Építészek matematikája II.

Dr. Barabás Béla
Dr. Fülöp Ottilia

Ez a jegyzet főként (de nem kizárólag) építészmérnök hallgatók számára készült és az Építészek matematikája I. folytatása, melyet igyekeztünk megoldott feladatokkal érthetőbbé, kézzelfoghatóvá tenni. Válogatott fejezetek ezek a matematika gazdag tárából, melyek arra hivatottak, hogy a matematika szépségére, alkalmazhatóságára fölhívják a hallgatók figyelmét. Arra is, hogy ha valaha komolyabb matematikai problémával kerülnek szembe, egyáltalán kitalálhassák, melyik úton érdemes elindulni. Az anyag szerteágazó, színes, némelyik témakör alaposabb megértéséhez évekre lenne szükségünk, mi most mégis bevállaljuk, hogy - ha érintőlegesen is - minél többet elmeséljünk ebben a jegyzetben, bemutatva a feladatok megoldásához nélkülözhetetlen elméleti összefoglalást. Sok mindenről szó esik ebben a kidolgozott mintapéldákkal, gyakorló feladatsorokkal tarkított jegyzetben, ugyanakkor sok minden ki is marad belőle.

"Rahmanyinov és Godowski, a két híres zongoraművész jelen voltak egy koncerten, amelynek során a zongorista elfelejtett néhány taktust.
- Szörnyű volt az a rész, amikor kihagyott néhány hangot - jegyezte meg az előadás végén Rahmanyinov.
- De még szörnyűbbek voltak azok, amelyekre emlékezett - válaszolta Godowski". (Raymond Smullyan, Emlékek, történetek, paradoxonok c. könyvéből, ld. [S04])

Tartalomjegyzék

1. fejezet

Lineáris egyenletrendszerek

1.1. Mátrix rangja

Legyen

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

egy valós elemű $m \times n$-es mátrix, jelöljük továbbá az $\mathbf{A}$ mátrix k-adik oszlopvektorát $\underline{a}_k$-val és i-edik sorvektorát $\underline{\alpha}_i$-vel, azaz

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \underline{a}_1 & \underline{a}_2 & \dots & \underline{a}_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{\alpha}_1 \\ \underline{\alpha}_2 \\ \vdots \\ \underline{\alpha}_m \end{bmatrix}.$$

Így bármely $\mathbf{A}$ mátrixhoz két lineáris alteret is hozzárendelhetünk:
(`http://hu.wikipedia.org/wiki/Line%C3%A1ris_alt%C3%A9r#Defin.C3.ADci.C3.B3`) egyik az $\underline{a}_k$ $(k = 1, \dots, n)$ oszlopvektorok által generált lineáris altér (ez az $\mathbb{R}^m$ tér egy altere és *oszlopvektortér* a neve), a másik pedig az $\underline{\alpha}_l$ $(l = 1, \dots, m)$ sorvektorok által generált lineáris altér (ez az $\mathbb{R}^n$ tér egy altere és *sorvektortérnek* hívjuk).

1.1. Tétel *Tetszőleges* $\mathbf{A}$ $m \times n$*-es mátrix esetén az oszlopvektortér dimenziója egyenlő a sorvektortér dimenziójával. Ezt a természetes számot az* $\mathbf{A}$ *mátrix rangjának nevezzük és rang A-val jelöljük.*

Az előzőekből könnyen levezethető az alábbi két észrevétel:

(1) $0 \leq rang\,\mathbf{A} \leq min(m, n)$;

(2) Ha egy mátrix csak 0 és 1 elemeket tartalmaz, úgy, hogy bármely sora és oszlopa legfeljebb egyetlen 1-est tartalmaz, akkor az ilyen mátrix rangja az 1-esek számával egyenlő.

Például,

$$rang \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = 2, \;\; rang \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} = 3.$$

1.2. Tétel *Az $m \times n$-es $\mathbf{A}$ mátrix rangja $r \Leftrightarrow \mathbf{A}$-nak létezik olyan r-edrendű minormátrixa, melynek determinánsa nem nulla, de minden r-nél magasabb rendű minormátrixának a determinánsa nulla.*

1.3. Tétel *Az $m \times n$-es $\mathbf{A}$ mátrix rangja nem változik meg, ha*

(1) két tetszőleges sorát felcseréljük;

(2) egy tetszőleges sorát bármilyen nem nulla számmal megszorozzuk;

(3) egy sorának tetszőleges számszorosát hozzáadjuk egy másik sorához.

A fent felsorolt műveleteket elemi sorműveleteknek nevezzük.

Az elemi sorműveletek elvégzésekor a mátrixok közé $\sim$ jelet teszünk.
Hasonlóan definiáljuk az *elemi oszlopműveleteket* is és a fenti tétel igaz marad ezekre is.
Elemi sor- vagy oszlopműveletek segítségével bármely mátrixból olyan vele *ekvivalens*, azaz ugyanolyan rangú (és természetesen, azonos típusú) mátrix képezhető, amelynek minden sorában és oszlopában legfeljebb egy zérustól különböző elem áll. Ekkor a rang nem más, mint a zérustól különböző elemek száma.

Ebben a fejezetben nem csak lineáris egyenletrendszerek megoldásánál használjuk az elemi sorműveleteket, hanem négyzetes ($n \times n$-es) mátrixok inverzének meghatározásánál is (már ha létezik inverz).

1.4. Tétel *Az $n \times n$-es $\mathbf{A}$ mátrix invertálható $\Leftrightarrow$ ha $\mathbf{A}$-ból elemi sorműveletekkel megkapható az* $I_n = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix}$ *egységmátrix, azaz $\mathbf{A}$ ekvivalens az n-edrendű egységmátrixszal.*

Amennyiben **A**-ból elemi sorműveletekkel nem lehet megkapni az n-edrendű egységmátrixot, az **A** mátrix nem invertálható.

1.1. Példa *Számítsuk ki az* $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 6 & 4 \\ 2 & 4 & -1 \\ 4 & 16 & 7 \end{bmatrix}$ *mátrix inverzét, ha létezik.*

1.1. Megoldás *A módszer a következő: egymás mellé írjuk az invertálandó* **A** *mátrixot és az* $\mathbf{I_3}$ *egységmátrixot, és az így keletkezett* $(\mathbf{A}|\mathbf{I_3})$ *mátrixban elemi sorműveletekkel megpróbáljuk elérni azt, hogy* **A** *és* $\mathbf{I_3}$ *helyet cseréljenek. Tesszük mindezt úgy, hogy először a főátló alá mindenhová nullákat "gyártunk", az első oszloppal kezdve, majd a másodikkal folytatva, stb. Utána a főátló fölé is nullákat gyártunk (ha sikerül) úgy, hogy az előző lépésben legyártott nullák megmaradjanak.*

$$\begin{bmatrix} 1 & 6 & 4 & | & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 4 & -1 & | & 0 & 1 & 0 \\ 4 & 16 & 7 & | & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 6 & 4 & | & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -8 & -9 & | & -2 & 1 & 0 \\ 0 & -8 & -9 & | & -4 & 0 & 1 \end{bmatrix} \sim$$
$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 6 & 4 & | & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -8 & -9 & | & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & | & -2 & -1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Ebben az esetben a második mátrixunkat úgy kaptuk az elsőből, hogy a második sorból kivontuk az első sor kétszeresét, majd a harmadik sorból kivontuk az első négyszeresét. A második lépésben pedig a harmadik sorból kivontuk a másodikat (a többi feladatnál ezeket már nem írjuk le, hiszen az elemi sorműveletek a mátrixokból mindig kiderülnek). Innen már azonnal látszik, hogy nem sikerül az **A** *helyére legyártani az egységmátrixot, tehát az*

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 6 & 4 \\ 2 & 4 & -1 \\ 4 & 16 & 7 \end{bmatrix}$$

mátrix nem invertálható.

Megjegyezzük, hogy amennyiben az **A** mátrix harmadik sorának utolsó eleme 7 helyett 8 lenne, akkor a mátrixnak létezne inverze.

1.2. Példa *Számítsuk ki a* $\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$ *mátrix inverzét, ha létezik.*

1.2. Megoldás *Ahhoz, hogy az előző problémában leírtakat el lehessen végezni, érdemes kicserélni az első két sort, majd az utolsó kettőt is. Kapjuk, hogy*

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right] \sim$$

$$\sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -1 & 0 & 1/2 & -1/2 \\ 0 & 2 & 0 & -2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right] \sim$$

$$\sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 1/2 & -1/2 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 1/2 & 1/2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right].$$

Ezért a

$$\mathbf{B}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 1/2 & -1/2 \\ -1 & 1/2 & 1/2 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

1.2. Lineáris egyenletrendszerek megoldása

1.5. Definíció *Lineáris egyenletrendszereknek nevezzük az olyan egyenletrendszereket, melyekben minden ismeretlen az első hatványon szerepel, azaz az m egyenletből álló, n ismeretlenes lineáris egyenletrendszer általános alakja:*

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m, \end{cases}$$

ahol $b_i \in \mathbb{R}$, $\forall i \in \{1, 2, \ldots, m\}$ és $a_{ij} \in \mathbb{R}$, $\forall i \in \{1, 2, \ldots, m\}$, $\forall j \in \{1, 2, \ldots, n\}$ (ha ezt nem tesszük fel, akkor egyenletrenszerünk komplex együtthatós).

Ebben a jegyzetben csak valós együtthatós lineáris egyenletrendszerekkel foglalkozunk. Egyenletrendszerünket az

$$\mathbf{A}\underline{x} = \underline{b} \tag{1.1}$$

mátrixegyenlet formában is megadhatjuk, ahol

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{bmatrix}, \ \underline{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix},$$

az *ismeretlenek oszlopvektora* pedig

$$\underline{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}.$$

1.6. Definíció *Az*

$$\mathbf{A}\underline{x} = \underline{b}$$

lineáris egyenletrendszer kibővített mátrixa az $(\mathbf{A}|\underline{b})$*, azaz az egyenletrendszer* $\mathbf{A}$ *együtthatómátrixának a szabadtagok* $\underline{b}$ *oszlopmátrixával való kiegészítése.*

A kibővített mátrix $m \times (n+1)$-es típusú. Vegyük észre, hogy például egy három egyenletből álló három ismeretlenes egyenletrendszer nem más, mint a három dimenziós tér három síkja. Ezek a következőképpen helyezkedhetnek el:

(1) nincs közös metszéspontjuk, azaz az egyenletrendszer megoldáshalmaza üres;

(2) egy pontban metszik egymást, ekkor a megoldáshalmaz egyelemű;

(3) végtelen közös pontjuk van, ekkor a megoldáshalmaz kétféle lehet: egyenes, ha a síkok közös egyenesben metszik egymást, vagy sík, mikor a három sík tulajdonképpen egybeesik.

A fenti példával csak azt szerettük volna érzékeltetni az olvasóval, melyek azok a fő kérdések, melyek lineáris egyenletrendszerek esetén foglalkoztathatnak bennünket:

(1) Mikor van megoldás?

(2) Megoldhatóság esetén hány megoldás van?

(3) Hogyan lehet az egyenletrendszer megoldásait kiszámolni?

1.7. Tétel *Az*

$$\mathbf{A}\underline{x} = \underline{b}$$

n változós, m egyenletből álló lineáris egyenletrendszernek

(1) létezik megoldása (a megoldáshalmaz legalább egy elemű) $\Leftrightarrow rang\,(\mathbf{A}) = rang\,(\mathbf{A}|\underline{b})$*;*

(2) létezik pontosan egy megoldása $\Leftrightarrow rang\,(\mathbf{A}) = rang\,(\mathbf{A}|\underline{b}) = n$*;*

(3) *végtelen sok megoldásunk van* $\Leftrightarrow$ $rang\,(\mathbf{A}) = rang\,(\mathbf{A}|\underline{b}) < n$. *Ekkor az ismeretlenek számából kivonva a rangot megkapjuk az egyenletrendszer szabadságfokát, mely nem más, mint az a pozitív egész szám, mely azt jelzi, hány ismeretlent fogunk szabad változóként tekinteni.*

Az egyenletrendszerek megoldásának menete a következő: az (1.1.) példában is leírt elemi sorműveleteket a kibővített mátrixban addig végezzük, míg elő nem állítunk egy olyan ekvivalens mátrixot, melyben a főátló alatt csupa 0 van és meggyőződünk arról, hogy teljesen nulla sort nem tudunk legyártani. Felírjuk az eredetivel ekvivalens, tehát azonos megoldásokkal rendelkező egyenletrendszert, ami már "háromszög" alakú lesz. Pontosan $n - rang$ számú ismeretlent szabad változóként kezelünk (ez az egyenletrendszer szabadságfoka) és innen visszafelé számolva megadjuk az egyenletrendszer megoldását/megoldásait. Ezt a módszert *Gauss-módszernek* nevezzük. Paraméteres egyenletrendszernél többnyire ezt alkalmazzuk. Amennyiben a kibővített mátrixban nincs paraméter, érdemes akár tovább is számolni egészen addig, míg egyenletrendszerünk bővített mátrixában az első valahány sorban az első nemnulla elem 1-es nem lesz. Ezek az úgynevezett *vezéregyesek*, melyek csupa különböző oszlopban, lépcsőzetesen helyezkednek el, úgy, hogy az i. sor vezéregyese az $(i+1)$. sor vezéregyeséhez képest balra van, a vezéregyesek alatt pedig minden elem 0. A tiszta nulla sorokat a végére írjuk, vagy akár elhagyjuk. Miután megkaptuk ezt a *lépcsős* alakot, a vezéregyenesek fölötti elemeket is kinullázhatjuk, ha alulról fölfelé haladva az egyes sorokból kivonjuk a vezéregyesek sorainak megfelelő többszörösét. Az ilyen alakot már *redukált lépcsős alaknak* nevezzük. Az ilyen alak előnye, hogy a megoldás is kiolvasható belőle (már ha létezik). A vezéregyesek száma nem más, mint az együtthatómátrix rangja. Tilos sor (azaz olyan, hogy az együtthatómátrix résznél csupa 0, jobboldalon pedig nemnulla szám) nem létezhet, amennyiben egyenletrendszerünknek megoldáshalmaza nemüres. Amennyiben a rang kisebb az ismeretlenek számánál, x_j csak akkor lehet szabad ismeretlen, ha a j-edik oszlop nem tartalmaz vezéregyest. A kötött ismeretleneket kifejezzük a szabadtagok és a szabad ismeretlenek függvényében (ez a *Gauss-Jordan módszer*).

1.3. Példa *A k konstans mely értékeire lesz a következő egyenletrendszer megoldáshalmaza üres? (Ilyenkor az egyenletrendszert szoktuk még* inkompatibilisnak *is nevezni.) Mikor van pontosan egy megoldásunk és mikor végtelen a megoldáshalmaz?*

$$\begin{cases} x - y = 3 \\ 2x - 2y = k \end{cases}$$

1.3. Megoldás *Most Gauss-módszerrel dolgozva kapjuk, hogy:*

$$(\mathbf{A}|\underline{b}) = \begin{bmatrix} 1 & -1 & | & 3 \\ 2 & -2 & | & k \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & -1 & | & 3 \\ 0 & 0 & | & k-6 \end{bmatrix}.$$

Ebből látszik, hogy

(1) a megoldáshalmaz üres $\Leftrightarrow$ *rang* $(\mathbf{A}) <$ *rang* $(\mathbf{A}|\underline{b})$*, azaz rang* $(\mathbf{A}) = 1$ *és rang* $(\mathbf{A}|\underline{b})$*=2, ami* $k \neq 6$ *esetben történik meg;*

(2) pontosan egy megoldás nem létezhet, mert

$$rang\,(\mathbf{A}) = rang\,(\mathbf{A}|\underline{b}) = 2$$

nem állhat fenn;

(3) végtelen megoldásunk pedig pontosan akkor van, ha

$$rang\,(\mathbf{A}) = rang\,(\mathbf{A}|\underline{b}) = 1 < 2,$$

azaz $k = 6$*. Ekkor az egyenlet szabadságfoka* 1*, azaz a megoldás*

$$\begin{cases} x = 3 + t \\ y = t \end{cases}$$

lesz, ahol $t \in \mathbb{R}$*, de ilyenkor használhatjuk az* $y = x - 3, \quad x \in \mathbb{R}$ *alakot is.*

1.4. Példa *Oldjuk meg Gauss-Jordan módszerrel a következő egyenletrendszert:*

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 = 8 \\ -x_1 - 2x_2 + 3x_3 = 1 \\ 3x_1 - 7x_2 + 4x_3 = 10 \end{cases}$$

1.4. Megoldás

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & | & 8 \\ -1 & -2 & 3 & | & 1 \\ 3 & -7 & 4 & | & 10 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & | & 8 \\ 0 & -1 & 5 & | & 9 \\ 0 & -10 & -2 & | & -14 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & | & 8 \\ 0 & 1 & -5 & | & -9 \\ 0 & 0 & -52 & | & -104 \end{bmatrix} \sim$$

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & | & 8 \\ 0 & 1 & -5 & | & -9 \\ 0 & 0 & 1 & | & 2 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 7 & | & 17 \\ 0 & 1 & 0 & | & 1 \\ 0 & 0 & 1 & | & 2 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & | & 3 \\ 0 & 1 & 0 & | & 1 \\ 0 & 0 & 1 & | & 2 \end{bmatrix}.$$

Innen már azonnal kiolvashatjuk a megoldásokat:

$$\begin{cases} x_1 = 3 \\ x_2 = 1 \\ x_3 = 2. \end{cases}$$

1.5. Példa *Az a valós paraméter értékétől függően tárgyaljuk és oldjuk meg Gauss módszerrel a következő egyenletrendszert:*

$$\begin{cases} x_1 & +2x_2 & -3x_3 & = & 4 \\ 3x_1 & -x_2 & +5x_3 & = & 2 \\ 4x_1 & +x_2 & +(a^2-14)x_3 & = & a+2. \end{cases}$$

1.5. Megoldás

$$(\mathbf{A}|\underline{b}) = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 & | & 4 \\ 3 & -1 & 5 & | & 2 \\ 4 & 1 & a^2-14 & | & a+2 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 & | & 4 \\ 0 & -7 & 14 & | & -10 \\ 0 & -7 & a^2-2 & | & a-14 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 & | & 4 \\ 0 & 1 & -2 & | & 10/7 \\ 0 & 0 & a^2-16 & | & a-4 \\ & & & & \end{bmatrix}.$$

Ebből látszik, hogy

(1) a megoldáshalmaz üres $\Leftrightarrow 2 = rang\,(\mathbf{A}) < rang\,(\mathbf{A}|\underline{b}) = 3$, *ami* $a = -4$ *esetben történik meg;*

(2) pontosan egy megoldásunk akkor van, ha

$$rang\,(\mathbf{A}) = rang\,(\mathbf{A}|\underline{b}) = 3,$$

azaz $a \in \mathbb{R}\backslash\{-4, 4\}$*;*

(3) végtelen sok megoldásunk pedig pontosan akkor van, ha

$$rang\,(\mathbf{A}) = rang\,(\mathbf{A}|\underline{b}) = 2 < 3,$$

azaz $a = 4$. *Ekkor az egyenlet szabadságfoka* 1, *azaz a megoldáshoz akár tovább is számolhatunk.* 4*-et írva az a paraméter helyére kapjuk, hogy:*

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 & | & 4 \\ 0 & 1 & -2 & | & 10/7 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & | & 8/7 \\ 0 & 1 & -2 & | & 10/7 \end{bmatrix},$$

ahonnan következik, hogy csak x_3*-at tekinthetjük szabad változónak, így a megoldás az*

$$\begin{cases} x_1 = & \frac{8}{7} - t \\ x_2 = & \frac{10}{7} + 2t \\ x_3 = & t \end{cases}$$

egyenes az $\mathbb{R}^3$ *térben, ahol* $t \in \mathbb{R}$.

Amikor pontosan egy megoldásunk van (azaz $a \in \mathbb{R}\setminus\{-4,4\}$), akkor

$$\begin{cases} x_3 = & & \dfrac{1}{a+4} \\ x_2 = & \dfrac{10}{7} + \dfrac{2}{a+4} = & \dfrac{10a+54}{7(a+4)} \\ x_1 = & 4 - 2\cdot\dfrac{10a+54}{7(a+4)} = & \dfrac{8a+25}{7(a+4)}, \end{cases}$$

tehát a $\left(\frac{8a+25}{7(a+4)}, \frac{10a+54}{7(a+4)}, \frac{1}{a+4}\right)$ *pont a megoldás.*

1.3. Inverz mátrix módszer és Cramer-szabály ha pontosan egy megoldás van

Amennyiben az

$$\mathbf{A}\underline{x} = \underline{b}$$

egyenletrendszerben az ismeretlenek száma (n) megegyezik az egyenletek számával (m), azaz az $\mathbf{A}$ együtthatómátrix négyzetes, akkor érdemes megvizsgálni azt az esetet, amikor az $\mathbf{A}$ nem szinguláris (azaz $det\mathbf{A} \neq 0$). Ekkor ugyanis létezik az $\mathbf{A}$ inverz mátrixa, amivel balról szorozva mátrixegyenletünket (ez az *inverz mátrix módszer*) kapjuk, hogy az ismeretlenek oszlopmátrixa

$$\underline{x} = \mathbf{A^{-1}}\underline{b}.$$

Nem szinguláris együtthatómátrix esetén a *Cramer szabály* (`http://en.wikipedia.org/wiki/Cramer%27s_rule`) is használható, mely szerint az $x_i,\quad i = 1, 2, \ldots, n$ ismeretleneket a

$$x_i = \frac{det\,\mathbf{D_i}}{det\,\mathbf{A}} \tag{1.2}$$

képlettel tudjuk kiszámolni, ahol a $\mathbf{D_i}$ mátrixot az $\mathbf{A}$ mátrixból kapjuk, ha az i-edik oszlop helyére beírjuk a szabadtagok $\underline{b}$ oszlopvektorát. (nem bizonyítjuk)

1.6. Példa *Oldjuk meg inverz mátrix módszerrel és Cramer szabállyal is a következő egyenletrendszert:*

$$\begin{cases} 5x_1 + 3x_2 + 9x_3 = 20 \\ 3x_1 + x_2 + 2x_3 = 7 \\ 3x_1 + 2x_2 + 4x_3 = 11. \end{cases}$$

1.6. Megoldás *Bármelyik módszerrel dolgozhatunk, hiszen az egyenletrendszer* $\mathbf{A}$ *együtthatómátrixa négyzetes és nem szinguláris, azaz*

$$det \begin{bmatrix} 5 & 3 & 9 \\ 3 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 4 \end{bmatrix} = 9 \neq 0.$$

Könnyen kiszámolhatjuk, hogy

$$\mathbf{A^{-1}} = \begin{bmatrix} 0 & 2/3 & -1/3 \\ -2/3 & -7/9 & 17/9 \\ 1/3 & -1/9 & -4/9 \end{bmatrix},$$

ahonnan azonnal kapjuk, hogy

$$\underline{x} = \mathbf{A^{-1}}\underline{b} = \begin{bmatrix} 0 & 2/3 & -1/3 \\ -2/3 & -7/9 & 17/9 \\ 1/3 & -1/9 & -4/9 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 20 \\ 7 \\ 11 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

A Cramer szabályhoz (ami szintén használható itt, mert az együtthatómátrix determinánsa nem nulla) ki kell számolnunk három determinánst:

$$det\,\mathbf{D_1} := det \begin{bmatrix} 20 & 3 & 9 \\ 7 & 1 & 2 \\ 11 & 2 & 4 \end{bmatrix} = 9,$$

így

$$x_1 = \frac{det\,\mathbf{D_1}}{det\,\mathbf{A}} = \frac{9}{9} = 1. \tag{1.3}$$

Hasonlóan felírhatjuk, hogy

$$det\,\mathbf{D_2} := det \begin{bmatrix} 5 & 20 & 9 \\ 3 & 7 & 2 \\ 3 & 11 & 4 \end{bmatrix} = 18,$$

ezért

$$x_2 = \frac{det\,\mathbf{D_2}}{det\,\mathbf{A}} = \frac{18}{9} = 2 \tag{1.4}$$

és ugyanígy számolva kapjuk az utolsó ismeretlenünkre, hogy

$$x_3 = \frac{det\,\mathbf{D_3}}{det\,\mathbf{A}} = \frac{9}{9} = 1. \tag{1.5}$$

1.4. Homogén egyenletrendszerek

1.8. Definíció *A homogén egyenletrendszer általános alakja*

$$\mathbf{A}\underline{x} = \underline{0},$$

azaz itt a jobboldalon $\underline{b} = \underline{0}$.

Vegyünk most egy példát homogén egyenletrendszerre:

$$\begin{cases} 2x - y + 3z = & 0 \\ x + 4y - 5z = & 0 \\ -3x - 2y + 7z = & 0. \end{cases}$$

Ez a három dimenziós térben három különböző, origón átmenő síkot jelent. Ebből is látszik, hogy a homogén egyenletrendszereknek megoldáshalmaza nemüres. Két eset lehetséges: a megoldás csak az origó (azaz minden változó csak a 0 értéket veheti fel, ezt nevezzük a homogén egyenletrendszer *triviális megoldásának*), vagy végtelen megoldásunk van, ami tartalmazza az origót is. Tehát homogén egyenletrendszerek esetén az a kérdés, hogy létezik-e a triviálistól eltérő megoldás (ekkor megoldáshalmazunk természetesen végtelen sok elemet tartalmaz).

Vegyük észre továbbá azt is, hogy az m egyenletből álló n ismeretlenes homogén egyenletrendszer megoldáshalmaza az $\mathbb{R}^n$ tér egy lineáris altere, melyet $\mathfrak{M}$-mel jelölünk. Indoklás: ha $\underline{x}_1$ és $\underline{x}_2$ megoldások, azaz $\mathbf{A}\underline{x}_1 = \underline{0}$ és $\mathbf{A}\underline{x}_2 = \underline{0}$, akkor minden α és β valós számra

$$\mathbf{A}(\alpha\underline{x}_1 + \beta\underline{x}_2) = \alpha\mathbf{A}\underline{x}_1 + \beta\mathbf{A}\underline{x}_2 = \underline{0}$$

is teljesül, azaz $\alpha\underline{x}_1 + \beta\underline{x}_2$ megoldása az előbbi homogén egyenletrendszernek. Az $\mathfrak{M}$ altér dimenziója $n - r$, ahol $r := rang(\mathbf{A})$ (nem bizonyítjuk), tehát az $\mathfrak{M}$ altér egy $\phi_1, \phi_2, \ldots, \phi_{n-r}$ bázisa nem más, mint a homogén egyenletrendszer $(n - r)$ darab lineárisan független megoldása. Bármely megoldás előállítható ezen báziselemek lineáris kombinációjaként. (Ezt utóbbit sem bizonyítjuk most.) Felírhatjuk, hogy a homogén egyenletrendszerünk *általános megoldása* nem más, mint

$$\phi := \sum_{k=1}^{n-r} c_k\phi_k. \tag{1.6}$$

A következő tételek az 1.7. tétel azonnali következményei:

1.9. Tétel *Legyen* $\mathbf{A}$ *egy* $m \times n$*-es valós elemű mátrix. Az* $\mathbf{A}\underline{x} = \underline{0}$ *homogén egyenletrendszernek van a triviálistól eltérő megoldása* $\iff rang(\mathbf{A}) < n$.

1.10. Tétel *Ha a homogén egyenletrendszer együtthatómátrixa négyzetes, azaz az ismeretlenek száma megegyezik az egyenletek számával ($m = n$), akkor a következő állítások ekvivalensek:*

(1) az $\mathbf{A}\underline{x} = \underline{0}$ egyenletrendszernek van nemtriviális megoldása;

(2) az $\mathbf{A}$ mátrix szinguláris, azaz det $\mathbf{A} = 0$.

1.11. Megjegyzés *Az $\mathbf{A}\underline{x} = \underline{b}$ inhomogén egyenletrendszer általános megoldása felírható az inhomogén egyenletrendszer egy partikuláris megoldásának és a homogén egyenletrendszer általános megoldásának összegeként.*

Indoklás: Ha ψ_1 és ψ_2 az $\mathbf{A}\underline{x} = \underline{b}$ inhomogén egyenletrendszer megoldásai, akkor

$$\mathbf{A}(\psi_1 - \psi_2) = \mathbf{A}\psi_1 - \mathbf{A}\psi_2 = \underline{b} - \underline{b} = \underline{0},$$

ami viszont azt jelenti, hogy $\psi_1 - \psi_2$ a hozzárendelt homogén egyenletrendszer egy megoldása. Ekkor léteznek $c_1, c_2, \ldots, c_{n-r}$ valós számok, hogy

$$\psi_1 - \psi_2 = \sum_{k=1}^{n-r} c_k \phi_k.$$

Ebből következik, hogy az inhomogén egyenletrendszer megoldása felírható a hozzárendelt homogén egyenletrendszer általános megoldásának és az inhomogén egyenletrendszer egy partikuláris megoldásának összegeként.

1.5. Feladatok

1.1. Feladat *Állapítsuk meg az α paraméter értékét úgy, hogy az:*

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 = & 2 \\ -3x_1 - 5x_2 + 4x_3 + x_4 = & \alpha \\ 2x_1 + 3x_2 - 3x_3 - 2x_4 = & 4 \end{cases}$$

egyenletrendszer megoldható legyen. Adjuk meg a megoldást is ebben az esetben.

Eredmény: $\alpha = -6$. Ekkor a szabadságfok 2, a megoldás pedig

$$\begin{cases} x_1 = & 2 + 3u & +7v \\ x_2 = & -u & -4v \\ x_3 = & u & \\ x_4 = & & v \end{cases}$$

ahol $u, v \in \mathbb{R}$.

1.2. Feladat *Határozzuk meg a p és q paraméterek értékét úgy, hogy a*

$$\begin{cases} x_1 + 9x_2 - 5x_3 = & q \\ 3x_1 + 5x_2 - x_3 = & 1 \\ x_1 + px_2 + 2x_3 = & 2 \end{cases}$$

egyenletrendszernek

(1) pontosan egy megoldása legyen;

(2) végtelen sok megoldása legyen;

(3) ne legyen megoldása.

Ebben a feladatban nem kérjük a megoldásokat, amikor azok léteznek.

Eredmények:

(1) $p \neq -2$;

(2) $p = -2$ és $q = -3$;

(3) $p = -2$ és $q \neq -3$.

1.3. Feladat *A t paraméter értékétől függően vizsgáljuk az alábbi egyenletrendszer megoldásainak számát. Ahol van megoldás, ott írjuk is fel azt:*

$$\begin{cases} 2x_1 + 5x_2 + x_3 + 3x_4 = & 2 \\ 4x_1 + 6x_2 + 3x_3 + 5x_4 = & 4 \\ 4x_1 + 14x_2 + x_3 + 7x_4 = & 4 \\ 2x_1 - 3x_2 + 3x_3 + tx_4 = & 7. \end{cases}$$

Eredmények:

(1) pontosan egy megoldásunk akkor volna, ha $rang\,(\mathbf{A}) = rang\,(\mathbf{A}|\underline{b}) = 4$, de ez semmilyen t értékre nem lehetséges;

(2) végtelen sok megoldásunk van, ha $rang\,(\mathbf{A}) = rang\,(\mathbf{A}|\underline{b}) < 4$, azaz a közös rang 3, ekkor $t \neq 1$. Ilyenkor a szabadságfok 1, a megoldáshalmaz pedig

$$\begin{cases} x_1 = & \frac{1}{2}(2 + \frac{10}{t-1} - 6u) \\ x_2 = & u - \frac{5}{t-1} \\ x_3 = & u \\ x_4 = & \frac{5}{t-1}; \end{cases}$$

(3) üres a megoldáshalmaz, ha $2 = rang\,(\mathbf{A}) < rang\,(\mathbf{A}|\underline{b}) = 3$, ez pedig csak a $t = 1$ esetben fordul elő.

1.4. Feladat *Van-e közös egyenese a következő origón átmenő síkoknak:*

$$\begin{cases} 5x - 2y + z = & 0 \\ \quad x + y + 6z = & 0 \\ 3x \qquad\quad + 4z = & 0 \\ \qquad\; -y + 2z = & 0. \end{cases}$$

Eredmény: Nincs az origón kívül közös pontjuk.

1.5. Feladat *Milyen a és b értékekre lesz a*

$$\begin{cases} ax + y + z = & 4 \\ x + by + z = & 3 \\ x + 2by + z = & 4 \end{cases}$$

síkoknak pontosan egy metszéspontja? Adjuk is meg ezt a közös pontot.

Eredmény: Pontosan egy metszéspont van, ha $b(a-1) \neq 0$. Ekkor

$$\begin{cases} x = & \dfrac{2b-1}{b(a-1)} \\ y = & \dfrac{1}{b} \\ z = & \dfrac{2ab-4b+1}{a-1}. \end{cases}$$

1.6. Feladat *Határozzuk meg a*

$$\begin{cases} 2x - y + 3z + 4 = & 0 \\ x + 4y - 5z - 7 = & 0 \\ -3x - 2y + 7z + 1 = & 0 \end{cases}$$

síkok metszéspontját, ha létezik.

Eredmény: $x = -1$, $y = 2$ és $z = 0$.

1.7. Feladat *Határozzuk meg a p paraméter értékét úgy, hogy az*

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 = & 0 \\ x_1 - 3x_2 - px_3 = & 0 \\ x_1 + px_2 + 3x_3 = & 0 \end{cases}$$

homogén egyenletrendszernek

(1) ne legyen a triviálistól különböző megoldása;

(2) végtelen sok megoldása legyen.

Most sem kérjük a megoldásokat, amikor azok léteznek.

Eredmények:

(1) $p \neq -1$ és $p \neq 3$;

(2) $p = -1$ vagy $p = 3$.

1.8. Feladat *Oldjuk meg az:*

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 - 3x_4 = & 0 \\ 2x_1 - 2x_2 - x_3 + 4x_4 = & 0 \\ 2x_1 + 3x_2 - x_3 + x_4 = & 0 \\ x_1 - 4x_2 - 3x_3 + 2x_4 = & 0 \end{cases}$$

homogén egyenletrendszert.

Eredmény: Mivelhogy az együtthatók mátrixának a rangja 4, ezért csak a triviális megoldásunk van.

1.9. Feladat *Oldjuk meg Cramer-szabállyal a*

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 - x_3 = & 4 \\ 3x_1 + 4x_2 - 2x_3 = & 11 \\ 3x_1 - 2x_2 + 4x_3 = & 11 \end{cases}$$

egyenletrendszert.

Eredmény: $x_1 = 3$, $x_2 = 1$ és $x_3 = 1$.

1.10. Feladat *Oldjuk meg Cramer-szabállyal a*

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 + 3x_4 = & 1 \\ 3x_1 - x_2 - x_3 - 2x_4 = & -4 \\ 2x_1 + 3x_2 - x_3 - x_4 = & -6 \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 - x_4 = & -4 \end{cases}$$

egyenletrendszert.

Eredmény: $x_1 = -1$, $x_2 = -1$, $x_3 = 0$ és $x_4 = 1$.

2. fejezet

Komplex számok

A képzetes számok - az isteni szellem e gyönyörű és csodálatos hordozói - már majdnem a lét és nemlét megtestesítői." (Carl Friedrich Gauss)

2.1. Mese

A komplex számok keletkezésének és fejlődésének története nagyon hosszú, ezért csak pár dolgot említenénk meg belőle, figyelemfelkeltés céljából. Gerolamo Cardano (1501-1576) (`http://hu.wikipedia.org/wiki/Gerolamo_Cardano`), aki először hozta nyilvánosságra a harmadfokú egyenlet megoldóképletét[1], tehetetlenül állt azzal az esettel szemben, amikor a megoldóképlet megbokrosodott, felmondta a szolgálatot. Ez akkor történt, amikor az egyenlet valós gyöke két komplex szám összegeként jelentkezett. Erre válaszolt elsőként sikerrel Bombelli (1526-1572) (`http://en.wikipedia.org/wiki/Rafael_Bombelli`), amikor az "Algebra" és a "Geometria" című munkáiban megalapozta a képzetes számok elméletét.

Az igazi áttörést a komplex számok területén Gaussnak (1777-1855) (`http://hu.wikipedia.org/wiki/Carl_Friedrich_Gauss`) köszönhetjük, hiszen ő volt az, aki a képzetes számok körüli misztériumot megszüntette azzal, hogy felépítette, rendszerezte, majd tárgyalta a komplex számok aritmetikáját és algebráját. Erre nagy igény volt, merthogy a valós számegyenes számos probléma esetében már "szűknek" bizonyult. A síkra való okos kiterjesztéshez már megvolt minden eszköz. Lényeges volt, hogy az összes eddigi, valós szá-

[1] "Cardano utóbb az asztrológia hívének szegődött, s elkészítette saját horoszkópját, amelyből a halálának a napja is kiderült. Mikor ez a nap elérkezett - hogy jóslata beteljesüljön - öngyilkos lett." (Raymond Smullyan, ld. [S04])

mokra vonatkozó művelet, szabály, tulajdonság érvényben maradjon.

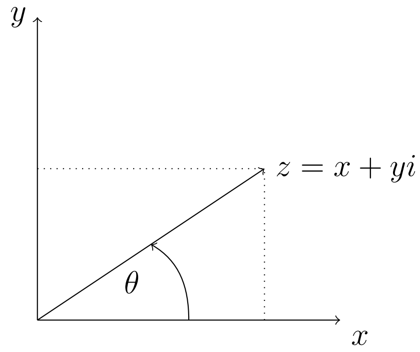
A komplex számok definiálása [2] után Gauss is foglalkozott az algebra alaptételével, mely szerint egy n-edfokú, egyváltozós, komplex együtthatós polinomnak multiplicitással számolva n gyöke van.

A számfogalom bővülésének fontos állomásához érkeztünk, de nem végállomás ez sem, merthogy feltevődik a kérdés: mi van, ha a három- vagy négydimenziós tér pontjaihoz szeretnénk egyértelműen számokat rendelni, vagyis a komplex számhalmazt bővíteni szeretnénk? Ekkor jön be a kvaternió fogalma. A kvaterniók a komplex számok négy dimenzióra történő nem kommutatív kiterjesztései. Először a kvaterniókat Sir William Rowan Hamilton ír matematikus (`http://hu.wikipedia.org/wiki/Kvaterni%C3%B3k`) vezette be 1843-ban, ezért hívjuk őket még Hamilton-féle számoknak is. Az $x_0+x_1\cdot\underline{i}+x_2\cdot\underline{j}+x_3\cdot\underline{k}$ ($x_l \in \mathbb{R}$, $l \in 0,1,2,3$) kvaternió valós része x_0 , míg a többi a képzetes rész, melyet gyakran a háromdimenziós vektorokkal azonosítunk (úgy is jelöltük őket). A valós számok azonosíthatók azokkal a kvaterniókkal, melyeknek képzetes része a nullvektor. Azokat a kvaterniókat, melyeknek a valós része nulla, tisztán képzetes kvaternióknak nevezik. A tisztán képzetes kvaterniók halmaza egy háromdimenziós vektortér, aminek egy bázisa $\{\underline{i},\underline{j},\underline{k}\}$. Mindamellett, hogy a kvaterniókkal végzett műveletekről itt nem lesz szó, megjegyeznénk, hogy legfontosabb hasznuk, hogy a tisztán képzetes kvaterniókkal leírható a háromdimenziós vektortér. A kvaterniókat a háromdimenziós mozgásokkal való szoros kapcsolatuk miatt robotok vezérlésénél használják. A kvaterniókhoz hasonló konstrukciókat *hiperkomplex* számoknak is nevezik. A komplex számok és függvények alkalmazása igen széleskörű, alkalmazták őket az első repülőgépszárny tervezésekor (Zsukovszkij-profil `http://hu.wikipedia.org/wiki/Nyikolaj_Jegorovics_Zsukovszkij`) vagy a komplex impedanciák használatakor a mérnöki gyakorlatban.

2.2. Komplex számok algebrai alakja

2.1. Definíció *A komplex szám algebrai alakja nem más, mint $z = x + yi$, ahol $x, y \in \mathbb{R}$ és $i^2 = -1$. Az x -et szoktuk a komplex szám valós részének nevezni, míg y -t a komplex szám képzetes (vagy imaginárius) részének. Jelölé-*

[2] Gauss-szal párhuzamosan Bolyai János (1802-1860) Responsio című munkájában korát megelőző ötleteket, észrevételeket, írt le a komplex számok értelmezésével kapcsolatosan, sőt ennek a geometriában játszott fontos szerepére is rámutatott. Gauss-szal egyidőben, de tőle függetlenül felfedezte a komplex számok aritmetikáját is. Igaz, eredményeit nem rendszerezte összefüggő dolgozatban, mint Gauss, ám kézirataiból, följegyzéseiből megállapíthatjuk, hogy a komplex egészek oszthatóságának minden alapvető problémájával foglalkozott.



2.1. ábra. Komplex szám

sük: Re $z = x$ *és Im* $z = y$ *. A komplex számok halmazát* $\mathbb{C}$ *-vel jelöljük, azaz* $\mathbb{C} := \{z = x + yi \mid x, y \in \mathbb{R},\ i^2 = -1\}$.

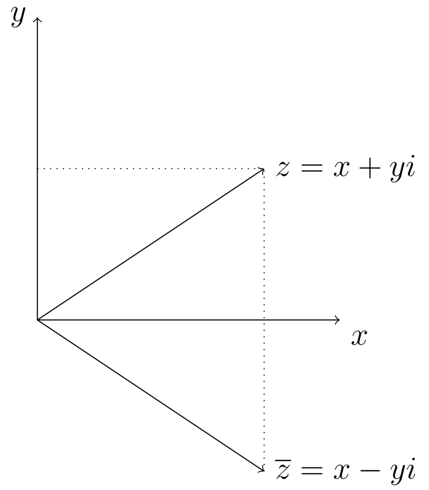
A $z = x + yi$ komplex számnak két geometriai reprezentációja is van, az egyik az xy-sík $P(x, y)$ pontja, míg a másik ugyanebben a síkban az origóból a $P(x, y)$ pontba mutató $\overrightarrow{OP} = \underline{r} = x\underline{i} + y\underline{j}$ vektor. Mindkét esetben az x -tengelyt *valós*, az y -tengelyt pedig *képzetes tengelynek* nevezzük, $Re\,z$, illetve $Im\,z - vel$ jelöljük. A komplex számok geometriai reprezentációját gyakran *Argand-diagramként* is emlegetjük. Az ábrán szereplő θ szögre visszatérünk később, mikor a komplex számok más alakjával is megismerkedünk.
Példák algebrai alakban megadott komplex számokra:
$z_1 = 3 + 4i; z_2 = 2 - 3i; z_3 = -3 - 4i; z_4 = 25; z_5 = 25i.$

2.2. Definíció *A* $z = x + yi$ *komplex szám ellentettje* $-z := -x - yi$ *, azaz tulajdonképpen a z origóra vett szimmetrikusa. A komplex szám abszolút értéke (akárcsak a valós számok esetén) nem más, mint az origótól vett távolság, azaz* $|z| := r := \sqrt{x^2 + y^2}$. *A* $z = x + yi$ *komplex szám konjugáltja a* $\overline{z} := x - yi$ *, azaz nem más, mint az* x *-tengelyre vett tükörképe (ezek szerint* $\overline{\overline{z}} = z$*).*

2.3. Műveletek algebrai alakban

Mivel a valós számok speciális komplex számok, ezért úgy kell a $\mathbb{C}$ -beli számokra a műveleteket definiálnunk, hogy minden eddigi definíció, tétel, tulajdonság, ami a valós számokkal végzett műveletekre vonatkozik, érvényben maradjon.

2.3. Definíció *Két, algebrai alakban megadott komplex számot úgy adunk össze (és vonunk ki egymásból), hogy a valós- és képzetes részekkel külön-külön elvégezzük az összeadást (kivonást). A kivonás itt is ellentettel való összeadást*



2.2. ábra. Komplex szám és konjugáltja

jelent. Tehát amennyiben $z_1 = x_1 + y_1 i$ *és* $z_2 = x_2 + y_2 i$*, akkor*

$$z_1 \pm z_2 := x_1 \pm x_2 + (y_1 \pm y_2)i. \tag{2.1}$$

Továbbá

$$z_1 \cdot z_2 := x_1 x_2 - y_1 y_2 + (x_1 y_2 + x_2 y_1)i, \tag{2.2}$$

azaz két algebrai alakban megadott komplex számot úgy szorzunk össze, mint két zárójelet, minden tagot beszorzunk minden taggal, figyelembe véve, hogy $i^2 = -1$.

2.4. Következmény $z \cdot \overline{z} = (x+yi)(x-yi) = x^2 - y^2 i^2 = x^2 + y^2 = |z|^2 \in \mathbb{R}$, $\forall z \in \mathbb{C}$.

"Ha jobban belegondolunk, csakugyan furcsa dolog ez. Csak éppen az az érthetetlen, hogy mégis számolhatunk imaginárius vagy más ilyen képtelen értékekkel, és végül mindennek ellenére reális értéket kapunk eredményül! ... De nem érzed, hogy marad az egészben mégis valami megfoghatatlan? Hogy is mondjam? Gondold csak végig: az ilyen számítások egészen szolid értékekkel indulnak, amelyek métert, súlyt vagy más valóban megfogható mennyiségeket jelölnek, vagy legalábbis valóságos számok. Az eredményben is ugyanilyen számokat kapsz. De ezeket valami olyasmi köti össze az előbbiekkel, ami egyáltalán nincs is. Hát nem olyan ez, mint egy híd, amelynek csak első és utolsó pillére van, a pillérek között pedig semmi, és te mégis olyan biztonsággal mégy át rajta, mintha nem kellene a folyóba esned? Én mindenképp csalást szimatolok az ilyen számításban, ahol csak hipp-hopp, ott legyek, ahol akarok ... És a legkísértetiesebb számomra a matematikának ez az ereje, amely csakugyan átvisz minket a nem létező hídon, anélkül, hogy lezuhannánk róla." (Robert Musil: Törless iskolaévei, Európa Könyvkiadó, Budapest, 1999, 91. old.)

Jegyezzük meg, hogy osztáskor mindig bővítünk a nevező konjugáltjával, azaz

$$\frac{x_1 + y_1 i}{x_2 + y_2 i} = \frac{(x_1 + y_1 i)(x_2 - y_2 i)}{(x_2 + y_2 i)(x_2 - y_2 i)} = \frac{x_1 x_2 + y_1 y_2}{{x_2}^2 + {y_2}^2} + \frac{x_2 y_1 - x_1 y_2}{{x_2}^2 + {y_2}^2} i \tag{2.3}$$

Mielőtt a hatványozásról szót ejtenénk, nézzük meg az i képzetes egység hatványait:

$$i = i;\ \ i^2 = -1;\ \ i^3 = -i;\ \ i^4 = 1, \tag{2.4}$$

és így tovább, ezért i tetszőleges hatványának eredményét mindig a hatványkitevő 4-gyel való maradékos osztása határozza meg.
Tetszőleges komplex számot algebrai alakban nem mindig tudunk hatványozni, ezért emiatt is szükséges egy másik alak bevezetése. Ugyanez a helyzet a komplex n-edik gyökvonás esetén is. Azért nagyon speciális komplex számok esetén algebrai alakban is könnyű a hatványozás, mint például ha:

(1) az x-tengelyen van a komplex számunk, azaz valós szám, pl.
$(-2 + 0 \cdot i)^{10} = 2^{10} (= 2^{10} + 0 \cdot i)$,

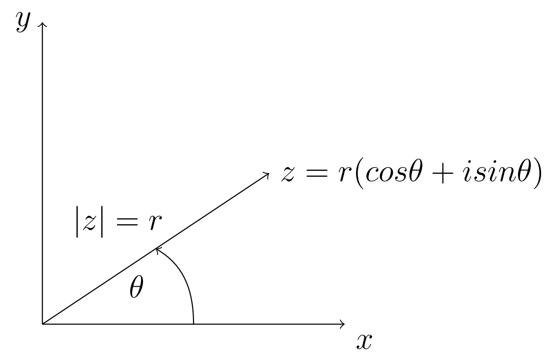
(2) az y-tengelyen van a komplex számunk, pl.
$(-2 \cdot i)^{10} = 2^{10} \cdot i^{10} = 2^{10} \cdot i^2 = -2^{10} + 0 \cdot i$,

(3) valamelyik "szögfelezőn" helyezkedik el z , azaz x és y között csak előjel eltérés lehet, pl.
$(1 - i)^{100} = [(1 - i)^2]^{50} = (-2i)^{50} = 2^{50} i^2 = -2^{50}$.

Amennyiben z máshol helyezkedik el, algebrai alakban csak nagyon kis kitevőjű hatványt érdemes elvégezni. Szükségünk a komplex számok más alakjára is.

2.1. Példa *Számítsuk ki:* $1 + i + i^2 + i^3 + \ldots + i^{2009}$ *értékét.*

2.1. Megoldás *Az* (2.4) *képlet miatt* $i + i^2 + i^3 + i^4 = 0$ *, így megy ez végig, ezért* $i + i^2 + i^3 + \ldots + i^{2008} = 0$*, mert* 2008 *osztható* 4*-gyel.*
$i^{2009} = (i^4)^{502} \cdot i = 1 \cdot i = i$*, emiatt a kért érték* $1 + i$*.*



2.3. ábra. Komplex szám trigonometrikus alakban

2.4. Komplex számok trigonometrikus és exponenciális alakja

Az Argand-diagramot megnézve, amennyiben θ-val jelöljük az x-tengely és az $\overrightarrow{OP}$ vektor által bezárt szöget (az x-tengelytől óramutató járásával ellentétes irányban haladva), a következőket állapíthatjuk meg:

(1) ha csak a θ értéket rögzítjük, egy félegyenest kapunk a síkban;

(2) ha csak az $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ abszolút értéket rögzítjük, akkor egy origó középpontú, r sugarú kört kapunk a síkban;

(3) ha mindkét értéket rögzítjük, akkor egy egyértelműen meghatározott $P(x, y)$ pontot kapunk a komplex számsíkban (a kör és félegyenes egyelemű metszetét).

Felírhatjuk, hogy

$$\cos\theta = \frac{x}{r}\ , \ \sin\theta = \frac{y}{r}\ , \ \text{ahol}\ r = \sqrt{x^2 + y^2}. \tag{2.5}$$

Emiatt $x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$. Az algebrai alakból kiindulva kapjuk, hogy

$$z = x + yi = r\cos\theta + ir\sin\theta = r(\cos\theta + i\sin\theta).$$

2.5. Definíció *A z komplex szám szám trigonometrikus alakja $z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$, ahol $r \geq 0$ az abszolút érték, $\theta \in [0, 2\pi)$ pedig a főargumentum.*

2.2. Példa *Legyen* $z = 2(\cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3})$*. Írjuk fel az algebrai alakot.*

2.2. Megoldás $z = 2(\cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3}) = 2\cos\frac{2\pi}{3} + 2i\sin\frac{2\pi}{3} = -1 + i\sqrt{3}$.

2.3. Példa *Legyen* $z = -\sqrt{3} - i$*. Írjuk fel a trigonometrikus alakot.*

2.3. Megoldás $|z| = \sqrt{x^2+y^2} = \sqrt{3+1} = 2$, $\cos\theta = \frac{x}{r} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$, $\sin\theta = \frac{y}{r} = -\frac{1}{2}$*. Mivel mindkét érték negatív, ezért az argumentum a harmadik negyedben van, azaz* $\theta = \pi + \frac{\pi}{6} = \frac{7\pi}{6}$*. Így* $z = 2(\cos\frac{7\pi}{6} + \sin\frac{7\pi}{6})$*.*

2.6. Definíció *A* $z \in \mathbb{C}$ *komplex szám* n*-edik gyökei* ($n \in 1, 2, 3, \ldots$) *azok a* $w \in \mathbb{C}$ *komplex számok, melyekre* $w^n = z$*. Speciális eset:* $\sqrt[n]{0} = 0$*. Minden más esetben az* $\sqrt[n]{z}$ *jelölés* n *különböző komplex számot takar.*

2.7. Tétel *(Euler formula):* $e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$*.*

2.8. Definíció *A komplex szám exponenciális alakja* $z = re^{i\theta}$*, ahol* $r \geq 0$ *és* $\theta \in [0, 2\pi)$*.*

A $\theta = \pi$ helyettesítéssel az Euler formula az

$$e^{i\pi} + 1 = 0$$

összefüggéshez vezet, ami szoros kapcsolatot jelent az e, a π és a képzetes i között.

2.5. Műveletek exponenciális és trigonometrikus alakban

Az eddig felírtakból könnyen beláthatjuk a következőket:

(1) Összeadást, kivonást csak algebrai alakban érdemes elvégezni.

(2) Szorzás: Legyen $z_1 = r_1(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1)$ és $z_2 = r_2(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2)$. Ekkor

$$z_1 z_2 = r_1 r_2[\cos(\theta_1+\theta_2) + i\sin(\theta_1+\theta_2)]. \tag{2.6}$$

Ebből látszik, hogy a szorzás egy nyújtva forgatást jelent a síkban. Könnyebben belátjuk a szorzás képletét, ha a komlex szám exponenciális alakjával dolgozunk, azaz tekintjük a $z_1 = r_1 e^{i\theta_1}$ és $z_2 = r_2 e^{i\theta_2}$ alakokat, ahol $r_l \geq 0$ és $\theta_l \in [0, 2\pi)$, $l = 1, 2$ esetén. Ekkor az egyenlő alapú hatványokkal végzett szorzás eredményeként kapjuk, hogy

$$z_1 z_2 = r_1 r_2 e^{i(\theta_1+\theta_2)}.$$

A következő két művelet is azonnal látható exponenciális alakban:

(3) Osztás: Legyen $z_1 = r_1(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1)$ és $z_2 = r_2(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2)$. Ekkor

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2}[\cos(\theta_1 - \theta_2) + i\sin(\theta_1 - \theta_2)]. \tag{2.7}$$

(4) Hatványozás: Tetszőleges $n \in \{1, 2, 3, \ldots\}$ és tetszőleges $z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$ ($r \geq 0$ és $\theta \in [0, 2\pi)$) esetén

$$z^n = r^n[\cos(n\theta) + i\sin(n\theta)]. \tag{2.8}$$

(5) Bármilyen műveletről is legyen szó, a végén ügyeljünk arra, hogy mindig $\theta \in [0, 2\pi)$ legyen.

(6) $r = 1$ esetén a

$$(\cos\theta + i\sin\theta)^n = \cos(n\theta) + i\sin(n\theta) \tag{2.9}$$

képletet *De Moivre tételének* nevezzük (`http://hu.wikipedia.org/wiki/Abraham_de_Moivre`).

(7) Komplex n-edik gyökök:

2.9. Tétel *Tetszőleges $n \in 1, 2, 3, \ldots$ és tetszőleges $z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$ ($r \geq 0,\ \theta \in [0, 2\pi)$) esetén z komplex n-edik gyökei:*

$$\sqrt[n]{z} := \sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\theta + 2k\pi}{n} + i\sin\frac{\theta + 2k\pi}{n}\right), \quad \textit{ahol}\, k = 0, 1, \ldots, n-1. \tag{2.10}$$

Bizonyítás: Az előbbi számokat n-edik hatványra emelve kapjuk, hogy

$$r[\cos(\theta + 2k\pi) + i\sin(\theta + 2k\pi)] = r(\cos\theta + i\sin\theta) = z.$$

2.6. Az algebra alaptétele

2.10. Tétel *A komplex számok körében minden n-edfokú ($n \in \{1, 2, 3, \ldots\}$), $a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \ldots + a_1 z + a_0 = 0$ alakú egyenletnek ($a_i \in \mathbb{C}$, $a_n \neq 0$) pontosan n darab gyöke van, amennyiben az m-szeres gyököket multiplicitással (azaz m-szer) számoljuk.*

A tétel bizonyításán sok nagy matematikus dolgozott, mégis elsőként egy amatőr matematikus adott precíz bizonyítást. Jean-Robert Argand (Genf, 1768. július 18. – Párizs, 1822. augusztus 13.) aki főállásban egy párizsi könyvesbolt vezetője volt 1806-ban elsőként adott teljes bizonyítást az algebra alaptételére. Ugyanekkor publikált egy ötletet a komplex számok geometriai értelmezésére, ez a már említett Argand-diagram.

2.4. Példa *Oldjuk meg a* $z^3 - 1 = 0$ *egyenletet a komplex számok halmazán. A megoldásokat algebrai alakban kérjük.*

2.4. Megoldás *Az algebra alaptétele miatt tudjuk, három komplex megoldásunk lesz. Ezekből egyik az eddig ismert* $z_0 = 1$*, a másik két megoldást még ki kell számolnunk. Kétféleképpen kezdhetünk hozzá. Dolgozhatunk algebrai alakban (1) és trigonometrikus alakban (2), a komplex köbgyökök képleteit használva:*

(1) $z^3 - 1 = (z-1)(z^2+z+1)$. *Emiatt* $z_0 = 1$ *és a másik két gyököt a* $z^2+z+1 = 0$ *másodfokú egyenlet komplex megoldásából kapjuk. A megoldóképlet marad*

$$z_{1,2} = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a},$$

úgy, hogy itt komplex négyzetgyök szerepel, így ez eleve két számot jelent (itt jön be a $\pm$ *, mert a komplex számok halmazában* $\sqrt{-3} = \pm i\sqrt{3}$ *, ahol már a valós* $\sqrt{3}$ *szerepel a jobb oldalon). Tehát*

$$z_0 = 1,\ z_{2,3} = \frac{-1+\sqrt{-3}}{2} = -\frac{1}{2} \pm i\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

(2) Az 1*-et trigonometrikus alakban felírva kapjuk, hogy a gyökök*

$$z = \sqrt[3]{1} = \sqrt[3]{1(\cos 0 + i \sin 0)} = \cos\frac{0+2k\pi}{3} + i\sin\frac{0+2k\pi}{3} \text{ alakúak, ahol } k = 0, 1, 2.$$

Ebből felírhatjuk, hogy

$$z_0 = \cos 0 + i \sin 0 = 1,$$
$$z_1 = \cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3} = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2},$$
$$z_2 = \cos\frac{4\pi}{3} + i\sin\frac{4\pi}{3} = -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

2.7. Feladatok

2.1. Feladat *Számítsuk ki a következő* z_1 *és* z_2 *számok* $\frac{z_1}{z_2}$ *hányadosát:*

(1) $z_1 = 5 + 2i$, $z_2 = 4 - 3i$;

(2) $z_1 = 1 + 2i$, $z_2 = 2 - i$;

(3) $z_1 = 2 + i$, $z_2 = 3 + i$.

Eredmények:

(1) $\frac{14}{25} + \frac{23}{25}i$;

(2) i;

(3) $\frac{7}{10} + \frac{1}{10}i$.

2.2. Feladat *Számítsuk ki a* $z_1 = 1 - i$ *és* $z_2 = 1 - 2i$ *számok esetén a* $z_1 z_2^2$ *és a* $\frac{z_1^4}{z_2}$ *számokat.*

Eredmények: $z_1 z_2^2 = -7 - i$ és $\frac{z_1^4}{z_2} = -\frac{4}{5} - \frac{8}{5}i$.

2.3. Feladat *Legyen* $z_1 = 2(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4})$ *és* $z_2 = 3(\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2})$. *Trigonometrikus alakban végezzük el a* $z_1 z_2$ *és a* $\frac{z_1}{z_2}$ *műveleteket és adjuk meg* $\overline{z_2}$ *-t is.*

Eredmények: $z_1 z_2 = 6(\cos\frac{3\pi}{4} + i\sin\frac{3\pi}{4})$; $\frac{z_1}{z_2} = \frac{2}{3}(\cos\frac{7\pi}{4} + i\sin\frac{7\pi}{4})$;

$\overline{z_2} = 3(\cos\frac{3\pi}{2} + i\sin\frac{3\pi}{2})$.

2.4. Feladat *Legyen* $z = 2(\cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3})$. *Írjuk fel a* z^4 *trigonometrikus alakját.*

Eredmény: $z^4 = 16(\cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3})$.

2.5. Feladat *Számítsuk ki a* $(2 + 2i)^6$ *komplex szám algebrai alakját.*

Eredmény: $-2^9 i$.

2.6. Feladat *Határozzuk meg a* $\sqrt{2i}$ *komplex számok algebrai alakját.*

Eredmény: $1 + i$ és $-1 - i$.

2.7. Feladat *Oldjuk meg a meg a* $z^2 - i - 1 = 0$ *egyenletet.*

Eredmény: $z_0 = \sqrt[4]{2}(\cos\frac{\pi}{8} + i\sin\frac{\pi}{8})$ és $z_1 = \sqrt[4]{2}(\cos\frac{9\pi}{8} + i\sin\frac{9\pi}{8})$.

2.8. Feladat *Írjuk fel a $z = 4 + i4\sqrt{3}$ komplex köbgyökeit.*

Eredmény: $z_0 = 2(\cos\frac{\pi}{9} + i\sin\frac{\pi}{9})$;

$z_1 = 2(\cos\frac{7\pi}{9} + i\sin\frac{7\pi}{9})$;

$z_2 = 2(\cos\frac{13\pi}{9} + i\sin\frac{13\pi}{9})$.

2.9. Feladat *Oldjuk meg a meg a $z^3 + 4\sqrt{2} - i4\sqrt{2} = 0$ egyenletet.*

Eredmény: $z_0 = 2(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4})$;

$z_1 = 2(\cos\frac{11\pi}{12} + i\sin\frac{11\pi}{12})$;

$z_2 = 2(\cos\frac{19\pi}{12} + i\sin\frac{19\pi}{12})$.

3. fejezet

Négyzetes mátrixok sajátértékei és sajátvektorai. Diagonalizálás.

3.1. Sajátértékek, sajátvektorok

3.1. Definíció *Legyen*

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

egy komplex elemű n-edrendű (négyzetes) mátrix. A komplex λ számot az $\mathbf{A}$ mátrix sajátértékének nevezzük, ha létezik olyan $\underline{v} \in \mathbb{C}^n \setminus \{\underline{0}\}$ vektor, amelyre

$$\mathbf{A}\underline{v} = \lambda \underline{v} \tag{3.1}$$

teljesül. A $\underline{v} \in \mathbb{C}^n \setminus \{\underline{0}\}$ vektort az $\mathbf{A}$ mátrix λ sajátértékéhez tartozó sajátvektorának hívjuk.

Az $\mathbf{A} = [a_{ij}]$ n-edrendű komplex elemű mátrix sajátértékeit úgy határozzuk meg, hogy kiszámoljuk a

$$p(\lambda) := det(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I}_n) = det \begin{bmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn}-\lambda \end{bmatrix} \tag{3.2}$$

karakterisztikus polinom gyökeit.

Amint az előző definíció mutatja, a négyzetes mátrixok sajátértékei és sajátvektorai "párban" léteznek. Ha átrendezzük az (3.1) mátrixegyenletet, kapjuk, hogy a λ sajátértékhez tartozó sajátvektorok az

$$(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I}_n)\underline{v} = \underline{0} \tag{3.3}$$

homogén lineáris egyenletrendszer megoldásai. Ennek az egyenletrendszernek végtelen sok megoldása van ($p(\lambda) = 0$ miatt a (3.3) egyenletrendszer együtthatómátrixának determinánsa nulla), ezért a lineárisan független sajátvektorokat kell megkeresnünk.

A $p(\lambda)$ karakterisztikus polinom n-ed fokú, így az algebra alaptétele miatt (multiplicitással számolva) n sajátértékünk van. *A különböző sajátértékekhez lineárisan független sajátvektorok tartoznak (most nem bizonyítjuk).* Ha $p(\lambda)$ pl. egy m-szeres sajátérték, akkor ehhez tartozhat m darab lineárisan független sajátvektor, de az is előfordulhat, hogy csak kevesebb lineárisan független sajátvektor tartozik hozzá.

Mi ebben a fejezetben többnyire csak valós elemű szimmetrikus mátrixokkal foglalkozunk, azaz olyan valós elemű négyzetes $\mathbf{A}$ mátrixokkal, melyekre $\mathbf{A}^T = \mathbf{A}$. Másodrendű mátrixok esetén a nem szimmetrikus esetre is veszünk példákat.

Az első féléves anyagban láttuk, hogy az n-edrendű, valós elemű $\mathbf{A}$ mátrix az $\mathbb{R}^n$ vektortér egy lineáris transzformációját adja meg, mely a $\underline{v} \in \mathbb{R}^n$ tárgyvektorhoz az $\underline{y} = \mathbf{A}\underline{v}$ képvektort rendeli. A gyakorlatban fontosak azok a vektorok (már ha léteznek), melyek iránya a transzformáció során nem változik meg, azaz érdekelnek bennünket azon $\underline{v}$ vektorok, melyek teljesítik az (3.1) egyenlőséget, azaz a sajátérték-sajátvektor párok.

3.2. Tétel *Sajátértékekre, sajátvektorokra a következők igazak:*

(1) Ha $\underline{v}$ sajátvektora $\mathbf{A}$-nak, akkor $\alpha\underline{v}$ is az, minden nemnulla valós α esetén, azaz csak a sajátvektorok iránya van egyértelműen meghatározva (nagyságuk nem).

(2) Ha $\mathbf{A}$ valós szimmetrikus mátrix, akkor minden sajátértéke valós.

(3) Ha $\mathbf{A}$ egy n-edrendű valós szimmetrikus mátrix, akkor $\mathbf{A}$-nak van n számú páronként ortogonális lineárisan független sajátvektora.

3.1. Példa *Számítsuk ki a következő mátrix sajátértékeit és sajátvektorait:*

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 5 & -6 \\ 3 & -4 \end{bmatrix}.$$

3.1. Megoldás *A karakterisztikus polinom*

$$p(\lambda) := det(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I}_2) = det \begin{bmatrix} 5-\lambda & -6 \\ 3 & -4-\lambda \end{bmatrix}.$$

Ennek megoldásai $\lambda_1 = -1$ *és* $\lambda_2 = 2$.

A $\lambda_1 = -1$*-hez tartozó* $\underline{v}_1 = \begin{bmatrix} v_{11} \\ v_{21} \end{bmatrix}$ *sajátvektorokat a* (3.3)*-ba, azaz az*

$$\begin{bmatrix} 5-\lambda & -6 \\ 3 & -4-\lambda \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_{11} \\ v_{21} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

mátrixegyenletbe behelyettesítve kapjuk meg, mely szerint

$$\begin{bmatrix} 6 & -6 \\ 3 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_{11} \\ v_{21} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Ebből $v_{11} = v_{21}$*, azaz a* $\lambda_1 = -1$ *sajátértékhez tartozó sajátvektorok*

$\underline{v}_1 = \begin{bmatrix} t \\ t \end{bmatrix}$ *alakúak, ahol* $t \in \mathbb{R} \backslash \{0\}$*, ilyenkor például egy reprezentáns*

$\underline{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$.

Vegyük észre tehát, hogy egy adott sajátértékhez tartozó összes sajátvektor és a nullvektor alteret alkotnak. Ezt az alteret az adott sajátértékhez tartozó sajátaltérnek *nevezzük.*

A $\lambda_2 = 2$ *sajátértékhez tartozó* $\underline{v}_2 = \begin{bmatrix} v_{12} \\ v_{22} \end{bmatrix}$ *sajátvektorokat a* (3.3)*-ba behelyettesítve kapjuk meg, azaz*

$$\begin{bmatrix} 3 & -6 \\ 3 & -6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_{12} \\ v_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Innen $v_{12} = 2v_{22}$*, azaz a* $\lambda_1 = 2$ *sajátértékhez tartozó sajátvektorok*

$\underline{v}_2 = \begin{bmatrix} 2s \\ s \end{bmatrix}$ *alakúak, ahol* $s \in \mathbb{R} \backslash \{0\}$*, ilyenkor például egy reprezentáns*

$\underline{v}_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$.

3.2. Példa *Igazoljuk, hogy ha az* $\mathbf{A}$ *mátrix sajátértéke* λ*, akkor az* $\mathbf{A}^{-1}$ *mátrix sajátértéke* $\frac{1}{\lambda}$.

3.2. Megoldás *Legyen az* $\mathbf{A}$ *mátrix* λ *sajátértékéhez tartozó sajátvektora* $\underline{v}$, *ekkor* $\mathbf{A}\underline{v} = \lambda\underline{v}$. *Felírhatjuk, hogy*

$$\mathbf{A}^{-1}\underline{v} = \frac{1}{\lambda}(\mathbf{A}^{-1}\lambda\underline{v}) = \frac{1}{\lambda}(\mathbf{A}^{-1}\mathbf{A}\underline{v}) = \frac{1}{\lambda}\mathbf{I}_n\underline{v} = \frac{1}{\lambda}\underline{v},$$

ami pontosan azt jelenti, hogy $\frac{1}{\lambda}$ *az* $\mathbf{A}^{-1}$ *mátrix sajátértéke.*

3.3. Példa *Számítsuk ki a következő mátrix sajátértékeit és sajátvektorait:*

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 3 & -2 & 0 \\ -2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{bmatrix}.$$

3.3. Megoldás *A karakterisztikus polinom*

$$p(\lambda) := det(\mathbf{B} - \lambda\mathbf{I}_3) = det \begin{bmatrix} 3-\lambda & -2 & 0 \\ -2 & 3-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 6-\lambda \end{bmatrix}.$$

A determinánst kifejtve kapjuk, hogy a sajátértékek a $(6-\lambda)(\lambda^2 - 6\lambda + 5) = 0$ *egyenlet gyökei. Ennek megoldásai* $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 5$ *és* $\lambda_3 = 6$.

A $\lambda_1 = 1$*-hez tartozó* $\underline{v}_1 = \begin{bmatrix} v_{11} \\ v_{21} \\ v_{31} \end{bmatrix}$ *sajátvektorokat a* (3.3)*-ba, azaz az*

$$\begin{bmatrix} 3-\lambda & -2 & 0 \\ -2 & 3-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 6-\lambda \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_{11} \\ v_{21} \\ v_{31} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

mátrixegyenletbe való behelyettesítéssel kapjuk meg, így

$$\begin{bmatrix} 2 & -2 & 0 \\ -2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_{11} \\ v_{21} \\ v_{31} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Ebből $v_{11} = v_{21}$ *és* $v_{31} = 0$ *azaz a* $\lambda_1 = 1$ *sajátértékhez tartozó sajátvektorok*

$\underline{v}_1 = \begin{bmatrix} t \\ t \\ 0 \end{bmatrix}$ *alakúak, ahol* $t \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$, *ilyenkor például egy reprezentáns*

$$\underline{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

A $\lambda_2 = 5$ *sajátértékhez tartozó* $\underline{v}_2 = \begin{bmatrix} v_{12} \\ v_{22} \\ v_{32} \end{bmatrix}$ *sajátvektorokat a* (3.3)*-ba behelyettesítve kapjuk meg, mely szerint*

$$\begin{bmatrix} -2 & -2 & 0 \\ -2 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_{12} \\ v_{22} \\ v_{32} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Innen $v_{22} = -v_{12}$ *és* $v_{32} = 0$*, azaz a* $\lambda_2 = 5$ *sajátértékhez tartozó sajátvektorok*

$\underline{v}_2 = \begin{bmatrix} s \\ -s \\ 0 \end{bmatrix}$ *alakúak, ahol* $s \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$*, ilyenkor például egy reprezentáns*

$\underline{v}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}.$

Hasonlóan a $\lambda_3 = 6$*-hoz tartozó* $\underline{v}_3 = \begin{bmatrix} v_{13} \\ v_{23} \\ v_{33} \end{bmatrix}$ *sajátvektorokat a* (3.3)*-ba való behelyettesítéssel kapjuk meg, tehát*

$$\begin{bmatrix} -3 & -2 & 0 \\ -2 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_{13} \\ v_{23} \\ v_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Ebből $v_{13} = v_{23} = 0$ *és* v_{33} *tetszőleges nemnulla valós szám, azaz a* $\lambda_3 = 6$ *sajátértékhez tartozó sajátvektorok*

$\underline{v}_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ p \end{bmatrix}$ *alakúak, ahol* $p \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$*, ilyenkor például egy reprezentáns*

$\underline{v}_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$

Megjegyezzük, hogy a harmadik sajátvektor kiszámítását akár "megspórolhattuk" volna, tudva azt, hogy valós szimmetrikus mátrixok különböző sajátértékeihez tartozó sajátvektorok ortogonálisak. Elegendő tehát a

$$\underline{v}_1 \times \underline{v}_2 = det \begin{bmatrix} \underline{i} & \underline{j} & \underline{k} \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -2 \end{bmatrix}$$

vektori szorzatot kiszámolni és ezt tekinteni $\underline{v}_3$-nak (pontosabban egy reprezentánsnak).

3.4. Példa *Számítsuk ki a következő mátrix sajátértékeit és sajátvektorait:*

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} 11 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 0 \\ 4 & 0 & 5 \end{bmatrix}.$$

3.4. Megoldás *A karakterisztikus polinom*

$$p(\lambda) := det(\mathbf{C} - \lambda \mathbf{I}_3) = det \begin{bmatrix} 11-\lambda & 0 & 4 \\ 0 & 1-\lambda & 0 \\ 4 & 0 & 5-\lambda \end{bmatrix}.$$

A determinánst kifejtve kapjuk, hogy a sajátértékek az $(1-\lambda)(\lambda^2-16\lambda+39) = 0$ *egyenlet gyökei. Ennek megoldásai* $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 3$ *és* $\lambda_3 = 13$.

A $\lambda_1 = 1$*-hez tartozó* $\underline{v}_1 = \begin{bmatrix} v_{11} \\ v_{21} \\ v_{31} \end{bmatrix}$ *sajátvektorokat a* (3.3)*-ba, azaz az*

$$\begin{bmatrix} 11-\lambda & 0 & 4 \\ 0 & 1-\lambda & 0 \\ 4 & 0 & 5-\lambda \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_{11} \\ v_{21} \\ v_{31} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

mátrixegyenletbe való behelyettesítéssel kapjuk meg, így

$$\begin{bmatrix} 10 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_{11} \\ v_{21} \\ v_{31} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Ebből $v_{11} = v_{31} = 0$ *és* v_{21} *tetszőleges, azaz a* $\lambda_1 = 1$ *sajátértékhez tartozó sajátvektorok*

$\underline{v}_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ t \\ 0 \end{bmatrix}$ *alakúak, ahol* $t \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$*, ilyenkor például egy reprezentáns*

$\underline{v}_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}.$

A $\lambda_2 = 3$ *sajátértékhez tartozó* $\underline{v}_2 = \begin{bmatrix} v_{12} \\ v_{22} \\ v_{32} \end{bmatrix}$ *sajátvektorokat a* (3.3)*-ba behelyettesítve kapjuk meg, mely szerint*

$$\begin{bmatrix} 8 & 0 & 4 \\ 0 & -2 & 0 \\ 4 & 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_{12} \\ v_{22} \\ v_{32} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Innen $v_{22} = 0$ *és* $v_{32} = -2v_{12}$, *azaz a* $\lambda_2 = 3$ *sajátértékhez tartozó sajátvektorok*

$\underline{v}_2 = \begin{bmatrix} s \\ 0 \\ -2s \end{bmatrix}$ *alakúak, ahol* $s \in \mathbb{R} \backslash \{0\}$, *ilyenkor például egy reprezentáns* $\underline{v}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{bmatrix}$. *Hasonlóan a* $\lambda_3 = 13$*-hoz tartozó* $\underline{v}_3 = \begin{bmatrix} v_{13} \\ v_{23} \\ v_{33} \end{bmatrix}$ *sajátvektorokat a* (3.3)*-ba való behelyettesítéssel kapjuk meg, tehát*

$$\begin{bmatrix} -2 & 0 & 4 \\ 0 & -12 & 0 \\ 4 & 0 & -8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_{13} \\ v_{23} \\ v_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Ebből $v_{23} = 0$ *és* $v_{33} = \frac{v_{13}}{2}$, *azaz a* $\lambda_3 = 13$ *sajátértékhez tartozó sajátvektorok*

$\underline{v}_3 = \begin{bmatrix} p \\ 0 \\ \frac{p}{2} \end{bmatrix}$ *alakúak, ahol* $p \in \mathbb{R} \backslash \{0\}$, *ilyenkor például egy reprezentáns* $\underline{v}_3 = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$.

Itt is a harmadik sajátvektor kiszámítását a $\underline{v}_1 \times \underline{v}_2$ vektori szorzat kiszámításával helyettesíthettük volna, tudva azt, hogy valós szimmetrikus mátrixok különböző sajátértékeihez tartozó sajátvektorok ortogonálisak. Elegendő tehát a

$$\underline{v}_1 \times \underline{v}_2 = det \begin{bmatrix} \underline{i} & \underline{j} & \underline{k} \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}$$

vektori szorzatot kiszámolni és ezt tekinteni $\underline{v}_3$-nak (pontosabban egy reprezentánsnak).

3.5. Példa *Számítsuk ki a következő mátrix sajátértékeit és mindegyikhez adjunk meg egy egységnyi hosszúságú sajátvektort:*

$$\boldsymbol{M} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -2 \\ 0 & -2 & 0 \\ -2 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

3.5. Megoldás *A karakterisztikus polinom*

$$p(\lambda) := det(\mathbf{M} - \lambda\mathbf{I}_3) = det \begin{bmatrix} -\lambda & 0 & -2 \\ 0 & -2-\lambda & 0 \\ -2 & 0 & -\lambda \end{bmatrix}.$$

A determinánst kifejtve kapjuk, hogy a sajátértékek a $-(\lambda+2)(\lambda^2-4)=0$ *egyenlet gyökei. Ennek megoldásai* $\lambda_1 = 2$ *és* $\lambda_{2,3} = -2$.

A $\lambda_1 = 2$*-höz tartozó* $\underline{v}_1 = \begin{bmatrix} v_{11} \\ v_{21} \\ v_{31} \end{bmatrix}$ *sajátvektorokat a* (3.3)*-ba, azaz az*

$$\begin{bmatrix} -\lambda & 0 & -2 \\ 0 & -2-\lambda & 0 \\ -2 & 0 & -\lambda \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_{11} \\ v_{21} \\ v_{31} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

mátrixegyenletbe való behelyettesítéssel kapjuk meg, ezért

$$\begin{bmatrix} -2 & 0 & -2 \\ 0 & -4 & 0 \\ -2 & 0 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_{11} \\ v_{21} \\ v_{31} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Ebből $v_{31} = -v_{11}$ *és* $v_{21} = 0$*, azaz a* $\lambda_1 = 2$ *sajátértékhez tartozó sajátvektorok*

$\underline{v}_1 = \begin{bmatrix} t \\ 0 \\ -t \end{bmatrix}$ *alakúak, ahol* $t \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$*, ilyenkor például egy reprezentáns*

$$\underline{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

A feladat egy egységnyi hosszú sajátvektort kért, így $\frac{\underline{v}_1}{|\underline{v}_1|} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$.

Most megmutatjuk, hogy a $\lambda_{2,3} = -2$ kétszeres sajátértékhez két lineárisan független sajátvektor is tartozik, mert egy tetszőleges, -2-höz tartozó $\underline{v}_2 = \begin{bmatrix} v_{12} \\ v_{22} \\ v_{32} \end{bmatrix}$ *sajátvektort a (3.3)-ba behelyettesítve kapjuk meg, mely szerint*

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_{12} \\ v_{22} \\ v_{32} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Innen a $v_{12} = v_{32}$ egyenletet kapjuk csak (eddig mindig volt 2 különböző egyenletünk, ez most ennyiben különbözik az eddig megoldott feladatoktól) azaz a $\lambda_2 = -2$ sajátértékhez két lineárisan független sajátvektor is tartozik, ilyenek pl. a $\underline{v}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ *és a* $\underline{v}_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ *vektorok.*

Itt ellenőrizhetjük, hogy jól dolgoztunk, amennyiben kiszámoljuk a $\underline{v}_1 \times \underline{v}_2$ vektori szorzatot:

$$\underline{v}_1 \times \underline{v}_2 = det \begin{bmatrix} \underline{i} & \underline{j} & \underline{k} \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -2 \\ 0 \end{bmatrix}$$

és ez, vagy akár $\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ *valóban tekinthető $\underline{v}_3$-nak (pontosabban egy reprezentánsnak). A $\lambda_{2,3} = -2$ kétszeres sajátértékhez tartozó egységnyi hosszú sajátvektorok* $\frac{\underline{v}_2}{|\underline{v}_2|} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$ *és* $\underline{v}_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$.

3.2. Diagonalizálás

A négyzetes mátrixok diagonalizálásának megkezdése előtt szükségünk van egy, a múlt félévben tanult fogalom felfrissítésére, valamint pár hozzá kapcsolódó tulajdonságra.

3.3. Definíció *A valós elemű n-edrendű $\mathbf{A}$ mátrixot ortogonálisnak nevezzük, ha $\mathbf{A} \cdot \mathbf{A}^\mathbf{T} = \mathbf{D}_n$, ahol $\mathbf{D}_n$ egy n-edrendű diagonálmátrix, azaz olyan mátrix, amelynek a főátlón kívüli elemei mind nullák.*

3.4. Definíció *A valós elemű n-edrendű $\mathbf{A}$ mátrixot ortonormáltnak nevezzük, ha $\mathbf{A} \cdot \mathbf{A}^\mathbf{T} = \mathbf{I}_n$, ahol $\mathbf{I}_n$ az n-edrendű egységmátrix.*

3.5. Tétel *Az* $\mathbf{A}$ *valós n-edrendű mátrixra a következő állítások ekvivalensek:*

(1) $\mathbf{A}$ *ortonormált;*

(2) az $\mathbf{A}$ *invertálható és inverze egyenlő a transzponáltjával, azaz*

$$\mathbf{A}^{-1} = \mathbf{A}^T; \tag{3.4}$$

(3) $\mathbf{A}$ *oszlopvektorai páronként ortogonálisak és egységnyi hosszúságúak. (Természetesen ugyanez igaz a sorvektorokra is.)*

3.6. Példa *Számítsuk ki a következő mátrix inverzét.*

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{bmatrix}.$$

3.6. Megoldás *Mivelhogy* $\mathbf{A}$ *ortonormált mátrix (oszlopvektorai egységnyi hosszúak és páronként vett skaláris szorzatuk* 0*), így az előbbi tétel miatt*

$$\mathbf{A}^{-1} = \mathbf{A}^T = \begin{bmatrix} -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{bmatrix}.$$

Vegyük észre, hogy mivel $\mathbf{A}$ *szimmetrikus is, a transzponálás nem változtat rajta, így a példa mátrixa egy olyan mátrix, melyre* $\mathbf{A}^{-1} = \mathbf{A}$.
A diagonalizálható mátrix definíciójának megadása előtt vezessük be a következő jelölést a diagonális (átlós) mátrixokra:

$$diag(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n) := \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{bmatrix}.$$

3.6. Definíció *Egy n-edrendű* $\mathbf{A}$ *mátrixot diagonalizálhatónak nevezünk, ha létezik egy olyan n-edrendű invertálható* $\mathbf{C}$ *mátrix, hogy a* $\mathbf{C}^{-1}\mathbf{AC}$ *szorzatmátrix diagonális legyen. Más szavakkal, egy n-edrendű* $\mathbf{A}$ *mátrixot diagonalizálhatónak nevezünk, ha hasonló egy diagonális mátrixhoz.*

3.7. Tétel *Egy n-edrendű* $\mathbf{A}$ *mátrix akkor és csak akkor diagonalizálható, ha van n lineárisan független* $\underline{v}_1, \underline{v}_2, \ldots, \underline{v}_n$ *sajátvektora. Ekkor a* $\underline{v}_1, \underline{v}_2, \ldots, \underline{v}_n$ *oszlopvektorokkal rendelkező* $\mathbf{C}$ *mátrixra, valamint a hozzájuk tartozó (nem feltétlenül különböző)* $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ *sajátértékekre igaz a*

$$\mathbf{C}^{-1}\mathbf{AC} = diag(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n) \tag{3.5}$$

egyenlőség.

Nem diagonalizálhatók azok a mátrixok, melyeknek van többszörös sajátértékük, melyekhez kevesebb számú lineárisan független sajátvektor tartozik, mint a sajátértékek multiplicitása. Példa nem diagonalizálható mátrixra:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Diagonalizálhatók pl. azok az n-edrendű mátrixok, melyeknek n különböző sajátértékük van (mivel a különböző sajátértékekhez tartozó sajátvektorok lineárisan függetlenek). Szimmetrikus mátrixok esetén még egyszerűbb a dolgunk:

3.8. Tétel *Bármely n-edrendű szimmetrikus $\mathbf{A}$ mátrixhoz létezik olyan ortonormált $\mathbf{C}$ mátrix, hogy*

$$\mathbf{C}^T\mathbf{AC} = diag(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n) \tag{3.6}$$

ahol $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ az $\mathbf{A}$ sajátértékei, $\mathbf{C}$ pedig az a mátrix, melynek oszlopvektorai az előbb felsorolt sajátértékekhez tartozó egységnyi hosszúságú, páronként ortogonális sajátvektorok (ez az előző tétel, a 3.2. tétel (3) pontja, és a (3.4) *egyenlőség miatt van).*

3.7. Példa *Diagonalizáljuk a következő mátrixot:*

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 5 & -6 \\ 3 & -4 \end{bmatrix}.$$

3.7. Megoldás *A 3.1. példa megoldására hivatkozunk, így nem kell újra kiszámolnunk az $\mathbf{A}$ mátrix sajátértékeit és a hozzájuk tartozó sajátvektorokat, ezek a következők: $\lambda_1 = -1$ és $\lambda_2 = 2$, a hozzájuk tartozó $\underline{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ és $\underline{v}_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$ sajátvektorokkal. A 3.7. tétel miatt felírhatjuk a diagonalizáló $\mathbf{C}$ mátrixot*

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Az eredményül kapott diagonális mátrix a

$$\mathbf{D} = diag(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n) = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

Ellenőrzésként érdemes elvégezni a következő szorzásokat és meggyőződni, hogy teljesül a (3.5) *képlet:*

$$\mathbf{C}^{-1}\mathbf{AC} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 5 & -6 \\ 3 & -4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 & -6 \\ 3 & -4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} = \mathbf{D}.$$

3.8. Példa *Ortonormált mátrixszal diagonalizáljuk a következő szimmetrikus mátrixot:*

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 3 & -2 & 0 \\ -2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{bmatrix}.$$

3.8. Megoldás *A 3.3. példa megoldására hivatkozunk, mely szerint a* $\mathbf{B}$ *mátrix sajátértékei:* $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 5$ *és* $\lambda_3 = 6$, *a hozzájuk tartozó*

$$\underline{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \underline{v}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}, \underline{v}_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

sajátvektorokkal.

A 3.8. tétel miatt felírhatjuk az ortonormált diagonalizáló $\mathbf{C}$ *mátrixot, csupán a sajátvektorokat kell normálni. Ezek a*

$$\frac{\underline{v}_1}{|\underline{v}_1|} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \end{bmatrix}, \ \frac{\underline{v}_2}{|\underline{v}_2|} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \end{bmatrix}, \ \frac{\underline{v}_3}{|\underline{v}_3|} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

egységvektorok lesznek.

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Az eredményül kapott diagonális mátrix a

$$\mathbf{D} = diag(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{bmatrix}.$$

Ellenőrzésként érdemes elvégezni a következő szorzásokat és meggyőződni, hogy teljesül a (3.6) *képlet:*

$$\mathbf{C}^T\mathbf{B}\mathbf{C} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & -2 & 0 \\ -2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{bmatrix} = \mathbf{D}.$$

3.9. Példa *Ortonormált mátrixszal diagonalizáljuk a következő mátrixot:*

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -2 \\ 0 & -2 & 0 \\ -2 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

3.9. Megoldás *A 3.5. példa megoldásából már ismerjük az* $\mathbf{M}$ *mátrix sajátértékeit és a hozzájuk tartozó sajátvektorokat, ezek a következők:* $\lambda_1 = 2$ *és* $\lambda_{2,3} = -2$*, a hozzájuk tartozó*

$$\frac{\underline{v}_1}{|\underline{v}_1|} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}, \frac{\underline{v}_2}{|\underline{v}_2|} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}, \underline{v}_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

egységnyi hosszúságú sajátvektorokkal.

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \end{bmatrix}$$

az ortonormált diagonalizáló mátrix. Az eredményül kapott diagonális mátrix

$$\mathbf{D} = diag(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n) = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}.$$

Ellenőrizhetjük itt is, hogy teljesül a (3.6) *képlet:*

$$\mathbf{C}^T\mathbf{M}\mathbf{C} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & -2 \\ 0 & -2 & 0 \\ -2 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix} = \mathbf{D}.$$

3.3. Diagonalizálható mátrixok pozitív egész hatványa

A diagonalizálható $\mathbf{A}$ mátrixra fennáll a (3.5) egyenlőség, amit akár

$$\mathbf{A} = \mathbf{C}\mathbf{D}\mathbf{C}^{-1} \tag{3.7}$$

alakba is írhatunk, ahol $\mathbf{D} = diag(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n)$ a sajátértékekből alkotott diagonális mátrix.

Teljes indukcióval (`http://hu.wikipedia.org/wiki/Teljes_indukci%C3%B3`) könnyen igazolható, hogy a diagonális mátrixok hatványozásánál csupán az átló elemeit kell a megfelelő hatványra emelnünk, azaz

$$\begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{bmatrix}^n = \begin{bmatrix} \lambda_1^n & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2^n & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3^n \end{bmatrix}. \tag{3.8}$$

Ez lényegesen megkönnyíti a diagonalizálható mátrixok hatványozását, mível

$$\mathbf{A}^n = (\mathbf{CDC}^{-1}) \cdot (\mathbf{CDC}^{-1}) \cdots (\mathbf{CDC}^{-1}) =$$

$$= \mathbf{CD}(\mathbf{C}^{-1}\mathbf{C})\mathbf{D}(\mathbf{C}^{-1}\mathbf{C}) \cdots \mathbf{DC}^{-1} = \mathbf{CD}^n\mathbf{C}^{-1} \tag{3.9}$$

és $\mathbf{D}^n$ pedig a (3.8) képlettel azonnal megadható. Ha az $\mathbf{A}$ mátrix még szimmetrikus is, akkor a diagonalizáló $\mathbf{C}$ mátrixot megadhatjuk úgy, hogy ortonormált legyen, így transzponálással $\mathbf{C}^{-1}$ is azonnal megvan.

3.10. Példa *Számítsuk ki az* $\mathbf{A}^{1002}$ *mátrixot, ha*

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 5 & -6 \\ 3 & -4 \end{bmatrix}.$$

3.10. Megoldás *A 3.7. példa megoldására hivatkozunk, melyben láttuk, hogy az* $\mathbf{A}$ *diagonalizálható, mert létezik* $\mathbf{C} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ *diagonalizáló mátrix, hogy*

$$\mathbf{C}^{-1}\mathbf{AC} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 5 & -6 \\ 3 & -4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 & -6 \\ 3 & -4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} = \mathbf{D}.$$

Innen kapjuk, hogy

$$\mathbf{A}^{1002} = \mathbf{CD}^{1002}\mathbf{C}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2^{1002} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2^{1003} - 1 & 2 - 2^{1003} \\ 2^{1002} - 1 & 2 - 2^{1002} \end{bmatrix}$$

3.11. Példa *Számítsuk ki a* $\mathbf{B}^{20}$ *mátrixot, ha*

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 3 & -2 & 0 \\ -2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{bmatrix}.$$

3.11. Megoldás *A 3.8. példa megoldására hivatkozunk, mely szerint a* $\mathbf{B}$ *szimmetrikus mátrix diagonalizálható, mert találunk hozzá olyan ortonormált*

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

mátrixot, melyre igaz a

$$\mathbf{C}^T\mathbf{B}\mathbf{C} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{bmatrix} = \mathbf{D}$$

egyenlőség. Innen kapjuk, hogy

$$\mathbf{B}^{20} = \mathbf{C}\cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 5^{20} & 0 \\ 0 & 0 & 6^{20} \end{bmatrix} \cdot \mathbf{C}^T = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 5^{20} & 0 \\ 0 & 0 & 6^{20} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{1+5^{20}}{2} & \frac{1-5^{20}}{2} & 0 \\ \frac{1-5^{20}}{2} & \frac{1+5^{20}}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 6^{20} \end{bmatrix}.$$

3.4. Feladatok

3.1. Feladat *Számítsuk ki a következő mátrixok sajátértékeit és sajátvektorait:*

(1) $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 7 & 0 & 6 \\ 0 & -1 & 0 \\ 6 & 0 & 2 \end{bmatrix}$;

(2) $\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 3 \\ 0 & 3 & 0 \\ 3 & 0 & 0 \end{bmatrix}$;

(3) $\mathbf{M} = \begin{bmatrix} 10 & 0 & 4 \\ 0 & -1 & 0 \\ 4 & 0 & 4 \end{bmatrix}$;

(4) $\mathbf{P} = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 4 \end{bmatrix}$.

Eredmények:

(1) $\lambda_1 = -2$, $\lambda_2 = -1$ és $\lambda_3 = 11$, a sajátvektorok pedig

$$\underline{v}_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ -3 \end{bmatrix}, \underline{v}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \text{ és } \underline{v}_3 = \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix};$$

(2) $\lambda_1 = -3$ és $\lambda_{2,3} = 3$, a sajátvektorok pedig

$$\underline{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}, \underline{v}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \text{ és } \underline{v}_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix};$$

(3) $\lambda_1 = -1$, $\lambda_2 = 2$ és $\lambda_3 = 12$, a sajátvektorok pedig

$$\underline{v}_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \underline{v}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{bmatrix} \text{ és } \underline{v}_3 = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix};$$

(4) $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = 3$ és $\lambda_3 = 6$, a sajátvektorok pedig

$$\underline{v}_1 = \begin{bmatrix} -2 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \underline{v}_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ -2 \\ 2 \end{bmatrix} \text{ és } \underline{v}_3 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

3.2. Feladat * *Számítsuk ki a következő komplex elemű szimmetrikus mátrix sajátértékeit és sajátvektorait:*

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2-i & 0 & i \\ 0 & 1+i & 0 \\ i & 0 & 2-i \end{bmatrix}.$$

Eredmények: $\lambda_1 = 1 + i$, $\lambda_2 = 2$ és $\lambda_3 = 2 - 2i$, a sajátvektorok pedig

$$\underline{v}_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \underline{v}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \text{ és } \underline{v}_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

3.3. Feladat *Írjuk fel az*

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & a & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & a & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & a \end{bmatrix}$$

n-edrendű mátrix karakterisztikus polinomját.

Eredmény: $p(\lambda) = (a - \lambda)^n$.

3.4. Feladat *Számítsuk ki a következő mátrixhatványokat:*

(1) $\mathbf{A}^{12}$ *mátrixot, ha* $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \frac{8}{10} & \frac{-6}{10} \\ -\frac{6}{10} & -\frac{8}{10} \end{bmatrix}$;

(2) $\mathbf{B}^{16}$ *mátrixot, ha* $\mathbf{B} = \begin{bmatrix} \frac{6}{10} & -\frac{8}{10} \\ -\frac{8}{10} & -\frac{6}{10} \end{bmatrix}$;

(3) $\mathbf{M}^{10}$ *mátrixot, ha* $\mathbf{M} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & -\frac{1}{2} & \frac{3}{2} \end{bmatrix}$.

Eredmények:

(1),(2) $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$;

(3) $\mathbf{M}^{10} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2^9 + \frac{1}{2} & \frac{1}{2} - 2^9 \\ 0 & \frac{1}{2} - 2^9 & \frac{1}{2} + 2^9 \end{bmatrix}$.

4. fejezet

Differenciálegyenletek

A mindennapi életben lejátszódó mozgásokat, folyamatokat és jelenségeket függvényekkel lehet leírni. Olyan egyenleteket állíthatunk fel, melyekben a folyamatot leíró függvény és annak (valahányad rendű) deriváltjai szerepelnek. Az ilyen függvényegyenleteket *differenciálegyenleteknek* nevezzük. A differenciálegyenlet elnevezést először Leibniz használta 1676-ban.
(`http://hu.wikipedia.org/wiki/Gottfried_Wilhelm_Leibniz`)

4.1. Alapfogalmak, példák

Tekintsünk egy pár példát differenciálegyenletekre:

$$y' = x^3 y, \tag{4.1}$$

vagy másképpen

$$\frac{dy}{dx} = x^3 y.$$

Lássunk még több példát:

$$y'' - 3y' + 2 = \sin x; \tag{4.2}$$

$$(y')^2 y + 2\cos x = 0; \tag{4.3}$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 3 - x\frac{\partial u}{\partial y}. \tag{4.4}$$

A (4.4) differenciálegyenleten kívül mindegyikben egyváltozós ismeretlen függvény szerepel, az ilyen egyenleteket *közönséges differenciálegyenleteknek* nevezzük. A (4.4) egyenlet ismeretlen függvénye többváltozós (pontosabban kétváltozós), ilyenkor *parciális differenciálegyenletről* beszélünk. A differenciálegyenletben szereplő legmagasabb rendű derivált rendjét a differenciálegyenlet *rendjének* hívjuk. A (4.2) egyenlet másodrendű, a többi mind elsőrendű differenciálegyenlet. Az elsőrendű differenciálegyenletet *explicitnek* nevezzük, ha az elsőrendű derivált a többi változóval kifejezhető, azaz

$$y' = f(x, y), \tag{4.5}$$

ahol $(x, y) \in \Omega$ valamely $\Omega \subsetneqq \mathbb{R}$ összefüggő tartományra [1], például a (4.1) elsőrendű differenciálegyenlet explicit.
Segít a szemléltetésben az, ha belegondolunk, hogy minden $(x, y) \in \Omega$ ponthoz a (4.5) differenciálegyenlet egy irányt rendel a $\tan \alpha = f(x, y)$ összefüggéssel, ahol α jelenti a megadott irányba mutató vektornak az x-tengely pozitív irányával bezárt szögét. Ily módon a (4.5) differenciálegyenlet az Ω tartományban egy *iránymezőt* definiál, a megoldások pedig olyan görbék, amelyek ezen iránymezőkhöz simulnak, vagyis amely görbék érintőjének meredeksége minden $(x, y) \in \Omega$ pontban a megfelelő $\tan \alpha = f(x, y)$ érték.
Ha az elsőrendű derivált (4.5) -ben megadott kifejezése nem lehetséges, *implicit* differenciálegyenletünk van, melynek szokásos jelölése $F(x, y, y') = 0$ Az n-edrendű közönséges differenciálegyenlet általános alakja

$$F(x, y', y'', y''', \ldots, y^{(n)}) = 0. \tag{4.6}$$

Egy differenciálegyenletet *lineárisnak* nevezünk, ha az ismeretlen függvényt és annak deriváltjait csak első hatványon tartalmazza, pontosabban, ha előáll az

$$y^{(n)} + a_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \ldots + a_1(x)y' + a_0(x)y = f(x) \tag{4.7}$$

alakban. A (4.7) differenciálegyenlet baloldalát $L(y)$-nal szoktuk jelölni és L-et a *differenciálegyenlethez tartozó operátornak* nevezzük. (Ez az
$L(y) := y^{(n)} + a_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \ldots + a_1(x)y' + a_0(x)y$ operátor lineáris,
azaz $L(\alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2) = \alpha_1 L(y_1) + \alpha_2 L(y_2)$ tetszőleges y_1, y_2 n-szer folytonosan deriválható függvényekre és tetszőleges α_1 és α_2 konstansokra.) Egy lineáris differenciálegyenlet *homogén*, ha $L(y) = 0$ alakú.

Behelyettesítéssel könnyen beláthatjuk, hogy a (4.1) egyenletnek egy megoldása az $y = e^{\frac{x^4}{4}}$, mint ahogy azt is, hogy az $y = ce^{\frac{x^4}{4}}$, $c \in \mathbb{R}$ függvénysereg is megoldás. A differenciálegyenlet *általános megoldása* nem más, mint az összes megoldást tartalmazó halmaz. A differenciálegyenlet megoldásán pedig az általános megoldás meghatározását értjük. Vannak feladatok, melyekben azonban egy további feltételt kielégítő, úgynevezett *partikuláris megoldást* keresünk. Például, ha a (4.1) differenciálegyenlet azon megoldását keressük, mely kielégíti az $y(0) = 2$ feltételt (az ilyen plusz feltételeket *kezdeti feltételeknek* nevezzük), akkor a függvényseregből már csak egy lesz megoldás, éspedig

[1] A tartomány nem lehet tetszőleges. Ebben a jegyzetben a továbbiakban Ω tartományon többnyire összefüggő nyílt halmazt értünk, például egy nyílt téglalap tartományt.

az $y = 2e^{\frac{x^4}{4}}$ függvény. Ez feladatunk partikuláris megoldása. Ezt mindig úgy találjuk meg, hogy az általános megoldásból meghatározzuk a kezdeti feltételt kielégítő c konstanst.

Egy differenciálegyenletet a hozzá tartozó kezdeti feltételekkel együtt *Cauchy feladatnak* vagy *kezdetiérték-problémának* nevezünk. A következő példákban a matematikai modell egy-egy differenciálegyenlet:

4.1. Példa *Egy egyenesen mozgó pont helyzetének meghatározásához azt kell tudnunk, hogy t idő alatt milyen messzire került a kiindulási helyétől. Ezt egy $s(t)$ függvénnyel írjuk le. Ha ismerjük a pont folytonos $v(t)$ sebességét és a t_0 időpillanatban az s_0 helyzetét, adjuk meg a mozgás matematikai modelljét!*

4.1. Megoldás *A sebesség értelmezése szerint a mozgás matematikai modellje*

$$\begin{aligned} s'(t) &= v(t) \qquad (4.8)\\ s(t_0) &= s_0. \end{aligned}$$

Egy $s(t)$ függvény pontosan akkor elégíti ki az előbbi függvényegyenletet, ha a $v(t)$-nek van primitív függvénye. A primitív függvények közül pedig pontosan egy olyan van, amely az t_0 időpillanatban az s_0 értéket veszi fel, és ez az

$$s(t) = s_0 + \int_{t_0}^{t} v(\tau)\, d\tau. \qquad (4.9)$$

összefüggéssel adott (út-idő) függvény.

4.2. Példa *Egy tartályban* 10 *liter tiszta víz van, melybe literenként* $0,25$ *kg sót tartalmazó oldat folyik be* 2 *liter/perc sebességgel. A befolyó oldat azonnal összekeveredik a tartályban lévő folyadékkal, és ez a keverék ugyanazzal a* 2 *liter/perc sebességgel kifolyik a tartályból. Adjuk meg a differenciálegyenletet, mely leírja, hogy a t időpontban mennyi só lesz a tartályban.*

4.2. Megoldás *Jelöljük $y(t)$-vel a tartályban lévő só mennyiségét a kísérlet kezdetétől számított t idő elteltével. Mivel egy perc alatt* 2 *liter oldat folyik be a tartályba, ezért Δt idő alatt $2\Delta t$ liter, és ebben $0,25 \cdot 2\Delta t = 0,5\Delta t$ kg só van. A tartályban* 10 *liter folyadék van, ez $y(t)$ kg sót tartalmaz, ezért ebből egy liternyi folyadék $\frac{y(t)}{10}$ kg sót tartalmaz, azaz Δt idő alatt $2\Delta t \cdot \frac{y(t)}{10}$ kg só folyik ki (itt feltettük, hogy Δt nagyon kicsi, ezért ennyi idő alatt nem változik számottevően a sómennyiség a tartályban). Tehát $y(t)$ megváltoztatása nem más, mint az előbbi két mennyiség különbsége, azaz*

$$y(t + \Delta t) - y(t) = 0,5\Delta t - 0,2\Delta t \cdot y(t).$$

Osszunk végig Δt-vel, majd tartson Δt nullához, ekkor a

$$y' = 0,5 - 0,2y(t)$$

differenciálegyenletet kapjuk, melyhez még egy feltételt kell társítanunk, éspedig azt, hogy a 0 időpillanatban a tartályban nincs só, azaz

$$y(0) = 0.$$

Az egyenlet megoldása később a 4.10. példában olvasható.

4.2. A megoldás létezése

4.1. Definíció *Az $y' = f(x, y), \quad (x, y) \in \Omega \subsetneqq \mathbb{R}^2$ explicit elsőrendű differenciálegyenlet megoldásának vagy megoldásfüggvényének nevezzük azt a legalább egyszer differenciálható $y(x)$ függvényt, melyre teljesülnek a következő feltételek:*

(1) $y(x)$ értelmezési tartománya valamely I intervallum;

(2) $(x, y(x)) \in \Omega \qquad \forall x \in I$;

(3) $y'(x) \equiv f(x, y(x))$.

4.2. Definíció *Az $y' = f(x, y), \quad y(x_0) = y_0$ kezdetiérték feladat az $\Omega \subsetneqq \mathbb{R}^2$ tartományon egyértelműen megoldható (azaz pontosan egy megoldása van), ha létezik olyan $y(x), \quad x \in I$ megoldás, hogy bármely más $\hat{y}(x), \quad x \in I_1$ megoldás esetén teljesül, hogy: $I_1 \subsetneqq I$ és $y(x) = \hat{y}(x) \qquad \forall x \in I_1$. Az ilyen egyértelműen létező $y(x)$ megoldást teljes megoldásnak nevezzük.*

A differenciálegyenletekkel kapcsolatosan felmerülő kérdéseink egyike, hogy milyen feltételekkel létezik egyáltalán megoldás, és ha ezt már tisztáztuk, akkor mikor mondhatjuk, hogy ez a megoldás egyértelmű (azaz az *exisztencia* és az *unicitás* kérdések). Mivel a differenciálegyenletek csak közelítik a valóságot, de sosem írják le pontosan, botorság lenne arra hivatkoznunk, hogy a megoldás létezik és egyértelmű, ha konkrét jelentéssel bír egy gyakorlati alkalmazásban. Ezért is érezzük fontosnak - ha csak érintőlegesen is, de - megemlíteni a következő *egzisztencia és unicitás tételt* explicit elsőrendű, kezdeti feltétellel ellátott differenciálegyenletekre.

4.3. Tétel *Adott az $y' = f(x, y), \quad y(x_0) = y_0$ Cauchy-feladat, melyben*

(1) f mint kétváltozós függvény folytonos;

(2) f a második változójában kielégíti a Lipschitz-feltételt az (x_0, y_0)-t tartalmazó $\Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | \quad \alpha < x < \beta, \gamma < y < \delta\}$ téglalapon, azaz

$$|f(x, y) - f(x, z)| \leq L|y - z|, \qquad \forall (x, y) \in \Omega, \ \forall (x, z) \in \Omega$$

ahol L egy alkalmas konstans.
Ekkor van olyan $(x_0 - h, x_0 + h) \subseteq (\alpha, \beta)$ intervallum, melyben a Cauchy-feladatnak pontosan egy megoldása van.

4.4. Tétel *Adott az $y' = f(x, y), \quad y(x_0) = y_0$ Cauchy-feladat, melyben mind az f, mind pedig a $\frac{df}{dy}$ kétváltozós függvények folytonosak az (x_0, y_0)-t tartalmazó $\Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | \quad \alpha < x < \beta, \gamma < y < \delta\}$ téglalapon. Ekkor van olyan $(x_0 - h, x_0 + h) \subseteq (\alpha, \beta)$ intervallum, melyben a Cauchy-feladatnak pontosan egy megoldása van.*

4.5. Megjegyzés *Ha csak f folytonos, akkor ez elég ahhoz, hogy a megoldás létezzen, de az unicitás nem biztosított.*

4.3. Közönséges elsőrendű szétválasztható változójú (szeparálható) differenciálegyenletek

4.6. Definíció *Egy differenciálegyenletet közönséges elsőrendű szétválasztható változójú differenciálegyenletnek nevezzük, ha az*

$$y' = f(x)g(y) \tag{4.10}$$

alakban előállítható.

Egy ilyen differenciálegyenlet megoldásakor először megkeressük azokat az azonosan konstans y függvényeket, melyekre $g(y) = 0$. Az ilyen függvények mind kielégítik a differenciálegyenletünket, hiszen ezekre a (4.10) egyenlet mindkét oldala nullával egyenlő. A következő lépésben felírjuk, hogy

$$\frac{dy}{dx} = f(x)g(y)$$

és innen következik, hogy

$$\int \frac{1}{g(y)}\, dy = \int f(x)\, dx.$$

Ha mindkét oldalt ki tudjuk integrálni, akkor x és y között kapunk egy összefüggést, amelyből jó esetben kifejezhető az y.

4.3. Példa *Adjuk meg az*

$$y' = x^3 y$$

differenciálegyenlet általános megoldását, valamint az $y(0) = 1$ *feltételt kielégítő partikuláris megoldást. (Más szavakkal megfogalmazva, adjuk meg az* $y' = x^3y$ *differenciálegyenletet kielégítő összes görbét és a* $(0, 1)$ *ponton átmenő megoldásgörbét.)*

4.3. Megoldás *Először megkeressük azokat az azonosan konstans y függvényeket, melyekre* $g(y) = 0$*. Ebben az esetben az* $y = 0$ *megoldást kapjuk (néha, hogy hangsúlyozzuk, hogy konstans függvényről van szó, az* $y \equiv 0$ *jelölést használjuk). Ez a függvény (görbe) azonban nem elégíti ki a kezdeti feltételünket. Visszatérünk a*

$$\frac{dy}{dx} = x^3 y,$$

egyenletünkhöz, ahonnan átrendezéssel kapjuk, hogy

$$\int \frac{dy}{y} = \int x^3 \, dx,$$

$$ln|y| = \frac{x^4}{4} + ln|C|, \qquad C \in \mathbb{R} \setminus \{0\}.$$

Vegyük észre, hogy a tetszőleges valós konstanst $ln|C|$*-ként jelenítettük meg, ahol* $C \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$*. Ezt olyankor érdemes (nem kötelező), ha van már másik logaritmus is az egyenletünkben. Innen felírhatjuk, hogy*

$$\ln\left|\frac{y}{C}\right| = \frac{x^4}{4},$$

ahonnan

$$y = Ce^{\frac{x^4}{4}}, \qquad C \in \mathbb{R} \setminus \{0\},$$

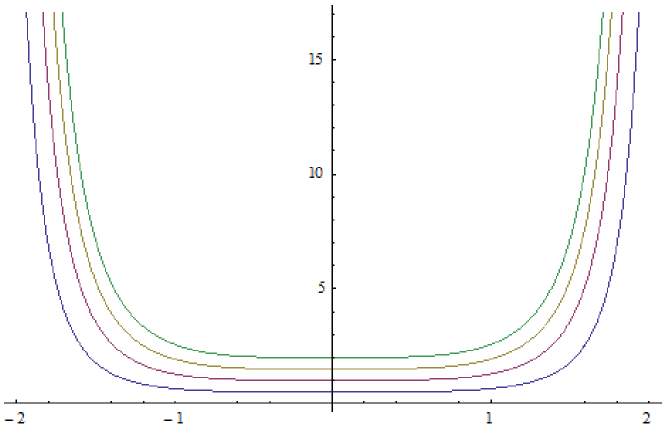
amit összevonva az $y = 0$ *megoldással, azaz a hiányzó* $C = 0$ *esettel, kapjuk, hogy a differenciálegyenletünk általános megoldása*

$$y = Ce^{\frac{x^4}{4}}, \qquad C \in \mathbb{R}.$$

Ebből a görbeseregből most kiválasztjuk azt az egyet, melyre az $y(0) = 1$ *kezdeti feltétel teljesül:*

$$1 = Ce^{\frac{0^4}{4}},$$

ahonnan kapjuk, hogy $C = 1$*. Ezért a Cauchy-feladat megoldása* $y = e^{\frac{x^4}{4}}$*.*



4.1. ábra. Az $y' = x^3 y$ differenciálegyenlet néhány megoldása

4.4. Példa *Oldjuk meg az következő differenciálegyenletet. Vizsgáljuk azt is, milyen kezdetiérték feltételt lehetne ehhez az egyenlethez írni?*

$$y' = \frac{1}{x}.$$

4.4. Megoldás *Az egyenletnek $x = 0$ -nál nincs megoldása, minden más helyen van, ezért kezdetiérték feltételnek bármilyen $y(x_0) = y_0$ feltételt írhatunk, amennyiben $x_0 \neq 0$. Az egyenletünk*

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{x}.$$

formába írható, ahonnan formálisan dx -szel átszorozva és integrálva kapjuk, hogy

$$y = \ln|x| + \ln|C|,$$

ahol $C \neq 0$, azaz $y = ln|Cx|, \quad C \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Ha még az $y(x_0) = y_0$ kezdeti feltételt is hozzávesszük, ahol $x_0 \neq 0$, kapjuk az $y = \ln|\frac{xe^{y_0}}{x_0}|$ megoldást. (Ebből is látszik, hogy $x = 0$ -ban a megoldásnak szakadása van).

4.5. Példa *Vizsgáljuk meg a következő kezdetiérték problémát a megoldások létezése és egyértelműsége szempontjából:*

$$y' = \frac{y^4}{3}, \quad y(0) = 1.$$

4.5. Megoldás *A 4.4. tétel feltételei teljesülnek, ezért létezik az $x = 0$ körül olyan intervallum, amelyben létezik pontosan egy megoldás. Sőt, erre az egyszerű egyenletre ránézve gondolhatnánk, hogy a megoldás a teljes valós számegyenesen létezik. Megmutatjuk most, hogy ez téves gondolatmenet lenne.*

Az $y = 0$ konstans függvény megoldása az egyenletnek, de a Cauchy-feladatunknak nem. Felírhatjuk, hogy

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y^4}{3},$$

majd a szeparáláshoz $\frac{3dx}{y^4}$ -el formálisan szorozva kapjuk, hogy

$$\frac{3}{y^4}dy = dx,$$

amiből integrálással a

$$-y^{-3} = x + C$$

implicit megoldáshoz jutunk. A kezdetiérték feltétel miatt $C = -1$, ezért a partikuláris megoldás explicit alakja

$$y = \frac{1}{\sqrt[3]{1-x}},$$

ami $x = 1$ -ben nem értelmezett, tehát a megoldás nem létezhet a teljes valós számegyenesen. Ezt az elején nyilván nem láthattuk.

4.6. Példa *Adjuk meg az*

$$y' = \frac{1+y^2}{1+x^2} \cdot \frac{x}{y} \tag{4.11}$$

differenciálegyenlet általános megoldását, valamint az $y(1) = 2$ feltételt kielégítő partikuláris megoldását is.

4.6. Megoldás

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1+y^2}{1+x^2} \cdot \frac{x}{y},$$

innen

$$\int \frac{y}{1+y^2}dy = \int \frac{x}{1+x^2}dx,$$

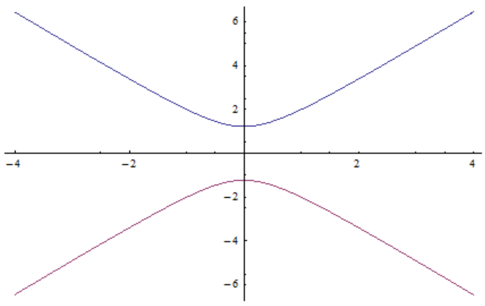
ami az

$$\frac{1}{2}\ln(1+y^2) = \frac{1}{2}\ln(1+x^2) + \ln\sqrt{C}, \qquad C > 0$$

megoldáshalmazt szolgáltatja. Átírva ezt az $y^2 - Cx^2 = C - 1$ alakba látjuk, hogy egy hiperbolaseregről van szó. Ebből választjuk ki azt, mely a kezdetiérték feltételünket is kielégíti, ekkor $C = \frac{5}{2}$, azaz kapjuk, hogy a Cauchy-feladatunk megoldása implicit alakban az

$$\frac{y^2}{(\sqrt{\frac{3}{2}})^2} - \frac{x^2}{(\sqrt{\frac{3}{5}})^2} = 1,$$

ami nem más, mint egy origó középpontú hiperbola, amelynek féltengelyei $\sqrt{\frac{3}{2}}$ és $\sqrt{\frac{3}{5}}$.



4.2. ábra. Az (4.11) differenciálegyenlet megoldása

4.4. Elsőrendű lineáris differenciálegyenletek

4.7. Definíció *Egy differenciálegyenletet közönséges elsőrendű lineáris inhomogén differenciálegyenletnek nevezzük, ha előáll az alábbi alakban:*

$$y' + p(x)y = q(x). \tag{4.12}$$

4.8. Definíció *Amennyiben az előbbi differenciálegyenlet jobb oldalán* $q(x) \equiv 0$*, homogén közönséges elsőrendű lineáris differenciálegyenletünk van, ez tehát az alábbi alakot jelenti:*

$$y' + p(x)y = 0. \tag{4.13}$$

Átrendezve a fenti egyenletet, könnyű belátni, hogy ha $p(x)$ és $q(x)$ folytonos függvények, akkor az (4.12) differenciálegyenletnek tetszőleges $y(x_0) = y_0$ kezdetiérték feltétel mellett létezik egyetlen megoldása.
Lássuk előbb a kezdetiérték feltétel nélküli differenciálegyenletünket: a megoldás menetét az *állandók variálásának módszerével* mutatjuk be. Először megoldjuk a (4.12) egyenlethez hozzárendelt homogén elsőrendű lineáris differenciálegyenletet, azaz a (4.13) egyenletet. Ez mindig egy szeparálható differenciálegyenlet, aminek persze az $y \equiv 0$ megoldása, úgyhogy most keressük a többit:

$$\frac{dy}{dx} = -p(x)y,$$

ahonnan átosztva y -nal és formálisan beszorozva dx -szel, majd integrálva kapjuk, hogy

$$\ln|y| = -\int p(x)dx + \ln|C|, \tag{4.14}$$

ahol $C \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$, ebből azonnal adódik, hogy a teljes általános megoldáshalmaza (az $y \equiv 0$ -t is beleértve) a (4.13) differenciálegyenletnek

$$y_{hom,alt} = Ce^{-\int p(x)dx} \tag{4.15}$$

ahol $C \in \mathbb{R}$.
Az eredeti, inhomogén (4.12) egyenlet egy speciális (nem általános, úgynevezett *partikuláris*) megoldását a következő alakban keressük: $y_{inh,part} = C(x)y_{hom,alt}$, ahol a $C(x)$ valós függvényt úgy számoljuk ki, hogy az $y_{inh,part}$ -t visszahelyettesítjük az eredeti inhomogén (4.12) egyenletbe. Kapjuk, hogy

$$C'(x)y_{hom,alt}(x) + C(x)y'_{hom,alt}(x) + p(x)C(x)y_{hom,alt}(x) = q(x),$$

azaz

$$C'(x)y_{hom,alt}(x) + C(x)[y'_{hom,alt}(x) + p(x)y_{hom,alt}(x)] = q(x),$$

és mivel a zárójelben levő mennyiség nulla,

$$C'(x)y_{hom,alt}(x) = q(x).$$

Rendezve, majd integrálva:

$$C(x) = \int \frac{q(x)}{y_{hom,alt}} dx = \int q(x)e^{\int p(x)dx} dx,$$

tehát a (4.12) inhomogén elsőrendű lineáris differenciálegyenletünk egy partikuláris megoldása

$$y_{inh,part} = e^{-\int p(x)dx} \int q(x)e^{\int p(x)dx} dx. \tag{4.16}$$

4.9. Tétel *A (4.12) inhomogén elsőrendű lineáris differenciálegyenletünk általános megoldása* $y_{inh,alt} = y_{hom,alt} + y_{inh,part}$ *alakú, ahol* $y_{hom,alt}$ *a hozzárendelt homogén differenciálegyenlet általános megoldása (amint azt az indexek is mutatják),* $y_{inh,part}$ *pedig az eredeti inhomogén egyenlet egy partikuláris megoldása (például az, amit az állandók variálásának módszerével számoltunk ki), azaz felírhatjuk a*

$$y_{inh,alt} = (\int q(x)e^{\int p(x)dx} dx + C)e^{-\int p(x)dx} \tag{4.17}$$

képletet, ahol $C \in \mathbb{R}$.

4.7. Példa *Oldjuk meg a következő Cauchy-feladatot:*

$$y' - \frac{2}{x}y = x^2e^x, \qquad y(1) = 2. \tag{4.18}$$

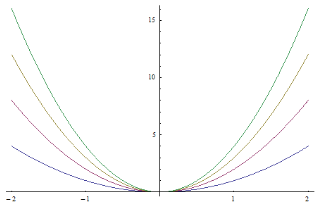
4.7. Megoldás *A hozzárendelt homogén differenciálegyenlet megoldásai az* $y = 0$ *mellett a következők:*

$$\frac{dy}{dx} - \frac{2}{x}y = 0, \tag{4.19}$$

$$\frac{dy}{y} = \frac{2}{x}dx, \tag{4.20}$$

$$\int \frac{dy}{y}dy = \int \frac{2}{x}dx, \tag{4.21}$$

ami az $y = Cx^2, \quad C \in \mathbb{R}$ *megoldáshamazt jelenti.*

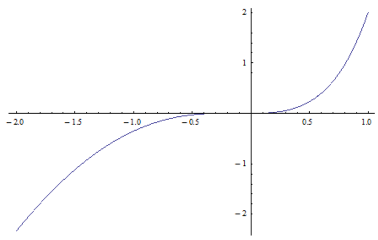


4.3. ábra. Az (4.18) differenciálegyenlet homogén részének általános megoldása

Az állandó variálásával keressük az eredeti egyenletünk egy partikuláris megoldását: $y_{inh,part} = C(x)x^2$, melyet visszahelyettesítve az eredeti inhomogén egyenletbe (felhasználva, hogy $y'_{inh,part} = C'(x)x^2 + C(x)2x$ kapjuk, hogy $C'(x) = e^x$, ahonnan $C(x) = e^x$. Innen a keresett partikuláris megoldás $y = e^x x^2$, az eredeti egyenletünk megoldáshalmaza pedig

$$y = (C + e^x)x^2, \tag{4.22}$$

ahol $C \in \mathbb{R}$. A Cauchy-feladat megoldásához a (4.22) egyenletbe y helyére 2 -t, x helyére 1 -et írva, kapjuk, hogy $C = 2 - e$, tehát a Cauchy-feladat megoldása $y_p = (2 - e + e^x)x^2$.



4.4. ábra. Az (4.18) Cauchy-feladat megoldása

4.8. Példa *Oldjuk meg a következő differenciálegyenletet:*

$$y' \cos x + y \sin x = 1 \qquad \cos x \neq 0.$$

4.8. Megoldás $\cos x$*-szel elosztva kapjuk, hogy*

$$y' + \frac{\sin x}{\cos x} y = \frac{1}{\cos x}, \tag{4.23}$$

melyhez hozzárendelt homogén egyenlet megoldása: $y_{hom,alt} = C \cos x$*, ahol* $C \in \mathbb{R}$ *konstans. Az inhomogén differenciálegyenlet partikuláris megoldását ugyanilyen alakban várjuk, csak feltételezzük, hogy* C *az* x *függvénye:* $y_{inhom,part} = C(x) \cos x$*, majd ezt visszahelyettesítve a* (4.23) *egyenletbe kapjuk, hogy* $C'(x) = \frac{1}{\cos^2 x}$*, azaz* $C(x) = \tan x$*. Innen* $y_{inhom,part} = \sin x$*, azaz* $y_{inhom,alt} = C \cos x + \sin x$*, ahol* $C \in \mathbb{R}$.

4.9. Példa *Oldjuk meg a következő differenciálegyenletet:*

$$y' = xy + x^3 \tag{4.24}$$

4.9. Megoldás *Átrendezve az egyenletet, kapjuk, hogy* $y' - xy = x^3$*. A hozzárendelt homogén egyenlet* $y' - xy = 0$*, melynek általános megoldása* $y_{hom,alt} = Ce^{\frac{x^2}{2}}$*. Az inhomogén differenciálegyenlet partikuláris megoldását* $y_{inh,part} = C(x)e^{\frac{x^2}{2}}$ *alakban várva, az eredeti egyenletbe behelyettesítve kapjuk, hogy* $C'(x) = x^3 e^{-\frac{x^2}{2}}$*. Innen parciális integrálással*

$$C(x) = \int x^3 e^{-\frac{x^2}{2}} dx = \int (-x^2)(e^{-\frac{x^2}{2}})' dx = (-x-2)e^{-\frac{x^2}{2}}. \tag{4.25}$$

A partikuláris megoldás így $y_{inh,part} = (-x^2-2)e^{-\frac{x^2}{2}} e^{\frac{x^2}{2}} = -x^2 - 2$*, az inhomogén differenciálegyenlet általános megoldása pedig* $y_{inh,alt} = Ce^{\frac{x^2}{2}} - x^2 - 2$.

4.10. Példa *Oldjuk meg a következő differenciálegyenletet:*

$$y' = 0,5 - 0,2y(t) \qquad y(0) = 0. \tag{4.26}$$

4.10. Megoldás *Először megoldjuk a differenciálegyenlet homogén részét:*

$$\begin{aligned} y' &= -0,2y \\ \frac{dy}{y} &= -0,2 \\ \ln y &= -0,2x + \ln C \\ y_{hom,alt} &= C \cdot e^{-0,2x}. \end{aligned}$$

Most következik az állandó variálása:

$$y_{inh,part} = C(x) \cdot e^{-0,2x}$$
$$C'(x) \cdot e^{-0,2x} = 0,5$$
$$C'(x) = 0,5 \cdot e^{0,2x}$$
$$C(x) = 2,5 \cdot e^{0,2x}$$

Tehát $y_{inh,part} = 2,5$ *és az általános megoldás:* $y_{inh,alt}(x) = C \cdot e^{-0,2x} + 2,5$.
Az $y(0) = 0$ *kezdeti feltételt kielégítő partikuláris megoldás:*

$$y_p(x) = 2,5\left(1 - e^{-0,2x}\right).$$

4.5. Állandó együtthatós lineáris differenciálegyenletek

4.10. Definíció *Állandó együtthatós lineáris differenciálegyenleten az alábbi típusú differenciálegyenletet értjük:*

$$y^{(n)}(x) + a_{n-1}y^{(n-1)}(x) + \ldots + a_1 y'(x) + a_0 y(x) = f(x), \tag{4.27}$$

ahol $a_0, a_1, \ldots, a_{n-1}$ tetszőleges valós konstansok.

4.11. Definíció *Amennyiben az előbbi differenciálegyenlet jobb oldala $f(x) \equiv 0$, homogén állandó együtthatós lineáris differenciálegyenletünk van, ez tehát az alábbi alakot jelenti:*

$$y^{(n)}(x) + a_{n-1}y^{(n-1)}(x) + \ldots + a_1 y'(x) + a_0 y(x) = 0. \tag{4.28}$$

Írjuk a (4.28) egyenletbe y helyébe az $y = e^{\lambda x}$-et:

$$\lambda^n e^{\lambda x} + a_{n-1}\lambda^{n-1}e^{\lambda x} + \ldots + a_1 \lambda e^{\lambda x} + a_0 e^{\lambda x} = 0,$$

azaz tekintsük a

$$\lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \ldots + a_1\lambda + a_0 = 0 \tag{4.29}$$

egyenletet.

4.12. Definíció *A (4.27) vagy (4.28) differenciálegyenlet karakterisztikus egyenletén a (4.29) egyenletet értjük.*

Az előbbiekből már következik az alábbi tétel:

4.13. Tétel *Ha μ a (4.29) karakterisztikus egyenlet gyöke, akkor az $e^{\mu x}$ megoldása a (4.28) állandó együtthatós homogén lineáris differenciálegyenletnek.*

Az előbbi tétel és a most következő segédállítások megmutatják, hogyan kell kiszámítani egy (4.28) típusú differenciálegyenlet megoldásait:

4.14. Lemma *Ha a $\mu = a + bi$ komplex szám megoldása a (4.29) karakterisztikus egyenletnek, akkor az $e^{\mu x} = e^{ax}[\cos(bx) + i\sin(bx)]$ komplex függvény kielégíti a (4.28) homogén differenciálegyenletet.*

Mivel az előbbi komplex függvény valós és képzetes része is kielégíti a szóban forgó homogén differenciálegyenletet, az $e^{ax}\cos(bx)$ és $e^{ax}\sin(bx)$ is kielégíti azt. Amennyiben a valós együtthatós karakterisztikus egyenletünknek a $\mu = a + bi$ komplex szám megoldása, akkor ennek konjugáltja is megoldás lesz. Ehhez a két gyökhöz "társítjuk" valójában az $e^{ax}\cos(bx)$ és $e^{ax}\sin(bx)$ megoldásokat.

4.15. Lemma *Ha μ a karakterisztikus egyenlet k -szoros gyöke, akkor nem csak az $e^{\mu x}$, hanem az $x^m e^{\mu x}$, $m = 1, 2, \ldots, k-1$ függvények is megoldások lesznek.*

Az algebra alaptétele miatt tudjuk, hogy egy n -edfokú karakterisztikus egyenletnek pontosan n darab, egymástól nem feltétlenül különböző gyöke van. Ezekhez az $y_1, y_2, \ldots, y_n$ megoldásokat társíthatjuk. Ekkor a (4.28) homogén differenciálegyenlet általános megoldása $y_{hom,alt} = c_1 y_1 + c_2 y_2 + \cdots + c_n y_n$ alakú. Csak speciális jobboldallal rendelkező inhomogén állandó együtthatós lineáris differenciálegyenleteket megoldásait fogjuk a következő tételben tárgyalni. Természetesen, itt is a speciális jobboldallal rendelkező inhomogén (4.27) egyenlet általános megoldása ($y_{inh,alt}$) a megfelelő homogén egyenlet általános megoldása ($y_{hom,alt}$) és az inhomogén egyenletünk egy partikuláris megoldásának ($y_{inh,part}$) összegéből áll elő. Most már csak meg kell mutatnunk, hogyan kell megtalálni egy $y_{inh,part}$ partikuláris megoldást.

4.16. Tétel *Ha a* (4.27) *állandó együtthatós lineáris differenciálegyenletben a jobboldal $f(x) = e^{\alpha x}[P_1(x)\cos(\beta x) + P_2(x)\sin(\beta x)]$ speciális alakú, akkor létezik az egyenletnek az alábbi alakú partikuláris megoldása*

$$y_{inh,part}(x) = x^r e^{\alpha x}[Q_1(x)\cos(\beta x) + Q_2(x)\sin(\beta x)],$$

ahol P_1, P_2, Q_1, Q_2 polinomok, a Q_1, Q_2 fokszáma kisebb vagy egyenlő, mint a P_1, P_2 polinomok fokszámai közül a nagyobbik, r pedig azt jelzi, hogy az $\alpha + \beta i$ hányszoros gyöke a karakterisztikus egyenletnek, azaz hányszoros rezonancia van.

A 4.16. tétel szerint az inhomogén állandó együtthatós lineáris differenciálegyenlet partikuláris megoldását ugyanolyan alakban keressük, mint amilyen az egyenlet jobboldala, kivéve, ha r-szeres rezonancia van, ekkor még bejön egy x^r-es szorzótényező is.

4.11. Példa *Adjuk meg a következő differenciálegyenlet (általános) megoldását:*

$$y'' + 7y' + 10y = \sinh 2x.$$

4.11. Megoldás *A karakterisztikus egyenlet:*

$$\lambda^2 + 7\lambda + 10 = 0,$$

melynek gyökei $\lambda_1 = -5$, $\lambda_2 = -2$. Ezért

$$y_{hom,alt} = c_1 e^{-5x} + c_2 e^{-2x}.$$

Az inhomogén másodrendű differenciálegyenletünk jobboldala két, a 4.16. tételben megadott típusú függvény összege, $\sinh 2x = \frac{1}{2}e^{2x} - \frac{1}{2}e^{-2x}$*. Vegyük észre, hogy itt egyik függvényben*

$$\alpha = 2,\ \ \beta = 0,\ \ P_1(x) = \frac{1}{2},\ \ P_2(x) = 0,\ \ r = 0,$$

valamint

$$\alpha = -2,\ \ \beta = 0,\ \ P_1(x) = -\frac{1}{2},\ \ P_2(x) = 0,\ \ r = 1,$$

tehát a partikuláris megoldást $y_{inh,part} = Ae^{2x} + Bxe^{-2x}$ *alakban keressük, ahol* A *és* B *kiszámítandó valós konstansok. Ezek értékét úgy kapjuk meg, hogy az* $y_{inh,part}$ *megoldást kétszer deriváljuk:*

$$y'_{inh,part} = 2Ae^{2x} + Be^{-2x} - 2Bxe^{-2x},$$

$$y''_{inh,part} = 4Ae^{2x} - 4Be^{-2x} + 4Bxe^{-2x}.$$

Visszahelyettesítve az inhomogén egyenletbe kapjuk, hogy

$$A = \frac{1}{56},\ \ B = -\frac{1}{6},$$

így $y_{inh,part} = \frac{1}{56}e^{2x} - \frac{1}{6}xe^{-2x}$*, azaz*

$$y_{inh,alt} = c_1e^{-5x} + c_2e^{-2x} + \frac{1}{56}e^{2x} - \frac{1}{6}xe^{-2x}. \tag{4.30}$$

4.12. Példa *Adjuk meg a következő differenciálegyenlet (általános) megoldását:*

$$y''' + y'' + y' + y = xe^x.$$

4.12. Megoldás *A karakterisztikus egyenlet:*

$$\lambda^3 + \lambda^2 + \lambda + 1 = 0,$$

melynek gyökei $\lambda_1 = -1$, $\lambda_2 = i$, $\lambda_3 = -i$*. Így a hozzárendelt homogén egyenlet megoldása:*

$$y_{hom,alt} = c_1e^{-x} + c_2\cos x + c_3\sin x.$$

Az inhomogén differenciálegyenletünk jobboldala a 4.16. tételben megadott típusú, vegyük észre, hogy itt

$$\alpha = 1,\ \ \beta = 0,\ \ P_1(x) = x,\ \ P_2(x) = 0,\ \ r = 0,$$

tehát a partikuláris megoldást $y_{inh,part} = e^x(Ax + B)$ alakban keressük, ahol A és B kiszámítandó valós konstansok. Ezek értékét úgy kapjuk meg, hogy az $y_{inh,part}$ megoldást háromszor deriváljuk:

$$y'_{inh,part} = Axe^x + (A + B)e^x,$$

$$y''_{inh,part} = Axe^x + (2A + B)e^x,$$

$$y'''_{inh,part} = Axe^x + (3A + B)e^x,$$

és a deriváltakat behelyettesítjük az eredeti inhomogén egyenletbe. Ekkor kapjuk, hogy

$$4Axe^x + (6A + 4B)e^x = xe^x,$$

azaz $A = \frac{1}{4}$ és $B = -\frac{3}{8}$. Így

$$y_{inh,part} = (\frac{x}{4} - \frac{3}{8})e^x$$

és az inhomogén differenciálegyenletünk általános megoldása pedig

$$y_{inh,alt} = c_1e^{-x} + c_2 \cos x + c_3 \sin x + (\frac{x}{4} - \frac{3}{8})e^x.$$

4.6. Feladatok

4.1. Feladat *Határozzuk meg az $y' = \frac{3x^2}{\cos y}$ differenciálegyenlet általános megoldását.*

Eredmény: $y = \arcsin(x^3 + C)$, ahol C tetszőleges valós konstans.

4.2. Feladat *Adja meg az $y' = \frac{y^2-1}{y(x+2)}$ differenciálegyenlet általános megoldását implicit alakban.*

Eredmény: $\sqrt{y^2 - 1} = C(x + 2)$, ahol C tetszőleges valós konstans.

4.3. Feladat *Adja meg az $y' = \frac{y^2-y}{x}$ differenciálegyenlet általános megoldását, ha $x > 0$.*

Eredmény: $y = \frac{1}{1-Cx}$, C tetszőleges valós konstans.

4.4. Feladat *Határozzuk meg az $y' - \frac{x^2}{x^3+1}y = 0, \quad y(0) = 1$ Cauchy-feladat megoldását.*

Eredmény: $y = \sqrt[3]{x^3 + 1}$.

4.5. Feladat *Határozzuk meg az* $y' - 2xy = x - x^3$ *differenciálegyenlet megoldását.*

Eredmény: $y_{inh,alt} = Ce^{x^2} + \frac{x^2}{2}$.

4.6. Feladat *Határozzuk meg az* $xy' = 2y + x^3 + x$ *differenciálegyenlet általános megoldását.*

Eredmény: $y_{inh,alt} = Cx^2 + x^3 - x$, ahol C tetszőleges valós konstans.

4.7. Feladat *Határozzuk meg az* $y' + \frac{3y}{x} = \frac{1}{x^2+1}, \quad y(1) = \frac{1}{2} - \frac{\ln 2}{2}$ *Cauchy-feladat megoldását.*

Eredmény: $y = \frac{1}{2x}(1 - \frac{\ln(x^2+1)}{x^2})$.

4.8. Feladat *Határozzuk meg az* $y' + y \tan x = \cos^3 x, \quad y(0) = 1$ *Cauchy-feladat megoldását.*

Eredmény: $y = (1 + \frac{x}{2} + \frac{\sin 2x}{4}) \cos x$.

4.9. Feladat *Határozzuk meg az* $y' - \frac{1}{x}y = 5x^7, \quad x > 0, \quad y(1) = 1$ *Cauchy-feladat megoldását.*

Eredmény: $y = \frac{2}{7}x + \frac{5}{7}x^8$.

4.10. Feladat *Határozzuk meg az* $y'' - 3y' + 2y = 5e^{5x}$ *differenciálegyenlet megoldását.*

Eredmény: $y_{inh,alt} = c_1e^x + c_2e^{2x} + \frac{5}{12}e^{5x}$.

4.11. Feladat *Határozzuk meg az* $y'' - y' - 2y = 4x^2,$ *differenciálegyenlet megoldását. Melyik megoldás teljesíti a következő kezdeti feltételeket:*
$y(0) = 1, \quad y'(0) = 4$*?*

Eredmény: $y_{inh,alt} = c_1e^{-x} + c_2e^{2x} - 2x^2 + 2x - 3$, a kezdeti feltételeket teljesítő megoldás pedig $y_p = 2e^{-x} + 2e^{2x} - 2x^2 + 2x - 3$.

5. fejezet

Kétváltozós függvények differenciálszámítása

5.1. Kétváltozós függvények geometriai interpretációja

Az egyváltozós függvények tanulmányozása során gyakran kihasználtuk, hogy a függvények értelmezési tartománya egy (nyílt vagy zárt) intervallum. A két vagy több változós függvények esetén az intervallum fogalmát is általánosítani kellene. A megfelelő fogalmat tartománynak fogjuk nevezni, de nem adunk rá precíz definíciót. Felhívjuk azonban az olvasó figyelmét, hogy nem minden ponthalmazt nevezünk tartománynak. A mérnöki gyakorlatban általában előforduló "szép" ponthalmazokra gondolunk, amikor ebben a fejezetben a tartomány szót használjuk.
Legyen D egy xy-síkbeli tartomány, f pedig egy D-n értelmezett, valós értékű függvény, mely tetszőleges D-beli (x, y) ponthoz egy $z = f(x, y)$ valós értéket feleltet meg. Ugyanígy definiálhatjuk az $\mathbb{R}^n$ tetszőleges "szép" D részhalmazán (tartományán) az $f : D \to \mathbb{R}$ $\quad n$-változós valós értékű $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ függvényt és minden definíciót, tételt, megjegyzést általánosíthatunk n-változós függvényekre is, csak ebben a fejezetben mi csupán a kétváltozós függvényeket tárgyaljuk, széleskörű alkalmazhatóságuk miatt.
A három dimenziós Descartes koordinátarendszerben az $(x, y, f(x, y))$ pontok által meghatározott alakzat a függvény geometriai megfelelője, ezt a függvény *grafikonjának* nevezzük. A grafikont a $z = f(x, y)$ *felületnek* is hívjuk. A felületről akkor kapunk pontosabb képet, ha megvizsgáljuk a szintvonalakat és a koordináta síkokkal való metszetgörbéket.

5.1. Definíció *Az xy-sík azon pontjainak összességét, melyekben az f függvény ugyanazt a c konstans értéket veszi fel, azaz $f(x, y) = c$, az f függvény* *szintvonalának vagy nívóvonalának nevezzük.*

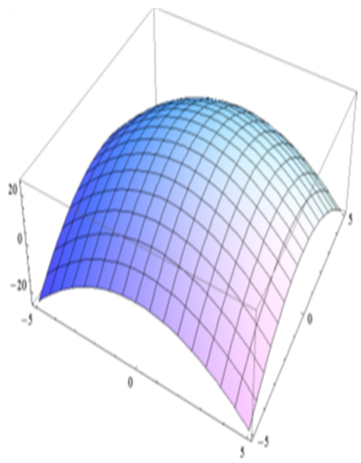
5.2. Definíció *A $z = f(x, y)$ felület azon pontjainak összességét, melyekben az f függvény ugyanazt a c konstans értéket veszi fel, azaz $f(x, y) = c$, az f függvény c értékhez tartozó kontúrvonalának nevezzük.*

A kontúrvonal megkülönböztetendő a szintvonaltól, mert míg az előbbi a felületen helyezkedik el, az utóbbi az xy-síkban van, egészen pontosan az értelmezési tartománynak egy részhalmaza.

5.1. Példa *Vizsgáljuk az $f(x, y) = 25 - x^2 - y^2$ függvény szintvonalait és a koordináta síkokkal való metszeteit és ezekből rajzoljuk meg a függvény grafikonját.*

5.1. Megoldás *f értelmezési tartománya (azaz a legbővebb halmaz az xy-síkból, melyre a függvény értelmes) az egész xy-sík, értékkészlete (azaz az összes valós érték, melyet a függvény felvesz) pedig a 25-nél kisebb vagy egyenlő valós számok halmaza. Az $f(x, y) = 0$ szintvonal az xy-sík (azaz az értelmezési tartomány) azon pontjaiból áll, melyekre $x^2 + y^2 = 25$, azaz egy origó középpontú, 5 sugarú kör az xy-síkban. Hasonlóan, az $f(x, y) = 9$ szintvonal az xy-sík azon pontjaiból áll, melyekre $x^2 + y^2 = 16$, azaz egy origó középpontú, 4 sugarú kör az xy-síkban, míg az $f(x, y) = 16$ szintvonal egy origó középpontú, 3 sugarú kör az xy-síkban. Az $f(x, y) = 25$ szintvonal nem más, mint az xy-sík origója, ha pedig $c > 25$, akkor a szintvonal az üres halmaz. Ugyanilyen okok miatt a kontúrvonalak is a felületen elhelyezkedő vízszintes körök, vagy a $(0, 0, 25)$ pont, vagy amennyiben a vízszintes sík nem metszi a felületet ($c > 25$ esetén), akkor az üres halmaz. A kontúrvonalak vizsgálatakor már láttuk az xy-síkkal való metszetgörbét. Hogy pontosabb képet alkossunk a grafikonról, tekintsük az yz-síkkal vett metszetgörbét is, ilyenkor $x = 0$. Ezt a $z = 25 - x^2 - y^2$ és az $x = 0$ metszetéből kapjuk és nem más, mint a $z = 25 - y^2$ konkáv parabola az yz-síkban. Az xz-síkkal vett metszetgörbe esetén $y = 0$, így a $z = 25 - x^2$ konkáv parabolát kapjuk az xz-síkban. Innen már látható, hogy a felületünk egy forgásparaboloid, mely maximumát az origóban veszi fel és ez a maximum 25-tel egyenlő.*

A számítógépek háromdimenziós grafikus programjai lehetővé teszik, hogy könnyedén ábrázoljuk a kétváltozós függvények grafikonjait, melyekből bizonyos információkat könnyebben ki lehet következtetni, mint a leképezési törvényt megadó képletből.

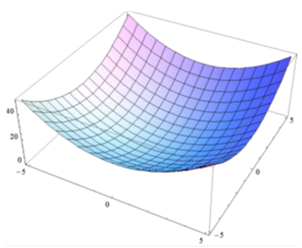


5.1. ábra. Az $f(x,y)=25-x^2-y^2$ egyenletű forgásparaboloid

5.2. Nevezetes felületek

Ebben a részben rövid összefoglalót készítünk az általunk használt fontosabb felületekről. Egy speciális *forgásparaboloiddal* találkoztunk már az (5.1.) példában. Láttuk, hogy az yz és xz-koordinátasíkokkal való metszetei parabolák, míg szintvonalai koncentrikus körök. A forgásparaboloid egyenlete (legegyszerűbb alakban):

$$f(x,y)=x^2+y^2$$

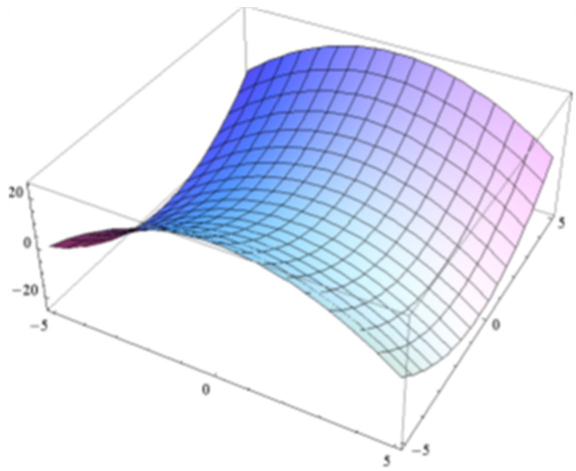


5.2. ábra. Forgásparaboloid

A *hiperbolikus paraboloid* egyenlete:

$$f(x, y) = y^2 - x^2.$$

Ha az yz koordinátasíkkal metszük el a felületet, akkor a $z = y^2$ konvex parabolát kapjuk, ha pedig az xz koordinátasíkkal metszük el a felületet, akkor a $z = -x^2$ konkáv parabolát. Az xy síkkal való metszet nem más, mint egy metsző egyenespár, míg ha pl. az $f(x, y) = 1$ -nek megfelelő szintvonal hiperbola, innen adódik a hiperbolikus paraboloid elvevezés is. Szoktuk még *nyeregfelületnek* is hívni. Síkmetszeteit lásd itt: (`http://archives.math.utk.edu/ICTCM/EP-10/C9/html/hph.gif`).

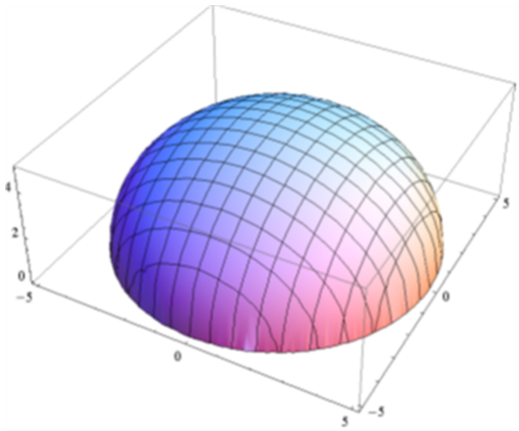


5.3. ábra. Hiperbolikus paraboloid (nyeregfelület)

Hiperbolikus paraboloid tetőszerkezettel több érdekes épület is rendelkezik (egyenes alkotói miatt tudják "könnyen" megépíteni), pl. Varsóban az Ochota-vonatállomás épülete, vagy az 1988-as téli olimpiai játékok idején a jégkorong és műkorcsolya versenyeknek helyet adó Aréna épülete Calgaryban, Kanadában (`http://en.wikipedia.org/wiki/Saddle_roof`).
Az egyszerűség kedvéért az ellipszoidnak, a kúpnak, a hengernek, valamint az egy-és kétköpenyű hiperboloidnak csak speciális eseteit írjuk fel, éspedig a nevezetesebb forgásfelületeket.

Az R sugarú *félgömb* egyenlete:

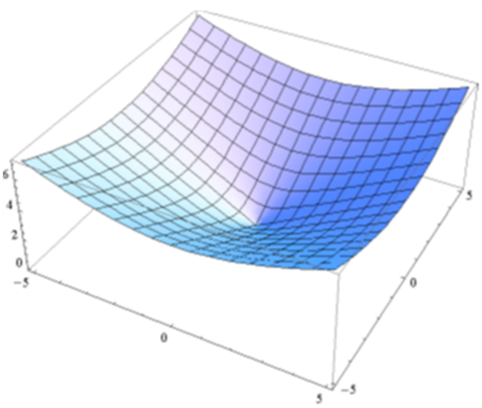
$$z = \sqrt{R^2 - (x^2 + y^2)}.$$



5.4. ábra. Origó középpontú félgömb

A *forgáskúp* egyenlete:

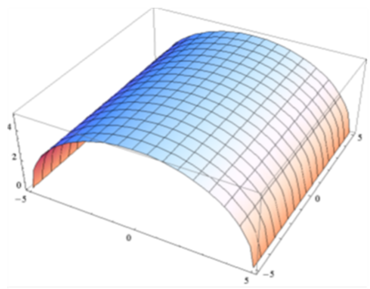
$$z = \sqrt{x^2 + y^2}.$$



5.5. ábra. Forgáskúp

Az y-tengelyű, R-sugarú *félhenger* egyenlete:

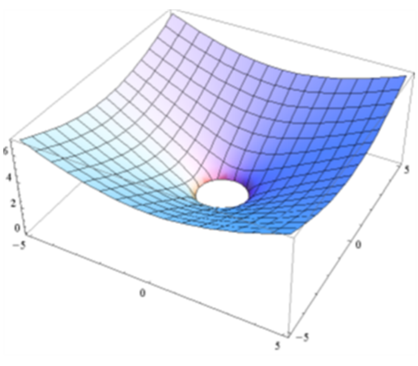
$$z = \sqrt{R^2 - x^2}.$$



5.6. ábra. Félhenger

Az *egyköpenyű forgáshiperboloid* egyenlete:

$$z = \sqrt{x^2 + y^2 - 1}.$$

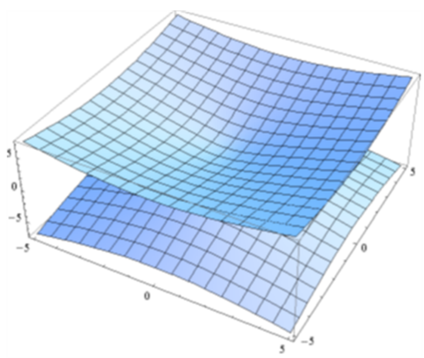


5.7. ábra. Egyköpenyű forgáshiperboloid

Síkmetszeteit lásd itt: (`http://archives.math.utk.edu/ICTCM/EP-10/C9/html/h1sh.gif`), és itt: (`http://archives.math.utk.edu/ICTCM/EP-10/C9/html/h1sv.gif`).

Vegyük észre, amennyiben nem követelnénk meg azt, hogy a felület egyenlete egy függvény legyen, hanem pl. lehetne két függvény is, mint például az implicit módon, azaz képlet formájában (és nem a $z = f(x, y)$ alakban) megadott $x^2 + y^2 - z^2 = 1$ esetén, ami egy egyköpenyű forgáshiperboloid és annak az xy síkra vett tükörképének az uniója ($z = \pm\sqrt{x^2 + y^2 - 1}$) és ezt is egyköpenyű forgáshiperboloidnak nevezzük, akkor ez egy köteg Marokkó-pálcika megcsavarásával modellezhető a legegyszerűbben.
A *kétköpenyű forgáshiperboloid* egyenlete:

$$z^2 - x^2 - y^2 = 1.$$



5.8. ábra. Kétköpenyű forgáshiperboloid

Síkmetszeteit lásd itt: (`http://archives.math.utk.edu/ICTCM/EP-10/C9/html/h2sh.gif`), és itt: (`http://archives.math.utk.edu/ICTCM/EP-10/C9/html/h2sv.gif`).

A felületek elméletét igencsak komolyan felhasználó, érdekes épületeket itt nem áll módunkban bemutatni, de még megemlítenénk a 2003-ban befejezett 30 St Mary Axe (becenevén Gherkin azaz az Uborka) felhőkarcolót London fő üzleti negyedében, a City of Londonban `http://hu.wikipedia.org/wiki/F%C3%A1jl:Grand-gherkin-of-the-skies.jpg`. További, említésre méltó furcsa épületeket találunk a
`http://villageofjoy.com/50-strange-buildings-of-the-world/`, valamint a `http://villageofjoy.com/20-unusual-churches-part-i/` linkek alatt, de a lista korántsem teljes.

5.3. Kétváltozós függvények határértéke és folytonossága

Az egyváltozós függvények határértékére vonatkozó lehetséges definíciók közül a következőt általánosítjuk:
$\lim_{x \to x_0} f(x) = A$ akkor és csakis akkor, ha minden $x_n \to x_0$ pontsorozatra $f(x_n) \to A$.
Ezt általánosítva, elmondhatjuk, hogy

$$\lim_{\substack{x \to x_0 \\ y \to y_0}} f(x, y) = A$$

akkor és csakis akkor, ha minden $(x_n, y_n) \to (x_0, y_0)$ pontsorozatra fennáll, hogy $f(x_n, y_n) \to A$.
A definícióból következik, hogy függvények konstans-szorosának, összegének, szorzatának, nem nullához tartó nevező esetén hányadosának a határértéke a határértékek konstans-szorosa, összege, szorzata, hányadosa.
Itt is érvényes, hogy ha egy $f(x, y)$ függvénynek van határértéke
$x \to x_0, \quad y \to y_0$ esetén, akkor az egyértelműen meghatározott.

5.2. Példa *Számítsuk ki az alábbi határértéket:*

$$\lim_{\substack{x \to 0 \\ y \to 1}} \frac{x - xy + 3}{x^2 y + 5xy - y^3}.$$

5.2. Megoldás *Behelyettesítünk és kapjuk, hogy*

$$\lim_{\substack{x \to 0 \\ y \to 1}} \frac{x - xy + 3}{x^2 y + 5xy - y^3} = \frac{0 - 0 \cdot 1 + 3}{0^2 + 5 \cdot 0 \cdot 1 - 1^3} = \frac{3}{-1} = -3.$$

5.3. Példa *Számítsuk ki a következő függvényhatárértéket:*

$$\lim_{\substack{x \to 0 \\ y \to 0}} \frac{x^2 - xy}{\sqrt{x} - \sqrt{y}}.$$

5.3. Megoldás *Behelyettesítünk és $\frac{0}{0}$ esetet kapunk, így a törtet át kell alakítanunk, pl. bővítünk a nevező konjugáltjával és kapjuk, hogy az eredeti határérték nem más, mint:*

$$\lim_{\substack{x \to 0 \\ y \to 0}} \frac{x(x - y)(\sqrt{x} + \sqrt{y})}{x - y} = 0 \cdot (0 + 0) = 0.$$

5.4. Példa *Vizsgáljuk meg, létezik-e az alábbi függvényhatárérték:*

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{4xy}{x^2+y^2}.$$

5.4. Megoldás *Az xy-síkban az origóhoz tarthatunk bárhogyan, amennyiben létezik a limesz, egyértelműnek kell lennie. Tegyük fel, hogy létezik a kért határérték. Vegyük észre, hogy ha az y-, valamint az x-tengely mentén tartunk az origóhoz, a*

$$\lim_{(0,y)\to(0,0)} \frac{4\cdot 0\cdot y}{0^2+y^2} = 0$$

és a

$$\lim_{(x,0)\to(0,0)} \frac{4\cdot x\cdot 0}{x^2+0^2} = 0$$

eredményekhez jutunk. Ebből még semmi nem következik. Vizsgáljuk most úgy a határértéket, hogy az origón átmenő $y = mx$ egyenesek mentén tartunk az origóhoz. Ekkor azt kapjuk, hogy a határérték eredménye függ m-től, tehát nem egyértelmű, ami ellentmond a határérték unicitásának, tehát a határérték nem létezik. A szóban forgó számolás a következő:

$$\lim_{(x,mx)\to(0,0)} \frac{4\cdot x\cdot mx}{x^2+m^2x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{4\cdot x^2\cdot m}{x^2(1+m^2)} = \frac{4m}{1+m^2}.$$

5.3. Definíció *A $z = f(x,y)$ kétváltozós függvény folytonos az értelmezési tartomány (x_0,y_0) pontjában, ha létezik a határérték ebben a pontban és ez egyenlő a függvény ebben a pontban vett helyettesítési értékével, azaz*

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y) = f(x_0,y_0).$$

Egy függvényt folytonosnak nevezünk, ha folytonos az értelmezési tartománya minden pontjában.

A folytonosság definíciójából következik, hogy az (x_0,y_0) pontban folytonos függvények konstans-szorosa, összege, szorzata és (x_0,y_0)-ban értelmezett hányadosfüggvénye esetén, ha a nevező nem tart nullához, hányadosa is folytonos az (x_0,y_0) pontban. Folytonos függvények kompozíciója is folytonos függvényt eredményez.

5.5. Példa *A k paraméter mely értékére lesz az alábbi függvény folytonos:*

$$f(x,y) = \begin{cases} \arctan \dfrac{1}{x^2+y^2}, & \textit{ha } (x,y)\neq(0,0) \\ k, & \textit{ha } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

5.5. Megoldás $(0,0)$*-ban a határérték* $\frac{\pi}{2}$*, ez* $(0,0)$*-ban való folytonosság esetén* $k = \frac{\pi}{2}$*. Mindenütt máshol az f folytonos függvény, mert folytonos függvények kompozíciójával folytonos függvényt kapunk. Tehát* $k = \frac{\pi}{2}$*.*

5.4. Parciális deriváltak, gradiens, iránymenti derivált, érintő sík

Egy $f(x, y)$ függvényt igen könnyű az egyes változói szerint deriválni, mert ilyenkor a másik változót (n-változós függvény esetén pedig értelemszerűen az összes többi változót) rögzítettnek képzeljük, és csak a szóban forgó változó egyváltozós függvényének tekintjük a függvényt.
A parciális deriváltakra a $\frac{\partial f}{\partial x}(x, y)$, $\frac{\partial f}{\partial y}(x, y)$, esetleg az $f'_x(x, y)$, $f'_y(x, y)$, illetve $f_x(x, y)$, $f_y(x, y)$ jelöléseket használjuk. Amennyiben nem egy adott (x_0, y_0) pontban kérik a parciális deriváltat, el lehet hagyni a jelölés végén szereplő (x, y)-t. Ezek szerint felírhatjuk a következőket:

5.4. Definíció *Az $f(x, y)$ függvény (x_0, y_0) pontbeli, x változó szerinti parciális deriváltja*

$$f'_x(x, y)|_{(x_0, y_0)} = f'_x(x_0, y_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h, y_0) - f(x_0, y_0)}{h}.$$

Hasonlóan az $f(x, y)$ függvény (x_0, y_0) pontbeli, y változó szerinti parciális deriváltja

$$f'_y(x, y)|_{(x_0, y_0)} = f'_y(x_0, y_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0, y_0 + h) - f(x_0, y_0)}{h}.$$

Amennyiben az

$$f'_x(x, y) = \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x + h, y) - f(x, y)}{h}$$

valamint az

$$f'_y(x, y) = \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x, y + h) - f(x, y)}{h}$$

határértékeket tekintjük, akkor az f függvény tetszőleges (x, y) pontban vett x-szerinti, illetve y-szerinti parciális deriváltját írjuk fel. Az $f(x, y)$ függvény (x_0, y_0) pontbeli x-szerinti parciális deriváltjának a geometriai jelentése nem más, mint a $z = f(x, y)$ felület és az $y = y_0$ egyenletű sík metszésvonala érintőjének a meredeksége az említett pontban. Hasonlóan értelmezhetjük geometrikus szemmel az $f(x, y)$ függvény (x_0, y_0) pontbeli y-szerinti parciális deriváltját.
Parciális deriváltakkal könnyű felírni a $z = f(x, y)$ *felület* $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$ *pontjában az érintő sík egyenletét* (már ha az létezik):

$$z - f(x_0, y_0) = f'_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f'_y(x_0, y_0)(y - y_0). \tag{5.1}$$

5.6. Példa *Határozza meg az alábbi függvény elsőrendű parciális deriváltjait az* $(x_0, y_0) = (\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ *pontban és írjuk fel az érintő sík egyenletét ugyancsak ebben a pontban:*

$$z = cos(x - 2y).$$

5.6. Megoldás *Az érintési pont harmadik koordinátája:* $z_0 = f(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) = cos(-\frac{\pi}{2}) = 0$*, az elsőrendű parciális deriváltak a kért pontban pedig*
$f'_x(x, y) = -sin(x - 2y)$*, így*
$f'_x(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) = -sin(-\frac{\pi}{2}) = -(-1) = 1$*, valamint*
$f'_y(x, y) = 2sin(x - 2y)$*, így* $f'_y(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) = 2sin(-\frac{\pi}{2}) = -2.$
Így használva az (5.1) *képletet, felírhatjuk az érintő sík egyenletét:*

$$z - 0 = 1(x - \frac{\pi}{2}) - 2(y - \frac{\pi}{2}),$$

amit átrendezve az $x - 2y - z = -\frac{\pi}{2}$ *egyenlethez jutunk.*

5.5. Definíció *A parciális deriváltakból álló vektort gradiens vektornak nevezzük. Jelölésében használjuk a* ∇ *nabla szimbólumot.*

$$\underline{\nabla f}(x, y) = (\frac{\partial f}{\partial x}(x, y), \frac{\partial f}{\partial y}(x, y)),$$

valamint egy adott (x_0, y_0) *pontban a gradiens (már ha létezik)*

$$\underline{\nabla f}(x_0, y_0) = (\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0), \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)).$$

A nabla héber szó jelentése "bibliai hárfa". A gradiens vektor a függvény minden egyes pontjában megadja a legnagyobb meredekség irányát (azaz a gradiens vektor a függvény legnagyobb növekedésének irányába mutat. Egy telken például a felület gradiense mentén folyik le az esővíz. Egy lokális minimumban, egy lokális maximumban vagy egy nyeregpontban a gradiens nulla, feltéve, hogy ezek a pontok az értelmezési tartomány belsejében vannak.

5.6. Definíció *A gradiens vektornak egy tetszőleges irányú* $\underline{v}$ *vektor egységvektorával való skalárszorzatát*

$$f'_{\underline{v}}(x, y) = \underline{\nabla f}(x, y) \cdot \frac{\underline{v}}{|\underline{v}|} \tag{5.2}$$

az $f(x, y)$ *függvény* $\underline{v}$ *irányban vett iránymenti deriváltjának nevezzük.*

5.7. Példa *Számítsa ki az* f *függvény gradiensét az* $(1, 1)$ *pontban, majd határozza meg a függvény* $\underline{v} = (3, 4)$ *irányban vett iránymenti deriváltját ebben a pontban, ha* $f(x, y) = xe^{xy} - xy$.

5.7. Megoldás *Az f függvény parciális deriváltjai:*

$$f'_x(x,y) = e^{xy}(1+xy) - y \text{ és } f'_y(x,y) = x^2 e^{xy} - x,$$

így az $(1,1)$ *pont koordinátáit behelyettesítve, kapjuk, hogy*

$$f'_x(x,y) = 2e - 1 \text{ és } f'_y(x,y) = e - 1.$$

A $\underline{v} = (3,4)$ *vektor egységvektora* $\frac{\underline{v}}{|\underline{v}|} = (\frac{3}{5}, \frac{4}{5})$*. A gradiens a kért pontban* $\underline{\nabla f}(1,1) = (2e-1, e-1)$*, míg az iránymenti derivált*

$$f'_{\underline{v}}(1,1) = (2e-1, e-1) \cdot (\frac{3}{5}, \frac{4}{5}) = 2e - \frac{7}{5}.$$

A *magasabbrendű parciális deriváltak* jelölései hasonlóak az elsőrendű derivált esetében bevezetett jelölésekhez:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y), \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y), \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y), \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x,y),$$

illetve

$$f''_{xx}(x,y), f''_{yy}(x,y), f''_{yx}(x,y) \text{ és } f''_{xy}(x,y).$$

Jelentésük is teljesen hasonló, például az

$$f''_{xy}(x,y) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x,y) = f'_y(f'_x(x,y)) = \frac{\partial}{\partial y}(\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}).$$

5.7. Tétel *(Young tétele) Ha* $f(x,y)$ *és parciális deriváltjai* $f'_x(x,y)$*,* $f'_y(x,y)$*,* $f''_{yx}(x,y)$ *és* $f''_{xy}(x,y)$ *léteznek egy olyan nyílt tartományon, ami tartalmazza az* (x_0,y_0) *pontot, és valamennyi folytonos az* (x_0,y_0) *pontban, akkor* $f''_{xy}(x_0,y_0) = f''_{yx}(x_0,y_0)$*.*

Az 5.7. tételt még Clairaut-tételnek is nevezik, felfedezője, Alexis Clairaut (`https://en.wikipedia.org/wiki/Alexis_Clairaut`) után.

5.8. Definíció *Tegyük fel, hogy f értelmezve van egy nyílt tartományon és* (x_0,y_0) *pontja ennek a tartománynak. Az* $f(x,y)$ *függvény differenciálható az* (x_0,y_0) *pontban, ha az elsőrendű parciális deriváltjai léteznek az* (x_0,y_0)*-ban és*

$$f(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y) - f(x_0,y_0) = f'_x(x_0,y_0)\Delta x + f'_y(x_0,y_0)\Delta y + \varepsilon_1 \Delta x + \varepsilon_2 \Delta y,$$

ahol ε_1 *és* ε_2 *is nullához tart, ha* Δx *és* Δy *is tartanak a nullához.*
Az f függvény differenciálható, ha értelmezési tartományának minden pontjában az.

Akárcsak egyváltozós esetben, kétváltozós függvények esetén is felírhatjuk a differenciálhatóság és a folytonosság közötti kapcsolatot:

5.9. Tétel *Ha f differenciálható egy (x_0, y_0) pontban, akkor folytonos is az (x_0, y_0)-ban.*

Jegyezzük meg, hogy a 5.9. tétel fordítottja nem igaz, sőt csupán a parciális deriváltak puszta létezése egy (x_0, y_0) pontban nem elegendő az adott pontbeli folytonossághoz, például az

$$f(x,y) = \begin{cases} 0, \text{ ha } xy \neq 0 \\ 1, \text{ ha } xy = 0. \end{cases}$$

Ennek a függvénynek, mely csupán a koordináta tengelyek esetén vesz fel 1 értéket, mindenütt máshol 0, létezik a $(0,0)$-ban mindkét változó szerinti elsőrendű parciális deriváltja és az 0, de ott nem differenciálható, sőt nem is folytonos, mert még határértéke sincs az origóban.

5.5. Lokális-, lokális feltételes- és abszolút szélsőértékek

Legyen az f függvény olyan tartományon definiálva, melynek az (x_0, y_0) belső pontja. Az (x_0, y_0) pont egy *lokális maximum hely*, (vagy mondjuk azt is, hogy $f(x_0, y_0)$ egy *lokális maximum (érték)*), ha van olyan (x_0, y_0) középpontú nyílt körlap, melyben minden értelmezési tartománybeli pont függvényértéke kisebb vagy egyenlő $f(x_0, y_0)$-nál. Nagyobb vagy egyenlő esetében a *lokális minimum hely*, illetve a *lokális minimum (érték)* definícióját kapjuk.

A továbbiakban feltételezzük, hogy az f értelmezési tartománya egy nyílt T halmaz, valamint azt, hogy az f elsőrendű parciális deriváltjai léteznek és folytonosak a T nyílt halmazon, melynek eleme az (x_0, y_0).

5.10. Tétel *(A lokális szélsőérték létezésének szükséges feltétele) Ha (x_0, y_0)-ban lokális szélsőértéke van az f-nek, akkor itt $f'_x(x_0, y_0) = 0$ és $f'_y(x_0, y_0) = 0$.*

5.11. Definíció *Kritikus pontnak nevezzük az T értelmezési tartomány azon pontjait, melyekben mindkét elsőrendű parciális derivált nulla.*

Amennyiben nem feltételeztük volna azt, hogy léteznek az elsőrendű parciális deriváltak, akkor is kritikus pontunk lenne, ha legalább az egyik a parciális deriváltak közül nem létezne. A nyeregfelület ismeretében könnyebb megérteni a következő definíciót:

5.12. Definíció *Nyeregpontnak nevezzük az T értelmezési tartomány azon (x_0, y_0) pontját, melyekben mindkét elsőrendű parciális derivált nulla és minden (x_0, y_0) középpontú nyílt körlapon van olyan pontja az értelmezési tartománynak, melynek függvényértéke kisebb az $f(x_0, y_0)$-nál és van olyan is, melynek nagyobb.*

5.13. Tétel *(Lokális szélsőérték létezésének elégséges feltétele)*
Ha $f'_x(x_0, y_0) = 0$ és $f'_y(x_0, y_0) = 0$ és f második parciális deriváltjai folytonosak az (x_0, y_0)-t tartalmazó nyílt T halmazon, akkor

(1) Ha det $\begin{bmatrix} f''_{xx}(x_0, y_0) & f''_{xy}(x_0, y_0) \\ f''_{xy}(x_0, y_0) & f''_{yy}(x_0, y_0) \end{bmatrix} > 0$ és $f''_{xx}(x_0, y_0) > 0$ akkor az f-nek (x_0, y_0)-ban lokális minimuma van és ez a minimum érték $f(x_0, y_0)$;

(2) Ha det $\begin{bmatrix} f''_{xx}(x_0, y_0) & f''_{xy}(x_0, y_0) \\ f''_{xy}(x_0, y_0) & f''_{yy}(x_0, y_0) \end{bmatrix} > 0$ és $f''_{xx}(x_0, y_0) < 0$ akkor az f-nek (x_0, y_0)-ban lokális maximuma van és ez a maximum érték $f(x_0, y_0)$;

(3) Ha pedig det $\begin{bmatrix} f''_{xx}(x_0, y_0) & f''_{xy}(x_0, y_0) \\ f''_{xy}(x_0, y_0) & f''_{yy}(x_0, y_0) \end{bmatrix} < 0$ akkor az f-nek (x_0, y_0)-ban nyeregpontja van.

A 5.13. tételben szereplő mátrixot *Hesse-mátrixnak* nevezzük (`http://hu.wikipedia.org/wiki/Hesse-m%C3%A1trix`).

5.8. Példa *Egységnyi térfogatú téglatestek közül melyiknek a legkisebb a felszíne?*

5.8. Megoldás *Ha a téglatest oldalait x, y, z-vel jelöljük, akkor a felszín*

$$f(x, y) = 2xy + 2xz + 2yz \quad \text{és} \quad xyz = 1 \text{ miatt } f(x, y) = 2(xy + \frac{1}{y} + \frac{1}{x}).$$

A szükséges feltételből követlezik, hogy

$$f'_x(x, y) = 2(y - \frac{1}{x^2}) = 0, \text{ és } f'_y(x, y) = 2(x - \frac{1}{y^2}) = 0.$$

A fenti egyenletekből kapjuk, hogy $x = y = 1$ a lehetséges szélsőérték hely. A Hesse-mátrix determinánsa

$$\det \begin{bmatrix} f''_{xx}(x, y) & f''_{xy}(x, y) \\ f''_{xy}(x, y) & f''_{yy}(x, y) \end{bmatrix} = \det \begin{bmatrix} \frac{4}{x^3} & 2 \\ 2 & \frac{4}{y^3} \end{bmatrix} = \frac{16}{x^3 y^3} - 4$$

Ennek a helyettesítési értéke $(1, 1)$-ben 12, azaz pozitív, ezért valóban szélsőértékünk van $(1, 1)$-ben. Mivel $f''_{xx}(1, 1) = 4 > 0$, az $(1, 1)$ lokális minimumhely, az $f(1, 1) = 6$ meg a lokális minimum (érték). Azt kaptuk tehát, hogy a legkisebb felszínű téglatest a kocka.

Ha nem volna más szempontunk is, akkor az előbbi feladat miatt a dobozokhoz felhasznált anyagmennyiség minimalizálása, azaz az anyagtakarékosság érdekében minden tejesdobozt kocka alakúra kéne készíteni. E jegyzet kereteit meghaladja, mégis megemlítenénk, hogy a gömb alakú tejesdoboz az "ideálisan" anyagtakarékos, másfelől használhatatlan. Azért ha már itt tartunk, az előző megállapításunk magyarázza azt, hogy a sündisznó gömb alakúra húzódik össze, ha fázik.
A továbbiakban feltételezzük, hogy az $f(x, y)$ függvény korlátos és zárt halmazon értelmezett, mert többváltozós függvényekre is igaz a tétel, mely szerint korlátos és zárt halmazon értelmezett folytonos függvény eléri maximumát és minimumát. Ezen most *abszolút* (vagy más szóval *globális*) *maximumot* és *abszolút minimumot* értünk, azaz a legnagyobb és a legkisebb függvényértéket, mikor a teljes értelmezési tartomány függvényértékeit végignézzük. A korlátos és zárt tartományon értelmezett függvény abszolút maximumának és minimumának keresésekor a következő forgatókönyv szerint járunk el:

(1) a tartomány belsejében megnézzük a lehetséges szélsőértékhelyeket;

(2) a tartomány határán megnézzük a lehetséges szélsőértékhelyeket;

(3) ha olyan pontot is megengednénk az értelmezési tartomyányban, ahol f valamelyik parciális deriváltja nem létezik, akkor külön még ezeket a pontokat is vizsgálni kéne (most nincsenek ilyenek);

(4) kiszámoljuk az előzőekre a függvényértékeket és kiválasztjuk közülük a legnagyobbat, valamint a legkisebbet.

Adott feltételek melletti a lokális szélsőértékek (azaz lokális feltételes szélsőértékek) kiszámításának fontos ötlete az úgynevezett *Lagrange-multiplikátoros módszer*. Ha az $f(x, y)$-t szeretnénk minimalizálni egy $g(x, y) = 0$ feltétel mellett, akkor ez ugyanaz, mintha a

$$h(x, y, \lambda) = f(x, y) - \lambda g(x, y)$$

függvényt minimalizálnánk minden feltétel nélkül (λ a *Lagrange-multiplikátor*). Ha a h függvény λ szerinti parciális deriváltját nullával egyenlővé tesszük, éppen a $g(x, y) = 0$ feltételt kapjuk, így mindhárom parciális deriváltat 0-val egyenlővé tevő egyenletrendszerből valóban meghatározhatjuk a lokális feltételes szélsőértékeket.

5.6. Feladatok

5.1. Feladat *Legyen* $f(x, y) = x^4[2 - \ln(1 + y^2)]$, $P_0(x_0, y_0) = (1, 0)$ *és* $\underline{v} = \underline{i} + 3\underline{j}$. *Számítsuk ki az* f *gradiensét és* $\underline{v}$ *irány menti deriváltját a* P_0 *pontban.*

Eredmény: A gradiens $(8, 0)$, az iránymenti derivált pedig $\frac{8}{\sqrt{10}}$.

5.2. Feladat *Vizsgáljuk az alábbi függvény folytonosságát:*

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{2x^2y}{x^4+y^2}, & ha\ (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & ha\ (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

Eredmény: A függvény $(0, 0)$-ban nem folytonos, mert határérték sincs ott (érdemes az $y = kx^2$ parabolák mentén vizsgálni a limeszt). Mindenütt máshol viszont folytonos.

5.3. Feladat *Adjuk meg a $z = x\cos y - ye^x$ felület érintő síkját az origóban.*

Eredmény: $x - y - z = 0$.

5.4. Feladat *Az $y = -\frac{1}{2}x+2$ egyenes mely pontja van az origóhoz legközelebb?*

Eredmény: Az egyenes egyenletét átírva, majd 2-vel átszorozva, hogy ne legyen tört együtthatónk, kapjuk, hogy a feltételfüggvény $g(x, y) = x + 2y - 4 = 0$, a távolságfüggvénynek inkább a négyzetét minimalizáljuk, kihasználva, hogy a távolság nemnegatív és a négyzetfüggvény a nemnegatív számokon szigorúan növekvő, így minimalizálandó az $f(x, y) = x^2 + y^2$. A feladatot könnyű visszavezetni egyváltozós függvény optimalizálására, de most ne tegyük, oldjuk meg Lagrange-multiplikátoros módszerrel. A végeredmény: $(\frac{4}{5}, \frac{8}{5})$.

5.5. Feladat *Lagrange-multiplikátoros módszerrel maximalizáljuk az $f(x, y) = x + y$ függvényt a $g(x, y) = x^2 + y - 1 = 0$ feltétel mellett.*

Eredmény: $f(\frac{1}{2}, \frac{3}{4}) = \frac{5}{4}$ a maximum.

6. fejezet

Kétváltozós függvények integrálszámítása

Ahogyan az egyváltozós függvény határozott integrálját eddig pl. területszámításra használtuk, úgy a többszörös integrálokat térfogat kiszámítására lehet használni. Az integrál kiszámítása függ a tartománytól, melyen integrálunk. Vizsgáljuk a kettős integrálokat, amikor a tartomány, melyen integrálunk:

(1) téglalap tartomány;

(2) normál tartomány;

(3) egyéb tartomány.

Jelen fejezetünk struktúráját is nagyjából ez a három eset határozza meg. Kettős integrálokat számítógéppel is ki tudunk számítani, legegyszerűbben pl a <wolframalpha> linkre kattintva, de a kiszámítás menetét csak ennek a fejezetnek az elsajátításával tudhatjuk meg.

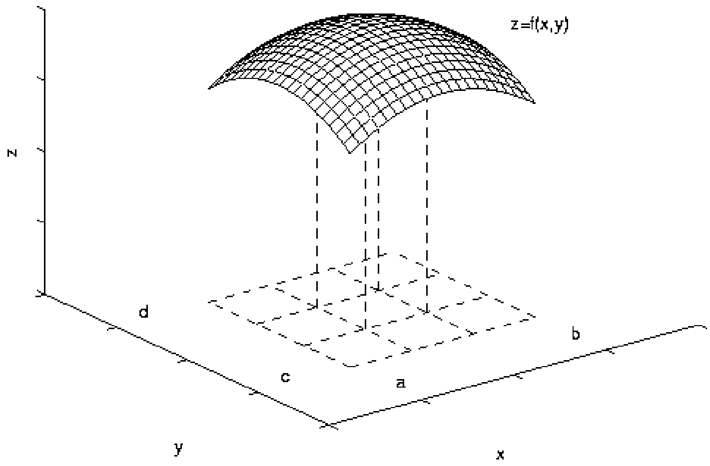
6.1. Kettős integrál téglalap tartományon

Azt az esetet vizsgáljuk legelőször, amikor a tartomány, amelyen integrálunk egy $T = [a, b] \times [c, d]$ zárt téglalap tartomány az xy-síkban. Az egyváltozós függvények Riemann-összegét fogjuk általánosítani a következőképpen: az x- és y-koordinátatengelyekkel párhuzamos egyenesek sgítségével osszuk fel a téglalap tartományunkat n darab kisebb téglalapra. Ezek a kis téglalapok képezik a T egy *felosztását.* Egy Δx szélességű és Δy magasságú téglalap területe $\Delta A = \Delta x \Delta y$. Számozzuk meg a felosztás téglalapjait, ezek területét pedig értelemszerűen jelölje $\Delta A_1, \Delta A_2, \dots \Delta A_n$, ahol ΔA_k a k-adik téglalap területe. Minden kis A_k területű téglalapból választunk egy (x_k, y_k)

pontot. Most már készen állunk arra, hogy a kettős Riemann-integrálhoz (`http://en.wikipedia.org/wiki/Bernhard_Riemann`) szükséges integrálközelítő összeget definiáljuk.

6.1. Definíció *A T tartomány feletti integrálközelítő összeg (Riemann-összeg)*

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} f(x_k, y_k)\Delta A_k. \tag{6.1}$$



6.1. ábra. Integrálközelítő összeg

A P *felosztás* $\|P\|$ *normája* nem más, mint a legnagyobb érték az összes téglalap szélessége és magassága közül, azaz, ha például $\|P\| = 10^{-2}$, akkor a felosztás minden téglalapjának oldalai nem haladhatják meg az $\frac{1}{100}$ -at. Arra vagyunk kíváncsiak, hogyan viselkedik az integrálközelítő összeg, amennyiben $\|P\| \to 0$.

6.2. Definíció *Ha T minden felosztására van az integrálösszegnek véges határértéke, amennyiben a felosztás normája 0-hoz tart, akkor létezik az f kettős integrálja a T tartományon és*

$$\iint_T f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} f(x_k, y_k)\Delta A_k. \tag{6.2}$$

6.3. Megjegyzés *Mikor a* (6.2) *képletben dxdy-t írunk és a kettős integrál jele alatt csak egy T található, még semmiféle integrálási sorrendre nem köteleztük el magunkat, ez csak egy jelölés. Jelölhetjük ugyanezt a kettős integrált $\iint_T f(x,y)dA$ -val is, az integrálási sorrend ilyenkor még nem tisztázott.*

Be lehet látni, hogy akárcsak az egyváltozós esetben is (lásd az Építészek matematikája I, `http://tankonyvtar.ttk.bme.hu/pdf/24.pdf`), ha az f kétváltozós függvény folytonos a korlátos és zárt téglalap alakú T tartományon, akkor ott integrálható. Olyan korlátos, nem folytonos függvényeknek is létezik integráljuk, amelyek csak véges sok pontban nem folytonosak (nem bizonyítjuk ezt sem).

A definícióból látszik és tetszőleges, nem csak téglalap tartományra igaz, hogy amennyiben létezik a T tartományon a kettős integrál, akkor az *előjeles térfogatot* jelent, azaz, amennyiben $f(x, y)$ grafikonja az xy-sík felett helyezkedik el, nem más, mint azon T fölötti háromdimenziós testnek a térfogata, melyet alulról az xy-sík, felülről pedig a $z = f(x, y)$ határol. Ha $f(x, y)$ grafikonja az xy-sík alatt helyezkedik el, $\iint_T f(x, y)dA$ nem más, mint azon T alatti háromdimenziós test térfogatának ellentettje, melyet felülről az xy-sík, alulról pedig a $z = f(x, y)$ határol. Ha $\iint_T f(x, y)dA = 0$, ez azt jelenti, hogy ugyanannyi térfogatrészünk van az xy-sík felett, mint alatta, természetesen a két testnek nem kell egybevágónak lenni, csak a térfogatuk kell, hogy megegyezzen.

A $T = [a, b] \times [c, d]$ téglalapon szukcesszív integrálással integrálunk, ahol ha már kiírjuk a kettős integrálban a határokat, rögzítjük a sorrendet, éspedig:

$$\iint_T f(x, y)dA = \int_a^b \int_c^d f(x, y)\mathrm{d}y\mathrm{d}x = \int_a^b (\int_c^d f(x, y)\mathrm{d}y)\mathrm{d}x. \tag{6.3}$$

Ez a legkönnyebb eset, mert létezik egy tétel, mely szerint az integrálás sorrendje nem fontos, azaz:

6.4. Tétel *(Fubini tétele (`http://en.wikipedia.org/wiki/Guido_Fubini`))*
Ha $f(x, y)$ folytonos a $T = [a, b] \times [c, d]$ zárt téglalap tartományon, akkor

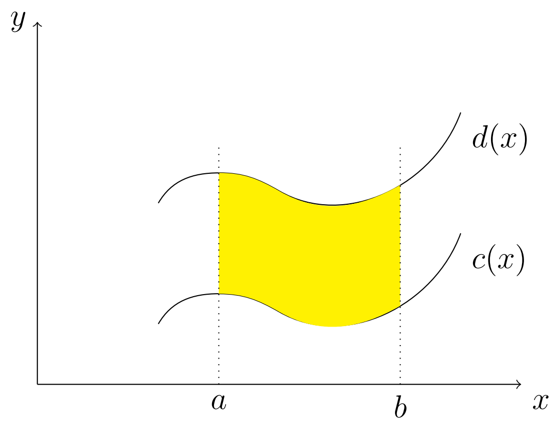
$$\iint_T f(x, y)dA = \int_a^b (\int_c^d f(x, y)\mathrm{d}y)\mathrm{d}x = \int_c^d (\int_a^b f(x, y)\mathrm{d}x)\mathrm{d}y. \tag{6.4}$$

Korlátos, nem téglalap alakú, területtel rendelkező T tartomány esetén az x- és y-koordinátatengelyekkel párhuzamos egyenesek segítségével téglalap tartományunkat n darab kisebb téglalapra osztottuk fel, melyek teljes egészében benne vannak T-ben és olyan téglalapjaink is vannak, melyek belemetszenek T-be, de van T-n kívüli pontjuk is. A felosztásnál csak a teljes egészében T-ben lévő téglalapokat tekintjük, merthogy amennyiben T-nek van területe, akkor a T-n kívüli pontokat is tartalmazó, T-be belemetsző téglalapok összterülete 0-hoz tart, ha a felosztás normája 0-hoz tart (nem bizonyítjuk). Minden mást ugyanúgy írunk fel, a kettős integrál definícióját is beleértve.

A kettős integrálokra is általánosíthatók az egyváltozós függvények Riemann-integráljánál tanult tulajdonságok, melyek szerint integrálható függvények konstansszorosa, összege, különbsége is integrálható, kisebb függvényértékű függvény T-n vett integrálja is kisebb, mint a nagyobb függvény integrálja T-n, valamint itt is felírható a tartományokra nézve vett additivitás is.
Kettős integrál számításának gyakorlására megtekinthető az igen gondosan kidolgozott `http://www.math.bme.hu/~adamk/` honlap is.

6.2. Kettős integrál normál tartományon

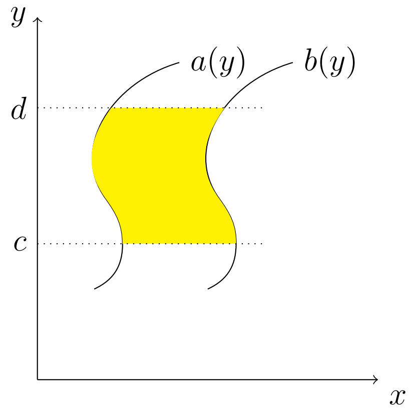
6.5. Definíció *A* $T_x = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | a \leq x \leq b$ *és* $c(x) \leq y \leq d(x)\}$, *röviden az* $a \leq x \leq b$ *és* $c(x) \leq y \leq d(x)$ *tartományt* x*-tengelyre vonatkoztatott normál tartománynak nevezzük.*



6.2. ábra. Az x-tengelyre vonatkoztatott normál tartomány

6.6. Definíció *A* $T_y = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | c \leq y \leq d$ *és* $a(y) \leq x \leq b(y)\}$, *röviden az* $c \leq y \leq d$ *és* $a(y) \leq x \leq b(y)$ *tartományt* y*-tengelyre vonatkoztatott normál tartománynak nevezzük.*

Ilyen tartományok esetén az integrálás sorrendjének felcserélése más forgatókönyv szerint történik. Ehhez szükségünk lesz a következőkre:



6.3. ábra. Az y-tengelyre vonatkoztatott normál tartomány

6.7. Tétel *(Fubini tétele, erősebb alak) Legyen $f(x,y)$ folytonos függvény a T tartományon.*

(1) Ha $T = \{a \leq x \leq b$ és $c(x) \leq y \leq d(x)\}$ egy x-tengelyre vonatkoztatott normál tartomány, ahol $c(x)$ és $d(x)$ folytonos függvények, akkor

$$\iint_T f(x,y)dA = \int_a^b \Big(\int_{c(x)}^{d(x)} f(x,y)\mathrm{d}y\Big)\mathrm{d}x; \tag{6.5}$$

(2) Ha $T = \{c \leq y \leq d$ és $a(y) \leq x \leq b(y)\}$ egy y-tengelyre vonatkoztatott normál tartomány, ahol $a(y)$ és $b(y)$ folytonos függvények, akkor

$$\iint_T f(x,y)dA = \int_c^d \Big(\int_{a(y)}^{b(y)} f(x,y)\mathrm{d}x\Big)\mathrm{d}y; \tag{6.6}$$

(3) Ha T pedig mindkét tengelyre nézve is normál tartomány, akkor a két integrál egyenlő (ez biztosítja az integrálás sorrendjének a megváltoztathatóságát).

A 6.7. tétel harmadik pontjának köszönhetően tudjuk megoldani a következő feladatot:

6.1. Példa *Számítsuk ki a következő kettős integrált:*

$$\iint_T \frac{x siny}{y} dA,$$

ahol T az első síknegyed szögfelezője, az $y = 1$ egyenes és az y-tengely által közrefogott zárt tartomány.

6.1. Megoldás *A tartomány, melyen integrálnunk kell a függvényt nem más, mint az $O(0,0)$, $A(0,1)$, $B(1,1)$ pontok által kifeszített zárt ABC háromszöglap. A kiszámítandó integrál felírható az*

$$\iint_T \frac{x\sin y}{y} dA = \int_0^1 \int_x^1 \frac{x\sin y}{y} \mathrm{d}y\mathrm{d}x = \int_0^1 x \int_x^1 \frac{\sin y}{y} \mathrm{d}y\mathrm{d}x.$$

Innen nem tudunk továbbhaladni, mert a $\frac{siny}{y}$ függvény elemi módszerekkel nem integrálható. Marad tehát a 6.7. tétel harmadik pontjának alkalmazási lehetősége, megfordítjuk az integrálás sorrendjét, mert a T tartomány mindkét tengelyre nézve normáltartomány:

$$\iint_T \frac{xsiny}{y} dA = \int_0^1 \int_0^y \frac{xsiny}{y} \mathrm{d}x\mathrm{d}y = \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{\sin y}{y}[y^2 - 0^2]\mathrm{d}y =$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^1 y\sin y\mathrm{d}y = \frac{\sin 1 - \cos 1}{2}. \tag{6.7}$$

Az $y\sin y$ integrálját parciális integrálással számoltuk ki, ahol a $\sin y$-t írtuk fel deriváltként, így

$$\int y\sin y\mathrm{d}y = \int y(-\cos y)'\mathrm{d}y = -y\cos y + \int \cos y\mathrm{d}y = -y\cos y + \sin y + C.$$

6.3. Kettős integrál egyéb tartományokon

6.8. Tétel *(Integráltranszformáció) Ha az xy-síkon minden (x,y) koordinátájú ponthoz hozzárendelünk egy $(x(u,v), y(u,v))$ pontot az uv-síkból, azaz*

$$f(x,y) = f(x(u,v), y(u,v)),$$

és az xy-síkbeli T tartomány uv-síkbeli megfelelőjét G tartományként jelöljük (azaz a T-n értelmezett $f(x,y)$ függvény tekinthető a G-n értelmezett $f(x(u,v), y(u,v))$ függvényként is), továbbá ha $\frac{\partial f}{\partial x}$, $\frac{\partial f}{\partial y}$, $\frac{\partial x}{\partial u}$, $\frac{\partial x}{\partial v}$, $\frac{\partial y}{\partial u}$ és $\frac{\partial y}{\partial v}$ léteznek és folytonosak, valamint a

$$J(u,v) = det\begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{bmatrix}$$

Jacobi determináns csak izolált pontokban vagy éppen sehol sem 0, akkor

$$\iint_T f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \iint_G f(x(u,v), y(u,v)) \cdot |J(u,v)|\mathrm{d}u\mathrm{d}v.$$

Alkalmazásként a *polárkoordinátás transzformációt* említenénk meg, amit érdemes használni, ha a tartományunk körlap, körcikk, körgyűrű, vagy a felsoroltak valamilyen részhalmaza, amelyen integrálható az adott függvény.
A 6.8. tételben szereplő u és v helyett most a szokásos r és φ polárkoordinátákat használjuk, ahol az első az (x, y) pont origótól vett távolságát, a második pedig a pont irányszögét jelenti, azaz a pont helyvektorának az x-tengely pozitív irányával bezárt szögét. A szokásos

$$x(r,\varphi) = r\cos\varphi \text{ és } y(r,\varphi) = r\sin\varphi \tag{6.8}$$

helyettesítést használva, a Jacobi-determináns

$$J(r,\varphi) = det\begin{bmatrix}\cos\varphi & -r\sin\varphi \\ \sin\varphi & r\cos\varphi\end{bmatrix} = r,$$

azaz

$$\mathrm{d}x\mathrm{d}y = r\mathrm{d}r\mathrm{d}\varphi.$$

6.2. Példa *Számítsuk ki a következő kettős integrált:*

$$\iint_T (x^2 + y^2)dA,$$

ahol T az origó középpontú, $R = 1$ sugarú körlap első síknegyedbe eső zárt része.

6.2. Megoldás *A tartomány, melyen integrálnunk kell polárkoordinátákban megadva $0 \le \varphi \le \frac{\pi}{2}$ és $0 \le r \le 1$, azaz érdemes áttérni polárkoordinátákra, mert akkor téglalap tartományunk lesz és az integrál*

$$\iint_T (x^2 + y^2)dA = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^1 r^2 \cdot r\mathrm{d}r\mathrm{d}\varphi = \frac{1}{4}\int_0^{\frac{\pi}{2}} (1^4 - 0^4)\mathrm{d}\varphi = \frac{\pi}{8}.$$

6.4. Alkalmazások: terület, forgatónyomaték, tömegközpont

Egy T korlátos zárt síktartomány *területe*

$$A(T) = \iint_T dA, \tag{6.9}$$

ha ez az integrál létezik és véges.
Ha egy vékony, T tartományt borító fémlemez tömegeloszlásáról feltesszük, hogy folytonos, $\delta(x,y)$-nal jelöljük a fémlemez anyagának sűrűségfüggvényét (az egységnyi területen lévő tömeget), akkor a fémlemez tömege, az x-, valamint y-tengelyre vonatkozó forgatónyomatékai és tömegközéppontjának koordinátái a következő képletekkel számíthatók ki (természetesen akkor, ha az alábbi integrálok léteznek és végesek):
tömeg:

$$M = \iint_T \delta(x,y)dA; \tag{6.10}$$

forgatónyomatékok:

$$M_x = \iint_T y\delta(x,y)dA; \tag{6.11}$$

$$M_y = \iint_T x\delta(x,y)dA; \tag{6.12}$$

ezek segítségével pedig a tömegközéppont koordinátái:

$$\overline{x} = \frac{M_y}{M} \text{ és } \overline{y} = \frac{M_x}{M}. \tag{6.13}$$

6.5. Feladatok

6.1. Feladat *Számítsuk ki kettős integrállal az R sugarú kör területét.*

Eredmény: $A = \iint_T dA = \pi R^2$.

6.2. Feladat *Számítsuk ki kettős integrállal a $z = 4-x-y$ sík alatti térfogatot a $T = [0,2] \times [0,1]$ téglalap tartomány felett.*

Eredmény: $V = 5$.

6.3. Feladat *Számítsuk ki az $\iint_T e^{-x^2-y^2}dA$ integrált, ahol T nem más, mint az origó középpontú, egység sugarú körlap.*

Eredmény: $\iint_T e^{-x^2-y^2}dA = \pi(1-e^{-1})$.

6.4. Feladat *Számítsuk ki az $\int\limits_{-1}^{1}\int\limits_{0}^{\sqrt{1-x^2}} \mathrm{d}y\mathrm{d}x$ integrált.*

Eredmény: $\frac{\pi}{2}$.

6.5. Feladat *Számítsuk ki az $\int\limits_{0}^{1}\int\limits_{0}^{x}(3x-10y^2)\mathrm{d}y\mathrm{d}x$ integrált.*

Eredmény: $\frac{1}{6}$.

6.6. Feladat *Számítsuk ki az* $\iint_T \cos\sqrt{x^2+y^2}dA$ *integrált, ahol* T *nem más, mint az origó középpontú,* π *és* $\frac{3\pi}{2}$*sugarú körök által alkotott zárt körgyűrű tartomány.*

Eredmény: $2\pi(1-\frac{3\pi}{2})$.

6.7. Feladat *Egy vékony lemez borítja azt a háromszöget, melyet az* x*-tengely, az* $x = 1$ *és az* $y = 2x$ *egyenesek határolnak az első síknegyedben. A lemez* (x, y)*-pontban vett sűrűségét a* $\delta(x, y) = 6x + 6y + 6$ *függvény adja meg. Határozzuk meg a lemez tömegét, a koordináta tengelyekre vonatkozó nyomatékait és a tömegközéppontjának koordinátáit.*

Eredmény: $M = 14$, $M_x = 11$, $M_y = 10$, $\overline{x} = \frac{5}{7}$ és $\overline{y} = \frac{11}{14}$.

6.8. Feladat *Számítsuk ki a* $z = \sqrt{x^2+y^2}$ *kúp* $z = \sqrt{1-x^2-y^2}$ *félgömb belsejébe eső részének a térfogatát.*

Eredmény: Először a metszetet kell kiszámolnunk, hiszen annak az xy-síkra vett vetülete lesz majd a tartomány, amin integráljuk a $\sqrt{1-x^2-y^2}-\sqrt{x^2+y^2}$ különbség függvényt. A metszetgörbe pedig az $x^2+y^2 = (\frac{1}{\sqrt{2}})^2$, így a tartomány az origó középpontú, $\frac{1}{\sqrt{2}}$ sugarú kör. A keresett térfogat $V = \frac{\pi}{3}(2-\sqrt{2})$.

7. fejezet

Térgörbék

7.1. Fogalmak

Ebben a fejezetben térbeli görbék leírásával és legfontosabb tulajdonságaival foglalkozunk. A téma első tudományos megalapozása Gaspard Monge (1746-1818) *Application de l'analyse a la géométrie (1809)* művében jelent meg. Monge nevével az építész hallgatók már ábrázológeometria órán találkozhattak.
A görbéket egy t paramétertől függő térbeli vektorral írjuk le. Úgy képzelhetjük, hogy a térgörbe egy a 3 dimenziós térben mozgó pont pályája. Itt most az építészeti alkalmazásokra gondolva egyszerű mozgást kell elképzelni. Nem foglalkozunk bonyolult kaotikus mozgásokkal, a mozgó pont nem áll meg, nem ugrik át egyik pozícióból a másikba, nem hurkolódik önmagába, stb.
Szokásos módon rögzítjük tehát az origóból induló $\underline{i}$, $\underline{j}$, $\underline{k}$ páronként merőleges egységvektorokat és egy az origóból induló térbeli vektort erre a bázisra vonatkozóan adunk meg a koordinátáival:

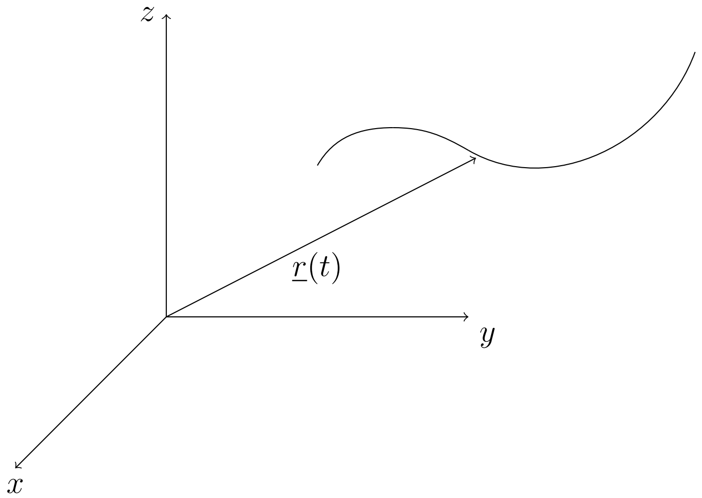
$$\underline{r}(t) = x(t)\underline{i} + y(t)\underline{j} + z(t)\underline{k}$$

Mivel az $\underline{i}$, $\underline{j}$, $\underline{k}$ vektorokat rögzítettük, ezért a továbbiakban elég csak a koordinátákat megadni:

$$\underline{r}(t) = [x(t), y(t), z(t)]$$

A paraméter jelölésére az irodalomban szokásososan a t betűt használjuk (*idő latinul tempus*), arra gondolva, hogy t időpontban $\underline{r}(t)$ a mozgó pont pozíciója.

Matematikai szempontból az $\underline{r}(t) = [x(t), y(t), z(t)]$ egy skalár változótól függő vektorértékű függvény. Erre a függvényosztályra a függvénytanban tanult fogalmak és módszerek (határérték, folytonosság, differenciálszámítás,



7.1. ábra. Térgörbe megadása

stb.) viszonylag könnyen átültethetők. A következő alfejezetben röviden összefoglaljuk az ide vonatkozó tételeket. Akik csak a kötelező tananyag iránt érdeklődnek átugorhatják ezt a részt. Őket arra kérjük, hogy a görbék tárgyalása során képzeljék azt, hogy az $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$ függvények mindenféle jó tulajdonsággal rendelkeznek, pl. háromszor differenciálhatók.

Néhány egyszerű példa:

(1) Az $\underline{r}(t) = [x_0 + v_1 t,\ y_0 + v_2 t,\ z_0 + v_3 t]$ egyenlet egy $(x_0,\ y_0,\ z_0)$ ponton átmenő $\underline{v} = [v_1,\ v_2,\ v_3]$ irányvektorú egyenest ír le. A $t = 0$ időpontban az $(x_0,\ y_0,\ z_0)$ helyen van a mozgó pont és sebességvektora $\underline{v} = [v_1,\ v_2,\ v_3]$.

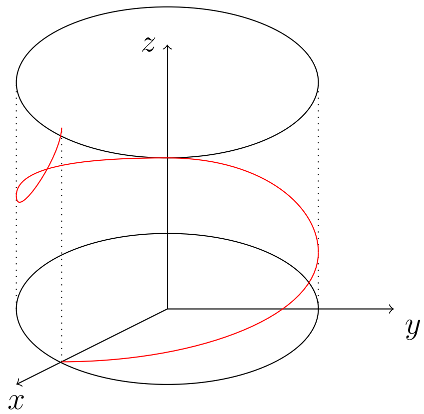
(2) Az $\underline{r}(t) = [R\cos t,\ R\sin t,\ 0]$ egyenlet egy (x, y) síkban levő origó középpontú R sugarú kört ír le.

(3) Az $\underline{r}(t) = [R\cos t,\ R\sin t,\ a \cdot t]$ egyenlet egy csavarvonal egyenlete, amely a z-tengely tengelyű R sugarú körhengerre van írva és egyenletes menetemelkedésű.

7.2. Függvénytani tételek

7.1. Definíció *Az $\underline{r}(t)$ vektor-skalár függvény t_0 pontbeli határértéke az $\underline{r}_0$ vektor, ha minden $\epsilon > 0$ számhoz található $\delta > 0$ szám úgy, hogy $|t - t_0| < \delta$ esetén*

$$|\underline{r}(t) - \underline{r}_0| < \epsilon$$



7.2. ábra. Csavarvonal

teljesül.

Jelölés:

$$\lim_{t \to t_0} \underline{r}(t) = \underline{r}_0$$

A határérték koordinátánként számolható:

7.2. Tétel *Ha*

$$\lim_{t \to t_0} x(t) = x_0 \quad \lim_{t \to t_0} y(t) = y_0 \quad \lim_{t \to t_0} z(t) = z_0,$$

akkor

$$\lim_{t \to t_0} \underline{r}(t) = \lim_{t \to t_0} \left(x(t)\underline{i} + y(t)\underline{j} + z(t)\underline{k} \right) = \underline{r}_0 = \left(x_0\underline{i} + y_0\underline{j} + z_0\underline{k} \right).$$

Összeg határértékére vonatkozó tétel:

7.3. Tétel *Ha* $\lim_{t \to t_0} \underline{r}_1(t) = \underline{a}$ *és* $\lim_{t \to t_0} \underline{r}_2(t) = \underline{b}$, *akkor*

$$\lim_{t \to t_0} (\underline{r}_1(t) + \underline{r}_2(t)) = \underline{a} + \underline{b}.$$

Skaláris-szorzat határértékére vonatkozó tétel:

7.4. Tétel *Ha* $\lim_{t \to t_0} \underline{r}_1(t) = \underline{a}$ *és* $\lim_{t \to t_0} \underline{r}_2(t) = \underline{b}$, *akkor*

$$\lim_{t \to t_0} (\underline{r}_1(t) \cdot \underline{r}_2(t)) = \underline{a} \cdot \underline{b}.$$

Vektoriális-szorzat határértékére vonatkozó tétel:

7.5. Tétel *Ha* $\lim_{t\to t_0} \underline{r}_1(t) = \underline{a}$ *és* $\lim_{t\to t_0} \underline{r}_2(t) = \underline{b}$, *akkor*

$$\lim_{t\to t_0} (\underline{r}_1(t) \times \underline{r}_2(t)) = \underline{a} \times \underline{b}.$$

7.6. Definíció *Az* $\underline{r}(t)$ *vektor-skalár függvény folytonos a* t_0 *pontban, ha*

$$\lim_{t\to t_0} \underline{r}(t) = \underline{r}(t_0).$$

Folytonosságra vonatkozó tételek:

7.7. Tétel *Ha* $\underline{r}_1(t)$ *és* $\underline{r}_2(t)$ *folytonosak a* t_0 *pontban, akkor az*

$$\underline{r}_1(t) + \underline{r}_2(t), \qquad \underline{r}_1(t) \cdot \underline{r}_2(t) \quad \text{és} \quad \underline{r}_1(t) \times \underline{r}_2(t)$$

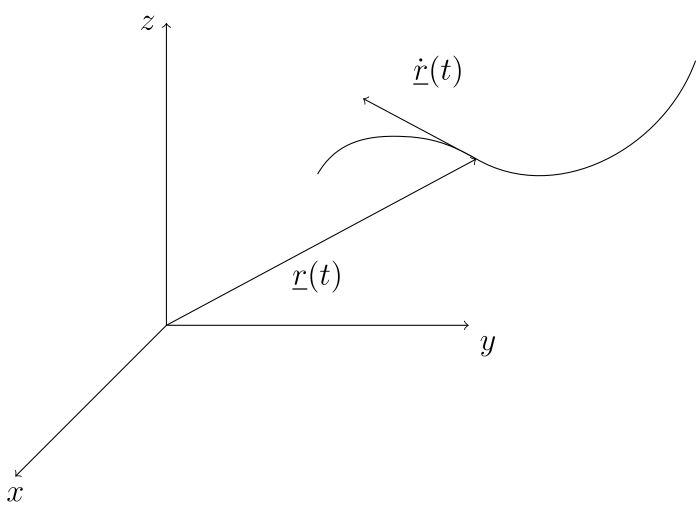
is az.

7.3. Derivált

7.8. Definíció *Az* $\underline{r}(t)$ *vektor-skalár függvény* t_0 *pontbeli deriváltját az*

$$\dot{\underline{r}}(t_0) = \lim_{\Delta t\to 0} \frac{\underline{r}(t_0 + \Delta t) - \underline{r}(t_0)}{\Delta t}$$

határértékkel definiáljuk.



7.3. ábra. Térgörbe deriváltja

7.9. Megjegyzés *A t paraméter szerinti deriváltat (idő szerinti derivált) a fizikában megszokott módon ponttal jelöljük.*

7.1. Példa *Határozzuk meg az*

$$\underline{r}(t) = \left[t,\, t^2,\, t^3\right]$$

függvény deriváltját!

7.1. Megoldás

$$\dot{\underline{r}}(t) = \left[1,\, 2t,\, 3t^2\right]$$

függvény.

A derivált geometriai jelentése:

7.10. Definíció *A görbét definiáló $\underline{r}(t)$ vektor-skalár függvény t_0 pontbeli érintőjének irányvektora az $\dot{\underline{r}}(t_0)$ derivált.*

A derivált fizikai jelentése:

7.11. Definíció *Ha egy térbeli pont mozgását az $\underline{r}(t)$ vektor-skalár függvény írja le, akkor a mozgó pont sebessége a t_0 időpillanatban $\dot{\underline{r}}(t_0)$.*

7.2. Példa *Határozzuk meg az $\underline{r}(t) = [R\cos t,\, R\sin t,\, a \cdot t]$ egyenlettel definiált csavarvonal érintővektorát egy tetszőleges t paraméterű pontban!*

7.2. Megoldás $\dot{\underline{r}}(t) = [-R\sin t,\, R\cos t,\, a]$.

7.4. Ívhossz

7.12. Definíció *Az $\underline{r}(t)$ görbének az $\underline{r}(t_1)$ és $\underline{r}(t_2)$ pontok közötti darabjának ívhossza*

$$s = \int_{t_1}^{t_2} |\dot{\underline{r}}(t)| dt = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{\dot{x}(t)^2 + \dot{y}(t)^2 + \dot{z}(t)^2}\, dt.$$

7.13. Megjegyzés *Ha az $\underline{r}(t)$ görbére úgy tekintünk, mint egy mozgó pont pályájára, akkor a $\underline{v} = \dot{r}(t)$ sebesség abszolútértéke $|\dot{r}(t)|$ és a t_1, t_2 időpontok között megtett út éppen $s = \int_{t_1}^{t_2} |\dot{r}(t)| dt$.*

7.3. Példa *Számoljuk ki a csavarvonal egy menetéhez tartozó ív hosszát!*

7.3. Megoldás *A sebességvektor:* $\dot{\underline{r}}(t) = [-R\sin t,\, R\cos t,\, a]$.
Ennek abszolút értéke:

$$\sqrt{(-R\sin t)^2 + (R\cos t)^2 + a^2} = \sqrt{R^2 + a^2}.$$

A sebesség abszolút értéke most konstans (egyenletes pályamenti sebességgel mozog a pont), ezért az integrálja:

$$\int_0^{2\pi} \sqrt{R^2 + a^2} dt = 2\pi\sqrt{R^2 + a^2}.$$

7.14. Megjegyzés *Nyilvánvalóan ugyanazon a görbén különböző sebességgel végig lehet menni. Azt jelenti ez, hogy ha az* $\underline{r}(t)$ *görbe esetén a* t *paraméter helyére egy szigorúan növő* $t = \varphi(\tau)$ *függvényt helyettesítünk, akkor az* $\underline{r}(\varphi(\tau))$ *függvény ugyan azt a görbét írja le, de a bejárás sebessége* $\dot{\underline{r}}(t)$ *helyett* $\dot{\underline{r}}(\varphi(\tau))\dot{\varphi}(\tau)$ *.*

Ha egy pont úgy mozog a görbén, hogy a sebességének abszolút értéke minden időpillanatban egységnyi $|\dot{\underline{r}}(t)| = 1$, akkor a t idő alatt megtett út:

$$s = \int_0^t |\dot{\underline{r}}(\tau)| d\tau = \int_0^t 1 d\tau = t$$

azaz $s = t$. Az így választott paraméterezést hívjuk ívhossz szerinti paraméterezésnek.

Ha egy görbe ívhossz szerint paraméterezett $\underline{r}(s)$, akkor a paraméter szerinti deriváltját (ívhossz szerinti deriváltját) pont helyett vesszővel $\underline{r}'(s)$ jelöljük és természetesen $|\underline{r}'(s)| = 1$.

Következmény: Az $\underline{r}'(s)$ érintő irányú egységvektor. Szokásos jelölése $\underline{r}'(s) = \underline{t}$ tangenciális egységvektor.

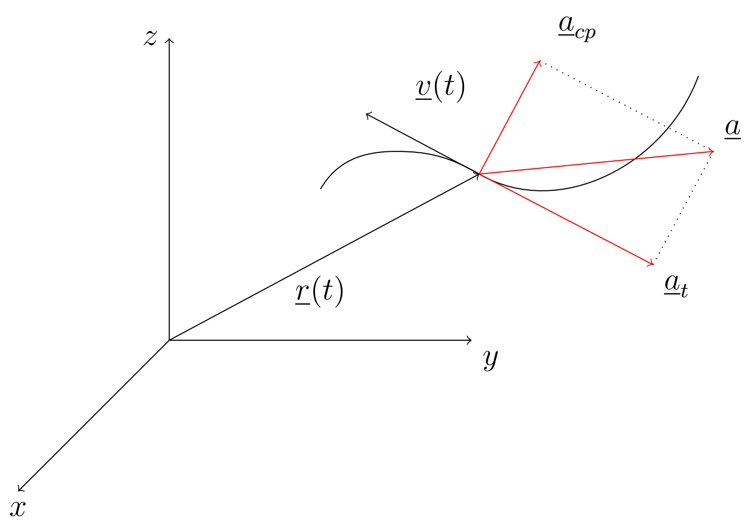
7.4. Példa *Paraméterezzük át az* $\underline{r}(t) = [3\cos t,\, 3\sin t,\, 4\cdot t]$ *egyenlettel definiált csavarvonalat ívhossz szerint!*

7.4. Megoldás *A csavarvonal ívhossza a* $(0;\, t)$ *intervallumon*

$$s(t) = \int_0^t \sqrt{9\sin^2\tau + 9\cos^2\tau + 16}\, d\tau = \int_0^t 5\, d\tau = 5t.$$

Ha most t *helyére* $t = \frac{s}{5}$*-t helyettesítjük, akkor az* $\underline{r}(s) = \left[3\cos\frac{s}{5},\, 3\sin\frac{s}{5},\, 4\cdot\frac{s}{5}\right]$ *csavarvonal ívhossz szerint paraméterezett.*

Ennek deriváltja az $\underline{r}'(s) = \left[-\frac{3}{5}\sin\frac{s}{5},\, \frac{3}{5}\cos\frac{s}{5},\, \frac{4}{5}\right]$ *vektor, amelynek abszolút értéke egységnyi.*



7.4. ábra. Gyorsulás

7.5. Második derivált

7.15. Definíció *Az elmozdulás idő szerinti második deriváltja a gyorsulás. Ha az $\underline{r}(t)$ görbét egy mozgó pont pályájának képzeljük, akkor $\underline{\ddot{r}}(t)$ a gyorsulásvektor.*

Gyakran szükség van arra, hogy a gyorsulásvektort felbontsuk egy érintő irányú és egy arra merőleges komponensre.

7.16. Definíció *A gyorsulásvektor érintő irányú komponensét tangenciális (pályamenti) gyorsulásnak hívjuk.*

Kiszámítása:

$$\underline{a}_t = \frac{(\underline{\dot{r}} \cdot \underline{\ddot{r}})}{|\underline{\dot{r}}|^2}\,\underline{\dot{r}}.$$

A tangenciális gyorsulás azt mutatja, hogy a sebesség a pálya irányában milyen gyorsan változik.

7.17. Definíció *A gyorsulásvektor érintő irányú komponensére merőleges komponenst centripetális gyorsulásnak hívjuk.*

Kiszámítása:

$$\underline{a}_{cp} = \underline{\ddot{r}} - \frac{(\underline{\dot{r}} \cdot \underline{\ddot{r}})}{|\underline{\dot{r}}|^2}\,\underline{\dot{r}}.$$

7.18. Megjegyzés *A centripetális gyorsulás a sebességvektor irányváltozása miatt lép fel.*

7.6. Görbület

A görbülettel a térgörbének az egyenestől való elhajlását mérjük. Olyan mennyiséget kívánunk bevezetni, amely nem függ a paraméterezéstől, hanem csak a görbére jellemző.

7.19. Definíció *Legyen a P és Q görbepontok közötti távolság a görbe mentén mérve Δs, valamint a P és Q görbepontokban húzott érintők szöge $\Delta\alpha$.*

Az $\underline{r}(t)$ görbe P pontbeli göbületét a

$$G = \lim_{\Delta s \to 0} \frac{\Delta\alpha}{\Delta s}$$

határértékkel definiáljuk, ahol a határátmenetet úgy képezzük, hogy $Q \to P$ a görbe mentén.

A görbület kiszámításához a

$$G = \lim_{\Delta s \to 0} \frac{\Delta\alpha}{\Delta s} = \frac{\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\alpha}{\Delta t}}{\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta s}{\Delta t}}$$

határértéket két lépésben határozzuk meg. Először a számlálóban lévő $\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\alpha}{\Delta t}$, majd a nevezőben levő $\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta s}{\Delta t}$ határértéket számítjuk ki.

Felhasználjuk, hogy $\frac{\Delta\alpha}{\Delta t} = \frac{\sin\Delta\alpha}{\Delta t} : \frac{\sin\Delta\alpha}{\Delta\alpha}$, és tudjuk, hogy $\lim_{\Delta\alpha \to 0} \frac{\sin\Delta\alpha}{\Delta\alpha} = 1$. A vektoriális szorzat définíciója alapján:

$$\sin\Delta\alpha = \frac{|\dot{\underline{r}} \times (\dot{\underline{r}} + \Delta\dot{\underline{r}})|}{|\dot{\underline{r}}| \cdot |\dot{\underline{r}} + \Delta\dot{\underline{r}}|} = \frac{|\dot{\underline{r}} \times \Delta\dot{\underline{r}}|}{|\dot{\underline{r}}| \cdot |\dot{\underline{r}} + \Delta\dot{\underline{r}}|}.$$

Ebből

$$\frac{\sin\Delta\alpha}{\Delta t} = \frac{\left|\dot{\underline{r}} + \frac{\Delta\dot{\underline{r}}}{\Delta t}\right|}{|\dot{\underline{r}}| \cdot |\dot{\underline{r}} + \Delta\dot{\underline{r}}|}.$$

Ennek határértéke $\Delta t \to 0$ esetén

$$\frac{|\dot{\underline{r}} \times \ddot{\underline{r}}|}{|\dot{\underline{r}}|^2}.$$

A $\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta s}{\Delta t}$ határérték meghatározása egyszerűbb, mert az ívhossz képletéből azonnal következik, hogy $\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} = |\dot{\underline{r}}|$. Tehát az $\underline{r}(t)$ görbe t paraméterű pontjában a göbület

$$G = \frac{|\dot{\underline{r}}(t) \times \ddot{\underline{r}}(t)|}{|\dot{\underline{r}}(t)|^3}.$$

Ha az $\underline{r}(t)$ görbét úgy tekintjük, mint egy térben mozgó pont pályáját, amely minden t időpillanatban megadja a mozgó pont helyét, akkor nyilvánvalóan $\dot{\underline{r}}(t)$ a pont sebességvektora és $\ddot{\underline{r}}(t)$ a gyorsulásvektora.

A tangenciális gyorsulás abszolútértéke:

$$|\underline{a}_t| = \frac{|\dot{\underline{r}} \cdot \ddot{\underline{r}}|}{|\dot{\underline{r}}|}$$

a centripetális gyorsulás abszolútértéke pedig:

$$|\underline{a}_{cp}| = \frac{|\dot{\underline{r}} \times \ddot{\underline{r}}|}{|\dot{\underline{r}}|}.$$

Kapcsolat a görbület és a centripetális gyorsulás között: amennyiben a paraméterezést úgy választjuk meg, hogy a pont egyenletes pályamenti sebességgel megy végig a görbén, azaz $|\dot{\underline{r}}(t)| = 1$, avagy ilyenkor szokásos jelöléssel $|\underline{r}'(s)| = 1$, akkor a tangenciális gyorsulás zérus, a centripetális gyorsulás abból származik, hogy a sebességvektor iránya változik, és ekkor a centripetális gyorsulás abszolútértéke megegyezik a görbülettel. Tehát ekkor

$$G = |\underline{r}''(s)|.$$

7.20. Megjegyzés *Ívhossz szerinti paraméterezés esetén a sebebesség és a gyorsulás merőlegesek egymásra, ami úgy is belátható, hogy ekkor* $(\underline{r}'')^2 = 1$ *és ennek ívhossz szerinti deriváltja* $2 \cdot \underline{r}' \cdot \underline{r}'' = 0$.

7.7. Kísérő triéder

7.21. Definíció *A kisérő triéder (vagy három él) vektorai*

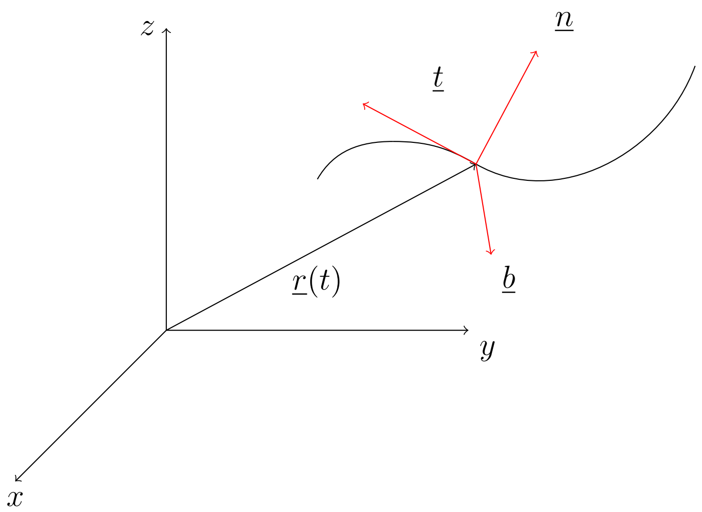
(1) Az érintő irányú egységvektort (érintővektort) $\underline{t}$*-vel jelöljük és*

$$\underline{t} = \frac{\dot{\underline{r}}}{|\dot{\underline{r}}|} = \underline{r}'.$$

(2) A centripetális gyorsulás irányú egységvektort főnormálisnak nevezzük és $\underline{n}$*-nel jelöljük.*

$$\underline{n} = \frac{\underline{r}''}{|\underline{r}''|}.$$

(Egyes könyvekben a főnormálist $\underline{f}$ *jelöli.)*



7.5. ábra. Kisérő triéder

(3) A binormális vektor a $\underline{t}$ érintővektorra és az $\underline{n}$ főnormálisra egyaránt merőleges és velük jobbrendszert alkotó egységvektor. Szokásos jelölése $\underline{b}$. Kiszámítása:

$$\underline{b} = \underline{t} \times \underline{n}.$$

7.5. Példa *Határozzuk meg az $\underline{r}(t) = [3\cos t\,; 3\sin t\,; 4t]$ csavarvonal kísérő triéderét a $t_0 = \frac{\pi}{4}$ paraméterű pontban!*

7.5. Megoldás $\underline{\dot{r}}(t) = [-3\sin t\,; 3\cos t\,; 4]$, *ezért* $\underline{\dot{r}}(\frac{\pi}{4}) = \left[-3\frac{\sqrt{2}}{2}\,; 3\frac{\sqrt{2}}{2}\,;\, 4\right]$

$\underline{\ddot{r}}(t) = [-3\cos t\,; -3\sin t\,; 0]$, *ezért* $\underline{\ddot{r}}(\frac{\pi}{4}) = \left[-3\frac{\sqrt{2}}{2}\,; -3\frac{\sqrt{2}}{2}\,;\, 0\right]$

$|\underline{\dot{r}}(\frac{\pi}{4})| = \sqrt{\left(3\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 + \left(3\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 + 4^2} = 5.$

Tehát

$$\underline{t} = \left[-\frac{3}{10}\sqrt{2}\,; \frac{3}{10}\sqrt{2}\,;\, \frac{4}{5}\right].$$

Következő lépésben a binormálist határozzuk meg, mert az merőleges $\underline{\dot{r}}$-ra és $\underline{\ddot{r}}$-ra is, tehát $\underline{\dot{r}} \times \underline{\ddot{r}}$ irányú.

$$\underline{\dot{r}} \times \underline{\ddot{r}} = \begin{vmatrix} \underline{i} & \underline{j} & \underline{k} \\ -3\frac{\sqrt{2}}{2} & 3\frac{\sqrt{2}}{2} & 4 \\ -3\frac{\sqrt{2}}{2} & -3\frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \end{vmatrix} = 6\sqrt{2}\underline{i} - 6\sqrt{2}\underline{j} + 9\underline{k}.$$

Mivel $|\underline{\dot{r}} \times \underline{\ddot{r}}| = 15$ *ezért*

$$\underline{b} = \frac{2}{5}\sqrt{2}\underline{i} - \frac{2}{5}\sqrt{2}\underline{j} + \frac{3}{5}\underline{k}.$$

Végül

$$\underline{n} = \underline{b} \times \underline{t} = \begin{vmatrix} \underline{i} & \underline{j} & \underline{k} \\ \frac{2\sqrt{2}}{5} & -\frac{2\sqrt{2}}{5} & \frac{3}{5} \\ -\frac{3\sqrt{2}}{10} & \frac{3\sqrt{2}}{10} & \frac{8}{10} \end{vmatrix} = -\frac{\sqrt{2}}{2}\underline{i} - \frac{\sqrt{2}}{2}\underline{j} + 0 \cdot \underline{k}.$$

7.22. Definíció *A sebesség- és gyorsulásvektor által meghatározott síkot simulósíknak nevezzük.*

A simulósík tehát az $\dot{\underline{r}}(t)$ és $\ddot{\underline{r}}(t)$ vektorok által meghatározott sík. Tartalmazza a $\underline{t}$ és $\underline{n}$ vektorokat. A simulósík normálisa a $\underline{b}$ binormális vektor.

7.23. Definíció *A normálsík a görbére merőleges sík. Normálisa tehát az $\dot{\underline{r}}(t)$ érintővektor. A normálsík tartalmazza a $\underline{n}$ normális és $\underline{b}$ binormális vektorokat.*

7.24. Definíció *A rektifikáló sík a $\underline{t}$ és $\underline{b}$ vektorok által meghatározott sík. Normálisa az $\underline{n}$ főnormális vektor.*

7.6. Példa *Határozzuk meg az*

$$\underline{r}(t) = t \cdot \underline{i} + \frac{2\sqrt{2}}{3} t^{\frac{3}{2}} \cdot \underline{j} + \frac{1}{2} t^2 \cdot \underline{k}$$

térgörbe $t_0 = 4$ paraméterű pontjában a simulósík, normálsík és rektifikáló sík egyenletét.

7.6. Megoldás *A görbepont koordinátái:*

$$\underline{r}(4) = \left[4;\ \frac{16\sqrt{2}}{3};\ 8\right].$$

A derivált:

$$\dot{\underline{r}}(t) = \left[1;\ \sqrt{2} t^{\frac{1}{2}};\ t\right] \text{ ezért } \dot{\underline{r}}(4) = \left[1;\ 2\sqrt{2};\ 4\right].$$

A normálsík egyenletét máris fel tudjuk írni:

$$x - 4 + 2\sqrt{2}\left(y - \frac{16\sqrt{2}}{3}\right) + 4(z - 8) = 0.$$

Szükség van a második deriváltra.

$$\ddot{\underline{r}}(t) = \left[0;\ \frac{\sqrt{2}}{2} t^{-\frac{1}{2}};\ 1\right] \text{ ezért } \ddot{\underline{r}}(4) = \left[0;\ \frac{\sqrt{2}}{4};\ 1\right].$$

A binormális $\underline{\dot{r}} \times \underline{\ddot{r}}$ irányú:

$$\underline{\dot{r}} \times \underline{\ddot{r}} = \begin{vmatrix} \underline{i} & \underline{j} & \underline{k} \\ 1 & 2\sqrt{2} & 4 \\ 0 & \frac{\sqrt{2}}{4} & 1 \end{vmatrix} = \sqrt{2} \cdot \underline{i} - \underline{j} + \frac{\sqrt{2}}{4} \cdot \underline{k}.$$

A simulósík egyenlete:

$$\sqrt{2}(x-4) - (y - \frac{16\sqrt{2}}{3}) + \frac{\sqrt{2}}{4}(z-8) = 0.$$

A rektifikáló sík normálisa (a főnormális) merőleges a simulósík és normálsík normálvektorára, ezért kiszámítjuk azok vektoriális szorzatát:

$$(\underline{\dot{r}} \times \underline{\ddot{r}}) \times \underline{\dot{r}} = \begin{vmatrix} \underline{i} & \underline{j} & \underline{k} \\ \sqrt{2} & -1 & \frac{\sqrt{2}}{4} \\ 1 & 2\sqrt{2} & 4 \end{vmatrix} = -5 \cdot \underline{i} - \frac{15}{4}\sqrt{2} \cdot \underline{j} + 5 \cdot \underline{k}.$$

Tehát a rektifikáló sík egyenlete:

$$-5(x-4) - \frac{15}{4}\sqrt{2}(y - \frac{16\sqrt{2}}{3}) + 5(z-8) = 0.$$

7.8. Torzió

A torzióval a térgörbének a síkgörbétől való elhajlását mérjük. Olyan mennyiséget kívánunk bevezetni, amely nem függ a paraméterezéstől, hanem csak a görbére jellemző.
Legyen a P és Q görbepontok közötti távolság a görbe mentén mérve Δs, valamint a P és Q görbepontokhoz tartozó érintősíkok szöge $\Delta\beta$.

7.25. Definíció *Az $\underline{r}(t)$ görbe P pontbeli torzióját a*

$$T = \lim_{\Delta s \to 0} \frac{\Delta\beta}{\Delta s}$$

határértékkel definiáljuk, ahol a határátmenetet úgy képezzük, hogy $Q \to P$ a görbe mentén.

A torzió kiszámítása.

7.26. Tétel *Bizonyítás nélkül közöljük, hogy az $\underline{r}(t)$ görbe t paraméterű pontjában a torzió*

$$T = \frac{\underline{\dot{r}}\,\underline{\ddot{r}}\,\underline{\dddot{r}}}{|\underline{\dot{r}} \times \underline{\ddot{r}}|^2}.$$

7.7. Példa *Határozzuk meg a 7.6. példában szereplő*

$$\underline{r}(t) = t \cdot \underline{i} + \frac{2\sqrt{2}}{3} t^{\frac{3}{2}} \cdot \underline{j} + \frac{1}{2} t^2 \cdot \underline{k}$$

térgörbe $t_0 = 4$ *paraméterű pontjában a torzió mértékét!*

7.7. Megoldás *A derivált:*

$$\dot{\underline{r}}(t) = \left[1;\ \sqrt{2} t^{\frac{1}{2}};\ t\right] \ \textit{ezért}\ \dot{\underline{r}}(4) = \left[1;\ 2\sqrt{2};\ 4\right].$$

A második derivált:

$$\ddot{\underline{r}}(t) = \left[0;\ \frac{\sqrt{2}}{2} t^{-\frac{1}{2}};\ 1\right] \ \textit{ezért}\ \ddot{\underline{r}}(4) = \left[0;\ \frac{\sqrt{2}}{4};\ 1\right].$$

A harmadik derivált:

$$\dddot{\underline{r}}(t) = \left[0;\ -\frac{\sqrt{2}}{4} t^{-\frac{3}{2}};\ 0\right] \ \textit{ezért}\ \dddot{\underline{r}}(4) = \left[0;\ -\frac{\sqrt{2}}{32};\ 0\right].$$

A torzió képletének számlálójában szereplő vegyesszorzat tehát:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2\sqrt{2} & 4 \\ 0 & \frac{\sqrt{2}}{4} & 1 \\ 0 & -\frac{\sqrt{2}}{32} & 0 \end{vmatrix} = \frac{\sqrt{2}}{32}.$$

A torzió képletének nevezőjében az

$$|\dot{\underline{r}} \times \ddot{\underline{r}}|^2 = \frac{25}{8},$$

ezért a torzió:

$$T = \frac{\sqrt{2}}{100}.$$

7.27. Megjegyzés *A térgörbe görbülete mindig nem negatív szám, a torzió azonban előjeles mennyiség. A torzió pozitív, ha a görbe jobbra csavarodik és negatív, ha balra. Egy síkgörbe torziója zérus.*

Összefoglalás:

	t paraméter	ívhossz paraméter
görbe megadása	$\underline{r}(t) = [x(t), y(t), z(t)]$	$\underline{r}(s) = [x(s), y(s), z(s)]$
érintő (sebesség)	$\dot{\underline{r}}(t) = [\dot{x}(t), \dot{y}(t), \dot{z}(t)]$	$\underline{r}'(s) = [x'(s), y'(s), z'(s)]$
gyorsulás	$\ddot{\underline{r}}(t) = [\ddot{x}(t), \ddot{y}(t), \ddot{z}(t)]$	$\underline{r}''(s) = [x''(s), y''(s), z''(s)]$
tangenciális gyorsulás (pályamenti v. érintő irányú)	$$\underline{a}_t = \frac{(\dot{\underline{r}} \cdot \ddot{\underline{r}})}{\lvert\dot{\underline{r}}\rvert^2}\,\dot{\underline{r}}$$	$$\underline{a}_t = \underline{0}$$
centripetális gyorsulás	$$\underline{a}_{cp} = \ddot{\underline{r}} - \frac{(\dot{\underline{r}} \cdot \ddot{\underline{r}})}{\lvert\dot{\underline{r}}\rvert^2}\,\dot{\underline{r}}.$$	$$\underline{a}_{cp} = \underline{r}''(s)$$
ívhossz	$$s = \int_{t_1}^{t_2} \lvert\dot{\underline{r}}(t)\rvert dt$$	
a kisérő triéder vektorai: érintő irányú főnormális binormális	$$\underline{t} = \frac{\dot{\underline{r}}}{\lvert\dot{\underline{r}}\rvert}$$ $$\underline{n} = \underline{b} \times \underline{t}$$ $$\underline{b} = \frac{\dot{\underline{r}}(t) \times \ddot{\underline{r}}(t)}{\lvert\dot{\underline{r}}(t) \times \ddot{\underline{r}}(t)\rvert}$$	$$\underline{t} = \underline{r}'.$$ $$\underline{n} = \frac{\underline{r}''}{\lvert\underline{r}''\rvert}.$$ $$\underline{b} = \underline{t} \times \underline{n}.$$
görbület	$$G = \frac{\lvert\dot{\underline{r}} \times \ddot{\underline{r}}\rvert}{\lvert\dot{\underline{r}}\rvert^3}$$	$$G = \lvert\underline{r}''\rvert$$
torzió	$$T = \frac{\dot{\underline{r}}\ddot{\underline{r}}\dddot{\underline{r}}}{\lvert\dot{\underline{r}} \times \ddot{\underline{r}}\rvert^2}$$	$$T = \frac{\underline{r}'\underline{r}''\underline{r}'''}{\lvert\underline{r}''\rvert^2}$$

7.9. Feladatok

7.1. Feladat *Írja fel az alábbi térgörbe adott pontbeli érintő egyenesének egyenletét:*

$\underline{r}(t) = (t-3)\underline{i} + (t^2+1)\underline{j} + t^2\underline{k}, \qquad t = 2.$

Eredmény: $\underline{\tau}(t) = (-1+t)\underline{i} + (5+4t)\underline{j} + (4+4t)\underline{k}.$

7.2. Feladat *Írja fel az alábbi térgörbe adott pontbeli érintő egyenesének egyenletét:*

$\underline{r}(t) = \underline{i}\sin t + \underline{j}\cos t + \frac{\underline{k}}{\cos t}, \qquad t = 0.$

Eredmény: $\underline{\tau}(t) = t\underline{i} + \underline{j} + \underline{k}.$

7.3. Feladat *Írja fel az alábbi térgörbe adott pontbeli érintő egyenesének egyenletét:*

$\underline{r}(t) = 2t\,\underline{i} + \frac{2}{t}\underline{j} + t^2\underline{k}, \qquad t = 2.$

Eredmény: $\underline{\tau}(t) = (4+2t)\underline{i} + (1-\frac{1}{2}t)\underline{j} + (4+4t)\underline{k}.$

7.4. Feladat *Írja fel az alábbi térgörbe adott pontbeli érintő egyenesének egyenletét:*

$\underline{r}(t) = \frac{t}{1+t}\underline{i} + \frac{1+t}{t}\underline{j} + t^2\underline{k}, \qquad t = 1.$

Eredmény: $\underline{\tau}(t) = (\frac{1}{2}+\frac{1}{4}t)\underline{i} + (2-\frac{1}{4}t)\underline{j} + (1+2t)\underline{k}.$

7.5. Feladat *Kiszámítandó a következő térgörbe adott szakaszának ívhossza.*

$\underline{r}(t) = at\,\underline{i} + \sqrt{3ab}\,t^2\underline{j} + 2bt^3\underline{k}, \qquad 0 \le t \le 1, \text{ ahol } \quad a \ge 0, \quad b \ge 0.$

Eredmény: $s = a + 2b.$

7.6. Feladat *Kiszámítandó a következő térgörbe adott szakaszának ívhossza.*

$\underline{r}(t) = e^{at}\cos t\,\underline{i} + e^{at}\sin t\,\underline{j} + b\cdot e^{at}\underline{k}, \qquad -\infty < t \le t_0 \quad a > 0.$

Eredmény: $s = \frac{\sqrt{1+a^2+a^2b^2}}{a}e^{at_0}.$

7.7. Feladat *Kiszámítandó a következő térgörbe adott szakaszának ívhossza.*

$\underline{r}(t) = t^2\underline{i} + 2t^6\underline{j} + \sqrt{3}\,t^4\underline{k}, \qquad -1 \le t \le 2.$

Eredmény: $s = 2^7 + 1.$

7.8. Feladat *Kiszámítandó a következő térgörbe adott szakaszának ívhossza.*

$\underline{r}(t) = \frac{\cos t}{ch\, t}\underline{i} + \frac{\sin t}{ch\, t}\underline{j} + (t - th\, t)\underline{k}, \qquad 0 \le t \le 10.$

Eredmény: $s = 10.$

7.9. Feladat *Kiszámítandó a térgörbék adott pontjában a kísérő háromél, a simulósík egyenlete, a normálsík egyenlete és a rektifikáló sík egyenlete.*

$\underline{r}(t) = (3t^2 - 2t)\underline{i} + t^3\underline{j} + (1 - t)\underline{k}, \qquad t = 2.$

Eredmények:

$$\underline{t} = \frac{1}{\sqrt{245}}\,[10;\ 12;\ -1] \quad \underline{n} = \frac{1}{\sqrt{69}}\,[2;\ -2;\ 8] \quad \underline{b} = \frac{1}{\sqrt{69}\cdot\sqrt{245}}\,[95;\ -82;\ -34]\,.$$

Simulósík: $2(x - 8) - (y - 8) + 8(z + 1) = 0$.
Normálsík: $10(x - 8) + 12(y - 8) - (z + 1) = 0$.
Rektifikáló sík: $95(x - 8) - 82(y - 8) - 34(z + 1) = 0.$

7.10. Feladat *Kiszámítandó a térgörbék adott pontjában a kísérő háromél, a simulósík egyenlete, a normálsík egyenlete és a rektifikáló sík egyenlete.*

$\underline{r}(t) = 3t^2\underline{i} + (2t + 3)\underline{j} + 3t^3\underline{k}, \qquad t = -1.$

Eredmények:

$$\underline{t} = \frac{1}{11}\,[-6;\ 2;\ 9] \quad \underline{n} = \frac{6}{11}\,[6;\ 9;\ 2] \quad \underline{b} = \frac{6}{11}\,[-7;\ 6;\ -6]\,.$$

Simulósík: $6(x - 3) + 9(y + 1) + 2(z + 3) = 0.$
Normálsík: $6(x - 3) - 2(y + 1) - 9(z + 3) = 0.$
Rektifikáló sík: $7(x - 3) - 6(y + 1) + 6(z + 3) = 0.$

7.11. Feladat *Kiszámítandó a térgörbék adott pontjában a kísérő háromél, a simulósík egyenlete, a normálsík egyenlete és a rektifikáló sík egyenlete.*

$\underline{r}(t) = \frac{t^4}{4}\underline{i} + \frac{t^3}{3}\underline{j} + \frac{t^2}{2}\underline{k}, \qquad t = 1.$

Eredmények:

$$\underline{t} = \frac{1}{\sqrt{3}}\,[1;\ 1;\ 1] \quad \underline{n} = \frac{1}{\sqrt{6}}\,[-1;\ 2;\ -1] \quad \underline{b} = \frac{1}{\sqrt{2}}\,[-1;\ 0;\ 1]\,.$$

Simulósík: $(x - \frac{1}{4}) - 2(y - \frac{1}{3}) + (z - \frac{1}{2}) = 0.$
Normálsík: $(x - \frac{1}{4}) + (y - \frac{1}{3}) + (z - \frac{1}{2}) = 0.$
Rektifikáló sík: $(x - \frac{1}{4}) - (z - \frac{1}{2}) = 0.$

7.12. Feladat *Számítsa ki az alábbi görbe adott pontbeli görbületét és torzióját!*

$\underline{r}(t) = (3t^2 - 2t)\underline{i} + t^3\underline{j} + (1 - t)\underline{k}, \qquad t = 2.$

Eredmények:

$$G = \frac{6 \cdot \sqrt{69}}{245 \cdot \sqrt{245}}, \qquad T = -\frac{1}{69}.$$

7.13. Feladat *Számítsa ki az alábbi görbe adott pontbeli görbületét és torzióját!*

$\underline{r}(t) = 3t^2\underline{i} + (2t + 3)\underline{j} + 3t^3\underline{k}, \qquad t = -1.$

Eredmények:

$$G = \frac{6}{121}, \qquad T = -\frac{6}{121}.$$

7.14. Feladat *Számítsa ki az alábbi görbe adott pontbeli görbületét és torzióját!*

$\underline{r}(t) = \frac{t^4}{4}\underline{i} + \frac{t^3}{3}\underline{j} + \frac{t^2}{2}\underline{k}, \qquad t = 1.$

Eredmények:

$$G = \frac{\sqrt{2}}{3}, \qquad T = -\frac{1}{2}.$$

8. fejezet

Felületek

A felületeket két skalárparamétertől függő térbeli vektorral írjuk le.
Szokásos módon rögzítjük tehát az origóból induló $\underline{i}$, $\underline{j}$, $\underline{k}$ páronként merőleges egységvektorokat és egy az origóból induló térbeli vektort erre a bázisra vonatkozóan adunk meg a koordinátáival:

$$\underline{r}(u,v) = x(u,v)\underline{i} + y(u,v)\underline{j} + z(u,v)\underline{k}.$$

Mivel az $\underline{i}$, $\underline{j}$, $\underline{k}$ vektorokat rögzítettük, ezért a továbbiakban elég csak a koordinátákat megadni:

$$\underline{r}(u,v) = [x(u,v),\ y(u,v),\ z(u,v)]\,.$$

Most is, mint a görbék tárgyalása során feltesszük, hogy az $x(u,v)$, $y(u,v)$, $z(u,v)$ kétváltozós függvények mindenféle jó tulajdonsággal rendelkeznek, pl. elég sokszor differenciálhatók.
Ha a v paramétert rögzítjük és csak az u paramétert változtatjuk, akkor az

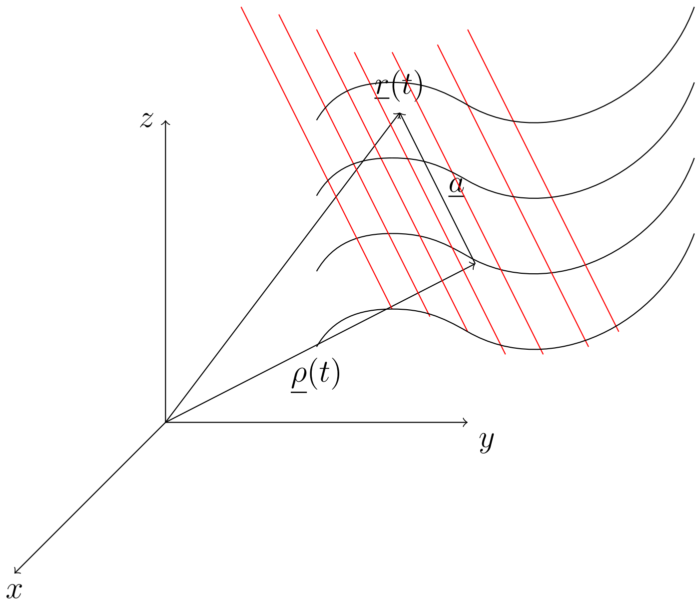
$$\underline{r}(u,v_0) = [x(u,v_0),\ y(u,v_0),\ z(u,v_0)]$$

függvény egy felületi görbét ír le. Különböző rögzített v értékek esetén egy felületi görbesereget kapunk. Hasonlóan az u paraméter különböző rögzített értékeihez egy másik görbesereg tartozik. Úgy is elképzelhetjük a felület ilyen típusú megadását, mintha a felületen futó görbék hálózatával jellemeznénk a felületet.

Példák felület $\underline{r}(u,v)$ alakú megadására:

(1) Origó középpontú R sugarú gömb (a földrajzban szokásos szélességi és hosszúsági körök mintájára):

$$\underline{r}(u,v) = [R\cos u\cos v,\ R\cos u\sin v,\ R\sin u\,]\,,$$



8.1. ábra. Henger

ahol R a gömb sugara, $-\frac{\pi}{2} \leq u \leq \frac{\pi}{2}$ az $\underline{r}(u, v)$ vektornak az egyenlítővel bezárt szöge és $0 \leq v \leq 2\pi$ az $\underline{r}(u, v)$ vektornak az x, z síkkal bezárt szöge.

(2) Egy $\underline{\rho}(u) = [x(u),\, y(u),\, z(u)]$ vezérgörbéjű $\underline{a} = [a_1,\, a_2,\, a_3]$ vektorral párhuzamos alkotójú henger egyenlete:

$$\underline{r}(u, v) = \underline{\rho}(u) + v \cdot \underline{a} = [x(u) + v \cdot a_1,\, y(u) + v \cdot a_2,\, z(u) + v \cdot a_3]\,.$$

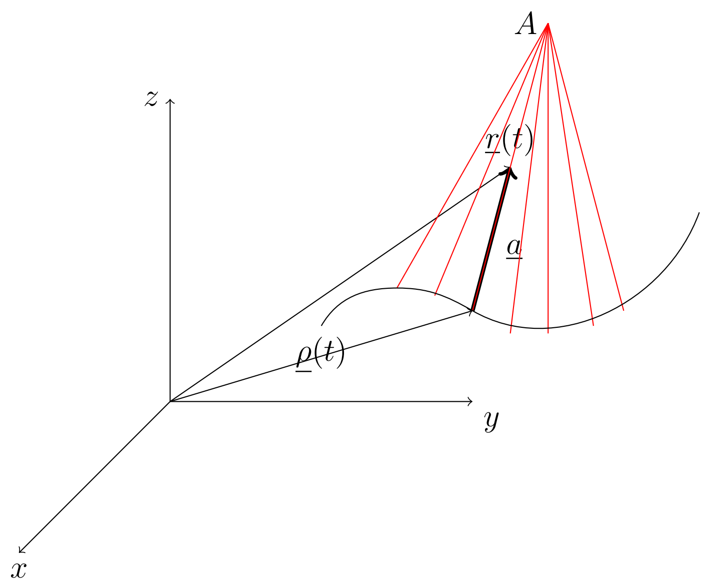
(3) Egy $\underline{\rho}(u) = [x(u),\, y(u),\, z(u)]$ vezérgörbéjű és $\overrightarrow{A} = [a_1,\, a_2,\, a_3]$ csúcspontú kúp egyenlete:

$$\underline{r}(u, v) = \underline{\rho}(u) + v \cdot \left(\overrightarrow{A} - \rho(u)\right) = (1 - v) \cdot \underline{\rho}(u) + v \cdot \overrightarrow{A} =$$
$$= [(1 - v) \cdot x(u) + v \cdot a_1,\, (1 - v) \cdot y(u) + v \cdot a_2,\, (1 - v) \cdot z(u) + v \cdot a_3]\,.$$

8.1. Felületi normális

Ahogy azt már a bevezetőben is említettük pl. a v paraméter rögzítésével egy felületi görbét kapunk:

$$\underline{r}(u, v_0) = [x(u, v_0),\, y(u, v_0),\, z(u, v_0)]\,.$$



8.2. ábra. Kúp

Ennek a görbének egy tetszőleges u paraméterű pontjában az érintővektora az u szerinti derivált:

$$\underline{r}_u(u, v_0) = [x_u(u, v_0),\ y_u(u, v_0),\ z_u(u, v_0)]\,.$$

Ez a vektor érintő a felülethez is. Hasonlóan az u paraméter rögzítésével az

$$\underline{r}(u_0, v) = [x(u_0, v),\ y(u_0, v),\ z(u_0, v)]$$

görbéhez v szerinti deriválással kapunk érintővektort:

$$\underline{r}_v(u_0, v) = [x_v(u_0, v),\ y_v(u_0, v),\ z_v(u_0, v)]\,.$$

A felületi normális mindkét érintővektorra merőleges, tehát előállítható

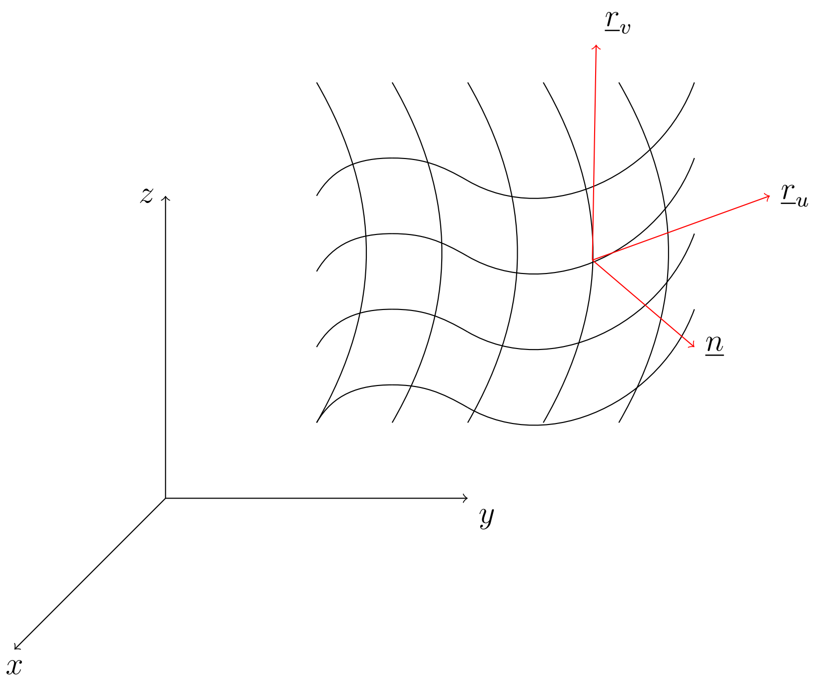
$$\underline{n} = \underline{r}_u(u, v) \times \underline{r}_v(u, v)$$

alakban. Feltesszük, hogy az $\underline{r}_u$ és $\underline{r}_v$ által bezárt ϕ szög nem zérus és nem π ($\phi \neq 0,\ \phi \neq \pi$).

Mivel

$$(\underline{r}_u \times \underline{r}_v)^2 = (\underline{r}_u)^2 \cdot (\underline{r}_v)^2 \cdot \sin^2\phi = (\underline{r}_u)^2 \cdot (\underline{r}_v)^2 \cdot (1 - \cos^2\phi) =$$

$$= (\underline{r}_u)^2 \cdot (\underline{r}_v)^2 - (\underline{r}_u \cdot \underline{r}_v)^2\,,$$



8.3. ábra. Felületi normális

ezért bevezetve az

$$E = (\underline{r}_u)^2$$

$$F = \underline{r}_u \cdot \underline{r}_v$$

$$G = (\underline{r}_v)^2$$

Gauss-féle elsőrendű főmennyiségeket, az

$$|\underline{r}_u(u,v) \times \underline{r}_v(u,v)| = \sqrt{EG - F^2}$$

egyenlőséget kapjuk.

8.1. Példa *Határozzuk meg az $\underline{r}(u,v) = [u,\ v,\ uv]$ felület $u = 2,\ v = 3$ paraméterű pontjában a felületi normálist és a Gauss-féle elsőrendű főmennyiségeket!*

8.1. Megoldás

$$\underline{r}_u = [1,\ 0,\ v],$$

$$\underline{r}_v = [0,\ 1,\ u],$$

$$\underline{n} = [-v,\ -u,\ 1],$$

$$E = 1 + v^2, \quad F = uv, \quad G = 1 + u^2.$$

Az adott pontban

$$\underline{n} = [-3,\ -2,\ 1] \quad E = 10, \quad F = 6, \quad G = 5.$$

8.2. Érintősík

Az $\underline{n} = \underline{r}_u(u,v) \times \underline{r}_v(u,v)$ felületi normális segítségével felírhatjuk a felület tetszőleges u_0, v_0 paraméterű pontjában az érintősík egyenletét:

$$n_1(x - x_0) + n_2(y - y_0) + n_3(z - z_0) = 0,$$

ahol $\underline{n} = [n_1,\ n_2,\ n_3]$ és $\underline{r}(u_0, v_0) = [x_0,\ y_0,\ z_0]$.

8.2. Példa *Írjuk fel az előző példa adott pontbeli érintősíkjának egyenletét!*

8.2. Megoldás *A normálvektoron kívül szükség van a felületi pont koordinátáira:* $\underline{r}_0 = [2,\ 3,\ 6]$. *Tehát az érintősík egyenlete:*

$$-3(x - 2) - 2(y - 3) + (z - 6) = 0.$$

Egyszerűsítve: $3x + 2y - z = -6$.

8.3. Felületi görbék

Az $u = u(t)$, $v = v(t)$ paraméterezéssel és a $t_1 \le t \le t_2$ feltétellel kijelölhetünk a felületen egy

$$\underline{r}\,(u(t), v(t))$$

görbedarabot. Ennek érintője a t változó szerinti derivált. Alkalmazva az összetett függvényre vonatkozó deriválási szabályt kapjuk, hogy

$$\dot{\underline{r}}\,(u(t), v(t)) = \underline{r}_u\,(u(t), v(t))\,\dot{u}(t) + \underline{r}_v\,(u(t), v(t))\,\dot{v}(t).$$

Itt tehát pont jelzi a t változó szerinti deriválást és alsó index az u vagy v változó szerinti parciális deriváltat. Emlékezve, hogy mindegyik függvény a t változótól függ, a fenti kifejezést röviden így írhatjuk:

$$\dot{\underline{r}} = \underline{r}_u\dot{u} + \underline{r}_v\dot{v}.$$

Mivel a görbedarab ívhossza az

$$\int_{t_1}^{t_2} |\dot{\underline{r}}(t)|dt$$

integrállal számolható, ezért egy felületi görbe adott darabjának ívhossza

$$s(t) = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{(\underline{r}_u \dot{u} + \underline{r}_v \dot{v})^2} dt.$$

Ezt a formulát részletesen kifejtve és felhasználva a Gauss-féle elsőrendű fő-mennyiségeket kapjuk, hogy

$$s(t) = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{E\,\dot{u}^2 + 2\,F\,\dot{u}\,\dot{v} + G\,\dot{v}^2} dt.$$

8.3. Példa *Számítsuk ki az* $\underline{r}(u, v) = [u\cos v,\ u\sin v,\ u]$ *kúpfelületre írt* $u = t^2, \quad v = t$ *paraméterrel definiált görbe* $0 \le t \le 2\pi$ *darabjának ívhosszát!*

8.3. Megoldás

$$\underline{r}_u = [\cos v,\ \sin v,\ 1]\,,$$

$$\underline{r}_v = [-u\sin v,\ u\cos v,\ 0]\,,$$

$$E = \cos^2 v + \sin^2 v + 1 = 2, \qquad F = \underline{r}_u \cdot \underline{r}_v = 0, \qquad G = u^2,$$

$$E\,\dot{u}^2 + 2\,F\,\dot{u}\,\dot{v} + G\,\dot{v}^2 = 2(2t)^2 + 0 + (t^2)^2 = 8t^2 + t^4,$$

$$s(t) = \int_0^{2\pi} \sqrt{8t^2 + t^4} dt = \int_0^{2\pi} t\sqrt{8 + t^2} dt = \left[\frac{1}{3}\left(8 + t^2\right)^{\frac{3}{2}}\right]_0^{2\pi} =$$

$$= \frac{1}{3}\left(8 + 4\pi^2\right)^{\frac{3}{2}} - \frac{1}{3} 8^{\frac{3}{2}}.$$

8.4. Felületdarab felszíne

Ha az u, v paramétersíkon kijelölünk egy T tartományt, akkor ez meghatározza az $\underline{r}(u, v)$ felületnek egy darabját. Bizonyítás nélkül közöljük, hogy ennek a felületdarabnak a felszíne az alábbi kettősintegrállal számítható ki:

$$\mathcal{F} = \iint_T |\underline{r}_u \times \underline{r}_v| du dv = \iint_T \sqrt{EG - F^2} du dv.$$

8.4. Példa *Számítsuk ki az*

$$\underline{r}(u, v) = [(a + b\cos u)\cos v,\ (a + b\cos u)\sin v,\ b\sin u]$$

egyenletű tórusz első térnyolcadba eső darabjának felszínét az $a > b$ *feltétel mellett!*

8.4. Megoldás

$$\underline{r}_u(u,v) = [-b\sin u\cos v,\ -b\sin u\sin v,\ b\cos u]\,,$$

$$\underline{r}_v(u,v) = [-(a+b\cos u)\sin v,\ (a+b\cos u)\cos v,\ 0]\,,$$

$$E = (\underline{r}_u)^2 = b^2\sin^2 u\cos^2 v + b^2\sin^2 u\sin^2 v + b^2\cos^2 u = b^2,$$

$$F = \underline{r}_u \cdot \underline{r}_v = 0,$$

$$G = (\underline{r}_v)^2 = (a+b\cos u)^2\sin^2 v + (a+b\cos u)^2\cos^2 v = (a+b\cos u)^2,$$

$$\sqrt{EG-F^2} = b(a+b\cos u),$$

$$\mathcal{F} = \iint_T \sqrt{EG-F^2}dudv = \iint_T b(a+b\cos u)dudv =$$

$$\iint_{\substack{0\le u\le\frac{\pi}{2}\\ 0\le v\le\frac{\pi}{2}}} b(a+b\cos u)dudv = (a\frac{\pi}{2}+b)b\frac{\pi}{2}.$$

8.5. Felületi pontok osztályozása

Képzeljük el, hogy a felület valamely pontjában az érintősíkot egy picit elmozdítjuk önmagával párhuzamosan úgy, hogy belemetszen a felületbe. A kapott metszettgörbének vegyük a másodrendű közelítését. A másodrendű görbe lehet ellipszis, hiperbola, vagy parabola (esetleg elfajult parabola, azaz párhuzamos egyenespár). Ennek megfelelően a felületi pont lehet elliptikus, hiperbolikus vagy parabolikus.

Ugyanennek a kérdésnek egy másik megközelítése: Készítsünk olyan metszősíkot a felülethez egy adott pontban, amely illeszkedik a felületi normálishoz, azaz a felületet merőlegesen metszi. Fordítsuk körbe ezt a metszősíkot és figyeljük meg a metszettgörbék görbületét. Ha minden görbén a metszettgörbe görbülete ugyanolyan előjelű, akkor a felületi pont elliptikus. Ha vannak ellentétes előjelű görbületek, akkor a felületi pont hiperbolikus (nyeregpont), ha pedig nincsenek ellentétes előjelű görbületek, de van zérus görbület is, akkor a felületi pont parabolikus.

A felületi pont jellegének kiszámítása a következőképpen történhet:

Vezessük be először a *Gauss-féle másodrendű főmennyiségeket*:

$$L = \underline{r}_{uu} \cdot \underline{n}^0,$$

$$M = \underline{r}_{uv} \cdot \underline{n}^0,$$

$$N = \underline{r}_{vv} \cdot \underline{n}^0.$$

Itt $\underline{n}^0$ jelöli az egységnyi hosszú normálist.
Ha az $LN - M^2 > 0$, akkor a felületi pont *elliptikus*.
Ha az $LN - M^2 < 0$, akkor a felületi pont *hiperbolikus*.
Ha az $LN - M^2 = 0$, akkor a felületi pont *parabolikus*.

8.5. Példa *Osztályozzuk a*

$$\underline{r}(u,v) = [(a + b\cos u)\cos v,\ (a + b\cos u)\sin v,\ b\sin u]$$

egyenletű tórusz felületi pontjait!

8.5. Megoldás *Folytatva az előző példa megoldását, először meghatározzuk a felületi normálist:*

$$\underline{n} = \underline{r}_u \times \underline{r}_v = [-b(a + b\cos u)\cos u\cos v,\ -b(a + b\cos u)\cos u\sin v,\ -b(a + b\cos u)\sin u]\,.$$

Ebből az egységnyi felületi normális:

$$\underline{n}^0 = [-\cos u\cos v,\ -\cos u\sin v,\ -\sin u]\,,$$

$$\underline{r}_{uu} = [-b\cos u\cos v,\ -b\cos u\sin v,\ -b\sin u]\,,$$

$$\underline{r}_{uv} = [b\sin u\sin v,\ -b\sin u\cos v,\ 0]\,,$$

$$\underline{r}_{vv} = [-(a + b\cos u)\cos v,\ -(a + b\cos u)\sin v,\ 0]\,.$$

Tehát

$$L = b, \qquad M = 0, \qquad N = (a+b\cos u)\cos u, \qquad LN-M^2 = (a+b\cos u)\cos u.$$

Mivel $a > b$ *feltétel miatt* $a + b\cos u > 0$*, ezért* $LN - M^2$ *előjele* $\cos u$ *előjelével egyezik. Következésképpen,*
ha $-\frac{\pi}{2} < u < +\frac{\pi}{2}$ *akkor a tórusz pontjai elliptikusak ("külső oldala").*
Ha $\frac{\pi}{2} < u < +\frac{3\pi}{2}$ *akkor a tórusz pontjai hiperbolikusak ("belső oldal").*
Ha $u = -\frac{\pi}{2}$ *vagy* $u = \frac{\pi}{2}$ *akkor a tórusz pontjai parabolikusak.*

8.6. Feladatok

A henger általános egyenlete: $\underline{r}(u,v) = \underline{\rho}(u) + v\underline{a}$.

8.1. Feladat *Írja fel annak a hengernek a paraméteres egyenletét, amelynek vezérgörbéje az adott* $\underline{\rho}(u)$ *görbe és alkotójának iránya az* $\underline{a}$ *vektor!*

$\underline{\rho}(u) = 2\cos u\,\underline{j} + 3\sin u\,\underline{k}, \qquad \underline{a} = \underline{i}.$

Eredmény: $\underline{r}(u,v) = v\underline{i} + 2\cos u\,\underline{j} + 3\sin u\,\underline{k}.$

8.2. Feladat *Írja fel annak a hengernek a paraméteres egyenletét, amelynek vezérgörbéje az adott $\underline{\rho}(u)$ görbe és alkotójának iránya az $\underline{a}$ vektor!*

$\underline{\rho}(u) = 3chu\,\underline{i} + shu\,\underline{k}, \qquad \underline{a} = \underline{j}.$

Eredmény: $\underline{r}(u,v) = 3chu\,\underline{i} + v\,\underline{j} + shu\,\underline{k}.$

8.3. Feladat *Írja fel annak a hengernek a paraméteres egyenletét, amelynek vezérgörbéje az adott $\underline{\rho}(u)$ görbe és alkotójának iránya az $\underline{a}$ vektor!*

$\underline{\rho}(u) = (2\sin u + 3tg\,u)\underline{i} + 2\cos u\,\underline{j}, \qquad \underline{a} = -\underline{i} + \underline{j} + 4\underline{k}.$

Eredmény: $\underline{r}(u,v) = (2\sin u + 3tg\,u - v)\underline{i} + (2\cos u + v)\underline{j} + 4v\underline{k}.$

A kúp általános egyenlete: $\underline{r}(u,v) = \underline{\rho}(u) + v\cdot(\underline{a} - \underline{\rho}(u)) = (1-v)\underline{\rho}(u) + v\cdot\underline{a}.$

8.4. Feladat *Írja fel annak a kúpnak a paraméteres egyenletét, amelynek vezérgörbéje az adott $\underline{\rho}(u)$ görbe és csúcspontja az $\underline{a}$ helyvektor végpontja!*

$\underline{\rho}(u) = shu\,\underline{i} + chu\,\underline{j}, \qquad \underline{a} = 5\underline{k}.$

Eredmény:

$$\underline{r}(u,v) = (1-v)shu\,\underline{i} + (1-v)chu\,\underline{j} + 5v\,\underline{k}.$$

8.5. Feladat *Írja fel annak a kúpnak a paraméteres egyenletét, amelynek vezérgörbéje az adott $\underline{\rho}(u)$ görbe és csúcspontja az $\underline{a}$ helyvektor végpontja!*

$\underline{\rho}(u) = u\underline{i} + u^4\underline{j}, \qquad \underline{a} = 3\underline{j} + 7\underline{k}.$

Eredmény:

$$\underline{r}(u,v) = (1-v)u\underline{i} + \left[(1-v)u^4 + 3v\right]\underline{j} + 7v\underline{k}.$$

8.6. Feladat *Írja fel annak a forgásfelületnek a paraméteres egyenletét, amelynek meridiángörbéje az adott $\underline{\rho}(u)$ görbe és forgástengelye az adott koordinátatengely!*

$\underline{\rho}(u) = (3 + 2\cos u)\underline{i} + (4 + 2\sin u)\underline{j}, \qquad y - tengely.$

Eredmény:

$$\underline{r}(u, v) = (3 + 2\cos u)\cos v\,\underline{i} + (4 + 2\sin u)\underline{j} + (3 + 2\cos u)\sin v\,\underline{k}.$$

8.7. Feladat *Írja fel annak a forgásfelületnek a paraméteres egyenletét, amelynek meridiángörbéje az adott $\underline{\rho}(u)$ görbe és forgástengelye az adott koordinátatengely!*

$\underline{\rho}(u) = u\underline{j} + (u^2 + 1)\underline{k}, \qquad z - tengely.$

Eredmény:

$$\underline{r}(u, v) = u\cos v\,\underline{i} + u\sin v\,\underline{j} + (u^2 + 5)\underline{k}.$$

8.8. Feladat *Írja fel annak a forgásfelületnek a paraméteres egyenletét, amelynek meridiángörbéje az adott $\underline{\rho}(u)$ görbe és forgástengelye az adott koordinátatengely!*

$\underline{\rho}(u) = u\underline{j} + (u^2 + 5)\underline{k}, \qquad y - tengely.$

Megoldás:

$$\underline{r}(u, v) = (u^2 + 5)\cos v\,\underline{i} + u\underline{j} + (u^2 + 5)\sin v\,\underline{k}.$$

8.9. Feladat *Írja fel az alábbi felület adott pontbeli érintősíkjának egyenletét!*

$\underline{r}(u, v) = (u^3 - 2v^2)\underline{i} + uv^2\underline{j} + (u^2v - u)\underline{k}, \qquad u = 1, \quad v = -2.$

Eredmény: $16(x + 7) + 43(y - 4) + 44(z + 3) = 0.$

8.10. Feladat *Írja fel az alábbi felület adott pontbeli érintősíkjának egyenletét!*

$\underline{r}(u, v) = u\cos v\,\underline{i} + u\sin v\underline{j} + v\underline{k}, \qquad$ tetszőleges pontban.

Eredmény: $\sin v \cdot x - \cos v \cdot y + u \cdot z = u \cdot v.$

8.11. Feladat *Írja fel az alábbi felület adott pontbeli érintősíkjának egyenletét!*

$xy^2 + z^3 = 12, \qquad P(1, 2, 2).$

Eredmény: $x + y = 3.$

8.12. Feladat *Számítsa ki az alább definiált felületdarab felszínét!*

$\underline{r}(u,v) = (\cos u - v \sin u)\underline{i} + (\sin u + v \cos u)\underline{j} + (u+v)\underline{k}$,
$0 \le u \le \pi, \quad 0 \le v \le 1.$

Eredmény: $\mathcal{F} = \frac{\sqrt{2}}{2}\pi$.

8.13. Feladat *Számítsa ki az alább definiált felületdarab felszínét!*

$\underline{r}(u,v) = R \cdot \cos u \cos v \cdot \underline{i} + R \cdot \cos u \sin v \cdot \underline{j} + R \cdot \sin u \cdot \underline{k}$,
$0 \le u \le \frac{\pi}{2}, \quad 0 \le v \le 2\pi.$

Eredmény: $\mathcal{F} = 2R^2\pi$.

8.14. Feladat *Számítsa ki az alább definiált felületdarab felszínét!*

$\underline{r}(u,v) = (a + b\cos u)\cos v\underline{i} + (a + b\cos u)\sin v\underline{j} + b\sin u\underline{k}$,
$0 \le u \le \frac{\pi}{2}, \quad 0 \le v \le 2\pi.$

Eredmény: $\mathcal{F} = ab\pi^2 + 2b^2\pi$.

8.15. Feladat *Számítsa ki az alább definiált felületdarab felszínét!*

$\underline{r}(u,v) = 4ch\, u \cos v\underline{i} + 4u\underline{j} + 4ch\, u \sin v\underline{k}, \qquad 0 \le u \le 2, \quad 0 \le v \le 2\pi.$

Eredmény: $\mathcal{F} = 4\pi(e^4 - e^{-4} + 8)$.

8.16. Feladat *Osztályozza az adott felület pontjait!*

$\underline{r}(u,v) = (a + b\cos u)\cos v\underline{i} + (a + b\cos u)\sin v\underline{j} + b\sin u\underline{k}$, ahol $a > b > 0$.

Eredmény: elliptikus, ha $-\frac{\pi}{2} < u < \frac{\pi}{2}$, hiperbolikus, ha $\frac{\pi}{2} < u < \frac{3\pi}{2}$, és parabolikus, ha $u = \pm\frac{\pi}{2}$.

8.17. Feladat *Osztályozza az adott felület pontjait!*

$\underline{r}(u,v) = (v + 2\cos u)\underline{i} + (v + 2\sin u)\underline{j} + v\underline{k}$.

Eredmény: minden pont hiperbolikus.

8.18. Feladat *Milyen típusú a felületi pont az origóban, ha a felület egyenlete:*

$x + y + 3z + 3xz - yz = 0$?

Eredmény: hiperbolikus.

8.19. Feladat *Osztályozza az adott felület pontjait!*

$z = \ln\sqrt{x^2 + y^2}$.

Eredmény: minden pont hiperbolikus.

8.20. Feladat *Osztályozza az adott felület pontjait!*

$z = x^2 - y^2$.

Eredmény: minden pont hiperbolikus.

Irodalomjegyzék

[F01] Farkas Miklósné 2001. Közönséges Differenciálegyenletek, Budapesti Műszaki és Gazdaságtudományi Egyetem TTK, Műegyetemi Kiadó, 2001.

[RT76] Rapcsák András, Tamásy Lajos 1976. Differenciálgeometria, II. rész, Kézirat, Tankönyvkiadó, Budapest, 1976.

[S79] Scharnitzky Viktor 1979. Mátrixszámítás, Példatár, 3. kiadás, Műszaki Könyvkiadó, Budapest, 1979.

[S04] Raymond Smullyan, 2004. Emlékek, történetek, paradoxonok, Ford. Csaba Ferenc, Typotex, 2004.

[SzZs94] Székely J. Gábor, Zsigri Gábor 1994. Differenciálegyenletek és differenciálgeometria, Jegyzetterv/2, II. év 1. félév, 1976.

[Sz09] Szili László, 2009. Lineáris algebra közgazdász szakos hallgatóknak a Matematika A2a-Vektorfüggvények tantárgyhoz, kézirat, Budapest, 2009.