ELEKTRODINAMIKA

BSC
2 kredit

Gálfi László

Tartalomjegyzék

1. fejezet

A Maxwell-egyenletek

Az elektrodinamika törvényeit a Maxwell-egyenletek foglalják magukban. Felírjuk az egyenleteket két különböző formában. Az egyik:

$$c^2 \oint \mathbf{B} d\mathbf{s} = \int \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} d\mathbf{f} + \frac{\mathbf{1}}{\varepsilon_0} \int \mathbf{j} d\mathbf{f} \tag{1.1}$$

$$\oint \mathbf{E} d\mathbf{f} = \frac{\mathbf{1}}{\varepsilon_\mathbf{0}} \int \rho dV \tag{1.2}$$

$$\oint \mathbf{E} d\mathbf{s} = -\int \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} d\mathbf{f} \tag{1.3}$$

$$\oint \mathbf{B} d\mathbf{f} = 0 \tag{1.4}$$

A másik formában a harmadik és negyedik egyenlet változatlan, az első kettő a következő:

$$\oint \mathbf{H} d\mathbf{s} = \int \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} d\mathbf{f} + \int \mathbf{j} d\mathbf{f}$$

$$\oint \mathbf{D} d\mathbf{f} = \int \rho dV$$

Az ismeretlenek az **E** elektromos térerősség, a **B** mágneses indukció vektor, ill. a **D** elektromos eltolás vektora és a **H** mágneses térerősség. Ismertnek tételezzük fel a ρ térfogati töltéssűrűséget és a **j** térfogati áramsűrűséget. A baloldalon tetszőleges zárt görbére vagy zárt felületre vett integrálok, a jobb oldalon a zárt görbe által határolt felületre vagy a zárt felület által határolt térfogatra vett integrálok állnak. ε_0 és c^2 univerzális állandók. A későbbiekben használni fogjuk a $\mu_0 = \frac{1}{\varepsilon_0 c^2}$ állandót is.

Az elektrodinamika tankönyvek, jegyzetek egyik része a Maxwell-egyenleteket az első, másik része a második módon vezeti be. Nagyon fontos tudni, hogy a kétféle felírásban ρ és **j** nem ugyanazt jelenti. Az első felírás első két egyenletében ρ ill. **j** minden lehetséges töltéssűrűséget ill. áramsűrűséget tartalmaz, a második felírásban az anyagokban megjelenő polarizációs töltéssűrűség, ill. polarizációs és mágneses áramsűrűség nem szerepel ρ-ban ill. $\mathbf{j}$-ben. Ezért utóbbiak pontos jelölése $\rho_{\text{valódi}}$ ill. $\mathbf{j}_{\text{valódi}}$, a valódi indexen azt kell érteni, hogy nem polarizációs töltésről, ill. nem polarizációs vagy mágneses áramról van szó. A valódi sűrűségeket általában jobban ismerjük, mint a nem valódiakat. A cél természetesen $\mathbf{E}$ ill. $\mathbf{B}$ meghatározása, ehhez tudnunk kell, hogy milyen kapcsolatban állnak $\mathbf{D}$-vel ill. $\mathbf{H}$-val. A kapcsolat anyagtól függően lehet egyszerű és nagyon bonyolult is. Mindezek a dielektrikumok, ill. a mágneses anyagok tárgyalásánál részletes kifejtésre kerülnek. Azt a nézőpontot fogadjuk el, hogy az elsődleges fizikai mennyiségek $\mathbf{E}$ és $\mathbf{B}$, $\mathbf{D}$-t és $\mathbf{H}$-t abban a reményben vezetjük be, hogy a valódi sűrűségeket tartalmazó egyenleteket könnyebben meg tudjuk oldani.

Az SI-rendszerben az elektrodinamika alapmennyisége az áramerősség, definíciója a következő: két egyenes, egymással párhuzamos, végtelen hosszú, elhanyagolhatóan kis körkeresztmetszetű vákuumban lévő vezetőben, amelyek egymástól 1 méter távolságra vannak, akkor folyik 1A erősségű áram, ha méterenként $2 \cdot 10^{-7}$ N erő hat rájuk. A többi mennyiség egységeit az elektrodinamika törvényeiből származtatjuk, a töltését például a $Q = I \cdot t$, az elektromos térerősségét az $\mathbf{F} = Q \cdot \mathbf{E}$ egyenlőségből. A mágneses indukció vektor definíciója kissé bonyolultabb. 1 T(tesla) a mágneses indukció, ha 1 m^2 területű, 1 A erősségű áramhurokra gyakorolt maximális forgatónyomaték 1 Nm. A definíció alapjául szolgáló törvény természetesen csak kisméretű áramhurokra érvényes jó közelítéssel, a hivatalos mértékegységek helyett mondhatnánk pl. 10^{-4} m^2 területet és 10^{-4} Nm forgatónyomatékot. A definíciókhoz felhasznált törvényeket a Maxwell-egyenletekből le lehet vezetni.

Mit fejeznek ki a Maxwell-egyenletek? Az (1.1) egyenlet szerint az áram és az időben változó elektromos tér mágneses teret kelt, $\varepsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}$ áram dimenziójú mennyiség. A (1.2) egyenlet azt állítja, hogy az elektromos tér forrásai a töltések. A (1.3) egyenlet szerint az időben változó mágneses tér elektromos teret kelt. A (1.4) egyenlet azt a kísérleti tényt fejezi ki, hogy mágneses töltés (monopólus) nem létezik. (Hasonlítsuk össze (1.4)-et (1.2)-vel!)

Az integrális Maxwell-egyenletek a tetszőleges térfogatra és az azt határoló zárt felületre érvényes $\oint \mathbf{E} d\mathbf{f} = \int \mathrm{div}\mathbf{E} dV$ Gauss-tétel és a tetszőleges felületre és az azt határoló zárt görbére érvényes $\oint \mathbf{E} d\mathbf{s} = \int \mathrm{rot}\mathbf{E} d\mathbf{f}$ Stokes-tétel segítségével differenciális alakra hozhatóak. Ezek a következőek:

$$c^2 \mathrm{rot}\mathbf{B} = \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} + \frac{\mathbf{j}}{\varepsilon_\mathbf{0}} \tag{1.5}$$

$$\mathrm{div}\mathbf{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_\mathbf{0}} \tag{1.6}$$

$$\mathrm{rot}\mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \tag{1.7}$$

$$\mathrm{div}\mathbf{B} = 0 \tag{1.8}$$

A differenciálegyenletek térrészenként érvényesek, a térrészek határain határfeltételek állnak fenn. Az integrális egyenletekből levezethető határfeltételek a következőek:

1) $E_{n2} - \quad E_{n1} = \frac{\eta}{\varepsilon_0}$, az elektromos térerősség felületre merőleges, normális komponense a két térrészt elválasztó felületen ugrik, az ugrás nagysága az η felületi töltéssűrűséggel arányos.

2) $\mathbf{E}_{t1} = \quad \mathbf{E}_{t2}$, az elektromos térerősség felülettel párhuzamos, tangenciális komponense (egy kétkomponensű vektor) a két térrészt elválasztó felületen folytonosan megy át.

3) $B_{n2} = B_{n1}$, a mágneses indukció vektor normális komponense a két térrészt elválasztó felületen folytonosan megy át.

4) $\mathbf{n} \times (\mathbf{B}_2 - \mathbf{B}_1) = \frac{\mathbf{i}}{\varepsilon_0 c^2}$, a mágneses indukció vektor tangenciális komponense (ez ad járulékot a vektoriális szorzáshoz) a két térrészt elválasztó felületen ugrik, az ugrás nagysága az $\mathbf{i}$ felületi áramsűrűséggel arányos, $\mathbf{n}$ a felület 1-es térrészből 2-es térrészbe mutató normálisa.

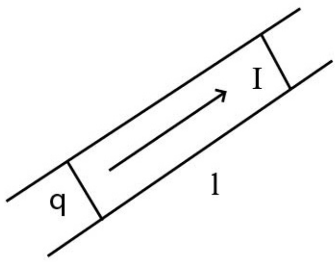
Feladat: Vezessük le a differenciális egyenleteket az integrális egyenletekből!

Az (1.5) egyenlet divergenciáját az (1.6) egyenlet időszerinti parciális deriváltjával összehasonlítva adódik a $\frac{\partial \rho}{\partial t} + \mathrm{div}\mathbf{j} = 0$ kontinuitási egyenlet, ami (a hidrodinamikai anyagmegmaradáshoz hasonlóan) az elektromos töltés megmaradását fejezi ki. Az egyenletet tetszőleges térfogatra integrálva a Gauss-tétel felhasználásával kaphatjuk a

$\frac{d}{dt} \int \rho dV + \oint \mathbf{j} d\mathbf{f} = 0$ egyenletet. Eszerint egy tetszőleges térfogatban az elektromos töltés csak azért változhat időben mert a térfogat határfelületén töltés áramolhat ki és be. A Maxwell-egyenletek tehát implicit módon tartalmazzák a töltés megmaradását, és így a világegyetem össztöltése állandó.

A $\mathbf{j}$ áramsűrűség két részre osztható, $\mathbf{j} = \mathbf{j}_{\text{vez}} + \mathbf{j}_{\text{kon}}$, az első a vezetőben folyó, vezetési (konduktív) áramsűrűség, a második a szabadon mozgó töltések konvektív áramsűrűsége, $\mathbf{j}_{\text{kon}} = \rho \mathbf{v}$, ρ a töltéssűrűség, $\mathbf{v}$ a töltés(ek) sebessége.

Az Ohm-törvényt a Maxwell-egyenletek nem tartalmazzák. Kapcsolatot teremt a vezetőben folyó áram sűrűsége és az elektromos térerősség között. A tapasztalat szerint az áramerősség, $I = \sigma \frac{\Delta\Phi}{l} q$, ahol $\Delta\Phi$ a potenciálkülönbség az l hosszúságú, q (állandó) keresztmetszetű vezetődarab végei között, σ a vezető anyagi minőségére jellemző arányossági tényező, $R = \frac{l}{q\sigma}$ a vezetődarab ellenállása. Az áramsűrűség nagysága, $|\mathbf{j}| = \frac{I}{q} = \sigma \frac{\Delta\Phi}{l}$ az $l \to 0$ határátmenetben $\sigma\,|\mathrm{grad}\Phi| = \sigma\,|\mathbf{E}|$-hez tart, és mivel az áram iránya a pozitív töltés mozgásiránya, ezért $\mathbf{j} = \sigma \mathbf{E}$ a differenciális Ohm-törvény. Itt $\mathbf{j}$ mindenhol a vezetési áram sűrűsége.



1. ábra

2. fejezet

Elektrosztatika

Az elektrosztatika egyenleteit úgy kapjuk, hogy a Maxwell-egyenletekben az áramsűrűség és az időderiváltak helyébe zérust írunk:

$\mathrm{rot}\mathbf{B} = 0, \quad \mathrm{div}\mathbf{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}, \quad \mathrm{rot}\mathbf{E} = 0, \quad \mathrm{div}\mathbf{B} = 0$.

Látható, hogy nincs kapcsolat az elektromos és mágneses mező között, az elektrosztatika és a magnetosztatika egymástól függetlenül tárgyalható. Az elektrosztatika integrális egyenletei:

$$\oint \mathbf{E}d\mathbf{f} = \frac{1}{\varepsilon_0}\int \rho dV, \qquad \oint \mathbf{E}d\mathbf{s} = 0.$$

Ezek akkor használhatók jól, ha a feladat valamilyen szimmetriát mutat, ilyenkor az integrálok könnyen kiszámíthatóak, általános esetben a differenciális egyenleteket kell megoldanunk a határfeltételekkel. Példaként meghatározzuk az egyenletesen töltött gömb elektromos terét.

Legyen az R sugarú gömb össztöltése q, a töltéssűrűség ekkor $\rho = \frac{3q}{4R^3\pi}$. A gömbszimmetria miatt a térerősség csak a gömb középpontjától mért távolság, r függvénye, $\mathbf{E} = \mathbf{E}(\mathrm{r})$. Kényelmes a gömbi koordináták használata, az $\oint \mathbf{E}d\mathbf{s} = 0$ egyenletet a gömb egy tetszőleges hosszúsági, ill. szélességi körére alkalmazva azt kapjuk, hogy $E_\phi = 0$, ill. $E_\vartheta = 0$. Az első integrális egyenletet egy r sugarú gömbre oldjuk meg, két esetet kell megkülönböztetnünk:

$$1) \quad r \geq R \quad \oint E_r df = E_r 4r^2\pi = \frac{q}{\varepsilon_0}, \quad E_r = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}.$$

$$2) \quad r \leq R \quad \oint E_r df = E_r 4r^2\pi = \frac{\rho 4r^3\pi}{3\varepsilon_0} = \frac{q}{\varepsilon_0}\frac{r^3}{R^3}, \quad E_r = \frac{qr}{4\pi\varepsilon_0 R^3}.$$

Emlékezzünk vissza a mechanikára, éppen ilyen szerkezetű egy homogén tömegeloszlású gömb gravitációs tere.

Szimmetria híján a rot $\mathbf{E} = 0$, div$\mathbf{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$ egyenleteket kell térrészenként megoldanunk. Mivel rot $\mathbf{E} = 0$, $\mathbf{E}$ felírható egy skalárfüggvény gradienseként,

$\mathbf{E} = -\mathrm{grad}\Phi$, Φ az elektrosztatikus vagy skalár potenciál. Megjegyezzük, hogy mint a mechanikában az erőt, itt is $(-\Phi)$ gradienseként írjuk fel $\mathbf{E}$-t, az egységnyi töltésre ható erőt. Ez a választás vezet az energiamegmaradás olyan alakjára, hogy a mozgási és helyzeti energia összege állandó. A második egyenletbe helyettesítve $\mathbf{E} = -\mathrm{grad}\Phi$ –t kapjuk a Poisson-egyenletet: (a Δ-operátor derékszögű koordinátákban a másodrendű parciális deriváltak összege)

$$\mathrm{div\ grad}\Phi \ = \ \Delta\Phi \ = \ -\frac{\rho}{\varepsilon_0}.$$

A Poisson-egyenletet is térrészenként kell megoldani, és a megoldásokat össze kell illeszteni az

$$\mathbf{E}_{t1} = \mathbf{E}_{t2} \quad \text{és} \quad E_{n2} - E_{n1} = \frac{\eta}{\varepsilon_0}$$

határfeltételek segítségével. A potenciálkülönbség fizikai jelentése az egységtöltésen az elektromos térerősség által végzett munka:

$$\int_A^B \mathbf{E}\, d\mathbf{s} = \int_A^B \mathrm{grad}\Phi\, d\mathbf{s} = \Phi(B) - \Phi(A).$$

Az $\mathbf{r}'$ helyzetvektorú pontban lévő q ponttöltés elektromos tere az $\mathbf{r}$ helyzetvektorú pontban:

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q(\mathbf{r}-\mathbf{r}')}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|^3}.$$

A Maxwell-egyenletek lineárisak, azaz változók elsőtől különböző hatványait és különböző változók szorzatait sem tartalmazzák, így alkalmazható rájuk a szuperpozíció elve, amely szerint megoldások összege (tetszőleges lineáris kombinációja) is megoldás.

Egy tetszőleges $\rho(\mathbf{r}')$ töltéseloszlás elektromos tere úgy kapható meg, hogy a kis dV' térfogatokban lévő $\rho dV'$ töltések elektromos tereit összeadjuk, azaz integráljuk:

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int \frac{\rho(\mathbf{r}')(\mathbf{r}-\mathbf{r}')}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|^3}dV'.$$

Megmutatható, hogy ez az $\mathbf{E}(\mathbf{r})$ megoldása a Maxwell-egyenleteknek. Szavakkal kifejezve:

elektrosztatika = Coulomb-törvény + szuperpozíció.

Az előzőekhez hasonlóan egy ponttöltés potenciálja:

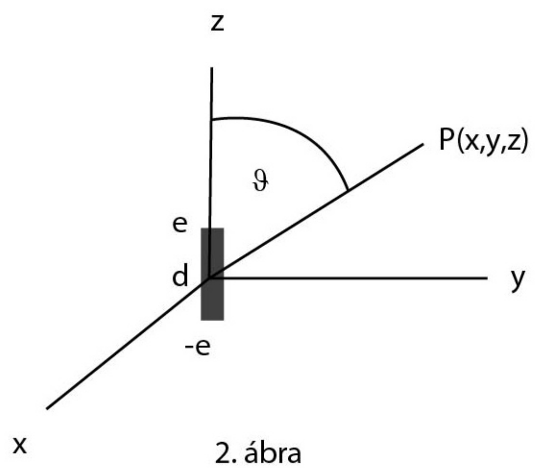
$$\Phi(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|},$$

egy $\rho(\mathbf{r}')$ töltéseloszlás potenciálja:

$$\Phi(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int \frac{\rho(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}dV'.$$

Megmutatható, hogy ez a $\Phi(\mathbf{r})$ kielégíti a Poisson-egyenletet.

Ha le tudnánk írni egy ponttöltés töltéssűrűségét, akkor az általános képletből is megkaphatnánk a ponttöltés potenciálját. A keresett töltéssűrűség olyan, hogy a ponttöltés helyén kívül mindenhol 0, ott viszont végtelen, mert 0 térfogattal kell osztanunk. Ilyen függvény nincs. A matematikusok ezért bevezették az általánosított függvény fogalmát, amelyet egy, a megszokott reguláris függvények alkotta sorozat határfüggvényeként értelmeztek. A Dirac-ról elnevezett δ- függvény olyan Gauss-függvények (haranggörbék) határfüggvénye, amelyeknek a teljes értelmezési tartományra vett integrálja 1, szélességük 0-hoz, ezért maximális értékük ∞-hez tart. A definíció szerint így $\int \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0)dV = 1$. Az $\mathbf{r}_0$ helyzetvektorú q ponttöltés töltéssűrűsége $q\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0)$, $\int q\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0)dV = q$. Tetszőleges $f(\mathbf{r})$ függvényre igaz, hogy $\int f(\mathbf{r})\,\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0)dV = f(\mathbf{r}_0)$.



2. ábra

Legyen e töltés a derékszögű koordinátarendszer $(0,\,0,\,d/2)$ pontjában, $-e$ töltés a $(0,\,0,\,-d/2)$ pontban. Ha d kicsi a megfigyelési pont és a kezdőpont r távolságához képest, akkor a két ponttöltés együttes potenciálja az egyes töltések potenciáljainak d/r szerinti sorfejtésével a következő alakra hozható:

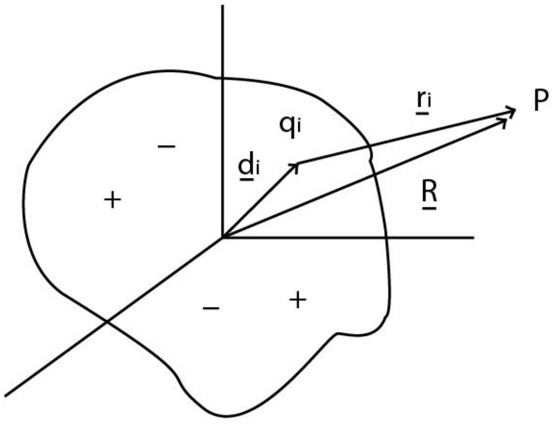
$$\Phi(x, y, z,) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{z}{r^3}ed = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\mathbf{pr}}{r^3} = -\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\mathbf{p}, \mathrm{grad}\frac{1}{r}\right).$$

Feladat: Vezessük le ezt az összefüggést **!**

Itt $\mathbf{p}$ a két töltés dipólmomentumvektora, $|\mathbf{p}| = ed$, a vektor a negatív töltéstől a pozitív felé mutat. A kis dipólus térerősségvektora:

$$\mathbf{E} = -\mathrm{grad}\Phi = -\mathrm{grad}\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\mathbf{pr}}{r^3} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{3(\mathbf{pr})\,\mathbf{r}}{r^5} - \frac{\mathbf{p}}{r^3}\right).$$

Legyen adott valamilyen töltéseloszlás, szeretnénk meghatározni ennek közelítő potenciálját nagy távolságban. A koordinátarendszer kezdőpontját a töltésekhez közel vesszük fel, a q_i töltés helyzetvektora legyen $\mathbf{d}_i$, a potenciálponté $\mathbf{R}$, a töltéstől a potenciálponthoz mutató vektor $\mathbf{r}_i$. A töltésrendszer össztöltése $\sum\limits_i q_i = Q$, eredő dipólmomentuma definíció szerint $\mathbf{p} \equiv \sum\limits_i q_i \mathbf{d}_i$ (Belátható, hogy két ellentétes töltés esetén ez a defíníció visszaadja a $\mathbf{p} = e\mathbf{d}$ dipólmomentumot.)



3. ábra

1. közelítés: $R \gg d_i$ esetén $r_i \approx R$,

$$\Phi = \frac{\sum\limits_i q_i}{4\pi\varepsilon_0 R} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 R},$$

a kezdőpontban lévő Q töltés potenciáljával egyenlő.
2. közelítés: $r_i = \sqrt{R^2 + d_i^2 - 2\mathbf{R}\mathbf{d}_i} \approx R - \frac{\mathbf{R}\mathbf{d}_i}{R}$, $r_i^{-1} \approx R^{-1}\left(1 + \frac{\mathbf{R}\mathbf{d}_i}{R^2}\right)$,

$$\Phi = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{Q}{R} + \sum_i q_i \frac{\mathbf{d}_i\mathbf{R}}{R^3} + ...\right) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{Q}{R} + \frac{\mathbf{p}\mathbf{R}}{R^3} + \dots\right),$$

a kezdőpontban lévő Q töltés és $\mathbf{p}$ dipólmomentum potenciáljával egyenlő.

A zárójelbeli ... az elhanyagolt, $\frac{d}{R}$-ben magasabbrendű tagokra utal. A kapott eredmény az ún. multipólus sorfejtés első két tagja.

A vezetők olyan szilárd testek, amelyek sok szabad elektront tartalmaznak. Ezek az egyes atomok „külső” elektronjai, nem kötődnek szorosan atomjaikhoz, elektromos erőtér hatására mozgásba jöhetnek. Így elektrosztatikailag csak az lehetséges, hogy a vezető belsejében $\mathbf{E} = 0$, a vezető külső felületén $\mathbf{E}$ merőleges a felületre, amely ezért ekvipotenciális felület kell legyen. A vezető belsejében div$\mathbf{E}$ is 0, ezért a térbeli töltéssűrűségnek is 0-nak kell lennie. Ezt úgy kell érteni, hogy nem atomi méretekben vizsgálódunk, nem megyünk olyan „közel” a protonokhoz és elektronokhoz, hogy érezzük azok elektromos terét, hanem átlagolunk olyan, nagyon kis tartományokra, amelyek még mindig nagyon sok protont és elektront tartalmaznak. Azt mondhatjuk, hogy makroszkópikus elektrodinamikával foglalkozunk.

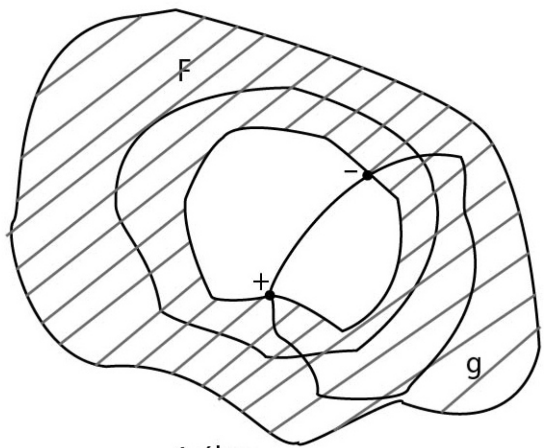
Megvizsgáljuk, hogyan változik a vezető belsejébe vitt töltés időben. Az Ohm-törvény szerint $\mathbf{j} = \sigma\mathbf{E}$, az egyszerűség kedvéért tegyük fel, hogy σ állandó. A kontinuitási egyenletet átalakítjuk:

$$0 = \frac{\partial\rho}{\partial t} + \mathrm{div}\mathbf{j} = \frac{\partial\rho}{\partial t} + \mathrm{div}\sigma\mathbf{E} = \frac{\partial\rho}{\partial t} + \sigma\mathrm{div}\mathbf{E} = \frac{\partial\rho}{\partial t} + \sigma\frac{\rho}{\varepsilon_0},$$

ennek megoldása

$\rho = \rho_0 e^{\alpha}, \quad \alpha = -\frac{\sigma}{\varepsilon_0}t.$

A töltéssűrűség tehát a $t_r = \frac{\varepsilon_0}{\sigma}$ relaxációs idő alatt e-ed részére csökken, szokás azt mondani, hogy a töltések „kiülnek” a vezető felületére. Vezetőkre t_r kicsi, pl. rézre $\sigma = 6 \cdot 10^7$ A/Vm, $t_r = 0,5 \cdot 10^{-8}$ s. (Szigetelőkre $\sigma = 0$, $\rho =$ állandó.)



4. ábra

Lehet-e elektromos erőtér a vezető belsejében lévő üres üregben? Vegyük körül az üreget egy olyan zárt felülettel, amelynek minden pontja a vezetőben van, tehát a felületen $\mathbf{E} = 0$. Erre a felületre $\oint \mathbf{E}d\mathbf{f} = 0$, ami azt jelenti, hogy az üregben az össztöltés 0. Lehetséges-e, hogy az üreg határán, a vezető belső felületén egyenlő számban vannak pozitív és negatív töltések? Tegyük fel, hogy így van, és rajzoljunk meg az üregben egy olyan erővonalat, amely egy pozitív töltésből indulva egy negatív töltésben végződik. Egészítsük ki ezt az erővonalat zárt görbévé egy a vezetőben haladó szakasszal. E zárt görbére $\oint \mathbf{E}d\mathbf{s} = 0$. Az integrálhoz a vezető belsejében haladó szakasz nem ad járulékot, mert ott $\mathbf{E} = 0$, az erővonal járuléka viszont nem lehet 0, mert ez azt jelentené, hogy munkavégzés nélkül mozgathanánk töltést a pozitív töltésből a negatívba. Töltések tehát az üreg falán sem lehetnek. A vezető belsejében lévő üreget szokás Faraday-kalitkának nevezni, ez megvédi pl. az űrhajósokat a lehetséges külső elektromos tértől.

3. fejezet

Dielektrikumok

Ha egy kondenzátor lemezei közé szigetelő anyagot csúsztatunk be, akkor a tapasztalat szerint a kondenzátor kapacitása ε_r-szeresére nő, ε_r a szigetelő anyagának relatív dielektromos állandója. A jelenség magyarázata az, hogy szigetelő az elektromos tér hatására polarizálódik, a semleges atomok töltései egy kicsit elmozdulnak, a protonok és elektronok töltésközéppontjai, amelyek eredetileg egybeestek, szétválnak, ún. indukált dipólmomentumok jönnek létre. (A töltésközéppont a tömegközéppont mintájára definiálható.) A térfogategység dipólmomentuma, $\mathbf{P} = Nq\mathbf{d}$, N az atomok számsűrűsége, $q\mathbf{d}$ egy atom indukált dipólmomentuma. A $\mathbf{P}$ dipólmomentumsűrűség másik neve: polarizációs vektor.

Korábban meghatároztuk egy kis dipólus potenciálját. Ennek ismeretében egy térfogati dipóluseloszlás potenciálja a szuperpozíció elv felhasználásával könnyen felírható,

$$\Phi(\mathbf{r}) = -\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int \left(\mathbf{P}(\mathbf{r}'), \mathrm{grad}_r \frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} dV'\right),$$

(az integrandus a $\mathbf{P}$ és a grad vektor skalárszorzata). Ez a kifejezés vektoranalitikai tételek és azonosságok segítségével a következő alakra hozható:

$$\Phi(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int \frac{(-\mathrm{div}\mathbf{P})}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} dV' + \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\oint \frac{P_n}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} df',$$

a második integrált a dipóluseloszlást határoló felületre kell képezni, az integrációs változó mindkét integrálban $\mathbf{r}'$. Ezt a kifejezést a töltéseloszlás potenciáljával összehasonlítva megállapíthatjuk, hogy egy dipóluseloszlás potenciálja egy $-\,\mathrm{div}\mathbf{P}$ térfogati és egy P_n felületi töltéseloszlás potenciáljával ekvivalens, P_n a polarizáció vektornak a térfogatból kifelé mutató normális komponense.

Sok olyan szigetelő anyag van, amelyre $\mathbf{P} = \chi\varepsilon_0\mathbf{E}$ (és vannak olyanok is, amelyekre ez nem teljesül), χ az anyag elektromos szuszceptibilitása. A síkkondenzátorban (a szokásos közelítésben) **E,** így $\mathbf{P}$ is állandó, ezért $\rho_{pol} = -\mathrm{div}\mathbf{P} = 0$, a szigetelő felületén $\eta_{pol} = P_n$.

Felhasználva az $\mathbf{E}$ normális komponensére vonatkozó határfeltételt, a kondenzátorban

$$|\mathbf{E}| = \frac{\eta}{\varepsilon_0} = \frac{\eta_{val} + \eta_{pol}}{\varepsilon_0} = \frac{\eta_{val} + |\mathbf{P}|}{\varepsilon_0} = \frac{\eta_{val} + \chi\varepsilon_0 |\mathbf{E}|}{\varepsilon_0},$$

így

$$|\mathbf{E}| = \frac{\eta_{val}}{\varepsilon_0}\frac{1}{1+\chi},$$

a kondenzátor kapacitása pedig $C = \frac{F\eta_{val}}{\Delta\Phi} = \frac{\varepsilon_r\varepsilon_0 F}{d}$, a tapasztalatnak megfelelően, $\varepsilon_r = 1+\chi$. Ugyanígy szétválasztjuk a térfogati töltéssűrűséget valódira és polarizációsra:

$$\mathrm{div}\mathbf{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0} = \frac{\rho_{val} + \rho_{pol}}{\varepsilon_0} = \frac{\rho_{val} - \mathrm{div}\mathbf{P}}{\varepsilon_0},$$

amiből

$$\mathrm{div}\left(\mathbf{E} + \frac{\mathbf{P}}{\varepsilon_0}\right) = \frac{\rho_{val}}{\varepsilon_0}.$$

A $\mathbf{D} \equiv \varepsilon_0\mathbf{E} + \mathbf{P}$ definícióval bevezetjük az elektromos eltolás $\mathbf{D}$ vektorát. Az elektrosztatika egyenletei így

$$\mathrm{div}\mathbf{D} = \rho_{val}, \quad \mathrm{rot}\mathbf{E} = 0.$$

$\mathbf{D}$-nek nincs olyan egyszerű fizikai jelentése, mint $\mathbf{E}$-nek és $\mathbf{P}$-nek. Azért vezetjük be, mert a rá vonatkozó egyenletben csak a valódi töltéssűrűség szerepel, ezt általában jobban ismerjük, mint a polarizációsat, így várhatóan az egyenletet is könnyebben lehet megoldani, mint az $\mathbf{E}$-re vonatkozót. Hasonló módon átalakítjuk az $\mathbf{E}$ normális komponensére vonatkozó határfeltételt:

$$E_{n2} - E_{n1} = \frac{\eta}{\varepsilon_0} = \frac{\eta_{val} + \eta_{pol}}{\varepsilon_0} = \frac{\eta_{val} - P_{n2} + P_{n1}}{\varepsilon_0},$$

$\mathbf{n}$ a közegeket elválasztó felület normális egységvektora az 1-es közegből a 2-es felé mutat, P_{n1} és P_{n2} a közegek polarizáció vektorainak $\mathbf{n}$ irányú komponensei, P_{n2} előtt azért van $-$ előjel, mert a polarizációs felületi töltést a polarizáció vektorának a közegből kifelé mutató komponense adja meg. Az egyenletet átrendezve azt kapjuk, hogy

$$(\varepsilon_0 E_{n2} + P_{n2}) - (\varepsilon_0 E_{n1} + P_{n1}) = D_{n2} - D_{n1} = \eta_{val},$$

tehát a $\mathbf{D}$ vektor normális komponensére vonatkozó határfeltételben is csak a valódi töltés jelenik meg.

Fontos megjegyezni, hogy az elektromos megosztás során létrejövő töltésszétválás nem polarizáció. Mint korábban megjegyeztük, poarizáció során az atomok töltésközéppontjai csak igen kis mértékben mozdulnak el, míg egy pl. 1 m sugarú fémgömbön végbemenő megosztásnál az ellentétes előjelű töltések méteres távolságra is kerülhetnek egymástól. **D**-re éppen a megosztás alapján lehet mérési utasítást adni.

Vannak olyan szigetelő (félvezető) ún. ferroelektromos anyagok, amelyek egyes makroszkopikus tartományainak külső elektromos tér nélkül is van elektromos dipólmomentumuk, ilyen pl a $BaTiO_3$ báriumtitanát. Ez annak következménye, hogy a molekulák pozitív és negatív töltésközéppontja nem esik egybe. Az ilyen anyagokra nem érvényes a $\mathbf{P} = \chi\varepsilon_0\mathbf{E}$ összefüggés. Ferroelektromos anyagokból elektréteket lehet előállítani, ezeknek tartós elektromos dipólmomentuma van, ilyen pl. a viasz.

Érdekes és anyagszerkezeti szempontból fontos kérdés, hogy milyen a térerősség a dielektrikumok üregeiben. Helyezzük a dielektrikumot feltöltött síkkondenzátor lapjai közé. Tudjuk, hogy ha a fegyverzetek elég nagyok, távolságuk elég kicsi, akkor a kondenzátoron belül, a szélektől elég távol az **E** térerősség jó közelítéssel állandó. Ezt a dielektrikumon belüli átlagos értéknek kell tekintenünk, hiszen a közeg atomjai között mozogva gyorsan változó elektromos teret észlelnénk. Nem erre vagyunk kíváncsiak, hanem egy nagyon sok atomot tartalmazó térfogatra átlagolt térerősségre. Ezt az átlagolást matematikailag precíz módon el lehet végezni, leírása megtalálható pl. J. D. Jackson Klasszikus elektrodinamika c. könyvében. Mostantól közegek jelenléte esetén a Maxwell-egyenletekben szereplő **E**, **D**, **B**, **H** mindig ilyen átlagolt térmennyiségeket jelentenek.

Tekintsünk először egy **E**-vel párhuzamos, hosszú, keskeny rést és egy olyan téglalapot, amelynek két hosszú oldala párhuzamos a réssel, egyik a résen belül, másik a résen kívül halad, a másik két, rövid oldal köti őket össze. Mivel **E** körintegrálja minden zárt görbére 0, és a rövid oldalak járuléka nagyon jó közelítéssel 0, a résen belüli térerősség egyenlő kell legyen a közegen belüli (átlagos) **E**-vel.

Tekintsünk most egy **E**-re merőleges hosszú, keskeny rést és egy olyan téglatestet, amelynek két nagy lapja **E**-re merőleges, egyik a résen belül, másik a résen kívül, a másik négy lap párhuzamos **E**-vel. Mivel **D** zárt felületre vett integrálja 0 (valódi töltés nincs), a résen belüli **D** egyenlő kell legyen a közegen belüli (átlagos) **D**-vel, ezért az üregben $\mathbf{E} = \frac{\mathbf{D}}{\varepsilon_0}$.

Tekintsünk végül egy G gömb alakú üreget. A szuperpozíció elve szerint **E** az üreges dielektrikum üregbeli térerősségének és a közeg egy G gömb alakú darabja gömbön belüli térerősségének összege. A G gömbön belül a **P** dipólmomentumsűrűség állandó (feltételezzük, hogy a közegre érvényes a $\mathbf{P} = \chi\varepsilon_0\mathbf{E}$ összefüggés), ezért egy állandó polarizációjú gömb gömbön belüli térerősségére van szükségünk, megmutatható, hogy ez $-\frac{\mathbf{P}}{3\varepsilon_0}$–lal egyenlő. Így a gömb alakú üregen belül a térerősség, $\mathbf{E}_{\text{üreg}} = \mathbf{E} + \frac{\mathbf{P}}{3\varepsilon_0}$.

Feladat: Mutassuk meg, hogy az egyenletesen polarizált gömb elektromos tere a gömbön belül $-\frac{\mathbf{P}}{3\varepsilon_0}$-lal egyenlő.

A későbbiekben szükségünk lesz egy $\mathbf{E}_0$ külső elektromos tér által polarizált gömb **p** eredő dipólmomentumára. A fentiek szerint a gömbön belül az eredő térerősség $\mathbf{E}_0 - \frac{\mathbf{P}}{3\varepsilon_0}$, ezért $\mathbf{P} = \varepsilon_0(\varepsilon_r - 1)\left(\mathbf{E}_0 - \frac{\mathbf{P}}{3\varepsilon_0}\right)$ (feltételeztük, hogy a gömb közegére érvényes a $\mathbf{P} = \varepsilon_0 \chi \mathbf{E}$ összefüggés), innen $\mathbf{P}$ kifejezhető. Végül

$$\mathbf{p} = \frac{4\pi}{3} a^3 \mathbf{P} = 4\pi\varepsilon_0 \frac{\varepsilon_r - 1}{\varepsilon_r + 2} a^3 \mathbf{E}_0.$$

4. fejezet

Stacionárius áram

Ebben a fejezetben az egyenáramra vonatkozó törvényekkel és az áram által keltett mágneses térrel foglalkozunk. Feltételezzük, hogy az elektromos és mágneses erőtér időben nem változik. A mágneses indukcióvektorra vonatkozó integrális egyenletek:

$$\oint \mathbf{B} d\mathbf{f} = 0, \qquad \oint \mathbf{B} d\mathbf{s} = \frac{1}{\varepsilon_0 c^2} \int \mathbf{j} d\mathbf{f} = \frac{I}{\varepsilon_0 c^2},$$

I az áramerősség. A differenciális egyenletek:

$$\mathrm{div}\mathbf{B} = 0, \quad \mathrm{rot}\mathbf{B} = \frac{\mathbf{j}}{\varepsilon_0 c^2},$$

a határfeltételek:

$$B_{n1} = B_{n2}, \quad \mathbf{n} \times (\mathbf{B}_2 - \mathbf{B}_1) = \frac{\mathbf{i}}{\varepsilon_0 c^2},$$

$\mathbf{i}$ a felületi áramsűrűség.

Először az egyenletek általános megoldási módszerét tárgyaljuk. Mivel $\mathrm{div}\mathbf{B} = 0$, $\mathbf{B}$ felírható egy vektor rotációjaként, $\mathbf{B} = \mathrm{rot}\mathbf{A}$, $\mathbf{A}$ a vektorpotenciál. Az $\mathbf{A}' = \mathbf{A} + \mathrm{grad}\chi$ vektor ugyanazt a $\mathbf{B}$-t állítja elő, mint $\mathbf{A}$, tehát utóbbi csak egy ún. mértéktranszformáció erejéig meghatározott, kiróhatunk rá valamilyen mellékfeltételt. Ha pl. azt írjuk elő, hogy $\mathrm{div}\mathbf{A} = 0$ teljesüljön, akkor azt mondjuk, hogy Coulomb-mértékben dolgozunk. Később lesz szó más mértékről is. $\mathbf{B} = \mathrm{rot}\mathbf{A}$ -t a másik Maxwell-egyenletbe helyettesítve és egy vektoranalitikai azonosságot felhasználva azt kapjuk, hogy

$$\mathrm{rot}\mathbf{B} = \mathrm{rot}\ \mathrm{rot}\mathbf{A} = \mathrm{grad}\ \mathrm{div}\mathbf{A} - \Delta\mathbf{A} = \frac{\mathbf{j}}{\varepsilon_0 c^2},$$

Coulomb-mértékben ez a $\Delta\mathbf{A} = -\frac{\mathbf{j}}{\varepsilon_0 c^2}$ Laplace-egyenletre vezet. E vektoregyenlet három komponense formailag azonos az elektrosztatika Poisson-egyenletével, a szuperpozíció elvet használva felírhatjuk a megoldást:

$$\mathbf{A}\left(\mathbf{r}\right)=\frac{\mu_0}{4\pi}\int\frac{\mathbf{j}\left(\mathbf{r}'\right)dV'}{\left|\mathbf{r}-\mathbf{r}'\right|}.$$

Megmutatható, hogy ez a megoldás kielégíti az egyenletet és a div$\mathbf{A}=0$ mellékfeltételt is.

$$\mathbf{B}\left(\mathbf{r}\right)=\mathrm{rot}\mathbf{A}\left(\mathbf{r}\right)=\frac{\mu_0}{4\pi}\int\mathrm{rot}_r\frac{\mathbf{j}\left(\mathbf{r}'\right)dV'}{\left|\mathbf{r}-\mathbf{r}'\right|}=\frac{\mu_0}{4\pi}\int\frac{\mathbf{j}\left(\mathbf{r}'\right)\times\left(\mathbf{r}-\mathbf{r}'\right)dV'}{\left|\mathbf{r}-\mathbf{r}'\right|^3}.$$

Lineáris vezetőre $\mathbf{j}dV{=}Id\mathbf{s}$, ezért

$$\mathbf{B}\left(\mathbf{r}\right)=\frac{\mu_0 I}{4\pi}\int\frac{d\mathbf{s}'\times\left(\mathbf{r}-\mathbf{r}'\right)}{\left|\mathbf{r}-\mathbf{r}'\right|^3},$$

ez a Biot-Savart törvény.

Alkalmazásként meghatározzuk egy kisméretű vezetőhurok mágneses terét a huroktól nagy távolságban. Az $\mathbf{A}\left(\mathbf{r}\right)=\frac{\mu_0}{4\pi}I\oint\frac{d\mathbf{s}'}{\left|\mathbf{r}-\mathbf{r}'\right|}$ egyenlőség mindkét oldalát skalárisan szorozzuk egy állandó $\mathbf{a}$ vektorral, hogy alkalmazni tudjuk a Stokes-tételt:

$$\mathbf{a}\mathbf{A}\left(\mathbf{r}\right)=\frac{\mu_0}{4\pi}I\oint\frac{\mathbf{a}d\mathbf{s}'}{\left|\mathbf{r}-\mathbf{r}'\right|}=\frac{\mu_0}{4\pi}I\int d\mathbf{f}'\mathrm{rot}_{r'}\frac{\mathbf{a}}{\left|\mathbf{r}-\mathbf{r}'\right|}=\mathbf{a}\frac{\mu_0}{4\pi}I\int d\mathbf{f}'\times\mathrm{grad}_{r'}\frac{1}{\left|\mathbf{r}-\mathbf{r}'\right|},$$

az utolsó átalakításnál vektoranalitikai azonosságot használtunk ki és azt, hogy az állandó $\mathbf{a}$ vektor kihozható az integrálás elé. $\frac{r'}{r}$ szerinti sorfejtéssel

$$\mathbf{A}\left(\mathbf{r}\right)=\frac{\mu_0}{4\pi}I\int d\mathbf{f}'\times\mathrm{grad}_{r'}\left(1+\frac{\mathbf{r}\mathbf{r}'}{r^2}+\ldots\right)\frac{1}{r}\approx\frac{\mu_0}{4\pi}I\int d\mathbf{f}'\times\frac{\mathbf{r}}{r^3}=\frac{\mu_0}{4\pi}\frac{\mathbf{m}\times\mathbf{r}}{r^3}.$$

Az áramforrásokban a töltéseket különböző típusú erők mozgatják, pl. a van der Graaf generátorban a szalag mechanikai ereje, a galvánelemekben a koncentrációkülönbség okozta kémiai erő. Ezek biztosítják az állandó feszültségkülönbséget.

Az áramforrás beoltott elektromotoros erejére jellemző $\mathbf{E}'$ vektor a definíció szerint azzal a térerősséggel egyenlő, ami a töltésszétválasztás során létrejött elektromos térerősséget kompenzálja, amikor nem folyik áram: $\mathbf{E}{+}\mathbf{E}'=0$. Az $\mathbf{E}'$-vel jellemzett mechanikai, kémiai stb. erők az elektromos térerősséghez hasonlóan részt vesznek a töltések mozgatásában, az Ohm törvény általános alakja: $\mathbf{j}=\sigma\left(\mathbf{E}+\mathbf{E}'\right)$, $\mathbf{E}'$ csak az áramforrásokban különbözik 0-tól.

Az egyenáram elektromos terének maghatározására szolgáló egyenletek:

$$\mathrm{div}\mathbf{E}=\frac{\rho}{\varepsilon_0},\quad \mathrm{rot}\mathbf{E}\ =0,\quad \mathbf{j}=\sigma\left(\mathbf{E}+\mathbf{E}'\right),$$

a kontinuitási egyenlet div $\mathbf{j}=0$. A vezetőkön kívül (itt feltevés szerint $\rho=0$) a $\Delta\Phi=0$ egyenletet kell megoldani a határfeltételekkel. A vezetőn belül ρ-t nem ismerjük, a kontinuitási egyenletből indulhatunk ki:

$$\mathrm{div}\mathbf{j} = \mathrm{div}\left(\sigma\left(\mathbf{E}+\mathbf{E}'\right)\right) = 0.$$

Az áramforráson kívül $\mathbf{E}' = 0$, ezért

$$\mathrm{div}\left(\sigma\mathbf{E}\right) = \sigma\mathrm{div}\mathbf{E} + \mathbf{E}\mathrm{grad}\sigma = 0.$$

Ha σ állandó, akkor div $\mathbf{E} = 0$, $\Delta\Phi = 0$, ha σ változik, akkor div $\mathbf{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0} = -\frac{\mathbf{E}\mathrm{grad}\sigma}{\sigma}$, ez azt jelenti, hogy inhomogén vezetőben térfogati töltéssűrűség alakul ki. A div $\mathbf{j} = 0$ kontinuitási egyenletből a Gauss-tétel segítségével kapjuk, hogy két különböző vezetőképességű vezetőszakaszt elválasztó határfelületen

$$j_{n1} = j_{n2}, \quad \text{ezért} \quad \sigma_1 E_{n1} = \sigma_2 E_{n2},$$

ami azt jelenti, hogy a határfelületen felületi töltéssűrűség halmozódik fel. A jelenség egy gyakran előforduló közlekedési helyzettel szemléltethető. Ha egy többsávos út pl. az útszélen végzett munkák miatt folyamatosan szűkül, „vezetőképessége” folytonosan változik, akkor az autók be akarnak sorolni egymás mögé, ezt indexeléssel, esetleg dudálással jelzik, amit „térfogati töltéssürüségnek” foghatunk fel. Ha pedig az egyik sávot valahol lezárják, az út „vezetőképessége” ugrásszerűen változik, akkor a lezárás közvetlen közelében észlelhető indexelés, dudálás, azaz „felületi töltéssűrűség”.

Feladat: Vezessük le a $j_{n1} = j_{n2}$ összefüggést!

Lényegesen egyszerűbb feladat az áramerősségek meghatározása. Lineárisnak nevezzük az olyan vezetőt, amelyben a $\mathbf{j}$ áramsűrűség, és a $d\mathbf{s}$ vonalelem párhuzamos egymással, kis keresztmetszetű drótra ez jó közelítésnek tekinthető. Ilyen vezetőkből álló áramkörre, zárt görbére

$$\oint \frac{\mathbf{j}d\mathbf{s}}{\sigma} = \oint (\mathbf{E}+\mathbf{E}')d\mathbf{s} = \oint \mathbf{E}'d\mathbf{s} = \mathcal{E},$$

$\mathcal{E}$ az áramforrás elektromotoros ereje (kihasználtuk, hogy $\oint \mathbf{E}d\mathbf{s} = 0$). Másrészt

$$\oint \frac{\mathbf{j}d\mathbf{s}}{\sigma} = \oint jq\frac{ds}{\sigma q} = I\oint \frac{ds}{\sigma q} = IR,$$

$I = jq$ az állandó keresztmetszetűnek tekintett lineáris vezetőben folyó áramerősség, R a vezető ellenállása. Ha több áramhurok kapcsolódik egymáshoz, és az egyes hurkokban több áramforrás és több fogyasztó = ellenállás található (és az egyéb vezetőszakaszok ellenállását a szokásos módon elhanyagoljuk), akkor

$$\sum_k I_k R_k = \sum_k \mathcal{E}_k,$$

a 2. Kirchoff-törvény, vagy huroktörvény.

A div $\mathbf{j} = 0$ egyenletet egy, a vezetők elágazási pontját körülvevő térfogatra integrálva

$$0 = \int \text{div}\mathbf{j}dV = \oint \mathbf{j}d\mathbf{f} = \oint j_n df.$$

A vezető határán $j_n = 0$, ezért a felületi integrálhoz csak az elágazási pontba be- és kifutó vezetőszakaszok keresztmetszetére számított integrálok adnak járulékot, ezek éppen az áramerősségek, tehát az elágazási pontoknál

$$\sum_k I_k = 0,$$

az 1. Kirchoff-törvény, vagy csomóponttörvény.

A mágneses térben mozgó q töltésre ható erő, $\mathbf{F} = q\,(\mathbf{v} \times \mathbf{B})$, a Lorentz-erő. Egy ΔV térfogatban lévő töltésekre ható erő $\rho\Delta V\,(\mathbf{v} \times \mathbf{B})$. $\rho\mathbf{v}$ a konvektív áramsűrűség, így az előzőek mintájára egy vezető ΔVtérfogatára ható erő, $\Delta\mathbf{F} = \mathbf{j} \times \mathbf{B}\Delta V$, $\mathbf{j}$ a konduktív áramsűrűség. Lineáris vezetőre az áramerősség vektorát $\mathbf{I} = \mathbf{j}f$-ként definiálva (f a vezető keresztmetszete) $\Delta\mathbf{F} = \mathbf{I} \times \mathbf{B}\Delta l$, Δla vezetődarab hossza. A vezető egységnyi hosszú darabjára ható erő így $\mathbf{I} \times \mathbf{B}$.

Az áram mágneses tere megfelelő szimmetriát mutató árameloszlás, pl. végtelen hosszú egyenes vezetőben folyó áram esetén a Maxwell-egyenletek integrális alakjából viszonylag könnyen meghatározható, a végtelen viszont matematikai nehézségeket okoz. A differenciális egyenletek megoldása, amelyet a következőkben megtárgyalunk, mentes az ilyen nehézségektől, elvezet a Biot-Savart-törvényhez, amelyből az eredmény egyszerű integrálással előállítható, és kiderül, hogy ugyanaz, amit az integrális egyenletekből a végtelen problémájával nem törődve kapnánk. Most csak a végeredményt írjuk fel. A végtelen hosszú, egyenes vezető mágneses tere I áramerősség esetén a tér valamelyik vezetőn kívüli, $\mathbf{r}$ helyzetvektorú pontjában (a kezdőpont a vezető valamelyik pontja),

$$\mathbf{B} = \frac{\mu_0}{2\pi}\frac{\mathbf{I} \times \mathbf{r}}{r^2}.$$

Most már megadhatjuk az áramerősség mértékegysége definíciójának magyarázatát. Az egyik vezető mágneses tere

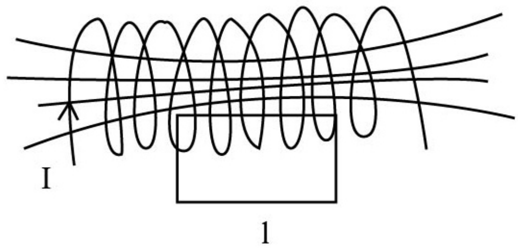
$$\mathbf{B} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0 c^2}\frac{2\mathbf{I}_1 \times \mathbf{r}}{r^2} = \frac{\mu_0}{2\pi}\frac{\mathbf{I}_1 \times \mathbf{r}}{r^2},$$

a másik vezető l hosszúságú darabjára ható erő nagysága így (r a két vezető távolsága)

$$|l\mathbf{I}_2 \times \mathbf{B}| = \frac{\mu_0}{2\pi}\frac{I_1 I_2 l}{r}.$$

Vázoljuk a mágneses indukció vektor definíciójának magyarázatát. Kis áramhurok esetén $\mathbf{B}$ állandónak vehető, lineáris vezetőre $\mathbf{I}ds = \mathrm{I}d\mathbf{s}.$ A vezető kis $d\mathbf{s}$ szakaszára ható forgatónyomaték $d\mathbf{M} = \mathbf{r} \times d\mathbf{F} = I\mathbf{r} \times (d\mathbf{s} \times \mathbf{B}) = I\,(\mathbf{rB})\,d\mathbf{s} - I\mathbf{B}\,(\mathbf{r}d\mathbf{s})$, $\mathbf{r}$ a kis vezetőszakasz helyzetvektora. A teljes forgatónyomaték $\mathbf{M} = I \oint (\mathbf{rB})\,d\mathbf{s}$, mert $d\mathbf{M}$ második tagjának körintegrálja 0. Ez a kifejezés vektroanalitikai azonosságok és a Stokes-tétel felhasználásával az $\mathbf{M} = I \int d\mathbf{f} \times \mathbf{B}$ alakra hozható, és kis áramhurok esetén $\mathbf{M} = I\mathbf{f} \times \mathbf{B}$,

$\mathbf{f}$ a felületvektor. A maximális forgatónyomaték nagysága *IfB,* amikor $\mathbf{f}$ és $\mathbf{B}$ merőleges egymásra.



5. ábra

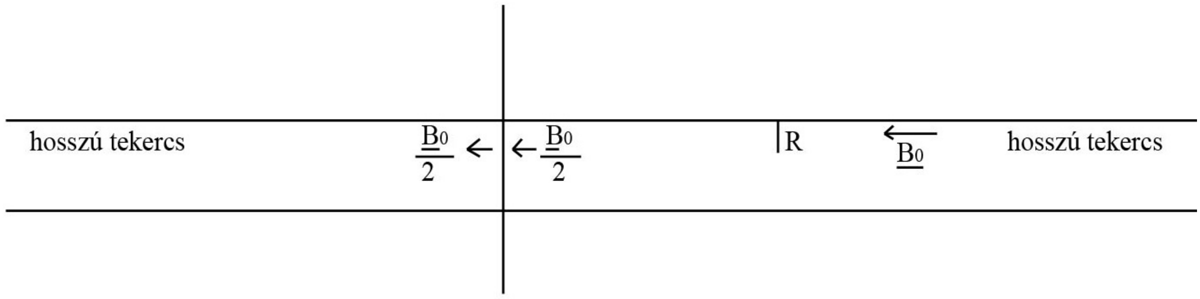
Fontos és érdekes kérdés a tekercs mágneses tere. Egy hosszú, kis keresztmetszetű, szorosan tekercselt, áram által átjárt szolenoid közelítőleg olyan teret hoz létre, amely kívül gyenge, belül homogén, a tengellyel párhuzamos. Ezt feltételezve számítsuk ki $\mathbf{B}$ körintegrálját egy olyan téglalapra, amelynek l hosszúságú élei a tekercsen belül és kívül párhuzamosak a tekercs tengelyével. Járulékot csak a belül lévő ilyen szakasz ad, így

$$\oint \mathbf{B}d\mathbf{s} = Bl = \frac{NI}{\varepsilon_0 c^2}, \quad B = \frac{nI}{\varepsilon_0 c^2} \quad ,$$

$n = \frac{N}{l}$ az egységnyi hosszra jutó menetszám. Ez az eredmény olvasható általában a fizikai összefoglalókban, példatárakban található olyan kidolgozott feladat, amely a tekercs tengelyén jobb közelítő eredményt ad.

Próbáljuk részletesebben megvizsgálni, milyen lehet a mágneses indukcióvonalak szerkezete. Egy nagyon (végtelen) hosszú tekercs belsejében, a végektől elég távol eső

középső szakaszon a tengellyel párhuzamosnak, állandónak tekinthetjük a teret, legyen ez $\mathbf{B}_0$. Rakjuk össze ezt a tekercset két (félig végtelen) hosszú tekercsből, a szuperpozíció elv szerint $\mathbf{B}_0$ a két féltekercs mágneses indukció vektorának összege. Ebből következik, hogy a féltekercsek végesben lévő határfelületén a mágneses tér tengelyirányú



6. ábra

összetevője $\frac{\mathbf{B}_0}{2}$, a fluxus, $\int \mathbf{B}d\mathbf{f} = \frac{B_0}{2}R^2\pi$, R a tekercs sugara. A féltekercsek nagyon messze (végtelenben) lévő keresztmetszetén viszont a fluxus $B_0R^2\pi$. Hová tűnt ennek a fluxusnak a fele? Kiment a tekercs hengeres felületén.

Tekintsünk most újra egy hosszú, de véges tekercset. Mivel a mágneses indukció vonalak zártak, a hengerfelületet elérő vonalaknak vissza kell fordulniuk, azaz a felületen a $\mathbf{B}$ vektor tangenciális komponense ugrásszerűen változik, ami megfelel a határfeltételnek, a tekercsben folyó áram felületi áramnak tekinthető.

A mágneses indukció vektor a kis áramhuroktól nagy távolságban:

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \mathrm{rot}\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi}\left(\frac{3(\mathbf{mr})\mathbf{r}}{r^5} - \frac{\mathbf{m}}{r^3}\right),$$

megegyezik egy $\mathbf{m}$ mágneses dipólus terével, ahol $\mathbf{m} = I\int d\mathbf{f}'$. Ez az egyezés azt is sejteti, hogy a mágnesség eredetét atomi köráramokban lehet keresni.

Ahogy a dielektrikumok tárgyalásánál a töltéssűrűséget, úgy most az áramsűrűséget is felosztjuk különböző eredetű részekre. A cél most az, hogy úgy vezessük be a $\mathbf{H}$ vektort, hogy a rá vonatkozó egyenletekben csak a valódi áramsűrűség szerepeljen:

$$\mathbf{j} = \mathbf{j}_{val} + \mathbf{j}_{pol} + \mathbf{j}_{\text{mágn}},$$

$\mathbf{j}_{pol}$ a polarizációs töltések mozgásából származó áramsűrűség, $\mathbf{j}_{\text{mágn}}$az atomi köráramok járuléka, $\mathbf{j}_{val}$ az ami nem polarizációs és nem mágneses. A polarizáció (dipólusmomentum sűrűség) vektor időderiváltja, $\frac{\partial\mathbf{P}}{\partial t}$ áramsűrűség dimenziójú mennyiség, a polarizációs töltések konvektív áramsűrűsége.

A dielektrikumoknál egy dipóluseloszlás potenciálját alakítottuk át, ebből vontunk le következtetést. Ehhez hasonlóan megállapítható, hogy egy $\mathbf{M}(\mathbf{r})$ mágneses momentum sűrűség vektorpotenciálja rot $\mathbf{M}$ térfogati és $\mathbf{M}\times\mathbf{n}$ felületi áramsűrűség vektorpotenciáljával ekvivalens, $\mathbf{n}$ az eloszlás határfelületének normálisa. Az $\mathbf{M}$ vektort, a térfogategység mágneses momentumát mágnesezettségnek is nevezik. Az első Maxwell-egyenlet tehát így írható:

$$c^2\text{rot}\mathbf{B} = \frac{1}{\varepsilon_0}\left(\mathbf{j}_{val} + \text{rot}\mathbf{M} + \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial t}\right) + \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t},$$

átalakítva:

$$c^2\text{rot}\left(\mathbf{B} - \frac{\mathbf{M}}{\varepsilon_0 c^2}\right) = \frac{\mathbf{j}_{val}}{\varepsilon_0} + \frac{\partial}{\partial t}\left(\mathbf{E} + \frac{\mathbf{P}}{\varepsilon_0}\right).$$

Definiáljuk a $\mathbf{H}$ vektort, $\mathbf{H} \equiv \frac{1}{\mu_0}\mathbf{B} - \mathbf{M}$ **,** ezzel

$$\text{rot}\mathbf{H} = \mathbf{j}_{val} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}.$$

Sztatikában a rot $\mathbf{H} = \mathbf{j}_{val}$ egyenlet meghatározza $\mathbf{H}$-t, nekünk $\mathbf{B}$-re van szükségünk. Ehhez vagy ismerni kell mérésekből $\mathbf{M}$-et, vagy az $\mathbf{M}$ és $\mathbf{B}$ közötti kapcsolatot.

Vannak olyan anyagok, amelyekre érvényes az $\mathbf{M} = \frac{\chi_m \mathbf{B}}{\mu_0(1+\chi_m)}$ összefüggés, ebből $\mathbf{B} = \mu_0(1+\chi_m)\mathbf{H} = \mu_0\mu_r\mathbf{H} = \mu\mathbf{H}$. χ_m a mágneses szuszceptibilitás, (μ_r) μ a (relatív) permeabilitás. A diamágneses anyagokra $\chi_m < 0$ független a hőmérséklettől, ilyen pl. a bizmut, a nemes gázok, a benzol. χ_m általában kicsi, bizmutra pl. $-1,66 \cdot 10^{-4}$. A paramágneses anyagokra $\chi_m > 0$ fordítva arányos a hőmérséklettel (Curie-törvény), ilyen pl. az oxigén, az alumínium, a ritka földfémek. Oxigénre szobahőmérsékleten $\chi_m = 1,9 \cdot 10^{-6}$.

A ferromágneses anyagoknál $\mathbf{B}$ és $\mathbf{H}$ kapcsolata bonyolult, függhet az anyag előéletétől is, ilyen pl. a vas, a kobalt, a nikkel.

Röviden megtárgyaljuk a szupravezető anyagok magnetosztatikáját, ami tulajdonképpen nem sztatika, mert az ún. szuperáram játszik benne fontos szerepet.

A tapasztalat szerint a szupravezetőkbe a mágneses tér csak nagyon kis mértékben, 10-100 nm nagyságrendű mélységben hatol be, ez a Meissner-effektus. A $\mathbf{H} = \frac{1}{\mu_0}\mathbf{B} - \mathbf{M}$ definíció szerint $\mathbf{B} = 0$ esetén, $\mathbf{H} = -\mathbf{M}$**,** ami tökéletes diamágnesességként $(\chi_m = -1)$ interpretálható. A tárgyalás érdekében megelőlegezzük az elektromos térerősség potenciálokkal kifejezett általános alakját (l. 6. fejezet), amely szerint $\mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} - \text{grad}\Phi$.

Feltételezve, hogy a szupravezetésben sztatikus töltések nem játszanak szerepet, Φ zérusnak vehető, ezért $\mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}$. A szuperáram konvektív áram, sűrűségének időegységre jutó megváltozása, $\frac{\partial \mathbf{j}_s}{\partial t} = n_s e\dot{\mathbf{v}} = n_s e\frac{e\mathbf{E}}{m} = -\frac{n_s e^2}{m}\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}$, itt n_s a szupravezetésben résztvevő töltések számsűrűsége, felhasználtuk e töltések $m\dot{\mathbf{v}} = e\mathbf{E}$ mozgásegyenletét. A kapott differenciálegyenlet könnyen megoldható, $\mathbf{j}_s = -\frac{n_s e^2}{m}\mathbf{A}$**,** az integrációs állandó 0, mert a szuperáramot az alkalmazott mágneses tér hozza létre. A feltevés szerint $\mathbf{j}_S$ a valódi áramsűrűséghez hozzáadódik az első Maxwell-egyenletben, $\text{rot}\mathbf{H} = \mathbf{j}_{val} + \mathbf{j}_s = \mathbf{j}_{val} - \frac{n_s e^2}{m}\mathbf{A}$. Feltételezve, hogy valódi áram nem folyik, és hogy a közeg homogenitása miatt $\text{div}\mathbf{H} = 0$, a Maxwell-egyenlet rotációját képezve a

$$\Delta \mathbf{H} = \frac{n_s e^2}{m} \mathbf{B} \ = \frac{n_s e^2 \mu}{m} \mathbf{H}$$

London-egyenletre jutunk, ez helyettesíti az Ohm-törvényt. A $\Lambda^{-2} \quad \equiv \frac{n_s e^2 \mu}{m}$ definíciójú Λ állandót Landau-féle behatolási mélységnek nevezik. Olyan elrendezésre oldjuk meg az egyenletet, amelyben az $x>0$ féltérben alkalmazott y-irányú mágneses tér behatol az $x < 0$ féltérben elhelyezkedő közegbe. A határfeltételeknek eleget tevő megoldás,

$$\mathbf{H}(x < 0) = \mathbf{H}(x = 0) \exp\left(\frac{x}{\Lambda}\right)$$

megegyezik a kísérleti tapasztalattal.

5. fejezet

Kvázistacionárius áram

Az elnevezés azt takarja, hogy míg a harmadik Maxwell-egyenletben megtartjuk a mágneses indukció vektor időderiváltját, az elsőben az elektromos térerősség időderiváltját az áramsűrűség mellett elhanyagoljuk. Mikor jelent ez jó közelítést? Az elektrotechnikában gyakori a vezetőben folyó, időben periodikusan változó áram, $\mathbf{E} = \mathbf{E}_0 \sin \omega t$, $\mathbf{j} = \sigma \mathbf{E} = \sigma \mathbf{E}_0 \sin \omega t$. Ekkor $\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = \omega \mathbf{E}_0 \cos \omega t$, $\frac{\mathbf{j}}{\varepsilon_0} = \frac{\sigma}{\varepsilon_0} \mathbf{E}_0 \sin \omega t$. E két mennyiség egy periódusra vett átlagának hányadosa, $\frac{\sigma}{\omega \varepsilon_0} = \frac{2\sigma}{4\pi\varepsilon_0 \nu} \approx \frac{1}{\nu} \cdot 10^8 \ \frac{\mathrm{A}}{\mathrm{Vm}} \cdot 10^{10} \ \frac{\mathrm{Vm}}{\mathrm{As}}$ a gyakorlatban előforduló frekvenciáknál nagy, tehát $\left|\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}\right| \ll \left|\frac{\mathbf{j}}{\varepsilon_0}\right|$. A kvázistacionárius áram differenciális egyenletei:

$$c^2 \mathrm{rot} \mathbf{B} = \frac{\mathbf{j}}{\varepsilon_0}, \quad \mathrm{div} \mathbf{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}, \quad \mathrm{rot} \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, \quad \mathrm{div} \mathbf{B} = 0,$$

az Ohm-törvény: $\mathbf{j} = \sigma (\mathbf{E} + \mathbf{E}')$.

Először az indukció jelenségével foglalkozunk. Rögzített görbe és felület esetén a harmadik Maxwell-egyenlet:

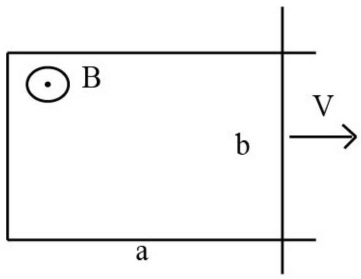
$$\oint \mathbf{E} d\mathbf{s} = -\int \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} d\mathbf{f} = -\frac{d}{dt} \int \mathbf{B} d\mathbf{f} = -\frac{d\Phi}{dt},$$

$\Phi = \int \mathbf{B} d\mathbf{f}$ a rögzített felületen átmenő mágneses fluxus.

Az indukált feszültség (elektromotoros erő) definíciója a következő: a töltésegységre ható erő érintő irányú komponensének tetszőleges zárt görbére vett körintegrálja, azaz a töltésegységen végzett munka. Fontos megjegyezni, hogy vezető jelenlétére nincs szükség.

Nyugalmi indukcióról beszélünk, ha a mágneses fluxus csak $\mathbf{B}$ változása miatt változik, a zárt görbe és a felület rögzített. Ekkor az időben változó mágneses tér kelt elektromos teret, ez mozgatja a töltést, így az indukált feszültség, $U_i = -\frac{d\Phi}{dt}$.

A mozgási indukciót egy egyszerű példával szemléltetjük. Képzeljünk el egy téglalap határait alkotó keretet, amelynek három oldala rögzített, a negyedik b hosszúságú oldal



7. ábra

a rá merőleges két oldal meghosszabbításán állandó V sebességgel mozog, e két oldal a hosszúsága
változik. A téglalap síkjára merőleges **B** állandó, mágneses tér van jelen, elektromos tér nincs. A keretben gondolatban mozgatott töltésre (nem áramról van szó!) a Lorentz-erő hat. A rögzített szakaszokon való mozgásnál a töltés sebessége a szakaszokkal párhuzamos, érintő irányú, ezért a Lorentz-erőnek nincs érintő irányú komponense. A v sebességgel mozgó szakaszon a töltés szakasszal párhuzamos sebessége az előzőekhez hasonlóan nem ad járulékot, a szakaszra merőleges v sebesség igen, a Lorentz-erő érintő irányú komponensének nagysága VB. Az indukált feszültség

$$U_i = VBb = bB\frac{da}{dt} = B\frac{d\left(ab\right)}{dt} = B\frac{df}{dt} = -\frac{d\Phi}{dt}.$$

A $-$ előjel Lenz-törvény néven ismeretes, a levezetés során azért lép fel, mert a körüljárás iránya a jobbkéz szabály szerint megszabja a felület normálisának, így a $d\mathbf{f}$ vektornak irányát.

Az, hogy a mozgási indukció e speciális példáján az indukált feszültség a nyugalmi indukciónál kapottal megegyezik, nem véletlen. Az indukált feszültséget úgy is definiálhattuk volna, hogy az elektromos térerősség érintő irányú komponensének tetszőleges zárt görbére vett integrálja a görbével együtt mozgó rendszerben. A bemutatott példában a speciális relativitáselmélet Lorenz-transzformációjának segítségével ki kellett volna számítani, hogy a szakasszal együtt mozgó rendszerben mekkora az elektromos térerősség, ennek integrálja a fenti eredményt adta volna.

Feladat: Határozzuk meg az indukált feszültséget abban az esetben, amikor a zárt görbe háromszög, ennek egyik oldalegyenese mozog az egyenesre merőleges, állandó sebességgel!

A lineáris vezetőkből álló hálózatokra vonatkozó Kirchoff- törvények közül az első változatlan, a második az indukcióval bővül. A k-ik (térben rögzített) áramhurokra felírt harmadik Maxwell-egyenletet az Ohm-törvény és a $\mathbf{B} = \text{rot}\ \mathbf{A}$ egyenlőség felhasználásával átalakítjuk:

$$\oint \frac{\mathbf{j}d\mathbf{s}}{\sigma} - \oint \mathbf{E}'d\mathbf{s} = -\frac{d}{dt}\int \mathrm{rot}\mathbf{A}d\mathbf{f} = -\frac{d}{dt}\oint \mathbf{A}d\mathbf{s}.$$

Behelyettesítjük ide a $\Delta\mathbf{A} = -\frac{\mathbf{j}}{\varepsilon_0 c^2}$ egyenlet $\mathbf{A} = \frac{\mu_0}{4\pi}\int \frac{\mathbf{j}dV'}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} = \frac{\mu_0}{4\pi} I \oint \frac{d\mathbf{s}'}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}$ megoldását. Feltételezzük, hogy nincs külső mágneses tér (csak az, amit az áramok létrehoznak), és hogy R_k, $\mathcal{E}_k$ ismert. Az eredmény a következő:

$$I_k R_k - \mathcal{E}_k \quad = \quad - \quad \frac{d}{dt}\frac{\mu_0}{4\pi}\sum_i I_i \iint \frac{d\mathbf{s}_k d\mathbf{s}_i}{|\mathbf{r}_k - \mathbf{r}_i|} \quad = \quad - \quad \sum_i L_{ik}\frac{dI_i}{dt},$$

$L_{ik} = \frac{\mu_0}{4\pi}\iint \frac{d\mathbf{s}_i d\mathbf{s}_k}{|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_k|}$ a hálózat geometriájától függő kölcsönös indukciós együttható. Ha $i = k$, akkor a kifejezés értelmetlen, ennek oka a lineáris vezető feltevés, a vektorpotenciálkifejezésében meg kell tartani a térfogati integrálást. Az $i = k$ önidukciós együttható, $L_{ii} = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{1}{I_i^2}\iint \frac{\mathbf{j}_k \mathbf{j}'_k dV dV'}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}$.

Ha az áramkörben kondenzátor is van, akkor annak fegyverzetei között az Ohm-törvény helyett $\int \mathbf{E}d\mathbf{s} = \frac{Q(t)}{C} = \frac{\int I(t')dt'}{C}$, $Q(t)$ a kondenzátor töltése, C a kapacitása. Egy áramkörre az $L\frac{d^2Q}{dt^2} + R\frac{dQ}{dt} + \frac{Q}{C} = \mathcal{E}$ másodrendű differenciálegyenlet adódik, ennek megoldásához két kezdeti feltételre van szükség. Honnan vesszük a kezdeti feltételeket?

Tapasztalati tény, hogy semmilyen fizikai tér, így $\mathbf{E}$ és $\mathbf{B}$ sem képes ugrásszerűen megváltozni. Ezért a kondenzátor feszültsége, $U = \int \mathbf{E}d\mathbf{s}$, és az indukciós tekercs fluxusa, $\Phi = \int \mathbf{B}d\mathbf{f}$ is csak folytonosan változhat. Utóbbi, ha nincs több tekercs pl. közös vasmagra tekercselve, azaz nem közösen hozzák létre a fluxust, az áramerősség folytonosságát jelenti, mert ebben az esetben $\Phi = \int \mathbf{B}d\mathbf{f} \approx LI$.

6. fejezet

Energia, impulzus, impulzusmomentum

A teljes Maxwell-egyenletrendszer:

$$\mathrm{rot}\mathbf{H} = \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} + \mathbf{j}_{val}, \quad \mathrm{div}\mathbf{D} \ = \rho_{val}, \quad \mathrm{rot}\mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, \quad \mathrm{div}\mathbf{B} = 0.$$

Az első egyenletet $-\mathbf{E}$ -vel, a harmadikat $\mathbf{H}$ -val skalárisan szorozzuk, a kapottakat összeadjuk, és az egyenlet mindkét oldalát egy tetszőleges térfogatra integráljuk:

$$-\frac{d}{dt}\int(\frac{\varepsilon}{2}\mathbf{E^2} + \frac{1}{2\mu}\mathbf{B^2})dV = \int \mathbf{E}\ \mathbf{j}_{val}dV - \int(\mathbf{E}\ \mathrm{rot}\mathbf{H}\ -\ \mathbf{H}\ \mathrm{rot}\mathbf{E})dV =$$
$$= \int \mathbf{E}\ \mathbf{j}_{val}dV + \int \mathrm{div}(\mathbf{E}\times\mathbf{H})dV = \int \mathbf{E}\ \mathbf{j}_{val}dV + \int(\mathbf{E}\times\mathbf{H})d\mathbf{f}.$$

Felhasználtuk az $\mathbf{E}\ \mathrm{rot}\mathbf{H}\ -\ \mathbf{H}\ \mathrm{rot}\mathbf{E} = -\ \mathrm{div}\ (\mathbf{E}\times\mathbf{H})$ azonosságot, és feltételeztük, hogy $\mathbf{D} = \varepsilon\mathbf{E},\ \mathbf{B} = \mu\mathbf{H},$ azaz a közeg lineáris. A jobb oldal második tagját a Gauss-tétel segítségével átalakítottuk.

Az a feladat, hogy értelmezzük ezt az egyenletet. Vizsgáljuk először a jobb oldal első tagját. Az áramsűrűséget felbontjuk vezetési és konvektív részre:

$\mathbf{E}\mathbf{j}_{val} = \mathbf{E}\rho\mathbf{v} + \mathbf{E}\mathbf{j}_{vez} + \mathbf{E}'\mathbf{j}_{vez} - \mathbf{E}'\mathbf{j}_{vez}$, hozzáadtunk és levontunk $\mathbf{E}'\mathbf{j}_{vez}$-t, hogy alkalmazhassuk az Ohm-törvényt.

$\hookrightarrow$ $\int \mathbf{E}\rho\mathbf{v}dV$ a konvektív áramot létrehozó töltéseken egységnyi idő alatt végzett munka.

$\hookrightarrow$ $\int(\mathbf{E}+\mathbf{E}')\mathbf{j}_{vez}dV = \int \frac{\mathbf{j}^2_{vez}}{\sigma}dV = \int \frac{I^2 ds}{\sigma q} = I^2R$ a (lineáris) vezetőben egységnyi idő alatt fejlődő Joule-hő.

$\hookrightarrow$ $(-)\int \mathbf{E}'\mathbf{j}_{vez}dV$ az áramforrásból az elektromágneses térbe egységnyi idő alatt betáplált energia.

Tegyük fel, hogy a teljes végtelen térfogatot vizsgáljuk, és csak szabadon mozgó töltések vannak a végesben. $\mathbf{E}$ és $\mathbf{H}$ a távolság négyzetével fordított arányban csökken, az $\int(\mathbf{E}\times\mathbf{H})d\mathbf{f}$ tagban az integrálási felület a távolság négyzetével arányosan nő, ezért a felületi integrál a végtelenben eltűnik. A töltéseken végzett munka, azok mozgási energiáját növeli, ez csak valamilyen más energia rovására történhet.

Ezek alapján az $u=\frac{\varepsilon}{2}\mathbf{E^2}+\frac{1}{2\mu}\mathbf{B}^2=\frac{\mathbf{ED}}{2}+\frac{\mathbf{BH}}{2}$ mennyiséget az elektromágneses tér energiasűrűségének tekinthetjük, $\frac{d}{dt}\int udV$ az elektromágneses tér energiájának egységnyi

idő alatti megváltozása a kiválasztott térfogatban. Amikor pl. egy vezetőben Joule-hő fejlődik, akkor az elektromágneses tér energiájának kell csökkennie. Ha a térfogatban sem szabad

töltések, sem vezetők nincsenek, akkor ebben csak úgy változhat az energia, hogy határfelületén energia áramlik ki vagy be. Ezért a jobb oldal második tagja,
$\int(\mathbf{E}\times\mathbf{H})d\mathbf{f}$ az integrálási térfogat felületén egységnyi idő alatt kiáramló energia, $\mathbf{S}$ = $(\mathbf{E}\times\mathbf{H})$ energia/felület/idő dimenziójú mennyiség, az energiaáramsűrűség vektora, más néven Poynting-vektor.

Ha a Maxwell-egyenletrendszer

$$c^2\mathrm{rot}\mathbf{B}=\frac{\partial\mathbf{E}}{\partial t}+\frac{\mathbf{j}}{\varepsilon_0},\quad \mathrm{div}\mathbf{E}=\frac{\rho}{\varepsilon_0},\quad \mathrm{rot}\mathbf{E}=-\frac{\partial\mathbf{B}}{\partial t},\quad \mathrm{div}\mathbf{B}=0$$

alakjából indultunk volna ki, akkor a fentiekhez nagyon hasonlóan arra jutottunk volna, hogy

$$u=\frac{\varepsilon_0}{2}\mathbf{E^2}+\frac{\varepsilon_0c^2}{2}\mathbf{B^2},\quad \mathbf{S}\ =\ \varepsilon_0c^2\left(\mathbf{E}\times\mathbf{B}\right).$$

Az eltérés oka az, hogy $\mathbf{j}$ a teljes áramsűrűség, tartalmazza a polarizációs és a mágneses áramsűrűséget is. Utóbbira nem igaz az Ohm-törvény, ezért ez a levezetés csak vákuumban érvényes. Olyan közegek esetén, amelyekre nem teljesülnek a $\mathbf{D}=\varepsilon\mathbf{E},\ \mathbf{B}=\mu\mathbf{H}$ összefüggések, a tárgyalás jóval bonyolultabb, ezzel nem foglalkozunk.

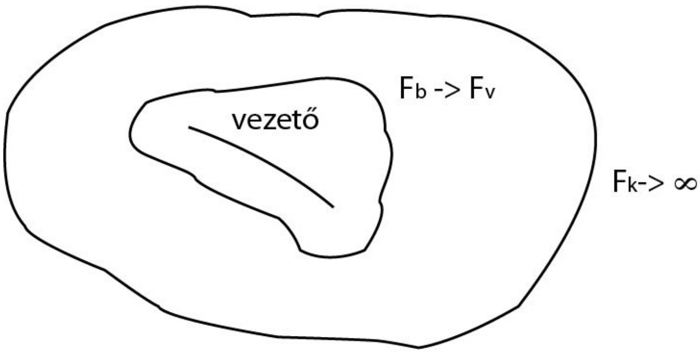
Átalakítjuk az elektrosztatikus tér energiáját megadó $U=\frac{\varepsilon_0}{2}\int\mathbf{E}^2dV$ összefüggést. A kiválasztott térfogatban legyen térfogati töltés és egy vezető, rajta felületi töltés. Az integrálási térfogatot az F_k külső és a vezetőt körülvevő F_b belső felület határolja.

Felhasználunk vektoranalitikai azonosságot, a Gauss-tételt, a $\Delta\Phi=-\frac{\rho}{\varepsilon_0}$ Poisson-egyenletet és azt, hogy $\mathbf{E}=-\ \mathrm{grad}\Phi$.

$$U=\frac{\varepsilon_0}{2}\int\left(\mathrm{grad}\Phi\right)\left(\mathrm{grad}\Phi\right)dV=\quad\frac{\varepsilon_0}{2}\int\left[\mathrm{div}\left(\Phi\mathrm{grad}\Phi\right)-\Phi\Delta\Phi\right]dV=$$

$$=\quad\frac{\varepsilon_0}{2}\oint\Phi\mathrm{grad}\Phi d\mathbf{f}+\quad\frac{1}{2}\int\Phi\rho dV.$$

Az F_k külső határfelületet kitoljuk a végtelenbe, az F_b belsőt ráhúzzuk a vezető felszínére. Amikor $F_k\to\infty$, akkor Φ $\frac{1}{r}$ szerint, gradΦ $\frac{1}{r^2}$ szerint tart 0-hoz (a töltések a végesben vannak), a határfelület r^2 szerint tart ∞-hez, így a külső felület járuléka a felületi



8. ábra

integrálhoz 0-hoz tart. A vezető felületén grad$\Phi = \frac{\eta}{\varepsilon_0}$ (2 − előjel van, az egyik az $\mathbf{E} = -\text{grad}\Phi$ egyenlőségben, a másik ott, hogy a Gauss-tétel szerint a felületi integrálban $d\mathbf{f}$ a térfogatból kifelé mutat, a vezető felületén $\frac{\eta}{\varepsilon_0}$ az elektromos térerősségnek a vezetőből kifelé mutató normális komponensével egyenlő). A végeredmény:

$$U = \frac{1}{2}\int \Phi\eta df + \frac{1}{2}\int \Phi\rho dV.$$

Ha csak ponttöltések vannak jelen, akkor

$$U = \frac{1}{2}\int \Phi\rho dV = \frac{1}{2}\iint \frac{\rho(\mathbf{r})\,\rho(\mathbf{r}')}{4\pi\varepsilon_0\,|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}dV dV' = \sum_{\text{párok}} \frac{q_i q_j}{4\pi\varepsilon_0 r_{ij}},$$

$r_{ij} = |\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j|$, az $i = j$ járulékot, egyetlen töltés ún. (végtelen) sajátenergiáját elhagytuk. Érdemes megemlíteni, hogy az energiának ebből a kifejezéséből is ki lehet indulni, átalakításokkal a különböző töltéseloszlásokra jellemző energiaképletek levezethetőek. A

fenti U megkapható úgy, hogy meghatározzuk, mekkora munkát végzünk, ha a q_j töltést a végtelenből behozzuk a q_i töltéstől r_{ij} távolságra lévő pontba.

Egy kondenzátor energiája, $U = \frac{1}{2}\int \Phi\eta df = \frac{1}{2}(\Phi_2 - \Phi_1)Q = \frac{1}{2}Q\Delta\Phi$, Q a kondenzátor töltése, $\Delta\Phi$ a fegyverzetek potenciálkülönbsége.

Hasonlóképpen átalakíthatjuk az áram által keltett mágneses tér energiáját,

$$U = \frac{\varepsilon_0 c^2}{2}\int \mathbf{B}^2 dV = \frac{\varepsilon_0 c^2}{2}\int \mathbf{B}\,\text{rot}\mathbf{A} dV = \frac{\varepsilon_0 c^2}{2}\int \mathbf{A}\,\text{rot}\mathbf{B} dV + \frac{\varepsilon_0 c^2}{2}\int \text{div}\,(\mathbf{A}\times\mathbf{B})\,dV =$$

$$= \frac{1}{2}\int \mathbf{A}\mathbf{j} dV.$$

Egy áramhurok esetén $U = \frac{1}{2}\int \mathbf{A}\mathbf{j}dV = \frac{1}{2}I\oint \mathbf{A}d\mathbf{s} = \frac{1}{2}I\int \text{rot}\mathbf{A}d\mathbf{f} = \frac{I}{2}\int \mathbf{B}d\mathbf{f} = \frac{1}{2}LI^2$, L az előző pontban bevezetett önindukciós együttható.

Az egységnyi térfogatban lévő töltésekre ható erő (erősűrűség): $\mathbf{f} = \rho\mathbf{E} + \rho\,(\mathbf{v} \times \mathbf{B})$, a töltésrendszer mechanikai impulzusának időegység alatti megváltozása: $\frac{d\mathbf{P}^m}{dt} = \int \mathbf{f} dV$. A jobb oldalra $\mathbf{f}$-et beírva, a korábbinál kissé bonyolultabb matematikai átalakítással a következő eredményre juthatunk:

$$\frac{d}{dt}\left(P_i^m + \varepsilon_0 \int (\mathbf{E} \times \mathbf{B})_i \, dV\right) \quad = \quad \sum_j \int \frac{\partial T_{ij}}{\partial x_j} dV \quad = \quad \sum_j \oint T_{ij} dF_j,$$

Itt $T_{ij} = \quad \varepsilon_0 (E_i E_j + c^2 B_i B_j \quad - \frac{1}{2}\left(\mathbf{E}^2 + c^2\mathbf{B}^2\right)\delta_{ij})$ a Maxwell-féle feszültségtenzor. Előfordulhat, hogy a térfogat határfelületén $T_{ij} = 0$, így az elektromágneses térnek impulzust kell tulajdonítanunk. Vákuumban $\mathbf{g} = \varepsilon_0\,(\mathbf{E} \times \mathbf{B}) = \frac{\mathbf{S}}{c^2}$, az impulzussűrűség, a T_{ij}tenzor pedig az impulzusáramsűrűség. Ez azért tenzor, mert két irányt kell megjelölnie, az egyik az impulzus iránya, a másik az impulzus áramlásáé. (Az energia skalár, ezért az energiaáramsűrűség vektor.)

Az elektromágneses tér impulzusának bizonyítéka a fénynyomás (Lebegyev-kísérlet). Egy teljesen tükröző f felületre a felület normálisával θ szöget bezáró fénysugár esik. A tükröt felületére merőleges irányban időegység alatt $g\cos\theta\,(fc\cos\theta)$ impulzus éri ($fc\cos\theta$ az f alapú, $c\cos\theta$ magasságú hasáb térfogata, időegység alatt az ebben lévő impulzus jut el a felületre). A nyomás az időegység alatti merőleges irányú impulzusváltozás és a felület hányadosa, $p = \frac{1}{f}\frac{\Delta P}{\Delta t} = \quad 2gc\cos^2\theta$, amit a kísérleti tapasztalat igazol.

A mechanikai impulzusmomentum ismeretében természetesnek tűnik, és belátható, hogy vákuumban az elektromágneses tér impulzusmomentum sűrűsége $\mathbf{r} \times \mathbf{g} = \varepsilon_0 \mathbf{r} \times (\mathbf{E} \times \mathbf{B})$. Ezt a következő kísérlettel lehet alátámasztani. Feltöltött hengerkondenzátor fonálon lóg függőleges irányú mágneses térben. A kondenzátorban sugár irányú elektromos tér van, az impulzusmomentum így tengely irányú. Ha kikapcsoljuk a mágneses teret, a kondenzátor forgásba jön, az elektromágneses tér impulzusmomentuma mechanikai impulzusmomentummá alakul át.

7. fejezet

Elektromágneses hullámok

Felírjuk a teljes Maxwell-egyenletrendszert töltés és áram nélküli szabad térben, $\mathbf{j} = 0$, $\rho = 0$.

$$c^2 \mathrm{rot}\mathbf{B} = \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}, \quad \mathrm{div}\mathbf{E} = 0, \quad \mathrm{rot}\mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, \quad \mathrm{div}\mathbf{B} = 0.$$

Keresünk a triviálistól ($\mathbf{E} = 0$, $\mathbf{B} = 0$) különböző megoldást. Képezzük az első egyenlet rotációját:

$$\mathrm{rot}\ \mathrm{rot}\mathbf{B} = \mathrm{grad}\ \mathrm{div}\mathbf{B} - \Delta\mathbf{B} = \frac{1}{c^2}\frac{\partial \mathrm{rot}\mathbf{E}}{\partial t} = -\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \mathbf{B}}{\partial t^2},$$

innen $\mathrm{div}\mathbf{B} = 0$ miatt

$$\Delta\mathbf{B} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \mathbf{B}}{\partial t^2} = 0.$$

Hasonlóan levezethető, hogy

$$\Delta\mathbf{E} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} = 0.$$

Ezek a szabad vagy homogén hullámegyenletek. Vektoregyenletek, $\mathbf{E}$ vagy $\mathbf{B}$ mindhárom derékszögű komponensére ilyen egyenlet érvényes. Speciális megoldásokat keresünk.

$\mathbf{E}(\mathbf{r},t) = \mathbf{E}_0 f(t - \frac{\mathbf{nr}}{c})$ megoldása az egyenletnek, ha $\mathbf{E}_0$ állandó, $\mathbf{n}$ tetszőleges egységvektor, f argumentumának tetszőleges függvénye. A bizonyítás az egyenletbe való behelyettesítéssel történhet. Az ilyen megoldást síkhullám megoldásnak nevezzük.

Feladat: Bizonyítsuk be, hogy a fenti síkhullám megoldása a hullámegyenletnek!

Miért síkhullám? Tegyük fel a következő kérdést: hol vannak a térben azok a pontok, amelyekben egy adott t_0 időpontban $\mathbf{E}$ ugyanazt az értéket veszi fel? Biztosan ugyanaz lesz $\mathbf{E}$ értéke azokban az $\mathbf{r}$ helyzetvektorú pontokban, amelyekre teljesül, hogy $t_0 - \frac{\mathbf{nr}}{c}$ állandó. Minthogy t_0 állandó, ehhez $\mathbf{nr}$ = állandó kell teljesüljön, ami egy az $\mathbf{n}$ vektorra merőleges sík egyenlete. Természetesen előfordulhat, hogy különböző $\mathbf{n}$-re merőleges síkokban $\mathbf{E}$ ugyanazt az értéket veszi fel.

Tegyünk fel egy újabb kérdést: hol vannak a térben azok a pontok, amelyekben $t_0+\Delta t$ időpontban $\mathbf{E}$ ugyanazt az értéket veszi fel, mint amit felvett a t_0 időpontban az előző síkon. Ez azokra az $\mathbf{r} + \Delta\mathbf{r}$ helyzetvektorú pontokra teljesül, amelyekre

$$t_0 - \frac{\mathbf{nr}}{c} = t_0 + \Delta t - \frac{\mathbf{n}\left(\mathbf{r}+\Delta\mathbf{r}\right)}{c}.$$

Innen $\mathbf{n}\cdot\Delta\mathbf{r} = c\Delta t$, ez pedig azt jelenti, hogy a két sík távolsága $c\Delta t$. Most tudtuk meg, hogy a Maxwell-egyenletekben szereplő c állandó az elektromágneses hullámok terjedési sebessége. Az f argumentumában álló $\mathbf{n}$ vektor a síkhullám terjedési iránya.

Hasonlóképpen belátható, hogy $\mathbf{E}(\mathbf{r},t) = \mathbf{E}_0\frac{1}{r}f(t \pm \frac{r}{c})$ is megoldása a szabad hullámegyenletnek, ez a gömbhullám megoldás. Az indoklás az előzőekhez hasonlóan történhet. A $-$ előjel egy pontból kifutó, a $+$ előjel befutó hullámot jelent.

Feladat: Bizonyítsuk be, hogy a fenti gömbhullám megoldása a hullámegyenletnek!

Mivel a hullámegyenlethez a Maxwell-egyenlet differenciálásával, nem azonos átalakítással jutottunk, meg kell győződnünk arról, hogy a megoldás a Maxwell-egyenleteket is kielégíti. Vizsgáljunk egy $\mathbf{E}(\mathbf{r},t) = \mathbf{E}_0 f(t - \frac{\mathbf{nr}}{c})$, $\mathbf{B}(\mathbf{r},t) = \mathbf{B}_0 f(t - \frac{\mathbf{nr}}{c})$, elektromágneses síkhullámot. A $\mathrm{div}\mathbf{E} = 0$ és $\mathrm{div}\mathbf{B} = 0$ egyenletekbe való behelyettesítés arra vezet, hogy $\mathbf{En} = 0$ és $\mathbf{Bn} = 0$ kell teljesüljön, azaz $\mathbf{E}$ és $\mathbf{B}$ merőleges kell legyen az $\mathbf{n}$ terjedési irányra, ezek transzverzális hullámok. Bármelyik rotációs egyenletbe való behelyettesítés azt adja, hogy $\mathbf{B} = \frac{1}{c}\mathbf{n} \times \mathbf{E}$, azaz $\mathbf{E}$ és $\mathbf{B}$ egymásra is merőleges kell legyen.

Feladat: Vezessük le az $\mathbf{En} = 0$ és a $\mathbf{B} = \frac{1}{c}\mathbf{n}\times\mathbf{E}$összefüggéseket, annak feltételeit, hogy a síkhullám megoldás kielégítse a Maxwell-egyenleteket!

Az ilyen transzverzális hullámban az energiasűrűség,
$u = \frac{\varepsilon_0}{2}\mathbf{E^2} + \frac{\varepsilon_0 c^2}{2}\mathbf{B^2} = \varepsilon_0\mathbf{E}^2$, az energiaáramsűrűség, $\mathbf{S} = \varepsilon_0 c^2\mathbf{E}\times\mathbf{B} = cu\mathbf{n}$, az energiaszállítás iránya tehát a terjedési irány. Megjegyezzük, hogy most az üres térben terjedő elektromágneses hullámokat vizsgáltuk, ezekre érvényesek az állítások. Vannak longitudinálisak elektromágneses hullámok is, hullámvezetőkben (drótokban) ilyenek is terjedhetnek.Ilyenkor a vezető felületén érvényes határfeltétel miatt az $\mathbf{E}_0$ ($\mathbf{B}_0$) amplitúdó nem állandó, a divergenciás egyenletekbe való behelyettesítésnél ezeket is deriválni kell, ezért a hullámok nem feltétlenül transzverzálisak.

A vezetőben terjedő elektromágneses hullámok leírására az első Maxwell-egyenlet rot $\mathbf{H} = \mathbf{j}_{val} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}$ alakja alkalmas, a vezetőben $\mathbf{j}_{val} = \sigma \mathbf{E}$. Feltételezzük, hogy a közegre a $\mathbf{B} = \mu \mathbf{H}$, $\mathbf{D} = \varepsilon \mathbf{E}$ anyagi egyenletek érvényesek, és azt, hogy $\rho_{val} = 0$. A vákuumbeli hullámegyenletek levezetéséhez hasonlóan most a

$$\Delta \mathbf{E} - \mu\varepsilon \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} - \mu\sigma \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = 0, \quad \Delta \mathbf{B} - \mu\varepsilon \frac{\partial^2 \mathbf{B}}{\partial t^2} - \mu\sigma \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = 0$$

ún. távíró-egyenletekre jutunk. $\sigma = 0$ esetén a dielektrikumokban érvényes hullámegyenleteket kapjuk, a terjedési sebesség ott $v = \frac{c}{\sqrt{\varepsilon_r \mu_r}} = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon\mu}}$.

A periodikus síkhullám megoldás (a komplex írásmódról részletesebben lesz szó a síkhullámok potarizációjának tárgyalásánál):

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{E}_0 \exp\left[-\frac{\omega}{c}\kappa(\mathbf{nr})\right] \exp\left[i(\omega t - \mathbf{kr})\right],$$
$$\mathbf{B}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{B}_0 \exp\left[-\frac{\omega}{c}\kappa(\mathbf{nr})\right] \exp\left[i(\omega t - \mathbf{kr})\right],$$

itt $\kappa = c\sqrt{\frac{\varepsilon\mu}{2}}\sqrt{\sqrt{1+\tau^2} - 1}$, a vezető extinkciós együtthatója, $\tau = \omega\mu\sigma$. Ezek a síkhullámok transzverzálisak (a megoldás végtelen vezető közegben érvényes), $\mathbf{E}$ és $\mathbf{B}$ merőleges egymásra, fáziskülönbség van közöttük, ami jó vezetőre és nem túl nagy frekvenciára $\approx$ 45 fok. Hallgatólagosan feltételeztük, hogy σa frekvenciától független állandó, túl nagy frekvenciánál ez sem igaz. Ebben a viszonylag egyszerű elméletben a szigetelők átlátszóak, mert $\sigma \quad = 0$ esetén $\kappa = 0$, a vezetők nem átlátszóak, mert vezetőre κ>0. Ezzel szemben a jó szigetelő ebonit nem átlátszó, a jó vezető konyhasó oldat átlátszó. Az ellentmondás legfőbb oka az, hogy a látható frekvenciatartományban σ nem független a frekvenciától.

A vezetőben haladó elektromágneses hullám amplitúdója exponenciálisan csökken, a csillapodás frekvenciafüggő. A hullám hatására meginduló áram hőt fejleszt, ez fogyasztja az elektromágneses tér energiáját.

Foglalkozzunk a síkhullámok polarizációjával! A szabad hullámegyenlet periodikus síkhullám megoldása komplex írásmódban: $\mathbf{E} = \mathbf{E}_0 \exp i(\omega t \quad - \mathbf{kr})$. A térmennyiségek valós függvényekkel leírhatók, a komplex írásmódot csak technikai egyszerűsítés céljából használjuk. Minden kifejezés, egyenlet felbontható valós és képzetes részre, fizikai jelentést a valós résznek tulajdonítunk. Komplex írásmódban az $\mathbf{E}_0$ amplitúdó is lehet komplex. Legyen a hullám terjedési iránya a z-tengely,

$\mathbf{k} = (0{,}0{,}k)$, $(\omega t - kz)$-t jelöljük τ-val. A síkhullám általános alakja valós írásmódban:

$$\mathbf{E} = (a_1 \cos\tau, a_2 \cos(\tau + \alpha), 0),$$

az α fáziseltolódás onnan származik, hogy $\mathbf{E}_0$ is lehet komplex. Az $E_x = a_1 \cos\tau$, $E_y = a_2 \cos(\tau + \alpha)$ egyenletpár valamilyen görbe paraméteres egyenlete az $(E_x,\ E_y)$ síkon. Négyzetreemeléssel és összeadással a következő egyenletre juthatunk:

$$\frac{E_x^2}{a_1^2}+\frac{E_y^2}{a_2^2}-\frac{2E_xE_y}{a_1a_2}\cos\alpha=\sin^2\alpha,$$

ez kúpszelet egyenlete. A kvadratikus alak determinánsa $\frac{1}{a_1^2a_2^2}(1-\cos^2\alpha) \geq 0$, tehát a kúpszelet ellipszis ($\alpha=0$ esetén egyenespár). Azt mondhatjuk, hogy az elektromágneses síkhullám általában elliptikusan polarizált. (Vigyázat: kísérleti fizika kollokviumon megkérdezhetik, hogyan állítható elő elliptikusan polarizált fénysugár. Erre nem szabad azt felelni, hogy nem kell semmit csinálni, mert az magától elliptikusan polarizált. A fénysugár ugyanis véges hullámvonulatokból áll, az állítás az ilyen hullámvonulatokra érvényes. Az egymás utáni hullámvonulatokban a térerősség általában különböző ellipsziseken fut körbe, erre azt mondjuk, hogy a fénysugár polarizálatlan.) Két speciális eset érdemel figyelmet:

1. $\alpha=l\pi$, ahol l egész szám. Ekkor $\sin\alpha=0$, $\cos\alpha=(-1)^l$, és így $(\frac{E_x}{a_1}\pm\frac{E_y}{a_2})^2=0$, azaz $\frac{E_x}{E_y}=(-1)^l\frac{a_1}{a_2}$, ami egyenespár egyenlete, ez a lineáris polarizáció.
2. $\alpha=(2l+1)\frac{\pi}{2}$, ahol l egész szám., és $a_1=a_2=a$. Ekkor $\cos\alpha=0$, $\sin^2\alpha \ = 1$, és így $E_x^2+E_y^2=a^2$, ami kör egyenlete, ez a cirkuláris polarizáció.

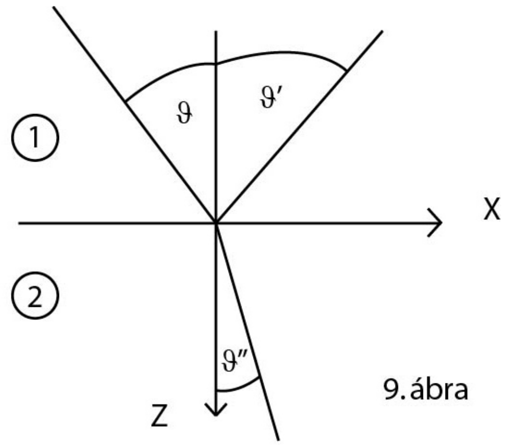
Az $\mathbf{E}=\mathbf{E}_0\exp i(\omega t-\mathbf{kr})$ síkhullám felírható $\mathbf{E}=\mathbf{e}E_0\exp i(\omega t \ -\mathbf{kr})$ alakban, $\mathbf{e}$ a $\mathbf{k}$-ra, a terjedési irányra merőleges egységvektor, a polarizációvektor, E_0komplex szám. Ha $\mathbf{e}$ állandó, akkor a térerősség mindig állandó irányba mutat, az ilyen síkhullám lineárisan polarizált. Legyen $\mathbf{e}_1$ és $\mathbf{e}_2$ $\mathbf{k}$-ra és egymásra merőleges két egységvektor. A $\mathbf{k}$ irányba terjedő legáltalánosabb síkhullám

$$\mathbf{E} \ =(\mathbf{e}_1E_1+\mathbf{e}_2E_2)\exp i(\omega t-\mathbf{kr})$$

alakban írható fel, E_1 és E_2 komplex szám. Ha fázisuk megegyezik, akkor a síkhullám lineárisan polarizált, polarizációvektora $\phi=\mathrm{arctg}(E_2/E_1)$ szöget zár be $\mathbf{e}_1$-gyel, a térerősség nagysága $\sqrt{E_1^2+E_2^2}$. Ha a fázisok különbözőek, akkor a síkhullám elliptikusan polarizált. Ha E_1 és E_2nagysága megegyezik, fázisuk különbsége 90^{O}, akkor a polarizáció cirkuláris, a térerősség

$$\mathbf{E} \ =E_0(\mathbf{e}_1\pm i\mathbf{e}_2)\exp i(\omega t-\mathbf{kr})$$

alakú, E_0 valós. $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{k}$ feszítse ki az x,y,z koordinátarendszert, ekkor
$E_x=E_0\cos(\omega t-kz)$, $E_y=\pm E_0\cos(\omega t-kz)$. Látható, hogy adott pontban az állandó nagyságú térerősség ω körfrekvenciával forog, jobbra, ill. balra cirkulárisan polarizált síkhullámról beszélünk. E kétféle cirkuláris polarizációjú hullám szuperpozíciójaként is leírhatjuk a $\mathbf{k}$ irányba terjedő legáltalánosabb síkhullámot,



9.ábra

$$\mathbf{E} = (\mathbf{e}_+ E_+ + \mathbf{e}_- E_-) \exp i(\omega t - \mathbf{kr}),$$

$\mathbf{e}_\pm = \frac{1}{\sqrt{2}}(\mathrm{e}_1 \pm \mathrm{ie}_2)$, E_+ és E_- komplex számok.

Levezetjük a két különböző dielektrikum sík határfelületén bekövetkező fénytörés és visszaverődés törvényeit. Legyen

a beeső hullám	$\mathbf{E} = \mathbf{E}_0 \exp i(\omega t - \mathbf{kr})$,	$\mathbf{B} = \dfrac{1}{\omega}\mathbf{k} \times \mathbf{E}$,
a visszavert hullám	$\mathbf{E}' = \mathbf{E}'_0 \exp i(\omega' t - \mathbf{k}'\mathbf{r})$,	$\mathbf{B}' = \dfrac{1}{\omega'}\mathbf{k}' \times \mathbf{E}'$,
a megtört hullám	$\mathbf{E}'' = \mathbf{E}''_0 \exp i(\omega'' t - \mathbf{k}''\mathbf{r})$,	$\mathbf{B}'' = \dfrac{1}{\omega''}\mathbf{k}'' \times \mathbf{E}''$,

a terjedés irányába mutató egységvektorok az ábra szerinti koordinátarendszerben

$$\mathbf{e} = \frac{\mathbf{k}}{|\mathbf{k}|} = (\sin\vartheta, 0, \cos\vartheta),$$
$$\mathbf{e}' = \frac{\mathbf{k}'}{|\mathbf{k}'|} = (\sin\vartheta'\cos\phi', \sin\vartheta'\sin\phi', -\cos\vartheta'),$$
$$\mathbf{e}'' = \frac{\mathbf{k}''}{|\mathbf{k}''|} = (\sin\vartheta''\cos\phi'', \sin\vartheta''\sin\phi'', \cos\vartheta'').$$

A két közeget elválasztó felületen határfeltételek érvényesek. Feltéve, hogy nincsenek valódi felületi töltések és áramok, $z = 0$-nál

$$\mathbf{E}_{t1} = \mathbf{E}_{t2}, \quad B_{n1} = B_{n2}, \quad D_{n1} = D_{n2}, \quad \mathbf{H}_{t1} = \mathbf{H}_{t2}.$$

Esetünkben az első egyenlet $\mathbf{E}_t + \mathbf{E}'_t = \mathbf{E}''_t$ alakú, ehhez jön még a további hasonló három egyenlet. Ezek a határfeltételek a felület (végtelen) sok pontjában, (végtelen) sok időpontban teljesülnek, ami csak úgy lehetséges, hogy $\mathbf{E}$, $\mathbf{E}'$, $\mathbf{E}''$ térbeli és időbeli változása $z = 0$-nál azonos, a fázistényezők megegyeznek:

$$(\omega t - \mathbf{kr})_{z=0} = (\omega' t - \mathbf{k}'\mathbf{r})_{z=0} = (\omega'' t - \mathbf{k}''\mathbf{r})_{z=0}.$$

Ezekből az egyenlőségekből az $\mathbf{r}$ vektor koordinátáinak megfelelő választásával kaphatók meg a törés és visszaverődés *kinematikai* törvényei:

1. $\omega = \omega' = \omega''$ ($x = y = 0$ választással), a körfrekvenciák megegyeznek. A beeső és a visszavert sugár ugyanabban a közegben terjed, ezért $k = k'$.

2. A $\mathbf{k}$, $\mathbf{k}'$, $\mathbf{k}''$ hullámszámvektorok egy síkban vannak. ($x = 0$ választás arra vezet, hogy $\phi' = \phi'' = 0$.)

3. $k \sin\vartheta = k' \sin\vartheta' = k'' \sin\vartheta''$. Mivel $k = k'$, ezért $\vartheta = \vartheta'$, a beesési szög egyenlő a visszaverődési szöggel. A második egyenlőségből

$$\frac{\sin\vartheta}{\sin\vartheta''} = \frac{k''}{k} = \sqrt{\frac{\varepsilon''\mu''}{\varepsilon\mu}} = \frac{n''}{n} = n_{12},$$

bevezettük az $n \equiv \sqrt{\frac{\varepsilon\mu}{\varepsilon_0\mu_0}}$, $n'' \equiv \sqrt{\frac{\varepsilon''\mu''}{\varepsilon_0\mu_0}}$ törésmutatókat és a 2-es közegnek az 1-es közegre vonatkoztatott n_{12} relatív törésmutatóját. Ez a Snellius-Descartes-törvény. Érdemes megjegyezni, hogy a kinematikai törvények levezetéséhez nem kellett felhasználni a határfeltételek explicit alakját csak azt, hogy vannak határfeltételek.

A 2-es közegben a térerősség

$$\mathbf{E}'' = \mathbf{E}''_0 \exp i(\omega t - k'' \sin\vartheta'' x - k'' \cos\vartheta'' z).$$

A Snellius-Descartes-törvényből

$$\cos\vartheta'' = \frac{1}{n_{12}}\sqrt{n_{12}^2 - \sin^2\vartheta} = -\frac{i}{n_{12}}\sqrt{\sin^2\vartheta - n_{12}^2}$$

(i a képzetes egység). Ha $n_{12} < 1$, azaz a fénysugár optikailag sűrűbb közegből optikailag ritkább közegbe megy át, akkor $\sin\vartheta > n_{12}$ esetén

$$\mathbf{E}'' = \mathbf{E}''_0 \exp\left(-\frac{1}{n_{12}}\sqrt{\sin^2\vartheta - n_{12}^2} k'' z\right) \exp i(\omega t - k'' \sin\vartheta'' x).$$

Ez a teljes visszaverődés, jellemzői az x-tengely mentén (a határfelülettel párhuzamos irányban) terjedő síkhullám és a z-tengely menti (a határfelületre merőleges irányú) exponenciális csökkenés.

A törés és visszaverődés *dinamikai* törvényei, amelyek a felületen átjutó, ill. visszavert energiamennyiség számítására nyújtanak lehetőséget, a határfeltételek konkrét alakjából következnek. Az exponenciálisokkal a fázisok egyenlősége következtében egyszerűsíteni lehet. Feltételezve, hogy mindkét közegre teljesülnek a

$\mathbf{D} = \varepsilon\mathbf{E}$, $\mathbf{B} = \mu\mathbf{H}$ anyagi egyenletek, mind a négy határfeltétel kifejezhető az elektromos térerősségekkel, $\mathbf{n}$ a határfelület normális egységvektora:

$$
\begin{aligned}
\mathbf{E}_{t1} = \mathbf{E}_{t2} \quad &\rightarrow \quad \mathbf{n} \times (\mathbf{E}_0 + \mathbf{E}'_0 - \mathbf{E}''_0) = 0,\\
B_{n1} = B_{n2} \quad &\rightarrow \quad \mathbf{n}(\mathbf{k} \times \mathbf{E}_0 + \mathbf{k}' \times \mathbf{E}'_0 - \mathbf{k}'' \times \mathbf{E}''_0) = 0,\\
D_{n1} = D_{n2} \quad &\rightarrow \quad \mathbf{n}(\varepsilon\mathbf{E}_0 + \varepsilon\mathbf{E}'_0 - \varepsilon''\mathbf{E}''_0) = 0,\\
\mathbf{H}_{t1} = \mathbf{H}_{t2} \quad &\rightarrow \quad \mathbf{n} \times \left(\frac{1}{\mu}(\mathbf{k} \times \mathbf{E}_0 + \mathbf{k}' \times \mathbf{E}'_0) - \frac{1}{\mu''}(\mathbf{k}'' \times \mathbf{E}''_0)\right) = 0.
\end{aligned}
$$

Tetszőleges polarizációjú síkhullám előállítható két, egymásra merőleges lineáris polarizációjú síkhullám megfelelő lineáris kombinációjaként. Legyen most az egyik olyan, amelynek polarizációvektora merőleges a $\mathbf{k}$ és az $\mathbf{n}$ vektorok által kifeszített beesési síkra, a másik olyan, amelynek polarizációvektora párhuzamos ezzel a síkkal. Tekintsük először az első esetet, ekkor az első és a negyedik határfeltétel szerint

$$E_0 + E'_0 = E''_0, \quad \sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}}\,(E_0 - E'_0)\cos\vartheta = \sqrt{\frac{\varepsilon''}{\mu''}}E''_0\cos\vartheta''.$$

A harmadik határfeltétel automatikusan teljesül, a második a Snellius-Descartes-törvény felhasználásával beláthatóan ugyanazt adja, mint az első. A két egyenlet megoldása a következő:

$$\frac{E'_0}{E_0} = \frac{\sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}}\cos\vartheta - \sqrt{\frac{\varepsilon''}{\mu''}}\cos\vartheta''}{\sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}}\cos\vartheta + \sqrt{\frac{\varepsilon''}{\mu''}}\cos\vartheta''}, \quad \frac{E''_0}{E_0} = \frac{2\sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}}\cos\vartheta}{\sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}}\cos\vartheta + \sqrt{\frac{\varepsilon''}{\mu''}}\cos\vartheta''}.$$

A második esetben hasonló gondolatmenettel a következő végeredményre jutunk:

$$\frac{E'_0}{E_0} = \frac{\sqrt{\frac{\varepsilon''}{\mu''}}\cos\vartheta - \sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}}\cos\vartheta''}{\sqrt{\frac{\varepsilon''}{\mu''}}\cos\vartheta + \sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}}\cos\vartheta''}, \quad \frac{E''_0}{E_0} = \frac{2\sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}}\cos\vartheta}{\sqrt{\frac{\varepsilon''}{\mu''}}\cos\vartheta + \sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}}\cos\vartheta''}.$$

Az első egyenlőségből következik, hogy a beesési síkkal párhuzamos polarizáció esetén a ϑ beesési szögnek van egy olyan értéke, amelynél nincs visszavert hullám, ez a *Brewster-szög*. Speciálisan, $\mu = \mu''$ esetén $\mathrm{tg}\vartheta_B = \frac{n''}{n}$. A Snellius-Descartes-törvényt felhasználva megmutatható, hogy ekkor $\vartheta_B + \vartheta'' = \frac{\pi}{2}$.

Feladat: Bizonyítsuk be ezt az állítást!

Speciális esetben, merőleges beesésnél ($\vartheta = 0$), olyan közegeknél, amelyekre $\mu = 1$

$$\frac{E_0'}{E_0} = \frac{1 - n_{12}}{1 + n_{12}}, \quad \frac{E_0''}{E_0} = \frac{2}{1 + n_{12}}.$$

Az időre (egy periódusra) átlagolt áramsűrűségvektorok nagysága:

$$\left|\bar{\mathbf{S}}\right| = \varepsilon_0 c^2 \frac{1}{2} \left|(\mathbf{E}_0 \times \mathbf{B}_0)\right| = \frac{\varepsilon_0 c^2}{2} \sqrt{\varepsilon} E_0^2,$$

$$\left|\bar{\mathbf{S}}'\right| = \varepsilon_0 c^2 \frac{1}{2} \left|(\mathbf{E}'_0 \times \mathbf{B}'_0)\right| = \frac{\varepsilon_0 c^2}{2} \sqrt{\varepsilon} E'^2_0,$$

$$\left|\bar{\mathbf{S}}''\right| = \varepsilon_0 c^2 \frac{1}{2} \left|(\mathbf{E}''_0 \times \mathbf{B}''_0)\right| = \frac{\varepsilon_0 c^2}{2} \sqrt{\varepsilon''} E''^2_0,$$

az $\frac{1}{2}$ szorzótényező az időátlagolás következménye. Definiáljuk az r visszaverődési és a d visszaverődési együtthatót:

$$r \equiv \frac{\left|\bar{\mathbf{S}}'\right|}{\left|\bar{\mathbf{S}}\right|} = \left(\frac{1 - n_{12}}{1 + n_{12}}\right)^2, \quad d \equiv \frac{\left|\bar{\mathbf{S}}''\right|}{\left|\bar{\mathbf{S}}\right|} = \frac{4n_{12}}{(1 + n_{12})^2}, \quad r + d = 1,$$

ezek az ún. Fresnel-formulák.

Mi történik akkor, ha két síkhullám találkozik? Létrejöhet az interferencia. Az $\mathbf{E} = \mathbf{E}_1 + \mathbf{E}_2$, $\mathbf{B} = \mathbf{B}_1 + \mathbf{B}_2$ szuperpozíciók megoldásai a Maxwell-egyenleteknek, de az intenzitásmérő adatok, az u energiasűrűség és az $\mathbf{S}$ energiaáramsűrűség nem adódnak össze. Ezeket összefoglalóan I-vel jelölve: $I = I_1 + I_2 + I'$, ahol $I_1 \approx \mathbf{E}_1^2$, $I_2 \approx \mathbf{E}_2^2$, $I' \approx \mathbf{E}_1\mathbf{E}_2$, ez utóbbi az interferencia-tag (felhasználtuk, hogy síkhullámban $\mathbf{B}$ kifejezhető $\mathbf{E}$-vel). Pillanatnyi interferencia általában van, de nem észleljük, mert I' nagyon gyorsan változik. Észlelhető tartós interferencia akkor jön létre, ha $\bar{I}'$, az interferencia-tag időátlaga különbözik nullától. Ennek három feltétele van:

1. A síkhullámok frekvenciája meg kell egyezzen: $\omega_1 = \omega_2 = \omega$. A periodikus síkhullámok időfüggése: $\mathbf{E}_1 = \mathbf{A}_1 \cos \omega_1 t$, $\mathbf{E}_2 = \mathbf{A}_2 \cos \omega_2 t$. A $\cos \omega_1 t \cdot \cos \omega_2 t$ szorzat gyorsan változik, nagyon sűrűn 0, időátlaga annál kisebb, minél nagyobb időtartamra átlagolunk. Ha viszont $\omega_1 = \omega_2 = \omega$, akkor $I' \approx \cos^2 t$, aminek időátlaga $\frac{1}{2}$.

2. A második feltétel geometriai jellegű. Az interferencia tag, $I' \approx \mathbf{E}_1\mathbf{E}_2$, így ha a két térerősség minden pillanatban merőleges egymásra, akkor sem tartós, sem pillanatnyi interferencia nincs. Pl. egy irányban terjedő, egymásra merőlegesen lineárisan polarizált hullámok nem interferálnak.

3. A harmadik az ún. koherencia-feltétel. A komplex írásmódban felírt térerősség tartalmaz egy $\exp(i\phi)$ tényezőt. A fényforrások általában véges hullámvonulatokat bocsájtanak ki, ezek ϕ fázisállandója rendszertelenül ingadozik. Ha a találkozó síkhullámok fázisállandóinak különbsége nem állandó, akkor az időátlagolás 0-t eredményez, nincs tartós interferencia. Ha egy fényforrás által kibocsájtott hullámot szétválasztunk, majd

újra egyesítünk, akkor ez a probléma nem lép fel. Azt mondjuk, hogy az ilyen hullámok koherensek. Vannak olyan fényforrások (lézer, mézer), amelyek szintén koherens hullámokat bocsájtanak ki, így létrejöhet tartós interferencia.

8. fejezet

Retardált potenciálok, dipólsugárzás, fényszórás

Levezetjük a Maxwell-egyenletek egy fizikailag nagyon fontos megoldását. A teljes egyenletrendszer:

$$c^2\mathrm{rot}\mathbf{B} = \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} + \frac{\mathbf{j}}{\varepsilon_0}, \quad \mathrm{div}\mathbf{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}, \quad \mathrm{rot}\mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, \quad \mathrm{div}\mathbf{B} = 0.$$

Az elektrosztatikában már bevezettük a skalárpotenciált, a stacionárius áram tárgyalásánál a vektorpotenciált, most ugyanezek legáltalánosabb alakját adjuk meg. Mivel $\mathrm{div}\mathbf{B} = 0$, ezért bevezethető a vektorpotenciál, $\mathbf{B} = \mathrm{rot}\mathbf{A}$. Beírva ezt a harmadik egyenletbe az adódik, hogy

$$\mathrm{rot}\left(\mathbf{E} + \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}\right) = 0,$$

ezért az $\mathbf{E} + \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}$ vektor írható fel gradiensként,

$$\mathbf{E} + \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} = -\mathrm{grad}\Phi.$$

$\mathbf{A}' = \mathbf{A} + \mathrm{grad}\chi$ és $\Phi' = \Phi - \frac{\partial \chi}{\partial t}$ ugyanazt az $\mathbf{E}$-t és $\mathbf{B}$-t határozza meg, mint $\mathbf{A}$ és χ, most is igaz, hogy a potenciálok csak egy mértéktranszformáció erejéig meghatározottak, kiróható egy mellékfeltétel, ami egyszerűsítheti az egyenleteket. Azt írjuk elő, hogy $\mathrm{div}\mathbf{A} + \frac{1}{c^2}\frac{\partial \Phi}{\partial t} = 0$ teljesüljön, ekkor Lorentz-mértékben dolgozunk. A potenciálokra így a következő egyenleteket kapjuk:

$$\Delta\Phi - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} = -\frac{\rho}{\varepsilon_0}, \quad \Delta\mathbf{A} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} = -\frac{\mathbf{j}}{\varepsilon_0 c^2},$$

ezek az inhomogén hullámegyenletek. Megmutatható, hogy az alábbi megoldások az egyenletek mellett a Lorentz-feltételt is kielégítik:

$$\Phi(\mathbf{r},t)=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int\frac{\rho(\mathbf{r}',t')}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}dV',\quad \mathbf{A}(\mathbf{r},t)=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0c^2}\int\frac{\mathbf{j}(\mathbf{r}',t')}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}dV',\quad t'=t-\frac{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}{c}.$$

Ezek a retardált potenciálok, a retardálás, időbeli késés az idő szerinti második derivált hatása. Fizikai jelentésük nagyon természetesnek látszik. A hatás nem pillanatszerű, c sebességgel terjed, az $\frac{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}{c}$ idővel korábbi töltés- ill. árameloszlás határozza meg a skalár- ill. vektorpotenciált. Éppen ennyi időre van szükség ahhoz, hogy hatás elérjen az $\mathbf{r}'$ helyzetvektorú pontból az $\mathbf{r}$ helyzetvektorú pontba. Megjegyezzük, hogy az inhomogén hullámegyenleteknek megoldásai az ún. avanzsált potenciálok is, amelyekben $t'=t+\frac{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}{c}$. Ez azt jelentené, hogy az $\frac{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}{c}$ idővel későbbi töltés- ill. árameloszlás határozná meg a potenciálokat, ami ellentmond az ok-okozat összefüggésnek, így semmiféle fizikai jelentése nem lehet.

A megoldás alábbi szemléletes magyarázata Feynmantól származik. Ha csak a kezdőpontban van egy pontszerű töltés, akkor megoldása az egyenletnek a

$\Phi(\mathbf{r},t)=\frac{1}{r}f(t-t')$, $\quad t'=\frac{r}{c}$ kifutó gömbhullám, amit a töltés hoz létre. Kis r esetén $\Phi\approx\frac{f(t)}{r}$, mert $\frac{r}{c}$ elég nagy t mellett kicsi. Ez a kezdőpontban lévő változó nagyságú töltés Coulomb-potenciálja, tehát $\Phi=\frac{Q(t)}{4\pi\varepsilon_0 r}$, ami megoldása a

$$\Delta\Phi=-\frac{\rho}{\varepsilon_0}$$

egyenletnek, $Q=\int\rho dV$. A hullámegyenlet megoldása ezért

$$\Phi(\mathbf{r},t)=\frac{Q(t-t')}{4\pi\varepsilon_0 r},\quad t'=\frac{r}{c}.$$

Alkalmazásként meghatározzuk egy nagyon kicsi (pontszerű) rezgő elektromos dipólus antenna elektromágneses terét. Az $\mathbf{r}_0$ helyzetvektorú pontban lévő $\mathbf{p}(t)$ dipólmomentumú antenna sűrűségvektora, a polarizáció vektor $\mathbf{P}(\mathbf{r},t)$, $\mathbf{p}(t)=\int\mathbf{P}(\mathbf{r},t)\,dV$. A pontszerű töltés töltéssűrűségéhez hasonlóan most is a $\delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}_0)$ általánosított függvény segítségével fejezzük ki a dipólmomentumsűrűséget,

$$\mathbf{P}(\mathbf{r},t)=\mathbf{p}(t)\,\delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}_0).$$

A dielektrikumok és a stacionárius áram tárgyalásánál kiderült, hogy a $\mathbf{P}$ dipóluseloszlás skalárpotenciálja $\rho_{pol}=-\mathrm{div}\mathbf{P}$ töltéssűrűségével, vektorpotenciálja $\mathbf{j}_{pol}=\frac{\partial\mathbf{P}}{\partial t}$ áramsűrűségével ekvivalens. Így a

$$\Delta\Phi-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\Phi}{\partial t^2}=\frac{\mathrm{div}\mathbf{P}}{\varepsilon_0},\quad \Delta\mathbf{A}-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\mathbf{A}}{\partial t^2}=-\frac{1}{\varepsilon_0c^2}\frac{\partial\mathbf{P}}{\partial t}$$

hullámegyenleteket kell megoldanunk, a megoldás a két retardált potenciál:

$$\Phi(\mathbf{r},t) = -\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int \frac{\text{div'}\mathbf{P}(\mathbf{r}',t')}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}dV', \quad \mathbf{A}(\mathbf{r},t) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0 c^2}\int \frac{\frac{\partial \mathbf{P}}{\partial t}(\mathbf{r}',t')}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}dV',$$

$t' = t - \frac{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}{c}$, div' azt jelenti, hogy állandó t' mellett kell deriválni. Az integrálások a $\delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}_0)$ általánosított függvény segítségével elvégezhető, az eredmény a következő:

$$\Phi(\mathbf{r},t) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0 c}\frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}_0|^2}\dot{\mathbf{p}}\left(t - \frac{|\mathbf{r}-\mathbf{r}_0|}{c}\right)(\mathbf{r} \ -\mathbf{r}_0) + \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\mathbf{r}-\mathbf{r}_0}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}_0|^3}\mathbf{p}\left(t - \frac{|\mathbf{r}-\mathbf{r}_0|}{c}\right),$$

$$\mathbf{A}(\mathbf{r},t) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0 c^2}\frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}_0|}\dot{\mathbf{p}}\left(t - \frac{|\mathbf{r}-\mathbf{r}_0|}{c}\right).$$

Tudjuk, hogy $\mathbf{E} = \text{grad}\Phi - \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}$, $\mathbf{B} = \text{rot}\mathbf{A}.$ Kissé hosszadalmas számolás adja a végeredményt:

$$\begin{aligned}
\mathbf{E} \ &= \frac{3}{4\pi\varepsilon_0 |\mathbf{r}-\mathbf{r}_0|^5}[\mathbf{p}(\mathbf{r}-\mathbf{r}_0)](\mathbf{r} \ -\mathbf{r}_0) \ - \frac{\mathbf{p}}{4\pi\varepsilon_0 |\mathbf{r}-\mathbf{r}_0|^3} + \\
&+ \frac{3}{4\pi\varepsilon_0 c |\mathbf{r}-\mathbf{r}_0|^4}[\dot{\mathbf{p}}(\mathbf{r}-\mathbf{r}_0)](\mathbf{r} \ -\mathbf{r}_0) \ - \frac{\dot{\mathbf{p}}}{4\pi\varepsilon_0 c |\mathbf{r}-\mathbf{r}_0|^2} + \\
&+ \frac{1}{4\pi\varepsilon_0 c^2 |\mathbf{r}-\mathbf{r}_0|^3}[\ddot{\mathbf{p}}(\mathbf{r}-\mathbf{r}_0)](\mathbf{r} \ -\mathbf{r}_0) \ - \frac{\ddot{\mathbf{p}}}{4\pi\varepsilon_0 c^2 |\mathbf{r}-\mathbf{r}_0|}, \\
\mathbf{B} \ &= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0 c^2 |\mathbf{r}-\mathbf{r}_0|^3}[\dot{\mathbf{p}} \times (\mathbf{r}-\mathbf{r}_0)] + \frac{1}{4\pi\varepsilon_0 c^3 |\mathbf{r}-\mathbf{r}_0|^2}[\ddot{\mathbf{p}} \times (\mathbf{r}-\mathbf{r}_0)],
\end{aligned}$$

$\mathbf{p}$, $\dot{\mathbf{p}}$, $\ddot{\mathbf{p}}$ argumentuma mindenhol a $t - \frac{|\mathbf{r}-\mathbf{r}_0|}{c}$ retardált idő.

A megoldásban jól elkülöníthető három rész. $\mathbf{E}$ első két tagja (az első sor) a dipólus sztatikus elektromos tere. Ha $\mathbf{p}$ időfüggetlen, akkor csak ez van,

$\mathbf{B} = 0$, egy sztatikus dipólusnak nincs mágneses tere. $\mathbf{E}$ második két tagja (a második sor) és $\mathbf{B}$ első tagja a polarizációs áram elektromágneses tere. $\mathbf{E}$ utolsó két tagja (a harmadik sor) és $\mathbf{B}$ második tagja a gyorsuló dipólus által kisugárzott elektromágneses hullám. Legyen $\mathbf{p}(t) = \mathbf{p}_0 \exp(i\omega t)$, $\mathbf{p}_0 = (0,\ 0,\ p_0)$, $\mathbf{r}_0 \ = (0,\ 0,\ 0)$. Összehasonlítjuk az előbb felsorolt három rész nagyságrendjét:

$$\begin{array}{cccccc}
\mathbf{E} & \frac{p_0}{r^3} & : & \frac{p_0\omega}{cr^2} & : & \frac{p_0\omega^2}{c^2 r} \\
\mathbf{B} & & & \frac{p_0\omega}{c^2 r^2} & : & \frac{p_0\omega^2}{c^3 r}
\end{array}$$

Az egymás melletti értékek hányadosa $2\pi\frac{r}{\lambda}$, $\lambda = 500$ m, $r = 50$ km esetén pl. a $2\pi\frac{r}{\lambda} \approx 600$. A dipólushoz közel a sztatikus zónában az elektrosztatikus tér a domináns, a távoli hullámzónában az elektromágneses sugárzás. Utóbbiban (gömbi koordinátákban)

$$E_\vartheta = \frac{\omega^2 p_0}{4\pi\varepsilon_0 c^2 r}\sin\vartheta \exp\left[i\omega\left(t - \frac{r}{c}\right)\right], \quad E_r = E_\phi = 0,$$

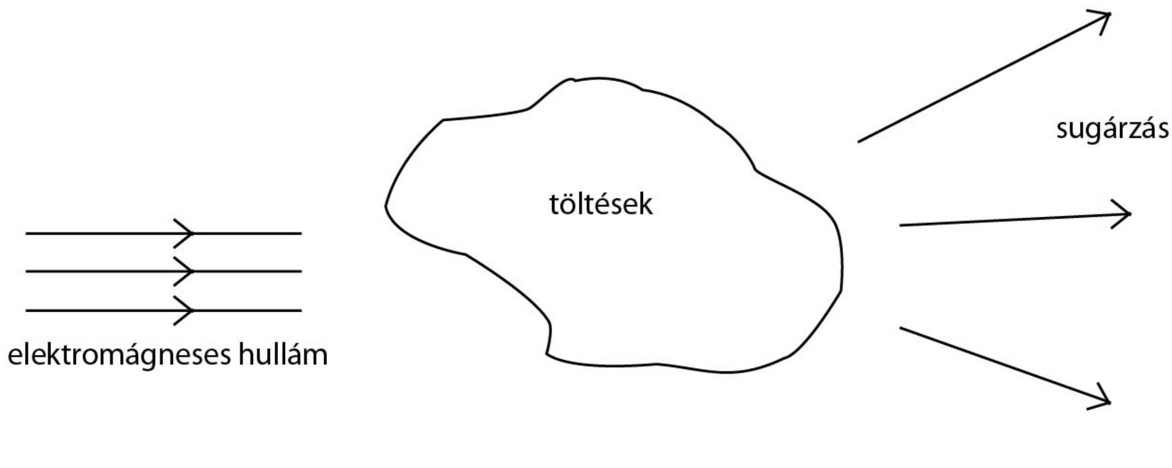
$$B_\phi = \frac{\omega^2 p_0}{4\pi\varepsilon_0 c^3 r}\sin\vartheta \exp\left[i\omega\left(t - \frac{r}{c}\right)\right], \quad B_r = B_\vartheta = 0.$$

Látszik a kifutó gömbhullára jellemző r-függés, $\mathbf{E}$ és $\mathbf{B}$ egymásra és $\mathbf{r}$-re is merőleges. Az $\mathbf{S}$ energiaáramsűrűség vektor sugár irányú,

$$|\mathbf{S}| \quad = \quad \frac{p_0^2 \omega^4}{(4\pi)^2 \varepsilon_0 c^3 r^2} \sin^2 \vartheta \cos^2 \omega \left(t - \frac{r}{c}\right).$$

Az energiaszállítás nem izotrop, ϑ- függő. A dipólmomentum irányában ($\vartheta = 0$) nincs energiasugárzás, az „egyenlítő” síkjában ($\vartheta = \pi/2$) maximális. Egy r sugarú gömb felületén időegység alatt áthaladó energia átlagos (egy periódusra átlagolt) értéke:

$$U_{sec} = \quad \frac{1}{T} \int_0^T \iint |\mathbf{S}|\, dt r^2 \sin \vartheta d\vartheta d\phi = \frac{p_0^2 \omega^4}{4\pi^2 \varepsilon_0 c^3} \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \sin^3 \vartheta d\vartheta d\phi \frac{1}{T} \int_0^T \cos^2 \omega \left(t - \frac{r}{c}\right) dt =$$
$$= \frac{p_0^2 \omega^4}{12\pi \varepsilon_0 c^3}.$$



10. ábra

A fényszórás olyan folyamat, amelynek során a porszemekre, vízcseppekre érkező elektromágneses hullám megrezgeti az ott lévő töltéseket, a rezgő töltések pedig újabb elektromágneses hullámokat sugároznak ki. Legyen $\mathbf{S}_{be}$ a bejövő hullám energiaáramsűrűség vektora, dU_{sec} a töltésrendszer által a $d\Omega$ térszögbe 1 sec alatt kisugárzott energia. A szórás $d\Omega$ térszögre eső differenciális hatáskeresztmetszete

$$d\sigma = \frac{d\bar{U}_{sec}}{\left|\bar{\mathbf{S}}_{be}\right|},$$

a felülvonás időre (egy periódusra) való átlagolást jelent. A teljes hatáskeresztmetszet $\sigma = \int d\sigma$, a térszög szerint kell integrálni.

Először az egyetlen szabad töltésen történő szórást vizsgáljuk a következő egyszerűsítő feltevések mellett:

1) a bejövő hullám mozgásba hozza a töltést, ennek sebessége $v \ll c$ (a töltés valamekkora tömegen pl. porszemen ül), ekkor a Lorentz-erő a Coulomb-erő mellet elhanyagolható, mert pl. síkhullámban $|\mathbf{B}| = \frac{|\mathbf{E}|}{c}$.

2) a töltés az origó ($\mathbf{r} = 0$) körül rezeg, de mindig a térerősség origóbeli értékével számolunk.

Legyen $\mathbf{E}_{be} = \mathbf{E}_0 \cos(\omega t - \mathbf{kr})$, lineárisan poláros síkhullám. A töltés mozgásegyenlete:

$$m\ddot{\mathbf{r}} = q\mathbf{E}_{be},$$

dipólmomentuma $\mathbf{p} = q\mathbf{r}$, és $\ddot{\mathbf{p}} = q\ddot{\mathbf{r}} = \frac{q^2}{m}\mathbf{E}_{be}$. A rezgő töltés által keltett elektromágneses tér kifutó gömbhullám része:

$$\mathbf{E}_{ki} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0 c^2}\left[\frac{(\ddot{\mathbf{p}}\mathbf{r})\,\mathbf{r}}{r^3} - \frac{\ddot{\mathbf{p}}}{r}\right] = \frac{(\ddot{\mathbf{p}} \times \mathbf{r}) \times \mathbf{r}}{4\pi\varepsilon_0 c^2 r^3}, \quad \mathbf{B}_{ki} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0 c^3}\frac{\ddot{\mathbf{p}} \times \mathbf{r}}{r^2},$$

$\ddot{\mathbf{p}}$ argumentuma a retardált idő, $t - \frac{r}{c}$. A kifutó energiaáramsűrűségvektor nagysága

$$|\mathbf{S}_{ki}| = \varepsilon_0 c^2 |\mathbf{E}_{ki} \times \mathbf{B}_{ki}| = \frac{(\ddot{\mathbf{p}} \times \mathbf{r})^2}{(4\pi)^2 \varepsilon_0 c^3 r^4} = \frac{1}{(4\pi)^2 \varepsilon_0 c^3}\frac{1}{r^2}\frac{q^4}{m^2}|\mathbf{E}_{be}|^2 \sin^2\vartheta,$$

ϑ az $\mathbf{r}$ és $\mathbf{E}_{be}$ vektorok által bezárt szög. A $d\Omega$ térszögbe 1 sec alatt kisugárzott, átlagos energia

$$d\bar{U}_{sec} = r^2 d\Omega \frac{1}{T}\int_0^T |\mathbf{S}_{ki}|\, dt = \frac{E_0^2}{(4\pi)^2 \varepsilon_0 c^3}\frac{q^4}{m^2}\sin^2\vartheta d\Omega.$$

Az egy periódusra átlagolt bejövő energiaáramsűrűség vektor

$$\left|\bar{\mathbf{S}}_{be}\right| = \varepsilon_0 c^2 \frac{1}{T}\int_0^T |\mathbf{E}_{be} \times \mathbf{B}_{be}|\, dt = \varepsilon_0 c \frac{E_0^2}{2}.$$

A differenciális hatáskeresztmetszet

$$d\sigma = \frac{d\bar{U}_{sec}}{|\mathbf{S}_{be}|} = \frac{1}{(4\pi\varepsilon_0)^2}\left(\frac{q^2}{mc^2}\right)^2 \sin^2\vartheta d\Omega,$$

a teljes hatáskeresztmetszet

$$\sigma = \frac{1}{(4\pi\varepsilon_0)^2}\left(\frac{q^2}{mc^2}\right)^2 \int \sin^3\vartheta d\vartheta d\phi = \frac{1}{(4\pi\varepsilon_0)^2}\frac{8\pi}{3}\left(\frac{q^2}{mc^2}\right)^2,$$

ez a Thomson-hatáskeresztmetszet. A $\frac{q^2}{mc^2}$ kifejezés neve klasszikus elektronsugár, de vigyázat, ez csak Gauss-mértékegységrendszerben távolság dimenziójú

Ha a bejövő elektromágneses hullám kis (a sugarú, ε_r relatív dielektromos állandójú) gömbön szóródik, akkor a dielektrikumoknál tárgyaltak szerint

$\mathbf{p} \propto \mathbf{E}_{be}$ (a pontos összefüggés $\mathbf{p} = 4\pi\varepsilon_0\frac{\varepsilon_r-1}{\varepsilon_r+2}a^3\mathbf{E}_{be}$), ezért $\ddot{\mathbf{p}}$-ban ω^2 szorzótényező jelenik meg, és a teljes hatáskeresztmetszet, $\sigma \propto \frac{\omega^4}{c^4} = \frac{1}{\lambda^4}$.

Feladat: Miért kék az ég, miért piros a lemenő Nap?

---

9. fejezet

Geometriai optika

A geometriai optika a fényterjedést sugarakkal írja le. Vizsgáljuk az elektromágneses hullám terjedését izotrop inhomogén szigetelő közegben. A hullámegyenlet $\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2} - v^2(\mathbf{r})\,\Delta\psi = 0$ alakú, itt $v(\mathbf{r})$ a helyfüggő terjedési sebesség, ψ az $\mathbf{E}$ elektromos térerősség vagy a $\mathbf{B}$ mágnese indukció valamelyik derékszögű komponense. Az egyenlet időben periodikus megoldása $\psi = \psi_0(\mathbf{r})\exp(i\omega t)$, $\psi_0(\mathbf{r})$ a

$$\Delta\psi_0(\mathbf{r}) + \frac{\omega^2}{v^2(\mathbf{r})}\psi_0(\mathbf{r}) = 0$$

egyenletnek tesz eleget. Keressük ennek megoldását $\psi_0(\mathbf{r}) = a(\mathbf{r})\exp(-ikL(\mathbf{r}))$ alakban. Az $L(\mathbf{r})$ neve eikonál (fényút), az $L = $ állandó felület normálvektora jelöli ki a fényterjedés irányát az adott pontban. Síkhullámban állandó terjedési sebesség esetén $L = \mathbf{nr}$. Ha $a(\mathbf{r})$ lassan változik, és L közel lineáris $\mathbf{r}$-ben, akkor $\psi_0$közel síkhullám. A törésmutató definíciója $n(\mathbf{r}) \equiv \frac{\omega}{kv(\mathbf{r})}$, ahol k a vákuumbeli hullámszám.

A $\lambda \to 0$ ($k = \frac{2\pi}{\lambda} \to \infty$) határesetben az egyenlet a

$$(\mathrm{grad}\ L)^2 = n^2$$

közelítő alakban írható, ez az *eikonál-egyenlet.* $\lambda \to 0$ (elterjedt) pongyola megfogalmazás, adott hullámhosszú fény terjedése során λtermészetesen állandó, azt kell megmondanunk, hogy mihez képest kicsi. A közelítés során, amelyet itt nem részletezünk, bizonyos tagokat elhanyagolunk, az elhanyagolás feltételei a következők:

1. $\frac{|grad\ a(\mathbf{r})|}{a(\mathbf{r})} \ll \frac{1}{\lambda'} = \frac{n}{\lambda}$, ahol λ'a közegbeli hullámhossz.

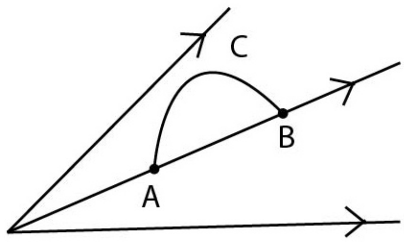
2. Az $L = $ állandó egyenlet által meghatározott hullámfelület görbületi sugara $\gg \lambda$.

3. A hullámfront lineáris méretei (pl. gömbhullám esetén a gömb sugara) $\gg \lambda$.

Az első feltétel nem érvényes pl. fény és árnyék határán (itt az intenzitás gyorsan változhat, grad a nagy lehet), a második és harmadik feltétel nem érvényes fényforrások, fókuszok közelében.

Izotrop közegben a $\mathbf{k}$ hullámszámvektor a fénysugarak irányába mutat, merőleges az $L \quad =$ állandó felületekre. Ekkor az eikonál-egyenletből gyökvonással azt kapjuk, hogy grad $L = \frac{\mathbf{k}}{k} n$.

Tetszőleges zárt görbére igaz, hogy $\oint n\mathbf{k}d\mathbf{s} = k \oint \text{grad } L d\mathbf{s} = 0$.



11. ábra

Alkalmazzuk ezt egy olyan zárt görbére, amelynek AB szakasza a fénysugár egy darabja, B-ből A-ba pedig valamilyen tetszőleges C görbén jutunk vissza.

$$\int_A^B n\mathbf{k}d\mathbf{s} + \int_C n\mathbf{k}d\mathbf{s} = k\int_A^B nds + \int_C n\mathbf{k}d\mathbf{s} = 0.$$

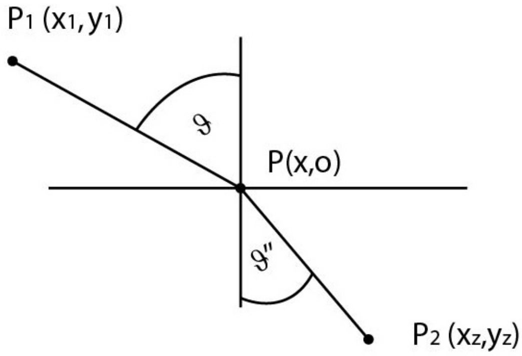
A skalárszorzat tulajdonsága miatt igaz, hogy $\int_C n\mathbf{k}d\mathbf{s} \leq \int_C nkds$, ezért

$$\int_A^B nds = -\frac{1}{k}\int_C n\mathbf{k}d\mathbf{s} = \frac{1}{k}\int_{-C} n\mathbf{k}d\mathbf{s} \leq \int_{-C} nds,$$

az utolsó két integrálban a $-C$ integrálási út a C megfordítottja. Az első és utolsó integrál összehasonlítása szolgáltatja a *Fermat-elvet*: az $\int nds$ optikai úthossznak nevezett integrál a fénysugár mentén minimális. Felhasználva, hogy $n = \frac{c}{v}$, arra jutunk, hogy $c\int \frac{ds}{v(\mathbf{r})}$ és így $T = \int \frac{ds}{v(\mathbf{r})}$ terjedési idő minimális a fénysugár mentén.

Alkalmazásként a Fermat-elvből levezetjük a Snellius-Descartes-törvényt. Meghatározzuk, hogy az 1-es közeg $\mathrm{P}_1(x_1, y_1)$ pontjától a két közeget elválasztó sík határfelület melyik $\mathrm{P}(x,0)$ pontján keresztül vezet a legrövidebb fényút a 2-es közeg $\mathrm{P}_2(x_2, y_2)$ pontjához. Annak kell teljesülnie, hogy

$$\int_{P_1}^{P_2} nds = \int_{P_1}^{P} nds + \int_{P}^{P_2} nds = n_1\sqrt{(x-x_1)^2 + y_1^2} + n_2\sqrt{(x-x_2)^2 + y_2^2} = \text{ minimum.}$$



12. ábra

Ebből következik, hogy $n_1 \sin\vartheta = n_2 \sin\vartheta''$, ahol ϑ a beesési, ϑ'' a törési szög.

Feladat: Fejezzük be az előző levezetést.

Irodalomjegyzék