

Kaotikus dinamika
Magyar nyelvű tananyag

Bene Gyula, Gruiz Márton

2012.11.30

Tartalomjegyzék

Bevezető	2
1. Alapfogalmak	3
1.1. Mi a "káosz"?	3
1.2. A fázistér fogalma és szerkezete	5
1.2.1. A fázistér	5
1.2.2. Fixpontok	7
1.2.3. Instabil és stabil állapotok	7
1.2.4. Fixpontok körüli mozgások	8
1.2.5. Nyugalmi helyzetek stabilitása az erőtvényből	19
1.3. Disszipatív (súrlódásos) rendszerek	20
1.3.1. Határciklus	20
1.3.2. Stroboszkópikus leképezés	22
1.3.3. Attraktor	25
1.4. Konzervatív (súrlódásmentes) rendszerek	25
1.4.1. Poincaré-leképezés	26
1.5. Sokaságok	28
1.5.1. Stabil sokaságok	28
1.5.2. Instabil sokaságok	28
1.5.3. Homoklinikus pontok	28
1.5.4. Heteroklinikus pontok	28
1.6. Az állandósult instabilitás nagyságának mérése	28
1.6.1. Ljapunov-exponens	28
1.6.2. Előrejelzési idő	28
1.6.3. Pillangó effektus	28
1.7. Tranziens káosz	28
1.8. Fraktálok	28
1.8.1. Cantor-halmaz	28
1.8.2. Koch-görbe	29
1.8.3. Fraktáldimenzió	31
1.8.4. Összevetített fraktálok	34

TARTALOMJEGYZÉK	2
1.9. Függelék	38
1.9.1. Instabil fixpont körüli sokaságok alakja	38
1.9.2. Stabil fixpont körüli sokaságok alakja	39
Tárgymutató	42
Irodalomjegyzék	42

Bevezető

1. fejezet

Alapfogalmak

Alábbiakban röviden összefoglaljuk a kaotikus rendszerek leírásához használt legfontosabb alapfogalmakat.

1.1. Mi a "káosz"?

A káosz egyszerű rendszerek bonyolult időbeli viselkedése. E meghatározás szerint a káosz (a hétköznapi szóhasználattal szemben) nem térbeli, nem statikus rendetlenség. A káosz tehát egy mozgási típus, általánosabb értelemben időbeli fejlődés. Számos hétköznapi folyamat (a biliárd vagy a flipperautomata golyójának mozgása, áramkörök begerjedése, festékek keveredése) mellett szerepel műszaki, kémiai, biológiai jelenségekben, betegségek lefolyásában, gazdasági részfolyamatokban, és jóval nagyobb léptékben is: például a Föld mágneses tengelyének váltakozásában vagy a Naprendszer alkotóelemeinek mozgásában.

A hosszú ideig tartó, állandósult mozgások egy része önmagát pontosan, periodikusan ismétli. A hétköznapi életből vett példaként gondolhatunk az ingaóra lengésére vagy a Föld Nap körüli keringésére. A hagyományos szemlélet és oktatás szerint az állandósult mozgások mindig szabályosak, azaz periodikusan ismétlődőek (vagy legfeljebb néhány különböző periodikus mozgás összetevéséből állnak). Az állandósult periodikus mozgás fontos tulajdonságai: 1) ismétli önmagát, 2) későbbi állapota pontosan jósolható, előre jelezhető (az ingaóra éppen ezért használható időmérésre), 3) adott helyzetébe mindig ugyanazzal a sebességgel tér vissza, vagyis a helyzetet és a visszatérési sebességet megadó ábrázolásban egyetlen pont jellemzi a mozgást.

A szabályos mozgások azonban a lehetséges állandósult mozgásoknak csak kis részét alkotják. Mára széleskörűen elfogadottá vált az a felismerés, hogy az egyszerű rendszerek hosszú ideig tartó mozgása is gyakran szabálytalan,

önmagát nem ismétlő.

Az egyszerű, azaz a kevés összetevőből álló rendszerek szabálytalan mozgását kaotikusnak mondjuk. Létezésére az ad lehetőséget, hogy egyszerű *nemlineáris egyenleteknek* is lehet igen bonyolult a megoldása. Nagyon fontos, ezért még egyszer hangsúlyozzuk: a kaotikus mozgás nélkülözhetetlen alapfeltétele, hogy a mozgásegyenlet nemlineáris legyen. Azonban meg kell jegyezzünk azt is, hogy a nemlinearitás szükséges, de nem elégséges feltétele a káosznak. Vannak olyan nemlineáris mozgásegyenletek, melyekhez sohasem társul kaotikus mozgás, viszont vannak olyanok, melyeknél megfelelő paraméterek esetén (pl. gerjesztő amplitúdó és frekvencia, súrlódás stb.) kaotikus mozgás jöhet létre. Sőt! A súrlódásmentes rendszereknél, azonos paraméterek mellett, még a kezdőfeltételektől is függhet a káosz megjelenése. Összességében azonban bizonyosan kijelenthető: az esetek jelentős részénél a mozgásegyenlet alakjából – a korábban általánosan elfogadott nézettel szemben – egyáltalán nem dönthető el, hogy a mozgás szabályos lesz-e vagy sem.

A kaotikus mozgás megértése a hagyományostól eltérő szemléletet és sajátos eszközöket kíván. A hagyományos eszközök az ilyen mozgások leírására alkalmatlanok, a kaotikus mozgásforma általánosságának felismerését a számítógépes kísérletezés tette lehetővé. A részletes vizsgálatok arra az eredményre vezettek, hogy a szabályos mozgás mindhárom említett tulajdonságának ellentéte jellemzi a kaotikus viselkedést: az ugyanis 1) nem ismétli önmagát, 2) nem jelezhető előre, mert érzékeny a kezdőfeltételekre, melyeket sohasem ismerünk teljesen pontosan, 3) a visszatérési szabály bonyolult geometriájú: a hely–sebesség ábrázolásban egy komplex, de szabályos szerkezet jelenik meg. A kétféle mozgás közötti különbséget az 1.1 táblázat foglalja össze.

1.1. táblázat. A szabályos és a kaotikus mozgás összehasonlítása.

SZABÁLYOS MOZGÁS	KAOTIKUS MOZGÁS
ismétlődő	szabálytalan
előrejelezhető	előrejelezhetetlen
egyszerű geometriájú	bonyolult geometriájú

A kaotikus rendszerek említett tulajdonságai külön-külön és együtt is szokatlanok, a megértésük konkrét esetek vizsgálatán keresztül a leghatéko-

nyabb. A káosz esetében kikerülhetetlen a numerikus szimulálás, melyekre egyszerű rendszerekben megfigyelhető kaotikus mozgásokat mutatunk be interaktív formában. E példák egyben a káosz különböző típusainak segítik a felismerését, elősegítik a megismerését.

1.2. A fázistér fogalma és szerkezete

1.2.1. A fázistér

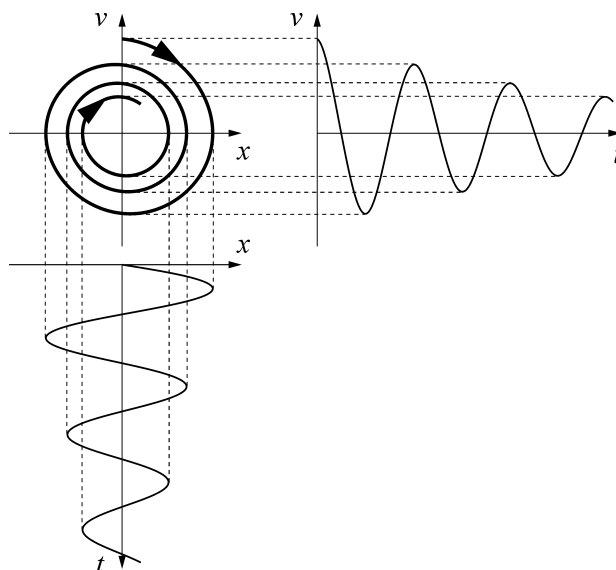
A kaotikus viselkedés hagyományos kitérés-idő vagy sebesség-idő grafikonon való ábrázolása nem alkalmas a mozgás áttekintésére, hiszen akármeddig követjük is a kitérést, a következőkben mindig számíthatunk újabb viselkedésformára. A káoszban megjelenő rend nem a kitérés-idő, hanem a kitérés-sebesség ábrázolásban mutatkozik meg.

Egy mechanikai rendszer pillanatnyi *állapotát* a hely- és sebességkoordináták együttes megadása jelenti, hiszen ezen koordináták és a dinamikai egyenlet ismeretében a mozgás egyértelműen folytatható. A hely- és sebességváltozók definiálják a rendszer *fázistérét*. Egydimenzióban zajló mozgásokra a fázistér tehát az (x, v) sík. A fázistérben egy pont jeleníti meg a rendszer mozgásállapotát, és a pont annak megfelelően vándorol a fázistérben, ahogyan a rendszer mozog. A mozgás fázistérbeli pályáját *trajektóriának* nevezzük (1.1. ábra). A trajektórához rendelt nyíl az idő, így a mozgás irányát jelzi. A trajektóriák összessége viszont áttekintő képet ad a rendszer különböző mozgási lehetőségeiről (lásd 1.2. táblázat).

1.2. táblázat. A mozgások hagyományos és fázistérbeli leírásának összehasonlítása.

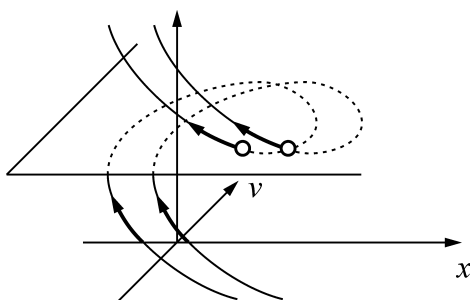
HAGYOMÁNYOS LEÍRÁS	FÁZISTÉRBELI LEÍRÁS
pillanatnyi koordináták	fázistérbeli pont
időfüggés $(x(t), v(t))$	trajektória $(v(x))$
időbeli struktúra	fázistérbeli struktúra
egyedi	áttekintő (globális)

Sokszor a rendszer állapotának egyértelmű meghatározásához nem elegendő egyetlen hely- és sebességkoordináta, azaz a fázistér három- vagy többdimenziós (a kaotikus esetekben mindig ez a helyzet). Ilyenkor érdemes a



1.1. ábra. A fázistérbeli trajektória (vastag vonal). Egy mozgás $x(t)$ és $v(t)$ grafikonjának megfelelő vetületeivel megszerkeszthető a mozgás fázistérbeli pályája. Az idő irányát a trajektórián lévő nyíl mutatja.

magasabb dimenziós fázistérből valamilyen szabály szerint mintát venni. Ez rendszerint úgy történik, hogy a fázistérről egy "metszetet" készítünk, s a trajektóriák pontjait csak a metszeten tartjuk számon. A szemléletes 1.2. ábra ezt szemlélteti. Az említett "metszetkészítés"-nek két fő csoportját a *stro-*



1.2. ábra. Mozgások követése leképezésen. A magasabb dimenziós fázistérben futó trajektóriákról valamely metszeten érdemes mintát venni. A leképezés az a szabály, amely megadja a trajektóriának ezen metszeten (vagy egymással egyenértékű metszetek sorozatán) vett egymás utáni metszéspontja közötti kapcsolatot.

boszópikus leképezések és a *poincaré-metszetek* alkotják (lásd még a 1.3.2. és a 1.4.1. fejezeteket).

1.2.2. Fixpontok

Fixpontnak nevezzük azt a fázistérbeli pontot, melyre a kezdőfeltételt végtelen pontosan elhelyezve a rendszer nyugalomban marad, azaz idővel sem a helyzete, sem a sebessége nem változik. A fixpontok fázistérbeli elhelyezkedésének, számának és fajtáinak ismerete a szabályos és a kaotikus rendszerek tulajdonságainak megértéséhez egyaránt nélkülözhetetlen. A fixpontoknak két alapvető csoportját a fixpont *stabilitása* alapján különböztetjük meg. Mindkét csoporton belül fontos továbbá különbséget tenni a *súrlódásos* és a *súrlódásmentes* esetek között is.

1.2.3. Instabil és stabil állapotok

Egy test nyugalmi állapotát valamely x^* helyzetben akkor nevezzük instabillnak (vagy más szóval labilisnak), ha a testet egy kissé kimozdított helyzetben elengedve, az az x^* -től egyre távolodó mozgásba kezd. Egyszerű példa erre egy domború edény tetejére helyezett golyó vagy egy hegyére állított ceruza esete (1.3. ábra). Az instabil állapot környékén az erő mindig taszító jellegű,



1.3. ábra. Az instabil állapot a domború felület tetejére helyezett golyó és a hegyére állított ceruza példájában. Csak egy pontban lehetséges nyugalmi állapot, amitől bármilyen kis kimozdítás után a test gyorsulva távolodni kezd.

a kitéréssel nő.

Egy test nyugalmi helyzetét az x^* pontban akkor nevezzük stabilnak, ha a testet egy kissé kimozdított helyzetben elengedve az x^* egyensúlyi helyzet felé visszahúzó erő hat rá, s így a test csak ideiglenesen távolodik el az x^* ponttól. Egyszerű példa erre egy homorú edény aljára helyezett golyó, vagy az inga lengése függőleges ($\varphi = 0$) állapota körül (1.4. ábra). A stabil állapot környékén az erő visszahúzó, a kitéréssel ellentétben nő.



1.4. ábra. A stabil állapot a homorú felület aljára helyezett golyó és az inga példájában. Itt is egyetlen pontban lehetséges csak nyugalmi állapot, de ha a rendszert kimozdítjuk onnan, akkor az a nyugalmi pont felé indul.

1.2.4. Fixpontok körüli mozgások

Az instabil és a stabil nyugalmi állapotok vizsgálatánál a legfontosabb dolog a környékükre jellemző mozgások vizsgálata. Ugyanis ezen mozgások mikéntjében nyilvánul meg a fixpont fázistérbeli szerepének a lényege. Az említett tulajdonságok *lineáris* megközelítésben megmutatkoznak meg legegyszerűbben és legérthetőbben.¹

A legegyszerűbb mozgások egyetlen helykoordináta időbeli változásával kapcsolatosak, méghozzá olyan rendszerekben, melyekben nem hat a testre külső (időfüggő) gerjesztőerő. A szabályos mozgások legfontosabb tulajdonságait, így a fixpontok fajtáit és jellemzőit, már az egyenes menti mozgások példáján keresztül is áttekinthetjük. Fontos megjegyezni, hogy a kaotikus rendszerekben fellelhető összes fixponttípus megtalálható az egyszerű, nemkaotikus rendszerekben is, így ezen egyszerű rendszerek tanulmányozása során olyan általános tulajdonságok megfogalmazására is lehetőségünk nyílik, melyek a kaotikus rendszerekre is érvényesek. (Mint később látni fogjuk: a kaotikus és nemkaotikus mozgások közötti különbségre nem a fixpontok fajtáinak eltérése, hanem azok eltérő száma és elhelyezkedése jellemző.)

A mozgást a fázistérben követjük nyomon, melyben – az egyszerű és kaotikus rendszerekben egyaránt – az instabil állapotból kiinduló görbék, az ún. *stabil és instabil sokaságok* játsszák a legfontosabb szerepet. Ezek ugyanis a lehetséges mozgásoknak mintegy a "vázát" alkotják. Ez igaz a súrlódásmentes és súrlódásos jelenségekre egyaránt, azzal a különbséggel, hogy az utóbbinál a hosszú idejű mozgások a fázistér attraktoraira húzódnak rá.

¹A nyugalmi állapot kis környezetén kívül általában *nemlineáris* viselkedést tapasztalunk.

Instabil fixpont (súrlódásmentes eset)

Az egyszerűség kedvéért egyetlen pontot vizsgálunk és a koordináta-rendszer kezdőpontját éppen ebbe a pontba helyezzük, vagyis az $x^* = 0$ választással élünk (a mozgás egydimenziós). Az instabil állapot környékén az erő mindig taszító jellegű és a kitéréssel nő. Egyszerű modellünkben az erőtvény² lineáris, azaz

$$F(x) = s_0^2 x, \quad (1.1)$$

ahol s_0 az instabilitás erősségére jellemző *taszítási paraméter*.³

Mivel a súrlódásmentes esetben az egységnyi tömegre csak az instabil állapottól eltávolító $F(x)$ erő hat, a mozgásegyenlet (Newton-egyenlet): $\ddot{x} = F(x)$. A (1.1) erőtvénnyel az

$$\ddot{x} = s_0^2 x \quad (1.2)$$

egyenletet kapjuk.

A 1.2 egyenletet megoldva belátható (lásd a 1.9.1 fejezetet), hogy a mozgás során bármely x , v értékre fenn kell állnia a

$$v^2 - s_0^2 x^2 = \text{állandó} = v_0^2 - s_0^2 x_0^2. \quad (1.3)$$

összefüggésnek. A fázistérbeli trajektóriák tehát a fixpont körüli hiperbolák (1.5. ábra). A fixpontot ezért *hiperbolikusnak* nevezzük.⁴ A hiperbolák aszimptotái az origón átmenő $v = \pm s_0 x$ egyenletű egyenesek. A hiperbolasereg jellegét tehát a dinamika egyetlen s_0 paramétere egyértelműen meghatározza. Gyenge taszítás (kis s_0) esetén az aszimptoták kis szöget zárnak be az x tengellyel.

Szinte bármilyen kezdőfeltétel esetén a mozgás egy hiperbolához tartozik, melyen a fázistérbeli pont esetleges kezdeti közeledés után elkanyarodik az origótól, és végül a részecske egyre gyorsabban távolodik. Vegyük észre, hogy az általános eltávolodás ellenére léteznek olyan speciális kezdőfeltételek, *melyekből a fixpontba jutunk*. Ha ugyanis pozitív kezdeti helykoordináta mellett olyan negatív kezdősebességet adunk, mely a

$$v = -s_0 x \quad (1.4)$$

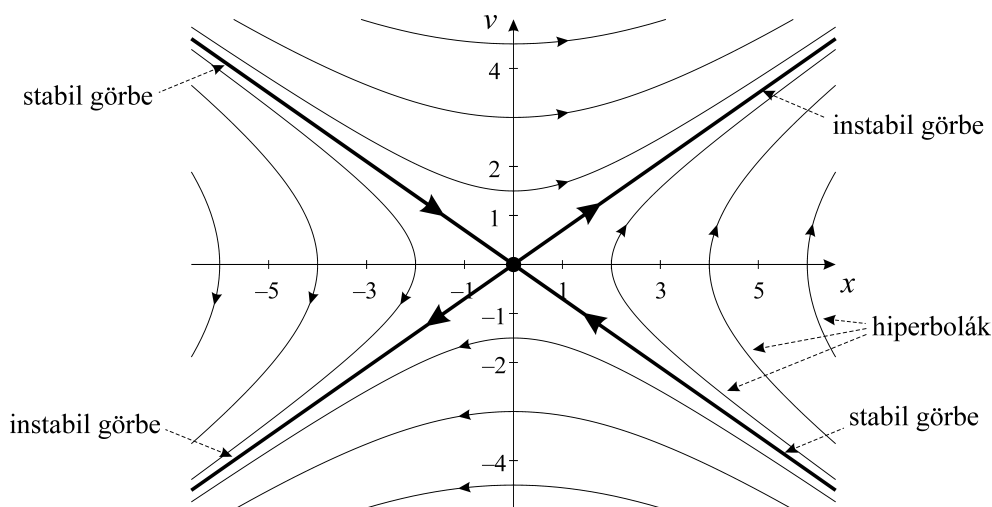
egyenesre esik, vagyis, ha a jól meghatározott sebességgel lökjük az instabil állapot felé a testet, akkor az a (1.39) és (1.41) egyenletek értelmében az

$$x(t) = x_0 e^{-s_0 t} \quad (1.5)$$

²Erőn a továbbiakban az egységnyi tömegre ható erőt értjük, ezért ha egyetlen testről van szó, akkor nem lesz szükségünk annak m tömegére.

³Az együttthatót azért írjuk s_0^2 alakban, hogy egyértelmű legyen a pozitivitása.

⁴Használatos a nyeregpont elnevezés is.



1.5. ábra. A hiperbolikus fixpont és környezete (súrlódásmentes eset): néhány hiperbola-trajektória (vékony vonalak) és az aszimptoták (vastag vonalak). A mozgás a vonalakon a nyilakkal jelölt irányban történik. A hiperbolikus pontba bejutni csak az egyik aszimptota, a stabil görbe mentén lehetséges. A taszítási paraméter: $s_0 = 0,7$.

törvény szerint éppen eljut az origóba (a ceruza éppen a hegyén áll meg). A fixpontba jutás elvileg végtelen hosszú ideig tart. Ugyanez érvényes a $v = -s_0x$ aszimptota negatív koordinátaértékekhez tartozó szakaszára, amelyhez pozitív kezdősebességek tartoznak, s amely mentén a mozgás ellentétes irányú.

A másik,

$$v = s_0x \quad (1.6)$$

egyenletű aszimptota mentén az eltávolodás az

$$x(t) = x_0 e^{s_0 t} \quad (1.7)$$

törvény szerint történik, azaz kezdetől fogva tisztán exponenciális ütemű (lásd (1.39), (1.41)). Minél közelebbi a kezdőpont a fixponthoz, minél kisebb x_0 , annál tovább marad a test a hiperbolikus fixpont környékén; minél közelebb van a ceruza kezdeti állapota a függőlegeshez, annál tovább tart, amíg feldől.

A $v = -s_0x$ egyenletű aszimptota a fentiek szerint azt a speciális mozgást írja le, mely a fixpontba történő eljutásnak felel meg. Ez utóbbi irányt ezért a hiperbolikus fixpont stabil irányának nevezzük, szemben a másik aszimptota által definiált instabil irányal. Az ezekben az irányokban elhelyezkedő

egyenes szakaszok a fixpontból kiinduló *stabil és instabil görbék* részei. A 1.5. ábrán is látható, hogy a fázissíkot a stabil és instabil görbék négy síknegyedre osztják. Vegyük észre, hogy a stabil görbe egyben a *választóvonal* szerepét játssza. A "felette" induló trajektóriák ugyanis a jobbra történő eltávolodásra, a ceruza jobbra dőlésére vezetnek, az "alatta" levők pedig az ellenkező irányú mozgásra.

Az instabilitás a fázistérben mindig hiperbolikus pontok megjelenésével kapcsolatos. Az a naiv (és téves) várákozás, hogy az instabil pont körül a fázistér minden irányában távolodás történjék, arra vezethető vissza, hogy a hétköznapi szóhasználatban akkor mondunk egy nyugalmi állapotot instabillnak, ha egy onnét *kezdősebesség nélkül* kibillentett test távolodik. A stabil irány jelenléte azt mutatja, hogy kezdősebességet is megengedve, nem ennyire egyszerű a helyzet. Az instabil állapot és környezete leginkább áttekinthető képe a fázistérbeli leírásban tárul elénk.

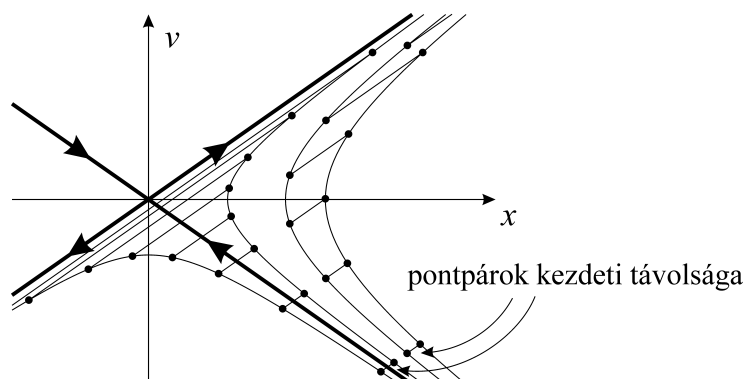
Általános kezdőfeltételek esetén, elegendően hosszú idő eltelte után ($t \gg 1/s_0$) a (1.39) kifejezésben az exponenciálisan növekvő első tag dominál. A részecskék tehát exponenciális ütemben hagyják el az instabil állapotot. Könnyen belátható: ebből az is következik, hogy *közeli kezdőpontokból induló részecskék egymástól is exponenciális időfüggéssel távolodnak*. Hasonlóan viselkedik a sebességkülönbség is, hiszen $\delta v(t) \approx s_0 \delta x(t)$.

A fázistérbeli távolság is exponenciálisan növekszik, s az eltávolodás mindig az instabil görbe mentén történik (1.6. ábra). A hiperbolikus fixpontok körül tehát a rendszer mindig *érzékeny a kezdőfeltételre*, mert a közeli pályák igen gyorsan távolodnak. Ez alól kizárólag a stabil görbe mentén elhelyezkedő pontok kivételek, amelyek az origó felé, s emiatt egymás felé is közelednek.

Instabil fixpont (súrlódásos eset)

Makroszkopikus testek mozgásának meghatározásában rendszerint *disszipatív*, azaz energiaemésztő folyamatok is szerepet játszanak. Erre legegyszerűbb példa a *súrlódási erő*, azon belül a közeg-ellenállási erő. A súrlódási erő tipikusan a sebesség valamilyen függvénye, de nem függ a helytől. Az egyszerűség kedvéért a továbbiakban feltesszük, hogy a súrlódási erő *egyenesen* arányos a sebességgel, mely a kis sebességű testekre ható közeg-ellenállási erőre jó közelítés.⁵ A helyfüggő $F(x)$ külső erőn kívül fellép tehát a $-\alpha v$ súrlódási erő is. Itt $\alpha > 0$ a konstansnak tekintett súrlódási együttható. A negatív előjel azt fejezi ki, hogy a súrlódás fékezi a mozgást. Vegyük észre,

⁵A sebességtől független "tapadási súrlódás" a kiterjedt rugalmas testek nyugalmi helyzetből történő kimozdulásának leírására bevezetett egyszerűsítő fogalom. Pontszerű testek mozgásának leírásakor használatára nincs szükség.



1.6. ábra. Pontpárok távolodása egymástól és az instabil fixponttól. A gyors eltávolodás mindig az instabil görbe mentén történik, még akkor is, ha a kezdőpontok a stabil görbe különböző oldalára esnek. A tasztítási paraméter $s_0 = 0,7$, a pontpárok távolságát $\Delta t = 0,5$ pillanatonként ábrázoltuk.

hogy az ilyen típusú, sebességgel arányos súrlódás a nyugalmi állapot helyét nem befolyásolja, hiszen abban a pontban nincs mozgás, s ezért ott nem hat súrlódási erő sem.

A mozgásegyenlet véges súrlódási együttható mellett

$$\ddot{x} = +s_0^2 x - \alpha \dot{x} \quad (1.8)$$

alakú. E homogén, lineáris differenciálegyenlet megoldása alapján látható (lásd 1.9.1 fejezetet), hogy a trajektóriák itt is hiperbolákhoz hasonló görbék, két aszimptotával.

A trajektóriák döntő többsége elhagyja az origó bármely környezetét, de ismét létezik egy speciális vonal, a $v = \lambda_- x$ egyenes, mely mentén az instabil pontba jutunk (1.7. ábra).

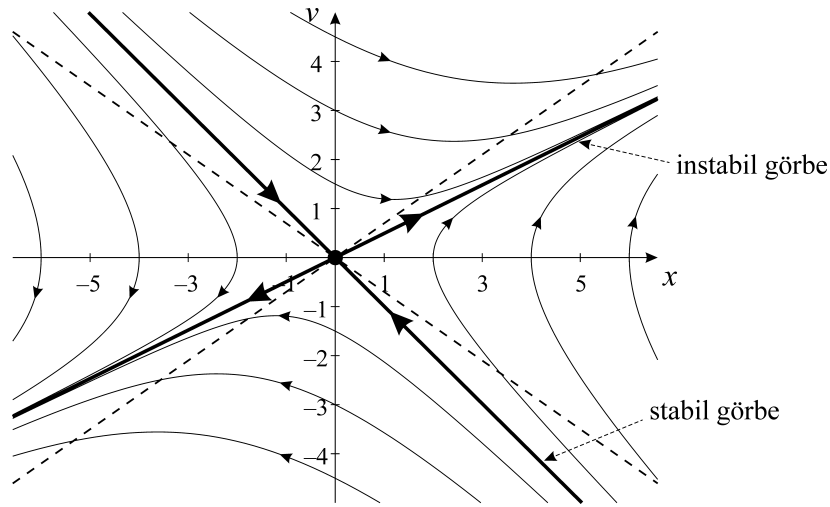
A fázissíkon az origót ezért továbbra is hiperbolikus fixpontnak nevezzük. Most is létezik a stabil és instabil irány, melyeket a

$$v = \lambda_- x, \quad x(t) = x_0 e^{\lambda_- t}, \quad (1.9)$$

illetve a

$$v = \lambda_+ x, \quad x(t) = x_0 e^{\lambda_+ t} \quad (1.10)$$

aszimptoták és kitérés-ido függvények definiálnak. Ezek a (1.5) és (1.7) összefüggések általánosításai. Az instabil irány menti eltávolodást jellemző λ_+ paramétert *instabilitási exponensnek* nevezzük. Felhívjuk a figyelmet arra, hogy λ_+ már nem azonos az erőtvényben fellépő s_0 tasztítási paraméterrel, hanem a teljes (1.8) dinamikát tükrözi, s függ a súrlódási együtthatótól



1.7. ábra. Hiperbolikus fixpont sűrűlódás jelenlétében. A fixpont körüli szerkezet jellege nem változik, csak az aszimptoták fordulnak el. (A sűrűlódásmentes eset aszimptotáit szaggatott vonal mutatja.) A paraméterek: $s_0 = 0,7$, $\alpha = 0,5$.

is. A sűrűlódás következtében az eltávolodás lassabb, mint sűrűlódás nélkül, ezért az instabil irány egyenese kisebb szöget zár be az x tengellyel, mint a sűrűlódásmentes esetben.

Lényeges tapasztalat, hogy a sűrűlódás *nem* szüntette meg a fixpont hiperbolikus jellegét. Ezt a tulajdonságot úgy szokás kifejezni, hogy a hiperbolikus viselkedés *strukturálisan stabil* a paraméterek kis változtatására, jelen esetben a sűrűlódás megjelenésére.

Továbbra is érvényes a közeli pályák exponenciális eltávolodási szabálya:

$$\delta x(t), \delta v(t) \sim e^{\lambda_+ t}, \quad (1.11)$$

ha $t \gg 1/|\lambda_-|$. Nem szabad azonban elfelejteni azt sem, hogy a stabil irány mentén fekvő kivételes trajektóriapárok viszont exponenciális gyorsasággal közelednek egymáshoz és a hiperbolikus ponthoz is az $e^{\lambda_- t}$ ($\lambda_- < 0$) időfüggés szerint.

Stabil fixpont (sűrűlódásmentes eset)

Egyszerű modellünkben az erőtörvény legyen

$$F(x) = -\omega_0^2 x \quad (1.12)$$

alakú, ahol az ω_0 paraméter a vonzás erősségére jellemző. A (1.12) erőtörvény a rugók lineáris visszatérítő hatását írja le, s az ω_0 paraméter négyzete az egységnyi tömegre eső rugóállandó.⁶ Az ω_0 paramétert sajátfrekvenciának nevezzük, mert a súrlódásmentes esetben a rezgés periódusidejét határozza meg.

A súrlódásmentes eset mozgásegyenlete $\ddot{x} = F(x)$, azaz

$$\ddot{x} = -\omega_0^2 x. \quad (1.13)$$

Ez nem más, mint az ω_0 körfrekvenciájú harmonikus rezgés egyenlete.

Az egyenlet $x(0) = x_0$, $v(0) = v_0$ kezdőfeltételhez tartozó megoldása

$$x(t) = x_0 \cos(\omega_0 t) + \frac{v_0}{\omega_0} \sin(\omega_0 t), \quad (1.14)$$

ami behelyettesítéssel ellenőrizhető. Ez az

$$x(t) = A \sin(\omega_0 t + \delta) \quad (1.15)$$

alakba is írható, ahol az A amplitúdót és a δ fázist az $A^2 = x_0^2 + v_0^2/\omega_0^2$ és a $\tan \delta = v_0/(x_0 \omega_0)$ egyenletek határozzák meg.⁷

Az (x, v) fázissíkon a trajektóriák az origó körüli ellipszisek (1.8. ábra), ugyanis a (1.15) megoldást és az abból képzett sebesség négyzetét véve következik, hogy

$$v^2 + \omega_0^2 x^2 = v_0^2 + \omega_0^2 x_0^2 = \omega_0^2 A^2 = \text{állandó} \quad (1.16)$$

minden t pillanatban. Az ilyen fixpontot ezért *elliptikus* fixpontnak nevezzük.

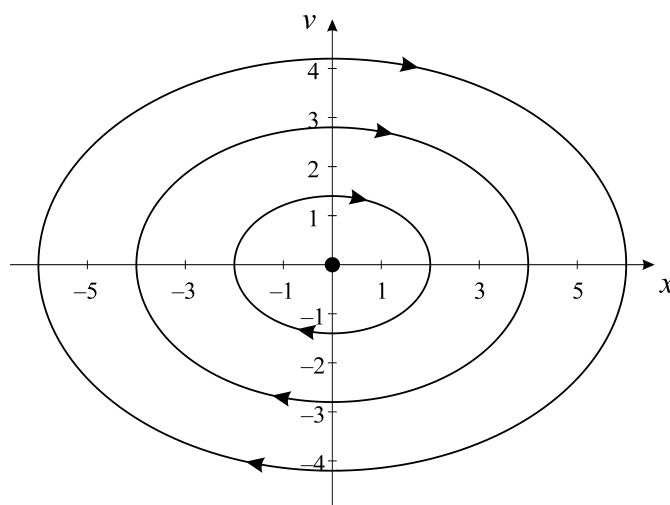
Különböző kezdőfeltételek csak akkor kerülnek különböző ellipszisekre, ha a mozgások amplitúdója különböző. A hiperbolikus fixponttal szemben a trajektóriák az elliptikus fixpont környezetét nem hagyják el, sőt a szomszédos trajektóriák közötti távolság sem nő állandóan, hiszen

$$\delta x(t) = \delta x_0 \cos(\omega_0 t) + \frac{\delta v_0}{\omega_0} \sin(\omega_0 t). \quad (1.17)$$

A különbség tehát hol nő, hol csökken, de mindig korlátos nagyságú marad. Az exponenciális távolodás *csak* a hiperbolikus pont jellemzője.

⁶Az együtthatót azért írjuk $-\omega_0^2$ formában, hogy egyértelmű legyen negatív előjele.

⁷Ez a megoldás is írható a (1.43), (1.44) alakba, csak most $\lambda_{\pm} = \pm i\omega_0$, amiből (1.14) az imaginárius argumentumú exponenciális és a trigonometrikus függvények közötti kapcsolatok felhasználásával adódik.



1.8. ábra. Az elliptikus fixpont és környéke. A mozgás irányát most is nyíl jelöli. A körüljárás mindig az óramutató járásával megegyező (mert pozitív sebességek pozitív elmozdulást eredményeznek). A sajátfrekvencia: $\omega_0 = 0,7$.

Stabil fixpont (súrlódásos eset)

Súrlódási erő jelenlétében a mozgásegyenlet így módosul:

$$\ddot{x} = -\omega_0^2 x - \alpha \dot{x}. \quad (1.18)$$

A megoldást $\exp(\lambda t)$ alakban keresve a $\lambda^2 + \alpha\lambda + \omega_0^2 = 0$ másodfokú egyenletre jutunk, amiből két lehetséges λ értéket kapunk:

$$\lambda_{\pm} = -\frac{\alpha}{2} \pm \sqrt{\frac{\alpha^2}{4} - \omega_0^2}. \quad (1.19)$$

Az általános megoldás most is

$$x(t) = c_+ e^{\lambda_+ t} + c_- e^{\lambda_- t}, \quad (1.20)$$

$$c_+ = \frac{-\lambda_- x_0 + v_0}{\lambda_+ - \lambda_-}, \quad c_- = \frac{\lambda_+ x_0 - v_0}{\lambda_+ - \lambda_-} \quad (1.21)$$

alakú. Mivel azonban a λ_{\pm} kitevők valós része mindig negatív, a megoldás a fixponthoz tartást írja le. A disszipatív rendszerek általános tulajdonsága az, amit itt konkrét példán látunk, hogy az ilyen rendszerek *elfelejtik* kezdőfeltételeiket. Ez azt jelenti, hogy a fázistérnek van olyan *részhalmlaza*,

melyet minden trajektória elér. Ezt a vonzó részalmazt attraktornak nevezük. Esetünkben minden trajektória az origóhoz tart, az attraktor eszerint egyszerű halmaz, egyetlen pont.

Az elliptikus fixpont tehát a leggyengébb súrlódás hatására is elveszti alapvető tulajdonságát, *strukturálisan instabil*. Azt az érdekes megfigyelést tettük tehát, hogy míg a stabil dinamikát jellemző viselkedés a súrlódás bekapcsolásakor alapvetően megváltoztatja jellegét, addig az instabil dinamikát jellemző viselkedés csak enyhén "deformálódik".

Az, hogy az origó elérése pontosan hogyan történik, a pontattraktor milyen típusú, függ a súrlódás erősségétől *Gyenge csillapítás, spirális attraktor*

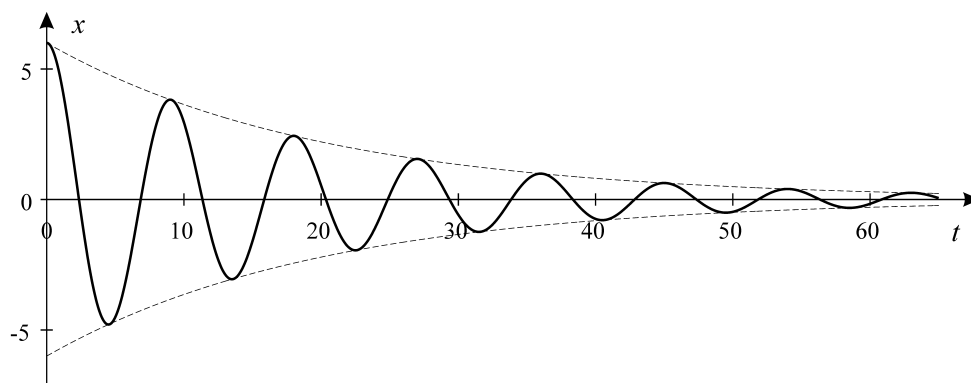
Ha az $\alpha/2$ súrlódási együttható a vonzás erősségét jellemző sajátfrekvenciájánál kisebb,

$$\frac{\alpha}{2} < \omega_0, \quad (1.22)$$

akkor a megoldás az

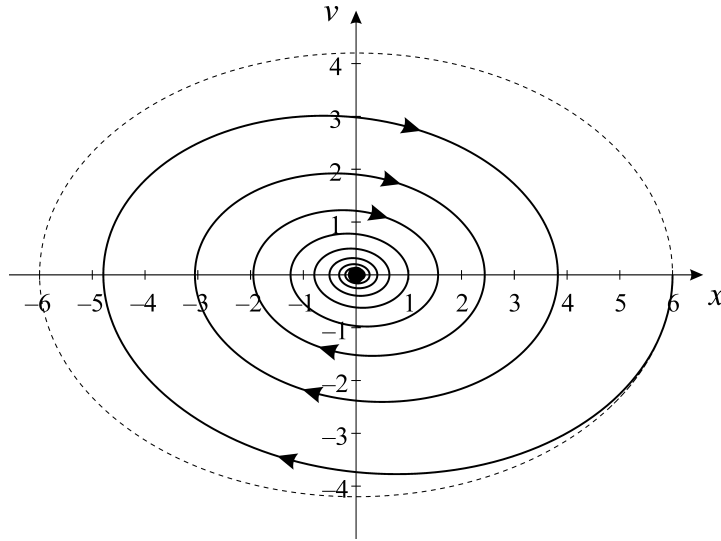
$$x(t) = Ae^{-(\alpha/2)t} \sin(\omega_\alpha t + \delta) \quad (1.23)$$

egyenlet lesz (lásd a 1.9.2 fejezetet). Innét jól látszik, hogy a mozgás exponenciálisan lecsengő amplitúdójú harmonikus rezgés (1.9. ábra). Az ω_α frekvencia *csökken* a súrlódás erősödésével, a rezgések tehát lassulnak α növelésekor.



1.9. ábra. A stabil állapot környékén gyenge csillapítás mellett kialakuló exponenciálisan lecsengő amplitúdójú harmonikus rezgés. A szaggatott vonalak egyenlete: $\pm Ae^{-(\alpha/2)t}$. A paraméterek: $\omega_0 = 0,7$, $\alpha = 0,1$, a kezdőfeltétel: $x_0 = 6$, $v_0 = 0$.

A fázistérbeli trajektóriák *spirál* mentén közelítik meg az origót, a kitérés és a sebesség előjelváltásainak megfelelően (1.10. ábra). Az origó ezért vonzó



1.10. ábra. A spirális attraktor és környéke. A szaggatott vonal a súrlódás nélküli trajektória ellipszisét mutatja. A paraméterek és kezdőfeltételek ugyanazok, mint a 1.9. ábrán.

spirális fixpontnak vagy *spirális attraktornak* nevezzük. A (1.23) megoldásból látszik, hogy a trajektória *exponenciális* ütemben tart az attraktorhoz. Matematikai értelemben csak végtelen hosszú idő után éri el azt, de az exponenciális függvény gyors lecsengése miatt az $1/\alpha$ időállandó néhányszorosa után már gyakorlatilag megállt a test.

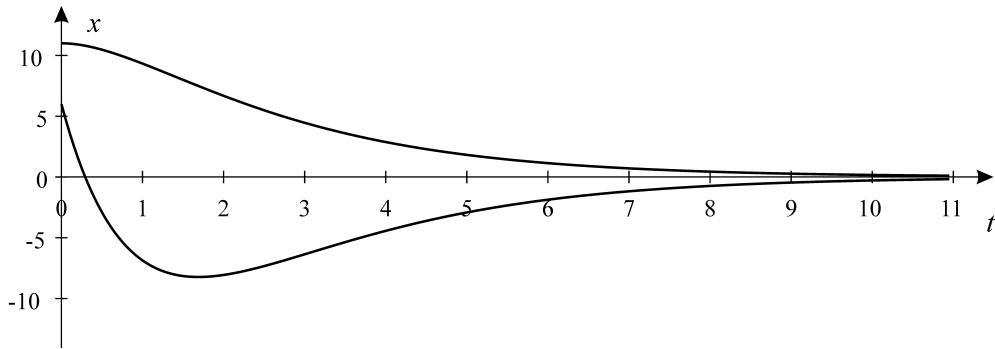
Erős csillapítás, csomópontattraktor

A csillapított rezgés $2\pi/\omega_\alpha$ periódusideje végtelenhez tart, ha $\alpha/2 \rightarrow \omega_0$, ami azt jelzi, hogy a mozgás más jellegű, amint a gyenge csillapítás tartományából kilépünk (ismét egy strukturális instabilitás). A túlcillapított esetben, amikor az $\alpha/2$ súrlódási együttható az ω_0 sajátfrekvenciájánál nagyobb,

$$\frac{\alpha}{2} > \omega_0, \quad (1.24)$$

a λ_\pm kitevők valósak, amihez *oszcillációmentes* lecsengés tartozik (1.11. ábra). Az x_0, v_0 kezdőfeltételt kielégítő megoldás (1.20), (1.21) alakú, de most mindkét kitevő negatív, s a lecsengést nem kísérik oszcillációk. Az erős csillapítás szemléletesen azt jelenti, hogy a test olyan sűrű közegben mozog, hogy már csillapított rezgések sem tudnak kialakulni, hanem a lehető leggyorsabban megáll.

A fázissíkon két speciális vonal található, a $v = \lambda_\pm x$ egyenesek, melyek

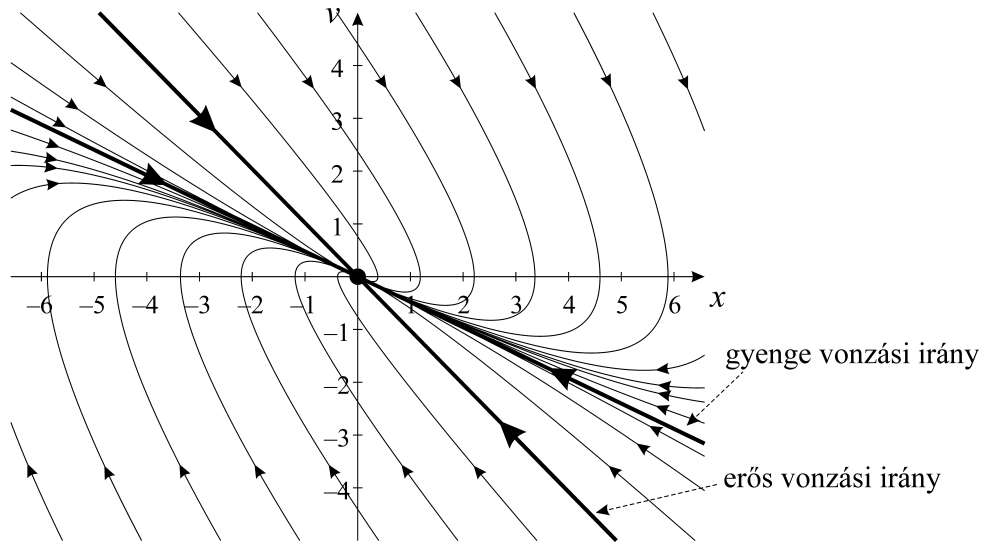


1.11. ábra. A stabil állapot környékén erős csillapítás mellett kialakuló oszcillációmentes lecsengés. Az egyik esetben ($x_0 = 11$, $v_0 = 0$) úgy áll meg a test, hogy kitérése nem vált előjelet, míg a másikban ($x_0 = 6$, $v_0 = -25$) átkerül a túloldalra. A paraméterek: $\omega_0 = 0,7$, $\alpha = 1,5$.

mentén a lecsengést egyetlen exponenciális függvény írja le (s nem két különböző exponenciális függvény lineárkombinációja). Mivel abszolút értékben λ_- nagyobb, mint λ_+ , (1.20)-ban a második tag gyorsabban cseng le, s hosszú idő után az első tag dominál. A trajektóriák a $v = \lambda_+ x$ egyeneshez tartanak, mely mentén időfüggésüket a λ_+ együttható szerinti exponenciális lecsengés jellemzi. Az ilyen típusú vonzó fixpontot *csomópontattraktornak* nevezzük (1.12. ábra). A $v = \lambda_- x$ egyenes mentén elhelyezkedő pontok kivételesek abban az értelemben, hogy ezek kezdettől fogva az erősebb, λ_- szerinti exponenciális viselkedés szerint tartanak az origóhoz. Ez az egyenes az erős vonzási irányt adja, a $v = \lambda_+ x$ görbe pedig a gyenge vonzási irányt.

Megjegyezzük, hogy a stabil állapot körüli mozgásra vonatkozó minden eredmény megkapható az instabil esetre érvényes összefüggésekből az $s_0 \rightarrow i\omega_0$ helyettesítéssel, ahol ω_0 valós. Az erős és a gyenge vonzási irány ezért a stabil és az instabil irányokból kapható a fenti transzformációval. Képletesen azt is mondhatjuk, hogy a csomópontattraktor körüli viselkedés úgy adódik a hiperbolikus pont körül, hogy az instabil irány az erőtvörvény megváltozása miatt a fázissík első és harmadik szögnyegyéből a második, negyedikbe fordul. Eközben természetesen jellege is megváltozik, s taszító irányból (gyenge) vonzási irányvá válik.

A csomópontattraktor elérése is exponenciális ütemben történik. Ezért a szomszédos pontok távolsága is exponenciálisan *csökken*: $\delta x(t), \delta v(t) \sim \exp(\lambda_+ t)$, az attraktorhoz tartás közben. Párunkénti exponenciális közeledés tapasztalható a spirális fixpont körül is. A pontattraktorok környékén a mozgás *nem* érzékeny a kezdőfeltételekre.



1.12. ábra. A csomópontattraktor és környéke: néhány általános trajektória (vékony vonalak) és a $v = \lambda_{\pm}x$ aszimptoták (vastag vonalak). A paraméterek: $\omega_0 = 0,7$, $\alpha = 1,5$.

1.2.5. Nyugalmi helyzetek stabilitása az erőtvényből

A mozgást létrehozó $F(x)$ erő sohasem egzaktul lineáris függvénye a helynek, a mozgásegyenlet sohasem egzaktul lineáris. Mielőtt egy általános $F(x)$ erőtvényhez tartozó esetben a mozgást egy kiterjedt tartományban vizsgálnánk, érdemes feltérképezni, hogy hol lehetnek egyáltalán egyensúlyi helyzetek. Ezek csak olyan x^* fixpontok lehetnek, melyekben az erő eltűnik, vagyis, ahol

$$F(x^*) = 0. \quad (1.25)$$

Ezek egyben a (1.46) összefüggéssel definiált potenciál szélsőérték helyei, ahol $V'(x^*) = 0$.

A fixpont megtalálása még semmit sem mond arról, hogy az a bizonyos egyensúlyi helyzet milyen típusú. Elvileg ugyan az x^* pontba helyezett test mindig ott is marad, a gyakorlatban azonban számos csekély külső hatás is éri. Ezek következtében a pont kissé kitér nyugalmi helyzetéből. Az ilyen kis külső zavarok következményeit az alapján deríthetjük fel, hogy az x^* -tól kissé eltérő helyzetekből induló mozgásokat követünk. A kérdés az, hogy a részecske tovább távolodik-e a fixponttól, vagyis, hogy rá az x^* egyensúlyi helyzet felé visszahúzó, vagy ellenkezőleg, attól eltávolító erő hat. Amennyiben az utóbbi eset áll fenn, akkor az egyensúlyi helyzet instabil, és a valóságos mozgásokban a rendszer nem maradhat tartósan ebben az állapotban.

Az, hogy a fixpont instabil-e vagy sem, attól függ, hogy az erőtörvény hogyan néz ki a *fixpont kis környezetében*. Tetszőleges x^* fixpont körül minden simán változó erőtörvény az

$$F(x) \approx F'(x^*)(x - x^*) \equiv -V''(x^*)(x - x^*) \quad (1.26)$$

alakkal közelíthető. Ez azt fejezi ki, hogy a nyugalmi helyzetből kissé kimozdulva az erő lineárisan változik. Itt figyelembe vettük a (1.25) összefüggést is, miszerint az erő a fixpontban eltűnik. A (1.26) kifejezés tulajdonképpen az erőtörvény alakjának Taylor-sorfejtése első rendig. Mivel $x - x^*$ kicsi, a sorfejtés magasabb hatványait nem írtuk ki. Ebből az összefüggésből leolvasható a fixpont stabilitása: vonzóerő, negatív $F'(x^*)$ esetén, vagyis a potenciál *minimumában stabil* a nyugalmi állapot, míg taszítóerő pozitív $F'(x^*)$ esetén, vagyis a potenciál *maximumában instabil*. A potenciál használata tehát azért hasznos, mert ismeretében rögtön a fixpont stabilitásáról is információhoz jutunk, összhangban a korábban említett, domborzaton történő mozgásról kialakított képünkkel. A fixpont kvalitatív tulajdonságát az $F'(x^*)$ előjele meghatározza, a stabilitás vagy instabilitás mértékéhez azonban szükség van a deriváltak számértékére. Egy állapot annál stabilabb, minél gyorsabban nő ott a visszatérítőerő, vagyis minél élesebb minimuma van a potenciálnak. Az előző szakaszokban használt s_0 , illetve ω_0 paraméterek tehát a fixpont közelében mindig meghatározhatók nemlineáris erőtörvény esetén is, és értéküket az erőtörvény deriváltjának számértéke adja:

$$F'(x^*) = -V''(x^*) = s_0^2 \quad \text{vagy} \quad -\omega_0^2. \quad (1.27)$$

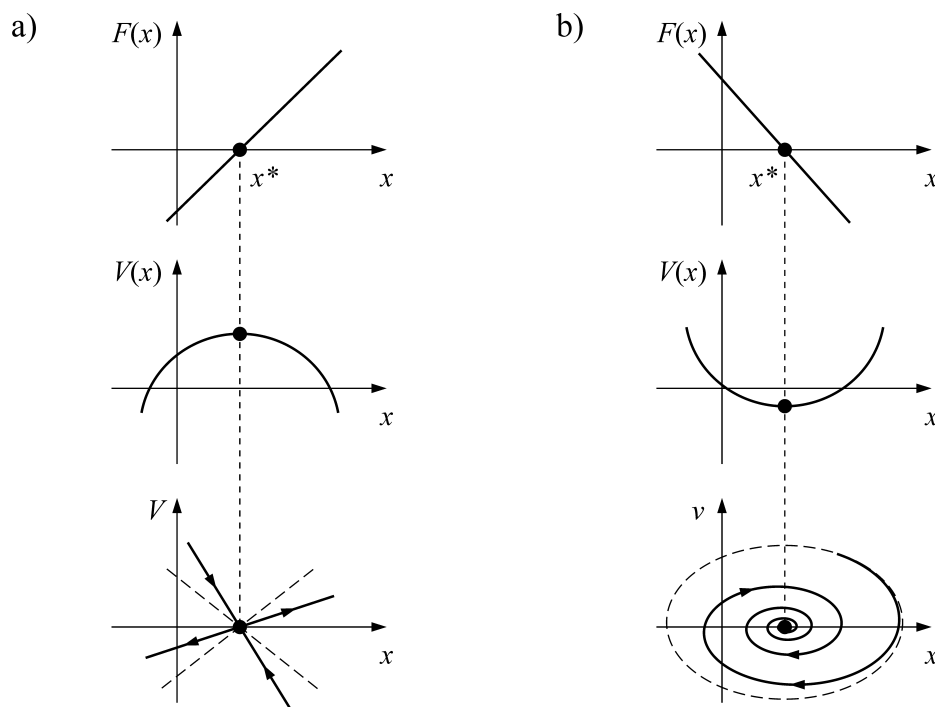
A stabilitás az erőtörvény fixpont körüli meredekségének előjelétől függ (1.13. ábra), a meredekség számértéke (vagyis a potenciál lokális görbülete) pedig egyértelműen meghatározza a fixpont taszítási, illetve vonzási erősségét.

1.3. Disszipatív (súrlódásos) rendszerek

1.3.1. Határciklus

Gerjesztett rendszereknél a mozgás egyértelmű jellemzéséhez szükséges annak megadása is, hogy a T periódusú gerjesztés éppen milyen "fázisban" van. Ennek érdekében bevezetjük a $\varphi = 2\pi \frac{t}{T} + \varphi_0$ gerjesztési fázist, amely definíció szerint szög jellegű, azaz 2π periódussal ismétlődő mennyiség. Az $\Omega = 2\pi/T$ kifejezést a gerjesztés frekvenciájának nevezzük.

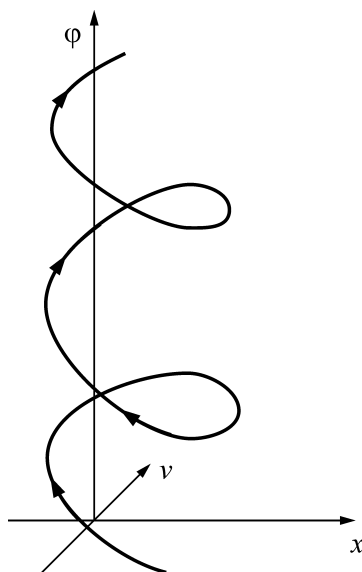
Az $F_g(x, t)$ gerjesztőerőt az idő helyett a fázis függvényeként is felírhatjuk valamilyen $F_g(x, \varphi)$ alakban. A kezdőállapot egyértelmű megadásához szükséges a φ_0 kezdőfázis ismerete is.



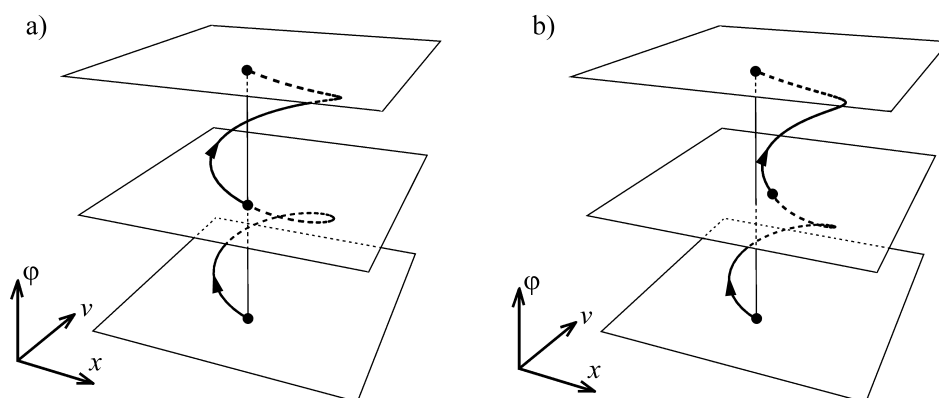
1.13. ábra. A fixpont stabilitásának függése az erőtörvény és a potenciál lokális alakjától, s az ehhez tartozó fázistérbeli szerkezet (a súrlódásmentes eset pályáit szaggatott vonalak jelzik). a) Instabil, b) stabil állapot.

Egyetlen helykoordinátával (általában valamilyen "kitérés") leírható gerjesztett esetben tehát a fázistér *háromdimenziós*, három adat: x , v és φ határozza meg egyértelműen az állapotot. A gerjesztett mozgást térben ábrázolhatjuk (1.14. ábra), ahol a fázistengely menti sebesség időben állandó, hiszen a fázis időderiváltja az Ω konstans.

A gerjesztés egyik fontos következménye, hogy a mechanikai energia még akkor *sem* marad meg, ha nincs súrlódás, hiszen a rendszer a gerjesztés hatására hol fölvesz (amikor a külső erő gyorsítja), hol pedig lead (amikor a külső erő lassítja) energiát. Mivel időfüggő gerjesztés mellett nyugalmi állapot nem érhető el, a v sebesség tartósan sohasem zérus, s ezért az energia időben állandóan változik. Olyan állapotok azonban létezhetnek, amelyekben a mozgás, és ennek megfelelően az energia időben periodikusan változik. Az ilyen állandósult mozgások a *határciklusok*. A legegyszerűbbek éppen átveszik a gerjesztés T periódusidejét. Jelen lehetnek azonban olyan határciklusok is, melyek periódusideje $2T$, $3T$, \dots , általában a T periódusidő $n > 1$ egészszámszorosa. Ezeket *n-es ciklusoknak* nevezzük (1.15. ábra).



1.14. ábra. Gerjesztett mozgás trajektóriája a háromdimenziós (x, v, φ) fázistérben.

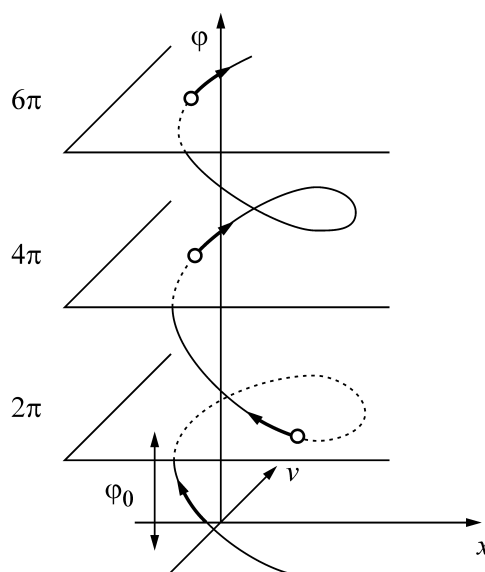


1.15. ábra. Határciklusok a gerjesztett rendszer fázistérében. A síkok egymástól 2π fázissal (T idővel) különböző állapotokat jelölnek. a) T periódusú egyes ciklus. A dőféspontok egymás fölé esnek. b) $2T$ periódusú kettes ciklus. Csak a második dőféspontok esnek egymás fölé.

1.3.2. Stroboszkópikus leképezés

A 1.3.1. fejezetben leírtak alapján sejthető, hogy a trajektóriák térbeli követe helyett legtöbbször célszerűbb a rendszert csak adott fázisú állapotaiban

vizsgálni. Csak olyan pillanatokban nézünk ilyenkor a rendszerre, vagy készítünk "fényképfelvételt", amelyek a gerjesztőerő T periódusidejének egész számú többszöröseivel különböznek. Minden egyes ilyen pillanatban megállapítjuk a hely- és sebességkoordinátákat. Ezek az egymás utáni képeken véges értékekkel térnek el egymástól, hiszen véges időintervallum telt el a felvételek között. Ez úgy is tekinthető, mint a térbeli trajektória elmettszése a $\varphi - \varphi_0 = 2\pi, 4\pi, \dots, 2\pi n, \dots$ síkokkal (1.16. ábra).



1.16. ábra. A stroboskopikus leképezés vázlata. A fázistérbeli trajektóriáról T periódusidő (2π fázisváltozás) után rendre az időtengelyre (fázistengelyre) merőleges síkmetszeteket készítünk.

Jelöljük az n -edik metszeten a hely- és sebességkoordinátákat x_n -nel és v_n -nel. Az n -edik síkon levő koordináták *egyértelmű* kapcsolatban vannak az $n + 1$ -edik síkon lévőkkel, ugyanis a (??) egyenlet megoldása adott x_0, v_0, φ_0 kezdőfeltétellel egyértelmű, s az adott trajektória két pontjáról van szó. A diszkrét koordinátákat összekapcsoló

$$(x_{n+1}, v_{n+1}) = M(x_n, v_n) \quad (1.28)$$

szabályt *leképezésnek* nevezzük.⁸ Az egyes koordinátákban kiírva ez az

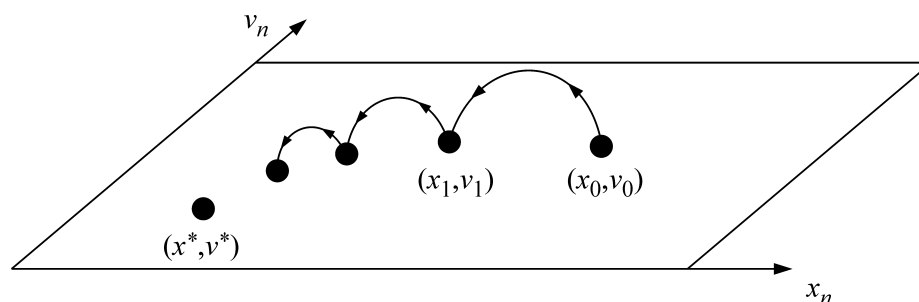
$$x_{n+1} = M_1(x_n, v_n), \quad v_{n+1} = M_2(x_n, v_n) \quad (1.29)$$

⁸Ha nem kívánjuk hangsúlyozni, hogy éppen hányadik leképezési lépésről van szó, akkor az $(x', v') = M(x, v)$ jelölés használatos.

alak, ahol M_1, M_2 a leképezés egyes komponenseit megadó függvények. Az (x_{n+1}, v_{n+1}) pont az (x_n, v_n) képe, a leképezés alkalmazását pedig *iterálásnak* mondjuk. Ez a leképezés nem más, mint a differenciálegyenlet (mozgásegyenlet) *diszkrét idejű* alakja. Egy differenciaegyenlet, amely mindig létezik, bár konkrét meghatározása nem feltétlenül könnyű. A periódusidő többszöröseit tartalmazó megfigyeléssorozat szempontjából a (1.28) leképezés a mozgásegyenlet.

Az időben periodikus, szaggatott megvilágítást biztosító eszköz a stroboszkóp, ezért a fenti típusú leképezést *stroboszkopikusnak* nevezzük. Mivel a stroboszkopikus leképezés időpillanataiban a gerjesztés mindig azonos fázisú, a leképezés alakja már *független* attól, hogy hányadik síkmetszeten alkalmazzuk: a stroboszkopikus leképezés autonóm, az M szabály maga *nem függ* a diszkrét idő szerepét játszó n -től.

A stroboszkopikus leképezés előnye, hogy az egyenes menti mozgást végző gerjesztetlen rendszernél megszokott koordinátákkal dolgozik. Ezen a síkon a mozgás azonban most nem folytonos (1.17. ábra). A térben érvényes egydi-



1.17. ábra. A stroboszkopikus leképezésen a mozgás diszkrét, ugráló pontsorozat. Itt az (x^*, v^*) ponthoz közelít a trajektória.

menziós görbe vonal helyett a stroboszkopikus leképezésen egy *pontsorozat* a trajektória. Általánosan igaz, hogy a leképezésen az egyes alakzatok dimenziója *eggyel kisebb*, mint a teljes fázistérben. Így pl. a T periódussal ismétlődő határciklus a stroboszkopikus leképezésen egyetlen fixpontként jelenik meg. A kettes ciklus képe pedig két, egymás között ugráló pont (lásd 1.15. ábra).

Természetesen a stroboszkopikus leképezés kevesebb információt tartalmaz, mint az eredeti mozgás, hiszen a két felvétel közötti viselkedést nem vizsgáljuk. Ennek ellenére a mozgás általános jellegéről hű képet kapunk a leképezés követésével. Sőt, az elvesztett információt is visszanyerhetjük, ha nemcsak egy rögzített fázisnál vizsgáljuk a leképezést, hanem azok egész családját tekintjük a φ_0 kezdőfázis függvényében.

A leképezés síkját ezért szokás a rendszer diszkrét idejű fázisterének tekinteni, s a benne lezajló mozgást diszkrét trajektóriának. A leképezés használatának sok előnye van, s érdemes a háromdimenziós térbeli gondolkodásról áttérni az ilyen síkbeli, de diszkrét idejű mozgások megértésére.

1.3.3. Attraktor

EZ A FEJEZET MÉG EMBRIONÁLIS ÁLLAPOTBAN VAN! Állandósult mozgás súrlódásos rendszerben csak külső energiabefektetés, gerjesztés hatására jöhet létre. Bármilyen kezdőfeltételből indult is a rendszer, hosszú idő eltelte után valamilyen állandósult mozgáshoz tart, amit ezért vonzó objektumnak, *attraktornak* nevezünk. Szabályos mozgásoknak, vagy a mozgás leállításának *egyszerű* attraktorok felelnek meg. Elegendően nagy energiabefektetés esetén, amikor a rendszer nemlinearitása óhatatlanul megnyilvánul, az állandósult mozgás rendszerint szabálytalan, kaotikus. Ezzel egy *kaotikus attraktor* megjelenése társul, melyet sajátos szerkezete miatt szokás *különös attraktornak* is nevezni.

1.4. Konzervatív (súrlódásmentes) rendszerek

A mozgások egy speciális, de fontos osztályát alkotják azok, amelyek során a súrlódás elhanyagolható, vagy általánosabban fogalmazva, amelyekben disszipatív hatások nem játszanak szerepet.⁹ Ilyenkor az idő iránya nem kitüntetett, a differenciálegyenlettel leírt folyamat reverzibilis: az időben előre haladva hasonló viselkedést tapasztalunk, mint időben hátrafelé haladva. Gondoljunk például egy bolygóra, melynek filmre vett mozgásáról nem lehet eldönteni, hogy az a valódi időben történik vagy pedig a megfordított időben. A súrlódásmentes rendszerekben a fázistérfogat nem változik, attraktorok nem létezhetnek.

A súrlódás mindig fázistérfogat-összehúzóással jár. A súrlódásmentes rendszerek alapvető tulajdonsága, hogy mozgásuk során a *fázistérfogat nem változik*. Ezért szokás ezeket *konzervatív* rendszereknek is nevezni. A konzervatív rendszerek fázistérfogat-összehúzóási rátája tehát definíció szerint zérus.

Ennek fontos következménye, hogy a fázistérnek *nem* lehet olyan rész-halmaza, melyre a térfogat ráhúzódhatna. *A konzervatív rendszerekben nem*

⁹Mivel a hétköznapi jelenségekben, sőt mindenfajta makroszkopikus dinamikában elkerülhetetlen a disszipáció, ezért a súrlódásmentes esetet csak a súrlódásos eset megismerése után tárgyaljuk.

létezhetnek attraktorok (repellorok sem), a mozgás nem felejt el kezdőfeltételt, s ezért a mozgás jellege még hosszú idő után is *függ a kezdőfeltételtől*. Ennek tulajdonítható, hogy súrlódásmentes rendszerekben a káosz is úgy jelentkezik, hogy bizonyos kezdőfeltételekhez kaotikus, másokhoz ugyanakkor egyszerű mozgás tartozik.

Ilyen típusú káosz előfordul például egyenes menti (egydimenziós) gerjesztett mozgásokban, eltűnő súrlódási együttható ($\alpha = 0$) mellett. A konzervatív káosz azonban egy *másik* rendszertípusban is kialakulhat: a nem gerjesztett (zárt) súrlódásmentes rendszerekben. Ezen rendszerek vizsgálatánál döntő fontosságú, hogy az *összenergia* megmaradó mennyiség. Egy test *síkbeli* helyzetét két helykoordináta (x, y) jellemzi, amelyekhez két sebességkomponens (v_x, v_y) tartozik. Az energiamegmaradás miatt a négy változó közül egy azonban (pl. v_y) kifejezhető a többi segítségével, s így három független elsőrendű differenciálegyenletünk marad. A legalább háromdimenziós fázistér a káosz megjelenésének szükséges feltétele. Arra a következtetésre jutunk tehát, hogy konzervatív káosz előfordulhat egyetlen test síkbeli vagy két test egyenes menti súrlódásmentes mozgásában gerjesztés nélkül is.

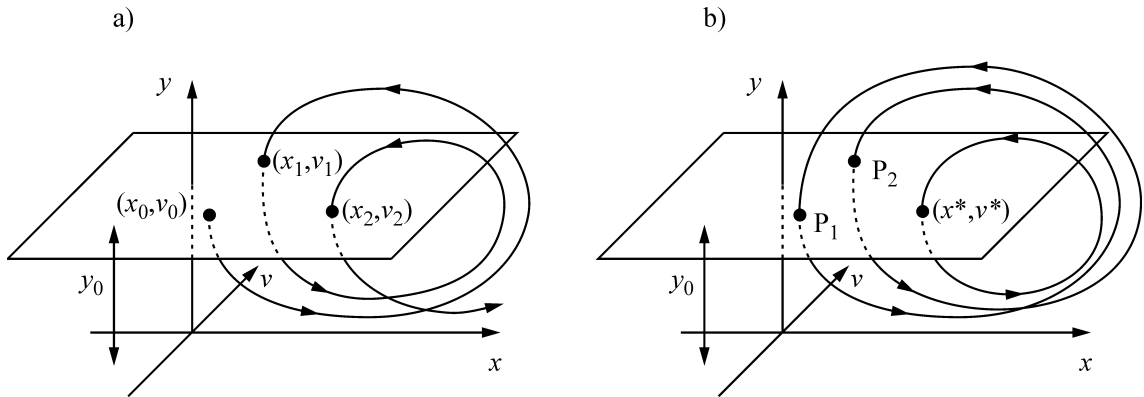
1.4.1. Poincaré-leképezés

A konzervatív rendszerek osztályban is érdemes a háromdimenziós fázistérbeli mozgást egy síkon, leképezés formájában, azaz diszkrét (lépésenként véges nagyságnyi változó) időben követni. Ez úgy tehető meg, hogy egy Poincaré-leképezést definiálunk: a rendszer trajektóriájának egyik hely- és sebességkoordinátáját akkor rögzítjük, amikor az valamilyen jellegzetes helyzetbe kerül. Ez a feltétel lehet pl. az, hogy az y koordináta adott y_0 értéket vesz fel. Ha ez teljesül, akkor leolvassuk a pillanatnyi x és v_x értékeket. A Poincaré-leképezés felvétele annak felel meg, hogy a háromdimenziós fázistérbeli folytonos trajektóriát egy felülettel elmetsszük (1.18. ábra). Emiatt a Poincaré-leképezés síkját szokás Poincaré-metszetnek is nevezni (a teljes fázistérképet pedig Poincaré-térképnek). Annak érdekében, hogy a v_x sebességérték egyértelmű legyen, mindig egy adott irányból, pl. a felülről érkező trajektóriák metszéspontjait rögzítjük. Ezek egymásutánja definiál egy

$$(x_{n+1}, v_{n+1}) = M(x_n, v_n) \quad (1.30)$$

leképezést. (Az egyszerűség kedvéért a sebességkomponens x indexét elhagyjuk.) A leképezés definíciójából látszik, hogy fixpontjai a folytonos idejű rendszer *periodikus* mozgásainak felelnek meg.

A stroboszkopikus leképezéssel összehasonlítva azt látjuk, hogy most a metszetet nem adott fázisú pillanatokban, hanem adott *konfigurációban* képezzük. A Poincaré-metszet helyzetét úgy kell megválasztani, hogy a tipikus



1.18. ábra. Poincaré-leképezés előállítása egy test síkbeli súrlódásmentes mozgása során. A metszetet az $y = y_0$ síkon képezzük. a) A trajektória felülről történő dőféspontjai definiálják az (x_n, v_n) koordinátákat. b) Az egy hurokból álló periodikus pályák a leképezés (x^*, v^*) fixpontjai, a kéthurkú pályák a leképezés (P_1, P_2) kettes ciklusai.

trajektóriák sokszor metszessék a kiválasztott felületet. A leképezés konkrét alakja függ a felület helyzetétől is. A mozgás egészére vonatkozó következtetések (kaotikus-e, mekkora a kaotikus és szabályos mozgásokhoz tartozó kezdőfeltételek által betöltött területek aránya) azonban már függetlenek a felület helyzetétől.

A Poincaré-leképezés természetesen megfordítható, hiszen differenciálegyenletből következik. Ráadásul a súrlódás hiánya miatt az időben előre és hátra történő mozgás ugyanolyan jellegű, a fázistérfogat egyik időirányban sem változik. Ennek következtében az M^{-1} inverz leképezés is hasonló típusú, mint az eredeti.

A konzervatív rendszerekkel kapcsolatos leképezések közös tulajdonsága (a fázistérfogat állandósága miatt), hogy (alkalmasan választott koordinátákban) *területtartóak*. Ezért a konzervatív rendszerek káoszának számos fontos vonása megérthető területtartó síkbeli leképezések vizsgálatával.

1.5. Sokaságok

1.5.1. Stabil sokaságok

1.5.2. Instabil sokaságok

1.5.3. Homoklinikus pontok

1.5.4. Heteroklinikus pontok

1.6. Az állandósult instabilitás nagyságának mérése

1.6.1. Ljapunov-exponens

1.6.2. Előrejelzési idő

1.6.3. Pillangó effektus

1.7. Tranziens káosz

1.8. Fraktálok

A fraktálok leglényesebb tulajdonságait egy mondatban a következőképpen foglalhatjuk össze: a fraktálok olyan önhasonló, tagolt alakzatok, melyeknek a térfogata (hosszúsága, területe stb.) függ a mérés pontosságától (a "mérőrúd" hosszától).

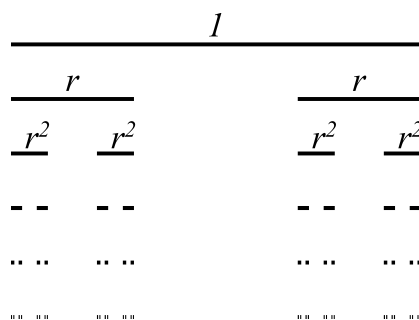
Néhány példa a természetből: szappanhab, szivacs, fák ágrendszere, érhálózat, tüdő, Hold felszíne, tengeri partvonal stb. Általában elmondható, ami egyébként az említett példákból is látszik, hogy ha a természetben valamilyen célból egy véges területen hosszú vonalra, vagy egy véges térfogatban nagy felületre van szükség (pl. tüdő), akkor a leghatékonyabb megoldás valamilyen a fraktálstruktúra létrehozása.

Vannak matematikailag egyszerűen megkonstruálható fraktálok is, például a Cantor-halmaz és a Koch-görbe.

1.8.1. Cantor-halmaz

Egy egységintervallumból vágjuk ki a közepét úgy, hogy a két szélső $r < 1/2$ hosszú szakaszt tartjuk meg. Utána végezzünk ugyanilyen arányú kivágást a megmaradt r , majd r^2 stb. hosszú szakaszokon (1.19 ábra). Az említett

eljárás végtelenszer ismételve kapjuk meg a Cantor-halmazt. A kis szakaszok száma a szerkesztés n -ik lépésében 2^n , a hosszuk pedig r^n , tehát teljes hossz $2^n r^n = (2r)^n$ lesz. Mivel $2r < 1$ és a szerkesztést végtelenszer kell végrehajtani, a Cantor-halmaz teljes hosszúsága nulla: $\lim_{n \rightarrow \infty} (2r)^n = 0$. A Cantor-halmaz egy egyenes mentén végtelen sok pontból álló szétszórt pont-halmaz lesz, nem alkot folytonos görbét. Vegyük észre, hogy ha egy "kész"



1.19. ábra. A Cantor-halmaz szerkesztésének egymás utáni lépései $r = 0.3$ paraméter mellett (fentről lefelé haladva).

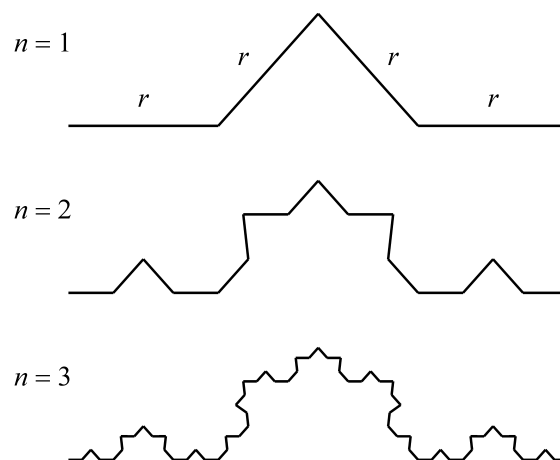
Cantor-halmaz hosszúságát akarjuk lemérni (vagyis nem számoljuk), akkor a Cantor-halmaz teljes mért hosszúsága pont ugyanúgy függ a mérőrúd nagyságától, ahogyan az a szerkesztésnél változott. Hiába mérem tehát egyre kisebb rudakkal, a kapott hosszúság nem konvergál egy konkrét értékhez! Ez tipikus és nagyon fontos tulajdonsága a fraktáloknak.

1.8.2. Koch-görbe

A Koch-görbe szerkesztése során ismét egy egységnyi szakaszból indulunk ki, de most a Cantor-halmazzal ellentétben két dimenziós tér foglalja magába a konstrukciónkat.

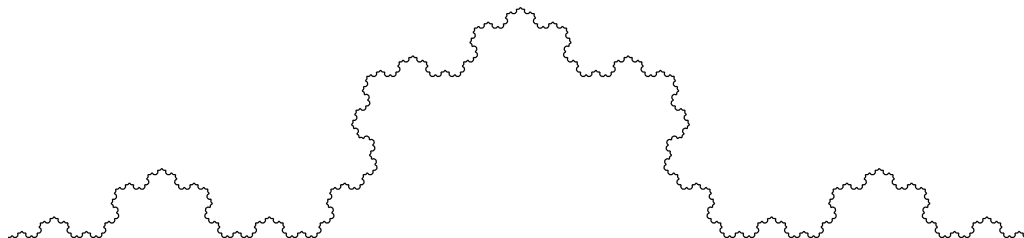
A szerkesztés első lépésként az egységszakasz közepéről szimmetrikusan eltávolítunk egy $(1/2)$ -nél rövidebb darabot, majd az így keletkező két új végponthoz a megmaradó szakaszokkal azonos két új r hosszúságú $(1/4 < r < 1/2)$ szakaszt illesztünk háztető alakban (1.20 ábra). Így egy $4r$ hosszúságú tört vonalhoz jutunk.

Ezután megismételjük az eljárást, immár az r hosszúságú szakaszokon. Az új szakaszok hossza tehát r^2 lesz. A Koch-görbe szerkesztésének lényege hasonló a Cantor-halmazéhoz: az eljárást tovább ismételjük, mindig a legújabb szakaszra alkalmazva, végtelen sokszor. Eközben a görbe egyre töredettebbé válik, s hossza nő. A határértékként előálló görbét Koch-görbének



1.20. ábra. A Koch-görbe szerkesztésének első három lépése ($r = 0.3$).

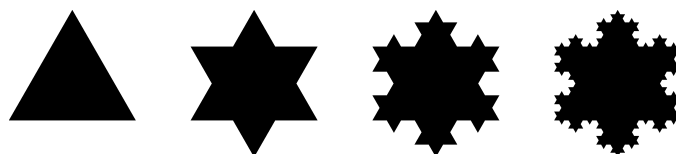
nevezzük (1.21 ábra). Az eljárás n -edik lépésében a szakaszok r^n hosszúságúak, számuk 4^n , a görbe hossza tehát $(4r)^n$. Mivel $4r > 1$, a Koch-görbék hossza végtelen: $\lim_{n \rightarrow \infty} (4r)^n = \infty$. Vegyük észre, hogy az egyszerű eljárással úgy hoztunk létre egy véges területen belül végtelen hosszú görbét, hogy az a területet nem töltötte ki!



1.21. ábra. A $r = 0.3$ paraméterű Koch-görbe. Bár alig tűnik többnek egy "rücskös" vonalnál, a hosszúsága végtelen!

A Koch-görbe és a Cantor-halmaz a fraktálok tipikus példái, ráadásul mindketten tökéletesen önhasonlóak.

Három Koch-görbéből ún. Koch-szigetet is szerkeszthetünk. A sziget szerkesztésének első négy lépése a következő látható az 1.21 ábrán. Miközben a szigetek területe pontosan meghatározható, véges és konkrét szám, addig a kerülete végtelen!



1.22. ábra. A $r = 1/3$ paraméterű Koch-szigetek szerkesztésének első négy lépése. A szerkesztés végén szigetek területe véges marad, miközben a kerülete végtelen hosszú lesz.

1.8.3. Fraktáldimenzió

A már bemutatott példáinkból is kitűnik, hogy a fraktálalakzatok igen tagoltak, hosszuk, kerületük, területük stb. mérőszáma változik a felbontással (a mérőrúd méretével), miközben az egész alakzat véges térrészre korlátozódik. A hagyományos alakzatoknál megszokott dimenziós fogalma fellazul, hiszen ezek az alakzatok jelentősen behatolnak a náluk eggyel magasabb dimenziós térbe. Pl. a Koch-görbe olyan vonal, mely végtelen, de mégis véges térrészre korlátozódik, méghozzá úgy, hogy nincs olyan felületdarab, melyet teljesen befedne. Tehát "több", mint egy egydimenziós vonal, de "kevesebb", mint egy kétdimenziós síkidom. A Cantor-halmaznál is hasonló a helyzet: úgy áll végtelen sok pontból egy véges szakaszon, hogy sehol sem alkot folytonos szakaszt. Kézenfekvően adódik ezért a dimenzió fogalmának olyan általánosítása, melyben a törtdimenziók is megengedettek, s a dimenzió annál nagyobb, minél tagoltabb az alakzat.

Egy d dimenziós euklideszi térbe ágyazott ponthalmaz fraktáldimenziójának mérése a következőképpen történik: fedjük le ε lineáris méretű d dimenziós dobozokkal (1.23 ábra), s nézzük meg, hogy ε függvényében hogyan változik az $N(\varepsilon)$ nem üres dobozszám (a "dobozt" itt általánosan kell érteni, az lehet egységvonal, egységnégyzet vagy egységkocka is).

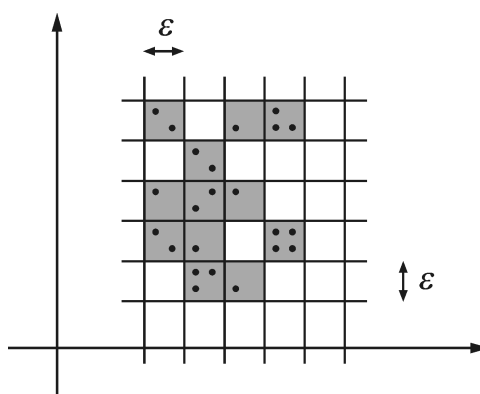
$N(\varepsilon)$ a felbontással nyilván nő, ráadásul a tapasztalat szerint a felbontás negatív hatványaként. A kitevő lesz a keresett fraktáldimenzió, nevezzük ezt D_0 -nek, mely természetesen nem feltétlenül egyezik meg a tér d dimenziójával. Az

$$N(\varepsilon) \sim \varepsilon^{-D_0}, \quad \text{ha } \varepsilon \ll 1 \quad (1.31)$$

összefüggés definiálja a vizsgált alakzat D_0 fraktáldimenzióját. Átrendezve:

$$D_0 = \frac{\ln N(\varepsilon)}{\ln 1/\varepsilon}, \quad \text{ha } \varepsilon \ll 1. \quad (1.32)$$

A fraktáldimenzió tehát leolvasható a lefedő dobozok számának felbontásfüggéséből, melynek ε több nagyságrendjén keresztül teljesülnie kell. Ez a



1.23. ábra. A fraktáldimenzió mérése. Egy ponthalmazt (vagy bármilyen alakzatot) ε élhosszúságú d dimenziójú kockákkal fedünk le, s megszámoljuk, hogy hány kockába esik pont (szürke dobozok). Ez a szám $N(\varepsilon)$. Az ε felbontás nagyságát csökkentve $N(\varepsilon)$ nő az $N(\varepsilon) \sim \varepsilon^{-D_0}$ összefüggés szerint, ahol D_0 a keresett fraktáldimenzió.

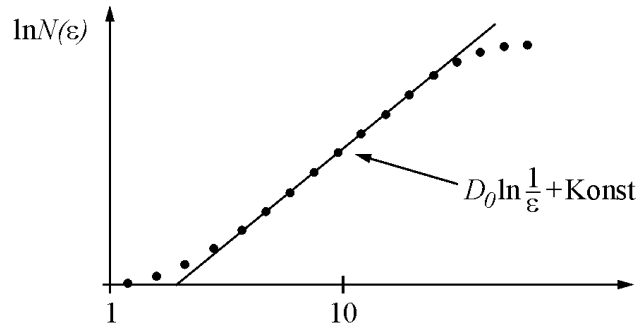
szám hagyományos alakzatokra megegyezik d -vel (véges számú pontok halmazának 0, görbéknek 1 stb.). Fraktálról akkor beszélhetünk, ha D_0 kisebb, mint az alakzatot magába foglaló tér d dimenziója. Fontos megjegyezni: a fraktálok kiegészítő halmaza nem fraktál, hanem d dimenziójú alakzat.

A gyakorlatban a fraktáldimenziót meghatározhatjuk mérésrel, illetve bizonyos egyszerűbb alakzatoknál egzakt számítással is. Ha a 1.31 egyenletnek vesszük a logaritmusát akkor az $\ln N(\varepsilon) = \ln A - D_0 \ln \varepsilon$ egyenletet kapjuk, ahol A az 1.31 egyenletben szereplő arányossági tényező. Átrendezve:

$$\ln N(\varepsilon) = D_0 \ln(1/\varepsilon) + \ln A. \quad (1.33)$$

A méréshez több nagyságrenden keresztül változtatott ε értékek mellett kell megmérni (vagy számítani) az alakzaton az $N(\varepsilon)$ -t, majd ábrázolni a $\ln N(\varepsilon)$ értékeket $\ln(1/\varepsilon)$ függvényében. A kapott pontsorozatra illesztett egyenes meredeksége éppen D_0 fraktáldimenzió lesz (lásd 1.24).

Számoljuk ki a Cantor-halmaz fraktáldimenzióját! A lefedő kis vonalak ("dobozok") ε hossza csökkenjen éppen olyan ütemben, ahogy a szerkesztés során keletkező kis vonaldarabkáké: $\varepsilon = r^n$. Átrendezve: $n = \ln \varepsilon / \ln r$. Az olyan lefedő "dobozok" száma, amiben az 1.23 ábrán bemutatottnak megfelelően, "találat" van $N(\varepsilon) = 2^n$ lesz. Figyelembe véve a fraktáldimenzió 1.31 definícióját $2^n = \varepsilon^{-D_0}$ egyenletet kapjuk, melynek logaritmusát véve, majd n helyére behelyettesítve $n = \ln \varepsilon / \ln r$ -t megkapjuk a Cantor-halmaz



1.24. ábra. A fraktáldimenzió a dobozszám és a felbontás reciprokának log–log skálán történő ábrázolásakor adódó egyenes meredeksége. Az $\ln N - \ln(1/\varepsilon)$ görbe az egységhez közeli felbontásokra és a nagyon kicsikre eltér a D_0 meredekségű egyenestől. Az eltérés oka a durva felbontásnál még nagyon kicsi a dobozszám, a nagyon finom skálán pedig új effektusok lépnek be, s a rendszer másként kezd viselkedni.

fraktáldimenzióját:

$$D_0 = \frac{\ln 2}{\ln 1/r}. \quad (1.34)$$

A 1.19 ábrán látható Cantor-halmaz fraktáldimenziója ($r = 0.3$): $D_0 = 0.576$. Látható, hogy minél nagyobb az r paraméter (minél kisebbek a kivágások), annál nagyobb lesz a fraktáldimenzió is. $r = 0.5$ határesetnél (nem vágunk ki semmit) a dimenzió 1 lesz, ahogy egy egyszerű vonalnal el is várjuk.

A Koch-görbe fraktáldimenziójának kiszámításakor hasonlóan járunk el, mint a Cantor-halmaznál. A halmaz szerkesztésének ütemében fedjük le kis vonaldarabkákkal. Az n -ik lépésben a lefedő vonalak hossza¹⁰ $\varepsilon = r^n$, a számuk pedig $N(\varepsilon) = 4^n$ lesz, tehát a Koch-görbe fraktáldimenziója:

$$D_0 = \frac{\ln 4}{\ln(1/r)}, \quad (1.35)$$

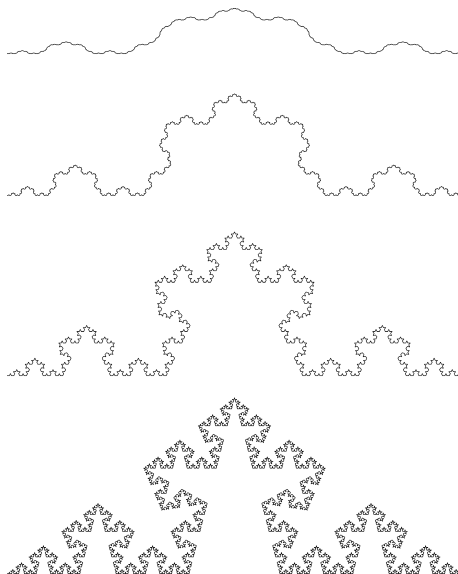
ami 1 és 2 közé eső szám. A triadikus ($r = 1/3$) esethez a $D_0 = \ln 4 / \ln 3 = 1,262$ dimenzió tartozik.

A felbontás finomításával a megfigyelt hosszúság, az $\varepsilon 4^n = \varepsilon^{1-D_0}$ összefüggés szerint nő, a megfigyelt terület viszont $\varepsilon^2 4^n = \varepsilon^{2-D_0}$ szerint csökken. Ez azt jelenti, hogy ha a Koch-görbét ε oldalélű négyzetekkel fedjük le, akkor az alakzat területe zérushoz tart, a görbe tehát a sík semmilyen részét nem

¹⁰Mivel a Koch-görbe egy kétdimenziós síkba ágyazott struktúra, kézenfekvőnek tűnik, hogy ne vonalakkal, hanem kis egység-négyzetekkel fedjük le. A számítás úgy is elvégezhető, s természetesen akkor is a 1.32 eredmény jön ki, azonban a számítás bonyolultabb lesz.

tölti ki. Bonyolultabb viszont bármely sima görbénél, ezt mutatja a növekvő hosszúsága és az 1-nél nagyobb dimenziója is.

Az érdekesség mértékét megadó r paraméterrel a dimenzió monoton növekszik (1.25 ábra). Az $r = 1/4$ választás a sima szakasznak, s ennek megfelelően egydimenziós objektumnak felel meg. Az $1/4$ -hez közeli r paraméterű Koch-görbék csak enyhén rücskösek (mint pl. egy karfiolszelet pereme), az $r = 1/3$

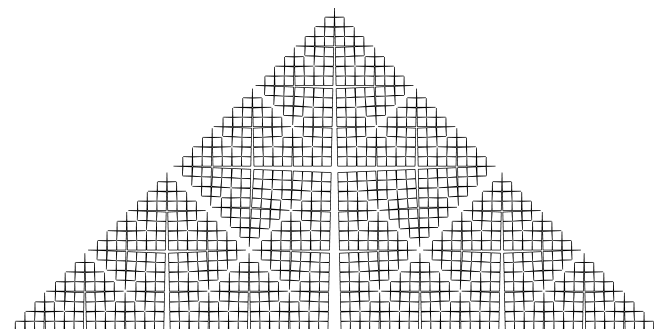


1.25. ábra. Koch-görbék az $r = 0, 26, 0, 3, 0, 35, 0, 4$ paraméterekkel. Nagyobb r paraméterhez "rúcskösebb" görbe és nagyobb fraktáldimenzió tartozik. A dimenziók rendre $D_0 = 1, 029, 1, 151, 1, 321$ és $1, 513$.

körüli $D_0 = 1, 2 - 1, 3$ értékek tartoznak a tengeri, óceáni szigetek partjának átlagos dimenziójához vagy a Hold-felszín egy metszetének dimenziójához. Az $r = 1/2$ -hez közeli értékek igen tagolt görbékhez tartoznak, melyek dimenziója közel esik kettőhöz (1.26 ábra). A természetben érthető módon gyakoriak a közel síkkitöltő görbék és térkitöltő felületek. Az előbbire példa a folyóhálózatok az egész vízgyűjtő területükre kiterjedő mellékfolyók, patakok, vízfolyások rendszerével, az élőlények érhálózata a nyirokkeringéssel és a fák sűrű lombkoronája, utóbbira pl. a tüdő és a szivacs.

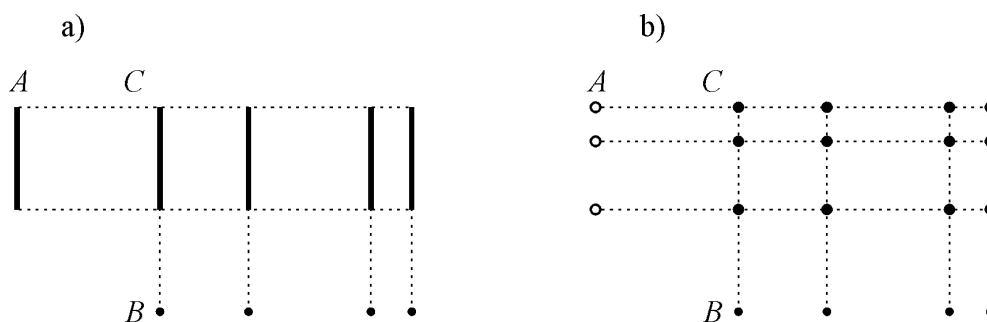
1.8.4. Összevetített fraktálok

A fraktáloknak – akár egzaktul önhasonlók, akár nem – létezik egy fontos osztályuk, amelyben a fraktálok mintegy részekre bonthatók. Ez akkor áll



1.26. ábra. Egy $r = 0,49$ paraméterű Koch-görbe az első hat szerkesztő lépést követően. A kész Koch-görbe majdnem síkkitöltő, dimenziója $D_0 = 1,943$.

fenn, ha egy fraktál két egyszerűbb fraktál összevetítéséként adódik (lásd 1.27 ábra).



1.27. ábra. Két halmaz, A és B, C halmazba való összevetítésének szemléltetése. A C halmazt szokás az A és B halmazok direkt szorzatának is hívni. a) Az A komponens egy szakasz. b) Az A komponens három pont együttese. A B komponens mindkét esetben négy pont együttese.

A $D_0^{(1)}$ és $D_0^{(2)}$ dimenziójú fraktálok összevetítésével kapott fraktálok teljes fraktáldimenziójára az alábbi – könnyen belátható, de most nem részletezett – összefüggés érvényes:

$$D_0 = D_0^{(1)} + D_0^{(2)}. \quad (1.36)$$

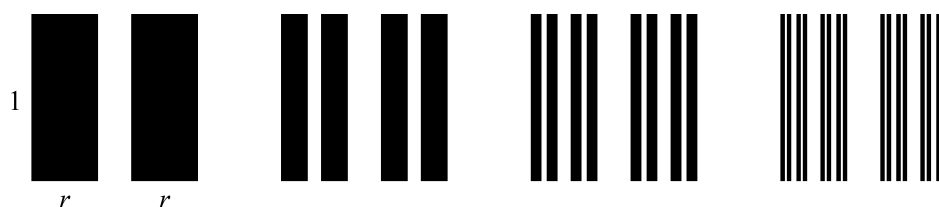
Az egyes komponensek $D_0^{(i)}$ dimenzióit szokás parciális dimenzióknak is nevezni.

Ez az összegszabály nemcsak egydimenzióba ágyazott, hanem tetszőleges fraktálok direkt szorzatára is érvényes, és a komponensek száma is tetszőleges lehet. Ugyanez az összefüggés érvényes a hagyományos alakzatokra is,

hiszen pl. sík két egyenes direkt szorzata, s dimenziója valóban $1 + 1$. Fontos hangsúlyozni, hogy az összegszabály nemcsak egyenesek mentén, hanem tetszőleges sima görbe vonalak mentén összevetített fraktálokra is érvényes. Az ilyen görbék menti vetítés ugyanis egy sima transzformáció, ami csak a (1.31) definícióban ki nem írt együtthatót módosítja, de a hatványfüggés kitevőjét, a dimenziót nem képes megváltoztatni.

Az összevetített fraktálokra tekintsünk meg két egyszerű példát, a Cantor-szálakat és a Cantor-felhőt, melyek egyébként a kaotikus rendszerekben előforduló leggyakoribb struktúráknak is egyszerű modelljei.

A Cantor-szálakat úgy szerkesztjük, hogy az egységnégyzetből kivágunk középről szimmetrikusan egy téglalapot oly módon, hogy a két megmaradó téglalap r vastagságú és egységnyi magasságú legyen. A következő lépésekben ugyanilyen módon aprítjuk a megmaradó, mindig egységnyi magasságú, de egyre keskenyebb téglalapokat (1.28 ábra).



1.28. ábra. Cantor-szálak szerkesztésének első négy lépése $r = 0,4$ paraméter mellett. Hasonlóan szerkesztjük, mint a Cantor-halmazt, csak most nem egy szakaszból, hanem egy négyzetből indulunk ki, s középről nem szakaszokat, hanem téglalapokat vágunk ki. A dimenzió $D_0 = 1,756$.

Az eredmény végtelen sok párhuzamos egységintervallum halmaza, melyek egy vízszintes vonallal elvágva az r paraméterű Cantor-halmazt adják. A Cantor-szálak együttese az egységintervallum és az r paraméterű Cantor-halmaz összevetítése, más szóval azok direkt (vagy Descartes-féle) szorzata.

A Cantor-szálak dimenziójának meghatározásakor természetesen eljárhatunk a 1.8.3 fejezetben ismertetett módon. Ehhez vegyük észre, hogy az $\varepsilon = r^n$ élhosszú négyzetekkel való lefedéskor 2^n számú oszlopot kapunk, melyek mindegyike $1/\varepsilon$ számú dobozt tartalmaz. A lefedő dobozok száma ezért $N(\varepsilon) = 2^n \varepsilon^{-1} = \varepsilon^{(\ln 2 / \ln r - 1)}$. A Cantor-szálak dimenziója tehát

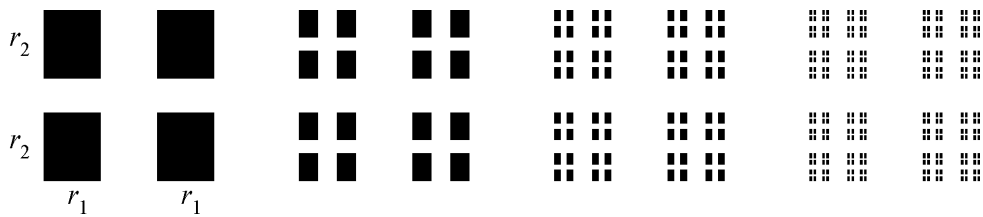
$$D_0 = 1 + \frac{\ln 2}{\ln(1/r)}. \quad (1.37)$$

Egyszerűbben tudjuk meghatározni a dimenziót, ha a Cantor-szálakra úgy tekintünk, mint egy egységszakasz és egy Cantor-halmaz összevetítésére (direkt

szorzatára), s az 1.36 összefüggés alapján számoljuk a fraktáldimenzióját: ha az egységszakasz $D_0^{(1)} = 1$ dimenziójához hozzáadjuk a Cantor-halmaz dimenzióját (1.34), akkor éppen a 1.37-ben látható eredményt kapjuk.

A Cantor-szálak érdekes tulajdonsága, hogy kerületük nő, területük pedig csökken a felbontással. Határesetben (végtelen nagy felbontásnál) végtelen nagy a kerülete, s nulla a területe.

A Cantor-felhőt úgy kapjuk, hogy az egységnégyzet közepéből egy olyan keresztet vágunk ki szimmetrikusan, hogy utána négy egybevágó, r_1 vastagságú és r_2 magasságú téglalap maradjon vissza (1.29 ábra).



1.29. ábra. Aszimmetrikus Cantor-felhő szerkesztésének első négy lépése $r_1 = 0,3$, $r_2 = 0,4$ paraméterek mellett. Az egységnégyzetből szimmetrikus kereszt alakban úgy vágunk ki téglalapokat, hogy a megmaradó kis téglalapok az eredeti hosszúságnak r_1 -re, illetve r_2 -szeresei legyenek, majd ezt rekurzív módon ismételjük.

Utána ezt a kivágási eljárást ismételjük minden téglalapban az r_1 és r_2 arányokat megtartva. Eredményül egy ponthalmazt kapunk, mely egyre kisebb téglalapokban koncentrálódik. Természetesen két Cantor-halmazt direkt szorzatának is tekinthetjük a Cantor-felhőket, így 1.34 és 1.36 alapján a fraktáldimenzió:

$$D_0 = \frac{\ln 2}{\ln(1/r_1)} + \frac{\ln 2}{\ln(1/r_2)}. \tag{1.38}$$

Ha $r_1 = r_2 \equiv r$, akkor $D_0 = \ln 4 / \ln(1/r)$, ami $r > 1/4$ -re formálisan ugyanakkora, mint a Koch-görbe dimenziója. A két fraktál azonban alapvetően különbözik, hiszen az egyik egy töredezett vonal, a másik pedig egy síkban szétszórt ponthalmaz. Ez a példa jól mutatja, hogy a fraktáldimenzió az alakzatoknak csak egyetlen mérőszáma, melynek azonosságából az alakzatok azonossága nem következik.

1.9. Függelék

1.9.1. Instabil fixpont körüli sokaságok alakja

Súrlódásmentes eset

Mint minden lineáris, állandó együtthatós, homogén differenciálegyenletnek, (1.2)-nek a megoldása is kereshető exponenciális alakban. Az $x = \exp(\lambda t)$ feltevéssel a $\lambda^2 = s_0^2$ eredményre jutunk, vagyis az λ kitevő csak a taszítási paraméter, s_0 vagy annak ellentettje, $-s_0$ lehet. Az általános megoldás ezen alapmegoldások lineáris kombinációja, azaz

$$x(t) = c_+ e^{s_0 t} + c_- e^{-s_0 t}, \quad (1.39)$$

amiből a sebesség:

$$v(t) = c_+ s_0 e^{s_0 t} - c_- s_0 e^{-s_0 t}. \quad (1.40)$$

Az $x(0) = x_0$, $v(0) = v_0$ általános kezdőfeltételhez tartozó megoldásra a (1.39), (1.40) alakból következik, hogy $x_0 = c_+ + c_-$, $v_0 = (c_+ - c_-)s_0$, amiből

$$c_+ = \frac{s_0 x_0 + v_0}{2s_0}, \quad c_- = \frac{s_0 x_0 - v_0}{2s_0}. \quad (1.41)$$

Adott (x_0, v_0) kezdőfeltételhez csak egyetlen c_+ , c_- együtthatópár tartozik, ami mutatja a megoldás egyértelműségét.

A fázistérbeli görbét az idő kiküszöbölésével kapjuk. Képezzük a $v - s_0 x$ és a $v + s_0 x$ mennyiségeket, melyek (1.39), (1.40) szerint $\exp(\mp s_0 t)$ -vel arányosak, szorzatuk tehát nem függ az időtől.

Így a mozgás során bármely x, v értékre fenn kell állnia a 1.3 összefüggésnek.

Súrlódásos eset

A 1.8 egyenlet megoldását is $\exp(\lambda t)$ alakban keresve, a $\lambda^2 + \alpha\lambda - s_0^2 = 0$ másodfokú egyenletre jutunk, amiből λ -ra két lehetséges értéket kapunk:

$$\lambda_{\pm} = -\frac{\alpha}{2} \pm \sqrt{\frac{\alpha^2}{4} + s_0^2}. \quad (1.42)$$

Ezek valósak, λ_+ pozitív, λ_- pedig negatív. Az $x(0) = x_0$, $v(0) = v_0$ kezdőfeltételhez tartozó megoldás a két exponenciális kifejezés lineáris kombinációja:

$$x(t) = c_+ e^{\lambda_+ t} + c_- e^{\lambda_- t} \quad (1.43)$$

és

$$c_+ = \frac{-\lambda_- x_0 + v_0}{\lambda_+ - \lambda_-}, \quad c_- = \frac{\lambda_+ x_0 - v_0}{\lambda_+ - \lambda_-}. \quad (1.44)$$

A trajektóriák egyenlete:

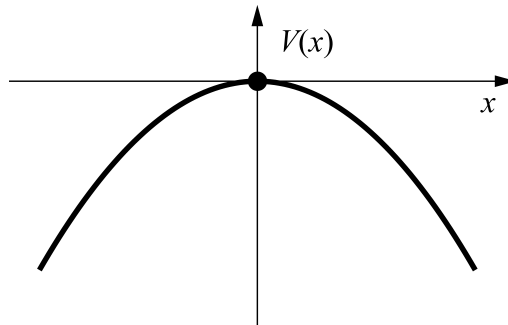
$$\frac{(v - \lambda_- x)^{\lambda_-}}{(v - \lambda_+ x)^{\lambda_+}} = \text{állandó} = \frac{(v_0 - \lambda_- x_0)^{\lambda_-}}{(v_0 - \lambda_+ x_0)^{\lambda_+}}. \quad (1.45)$$

Potenciálfüggvény

Végül megjegyezzük, hogy az adott $F(x)$ erőtvénnyről szemléletes képet nyerünk a *potenciálfüggvény* vagy potenciál fogalmának bevezetésével. Ha a részecskére helyfüggő erő hat, akkor annak potenciális energiája is függ a helytől. A $V(x)$ potenciálfüggvény a részecske egységnyi tömegre eső potenciális energiáját adja az x helyen. Az erő a potenciális energia változási gyorsaságával arányos. Ha az erő visszahúzó, akkor a potenciál nő az x távolsággal, és fordítva. Az $F(x)$ erőtvény és a $V(x)$ potenciál közötti kapcsolat általános alakja ezért

$$F(x) = -\frac{dV(x)}{dx} \equiv -V'(x). \quad (1.46)$$

A részecske úgy mozog, mintha egy $V(x)$ alakú domborzaton haladna gravitációs térben. Az instabil állapot környékén érvényes (1.1) erőtvénynek megfelelő potenciál¹¹ $V(x) = -s_0^2 x^2/2$ (1.30. ábra). A vizsgált potenciál tehát valóban egy dombnak felel meg, s a domb teteje (az $x^* = 0$ helyzet) az instabil állapot, összhangban a 1.3. ábra kvalitatív képével.¹²



1.30. ábra. Az instabil állapot körüli erőtvény potenciálja. Az instabil viselkedés egy "domb tetején" zajló mozgásnak felel meg.

¹¹Mivel a potenciál csak egy állandó erejéig meghatározott, mindig megtehetjük, hogy a fixponthoz tartozó értéket nullának választjuk.

¹²A súrlódásmentes esetben a trajektóriák az állandó $v^2/2 - s_0^2 x^2/2 \equiv \mathcal{E}$ egységnyi tömegre eső energiához tartozó vonalak; a stabil és instabil görbék a domb tetejének megfelelő $\mathcal{E} = 0$ értékhez tartoznak.

1.9.2. Stabil fixpont körüli sokaságok alakja

Súrlódásos eset

A 1.22 feltétel esetén a (1.19)-ben szereplő gyökjel alatt negatív szám áll, a λ_{\pm} együtthatónak lesz képzetes része. Ez oszcilláló lecsengésnek felel meg

$$\omega_{\alpha} = \sqrt{\omega_0^2 - \frac{\alpha^2}{4}} \quad (1.47)$$

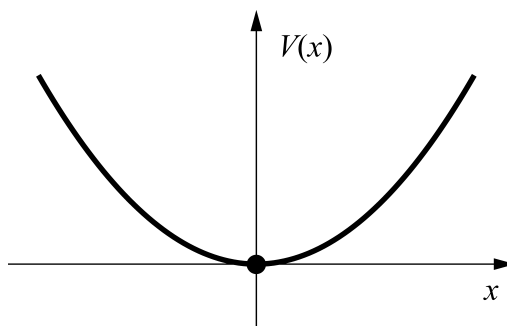
frekvenciával. Az x_0, v_0 kezdőfeltételt kielégítő megoldás ezért (1.20), (1.21) alapján és az exponenciális és trigonometrikus függvények közötti kapcsolatok felhasználásával

$$x(t) = x_0 e^{-(\alpha/2)t} \cos(\omega_{\alpha} t) + \frac{v_0 + (\alpha/2)x_0}{\omega_{\alpha}} e^{-(\alpha/2)t} \sin(\omega_{\alpha} t), \quad (1.48)$$

ami átírható a 1.23 alakba is.

Potenciálfüggvény

A stabil állapotot jellemző (1.12) erőhöz tartozó potenciál $V(x) = \omega_0^2 x^2 / 2$ (a stabil fixponthoz tartozó értéket nullának választva). A vizsgált potenciál tehát valóban egy völgynek felel meg (1.31. ábra), s a völgy alja, az $x^* = 0$ helyzet a stabil állapot, összhangban a 1.4. ábrával.¹³



1.31. ábra. A stabil állapot körüli erőtvénynek megfelelő potenciál. A stabil mozgás egy "völgy alján" zajlik.

¹³A súrlódásmentes eset ellipszisztrajektóriái az állandó energiához tartozó görbék.

Irodalomjegyzék

- [DandJ] Dow, W. & Jones, E.A., *Wall Street Journal*, March 29, 1929.
- [HB98] Huynen, M. A. and Bork, P. 1998. Measuring genome evolution. *Proceedings of the National Academy of Sciences USA* 95:5849–5856.
- [CA] Caprara, A. 1997. Sorting by reversals is difficult. In: *Proceedings of the First Annual International Conference on Computational Molecular Biology (RECOMB 97)*, New York: ACM. pp. 75-83.
- [MSW00] McLysaght, A., Seoighe, C. and Wolfe, K. H. 2000. High frequency of inversions during eukaryote gene order evolution. In Sankoff, D. and Nadeau, J. H., editors, *Comparative Genomics*, Dordrecht, NL: Kluwer Academic Press. pp. 47–58.