus tér, P az egy pontból álló tér, $\epsilon\colon X \to P$ az egyetlen (egyben folytonos) leképezés. Ekkor az indukált

$$\epsilon_\bullet\colon H_\bullet(X, \emptyset) \longrightarrow H_\bullet(P, \emptyset)$$

homomorfizmus szürjektív, ugyanis ha $i\colon P \hookrightarrow X$ egy tetszőleges beágyazás, akkor

$$\epsilon \circ i = \mathrm{id}_P ,$$

így

$$\epsilon_\bullet \circ i_\bullet = \mathrm{id} \ .$$

Legyen

$$\widetilde{H}_0(X) \overset{def}{=} \mathrm{Ker}\,\epsilon_0 \ ,$$

, azaz definiáljuk $\widetilde{H}_0(X)$-et úgy, hogy a

$$0 \longrightarrow \widetilde{H}_0(X) \longrightarrow H_0(X,\emptyset) \xrightarrow{\epsilon_\bullet} \underbrace{H_0(P,\emptyset)}_{G} \longrightarrow 0$$

sorozat egzakt legyen.

Az iménti egzakt sorozat felhasadó, hiszen $\epsilon_\bullet \circ i_\bullet = \mathrm{id}$, azonban az indukált homomorfizmus függ i választásától, mindazonáltal

$$H_0(X,\emptyset) \ \simeq \ \widetilde{H}_0(X) \oplus G \ ,$$

ahol $G = H_0(P,\emptyset)$ a $H_\bullet$ homológiaelmélet együtthatócsoportja.

Az eddigieket tekintetbe véve legyenek

$$\begin{aligned} \widetilde{H}_p(X) \ &\overset{def}{=} \ H_p(X), \ \text{ha } X \neq \emptyset \ (p \neq 0) \ , \text{és} \\ \widetilde{H}_p(X,A) \ &\overset{def}{=} \ H_p(X,A) \ \text{ha } A \neq \emptyset \ . \end{aligned}$$

4.8 Feladat (A redukált homológia egzakt sorozata) *Az iménti jelölésekkel igazoljuk az alábbiakat:*

1. *Az $(X,A) \to (P,P)$ leképezés az alábbi kommutatív diagramhoz vezet:*

$$\begin{tikzcd}
 & & \widetilde{H}_0(A) \arrow[r] \arrow[d] & \widetilde{H}_0(X) \arrow[dr] & & \\
 & H_1(X,A) \arrow[r] \arrow[ur] \arrow[d] & H_0(A,\emptyset) \arrow[r] \arrow[d] & H_0(X,\emptyset) \arrow[r] \arrow[d] & H_0(X,A) \arrow[r] \arrow[d] & H_{-1}(A,\emptyset) \\
0 \arrow[r, "="] & H_1(P,P) \arrow[r] & H_0(P,\emptyset) \arrow[r] & H_0(P,\emptyset) \arrow[r] & H_0(P,P) \arrow[r, "="] & 0
\end{tikzcd}$$

2. *A fenti diagram segítségével igazoljuk a redukált homológia hosszú egzakt sorozatának az egzaktságát.*

4.4. A homológia- és homotópia-csoportok kapcsolata: a Hurewicz-homomorfizmus

Természetesen felmerülő kérdés, hogy vajon létesíthető valamilyen kapcsolat topologikus tereknek az eddigiekben definiált algebrai invariánsai között. A kérdés már a terület hajnalán felvetődött, és a pozitív választ Hurewicz tétele fogalmazza meg.

Mi most a Hurewicz-tételnek az 'egydimenziós' változatával, vagyis egy topologikus tér fundamentális csoportjának és az első homológiacsoportjának a kapcsolatával fogunk foglalkozni. Úgy is fogalmazhatunk, hogy adott X topologikus tér esetén megpróbáljuk a $H_1(X)$ csoportot meghatározni az X (alkalmas bázisponthoz tartozó) fundamentális csoportjának ismeretében. Mindazonáltal az eredmény általánosítható magasabb homotópiacsoportok és homológiacsoportok kapcsolatára [Bre93, Section VII.10].

Mivel egyrészt a fundamentális csoport a bázispont választásán keresztül függ az X tér útösszefüggőségi komponenseitől, másrészt a homológia képzéséhez elegendő az útösszefüggőségi komponenseinek a homológiájának az ismerete, a továbbiakban feltesszük, hogy az X topologikus tér útösszefüggő, és rögzítünk egy $x_0 \in X$ bázispontot.

4.77. Tétel (Hurewicz) *Tetszőleges X útösszefüggő topologius tér és $x_0 \in X$ bázispont esetén*

$$\pi_1(X, x_0)/[\pi_1(X, x_0), \pi_1(X, x_0)] \simeq H_1(X) \ .$$

Először is egy algebrai megjegyzés: a homotópia- és homológiacsoportok közti összefüggést egy alkalmas csoporthomomorfizmus képében keressük. Mivel H_1 automatikusan kommutatív, a fundamentális csoport viszont nem, szükségünk lesz csoportok abelianizált, másképpen kommutatívvá tett változatára.

4.78. Definíció *Legyen G tetszőleges csoport. Ekkor*

$$\widetilde{G} \overset{def}{=} G/[G, G]$$

a G csoport abelianizált*ja, vagy kommutativvá tétele.*

4.79. Megjegyzés *A $[G, G]$ kommutátorrészcsoport definíciójából következik, hogy $\widetilde{G}$ abel-csoport.*

4.80. Megjegyzés (A kommutatívvá tétel univerzális tulajdonsága) *Legyen G tetszőleges csoport, A tetszőleges abel-csoport.*

Minden $\phi\colon G \to A$ csoporthomomorfizmus egyértelműen keresztülfaktorizálható a

$$\begin{array}{rcl} \kappa\colon G & \longrightarrow & \widetilde{G} \overset{def}{=} G/[G, G] \\ g & \mapsto & \overline{g} \end{array}$$

természetes leképezésen, vagyis minden ϕ esetén létezik pontosan egy

$$\widetilde{\phi} \colon \widetilde{G} \longrightarrow A$$

csoporthomomorfizmus, amelyre

$$\widetilde{\phi} \circ \kappa = \phi \ .$$

Ennek megfelelően a továbbiakban $\widetilde{\pi_1(X, x_0)}$ az adott fundamentális csoport abelianizáltját jelöli.

4.9 Feladat *Ellenőrizzük az 4.80. Megjegyzés állításait.*

Legyen tehát X útösszefüggő topologikus tér, $x_0 \in X$ rögzített. Először is szükségünk lesz némi előkészületre.

4.81. Lemma *Legyenek f, g X-beli utak úgy, hogy $f(1) = g(0)$. Ekkor az $f \star g - f - g$ 1-lánc határ.*

Bizonyítás. Belátjuk, hogy létezik olyan $c \in \Delta_2(X)$ 2-lánc, amelyre

$$\partial_2 c = f \star g - f - g \ .$$

Ehhez jelölje szokásos módon Δ a standard 2-szimplexet, $\sigma \colon \Delta \to X$ pedig az alábbi leképezést:

$$\sigma\Big|_{[e_0,e_1]} \stackrel{\text{def}}{=} f \ ,$$
$$\sigma\Big|_{[e_1,e_2]} \stackrel{\text{def}}{=} g \ .$$

Mivel $f(1) = g(0)$, ezért $\sigma\Big|_{[e_0,e_1]\cup[e_1,e_2]}$ folytonos. A Δ szimplex kimaradó részén definiáljuk a σ leképezést úgy, hogy az $[e_0, e_2]$-re merőleges szakaszokon legyen állandó. A kiterjesztés jóldefiniált, folytonos, és láthatóan

$$\sigma\Big|_{[e_0,e_2]} = f * g \ ,$$

továbbá

$$\partial\sigma = g - (f * g) + f \ ,$$

amint azt állítottuk. □

4.82. Következmény *Az iménti jelölésekkel $f \star g - (f + g)$ határ, vagyis*

$$f \star g \sim f + g \ .$$

4.83. Lemma *Ha f egy X-beli út, akkor $f + \tilde{f}$ határ. A konstans út is határ.*

Bizonyítás. Analóg a 4.81. Lemma bizonyításával. $\square$

4.84. Lemma *Legyenek f és g ismételten X-beli utak, melyekre*

$$f \simeq g \ \operatorname{rel} \partial I \ .$$

Ekkor $f \sim g$, vagyis ha f és g úthomotópok, akkor a különbségük határ.

Bizonyítás. Tekintsünk egy tetszőleges $F \colon I \times I \to X$ úthomotópiát f-ből g-be. Ekkor automatikusan

$$F\big|_{\{0\}\times I} \equiv \text{konstans} \ ,$$

így a hányadostopológia univerzális tulajdonságát használva azt kapjuk, hogy egyértelműen létezik egy

$$\sigma \colon \Delta_2 \longrightarrow X$$

függvény, amelyre az alábbi diagram kommutatív:

$$\begin{tikzcd} I \times I \arrow[r, "q"] \arrow[dr, "F"'] & \Delta_2 \arrow[d, "\sigma"] \\ & X \end{tikzcd}$$

ahol a $q \colon I \times I \to \Delta_2$ hányadosleképezést úgy kapjuk, hogy az $I \times I$ négyzet két szomszédos csúcsát azonosítjuk.

A konstrukció alapján

$$\begin{aligned} \sigma\big|_{[e_0,e_1]} &= f \ , \\ \sigma\big|_{[e_0,e_2]} &= g \ , \end{aligned}$$

továbbá

$$\sigma\big|_{[e_1,e_2]} = \text{konstans},$$

hiszen a feltétel miatt F úthomotópia, tehát $F\big|_{\{1\}\times I}$ is állandó.

Mindezekből azt kapjuk, hogy

$$\partial\sigma = f - g + \text{konstans},$$

amiből az 4.83. Lemma miatt készen vagyunk, hiszen ott kiderült, hogy a konstans út határ, tehát akkor $f - g$ is az. $\square$

Legyen most $f\colon I \to X$ egy tetszőleges $x_0 \in X$ kezdőpontú hurok. Ekkor $\partial f = x_0 - x_0 = 0$, így f automatikusan egy ciklus lesz. A 4.84. Lemma miatt az a $\varphi\colon \pi_1(X, x_0) \to H_1(X; \mathbb{Z})$ függvény, amelyre:

$$\begin{aligned} \varphi\colon \pi_1(X, x_0) &\longrightarrow H_1(X; \mathbb{Z}) \\ [f] &\mapsto \langle f \rangle, \end{aligned}$$

jóldefiniált. Itt $\langle f \rangle$ átmenetileg az f elem homológiaosztályát jelöli.

Az alábbi egyszerű megfigyelés igen fontos.

4.85. Állítás *Az imént definiált $\varphi\colon \pi_1(X, x_0) \to H_1(X; \mathbb{Z})$ leképezés csoporthomomorfizmus.*

Bizonyítás. Legyenek f és g x_0-beli hurkok X-ben. Ekkor

$$\varphi([f] \star [g]) = \varphi([f \star g]) = \langle f \star g \rangle = \langle f \rangle + \langle g \rangle \ \in H_1(X; \mathbb{Z}) \ ,$$

ahol az utolsó egyenlőség a 4.81. Lemma következménye, az utolsó előtti pedig φ definíciója. $\square$

4.86. Megjegyzés (Hurewicz-leképezés) *Az 4.85. Állítás és a kommutatívvá tétel következményeként φ indukál egy*

$$\widetilde{\varphi}\colon \pi_1\widetilde{(X, x_0)} \longrightarrow H_1(X; \mathbb{Z})$$

homomorfizmust, az ún. Hurewicz-leképezést.

Az elkövetkezőkben megmutatjuk, hogy a Hurewicz-leképezés bijektív.

4.87. Tétel (Hurewicz tétele) *Legyen X tetszőleges útösszefüggő topologikus tér, $x_0 \in X$ szabadon választott bázispont. Ekkor a*

$$\widetilde{\varphi}\colon \pi_1\widetilde{(X, x_0)} \longrightarrow H_1(X; \mathbb{Z})$$

Hurewicz-leképezés egy izomorfizmus.

Bizonyítás. A bizonyítás konstruktív; konkrétan megadjuk $\widetilde{\varphi}$ inverzét.

Először is tetszőleges $x \in X$ ponthoz rögzítsünk egy $\lambda_x\colon I \to X$ utat x_0-ból x-be; a λ_{x_0} út legyen a konstans leképezés.

Tetszőleges $f \in \Delta_1(X)$ esetén legyen

$$\hat{f} \stackrel{\text{def}}{=} \lambda_{f(0)} \star f \star \widetilde{\lambda}_{f(1)} \ ,$$

ez egy x_0-beli hurok. Legyen továbbá

$$\psi(f) \stackrel{\text{def}}{=} [\hat{f}] \in \widetilde{\pi_1(X, x_0)} \ .$$

Ez utóbbi leképezést ki szeretnénk terjeszteni $\Delta_1(X)$-re, ami rendben lesz, mivel $\widetilde{\pi_1(X, x_0)}$ abel csoport, és $\Delta_1(X)$ szabad abel csoport az 1-szimplexeken mint bázison.

Az 4.88. Lemma alapján teljesül az is, hogy a ψ függvény az 1-határokat a $\widetilde{\pi_1(X, x_0)}$ csoport egységelemébe képzi, így ψ indukál egy

$$\psi_* \colon H_1(X;\mathbb{Z}) \longrightarrow \widetilde{\pi_1(X, x_0)} \qquad \square$$

homomorfizmust. Ez lesz a Hurewicz-leképezés inverze, amely állítás egyik felét a 4.89. Lemma segítségével láthatjuk.

A másik irányhoz legyen f egy x_0-beli hurok, ekkor

$$\begin{aligned}
(\psi \circ \varphi)([f]) &= \psi(\langle f \rangle) \\
&= \left[\lambda_{x_0} \star f \star \widetilde{\lambda}_{x_0}\right] \\
&= [f],
\end{aligned}$$

mivel λ_{x_0} a konstans út.

4.88. Lemma *A*

$$\psi \colon \Delta_1(X) \longrightarrow \widetilde{\pi_1(X, x_0)}$$

függvény az 1*-határokat a* $\widetilde{\pi_1(X, x_0)}$ *csoport egységelemébe képezi.*

Bizonyítás. Legyen $\sigma \colon \Delta_2 \to X$ egy szinguláris 2-szimplex, $\sigma(e_i) = y_i$, $f = \sigma^{(2)}$, $g = \sigma^{(0)}$ és $h = \widetilde{\sigma^{(1)}}$.

Ekkor

$$
\begin{aligned}
\psi\left(\partial\sigma\right) &= \psi\left(\sigma^{(0)} - \sigma^{(1)} + \sigma^{(2)}\right) \\
&= \psi\left(g - \widetilde{h} + f\right) = \psi\left(f + g - \widetilde{h}\right) \quad \text{(a jelölés miatt)} \\
&= \psi(f)\psi(g)\psi(\widetilde{h})^{-1} \quad \text{(mivel } \psi \text{ homomorizmus)} \\
&= \left[\hat{f}\right]\left[\hat{g}\right]\left[\hat{\widetilde{h}}\right]^{-1} \text{(}\psi \text{ definíciója alapján)} \\
&= \left[\hat{f}\right]\left[\hat{g}\right]\left[\widetilde{\hat{\widetilde{h}}}\right] \\
&= \left[\hat{f} \star \hat{g} \star \widetilde{\hat{\widetilde{h}}}\right] \\
&= \left[\lambda_{y_0} \star f \star \widetilde{\lambda}_{y_1} \star \lambda_{y_1} \star g \star \widetilde{\lambda}_{y_2} \star \widetilde{\left(\lambda_{y_0} \star \widetilde{h} \star \widetilde{\lambda}_{y_2}\right)}\right] \\
&= \left[\lambda_{y_0} \star f \star g \star h \star \widetilde{\lambda}_{y_0}\right] \\
&= [\text{konstans}]\ .
\end{aligned}
$$

4.89. Lemma *Az eddigi jelölésekkel teljesülnek az alábbiak.*

1. *Ha σ 1-szimplex, akkor*

$$(\widetilde{\varphi} \circ \psi)(\sigma) = [\sigma] + \lambda_{\sigma_0} - \lambda_{\sigma_1} = \sigma - \lambda_{\partial\sigma}\ .$$

2. *Ha $c \in \Delta_1(X)$, akkor $(\varphi \circ)\psi(c) = \langle c - \lambda_{\partial c}\rangle$.*

3. *Ha $c \in Z_1(X)$, akkor $(\varphi \star \psi)(c) = \langle c \rangle$.*

Bizonyítás. Az állítások az alábbi számolásból következnek:

$$
\begin{aligned}
(\widetilde{\varphi} \circ \psi)(\sigma) &= \widetilde{\varphi}\left[\lambda_{\sigma(0)} \star \sigma \star \widetilde{\lambda}_{\sigma(1)}\right] \\
&= \left\langle \lambda_{\sigma(0)} \star \sigma \star \widetilde{\lambda}_{\sigma(1)} \right\rangle \\
&= \left\langle \lambda_{\sigma(0)} + \sigma + \widetilde{\lambda}_{\sigma(1)} \right\rangle \quad \text{(az 4.82.. Következmény miatt)} \\
&= \left\langle \lambda_{\sigma(0)} + \sigma - \lambda_{\sigma(1)} \right\rangle \quad \text{(az 4.83.. Lemma miatt)}
\end{aligned}
$$

Ezel a lemmát beláttuk. □

A Hurewicz-tétel egy igen hasznos következménye, hogy meg tudjuk határozni a körvonal első homológiacsoportját. Mivel $H_0(\mathbb{S}^1;\mathbb{Z}) = \mathbb{Z}$ (hiszen $\mathbb{S}^1$ útösszefüggő, és mint belátható, egy sima sokaság homológiacsoportjai a dimenzió fölötti fokszámokban mind nullák, ezzel a körvonal összes nemnulla homológiacsoportját ismerjük.

4.90. Következmény *A körvonal homológiacsoportjai az alábbi módon alakulnak:*

$$H_i(\mathbb{S}^1;\mathbb{Z}) = \begin{cases} \mathbb{Z} & \textit{ha } i=0 \\ \mathbb{Z} & \textit{ha } i=1 \\ 0 & \textit{ha } i<0 \textit{ vagy } i>1. \end{cases}$$

Bizonyítás. Az $i = 0$ esetet korábban láttuk, az $i = 1$ eset pedig a Hurewicz-tétel, illetve a

$$\pi_1(\mathbb{S}^1) \simeq \mathbb{Z}$$

eredmény következménye. Tetszőleges topologikus tér esetén a negatív indexű szinguláris homológiacsoportok nullák, a

$$H_i(\mathbb{S}^1;\mathbb{Z}) = 0 \quad \text{ha } i > 1$$

állításhoz lásd például [Bre93, Theorem 6.6]. □

III. rész

Szimplektikus algebra és geometria

5. fejezet

Szimplektikus lineáris algebra

A fejezet során a szimplektikus lineáris algebra legegyszerűbb tudnivalóival ismerkedünk meg. Az alkalmazásokat szem előtt tartva a valós és komplex számtestek felett dolgozunk, de a tárgyalt anyag döntő többsége igaz marad tetszőleges test felett. Az előforduló vektorterek véges-dimenziósak, az ettől való eltérést jelezzük.

Először is idézzük fel az alternáló formák definícióját.

5.1. Definíció *Legyen V egy n-dimenziós valós vektortér,*

$$\omega\colon V \times V \longrightarrow \mathbb{R}$$

egy bilineáris leképezés. Azt mondjuk, hogy ω ferdén szimmetrikus *vagy* alternáló*, ha*

$$\omega(v,v) = 0 \quad \text{minden } v \in V \text{ esetén.}$$

5.2. Megjegyzés *Mivel az alaptest karakterisztikája nem kettő, az iménti definíció ekvivalens azzal, hogy*

$$\omega(u,v) = -\,\omega(v,u) \quad \text{minden } u,v \in V \text{ esetén.}$$

Ez a következőképpen látható: egyfelől az $u = v$ választással

$$\omega(u,u) = -\,\omega(u,u) \quad \Rightarrow \quad \omega(u,u) = 0\ ,$$

másrészt tetszőleges $u, v \in V$ vektorokra

$$\begin{aligned} 0 &= \omega(u+v, u+v) \\ &= \omega(u,u) + \omega(u,v) + \omega(v,u) + \omega(v,v) \\ &= 0 + \omega(u,v) + \omega(v,u) + 0\ , \end{aligned}$$

ahonnan

$$\omega(u,v) = -\,\omega(v,u)$$

következik.

5.3. Tétel (Ferdén szimmetrikus bilineáris formák alaptétele) *Legyen V egy véges-dimenziós valós vektortér, $\omega : V \times V \to \mathbb{R}$ egy ferdén szimmetrikus bilineáris forma. Ekkor létezik V-nek egy*

$$e_1, \ldots, e_m, f_1, \ldots, f_m, g_1, \ldots, g_k$$

bázisa, amelyre

$$\begin{cases} \omega(g_i, v) = 0 & \textit{minden } 1 \le i \le k \textit{ és } v \in V \textit{ esetén,} \\ \omega(e_i, e_j) = \omega(f_i, f_j) = 0 & \textit{minden } 1 \le i, j \le m \textit{ esetén,} \\ \omega(e_i, f_j) = \delta_{ij} & \textit{minden } 1 \le i, j \le m \textit{ esetén.} \end{cases}$$

5.4. Megjegyzés *Tetszőleges $\phi \in \mathrm{Bil}_2(V, \mathbb{R}) \stackrel{def}{=} L(V, V; \mathbb{R})$ esetén definiálhatjuk ϕ* radikálj*át:*

$$\mathrm{Rad}(\phi) \stackrel{def}{=} \{u \in V \mid \phi(u, v) = 0 \textit{ minden } v \in V \textit{ esetén}\} \subseteq V \ .$$

Egy bilineáris forma radikálja lineáris altér.

A 5.3. Tételben a $g_1, \ldots, g_k$ vektorok $\mathrm{Rad}(\omega)$ *egy bázisát alkotják.*

5.5. Megjegyzés *Az alaptételben szereplő bázis távolról sem egyértelmű. Például a g_i elemek* $\mathrm{Rad}(\omega)$ *egy tetszőleges más bázisával helyettesíthetők, de még a* $\mathrm{Rad}(\omega) = 0$ *esetben is sok, a 5.3. Tételben szereplő tulajdonśagokkal rendelkező bázist tudunk konstruálni.*

Ezzel együtt az irodalomban egy fenti típusú bázist gyakran kanonikus*nak neveznek.*

5.6. Megjegyzés *Az ω bilineáris forma mátrixa az e_i, f_j, g_l bázisban az alábbi módon néz ki.*

$$\begin{pmatrix} 0 & \mathrm{Id} & 0 \\ -\mathrm{Id} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

5.7. Definíció *Legyen V valós vektortér (nem feltétlenül véges dimenziós). Egy $\phi \in \mathrm{Bil}_2(V, \mathbb{R})$ bilineáris formát* nemelfajuló*nak hívunk, ha $\mathrm{Rad}(\phi) = 0$, másképp: minden nemnulla $u \in V$ vektorhoz létezik $v \in V$, amelyre $\phi(u, v) \neq 0$.*

Egy nemelfajuló ferdén szimmetrikus bilineáris formát szimplektikus formának *nevezünk.*

Tetszőleges $W \le V$ altér esetén jelölje

$$W^{\perp} \stackrel{def}{=} \{v \in V \mid \phi(v, w) = 0 \textit{ minden } w \in W\textit{-re}\}$$

a W-re merőleges alteret.

5.8. Lemma *Az iménti jelölésekkel $W^{\perp}$ egy lineáris altér V-ben. Ha $\phi|_W$ nemelfajuló, akkor $W \cap W^{\perp} = 0$; ha ϕ nemelfajuló, akkor $V = W \oplus W^{\perp}$.*

Bizonyítás. Tegyük föl, hogy $v_1, v_2 \in W^\perp$, α_1, α_2 valós számok, $w \in W$ tetszőleges. Ekkor
$$\phi(\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2, w) = \alpha_1 \phi(v_1, w) + \alpha_2 \phi(v_2, w) = 0 \ ,$$
s így $\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 \in W^\perp$.

Legyen $\phi|_W$ nemelfajuló, $v \in W \cap W^\perp$. Mivel $v \in W^\perp$, $\phi(v, w) = 0$ minden $w \in W$ esetén, vagyis $v \in \mathrm{Rad}(\phi|_W)$. Viszont $\phi|_W$ nemelfajuló, másképpen $\mathrm{Rad}(\phi|_W) = 0$, tehát $v = 0$.

Tegyük most fel, hogy ϕ nemelfajuló, és tekintsük az alábbi diagramot:

$$V \xrightarrow{\widetilde{\phi}} V^* \xrightarrow{\pi} W^* \ ,$$

ahol $\pi \colon V^* \to W^*$ a lineáris leképezések megszorításábó adódó természetes szürjekció. Vegyük észre, hogy $\mathrm{Ker}(\pi \circ \widetilde{\phi}) = W^\perp$, továbbá $\mathrm{im}(\pi \circ \widetilde{\phi}) = W^*$, mivel $\widetilde{\phi}$ és π egyaránt szürjektívek.

A homomorfizmus-tételt alkalmazva a $\pi \circ \widetilde{\phi}$ leképezésre kapjuk, hogy

$$\dim V = \dim \mathrm{Ker}(\pi \circ \widetilde{\phi}) + \dim \mathrm{im}(\pi \circ \widetilde{\phi}) = \dim W^\perp + \dim W^* = \dim W^\perp + \dim W \ .$$

Ebből, és a korábban megállapított $W \cap W^\perp = 0$ összefüggésből következik, hogy $V = W \oplus W^\perp$. □

5.9. Következmény *Ha ω egy szimplektikus bilineáris forma a V vektortéren, $W \leq V$, akkor*
$$\dim W + \dim W^\perp = \dim V \ .$$

Bizonyítás. Felhasználva, hogy $\mathrm{Rad}(\omega) \leq V$ egy lineáris altér, legyen $g_1, \ldots, g_k$ ennek egy tetszőleges bázisa. Ezután vegyünk egy $W \subseteq V$ alteret, amelyre

$$V = \mathrm{Rad}(\omega) \oplus W \ .$$

Ekkor $\omega|_W$ nemelfajuló, hiszen ha $\omega(u, w) = 0$ minden $w \in W$ esetén valamely $u \in W$-re, akkor egyszerre $\omega(u, v) = 0$ minden $v \in V$-re is, így $u \in \mathrm{Rad}(\omega)$, amiből $\mathrm{Rad}(\omega) \cap W = 0$ miatt $u = 0$ következik.

Válasszunk egy tetszőleges $0 \neq e_1 \in W$ vektort. Mivel $\omega|_W$ nemelfajuló, létezik $f_1 \in W$, amelyre
$$\omega(e_1, f_1) \neq 0 \ .$$
Természetesen ebből $f_1 \neq 0$ is azonnal következik. Az általánosság megsértése nélkül azt is feltehetjük, hogy $\omega(e_1, f_1) = 1$.

Legyen
$$W_1 \stackrel{\mathrm{def}}{=} \langle e_1, f_1 \rangle \ ,$$

és jelölje $W_1^\perp$ a W_1 altér ortogonálisát W-ben. Válasszunk egy nullától különböző $e_2 \in W_1^\perp$ elemet. Ekkor a már látott érvelés szerint létezik olyan $f_2 \in W_1^\perp$ elem, amelyre

$$\omega(e_2, f_2) = 1 \ ,$$

speciálisan $f_2 \neq 0$.

Legyen most

$$W_2 \stackrel{\text{def}}{=} \langle e_2, f_2 \rangle \ ,$$

$W_2^\perp$ pedig a W_2-re merőleges alteret W_1-ben, és így tovább. Mivel a kiindulásként vett V vektortér dimenziója véges, az iménti eljárás véges sok lépésben véget ér, és egy

$$V = \mathrm{Rad}(\omega) \oplus W_1 \oplus W_2 \oplus \ldots \oplus W_m$$

felbontást eredményez, ahol a direkt összeadandók páronként ω-ortogonálisak egymásra, és minden $1 \leq i \leq m$ esetén W_i-nek van ogy e_i, f_i bázisa, ahol $\omega(e_i, f_i) = 1$. Ezzel a tételt bebizonyítottuk. $\square$

5.10. Megjegyzés *Az*

$$m \stackrel{def}{=} \frac{1}{2}(\dim V - \dim \mathrm{Rad}(\omega))$$

az ω alternáló forma egy invariánsa, amelyet ω rang*jának nevezünk.*

5.11. Megjegyzés *Ha (V, ω) egy szimplektikus vektortér, akkor* $\dim V = 2m$ *páros szám.*

5.12. Megjegyzés *Tetszőleges $\phi : V \times V \to \mathbb{R}$ bilineáris leképezéshez tartozik egy*

$$\widetilde{\phi} : V \stackrel{\sim}{\longrightarrow} V^*$$

izomorfizmus, amit a

$$v \mapsto (u \mapsto \phi(u, v))$$

hozzárendelés definiál.

Látható, hogy ϕ pontosan akkor nemelfajuló, ha $\widetilde{\phi}$ injektív, ami az általunk főként tárgyalt véges-dimenziós esetben azt jelenti, hogy $\widetilde{\phi}$ izomorfizmus.

Ennek értelmében, ha (V, ω) egy szimplektikus vektortér, akkor jön vele egy rögzített

$$\widetilde{\omega} : V \longrightarrow V^*$$

izomorfizmus, amelynek segítségével azonosíthatjuk a V és V^* vektortereket. Ennek az izomorfizmusnak a szimplektikus geometriában, s ily módon az elméleti fizikában kitüntetett szerepe van.

5.13. Megjegyzés *Szimplektikus vektorterek esetén a 5.3. Tétel megad egy*

$$e_1, \ldots, e_m, f_1, \ldots, f_m$$

bázist, amelynek elemeire

$$\omega(e_i, e_j) = \omega(f_i, f_j) = 0 \ , \ \omega(e_i, f_j) = \delta_{ij}$$

teljesül. Egy ilyen bázist szimplektikus bázis*nak nevezünk, erre nézve az* ω *forma mátrixa*

$$\begin{pmatrix} 0 & \mathrm{Id} \\ -\mathrm{Id} & 0 \end{pmatrix} .$$

A továbbiakban csak szimplektikus vektorterekkel fogunk foglalkozni.

5.14. Megjegyzés *Ha* (V, ϕ) *egy nemelfajuló szimmetrikus bilineáris formával ellátott vektortér, akkor ez a tulajdonság öröklődik minden* $W \leq V$ *altérre, azaz* $\phi|_W$ *egy nemelfajuló szimmetrikus bilineáris forma* W*-n.*

Ez határozottan nem igaz szimplektikus vektorterek esetén: ha például $\dim(V, \omega) = 4$, e_1, e_2, f_1, f_2 *egy szimplektikus bázis, akkor ugyan*

$$\omega|_{\langle e_1, f_1 \rangle} \ \text{nemelfajuló,}$$

azonban

$$\omega|_{\langle e_1, e_2 \rangle} \equiv 0 \ .$$

5.1 Feladat *Igazoljuk a fenti megjegyzés állításait.*

5.15. Definíció (Szimplektikus vektorterek alterei) *Legyen* (V, ω) *egy szimplektikus vektortér,* $W \leq V$ *lineáris altér. Ekkor*

1. W szimplektikus, *ha* $\omega|_W$ *nemelfajuló,*
2. W izotróp, *ha* $\omega|_W \equiv 0$,
3. W koizotróp, *ha* $W^\perp \subseteq W$, *és*
4. W Lagrange-féle, *ha* $W^\perp = W$.

5.2 Feladat *Legyen* (V, ω) *egy szimplektikus vektortér,* $W, W_1, W_2 \leq V$*. Ellenőrizzük az alábbi állításokat.*

1. $W \cap W^\perp$ *nem feltétlenül a* 0 *altér.*
2. *Ha* $W_1 \subseteq W_2$*, akkor* $W_2^\perp \subseteq W_1^\perp$.

5.3 Feladat *Az eddigi jelölésekkel*

1. *$W \subseteq (V, \omega)$ pontosan akkor szimplektikus, ha $W \cap W^{\perp} = 0$, ami pontosan akkor teljesül, amennyiben $W \oplus W^{\perp} = V$.*

2. *W pontosan akkor izotróp, ha $W \subseteq W^{\perp}$; ebben az esetben $W \leq \frac{1}{2} \dim V$.*

3. *Ha $\operatorname{codim}_V W = 1$, akkor W koizotróp V-ben.*

4. *W pontosan akkor Lagrange-féle, ha izotróp és $\dim W = \frac{1}{2} \dim V$.*

5.16. Definíció *Legyenek (V_1, ω_1) és (V_2, ω_2) szimplektikus vektorterek. Egy $\phi : V_1 \to V_2$ lineáris leképezést* szimplektikus*nak hívunk, ha*

$$\omega_1 = \phi^* \omega_2 \ ,$$

azaz minden $u, v \in V_1$ esetén

$$\omega_1(u, v) = \omega_2(\phi(u), \phi(v)) \ .$$

Egy invertálható szimplektikus lineáris leképezést szimplektomorfizmus*nak vagy* szimplektikus izomorfizmus*nak nevezünk.*

5.17. Megjegyzés *Ha (V, ω) egy $2n$-dimenziós szimplektikus vektortér, akkor*

$$(V, \omega) \simeq (\mathbb{R}^{2n}, \omega_0) \ ,$$

ahol ω_0 az alábbi módon definiált ún. standard szimplektikus forma*: Legyen $e_1, \ldots, e_n$ az $\mathbb{R}^{2n}$ valós vektortér kanonikus bázisa. Ekkor ω_0-t a következő mátrix adja meg:*

$$\begin{pmatrix} 0 & \mathrm{Id} \\ -\mathrm{Id} & 0 \end{pmatrix} \ .$$

Ez azt is jelenti egyben, hogy minden páros dimenzióban (szimplektikus izomorfizmus erejéig) pontosan egy szimplektikus vektortér van.

5.18. Megjegyzés *Legyen mint mindig V egy n-dimenziós valós vektortér, és tekintsük a duális teréhez rendelt $\wedge^{\bullet} V^*$ külső algebrát. Ez természetes módon felbomlik mint direkt összeg:*

$$\wedge^{\bullet} V^* = \bigoplus_{k=0}^{n} \wedge^k V^* \ ,$$

ahol a $\wedge^k V^* \simeq (\wedge^k V)^*$ vektorteret tekinthetjük a V-n értelmezett

$$\alpha : \underbrace{V \times \ldots \times V}_{k \times} \longrightarrow \mathbb{R}$$

alternáló multilineáris formák lineáris terének.

Az alternáló formák definíciójából azonnal következik, hogy egy alternáló forma nem más, mint $\wedge^2 V^*$ egy eleme, egy szimplektikus forma pedig $\wedge^2 V^*$ egy nemelfajuló eleme.

Szimplektikus formák egy igen fontos tulajdonsága az alábbi megfigyelés.

5.4 Feladat *Legyen* (V, ω) *egy* n*-dimenziós szimplektikus vektortér. Ekkor*

$$\omega \wedge \ldots \wedge \omega \in \wedge^n V^* \simeq \mathbb{R}$$

nem nulla.

6. fejezet

Szimplektikus geometriai bevezető

Az alábbiakban a szimplektikus lineáris algebrát fogjuk kiterjeszteni sima sokaságokra. Ehhez ismertnek tekintjük a differenciálható sokaságok elméletének alapjait. Az egyszerűség kedvéért C^∞-sokaságokkal fogunk foglalkozni.

A jegyzet korábbi fejezeteitől eltérően feltételezni fogunk egy alapos differenciálgeometriai előképzettséget, ugyanakkor szaporodni fognak a nem bizonyított eredmények. Ezek elsősorban informćióforrásként szolgálnak, nem fogjuk őket más bizonyítások részeként felhasználni. A szimplektikus geometriai részek erősen támaszkodnak a [CdS01] forrásra.

6.1. Definíció (Szimplektikus sokaságok) *Legyen M egy sima sokaság, ω egy sima 2-forma M-en. Azt mondjuk, hogy ω* szimplektikus*, ha nemelfajuló és zárt. Ez esetben az (M, ω) párt* szimplektikus sokaság*nak hívjuk.*

6.2. Megjegyzés *Vegyük észre a globális feltétel (ω zárt) megjelenését.*

6.3. Megjegyzés *Emlékeztetőül: az, hogy ω egy sima 2-forma M-en, nem jelent mást, minthogy minden $p \in M$ esetén*

$$\omega_p : T_pM \times T_pM \longrightarrow \mathbb{R}$$

ferdén szimmetrikus bilineáris forma, amely p-vel simán változik.

6.4. Megjegyzés *Szimplektikus lineáris algebrában láttuk, hogy egy szimplektikus vektortér dimenziója mindig páros. Emiatt viszont*

$$\dim M = \dim T_pM$$

is páros szám kell, hogy legyen.

Az alábbi példa alapvető jelentőségű.

6.5. Példa *Legyen $M = \mathbb{R}^{2n}$, és legyenek $x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_n$ koordináták $\mathbb{R}^{2n}$-en. Tekintsük az*

$$\omega_0 \overset{def}{=} \sum_{i=1}^{n} dx_i \wedge dy_i$$

sima 2-formát $\mathbb{R}^{2n}$-en.

Minden $p \in \mathbb{R}^{2n}$ esetén a

$$T_p\mathbb{R}^{2n} = \mathbb{R}^{2n}$$

kanonikus izomorfizmust felhasználva

$$\omega_0|_{T_p\mathbb{R}^{2n}} : \mathbb{R}^{2n} \times \mathbb{R}^{2n} \longrightarrow \mathbb{R}$$

nem más, mint a standard szimplektikus forma, ily módon rögtön látszik, hogy nemelfajuló.

Másrészt

$$\begin{aligned} d\omega_0 &= d(\sum_{i=1}^{n} dx_i \wedge dy_i) \\ &= \sum_{i=1}^{n} d(dx_i \wedge dy_i) \\ &= \sum_{i=1}^{n} ((ddx_i) \wedge dy_i - dx_i \wedge (ddy_i)) \\ &= 0 \ , \end{aligned}$$

így ω_0 zárt is egyben, tehát $(\mathbb{R}^{2n}, \omega_0)$ egy szimplektikus sokaság.

6.6. Példa *Az előző fontos példa egy másik megfogalmazása az alábbi. Legyen $M = \mathbb{C}^n$ mint sima valós sokaság a $z_1, \ldots, z_n, \overline{z}_1, \ldots, \overline{z}_n$ koordinátafüggvényekkel. Egy közvetlen számolás vagy a*

$$z_i = x_i + iy_i \ , \ \overline{z}_i = x_i - iy_i$$

összefüggések mutatják, hogy

$$\omega_0 \overset{def}{=} \sum_{i=1}^{n} dz_i \wedge d\overline{z}_i$$

egy szimplektikus forma $\mathbb{C}^n$-en.

6.7. Példa *Egy további klasszikus elemi példa szimplektikus sokaságra a kétdimenziós gömbfelület $\mathbb{S}^2$. Legyen*

$$M \overset{def}{=} \mathbb{S}^2 = \left\{ (x_1, x_2, x_3) \mid x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1 \right\} \subseteq \mathbb{R}^3 \ ,$$

és $p \in \mathbb{S}^2$ egy tetszőleges pont. Ekkor a $T_p\mathbb{S}^2$ érintőteret azonosíthatjuk a

$$\left\{ v \in \mathbb{R}^3 \mid p \perp v \right\}$$

vektortérrel; ezen azonosítást kihasználva legyen

$$\omega_p(v_1, v_2) \stackrel{def}{=} \langle p, v_1 \times v_2 \rangle$$

egy $T_p\mathbb{S}^2 \times T_p\mathbb{S}^2 \to \mathbb{R}$ bilineáris forma. Az ily módon kapott $\mathbb{S}^2$-en értelmezett ω 2-forma zárt, mivel minden 2-forma zárt egy kétdimenziós sokaságon, és nemelfajuló is, mert

$$\langle p, v_1 \times v_2 \rangle \neq 0 \ ,$$

amennyiben például $v_1 \neq 0$ és $v_2 = v_1 \times p$. Így tehát $(\mathbb{S}^2, \omega)$ egy szimplektikus sokaság.

6.8. Definíció *Legyenek (M_1, ω_1) és (M_2, ω_2) szimplektikus sokadágok, $\phi : M_1 \to M_2$ egy sokaságok közti sima leképezés. Azt mondjuk, hogy ϕ* szimplektikus, *ha*

$$\phi^* \omega_2 = \omega_1 \ .$$

Egy szimplektikus leképezést szimplektomorfizmus*nak hívunk, ha diffeomorfizmus is egyben.*

6.9. Megjegyzés *Emlékezzünk rá, hogy*

$$(\phi^* \omega_2)_p(v_1, v_2) \stackrel{def}{=} (\omega_2)_{\phi(p)}(d\phi_p(v_1), d\phi_p(v_2))$$

minden $p \in M$ és $v_1, v_2 \in T_pM$ esetén.

A szimplektikus geometria egy nagy része azzal foglalkozik, hogy a szimplektikus sokaságokat szimplektomorfizmus erejéig osztályozza. A lokális kérdésre Darboux tétele ad azonnali választ.

6.10. Tétel (Darboux tétele) *Legyen (M, ω) egy $2n$-dimenziós szimplektikus sokaság, $p \in M$ tetszőleges. Ekkor létezik p-nek olyan*

$$(\mathcal{U}, x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_n)$$

koordinátakörnyezete, amelyre $\omega|_{\mathcal{U}}$ szimplektomorf a $\sum_{i=1}^n dx_i \wedge dy_i$ standard szimplektikus formával.

Darboux tételét nem bizonyítjuk be, a jelzett irodalomban igen alaposan van tárgyalva.

6.11. Megjegyzés *Az 6.10. Tételt úgy is megfogalmazhatjuk, hogy a szimplektikus sokaságoknak egy lokális invariánsa van, a dimenzió; vagyis minden dimenzióban pontosan egy lokális modell létezik.*

A szimplektikus geometria mögötti egyik fő motiváció, és a szimplektikus sokaságokra az egyik legfontosabb példa egy sima sokaság koérintőtere.

6.12. Példa (Sokaság koérintőterének szimplektikus struktúrája) *Legyen X egy n-dimenziós sima sokaság, $M \stackrel{def}{=} T^*X$. Megmutatjuk, hogyan látható el M egy kanonikus szimplektikus struktúrával.*

Tegyük fel, hogy X sima struktúrája

$$(\mathcal{U}, x_1, \dots, x_n)$$

koordinátakörnyezetekkel van megadva. Másszóval $\mathcal{U} \subseteq \mathbb{R}^n$ nyílt halmaz, és

$$(x_1, \dots, x_n) \colon \mathcal{U} \longrightarrow \mathbb{R}^n$$

adja meg a sima struktúrát $\mathcal{U}$-n.

Emiatt minden $x \in \mathcal{U}$ pontban a

$$(dx_1)_x, \dots, (dx_n)_x$$

lineáris formák a T_x^*X koérintőtér egy bázisát alkotják, amely bázis x-szel simán változik.

Speciálisan, ha $\xi \in T_x^*X$ tetszőleges lineáris forma, akkor ξ egyértelműen írható

$$\xi = \sum_{i=1}^{n} \xi_i (dx_i)_x$$

alakba, ahol $\xi_1, \dots, \xi_n \in \mathbb{R}$.

Ez a kifejtés egy

$$\begin{array}{rcl} T^*\mathcal{U} & \longrightarrow & \mathbb{R}^{2n} \\ (x, \xi) & \mapsto & (x_1(x), \dots, x_n(x), \xi_1, \dots, \xi_n) \end{array}$$

leképezést indukál. Mivel $T^*\mathcal{U} \simeq \mathcal{U} \times \mathbb{R}^n$, $T^*\mathcal{U} \subseteq T^*X$ nyílt halmaz, és

$$(T^*\mathcal{U}, x_1, \dots, x_n, \xi_1, \dots, \xi_n)$$

egy koordinátakörnyezet lesz T^*X-en a szokásos differenciálható struktúrára nézve: ha $(\mathcal{U}', x_1', \dots, x_n')$ egy másik koordinátakörnyezet X-en, $(T^*\mathcal{U}', x_1', \dots, x_n', \xi_1', \dots, \xi_n')$ a neki megfelelő környezet $M = T^*X$-en, akkor az átmenetfüggvények simák, ugyanis ha $x \in \mathcal{U} \cap \mathcal{U}'$, $\xi \in T_x^*X$, akkor

$$\begin{aligned} \xi &= \sum_{i=1}^{n} \xi_i (dx_i)_x \\ &= \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \xi_i \left(\frac{\partial x_i}{\partial x_j'} \right)_x \cdot (dx_j')_x \\ &= \sum_{j=1}^{n} \xi_j' (dx_j')_x \ , \end{aligned}$$

ahol

$$\xi'_j = \sum_{i=1}^{n} \xi_i \left(\frac{\partial x_i}{\partial x'_j}\right)$$

sima minden $1 \leq j \leq n$ *esetén.*

Az iménti jelölésekkel legyen

$$\omega|_{T^*\mathcal{U}} \stackrel{def}{=} \sum_{i=1}^{n} dx_i \wedge d\xi_i \ .$$

Hogy ellenőrizhessük, hogy ω *az egész* T^*X *sokaságon jóldefiniált, a következő módon fogunk eljárni.*

Állítás.

1. $\alpha|_{T^*\mathcal{U}} \stackrel{def}{=} \sum_{i=1}^{n} \xi_i dx_i$ *egy jóldefiniált* 1*-formát ad meg* M*-en.*

2. $\omega = -d\alpha$.

A második állítás a könnyebb, mivel rögtön adódik, hogy

$$d\alpha = d(\sum_{i=1}^{n} \xi dx_i) = \sum_{i=1}^{n} d\xi_i \wedge dx_i = -\omega \ .$$

Az első állítás igazolásához emlékezzünk, hogy a ξ_i *és* ξ'_j *koordinátafüggvényeket a*

$$\xi'_j = \sum_{i=1}^{n} \xi_i \left(\frac{\partial x_i}{\partial x'_j}\right)$$

összefüggés köti össze. Mivel emellett

$$dx'_j = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial x'_j}{\partial x_i}\right) dx_i \ ,$$

azt kapjuk, hogy

$$\begin{aligned}
(\alpha'|_{T^*\mathcal{U}'})|_{T^*\mathcal{U}' \cap T^*\mathcal{U}'} &= \sum_{j=1}^{n} \xi'_j dx'_j \\
&= \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{n} \xi_i \left(\frac{\partial x_i}{\partial x'_j}\right) \left(\frac{\partial x'_j}{\partial x_i}\right) dx_i \\
&= (\alpha|_{T^*\mathcal{U}})|_{T^*\mathcal{U}' \cap T^*\mathcal{U}'} \ .
\end{aligned}$$

Ezzel mindkét állításunkat beláttuk, és igazoltuk, hogy $\omega = -d\alpha$ *egy jóldefiniált* 2*-forma* M*-en. Azonnal kapjuk, hogy* ω *zárt, és a lokális leírásból az is látható, hogy nemelfajuló, s így* (T^*X, ω) *egy szimplektikus sokaság. Az* α 1*-forma neve* tautologikus *vagy* Liouville-féle 1*-forma,* ω *pedig a* kanonikus szimplektikus forma $M = T^*X$*-en.*

6.13. Példa *Az előző példa jelentősége miatt megadjuk a koordinátamentes leírását is. Legyen tehát X egy sima sokaság, $M = T^*X$ a koérintőnyalábja,*

$$\pi : T^*X \longrightarrow X$$

a nyalábleképezés (amely minden koérintővektorhoz hozzárendeli a neki megfelelő X-beli pontot),

$$\sigma : X \hookrightarrow T^*X$$

pedig X-nek a nulla-szelésként történő beágyazása (vagyis minden $x \in X$ ponthoz hozzárendeljük az $(x, 0) \in T^*X$ koérintővektort). Ekkor

$$\pi \circ \sigma = \mathrm{id}_X \ .$$

A π és σ leképezések további leképezéseket indukálnak:

$$d\pi \colon T(T^*X) \longrightarrow TX \ ,$$

és

$$d\sigma \colon TX \hookrightarrow T(T^*X) \ ,$$

ahol

$$d\pi \circ d\sigma = \mathrm{id}_{TX} \ .$$

Vegyük észre, hogy $x \in X$ esetén

$$d\sigma_x \colon T_xX \hookrightarrow T_{(x,0)}T^*X \ ,$$

és $p = (x, \xi)$ esetén

$$d\pi_p = d\pi_{(x,\xi)} \colon T_{(x,\xi)}(T^*X) \twoheadrightarrow T_xX \ .$$

Ha $\eta \in T^*_{\pi(p)}X$, akkor a $d\pi_p$ szerint vett visszahúzását a

$$(d\pi_p)^*(\eta) \overset{def}{=} \eta \circ d\pi_p$$

formulával definiáljuk.

Egy $p = (x, \xi) \in T^*X$ pontban az α Liouville-formát az alábbi módon definiáljuk:

$$\alpha_p \overset{def}{=} (d\pi_p)^*\xi \in T^*_p(T^*X) \ .$$

Másképpen kifejezve, ha $v \in T_p(T^*X)$ egy érintővektor M-en, akkor

$$\alpha_p(v) = \xi((d\pi_p)(v)) \ .$$

Most igazoljuk, hogy α új és régi definíciói megegyeznek. Legyen, mint korábban, $(\mathcal{U}, x_1, \ldots, x_n)$ egy koordinátakörnyezet X-en, és $(T^*\mathcal{U}, x_1, \ldots, x_n, \xi_1, \ldots, \xi_n)$ a neki megfelelő koordinátakörnyezet T^*X-en.

A $\partial_{x_1}, \ldots, \partial_{x_n}, \partial_{\xi_1}, \ldots, \partial_{\xi_n}$ *bázisban a*

$$d\pi_p \colon T_p(T^*X) \longrightarrow T_{\pi(p)}X$$

lineáris leképezés a

$$(t_1, \ldots, t_n, \tau_1, \ldots, \tau_n) \mapsto (t_1, \ldots, t_n)$$

kifejezéssel van megadva.

Legyen $\xi \in T^*_{\pi(p)}X$*, úgy hogy*

$$\xi(\partial_{x_i}) = \xi_i \ .$$

Ekkor

$$\begin{aligned} \alpha_p(\partial_{x_i}) &= \xi(\partial_{x_i}) = \xi_i \\ \alpha_p(\partial_{\xi_i}) &= 0 \ , \end{aligned}$$

s így

$$\alpha_p = \left(\sum_{i=1}^{n} \xi_i dx_i \right)_p \ ,$$

amiből

$$\alpha = \sum_{i=1}^{n} \xi dx_i$$

következik, ahogy állítottuk.

Természetesen ekkor az is igaz, hogy ha az

$$\omega \overset{def}{=} -d\alpha$$

képlettel definiáljuk a kanonikus szimplektikus formát M*-en, akkor*

$$\omega = \sum_{i=1}^{n} dx_i \wedge d\xi_i$$

lokális koordinátákban.

A továbbiakban először is a kanonikus formák funktoriális tulajdonságait tárgyaljuk.

6.14. Lemma *Legyen* $f : X_1 \to X_2$ *egy sima sokaságok közti diffeomorfizmus,* $M_i \overset{def}{=} T^*X_i$*, jelölje* α_i *a Liouville-féle formát* M_i*-n, ahol* $i = 1, 2$*.*

Ekkor létezik pontosan egy $f_\# : M_1 \to M_2$ *diffeomorfizmus, amelyre a*

$$\begin{array}{ccc} M_1 & \xrightarrow{f_\#} & M_2 \\ {\scriptstyle \pi_1}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \pi_2} \\ X_1 & \xrightarrow{f} & X_2 \end{array}$$

diagramm kommutatív.

Bizonyítás. Legyen $p = (x, \xi) \in M_1 = T^*X_1$. Azt állítjuk, hogy

$$f_\#(p) = \left(f(x), \big((df_x)^{*-1}\big)\xi\right) .$$

Ehhez többek közt az is kell, hogy

$$f_\# \alpha_2 = \alpha_1 .$$

Legyenek $p_i = (x_i, \xi_i) \in M_i$ úgy, hogy $f_\#(p_1) = p_2$. Megmutatjuk, hogy

$$(df_\#)^*_{p_1}(\alpha_2)_{p_2} = (\alpha_1)_{p_1} .$$

A bizonyítás az alábbi:

$$\begin{aligned}
(df_\#)^*_{p_1}(\alpha_2)_{p_2} &= (df_\#)^*_{p_1}(d\pi_2)^*_{p_2}\xi_2 \\
&= (d(\pi_2 \circ f_\#))^*_{p_1}\xi_2 \\
&= (d(f \circ \pi_1))^*_{p_1}\xi_2 \\
&= (d\pi_1)^*_{p_1}(df)^*_{x_1}\xi_2 \\
&= (d\pi_1)^*_{p_1}\xi_1 \\
&= (\alpha_1)_{p_1} .
\end{aligned}$$

Az egyenlőségek során (időrendi sorrendben) az alábbiakat használtuk:

1. az α_2 forma definíciója,
2. a visszahúzás funktorialitása,
3. $\pi_2 \circ f_\# = f \circ \pi_1$,
4. a visszahúzás funktorialitása,
5. $f_\#$ definíciója,
6. Az α_1 forma definíciója. □

6.15. Következmény *Mivel*

$$f_\#^*\omega_2 = \omega_1 ,$$

$f_\#$ *szimplektomorfizmus.*

6.16. Példa *Legyen* $X_1 = X_2 = \mathbb{S}^1$. *Ekkor a* $T^*\mathbb{S}^1$ *érintőnyaláb diffeomorf* $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{R}$*-rel,*

$$\omega = d\theta \wedge d\xi$$

az $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{R}$*-beli térfogatforma. Ha* $f : \mathbb{S}^1 \to \mathbb{S}^1$ *egy diffeomorfizmus, akkor* $f_\# : \mathbb{S}^1 \times \mathbb{R} \to \mathbb{S}^1 \times \mathbb{R}$ *automatikusan egy szimplektomorfizmus lesz (mivel* $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{R}$ *egy térfogatmegőrző diffeomorfizmusa).*

A továbbiakban a szimplektikus és Kähler-geometriában egyaránt kitüntetett szerepet játszó Lagrange-részsokaságokkal fogunk foglalkozni.

6.17. Megjegyzés *Legyenek X,M sima sokaságok, $i : X \hookrightarrow M$ egy injektív leképezés. Azt mondjuk, hogy i egy* immerzió*, ha minden $p \in X$ pontban di_p injektív leképezés. Az i leképezés egy* beágyazás*, ha immerzió, és $i : X \to i(X) \subseteq M$ egy homeomorfizmus, illetve* zárt beágyazás*, ha egy proper injektív immerzió.*

6.1 Feladat *Adjunk példát olyan immerzióra, amely nem beágyazás.*

6.2 Feladat *Mutassuk meg, hogy i pontosan akkor zárt beágyazás, ha i beágyazás, és $i(X) \subseteq M$ zárt altér.*

6.3 Feladat *A fentiek közül melyik tulajdonság teljesül egy irracionális meredekségű egyenes képére $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$-ben?*

6.18. Megjegyzés *Az iménti jelölésekkel az M sokaság egy X részsokasága nem más, mint egy $i : X \hookrightarrow M$ zárt beágyazás.*

Ebben az esetben a p és $i(p)$ pontokat, illetve a T_pX és $(di)_p(T_pX) \subseteq T_{i(p)}M$ lineáris tereket azonosíthatjuk.

6.19. Definíció (Lagrange-féle részsokaságok) *Legyen (M, ω) egy $2n$-dimenziós szimplektikus sokaság, $i : Y \hookrightarrow M$ egy részsokaság. Azt mondjuk, hogy Y egy* Lagrange-féle részsokaság*, ha*

$$i^*\omega \equiv 0 \quad \textit{és} \quad \dim Y = \frac{1}{2} \dim M \ .$$

6.20. Megjegyzés *Az $i^*\omega \equiv 0$ feltétel azt takarja, hogy minden $p \in Y$ pontban*

$$\omega|_{T_pY} \equiv 0 \ .$$

6.21. Példa *Tetszőleges X sima sokaság esetén tekintsük az*

$$X_0 \overset{def}{=} \{(x, \xi) \in T^*X \mid \xi = 0 \in T_x^*X\}$$

úgynevezett nulla-szelést. Egy tetszőlegesen választott

$$(T^*\mathcal{U}, x_1, \ldots, x_n, \xi_1, \ldots, \xi_n)$$

koordinátakörnyezetben

$$X_0 \cap T^*\mathcal{U} = T^*\mathcal{U} \cap \{\xi_1 = \ldots = \xi_n = 0\} \ ,$$

ami miatt $\alpha = \sum_i \xi dx_i$ azonosan eltűnik az $X_0 \cap T^*\mathcal{U}$ halmazon.

Ha $i_0 : X_0 \hookrightarrow T^*X$ a természetes beágyazás, akkor

$$i_0^*\omega = i_0^* d\alpha = d(i_0^*\alpha) = 0 \ ,$$

mivel $i_0^*\alpha = 0$ az X_0 részsokaságon. Tekintve, hogy $\dim X_0 = \frac{1}{2} \dim T^*X$, azt kapjuk, hogy $X_0 \subseteq T^*X$ egy Lagrange-féle részsokaság.

Az előző érvelés általánosításaként azt kapjuk, hogy ha $\mu : X \to T^*X$ egy tetszőleges sima 1-forma,

$$X_\mu \overset{\text{def}}{=} \{(x, \mu(x)) \mid x \in X, \mu(x) \in T_x^*X\} \ ,$$

akkor igaz az alábbi eredmény.

6.22. Tétel *Az $X_\mu \subseteq T^*X$ részsokaság pontosan akkor Lagrange-féle, ha μ zárt.*

Lagrange-féle részsokaságok egy másik forrása az ún. konormális nyalábok.

6.23. Definíció (Konormális tér) *Legyen $Y \subseteq X$ egy részsokaság. Az $x \in Y$ pontbeli* konormális teret *az alábbi módon definiáljuk:*

$$N_x^*Y \overset{def}{=} \{\xi \in T_x^*X \mid \xi(v) = 0 \ \forall v \in T_xY\} \ .$$

6.24. Megjegyzés *Az*

$$N^*Y \overset{def}{=} \{(x, \xi) \in T_x^*X \mid x \in Y, \xi \in N_x^*Y\} \subseteq T^*X$$

részhalmaz T^*X egy részvektornyalábja.

6.4 Feladat *Igazoljuk, hogya fenti jelölésekkel N^*Y a T^*X sokaság egy n-dimenziós részsokasága.*

6.25. Állítás *Tekintsük az $i : N^*Y \hookrightarrow T^*X$ részsokaságot, és legyen α a tautologikus forma T^*X-en. Ekkor*

$$i^*\alpha \equiv 0 \ ,$$

azaz az N^*Y konormális nyaláb egy Lagrange-féle részsokaság.

Bizonyítás. Legyen $(\mathcal{U}, x_1, \ldots, x_n)$ egy koordinátakörnyezet X-en $x \in Y$ origóval, és tegyük fel, hogy

$$\mathcal{U} \cap Y = \mathcal{U} \cap \{x_{k+1} = \ldots = x_n = 0\}$$

valamely $1 \leq k \leq n$ esetén. Tekintsük a hozzá tartozó

$$(T^*\mathcal{U}, x_1, \ldots, x_n, \xi_1, \ldots, \xi_n)$$

T^*X-beli koordinátakörnyezetet. Erre igaz, hogy

$$N^*Y \cap T^*\mathcal{U} = T^*\mathcal{U} \cap \{x_{k+1} = \ldots = x_n = 0\} \cap \{\xi_1 = \ldots = \xi_k = 0\} \ .$$

Mivel

$$\alpha|_{T^*\mathcal{U}} = \sum_{i=1}^{n} \xi_i dx_i \ ,$$

így minden $p = (x, \xi) \in N^*Y$ esetén

$$(i^*\alpha)_p = \alpha_p|_{T_p(N^*Y)} = \sum_{i=k+1}^{n} \xi_i dx_i|_{\langle \partial_{x_j} | 1 \leq j \leq k \rangle} \equiv 0 \ .$$

□

6.26. Következmény *Legyen* $x \in X$, $Y \overset{def}{=} \{x\} \subseteq X$. *Ekkor* $N^*Y = T_x^*X \subseteq T^*X$ *egy Lagrange-részsokaság.*

Egy további módszer Lagrange-részsokaságok konstrukciójára a következő.

6.27. Tétel *Legyenek* (M_i, ω_i) *azonos dimenziós szimplektikus sokaságok,* $i = 1, 2$, $\phi : M_1 \to M_2$ *egy diffeomorfizmus. Ekkor* $\phi^*\omega_2 = \omega_1$ *pontosan akkor, ha*

$$\Gamma_\phi \subseteq (M_1 \times M_2, \pi_1^*\omega_1 - \pi_2^*\omega_2)$$

Lagrange-részsokaság.

7. fejezet

Komplex struktúrák vektortereken

Távlati célunk az, hogy valamennyire megértsük a szimplektikus, Riemann-, illetve komplex sokaságok közti összefüggéseket. Ehhez először az infinitezimális modelljeiket fogjuk vizsgálni. Az alapvető példa az alábbi.

7.1. Példa *Legyen $V = \mathbb{R}^{2n}$, $x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_n$ koordináták V-n. Ekkor léteznek V-n az alábbi kanonikus struktúrák.*

1. *g_0 standard skalárszorzat: ha*

   $$v = (x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_n) \quad \textit{és} \quad v' = (x'_1, \ldots, x'_n, y'_1, \ldots, y'_n) \ ,$$

   akkor

   $$g(v, v') = \sum_{i=1}^{n} x_i x'_i + \sum_{i=1}^{n} y_i y'_i \ ,$$

   mátrix alakban kifejezve

   $$\begin{pmatrix} \mathrm{Id} & 0 \\ 0 & \mathrm{Id} \end{pmatrix} ,$$

   vagyis

   $$g_0(u, v) = v^T u$$

   minden $u, v \in \mathbb{R}^{2n}$ esetén.

2. *Standard komplex struktúra: azonosítsuk $\mathbb{R}^{2n}$-t $\mathbb{C}^n$-nel a*

   $$z_j = x_j + \sqrt{-1} y_j$$

   relációval. Ekkor kapunk egy $J_0 : \mathbb{R}^{2n} \to \mathbb{R}^{2n}$ lineáris leképezést:

   $$\begin{aligned} J_0(e_j) &= f_j \\ J_0(f_j) &= -e_j \end{aligned}$$

az x_i, y_i koordinátákhoz tartozó e_i, f_i bázisban kifejtve. A J_0 transzformáció bizonyos értelemben a komplex számok körében $\sqrt{-1}$-gyel való szorzásnak felel meg. Mátrix alakban

$$J_0 u = \begin{pmatrix} 0 & -\mathrm{Id} \\ \mathrm{Id} & 0 \end{pmatrix} u$$

minden $u \in \mathbb{R}^{2n}$ esetén.

3. *Standard szimplektikus struktúra: ha*

$$v = (x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_n) \quad \textit{és} \quad v' = (x'_1, \ldots, x'_n, y'_1, \ldots, y'_n) \ ,$$

akkor

$$\omega_0(v, v') = \sum_{i=1}^{n} x_i y'_i - \sum_{i=1}^{n} x'_i y_i \ ,$$

mátrix alakban

$$\begin{pmatrix} 0 & \mathrm{Id} \\ -\mathrm{Id} & 0 \end{pmatrix} .$$

A három standard struktúrát az

$$\omega_0(u, v) = g_0(J_0 u, v)$$

kompatibilitási összefüggés köti össze.

Most a fenti típusú struktúrákat fogjuk tanulmányozni egy tetszőleges valós vektortéren.

7.2. Definíció *Legyen V egy valós vektortér. Egy $J \in \mathrm{End}_{\mathbb{R}}(V)$ endomorfizmust V*-n értelmezett komplex struktúrának *hívunk, ha*

$$J^2 = -\mathrm{Id} \ .$$

7.3. Megjegyzés *Amennyiben a V valós vektortéren létezik egy kívánt tulajdonságú J endomorfizmus, akkor* $\dim V$ *páros kell, hogy legyen.*

7.4. Példa *Ha J alkalmazását azonosítjuk az $\sqrt{-1}$-gyel való szorzással, akkor J választása ekvivalens egy V-n vett komplex vektortérstruktúra választásával. Ebből többek közt az is következik, hogy egy adott valós vektortéren, ha létezik komplex strukúra, akkor sok különböző van.*

7.5. Definíció *Legyen (V, ω) szimplektikus vektortér, J komplex struktúra V-n. Azt mondjuk, hogy J* ω-kompatibilis, *ha a*

$$g_J(u, v) \overset{def}{=} \omega(u, Jv)$$

bilineáris forma egy skalárszorzat (vagyis szimmetrikus, nemelfajuló és pozitív definit).

7.1 Feladat *A fenti jelölésekkel lássuk be, hogy J pontosan akkor ω-kompatibilis, ha*

1. $J\colon (V,\omega) \to (V,\omega)$ *szimplektomorfizmus, és*
2. $\omega(u, Ju) > 0$ *minden* $0 \neq u \in V$ *esetén.*

Az alábbi tétel alapvető jelentőségű.

7.6. Tétel *Legyen (V,ω) szimplektikus vektortér. Ekkor létezik ω-kompatibilis komplex struktúra V-n.*

A bizonyításhoz szükséges lesz pár független megjegyzésre, először ezeket szedjük össze.

7.7. Megjegyzés *Legyen V egy valós vektortér, g egy skalárszorzat V-n, $\phi : V \to V$ egy lineáris leképezés. Ekkor létezik egyetlen $\phi^T : V \to V$ lineáris leképezés, amit ϕ g-adjungáltjának nevezünk, amelyre*

$$g(u, \phi(v)) = g(\phi^T(u), v)$$

minden $u, v \in V$ esetén.

Hasonló szellemben, a ϕ leképezést g-pozitív definitnek hívjuk, ha

$$g(u, \phi(u)) > 0$$

minden $0 \neq u \in V$ választásra.

7.8. Megjegyzés *Az iménti jelölésekkel, ha g egy tetszőleges de rögzített skalárszorzat V-n, akkor egy $\phi \in \mathrm{End}_{\mathbb{R}}(V)$ szimmetrikus g-pozitív definit leképezés és vele együtt $\phi\phi^T$ is diagonalizálható $\mathbb{R}$-fölött, és $2n$ darab pozitív sajátértéke van. Jelölje a $\phi\phi^T$ endomorfizmus sajátértékeit $\lambda_1, \ldots, \lambda_{2n}$.*

Emiatt $\phi\phi^T$ hasonló egy

$$B \cdot \mathrm{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_{2n}) \cdot B^{-1}$$

mátrixhoz. Ebből viszont következik, hogy minden $\mu \in \mathbb{R}_{>0}$ számra tudjuk definiálni a $(\phi^T\phi)^\mu$ hatványt a

$$B \cdot \mathrm{diag}(\lambda_1^\mu, \ldots, \lambda_{2n}^\mu) \cdot B^{-1}$$

mátrix segítségével. Speciálisan, tudunk a $\phi^T\phi$ leképezésből négyzetgyököt vonni.

A 7.6. Tétel bizonyítása. Válasszunk egy tetszőleges g skalárszorzatot V-n. A bizonyítás eredményeként kapott ω-kompatibilis komplex struktúra függni fog g választásától, ebből azt is látni fogjuk, hogy sok ilyen komplex struktúra van V-n.

Mivel mind ω, mind g nemelfajuló bilineáris formák, a

$$\begin{aligned}\phi_\omega\colon u\in V &\mapsto \omega(u,\ )\in V^*\\ \phi_g\colon u\in V &\mapsto g(u,\ )\in V^*\end{aligned}$$

lineáris leképezések mindketten V-ből V^*-be menő izomorfizmusok.

Tekintsük az alábbi diagramot

$$\begin{tikzcd} V \arrow[r, "\phi_\omega"] & V^* \\ V \arrow[ur, "\phi_g"'] & \end{tikzcd},$$

erre létezik olyan $\psi : V \to V$ lineáris leképezés (nevezetesen $\phi_g^{-1}\circ\phi_\omega$), amely kommutatívvá teszi, vagyis

$$\phi_g\circ\psi=\phi_\omega\ .$$

Másképpen kifejezve, minden $u,v\in V$ esetén

$$\omega(u,v)=g(\psi(u),v)\ .$$

Először is vegyük észre, hogy ψ ferdén szimmetrikus:

$$\begin{aligned}g(\psi^T u,v) &= g(u,\psi(v))\\ &= g(\psi(v),u)\\ &= \omega(v,u)\\ &= -\omega(u,v)\\ &= -g(\psi(u),v)\\ &= g(-\psi(u),v)\ ,\end{aligned}$$

ily módon

$$\psi^T=-\,\psi\ .$$

Következményképpen

$$(\psi\psi^T)^T=(\psi^T)^T\psi^T=(-\psi)^T\psi^T=\psi\psi^T\ ,$$

vagyis $\psi\psi^T$ szimmetrikus, továbbá

$$g(\psi\psi^T(u),u)=g(\psi^T(u),\psi^T(u))>0$$

minden $u\neq 0$-ra, azaz $\psi\psi^T$ pozitív definit.

A 7.8. Megjegyzes alapján értelmes $\psi\psi^T$ négyzetgyökéről beszélni. Legyen

$$J\stackrel{\text{def}}{=}\sqrt{\psi\psi^T}^{-1}\cdot\psi\ .$$

Amint azt a 7.9. Lemmában megmutatjuk, némileg hosszadalmas de elemi számolással adódik, hogy J egy ω-kompatibilis komplex struktúra V-n. $\square$

7.9. Lemma *A fenti jelölésekkel a J lineáris leképezés teljesíti az alábbiakat.*

1. *J felcserélhető $\sqrt{\psi\psi^T}$-vel.*
2. *J g-ortogonális, azaz minden $u, v \in V$ esetén*
$$g(Ju, Jv) = g(u, v) \ .$$
3. *$JJ^T = \mathrm{Id}$.*
4. *$J^T = -J$.*
5. *J egy komplex struktúra V-n.*
6. *J ω-kompatibilis.*

Bizonyítás. 1. Mivel ψ felcserélhető $\sqrt{\psi\psi^T}$-vel,

$$\begin{aligned} J \cdot \sqrt{\psi\psi^T} &= (\sqrt{\psi\psi^T}^{-1} \cdot \psi) \cdot \sqrt{\psi\psi^T} \\ &= \sqrt{\psi\psi^T}^{-1} \cdot \sqrt{\psi\psi^T} \cdot \psi \\ &= \psi \ . \end{aligned}$$

Másrészt
$$\sqrt{\psi\psi^T} \cdot J = \sqrt{\psi\psi^T} \cdot \sqrt{\psi\psi^T}^{-1} \cdot \psi = \psi \ .$$

3. Egyszerű számolással adódik, hogy

$$\begin{aligned} JJ^T &= (\sqrt{\psi\psi^T}^{-1} \cdot \psi) \cdot (\sqrt{\psi\psi^T}^{-1} \cdot \psi)^T \\ &= \sqrt{\psi\psi^T}^{-1} \cdot \psi\psi^T \cdot (\sqrt{\psi\psi^T}^{-1})^T \\ &= \sqrt{\psi\psi^T}^{-1} \cdot \psi\psi^T \cdot \sqrt{\psi\psi^T}^{-1} \\ &= \mathrm{Id} \ . \end{aligned}$$

2. Mivel J g-pozitív definit, ezért invertálható, így a $JJ^T = \mathrm{Id}$ összefüggésből $J^T = J^{-1}$ adódik, vagyis J g-ortogonális.
4. Definíció szerint

$$J^T = \psi^T \cdot \sqrt{\psi\psi^T}^{-1} = -\psi \cdot \sqrt{\psi\psi^T}^{-1} = -\sqrt{\psi\psi^T}^{-1} \cdot \psi = -J \ ,$$

ahol felhasználtuk, hogy $\sqrt{\psi\psi^T}^{-1}$ és ψ felcserélhetők.
2. Mivel J g-pozitív definit, ezért invertálható, így a $JJ^T = \mathrm{Id}$ összefüggésből $J^T = J^{-1}$ adódik, vagyis J g-ortogonális.

5. Az eddigiekből gyorsan következik, hogy

$$J^2 = J(-J^T) = -\operatorname{Id} ,$$

vagis J egy komplex struktúra V-n.
6. A J komplex struktúra ω-kompatibilitása az alábbi számolással igazolható. Legyenek $u, v \in V$ tetszőleges elemek. Ekkor

$$\begin{aligned} \omega(Ju, Jv) &= g(\psi Ju, Jv) \\ &= g(J\psi u, Jv) \\ &= g(\psi u, J^T Jv) \\ &= g(\psi u, v) \\ &= \omega(u, v) , \end{aligned}$$

vagyis $J : (V, \omega) \to (V, \omega)$ szimplektomorfizmus; másrészt g_J pozitív definit, hiszen

$$\begin{aligned} g_J(u, u) &\overset{\text{def}}{=} \omega(u, Ju) \\ &= g(\psi u, Ju) \\ &= g(-J\psi u, u) \\ &= g(\sqrt{\psi\psi^T} u, u) \\ &> 0 \end{aligned}$$

amennyiben $u \neq 0$, mivel $\sqrt{\psi\psi^T}$ egy g-pozitív definit szimmetrikus lineáris leképezés.$\square$

7.10. Megjegyzés *A bizonyítás során konstruáltt J komplex struktúra csak g választásától függ: tudniillik a $\sqrt{\psi\psi^T}^{-1}$ lineáris leképezést meghatározza a $\psi\psi^T$ leképezés sajátalterein vett hatása.*

7.11. Megjegyzés *Vigyázzunk arra, hogy általában*

$$g_J \overset{def}{=} \omega(\ ,J\ ) \neq g\ ;$$

amennyiben mégis, akkor az (ω, J, g) hármast kompatibilis hármas*nak nevezzük.*

8. fejezet

Majdnem komplex struktúrák és Kähler-sokaságok

8.1. Kompatibilis majdnem komplex struktúrák

8.1. Definíció (Majdnem komplex sokaság) *Legyen M egy sima sokaság, legyen $J \in \operatorname{Hom}(TM, TM)$. Azt mondjuk, hogy J egy* majdnem komplex struktúra M-en, *ha $J^2 = -\operatorname{Id}$. Ekkor az (M, J) párt* majdnem komplex sokaság*nak nevezzük.*

Legyen (M, ω) egy szimplektikus sokaság, J egy majdnem komplex struktúra M-en. Azt mondjuk, hogy J ω-kompatibilis, *ha $\omega(\cdot, J\cdot)$ egy Riemann-metrika M-en.*

Szimplektikus vektorterekre bebizonyítottuk a kompatibilis komplex strukúrák létezését. Ennek a ténynek a globális verziója az alábbi.

8.2. Tétel (Majdnem komplex struktúra létezése) *Legyen (M, ω) egy szimplektikus sokaság, g egy Riemann-metrika M-en. Ekkor létezik egy kanonikus majdnem komplex struktúra M-en, amely ω-kompatibilis.*

Bizonyítás. Nem fogjuk részletesen tárgyalni; a lényeg az, hogy a polárfelbontás, ami az infinitezimális esetben a komplex struktúra létezéséhez vezetett, g választásával kanonikus, és simán változik M-en. □

Ismét teljesül, hogy egy adott szimplektikus sokaságon sok ω-kompatibilis komplex struktúra van.

8.3. Állítás *Legyen (M, ω) szimplektikus sokaság, J_1, J_2 ω-kompatibilis majdnem komplex struktúrák M-en. Ekkor létezik ω-kompatibilis majdnem komplex struktúrák egy sima J_t $(0 \leq t \leq 1)$ családja, amely J_0-t összeköti J_1-gyel.*

Bizonyítás. A bizonyítás ötlete a következő: ω és J_0, illetve ω és J_1 meghatároznak egy-egy $g_0 = \omega(\cdot, J\cdot)$, illetve $g_1 = \omega(\cdot, J\cdot)$ Riemann-metrikát M-en. Ekkor viszont

$$g_t \stackrel{\text{def}}{=} (1-t)g_0 + tg_1 \quad \text{minden } 0 \leq t \leq 1 \text{ esetén}$$

Riemann-metrikák egy sima családja M-en. Ennek a családnak az elemeire alkalmazva a polárfelbontást kapjuk a keresett majdnem komplex struktúrákat. □

8.4. Következmény *Az (M, ω)-n értelmezett majdnem komplex struktúrák tere összefüggő.*

8.5. Megjegyzés *Legyen (ω, J, g) egy kompatibilis hármas, ekkor tetszőleges elem kifejezhető a másik kettő segítségével:*

$$\begin{aligned} g(u,v) &= \omega(u, Jv) \ , \\ \omega(u,v) &= g(Ju, v) \ , \\ Ju &= (\phi_g)^{-1}(\phi_\omega(u)) \ . \end{aligned}$$

8.2. Dolbeault-elmélet

Legyen (M, J) egy majdnem komplex sokaság, $T_{\mathbb{C}}M \stackrel{\text{def}}{=} TM \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$ a komplexifikált érintőnyaláb. Egy $x \in X$ pont felett TM szála a T_xM érintőtér, $TM \otimes \mathbb{C}$ szála pedig a

$$T_xM \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$$

komplex vektortér lesz.

Lineáris algebrából ismert, hogy

$$\dim_{\mathbb{R}} T_xM = \dim_{\mathbb{C}} T_xM \otimes \mathbb{C} = n \ ,$$

és

$$\dim_{\mathbb{R}} T_xM \otimes \mathbb{C} = 2n \ .$$

Egy fontos észrevétel, hogy a J endomorfizmust kiterjeszthetjük $TM \otimes \mathbb{C}$-re:

$$J(v \otimes z) \stackrel{\text{def}}{=} Jv \otimes z \quad \text{ahol } v \in TM \text{ és } z \in \mathbb{C}.$$

Mivel láthatóan továbbra is

$$J^2 = -\operatorname{Id} \ ,$$

mint $TM \otimes \mathbb{C}$ endomorfizmusa, J_x sajátértékei a $T_xM \otimes \mathbb{C}$ komplex vektortéren a $\pm i$ komplex számok lesznek.

8.6. Definíció *Az iménti jelölésekkel legyen* $T_{1,0}$ *az* i *sajátértékhez,* $T_{0,1}$ *pedig a* $-i$ *sajátértékhez tartozó sajátaltere* $TM \otimes \mathbb{C}$*-nek.*

8.7. Megjegyzés *A fenti alterekre*

$$\begin{aligned} T_{1,0} &= \{w \in TM \otimes \mathbb{C} \mid Jw = iw\} \\ &= \{v \otimes 1 - Jv \otimes i \mid v \in TM\} \\ &= J\text{-holomorf érintővektorok} \end{aligned}$$

és

$$\begin{aligned} T_{0,1} &= \{w \in TM \otimes \mathbb{C} \mid Jw = -iw\} \\ &= \{v \otimes 1 + Jv \otimes i \mid v \in TM\} \\ &= J\text{-antiholomorf érintővektorok} \ . \end{aligned}$$

Tekintsük a

$$\begin{aligned} \pi_{1,0} : TM &\longrightarrow T_{1,0} \\ v &\mapsto \frac{1}{2}(v \otimes 1 - Jv \otimes i) \end{aligned}$$

és

$$\begin{aligned} \pi_{0,1} : TM &\longrightarrow T_{0,1} \\ v &\mapsto \frac{1}{2}(v \otimes 1 + Jv \otimes i) \end{aligned}$$

leképezéseket. Ezekre teljesül, hogy

$$\begin{aligned} \pi_{1,0} \circ J &= i \cdot \pi_{1,0} \\ \pi_{0,1} \circ J &= -i \cdot \pi_{0,1} \ , \end{aligned}$$

és

$$(\pi_{1,0}, \pi_{0,1}) : TM \otimes \mathbb{C} \xrightarrow{\sim} T_{1,0} \oplus T_{0,1} \ .$$

Analóg megfontolások érvényesek a $T^*M \otimes \mathbb{C}$ komplexifikált koérintőnyalábra.

8.8. Megjegyzés *Analóg megfontolások érvényesek a* $T^*M \otimes \mathbb{C}$ *komplexifikált koérintőnyalábra. Speciálisan,*

$$\begin{aligned} T^{1,0} &= T^*_{1,0} \\ &= \{\eta \in T^*M \otimes \mathbb{C} \mid \eta(Jw) = i\eta(w) \ \forall w \in TM \otimes \mathbb{C}\} \\ &= \{\xi \otimes 1 - (\xi \circ J) \otimes i \mid \xi \in T^*M\} \\ &= \text{komplex lineáris koérintővektorok} \ , \end{aligned}$$

és

$$\begin{aligned} T^{0,1} &= T^*_{0,1} \\ &= \{\eta \in T^*M \otimes \mathbb{C} \mid \eta(Jw) = -i\eta(w)\ \forall w \in TM \otimes \mathbb{C}\} \\ &= \{\xi \otimes 1 + (\xi \circ J) \otimes i \mid \xi \in T^*M\} \\ &= \textit{komplex antilineáris koérintővektorok} \ . \end{aligned}$$

Ismét adottak a vetítések,

$$\begin{aligned} \pi^{1,0} \colon T^*M \otimes \mathbb{C} &\longrightarrow T^{1,0} \\ \eta &\mapsto \eta^{1,0} \overset{def}{=} \frac{1}{2}(\eta - i\eta \circ J) \end{aligned}$$

és

$$\begin{aligned} \pi^{0,1} \colon T^*M \otimes \mathbb{C} &\longrightarrow T^{0,1} \\ \eta &\mapsto \eta^{0,1} \overset{def}{=} \frac{1}{2}(\eta + i\eta \circ J) \ , \end{aligned}$$

amelyekre

$$(\pi^{1,0}, \pi^{0,1}) \colon T^*M \otimes \mathbb{C} \xrightarrow{\sim} T^{1,0} \oplus T^{0,1} \ .$$

8.9. Definíció *Az eddigi jelölésekkel legyen*

$$\Lambda^{l,m} \overset{def}{=} \wedge^l T^{1,0} \otimes \wedge^m T^{0,1}$$

minden l, m természetes szám esetén.

8.10. Megjegyzés *Ekkor*

$$\wedge^k (T^*M \otimes \mathbb{C}) = \wedge^k (T^{1,0} \oplus T^{0,1}) = \bigoplus_{k=l+m} \Lambda^{l,m} \ .$$

8.11. Definíció *Legyen (M, J) egy majdnem komplex sokaság, $0 \leq k \leq \dim M$,*

$$\Omega^k(M; \mathbb{C}) \overset{def}{=} \Gamma(M, \wedge^k (T^*M \otimes \mathbb{C}))$$

a k-adfokú komplex értékű differenciálformák tere M-en. Ha l, m természetes számok, akkor

$$\Omega^{l,m} \overset{def}{=} \Gamma(M, \Lambda^{l,m})$$

az (l, m)-típusú differenicálformák vektortere.

8.1 Feladat *Mutassuk meg, hogy*

$$\Omega^k(M;\mathbb{C}) = \bigoplus_{l+m=k} \Omega^{l,m} \ .$$

8.12. Megjegyzés *Legyen $f : M \to \mathbb{C}$ egy komplex értékű C^∞ függvény. Ekkor a valós d de Rham differenciál értelmezhető a*

$$d_{\mathbb{C}} f \overset{def}{=} d(\Re f) + i \cdot d(\Im f)$$

definícióval, ami továbbvihető tetszőleges komplex értékű sima k-formákra.

8.13. Definíció *Jelölje*

$$\pi^{l,m} : \wedge^k(T^*M \otimes \mathbb{C}) \longrightarrow \Lambda^{l,m}$$

a megfelelő direkt összeadandóra történő vetítést. Legyenek

$$\begin{aligned}
\partial^{l,m} &\overset{def}{=} \pi^{l+1,m} \circ d_{\mathbb{C}} &:& \quad \Omega^{l,m}(M) \longrightarrow \Omega^{l+1,m}(M) \\
\bar{\partial}^{l,m} &\overset{def}{=} \pi^{l,m+1} \circ d_{\mathbb{C}} &:& \quad \Omega^{l,m}(M) \longrightarrow \Omega^{l,m+1}(M) \ .
\end{aligned}$$

8.14. Megjegyzés *A fenti definícióban szereplő ∂ és $\bar{\partial}$ elsőrendű differenciáloperátorok, amelyekre*

$$\partial^2 = \bar{\partial}^2 = 0 \ .$$

8.2 Feladat *Igazoljuk az előző megjegyzés állításait.*

8.15. Definíció *Egy $f : M \to \mathbb{C}$ sima függvényt J-*holomorf*nak, illetve J-*antiholomorf*nak nevezünk egy $x \in M$ pontban, ha*

$$df_x \circ J = i \cdot df_x \ ,$$

illetve ha

$$df_x \circ J = -i \cdot df_x \ .$$

8.3 Feladat *Mutassuk meg, hogy*

1. *f pontosan akkor J-holomorf az $x \in M$ pontban, ha $df_x \in T_x^{1,0}$, másképpen, ha $\pi_x^{1,0} \circ df_x = 0$;*

2. *f pontosan akkor J-antiholomorf az $x \in M$ pontban, ha $df_x \in T_x^{0,1}$, másképpen, ha $\pi_x^{0,1} \circ df_x = 0$.*

8.16. Megjegyzés *Az eddigiek megmutatták, hogy függvényekre*

$$df = \partial f + \bar{\partial} f \ .$$

Tegyük most fel, hogy egy (M, J) majdnem komplex sokaságon minden β differenciálformára teljesül, hogy

$$d\beta = \partial\beta + \bar{\partial}\beta \ .$$

Ekkor

$$\begin{aligned} 0 &= d^2\beta \\ &= (\partial + \bar{\partial})^2\beta \\ &= \partial^2\beta + (\partial\bar{\partial} + \bar{\partial}\partial)\beta + \bar{\partial}^2\beta \ . \end{aligned}$$

Mivel az utóbbi összeg három tagja három különböző homogén komponensbe esik (ezek $\Omega^{l+2,m}$,$\Omega^{l+1,m+1}$, és $\Omega^{l,m+2}$), így

$$\partial^2 = \bar{\partial}^2 = \partial\bar{\partial} + \bar{\partial}\partial = 0 \ .$$

A kérdéssel, hogy milyen sokaságokra teljesül a $d = \partial + \bar{\partial}$ feltétel, hamarosan részletesen foglalkozni fogunk.

8.17. Tétel *Minden M komplex sokaságnak van egy kanonikus majdnem komplex struktúrája.*

Bizonyítás. Nem bizonyítjuk. □

Legyen most M egy n-dimenziós komplex sokaság, J a kanonikus majdnem komplex struktúra M-en. Meg fogjuk vizsgálni, hogyan írható le a

$$\Omega^k(M;\mathbb{C}) = \bigoplus_{l+m=k} \Omega^{l,m}$$

felbontás.

Először lokális koordinátákkal fogunk számolni. Válasszunk tehát egy $\mathcal{U} \subseteq M$ koordinátakörnyezetet $z_1, \ldots, z_n$ komplex koordinátákkal, és jelölje

$$z_j = x_j + iy_j \quad \forall 1 \leq j \leq n \ .$$

Egy $x \in \mathcal{U}$ pontban

$$T_xM = \left\langle \frac{\partial}{\partial x_j}|_x, \frac{\partial}{\partial y_j}|_x : 1 \leq j \leq n \right\rangle_{\mathbb{R}},$$

ezért

$$T_xM \otimes \mathbb{C} = \left\langle \frac{\partial}{\partial x_j}|_x, \frac{\partial}{\partial y_j}|_x : 1 \leq j \leq n \right\rangle_{\mathbb{C}},$$

másképpen

$$T_xM\otimes\mathbb{C}=\left\langle\frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x_j}|_x-i\cdot\frac{\partial}{\partial y_j}|_x\right)\right\rangle_{\mathbb{C}}\oplus\left\langle\frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x_j}|_x+i\cdot\frac{\partial}{\partial y_j}|_x\right)\right\rangle_{\mathbb{C}},$$

mivel

$$T_{1,0}=\left\langle\frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x_j}|_x-i\cdot\frac{\partial}{\partial y_j}|_x\right)\right\rangle_{\mathbb{C}},$$

és

$$T_{0,1}=\left\langle\frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x_j}|_x+i\cdot\frac{\partial}{\partial y_j}|_x\right)\right\rangle_{\mathbb{C}}.$$

Ez utóbbi állításokhoz vegyük észre, hogy

$$J\left(\frac{\partial}{\partial x_j}-i\cdot\frac{\partial}{\partial y_j}\right)=i\left(\frac{\partial}{\partial x_j}-i\cdot\frac{\partial}{\partial y_j}\right),$$

illetve

$$J\left(\frac{\partial}{\partial x_j}+i\cdot\frac{\partial}{\partial y_j}\right)=-i\left(\frac{\partial}{\partial x_j}-i\cdot\frac{\partial}{\partial y_j}\right).$$

8.18. Definíció *Az eddigi jelölésekkel legyen*

$$\frac{\partial}{\partial z_j}\overset{def}{=}\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{\partial}{\partial x_j}-i\frac{\partial}{\partial y_j}\right),$$
$$\frac{\partial}{\partial \overline{z_j}}\overset{def}{=}\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{\partial}{\partial x_j}+i\frac{\partial}{\partial y_j}\right).$$

8.19. Megjegyzés *A* $\frac{\partial}{\partial z_j}$ *és* $\frac{\partial}{\partial \overline{z_j}}$ *definícióit felhasználva*

$$(T_{1,0})_x=\mathbb{C}\left\langle\frac{\partial}{\partial z_j}|_x \mid 1\le j\le n\right\rangle,$$

és

$$(T_{0,1})_x=\mathbb{C}\left\langle\frac{\partial}{\partial \overline{z_j}}|_x \mid 1\le j\le n\right\rangle.$$

Az érintőtér felbontásával analóg módon

$$\begin{aligned}T^*M\otimes\mathbb{C} &= \mathbb{C}\langle dx_j,dy_j\mid 1\le j\le n\rangle\\ &= \mathbb{C}\langle dx_j+idy_j\mid 1\le j\le n\rangle\oplus\mathbb{C}\langle dx_j-idy_j\mid 1\le j\le n\rangle,\end{aligned}$$

hiszen

$$T^{1,0}=\mathbb{C}\langle dx_j+idy_j\mid 1\le j\le n\rangle$$

és
$$T^{0,1} = \mathbb{C}\langle dx_j - idy_j \mid 1 \leq j \leq n\rangle \ .$$
Ezek ismét csak abból következnek, hogy
$$(dx_j \pm i \cdot dy_j) \circ J = \mp i \cdot (dx_j \pm dy_j) \ .$$

8.20. Definíció *Jelölje*
$$dz_j \stackrel{def}{=} dx_j + idy_j \quad \textit{és} \quad d\bar{z}_j \stackrel{def}{=} dx_j - idy_j \ .$$

Az új átírással azt kapjuk, hogy
$$\begin{aligned} T^{1,0} &= \mathbb{C}\langle dz_j \mid 1 \leq j \leq n\rangle \\ T^{0,1} &= \mathbb{C}\langle d\bar{z}_j \mid 1 \leq j \leq n\rangle \ . \end{aligned}$$

8.21. Megjegyzés *Az $\mathcal{U}$ koordinátakörnyezeten könnyen le tudjuk írni a különböző típusú differenciálformákat. Egy tetszőleges $(1,0)$-forma például*
$$\sum_{j=1}^{n} b_j dz_j$$
alakba írható, ahol $b_j \in \mathcal{C}^\infty(\mathcal{U}, \mathbb{C})$.

Egy $(1,1)$-forma általános alakja
$$\sum_{1 \leq j_1, j_2 \leq n} b_{j_1,j_2} dz_{j_1} \wedge d\bar{z}_{j_2} \ ,$$
ahol ismét csak b_{j_1,j_2} az $\mathcal{U}$ halmazon értelmezett sima komplex értékű függvények.

Legyen most $1 \leq l, m \leq n = \dim M$ egy természetes szám, $I = (i_1, \ldots, i_m)$, $K = (k_1, \ldots, k_l)$ multiindexek, amelyekre
$$1 \leq i_1 < i_2 < \ldots < i_m \leq n \ ,$$
és
$$1 \leq k_1 < k_2 < \ldots k_l \leq n \ .$$
A multiindexek hosszát $|I|$-vel (illetve $|K|$-val) jelöljük, és
$$\begin{aligned} dz_I &\stackrel{\text{def}}{=} dz_{i_1} \wedge dz_{i_2} \wedge \ldots \wedge dz_{i_m} \ , \\ d\bar{z}_K &\stackrel{\text{def}}{=} d\bar{z}_{k_1} \wedge \ldots \wedge d\bar{z}_{k_l} \ . \end{aligned}$$

8.22. Állítás *Ha $\mathcal{U} \subseteq M$ egy koordinátakörnyezet, $z_1, \ldots, z_n$ komplex koordináták $\mathcal{U}$-n, akkor*

$$\Omega^{m,l}(\mathcal{U}) = \left\{ \sum_{|I|=m,|K|=l} b_{I,K} dz_I \wedge d\bar{z}_K \mid b_{J,K} \in \mathcal{C}^\infty(\mathcal{U}, \mathbb{C}) \right\} .$$

8.23. Tétel *Legyen M egy komplex sokaság. Ekkor $d = \partial + \bar{\partial}$ tetszőleges differenciálformákra.*

Bizonyítás. Legyen $\beta \in \Omega^k(M; \mathbb{C}), \mathcal{U} \subseteq M$ egy tetszőleges koordinátakörnyezet, $z_1, \ldots, z_n$ komplex koordináták $\mathcal{U}$-n. Ekkor a 8.22. Állítás alapján

$$\beta = \beta|_{\mathcal{U}} = \sum_{|I|=m,|K|=l} b_{I,K} dz_I \wedge d\bar{z}_K$$

megfelelő $b_{I,K}$ függvényekre. Átcsoportosítva

$$\beta = \sum_{m+l=k} \sum_{|I|=m,|K|=l} b_{I,K} dz_I \wedge d\bar{z}_K \ ,$$

amiből következik, hogy

$$\begin{aligned}
d\beta &= \sum_{m+l=k} \sum_{|I|=m,|K|=l} d(b_{I,K} dz_I \wedge d\bar{z}_K) \\
&= \sum_{m+l=k} \sum_{|I|=m,|K|=l} db_{I,K} \wedge dz_I \wedge d\bar{z}_K \\
&= \sum_{m+l=k} \sum_{|I|=m,|K|=l} ((\partial + \bar{\partial}) b_{I,K}) \wedge dz_I \wedge d\bar{z}_K \\
&= \sum_{m+l=k} \sum_{|I|=m,|K|=l} (\partial b_{I,K} + \bar{\partial} b_{I,K}) \wedge dz_I \wedge d\bar{z}_K \\
&= \sum_{m+l=k} \sum_{|I|=m,|K|=l} \partial b_{I,K} \wedge dz_I \wedge d\bar{z}_K \\
&= + \sum_{m+l=k} \sum_{|I|=m,|K|=l} \bar{\partial} b_{I,K} \wedge dz_I \wedge d\bar{z}_K \\
&= \partial\beta + \bar{\partial}\beta \ ,
\end{aligned}$$

ahol a harmadik egyenlőségnél kihasználtuk, hogy a bizonyítandó állítás teljesül sima függvényekre. $\square$

8.24. Megjegyzés *Amennyiben M csak egy majdnem komplex sokaság, akkor általában $d \neq \partial + \bar{\partial}$, mivel nincsenek alkalmas z_j komplex koordinátafüggvények, amelyek segítenének az 1-formák egy alkalmas bázisát generálni.*

8.25. Megjegyzés *Legyen $f \in C^\infty(U;\mathbb{C})$. Ekkor*

$$\begin{aligned} df &= \sum_{j=1}^{n}\left(\frac{\partial f}{\partial x_j}dx_j + \frac{\partial f}{\partial y_j}dy_j\right) \\ &= \sum_{j=1}^{n}\left(\frac{1}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial x_j} - i\cdot\frac{\partial f}{\partial y_j}\right)(dx_j + idy_j)\right. \\ &+ \left.\sum_{j=1}^{n}\frac{1}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial x_j} + i\cdot\frac{\partial f}{\partial y_j}\right)(dx_j - idy_j)\right) \\ &= \sum_{j=1}^{n}\left(\frac{\partial f}{\partial z_j}dz_j + \frac{\partial f}{\partial \bar{z}_j}d\bar{z}_j\right) . \end{aligned}$$

Speciálisan

$$\begin{aligned} \partial f &= \pi^{1,0}df = \sum_{j=1}^{n}\frac{\partial f}{\partial z_j}dz_j \ , \\ \bar{\partial} f &= \pi^{0,1}df = \sum_{j=1}^{n}\frac{\partial f}{\partial \bar{z}_j}d\bar{z}_j \ . \end{aligned}$$

A $d = \partial + \bar{\partial}$ egyenlőségre vonatkozó általános eredmény majdnem komplex sokaságokra az alábbi.

8.26. Tétel (Newlander–Nirenberg) *Legyen (M, J) egy majdnem komplex sokaság. Ekkor az alábbiak ekvivalensek:*

1. *M egy komplex sokaság és J a kanonikus majdnem komplex struktúrája,*
2. *$d = \partial + \bar{\partial}$ tetszőleges M-en értelmezett differenciálformákra,*
3. *$\bar{\partial}^2 = 0$.*

8.3. Kähler-sokaságok

8.27. Definíció *Ha egy M sima sokaságon értelmezett J majdnem komplex struktúrára teljesülnek a Newlander–Nirenberg-tétel ekvivalens feltételei, akkor azt mondjuk, hogy J egy* integrálható *majdnem komplex struktúra.*

8.28. Definíció (Kähler-sokaság) *Legyen (M, ω) egy szimplektikus sokaság, J egy ω-kompatibilis majdnem komplex struktúra. Azt mondjuk, hogy (M, ω, J)* Kähler, *ha J integrálható. Ebben az esetben ω-t* Kähler-formának *nevezzük.*

8.29. Megjegyzés *Egy Kähler-sokaság komplex sokaság is egyben, így többek között* $d = \partial + \bar{\partial}$ *minden differenciálformára.*

Az alábbiakban az alábbi természetesen felmerülő kérdést válaszoljuk meg: hol a helye az ω formának az

$$\Omega^k(M;\mathbb{C}) = \bigoplus_{m+l=k} \Omega^{m,l}$$

felbontásban?

Kiindulásként szedjük össze, hogy mit tudunk ω-ról: ω egy valós, nemelfajuló, zárt 2-forma, amely kompatibilis az adott majdnem komplex struktúrával.

Mivel ω 2-forma,

$$\omega \in \Omega^2(M;\mathbb{C}) = \Omega^{2,0} \oplus \Omega^{1,1} \oplus \Omega^{0,2} \ ,$$

ami azt jelenti, hogy egy $(\mathcal{U}, z_1, \ldots, z_n) \subseteq M$ koordinátakörnyezeten

$$\omega \overset{\text{def}}{=} \omega|_{\mathcal{U}} = \sum_{j,k} a_{jk} dz_j \wedge dz_k + \sum_{j,k} b_{jk} dz_j \wedge d\bar{z}_k + \sum_{j,k} c_{jk} d\bar{z}_j \wedge d\bar{z}_k \tag{8.1}$$

alakba írható.

Tudjuk, hogy M J komplex struktúrája ω-kompatibilis, ezért J egy szimplektomorfizmus, vagyis $J^*\omega = \omega$. Ebből következik, hogy

$$\begin{aligned} J^* dz_j &= dz_j \circ J = i dz_j \\ J^* d\bar{z}_j &= d\bar{z}_j \circ J = -i d\bar{z}_j \ . \end{aligned}$$

A fenti számolást a (8.1) képletbe behelyettesítve azt kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} J^*\omega &= \sum_{j,k} (i \cdot i) \cdot a_{jk} dz_j \wedge dz_k + \sum_{j,k} i(-i) b_{jk} dz_j \wedge d\bar{z}_k \\ &+ \sum_{j,k} (-i)(-i) c_{jk} d\bar{z}_j \wedge d\bar{z}_k \\ &= (-1) \cdot \sum_{j,k} a_{jk} dz_j \wedge dz_k + (+1) \cdot \sum_{j,k} b_{jk} dz_j \wedge d\bar{z}_k \\ &+ (-1) \cdot \sum_{j,k} c_{jk} d\bar{z}_j \wedge d\bar{z}_k \ . \end{aligned}$$

A $J^*\omega = \omega$ feltételből rögtön adódik, hogy

$$a_{jk} \ , \ c_{jk} \equiv 0 \quad \forall j,k \ ,$$

másképpen $\omega \in \Omega^{1,1}$.

8.30. Megjegyzés (Dolbeault-kohomológia) *Legyen M egy komplex sokaság, ekkor*

$$d = \partial + \bar{\partial} \ ,$$

következésképpen

$$\partial^2 = \partial\bar{\partial} + \bar{\partial}\partial = \bar{\partial}^2 = 0 \ .$$

Minden $l \geq 0$ esetén kapunk egy

$$0 \longrightarrow \Omega^{l,0} \xrightarrow{\bar{\partial}} \Omega^{l,1} \xrightarrow{\bar{\partial}} \Omega^{l,2} \longrightarrow \ldots$$

komplexust, ahol $\bar{\partial}$ a differenciál. Hagyományosan

$$H^{l,m}_{Dolbeault}(M) \stackrel{def}{=} \frac{\ker \bar{\partial}^{l,m}}{\operatorname{im} \bar{\partial}^{l,m-1}}$$

jelöli az M komplex sokaság megfelelő Dolbeault-féle kohomológiacsoportját*.*

Visszatérve az ω szimplektikus forma vizsgálatához, ω zárt, vagyis $d\omega = 0$, amiből $d = \partial + \bar{\partial}$ miatt

$$\partial\omega = 0 \ , \ \bar{\partial}\omega = 0$$

következik, hiszen különböző típusúak. Ez utóbbi miatt ω meghatátoz egy

$$[\omega] \in H^{1,1}_{\mathrm{Dolbeault}}(M)$$

kohomológiaosztályt.

Legyen

$$h_{jk} \stackrel{\mathrm{def}}{=} \frac{2}{i} b_{jk} \ ,$$

ezzel az átírással

$$\omega = \frac{i}{2} \sum_{j,k} h_{jk} dz_j \wedge d\bar{z}_k \ .$$

Mivel ω valós, $\bar{\omega} = \omega$, amit részletesen kiírva azt kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} \bar{\omega} &= -\frac{i}{2} \sum_{j,k} \bar{h}_{jk} d\bar{z}_j \wedge dz_k \\ &= \frac{i}{2} \sum_{j,k} \bar{h}_{jk} dz_k \wedge d\bar{z}_j \\ &= \frac{i}{2} \sum_{j,k} \bar{h}_{kj} dz_j \wedge d\bar{z}_k, \end{aligned}$$

vagyis

$$h_{jk} = \bar{h}_{kj} \quad \forall 1 \leq j, k \leq n \ .$$

Ez azt jelenti, hogy minden $x \in M$ pontban $h_{jk}(x)$ egy Hermite-féle mátrix.

Továbbmenve, ismert, hogy $\wedge^n \omega \neq 0$, mivel ω nemelfajuló. A fenti számítások alapján

$$0 \neq \wedge^n \omega = n! \left(\frac{i}{2}\right)^n \det h_{jk} dz_1 \wedge d\bar{z}_1 \wedge \ldots \wedge dz_n \wedge d\bar{z}_n \ ,$$

tehát $\det h_{jk} \neq 0$ minden pontban.

Az ω Kähler-forma és J kompatibilitása azt is eredményezi, hogy minden $0 \neq u$ esetén $\omega(u, Ju) > 0$; másképpen fogalmazva, a $h_{jk}(x)$ mátrix pozitív definit minden $x \in M$-re.

8.31. Megjegyzés *Az eddigieket összefoglalva: ha ω egy Kähler-forma egy M komplex sokaságon, akkor ω egy ∂- és $\bar{\partial}$-zárt $(1,1)$-forma M-en, amely lokálisan pozitív definit Hermite-féle mátrixokkal van megadva.*

A Kähler-sokaságoknak láthatóan igen sok előnyös tulajdonsága van, felmerül azonban a kérdés, hogy milyen módon tudunk komplex sokaságokat konstruálni, amelyek teljesítik a kirótt feltételeket. Egy igen hasznos módszert mutatunk, ami a komplex analízisből jön.

8.32. Definíció (Erősen pluriszubharmonikus függvények) *Legyen M egy komplex sokaság, $\phi : M \to \mathbb{R}$ egy sima függvény. Azt mondjuk, hogy ϕ* erősen pluriszubharmonikus *(EPSH), ha minden $(\mathcal{U}, z_1, \ldots, z_n) \subseteq M$ komplex koordinátakörnyezetre és minden $x \in \mathcal{U}$ pontban*

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial z_j \partial \bar{z}_k}(x) \ \ \textit{pozitív definit.}$$

8.33. Állítás *Legyen M egy komplex sokaság, $\phi \in \mathcal{C}^\infty(M; \mathbb{R})$ egy erősen pluriszubharmonikus függvény. Ekkor*

$$\omega \stackrel{def}{=} \frac{i}{2} \partial \bar{\partial} \phi$$

egy Kähler-forma M-en.

Bizonyítás. Az állítást közvzetlen számolással kapjuk:

$$\begin{aligned} \partial \omega &= \frac{i}{2} \partial^2 \bar{\partial} \phi = 0 \ , \\ \bar{\partial} \omega &= \frac{i}{2} (\bar{\partial} \partial)(\bar{\partial} \phi) = \frac{i}{2} (-\partial \bar{\partial})(\bar{\partial} \phi) = 0 \ , \end{aligned}$$

s így ω d-zárt, hiszen $d = \partial + \bar{\partial}$.

Másrészt

$$\bar{\omega} = -\frac{i}{2} \bar{\partial} \partial \bar{\phi} = -\frac{i}{2} \bar{\partial} \partial \phi = \frac{i}{2} \partial \bar{\partial} \phi = \omega \ ,$$

tehát ω valós.

Mivel $\omega \in \Omega^{1,1}$, $J^*\omega = \omega$, s így $\omega(\cdot, J\cdot)$ szimmetrikus.

Végül

$$\begin{aligned}
\omega &= -\frac{i}{2}\partial\bar{\partial}\phi \\
&= \frac{i}{2}\sum_{j,k}\frac{\partial}{\partial z_j}\left(\frac{\partial\phi}{\partial\bar{z}_j}\right)dz_j \wedge d\bar{z}_k \\
&= \frac{i}{2}\sum_{j,k}\frac{\partial^2\phi}{\partial z_j\partial\bar{z}_k}dz_j \wedge d\bar{z}_k \ ,
\end{aligned}$$

és az együtthatómátrix ϕ EPSH volta miatt pozitív definit. Ezzel beláttuk, hogy ω és J kompatibilis, és ω nemelfajuló, ahogy akartuk. □

8.34. Példa *Legyen $M = \mathbb{C}^n \simeq \mathbb{R}^{2n}$ a szokásos $z_1, \ldots, z_n$ komplex koordinátákkal, $z_j = x_j + iy_j$. Tekintsük a*

$$\phi(x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_n) = \sum_{j=1}^{n} x_j^2 + y_j^2 = \sum_{j=1}^{n} |z_j|^2 = \sum_{j=1}^{n} z_j\bar{z}_j$$

függvényt. Ekkor

$$\frac{\partial^2\phi}{\partial z_j\partial\bar{z}_k} = \frac{\partial}{\partial z_j}z_k = \delta_{jk} \ ,$$

így a h_{jk} mátrix egyenlő az identitással, ami pozitív definit. Ezzel beláttuk, hogy ϕ EPSH.

Határozzuk meg az $\omega = \frac{i}{2}\partial\bar{\partial}\phi$ Kähler-formát:

$$\begin{aligned}
\omega &= \frac{i}{2}\partial\bar{\partial}\phi \\
&= \frac{i}{2}\sum_{j,k}\delta_{jk}dz_j \wedge d\bar{z}_k \\
&= \frac{i}{2}\sum_{j}dz_j \wedge d\bar{z}_j \\
&= \sum_{j=1}^{n}dx_j \wedge dy_j \ ,
\end{aligned}$$

vagyis ω a standard szimplektikus forma $\mathbb{R}^{2n}$-en.

Irodalomjegyzék

[AM69] M. F. Atiyah and I. G. Macdonald, *Introduction to commutative algebra*, Addison-Wesley Publishing Co., Reading, Mass.-London-Don Mills, Ont., 1969. MR 0242802 (39 #4129)

[Ara12] Donu Arapura, *Algebraic geometry over the complex numbers*, Universitext, Springer, New York, 2012. MR 2895485

[Bre93] Glen E. Bredon, *Topology and geometry*, Graduate Texts in Mathematics, vol. 139, Springer-Verlag, New York, 1993. MR 1224675 (94d:55001)

[CdS01] Ana Cannas da Silva, *Lectures on symplectic geometry*, Lecture Notes in Mathematics, vol. 1764, Springer-Verlag, Berlin, 2001. MR 1853077 (2002i:53105)

[Con] Brian Conrad, *Higher derivatives and taylor's formula via multilinear maps*, unpublished lectures notes, http://math.stanford.edu/∼conrad/diffgeomPage/handouts.html.

[Fra12] Theodore Frankel, *The geometry of physics*, third ed., Cambridge University Press, Cambridge, 2012, An introduction. MR 2884939 (2012j:58001)

[Ful95] William Fulton, *Algebraic topology*, Graduate Texts in Mathematics, vol. 153, Springer-Verlag, New York, 1995, A first course. MR 1343250 (97b:55001)

[GM96] Sergei I. Gelfand and Yuri I. Manin, *Methods of homological algebra*, Springer-Verlag, Berlin, 1996, Translated from the 1988 Russian original. MR 1438306 (97j:18001)

[Har77] Robin Hartshorne, *Algebraic geometry*, Springer-Verlag, New York, 1977, Graduate Texts in Mathematics, No. 52. MR 0463157 (57 #3116)

[Har08] Günter Harder, *Lectures on algebraic geometry. I*, Aspects of Mathematics, E35, Friedr. Vieweg & Sohn, Wiesbaden, 2008, Sheaves, cohomology of sheaves, and applications to Riemann surfaces. MR 2382668 (2009b:14001)

[Hat02] Allen Hatcher, *Algebraic topology*, Cambridge University Press, Cambridge, 2002. MR 1867354 (2002k:55001)

[Huy05] Daniel Huybrechts, *Complex geometry*, Universitext, Springer-Verlag, Berlin, 2005, An introduction. MR 2093043 (2005h:32052)

[Kur09] Alex Kuronya, *Introduction to topology*, 2009, Lecture notes for the Budapest Semesters in Mathematics, http://www.math.bme.hu/~kalex/Teaching/Spring10/Topology/TopNotes_Spring10.pdf.

[Mas91] William S. Massey, *A basic course in algebraic topology*, Graduate Texts in Mathematics, vol. 127, Springer-Verlag, New York, 1991. MR 1095046 (92c:55001)

[McC01] John McCleary, *A user's guide to spectral sequences*, second ed., Cambridge Studies in Advanced Mathematics, vol. 58, Cambridge University Press, Cambridge, 2001. MR 1793722 (2002c:55027)

[MS98] Dusa McDuff and Dietmar Salamon, *Introduction to symplectic topology*, second ed., Oxford Mathematical Monographs, The Clarendon Press Oxford University Press, New York, 1998. MR 1698616 (2000g:53098)

[Mun75] James R. Munkres, *Topology: a first course*, Prentice-Hall Inc., Englewood Cliffs, N.J., 1975. MR 0464128 (57 #4063)

[Nor08] D. G. Northcott, *Multilinear algebra*, Cambridge University Press, Cambridge, 2008, Reprint of the 1984 original. MR 2482681 (2009m:15030)

[Osb00] M. Scott Osborne, *Basic homological algebra*, Graduate Texts in Mathematics, vol. 196, Springer-Verlag, New York, 2000. MR 1757274 (2001d:18013)

[Rot09] Joseph J. Rotman, *An introduction to homological algebra*, second ed., Universitext, Springer, New York, 2009. MR 2455920 (2009i:18011)

[SS88] Günter Scheja and Uwe Storch, *Lehrbuch der Algebra. Teil 2*, Mathematische Leitfäden. [Mathematical Textbooks], B. G. Teubner, Stuttgart, 1988, Unter Einschluss der linearen Algebra. [Including linear algebra]. MR 934019 (89f:00002)

[SZ94] Ralph Stöcker and Heiner Zieschang, *Algebraische Topologie*, second ed., Mathematische Leitfäden. [Mathematical Textbooks], B. G. Teubner, Stuttgart, 1994, Eine Einführung. [An introduction]. MR 1328835 (96b:55001)

[Sza09] Tamás Szamuely, *Galois groups and fundamental groups*, Cambridge Studies in Advanced Mathematics, vol. 117, Cambridge University Press, Cambridge, 2009. MR 2548205 (2011b:14064)

[War] Thomas Ward, *Topology lecture notes*, online lecture notes, http://www.uea.ac.uk/∼h720/teaching/topology/materials/topology.pdf.

[Wei94] Charles A. Weibel, *An introduction to homological algebra*, Cambridge Studies in Advanced Mathematics, vol. 38, Cambridge University Press, Cambridge, 1994. MR 1269324 (95f:18001)

[wik] *Homotopy groups of spheres*, Wikipedia bejegyzés, http://en.wikipedia.org/wiki/Homotopy_groups_of_spheres.