

# Bevezetés az elméleti plazmafizikába

Bencze Attila,  
Cseh Gábor & Veres Gábor

2012.10.30.

# Tartalomjegyzék

<b>1. Bevezetés</b>	<b>3</b>
<b>2. Alapfogalmak</b>	<b>5</b>
2.1. A plazmafizika felépítése	5
2.2. Debye-árnyékolás	6
2.3. Kvázineutralitás	8
2.4. Coulomb-szórás	9
2.5. Elektron- és ionütközési frekvenciák	12
2.6. Transzportfolyamatok	13
<b>3. Kinetikus egyenlet</b>	<b>16</b>
3.1. A kinetikus egyenlet momentumai	18
3.2. Entrópia és eloszlásfüggvény	21
<b>4. Kétfolyadék-egyenletek</b>	<b>24</b>
4.1. Kétfolyadék kontinuitási egyenlet	24
4.2. Kétfolyadék-mozgásegyenlet	24
4.3. Kétfolyadék-állapotegyenlet	27
4.4. A momentumegyenletek lezárásának problematikája	29
<b>5. Egyrészcseke kép, egyrészcseke driftek</b>	<b>33</b>
5.1. Egyrészcseke mozgás sztatikus elektromos térben	35
5.2. Egyrészcseke mozgás gravitációs térben	38
5.3. Az $\mathbf{E} \times \mathbf{B}$ drift levezetése sorfejtésből, valamint gradB- és a polarizációs drift	39
5.4. A mágneses tükör	45
5.4.1. A mágneses momentum megmaradása	45
5.4.2. A mágneses tükör	46
<b>6. Driftáramlások</b>	<b>49</b>
6.0.3. Driftáramlások nullad- és elsőrendben	49
6.0.4. Driftáramlások és az egyrészcseke kép	52

<b>7. A Landau-csillapodás</b>	<b>55</b>
7.1. Az átlagsebesség fogalma . . . . .	55
7.2. Részecskemozgás fűrészfog potenciálban . . . . .	56
7.3. A kinetikus egyenlet Fourier-analízise . . . . .	59
7.4. A Laplace-transzformáció . . . . .	61
7.5. A kinetikus egyenlet Landau-féle analízise . . . . .	62

# 1. fejezet

## Bevezetés

Hétköznapi értelemben plazmáról beszélünk, ha egy gáz halmazállapotú anyag részecskéinek (vagy legalább néhány részecskéjének) mozgási energiája elegendően nagy ahhoz, hogy más részecskékkel történő ütközések során a semleges atomok elektronburkáról egy vagy több elektron leszakadjon, és elektronok, ionok és atomok keveréke jöjjön létre. Ezt a plazma definíciót – bár nem tudományos pontosságú – kiindulásként felhasználjuk azzal, hogy később még megadjuk a plazma pontosabb definícióját.

Az univerzumban, és így természetesen a minket körülvevő világban is, nagyon sok helyen találkozhatunk plazmával. A ?? ábrán láthatjuk azt a hihetetlenül széles paramétertartományt, ahol a plazmaállapot létezhet és ahol a plazmafizika eszköztára felhasználható. A vízszintes tengelyen a részecskeszám-sűrűség logaritmusát, a függőlegesen pedig a plazma hőmérsékletének logaritmusát ábrázoltuk.

A plazmafizikában szokásos módon a hőmérsékletet nem kelvinben vagy celsius-fokban, hanem a plazma egy tetszőleges részecskéjére átlagosan jutó kinetikus energiában adjuk meg, amit ráadásul nem joule-ban, hanem elektronvoltban fejezünk ki. Ennek megfelelően 1 eV hozzávetőlegesen 11600 K hőmérsékletnek felel meg. Ez egy kicsit furcsa, de kényelmes mértékegység, tekintve a plazmafizikában előforduló esetlegesen igen magas hőmérsékleteket.

### Jelölések

A jegyzetben használt főbb szimbólumok és jelölések a következők:

$\sigma$  — (alsó indexként) részecskefajta ( $e$  – elektron,  $i$  – ion,  $a$  – atom stb.),

$n_\sigma$  — a szigma típusú részecske részecskeszám-sűrűsége, [ $m^{-3}$ ],

$q_\sigma$  — a szigma típusú részecske töltése, [ $C$ ],

$T_\sigma$  — a szigma típusú részecske hőmérséklete, [ $K$ ],

$\kappa$  — Boltzmann-állandó, [ $1,38 \cdot 10^{-23} JK^{-1}$ ]<sup>1</sup>,

$\epsilon_0$  — a vákuum dielektromos állandója, [ $8,85 \cdot 10^{-12} Fm^{-1}$ ],

---

<sup>1</sup>A képletek származtatásánál megtartjuk a Boltzmann-állandót és a hőmérsékletet Kelvinben a jobb követhetőség kedvéért, bár – mint fentebb megjegyeztük – a plazmafizikában  $\kappa T$  helyett mindig egyszerűen  $T$ -t használnak elektronvoltban.

$\mu_0$  — a vákuum permeabilitása,  $[4\pi \cdot 10^{-7} Hm^{-1}]$ ,

$\hat{z}$  — a  $\mathbf{B}$  mágneses indukcióvektor irányába mutató egységvektor.

## 2. fejezet

# Alapfogalmak

### 2.1. A plazmafizika felépítése

A plazmafizika nehezen építhető fel axiomatikus rendszerként. Az egyenletek levezetéséhez mindig szükség van néhány *a priori* fogalom, mennyiség, illetve közelítés bevezetésére, és csak később, már az egyenletek birtokában mutatható meg, hogy *a priori* fogalmaink helyesek voltak. Ennek nagyon egyszerű oka van. Egy plazmafizikai rendszer maga töltött és semleges részecskéivel, külső és belső elektromágneses tereivel annyira komplex, hogy leírásához a fizika sokszor látszólag egymástól távolálló diszciplináinak (statisztikus fizika, elektrodinamika, mechanika, termodinamika stb.) eszköztárát is fel kell használni. Ezen túlmenően a plazmafizika felépítéséhez tulajdonképpen nincs is szükség új axiómákra, azaz olyanokra, amelyek a fizika más területein ne fordulnának elő. Ezért a más területektől – elsősorban a statisztikus fizikától – ”kölcsonvett” fogalmakat a plazmafizikában axiómaként kezeljük.

Klasszikus értelemben vett plazmákról akkor beszélünk, ha a részecskék zöme legalább egyszeresen ionizált, és így a plazma viselkedésének egészét a töltött és nem a semleges részecskék viselkedése határozza meg. Nehéz persze meghúzni a választóvonalat, hogy mikortól dominál a töltött részecskék viselkedése, így az egyszerűség kedvéért feltesszük, hogy az általunk ebben a jegyzetben vizsgált plazmák teljesen ionizáltak, azaz az ionizáltsági fok<sup>1</sup> legyen 1.

A Lorentz-egyenlet és a Maxwell-egyenletek rendszere pontosan előírja minden, a plazmát alkotó töltött részecske mozgását. A megoldást önkonzisztens módon kell végrehajtunk. A Maxwell-egyenletekkel kiszámítjuk a töltött részecskék hatására kialakuló elektromágneses tereket, majd a Lorentz-egyenlet segítségével térben léptetjük a részecskéket. Ha a plazmában nem csak töltött részecskék vannak, a semleges részecskékre külön kell mozgásegyenleteket felírunk, a semleges-semleges és semleges-töltött kölcsön-

---

<sup>1</sup>Az ionizáltsági fok azt mutatja meg, hogy a plazmát alkotó részecskék mekkora hányada van ionizált állapotban.  $\alpha = n_i / (n_i + n_a)$ .

hatásokat pedig valamilyen módon modellezni (de most ezeket a folyamatokat figyelmen kívül hagyjuk). Könnyű elképzelni, hogy  $\sim 10^{20}$  részecske esetén az itt vázolt módszer megoldhatatlan számítási feladatot jelent, tehát a plazmára mint részecskék sokaságára vonatkozó elméletet a statisztikus fizika eszköztárával kell felépítenünk.

Definiáljuk az  $f(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t)$  eloszlásfüggvényt úgy, hogy

$$dn = f(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t)d^3x d^3v \quad (2.1)$$

adja meg a  $t$ -időpillanatban az  $\mathbf{x}$  és  $\mathbf{x} + d\mathbf{x}$  térbeli pontok között tartózkodó azon részecskék számát, amelyeknek a sebessége  $\mathbf{v}$  és  $\mathbf{v} + d\mathbf{v}$  közé esik. Most tekintsünk el attól az egyébként egyáltalán nem triviális kérdéstől, hogy mikor rendelhető egy rendszerhez a fenti típusú eloszlásfüggvény, és egyszerűen posztuláljuk, hogy az általunk vizsgálandó plazmák esetében létezik a 2.1 egyenlet alatti eloszlásfüggvény (1. számú *a priori* feltevés).

Tegyük fel továbbá, hogy „elegendően sok” részecske alkotja a rendszerünket, és a részecskék között „elegendően sok” ütközés van ahhoz, hogy az eloszlásfüggvény időben és térben folytonosan, kváziegyensúlyi módon változzon (2. és 3. számú *a priori* feltevések).

Nem kellene szükségszerűen feltennünk, de követeljük még meg, hogy a részecskék nemrelativisztikus sebességgel mozognak és csak elektromágneses kölcsönhatás van közöttük.

## 2.2. Debye-árnyékolás

Tekintsünk egy pozitív és negatív töltések összességéből álló rendszert! Nyilvánvaló, hogy mivel vákuumban a Coulomb-kölcsönhatás hatótávolsága végtelen, egy adott részecskére ható eredő erő kiszámításánál elvileg annak minden más részecskével történő kölcsönhatását figyelembe kellene venni. Szerencsére azonban plazmában ezt nem kell megtenni, mert a részecskék szabad mozgása miatt a vákuumban érvényes Coulomb-tér módosulni fog, mégpedig úgy, hogy egy adott részecskének csak egy adott sugarú gömbön belül tartózkodó többi részecskével való kölcsönhatását kell figyelembe venni. Más szavakkal: plazmában a Coulomb-potenciál távolságfüggése módosul, a Coulomb-tér a távolság növelésével gyorsabban cseng le a vákuumbeli inverz távolságfüggésnél.

Helyezzünk a plazmába egy  $q_P$  pozitív töltésű próbatöltést! Ez a töltés a plazma elektronjait vonzani, ionjait pedig taszítani fogja. Ennek következtében a próbatöltés közelében (mivel a részecskék szabadon elmozdulhatnak) az elektronokból felesleg, az ionokból pedig hiány fog kialakulni. Természetesen csak addig fognak az elektronok a töltéshez vándorolni (és az ionok onnan elvándorolni), amíg az eredő elektromos térerősség a töltéstől mért bizonyos távolságnál nagyobb távolságokon nullává nem válik. Azon a bizonyos távolságon belül azonban nem kell nullának lennie az elektromos térnek, különben az odavonzott elektronok és ionok elvándorolnak.

Legyen a töltésvándorlás után kialakuló elektromos tér potenciálja  $\phi(\mathbf{r})$ ! Nyilvánvaló, hogy egy elektron, amelyik a próbatöltés közelébe vándorolt, nem marad örökké ott, hanem a hőmozgás miatt elmegy onnan, azonban a nagyszámú elektron miatt (2. *a priori* feltétel) új elektron lép a helyébe, mely a régítől statisztikailag megkülönböztethetetlen. Ugyanez igaz az ionokra is.

A 3. számú *a priori* feltétel miatt a részecskék eloszlása ebben a  $\phi(r)$  potenciáltérben Boltzmann-eloszlás, azaz

$$n_\sigma(\mathbf{r}) = n_{\sigma 0} \exp(-q_\sigma \phi(\mathbf{r})/\kappa T_\sigma) \quad (2.2)$$

( $n_{\sigma 0}$  és  $T_\sigma$  legyenek homogének). Írjuk fel a Poisson-egyenletet a kialakult potenciállal és töltéseloszlással!

$$\nabla^2 \phi(\mathbf{r}) = -\frac{1}{\varepsilon_0} \left[ q_P \delta(\mathbf{r}) + \sum_\sigma q_\sigma n_\sigma(\mathbf{r}) \right], \quad (2.3)$$

ahol  $q_P \delta(\mathbf{r})$  a próbatöltés töltéssűrűsége. Nyugodtan feltehetjük, hogy egyetlen próbatöltés nem nagyon perturbálja a nagyon sok részecskéből álló plazmát, azaz  $|q_\sigma \phi| \ll \kappa T_\sigma$ . Ennek megfelelően 2.2-t közelíthetjük

$$\frac{n_\sigma}{n_{\sigma 0}} \simeq 1 - \frac{q_\sigma \phi}{\kappa T_\sigma} \quad \text{-val,}$$

amivel a 2.3 egyenlet

$$\nabla^2 \phi(\mathbf{r}) = -\frac{1}{\varepsilon_0} \left[ q_P \delta(\mathbf{r}) + \left( 1 - \frac{q_e \phi}{\kappa T_e} \right) q_e n_{e0} + \left( 1 - \frac{q_i \phi}{\kappa T_i} \right) q_i n_{i0} \right]. \quad (2.4)$$

Ha a próbatöltés behelyezése előtt a plazma semleges volt, azaz a nemperturbált sűrűségekre igaz, hogy  $q_e n_{e0} + q_i n_{i0} = 0$ , akkor a 2.4 egyenlet a következő alakra egyszerűsödik:

$$\nabla^2 \phi(\mathbf{r}) - \frac{1}{\lambda_D^2} \phi(\mathbf{r}) = -\frac{q_P}{\varepsilon_0} \delta(\mathbf{r}). \quad (2.5)$$

Itt definiáltuk az

$$\frac{1}{\lambda_D^2} = \sum_\sigma \frac{1}{\lambda_\sigma^2} \quad (2.6)$$

effektív *Debye-hosszt* az egyes részecskék

$$\lambda_\sigma^2 = \frac{\varepsilon_0 \kappa T_\sigma}{n_{\sigma 0} q_\sigma^2} \quad (2.7)$$

Debye-hosszán keresztül.



A 2.5 egyenlet megoldása

$$\phi(\mathbf{r}) = \frac{qP}{4\pi\epsilon_0 r} e^{-r/\lambda_D}, \quad (2.8)$$

ami a vákuumbeli Coulomb-potenciálnál gyorsabban lecsengő potenciáltér. Látható, hogy  $r \gg \lambda_D$  távolságokon a plazma tökéletesen kioltja a próbatöltés elektromos terét.

Általában is igaz, nem csak a próbatöltésre, hogy a plazma Debye-hossznyi távolságokon leárnyékolja az elektrosztatikus elektromos teret, feltéve hogy a Debye-hossznak megfelelő sugarú gömbön belül sok részecske van (különben az egész előbbi analízisünk értelmét veszti).

A Debye-árnyékolás egy szép példája annak, hogy a plazma, mint részecskék összessége, minőségileg másképp viselkedik, mint az egyes részecskék külön-külön viselkednének. Ezért 1 egyenlet alatti plazma definíciót úgy kell pontosítanunk, hogy *a plazma pozitív és negatív töltések összessége, és a Debye-hossznak megfelelő sugarú gömbön belül sok plazmarészecske van.*

## 2.3. Kvázineutralitás

A Debye-árnyékolás bemutatásánál feltételeztük, hogy a plazma a próbatöltés behelyezése (az elektrosztatikus perturbáció bekapcsolása) előtt semleges volt. Most megmutatjuk, hogy ez egy teljesen jogos feltételezés volt, mert a plazma elektromos semlegessége csak Debye-hossznyi távolságokon sérülhet.

Számítsuk ki annak a maximális gömbnek a sugarát, amelyből véletlen (termikus) fluktuáció következtében minden elektron egyszerre eltávozhat. Ha ez az eset ténylegesen elő is állna, akkor az jelentené a kvázineutralitás maximális sérülését.

Az elektronmentes  $r$  sugarú gömbben visszamaradt ionok össztöltése  $Q = 4\pi n e r^3 / 3$ , aminek megfelelő elektromos tér  $E = Q / 4\pi\epsilon_0 r^2 = n e r / 3\epsilon_0$ . Az elektromos tér energiasűrűsége  $\epsilon_0 E^2 / 2$ , azaz a tér teljes energiája

$$W = \int_0^{r_{max}} \frac{\epsilon_0 E^2}{2} 4\pi r^2 dr = \pi r_{max}^5 \frac{2n_e^2 e^2}{45\epsilon_0}. \quad (2.9)$$

Amikor a kvázineutralitás legjobban sérül, az elektrosztatikus térben tárolt energia éppen a gömböt elhagyó elektronok mozgási energiája.

$$\pi r_{max}^5 \frac{2n_e^2 e^2}{45\epsilon_0} = \frac{3}{2} n \kappa T \cdot \frac{4}{3} \pi r_{max}^3 \quad (2.10)$$

Ebből  $r_{max}$ -ra az alábbi kifejezést kapjuk:

$$r_{max}^2 = 45 \frac{\epsilon_0 \kappa T}{n_e e^2}, \quad (2.11)$$

$$r_{max}^2 = 45 \frac{\varepsilon_0 \kappa T}{n_e e^2}, \quad (2.12)$$

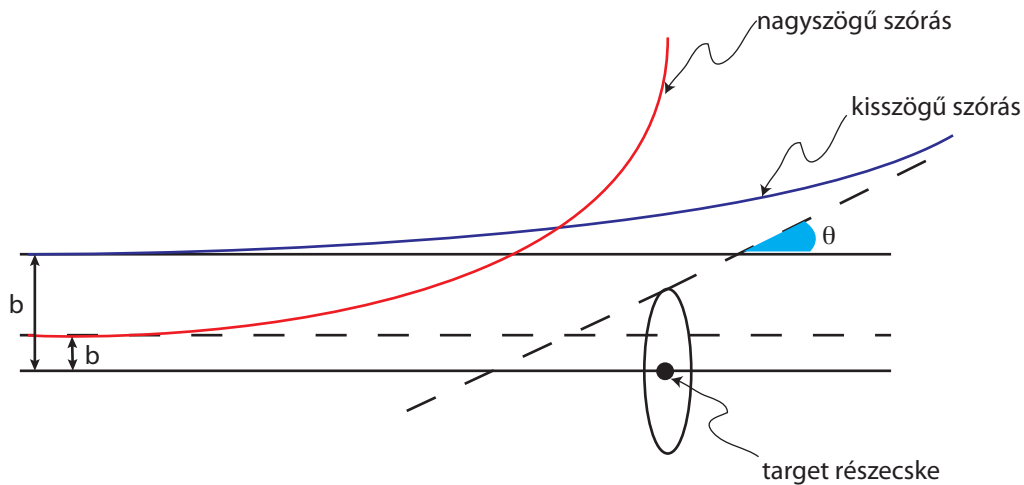
azaz

$$r_{max} \simeq 7\lambda_D. \quad (2.13)$$

Eszerint a plazma kvázineutralitása valóban csak néhány Debye-hossznyi távolságon sérülhet.

## 2.4. Coulomb-szórás

Korábban feltettük, hogy részecskéink nemrelativisztikus sebességgel mozognak, ezért ennek megfelelően kölcsönhatásukat egymás elektrosztatikus, Coulomb-terében való szórásra szűkíthetjük. Tekintsük két töltött részecske ütközését, mégpedig tömegközépponti rendszerükben (?? ábra)! Ebben a rendszerben az  $F$ -vel és  $T$ -vel jelölt részecskék sebessége párhuzamos, és a sebességvektorokat tartalmazó egyenesek távolsága legyen  $b$  (ütközési paraméter). Az ütközés során a részecskék sebességvektorai eltérülést szenvednek. Jelöljük a szóródás után a sebességvektorok által bezárt szöget  $\theta$ -val!



2.1. ábra. A Coulomb-szórás szemléltetése tömegközépponti rendszerben.

Felírva a szórási folyamatra az energia- és impulzusnyomaték-megmaradási egyenleteket, az eltérülés szögére az alábbi kifejezés adódik:

$$\tan\left(\frac{\theta}{2}\right) = \frac{q_T q_F}{4\pi\epsilon_0 b \mu v_0^2}. \quad (2.14)$$

Itt  $\mu$  a redukált tömeg ( $\mu^{-1} = m_F^{-1} + m_T^{-1}$ ) és  $v_0$  a részecskék relatív sebessége. Minél kisebb a  $b$ , annál nagyobb az ütközés után a sebességeltérülés (a  $b = 0$  centrális ütközéshez  $\theta = 180^\circ$  tartozik). Nyilvánvalóan létezik egy olyan  $b_{\pi/2}$ -vel jelölt ütközési paraméter érték, amely esetén az eltérülés szöge éppen  $90^\circ$ . Ennél kisebb ütközési paraméter esetén az eltérülés szöge nagyobb (hívjuk ezeket *nagyszögű ütközéseknek*), nagyobb ütközési paraméter esetén pedig kisebb lesz  $90$  foknál (ez utóbbiakat pedig hívjuk *kisszögű ütközéseknek*). A 2.14 egyenletből azonnal következik, hogy

$$b_{\pi/2} = \frac{q_T q_F}{4\pi\epsilon_0 \mu v_0^2}. \quad (2.15)$$

A nagyszögű szórás hatáskeresztmetszete  $\sigma_{nagy} \approx \pi b_{\pi/2}^2$ , a kisszögű szórásoknál pedig differenciális hatáskeresztmetszetet adhatunk meg. A  $b$  és  $b + db$  ütközési paraméterek közé eső szórás eltérülési szöge  $\theta(b)$  és  $\theta(b + db)$  szögek közé esik. Ezeknek a szórási eseményeknek a hatáskeresztmetszete  $\sigma(b, b + db) \approx 2\pi b db$ . Nagyszögű ütközést természetesen nemcsak egy nagyszögű szórási esemény, hanem sok egymást követő kisszögű szórási esemény együttesen is létrehozhat. Határozzuk meg, hogy mekkora effektív hatáskeresztmetszettel írható le egy ilyen ütközési sorozat!

Természetesen a Coulomb-ütközés axiális szimmetriája miatt a kisszögű szórási események eltérülési szögeinek ( $\theta_i$ ) egyszerű számtani középértéke nulla ( $N$  az ütközések száma), azaz  $N^{-1} \sum_{i=1}^N \theta_i = 0$ , ezért ne ezt, hanem az eltérülési szögek négyzetes átlagát számítsuk ki. Keressük a kisszögű eseményeknek azt az  $N$  számát, hogy  $\sum_{i=1}^N \theta_i^2 \simeq 1$  radián legyen! Mivel  $\pi/2 \simeq 1$ , a kisszögű események sorozata jó közelítéssel egyenértékűnek vehető egy nagyszögű szórási eseménnyel.

Képzeljük el, hogy a  $T$  jelű részecskén ülünk, és az  $F$  jelű részecskék velünk szembejönnek  $v_{rel}$  relatív sebességgel! Ekkor a szembejövő részecskék fluxusa  $\Gamma = n_F v_{rel}$  és  $t$  idő alatt a  $b$  és  $b + db$  ütközési paraméterek közé eső kisszögű szórási események száma  $\Gamma t 2\pi b db$ . Ha  $t^*$ -al azt az időt jelöljük, amely alatt a kisszögű események éppen egy nagyszögű szórást eredményeznek, akkor

$$1 \simeq \sum_{i=1}^N \theta_i^2 = \Gamma t^* \int 2\pi b [\theta(b)]^2 db. \quad (2.16)$$

Ha az ütközések  $N$  száma, ami egy ilyen nagyszögű szóráshoz kell, elegendően nagy, akkor a  $\Gamma$  fluxust és a  $t$  időt egy effektív hatáskeresztmetszet köti össze:  $\sigma \Gamma = t^{-1}$ . A 2.16 egyenletre pillantva azonnal látszik, hogy a keresett kumulatív kisszögű hatáskeresztmetszet

$$\sigma^* = \int 2\pi b [\theta(b)]^2 db. \quad (2.17)$$

Az integrálás alsó határa nyilvánvalóan  $b_{\pi/2}$ , mivel ennél kisebb ütközési paraméternél már egyetlen ütközés is  $\pi/2$ -nél nagyobb eltéréshez vezetne. A felső határ pedig a korábban megismert  $\lambda_D$  Debye-hossz, mert az annál nagyobb ütközési paraméterek már semmilyen eltéréshez nem vezetnek (a töltések a Debye-árnyékolás miatt nem is hatnak kölcsön).

Kis szögekre a 2.14 alatti kifejezés így közelíthető:

$$\theta(b) = \frac{q_T q_F}{2\pi\epsilon_0 b \mu v_0^2}, \quad (2.18)$$

azaz

$$\sigma^* = \int_{b_{\pi/2}}^{\lambda_D} 2\pi b \left( \frac{q_T q_F}{2\pi\epsilon_0 b \mu v_0^2} \right)^2 db. \quad (2.19)$$

Az integrálást elvégezve

$$\sigma^* = 8 \ln \left( \frac{\lambda_D}{b_{\pi/2}} \right) \sigma_{nagy}, \quad (2.20)$$

ahol  $\sigma_{nagy}$  a  $b_{\pi/2}$  paraméterhez tartozó nagyszögű szórás hatáskeresztmetszete. Látható, hogy a kumulatív kisszögű szórásokhoz tartozó hatáskeresztmetszet lényegesen nagyobb az egyetlen nagyszögű szórás hatáskeresztmetszeténél. Pontosabban csak akkor lényegesen nagyobb, ha  $\lambda_D/b_{\pi/2} \gg 1$ . De mivel  $q_T = q_F$  esetén  $b_{\pi/2} = 1/(2n\lambda_D^2)$ , ez a feltétel egyenértékű a  $n\lambda_D^3 \gg 1$  feltétellel, ami a korábbi fejezetekben mondottak szerint – mármint hogy sok részecskénk van – nyilvánvalóan teljesül.

$\sigma_{nagy}$  értékét behelyettesítve,

$$\sigma^* = \frac{1}{2\pi} \left( \frac{q_T q_F}{\epsilon_0 \mu v_0^2} \right)^2 \ln \left( \frac{\lambda_D}{b_{\pi/2}} \right) \quad (2.21)$$

adódik.

A legfontosabb észrevétel a 2.21 kifejezéssel kapcsolatban az, hogy a kumulatív kisszögű Coulomb-szórások, vagy – a nagyszögű szórásokat a fentiek miatt elhanyagolva – egyszerűen a Coulomb-szórás hatáskeresztmetszete a *relatív sebesség negyedik hatványával fordítottan arányos*. Forró plazmában  $v_0$  igen nagy, azaz  $\sigma^*$  nagyon kicsi tud lenni. Olyan kicsi, hogy a Coulomb-szórás sokszor elhanyagolható más folyamatok mellett. Hogy valóban el lehet-e hanyagolni a Coulomb-szórást, ahhoz vagy a szórási hatáskeresztmetszetből számítható  $\nu$  ütközési frekvenciát ( $\nu = \sigma^* n v$ ), vagy két ütközés között a részecskék által átlagosan megtett  $l$  szabad úthosszat ( $l = 1/(\sigma^* n)$ ) kell összehasonlítani a vizsgálni kívánt egyéb folyamat idő- és térskálájával.

Ha a plazmában a részecskék közötti Coulomb-szórás elhanyagolható, *ütközésmentes* vagy *ideális* plazmáról beszélünk.

## 2.5. Elektron- és ionütközési frekvenciák

Vegyük azt az esetet, amikor plazmánk csak elektronokból és azonos ionokból áll. A jegyzetben a későbbiek során is gyakran csak két plazmakomponenst, elektronokat és (egyfajta) ionokat fogunk megkülönböztetni. Több plazmakomponensre az analízis persze sokkal bonyolultabb, mint kettőre, de kvalitatíve nem vezet más végeredményre.

Legyenek tehát elektronjaink és ionjaink, amelyek között az alábbi négyféle ütközési frekvenciát lehet megkülönböztetni:<sup>2</sup>

1. elektron-elektron ütközési frekvencia, elektronok elektronokon szóródnak,  $\nu_{ee}$ ,
2. elektron-ion ütközési frekvencia, elektronok ionokon szóródnak,  $\nu_{ei}$ ,
3. ion-ion ütközési frekvencia, ionok ionokon szóródnak,  $\nu_{ii}$ ,
4. ion-elektron ütközési frekvencia, ionok elektronokon szóródnak,  $\nu_{ie}$ .

A semleges gázok kinetikus elméletéből ismert, hogy ha egy  $n$  részecskeszám sűrűségű gázban az atomok sebessége  $v$  és az atomok közötti kölcsönhatás keresztmetszete  $\sigma$ , akkor a  $\nu$  ütközési frekvencia

$$\nu = n\sigma v$$

alakban adható meg.

Csak nagyságrendi összehasonlítást akarunk az ütközési frekvenciák között, ezért minden frekvenciát  $\nu_{ee}$ -vel fogunk összehasonlítani, azzal a feltevéssel élve, hogy az ütközésekben a relatív sebesség a résztvevők „tipikus” sebessége, azaz a  $v_{T\sigma} = (2\kappa T_\sigma/m_\sigma)^{1/2}$  termikus sebesség. Ez persze egy nagyon durva közelítés, mivel  $\sigma^* v^{-4}$ -el arányos, és egyáltalán nem lehet minden részecskét azonos sebességűnek venni, de ettől most tekintsünk el.

Ha az elektron- és az ionkomponens hőmérséklete megegyezik (ez nem túl erős feltevés), akkor  $v_{Te} \gg v_{Ti}$  és  $\nu_{ee} \approx \nu_{ei}$ , mivel a különbség csak a redukált tömegek különbségéből adódik. A hőmérsékletek egyenlősége miatt  $\sigma_{ii}^* \approx \sigma_{ee}^*$ , és az ütközési frekvenciák közötti különbség csak a relatív sebességekből adódik, azaz  $\nu_{ii} \approx (m_e/m_i)^{1/2}\nu_{ee}$ . Az ion-elektron ütközési frekvenciára nehéz még durva becslést is adni, ezért inkább csak érzékeltetjük, hogy a  $\nu_{ie} \approx (m_e/m_i)\nu_{ee}$  azért helytálló, mert az elektronoknak sok ütközésre van szükségük az ionokat eredeti sebességükhöz képest eltéríteni, de az ionoknak, sokkal nagyobb tömegük miatt, a lassú sebesség ellenére is már kevés ütközés is elég ahhoz, hogy az elektronokat eltérítsék.

---

<sup>2</sup>A következőkben definiált ütközési frekvenciák az *impulzusátadás* és nem az *energiaátadás* jellemző frekvenciaértékei.

## 2.6. Transzportfolyamatok

Ebben a részben három példán mutatjuk be az eddig tárgyaltakat. Az egyik példa a plazmák *elektromos ellenállása*, a másik az ún. *ambipoláris diffúzió*, végül néhány gondolat az anomális diffúzióról.

Tegyük fel, hogy egy homogén plazmára külső homogén  $\mathbf{E}$  elektromos tere kapcsolunk. Ekkor az elektronok és az ionok ellenkező irányba fognak gyorsulni. Ennek hatására egy  $\mathbf{u}_{\text{rel}} = \mathbf{u}_e - \mathbf{u}_i$  sebességkülönbség keletkezik a két részecsketípus átlagsebességei között. Amennyiben egy ilyen relatív átlagsebesség keletkezik, a különböző részecsketípusok között fellépő ütközések sűrűlódási erőben, disszipációban nyilvánulnak meg. Előbb-utóbb a relatív sebességet generáló elektromos tér egyensúlyba kerül a sűrűlódással:

$$0 = -e\mathbf{E} - \nu_{ei}m_e\mathbf{u}_{\text{rel}}, \quad (2.22)$$

ahol  $\nu_{ei}m_e(\mathbf{u}_e - \mathbf{u}_i)$  sűrűlódási erőnek tekinthető, ami egy átlagos elektronra hat. A  $\mathbf{J} = -en_e\mathbf{u}_{\text{rel}}$  elektromos áramsűrűség segítségével, a fenti mozgásegyenlet az Ohm-törvény alakjára hozható:

$$\mathbf{E} = \eta\mathbf{J}, \quad (2.23)$$

ahol  $\eta = \nu_{ei}m_e/e^2n_e$  a plazma elektromos ellenállása. Ebbe a formulába behelyettesíthetjük a már ismert ütközési frekvenciát  $\nu_{ei} = \sigma^*n_i v_{Te}$  és felhasználva a kvázineutralitást kapjuk:

$$\eta = \frac{Ze^2}{2\pi m_e \epsilon_0^2 v_{Te}^3} \ln\left(\frac{\lambda_D}{b_{\pi/2}}\right) \quad (2.24)$$

a plazma ellenállását (Spitzer ellenállás 1953), ami független a sűrűségtől és arányos  $T^{-3/2}$  ill. az ionok  $Z$  töltésével. Mielőtt továbbmennénk az ambipoláris diffúzió témájára, meg kell jegyeznünk, hogy a fenti tárgyalásunk homogén teret tételez fel a plazmában. Felvetődik a kérdés, hogy ez miképpen jöhet létre. A legegyszerűbb lehetőségnek tűnik, hogy a plazmát nagy kondenzátorlemezek közé helyezzük. Ez sajnos nem fog működni a Debye-árnyékolás miatt, ugyanis ez elektromos tér a lemezek közvetlen közelében lesz csak zérustól különböző. Tehát az egyetlen lehetőség az indukált elektromos tér, ahol nincs szükség a plazmába behelyezett elektródákra.

Az *ambipoláris diffúzió* megértéséhez induljunk ki az ismert véletlen bolyongás modellből, melynek segítségével meghatározható a diffúziós együttható skálázása:  $D \sim (\Delta x)^2/\tau$ , ahol  $\Delta x$  a karakterisztikus lépéshossz, a  $\tau$  pedig az az idő amelyik két lépés között eltelik. Dimenzióanalízis segítségével, és felhasználva az ütközési frekvenciákról tanultakat megmutatható, hogy az elektronok diffúziós együtthatója mintegy két nagyságrenddel meghaladja az ionokét (ld. az idevonatkozó videót). A diffúzió sebességében mutatkozó különbség egy elektromos tér felépüléséhez vezet, ezt nevezzük *ambipoláris*

elektromos térnek. Ez az elektromos tér önszabályozó módon egy olyan effektív diffúziót valósít meg, mely biztosítja, hogy az elektronok és az ionok fluxusa kiegyenlítődjék. A (2.22) egyenletből látjuk, hogy a kialakuló elektromos mező egy átlagos elektronimpulzust generál  $m_e \mathbf{u}_e = -e\mathbf{E}/\nu_e$ , ahol  $\nu_e$  ütközési frekvencia jellemzi azt a rátát amellyel az elektron lendületet veszít az ionokkal való ütközések során. Mivel a belső elektromos tér nem közölhet impulzust a plazmának mint egésznek, az ionok által nyert lendület egyenlő és ellentétes előjelű kell legyen az előbbivel, azaz  $m_i \mathbf{u}_i = -e\mathbf{E}/\nu_e$ . A sűrűséggradiens jelenlétében fellépő elektrondiffúzió által keltett  $-D_e \nabla n_e$  elektronfluxust az ambipoláris elektromos tér módosítja:

$$\mathbf{\Gamma}_e = n_e \mu_e \mathbf{E} - D_e \nabla n_e, \quad (2.25)$$

ahol  $\mu_\sigma = q_\sigma/m_\sigma \nu_\sigma$  a  $\sigma$ -típusú részecskék mobilitása. Hasonló módon írhatjuk az ionfluxust:

$$\mathbf{\Gamma}_i = n_i \mu_i \mathbf{E} - D_i \nabla n_i. \quad (2.26)$$

Annak érdekében, hogy a kvázineutralitás fennmaradjon, a plazma önszerveződő módon olyan elektromos teret épít fel, hogy  $\mathbf{\Gamma}_e = \mathbf{\Gamma}_i = \mathbf{\Gamma}_{\text{amb}}$ , továbbá  $n_e = n_i = n$ . Ezekből az ambipoláris elektromos tér könnyen kiszámítható:

$$\mathbf{E}_{\text{amb}} = \frac{(D_e - D_i)}{(\mu_e - \mu_i)} \nabla \ln n \simeq \frac{D_e}{\mu_e} \nabla \ln n = \frac{k_B T_e}{e} \nabla \ln n. \quad (2.27)$$

Az ambipoláris fluxus ezzel az elektromos térrel:

$$\mathbf{\Gamma}_{\text{amb}} = \frac{(\mu_e D_i - \mu_i D_e)}{(\mu_e - \mu_i)} \nabla n, \quad (2.28)$$

ebből leolvasható az ambipoláris diffúzió diffúziós együtthatója:

$$D_{\text{amb}} = \frac{(\mu_e D_i - \mu_i D_e)}{(\mu_e - \mu_i)} = \frac{\frac{D_i}{\mu_i} - \frac{D_e}{\mu_e}}{\frac{1}{\mu_i} - \frac{1}{\mu_e}} \simeq \frac{k_B(T_i + T_e)}{m_i \nu_i}, \quad (2.29)$$

ahol felhasználtuk, hogy  $\nu_i \sim (m_e/m_i)^{1/2} \nu_e$ . Amennyiben az elektronok sokkal forróbbak, mint az ionok, a  $D_{\text{amb}} \sim T_e/m_i$ .

Erős mágneses terekben az elektronok diffúziója a mágneses térre merőlegesen nagyon lassú lehet, legalábbis a számolt értékek nagyon távol állnak a valóságos mérésektől, ezt szokták *anomális transzportnak* nevezni. A szakirodalomban erős konszenzus alakult ki arról, hogy az anomális transzportot a plazma turbulens (konvektív) mozgása okozza. A legegyszerűbb eset, az elektrosztatikus turbulencia - ebben az esetben a fluktuáló  $\mathbf{E} = -\nabla\Phi$  elektromos tér természetesen befolyásolja az elektronok mozgását (persze az ionokét is, csak azok sokkal tehetetlenebbek) az  $E \times B$  driften keresztül:

$$\mathbf{v}_E = \frac{\mathbf{E} \times \mathbf{B}}{B^2}. \quad (2.30)$$

Ez a képlet egyszerűen következik a

$$m_e \mathbf{v} = -e(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}), \quad (2.31)$$

mozgásegyenletből képezve ennek vektoriális szorzatát  $\mathbf{B}$ -vel. Ekkor a mágneses térre merőleges sebességre a következő összefüggést kapjuk:

$$\mathbf{v}_\perp = \frac{\mathbf{E} \times \mathbf{B}}{B^2} + \frac{m_e \dot{\mathbf{v}} \times \mathbf{B}}{eB^2}. \quad (2.32)$$

Kiátlagolva a ciklotron mozgásra, a fenti egyenlet második tagja zérus átlagot ad. Tehát a turbulens elektromos tér a Larmor-centrumok random (turbulens) driftjét okozza. Már láttuk, hogy a véletlen bolyongási modell szerint az elektronok diffúziós együtthatója:

$$D_e = \frac{(\Delta x)^2}{\tau}, \quad (2.33)$$

ahol  $\Delta x^2$  a mágneses térre merőleges lépéshossz négyzetes eltérése (néha ezt szokták  $\lambda$ -val jelölni és, eléggé félreérthetően, "turbulens hullámhossznak" nevezni),  $\tau$  pedig két diffúziós lépés között eltelt idő. Dimenzóanalízist használva:

$$\begin{aligned} \frac{\Delta x}{\tau} &= v_E = -\frac{\nabla \Phi}{B} \sim \frac{\Phi}{\Delta x B} \\ D_e &= v_E \Delta x = \frac{\Phi}{\Delta x B} \Delta x = \frac{\Phi}{\Delta x B} \Delta x = \underbrace{\frac{e\Phi}{T}}_{1/16} \frac{T}{eB} \end{aligned} \quad (2.34)$$

a híres 1/16-os faktor kiszámítása első elvekből bonyolult, nemlineáris feladat és jócskán túlmutat a jelen tananyag keretein. Az így kapott diffúziós együttható a *Bohm*-féle diffúziót jellemzi, amely arra enged következtetni, hogy amennyiben ez jól közelíti a valószínű transzport viszonyokat egy tokamakban, úgy azt várjuk, hogy az anomális transzport nem függ a berendezés méreteitől. Vannak szimulációk, amelyek egyértelműen arra mutatnak, hogy a Bohm-diffúzió helyett a gyro-Bohm diffúzió közelíti jobban a valószínű helyzetet, ami térbeli skálafüggő. Megjegyezzük, hogy a Bohm-diffúzió sokkal gyorsabb, mint a klasszikus diffúzió:

$$\frac{D_e^{bohm}}{D_e^{klasszikus}} \sim \Omega_e \tau_e. \quad (2.35)$$



## 3. fejezet

# Kinetikus egyenlet

Statisztikus fizikai tanulmányaink során már megismerkedtünk a fázistér fogalmával, most származtassunk egyenletet a Coulomb-rendszerünket leíró hatdimenziós fázistérben definiált eloszlásfüggvény tér- és időbeli fejlődésére! Tekintsük a ?? ábrát! A részecskék a fázistérben egymás kölcsönhatása alatt, de önállóan mozognak, ezért az eloszlásfüggvényt úgy is tekinthetjük, mint egy „fázisfolyadékot”, melyet a részecskék összessége alkot. A kinetikus egyenlet nem más, mint ennek a fázisfolyadéknak a mozgását leíró egyenlet.

A ?? ábrán bejelöltünk egy kicsiny fázistérfogatot és néhány részecskét, melyek belépnek a feltüntetett fázistérfogatba, illetve kilépnek onnan. Nyilvánvaló, hogy amennyiben a részecskék között nincsenek ütközések, akkor a fázistérfogatban lévő fázispontok számának megváltozása éppen az oda belépő, illetve az onnan kilépő részecskék számának különbségével egyenlő. Ekkor a be- és kilépő részecskék számára az alábbi mérlegegyenlet adódik:

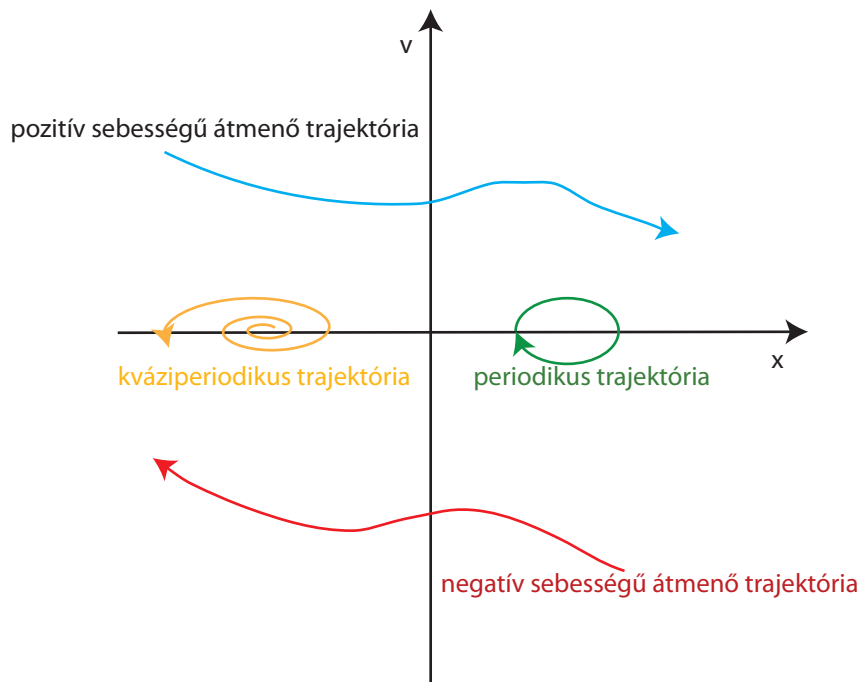
$$\begin{aligned} \frac{\partial f(x, v, t)}{\partial t} dx dv = & - f(x + dx, v, t) v dv + f(x, v, t) v dv \\ & - f(x, v + dv, t) a(x, v + dv, t) dx \\ & + f(x, v, t) a(x, v, t) dx. \end{aligned} \quad (3.1)$$

Az  $x + dx$  és  $v + dv$  mennyiségeket tartalmazó tagokat Taylor-sorba fejtve kapjuk a kinetikus egyenlet egydimenziós (egy térbeli dimenziós) alakját:

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(vf) + \frac{\partial}{\partial v}(af) = 0. \quad (3.2)$$

Kézenfekvő, hogy ha nem egy, hanem három térbeli dimenzió van, akkor a kinetikus egyenlet így általánosítható:

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} \cdot (\mathbf{v}f) + \frac{\partial}{\partial \mathbf{v}} \cdot (\mathbf{a}f) = 0. \quad (3.3)$$



3.1. ábra. Különböző lehetséges fázistér trajektóriák.

Ha plazmánk teljesen ionizált (fúziós plazmáknál ez többnyire igaz) és ennek következtében nincsenek benne semleges részecskék, akkor a 3.3 egyenletben a gyorsulás egyenlő a Lorentz-egyenletből kifejezhető gyorsulással, azaz

$$\mathbf{a} = \frac{q}{m}(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}). \quad (3.4)$$

A gyorsulásvektor kiemelhető a sebességvektor szerinti deriválás alól,

$$\mathbf{a} \cdot \frac{\partial f}{\partial \mathbf{v}} = \frac{\partial}{\partial \mathbf{v}} \cdot (\mathbf{a}f), \quad (3.5)$$

mivel a Lorentz-gyorsulás merőleges a sebességre. Az  $\mathbf{x}$  helyvektor és a sebesség független változók, tehát a sebesség (a gyorsuláshoz hasonló módon) szintén kiemelhető a hely szerinti deriválás alól.

Felhasználva a kiemeléseket jutunk az ütközésmentes kinetikus egyenlet, a *Vlaszov-egyenlet* kanonikus alakjához:

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \frac{\partial f}{\partial \mathbf{x}} + \mathbf{a} \cdot \frac{\partial f}{\partial \mathbf{v}} = 0. \quad (3.6)$$

Ha a plazmában ütközések is vannak a részecskék között, akkor – a ?? ábrán szemléltetett módon – a fázistér fogatban nem lesz a részecskék száma állandó, hanem a ré-

szecskék az ütközések következtében látszólag megsemmisülnek, illetve keletkeznek – legalábbis az adott fázistérfogat számára, hiszen a részecskék az ütközéseket követően másik fázistérfogatban jelennek meg. Ezt a keltő-eltüntető folyamatot a kinetikus egyenlet jobb oldalán a zérus helyett egy ún. *ütközési integrállal* (vagy más néven *ütközési operátorral*) vehetjük figyelembe.

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \frac{\partial f}{\partial \mathbf{x}} + \mathbf{a} \cdot \frac{\partial f}{\partial \mathbf{v}} = \left( \frac{\partial f}{\partial t} \right)_{coll}, \quad (3.7)$$

ahol a *coll* az angol *collision* szóból származik és az ütközésekre utal. Az ütközési operátor az eloszlásfüggvény ütközések miatti megváltozását adja meg. Az ütközési integrál konkrét alakja általában nagyon bonyolult, függ a részecskék közötti kölcsönhatás természetétől és hatótávolságától.

Ha többfajta részecskét is tartalmaz a plazma, minden részecskefajtára külön-külön fell kell írni a kinetikus egyenletet és az ütközési integrálban a különböző részecskék közötti ütközéseket is figyelembe kell venni.

$$\frac{\partial f_\sigma}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \frac{\partial f_\sigma}{\partial \mathbf{x}} + \mathbf{a} \cdot \frac{\partial f_\sigma}{\partial \mathbf{v}} = \sum_\alpha C_{\sigma\alpha}(f_\sigma) \quad (3.8)$$

Ez utóbbi egyenletben az ütközési integrált  $\sum_\alpha C_{\sigma\alpha}(f_\sigma)$  alakban írtuk, ahol  $C_{\sigma\alpha}(f_\sigma)$  az  $f_\sigma$  eloszlásfüggvény megváltozásának rátája az  $\alpha$  típusú részecskékkel való ütközések során (természetesen  $\alpha$  lehet  $\sigma$  is).

### 3.1. A kinetikus egyenlet momentumai

A kinetikus egyenlet teljes mértékben meghatározza a rendszerünket, minden, a plazmát alkotó részecskék mozgásából eredő fizikai folyamatot le tud írni.<sup>1</sup>

Használata azonban nem egyszerű, elsősorban azért, mert megoldása igen nehéz, szinte minden esetben csak numerikusan, sok-sok közelítő feltevés figyelembevételével lehetséges.

Másodsorban azért nem egyszerű a kinetikus egyenlet használata, mert az eloszlásfüggvény túlságosan sok és részletes információt tartalmaz a rendszerről. Egy átlagos feladat megoldásánál azonban általában nincs szükségünk ilyen sok ismeretre, és nem is tudjuk az eloszlásfüggvényt közvetlenül mérni.

Szükség van tehát általánosan használható, a teljes kinetikus egyenletnél egyszerűbb, viszonylag kevés megkötést tartalmazó elméletekre.

Az egyik lehetőségünk az, hogy valahogyan, a rendszer szimmetriatulajdonságait felhasználva megpróbáljuk az eloszlásfüggvény dimenziószámát csökkenteni. A teljes eloszlásfüggvény  $6 + 1$  dimenziós a három térbeli és a három sebességtérbeli dimenzió,

---

<sup>1</sup>Természetesen az ütközési integrálon keresztül a kinetikus egyenlet nemcsak mechanikai, hanem például atomfizikai folyamatok leírására is alkalmas.

valamint az idő miatt. Ha a rendszerünk valamilyen szimmetriatulajdonsággal bír, akkor a szimmetriakoordináta szerint az eloszlásfüggvény és vele együtt a kinetikus egyenlet kiintegrálható, így csökkentve a dimenziószámot. Az is előfordulhat (és ez a gyakoribb eset), hogy rendszerünkben több, egymástól lényegesen eltérő tér- és/vagy időskálával rendelkező folyamat zajlik, minket pedig csak a lassú és nagy térrészekre kiterjedő jelenségek érdekelnek. Ekkor a gyors tér- és/vagy időváltozással bíró folyamatra átlagoljuk ki a kinetikus egyenletet és az eloszlásfüggvényt (ún. *rendezést* hajtunk végre). Rendezésről beszélünk akkor is, ha egy fizikai mennyiséget valamilyen kis paraméter (a *rendező paraméter*) szerint kifejtünk, és a számítások során csak a nulladik, első, második stb. tagokat tartjuk meg.<sup>2</sup>

Hogy ez az egész ne legyen túl absztrakt, mondjunk egy példát! Tudjuk, hogy a töltött részecskék mágneses térben a mágneses indukcióvektor irányára merőlegesen körmozgást végeznek (*Larmor-mozgás*). Ennek a körmozgásnak van egy időskálája (a keringési idő) és van egy térskálája (a kör sugara). Ha csak olyan folyamatok érdekesek számunkra, amelyek lényegesen lassabbak, mint a Larmor-frekvencia és lényegesen hosszabb skálájúak, mint a Larmor-sugár, akkor mindkét skála szerint átlagolunk, azaz úgynevezett *drift-rendezést* végzünk, ha csak a keringési idő szerint átlagolunk, *Larmor-rendezésről* beszélünk. Mindkét eljárással 6 + 1-ről 5 + 1-re csökkenthető a dimenziószám.

Van azonban más lehetőség is, hogy a kinetikus egyenletből és az eloszlásfüggvényből „kezelhetőbb” elméletet származtassunk. Lássuk, mi is ez!

Vezessünk be az eloszlásfüggvény segítségével definiált, laboratóriumban is mérhető mennyiségeket!

Ha az eloszlásfüggvényt egy adott helyen a sebesség szerint kiintegráljuk, megkapjuk az adott helyen a részecskesűrűséget:

$$n_\sigma(\mathbf{x}) = \int f_\sigma(\mathbf{x}, \mathbf{v}) d^3v. \quad (3.9)$$

Az adott helyen érvényes átlagsebesség az eloszlásfüggvény sebességgel súlyozott átlaga:

$$\mathbf{u}_\sigma(\mathbf{x}) = \frac{\int \mathbf{v} f_\sigma(\mathbf{x}, \mathbf{v}) d^3v}{n_\sigma(\mathbf{x})}. \quad (3.10)$$

A fenti logikát folytatva az átlagenergia az eloszlásfüggvény sebességnégyzettel súlyozott átlaga:

$$q_\sigma(\mathbf{x}) = \frac{\int \frac{1}{2} m_\sigma v^2 f_\sigma(\mathbf{x}, \mathbf{v}) d^3v}{n_\sigma(\mathbf{x})}. \quad (3.11)$$

---

<sup>2</sup>Ez utóbbi eljárást hívhatjuk nullad-, első-, másod- stb. rendű közelítésnek is, de a plazmafizikában előszeretettel használják a rendezés kifejezést.

Az iménti eljárást, amikor az eloszlásfüggvénynek a sebesség egyre növekvő hatványaival vett átlagát számítjuk ki, az eloszlásfüggvény *momentumai* kiszámításának hívjuk. Általában is egy függvény egyik változója növekvő hatványai szerinti átlagokat a függvény momentumainak nevezünk és belátható, hogy (bizonyos analitikus feltételek megléte esetén) az adott függvényt ekvivalens módon – általában végtelen számú – momentumával is megadhatjuk.

A momentumképzés egyenletekre is értelmezhető, amikor is az egyenlet mindkét oldalát beszorozzuk az egyenlet egyik független változójával és ugyanezen változó szerint az egyenletet integráljuk. Tegyük most mi is ezt a 3.8 kinetikus egyenletünkkel!

A kinetikus egyenlet momentumainak kiszámításánál különös figyelmet kell fordítani az ütközési integrál momentumainak kiszámítására. Vizsgáljuk meg, anélkül, hogy konkrétan ismernénk az ütközési integrál alakját, hogy momentumai milyen tulajdonságokkal rendelkeznek! Természetesen feltesszük, hogy az ionizációhoz, illetve rekombinációhoz (azaz a részecskefajta megváltozásához) vezető ütközéseket figyelmen kívül hagyjuk.

1. Az ütközések következtében nem változhat meg egy adott helyen a részecskék száma:

$$\int C_{\sigma\alpha}(f_\sigma) d^3v = 0. \quad (3.12)$$

2. Azonos típusú részecskék közötti ütközések következtében nem változhat meg egy adott helyen a részecskék összes impulzusa:

$$\int m_\sigma \mathbf{v} C_{\sigma\sigma}(f_\sigma) d^3v = 0. \quad (3.13)$$

Különböző típusú részecskék közötti ütközések következtében a két részecsketípus összes impulzusa változatlan:

$$\int m_\sigma \mathbf{v} C_{\sigma\alpha}(f_\sigma) d^3v + \int m_\alpha \mathbf{v} C_{\alpha\sigma}(f_\alpha) d^3v = 0. \quad (3.14)$$

3. Azonos típusú részecskék közötti ütközések következtében nem változhat meg egy adott helyen a részecskék összes energiája:

$$\int m_\sigma v^2 C_{\sigma\sigma}(f_\sigma) d^3v = 0. \quad (3.15)$$

Különböző típusú részecskék közötti ütközések következtében a két részecsketípus összes energiája változatlan:

$$\int m_\sigma v^2 C_{\sigma\alpha}(f_\sigma) d^3v + \int m_\alpha v^2 C_{\alpha\sigma}(f_\alpha) d^3v = 0. \quad (3.16)$$

## 3.2. Entrópia és eloszlásfüggvény

A plazmában fellépő ütközések nyomán a rendszer állapota egy olyan végső állapot irányába fejlődik melyben az entópia maximális, rögzített teljes energia mellett. Ahhoz, hogy ezt megmutathassuk, először látnunk kell, hogy milyen összefüggésben áll az eloszlás függvény az entrópiával.

Kezdjük az entrópia ismert definíciójával: adott makroállapot  $S$  entrópiája azon mikroállapotok számának *természetes logaritmus*a, amelyek a vizsgált makroállapotot valószínűsítik meg. Vegyünk egy nagyon egyszerű példát. Tekintsünk két szabályos A és B dobókockát. Egy makroállapot legyen a két kockával való dobás utáni dobott értékek összege, míg egy mikroállapot legyen az aktuálisan dobott számok rendezett párosa. Például az  $M = 4$  makroállapothoz tartozó mikroállapotok:  $(1, 3), (3, 1), (2, 2)$ , azaz a mikroállapotok száma  $m = 3$ , így  $S(M = 4) = \ln(3)$ . Hasonló leszámolással megmutatható, hogy a legtöbb mikroállapot az  $M = 7$  esetben lehetséges, számszerint  $m = 6$ , azaz hatféleképpen lehet 2 kockával hetest dobni. Az sem meglepő, hogy amennyiben nagyon sokszor dobunk azt fogjuk találni, hogy a leggyakoribb dobott összeg a hetes lesz. Úgy is mondhatjuk, hogy mivel az összes mikroállapot létrejötté azonos valószínűségű, a legvalószínűbb makroállapot egyben a legnagyobb entrópiájú állapot is (a logaritmus függvény szigorúan monoton).

Annak érdekében, hogy közelebb kerüljünk az eloszlásfüggvény koncepciójához tekintsük a következő egyszerű rendszert: legyen egy négyzettrácsos táblánk  $\mathcal{N}$   $m_1, m_2, \dots, m_{\mathcal{N}}$  darab mezővel, továbbá legyen szintén  $\mathcal{N}$  darab  $k_1, k_2, \dots, k_{\mathcal{N}}$  jelölt korongunk. Világos, hogy  $\mathcal{N}!$  számú lehetőségünk van, ha minden korongot, minden mezőre szeretnénk feltenni. Kicsit bonyolítva a helyzetet, csoportosítsuk a mezőket  $\mathcal{M}$  darab csoportba. Például az első  $G_1$  csoport tartalmaz 10 mezőt, a második  $G_2$  csoport 19 mezőt, és így tovább. Jelöljük  $f(j)$ -vel a  $j$ -edik ( $G_j$  nevű) csoportban lévő mezők számát. Ekkor pl.  $f(1) = 10, f(2) = 19$ , stb.

Jelöljük  $C$ -vel azon lehetőségek számát, hogy minden korongot, minden csoportba elhelyezünk, anélkül, hogy figyelnénk a csoporton belüli sorrendet. Amennyiben a csoporton belüli permutációkat is figyelembe vesszük,  $C \cdot f(1)! \cdot f(2)! \cdot \dots \cdot f(\mathcal{M})!$  lehetőségünk van, de ez nem más, mint az összes lehetőségek száma, azaz  $\mathcal{N}!$ . Ebből  $C$  meghatározható:

$$C = \frac{\mathcal{N}!}{f(1)! \cdot f(2)! \cdot \dots \cdot f(\mathcal{M})!}. \quad (3.17)$$

Adott csoportosítás esetén (makroszkopikus állapot), a  $C$  a mikroállapotok számát jelenti. Azaz az adott csoportosítás entrópiája  $S = \ln C$ , azaz:

$$\begin{aligned}
S &= \ln \left( \frac{\mathcal{N}!}{f(1)! \cdot f(2)! \cdot \dots \cdot f(\mathcal{M})!} \right) \\
&= \ln \mathcal{N}! - \ln f(1)! - \ln f(2)! - \dots - \ln f(\mathcal{M})!
\end{aligned} \tag{3.18}$$

A faktoriálisok aszimptotikus kifejtésére ismert a Stirling formula, azaz  $\lim \ln k! = k \ln k - k$ . Ennek segítségével, illetve felhasználva, hogy  $f(1) + f(2) + \dots + f(\mathcal{M}) = \mathcal{N}$  kapjuk:

$$\begin{aligned}
S &= \mathcal{N} \ln \mathcal{N} - f(1) \ln f(1) - f(2) \ln f(2) - \dots - f(\mathcal{M}) \ln f(\mathcal{M}) \\
&= \mathcal{N} \ln \mathcal{N} - \sum_{j=1}^{\mathcal{M}} f(j) \ln f(j).
\end{aligned} \tag{3.19}$$

Az  $\mathcal{N} \ln \mathcal{N}$  konstans csak az entrópia nullpontját tolja el, ezért ezt a tagot el szokták hagyni:

$$S = - \sum_{j=1}^{\mathcal{M}} f(j) \ln f(j). \tag{3.20}$$

A fenti diszkrét rendszerről át tudunk térni egy folytonos változóval leírt rendszerre, azaz elvégezhetjük a  $j \rightarrow v$  átmenetet azzal, hogy  $f(v)dv$  azon elemek számát jelenti, melyek a  $v$ -vel vannak címkézve. Ezzel az entrópiára a következő integrál adódik:

$$S = - \int f(v) \ln f(v) dv. \tag{3.21}$$

A fenti egyenletet általánosíthatjuk, amennyiben az  $f$  eloszlásfüggvény nem  $\mathbf{v}$ -nek, hanem  $\mathbf{x}$ -nek is függvénye. Ebben az esetben az integrált az egész 6 dimenziós fázistérre ki kell terjeszteni:

$$S = - \int f(\mathbf{x}, \mathbf{v}) \ln f(\mathbf{x}, \mathbf{v}) d^3x d^3v. \tag{3.22}$$

A plazmában lejátszódó ütközések részecskéket visznek át a fázistér egyik pontjából a másikba, ezért a kezdeti mikroállapotot átviszik más mikroállapotokba. Elvben ez az új mikroállapot lehet bármelyik másik mikroállapot, de valószínűbb, hogy olyan mikroállapot lesz, amely a kezdetinél nagyobb entrópiájú makroállapotot valósít meg. Azt lehet tehát mondani, hogy az ütközések a rendszert - az adott kényszerfeltételek mellett - legnagyobb entrópiájú makroállapota felé hajtják. Ilyen kényszerfeltétel lehet, hogy a rendszer teljes energiája és részecskeszámra megmarad. Adódik tehát a kérdés: egy a környezetétől elszigetelt  $V$  térfogatú,  $\mathcal{N}$  részecskeszámú rendszernek, melyben a részecskék

átlagos kezdeti energiája  $\langle E \rangle$ , mi lesz a maximális entrópiájú állapota? A probléma egy tipikus variációs feladat, érdemes a kényszereket a Lagrange-multiplikátorok módszerével figyelembe venni:

$$\delta S - \lambda_1 \delta \mathcal{N} - \lambda_2 \delta (\mathcal{N} \langle E \rangle) = 0, \quad (3.23)$$

ahol a  $\lambda_1, \lambda_2$  meghatározandó Lagrange-multiplikátorok. A teljes részecskeszám:

$$\mathcal{N} = V \int f dv. \quad (3.24)$$

Az egyes részecskék kinetikus energiája  $E = mv^2/2$ , a teljes kinetikus energia a nyugvó tömegközépponti rendszerből mérve:

$$\mathcal{N} \langle E \rangle = V \int \frac{mv^2}{2} f(v) dv, \quad (3.25)$$

ezzel a variációs problémánkra a következő képlet adódik:

$$\delta \int \left( f \ln f - \lambda_1 V f - \lambda_2 V \frac{mv^2}{2} f \right) dv = 0. \quad (3.26)$$

Az állandó térfogatot összevonhatjuk a multiplikátorokkal, továbbá a variálást követően kiemelhetjük a  $\delta f$ -et:

$$\int \delta f \left( 1 + \ln f - \lambda_1 - \lambda_2 \frac{mv^2}{2} \right) dv = 0. \quad (3.27)$$

Mivel  $\delta f$  variáció tetszőleges, a zárójelben lévő kifejezésnek zérust kell adnia. Átdefiniálva  $\lambda_1$ -et, úgy hogy  $1 - \lambda_1$ -el legyen egyenlő, kapjuk:

$$\ln f = \lambda_2 \frac{mv^2}{2} - \lambda_1. \quad (3.28)$$

Tehát egy izolált rendszer maximális entrópiájú állapotának sebességeloszlása:

$$f(v) = \lambda_1 \exp(-\lambda_2 mv^2/2), \quad (3.29)$$

ami nem más, mint a jól ismert Maxwell-eloszlás!



## 4. fejezet

# Kétfolyadék-egyenletek

A plazmák leírásának ebben az elméletében a plazmát két (elektron- és ion-) folyadék-komponensből álló rendszerként írják le.

### 4.1. Kétfolyadék kontinuitási egyenlet

Számítsuk ki először a kinetikus egyenlet nulladik momentumát, ami a sebesség nulladik hatványa, azaz az 1 szerinti átlagképzést jelenti!

$$\int \left[ \frac{\partial f_\sigma}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} \cdot (\mathbf{v} f_\sigma) + \frac{\partial}{\partial \mathbf{v}} \cdot (\mathbf{a} f_\sigma) \right] d^3v = \sum_\alpha \int C_{\sigma\alpha}(f_\sigma) d^3v \quad (4.1)$$

Felhasználva a részecskesűrűség 3.9 szerinti és az átlagsebesség 3.10 szerinti kifejezéseit, valamint a sebességtérbeli divergenciát a Gauss-tétellel felületi integrállá alakítva kapjuk a

$$\frac{\partial n_\sigma}{\partial t} + \nabla \cdot (n_\sigma \mathbf{u}_\sigma) = 0 \quad (4.2)$$

egyenletet (az idő- és térderiváltakat kihoztuk a sebesség szerinti integrál alól). Ez a kétfolyadék kontinuitási egyenlet.

### 4.2. Kétfolyadék-mozgásegyenlet

Számítsuk ki ezután az első momentumot, ami a sebesség első hatványa szerinti átlagképzést jelenti!

$$\int \mathbf{v} \left[ \frac{\partial f_\sigma}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} \cdot (\mathbf{v} f_\sigma) + \frac{\partial}{\partial \mathbf{v}} \cdot (\mathbf{a} f_\sigma) \right] d^3v = \sum_\alpha \int \mathbf{v} C_{\sigma\alpha}(f_\sigma) d^3v \quad (4.3)$$

Az egyenlet bal oldalán álló összeget integráljuk tagonként és végezzük el az alábbi egyszerűsítéseket!

- Az idő- és térderiváltakat hozzuk ki a sebesség szerinti integrál alól.
- A sebességet bontsuk átlagsebességre és az átlag körüli ingadozásra, azaz legyen  $\mathbf{v}_\sigma(\mathbf{x}, t) = \mathbf{u}_\sigma(\mathbf{x}, t) + \mathbf{v}'_\sigma(\mathbf{x}, t)$ , ahol  $\mathbf{v}'_\sigma(\mathbf{x}, t)$  az átlagsebesség körüli ingadozás.
- A gyorsulást tartalmazó tagokat integráljuk parciálisan és használjuk fel a

$$\left( \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial \mathbf{v}} \right)_{ij} = \delta_{ij}$$

összefüggést.

Az egyszerűsítések elvégzése után az elsőmomentum-egyenlet az alábbi alakot ölti:

$$\begin{aligned} \frac{\partial(n_\sigma \mathbf{u}_\sigma)}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} \cdot \int (\mathbf{v}'_\sigma \mathbf{v}'_\sigma + \mathbf{v}'_\sigma \mathbf{u}_\sigma + \mathbf{u}_\sigma \mathbf{v}'_\sigma + \mathbf{u}_\sigma \mathbf{u}_\sigma) f_\sigma d^3v - \\ - \frac{q_\sigma}{m_\sigma} \int (\mathbf{E} + \mathbf{v}_\sigma \times \mathbf{B}) f_\sigma d^3v = -\frac{1}{m_\sigma} \mathbf{R}_{\sigma\alpha}. \end{aligned} \quad (4.4)$$

Itt  $\mathbf{R}_{\sigma\alpha}$  az a súrlódási erő, amely a  $\sigma$  részecskékre hat az  $\alpha$  részecskékkal való ütközés következtében. Nyilvánvalóan  $\mathbf{R}_{\sigma\sigma} = 0$ , azaz a részecskék saját magukra nem hatnak súrlódási erővel. Feltéve, hogy a plazma elektron- és ionkomponensekből áll, a súrlódási erő így adható meg:

$$\mathbf{R}_{ei} = \nu_{ei} m_e n_e (\mathbf{u}_e - \mathbf{u}_i) \quad (4.5)$$

és

$$\mathbf{R}_{ie} = \nu_{ie} m_i n_i (\mathbf{u}_i - \mathbf{u}_e). \quad (4.6)$$

Itt  $\nu_{ei}$  az elektron-ion, míg  $\nu_{ie}$  az ion-elektron ütközési frekvencia. A súrlódási erő fenti kifejezése szemléletesen azt jelentik, hogy például az elektronokat az ionokhoz kötött vonatkoztatási rendszerből szemlélve az elektronok  $m_e n_e (\mathbf{u}_e - \mathbf{u}_i)$  impulzusa  $\nu_{ei}$  rátával tűnik el (randomizálódik). A 4.4 egyenlet tovább egyszerűsíthető, ha felhasználjuk, hogy  $\int \mathbf{v}'_\sigma f_\sigma d^3v = 0$ .

$$m_\sigma \left[ \frac{\partial(n_\sigma \mathbf{u}_\sigma)}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} \cdot (n_\sigma \mathbf{u}_\sigma \mathbf{u}_\sigma) \right] = n_\sigma q_\sigma (\mathbf{E} + \mathbf{u}_\sigma \times \mathbf{B}) - \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} \cdot \mathbf{P}_\sigma - \mathbf{R}_{\sigma\alpha} \quad (4.7)$$

A *nyomás tenzort* ilyen alakban definiáltuk:

$$\mathbf{P}_\sigma = m_\sigma \int \mathbf{v}'_\sigma \mathbf{v}'_\sigma f_\sigma d^3v'. \quad (4.8)$$

Ha  $f_\sigma$  eloszlásfüggvény az átlagsebességtől való  $\mathbf{v}'_\sigma$  eltérés izotróp függvénye, akkor a nyomástenzor nemdiagonális elemei eltűnnek, a diagonális elemek pedig egyenlők. Ebben az esetben érdemes bevezetni a  $P_\sigma$  *skalárnyomást*, ami nem más, mint a diagonális elemek értéke:

$$\begin{aligned} P_\sigma &= m_\sigma \int v'_x v'_x f_\sigma d^3v' = m_\sigma \int v'_y v'_y f_\sigma d^3v' = m_\sigma \int v'_z v'_z f_\sigma d^3v' = \\ &= \frac{m_\sigma}{3} \int \mathbf{v}' \cdot \mathbf{v}' f_\sigma d^3v'. \end{aligned} \quad (4.9)$$

Ha a nyomástenzor nemdiagonális elemei nem tűnnek el, akkor érdemes definiálnunk a  $\mathbf{\Pi}_\sigma$  *általánosított nyírási tenzort* az alábbi módon:

$$\mathbf{P}_\sigma = P_\sigma \mathbf{I} + \mathbf{\Pi}_\sigma,$$

ahol  $\mathbf{I}$  az egységtenzor, és a nyírási tenzor tartalmazza a nyomástenzor összes nemdiagonális elemét, de neki magának nincsenek diagonális elemei. A nemdiagonális elemek akkor nem tűnnek el (azaz a nyírási tenzor nem nulla), ha a plazmában különböző irányokban a részecskék más-más, ráadásul nem-maxwelli sebességeloszlással rendelkeznek, azaz az eloszlásfüggvény a sebességnek nem egyensúlyi és nem izotróp függvénye.

A plazmafizikában a sebességeloszlások nagyon sokszor nem izotrópák és nem maxwelliek, mivel a részecskék közötti ütközések száma általában nem elegendő ahhoz, hogy egyensúlyi és izotróp eloszlásfüggvény kialakulhasson. Minden esetben külön-külön meg kell vizsgálni, hogy van-e elegendő ütközés az egyensúly és az izotrópia kialakulásához. Előfordulhat, hogy bizonyos koordinátatengelyek mentén van elegendő ütközés, míg mások mentén nincs.

A továbbiakban olyan plazmákat fogunk csak vizsgálni, melyek esetében a nyírási tenzor elhanyagolható a skalárnyomás mellett. Ez azokra a plazmákra tehető meg, amelyek eloszlásfüggvénye a fentebb mondottak értelmében (legalább koordinátairányonként) nem nagyon különbözik a Maxwell-eloszlástól.

Később (?? fejezet) majd látni fogjuk, hogy mágnesezett plazmákban más-más (skalár)nyomás alakulhat ki a mágneses térrel párhuzamosan, mint arra merőlegesen.

Ha a rendszerünk dimenziószáma nem három, hanem kevesebb vagy több, bevezethetjük az  $N$  dimenziós skalárnyomást a következő módon:

$$P_\sigma = \frac{m_\sigma}{N} \int \sum_{j=1,N} v_j'^2 f_\sigma d^N v'.$$

Teljesen izotróp, Maxwell-eloszlást követő sebességeloszlás esetén a skalárnyomás nem más, mint  $P_\sigma = n_\sigma \kappa T_\sigma$ , ahogy azt az ideális gáztörvényből is ismerjük.

Kibontva a deriváltakat a 4.7 egyenletben észrevevesszük, hogy a kapott egyenlet tartalmazza a 4.2 kontinuitási egyenlet  $\mathbf{u}_\sigma$ -szorosát. Levonva ezt a beágyazott kontinuitási egyenletet, kapjuk:

$$n_\sigma m_\sigma \frac{d\mathbf{u}_\sigma}{dt} = n_\sigma q_\sigma (\mathbf{E} + \mathbf{u}_\sigma \times \mathbf{B}) - \nabla P_\sigma - \mathbf{R}_{\sigma\alpha}, \quad (4.10)$$

ahol

$$\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{u}_\sigma \cdot \nabla \quad (4.11)$$

az úgynevezett *konvektív* (vagy *szubsztanciális*) *derivált*. A 4.10 egyenlet a kétfolyadék-mozgásegyenlet.

### 4.3. Kétfolyadék-állapotegyenlet

Számítsuk most ki a kinetikus egyenlet második momentumát! A kontinuitási és a mozgásegyenlettel ellentétben ennek a momentumnak a kiszámításánál a rendszer dimenziószáma explicite megjelenik, tehát a skalárnyomás felírásánál az általános,  $N$  dimenziós alakot fogjuk használni. A kinetikus egyenletet  $m_\sigma v^2/2$ -vel szorozva kapjuk:

$$\left[ \begin{array}{l} \frac{\partial}{\partial t} \int \frac{m_\sigma v^2}{2} f_\sigma d^N v + \\ + \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} \cdot \int \frac{m_\sigma v^2}{2} \mathbf{v} f_\sigma d^N v + \\ + q_\sigma \int \frac{v^2}{2} \frac{\partial}{\partial \mathbf{v}} \cdot (\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}) f_\sigma d^N v \end{array} \right] = \sum_\alpha \int m_\sigma \frac{v^2}{2} C_{\sigma\alpha} f_\sigma d^N v. \quad (4.12)$$

Vizsgáljuk meg és alakítsuk át az egyenlet minden tagját külön-külön!

1. Az időderiváltat tartalmazó tag így fog kinézni:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \int \frac{m_\sigma v^2}{2} f_\sigma d^N v &= \frac{\partial}{\partial t} \int \frac{m_\sigma (\mathbf{v}' + \mathbf{u}_\sigma)^2}{2} f_\sigma d^N v = \\ &= \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{NP_\sigma}{2} + \frac{m_\sigma n_\sigma u_\sigma^2}{2} \right). \end{aligned} \quad (4.13)$$

2. Felhasználva a  $\mathbf{v}_\sigma = \mathbf{u}_\sigma + \mathbf{v}'_\sigma$  felbontást, a térderiváltat tartalmazó tag így alakul:

$$\frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} \cdot \int \frac{m_\sigma v^2}{2} \mathbf{v} f_\sigma d^N v = \nabla \cdot \left( \mathbf{Q}_\sigma + \frac{N+2}{2} P_\sigma \mathbf{u}_\sigma + \frac{m_\sigma n_\sigma u_\sigma^2}{2} \mathbf{u}_\sigma \right),$$

ahol  $\mathbf{Q}_\sigma = \int \frac{m_\sigma v'^2}{2} \mathbf{v}' f_\sigma d^N v$  a *hőfluxus*.

3. A gyorsulást tartalmazó tagot parciálisan integráljuk:

$$q_\sigma \int \frac{v^2}{2} \frac{\partial}{\partial \mathbf{v}} \cdot (\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}) f_\sigma d^N v = -q_\sigma \int \mathbf{v} \cdot \mathbf{E} f_\sigma d^N v = -q_\sigma n_\sigma \mathbf{u}_\sigma \cdot \mathbf{E}.$$

4. Az ütközési tag nem más, mint a  $\sigma$  részecskék energiájának időegységre eső megváltozása az  $\alpha$  részecskékkel történő ütközések következtében.

$$\sum_\alpha \int m_\sigma \frac{v^2}{2} C_{\sigma\alpha} f_\sigma d^N v = \int_{\alpha \neq \sigma} m_\sigma \frac{v^2}{2} f_\sigma d^N v = - \left( \frac{\partial W}{\partial t} \right)_{E\sigma\alpha}.$$

A fenti négy átalakítást 4.12-en elvégezve kapjuk:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{NP_\sigma}{2} + \frac{m_\sigma n_\sigma u_\sigma^2}{2} \right) + \nabla \cdot \left( \mathbf{Q}_\sigma + \frac{N+2}{2} P_\sigma \mathbf{u}_\sigma + \frac{m_\sigma n_\sigma u_\sigma^2}{2} \mathbf{u}_\sigma \right) \\ - q_\sigma n_\sigma \mathbf{u}_\sigma \cdot \mathbf{E} = - \left( \frac{\partial W}{\partial t} \right)_{E\sigma\alpha}. \end{aligned} \quad (4.14)$$

Ezt az egyenletet tovább egyszerűsíthetjük két matematikai azonosság felhasználásával. Az első ez:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{m_\sigma n_\sigma u_\sigma^2}{2} \right) + \nabla \cdot \left( \frac{m_\sigma n_\sigma u_\sigma^2}{2} \mathbf{u}_\sigma \right) &= n_\sigma \left( \frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{u}_\sigma \cdot \nabla \right) \frac{m_\sigma u_\sigma^2}{2} = \\ &= n_\sigma \frac{d}{dt} \left( \frac{m_\sigma u_\sigma^2}{2} \right), \end{aligned}$$

a másodikat pedig a mozgásegyenlet  $\mathbf{u}_\sigma$ -val való skaláris szorzása után kapjuk:

$$\begin{aligned} n_\sigma m_\sigma \left[ \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{u_\sigma^2}{2} \right) + \mathbf{u}_\sigma \cdot \left( \nabla \left( \frac{u_\sigma^2}{2} \right) - \mathbf{u}_\sigma \times \nabla \times \mathbf{u}_\sigma \right) \right] = \\ = n_\sigma q_\sigma \mathbf{u}_\sigma \cdot \mathbf{E} - \mathbf{u}_\sigma \cdot \nabla P_\sigma - \mathbf{R}_{\sigma\alpha} \cdot \mathbf{u}_\sigma. \end{aligned}$$

Az utóbbi egyenlet így is írható:

$$n_\sigma \frac{d}{dt} \left( \frac{m_\sigma u_\sigma^2}{2} \right) = n_\sigma q_\sigma \mathbf{u}_\sigma \cdot \mathbf{E} - \mathbf{u}_\sigma \cdot \nabla P_\sigma - \mathbf{R}_{\sigma\alpha} \cdot \mathbf{u}_\sigma. \quad (4.15)$$

A 4.3 és a 4.15 egyenleteket 4.14-ba írva az energiaváltozásra az alábbi egyenletet kapjuk:

$$\frac{N}{2} \frac{dP_\sigma}{dt} + \frac{N+2}{2} P_\sigma \nabla \cdot \mathbf{u}_\sigma = -\nabla \cdot \mathbf{Q}_\sigma + \mathbf{R}_{\sigma\alpha} \cdot \mathbf{u}_\sigma - \left( \frac{\partial W}{\partial t} \right)_{E_{\sigma\alpha}}. \quad (4.16)$$

Az egyenlet jobb oldalán az első tag a hőfluxus, a második tag a részecskék ütközése miatt fellépő súrlódási erő munkája, a harmadik tag pedig az ütközések során átvett, illetve leadott energiát adja meg.

## 4.4. A momentumegyenletek lezárásának problematikája

A 4.2, 4.10 és 4.16 egyenletek a kinetikus egyenlet első három momentum-egyenletei. A gyakorlatban nem szoktak magasabb momentumegyenleteket származtatni, mert a magasabb egyenletek már nem nyújtanak minőségileg új fizikai információt a rendszerről, és a megnövekedő komplexitás sem ér fel az általuk nyújtott többletpontossággal.

A fenti levezetésből világosan látszik, hogy a momentumegyenletek származtatásánál az  $n$ -edik lépésben olyan mennyiségek jelennek meg az egyenletekben, melyek értékét csak az  $n+1$ -edik momentumegyenlet határozza meg (ilyen például a hőfluxus a 4.16 egyenletben). Ez szemmel láthatóan a  $\frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} \cdot \int \mathbf{v} f_\sigma d^3v$  tagban a sebességgel való szorzás miatt van, azaz minden esetben a kinetikus egyenlet momentumainak végtelen láncolatát kapjuk, ami persze semmiféle könnyítést nem jelent a teljes kinetikus egyenlet megoldásával szemben. Valahogyan el kell tehát vágnunk az egyenletek láncolatát – ezt az „elváágást” hívjuk a momentumegyenletek *lezárásának*.

Egészen pontosan a lezárás az a folyamat, amely során a 4.2, 4.10 és 4.16 egyenletekben meghatározatlan mennyiségeket, a hőfluxust, a nyírási tenzort (ha van) és az ütközési operátor két momentumát kifejezzük a részecskeszám-sűrűséggel, a sebességgel és a skalárnyomással.

Kétféle fő lezárási eljárás létezik: az úgynevezett *csonkolásos* és az *aszimptotikus*. Az elsőben a magasabb momentumokat egyszerűen nullának veszik, vagy önkényesen kifejezik az alacsonyabb momentumok segítségével. Ennek az a fő hátránya, hogy nehezen indokolható közelítésekhez kell nyúlni, amikhez nem teljesen ismert pontosság (pontatlanság) tartozik. A másodikban az egyenleteket valamilyen kis paraméter segítségével vizsgáljuk, bizonyos paramétereket sorbafejtünk, ezáltal jól kézbentARTHATÓ közelítésekhez jutunk. Ennek persze az az ára, hogy igen bonyolult matematikai kifejezésekkel kell dolgoznunk.

A legismertebb klasszikus aszimptotikus lezárási séma a Chapman–Enskog-lezárás, mely ütközések dominálta semleges gázokban alkalmazható és a kis paraméter a szabad

úthossz és a makroszkópikus skálahossz (ezen a skálán változnak érezhetően a makroszkópikus mennyiségek) aránya.

Az eljárás röviden a következő.

Legyen  $l$  a szabad úthossz és  $L$  a makroszkópikus skálahossz, azaz legyen

$$\epsilon = \frac{l}{L} \ll 1$$

a kis paraméter! Ekkor az  $f$  eloszlásfüggvény  $\epsilon$  szerint sorbafejthető az  $f_0$  egyensúlyi eloszlás körül.

$$f(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t) = f_0(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t) + \epsilon f_1(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t) + \epsilon^2 f_2(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t) + \dots$$

Az  $f_0$  egyensúlyi eloszlásfüggvény természetesen a Maxwell-eloszlás. A sorfejtést felhasználva a kinetikus egyenlet átalakítható úgy, hogy integrálegyenletet kapjunk  $f_1$ -re  $f_0$  függvényében. Ezt az egyenletet megoldva a sorfejtés következő tagjára további egyenletet írhatunk fel a már ismert tagok figyelembevételével. A valóságban azonban ezt a következő egyenletet még soha senki nem írta fel és senki sem számolta ki a kis paraméterben négyzetes korrekciót az elképzelhetetlen matematikai nehézségek miatt. Szerencsére azonban  $f_1$  meghatározása már elegendő pontosságot nyújt a problémák gyakorlati megoldásához.

A Chapman–Enskog-lezárás nemcsak semleges gázok esetében használható, hanem minden rövid hatótávolságú kölcsönhatással bíró erőtörvény esetén. Ebben az esetben a rövid hatótávolság azt jelenti, hogy két részecske között a kölcsönhatási erő az  $1/r^2$ -es erőtörvénynél gyorsabban cseng le (semleges gázok esetében a kölcsönhatás távolsága gyakorlatilag a részecskék mérete). Ekkor megmutatható, hogy a nyírási tenzor

$$\Pi_{ij} = -\eta \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} - \frac{2}{3} \delta_{ij} \nabla \cdot \mathbf{u} \right),$$

a hőfluxus pedig

$$\mathbf{Q} = -\kappa_Q \nabla T$$

alakú, ahol  $\eta$  a viszkozitási,  $\kappa_Q$  pedig a hővezetési együttható. A Chapman–Enskog-lezárás – a nyírási tenzor és a hőfluxus fenti alakjai mellett – a viszkozitási és a hővezetési együtthatóra is konkrét kifejezést szolgáltat.

Mágnesezett plazmák esetében a Chapman–Enskog-lezárás az úgynevezett *Braginszkij-egyenletek*re vezet, kis paraméterként vagy a semleges gázokhoz hasonló módon a szabad úthossz arányát a skálahosszhoz vagy a drift-rendezésnél korábban megismert mennyiségeket használva (azaz a Larmor-pálya sugarának arányát a térbeli skálahosszhoz, illetve

a Larmor-frekvencia és az időskála szorzatát). Fontos megjegyezni, hogy a Braginszkij-egyenleteknél nem átlagolunk ki a kis paraméterek szerint, azokat csak az eloszlásfüggvény sorfejtésénél használjuk.<sup>1</sup>

Az ebben a bevezető jegyzetben megismerendő plazmafolyamatok ismertetéséhez tökéletesen elegendő a momentumegyenletek csonkolásos lezárása, ami a 4.16 egyenlet két fontos határesetére vezet. Ebben a két határesetben a 4.16 egyenlet igen egyszerű alakot ölt.

Legyen  $t$  egy valamilyen folyamat karakterisztikus ideje és  $l$  ugyanezen folyamat karakterisztikus térszkálája. Ekkor a folyamatot jellemző  $V_{folyamat}$  sebességére  $V_{folyamat} = l/t$  adódik.

1. *Izoterm határesetben* a hőfluxus tag dominál, aminek következtében térben homogén hőmérséklet alakul ki. Ez az eset akkor áll elő, ha a termikus átlagsebességre igaz, hogy  $v_{T\sigma} \gg V_{folyamat}$  és az ütközési tagok elhanyagolhatóak.
2. *Adiabatikus határesetben* viszont a hőfluxus hanyagolható el az ütközési tagokkal együtt. Ebben az esetben  $v_{T\sigma} \ll V_{folyamat}$ .

Adiabatikus határesetben az energiaegyenlet nagyban leegyszerűsödik, ha átrendezzük a kontinuitási egyenletet

$$\nabla \cdot \mathbf{u}_\sigma = -\frac{1}{n_\sigma} \frac{dn_\sigma}{dt} \quad (4.17)$$

és behelyettesítjük 4.16-be

$$\frac{1}{P_\sigma} \frac{dP_\sigma}{dt} = \frac{\gamma}{n_\sigma} \frac{dn_\sigma}{dt}. \quad (4.18)$$

Gamma definíciója

$$\gamma = \frac{N+2}{N},$$

ahol  $N$  a rendszer dimenziója. Például teljesen izotróp esetben  $N = 3$ , így  $\gamma = 5/3$ ; egydimenziós folyamatokra pedig (pl. mágneses tér erővonalai mentén terjedő perturbáció)  $N = 1$  és  $\gamma = 3$ . A 4.18 egyenletet integrálva kapjuk a kétfolyadék *adiabatikus állapotegyenlet* kompakt alakját:

$$\frac{P_\sigma}{n_\sigma^\gamma} = \text{állandó}, \quad (4.19)$$

vagy ezzel egyenértékű módon

$$\frac{d}{dt} \frac{P_\sigma}{n_\sigma^\gamma} = 0. \quad (4.20)$$

---

<sup>1</sup>Természetesen a Chapman–Enskog-lezárás egésze sem tartalmaz a kis paraméter szerinti átlagolást.



4.2, a 4.10 és 4.20 a Maxwell-egyenletekkel együtt alkotják a kétfolyadék-egyenleteket azzal a megkötéssel, hogy 4.20 csak adiabatikus közelítésben használható.

## 5. fejezet

# Egyrészecske kép, egyrészecske driftek

Ebben a fejezetben a plazmarészecskéket kölcsönhatásmentes sokaságként leíró, úgynevezett *egyrészecske* képet ismerhetjük meg. Benne a részecskék a Lorentz-erő hatására, kizárólag külső forrásból származó elektromos és mágneses terekben mozognak. A Lorentz-erőt tartalmazó mozgásegyenlet általános, analitikus megoldása tetszőleges elektromos és mágneses mezőben nem megoldott feladat. Azonban közelítések, valamint fizikai megfontolások segítségével több fontos hatást megismerhetünk és levezethetünk. A fejezet elején néhány szemléletes példán keresztül megismerjük az egyrészecske mozgások főbb tulajdonságait, később pedig sorfejtés segítségével levezetjük a szemléletes képből kapott eredményeinket és új hatásokat is megismerünk.

A továbbiakban a részecskék helyét az  $\mathbf{x}(t)$  koordináta, sebességét a  $d\mathbf{x}(t)/dt = \dot{\mathbf{x}}(t)$  derivált, gyorsulását pedig a  $d\mathbf{v}(t)/dt = \ddot{\mathbf{x}}(t)$  adja meg. Tekintsük a mozgásegyenletet a Lorentz-erővel!

$$m \frac{d\mathbf{v}}{dt} = q(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}) \quad (5.1)$$

Ha nincs elektromos tér ( $\mathbf{E} = 0$ ), a mágneses tér pedig merőleges a részecske sebességére, akkor az egyenlet könnyen integrálható. Koordináta-rendszerünk mutasson a mágneses tér irányába! Tehát legyen  $\mathbf{B} = (0 \ 0 \ B_z)$  és koordináta-rendszerünk mutasson a  $z$  irányba. Az 5.1. egyenletben végezzük el a vektorszorzást, ekkor a következőt kapjuk.

$$\mathbf{v} \times \mathbf{B} = \begin{pmatrix} v_y B_z - v_z B_y \\ v_z B_x - v_x B_z \\ v_x B_y - v_y B_x \end{pmatrix} \quad (5.2)$$

Ahol a  $B_z$ -t nem tartalmazó tagok mind nullák lesznek. Ezt visszahelyettesítve az 5.1.

egyenletbe és az egyenletek bal oldalát  $\dot{\mathbf{v}}$ -ra rendezve és az eredményt komponensenként kiírva az alábbi egyenletrendszert kapjuk.

$$\begin{aligned}\dot{v}_x &= \frac{qB}{m}v_y \\ \dot{v}_y &= -\frac{qB}{m}v_x \\ \dot{v}_z &= 0\end{aligned}\tag{5.3}$$

A fenti (5.3-al jelölt) három egyenletet deriváljuk le még egyszer idő szerint és helyettesítsük be a jobb oldalra a  $\dot{\mathbf{v}}$  megfelelő értékeit (mostantól csak a nem nulla komponensekre).

$$\begin{aligned}\ddot{v}_x &= \frac{qB}{m}\dot{v}_y = \left(\frac{qB}{m}\right)^2 v_x \\ \ddot{v}_y &= -\frac{qB}{m}\dot{v}_x = -\left(\frac{qB}{m}\right)^2 v_y\end{aligned}\tag{5.4}$$

A 5.3. és a 5.4. egyenletrendszerben felbukkanó, 1/idő dimenziójú  $\frac{qB}{m}$  kifejezést ciklotron-frekvenciának, vagy más néven Larmor-frekvenciának nevezzük és  $\omega_c$ -vel jelöljük<sup>1</sup>. A 5.4. egyenletrendszer mindkét tagja éppen a harmonikus oszcillátor egyenletét adja, melynek  $\mathbf{v}$ -re vett általános megoldása (nem nulla tagok esetén) a következő.

$$v_{x,y} = v_{\perp} \cdot e^{\pm i(\omega_c t + \delta_{x,y})}\tag{5.5}$$

Ahol a  $\pm$  a töltés előjelét jelöli,  $\delta$  pedig a fázis, melyet célszerű olyannak választani, hogy kielégítse az alábbi egyenletet.

$$v_x = v_{\perp} \cdot e^{i\omega_c t} = \dot{x}\tag{5.6}$$

Itt a megoldásban jelentkező amplitúdó faktort  $v_{\perp}$ -sel jelöljük, ez a mágneses térre merőleges sebesség<sup>2</sup>. Gondoljunk bele: mivel z irányúnak választottuk a mágneses teret, ezért a mágneses térre merőleges irányú sebesség általános esetben a  $v_x$  és a  $v_y$  sebességkomponensekből számítható ki (hiszen ekkor a  $v_z$  éppen a mágneses térrel párhuzamos komponens fogja adni). A  $v_x$  értéke tehát maximum  $\pm|v_{\perp}|$  lehet.

Ekkor az y irányú sebességkomponens ( $\delta$  fenti megválasztása miatt) a következőképpen néz ki<sup>3</sup>.

$$v_y = \frac{m}{qB}\dot{v}_x = \pm\frac{1}{\omega_c}\dot{v}_x = \pm\frac{1}{\omega_c}i\omega_c e^{i\omega_c t} = \pm i v_{\perp} e^{i\omega_c t} = \dot{y}\tag{5.7}$$

<sup>1</sup>Az irodalomban használatos az  $\omega_L$  jelölés is.

<sup>2</sup>A mágneses térrel párhuzamos komponens  $v_{\parallel}$ -sal jelöljük. A részecske teljes sebessége így  $v_{\perp}$  és  $v_{\parallel}$  szuperpozíciójából áll elő.

<sup>3</sup> $v_y$  kiszámításához felhasználjuk a 5.3. egyenletrendszer első tagját.

Tehát megvan az x- és y-irányú sebességkomponens, ezt integrálva megkaphatjuk a részecske x és y koordinátáinak időfüggését.

$$\begin{aligned}x - x_0 &= -i \frac{v_{\perp}}{\omega_c} e^{i\omega_c t} \\y - y_0 &= \pm \frac{v_{\perp}}{\omega_c} e^{i\omega_c t}\end{aligned}\tag{5.8}$$

Ahol  $x_0$  és  $y_0$  időfüggetlen pontok a pálya középpontját jelölik. Ezt a középpontot a későbbiekben  $gc$  alsó indexszel fogjuk jelölni (az angol *guiding center* szavakból). A 5.8. egyenletrendszerben megjelenő, hosszúság dimenziójú  $r_L = \frac{v_{\perp}}{\omega_c}$  kifejezést Larmor-sugárnak nevezzük. Ez adja meg a középpont körül körmozgást végző részecske pályájának sugarát. Vegyük a 5.8. egyenletrendszer tagjainak valós részét. Felhasználva, hogy  $e^{ix} = \cos(x) + i \cdot \sin(x)$ ,  $x \in \mathbb{R}$  és az egyenletek abszolút értékét véve a következő eredményt kapjuk.

$$\begin{aligned}x - x_0 &= \operatorname{Re} \left[ -i \frac{v_{\perp}}{\omega_c} (\cos(\omega_c t) + i \cdot \sin(\omega_c t)) \right] \\&= \operatorname{Re} [r_L (-i \cdot \cos(\omega_c t) + \sin(\omega_c t))] = r_L \sin(\omega_c t) \\y - y_0 &= \operatorname{Re} \left[ \pm \frac{v_{\perp}}{\omega_c} (\cos(\omega_c t) + i \cdot \sin(\omega_c t)) \right] = r_L \cos(\omega_c t)\end{aligned}\tag{5.9}$$

A 5.9. egyenletrendszer két tagja az  $(x_0, y_0)$  középpont körüli körkörös mozgást ír le. A keringés iránya mindig olyan, hogy a mozgó töltött részecske által keltett mágneses tér akadályozza a mozgást létrehozó külső mágneses teret. Mivel általános esetben a  $v_{\parallel}$  sebességkomponens (amelyre nem hat a mágneses tér) sem zérus, ezért a töltött részecske pályája külső mágneses térben hélix alakú lesz.

## 5.1. Egyrészecske mozgás sztatikus elektromos térben

Ha megengedjük elektromos tér jelenlétét is, a fentebb leírt körmozgás egy újabb taggal bővül: egyrészt megmarad a fentebb leírt körkörös Larmor-mozgás, de ehhez hozzáadódik a középpont (a fentebb már említett *guiding center*) elmozdulása (ú.n. driftje). Válasszuk meg a (homogén) elektromos teret olyannak, hogy az y komponense zérus legyen, azaz  $\mathbf{E} = (E_x, 0, E_z)$ . A mágneses tér továbbra is  $\mathbf{B} = (0, 0, B)$  alakú. Ekkor a mozgásegyenletünk az 5.1. egyenlet alakját veszi fel, melynek foglalkozunk először a z komponensével.

$$\frac{dv_z}{dt} = \frac{q}{m} E_z\tag{5.10}$$

A fenti egyenlet megoldás a következő.

$$v_z = \frac{qE_z}{m}t + v_{z0} \quad (5.11)$$

Látható, hogy a 5.11. egyenlet a mágneses tér irányában történő (azaz jelen esetben  $z$  irányú) gyorsulást ír le. Most vizsgáljuk meg a mágneses térre merőleges komponenseket is.

$$\begin{aligned} \frac{dv_x}{dt} &= \frac{q}{m}E_x + \frac{q}{m}(v_y B_z - v_z B_y) = \frac{q}{m}E_x \pm \omega_c v_y \\ \frac{dv_y}{dt} &= \frac{q}{m}E_y + \frac{q}{m}(v_z B_x - v_x B_z) = \mp \omega_c v_x \end{aligned} \quad (5.12)$$

A 5.12. egyenletrendszer tagjaiban a mágneses  $B_z$ -től különböző tagjai kiesnek, hiszen a mágneses tér  $z$  irányú, ugyanezért esik ki az elektromos teret tartalmazó tag az egyenletrendszer második tagjában, mivel az elektromos tér  $y$  komponense is zérus. Az  $\omega_c$ -t tartalmazó tagok pedig a korábban bevezetett  $\omega_c = \frac{qB}{m}$  összefüggésből állnak elő. Mivel a  $q$  töltés pozitív és negatív is lehet, ezért az áttéréskor az adott tag előjelének megfelelően  $\pm$  vagy  $\mp$  bevezetése szükséges. A 5.12. egyenletrendszer tagjait még egyszer deriválva megkapjuk - az előző esethez hasonlóan - az oszcillátor-egyenleteket, melyeket az alábbiakban - az előző példa mintájára - meg is oldunk.

$$\begin{aligned} \ddot{v}_x &= \pm \omega_c \dot{v}_y = \omega_c (\mp \omega_c v_x) = -\omega_c^2 v_x \\ \ddot{v}_y &= \mp \omega_c \dot{v}_x = \mp \omega_c \left( \frac{q}{m}E_x + \omega_c v_y \right) = -\omega_c^2 \left( \frac{E_x}{B} + v_y \right) \end{aligned} \quad (5.13)$$

A megoldás pedig a következő alakú lesz.

$$\begin{aligned} v_x &= v_{\perp} e^{i\omega_c t} = \dot{x} \\ v_y &= v_{\perp} e^{i\omega_c t} - \frac{E_x}{B} = \dot{y} \end{aligned} \quad (5.14)$$

$$\begin{aligned} x - x_0 &= -i \frac{v_{\perp}}{\omega_c} e^{i\omega_c t} \\ y - y_0 &= \pm \frac{v_{\perp}}{\omega_c} e^{i\omega_c t} - \frac{E_x}{B} t \end{aligned} \quad (5.15)$$

Melynek a valós részét véve - hasonlóan az elektromos tér nélküli esethez - a következőt kapjuk.

$$\begin{aligned} x - x_0 &= \operatorname{Re} \left( -i \frac{v_{\perp}}{\omega_c} (\cos(\omega_c t) + i \cdot \sin(\omega_c t)) \right) = r_L \cdot \sin(\omega_c t) \\ y - y_0 &= \operatorname{Re} \left( \pm \frac{v_{\perp}}{\omega_c} (\cos(\omega_c t) + i \cdot \sin(\omega_c t)) - \frac{E_x}{B} t \right) = r_L \cdot \cos(\omega_c t) - \frac{E_x}{B} t \end{aligned} \quad (5.16)$$

Láthatjuk, hogy a 5.15. és a 5.16. egyenletrendszer majdnem teljesen megegyezik a 5.8. és a 5.9. egyenletrendszerekkel azzal a különbséggel, hogy itt az  $y$  irányban van egy plusz  $\frac{E_x}{B}t$  tagunk, ami hozzáadódik a megszokott csavarvonal alakú mozgáshoz és mivel az elektromos tér mértékegysége (az SI mértékegységrendszerben)  $[E] = \frac{V}{m}$ , a mágneses téré pedig  $[B] = \frac{Vs}{m^2}$ , így kettőjük hányadosa éppen sebesség dimenziójú mennyiséget ad (ez általánosan is megmutatható). Ezt a sebességet nevezzük középponti driftnek (angolul *guiding center drift*) és  $v_{gc}$ -vel jelöljük. Jelen példában ez éppen a  $-y$  irányba hat,  $E_x > 0$  elektromos tér esetén, azaz  $\mathbf{v}_{gc} = (0, -\frac{E_x}{B})$ . Általános esetben a középponti driftet a következőképpen írhatjuk fel. Vegyük a mozgásegyenletet és mivel az  $m\frac{d\mathbf{v}}{dt}$  tagról korábban láttuk, hogy a körmozgáshoz ad járulékot, így azt most elhanyagoljuk és szorozzuk meg az így kapott egyenlet mindkét oldalát vektoriálisan jobbról a mágneses tér vektorával.

$$\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B} = 0 \quad (5.17)$$

$$\mathbf{E} = -\mathbf{v} \times \mathbf{B} \quad (5.18)$$

$$\mathbf{E} \times \mathbf{B} = -(\mathbf{v} \times \mathbf{B}) \times \mathbf{B} \quad (5.19)$$

$$\mathbf{E} \times \mathbf{B} = \mathbf{B} \times (\mathbf{v} \times \mathbf{B}) \quad (5.20)$$

A  $\mathbf{B} \times (\mathbf{v} \times \mathbf{B}) = \mathbf{v}B^2 - \mathbf{B}(\mathbf{v} \cdot \mathbf{B})$  vektoranalitikai összefüggést felhasználva láthatjuk, hogy az egyenlet jobb oldala két részre tagolódik. Lesz egy sebességvektorral, illetve egy mágneses térrel párhuzamos tag (hiszen mind a  $B^2$ , mind a  $\mathbf{v} \cdot \mathbf{B}$  skalárt ad eredményül). A mágneses térrel párhuzamos tagot most nem vesszük figyelembe, hiszen a mágneses térre merőleges driftet keresünk. Tehát a másik tagot behelyettesítve az egyenletbe megkapjuk a középponti drift mágneses térre merőleges részét a következőképpen.

$$\mathbf{E} \times \mathbf{B} = \mathbf{v}B^2 \quad (5.21)$$

$$\frac{\mathbf{E} \times \mathbf{B}}{B^2} = \mathbf{v}_{\perp gc} = \mathbf{v}_{\mathbf{E} \times \mathbf{B}} \quad (5.22)$$

Láthatjuk, hogy az így kapott sebesség mind a töltéstől, mind a tömegtől, mind pedig a mágneses erővonalakra merőleges ( $v_{\perp}$ ) sebességtől független (neve:  $\mathbf{E} \times \mathbf{B}$  drift). Ez azt

jelenti, hogy jelen esetben az ionok és az elektronok is ugyanabba az irányba driftelnek. Szemléletesen ezt úgy képzelhetjük el, hogy a Larmor-pályán történő mozgása során az ionok a körpálya első felében energiát vesznek fel az elektromos térből, ekkor növekszik a  $v_{\perp}$  sebességük, ezáltal növekszik a Larmor-pályájuk sugara ( $r_L$ ) is. A körpálya második felében ez a két mennyiség csökken, így a körpálya középpontja arrébb mozog. Az elektronoknál éppen fordítva történik, ők a körpálya első felében veszítenek energiát, de a második felében gyűjtenek, így ugyanabba az irányba fognak driftelni, mint az ionok.

A korábbiakban láttuk, hogy a drift iránya elektronokra és ionokra megegyezik, érdemes még megvizsgálni azt is, hogy hogyan lehet az  $\mathbf{E} \times \mathbf{B}$  drift nagysága ugyanaz az azonos részecskéken belül az eltérő sebességűekre. Ha a részecskék tömege megegyezik, de a sebességük más, akkor ugyanaz lesz az  $\omega_c = \frac{qB}{m}$  ciklotron-frekvenciájuk, ám a lassabb részecskének kisebb lesz a Larmor-sugara ( $r_L = \frac{v_{\perp}}{\omega_c}$ ), így kevesebb energiát gyűjt egy félkör alatt (igaz, kevesebbet is veszít a kör másik felében). A kisebb sebességű részecskék tehát kevesebb ideig gyűjtik az energiát az elektromos térből, ám kevesebb ideig is veszítik (a kör második felében). A két hatás kioltja egymást.

**Általános esetben** egy  $\mathbf{F}$  erő által okozott drift hatását a következő képlettel írhatjuk fel.

$$\mathbf{v}_F = \frac{1}{q} \frac{\mathbf{F} \times \mathbf{B}}{B^2} \quad (5.23)$$

Az általános alak fontos tulajdonsága, hogy ez már nem töltésfüggetlen (a pozitív és negatív töltések esetén különböző előjelű lesz a sebességvektor), tehát általános erő esetén az elektronok és az ionok egymással ellentétes irányba driftelnek.

## 5.2. Egyrészecske mozgás gravitációs térben

Érdemes még megvizsgálni a gravitációs tér hatását a töltött részecskék mozgására. Ez fúziós berendezésekben elhanyagolható hatás (a fentiekben nem is vettük figyelembe, hiszen a Lorentz-erő nem tartalmazza), ám csillagközi plazmákban általában igen jelentős tényezőként lép fel. Ha a fenti, 5.23. képletbe behelyettesítjük a nehézségi erő<sup>4</sup>  $\mathbf{F} = m\mathbf{g}$  képletét, a következő egyenletet kapjuk.

$$\mathbf{v}_g = \frac{m}{q} \frac{\mathbf{g} \times \mathbf{B}}{B^2} \quad (5.24)$$

A 5.24. egyenletből is láthatjuk, hogy a nehézségi erő által keltett drift sem töltésfüggetlen, ennek következtében az elektronok az ionokkal ellentétes irányban mozognak, de a

<sup>4</sup>Melyről tudjuk, hogy nem egyenlő a gravitációs erővel, melyet az  $\mathbf{F} = G \cdot \frac{m_1 \cdot m_2}{r^2} \hat{\mathbf{r}}$  képlet ad meg és ahol  $G = (6,67428 \pm 0,00067) \cdot 10^{-11} \frac{\text{m}^3}{\text{kg s}^2}$  a gravitációs állandó.

rájuk ható erő ugyanolyan irányú, mint az ionokra<sup>5</sup>. Így az elektronok és ionok driftjének az iránya is ellentétes lesz. Mivel a különböző előjelű töltések ellentétes irányban mozognak, a plazmában áram kezd folyni, melynek áramsűrűsége a következőképpen írható fel (feltesszük, hogy a különböző részecskeszám-sűrűségek megegyeznek, azaz  $n_e = n_i = n$ ).

$$\mathbf{j} = n \cdot \sum_{\sigma} q_{\sigma} \cdot \mathbf{v}_{g\sigma} = n \cdot \left( q_i \cdot \frac{m_i}{q_i} \frac{\mathbf{q} \times \mathbf{B}}{B^2} + q_e \cdot \frac{m_e}{q_e} \frac{\mathbf{q} \times \mathbf{B}}{B^2} \right) = n \cdot (m_e + m_i) \cdot \frac{\mathbf{g} \times \mathbf{B}}{B^2} \quad (5.25)$$

Ahol  $\mathbf{j}$  az áramsűrűség,  $q_{\sigma}$  a részecskék töltése,  $m_e$  az elektron,  $m_i$  pedig a proton tömege. A  $\mathbf{v}_{g\sigma}$  és a  $q_{\sigma}$  jelentése, hogy a részecskefajtától függő változókat (tömeg, töltés) most megkülönböztetjük ionok és elektronok esetén, tehát  $\sigma \in [e, i]$ .

A  $\mathbf{v}_g$  nagysága általában elhanyagolható, ám ha az erővonalak görbültek, a centrifugális erő hatására fellép egy úgynevezett effektív gravitációs erő. Ez az erő, amely már nem elhanyagolható, független a tömegtől. A centrifugális erő az alapja az úgynevezett *gravitációs instabilitásnak*, amelynek semmi köze a valódi gravitációhoz.

### 5.3. Az $\mathbf{E} \times \mathbf{B}$ drift levezetése sorfejtésből, valamint gradB- és a polarizációs drift

A fentiekben láttunk két szemléletes példát az egyrészecske driftekre, valamint megállapítottuk, hogy a részecske mozgása felbontható egy körmozgásra, illetve a körmozgás középpontjának mozgására. A fenti esetekben - bizonyos megfontolások után - ráadásul egzakt megoldást kaptunk a középponti driftek értékére. Azonban ha az elektromos és mágneses terek inhomogenitását is megengedjük, a probléma bonyolultsága miatt csak közelítő megoldást kaphatunk, sorfejtést fogunk alkalmazni<sup>6</sup>. A korábbiakban láthatuk, hogy a részecskék sebessége felbontható egy gyors körmozgás (L alsó index jelöli, a Larmor-pályára utal) és a körmozgás középpontjának (gc alsó index jelöli a korábban említett angol *guiding center* szavakból) lassú mozgására.

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{x}_{gc}(t) + \mathbf{r}_L(t), \quad \mathbf{v}(t) = \frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{v}_{gc}(t) + \mathbf{v}_L(t). \quad (5.26)$$

Amennyiben az elektromos és mágneses terek lassan változnak, sorba fejthetjük a térerősséget, illetve az indukcióvektort a részecske pillanatnyi helye körül. Ez azt jelenti, hogy megköveteljük, hogy az elektromos és mágneses terek időben úgy változzanak, hogy a részecske egy körbefordulása alatt közel állandóak legyenek tekinthetőek, térben pedig úgy változzanak, hogy a körpálya mérettartományában közel homogénnek legyenek

<sup>5</sup>Az  $\mathbf{E} \times \mathbf{B}$  drift esetében az elektronok és ionok azonos irányba mozogtak, hiszen az  $\mathbf{E} \times \mathbf{B}$  drift töltésfüggetlen.

<sup>6</sup>Ehhez feltesszük, hogy az elektromos és mágneses terek időben lassan változnak.



tekinthetőek<sup>7</sup>. Egy vektormennyiség Taylor-sorfejtése egy tetszőleges  $\mathbf{r}$  vektor körül a következő alakban írható fel.

$$f(\mathbf{r} + \mathbf{a}) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} (\mathbf{a} \cdot \nabla)^n f(\mathbf{r})$$

A fenti képlet segítségével fejtsük sorba az elektromos és mágneses teret a részecske pillanatnyi helye körül<sup>8</sup>.

$$\mathbf{E}(\mathbf{x}(t)) = \mathbf{E}(\mathbf{x}_{gc}(t) + \mathbf{r}_L(t)) \approx \mathbf{E}(\mathbf{x}_{gc}(t)) + (\mathbf{r}_L(t) \cdot \nabla) \mathbf{E} \quad (5.27)$$

$$\mathbf{B}(\mathbf{x}(t)) = \mathbf{B}(\mathbf{x}_{gc}(t) + \mathbf{r}_L(t)) \approx \mathbf{B}(\mathbf{x}_{gc}(t)) + (\mathbf{r}_L(t) \cdot \nabla) \mathbf{B} \quad (5.28)$$

Írjuk be a 5.26. és a 5.28. egyenletekben szereplő felbontásokat az 5.1. (mozgás)egyenletünkbe:

$$m \frac{d\mathbf{v}}{dt} = q\mathbf{E} + q(\mathbf{v} \times \mathbf{B})$$

$$m \frac{d[\mathbf{v}_{gc}(t) + \mathbf{v}_L(t)]}{dt} = q [\mathbf{E}(\mathbf{x}_{gc}(t)) + (\mathbf{r}_L(t) \cdot \nabla) \mathbf{E}] + q [\mathbf{v}_{gc}(t) + \mathbf{v}_L(t)] \times [\mathbf{B}(\mathbf{x}_{gc}(t)) + (\mathbf{r}_L(t) \cdot \nabla) \mathbf{B}]. \quad (5.29)$$

A feltételezéseink szerint a körmozgásra vonatkozó  $\mathbf{v}_L(t)$  sebesség éppen az alábbi, korábban is látott (5.1. egyenlet, az) úgynevezett Larmor-egyenlet megoldása<sup>9</sup>.

$$m \frac{d\mathbf{v}_L(t)}{dt} = q\mathbf{v}_L(t) \times \mathbf{B}(\mathbf{x}_{gc}(t)) \quad (5.30)$$

Levonva ezt az egyenletet a 5.29. egyenletből a következőt kapjuk.

$$m \frac{d\mathbf{v}_{gc}(t)}{dt} = q [\mathbf{E}(\mathbf{x}_{gc}(t)) + (\mathbf{r}_L(t) \cdot \nabla) \mathbf{E}] + q \{ \mathbf{v}_{gc}(t) \times [\mathbf{B}(\mathbf{x}_{gc}(t)) + (\mathbf{r}_L(t) \cdot \nabla) \mathbf{B}] + \mathbf{v}_L(t) \times (\mathbf{r}_L(t) \cdot \nabla) \mathbf{B} \}. \quad (5.31)$$

<sup>7</sup>Ezen kívül megköveteljük még a Faraday-törvény ( $\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$ ) alkalmazhatóságát, valamint azt, hogy  $\frac{E}{B} \ll c$ , azaz hogy a relativisztikus hatások elhanyagolhatóak legyenek.

<sup>8</sup>Mivel korábban feltettük, hogy az elektromos- és mágneses terek közel homogének a körmozgás pályájának idő- és mérettartományában, ezért a sorfejtést elég az első rendig elvégeznünk.

<sup>9</sup>A  $(\mathbf{r}_L(t) \cdot \nabla) \mathbf{B}$  tagot azért nem írjuk bele ebbe az egyenletbe, mert feltesszük, hogy a mágneses tér homogénnek tekinthető a Larmor-pálya méretskáláján, tehát ez a tag csak a középpont driftjében fog szerepet játszani.

Ahhoz, hogy csak a középpont mozgását leíró egyenletet kapjunk, ezt az egyenletet időben ki kell átlagolnunk egy Larmor-pályán való körülfordulásra. Ekkor a Larmor-mozgást első rendben tartalmazó tagok<sup>10</sup> időátlaga nulla<sup>11</sup>. Az átlagolás eredményét a 5.32. egyenlet mutatja.

$$m \frac{d\mathbf{v}_{gc}(t)}{dt} = q [\mathbf{E}(\mathbf{x}_{gc}(t)) + \mathbf{v}_{gc}(t) \times \mathbf{B}(\mathbf{x}_{gc}(t)) + \langle \mathbf{v}_L(t) \times (\mathbf{r}_L(t) \cdot \nabla) \mathbf{B} \rangle] \quad (5.32)$$

Bontsuk fel a pálya középpontjának (Larmor-centrum) sebességét a mágneses térrel párhuzamos, és arra merőleges komponensekre (ahogy azt a korábbi, szemléletes példákban láttuk)! A driftsebesség megjelenését (a fenti példákból kiindulva) a térre merőleges komponensben várjuk (koordináta-rendszerünk  $z$  tengelye továbbra is a mágneses tér irányába mutat a pálya minden pontjában – azaz  $\mathbf{B} = B\hat{z}$ , ám mivel a pálya most már lehet görbült is, ez a feltételezés már csak lokálisan igaz, így a későbbiekben előkerülő  $\hat{x}$ ,  $\hat{y}$  és  $\hat{z}$  vektorok az adott pontban az  $x$ -,  $y$ - és  $z$  irányba mutató egységvektorok).

$$\mathbf{v}_{gc}(t) = \mathbf{v}_{\perp gc}(t) + v_{\parallel gc}(t)\hat{z} \quad (5.33)$$

A felbontást beírva a 5.31. egyenletbe, a 5.31. bal oldala így alakul:

$$\frac{d\mathbf{v}_{\perp gc}(t)}{dt} + \frac{d(v_{\parallel gc}(t)\hat{z})}{dt} = \frac{d\mathbf{v}_{\perp gc}(t)}{dt} + \frac{dv_{\parallel gc}(t)}{dt}\hat{z} + \frac{d\hat{z}}{dt}v_{\parallel gc}(t). \quad (5.34)$$

A mágneses tér időderiváltját tartalmazó tagot külön is meg kell vizsgálnunk. Paraméterezzük a mágneses teret az erővonal mentén mért  $s$  ívhosszal. Ekkor

$$\frac{d\hat{z}}{dt} = \frac{d\hat{z}}{ds} \frac{ds}{dt} = v_{\parallel gc}(\hat{z} \cdot \nabla)\hat{z},$$

mivel

$$\frac{d\hat{z}}{ds} = (\hat{z} \cdot \nabla)\hat{z},$$

és

$$\frac{ds}{dt} = v_{\parallel gc}.$$

Ezt felhasználva a 5.31. egyenlet már könnyen párhuzamos és merőleges komponensekre bontható.

<sup>10</sup>Ezek a tagok az  $\mathbf{r}_L(t) \cdot \nabla \mathbf{E}$ , és az  $\mathbf{r}_L(t) \cdot \nabla \mathbf{B}$ .

<sup>11</sup>Gondoljunk például arra, hogy a körpálya pontjaira mutató  $\mathbf{r}_L(t)$  vektorokat egy teljes körre összeadva az előjeles össze zérus lesz.

$$m \left[ \frac{d\mathbf{v}_{\perp gc}(t)}{dt} + \frac{dv_{\parallel gc}(t)}{dt} \hat{z} + v_{\parallel gc}^2(t) (\hat{z} \cdot \nabla) \hat{z} \right] = \\ = q\mathbf{E}(\mathbf{x}_{gc}(t)) + q\mathbf{v}_{gc}(t) \times \mathbf{B}(\mathbf{x}_{gc}(t)) + q\langle \mathbf{v}_L(t) \times (\mathbf{r}_L(t) \cdot \nabla) \mathbf{B} \rangle \quad (5.35)$$

A párhuzamos komponens a következő alakot veszi fel:

$$m \frac{dv_{\parallel gc}(t)}{dt} \hat{z} = q \left[ \hat{z} E_{\parallel}(\mathbf{x}_{gc}(t)) + \langle \mathbf{v}_L(t) \times (\mathbf{r}_L(t) \cdot \nabla) \mathbf{B} \rangle_{\parallel} \right], \quad (5.36)$$

míg a merőleges komponens így írható:

$$m \left[ \frac{d\mathbf{v}_{\perp gc}(t)}{dt} + v_{\parallel gc}^2(t) (\hat{z} \cdot \nabla) \hat{z} \right] = \\ = q \left[ \mathbf{E}_{\perp}(\mathbf{x}_{gc}(t)) + \mathbf{v}_{gc}(t) \times \mathbf{B}(\mathbf{x}_{gc}(t)) + \langle \mathbf{v}_L(t) \times (\mathbf{r}_L(t) \cdot \nabla) \mathbf{B} \rangle_{\perp} \right]. \quad (5.37)$$

Az egyenlet átrendezhető az alábbi alakra:

$$m \frac{d\mathbf{v}_{\perp gc}(t)}{dt} = \mathbf{F}_{\perp} + q\mathbf{v}_{gc} \times \mathbf{B}, \quad (5.38)$$

ahol

$$\mathbf{F}_{\perp} = q\mathbf{E}_{\perp}(\mathbf{x}_{gc}(t)) + q\langle \mathbf{v}_L(t) \times (\mathbf{r}_L(t) \cdot \nabla) \mathbf{B} \rangle_{\perp} + v_{\parallel gc}^2(t) (\hat{z} \cdot \nabla) \hat{z}. \quad (5.39)$$

A feltételezéseink szerint  $\mathbf{v}_{\perp gc}(t)$  időváltozása lassú, tehát a 5.39. egyenlet bal oldalán az időderivált nullad rendben elhagyható. Az így kapott egyenletet  $\mathbf{B}$ -vel vektoriálisan szorozva a driftsebesség nullad rendben kifejezhető:

$$\mathbf{v}_{\perp gc0} = \frac{\mathbf{F}_{\perp} \times \mathbf{B}}{qB^2}. \quad (5.40)$$

Ezzel visszakaptuk a korábban felírt 5.23. egyenletet, ezúttal egy sokkal formálisabb levezetésből. Annyival pontosabb ez a megfogalmazás, hogy itt már jelöljük: a driftsebességnél csak az erő mágneses térre merőleges komponensét kell figyelembe venni. Vizsgáljuk meg az erőt kifejező, 5.39. egyenlet egyes tagjait és helyettesítsük be a 5.40. egyenletbe az egyes tagokat balról jobbra és egyszerűsítsünk a töltéssel, ahol lehet. Ekkor a következőket kapjuk.

$$\mathbf{v}_{\perp gc01} = \frac{\mathbf{E}_{\perp} \times \mathbf{B}}{B^2}, \quad (5.41)$$

$$\mathbf{v}_{\perp gc02} = \frac{\langle \mathbf{v}_L(t) \times (\mathbf{r}_L(t) \cdot \nabla) \mathbf{B} \rangle_{\perp} \times \mathbf{B}}{B^2}, \quad (5.42)$$

$$\mathbf{v}_{\perp gc03} = \frac{v_{\parallel gc}^2 (\hat{z} \cdot \nabla) \hat{z} \times \mathbf{B}}{qB^2}. \quad (5.43)$$

Vegyük észre, hogy az első tagból kapott, 5.41. egyenlet éppen a korábban megvizsgált  $\mathbf{E} \times \mathbf{B}$  driftet adja, ezúttal általános esetben, hiszen a 5.22. egyenletben az elektromos térnek csak a mágneses térre merőleges komponense szerepelt a driftsebesség kifejezésében, tehát nem kellett kikötnünk, hogy csak a merőleges komponenset vizsgáljuk meg. A 5.43. képletben szereplő tagot *görbületi drift*nek nevezzük. A görbületi drift elnevezést az indokolja, hogy  $(\hat{z} \cdot \nabla) \hat{z}$  nem más, mint a mágneses tér  $\boldsymbol{\kappa}$  görbületvektora. Ha a mágneses erővonalak görbültek, a középpont driftjét a részecske által a görbület hatására érzékelt centrifugális erő váltja ki. Értékeljük most ki a 5.39. egyenlet jobb oldalának középső tagját! Az ebből a tagból eredő driftet, mivel benne a mágneses tér gradiense szerepel, az egyrészecske képben *gradB* driftnek hívjuk.

$$\mathbf{F}_{\nabla B} = q \langle \mathbf{v}_L(t) \times \mathbf{r}_L(t) \cdot \nabla \mathbf{B} \rangle_{\perp} \quad (5.44)$$

Koordinátarendszerünk  $z$  tengelye továbbra is a mágneses tér irányába mutat, és az  $x$  tengelyt ezúttal vegyük fel úgy, hogy  $t = 0$ -ban a Larmor-sebesség éppen  $x$  irányú legyen. Ekkor a Larmor-sebesség

$$\mathbf{v}_L(t) = v_L [\hat{x} \cos \omega_c t - \hat{y} \sin \omega_c t]$$

és

$$\omega_c = \frac{qB}{m},$$

ahol  $\omega_c$  a korábban már megismert ciklotron-, vagy más néven Larmor-frekvencia. A részecske koordinátája a Larmor-pályán

$$\mathbf{r}_L(t) = \frac{v_L}{\omega_c} [\hat{x} \sin \omega_c t + \hat{y} \cos \omega_c t]$$

Ezeket a kifejezéseket a 5.44. egyenletbe írva:

$$\mathbf{F}_{\nabla B} = q \frac{v_L^2}{\omega_c} \langle [\hat{x} \cos \omega_c t - \hat{y} \sin \omega_c t] \times ([\hat{x} \sin \omega_c t + \hat{y} \cos \omega_c t] \cdot \nabla) \mathbf{B} \rangle.$$

Mivel  $\langle \cos^2 \omega_c t \rangle = \langle \sin^2 \omega_c t \rangle = 1/2$ , de  $\langle \cos(\omega_c t) \sin(\omega_c t) \rangle = 0$ , és  $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$  (előbbieket a szögfüggvények tulajdonságai miatt, utóbbi pedig a Maxwell-egyenletekből következik), a 5.44. egyenlet elnyeri végső alakját:

$$\mathbf{F}_{\nabla B} = -\frac{mv_L^2}{2B}\nabla B. \quad (5.45)$$

A gradB drift ezek után:

$$\mathbf{u}_{\nabla B} = \frac{\mathbf{F}_{\nabla B} \times \mathbf{B}}{qB^2} = -\frac{mv_L^2}{2qB^3}\nabla B \times \mathbf{B}. \quad (5.46)$$

Elsőrendű korrekciót kapunk, ha a driftsebességet  $\mathbf{v}_{\perp gc} = \mathbf{v}_{\perp gc0} + \mathbf{v}_{\perp gc1}$  alakban keressük, ahol  $\mathbf{v}_{\perp gc1}$  kicsi  $\mathbf{v}_{\perp gc0}$ -hoz képest. Ekkor

$$m \left( \frac{d\mathbf{v}_{\perp gc0}}{dt} + \frac{d\mathbf{v}_{\perp gc1}}{dt} \right) = q(\mathbf{v}_{\perp gc0} + \mathbf{v}_{\perp gc1}) \times \mathbf{B}, \quad (5.47)$$

ahol a 5.47. jobb oldalán lévő  $\frac{dv_{\perp gc1}}{dt}$  tagot elhanyagoljuk, hiszen feltettük, hogy  $v_{\perp gc1} \ll v_{\perp gc0}$ , valamint

$$m \frac{d\mathbf{v}_{\perp gc0}}{dt} = q\mathbf{v}_{\perp gc1} \times \mathbf{B}.$$

Ismét a mágneses térrel vektoriálisan szorozva a  $\mathbf{v}_{\perp gc1}$  kis korrekció kifejezhető

$$\mathbf{v}_{\perp gc1} = -\frac{m}{qB^2} \frac{d\mathbf{v}_{\perp gc0}}{dt} \times \mathbf{B}$$

Ennek a lineáris rendű kis korrekciónak a neve *polarizációs* drift. Összegyűjtve az imént származtatott drift értékeket, az alábbi kifejezéseket kapjuk – ebben a sorrendben – az  $\mathbf{E} \times \mathbf{B}$ , a gradB, a görbületesi és a polarizációs driftekre:

$$\mathbf{u}_{\mathbf{E} \times \mathbf{B}} = \frac{\mathbf{E} \times \mathbf{B}}{B^2} \quad (5.48)$$

$$\mathbf{u}_{\nabla B} = -\frac{mv_{L0}^2}{2qB^3}\nabla B \times \mathbf{B} \quad (5.49)$$

$$\mathbf{u}_c = \frac{mv_{\parallel gc}^2}{qB^2} \hat{z} \cdot \nabla \hat{z} \times \mathbf{B} = \frac{1}{qB^2} \left( \frac{mv_{\parallel gc}^2 \hat{R}}{R} \right) \times \mathbf{B} \quad (5.50)$$

$$\mathbf{u}_P = -\frac{m}{qB^2} \left[ \frac{d}{dt} (\mathbf{u}_E + \mathbf{u}_{\nabla B} + \mathbf{u}_c) \right] \times \mathbf{B} \quad (5.51)$$

Ebben a fejezetben megismerkedtünk az egyrészecske drifttel és áttekintettük a főbb egyrészecske drifteket. Megtudtuk, hogy a részecskék Larmor-pályán mozognak, melynek középpontja elektromos tér, mágneses tér gradiensének, vagy az erővonalak görbülete miatt valamilyen irányba elmozdulhat (driftelhet). Kaptunk egy szemléletes képet a gravitációs és az  $\mathbf{E} \times \mathbf{B}$  driftről, valamint magáról a Larmor-mozgásról (mely mozgás pályájának általános alakja hélix), illetve ezeket később le is vezettük, s a levezetésből a fentebb említett további driftek egyenleteit is megkaptuk.

## 5.4. A mágneses tükör

### 5.4.1. A mágneses momentum megmaradása

A Larmor-centrum közelítés egy másik (a driftek meghatározása mellett) alkalmazása a részecskék mágneses momentumának megmaradása. Képzeljük magunkat egy  $\mathbf{v}_\perp$  sebességgel mozgó vonatkoztatási rendszerbe. Ebben a rendszerben a részecske mágneses térre merőleges sebessége csak a Larmor-mozgásból ered, mert a driftsebesség térre merőleges komponensét a vonatkoztatási rendszer megválasztásával „kitranszformáltuk”.

Mivel  $\mathbf{v}_\perp$  merőleges a mágneses térre, ezért a párhuzamos mozgásegyenletet nem befolyásolja a vonatkoztatási rendszer megválasztása:

$$m \frac{dv_\parallel}{dt} = qE_\parallel - \frac{mv_L^2}{2B} \frac{\partial B}{\partial s}. \quad (5.52)$$

Itt  $s$  a szokásos módon a mágneses erővonal menti ívhosszat jelöli. Az egyenletet  $v_\parallel$ -sal szorozva energiaegyenletet kapunk:

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{mv_\parallel^2}{2} \right) = qE_\parallel v_\parallel - \frac{mv_L^2}{2B} v_\parallel \frac{\partial B}{\partial s}. \quad (5.53)$$

Most szorozzuk skalárisan a Lorentz-egyenletet a  $\mathbf{v}$  sebességgel!

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{mv_\parallel^2}{2} + \frac{mv_L^2}{2} \right) = qE_\parallel v_\parallel + q\mathbf{v}_\perp \cdot \mathbf{E}_\perp, \quad (5.54)$$

ahol  $\mathbf{v}_\perp$  a Larmor-pálya sebességvektora és  $v_L = \sqrt{\mathbf{v}_\perp \cdot \mathbf{v}_\perp}$  ennek abszolútértéke. **5.53.** egyenletből **5.54.** egyenletet levonva kapjuk:

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{mv_L^2}{2} \right) = q\mathbf{v}_\perp \cdot \mathbf{E}_\perp + \frac{mv_L^2}{2B} v_\parallel \frac{\partial B}{\partial s}. \quad (5.55)$$

Integráljuk a Larmor-pályára a Faraday-törvényt! (Mozgó vonatkoztatási rendszerünkben a mágneses tér *teljes időderiváltja* miatt örvényes elektromos tér keletkezik.)

$$\int \nabla \times \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s} = - \int \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \cdot d\mathbf{s} \quad (5.56)$$

vagy

$$\oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = -\pi r_L^2 \frac{\partial B}{\partial t}. \quad (5.57)$$

Az integrálásnál figyelembe vettük, hogy a mágneses tér elegendően lassan változik ahhoz, hogy egy körülfordulás alatt a Larmor-pálya sugarát állandónak vegyük.

**5.55.** egyenlet tartalmazza a lokális  $\mathbf{E}_\perp$  elektromos teret, de **5.57.** egyenlet csak a vonalintegrálját adja meg. Átlagoljuk tehát az elektromos tér által a töltésen végzett  $q\mathbf{v}_\perp \cdot \mathbf{E}_\perp dt$  munkát a Larmor-pályára!

$$\langle q\mathbf{v}_\perp \cdot \mathbf{E}_\perp \rangle_{pálya} = \frac{\omega_c}{2\pi} \int q\mathbf{v}_\perp \cdot \mathbf{E}_\perp dt = -\frac{q\omega_c}{2\pi} \oint \mathbf{E}_\perp d\mathbf{l} = \frac{q\omega_c}{2} r_L^2 \frac{\partial B}{\partial t} \quad (5.58)$$

Itt a  $\mathbf{v}_\perp dt = -d\mathbf{l}$  helyettesítéssel éltünk, mivel a részecskék mozgása diamágneses jellegű (az ionok mozgása „balkezes”, a Stokes-tételben pedig az ívelem „jobbkezes”). Ezzel az eredménnyel **5.55.** egyenlet így alakul:

$$\left\langle \frac{d}{dt} \left( \frac{mv_L^2}{2} \right) \right\rangle_{pálya} = \frac{mv_L^2}{2B} \frac{\partial B}{\partial t} + \frac{mv_L^2}{2B} v_\parallel \frac{\partial B}{\partial s} = \frac{mv_L^2}{2B} \frac{dB}{dt}. \quad (5.59)$$

Itt  $\frac{dB}{dt}$  a töltés által érzékelt mágneses tér teljes időváltozása. Bevezetve a Larmor-mozgás  $W_\perp = \frac{mv_L^2}{2}$  kinetikus energiáját, **5.59.** egyenlet egyszerűen felírható:

$$\frac{1}{W_\perp} \frac{dW_\perp}{dt} = \frac{1}{B} \frac{dB}{dt}, \quad (5.60)$$

aminek a megoldása

$$\frac{W_\perp}{B} \equiv \mu = \text{állandó}. \quad (5.61)$$

A  $\mu$  mennyiséget a plazmafizikában *első adiabatikus invariáns*nak hívják, és egyszerűen megmutatható, hogy pontosan egyenlő a Larmor-pályán keringő részecske m mágneses momentumával. Ugyanis egy  $r_L$  sugarú körön keringő  $q$  töltésű részecske  $I = \frac{q\omega_c}{2\pi}$  áramerősségű áramhurkot hoz létre, aminek a felülete  $A = \pi r_L^2$ .

$$m = \left( \frac{q\omega_c}{2\pi} \right) \pi r_L^2 = \frac{mv_L^2}{2B} = \mu$$

### 5.4.2. A mágneses tükör

Tekintsünk egy statikus, de helytől függő mágneses térben mozgó részecskét! A tér inhomogenitása legyen olyan, hogy a mágneses indukcióvektor nagysága az erővonal mentén változzon, azaz legyen  $\frac{\partial B}{\partial s} \neq 0$ . Könnyű belátni, hogy egy ilyen tér erővonalai nem lehetnek egyenesek, mert a  $\mathbf{B} = B_z(z)\hat{z}$  alakban felvett mágneses tér divergenciája nem zérus. Az erővonalak tehát ezeknél a tereknél szükségképpen görbültek, és a legegyszerűbb, megengedhető mágneses tér  $\mathbf{B} = B_z\hat{z} + B_r\hat{r}$  alakú ( $\hat{r}$  egy  $\hat{z}$ -ra merőleges egységvektor).

Statikus mágneses tér esetében  $\nabla \times \mathbf{E} = 0$ , amiből következően  $\mathbf{E} = -\nabla\phi$ , és **5.52.** egyenlet így írható:

$$m \frac{dv_\parallel}{dt} = -q \frac{\partial \phi}{\partial s} - \mu \frac{\partial B}{\partial s}. \quad (5.62)$$

Az egyenlet  $v_{\parallel}$ -sal való szorzása után kapjuk:

$$\frac{d}{dt} \left[ \frac{mv_{\parallel}^2}{2} + q\phi + \mu B \right] = 0. \quad (5.63)$$

Feltéve, hogy az elektrosztatikus potenciál időben állandó,

$$\frac{mv_{\parallel}^2}{2} + q\phi(s) + \mu B(s) = \text{állandó} \quad (5.64)$$

adódik. Ebből a kifejezésből az következik, hogy a  $\mu B(s)$  mennyiség egyfajta effektív potenciálként viselkedik, mivel hozzáadódik az elektrosztatikus potenciál  $q\phi(s)$  energiájához. **5.64.** egyenletből az is következik, hogy ha nincs is elektrosztatikus tér, a részecskék akkor is csapdázódnak tudnak két erős mágneses terű tartomány között. Ilyen csapdázásra alkalmas mágneses térszerkezetet előállíthatunk például két, egymástól kissé eltávolított koaxiális tekercsel. A mágneses térnek a tekercsek közepénél maximuma, a tekercsek között félúton pedig minimuma lesz.

Tegyük fel tehát, hogy nincs elektrosztatikus tér és így

$$\frac{mv_{\parallel}^2}{2} + \mu B(s) = \text{állandó}. \quad (5.65)$$

Legyen a részecske a  $t = 0$  időpontban az  $s_0 = 0$  helyen, ami legyen éppen a minimális mágneses indukcióval bíró pont. Ekkor egy későbbi időpontra és pozícióra fennáll ez az egyenlet:

$$\frac{mv_{\parallel}^2(s)}{2} + \mu B(s) = \frac{mv_{\parallel 0}^2(s)}{2} + \mu B(s_0) = \frac{m(v_{\parallel 0}^2 + v_{\perp 0}^2)}{2} = W_0, \quad (5.66)$$

ahol  $W_0$  a részecske teljes kinetikus energiája  $t = 0$ -kor. Ennek az egyenletnek a származtatásánál felhasználtuk, hogy  $v_{\perp} = v_L$ , azaz a Larmor-sebesség megegyezik a merőleges irányú sebességgel. **5.66.** egyenletet rendezve a párhuzamos sebességre kapjuk:

$$v_{\parallel}(s) = \pm \sqrt{\frac{2}{m} [W_0 - \mu B(s)]}. \quad (5.67)$$

Ha az erővonal mentén valahol  $\mu B(s) = W_0$ , akkor a párhuzamos sebességnek ugyanitt el kell tűnnie. Mivel ez egy instabil helyzet, a részecske párhuzamos sebességének előjelet kell váltania és a részecske elindul visszafelé. Olyan ez, mint amikor egy inga két maximális potenciális energiájú pont között oszcillál úgy, hogy potenciális és kinetikus energiáinak összege állandó.

A mágneses momentum megmaradásából az következik, hogy ha a részecske növekvő mágneses terű tartományon halad keresztül, akkor Larmor-sebességének is meg kell nőnie. A megfordulási pontot (ha van) az jellemzi, hogy a részecske teljes kinetikus energiája a mágneses térre merőleges mozgásában koncentrálódik. Tehát a  $\mu B(s) = W_0$  megfordulási



feltétel csak olyan részecskékre teljesülhet, amelyek kezdeti ( $s_0 = 0$ -beli) párhuzamos sebessége „nem túl nagy” a merőleges sebességhez képest, hiszen a párhuzamos sebességnek „el kell fogynia”, mire a részecske a fordulóponthoz ér. Azok a részecskék, amelyek párhuzamos sebessége nagyobb a küszöbértéknél, nem fordulnak vissza, hanem áthaladnak a maximális mágneses terű térrészen.

A maximális és minimális mágneses indukció arányára kapjuk:

$$\frac{B_{min}}{B_{max}} < \frac{v_{\perp 0}^2}{v_0^2}. \quad (5.68)$$

Ha a részecske teljes kezdeti sebessége  $v_0$ , és sebességvektora  $\theta$  szöget zár be a mágneses erővonalakkal, akkor  $v_{\parallel} = v_0 \sin \theta$  és  $v_{\perp} = v_0 \cos \theta$ , amiből a párhuzamos és merőleges sebességek aránya a  $\theta$  szöggel egyértelműen jellemezhető. Ekkor a kritikus szögre a

$$\theta_{befogott} = \sin^{-1} \sqrt{\frac{B_{min}}{B_{max}}} \quad (5.69)$$

érték adódik. Az ennél élesebb szögben haladó részecskék vissza fognak verődni a maximális mágneses indukciójú ponton, az ennél tompább szögben haladók viszont áthaladnak rajta.

Azt a mágneses konfigurációt, amelyben a részecskék az előbb leírt módon csapdázhatók, *mágneses tükör* elrendezésnek hívjuk.

## 6. fejezet

# Driftáramlások

### 6.0.3. Driftáramlások nullad- és elsőrendben

Jelen fejezetben a kétfolyadék képet fogjuk használni, melynek lényege, hogy a plazmát úgy képzeljük el, mint egy két (egy ion és egy elektron) folyadékkomponensből álló rendszert. A kétfolyadék-egyenletek segítségével a plazmakomponensek mint folyadékok áramlási tere – a peremfeltételeket is figyelembe véve – meghatározható. Az egyenletek megoldása azonban általános esetben igen nehéz, és hasznos lenne, bizonyos közelítések bevezetése után, az áramlási kép legalább kvalitatív, közelítő megoldásait megtalálni. Az áramlási képben térben és időben lassan változó, úgynevezett *driftáramlások*at fogunk keresni. A *driftközelítés* sajátossága, hogy kihasználjuk azt, hogy az áramlás sebességének mágneses térrel párhuzamos komponense általában kisebb a térre merőleges komponensnél, ezért csak a térre merőleges komponens határozza meg, a párhuzamos rész iránt nem érdeklődünk. Ennek a leszűkített érdeklődésnek a jogosságát egyrészt a korábban tárgyalt egyrészecske képben kapott eredmények igazolják (lásd 5.3. alfejezet), ám később a kétfolyadék képben is egzaktul látni fogjuk.

A kétfolyadék-mozgásegyenlet párhuzamos komponensében az áramlás dinamikáját lassú idő- és nagy térskálákon – amikor a sebesség teljes időderiváltja nulla vagy nagyon kicsi – a súrlódási erő (ha van) és a nyomásgradiens egyensúlya határozza meg. Azaz a mozgásegyenletnek ez a komponense vezető rendben (a sebességderivált elhanyagolása esetén) nem ad információt  $\mathbf{u}_{\sigma 0}$  nagyságáról, viszont mivel a súrlódási erő általában kicsi (a plazma forró és az elektromágneses erők dominálnak), a párhuzamos nyomásgradiens sem lehet nagy, tehát a párhuzamos sebesség várhatóan kicsi. Ezzel szemben a merőleges mozgásegyenlet-komponens a plazmára ható erők egyensúlya esetén is jól definiálható, véges áramlási sebességet ad.

Induljunk ki ezek után a kétfolyadék-mozgásegyenletből, elhagyva a súrlódási tagot és fejtünk ki, hogy nekünk most csak a merőleges áramlás érdekes!

$$m_{\sigma} n_{\sigma} \frac{d\mathbf{u}_{\sigma}}{dt} = q_{\sigma} n_{\sigma} (\mathbf{E} + \mathbf{u}_{\sigma} \times \mathbf{B}) - \nabla P_{\sigma} \quad (6.1)$$

Az alkalmazott driftközelítés magja a következő. A mozgásegyenlet bal oldalán álló konvektív derivált két részből áll. Az első, a parciális időderiváltat tartalmazó tag az áramlási tér egy adott helyén a sebesség explicit időfüggését írja le, míg a második tag azt, hogy a folyadékkal együtt mozogva hogyan változik a sebesség. Tegyük fel, hogy a sebesség jellemzően  $T$  idő eltelte, illetve  $L$  távolság megtétele után változik meg. Ekkor a konvektív derivált két tagjának nagyságrendje  $\frac{u_\sigma}{T}$  és  $\frac{u_\sigma u_\sigma}{L}$ . Vegyük észre, hogy  $\frac{L}{u_\sigma}$  nem más, mint az az idő, ami ahhoz szükséges, hogy a folyadék  $L$  utat megtegyen. Jelöljük ezt az időt  $T^*$ -al, azaz  $T^* = \frac{L}{u_\sigma}$ .

A bevezetett  $T$  és  $T^*$  mennyiségekkel 6.1. egyenlet alábbi közelítését kapjuk!

$$\frac{\mathbf{u}_\sigma}{T} + \frac{\mathbf{u}_\sigma}{T^*} = \frac{q_\sigma}{m_\sigma} \mathbf{E} + \omega_{c\sigma} \mathbf{u}_\sigma \times \hat{z} - \frac{\nabla P_\sigma}{n_\sigma m_\sigma} \quad (6.2)$$

Ebben az átalakításban felhasználtuk az  $\omega_{c\sigma}$  ciklotronfrekvencia definícióját, és  $\hat{z}$  a mágneses tér irányába mutató egységvektor. 6.2. egyenletre pillantva azonnal látszik, hogy ha  $T^*, T \gg \omega_{c\sigma}^{-1}$ , azaz a plazmafolyadék sebességének megváltozása mind térben, mind időben lassabb, mint a ciklotronfrekvenciából meghatározható idő, akkor nulladik közelítésben az egyenlet bal oldala nullának tekinthető (ekkor ugyanis az egyenlet bal oldala elhanyagolható a mágneses tag mellett).

$$0 = \frac{q_\sigma}{m_\sigma} \mathbf{E} + \frac{q_\sigma}{m_\sigma} \mathbf{u}_{\sigma 0} \times \mathbf{B} - \frac{\nabla P_\sigma}{n_\sigma m_\sigma} \quad (6.3)$$

Az egyenletet a  $\mathbf{B}$  mágneses térrel vektoriálisan szorozva  $\mathbf{u}_{\sigma 0}$  kifejezhető.

$$\mathbf{u}_{\sigma 0} = \frac{\mathbf{E} \times \mathbf{B}}{B^2} - \frac{\nabla P_\sigma \times \mathbf{B}}{q_\sigma n_\sigma B^2} \quad (6.4)$$

Ez a driftsebesség nulladrendű közelítése. A jobb oldalon álló első tag az elektromos tértől származik és neve a már korábban megismert  $\mathbf{E} \times \mathbf{B}$  drift, a második tag pedig az úgynevezett *diamágneses drift*, ami a plazma diamágneses tulajdonságából származik, azaz abból, hogy külső mágneses tér hatására a plazmában olyan áramlások (és ennek következtében áramok) jönnek létre, hogy az áram generálta mágneses tér a külső mágneses teret gyengítse. A 6.4. kifejezés azt mutatja, hogy – miként egyébként is vártuk – a vezetőrendű driftsebesség merőleges a mágneses térre.

Ha 6.4. egyenletben a mágneses térrel való keresztszorzatot kiemeljük, az alábbi alakot kapjuk:

$$\mathbf{u}_{\sigma 0} = \left( \mathbf{E} - \frac{\nabla P_\sigma}{q_\sigma n_\sigma} \right) \times \frac{\mathbf{B}}{B^2},$$

amit úgy is értelmezhetünk, hogy a drifteket hatására az elektromos tér módosul a plazmában, és valójában csak egyféle, az elektromos tértől származó drift létezik. Ezt az alakját a driftsebességnek azonban ritkán szokták használni.

Az  $\mathbf{u}_{\sigma 0}$  vezetőrendű driftsebességhez elsőrendű korrekciót találhatunk, ha feltesszük, hogy a „tényleges”  $\mathbf{u}_{\sigma}$  driftsebesség  $\mathbf{u}_{\sigma 0}$ -tól csak egy kicsiny  $\mathbf{u}_{\sigma 1}$  tagban különbözik, azaz

$$\mathbf{u}_{\sigma} = \mathbf{u}_{\sigma 0} + \mathbf{u}_{\sigma 1}$$

és

$$u_{\sigma 0} \gg u_{\sigma 1}.$$

A korrekciós tagnak persze már lehet mind párhuzamos, mind merőleges komponense. Írjuk be a korrekciós tagot a nulladrendű taggal együtt 6.1. egyenletbe!

$$m_{\sigma} n_{\sigma} \frac{d}{dt} (\mathbf{u}_{\sigma 0} + \mathbf{u}_{\sigma 1}) = q_{\sigma} n_{\sigma} (\mathbf{E} + (\mathbf{u}_{\sigma 0} + \mathbf{u}_{\sigma 1}) \times \mathbf{B}) - \nabla P_{\sigma}. \quad (6.5)$$

A bal oldalon  $\mathbf{u}_{\sigma 0}$  mellett  $\mathbf{u}_{\sigma 1}$  elhanyagolható, míg a jobb oldalon  $\mathbf{u}_{\sigma 0}$  6.3. egyenlet miatt kiesik. Ekkor

$$m_{\sigma} n_{\sigma} \frac{d}{dt} \mathbf{u}_{\sigma 0} = q_{\sigma} n_{\sigma} \mathbf{u}_{\sigma 1} \times \mathbf{B}. \quad (6.6)$$

Az egyenletet – a fentebb már látott módon – a mágneses térrel vektoriálisan szorozva kapjuk az  $\mathbf{u}_{\sigma 1}$  korrekciót

$$\mathbf{u}_{\sigma 1} = -\frac{m_{\sigma}}{q_{\sigma} B^2} \frac{d\mathbf{u}_{\sigma 0}}{dt} \times \mathbf{B}, \quad (6.7)$$

ahol  $\mathbf{u}_{\sigma 0}$ -t 6.4. egyenlet definiálja. Az  $\mathbf{u}_{\sigma 1}$  korrekciós tag neve *tehetetlenségi drift*, mert az  $\mathbf{u}_{\sigma 0}$  származtatásánál korábban felhasznált közelítések ekvivalensek azzal, hogy a plazma részecskéinek nulla tömeget, azaz végtelenül kicsi tehetetlenséget tulajdonítunk. Az  $\mathbf{u}_{\sigma 1}$  korrekciót pedig akkor kapjuk, ha véges részecsketömeget, tehát véges tehetetlenséget veszünk figyelembe.

6.7. kifejezés a teljes időderivált miatt nagyon bonyolult. Ha a kifejezés kiértékelésénél csak a lineáris tagra (az idő szerinti explicit deriválásra) korlátozzuk magunkat, akkor az úgynevezett *polarizációs driftet* kapjuk.

$$\mathbf{u}_{\sigma 1} = \frac{m_{\sigma}}{q_{\sigma} B^2} \frac{\partial}{\partial t} (\mathbf{E}_{\perp} - \frac{1}{q_{\sigma} n_{\sigma}} \nabla_{\perp} P), \quad (6.8)$$

ahol  $\nabla_{\perp} = \nabla - \hat{z} \partial / \partial z$ , a gradiensoperátor mágneses térre merőleges komponense.

### 6.0.4. Driftáramlások és az egyrészecke kép

Az egyrészecke driftek birtokában a driftáramlások további tulajdonságait is megismerhetjük.

Az egyrészecke driftek (5. fejezet) meghatározásánál a Lorentz-egyenlet rendezésére két paramétert használtunk: a Larmor-frekvencia arányát a tipikus időskálához és a Larmor-sugár arányát a tipikus térskálához. A driftáramlásoknál pedig a következő rendezési paramétereink (6. fejezet) voltak: a ciklotronfrekvencia viszonya a jellemző időskálához ( $\delta_T = (\omega_{c\sigma} \cdot T_{skála})^{-1}$ ) és ugyancsak a ciklotronfrekvencia aránya ahhoz az időhöz, ami alatt a plazmafolyadék megteszi a tipikus térskálához tartozó utat ( $\delta_L = (\omega_{c\sigma} \cdot \frac{L_{skála}}{u_\sigma})^{-1}$ ).

Belátható – de most bizonyítás nélkül adjuk meg –, hogy a korrekt driftrendezési eljárás keretében nemcsak az egyenleteket, hanem a plazma nyomástenzorát is rendeznünk kell a térbeli rendező paraméter,  $\delta_L$  szerint, és figyelembe kell vennünk a  $\delta_L$  rendű tagokat (de a magasabb rendűeket nem). Ekkor a nyomástenzorra a tagokat a rendező paraméter másodrendéig megtartva az alábbi kifejezés kapható:

$$\mathbf{P} = P\mathbf{I} + [\mathbf{P}_{CGL} - P\mathbf{I}]_1 + [m_\sigma n_\sigma \mathbf{u}_\sigma \mathbf{u}_\sigma + \mathbf{\Pi}]_2, \quad (6.9)$$

ahol  $\mathbf{I}$  az egységtenzor,  $\mathbf{\Pi}$  a nyírási tenzor,  $\mathbf{P}_{CGL}$  pedig az úgynevezett Chew–Goldberger–Lowe-nyomástenzor, ami kifejezi azt, hogy mekkora a nyomáskülönbség a mágneses térrel párhuzamos és arra merőleges irányokban. Szokásos módon lokális derékszögű koordinátarendszert felvéve a CGL-nyomás így írható:

$$\mathbf{P}_{CGL} = P_\perp \mathbf{I} + (P_\parallel - P_\perp) \hat{z} \hat{z} = \begin{pmatrix} P_\perp & 0 & 0 \\ 0 & P_\perp & 0 \\ 0 & 0 & P_\parallel \end{pmatrix}. \quad (6.10)$$

Itt  $P_\perp$  a nyomás merőleges, míg  $P_\parallel$  a nyomás párhuzamos irányú értéke. A merőleges irányú nyomás a részecskék Larmor-mozgásával kapcsolatos, a párhuzamos irányú nyomás pedig a részecskék térrel párhuzamos sebességével. Ebből világos, hogy a nyomás-anizotropia csak a driftrendezés első rendjében, azaz  $\delta_L$  rendben lesz számottevő, nulladrendben nem. 6.9. egyenletben a jobb oldali harmadik tag  $\delta_L^2$  rendű, ezért a driftáramlásoknál elhanyagolható.

6.10. kifejezés indexes írásmódban a következő alakú (a továbbiakban elhagyjuk a CGL megjelölést, úgyis világos, hogy kétindexes nyomástenzor esetén a CGL-nyomásról van szó):

$$P_{ij} = P_\perp \delta_{ij} + (P_\parallel - P_\perp) \hat{z}_i \hat{z}_j, \quad (6.11)$$

amit helyettesítsünk be az anizotróp nyomáseloszlásból származó driftáramlás-korrektió kiszámításához 6.4. egyenletbe! A jobb követhetőség kedvéért használjuk az indexes írásmódot!

$$(\tilde{\mathbf{u}}_{\sigma 0})_l = \left( \frac{\mathbf{E} \times \mathbf{B}}{B^2} \right)_l - \frac{\varepsilon_{ljk} B_k \partial_i P_{ij}}{q_\sigma n_\sigma B^2} \quad (6.12)$$

Ebben a felírásban az  $\tilde{\mathbf{u}}_{\sigma 0}$  jelölést használtuk, hogy nyilvánvalóvá tegyük a különbséget  $\mathbf{u}_{\sigma 0}$  6.4 alatti értékétől. Foglalkozzunk csak a jobb oldal második tagjának számolásával!

$$\varepsilon_{ljk} B_k \partial_i P_{ij} = \varepsilon_{ljk} B_k \partial_i (P_\perp \delta_{ij} + (P_\parallel - P_\perp) \hat{z}_i \hat{z}_j)$$

Kibontva a zárójelet a következő tagokat kapjuk:

$$(1) \quad \varepsilon_{ljk} B_k \partial_j P_\perp$$

$$(2) \quad \varepsilon_{ljk} B_k \hat{z}_i \hat{z}_j \partial_i P_\parallel$$

$$(3) \quad \varepsilon_{ljk} B_k \hat{z}_i \hat{z}_j \partial_i P_\perp$$

$$(4) \quad \varepsilon_{ljk} B_k P_\parallel \hat{z}_i \partial_i \hat{z}_j$$

$$(5) \quad \varepsilon_{ljk} B_k P_\perp \hat{z}_i \partial_i \hat{z}_j$$

$$(6) \quad \varepsilon_{ljk} B_k P_\parallel \hat{z}_j \partial_i \hat{z}_i$$

$$(7) \quad \varepsilon_{ljk} B_k P_\perp \hat{z}_j \partial_i \hat{z}_i$$

A (2)–(3) és a (6)–(7) tagok azonosan nullák, mert tartalmaznak egy  $(\hat{z} \times \mathbf{B})_l$  tagot, ami nyilván nulla. Szedjük össze a megmaradt tagokat, térjünk vissza a vektoros írásmódra és boncoljuk tovább 6.12. egyenlet jobb oldalának második tagját!

$$\begin{aligned} & \frac{\nabla \cdot \mathbf{P}_\sigma \times \mathbf{B}}{q_\sigma n_\sigma B^2} = \\ & = \frac{\nabla P_{\sigma\perp} \times \mathbf{B}}{q_\sigma n_\sigma B^2} + \frac{P_{\sigma\parallel} (\hat{z} \cdot \nabla) \hat{z} \times \mathbf{B}}{q_\sigma n_\sigma B^2} - \frac{P_{\sigma\perp} (\hat{z} \cdot \nabla) \hat{z} \times \mathbf{B}}{q_\sigma n_\sigma B^2} \end{aligned} \quad (6.13)$$

A jobb oldal első tagjának szintén *diamágneses drift*,<sup>1</sup> második tagjának pedig az egyrészeszke képben (5. fejezet) már megismert *görbületi drift* a neve. Az utolsó tagot még tovább kell boncolnunk, felhasználva a  $(\hat{z} \cdot \nabla) \hat{z} = -\hat{z} \times \nabla \times \hat{z}$  azonosságot.

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\kappa} \times \mathbf{B} &= (\hat{z} \cdot \nabla) \hat{z} \times \mathbf{B} = -(\hat{z} \times \nabla \times \hat{z}) \times \mathbf{B} = -\hat{z} \times \nabla \times \left( \frac{\mathbf{B}}{B} \right) = \\ &= -\hat{z} \times \left[ \frac{1}{B} \nabla \times \mathbf{B} + B \times \nabla \left( \frac{1}{B} \right) \right] = \frac{\mu_0 \mathbf{J} \times \mathbf{B}}{B^2} + \frac{\nabla_\perp B}{B} \end{aligned} \quad (6.14)$$

<sup>1</sup>Ez annyiban különbözik a korábban megismert kifejezéstől, hogy benne a merőleges irányú nyomás szerepel. Ez fejezi ki azt a fizikai tényt, hogy a diamágneses drift valójában csak a merőleges nyomás függvénye, azaz független a párhuzamos nyomástól.

Foglaljuk össze a kapott eredményt!

$$\tilde{\mathbf{u}}_{\sigma 0} = \frac{\mathbf{E} \times \mathbf{B}}{B^2} + \frac{\nabla P_{\sigma \perp} \times \mathbf{B}}{q_{\sigma} n_{\sigma} B^2} + \frac{P_{\sigma \parallel} \boldsymbol{\kappa} \times \mathbf{B}}{q_{\sigma} n_{\sigma} B^2} - \frac{P_{\sigma \perp} \nabla_{\perp} B \times \mathbf{B}}{q_{\sigma} n_{\sigma} B^3} - \frac{P_{\sigma \perp}}{B^2 / \mu_0} \frac{\mathbf{J} \times \mathbf{B}}{q_{\sigma} n_{\sigma} B^2} \times \mathbf{B} \quad (6.15)$$

Az 5. fejezetben (illetve a kétfolyadék képben) megismert polarizációs driftet is figyelembe véve a driftáramlás sebességének végleges alakja, amely a rendezési paraméter lineáris rendjéig igaz:

$$\mathbf{u}_{\sigma \perp} = \tilde{\mathbf{u}}_{\sigma \perp 0} - \frac{m_{\sigma}}{q_{\sigma} B^2} \frac{d\mathbf{u}_{\sigma 0}}{dt} \times \mathbf{B}. \quad (6.16)$$

Vegyük észre, hogy a polarizációs driftben megtartottuk a nulladrendű 6.4 egyenlet alatti értéket, mivel a polarizációs drift már elsőrendű korrekció, nem vehető bele szintén elsőrendű tag, mert az már másodrendű korrekciókat eredményezne, és nem lenne rendezésünk konzekvens. 6.15. egyenletben a görbületi drift után álló tényező a mágneses tér abszolútértékének megváltozásából származó – az egyrészecke képben szintén előkerült –, úgynevezett *gradB* drift. Az utolsó tagnak nincs kanonizált neve, leginkább *bétadrift*nek lehetne hívni, mert kis plazmabéta esetén (azaz amikor a mágneses nyomás sokkal nagyobb a kinetikus nyomásnál) elhanyagolható; véges  $\beta$  esetén azonban szerepet játszik.

A fenti, kétfolyadékképben származtatott driftsebesség kifejezések érdekessége, hogy azok, bár nagyon hasonlítanak az egyrészecke driftekre, nem származtathatóak az egyrészecke driftek összegeként. Ennek oka az, hogy a nyomás nem értelmezhető egyetlen részecskére, és bár a driftek hasonló alakúak, mégis más a fizikai tartalmuk.

## 7. fejezet

# A Landau-csillapodás

A kétfolyadék kép tárgyalási keretein belül a plazmában keltett elektrosztatikus hullámok az ütközések elhanyagolása esetén nem csillapodnak, azaz ha egyszer létrejöttek, az idők végezetéig megmaradnak. A valóságban azonban ez az elképzelés pontosításra szorul. Lev Davidovics Landau dolgozta ki azt az elméletet, amely a kinetikus egyenlet felhasználásával korrekciókat tud adni a diszperziós egyenlethez. Érdekességként megemlíthető, hogy Landau már több mint egy évtizeddel a kísérleti igazolás előtt megjósolta, hogy az elektrosztatikus plazmahullámoknak csillapodniuk *kell*.

**7.1.** animáció egy hipotetikus plazmarészecskét ábrázol az elektrosztatikus hullám potenciáljában. Legyen a hullám terjedési sebessége  $v_f$ , a plazmarészecske sebessége pedig  $v_p$ ! Ha  $v_f > v_p$ , a hullám a részecskét gyorsítani fogja, a részecske a hullám energiájának rovására jut energiához. A hatékony energiacseréhez persze az is kell, hogy  $v_f$  ne nagyon különbözzön  $v_p$ -től (ún. *rezonancia közeli állapot*), különben a hullám és a részecske relatív mozgásának fázisa időben hamar szétcsúszik, és az energiacsere időben kiátlagolódik. Ha viszont  $v_f < v_p$ , akkor minden pont fordítva van, a hullám erősödni fog a részecske energiájának rovására.

7.1. ábra. A Landau-csillapodás

Ha a plazmában azonos számú, a hullámnál gyorsabb és a hullámnál lassabb részecske van, akkor összességében a hullámot erősítő, illetve gyengítő hatás kiegyenlíti egymást. Plazmában azonban a részecskék sebesség-eloszlása (legtöbbször) **7.17.** szerinti Maxwell-eloszlás, tehát a hullám ekkor gyengülni fog.

### 7.1. Az átlagsebesség fogalma

Mielőtt részletesen megvizsgálánk a plazmában terjedő elektrosztatikus hullámok csillapodásának Landau-féle mechanizmusát, vizsgáljuk meg, hogy általános esetben, hogy



hogyan adódik át az energia egy részecske és egy hullám között. Először is vegyük a legegyszerűbb esetet. Aki állt már közlekedési dugóban, észrevehette, hogy általában lehetetlen behozni a dugó miatt kialakult késést, hiába megyünk akármilyen gyorsan, miután kiszabadultunk a dugóból. Hogy erre a jelenségre magyarázatot találjunk, vezessük be az  $\alpha$ -t, mint a teljes út dugóban megtett részét ( $\alpha \in [0, 1]$ ),  $v_l$  legyen a dugóban érvényes sebesség (lassú),  $v_{gy}$  pedig a dugó átvészélése utáni sebesség (gyors). Csábító és egyszerű lenne felírni az átlagsebességet, mint a lassú és a gyors sebességek súlyozott összegét, azaz  $(1 - \alpha)v_{gy} + \alpha v_l$ , ám helytelen, hiszen az átlagsebesség az összes megtett út és a megtételéhez szükséges összes idő hányadosa, azaz:  $v_{\text{átl}} = \frac{\text{összes út}}{\text{teljes idő}}$ . Mivel a gyors szakaszban töltött idő:  $t_{gy} = \frac{(1-\alpha) \cdot s}{v_{gy}}$  – ahol  $s$  a teljes megtett út –, a lassú szakaszban töltött idő pedig:  $t_l = \frac{\alpha \cdot s}{v_l}$ . Így a teljes útra vett átlagsebesség a következőképpen alakul.

$$v_{\text{átl}} = \frac{s}{\frac{(1-\alpha) \cdot s}{v_{gy}} + \frac{\alpha \cdot s}{v_l}} = \frac{s}{s \cdot \left( \frac{1-\alpha}{v_{gy}} + \frac{\alpha}{v_l} \right)} = \frac{1}{\frac{1-\alpha}{v_{gy}} + \frac{\alpha}{v_l}} \quad (7.1)$$

Ha  $v_l \ll v_{gy}$ , akkor a 7.1. egyenlet nevezőjében az  $\frac{1-\alpha}{v_{gy}} \ll \frac{\alpha}{v_l}$ , így a  $v_{gy}$ -t tartalmazó tag elhanyagolható, tehát  $v_{\text{átl}} \simeq \frac{v_l}{\alpha}$ . Látható, hogy ez egyrészt nem a lassú és gyors sebességek súlyozott átlaga, másrészt szinte teljes egészében a lassú sebesség határozza meg.

## 7.2. Részecskemozgás fűrészfog potenciálban

A szinuszos potenciálban mozgó részecske mozgásának leírása ugyan elliptikus integrálok használatával megoldható, ám a megoldás – bár egzakt – implicit természeté miatt nehéz belőle a jelenség alapvető fizikai természetére vonatkozó következtetéseket levonni. Ezért, hogy a jelenség fizikáját jobban megvilágítsuk, a részecske mozgását egy mesterséges, ám analitikusan jól követhető, fűrészfog alakú potenciálban vizsgáljuk (lásd 7.2. ábra).

A lefelé szálló ágban a részecske konstans +a gyorsulást érez, a felszálló ágban pedig szintén konstans -a gyorsulást (azaz lassulást) szenved el. Célunk annak meghatározása, hogy különböző helyről indított, ám azonos  $v_0$  kezdősebességű részecskéknek együttesen mi lesz az átlagsebessége ebben a rendszerben. Figyeljünk arra, hogyan használjuk az „átlag” szót. Ne keverjük a sebességátlagot az átlagsebességgel! Egyetlen részecske átlagsebességét a korábban is említett  $v_{\text{átl}} = \frac{\text{összes út}}{\text{összes idő}}$  képlettel definiáljuk. Több részecske sebességének átlagát pedig a következő képlettel adhatjuk meg:  $v_{\text{átl}} = \frac{\text{az összes részecske sebességének összege}}{\text{az összes részecske száma}}$ .

Egyetlen részecske átlagsebessége attól függ, hogy a részecske hol került a rendszerbe. Vizsgáljuk meg a 7.2. ábrán látható A, B, C és D pontokat, mint lehetséges kezdeti részecskepozíciókat a fűrészfog potenciálban. Az „A” jelű részecskét a potenciál maximumánál helyeztük a rendszerbe, a „C” jelű részecske a potenciálminimumnál, míg a „B”

jelű a lefelé szálló ág felénél, a „D” jelű pedig a felszálló ág felénél indul el. Számoljuk ki ezen négy részecske átlagsebességét!

- Az „A” részecskére: legyen a potenciál maximuma és minimuma közötti távolság  $d$ . Legyen  $x = 0$  a potenciál minimuma, tehát a részecske  $x = -d$ -nél kerül a rendszerbe. A pályája a leszálló ágban:

$$x(t) = -d + v_0 t + \frac{a}{2} t^2 \quad (7.2)$$

Számoljuk ki, hogy az „A” részecske mennyi idő alatt jut el a potenciálminimumba. Ehhez a fenti, 7.2. egyenletet kell kiértékelnünk az  $x(t) = 0$  helyen. Ez egy másodfokú egyenletre vezet, melynek csak az egyik megoldása releváns fizikailag, hiszen most csak azt az esetet vizsgáljuk, amikor a részecske jobbra halad.

$$t_{le}^A = \frac{-v_0 \pm \sqrt{v_0^2 - 4 \cdot \frac{a}{2} (-d)}}{2 \cdot \frac{a}{2}} \rightarrow \frac{v_0}{a} \cdot \left( -1 + \sqrt{1 + 2 \frac{ad}{v_0^2}} \right) = \frac{v_0}{a} \cdot \left( -1 + \sqrt{1 + 2\delta} \right) \quad (7.3)$$

ahol  $\delta = \frac{ad}{v_0^2}$  a normált gyorsulás. Ha az „A” részecske eléri a következő csúcsot a potenciálban, a sebessége megint  $v_0$  lesz, és ha az idő- és térbeli nulla állapotot átállítjuk erre az új csúcsra, akkor a pálya alakja a következő lesz.

$$x(t) = v_0 t - \frac{a}{2} t^2. \quad (7.4)$$

Az az idő, ami alatt a részecske az előző potenciálminimumban tartózkodik (negatív érték lesz) a következő képletből számolható.

$$-d = v_0 t - \frac{a}{2} t^2 \rightarrow t_{fel}^A = -\frac{v_0}{a} \left( -1 + \sqrt{1 + 2\delta} \right), \quad (7.5)$$

ahol  $\delta$  megegyezik a 7.3. egyenletben bevezetett definícióval. Ha figyelembe vesszük, hogy a mennyi időnek kell eltelnie ahhoz, hogy a részecske az előző potenciálminimumból a következő potenciálmaximumba jusson<sup>1</sup>, akkor láthatjuk, hogy  $t_{le}^A = t_{fel}^A$ . Így az „A” részecske átlagsebessége:

$$v_{\text{átl}}^A = \frac{2d}{2 \cdot \frac{v_0}{a} \left( -1 + \sqrt{1 + 2\delta} \right)} = \frac{\frac{ad}{v_0}}{-1 + \sqrt{1 + 2\delta}}. \quad (7.6)$$

Látható, hogy az „A” részecske átlagsebessége mindig nagyobb lesz, mint a kezdeti  $v_0$  sebessége.

<sup>1</sup>Ami épp a 7.5. egyenlet mínusz egzszeresével egyenlő.

- A „C” részecskére: most legyen  $x = 0$  a potenciál maximumának a helye és  $x = -d$  a részecske kezdeti helye a rendszerbe kerülésekor. Ekkor a részecske pályája a következőképpen írható le:

$$x(t) = -d + v_0 t - \frac{a}{2} t^2. \quad (7.7)$$

Az az idő, ami ahhoz szükséges, hogy  $x = 0$ -ba jussunk a következő alakot veszi fel (hasonlóan a fentiekhez):

$$t_{fel}^C = \frac{v_0}{a} \left( 1 - \sqrt{1 - 2\delta} \right). \quad (7.8)$$

Szimmetria okokból a maximumból a minimumba jutáshoz szükséges idő is ugyanennyi lesz, tehát a „C” részecske átlagsebessége a következőképpen alakul:

$$v_{\text{átl}}^C = \frac{\frac{ad}{v_0}}{1 - \sqrt{1 - 2\delta}}. \quad (7.9)$$

Mivel a „C” részecske a rendszerbe kerülési helyzetéhez képest a pálya összes többi pontján magasabb potenciált érez, így nem meglepő, hogy átlagsebessége alacsonyabb lesz, mint a rendszerbe kerülési sebessége.

- A „B” és „D” részecskékre: a „B” részecskére tekinthetünk úgy, mint ami először egy potenciálgödörön, majd egy potenciáldombon halad keresztül, míg a „D” részecske ennek pont a fordítottját teszi. A potenciálgörödben töltött idő a következőképpen alakul (ugyanazok a hatások érvényesülnek, mint fentebb, csak most a távolság feleakkora):

$$t_{\text{gödör}} = \frac{2v_0}{a} \left( -1 + \sqrt{1 + \delta} \right). \quad (7.10)$$

Hasonlóan a potenciáldombon való áthaladáshoz szükséges idő:

$$t_{\text{domb}} = \frac{2v_0}{a} \left( 1 - \sqrt{1 - \delta} \right), \quad (7.11)$$

így a „B” és „D” részecskék átlagos sebessége a következőnek adódik.

$$v_{\text{átl}}^{B,D} = \frac{\frac{ad}{v_0}}{\sqrt{1 + \delta} - \sqrt{1 - \delta}}. \quad (7.12)$$

Ezen részecskéknek is kisebb az átlagsebessége, mint a kezdeti sebességük, de a hatás itt  $\delta$ -ban másodrendű. A négy részecske sebességátlaga (azaz átlagsebességeik átlaga) a következő alakot veszi fel.

$$v_{\text{átl}} = \frac{1}{4} \cdot (v_{\text{átl}}^A + v_{\text{átl}}^B + v_{\text{átl}}^C + v_{\text{átl}}^D) \quad (7.13)$$

$$= \frac{ad}{4v_0} \left[ \frac{1}{-1 + \sqrt{1 + 2\delta}} + \frac{1}{1 - \sqrt{q - 2\delta}} + \frac{2}{\sqrt{1 + \delta} - \sqrt{1 - \delta}} \right] \quad (7.14)$$

Ha  $\delta$  kicsi, akkor a fenti 7.13. kifejezést közelíthetjük a következővel:

$$v_{\text{átl}} \simeq \frac{ad}{4\delta v_0} \left[ \frac{1}{1 - \frac{\delta}{2} + \frac{\delta^2}{2}} + \frac{1}{1 + \frac{\delta}{2} + \frac{\delta^2}{2}} + \frac{2}{1 + \frac{\delta^2}{8}} \right] = \frac{ad}{2\delta v_0} \left[ \frac{1 + \frac{\delta^2}{2}}{1 + \frac{3\delta^2}{4}} + \frac{1}{1 + \frac{\delta^2}{8}} \right] \quad (7.15)$$

$$\simeq v_0 \left[ 1 - \frac{3\delta^2}{16} \right] \quad (7.16)$$

Tehát a négy vizsgált részecske sebességátlaga összességében alacsonyabb, mint az egyes részecskék kezdeti sebessége. Ez a hatás a  $\delta$ -ban másodrendben mutatkozik meg, és azt mutatja, hogy fűrészfog alakú potenciálban véletlen helyekre azonos sebességgel elhelyezett részecskék nagy átlagban lassulni fognak.

Érdeemes elgondolkodni azon, mit is jelent a fenti eredmény. Az energia minden egyes részecske esetén megmarad és amikor a részecske ugyanabban a fázisban van, mint ahol pályája kezdetén, a sebessége mindig  $v_0$  lesz. Azonban az átlagsebessége nem fog megegyezni a kezdeti sebességével. Az „A” jelű részecskének az átlagsebessége magasabb lesz, mint a kezdeti, a „B”, „C” és „D” jelű részecskéknek pedig alacsonyabb. A részecskék sebességátlaga így összességében alacsonyabb lesz, mint a kezdeti sebességük. Mivel a részecskék sebességátlaga alacsonyabb, mint a kezdeti sebességük, a mozgási energiájuk is csökken a kezdeti mozgási energiájukhoz képest. Tehát a részecskék átlagsebessége lassabb lesz, mint a kezdeti sebességük ebben a periodikus potenciálban, de paradox módon az egyes részecskék mégsem veszítenek energiát. Hogyan lehetséges ez? Úgy, hogy a hiányzó (vagy felesleges) energia a részecskék pillanatnyi potenciális energiájában jelenik meg.

### 7.3. A kinetikus egyenlet Fourier-analízise

Idézzük fel a plazmahullámok tárgyalásánál követett eljárásunkat! (1) – az egyenleteket linearizáltuk, (2) – harmonikus perturbációt feltételeztünk, (3) – a differenciálegyenlet-rendszert algebrai egyenletrendszerre alakítottuk és végül (4) – az algebrai egyenletrendszer determinánsának gyökei szolgáltatták a diszperziós relációt.

Próbáljuk most meg ugyanezt az eljárást végigvinni a kinetikus egyenleten! Az egyszerűség kedvéért rendszerünk legyen egydimenziós, csak elektrosztatikus elektromos teret engedünk meg, és tekintsük az ionokat mozdulatlanoknak! Mivel az ionok mozdulatlanok, minden perturbált mennyiség az elektronokra vonatkozik, azaz mennyiségeinknél az  $e$  indexet elhagyhatjuk.

Az egyensúlyi elektroneloszlás legyen maxwelli

$$f_0(v) = n_0 \frac{1}{\pi^{1/2} v_T} \exp(-v^2/v_T^2), \quad (7.17)$$

ahol  $v_T \equiv \sqrt{2\kappa T/m}$ !

Az egydimenziós kinetikus egyenlet

$$\frac{\partial f}{\partial t} + v \frac{\partial f}{\partial x} - \frac{q}{m} \frac{\partial \phi}{\partial x} \frac{\partial f}{\partial v} = 0 \quad (7.18)$$

és linearizált alakja

$$\frac{\partial f_1}{\partial t} + v \frac{\partial f_1}{\partial x} - \frac{q}{m} \frac{\partial \phi_1}{\partial x} \frac{\partial f_0}{\partial v} = 0, \quad (7.19)$$

ahol  $f_1$  az eloszlásfüggvény perturbációja,  $f = f_0 + f_1$ . Feltéve, hogy a függő változók  $\sim \exp(ikx - i\omega t)$  szerint függenek a tértől és az időtől, a 7.19. egyenlet így írható:

$$-i(\omega - kv)f_1 - ik\phi_1 \frac{q}{m} \frac{\partial f_0}{\partial v} = 0, \quad (7.20)$$

amit  $f_1$ -re megoldhatunk

$$f_1 = -\frac{k}{(\omega - kv)} \frac{q}{m} \frac{\partial f_0}{\partial v} \phi_1. \quad (7.21)$$

Az elektronsűrűség perturbációja ezek után

$$n_1 = \int_{-\infty}^{+\infty} f_1 dv = -\frac{q}{m} \phi_1 \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{k}{(\omega - kv)} \frac{\partial f_0}{\partial v} dv. \quad (7.22)$$

A Poisson-egyenletből kaphatunk még egy összefüggést  $n_1$  és  $\phi_1$  között

$$\frac{\partial^2 \phi_1}{\partial x^2} = -\frac{n_1 q}{\epsilon_0}, \quad (7.23)$$

vagy  $\frac{\partial}{\partial x}$ -t  $ik$ -val helyettesítve

$$k^2 \phi_1 = \frac{n_1 q}{\epsilon_0}. \quad (7.24)$$

7.22. és 7.24. egyenletek kombinálásával a diszperziós relációt kapjuk

$$1 + \frac{q^2}{k^2 m \varepsilon_0} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{k}{(\omega - kv)} \frac{\partial f_0}{\partial v} dv = 0. \quad (7.25)$$

Ezt az egyenletet elegánsabb formába írhatjuk, ha behelyettesítjük  $f_0$  7.17 alatti alakját és bevezetjük a  $\xi = \frac{v}{v_T}$  dimenziótlan részecskesebességet és az  $\alpha = \frac{\omega}{kv_T}$  dimenziótlan fázissebességet:

$$1 - \frac{1}{2k^2 \lambda_D^2} \frac{1}{\pi^{1/2}} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{(\xi - \alpha)} \frac{\partial}{\partial \xi} e^{-\xi^2} d\xi = 0. \quad (7.26)$$

Az elektron szuszceptibilitását

$$\chi = -\frac{1}{2k^2 \lambda_D^2} \frac{1}{\pi^{1/2}} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{(\xi - \alpha)} \frac{\partial}{\partial \xi} e^{-\xi^2} d\xi$$

alakban definiálva a következő alakot ölti:

$$1 + \chi = 0$$

Ezzel a számolással azonban távolról sem oldottuk meg a feladatot, mert 7.26. egyenletben szereplő integrál  $\xi = \alpha$ , azaz  $\omega = kv_T$  esetén nem értékelhető ki.

**Érdemes megjegyezni, hogy míg kétfolyadék képben a kinetikus egyenlet három momentumára és a Poisson-egyenletre volt szükségünk, addig most elegendő volt a kinetikus (Vlaszov-) és a Poisson-egyenletek felhasználása, ami alátámasztja azt az amúgy is ismert tényt, hogy a kinetikus egyenlet egymagában is elegendő a rendszer leírásához.**

## 7.4. A Laplace-transzformáció

Landau jött rá arra, hogy az imént bemutatott Vlaszov–Poisson-problémát nem *sajátérték*, hanem *kezdetiérték*-problémaként kell kezelni. Kezdetiérték-problémák megoldásához pedig nem a Fourier-, hanem a Laplace-transzformáció nyújt megfelelő eszközt.

Vázlatosan tekintsük át a Laplace-transzformáció főbb jellemzőit!

Egy  $\psi(t)$  függvény Laplace-transzformáltja a következő ( $p$  komplex szám):

$$\tilde{\psi}(p) = \int_0^{\infty} \psi(t) e^{-pt} dt. \quad (7.27)$$

Azokban az esetekben, amikor  $\psi(t)$  exponenciálisan növekvő tagokat tartalmaz, elővigyázattal kell eljárni.

Tegyük fel, hogy  $t \rightarrow \infty$  esetén  $\psi(t) \sim \exp(\gamma t)$  szerint divergál, azaz  $\gamma$  a leggyorsabban növekvő kitevő  $\psi$ -ben. Ebből rögtön következik, hogy a 7.27. integrálnak csak

akkor van értelme, ha megkötést teszünk  $p$  valós részére, mégpedig azt, hogy  $\text{Re } p > \gamma$ . Hogy ezt ne felejtsük el, a Laplace-transzformációt explicite így definiáljuk:

$$\tilde{\psi}(p) = \int_0^{\infty} \psi(t)e^{-pt} dt, \quad \text{Re } p > \gamma. \quad (7.28)$$

Szükségünk lesz még a  $\tilde{\psi}(p)$  függvény inverz Laplace-transzformáltjára,  $g(t)$ -re is.

$$g(t) = \int_C \tilde{\psi}(p)e^{pt} dp \quad (7.29)$$

Itt az integrálás  $C$  kontúrjának megválasztásakor tekintettel kell lenni arra, hogy a kontúr csak azokat a tartományokat járhatja be, ahol  $\tilde{\psi}(p)$  értelmezett, azaz ahol  $\text{Re } p > \gamma$ . Egy lehetséges integrálási kontúr az úgynevezett *Bromwich-kontúr*, ahol  $p$  valós részét állandóan tarjuk  $\beta > \gamma$  értéken, a komplex résszel pedig végighaladunk  $-i\infty$ -től  $+i\infty$ -ig. Ha  $\tilde{\psi}(p)$ -nek 7.28. alatti kifejezést vesszük, akkor az inverz Laplace-transzformáció (egy rövid levezetést átugorva):

$$\psi(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\beta-i\infty}^{\beta+i\infty} \tilde{\psi}(p)e^{pt} dp, \quad \beta > \gamma. \quad (7.30)$$

Mielőtt áttérnénk a fizikára, megemlíjtük a Laplace-transzformáció egy másik fontos tulajdonságát is.  $\psi$  időderiváltjának,  $\frac{d\psi}{dt}$ -nek ugyanis parciális integrálás után nagyon egyszerűen számítható a transzformáltja:

$$\int_0^{\infty} \frac{d\psi(t)}{dt} e^{-pt} dt = [\psi(t)e^{-pt}]_0^{\infty} + p \int_0^{\infty} \psi(t)e^{-pt} dt = p\tilde{\psi}(p) - \psi(0). \quad (7.31)$$

Látható, hogy a  $\psi(0)$  kezdeti érték explicite megjelent a transzformáció során, ami mindjárt igazolja is, hogy miért Laplace-transzformáció kell a kezdetiérték-problémákhoz.

## 7.5. A kinetikus egyenlet Landau-féle analízise

Legyen a részecskék sebességeloszlása az alábbi Maxwell-eloszlás:

$$f_{\sigma 0}(\mathbf{v}) = n_{\sigma 0} \left( \frac{m_{\sigma}}{2\pi\kappa T_{\sigma}} \right)^{3/2} \exp(-m_{\sigma}\mathbf{v}^2/2\kappa T_{\sigma})! \quad (7.32)$$

Tegyük fel, hogy  $t = 0$ -ban az egyensúlyi elektromos tér nulla, valamint azt, hogy az eloszlásfüggvény időben csak egy kis perturbáció időfüggésén keresztül változik, azaz

$$f_{\sigma}(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t) = f_{\sigma 0}(\mathbf{v}) + f_{\sigma 1}(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t)! \quad (7.33)$$

A linearizált kinetikus egyenlet a 7.19. egyenlethez hasonlóan

$$\frac{\partial f_{\sigma 1}}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla f_{\sigma 1} - \frac{q_{\sigma}}{m_{\sigma}} \nabla \phi_1 \cdot \frac{\partial f_{\sigma 0}}{\partial \mathbf{v}} = 0. \quad (7.34)$$

A függő változók  $\sim \exp(\mathbf{ik} \cdot \mathbf{x})$  térbeli függését feltételezve kapjuk:

$$\frac{\partial f_{\sigma 1}}{\partial t} + \mathbf{ik} \cdot \mathbf{v} f_{\sigma 1} - \frac{q_{\sigma}}{m_{\sigma}} \phi_1 \mathbf{ik} \cdot \frac{\partial f_{\sigma 0}}{\partial \mathbf{v}} = 0. \quad (7.35)$$

Az időben Laplace-transzformációt végrehajtva

$$(p + \mathbf{ik} \cdot \mathbf{v}) \tilde{f}_{\sigma 1}(\mathbf{v}, p) - f_{\sigma 1}(\mathbf{v}, 0) - \frac{q_{\sigma}}{m_{\sigma}} \tilde{\phi}_1(p) \mathbf{ik} \cdot \frac{\partial f_{\sigma 0}}{\partial \mathbf{v}} = 0 \quad (7.36)$$

és  $\tilde{f}_{\sigma 1}(\mathbf{v}, p)$ -re megoldva az egyenletet

$$\tilde{f}_{\sigma 1}(\mathbf{v}, p) = \frac{1}{(p + \mathbf{ik} \cdot \mathbf{v})} \left[ f_{\sigma 1}(\mathbf{v}, 0) + \frac{q_{\sigma}}{m_{\sigma}} \tilde{\phi}_1(p) \mathbf{ik} \cdot \frac{\partial f_{\sigma 0}}{\partial \mathbf{v}} \right]. \quad (7.37)$$

A Poisson-egyenlet a szokásos módon írható:

$$\nabla^2 \phi_1 = -\frac{1}{\varepsilon_0} \sum_{\sigma} q_{\sigma} n_{\sigma 1} = -\frac{1}{\varepsilon_0} \sum_{\sigma} q_{\sigma} \int f_{\sigma 1}(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t) d^3 v, \quad (7.38)$$

majd  $\nabla \rightarrow \mathbf{ik}$  helyettesítés után

$$k^2 \tilde{\phi}_1(p) = \frac{1}{\varepsilon_0} \sum_{\sigma} q_{\sigma} \int \tilde{f}_{\sigma 1}(\mathbf{v}, p) d^3 v. \quad (7.39)$$

Kombinálva a Poisson- és kinetikus egyenletek fenti alakjait kapjuk:

$$k^2 \tilde{\phi}_1(p) = \frac{1}{\varepsilon_0} \sum_{\sigma} q_{\sigma} \int \left[ \frac{f_{\sigma 1}(\mathbf{v}, 0) + \frac{q_{\sigma}}{m_{\sigma}} \tilde{\phi}_1(p) \mathbf{ik} \cdot \frac{\partial f_{\sigma 0}}{\partial \mathbf{v}}}{(p + \mathbf{ik} \cdot \mathbf{v})} \right] d^3 v. \quad (7.40)$$

Ezt  $\tilde{\phi}_1(p)$ -re megoldva

$$\tilde{\phi}_1(p) = \frac{S(p)}{N(p)} \quad (7.41)$$

adódik, ahol az  $S(p)$  számláló és az  $N(p)$  nevező az alábbi alakú:

$$S(p) = \frac{1}{k^2 \varepsilon_0} \sum_{\sigma} q_{\sigma} \int \frac{f_{\sigma 1}(\mathbf{v}, 0)}{(p + \mathbf{ik} \cdot \mathbf{v})} d^3 v, \quad (7.42)$$

$$N(p) = 1 - \frac{1}{k^2 \varepsilon_0} \sum_{\sigma} q_{\sigma} \frac{q_{\sigma}^2}{m_{\sigma}} \int \frac{\mathbf{ik} \cdot \frac{\partial f_{\sigma 0}}{\partial \mathbf{v}}}{(p + \mathbf{ik} \cdot \mathbf{v})} d^3 v. \quad (7.43)$$



Ezek után már „csak” a

$$\phi_1(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\beta-i\infty}^{\beta+i\infty} \frac{S(p)}{N(p)} e^{pt} dp \quad (7.44)$$

inverz Laplace-transzformációt kell végrehajtani, és máris megkaptuk a keresett végeredményt. 7.44. egyenletben az integrálási határoknál  $\beta$ -t úgy kell megválasztani, hogy az nagyobb legyen az  $\frac{S(p)}{N(p)}$  kifejezésben exponenciálisan leggyorsabban növekvő tagnál.

A most bemutatott formális megoldás szerint  $\phi_1(t)$  a valóságban az integrandus komplexitása miatt nem értékelhető ki, de szerencsére a Landau csillapodás szempontjából elegendő  $\phi_1(t)$  időben aszimptotikus viselkedését ismerni, ami viszont analitikusan számolható.

Részletes levezetés helyett most csak a főbb lépéseket ismertetjük.

A 7.44. egyenletben szereplő integrandust a komplex függvénytanból ismert *reziduum tétel* segítségével értékeljük ki. Ehhez elvileg az integrandus összes pólusát, azaz  $N(p)$  zérushelyeit ismerni kell. Az  $N(p) = 0$  egyenlet a szuszceptibilitások segítségével az alábbi, már ismerős alakban is írható:

$$N(p) = 1 + \chi_e + \chi_i = 0, \quad (7.45)$$

ahol

$$\chi_\sigma = \frac{1}{2k^2\lambda_D^2} [1 + \alpha Z(\alpha)]. \quad (7.46)$$

Itt bevezettük – 7.26-hez hasonlóan – az  $\alpha = ip/kv_{T\sigma}$  és  $\xi = v/v_{T\sigma}$  változókat, és  $Z(\alpha)$  a plazma *diszperziós függvénye*.

$$Z(\alpha) \equiv \frac{1}{\pi^{1/2}} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-\xi^2}}{(\xi - \alpha)} d\xi \quad (7.47)$$

Látható, hogy 7.45. egyenlet komplex együtthatójú, és így – általában – komplex gyökei vannak a most komplex  $\omega = ip$  „frekvencia” síkon.

Kiértékelve a plazma diszperziós függvényét  $|\alpha| \gg 1$  esetre (adiabatikus határeset) a szuszceptibilitásokra az alábbi kifejezés adódik:<sup>2</sup>

$$\chi_\sigma = -\frac{\omega_{p\sigma}^2}{\omega^2} \left( 1 + 3 \frac{k^2}{\omega^2} \frac{\kappa T_\sigma}{m_\sigma + \dots} \right) + i \frac{\omega}{kv_{T\sigma}} \frac{\pi^{1/2}}{k^2\lambda_D^2} \exp(-\omega^2/k^2v_{T\sigma}^2). \quad (7.48)$$

Mivel  $\omega_{pe} \gg \omega_{pi}$ , 7.45. diszperziós egyenletben az ionok járulékát elhanyagoljuk és így kapjuk a komplex  $\omega = \omega_r + i\omega_i$  gyökökre:

<sup>2</sup>A diszperziós függvény nagy argumentumokra érvényes közelítő alakja:  $Z(\alpha) \simeq i\pi \exp(-\alpha^2) - \frac{1}{\alpha} \left( 1 + \frac{1}{2\alpha^2} \right)$ .

$$\begin{aligned}\omega_r^2 &= \omega_{pe}^2 \left( 1 + 3 \frac{k^2}{\omega_r^2} \frac{\kappa T_e}{m_e} \right) \simeq \omega_{pe}^2 (1 + 3k^2 \lambda_{De}^2), \\ \omega_i &= - \sqrt{\frac{8}{\pi}} \frac{\omega_{pe}}{k^3 \lambda_{De}^3} \exp \left[ -(1 + 3k^2 \lambda_{De}^2) / 2k^2 \lambda_{De}^2 \right].\end{aligned}\tag{7.49}$$

Korábban, a kétfolyadék képben a hullámok frekvenciája tisztán valós volt, ezért  $\exp(-i\omega t)$  időfüggést feltételezve a hullámok nem csillapodtak. Most a pontosabb analízis megmutatta, hogy a frekvencia valójában komplex, tehát a hullámok amplitúdója  $\exp(-|\omega_i|t)$  szerint lecseng. Számítsuk ki, milyen gyors ez a lecsengés! A hullám egy periódusideje  $\tau = 2\pi/\omega_r$ , azaz a csillapítás egy periódusidő alatt  $\exp(-|\omega_i|/\tau)$ . A frekvencia valós és képzetes részét 7.49 szerint behelyettesítve a csillapodás  $\exp(-|\omega_i|/\tau) = \exp(-(2\pi/6)) \sim \exp(-1) \sim 0,3$ , ami mindenképpen el nem hanyagolható effektus.

7.2. ábra. Az A, B, C és D részecskék kiindulási helye. Mindegyik jobbra mozog és azonos  $v_0$  kezdeti sebességgel kerül a rendszerbe.