Általános relativitáselmélet

Bene Gyula

2013.07.30

Tartalomjegyzék

Bevezetés

A modern asztrofizika műveléséhez elengedhetetlen az általános relativitáselmélet alapos ismerete. Nagy skálán az univerzum tágulása, a mikrohullámú háttérsugárzás tulajdonságai, kisebb skálán a ma már közhelyszámba menő fekete lyukak mind-mind olyan jelenségek, melyeket az általános relativitáselmélet segítségével értelmezhetünk. Az elmélet elsajátítása útjában két komoly akadály tornyosul: egyfelől a hallgatónak meg kell barátkoznia azzal a szokatlan gondolattal, hogy az elméletben szereplő mennyiségek általában nem azonosak a ténylegesen mérhető mennyiségekkel, pl. a koordináták és az idő különbségei általában nem felelnek meg a valóságban mérhető távolságoknak és időtartamoknak. Ez a körülmény egyben a szemléletesség rovására is megy. Másfelől az elmélet eredményeinek levezetéséhez szükséges számítások a klasszikus fizika egyéb ágaihoz képest fáradságosak, ami a kezdőnek könnyen a kedvét szegheti. Ez utóbbi technikai nehézség a különböző szimbolikus számításokra képes számítógépes programcsomagok (Reduce, Mathematica, Maple) alkalmazásával azonban jelentősen mérsékelhető.

A jelen jegyzet célja az asztrofizika szakirányon tanuló MSC hallgatók bevezetése az általános relativitáselmélet alapjaiba. A hangsúly az elmélet biztos alkalmazni tudásán lesz, ennek megfelelően az elvi kérdések tárgyalását igyekszem a szükséges minimumra korlátozni. A relativitáselmélet (speciális relativitáselmélet: 1905, általános relativitáselmélet: 1915) a maga korában hatalmas közérdeklődést váltott ki, ami máig is tart. Ez sajnos azzal a nemkívánatos mellékhatással járt, hogy a relativitáselméletet sokan egyfajta ezoterikus-filozofikus elméletnek tartják. Hazánkban is szinte évente jelentkezik egy-egy (többnyire szakképzetlen) személy azzal a kijelentéssel, hogy ő „megcáfolta" Einsteint. Természetesen minden tudományos elmélet meghaladható és bizonyos körülmények között változtatásra szorul - az általános relativitáselmélet esetében ez egészen biztosan így van abban a tartományban, ahol a gravitációs és a kvantumfizikai hatások összemérhetőek. Az viszont nem elegendő indok az elmélet elvetésére, ha valaki a saját világképével nem érzi azt összeegyeztethetőnek.

Az általános relativitáselmélet matematikai formalizmusa rengeteget fejlődött az elmélet megalkotása óta eltelt évszázad alatt. Ezt részben az egzakt megoldások keresése, részben a tételek egzakt bizonyítása, részben az elmélet továbbfejlesztése (pl. kvantálása) iránti igény ösztönözte. Bevezető munkáról lévén szó, ebben a jegyzetben csak a standard egyetemi differenciálgeometriát alkalmazzuk.

A használt konvenciók a Landau-Lifsic: Elméleti fizika II. - Klasszikus erőterek c. könyvben alkalmazottakat követik. A téridő-koordinátákat latin betűkkel, a térkoordinátákat görög betűkkel jelölöm. Előbbiek a 0, 1, 2, 3, utóbbiak az 1, 2, 3 értékeket vehetik fel. A metrika szignatúrája (sajátértékeinek előjele) +,-,-,-.

1. fejezet

Előzmények

Történeti áttekintés. Eötvös Loránd szerepe. A speciális relativitáselmélet: események és inerciarendszerek, Lorentz-transzformáció, Minkowski-tér, sajátidő, az egyidejűség relativitása, Lorentz-kontrakció, idődilatáció, ikerparadoxon, négyesvektorok, relativisztikus mechanika.

2. fejezet

Alapfogalmak

Gyorsuló koordinátarendszerek. Forgó koordinátarendszer. Metrikus tenzor. Az ekvivalencia elve. Görbevonalú koordináták. Távolságok és időtartamok.

2.1. Az elmélet elvi alapjai

Az általános relativitáselmélet annak az igénynek a megvalósítása, hogy a természet törvényeit tetszőleges vonatkoztatási rendszerben (nem csak inerciarendszerekben) egységes, kovariáns alakban lehessen megfogalmazni. Ez többek között azt is jelenti, hogy gyorsuló koordinátarendszerekben is felírhatóknak kell lennie a természeti törvényeknek.

A speciális relativitáselmélet alkalmazásával kiderül, hogy gyorsuló koordinátarendszerekben a tér geometriája általában nem-euklideszi, a téridő geometriája pedig nem Minkowski típusú. Az ilyen általánosabb geometriák egyértelmű jellemzése a metrikus tenzor segítségével válik lehetővé.

Az általános relativitáselméletben alapvető jelentőségű felismerés az ekvivalencia elve: lokálisan semmilyen méréssel nem dönthető el, hogy gravitációs mezőben, vagy alkalmas gyorsuló koordinátarendszerben tartózkodik-e a megfigyelő. Ennek megfelelően - mivel a természet törvényei lokális törvények -, a gravitációs mező jelenlétében szintén nem-Minkowski típusú a téridő és elméleti leírása szintén a metrikus tenzorral lehetséges.

A téridő minden pontjában ismert metrikus tenzor esetén a tömegpontok és anyagi mezők (a gravitációs teret nem értve ide) mozgásegyenletei az inerciarendszerbeli törvények közvetlen általánosításaként adódnak azzal a szabállyal, hogy a téridő-koordináták szerinti parciális deriváltakat kovariáns deriváltakra kell kicserélni.

A gravitációs mezőt tömegek keltik, vagy általánosabban: a gravitációs mező forrása az energia-impulzus tenzor. Az energia-impulzus tenzor és az általa létrehozott gravitációs mező, ill. az azt leíró metrikus tenzor kapcsolatát az Einstein-egyenletek fejezik ki. Ezek levezetése kézenfekvő fizikai analógiák segítségével lehetséges: mezőelméletről lévén szó, olyan Lagrange-sűrűséget keresünk, melyben a térmennyiség (a metrikus tenzor) legfeljebb első deriváltjai szerepelnek, és ami - négyesdivergencia alakú additív tagok erejéig - skalárral ekvivalens. A kapott Lagrange-sűrűség a gravitációs mezőt jellemzi, melyhez az anyagi mezők (ill. tömegpontok) Lagrange-sűrűségét hozzá kell adni. Az anyag és a gravitációs mező közötti csatolást az anyagi mezők Lagrange-sűrűségében fellépő metrikus tenzor biztosítja.

Az általános relativitáselmélet alkalmazásai tulajdonképpen az Einstein-egyenletek és az anyag mozgásegyenleteinek egyidejű megoldását jelentik. Mint látni fogjuk, ennek segítségével értelmezhető pl. a Merkur perihélium-elfordulása, a fénysugarak irányváltozása a Nap mellett, a táguló univerzum és a mikrohullámú háttérsugárzás.

2.2. Példa gyorsuló koordinátarendszerre: egyenletesen forgó koordinátarendszer

Tételezzük fel, hogy inerciarendszerben vagyunk. Tekintsünk egy nagy, R rugarú, egyenletes ω szögsebességgel forgó korongot, úgy, hogy $R\omega < c$[1]. A forgástengely a korong síkjára merőleges és a középpontján halad keresztül. A korongon megfigyelők tartózkodnak, akik a rendelkezésükre álló méterrudakkal megmérik a korong sugarát és kerületét. A korong kerületének és sugarának aránya az inerciarendszerből mérve természetesen 2π lenne, hiszen a távolságok mérése az inerciarendszerben egyidejű téridő-pontok között történik, ami szemléletesen szólva azzal egyenértékű, hogy a forgó korongot leképezzük egy az inerciarendszerbeli körre, majd ez utóbbin végezzük el a méréseket. Más a helyzet a korongon tartózkodó megfigyelők esetében. Az ő méréseik eredményét a speciális relativitáselmélet alapján meg tudjuk jósolni, feltéve, hogy lokálisan a gyorsulásnak nincs hatása a távolságok (és időtartamok) mérésére. Ezt az általános relativitáselméletben minden körülmények között feltételezzük. Más szavakkal ez azt jelenti, hogy a korong adott pontján mérést végző megfigyelő ugyanazt az eredmény kapja akkor is, ha az adott pont kerületi sebességével mozgó inerciarendszerben tartózkodik, és nem gyorsul együtt a koronggal. Ez esetben nyilvánvaló, hogy a

[1] Az R és ω mennyiségeket az inerciarendszerből, a forgó korongon mérjük.

kerület mentén elhelyezett méterrudak Lorentz-kontrakciót szenvednek, vagyis az inerciarendszerből nézve $\sqrt{1 - R^2\omega^2/c^2}$ arányban megrövidülnek, míg a sugárirányban elhelyezett méterrudak hossza változatlan. Az inerciarendszerbeli megfigyelők tehát azt látják, hogy a $2\pi R$ kerületet a korongon dolgozó megfigyelők hosszabbnak, $2\pi R/\sqrt{1 - R^2\omega^2/c^2}$-nek találják, míg a sugarat továbbra is R-nek mérik. De ez azt jelenti, hogy a korongon a kör kerületének és sugarának aránya nem 2π, hanem az annál nagyobb $2\pi/\sqrt{1 - R^2\omega^2/c^2}$ érték. Gyorsuló koordinátarendszerekben a geometria tehát általában nemeuklideszi ill. a téridő nem-Minkowski. Joggal vethető fel a kérdés, hogy a korong kerülete miért nem szenved Lorentz-kontrakciót. A válasz az, hogy azt a korong anyagában fellépő rugalmas deformációk éppen kiegyenlítik. Ilyen deformációk nem lépnek fel a méterrudakban. Mi történik, ha a korongot olyan erős anyagból készítjük, ami ellenáll a deformációnak? Ez esetben nem tudjuk megpörgetni, ugyanis a $D(\Delta\ell)^2/2$ rugalmas energia végtelenhez tart (D az effektív rugóállandó, $\Delta\ell$ a deformáció). Ezekből a megfontolásokból látható, hogy anyagi testekkel megvalósított gyorsuló koordinátarendszerben általában rugalmas deformációk ill. feszültségek lépnek fel.

Az is felvetődhet, hogy nem kapnánk-e más eredményt, ha más módszerrel mérnénk a távolságot. A válasz nemleges, ugyanis a távolság mérése inerciarendszerben végzett távolságméréssel egyenértékű, ott pedig a távolságok a mérési eljárástól elvben nem függenek. Vizsgáljuk meg a két közeli téridőpont közötti ívelemnégyzetet! Az inerciarendszerben legyenek a koordinátadifferenciálok derékszögű térbeli koordináták esetén dx', dy', dz' és dt', illetve hengerkoordinátákat használva dr', $d\varphi'$, dz' és dt'! Az ívelemnégyzet nyilván

$$ds^2 = c^2dt'^2 - dx'^2 - dy'^2 - dz'^2 = c^2dt'^2 - dr'^2 - r'^2d\varphi'^2 - dz'^2 \ . \qquad (2.1)$$

A korong vonatkoztatási rendszerébe térjünk át a

$$\begin{aligned} t' &= t \\ r' &= r \\ \varphi' &= \varphi + \omega t \\ z' &= z \end{aligned} \qquad (2.2)$$

koordinátatranszformációval. Ez biztosítja, hogy a konstans vesszőtlen koordinátájú pontok együtt mozognak a koronggal. Ekkor (2.1)-ből azt kapjuk, hogy

$$ds^2 = \left(c^2 - r^2\omega^2\right) dt^2 - dr^2 - r^2d\varphi^2 - dz^2 - 2r^2\omega d\varphi dt \ . \qquad (2.3)$$

Feltételeztük az ívelemnégyzet invarianciáját, akárcsak a speciális relativitáselméletben. Ott az ívelemnégyzet kifejezése is változatlan maradt, itt viszont megváltozott. Nyilvánvaló, hogy tetszőleges általános koordinátatranszformáció esetén is igaz lesz, hogy az ívelemnégyzet a koordinátadifferenciálok kvadratikus alakja:

$$ds^2 = g_{ik} dx^i dx^k \ . \tag{2.4}$$

A g_{ik} kétindexes mennyiséget metrikus tenzornak nevezzük. Az előbbi példában $x^0 = ct$, $x^1 = r$, $x^2 = \varphi$ és $x^3 = z$ esetén a metrikus tenzor nullától különböző komponensei

$$\begin{aligned} g_{00} &= 1 - r^2\omega^2/c^2 \\ g_{11} &= g_{33} = -1 \\ g_{22} &= -r^2 \\ g_{02} &= g_{20} = -r^2\omega/c \ . \end{aligned} \tag{2.5}$$

Matematikai szempontból a metrikus tenzor 4×4-es szimmetrikus mátrix (az esetleges antiszimmetrikus rész ui. az ívelemnégyzet kifejezéséből kiesik és így nincs fizikai tartalma). A mátrix sajátértékei előjelének - a szignatúrának - kiemelt jelentősége van. Ha nem három negatív és egy pozitív van közöttük, akkor az a metrika nem felelhet meg valódi fizikai téridőnek, mivel lokálisan nem lehet Minkowski-alakra transzformálni. A (2.5) metrika sajátértékei között valóban mindig három negatív és két pozitív van, ugyanis a metrika blokkdiagonális, és a $g_{11} = -1$, $g_{33} = -1$ elemek egyben sajátértékek is, a maradék g_{00}, g_{22}, g_{02} és g_{20} elemekből álló blokk determinánsa pedig $-r^2$, tehát a maradék két sajátérték ellentétes előjelű.[2]

2.3. Görbevonalú koordináták

Az általános relativitáselméletben görbevonalú koordinátákat kell használnunk, mivel egyrészt nem-euklideszi geometria esetében nem vezethetők be derékszögű koordináták, másrészt az elmélet egyik legfontosabb célkitűzése, hogy tetszőleges koordinátarendszerben is megfogalmazható legyen. A fenti példához hasonlóan induljunk ki a

$$ds^2 = \left(dx'^0\right)^2 - \left(dx'^1\right)^2 - \left(dx'^2\right)^2 - \left(dx'^3\right)^2 \ . \tag{2.6}$$

Minkowski-metrikából, és térjünk át tetszőleges görbevonalú koordinátákra (gyorsuló koordinátarendszerre) a

$$x'^i = x'^i(x^0, x^1, x^2, x^3) \tag{2.7}$$

[2] A sajátértékek formális felírását megelőzően célszerű minden koordinátát azonos dimenziójúvá tenni (pl. a $x^2 = \varphi c/\omega$ új definícióval).

képletekkel, ahol a vesszős koordinátákat a vesszőtlenek (általában nemlineáris) függvényének tekintjük. A koordinátatranszformációt tehát négy darab négyváltozós függvény adja meg. A koordinátadifferenciálokra a többváltozós függvények differenciálási szabálya alapján azt kapjuk, hogy

$$dx'^i = \frac{\partial x'^i}{\partial x^j} dx^j \ , \tag{2.8}$$

ahol a kétszer előforduló indexekre összegzés értendő. Ezt beírva az ívelemnégyzet képletébe, a

$$ds^2 = g_{ik} dx^i dx^k \tag{2.9}$$

kvadratikus alak adódik, ahol a g_{ik} metrikus tenzort a

$$g_{ik} = \frac{\partial x'^l}{\partial x^i} \frac{\partial x'^m}{\partial x^k} g^{(0)}_{lm} \tag{2.10}$$

képlet határozza meg, ahol $g^{(0)}_{lm} = \mathrm{diag}\,(1, -1, -1, -1)$ a Minkowski-metrikának megfelelő metrikus tenzor. Mivel a transzformáció általában nemlineáris, a g_{ik} metrikus tenzor komponensei téridő-pontról téridő-pontra változnak, azaz függnek a koordinátáktól. A (2.10) képlet megfordítva azt jelenti, hogy gyorsuló koordinátarendszerből alkalmas koordinátatranszformációval a téridő minden pontjában a metrikus tenzor egyidejűleg a Minkowski-metrikára transzformálható. Ez a tulajdonság tömegek által keltett gravitációs terekben már nem érvényes, semmilyen koordinátatranszformációval nem hozható mindenütt egyidejűleg sík (Minkowski) alakra a metrika. Emiatt ilyenkor görbült téridőről beszélünk, hiszen a nem-Minkowski alak nem pusztán a választott koordinátarendszer, hanem a téridő tulajdonsága. Hogy általános esetben a metrikus tenzort nem lehet mindenütt Minkowski-alakra transzformálni, már abból is nyilvánvaló, hogy a szimmetrikus 4×4-es metrikus tenzornak tíz független eleme van, melyek a téridő függvényei, de az általános koordinátatranszformációban csak négy függvény szerepel.

A (2.10) képlet megfordításával a vesszős koordinátarendszer-beli metrikus tenzor kifejezése

$$g'_{lm} = \frac{\partial x^i}{\partial x'^l} \frac{\partial x^k}{\partial x'^m} g_{ik} \ . \tag{2.11}$$

Látható, hogy a metrikus tenzor indexei másképpen transzformálódnak, mint a koordinátadifferenciálok. Vizsgáljuk meg, hogyan transzformálódik egy $\Phi(\{x^i\})$ skalárfüggvény gradiense! A közvetett függvény deriválási szabálya szerint azt kapjuk, hogy

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x'^i} = \frac{\partial x^j}{\partial x'^i} \frac{\partial \Phi}{\partial x^j} \ , \tag{2.12}$$

A koordinátadifferenciálok homogén lineáris transzformációs szabálya szerint transzformálódó mennyiségeket a továbbiakban kontravariáns vektoroknak nevezzük, a skalár gradiensének (szintén homogén lineáris) transzformációs szabálya szerint transzformálódó mennyiségeket pedig kovariáns vektornak. A transzformációs szabályt az index pozíciójával jelezzük: a felső index kontravariáns, az alsó index kovariáns vektorkomponensként transzformálódó mennyiséget jelent. Látható, hogy a metrikus tenzor indexei egyenként kovariáns vektorként transzformálódnak. Általában tenzornak nevezünk majd olyan többindexes mennyiségeket, amelyek kontravariáns és/vagy kovariáns vektorkomponensek szorzataként transzformálódnak. A kétféle transzformációs szabály együtthatómátrixai éppen egymás inverzei, emiatt egy kovariáns és egy kontravariáns vektor szorzata az indexeket összeejtve (azaz egyenlővé téve és az egyenlő indexre összegezve) skalárt eredményez:

$$A'^i B'_i = \frac{\partial x'^i}{\partial x^k} A^k \frac{\partial x^n}{\partial x'^i} B_n = A^k B_k \; . \tag{2.13}$$

Tenzorok esetén egy kovariáns és egy kontravariáns index összeejtése a tenzor rendjét kettővel csökkenti.

Egy A^i kontravariáns vektort a kovariáns g_{ik} metrikus tenzorral megszorozva és indexét annak egyik indexével összeejtve kovaráns vektort kapunk, amit A_i-vel jelölünk, mivel ugyanannak a fizikai mennyiségnek a kovariáns változata:

$$A_i = g_{ik} A^k \; . \tag{2.14}$$

Fordítva, egy kovariáns vektort g_{ik} inverzével szorozva indexösszeejtéssel kontravariáns vektort kapunk. A metrikus tenzor inverzét g^{ik}-val jelöljük és kontravariáns metrikus tenzornak nevezzük:

$$A^i = g^{ik} A_k \; , \tag{2.15}$$

$$g^{ik} g_{kj} = \delta^i_j \; . \tag{2.16}$$

A kovariánsból kontravariáns mennyiség előállítását röviden az index felhúzásának, a fordított műveletet az index lehúzásának fogjuk hívni.

2.4. Távolságok és időtartamok, mérhető mennyiségek

Általános görbevonalú koordinátarendszerben a koordináták csupán az események téridőbeli helyzetét határozzák meg, de különbségeik nem felelnek meg valódi távolságoknak ill. időtartamoknak. Ez önmagában nem meglepő, hiszen ez a helyzet pl. térbeli polárkoordináták használatakor is. Felmerül tehát a kérdés, hogy a metrika ismeretében hogyan határozható meg két közeli esemény valódi távolsága ill. a tér adott pontjában végbemenő két esemény között eltelt valódi időtartam. Általánosabban felvethető az a kérdés, hogy mi a kapcsolat a tényleges, mérhető fizikai mennyiségek és a leírásukra használt vektor vagy tenzorkomponensek között.

A megoldás alapja ugyanaz, amit már a forgó korongon végzett méréseknél is hangsúlyoztam: a koordinátarendszer adott pontjában áttérünk egy olyan inerciarendszerre, ami a görbevonalú koordinátarendszer adott pontjával az adott pillanatban együtt mozog, és minden mérhető mennyiséget ebben az érintőtérben értelmezünk. Távolságok és időtartamok mérésekor nem egy, hanem két közeli pontról (eseményről) van szó, azonban a leírt konstrukcióban a másik pont sebessége az inerciarendszerhez képest másodrendben kicsi (a koordinátakülönségek négyzetével arányos).

2.4.1. A tér adott pontjában bekövetkezett két közeli esemény között eltelt idő

A két esemény a leírt konstrukcióval felvett inerciarendszerben is azonos helyen van, így a közöttük eltelt valódi $d\tau$ idővel az ívelemnégyzet

$$ds^2 = c^2 d\tau^2 \tag{2.17}$$

alakban fejezhető ki. A görbevonalú koordinátarendszerben a két esemény közötti ívelemnégyzet ugyanennyi, viszont a görbevonalú koordinátákkal fejezhető ki:

$$ds^2 = g_{00}\left(dx^0\right)^2 \ , \tag{2.18}$$

ugyanis a térbeli koordináták különbségei eltűnnek ($dx^\alpha = 0$). A két kifejezés egyenlőségéből

$$d\tau = \frac{\sqrt{g_{00}}}{c} dx^0 \tag{2.19}$$

adódik.

2.4.2. Két közeli esemény valódi térbeli távolsága

Áttérünk az inerciarendszerre, melyben az egyidejűség fogalma jól meghatározott, mivel az idő egyformán telik a különböző térbeli pontokban. Ez azt jelenti, hogy olyan konstans együtthatós, homogén lineáris transzformációt alkalmazunk, ami a kiszemelt téridőpontban Minkowski-alakra hozza a metrikát. Ezenkívül, hogy az inerciarendszer ne mozogjon a görbevonalú koordinátarendszerhez képest, megköveteljük, hogy az inerciarendszerbeli dx'^{α} térbeli koordinátadifferenciálok ne függjenek dx^0-tól. Ekkor ugyanis $dx^{\alpha} = 0$-ból $dx'^{\alpha} = 0$ következik (és viszont), tehát az egyik rendszerben rögzített térbeli pont a másikban is helyben marad. Ez annyit jelent matematikailag, hogy a koordinátadifferenciálok transzformációs képlete

$$dx'^{\alpha} = A^{\alpha}_{\beta} dx^{\beta} \tag{2.20}$$

$$dx'^{0} = A^{0}_{j} dx^{j} \ . \tag{2.21}$$

A görög betűk a térbeli (1,2,3), a latin betűk a téridőbeli (0,1,2,3) indexeken futnak végig. Az ívelemnégyzet

$$ds^2 = \left(dx'^0\right)^2 - \left(dx'^{\alpha}\right)^2 = A^0_j A^0_k dx^j dx^k - A^{\alpha}_{\beta} A^{\alpha}_{\nu} dx^{\beta} dx^{\nu} \ . \tag{2.22}$$

Ez természetesen meg kell, hogy egyezzen a $g_{jk} dx^j dx^k$ kifejezéssel. A térszerű és időszerű indexek szétválasztásával ez azt jelenti, hogy

$$g_{00} = \left(A^0_0\right)^2 \tag{2.23}$$

$$g_{0\alpha} = A^0_0 A^0_{\alpha} \tag{2.24}$$

$$g_{\beta\nu} = A^0_{\beta} A^0_{\nu} - A^{\alpha}_{\beta} A^{\alpha}_{\nu} \ . \tag{2.25}$$

Az első egyenletből

$$A^0_0 = \sqrt{g_{00}} \ , \tag{2.26}$$

a másodikból pedig

$$A^0_{\alpha} = \frac{g_{0\alpha}}{\sqrt{g_{00}}} \tag{2.27}$$

adódik. Két közeli pont $d\ell$ távolságának mérésekor az inerciarendszerben egyidejű pontokat vizsgálunk, vagyis megköveteljük, hogy $dx'^0 = 0$ legyen, ezért egyrészt

$$ds^2 = -\left(d\ell\right)^2 \tag{2.28}$$

írható, másrészt megkapjuk az egyidejűség feltételét a görbevonalú koordinátarendszerben:

$$dx'^0 = A^0_j dx^j = 0 \ . \tag{2.29}$$

Ebbe a transzformáció mátrixát behelyettesítve kapjuk, hogy

$$dx^0 = -\frac{g_{0\alpha}}{g_{00}} dx^\alpha \, . \tag{2.30}$$

Két közeli esemény tehát akkor egyidejű, ha időkoordinátáik különbségére ez az egyenlet teljesül. Az egyidejűség feltételének megadását szokás szemléletesen az órák szinkronizálásának nevezni. Az eljárást folytatva további pontokra definiálható az események egyidejűsége, így egy görbe mentén is. Az viszont már általában nem igaz, hogy zárt görbe mentén az órák szinkronizálása elvégezhető, ugyanis a kezdőpontba visszatérve véges időkoordinátakülönbség adódik. Más szavakkal, két véges távolságban levő pont egyidejűsége nem definiálható egyértelműen, mivel az órák szinkronizálásának eredménye általában függ attól, hogy a két pont között milyen pálya mentén végeztük el a szinkronizálást. Ez a helyzet például a forgó koordinátarendszer esetén: az origó középpontú kör mentén szinkronizálva az órákat nulla helyett

$$\Delta x^0 = -\oint \frac{g_{0\alpha}}{g_{00}} dx^\alpha = \frac{2\pi R^2 \omega c}{c^2 - R^2\omega^2} \tag{2.31}$$

adódik. Ez a tulajdonság nem a téridő, hanem a választott koordinátarendszer tulajdonsága. Nyilvánvaló, hogy a négy transzformációs függvény (vagyis a koordinátarendszer) alkalmas megválasztásával általában a téridő minden pontjában nullává tehető a három $g_{0\alpha}$ mennyiség, sőt még az is elérhető, hogy ezzel egyidejűleg minden téridő-pontban $g_{00} = 1$ is teljesüljön. Az ilyen koordinátarendszert, melyben az egyidejűség a teljes téridőben egyértelműen definiálható, szinkronizált vonatkoztatási rendszernek, az x^0 időkoordinátát, melynek különbsége az adott térbeli pontban eltelt valódi idővel egyenlő, világidőnek nevezzük. [3]

Visszatérve a közeli pontok valódi távolságához, a (2.28) és (2.30) képletekből azt kapjuk, hogy

$$\begin{aligned}(d\ell)^2 = -ds^2 &= -g_{00}\left(dx^0\right)^2 - 2g_{0\alpha}dx^0 dx^\alpha - g_{\alpha\beta}dx^\alpha dx^\beta \\ &= \left(\frac{g_{0\alpha}g_{0\beta}}{g_{00}} - g_{\alpha\beta}\right) dx^\alpha dx^\beta \, .\end{aligned} \tag{2.32}$$

A

$$\gamma_{\alpha\beta} = \frac{g_{0\alpha}g_{0\beta}}{g_{00}} - g_{\alpha\beta} \tag{2.33}$$

[3] Az előbbi állítást annyiban pontosítanunk kell, hogy szinkronizált vonatkoztatási rendszerben a világidő valamilyen véges értékénél a metrika szükségképpen szingulárissá válik, azon túl (pozitív vagy negatív időirányban) a koordinátarendszer nem alkalmazható.

mennyiség tehát a térbeli metrikát határozza meg. Érdekesség, hogy ez éppen a $-g^{\alpha\beta}$ 3×3-as mátrix (a kontravariáns metrikus tenzor térszerű részének ellentettje) inverze.

A forgó koordinátarendszer (2.5) téridő-metrikájának segítségével a forgó korong térbeli metrikájának nullától különböző komponenseire a

$$\begin{aligned} \gamma_{11} &= 1 \\ \gamma_{22} &= \frac{r^2}{1 - \frac{r^2\omega^2}{c^2}} \\ \gamma_{33} &= 1 \end{aligned} \tag{2.34}$$

értékeket kapjuk. Ennek megfelelően a sugárirányú valódi távolság a korong közepétől a pereméig R, míg a perem mentén mérve a valódi kerület $2\pi R/\sqrt{1 - R^2\omega^2/c^2}$, a korábbi eredménnyel egyezően.

2.4.3. Valódi (mérhető) fizikai mennyiségek

Valamely lokális fizikai mennyiséget, amely lehet skalár, vektor, tenzor, az elméletben tetszőleges görbevonalú komponenseivel megadhatunk, az indexeket a metrikus tenzorral ill. inverzével le- és felhúzhatjuk. Természetes módon merül fel a kérdés, hogy mi felel meg a ténylegesen mérhető értékeknek. A válasz azt, hogy a (2.20), (2.21) képletekkel - mivel ez egyben a kontravariáns vektorkomponensek transzformációs szabálya is -, vagy ennek inverzével (kovariáns vektorok esetében), vagy ezek szorzatával (tenzorok esetén) inerciarendszerbe képezzük le kérdéses fizikai mennyiséget, és eredményül a ténylegesen mérhető értéket kapjuk. A transzformáció megadásához szükségünk van az eddig még nem meghatározott A^α_β mennyiségekre is. A megadott feltételek alapján ez nem egyértelmű, ami azzal kapcsolatos, hogy az inerciarendszer x, y, z térszerű koordinátatengelyeit még tetszőleges forgatásnak lehet alávetni. Az (2.25), (2.33) egyenletekből ugyanis

$$A^\alpha_\beta A^\alpha_\nu = \gamma_{\beta\nu} \tag{2.35}$$

adódik, aminek a megoldása

$$A^\alpha_\beta = F^\alpha_\nu \sqrt{\lambda_\nu} O^\nu_\beta \,, \tag{2.36}$$

ahol F^α_ν tetszőleges 3×3-as ortogonális mátrix (forgásmátrix), λ_ν a $\gamma_{\alpha\beta}$ pozitív definit, valós szimmetrikus mátrix ν-edik sajátértéke, O^ν_β pedig a hozzátartozó sajátvektor, melyek összessége szintén 3×3-as ortogonális mátrixot alkot.

Fejezzük ki pl. egy forgó korongon mozgó tömegpont sebességét koordinátáinak időderiváltjaival! Jelöljük a t szerinti deriváltakat $\dot{r}$, $\dot{\varphi}$ és $\dot{z}$-tal! Először a négyessebességet írjuk fel, ami definíció szerint $u^i = dx^i/ds$, azaz

$$u^0 = \frac{dx^0}{ds} = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{\dot{r}^2}{c^2} - \frac{r^2(\dot{\varphi}+\omega)^2}{c^2} - \frac{\dot{z}^2}{c^2}}} \tag{2.37}$$

$$u^1 = \frac{dx^1}{ds} = \frac{\dot{r}}{c\sqrt{1 - \frac{\dot{r}^2}{c^2} - \frac{r^2(\dot{\varphi}+\omega)^2}{c^2} - \frac{\dot{z}^2}{c^2}}} \tag{2.38}$$

$$u^2 = \frac{dx^2}{ds} = \frac{\dot{\varphi}}{c\sqrt{1 - \frac{\dot{r}^2}{c^2} - \frac{r^2(\dot{\varphi}+\omega)^2}{c^2} - \frac{\dot{z}^2}{c^2}}} \tag{2.39}$$

$$u^3 = \frac{dx^3}{ds} = \frac{\dot{z}}{c\sqrt{1 - \frac{\dot{r}^2}{c^2} - \frac{r^2(\dot{\varphi}+\omega)^2}{c^2} - \frac{\dot{z}^2}{c^2}}} \tag{2.40}$$

A (2.20), (2.21), (2.26), (2.27), (2.36) képleteket alkalmazzuk. Mivel a (2.34) térbeli metrika máris diagonális, az O^ν_β mátrix az egységmátrix, a λ_ν értékek pedig a diagonális elemek. Végül az F^α_ν forgásmátrixot önkényesen egységmátrixnak választjuk. Ekkor az A^α_β transzformációs mátrix diagonális lesz. Mindezeket figyelembevéve a négyessebesség komponenseit

$$u'^0 = \frac{dx'^0}{ds} = \frac{1 - \frac{r^2\omega^2}{c^2} - \frac{r^2\omega\dot{\varphi}}{c^2}}{\sqrt{1 - \frac{r^2\omega^2}{c^2}}\sqrt{1 - \frac{\dot{r}^2}{c^2} - \frac{r^2(\dot{\varphi}+\omega)^2}{c^2} - \frac{\dot{z}^2}{c^2}}} \tag{2.41}$$

$$u'^1 = \frac{dx'^1}{ds} = \frac{\dot{r}}{c\sqrt{1 - \frac{\dot{r}^2}{c^2} - \frac{r^2(\dot{\varphi}+\omega)^2}{c^2} - \frac{\dot{z}^2}{c^2}}} \tag{2.42}$$

$$u'^2 = \frac{dx'^2}{ds} = \frac{r\dot{\varphi}}{c\sqrt{1 - \frac{r^2\omega^2}{c^2}}\sqrt{1 - \frac{\dot{r}^2}{c^2} - \frac{r^2(\dot{\varphi}+\omega)^2}{c^2} - \frac{\dot{z}^2}{c^2}}} \tag{2.43}$$

$$u'^3 = \frac{dx'^3}{ds} = \frac{\dot{z}}{c\sqrt{1 - \frac{\dot{r}^2}{c^2} - \frac{r^2(\dot{\varphi}+\omega)^2}{c^2} - \frac{\dot{z}^2}{c^2}}} \tag{2.44}$$

alakban kapjuk. Ez az elmozdulásokat a tömegpont sajátidejében méri, amint az a négyessebesség esetében szokásos. A hármassebesség komponenseit viszont korongon eltelt valódi időben mérjük, mégpedig a tömegpont pályája mentén szinkronizált órák segítségével. Ez azt jelenti, hogy az eltelt valódi idő nagysága dx^0 időkoordináta-változáskor

$$\sqrt{g_{00}}\left(dx^0 + \frac{g_{0\alpha}}{g_{00}}dx^\alpha\right) \tag{2.45}$$

lesz, mivel figyelembe kell vennünk, hogy a másik térbeli pontban a 0 időpont $-\frac{g_{0\alpha}}{g_{00}}dx^\alpha$-val egyidejű. De ez azt jelenti, hogy éppen dx'^0 (v.ö. (2.21)) szerint kell a koordinátákat deriválni. Így viszont a keresett hármassebesség-komponensek

$$v^1 = c\frac{u'^1}{u'^0} = \frac{\dot{r}\sqrt{1-\frac{r^2\omega^2}{c^2}}}{1-\frac{r^2\omega^2}{c^2}-\frac{r^2\omega\dot{\varphi}}{c^2}} \tag{2.46}$$

$$v^2 = c\frac{u'^2}{u'^0} = \frac{r\dot{\varphi}}{1-\frac{r^2\omega^2}{c^2}-\frac{r^2\omega\dot{\varphi}}{c^2}} \tag{2.47}$$

$$v^3 = c\frac{u'^3}{u'^0} = \frac{\dot{z}\sqrt{1-\frac{r^2\omega^2}{c^2}}}{1-\frac{r^2\omega^2}{c^2}-\frac{r^2\omega\dot{\varphi}}{c^2}} \tag{2.48}$$

3. fejezet

Kovariáns differenciálás

Kovariáns és kontravariáns vektorok görbevonalú koordinátarendszerekben. Tenzorok. Kontravariáns metrikus tenzor. Vektorok eltolása. Christoffel-szimbólumok. Kovariáns differenciálás. Részecske mozgása gravitációs térben. Az elektromágnesség egyenletei gravitációs térben. Fény terjedése gravitációs térben.

Általános koordinátatranszformációk esetén a vektorok transzformációs szabálya minden pontban különböző. Ennek következtében egy vektortér deriváltja, mivel adott pontban két különböző pontbeli érték különbsége, nem alkot vektort. Ez a transzformációs szabály deriválásakor nyilvánvaló, mivel a helyfüggő együtthatók deriváltja extra tagot eredményez.

Ahhoz, hogy a tenzorként transzformálódó általánosítást megkapjuk, azonos pontbeli vektorokat kell egymásból kivonni, tehát az x^i és $x^i + dx^i$ pontokban levő vektorok valamelyikét - pl. az x^i pontban lévőt - a másik pontba kell párhuzamosan eltolni.

3.1. Párhuzamos eltolás

Ezzel a vektorok görbült térbeli párhuzamos eltolásának problémájához jutottunk. A már alkalmazott módszert fogjuk kiterjeszteni: nem csak egy pontban, hanem egy kis környezetben definiáljuk a görbe vonalú koordinátarendszerről az inerciarendszerre való áttérést. Utóbbiban derékszögű koordinátákat használva párhuzamos eltoláskor a vektorkomponensek változatlanok. Ezután az eltolás végpontjában visszatérünk a görbevonalú koordinátákra, és eredményül megkapjuk a párhuzamosan eltolt vektort görbevonalú koordinátarendszerben.

Az egyszerűség kedvéért tételezzük fel, hogy a kiválasztott pont, melyből az eltolást kezdjük, a görbevonalú koordinátarendszer és az inerciarendszer közös origója. Ekkor a korábbi formuláink kiterjesztésével írhatjuk, hogy

$$x'^i = A^i_j x^j + \frac{1}{2} B^i_{jk} x^j x^k + \mathcal{O}\left(\left(x^j\right)^3\right) \tag{3.1}$$

Itt x^j-k a gravitációs térbeli görbevonalú koordináták, míg x'^i-k az inerciarendszerbeli derékszögű koordináták. Nyilvánvalóan a B^i_{jk} konstans együtthatók alsó indexeikben szimmetrikusak. A koordinátadifferenciálokra azt kapjuk, hogy

$$dx'^i = A^i_j dx^j + B^i_{jk} x^j dx^k + \mathcal{O}\left(\left(x^j\right)^2\right) \tag{3.2}$$

Ebből az ívelemnégyzet

$$\begin{aligned} ds^2 = \left(dx'^0\right)^2 - \left(dx'^\alpha\right)^2 &= \left(A^0_j A^0_k + A^0_j B^0_{nk} x^n + A^0_k B^0_{nj} x^n\right) dx^j dx^k && (3.3)\\ &- \left(A^\alpha_j A^\alpha_k + A^\alpha_j B^\alpha_{nk} x^n + A^\alpha_k B^\alpha_{nj} x^n\right) dx^j dx^k && (3.4)\\ &= \left(g_{jk}(0) + \frac{\partial g_{jk}}{\partial x^n} x^n\right) dx^j dx^k && (3.5) \end{aligned}$$

Itt a jobboldalon a metrikus tenzort az origó körül elsőrendig sorbafejtettük. Ebből a korábbi összefüggéseken túl

$$\frac{\partial g_{jk}}{\partial x^n} = A^0_j B^0_{nk} + A^0_k B^0_{nj} - A^\alpha_j B^\alpha_{nk} - A^\alpha_k B^\alpha_{nj} \tag{3.6}$$

következik. Könnyen belátható, hogy az egyenletek és az ismeretlen B^i_{jk} együtthatók száma megegyezik.[1] A B^i_{jk} együtthatók meghatározáse céljából vezessük be a

$$b_{jnk} = A^0_j B^0_{nk} - A^\alpha_j B^\alpha_{nk} \tag{3.7}$$

jelölést. A b_{jnk} mennyiségek az n, k indexekben szimmetrikusak. Ezzel

$$\frac{\partial g_{jk}}{\partial x^n} = b_{jnk} + b_{knj} \tag{3.8}$$

$$\frac{\partial g_{kn}}{\partial x^j} = b_{kjn} + b_{njk} \tag{3.9}$$

$$\frac{\partial g_{nj}}{\partial x^k} = b_{nkj} + b_{jkn} \tag{3.10}$$

[1] A sorfejtés következő rendjében ez már nem teljesül, ami összhangban van azzal, hogy tetszőleges metrika esetén a teljes téridőt nem lehet egyidejűleg Minkowski-alakra transzformálni.

A második és a harmadik egyenlet az elsőből következik az indexek ciklikus cseréjével. Az első két egyenlet összegéből levonva a harmadikat

$$b_{kjn} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial g_{jk}}{\partial x^n} + \frac{\partial g_{kn}}{\partial x^j} - \frac{\partial g_{nj}}{\partial x^k}\right) \tag{3.11}$$

adódik. Ezt az A^i_j mátrix inverzével balról szorozva megkapjuk a keresett együtthatókat.

A párhuzamos eltolást a korábban mondottak szerint végezzük el: a kontravariáns dx^j vektorra $x^j = 0$ esetén alkalmazzuk a (3.2) képletet. A kapott dx'^i komponensek nem változnak meg párhuzamos eltoláskor. Végezetül a (3.2) képlet inverzével térünk vissza a görbevonalú komponensekre, de ezúttal nullától különböző x^j-k mellett, amelyek éppen az eltolás mértékét fejezik ki a görbevonalú koordinátarendszerben. Hogy a levezetést egyszerűsítsük, eszközöljünk annyi változtatást, hogy a 0 és x^j pontok helyett (az eltolás előtti és utáni pontok) használjuk a $-x^j$ és 0 pontokat. Mivel x^j-t végig kis mennyiségnek feltételeztük, ez a változtatás nem befolyásolja az eredményt, viszont a (3.2) képlet invertálása az eltolás végpontjában kényelmesebben elvégezhető. Ekkor ugyanis a

$$dx'^i = A^i_j d\tilde{x}^j \tag{3.12}$$

egyenletből kell a vesszőtlen koordinátákat a vesszősekkel kifejezni. A hullámvonal az eltolás utáni komponenseket jelöli. Mivel

$$A^0_j A^0_k - A^\alpha_j A^\alpha_k = g_{jk}\ , \tag{3.13}$$

azt kapjuk, hogy

$$A^0_k dx'^0 - A^\alpha_k dx'^\alpha = g_{kj} d\tilde{x}^j\ , \tag{3.14}$$

amiből a g^{jk} inverz mátrixszal szorozva adódik, hogy

$$d\tilde{x}^j = g^{jk}\left(A^0_k dx'^0 - A^\alpha_k dx'^\alpha\right)\ . \tag{3.15}$$

Itt a dx'^i mennyiségeket a leírtaknak megfelelően a (3.2) képlet $x^j \to -x^j$ cserével kapott alakjából kell behelyettesíteni:

$$\begin{aligned} d\tilde{x}^j &= g^{jk}\left(A^0_k A^0_l dx^l - A^\alpha_k A^\alpha_l dx^l - A^0_k B^0_{nl} x^n dx^l + A^\alpha_k B^\alpha_{nl} x^n dx^l\right) && (3.16)\\ &= g^{jk} g_{kl} dx^l - g^{jk} b_{knl} x^n dx^l && (3.17)\\ &= dx^j - \frac{1}{2} g^{jk}\left(\frac{\partial g_{kn}}{\partial x^l} + \frac{\partial g_{kl}}{\partial x^n} - \frac{\partial g_{nl}}{\partial x^k}\right) x^n dx^l && (3.18) \end{aligned}$$

Ennek megfelelően egy tetszőleges C^j kontravariáns vektor komponenseinek változása végtelen kis δx^n párhuzamos eltolás esetében

$$\delta C^j = -\frac{1}{2} g^{jk} \left(\frac{\partial g_{kn}}{\partial x^l} + \frac{\partial g_{kl}}{\partial x^n} - \frac{\partial g_{nl}}{\partial x^k} \right) C^l \delta x^n \; . \tag{3.19}$$

A metrikus tenzornak és deriváltjainak itt fellépő kombinációja a Γ^j_{nl}-nel jelölt Christoffel-szimbólum:

$$\Gamma^j_{nl} = \frac{1}{2} g^{jk} \left(\frac{\partial g_{kn}}{\partial x^l} + \frac{\partial g_{kl}}{\partial x^n} - \frac{\partial g_{nl}}{\partial x^k} \right) \; , \tag{3.20}$$

amivel

$$\delta C^j = -\Gamma^j_{nl} C^l \delta x^n \; . \tag{3.21}$$

Látható, hogy a Christoffel-szimbólumok az alsó indexeikben szimmetrikusak. Fontos hangsúlyozni, hogy a Christoffel-szimbólumok nem alkotnak tenzort, mivel pl. Minkowski-metrika esetén azonosan eltűnnek. A transzformáció homogén lineáris jellege miatt viszont ha egy tenzor egy koordinátarendszerben eltűnik, akkor minden más koordinátarendszerben is eltűnik.

Megjegyezzük, hogy az eddigiekből (v.ö. (3.7), (3.11), (3.13), (3.20)) egyszerű számítással következik, hogy

$$B^i_{jk} = A^i_n \Gamma^n_{jk} \; . \tag{3.22}$$

Kovariáns vektor komponenseinek megváltozását abból vezethetjük le, hogy egy kontravariáns és egy kovariáns vektor szorzata skalár, ami az eltolás következtében nem változik meg:

$$0 = \delta \left(D_j C^j \right) = D_j \delta C^j + C^j \delta D_j = -D_j \Gamma^j_{nl} C^l \delta x^n + C^l \delta D_l \; . \tag{3.23}$$

Mivel ez tetszőleges kontravariáns C^l vektor esetén fennáll, következik, hogy

$$\delta D_l = \Gamma^j_{nl} D_j \delta x^n \; . \tag{3.24}$$

Tenzorkomponensek párhuzamos eltoláskor fellépő megváltozását annak alapján vezetjük le, hogy a tenzor ilyenkor is megfelelő vektorkomponensek szorzataként viselkedik, amiből az következik, hogy minden kovariáns j indexhez $\delta T^{\dots j \dots}_{\dots k \dots}$ képletében egy $-\Gamma^j_{nl} \delta x^n T^{\dots l \dots}_{\dots k \dots}$ tag tartozik, míg minden kovariáns k indexhez egy $\Gamma^l_{nk} \delta x^n T^{\dots j \dots}_{\dots l \dots}$ tag tartozik. Ez közvetlenül levezethető a vektorkomponensek szorzatára vonatkozó összefüggésből, ha a kis megváltozásokban elsőrendű tagokat összegyűjtjük.

3.2. Kovariáns deriváltak

Miután a párhuzamos eltolást definiáltuk, a korábban mondottaknak megfelelően definiáljuk a kovariáns deriváltat: az $x^i + dx^i$ pontbeli vektorkomponensből az x^i-ből $x^i + dx^i$-be párhuzamosan eltolt vektorkomponenst (v.ö. (3.21)) vonjuk le. Tehát a kovariáns differenciál

$$DA^j = A^j(x^i + dx^i) - \left(A^j(x^i) - \Gamma^j_{ik} A^k dx^i\right) \approx \frac{\partial A^j}{\partial x^i} dx^i + \Gamma^j_{ik} A^k dx^i \ , \tag{3.25}$$

a kovariáns derivált pedig (x^i szerint)

$$\frac{DA^j}{dx^i} = \frac{\partial A^j}{\partial x^i} + \Gamma^j_{ik} A^k \ . \tag{3.26}$$

DA^j vektor, DA^j/dx^i pedig vegyes másodrendű tenzor. Ugyanígy kovariáns vektorra (v.ö. (3.24))

$$DA_j = A_j(x^i + dx^i) - \left(A_j(x^i) + \Gamma^k_{ij} A_k dx^i\right) \approx \frac{\partial A_j}{\partial x^i} dx^i - \Gamma^k_{ij} A_k dx^i \ , \tag{3.27}$$

és

$$\frac{DA_j}{dx^i} = \frac{\partial A_j}{\partial x^i} - \Gamma^k_{ij} A_k \ . \tag{3.28}$$

Tenzorok kovariáns deriváltja a párhuzamos eltolásnál mondottak alapján vezethető le, pl.

$$\frac{DT^i_j}{dx^k} = \frac{\partial T^i_j}{\partial x^k} + \Gamma^i_{lk} T^l_j - \Gamma^l_{jk} T^i_l \tag{3.29}$$

írható vegyes másodrendű tenzor kovariáns deriváltjára.

Szokás az írásmód egyszerűsítése érdekében a parciális deriváltakat indexbe tett vesszővel, a kovariáns deriváltakat pedig indexbe tett pontosvesszővel jelölni:

$$T^i_{j,k} \equiv \frac{\partial T^i_j}{\partial x^k} \tag{3.30}$$

$$T^i_{j;k} \equiv \frac{DT^i_j}{dx^k} \tag{3.31}$$

A metrikus tenzor kovariáns deriváltja nulla. Ez azonnal következik abból, hogy

$$DA_i = g_{ik} DA^k = D\left(g_{ik} A^k\right) = A^k Dg_{ik} + g_{ik} DA^k \ , \tag{3.32}$$

de természetesen közvetlen számolással is belátható:

$$Dg_{ik} = g_{ik,n}dx^n - \Gamma^l_{in}g_{lk}dx^n - \Gamma^l_{kn}g_{il}dx^n \tag{3.33}$$

$$= g_{ik,n}dx^n - \frac{1}{2}\left(g_{ik,n} + g_{kn,i} - g_{in,k}\right)dx^n - \frac{1}{2}\left(g_{ik,n} + g_{in,k} - g_{kn,i}\right)dx^n \equiv 0\ . \tag{3.34}$$

3.3. Erőmentes gömbszimmetrikus pörgettyű precessziója

A párhuzamos eltolásra ill. a kovariáns deriválás alkalmazására példa a stacionárius gravitációs mezőben[2] nyugvó erőmentes gömbszimmetrikus pörgettyű precessziója.[3] Forgatónyomaték hiányában a pörgettyűvel pillanatnyilag együttmozgó inerciarendszerben a pörgettyű tengelyének helyvektora változatlan. Ez azt jelenti, hogy a görbevonalú koordinátarendszerben a pörgettyű tengelyét időirányú párhuzamos eltolásnak vetjük alá. Ehhez szükséges a helyvektort négyesvektorrá kiegészíteni, úgy, hogy a tengely két végpontját egyidőben tekintjük, és a két közeli esemény különbségét képezzük. Az egyidejűség a (2.30) időkoordináta-különbséggel egyenértékű. Legyen a helyvektor n^α, ekkor a négyesvektor időkomponense $n^0 = -(g_{0\alpha}/g_{00})n^\alpha$. A tengely δx^0 idő alatti megváltozása az eddigiek szerint

$$\delta n^\alpha = -\Gamma^\alpha_{k0}n^k\delta x^0\ , \tag{3.35}$$

ami egyenértékű az $n^\alpha_{;0} = 0$ feltétellel, az idő szerinti kovariáns derivált eltűnésével.[4] Ez annak az általános szabálynak az egyik esete (ld. a következő fejezetet), mely szerint a Minkowski-rendszerben érvényes tenzoriális összefüggéseket úgy lehet görbevonalú koordinátákra ill. görbült téridőbe átírni, hogy az előforduló deriváltakat kovariáns deriváltakra cseréljük. Végső soron a helyvektor időbeli változására a

$$\frac{dn^\alpha}{dx^0} = \left(-\Gamma^\alpha_{\beta 0} + \Gamma^\alpha_{00}\frac{g_{0\beta}}{g_{00}}\right)n^\beta \tag{3.36}$$

egyenletet kapjuk. Alkalmazzuk ezt a forgó koordinátarendszer esetére!

---

[2]Vagyis a választott görbevonalú koordinátarendszerben a metrikus tenzor komponensei nem függnek az időtől.

[3]Ha a pörgettyű nem lenne gömbszimmetrikus, inhomogén gravitációs térben már klasszikus közelítésben is forgatónyomaték lépne fel.

[4]Megjegyzendő, hogy az egyenlet csak a térbeli komponensekre teljesül, ugyanis az időbeli komponensre vonatkozó $n^0_{;0} = 0$ egyenlet már ellentmondana az n^0-ra felírt összefüggésnek.

A metrikát (2.5) adja. A Christoffel-szimbólumok (3.20) kifejezését kiértékelve azt kapjuk, hogy a nullától különböző komponensek a következők:

$$\Gamma^1_{00} = -r\omega^2/c^2 \tag{3.37}$$
$$\Gamma^1_{20} = \Gamma^1_{02} = -r\omega/c \tag{3.38}$$
$$\Gamma^1_{22} = -r \tag{3.39}$$
$$\Gamma^2_{10} = \Gamma^2_{01} = \omega/(cr) \tag{3.40}$$
$$\Gamma^2_{12} = \Gamma^2_{21} = 1/r \tag{3.41}$$

Ennek segítségével a (3.36) egyenletek az

$$\dot{n}^1 = \frac{r\omega}{1 - r^2\omega^2/c^2} n^2 \tag{3.42}$$
$$\dot{n}^2 = -\frac{\omega}{r} n^1 \tag{3.43}$$
$$\dot{n}^3 = 0 \tag{3.44}$$

alakot öltik (a pont a t idő szerinti deriválást jelenti). Ha bevezetjük (2.34) és (2.36) alapján a ténylegesen mérhető

$$n_r = n^1 \tag{3.45}$$
$$n_\varphi = \frac{r}{\sqrt{1 - r^2\omega^2/c^2}} n^2 \tag{3.46}$$
$$n_z = n^3 \tag{3.47}$$

vektorkomponenseket, akkor azt kapjuk, hogy

$$\dot{n}_r = \frac{\omega}{\sqrt{1 - r^2\omega^2/c^2}} n_\varphi \tag{3.48}$$
$$\dot{n}_\varphi = -\frac{\omega}{\sqrt{1 - r^2\omega^2/c^2}} n_r \tag{3.49}$$
$$\dot{n}_z = 0\ , \tag{3.50}$$

ahonnan látható, hogy a pörgettyű tengelye $\omega/\sqrt{1 - r^2\omega^2/c^2}$ szögsebességgel visszafelé precesszál abban a derékszögű koordinátarendszerben, melynek egyik tengelye a középponttól sugárirányban kifelé mutat. Ennek megfelelően a $2\pi/\omega$ periódusidő alatt a pörgettyű tengelyének vetülete a forgásiránnyal ellentétesen $2\pi(1/\sqrt{1 - r^2\omega^2/c^2} - 1)$ szöggel mozdul el, tehát a pörgettyű $-\omega(1/\sqrt{1 - r^2\omega^2/c^2} - 1)$ szögsebességgel precesszál. Az $r\omega \ll c$ határesetben ez közelítőleg $-r^2\omega^3/(2c^2)$-tel egyenlő. Ez a speciális relativitáselméletből jól ismert Thomas-precesszió, az erőmentes pörgettyű tengelyirányának változása körmozgás során. A levezetés végén kihasználtuk, hogy a t koordinátaidő annak az inerciarendszernek az időkoordinátájával egyezik meg, melynek origója a forgó koordinátarendszerével egybeesik, a precesszió szögsebessége tehát ebben a koordinátarendszerben értendő.

A (3.36) képletből látható, hogy sztatikus gravitációs mezőben nyugvó pörgettyű esetén, amikor a metrikus tenzor komponensei nem csupán időtől függetlenek, hanem a $g_{0\alpha}$ komponensek el is tűnnek, nem lép fel precesszió. Ezek a komponensek azonban nullától különbözőek forgó gömbszimmetrikus test gravitációs mezejében (ld. a 11. fejezetben), és a precesszió ebben az esetben valóban fel is lép. Ennek kísérleti kimutatása (Gravity Probe B kísérlet) az általános relativitáselmélet helyességének egyik fontos bizonyítéka (ld. 13. fejezet).

4. fejezet

A fizikai törvények görbült téridőben

Részecske mozgása gravitációs térben.

A legkisebb hatás elve:

$$\delta S = -mc\delta \int ds = 0$$

Mozgásegyenlet:

$$\frac{Du^i}{Ds} = 0$$

(ahol $u^i = \frac{dx^i}{ds}$ a négyessebesség), azaz

$$\frac{d^2x^i}{ds^2} + \Gamma^i{}_{kl}\frac{dx^k}{ds}\frac{dx^l}{ds} = 0$$

Hamilton-Jacobi-egyenlet

$$p^i = mcu^i$$

$$p_i p^i = m^2c^2$$

$$g^{ik}\frac{\partial S}{\partial x^i}\frac{\partial S}{\partial x^k} - m^2c^2 = 0$$

Fény terjedése

$$\frac{dk^i}{d\lambda} + \Gamma^i{}_{kl}k^k k^l = 0$$

Gyenge gravitációs tér
Nemrelativisztikus Lagrange-függvény:

$$L = -mc^2 + \frac{mv^2}{2} - m\varphi$$

$$ds^2 = (c^2 + 2\varphi)dt^2 - d\boldsymbol{r}^2$$

$$g_{00} = 1 + \frac{2\varphi}{c^2}$$

Állandó gravitációs tér, gravitációs vöröseltolódás
Sajátidőben mért frekvencia:

$$\omega = \frac{\omega_0}{\sqrt{g_{00}}} \approx \omega_0 \left(1 - \frac{\varphi}{c^2}\right)$$

$$\Delta\omega = \frac{\varphi_1 - \varphi_2}{c^2}\omega$$

Az elektromágnesség egyenletei gravitációs térben.
Térerősségtenzor:

$$F_{ik} = A_{k;i} - A_{i;k} = \frac{\partial A_k}{\partial x^i} - \frac{\partial A_i}{\partial x^k}$$

Négyes áramsűrűség:

$$j^i = \frac{\rho c}{\sqrt{g_{00}}} \frac{dx^i}{dx^0}$$

Maxwell-egyenletek:

$$\frac{\partial F_{ik}}{\partial x^l} + \frac{\partial F_{li}}{\partial x^k} + \frac{\partial F_{kl}}{\partial x^i} = 0$$

$$F^{ik}_{;k} = \frac{1}{\sqrt{-g}} \frac{\partial}{\partial x^k} \left(\sqrt{-g} F^{ik}\right) = -\frac{j^i}{\epsilon_0 c^2}$$

Töltött részecske mozgása elektromágneses és gravitációs erőtérben:

$$m\left(\frac{du^i}{ds} + \Gamma^i{}_{kl} u^k u^l\right) = qF^{ik} u_k$$

5. fejezet

Görbületi tenzor

Vektor eltolása zárt görbe mentén. Görbületi tenzor. A görbületi tenzor szimmetriái. Bianchi-azonosság. Weil-tenzor, Ricci-tenzor, skalár görbület. Példa: görbületi tenzor számítása görbült kétdimenziós felületen. Független tenzorkomponensek száma kettő, három és négy dimenzióban.

5.1. Ismétlés

- Vektor megváltozása akkor transzformálódik vektorként, ha azonos pontban levő vektorokat vonunk ki egymásból.
- Vektor párhuzamos eltolása, Christoffel-szimbólumok, kovariáns deriváltak
- A Christoffel-szimbólumok alsó indexeikben szimmetrikusak
- A metrikus tenzor kovariáns deriváltja nulla
- A Christoffel-szimbólumok kifejezhetők a metrikus tenzor deriváltjaival.
- Mozgás görbült téridőben, geodetikus mozgás
- A Maxwell-egyenletek általánosítása görbült téridőre

5.2. A görbületi tenzor

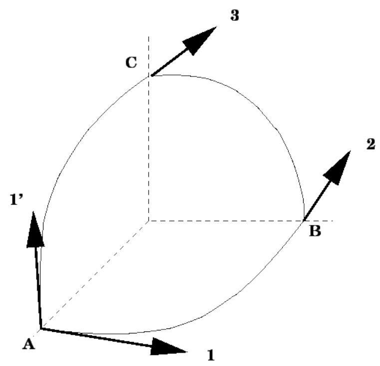
Kérdés: milyen lokális mennyiség jelzi, hogy görbült a téridő?

Vektor párhuzamos eltolása: a komponensek lokálisan Minkowski téridőben változatlanok. Tetszőleges téridőben:

$$DA^i = 0$$

Geodetikus ($Du^i = 0$) mentén végzett párhuzamos eltolás során a pálya érintőjével (u^i) bezárt szög állandó.

Párhuzamos eltolás zárt görbe mentén



5.1. ábra. Görbült felületen szakaszonként geodetikus zárt görbe mentén végzett párhuzamos eltolás eredménye nem egyezik meg a kiindulási vektorral.

$$\Delta A_k = \oint \Gamma^i{}_{kl} A_i dx^l$$

$$\frac{\partial A_i}{\partial x^l} = \Gamma^n{}_{il} A_n$$

Stokes tétele:

$$\oint A_i \; dx^i = \int df^{ki} \frac{\partial A^i}{\partial x^k} = \frac{1}{2} \int df^{ki} \left(\frac{\partial A^i}{\partial x^k} - \frac{\partial A^k}{\partial x^i} \right)$$

ahol

$$df^{ki} = dx^{(1)k} dx^{(2)i} - dx^{(1)i} dx^{(2)k}$$

a $dx^{(1)i}$ és $dx^{(2)i}$ vektorok által kifeszített paralelogramma területe.

$$\Delta A_k = \frac{1}{2} \left[\frac{\partial \left(\Gamma^i{}_{km} A_i \right)}{\partial x^l} - \frac{\partial \left(\Gamma^i{}_{kl} A_i \right)}{\partial x^m} \right] \Delta f^{lm}$$

$$\Delta A_k = \frac{1}{2} R^i{}_{klm} A_i \Delta f^{lm}$$

$$R^i{}_{klm} = \frac{\partial \Gamma^i{}_{km}}{\partial x^l} - \frac{\partial \Gamma^i{}_{kl}}{\partial x^m} + \Gamma^i{}_{nl}\Gamma^n{}_{km} - \Gamma^i{}_{nm}\Gamma^n{}_{kl}$$

A Riemann-tenzor kifejezése a Christoffel-szimbólumokkal:

$$\begin{aligned}
R^i{}_{klm}A_i &= \frac{\partial\left(\Gamma^i{}_{km}A_i\right)}{\partial x^l} - \frac{\partial\left(\Gamma^i{}_{kl}A_i\right)}{\partial x^m} && (5.1)\\
&= \left(\frac{\partial \Gamma^i{}_{km}}{\partial x^l} - \frac{\partial \Gamma^i{}_{kl}}{\partial x^m}\right) A_i + \Gamma^i{}_{km}\Gamma^n{}_{il}A_n - \Gamma^i{}_{kl}\Gamma^n{}_{im}A_n && (5.2)\\
&= \left(\frac{\partial \Gamma^i{}_{km}}{\partial x^l} - \frac{\partial \Gamma^i{}_{kl}}{\partial x^m} + \Gamma^n{}_{km}\Gamma^i{}_{nl} - \Gamma^n{}_{kl}\Gamma^i{}_{nm}\right) A_i && (5.3)
\end{aligned}$$

Felhasználtuk, hogy

$$\frac{\partial A_i}{\partial x^l} = \Gamma^n{}_{il}A_n$$

A fenti levezetés tetszőleges A_i vektorra érvényes, ezért

$$R^i{}_{klm} = \frac{\partial \Gamma^i{}_{km}}{\partial x^l} - \frac{\partial \Gamma^i{}_{kl}}{\partial x^m} + \Gamma^n{}_{km}\Gamma^i{}_{nl} - \Gamma^n{}_{kl}\Gamma^i{}_{nm}$$

$$\Delta A^k = -\frac{1}{2} R^k{}_{ilm} A^i \Delta f^{lm}$$

$$A_{i;k;l} - A_{i;l;k} = A_m R^m_{ikl}$$

$$A^i_{;k;l} - A^i_{;l;k} = -A^m R^i{}_{mkl}$$

$$R_{iklm} = g_{in}R^n{}_{klm} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 g_{im}}{\partial x^k \partial x^l} + \frac{\partial^2 g_{kl}}{\partial x^i \partial x^m} - \frac{\partial^2 g_{il}}{\partial x^k \partial x^m} - \frac{\partial^2 g_{km}}{\partial x^i \partial x^l}\right)$$

$$+ g_{np}\left(\Gamma^n{}_{kl}\Gamma^p{}_{im} - \Gamma^n{}_{km}\Gamma^p{}_{il}\right)$$

$$R_{iklm} = -R_{kilm} = -R_{ikml}$$

$$R_{iklm} = R_{lmik}$$

$$R_{iklm} + R_{imkl} + R_{ilmk} = 0$$

$$R^n{}_{ikl;m} + R^n{}_{imk;l} + R^n{}_{ilm;k} = 0$$

$$R_{ik} = g^{lm} R_{limk} = R^m{}_{imk}$$

$$R_{ik} = R_{ki}$$

$$R = g^{ik} R_{ik}$$

$$R = \frac{2R_{1212}}{\gamma}$$

$$\frac{R}{2} = K = \frac{1}{\rho_1 \rho_2}$$

(levezetés)
kapjuk:

$$0 = g^{ik} \left(R^l{}_{ikl;m} + R^l{}_{imk;l} + R^l{}_{ilm;k} \right) = -R_{,m} + 2R^l{}_{m;l}$$

vagy

$$R^l{}_{m;l} = \frac{1}{2} \frac{\partial R}{\partial x^m}$$

második ($\gamma\delta$) indexpárjai három-három értéket vehetnek fel, tehát a független komponensek megegyeznek egy szimmetrikus 3X3-as mátrix komponenseinek számával, azaz 6-tal. (A ciklikus összeg automatikusan eltűnik.)

hat-hat értéket vehetnek fel. Egy 6X6-os szimmetrikus mátrix független komponenseinek száma 21. A ciklikus összeg csak akkor nem tűnik el automatikusan, ha mind a négy index különböző, ezért egyetlen további összefüggést ad a komponensek között. Négy dimenzióban tehát a görbületi tenzor független komponenseinek száma 20.

$$C_{iklm} = R_{iklm} - \frac{1}{2} R_{il} g_{km} + \frac{1}{2} R_{im} g_{kl} + \frac{1}{2} R_{kl} g_{im} - \frac{1}{2} R_{km} g_{il} + \frac{1}{6} R \left(g_{il} g_{km} - g_{im} g_{kl} \right)$$

Rendelkezik a görbületi tenzor minden algebrai szimmetriájával, de bármely indexpárját összeejtve nullát kapunk (irreducibilis tenzor). invariánsai: görbületi tenzor helyett). metrika Minkowski alakú.

$$A_{\alpha\beta} = R_{0\alpha 0\beta}\,, \quad C_{\alpha\beta} = \frac{1}{4} e_{\alpha\gamma\delta} e_{\beta\lambda\mu} R_{\gamma\delta\lambda\mu}\,, \quad B_{\alpha\beta} = \frac{1}{2} e_{\alpha\gamma\delta} R_{0\beta\gamma\delta}$$

eltűnik.

$$A_{\alpha\alpha} = 0\,, \quad B_{\alpha\beta} = B_{\beta\alpha}\,, \quad A_{\alpha\beta} = -C_{\alpha\beta}$$

$$D_{\alpha\beta} = A_{\alpha\beta} + iB_{\alpha\beta}$$

szimmetrikus, spurtalan komplex mátrix háromdimenziós komplex forgatásaival.

$$D_{\alpha\beta} n_\beta = \lambda n_\beta$$

sajátértékprobléma megoldásai szerint történik az osztályozás. Ha a szimmetrikus komplex mátrix hasonlósági transzformációval diagonalizálható, akkor három ortogonális sajátvektora van úgy, hogy ezek négyzete nem nulla. Ha a mátrix nem diagonalizálható, akkor a sajátvektorok száma kevesebb és van közöttük olyan, melynek négyzete nulla, a hozzátartozó sajátérték pedig degenerált. invariáns van (a két komplex sajátérték, ha ezek egyenlők, D-típusról beszélünk) Invariánsok kifejezése a görbületi tenzorral:

$$I_1 = \frac{1}{48}\left(R_{iklm}R^{iklm} - iR_{iklm}\tilde{R}^{iklm}\right) = \frac{1}{3}\left(\lambda^{(1)2} + \lambda^{(2)2} + \lambda^{(1)}\lambda^{(2)}\right)$$

$$I_2 = \frac{1}{96}\left(R_{iklm}R^{lmpr}R_{pr}{}^{ik} + iR_{iklm}R^{lmpr}\tilde{R}_{pr}{}^{ik}\right) = \frac{1}{2}\lambda^{(1)}\lambda^{(2)}\left(\lambda^{(1)} + \lambda^{(2)}\right)$$

Itt

$$\tilde{R}_{iklm} = \frac{1}{2}E_{ikpr}R^{pr}{}_{lm}$$

a görbületi tenzor duálisa. Ekkor csak két invariáns létezik:

$$I_1 = \lambda^2\,, \quad I_2 = \lambda^3 \to I_1^3 = I_2^2$$

Ha $\lambda^{(1)} = 0$, N-típusról beszélünk. $\lambda^{(1)} = \lambda^{(2)} = \lambda^{(3)} = 0$. A görbületi tenzor nullától különböző, de mégsem létezik a görbületet jellemző invariáns mennyiség.

6. fejezet

Gravitációs tér hatásintegrálja

Klasszikus mezőelméleti emlékeztető. Hatás, Lagrange-sűrűség, Euler-Lagrange mozgásegyenlet, megmaradási tételek. Energia-impulzus tenzor és határozatlansága. Az impulzusmomentum megmaradása. A gravitációs erőtér hatásintegrálja.

4.2. Klasszikus térelméleti bevezető

$q(x, y, z, t)$: térmennyiség (pl. elektromágneses térerősség komponense, metrikus tenzor komponense)

$\Lambda\left(q, q_{,i}\right)$: Lagrange-sűrűség (a térmennyiségektől és azok koordináták szerinti ill. időderiváltjától függ, itt $q_{,i} = \frac{\partial q}{\partial x^i}$

$$S = \int \Lambda\left(q, q_{,i}\right) d\Omega$$

($d\Omega = c\, dV\, dt$)

$$\delta S = \int \left[\frac{\partial \Lambda}{\partial q}\delta q + \frac{\partial \Lambda}{\partial q_{,i}}\delta q_{,i}\right] d\Omega = \int \left[\frac{\partial \Lambda}{\partial q}\delta q + \frac{\partial}{\partial x^i}\left(\frac{\partial \Lambda}{\partial q_{,i}}\delta q\right) - \delta q \frac{\partial}{\partial x^i}\frac{\partial \Lambda}{\partial q_{,i}}\right] d\Omega = 0$$

Euler-Lagrange-egyenlet (mozgásegyenlet):

$$\frac{\partial}{\partial x^i}\frac{\partial \Lambda}{\partial q_{,i}} - \frac{\partial \Lambda}{\partial q} = 0$$

Energia- és impulzusmegmaradás:

Mivel a Langrange-sűrűség nem függ expliciten a koordinátáktól és az időtől,

$$\frac{\partial \Lambda}{\partial x^i} = \frac{\partial \Lambda}{\partial q}\frac{\partial q}{\partial x^i} + \frac{\partial \Lambda}{\partial q_{,k}}\frac{\partial q_{,k}}{\partial x^i}$$

A mozgásegyenletet felhasználva:

$$\frac{\partial \Lambda}{\partial x^i} = \frac{\partial}{\partial x^k}\frac{\partial \Lambda}{\partial q_{,k}} q_{,i} + \frac{\partial \Lambda}{\partial q_{,k}} q_{,k,i} = \frac{\partial}{\partial x^k}\left(q_{,i}\frac{\partial \Lambda}{\partial q_{,k}}\right)$$

Nullára redukálva:

$$\frac{\partial}{\partial x^k}\left(q_{,i}\frac{\partial \Lambda}{\partial q_{,k}} - \delta_i^k \Lambda\right) = 0$$

Energia-impulzus-tenzor:

$$T_i^k = q_{,i}\frac{\partial \Lambda}{\partial q_{,k}} - \delta_i^k \Lambda$$

A $\frac{\partial T_i^k}{\partial x^k} = 0$ kontinuitási egyenletet a t_1 és t_2 időpontok közötti négyestérfogatra integráljuk:

$$\frac{dP^i}{dt} = 0$$

ahol

$$P^i = \int T^{ik} dS_k$$

a megmaradó négyesimpulzus.
T^{ik} határozatlan:

$$T^{ik} + \frac{\partial}{\partial x^l}\psi^{ikl}$$

is kielégíti a kontinuitási egyenletet, ha $\psi^{ikl} = -\psi^{ilk}$. A megmaradó négyesimpulzus értékét ez nem befolyásolja, mivel

$$\int \frac{\partial \psi^{ikl}}{\partial x^l} dS_k = \frac{1}{2}\int \left(dS_k \frac{\partial \psi^{ikl}}{\partial x^l} - dS_l \frac{\partial \psi^{ikl}}{\partial x^k}\right) = \frac{1}{2}\int \psi^{ikl} df^*_{kl} = 0$$

ahol $df^*_{kl} = \epsilon_{klmn} df^{mn}$ a $df^{mn} = dx^{(1)m}dx^{(2)n} - dx^{(1)n}dx^{(2)m}$ négyes felületelem duálisa. A végtelen távoli felületen az integrandus eltűnik.
Az impulzusmomentum megmaradása (skalár térre):
Az impulzusmomentum négyestenzora:

$$J^{ik} = \int \left(x^i dP^k - x^k dP^i\right) = \int \left(x^i T^{kl} - x^k T^{il}\right) dS_l$$

Az impulzusmomentum megmaradása ekvivalens az impulzusmomentum-sűrűség négyesdivergenciájának eltűnésével:

$$0 = J^{ik}(t_2) - J^{ik}(t_1) = \oint \left(x^i T^{kl} - x^k T^{il}\right) dS_l = \int \frac{\partial}{\partial x^l} \left(x^i T^{kl} - x^k T^{il}\right) d\Omega$$

$$\rightarrow \quad \frac{\partial}{\partial x^l} \left(x^i T^{kl} - x^k T^{il}\right) = 0$$

De

$$\frac{\partial}{\partial x^l} \left(x^i T^{kl} - x^k T^{il}\right) = x^i \frac{\partial T^{kl}}{\partial x^l} - x^k \frac{\partial T^{il}}{\partial x^l} + \delta^i_l T^{kl} - \delta^k_l T^{il} = T^{ki} - T^{ik}$$

tehát az impulzusmomentum megmaradásából T^{ki} szimmetrikussága következik.

4.3. Előkészítés (néhány fontos azonosság levezetése)

Determináns deriváltja:

$$\frac{\partial g}{\partial x^k} = \frac{\partial}{\partial x^k} \epsilon^{i_0,i_1,i_2,i_3} g_{0i_0} g_{1i_1} g_{2i_2} g_{3i_3} = \epsilon^{i_0,i_1,i_2,i_3} \frac{\partial g_{0i_0}}{\partial x^k} g_{1i_1} g_{2i_2} g_{3i_3} + ...$$

$\frac{\partial g_{0i_0}}{\partial x^k}$ együtthatója

$$\epsilon^{i_0,i_1,i_2,i_3} g_{1i_1} g_{2i_2} g_{3i_3}$$

a 0. sorhoz és i_0-ik oszlophoz tartozó előjeles aldetermináns, azaz $g\ g^{0i_0}$. (Hasonlóan a további tagokra.) Ezzel

$$\frac{\partial g}{\partial x^k} = g\ g^{ij}\ \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k}$$

Mivel

$g_{ij} g^{ij} = \delta^j_j = 4$,

$$g^{ij} \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k} = -g_{ij} \frac{\partial g^{ij}}{\partial x^k}$$

A Christoffel-szimbólum definíciója,

$$\Gamma^i_{kl} = \frac{1}{2} g^{im} \left(\frac{\partial g_{mk}}{\partial x^l} + \frac{\partial g_{ml}}{\partial x^k} - \frac{\partial g_{kl}}{\partial x^m} \right)$$

alapján

$$\Gamma^i_{ki} = \frac{1}{2} g^{im} \left(\frac{\partial g_{mk}}{\partial x^i} + \frac{\partial g_{mi}}{\partial x^k} - \frac{\partial g_{ki}}{\partial x^m} \right) = \frac{1}{2} g^{im} \frac{\partial g_{mi}}{\partial x^k} = \frac{1}{2g} \frac{\partial g}{\partial x^k}$$

Vektor kovariáns négyesdivergenciája:

$$A^i_{;i} \equiv \frac{DA^i}{Dx^i} = \frac{\partial A^i}{\partial x^i} + \Gamma^i_{ki} A^k = \frac{\partial A^i}{\partial x^i} + \frac{1}{2g} \frac{\partial g}{\partial x^k} A^k = \frac{1}{\sqrt{-g}} \frac{\partial \left(\sqrt{-g}\ A^i\right)}{\partial x^i}$$

4.4. A gravitációs erőtér hatásintegrálja

A gravitációs tér egyenletei a fizika más ágaiból nem vezethetők le (új fizikai törvények, 1916). Csupán analógiák használhatók motivációként: másodrendű téregyenleteket várunk (első deriváltak a Lagrange-sűrűségben), a Lagrange-sűrűség skalár, térmennyiségek: a metrikus tenzor komponensei.

Probléma: A metrikus tenzor első deriváltjaiból (Christoffel-szimbólumokból) nem képezhető skalár, a rendelkezésre álló egyetlen nemtriviális skalár mennyiség, a skalár görbület (R) viszont második deriváltakat is tartalmaz. Megoldás: mivel R a második deriváltakat csak lineárisan tartalmazza, megmutatjuk, hogy

$$\int R\sqrt{-g} d\Omega = \int G\sqrt{-g} d\Omega + \int \frac{\partial \left(\sqrt{-g}\ w^i\right)}{\partial x^i} d\Omega$$

ahol G csak a metrikus tenzor első deriváltjait tartalmazza. (A w^i mennyiség nem transzformálódik vektorként!). Tekintsük ehhez $R\sqrt{-g}$ kifejezésében a másodrendű deriváltakat tartalmazó tagokat:

$$R\sqrt{-g} = \sqrt{-g}\ g^{ki}\ R^m_{kmi} = \sqrt{-g}\ g^{ki} \left(\underline{\frac{\partial \Gamma^m_{ki}}{\partial x^m} - \frac{\partial \Gamma^m_{km}}{\partial x^i}} + \Gamma^m_{nm} \Gamma^n_{ki} - \Gamma^m_{ni} \Gamma^n_{km} \right)$$

Második deriváltak csak a Christoffel-szimbólumok deriváltjaiban szerepelnek. Ezeket a tagokat tovább alakítva:

$$\sqrt{-g} \left(g^{km}\ \frac{\partial \Gamma^i_{km}}{\partial x^i} - g^{ki}\ \frac{\partial \Gamma^m_{km}}{\partial x^i} \right) = \frac{\partial}{\partial x^i} \left(\sqrt{-g} \left[g^{km}\ \Gamma^i_{km} - g^{ki}\ \Gamma^m_{km} \right] \right)$$

$$- \left(\Gamma^i_{km} \frac{\partial \left(\sqrt{-g}\ g^{km}\right)}{\partial x^i} - \Gamma^m_{km} \frac{\partial \left(\sqrt{-g}\ g^{ki}\right)}{\partial x^i} \right)$$

Tehát

$$w^i = g^{km}\ \Gamma^i_{km} - g^{ki}\ \Gamma^m_{km}$$

és

$$G = g^{ki}\ \left(\Gamma^m_{nm}\Gamma^n_{ki} - \Gamma^m_{ni}\Gamma^n_{km}\right) + \frac{\Gamma^m_{km}}{\sqrt{-g}}\frac{\partial\left(\sqrt{-g}\ g^{ki}\right)}{\partial x^i} - \frac{\Gamma^i_{km}}{\sqrt{-g}}\frac{\partial\left(\sqrt{-g}\ g^{km}\right)}{\partial x^i}$$

A metrikus tenzor deriváltjait kifejezzük a Christoffel szimbólumokkal ($g^{ik}_{;l} = 0$):

$$\frac{\partial g^{im}}{\partial x^l} = -\Gamma^i_{kl}\ g^{km} - \Gamma^m_{kl}\ g^{ik}$$

Kapjuk:

$$G = g^{ki}\ \left(\Gamma^m_{nm}\Gamma^n_{ki} - \Gamma^m_{ni}\Gamma^n_{km}\right) + \Gamma^m_{km}\ \Gamma^n_{in}\ g^{ki} - \Gamma^m_{km}\ \Gamma^i_{ni}\ g^{nk} - \Gamma^m_{km}\ \Gamma^k_{ni}\ g^{in}$$

$$\underline{-\Gamma^i_{km}\ \Gamma^n_{in}\ g^{km}} + \Gamma^i_{km}\ \Gamma^k_{ni}\ g^{nm} \underline{+\Gamma^i_{km}\ \Gamma^m_{ni}\ g^{kn}}$$

Tehát

$$G = g^{ki}\ \left(\Gamma^m_{ni}\Gamma^n_{km} - \Gamma^m_{nm}\Gamma^n_{ki}\right)$$

A Lagrange-sűrűség

$$-\frac{c^3}{16\pi k}R\sqrt{-g}$$

A negatív előjel biztosítja, hogy a hatás pozitív definit legyen. $k = 6.67 \times 10^{-11}\frac{\mathrm{m}^3}{\mathrm{kgs}^2}$ a gravitációs állandó.

7. fejezet

Energia-impulzus-tenzor

Szimmetrikus energia-impulzus-tenzor levezetése görbült téridőben.

4.5. Energia-impulzus-tenzor

Új levezetést adunk az energia-impulzus-tenzorra, amely azonnal szimmetrikusT_{ik}-t eredményez

Gondolatmenet:

Végtelen kis általános koordinátatranszformációt végzünk.

Ennek következtében az anyag hatásfüggvénye (mivel a Lagrange-sűrűség skalár) nem változhat, $\delta S = 0$.

Felírjuk a hatás koordinátatranszformációból eredő megváltozását és egyenlővé tesszük nullával.

Az anyagot jellemző térmennyiségek (pl. elektromágneses térerősségtenzor) kielégítik a mozgásegyenleteket, így a koordinátatranszformációból eredő megváltozásuk a hatás kifejezésében első rendben nem ad járulékot.

Csak a metrika megváltozása eredményez nemtriviális változást. Eredmény: egy szimmetrikus tenzor (T_{ik}) kovariáns négyesdivergenciája nulla. (Ez most nem jelenti automatikusan megmaradó mennyiség létezését!)

$$S = \frac{1}{c} \int \Lambda \sqrt{-g} \, d\Omega$$

Infinitezimális koordinátatranszformáció:

$$x'^i = x^i + \xi^i$$

(ξ^i kicsi)

$$dx'^i = dx^i + \frac{\partial \xi^i}{\partial x^l} dx^l = \left(\delta^i_l + \frac{\partial \xi^i}{\partial x^l} \right) dx^l$$

$$g'^{ik}(x'^l) = g^{mn}(x^l) \left(\delta^i_m + \frac{\partial \xi^i}{\partial x^m} \right) \left(\delta^k_n + \frac{\partial \xi^k}{\partial x^n} \right) \approx g^{ik}(x^l) + g^{im} \frac{\partial \xi^k}{\partial x^m} + g^{kn} \frac{\partial \xi^i}{\partial x^n}$$

Átalakítjuk a baloldalt:

$$g'^{ik}(x'^l) = g'^{ik}(x^l + \xi^l) = g'^{ik}(x^l) + \frac{\partial g'^{ik}}{\partial x^l}\xi^l \approx g'^{ik}(x^l) + \frac{\partial g^{ik}}{\partial x^l}\xi^l$$

Végül tehát

$$g'^{ik}(x^l) = g^{ik}(x^l) - \frac{\partial g^{ik}}{\partial x^l}\xi^l + g^{im}\frac{\partial \xi^k}{\partial x^m} + g^{kn}\frac{\partial \xi^i}{\partial x^n}$$

$$\xi^{i;k} + \xi^{k;i} = g^{kn}\frac{\partial \xi^i}{\partial x^n} + g^{km}\Gamma^i_{ml}\xi^l + g^{im}\frac{\partial \xi^k}{\partial x^m} + g^{im}\Gamma^k_{ml}\xi^l$$

$$= g^{im}\frac{\partial \xi^k}{\partial x^m} + g^{kn}\frac{\partial \xi^i}{\partial x^n} + \left(g^{km}g^{in} + g^{im}g^{kn}\right)\frac{1}{2}\left(\frac{\partial g_{nm}}{\partial x^l} + \frac{\partial g_{nl}}{\partial x^m} - \frac{\partial g_{ml}}{\partial x^n}\right)\xi^l$$

$$= g^{im}\frac{\partial \xi^k}{\partial x^m} + g^{kn}\frac{\partial \xi^i}{\partial x^n} + g^{km}g^{in}\frac{\partial g_{nm}}{\partial x^l}\xi^l = g^{im}\frac{\partial \xi^k}{\partial x^m} + g^{kn}\frac{\partial \xi^i}{\partial x^n} - g^{km}g_{nm}\frac{\partial g^{in}}{\partial x^l}\xi^l$$

$$= g^{im}\frac{\partial \xi^k}{\partial x^m} + g^{kn}\frac{\partial \xi^i}{\partial x^n} - \frac{\partial g^{ik}}{\partial x^l}\xi^l$$

Tehát

$$g'^{ik}(x^l) = g^{ik}(x^l) + \delta g^{ik}(x^l)\ , \qquad \delta g^{ik} = \xi^{i;k} + \xi^{k;i}$$

Hasonlóan (mivel $g'^{ik}g'_{kl} = \delta^i_l$)

$$g'_{ik}(x^l) = g_{ik}(x^l) + \delta g_{ik}(x^l)\ , \qquad \delta g_{ik} = -\xi_{i;k} - \xi_{k;i}$$

$$\delta S = \frac{1}{c}\int\left\{\frac{\partial\left(\sqrt{-g}\Lambda\right)}{\partial g^{ik}}\delta g^{ik} + \frac{\partial\left(\sqrt{-g}\Lambda\right)}{\partial\left(\frac{\partial g^{ik}}{\partial x^l}\right)}\delta\left(\frac{\partial g^{ik}}{\partial x^l}\right)\right\}d\Omega$$

$$= \frac{1}{c}\int\left\{\frac{\partial\left(\sqrt{-g}\Lambda\right)}{\partial g^{ik}} - \frac{\partial}{\partial x^l}\left(\frac{\partial\left(\sqrt{-g}\Lambda\right)}{\partial\left(\frac{\partial g^{ik}}{\partial x^l}\right)}\right)\right\}\delta g^{ik}\,d\Omega$$

Legyen

$$T_{ik} = \frac{2}{\sqrt{-g}} \left\{ \frac{\partial\left(\sqrt{-g}\Lambda\right)}{\partial g^{ik}} - \frac{\partial}{\partial x^l} \left(\frac{\partial\left(\sqrt{-g}\Lambda\right)}{\partial\left(\frac{\partial g^{ik}}{\partial x^l}\right)} \right) \right\}$$

(Szimmetrikus!)
Ekkor

$$\delta S = \frac{1}{2c} \int T_{ik} \delta g^{ik} \sqrt{-g}\, d\Omega$$

δg^{ik} kifejezését behelyettesítve:

$$\delta S = \frac{1}{2c} \int T_{ik} \left(\xi^{i;k} + \xi^{k;i}\right) \sqrt{-g}\, d\Omega$$

Másképpen:

$$\delta S = \frac{1}{c} \int T_{ik} \xi^{i;k} \sqrt{-g}\, d\Omega = \frac{1}{c} \int T_i^k \xi^i_{;k} \sqrt{-g}\, d\Omega$$

$$= \frac{1}{c} \int \left(T_i^k \xi^i\right)_{;k} \sqrt{-g}\, d\Omega - \frac{1}{c} \int \xi^i\, T^k_{i;k} \sqrt{-g}\, d\Omega$$

Az első tagban felhasználjuk a vektorok kovariáns négyesdivergenciájára vonatkozó azonosságot. Kapjuk:

$$\int \left(T_i^k \xi^i\right)_{;k} \sqrt{-g}\, d\Omega = \int \frac{\partial}{\partial x^k} \left(\sqrt{-g}\, T_i^k \xi^i\right) d\Omega$$

Ezt a négydimenziós Gauss-tétel segítségével átalakítva nullát kapunk.
Marad:

$$\delta S = -\frac{1}{c} \int \xi^i\, T^k_{i;k} \sqrt{-g}\, d\Omega$$

Mivel ξ^i tetszőleges,

$$T^k_{i;k} = 0$$

következik. Ez sík téridőben az energia-impulzus-tenzor kontinuitási egyenletével azonos alakú.

8. fejezet

Einstein-egyenletek

Anyag és gravitációs tér egyesített hatása. Az Einstein-egyenletek származtatása. Az Einstein-egyenletek tulajdonságai. Csak a metrikus tenzor térszerű komponenseinek lép fel a második deriváltja. Kényszerek. Kezdetiérték-probléma. Függetlenül megadható fizikai mennyiségek.

5.3. Az Einstein-egyenletek, származtatásuk, tulajdonságaik

Variációs elv:

$$\delta(S_g + S_m) = 0$$

A metrikus tenzor komponensei szerint variálunk.

$$\delta S_g \propto \delta \int R\sqrt{-g}d\Omega = \delta \int g^{ik}R_{ik}\sqrt{-g}d\Omega$$

$$= \int \left(R_{ik}\sqrt{-g}\delta g^{ik} + g^{ik}R_{ik}\delta\sqrt{-g} + g^{ik}\sqrt{-g}\delta R_{ik}\right) d\Omega$$

$$\delta\sqrt{-g} = -\frac{1}{2}\sqrt{-g}\; g_{ik}\; \delta g^{ik}$$

$$\delta \int R\sqrt{-g}d\Omega = \int \left(R_{ik} - \frac{1}{2}g_{ik}R\right)\delta g^{ik}d\Omega + \int g^{ik}\delta R_{ik}\;\sqrt{-g}d\Omega$$

Megmutatjuk, hogy a második tag eltűnik:

$\delta\Gamma^k_{il}A_k dx^l$ vektor, mert azonos pontokban levő vektorok különbsége. Eszerint

$\delta\Gamma^k_{il}$ tenzor.

Lokálisan geodetikus rendszerben számolunk. Ekkor a metrikus tenzor első deriváltjai eltűnnek.

$$g^{ik}\delta R_{ik} = g^{ik}\left(\frac{\partial}{\partial x^l}\delta\Gamma^l_{ik} - \frac{\partial}{\partial x^k}\delta\Gamma^l_{il}\right) = \frac{\partial w^l}{\partial x^l}$$

ahol

$$w^l = g^{ik}\delta\Gamma^l_{ik} - g^{il}\delta\Gamma^k_{ik}$$

Általános esetben tehát

$$g^{ik}\delta R_{ik} = \frac{1}{\sqrt{-g}}\frac{\partial\left(\sqrt{-g}\; w^l\right)}{\partial x^l}$$

A Gauss-tételt alkalmazva bizonyítjuk az eredeti állítást.
Tehát

$$\delta S_g = -\frac{c^3}{16\pi k}\int\left(R_{ik} - \frac{1}{2}g_{ik}R\right)\delta g^{ik} d\Omega$$

Az anyag hatásintegráljának variációja (ld. az energia-impulzus-tenzor levezetését):

$$\delta S_m = \frac{1}{2c}\int T_{ik}\delta g^{ik}\,\sqrt{-g}\; d\Omega$$

Végül tehát a teljes variáció:

$$-\frac{c^3}{16\pi k}\int\left(R_{ik} - \frac{1}{2}g_{ik}R - \frac{8\pi k}{c^4}T_{ik}\right)\delta g^{ik} d\Omega$$

amiből megkapjuk az Einstein-egyenleteket:

$$R_{ik} - \frac{1}{2}g_{ik}R = \frac{8\pi k}{c^4}T_{ik}$$

Másképpen:

$$R^k_i - \frac{1}{2}\delta^k_i R = \frac{8\pi k}{c^4}T^k_i$$

Az indexeket összeejtve:

$$R = -\frac{8\pi k}{c^4}T$$

Ezért írhatjuk:

$$R_{ik} = \frac{8\pi k}{c^4}\left(T_{ik} - \frac{1}{2}g_{ik}T\right)$$

Az Einstein-egyenletek tulajdonságai

nemlinearitás

anyag és gravitációs tér kezdeti értékei nem függetlenek

csak a metrikus tenzor térszerű komponenseinek fordul elő a második időderiváltja

összesen nyolc független kezdeti feltétel adható meg

9. fejezet

Megmaradási tételek

Az energia-impulzus tenzor négyesdivergenciája eltűnik, de ebből nem következik megmaradási tétel. Ok: az anyag és gravitációs tér együttes négyesimpulzusa marad meg. Az energia, impulzus, impulzusmomentum, tömegközéppont megmaradása gravitációs térben. A gravitációs tér energia-impulzus pszeudotenzora. A tér megmaradó teljes négyesimpulzusának transzformációs tulajdonságai.

6.2. Megmaradási tételek. Az energia, impulzus, impulzusmomentum, tömegközéppont megmaradása gravitációs térben.

Görbült téridőben az energia-impulzus-tenzor a

$$T^{ik}_{;k} = 0$$

koninuitási egyenletnek tesz eleget, ami felírható

$$T^k_{i;k} = \frac{1}{\sqrt{-g}} \frac{\partial \left(T^k_i \sqrt{-g} \right)}{\partial x^k} - \frac{1}{2} \frac{\partial g_{kl}}{\partial x^i} T^{kl} = 0$$

alakban. Ebből nem következik megmaradási tétel!

Magyarázat: csak a gravitációs tér és az anyag együttes energiája és impulzusa marad meg.

A megmaradó, teljes négyesimpulzus meghatározása

Az Einstein-egyenletek felhasználásával olyan kifejezést keresünk, amely a gravitációs tér kikapcsolásakor (azaz lokálisan geodetikus rendszerben) az anyag T^{ik} energia-impulzus-tenzorába megy át, térfogati integrálja megmaradó mennyiség, és melynek általános esetben T^{ik}-tól való eltérése a metrikának legfeljebb első deriváltjaitól függ.

Lokálisan geodetikus rendszerben számolunk (az adott pontban a metrikus tenzor első deriváltjai ill. a Christoffel-szimbólumok eltûnnek)

Az adott pontban

$$T^{ik}_{;k} = \frac{\partial T^{ik}}{\partial x^k} = 0$$

T^{ik}-t az Einstein-egyenletek segítségével

$$T^{ik} = \frac{\partial \eta^{ikl}}{\partial x^l}$$

alakra hozzuk (még mindig lokálisan geodetikus rendszerben), ahol

$$\eta^{ikl} = -\eta^{ilk}$$

(Ekkor a kontinuitási egyenlet azonosan teljesül.)
Ehhez
kiindulunk az Einstein-egyenletekből:

$$T^{ik} = \frac{c^4}{8\pi k}\left(R_{ik} - \frac{1}{2}g_{ik}R\right)$$

Felhasználjuk, hogy lokálisan geodetikus rendszerben

$$R^{ik} = \frac{1}{2}\, g^{im}g^{kp}g^{ln}\left\{\frac{\partial^2 g_{lp}}{\partial x^m \partial x^n} + \frac{\partial^2 g_{mn}}{\partial x^l \partial x^p} - \frac{\partial^2 g_{ln}}{\partial x^m \partial x^p} - \frac{\partial^2 g_{mp}}{\partial x^l \partial x^n}\right\}$$

Kapjuk:

$$T^{ik} = \frac{\partial}{\partial x^l}\left\{\frac{1}{(-g)} \quad \underbrace{\frac{c^4}{16\pi k}\frac{\partial}{\partial x^m}\left[(-g)\left(g^{ik}g^{lm} - g^{il}g^{km}\right)\right]}_{b^{ikl}}\ \right\} \tag{9.1}$$

(9.2)

$(\eta^{ikl} = \frac{1}{(-g)}b^{ikl})$
Lokálisan geodetikus rendszerben

$$T^{ik} = \frac{1}{(-g)}\frac{\partial b^{ikl}}{\partial x^l}$$

vagy

$$(-g)T^{ik} = \frac{\partial b^{ikl}}{\partial x^l}$$

Visszatérünk általános görbevonalú koordinátákra. Ekkor

$$(-g)\left(T^{ik}+t^{ik}\right)=\frac{\partial b^{ikl}}{\partial x^l}$$

ahol t^{ik} csak a metrikus tenzor első deriváltjaitól függ. Expliciten (T^{ik}-t ismét a téregyenletből véve):

$$t^{ik}=\frac{c^4}{16\pi k}\left\{\left(g^{il}g^{km}-g^{ik}g^{lm}\right)\left(2\Gamma^n_{lm}\Gamma^p_{np}-\Gamma^n_{lp}\Gamma^p_{mn}-\Gamma^n_{ln}\Gamma^p_{mp}\right)\right.$$

$$+\,g^{il}g^{mn}\left(\Gamma^k_{lp}\Gamma^p_{mn}+\Gamma^k_{mn}\Gamma^p_{lp}-\Gamma^k_{np}\Gamma^p_{lm}-\Gamma^k_{lm}\Gamma^p_{np}\right)$$

$$+\,g^{kl}g^{mn}\left(\Gamma^i_{lp}\Gamma^p_{mn}+\Gamma^i_{mn}\Gamma^p_{lp}-\Gamma^i_{np}\Gamma^p_{lm}-\Gamma^i_{lm}\Gamma^p_{np}\right)$$

$$\left.+\,g^{lm}g^{np}\left(\Gamma^i_{ln}\Gamma^k_{mp}-\Gamma^i_{lm}\Gamma^k_{np}\right)\right\}$$

t^{ik} a gravitációs tér energia-impulzus pszeudotenzora.
Mivel

$$b^{ikl}=-b^{ilk}$$

azonosan teljesül, hogy

$$\frac{\partial}{\partial x^k}(-g)\left(T^{ik}+t^{ik}\right)=0$$

Emiatt

$$P^i=\frac{1}{c}\int(-g)\left(T^{ik}+t^{ik}\right)dS_k$$

megmaradó mennyiség. Ez az anyag és a gravitációs tér együttes „négyesimpulzusa”. (Ténylegesen nem négyesvektor, mivel a négyesvektorok a tér különböző pontjaiban különbözőképpen transzformálódnak, P^i pedig egy teljes háromdimenziós hiperfelülethez tartozik.)

Mivel $(-g)\left(T^{ik}+t^{ik}\right)$ szimmetrikus az i,k indexekben, megmarad a négyes impulzusmomentum:

$$J^{ik}=\int\left(x^i dP^k-x^k dP^i\right)=\frac{1}{c}\int\left[x^i\left(T^{kl}+t^{kl}\right)-x^k\left(T^{il}+t^{il}\right)\right](-g)dS_l$$

A tömegközéppont megmaradása a $J^{0\alpha}$ mennyiség megmaradásának felel meg:

$$x^0 \int \left(T^{\alpha 0} + t^{\alpha 0}\right)(-g)dV - \int x^\alpha \left(T^{00} + t^{00}\right)(-g)dV = const.$$

Másképpen:

$$X^\alpha = const.' + \frac{P^\alpha}{P^0} x^0$$

ahol

$$X^\alpha = \frac{\int x^\alpha \left(T^{00} + t^{00}\right)(-g)dV}{\int \left(T^{00} + t^{00}\right)(-g)dV}$$

A négyesimpulzus és a négyes impulzusmomentum kifejezése felületi integrálként:

$$P^i = \frac{1}{c}\int \frac{\partial b^{i0l}}{\partial x^l} dV = \frac{1}{c}\int \frac{\partial b^{i0\alpha}}{\partial x^\alpha} dV = \frac{1}{c}\oint b^{i0\alpha} df_\alpha$$

Hasonlóan belátható, hogy

$$J^{ik} = \frac{1}{c}\oint \left(x^i b^{k0\alpha} - x^k b^{i0\alpha} + \lambda^{i0\alpha k}\right) df_\alpha$$

Nemrelativisztikus határeset:
Ívelemnégyzet (levezetés később):

$$ds^2 = \left(1 + \frac{2}{c^2}\varphi(\boldsymbol{r})\right) c^2 dt^2 - \left(1 - \frac{2}{c^2}\varphi(\boldsymbol{r})\right)\left(dx^2 + dy^2 + dz^2\right)$$

Itt

$$\varphi(\boldsymbol{r}) = -k \sum_a \frac{m_a}{|\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}_a|}$$

Energia
Impulzus
Tömegközéppont
Impulzusmomentum

10. fejezet

Gömbszimmetrikus gravitációs tér

Sztatikus gravitációs tér. Gravitációs vöröseltolódás. Szinkronizált vonatkoztatási rendszer. Gravitáló testek erőtere. Gömbszimmetrikus gravitációs tér. Schwarzschild metrika. Mozgás gömbszimmetrikus gravitációs térben. Eseményhorizont. Gravitációs kollapszus.

7.2. Gravitáló testek erőtere. Gömbszimmetrikus gravitációs tér. Schwarzschild metrika.

Gömbszimmetria: a téridő-metrika a középponttól egyenlő távolságokban levő pontokban azonos. Az ívelemnégyzet legáltalánosabb gömbszimmetrikus kifejezése

$$ds^2 = h(r,t)dr^2 + k(r,t)(\sin^2\Theta d\varphi^2 + d\Theta^2) + l(r,t)dt^2 + a(r,t)drdt$$

Az $r = f_1(r',t'),\ t = f_2(r',t')$ alakú transzformációk megőrzik a gömbszimmetriát. Elérhető, hogy $a(r,t) = 0$ és $k(r,t) = -r^2$ legyen. Így az általánosságot nem csorbítva írhatjuk, hogy

$$ds^2 = \mathrm{e}^{\nu}c^2dt^2 - r^2(d\Theta^2 + \sin^2\Theta d\varphi^2) - \mathrm{e}^{\lambda}dr^2$$

$x^0 = ct,\ x^1 = r,\ x^2 = \Theta,\ x^3 = \varphi$ választással a metrikus tenzor nullától különböző komponensei

$$g_{00} = \mathrm{e}^{\nu},\ g_{11} = -\mathrm{e}^{\lambda},\ g_{22} = -r^2,\ g_{33} = -r^2\sin^2\Theta$$

ill.

$$g^{00} = \mathrm{e}^{-\nu},\ g^{11} = -\mathrm{e}^{-\lambda},\ g^{22} = -r^{-2},\ g^{33} = -r^{-2}\sin^{-2}\Theta$$

A nullától különböző Christoffel-szimbólumok:

$$\Gamma^1_{11} = \frac{\lambda'}{2},\ \Gamma^0_{10} = \Gamma^0_{01} = \frac{\nu'}{2},\ \Gamma^2_{33} = -\sin\Theta\cos\Theta$$

$$\Gamma^0_{11} = \frac{\dot\lambda}{2}\mathrm{e}^{\lambda-\nu},\ \Gamma^1_{22} = -r\mathrm{e}^{-\lambda},\ \Gamma^1_{00} = \frac{\nu'}{2}\mathrm{e}^{\nu-\lambda}$$

$$\Gamma^2_{12} = \Gamma^2_{21} = \Gamma^3_{13} = \Gamma^3_{31} = \frac{1}{r},\ \Gamma^3_{23} = \Gamma^3_{32} = \coth\Theta,\ \Gamma^0_{00} = \frac{\dot\nu}{2}$$

$$\Gamma^1_{10} = \Gamma^1_{01} = \frac{\dot\lambda}{2},\ \Gamma^1_{33} = -r\sin^2\Theta\mathrm{e}^{-\lambda}$$

(Itt $\nu' = \partial\nu/\partial r$ és $\dot\nu = \partial\nu/\partial t$)
Ebből az Einstein-egyenletek:

$$-\mathrm{e}^{-\lambda}\left(\frac{\nu'}{r} + \frac{1}{r^2}\right) + \frac{1}{r^2} = \frac{8\pi k}{c^4}T^1_1$$

$$-\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-\lambda}\left(\nu'' + \frac{\nu'^2}{2} + \frac{\nu' - \lambda'}{r} - \frac{\nu'\lambda'}{2}\right) + \frac{1}{2}\mathrm{e}^{-\nu}\left(\ddot\lambda + \frac{\dot\lambda^2}{2} - \frac{\dot\nu\dot\lambda}{2}\right) = \frac{8\pi k}{c^4}T^2_2 = \frac{8\pi k}{c^4}T^3_3$$

$$-\mathrm{e}^{-\lambda}\left(\frac{1}{r^2} - \frac{\lambda'}{r}\right) + \frac{1}{r^2} = \frac{8\pi k}{c^4}T^0_0$$

$$-\mathrm{e}^{-\lambda}\frac{\dot\lambda}{r} = \frac{8\pi k}{c^4}T^1_0$$

Anyagmentes esetben (az erőteret létrehozó tömegen kívül) csak három független egyenlet van:

$$\mathrm{e}^{-\lambda}\left(\frac{\nu'}{r} + \frac{1}{r^2}\right) - \frac{1}{r^2} = 0$$

$$\mathrm{e}^{-\lambda}\left(\frac{\lambda'}{r} - \frac{1}{r^2}\right) + \frac{1}{r^2} = 0$$

$$\dot{\lambda} = 0$$

A vákuumbeli egyenletek megoldása:
λ nem függ az időtől
$\lambda + \nu = F(t)$, ahol $F(t)$ nullává tehető az idő alkalmas $t = f(t')$ alakú transzformációjával

$$\mathrm{e}^{-\lambda} = \mathrm{e}^{\nu} = 1 + \frac{\mathrm{const.}}{r}$$

Nagy távolságok esetén $g_{00} = 1 + \frac{2\varphi}{c^2} = 1 - \frac{2kM}{c^2 r}$, ezért

$$\mathrm{const.} = -r_g = -\frac{2kM}{c^2}$$

Schwarzschild-metrika (K.Schwarzschild, 1916):

$$ds^2 = \left(1 - \frac{r_g}{r}\right) c^2 dt^2 - r^2(d\Theta^2 + \sin^2\Theta d\varphi^2) - \frac{dr^2}{1 - \frac{r_g}{r}}$$

(térbeli metrika, kerület, sugár, időtartamok)
Nagy távolságban érvényes közelítő alak:

$$ds^2 = ds_0^2 - \frac{2kM}{c^2 r}\left(dr^2 + c^2 dt^2\right)$$

$$\mathrm{e}^{-\lambda} = 1 - \frac{8\pi k}{c^4 r}\int_0^a T_0^0 r^2 dr = 1 - \frac{2kM}{c^2 r}$$

$\rightarrow$

$$M = \frac{4\pi}{c^2}\int_0^a T_0^0 r^2 dr$$

(gravitációs tömeghiány)
7.3. Mozgás gömbszimmetrikus gravitációs térben. Perihélium-elfordulás, fénysugár-elhajlás.
Lagrange-függvény gravitációs térben mozgó ponttömeg esetén:

$$L = -mc\frac{ds}{dt} = -mc^2\sqrt{1 - \frac{r_g}{r} - \frac{\dot{r}^2}{c^2\left(1 - \frac{r_g}{r}\right)} - \frac{r^2\dot{\Theta}^2}{c^2} - \frac{r^2\sin^2\Theta\dot{\varphi}^2}{c^2}}$$

m az erőtérben mozgó részecske tömege.

Ha a z tengely a hármas impulzusmomentum-vektor irányába mutat, akkor a mozgás az xy síkban megy végbe, tehát $\Theta = \frac{\pi}{2}$, $\dot{\Theta} = 0$. Ekkor

$$L = -mc^2\sqrt{1 - \frac{r_g}{r} - \frac{\dot{r}^2}{c^2\left(1 - \frac{r_g}{r}\right)} - \frac{r^2\dot{\varphi}^2}{c^2}}$$

Megmaradó mennyiségek:

Impulzusmomentum:

$$J = \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} = \frac{mr^2\dot{\varphi}}{\sqrt{1 - \frac{r_g}{r} - \frac{\dot{r}^2}{c^2\left(1-\frac{r_g}{r}\right)} - \frac{r^2\dot{\varphi}^2}{c^2}}}$$

Ebből

$$\frac{r^2}{c^2}\dot{\varphi}^2 = \frac{\frac{J^2}{m^2c^2r^2}}{1 + \frac{J^2}{m^2c^2r^2}}\left(1 - \frac{r_g}{r} - \frac{\dot{r}^2}{c^2\left(1 - \frac{r_g}{r}\right)}\right)$$

Ezzel

$$J = \frac{mr^2\dot{\varphi}\sqrt{1 + \frac{J^2}{m^2c^2r^2}}}{\sqrt{1 - \frac{r_g}{r} - \frac{\dot{r}^2}{c^2\left(1-\frac{r_g}{r}\right)}}}$$

Energia:

$$E = \dot{r}\frac{\partial L}{\partial \dot{r}} + \dot{\varphi}\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} - L = \frac{mc^2\left(1 - \frac{r_g}{r}\right)\sqrt{1 + \frac{J^2}{m^2c^2r^2}}}{\sqrt{1 - \frac{r_g}{r} - \frac{\dot{r}^2}{c^2\left(1-\frac{r_g}{r}\right)}}}$$

Időfüggés és pálya:

$$\dot{\varphi} = \frac{Jc^2}{E}\frac{1}{r^2}\left(1 - \frac{r_g}{r}\right) \quad (10.1)$$

$$\dot{r} = c\left(1 - \frac{r_g}{r}\right)\sqrt{1 - \left(\frac{mc^2}{E}\right)^2\left(1 - \frac{r_g}{r}\right)\left(1 + \frac{J^2}{m^2c^2r^2}\right)} \quad (10.2)$$

Ezekből:

$$ct = \frac{E}{mc^2}\int \frac{dr}{\left(1 - \frac{r_g}{r}\right)\sqrt{\left(\frac{E}{mc^2}\right)^2 - \left(1 + \frac{J^2}{m^2c^2r^2}\right)\left(1 - \frac{r_g}{r}\right)}} = \int \frac{dr}{\left(1 - \frac{r_g}{r}\right)\sqrt{1 - \left(\left(\frac{mc^2}{E}\right)^2 + \left(\frac{Jc}{E}\right)^2\frac{1}{r^2}\right)}}$$

$$\varphi = \int \frac{J\,dr}{r^2\sqrt{\left(\frac{E}{c}\right)^2 - \left(m^2c^2 + \frac{J^2}{r^2}\right)\left(1 - \frac{r_g}{r}\right)}} = \int \frac{dr}{r^2\sqrt{\left(\frac{E}{Jc}\right)^2 - \left(\left(\frac{mc}{J}\right)^2 + \frac{1}{r^2}\right)\left(1 - \frac{r_g}{r}\right)}}$$

Fénysugár esetében $m = 0$, $\frac{Jc}{E} = \rho$, ahol ρ az ütközési paraméter (végtelenből jövő fénysugár tömegvonzás hiányában ρ távolságban haladna el az erőtér centruma mellett). Ekkor tehát

$$ct = \int \frac{dr}{\left(1-\frac{r_g}{r}\right)\sqrt{1-\frac{\rho^2}{r^2}\left(1-\frac{r_g}{r}\right)}} \tag{10.5}$$

$$\varphi = \int \frac{dr}{r^2\sqrt{\frac{1}{\rho^2}-\frac{1}{r^2}\left(1-\frac{r_g}{r}\right)}} \tag{10.6}$$

Perihélium-elfordulás (gyenge gravitációs tér esetén):

$$\delta\varphi = 2\int_{r_{min}}^{r_{max}} \frac{J\,dr}{r^2\sqrt{\left(\left(\frac{E}{c}\right)^2-m^2c^2\right)+\frac{2km^2M}{r}-\frac{J^2}{r^2}+\frac{2kMJ^2}{c^2}\frac{1}{r^3}}}-2\pi \tag{10.7}$$

$$= \frac{6\pi k^2m^2M^2}{c^2J^2} = \frac{6\pi kM}{c^2a(1-e^2)} \tag{10.8}$$

a az ellipszis nagytengelye, e az excentricitása.

Gravitációs térben a fénysugár elhajlik. A a fénysugár irányának megváltozása (gyenge gravitációs tér esetén):

$$\delta\varphi = 2\int_{r_{min}}^{\infty} \frac{\rho\,dr}{r^2\sqrt{1-\frac{\rho^2}{r^2}+\frac{2kM\rho^2}{c^2}\frac{1}{r^3}}}-\pi \tag{10.9}$$

$$= \frac{2r_g}{\rho} = \frac{4kM}{c^2\rho} \tag{10.10}$$

Félklasszikus számolás (fénysebességgel mozgó test irányváltozása a newtoni gravitáció következtében):

$$F = \frac{k\ E/c^2\ M}{\rho^2 + x^2} \tag{10.11}$$

$$F_y = \frac{\rho\ k\ E/c^2\ M}{(\rho^2 + x^2)^{\frac{3}{2}}} \tag{10.12}$$

$$\delta\varphi = \frac{\Delta p}{E/c} = \frac{c}{E}\int_{-\infty}^{\infty} F_y \frac{dx}{c} = \frac{c}{E}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\rho\ k\ E/c^2\ M}{(\rho^2 + x^2)^{\frac{3}{2}}}\frac{dx}{c} \tag{10.13}$$

$$= \frac{kM}{c^2\rho}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{(1+\xi^2)^{\frac{3}{2}}} d\xi = \frac{kM}{c^2\rho}\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos\alpha\ d\alpha \tag{10.14}$$

$$\left(\text{itt } \xi = \frac{x}{\rho} = \text{tg } \alpha\right) \tag{10.15}$$

$$= \frac{2kM}{c^2\rho} \tag{10.16}$$

Ez feleannyi, mint amit az általános relativitáselmélet jósol.

7.4. Gravitációs kollapszus.

A Schwarzschild-metrika szingularitása nem jelenti a téridő szingularitását ($g = -r^4 \sin^2\Theta$ pl. nem szinguláris), csak azt, hogy $r \leq; r_g$ esetén az r, Θ, φ merev koordinátarendszer valódi testekkel nem valósítható meg.

Koordinátatranszformáció:

$$c\tau = \pm ct \pm \int \frac{f(r)dr}{1 - \frac{r_g}{r}},\ R = ct + \int \frac{dr}{\left(1 - \frac{r_g}{r}\right) f(r)}$$

Az új koordinátákban az ívelemnégyzet:

$$ds^2 = \frac{1 - \frac{r_g}{r}}{1 - f^2}\left(c^2 d\tau^2 - f^2 dR^2\right) - r^2(d\Theta^2 + \sin^2\Theta d\varphi^2)$$

$f(r) = \sqrt{r_g/r}$ választással a szingularitás eltűnik és szinkronizált koordinátarendszerhez jutunk:

$$R - c\tau = \int \frac{(1 - f^2)dr}{\left(1 - \frac{r_g}{r}\right) f} = \frac{2}{3}\frac{r^{3/2}}{r_g^{1/2}}$$

$$r = \left[\frac{3}{2}(R - c\tau)\right]^{2/3} r_g^{1/3}$$

$$ds^2 = c^2 d\tau^2 - \frac{dR^2}{\left[\frac{3}{2r_g}(R - c\tau)\right]^{2/3}} - \left[\frac{3}{2}(R - c\tau)\right]^{4/3} r_g^{2/3}(d\Theta^2 + \sin^2\Theta d\varphi^2)$$

Schwarzschild-gömb:

$$\frac{3}{2}(R - c\tau) = r_g$$

Radiális mozgás "kívülről nézve":

$$J = 0 \ , \quad E_0 = mc^2\sqrt{1 - \frac{r_g}{r_0}}$$

$$c(t - t_0) = \sqrt{1 - \frac{r_g}{r_0}} \int_r^{r_0} \frac{dr}{\left(1 - \frac{r_g}{r}\right)\sqrt{\frac{r_g}{r} - \frac{r_g}{r_0}}}$$

A Schwarzschild-sugarat az összehúzódó objektum végtelen idő alatt éri el:

$$r - r_g = const. \times \mathrm{e}^{-\frac{ct}{r_g}}$$

Sajátidőben mérve azonban a test véges idő alatt áthalad az eseményhorizonton és szintén véges idő alatt a centrumba esik:

$$\tau - \tau_0 = \frac{1}{c} \int \left(\frac{r_g}{r} - \frac{r_g}{r_0}\right)^{-1/2} dr$$

11. fejezet

Gyenge gravitációs mezők

Kis tömegek esetében a gravitációs mezők mindenütt gyengék lehetnek, pontosabban található olyan koordinátarendszer, melynek pontjaiban a metrika a Minkowski-metrikától csak csekély mértékben tér el. Az ilyen koordinátarendszerek választása nem egyértelmű, mivel az identitáshoz közeli koordinátatranszformáció ugyanilyen tulajdonságú koordinátarendszerbe visz át.

Gyenge gravitációk mezők esetében a metrika tehát felírható

$$g_{ik} = \eta_{ik} + h_{ik} \tag{11.1}$$

alakban, ahol η_{ik} a Minkowski-metrika, h_{ik} komponensei pedig abszolút értékben kicsik az egységhez képest. Ilyen körülmények között a h_{ik}-ban négyzetes és annál magasabb rendű tagok elhanyagolhatók. A metrikus tenzor determinánsa pl. közelítőleg

$$g = -1 - \eta^{ik} h_{ik} \tag{11.2}$$

lesz, a kontravariáns metrikus tenzor pedig

$$g^{ik} = \eta^{ik} - \eta^{ij}\eta^{kn} h_{jn} \ , \tag{11.3}$$

amit közvetlen számítással ellenőrizhetünk. Az indexek fel- és lehúzását a Minkowski-metrikával fogjuk végezni, tehát definíció szerint

$$h^{ik} = \eta^{ij}\eta^{kn} h_{jn} \ . \tag{11.4}$$

A Riemann-tenzor lineáris rendig

$$R_{iklm} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 h_{im}}{\partial x^k \partial x^l} + \frac{\partial^2 h_{kl}}{\partial x^i \partial x^m} - \frac{\partial^2 h_{il}}{\partial x^k \partial x^m} - \frac{\partial^2 h_{km}}{\partial x^i \partial x^l} \right) \ , \tag{11.5}$$

amiből a Minkowski-metrikával végzett indexösszeejtésekkel kapjuk a Ricci-tenzort:

$$R_{km} = \frac{1}{2}\eta^{il}\left(\frac{\partial^2 h_{im}}{\partial x^k \partial x^l} + \frac{\partial^2 h_{kl}}{\partial x^i \partial x^m} - \frac{\partial^2 h_{il}}{\partial x^k \partial x^m} - \frac{\partial^2 h_{km}}{\partial x^i \partial x^l}\right) \tag{11.6}$$

$$= \frac{1}{2}\left(-\eta^{il}\frac{\partial^2 h_{km}}{\partial x^i \partial x^l} + \frac{\partial^2 h^l_m}{\partial x^l \partial x^k} + \frac{\partial^2 h^l_k}{\partial x^l \partial x^m} - \frac{\partial^2 h^l_l}{\partial x^k \partial x^m}\right) . \tag{11.7}$$

Ha $x'^i = x^i + \xi^i(\{x^k\})$ alakú transzformációt végzünk, ahol a ξ^i függvény kicsi, akkor

$$h'_{ik} = h_{ik} - \frac{\partial \xi_i}{\partial x^k} - \frac{\partial \xi_k}{\partial x^i} \tag{11.8}$$

lesz az új koordinátarendszerben a metrika korrekciója, ami továbbra is kicsi. Ezt a szabadságot, tehát a négy ξ^i függvény tetszőleges megválasztásának lehetőségét arra használjuk, hogy alkalmas mellékfeltételeket kiszabva egyszerűsítsük az Einstein-egyenleteket. Legyen

$$\psi_i^k = h_i^k - \frac{1}{2}\delta_i^k h_j^j . \tag{11.9}$$

A mellékfeltételek legyenek

$$\frac{\partial \psi_i^k}{\partial x^k} = 0 . \tag{11.10}$$

Könnyen belátható, hogy a (11.7) egyenlet utolsó három tagja ennek következtében kölcsönösen kiejti egymást. Marad tehát

$$R_{km} = \frac{1}{2}\Box h_{km} \equiv -\frac{1}{2}\eta^{il}\frac{\partial^2 h_{km}}{\partial x^i \partial x^l} \tag{11.11}$$

Itt $\Box$ a d'Alambert-operátor. Az Einstein-egyenletek ennek megfelelően az

$$\frac{1}{2}\Box\psi_i^k = \frac{8\pi G}{c^4}T_i^k \tag{11.12}$$

alakot öltik.

11.1. Sztatikus gravitációs tér

11.2. Stacionárius gravitációs tér

11.3. Gravitációs hullámok

12. fejezet

Az általános relativitáselmélet kísérleti bizonyítékai

Az általános relativitáselmélet kísérleti bizonyítékai I. Az ekvivalencia elvének kísérleti bizonyítékai. Fényelhajlás gravitációs térben. Összehasonlítás a newtoni gravitáció következményével. Gravitációs lencsék. Perihéliumelfordulás. Gravitációs vöröseltolódás.

Az általános relativitáselmélet kísérleti bizonyítékai II. Gravity Probe B kísérlet. Forgó testek gravitációs tere, Kerr-metrika. Lens-Thirring-effektus. Gravitációs hullámok. Gyenge gravitációs hullámok egyenletének származtatása, transzverzalitás, polarizáció. Gravitációs hullámok kisugárzása. Kettős rendszerek gravitációs sugárzása, Hulse-Taylor-pulzár.

12.1. Az ekvivalencia elvének kísérleti bizonyítékai

12.2. Perihélium-elfordulás

12.3. A fénysugár elgörbülése gravitációs térben, gravitációs lencsék

12.4. Gravitációs vöröseltolódás

12.5. Erőmentes pörgettyű precessziója: a Gravity Probe B kísérlet

Amint a 3.3 szakaszban láttuk, stacionárius, de nem sztatikus gravitációs mezőkben nyugvó pörgettyűk tengelyiránya lassan változik, precesszál. A gyenge gravitációs mezők tárgyalásakor megmutattuk, hogy a Föld forgása miatt a Föld gravitációs mezejének is nullától különböző $g_{0\alpha}$ komponensei vannak.

Ennek megfelelően egy a Föld forgásában részt nem vevő erőmentes pörgettyű tengelye precesszál. Valóban, a (3.36) és a (**??**) képletekből azt kapjuk, hogy

12.6. Gravitációs hullámok kisugárzása: a Hulse-Taylor-pulzár

13. fejezet

Relativisztikus kozmológia

Relativisztikus kozmológia I. Homogén és izotrop tér. Friedmann-Robertson-Walker metrika. Skálafaktor. Zárt, nyílt, sík modell. Fény terjedése homogén univerzumban. Tágulás, vöröseltolódás. Divergenciaegyenlet. Anyagtípusok, állapotegyenletek. Korai és késői univerzum, domináns anyagtípusok.

Relativisztikus kozmológia II. Kozmológiai standard modell. Nehézségek: horizont-probléma, finomhangolási probléma, gyorsuló tágulás. Fény terjedése, Hubble-diagram. Kozmológiai állandó és következményei.

Relativisztikus kozmológia III. Skalártér mint a gravitációs tér forrása. Infláció a korai univerzumban. A horizont-probléma és a finomhangolási probléma megoldása. A mikrohullámú háttérsugárzás fluktuációi. WMAP mérés.

Relativisztikus kozmológia IV. A késői univerzum. Szerkezetkialakulás. Galaxisok eloszlása: SDSS mérés. Gyorsuló tágulás: 1A típusú szupernovák. Concordance-modell. Az univerzum termodinamikai története.

Irodalomjegyzék