Topologikus vektorterek és normált algebrák

Kristóf János

Tartalomjegyzék

I. rész

Topologikus vektorterek

BEVEZETÉS

Ebben a részben a *lineáris analízis* által vizsgált legfontosabb matematikai objektumokról, a *topologikus vektorterekről*, valamint a topologikus vektorterek között ható *folytonos lineáris operátorokról* lesz szó.

Az első fejezetben értelmezzük a *lineáris topológiákat* és a *topologikus vektortereket*. Részletesen megvizsgáljuk azokat a speciális tulajdonságokat, amelyek a lineáris topológiákat megkülönböztetik a nem lineáris topológiáktól. Megnézzük, hogy a 0 vektor lineáris topológiák szerinti környezetbázisai milyen különleges tulajdonságokkal rendelkeznek; ezáltal olyan módszerhez jutunk, amelynek alkalmazásával lineáris topológiák állíthatók elő. Jellemzést adunk azokra a lineáris topológiákra, amelyek Hausdorff-topológiák (másnéven: *szeparáltak*), és megmutatjuk, hogy minden topologikus vektortér reguláris topologikus tér. Ezután jellemezzük a topologikus vektorterek feletti lineáris funkcionálok folytonosságát. Kiderül, hogy a lineáris topológiák és lineáris operátorok által *projektíven előállított* topológiák automatikusan lineárisak. Ebből megkapjuk a *topologikus lineáris alterek* és *topologikus lineáris szorzatterek* definícióját, valamint ezek jellemzését a 0 vektor környezetbázisaival. Fontos az a következmény is, hogy egy vektortér feletti lineáris topológiák tetszőleges rendszerének a *topológia-szuprémuma* szintén lineáris topológia. Azonban az is nyilvánvalóvá válik, hogy a lineáris topológiák és lineáris operátorok által *induktívan* előállított topológiák általában nem szükségképpen lineárisak. Ez alól nevezetes kivétel a *lineáris faktortopológiák* esete. Megvizsgáljuk a topologikus lineáris faktorterek szeparáltságának kritériumát, majd jellemzést adunk a *lokálisan kompakt* topologikus vektorterekre. Látható lesz, hogy szeparált topologikus vektortér pontosan akkor lokálisan kompakt, ha véges dimenziós; továbbá véges dimenziós valós vagy komplex vektortér felett egyetlen szeparált lineáris topológia létezik. Korábban igazoltuk, hogy véges dimenziós valós vagy komplex vektortér felett bármely két norma ekvivalens, vagyis ugyanazt a topológiát generálja: ez az egyetlen lehetséges szeparált lineáris topológia az adott véges dimenziós vektortér felett. A fejezetet a *topologikus teljesség* fogalmának bevezetésével zárjuk. Bebizonyítjuk, hogy topologikus vektortér sűrű lineáris alterén értelmezett, szeparált teljes topologikus vektortérbe ható folytonos lineáris operátor egyértelműen kiterjeszthető folytonos lineáris operátorrá. Megmutatjuk továbbá, hogy minden topologikus vektortérnek lényegében egyértelműen létezik *szeparált teljes burka*. A topologikus vektorterekkel kapcsolatos teljesség-fogalom eleve semmiféle metrikához nem kötődik. Azonban *normált tér* metrikus teljessége a topologikus teljességgel egyenértékűnek bizonyul.

A második fejezetben a topologikus vektorterek egy fontos típusával foglalkozunk: a *félmetrizálható*, illetve *metrizálható* topologikus vektorterekkel. Ezen a területen a legfontosabb tétel az, hogy egy topologikus vektortér félmetrizálhatósága ekvivalens azzal, hogy a 0-nak létezik *megszámlálható környezetbázisa*, vagyis a topologikus vektortér M_1-tér. Látható lesz, hogy minden félmetrikából (illetve metrikából) származtatható lineáris topológia olyan félmetrikából (illetve metrikából) is származtatható, amely invariáns az eltolásokra nézve, vagyis *transzláció-invariáns*. Bebizonyítjuk *Banach nyíltleképezés-tételét* teljes és metrizálható topologikus vektorterekre. Azt is megmutatjuk, hogy ez a tétel könnyen általánosítható olyan esetre, amikor az indulási topologikus vektortér nem teljes vagy nem metrizálható. Banach nyíltleképezés-tételének itt is fontos következménye a teljes és metrizálható topologikus vektorterek között ható folytonos lineáris bijekciók *homeomorfitása*, valamint a *zártgráf-tétel*.

A harmadik fejezetben a topologikus vektorterek legfontosabb típusát vizsgáljuk: a *lokálisan konvex terek* típusát. A lokálisan konvex terek annyiban speciális topologikus vektorterek, hogy bennük a 0 vektornak létezik *konvex halmazokból álló környezetbázisa*. Ilyen terek például a félnormából származtatható, vagyis *félnormálható* topologikus vektorterek. Kiderül, hogy lokálisan konvex térben a 0-nak egészen speciális alakú halmazokból álló környezetbázisa is létezik; olyan, amelynek az elemei zártak, konvexek, kiegyensúlyozottak és elnyelők. Az ilyen tulajdonságú halmazokat *hordóknak* nevezzük. Lokálisan konvex térben, sőt normált térben is előfordulhat, hogy nem minden hordó környezete a 0-nak. *Hordós tereknek* nevezzük azokat a lokálisan konvex tereket, amelyekben minden hordó a 0-nak környezete. Ezek jelentősége az 5.13. pontban válik nyilvánvalóvá. Megmutatjuk, hogy a lokálisan konvex terek és lineáris operátorok által projektíven előállított topológiák automatikusan lokálisan konvexek. Értelmezzük a *félnorma-rendszer által generált lokálisan konvex topológia* fogalmát: ebben is megnyilvánul annak jelentősége, hogy vektortér feletti lineáris topológia-rendszer topológia-szuprémuma szintén lineáris. Megmutatjuk, hogy minden lokálisan konvex topológia félnorma-rendszer által generálható. Bebizonyítjuk, hogy lokálisan konvex tér pontosan akkor félmetrizálható, ha *megszámlálható* félnorma-rendszer által generálható. A teljes és metrizálható lokálisan konvex tereket *Fréchet-tereknek* nevezzük. Jellemzést adunk a lokálisan konvex terek között ható lineáris operátorok folytonosságára, amikor a lokálisan konvex topológiák félnorma-renszerek által vannak meghatározva.

Habár a topologikus vektorterek és lineáris operátorok által induktívan előállított topológiák nem szükségképpen lineárisak; kiderül, hogy ha E vektortér $\mathbb{K}$ felett, és $(E_i, u_i)_{i\in I}$ olyan rendszer, hogy minden $I \ni i$-re E_i *topologikus vektortér* $\mathbb{K}$ felett és $u_i : E_i \to E$ lineáris operátor, akkor egyértelműen létezik E felett az a *legnagyobb lokálisan konvex topológia*, amelyre minden $i \in I$ esetén az u_i operátor folytonos. Ezt az E feletti lokálisan konvex topológiát nevezzük az $(E_i, u_i)_{i\in I}$ rendszer által *induktívan előállított lokálisan konvex topológiának*. Ez a topológia nem feltételenül egyenlő az E feletti *legnagyobb topológiával*, amely szerint minden $I \ni i$-re az $u_i : E_i \to E$ leképezés folytonos; hanem annál (esetleg szigorúan) kisebb. Megadjuk a 0 vektor egy nevezetes környezetbázisát az induktívan előállított lokálisan konvex topológia szerint, amelynek segítségével könnyen jellemezhetjük az induktívan előállított lokálisan konvex tereken értelmezett, lokálisan konvex terekbe érkező lineáris operátorok folytonosságát. Az induktívan előállított lokálisan konvex topológiák fontos speciális esete a lokálisan konvex topológiák *induktív limesze*, valamint *szigorú induktív limesze*. Ennek a lokálisan konvex topológia-típusnak két jól ismert, érdekes speciális esete van: az egyik a lokálisan kompakt tér feletti folytonos kompakt tartójú függvények terének ún. *természetes induktív topológiája*, és a másik az $\mathbb{R}^n$ nyílt részhalmazán értelmezett, kompakt tartójú, végtelenszer differenciálható függvények terének *természetes induktív topológiája*. Az általános esetben ezek a topológiák *nem metrizálhatók*. Az előbbi fontos szerepet játszik a *topologikus integrálelmélet* mélyebb tételeinek bizonyításában (például a *Gelfand–Dunford-tétel* esetében). Az utóbbi pedig a *disztribúcióelmélet* komolyabb állításainak bizonyításában alkalmazható. A szigorú induktív limeszek tulajdonságaival kapcsolatban két viszonylag könnyen igazolható állítást mutatunk be, amelyeknek fontos alkalmazásai vannak a Radon-mértékek elméletében, valamint a disztribúcióelméletben.

A negyedik fejezetben a Hahn–Banach-tétel algebrai és geometriai formájáról, ezek kapcsolatáról és az elemi alkalmazásaikról lesz szó. A Hahn–Banach-tétel az egyik legsokoldalúbban alkalmazható egzisztencia-tétel lineáris funkcionálokra. Megmutatjuk, hogy a Hahn–Banach-tétel algebrai és geometriai formája *ekvivalensek* egymással. A Hahn–Banach-tétel geometriai formájának alkalmazásaként igazolunk két *szétválasztási tételt*, egyet topologikus vektorterekre, és egy másikat lokálisan konvex terekre. Ezeknek a *Hahn–Banach-szétválasztási tételeknek* fontos alkalmazásai vannak például a *geometriai funkcionálanalízisben*, amelynek egy érdekes témakörével a II. részben foglalkozunk.

Ezután a *lineáris függvényterek* felett természetes módon értelmezhető lineáris topológiákkal, az ún. $\mathfrak{S}$-topológiákkal foglalkozunk, az ötödik fejezetben. Bevezetjük a *pontonkénti konvergencia topológiáját*, az *egyenletes konvergencia topológiáját*, a *kompakt konvergencia topológiáját*, valamint az *operátortopológiák* egy nevezetes típusát. Ezek értelmezéséhez lényeges a halmazok *topologikus korlátosságának* fogalma topologikus vektorterekben. Ez a korlátosság-fogalom tisztán topologikus jellegű, tehát semmiféle metrikával nem kapcsolatos. Megvilágítjuk a metrikus és topologikus korlátosság kapcsolatát metrizálható topologikus vektorterek esetében. Bebizonyítjuk, hogy topologikus vektortér pontosan akkor félnormálható, ha létezik a 0 vektornak korlátos konvex környezete. A folytonos lineáris operátorok természetes általánosításaként bevezetjük a *korlátos operátorok* fogalmát. Jellemzést adunk a lineáris függvényterek feletti $\mathfrak{S}$-topológiák szeparáltságára, valamint a halmazok korlátosságára ezekben a terekben. Értelmezzük az *ekvifolytonos halmazokat* folytonos függvények tereiben, és jellemzést adunk a pontonkénti konvergencia topológiája szerint relatív kompakt halmazokra folytonos lineáris operátorok terében. Ennek fontos következménye az *Alaoglu–Bourbaki-tétel*, amely szerint topologikus vektortér topologikus duálisában minden ekvifolytonos halmaz a pontonkénti konvergencia topológiája szerint relatív kompakt. Ebből kapjuk a *Banach–Alaoglu-tételt*, vagyis azt, hogy (szeparábilis) normált tér topologikus duálisában a zárt egységgömb (metrizálható) kompakt halmaz a pontonkénti konvergencia topológiája szerint. Bebizonyítjuk *Banach egyenletes korlátosság tételét* és a *Banach–Steinhaus-tételt* lokálisan konvex terekre.

A hatodik fejezetben a vektorterek közötti dualitással foglalkozunk. A dualitás fogalmához az a megfigyelés vezet, hogy bizonyos vektortér-párok olyanok, hogy mindegyikük a másik algebrai duálisának egy lineáris alterével azonosítható, lényegében kitüntetett módon. Továbbá, ilyen esetben mindkét vektortéren kijelölhető egy legkisebb szeparált lokálisan konvex topológia (a dualitás által meghatározott *gyenge topológia*), amely szerint folytonos lineáris funkcionálok tere azonosul (a dualitás által) a másik vektortérrel. Ezáltal a folytonos lineáris funkcionálokra vonatkozó funkcionálanalízisbeli ismereteink a dualitásban álló vektorterekre nemtriviális eredményeket szolgáltatnak. A duális párokban szereplő vektortereken a gyenge topológián kívül más szeparált lokálisan konvex topológiák is létezhetnek, amelyek rendelkeznek azzal a tulajdonsággal, hogy a szerintük folytonos lineáris funkcionálok tere a dualitás által a másik térrel azonosul: ezek a *dualitással kompatibilis topológiák*. Bebizonyítjuk a Mackey–Arens-tételt, amely jellemzést ad a dualitással kompatibilis topológiákra, és megmutatja, hogy mindig létezik egy legnagyobb topológia, amely a dualitással kompatibilis: ez a (dualitás által meghatározott) *Mackey-topológia*. Egy szeparált lokálisan konvex topológiát *Mackey-térnek* nevezünk, ha topológiája megegyezik a tér és a topologikus duálisa közötti kanonikus dualitás által meghatározott Mackey-topológiával.

A dualitással kapcsolatban természetes módon bevezethetők a Mackey-terek bizonyos speciális altípusai: az infrahordós, a bornologikus, az ultrabornologikus, a félreflexív, a reflexív és a Montel-terek. Az utolsó fejezetben megvizsgáljuk ezeknek az alaptulajdonságait és egymással való kapcsolatait. Végül bevezetünk néhány természetes lokálisan konvex topológiát bizonyos függvénytereken, és az így értelmezett topologikus vektortereket elhelyezzük az addig megismert terek között.

A topologikus vektorterek elmélete az analízis részletesen kidolgozott, eredményekben rendkívül gazdag területe. A szakirodalomban rendelkezésre álló hatalmas anyagnak csak azt a töredékét tudjuk itt kellő alapossággal tárgyalni, amelynek fontos alkalmazásai vannak a kompakt konvex halmazok és a normált algebrák elméletében, valamint a harmonikus analízis elemeiben. A témakör megértéséhez nélkülözhetetlen a topologikus terek elméletének bizonyos fokú ismerete. Teljesen elégséges IV. részben foglalt függelék anyagának elsajátítása.

Megállapodunk abban, hogy ebben a részben *vektortéren* mindenütt *valós* vagy *komplex* vektorteret értünk. A topologikus vektorterek elmélete általánosítható $\mathbb{R}$-től és $\mathbb{C}$-től különböző *topologikus ferdetestek* feletti vektorterek esetére is, de ez az általánosítás csak az analitikus számelmélet általunk nem érintett területén érdekes.

Lokálisan konvex terek típusai

$$
\begin{tikzcd}[column sep=tiny]
 & & & \textbf{Mackey-tér} & & \\
 & & & \textbf{infrahordós tér} \arrow[u] & & \\
\textbf{félreflexív tér} & & \textbf{hordós tér} \arrow[ur] & & \textbf{bornologikus tér} \arrow[ul] & \\
 & \textbf{reflexív tér} \arrow[ul] \arrow[ur] & & \textbf{ultrabornologikus tér} \arrow[ul] \arrow[ur] & & \textbf{metrizálható tér} \arrow[ul] \\
 & \textbf{Montel-tér} \arrow[u] & & \textbf{Fréchet-tér} \arrow[u] & & \textbf{normálható tér} \arrow[u] \\
 & & & & \textbf{Banach-tér} \arrow[ul] \arrow[ur] & \\
 & & & & \textbf{Hilbert-tér} \arrow[u] &
\end{tikzcd}
$$

Az összes itt álló lokálisan konvex teret *szeparáltnak* tekintjük; de az infrahordós, hordós, bornologikus és ultrabornologikus tereket értelmezzük nem szeparált esetben is.

1. fejezet

Topologikus vektorterek

1.1. Lineáris topológiák tulajdonságai

1.1.1. Definíció. *Legyen E vektortér $\mathbb{K}$ felett. Egy E feletti $\mathscr{T}$ topológiát* **lineárisnak** *mondunk, ha teljesülnek rá az alábbiak.*

(EVT$_{\mathrm{I}}$) *Az $E \times E \to E$; $(x, y) \mapsto x + y$ leképezés folytonos a $\mathscr{T} \times \mathscr{T}$ és $\mathscr{T}$ topológiák szerint.*

(EVT$_{\mathrm{II}}$) *A $\mathbb{K} \times E \to E$; $(\alpha, x) \mapsto \alpha.x$ leképezés folytonos az $\mathscr{E}_{\mathbb{K}} \times \mathscr{T}$ és $\mathscr{T}$ topológiák szerint, ahol $\mathscr{E}_{\mathbb{K}}$ az euklidészi topológia $\mathbb{K}$ felett.*

Az $(E, \mathscr{T})$ párt **topologikus vektortérnek** *nevezzük, ha E vektortér és $\mathscr{T}$ lineáris topológia E felett. Azt mondjuk, hogy az $(E, \mathscr{T})$ topologikus vektortér* **szeparált**, *ha $\mathscr{T}$ Hausdorff-topológia.*

A szokásos jelölési konvenciónak megfelelően a topologikus vektortereket rendszerint egyetlen szimbólummal, az alaphalmaz jelével jelöljük, feltéve, hogy ez nem okozhat félreértést.

A definícióból azonnal következik, hogy ha E topologikus vektortér, $A, B \subseteq E$ és $H \subseteq \mathbb{K}$, akkor

$$\overline{A} + \overline{B} \subseteq \overline{A + B},$$
$$\overline{H}.\overline{A} \subseteq \overline{H.A}.$$

Valóban, az $s : E \times E \to E$; $(x, y) \mapsto x + y$ leképezés folytonos, ezért a folytonosság topologikus jellemzése alapján

$$\overline{A} + \overline{B} = s\langle \overline{A} \times \overline{B} \rangle = s\langle \overline{A \times B} \rangle \subseteq \overline{s\langle A \times B \rangle} = \overline{A + B}.$$

Hasonlóan, az $m : \mathbb{K} \times E \to E$; $(\alpha, x) \mapsto \alpha.x$ leképezés folytonos, ezért a folytonosság topologikus jellemzése alapján

$$\overline{H}.\overline{A} = m\langle \overline{H} \times \overline{A} \rangle = m\langle \overline{H \times A} \rangle \subseteq \overline{m\langle H \times A \rangle} = \overline{H.A}.$$

Ha E topologikus vektortér $\mathbb{K}$ felett, akkor minden $z \in E$ és $\lambda \in \mathbb{K} \setminus \{0\}$ esetén az

$$E \to E; \quad x \mapsto \lambda.x + z$$

leképezés *homeomorfizmus*, hiszen a topologikus vektorterek definíciója alapján ez folytonos függvények kompozíciója, és ez a függvény bijekció, amelynek inverze megegyezik az

$$E \to E; \quad x \mapsto \lambda^{-1}.(x - z)$$

függvénnyel, amely szintén folytonos. Speciálisan, a $\lambda := 1$ választással kapjuk, hogy az E feletti lineáris topológia *transzláció-invariáns*, vagyis ha $x \in E$ tetszőleges pont és $\mathfrak{B}$ az x-nek környezetbázisa E-ben, akkor bármely $E \ni y$-ra az $\{y - x + V | V \in \mathfrak{B}\}$ halmaz az y-nak környezetbázisa. Ezért egy E feletti lineáris topológiát egyértelműen meghatározza az E bármely pontjának bármely környezetbázisa. Az E-ben algebrai szempontból kitüntetett elem a 0 vektor, ezért az E feletti lineáris topológiák előállítása, valamint azok tulajdonságai szempontjából döntő jelentőségű annak kiderítése, hogy a 0 vektor lineáris topológiák szerinti környezetbázisai milyen tulajdonságúak? Ehhez először bevezetünk két halmaztípust vektorterekben.

1.1.2. Definíció. *Legyen E vektortér $\mathbb{K}$ felett.*

– *Azt mondjuk, hogy az $A \subseteq E$ halmaz* **kiegyensúlyozott**, *ha minden $x \in A$ és minden $\lambda \in \mathbb{K}$ esetén, ha $|\lambda| \leq 1$, akkor $\lambda.x \in A$.*

– *Azt mondjuk, hogy az $A \subseteq E$ halmaz* **elnyeli** *a $B \subseteq E$ halmazt, ha létezik olyan $\alpha \in \mathbb{R}^+$, hogy minden $\lambda \in \mathbb{K}$ esetén, ha $|\lambda| \geq \alpha$, akkor $B \subseteq \lambda.A$. Azt mondjuk, hogy az $A \subseteq E$ halmaz* **elnyelő**, *ha A elnyeli az E minden egy elemű részhalmazát; tehát, ha minden $E \ni x$-hez van olyan $\alpha \in \mathbb{R}^+$, hogy minden $\lambda \in \mathbb{K}$ esetén, ha $|\lambda| \geq \alpha$, akkor $x \in \lambda.A$.*

Megjegyzések. Legyen E vektortér $\mathbb{K}$ felett.

1) Könnyen látható, hogy ha $A \subseteq E$ tetszőleges halmaz, akkor a $\overline{B}_1(0;\mathbb{K}).A$ halmaz kiegyensúlyozott, tartalmazza A-t, és részhalmaza az E minden olyan kiegyensúlyozott részhalmazának, amely az A halmazt tartalmazza. Ha $A \subseteq E$, akkor a $\overline{B}_1(0;\mathbb{K}).A$ halmazt az A *kiegyensúlyozott burkának* nevezzük, és az $\mathrm{eq}(A)$ szimbólummal jelöljük.

2) Topologikus vektortér kiegyensúlyozott részhalmazának a lezártja kiegyensúlyozott, mert ha A kiegyensúlyozott halmaz az E topologikus vektortérben, akkor $\overline{B}_1(0;\mathbb{K}).\overline{A} \subseteq \overline{\overline{B}_1(0;\mathbb{K}).A} = \overline{A}$.

3) Ha A kiegyensúlyozott halmaz E-ben, akkor $-A = A$, vagyis az A halmaz *szimmetrikus*. Azonban általában léteznek szimmetrikus, de nem kiegyensúlyozott halmazok.

4) Nyilvánvaló, hogy az E minden elnyelő részhalmazának eleme a 0 vektor. Továbbá,

az E minden olyan részhalmaza elnyelő, amely tartalmaz elnyelő halmazt.

5) Ha $A \subseteq E$ kiegyensúlyozott halmaz és $B \subseteq E$, akkor az "A elnyeli B-t" kijelentés azzal ekvivalens, hogy "létezik olyan $\alpha \in \mathbb{R}^+$, hogy $B \subseteq \alpha.A$". Valóban, ha A elnyeli B-t, akkor legyen $\alpha \in \mathbb{R}^+$ olyan, hogy minden $\lambda \in \mathbb{K}$ számra, $|\lambda| \geq \alpha$ esetén $B \subseteq \lambda.A$; ekkor az $\alpha \in \mathbb{R}^+$ számra $B \subseteq \alpha.A$ teljesül. Megfordítva, legyen $\alpha \in \mathbb{R}^+$ olyan, hogy $B \subseteq \alpha.A$. Ekkor $\lambda \in \mathbb{K}$ és $|\lambda| \geq \alpha$ esetén $B \subseteq \alpha.A = \lambda.\left(\frac{\alpha}{\lambda}.A\right) \subseteq \lambda.A$, mert $\left|\frac{\alpha}{\lambda}\right| \leq 1$ és A kiegyensúlyozott; tehát A elnyeli a B halmazt. Ebből az is látható, hogy az $A \subseteq E$ kiegyensúlyozott halmaz pontosan akkor elnyelő, ha minden $E \ni x$-hez létezik olyan $\alpha \in \mathbb{R}^+$, hogy $x \in \alpha.A$.

6) Nyilvánvaló, hogy az E kiegyensúlyozott részhalmazai tetszőleges nem üres rendszerének a metszete kiegyensúlyozott halmaz. Továbbá, az E elnyelő részhalmazai tetszőleges nem üres *véges* rendszerének a metszete elnyelő halmaz.

7) Ha A kiegyensúlyozott és elnyelő halmaz az E vektortérben, és $(\lambda_n)_{n \in \mathbb{N}}$ olyan sorozat $\mathbb{K}$-ban, amelyre $\sup_{n \in \mathbb{N}} |\lambda_n| = +\infty$, akkor $E = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \lambda_n.A$. Legyen ugyanis $x \in E$ rögzített. Az A halmaz elnyelő, ezért van olyan $\lambda \in \mathbb{K}$, hogy $x \in \lambda.A$. A $\sup_{n \in \mathbb{N}} |\lambda_n| = +\infty$ feltétel alapján van olyan $n \in \mathbb{N}$, hogy $|\lambda_n| \geq |\lambda|$. Ekkor az A halmaz kiegyensúlyozottsága és $\left|\frac{\lambda}{\lambda_n}\right| \leq 1$ miatt $x \in \lambda.A = \lambda_n.\left(\frac{\lambda}{\lambda_n}.A\right) \subseteq \lambda_n.A$.

1.1.3. Tétel. *Legyen E vektortér. Ha $\mathscr{T}$ lineáris topológia E felett és $\mathfrak{B}$ a 0 vektornak környezetbázisa a $\mathscr{T}$ topológia szerint, akkor $\mathfrak{B}$-re teljesülnek a következők.*

(EV$_{\mathrm{I}}$) *Minden $V \in \mathfrak{B}$ halmaz elnyelő, és V-hez létezik olyan $W \in \mathfrak{B}$, hogy $\mathrm{eq}(W) \subseteq V$.*

(EV$_{\mathrm{II}}$) *Minden $\mathfrak{B} \ni V$-hez és $\mathbb{K} \setminus \{0\} \ni \lambda$-hoz létezik olyan $W \in \mathfrak{B}$, hogy $W \subseteq \lambda.V$.*

(EV$_{\mathrm{III}}$) *Minden $V \in \mathfrak{B}$ halmazhoz létezik olyan $W \in \mathfrak{B}$, hogy $W + W \subseteq V$.*

Megfordítva, ha $\mathfrak{B}$ olyan rács, amelynek minden V elemére $V \subseteq E$, továbbá $\mathfrak{B}$-re teljesülnek az (EV$_{\mathrm{I}}$), (EV$_{\mathrm{II}}$) *és* (EV$_{\mathrm{III}}$) *tulajdonságok, akkor létezik E felett egyetlen olyan $\mathscr{T}$ lineáris topológia, amelyre $\mathfrak{B}$ a 0-nak környezetbázisa $\mathscr{T}$ szerint.*

Bizonyítás. (I) Legyen $\mathscr{T}$ lineáris topológia E felett és $\mathfrak{B}$ a 0 vektornak környezetbázisa $\mathscr{T}$ szerint.

Legyen V környezete 0-nak $\mathscr{T}$ szerint és $x \in E$. Az (EVT$_{\mathrm{II}}$) alapján a $\mathbb{K} \to E;\ \lambda \mapsto \lambda.x$ leképezés folytonos a 0-ban a $\mathscr{E}_{\mathbb{K}}$ és $\mathscr{T}$ topológiák szerint, és a 0-hoz 0-t rendel, ezért a V-hez létezik olyan $\delta \in \mathbb{R}^+$, hogy $\overline{B}_\delta(0;\mathbb{K}).x \subseteq V$. Világos, hogy ekkor $\frac{1}{\delta} \in \mathbb{R}^+$ olyan, hogy minden $\lambda \in \mathbb{K}$ esetén, ha $|\lambda| \geq \frac{1}{\delta}$, akkor $x \in \lambda.V$, tehát V elnyeli az $\{x\}$ halmazt.

Legyen V környezete 0-nak $\mathscr{T}$ szerint. Az (EVT$_{\mathrm{II}}$) alapján a $\mathbb{K} \times E \to E;\ (\lambda, x) \mapsto \lambda.x$

leképezés a $(0,0)$ pontban folytonos az $\mathscr{E}_{\mathbb{K}} \times \mathscr{T}$ és $\mathscr{T}$ topológiák szerint, valamint ehhez a 0-t rendeli, ezért létezik olyan $\delta \in \mathbb{R}^+$ és a 0-nak olyan U környezete $\mathscr{T}$ szerint, hogy $\overline{B}_\delta(0;\mathbb{K}).U \subseteq V$. Nyilvánvaló, hogy $\overline{B}_\delta(0;\mathbb{K}).U$ kiegyensúlyozott halmaz E-ben, és tartalmazza $\delta.U$-t, így környezete a 0-nak $\mathscr{T}$ szerint. Ugyanakkor $\mathfrak{B}$ a 0-nak környezetbázisa $\mathscr{T}$ szerint, így van olyan $W \in \mathfrak{B}$, hogy $W \subseteq \delta.U$; ekkor $\mathrm{eq}(W) \subseteq \mathrm{eq}(\delta.U) \subseteq \mathrm{eq}(\overline{B}_\delta(0;\mathbb{K}).U) = \overline{B}_\delta(0;\mathbb{K}).U \subseteq V$. Ezzel megmutattuk, hogy $\mathfrak{B}$-re $(\mathrm{EV_I})$ teljesül.

Legyen V környezete 0-nak $\mathscr{T}$ szerint és $\lambda \in \mathbb{K} \setminus \{0\}$. Az $(\mathrm{EVT_{II}})$ alapján az $E \to E;\ x \mapsto \lambda^{-1}.x$ leképezés folytonos (lineáris operátor) a $\mathscr{T}$ topológia szerint, és a 0-hoz 0-t rendel, így a V-hez létezik a 0-nak olyan U környezete, amelyre $\lambda^{-1}.U \subseteq V$, vagyis $U \subseteq \lambda.V$. Ugyanakkor $\mathfrak{B}$ a 0-nak környezetbázisa $\mathscr{T}$ szerint, így van olyan $W \in \mathfrak{B}$, hogy $W \subseteq U$; ekkor $W \subseteq \lambda.V$. Ezzel igazoltuk, hogy $\mathfrak{B}$-re $(\mathrm{EV_{II}})$ teljesül.

Legyen V környezete 0-nak $\mathscr{T}$ szerint. Az $(\mathrm{EVT_I})$ alapján az $E \times E \to E;\ (x,y) \mapsto x+y$ leképezés folytonos a $(0,0)$ pontban a $\mathscr{T} \times \mathscr{T}$ és $\mathscr{T}$ topológia szerint, és a $(0,0)$-hoz 0-t rendel, így léteznek a 0-nak olyan U_1 és U_2 környezetei $\mathscr{T}$-szerint, amelyekre $U_1+U_2 \subseteq V$. Ekkor $U_1 \cap U_2$ a 0-nak környezete $\mathscr{T}$ szerint, és $\mathfrak{B}$ a 0-nak környezetbázisa $\mathscr{T}$ szerint, így van olyan $W \in \mathfrak{B}$, hogy $W \subseteq U_1 \cap U_2$; ekkor $W+W \subseteq U_1+U_2 \subseteq V$. Ezzel megmutattuk, hogy $\mathfrak{B}$-re $(\mathrm{EV_{III}})$ teljesül.

(II) Legyen $\mathfrak{B}$ olyan rács, amelynek minden V elemére $V \subseteq E$, továbbá $\mathfrak{B}$-re teljesülnek az $(\mathrm{EV_I})$, $(\mathrm{EV_{II}})$ és $(\mathrm{EV_{III}})$ tulajdonságok. Értelmezzük a

$$\mathscr{T} := \{\ \Omega \in \mathscr{P}(E) \mid (\forall\ x \in \Omega)(\exists\ V \in \mathfrak{B}) : x+V \subseteq \Omega\ \}$$

halmazt; megmutatjuk, hogy $\mathscr{T}$ olyan lineáris topológia E felett, amely szerint $\mathfrak{B}$ a 0-nak környezetbázisa.

Nyilvánvaló, hogy $E \in \mathscr{T}$, tehát $\mathscr{T}$-re $(\mathrm{O_I})$ teljesül. Legyen $(\Omega_i)_{i\in I}$ nem üres véges rendszer $\mathscr{T}$-ben, és $x \in \bigcap_{i\in I} \Omega_i$. Ekkor van olyan $(V_i)_{i\in I}$ rendszer, amelyre minden $i \in I$ esetén $V_i \in \mathfrak{B}$ és $x+V_i \subseteq \Omega_i$. A $\mathfrak{B}$ halmaz rács, ezért van olyan $V \in \mathfrak{B}$, hogy $V \subseteq \bigcap_{i\in I} V_i$. Ekkor $x+V \subseteq \bigcap_{i\in I} \Omega_i$, következésképpen $\bigcap_{i\in I} \Omega_i \in \mathscr{T}$, vagyis $\mathscr{T}$-re $(\mathrm{O_{II}})$ teljesül. Ha $(\Omega_i)_{i\in I}$ tetszőleges rendszer $\mathscr{T}$-ben és $x \in \bigcup_{i\in I} \Omega_i$, akkor van olyan $j \in I$, hogy $x \in \Omega_j$, így létezik olyan $V \in \mathfrak{B}$, hogy $x+V \subseteq \Omega_j \subseteq \bigcup_{i\in I} \Omega_i$; tehát $\bigcup_{i\in I} \Omega_i \in \mathscr{T}$, vagyis $\mathscr{T}$-re $(\mathrm{O_{III}})$ teljesül. Ez azt jelenti, hogy $\mathscr{T}$ topológia E felett. (Látható, hogy ennek bizonyításához nem használtuk fel az $(\mathrm{EV_I})$, $(\mathrm{EV_{II}})$ és $(\mathrm{EV_{III}})$ tulajdonságok egyikét sem; csak az volt lényeges, hogy $\mathfrak{B}$ olyan rács, amelynek minden V elemére $V \subseteq E$.)

Bebizonyítjuk, hogy a $\mathfrak{B}$ halmaz környezetbázisa 0-nak a $\mathscr{T}$ topológia szerint. Ehhez azt kell igazolni, hogy minden $V \in \mathfrak{B}$ halmaz a 0-nak könyezete a $\mathscr{T}$ topológia szerint, valamint a 0 vektor $\mathscr{T}$ topológia szerinti bármely U környezetéhez van olyan $V \in \mathfrak{B}$, hogy $V \subseteq U$.

Legyen $V \in \mathfrak{B}$ rögzített, és értelmezzük az $\Omega := \{x \in E | (\exists\, U \in \mathfrak{B}) : x + U \subseteq V\}$ halmazt. Ha $x \in \Omega$ és $U \in \mathfrak{B}$ olyan, hogy $x + U \subseteq V$, akkor $x = x + 0 \in x + U \subseteq V$, mert az $(\mathrm{EV_I})$ szerint U elnyelő halmaz, tehát $0 \in U$. Ez azt jelenti, hogy $\Omega \subseteq V$. Továbbá, $\Omega \in \mathscr{T}$, mert ha $x \in \Omega$ és $U \in \mathfrak{B}$ olyan halmaz, hogy $x + U \subseteq V$, akkor az $(\mathrm{EV_{III}})$ alapján létezik olyan $W \in \mathfrak{B}$, hogy $W + W \subseteq U$, és ekkor $x + W \subseteq \Omega$, hiszen minden $x + W \ni y$-ra $y + W \subseteq (x + W) + W = x + (W + W) \subseteq x + U \subseteq V$. Ezért $\Omega \in \mathscr{T}$, és nyilvánvaló, hogy $0 \in \Omega$, tehát V a 0-nak környezete a $\mathscr{T}$ topológia szerint.

Megfordítva, ha U a 0-nak környezete a $\mathscr{T}$ topológia szerint, akkor létezik olyan $\Omega \in \mathscr{T}$, hogy $0 \in \Omega \subseteq U$, tehát a $\mathscr{T}$ definíciója alapján van olyan $V \in \mathfrak{B}$, amelyre $V = 0 + V \subseteq \Omega \subseteq U$. Ezzel megmutattuk, hogy $\mathfrak{B}$ a 0-nak környezetbázisa a $\mathscr{T}$ topológia szerint.

Megmutatjuk, hogy ha $x \in E$ és $\Omega \in \mathscr{T}$, akkor $x + \Omega \in \mathscr{T}$. Valóban, ha $y \in x + \Omega$ tetszőleges, akkor $y - x \in \Omega$, tehát van olyan $V \in \mathfrak{B}$, amelyre $(y - x) + V \subseteq \Omega$, így $y + V \subseteq x + \Omega$. Ez azt jelenti, hogy $x \in E$ esetén az $E \to E;\ y \mapsto x + y$ leképezés *homeomorfizmus* a $\mathscr{T}$ topológia szerint, tehát minden $E \ni x$-re az $\{x + V | V \in \mathfrak{B}\}$ halmaz környezetbázisa x-nek a $\mathscr{T}$ topológia szerint. Azt kell még igazolni, hogy $\mathscr{T}$ *lineáris topológia* E felett.

Legyen $(x_0, y_0) \in E \times E$ és $V \in \mathfrak{B}$ rögzített. Az $(\mathrm{EV_{III}})$ alapján létezik olyan $W \in \mathfrak{B}$, hogy $W + W \subseteq V$. Ekkor $x_0 + W$ az x_0-nak és $y_0 + W$ az y_0-nak környezete $\mathscr{T}$ szerint, és

$$(x_0 + W) + (y_0 + W) = (x_0 + y_0) + (W + W) \subseteq (x_0 + y_0) + V.$$

Ez azt jelenti, hogy az $E \times E \to E;\ (x, y) \mapsto x + y$ függvény a (tetszőleges) $(x_0, y_0) \in E \times E$ pontban folytonos a $\mathscr{T} \times \mathscr{T}$ és $\mathscr{T}$ topológiák szerint.

Legyen $(\lambda_0, x_0) \in \mathbb{K} \times E$ és $V \in \mathfrak{B}$ rögzített. Az $(\mathrm{EV_{III}})$ alapján létezik olyan $W' \in \mathfrak{B}$, hogy $W' + W' \subseteq V$. A W'-höz ismét az $(\mathrm{EV_{III}})$ alapján létezik olyan $W \in \mathfrak{B}$, hogy $W + W \subseteq W'$. Ekkor teljesül az, hogy $W + W + W = W + W + W + 0 \subseteq (W + W) + (W + W) \subseteq W' + W' \subseteq V$, mert $0 \in W$. Ha $\lambda_0 \neq 0$, akkor az $(\mathrm{EV_{II}})$-t alkalmazva λ_0^{-1}-re és W-re kapjuk olyan $U' \in \mathfrak{B}$ halmaz létezését, amelyre $U' \subseteq \lambda_0^{-1}.W$, vagyis $\lambda_0.U' \subseteq W$. Ha $\lambda_0 = 0$, akkor *bármely* $U' \in \mathfrak{B}$ halmazra $\lambda_0.U' = \{0\} \subseteq W$. Vehetünk tehát olyan $U' \in \mathfrak{B}$ halmazt, amelyre $\lambda_0.U' \subseteq W$. Az $(\mathrm{EV_I})$ alapján W elnyeli az x_0 pontot, tehát létezik olyan $\alpha \in \mathbb{R}^+$, hogy minden $\mathbb{K} \ni \lambda$-ra, ha $|\lambda| \geq \alpha$, akkor $x_0 \in \lambda.W$. Legyen $r := \min(1, 1/\alpha)$. Ekkor $r \in]0, 1]$ olyan valós szám, hogy minden $\mathbb{K} \ni \lambda$-ra, ha $|\lambda| \leq r$, akkor $\lambda.x_0 \in W$, vagyis $\overline{B}_r(0; \mathbb{K}).x_0 \subseteq W$. Végül, az $(\mathrm{EV_I})$ alapján van olyan $U'' \in \mathfrak{B}$, hogy $\overline{B}_1(0; \mathbb{K}).U'' \subseteq W$. A $\mathfrak{B}$ halmaz rács, ezért vehetünk olyan $U \in \mathfrak{B}$ halmazt, hogy $U \subseteq U' \cap U''$. Ekkor $(\lambda, x) \in \overline{B}_r(\lambda_0; \mathbb{K}) \times (x_0 + U)$ esetén $|\lambda - \lambda_0| \leq r \leq 1$ és $x - x_0 \in U \subseteq U' \cap U''$, tehát

$$\lambda.x = \lambda_0.x_0 + (\lambda - \lambda_0).x_0 + \lambda_0.(x - x_0) + (\lambda - \lambda_0).(x - x_0) \in$$

$$\in \lambda_0.x_0 + \overline{B}_r(0;\mathbb{K}).x_0 + \lambda_0.U' + \overline{B}_1(0;\mathbb{K}).U'' \subseteq \lambda_0.x_0 + W + W + W \subseteq \lambda_0.x_0 + V,$$

ami azt jelenti, hogy a $\mathbb{K} \times E \to E$; $(\lambda, x) \mapsto \lambda.x$ leképezés folytonos a (tetszőleges) $(\lambda_0, x_0) \in \mathbb{K} \times E$ pontban a $\mathscr{E}_{\mathbb{K}} \times \mathscr{T}$ és $\mathscr{T}$ topológiák szerint.

Tehát $\mathscr{T}$ olyan lineáris topológia E felett, amely szerint $\mathfrak{B}$ a 0-nak környezetbázisa. Ha $\mathscr{T}'$ szintén olyan lineáris topológia E felett, amely szerint $\mathfrak{B}$ a 0-nak környezetbázisa, akkor a 0 vektor környezetei a $\mathscr{T}$ és $\mathscr{T}'$ topológiák szerint megegyeznek, ezért a $\mathscr{T}$ és $\mathscr{T}'$ linearitása folytán $\mathscr{T} = \mathscr{T}'$. ■

Megjegyezzük, hogy ha E vektortér és $\mathfrak{B}$ olyan rács, amelynek minden V elemére $V \subseteq E$, és V kiegyensúlyozott, akkor az $(\mathrm{EV_I})$ feltétel nyilvánvalóan azzal ekvivalens, hogy a $\mathfrak{B}$ minden eleme elnyelő halmaz. Speciálisan, ha $\mathfrak{B}$ olyan rács, amelynek minden V elemére $V \subseteq E$, és V kiegyensúlyozott és elnyelő, akkor az $(\mathrm{EV_{II}})$ és $(\mathrm{EV_{III}})$ feltételek együttes teljesülése szükséges és elégséges olyan E feletti lineáris topológia egyértelműen létezéséhez, amely szerint $\mathfrak{B}$ a 0-nak környezetbázisa.

Példák (**lineáris topológiákra**).

1) Ha E vektortér, akkor az E feletti antidiszkrét topológia nyilvánvalóan lineáris, mert bármely topologikus térből antidiszkrét térbe érkező bármely függvény folytonos. Ezzel szemben vektortér felett a diszkrét topológia csak akkor lineáris, ha a tér nulla dimenziós, hiszen ha a $\{0\}$ halmaz környezete a 0-nak, akkor $\{0\}$ elnyelő és kiegyensúlyozott, így minden $x \in E$ vektorhoz van olyan $\alpha \in \mathbb{R}^+$, amelyre $x \in \alpha.\{0\} = \{0\}$.

2) Legyen E vektortér és p *félnorma* E felett. Ekkor a

$$d_p : E \times E \to \mathbb{R}_+; \qquad (x, y) \mapsto p(x - y)$$

leképezés félmetrika E felett, és könnyen látható, hogy a d_p által generált $\mathscr{T}_{d_p}$ topológia lineáris, mert ha $x, y, x', y' \in E$ és $\lambda, \lambda' \in \mathbb{K}$, akkor

$$p((x' + y') - (x + y)) = p((x' - x) + (y' - y)) \leq p(x' - x) + p(y' - y),$$

$$p(\lambda'.x' - \lambda.x) \leq |\lambda' - \lambda| p(x) + |\lambda| p(x' - x) + |\lambda' - \lambda| p(x' - x),$$

és ezekből az egyenlőtlenségekből következik $(\mathrm{EVT_I})$ és $(\mathrm{EVT_{II}})$. A jelölések egyszerűsítése céljából a $\mathscr{T}_{d_p}$ topológiát $\mathscr{T}_p$-vel jelöljük. Ha $R \subseteq \mathbb{R}^+$ tetszőleges olyan nem üres halmaz, amelyre $\inf(R) = 0$, akkor a $\{B_r(0; d_p) | r \in R\}$ halmaz környezetbázisa a 0-nak a $\mathscr{T}_p$ topológia szerint, tehát erre a halmazra teljesülnek az $(\mathrm{EV_I})$, $(\mathrm{EV_{II}})$ és $(\mathrm{EV_{III}})$ tulajdonságok. Azt mondjuk, hogy az E vektortér feletti $\mathscr{T}$ lineáris topológia *félnormálható*, ha létezik olyan p félnorma E felett, amelyre $\mathscr{T} = \mathscr{T}_p$. Az mondjuk, hogy az E vektortér feletti $\mathscr{T}$ lineáris topológia *normálható*, ha létezik olyan $\|\cdot\|$ norma E felett, amelyre $\mathscr{T} = \mathscr{T}_{\|\cdot\|}$.

3) Legyen $(T, \mathscr{R}, \theta)$ mértéktér, F normált tér és $p \in]0, 1[$ tetszőleges valós szám. Értelmezzük az

$$\mathscr{F}_F^p(T, \mathscr{R}, \theta) := \left\{ f \in \mathscr{F}(T; F) \,\middle|\, \int_T^* \|f\|^p \, d|\theta| < +\infty \right\}$$

függvényhalmazt, továbbá legyen

$$d_{\theta,p} : \mathscr{F}_F^p(T, \mathscr{R}, \theta) \times \mathscr{F}_F^p(T, \mathscr{R}, \theta) \to \mathbb{R}_+; \quad (f, g) \mapsto \int_T^* \|f - g\|^p \, d|\theta|.$$

(Vigyázzunk arra, hogy itt nem veszünk $1/p$-edik hatványt!) Ekkor $\mathscr{F}_F^p(T, \mathscr{R}, \theta)$ lineáris altere a $\mathscr{F}(T; F)$ függvénytérnek, és $d_{\theta,p}$ olyan félmetrika $\mathscr{F}_F^p(T, \mathscr{R}, \theta)$ felett, amely lineáris topológiát generál.

1.1.4. Állítás. *Minden topologikus vektortér reguláris topologikus tér.*

Bizonyítás. Legyen E topologikus vektortér, $x \in E$ és V környezete x-nek. Azt kell igazolni, hogy létezik x-nek olyan *zárt* környezete, amely részhalmaza V-nek. Ehhez vegyük a 0-nak olyan U környezetét, hogy $x + U \subseteq V$, és legyen W a 0-nak olyan környezete, amelyre $W - W \subseteq U$. Megmutatjuk, hogy $\overline{x + W} \subseteq V$. Valóban, ha $z \in \overline{x + W}$, akkor $(z+W) \cap (x+W) \neq \emptyset$, mert $z+W$ a z-nek környezete; tehát léteznek olyan $x', z' \in W$ pontok, hogy $z+z' = x+x'$, vagyis $z = x+(x'-z') \in x+(W-W) \subseteq x+U \subseteq V$. Ez azt jelenti, hogy $\overline{x + W}$ olyan zárt környezete x-nek, hogy $\overline{x + W} \subseteq V$. ■

1.1.5. Következmény. *Ha E topologikus vektortér és $\mathfrak{B}$ a 0-nak környezetbázisa E-ben, akkor $\bigcap\limits_{V \in \mathfrak{B}} V = \overline{\{0\}}$.*

Bizonyítás. Ha $V \in \mathfrak{B}$, akkor az előző állítás szerint van olyan W *zárt* környezete 0-nak, hogy $W \subseteq V$; ekkor $\overline{\{0\}} \subseteq \overline{W} = W \subseteq V$. Ebből következik, hogy $\overline{\{0\}} \subseteq \bigcap\limits_{V \in \mathfrak{B}} V$.

Legyen $x \in E \setminus \overline{\{0\}}$; ekkor van olyan $W \in \mathfrak{B}$, hogy $0 \notin x + W$. A $W \cap (-W)$ halmaz a 0-nak környezete, tehát van olyan $V \in \mathfrak{B}$, hogy $V \subseteq W \cap (-W)$. Ekkor $0 \in x - V$ esetén $-V \subseteq W$ miatt $0 \in x + W$ teljesülne, ami lehetetlen. Ezért $0 \notin x - V$, így $x \notin V \in \mathfrak{B}$. Ez azt jelenti, hogy $\bigcap\limits_{V \in \mathfrak{B}} V \subseteq \overline{\{0\}}$. ■

1.1.6. Tétel. (Topologikus vektortér szeparáltságának jellemzése) *Ha E topologikus vektortér, akkor a következő állítások ekvivalensek.*

(i) *Az E topologikus tér Hausdorff-tér (vagyis E szeparált topologikus vektortér).*

(ii) *Az E topologikus tér T_1-tér.*

(iii) *Az E topologikus tér T_0-tér.*

(iv) *A* $\{0\}$ *halmaz zárt* E*-ben.*

(v) *A* 0 *minden* $\mathfrak{B}$ *környezetbázisára* E*-ben* $\bigcap_{V\in\mathfrak{B}} V = \{0\}$.

(v)$'$ *A* 0*-nak létezik olyan* $\mathfrak{B}$ *környezetbázisa* E*-ben, amelyre* $\bigcap_{V\in\mathfrak{B}} V = \{0\}$.

Bizonyítás. Nyilvánvaló, hogy (i)⇒(ii) és (ii)⇒(iii) teljesül (tetszőleges E topologikus térre).

(iii)⇒(iv) Tegyük fel, hogy az E topologikus tér T_0-tér, és legyen $x \in E \setminus \{0\}$. Ekkor $x \neq 0$, ezért létezik x-nek olyan V környezete, hogy $0 \notin V$, *vagy* létezik 0-nak olyan V környezete, hogy $x \notin V$. Az első esetben $V \subseteq E \setminus \{0\}$, vagyis x belső pontja az $E \setminus \{0\}$ halmaznak. A második esetben vegyük a 0-nak olyan W környezetét, amely szimmetrikus és $W \subseteq V$. Ekkor $x + W$ olyan környezete x-nek, hogy $x + W \subseteq E \setminus \{0\}$, mert ha $0 \in x + W$ teljesülne, akkor létezne olyan $y \in W$, hogy $0 = x + y$, vagyis $x = -y \in -W = W \subseteq V$, holott $x \notin V$. Tehát a második esetben is belső pontja x az $E \setminus \{0\}$ halmaznak. Ez azt jelenti, hogy $E \setminus \{0\}$ nyílt halmaz, vagyis (iv) teljesül.

(iv)⇒(v) Az előző következmény alapján a 0 minden $\mathfrak{B}$ környezetbázisára $\bigcap_{V\in\mathfrak{B}} V = \overline{\{0\}}$, tehát, ha (iv) teljesül, akkor $\bigcap_{V\in\mathfrak{B}} V = \{0\}$.

(v)⇒(v)$'$ Nyilvánvaló.

(v)$'$ ⇒(i) Legyenek $x, y \in E$ és $x \neq y$. Rögzítsük a 0-nak olyan $\mathfrak{B}$ környezetbázisát, amelyre $\bigcap_{V\in\mathfrak{B}} V = \{0\}$. A feltevés szerint $y - x \neq 0$, ezért van olyan $V \in \mathfrak{B}$, hogy $y - x \notin V$. Legyen W olyan környezete a 0-nak, amelyre $W - W \subseteq V$. Ekkor $x + W$ és $y + W$ diszjunkt halmazok, mert ha $(x + W) \cap (y + W) \neq \emptyset$, akkor léteznek olyan $x', y' \in W$ vektorok, hogy $x + x' = y + y'$, vagyis $y - x = x' - y' \in W - W \subseteq V$, holott $y - x \notin V$. Tehát $x + W$ olyan környezete x-nek és $y + W$ olyan környezete y-nak, amelyek nem metszik egymást, így E Hausdorff-tér. ■

1.2. A legnagyobb lineáris topológia jellemzése

Ha E vektortér és $V \subseteq E$, akkor a $(\overset{n}{V})_{n\in\mathbb{N}}$ halmazsorozatot iterációval értelmezzük úgy, hogy $\overset{0}{V} := \{0\}$, és minden $\mathbb{N} \ni n$-re $\overset{n+1}{V} = \overset{n}{V} + V$; tehát $\overset{1}{V} = V$, $\overset{2}{V} = V + V$, $\overset{3}{V} = V + V + V$, s.í.t.

1.2.1. Állítás. *Ha* E *topologikus vektortér, akkor minden* $\mathbb{N} \ni n$*-hez és a* 0 *minden* V *környezetéhez létezik a* 0*-nak olyan* W *zárt és kiegyensúlyozott környezete, amelyre* $\overset{n}{W} \subseteq V$.

Bizonyítás. Az állítást teljes indukcióval bizonyítjuk. Ha $n = 0$ és V a 0-nak környezete, akkor *bármely* $W \subseteq E$ halmazra (például a $W := E$ zárt és kiegyensúlyozott halmazra is) $\overset{0}{W} := \{0\} \subseteq V$.

Ha V a 0-nak környezete, akkor az E regularitása folytán létezik a 0-nak olyan V' zárt környezete, hogy $V' \subseteq V$. Az $(\mathrm{EV_I})$ alapján a 0-nak létezik olyan U környezete, hogy $\mathrm{eq}(U) = \overline{B}_1(0;\mathbb{K}).U \subseteq V'$. Ha W jelöli az $\mathrm{eq}(U)$ kiegyensúlyozott halmaz lezártját, akkor W olyan zárt és kiegyensúlyozott környezete 0-nak, hogy $\overset{1}{W} := W \subseteq U$, tehát az állítás igaz, az $n = 1$ esetben.

Tegyük fel, hogy $n \in \mathbb{N}^+$ olyan, amelyre teljesül az állítás, és legyen V a 0-nak tetszőleges környezete. Az $(\mathrm{EV_{III}})$ alapján a 0-nak létezik olyan V_1 környezete, hogy $V_1 + V_1 \subseteq V$. Az indukciós hipotézist alkalmazva V_1-re kapjuk, hogy a 0-nak létezik olyan V_2 zárt és kiegyensúlyozott környezete, amelyre $\overset{n}{V}_2 \subseteq V_1$. Most ismét az indukciós hipotézist alkalmazzuk a $V_1 \cap V_2$ környezetre; tehát vesszük a 0-nak olyan W zárt és kiegyensúlyozott környezetét, amelyre $\overset{n}{W} \subseteq V_1 \cap V_2$. Ekkor $W \subseteq V_2$ miatt $\overset{n}{W} \subseteq \overset{n}{V}_2 \subseteq V_1$, továbbá $W \subseteq \overset{n-1}{W} + W =: \overset{n}{W} \subseteq V_1$, így $\overset{n+1}{W} := \overset{n}{W} + W \subseteq V_1 + V_1 \subseteq V$. ■

1.2.2. Lemma. *Legyen E vektortér és $V \subseteq E$. Akkor és csak akkor létezik olyan E feletti lineáris topológia, amely szerint V a 0-nak környezete, ha létezik az E kiegyensúlyozott és elnyelő részhalmazainak olyan $(W_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sorozata, hogy $W_0 + W_0 \subseteq V$ és minden $\mathbb{N} \ni n$-re $W_{n+1} + W_{n+1} \subseteq W_n$.*

Bizonyítás. (I) Legyen V a 0-nak környezete az E feletti $\mathscr{T}$ lineáris topológia szerint. A kiválasztási axiómával kombinált rekurzió-tétel alkalmazásával igazoljuk, hogy létezik a 0 vektor $\mathscr{T}$ topológia szerinti kiegyensúlyozott környezeteinek olyan $(W_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sorozata, hogy $W_0 + W_0 \subseteq V$ és minden $\mathbb{N} \ni n$-re $W_{n+1} + W_{n+1} \subseteq W_n$.

A 0 vektor $\mathscr{T}$ topológia szerinti környezetszűrőjére $(\mathrm{EV_I})$ és $(\mathrm{EV_{III}})$ teljesül, ezért van olyan W_0 kiegyensúlyozott környezete 0-nak, hogy $W_0 + W_0 \subseteq V$. Tegyük fel, hogy $n \in \mathbb{N}$ és $(W_k)_{0\le k\le n}$ a 0 kiegyensúlyozott környezeteinek olyan rendszere, hogy $W_0 + W_0 \subseteq V$ és minden $k < n$ természetes számra $W_{k+1} + W_{k+1} \subseteq W_k$. A W_n halmaz a 0-nak környezete a $\mathscr{T}$ lineáris topológia szerint, ezért van olyan W_{n+1} kiegyensúlyozott környezete a 0-nak, hogy $W_{n+1} + W_{n+1} \subseteq W_n$. Ekkor $(W_k)_{0\le k\le n+1}$ a 0 kiegyensúlyozott környezeteinek olyan rendszere, hogy $W_0 + W_0 \subseteq V$ és minden $k < n+1$ természetes számra $W_{k+1} + W_{k+1} \subseteq W_k$. Ezért létezik a 0 vektor $\mathscr{T}$ topológia szerinti kiegyensúlyozott környezeteinek olyan $(W_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sorozata, hogy $W_0 + W_0 \subseteq V$ és minden $\mathbb{N} \ni n$-re $W_{n+1} + W_{n+1} \subseteq W_n$; ekkor minden $\mathbb{N} \ni n$-re a W_n halmaz elnyelő, tehát a $(W_n)_{n\in\mathbb{N}}$ halmazsorozat eleget tesz a követelményeknek.

(II) Legyen $(W_n)_{n\in\mathbb{N}}$ az E kiegyensúlyozott és elnyelő részhalmazainak olyan sorozata, hogy $W_0 + W_0 \subseteq V$ és minden $\mathbb{N} \ni n$-re $W_{n+1} + W_{n+1} \subseteq W_n$. Vegyünk egy $\mathbb{K} \setminus \{0\}$-ban haladó $(\lambda_m)_{m\in\mathbb{N}}$ zérussorozatot, és legyen

$$\mathfrak{B} := \{\lambda_m.W_n \mid (m,n) \in \mathbb{N}\times\mathbb{N}\}.$$

A $\mathfrak{B}$ (megszámlálható) halmaz minden eleme 0-t tartalmazó részhalmaza E-nek, továbbá $\mathfrak{B}$ rács is, mert ha $(m,n),(m',n') \in \mathbb{N}\times\mathbb{N}$ és $(k,p) \in \mathbb{N}\times\mathbb{N}$ olyan pár, hogy $|\lambda_k| \leq \min(|\lambda_m|,|\lambda_{m'}|)$ és $p \geq \max(n,n')$, akkor

$$\lambda_k.W_p \subseteq (\lambda_k.W_n)\cap(\lambda_k.W_{n'}) = \lambda_m.\left(\frac{\lambda_k}{\lambda_m}.W_n\right) \cap \lambda_{m'}.\left(\frac{\lambda_k}{\lambda_{m'}}.W_{n'}\right) \subseteq$$

$$\subseteq (\lambda_m.W_n)\cap(\lambda_{m'}.W_{n'}),$$

hiszen a $(W_i)_{i\in\mathbb{N}}$ halmazsorozat monoton fogyó és mindegyik tagja kiegyensúlyozott halmaz.

A $\mathfrak{B}$ halmazra teljesülnek az $(\mathrm{EV_I})$, $(\mathrm{EV_{II}})$ és $(\mathrm{EV_{III}})$ tulajdonságok. Valóban, a $\mathfrak{B}$ minden eleme kiegyensúlyozott és elnyelő halmaz, ezért $\mathfrak{B}$-re $(\mathrm{EV_I})$ igaz. Ha $m,n\in\mathbb{N}$ és $\lambda \in \mathbb{K}\setminus\{0\}$, akkor $\lim\limits_{k\to\infty}\lambda_k = 0$ miatt van olyan $k\in\mathbb{N}$, hogy $|\lambda_k| \leq |\lambda\lambda_m|$, tehát a $\lambda_k.W_n \in \mathfrak{B}$ halmazra

$$\lambda_k.W_n = (\lambda\lambda_m).\left(\frac{\lambda_k}{\lambda\lambda_m}.W_n\right) \subseteq (\lambda\lambda_m).W_n = \lambda.(\lambda_m.W_n),$$

hiszen W_n kiegyensúlyozott halmaz. Ezért $\mathfrak{B}$-re $(\mathrm{EV_{II}})$ is teljesül. Ha $m,n\in\mathbb{N}$, akkor a $\lambda_m.W_{n+1} \in \mathfrak{B}$ halmazra

$$\lambda_m.W_{n+1} + \lambda_m.W_{n+1} = \lambda_m.(W_{n+1}+W_{n+1}) \subseteq \lambda_m.W_n$$

teljesül, így $\mathfrak{B}$-re $(\mathrm{EV_{III}})$ is igaz. Tehát 1.1.3. alapján egyértelműen létezik olyan E feletti $\mathscr{T}$ lineáris topológia, amely szerint $\mathfrak{B}$ a 0-nak környezetbázisa. Továbbá, $W_0 = W_0 + \{0\} \subseteq W_0 + W_0 \subseteq V$ és $\lambda_0.W_0 \in \mathfrak{B}$, így $\lambda_0 \neq 0$ miatt W_0 a 0-nak környezete $\mathscr{T}$ szerint. Ezért a V halmaz is környezete a 0-nak $\mathscr{T}$ szerint. ■

1.2.3. Állítás. *Ha E vektortér, akkor létezik E felett legnagyobb lineáris topológia, és ha $\mathfrak{B}$ jelöli azon $V\subseteq E$ halmazok halmazát, amelyekhez létezik az E kiegyensúlyozott és elnyelő részhalmazainak olyan $(W_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sorozata, hogy $W_0+W_0\subseteq V$ és minden $\mathbb{N}\ni n$-re $W_{n+1}+W_{n+1}\subseteq W_n$, akkor $\mathfrak{B}$ a 0-nak környezetszűrője a legnagyobb E feletti lineáris topológia szerint.*

Bizonyítás. A $\mathfrak{B}$ halmaz olyan rács, amelynek minden eleme 0-t tartalmazó részhalmaza E-nek. Valóban, ha $V,V'\in\mathfrak{B}$ és $(W_n)_{n\in\mathbb{N}}$, valamint $(W'_n)_{n\in\mathbb{N}}$ az E kiegyensúlyozott és elnyelő részhalmazainak olyan sorozata, hogy $W_0+W_0\subseteq V$, $W'_0+W'_0\subseteq V'$ és minden $\mathbb{N}\ni n$-re $W_{n+1}+W_{n+1}\subseteq W_n$, $W'_{n+1}+W'_{n+1}\subseteq W'_n$, akkor a kiegyensúlyozott és elnyelő halmazokból álló $(W_n\cap W'_n)_{n\in\mathbb{N}}$ halmazsorozatra teljesül az, hogy $(W_0\cap W'_0)+(W_0\cap W'_0)\subseteq$

$V \cap V'$, valamint minden $\mathbb{N} \ni n$-re $(W_{n+1} \cap W'_{n+1}) + (W_{n+1} \cap W'_{n+1}) \subseteq W_n \cap W'_n$, így $V \cap V' \in \mathfrak{B}$.

A definíció alapján triviális, hogy $V \in \mathfrak{B}$ és $V \subseteq V' \subseteq E$ esetén $V' \in \mathfrak{B}$, ezért $\mathfrak{B}$ szűrő E felett.

Ha $V \in \mathfrak{B}$ és $(W_n)_{n\in\mathbb{N}}$ az E kiegyensúlyozott és elnyelő részhalmazainak olyan sorozata, hogy $W_0 + W_0 \subseteq V$ és minden $\mathbb{N} \ni n$-re $W_{n+1} + W_{n+1} \subseteq W_n$, akkor minden $m \in \mathbb{N}$ esetén $W_m \in \mathfrak{B}$, hiszen $(W_{m+n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ az E kiegyensúlyozott és elnyelő részhalmazainak olyan sorozata, hogy $W_{m+1} + W_{m+1} \subseteq W_m$ és minden $\mathbb{N} \ni n$-re $W_{m+n+2} + W_{m+n+2} \subseteq W_{m+n+1}$, tehát $W_m \in \mathfrak{B}$. Ebből bebizonyítjuk, hogy $\mathfrak{B}$-re az $(\mathrm{EV_I})$, $(\mathrm{EV_{II}})$ és $(\mathrm{EV_{III}})$ tulajdonságok teljesülnek.

Legyen $V \in \mathfrak{B}$, és $(W_n)_{n\in\mathbb{N}}$ az E kiegyensúlyozott és elnyelő részhalmazainak olyan sorozata, hogy $W_0 + W_0 \subseteq V$ és minden $\mathbb{N} \ni n$-re $W_{n+1} + W_{n+1} \subseteq W_n$. Ekkor $W_0 \subseteq V$ és W_0 elnyelő, így V is elnyelő, továbbá $W_0 \in \mathfrak{B}$ és W_0 kiegyensúlyozott, így $\mathfrak{B}$-re $(\mathrm{EV_I})$ teljesül. Ha $\lambda \in \mathbb{K} \setminus \{0\}$, akkor $(\lambda.W_n)_{n\in\mathbb{N}}$ az E kiegyensúlyozott és elnyelő részhalmazainak olyan sorozata, hogy $\lambda.W_0 + \lambda.W_0 \subseteq \lambda.V$ és minden $\mathbb{N} \ni n$-re $\lambda.W_{n+1} + \lambda.W_{n+1} \subseteq \lambda.W_n$, tehát $\lambda.V \in \mathfrak{B}$, vagyis $\mathfrak{B}$-re $(\mathrm{EV_{II}})$ teljesül. Végül, $W_0 + W_0 \subseteq V$ és $W_0 \in \mathfrak{B}$, tehát $\mathfrak{B}$-re $(\mathrm{EV_{III}})$ is teljesül.

Jelölje $\mathscr{T}$ azt az E feletti lineáris topológiát, amely szerint $\mathfrak{B}$ a 0-nak környezetbázisa (valójában a *környezetszűrője*). Ha $\mathscr{T}'$ lineáris topológia E felett és V a 0-nak környezete $\mathscr{T}'$ szerint, akkor az előző lemma alapján létezik az E kiegyensúlyozott és elnyelő részhalmazainak olyan $(W_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sorozata, hogy $W_0 + W_0 \subseteq V$ és minden $\mathbb{N} \ni n$-re $W_{n+1} + W_{n+1} \subseteq W_n$, így $V \in \mathfrak{B}$, vagyis V a 0-nak környezete $\mathscr{T}$ szerint. Ez azt jelenti, hogy $\mathscr{T}$ minden E feletti lineáris topológiánál nagyobb-egyenlő. ■

Később meg fogjuk mutatni, hogy ha E vektortér, akkor az E feletti legnagyobb lineáris topológia Hausdorff-topológia, mert nagyobb-egyenlő a legnagyobb E feletti lokálisan konvex topológiánál, amely Hausdorff-topológia (4.1.3.).

1.3. Lineáris operátor és lineáris funkcionál folytonossága

1.3.1. Állítás. *Legyenek E és F topologikus vektorterek, valamint $u : E \to F$ lineáris operátor. A következő állítások ekvivalensek.*

(i) *u folytonos.*

(ii) *u folytonos a 0 pontban.*

(iii) *Létezik olyan $x \in E$, hogy u folytonos az x pontban.*

Bizonyítás. Világos, hogy (i)⇒(ii) és (ii)⇒(iii) teljesül (tetszőleges E és F topologikus terekre). A (iii)⇒(i) bizonyításához legyen $x_0 \in E$ olyan pont, amelyben u folytonos, és legyen $x \in E$ tetszőleges. Vegyük az $u(x) \in F$ vektornak tetszőleges V környezetét, és legyen W olyan környezete a 0-nak F-ben, amelyre $u(x) + W \subseteq V$. Ekkor $u(x_0) + W$ környezete $u(x_0)$-nak F-ben, tehát az u függvény x_0 pontbeli folytonossága miatt van olyan U' környezete az x_0-nak E-ben, hogy $u\langle U' \rangle \subseteq u(x_0) + W$. Ha U olyan környezete a 0-nak E-ben, hogy $x_0 + U \subseteq U'$, akkor $u\langle x + U \rangle = u(x - x_0) + u\langle x_0 + U \rangle \subseteq u(x - x_0) + u\langle U' \rangle \subseteq u(x - x_0) + u(x_0) + W = u(x) + W$, így u folytonos az x pontban. ■

1.3.2. Jelölés. *Legyenek E és F topologikus vektorterek. Az $E \to F$ folytonos lineáris operátorok halmazát $\mathscr{L}(E; F)$ jelöli. Az $E \to \mathbb{K}$ folytonos lineáris funkcionálok halmazát E' jelöli, és E'-t az E* **topologikus duálisának** *nevezzük.*

Megjegyezzük, hogy ha E és F topologikus vektorterek, akkor $\mathscr{L}(E; F)$ *lineáris altere* az $\mathscr{F}(E; F)$ függvénytérnek. Valóban, ha $s : F \times F \to F$ az összeadás-függvény, akkor az F-re vonatkozó ($\mathrm{EVT_I}$) szerint s a szorzattopológia szerint folytonos, továbbá $u, v \in \mathscr{L}(E; F)$ esetén az $(u, v) : E \to F \times F;\ x \mapsto (u(x), v(x))$ függvény is folytonos, hiszen a komponens-függvényei folytonosak, valamint $u + v = s \circ (u, v)$, ezért $u + v \in \mathscr{L}(E; F)$. Továbbá, ha $\lambda \in \mathbb{K}$ és $h_\lambda : F \to F;\ y \mapsto \lambda.y$, akkor az F-re vonatkozó ($\mathrm{EVT_{II}}$) szerint $h_\lambda \in \mathscr{L}(F; F)$, ezért minden $u \in \mathscr{L}(E; F)$ esetén $\lambda.u = h_\lambda \circ u$ folytonos lineáris operátor.

Emlékeztetünk arra, hogy ha E vektortér $\mathbb{K}$ felett, akkor E^* jelöli az $E \to \mathbb{K}$ lineáris funkcionálok vektorterét, tehát, ha E topologikus vektortér, akkor $E' \subseteq E^*$; és itt még Banach-terek esetében sincs általában egyenlőség.

1.3.3. Állítás. (Lineáris funkcionál folytonosságának jellemzése) *Ha E topologikus vektortér és $u \in E^*$, akkor a következő állítások ekvivalensek.*

(i) $u \in E'$.

(ii) $\mathrm{Ker}(u)$ *zárt lineáris altér E-ben.*

(iii) *Létezik a 0-nak olyan V környezete E-ben, amelyre $u\langle V \rangle$ korlátos halmaz $\mathbb{K}$-ban.*

Bizonyítás. (i)⇒(ii) Ha u folytonos, akkor a $\{0\} \subseteq \mathbb{K}$ zárt halmaz u által létesített inverz képe, vagyis $\mathrm{Ker}(u)$ szükségképpen zárt.
(ii)⇒(iii) Tegyük fel, hogy $\mathrm{Ker}(u)$ zárt és $u \neq 0$. Ekkor $E \setminus \mathrm{Ker}(u)$ nem üres nyílt halmaz, tehát, ha $x \in E \setminus \mathrm{Ker}(u)$ rögzített pont, akkor létezik a 0-nak olyan V kiegyensúlyozott környezete, hogy $x + V \subseteq E \setminus \mathrm{Ker}(u)$, vagyis $(x + V) \cap \mathrm{Ker}(u) = \emptyset$. Állítjuk, hogy ha x és V ilyen tulajdonságú objektumok, akkor $u\langle V \rangle$ korlátos halmaz $\mathbb{K}$-ban. Az állítással ellentétben tegyük fel, hogy $u\langle V \rangle$ nem korlátos $\mathbb{K}$-ban. Ekkor $\lambda \in \mathbb{K}$ esetén van olyan $y \in V$, hogy $|\lambda| < |u(y)|$, tehát a V kiegyensúlyozottsága folytán $\dfrac{\lambda}{u(y)}.y \in V$ és $u\left(\dfrac{\lambda}{u(y)}.y\right) = \lambda$. Tehát az indirekt feltevésből következik, hogy $u\langle V \rangle = \mathbb{K}$. Ezért a $-u(x) \in \mathbb{K}$ számhoz is van olyan $y \in V$, amelyre $u(y) = -u(x)$, vagyis $x + y \in (x + V) \cap \mathrm{Ker}(u)$, ami ellentmond annak, hogy $(x + V) \cap \mathrm{Ker}(u) = \emptyset$. (iii)⇒(i)

Legyen V olyan környezete a 0-nak, amelyre $u\langle V\rangle$ korlátos halmaz $\mathbb{K}$-ban. Legyen $r \in \mathbb{R}^+$ olyan, hogy $u\langle V\rangle \subseteq B_r(0;\mathbb{K})$. Ha $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ tetszőleges és $\lambda \in \mathbb{K}$ olyan, hogy $0 < |\lambda| \leq \varepsilon/r$, akkor $\lambda.V$ a 0-nak olyan környezete E-ben, hogy $u\langle\lambda.V\rangle \subseteq B_{|\lambda|r}(0;\mathbb{K}) \subseteq B_\varepsilon(0;\mathbb{K})$. Ez azt jelenti, hogy u a 0-ban folytonos, így $u \in E'$. ■

1.4. Projektíven előállított lineáris topológiák

1.4.1. Állítás. *Legyen E vektortér, $(E_i)_{i\in I}$ topologikus vektorterek rendszere és $(u_i)_{i\in I}$ olyan rendszer, hogy minden $I \ni i$-re $u_i : E \to E_i$ lineáris operátor. Ekkor az $(E_i, u_i)_{i\in I}$ rendszer által projektíven előállított E feletti topológia lineáris. Ha $I \neq \emptyset$ és $\mathscr{P}_0(I)$ jelöli az I nem üres véges részhalmazainak halmazát, továbbá $(\mathfrak{B}_i)_{i\in I}$ olyan rendszer, hogy minden $I \ni i$-re $\mathfrak{B}_i$ a 0-nak környezetbázisa E_i-ben, akkor a*

$$\mathfrak{B} := \left\{ \bigcap_{i\in J} \overset{-1}{u_i}\langle V_i\rangle \;\middle|\; (J \in \mathscr{P}_0(I)) \wedge \left((V_i)_{i\in J} \in \prod_{i\in J} \mathfrak{B}_i\right) \right\}$$

halmaz a 0-nak környezetbázisa az $(E_i, u_i)_{i\in I}$ rendszer által projektíven előállított E feletti topológia szerint.

Bizonyítás. Jelölje $\mathscr{T}$ az $(E_i, u_i)_{i\in I}$ rendszer által projektíven előállított E feletti topológiát, és minden $I \ni i$-re legyen $\mathscr{T}_i$ az E_i topológiája. Legyen továbbá minden $i \in I$ esetén s_i az E_i vektortér összeadás-függvénye, és m_i a $\mathbb{K} \times E_i \to E_i$ szorzás-függvény. Legyen s az E vektortér összeadás-függvénye, és $m : \mathbb{K} \times E \to E$ a szorzás-függvény.

Először megmutatjuk, hogy az s függvény folytonos a $\mathscr{T} \times \mathscr{T}$ és $\mathscr{T}$ topológiák szerint. A $\mathscr{T}$ topológia inicialitása miatt ez azzal ekvivalens, hogy minden $i \in I$ esetén az $u_i \circ s : E \times E \to E_i$ függvény folytonos a $\mathscr{T} \times \mathscr{T}$ és $\mathscr{T}_i$ topológiák szerint. Legyen $i \in I$ rögzített. A $\mathscr{T}_i$ topológia lineáris, ezért az s_i függvény folytonos a $\mathscr{T}_i \times \mathscr{T}_i$ és $\mathscr{T}_i$ topológiák szerint. Ugyanakkor az u_i leképezés folytonos a $\mathscr{T}$ és $\mathscr{T}_i$ topológiák szerint, így az $u_i \times u_i : E \times E \to E_i \times E_i$ függvény folytonos az $\mathscr{T} \times \mathscr{T}$ és $\mathscr{T}_i \times \mathscr{T}_i$ topológiák szerint. Ezért az $s_i \circ (u_i \times u_i) : E \times E \to E_i$ függvény folytonos a $\mathscr{T} \times \mathscr{T}$ és $\mathscr{T}_i$ topológiák szerint. Az u_i leképezés additivitása folytán $u_i \circ s = s_i \circ (u_i \times u_i)$, tehát az $u_i \circ s : E \times E \to E_i$ függvény folytonos a $\mathscr{T} \times \mathscr{T}$ és $\mathscr{T}_i$ topológiák szerint.

Megmutatjuk, hogy az m függvény folytonos az $\mathscr{E}_{\mathbb{K}} \times \mathscr{T}$ és $\mathscr{T}$ topológiák szerint. A $\mathscr{T}$ topológia inicialitása miatt ez azzal ekvivalens, hogy minden $i \in I$ esetén az $u_i \circ m : \mathbb{K} \times E \to E_i$ függvény folytonos az $\mathscr{E}_{\mathbb{K}} \times \mathscr{T}$ és $\mathscr{T}_i$ topológiák szerint. Legyen $i \in I$ rögzített. A $\mathscr{T}_i$ topológia lineáris, ezért az m_i függvény folytonos az $\mathscr{E}_{\mathbb{K}} \times \mathscr{T}_i$ és $\mathscr{T}_i$ topológiák szerint. Ugyanakkor az u_i leképezés folytonos a $\mathscr{T}$ és $\mathscr{T}_i$ topológiák szerint, így az $id_{\mathbb{K}} \times u_i : \mathbb{K} \times E \to \mathbb{K} \times E_i$ függvény folytonos az $\mathscr{E}_{\mathbb{K}} \times \mathscr{T}$ és $\mathscr{E}_{\mathbb{K}} \times \mathscr{T}_i$ topológiák szerint. Ezért az $m_i \circ (id_{\mathbb{K}} \times u_i) : \mathbb{K} \times E \to E_i$ függvény folytonos az $\mathscr{E}_{\mathbb{K}} \times \mathscr{T}$ és $\mathscr{T}_i$ topológiák szerint. Az u_i leképezés homogenitása folytán $u_i \circ m = m_i \circ (id_{\mathbb{K}} \times u_i)$, tehát az $u_i \circ m : \mathbb{K} \times E \to E_i$ függvény folytonos az $\mathscr{E}_{\mathbb{K}} \times \mathscr{T}$ és $\mathscr{T}_i$ topológiák szerint.

Ezzel bebizonyítottuk, hogy $\mathscr{T}$ lineáris topológia E felett. Tegyük fel, hogy $I \neq \emptyset$, és legyen minden $i \in I$ esetén $\mathfrak{B}_i$ a 0-nak környezetbázisa E_i-ben. Most meg fogjuk mutatni, hogy az állításban értelmezett $\mathfrak{B}$ halmaz a 0-nak környezetbázisa E-ben a $\mathscr{T}$ topológia szerint.

Ha $J \subseteq I$ véges és nem üres halmaz, továbbá $(V_i)_{i\in J} \in \prod_{i\in J} \mathfrak{B}_i$, akkor minden $J \ni i$-hez vehetünk olyan $\Omega_i \in \mathscr{T}_i$ halmazt, hogy $0 \in \Omega_i \subseteq V_i$, így ha $i \in I \setminus J$ esetén $\Omega_i := E_i$, akkor $(\Omega_i)_{i\in I} \in \prod_{i\in I} \mathscr{T}_i$ és $\{i \in I | \Omega_i \neq E_i\} \subseteq J$, tehát $\{i \in I | \Omega_i \neq E_i\}$ véges halmaz. Ezért $0 \in \bigcap_{i\in I} \overset{-1}{u_i}\langle \Omega_i \rangle \in \mathscr{T}$, továbbá $\bigcap_{i\in I} \overset{-1}{u_i}\langle \Omega_i \rangle = \bigcap_{i\in J} \overset{-1}{u_i}\langle \Omega_i \rangle \subseteq \bigcap_{i\in J} \overset{-1}{u_i}\langle V_i \rangle$, ami azt jelenti, hogy a $\mathfrak{B}$ minden eleme környezete a 0-nak a $\mathscr{T}$ topológia szerint.

Legyen V tetszőleges környezete a 0-nak a $\mathscr{T}$ topológia szerint. Ekkor van olyan $\Omega \in \mathscr{T}$, hogy $0 \in \Omega \subseteq V$. Tudjuk, hogy a

$$\left\{ \bigcap_{i\in I} \overset{-1}{u_i}\langle \Omega_i \rangle \;\middle|\; \left((\Omega_i)_{i\in I} \in \prod_{i\in I} \mathscr{T}_i \right) \wedge (\{i \in I | \Omega_i \neq E_i\} \text{ véges halmaz}) \right\}$$

halmaz topologikus bázisa az $(E, \mathscr{T})$ topologikus térnek, ezért van olyan $(\Omega_i)_{i\in I} \in \prod_{i\in I} \mathscr{T}_i$, hogy a $J := \{i \in I | \Omega_i \neq E_i\}$ halmaz véges és $0 \in \bigcap_{i\in I} \overset{-1}{u_i}\langle \Omega_i \rangle \subseteq \Omega$. Ha $J = \emptyset$, akkor $\bigcap_{i\in I} \overset{-1}{u_i}\langle \Omega_i \rangle = E$, így $E = \Omega = V$, ezért *bármely* $V' \in \mathfrak{B}$ esetén $V' \subseteq V$. Ha $J \neq \emptyset$, akkor $\bigcap_{i\in I} \overset{-1}{u_i}\langle \Omega_i \rangle = \bigcap_{i\in J} \overset{-1}{u_i}\langle \Omega_i \rangle$. Ha $i \in J$, akkor $0 \in \Omega_i \in \mathscr{T}_i$ és $\mathfrak{B}_i$ a 0-nak környezetbázisa $\mathscr{T}_i$ szerint, ezért kiválasztható olyan $V_i \in \mathfrak{B}_i$, hogy $V_i \subseteq \Omega_i$. Ekkor teljesülnek a $\bigcap_{i\in J} \overset{-1}{u_i}\langle V_i \rangle \subseteq \bigcap_{i\in J} \overset{-1}{u_i}\langle \Omega_i \rangle = \bigcap_{i\in I} \overset{-1}{u_i}\langle \Omega_i \rangle \subseteq \Omega \subseteq V$ összefüggések, és a definíció szerint $\bigcap_{i\in J} \overset{-1}{u_i}\langle V_i \rangle \in \mathfrak{B}$. Ez azt jelenti, hogy $\mathfrak{B}$ a 0-nak környezetbázisa a $\mathscr{T}$ topológia szerint. ■

1.4.2. Következmény. *Topologikus vektortér lineáris altere az altértopológiával ellátva topologikus vektortér. Topologikus vektorterek lineáris szorzata a szorzattopológiával ellátva topologikus vektortér. Vektortér feletti lineáris topológiák bármely rendszerének a topológia-szuprémuma lineáris topológia.*

Bizonyítás. Az altér-topológia, a szorzattopológia, és a topológia-szuprémum speciális projektíven előállított topológiák. ■

1.4.3. Definíció. *Ha E vektortér és $F \subseteq E^*$ lineáris altér, akkor $\sigma(E, F)$ jelöli a $(\mathbb{K}, u)_{u\in F}$ rendszer által projektíven előállított E feletti topológiát. Ha E topologikus vekortér, akkor a $\sigma(E, E')$ topológiát az E* **gyengített topológiájának** *nevezzük.*

Most jellemzést adunk a gyengített topológia szerint folytonos lineáris funkcionálokra. Ehhez szükségünk lesz a következő lemmára a lineáris algebrából.

1.4.4. Lemma. *Legyen E vektortér a K test felett és $(u_i)_{i\in I}$ tetszőleges nem üres véges rendszer E^*-ban. Ha $u \in E^*$, akkor a következő állítások ekvivalensek.*

a) Létezik olyan $(\alpha_i)_{i\in I} \in K^I$, hogy $u = \sum\limits_{i\in I} \alpha_i.u_i$, vagyis u lineárisan függ az $(u_i)_{i\in I}$ rendszertől E^*-ban.

b) $\bigcap\limits_{i\in I} \mathrm{Ker}(u_i) \subseteq \mathrm{Ker}(u)$.

Bizonyítás. Az a)⇒b) állítás triviális. A b)⇒a) állítás bizonyításához először megjegyezzük, hogy a

$$v : E \to K^I; \qquad x \mapsto (u_i(x))_{i\in I}$$

leképezés nyilvánvalóan olyan lineáris operátor, amelyre $\mathrm{Ker}(v) = \bigcap\limits_{i\in I} \mathrm{Ker}(u_i)$, tehát a b) szerint $\mathrm{Ker}(v) \subseteq \mathrm{Ker}(u)$, így létezik olyan $f : \mathrm{Im}(v) \to K$ lineáris funkcionál, hogy $f \circ v = u$. Legyen $\widetilde{f} : K^I \to K$ az f funkcionál tetszőleges lineáris kiterjesztése $\mathrm{Im}(v)$-ről K^I-re. (Ilyen kiterjesztés létezése könnyen igazolható az I számossága szerinti teljes indukcióval, de a 4.1.1. tételt is alkalmazhatjuk.) A K^I véges dimenziós vektortér feletti lineáris funkcionálok általános alakjának ismeretében kapjuk olyan $(\alpha_i)_{i\in I} \in K^I$ rendszer létezését, amelyre minden $(\zeta_i)_{i\in I} \in K^I$ esetén

$$\widetilde{f}((\zeta_i)_{i\in I}) = \sum_{i\in I} \alpha_i \zeta_i.$$

Ekkor $\widetilde{f} \circ v = u$, ezért minden $x \in E$ esetén

$$u(x) = \widetilde{f}(v(x)) = \widetilde{f}((u_i(x))_{i\in I}) = \sum_{i\in I} \alpha_i u_i(x) = \left(\sum_{i\in I} \alpha_i.u_i\right)(x),$$

vagyis $u = \sum\limits_{i\in I} \alpha_i.u_i$. ■

1.4.5. Állítás. *Legyen E vektortér, $F \subseteq E^*$ lineáris altér, és jelölje E_σ az E vektorteret a $\sigma(E,F)$ topológiával ellátva. Ekkor fennáll az $(E_\sigma)' = F$ egyenlőség. Ha E topologikus vektortér, és E_σ jelöli az E vektorteret a $\sigma(E,E')$ gyengített topológiával ellátva, akkor $(E_\sigma)' = E'$.*

Bizonyítás. A $\sigma(E,F)$ topológia értelmezése alapján az F minden eleme folytonos lineáris funkcionál a $\sigma(E,F)$ szerint, vagyis $F \subseteq (E_\sigma)'$. Legyen $u \in (E_\sigma)'$ tetszőleges. Ekkor létezik a 0-nak olyan V környezete E-ben a $\sigma(E,F)$ topológia szerint és létezik olyan $r \in \mathbb{R}^+$, hogy $u\langle V\rangle \subseteq B_r(0;\mathbb{K})$. Ekkor létezik olyan $(u_i)_{i\in I}$ nem üres véges rendszer F-ben és létezik a 0 szám $\mathbb{K}$-beli környezeteinek olyan $(V_i)_{i\in I}$ rendszere, hogy

$\bigcap_{i\in I} \overset{-1}{u_i}\langle V_i\rangle \subseteq V$. Legyen $\rho \in \mathbb{R}^+$ olyan, hogy $B_\rho(0;\mathbb{K}) \subseteq \bigcap_{i\in I} V_i$; természetesen ekkor $\bigcap_{i\in I} \overset{-1}{u_i}\langle B_\rho(0;\mathbb{K})\rangle \subseteq \bigcap_{i\in I} \overset{-1}{u_i}\langle V_i\rangle$. Tehát, ha $x \in E$ olyan, hogy minden $i \in I$ esetén $|u_i(x)| < \rho$, akkor $|u(x)| < r$. Ha $x \in \bigcap_{i\in I} \mathrm{Ker}(u_i)$, akkor minden $\alpha \in \mathbb{R}^+$ és $i \in I$ esetén $|u_i(\alpha.x)| = 0 < \rho$, tehát $|u(\alpha.x)| < r$, vagyis $|u(x)| < \dfrac{r}{\alpha}$. Ebből következik, hogy $x \in \bigcap_{i\in I} \mathrm{Ker}(u_i)$ esetén $x \in \mathrm{Ker}(u)$, vagyis $\bigcap_{i\in I} \mathrm{Ker}(u_i) \subseteq \mathrm{Ker}(u)$. Az előző lemma szerint létezik olyan $(\lambda_i)_{i\in I}$ rendszer $\mathbb{K}$-ban, amelyre $u = \sum_{i\in I} \lambda_i.u_i \in F$. Tehát $(E_\sigma)' \subseteq F$ is teljesül. ■

1.5. Lineáris faktortopológiák

Vigyázzunk arra, hogy vektortér felett létezhetnek olyan lineáris topológiák, amelyek topológia-infimuma *nem lineáris* topológia. Ez azt jelenti, hogy ha $(E_i)_{i\in I}$ topologikus vektorterek rendszere és $(u_i)_{i\in I}$ olyan rendszer, hogy minden $I \ni i$-re $u_i : E_i \to E$ lineáris operátor, akkor az $(E_i, u_i)_{i\in I}$ rendszer által induktívan előállított E feletti topológia *nem szükségképpen lineáris.* Azonban a lineáris alterek szerinti faktortopológiák induktívan előállított topológiák, és ezek automatikusan lineárisak. Ennek bizonyításához felhasználjuk a következő egyszerű állítást.

1.5.1. Lemma. *Legyenek X, Y, Z topologikus terek, $f : X \to Y$ és $g : Y \to Z$ függvények. Ha f nyílt szürjekció és a $g \circ f : X \to Z$ függvény folytonos, akkor g is folytonos.*

Bizonyítás. Legyen $\Omega \subseteq Z$ nyílt halmaz. A hipotézis szerint $(\overset{-1}{g \circ f})\langle\Omega\rangle$ nyílt halmaz X-ben, és az f szürjektivitása miatt $f\langle(\overset{-1}{g \circ f})\langle\Omega\rangle\rangle = f\langle \overset{-1}{f}\langle \overset{-1}{g}\langle\Omega\rangle\rangle\rangle = \overset{-1}{g}\langle\Omega\rangle$. Az f nyíltsága miatt $f\langle(\overset{-1}{g \circ f})\langle\Omega\rangle\rangle$ nyílt halmaz Y-ban, vagyis $\overset{-1}{g}\langle\Omega\rangle \subseteq Y$ nyílt halmaz. Ez azt jelenti, hogy g folytonos. ■

1.5.2. Állítás. *Legyen E topologikus vektortér, $M \subseteq E$ lineáris altér, és jelölje $\pi_{E/M}$ az $E \to E/M$ kanonikus szürjekciót. Ekkor az E/M lineáris faktortér felett a faktortopológia lineáris és $\pi_{E/M}$ nyílt leképezés.*

Bizonyítás. Ha $\Omega \subseteq E$ nyílt halmaz, akkor $\overset{-1}{\pi}_{E/M}\langle\pi_{E/M}\langle\Omega\rangle\rangle = \Omega + M = \bigcup_{x\in M}(\Omega + x)$, tehát a $\pi_{E/M}\langle\Omega\rangle$ halmaz nyílt E/M-ben, vagyis $\pi_{E/M} : E \to E/M$ nyílt leképezés.

Legyen s_E az E vektortér összeadás-függvénye, és $s_{E/M}$ az E/M lineáris faktortér összeadás-függvénye. Az E/M feletti összeadás értelmezése alapján nyilvánvaló, hogy

$s_{E/M} \circ (\pi_{E/M} \times \pi_{E/M}) = \pi_{E/M} \circ s_E$, és az előző bekezdés szerint $\pi_{E/M} : E \to E/M$ nyílt szürjekció, tehát $\pi_{E/M} \times \pi_{E/M} : E \times E \to (E/M) \times (E/M)$ szintén nyílt szürjekció, valamint a $\pi_{E/M} \circ s_E : E \times E \to E/M$ leképezés folytonos, mivel az E összeadás-függvénye folytonos. Ezért az előző lemma alapján az $s_{E/M} : (E/M) \times (E/M) \to E/M$ összeadás-függvény folytonos.

Legyen m_E a $\mathbb{K} \times E \to E$ szorzás-függvény, és $m_{E/M} : \mathbb{K} \times (E/M) \to E/M$ az E/M lineáris faktortér szorzás-függvénye. A definíció szerint $m_{E/M} \circ (id_{\mathbb{K}} \times \pi_{E/M}) = \pi_{E/M} \circ m_E$, és $\pi_{E/M} : E \to E/M$ nyílt szürjekció, tehát $id_{\mathbb{K}} \times \pi_{E/M} : \mathbb{K} \times E \to \mathbb{K} \times (E/M)$ szintén nyílt szürjekció, valamint a $\pi_{E/M} \circ m_E : \mathbb{K} \times E \to E/M$ leképezés folytonos, mert az E szorzás-függvénye folytonos. Ezért az előző lemma alapján az $m_{E/M} : \mathbb{K} \times (E/M) \to E/M$ szorzás-függvény folytonos. Ez azt jelenti, hogy az E/M lineáris faktortér felett a faktortopológia lineáris. ■

Elnevezés. Ha E topologikus vektortér és $M \subseteq E$ lineáris altér, akkor az E/M lineáris faktorteret a faktortopológiával ellátva az E topologikus vektortér M altér szerinti **topologikus lineáris faktorterének** nevezzük.

1.5.3. Állítás. *Ha E topologikus vektortér és $M \subseteq E$ lineáris altér, akkor az E/M topologikus lineáris faktortér pontosan akkor szeparált, ha M zárt E-ben.*

Bizonyítás. Tegyük fel, hogy M zárt, és legyenek $\xi_1, \xi_2 \in E/M$ olyanok, hogy $\xi_1 \neq \xi_2$. Vegyünk olyan $x_1, x_2 \in E$ vektorokat, amelyekre $\xi_1 = \pi_{E/M}(x_1)$ és $\xi_2 = \pi_{E/M}(x_2)$. Ekkor $x_2 - x_1 \notin M$, tehát az M zártsága miatt vehetjük a 0-nak olyan V környezetét E-ben, hogy $(x_2 - x_1) + V \subseteq E \setminus M$. Legyen W a 0-nak olyan környezete E-ben, hogy $W - W \subseteq V$. Ekkor $(\xi_1 + \pi_{E/M}\langle W \rangle) \cap (\xi_2 + \pi_{E/M}\langle W \rangle) = \emptyset$, különben léteznének olyan $\eta_1, \eta_2 \in \pi_{E/M}\langle W \rangle$, hogy $\xi_1 + \eta_1 = \xi_2 + \eta_2$, és ekkor léteznének olyan $y_1, y_2 \in W$ vektorok, hogy $\eta_1 = \pi_{E/M}(y_1)$ és $\eta_2 = \pi_{E/M}(y_2)$, így $(x_2 + y_2) - (x_1 + y_1) \in M$ teljesülne, ami lehetetlen, mert $(x_2 + y_2) - (x_1 + y_1) = (x_2 - x_1) + (y_2 - y_1) \in (x_2 - x_1) + (W - W) \subseteq (x_2 - x_1) + V \subseteq E \setminus M$. Ugyanakkor a $\pi_{E/M}$ leképezés nyíltsága folytán $\pi_{E/M}\langle W \rangle$ a 0-nak környezete az E/M topologikus faktortérben, tehát E/M Hausdorff-tér.

Megfordítva, tegyük fel, hogy az E/M topologikus lineáris faktortér szeparált, és legyen $x \in E \setminus M$. Ekkor $\pi_{E/M}(x) \neq 0$, tehát a 0-nak létezik olyan V környezete E-ben, hogy $0 \notin \pi_{E/M}(x) + \pi_{E/M}\langle V \rangle = \pi_{E/M}\langle x + V \rangle$. Ha $y \in M$, akkor $\pi_{E/M}(y) = 0$, tehát $y \notin x + V$, ami azt jelenti, hogy $x + V \subseteq E \setminus M$, vagyis x belső pontja $E \setminus M$-nek. Ezért M zárt halmaz E-ben. ■

1.6. Lokálisan kompakt topologikus vektorterek

1.6.1. Állítás. *Szeparált topologikus vektortér minden lokálisan kompakt lineáris altere zárt.*

Bizonyítás. Legyen E szeparált topologikus vektortér és F lokálisan kompakt lineáris altere E-nek. Van olyan Ω nyílt halmaz E-ben, amelyre $F = \overline{F} \cap \Omega$ teljesül (27.6.5.). Legyen $x \in \overline{F}$. Az Ω halmaz nyílt környezete a 0-nak E-ben, ezért $(x + \Omega) \cap F \neq \emptyset$; rögzítsünk egy $y \in (x + \Omega) \cap F$ vektort. Ekkor $y - x \in \Omega$, ugyanakkor $y - x \in F - \overline{F} \subseteq \overline{F} - \overline{F} \subseteq \overline{F}$, mivel $\overline{F}$ lineáris altér E-ben. Tehát $y - x \in \overline{F} \cap \Omega = F$, így $x = y - (y - x) \in F - F \subseteq F$. Ezért $\overline{F} \subseteq F$, vagyis F zárt halmaz E-ben. ■

1.6.2. Állítás. *Ha F topologikus vektortér $\mathbb{K}$ felett, $n \in \mathbb{N}$ és $u : \mathbb{K}^n \to F$ lineáris operátor, akkor u folytonos a $\mathbb{K}^n$ feletti euklidészi topológia szerint.*

Bizonyítás. Az állítást n szerinti teljes indukcióval bizonyítjuk. Az $n = 0$ eset triviális, míg az $n = 1$ esetben az $u : \mathbb{K} \to F$ lineáris operátor megegyezik a $\mathbb{K} \to E;\ \lambda \mapsto \lambda.u(1)$ függvénnyel, amely az $(\mathrm{EVT_{II}})$ alapján folytonos.

Legyen $n \in \mathbb{N}^+$ olyan szám, amelyre teljesül az állítás, és legyen $u : \mathbb{K}^{n+1} \to F$ lineáris operátor. Jelölje $(\mathbf{e}_k)_{0 \leq k \leq n}$ a kanonikus bázist $\mathbb{K}^{n+1}$-ben, és értelmezzük a következő leképezéseket

$$u_1 : \mathbb{K}^n \to F; \quad (\lambda_k)_{0 \leq k \leq n-1} \mapsto \sum_{k=0}^{n-1} \lambda_k.u(\mathbf{e}_k);$$

$$u_2 : \mathbb{K} \to F; \quad \lambda \mapsto \lambda.u(\mathbf{e}_n);$$

$$w : \mathbb{K}^{n+1} \to \mathbb{K}^n \times \mathbb{K}; \quad (\lambda_k)_{0 \leq k \leq n} \mapsto ((\lambda_k)_{0 \leq k \leq n-1}, \lambda_n).$$

Könnyen látható, hogy $u = s_F \circ (u_1 \times u_2) \circ w$, ahol s_F az összedás-függvény F-ben, továbbá u_1 és u_2 lineáris operátorok, és w lineáris bijekció. Az u_2 folytonosságát az imént igazoltuk (ezért volt szükségünk az $n = 1$ esetre). Az u_1 folytonossága az indukciós hipotézisből következik. Ezért az $u_1 \times u_2 : \mathbb{K}^n \times \mathbb{K} \to F \times F$ függvény is folytonos a szorzattopológiák szerint (25.7.3.). A w függvény nyilvánvalóan folytonos a $\mathbb{K}^{n+1}$ feletti euklidészi topológia és a $\mathbb{K}^n \times \mathbb{K}$ feletti szorzattopológia szerint. Ugyanakkor s_F az $(\mathrm{EVT_I})$ miatt folytonos. Ezért az u operátor folytonos, így az állítás igaz $n + 1$-re is. ■

1.6.3. Tétel. (Véges dimenziós alterek jellemzése szeparált topologikus vektortérben) *Legyen E szeparált topologikus vektortér $\mathbb{K}$ felett. Minden $\mathbb{N} \ni n$-re és minden $u : \mathbb{K}^n \to E$ lineáris injekcióra $\mathrm{Im}(u)$ zárt lineáris altér E-ben, és u homeomorfizmus a $\mathbb{K}^n$ feletti euklidészi topológia és az $\mathrm{Im}(u)$ feletti altértopológia szerint.*

Bizonyítás. Az állítást n szerinti teljes indukcióval bizonyítjuk.

Az $n = 0$ esetben $\mathrm{Im}(u) = \{0\}$ zárt lineáris altér E-ben, mert E szeparált; ekkor az u homeomorfitása nyilvánvaló.

Az $n = 1$ esetben az $u : \mathbb{K} \to E$ lineáris operátor megegyezik a $\mathbb{K} \to E;\ \lambda \mapsto \lambda.u(1)$ függvénnyel, amely az $(\mathrm{EVT_{II}})$ alapján folytonos. Ugyanakkor u^{-1} nem nulla lineáris funkcionál az $\mathrm{Im}(u)$ egydimenziós vektortér felett, tehát $\mathrm{Ker}(u^{-1}) = \{0\}$, így $\mathrm{Ker}(u^{-1})$

zárt lineáris altere az $\mathrm{Im}(u)$ topologikus lineáris altérnek, mert az E szeparáltsága miatt $\mathrm{Im}(u)$ is szeparált. A lineáris funkcionálok folytonosságának jellemzése alapján u^{-1} folytonos az $\mathrm{Im}(u)$ altértopológiája szerint. Tehát u homeomorfizmus a $\mathbb{K}$ euklidészi topológiája és az $\mathrm{Im}(u)$ altértopológiája szerint. Ebből következik, hogy $\mathrm{Im}(u)$ lokálisan kompakt halmaz E-ben, így az előző lemma alapján $\mathrm{Im}(u)$ zárt E-ben.

Legyen $n \in \mathbb{N}^+$ olyan szám, amelyre teljesül az állítás, és legyen $u : \mathbb{K}^{n+1} \to E$ lineáris injekció. Jelölje $(\mathbf{e}_k)_{k \in n+1}$ a kanonikus bázist $\mathbb{K}^{n+1}$-ben.

Az $(u(\mathbf{e}_k))_{0 \leq k \leq n}$ rendszer algebrai bázis $\mathrm{Im}(u)$-ban, ezért van olyan $(f_k)_{0 \leq k \leq n}$ rendszer $(\mathrm{Im}(u))^*$-ban, hogy minden $j, k \leq n$ természetes számra $f_j(u(\mathbf{e}_k)) = \delta_{j,k}$. Ekkor minden $\mathrm{Im}(u) \ni x$-re $u^{-1}(x) = (f_k(x))_{0 \leq k \leq n}$, tehát, ha minden $k \leq n$ természetes számra $pr_k : \mathbb{K}^{n+1} \to \mathbb{K}$ a k-adik projekció-függvény, akkor $pr_k \circ u^{-1} = f_k$. Ha $k \leq n$ természetes szám, akkor $\dim(\mathrm{Ker}(f_k)) = n$, tehát az indukciós hipotézis alapján $\mathrm{Ker}(f_k)$ zárt lineáris altér E-ben, hiszen előáll egy $\mathbb{K}^n \to E$ injekció képeként. Ha $k \leq n$ természetes szám, akkor $\mathrm{Ker}(f_k) \subseteq \mathrm{Im}(u)$, így $\mathrm{Ker}(f_k)$ az $\mathrm{Im}(u)$ topologikus altérben is zárt. A lineáris funkcionálok folytonosságának jellemzési tétele alapján minden $k \leq n$ természetes számra $f_k : \mathrm{Im}(u) \to \mathbb{K}$ folytonos lineáris funkcionál az $\mathrm{Im}(u)$ topologikus lineáris altér felett, tehát az $u^{-1} : \mathrm{Im}(u) \to \mathbb{K}^{n+1}$ operátor folytonos az $\mathrm{Im}(u)$ altértopológiája és a $\mathbb{K}^{n+1}$ szorzattopológiája, tehát az euklidészi topológia szerint. Ez azt jelenti, hogy u homeomorfizmus a $\mathbb{K}^{n+1}$ euklidészi tér és az $\mathrm{Im}(u)$ topologikus altér között. A $\mathbb{K}^{n+1}$ euklidészi tér lokálisan kompakt, ezért ebből következik, hogy $\mathrm{Im}(u)$ lokálisan kompakt lineáris altere E-nek. Az előző állítás szerint $\mathrm{Im}(u)$ zárt E-ben, tehát az állítás igaz $n+1$-re is. ■

1.6.4. Következmény. *Szeparált topologikus vektortérben minden véges dimenziós lineáris altér zárt.*

Bizonyítás. Ha E szeparált topologikus vektortér $\mathbb{K}$ felett és F véges dimenziós lineáris altere E-nek, akkor létezik olyan $n \in \mathbb{N}$ és létezik olyan $u : \mathbb{K}^n \to E$ leképezés, amely lineáris injekció és $\mathrm{Im}(u) = F$, ezért az előző állítás szerint F zárt halmaz. ■

1.6.5. Következmény. *Ha E véges dimenziós szeparált topologikus vektortér $\mathbb{K}$ felett, akkor bármely $\mathbb{K}^{\dim(E)} \to E$ lineáris bijekció homeomorfizmus. Véges dimenziós vektortér felett egyetlen lineáris Hausdorff-topológia létezik; ez a topológia lokálisan kompakt és normálható.*

Bizonyítás. Az első kijelentés az előző állítás, míg a második kijelentés az első kijelentés közvetlen következménye. ■

1.6.6. Következmény. *Véges dimenziós vektortér felett bármely két norma ekvivalens.*

Bizonyítás. Norma által generált topológia lineáris és Hausdorff-féle, ezért az állítás azonnal adódik az előző következményből. ■

1.6.7. Következmény. *Legyen E véges dimenziós szeparált topologikus vektortér. Ha F topologikus vektortér, akkor minden $E \to F$ lineáris operátor folytonos. Speciálisan: $E' = E^*$ is teljesül.*

Bizonyítás. Láttuk, hogy a $\mathbb{K}^{\dim(E)}$ euklidészi tér és az E topologikus vektortér között létezik lineáris homeomorfizmus (bármely $\mathbb{K}^{\dim(E)} \to E$ lineáris bijekció ilyen). Ezért az állítás ekvivalens azzal, hogy minden $\mathbb{N} \ni n$-re, minden F topologikus vektortérre, minden $u : \mathbb{K}^n \to F$ lineáris operátor folytonos a $\mathbb{K}^n$ feletti euklidészi topológia szerint; ezt viszont korábban igazoltuk. ■

1.6.8. Lemma. *Legyen E topologikus vektortér.*

a) *Ha V a 0-nak környezete E-ben és $(\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}}$ olyan sorozat $\mathbb{K}$-ban, amelyre $\sup\limits_{n\in\mathbb{N}} |\lambda_n| = +\infty$, akkor $E = \bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} \lambda_n.V$.*

b) *Ha $K \subseteq E$ kompakt halmaz és V a 0-nak környezete E-ben, akkor V elnyeli K-t.*

Bizonyítás. a) Abból következik, hogy a V-hez létezik a 0-nak olyan W környezete, amely kiegyensúlyozott és $W \subseteq V$; ekkor az 1.1. 7) megjegyzés alapján még $E = \bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} \lambda_n.W$ is teljesül.

b) Legyen W a 0-nak olyan kiegyensúlyozott környezete, amelyre $W \subseteq V$, és rögzítsünk tetszőleges olyan $(\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sorozatot $\mathbb{K}$-ban, amelyre $\sup\limits_{n\in\mathbb{N}} |\lambda_n| = +\infty$. Az a) alapján $E = \bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} \lambda_n.\overset{\circ}{W}$, tehát $\left(\lambda_n.\overset{\circ}{W}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ nyílt befedése a K kompakt halmaznak. Ezért létezik olyan $H \subseteq \mathbb{N}$ véges halmaz, hogy $K \subseteq \bigcup\limits_{n\in H} \lambda_n.\overset{\circ}{W}$. Legyen $\alpha \in \mathbb{R}^+$ olyan, hogy minden $H \ni n$-re $\alpha \geq |\lambda_n|$. Ha $\lambda \in \mathbb{K}$ olyan, hogy $|\lambda| \geq \alpha$, akkor minden $n \in H$ esetén $\left|\dfrac{\lambda_n}{\lambda}\right| \leq 1$, így a W kiegyensúlyozottsága miatt $\lambda_n.\overset{\circ}{W} \subseteq \lambda.\left(\dfrac{\lambda_n}{\lambda}\right).\overset{\circ}{W} \subseteq \lambda.W \subseteq \lambda.V$. Ez azt jelenti, hogy minden $\lambda \in \mathbb{K}$ esetén, ha $|\lambda| \geq \alpha$, akkor $K \subseteq \bigcup\limits_{n\in H} \lambda_n.\overset{\circ}{W} \subseteq \lambda.V$, így V elnyeli a K halmazt. ■

1.6.9. Tétel. (Topologikus vektortér lokális kompaktságának jellemzése) *Ha E szeparált topologikus vektortér, akkor a következő állítások ekvivalensek.*

(i) *Az E topologikus tér lokálisan kompakt.*

(ii) *Létezik a 0-nak kompakt környezete E-ben.*

(iii) *Az E vektortér véges dimenziós.*

Bizonyítás. (i)⇒(ii) Nyilvánvaló.

(ii)⇒(iii) Legyen V a 0-nak kompakt környezete E-ben. Rögzítsünk egy olyan $\lambda \in \mathbb{K}$ számot, amelyre $|\lambda| > 1$. Az $(x+V)_{x\in\lambda.V}$ halmazrendszer környezetekkel való befedése a $\lambda.V$ kompakt halmaznak, ezért van olyan $H \subseteq \lambda.V$ véges halmaz, amelyre $\lambda.V \subseteq \bigcup_{x\in H}(x+V)$. Jelölje F a H halmaz által generált (véges dimenziós) lineáris alteret. Meg fogjuk mutatni, hogy $F{=}E$.

Először teljes indukcióval bebizonyítjuk, hogy minden $\mathbb{N} \ni n$-re $\lambda^n.V \subseteq F+V$. Az állítás $n = 0$ esetén triviálisan igaz. Tegyük fel, hogy az állítás igaz az $n \in \mathbb{N}$ számra; ekkor kihasználva az indukciós hipotézist, valamint azt, hogy $F+F = F$ és $\lambda.F = F$ kapjuk a

$$\lambda^{n+1}.V = \lambda.(\lambda^n.V) \subseteq \lambda.(F+V) = \lambda.F + \lambda.V \subseteq F + (F+V) = F+V$$

összefüggéseket, ahol még azt is felhasználtuk, hogy – a H választása szerint – $\lambda.V \subseteq H+V \subseteq F+V$. Ezért az állítás $n+1$-re is igaz.

Az előző lemma a) pontja szerint $E = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \lambda^n.V$, hiszen $|\lambda| > 1$ miatt $\sup_{n\in\mathbb{N}} |\lambda^n| = +\infty$. Ebből következik, hogy $F+V = E$.

Végül, indirekt bizonyítással megmutatjuk, hogy $F = E$. Tegyük fel, hogy $x \in E \setminus F$. Az $F \subseteq E$ lineáris altér véges dimenziós és E szeparált, ezért F zárt, így van a 0-nak olyan W szimmetrikus környezete, hogy $x+W \subseteq E \setminus F$. Ebből, és a W halmaz szimmetrikusságából következik, hogy $x \notin F+W$. A V halmaz kompakt, ezért az előző lemma b) pontja szerint W elnyeli V-t, így létezik olyan $\sigma \in \mathbb{K}\setminus\{0\}$, hogy $V \subseteq \sigma.W$. Ekkor $\sigma.x \notin \sigma.(F+W) = \sigma.F + \sigma.W = F + \sigma.W$ és $F+V \subseteq F+\sigma.W$, így $\sigma.x \notin F+V$, ami ellentmond annak, hogy $F+V = E$.

(iii)⇒(i) Ha $n := \dim(E)$, akkor létezik $\mathbb{K}^n \to E$ lineáris bijekció, amelyről tudjuk, hogy homeomorfizmus a $\mathbb{K}^n$ euklidészi topológiája és az E topológiája szerint, így E lokálisan kompakt, hiszen $\mathbb{K}^n$ is az. ■

1.7. Metrikus és topologikus teljesség lineáris topológia szerint

1.7.1. Definíció. *Ha E topologikus vektortér, akkor az E-ben haladó $(x_i)_{i\in I}$ általánosított sorozatot* **általánosított Cauchy-sorozatnak** *nevezzük, ha a 0 minden V környezetéhez létezik olyan $i \in I$, hogy minden $j, k \in I$ indexre, ha $j \geq i$ és $k \geq i$, akkor $x_j - x_k \in V$. Azt mondjuk, hogy az E topologikus vektortér* **teljes**, *ha minden E-ben haladó általánosított Cauchy-sorozat konvergens E-ben. Azt mondjuk, hogy az E topologikus vektortér* **sorozatteljes**, *ha minden E-ben haladó Cauchy-sorozat konvergens E-ben. Az E topologikus vektortér M részhalmazát* **teljesnek** *mondjuk, ha minden M-ben haladó általánosított Cauchy-sorozat konvergens E-ben és mindegyik limeszpontja eleme M-nek.*

Topologikus vektortérben sem az általánosított Cauchy-sorozatok fogalma, sem a halmazok teljessége nem köthető semmiféle metrikához, hanem a tér lineáris topológiája által van meghatározva. Ezért a félreértések elkerülése érdekében olykor általánosított *topologikus* Cauchy-sorozatokról és *topologikus* teljességről beszélünk topologikus vektorterek esetében; szemben a félmetrikák által meghatározott általánosított *metrikus* Cauchy-sorozatokkal és *metrikus* teljességgel. A következő állításban megvizsgáljuk a metrikus és topologikus teljesség kapcsolatát abban az esetben, amikor értelmes metrikus teljességről beszélni topologikus vektortérben.

1.7.2. Állítás. (A metrikus és topologikus teljesség kapcsolata) *Legyen E félmetrizálható topologikus vektortér és d olyan félmetrika E felett, amelyre $\mathscr{T}_d$ egyenlő az E topológiájával és minden $E \ni x, y, z$-re $d(x+z, y+z) = d(x, y)$ (vagyis feltesszük, hogy d transzláció-invariáns(. Az E topologikus vektortér pontosan akkor teljes, ha az (E, d) félmetrikus tér teljes.*

Bizonyítás. Ha $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ olyan E-ben haladó sorozat, amely a d félmetrika szerint Cauchy-sorozat, akkor $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ általánosított Cauchy-sorozat az E topologikus vektortérben. Valóban, ha V a 0-nak környezete E-ben, akkor van olyan $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$, hogy $B_\varepsilon(0; d) \subseteq V$, és az ε-hoz létezik olyan $N \in \mathbb{N}$, hogy minden $m, n \geq N$ természetes számra $d(x_m, x_n) < \varepsilon$. Ekkor minden $m, n \geq N$ természetes számra a d transzláció-invarianciája folytán $d(x_m - x_n, 0) = d(x_m, x_n) < \varepsilon$, vagyis $x_m - x_n \in B_\varepsilon(0; d) \subseteq V$, így $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ általánosított Cauchy-sorozat az E topologikus vektortérben. Ebből azonnal következik, hogy ha az E topologikus vektortér teljes, akkor metrikusan is teljes, vagyis az (E, d) félmetrikus tér teljes.

Tegyük fel, hogy az (E, d) félmetrikus tér teljes, és legyen $(x_i)_{i\in I}$ tetszőleges általánosított Cauchy-sorozat az E topologikus vektortérben. Legyen $(\varepsilon_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tetszőleges zérussorozat $\mathbb{R}^+$-ban. Felhasználva az I előrendezett halmaz felfelé irányítottságát, a kiválasztási axiómával kombinált rekurzió tételének alkalmazásával könnyen látható olyan I-ben haladó $(i_n)_{n\in\mathbb{N}}$ monoton növő sorozat létezése, hogy minden $n \in \mathbb{N}$ és $j, k \in I$ esetén, ha $j, k \geq i_n$, akkor $x_k - x_j \in B_{\varepsilon_n}(0; d)$. Speciálisan, ha $n \in \mathbb{N}$ és $i \in I$ olyan, hogy $i \geq i_n$, akkor $x_i - x_{i_n} \in B_{\varepsilon_n}(0; d)$. Világos, hogy $(x_{i_n})_{n\in\mathbb{N}}$ Cauchy-sorozat a d félmetrika szerint, mert ha $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ tetszőleges, és $N \in \mathbb{N}$ olyan, hogy $\varepsilon_N < \varepsilon$, akkor minden $m, n > N$ esetén $i_m, i_n \geq i_N$, tehát $x_{i_m} - x_{i_n} \in B_{\varepsilon_N}(0; d) \subseteq B_\varepsilon(0; d)$, vagyis $d(x_{i_m}, x_{i_n}) = d(x_{i_m} - x_{i_n}, 0) < \varepsilon$.

Az (E, d) félmetrikus tér teljessége alapján az $(x_{i_n})_{n\in\mathbb{N}}$ sorozat konvergens E-ben; legyen $x \in E$ olyan pont, amelyhez $(x_{i_n})_{n\in\mathbb{N}}$ konvergál (sok ilyen lehet, mert d nem feltétlenül metrika). Megmutatjuk, hogy az $(x_i)_{i\in I}$ általánosított sorozat konvergál x-hez. Ehhez legyen V tetszőleges környezete a 0-nak E-ben, és vegyük a 0-nak olyan W környezetét, amelyre $W + W \subseteq V$. Van olyan $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$, hogy $B_\varepsilon(0; d) \subseteq W$, és az ε-hoz van olyan $N' \in \mathbb{N}$, hogy minden $n > N'$ természetes számra $\varepsilon_n < \varepsilon$. Létezik továbbá olyan $N'' \in \mathbb{N}$, hogy minden $n > N''$ természetes számra $x_{i_n} - x \in W$. Legyen $n \in \mathbb{N}$ olyan, hogy $n > \max(N', N'')$. Ekkor $i_n \in I$ olyan index, amelyre $i \in I$ és $i \geq i_n$ esetén $x_i - x_{i_n} \in B_{\varepsilon_n}(0; d) \subseteq B_\varepsilon(0; d) \subseteq W$, hiszen $n > N'$, továbbá $x_{i_n} - x \in W$, mert $n > N''$;

így $x_i - x \in W + W \subseteq V$. ■

Könnyen látható, hogy topologikus vektortérben konvergens általánosított sorozat szükségképpen általánosított Cauchy-sorozat, és az előző állítás alapján ennek megfordítása általában nem igaz. A topologikus terek zárt részhalmazainak általánosított sorozatokkal való jellemzési tétele alapján az is nyilvánvaló, hogy topologikus vektortér teljes részhalmaza zárt, és teljes topologikus vektortérben a zárt és teljes halmazok ugyanazok.

1.8. Folytonos lineáris operátor folytonos lineáris kiterjesztése

1.8.1. Tétel. (Folytonos lineáris operátor folytonos lineáris kiterjesztése) *Legyen E topologikus vektortér, F szeparált és teljes topologikus vektortér, $E_0 \subseteq E$ sűrű lineáris altér, és $u_0 : E_0 \to F$ olyan lineáris operátor, amely folytonos az E_0 altértopológiája szerint. Ekkor egyértelműen létezik olyan $u \in \mathscr{L}(E; F)$, amely u_0-nak kiterjesztése.*

Bizonyítás. Az u_0 folytonos kiterjesztésének *egyértelműsége* az E_0 sűrűségéből, F szeparáltságából, és az egyenlőségek folytatásának elvéből következik.

Az u_0 folytonos lineáris kiterjesztése *létezésének* bizonyításához először megjegyezzük, hogy $x \in E$ esetén létezik olyan E_0-ban haladó $(x_i)_{i\in I}$ általánosított sorozat, amely x-hez konvergál E-ben; ez az E_0 sűrűségéből és az érintési pontok általánosított sorozatokkal való jellemzési tételéből következik (26.3.5.).

Legyen $x \in E$ rögzített pont. Megmutatjuk, hogy

a) ha $(x_i)_{i\in I}$ olyan E_0-ban haladó általánosított sorozat, amely x-hez konvergál E-ben, akkor $(u_0(x_i))_{i\in I}$ általánosított Cauchy-sorozat F-ben, tehát az F teljessége miatt konvergens is;

b) ha $(x_\alpha)_{\alpha\in A}$ és $(x'_\beta)_{\beta\in B}$ olyan E_0-ban haladó általánosított sorozatok, amelyek x-hez konvergálnak E-ben, akkor $\lim\limits_{\alpha,\ A} u_0(x_\alpha) = \lim\limits_{\beta,\ B} u_0(x'_\beta)$.

Az a) bizonyításához legyen $(x_i)_{i\in I}$ olyan E_0-ban haladó általánosított sorozat, amely x-hez konvergál E-ben, és legyen V a 0-nak környezete F-ben. Az $u_0 : E_0 \to F$ operátor altér-topológia szerinti folytonossága alapján létezik E-ben a 0-nak olyan U környezete, hogy $u_0\langle U \cap E_0\rangle \subseteq V$. Ugyanakkor $(x_i)_{i\in I}$ általánosított Cauchy-sorozat E-ben, ezért van olyan $i \in I$, hogy $j, k \in I$, $j, k \geq i$ esetén $x_k - x_j \in U$, így $u_0(x_k) - u_0(x_j) = u_0(x_k - x_j) \in u_0\langle U \cap E_0\rangle \subseteq V$, ami azt jelenti, hogy $(u_0(x_i))_{i\in I}$ általánosított Cauchy-sorozat F-ben.

Legyenek $(x_\alpha)_{\alpha\in A}$ és $(x'_\beta)_{\beta\in B}$ olyan E_0-ban haladó általánosított sorozatok, amelyek x-hez konvergálnak E-ben, továbbá legyenek $y := \lim\limits_{\alpha,\ A} u_0(x_\alpha)$ és $y' := \lim\limits_{\beta,\ B} u_0(x'_\beta)$. Legyen

V a 0-nak környezete F-ben, és V_0 olyan *zárt* környezete a 0-nak F-ben, amelyre $V_0 \subseteq V$. Ugyanúgy, mint az imént, a V_0-hoz vegyük a 0-nak olyan U_0 környezetét E-ben, amelyre $u_0\langle U_0 \cap E_0\rangle \subseteq V_0$, és legyen U a 0-nak olyan környezete E-ben, hogy $U - U \subseteq U_0$. A U-hoz rögzítünk olyan $\alpha_U \in A$ és $\beta_U \in B$ indexeket, hogy minden $\alpha \in A$ esetén, ha $\alpha \geq \alpha_U$, akkor $x_\alpha - x \in U$, valamint minden $\beta \in B$ esetén, ha $\beta \geq \beta_U$, akkor $x'_\beta - x \in U$. Legyen $\beta \in B$ olyan, hogy $\beta_U \leq \beta$. Ekkor minden $\alpha \in A$ indexre, ha $\alpha \geq \alpha_U$, akkor

$$u_0(x_\alpha) - u_0(x'_\beta) = u_0(x_\alpha - x'_\beta) = u_0((x_\alpha - x) - (x'_\beta - x)) \in u_0\langle (U - U) \cap E_0\rangle \subseteq$$

$$\subseteq u_0\langle U_0 \cap E_0\rangle \subseteq V_0,$$

tehát $u_0(x_\alpha) \in u_0(x'_\beta) + V_0$. Ez minden olyan $\alpha \in A$ indexre igaz, amelyre $\alpha \geq \alpha_U$, és $u_0(x'_\beta) + V_0$ zárt halmaz F-ben, ezért $y = \lim\limits_{\alpha,\ A} u_0(x_\alpha) \in u_0(x'_\beta) + V_0$. Ez azt jelenti, hogy ha $\beta \in B$ és $\beta \geq \beta_U$, akkor $u_0(x'_\beta) \in y - V_0$, így az $y - V_0$ halmaz zártsága folytán $y' = \lim\limits_{\beta,\ B} u_0(x'_\beta) \in y - V_0$. Tehát $y - y' \in V_0 \subseteq V$, és itt V a 0-nak tetszőleges környezete F-ben. Ez azt jelenti, hogy $y - y' \in \bigcap\limits_{V \in \mathscr{F}} V$, ahol $\mathscr{F}$ a 0 környezeteinek halmaza F-ben. Az F szeparált, ezért $\bigcap\limits_{V \in \mathscr{F}} V = \overline{\{0\}} = \{0\}$, így $y = y'$; ezzel b)-t igazoltuk.

Értelmezzük most az $u : E \to F$ leképezést úgy, hogy minden $x \in E$ esetén

$$u(x) := \lim_{i,\ I} u_0(x_i),$$

ahol $(x_i)_{i \in I}$ tetszőleges olyan E_0-ban haladó általánosított sorozat, amely x-hez konvergál E-ben. Megmutatjuk, hogy az u függvény, amely nyilvánvalóan kiterjesztése u_0-nak *folytonos lineáris operátor.*

Az u leképezés additivitásának bizonyításához legyenek $x, x' \in E$ rögzítettek, és vegyünk olyan $(x_\alpha)_{\alpha \in A}$ és $(x'_\beta)_{\beta \in B}$ általánosított sorozatokat E_0-ban, hogy $(x_\alpha)_{\alpha \in A}$ az x-hez és $(x'_\beta)_{\beta \in B}$ az x'-höz konvergál E-ben. Az $A \times B$ halmazt ellátjuk azzal a $\leq$ relációval, amelyre $(\alpha, \beta), (\alpha', \beta') \in A \times B$ esetén $(\alpha, \beta) \leq (\alpha', \beta')$ pontosan akkor teljesül, ha $\alpha \leq \alpha'$ és $\beta \leq \beta'$; ekkor $A \times B$ szintén felfelé irányított előrendezett halmaz. Tekintsük az $(x_\alpha + x'_\beta)_{(\alpha,\beta) \in A \times B}$ általánosított sorozatot; az E összeadásának folytonossága miatt ez konvergál az $x + x'$ ponthoz E-ben. Ugyanakkor $u(x) := \lim\limits_{\alpha,\ A} u_0(x_\alpha)$ és $u(x') := \lim\limits_{\beta,\ B} u_0(x'_\beta)$ teljesül F-ben, tehát az F összeadásának folytonossága miatt az $(u_0(x_\alpha) + u_0(x'_\beta))_{(\alpha,\beta) \in A \times B}$ általánosított sorozat konvergál az $u(x) + u(x')$ ponthoz F-ben. Ezért az u_0 additivitását és az átviteli elvet alkalmazva kapjuk, hogy

$$u(x + x') := \lim_{(\alpha,\beta),\ A \times B} u_0(x_\alpha + x'_\beta) = \lim_{(\alpha,\beta),\ A \times B} u_0(x_\alpha) + u_0(x'_\beta) =$$

$$= \lim_{\alpha,\ A} u_0(x_\alpha) + \lim_{\beta,\ B} u_0(x'_\beta) =: u(x) + u(x'),$$

vagyis u additív.

Az u leképezés homogenitásának bizonyításához legyenek $x \in E$ és $\lambda \in \mathbb{K}$ rögzítettek. Vegyünk olyan E_0-ban haladó $(x_i)_{i\in I}$ általánosított sorozatot, amely az x-hez konvergál E-ben. Az E-re vonatkozó (EVT$_{\text{II}}$) feltétel miatt a $(\lambda.x_i)_{i\in I}$ általánosított sorozat konvergál $\lambda.x$-hez E-ben. Ugyanakkor $u(x) := \lim\limits_{i,\ I} u_0(x_i)$, tehát az F-re vonatkozó (EVT$_{\text{II}}$) feltétel miatt a $(\lambda.u_0(x_i))_{i\in I}$ általánosított sorozat konvergál $\lambda.u(x)$-hez F-ben. Ezért az u_0 homogenitását alkalmazva kapjuk, hogy

$$u(\lambda.x) := \lim_{i,\ I} u_0(\lambda.x_i) = \lim_{i,\ I} (\lambda.u_0(x_i)) = \lambda.u(x),$$

vagyis u homogén.

Végül, az u folytonosságának bizonyításához legyen V a 0-nak tetszőleges környezete F-ben, és vegyük a 0-nak olyan V_0 zárt környezetét F-ben, amelyre $V_0 \subseteq V$. Az u_0 altér-topológia szerinti folytonosságát alkalmazva legyen U_0 olyan környezete a 0-nak E-ben, hogy $u_0\langle U_0 \cap E_0\rangle \subseteq V_0$, továbbá legyen U olyan környezete a 0-nak E-ben, hogy $U + U \subseteq U_0$. Legyen $x \in U$, és vegyünk olyan E_0-ban haladó $(x_i)_{i\in I}$ általánosított sorozatot, amely x-hez konvergál E-ben. Van olyan $i_0 \in I$, hogy minden $I \ni i$-re, ha $i \geq i_0$, akkor $x_i - x \in U$, így $x_i \in x + U \subseteq U + U \subseteq U_0$. Tehát $i \in I$ és $i \geq i_0$ esetén $x_i \in U_0 \cap E_0$, ezért $u_0(x_i) \in u_0\langle U_0 \cap E_0\rangle \subseteq V_0$. Ebből következik, hogy $u(x) := \lim\limits_{i,\ I} u_0(x_i) \in \overline{V_0} = V_0 \subseteq V$, vagyis $u\langle U\rangle \subseteq V$. Ez azt jelenti, hogy u a 0-ban folytonos. ■

1.9. Topologikus vektortér szeparált teljes burka

1.9.1. Lemma. *Az E topologikus vektortér pontosan akkor teljes, ha létezik olyan $H \subseteq E$ sűrű halmaz, hogy minden H-ban haladó általánosított Cauchy-sorozat konvergens E-ben.*

Bizonyítás. Csak az elégségességet kell igazolni. Legyen $(x_i)_{i\in I}$ általánosított Cauchy-sorozat E-ben, és jelölje $\mathscr{F}$ a 0 környezeteinek halmazát E-ben. A H halmaz sűrű E-ben, ezért minden $I \ni i$-re és $\mathscr{F} \ni V$-re $(x_i + V) \cap H \neq \emptyset$, így a kiválasztási axióma alapján $\prod\limits_{(i,V)\in I\times\mathscr{F}} ((x_i + V) \cap H) \neq \emptyset$. Legyen $((x_{i,V}))_{(i,V)\in I\times\mathscr{F}}$ tetszőleges eleme ennek a szorzathalmaznak. Az $I \times \mathscr{F}$ halmazon bevezetjük a $\leq$ relációt úgy, hogy $(i,V), (i',V') \in I \times \mathscr{F}$ esetén $(i,V) \leq (i',V')$ azt jelentse, hogy $i \leq i'$ és $V' \subseteq V$. Ezzel a $\leq$ relációval ellátva $I \times \mathscr{F}$ felfelé irányított előrendezett halmaz, tehát $((x_{i,V}))_{(i,V)\in I\times\mathscr{F}}$ általánosított sorozat.

Megmutatjuk, hogy $((x_{i,V}))_{(i,V)\in I\times\mathscr{F}}$ általánosított Cauchy-sorozat. Legyen V a 0-nak környezete E-ben, és V_0 a 0-nak olyan szimmetrikus környezete, hogy $V_0 + V_0 + V_0 \subseteq V$.

A V_0-hoz veszünk olyan $i_0 \in I$ indexet, hogy minden $I \ni j, k$-ra, ha $j, k \geq i_0$, akkor $x_k - x_j \in V_0$. Ekkor $(i_0, V_0) \in I \times \mathscr{F}$, és ha $(j, U), (k, W) \in I \times \mathscr{F}$ olyanok, hogy $(i_0, V_0) \leq (j, U)$ és $(i_0, V_0) \leq (k, W)$, akkor $i_0 \leq j, k$ és $U \subseteq V_0$, $W \subseteq V_0$, így

$$x_{k,W} - x_{j,U} \in (x_k + W) - (x_j + U) = (x_k - x_j) + (W - U) \subseteq V_0 + V_0 + V_0 \subseteq V.$$

Tehát $(x_{i,V})_{(i,V)\in I\times\mathscr{F}}$ olyan általánosított Cauchy-sorozat E-ben, amely H-ban halad. A hipotézis szerint vehetünk olyan $x \in E$ pontot, hogy $((x_{i,V}))_{(i,V)\in I\times\mathscr{F}}$ konvergál x-hez E-ben.

Megmutatjuk, hogy az $(x_i)_{i\in I}$ általánosított sorozat konvergál x-hez E-ben. Ehhez legyen V a 0-nak környezete E-ben, és V_0 olyan környezete a 0-nak, hogy $V_0 - V_0 \subseteq V$. A V_0-hoz vegyünk olyan $(i, W) \in I \times \mathscr{F}$ elemet, hogy minden $I \times \mathscr{F} \ni (j, U)$-ra, ha $(i, W) \leq (j, U)$, akkor $x_{j,U} \in x + V_0$. Ha $j \in I$ és $j \geq i$, akkor $(i, W) \leq (j, W \cap V_0)$, ezért $x_{j,W\cap V_0} \in (x + V_0) \cap (x_j + (W \cap V_0))$, amiből következik, hogy

$$x_j = x_{j,W\cap V_0} - (x_{j,W\cap V_0} - x_j) \in (x + V_0) - (W \cap V_0) \subseteq x + (V_0 - V_0) \subseteq x + V,$$

vagyis az $(x_i)_{i\in I}$ általánosított sorozat konvergál x-hez E-ben. ■

1.9.2. Tétel. (Topologikus vektortér szeparált teljesítése) *Legyen E topologikus vektortér.*

a) *Létezik olyan $(\widehat{E}, \pi)$ pár, hogy $\widehat{E}$ szeparált teljes topologikus vektortér, $\pi : E \to \widehat{E}$ folytonos lineáris operátor, $\overline{\mathrm{Im}(\pi)} = \widehat{E}$, $\mathrm{Ker}(\pi) = \overline{\{0\}}$ és teljesül a következő állítás:*

(C) *Minden F szeparált teljes topologikus vektortérhez és $u \in \mathscr{L}(E; F)$ operátorhoz létezik egyetlen olyan $\widehat{u} \in \mathscr{L}(\widehat{E}; F)$, hogy $\widehat{u} \circ \pi = u$.*

b) *Ha (E_1, π_1) és (E_2, π_2) olyan párok, amelyekre E_1 és E_2 szeparált teljes topologikus vektorterek, valamint $\pi_1 \in \mathscr{L}(E; E_1)$ és $\pi_2 \in \mathscr{L}(E; E_2)$, és teljesül a (C) állítás (az $(\widehat{E}, \pi)$ helyére az (E_1, π_1), illetve (E_2, π_2) párokat helyettesítve), akkor egyértelműen létezik olyan $w : E_1 \to E_2$ lineáris homeomorfizmus, amelyre $w \circ \pi_1 = \pi_2$.*

Bizonyítás. (I) Nevezzünk egy E feletti $\mathfrak{f}$ szűrőt *Cauchy-szűrőnek*, ha a 0 minden V környezetéhez létezik olyan $F \in \mathfrak{f}$, hogy $F - F \subseteq V$. Egy E feletti $\mathfrak{m}$ Cauchy-szűrőt *minimálisnak* nevezünk, ha $\mathfrak{m}$-nek egyetlen E feletti Cauchy-szűrő sem valódi részhalmaza, vagyis $\mathfrak{m}$ a tartalmazás tekintetében minimális eleme az E feletti Cauchy-szűrők halmazának. A továbbiakban $\mathfrak{F}$ fogja jelölni a 0 környezetszűrőjét E-ben.

Megmutatjuk, hogy ha $\mathfrak{f}$ Cauchy-szűrő E-ben, akkor az

$$\mathfrak{m} := \{M \subseteq E \mid (\exists\ F \in \mathfrak{f})(\exists\ V \in \mathfrak{F}) :\ F + V \subseteq M\}$$

halmaz az egyetlen olyan minimális Cauchy-szűrő E felett, amelyre $\mathfrak{m} \subseteq \mathfrak{f}$. A definíció alapján $\mathfrak{m}$ nyilván nem üres, és minden eleme nem üres halmaz. Ha az $X \subseteq E$ halmazhoz létezik olyan $M \in \mathfrak{m}$, hogy $M \subseteq X$, akkor van olyan $F \in \mathfrak{f}$ és $V \in \mathfrak{F}$, hogy $F + V \subseteq M$, így $F + V \subseteq X$, vagyis $X \in \mathfrak{m}$. Legyenek $M_1, M_2 \in \mathfrak{m}$, és vegyünk olyan $F_1, F_2 \in \mathfrak{f}$ és $V_1, V_2 \in \mathfrak{F}$ halmazokat, hogy $F_1 + V_1 \subseteq M_1$ és $F_2 + V_2 \subseteq M_2$. Ekkor $F_1 \cap F_2 \in \mathfrak{f}$ és $V_1 \cap V_2 \in \mathfrak{F}$, valamint $(F_1 \cap F_2) + (V_1 + V_2) \subseteq (F_1 + V_1) \cap (F_2 + V_2) \subseteq M_1 \cap M_2$, tehát $M_1 \cap M_2 \in \mathfrak{m}$. Ez azt jelenti, hogy $\mathfrak{m}$ szűrő E felett. Ez Cauchy-szűrő, mert ha V a 0-nak tetszőleges környezete E-ben, és V_1 a 0-nak olyan környezete, hogy $V_1 + V_1 \subseteq V$, akkor van olyan $F \in \mathfrak{f}$, hogy $F - F \subseteq V_1$ (mert $\mathfrak{f}$ Cauchy-szűrő), és van olyan W környezete a 0-nak, hogy $W - W \subseteq V_1$, így $(F + W) - (F + W) = (F - F) + (W - W) \subseteq V_1 + V_1 \subseteq V$, és $F + W \in \mathfrak{m}$. Tehát $\mathfrak{m}$ Cauchy-szűrő E felett, és nyilvánvaló, hogy $\mathfrak{m} \subseteq \mathfrak{f}$, hiszen ha $M \in \mathfrak{m}$ és $F \in \mathfrak{f}$ valamint $V \in \mathfrak{F}$ olyanok, hogy $F + V \subseteq M$, akkor $F \subseteq F + V$ miatt $M \in \mathfrak{f}$. Megmutatjuk, hogy ha $\mathfrak{n}$ olyan Cauchy-szűrő E felett, hogy $\mathfrak{n} \subseteq \mathfrak{f}$, akkor $\mathfrak{m} \subseteq \mathfrak{n}$; ebből már nyilvánvalóan következik, hogy $\mathfrak{m}$ az egyetlen olyan minimális Cauchy-szűrő E felett, amelyre $\mathfrak{m} \subseteq \mathfrak{f}$. Legyen tehát $\mathfrak{n}$ olyan Cauchy-szűrő E felett, hogy $\mathfrak{n} \subseteq \mathfrak{f}$, és vegyünk egy $M \in \mathfrak{m}$ halmazt; azt kell igazolni, hogy $M \in \mathfrak{n}$. Az M-hez legyen $F \in \mathfrak{f}$ és $V \in \mathfrak{F}$ olyan, hogy $F + V \subseteq M$. Az $\mathfrak{n}$ Cauchy-szűrő, tehát van olyan $N \in \mathfrak{n}$, hogy $N - N \subseteq V$. Ekkor $\mathfrak{n} \subseteq \mathfrak{f}$ miatt $N \in \mathfrak{f}$, így $N \cap F \neq \emptyset$; legyen $x_0 \in N \cap F$ rögzített. Ha $x \in N$, akkor $x - x_0 \in N - N \subseteq V$, tehát $x \in x_0 + V \subseteq F + V$; ami azt jelenti, hogy $N \subseteq F + V \subseteq M$. Ezért $M \in \mathfrak{n}$ teljesül.

Megmutatjuk, hogy egy E feletti $\mathfrak{m}$ Cauchy-szűrő pontosan akkor minimális, ha minden $\mathfrak{m} \ni M$-hez van olyan $M' \in \mathfrak{m}$ és $V \in \mathfrak{F}$, hogy $M' + V \subseteq M$. Valóban, legyen $\mathfrak{m}_0 := \{M \subseteq E | (\exists\, M' \in \mathfrak{m})(\exists\, V \in \mathfrak{F}) :\ M' + V \subseteq M\}$. Az előző bekezdés alapján $\mathfrak{m}_0$ az egyetlen $\mathfrak{m}$ által tartalmazott minimális Cauchy-szűrő E felett, ezért az $\mathfrak{m}$ minimalitása ekvivalens a $\mathfrak{m} = \mathfrak{m}_0$ egyenlőséggel. Ez az egyenlőség pedig éppen azt jelenti, hogy minden $\mathfrak{m} \ni M$-hez van olyan $M' \in \mathfrak{m}$ és $V \in \mathfrak{F}$, hogy $M' + V \subseteq M$.

Megmutatjuk, hogy minden E feletti $\mathfrak{m}$ minimális Cauchy-szűrőre teljesül az, hogy minden $M \in \mathfrak{m}$ esetén $\overset{\circ}{M} \in \mathfrak{m}$ (ezért aztán $\overset{\circ}{M} \neq \emptyset$). Valóban, ha $M \in \mathfrak{m}$, akkor az előző bekezdés alapján van olyan $M' \in \mathfrak{m}$ és $V \in \mathfrak{F}$, hogy $M' + V \subseteq M$; ekkor $M' \subseteq \overset{\circ}{M}$, mert ha $x \in M'$, akkor $x + V \subseteq M' + V \subseteq M$ és $x + V$ az x-nek környezete E-ben; ezért $\overset{\circ}{M} \in \mathfrak{m}$ is igaz.

Az E minden pontjának a környezetszűrője minimális Cauchy-szűrő E felett. Legyen ugyanis $x \in E$ rögzített, és $\mathfrak{m} := \{x + V | V \in \mathfrak{F}\}$, vagyis $\mathfrak{m}$ az x környezetszűrője E-ben. Ez Cauchy-szűrő, mert $V \in \mathfrak{F}$ esetén van olyan $W \in \mathfrak{F}$, hogy $W - W \subseteq V$, tehát $(x + W) - (x + W) = W - W \subseteq V$. Ha $V \in \mathfrak{F}$, és $W \in \mathfrak{F}$ olyan, hogy $W + W \subseteq V$, akkor $(x + W) + W \subseteq x + V$, és $x + W \in \mathfrak{m}$, így az előzőek alapján $\mathfrak{m}$ minimális Cauchy-szűrő E felett.

(II) Jelölje E az E feletti minimális Cauchy-szűrők halmazát. Minden $(\mathfrak{m}_1, \mathfrak{m}_2) \in E \times E$ és $(\lambda, \mathfrak{m}) \in (\mathbb{K} \setminus \{0\}) \times E$ esetén legyen

$$\mathfrak{m}_1 + \mathfrak{m}_2 := \{\ M \subseteq E \mid (\exists\, M_1 \in \mathfrak{m}_1)(\exists\, M_2 \in \mathfrak{m}_2) :\ M_1 + M_2 \subseteq M\ \},$$

$$\lambda.\mathfrak{m} := \{ \ \lambda.M \mid M \in \mathfrak{m} \ \},$$

valamint legyen $0.\mathfrak{m} := \mathfrak{F}$.

Megmutatjuk, hogy $(\mathfrak{m}_1, \mathfrak{m}_2) \in E \times E$ esetén $\mathfrak{m}_1 + \mathfrak{m}_2 \in E$. Világos, hogy $\mathfrak{m}_1 + \mathfrak{m}_2 \neq \emptyset$, és minden $M \in \mathfrak{m}_1 + \mathfrak{m}_2$ esetén $M \neq \emptyset$. Ha $M, N \in \mathfrak{m}_1 + \mathfrak{m}_2$, és $M_1, N_1 \in \mathfrak{m}_1$, valamint $M_2, N_2 \in \mathfrak{m}_2$ olyanok, hogy $M_1 + M_2 \subseteq M$ és $N_1 + N_2 \subseteq N$, akkor $(M_1 \cap N_1) + (M_2 \cap N_2) \subseteq (M_1 + M_2) \cap (N_1 + N_2) \subseteq M \cap N$, és $M_1 \cap N_1 \in \mathfrak{m}_1$, valamint $M_2 \cap N_2 \in \mathfrak{m}_2$, ezért $M \cap N \in \mathfrak{m}_1 + \mathfrak{m}_2$. Ha $X \subseteq E$, $M \in \mathfrak{m}_1 + \mathfrak{m}_2$ és $M \subseteq X$, akkor léteznek olyan $M_1 \in \mathfrak{m}_1$ és $M_2 \in \mathfrak{m}_2$, hogy $M_1 + M_2 \subseteq M \subseteq X$, tehát $X \in \mathfrak{m}_1 + \mathfrak{m}_2$. Ezzel megmutattuk, hogy $\mathfrak{m}_1 + \mathfrak{m}_2$ szűrő E felett. Ez Cauchy-szűrő, mert ha V a 0-nak környezete E-ben, és W a 0-nak olyan környezete, hogy $W + W \subseteq V$, akkor létezik olyan $M_1 \in \mathfrak{m}_1$, hogy $M_1 - M_1 \subseteq W$ (mert $\mathfrak{m}_1$ Cauchy-szűrő E felett), és létezik olyan $M_2 \in \mathfrak{m}_2$, hogy $M_2 - M_2 \subseteq W$ (mert $\mathfrak{m}_2$ Cauchy-szűrő E felett), ezért $(M_1 + M_2) - (M_1 + M_2) = (M_1 - M_1) + (M_2 - M_2) \subseteq W + W \subseteq V$, továbbá $M_1 + M_2 \in \mathfrak{m}_1 + \mathfrak{m}_2$. Végül, $\mathfrak{m}_1 + \mathfrak{m}_2$ minimális Cauchy-szűrő E felett, mert ha $M \in \mathfrak{m}_1 + \mathfrak{m}_2$, és $M_1 \in \mathfrak{m}_1$, $M_2 \in \mathfrak{m}_2$ olyanok, hogy $M_1 + M_2 \subseteq M$, akkor az $\mathfrak{m}_1$ és $\mathfrak{m}_2$ minimalitása folytán léteznek olyan $M_1' \in \mathfrak{m}_1$, $M_2' \in \mathfrak{m}_2$ és $V_1, V_2 \in \mathfrak{F}$, hogy $M_1' + V_1 \subseteq M_1$ és $M_2' + V_2 \subseteq V_2$; ekkor $(M_1' + M_2') + (V_1 + V_2) = (M_1' + V_1) + (M_2' + V_2) \subseteq M_1 + M_2 \subseteq M$, és $M_1' + M_2' \in \mathfrak{m}_1 + \mathfrak{m}_2$, valamint $V_1 + V_2 \in \mathfrak{F}$. Ezzel igazoltuk, hogy $\mathfrak{m}_1 + \mathfrak{m}_2 \in E$.

Megmutatjuk, hogy $(\lambda, \mathfrak{m}) \in \mathbb{K} \times E$ esetén $\lambda.\mathfrak{m} \in E$. Ha $\lambda = 0$, akkor $\lambda.\mathfrak{m} := \mathfrak{F}$, és $\mathfrak{F}$ a 0 környezetszűrője E-ben, ami szükségképpen minimális Cauchy-szűrő E felett, vagyis E-nak eleme. Legyen $\lambda \neq 0$. Világos, hogy $\lambda.\mathfrak{m} \neq \emptyset$ és a $\lambda.\mathfrak{m}$ minden eleme nem üres halmaz. Ha $N, N' \in \lambda.\mathfrak{m}$, akkor létezik olyan $M, M' \in \mathfrak{m}$, hogy $\lambda.M = N$ és $\lambda.M' = N'$; ekkor $N \cap N' = (\lambda.M) \cap (\lambda.M') = \lambda.(M \cap M')$, így $N \cap N' \in \lambda.\mathfrak{m}$. Ha $X \subseteq E$ és $N \in \lambda.\mathfrak{m}$ olyan, hogy $N \subseteq X$, akkor van olyan $M \in \mathfrak{m}$, hogy $\lambda.M = N \subseteq X$; ekkor $M \subseteq \lambda^{-1}.X$, tehát $\lambda^{-1}.X \in \mathfrak{m}$ (mert $\mathfrak{m}$ szűrő E felett), így $X = \lambda.(\lambda^{-1}.X) \in \lambda.\mathfrak{m}$. Ez azt jelenti, hogy $\lambda.\mathfrak{m}$ szűrő E felett. Ez Cauchy-szűrő, mert ha V a 0-nak környezete E-ben, akkor van olyan W környezete a 0-nak, hogy $\lambda.W \subseteq V$, és a W-hez van olyan $M \in \mathfrak{m}$, hogy $M - M \subseteq W$ (mert $\mathfrak{m}$ Cauchy-szűrő E felett); ekkor $(\lambda.M) - (\lambda.M) = \lambda.(M - M) \subseteq \lambda.W \subseteq V$ és $\lambda.M \in \lambda.\mathfrak{m}$. Végül, $\lambda.\mathfrak{m}$ minimális Cauchy-szűrő E felett, mert ha $N \in \lambda.\mathfrak{m}$, akkor van olyan $M \in \mathfrak{m}$, hogy $\lambda.M = N$, és a $\mathfrak{m}$ minimalitása folytán van olyan $M' \in \mathfrak{m}$ és $V \in \mathfrak{F}$, hogy $M' + V \subseteq M$; ekkor $\lambda.M' + \lambda.V = \lambda.(M' + V) \subseteq \lambda.M \subseteq N$, ugyanakkor $\lambda.M' \in \lambda.\mathfrak{m}$ és $\lambda.V \in \mathfrak{F}$. Ezzel megmutattuk, hogy $\lambda.\mathfrak{m} \in E$.

Tehát értelmezhetjük az

$$E \times E \to E; \quad (\mathfrak{m}_1, \mathfrak{m}_2) \mapsto \mathfrak{m}_1 + \mathfrak{m}_2,$$

$$\mathbb{K} \times E \to E; \quad (\lambda, \mathfrak{m}) \mapsto \lambda.\mathfrak{m}$$

leképezéseket. Megmutatjuk, hogy az $(E, +, .)$ hármas vektortér a $\mathbb{K}$ test felett.

Az E feletti összeadás asszociativitása és kommutativitása következik abból, hogy minden $M_1, M_2, M_3 \subseteq E$ esetén, az E feletti összeadás asszociativitása és kommutativitása miatt $M_1 + (M_2 + M_3) = (M_1 + M_2) + M_3$ és $M_1 + M_2 = M_2 + M_1$. Legyen $\mathfrak{m} \in E$ rögzített. Ha $N \in \mathfrak{m} + \mathfrak{F}$, akkor van olyan $M \in \mathfrak{m}$ és $V \in \mathfrak{F}$, hogy $M + V \subseteq N$; ekkor $0 \in V$ miatt $M \subseteq M + V$, tehát $N \in \mathfrak{m}$, hiszen $\mathfrak{m}$ szűrő E felett. Ez azt jelenti, hogy $\mathfrak{m} + \mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{m}$. Ebből már következik, hogy $\mathfrak{m} + \mathfrak{F} = \mathfrak{m}$, mert $\mathfrak{m}$ minimális Cauchy-szűrő E felett és $\mathfrak{m} + \mathfrak{F}$ Cauchy-szűrő E felett. Tehát $\mathfrak{F}$ a neutrális elem az E feletti összeadásra nézve. Ha $\mathfrak{m} \in E$ és $V \in \mathfrak{F}$, akkor van olyan $M \in \mathfrak{m}$, hogy $M - M \subseteq V$ (mert $\mathfrak{m}$ Cauchy-szűrő E felett); ekkor $M + (-1).M = M - M \subseteq V$ és $(-1).M \in (-1).\mathfrak{m}$, így $M + (-1).M \in \mathfrak{m} + (-1).\mathfrak{m}$, következésképpen $V \in \mathfrak{m} + (-1).\mathfrak{m}$. Tehát minden $E \ni \mathfrak{m}$-re $\mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{m} + (-1).\mathfrak{m}$, ezért aztán $\mathfrak{F} = \mathfrak{m} + (-1).\mathfrak{m}$ is teljesül, hiszen $\mathfrak{m} + (-1).\mathfrak{m}$ minimális Cauchy-szűrő E felett és $\mathfrak{F}$ Cauchy-szűrő E felett. Ez azt jelenti, hogy minden $\mathfrak{m} \in E$ esetén $(-1).\mathfrak{m} \in E$ az $\mathfrak{m}$ inverze az E feletti összeadásra nézve. Tehát az $(E, +)$ pár kommutatív csoport.

Legyenek $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{K}$ és $\mathfrak{m} \in E$. Ha $N \in (\lambda_1.(\lambda_2.N))$, akkor van olyan $M \in \mathfrak{m}$, hogy $(\lambda_1\lambda_2).M = \lambda_1.(\lambda_2.M) = N$, így $N \in (\lambda_1\lambda_2).\mathfrak{m}$, hiszen $(\lambda_1\lambda_2).\mathfrak{m}$ szűrő E felett. Ez azt jelenti, hogy $\lambda_1.(\lambda_2.\mathfrak{m}) \subseteq (\lambda_1\lambda_2).\mathfrak{m}$, amiből következik a $\lambda_1.(\lambda_2.\mathfrak{m}) = (\lambda_1\lambda_2).\mathfrak{m}$ egyenlőség, mert $(\lambda_1\lambda_2).\mathfrak{m}$ minimális Cauchy-szűrő E felett és $\lambda_1.(\lambda_2.\mathfrak{m})$ Cauchy-szűrő E felett. Ha $N \in (\lambda_1 + \lambda_2).\mathfrak{m}$, akkor létezik olyan $M \in \mathfrak{m}$, hogy $\lambda_1.M + \lambda_2.M = (\lambda_1 + \lambda_2).M = N$, tehát $N \in \lambda_1.\mathfrak{m} + \lambda_2.\mathfrak{m}$, hiszen $\lambda_1\mathfrak{m} + \lambda_2.\mathfrak{m}$ szűrő E felett. Ez azt jelenti, hogy $(\lambda_1 + \lambda_2).\mathfrak{m} \subseteq \lambda_1.\mathfrak{m} + \lambda_2.\mathfrak{m}$, amiből következik a $(\lambda_1 + \lambda_2).\mathfrak{m} = \lambda_1.\mathfrak{m} + \lambda_2.\mathfrak{m}$ egyenlőség, mert $\lambda_1.\mathfrak{m} + \lambda_2.\mathfrak{m}$ minimális Cauchy-szűrő E felett és $(\lambda_1 + \lambda_2).\mathfrak{m}$ Cauchy-szűrő E felett. Legyenek $\mathfrak{m}_1, \mathfrak{m}_2 \in E$ és $\lambda \in \mathbb{K}$. Ha $N \in \lambda.(\mathfrak{m}_1 + \mathfrak{m}_2)$, akkor van olyan $M \in \mathfrak{m}_1 + \mathfrak{m}_2$, hogy $\lambda.M = N$, és akkor léteznek olyan $M_1 \in \mathfrak{m}_1$ és $M_2 \in \mathfrak{m}_2$, hogy $M_1 + M_2 \subseteq M$, tehát $\lambda.M_1 + \lambda.M_2 = \lambda.(M_1 + M_2) \subseteq \lambda.M = N$, így $N \in \lambda.\mathfrak{m}_1 + \lambda.\mathfrak{m}_2$. Ez azt jelenti, hogy $\lambda.(\mathfrak{m}_1 + \mathfrak{m}_2) \subseteq \lambda.\mathfrak{m}_1 + \lambda.\mathfrak{m}_2$, amiből következik a $\lambda.(\mathfrak{m}_1 + \mathfrak{m}_2) = \lambda.\mathfrak{m}_1 + \lambda.\mathfrak{m}_2$ egyenlőség, mert $\lambda.\mathfrak{m}_1 + \lambda.\mathfrak{m}_2$ minimális Cauchy-szűrő E felett és $\lambda.(\mathfrak{m}_1 + \mathfrak{m}_2)$ Cauchy-szűrő E felett. Végül, $N \in 1.\mathfrak{m}$ esetén van olyan $M \in \mathfrak{m}$, hogy $N = 1.M = M$, tehát $N \in \mathfrak{m}$. Ez azt jelenti, hogy $1.\mathfrak{m} \subseteq \mathfrak{m}$, amiből következik az $1.\mathfrak{m} = \mathfrak{m}$ egyenlőség, mert $\mathfrak{m}$ minimális Cauchy-szűrő E felett és $1.\mathfrak{m}$ Cauchy-szűrő E felett.

Ezzel igazoltuk, hogy az $(E, +, .)$ hármas vektortér a $\mathbb{K}$ test felett. A továbbiakban az E halmaz felett mindig ezt a lineáris sruktúrát tekintjük adottnak.

Minden $x \in E$ esetén jelölje $\pi(x)$ az x pont környezetszűrőjét. Megmutatjuk, hogy a $\pi : E \to E$ leképezés lineáris operátor. Legyenek $x_1, x_2 \in E$. Ha $M \in \pi(x_1 + x_2)$, akkor van olyan $V \in \mathfrak{F}$, hogy $(x_1 + x_2) + V \subseteq M$, továbbá az $(\mathrm{EV_{III}})$ miatt van olyan $W \in \mathfrak{F}$, hogy $W + W \subseteq V$; ekkor $(x_1 + W) + (x_2 + W) = (x_1 + x_2) + (W + W) \subseteq (x_1 + x_2) + V \subseteq M$, így $M \in \pi(x_1) + \pi(x_2)$. Ez azt jelenti, hogy $\pi(x_1 + x_2) \subseteq \pi(x_1) + \pi(x_2)$, amiből következik a $\pi(x_1 + x_2) = \pi(x_1) + \pi(x_2)$ egyenlőség, mert $\pi(x_1) + \pi(x_2)$ minimális Cauchy-szűrő E felett és $\pi(x_1 + x_2)$ Cauchy-szűrő E felett. Tehát π additív, ezért $\pi(0) = 0$ is teljesül, következésképpen minden $E \ni x$-re $\pi(0.x) = \pi(0) = 0 = 0.\pi(x)$. Legyen $x \in E$ és $\lambda \in \mathbb{K} \setminus \{0\}$. Ha $N \in \pi(\lambda.x)$, akkor van olyan $V \in \mathfrak{F}$, hogy $\lambda.x + V = N$, és a V-hez az $(\mathrm{EV_{II}})$ alapján van olyan $W \in \mathfrak{F}$, hogy $\lambda.W \subseteq V$; ekkor $\lambda.(x + W) = \lambda.x + \lambda.W \subseteq \lambda.x + V \subseteq N$, így

$N \in \lambda.\pi(x)$, hiszen $\lambda.\pi(x)$ szűrő E felett. Ez azt jelenti, hogy $\pi(\lambda.x) \subseteq \lambda.\pi(x)$, amiből következik a $\pi(\lambda.x) = \lambda.\pi(x)$ egyenlőség, mert $\lambda.\pi(x)$ minimális Cauchy-szűrő E felett és $\pi(\lambda.x)$ Cauchy-szűrő E felett. Tehát a $\pi : E \to E$ leképezés lineáris operátor.

Minden $V \in \mathfrak{F}$ esetén legyen

$$V := \{ \ \mathfrak{m} \in E \mid (\exists\ M \in \mathfrak{m} \cap \mathfrak{F}): \ M - M \subseteq V \ \}.$$

Nyilvánvaló, hogy $V, W \in \mathfrak{F}$ és $W \subseteq V$ esetén $W \subseteq V$, továbbá minden $\mathbb{K} \ni \lambda$-ra, ha $\lambda \neq 0$, akkor $\lambda.V = \lambda.V$. Értelmezzük a

$$\mathfrak{B} := \{ \ V \mid V \in \mathfrak{F} \ \}$$

halmazt. Bebizonyítjuk, hogy $\mathfrak{B}$ olyan rács az E vektortér felett, amelyre teljesülnek az $(\mathrm{EV_I})$, $(\mathrm{EV_{II}})$ és $(\mathrm{EV_{III}})$ tulajdonságok.

Ha $V \in \mathfrak{F}$, akkor létezik olyan $W \in \mathfrak{F}$, hogy $W - W \subseteq V$, tehát $\mathfrak{F} \in V$. Ha $V_1, V_2 \in \mathfrak{F}$, és $V \in \mathfrak{F}$ olyan, hogy $V \subseteq V_1 \cap V_2$, akkor minden $\mathfrak{m} \in V$ esetén van olyan $M \in \mathfrak{m} \cap \mathfrak{F}$, hogy $M - M \subseteq V$, így $\mathfrak{m} \in \widetilde{V_1} \cap \widetilde{V_2}$, következésképpen $V \subseteq \widetilde{V_1} \cap \widetilde{V_2}$. Tehát $\mathfrak{B}$ olyan rács, amelynek mindegyik tagja részhalmaza E-nak, és mindegyik tagjának eleme a $0 \in E$ vektor (ami egyenlő az $\mathfrak{F}$ szűrővel).

Legyen $V \in \mathfrak{F}$, és vegyünk olyan $W \in \mathfrak{F}$ kiegyensúlyozott halmazt, amelyre $W \subseteq V$. A W halmaz kiegyensúlyozott az E vektortérben, hiszen minden $\mathbb{K} \ni \lambda$-ra, ha $0 < |\lambda| \leq 1$, akkor $\mathfrak{m} \in W$ esetén van olyan $M \in \mathfrak{m} \cap \mathfrak{F}$, hogy $M - M \subseteq W$, így $\lambda.M - \lambda.M = \lambda.(M - M) \subseteq \lambda.W \subseteq W$ és $\lambda.M \in (\lambda.\mathfrak{m}) \cap \mathfrak{F}$, tehát $\lambda.\mathfrak{m} \in W$. Ezért $W \subseteq V$ és W kiegyensúlyozott E-ben.

Tehát az $(\mathrm{EV_I})$ bizonyításához elég azt megmutatni, hogy minden $\mathfrak{F} \ni V$-re V *elnyelő* halmaz az E vektortérben. Legyen $V \in \mathfrak{F}$ és $\mathfrak{m} \in E$ rögzített. Legyen $U \in \mathfrak{F}$ olyan kiegyensúlyozott halmaz, amelyre $U + U \subseteq V$. Az U-hoz vegyük a 0-nak olyan W *nyílt* környezetét E-ben, amelyre $W - W \subseteq U$. Szintén az U-hoz van olyan $M \in \mathfrak{m}$ halmaz, hogy $M - M \subseteq U$ (mert $\mathfrak{m}$ Cauchy-szűrő E felett). Legyen $x \in M$ rögzített pont. A W halmaz elnyeli a $-x$ vektort, tehát vehetünk olyan $\alpha \in \mathbb{R}^+$ számot, hogy minden $\mathbb{K} \ni \lambda$-ra, ha $|\lambda| \geq \alpha$, akkor $-x \in \lambda.W$. Ha $\lambda \in \mathbb{K}$ és $|\lambda| \geq \alpha$, akkor $0 = x + (-x) \in M + \lambda.W$, valamint $M + \lambda.W$ nyílt halmaz E-ben és tartalmazza az M halmazt; ezért $M + \lambda.W \in \mathfrak{m} \cap \mathfrak{F}$. Tehát, ha $\lambda \in \mathbb{K}$ és $|\lambda| \geq \max(\alpha, 1)$, akkor $(M + \lambda.W) - (M + \lambda.W) = (M - M) + \lambda.(W - W) \subseteq U + \lambda.U \subseteq \lambda.U + \lambda.U = \lambda.(U + U) \subseteq \lambda.V$, ahol kihasználtuk azt, hogy az U kiegyensúlyozottsága és $|\lambda| \geq 1$ miatt $U \subseteq \lambda.U$. Tehát a $\max(\alpha, 1) \in \mathbb{R}^+$ szám olyan, hogy minden $\lambda \in \mathbb{K}$ esetén, ha $|\lambda| \geq \max(\alpha, 1)$, akkor $\mathfrak{m} \in \lambda.V = \lambda.V$. Ezért V elnyeli az $\mathfrak{m}$ pontot, így $(\mathrm{EV_I})$ teljesül.

Legyen $V \in \mathfrak{F}$ és $\lambda \in \mathbb{K} \setminus \{0\}$. Van olyan $W \in \mathfrak{F}$, hogy $W \subseteq \lambda.V$, következésképpen $W \subseteq \lambda.V$. Tehát $\mathfrak{B}$-re $(\mathrm{EV_{II}})$ teljesül.

Legyen $V \in \mathfrak{F}$ és $W \in \mathfrak{F}$ olyan, hogy $W + W \subseteq V$. Ha $\mathfrak{m}_1, \mathfrak{m}_2 \in W$, akkor léteznek olyan $M_1 \in \mathfrak{m}_1 \cap \mathfrak{F}$ és $M_2 \in \mathfrak{m}_2 \cap \mathfrak{F}$, hogy $M_1 - M_1 \subseteq W$ és $M_2 - M_2 \subseteq W$; ekkor $(M_1 + M_2) - (M_1 + M_2) = (M_1 - M_1) + (M_2 - M_2) \subseteq W + W \subseteq V$, vagyis $M_1 + M_2 \in (\mathfrak{m}_1 + \mathfrak{m}_2) \cap \mathfrak{F}$ miatt $\mathfrak{m}_1 + \mathfrak{m}_2 \in V$. Ez azt jelenti, hogy $W + W \subseteq V$, tehát $\mathfrak{B}$-re $(\mathrm{EV_{III}})$ is teljesül.

Tehát létezik az E vektortér felett egyetlen olyan $\mathbb{K}$-lineáris topológia, amely szerint $\mathfrak{B}$ a 0-nak környezetbázisa. A továbbiakban a E vektorteret ezzel a topológiával ellátva topologikus vektortérnek tekintjük.

Megmutatjuk, hogy az E topologikus vektortér szeparált. Ehhez legyen $\mathfrak{m} \in \bigcap\limits_{V \in \mathfrak{F}} V$. Ekkor $V \in \mathfrak{F}$ esetén $\mathfrak{m} \in V$ miatt van olyan $M \in \mathfrak{m} \cap \mathfrak{F}$, hogy $M - M \subseteq V$; ekkor $0 \in M$ miatt $M \subseteq M - M \subseteq V$, tehát $V \in \mathfrak{m}$, hiszen $\mathfrak{m}$ szűrő E felett. Ez azt jelenti, hogy $\mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{m}$, ezért $\mathfrak{F} = \mathfrak{m}$ is teljesül, hiszen $\mathfrak{m}$ minimális Cauchy-szűrő E felett és $\mathfrak{F}$ Cauchy-szűrő E felett. Tehát, ha $\mathfrak{m}$ nem nulla E-ben, vagyis $\mathfrak{m} \neq \mathfrak{F}$, akkor létezik olyan $V \in \mathfrak{F}$, hogy $\mathfrak{m} \notin V$, így E szeparált.

A $\pi : E \to E$ lineáris operátor folytonos. Valóban, legyen $V \in \mathfrak{F}$ és W a 0-nak olyan nyílt környezete E-ben, hogy $W - W \subseteq V$. Ha $x \in W$, akkor $W \in \pi(x) \cap \mathfrak{F}$ és $W - W \subseteq V$, tehát $\pi(x) \in V$. Ezért $\pi\langle W \rangle \subseteq V$, vagyis π a 0-ban folytonos, így folytonos.

Az E szeparáltsága és a π operátor folytonossága miatt $\mathrm{Ker}(\pi)$ zárt lineáris altér E-ben, így $\overline{\{0\}} \subseteq \mathrm{Ker}(\pi)$. Ha $x \in \mathrm{Ker}(\pi)$, akkor $\pi(x) = 0 = \mathfrak{F}$, vagyis az x pont és a 0 környezetei megegyeznek E-ben, ezért $x \in \overline{\{0\}}$. Ezzel igazoltuk, hogy $\mathrm{Ker}(\pi) = \overline{\{0\}}$.

Bebizonyítjuk, hogy $\mathrm{Im}(\pi)$ sűrű lineáris altere E-nek. Ehhez legyen $\mathfrak{m} \in E$ és $V \in \mathfrak{F}$ tetszőleges. Legyen $W \in \mathfrak{F}$ olyan, hogy $W - W \subseteq V$, és a W-hez vegyünk olyan $M \in \mathfrak{m}$ halmazt, amelyre $M - M \subseteq W$. Tudjuk, hogy $\mathring{M} \in \mathfrak{m}$. Ha $x \in \mathring{M}$, akkor $\mathring{M} \in \pi(x)$, így $\mathring{M} - \mathring{M} \in \pi(x) - \mathfrak{m}$, valamint $\mathring{M} - \mathring{M} \in \mathfrak{F}$, továbbá $(\mathring{M} - \mathring{M}) - (\mathring{M} - \mathring{M}) \subseteq W - W \subseteq V$, vagyis $\pi(x) - \mathfrak{m} \in V$, azaz $\pi(x) \in (\mathfrak{m} + V) \cap \mathrm{Im}(\pi)$. Ez azt jelenti, hogy $\mathrm{Im}(\pi)$ sűrű lineáris altere E-nek.

(IV) Megmutatjuk, hogy az E topologikus vektortér *teljes*. Az előző bekezdés és a tétel előtt álló lemma szerint ehhez elég azt igazolni, hogy minden $\mathrm{Im}(\pi)$-ben haladó általánosított Cauchy-sorozat konvergens E-ben. Legyen $(\mathfrak{m}_i)_{i \in I}$ tetszőleges $\mathrm{Im}(\pi)$-ben haladó általánosított Cauchy-sorozat. A kiválasztási axióma alkalmazásával vehetünk olyan E-ben haladó $(x_i)_{i \in I}$ általánosított sorozatot, amelyre minden $i \in I$ esetén $\mathfrak{m}_i = \pi(x_i)$. Megmutatjuk, hogy $(x_i)_{i \in I}$ általánosított Cauchy-sorozat E-ben. Valóban, legyen $V \in \mathfrak{F}$, és rögzítsünk olyan $i \in I$ indexet, hogy minden $I \ni j, k$-ra, ha $j, k \geq i$, akkor $\mathfrak{m}_j - \mathfrak{m}_k \in V$, vagyis $\pi(x_j - x_k) \in V$. Tehát, ha $j, k \in I$ és $j, k \geq i$, akkor van olyan $M \in \pi(x_j - x_k) \cap \mathfrak{F}$, hogy $M - M \subseteq V$; ekkor $0 \in M$ miatt $x_j - x_k \in M \subseteq M - M \subseteq V$. Ez azt jelenti, hogy $(x_i)_{i \in I}$ általánosított Cauchy-sorozat E-ben. Legyen most

$$\mathfrak{h} := \{\ H \subseteq E \mid (\exists\, i \in I) :\ \{x_j | (j \in I) \wedge (j \geq i)\} \subseteq H\ \}.$$

Könnyen látható, hogy $\mathfrak{h}$ Cauchy-szűrő E felett. Legyen ugyanis $V \in \mathfrak{F}$ és $i \in I$ olyan, hogy minden $j, k \in I$ esetén, ha $j, k \geq i$, akkor $x_j - x_k \in V$. Ekkor $H := \{x_j | (j \in I) \wedge (j \geq i)\} \in \mathfrak{h}$ és természetesen $H - H \subseteq V$. Jelölje $\mathfrak{m}$ azt az E feletti minimális Cauchy-szűrőt, amelyre $\mathfrak{m} \subseteq \mathfrak{h}$. Állítjuk, hogy az $(\mathfrak{m}_i)_{i \in I}$ általánosított sorozat konvergál $\mathfrak{m}$-hez E-ben. Legyen ugyanis $V \in \mathfrak{F}$, és $W \in \mathfrak{F}$ olyan, hogy $W + W \subseteq V$. A W-hez vegyünk olyan $M \in \mathfrak{m}$ halmazt, hogy $M - M \subseteq W$. Ekkor $\overset{\circ}{M} \in \mathfrak{m} \subseteq \mathfrak{h}$, tehát a $\mathfrak{h}$ definíciója szerint rögzíthetünk olyan $i_0 \in I$ indexet, amelyre minden $i \in I$ esetén, ha $i \geq i_0$, akkor $x_i \in \overset{\circ}{M}$. Ha $i \in I$ és $i \geq i_0$, akkor $\overset{\circ}{M} \in \pi(x_i) = \mathfrak{m}_i$, így $\overset{\circ}{M} - M \in \mathfrak{m}_i - \mathfrak{m}$, továbbá $\overset{\circ}{M} - M \in \mathfrak{F}$ (hiszen $\overset{\circ}{M} - M$ nyílt E-ben és $\overset{\circ}{M} \neq \emptyset$ miatt $0 \in \overset{\circ}{M} - M$), valamint $(\overset{\circ}{M} - M) - (\overset{\circ}{M} - M) = (\overset{\circ}{M} - \overset{\circ}{M}) + (M - M) \subseteq W + W \subseteq V$, ami a V definíciója alapján azt jelenti, hogy $\mathfrak{m}_i - \mathfrak{m} \in V$.

Ezzel bebizonyítottuk azt, hogy (E, π) olyan pár, amelyre E szeparált teljes topologikus vektortér, $\pi : E \to E$ folytonos lineáris operátor, $\overline{\mathrm{Im}(\pi)} = E$ és $\mathrm{Ker}(\pi) = \overline{\{0\}}$.

(V) Bebizonyítjuk, hogy az (E, π) párra teljesül a (C) állítás. Ehhez legyen F szeparált teljes topologikus vektortér és $u : E \to F$ tetszőleges folytonos lineáris operátor. Igazolni fogjuk egyetlen olyan $\widehat{u} : E \to F$ folytonos lineáris operátor létezését, amelyre $\widehat{u} \circ \pi = u$. Az $\widehat{u}$ unicitása nyilvánvaló (még az $E \to F$ folytonos függvények halmazában is), mert két ilyen tulajdonságú folytonos függvény megegyezik az $\mathrm{Im}(\pi)$ halmazon, amely sűrű E-ben, ezért az F szeparáltsága és az egyenlőségek folytatásának elve alapján egyenlők. Másfelől, $\mathrm{Ker}(\pi) = \overline{\{0\}} \subseteq \mathrm{Ker}(u)$, hiszen u Hausdorff-térbe érkező folytonos lineáris operátor, tehát $\mathrm{Ker}(u)$ zárt. Ezért egyértelműen létezik olyan $v : \mathrm{Im}(\pi) \to F$ lineáris operátor, amelyre $v \circ \pi = u$. Az $\mathrm{Im}(\pi)$ altér sűrű E-ben, és F szeparált teljes topologikus vektortér, ezért a folytonos lineáris operátorok kiterjesztési tétele alapján elegendő azt igazolni, hogy v folytonos az $\mathrm{Im}(\pi)$ feletti altértopológia szerint.

Legyen V a 0-nak környezete F-ben, és a V-hez vegyük a 0-nak olyan W környezetét E-ben, hogy $u\langle W \rangle \subseteq V$. Állítjuk, hogy $v\langle W \cap \mathrm{Im}(\pi) \rangle \subseteq V$, és ha ez igaz, akkor v folytonos a 0-ban, következésképpen v folytonos az $\mathrm{Im}(\pi)$ feletti altértopológia szerint. Legyen $\mathfrak{m} \in W \cap \mathrm{Im}(\pi)$, és vegyünk olyan $x \in E$ pontot, hogy $\mathfrak{m} = \pi(x)$, vagyis $\mathfrak{m}$ egyenlő az x pont E-beli környezetszűrőjével. Az $\mathfrak{m} \in W$ feltétel alapján van olyan $M \in \mathfrak{m} \cap \mathfrak{F}$, hogy $M - M \subseteq W$. Ekkor $x \in M \subseteq M - M \subseteq W$, amiből következik, hogy $v(\mathfrak{m}) = v(\pi(x)) = u(x) \in u\langle W \rangle \subseteq V$.

(VI) Végül, legyenek (E_1, π_1) és (E_2, π_2) olyan párok, amelyekre E_1 és E_2 szeparált teljes topologikus vektorterek, valamint $\pi_1 \in \mathscr{L}(E; E_1)$ és $\pi_2 \in \mathscr{L}(E; E_2)$, és teljesül a (C) állítás (az (E, π) helyére az (E_1, π_1), illetve (E_2, π_2) párokat helyettesítve). A (C) feltételt alkalmazva az (E_2, π_2) párra és a $\pi_1 \in \mathscr{L}(E; E_1)$ operátorra azt kapjuk, hogy egyértelműen létezik olyan $\widehat{\pi_1} \in \mathscr{L}(E_2; E_1)$, hogy $\widehat{\pi_1} \circ \pi_2 = \pi_1$. A (C) feltételt alkalmazva az (E_1, π_1) párra és a $\pi_2 \in \mathscr{L}(E; E_2)$ operátorra azt kapjuk, hogy egyértelműen létezik olyan $\widehat{\pi_2} \in \mathscr{L}(E_1; E_2)$, hogy $\widehat{\pi_2} \circ \pi_1 = \pi_2$. Ekkor $(\widehat{\pi_1} \circ \widehat{\pi_2}) \circ \pi_1 = \widehat{\pi_1} \circ \pi_2 = \pi_1$ és

$(\widehat{\pi_2} \circ \widehat{\pi_1}) \circ \pi_2 = \widehat{\pi_2} \circ \pi_1 = \pi_2$. Most az (C) feltételt alkalmazva az (E_1, π_1) párra és a $\pi_1 \in \mathscr{L}(E; E_1)$ operátorra azt kapjuk, hogy egyértelműen létezik olyan $u_1 \in \mathscr{L}(E_1; E_1)$, hogy $u_1 \circ \pi_1 = \pi_1$. Az u_1-re vonatkozó egyértelműségi feltétel és $(\widehat{\pi_1} \circ \widehat{\pi_2}) \circ \pi_1 = \pi_1$ miatt $u_1 = \widehat{\pi_1} \circ \widehat{\pi_2} = id_{E_1}$. Végül, a (C) feltételt alkalmazva az (E_2, π_2) párra és a $\pi_2 \in \mathscr{L}(E; E_2)$ operátorra azt kapjuk, hogy egyértelműen létezik olyan $u_2 \in \mathscr{L}(E_2; E_2)$, hogy $u_2 \circ \pi_2 = \pi_2$. Az u_2-re vonatkozó egyértelműségi feltétel és $(\widehat{\pi_2} \circ \widehat{\pi_1}) \circ \pi_2 = \pi_2$ miatt $u_2 = \widehat{\pi_2} \circ \widehat{\pi_1} = id_{E_2}$. Ez azt jelenti, hogy $\widehat{\pi_2} : E_1 \to E_2$ olyan lineáris homeomorfizmus, amelyre $\widehat{\pi_2} \circ \pi_1 = \pi_2$. Ha $w \in \mathscr{L}(E_1; E_2)$ szintén olyan, hogy $w \circ \pi_1 = \pi_2$, akkor $w = \widehat{\pi_2}$ az $\mathrm{Im}(\pi_1) \subseteq E_1$ sűrű altéren, ezért $w = \widehat{\pi_2}$. Tehát $\widehat{\pi_2}$ az egyetlen olyan lineáris homeomorfizmus E_1 és E_2 között, amelyre $\widehat{\pi_2} \circ \pi_1 = \pi_2$. ■

1.9.3. Definíció. *Az E topologikus vektortér* **szeparált teljes burkának** *nevezzük az (E, π) párt, ha E szeparált teljes topologikus vektortér és $\pi : E \to E$ olyan folytonos lineáris operátor, hogy minden F szeparált teljes topologikus vektortérhez és $u \in \mathscr{L}(E; F)$ operátorhoz létezik egyetlen olyan $\widehat{u} \in \mathscr{L}(E; F)$, amelyre $\widehat{u} \circ \pi = u$.*

Megjegyezzük, hogy az előző tételből következik, hogy ha E topologikus vektortér és (E, π) tetszőleges szeparált teljes burka E-nek, akkor $\overline{\mathrm{Im}(\pi)} = E$ és $\mathrm{Ker}(\pi) = \overline{\{0\}}$ *automatikusan teljesül.* Speciálisan; az E szeparáltsága ekvivalens azzal, hogy π injektív.

2. fejezet

Metrizálható topologikus vektorterek

2.1. Metrizációs lemma

2.1.1. Definíció. *Azt mondjuk, hogy az E topologikus vektortér* **félmetrizálható** (*illetve* **metrizálható**)*, ha az E topologikus tér félmetrizálható (illetve metrizálható), tehát, ha létezik olyan E feletti d félmetrika (illetve metrika), hogy $\mathscr{T}_d$ egyenlő az E topológiájával.*

2.1.2. Definíció. *Az E vektortér feletti d félmetrikát* **transzláció-invariánsnak** *nevezzük, ha minden $(x, y) \in E \times E$ párra és $z \in E$ vektorra $d(x + z, y + z) = d(x, y)$.*

2.1.3. Állítás. *Legyen d olyan transzláció-invariáns félmetrika az E vektortér felett, hogy minden $r \in \mathbb{R}^+$ esetén a $B_r(0; d)$ gömb kiegyensúlyozott halmaz. A $\mathscr{T}_d$ topológia pontosan akkor lineáris, ha minden $\mathbb{R}^+ \ni r$-re a $B_r(0; d)$ gömb elnyelő halmaz.*

Bizonyítás. A feltétel *szükséges*, mert lineáris topológia szerint a 0 minden környezete elnyelő halmaz.

Az *elégségesség* bizonyításához legyen $\mathfrak{B} := \{B_r(0; d) | r \in \mathbb{R}^+\}$. A hipotézis szerint a $\mathfrak{B}$ rács minden eleme kiegyensúlyozott és elnyelő halmaz, ezért $\mathfrak{B}$-re $(\mathrm{EV_I})$ teljesül. Az $(\mathrm{EV_{III}})$ szintén igaz, mert ha $r \in \mathbb{R}^+$, akkor $B_{r/2}(0; d) + B_{r/2}(0; d) \subseteq B_r(0; d)$, hiszen $x_1, x_2 \in B_{r/2}(0; d)$ esetén a d transzláció-invarianciája folytán $d(x_1 + x_2, 0) \leq d(x_1 + x_2, x_2) + d(x_2, 0) = d(x_1, 0) + d(x_2, 0) < r$. Az $(\mathrm{EV_{II}})$ bizonyításához először megjegyezzük, hogy ismét a d transzláció-invarianciája miatt minden $E \ni x$-re és $\mathbb{N}^+ \ni n$-re

$$d(n.x, 0) \leq \sum_{k=0}^{n-1} d((k + 1).x, k.x) = \sum_{k=0}^{n-1} d(k.x + x, k.x) = \sum_{k=0}^{n-1} d(x, 0) = n \cdot d(x, 0).$$

Ebből következik, hogy minden $r \in \mathbb{R}^+$ és $n \in \mathbb{N}^+$ esetén $n.B_r(0; d) \subseteq B_{nr}(0; d)$, hiszen $x \in n.B_r(0; d)$ esetén $n^{-1}.x \in B_r(0; d)$, így $d(x, 0) = d(n.(n^{-1}.x), 0) \leq n \cdot d(n^{-1}.x, 0) <$

nr. Ha $\lambda \in \mathbb{K} \setminus \{0\}$ és $r \in \mathbb{R}^+$, akkor van olyan $n \in \mathbb{N}^+$, hogy $\dfrac{1}{n} < |\lambda|$; ekkor $\left|\dfrac{\lambda^{-1}}{n}\right| \leq 1$ és a $B_{r/n}(0;d)$ gömb kiegyensúlyozott, ezért

$$\lambda^{-1}.B_{r/n}(0;d) = n.\left(\frac{\lambda^{-1}}{n}\right).B_{r/n}(0;d) \subseteq n.B_{r/n}(0;d) \subseteq B_r(0;d),$$

vagyis $B_{r/n}(0;d) \subseteq \lambda.B_r(0;d)$, ami azt jelenti, hogy $\mathfrak{B}$-re $(\mathrm{EV}_{\mathrm{II}})$ is teljesül.
Ezért egyértelműen létezik olyan E feletti $\mathscr{T}$ lineáris topológia, amely szerint $\mathfrak{B}$ a 0-nak környezetbázisa. Ugyanakkor $\mathfrak{B}$ a 0-nak környezetbázisa a $\mathscr{T}_d$ topológia szerint is, tehát a 0 vektor környezetei a $\mathscr{T}$ és $\mathscr{T}_d$ topológiák szerint megegyeznek. A d félmetrika transzláció-invarianciája folytán $x \in E$ és $r \in \mathbb{R}^+$ esetén $B_r(x;d) = x + B_r(0;d)$, hiszen ha $y \in E$, akkor $d(y,x) = d(y-x,0)$. Tehát minden $E \ni x$-re $\{x + V | V \in \mathfrak{B}\} = \{B_r(x;d) | r \in \mathbb{R}^+\}$, vagyis az x környezetei a $\mathscr{T}$ és $\mathscr{T}_d$ topológiák szerint ugyanazok. Ezért $\mathscr{T} = \mathscr{T}_d$, vagyis a $\mathscr{T}_d$ topológia lineáris. ■

Megjegyezzük, hogy ha E vektortér és d a diszkrét metrika E felett (tehát $x, y \in E$ esetén $d(x,y) := 1$, ha $x \neq y$, és $d(x,y) := 0$, ha $x = y$), akkor a d metrika nyilvánvalóan transzláció-invariáns, és minden $\mathbb{R}^+ \ni r$-re a $B_r(0;d)$ gömb kiegyensúlyozott halmaz, hiszen $r \leq 1$ esetén $B_r(0;d) = \{0\}$ és $r > 1$ esetén $B_r(0;d) = E$. Azonban a $\{0\}$ halmaz csak akkor elnyelő, ha E nulla dimenziós, tehát, ha $E \neq \{0\}$, akkor a d által generált topológia (a diszkrét topológia) nem lineáris. Ez azt mutatja, hogy az E vektortér feletti d metrikára vonatkozó transzláció-invariancia, valamint az a feltétel, hogy minden $r \in \mathbb{R}^+$ esetén a $B_r(0;d)$ gömb kiegyensúlyozott; *együtt sem elegendő* ahhoz, hogy minden $\mathbb{R}^+ \ni r$-re a $B_r(0;d)$ gömb elnyelő legyen.

2.1.4. Lemma. (Metrizációs lemma) *Legyen E halmaz és $(R_n)_{n\in\mathbb{N}}$ olyan sorozat, hogy minden $\mathbb{N} \ni n$-re R_n reflexív és szimmetrikus reláció E felett és $R_{n+1} \circ R_{n+1} \circ R_{n+1} \subseteq R_n$. Vezessük be az*

$$f := \chi_{(E\times E)\setminus R_0} + \sum_{k=0}^{\infty} 2^{-(k+1)}.\chi_{R_k \setminus R_{k+1}} : E \times E \to \mathbb{R}_+$$

függvényt, és értelmezzük a

$$d : E \times E \to \mathbb{R}_+$$

$$(x,y) \mapsto \inf\left\{ \sum_{k=0}^{p-1} f(z_k, z_{k+1}) \,\middle|\, (p \in \mathbb{N}^+) \wedge ((z_k)_{0\leq k\leq p} \in E^{p+1}) \wedge (z_0 = x) \wedge (z_p = y) \right\}$$

leképezést. Ekkor d olyan félmetrika E felett, amelyre

$$(\forall\, \varepsilon \in \mathbb{R}^+)(\exists\, n \in \mathbb{N}) : \; R_n \subseteq \overset{-1}{d}\langle[0,\varepsilon[\rangle,$$

$$(\forall\, n \in \mathbb{N})(\exists\, \varepsilon \in \mathbb{R}^+) : \; \overset{-1}{d}\langle[0,\varepsilon[\rangle \subseteq R_n.$$

A d függvény pontosan akkor metrika E felett, ha

$$\bigcap_{n\in\mathbb{N}} R_n = \{(x,x)|x \in E\}.$$

Bizonyítás. (I) Először néhány megállapítást teszünk az $(R_n)_{n\in\mathbb{N}}$ reláció-szorozattal és az f függvénnyel kapcsolatban.

a) Minden $n \in \mathbb{N}$ esetén R_n reflexív reláció E felett, ezért $R_{n+1} \subseteq R_{n+1} \circ R_{n+1} \circ R_{n+1} \subseteq R_n$, tehát az $(R_n)_{n\in\mathbb{N}}$ reláció-szorozat tartalmazás tekintetében monoton fogyó, és

$$E \times E = ((E \times E) \setminus R_0) \cup \bigcup_{k\in\mathbb{N}} (R_k \setminus R_{k+1}) \cup \bigcap_{k\in\mathbb{N}} R_k$$

az $E \times E$ halmaz diszjunkt felbontása, továbbá $(E \times E) \setminus R_0 = [f = 1]$, és $k \in \mathbb{N}$ esetén $R_k \setminus R_{k+1} = \quad f = \dfrac{1}{2^{k+1}}$ és $\bigcap_{k\in\mathbb{N}} R_k = [f = 0]$. Ebből az is látható, hogy minden $\mathbb{N} \ni n$-re és $E \ni x, y$-ra $f(x,y) \leq \dfrac{1}{2^{n+1}}$ pontosan akkor teljesül, ha $(x,y) \in R_n$.

b) Minden $n \in \mathbb{N}$ esetén R_n szimmetrikus reláció E felett, ezért az f függvény szimmetrikus, vagyis minden $E \times E \ni (x,y)$-ra $f(x,y) = f(y,x)$.

c) Ha $p \in \mathbb{N}^+$, $(z_k)_{0\leq k\leq p} \in E^{p+1}$ és minden $k < p$ természetes számra $(z_k, z_{k+1}) \in \bigcap_{n\in\mathbb{N}} R_n$, akkor $(z_0, z_p) \in \bigcap_{n\in\mathbb{N}} R_n$. Tegyük fel ugyanis, hogy $(z_0, z_p) \notin \bigcap_{n\in\mathbb{N}} R_n$, tehát a $H := \quad k \in \mathbb{N} \Big| (k \leq p) \wedge \quad (z_0, z_k) \notin \bigcap_{n\in\mathbb{N}} R_n$ halmaz nem üres, hiszen $p \in H$. Legyen $q := \min(H)$. Ekkor $q > 0$, mert $(z_0, z_0) \in \bigcap_{n\in\mathbb{N}} R_n$, mivel minden $n \in \mathbb{N}$ esetén R_n reflexív reláció E felett. A q minimalitása miatt $(z_0, z_{q-1}) \in \bigcap_{n\in\mathbb{N}} R_n$, ugyanakkor a feltevés alapján $(z_{q-1}, z_q) \in \bigcap_{n\in\mathbb{N}} R_n$ és természetesen $(z_q, z_q) \in \bigcap_{n\in\mathbb{N}} R_n$. Tehát minden $\mathbb{N} \ni n$-re $(z_0, z_{q-1}) \in R_{n+1}$, $(z_{q-1}, z_q) \in R_{n+1}$ és $(z_q, z_q) \in R_{n+1}$, így $(z_0, z_q) \in R_{n+1} \circ R_{n+1} \circ R_{n+1} \subseteq R_n$. Ez azt jelenti, hogy $(z_0, z_q) \in \bigcap_{n\in\mathbb{N}} R_n$, holott $q \in H$ miatt $(z_0, z_q) \notin \bigcap_{n\in\mathbb{N}} R_n$.

d) Megmutatjuk, hogy minden $p \in \mathbb{N}^+$ esetén

$$(\forall\ (x,y) \in E \times E)(\forall\ (z_k)_{0\leq k\leq p} \in E^{p+1}) :$$

$$(\ (x = z_0) \wedge (y = z_p)\ ) \ \Rightarrow\ f(x,y) \leq 2\sum_{k=0}^{p-1} f(z_k, z_{k+1}) \qquad .$$

Ezt az állítást p szerinti teljes indukcióval igazoljuk. A $p = 1$ esetben arról van szó, hogy minden $E \ni x, y$-ra $f(x,y) \leq 2f(x,y)$, ami igaz. Tegyük fel, hogy $p \in \mathbb{N}$ és $p > 1$, valamint minden p-nél kisebb természetes számra igaz az állítás. Legyen $(x,y) \in E \times E$ és $(z_k)_{0\leq k\leq p} \in E^{p+1}$ olyan rendszer, amelyre $x = z_0$ és $y = z_p$. Azt kell megmutatni, hogy a $c := \sum_{k=0}^{p-1} f(z_k, z_{k+1})$ számra igaz az $f(x,y) \leq 2c$ egyenlőtlenség. Ha $1/2 \leq c$, akkor $f(x,y) \leq 1$ miatt az állítás igaz, ezért feltehető, hogy $1/2 > c$, és még azt is megkövetelhetjük, hogy $c > 0$ legyen, különben minden $k < p$ természetes számra $f(z_k, z_{k+1}) = 0$, így $(z_k, z_{k+1}) \in \bigcap_{n\in\mathbb{N}} R_n$, tehát a c) alapján $(x,y) = (z_0, z_p) \in \bigcap_{n\in\mathbb{N}} R_n$, vagyis $f(x,y) = 0$, következésképpen az állítás igaz. Értelmezzük a $q \in \mathbb{N}$ számot úgy, hogy

$$q := \max\left\{ m \in \mathbb{N} \,\middle|\, (1 \leq m \leq p) \wedge \left(\sum_{k=0}^{m-1} f(z_k, z_{k+1}) \leq \frac{c}{2}\right) \right\},$$

ha létezik olyan $m \in \mathbb{N}$, hogy $1 \leq m \leq p$ és $\sum_{k=0}^{m-1} f(z_k, z_{k+1}) \leq \frac{c}{2}$, egyébként legyen $q := 0$. A c szám definíciója alapján és a $c > 0$ feltevés miatt nyilvánvaló, hogy $q < p$.

Megmutatjuk, hogy $f(x, z_q) \leq c$. Ha $q = 0$, akkor $x = z_0$ miatt $f(x, z_q) = 0 \leq c$. Ha $q > 0$, akkor az (x, z_q) párra és a $(z_k)_{0\leq k\leq q} \in E^{q+1}$ rendszerre alkalmazva az indukciós hipotézist kapjuk hogy $f(x, z_q) \leq 2\sum_{k=0}^{q-1} f(z_k, z_{k+1}) \leq 2\ \frac{c}{2}$, így $f(x, z_q) \leq c$.

Megmutatjuk, hogy $f(z_{q+1}, y) \leq c$. Ha $q = p-1$, akkor $y = z_p$ miatt $f(z_{q+1}, y) = 0 < c$. Ha $q < p-1$, akkor a (z_{q+1}, y) párra és a $(z_{j+q+1})_{0\leq j\leq p-q-1} \in E^{p-q}$ rendszerre alkalmazva az indukciós hipotézist kapjuk, hogy

$$f(z_{q+1}, y) \leq 2\sum_{j=0}^{p-q-2} f(z_{j+q+1}, z_{j+q+2}) = 2\sum_{k=q+1}^{p-1} f(z_k, z_{k+1}) =$$

$$= 2\left(c - \sum_{k=0}^{q} f(z_k, z_{k+1})\right) < c,$$

mert a q szám maximalitása és $q+1 < p$ miatt $\sum_{k=0}^{(q+1)-1} f(z_k, z_{k+1}) > \frac{c}{2}$.

Tehát $f(x, z_q) \leq c$ és $f(z_{q+1}, y) \leq c$ teljesül, továbbá nyilvánvaló, hogy $f(z_q, z_{q+1}) \leq \sum_{k=0}^{p-1} f(z_k, z_{k+1}) =: c$. Legyen most $n := \min\left\{ m \in \mathbb{N} \,\middle|\, \frac{1}{2^{m+1}} \leq c \right\}$; ez a szám $c > 0$ miatt létezik. Ekkor az f értelmezése alapján az $f(x, z_q)$, $f(z_q, z_{q+1})$ és $f(z_{q+1}, y)$ számok mind kisebb-egyenlők $\frac{1}{2^{n+1}}$-nél (hiszen f nem 0 értekei $\frac{1}{2^m}$ alakúak, ahol $m \in \mathbb{N}$). Ezért $(x, z_q) \in R_n$, $(z_q, z_{q+1}) \in R_n$ és $(z_{q+1}, y) \in R_n$, így $(x,y) \in R_n \circ R_n \circ R_n \subseteq R_{n-1}$. Ebből következik, hogy

$$f(x,y) \leq \frac{1}{2^n} = 2\frac{1}{2^{n+1}} \leq 2c = 2\sum_{k=0}^{p-1} f(z_k, z_{k+1}).$$

e) A definíció szerint minden $(x,y) \in E \times E$ párra $d(x,y) \le f(x,y)$, mert ha $p := 1$, $z_0 := x$ és $z_p := y$, akkor $d(x,y) \le \sum_{k=0}^{p-1} f(z_k, z_{k+1}) = f(x,y)$. Ugyanakkor a d)-ből és a d függvény definíciójából azonnal következik, hogy minden $(x,y) \in E \times E$ esetén $f(x,y) \le 2d(x,y)$. Tehát minden $E \times E \ni (x,y)$-ra

$$d(x,y) \le f(x,y) \le 2d(x,y).$$

(II) Most bebizonyítjuk, hogy d félmetrika E felett.

Ehhez először megjegyezzük, hogy a definíció szerint minden $(x,y) \in E \times E$ párra $d(x,y) \le f(x,y)$, mert ha $p := 1$, $z_0 := x$ és $z_p := y$, akkor $d(x,y) \le \sum_{k=0}^{p-1} f(z_k, z_{k+1}) = f(x,y)$. Ezért $x \in E$ esetén $d(x,x) \le f(x,x) = 0$. A d függvény szimmetrikusságának bizonyításához legyen $(x,y) \in E \times E$, $p \in \mathbb{N}^+$ és $(z_k)_{0 \le k \le p}$ olyan E-ben haladó rendszer, amelyre $x = z_0$ és $y = z_p$. Minden $k \le p$ természetes számra legyen $z'_k := z_{p-k}$. Ekkor $(z'_k)_{0 \le k \le p} \in E^{p+1}$ olyan rendszer, hogy $y = z'_0$ és $x = z'_p$, tehát teljesül a $d(y,x) \le \sum_{k=0}^{p-1} f(z'_k, z'_{k+1})$ egyenlőtlenség. De az f szimmetrikussága folytán

$$\sum_{k=0}^{p-1} f(z'_k, z'_{k+1}) = \sum_{k=0}^{p-1} f(z_{p-k}, z_{p-k-1}) = \sum_{j=1}^{p} f(z_j, z_{j-1}) =$$

$$= \sum_{k=0}^{p-1} f(z_{k+1}, z_k) = \sum_{k=0}^{p-1} f(z_k, z_{k+1}),$$

tehát $d(y,x) \le \sum_{k=0}^{p-1} f(z_k, z_{k+1})$. Ebből következik, hogy $d(y,x) \le d(x,y)$. Ez minden $E \times E \ni (x,y)$-ra igaz, így minden $(x,y) \in E \times E$ esetén $d(x,y) = d(y,x)$.

A háromszög-egyenlőtlenség bizonyításához legyenek $x, y, z \in E$ tetszőlegesek. Legyenek $p, q \in \mathbb{N}^+$ és $(u_k)_{0 \le k \le p} \in E^{p+1}$ és $(v_k)_{0 \le k \le q} \in E^{q+1}$ olyan rendszerek, hogy $x = u_0$ és $y = u_p$, valamint $y = v_0$ és $z = v_q$. Legyen $(w_k)_{0 \le k \le p+q+1} \in E^{p+q+2}$ az a rendszer, amelyre $0 \le k \le p$ esetén $w_k := u_k$, és $p < k \le p+q+1$ esetén $w_k := v_{k-p-1}$. Ekkor $x = u_0 = w_0$ és $z = v_q = w_{p+q+1}$, tehát

$$d(x,z) \le \sum_{k=0}^{p+q+1} f(w_k, w_{k+1}) = \sum_{k=0}^{p-1} f(w_k, w_{k+1}) + f(w_p, w_{p+1}) + \sum_{k=p+1}^{p+q} f(w_k, w_{k+1}) =$$

$$= \sum_{k=0}^{p-1} f(u_k, u_{k+1}) + f(y,y) + \sum_{j=0}^{q-1} f(w_{j+p+1}, w_{j+p+2}) =$$

$$= \sum_{k=0}^{p-1} f(u_k, u_{k+1}) + \sum_{k=0}^{q-1} f(v_k, v_{k+1}).$$

Ez azt jelenti, hogy a rögzített $(v_k)_{0\leq k\leq q} \in E^{q+1}$ rendszerre

$$d(x,z) - \sum_{k=0}^{q-1} f(v_k, v_{k+1}) \leq \sum_{k=0}^{p-1} f(u_k, u_{k+1})$$

teljesül minden olyan $(u_k)_{0\leq k\leq p} \in E^{p+1}$ esetén, amelyre $x = u_0$ és $y = u_p$, így

$$d(x,z) - \sum_{k=0}^{q-1} f(v_k, v_{k+1}) \leq d(x,y).$$

Ez azt jelenti, hogy minden olyan $(v_k)_{0\leq k\leq q} \in E^{q+1}$ esetén, amelyre $y = v_0$ és $z = v_q$ fennáll a

$$d(x,z) - d(x,y) \leq \sum_{k=0}^{q-1} f(v_k, v_{k+1})$$

egyenlőtlenség, ezért $d(x,z) - d(x,y) \leq d(y,z)$, vagyis $d(x,z) \leq d(x,y) + d(y,z)$. Ezért d félmetrika az E halmaz felett.

(III) Most könnyen látható, hogy ha $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} R_n = \{(x,x) | x \in E\}$, akkor d metrika E felett. Valóban, ha $(x,y) \in E \times E$ olyan, hogy $x \neq y$, akkor $(x,y) \notin \bigcap_{n\in\mathbb{N}} R_n$ miatt $f(x,y) > 0$, így az (I) pontban igazolt e) tulajdonság alapján $d(x,y) \geq \frac{1}{2} f(x,y) > 0$.

(IV) Legyen $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ tetszőleges. Vegyünk olyan $n \in \mathbb{N}$ számot, hogy $\frac{1}{2^{n+1}} < \varepsilon$. Ekkor $(x,y) \in R_n$ esetén $d(x,y) \leq f(x,y) \leq \frac{1}{2^{n+1}} < \varepsilon$, tehát $R_n \subseteq \overset{-1}{d}\langle[0,\varepsilon[\rangle$.

Legyen $n \in \mathbb{N}$ tetszőleges. Vegyünk olyan $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ számot, hogy $\varepsilon < \frac{1}{2^{n+1}}$. Ekkor $(x,y) \in \overset{-1}{d}\langle[0,\varepsilon[\rangle$ esetén $f(x,y) \leq 2d(x,y) < 2\varepsilon < \frac{1}{2^n}$, tehát $f(x,y) \leq \frac{1}{2^{n+1}}$, így $(x,y) \in R_n$, vagyis $\overset{-1}{d}\langle[0,\varepsilon[\rangle \subseteq R_n$. ■

2.2. Topologikus vektortér félmetrizálhatósága és metrizálhatósága

2.2.1. Tétel. (Topologikus vektortér félmetrizálhatósága) *Ha E topologikus vektortér, akkor a következő állítások ekvivalensek.*

(i) *Az E topologikus tér M_1-tér.*

(ii) *A 0-nak létezik megszámlálható környezetbázisa E-ben.*

(iii) *Létezik olyan E feletti d transzláció-invariáns félmetrika, hogy $\mathscr{T}_d$ egyenlő az E topológiájával, és minden $\mathbb{R}^+ \ni r$-re a $B_r(0;d)$ gömb kiegyensúlyozott halmaz.*

(iv) *Az E topologikus tér félmetrizálható.*

Bizonyítás. Az (i)⇒(ii), (iii)⇒(iv) és (iv)⇒(i) következtetések nyilvánvalók, tehát csak a (ii)⇒(iii) implikációt kell igazolni.

A (ii)-ből következik, hogy létezik a 0 környezeteinek olyan $(W_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sorozata, hogy a $\{W_n | n \in \mathbb{N}\}$ halmaz környezetbázisa a 0-nak. A kiválasztási axiómával kombinált rekurzió tételének alkalmazásával igazoljuk olyan $(V_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sorozat létezését, hogy minden $\mathbb{N} \ni n$-re a V_n halmaz a 0-nak kiegyensúlyozott környezete E-ben és $V_{n+1}+V_{n+1}+V_{n+1} \subseteq V_n \subseteq W_n$. Tegyük fel ugyanis, hogy $n \in \mathbb{N}^+$ és $(V_k)_{k\leq n-1}$ olyan rendszer, hogy minden $k \leq n-1$ természetes számra V_k a 0-nak kiegyensúlyozott környezete E-ben, $V_k \subseteq W_k$, és ha $k+1 < n$, akkor $V_{k+1} + V_{k+1} + V_{k+1} \subseteq V_k$. Ekkor $V_{n-1} \cap W_n$ a 0-nak környezete E-ben, ezért az ($\mathrm{EV_I}$) és ($\mathrm{EV_{III}}$) alapján vehető a 0-nak olyan V környezete, amely kiegyensúlyozott, és $V + V \subseteq V_{n-1} \cap W_n$. A V-hez választható a 0-nak olyan V_n kiegyensúlyozott környezete, hogy $V_n + V_n \subseteq V$. Ekkor $(V_k)_{0\leq k\leq n}$ olyan rendszer, hogy minden $k \leq n$ természetes számra V_k a 0-nak kiegyensúlyozott környezete E-ben, $V_k \subseteq W_k$, és ha $k+1 < n$, akkor $V_{k+1} + V_{k+1} + V_{k+1} \subseteq V_k$, valamint V_n a 0-nak kiegyensúlyozott környezete és $V_n+V_n+V_n \subseteq V_n+V_n+V_n+V_n \subseteq V+V \subseteq V_{n-1}$. Ezzel az előírt tulajdonságú $(V_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sorozat létezését igazoltuk. Nyilvánvaló, hogy a $\{V_n | n \in \mathbb{N}\}$ halmaz a 0-nak könyezetbázisa, mert ha V a 0-nak környezete, akkor van olyan $n \in \mathbb{N}$, hogy $V_n \subseteq W_n \subseteq V$, hiszen a $\{W_n | n \in \mathbb{N}\}$ halmaz környezetbázisa a 0-nak.

Rögzítsük a 0 kiegyensúlyozott környezeteinek olyan $(V_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sorozatát, hogy $\{V_n | n \in \mathbb{N}\}$ a 0-nak környezetbázisa, és minden $\mathbb{N} \ni n$-re $V_{n+1} + V_{n+1} + V_{n+1} \subseteq V_n$. Minden $n \in \mathbb{N}$ esetén legyen

$$R_n := \{\ (x,y) \in E \times E \mid y - x \in V_n\ \}.$$

Minden $\mathbb{N} \ni n$-re az R_n reláció reflexív és szimmetrikus, mert $0 \in V_n$ és $-V_n = V_n$. Továbbá, $n \in \mathbb{N}$ esetén $R_{n+1} \circ R_{n+1} \circ R_{n+1} \subseteq R_n$, mert $V_{n+1}+V_{n+1}+V_{n+1} \subseteq V_n$. Vegyük most az

$$f := \chi_{(E\times E)\setminus R_0} + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2^{k+1}} \chi_{R_k \setminus R_{k+1}} : E \times E \to \mathbb{R}_+$$

függvényt, és értelmezzük a

$$d : E \times E \to \mathbb{R}_+$$

$$(x,y) \mapsto \inf \left\{ \sum_{k=0}^{p-1} f(z_k, z_{k+1}) \,\middle|\, (p \in \mathbb{N}^+) \wedge ((z_k)_{0\leq k\leq p} \in E^{p+1}) \wedge (z_0 = x) \wedge (z_p = y) \right\}$$

leképezést. A metrizációs lemma szerint d olyan félmetrika E felett, amelyre

$$(\forall\, \varepsilon \in \mathbb{R}^+)(\exists\, n \in \mathbb{N}) : \ R_n \subseteq \overset{-1}{d}\langle [0, \varepsilon[\rangle,$$

$$(\forall\ n \in \mathbb{N})(\exists\ \varepsilon \in \mathbb{R}^+) : \overset{-1}{d}\langle[0, \varepsilon[\rangle \subseteq R_n.$$

Bebizonyítjuk, hogy d olyan félmetrika, amelynek létezését a (iii)-ban állítottuk.

Ha $(x, y) \in E \times E$ és $z \in E$, akkor $n \in \mathbb{N}$ esetén az $(x, y) \in R_n$ állítás nyilvánvalóan ekvivalens az $(x + z, y + z) \in R_n$ állítással. Ebből azonnal következik, hogy minden $(x, y) \in E \times E$ és $z \in E$ esetén $f(x+z, y+z) = f(x, y)$, ezért a d félmetrika transzláció-invariáns. Ha ugyanis $x, y, z \in E$, $p \in \mathbb{N}^+$ és $(z_k)_{0 \leq k \leq p} \in E^{p+1}$ olyan, hogy $x = z_0$ és $y = z_p$, akkor a $(z_k + z)_{0 \leq k \leq p} \in E^{p+1}$ rendszerre $x + z = z_0 + z$ és $y + z = z_p + z$ teljesül, tehát a d definíciója alapján

$$d(x + z, y + z) \leq \sum_{k=0}^{p-1} f(z_k + z, z_{k+1} + z) = \sum_{k=0}^{p-1} f(z_k, z_{k+1}),$$

így $d(x + z, y + z) \leq d(x, y)$. Ez tetszőleges $x, y, z \in E$ esetén igaz, tehát az előző egyenlőtlenségben x helyére az $x - z$, és y helyére az $y - z$ vektort helyettesítve kapjuk, hogy $d(x, y) \leq d(x - z, y - z)$. Ide z helyére a $-z$ vektort helyettesítve $d(x, y) \leq d(x + z, y + z)$ adódik, tehát $d(x, y) = d(x + z, y + z)$.

Megmutatjuk, hogy ha $r \in \mathbb{R}^+$, akkor a $B_r(0; d)$ gömb kiegyensúlyozott halmaz. Ehhez először megjegyezzük, hogy ha $n \in \mathbb{N}$ és $(x, y) \in R_n$, akkor $y - x \in V_n$, tehát $\lambda \in \mathbb{K}$ és $|\lambda| \leq 1$ esetén a V_n kiegyensúlyozottsága folytán $\lambda.y - \lambda.x = \lambda.(y - x) \in \lambda.V_n \subseteq V_n$, vagyis $(\lambda.x, \lambda.y) \in R_n$. Ebből azonnal következik, hogy $\lambda \in \mathbb{K}$, $|\lambda| \leq 1$ és $(x, y) \in E \times E$ esetén $f(\lambda.x, \lambda.y) \leq f(x, y)$. Legyen most $r \in \mathbb{R}^+$, $x \in B_r(0; d)$ és $\lambda \in \mathbb{K}$ olyan, hogy $|\lambda| \leq 1$. Ekkor $d(0, x) < r$, tehát a d definíciója szerint van olyan $p \in \mathbb{N}$ és olyan $(z_k)_{0 \leq k \leq p} \in E^{p+1}$, hogy $0 = z_0$ és $x = z_p$, valamint $\sum_{k=0}^{p-1} f(z_k, z_{k+1}) < r$. Ebből következik, hogy $\sum_{k=0}^{p-1} f(\lambda.z_k, \lambda.z_{k+1}) \leq \sum_{k=0}^{p-1} f(z_k, z_{k+1}) < r$, és $(\lambda.z_k)_{0 \leq k \leq p} \in E^{p+1}$ olyan rendszer, hogy $0 = \lambda.z_0$ és $\lambda.x = \lambda.z_p$. Ezért $d(0, \lambda.x) \leq \sum_{k=0}^{p-1} f(\lambda.z_k, \lambda.z_{k+1}) < r$ is igaz, vagyis $\lambda.x \in B_r(0; d)$.

Megmutatjuk, hogy a $\mathscr{T}_d$ topológia megegyezik az E topológiájával. Legyen $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ tetszőleges, és vegyünk olyan $n \in \mathbb{N}$ számot, hogy $R_n \subseteq \overset{-1}{d}\langle[0, \varepsilon[\rangle$. Ekkor $x \in V_n$ esetén $(0, x) \in R_n$, tehát $d(0, x) < \varepsilon$. Ez azt jelenti, hogy $V_n \subseteq B_\varepsilon(0; d)$, tehát a $B_\varepsilon(0; d)$ gömb a 0-nak környezete E-ben. Megfordítva, legyen V a 0-nak környezete E-ben, akkor van olyan $n \in \mathbb{N}$, hogy $V_n \subseteq V$, mivel $\{V_n | n \in \mathbb{N}\}$ a 0-nak környezetbázisa E-ben. Ekkor van olyan $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$, hogy $\overset{-1}{d}\langle[0, \varepsilon[\rangle \subseteq R_n$, tehát $x \in B_\varepsilon(0; d)$ esetén $d(0, x) < \varepsilon$, vagyis $(0, x) \in R_n$, így $x \in V_n \subseteq V$. Ez azt jelenti, hogy $B_\varepsilon(0; d) \subseteq V$, tehát V a 0-nak környezete a $\mathscr{T}_d$ topológia szerint. Ezzel megmutattuk, hogy a 0 vektor környezetei az E topológiája és a $\mathscr{T}_d$ topológia szerint ugyanazok. Ebből következik, hogy minden

$\mathbb{R}^+ \ni r$-re a $B_r(0;d)$ gömb *elnyelő* halmaz, így a $\mathscr{T}_d$ topológia *lineáris*, következésképpen $\mathscr{T}_d$ egyenlő az E topológiájával. ■

2.2.2. Tétel. (Topologikus vektortér metrizálhatósága) *Ha E topologikus vektortér, akkor a következő állítások ekvivalensek.*

(i) *Az E topologikus tér M_1-tér és T_2-tér.*

(ii) *A 0 vektornak létezik olyan $\mathfrak{B}$ megszámlálható környezetbázisa E-ben, amelyre $\{0\} = \bigcap_{V \in \mathfrak{B}} V$.*

(iii) *Létezik olyan E feletti d transzláció-invariáns metrika, hogy $\mathscr{T}_d$ egyenlő az E topológiájával, és minden $\mathbb{R}^+ \ni r$-re a $B_r(0;d)$ gömb kiegyensúlyozott halmaz.*

(iv) *Az E topologikus tér metrizálható.*

Bizonyítás. Az (i)⇒(ii), (iii)⇒(iv) és (iv)⇒(i) következtetések ismét nyilvánvalók, figyelembe véve a topologikus vektorterek szeparáltságának kritériumát. Az előző tétel bizonyítása alapján a (ii)-ből következik a (iii), mert az ott előállított d félmetrika itt metrika lesz, hiszen $\{0\} = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} V_n$, amiből következik, a $\{(x,x) | x \in E\} = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} R_n$ egyenlőség. ■

2.3. Banach nyíltleképezés tétele

2.3.1. Lemma. *Legyenek E és F topologikus vektorterek, és $u : E \to F$ olyan (nem feltétlenül folytonos) lineáris operátor, hogy* $\mathrm{Im}(u)$ *második kategóriájú halmaz F-ben. Ha V a 0-nak környezete E-ben, akkor $\overline{u\langle V \rangle}$ a 0-nak környezete E-ben.*

Bizonyítás. Legyen V a 0-nak tetszőleges környezete E-ben. Rögzítsük a 0-nak egy olyan W szimmetrikus környezetét, amelyre $W + W \subseteq V$, és legyen $(\lambda_n)_{n \in \mathbb{N}}$ olyan sorozat $\mathbb{K} \setminus \{0\}$-ban, hogy $\sup_{n \in \mathbb{N}} |\lambda_n| = +\infty$. Korábban láttuk, hogy ekkor $E = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} (\lambda_n.W)$, amiből következik, hogy

$$\mathrm{Im}(u) = u\langle \bigcup_{n \in \mathbb{N}} (\lambda_n.W) \rangle = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} u\langle \lambda_n.W \rangle = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \lambda_n.u\langle W \rangle.$$

Az u operátorra vonatkozó hipotézis szerint $\mathrm{Im}(u)$ második kategóriájú halmaz F-ben, ezért létezik olyan $n \in \mathbb{N}$, hogy a $\lambda_n.u\langle W \rangle$ halmaz nem sehol sem sűrű, azaz

$$\emptyset \neq \mathrm{Int}(\overline{\lambda_n.u\langle W \rangle}) = \mathrm{Int}(\lambda_n.\overline{u\langle W \rangle}) = \lambda_n.\mathrm{Int}(\overline{u\langle W \rangle}),$$

ahol kihasználtuk azt, hogy az $F \to F;\ y \mapsto \lambda_n.y$ leképezés homeomorfizmus. Ezért $\mathrm{Int}(\overline{u\langle W \rangle}) \neq \emptyset$; válasszunk ki egy $y \in \mathrm{Int}(\overline{u\langle W \rangle})$ pontot, és legyen U olyan szimmetrikus környezete a 0-nak F-ben, hogy $y + U \subseteq \overline{u\langle W \rangle}$. Ekkor $-(y+U) \subseteq -\overline{u\langle W \rangle} = \overline{-u\langle W \rangle} =$

$\overline{u\langle -W\rangle} = \overline{u\langle W\rangle}$. Tehát a $0 \in U$ és $-U = U$ tulajdonságok, valamint az u operátor folytonosságának és additivitásának figyelembe vételével kapjuk, hogy

$$U \subseteq U + U = U - U = (y + U) - (y + U) \subseteq \overline{u\langle W\rangle} + \overline{u\langle W\rangle} \subseteq$$

$$\subseteq \overline{u\langle W\rangle + u\langle W\rangle} = \overline{u\langle W + W\rangle} \subseteq \overline{u\langle V\rangle},$$

így $\overline{u\langle V\rangle}$ a 0-nak környezete E-ben. ■

2.3.2. Lemma. *Legyen E teljes metrikus tér, F metrikus tér, és $f : E \to F$ olyan folytonos függvény, hogy*

$$(\forall r \in \mathbb{R}^+)(\exists s \in \mathbb{R}^+)(\forall x \in E) : \ B_s(f(x)) \subseteq \overline{f\langle B_r(x)\rangle}.$$

Ha $(r, s) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+$ olyan pár, hogy minden $E \ni x$-re $B_s(f(x)) \subseteq \overline{f\langle B_r(x)\rangle}$, akkor minden $r' > r$ valós számra

$$(\forall x \in E) : \ B_s(f(x)) \subseteq f\langle B_{r'}(x)\rangle.$$

<u>*Bizonyítás.*</u> Legyen $(r, s) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+$ olyan pár, hogy minden $E \ni x$-re $B_s(f(x)) \subseteq \overline{f\langle B_r(x)\rangle}$, és rögzítsünk egy $r' > r$ valós számot, valamint egy $x_0 \in E$ pontot. Azt kell megmutatni, hogy $B_s(f(x_0)) \subseteq f\langle B_{r'}(x_0)\rangle$. Ehhez válasszunk egy $y \in B_s(f(x_0))$ pontot. Olyan $x \in B_{r'}(x_0)$ elemet keresünk, amelyre $f(x) = y$.

Legyen $(r_k)_{k \in \mathbb{N}^+}$ olyan rendszer $\mathbb{R}^+$-ban, amelyre a $\sum\limits_{k \in \mathbb{N}^+} r_k$ sor konvergens $\mathbb{R}$-ben, és $r_1 = r$, valamint $\sum\limits_{k=1}^{\infty} r_k < r'$. Az f függvényre vonatkozó hipotézis alapján minden $\mathbb{N}^+ \ni k$-hoz létezik olyan $s_k \in \mathbb{R}^+$, hogy minden $E \ni x'$-re $B_{s_k}(f(x')) \subseteq \overline{f\langle B_{r_k}(x')\rangle}$. Ezért *kiválaszthatunk* olyan $\mathbb{R}^+$-ban haladó $(s_k)_{k \in \mathbb{N}^+}$ rendszert, hogy $s_1 = s$, $\lim\limits_{k \to \infty} s_k = 0$ és minden $\mathbb{N}^+ \ni k$-ra és minden $E \ni x'$-re $B_{s_k}(f(x')) \subseteq \overline{f\langle B_{r_k}(x')\rangle}$.

Most a kiválasztási axiómával kombinált rekurzió tételének alkalmazásával igazoljuk olyan E-ben haladó $(x_n)_{n \in \mathbb{N}^+}$ rendszer létezését, hogy minden $\mathbb{N}^+ \ni n$-re $x_n \in B_{r_n}(x_{n-1})$ és $f(x_n) \in B_{s_{n+1}}(y)$.

Az $x_1 \in E$ pontot úgy kell megválasztani, hogy $x_1 \in B_{r_1}(x_0) = B_r(x_0)$ valamint $f(x_1) \in B_{s_2}(y)$ teljesüljön. Ilyen választás lehetséges, mert $y \in B_s(f(x_0)) \subseteq \overline{f\langle B_r(x_0)\rangle}$ és $B_{s_2}(y)$ az y-nak környezete, tehát

$$B_{s_2}(y) \cap f\langle B_r(x_0)\rangle \neq \emptyset,$$

így létezik olyan $x_1 \in B_r(x_0)$, hogy $f(x_1) \in B_{s_2}(y)$.

Tegyük most fel, hogy $n \in \mathbb{N}^+$ és $(x_k)_{1 \leq k \leq n}$ olyan rendszer E-ben, hogy minden $1 \leq k \leq n$ természetes számra $x_k \in B_{r_k}(x_{k-1})$ és $f(x_k) \in B_{s_{k+1}}(y)$. Olyan $x_{n+1} \in B_{r_{n+1}}(x_n)$

pontot keresünk, amelyre $f(x_{n+1}) \in B_{s_{n+2}}(y)$. Ha x_{n+1} ilyen pont volna, akkor $f(x_{n+1}) \in B_{s_{n+2}}(y) \cap f\langle B_{r_{n+1}}(x_n)\rangle$ teljesülne, tehát

$$B_{s_{n+2}}(y) \cap f\langle B_{r_{n+1}}(x_n)\rangle \neq \emptyset.$$

Megfordítva, ha $B_{s_{n+2}}(y) \cap f\langle B_{r_{n+1}}(x_n)\rangle \neq \emptyset$, akkor $\overset{-1}{f}\langle B_{s_{n+2}}(y)\rangle \cap B_{r_{n+1}}(x_n) \neq \emptyset$, és e halmaz bármely x elemére $f(x) \in B_{s_{n+2}}(y)$ és $x \in B_{r_{n+1}}(x_n)$ teljesülne, tehát az $x_{n+1} := x$ választás megfelelő volna. Tehát azt kell igazolni, hogy $B_{s_{n+2}}(y) \cap f\langle B_{r_{n+1}}(x_n)\rangle \neq \emptyset$. A $B_{s_{n+2}}(y)$ gömb környezete y-nak, ezért elég volna azt igazolni, hogy $y \in \overline{f\langle B_{r_{n+1}}(x_n)\rangle}$. Ez viszont igaz, mert $B_{s_{n+1}}(f(x_n)) \subseteq \overline{f\langle B_{r_{n+1}}(x_n)\rangle}$ és $f(x_n) \in B_{s_{n+1}}(y)$, vagyis $y \in B_{s_{n+1}}(f(x_n))$.

Legyen tehát $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^+}$ olyan E-ben haladó rendszer, amelyre minden $n \in \mathbb{N}^+$ esetén $x_n \in B_{r_n}(x_{n-1})$ és $f(x_n) \in B_{s_{n+1}}(y)$. Ha $m, n \in \mathbb{N}$ és $m < n$, akkor d-vel jelölve az E feletti metrikát kapjuk, hogy

$$d(x_m, x_n) \leq \sum_{k=m+1}^{n} d(x_{k-1}, x_k) < \sum_{k=m+1}^{n} r_k < \sum_{k=m+1}^{\infty} r_k,$$

amiből következik, hogy minden $\mathbb{N} \ni m, n$-re

$$d(x_m, x_n) \leq \sum_{k=\min(m,n)}^{\infty} r_k.$$

A $\sum_{k\in\mathbb{N}^+} r_k$ sor konvergens $\mathbb{R}$-ben, ezért $\lim_{m\to\infty} \sum_{k=m+1}^{\infty} r_k = 0$. Ebből adódik, hogy $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^+}$ Cauchy-sorozat E-ben. Az E metrikus tér teljessége folytán az $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^+}$ sorozat konvergens E-ben; legyen $x := \lim_{n\to\infty} x_n$.

Ha $n \in \mathbb{N}^+$, akkor $d(x_0, x_n) \leq \sum_{k=1}^{\infty} r_k$, ezért $d(x_0, x) = \lim_{n\to\infty} d(x_0, x_n) \leq \sum_{k=1}^{\infty} r_k < r'$, vagyis $x \in B_{r'}(x_0)$. Az f függvény folytonos, ezért $f(x) = \lim_{n\to\infty} f(x_n)$. Ugyanakkor minden $\mathbb{N}^+ \ni n$-re $f(x_n) \in B_{s_{n+1}}(y)$, és $(s_n)_{n\in\mathbb{N}^+}$ zérussorozat $\mathbb{R}$-ben, így $y = \lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(x)$. Ezzel az előírt tulajdonságú x pont létezését igazoltuk. ■

2.3.3. Tétel. (Banach nyíltleképezés tétele) *Legyenek E és F teljes és metrizálható topologikus vektorterek, valamint $u \in \mathscr{L}(E;F)$. A következő állítások ekvivalensek.*

(i) *u nyílt leképezés.*

(ii) *u szürjektív leképezés.*

(iii) $\mathrm{Im}(u)$ *második kategóriájú részhalmaza F-nek.*

Bizonyítás. (i)⇒(ii) Ha u nyílt leképezés, akkor $\mathrm{Im}(u)$ környezete a 0-nak F-ben, ezért elnyelő halmaz. Ugyanakkor az $\mathrm{Im}(u)$ halmaz zárt a skalárokkal vett szorzásra nézve, ezért $\mathrm{Im}(u) = F$.

(ii)⇒(iii) A Baire-féle kategóriatétel szerint F második kategóriájú részhalmaza az F teljes és metrizálható topologikus térnek.

(iii)⇒(i) Rögzíthetünk olyan E (illetve F) feletti metrikát, amely transzláció-invariáns, és az E (illetve F) topológiáját generálja. Ekkor E (illetve F) ezzel a metrikával ellátva teljes metrikus tér. Továbbá, a (iii) hipotézis, és 2.3.1. alapján a $0 \in E$ vektor minden W környezetére az $\overline{u\langle W\rangle}$ halmaz környezete a $0 \in F$ vektornak. Ezért minden $\mathbb{R}^+ \ni r$-hez van olyan $s \in \mathbb{R}^+$, hogy $B_s(0) \subseteq \overline{u\langle B_r(0)\rangle}$, ahol a gömböket az E és F felett adott transzláció-invariáns metrikák szerint kell venni. Ha $r, s \in \mathbb{R}^+$ ilyen tulajdonságú számok, akkor az u additivitása folytán minden $x \in E$ esetén

$$B_s(u(x)) = u(x) + B_s(0) \subseteq u(x) + \overline{u\langle B_r(0)\rangle} = \overline{u(x) + u\langle B_r(0)\rangle} =$$

$$= \overline{u\langle x + B_r(0)\rangle} = \overline{u\langle B_r(x)\rangle},$$

ahol kihasználtuk azt, hogy bármely $y \in F$ esetén az $F \to F;\ y' \mapsto y + y'$ leképezés homeomorfizmus. Ez azt jelenti, hogy az E és F teljes metrikus terek között ható u folytonos függvényre teljesül 2.3.2. lemma hipotézise. Tehát, ha $(r, s) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+$ olyan pár, hogy $B_s(0) \subseteq \overline{u\langle B_r(0)\rangle}$, akkor minden $r' > r$ valós számra és $E \ni x$-re $B_s(u(x)) \subseteq u\langle B_{r'}(x)\rangle$.

Legyen most $\Omega \subseteq E$ tetszőleges nyílt halmaz és $x \in \Omega$. Legyen $r' \in \mathbb{R}^+$ olyan, hogy $B_{r'}(x) \subseteq \Omega$, és rögzítsünk egy $r \in]0, r'[$ valós számot. Az előzőek alapján van olyan $s \in \mathbb{R}^+$, hogy $B_s(0) \subseteq \overline{u\langle B_r(0)\rangle}$, ezért $B_s(u(x)) \subseteq u\langle B_{r'}(x)\rangle \subseteq u\langle \Omega\rangle$. Ez azt jelenti, hogy $u\langle\Omega\rangle$ nyílt részhalmaza F-nek, vagyis (i) igaz. ■

2.3.4. Következmény. *Teljes és metrizálható topologikus vektorterek között ható folytonos lineáris bijekció szükségképpen homeomorfizmus, tehát az inverze is folytonos.*

Bizonyítás. Egy ilyen operátor szürjektív, tehát Banach nyíltleképezés tétele alapján nyílt leképezés, ami azzal ekvivalens, hogy az inverze folytonos. ■

2.4. A zártgráf-tétel és következményei

2.4.1. Tétel. (Zártgráf-tétel) *Legyenek E és F teljes és metrizálható topologikus vektorterek, valamint $u : E \to F$ lineáris operátor. Ha u gráfja zárt halmaz az $E \times F$ topologikus szorzattérben, akkor u folytonos.*

Bizonyítás. Legyen $G{:=}\{(x, u(x)){\in}E{\times}F | x{\in}E\}$, tehát G az u operátor gráfja. Ez lineáris altere az $E \times F$ szorzattérnek, és a hipotézis alapján zárt a szorzattopológia szerint. Az

E és F topologikus vektorterek teljesek és metrizálhatóak, tehát az $E \times F$ topologikus lineáris szorzattér is teljes és metrizálható, így G a szorzattopológia leszűkítésével ellátva szintén teljes és metrizálható topologikus vektortér. Értelmezzük a következő lineáris operátorokat:

$$v : E \to G; \quad x \mapsto (x, u(x)),$$

$$w : G \to F; \quad (x, y) \mapsto y.$$

Ekkor $u = w \circ v$, ezért u folytonosságához elegendő a v és w operátorok folytonossága. A w függvény nyilvánvalóan folytonos, mert a $pr_2 : E \times F \to F$ projekció folytonos és $w := pr_2|_G$. A v operátor nyilvánvalóan lineáris bijekció és v^{-1} folytonos, mert a $pr_1 : E \times F \to E$ projekció folytonos és $v^{-1} = pr_1|G$. Banach nyíltleképezés tételének előző következményét alkalmazva kapjuk, hogy a $v^{-1} : G \to E$ operátor lineáris homeomorfizmus, ezért v folytonos. ■

2.4.2. Következmény. *Legyenek E, F vektorterek, és $\mathscr{T}_E$ (illetve $\mathscr{T}_F$) teljes és metrizálható topológia E (illetve F) felett. Ha $u : E \to F$ olyan lineáris operátor, amelyhez létezik olyan F feletti $\mathscr{T}$ lineáris Hausdorff-topológia, hogy $\mathscr{T} \subseteq \mathscr{T}_F$ és u folytonos a $\mathscr{T}_E$ és $\mathscr{T}$ topológiák szerint, akkor u folytonos a $\mathscr{T}_E$ és $\mathscr{T}_F$ topológiák szerint is.*

Bizonyítás. Ha $\mathscr{T}$ olyan lineáris Hausdorff-topológia E felett, hogy $\mathscr{T} \subseteq \mathscr{T}_F$ és u folytonos a $\mathscr{T}_E$ és $\mathscr{T}$ topológiák szerint, akkor u gráfja zárt $E \times F$-ben a $\mathscr{T}_E \times \mathscr{T}$ topológia szerint, így a $\mathscr{T}_E \times \mathscr{T}_F$ topológia szerint is zárt, hiszen $\mathscr{T}_E \times \mathscr{T} \subseteq \mathscr{T}_E \times \mathscr{T}_F$. Ezért a zártgráf-tétel alapján u folytonos a $\mathscr{T}_E$ és $\mathscr{T}_F$ topológiák szerint. ■

2.4.3. Következmény. *Legyen E vektortér és $\mathscr{T}_1$, $\mathscr{T}_2$ teljes és metrizálható lineáris topológiák E felett. Ha létezik olyan E feletti $\mathscr{T}$ lineáris Hausdorff-topológia, hogy $\mathscr{T} \subseteq \mathscr{T}_1$ és $\mathscr{T} \subseteq \mathscr{T}_2$, akkor $\mathscr{T}_1 = \mathscr{T}_2$.*

Bizonyítás. Az előző állítást kétszer alkalmazva az id_E operátorra kapjuk, hogy ez folytonos a $\mathscr{T}_1$ és $\mathscr{T}_2$ topológiák szerint (tehát $\mathscr{T}_2 \subseteq \mathscr{T}_1$), valamint folytonos a $\mathscr{T}_2$ és $\mathscr{T}_1$ topológiák szerint (tehát $\mathscr{T}_1 \subseteq \mathscr{T}_2$). ■

2.4.4. Következmény. *Legyen E vektortér és $\mathscr{T}_1$, $\mathscr{T}_2$ teljes és metrizálható lineáris topológiák E felett. Ha $\mathscr{T}_1 \neq \mathscr{T}_2$, akkor a $\mathscr{T}_1$ és $\mathscr{T}_2$ topológiák infimuma nem lineáris topológia.*

Bizonyítás. Ha az infimum-topológia lineáris volna, akkor Hausdorff-topológia is lenne, mert triviális, hogy két T_1-topológia infimuma T_1-topológia, és lineáris topológia pontosan akkor Hausdorff-féle, ha T_1-topológia (1.1.6.). Tehát, ha az infimum-topológia lineáris, akkor az előző következmény alapján $\mathscr{T}_1 = \mathscr{T}_2$. ■

Példa. Megmutatjuk, hogy ha $p \geq 1$ valós szám, akkor a $\mathbb{K}$-ban haladó, p-edik hatványon abszolút szummálható sorozatok $\mathbf{l}^p_{\mathbb{K}}$ vektortere olyan, hogy léteznek $\mathbf{l}^p_{\mathbb{K}}$ felett különböző, de teljes és normálható lineáris topológiák. (Az előző következmény szerint két ilyen topológia infimuma nem lehet lineáris.) Legyen B algebrai bázishalmaz $\mathbf{l}^p_{\mathbb{K}}$-ban. A Baire-féle kategóriatételből (27.10.3.) következik, hogy B nem megszámálhatóan végtelen. Megmutatható, hogy B pontosan kontinuum-számosságú. (Ezen nincs mit bizonyítani, ha feltesszük a kontinuum-hipotézist, de a kontinuum-hipotézist nélkül is igazolható!) Ismeretes, hogy a $B \to B$ bijekciók halmazának számossága egyenlő a B hatványhalmazának számosságával. Ugyanakkor, minden $B \to B$ bijekció egyértelműen kiterjeszthető $\mathbf{l}^p_{\mathbb{K}} \to \mathbf{l}^p_{\mathbb{K}}$ lineáris bijekcióvá. Ebből következik, hogy az $\mathbf{l}^p_{\mathbb{K}}$ vektortér automorfizmusainak halmaza a kontinuumnál nagyobb számosságú. Ha u automorfizmusa az $\mathbf{l}^p_{\mathbb{K}}$ vektortérnek, akkor $\|\cdot\|_p \circ u$ olyan Banach-norma, amely pontosan akkor ekvivalens $\|\cdot\|_p$-vel (tehát pontosan akkor generálja ugyanazt a topológiát, mint $\|\cdot\|_p$), ha u homeomorfizmus $\|\cdot\|_p$ szerint. Azonban $\mathbf{l}^p_{\mathbb{K}}$ felett a $\|\cdot\|_p$ által meghatározott topológia szeparábilis, ezért az *összes* $\|\cdot\|_p$-szerint folytonos $\mathbf{l}^p_{\mathbb{K}} \to \mathbf{l}^p_{\mathbb{K}}$ függvények halmaza kontinuum-számosságú. Ezért *létezik* olyan $u : \mathbf{l}^p_{\mathbb{K}} \to \mathbf{l}^p_{\mathbb{K}}$ lineáris bijekció, amely a $\|\cdot\|_p$ szerint nem folytonos, így a $\|\cdot\|_p \circ u$ által generált topológia nem egyenlő a $\|\cdot\|_p$ által generált topológiával, és mindkét topológia teljes és normálható. (Természetesen ez a gondolatmenet nagymértékben általánosítható.)

2.5. Banach nyíltleképezés tételének általánosítása

Banach nyíltleképezés tételének bizonyításából láthatók a következők:

– az (i)$\Rightarrow$(ii) implikáció tetszőleges E és F topologikus vektortérre igaz;

– a (ii)$\Rightarrow$(iii) következtetés érvényessége azon múlik, hogy F teljes és metrizálható, tehát itt az E teljessége és metrizálhatósága lényegtelen;

– a (iii)$\Rightarrow$(i) implikáció bizonyításában nem használtuk ki az F teljességét.

Ezért várható, hogy a tétel gyengébb feltételek mellett is érvényes. Többféle általánosítás létezik; ezek közül most bemutatunk egyet, amely lényegesen hivatkozik Banach nyíltleképezés tételére, tehát *nem helyettesítheti* a korábbi tétel bizonyítását, hanem csak az ismert tényeket általánosítja.

2.5.1. Tétel. *Legyen E olyan topologikus vektortér, amelyhez van olyan $(E_n, v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sorozat, hogy minden $\mathbb{N} \ni n$-re E_n teljes és metrizálható topologikus vektortér, $v_n : E_n \to E$ folytonos lineáris operátor és $E = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \mathrm{Im}(v_n)$. Ekkor minden F teljes és metrizálható topologikus vektortérre és $u : E \to F$ folytonos lineáris operátorra a következő állítások ekvivalensek.*

(i) *u nyílt leképezés.*

(ii) *u szürjektív leképezés.*

(iii) $\mathrm{Im}(u)$ *második kategóriájú részhalmaza F-nek.*

Bizonyítás. (i)⇒(ii) Ha u nyílt leképezés, akkor $\mathrm{Im}(u)$ környezete a 0-nak F-ben, ezért elnyelő halmaz. Ugyanakkor az $\mathrm{Im}(u)$ halmaz zárt a skalárokkal vett szorzásra nézve, ezért $\mathrm{Im}(u) = F$.

(ii)⇒(iii) A Baire-féle kategóriatétel szerint F második kategóriájú részhalmaza az F teljes és metrizálható topologikus térnek.

(iii)⇒(i) Tegyük fel, hogy $\mathrm{Im}(u)$ második kategóriájú részhalmaza F-nek, és legyen $(E_n, v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ olyan sorozat, hogy minden $\mathbb{N} \ni n$-re E_n teljes és metrizálható topologikus vektortér, $v_n : E_n \to E$ folytonos lineáris operátor és $E = \bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} \mathrm{Im}(v_n)$. Ekkor $\mathrm{Im}(u) = \bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} \mathrm{Im}(u \circ v_n)$, ezért vehetünk olyan $n \in \mathbb{N}$ számot, hogy $\mathrm{Im}(u \circ v_n)$ második kategóriájú részhalmaza F-nek (hiszen megszámlálható sok első kategóriájú halmaz uniója első kategóriájú). Az E_n és E topologikus vektorterek teljesek és metrizálhatóak, és az $u \circ v_n : E_n \to F$ folytonos lineáris operátor értékkészlete második kategóriájú, így Banach nyíltleképezés tétele alapján $u \circ v_n : E_n \to F$ nyílt szürjekció. Ha V a 0-nak környezete E-ben, akkor a $v_n : E_n \to E$ operátor folytonossága miatt létezik a 0-nak olyan V_n környezete E_n-ben, hogy $v_n\langle V_n\rangle \subseteq V$, tehát $(u\circ v_n)\langle V_n\rangle = u\langle v_n\langle V_n\rangle\rangle \subseteq u\langle V\rangle$, és az $u\circ v_n$ nyíltsága miatt $(u\circ v_n)\langle V_n\rangle$ a 0-nak környezete F-ben, tehát $u\langle V\rangle$ is környezete a 0-nak F-ben. Ebből következik, hogy $u : E \to F$ nyílt leképezés. ■

Az előző tétel *valódi* általánosítása Banach-nyíltleképezés tételének. A 3.9. pontban látni fogjuk, hogy ha T σ-kompakt lokálisan kompakt tér és F Banach-tér, akkor a $T \to F$ kompakt tartójú folytonos függvények $\mathscr{K}(T; F)$ tere a természetes induktív topológiával ellátva olyan topologikus vektortér, amelyre teljesül az E-re előírt feltétel. Ugyanakkor azt is igazolni fogjuk, hogy ha T nem kompakt és F nem nulla demenziós, akkor ez a topologikus vektortér *nem metrizálható* (5.5.5.).

3. fejezet

Lokálisan konvex terek

3.1. Konvex halmazok topologikus vektortérben

Emlékeztetünk arra, hogy az E vektortér C részhalmazát *konvexnek* nevezzük, ha minden $x, y \in C$ esetén a $[\![x, y]\!]$ szakasz részhalmaza C-nek, vagyis minden $\alpha \in [0, 1]$ valós számra $(1 - \alpha).x + \alpha.y \in C$.

3.1.1. Lemma. *Legyen E vektortér. A $C \subseteq E$ halmaz pontosan akkor konvex, ha minden C-ben haladó $(x_i)_{i\in I}$ nem üres véges rendszerre és minden $[0, 1]$ intervallumban haladó $(\alpha_i)_{i\in I}$ rendszerre; $\sum_{i\in I} \alpha_i = 1$ esetén $\sum_{i\in I} \alpha_i.x_i \in C$.*

Bizonyítás. A feltétel nyilvánvalóan elégséges, és a szükségessége az I halmaz számossága szerinti teljes indukcióval könnyen belátható. ■

Legyen E vektortér. Az E konvex részhalmazai tetszőleges nem üres rendszerének a metszete konvex, és E konvex részhalmaza E-nek. Ezért minden $A \subseteq E$ halmazhoz létezik olyan konvex részhalmaza E-nek, amely tartalmazza A-t és a legkisebb az összes A-t tartalmazó konvex halmazok között; ez éppen az E vektortér A-t tartalmazó konvex részhalmazainak metszete. Ha $A \subseteq E$, akkor az A-t tartalmazó konvex halmazok metszetét az A halmaz *konvex burkának* nevezzük és a $\mathrm{co}(A)$ szimbólummal jelöljük.

3.1.2. Állítás. *Legyen E vektortér és $(C_i)_{i\in I}$ az E konvex részhalmazainak tetszőleges rendszere. Jelölje $\mathscr{P}_0(I)$ az I nem üres véges részhalmazainak halmazát. Ekkor*

$$\mathrm{co}\left(\bigcup_{i\in I} C_i\right) =$$

$$\left\{\sum_{i\in J} \alpha_i.x_i \,\middle|\, (J\in\mathscr{P}_0(I))\wedge((\alpha_i)_{i\in J}\in(\mathbb{R}_+)^J)\wedge\left(\sum_{i\in J}\alpha_i=1\right)\wedge\left((x_i)_{i\in J}\in\prod_{i\in J} C_i\right)\right\}.$$

Bizonyítás. Ha $I = \emptyset$, vagy $I \neq \emptyset$, de minden $I \ni i$-re $C_i = \emptyset$, akkor a bizonyítandó egyenlőség mindkét oldalán az üres halmaz áll, ezért feltesszük, hogy $I \neq \emptyset$ és van olyan $i \in I$, hogy $C_i \neq \emptyset$.

Jelölje C a bizonyítandó egyenlőség jobb oldalán álló halmazt. Nyilvánvaló, hogy minden $i \in I$ esetén $C_i \subseteq C$, tehát $\bigcup_{i \in I} C_i \subseteq C$. Ha C' olyan konvex részhalmaza E-nek, hogy $\bigcup_{i \in I} C_i \subseteq C'$, akkor az előző lemma alapján $C \subseteq C'$. Ezért elég azt igazolni, hogy C konvex.

Legyenek $x, y \in C$ és $\lambda \in]0,1[$ tetszőleges valós szám; azt kell belátni, hogy $(1-\lambda).x + \lambda.y \in C$. Legyenek $J, K \subseteq I$ olyan nem üres véges halmazok és $(\alpha_i)_{i \in J} \in (\mathbb{R}_+)^J$ és $(\beta_i)_{i \in K} \in (\mathbb{R}_+)^K$ olyan rendszerek, hogy $\sum_{i \in J} \alpha_i = 1 = \sum_{i \in K} \beta_i$, továbbá legyenek $(x_i)_{i \in J} \in \prod_{i \in J} C_i$ és $(y_i)_{i \in K} \in \prod_{i \in K} C_i$ olyan rendszerek, hogy $x = \sum_{i \in J} \alpha_i.x_i$ és $y = \sum_{i \in K} \beta_i.y_i$.
Értelmezzük az $(\widetilde{\alpha}_i)_{i \in J \cup K}, (\widetilde{\beta}_i)_{i \in J \cup K} \in (\mathbb{R}_+)^{J \cup K}$ rendszereket úgy, hogy minden $i \in J \cup K$ esetén

$$\widetilde{\alpha}_i := \begin{cases} \alpha_i & \text{, ha } i \in J \\ 0 & \text{, ha } i \in K \setminus J \end{cases}, \qquad \widetilde{\beta}_i := \begin{cases} \beta_i & \text{, ha } i \in K \\ 0 & \text{, ha } i \in J \setminus K. \end{cases}$$

Legyenek $(\widetilde{x_i})_{i \in J \cup K}, (y_i)_{i \in J \cup K} \in E^{J \cup K}$ azok a rendszerek E-ben, amelyekre minden $i \in J \cup K$ esetén

$$\widetilde{x_i} := \begin{cases} x_i & \text{, ha } i \in J \\ 0 & \text{, ha } i \in K \setminus J \end{cases}, \qquad y_i := \begin{cases} y_i & \text{, ha } i \in K \\ 0 & \text{, ha } i \in J \setminus K. \end{cases}$$

Végül, legyenek $(\sigma_i)_{i \in J \cup K} \in (\mathbb{R}_+)^{J \cup K}$ és $(z_i)_{i \in J \cup K} \in E^{J \cup K}$ azok a rendszerek, amelyekre minden $i \in J \cup K$ esetén

$$\sigma_i := (1-\lambda)\widetilde{\alpha}_i + \lambda\widetilde{\beta}_i,$$

$$z_i := \begin{cases} (1-\lambda)\dfrac{\widetilde{\alpha}_i}{\sigma_i}.\widetilde{x_i} + \lambda\dfrac{\widetilde{\beta}_i}{\sigma_i}.y_i & \text{, ha } \sigma_i \neq 0 \\ 0 & \text{, ha } \sigma_i = 0. \end{cases}$$

Vezessük be az $L := \{i \in J \cup K | \sigma_i \neq 0\}$ halmazt, amely az I-nek nem üres véges részhalmaza. Ekkor $(\sigma_i)_{i \in L} \in (\mathbb{R}_+)^L$ olyan rendszer, hogy

$$\sum_{i \in L} \sigma_i = \sum_{i \in J \cup K} \sigma_i := \sum_{i \in J \cup K} (1-\lambda)\widetilde{\alpha}_i + \lambda\widetilde{\beta}_i =$$

$$= (1-\lambda) \sum_{i \in J \cup K} \widetilde{\alpha}_i + \lambda \sum_{i \in J \cup K} \widetilde{\beta}_i = (1-\lambda) \sum_{i \in J} \alpha_i + \lambda \sum_{i \in K} \beta_i = 1.$$

Továbbá, $(z_i)_{i \in L}$ olyan E-ben haladó rendszer, hogy

$$(1-\lambda).x + \lambda.y = (1-\lambda) \sum_{i \in J} \alpha_i.x_i + \lambda \sum_{i \in K} \beta_i.y_i =$$

$$= (1-\lambda) \sum_{i \in J \cup K} \widetilde{\alpha_i}.\widetilde{x_i} + \lambda \sum_{i \in J \cup K} \widetilde{\beta_i}.y_i =$$

$$= \sum_{i \in J \cup K} \Big((1-\lambda)\widetilde{\alpha_i}.\widetilde{x_i} + \lambda \widetilde{\beta_i}.y_i \Big) = \sum_{i \in L} \Big((1-\lambda)\widetilde{\alpha_i}.\widetilde{x_i} + \lambda \widetilde{\beta_i}.y_i \Big) = \sum_{i \in L} \sigma_i.z_i,$$

ahol kihasználtuk azt, hogy $i \in (J \cup K) \setminus L$ esetén $\sigma_i = 0$, tehát $0 < \lambda < 1$ és $\widetilde{\alpha_i}, \widetilde{\beta_i} \geq 0$ miatt $\widetilde{\alpha_i} = 0 = \widetilde{\beta_i}$.

Végül, minden $L \ni i$-re $z_i \in C_i$, hiszen ha $i \in L$, akkor $\sigma_i > 0$, tehát a következő esetek lehetségesek:

– fennállnak az $\widetilde{\alpha_i} > 0$ és $\widetilde{\beta_i} > 0$ egyenlőtlenségek; ekkor $i \in J \cap K$, tehát $\widetilde{\alpha_i} = \alpha_i$ és $\widetilde{\beta_i} = \beta_i$, így a C_i konvexitása és a σ_i definíciója miatt $z_i := (1-\lambda)\dfrac{\widetilde{\alpha_i}}{\sigma_i}.\widetilde{x_i} + \lambda\dfrac{\widetilde{\beta_i}}{\sigma_i}.y_i = (1-\lambda)\dfrac{\alpha_i}{\sigma_i}.x_i + \lambda\dfrac{\beta_i}{\sigma_i}.y_i \in C_i$;

– fennállnak az $\widetilde{\alpha_i} > 0$ és $\widetilde{\beta_i} = 0$ összefüggések; ekkor $i \in J$, tehát $\widetilde{\alpha_i} = \alpha_i$ és $\widetilde{x_i} = x_i$, így $\sigma_i := (1-\lambda)\alpha_i$ és $z_i := (1-\lambda)\dfrac{\alpha_i}{\sigma_i}.x_i = x_i \in C_i$;

– fennállnak az $\widetilde{\alpha_i} = 0$ és $\widetilde{\beta_i} > 0$ összefüggések; ekkor $i \in K$, tehát $\widetilde{\beta_i} = \beta_i$ és $y_i = y_i$, így $\sigma_i := \lambda\beta_i$ és $z_i := \lambda\dfrac{\beta_i}{\sigma_i}.y_i = y_i \in C_i$.

Tehát teljesül a $(z_i)_{i \in L} \in \prod_{i \in L} C_i$ összefüggés, így a C értelmezése alapján $(1-\lambda).x + \lambda.y = \sum_{i \in L} \sigma_i.z_i \in C$. ■

Megjegyzések. 1) Az előzőekből látható, hogy kiegyensúlyozott halmaz konvex burka kiegyensúlyozott halmaz. Ezzel szemben konvex halmaz kiegyensúlyozott burka nem feltétlenül konvex.

2) Ha E topologikus vektortér és $C \subseteq E$ konvex halmaz, akkor $\overset{\circ}{C}$ is konvex. Valóban, legyenek $x, y \in \overset{\circ}{C}$ és $\alpha \in [0,1]$. Léteznek a 0-nak olyan U és V környezetei, amelyekre $x + U \subseteq C$ és $y + V \subseteq C$. Ekkor $W := U \cap V$ a 0-nak környezete E-ben, és triviális, hogy $W \subseteq (1-\alpha).W + \alpha.W$, így

$$((1-\alpha).x + \alpha.y) + W \subseteq ((1-\alpha).x + \alpha.y) + ((1-\alpha).W + \alpha.W) =$$

$$= (1-\alpha).(x + W) + \alpha.(y + W) \subseteq (1-\alpha).C + \alpha.C \subseteq C,$$

vagyis $(1-\alpha).x + \alpha.y \in \overset{\circ}{C}$.

3) Ha E topologikus vektortér és $C \subseteq E$ konvex halmaz, akkor $\overline{C}$ is konvex. Valóban, legyenek $x, y \in \overline{C}$, $\alpha \in [0,1]$ és V a 0-nak tetszőleges környezete E-ben; azt kell igazolni, hogy $((1-\alpha).x + \alpha.y) + V) \cap C \neq \emptyset$. Ehhez legyen W a 0-nak olyan kiegyensúlyozott

környezete E-ben, amelyre $W + W \subseteq V$. Legyen $x' \in (x + W) \cap C$ és $y' \in (y + W) \cap C$. A C konvexitása folytán $(1 - \alpha).x' + \alpha.y' \in C$, továbbá

$$(1 - \alpha).x' + \alpha.y' \in (1 - \alpha).(x + W) + \alpha.(y + W) \subseteq$$

$$\subseteq ((1 - \alpha).x + \alpha.y) + (W + W) \subseteq ((1 - \alpha).x + \alpha.y) + V.,$$

Tehát $(1 - \alpha).x' + \alpha.y' \in ((1 - \alpha).x + \alpha.y) + V) \cap C$, így $((1 - \alpha).x + \alpha.y) + V) \cap C \neq \emptyset$ teljesül.

4) Ha E topologikus vektortér, akkor $A \subseteq E$ esetén a $\overline{\mathrm{co}(\mathrm{eq}(A))}$ halmaz zárt, konvex és kiegyensúlyozott; ezt nevezzük az A halmaz *abszolút konvex burkának.*

3.2. Lokálisan konvex terek és hordós terek

3.2.1. Definíció. *Az E topologikus vektorteret* **lokálisan konvexnek** *nevezzük, ha a 0-nak létezik konvex halmazokból álló környezetbázisa E-ben. Az E vektortér feletti $\mathscr{T}$ topológiát lokálisan konvexnek mondjuk, ha E a $\mathscr{T}$ topológiával ellátva lokálisan konvex tér.*

A félnormálható topologikus vektorterek lokálisan konvexek, mert ha E vektortér, p félnorma E felett, és $R \subseteq \mathbb{R}^+$ tetszőleges olyan nem üres halmaz, hogy $\inf(R) = 0$, akkor a $\{[p < r] | r \in R\}$ halmaz a 0-nak környezetbázisa a $\mathscr{T}_p$ topológia szerint, és nyilvánvaló, hogy minden $\mathbb{R}^+ \ni r$-re a $[p < r]$ halmaz konvex, hiszen ha $x, y \in [p < r]$ és $\alpha \in [0, 1]$, akkor $p((1 - \alpha).x + \alpha.y) \leq (1 - \alpha)p(x) + \alpha p(y) < (1 - \alpha)r + \alpha r = r$, vagyis $(1 - \alpha).x + \alpha.y \in [p < r]$.

A 3.1. 2) megjegyzésből látható, hogy lokálisan konvex térben a 0-nak létezik *nyílt* konvex halmazokból álló környezetbázisa E-ben, hiszen ha $\mathfrak{B}$ a 0-nak konvex halmazokból álló könyezetbázisa, akkor $\{\overset{\circ}{V} | V \in \mathfrak{B}\}$ a 0-nak nyílt konvex halmazokból álló környezetbázisa.

3.2.2. Definíció. *Topologikus vektortérben* **hordónak** *nevezünk minden zárt, konvex, kiegyensúlyozott és elnyelő halmazt.*

3.2.3. Állítás. *Lokálisan konvex térben a 0-nak létezik hordókból álló környezetbázisa.*

Bizonyítás. Legyen V a 0-nak környezete az E lokálisan konvex térben. Vegyük a 0-nak olyan V_1 *zárt* környezetét, amelyre $V_1 \subseteq V$. Az E lokális konvexitása miatt van a 0-nak olyan V_2 *konvex* környezete, hogy $V_2 \subseteq V_1$. Végül, legyen W a 0-nak olyan *kiegyensúlyozott* környezete, hogy $W \subseteq V_2$. Ekkor az $\overline{\mathrm{co}(W)}$ halmaz zárt, konvex (mert konvex halmaz lezártja konvex), kiegyensúlyozott (mert kiegyensúlyozott halmaz konvex burka kiegyensúlyozott, és kiegyensúlyozott halmaz lezártja kiegyensúlyozott), vagyis hordó, és $\overline{\mathrm{co}(W)} \subseteq V$. ■

3.2.4. Definíció. *Az E lokálisan konvex teret* **hordós térnek** *nezezzük, ha minden E-beli hordó a 0-nak környezete.*

3.2.5. Tétel. *Ha E olyan lokálisan konvex tér, hogy E második kategóriájú halmaz, akkor E hordós tér.*

Bizonyítás. Legyen T hordó E-ben; azt kell igazolni, hogy a 0 belső pontja T-nek. Legyen $(\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}}$ olyan sorozat $\mathbb{K} \setminus \{0\}$-ban, hogy $\sup\limits_{n\in\mathbb{N}} |\lambda_n| = +\infty$. Ekkor a T elnyelősége és kiegyensúlyozottsága miatt $E = \bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} (\lambda_n T)$ teljesül, ugyanakkor E második kategóriájú halmaz, így van olyan $n \in \mathbb{N}$, hogy $\overset{\circ}{\overline{\lambda_n T}} \neq \emptyset$. Világos, hogy $n \in \mathbb{N}$ esetén $\overset{\circ}{\overline{\lambda_n T}} = \lambda_n \overset{\circ}{\overline{T}}$, hiszen $\lambda_n \neq 0$, így a λ_n-nel való szorzás E-ben homeomorfizmus, tehát lezárás-tartó és belsőrész-tartó leképezés. Ugyanakkor T zárt, ezért $\overset{\circ}{T} \neq \emptyset$; legyen $x \in \overset{\circ}{T}$ rögzített elem, és legyen U olyan környezete a 0-nak E-ben, hogy $x+U \subseteq T$. Ekkor $-(x+U) \subseteq -T = T$, mert a T kiegyensúlyozott, így szimmetrikus is. Ebből a T konvexitása folytán és $0 \in U$ alapján következik, hogy

$$\frac{1}{2}U \subseteq \frac{1}{2}(U - U) = \frac{1}{2}((x + U) - (x + U)) \subseteq \frac{1}{2}(T + T) = \frac{1}{2}T + \frac{1}{2}T \subseteq T,$$

és $\frac{1}{2}U$ a 0-nak környezete E-ben, tehát T szintén környezete a 0-nak. ■

Az előző állítás szerint minden teljes és félmetrizálható lokálisan konvex tér hordós tér, mert a Baire-féle kategóriatétel szerint ilyen térben minden nem üres nyílt halmaz második kategóriájú. Azonban a következő példa szerint nem minden normálható tér hordós tér.

Példa. Vezessük be a következő függvényhalmazt:

$$E := \{\ f \in \mathscr{C}([0,1];\mathbb{R}) \mid (\exists \delta \in \mathbb{R}^+)(\forall t \in [0,\delta[) :\ f(t) = 0\ \}.$$

Ez nyilvánvalóan lineáris altere a $[0,1] \to \mathbb{R}$ folytonos függvények $\mathscr{C}([0,1];\mathbb{R})$ terének. Az E valós vektorteret ellátjuk a sup-normával. Ekkor a

$$T := \quad f \in E \,\Bigg|\, (\forall\ m \in \mathbb{N}^+) : \Bigg| f \quad \frac{1}{m} \Bigg| \leq \frac{1}{m}$$

halmaz olyan hordó E-ben, amely *nem környezete* a $0 \in E$ vektornak az E normált térben. Továbbá; az E halmaz első kategóriájú az E metrikus térben. (Természetesen E nem Banach-tér.)
Megmutatjuk, hogy ha $r \in \mathbb{R}^+$ tetszőleges, akkor a $B_r(0)$ gömb nem részhalmaza T-nek. Minden $\mathbb{N}^+ \ni n$-re legyen:

$$f_n : [0,1] \to \mathbb{R}; \quad t \mapsto \begin{cases} 0 & ;\text{ ha } t \in [0, \frac{1}{3n}[, \\ 6t - \dfrac{2}{n} & ;\text{ ha } t \in [\frac{1}{3n}, \frac{1}{2n}[, \\ \dfrac{1}{n} & ;\text{ ha } t \in [\frac{1}{2n}, 1]. \end{cases}$$

Ekkor $n \in \mathbb{N}^+$ esetén $f_n \in E$, és ha $n > \frac{1}{r}$, akkor $f_n \in B_r(0)$; ugyanakkor $f_n \quad \frac{1}{2n} \quad = \frac{1}{n}$, tehát $f_n \notin T$. Ezért $B_r(0)$ nem részhalmaza T-nek, vagyis T nem környezete a 0-nak E-ben.

Legyen $(\varepsilon_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tetszőleges valós zérussorozat a $]0, 1]$ intervallumban, és minden $n \in \mathbb{N}$ esetén

$$F_n := \{f \in E|(\forall\ t \in [0, \varepsilon_n]) :\ f(t) = 0\}.$$

Ekkor $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ az E valódi zárt lineáris altereinek olyan sorozata, amelyre $E = \bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} F_n$, ezért E első kategóriájú halmaz.

3.3. Projektíven előállított lokálisan konvex terek

3.3.1. Állítás. *Legyen E vektortér, $(E_i)_{i\in I}$ lokálisan konvex terek rendszere, és $(u_i)_{i\in I}$ olyan rendszer, hogy minden $I \ni i$-re $u_i : E \to E_i$ lineáris operátor. Ekkor az $(E_i, u_i)_{i\in I}$ rendszer által projektíven előállított E feletti topológia lokálisan konvex.*

Bizonyítás. Ha $I = \emptyset$, akkor $(E_i, u_i)_{i\in I}$ rendszer által projektíven előállított E feletti topológia az antidiszkrét topológia, amely természetesen lokálisan konvex.

Ha $I \neq \emptyset$ és $\mathscr{P}_0(I)$ jelöli az I nem üres véges részhalmazainak halmazát, továbbá $(\mathfrak{B}_i)_{i\in I}$ olyan rendszer, hogy minden $I \ni i$-re $\mathfrak{B}_i$ a 0-nak környezetbázisa E_i-ben, akkor a

$$\mathfrak{B} := \left\{ \bigcap_{i\in J} \overset{-1}{u_i}\langle V_i\rangle \;\middle|\; (J \in \mathscr{P}_0(I)) \wedge \left((V_i)_{i\in J} \in \prod_{i\in J} \mathfrak{B}_i\right)\right\}$$

halmaz a 0-nak környezetbázisa az $(E_i, u_i)_{i\in I}$ rendszer által projektíven előállított E feletti topológia szerint. Ha minden $I \ni i$-re E_i lokálisan konvex, akkor a $(\mathfrak{B}_i)_{i\in I}$ rendszer megválasztható úgy, hogy minden $i \in I$ esetén a $\mathfrak{B}_i$ minden eleme konvex halmaz; ekkor nyilvánvaló, hogy a $\mathfrak{B}$ minden eleme konvex halmaz, így az $(E_i, u_i)_{i\in I}$ rendszer által projektíven előállított E feletti topológia lokálisan konvex. ■

3.3.2. Következmény. *Lokálisan konvex tér topologikus lineáris altere lokálisan konvex tér. Lokálisan konvex terek topologikus lineáris szorzata lokálisan konvex tér. Vektortér feletti lokálisan konvex topológiák tetszőleges rendszerének topológia-szuprémuma lokálisan konvex topológia.*

Bizonyítás. Az altér-topológia, a szorzattopológia és a topológia-szuprémum projektíven előállított topológiák, ezért ha ezek lokálisan konvex topológiákból származnak, akkor az előző állítás alapján szintén lokálisan konvexek. ■

3.3.3. Következmény. *Ha E vektortér és $F \subseteq E^*$ lineáris altér, akkor az E feletti $\sigma(E, F)$ topológia lokálisan konvex. Ha E topologikus vektortér, akkor $\sigma(E, E')$ olyan lokálisan konvex topológia E felett, amely kisebb-egyenlő az E topológiájánál.*

Bizonyítás. A második állítás következik az elsőből. Az első állítás azért igaz, mert a $\sigma(E,F)$ topológia megegyezik az $(\mathbb{K},u)_{u\in F}$ rendszer által projektíven előállított E feletti topológiával, és a $\mathbb{K}$ topologikus vektortér lokálisan konvex, így az előző állítás szerint $\sigma(E,F)$ lokálisan konvex. ■

Legyen E vektortér. Az E feletti antidiszkrét topológia nyilvánvalóan lokálisan konvex, tehát létezik E felett legkisebb lokálisan konvex topológia. Az is nyilvánvaló, hogy létezik E felett *legnagyobb lokálisan konvex topológia*: ez az E feletti összes lokálisan konvex topológia szuprémuma.

3.3.4. Állítás. *Az E vektortér feletti legnagyobb lokálisan konvex topológia szerint egy $V\subseteq E$ halmaz pontosan akkor környezete a 0-nak, ha V tartalmaz konvex, kiegyensúlyozott és elnyelő halmazt.*

Bizonyítás. Legyen $\mathfrak{B}$ az E *összes* konvex, kiegyensúlyozott és elnyelő részhalmazainak halmaza. Az állításunk azzal ekvivalens, hogy $\mathfrak{B}$ a 0-nak környezetbázisa a legnagyobb E feletti lokálisan konvex topológia szerint. Nyilvánvaló, hogy $\mathfrak{B}$ olyan rács, amelyre minden $V\in\mathfrak{B}$ esetén $0\in V$. Másfelől, $\mathfrak{B}$-re triviálisan teljesül $(\mathrm{EV_I})$ és $(\mathrm{EV_{II}})$ (1.1.3.). Ugyanakkor $(\mathrm{EV_{III}})$ is teljesül, mert $V\in\mathfrak{B}$ esetén a V konvexitása miatt $\frac{1}{2}.V+\frac{1}{2}.V\subseteq V$ és $\frac{1}{2}.V\in\mathfrak{B}$. Ezért létezik egyetlen olyan $\mathscr{T}$ lineáris topológia E felett, amely szerint $\mathfrak{B}$ a 0-nak környezetbázisa (1.1.3.). Természetesen $\mathscr{T}$ lokálisan konvex topológia. Ha $\mathscr{T}'$ tetszőleges lokálisan konvex topológia E felett és V környezete a 0-nak $\mathscr{T}'$ szerint, akkor V tartalmaz $\mathscr{T}'$ szerinti hordót (3.2.3.), és ez eleme $\mathfrak{B}$-nek, így V a 0-nak környezete $\mathscr{T}$ szerint is. Ez azt jelenti, hogy $\mathscr{T}'\subseteq\mathscr{T}$, tehát $\mathscr{T}$ a legnagyobb E feletti lokálisan konvex topológia. ■

Később be fogjuk bizonyítani, hogy ha E vektortér, akkor az E feletti legnagyobb lokálisan konvex topológia Hausdorff-topológia (4.1.3.).

3.4. Félnorma-rendszer által generált lokálisan konvex topológiák

3.4.1. Definíció. *Legyen E vektortér és $(p_i)_{i\in I}$ olyan rendszer, hogy minden $I\ni i$-re p_i félnorma E felett (ilyenkor azt mondjuk, hogy $(p_i)_{i\in I}$* **félnorma-rendszer** *E felett). Ekkor a $\sup\limits_{i\in I}\mathscr{T}_{p_i}$ topológiát a $(p_i)_{i\in I}$ félnorma-rendszer által generált E feletti lokálisan konvex topológiának nevezzük. Az $(E,(p_i)_{i\in I})$ párt* **polinormált térnek** *nevezzük, ha E vektortér és $(p_i)_{i\in I}$ félnorma-rendszer E felett.*

Legyen E vektortér, $(p_i)_{i\in I}$ félnorma-rendszer E felett, és jelölje $\mathscr{T}$ a $(p_i)_{i\in I}$ által generált E feletti lokálisan konvex topológiát. Ha $I=\emptyset$, akkor $\mathscr{T}$ az antidiszkrét topológia E felett. Ha $I \neq \emptyset$ és $\mathscr{P}_0(I)$ az I nem üres véges részhalmazainak halmaza, és $R \subseteq \mathbb{R}^+$ tetszőleges olyan nem üres halmaz, hogy $\inf(R) = 0$, akkor a

$$\mathfrak{B} := \left\{ \bigcap_{i \in J} [p_i < r] \,\middle|\, (J \in \mathscr{P}_0(I)) \wedge (r \in R) \right\}$$

halmaz a 0-nak környezetbázisa $\mathscr{T}$ szerint. Valóban, a

$$\mathfrak{B}' := \left\{ \bigcap_{i \in J} [p_i < r_i] \,\middle|\, (J \in \mathscr{P}_0(I)) \wedge ((r_i)_{i \in J} \in R^J) \right\}$$

halmaz a 0-nak környezetbázisa $\mathscr{T}$ szerint, mert minden $I \ni i$-re a $\{[p_i < r] | r \in R\}$ halmaz a 0-nak környezetbázisa a $\mathscr{T}_{p_i}$ topológia szerint. Ugyanakkor könnyen látható, hogy $\mathfrak{B} \subseteq \mathfrak{B}'$ és minden $V' \in \mathfrak{B}'$ halmazhoz van olyan $V \in \mathfrak{B}$, amelyre $V \subseteq V'$, ezért $\mathfrak{B}$ is környezetbázisa a 0-nak a $\mathscr{T}$ topológia szerint.

3.4.2. Állítás. (Félnorma-rendszer által generált lokálisan konvex topológia szeparáltsága) *Az E vektortér feletti $(p_i)_{i \in I}$ félnorma-rendszer által generált E feletti lokálisan konvex topológia pontosan akkor szeparált, ha minden $x \in E \setminus \{0\}$ esetén létezik olyan $i \in I$, hogy $p_i(x) > 0$ (ilyenkor azt mondjuk, hogy a $(p_i)_{i \in I}$ félnorma-rendszer* **szétválasztó***).*

Bizonyítás. Tegyük fel, hogy a $(p_i)_{i \in I}$ félnorma-rendszer szétválasztó, és legyenek $x, y \in E$ olyanok, hogy $x \neq y$. Legyen $i \in I$ olyan index, hogy $p_i(y - x) > 0$. Ha $r \in \mathbb{R}^+$ tetszőleges olyan szám, hogy $r \leq p_i(y - x)/2$, akkor $[p_i < r]$ olyan környezete a 0-nak a $(p_i)_{i \in I}$ félnorma-rendszer által generált E feletti lokálisan konvex topológia szerint, amelyre $(x + [p_i{<}r]) \cap (y + [p_i{<}r]) = \emptyset$, hiszen ha $z \in (x + [p_i{<}r]) \cap (y + [p_i{<}r])$ volna, akkor $p_i(z - x) < r$ és $p_i(y - z) = p_i(z - y) < r$ teljesülne, amiből következne, hogy $p_i(y - x) = p_i((y - z) + (z - x)) \leq p_i(y - z) + p_i(z - x) < 2r \leq p_i(y - x)$, ami lehetetlen. Ezért a $(p_i)_{i \in I}$ félnorma-rendszer által generált E feletti lokálisan konvex topológia Hausdorff-topológia.

Megfordítva, tegyük fel, hogy a $(p_i)_{i \in I}$ félnorma-rendszer által generált E feletti lokálisan konvex topológia Hausdorff-topológia, és legyen $x \in E$ olyan, hogy $x \neq 0$. Ekkor van olyan $J \subseteq I$ nem üres véges halmaz és olyan $r \in \mathbb{R}^+$, hogy $x \notin \bigcap_{i \in J} [p_i < r]$. Tehát van olyan $i \in J$, hogy $x \notin [p_i < r]$, így $p_i(x) \geq r > 0$. ∎

3.4.3. Definíció. *Ha E vektortér $\mathbb{K}$ felett, akkor azt mondjuk, hogy a $p : E \to \mathbb{R}$ függvény:*

– **pozitív homogén***, ha minden $x \in E$ és $\lambda \in \mathbb{R}_+$ esetén $p(\lambda.x) = \lambda p(x)$;*

– **szubadditív***, ha minden $x, y \in E$ esetén $p(x + y) \leq p(x) + p(y)$;*

– **szublineáris***, ha pozitív homogén és szubadditív.*

3.4.4. Definíció. *Ha E vektortér és $C \subseteq E$ olyan halmaz, hogy minden $E \ni x$-hez létezik olyan $\lambda \in \mathbb{R}^+$, hogy $x \in \lambda.C$, akkor a*

$$p_C : E \to \mathbb{R}; \quad x \mapsto \inf\{\lambda \in \mathbb{R}^+ | x \in \lambda.C\}$$

függvényt a C halmaz **Minkowski-funkcionáljának** *nevezzük.*

3.4.5. Lemma. a) *Legyen E vektortér és $C \subseteq E$ olyan halmaz, hogy minden $E \ni x$-hez létezik olyan $\lambda \in \mathbb{R}^+$, hogy $x \in \lambda.C$. Ekkor $0 \in C$ és*

– a p_C Minkowski-funkcionál pozitív homogén és $C \subseteq [p_C \leq 1]$;

– ha a C halmaz konvex, akkor p_C szublineáris funkcionál és $[p_C < 1] \subseteq C$;

– ha a C halmaz kiegyensúlyozott, akkor $x \in E$ és $\lambda \in \mathbb{K}$ esetén $p_C(\lambda.x) = |\lambda| p_C(x)$;

– ha a C halmaz konvex és kiegyensúlyozott, akkor p_C félnorma E felett és teljesül az, hogy $[p_C < 1] \subseteq C \subseteq [p_C \leq 1]$.

b) *Ha E topologikus vektortér és Ω a 0-nak konvex nyílt környezete, akkor a p_Ω szublineáris funkcionálra $\Omega = [p_\Omega < 1]$ teljesül.*

Bizonyítás. a) A C halmazra vonatkozó feltevés szerint a 0 vektorhoz van olyan $\alpha \in \mathbb{R}^+$, amelyre $0 \in \alpha.C$, tehát valamely $C \ni x$-re $0 = \alpha.x$, így $0 = x \in C$.
Ha $x \in E$ rögzített és $\alpha \in \mathbb{R}^+$, akkor minden $\beta \in \mathbb{R}^+$ esetén, ha $x \in \beta.C$, akkor $\alpha.x \in (\alpha\beta).C$, így $p_C(\alpha.x) \leq \alpha.\beta$, tehát $\alpha^{-1} p_C(\alpha.x) \leq p_C(x)$, vagyis $p_C(\alpha.x) \leq \alpha p_C(x)$. Ide x helyére $\alpha.x$-et és α helyére α^{-1}-et helyettesítve kapjuk, hogy $p_C(x) \leq \alpha^{-1} p_C(\alpha.x)$, vagyis $\alpha p_C(x) \leq p_C(\alpha.x)$. Ez azt jelenti, hogy p_C pozitív homogén. Ha $x \in C$, akkor $x \in 1.C$, tehát $p_C(x) \leq 1$, így $C \subseteq \{x \in E | p_C(x) \leq 1\}$.

Tegyük fel, hogy C konvex is, és legyenek $x, y \in E$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}^+$ olyanok, hogy $x \in \alpha.C$ és $y \in \beta.C$. Ekkor a C konvexitása miatt

$$x + y \in \alpha.C + \beta.C = (\alpha + \beta).\left(\frac{\alpha}{\alpha + \beta}.C + \frac{\beta}{\alpha + \beta}.C\right) \subseteq (\alpha + \beta).C,$$

így $p_C(x + y) \leq \alpha + \beta$. Ebből következik, hogy $p_C(x + y) \leq p_C(x) + p_C(y)$. Továbbá, $x \in E$ és $p_C(x) < 1$ esetén van olyan $\alpha \in \mathbb{R}^+$, amelyre $\alpha < 1$ és $x \in \alpha.C$; ekkor $0 \in C$, $\alpha^{-1}.x \in C$, $\alpha \in]0, 1[$ és a C konvexitása folytán $x = (1 - \alpha).0 + \alpha.(\alpha^{-1}.x) \in C$ teljesül, így $\{x \in E | p_C(x) < 1\} \subseteq C$.

b) Legyen Ω a 0-nak konvex nyílt környezete az E topologikus vektortérben. Ekkor Ω elnyelő halmaz, így minden $E \ni x$-hez létezik olyan $\lambda \in \mathbb{R}^+$, hogy $x \in \lambda.C$. Ezért értelmezhető a p_Ω Minkowski-funkcionál, és az Ω konvexitása folytán $[p_\Omega < 1] \subseteq \Omega$. Legyen $x \in \Omega$ rögzített pont. A $\mathbb{K} \to E$; $\lambda \mapsto \lambda.x$ leképezés az $(\mathrm{EVT_{II}})$ szerint folytonos az 1 helyen, az 1 számhoz az x értéket rendeli, és Ω környezete x-nek, mert Ω nyílt. Ezért létezik olyan $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$, hogy minden $\lambda \in B_\varepsilon(1; \mathbb{K})$ esetén $\lambda.x \in \Omega$. Természetesen van olyan

$\lambda \in]1, \rightarrow[$ valós szám, amelyre $\lambda \in B_\varepsilon(1;\mathbb{K})$; ekkor $x \in \frac{1}{\lambda}.\Omega$, tehát $p_\Omega(x) \leq \frac{1}{\lambda} < 1$, vagyis $x \in [p_\Omega < 1]$. Ez azt jelenti, hogy $\Omega \subseteq [p_\Omega < 1]$, következésképpen $\Omega = [p_\Omega < 1]$. ■

3.4.6. Állítás. *Legyen E topologikus vektortér és $\mathfrak{B}$ olyan környezetbázisa a 0-nak E-ben, amelynek minden eleme konvex és kiegyensúlyozott halmaz. Ekkor az E topológiája egyenlő a $(p_U)_{U\in\mathfrak{B}}$ félnorma-rendszer által generált E feletti lokálisan konvex topológiával.*

Bizonyítás. Jelölje $\mathscr{T}$ az E topológiáját és $\mathscr{T}'$ a $(p_U)_{U\in\mathfrak{B}}$ félnorma-rendszer által generált E feletti lokálisan konvex topológiát. A $\mathscr{T} = \mathscr{T}'$ egyenlőség ekvivalens azzal, hogy $\mathfrak{B}$ a 0-nak környezetbázisa a $\mathscr{T}'$ topológia szerint.

Ha $U \in \mathfrak{B}$, akkor $[p_U < 1] \subseteq U$ és $[p_U < 1]$ a 0-nak környezete $\mathscr{T}'$ szerint, ezért U a 0-nak szintén környezete a $\mathscr{T}'$ topológia szerint. Legyen V a 0-nak tetszőleges környezete a $\mathscr{T}'$ topológia szerint. Ekkor van olyan $B \subseteq \mathfrak{B}$ nem üres véges halmaz és olyan $r \in \mathbb{R}^+$, hogy $\bigcap_{U\in B}[p_U < r] \subseteq V$. Legyen $s \in]0, r[$ tetszőleges valós szám. Ha $U \in B$, akkor $s.[p_U \leq 1] = [p_U \leq s] \subseteq [p_U < r]$, tehát $U \subseteq [p_U \leq 1] \subseteq \frac{1}{s}.[p_U < r]$. Ez azt jelenti, hogy

$$\bigcap_{U\in B} U \subseteq \bigcap_{U\in B} \frac{1}{s}.[p_U < r] = \frac{1}{s}.\bigcap_{U\in B}[p_U < r] \subseteq \frac{1}{s}.V,$$

vagyis $s.\bigcap_{U\in B} U \subseteq V$, és itt a bal oldalon a 0-nak $\mathscr{T}$ szerinti környezete áll, tehát van olyan $W \in \mathfrak{B}$, hogy $W \subseteq s.\bigcap_{U\in B} U \subseteq V$. Ez azt jelenti, hogy $\mathfrak{B}$ a 0-nak környezetbázisa a $\mathscr{T}'$ topológia szerint. ■

3.4.7. Tétel. *Az E topologikus vektortér pontosan akkor lokálisan konvex, ha létezik olyan félnorma-rendszer E felett, amely az E topológiáját generálja.*

Bizonyítás. Az előző állításból nyilvánvalóan következik. ■

3.5. Lokálisan konvex tér metrizálhatósága

3.5.1. Tétel. (Lokálisan konvex tér metrizálhatósága) *Az E lokálisan konvex tér pontosan akkor félmetrizálható, ha létezik olyan megszámlálható félnorma-rendszer E felett, amely az E topológiáját generálja. Az E lokálisan konvex tér pontosan akkor metrizálható, ha létezik olyan megszámlálható és szétválasztó félnorma-rendszer E felett, amely az E topológiáját generálja.*

Bizonyítás. Ha E félmetrizálható lokálisan konvex tér, akkor létezik olyan $\mathfrak{B}$ megszámlálható környezetbázisa a 0-nak, amelynek minden eleme konvex és kiegyensúlyozott halmaz. Ekkor az E topológiája egyenlő a $(p_U)_{U\in\mathfrak{B}}$ félnorma-rendszer által generált E

feletti lokálisan konvex topológiával.

Megfordítva, ha $(p_i)_{i\in I}$ olyan megszámlálható félnorma-rendszer E felett, amely az E topológiáját generálja, és $(r_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tetszőleges zérussorozat $\mathbb{R}^+$-ban, valamint $\mathscr{P}_0(I)$ jelöli az I nem üres véges részhalmazainak halmazát, akkor a

$$\mathfrak{B} := \left\{ \bigcap_{i\in H} [p_i < r_n] \,\middle|\, (H \in \mathscr{P}_0(I)) \wedge (n \in \mathbb{N}) \right\}$$

halmaz a 0-nak megszámlálható környezetbázisa, így a topologikus vektorterek félmetrizálhatóságának kritériumából kapjuk, hogy E félmetrizálható. ■

3.5.2. Definíció. *A teljes és metrizálható lokálisan konvex tereket* **Fréchet-tereknek** *nevezzük.*

Vigyázzunk arra, hogy ha az E lokálisan konvex tér topológiája egy *megszámlálható* félnorma-rendszer által generálható, akkor csak annyit állíthatunk, hogy E *félmetrizálható*, de azt már nem állíthatjuk, hogy *félnormálható*. Léteznek nem normálható Fréchet-terek.

3.6. Lokálisan konvex terek közötti folytonos lineáris operátorok

3.6.1. Tétel. (Lokálisan konvex terek között ható lineáris operátor folytonossága) *Legyenek E, F lokálisan konvex terek, és $(p_i)_{i\in I}$ (illetve $(q_j)_{j\in J}$) olyan félnorma-rendszer E (illetve F) felett, amely az E (illetve F) topológiáját generálja. Az $u : E \to F$ lineáris operátor pontosan akkor folytonos, ha*

$$(\forall\ j \in J)(\exists\ H \in \mathscr{P}_0(I))(\exists\ C \in \mathbb{R}_+)(\forall\ x \in E) : q_j(u(x)) \leq C \cdot \max_{i\in H} p_i(x),$$

ahol $\mathscr{P}_0(I)$ jelöli az I nem üres véges részhalmazainak halmazát.

Bizonyítás. (*Elégségesség.*) Legyen V a 0-nak környezete F-ben. Létezik olyan $K \subseteq J$ nem üres véges halmaz és $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$, hogy $\bigcap_{j\in K} [q_j < \varepsilon] \subseteq V$. A hipotézis alapján léteznek olyan $(H_j)_{j\in K}$ és $(C_j)_{j\in K}$ rendszerek, hogy minden $j \in K$ esetén $H_j \subseteq I$ nem üres véges halmaz, $C_j \in \mathbb{R}^+$ és minden $E \ni x$-re $q_j(u(x)) \leq C_j \cdot \max_{i\in H_j} p_i(x)$. Legyen $C := \max_{j\in K} C_j$ és $H := \bigcup_{j\in K} H_j$. Ekkor $C \in \mathbb{R}^+$ és $H \subseteq I$ nem üres véges halmaz, tehát $U := \bigcap_{i\in H} p_i < \dfrac{\varepsilon}{C}$ a 0-nak környezete E-ben. Ugyanakkor könnyen látható, hogy

$$u\left\langle \bigcap_{i\in H} p_i < \frac{\varepsilon}{C} \right\rangle \subseteq \bigcap_{j\in K} [q_j < \varepsilon]$$

teljesül, így $u\langle U\rangle \subseteq V$, vagyis u a 0-ban folytonos.

(*Szükségesség.*) Tegyük fel, hogy u a 0-ban folytonos, és legyen $j \in J$ rögzített. Ekkor a $[q_j < 1]$ halmaz a 0-nak környezete F-ben, tehát létezik a 0-nak olyan U környezete E-ben, hogy $u\langle U\rangle \subseteq [q_j < 1]$. Az U-hoz létezik olyan $H \subseteq I$ nem üres véges halmaz és $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$, hogy $\bigcap_{i\in H}[p_i < \varepsilon] \subseteq U$. Ekkor minden $x \in E$ esetén $q_j(u(x)) \leq \frac{1}{\varepsilon}\max_{i\in H} p_i(x)$. Valóban, ha $x \in E$ rögzített vektor, és $r \in \mathbb{R}^+$ tetszőleges olyan szám, amelyre $\frac{1}{\varepsilon}\max_{i\in H} p_i(x) < r$, akkor $\frac{1}{r}.x \in \bigcap_{i\in H}[p_i < \varepsilon] \subseteq U$, tehát $u\ \frac{1}{r}.x \in [q_j < 1]$, így $q_j(u(x)) < r$, amiből következik, hogy $q_j(u(x)) \leq \frac{1}{\varepsilon}\max_{i\in H} p_i(x)$. ■

3.6.2. Következmény. *Legyenek E, F lokálisan konvex terek, és $(p_i)_{i\in I}$ (illetve $(q_j)_{j\in J}$) olyan félnorma-rendszer E (illetve F) felett, amely az E (illetve F) topológiáját generálja. Tegyük fel, hogy a $(p_i)_{i\in I}$ félnorma-rendszer felfelé irányított, vagyis minden $i_1, i_2 \in I$ esetén van olyan $i \in I$, hogy $p_{i_1} \leq p_i$ és $p_{i_2} \leq p_i$. Az $u : E \to F$ lineáris operátor pontosan akkor folytonos, ha*

$$(\forall\ j \in J)(\exists\ i \in I)(\exists\ C \in \mathbb{R}_+)(\forall\ x \in E) : q_j(u(x)) \leq C \cdot p_i(x).$$

Bizonyítás. Az előző tétel és a $(p_i)_{i\in I}$ félnorma-rendszer felfelé irányítottsága miatt nyilvánvaló, hiszen minden $H \subseteq I$ nem üres véges halmazhoz van olyan $i \in I$, hogy minden $k \in H$ esetén $p_k \leq p_i$. ■

3.6.3. Következmény. *Legyenek $(p_i)_{i\in I}$ és $(q_j)_{j\in J}$ félnorma-rendszerek az E vektortér felett. Jelölje $\mathscr{P}_0(I)$ (illetve $\mathscr{P}_0(J)$) az I (illetve J) halmaz nem üres véges részhalmazainak halmazát. A $(p_i)_{i\in I}$ és $(q_j)_{j\in J}$ félnorma-rendszerek által generált E feletti lokálisan konvex topológiák pontosan akkor egyenlőek, ha*

$$(\forall\ j \in J)(\exists\ H \in \mathscr{P}_0(I))(\exists\ C \in \mathbb{R}_+)(\forall\ x \in E) : q_j(x) \leq C \cdot \max_{i\in H} p_i(x)$$

és

$$(\forall\ i \in I)(\exists\ H \in \mathscr{P}_0(J))(\exists\ C \in \mathbb{R}_+)(\forall\ x \in E) : p_i(x) \leq C \cdot \max_{j\in H} q_j(x).$$

Bizonyítás. Ha $\mathscr{T}$ (iletve $\mathscr{T}'$) jelöli a $(p_i)_{i\in I}$ (illetve $(q_j)_{j\in J}$) félnorma-rendszer által generált E feletti lokálisan konvex topológiát, akkor az első formula azzal ekvivalens, hogy az $id_E : E \to E$ lineáris operátor folytonos a $\mathscr{T}$ és $\mathscr{T}'$ topológiák szerint (vagyis $\mathscr{T}' \leq \mathscr{T}$), továbbá a második formula azzal ekvivalens, hogy az $id_E : E \to E$ lineáris operátor folytonos a $\mathscr{T}'$ és $\mathscr{T}$ topológiák szerint (vagyis $\mathscr{T} \leq \mathscr{T}'$). ■

3.6.4. Következmény. *Legyenek $(p_i)_{i\in I}$ félnorma-rendszer az E vektortér felett és $J \subseteq I$. Jelölje $\mathscr{P}_0(J)$ a J halmaz nem üres véges részhalmazainak halmazát. A $(p_i)_{i\in I}$*

félnorma-rendszer és a $(p_i)_{i\in J}$ félnorma-részrendszer által generált E feletti lokálisan konvex topológiák pontosan akkor egyenlőek, ha

$$(\forall\ i \in I)(\exists\ H \in \mathscr{P}_0(J))(\exists\ C \in \mathbb{R}_+)(\forall\ x \in E) : p_i(x) \leq C \cdot \max_{j\in H} p_j(x).$$

Bizonyítás. Az előző állítás alapján nyilvánvaló. ■

3.6.5. Következmény. *Legyen $(p_i)_{i\in I}$ nem üres félnorma-rendszer az E vektortér felett. Jelölje J az I nem üres véges részhalmazainak halmazát, és minden $j \in J$ esetén értelmezzük a*

$$q_j : E \to \mathbb{R}_+; \quad x \mapsto \max_{i\in j} p_i(x)$$

leképezést. Ekkor $(q_j)_{j\in J}$ olyan felfelé irányított félnorma-rendszer E felett, amely ugyanazt a lokálisan konvex topológiát generálja, mint a $(p_i)_{i\in I}$ félnorma-rendszer.

Bizonyítás. Az előző következmény alapján nyilvánvaló, hiszen ekkor $(p_i)_{i\in I}$ részrendszere $(q_j)_{j\in J}$-nek, és minden $j \in J$ esetén, a definíció szerint, $j \subseteq I$ olyan nem üres véges részhalmaza I-nek, hogy minden $E \ni x$-re $q_j(x) := \max_{i\in j} p_i(x)$. ■

Az imént igazolt következményből látható, hogy a félnorma-rendszerek által előállított lokálisan konvex topológiák értelmezéséhez *elégséges* volna azt a speciális esetet tekinteni, amikor a szóbanforgó félnorma-rendszer *felfelé irányított.* Azonban sok esetben a felfelé irányítottság *szükségtelen* korlátozó feltétel, így nem fogjuk előírni.

3.7. Példák teljes és metrizálható lokálisan konvex terekre

3.7.1. Állítás. *Legyen A halmaz, B nem üres halmaz, és $(c_{\alpha,\beta})_{(\alpha,\beta)\in A\times B} \in \mathbb{R}_+^{A\times B}$ tetszőleges függvény. Legyen*

$$E := \left\{ (x_\alpha)_{\alpha\in A} \in \mathbb{K}^A \,\middle|\, (\forall \beta \in B) : \sum_{\alpha\in A} c_{\alpha,\beta}|x_\alpha| < +\infty \right\},$$

továbbá minden $\beta \in B$ esetén

$$p_\beta : E \to \mathbb{R}_+; \quad (x_\alpha)_{\alpha\in A} \mapsto \sum_{\alpha\in A} c_{\alpha,\beta}|x_\alpha|.$$

Ekkor teljesülnek a következő állítások.

a) *Az E halmaz lineáris altere a $\mathbb{K}^A$ függvénytérnek, és minden $\beta \in B$ esetén p_β félnorma E felett. A továbbiakban az E vektorteret ellátjuk a $(p_\beta)_{\beta\in B}$ félnorma-rendszer által generált lokálisan konvex topológiával.*

b) $\mathbb{K}^{(A)} \subseteq E$ *és* $\mathbb{K}^{(A)}$ *sűrű lineáris altere az* E *lokálisan konvex térnek. Ha* A *megszámlálható halmaz, akkor* E *szeparábilis lokálisan konvex tér.*

c) *Az* E *lokálisan konvex tér pontosan akkor szeparált, ha minden* $\alpha \in A$ *esetén van olyan* $\beta \in B$, *hogy* $c_{\alpha,\beta} > 0$.

d) *Ha minden* $\alpha \in A$ *esetén van olyan* $\beta \in B$, *hogy* $c_{\alpha,\beta} > 0$, *akkor* E *teljes szeparált lokálisan konvex tér.*

e) *Ha* B *megszámlálható halmaz és minden* $\alpha \in A$ *esetén van olyan* $\beta \in B$, *hogy* $c_{\alpha,\beta} > 0$, *akkor* E *Fréchet-tér.*

f) *Jelölje* $\mathscr{P}_0(B)$ *a* B *nem üres véges részhalmazainak halmazát. Egy* $u : E \to \mathbb{K}$ *lineáris funkcionál pontosan akkor folytonos a* $(p_\beta)_{\beta\in B}$ *félnorma-rendszer által generált lokálisan konvex topológia szerint, ha létezik olyan* $(u_\alpha)_{\alpha\in A} \in \mathbb{K}^A$, *hogy*

$$(\exists B_u \in \mathscr{P}_0(B))(\exists K \in \mathbb{R}_+)(\forall \alpha \in A):\ |u_\alpha| \leq K \max_{\beta\in B_u} c_{\alpha,\beta}$$

és minden $E \ni (x_\alpha)_{\alpha\in A}$*-ra az* $(x_\alpha u_\alpha)_{\alpha\in A}$ *rendszer abszolút szummálható* $\mathbb{K}$*-ban, így szummálható is és*

$$u\left((x_\alpha)_{\alpha\in A}\right) = \sum_{\alpha\in A} x_\alpha u_\alpha.$$

Megfordítva: ha $(u_\alpha)_{\alpha\in A} \in \mathbb{K}^A$ *tetszőleges olyan rendszer, amelyre*

$$(\exists B_u \in \mathscr{P}_0(B))(\exists K \in \mathbb{R}_+)(\forall \alpha \in A):\ |u_\alpha| \leq K \max_{\beta\in B_u} c_{\alpha,\beta}$$

teljesül, akkor minden $E \ni (x_\alpha)_{\alpha\in A}$*-ra az* $(x_\alpha u_\alpha)_{\alpha\in A}$ *rendszer abszolút szummálható* $\mathbb{K}$*-ban (így szummálható is) és az*

$$E \to \mathbb{K};\quad (x_\alpha)_{\alpha\in A} \mapsto \sum_{\alpha\in A} x_\alpha u_\alpha$$

leképezés folytonos lineáris funkcionál az E *lokálisan konvex tér felett.*

(**Megjegyzés**. Tehát az E' topologikus duális *azonosítható* az

$$(u_\alpha)_{\alpha\in A} \in \mathbb{K}^A \,\middle|\, (\exists B_u \in \mathscr{P}_0(B))(\exists K \in \mathbb{R}_+)(\forall \alpha \in A):\ |u_\alpha| \leq K \max_{\beta\in B_u} c_{\alpha,\beta}$$

vektortérrel. Ha E szeparált, akkor ez a halmaz megegyezik a

$$\left\{ (u_\alpha)_{\alpha\in A} \in \mathbb{K}^A \,\middle|\, (\exists B_u \in \mathscr{P}_0(B)):\ \sup_{\alpha\in A} \frac{|u_\alpha|}{\max\limits_{\beta\in B_u} c_{\alpha,\beta}} < +\infty \right\}$$

halmazzal.)

Bizonyítás. Itt az a) állítás nyilvánvaló, míg c) abból következik, hogy $\mathbb{K}^{(A)} \subseteq E$, és az E szeparáltsága ekvivalens azzal, hogy a $(p_\beta)_{\beta\in B}$ félnorma-rendszer szétválasztó E felett, ami éppen azt jelenti, hogy minden minden $\alpha \in A$ esetén van olyan $\beta \in B$, hogy $c_{\alpha,\beta} > 0$. Továbbá e) következik d)-ből és a lokálisan konvex terek félmetrizálhatóságának jellemzéséből. Ezért csak a b), d) és f) állításokat kell igazolni.

Nyilvánvaló, hogy $\mathbb{K}^{(A)} \subseteq E$. Legyen $x \in E$ és minden $H \subseteq A$ véges halmazra $(x|_H)^\circ$ az x függvény H-ra vett leszűkítésének 0-val vett kiterjesztése A-ra. Ekkor minden $H \subseteq A$ véges halmazra $(x|_H)^\circ \in \mathbb{K}^{(A)}$ és minden $B \ni \beta$-ra

$$p_\beta\left(x - (x|_H)^\circ\right) = \sum_{\alpha\in A} c_{\alpha,\beta}|x_\alpha - ((x|_H)^\circ)_\alpha| = \sum_{\alpha\in A\setminus H} c_{\alpha,\beta}|x_\alpha| =$$

$$= \sum_{\alpha\in A} c_{\alpha,\beta}|x_\alpha| - \sum_{\alpha\in H} c_{\alpha,\beta}|x_\alpha|,$$

ezért az $((x|_H)^\circ)_{H\subseteq A;\ H \text{ véges}}$ általánosított sorozat E-ben konvergál x-hez. Ezért $\mathbb{K}^{(A)}$ sűrű lineáris altere E-nek, és ha A megszámlálható, akkor nyilvánvaló, hogy $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ esetén a $\mathbb{Q}^{(A)}$, míg $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ esetén $(\mathbb{Q} + i\mathbb{Q})^{(A)}$ olyan megszámlálható részhalmaza $\mathbb{K}^{(A)}$-nak, amely sűrű $\mathbb{K}^{(A)}$-ban, így E-ben is az, tehát E szeparábilis. Ezzel a b) állítást igazoltuk.

Tegyük fel, hogy E szeparált; bebizonyítjuk az E teljességét. Legyen $((x_{i,\alpha})_{\alpha\in A})_{i\in I}$ tetszőleges általánosított Cauchy-sorozat E-ben. Ekkor minden $\beta \in B$ és $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ esetén $[p_\beta \leq \varepsilon]$ a 0-nak környezete E-ben, ezért kiválaszthatunk olyan $i_{\beta,\varepsilon} \in I$ indexet, hogy minden $j, k \in I$ esetén, ha $j, k \geq i_{\beta,\varepsilon}$, akkor $p_\beta((x_{j,\alpha})_{\alpha\in A} - (x_{k,\alpha})_{\alpha\in A}) \leq \varepsilon$, vagyis $\sum\limits_{\alpha\in A} c_{\alpha,\beta}|x_{j,\alpha} - x_{k,\alpha}| \leq \varepsilon$. Tehát, ha $\alpha \in A$ és rögzítünk egy $\beta \in B$ elemet (itt lényeges, hogy $B \neq \emptyset$), akkor azt kapjuk, hogy minden $\mathbb{R}^+ \ni \varepsilon$-ra és $I \ni j, k$-ra, ha $j, k \geq i_{\beta,\varepsilon}$, akkor $c_{\alpha,\beta}|x_{j,\alpha} - x_{k,\alpha}| \leq \varepsilon$, amiből $c_{\alpha,\beta} > 0$ alapján látható, hogy minden $A \ni \alpha$-ra $(x_{i,\alpha})_{i\in I}$ általánosított Cauchy-sorozat $\mathbb{K}$-ban, tehát konvergens. Minden $\alpha \in A$ esetén legyen $x_\alpha := \lim\limits_{i,\ I} x_{i,\alpha}$. Megmutatjuk, hogy $(x_\alpha)_{\alpha\in A} \in E$ és az $((x_{i,\alpha})_{\alpha\in A})_{i\in I}$ általánosított sorozat konvergál E-ben $(x_\alpha)_{\alpha\in A}$-hoz. Legyen $\beta \in B$ rögzítve. Ekkor minden $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ számra, minden $H \subseteq A$ véges halmazra és minden $I \ni j, k$-ra, ha $j, k \geq i_{\beta,\varepsilon}$, akkor $\sum\limits_{\alpha\in H} c_{\alpha,\beta}|x_{j,\alpha} - x_{k,\alpha}| \leq \varepsilon$. Tehát minden $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ számra, minden $H \subseteq A$ véges halmazra és minden $I \ni k$-ra, ha $k \geq i_{\beta,\varepsilon}$, akkor

$$\sum_{\alpha\in H} c_{\alpha,\beta}|x_\alpha - x_{k,\alpha}| := \sum_{\alpha\in H} c_{\alpha,\beta}|\lim_{j,I} x_{j,\alpha} - x_{k,\alpha}| = \lim_{j,I} \sum_{\alpha\in H} c_{\alpha,\beta}|x_{j,\alpha} - x_{k,\alpha}| \leq \varepsilon.$$

Ebből látható, hogy minden $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ esetén minden $I \ni k$-ra, ha $k \geq i_{\beta,\varepsilon}$, akkor

$$\sum_{\alpha\in A} c_{\alpha,\beta}|x_\alpha - x_{k,\alpha}| := \sup_{\substack{H\subseteq A \\ H \text{ véges}}} \sum_{\alpha\in H} c_{\alpha,\beta}|x_\alpha - x_{k,\alpha}| \leq \varepsilon.$$

Ebből $\beta \in B$ esetén az $\varepsilon := 1$ és $k := i_{\beta,1}$ választással kapjuk, hogy minden $B \ni \beta$-ra

$$\sum_{\alpha \in A} c_{\alpha,\beta}|x_\alpha| \leq \sum_{\alpha \in A} c_{\alpha,\beta}|x_{i_{\beta,1},\alpha}| + \sum_{\alpha \in A} c_{\alpha,\beta}|x_\alpha - x_{i_{\beta,1},\alpha}| \leq \sum_{\alpha \in A} c_{\alpha,\beta}|x_{i_{\beta,1},\alpha}| + 1 < +\infty,$$

hiszen $(x_{i_{\beta,1},\alpha})_{\alpha \in A} \in E$. Ezért $(x_\alpha)_{\alpha \in A} \in E$ is igaz, és minden $\beta \in B$, $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ és $k \in I$ esetén, ha $k \geq i_{\beta,\varepsilon}$, akkor $p_\beta\left((x_\alpha)_{\alpha \in A} - (x_{k,\alpha})_{\alpha \in A}\right) \leq \varepsilon$, vagyis az $((x_{i,\alpha})_{\alpha \in A})_{i \in I}$ általánosított sorozat konvergál E-ben $(x_\alpha)_{\alpha \in A}$-hoz. Ezzel a d) állítást igazoltuk.

Az f) állítás bizonyításához jelölje minden $\alpha \in A$ esetén $\mathbf{e}_\alpha$ azt az elemet $\mathbb{K}^{(A)}$-ban, amely α-hoz 1-t és az A többi eleméhez 0-t rendel. Ekkor $(\mathbf{e}_\alpha)_{\alpha \in A}$ algebrai bázisa $\mathbb{K}^{(A)}$-nak, így ez a rendszer a b) alapján *totális* E-ben (vagyis a lineáris burka sűrű). Legyen $u \in E'$ rögzített, és minden $A \ni \alpha$-ra $u_\alpha := u(\mathbf{e}_\alpha)$, tehát értelmeztünk egy $(u_\alpha)_{\alpha \in A} \in \mathbb{K}^A$ rendszert. Az u funkcionál folytonossága miatt van olyan $K \in \mathbb{R}_+$ és olyan $B_u \subseteq B$ nem üres véges halmaz, hogy minden $x \in E$ esetén $|u(x)| \leq K \max_{\beta \in B_u} p_\beta(x)$. Ha $\beta \in B$, akkor minden $A \ni \alpha$-ra nyilvánvalóan $p_\beta(\mathbf{e}_\alpha) = c_{\alpha,\beta}$, ezért az $(u_\alpha)_{\alpha \in A}$ rendszerre teljesül az, hogy minden $\alpha \in A$ esetén $|u_\alpha| \leq K \max_{\beta \in B_u} c_{\alpha,\beta}$. Legyen $x := (x_\alpha)_{\alpha \in A} \in E$ rögzített. Minden $H \subseteq A$ véges halmazra

$$\sum_{\alpha \in H} |x_\alpha u_\alpha| \leq K \sum_{\alpha \in H} \max_{\beta \in B_u} c_{\alpha,\beta}|x_\alpha| \leq K \sum_{\alpha \in H} \sum_{\beta \in B_u} c_{\alpha,\beta}|x_\alpha| =$$

$$= K \sum_{\beta \in B_u} \sum_{\alpha \in H} c_{\alpha,\beta}|x_\alpha| \leq K \sum_{\beta \in B_u} \sum_{\alpha \in A} c_{\alpha,\beta}|x_\alpha| =: K \sum_{\beta \in B_u} p_\beta(x),$$

amiből látható, hogy az $(x_\alpha u_\alpha)_{\alpha \in A}$ rendszer abszolút szummálható $\mathbb{K}$-ban, tehát szummálható is, így jól értelmezett a $\sum_{\alpha \in A} x_\alpha u_\alpha \in \mathbb{K}$ összeg. Ha $H \subseteq A$ véges halmaz, akkor

$$u\left(\sum_{\alpha \in H} x_\alpha \mathbf{e}_\alpha\right) = \sum_{\alpha \in H} x_\alpha u_\alpha,$$

és természetesen $\sum_{\alpha \in H} x_\alpha \mathbf{e}_\alpha = (x|_H)^\circ$, továbbá a b) bizonyításában láttuk, hogy $\lim_{\substack{H \subseteq A \\ H \text{ véges}}} (x|_H)^\circ = x$ teljesül az E topológiája szerint, ezért az u folytonosságából és a $\sum_{\alpha \in A} x_\alpha u_\alpha$ összeg értelmezéséből következik az

$$u(x) = \sum_{\alpha \in A} x_\alpha u_\alpha$$

egyenlőség. Ezzel az f) nemtriviális részét igazoltuk. ■

3.8. Induktívan előállított lokálisan konvex topológiák

3.8.1. Tétel. *Legyen E vektortér, $(E_i)_{i\in I}$ lokálisan konvex terek rendszere, és $(u_i)_{i\in I}$ olyan rendszer, hogy minden $I \ni i$-re $u_i : E_i \to E$ lineáris operátor. Az E felett létezik egyetlen olyan lokálisan konvex topológia, amely a legnagyobb mindazon E feletti lokálisan konvex topológiák között, amelyekre minden $i \in I$ esetén az $u_i : E_i \to E$ lineáris operátor folytonos.*

Bizonyítás. Minden $I \ni i$-re legyen $\mathscr{T}_i$ az E_i feletti lokálisan konvex topológia. Jelölje $\mathfrak{S}$ azon E feletti $\mathscr{T}$ lokálisan konvex topológiák halmazát, amelyekre minden $i \in I$ esetén az $u_i : E_i \to E$ operátor folytonos a $\mathscr{T}_i$ és $\mathscr{T}$ topológiák szerint. Tekintsük a $\mathscr{T} := \sup\limits_{\mathscr{T}'\in\mathfrak{S}} \mathscr{T}'$ topológiát, amelyről tudjuk, hogy lokálisan konvex topológia E felett. Ha $\mathscr{T} \in \mathfrak{S}$ teljesülne, akkor $\mathscr{T}$ a legnagyobb lenne mindazon E feletti lokálisan konvex topológiák között, amelyre teljesül az, hogy minden $i \in I$ esetén az $u_i : E_i \to E$ lineáris operátor folytonos a $\mathscr{T}_i$ és $\mathscr{T}$ topológiák szerint.

Legyen $i \in I$ rögzített; megmutatjuk, hogy $u_i : E_i \to E$ folytonos a $\mathscr{T}_i$ és $\mathscr{T}$ topológiák szerint. Ehhez legyen V a 0-nak környezete E-ben a $\mathscr{T}$ topológia szerint. Legyen $\Omega \in \mathscr{T}$ olyan, hogy $0 \in \Omega \subseteq V$. A szuprémum-topológia értelmezése alapján léteznek olyan $(\mathscr{T}'_\alpha)_{\alpha\in A}$ és $(\Omega_\alpha)_{\alpha\in A}$ nem üres véges rendszerek, hogy minden $A \ni \alpha$-ra $\mathscr{T}'_\alpha \in \mathfrak{S}$ és $\Omega_\alpha \in \mathscr{T}'_\alpha$, valamint $0 \in \bigcap\limits_{\alpha\in A} \Omega_\alpha \subseteq \Omega$. Minden $\alpha \in A$ esetén az $u_i : E_i \to E$ lineáris operátor folytonos a $\mathscr{T}_i$ és $\mathscr{T}'_\alpha$ topológiák szerint, tehát $\overset{-1}{u_i}\langle\Omega_\alpha\rangle$ környezete a 0-nak E_i-ben a $\mathscr{T}_i$ topológia szerint. Ezért $U := \bigcap\limits_{\alpha\in A} \overset{-1}{u_i}\langle\Omega_\alpha\rangle$ olyan környezete a 0-nak E_i-ben a $\mathscr{T}_i$ topológia szerint, hogy $u_i\langle U\rangle \subseteq \Omega \subseteq V$, tehát u_i a 0-ban folytonos a $\mathscr{T}_i$ és $\mathscr{T}$ topológiák szerint. ■

3.8.2. Definíció. *Ha E vektortér, $(E_i)_{i\in I}$ topologikus vektorterek rendszere, és $(u_i)_{i\in I}$ olyan rendszer, hogy minden $I \ni i$-re $u_i : E_i \to E$ lineáris operátor, akkor az $(E_i, u_i)_{i\in I}$ rendszer által* **induktívan előállított E feletti lokálisan konvex topológiának** *nevezzük azt a legnagyobb E feletti lokálisan konvex topológiát, amelyre minden $i \in I$ esetén az $u_i : E_i \to E$ lineáris operátor folytonos.*

Vigyázzunk arra, hogy ha E vektortér, $(E_i)_{i\in I}$ topologikus vektorterek rendszere, és $(u_i)_{i\in I}$ olyan rendszer, hogy minden $I \ni i$-re $u_i : E_i \to E$ lineáris operátor, akkor az $(E_i, u_i)_{i\in I}$ rendszer által induktívan előállított E feletti topológia nem szükségképpen lineáris; ez a topológia szigorúan nagyobb lehet az $(E_i, u_i)_{i\in I}$ rendszer által induktívan előállított E feletti lokálisan konvex topológiánál.

3.8.3. Állítás. *Legyen E vektortér, $(E_i)_{i\in I}$ topologikus vektorterek rendszere, és $(u_i)_{i\in I}$ olyan rendszer, hogy minden $I \ni i$-re $u_i : E_i \to E$ lineáris operátor. Jelölje $\mathfrak{C}$ az E összes* *konvex, kiegyensúlyozott és elnyelő részhalmazainak halmazát, továbbá minden $I \ni i$-re legyen $\mathscr{F}_i$ a 0 vektor környezetszűrője E_i-ben. Ekkor a*

$$\mathfrak{B} := \{V \in \mathfrak{C} \mid (\forall\ i \in I) : \overset{-1}{u_i}\langle V \rangle \in \mathscr{F}_i\}$$

halmaz a 0-nak környezetbázisa az $(E_i, u_i)_{i \in I}$ rendszer által induktívan előállított E feletti lokálisan konvex topológia szerint.

Bizonyítás. Nyilvánvaló, hogy $\mathfrak{B}$ olyan rács, amelynek minden eleme 0-t tartalmazó részhalmaza E-nek, és $\mathfrak{B}$ rendelkezik az $(\mathrm{EV_I})$ tulajdonsággal. Ha $V \in \mathfrak{B}$ és $\lambda \in \mathbb{K} \setminus \{0\}$, akkor $\lambda.V$ szintén konvex, kiegyensúlyozott és elnyelő halmaz, továbbá minden $i \in I$ esetén az u_i operátor homogenitása folytán $\overset{-1}{u_i}\langle \lambda.V \rangle = \lambda.\overset{-1}{u_i}\langle V \rangle$, tehát $\overset{-1}{u_i}\langle V \rangle \in \mathscr{F}_i$ miatt $\overset{-1}{u_i}\langle \lambda.V \rangle \in \mathscr{F}_i$, vagyis $\lambda.V \in \mathfrak{B}$, így $\mathfrak{B}$-re $(\mathrm{EV_{II}})$ is teljesül. Ha $V \in \mathfrak{B}$, akkor az előzőek szerint bármely $\alpha \in]0,1[$ valós számra $\alpha.V \in \mathfrak{B}$ és $(1-\alpha).V \in \mathfrak{B}$, ugyanakkor a V konvexitása miatt $\alpha.V + (1-\alpha).V \subseteq V$, tehát $\mathfrak{B}$-re $(\mathrm{EV_{III}})$ teljesül.

Ezért létezik egyetlen olyan E feletti $\mathscr{T}'$ lineáris topológia, amely szerint $\mathfrak{B}$ a 0-nak környezetbázisa. A definíciója alapján nyilvánvaló, hogy a $\mathscr{T}'$ topológia lokálisan konvex, továbbá minden $i \in I$ esetén az $u_i : E_i \to E$ lineáris operátor folytonos az E_i topológiája és $\mathscr{T}'$ szerint, mert ha V a 0-nak környezete a $\mathscr{T}'$ szerint, akkor van olyan $W \in \mathfrak{B}$, hogy $W \subseteq V$, és ekkor $\overset{-1}{u_i}\langle W \rangle \subseteq \overset{-1}{u_i}\langle V \rangle$, és $\overset{-1}{u_i}\langle W \rangle$ a 0-nak környezete E_i-ben. Ezért a $\mathscr{T}'$ topológia kisebb-egyenlő az $(E_i, u_i)_{i \in I}$ rendszer által induktívan előállított E feletti lokálisan konvex topológiánál, amit $\mathscr{T}$-vel fogunk jelölni.

Megmutatjuk, hogy $\mathscr{T} = \mathscr{T}'$, vagyis $\mathscr{T} \subseteq \mathscr{T}'$. Legyen W a 0-nak környezete a $\mathscr{T}$ topológia szerint. Létezik a 0-nak olyan V konvex kiegyensúlyozott környezete $\mathscr{T}$ szerint, amelyre $V \subseteq W$. Ekkor V elnyelő halmaz, tehát $V \in \mathfrak{C}$, és minden $i \in I$ esetén $\overset{-1}{u_i}\langle V \rangle$ a 0-nak környezete E_i-ben, hiszen a $\mathscr{T}$ definíciója alapján az $u_i : E_i \to E$ operátor folytonos az E_i topológiája és $\mathscr{T}$ szerint. Ebből következik, hogy $\mathscr{T} \subseteq \mathscr{T}'$, tehát $\mathscr{T} = \mathscr{T}'$, így $\mathfrak{B}$ a 0-nak környezetbázisa a $\mathscr{T}$ topológia szerint. ■

3.8.4. Állítás. *Legyen E vektortér, $(E_i)_{i \in I}$ lokálisan konvex terek rendszere, és $(u_i)_{i \in I}$ olyan rendszer, hogy minden $I \ni i$-re $u_i : E_i \to E$ lineáris operátor. Lássuk el E-t az $(E_i, u_i)_{i \in I}$ rendszer által induktívan előállított E feletti lokálisan konvex topológiával. Ha F lokálisan konvex tér, akkor egy $u : E \to F$ lineáris operátor pontosan akkor folytonos, ha minden $i \in I$ esetén az $u \circ u_i : E_i \to F$ lineáris operátor folytonos.*

Bizonyítás. Legyen F lokálisan konvex tér és $u : E \to F$ lineáris operátor. Ha u folytonos, akkor minden $i \in I$ esetén az $u \circ u_i : E_i \to F$ lineáris operátor folytonos, mert az $u_i : E_i \to E$ operátor folytonos. Megfordítva, tegyük fel, hogy minden $I \ni i$-re az $u \circ u_i : E_i \to F$ lineáris operátor folytonos. Legyen V a 0-nak környezete F-ben, és vegyük a 0-nak olyan W környezetét F-ben, amely konvex, kiegyensúlyozott és $W \subseteq V$. Ekkor W elnyelő is, így $\overset{-1}{u}\langle W \rangle$ konvex, kiegyensúlyozott és elnyelő halmaz E-ben, továbbá minden $I \ni i$-re $\overset{-1}{u_i}\langle \overset{-1}{u}\langle W\rangle\rangle = \overset{-1}{(u \circ u_i)}\langle W\rangle$ a 0-nak környezete E_i-ben, vagyis az előző állítás alapján $\overset{-1}{u}\langle W\rangle$ a 0-nak környezete E-ben. Ezért $\overset{-1}{u}\langle V\rangle$ is a 0-nak környezete E-ben, vagyis u folytonos a 0-ban. ■

3.8.5. Állítás. *Ha E vektortér, $(E_i)_{i\in I}$ hordós terek rendszere, és $(u_i)_{i\in I}$ olyan rendszer, hogy minden $I \ni i$-re $u_i : E_i \to E$ lineáris operátor, akkor E az $(E_i, u_i)_{i\in I}$ rendszer által induktívan előállított lokálisan konvex topológiával ellátva szintén hordós tér.*

Bizonyítás. Legyen T hordó E-ben; ekkor T konvex, kiegyensúlyozott és elnyelő halmaz E-ben. Továbbá, minden $i \in I$ esetén $\overset{-1}{u_i}\langle T\rangle$ zárt E_i-ben, mert T zárt E-ben és u_i folytonos. Tehát minden $i \in I$ esetén $\overset{-1}{u_i}\langle T\rangle$ hordó E_i-ben, így a 0-nak környezete E_i-ben, mert a hipotézis szerint E_i hordós tér. Ezért T a 0-nak környezete E-ben, vagyis E hordós tér. ■

Például egy teljes és normálható topologikus vektorterek rendszere által induktívan előállított lokálisan konvex tér szükségképpen hordós tér, de még az is lehet, hogy nem félmetrizálható.

3.9. Lokálisan konvex terek induktív limesze és szigorú induktív limesze

Most az induktív lokálisan konvex topológiák leggyakrabban előforduló speciális esetéről lesz szó: a lokálisan konvex topológiák *induktív limeszéről.*

3.9.1. Definíció. *Legyen E vektortér és $(E_i)_{i\in I}$ lokálisan konvex terek olyan rendszere, hogy minden $I \ni i$-re E_i lineáris altere E-nek. Minden $i \in I$ esetén jelölje u_i az $E_i \to E$ kanonikus injekciót. Ekkor az $(E_i)_{i\in I}$ lokálisan konvex tér-rendszer* **induktív limeszének** *nevezzük az E vektorteret az $(E_i, u_i)_{i\in I}$ rendszer által induktívan előállított lokálisan konvex topológiával ellátva.*

Legyen E az $(E_i)_{i\in I}$ lokálisan konvex tér-rendszer induktív limesze. Jelölje $\mathfrak{C}$ az E összes konvex, kiegyensúlyozott és elnyelő részhalmazainak halmazát, és minden $I \ni i$-re legyen $\mathscr{F}_i$ a 0 vektor környezetszűrője E_i-ben. Ekkor a

$$\mathfrak{B} := \{V \in \mathfrak{C} \mid (\forall\, i \in I) : V \cap E_i \in \mathscr{F}_i\}$$

halmaz a 0-nak környezetbázisa E-ben, hiszen $i \in I$ és $V \in \mathfrak{C}$ esetén $\overset{-1}{u_i}\langle V\rangle = V \cap E_i$, ahol u_i az $E_i \to E$ kanonikus injekció. Ezért egy $V \subseteq E$ halmaz pontosan akkor környezete a 0-nak E-ben, ha létezik olyan $W \subseteq E$ konvex, kiegyensúlyozott és elnyelő halmaz, hogy

$W \subseteq V$ és minden $I \ni i$-re $W \cap E_i$ a 0-nak környezete E_i-ben.

Ha E az $(E_i)_{i \in I}$ lokálisan konvex tér-rendszer induktív limesze, akkor minden $i \in I$ esetén az $E_i \to E$ kanonikus injekció folytonos, ezért az E_i topológiája majorálja az E topológiájának E_i-re vett leszűkítését, de azzal nem feltétlenül egyenlő. Most szükséges és elégséges feltételt adunk ahhoz, hogy minden $I \ni i$-re az E_i topológiája megegyezzen az E topológiájának E_i-re vett leszűkítésével.

3.9.2. Állítás. *Legyen E az $(E_i)_{i \in I}$ lokálisan konvex tér-rendszer induktív limesze. Jelölje $\mathscr{T}$ az E topológiáját, és minden $i \in I$ esetén legyen $\mathscr{T}_i$ az E_i topológiája. A következő állítások ekvivalensek.*

(i) *Minden $I \ni i$-re $\mathscr{T}_i = \mathscr{T} | E_i$.*

(ii) *Létezik olyan $\mathscr{T}'$ lokálisan konvex topológia E felett, amelyre minden $i \in I$ esetén $\mathscr{T}' | E_i = \mathscr{T}_i$.*

Bizonyítás. (i)$\Rightarrow$(ii) Triviális, hiszen a $\mathscr{T}' := \mathscr{T}$ választás megfelel.

(ii)$\Rightarrow$(i) Legyen $\mathscr{T}'$ olyan lokálisan konvex topológia E felett, amelyre minden $i \in I$ esetén $\mathscr{T}' | E_i = \mathscr{T}_i$. Ekkor minden $I \ni i$-re az $E_i \to E$ kanonikus injekció folytonos a $\mathscr{T}_i$ és $\mathscr{T}'$ topológiák szerint, tehát a $\mathscr{T}$ definíciója alapján $\mathscr{T}' \leq \mathscr{T}$. Ebből kapjuk, hogy minden $i \in I$ esetén $\mathscr{T}_i = \mathscr{T}' | E_i \leq \mathscr{T} | E_i$, így $\mathscr{T}_i = \mathscr{T} | E_i$. ■

Példák (induktív limeszekre).

1) Legyen T lokálisan kompakt tér, F normált tér, és tekintsük a $T \to F$ kompakt tartójú folytonos függvények $\mathscr{K}(T; F)$ vektorterét. Jelölje $\mathscr{T}$ a sup-norma által generált (normálható, tehát lokálisan konvex) topológiát $\mathscr{K}(T; F)$ felett. Legyen továbbá minden $K \subseteq T$ kompakt halmazra

$$\mathscr{K}(T, K; F) := \{ \ f \in \mathscr{K}(T; F) \mid \operatorname{supp}(f) \subseteq K \ \},$$

és a $\mathscr{K}(T, K; F) \subseteq \mathscr{K}(T; F)$ lineáris alteret lássuk el a $\mathscr{T} | \mathscr{K}(T, K; F)$ altértopológiával. Minden $K \subseteq T$ kompakt halmazra $\mathscr{K}(T, K; F)$ normálható topologikus vektortér, sőt ha F Banach-tér, akkor ez teljes és normálható topologikus vektortér. A $\mathscr{K}(T; F)$ függvénytér feletti *természetes induktív topológiának* nevezzük a $(\mathscr{K}(T, K; F))_{K \in \mathfrak{K}}$ lokálisan konvex tér-rendszer induktív limeszének topológiáját, ahol $\mathfrak{K}$ a T összes kompakt részhalmazainak halmaza. A $\mathscr{K}(T; F)$ feletti természetes induktív topológia Hausdorff-topológia, mert majorálja a sup-norma által generált topológiát (vagyis $\mathscr{T}$-t). Továbbá, az előző állítás szerint minden $K \subseteq T$ kompakt halmazra a $\mathscr{K}(T; F)$ feletti természetes induktív topológia $\mathscr{K}(T, K; F)$-re vett leszűkítése egyenlő a $\mathscr{K}(T, K; F)$ topológiájával. Ha H lokálisan konvex tér, akkor egy

$$u : \mathscr{K}(T; F) \to H$$

lineáris operátor pontosan akkor folytonos a $\mathscr{K}(T;F)$ feletti természetes induktív topológia szerint, ha minden $K \subseteq T$ kompakt halmazra az u leszűkítése $\mathscr{K}(T,K;F)$-re folytonos. Ha F Banach-tér, akkor $\mathscr{K}(T;F)$ a természetes induktív topológiával ellátva hordós-tér, mert ekkor $\mathscr{K}(T;F)$ teljes és normálható topologikus vektorterek (tehát hordós terek) induktív limesze.

2) Legyen E véges dimenziós valós normált tér, $\Omega \subseteq E$ nyílt részhalmaz és F normált tér. Jelölje $C_0^\infty(\Omega;F)$ az $\Omega \to F$ kompakt tartójú végtelenszer differenciálható függvények vektorterét, továbbá minden $K \subseteq \Omega$ kompakt halmazra legyen

$$C^\infty(\Omega,K;F) := \{\ f \in C_0^\infty(T;F) \mid \mathrm{supp}(f) \subseteq K\ \}.$$

Legyen $K \subseteq \Omega$ rögzített kompakt halmaz, és minden $p \in \mathbb{N}$ esetén értelmezzük a

$$|||\cdot|||_{K,p} : C^\infty(\Omega,K;F) \to \mathbb{R}_+; \quad f \mapsto \sup_{x\in K} \|(D^p f)(x)\|$$

leképezést, amelyről könnyen látható, hogy félnorma a $C^\infty(\Omega,K;F)$ függvénytér felett. Lássuk el a $C^\infty(\Omega,K;F)$ vektorteret a $(\|\cdot\|_{K,p})_{p\in\mathbb{N}}$ félnorma-sorozat által generált lokálisan konvex topológiával. Világos, hogy ekkor $C^\infty(\Omega,K;F)$ metrizálható lokálisan konvex tér, és belátható, hogy ha F Banach-tér, akkor teljes is, vagyis ekkor $C^\infty(\Omega,K;F)$ Fréchet-tér. A $C_0^\infty(\Omega;F)$ függvénytér *természetes induktív topológiának* nevezzük a $(C^\infty(\Omega,K;F))_{K\in\mathfrak{K}}$ lokálisan konvex tér-rendszer induktív limeszének topológiáját, ahol $\mathfrak{K}$ az Ω összes kompakt részhalmazainak halmaza. Világos, hogy a $C_0^\infty(\Omega;F)$ feletti természetes induktív topológia Hausdorff-topológia, mert majorálja a sup-norma által generált topológiát.

3.9.3. Lemma. *Legyen E lokálisan konvex tér, M lineáris altere E-nek, és W a 0-nak konvex kiegyensúlyozott környezete az M topologikus lineáris altérben. Ekkor létezik a 0-nak olyan V konvex kiegyensúlyozott környezete E-ben, amelyre $V \cap M = W$.*

Bizonyítás. Az altértopológia definíciója alapján a W-hez létezik a 0-nak olyan V' környezete E-ben, hogy $V' \cap M \subseteq W$, továbbá az E lokális konvexitása miatt V' megválasztható úgy, hogy konvex és kiegyensúlyozott legyen. Értelmezzük a $V := \mathrm{co}(V' \cup W)$ halmazt, ami a 0-nak konvex környezete E-ben, és kiegyensúlyozott is, mert $V' \cup W$ kiegyensúlyozott és kiegyensúlyozott halmaz konvex burka kiegyensúlyozott. Megmutatjuk, hogy $V \cap M = W$. Az nyilvánvaló, hogy $W \subseteq V \cap M$. Megfordítva, legyen $x \in V \cap M$; ekkor léteznek olyan $\alpha, \beta \in [0,1]$ valós számok és $y \in V'$, $z \in W$ vektorok, hogy $\alpha + \beta = 1$ és $x = \alpha.y + \beta.z$. Ha $\alpha = 0$, akkor $\beta = 1$, tehát $x = z \in W$. Ha $\alpha > 0$, akkor $y = \alpha^{-1}.(x - \beta.z) \in M$, mert $x \in M$ és $z \in W \subseteq M$; ekkor $y \in V' \cap M \subseteq W$, tehát a W konvexitása folytán $x \in W$. ■

3.9.4. Állítás. *Legyen E az $(E_n)_{n\in\mathbb{N}}$ lokálisan konvex tér-sorozat induktív limesze, és tegyük fel, hogy minden $\mathbb{N} \ni n$-re $E_n \subseteq E_{n+1}$, valamint E_n topologikus lineáris* *altere E_{n+1}-nek (vagyis az E_{n+1} topológiájának E_n-re vett leszűkítése megegyezik az E_n topológiájával), és $E = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} E_n$. Ekkor minden $\mathbb{N} \ni n$-re az E topológiájának E_n-re vett leszűkítése egyenlő az E_n topológiájával, és ha minden $\mathbb{N} \ni n$-re E_n szeparált, akkor E is szeparált.*

Bizonyítás. (I) Legyen $n\in\mathbb{N}$ rögzített, és legyen W a 0-nak konvex kiegyensúlyozott környezete E_n-ben. Megmutatjuk, hogy létezik a 0-nak olyan V konvex kiegyensúlyozott környezete E-ben, amelyre $V \cap E_n = W$; ebből következik, hogy E_n topologikus lineáris altere E-nek.

A kiválasztási axiómával kombinált rekurzió tételének és az előző lemmának alkalmazásával könnyen látható olyan $(V_k)_{k\in\mathbb{N}}$ sorozat létezése, hogy $V_0 = W$, és minden $k \in \mathbb{N}$ esetén V_k a 0-nak konvex kiegyensúlyozott környezete E_{n+k}-ban, és $V_{k+1} \cap E_{n+k} = V_k$. Legyen $V := \bigcup_{k\in\mathbb{N}} V_k$. Világos, hogy ez kiegyensúlyozott halmaz, és konvex is, mert a $(V_k)_{k\in\mathbb{N}}$ halmazsorozat monoton növő. Ugyanakkor a V halmaz elnyelő E-ben, mert $x \in E$ esetén van olyan $k \in \mathbb{N}$, hogy $x \in E_{n+k}$, így V_k elnyeli x-et, hiszen V_k a 0-nak környezete E_{n+k}-ban, következésképpen V még inkább elnyeli x-et, hiszen $V_k \subseteq V$.

Megmutatjuk, hogy $V \cap E_n = W$. Ehhez először teljes indukcióval igazoljuk, hogy minden $k \in \mathbb{N}$ esetén $V_k \cap E_n = W$. Ez nyilván igaz, ha $k = 0$, mert $V_0 := W$ és $W \subseteq E_n$. Ha $k \in \mathbb{N}$ és $V_k \cap E_n = W$, akkor $E_n \subseteq E_{n+k}$ miatt $V_{k+1} \cap E_n = (V_{k+1} \cap E_{n+k}) \cap E_n = V_k \cap E_n = W$, vagyis az állítás igaz a $k + 1$ számra is. Ebből nyilvánvalóan következik, hogy $V \cap E_n = \bigcup_{k\in\mathbb{N}} (V_k \cap E_n) = W$.

Bebizonyítjuk, hogy minden $\mathbb{N} \ni m$-re $V \cap E_m$ a 0-nak környezete E_m-ben. Valóban, ha $m \in \mathbb{N}$ és $m \leq n$, akkor $E_m \subseteq E_n$ miatt $V \cap E_m = (V \cap E_n) \cap E_m = W \cap E_m$, és W a 0-nak környezete E_n-ben, valamint a hipotézis szerint az E_n topológiájának E_m-re vett leszűkítése egyenlő az E_m topológiájával, tehát $W \cap E_m$ a 0-nak környezete E_m-ben. Ezért elegendő azt igazolni, hogy ha $m \in \mathbb{N}$ és $m > n$, akkor $V \cap E_m$ a 0-nak környezete E_m-ben. Tehát az a kérdés, hogy ha $k \in \mathbb{N}^+$ tetszőleges, akkor $V \cap E_{n+k}$ a 0-nak környezete-e E_{n+k}-ban? Ez viszont nyilvánvalóan így van, mert minden $k \in \mathbb{N}$ esetén $V_k = V_{k+1} \cap E_{n+k} \subseteq V \cap E_{n+k}$ és V_k a 0-nak környezete E_{n+k}-ban.

Összefoglalva: V olyan konvex, kiegyensúlyozott és elnyelő részhalmaza E-nek, hogy minden $m \in \mathbb{N}$ esetén $V \cap E_m$ a 0-nak környezete E_m-ben. Ebből következik, hogy V a 0-nak környezete az E induktív limeszben, továbbá $V \cap E_n = W$. Ezzel igazoltuk azt, hogy minden $\mathbb{N} \ni n$-re az E topológiájának E_n-re vett leszűkítése egyenlő az E_n topológiájával.

(II) Tegyük fel, hogy minden $n \in \mathbb{N}$ esetén E_n szeparált. Az E szeparáltságának bizonyításához legyen $x \in E \setminus \{0\}$ rögzített. Az $E = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} E_n$ feltétel alapján van olyan $n \in \mathbb{N}$, hogy $x \in E_n \setminus \{0\}$. Az E_n szeparáltsága folytán a 0-nak van olyan W környezete E_n-ben, hogy $x \notin W$. Az E_n topologikus altere E-nek, ezért létezik a 0-nak olyan V környezete

E-ben, hogy $V \cap E_n = W$. Ekkor nyilvánvalóan $x \notin V$, így E szeparált lokálisan konvex tér. ■

3.9.5. Definíció. *Azt mondjuk, hogy az E lokálisan konvex tér az $(E_n)_{n\in\mathbb{N}}$ lokálisan konvex tér-sorozat* **szigorú induktív limesze***, ha E az $(E_n)_{n\in\mathbb{N}}$ lokálisan konvex tér-sorozat induktív limesze, és minden $\mathbb{N} \ni n$-re E_n zárt topologikus lineáris altere E_{n+1}-nek, valamint $E = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} E_n$.*

3.9.6. Állítás. *Ha az E lokálisan konvex tér az $(E_n)_{n\in\mathbb{N}}$ lokálisan konvex tér-sorozat szigorú induktív limesze, akkor minden $n \in \mathbb{N}$ esetén E_n zárt lineáris altere E-nek.*

Bizonyítás. A hipotézis szerint minden $n \in \mathbb{N}$ esetén E_n zárt topologikus lineáris altere E_{n+1}-nek, ezért teljes indukcióval könnyen igazolható, hogy $n \in \mathbb{N}$ esetén minden $m \geq n$ természetes számra E_n zárt topologikus lineáris altere E_m-nek.

Legyen $n \in \mathbb{N}$ rögzítve, és vegyünk olyan E_n-ben haladó $(x_i)_{i\in I}$ általánosított sorozatot és olyan $x \in E$ vektort, hogy $(x_i)_{i\in I}$ konvergál x-hez E-ben; azt kell bizonyítani, hogy $x \in E_n$. Az $E = \bigcup_{m\in\mathbb{N}} E_m$ feltétel alapján van olyan $m \in \mathbb{N}$, hogy $x \in E_m$; és mivel az $(E_k)_{k\in\mathbb{N}}$ halmazsorozat tartalmazás tekintetében monoton növő, feltehető, hogy $m \geq n$. Ekkor az $(x_i)_{i\in I}$ általánosított sorozat E_m-ben halad és $x \in E_m$, valamint E_m topologikus lineáris altere E-nek, ezért $(x_i)_{i\in I}$ konvergál x-hez az E_m topologikus lineáris altérben. Az E_n halmaz zárt E_m-ben, és az $(x_i)_{i\in I}$ általánosított sorozat E_n-ben halad, ezért $x \in E_n$. ■

Példák *(szigorú induktív limeszekre).*

1) Legyen T σ-kompakt lokálisan kompakt tér; ekkor létezik a T kompakt részhalmazainak olyan $(K_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sorozata, hogy minden $n \in \mathbb{N}$ esetén $K_n \subseteq \overset{\circ}{K}_{n+1}$ és $T = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} K_n$. Legyen F normált tér. Minden $n \in \mathbb{N}$ esetén a $\mathscr{K}(T, K_n; F)$ vektorteret a sup-norma által generált topológiával látjuk el. Ekkor a $\mathscr{K}(T; F)$ függvénytér a természetes induktív topológiával ellátva egyenlő a $(\mathscr{K}(T, K_n; F))_{n\in\mathbb{N}}$ normálható topologikus vektortér-sorozat szigorú induktív limeszével. A definíciók alapján ez nyilvánvaló, ha figyelembe vesszük azt, hogy minden $K \subseteq T$ kompakt halmazhoz van olyan $n \in \mathbb{N}$, hogy $K \subseteq \overset{\circ}{K}_n$, ezért $\mathscr{K}(T, K; F) \subseteq \mathscr{K}(T, K_n; F)$.

2) Legyen $n \in \mathbb{N}^+$, Ω nyílt részhalmaza $\mathbb{R}^n$-nek és F normált tér. Létezik az Ω kompakt részhalmazainak olyan $(K_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sorozata, hogy minden $n \in \mathbb{N}$ esetén $K_n \subseteq \overset{\circ}{K}_{n+1}$ és $\Omega = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} K_n$. Ekkor a $C_0^\infty(\Omega; F)$ függvénytér a természetes induktív topológiával ellátva egyenlő a $(C_0^\infty(T, K_n; F))_{n\in\mathbb{N}}$ metrizálható topologikus vektortér-sorozat szigorú induktív limeszével.

4. fejezet

Konvex halmazok szétválasztása

4.1. A Hahn–Banach tétel algebrai formája

Ebben a pontban azt vizsgáljuk meg, hogy topologikus vektortér tér felett "elég sok" folytonos lineáris funkcionál létezik-e? A funkcionálanalízisben sok probléma megoldása adott tulajdonságú folytonos lineáris funkcionálok létezésének bizonyítására redukálható, ezért ennek a problémakörnek az analízisben egészen széleskörű alkalmazása van.

Általában könnyű megadni egyszerű, például véges dimenziós lineáris altereken nemtriviális folytonos lineáris operátorokat, ezért a nemtriviális folytonos lineáris funkcionálok, illetve operátorok létezésének problémája kapcsolatba hozható a folytonos lineáris operátorok folytonos lineáris kiterjeszthetőségének feladatával. Ebből a témakörből származik a topologikus vektortér sűrű alterén értelmezett, teljes és szeparált topologikus vektortérbe ható folytonos lineáris operátor folytonos kiterjesztésének tétele (1.8.1.). Azonban ez a tétel nem alkalmazható nemtriviális folytonos lineáris operátorok *létezésének* bizonyítására, mert végtelen dimenziós normált tér sűrű lineáris altere annyira bonyolult szerkezetű, hogy azon sem látszik nemtriviális folytonos lineáris operátor létezése. Olyan kiterjesztési tételre volna szükség, amely *nem sűrű* lineáris altéren folytonos lineáris operátorra vonatkozik.

Másfelől, gyakran olyan lineáris kiterjesztésre van szükségünk, amely rendelkezik egy olyan tulajdonsággal, amellyel a kiterjesztendő operátor is bír. Ilyen jellegű tétel lesz a Hahn–Banach-tétel, azonban csak abban a speciális esetben, amikor az érkezési tér $\mathbb{K}$. A lineáris operátorok feltétel nélküli kiterjesztése *mindig* lehetséges: erről szól a következő tétel a lineáris algebrából.

4.1.1. Tétel. *Ha E és F vektorterek (tetszőleges K test felett), $M \subseteq E$ lineáris altér, és $u : M \to F$ lineáris operátor, akkor létezik olyan $\tilde{u} : E \to F$ lineáris operátor, amelyre $u \subseteq \tilde{u}$.*

Bizonyítás. Először megmutatjuk, hogy létezik olyan $N \subseteq E$ lineáris altér, amelyre $E = M \oplus N$, vagyis $E = M + N$ és $M \cap N = \{0\}$. (Ilyenkor azt mondjuk, hogy N *algebrai komplementere* M-nek.) Jelölje $\mathfrak{S}_M$ azon $N \subseteq E$ lineáris alterek halmazát, amelyekre $M \cap N = \{0\}$. Az $\mathfrak{S}_M$ halmaz felett a tartalmazás-reláció *induktív* rendezés, hiszen ha $(N_i)_{i \in I}$ olyan nem üres rendszer $\mathfrak{S}_M$-ben, amelyre minden $I \ni i, j$-re $N_i \subseteq N_j$ vagy $N_j \subseteq N_i$, akkor $N := \bigcup_{i \in I} N_i \in \mathfrak{S}_M$ és minden $I \ni i$-re $N_i \subseteq N$. Ezért a Kuratowski–Zorn-lemma alapján vehetünk olyan $N \in \mathfrak{S}_M$ elemet, amely tartalmazás tekintetében maximális. Ekkor $M \cap N = \{0\}$ és állítjuk, hogy $M + N = E$, vagyis N algebrai komplementere M-nek. Valóban, ha létezik $x \in E \setminus (M + N)$, akkor $y \in M \cap (N + K.x)$ esetén van olyan $z \in N$ és $\lambda \in K$, hogy $y = z + \lambda.x$. Ekkor $\lambda.x = y - z \in M + N$, ezért $x \notin M + N$ alapján $\lambda = 0$, így $y - z = 0$, vagyis $y = z \in M \cap N$, azaz $y = 0$. Ez azt jelenti, hogy $N + K.x \in \mathfrak{S}_M$, ugyanakkor $N + K.x$ tartalmazza N-t és nem egyenlő N-nel, mert $x \notin N$. Ez viszont ellentmond N maximalitásának.

Legyen N tetszőleges algebrai komplementere M-nek, és tekintsük az

$$s : M \times N \to E; \quad (x, y) \mapsto x + y$$

$$p : M \times N \to M; \quad (x, y) \mapsto x$$

leképezéseket. Ezek lineáris operátorok és s bijekció, mert $E = M \oplus N$. Továbbá, $x \in M$ esetén $s^{-1}(x) = (x, 0)$, így az $u \circ p \circ s^{-1} : E \to F$ operátor u-nak lineáris kiterjesztése. ■

4.1.2. Következmény. *Ha E vektortér (tetszőleges K test felett), akkor E^* szétválasztó E felett, tehát minden $x \in E \setminus \{0\}$ vektorhoz létezik olyan $u \in E^*$, hogy $u(x) \neq 0$.*

Bizonyítás. Legyen $x \in E \setminus \{0\}$, és tekintsük a $K.x \to K$; $\lambda.x \mapsto \lambda$ leképezést, amely lineáris funkcionál a $K.x \subseteq E$ egydimenziós altér felett. Az előző tétel alapján ez a leképezés kiterjeszthető $u : E \to K$ lineáris funkcionállá, és természetesen $u(x) = 1$. ■

4.1.3. Következmény. *Ha E vektortér $\mathbb{K}$ felett, akkor a legnagyobb E feletti lokálisan konvex topológia Hausdorff-topológia.*

Bizonyítás. Ha $x \in E \setminus \{0\}$, akkor az előző következmény alapján létezik olyan $u \in E^*$, hogy $u(x) \neq 0$, és akkor az $[|u| < |u(x)|]$ halmaz a 0-nak x-et nem tartalmazó környezete a legnagyobb E feletti lokálisan konvex topológia szerint, hiszen ez a halmaz nyilvánvalóan konvex, kiegyensúlyozott és elnyelő (3.3.4.). Ezután természetesen elegendő a 1.1.6. tételre hivatkozni. ■

A következő lemma előtt emlékeztetünk arra, hogy ha E valós vektortér, akkor egy $p : E \to \mathbb{R}$ függvényt konvexnek nevezünk, ha minden $\alpha \in [0, 1]$ valós számra és minden $x, y \in E$ vektorra:

$$p((1 - \alpha).x + \alpha.y) \leq (1 - \alpha)p(x) + \alpha p(y).$$

Nyilvánvaló, hogy valós vektortér felett minden félnorma szublineáris függvény (3.4.3.), és minden szublineáris függvény konvex függvény.

4.1.4. Lemma. *Legyen E valós vektortér, $p : E \to \mathbb{R}$ konvex függvény, $M \subseteq E$ lineáris altér, és $u : M \to \mathbb{R}$ olyan lineáris funkcionál, hogy minden $x \in M$ esetén $u(x) \leq p(x)$. Ekkor $z \in E \setminus M$ esetén létezik olyan $\tilde{u} : M \oplus (\mathbb{R}.z) \to \mathbb{R}$ lineáris funkcionál, amelyre minden $x \in M \oplus (\mathbb{R}.z)$ esetén $\tilde{u}(x) \leq p(x)$.*

Bizonyítás. Ha $\alpha, \beta \in \mathbb{R}^+$ és $x_1, x_2 \in M$ esetén

$$\alpha u(x_1) + \beta u(x_2) = u(\alpha.x_1 + \beta.x_2) =$$

$$= (\alpha+\beta)u\left(\frac{\alpha}{\alpha+\beta}.x_1 + \frac{\beta}{\alpha+\beta}.x_2\right) \leq (\alpha+\beta)p\left(\frac{\alpha}{\alpha+\beta}.x_1 + \frac{\beta}{\alpha+\beta}.x_2\right) =$$

$$= (\alpha+\beta)p\left(\frac{\alpha}{\alpha+\beta}.(x_1 - \beta.z) + \frac{\beta}{\alpha+\beta}.(x_2 + \alpha.z)\right) \leq$$

$$\leq \alpha p(x_1 - \beta.z) + \beta p(x_2 + \alpha.z),$$

amiből átrendezéssel kapjuk, hogy

$$\frac{1}{\beta}\left(u(x_1) - p(x_1 - \beta.z)\right) \leq \frac{1}{\alpha}\left(p(x_2 + \alpha.z) - u(x_2)\right).$$

Ebből következik, hogy

$$c_- := \sup_{\substack{\alpha \in \mathbb{R}^+ \\ x \in M}} \left(\frac{1}{\alpha}\left(u(x) - p(x - \alpha.z)\right)\right) \leq$$

$$\leq \inf_{\substack{\alpha \in \mathbb{R}^+ \\ x \in M}} \left(\frac{1}{\alpha}\left(p(x + \alpha.z) - u(x)\right)\right) =: c_+.$$

Az $M \oplus (\mathbb{R}.z) \subseteq E$ lineáris altér minden eleme egyértelműen előáll $x + \alpha.z$ alakban, ahol $x \in M$ és $\alpha \in \mathbb{R}$. Ebből látható, hogy $c \in \mathbb{R}$ esetén jól értelmezett az

$$u_c : M \oplus (\mathbb{R}.z) \to \mathbb{R}; \quad x + \alpha.z \mapsto u(x) + \alpha \cdot c$$

leképezés, és ez nyilvánvalóan az a lineáris funkcionál, amely u-nak kiterjesztése, és z-hez a c értéket rendeli.
Megmutatjuk, hogy ha $c \in [c_-, c_+]$, akkor az u_c funkcionálra teljesül az, hogy minden $x \in M$ és $\alpha \in \mathbb{R}$ esetén $u_c(x + \alpha.z) \leq p(x + \alpha.z)$. Valóban, ha $\alpha > 0$, akkor $c \leq c_+ \leq \frac{1}{\alpha}\left(p(x + \alpha.z) - u(x)\right)$, ezért $u_c(x + \alpha.z) := u(x) + \alpha \cdot c \leq p(x + \alpha.z)$. Ha pedig $\alpha < 0$, akkor $-\alpha > 0$, tehát $c \geq c_- \geq \frac{1}{-\alpha}\left(u(x) - p(x + \alpha.z)\right)$, ezért $-\alpha \cdot c \geq u(x) - p(x + \alpha.z$, vagyis $p(x + \alpha.z \geq u(x) + \alpha \cdot c =: u_c(x + \alpha.z)$. ■

4.1.5. Tétel. (A Hahn–Banach-tétel algebrai formája) *Legyen E valós vektortér, $p : E \to \mathbb{R}$ konvex függvény, $M \subseteq E$ lineáris altér, és $u : M \to \mathbb{R}$ olyan lineáris funkcionál, amelyre minden $x \in M$ esetén $u(x) \leq p(x)$. Ekkor létezik olyan $\tilde{u} : E \to \mathbb{R}$ lineáris funkcionál, amely u-nak kiterjesztése, és amelyre minden $x \in M$ esetén $\tilde{u}(x) \leq p(x)$.*

Bizonyítás. Jelölje $\mathfrak{S}$ azon $v{:}E{\rightarrowtail}\mathbb{R}$ függvények halmazát, amelyekre $\mathrm{Dom}(v) \subseteq E$ lineáris altér, és v lineáris funkcionál, továbbá $M \subseteq \mathrm{Dom}(v)$, $v|_M = u$, valamint minden $\mathrm{Dom}(v) \ni x$-re $v(x) \leq p(x)$. Természetesen $u \in \mathfrak{S}$. Jelölje $\leq$ a $\subseteq$ relációt az $\mathfrak{S}$ halmazon.

Megmutatjuk, hogy $\leq$ *induktív rendezés* az $\mathfrak{S}$ halmaz felett. Ehhez legyen $(v_i)_{i\in I}$ olyan $\mathfrak{S}$-ben haladó nem üres rendszer, hogy minden $I \ni i, j$-re $v_i \leq v_j$ vagy $v_j \leq v_i$. Ekkor jól értelmezett az a $v : E \rightarrowtail \mathbb{R}$ függvény, amelyre $\mathrm{Dom}(v) := \bigcup\limits_{i\in I} \mathrm{Dom}(v_i)$, és minden $\mathrm{Dom}(v) \ni x$-re $v(x) := v_i(x)$, ahol $i \in I$ tetszőleges olyan index, amelyre $x \in \mathrm{Dom}(v_i)$. Könnyen látható, hogy $v \in \mathfrak{S}$, és nyilvánvaló, hogy minden $i \in I$ esetén $v_i \leq v$, vagyis v felső korlátja a $(v_i)_{i\in I}$ rendszernek az $(\mathfrak{S}, \leq)$ rendezett halmazban. (Sőt még az is igaz, hogy v a legkisebb felső korlátja, vagyis a szuprémuma a $(v_i)_{i\in I}$ rendszernek.) Ezért a $(\mathfrak{S}, \leq)$ pár induktívan rendezett halmaz.

A Kuratowski–Zorn-lemma alapján létezik maximális eleme az $(\mathfrak{S}, \leq)$ rendezett halmaznak; legyen v ilyen elem. Ha létezne $z \in E \setminus \mathrm{Dom}(v)$ vektor, akkor az előző lemma alapján találhatunk olyan $\tilde{v} : \mathrm{Dom}(v) \oplus (\mathbb{R}.z) \to \mathbb{R}$ lineáris funkcionált, amely a v kiterjesztése, és amelyre minden $\mathrm{Dom}(v) \oplus (\mathbb{R}.z) \ni x$-re $\tilde{v}(x) \leq p(x)$. Ekkor $\tilde{v} \in \mathfrak{S}$, $v \leq \tilde{v}$ és $v \neq \tilde{v}$ teljesülne, ami ellentmond a v maximalitásának a $\leq$ rendezés szerint. Ezért $\mathrm{Dom}(v) = E$, így $v \in \mathfrak{S}$ miatt $v : E \to \mathbb{R}$ olyan lineáris funkcionál, amely u-nak kiterjesztése, és minden $x \in E$ esetén $v(x) \leq p(x)$. ■

Nyilvánvaló, hogy ha E vektortér $\mathbb{K}$ felett, akkor az E halmaz a $+$ művelettel és a $\mathbb{K} \times E \to E$ leképezés $\mathbb{R} \times E$-re vett leszűkítésével ellátva valós vektortér; ezt nevezzük az *E alatt fekvő valós vektortérnek*, és $E_{\mathbb{R}}$-rel jelöljük. Ha E normált tér, akkor $E_{\mathbb{R}}$ az E normájával ellátva nyilvánvalóan valós normált tér; ezt nevezzük az *E alatt fekvő valós normált térnek*.

4.1.6. Lemma. *Legyen E komplex vektortér. Ha $u : E \to \mathbb{C}$ lineáris funkcionál, akkor a $v : E_{\mathbb{R}} \to \mathbb{R};\ x \mapsto \Re(u(x))$ leképezés olyan lineáris funkcionál az $E_{\mathbb{R}}$ valós vektortér felett, amelyre minden $x \in E$ esetén $u(x) = v(x) - \mathbf{i}v(\mathbf{i}.x)$. Megfordítva, ha $v : E_{\mathbb{R}} \to \mathbb{R}$ tetszőleges lineáris funkcionál az $E_{\mathbb{R}}$ valós vektortér felett, akkor az $u : E \to \mathbb{C};\ x \mapsto v(x) - \mathbf{i}v(\mathbf{i}.x)$ leképezés olyan lineáris funkcionál az E komplex vektortér felett, amelyre minden $x \in E$ esetén $v(x) = \Re(u(x))$.*

Bizonyítás. Ha $u{:}E{\to}\mathbb{C}$ lineáris funkcionál és $x{\in}E$, akkor $\Re(u(\mathbf{i}.x)) = \Re(\mathbf{i}.u(x)) = -\Im(u(x))$, következésképpen $u(x) = \Re(u(x)) - \mathbf{i}\Re(u(\mathbf{i}.x))$. Ebből következik az első állítás.

Legyen $v : E_{\mathbb{R}} \to \mathbb{R}$ lineáris funkcionál az $E_{\mathbb{R}}$ valós vektortér felett, és vezessük be az $u : E \to \mathbb{C};\ x \mapsto v(x) - \mathbf{i}v(\mathbf{i}.x)$ leképezést. Nyilvánvaló, hogy az u függvény additív és minden $x \in E$ esetén $v(x) = \Re(u(x))$. Ha $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ és $x \in E$, akkor

$$u((\alpha + \mathbf{i}\beta).x) := v((\alpha + \mathbf{i}\beta).x) - \mathbf{i}v(\mathbf{i}.(\alpha + \mathbf{i}\beta).x) =$$

$$= v(\alpha.x + \beta.(\mathbf{i}.x)) - \mathbf{i}v(\alpha.(\mathbf{i}.x) - \beta.x) = \alpha v(x) + \beta v(\mathbf{i}.x) - \alpha\mathbf{i}v(\mathbf{i}.x) + \beta\mathbf{i}v(x) =$$

$$= (\alpha + \mathbf{i}\beta)(v(x) - \mathbf{i}v(x)) =: (\alpha + \mathbf{i}\beta)u(x),$$

tehát $u : E \to \mathbb{C}$ lineáris funkcionál. ■

4.1.7. Tétel. *Legyen E vektortér $\mathbb{K}$ felett, p félnorma E felett, $M \subseteq E$ lineáris altér, és $u : M \to \mathbb{K}$ olyan lineáris funkcionál, amelyre minden $x \in M$ esetén $|u(x)| \leq p(x)$. Ekkor létezik olyan $\tilde{u} : E \to \mathbb{K}$ lineáris funkcionál, amely u-nak kiterjesztése, és minden $E \ni x$-re $|\tilde{u}(x)| \leq p(x)$.*

Bizonyítás. Először arra az esetre bizonyítunk, amikor $\mathbb{K} = \mathbb{R}$. Ekkor a p félnorma konvex függvény az E valós vektortér felett, és minden $M \ni x$-re $u(x) \leq |u(x)| \leq p(x)$. Ezért a Hahn–Banach-tétel szerint van olyan $\tilde{u} : E \to \mathbb{R}$ lineáris funkcionál, amely u-nak kiterjesztése, és minden $E \ni x$-re $\tilde{u}(x) \leq p(x)$. Ekkor $x \in E$ esetén $-\tilde{u}(x) = \tilde{u}(-x) \leq p(-x) = p(x)$, így $|\tilde{u}(x)| \leq p(x)$ is igaz.

Tegyük fel, hogy $\mathbb{K} = \mathbb{C}$. Ekkor a p félnorma szublineáris függvény az $E_{\mathbb{R}}$ valós vektortér felett, és M lineáris altere az $E_{\mathbb{R}}$ valós vektortérnek, továbbá a $v : M \to \mathbb{R};\ x \mapsto \Re(u(x))$ leképezés olyan lineáris funkcionál, amelyre $x \in M$ esetén $v(x) := \Re(u(x)) \leq |u(x)| \leq p(x)$. Ezért a Hahn–Banach-tétel szerint van olyan $\tilde{v} : E_{\mathbb{R}} \to \mathbb{R}$ lineáris funkcionál, amely v-nek kiterjesztése, és minden $E \ni x$-re $\tilde{v}(x) \leq p(x)$. Az előző lemma alapján az $\tilde{u} : E \to \mathbb{C};\ x \mapsto \tilde{v}(x) - \mathbf{i}\tilde{v}(\mathbf{i}.x)$ leképezés olyan lineáris funkcionál az E komplex vektortér felett, amelyre minden $x \in E$ esetén $\Re(\tilde{u}(x)) = \tilde{v}(x)$. Ezért $x \in M$ esetén $\Re(\tilde{u}(x)) = \tilde{v}(x) = v(x) = \Re(u(x))$, továbbá $\mathbf{i}.x \in M$ miatt $-\Im(\tilde{u}(x)) = \Re(\mathbf{i}\tilde{u}(x)) = \Re(\tilde{u}(\mathbf{i}.x)) = \tilde{v}(\mathbf{i}.x) = v(\mathbf{i}.x) = \Re(u(\mathbf{i}.x)) = \Re(\mathbf{i}u(x)) = -\Im(u(x))$, vagyis $\Im(\tilde{u}(x)) = \Im(u(x))$. Ez azt jelenti, hogy $\tilde{u}$ az u-nak kiterjesztése. Ha $x \in E$, akkor van olyan $z \in \mathbb{C}$, hogy $|z| = 1$ és $\tilde{u}(x) = z|\tilde{u}(x)|$; ekkor kihasználva azt, hogy p félnorma

$$|\tilde{u}(x)| = \overline{z}\tilde{u}(x) = \tilde{u}(\overline{z}.x) = \Re(\tilde{u}(\overline{z}.x)) = \tilde{v}(\overline{z}.x) \leq p(\overline{z}.x) = |\overline{z}|p(x) = p(x)$$

adódik, tehát $\tilde{u} : E \to \mathbb{C}$ olyan leképezés, amelynek a létezését állítottuk. ■

4.1.8. Következmény. *Legyen E normált tér $\mathbb{K}$ felett. Ekkor az E minden M lineáris alteréhez, és minden $u : M \to \mathbb{K}$ folytonos lineáris funkcionálhoz létezik olyan $\tilde{u} : E \to \mathbb{K}$ folytonos lineáris funkcionál, amely u-nak kiterjesztése, és amelyre $\|u\| = \|\tilde{u}\|$.*

Bizonyítás. Legyen $p : E \to \mathbb{R}_+;\ x \mapsto \|u\|\|x\|$. Ekkor p olyan félnorma E felett, amelyre minden $x \in M$ esetén $|u(x)| \leq \|u\|\|x\| =: p(x)$. Ezért az előző tétel alapján létezik olyan $\tilde{u} : E \to \mathbb{K}$ lineáris funkcionál, amely u-nak kiterjesztése, és minden $x \in E$ esetén $|\tilde{u}(x)| \leq p(x) := \|u\|\|x\|$. Ekkor a funkcionálnorma definíciója szerint $\|\tilde{u}\| \leq \|u\|$, ugyanakkor $\|u\| \leq \|\tilde{u}\|$ nyilvánvalóan igaz, mert $\tilde{u}$ az u kiterjesztése, és az M egységgömbje része az E egységgömbjének. ■

4.1.9. Következmény. *Legyen E normált tér $\mathbb{K}$ felett, $(x_i)_{i\in I}$ lineárisan független véges rendszer E-ben, és $(\alpha_i)_{i\in I}$ tetszőleges (ugyanolyan indexhalmazú) rendszer $\mathbb{K}$-ban. Ekkor létezik olyan $u : E \to \mathbb{K}$ folytonos lineáris funkcionál, amelyre minden $i \in I$ esetén $u(x_i) = \alpha_i$.*

Bizonyítás. Jelölje M az $(x_i)_{i\in I}$ rendszer által generált lineáris alteret E-ben. Ekkor

$$w : \mathbb{K}^I \to M; \quad (\lambda_i)_{i\in I} \mapsto \sum_{i\in I} \lambda_i.x_i$$

olyan *lineáris bijekció*, amelyre minden $i \in I$ esetén $w(\mathbf{e}_i) = x_i$, ahol $\mathbf{e}_i \in \mathbb{K}^I$ az a függvény, amelyre $j \in I$ esetén $\mathbf{e}_i(j) = \delta_{i,j}$ (*Kronecker-szimbólum*). Tekintsük a

$$v : \mathbb{K}^I \to \mathbb{K}; \quad (\lambda_i)_{i\in I} \mapsto \sum_{i\in I} \lambda_i \alpha_i$$

leképezést, amely lineáris funkcionál $\mathbb{K}^I$ felett. Ekkor $v \circ w^{-1} : M \to \mathbb{K}$ lineáris funkcionál, és folytonos az M normált altéren, hiszen M véges dimenziós. Ezért az előző állítás szerint van olyan $u : E \to \mathbb{K}$ folytonos lineáris funkcionál, amely $v \circ w^{-1}$-nek kiterjesztése. Ekkor nyilvánvalóan $u \circ w = v$, tehát minden $i \in I$ esetén $u(x_i) = u(w(\mathbf{e}_i)) = v(\mathbf{e}_i) = \alpha_i$ teljesül. ■

4.1.10. Következmény. *Ha E normált tér, akkor E' szétválasztó E felett, tehát minden $x \in E \setminus \{0\}$ esetén létezik olyan $u \in E'$, hogy $u(x) \neq 0$.*

Bizonyítás. Az előző következményből kapjuk, mert egy nem nulla vektorból álló egy tagú rendszer lineárisan független. ■

Az előző állítást gyakran alkalmazzuk vektor-egyenlőségek bizonyítására. Ugyanis, ha E normált tér és $x, y \in E$, akkor az $x = y$ vektor-egyenlőség azzal ekvivalens, hogy minden $u \in E'$ esetén fennáll az $u(x) = u(y)$ skalár-egyenlőség.

4.1.11. Következmény. *Legyen p szublineáris függvény az E valós vektortér felett és $H_p := \{u \in E^* | (\forall x \in E) : u(x) \leq p(x)\}$. Ekkor minden $E \ni x$-hez létezik olyan $u \in H_p$, amelyre $u(x) = p(x)$, ezért $H_p \neq \emptyset$, és minden $x \in E$ esetén*

$$p(x) = \sup_{u\in H_p} u(x).$$

Bizonyítás. Legyen $x \in E$ rögzített, és vezessük be az $u_x : \mathbb{R}.x \to \mathbb{R}$; $\alpha.x \mapsto \alpha p(x)$ lineáris funkcionált. Minden $z \in \mathbb{R}.x$ esetén $u_x(z) \le p(z)$ teljesül, ezért a Hahn-Banach-tétel alapján van olyan $\tilde{u}_x \in E^*$, hogy $\tilde{u}_x$ az u_x kiterjesztése és $\tilde{u}_x \in H_p$. Ezért $H_p \neq \emptyset$ és fennállnak a $p(x) = u_x(x) = \tilde{u}_x(x) \le \sup\limits_{u \in H_p} u(x) \le p(x)$ egyenlőtlenségek.) ■

4.1.12. Tétel. *Ha E normált tér, akkor a*

$$j_E : E \to E''; \quad (x \mapsto (u \mapsto u(x)))$$

lineáris operátor izometria, tehát minden $x \in E$ esetén fennáll az

$$\|x\| = \sup_{\substack{u \in E' \\ \|u\| \le 1}} |u(x)|$$

egyenlőség.

Bizonyítás. Megmutatjuk, hogy $x \in E$ esetén van olyan $u \in E'$, amelyre $\|u\| \le 1$ és $\|x\| = |u(x)|$ teljesül, tehát még

$$\|x\| = \max_{\substack{u \in E' \\ \|u\| \le 1}} |u(x)|$$

is igaz. Valóban, ha $x = 0$, akkor $u := 0$ ilyen funkcionál, ezért feltehető, hogy $x \neq 0$. Legyen $x_0 := \|x\|^{-1}.x$, és vegyük a $\mathbb{K}.x_0 \subseteq E$ egydimenziós lineáris alteret, valamint a $\mathbb{K}.x_0 \to \mathbb{K}$; $\alpha.x_0 \mapsto \alpha$ lineáris funkcionált. Ez nyilvánvalóan folytonos, és a funkcionálnormája egyenlő 1-gyel. Ezért van olyan $u \in E'$, amelyre minden $\alpha \in \mathbb{K}$ esetén $u(\alpha.x_0) = \alpha$, és $\|u\| = 1$; ekkor $u(x) = u(\|x\|.x_0) = \|x\|$. ■

4.2. A Hahn–Banach tétel geometriai formája

4.2.1. Definíció. *Az E vektortér M részhalmazát* **affin altérnek** *nevezzük, ha létezik olyan M_0 lineáris altere E-nek és olyan $z \in E$, hogy $M = z + M_0$.*

4.2.2. Jelölés. *Ha E vektortér $\mathbb{K}$ felett és $u : E \to \mathbb{K}$ lineáris funkcionál, akkor a $\Re \circ u : E \to \mathbb{R}$ függvényt (amely $\mathbb{R}$-lineáris funkcionál E felett) az $u_{\mathbb{R}}$ szimbólummal jelöljük. Tehát $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ esetén $u_{\mathbb{R}} = u$, míg $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ esetén $u_{\mathbb{R}}$ az u függvény valós része.*

4.2.3. Tétel. *(A Hahn–Banach-tétel geometriai alakja.) Legyen E topologikus vektortér, $\Omega \subseteq E$ konvex nyílt halmaz, és $M \subseteq E$ affin altér. Ha $\Omega \cap M = \emptyset$, akkor létezik olyan $u \in E'$ és $c \in \mathbb{R}$, hogy $\Omega \subseteq [u_{\mathbb{R}} < c]$ és $M \subseteq [u_{\mathbb{R}} = c]$.*

Bizonyítás. Ha Ω üres, akkor az $u := 0$ és $c := 0$ választás megfelelő, hiszen ekkor $\Omega = \emptyset = [u_{\mathbb{R}} < c]$ és $M \subseteq E = [u_{\mathbb{R}} = c]$. Ezért feltehetjük, hogy $\Omega \neq \emptyset$. Három lépésben bizonyítunk.

(I) Először feltesszük, hogy E *valós* topologikus vektortér és $0 \in \Omega$. Ekkor Ω elnyelő konvex halmaz, így tekinthetjük az Ω halmaz $p_\Omega : E \to \mathbb{R}$ Minkowski-funkcionálját, amely olyan szublineáris funkcionál E felett, hogy $\Omega = [p_\Omega < 1]$ teljesül, így $\Omega \cap M = \emptyset$ miatt $M \subseteq [p_\Omega \geq 1]$. Legyen $z \in E$ olyan vektor és $M_0 \subseteq E$ olyan lineáris altér, hogy $M = z + M_0$. Világos, hogy $z \notin M_0$, különben $-z \in M_0 = -z + M$ teljesülne, így $0 \in M$ is igaz volna, holott $0 \in \Omega$ és $\Omega \cap M = \emptyset$.

Ha $x, y \in M_0$, akkor p_Ω pozitivitása és szubadditivitása folytán

$$0 \leq p_\Omega(x + y) = p_\Omega((x - z) + (y + z)) \leq p_\Omega(x - z) + p_\Omega(y + z),$$

tehát $-p_\Omega(x - z) \leq p_\Omega(y + z)$. Ebből következik, hogy a $\{-p_\Omega(x - z) | x \in M_0\}$ halmaz felülről és a $\{p_\Omega(y + z) | y \in M_0\}$ halmaz alulról korlátos $\mathbb{R}$-ben, és

$$c_- := \sup_{x \in M_0} (-p_\Omega(x - z)) \leq \inf_{y \in M_0} p_\Omega(y + z) =: c_+.$$

Legyen $c \in [c_-, c_+]$ tetszőleges valós szám, és értelmezzük a

$$v_c : M_0 \oplus (\mathbb{R}.z) \to \mathbb{R}; \quad x + \lambda.z \mapsto \lambda \cdot c$$

lineáris funkcionált. Megmutatjuk, hogy $v_c \leq p_\Omega$ teljesül az $M_0 \oplus (\mathbb{R}.z)$ altéren.

Valóban, ha $x \in M_0$ és $\lambda \in \mathbb{R}^+$, akkor $\lambda^{-1}.x \in M_0$, és a p_Ω pozitív homogenitása, valamint $c \leq c_+$ miatt

$$p_\Omega(x + \lambda.z) = p_\Omega\big(\lambda.(\lambda^{-1}.x + z)\big) = \lambda \cdot p_\Omega(\lambda^{-1}.x + z) \geq \lambda \cdot c_+ \geq \lambda \cdot c =: v_c(x + \lambda.z).$$

Ha $x \in M_0$ és $\lambda < 0$ valós szám, akkor $\lambda^{-1}.(-x) \in M_0$, és a p_Ω pozitív homogenitása, valamint $c_- \leq c$ miatt

$$p_\Omega(x + \lambda.z) = p_\Omega\big((-\lambda).(\lambda^{-1}.(-x) - z)\big) = (-\lambda) \cdot p_\Omega\big(\lambda^{-1}.(-x) - z\big) \geq$$

$$\geq (-\lambda) \cdot (-c_-) \geq \lambda \cdot c =: v_c(x + \lambda.z).$$

Ha $x \in M_0$, akkor $p_\Omega(x) \geq 0 =: v_c(x)$.

Tehát a $v_c : M_0 \oplus (\mathbb{R}.z) \to \mathbb{R}$ lineáris funkcionált majorálja az E feletti p_Ω szublineáris funkcionál. A Hahn–Banach-tétel algebrai formájának (4.1.5.) alkalmazásával vehetünk olyan $u_c : E \to \mathbb{R}$ lineáris funkcionált, amely v_c-nek kiterjesztése, és $u_c \leq p_\Omega$ az E halmazon.

Megmutatjuk, hogy u_c folytonos. Ehhez legyen $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ tetszőleges. Ekkor $(\varepsilon.\Omega) \cap (-\varepsilon.\Omega)$ a 0-nak nyílt környezete E-ben, és ha $x \in (\varepsilon.\Omega) \cap (-\varepsilon.\Omega)$, akkor $\varepsilon^{-1}.x, \varepsilon^{-1}.(-x) \in \Omega =$

$[p_\Omega < 1]$, tehát $p_\Omega(x) < \varepsilon$ és $p_\Omega(-x) < \varepsilon$, így $-\varepsilon < -p_\Omega(-x) \leq u_c(x) \leq p_\Omega(x) < \varepsilon$, vagyis $|u_c(x)| < \varepsilon$. Ez azt jelenti, hogy u_c a 0-ban folytonos, tehát folytonos.

Ha $x \in M_0$, akkor $x + z \in M_0 \oplus (\mathbb{R}.z)$, tehát $u_c(x + z) = v_c(x + z) := c$. Továbbá, $z + M_0 = M$, ezért $M \subseteq [u_c = c]$. Ugyanakkor $\Omega = [p_\Omega < 1] \subseteq [u_c < 1]$, hiszen $u_c \leq p_\Omega$. Ez azt mutatja, hogy ha a c szám megválasztható volna úgy, hogy $1 \leq c$ teljesüljön (természetesen a $c \in [c_-, c_+]$ feltétel mellett), akkor az $u := u_c$ funkcionál és a c valós szám rendelkezne az előírt tulajdonságokkal. Ez a választás pedig azért lehetséges, mert $1 \leq c_+$, hiszen $y \in M_0$ esetén $y + z \in M \subseteq [p_\Omega \geq 1]$, azaz $p_\Omega(y + z) \geq 1$, így $1 \leq \inf_{y \in M_0} p_\Omega(y + z) =: c_+$. Ebből következik, hogy $\max(1, c_-) \leq c_+$, tehát *lehetséges* a $c \in [\max(1, c_-), c_+]$ választás.

(II) Most csak annyit teszünk fel, hogy E *valós* topologikus vektortér. Legyen $z \in \Omega$ rögzített, és legyenek $\Omega_z := \Omega - z$, valamint $M_z := M - z$. Ekkor Ω_z olyan nyílt konvex halmaz E-ben, hogy $0 \in \Omega_z$, továbbá M_z olyan affin altere E-nek, hogy $\Omega_z \cap M_z = \emptyset$. Az (I) alapján van olyan $u_z \in E'$ és $c_z \in \mathbb{R}$, hogy $\Omega_z \subseteq [u_z < c_z]$ és $M_z \subseteq [u_z = c_z]$. Ekkor $u := u_z \in E'$ és $c := c_z + u_z(z) \in \mathbb{R}$ olyanok, hogy $\Omega \subseteq [u < c]$ és $M \subseteq [u = c]$.

(III) Tegyük fel, hogy E *komplex* topologikus vektortér, és jelölje $E_{\mathbb{R}}$ az E alatt fekvő valós vektorteret. Az $E_{\mathbb{R}}$ valós vektortér az E topológiájával ellátva valós topologikus vektortér, és Ω olyan nem üres nyílt konvex halmaz, valamint M olyan affin altér ebben az $E_{\mathbb{R}}$ valós topologikus vektortérben, hogy $\Omega \cap M = \emptyset$. A (II) alapján van olyan $v \in (E_{\mathbb{R}})'$ és $c \in \mathbb{R}$, hogy $\Omega \subseteq [v < c]$ és $M \subseteq [v = c]$. Ekkor a

$$v_{\mathbb{C}} : E \to \mathbb{C}; \quad x \mapsto v(x) - \mathbf{i}.v(\mathbf{i}.x)$$

leképezés az egyetlen $\mathbb{C}$-lineáris funkcionál E felett, amelyre $v = \Re \circ v_{\mathbb{C}}$ teljesül (4.1.6.). Nyilvánvaló, hogy $v_{\mathbb{C}}$ folytonos, tehát az $u := v_{\mathbb{C}} \in E'$ és $c \in \mathbb{R}$ objektumok rendelkeznek a megkövetelt tulajdonságokkal. ■

4.2.4. Következmény. *Ha E szeparált lokálisan konvex tér, akkor E' szétválasztó E felett, tehát minden $x \in E \setminus \{0\}$ esetén létezik olyan $u \in E'$, hogy $u(x) \neq 0$.*

Bizonyítás. Legyen $x \in E \setminus \{0\}$ rögzített. Az E szeparáltsága és lokális konvexitása miatt van olyan Ω nyílt konvex környezete a 0-nak, amelyre $x \notin \Omega$. Ekkor Ω nem üres nyílt konvex halmaz és $\{x\}$ affin altér E-ben, továbbá $\Omega \cap \{x\} = \emptyset$. A Hahn–Banach-tétel geometriai formája szerint létezik olyan $u \in E'$ és $c \in \mathbb{R}$, hogy $\Omega \subseteq [u_{\mathbb{R}} < c]$ és $\{x\} \subseteq [u_{\mathbb{R}} = c]$. Ekkor $0 \in \Omega$ miatt $0 = u_{\mathbb{R}}(0) < c$ és $\Re(u(x)) = u_{\mathbb{R}}(x) = c > 0$, tehát $u(x) \neq 0$. ■

4.2.5. Definíció. *Legyen E topologikus vektortér. Minden $x \in E$ esetén az*

$$E' \to \mathbb{K}; \quad u \mapsto u(x)$$

leképezés lineáris funkcionál az E' vektortér felett, tehát eleme E'^*-nak, és a

$$j_E : E \to E'^*; \quad x \mapsto (u \mapsto u(x))$$

lineáris operátort az E és E'^* közötti **kanonikus leképezésnek** *nevezzük.*

Ha E olyan topologikus vektortér, hogy E' szétválasztó E felett, akkor (és csak akkor) a j_E kanonikus leképezés *injekció*, tehát E algebrailag azonosul az E'^* egy lineáris alterével (ti. $\mathrm{Im}(j_E)$-vel); ilyenkor azt is írjuk, hogy $E \subseteq E'^*$. A Hahn–Banach-tétel előző következményéből látható, hogy ha E szeparált lokálisan konvex tér, akkor a j_E kanonikus leképezés injekció.

4.3. A Hahn–Banach tétel algebrai és geometriai formájának kapcsolata

Látható, hogy a Hahn–Banach-tétel geometriai formája könnyen bizonyítható a Hahn–Banach-tétel algebrai alakjának ismeretében. A Hahn–Banach-tétel geometriai alakjának ismert olyan bizonyítása, amely nem hivatkozik az algebrai formájára; ilyen bizonyítás található például az [8] könyvben. Most *levezetjük* a Hahn–Banach-tétel algebrai formáját a geometriaiból; ezáltal világossá válik, hogy a kétféle alak *ekvivalens* egymással.

Legyen E valós valós vektortér, $p : E \to \mathbb{R}$ szublineáris funkcionál, $H \subseteq E$ lineáris altér és $u : H \to \mathbb{R}$ olyan lineáris funkcionál, amelyre minden $x \in H$ esetén $u(x) \leq p(x)$. Értelmezzük az

$$\Omega := \{(x,t) \in E \times \mathbb{R} |\ p(x) < t\}, \quad M := \{(x,t) \in E \times \mathbb{R} |\ (x \in H) \wedge (u(x) = t)\}$$

halmazokat. Lássuk el az E vektorteret a legnagyobb E feletti lokálisan konvex topológiával, valamint $\mathbb{R}$-et az euklidészi topológiával, és az $E \times \mathbb{R}$ lineáris szorzatteret a szorzattopológiával; tehát E, $\mathbb{R}$ és $E \times \mathbb{R}$ mindhárman szeparált lokálisan konvex terek. Az u linearitása miatt M *affin altér* $E \times \mathbb{R}$-ben, és a p szublinearitása folytán Ω *nem üres konvex halmaz* $E \times \mathbb{R}$-ben. Továbbá, az $u \leq p$ feltétel alapján $\Omega \cap M = \emptyset$. Könnyen látható, hogy minden $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ esetén az $U(\varepsilon) := [p < \varepsilon] \cap (-[p < \varepsilon])$ halmaz konvex, kiegyensúlyozott és elnyelő, tehát a 0-nak környezete E-ben. Egyszerűen ellenőrizhető, hogy ha $(x_0, t_0) \in \Omega$ és $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ olyan valós szám, hogy $\varepsilon < (t_0 - p(x_0))/2$, akkor $(x_0, t_0) + (U(\varepsilon) \times] - \varepsilon, \varepsilon[) \subseteq \Omega$. Ebből következik, hogy Ω *nyílt halmaz* $E \times \mathbb{R}$-ben. A Hahn–Banach-tétel geometriai formája szerint létezik olyan $w : E \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ lineáris funkcionál és $c \in \mathbb{R}$, hogy $\Omega \subseteq [w < c]$ és $M \subseteq [w = c]$. A w funkcionálhoz egyértelműen létezik olyan $v \in E^*$ és $\alpha \in \mathbb{R}$, hogy minden $E \times \mathbb{R} \ni (x,t)$-re $w(x,t) = v(x) + \alpha t$. Ekkor

$(0,0) \in M \subseteq [w=c]$ miatt $c=0$, továbbá $p(0)=0$ miatt $(0,1) \in \Omega \subseteq [w<c]$, tehát $\alpha < 0$. Legyen $\tilde{u} := -\alpha^{-1}.v$; ekkor $\tilde{u} \in E^*$ és minden $H \ni x$-re $(x, u(x)) \in M$, tehát $v(x) + \alpha u(x) = 0$, így $u(x) = \tilde{u}(x)$. Ez azt jelenti, hogy $u \subseteq \tilde{u}$. Ha $x \in E$ és $t \in]p(x), \to[$ tetszőleges, akkor $(x,t) \in \Omega$, tehát $v(x) + \alpha t < 0$, vagyis $\tilde{u}(x) = -\alpha^{-1}v(x) < t$, hiszen $\alpha < 0$. Ebből következik, hogy minden $x \in E$ esetén $\tilde{u}(x) \leq p(x)$.

4.4. A Hahn–Banach-tétel topologikus algebrai formája

4.4.1. Tétel. (A Hahn–Banach-tétel topologikus algebrai formája lokálisan konvex terekre) *Legyen E lokálisan konvex tér, $H \subseteq E$ lineáris altér, és $u : H \to \mathbb{K}$ olyan lineáris funkcionál, amely folytonos a H altértopológiája szerint. Ekkor létezik olyan $\tilde{u} \in E'$, hogy $u \subseteq \tilde{u}$.*

Bizonyítás. Természetesen csak az $u \neq 0$ eset érdekes; ekkor az $[u=1]$ halmaz affin altere H-nak, tehát E-ben is affin altér.

(I) Először feltesszük, hogy E *valós* lokálisan konvex tér. Az $u : H \to \mathbb{R}$ lineáris funkcionál folytonos az altér-topológia szerint, ezért $[u=1]$ zárt H-ban az altér-topológia szerint. Ugyanakkor $0 \notin [u=1]$, tehát az altér-topológia definíciója és az E lokális konvexitása miatt létezik a 0-nak olyan Ω konvex nyílt környezete E-ben, hogy $\Omega \cap H$ nem metszi az $[u=1]$ affin alteret. Természetesen ekkor $\Omega \cap [u=1] = \emptyset$, így a Hahn–Banach-tétel geometriai formája szerint van olyan $v \in E'$ és $c \in \mathbb{R}$, hogy $\Omega \subseteq [v<c]$ és $[u=1] \subseteq [v=c]$. Ekkor $0 \in \Omega$ miatt $0 = v(0) < c$, tehát értelmezhetjük a $\widetilde{u} := c^{-1}.v \in E'$ funkcionált. A definíció alapján $\Omega \subseteq [v<c] = [\widetilde{u} < 1]$ és $[u=1] \subseteq [\widetilde{u}=1]$. Könnyen látható, hogy $\widetilde{u}$ az u-nak kiterjesztése. Valóban, ha $x \in H$ és $u(x) \neq 0$, akkor $\dfrac{1}{u(x)}.x \in [u=1]$, tehát $\widetilde{u}\left(\dfrac{1}{u(x)}.x\right) = 1$, azaz $\widetilde{u}(x) = u(x)$. Ha $x \in H$ és $u(x) = 0$, továbbá $z \in H$ olyan vektor, hogy $u(z) = 1$, akkor $\widetilde{u}(z) = 1$, és $x + z \in [u=1]$, tehát $\widetilde{u}(x+z) = 1$, vagyis $\widetilde{u}(x) = 0 = u(x)$.

(II) Tegyük fel, hogy E *komplex* lokálisan konvex tér, és jelölje $E_{\mathbb{R}}$ az E alatt fekvő valós vektorteret. Az $E_{\mathbb{R}}$ valós vektortér az E topológiájával ellátva valós topologikus vektortér, és H lineáris altere $E_{\mathbb{R}}$-nek, továbbá az $u_{\mathbb{R}} := \Re \circ u : H \to \mathbb{R}$ leképezés olyan $\mathbb{R}$-lineáris funkcionál, amely folytonos a H altértopológiája szerint. Ezért az (I) alapján van olyan $v : E_{\mathbb{R}} \to \mathbb{R}$ folytonos lineáris funkcionál, hogy $u_{\mathbb{R}} \subseteq v$. Ekkor a

$$v_{\mathbb{C}} : E \to \mathbb{C}; \quad x \mapsto v(x) - \mathbf{i} \cdot v(\mathbf{i}.x)$$

leképezés az egyetlen $\mathbb{C}$-lineáris funkcionál E felett, amelyre $v = \Re \circ v_{\mathbb{C}}$ teljesül (4.1.6.). Nyilvánvaló, hogy $v_{\mathbb{C}}$ folytonos, és minden $x \in H$ esetén $\Re(v_{\mathbb{C}}(x)) = v(x) = u_{\mathbb{R}}(x) = \Re(u(x))$. Ha $x \in H$, akkor $\mathbf{i}.x \in H$ is teljesül, mert a hipotézis szerint H $\mathbb{C}$-lineáris altere E-nek, ezért $v(\mathbf{i}.x) = \Re(u(\mathbf{i}.x)) = \Re(\mathbf{i}\cdot u(x)) = -\Im(u(x))$, hiszen az u funkcionál $\mathbb{C}$-homogén. Ezért minden $H \ni x$-re $u(x) = \Re(u(x)) + \mathbf{i}\cdot\Im(u(x)) = v(x) - \mathbf{i}\cdot v(\mathbf{i}.x) =: v_{\mathbb{C}}(x)$. Ez azt jelenti, hogy $v_{\mathbb{C}}$ kiterjesztése u-nak. ■

4.5. Konvex halmazok szétválasztása topologikus vektortérben

4.5.1. Definíció. *Ha E topologikus vektortér, akkor azt mondjuk, hogy az $A, B \subseteq E$ halmazok* **szétválaszthatóak** (*illetve* **szigorúan szétválaszthatóak**), *ha létezik olyan $u \in E'$ és $c \in \mathbb{R}$, hogy $A \subseteq [u_{\mathbb{R}} \leq c]$ és $B \subseteq [u_{\mathbb{R}} \geq c]$ (illetve $A \subseteq [u_{\mathbb{R}} < c]$ és $B \subseteq [u_{\mathbb{R}} > c]$).*

4.5.2. Lemma. *Ha E topologikus vektortér és $v : E \to \mathbb{R}$ nem nulla folytonos $\mathbb{R}$-lineáris funkcionál és $c \in \mathbb{R}$, akkor $\overset{\circ}{[v \leq c]} = [v < c]$.*

Bizonyítás. A v folytonossága miatt a $[v < c] = \overset{-1}{v}\langle]\leftarrow, c[\rangle$ halmaz nyílt E-ben és részhalmaza $[v \leq c]$-nek, így $[v < c] \subseteq \overset{\circ}{[v \leq c]}$. Megfordítva, legyen $x \in \overset{\circ}{[v \leq c]}$ rögzített. A 0-nak létezik olyan V szimmetrikus környezete, hogy $x + V \subseteq [v \leq c]$. Ekkor minden $V \ni z$-re $v(x+z) \leq c$ és $-z \in V$ miatt $v(x-z) \leq c$ is teljesül. Tehát minden $z \in V$ esetén $v(x) - c \leq v(z) \leq c - v(x)$. Ha $v(x) = c$ teljesülne, akkor ebből következne, hogy minden $z \in V$ esetén $v(z) = 0$, ezért a V elnyelősége miatt $v = 0$. Tehát, ha $v \neq 0$, akkor $v(x) < c$, vagyis $\overset{\circ}{[v \leq c]} \subseteq [v < c]$. ■

4.5.3. Tétel. (Hahn–Banach szétválasztási tétel topologikus vektorterekre) *Legyen E topologikus vektortér, $\Omega \subseteq E$ nyílt konvex halmaz és $C \subseteq E$ konvex halmaz. Ha $\Omega \cap C = \emptyset$, akkor létezik olyan $u \in E'$ és $c \in \mathbb{R}$, hogy $\Omega \subseteq [u_{\mathbb{R}} < c]$ és $C \subseteq [u_{\mathbb{R}} \geq c]$ (tehát Ω és C szétválaszthatóak).*

Bizonyítás. Ha Ω üres, akkor az $u := 0$ és $c := 0$ választás megfelelő, mert ekkor $\Omega = \emptyset = [u_{\mathbb{R}} < c]$ és $C \subseteq E = [u_{\mathbb{R}} \geq c]$. Ha C üres, akkor az $u := 0$ és $c := 1$ választás megfelelő, mert ekkor $\Omega \subseteq E = [u_{\mathbb{R}} < c]$ és $C = \emptyset = [u_{\mathbb{R}} \geq c]$. Ezért feltehető, hogy $\Omega \neq \emptyset \neq C$.

Nyilvánvaló, hogy az $\Omega - C$ halmaz konvex és nyílt, mert $\Omega - C = \bigcup\limits_{y \in C} (\Omega - y)$ és minden $C \ni y$-ra az $\Omega - y$ halmaz nyílt. Világos, hogy $0 \notin \Omega - C$, mert $\Omega \cap C = \emptyset$. Tehát $\Omega - C$ nyílt konvex halmaz E-ben, $\{0\}$ affin altér E-ben és $(\Omega - C) \cap \{0\} = \emptyset$. A Hahn–Banach-tétel geometriai formája szerint létezik olyan $u \in E'$ és $c' \in \mathbb{R}$, hogy $\Omega - C \subseteq [u_{\mathbb{R}} < c']$ és $\{0\} \subseteq [u_{\mathbb{R}} = c']$. A második összefüggésből következik, hogy $0 = u_{\mathbb{R}}(0) = c'$, tehát $\Omega - C \subseteq [u_{\mathbb{R}} < 0]$. Ekkor $x \in \Omega$ és $y \in C$ esetén $u_{\mathbb{R}}(x - y) < 0$, azaz $u_{\mathbb{R}}(x) < u_{\mathbb{R}}(y)$. Ez azt jelenti, hogy az $\{u_{\mathbb{R}}(x) | x \in \Omega\}$ halmaz felülről és az $\{u_{\mathbb{R}}(y) | y \in C\}$ halmaz alulról korlátos $\mathbb{R}$-ben, valamint egyikük sem üres, így $c_- := \sup_{x\in\Omega} u_{\mathbb{R}}(x)$ és $c_+ := \inf_{y\in C} u_{\mathbb{R}}(y)$ olyan számok, hogy $c_- \leq c_+$. Legyen $c \in [c_-, c_+]$ tetszőleges valós szám. Ekkor minden $\Omega \ni x$-re $u_{\mathbb{R}}(x) \leq c_- \leq c$, vagyis $\Omega \subseteq [u_{\mathbb{R}} \leq c]$. Ugyanakkor minden $C \ni y$-ra $u_{\mathbb{R}}(y) \geq c_+ \geq c$, vagyis $C \subseteq [u_{\mathbb{R}} \geq c]$. Természetesen az $u_{\mathbb{R}} : E \to \mathbb{R}$ folytonos $\mathbb{R}$-lineáris funkcionál nem 0, különben az $\Omega - C \subseteq [u_{\mathbb{R}} < 0]$ tartalmazás miatt $\Omega - C$ üres volna, holott $\Omega \neq \emptyset \neq C$ miatt $\Omega - C \neq \emptyset$. Ezért az előző lemma és az Ω halmaz nyíltsága folytán $\Omega \subseteq [u_{\mathbb{R}} \overset{\circ}{\leq} c] = [u_{\mathbb{R}} < c]$ is teljesül. ■

Megjegyzés. Ha E topologikus vektortér, $\Omega \subseteq E$ nyílt konvex halmaz és $x \in \overline{\Omega} \setminus \Omega$, akkor $C := \{x\}$ olyan (kompakt) konvex halmaz, hogy $\Omega \cap C = \emptyset$, tehát az előző tétel alapján Ω és C szétválaszthatóak, azonban nem lehetnek szigorúan szétválaszthatóak, mert ha $u \in E'$ és $c \in \mathbb{R}$, akkor $\Omega \subseteq [u_{\mathbb{R}} < c]$ esetén $x \in \overline{\Omega} \subseteq \overline{[u_{\mathbb{R}} < c]} \subseteq [u_{\mathbb{R}} \leq c]$, így $x \in C \subseteq [u_{\mathbb{R}} > c]$ lehetetlen.

4.5.4. Következmény. *Legyen E topologikus vektortér és Ω, Ω' nyílt konvex halmazok E-ben. Ha $\Omega \cap \Omega' = \emptyset$, akkor létezik olyan $u \in E'$ és $c \in \mathbb{R}$, hogy $\Omega \subseteq [u_{\mathbb{R}} < c]$ és $\Omega' \subseteq [u_{\mathbb{R}} > c]$ (tehát Ω és Ω' szigorúan szétválaszthatóak).*

Bizonyítás. Ha Ω üres, akkor $u := 0$ és $c := -1$ megfelelő, mert $\Omega = \emptyset = [u_{\mathbb{R}} < c]$ és $\Omega' \subseteq E \subseteq [u_{\mathbb{R}} > c]$. Hasonlóan, ha Ω' üres, akkor $u := 0$ és $c := 1$ megfelelő, mert $\Omega \subseteq E = [u_{\mathbb{R}} < c]$ és $\Omega' = \emptyset = [u_{\mathbb{R}} > c]$. Ezért feltehető, hogy $\Omega \neq \emptyset \neq \Omega'$.

Az előző állítást alkalmazzuk az Ω nyílt konvex halmazra és a $C := \Omega'$ konvex halmazra. Azt kapjuk, hogy létezik $u \in E'$ és $c \in \mathbb{R}$ úgy, hogy $\Omega \subseteq [u_{\mathbb{R}} < c]$ és $\Omega' \subseteq [u_{\mathbb{R}} \geq c]$. Ha $u_{\mathbb{R}} = 0$ teljesülne, akkor az utóbbi összefüggésből $c \leq 0$ következne, különben $[u_{\mathbb{R}} \geq c] = \emptyset$, így $\Omega' = \emptyset$ adódna. Ha viszont $c \leq 0$, akkor $u_{\mathbb{R}} = 0$ esetén $[u_{\mathbb{R}} < c] = \emptyset$, ezért $\Omega = \emptyset$ teljesülne. Ez azt jelenti, hogy $\Omega \neq \emptyset \neq \Omega'$ miatt $u_{\mathbb{R}} \neq 0$. Az Ω' nyíltsága folytán $\Omega' \subseteq [u_{\mathbb{R}} \overset{\circ}{\geq} c]$ is teljesül, és az előző lemma alapján $[u_{\mathbb{R}} \overset{\circ}{\geq} c] = [-u_{\mathbb{R}} \overset{\circ}{\leq} -c] = [-u_{\mathbb{R}} < -c] = [c < u_{\mathbb{R}}]$. Ezért $\Omega' \subseteq [u_{\mathbb{R}} > c]$ automatikusan teljesül. ■

4.6. Konvex halmazok szétválasztása lokálisan konvex térben

4.6.1. Állítás. *Legyen E topologikus vektortér, $K \subseteq E$ kompakt és $F \subseteq E$ zárt halmaz. Ha $K \cap F = \emptyset$, akkor létezik a 0-nak olyan V környezete E-ben, hogy $(K + V) \cap (F + V) = \emptyset$.*

Bizonyítás. Ha V a 0-nak olyan környezete E-ben, hogy $(K + V) \cap (F + V) \neq \emptyset$, akkor $(K + V - V) \cap F \neq \emptyset$. Tehát, ha V a 0-nak olyan környezete E-ben, hogy

$K+V-V \subseteq E \setminus F$, akkor $(K+V) \cap (F+V) = \emptyset$. Ha U a 0-nak olyan környezete, hogy $K+U \subseteq E \setminus F$, és V a 0-nak olyan szimmetrikus környezete E-ben, hogy $V+V \subseteq U$, akkor $K+V-V = K+V+V \subseteq K+U \subseteq E \setminus F$. Ezért elegendő a 0-nak olyan U környezetét előállítani E-ben, amelyre $K+U \subseteq E \setminus F$. Természetesen $K \neq \emptyset$ feltehető, különben a 0 *bármely* E-beli U környezetére $K+U = \emptyset \subseteq E \setminus F$.

Az $E \setminus F$ halmaz nyílt E-ben és $K \subseteq E \setminus F$, ezért kiválasztható E-ben a 0 környezeteinek olyan $(W_x)_{x \in K}$ rendszere, hogy minden $K \ni x$-re $(x+W_x) \cap F = \emptyset$. Ismét a kiválasztási axióma alkalmazásával vehetjük a 0 környezeteinek olyan $(U_x)_{x \in K}$ rendszerét, hogy minden $K \ni x$-re $U_x + U_x \subseteq W_x$. Ekkor $(x+U_x)_{x \in K}$ a K kompakt halmaznak környezetekkel való befedése, ezért van olyan $A \subseteq K$ véges halmaz, hogy $K \subseteq \bigcup_{a \in A} (a+U_a)$. Az A halmaz nem üres, mert $K \neq \emptyset$, ezért az $U := \bigcap_{a \in A} U_a$ halmaz a 0-nak környezete E-ben. Megmutatjuk, hogy $K+U \subseteq E \setminus F$. Valóban, ha $x \in K$, akkor $K \subseteq \bigcup_{a \in A} (a+U_a)$ miatt van olyan $a \in A$, hogy $x \in a+U_a$; ekkor $U \subseteq U_a$ folytán $x+U \subseteq a+U_a+U \subseteq a+U_a+U_a \subseteq a+W_a \subseteq E \setminus F$. Tehát $K+U = \bigcup_{x \in K} (x+U) \subseteq E \setminus F$, amit bizonyítani kellett. ■

4.6.2. Tétel. (Hahn–Banach szétválasztási tétel lokálisan konvex terekre) *Legyen E lokálisan konvex tér, $K \subseteq E$ kompakt konvex halmaz és $C \subseteq E$ zárt konvex halmaz. Ha $K \cap C = \emptyset$, akkor létezik olyan $u \in E'$ és $c \in \mathbb{R}$, hogy $K \subseteq [u_{\mathbb{R}} < c]$ és $C \subseteq [u_{\mathbb{R}} > c]$ (tehát K és C szigorúan szétválaszthatóak).*

Bizonyítás. Az előző állítás és az E lokális konvexitása alapján vehetjük a 0-nak olyan V nyílt konvex környezetét, amelyre $(K+V) \cap (C+V) = \emptyset$. A $K+V$ és $C+V$ halmazok nyíltak, konvexek és nem metszik egymást, ezért létezik olyan $u \in E'$ és $c \in \mathbb{R}$, hogy $K+V \subseteq [u_{\mathbb{R}} < c]$ és $C+V \subseteq [u_{\mathbb{R}} > c]$. De $0 \in V$ miatt $K \subseteq K+V$ és $C \subseteq C+V$, így $K \subseteq [u_{\mathbb{R}} < c]$ és $C \subseteq [u_{\mathbb{R}} > c]$. ■

4.7. A szétválasztási tételek elemi következményei

4.7.1. Következmény. *Legyen E olyan topologikus vektortér, hogy E' szétválasztó E felett. Ha K és C kompakt konvex halmazok E-ben és $K \cap C = \emptyset$, akkor létezik olyan $u \in E'$ és $c \in \mathbb{R}$, hogy $K \subseteq [u_{\mathbb{R}} < c]$ és $C \subseteq [u_{\mathbb{R}} > c]$ (tehát K és C szigorúan szétválaszthatóak).*

Bizonyítás. Jelölje E_σ az E vektorteret a $\sigma(E,E')$ topológiával ellátva, továbbá legyen $\mathscr{T}$ az E topológiája. A K és C halmazok kompaktak a $\mathscr{T}$ topológia szerint, és $\sigma(E,E') \leq \mathscr{T}$, ezért a K és C halmazok a $\sigma(E,E')$ topológia szerint is kompaktak. Tehát K és C diszjunkt kompakt konvex halmazok az E_σ lokálisan konvex térben. Az E' halmaz szétválasztó E felett, így E_σ *szeparált* lokálisan konvex tér, következésképpen

C *zárt* konvex halmaz E_σ-ban. A lokálisan konvex terekre vonatkozó Hahn–Banach szétválasztási tételt alkalmazva az E_σ térre, valamint a K és C halmazokra kapjuk, hogy létezik olyan $u \in (E_\sigma)'$ és $c \in \mathbb{R}$, amelyekre $K \subseteq [u_{\mathbb{R}} < c]$ és $C \subseteq [u_{\mathbb{R}} > c]$. Ugyanakkor, $\sigma(E, E') \leq \mathscr{T}$ miatt nyilvánvaló, hogy $(E_\sigma)' \subseteq E'$, ezért $u \in E'$. (Egyébként tudjuk, hogy fennáll az $(E_\sigma)' = E'$ egyenlőség is.) ∎

4.7.2. Következmény. *Legyen E lokálisan konvex tér és $C \subseteq E$ olyan zárt konvex halmaz, hogy $C \neq \emptyset$ és $C \neq E$. Ekkor a $H := \{(u, c) \in E' \times \mathbb{R} | C \subseteq [u_{\mathbb{R}} \leq c]\}$ halmaz nem üres és*

$$C = \bigcap_{(u,c) \in H} [u_{\mathbb{R}} \leq c].$$

Bizonyítás. Legyen $x \in E \setminus C$. Ekkor $\{x\}$ kompakt konvex halmaz E-ben, és C zárt konvex halmaz E-ben, valamint $\{x\} \cap C = \emptyset$, így a lokálisan konvex terekre vonatkozó Hahn–Banach szétválasztási tételt alkalmazva kapjuk olyan $u \in E'$ és $c \in \mathbb{R}$ létezését, hogy $\{x\} \subseteq [u_{\mathbb{R}} < c]$ és $C \subseteq [u_{\mathbb{R}} > c] = [-u_{\mathbb{R}} < -c] \subseteq [-u_{\mathbb{R}} \leq -c]$. Ebből látható, hogy $(-u, -c) \in H$, tehát $H \neq \emptyset$, továbbá $u_{\mathbb{R}}(x) < c$, vagyis $x \notin [-u_{\mathbb{R}} \leq -c]$. Ez azt jelenti, hogy $x \notin \bigcap_{(u,c) \in H} [u_{\mathbb{R}} \leq c]$. Ebből következik, hogy $\bigcap_{(u,c) \in H} [u_{\mathbb{R}} \leq c] \subseteq C$, míg a fordított tartalmazás nyilvánvalóan igaz. ∎

4.7.3. Következmény. *Ha E lokálisan konvex tér és $C \subseteq E$ konvex halmaz, akkor a C lezártja E-ben egyenlő a C halmaz $\sigma(E, E')$ topológia szerinti lezártjával.*

Bizonyítás. Ha $u \in E'$ és $c \in \mathbb{R}$, akkor az $[u_{\mathbb{R}} \leq c]$ halmaz zárt a $\sigma(E, E')$ topológia szerint, ezért az előző állításból következik, hogy az E zárt konvex részhalmazai azonosak az $\sigma(E, E')$ topológia szerint zárt konvex halmazokkal. Ugyanakkor minden $C \subseteq E$ konvex halmazra a C lezártja megegyezik a C-t tartalmazó zárt konvex halmazok metszetével. Ezért minden $C \subseteq E$ konvex halmaz lezártja E-ben egyenlő a C halmaz $\sigma(E, E')$ topológia szerinti lezártjával. ∎

A Hahn–Banach szétválasztási tételeknek rendkívül sok fontos következménye van. A II. és III. részekben elvi jelentőségű következményeket fogunk bemutatni.

5. fejezet

Lineáris függvényterek és operátor-topológiák

5.1. Korlátos halmazok topologikus vektorterekben

5.1.1. Definíció. *Ha E topologikus vektortér, akkor a $B \subseteq E$ halmazt* **korlátosnak** *mondjuk, ha a 0 vektor minden E-beli környezete elnyeli a B halmazt.*

Vigyázzunk arra, hogy topologikus vektortérben a korlátosság fogalma a lineáris topológia által van meghatározva, és független bármiféle félmetrika választásától. Ebből semmilyen félreértés nem származhat mindaddig, amíg topologikus vektortér esetében nem választunk valamilyen félmetrikát a vektortér felett. A metrikus és topologikus korlátosság kapcsolatát írja le a következő állítás.

5.1.2. Állítás. *Legyen E félmetrizálható topologikus vektortér, és d olyan transzláció-invariáns félmetrika E felett, amely az E topológiáját generálja.*

a) *Ha $B \subseteq E$ olyan halmaz, amelyhez létezik $r \in \mathbb{R}^+$ úgy, hogy a $B_r(0; d)$ gömb elnyeli a B halmazt, akkor B korlátos a d félmetrika szerint.*

b) *Az E topologikus vektortér minden korlátos részhalmaza korlátos a d félmetrika szerint is.*

c) *Ha a d félmetrika félnormából származtatható, akkor az E topologikus vektortér korlátos részhalmazai megegyeznek a d félmetrika szerint korlátos halmazokkal.*

Bizonyítás. a) Először megjegyezzük, hogy a 2.1.3. állítás *bizonyításában* láttuk, hogy a d félmetrika transzláció-invariánciája miatt minden $r \in \mathbb{R}^+$ és $n \in \mathbb{N}^+$ esetén $n.B_r(0; d) \subseteq B_{nr}(0; d)$.

Legyen $B \subseteq E$ és $r \in \mathbb{R}^+$ olyan szám, hogy $B_r(0; d)$ elnyeli a B halmazt. Ekkor van olyan $\alpha \in \mathbb{R}^+$, hogy minden $\lambda \in \mathbb{K}$ esetén, ha $|\lambda| \geq \alpha$, akkor $B \subseteq \lambda.B_r(0; d)$. Tehát, ha $n \in \mathbb{N}^+$ olyan, hogy $n \geq \alpha$, akkor $B \subseteq n.B_r(0; d) \subseteq B_{nr}(0; d)$, így B korlátos a d félmetrika szerint.

b) Az a) állításból nyilvánvalóan következik.

c) Legyen p olyan félnorma E felett, hogy $d = d_p$. Legyen a $B \subseteq E$ halmaz korlátos a d félmetrika szerint, és vegyünk olyan $R \in \mathbb{R}^+$ számot, hogy $B \subseteq B_R(0; d)$, vagyis minden $B \ni x$-re $p(x) < R$. Ha V a 0-nak környezete, akkor van olyan $r \in \mathbb{R}^+$, hogy $B_r(0; d) \subseteq V$; ekkor $x \in B$ és $\lambda \in \mathbb{K}$ esetén, ha $|\lambda| \geq \dfrac{R}{r}$, akkor $p(\lambda^{-1}.x) = |\lambda|^{-1} p(x) < r$, tehát $\lambda^{-1}.x \in B_r(0; d) \subseteq V$, vagyis $x \in \lambda.V$. Ez azt jelenti, hogy a 0 minden környezete elnyeli B-t, vagyis B korlátos halmaz. ■

Azonban az E metrizálható topologikus vektortér felett biztosan létezik olyan transzláció-invariáns metrika, amely az E topológiáját generálja, és amely szerint E korlátos halmaz; ha például d tetszőleges olyan transzláció-invariáns metrika, amely az E topológiáját generálja, akkor az $E \times E \to \mathbb{R}_+$; $(x, y) \mapsto \min(d(x, y), 1)$ függvény olyan transzláció-invariáns metrika E felett, amely ekvivalens d-vel, tehát az E topológiáját generálja, és e szerint az E átmérője kisebb-egyenlő 1-nél. Ezért a metrikus korlátosságból általában nem következik a korlátosság.

Megjegyzések. Legyen E topologikus vektortér.

1) Nyilvánvaló, hogy az E véges sok korlátos részhalmazának uniója korlátos, és korlátos halmaz minden részhalmaza korlátos. Ha $A, B \subseteq E$ korlátos halmazok, akkor $A + B$ is korlátos, mert ha V a 0-nak környezete E-ben és W a 0-nak olyan környezete E-ben, hogy $W + W \subseteq V$, akkor W-hez léteznek olyan $\alpha, \beta \in \mathbb{R}^+$, hogy minden $\lambda \in \mathbb{K}$ esetén, ha $|\lambda| \geq \alpha$ (illetve $|\lambda| \geq \beta$), akkor $A \subseteq \lambda.W$ (illetve $B \subseteq \lambda.W$); ekkor $\lambda \in \mathbb{K}$ és $|\lambda| \geq \max(\alpha, \beta)$ esetén $A + B \subseteq \lambda.W + \lambda.W = \lambda.(W + W) \subseteq \lambda.V$, vagyis V elnyeli az $A + B$ halmazt.

2) Korlátos halmaz kiegyensúlyozott burka korlátos. Sőt, ha $K \subseteq \mathbb{K}$ és $A \subseteq E$ korlátos halmazok, akkor $K.A$ korlátos halmaz E-ben. Valóban, legyen $r \in \mathbb{R}^+$ olyan, hogy $K \subseteq \overline{B}_r(0; \mathbb{K})$. Legyen V a 0-nak környezete E-ben, és vegyük a 0-nak egy olyan W kiegyensúlyozott környezetét, amelyre $W \subseteq V$. Ekkor $r^{-1}.W$ is környezete a 0-nak, így A korlátossága miatt van olyan $\alpha \in \mathbb{R}^+$, hogy $\lambda \in \mathbb{K}$ és $|\lambda| \geq \alpha$ esetén $A \subseteq \lambda.(r^{-1}.W)$. Ha $\sigma \in K$ és $x \in A$, akkor minden $\lambda \in \mathbb{K}$, $|\lambda| \geq \alpha$ esetén $\sigma.x \in \sigma.(\lambda.(r^{-1}.W)) = \lambda.((\sigma r^{-1}).W) \subseteq \lambda.W \subseteq \lambda.V$, tehát V elnyeli a $K.A$ halmazt.

3) Korlátos halmaz lezártja korlátos. Valóban, legyen $B \subseteq E$ korlátos halmaz és V a 0-nak környezete E-ben. Vegyük a 0-nak olyan U zárt környezetét E-ben, hogy $U \subseteq V$. Ekkor U elnyeli B-t, tehát van olyan $\alpha \in \mathbb{R}^+$, hogy minden $\lambda \in \mathbb{K}$ számra, ha $|\lambda| \geq \alpha$, akkor $B \subseteq \lambda.U$. Ha $\lambda \in \mathbb{K}$ és $|\lambda| \geq \alpha$, akkor a $\lambda.U$ halmaz zártsága miatt $\overline{B} \subseteq \lambda.U$ is teljesül, tehát U elnyeli $\overline{B}$-t, így V is elnyeli a B halmaz lezártját.

4) *Lokálisan konvex térben* korlátos halmaz konvex burka korlátos. Valóban, legyen $B \subseteq E$ korlátos halmaz és V a 0-nak környezete E-ben. Vegyük a 0-nak olyan konvex környezetét E-ben, hogy $U \subseteq V$. Ekkor U elnyeli B-t, tehát van olyan $\alpha \in \mathbb{R}^+$, hogy minden $\lambda \in \mathbb{K}$ számra, ha $|\lambda| \geq \alpha$, akkor $B \subseteq \lambda.U$. Ha $\lambda \in \mathbb{K}$ és $|\lambda| \geq \alpha$, akkor a $\lambda.U$ halmaz konvexitása miatt $\mathrm{co}(B) \subseteq \lambda.U$ is teljesül, tehát U elnyeli $\mathrm{co}(B)$-t, így V is elnyeli a B halmaz konvex burkát.

5) A 2), 3) és 4) megjegyzések alapján világos, hogy lokálisan konvex térben minden korlátos halmaz *abszolút konvex burka* korlátos.

6) A 1.6.8. lemma b) pontja alapján az E minden kompakt (speciálisan véges) részhalmaza korlátos.

7) Ha F korlátos lineáris altér E-ben, akkor $F \subseteq \overline{\{0\}}$, hiszen ha V a 0-nak környezete E-ben, akkor létezik olyan $\lambda \in \mathbb{K} \setminus \{0\}$, hogy $F \subseteq \lambda.V$, így $F = \lambda^{-1}.F \subseteq V$, vagyis F részhalmaza a 0 vektor környezetei metszetének, amely egyenlő $\overline{\{0\}}$-val. Tehát, ha E szeparált topologikus vektortér (azaz $\{0\} = \overline{\{0\}}$), akkor az E nem nulla dimenziós lineáris alterei nem korlátosak.

8) Vigyázzunk arra, hogy ha $(x_i)_{i \in I}$ konvergens általánosított sorozat az E topologikus vektortérben, akkor az $\{x_i | i \in I\}$ halmaz *nem szükségképpen korlátos*. Legyen például I az a (jól)rendezett halmaz, amit úgy kapunk, hogy az $\mathbb{N}$-hez hozzáveszünk egy legnagyobb elemet, amit ω-val jelölünk. Ekkor minden E topologikus vektortérre, *minden* E-ben haladó $(x_i)_{i \in I}$ általánosított sorozat konvergál x_ω-hoz, ugyanakkor $\{x_n | n \in \mathbb{N}\}$ nem szükségképpen korlátos halmaz.

Azonban, ha E topologikus vektortér és $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ konvergens sorozat E-ben, akkor az $\{x_n | n \in \mathbb{N}\}$ halmaz korlátos E-ben. Valóban, ha x limeszpontja az $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sorozatnak, akkor az $\{x\} \cup \{x_n | n \in \mathbb{N}\}$ halmaz nyilvánvalóan kompakt, tehát a 6) megjegyzés alapján korlátos E-ben, így az $\{x_n | n \in \mathbb{N}\}$ halmaz is korlátos E-ben.

Megmutatjuk, hogy ha $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ Cauchy-sorozat E-ben, akkor $\{x_n | n \in \mathbb{N}\}$ az E-nek korlátos részhalmaza (vagyis minden Cauchy-sorozat korlátos). Ehhez legyen V a 0-nak tetszőleges környezete, és vegyük a 0-nak olyan W kiegyensúlyozott környezetét, amelyre $W + W \subseteq V$. A W-hez vegyünk olyan $n \in \mathbb{N}$ számot, hogy minden $j, k \geq n$ természetes számra $x_k - x_j \in W$. Ekkor $\{x_k | k \in \mathbb{N}\} = \{x_k | (k \in \mathbb{N}) \wedge (k \geq n)\} \cup \{x_k | k \in n\}$, és itt $\{x_k | (k \in \mathbb{N}) \wedge (k \geq n)\} \subseteq x_n + W$. A W halmaz elnyelő, tehát van olyan $\alpha_1 \in \mathbb{R}^+$, hogy $\lambda \in \mathbb{K}$ és $|\lambda| \geq \alpha_1$ esetén $x_n \in \lambda.W$. A W halmaz kiegyensúlyozott, ezért $\lambda \in \mathbb{K}$ és $|\lambda| \geq 1$ esetén $W \subseteq \lambda.W$. Tehát $\lambda \in \mathbb{K}$ és $|\lambda| \geq \max(\alpha_1, 1)$ esetén $\{x_k | (k \in \mathbb{N}) \wedge (k \geq n)\} \subseteq x_n + W \subseteq \lambda.W + \lambda.W = \lambda.(W + W) \subseteq \lambda.V$. Ugyanakkor az $\{x_k | k \in n\}$ halmaz véges, ezért korlátos, így van olyan $\alpha_2 \in \mathbb{R}^+$, hogy $\lambda \in \mathbb{K}$ és $|\lambda| \geq \alpha_2$ esetén $\{x_k | k \in n\} \subseteq \lambda.V$. Ez azt jelenti, hogy minden $\lambda \in \mathbb{K}$ számra, ha $|\lambda| \geq \max(\alpha_1, 1, \alpha_2)$, akkor $\{x_k | k \in \mathbb{N}\} \subseteq \lambda.V$, így V elnyeli az $\{x_n | n \in \mathbb{N}\}$ halmazt.

9) A definíció alapján nyilvánvaló, hogy ha $\mathscr{T}_1$ és $\mathscr{T}_2$ olyan lineáris topológiák E felett, hogy $\mathscr{T}_1 \subseteq \mathscr{T}_2$, akkor az E minden $\mathscr{T}_2$ szerint korlátos részhalmaza $\mathscr{T}_1$ szerint is korlátos.

Speciálisan, ha E topologikus vektortér, akkor az E minden korlátos részhalmaza korlátos a $\sigma(E, E')$ topológia szerint.

5.1.3. Állítás. (A korlátosság jellemzése sorozatokkal) *Ha E topologikus vektortér, akkor a $B \subseteq E$ halmaz pontosan akkor korlátos, ha minden B-ben haladó $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sorozatra és minden $\mathbb{K}$-beli $(\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}}$ zérussorozatra a $(\lambda_n.x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sorozat 0-hoz konvergál E-ben.*

Bizonyítás. Tegyük fel, hogy B korlátos E-ben és legyen $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tetszőleges B-ben haladó sorozat, valamint $(\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tetszőleges $\mathbb{K}$-ban haladó zérussorozat. Legyen V a 0-nak környezete E-ben. Ekkor van olyan $\alpha \in \mathbb{R}^+$, hogy minden $\mathbb{K} \ni \sigma$-ra, ha $|\sigma| \geq \alpha$, akkor $B \subseteq \sigma.V$. A $\lim\limits_{n\to\infty} \lambda_n = 0$ feltétel alapján vehetünk olyan $N \in \mathbb{N}$ számot, hogy minden $n > N$ természetes számra $|\lambda_n| < \dfrac{1}{\alpha}$. Ha $n \in \mathbb{N}$, $n > N$ és $\lambda_n \neq 0$, akkor $|\lambda_n^{-1}| \geq \alpha$, így $x_n \in B \subseteq \lambda_n^{-1}.V$, vagyis $\lambda_n.x_n \in V$. Ebből következik, hogy minden $n \in \mathbb{N}$ esetén, ha $n > N$, akkor $\lambda_n.x_n \in V$, így a $(\lambda_n.x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sorozat 0-hoz konvergál E-ben.

Tegyük fel, hogy B nem korlátos E-ben. Ekkor létezik a 0-nak olyan V környezete, hogy V nem nyeli el a B halmazt, tehát minden $\alpha \in \mathbb{R}^+$ esetén van olyan $\sigma \in \mathbb{K}$, hogy $|\sigma| \geq \alpha$ és $B \setminus (\sigma.V) \neq \emptyset$. Vegyük a 0-nak egy ilyen V környezetét és rögzítsünk egy olyan $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sorozatot $\mathbb{R}^+$-ban, amelyre $\lim\limits_{n\in\mathbb{N}} \alpha_n^{-1} = 0$. Kiválasztunk olyan $(\sigma_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sorozatot $\mathbb{K}$-ban, amelyre minden $n \in \mathbb{N}$ esetén $|\sigma_n| \geq \alpha_n$ és $B \setminus (\sigma_n.V) \neq \emptyset$. A kiválasztási axióma alkalmazásával veszünk egy $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \prod\limits_{n\in\mathbb{N}} (B \setminus (\sigma_n.V))$ sorozatot. Ekkor $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ olyan B-ben haladó sorozat és $(\sigma_n^{-1})_{n\in\mathbb{N}}$ olyan $\mathbb{K}$-ban haladó zérussorozat, hogy minden $\mathbb{N} \ni n$-re $x_n \notin \sigma_n.V$, vagyis $\sigma_n^{-1}.x_n \notin V$. Ez azt jelenti, hogy a $(\sigma_n^{-1}.x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vektorsorozat nem tart 0-hoz E-ben. ■

5.1.4. Következmény. *Ha E topologikus vektortér, akkor egy $B \subseteq E$ halmaz pontosan akkor korlátos, ha a B minden megszámlálható részhalmaza korlátos.*

(**Megjegyzés**. Ezt a tényt úgy fejezzük ki, hogy topologikus vektortérben halmaz korlátossága **megszámlálható karakterű** tulajdonság.)

Bizonyítás. Topologikus vektortérben korlátos halmaz *minden* részhalmaza korlátos, így a feltétel szükséges. Ha az E topologikus vektortérben a $B \subseteq E$ halmaz nem korlátos, akkor az előző állítás alapján létezik olyan B-ben haladó $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sorozat és olyan $\mathbb{K}$-ban haladó $(\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}}$ zérussorozat, hogy a $(\lambda_n.x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sorozat nem tart 0-hoz E-ben. Ekkor $\{x_n | n \in \mathbb{N}\}$ olyan megszámlálható részhalmaza B-nek, amely szintén az előző állítás alapján nem korlátos. Ezért a feltétel elégséges is. ■

5.2. Lineáris topológia normálhatóságának jellemzése

5.2.1. Tétel. (Topologikus vektortér normálhatóságának jellemzése) *Az E topologikus vektortér pontosan akkor félnormálható, ha a 0-nak létezik korlátos konvex környezete E-ben. Az E topologikus vektortér pontosan akkor normálható, ha szeparált és a 0-nak létezik korlátos konvex környezete E-ben.*

Bizonyítás. Ha p olyan félnorma E felett, amely az E topológiáját generálja, akkor a $B_1(0; d_p)$ gömb nyilvánvalóan konvex, továbbá metrikusan korlátos is, így a félnormálhatóság miatt topologikusan is korlátos.

Tegyük fel, hogy V a 0-nak korlátos konvex környezete E-ben. Létezik a 0-nak olyan W kiegyensúlyozott környezete, amelyre $W \subseteq V$; ekkor az $U := \mathrm{co}(W)$ halmaz a 0-nak konvex kiegyensúlyozott környezete, és korlátos is, mert a V konvexitása folytán $U \subseteq V$. Jelölje p_U az U halmaz Minkowski-funkcionálját, ami olyan félnorma E felett, hogy $[p_U < 1] \subseteq U \subseteq [p_U \leq 1]$. Megmutatjuk, hogy a p_U félnorma által generált E feletti topológia egyenlő az E topológiájával. Ehhez elegendő azt igazolni, hogy a 0 környezetei a $\mathscr{T}_{p_U}$ topológia szerint ugyanazok, mint az E eredeti topológiája szerint.

Ha V a 0-nak környezete a $\mathscr{T}_{p_U}$ topológia szerint, akkor van olyan $r \in \mathbb{R}^+$, hogy $[p_U \leq r] \subseteq V$; ekkor $r.U \subseteq r.[p_U \leq 1] = [p_U \leq r] \subseteq V$, és $r.U$ a 0-nak környezete az E eredeti topológiája szerint, így V szintén környezete a 0-nak az E eredeti topológiája szerint. Megfordítva, ha V a 0-nak környezete E-ben, akkor az U korlátossága miatt létezik olyan $\alpha \in \mathbb{R}^+$, hogy $\lambda \in \mathbb{K}$ és $|\lambda| \geq \alpha$ esetén $U \subseteq \lambda.V$; ekkor $r \in \mathbb{R}^+$ és $1/r \geq \alpha$ esetén $U \subseteq (1/r).V$, így $[p_U < r] = r.[p_U < 1] \subseteq r.U \subseteq V$ és $[p_U < r]$ a 0-nak környezete a $\mathscr{T}_{p_U}$ topológia szerint, vagyis V szintén környezete a 0-nak a $\mathscr{T}_{p_U}$ topológia szerint.
Topologikus vektortér pontosan akkor normálható, ha szeparált és félnormálható. Ezért a második állítás következik az elsőből. ■

Az előző tételből következik, hogy lokálisan konvex tér pontosan akkor félnormálható, ha a 0-nak létezik korlátos környezete, hiszen lokálisan konvex térben a 0 minden korlátos környezete tartalmaz konvex környezetet, amely szükségképpen korlátos. Tehát, ha egy lokálisan konvex térben a 0-nak nincs korlátos környezete, akkor a tér nem félnormálható.

5.3. Korlátos lineáris operátorok

5.3.1. Definíció. *Ha E és F topologikus vektorterek, akkor az $u : E \to F$ lineáris operátort* **korlátosnak** *nevezzük, ha az E minden B korlátos részhalmazára $u\langle B\rangle$ korlátos halmaz F-ben. Az $E \to F$ korlátos lineáris operátorok halmazát $\mathscr{B}(E; F)$ jelöli.*

A korlátos halmazokkal kapcsolatos 5.1. 1) és 5.1. 5) megjegyzések alapján nyilvánvaló, hogy ha E és F topologikus vektorterek, akkor $\mathscr{B}(E; F)$ *lineáris altere* az $E \to F$ lineáris operátorok vektorterének.

5.3.2. Állítás. *Ha E és F topologikus vektorterek, akkor $\mathscr{L}(E;F)\subseteq\mathscr{B}(E;F)$.*

Bizonyítás. Legyen $u \in \mathscr{L}(E;F)$ rögzített, és $B \subseteq E$ korlátos halmaz. Legyen V a 0-nak környezete F-ben. Az u folytonos a 0-ban, tehát $\overset{-1}{u}\langle V\rangle$ a 0-nak környezete E-ben. A B halmaz korlátossága miatt van olyan $\alpha \in \mathbb{R}^+$, hogy minden $\mathbb{K} \ni \lambda$-ra, ha $|\lambda| \geq \alpha$, akkor $B \subseteq \lambda.\overset{-1}{u}\langle V\rangle = \overset{-1}{u}\langle \lambda.V\rangle$. Ekkor minden $\mathbb{K} \ni \lambda$-ra, ha $|\lambda| \geq \alpha$, akkor $u\langle B\rangle \subseteq \lambda.V$, tehát V elnyeli az $u\langle B\rangle$ halmazt, vagyis $u\langle B\rangle$ korlátos halmaz F-ben. ■

Később látni fogjuk, hogy bizonyos típusú E és F topologikus vektorterek esetében $\mathscr{L}(E;F) = \mathscr{B}(E;F)$ teljesül (7.2.1.), azonban általában topologikus vektorterek közötti korlátos operátor nem feltétlenül folytonos.

5.4. Korlátos halmazok jellemzése projektíven előállított lineáris topológia szerint

5.4.1. Állítás. (Korlátos halmazok jellemzése projektíven előállított lineáris topológia szerint) *Legyen E vektortér és $(E_i, u_i)_{i\in I}$ olyan rendszer, hogy minden $i \in I$ esetén E_i topologikus vektortér és $u_i : E \to E_i$ lineáris operátor. Egy $B \subseteq E$ halmaz pontosan akkor korlátos az $(E_i, u_i)_{i\in I}$ rendszer által projektíven előállított E feletti topológia szerint, ha minden $I \ni i$-re az $u_i\langle B\rangle \subseteq E_i$ halmaz korlátos az E_i topologikus vektortérben.*

Bizonyítás. Ha a $B \subseteq E$ halmaz korlátos E-ben az $(E_i, u_i)_{i\in I}$ rendszer által projektíven előállított topológia szerint, akkor minden $i \in I$ esetén az $u_i\langle B\rangle \subseteq E_i$ halmaz korlátos az E_i topologikus vektortérben, mert $u_i : E \to E_i$ folytonos lineáris operátor, tehát korlátos operátor.

Tegyük fel, hogy a $B \subseteq E$ halmazra teljesül az, hogy minden $I \ni i$-re az $u_i\langle B\rangle \subseteq E_i$ halmaz korlátos az E_i topologikus vektortérben. Ha $I = \emptyset$, akkor az $(E_i, u_i)_{i\in I}$ rendszer által projektíven előállított E feletti topológia az antidiszkrét topológia, amely szerint az E minden részhalmaza, így B is korlátos. Ezért feltehetjük, hogy $I \neq \emptyset$. Az $(E_i, u_i)_{i\in I}$ rendszer által projektíven előállított E feletti topológiát $\mathscr{T}$ fogja jelölni.

Legyen V a 0-nak környezete $\mathscr{T}$ szerint. Ekkor van olyan $J \subseteq I$ nem üres véges halmaz és olyan $(V_i)_{i\in J}$ rendszer, hogy minden $i \in J$ esetén V_i a 0-nak környezete az E_i topologikus vektortérben és $\bigcap_{i\in J} \overset{-1}{u_i}\langle V_i\rangle \subseteq V$. Ha $i \in J$, akkor az $u_i\langle B\rangle$ halmaz korlátos E_i-ben, ezért V_i elnyeli ezt a halmazt. Tehát létezik olyan $(\alpha_i)_{i\in J}$ rendszer $\mathbb{R}^+$-ban, hogy minden $i \in J$ esetén, minden $\lambda \in \mathbb{K}$ számra, ha $|\lambda| \geq \alpha_i$, akkor $u_i\langle B\rangle \subseteq \lambda.V_i$. Ekkor $\alpha := \max_{i\in J} \alpha_i \in \mathbb{R}^+$ olyan szám, amelyre $\lambda \in \mathbb{K}$ és $|\lambda| \geq \alpha$ esetén minden $J \ni i$-re $u_i\langle B\rangle \subseteq \lambda.V_i$, azaz $B \subseteq \lambda.\overset{-1}{u_i}\langle V_i\rangle$. Tehát, ha $\lambda \in \mathbb{K}$ és $|\lambda| \geq \alpha$, akkor

$B \subseteq \bigcap_{i \in J} \lambda.\overset{-1}{u_i}\langle V_i \rangle = \lambda.\bigcap_{i \in J} \overset{-1}{u_i}\langle V_i \rangle \subseteq \lambda.V$. Ez azt jelenti, hogy V elnyeli a B halmazt, tehát B korlátos a $\mathscr{T}$ topológia szerint. ■

5.4.2. Következmény. *Legyen E topologikus vektortér és $M \subseteq E$ lineáris altér. Egy $B \subseteq M$ halmaz pontosan akkor korlátos az M topologikus lineáris altérben, ha korlátos E-ben.*

Bizonyítás. Az M topologikus lineáris altér megegyezik az $(E, \mathrm{in}_{M,E})$ pár által projektíven előállított topologikus vektortérrel, ahol $\mathrm{in}_{M,E} : M \to E$ a kanonikus injekció. Ezért itt az állítás speciális esetéről van szó. ■

5.4.3. Következmény. *Legyen $(E_i)_{i \in I}$ topologikus vektorterek rendszere, és E az $(E_i)_{i \in I}$ rendszer topologikus lineáris szorzata. Egy $B \subseteq E$ halmaz pontosan akkor korlátos az E topologikus lineáris szorzattérben, ha minden $i \in I$ esetén $pr_i\langle B \rangle \subseteq E_i$ korlátos az E_i topologikus vektortérben, ahol $pr_i : E \to E_i$ a kanonikus projekció.*

Bizonyítás. Az E topologikus vektortér egyenlő a $(E_i, pr_i)_{i \in I}$ rendszer által projektíven előállított topologikus vektortérrel, ezért itt az állítás speciális esetéről van szó. ■

5.4.4. Következmény. *Legyen $(p_i)_{i \in I}$ félnorma-rendszer az E vektortér felett. Egy $B \subseteq E$ halmaz pontosan akkor korlátos a $(p_i)_{i \in I}$ félnorma-rendszer által generált E feletti lokálisan konvex topológia szerint, ha minden $i \in I$ esetén $\sup_{x \in B} p_i(x) < +\infty$, vagyis a p_i félnorma korlátos a B halmazon.*

Bizonyítás. A $(p_i)_{i \in I}$ félnorma-rendszer által generált E feletti lokálisan konvex topológia egyenlő a $\sup_{i \in I} \mathscr{T}_{p_i}$ topológia-szuprémummal, ami nem más, mint az $(E_i, id_{E_i})_{i \in I}$ rendszer által projektíven előállított topológia, ahol minden $i \in I$ esetén E_i az E vektortér a $\mathscr{T}_{p_i}$ topológiával ellátva. Ezért az állítás alapján egy $B \subseteq E$ halmaz pontosan akkor korlátos a $(p_i)_{i \in I}$ félnorma-rendszer által generált E feletti lokálisan konvex topológia szerint, ha minden $i \in I$ esetén B korlátos az E_i topologikus vektortérben, vagyis korlátos az E feletti $\mathscr{T}_{p_i}$ lineáris topológia szerint. De $i \in I$ esetén az E egy részhalmaza pontosan akkor korlátos $\mathscr{T}_{p_i}$ szerint, ha $\sup_{x \in B} p_i(x) < +\infty$, vagyis a p_i félnorma korlátos a B halmazon. ■

5.4.5. Következmény. *Legyen E vektortér $\mathbb{K}$ felett és $F \subseteq E^*$ lineáris altér. Egy $B \subseteq E$ halmaz pontosan akkor korlátos a $\sigma(E, F)$ topológia szerint, ha minden F-hez tartozó funkcionál korlátos a B halmazon.*

Bizonyítás. A $\sigma(E, F)$ topológia – a definíciója szerint – egyenlő a $(\mathbb{K}, u)_{u \in F}$ rendszer által projektíven előállított E feletti topológiával, ahol $\mathbb{K}$-t természetesen az euklidészi topológiával látjuk el. Ezért egy $B \subseteq E$ halmaz pontosan akkor korlátos a $\sigma(E, F)$ topológia szerint, ha minden $u \in F$ esetén az $u\langle B \rangle$ halmaz korlátos $\mathbb{K}$-ban az euklidészi topológia szerint. ■

Az előzőek alkalmazásaként bebizonyítunk egy érdekes állítást a normált terek elméletéből.

5.4.6. Állítás. *Ha E végtelen dimenziós normálható topologikus vektortér, akkor létezik nem folytonos lineáris funkcionál E felett, tehát $E' \neq E^*$.*

Bizonyítás. (I) Először megmutatjuk, hogy ha E vektortér $\mathbb{K}$ felett és $A \subseteq E$ végtelen dimenziós halmaz (tehát az A halmaz által generált E_A lineáris altér végtelen dimenziós), akkor A *nem korlátos* a $\sigma(E, E^*)$ topológia szerint. Az A korlátossága a $\sigma(E, E^*)$ topológia szerint azzal ekvivalens, hogy minden E feletti lineáris funkcionál korlátos az A halmazon, ezért ehhez elég volna olyan $B \subseteq A$ halmazt és olyan $u \in E^*$ funkcionált találni, hogy u nem korlátos a B halmazon. Az A halmaz generátorhalmaz az E_A vektortérben, így létezik olyan $B \subseteq A$ halmaz, amely algebrai bázishalmaz E_A-ban. Minden $\alpha \in \mathbb{K}^B$ függvényhez van egyetlen olyan $u_\alpha : E_A \to \mathbb{K}$ lineáris funkcionál, amelyre minden $B \ni b$-re $u_\alpha(b) = \alpha(b)$ teljesül, és van olyan $u \in E^*$, amely kiterjesztése u_α-nak. Az E_A vektortér végtelen dimenziós, ezért B végtelen halmaz, így vehetünk olyan $\alpha \in \mathbb{K}^B$ függvényt, amely nem korlátos. Ha $u \in E^*$ olyan, hogy kiterjesztése u_α-nak, akkor u nem korlátos a B halmazon.

(II) Legyen E olyan normálható topologikus vektortér, hogy $E' = E^*$. Az E-ben létezik a 0-nak korlátos környezete: legyen V ilyen. Ekkor V a $\sigma(E, E') = \sigma(E, E^*)$ topológia szerint még inkább korlátos, hiszen $\sigma(E, E')$ kisebb-egyenlő az E topológiájánál. Ezért az (I) alapján a V halmaz véges dimenziós, ugyanakkor a V által generált lineáris altér egyenlő E-vel, mert V elnyelő E-ben, ezért E véges dimenziós. ■

Megjegyezzük, hogy az előző állításban a normálhatóság feltétele *lényeges*. Ugyanis, ha E tetszőleges vektortér $\mathbb{K}$ felett, és E-t ellátjuk a legnagyobb lokálisan konvex topológiával, akkor $E' = E^*$ teljesül, függetlenül az E dimenziójától. Valóban, a $\sigma(E, E^*)$ lineáris topológia lokálisan konvex, tehát kisebb-egyenlő a legnagyobb E feletti lokálisan konvex topológiánál, ezért minden E feletti $\sigma(E, E^*)$-folytonos lineáris funkcionál nyilvánvalóan folytonos a legnagyobb E feletti lokálisan konvex topológia szerint is. De a definíció szerint minden E feletti lineáris funkcionál folytonos a $\sigma(E, E^*)$ topológia szerint, így $E' = E^*$. Az előző állítás alapján ez azt mutatja, hogy végtelen dimenziós valós vagy komplex vektortér felett a legnagyobb lokálisan konvex topológia biztosan nem normálható.

5.5. Korlátos halmazok jellemzése szigorú induktív limeszben

5.5.1. Állítás. (Korlátos halmazok jellemzése szigorú induktív limeszben) *Legyen az E lokálisan konvex tér az $(E_n)_{n \in \mathbb{N}}$ lokálisan konvex tér-sorozat szigorú induktív* *limesze. Egy $B \subseteq E$ halmaz pontosan akkor korlátos E-ben, ha létezik olyan $n \in \mathbb{N}$, hogy $B \subseteq E_n$ és B korlátos az E_n topologikus lineáris altérben.*

Bizonyítás. A feltétel nyilvánvalóan elégséges, mert topologikus lineáris altér minden korlátos részhalmaza korlátos az eredeti térben.

A szükségesség bizonyításához legyen $H \subseteq E$ olyan halmaz, amelyre minden $n \in \mathbb{N}$ esetén $H \nsubseteq E_n$; megmutatjuk, hogy ekkor H nem korlátos E-ben. Minden $\mathbb{N} \ni n$-re $H \setminus E_n \neq \emptyset$, ezért kiválaszthatunk olyan H-ban haladó $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sorozatot, amelyre minden $n \in \mathbb{N}$ esetén $x_n \notin E_n$. Ha $n \in \mathbb{N}$, akkor E_n zárt lineáris altér E-ben, ezért a Hahn–Banach tétel alapján van olyan $u \in E'$, amelyre $u(x_n) \neq 0$ és $E_n \subseteq \mathrm{Ker}(u)$. Tehát kiválaszthatunk olyan E'-ben haladó $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sorozatot, amelyre minden $n \in \mathbb{N}$ esetén $u_n(x_n) = 1$ és $E_n \subseteq \mathrm{Ker}(u_n)$. Vegyünk egy tetszőleges $(\varepsilon_n)_{n\in\mathbb{N}}$ zérussorozatot $\mathbb{R}^+$-ban, és értelmezzük a

$$V := \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \{x \in E \mid |u_n(x)| < \varepsilon_n\}$$

halmazt. Világos, hogy minden $\mathbb{N} \ni n$-re $\{x \in E||u_n(x)| < \varepsilon_n\}$ kiegyensúlyozott és konvex, ezért V szintén kiegyensúlyozott és konvex halmaz. Megmutatjuk, hogy a V halmaz a 0-nak környezete E-ben. Az induktívan előállított lokálisan konvex topológiák tulajdonságai alapján ehhez azt elegendő (és szükséges) igazolni, hogy V elnyelő és minden $\mathbb{N} \ni n$-re $V \cap E_n$ a 0-nak környezete az E_n topologikus lineáris altérben.

Először megmutatjuk, hogy V elnyelő halmaz. Valóban, legyen $x \in E$ rögzítve, és vegyünk olyan $n \in \mathbb{N}$ számot, amelyre $x \in E_{n+1}$. Ha $m \in \mathbb{N}$ és $m > n$, akkor $x \in E_{n+1} \subseteq E_m$ miatt $u_m(x) = 0$, tehát minden $r \in \mathbb{R}^+$ esetén $r.x \in [|u_m(\cdot)| < \varepsilon_m]$. Ugyanakkor $\bigcap\limits_{0\leq m\leq n} [|u_m(\cdot)| < \varepsilon_m]$ a 0-nak nyílt környezete E-ben, így elnyelő halmaz, tehát van olyan $r \in \mathbb{R}^+$, hogy $r.x \in \bigcap\limits_{0\leq m\leq n} [|u_m(\cdot)| < \varepsilon_m]$. Ekkor, a definíció alapján, $r.x \in V$ teljesül, vagyis V elnyeli az $\{x\}$ halmazt.

Legyen most $n \in \mathbb{N}$ rögzítve; megmutatjuk, hogy $V \cap E_n$ a 0-nak környezete az E_n topologikus lineáris altérben. Ha $x \in E_n$, akkor minden $\mathbb{N} \ni m$-re, $m \geq n$ esetén $x \in E_n \subseteq E_m \subseteq \mathrm{Ker}(u_m)$, tehát $x \in [|u_m(\cdot)| < \varepsilon_m] \cap E_n$. Ha $n = 0$, akkor ebből kapjuk, hogy $V \cap E_0 = E_0$, tehát $V \cap E_0$ a 0-nak környezete az E_0 topologikus lineáris altérben. Ha $n > 0$, akkor $\bigcap\limits_{m\in n} [|u_m(\cdot)| < \varepsilon_m]$ a 0-nak nyílt környezete E-ben, tehát

$$V \cap E_n = \bigcap_{m\in n} [|u_m(\cdot)| < \varepsilon_m] \cap E_n$$

miatt $V \cap E_n$ a 0-nak környezete az E_n topologikus lineáris altérben.

Tehát V a 0-nak környezete E-ben. Ez a halmaz nem nyeli el a H halmazt, különben létezne olyan $r \in \mathbb{R}^+$, hogy $H \subseteq r.V$; ekkor viszont $\lim\limits_{n\to\infty} \varepsilon_n = 0$ miatt létezne olyan $n \in \mathbb{N}$, hogy $\varepsilon_n r \leq 1$, így a V kiegyensúlyozottsága és $x_n \in H$ folytán $x_n \in r.V$, tehát $\varepsilon_n.x_n \in \varepsilon_n r.V \subseteq V \subseteq [|u_n(\cdot)| < \varepsilon_n]$, ami $u_n(x_n) = 1$ miatt lehetetlen. Ezzel megmutattuk, hogy H nem korlátos E-ben. ■

5.5.2. Következmény. *Legyen az E lokálisan konvex tér az $(E_n)_{n\in\mathbb{N}}$ lokálisan konvex tér-sorozat szigorú induktív limesze. Az E-ben haladó $(x_m)_{m\in\mathbb{N}}$ sorozat pontosan akkor konvergál E-ben az $x \in E$ vektorhoz, ha van olyan $n \in \mathbb{N}$, hogy $x \in E_n$ és az $(x_m)_{m\in\mathbb{N}}$ sorozat E_n-ben halad és x-hez konvergál az E_n topologikus lineáris altérben.*

Bizonyítás. A feltétel természetesen elégséges. A szükségessége abból következik, hogy az $\{x\}\cup\{x_m|m \in \mathbb{N}\}$ halmaz korlátos E-ben, ezért van olyan $n \in \mathbb{N}$, hogy $\{x\}\cup\{x_m|m \in \mathbb{N}\} \subseteq E_n$; ekkor az E_n-ben haladó $(x_m)_{m\in\mathbb{N}}$ sorozat az E_n topologikus lineáris altérben konvergál az $x \in E_n$ vektorhoz. ■

5.5.3. Következmény. (A szigorú induktív limesz sorozatteljességének jellemzése) *Legyen az E lokálisan konvex tér az $(E_n)_{n\in\mathbb{N}}$ lokálisan konvex tér-sorozat szigorú induktív limesze. Az E pontosan akkor sorozatteljes, ha minden $\mathbb{N} \ni n$-re az E_n topologikus lineáris altér sorozatteljes.*

Bizonyítás. Ha E sorozatteljes, akkor minden $\mathbb{N} \ni n$-re az E_n topologikus lineáris altér sorozatteljes, mert E_n *zárt*, tehát sorozatzárt halmaz E-ben.

Megfordítva, legyen minden $\mathbb{N} \ni n$-re az E_n topologikus lineáris altér sorozatteljes, és vegyünk egy $(x_m)_{m\in\mathbb{N}}$ Cauchy-sorozatot E-ben. Ekkor az $\{x_m|m \in \mathbb{N}\}$ halmaz korlátos E-ben, így az előző állítás szerint van olyan $n \in \mathbb{N}$, hogy $\{x_m|m \in \mathbb{N}\} \subseteq E_n$, tehát $(x_m)_{m\in\mathbb{N}}$ Cauchy-sorozat az E_n sorozatteljes topologikus lineáris altérben. Ekkor $(x_m)_{m\in\mathbb{N}}$ konvergens az E_n topologikus lineáris altérben, tehát E-ben is, így E sorozatteljes. ■

5.5.4. Következmény. *Ha az E szeparált lokálisan konvex tér az $(E_n)_{n\in\mathbb{N}}$ topologikus lineáris altér-sorozatának szigorú induktív limesze, valamint minden $n \in \mathbb{N}$ esetén E_n sorozatteljes és $E_n \neq E$, akkor E nem metrizálható.*

Bizonyítás. Minden $n \in \mathbb{N}$ esetén E_n valódi zárt lineáris altere E-nek, tehát E_n sehol sem sűrű halmaz E-ben. Ugyanakkor $E = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} E_n$, tehát az E halmaz első kategóriájú. Továbbá, az előző állítás szerint, E sorozatteljes is, ezért ha E metrizálható volna, akkor a Baire-tétel alapján az E halmaz (és az E minden nem üres nyílt részhalmaza) második kategórájú lenne, ami lehetetlen. ■

5.5.5. Következmény. *Ha T nem kompakt, σ-kompakt lokálisan kompakt tér és F nem nulla dimenziós Banach-tér, akkor a $T \to F$ kompakt tartójú folytonos függvények $\mathscr{K}(T; F)$ tere a természetes induktív topológiával ellátva nem metrizálható, sorozatteljes hordós tér. Ha $n \in \mathbb{N}^+$ és Ω nem üres nyílt részhalmaza $\mathbb{R}^n$-nek, valamint F nem nulla dimenziós Banach-tér, akkor az $\Omega \to F$ kompakt tartójú végtelenszer differenciálható függvények $C_0^\infty(T; F)$ tere a természetes induktív topológiával ellátva nem metrizálható, sorozatteljes hordós tér.*

Bizonyítás. Az első esetben vehetjük a T kompakt részhalmazainak olyan $(K_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sorozatát, hogy minden $\mathbb{N} \ni n$-re $K_n \subseteq \mathrm{Int}(K_{n+1})$ és $T = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} K_n$. Ekkor a sup-normával ellátott $(\mathscr{K}(T, K_n; F))_{n\in\mathbb{N}}$ függvénytér-sorozat Banach-tereknek olyan sorozata, hogy $\mathscr{K}(T; F) = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \mathscr{K}(T, K_n; F)$ és a T nem kompakt, így minden $\mathbb{N} \ni n$-re $K_n \neq T$, tehát $F \neq \{0\}$ és a T lokális kompaktsága miatt minden $\mathbb{N} \ni n$-re $\mathscr{K}(T, K_n; F) \neq \mathscr{K}(T; F)$. Ezért az állítás az előző következményből kapható.

A második esetben vehetjük az Ω kompakt részhalmazainak olyan $(K_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sorozatát, hogy minden $\mathbb{N} \ni n$-re $K_n \subseteq \mathrm{Int}(K_{n+1})$ és $\Omega = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} K_n$. Ekkor a természetes Fréchet-tér struktúrával ellátott $(C_0^\infty(\Omega, K_n; F))_{n\in\mathbb{N}}$ függvénytér-sorozat Fréchet-tereknek olyan sorozata, hogy $C_0^\infty(\Omega; F) = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} C_0^\infty(T, K_n; F)$ és az Ω nem kompakt, így minden $\mathbb{N} \ni n$-re $K_n \neq \Omega$, tehát $F \neq \{0\}$ miatt minden $\mathbb{N} \ni n$-re $C_0^\infty(\Omega, K_n; F) \neq C_0^\infty(\Omega; F)$. Ezért az állítás az előző következményből kapható. ■

5.6. Az egyenletes konvergencia topológiája korlátos függvények terén

5.6.1. Jelölés. *Ha T halmaz és F topologikus vektortér, akkor $\mathscr{F}^b(T; F)$ jelöli a $T \to F$ korlátos függvények halmazát és a $0 \in F$ vektor minden V környezetére*

$$\mathbf{W}(V) := \{\ f \in \mathscr{F}^b(T; F) \mid \mathrm{Im}(f) \subseteq V\ \}.$$

Nyilvánvaló, hogy ha T halmaz és F topologikus vektortér, akkor $\mathscr{F}^b(T; F)$ lineáris altere az $\mathscr{F}(T; F)$ függvénytérnek, mert $f, g \in \mathscr{F}^b(T; F)$ és $\lambda \in \mathbb{K}$ esetén $\mathrm{Im}(f + g) \subseteq \mathrm{Im}(f) + \mathrm{Im}(g)$ és $\mathrm{Im}(\lambda f) \subseteq \lambda \mathrm{Im}(f)$, és itt a $\subseteq$ reláció jobb oldalán mindkét esetben korlátos halmaz áll.

5.6.2. Tétel. *Legyen T halmaz és F topologikus vektortér, amelynek topológiáját $\mathscr{T}_F$ jelöli.*

a) *Egyértelműen létezik $\mathscr{F}^b(T; F)$ felett olyan $\mathscr{T}$ lineáris topológia, amely szerint $\{\mathbf{W}(V) \mid V \in \mathscr{T}_F(0)\}$ a 0-nak $\mathscr{T}$-környezetbázisa.*

b) *Ha $\mathfrak{b}$ könyezetbázisa a 0-nak F-ben a $\mathscr{T}_F$ topológia szerint, akkor a $\{\mathbf{W}(V) \mid V \in \mathfrak{b}\}$ halmaz $\mathscr{T}$-környezetbázisa a 0-nak $\mathscr{F}^b(T; F)$-ben.*

c) *Egy $\mathscr{F}^b(T; F)$-ben haladó $(f_i)_{i\in I}$ általánosított sorozat pontosan akkor konvergál az $f \in \mathscr{F}^b(T; F)$ függvényhez a $\mathscr{T}$ topológia szerint, ha*

$$(\forall\ V \in \mathscr{T}_F(0))(\exists\ i \in I)(\forall\ j \in I)(\forall\ t \in T) :\ (\ j \geq i \Rightarrow f_j(t) - f(t) \in V\ ),$$

amit úgy fejezünk ki, hogy "az $(f_i)_{i\in I}$ általánosított függvénysorozat az f függvényhez egyenletesen konvergál".

Bizonyítás. Legyen $\mathfrak{b}$ könyezetbázisa a 0-nak F-ben, és legyen $\mathfrak{B} := \{\mathbf{W}(V) \mid V \in \mathfrak{b}\}$. Nyilvánvaló, hogy $\mathfrak{B}$ olyan rács $\mathscr{F}^b(T;F)$-ben, amelynek minden tagjának eleme a $T \to F$ azonosan 0 függvény. Ehhez elég azt észrevenni, hogy $V_1, V_2 \in \mathfrak{b}$ esetén $\mathbf{W}(V) \subseteq \mathbf{W}(V_1) \cap \mathbf{W}(V_2)$ teljesül minden olyan $V \in \mathfrak{b}$ halmazra, amelyre $V \subseteq V_1 \cap V_2$. Meg fogjuk mutatni, hogy $\mathfrak{B}$-re teljesülnek az $(\mathrm{EV_I})$, $(\mathrm{EV_{II}})$ és $(\mathrm{EV_{III}})$ tulajdonságok (1.1.3.).

Ha $V \in \mathfrak{b}$ és $f \in \mathscr{F}^b(T;F)$, akkor az $\mathrm{Im}(f) \subseteq F$ halmaz korlátossága miatt van olyan $\alpha \in \mathbb{R}^+$, hogy minden $\mathbb{K} \ni \lambda$-ra, ha $|\lambda| \geq \alpha$, akkor $\mathrm{Im}(f) \subseteq \lambda.V$; ekkor világos, hogy $\lambda \in \mathbb{K}$ és $|\lambda| \geq \alpha$ esetén $f \in \mathbf{W}(\lambda.V) = \lambda.\mathbf{W}(V)$, tehát a $\mathbf{W}(V)$ halmaz elnyelő az $\mathscr{F}^b(T;F)$ vektortérben. Ugyanakkor, ha $V \in \mathfrak{b}$ és U a 0-nak olyan kiegyensúlyozott környezete F-ben, hogy $U \subseteq V$, akkor van olyan $V' \in \mathfrak{b}$, amelyre $V' \subseteq U$, így $\mathbf{W}(V') \subseteq \mathbf{W}(U) \subseteq \mathbf{W}(V)$, és $\mathbf{W}(U)$ nyilvánvalóan kiegyensúlyozott halmaz az $\mathscr{F}^b(T;F)$ vektortérben, tehát $\mathrm{eq}(\mathbf{W}(V')) \subseteq \mathbf{W}(U) \subseteq \mathbf{W}(V)$. Ez azt jelenti, hogy $\mathfrak{B}$-re $(\mathrm{EV_I})$ teljesül.

Ha $V \in \mathfrak{b}$ és $\lambda \in \mathbb{K} \setminus \{0\}$, akkor $\lambda.V$ a 0-nak környezete F-ben, így létezik olyan $U \in \mathfrak{b}$, amelyre $U \subseteq \lambda.V$; ekkor $\mathbf{W}(U) \subseteq \mathbf{W}(\lambda.V) = \lambda.\mathbf{W}(V)$, ezért $\mathfrak{B}$-re $(\mathrm{EV_{II}})$ teljesül.

Ha $V \in \mathfrak{b}$, akkor van olyan $U \in \mathfrak{b}$, hogy $U + U \subseteq V$; ekkor $\mathbf{W}(U) + \mathbf{W}(U) \subseteq \mathbf{W}(V)$, tehát $\mathfrak{B}$-re $(\mathrm{EV_{III}})$ teljesül.

Ez azt jelenti, hogy ha $\mathfrak{b}$ környezetbázisa a 0-nak F-ben, akkor $\mathscr{F}^b(T;F)$ felett létezik egyetlen olyan $\mathscr{T}_{\mathfrak{b}}$ lineáris topológia, amelyre $\{\mathbf{W}(V) | V \in \mathfrak{b}\}$ a 0 függvénynek környezetbázisa $\mathscr{F}^b(T;F)$-ben (1.1.3.). Ha $\mathfrak{b}'$ szintén környezetbázisa a 0-nak F-ben, akkor nyilvánvaló, hogy a $\{\mathbf{W}(V) | V \in \mathfrak{b}\}$ és $\{\mathbf{W}(V) | V \in \mathfrak{b}'\}$ rácsok ekvivalensek, így $\mathscr{T}_{\mathfrak{b}} = \mathscr{T}_{\mathfrak{b}'}$. Ez az a közös topológia $\mathscr{F}^b(T;F)$ felett, amelynek egyértelmű létezését állítottuk, és amelyet a továbbiakban $\mathscr{T}$-vel jelölünk. Ezzel az a) és b) állításokat igazoltuk.

c) Legyen $(f_i)_{i\in I}$ tetszőleges általánosított sorozat $\mathscr{F}^b(T;F)$-ben és legyen $f \in \mathscr{F}^b(T;F)$. Ekkor az "$(f_i)_{i\in I}$ konvergál f-hez a $\mathscr{T}$ topológia szerint" kijelentés azzal ekvivalens, hogy a 0 minden F-beli V környezetéhez van olyan $i \in I$, hogy minden $j \in I$, $j \geq i$ indexre $f_j - f \in \mathbf{W}(V)$, vagyis minden $T \ni t$-re $f_j(t) - f(t) \in V$, vagyis

$$(\forall\, V \in \mathscr{T}_F(0))(\exists\, i \in I)(\forall\, j \in I)(\forall\, t \in T) : \ (\ j \geq i \Rightarrow f_j(t) - f(t) \in V\ ). \ \blacksquare$$

5.6.3. Definíció. *Ha T halmaz és F topologikus vektortér, akkor az $\mathscr{F}^b(T;F)$ függvénytér feletti* **egyenletes konvergencia topológiájának** *nevezzük azt az $\mathscr{F}^b(T;F)$ feletti lineáris topológiát, amely szerint a $\{\mathbf{W}(V) \mid V \in \mathscr{T}_F(0)\}$ halmaz a 0-nak környezetbázisa, ahol $\mathscr{T}_F$ az F topológiája.*

5.6.4. Állítás. *Ha T halmaz és F lokálisan konvex (illetve félmetrizálható, illetve félnormálható) topologikus vektortér, akkor az $\mathscr{F}^b(T;F)$ függvénytér az egyenletes konvergencia topológiájával ellátva szintén lokálisan konvex (illetve félmetrizálható, illetve félnormálható) topologikus vektortér.*

Bizonyítás. Ha F lokálisan konvex és $\mathfrak{b}$ a 0-nak konvex halmazokból álló környezetbázisa F-ben, akkor $\{\mathbf{W}(V) \mid V \in \mathfrak{b}\}$ konvex halmazokból álló környezetbázisa a 0-nak $\mathscr{F}^b(T;F)$-ben az egyenletes konvergencia topológiája szerint.
Ha F félmetrizálható, akkor létezik F-ben a 0-nak megszámlálható környezetbázisa, és ha $\mathfrak{b}$ ilyen, akkor $\{\mathbf{W}(V) \mid V \in \mathfrak{b}\}$ a 0-nak megszámlálható környezetbázisa $\mathscr{F}^b(T;F)$-ben az egyenletes konvergencia topológiája szerint, így a lineáris topológiák félmetrizálhatóságának kritériuma szerint az $\mathscr{F}^b(T;F)$ függvénytér az egyenletes konvergencia topológiájával ellátva szintén félmetrizálható.

Tegyük fel, hogy p olyan félnorma F felett, amely az F topológiáját generálja. Ha $B \subseteq F$ topologikusan korlátos halmaz, akkor a p által generált félmetrika szerint is korlátos, így $\sup\limits_{x\in B} p(x) < +\infty$. Ezért jól értelmezett a

$$\mathbf{p} \ : \ \mathscr{F}^b(T;F) \to \mathbb{R}_+; \quad f \mapsto \sup_{t\in T} \ p(f(t))$$

függvény. Nyilvánvaló, hogy ez félnorma az $\mathscr{F}^b(T;F)$ vektortér felett. Megmutatjuk, hogy a $\mathbf{p}$ által generált $\mathscr{F}^b(T;F)$ feletti topológia egyenlő az egyenletes konvergencia topológiájával. Valóban, az $\{\overline{B}_r(0;p)|r\in\mathbb{R}^+\}$ halmaz a 0-nak környezetbázisa F-ben, ezért $\{\mathbf{W}(\overline{B}_r(0;p))|r\in\mathbb{R}^+\}$ a 0-nak környezetbázisa $\mathscr{F}^b(T;F)$-ben az egyenletes konvergencia topológiája szerint. Ugyanakkor minden $\mathbb{R}^+ \ni r$-re

$$\mathbf{W}(\overline{B}_r(0;p)) := \{f \in \mathscr{F}^b(T;F) \mid \mathrm{Im}(f) \subseteq \overline{B}_r(0;p)\} =$$

$$= \{f \in \mathscr{F}^b(T;F) \mid \sup_{t\in T} \ p(f(t)) \leq r\} =: \overline{B}_r(0;\mathbf{p}).$$

Ebből következik, hogy a 0-nak létezik közös környezetbázisa az $\mathscr{F}^b(T;F)$ feletti egyenletes konvergencia topológiája és a $\mathbf{p}$ félnorma által generált lineáris topológia szerint, így ezek a lineáris topológiák egyenlőek. ■

Megjegyezzük, hogy ha T halmaz, F topologikus vektortér, és p folytonos félnorma F felett, akkor az előző állítás bizonyításában bevezetett

$$\mathbf{p} \ : \ \mathscr{F}^b(T;F) \to \mathbb{R}_+; \quad f \mapsto \sup_{t\in T} \ p(f(t))$$

félnormát a p által meghatározott *sup-félnormának* nevezzük az $\mathscr{F}^b(T;F)$ függvénytér felett.

5.6.5. Állítás. *Ha T halmaz és F szeparált topologikus vektortér, akkor az $\mathscr{F}^b(T;F)$ függvénytér az egyenletes konvergencia topológiájával ellátva szintén szeparált topologikus vektortér.*

Bizonyítás. Legyen $f \in \mathscr{F}^b(T;F)$ nem nulla függvény és legyen $t \in T$ olyan, hogy $f(t) \neq 0$. Az F szeparáltsága miatt van olyan V környezete a 0-nak F-ben, hogy $f(t) \notin V$; ekkor természetesen $f \notin \mathbf{W}(V)$, és $\mathbf{W}(V)$ a 0-nak környezete $\mathscr{F}^b(T;F)$-ben az egyenletes konvergencia topológiája szerint. ■

Tehát, ha T halmaz és F metrizálható (illetve normálható) topologikus vektortér, akkor az $\mathscr{F}^b(T;F)$ függvénytér az egyenletes konvergencia topológiájával ellátva szintén metrizálható (illetve normálható) topologikus vektortér.

5.6.6. Állítás. *Ha T halmaz és F teljes topologikus vektortér, akkor az $\mathscr{F}^b(T;F)$ függvénytér az egyenletes konvergencia topológiájával ellátva szintén teljes topologikus vektortér.*

Bizonyítás. Legyen $(f_i)_{i\in I}$ olyan általánosított sorozat $\mathscr{F}^b(T;F)$-ben, amely az egyenletes konvergencia topológiája szerint általánosított Cauchy-sorozat. Ekkor teljesül az, hogy

$$(\forall\, V \in \mathscr{T}_F(0))(\exists\, i \in I)(\forall\, j \in I)(\forall\, k \in I):\ (\ ((j \geq i) \wedge (k \geq i)) \Rightarrow f_j - f_k \in \mathbf{W}(V)\ ),$$

ami ekvivalens azzal, hogy

$$(\forall\, V \in \mathscr{T}_F(0))(\exists\, i \in I)(\forall\, j \in I)(\forall\, k \in I)(\forall\, t \in T):$$

$$(\ ((j \geq i) \wedge (k \geq i)) \Rightarrow f_j(t) - f_k(t) \in V\ ).$$

Ebből következik, hogy

$$(\forall\, t \in T)(\forall\, V \in \mathscr{T}_F(0))(\exists\, i \in I)(\forall\, j \in I)(\forall\, k \in I):$$

$$(\ ((j \geq i) \wedge (k \geq i)) \Rightarrow f_j(t) - f_k(t) \in V\ ).$$

is teljesül, ami pontosan azt jelenti, hogy minden $t \in T$ esetén $(f_i(t))_{i\in I}$ általánosított Cauchy-sorozat F-ben, így az F teljessége miatt konvergens F-ben. Azonban F nem feltétlenül szeparált, így $t \in T$ esetén az $(f_i(t))_{i\in I}$ konvergens általánosított sorozatnak több határértéke is létezhet. A kiválasztási axióma alkalmazásával vehetünk olyan $f : T \to F$ függvényt, amelyre teljesül az, hogy minden $t \in T$ pontra $f(t)$ határértéke az $(f_i(t))_{i\in I}$ általánosított sorozatnak F-ben. Meg fogjuk mutatni, hogy f korlátos, tehát $f \in \mathscr{F}^b(T;F)$, továbbá $(f_i)_{i\in I}$ konvergál f-hez az $\mathscr{F}^b(T;F)$ függvénytér feletti egyenletes konvergencia topológiája szerint.

Az $\mathrm{Im}(f) \subseteq F$ halmaz korlátosságának bizonyításához legyen V a 0-nak környezete F-ben. Legyen V' a 0-nak olyan környezete F-ben, amely zárt és $V' \subseteq V$. A V'-höz legyen U olyan kiegyensúlyozott környezete a 0-nak F-ben, amelyre $U + U \subseteq V'$. Az U-hoz legyen $i \in I$ olyan, hogy minden $j, k \in I$ esetén, ha $j \geq i$ és $k \geq i$, akkor $f_j - f_k \in \mathbf{W}(U)$. Az f_i függvény korlátos, tehát vehetünk olyan $\alpha \in \mathbb{R}^+$ számot, hogy minden $\lambda \in \mathbb{K}$ számra, ha $|\lambda| \geq \alpha$, akkor $\mathrm{Im}(f_i) \subseteq \lambda.U$. Ha $t \in T$, akkor minden $j \in I$, $j \geq i$ indexre $f_j(t) \in f_i(t) + U \subseteq \mathrm{Im}(f_i) + U$, így minden $\lambda \in \mathbb{K}$ számra, ha $|\lambda| \geq \alpha$ és $|\lambda| \geq 1$, akkor $f_j(t) \in \lambda.U + U \subseteq \lambda.(U + U) \subseteq \lambda.V'$. Ha $\lambda \in \mathbb{K}$ és $|\lambda| \geq \max(\alpha, 1)$, akkor $t \in T$ esetén minden $j \in I$, $j \geq i$ indexre $f_j(t) \in \lambda.V'$ és itt $\lambda.V'$ zárt halmaz F-ben, ezért az $(f_j(t))_{j \in I}$ általánosított sorozat minden limeszpontja (így $f(t)$ is) eleme $\lambda.V'$-nek, vagyis $\mathrm{Im}(f) \subseteq \lambda.V' \subseteq \lambda.V$. Ez azt jelenti, hogy $\mathrm{Im}(f)$ korlátos halmaz F-ben, tehát $f \in \mathscr{F}^b(T; F)$.

Végül megmutatjuk, hogy $(f_i)_{i \in I}$ egyenletesen konvergál f-hez. Ehhez legyen V a 0-nak környezete F-ben, és legyen U a 0-nak olyan zárt szimmetrikus környezete, hogy $U \subseteq V$. Az U-hoz vegyünk olyan $i \in I$ indexet, hogy minden $j, k \in I$ esetén, ha $j \geq i$ és $k \geq i$, akkor $f_k - f_j \in \mathbf{W}(U)$. Legyen $j \in I$, $j \geq i$ rögzített; ekkor $t \in T$ és $k \in I$, $k \geq i$ esetén $f_k(t) \in f_j(t) + U$, és $f_j(t) + U$ zárt halmaz F-ben, így az $(f_k(t))_{k \in I}$ általánosított sorozat minden limeszpontja (tehát $f(t)$ is) eleme $f_j(t) + U$-nak. Tehát minden $j \in I$, $j \geq i$ indexre és minden $T \ni t$-re $f_j(t) \in f(t) - U = f(t) + U$, azaz $f_j(t) - f(t) \in U \subseteq V$. Ez azt jelenti, hogy $(f_i)_{i \in I}$ egyenletesen konvergál f-hez, vagyis az $(f_i)_{i \in I}$ általánosított sorozat konvergál f-hez az $\mathscr{F}^b(T; F)$ függvénytér feletti egyenletes konvergencia topológiája szerint. ■

Tehát, ha T halmaz és F Fréchet-tér (illetve Banach-tér), akkor az $\mathscr{F}^b(T; F)$ függvénytér az egyenletes konvergencia topológiájával ellátva szintén Fréchet-tér (illetve Banach-tér).

5.6.7. Állítás. *Legyen T halmaz és F topologikus vektortér. A $B \subseteq \mathscr{F}^b(T; F)$ halmaz pontosan akkor korlátos az egyenletes konvergencia topológiája szerint, ha az $\bigcup_{f \in B} \mathrm{Im}(f)$ halmaz korlátos F-ben.*

Bizonyítás. A B halmaz pontosan akkor korlátos az $\mathscr{F}^b(T; F)$ függvénytér feletti egyenletes konvergencia topológiája szerint, ha

$$(\forall V \in \mathscr{T}_F(0))(\exists \alpha \in \mathbb{R}^+)(\forall \lambda \in \mathbb{K}) : (\ (|\lambda| \geq \alpha) \Rightarrow B \subseteq \lambda.\mathbf{W}(V)\ ).$$

Ha $V \in \mathscr{T}_F(0)$ és $\lambda \in \mathbb{K}$, akkor

$$B \subseteq \lambda.\mathbf{W}(V) \Leftrightarrow B \subseteq \mathbf{W}(\lambda.V) \Leftrightarrow \bigcup_{f \in B} \mathrm{Im}(f) \subseteq \lambda.V,$$

ezért a B halmaz pontosan akkor korlátos az $\mathscr{F}^b(T; F)$ függvénytér feletti egyenletes konvergencia topológiája szerint, ha

$$(\forall V \in \mathscr{T}_F(0))(\exists \alpha \in \mathbb{R}^+)(\forall \lambda \in \mathbb{K}) : (\ (|\lambda| \geq \alpha) \Rightarrow \bigcup_{f \in B} \mathrm{Im}(f) \subseteq \lambda.V\ ).$$

Ez utóbbi állítás pedig ekvivalens azzal, hogy az $\bigcup_{f \in B} \mathrm{Im}(f)$ halmaz korlátos F-ben. ■

5.7. $\mathfrak{S}$-topológia az $\mathfrak{S}$-korlátos függvények terén

5.7.1. Definíció. *Legyen T halmaz, $\mathfrak{S} \subseteq \mathscr{P}(T)$ nem üres halmaz, és F topologikus vektortér. Ekkor $\mathscr{F}^b_{\mathfrak{S}}(T;F)$ jelöli azon $f : T \to F$ függvények halmazát, amelyekre teljesül az, hogy minden $S \in \mathfrak{S}$ esetén az $f\langle S\rangle$ halmaz korlátos F-ben. Az $\mathscr{F}^b_{\mathfrak{S}}(T;F)$ függvényhalmaz elemeit* **$\mathfrak{S}$-korlátos** *függvényeknek nevezzük.*

Megjegyezzük, hogy az előző definíció feltételei mellett az $\mathscr{F}^b_{\mathfrak{S}}(T;F)$ függvényhalmaz *lineáris altere* az összes $T \to F$ függvények vektorterének, mert $f,g \in \mathscr{F}^b_{\mathfrak{S}}(T;F)$ és $\lambda \in \mathbb{K}$ esetén minden $\mathfrak{S} \ni S$-re $(f+g)\langle S\rangle \subseteq f\langle S\rangle + g\langle S\rangle$, valamint $(\lambda.f)\langle S\rangle \subseteq \lambda.f\langle S\rangle$, és a $\subseteq$ reláció jobb oldalán mindkét esetben F-ben korlátos halmaz áll.

5.7.2. Definíció. *Legyen T halmaz, $\mathfrak{S} \subseteq \mathscr{P}(T)$ nem üres halmaz, és F topologikus vektortér. Minden $S \in \mathfrak{S}$ esetén értelmezzük a*

$$p_S : \mathscr{F}^b_{\mathfrak{S}}(T;F) \to \mathscr{F}^b(S;F); \quad f \mapsto f|_S$$

lineáris operátort, és az $\mathscr{F}^b(S;F)$ függvényteret lássuk el az egyenletes konvergencia topológiájával. Ekkor az $(\mathscr{F}^b(S;F), p_S)_{S\in\mathfrak{S}}$ rendszer által projektíven előállított $\mathscr{F}^b_{\mathfrak{S}}(T;F)$ feletti topológiát úgy nevezzük, hogy **az $\mathscr{F}^b_{\mathfrak{S}}(T;F)$ függvénytér feletti $\mathfrak{S}$-topológia**. *Ha L lineáris altere $\mathscr{F}^b_{\mathfrak{S}}(T;F)$-nek, akkor az $\mathscr{F}^b_{\mathfrak{S}}(T;F)$ függvénytér feletti $\mathfrak{S}$-topológia L-re vett leszűkítését az L* **feletti $\mathfrak{S}$-topológiának** *nevezzük.*

A gyakorlatban ritkán van dolgunk az $\mathscr{F}^b_{\mathfrak{S}}(T;F)$ alakú függvényterekkel, mert ez a függvénytér általában nehezen kezelhető. Rendszerint ilyen alakú függvénytereknek bizonyos *lineáris alterei* érdekesek számunkra.

5.7.3. Jelölés. *Ha T halmaz, $\mathfrak{S} \subseteq \mathscr{P}(T)$, és F topologikus vektortér, akkor minden $S \in \mathfrak{S}$ halmazra és a $0 \in F$ vektor minden V környezetére a*

$$\mathbf{W}(S,V) := \{f \in \mathscr{F}^b_{\mathfrak{S}}(T;F) \mid f\langle S\rangle \subseteq V\}$$

jelölést alkalmazzuk.

5.7.4. Állítás. *Legyen T halmaz, $\mathfrak{S} \subseteq \mathscr{P}(T)$ nem üres halmaz, és F topologikus vektortér.*

a) *Ha $\mathfrak{b}$ a 0-nak környezetbázisa F-ben, akkor a*

$$\{\ \mathbf{W}(S,V) \mid (S \in \mathfrak{S}) \wedge (V \in \mathfrak{b})\ \}$$

halmaz a 0-nak környezet-szubbázisa az $\mathscr{F}^b_{\mathfrak{S}}(T;F)$ feletti $\mathfrak{S}$-topológia szerint.

b) *Egy $\mathscr{F}^b_{\mathfrak{S}}(T;F)$-ben haladó $(f_i)_{i\in I}$ általánosított sorozat pontosan akkor konvergál az $f \in \mathscr{F}^b_{\mathfrak{S}}(T;F)$ függvényhez az $\mathfrak{S}$-topológia szerint, ha*

$$(\forall S \in \mathfrak{S})(\forall\ V \in \mathscr{T}_F(0))(\exists\ i \in I)(\forall\ j \in I)(\forall\ t \in S) : (j \geq i \Rightarrow f_j(t) - f(t) \in V),$$

amit úgy fejezünk ki, hogy "az $(f_i)_{i\in I}$ általánosított függvénysorozat az f függvényhez minden $\mathfrak{S}$-hez tartozó halmazon egyenletesen konvergál".

Bizonyítás. Minden $S \in \mathfrak{S}$ és $V \in \mathfrak{b}$ esetén legyen

$$\mathbf{W}_S(V) := \{f \in \mathscr{F}^b(S;F) \mid \mathrm{Im}(f) \subseteq V\}.$$

Tudjuk, hogy $S \in \mathfrak{S}$ esetén $\{\mathbf{W}_S(V) \mid V \in \mathfrak{b}\}$ a 0-nak környezetbázisa az $\mathscr{F}^b(S;F)$ függvénytér-ben az egyenletes konvergencia topológiája szerint. Ezért az $\mathscr{F}^b_{\mathfrak{S}}(T;F)$ feletti $\mathfrak{S}$-topológia értelmezése alapján

$$\{\overset{-1}{p_S}\langle \mathbf{W}_S(V)\rangle | (S \in \mathfrak{S}) \wedge (V \in \mathfrak{b})\}$$

a 0-nak környezet-szubbázisa az $\mathfrak{S}$-topológia szerint. Ugyanakkor a definíció alapján nyilvánvaló, hogy $S \in \mathfrak{S}$ és $V \in \mathfrak{b}$ esetén

$$\overset{-1}{p_S}\langle \mathbf{W}_S(V)\rangle = \mathbf{W}(S,V).$$

Továbbá, a projektíven előállított topológiák szerinti konvergencia tulajdonsága alapján, egy $\mathscr{F}^b_{\mathfrak{S}}(T;F)$-ben haladó $(f_i)_{i\in I}$ általánosított sorozat pontosan akkor konvergál az $f \in \mathscr{F}^b_{\mathfrak{S}}(T;F)$ függvényhez az $\mathfrak{S}$-topológia szerint, ha minden $\mathfrak{S} \ni S$-re a $(p_S(f_i))_{i\in I}$ általánosított sorozat konvergál a $p_S(f)$ függvényhez $\mathscr{F}^b(S;F)$-ben az egyenletes konvergencia topológiája szerint, vagyis ha

$$(\forall S \in \mathfrak{S})(\forall\, V \in \mathscr{T}_F(0))(\exists\, i \in I)(\forall\, j \in I)(\forall\, t \in S) : (j \geq i \Rightarrow f_j(t) - f(t) \in V). \blacksquare$$

Könnyen látható, hogy ha az előző állítás feltételei mellett még az is teljesül, hogy $\mathfrak{S}$ *felfelé irányított*, (vagyis minden $S_1, S_2 \in \mathfrak{S}$ esetén van olyan $S \in \mathfrak{S}$, hogy $S_1 \cup S_2 \subseteq S$), akkor $\{\mathbf{W}(S,V)|(S \in \mathfrak{S}) \wedge (V \in \mathfrak{b})\}$ a 0-nak *környezetbázisa* az $\mathscr{F}^b_{\mathfrak{S}}(T;F)$ feletti $\mathfrak{S}$-topológia szerint, ahol $\mathfrak{b}$ a 0-nak F-ben tetszőleges környezetbázisa.

5.7.5. Állítás. *Legyen T halmaz, $\mathfrak{S} \subseteq \mathscr{P}(T)$ nem üres halmaz, és F topologikus vektortér. Jelölje $\mathfrak{S}'$ azon $S' \subseteq T$ halmazok halmazát, amelyekhez van olyan $(S_i)_{i\in I}$ véges rendszer $\mathfrak{S}$-ben, hogy $S' \subseteq \bigcup_{i\in I} S_i$. Ekkor $\mathscr{F}^b_{\mathfrak{S}}(T;F) = \mathscr{F}^b_{\mathfrak{S}'}(T;F)$ és az $\mathscr{F}^b_{\mathfrak{S}}(T;F)$ feletti $\mathfrak{S}$-topológia egyenlő az $\mathfrak{S}'$ topológiával.*

Bizonyítás. Világos, hogy $\mathfrak{S} \subseteq \mathfrak{S}'$, ezért nyilvánvaló, hogy $\mathscr{F}^b_{\mathfrak{S}'}(T;F) \subseteq \mathscr{F}^b_{\mathfrak{S}}(T;F)$. Legyen $f \in \mathscr{F}^b_{\mathfrak{S}}(T;F)$ és $S' \in \mathfrak{S}'$. Ekkor van olyan $(S_i)_{i\in I}$ véges rendszer $\mathfrak{S}$-ben, hogy $S' \subseteq \bigcup_{i\in I} S_i$, ezért $f\langle S'\rangle \subseteq \bigcup_{i\in I} f\langle S_i\rangle$, és itt a jobb oldalon az F véges sok korlátos részhalmazának uniója áll, így $f\langle S'\rangle$ is korlátos halmaz F-ben. Ez azt jelenti, hogy $\mathscr{F}^b_{\mathfrak{S}}(T;F) \subseteq \mathscr{F}^b_{\mathfrak{S}'}(T;F)$ is teljesül.

Tudjuk, hogy $\{\mathbf{W}(S,V)|(S \in \mathfrak{S}) \wedge (V \in \mathscr{T}_F(0))\}$ a 0-nak környezet-szubbázisa az $\mathscr{F}^b_{\mathfrak{S}}(T;F)$ feletti $\mathfrak{S}$-topológia szerint, és $\{\mathbf{W}(S',V)|(S' \in \mathfrak{S}') \wedge (V \in \mathscr{T}_F(0))\}$ a 0-nak környezet-szubbázisa az $\mathscr{F}^b_{\mathfrak{S}}(T;F)$ feletti $\mathfrak{S}'$-topológia szerint. Az $\mathfrak{S} \subseteq \mathfrak{S}'$ tartalmazás miatt $\{\mathbf{W}(S,V)|(S \in \mathfrak{S}) \wedge (V \in \mathscr{T}_F(0))\} \subseteq \{\mathbf{W}(S',V)|(S' \in \mathfrak{S}') \wedge (V \in \mathscr{T}_F(0))\}$, ezért az $\mathfrak{S}$-topológa kisebb-egyenlő a $\mathfrak{S}'$-topológiánál. Ha $V \in \mathscr{T}_F(0)$ és $S' \in \mathfrak{S}'$, és $(S_i)_{i\in I}$ olyan nem üres véges rendszer $\mathfrak{S}$-ben, hogy $S' \subseteq \bigcup_{i\in I} S_i$, akkor nyilvánvalóan

$$\bigcap_{i\in I} \mathbf{W}(S_i,V) \subseteq \mathbf{W}(S',V),$$

ezért $\mathbf{W}(S',V)$ a 0-nak környezete az $\mathfrak{S}$-topológia szerint, amiből következik, hogy az $\mathfrak{S}'$-topológia kisebb-egyenlő az $\mathfrak{S}$-topológiánál. ■

Nyilvánvaló, hogy az előző állításban bevezetett $\mathfrak{S}'$ halmaz zárt a véges unió-képzésre nézve, továbbá mindegyik elemének minden részhalmaza is eleme neki, ezért az $\mathscr{F}^b_{\mathfrak{S}}(T;F)$ függvényterek és az $\mathfrak{S}$-topológiák értelmezésénél kezdettől fogva feltehettük volna, hogy $\mathfrak{S}$ rendelkezik ezzel a két tulajdonsággal.

5.7.6. Állítás. *Legyen T halmaz, $\mathfrak{S} \subseteq \mathscr{P}(T)$ nem üres halmaz, és F topologikus vektortér. Ha F lokálisan konvex, akkor $\mathscr{F}^b_{\mathfrak{S}}(T;F)$ az $\mathfrak{S}$-topológiával ellátva szintén lokálisan konvex. Ha F félmetrizálható és létezik olyan $\mathfrak{S}' \subseteq \mathfrak{S}$ megszámlálható halmaz, hogy minden $S \in \mathfrak{S}$ esetén van olyan $(S'_i)_{i\in I}$ véges rendszer $\mathfrak{S}'$-ben, amelyre $S \subseteq \bigcup_{i\in I} S'_i$, akkor $\mathscr{F}^b_{\mathfrak{S}}(T;F)$ az $\mathfrak{S}$-topológiával ellátva szintén félmetrizálható.*

Bizonyítás. Ha V konvex környezete a 0-nak F-ben, akkor minden $\mathfrak{S} \ni S$-re $\mathbf{W}(S,V)$ konvex részhalmaza $\mathscr{F}^b_{\mathfrak{S}}(T;F)$-nek. Ebből azonnal következik, hogy ha F lokálisan konvex, akkor $\mathscr{F}^b_{\mathfrak{S}}(T;F)$ az $\mathfrak{S}$-topológiával ellátva szintén lokálisan konvex.

Legyen F félmetrizálható, és vegyük a 0-nak egy $\mathfrak{b}$ megszámlálható környezetbázisát. Legyen továbbá $\mathfrak{S}' \subseteq \mathfrak{S}$ olyan megszámlálható halmaz, hogy minden $S \in \mathfrak{S}$ esetén van olyan $(S'_i)_{i\in I}$ véges rendszer $\mathfrak{S}'$-ben, amelyre $S \subseteq \bigcup_{i\in I} S'_i$. Ekkor a $\{\mathbf{W}(S',V)|(S' \in \mathfrak{S}') \wedge (V \in \mathfrak{b})\}$ halmaz megszámlálható környezet-szubbázisa a 0-nak $\mathscr{F}^b_{\mathfrak{S}}(T;F)$-ben az $\mathfrak{S}$-topológia szerint, ezért a lineáris topológiák félmetrizálhatóságának kritériuma alapján az $\mathfrak{S}$-topológia félmetrizálható. ■

Azonban vigyázzunk arra, hogy ha T halmaz, $\mathfrak{S} \subseteq \mathscr{P}(T)$ nem üres halmaz, és F topologikus vektortér, továbbá F *félnormálható*, valamint létezik olyan $\mathfrak{S}' \subseteq \mathfrak{S}$ megszámlálható halmaz, hogy minden $S \in \mathfrak{S}$ esetén van olyan $(S'_i)_{i\in I}$ véges rendszer $\mathfrak{S}'$-ben, amelyre $S \subseteq \bigcup_{i\in I} S'_i$, akkor csak annyit mondhatunk, hogy $\mathscr{F}^b_{\mathfrak{S}}(T;F)$ az $\mathfrak{S}$-topológiával ellátva lokálisan konvex és félmetrizálható, azonban már nem szükségképpen félnormálható.

5.8. Példák $\mathfrak{S}$-topológiákra

1) Legyen T halmaz és jelölje $\mathfrak{S}$ a T egy elemű részhalmazainak halmazát. Ha F topologikus vektortér, akkor nyilvánvalóan $\mathscr{F}^b_{\mathfrak{S}}(T;F) = \mathscr{F}(T;F)$, így az $\mathscr{F}(T;F)$ függvénytér felett tekinthetjük az $\mathfrak{S}$-topológiát, amit a *pontonkénti konvergencia topológiájának* nevezünk, hiszen egy $\mathscr{F}(T;F)$-ben haladó $(f_i)_{i\in I}$ általánosított sorozat pontosan akkor konvergál az $f \in \mathscr{F}(T;F)$ függvényhez az $\mathfrak{S}$-topológia szerint, ha

$$(\forall\ t \in T)(\forall\ V \in \mathscr{T}_F(0))(\exists\ i \in I)(\forall\ j \in I):\ (\ j \geq i \Rightarrow f_j(t) - f(t) \in V\ ),$$

vagyis $(f_i)_{i\in I}$ pontonként konvergál T-n f-hez. Az $\mathscr{F}(T;F)$ függvényteret a pontonkénti konvergencia topológiájával ellátva a $\mathscr{F}_s(T;F)$ szimbólummal is jelöljük. Ha $\mathfrak{S}'$ jelöli azon $S' \subseteq T$ halmazok halmazát, amelyekhez van olyan $(S_i)_{i\in I}$ véges rendszer $\mathfrak{S}$-ben, hogy $S' \subseteq \bigcup\limits_{i\in I} S_i$, akkor világos, hogy $\mathfrak{S}'$ a T *véges részhalmazainak halmaza*, ezért egy $W \subseteq \mathscr{F}(T;F)$ halmaz pontosan akkor környezete a 0-nak a pontonkénti konvergencia topológiája szerint, ha létezik olyan $S \subseteq T$ véges halmaz és létezik a 0-nak olyan V környezete F-ben, hogy $\mathbf{W}(S,V) \subseteq W$, azaz

$$(\forall f \in \mathscr{F}(T;F)):\ (\ ((\forall t \in S): f(t) \in V) \Rightarrow\ (f \in W)\ ).$$

Ha T megszámlálható és F félmetrizálható, akkor $\mathscr{F}_s(T;F)$ félmetrizálható topologikus vektortér, ezért bármely $\mathbf{L} \subseteq \mathscr{F}(T;F)$ lineáris altérre, az $\mathbf{L}$ feletti pontonkénti konvergencia topológiája szintén félmetrizálható.

2) Legyen T halmaz, $\mathfrak{S} := \{T\}$ és F topologikus vektortér. Ekkor nyilvánvalóan $\mathscr{F}^b_{\mathfrak{S}}(T;F) = \mathscr{F}^b(T;F)$, és az $\mathfrak{S}$-topológia megegyezik az egyenletes konvergencia topológiájával. Az $\mathscr{F}^b(T;F)$ függvényteret az egyenletes konvergencia topológiájával ellátva a $\mathscr{F}^b_u(T;F)$ szimbólummal is jelöljük.

3) Legyen T topologikus tér, $\mathfrak{S}$ a T kompakt részhalmazainak halmaza és F topologikus vektortér. Ekkor minden $K \in \mathfrak{S}$ és $f \in \mathscr{C}(T;F)$ esetén $f\langle S\rangle$ kompakt részhalmaza F-nek, tehát korlátos, így $\mathscr{C}(T;F) \subseteq \mathscr{F}^b_{\mathfrak{S}}(T;F)$. Ezért vehetjük a $\mathscr{C}(T;F)$ feletti $\mathfrak{S}$-topológiát, amit a $\mathscr{C}(T;F)$ feletti *kompakt konvergencia topológiájának* nevezünk, hiszen egy $\mathscr{C}(T;F)$-ben haladó $(f_i)_{i\in I}$ általánosított sorozat pontosan akkor konvergál az $f \in \mathscr{C}(T;F)$ függvényhez az $\mathfrak{S}$-topológia szerint, ha $(f_i)_{i\in I}$ a T minden kompakt részhalmazán egyenletesen konvergál f-hez. A $\mathscr{C}(T;F)$ függvényteret a kompakt konvergencia topológiájával ellátva a $\mathscr{C}_c(T;F)$ szimbólummal is jelöljük.

4) Legyenek E és F topologikus vektorterek, valamint $\mathfrak{S}$ az E korlátos részhalmazainak tetszőleges nem üres halmaza. Ekkor minden $u \in \mathscr{L}(E;F)$ és $S \in \mathfrak{S}$ esetén $u\langle S\rangle$ korlátos halmaz F-ben, ezért $\mathscr{L}(E;F) \subseteq \mathscr{F}^b_{\mathfrak{S}}(T;F)$, tehát az $\mathscr{L}(E;F)$ operátortér felett tekinthetjük a $\mathfrak{S}$-topológiát. Hasonlóan értelmezhetjük az $\mathfrak{S}$-topológiát az $E \to F$ korlátos lineáris operátorok $\mathscr{B}(E;F)$ terén is. Az $\mathscr{L}(E;F)$ operátorteret az $\mathfrak{S}$-topológiával ellátva a $\mathscr{L}_{\mathfrak{S}}(E;F)$ szimbólummal is jelöljük.

5) A 4) példa fontos speciális esete az, amikor E és F topologikus vektorterek,

és $\mathfrak{S}$ az E véges részhalmazainak halmaza; ekkor az $\mathscr{L}(E;F)$ operátorteret az $\mathfrak{S}$-topológiával (vagyis a pontonkénti konvergencia topológiájával ellátva) az $\mathscr{L}_s(E;F)$ szimbólummal jelöljük. Ennek speciális esete az, amikor E topologikus vektortér és az $E' := \mathscr{L}(E;\mathbb{K})$ topologikus duális felett a pontonkénti konvergencia topológiáját vesszük: ezt a topológiát a $\sigma(E',E)$ szimbólummal jelöljük.

5.9. Az $\mathfrak{S}$-topológák elemi tulajdonságai

5.9.1. Állítás. *Legyenek E és F lokálisan konvex terek, és $\mathfrak{S}$ az E korlátos részhalmazainak nem üres halmaza. Jelölje $\mathfrak{S}'$ azon $S' \subseteq E$ halmazok halmazát, melyekhez van olyan $S \in \mathfrak{S}$, hogy $S' \subseteq \overline{\mathrm{co}}(\mathrm{eq}(S))$. Ekkor az $\mathfrak{S}'$ minden eleme korlátos halmaz E-ben, és az $\mathscr{L}(E;F)$ felett az $\mathfrak{S}$ és $\mathfrak{S}'$ topológiák egyenlők.*

Bizonyítás. Az $\mathfrak{S}'$ minden eleme korlátos halmaz E-ben, mert E lokálisan konvex. Továbbá, $\mathfrak{S} \subseteq \mathfrak{S}'$ miatt az $\mathscr{L}(E;F)$ feletti $\mathfrak{S}$ topológia nyilvánvalóan kisebb-egyenlő a $\mathfrak{S}'$ topológiánál.
Megfordítva, legyen $S' \in \mathfrak{S}'$ és U' a 0-nak környezete F-ben. Az F lokális konvexitása miatt vehetjük a 0-nak olyan U zárt, konvex és kiegyensúlyozott környezetét F-ben, amelyre $U \subseteq U'$. Továbbá, az $\mathfrak{S}'$ értelmezése alapján van olyan $S \in \mathfrak{S}$, hogy $S' \subseteq \overline{\mathrm{co}}(\mathrm{eq}(S))$. Ekkor $u \in \mathbf{W}(S,U) \cap \mathscr{L}(E;F)$ esetén $S \subseteq \overset{-1}{u}\langle U\rangle$ és az $\overset{-1}{u}\langle U\rangle$ halmaz zárt, konvex és kiegyensúlyozott E-ben, így $S' \subseteq \overset{-1}{u}\langle U\rangle \subseteq \overset{-1}{u}\langle U'\rangle$, tehát $\mathbf{W}(S,U) \cap \mathscr{L}(E;F) \subseteq \mathbf{W}(S',U') \cap \mathscr{L}(E;F)$. Ebből következik, hogy az $\mathscr{L}(E;F)$ feletti $\mathfrak{S}'$ topológia kisebb-egyenlő az $\mathfrak{S}$ topológiánál. ■

5.9.2. Állítás. *Legyen T halmaz, $\mathfrak{S} \subseteq \mathscr{P}(T)$ nem üres halmaz, és F topologikus vektortér. Ha $\bigcup_{S \in \mathfrak{S}} S = T$ és F szeparált, akkor az $\mathscr{F}^b_{\mathfrak{S}}(T;F)$ feletti $\mathfrak{S}$-topológia is Hausdorff-topológia (ezért minden $\mathbf{L} \subseteq \mathscr{F}^b_{\mathfrak{S}}(T;F)$ lineáris altérre, az $\mathbf{L}$ feletti $\mathfrak{S}$-topológia is szeparált).*

Bizonyítás. Legyen $f \in \mathscr{F}^b_{\mathfrak{S}}(T;F) \setminus \{0\}$ és vegyünk olyan $t \in T$ pontot, hogy $f(t) \neq 0$. Az F szeparáltsága miatt van olyan U környezete a 0-nak F-ben, hogy $f(t) \notin U$. Továbbá, az $\bigcup_{S \in \mathfrak{S}} S = T$ feltétel miatt van olyan $S \in \mathfrak{S}$, hogy $t \in S$. Ekkor $f \notin \mathbf{W}(S,U)$, és $\mathbf{W}(S,U)$ a 0-nak környezete az $\mathscr{F}^b_{\mathfrak{S}}(T;F)$ feletti $\mathfrak{S}$-topológia szerint. Ezért az $\mathscr{F}^b_{\mathfrak{S}}(T;F)$ feletti $\mathfrak{S}$-topológia Hausdorff-topológia. ■

Megjegyzés. Tegyük fel, hogy teljesülnek az előző állítás feltételei, továbbá $\mathfrak{S}$ a tartalmazás tekintetében felfelé irányított. Ha $\mathbf{L}$ olyan lineáris altér $\mathscr{F}^b_{\mathfrak{S}}(T;F)$-ben, hogy minden $S \in \mathfrak{S}$ esetén van olyan $f \in \mathbf{L}$, hogy $f \neq 0$ és $S \subseteq [f=0]$, akkor az $\mathbf{L}$ feletti $\mathfrak{S}$-topológia *nem normálható*. Valóban, ha $S \in \mathfrak{S}$ és U a 0-nak környezete F-ben, akkor $\{f \in \mathbf{L} | S \subseteq [f=0]\} \subseteq \mathbf{W}(S,U) \cap \mathbf{L}$, ugyanakkor a bal oldalon álló halmaz az $\mathbf{L}$-re vonatkozó hipotézis miatt nem nulla dimenziós lineáris altere $\mathbf{L}$-nek, tehát az $\mathbf{L}$ feletti $\mathfrak{S}$-topológia szeparáltsága folytán $\{f \in \mathbf{L} | S \subseteq [f = 0]\}$ nem korlátos az $\mathfrak{S}$-topológia szerint, így $\mathbf{W}(S, U) \cap \mathbf{L}$ sem korlátos. Ez azt jelenti, hogy a 0-nak egyáltalán nincs korlátos környezete $\mathbf{L}$-ben az $\mathfrak{S}$-topológia szerint, tehát a topologikus vektorterek normálhatóságának kritériuma alapján a $\mathfrak{S}$-topológia nem normálható. Érdekes speciális esetek a következők.

– Ha T nem kompakt teljesen reguláris Hausdorff-tér és F nem nulla dimenziós szeparált topologikus vektortér, akkor a $\mathscr{C}(T; F)$ függvénytér feletti kompakt konvergencia topológiája nem normálható.

– Ha E végtelen dimenziós szeparált lokálisan konvex tér, akkor E' felett a $\sigma(E', E)$ topológia nem normálható.

5.9.3. Állítás. *Legyen T halmaz, $\mathfrak{S} \subseteq \mathscr{P}(T)$ nem üres halmaz, és F lokálisan konvex tér. Legyen $(p_i)_{i \in I}$ olyan nem üres félnorma-rendszer, amely az F topológiáját generálja, továbbá minden $i \in I$ és $S \in \mathfrak{S}$ esetén értelmezzük a*

$$\mathbf{p}_{i,S} : \mathscr{F}^b_{\mathfrak{S}}(T; F) \to \mathbb{R}_+; \quad f \mapsto \sup_{t \in S} p_i(f(t))$$

függvényt (amely $S = \emptyset$ esetén, definíció szerint, az $\mathscr{F}^b_{\mathfrak{S}}(T; F) \to \mathbb{R}_+$ azonosan 0 függvény). Ekkor $(\mathbf{p}_{i,S})_{(i,S) \in I \times \mathfrak{S}}$ olyan félnorma-rendszer $\mathscr{F}^b_{\mathfrak{S}}(T; F)$ felett, amely az $\mathfrak{S}$-topológiát generálja.

Bizonyítás. Legyen $S \in \mathfrak{S}$ és U a 0-nak környezete F-ben. Létezik olyan $J \subseteq I$ nem üres véges halmaz és $r \in \mathbb{R}^+$, hogy $\bigcap_{i \in J} [p_i \leq r] \subseteq U$. Nyilvánvaló, hogy $\bigcap_{i \in J} [\mathbf{p}_{i,S} \leq r] \subseteq \mathbf{W}(S, U)$, és itt a bal oldalon a 0 függvény környezete áll a $(\mathbf{p}_{i,S})_{(i,S) \in I \times \mathfrak{S}}$ félnorma-rendszer által generált $\mathscr{F}^b_{\mathfrak{S}}(T; F)$ feletti lokálisan konvex topológia szerint. Ezért ez a topológia majorálja az $\mathscr{F}^b_{\mathfrak{S}}(T; F)$ feletti $\mathfrak{S}$-topológiát.

Megfordítva, ha $i \in I$, $S \in \mathfrak{S}$ és $r \in \mathbb{R}^+$, akkor a definíciók alapján nyilvánvaló, hogy $[\mathbf{p}_{i,S} \leq r] = \mathbf{W}(S, [p_i \leq r])$, és itt a jobb oldalon a 0 függvény környezete áll a $\mathscr{F}^b_{\mathfrak{S}}(T; F)$ feletti $\mathfrak{S}$-topológia szerint. Ezért ez a topológia majorálja a $(\mathbf{p}_{i,S})_{(i,S) \in I \times \mathfrak{S}}$ félnorma-rendszer által generált $\mathscr{F}^b_{\mathfrak{S}}(T; F)$ feletti lokálisan konvex topológiát. ■

5.10. Ekvifolytonos függvényhalmazok

5.10.1. Definíció. *Legyen T topologikus tér és F topologikus vektortér. Egy $H \subseteq \mathscr{F}(T; F)$ halmazt* **ekvifolytonosnak** *nevezünk a $t \in T$ pontban, ha a 0 minden F-beli V környezetéhez létezik a t-nek olyan U környezete T-ben, hogy minden $f \in H$ és $t' \in U$ esetén $f(t') - f(t) \in V$. Azt mondjuk, hogy a $H \subseteq \mathscr{F}(T; F)$ halmaz* **ekvifolytonos**, *ha a T minden pontjában ekvifolytonos.*

Ha T topologikus tér, F topologikus vektortér és $H \subseteq \mathscr{F}(T; F)$ olyan halmaz, amely a $t \in T$ pontban ekvifolytonos, akkor minden $f \in H$ esetén az f függvény folytonos a t pontban; ez a definíció alapján nyilvánvaló.

Megemlítjük még azt a nyilvánvaló tényt, hogy ha T topologikus tér és F topologikus vektortér akkor az $\mathscr{F}(T; F)$ véges sok ekvifolytonos részhalmazának uniója ekvifolytonos, és ekvifolyonos halmaz minden részhalmaza is ekvifolytonos.

Ha E és F topologikus vektorterek, akkor egy $H \subseteq \mathscr{L}(E; F)$ operátorhalmaz pontosan akkor ekvifolytonos, ha a 0-ban ekvifolyonos. Valóban, ha H a 0-ban ekvifolytonos és $x \in E$, valamint V a 0-nak környezete F-ben, akkor van olyan U környezete a 0-nak E-ben, amelyre minden $u \in H$ és $z \in U$ esetén $u(z) = u(z) - u(0) \in V$; ekkor $x + U$ olyan környezete x-nek E-ben, hogy minden $u \in H$ és $x' \in x + U$ esetén $u(x') - u(x) = u(x' - x) \in V$, vagyis H ekvifolytonos az x pontban.

5.10.2. Tétel. (Első Ascoli-tétel) *Legyen T topologikus tér és F topologikus vektortér. Ha $H \subseteq \mathscr{F}(T; F)$ ekvifolytonos halmaz, és $\overline{H}$ jelöli a H lezártját $\mathscr{F}(T; F)$-ben a pontonkénti konvergencia topológiája szerint, akkor $\overline{H}$ is ekvifolytonos halmaz, így $\overline{H} \subseteq \mathscr{C}(T; F)$ is teljesül.*

Bizonyítás. Legyen $t \in T$ rögzített; megmutatjuk, hogy $\overline{H}$ ekvifolytonos a t pontban. Legyen V a 0-nak tetszőleges környezete F-ben. Vegyük a 0-nak olyan W szimmetrikus környezetét F-ben, amelyre $W + W + W \subseteq V$. A H halmaz ekvifolytonos a t pontban, így a W-hez van olyan U környezete t-nek T-ben, hogy minden $f \in H$ és $t' \in U$ esetén $f(t') - f(t) \in W$. Megmutatjuk, hogy minden $f \in \overline{H}$ és $t' \in U$ esetén $f(t') - f(t) \in V$ teljesül, amiből már következik az $\overline{H}$ halmaz ekvifolytonossága a t pontban. Legyen tehát $f \in \overline{H}$ és $t' \in U$ rögzített. Ekkor létezik olyan H-ban haladó $(f_i)_{i \in I}$ általánosított sorozat, amely pontonként konvergál f-hez. Speciálisan; $(f_i(t))_{i \in I}$ olyan általánosított sorozat F-ben, amely $f(t)$-hez konvergál, így létezik olyan $i_1 \in I$, hogy minden $i \in I$ esetén, ha $i \geq i_1$, akkor $f_i(t) - f(t) \in W$. Ugyanakkor $(f_i(t'))_{i \in I}$ olyan általánosított sorozat F-ben, amely $f(t')$-hez konvergál, így létezik olyan $i_2 \in I$, hogy minden $i \in I$ esetén, ha $i \geq i_2$, akkor $f_i(t') - f(t') \in W$, tehát a W szimmetrikussága miatt $f(t') - f_i(t') \in W$. Ha $i \in I$ olyan, hogy $i \geq i_1$ és $i \geq i_2$, akkor $f(t') - f(t) = (f(t') - f_i(t')) + (f_i(t') - f_i(t)) + (f_i(t) - f(t)) \in W + W + W \subseteq V$, hiszen $i \geq i_2$ miatt $f(t') - f_i(t') \in W$, továbbá $f_i \in H$ és az U választása miatt $f_i(t') - f_i(t) \in W$, valamint $i \geq i_1$ miatt $f_i(t) - f(t) \in W$. Ebből következik, hogy $f(t') \in f(t) + V$, amit bizonyítani kellett. ■

5.11. A relatív kompaktság jellemzése a pontonkénti konvergencia topológiája szerint

5.11.1. Tétel. *Legyen E topologikus vektortér és F szeparált topologikus vektortér. Egy $H \subseteq \mathscr{L}(E;F)$ ekvifolytonos halmaz pontosan akkor relatív kompakt az $\mathscr{L}(E;F)$ feletti pontonkénti konvergencia topológiája szerint, ha minden $x \in E$ esetén az $\{u(x)|u \in H\}$ halmaz relatív kompakt F-ben.*

Bizonyítás. Jelölje $\overline{H}$ a H halmaz pontonkénti konvergencia topológiája szerinti lezártját $\mathscr{F}(E;F)$-ben. Az előző állítás szerint $\overline{H}$ ekvifolytonos halmaz, tehát a $\overline{H}$ halmaz elemei folytonos függvények. Az nyilvánvaló, hogy a $\overline{H}$ minden eleme lineáris operátor, ezért $\overline{H} \subseteq \mathscr{L}(E;F)$. Ebből azonnal következik, hogy $\overline{H}$ egyenlő a H halmaz lezártjával $\mathscr{L}_s(E;F)$-ben.

Tehát, ha H relatív kompakt $\mathscr{L}_s(E;F)$-ben, akkor $\overline{H}$ kompakt az $\mathscr{L}(E;F)$ feletti pontonkénti konvergencia topológiája szerint, így $\mathscr{F}_s(E;F)$-ben kompakt. Minden $x \in E$ esetén az $\widetilde{x} : \mathscr{F}(E;F) \to F;\ f \mapsto f(x)$ leképezés a pontonkénti konvergencia topológiája szerint folytonos, így $\{u(x)|u \in \overline{H}\} = \widetilde{x}\langle\overline{H}\rangle$ kompakt halmaz F-ben. Ugyanakkor $\{u(x)|u \in H\} \subseteq \{u(x)|u \in \overline{H}\}$, amiből látszik, hogy $\{u(x)|u \in H\}$ relatív kompakt F-ben.

Megfordítva, tegyük fel, hogy minden $x \in E$ esetén az $\{u(x)|u \in H\}$ halmaz relatív kompakt F-ben. Ha $x \in E$, akkor az $\widetilde{x} : \mathscr{F}(E;F) \to F;\ f \mapsto f(x)$ leképezés a pontonkénti konvergencia topológiája szerint folytonos, ezért $\{u(x)|u \in \overline{H}\} = \widetilde{x}\langle\overline{H}\rangle \subseteq \overline{\widetilde{x}\langle H\rangle} = \overline{\{u(x)|u \in H\}}$. Ebből kapjuk, hogy $\overline{H} \subseteq \prod_{x\in E} \overline{\{u(x)|u \in H\}}$, és a Tyihonov-tétel alapján itt a jobb oldalon kompakt halmaz áll az F^E topologikus szorzattérben. De $F^E = \mathscr{F}(E;F)$, és az F^E feletti szorzattopológia egyenlő az $\mathscr{F}(E;F)$ függvénytér feletti pontonkénti konvergencia topológiájával. Ezért $\overline{H}$ is kompakt az F^E topologikus szorzattérben, így kompakt az $\mathscr{L}(E;F)$ feletti pontonkénti konvergencia topológiája szerint is. ■

5.11.2. Tétel. (Alaoglu–Bourbaki-tétel) *Ha E topologikus vektortér, F véges dimenziós szeparált topologikus vektortér, és $H \subseteq \mathscr{L}(E;F)$ ekvifolytonos halmaz, akkor H relatív kompakt az $\mathscr{L}(E;F)$ feletti pontonkénti konvergencia topológiája szerint.*

Bizonyítás. Az F topologikus vektortér lokálisan kompakt; legyen V a 0-nak kompakt környezete F-ben. A H halmaz ekvifolytonos a 0-ban, így van olyan U környezete a 0-nak E-ben, hogy minden $x \in U$ és $u \in H$ esetén $u(x) \in V$. Az U halmaz elnyelő, így ha $x \in E$, akkor van olyan $\lambda \in \mathbb{K} \setminus \{0\}$, hogy $x \in \lambda.U$, tehát $\{u(x)|u \in H\} \subseteq \lambda.V$, vagyis az $\{u(x)|u \in H\}$ halmaz relatív kompakt F-ben, hiszen $\lambda.V$ kompakt. Az előző tétel alapján H relatív kompakt az $\mathscr{L}(E;F)$ feletti pontonkénti konvergencia topológiája szerint. ■

Speciálisan, ha E topologikus vektortér és $H \subseteq E'$ ekvifolytonos halmaz, akkor H relatív kompakt E'-ben a $\sigma(E', E)$ topológia szerint, mert $E' := \mathscr{L}(E; \mathbb{K})$, és az E' feletti $\sigma(E', E)$ topológia (a definíció alapján) egyenlő az $\mathscr{L}(E; \mathbb{K})$ feletti pontonkénti konvergencia topológiájával.

5.11.3. Tétel. (Banach–Alaoglu-tétel) *Legyen E topologikus vektortér.*

a) Ha U a 0-nak környezete E-ben, akkor az $\left\{ u \in E' \,\middle|\, \sup_{x \in U} |u(x)| \leq 1 \right\}$ *halmaz kompakt a $\sigma(E', E)$ topológia szerint.*

b) Ha E normált tér, akkor E'-ben a funkcionálnorma szerinti zárt egységgömb kompakt a $\sigma(E', E)$ topológia szerint.

c) Ha E szeparábilis normált tér, akkor E'-ben a funkcionálnorma szerinti zárt egységgömb metrizálható és kompakt a $\sigma(E', E)$ topológia szerint.

Bizonyítás. a) Legyen U a 0-nak környezete az E topologikus vektortérben és $H := \left\{ u \in E' \,\middle|\, \sup_{x \in U} |u(x)| \leq 1 \right\}$. A H halmaz ekvifolytonos a 0-ban, mert $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ esetén $\varepsilon.U$ a 0-nak olyan környezete E-ben, hogy minden $u \in H$ és $x \in \varepsilon.U$ esetén $|u(x)| \leq \varepsilon$. Tehát H ekvifolytonos halmaz, így az Alaoglu–Bourbaki- tétel (5.11.2.) alapján relatív kompakt E'-ben a $\sigma(E', E)$ topológia szerint. Ugyanakkor H zárt is a $\sigma(E', E)$ topológia szerint, hiszen $H = \bigcap_{x \in U} \{u \in E' | |u(x)| \leq 1\}$, és nyilvánvaló, hogy minden $E \ni x$-re az $\{u \in E' | |u(x)| \leq 1\}$ halmaz zárt a $\sigma(E', E)$ topológia szerint. Ezért a H halmaz kompakt a $\sigma(E', E)$ topológia szerint.

b) Ha E normált tér, akkor E'-ben a funkcionálnorma szerinti zárt egységgömb egyenlő az $\left\{ u \in E' \,\middle|\, \sup_{x \in U} |u(x)| \leq 1 \right\}$ halmazzal, ahol U a zárt egységgömb E-ben, így elég az a) állítást alkalmazni.

c) Legyen E szeparábilis normált tér, és jelölje B' a zárt egységgömböt E'-ben. A B' halmazt ellátjuk a $\sigma(E', E)|B'$ topológiával, tehát B' a b) alapján kompakt tér. Jelöljön D egy megszámlálható sűrű halmazt E-ben, és legyen $F := \{j_E(x)|_{B'} \mid x \in D\}$, ahol $j_E : E \to E''$ a kanonikus leképezés. Ekkor $F \subseteq \mathscr{C}(B'; \mathbb{K})$ olyan megszámlálható halmaz, amely szétválasztó B' felett, hiszen ha $u_1, u_2 \in B'$ olyanok, hogy minden $f \in F$ esetén $f(u_1) = f(u_2)$, akkor minden $D \ni x$-re $u_1(x) = j_E(x)|_{B'}(u_1) = j_E(x)|_{B'}(u_2) = u_2(x)$, tehát $D \subseteq [u_1 = u_2]$, így D sűrűsége és az egyenlőségek folytatásának elve alapján $u_1 = u_2$. Minden $F \ni f$-re $\mathrm{Im}(f) \subseteq \mathbb{K}$ kompakt halmaz, tehát a $\prod_{f \in F} \mathrm{Im}(f)$ topologikus szorzattér kompakt és metrizálható. Továbbá, a $\phi : B' \to \prod_{f \in F} \mathrm{Im}(f);\ u \mapsto (f(u))_{f \in F}$ leképezés injektív, és folytonos a szorzattopológia szerint, mert ha $f \in F$ esetén pr_f az f-hez tartozó projekció-függvény, akkor $pr_f \circ \phi = f : B' \to \mathbb{K}$ folytonos függvény. Az $\mathrm{Im}(\phi)$ topologikus altér Hausdorff-tér, és láttuk, hogy $\phi : B' \to \mathrm{Im}(\phi)$ folytonos bijekció. Tehát a B' kompaktsága miatt ϕ homeomorfizmus B' és az $\mathrm{Im}(\phi)$ topologikus altér között. Ugyanakkor az $\mathrm{Im}(\phi)$ topologikus altér metrizálható, mert a $\prod_{f \in F} \mathrm{Im}(f)$ topologikus szorzattér is metrizálható. Ezért a B' kompakt tér metrizálható. ■

A Banach–Alaoglu-tételből következik, hogy ha E végtelen dimenziós normált tér, akkor E' a $\sigma(E', E)$ topológiával ellátva olyan σ-kompakt Hausdorff-tér, amely nem lokálisan kompakt. Valóban, ha B' a zárt egységgömb E'-ben, akkor $E' = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} (n.B')$, és a Banach–Alaoglu-tétel alapján minden $\mathbb{N} \ni n$-re az $n.B'$ halmaz kompakt a $\sigma(E', E)$ topológia szerint, így E' a $\sigma(E', E)$ topológiával ellátva σ-kompakt Hausdorff-tér. Ugyanakkor ez a topologikus tér nem lehet lokálisan kompakt, különben az E' vektortér véges dimenziós lenne, így E'' is véges dimenziós volna, tehát E is véges dimenziós, hiszen a $j_E : E \to E''$ kanonikus leképezés lineáris injekció.

5.11.4. Következmény. *Ha E szeparábilis normált tér, akkor van olyan $H \subseteq E'$ megszámlálható halmaz, amely szétválasztó E felett.*

Bizonyítás. Jelölje B' a zárt egységgömböt E'-ben. A Banach–Alaoglu-tétel szerint B' metrizálható kompakt halmaz a $\sigma(E', E)$ topológia szerint, így a kompakt terek metrizálhatóságának jellemzése alapján létezik olyan $H \subseteq B'$ megszámlálható halmaz, amely a $\sigma(E', E)|B'$ topológia szerint sűrű (27.5.1.). Ha $x \in E$ és $x \neq 0$, akkor a $B' \to \mathbb{K}$; $u \mapsto u(x)$ leképezés folytonos a $\sigma(E', E)|B'$ topológia szerint, ezért az $\{u \in B' | u(x) \neq 0\}$ halmaz nyílt B'-ben a $\sigma(E', E)|B'$ topológia szerint, és nem üres, mert E' szétválasztó E felett. Ebből kapjuk, hogy $x \in E$ és $x \neq 0$ esetén van olyan $u \in H$, hogy $u(x) \neq 0$. ■

5.12. Korlátosság az $\mathfrak{S}$-topológiák szerint

5.12.1. Állítás. *Legyen T halmaz, $\mathfrak{S} \subseteq \mathscr{P}(T)$ nem üres halmaz, és F topologikus vektortér. Egy $B \subseteq \mathscr{F}^b_{\mathfrak{S}}(T; F)$ halmaz pontosan akkor korlátos az $\mathfrak{S}$-topológia szerint, ha minden $S \in \mathfrak{S}$ esetén $\bigcup_{f \in B} f\langle S \rangle$ korlátos halmaz F-ben.*

Bizonyítás. A definíció szerint az $\mathscr{F}^b_{\mathfrak{S}}(T; F)$ függvénytér feletti $\mathfrak{S}$-topológia egyenlő az $(\mathscr{F}^b_u(S; F), p_S)_{S \in \mathfrak{S}}$ rendszer által projektíven előállított topológiával, ahol minden $\mathfrak{S} \ni S$-re

$$p_S : \mathscr{F}^b_{\mathfrak{S}}(T; F) \to \mathscr{F}^b(S; F); \quad f \mapsto f|_S.$$

Ezért – a projektíven előállított lineáris topológiák szerinti korlátosság kritériuma alapján – teljesül az, hogy a $B \subseteq \mathscr{F}^b_{\mathfrak{S}}(T; F)$ halmaz pontosan akkor korlátos az $\mathfrak{S}$-topológia szerint, ha minden $S \in \mathfrak{S}$ esetén a $p_S\langle B \rangle$ halmaz korlátos az $\mathscr{F}^b_u(S; F)$ topologikus vektortérben, vagyis $\bigcup_{f \in B} f\langle S \rangle$ korlátos F-ben. ■

5.12.2. Állítás. *Ha E és F topologikus vektorterek, valamint $H \subseteq \mathscr{L}(E;F)$ ekvifolytonos halmaz, akkor H korlátos bármely olyan $\mathscr{L}(E;F)$ feletti $\mathfrak{S}$-topológia szerint, amelyre $\mathfrak{S}$ az E korlátos részhalmazainak nem üres, felfelé irányított halmaza.*

Bizonyítás. Természetesen a $H \neq \emptyset$ eset érdekes. Azt kell igazolni, hogy ha $S \subseteq E$ korlátos halmaz, akkor az $\bigcup_{u \in H} u\langle S \rangle$ halmaz korlátos F-ben. Legyen tehát $S \subseteq E$ korlátos halmaz és V a 0-nak környezete F-ben. A H operátorhalmaz ekvifolytonos, ezért a $\bigcap_{u \in H} \overset{-1}{u}\langle V \rangle$ halmaz a 0-nak környezete E-ben, tehát ez elnyeli az S halmazt. Legyen $\alpha \in \mathbb{R}^+$ olyan, hogy minden $\lambda \in \mathbb{K}$ esetén, ha $|\lambda| \geq \alpha$, akkor $S \subseteq \lambda. \bigcap_{u \in H} \overset{-1}{u}\langle V \rangle = \bigcap_{u \in H} \overset{-1}{u}\langle \lambda.V \rangle$. Ekkor $\lambda \in \mathbb{K}$ és $|\lambda| \geq \alpha$ esetén $\bigcup_{u \in H} u\langle S \rangle \subseteq \lambda.V$, vagyis V elnyeli az $\bigcup_{u \in H} u\langle S \rangle$ halmazt, tehát $\bigcup_{u \in H} u\langle S \rangle$ korlátos F-ben. ■

5.12.3. Tétel. (Banach ekvifolytonosság tétele) *Ha E hordós tér, F lokálisan konvex tér és $H \subseteq \mathscr{L}(E;F)$ pontonként korlátos operátorhalmaz, akkor H ekvifolytonos.*

Bizonyítás. Csak a $H \neq \emptyset$ esetre kell bizonyítani azt, hogy H a 0-ban ekvifolytonos. Legyen V a 0-nak környezete F-ben. Az F lokális konvexitása folytán létezik a 0-nak olyan W környezete F-ben, amely hordó és $W \subseteq V$. Ha $u \in H$, akkor $\overset{-1}{u}\langle W \rangle$ zárt, mert u folytonos, valamint konvex és kiegyensúlyozott, mert u lineáris. Ezért a $T := \bigcap_{u \in H} \overset{-1}{u}\langle W \rangle$ halmaz zárt, konvex és kiegyensúlyozott E-ben. Ha $x \in E$, akkor az $\{u(x)|u \in H\}$ halmaz F-beli korlátossága miatt van olyan $\lambda \in \mathbb{K} \setminus \{0\}$, hogy $\{u(x)|u \in H\} \subseteq \lambda.W$, vagyis $x \in \lambda.T$. Ez azt jelenti, hogy T elnyelő halmaz E-ben, tehát a hordó, így a 0-nak környezete, mert E hordós tér. Ekkor $T \subseteq \bigcap_{u \in H} \overset{-1}{u}\langle V \rangle$, tehát $\bigcap_{u \in H} \overset{-1}{u}\langle V \rangle$ a 0-nak környezete E-ben, így H ekvifolytonos operátorhalmaz. ■

A két előző állítás összeillesztésével kapjuk, hogy ha E hordós tér, F lokálisan konvex tér és $H \subseteq \mathscr{L}(E;F)$ pontonként korlátos operátorhalmaz, akkor H ekvifolytonos, így az E minden korlátos részhalmazán egyenletesen korlátos. Ezt a következményt nevezhetjük *Banach egyenletes korlátosság tételének.*

5.13. A Banach–Steinhaus-tétel

5.13.1. Tétel. (Második Ascoli-tétel) *Legyen T topologikus tér és F topologikus vektortér. Ha $H \subseteq \mathscr{F}(T;F)$ ekvifolytonos halmaz, akkor a $\mathscr{C}(T;F)$ feletti pontonkénti konvergencia topológiájának és a $\mathscr{C}(T;F)$ feletti kompakt konvergencia topológiájának H-ra vett leszűkítései egyenlők.*

Bizonyítás. Elég azt igazolni, hogy ha $f \in H$, $K \subseteq T$ kompakt halmaz és V a 0-nak környezete F-ben, akkor létezik olyan $K' \subseteq T$ *véges* halmaz és a 0-nak olyan V' környezete

F-ben, hogy $(f + \mathbf{W}(K', V')) \cap H \subseteq (f + \mathbf{W}(K, V)) \cap H$.
A V-hez vegyük a 0-nak olyan V' szimmetrikus környezetét, amelyre $V' + V' + V' \subseteq V$. A H halmaz ekvifolytonosságát alkalmazva kiválasztható olyan $(U(t'))_{t' \in K}$ rendszer, hogy minden $K \ni t'$-re $U(t')$ a t'-nek nyílt környezete és minden $t \in U(t')$ pontra és $g \in H$ függvényre $g(t) - g(t') \in V'$. Ekkor $K \subseteq \bigcup_{t' \in K} U(t')$, tehát a K kompaktsága folytán létezik olyan $K' \subseteq K$ véges halmaz, amelyre $K \subseteq \bigcup_{t' \in K'} U(t')$. Megmutatjuk, hogy az így kiválasztott (K', V') pár rendelkezik a megkövetelt tulajdonsággal, vagyis $(f + \mathbf{W}(K', V')) \cap H \subseteq (f + \mathbf{W}(K, V)) \cap H$.
Legyen ugyanis $f' \in (f + \mathbf{W}(K', V')) \cap H$ tetszőleges, vagyis $f' \in H$ és minden $t' \in K'$ esetén $f'(t') - f(t') \in V'$. Legyen $t \in K$ rögzített. Vehetünk olyan $t' \in K'$ pontot, hogy $t \in U(t')$. Ekkor az $U(t')$ értelmezése és $f, f' \in H$ alapján $f(t) - f(t') \in V'$ és $f'(t) - f'(t') \in V'$. Ugyanakkor $f'(t') - f(t') \in V'$ is igaz, mert $t' \in K'$ és $f' - f \in \mathbf{W}(K', V')$. Ebből következik, hogy

$$f'(t) - f(t) = (f'(t) - f'(t')) + (f'(t') - f(t')) + (f(t') - f(t)) \in$$

$$\in V' + V' + (-V') = V' + V' + V' \subseteq V,$$

vagyis $f' \in (f + \mathbf{W}(K, V)) \cap H$. ■

5.13.2. Tétel. (Banach–Steinhaus-tétel) *Legyen E hordós tér, F szeparált lokálisan konvex tér, és $(u_i)_{i \in I}$ olyan általánosított sorozat $\mathscr{L}(E; F)$-ben, amely pontonként konvergens. Legyen $u := \lim_{i,\ I} u_i$ és tegyük fel, hogy létezik olyan $i_0 \in I$, amelyre az $\{u_i | (i \in I) \wedge (i \geq i_0)\}$ halmaz pontonként korlátos. Ekkor $u \in \mathscr{L}(E; F)$ és az $(u_i)_{i \in I}$ általánosított operátorsorozat az E minden kompakt részhalmazán egyenletesen konvergens.*

Bizonyítás. Legyen $I_0 := \{i \in I | i \geq i_0\}$ és $H := \{u_i | i \in I_0\}$. A hipotézis szerint $H \subseteq \mathscr{L}(E; F)$ pontonként korlátos operátorhalmaz, így Banach ekvifolytonosság tétele (5.12.3.) alapján ekvifolytonos. Tehát, ha $\overline{H}$ jelöli a H függvényhalmaz pontonkénti konvergencia topológiája szerinti lezártját, akkor $u \in \overline{H} \subseteq \mathscr{L}(E; F)$, vagyis $u \in \mathscr{L}(E; F)$, továbbá $\overline{H}$ is ekvifolytonos operátorhalmaz. A második Ascoli-tétel alapján $\overline{H}$ felett a pontonkénti konvergencia topológiája megegyezik az E kompakt részhalmazain való egyenletes konvergencia topológiájával. Az $(u_i)_{i \in I_0}$ általánosított operátorsorozat az előbbi szerint konvergál u-hoz. Ezért $(u_i)_{i \in I_0}$, és vele együtt az $(u_i)_{i \in I}$ általánosított operátorsorozat is konvergál u-hoz az E minden kompakt részhalmazán egyenletesen. ■

5.13.3. Következmény. *Legyen E hordós tér, F szeparált lokálisan konvex tér, és $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ olyan sorozat $\mathscr{L}(E; F)$-ben, amely pontonként konvergens. Ekkor $\lim_{n \to \infty} u_n \in \mathscr{L}(E; F)$ és az $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ operátorsorozat az E minden kompakt részhalmazán egyenletesen konvergens.*

Bizonyítás. Ha $x \in E$, akkor $(u_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ konvergens sorozat F-ben, így az $\{u_n(x)|n \in \mathbb{N}\}$ halmaz az 5.1. 8) megjegyzés alapján korlátos F-ben, vagyis az $\{u_n|n \in \mathbb{N}\}$ operátorhalmaz pontonként korlátos. Ezért az $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ operátorsorozatra alkalmazható a Banach–Steinhaus-tétel. ■

6. fejezet

Dualitás vektorterek között

6.1. Duális párok és poláris halmazok

6.1.1. Definíció. *Ha E és F vektorterek $\mathbb{K}$ felett, akkor egy*

$$\langle\cdot,\cdot\rangle : E \times F \to \mathbb{K}; \quad (x, y) \mapsto \langle x, y\rangle$$

leképezést E és F közötti **dualitásnak** *nevezünk, ha $\langle\cdot,\cdot\rangle$ olyan $\mathbb{K}$-bilineáris függvény, amelyre teljesülnek a következő tulajdonságok.*

($\mathrm{D_I}$) *Minden $x \in E \setminus \{0\}$ esetén van olyan $y \in F$, hogy $\langle x, y\rangle \neq 0$.*

($\mathrm{D_{II}}$) *Minden $y \in F \setminus \{0\}$ esetén van olyan $x \in E$, hogy $\langle x, y\rangle \neq 0$.*

Azt mondjuk, hogy (E, F) **duális pár***, ha E és F vektorterek $\mathbb{K}$ felett, és adott egy E és F közötti dualitás (amit a $\langle\cdot,\cdot\rangle$ szimbólummal jelölünk, ha ez nem vezet félreértésre).*

Világos, hogy ha E és F vektorterek $\mathbb{K}$ felett, valamint $\langle\cdot,\cdot\rangle : E \times F \to \mathbb{K}$ egy $\mathbb{K}$-bilineáris leképezés, akkor a ($\mathrm{D_I}$) feltétel azzal ekvivalens, hogy az

$$E \to F^*, \quad x \mapsto (y \mapsto \langle x, y\rangle)$$

lineáris operátor injektív, továbbá a ($\mathrm{D_{II}}$) feltétel azzal ekvivalens, hogy az

$$F \to E^*, \quad y \mapsto (x \mapsto \langle x, y\rangle)$$

lineáris operátor injektív. Tehát, ha (E, F) duális pár, akkor az első lineáris operátor által az E vektortér algebrailag azonosul az F^* duális tér egy lineáris alterével, és a második lineáris operátor által az F vektortér algebrailag azonosul az E^* duális tér egy lineáris alterével. Ezért ha (E, F) duális pár, akkor formálisan azt írjuk, hogy $E \subseteq F^*$ és $F \subseteq E^*$, amit úgy kell érteni, hogy az E és F közötti adott dualitás által E azonosul az F^*, valamint F azonosul az E^* egy lineáris alterével.

Példák (duális párokra).

1) Legyen E vektortér $\mathbb{K}$ felett és $F \subseteq E^*$ olyan lineáris altér, amely szétválasztó E felett, vagyis minden $x_1, x_2 \in E$ esetén, ha $x_1 \neq x_2$, akkor van olyan $u \in F$, hogy $u(x_1) \neq u(x_2)$. Ekkor az

$$E \times F \to \mathbb{K}; \quad (x, u) \mapsto u(x)$$

leképezés nyilvánvalóan dualitás E és F között, mert ez nyilvánvalóan $\mathbb{K}$-bilineáris, és $(\mathrm{D_I})$ pontosan azért igaz, mert F szétválasztó E felett, míg $(\mathrm{D_{II}})$ triviálisan teljesül. Ezt az E és F közötti dualitást *kanonikus dualitásnak* nevezzük, és ilyen szituációban az (E, F) párt duális párnak tekintjük, amelynek dualitása a kanonikus dualitás, hacsak más dualitást nem értelmezünk E és F között.

Speciálisan:

– ha E vektortér, akkor (E, E^*) duális pár a kanonikus dualitással, mivel E^* szétválasztó E felett (4.1.2.);

– ha E szeparált lokálisan konvex tér, akkor (E, E') duális pár a kanonikus dualitással, mert a Hahn–Banach-tétel szerint $E' \subseteq E^*$ szétválasztó E felett (4.2.4.).

2) Legyen $(E_i)_{i \in I}$ vektortér-rendszer. Ekkor a

$$\left(\prod_{i \in I} E_i\right) \times \bigoplus_{i \in I} E_i^* \to \mathbb{K}; \quad ((x_i)_{i \in I}, (u_i)_{i \in I}) \mapsto \langle (x_i)_{i \in I}, (u_i)_{i \in I} \rangle := \sum_{i \in I} u_i(x_i)$$

leképezés dualitás a $\prod\limits_{i \in I} E_i$ és $\bigoplus\limits_{i \in I} E_i^*$ vektorterek között.

Speciálisan, ha T halmaz és F vektortér $\mathbb{K}$ felett, akkor az

$$F^T \times (F^*)^{(T)} \to \mathbb{K}; \quad (f, \alpha) \mapsto \langle f, \alpha \rangle := \sum_{t \in T} \alpha(t)(f(t))$$

leképezés dualitás az F^T és $(F^*)^{(T)}$ függvényterek között.

3) Legyenek E és F vektorterek $\mathbb{K}$ felett, és jelölje $\mathbf{L}(E; F)$ az $E \to F$ lineáris operátorok vektorterét. Tekintsük az

$$F^* \times E \to (\mathbf{L}(E; F))^*; \quad (f, x) \mapsto (u \mapsto f(u(x)))$$

leképezést. Ez nyilvánvalóan $\mathbb{K}$-bilineáris, így a tenzorszorzat értelmezése alapján egyértelműen létezik olyan

$$\tau : F^* \otimes E \to (\mathbf{L}(E; F))^*$$

lineáris operátor, amelyre minden $(f, x) \in F^* \times E$ esetén teljesül az, hogy minden $\mathbf{L}(E; F) \ni u$-ra $\tau(f \otimes x)(u) = f(u(x))$. Ekkor az

$$\mathbf{L}(E, F) \times (F^* \otimes E) \to \mathbb{K}; \quad (u, t) \mapsto \tau(t)(u)$$

leképezés dualitás az $\mathbf{L}(E;F)$ operátortér és az $F^* \otimes E$ tenzorszorzat között.

4) Ha (E,F) duális pár, akkor az

$$F \times E \to \mathbb{K}; \quad (y,x) \mapsto \langle x,y \rangle$$

leképezés dualitás F és E között, tehát az (F,E) pár szintén duális pár ezzel a dualitással ellátva. Ez a definíciók alapján nyilvánvaló.

5) Ha E prehilbert-tér és $E_{\mathbb{R}}$ jelöli az E alatt fekvő valós vektorteret, akkor az

$$E_{\mathbb{R}} \times E_{\mathbb{R}} \to \mathbb{R}; \quad (x,y) \mapsto \langle x,y \rangle := \Re((x|y))$$

leképezés dualitás az $E_{\mathbb{R}}$ és $E_{\mathbb{R}}$ valós vektorterek között, ahol $(\cdot|\cdot)$ jelöli az E feletti skalárszorzást. A skalárszorzás pozitív definitivitása miatt ez nyilvánvaló, hiszen $x \in E \setminus \{0\}$ esetén $\langle x,x \rangle := (x|x) = \|x\|^2 > 0$.

Most bevezetünk egy olyan halmaz-konstrukciót, amelyet duális terekkel kapcsolatban lehet értelmezni, és amelynek különös jelentősége van a dualitás-elméletben.

6.1.2. Definíció. *Legyen (E,F) duális pár.*

– Az $A \subseteq E$ és $B \subseteq F$ halmaz (adott dualitás szerinti) **polárisának** *nevezzük az*

$$A^\circ := \{y \in F \mid (\forall x \in A) : \Re(\langle x,y \rangle) \leq 1\},$$

$$B^\circ := \{x \in E \mid (\forall y \in B) : \Re(\langle x,y \rangle) \leq 1\}$$

halmazt.

– Az $A \subseteq E$ és $B \subseteq F$ halmaz (adott dualitás szerinti) **bipolárisának** *nevezzük az*

$$A^{\circ\circ} := (A^\circ)^\circ,$$

$$B^{\circ\circ} := (B^\circ)^\circ$$

halmazt.

Megjegyzések. Legyen (E,F) duális pár.

1) Ha $A \subseteq B \subseteq E$, akkor a definíció alapján nyilvánvalóan $B^\circ \subseteq A^\circ$; ennek egyszerűen logikai oka van.

2) Világos, hogy $A \subseteq E$ esetén $0 \in A^\circ$.

3) A definíció szerint nyilvánvaló, hogy $A \subseteq A^{\circ\circ}$, ezért az 1) alapján

$$(A^\circ)^{\circ\circ} := ((A^\circ)^\circ)^\circ =: (A^{\circ\circ})^\circ \subseteq A^\circ \subseteq (A^\circ)^{\circ\circ},$$

vagyis fennáll az

$$A^\circ = (A^\circ)^{\circ\circ} = (A^{\circ\circ})^\circ$$

egyenlőség.

4) Ha $(A_i)_{i\in I}$ az E részhalmazainak nem üres rendszere, akkor

$$\left(\bigcup_{i\in I} A_i\right)^\circ = \bigcap_{i\in I} A_i^\circ.$$

Valóban, ha $j \in I$, akkor $A_j \subseteq \bigcup_{i\in I} A_i$ és az 1) alapján $\left(\bigcup_{i\in I} A_i\right)^\circ \subseteq A_j^\circ$, következésképpen $\left(\bigcup_{i\in I} A_i\right)^\circ \subseteq \bigcap_{i\in I} A_i^\circ$. Megfordítva, ha $y \in \bigcap_{i\in I} A_i^\circ$, akkor minden $i \in I$ és minden $x \in A_i$ esetén $\Re(\langle x, y\rangle) \leq 1$, tehát minden $x \in \bigcup_{i\in I} A_i$ esetén $\Re(\langle x, y\rangle) \leq 1$, vagyis $y \in \left(\bigcup_{i\in I} A_i\right)^\circ$.

5) Ha $A \subseteq E$ és $\lambda \in \mathbb{K} \setminus \{0\}$, akkor

$$(\lambda.A)^\circ = \lambda^{-1}.A^\circ.$$

Valóban, $y \in F$ esetén $y \in (\lambda.A)^\circ$ pontosan akkor teljesül, ha minden $x \in \lambda.A$ vektorra $\Re(\langle x, y\rangle) \leq 1$, vagyis ha minden $A \ni x'$-re $\Re(\langle \lambda.x', y\rangle) \leq 1$, azaz minden $A \ni x'$-re $\Re(\langle x', \lambda.y\rangle) \leq 1$, ami éppen azt jelenti, hogy $\lambda.y \in A^\circ$, azaz $y \in \lambda^{-1}.A^\circ$.

6) Ha $A \subseteq E$ kiegyensúlyozott halmaz, akkor A° is kiegyensúlyozott az F vektortérben, mert $\lambda \in \mathbb{K}$, $0 < |\lambda| \leq 1$ és $y \in A^\circ$ esetén az 5) alapján $\lambda.y \in \lambda.A^\circ = (\lambda^{-1}.A)^\circ \subseteq A^\circ$, hiszen $\lambda.A \subseteq A$, vagyis $A \subseteq \lambda^{-1}.A$ teljesül az A kiegyensúlyozottsága folytán, ezért elég az 1) megjegyzést alkalmazni.

7) Ha $A \subseteq E$ és $B \subseteq F$ nem üres halmazok, akkor írható, hogy

$$A^\circ = \left\{ y \in F \,\middle|\, \sup_{x\in A} \Re(\langle x, y\rangle) \leq 1 \right\},$$

$$B^\circ = \left\{ x \in E \,\middle|\, \sup_{y\in B} \Re(\langle x, y\rangle) \leq 1 \right\}.$$

Megmutatjuk, hogy ha $A \subseteq E$ nem üres kiegyensúlyozott halmaz, akkor

$$A^\circ = \left\{ y \in F \,\middle|\, \sup_{x\in A} |\langle x, y\rangle| \leq 1 \right\}.$$

Jelölje C a jobb oldalon álló halmazt. A poláris definíciója szerint világos, hogy $C \subseteq A^\circ$, mert ha $y \in C$, akkor minden $x \in A$ esetén $\Re(\langle x, y\rangle) \leq |\langle x, y\rangle| \leq 1$, így $y \in A^\circ$.

Ha $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, akkor $y \in A^\circ$ esetén minden $A \ni x$-re $-x \in A$, hiszen A kiegyensúlyozott (és még inkább szimmetrikus), ezért $\langle -x, y\rangle \leq 1$, vagyis $-1 \leq \langle x, y\rangle \leq 1$, ami azt jelenti, hogy $|\langle x, y\rangle| \leq 1$. Tehát ekkor $A^\circ \subseteq C$ is teljesül.

Legyen $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ és $y \in A^\circ$. Az A halmaz kiegyensúlyozott, tehát minden $\lambda \in \mathbb{C}$, $|\lambda| \leq 1$ számra és minden $A \ni x$-re $\lambda.x \in A$, így $\Re(\lambda\langle x, y\rangle) = \Re(\langle \lambda.x, y\rangle) \leq 1$. Ugyanakkor, $x \in A$ esetén az $\langle x, y\rangle \in \mathbb{C}$ számhoz nyilvánvalóan létezik olyan $\lambda \in \mathbb{C}$, hogy $|\lambda| \leq 1$ és $|\langle x, y\rangle| = \lambda\langle x, y\rangle$, így az iménti egyenlőtlenség alapján $|\langle x, y\rangle| = \Re(\lambda\langle x, y\rangle) \leq 1$. Ez azt jelenti, hogy $A^\circ \subseteq C$ is teljesül.

Természetesen hasonlóan igazolható, hogy ha $B \subseteq F$ nem üres kiegyensúlyozott halmaz, akkor

$$B^\circ = \left\{ x \in E \;\middle|\; \sup_{y \in B} |\langle x, y\rangle| \leq 1 \right\}.$$

6.2. Gyenge topológia és a poláris halmazok jellemzése

6.2.1. Definíció. *Ha (E, F) duális pár, akkor az E (illetve F) feletti, adott dualitás szerinti* **gyenge topológiának** *nevezzük és a $\sigma(E, F)$ (illetve $\sigma(F, E)$) szimbólummal jelöljük azt a legkisebb E (illetve F) feletti topológiát, amely szerint minden $F \ni y$-ra (illetve minden $E \ni x$-re) az $\langle \cdot, y\rangle : E \to \mathbb{K}$ (illetve $\langle x, \cdot\rangle : F \to \mathbb{K}$) lineáris funkcionál folytonos.*

A $(\mathrm{D_I})$ és $(\mathrm{D_{II}})$ feltételek miatt a dualitás szerinti gyenge topológiák *szeparált lokálisan konvex topológiák.*

6.2.2. Állítás. (A poláris és bipoláris halmazok jellemzése). *Legyen (E, F) duális pár.*

a) *Minden $A \subseteq E$ halmazra A° konvex és $\sigma(F, E)$-zárt F-ben. Minden $B \subseteq F$ halmazra B° konvex és $\sigma(E, F)$-zárt E-ben.*

b) *Minden $A \subseteq E$ halmazra fennáll az $A^{\circ\circ} = \overline{\mathrm{co}}(A \cup \{0\})$ egyenlőség, ahol a lezárást az E feletti $\sigma(E, F)$ topológia szerint kell venni.*

c) *Ha $A \subseteq E$ olyan, hogy $0 \in A$, akkor az $A = A^{\circ\circ}$ egyenlőség pontosan akkor teljesül, ha A konvex és $\sigma(E, F)$-zárt.*

d) *Ha $A \subseteq E$, akkor pontosan akkor létezik olyan $B \subseteq F$ halmaz, hogy $A = B^\circ$, ha A olyan $\sigma(E, F)$-zárt konvex halmaz E-ben, amelyre $0 \in A$.*

Bizonyítás. a) Ha $A \subseteq E$ nem üres halmaz, akkor a definíció szerint

$$A^\circ = \bigcap_{x \in A} [\Re \circ \langle x, \cdot\rangle \leq 1],$$

és ha $x \in E$, akkor a $\sigma(F, E)$ topológia definíciója szerint a $\Re \circ \langle x, \cdot\rangle : F \to \mathbb{R}$ leképezés $\sigma(F, E)$-folytonos $\mathbb{R}$-lineáris funkcionál, így a $[\Re \circ \langle x, \cdot\rangle \leq 1]$ halmaz $\sigma(F, E)$-zárt és konvex. Mivel pedig $\sigma(F, E)$-zárt és konvex halmazok tetszőleges nem üres rendszerének a metszete szintén $\sigma(F, E)$-zárt és konvex; így A° konvex és $\sigma(F, E)$-zárt F-ben.

b) Lássuk el az E vektorteret a $\sigma(E,F)$ topológiával, s az így nyert szeparált lokálisan konvex teret jelölje E_σ. Legyen $A \subseteq E$ tetszőleges. Az a) alapján $A^{\circ\circ}$ konvex és $\sigma(E,F)$-zárt halmaz E-ben, továbbá $A \subseteq A^{\circ\circ}$ és $0 \in A^{\circ\circ}$, amiből következik, hogy $\overline{\mathrm{co}}(A \cup \{0\}) \subseteq A^{\circ\circ}$, ahol a lezárást a $\sigma(E,F)$ topológia szerint kell venni. Tegyük fel, hogy $x \in E \setminus \overline{\mathrm{co}}(A \cup \{0\})$. A lokálisan konvex terekre vonatkozó Hahn–Banach szétválasztási-tételt alkalmazva az E_σ lokálisan konvex térre, az $\{x\}$ kompakt konvex halmazra és a $\overline{\mathrm{co}}(A \cup \{0\})$ zárt konvex halmazra kapjuk olyan $u \in (E_\sigma)'$ és $c \in \mathbb{R}$ létezését, hogy $u_\mathbb{R}(x) < c$ és $\overline{\mathrm{co}}(A \cup \{0\}) \subseteq [u_\mathbb{R} > c]$. Ekkor $0 \in \overline{\mathrm{co}}(A \cup \{0\})$ miatt $c < 0$, következésképpen $v := c^{-1}.u \in (E_\sigma)'$ olyan, hogy $\overline{\mathrm{co}}(A \cup \{0\}) \subseteq [v_\mathbb{R} < 1] \subseteq [v_\mathbb{R} \leq 1]$ és $v_\mathbb{R}(x) > 1$. Tudjuk, hogy $(E_\sigma)' = \{\langle \cdot, y\rangle | y \in F\}$, tehát van olyan $y \in F$, hogy $v = \langle \cdot, y\rangle$. Ekkor $A \subseteq \overline{\mathrm{co}}(A \cup \{0\}) \subseteq [\Re \circ \langle \cdot, y\rangle \leq 1]$, következésképpen $y \in A^\circ$, ugyanakkor $\Re(\langle x, y\rangle) = v_\mathbb{R}(x) > 1$, azaz $x \notin A^{\circ\circ}$. Ez azt jelenti, hogy $A^{\circ\circ} \subseteq \overline{\mathrm{co}}(A \cup \{0\})$.

c) Ha $A \subseteq E$ olyan, hogy $0 \in A$, akkor a b) szerint $A = A^{\circ\circ}$ ekvivalens azzal, hogy $A = \overline{\mathrm{co}}(A)$, vagyis A konvex és $\sigma(E,F)$-zárt.

d) Ha A olyan konvex és $\sigma(E,F)$-zárt részhalmaza E-nek, hogy $0 \in A$, akkor a c) szerint $A = A^{\circ\circ}$, tehát a $B := A^\circ$ választás megfelel. Ugyanakkor az a) alapján a poláris halmazok gyengén zártak, konvexek és a 0-t tartalmazzák. ■

6.2.3. Következmény. *Ha (E,F) duális pár és $(A_i)_{i\in I}$ az E konvex, $\sigma(E,F)$-zárt, 0-t tartalmazó részhalmazainak tetszőleges nem üres rendszere, akkor*

$$\left(\bigcap_{i\in I} A_i\right)^\circ = \overline{\mathrm{co}}\left(\bigcup_{i\in I} A_i^\circ\right),$$

ahol a lezárást az F feletti $\sigma(F,E)$ topológia szerint kell venni.

Bizonyítás. Az előző állítás c) része szerint minden $i \in I$ esetén $A_i = A_i^{\circ\circ}$, így a 6.1. 4) megjegyzés alapján

$$\bigcap_{i\in I} A_i = \bigcap_{i\in I} A_i^{\circ\circ} = \left(\bigcup_{i\in I} A_i^\circ\right)^\circ.$$

Tehát az előző állítás b) része és a $0 \in \bigcup\limits_{i\in I} A_i^\circ$ tulajdonság alapján

$$\left(\bigcap_{i\in I} A_i\right)^\circ = \left(\bigcup_{i\in I} A_i^\circ\right)^{\circ\circ} = \overline{\mathrm{co}}\left(\bigcup_{i\in I} A_i^\circ\right)$$

adódik, ahol a lezárást a $\sigma(F,E)$ topológia szerint kell venni. ■

6.3. Ekvifolytonos halmazok poláris jellemzése és gyenge topológia leszűkítései

6.3.1. Állítás. (Ekvifolytonos halmazok poláris jellemzése) *Legyen E szeparált lokálisan konvex tér és $H \subseteq E'$. A következő állítások ekvivalensek.*

(i) *A H halmaz ekvifolytonos E'-ben.*

(ii) *A H° poláris halmaz a 0-nak környezete E-ben.*

(iii) *Létezik a 0-nak olyan V környezete E-ben, hogy $H \subseteq V^\circ$.*

Bizonyítás. Természetesen elég a $H \neq \emptyset$ esetre bizonyítani.

(i)⇒(ii) Világos, hogy

$$\{x \in E | (\forall u \in H) : |u(x)| \leq 1\} = \bigcap_{u \in H} \overset{-1}{u} \langle \overline{B}_1(0; \mathbb{K}) \rangle,$$

tehát, ha H ekvifolytonos halmaz, akkor az $\{x \in E | (\forall u \in H) : |u(x)| \leq 1\}$ halmaz a 0-nak környezete E-ben, és nyilvánvaló, hogy ez a halmaz része a H° polárisnak, így H° is a 0-nak környezete E-ben.

(ii)⇒(iii) Nyilvánvaló, mert $H \subseteq H^{\circ\circ}$.

(iii)⇒(i) Legyen V a 0-nak olyan V környezete E-ben, hogy $H \subseteq V^\circ$, és vegyük a 0-nak olyan U kiegyensúlyozott környezetét E-ben, amelyre $U \subseteq V$. Ekkor $H \subseteq U^\circ$, és minden $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ esetén $\varepsilon.U$ a 0-nak olyan környezete E-ben, amelyre

$$\varepsilon.U \subseteq \bigcap_{u \in H} \overset{-1}{u} \langle \overline{B}_\varepsilon(0; \mathbb{K}) \rangle,$$

ami azt jelenti, hogy H ekvifolytonos halmaz. ■

6.3.2. Állítás. (A gyenge topológia leszűkítései). *Legyen (E, F) duális pár és $M \subseteq E$ lineáris altér.*

a) *Az M° halmaz lineáris altere F-nek, és fennáll az*

$$M^\circ = \{y \in F \mid (\forall x \in M) : \langle x, y \rangle = 0\}$$

egyenlőség.

b) *Létezik egyetlen olyan*

$$\langle \cdot, \cdot \rangle_M : M \times (F/M^\circ) \to \mathbb{K}$$

bilineáris funkcionál, amelyre teljesül az, hogy minden $(x, y) \in M \times F$ esetén

$$\langle x, \pi_{F/M^\circ}(y) \rangle_M = \langle x, y \rangle.$$

A $\langle\cdot,\cdot\rangle_M$ leképezés dualitás az M lineáris altér és az F/M° lineáris faktortér között.

c) *Fennáll a*

$$\sigma(E,F)|M = \sigma(M, F/M^\circ)$$

egyenlőség, ahol a $\sigma(M, F/M^\circ)$ gyenge topológiát a b) pontban bevezetett $\langle\cdot,\cdot\rangle_M$ bilineáris leképezés által létesített dualitás szerint kell érteni.

Bizonyítás. a) Ha $y \in M^\circ$, akkor minden $r \in \mathbb{R}^+$ és $x \in M$ esetén $r.x \in M$, ezért $r\Re(\langle x,y\rangle) = \Re(\langle r.x,y\rangle) \leq 1$, vagyis $\Re(\langle x,y\rangle) \leq 1/r$. Ebből következik, hogy minden $y \in M^\circ$ és $x \in M$ esetén $\Re(\langle x,y\rangle) \leq 0$. Ha $y \in M^\circ$ és $x \in M$, akkor $-x \in M$, így $-\Re(\langle x,y\rangle) = \Re(\langle -x,y\rangle) \leq 0$, vagyis $\Re(\langle x,y\rangle) \geq 0$. Ebből következik, hogy $y \in M^\circ$ és $x \in M$ esetén $\Re(\langle x,y\rangle) = 0$.

Ha $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, akkor ebből azonnal kapjuk, hogy $M^\circ \subseteq \{y \in F | (\forall x \in M) : \langle x,y\rangle = 0\}$, és persze $\{y \in F | (\forall x \in M) : \langle x,y\rangle = 0\} \subseteq M^\circ$ nyilvánvalóan teljesül.

Ha $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, akkor $y \in M^\circ$ és $x \in M$ esetén $i.x \in M$, tehát $-\Im(\langle x,y\rangle) = \Re(i\langle x,y\rangle) = \Re(\langle i.x,y\rangle) = 0$, így $\Im(\langle x,y\rangle) = 0$ is, vagyis $\langle x,y\rangle = 0$. Ebből kapjuk, hogy $M^\circ \subseteq \{y \in F | (\forall x \in M) : \langle x,y\rangle = 0\}$, és persze $\{y \in F | (\forall x \in M) : \langle x,y\rangle = 0\} \subseteq M^\circ$ nyilvánvalóan teljesül.

Ezzel megmutattuk, hogy $M^\circ = \{y \in F | (\forall x \in M) : \langle x,y\rangle = 0\}$, és világos, hogy itt a jobb oldalon a $\bigcap\limits_{x\in M} \mathrm{Ker}(\langle x,\cdot\rangle)$ lineáris altér áll, tehát M° lineáris altere F-nek.

b) Legyen $x \in M$ és $y_1, y_2 \in F$ olyanok, hogy $\pi_{F/M^\circ}(y_1) = \pi_{F/M^\circ}(y_2)$, vagyis $y_1 - y_2 \in M^\circ$. Ekkor az a) alapján $\langle x, y_1 - y_2\rangle = 0$, vagyis $\langle x,y_1\rangle = \langle x,y_2\rangle$. Ezért rögzített $x \in M$ esetén egyértelműen létezik olyan $w_x : F/M^\circ \to \mathbb{K}$ függvény, amelyre $w_x \circ \pi_{F/M^\circ} = \langle x,\cdot\rangle$. Ekkor az

$$\langle\cdot,\cdot\rangle_M : M \times (F/M^\circ) \to \mathbb{K}; \quad (x,\zeta) \mapsto w_x(\zeta)$$

leképezés az egyetlen olyan függvény, amelyre minden $(x,y) \in M \times F$ esetén

$$\langle x, \pi_{F/M^\circ}(y)\rangle_M = \langle x,y\rangle.$$

Ebből könnyen látható, hogy $\langle\cdot,\cdot\rangle_M$ bilineáris funkcionál, hiszen a $\pi_{F/M^\circ} : F \to F/M^\circ$ kanonikus leképezés lineáris és $\langle\cdot,\cdot\rangle : E \times F \to \mathbb{K}$ bilineáris.

Ha $x \in M$ és $x \neq 0$, akkor a $\langle\cdot,\cdot\rangle$ bilineáris funkcionálra vonatkozó ($\mathrm{D_I}$) feltétel alapján van olyan $y \in F$, hogy $\langle x,y\rangle \neq 0$; ekkor az $\langle\cdot,\cdot\rangle_M$ bilineáris funkcionál értelmezése alapján a $\zeta := \pi_{F/M^\circ}(y) \in F/M^\circ$ vektorra $\langle x,\zeta\rangle_M = \langle x, \pi_{F/M^\circ}(y)\rangle_M = \langle x,y\rangle \neq 0$. Ezért a $\langle\cdot,\cdot\rangle_M$ bilineáris leképezésre ($\mathrm{D_I}$) teljesül.

Ha $\zeta \in F/M^\circ$ és $\zeta \neq 0$, akkor van olyan $y \in F$, hogy $\zeta = \pi_{F/M^\circ}(y)$ és $y \notin M^\circ$, vagyis az a) szerint van olyan $x \in M$, hogy $\langle x,y\rangle \neq 0$, így $\langle x,\zeta\rangle_M = \langle x, \pi_{F/M^\circ}(y)\rangle_M = \langle x,y\rangle \neq 0$. Ezért a $\langle\cdot,\cdot\rangle_M$ bilineáris leképezésre ($\mathrm{D_{II}}$) teljesül.

Tehát a $\langle\cdot,\cdot\rangle_M$ leképezés dualitás az M lineáris altér és az F/M° lineáris faktortér között.

c) Azt kell igazolni, hogy a $\sigma(E,F)|M$ topológia a legkisebb mindazon M feletti topológiák között, amely szerint minden $F/M^\circ \ni \zeta$-ra az $\langle\cdot,\zeta\rangle_M : M \to \mathbb{K}$ leképezés folytonos. Minden $F \ni y$-ra a $\langle\cdot,\pi_{F/M^\circ}(y)\rangle_M = \langle\cdot,y\rangle|_M$, és a $\pi_{F/M^\circ} : F \to F/M^\circ$ függvény szürjektív, ezért azt kell megmutatni, hogy a $\sigma(E,F)|M$ topológia a legkisebb mindazon M feletti topológiák között, amely szerint minden $F \ni y$-ra a $\langle\cdot,y\rangle|_M : M \to \mathbb{K}$ függvény folytonos.

Ha $y \in F$, akkor a $\langle\cdot,y\rangle : E \to \mathbb{K}$ függvény folytonos a $\sigma(E,F)$ topológia szerint, ezért a $\langle\cdot,y\rangle|_M : M \to \mathbb{K}$ leszűkített függvény folytonos a $\sigma(E,F)|M$ altértopológia szerint. Tehát $\sigma(E,F)|M$ *olyan* topológia M felett, hogy minden $y \in F$ esetén a $\langle\cdot,y\rangle|_M : M \to \mathbb{K}$ függvény folytonos.

Legyen $\mathscr{T}$ tetszőleges olyan topológia M felett, amely szerint minden $F \ni y$-ra a $\langle\cdot,y\rangle|_M : M \to \mathbb{K}$ függvény folytonos; azt kell igazolni, hogy $\sigma(E,F)|M \subseteq \mathscr{T}$. Ez a tartalmazás azzal ekvivalens, hogy az $id_M : M \to M$ függvény folytonos a $\mathscr{T}$ és $\sigma(E,F)|M$ topológiák szerint, vagy ami ugyanaz: az $\mathrm{in}_{M,E} : M \to E$ kanonikus beágyazás folytonos a $\mathscr{T}$ és $\sigma(E,F)$ topológiák szerint. A projektíven előállított topológiák szerint folytonos függvények jellemzési tétele és a $\sigma(E,F)$ topológia definíciója alapján az $\mathrm{in}_{M,E}$ függvény pontosan akkor folytonos a $\mathscr{T}$ és $\sigma(E,F)$ topológiák szerint, ha minden $y \in F$ esetén a $\langle\cdot,y\rangle \circ \mathrm{in}_{M,E} : M \to \mathbb{K}$ leképezés folytonos a $\mathscr{T}$ és a $\mathbb{K}$ feletti euklidészi topológia szerint. Azonban minden $F \ni y$-ra $\langle\cdot,y\rangle \circ \mathrm{in}_{M,E} = \langle\cdot,y\rangle|_M$, és a $\mathscr{T}$-re vonatkozó hipotézis alapján ez a függvény folytonos a $\mathscr{T}$ és a $\mathbb{K}$ feletti euklidészi topológia szerint. ■

6.3.3. Következmény. *Legyen (E,F) duális pár és $M \subseteq E$ olyan lineáris altér, amelyre teljesül az, hogy minden $y \in F \setminus \{0\}$ esetén van olyan $x \in M$, hogy $\langle x,y\rangle \neq 0$. Ekkor az (M,F) pár az $E \times F \to \mathbb{K}$ dualitás $M \times F$-re vett leszűkítése által dualitásban van és*

$$\sigma(M,F) = \sigma(E,F)|M.$$

Bizonyítás. A hipotézisből azzal ekvivalens, hogy $M^\circ = \{0\}$. Tehát ekkor az F/M° lineáris faktortér kanonikusan azonosul F-fel, és ez által a $\sigma(M,F/M^\circ)$ topológia azonosul $\sigma(M,F)$-fel. Ugyanakkor az előző állítás szerint fennáll a $\sigma(E,F)|M = \sigma(M,F/M^\circ)$ egyenlőség. ■

6.3.4. Következmény. *Legyen (E,F) duális pár és $M \subseteq E$ lineáris altér. Egy $u : M \to \mathbb{K}$ lineáris funkcionál pontosan akkor folytonos a $\sigma(E,F)|M$ altértopológia szerint, ha létezik olyan $y \in F$, hogy $u(\cdot) = \langle\cdot,y\rangle|_M$.*

Bizonyítás. Az előző állítás szerint u pontosan akkor folytonos a $\sigma(E,F)|M$ altértopológia szerint, ha van olyan $\zeta \in F/M^\circ$, hogy $u(\cdot) = \langle\cdot,\zeta\rangle_M$, ahol $\langle\cdot,\cdot\rangle_M$ az M és F/M° között értelmezett dualitást jelöli. Az M és F/M° között bevezetett dualitás értelmezése alapján ez a tulajdonság olyan $y \in F$ létezésével ekvivalens, amelyre $u(\cdot) = \langle\cdot,\pi_{F/M^\circ}(y)\rangle_M = \langle\cdot,y\rangle|_M$. ■

6.4. Gyenge topológiák szorzata

6.4.1. Állítás. (Gyenge topológiák szorzata) *Ha* $((E_i, F_i))_{i\in I}$ *duális párok rendszere, akkor a*

$$\left(\prod_{i\in I} E_i\right) \times \bigoplus_{i\in I} F_i \to \mathbb{K}; \qquad ((x_i)_{i\in I}, (y_i)_{i\in I}) \mapsto \langle (x_i)_{i\in I}, (y_i)_{i\in I}\rangle := \sum_{i\in I} \langle x_i, y_i\rangle$$

leképezés dualitás a $\prod_{i\in I} E_i$ *és* $\bigoplus_{i\in I} F_i$ *vektorterek között, és fennáll a*

$$\sigma\left(\prod_{i\in I} E_i, \bigoplus_{i\in I} F_i\right) = \prod_{i\in I} \sigma(E_i, F_i)$$

egyenlőség.

Bizonyítás. Nyilvánvaló, hogy az itt értelmezett $\langle\cdot,\cdot\rangle$ leképezés dualitás a $\prod_{i\in I} E_i$ és $\bigoplus_{i\in I} F_i$ vektorterek között. Tehát csak azt kell igazolni, hogy $\mathscr{T} := \prod_{i\in I} \sigma(E_i, F_i)$ a legkisebb mindazon $E := \prod_{i\in I} E_i$ feletti topológiák között, amelyek szerint minden $(y_i)_{i\in I} \in \bigoplus_{i\in I} F_i$ esetén a $\langle\cdot,(y_i)_{i\in I}\rangle : \prod_{i\in I} E_i \to \mathbb{K}$ függvény folytonos.

Ha $(y_i)_{i\in I} \in \bigoplus_{i\in I} F_i$ és $I_0 := \{i \in I | y_i \neq 0\}$, akkor I_0 véges halmaz, és a dualitás értelmezése alapján $\langle\cdot,(y_i)_{i\in I}\rangle = \sum_{i\in I_0} (\langle\cdot, y_i\rangle \circ pr_i)$, ahol $i \in I$ esetén pr_i jelöli az $E \to E_i$ projekciót. Ha $i \in I_0$, akkor az $\langle\cdot, y_i\rangle : E_i \to \mathbb{K}$ függvény folytonos a $\sigma(E_i, F_i)$ topológia szerint, továbbá a $pr_i : E \to E_i$ leképezés folytonos a $\mathscr{T}$ és $\sigma(E_i, F_i)$ topológiák szerint, így $\langle\cdot, y_i\rangle \circ pr_i : E \to \mathbb{K}$ folytonos a $\mathscr{T}$ topológia szerint. Ezért a $\langle\cdot,(y_i)_{i\in I}\rangle : E \to \mathbb{K}$ funkcionál is folytonos a $\mathscr{T}$ topológia szerint. Tehát a $\prod_{i\in I} \sigma(E_i, F_i)$ szorzattopológia *olyan* a $\prod_{i\in I} E_i$ lineáris szorzattér felett, hogy minden $(y_i)_{i\in I} \in \bigoplus_{i\in I} F_i$ esetén a $\langle\cdot,(y_i)_{i\in I}\rangle : \prod_{i\in I} E_i \to \mathbb{K}$ függvény folytonos.

Legyen $\mathscr{T}'$ olyan topológia $\prod_{i\in I} E_i$ felett, hogy minden $(y_i)_{i\in I} \in \bigoplus_{i\in I} F_i$ esetén a $\langle\cdot,(y_i)_{i\in I}\rangle : \prod_{i\in I} E_i \to \mathbb{K}$ függvény folytonos. Azt kell megmutatni, hogy $\mathscr{T} \subseteq \mathscr{T}'$, vagyis az id_E operátor folytonos a $\mathscr{T}'$ és $\mathscr{T}$ topológiák szerint. A $\mathscr{T}$ topológia definíciója szerint az id_E operátor pontosan akkor folytonos a $\mathscr{T}'$ és $\mathscr{T}$ topológiák szerint, ha minden $I \ni i$-re a $pr_i : E \to E_i$ projekció-függvény folytonos a $\mathscr{T}'$ és $\sigma(E_i, F_i)$ topológiák szerint. A gyenge topológiák értelmezése alapján $i \in I$ esetén a $pr_i : E \to E_i$ függvény pontosan akkor folytonos a $\mathscr{T}'$ és $\sigma(E_i, F_i)$ topológiák szerint, ha minden $y_i \in F_i$ esetén a $\langle\cdot, y_i\rangle \circ pr_i : E \to \mathbb{K}$ funkcionál folytonos a $\mathscr{T}'$ és a $\mathbb{K}$ feletti euklidészi topológia szerint. Ha $i \in I$, $y_i \in I$ és $\tilde{y}_i$ jelöli azt az elemet $\bigoplus_{j\in I} F_j$-ben, amelyre $j \in I$ és $j \neq i$ esetén a $\tilde{y}_i$ elem j-edik komponense a 0 vektor F_i-ben, míg az i-edik komponense egyenlő y_i-vel, akkor világos, hogy $\langle\cdot, y_i\rangle \circ pr_i = \langle\cdot, \tilde{y}_i\rangle$, és a $\mathscr{T}'$-re vonatkozó hipotézis alapján az egyenlőség jobb oldalán álló funkcionál folytonos a $\mathscr{T}'$ és a $\mathbb{K}$ feletti euklidészi topológia szerint. ∎

6.5. Dualitással kompatibilis topológiák

6.5.1. Definíció. *Ha (E, F) duális pár, akkor egy E feletti $\mathscr{T}$ szeparált lokálisan konvex topológiára azt mondjuk, hogy* **kompatibilis az E és F közötti dualitással**, *ha az E feletti $\mathscr{T}$ szerint folytonos lineáris funkcionálok tere a dualitás által az F vektortérrel azonosul.*

Tehát, ha (E, F) duális pár, akkor egy E feletti $\mathscr{T}$ szeparált lokálisan konvex topológia pontosan akkor kompatibilis az E és F közötti dualitással, ha a $\mathscr{T}$ topológia szerinti folytonos E feletti lineáris funkcionálok halmaza egyenlő a $\{\langle\cdot, y\rangle | y \in F\}$ halmazzal.

6.5.2. Állítás. *Ha (E, F) duális pár, akkor a $\sigma(E, F)$ topológia kompatibilis az E és F közötti dualitással.*

Bizonyítás. A $\sigma(E, F)$ topológia – definíció szerint – megegyezik a $(\mathbb{K}, \langle\cdot, y\rangle)_{y\in F}$ rendszer által projektíven előállított E feletti topológiával. Korábban láttuk, hogy az E vektortér feletti $\sigma(E, F)$-folytonos lineáris funkcionálok halmaza egyenlő a $\{\langle\cdot, y\rangle | y \in F\}\rangle$ halmazzal (1.4.5.). Ugyanakkor a $(\mathrm{D_I})$ alapján a $\{\langle\cdot, y\rangle | y \in F\}\rangle$ funkcionálhalmaz szétválasztó E felett, így a $\sigma(E, F)$ topológia szeparált és lokálisan konvex. ∎

6.5.3. Állítás. *Legyen (E, F) duális pár. Ekkor az E és F közötti dualitással kompatibilis E feletti topológiák szerint a zárt konvex halmazok ugyanazok.*

Bizonyítás. Legyen $\mathscr{T}$ olyan topológia E felett, amely kompatibilis az E és F közötti dualitással, és vegyünk egy $C \subseteq E$ halmaz konvex és $\mathscr{T}$-zárt halmazt, amelyre $C \neq E$ és $C \neq \emptyset$. A lokálisan konvex terekre vonatkozó Hahn–Banach szétválasztási tételből következik, hogy létezik E feletti folytonos lineáris funkcionáloknak olyan $(u_i)_{i\in I}$ nem üres rendszere és olyan $\mathbb{R}$-ben haladó $(c_i)_{i\in I}$ rendszer, amelyre

$$C = \bigcap_{i\in I} [\Re \circ u_i \leq c_i].$$

A $\mathscr{T}$ topológia kompatibilis az E és F közötti dualitással, így minden $i \in I$ esetén egyértelműen létezik olyan $y_i \in F$, hogy $u_i = \langle\cdot, y_i\rangle$. Tehát, ha $\mathscr{T}'$ olyan topológia

E felett, amely kompatibilis az E és F közötti dualitással, akkor minden $I \ni i$-re a $\Re \circ u_i = \Re(\langle \cdot, y_i \rangle) : E \to \mathbb{R}$ függvény folytonos a $\mathscr{T}'$ szerint, így a $[\Re \circ u_i \leq c_i]$ halmaz zárt a $\mathscr{T}'$ topológia szerint, tehát C zárt a $\mathscr{T}'$ topológia szerint is. ■

6.5.4. Következmény. *Legyen (E, F) duális pár és $A \subseteq E$ konvex halmaz. Ekkor az E és F közötti dualitással kompatibilis E feletti topológiák szerint az A lezártja ugyanaz a halmaz, és ha $0 \in A$, akkor ez a lezárt megegyezik az $A^{\circ\circ}$ bipolárissal.*

Bizonyítás. Egy konvex halmaz lineáris topológia szerinti lezártja megegyezik a halmazt tartalmazó zárt konvex halmazok metszetével, ezért az állítás első fele azonnal következik az előző állításból. Az állítás második fele pedig annak következménye, hogy ha $0 \in A \subseteq E$ konvex halmaz, akkor az $A^{\circ\circ}$ bipoláris megegyezik az A halmaz $\sigma(E, F)$ topológia szerinti lezártjával, és a $\sigma(E, F)$ topológia kompatibilis az E és F közötti dualitással. ■

6.5.5. Következmény. *Legyen E metrizálható lokálisan konvex tér és $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ olyan sorozat E-ben, amely a $\sigma(E, E')$ topológia szerint konvergál az $x \in E$ vektorhoz. Ekkor létezik olyan $(\tilde{x}_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sorozat, amely az E eredeti topológiája szerint konvergál x-hez és minden $\mathbb{N} \ni n$-re $\tilde{x}_n \in \mathrm{co}(\{x_k | k \in \mathbb{N}\})$.*

Bizonyítás. Ha $A := \mathrm{co}(\{x_k | k \in \mathbb{N}\})$, akkor az $A \subseteq E$ konvex halmaz lezártja E-ben megegyezik a $\sigma(E, E')$ szerinti lezárjával, ezért x eleme az A halmaz eredeti topológia szerinti lezártjának. Az E metrizálható, tehát ekkor létezik olyan A-ban haladó sorozat, amely E-ben konvergál x-hez. ■

6.5.6. Következmény. (A hordók poláris jellemzése) *Legyen E szeparált lokálisan konvex tér. Egy $T \subseteq E$ halmaz pontosan akkor hordó, ha létezik olyan $B \subseteq E'$ kiegyensúlyozott, $\sigma(E', E)$-korlátos halmaz, amelyre $T = B^\circ$.*

Bizonyítás. Tegyük fel, hogy T hordó E-ben. Ekkor T zárt és konvex halmaz, így T a $\sigma(E, E')$ topológia szerint is zárt és konvex, valamint $0 \in T$. Ebből következik, hogy $T = T^{\circ\circ}$, tehát a $B := T^\circ$ halmazra $T = B^\circ$ teljesül. A T halmaz kiegyensúlyozott, így B is kiegyensúlyozott, tehát elég azt igazolni, hogy B a $\sigma(E', E)$ topológia szerint korlátos. Ez abból következik, hogy a T halmaz elnyelő E-ben. Valóban, ha $x \in E$, akkor van olyan $\lambda \in \mathbb{K} \setminus \{0\}$, hogy $\lambda.x \in T$, tehát $B = T^\circ$ miatt minden $B \ni u$-ra $|u(\lambda.x)| \leq 1$, amiből következik, hogy $\sup\limits_{u \in B} |u(x)| \leq 1/|\lambda| < +\infty$.

Megfordítva, tegyük fel, hogy $B \subseteq E'$ olyan kiegyensúlyozott, $\sigma(E', E)$-korlátos halmaz, amelyre $T = B^\circ$. Ekkor T konvex, $\sigma(E, E')$-zárt halmaz E-ben, ezért T az E eredeti topológiája szerint is zárt konvex halmaz. A B kiegyensúlyozottsága miatt T is kiegyensúlyozott, tehát elég azt igazolni, hogy T elnyelő E-ben. Ez abból következik, hogy B korlátos a $\sigma(E', E)$ topológia szerint. Valóban, ha $x \in E$, akkor van olyan $c \in \mathbb{R}^+$, hogy minden $B \ni u$-ra $|u(x)| \leq c$; ekkor $c^{-1}.x \in B^\circ = T$, azaz $x \in c.T$, így T elnyeli az x vektort. ■

6.5.7. Állítás. *Legyen E szeparált hordós tér és $H \subseteq E'$. A következő állítások ekvivalensek.*

(i) *A H halmaz ekvifolytonos E'-ben.*

(ii) *A H halmaz relatív kompakt a $\sigma(E', E)$ topológia szerint.*

(iii) *A H halmaz korlátos a $\sigma(E', E)$ topológia szerint.*

Bizonyítás. (i)$\Rightarrow$(ii) Az Alaoglu–Bourbaki tétel (5.11.2.) alapján még akkor is igaz, ha E nem hordós tér.

(ii)$\Rightarrow$(iii) Topologikus vektortérben minden kompakt halmaz korlátos; ezt az 1.6.8. lemma b) pontjában igazoltuk. Korlátos halmaz minden részhalmaza korlátos, ezért ha H relatív kompakt a $\sigma(E', E)$ topológia szerint, akkor H korlátos is ugyanezen topológia szerint.

(iii)$\Rightarrow$(i) Legyen a H halmaz korlátos a $\sigma(E', E)$ topológia szerint. Ekkor $\mathrm{eq}(H)$ kiegyensúlyozott $\sigma(E', E)$-korlátos halmaz, így $(\mathrm{eq}(H))^\circ$ hordó E-ben. A hipotézis szerint E hordós tér, tehát $(\mathrm{eq}(H))^\circ$ a 0-nak környezete E-ben, és persze $(\mathrm{eq}(H))^\circ \subseteq H^\circ$, így H° is a 0-nak környezete E-ben. Ezért H ekvifolytonos halmaz E'-ben. ■

6.6. Kváziteljes topologikus vektorterek

6.6.1. Definíció. *Egy topologikus vektorteret* **kváziteljesnek** *nevezünk, ha a tér minden korlátos és zárt részhalmaza teljes halmaz.*

Tekintettel arra, hogy teljes topologikus vektortérben minden zárt halmaz teljes; a kváziteljesség a teljesség fogalmának gyengítése.

6.6.2. Következmény. *Ha E szeparált hordós tér, akkor E' a $\sigma(E', E)$ topológiával ellátva kváziteljes szeparált lokálisan konvex tér.*

Bizonyítás. Ha E szeparált hordós tér, akkor az előző állítás szerint az E' minden $\sigma(E', E)$ szerint korlátos részhalmaza relatív kompakt $\sigma(E', E)$ szerint, ezért ha $\sigma(E', E)$-zárt is, akkor $\sigma(E', E)$-kompakt, következésképpen teljes is a $\sigma(E', E)$ topológia szerint. ■

A kváziteljesség fogalmának alkalmazására mutat jó példát a következő állítás, amely a sűrű altéren folytonos, szeparált és teljes topologikus vektortérbe ható lineáris operátorok folytonos kiterjesztési tételének variánsa.

6.6.3. Állítás. *Legyen E topologikus vektortér és F kváziteljes szeparált topologikus vektortér. Legyen $M \subseteq E$ olyan lineáris altér, amelyre teljesül az, hogy minden $x \in E$ esetén van olyan $B \subseteq M$ korlátos halmaz, hogy $x \in \overline{B}$. Ha $u : M \to F$ az altértopológia szerint folytonos lineáris operátor, akkor létezik egyetlen olyan $\widehat{u} \in \mathscr{L}(E; F)$, amelyre $u \subseteq \widehat{u}$.*

Bizonyítás. A hipotézis alapján M sűrű E-ben, ezért ha F az F teljes burka, akkor egyértelműen létezik olyan $\widehat{u} \in \mathscr{L}(E;F)$, amelyre $u \subseteq \widehat{u}$. Meg fogjuk mutatni, hogy $\mathrm{Im}(\widehat{u}) \subseteq F$.

Legyen $x \in E$ rögzített vektor, és vegyünk olyan $B \subseteq M$ korlátos halmazt, amelyre $x \in \overline{B}$. Ekkor az $\widehat{u}$ folytonossága miatt $\widehat{u}(x) \in \widehat{u}\langle \overline{B} \rangle \subseteq \overline{\widehat{u}\langle B \rangle} = \overline{u\langle B \rangle}$, ahol $\overline{u\langle B \rangle}$ az $u\langle B \rangle \subseteq F$ halmaz lezártját jelenti az F teljes topologikus vektortérben. Az $u\langle B \rangle$ halmaz korlátos F-ben, ezért az F-beli lezártja korlátos és zárt F-ben, így az F kváziteljessége folytán teljes F-ben. Ebből azonnal következik, hogy az $u\langle B \rangle$ halmaz F-beli lezártja F-ban is teljes, tehát zárt. Ezért $\overline{u\langle B \rangle}$ részhalmaza az $u\langle B \rangle$ halmaz F-beli lezártjának, így $\overline{u\langle B \rangle} \subseteq F$, következésképpen $\widehat{u}(x) \in F$. ■

6.6.4. Tétel. (Hordós terek duális jellemzése) *Ha E szeparált lokálisan konvex tér, akkor a következő állítások ekvivalensek.*

(i) *E hordós tér.*

(ii) *Minden F lokálisan konvex térre, az $\mathscr{L}(E;F)$ minden pontonként korlátos részhalmaza ekvifolytonos.*

(iii) *Az E' minden $\sigma(E',E)$-korlátos részhalmaza ekvifolytonos.*

Bizonyítás. (i)⇒(ii) Banach ekvifolytonosság tétele alapján teljesül (5.12.3.).

(ii)⇒(iii) Triviális.

(iii)⇒(i) Legyen $T \subseteq E$ hordó, és vegyünk olyan $B \subseteq E'$ kiegyensúlyozott, $\sigma(E',E)$-korlátos halmazt, amelyre $T = B^\circ$. A hipotézis szerint B ekvifolytonos halmaz, ezért B° a 0-nak környezete E-ben, ami azt jelenti, hogy E hordós tér. ■

6.7. A dualitással kompatibilis topológiák jellemzése – Mackey–Arens-tétel

6.7.1. Definíció. *Legyen (E,F) duális pár, továbbá jelölje E_σ (illetve F_σ) az E (illetve F) vektorteret a $\sigma(E,F)$ (illetve $\sigma(F,E)$) topológiával ellátva. Tudjuk, hogy a dualitás által E algebrailag azonosul $F'_\sigma := \mathscr{L}(F_\sigma;\mathbb{K})$-val és F algebrailag azonosul $E'_\sigma := \mathscr{L}(E_\sigma;\mathbb{K})$-val. Tehát, ha $\mathfrak{S}$ az F_σ (illetve E_σ) lokálisan konvex tér korlátos részhalmazainak tetszőleges olyan tartalmazás tekintetében felfelé irányított halmaza, hogy $F = \bigcup\limits_{S \in \mathfrak{S}} S$ (illetve $E = \bigcup\limits_{S \in \mathfrak{S}} S$), akkor az E (illetve F) vektortér felett tekinthetjük az $\mathfrak{S}$-topológiát; az E (illetve F) vektorteret ezzel a topológiával ellátva az $E_\mathfrak{S}$ (illetve $F_\mathfrak{S}$) szimbólummal jelöljük, és ezt a szeparált lokálisan konvex topológiát E (illetve F) felett, az adott dualitás által meghatározott* **$\mathfrak{S}$-topológiának** *nevezzük.*

Megjegyzések. 1) Ha (E,F) duális pár, akkor nyilvánvalóan a $\sigma(E,F)$ (illetve $\sigma(F,E)$) topológia megegyezik az F (illetve E) *véges* részhalmazainak $\mathfrak{S}$ halmazából származó, dualitás által meghatározott E (illetve F) feletti $\mathfrak{S}$-topológiával.

2) Legyen (E, F) duális pár és $\mathfrak{S}$ az F_σ lokálisan konvex tér korlátos részhalmazainak tetszőleges nem üres, tartalmazás tekintetében felfelé irányított halmaza. Minden $S \in \mathfrak{S}$ és $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ esetén legyen

$$U(S, \varepsilon) := \{x \in E \mid (\forall y \in S) : \ |\langle x, y\rangle| \leq \varepsilon\}.$$

Ekkor az $(U(S, \varepsilon))_{(S,\varepsilon)\in\mathfrak{S}\times\mathbb{R}^+}$ a 0-nak környezetbázisa a dualitás által meghatározott E feletti $\mathfrak{S}$-topológia szerint; ez az $\mathfrak{S}$-topológiák definíciója alapján nyilvánvaló. Ha $S \in \mathfrak{S}$ és $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$, akkor a 6.1. 7) megjegyzés alapján

$$U(S, \varepsilon) = U(\mathrm{eq}(S), \varepsilon) = \varepsilon.(\mathrm{eq}(S))^\circ = \left(\varepsilon^{-1}.\mathrm{eq}(S)\right)^\circ.$$

6.7.2. Definíció. *Legyen (E, F) duális pár, továbbá jelölje $\mathfrak{S}$ az F (illetve E) összes konvex, kiegyensúlyozott, $\sigma(F, E)$-kompakt (illetve $\sigma(E, F)$-kompakt) részhalmazainak halmazát. Ekkor az E (illetve F) feletti dualitás által meghatározott $\mathfrak{S}$-topológiát a $\tau(E, F)$ (illetve $\tau(F, E)$) szimbólummal jelöljük, és az E (illetve F) feletti, adott dualitás által meghatározott Mackey-topológiának nevezzük. Azt mondjuk, hogy az E szeparált lokálisan konvex tér* **Mackey-tér***, ha az E topológiája egyenlő az E és E' közötti kanonikus dualitás által meghatározott E feletti Mackey-topológiával.*

Ha (E, F) duális pár, akkor a 2) megjegyzés alapján a C° alakú poláris halmazok a $\tau(E, F)$ topológia szerint a 0-nak környezetbázisát alkotják, ha C befutja az F konvex, kiegyensúlyozott, $\sigma(F, E)$-kompakt részhalmazainak halmazát.

6.7.3. Definíció. *Legyen (E, F) duális pár, továbbá jelölje $\mathfrak{S}$ az F (illetve E) összes $\sigma(F, E)$-korlátos (illetve $\sigma(E, F)$-korlátos) részhalmazainak halmazát. Ekkor az E (illetve F) feletti, adott dualitás által meghatározott $\mathfrak{S}$-topológiát a $\beta(E, F)$ (illetve $\beta(F, E)$) szimbólummal jelöljük, és az E (illetve F) feletti, adott dualitás által meghatározott* **erős topológiának** *nevezzük. Ha E szeparált lokálisan konvex tér, akkor az E és E' közötti kanonikus dualitás által meghatározott $\beta(E, E')$ topológiát az E* **erősített topológiájának** *nevezzük.*

Ha (E, F) duális pár, akkor a 9) megjegyzés alapján a C° alakú poláris halmazok a $\beta(E, F)$ topológia szerint a 0-nak környezetbázisát alkotják, ha C befutja az F kiegyensúlyozott, $\sigma(F, E)$-korlátos részhalmazainak halmazát.

Nyilvánvaló, hogy ha (E, F) duális pár, és $\mathfrak{S}$ az F (illetve E) vektortér $\sigma(F, E)$-korlátos (illetve $\sigma(E, F)$-korlátos) részhalmazainak olyan felfelé irányított halmaza, amelyre $F = \bigcup_{S\in\mathfrak{S}} S$ (illetve $E = \bigcup_{S\in\mathfrak{S}} S$), akkor a dualitás által meghatározott E (illetve F) feletti $\mathfrak{S}$-topológiát majorálja a $\beta(E, F)$ (illetve $\beta(F, E)$) topológia.

Megjegyezzük, hogy ha E normált tér, akkor a funkcionálnorma által meghatározott

E' feletti topológia egyenlő a $\beta(E', E)$ topológiával. Valóban, a $\beta(E', E)$ topológia megegyezik az E korlátos részhalmazain való egyenletes konvergencia topológiájával, ami nyilvánvalóan egyenlő az E zárt egységgömbjén való egyenletes konvergencia topológiájával. Ezt a topológiát viszont a funkcionálnorma generálja.

6.7.4. Tétel. (Mackey–Arens-tétel: a dualitással kompatibilis topológiák jellemzése) *Ha (E, F) duális pár, akkor egy E feletti $\mathscr{T}$ szeparált lokálisan konvex topológia pontosan akkor kompatibilis az E és F közötti dualitással, ha létezik az F konvex, kiegyensúlyozott, $\sigma(F, E)$-kompakt részhalmazainak olyan $\mathfrak{S}$ felfelé irányított halmaza, hogy $F = \bigcup_{S \in \mathfrak{S}} S$ és $\mathscr{T}$ egyenlő a dualitás által meghatározott E feletti $\mathfrak{S}$-topológiával.*

Bizonyítás. (I) Először tegyük fel, hogy az E feletti $\mathscr{T}$ szeparált lokálisan konvex topológia kompatibilis az E és F közötti dualitással. Legyen $\mathfrak{B}$ olyan környezetbázisa a 0-nak a $\mathscr{T}$ topológia szerint, amelynek minden tagja hordó. Ilyen azért létezik, mert $\mathscr{T}$ lokálisan konvex topológia E felett. Legyen $V \in \mathfrak{B}$ rögzített. Ekkor $V = V^{\circ\circ}$, hiszen $0 \in V$ és V konvex és $\mathscr{T}$-zárt (ezért $\sigma(E, F)$-zárt) halmaz. A V halmaz konvex és kiegyensúlyozott, ezért V° konvex, kiegyensúlyozott és $\sigma(F, E)$-zárt halmaz F-ben. Továbbá V környezete a 0-nak $\mathscr{T}$ szerint, így az ekvifolytonosság poláris jellemzése alapján $V^\bullet$ ekvifolytonos E'-ben, ahol $\bullet$ jelöli az E és E' közötti kanonikus dualitás szerint vett polaritást. Ezért az Alaoglu–Bourbaki-tétel alapján $V^\bullet$ relatív kompakt a $\sigma(E', E)$ topológia szerint. De a $\pi : F \to E';\ y \mapsto \langle \cdot, y \rangle$ leképezés lineáris homeomorfizmus a $\sigma(F, E)$ és $\sigma(E', E)$ topológiák szerint, és $\pi\langle V^\circ \rangle = V^\bullet$. Ebből következik, hogy a V° halmaz relatív kompakt a $\sigma(F, E)$ topológia szerint, így $\sigma(F, E)$-kompakt is, mert $\sigma(F, E)$-zárt. Tehát az $\mathfrak{S} := \{V^\circ | V \in \mathfrak{B}\}$ halmaz az F konvex, kiegyensúlyozott, $\sigma(F, E)$-kompakt részhalmazainak halmaza, és ez tartalmazás tekintetében felfelé irányított, mivel $\mathfrak{B}$ a tartalmazás tekintetében lefelé irányított.

Megmutatjuk, hogy $F = \bigcup_{V \in \mathfrak{B}} V^\circ$. Ehhez legyen $y \in F$ rögzített vektor, és a $\langle \cdot, y \rangle : E \to \mathbb{K}$ lineáris funkcionál $\mathscr{T}$ topológia szerinti folytonossága alapján vegyük a 0-nak olyan U kiegyensúlyozott környezetét E-ben a $\mathscr{T}$ topológia szerint, amelyre minden $x \in U$ esetén $|\langle x, y \rangle| \leq 1$. Ekkor $y \in U^\circ$, és van olyan $V \in \mathfrak{B}$, hogy $V \subseteq U$, így $y \in V^\circ$ is teljesül. Ez azt jelenti, hogy $y \in \bigcup_{V \in \mathfrak{B}} V^\circ$.

Jelölje $\mathscr{T}'$ az E és F közötti dualitás által meghatározott E feletti $\mathfrak{S}$-topológiát; megmutatjuk, hogy $\mathscr{T} = \mathscr{T}'$. A 9) megjegyzés alapján a $\mathfrak{B}' := \{\varepsilon.S^\circ | (\varepsilon \in \mathbb{R}^+) \wedge (S \in \mathfrak{S})\}$ halmaz a 0-nak környezetbázisa E-ben a $\mathscr{T}'$ topológia szerint. De $\{\varepsilon.S^\circ | (\varepsilon \in \mathbb{R}^+) \wedge (S \in \mathfrak{S})\} = \{\varepsilon.V^{\circ\circ} | (\varepsilon \in \mathbb{R}^+) \wedge (V \in \mathfrak{B})\} = \{\varepsilon.V | (\varepsilon \in \mathbb{R}^+) \wedge (V \in \mathfrak{B})\}$, hiszen minden $V \in \mathfrak{B}$ halmazra $V = V^{\circ\circ}$. Ebből látható, hogy $\mathfrak{B} \subseteq \mathfrak{B}'$ és a $\mathfrak{B}'$ minden eleme a 0-nak környezete $\mathscr{T}$ szerint, így $\mathscr{T} = \mathscr{T}'$.

(II) Tegyük fel, hogy $\mathfrak{S}$ az F konvex, kiegyensúlyozott, $\sigma(F, E)$-kompakt részhalmazainak olyan felfelé irányított halmaza, hogy $F = \bigcup_{S \in \mathfrak{S}} S$, és jelölje $\mathscr{T}$ a dualitás által meghatározott E feletti $\mathfrak{S}$-topológiát. Legyen E' a $\mathscr{T}$ topológia szerint folytonos lineáris funkcionálok halmaza. Az F vektorteret az E és F közötti dualitással azonosítjuk az E^* egy lineáris alterével, és azt kell bizonyítani, hogy $F = E'$.

Először megmutatjuk, hogy $F \subseteq E'$, vagyis minden $F \ni y$-ra az $\langle \cdot, y\rangle : E \to \mathbb{K}$ funkcionál folytonos a $\mathscr{T}$ topológia szerint. Legyen ugyanis $y \in F$ rögzítve, és vegyünk olyan $S \in \mathfrak{S}$ halmazt, amelyre $y \in S$. Minden $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ esetén az $\varepsilon.S^\circ$ halmaz a 0-nak környezete E-ben a $\mathscr{T}$ topológia szerint, és ha $x \in \varepsilon.S^\circ$, akkor $\varepsilon^{-1}|\langle x, y\rangle| = |\langle \varepsilon^{-1}.x, y\rangle| \leq 1$, vagyis $|\langle x, y\rangle| \leq \varepsilon$. Ebből látható, hogy a $\langle \cdot, y\rangle$ funkcionál folytonos a 0-ban a $\mathscr{T}$ topológia szerint.

Most tekinthetjük az E és F vektorterek közötti adott dualitást, valamint az E és E' közötti kanonikus dualitást. Megállapodunk abban, hogy az előbbi szerinti polaritást a $\circ$, míg az utóbbi szerinti polaritást a $\bullet$ szimbólummal jelöljük. Nyilvánvaló, hogy $H \subseteq F$ esetén $H^\circ = H^\bullet$, hiszen $H^\bullet := \{x \in E | (\forall u \in H) : \Re(u(x)) \leq 1\} = \{x \in E | (\forall y \in H) : \Re(\langle x, y\rangle) \leq 1\} =: H^\circ$. Ebből következik, hogy $F^\bullet = F^\circ = \{0\}$, ezért a gyenge topológiák altértopológiáinak jellemzési tétele alapján fennáll a $\sigma(E', E)|F = \sigma(F, E/F^\bullet) = \sigma(F, E)$ egyenlőség.

A $E' \subseteq F$ tartalmazás bizonyításához legyen $u \in E'$ rögzítve, és vegyük a 0-nak E-ben olyan V környezetét a $\mathscr{T}$ szerint, amelyre minden $x \in V$ esetén $|u(x)| \leq 1$. A $\mathscr{T}$ topológia definíciója alapján az $\{\varepsilon.S^\circ | (S \in \mathfrak{S}) \wedge (\varepsilon \in \mathbb{R}^+)\}$ halmaz a 0-nak környezetbázisa a $\mathscr{T}$ szerint, így vehetünk olyan $S \in \mathfrak{S}$ halmazt és $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ számot, hogy $\varepsilon.S^\circ \subseteq V$. Feltehető, hogy $S \neq \emptyset$, különben $S^\circ = E$ miatt $V = E$, tehát u korlátos az E vektortéren, tehát $u = 0$, így $u \in F$. Tehát az $C := \varepsilon^{-1}.S$ halmaz F-ben nem üres konvex, kiegyensúlyozott, $\sigma(F, E)$-kompakt, és $C^\circ = \varepsilon.S^\circ$, vagyis $C^\circ \subseteq V$. Ugyanakkor minden $x \in C^\circ$ esetén $|u(x)| \leq 1$, ezért $u \in (C^\circ)^\bullet$. De $C \subseteq F$ miatt $C^\circ = C^\bullet$, tehát $u \in C^{\bullet\bullet}$. A $C \subseteq F$ halmaz $\sigma(F, E)$-kompakt, és $\sigma(F, E) = \sigma(E', E)|F$, ezért C az E'-ben $\sigma(E', E)$-kompakt halmaz. Tehát C az E'-ben $\sigma(E', E)$-zárt, konvex, kiegyensúlyozott halmaz, és $C \neq \emptyset$, így $0 \in C$ is igaz, vagyis a bipolárisok jellemzési tétele alapján $C^{\bullet\bullet} = C$. Ezért $u \in C^{\bullet\bullet} = C \subseteq F$, így $u \in F$. ■

Vigyázzunk arra, hogy ha (E, F) duális pár, akkor létezhet olyan $\mathscr{T}$ *nem lokálisan konvex* lineáris topológia E felett, amely szerint az E topologikus duálisa azonosul F-fel a dualitás által. Ilyen esetben természetesen *nem létezhet* az F konvex, kiegyensúlyozott, $\sigma(F, E)$-kompakt részhalmazainak olyan $\mathfrak{S}$ nem üres, felfelé irányított halmaza, hogy $\mathscr{T}$ egyenlő a dualitás által meghatározott E feletti $\mathfrak{S}$-topológiával, hiszen az $\mathfrak{S}$-topológiák szükségképpen lokálisan konvexek.

6.7.5. Tétel. *Ha (E, F) duális pár, akkor egy E feletti $\mathscr{T}$ szeparált lokálisan konvex topológia pontosan akkor kompatibilis az E és F közötti dualitással, ha*

$$\sigma(E, F) \subseteq \mathscr{T} \subseteq \tau(E, F).$$

Bizonyítás. Először tegyük fel, hogy az E feletti $\mathscr{T}$ szeparált lokálisan konvex topológia kompatibilis az E és F közötti dualitással. A dualitással kompatibilis topológiák jellemzési tétele alapján vehetjük az F konvex, kiegyensúlyozott, $\sigma(F,E)$-kompakt részhalmazainak olyan felfelé irányított $\mathfrak{S}$ halmazát, amelyre $F = \bigcup_{S \in \mathfrak{S}} S$ és $\mathscr{T}$ egyenlő az E és F közötti dualitás által meghatározott E feletti $\mathfrak{S}$-topológiával.

Világos, hogy ez az $\mathfrak{S}$-topológia kisebb-egyenlő a $\tau(E,F)$ topológiánál, mivel $\mathfrak{S}$ részhalmaza az F *összes* konvex, kiegyensúlyozott, $\sigma(F,E)$-kompakt részhalmazai halmazának. Ugyanakkor, a $\sigma(E,F)$ topológia – a definíció szerint – a legkisebb topológia E felett, amely szerint a $\{\langle\cdot,y\rangle | y \in F\}$ halmaz minden eleme folytonos függvény, ezért $\sigma(E,F)$ kisebb-egyenlő $\mathscr{T}$-nél, hiszen a dualitással kompatibilis topológiák értelmezése alapján $\{\langle\cdot,y\rangle | y \in F\}$ egyenlő a $\mathscr{T}$ szerint folytonos lineáris funkcionálok halmazával.

Megfordítva, legyen $\mathscr{T}$ olyan szeparált lokálisan konvex topológia E felett, amelyre $\sigma(E,F) \subseteq \mathscr{T} \subseteq \tau(E,F)$. Ha egy $E \to \mathbb{K}$ lineáris funkcionál folytonos $\sigma(E,F)$ szerint, akkor $\sigma(E,F) \subseteq \mathscr{T}$ miatt a $\mathscr{T}$ topológia szerint is folytonos. Ha egy $E \to \mathbb{K}$ lineáris funkcionál folytonos a $\mathscr{T}$ topológia szerint, akkor $\mathscr{T} \subseteq \tau(E,F)$ miatt folytonos $\tau(E,F)$ szerint is. Ugyanakkor – a dualitással kompatibilis topológiák jellemzési tétele alapján – a $\tau(E,F)$ topológia kompatibilis az E és F közötti dualitással, ezért minden olyan $E \to \mathbb{K}$ lináris funkcionál, amely a $\tau(E,F)$ topológia szerint folytonos, a $\sigma(E,F)$ topológia szerint is folytonos. Tehát egy E feletti lineáris funkcionál pontosan akkor folytonos a $\mathscr{T}$ szerint, ha a $\sigma(E,F)$ szerint folytonos. Ezért $\mathscr{T}$ kompatibilis az E és F közötti dualitással, hiszen $\sigma(E,F)$ is kompatibilis az E és F közötti dualitással. ■

6.7.6. Következmény. *Ha E szeparált lokálisan konvex tér, akkor a $\beta(E,E')$ topológia pontosan akkor kompatibilis az E és E' közötti kanonikus dualitással, ha $\tau(E,E') = \beta(E,E')$.*

Bizonyítás. A $\tau(E,E') \subseteq \beta(E,E')$ összefüggés mindig igaz, ezért $\tau(E,E') = \beta(E,E')$ ekvivalens azzal, hogy $\beta(E,E') \subseteq \tau(E,E')$. Tekintettel arra, hogy $\sigma(E,E') \subseteq \beta(E,E')$ is teljesül; $\beta(E,E') \subseteq \tau(E,E')$ azzal ekvivalens, hogy $\sigma(E,E') \subseteq \beta(E,E') \subseteq \tau(E,E')$. Az előző tétel alapján ez éppen azt jelenti, hogy $\beta(E,E')$ kompatibilis az E és E' közötti kanonikus dualitással. ■

6.7.7. Következmény. *Ha E szeparált hordós tér, és $\mathscr{T}$ az E topológiája, akkor*

$$\mathscr{T} = \tau(E,E') = \beta(E,E').$$

Bizonyítás. Az előző tétel alapján $\mathscr{T} \subseteq \tau(E,E')$, ugyanakkor $\tau(E,E') \subseteq \beta(E,E')$ is igaz, ezért elég azt igazolni, hogy ha E szeparált hordós tér, akkor $\beta(E,E') \subseteq \mathscr{T}$. Tudjuk, hogy ha $\mathfrak{S}$ jelöli az E' összes kiegyensúlyozott, $\sigma(E',E)$-korlátos részhalmazainak halmazát, akkor $\{S^\circ | S \in \mathfrak{S}\}$ a 0-nak környezetbázisa E-ben a $\beta(E,E')$ topológia szerint. Ezért elegendő azt igazolni, hogy ha $S \subseteq E'$ kiegyensúlyozott, $\sigma(E',E)$-korlátos halmaz, akkor S° a 0-nak környezete E-ben $\mathscr{T}$ szerint. Ez viszont így van, mert S korlátos a $\sigma(E', E)$ topológia szerint és kiegyensúlyozott, így a hordók poláris jellemzésének tétele alapján az S° halmaz hordó E-ben a $\mathscr{T}$ topológia szerint, tehát a 0-nak környezete $\mathscr{T}$ szerint. ■

6.8. Sorozatzárt halmazok lokálisan konvex terekben

6.8.1. Definíció. *Ha T topologikus tér, akkor egy $H \subseteq T$ halmazt* **sorozatzártnak** *nevezünk, ha minden H-ban haladó, T-ben konvergens sorozat mindegyik limeszpontja eleme H-nak. Ha E topologikus vektortér, akkor egy $H \subseteq E$ halmazt* **sorozatteljesnek** *nevezünk, ha az E minden H-ban haladó Cauchy-sorozata konvergens E-ben, és mindegyik limeszpontja eleme H-nak.*

Világos, hogy topologikus térben minden zárt halmaz sorozatzárt, de ennek megfordítása általában nem igaz. Továbbá, topologikus vektortérben minden teljes halmaz sorozatteljes, de ennek megfordítása általában szintén nem igaz.

6.8.2. Lemma. (Teljességi lemma) *Legyen E vektortér, valamint $\mathscr{T}_1$ és $\mathscr{T}_2$ olyan lineáris topológiák E felett, hogy $\mathscr{T}_1 \subseteq \mathscr{T}_2$. Ha a 0-nak létezik olyan $\mathscr{T}_2$ szerinti környezetbázisa E-ben, amelynek minden eleme sorozatzárt (illetve zárt) a $\mathscr{T}_1$ topológia szerint, akkor az E minden $\mathscr{T}_1$ szerint sorozatteljes (illetve teljes) részhalmaza a $\mathscr{T}_2$ topológia szerint is sorozatteljes (illetve teljes).*

Bizonyítás. (I) Legyen $\mathfrak{B}$ a 0-nak olyan $\mathscr{T}_2$ szerinti környezetbázisa E-ben, amelynek minden eleme sorozatzárt a $\mathscr{T}_1$ topológia szerint. Legyen továbbá $A \subseteq E$ olyan halmaz, amely sorozatteljes a $\mathscr{T}_1$ lineáris topológia szerint. Megmutatjuk, hogy A sorozatteljes a $\mathscr{T}_2$ lineáris topológia szerint is.

Ehhez legyen $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tetszőleges A-ban haladó Cauchy-sorozat a $\mathscr{T}_2$ szerint; azt kell igazolni, hogy $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergens a $\mathscr{T}_2$ topológia szerint, és minden $\mathscr{T}_2$ szerinti limeszpontja eleme A-nak. Ez utóbbi tulajdonság nyilvánvalóan teljesül, mert A sorozatzárt is a $\mathscr{T}_1$ szerint, így a $\mathscr{T}_2$ szerint is sorozatzárt. Ezért csak azt kell igazolni, hogy az $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sorozat konvergens a $\mathscr{T}_2$ szerint.

A $\mathscr{T}_1 \subseteq \mathscr{T}_2$ feltétel alapján $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ nyilvánvalóan A-ban haladó Cauchy-sorozat a $\mathscr{T}_1$ szerint is, ezért a hipotézis alapján van olyan $x \in E$, hogy $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergál x-hez $\mathscr{T}_1$ szerint. Megmutatjuk, hogy az $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sorozat konvergál x-hez $\mathscr{T}_2$ szerint is.

Legyen V a 0-nak tetszőleges környezete $\mathscr{T}_2$ szerint. Jelölje U_1 a $\mathfrak{B}$-nek olyan elemét, amelyre $U_1 \subseteq V$, és képezzük az $U := U_1 \cap (-U_1)$ halmazt; ez a 0-nak olyan környezete E-ben a $\mathscr{T}_2$ szerint, amely szimmetrikus, $\mathscr{T}_1$-sorozatzárt, és $U \subseteq V$. Az U-hoz vegyünk olyan $N \in \mathbb{N}$ indexet, hogy minden $j, k \in \mathbb{N}$ esetén, ha $j, k \geq N$, akkor $x_k - x_j \in U$; ilyen $N \in \mathbb{N}$ azért létezik, mert $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ Cauchy-sorozat $\mathscr{T}_2$ szerint. Ekkor minden $j, k \in \mathbb{N}$

esetén, ha $j, k \geq N$, akkor $x_k \in x_j + U$; vagyis $\{x_k | (k \in \mathbb{N}) \wedge (k \geq N)\} \subseteq x_j + U$. Ugyanakkor, $j \in \mathbb{N}$ esetén az $x_j + U$ halmaz sorozatzárt a $\mathscr{T}_1$ topológia szerint, valamint $(x_k)_{k\in\mathbb{N};\ k\geq N}$ általánosított részsorozata $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$-nek, tehát ez a $\mathscr{T}_1$ szerint szintén konvergál x-hez, így $j \geq N$ esetén $x \in x_j + U$. Tehát minden $\mathbb{N} \ni j$-re, ha $j \geq N$, akkor az U szimmetrikussága folytán $x_j = x + (x_j - x) \in x - U = x + U \subseteq x + V$. Ez azt jelenti, hogy $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergál x-hez $\mathscr{T}_2$ szerint is.

(II) Legyen $\mathfrak{B}$ a 0-nak olyan $\mathscr{T}_2$ szerinti környezetbázisa E-ben, amelynek minden eleme zárt a $\mathscr{T}_1$ topológia szerint. Legyen továbbá $A \subseteq E$ olyan halmaz, amely teljes a $\mathscr{T}_1$ lineáris topológia szerint. Meg fogjuk mutatni, hogy A teljes a $\mathscr{T}_2$ lineáris topológia szerint is.

Ehhez legyen $(x_i)_{i\in I}$ tetszőleges A-ban haladó általánosított Cauchy-sorozat a $\mathscr{T}_2$ szerint; azt kell igazolni, hogy $(x_i)_{i\in I}$ konvergens a $\mathscr{T}_2$ topológia szerint, és minden $\mathscr{T}_2$ szerinti limeszpontja eleme A-nak. Ez utóbbi tulajdonság nyilvánvalóan teljesül, mert A zárt is a $\mathscr{T}_1$ szerint, így a $\mathscr{T}_2$ szerint is zárt. Ezért csak azt kell igazolni, hogy az $(x_i)_{i\in I}$ általánosított sorozat konvergens a $\mathscr{T}_2$ szerint.

A $\mathscr{T}_1 \subseteq \mathscr{T}_2$ feltétel alapján $(x_i)_{i\in I}$ nyilvánvalóan A-ban haladó általánosított Cauchy-sorozat a $\mathscr{T}_1$ szerint is, ezért a hipotézis alapján van olyan $x \in E$, hogy $(x_i)_{i\in I}$ konvergál x-hez $\mathscr{T}_1$ szerint. Megmutatjuk, hogy az $(x_i)_{i\in I}$ általánosított sorozat konvergál x-hez $\mathscr{T}_2$ szerint is.

Legyen V a 0-nak tetszőleges környezete $\mathscr{T}_2$ szerint. Jelölje U_1 a $\mathfrak{B}$-nek olyan elemét, amelyre $U_1 \subseteq V$, és képezzük az $U := U_1 \cap (-U_1)$ halmazt; ez a 0-nak olyan környezete E-ben a $\mathscr{T}_2$ szerint, amely szimmetrikus, $\mathscr{T}_1$-zárt, és $U \subseteq V$. Az U-hoz vegyünk olyan $i_U \in I$ indexet, hogy minden $j, k \in I$ esetén, ha $j, k \geq i_U$, akkor $x_k - x_j \in U$; ilyen $i_U \in I$ azért létezik, mert $(x_i)_{i\in I}$ általánosított Cauchy-sorozat $\mathscr{T}_2$ szerint. Ekkor minden $j, k \in I$ esetén, ha $j, k \geq i_U$, akkor $x_k \in x_j + U$; vagyis $\{x_k | (k \in I) \wedge (k \geq i_U)\} \subseteq x_j + U$. Ugyanakkor, $j \in I$ esetén az $x_j + U$ halmaz zárt a $\mathscr{T}_1$ topológia szerint, valamint $(x_k)_{k\in I;\ k\geq i_U}$ általánosított részsorozata $(x_i)_{i\in I}$-nek, tehát ez a $\mathscr{T}_1$ szerint szintén konvergál x-hez, így $j \geq i_U$ esetén $x \in x_j + U$. Tehát minden $I \ni j$-re, ha $j \geq i_U$, akkor az U szimmetrikussága folytán $x_j = x + (x_j - x) \in x - U = x + U \subseteq x + V$. Ez azt jelenti, hogy $(x_i)_{i\in I}$ konvergál x-hez $\mathscr{T}_2$ szerint is. ■

6.8.3. Állítás. *Minden gyengén kváziteljes topologikus vektortér kváziteljes. Minden gyengén teljes topologikus vektortér teljes.*

Bizonyítás. Legyen E topologikus vektortér, és jelölje $\mathscr{T}$ az E topológiáját. Ekkor az E vektortér feletti $\sigma(E, E')$ és $\mathscr{T}$ lineáris topológiákra teljesül a $\sigma(E, E') \subseteq \mathscr{T}$ összefüggés, továbbá a 0 vektor konvex és $\mathscr{T}$-zárt $\mathscr{T}$-környezeteinek halmaza a 0-nak olyan környezetbázisa $\mathscr{T}$ szerint, amelynek mindegyik eleme $\sigma(E, E')$-zárt halmaz. Ezért a teljességi lemma alapján az E minden $\sigma(E, E')$-teljes részhalmaza $\mathscr{T}$-teljes is. Ebből azonnal látszik, hogy ha E teljes a $\sigma(E, E')$ topológia szerint (vagyis E gyengén teljes), akkor a $\mathscr{T}$ szerint is teljes.

Tegyük fel, hogy E kváziteljes a $\sigma(E, E')$ topológia szerint, és legyen $A \subseteq E$ egy $\mathscr{T}$ szerint korlátos és zárt halmaz. Ekkor az A halmaz $\sigma(E, E')$-korlátos is; jelölje $\tilde{A}$ az A halmaz $\sigma(E, E')$ topológia szerinti lezártját. Ekkor $\tilde{A}$ is $\sigma(E, E')$-korlátos és persze $\sigma(E, E')$-zárt is, így az E gyenge kváziteljessége folytán $\tilde{A}$ teljes a $\sigma(E, E')$ topológia szerint. A bizonyítás első bekezdése alapján $\tilde{A}$ a $\mathscr{T}$ topológia szerint is teljes. Ugyanakkor az A halmaz az $\tilde{A}$-nak $\mathscr{T}$-zárt részhalmaza, így A teljes a $\mathscr{T}$ topológia szerint. Ezért E kváziteljes a $\mathscr{T}$ topológia szerint. ■

A következő állítás bizonyításában felhasználjuk azt, hogy ha E topologikus vektortér, $M \subseteq E$ lineáris altér és $A \subseteq M$, akkor az A halmaz E-beli sorozatteljességéből következik, hogy A sorozatteljes az M topologikus lineáris altérben is. Valóban, jelölje $\mathscr{T}$ az E lineáris topológiáját, és legyen $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ egy A-ban haladó, $\mathscr{T}|M$ szerinti Cauchy-sorozat. Ekkor $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ a $\mathscr{T}$ szerint is Cauchy-sorozat, és A-ban halad, így az A halmaz $\mathscr{T}$ szerinti sorozatteljessége miatt $\mathscr{T}$-konvergens, és minden $\mathscr{T}$ szerinti limeszpontja eleme A-nak. Ezért van olyan pont M-ben, amelyhez $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergál $\mathscr{T}$ szerint, így $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ a $\mathscr{T}|M$ altértopológia szerint is konvergens. Ha $x \in M$ olyan pont, amelyhez $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ a $\mathscr{T}|M$ szerint konvergál, akkor $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ az x-hez $\mathscr{T}$ szerint is konvergál, tehát $x \in A$. Ez azt jelenti, hogy az A halmaz sorozatteljes $\mathscr{T}|M$ szerint.

6.8.4. Lemma. (Elnyelési lemma) *Topologikus vektortérben minden hordó elnyel minden konvex, kiegyensúlyozott, korlátos és sorozatteljes halmazt.*

Bizonyítás. Legyen T hordó az E topologikus vektortérben, és $A \subseteq E$ konvex, kiegyensúlyozott, korlátos és sorozatteljes halmaz. Megmutatjuk, hogy létezik olyan $r \in \mathbb{R}^+$, amelyre $r.A \subseteq T$, tehát T elnyeli A-t.

Jelölje $\mathscr{T}$ az E topológiáját, és legyen E_A az A halmaz által generált lineáris altér E-ben. Világos, hogy A konvex és kiegyensúlyozott halmaz az E_A vektortérben is, és ebben elnyelő is, mert ha $x \in E_A$ és $(\lambda_i)_{i\in I}$ olyan rendszer $\mathbb{K}$-ban, valamint $(x_i)_{i\in I}$ olyan rendszer A-ban, hogy I nem üres és véges, továbbá minden $I \ni i$-re $\lambda_i \neq 0$, valamint $x = \sum_{i\in I} \lambda_i.x_i$, akkor

$$x = \left(\sum_{j\in I} |\lambda_j|\right)\left(\sum_{i\in I} \left(\frac{|\lambda_i|}{\sum_{j\in I} |\lambda_j|}\right)\left(\frac{\lambda_i}{|\lambda_i|}\right).x_i\right) \in \left(\sum_{j\in I} |\lambda_j|\right).\mathrm{co}(A) = \left(\sum_{j\in I} |\lambda_j|\right).A,$$

mert $i \in I$ esetén az A kiegyensúlyozottsága miatt $\left(\frac{\lambda_i}{|\lambda_i|}\right).x_i \in A$.

Ezért elkészíthetjük az A halmaz p_A *Minkowski-funkcionálját* E_A-ban; vagyis $p_A : E_A \to \mathbb{R}_+$ az a függvény, amelyre minden $x \in E_A$ esetén

$$p_A(x) := \inf\{\lambda \in \mathbb{R}^+ \mid x \in \lambda.A\}.$$

Tudjuk, hogy az A konvexitása és kiegyensúlyozottsága miatt p_A félnorma E_A felett, és $[p_A < 1] \subseteq A \subseteq [p_A \leq 1]$.

Legyen V a 0-nak környezete E-ben a $\mathscr{T}$ topológia szerint. Ekkor az A halmaz $\mathscr{T}$-korlátossága miatt van olyan $\lambda \in \mathbb{K} \setminus \{0\}$, hogy $A \subseteq \lambda.V$, ezért $\lambda^{-1}.A \subseteq V \cap E_A$. De A a 0-nak $\mathscr{T}_{p_A}$ szerinti környezete E_A-ban, így $\lambda \in \mathbb{K} \setminus \{0\}$ esetén $\lambda^{-1}.A$ is az, következésképpen $V \cap E_A$ a 0-nak $\mathscr{T}_{p_A}$ szerinti környezete E_A-ban. Ez azt jelenti, hogy $\mathscr{T}|E_A \subseteq \mathscr{T}_{p_A}$.

Ha $r \in \mathbb{R}^+$, akkor nyilvánvaló, hogy A-val együtt $r.A$ is sorozatteljes halmaz a $\mathscr{T}$ lineáris topológia szerint és persze $r.A \subseteq E_A$. Ebből következik, hogy minden $\mathbb{R}^+ \ni r$-re $r.A$ sorozatteljes halmaz a $\mathscr{T}|E_A$ altértopológia szerint is E_A-ban. Ugyanakkor $\{r.A | r \in \mathbb{R}^+\}$ a 0-nak környezetbázisa E_A-ban a $\mathscr{T}_{p_A}$ topológia szerint.

Összefoglalva; $\mathscr{T}|E_A$ és $\mathscr{T}_{p_A}$ olyan lineáris topológiák az E_A vektortér felett, hogy $\mathscr{T}|E_A \subseteq \mathscr{T}_{p_A}$, és a 0-nak létezik E_A-ban olyan környezetbázisa $\mathscr{T}_{p_A}$ szerint, amelynek minden eleme sorozatteljes, így sorozatzárt is a $\mathscr{T}|E_A$ topológia szerint. Ezért a teljességi lemma alapján az E_A minden olyan részhalmaza sorozatteljes a $\mathscr{T}_{p_A}$ topológia szerint, amely a $\mathscr{T}|E_A$ szerint sorozatteljes. Az A halmaz sorozatteljes $\mathscr{T}|E_A$ szerint, így ez a 0-nak $\mathscr{T}_{p_A}$ szerint sorozatteljes környezete. Ezért E_A a $\mathscr{T}_{p_A}$ topológiával ellátva *teljes és félnormálható* topologikus vektortér.

Világos, hogy a $T \cap E_A$ halmaz hordó E_A-ban a $\mathscr{T}|E_A$ topológia szerint, így $\mathscr{T}|E_A \subseteq \mathscr{T}_{p_A}$ miatt a $\mathscr{T}_{p_A}$ topológia szerint is hordó. A teljes és félnormálható terek hordós terek, ezért $T \cap E_A$ a 0-nak környezete $\mathscr{T}_{p_A}$ szerint. Ekkor viszont létezik olyan $r \in \mathbb{R}^+$, hogy $r.A \subseteq T \cap E_A \subseteq T$, ezért T elnyeli az A halmazt. ■

6.9. Infrahordós terek

6.9.1. Definíció. *Az E lokálisan konvex teret* **infrahordósnak** *nevezzük, ha az E-ben minden olyan hordó a 0-nak környezete, amely minden korlátos halmazt elnyel.*

A definíció alapján világos, hogy minden hordós tér infrahordós, vagyis az infrahordósság a hordósság fogalmának általánosítása. Nyilvánvaló, hogy minden normálható tér infrahordós, mert normálható térben a 0-nak létezik korlátos környezete, így egy olyan hordó, amely minden korlátos halmazt elnyel, a 0 valamelyik környezetét is elnyeli, ezért a 0-nak környezete. A következő pontban majd igazoljuk, hogy minden metrizálható lokálisan konvex tér is infrahordós. A 3.2.-ben láttunk példát olyan normált térre, amely nem hordós tér, tehát létezik nem hordós, de infrahordós tér.

6.9.2. Állítás. *Minden szeparált infrahordós tér Mackey-tér.*

Bizonyítás. Azt kell igazolni, hogy ha E szeparált infrahordós tér és $S \subseteq E'$ konvex, kiegyensúlyozott, $\sigma(E', E)$-kompakt halmaz, akkor S° a 0-nak környezete E-ben. A hordók poláris jellemzése alapján S° hordó E-ben, hiszen S kiegyensúlyozott és $\sigma(E', E)$-korlátos halmaz, ezért elég azt megmutatni, hogy ha $B \subseteq E$ korlátos halmaz, akkor S° elnyeli a B halmazt. Az $\mathrm{eq}(B)$ halmaz szintén korlátos E-ben, így ez $\sigma(E, E')$-korlátos és kiegyensúlyozott, tehát $(\mathrm{eq}(B))^\circ$ hordó E'-ben a $\sigma(E', E)$ topológia szerint. Ugyanakkor $S \subseteq E'$ konvex, kiegyensúlyozott, $\sigma(E', E)$-korlátos és $\sigma(E', E)$-teljes halmaz, ezért az elnyelési lemma alapján $(\mathrm{eq}(B))^\circ$ elnyeli S-t. Ezért van olyan $r \in \mathbb{R}^+$, hogy $S \subseteq r.(\mathrm{eq}(B))^\circ = (r^{-1}.\mathrm{eq}(B))^\circ$, így $r^{-1}.B \subseteq r^{-1}.\mathrm{eq}(B) \subseteq (r^{-1}.\mathrm{eq}(B))^{\circ\circ} \subseteq S^\circ$, vagyis $B \subseteq r.S^\circ$, amiből következik, hogy S° elnyeli B-t. ■

A következő állításban felhasználjuk azt az elemi általános topológiai tényt, hogy ha E sűrű topologikus altere a T topologikus térnek, $x \in E$ és V az x-nek környezete E-ben az altértopológia szerint, akkor a V halmaz lezártja T-ben az x-nek környezete T-ben. Legyen ugyanis W az x pontnak olyan nyílt környezete T-ben, amelyre $W \cap E \subseteq V$. Ekkor $W \subseteq \overline{V}$, hiszen $y \in W$ esetén W az y-nak környezete T-ben, tehát, ha U az y-nak tetszőleges környezete T-ben, akkor $U \cap W$ is az, így az E sűrűsége folytán $(U \cap W) \cap E \neq \emptyset$, következésképpen $U \cap V \neq \emptyset$, hiszen $U \cap V \supseteq U \cap (W \cap E) = (U \cap W) \cap E \neq \emptyset$.

6.9.3. Állítás. *Minden kváziteljes infrahordós tér hordós tér. Szeparált infrahordós tér teljes burka hordós tér.*

Bizonyítás. Legyen E kváziteljes infrahordós tér, és vegyünk egy $T \subseteq E$ hordót. Azt kell igazolni, hogy T a 0-nak környezete E-ben. Az E infrahordóssága miatt ehhez elég azt megmutatni, hogy ha $A \subseteq E$ korlátos halmaz, akkor T elnyeli az A halmazt. Ez valóban így van, mert az A halmaz abszolút konvex burka konvex, kiegyensúlyozott, zárt és szintén korlátos halmaz, tehát az E kváziteljessége folytán teljes is, így az elnyelési lemma alapján minden E-beli hordó elnyeli az A abszolút konvex burkát, következésképpen T elnyeli A-t.

Legyen E szeparált infrahordós tér és E az E teljes burka. Jelöljön T tetszőleges hordót E-ban. Nyilvánvaló, hogy $T \cap E$ hordó E-ben, tehát, ha ez a halmaz elnyelné az E minden korlátos részhalmazát, akkor az E infrahordóssága folytán $T \cap E$ a 0-nak környezete volna az E topologikus térben, így az állítás előtt álló megjegyzés alapján $\overline{T \cap E}$ a 0-nak környezete E-ban, következésképpen T is környezete a 0-nak E-ban, hiszen $\overline{T \cap E} \subseteq T$, mert T zárt E-ben.

Legyen tehát $A \subseteq E$ tetszőleges korlátos halmaz; igazoljuk, hogy $T \cap E$ elnyeli az A halmazt az E vektortérben. Ekkor a E lokális konvexitása miatt $\overline{\mathrm{co}}(\mathrm{eq}(A))$ szintén korlátos halmaz E-ban, és zárt is az E teljes szeparált topologikus vektortérben, tehát $\overline{\mathrm{co}}(\mathrm{eq}(A))$ teljes halmaz E-ban, továbbá konvex, kiegyensúlyozott és korlátos. Az elnyelési lemma szerint E minden hordója elnyeli $\overline{\mathrm{co}}(\mathrm{eq}(A))$-t, így T elnyeli az A halmazt. Ezért $A \subseteq E$ miatt $T \cap E$ is elnyeli az A halmazt. ■

6.10. A dualitással kompatibilis topológiák szerint korlátos halmazok jellemzése

6.10.1. Tétel. (A dualitással kompatibilis topológiák szerint korlátos halmazok jellemzése) *Legyen (E, F) duális pár. Ekkor az E és F közötti dualitással kompatibilis E feletti topológiák szerint a korlátos halmazok ugyanazok.*

Bizonyítás. Tekintettel arra, hogy egy nagyobb lineáris topológia szerint korlátos halmazok a kisebb lineáris topológiák szerint is korlátosak; elég azt igazolni, hogy minden olyan $B \subseteq E$ halmaz, amely korlátos a $\sigma(E, F)$ topológia szerint, a $\tau(E, F)$ Mackey-topológia szerint is korlátos.

Legyen tehát a $B \subseteq E$ halmaz korlátos a $\sigma(E, F)$ topológia szerint. Azt kell igazolni, hogy a $\{\langle x, \cdot\rangle | x \in B\}$ funkcionál-halmaz minden $S \subseteq F$ konvex, kiegyensúlyozott és $\sigma(F, E)$-kompakt halmazon *egyenletesen korlátos*, vagyis $\sup\limits_{y \in S} \sup\limits_{x \in B} |\langle x, y\rangle| < +\infty$. Legyen tehát $S \subseteq F$ konvex, kiegyensúlyozott és $\sigma(F, E)$-kompakt halmaz. Az $\mathrm{eq}(B)$ kiegyensúlyozott halmaz szintén korlátos a $\sigma(E, F)$ topológia szerint, ezért $(\mathrm{eq}(B))^{\circ}$ *hordó* F-ben a $\sigma(F, E)$ topológia szerint. Ugyanakkor S az F-nek konvex, kiegyensúlyozott, $\sigma(F, E)$-korlátos és $\sigma(F, E)$-teljes részhalmaza, így az elnyelési lemma szerint $(\mathrm{eq}(B))^{\circ}$ elnyeli az S halmazt. Ezért van olyan $r \in \mathbb{R}^+$, hogy $S \subseteq r.(\mathrm{eq}(B))^{\circ} = (r^{-1}.\mathrm{eq}(B))^{\circ}$. Tehát $y \in S$ esetén $y \in (r^{-1}.\mathrm{eq}(B))^{\circ}$, vagyis minden $\mathrm{eq}(B) \ni x$-re $|\langle r^{-1}.x, y\rangle| \leq 1$, így $|\langle x, y\rangle| \leq r$. Ebből következik, hogy minden $S \ni y$-ra és $B \ni x$-re $|\langle x, y\rangle| \leq r$, tehát $\sup\limits_{y \in S} \sup\limits_{x \in B} |\langle x, y\rangle| < +\infty$. ■

6.10.2. Következmény. *Ha E szeparált lokálisan konvex tér, akkor az E korlátos részhalmazai megegyeznek az E vektortér $\sigma(E, E')$-korlátos részhalmazaival.*

Bizonyítás. Nyilvánvalóan következik az előző tételből, mert szeparált lokálisan konvex tér gyengített topológiája kompatibilis a kanonikus dualitással. ■

6.10.3. Következmény. *Legyen E normált tér, F szeparált lokálisan konvex tér és $f : E \rightarrowtail F$ függvény. Legyen $\mathfrak{a} \in E$ olyan pont, hogy minden $u \in F'$ esetén az $u \circ f : E \rightarrowtail \mathbb{K}$ függvény differenciálható $\mathfrak{a}$-ban (ilyen esetben azt mondjuk, hogy f skalárisan differenciálható $\mathfrak{a}$-ban). Ekkor az f függvény folytonos az $\mathfrak{a}$ pontban.*

Bizonyítás. A feltevés alapján $\mathfrak{a}$ belső pontja $\mathrm{Dom}(f)$-nek, ezért az átviteli elvet alkalmazva azt fogjuk igazolni, hogy ha $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ olyan $\mathrm{Dom}(f) \setminus \{\mathfrak{a}\}$-ban haladó sorozat, amely $\mathfrak{a}$-hoz konvergál E-ben, akkor az $(f(x_n))_{n \in \mathbb{N}}$ sorozat $f(\mathfrak{a})$-hoz konvergál F-ben.

Ehhez képezzük az $\left(\frac{f(x_n)-f(\mathfrak{a})}{\|x_n-\mathfrak{a}\|}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ sorozatot F-ben, továbbá legyen $u \in F'$ tetszőleges. Ekkor minden $n \in \mathbb{N}$ esetén

$$u\left(\frac{f(x_n)-f(\mathfrak{a})}{\|x_n-\mathfrak{a}\|}\right) = \frac{(u\circ f)(x_n)-(u\circ f)(\mathfrak{a})}{\|x_n-\mathfrak{a}\|} =$$

$$= \frac{(u\circ f)(x_n)-(u\circ f)(\mathfrak{a})-(D(u\circ f))(\mathfrak{a})(x_n-\mathfrak{a})}{\|x_n-\mathfrak{a}\|}+(D(u\circ f))(\mathfrak{a})\left(\frac{x_n-\mathfrak{a}}{\|x_n-\mathfrak{a}\|}\right),$$

és az $u\circ f$ függvény $\mathfrak{a}$ pontbeli differenciálhatósága miatt

$$\lim_{n\to\infty}\frac{(u\circ f)(x_n)-(u\circ f)(\mathfrak{a})-(D(u\circ f))(\mathfrak{a})(x_n-\mathfrak{a})}{\|x_n-\mathfrak{a}\|}=0,$$

továbbá $(D(u\circ f))(\mathfrak{a}) \in E'$, így

$$\sup_{n\in\mathbb{N}}\left|(D(u\circ f))(\mathfrak{a})\left(\frac{x_n-\mathfrak{a}}{\|x_n-\mathfrak{a}\|}\right)\right| \le \|(D(u\circ f))(\mathfrak{a})\| < +\infty.$$

Ebből következik, hogy minden $F' \ni u$-ra az $\left(u\left(\frac{f(x_n)-f(\mathfrak{a})}{\|x_n-\mathfrak{a}\|}\right)\right)_{n\in\mathbb{N}}$ számsorozat korlátos, vagyis az $\left(\frac{f(x_n)-f(\mathfrak{a})}{\|x_n-\mathfrak{a}\|}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ vektorsorozat $\sigma(F,F')$-korlátos. Az előző tétel alapján ez a vektorsorozat korlátos F-ben az eredeti topológia szerint is. Tehát, ha U a 0-nak tetszőleges kiegyensúlyozott környezete F-ben, akkor van olyan $r \in \mathbb{R}^+$, hogy minden $n \in \mathbb{N}$ esetén

$$\frac{f(x_n)-f(\mathfrak{a})}{\|x_n-\mathfrak{a}\|} \in r.U,$$

vagyis $f(x_n)-f(\mathfrak{a}) \in \|x_n-\mathfrak{a}\|r.U$; ekkor van olyan $N \in \mathbb{N}$, hogy minden $n > N$ természetes számra $\|x_n-\mathfrak{a}\|r \le 1$, így az U kiegyensúlyozottsága folytán $f(x_n)-f(\mathfrak{a}) \in U$. Ez azt jelenti, hogy az $(f(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ sorozat $f(\mathfrak{a})$-hoz konvergál F-ben. ■

6.11. Gyengén folytonos lineáris operátorok

6.11.1. Állítás. *Legyenek (E_1,F_1) és (E_2,F_2) duális párok.*

a) *Az $u : E_1 \to E_2$ lineáris operátor pontosan akkor folytonos a $\sigma(E_1,F_1)$ és $\sigma(E_2,F_2)$ topológiák szerint, ha*

$$(\forall y_2 \in F_2)(\exists y_1 \in F_1)(\forall x_1 \in E_1): \ \langle u(x_1),y_2\rangle = \langle x_1,y_1\rangle.$$

b) *Ha az $u : E_1 \to E_2$ lineáris operátor folytonos a $\sigma(E_1,F_1)$ és $\sigma(E_2,F_2)$ topológiák szerint, akkor*

$$(\forall y_2 \in F_2)(\exists_1 y_1 \in F_1)(\forall x_1 \in E_1): \ \langle u(x_1),y_2\rangle = \langle x_1,y_1\rangle$$

teljesül, és ha u' jelöli azt az $F_2 \to F_1$ függvényt, amelyre

$$(\forall y_2 \in F_2)(\forall x_1 \in E_1): \ \langle u(x_1), y_2 \rangle = \langle x_1, u'(y_2) \rangle,$$

akkor $u' : F_2 \to F_1$ olyan lineáris operátor, amely folytonos a $\sigma(F_2, E_2)$ és $\sigma(F_1, E_1)$ topológiák szerint.

Bizonyítás. a) A $\sigma(E_2, F_2)$ topológia projektíven van előállítva, ezért az $u : E_1 \to E_2$ lineáris operátor pontosan akkor folytonos a $\sigma(E_1, F_1)$ és $\sigma(E_2, F_2)$ topológiák szerint, ha minden $y_2 \in F_2$ esetén az $\langle \cdot, y_2 \rangle \circ u : E_1 \to \mathbb{K}$ lineáris funkcionál folytonos E_1 felett a $\sigma(E_1, F_1)$ topológia szerint, ami a $\sigma(E_1, F_1)$ topológia értelmezése alapján azt jelenti, hogy van olyan $y_1 \in F_1$, amelyre $\langle \cdot, y_2 \rangle \circ u = \langle \cdot, y_1 \rangle$.

b) Ha az $u : E_1 \to E_2$ lineáris operátor folytonos a $\sigma(E_1, F_1)$ és $\sigma(E_2, F_2)$ topológiák szerint, $y_2 \in F_2$ és $y_1, y_1' \in F_1$ olyanok, hogy minden $E_1 \ni x_1$-re $\langle x_1, y_1' \rangle = \langle u(x_1), y_2 \rangle = \langle x_1, y_1 \rangle$, akkor minden $E_1 \ni x_1$-re $\langle x_1, y_1' - y_1 \rangle = 0$, így a $(\mathrm{D_I})$ alapján $y_1' = y_1$. Ezért jól értelmezett az az $u' : F_2 \to F_1$ függvény, amelyre

$$(\forall y_2 \in F_2)(\forall x_1 \in E_1): \ \langle u(x_1), y_2 \rangle = \langle x_1, u'(y_2) \rangle.$$

Ha $y_2, y_2' \in F_2$, akkor minden $x_1 \in E_1$ esetén $\langle u(x_1), y_2 \rangle = \langle x_1, u'(y_2) \rangle$ és $\langle u(x_1), y_2' \rangle = \langle x_1, u'(y_2') \rangle$, következésképpen minden $x_1 \in E_1$ esetén az u' értelmezése alapján

$$\langle x_1, u'(y_2 + y_2') \rangle = \langle u(x_1), y_2 + y_2' \rangle = \langle u(x_1), y_2 \rangle + \langle u(x_1), y_2' \rangle =$$

$$= \langle x_1, u'(y_2) \rangle + \langle x_1, u'(y_2') \rangle = \langle x_1, u'(y_2) + u'(y_2') \rangle,$$

ahol azt használtuk ki, hogy az $\langle x_1, \cdot \rangle : F_1 \to \mathbb{K}$ leképezés additív. Ebből következik, hogy u' additív.

Ha $y_2 \in F_2$ és $\lambda \in \mathbb{K}$, akkor minden $x_1 \in E_1$ esetén az u' értelmezése alapján

$$\langle x_1, u'(\lambda.y_2) \rangle = \langle u(x_1), \lambda.y_2 \rangle = \lambda \langle u(x_1), y_2 \rangle = \lambda \langle x_1, u'(y_2) \rangle = \langle x_1, \lambda.u'(y_2) \rangle,$$

ahol azt használtuk ki, hogy az $\langle x_1, \cdot \rangle : F_1 \to \mathbb{K}$ leképezés $\mathbb{K}$-homogén. Ebből következik, hogy u' is $\mathbb{K}$-homogén.

Tehát az $u' : F_2 \to F_1$ leképezés lineáris operátor. Most az a)-t alkalmazzuk u helyett u'-re és az (E_1, F_1) duális pár helyett az (F_2, E_2), valamint az (E_2, F_2) duális pár helyett az (F_1, E_1) párt véve. Azonnal kapjuk, hogy az u' lineáris operátor folytonos a $\sigma(F_2, E_2)$ és $\sigma(F_1, E_1)$ topológiák szerint. ■

6.11.2. Definíció. *Ha (E_1, F_1) és (E_2, F_2) duális párok és $u : E_1 \to E_2$ olyan lineáris operátor, amely folytonos a $\sigma(E_1, F_1)$ és $\sigma(E_2, F_2)$ topológiák szerint, akkor az előző állításban bevezetett $u' : F_2 \to F_1$ lineáris operátort az u operátor (adott dualitások által meghatározott)* **duálisának** *nevezzük.*

Legyenek (E_1, F_1) és (E_2, F_2) duális párok és $u : E_1 \to E_2$ olyan lineáris operátor, amely folytonos a $\sigma(E_1, F_1)$ és $\sigma(E_2, F_2)$ topológiák szerint. Könnyen látható, hogy ekkor minden $S \subseteq F_2$ halmazra $(u'\langle S\rangle)^\circ = \overset{-1}{u}\langle S^\circ\rangle$. Valóban, ha $x_2 \in E_2$, akkor

$$x_2 \in (u'\langle S\rangle)^\circ \Leftrightarrow (\forall y_2 \in S) : \Re(\langle x_2, u'(y_2)\rangle) \leq 1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (\forall y_2 \in S) : \Re(\langle u(x_2), y_2\rangle) \leq 1 \Leftrightarrow u(x_2) \in S^\circ \Leftrightarrow x_2 \in \overset{-1}{u}\langle S^\circ\rangle.$$

Hasonlóan látható, hogy $S \subseteq E_1$ esetén $(u\langle S\rangle)^\circ = \overset{-1}{u'}\langle S^\circ\rangle$ teljesül, mert ha $y_2 \in F_2$, akkor

$$y_2 \in (u\langle S\rangle)^\circ \Leftrightarrow (\forall x_1 \in S) : \Re(\langle u(x_1), y_2\rangle) \leq 1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (\forall x_1 \in S) : \Re(\langle x_1, u'(y_2)\rangle) \leq 1 \Leftrightarrow u'(y_2) \in S^\circ \Leftrightarrow y_2 \in \overset{-1}{u'}\langle S^\circ\rangle.$$

Ezeket a halmaz-egyenlőségeket gyakran alkalmazzuk a duális operátorokkal kapcsolatos topológiai megfontolásokban.

6.11.3. Definíció. *Legyenek E és F szeparált lokálisan konvex terek. Egy $u : E \to F$ lineáris operátort* **gyengén folytonosnak** *nevezünk, ha u folytonos a $\sigma(E, E')$ és $\sigma(F, F')$ topológiák szerint. Egy $u : E \to F$ lineáris operátort* **erősen folytonosnak** *nevezünk, ha u folytonos a $\beta(E, E')$ és $\beta(F, F')$ topológiák szerint.*

6.11.4. Állítás. *Legyenek E és F szeparált lokálisan konvex terek, valamint $u : E \to F$ lineáris operátor. Ha u folytonos, akkor u gyengén is folytonos, továbbá az $u' : F' \to E'$ duális operátor folytonos a $\sigma(F', F)$ és $\sigma(E', E)$ topológiák, valamint a $\beta(F', F)$ és $\beta(E', E)$ topológiák szerint.*

Bizonyítás. Az $u' : F' \to E'$ duális operátor – a definíciója alapján – nyilvánvalóan folytonos a $\sigma(F', F)$ és $\sigma(E', E)$ topológiák szerint.

Legyen V a 0-nak környezete E'-ben a $\beta(E', E)$ topológia szerint. Ekkor vehetünk olyan $S \subseteq E$ halmazt, amely korlátos a $\sigma(E, E')$ topológia szerint, és $S^\circ \subseteq V$. Ekkor S az E eredeti topológiája szerint is korlátos, tehát az u folytonossága miatt $u\langle S\rangle$ korlátos F-ben, tehát $\sigma(F, F')$-korlátos is. Ebből következik, hogy $(u\langle S\rangle)^\circ$ a 0-nak környezete F'-ben a $\beta(F', F)$ topológia szerint. Ugyanakkor $(u\langle S\rangle)^\circ = \overset{-1}{u'}\langle S^\circ\rangle$, ezért $u'\langle (u\langle S\rangle)^\circ\rangle = u'\langle \overset{-1}{u'}\langle S^\circ\rangle\rangle \subseteq S^\circ \subseteq V$, vagyis u' a 0-ban folytonos a $\beta(F', F)$ és $\beta(E', E)$ topológiák szerint. ■

6.11.5. Állítás. *Legyenek E és F szeparált lokálisan konvex terek. Ekkor minden $u : E \to F$ gyengén folytonos lineáris operátor folytonos a $\tau(E, E')$ és $\tau(F, F')$ Mackey-topológiák szerint.*

Bizonyítás. Legyen $u : E \to F$ gyengén folytonos lineáris operátor és V a 0-nak környezete a $\tau(F, F')$ topológia szerint. A Mackey-topológia definíciója alapján vehetünk olyan $S \subseteq F'$ konvex, kiegyensúlyozott, $\sigma(F', F)$-kompakt halmazt, amelyre $S^\circ \subseteq V$. Az $u' : F' \to E'$ duális operátor folytonos a $\sigma(F', F)$ és $\sigma(E', E)$ topológiák szerint, ezért az $u'\langle S\rangle \subseteq E'$ halmaz $\sigma(E', E)$-kompakt, továbbá konvex és kiegyensúlyozott. Ebből következik, hogy $(u'\langle S\rangle)^\circ$ a 0-nak környezete a $\tau(E, E')$ topológia szerint. Ugyanakkor $(u'\langle S\rangle)^\circ = \overset{-1}{u}\langle S^\circ\rangle \subseteq \overset{-1}{u}\langle V\rangle$, tehát $\overset{-1}{u}\langle V\rangle$ a 0-nak környezete a $\tau(E, E')$ topológia szerint. Ezért az u operátor folytonos a $\tau(E, E')$ és $\tau(F, F')$ topológiák szerint. ■

6.11.6. Következmény. *Ha E Mackey-tér és F szeparált lokálisan konvex tér, akkor az $E \to F$ folytonos lineáris operátorok megegyeznek az $E \to F$ gyengén folytonos lineáris operátorokkal.*

Bizonyítás. Ha $u : E \to F$ gyengén folytonos lineáris operátor, akkor az előző állítás szerint u folytonos a $\tau(E, E')$ és $\tau(F, F')$ Mackey-topológiák szerint. A hipotézis szerint $\tau(E, E')$ egyenlő az E eredeti topológiájával, továbbá $\tau(F', F)$ majorálja az F topológiáját, ezért u folytonos az E és F eredeti topológiái szerint is. ■

6.12. Gyengén folytonos lineáris operátor gyengén folytonos kiterjesztése

6.12.1. Tétel. (Gyengén folytonos lineáris operátorok gyengén folytonos kiterjesztése). *Legyenek (E_1, F_1) és (E_2, F_2) duális párok, továbbá tegyük fel, hogy E_0 olyan lineáris altere E_1-nek, hogy az E_1 minden E_0 alteret tartalmazó, $\sigma(E_1, F_1)$-sorozatzárt részhalmaza egyenlő E_1-gyel. Ha E_2 sorozatteljes a $\sigma(E_2, F_2)$ topológia szerint, és $u_0 : E_0 \to E_2$ olyan lineáris operátor, amely a $\sigma(E_1, F_1)|E_0$ és $\sigma(E_2, F_2)$ topológiák szerint folytonos, akkor u_0 egyértelműen kiterjeszthető olyan $u : E_1 \to E_2$ lineáris operátorrá, amely a $\sigma(E_1, F_1)$ és $\sigma(E_2, F_2)$ topológiák szerint folytonos (vagyis gyengén folytonos).*

Bizonyítás. Ha H olyan részhalmaza a T topologikus térnek, hogy T az egyetlen sorozatzárt részhalmaza T-nek, amely H-t tartalmazza, akkor H *sűrű* T-ben, hiszen a H lezártja a T-nek H-t tartalmazó zárt, tehát sorozatzárt részhalmaza. Ezért az E_0-ra vonatkozó feltételből következik, hogy E_0 sűrű E_1-ben a $\sigma(E_1, F_1)$ topológia szerint. Tehát a $\sigma(E_2, F_2)$ topológia szeparáltsága folytán legfeljebb egy olyan $E_1 \to E_2$ függvény létezik, amely folytonos a $\sigma(E_1, F_1)$ és $\sigma(E_2, F_2)$ topológiák szerint, és kiterjesztése u_0-nak.

Az u_0-ra vonatkozó folytonossági feltétel azt jelenti, hogy

$$(\forall y_2 \in F_2)(\exists y_1 \in F_1)(\forall x \in E_0) : \ \langle u_0(x), y_2\rangle = \langle x, y_1\rangle.$$

Ha $y_2 \in F_2$ és $y_1, y_1' \in F_1$ olyanok, hogy minden $x \in E_0$ esetén $\langle u_0(x), y_2 \rangle = \langle x, y_1 \rangle$ és $\langle u_0(x), y_2 \rangle = \langle x, y_1' \rangle$, akkor minden $E_0 \ni x$-re $\langle x, y_1 \rangle = \langle x, y_1' \rangle$, így $y_1 = y_1'$, mert E_0 a $\sigma(E_1, F_1)$ topológia szerint sűrű E_1-ben, és a $\langle \cdot, y_1 \rangle$ valamint $\langle \cdot, y_1' \rangle$ funkcionálok folytonosak e topológia szerint. Ezért egyértelműen létezik az a $v : F_2 \to F_1$ függvény, amelyre

$$(\forall y_2 \in F_2)(\forall x \in E_0) : \ \langle u_0(x), y_2 \rangle = \langle x, v(y_2) \rangle.$$

Ismét az E_0 halmaz E_1-beli $\sigma(E_1, F_1)$-sűrűsége alapján kapjuk, hogy v lineáris operátor. Megmutatjuk, hogy v-re teljesül a következő kijelentés:

$$(\forall x \in E_1)(\exists x_2 \in E_2)(\forall y_2 \in F_2) : \ \langle x, v(y_2) \rangle = \langle x_2, y_2 \rangle.$$

Megjegyezzük, hogy minden $x \in E_1$ esetén legfeljebb egy olyan $x_2 \in E_2$ létezik, hogy minden $F_2 \ni y_2$-re $\langle x, v(y_2) \rangle = \langle x_2, y_2 \rangle$, hiszen ha $x_2, x_2' \in E_2$ ilyenek, akkor minden $F_2 \ni y_2$-re $\langle x_2, y_2 \rangle = \langle x, v(y_2) \rangle = \langle x_2', y_2 \rangle$, tehát $x_2 = x_2'$, mivel F_2 szétválasztó E_2 felett. Tekintsük most a

$$Z := \{x \in E_1 \mid (\exists x_2 \in E_2)(\forall y_2 \in F_2) : \ \langle x, v(y_2) \rangle = \langle x_2, y_2 \rangle\}$$

halmazt; azt kell igazolni, hogy $Z = E_1$. Az E_0-ra vonatkozó sűrűségi feltétel alapján ehhez elegendő azt megmutatni, hogy $E_0 \subseteq Z$ és Z sorozatzárt a $\sigma(E_1, F_1)$ topológia szerint.

Az $E_0 \subseteq Z$ összefüggés nyilvánvalóan igaz, mert a v definíciója szerint $x \in E_0$ esetén az $u_0(x) \in E_2$ vektor olyan, hogy minden $F_2 \ni y_2$-re $\langle x, v(y_2) \rangle = \langle u_0(x), y_2 \rangle$.

A Z halmaz $\sigma(E_1, F_1)$ topológia szerinti sorozatzártságának bizonyításához legyen $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ olyan Z-ben haladó sorozat, amely a $\sigma(E_1, F_1)$ topológia szerint konvergál az $x \in E_1$ elemhez. A Z definíciója alapján vehetjük azt az $(\tilde{x}_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sorozatot E_2-ben, amelyre teljesül az, hogy minden $n \in \mathbb{N}$ és $y_2 \in F_2$ esetén $\langle x_n, v(y_2) \rangle = \langle \tilde{x}_n, y_2 \rangle$. Ekkor minden $F_2 \ni y_2$-re az $(\langle \tilde{x}_n, y_2 \rangle)_{n \in \mathbb{N}}$ számsorozat konvergens (és határértéke egyenlő az $\langle x, v(y_2) \rangle$ számmal), ezért az $(\tilde{x}_n)_{n \in \mathbb{N}}$ vektorsorozat a $\sigma(E_2, F_2)$ topológia szerint Cauchy-sorozat. Az E_2 tér sorozatteljes a $\sigma(E_2, F_2)$ topológia szerint, így egyértelműen létezik az az $\tilde{x} \in E_2$ elem, amelyre $\tilde{x} = \lim\limits_{n \to \infty} \tilde{x}_n$ teljesül a $\sigma(E_2, F_2)$ topológia szerint. Ekkor minden $y_2 \in F_2$ esetén

$$\langle x, v(y_2) \rangle = \lim_{n \to \infty} \langle x_n, v(y_2) \rangle = \lim_{n \to \infty} \langle \tilde{x}_n, y_2 \rangle = \langle \tilde{x}, y_2 \rangle,$$

ami azt jelenti, hogy $x \in Z$, vagyis Z sorozatzárt a $\sigma(E_1, F_1)$ topológia szerint.

Jelölje $u : E_1 \to E_2$ azt a függvényt, amelyre minden $x \in E_1$ esetén $u(x) \in E_2$ az a vektor, amelyre minden $y_2 \in F_2$ esetén $\langle x, v(y_2) \rangle = \langle u(x), y_2 \rangle$. Ez az u leképezés lineáris, mert F_2 szétválasztja E_2 elemeit. Világos továbbá, hogy u kiterjesztése u_0-nak, mert $x \in E_0$ esetén $u_0(x) \in E_2$ olyan, hogy minden $F_2 \ni y_2$-re $\langle x, v(y_2) \rangle = \langle u_0(x), y_2 \rangle$. Végül, az u operátor folytonos a $\sigma(E_1, F_1)$ és $\sigma(E_2, F_2)$ topológiák szerint, hiszen ha $y_2 \in F_2$, akkor a definició alapján a $v(y_2) \in F_1$ funkcionálra teljesül az, hogy minden $E \ni x$-re $\langle u(x), y_2 \rangle = \langle x, v(y_2) \rangle$. ■

6.12.2. Állítás. *Legyenek (E_1, F_1) és (E_2, F_2) duális párok, továbbá tegyük fel, hogy E_0 olyan lineáris altere E_1-nek, hogy az E_1 minden E_0-t tartalmazó, $\sigma(E_1, F_1)$-sorozatzárt részhalmaza egyenlő E_1-gyel. Legyen E_2 sorozatteljes a $\sigma(E_2, F_2)$ topológia szerint, és $u_0 : E_0 \to E_2$ olyan lineáris operátor, amely a $\sigma(E_1, F_1)|E_0$ és $\sigma(E_2, F_2)$ topológiák szerint folytonos. Jelölje $u : E_1 \to E_2$ az u_0 egyértelmű, $\sigma(E_1, F_1)$ és $\sigma(E_2, F_2)$ topológiák szerint folytonos lineáris kiterjesztését.*

a) *Legyen $\mu : E_1 \times E_1 \to E_1$ (illetve $\nu : E_2 \times E_2 \to E_2$) olyan művelet, amely változóiban sorozatfolytonos a $\sigma(E_1, F_1)$ (illetve $\sigma(E_2, F_2)$) topológia szerint. Ha $\mu\langle E_0 \times E_0 \rangle \subseteq E_0$ és $u_0 \circ (\mu|_{E_0 \times E_0}) = \nu \circ (u_0 \times u_0)$, akkor $u \circ \mu = \nu \circ (u \times u)$.*

b) *Legyen $i : E_1 \to E_1$ (illetve $j : E_2 \to E_2$) olyan függvény, amely sorozatfolytonos a $\sigma(E_1, F_1)$ (illetve $\sigma(E_2, F_2)$) topológia szerint. Ha $i\langle E_0 \rangle \subseteq E_0$ és $u_0 \circ (i|_{E_0}) = j \circ u_0$, akkor $u \circ i = j \circ u$.*

Bizonyítás. a) Legyen $x_0 \in E_0$ rögzítve, és tekintsük a

$$Z(x_0) := \{x_1 \in E_1 \mid u(\mu(x_0, x_1)) = \nu(u(x_0), u(x_1))\}$$

halmazt. A hipotézis alapján $E_0 \subseteq Z(x_0)$. Az $u : E_1 \to E_2$ operátor folytonos a $\sigma(E_1, F_1)$ és $\sigma(E_2, F_2)$ topológiák szerint, és a $\mu(x_0, \cdot) : E_1 \to E_1$ (illetve $\nu(u(x_0), \cdot) : E_2 \to E_2$) függvény sorozatfolytonos a $\sigma(E_1, F_1)$ (illetve $\sigma(E_2, F_2)$) topológiák szerint. Ezért az $u \circ \mu(x_0, \cdot) : E_1 \to E_2$ (illetve $\nu(u(x_0), \cdot) \circ u : E_1 \to E_2$) függvény sorozatfolytonos a $\sigma(E_1, F_1)$ és $\sigma(E_2, F_2)$ topológiák szerint. Ebből látható, hogy $Z(x_0)$ sorozatzárt a $\sigma(E_1, F_1)$ topológia szerint, így az E_0-ra vonatkozó sűrűségi feltétel alapján $Z(x_0) = E_1$. Legyen most

$$Z := \{z \in E_1 \mid (\forall x \in E_1) : \ u(\mu(z, x)) = \nu(u(z), u(x))\}.$$

Láttuk, hogy minden $E_0 \ni x_0$-ra $Z(x_0) = E_1$, ami éppen azt jelenti, hogy $E_0 \subseteq Z$. Ugyanakkor

$$Z = \bigcap_{x \in E_1} \{z \in E_1 \mid u(\mu(z, x)) = \nu(u(z), u(x))\}.$$

Ha $x \in E_1$, akkor az $u \circ \mu(\cdot, x) : E_1 \to E_2$ és $\nu(\cdot, u(x)) \circ u : E_1 \to E_2$ függvények sorozatfolytonosak a $\sigma(E_1, F_1)$ és $\sigma(E_2, F_2)$ topológiák szerint, így a $\{z \in E_1 | u(\mu(z, x)) = \nu(u(z), u(x))\}$ halmaz $\sigma(E_1, F_1)$-sorozatzárt. Ezért a Z halmaz is $\sigma(E_1, F_1)$-sorozatzárt, így az E_0-ra vonatkozó sűrűségi feltétel alapján $Z = E_1$. Ez az egyenlőség pontosan azt jelenti, hogy $u \circ \mu = \nu \circ (u \times u)$.

b) Legyen $Z := \{x \in E_1 | u(i(x)) = j(u(x))\}$. A hipotézis szerint $E_0 \subseteq Z$, továbbá az $u \circ i : E_1 \to E_2$ és $j \circ u : E_1 \to E_2$ függvények sorozatfolytonosak a $\sigma(E_1, F_1)$ és $\sigma(E_2, F_2)$ topológiák szerint. Ezért a Z halmaz $\sigma(E_1, F_1)$-sorozatzárt, így az E_0-ra vonatkozó sűrűségi feltétel alapján $Z = E_1$. Ez az egyenlőség pontosan azt jelenti, hogy $u \circ i = j \circ u$. ■

7. fejezet

Bornologikus terek és félreflexív terek

7.1. Bornologikus terek és ultrabornologikus terek

7.1.1. Definíció. *Az E lokálisan konvex teret* **bornologikusnak** *nevezzük, ha az E minden olyan konvex részhalmaza a 0-nak környezete, amely minden korlátos halmazt elnyel. Az E lokálisan konvex teret* **ultrabornologikusnak** *nevezzük, ha az E minden olyan konvex részhalmaza a 0-nak környezete, amely minden konvex, kiegyensúlyozott, korlátos és sorozatteljes halmazt elnyel.*

7.1.2. Lemma. *Legyen E topologikus vektortér és $\mathfrak{S}$ az E részhalmazainak tetszőleges halmaza. Ha $A \subseteq E$ olyan konvex halmaz, amely minden $\mathfrak{S}$-beli halmazt elnyel és $0 \in A$, akkor létezik olyan $B \subseteq E$ konvex és kiegyensúlyozott halmaz, amelyre $B \subseteq A$ és B is elnyel minden $\mathfrak{S}$-beli halmazt.*

Bizonyítás. Minden $S \in \mathfrak{S}$ esetén A elnyeli az S halmazt, ezért kiválaszthatunk olyan $\mathbb{R}^+$-ban haladó $(\alpha_S)_{S\in\mathfrak{S}}$ rendszert, amelyre minden $S \in \mathfrak{S}$ esetén fennáll a $\overline{B}_{\alpha_S}(0;\mathbb{K}).S \subseteq A$ összefüggés. Ekkor az $\bigcup_{S\in\mathfrak{S}} \overline{B}_{\alpha_S}(0;\mathbb{K}).S$ halmaz kiegyensúlyozott, tehát $B := \mathrm{co}\left(\bigcup_{S\in\mathfrak{S}} \overline{B}_{\alpha_S}(0;\mathbb{K}).S\right)$ konvex és kiegyensúlyozott. Ugyanakkor $\bigcup_{S\in\mathfrak{S}} \overline{B}_{\alpha_S}(0;\mathbb{K}).S \subseteq A$ és A konvex, ezért $B \subseteq A$. Végül, ha $S \in \mathfrak{S}$, akkor $\alpha_S.S \subseteq B$, így a B konvex és kiegyensúlyozott halmaz elnyeli az S halmazt. ■

A lemmából következik, hogy az E lokálisan konvex tér pontosan akkor bornologikus (illetve ultrabornologikus), ha az E minden olyan konvex *és kiegyensúlyozott* részhalmaza a 0-nak környezete, amely az E minden korlátos (illetve konvex, kiegyensúlyozott, korlátos és sorozatteljes) részhalmazát elnyeli.

Minden hordó konvex halmaz, ezért minden bornologikus tér infrahordós tér. A definíció alapján triviális, hogy minden ultrabornologikus tér bornologikus. Kevésbé nyilvánvaló, de igaz, hogy minden ultrabornologikus tér hordós tér, hiszen az elnyelési lemma szerint topologikus vektortérben minden hordó elnyel minden konvex, kiegyensúlyozott, korlátos és sorozatteljes halmazt.

Tehát ultrabornologikus tér egyszerre bornologikus és hordós tér. Érdekességként megjegyezzük, hogy ismerünk olyan lokálisan konvex teret, amely hordós és bornologikus, de nem ultrabornologikus ([35]).

7.1.3. Állítás. *Minden félmetrizálható lokálisan konvex tér bornologikus.*

Bizonyítás. Legyen E félmetrizálható lokálisan konvex tér és $A \subseteq E$ olyan konvex, kiegyensúlyozott halmaz, amely az E minden korlátos részhalmazát elnyeli. Megmutatjuk, hogy A a 0-nak környezete E-ben.

Indirekt bizonyítunk, tehát feltesszük, hogy A nem környezete a 0-nak E-ben. Az E félmetrizálhatósága folytán vehetjük a 0 kiegyensúlyozott környezeteinek olyan $(V_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sorozatát, hogy $\{V_n|n \in \mathbb{N}\}$ a 0-nak környezetbázisa és minden $n \in \mathbb{N}$ esetén $V_{n+1} \subseteq V_n$. Legyen $(\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}}$ olyan sorozat $\mathbb{K}\setminus\{0\}$-ban, amelyre $(\lambda_n^{-1})_{n\in\mathbb{N}}$ zérussorozat. Minden $n \in \mathbb{N}$ esetén $\lambda_n^{-1}.V_n \nsubseteq A$, különben A a 0-nak környezete volna, hiszen $\lambda_n^{-1}.V_n$ is az. Ezért kiválaszthatunk olyan $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sorozatot, hogy minden $\mathbb{N} \ni n$-re $x_n \in (\lambda_n^{-1}.V_n) \setminus A$, vagyis $\lambda_n.x_n \in V_n$ és $x_n \notin A$. Ha V a 0-nak környezete E-ben, akkor van olyan $N \in \mathbb{N}$, hogy $V_N \subseteq V$, így a $(V_n)_{n\in\mathbb{N}}$ halmazsorozat monoton fogyása miatt minden $n > N$ természetes számra $\lambda_n.x_n \in V_n \subseteq V_N \subseteq V$. Ez azt jelenti, hogy $(\lambda_n.x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ zérussorozat E-ben, következésképpen $\{\lambda_n.x_n|n \in \mathbb{N}\}$ korlátos halmaz. A hipotézis szerint A elnyeli ezt a halmazt, így létezik olyan $\lambda \in \mathbb{K} \setminus \{0\}$, hogy minden $n \in \mathbb{N}$ esetén $\lambda_n.x_n \in \lambda.A$. Ugyanakkor $(\lambda_n^{-1})_{n\in\mathbb{N}}$ zérussorozat $\mathbb{K}$-ban, tehát vehetünk olyan $m \in \mathbb{N}$ számot, hogy $|\lambda| \leq |\lambda_m|$. Ekkor az A kiegyensúlyozottsága miatt $x_m \in \lambda_m^{-1}.(\lambda.A) \subseteq A$, holott minden $n \in \mathbb{N}$ esetén $x_n \notin A$. Ez az ellentmondás mutatja, hogy A a 0-nak környezete E-ben. ■

7.2. Bornologikus tér feletti lineáris operátor folytonossága

A következő állítás megmutatja, hogy ha E bornologikus tér, akkor az E-n értelmezett, lokálisan konvex terekbe ható lineáris operátorok esetében a folytonosság, a sorozatfolytonosság és a korlátosság ekvivalens tulajdonságok.

7.2.1. Tétel. *Legyen E bornologikus tér, F lokálisan konvex tér, és $u : E \to F$ lineáris operátor. A következő állítások ekvivalensek.*

(i) $u \in \mathscr{L}(E; F)$.

(ii) *Minden E-ben haladó $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ zérussorozatra $(u(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ zérussorozat F-ben (ami* *ekvivalens azzal, hogy az u függvény sorozatfolytonos*).

(iii) *Minden E-ben haladó $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ zérussorozatra $(u(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ korlátos sorozat F-ben.*

(iv) $u \in \mathscr{B}(E;F)$.

Bizonyítás. (i)⇒(ii) A függvények folytonosságával kapcsolatos átviteli elv alapján nyilvánvaló.

(ii)⇒(iii) Következik abból, hogy minden konvergens sorozat értékkészlete korlátos halmaz.

(iii)⇒(iv) Tegyük fel, hogy (iv) nem igaz, tehát legyen $B \subseteq E$ olyan korlátos halmaz, amelyre az $u\langle B\rangle \subseteq F$ halmaz nem korlátos. Vegyük a 0-nak olyan V környezetét F-ben, amely nem nyeli el $u\langle B\rangle$-t, továbbá rögzítsük a 0-nak olyan W kiegyensúlyozott környezetét F-ben, hogy $W \subseteq V$. Természetesen ekkor W sem nyeli el az $u\langle B\rangle$ halmazt. Vegyünk olyan $(\sigma_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sorozatot $\mathbb{K}\setminus\{0\}$-ban, amelyre $(\sigma_n^{-1})_{n\in\mathbb{N}}$ zérussorozat $\mathbb{K}$-ban. Ekkor minden $\mathbb{N} \ni n$-re $u\langle B\rangle \not\subseteq \sigma_n^2.W$, ezért kiválaszthatunk olyan $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sorozatot B-ből, hogy minden $n \in \mathbb{N}$ esetén $u(x_n) \notin \sigma_n^2.W$. A korlátos halmazok sorozatokkal való jellemzése alapján $(\sigma_n^{-1}.x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ zérussorozat E-ben, hiszen B az E-nek korlátos részhalmaza, $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ a B-ben halad és $(\sigma_n^{-1})_{n\in\mathbb{N}}$ zérussorozat $\mathbb{K}$-ban. Ha (iii) teljesülne, akkor az $\{u(\sigma_n^{-1}.x_n)|n \in \mathbb{N}\}$ halmaz korlátos volna F-ben, így W-hez létezne olyan $\sigma \in \mathbb{K}\setminus\{0\}$, hogy $\{u(\sigma_n^{-1}.x_n)|n \in \mathbb{N}\} \subseteq \sigma.W$. Ez viszont lehetetlen, mert akkor volna olyan $n \in \mathbb{N}$, hogy $|\sigma| \le |\sigma_n|$, így a W kiegyensúlyozottsága folytán $u(x_n) \in (\sigma_n\sigma).W = \sigma_n^2 \left(\frac{\sigma}{\sigma_n}\right).W \subseteq \sigma_n^2.W$, holott $u(x_n) \notin \sigma_n^2.W$. Tehát (iii) nem igaz, amivel azt bizonyítottuk, hogy (iii)-ból következik (iv).

(iv)⇒(i) Legyen V a 0-nak konvex környezete F-ben. Ekkor $\overset{-1}{u}\langle V\rangle$ konvex halmaz E-ben, tehát, ha ez az E minden korlátos részhalmazát elnyelné, akkor az E bornologikussága folytán a 0-nak környezete volna E-ben, így az u operátor folytonos. Legyen tehát $B \subseteq E$ tetszőleges korlátos halmaz. A hipotézis alapján $u\langle B\rangle$ korlátos halmaz F-ben, így vehetünk olyan $\alpha \in \mathbb{R}^+$ számot, hogy minden $\lambda \in \mathbb{K}$ esetén, ha $|\lambda| \ge \alpha$, akkor $u\langle B\rangle \subseteq \lambda.V$. Ekkor $\lambda \in \mathbb{K}$ és $|\lambda| \ge \alpha$ esetén $B \subseteq \lambda.\overset{-1}{u}\langle V\rangle$, amiből következik, hogy $\overset{-1}{u}\langle V\rangle$ elnyeli a B halmazt. ■

Figyeljük meg, hogy az előző tételben, a (iii)⇒(iv) következtetés bizonyításához nem használtuk fel az E tér bornologikusságát, így ez az implikáció jól használható *elégséges feltételt* fogalmaz meg lokálisan konvex terek között ható lineáris operátorok korlátosságára.

7.2.2. Állítás. *Minden sorozatteljes bornologikus tér ultrabornologikus.*

Bizonyítás. Legyen E sorozatteljes bornologikus tér, és $A \subseteq E$ olyan konvex halmaz, amely az E minden konvex, kiegyensúlyozott, korlátos és sorozatteljes részhalmazát elnyeli. Ha B az E-nek tetszőleges korlátos részhalmaza, akkor $\overline{\mathrm{co}(\mathrm{eq}(B))}$ konvex, kiegyensúlyozott, korlátos és zárt halmaz, így sorozatzárt is, tehát az E sorozatteljessége miatt sorozatteljes, így A elnyeli a B abszolút konvex burkát, és akkor B-t is. Ezért az E bornologikussága miatt A a 0-nak környezete E-ben. Ez azt jelenti, hogy E ultrabornologikus tér. ■

7.2.3. Következmény. *Minden teljes félmetrizálható lokálisan konvex tér* (*speciálisan: minden Fréchet-tér*) *ultrabornologikus.*

Bizonyítás. Ha E teljes félmetrizálható lokálisan konvex tér, akkor E sorozatteljes bornologikus tér, tehát az előző állítás szerint ultrabornologikus. ■

7.3. Bornologikus terek és ultrabornologikus terek induktív előállítása

7.3.1. Állítás. *Legyen E vektortér és $(E_i, u_i)_{i\in I}$ olyan rendszer, hogy minden $i \in I$ esetén E_i lokálisan konvex tér és $u_i : E_i \to E$ lineáris operátor. Ha minden $I \ni i$-re E_i bornologikus, akkor E az $(E_i, u_i)_{i\in I}$ rendszer által induktívan előállított lokálisan konvex topológiával ellátva szintén bornologikus tér.*

Bizonyítás. Lássuk el E-t az $(E_i, u_i)_{i\in I}$ rendszer által induktívan előállított lokálisan konvex topológiával.

Tegyük fel, hogy minden $I \ni i$-re E_i bornologikus tér. Legyen $A \subseteq E$ olyan konvex kiegyensúlyozott halmaz, amely az E minden korlátos részhalmazát elnyeli. Az E minden egy elemű részhalmaza korlátos, ezért A elnyelő halmaz E-ben. Ha $i \in I$ és $B_i \subseteq E_i$ korlátos halmaz, akkor $u_i\langle B_i\rangle \subseteq E$ korlátos halmaz E-ben, mert az $u_i : E_i \to E$ lineáris operátor folytonos, tehát korlátos is; ezért az A-ra vonatkozó hipotézis alapján van olyan $r \in \mathbb{R}^+$, hogy $u_i\langle B_i\rangle \subseteq r.A$, vagyis $B_i \subseteq r.\overset{-1}{u_i}\langle A\rangle$. Ez azt jelenti, hogy minden $I \ni i$-re az $\overset{-1}{u_i}\langle A\rangle \subseteq E_i$ konvex és kiegyensúlyozott halmaz elnyeli az E_i minden korlátos részhalmazát, ezért az E_i bornologikussága miatt a 0-nak környezete E_i-ben. Tehát A olyan konvex, kiegyensúlyozott és elnyelő halmaz, hogy minden $i \in I$ esetén $\overset{-1}{u_i}\langle A\rangle$ a 0-nak környezete E_i-ben. Az induktív lokálisan konvex topológia alaptulajdonsága szerint A a 0-nak környezete E-ben, tehát E bornologikus. ■

7.3.2. Állítás. *Ha E bornologikus* (*illetve szeparált bornologikus*) *tér, akkor létezik olyan $((E_i, \mathscr{T}_i))_{i\in I}$ rendszer, amelyre a következők teljesülnek:*

– minden $I \ni i$-re E_i lineáris altere E-nek, és az $(E_i)_{i\in I}$ altér-rendszer a $\subseteq$ tekintetében felfelé irányított, valamint $E = \bigcup_{i\in I} E_i$;

– minden $I \ni i$-re $\mathscr{T}_i$ félnormálható (*illetve normálható*) *lineáris topológia E_i felett;*

– *az E topológiája megegyezik az $((E_i, \mathscr{T}_i), id_{E_i})_{i \in I}$ rendszer által induktívan előállított lokálisan konvex topológiával.*

Bizonyítás. Jelölje $\mathfrak{B}$ az E összes konvex, kiegyensúlyozott és korlátos részhalmazainak halmazát, továbbá jelölje $\mathscr{T}$ az E topológiáját. Minden $B \in \mathfrak{B}$ esetén legyen E_B a B által generált lineáris altér E-ben; ekkor B konvex, kiegyensúlyozott és elnyelő halmaz E_B-ben, így vehetjük a B halmaz p_B Minkowski-funkcionálját, amely olyan félnorma E_B felett, hogy $\{r.B | r \in \mathbb{R}^+\}$ a 0-nak környezetbázisa $\mathscr{T}_{p_B}$ szerint. Ha $B \in \mathfrak{B}$, akkor a B halmaz $\mathscr{T}$-korlátossága miatt $\mathscr{T}|E_B \subseteq \mathscr{T}_{p_B}$.

A $\mathfrak{B}$ halmaz a $\subseteq$ tekintetében felfelé irányított, ezért az $(E_B)_{B \in \mathfrak{B}}$ lineáris altér-rendszer is $\subseteq$ tekintetében felfelé irányított. Ha $x \in E$, akkor $x \in \mathrm{co}(\mathrm{eq}(\{x\})) \in \mathfrak{B}$, ezért $E = \bigcup\limits_{B \in \mathfrak{B}} E_B$.

Minden $B \in \mathfrak{B}$ esetén a $\mathscr{T}_{p_B}$ topológia *félnormálható*, és ha E szeparált, akkor $\mathscr{T}|E_B \subseteq \mathscr{T}_{p_B}$ miatt a $\mathscr{T}_{p_B}$ topológia *normálható*. Megmutatjuk, hogy az $((E_B, \mathscr{T}_{p_B}), id_{E_B})_{B \in \mathfrak{B}}$ rendszer által induktívan előállított E feletti $\mathscr{T}'$ topológia egyenlő $\mathscr{T}$-vel.

Minden $B \in \mathfrak{B}$ esetén az $E_B \to E$ kanonikus injekció folytonos a $\mathscr{T}_{p_B}$ és $\mathscr{T}$ topológiák szerint, mert $\mathscr{T}|E_B \subseteq \mathscr{T}_{p_B}$; ezért az induktívan előállított lokálisan konvex topológiák definíciója szerint $\mathscr{T} \subseteq \mathscr{T}'$. Legyen V a 0-nak konvex és kiegyensúlyozott környezete $\mathscr{T}'$ szerint; azt kell igazolni, hogy V a 0-nak környezete $\mathscr{T}$ szerint is. Az E bornologikussága miatt elég azt bebizonyítani, hogy V elnyeli az E minden $\mathscr{T}$-korlátos részhalmazát. Ehhez legyen $B \subseteq E$ tetszőleges $\mathscr{T}$-korlátos halmaz; ekkor $B' := \mathrm{co}(\mathrm{eq}(B)) \in \mathfrak{B}$, ezért $V \cap E_{B'}$ a 0-nak környezete $E_{B'}$-ben $\mathscr{T}_{p_{B'}}$ szerint. Ebből következik olyan $r \in \mathbb{R}^+$ létezése, amelyre $r.B' \subseteq V \cap E_{B'}$, tehát $r.B \subseteq V$. Ez azt jelenti, hogy V elnyeli a B halmazt, tehát V a 0-nak környezete $\mathscr{T}$-szerint, így $\mathscr{T}' \subseteq \mathscr{T}$. ■

7.3.3. Következmény. *Minden félmetrizálható (illetve metrizálható) lokálisan konvex tér előáll félnormálható (illetve normálható) terek induktív limeszeként.*

Bizonyítás. Minden félmetrizálható (illetve metrizálható) lokálisan konvex tér bornologikus (illetve szeparált bornologikus) tér, ezért az elég alkalmazni az előző állítást. ■

Láttuk, hogy a bornologikus terekből induktívan előállított lokálisan konvex terek szükségképpen bornologikusak. Azonban ultrabornologikus terekből induktívan előállított lokálisan konvex terek ultrabornologikusságát illetően ennél jóval kevesebbet állíthatunk.

7.3.4. Állítás. *Legyen E lokálisan konvex tér, és $(E_i)_{i \in I}$ az E topologikus lineáris altereinek olyan rendszere, hogy E megegyezik az $(E_i, id_{E_i})_{i \in I}$ rendszer által induktívan előállított lokálisan konvex térrel. Ha minden $i \in I$ esetén az E_i topologikus lineáris altér ultrabornologikus, és E_i sorozatzárt E-ben, akkor E ultrabornologikus.*

Bizonyítás. Legyen $A \subseteq E$ olyan konvex és kiegyensúlyozott halmaz, amely az E minden konvex, kiegyensúlyozott, korlátos és sorozatteljes részhalmazát elnyeli. Ha $x \in E$, akkor $\overline{\mathrm{co}(\mathrm{eq}(\{x\}))} = \overline{B}_1(0;\mathbb{K}).x$ és a $\overline{B}_1(0;\mathbb{K}).x$ halmaz kompakt, mert egyenlő a $\overline{B}_1(0;\mathbb{K}) \subseteq \mathbb{K}$ kompakt halmaz $\mathbb{K} \to E;\ \lambda \mapsto \lambda.x$ folytonos függvény által létesített képével. Reguláris topologikus térben kompakt halmaz lezártja kompakt (27.1.6.), ezért minden $E \ni x$-re $\overline{\mathrm{co}(\mathrm{eq}(\{x\}))}$ olyan konvex, kiegyensúlyozott és kompakt halmaz, amelynek x eleme. Ezért az E minden eleme benne van egy konvex, kiegyensúlyozott, korlátos és sorozatteljes halmazban, amit az A elnyel, így A konvex, kiegyensúlyozott és elnyelő halmaz. Tehát, ha minden $i \in I$ esetén $A \cap E_i$ a 0-nak környezete volna az E_i topologikus altérben, akkor A a 0-nak környezete volna E-ben. Ha $i \in I$, akkor az E_i topologikus lineáris altér minden konvex, kiegyensúlyozott, korlátos és sorozatteljes részhalmaza E-ben is konvex, kiegyensúlyozott, korlátos és sorozatteljes, mert E_i sorozatzárt E-ben. Tehát, ha $i \in I$, akkor A elnyeli az E_i topologikus lineáris altér minden konvex, kiegyensúlyozott, korlátos és sorozatteljes részhalmazát, így az $A \cap E_i$ konvex és kiegyensúlyozott halmaz szintén elnyeli az E_i topologikus lineáris altér minden konvex, kiegyensúlyozott, korlátos és sorozatteljes részhalmazát. Minden $i \in I$ esetén E_i ultrabornologikus, ezért $i \in I$ esetén $A \cap E_i$ a 0-nak környezete az E_i topologikus lineáris altérben. ■

7.3.5. Állítás. *Ha E ultrabornologikus (illetve szeparált ultrabornologikus) tér, akkor létezik olyan $((E_i, \mathscr{T}_i))_{i \in I}$ rendszer, amelyre a következők teljesülnek:*

– minden $I \ni i$-re E_i lineáris altere E-nek, és $E = \bigcup_{i \in I} E_i$;

– minden $I \ni i$-re $\mathscr{T}_i$ teljes félnormálható (illetve teljes normálható) lineáris topológia E_i felett;

– az E topológiája megegyezik az $((E_i, \mathscr{T}_i), id_{E_i})_{i \in I}$ rendszer által induktívan előállított lokálisan konvex topológiával.

Bizonyítás. Jelölje $\mathfrak{B}$ az E összes konvex, kiegyensúlyozott, korlátos és sorozatteljes részhalmazainak halmazát, továbbá jelölje $\mathscr{T}$ az E topológiáját. Minden $B \in \mathfrak{B}$ esetén legyen E_B a B által generált lineáris altér E-ben; ekkor B konvex, kiegyensúlyozott és elnyelő halmaz E_B-ben, így vehetjük a B halmaz p_B Minkowski-funkcionálját, amely olyan félnorma E_B felett, hogy $\{r.B | r \in \mathbb{R}^+\}$ a 0-nak környezetbázisa $\mathscr{T}_{p_B}$ szerint. Ha $B \in \mathfrak{B}$, akkor a B halmaz $\mathscr{T}$-korlátossága miatt $\mathscr{T}|E_B \subseteq \mathscr{T}_{p_B}$.

Ha $x \in E$, akkor az előző állítás *bizonyítása* szerint $x \in \overline{\mathrm{co}(\mathrm{eq}(\{x\}))} \in \mathfrak{B}$, ezért $E = \bigcup_{B \in \mathfrak{B}} E_B$.

Ha $B \in \mathfrak{B}$, akkor minden $\mathbb{R}^+ \ni r$-ra $r.B$ sorozatteljes a $\mathscr{T}|E_B$ altértopológia szerint, így $\mathscr{T}|E_B$-sorozatzárt. Ezért a teljességi lemma szerint $B \in \mathfrak{B}$ esetén az E_B minden $\mathscr{T}|E_B$-sorozatteljes részhalmaza $\mathscr{T}_{p_B}$ szerint is sorozatteljes; tehát B is $\mathscr{T}_{p_B}$-sorozatteljes. Ezért minden $\mathfrak{B} \ni B$-re a $\mathscr{T}_{p_B}$ topológia *teljes félnormálható*, és ha E szeparált, akkor $\mathscr{T}|E_B \subseteq \mathscr{T}_{p_B}$ miatt a $\mathscr{T}_{p_B}$ topológia *teljes normálható*.

Megmutatjuk, hogy az $((E_B, \mathscr{T}_{p_B}), id_{E_B})_{B\in\mathfrak{B}}$ rendszer által induktívan előállított E feletti $\mathscr{T}'$ topológia egyenlő $\mathscr{T}$-vel.

Minden $B \in \mathfrak{B}$ esetén az $E_B \to E$ kanonikus injekció folytonos a $\mathscr{T}_{p_B}$ és $\mathscr{T}$ topológiák szerint, mert $\mathscr{T}|E_B \subseteq \mathscr{T}_{p_B}$; ezért az induktívan előállított lokálisan konvex topológiák definíciója szerint $\mathscr{T} \subseteq \mathscr{T}'$. Legyen V a 0-nak konvex és kiegyensúlyozott környezete $\mathscr{T}'$ szerint; azt kell igazolni, hogy V a 0-nak környezete $\mathscr{T}$ szerint is. Az E ultrabornologikussága miatt elég azt bebizonyítani, hogy V elnyeli az E minden konvex, kiegyensúlyozott, $\mathscr{T}$-korlátos és $\mathscr{T}$-sorozatteljes részhalmazát. Ehhez legyen $B \subseteq E$ tetszőleges konvex, kiegyensúlyozott, $\mathscr{T}$-korlátos és $\mathscr{T}$-sorozatteljes halmaz; ekkor $B \in \mathfrak{B}$, ezért $V \cap E_B$ a 0-nak környezete E_B-ben $\mathscr{T}_{p_B}$ szerint. Ebből következik olyan $r \in \mathbb{R}^+$ létezése, amelyre $r.B \subseteq V \cap E_B \subseteq V$. Ez azt jelenti, hogy V elnyeli a B halmazt, tehát V a 0-nak környezete $\mathscr{T}$-szerint, így $\mathscr{T}' \subseteq \mathscr{T}$. ■

7.3.6. Következmény. *Minden teljes és félmetrizálható lokálisan konvex tér (illetve Fréchet-tér) előáll teljes és félnormálható terek (illetve Banach-terek) induktív limeszeként.*

Bizonyítás. Minden teljes félmetrizálható (illetve teljes metrizálható) lokálisan konvex tér ultrabornologikus (illetve szeparált ultrabornologikus) tér, ezért elég alkalmazni az előző állítást. ■

7.4. Szeparált lokálisan konvex tér erős duálisa és biduálisa

7.4.1. Definíció. *Ha E szeparált lokálisan konvex tér, akkor E'_β jelöli az E' vektorteret a $\beta(E', E)$ topológiával ellátva, és az E'_β szeparált lokálisan konvex teret az E* **erős duálisának** *nevezzük. Ha E szeparált lokálisan konvex tér $\mathbb{K}$ felett, akkor az $(E'_\beta)'$ vektorteret, tehát a $\beta(E', E)$ topológia szerint folytonos $E' \to \mathbb{K}$ lineáris funkcionálok vektorterét E'' jelöli, és ezt a vektorteret az E* **biduálisának** *nevezzük.*

Ha E szeparált lokálisan konvex tér, akkor $E'' \subseteq E'^*$, és a

$$j_E : E \to E'^*; \quad x \mapsto (u \mapsto u(x))$$

kanonikus injekció értékkészlete részhalmaza E''-nek, hiszen minden $x \in E$ esetén a $j_E(x) : E' \to \mathbb{K}$ funkcionál nyilvánvalóan folytonos a pontonkénti konvergencia topológiája, vagyis $\sigma(E', E)$ szerint, így $\sigma(E', E) \subseteq \beta(E', E)$ miatt a $\beta(E', E)$ topológia szerint még inkább folytonos.

Legyen (E, F) duális pár és $M \subseteq E$ olyan lineáris altér, hogy minden $y \in F \setminus \{0\}$ esetén van olyan $x \in M$, hogy $\langle x, y\rangle \neq 0$. Ekkor az E és F közötti dualitás $M \times F$-re vett leszűkítése dualitás M és F között, tehát (M,F) duális pár. Jelölje $\circ$ (illetve $\bullet$) az (E,F) (illetve (M,F)) duális pár szerinti polaritást. Ekkor minden $A \subseteq M$ halmazra $A^\circ = A^\bullet$ nyilvánvalóan igaz, míg $A \subseteq F$ esetén $A^\bullet = A^\circ \cap M$. Ebből következik, hogy $\sigma(M,F) = \sigma(E,F)|M$, hiszen az E-ben a 0-nak $\sigma(E,F)$-környezetbázisát alkotják az $(\mathrm{eq}(S))^\circ$ halmazok, ahol S befutja az F véges részhalmazainak halmazát, és az M-ben a 0-nak $\sigma(M,F)$-környezetbázisát alkotják az $(\mathrm{eq}(S))^\bullet$ halmazok, ahol S befutja az F véges részhalmazainak halmazát.

Speciálisan, ha E szeparált lokálisan konvex tér, akkor:

– az (E'^*, E') duális párra és az $E'' \subseteq E'^*$ lineáris altérre kapjuk, hogy

$$\sigma(E'', E') = \sigma(E'^*, E')|E'',$$

– az (E'', E') duális párra és az $E \subseteq E''$ lineáris altérre kapjuk, hogy

$$\sigma(E, E') = \sigma(E'', E')|E,$$

– az (E'^*, E') duális párra és az $E \subseteq E'^*$ lineáris altérre kapjuk, hogy

$$\sigma(E, E') = \sigma(E'^*, E')|E.$$

7.4.2. Állítás. *Legyen E szeparált lokálisan konvex tér. Ha $A \subseteq E$ olyan halmaz, amely relatív $\sigma(E,E')$-kompakt, akkor az A lezártja E'^*-ban a $\sigma(E'^*,E')$ topológia szerint megegyezik az A lezártjával a $\sigma(E,E')$ topológia szerint (tehát ez a lezárt részhalmaza E-nek).*

Bizonyítás. Jelölje $\tilde{A}$ (illetve $\overline{A}$) az A halmaz lezártját a $\sigma(E,E')$ (illetve a $\sigma(E'^*,E')$) topológia szerint. A feltevés alapján az $\tilde{A} \subseteq E$ halmaz $\sigma(E,E')$-kompakt, ezért $\sigma(E,E') = \sigma(E'^*,E')|E$ miatt $\tilde{A}$ a $\sigma(E'^*,E')$ topológia szerint is kompakt. Ugyanakkor $\sigma(E'^*,E')$ Hausdorff-topológia, ezért az $\tilde{A}$ halmaz zárt a $\sigma(E'^*,E')$ topológia szerint, és persze $A \subseteq \tilde{A}$. Ebből következik, hogy $\overline{A} \subseteq \tilde{A}$. De a $\sigma(E,E') = \sigma(E'^*,E')|E$ egyenlőség alapján $\tilde{A} = \overline{A} \cap E$, ezért $\tilde{A} \subseteq \overline{A}$ is igaz, tehát $\tilde{A} = \overline{A}$. ■

7.4.3. Állítás. *Legyen E szeparált lokálisan konvex tér. Ha $A \subseteq E$ olyan halmaz, amely korlátos a $\sigma(E,E')$ topológia szerint, akkor az A lezártja E'^*-ban a $\sigma(E'^*,E')$ topológia szerint megegyezik az A lezártjával a $\sigma(E'',E')$ topológia szerint (tehát ez a lezárt részhalmaza E''-nek).*

Bizonyítás. Jelölje $\tilde{A}$ (illetve $\overline{A}$) az A halmaz lezártját a $\sigma(E'',E')$ (illetve a $\sigma(E'^*,E')$) topológia szerint. Az A halmaz korlátos a $\sigma(E,E')$ topológia szerint, ezért a $\beta(E',E)$ topológia értelmezése alapján A° a 0-nak $\beta(E',E)$-környezete E'-ben. Alkalmazva az $(E')_\beta$ erős duálisra az ekvifolytonos halmazok jellemzését azt kapjuk, hogy $(A^\circ)^\bullet$ ekvifolytonos részhalmaza az $E'' = \mathscr{L}((E')_\beta; \mathbb{K})$ funkcionál-térnek, ahol $\bullet$ jelöli az E'' és E' közötti kanonikus dualitás szerinti polaritást. Az Alaoglu–Bourbaki tétel alapján $(A^\circ)^\bullet$ relatív kompakt a $\sigma(E'', E')$ topológia szerint és persze zárt is erre a topológiára nézve, vagyis $\sigma(E'', E')$-kompakt. A $\sigma(E'', E') = \sigma(E'^*, E')|E''$ egyenlőség alapján $(A^\circ)^\bullet$ az E'^*-ban is kompakt a $\sigma(E'^*, E')$ szerint, így $\sigma(E'^*, E')$-zárt is, és persze $A \subseteq (A^\circ)^\bullet$. Ezért $\overline{A} \subseteq (A^\circ)^\bullet \subseteq E''$, így ismét a $\sigma(E'', E') = \sigma(E'^*, E')|E''$ egyenlőség miatt $\tilde{A} = \overline{A} \cap E'' = \overline{A}$ adódik. ■

7.4.4. Állítás. *Legyen E szeparált lokálisan konvex tér. Minden $f \in E''$ funkcionálhoz van olyan $B \subseteq E$ korlátos halmaz, amelyre $f \in \overline{B}$, ahol a lezárást a $\sigma(E'', E')$ topológia szerint kell venni.*

Bizonyítás. Legyen $f \in E''$, tehát $f : E' \to \mathbb{K}$ olyan lineáris funkcionál, amely a $\beta(E', E)$ topológia szerint folytonos. Ekkor létezik a 0-nak olyan környezete E'-ben a $\beta(E', E)$ topológia szerint, amelyen f korlátos. A $\beta(E', E)$ topológia értelmezése alapján ez azt jelenti, hogy van olyan $S \subseteq E$ korlátos halmaz, hogy minden $u \in S^\circ$ esetén $|f(u)| \leq 1$. Ekkor $f \in (S^\circ)^\bullet$, ahol $\bullet$ jelöli az E'' és E' közötti kanonikus dualitás szerinti polaritást. Az nyilvánvaló, hogy $S^\circ = S^\bullet$, tehát $f \in (S^\bullet)^\bullet$. A bipolárisok jellemzése szerint $(S^\bullet)^\bullet$ egyenlő a $\mathrm{co}(S \cup \{0\})$ halmaz $\sigma(E'', E')$ topológia szerinti lezártjával. A $\mathrm{co}(S \cup \{0\})$ halmaz korlátos E-ben, amiből következik, hogy a $B := \mathrm{co}(S \cup \{0\})$ halmaz eleget tesz a követelményeknek. ■

7.4.5. Következmény. *Ha E szeparált lokálisan konvex tér, akkor E'' megegyezik az E korlátos részhalmazai $\sigma(E'^*, E')$ topológia szerinti lezártjainak uniójával.* ■

7.5. Félreflexív terek

7.5.1. Definíció. *Az E szeparált lokálisan konvex teret* **félreflexívnek** *nevezzük, ha a $j_E : E \to E''$ kanonikus injekció szürjektív, vagyis a kanonikus azonosítás által az E vektortér lineárisan izomorf az E'' biduálissal.*

7.5.2. Tétel. (A félreflexivitás jellemzése) *Ha E szeparált lokálisan konvex tér, akkor a következő állítások ekvivalensek.*

(i) *E félreflexív.*

(ii) *Az E' minden konvex, $\beta(E', E)$-zárt részhalmaza $\sigma(E', E)$-zárt.*

(iii) *A $\beta(E', E)$ topológia kompatibilis az E és E' közötti kanonikus dualitással, vagyis fennáll a $\beta(E', E) = \tau(E', E)$ egyenlőség.*

(iv) *Az E' vektortér a $\tau(E', E)$ topológiával ellátva hordós tér.*

(v) *Az E minden korlátos részhalmaza relatív $\sigma(E, E')$-kompakt.*

(vi) *Az* E *minden* $\sigma(E,E')$*-korlátos és* $\sigma(E,E')$*-zárt részhalmaza* $\sigma(E,E')$*-kompakt.*

(vii) *Az* E *kváziteljes a* $\sigma(E,E')$ *topológia szerint.*

(viii) *Az* E *minden konvex, korlátos és zárt részhalmaza teljes a* $\sigma(E,E')$ *topológia szerint.*

Bizonyítás. (i)⇒(ii) Legyen $C \subseteq E'$ olyan $\beta(E',E)$-zárt konvex halmaz, hogy $C \neq \emptyset$ és $C \neq E'$. A Hahn–Banach tétel alapján van olyan $(u_i)_{i\in I}$ nem üres rendszer az E' feletti $\beta(E',E)$-folytonos lineáris funkcionálok halmazában és van olyan $(c_i)_{i\in I}$ rendszer $\mathbb{R}$-ben, hogy $C = \bigcap\limits_{i\in I} [(u_i)_{\mathbb{R}} \leq c_i]$. Minden $i \in I$ esetén az (i) miatt az $u_i : E' \to \mathbb{K}$ funkcionál $\sigma(E',E)$-folytonos, így $[(u_i)_{\mathbb{R}} \leq c_i]$ az E'-ben $\sigma(E',E)$-zárt. Ezért a C halmaz $\sigma(E',E)$-zárt.

(ii)⇒(i) Ha $f : E' \to \mathbb{K}$ olyan lineáris funkcionál, amely a $\beta(E',E)$ topológia szerint folytonos, akkor $\mathrm{Ker}(f)$ az E'-ben konvex és $\beta(E',E)$-zárt halmaz, így a (ii) miatt $\sigma(E',E)$-zárt is, amiből következik az f funkcionál $\sigma(E',E)$ szerinti folytonossága, vagyis $f \in E$.

(i)⇒(iii) Az (i) alapján a $\beta(E',E)$ szerint folytonos $E' \to \mathbb{K}$ lineáris funkcionálok megegyeznek a $\sigma(E',E)$ szerint folytonos lineáris funkcionálokkal, tehát $\beta(E',E)$ kompatibilis az E' és E közötti kanonikus dualitással. A Mackey–Arens-tétel alapján $\beta(E',E) \subseteq \tau(E',E)$, ugyanakkor $\tau(E',E) \subseteq \beta(E',E)$ a definíciók alapján teljesül.

(iii)⇒(iv) Legyen a $T \subseteq E'$ halmaz hordó a $\tau(E',E)$ topológia szerint. Ekkor a hordók poláris jellemzése alapján van olyan $S \subseteq E$ halmaz, amely kiegyensúlyozott és $\sigma(E,E')$-korlátos, valamint $S^\circ = T$. A $\beta(E',E)$ topológia értelmezése alapján S° a 0-nak környezete a $\beta(E',E)$ topológia szerint. Ezért a (iii) alapján T a 0-nak környezete a $\tau(E',E)$ topológia szerint, tehát E' a $\tau(E',E)$ topológiával ellátva hordós tér.

(iv)⇒(v) Legyen $B \subseteq E$ korlátos halmaz. Ekkor $\mathrm{eq}(B)$ kiegyensúlyozott és $\sigma(E,E')$-korlátos halmaz E-ben, tehát a hordók poláris jellemzése alapján $(\mathrm{eq}(B))^\circ$ hordó E'-ben a $\tau(E',E)$ topológia szerint. A (iv) alapján az $(\mathrm{eq}(B))^\circ$ halmaz a 0-nak környezete E'-ben a $\tau(E',E)$ topológia szerint, és $(\mathrm{eq}(B))^\circ \subseteq B^\circ$, így B° is $\tau(E',E)$-környezete a 0-nak E'-ben. A Mackey-topológia definíciója alapján ez olyan $K \subseteq E$ konvex, kiegyensúlyozott és $\sigma(E,E')$-kompakt halmaz létezését jelenti, amelyre $K^\circ \subseteq B^\circ$. Ekkor $B \subseteq B^{\circ\circ} \subseteq K^{\circ\circ} = K$, tehát B részhalmaza az E egy $\sigma(E,E')$-kompakt részhalmazának, így a B halmaz relatív $\sigma(E,E')$-kompakt.

(v)⇒(vi) Ha a $B \subseteq E$ halmaz $\sigma(E,E')$-korlátos, akkor a dualitással kompatibilis topológiák szerint korlátos halmazok jellemzése alapján a B halmaz korlátos is, tehát az (v) miatt relatív $\sigma(E,E')$-kompakt. Ezért ha a $B \subseteq E$ halmaz $\sigma(E,E')$-korlátos és $\sigma(E,E')$-zárt, akkor $\sigma(E,E')$-kompakt.

(vi)⇒(vii) A $\sigma(E,E')$-kompakt halmazok $\sigma(E,E')$-teljesek, ezért a (vi) miatt az E minden $\sigma(E,E')$-korlátos és $\sigma(E,E')$-zárt részhalmaza $\sigma(E,E')$-teljes.

(vii)⇒(viii) Ha $B \subseteq E$ konvex, korlátos és zárt halmaz, akkor B korlátos a $\sigma(E, E')$ topológia szerint, és a konvexitás miatt $\sigma(E, E')$-zárt is, mert a dualitással kompatibilis topológiák szerint a zárt konvex halmazok ugyanazok; ezért a (vii) alapján a B halmaz $\sigma(E, E')$-teljes.

(viii)⇒(i) Legyen $f \in E''$ rögzített. Ekkor a tétel előtt álló kijelentés alapján létezik olyan $B \subseteq E$ korlátos halmaz, amelyre $f \in \overline{B}$, ahol a lezárást a $\sigma(E'', E')$ topológia szerint kell venni. Tehát van olyan $(x_i)_{i \in I}$ általánosított sorozat B-ben, amely a $\sigma(E'', E')$ topológia szerint konvergál f-hez. Ekkor $(x_i)_{i \in I}$ általánosított Cauchy-sorozat a $\sigma(E'', E')$ szerint, így $\sigma(E'', E')|E = \sigma(E, E')$ miatt a $\sigma(E, E')$ szerint is általánosított Cauchy-sorozat, és B-ben halad. A B halmaz $\sigma(E, E')$-korlátos is, tehát a $C := \overline{\mathrm{co}(B)}$ halmaz konvex, $\sigma(E, E')$-korlátos és $\sigma(E, E')$-zárt, ahol a lezárást a $\sigma(E, E')$ topológia szerint vesszük. A dualitással kompatibilis topológiák szerint a korlátos halmazok, valamint a zárt konvex halmazok ugyanazok, ezért a C halmaz konvex, korlátos és zárt az E eredeti topológiája szerint is. Ezért a (viii) szerint a C halmaz $\sigma(E, E')$-teljes. Tehát a C-ben haladó $(x_i)_{i \in I}$ általánosított sorozat konvergens E-ben a $\sigma(E, E')$ topológia szerint, így van olyan $x \in E$, hogy $x = \lim\limits_{i,I} x_i$ a $\sigma(E, E')$ topológia szerint. Ekkor ismét $\sigma(E'', E')|E = \sigma(E, E')$ miatt $x = \lim\limits_{i,I} x_i$ a $\sigma(E'', E')$ topológia szerint is, ezért $f = x \in E$, hiszen $f = \lim\limits_{i,I} x_i$ is teljesül a $\sigma(E'', E')$ topológia szerint. ■

7.5.3. Következmény. *Félreflexív tér erős duálisa hordós tér.*

Bizonyítás. Ha E félreflexív tér, akkor az imént igazolt tétel (iii) pontja szerint $\beta(E', E) = \tau(E', E)$, tehát az E erős duálisa megegyezik az E' vektortérrel, a $\tau(E', E)$ topológiával ellátva, ami viszont a (iv) pont szerint hordós tér. ■

A félreflexív terek gyengén kváziteljesek, ezért kváziteljesek, így minden metrizálható, de nem teljes lokálisan konvex tér biztosan nem félreflexív.

A félreflexivitás jellemzési tételéből látható, hogy ha E nem félreflexív szeparált lokálisan konvex tér, akkor E' felett a $\beta(E', E)$ topológia *nem kompatibilis* az E' és E közötti kanonikus dualitással. Azonban fennáll a következő.

7.5.4. Állítás. *Ha E kváziteljes lokálisan konvex tér, akkor E'-ben a $\sigma(E', E)$-korlátos és a $\beta(E', E)$-korlátos halmazok ugyanazok.*

Bizonyítás. Legyen $B \subseteq E'$ tetszőleges $\sigma(E', E)$-korlátos halmaz; azt kell igazolni, hogy ez $\beta(E', E)$-korlátos is. Ehhez legyen V a 0-nak környezete a $\beta(E', E)$ topológia szerint. A $\beta(E', E)$ definíciója szerint létezik olyan $S \subseteq E$ kiegyensúlyozott és korlátos halmaz, hogy $S^\circ \subseteq V$. Az $\mathrm{eq}(B)$ halmaz kiegyensúlyozott és $\sigma(E', E)$-korlátos, így a hordók poláris jellemzése alapján $(\mathrm{eq}(B))^\circ$ hordó E-ben. Ha C jelöli az S halmaz abszolút konvex burkát E-ben, akkor C zárt, konvex, kiegyensúlyozott és korlátos, így az E kváziteljessége folytán C teljes is. Az elnyelési lemma szerint $(\mathrm{eq}(B))^\circ$ elnyeli a C halmazt, tehát az S halmazt is. Ezért van olyan $r \in \mathbb{R}^+$, hogy $r.S \subseteq (\text{eq}(B))^\circ$, következésképpen $B \subseteq (\text{eq}(B))^{\circ\circ} \subseteq (r.S)^\circ = r^{-1}.S^\circ$. Ez azt jelenti, hogy az S° kiegyensúlyozott halmaz elnyeli B-t, és akkor $S^\circ \subseteq V$ miatt V is elnyeli a B halmazt, vagyis B korlátos a $\beta(E', E)$ topológia szerint. ■

7.6. Reflexív terek

7.6.1. Definíció. *Azt mondjuk, hogy az E lokálisan konvex tér* **reflexív**, *ha E félreflexív tér, és az E topológiája egyenlő a $\beta(E, E')$ topológiával.*

7.6.2. Tétel. (A reflexivitás jellemzése) *Ha E szeparált lokálisan konvex tér, akkor a következő állítások ekvivalensek.*

(i) *E reflexív tér.*

(ii) *E félreflexív hordós tér.*

(iii) *E félreflexív infrahordós tér.*

(iv) *E hordós tér, és az E minden $\sigma(E, E')$-korlátos és $\sigma(E, E')$-zárt részhalmaza $\sigma(E, E')$-kompakt.*

Bizonyítás. (i)⇒(ii) A definíció szerint minden reflexív tér félreflexív. Tegyük fel, hogy E reflexív és legyen $T \subseteq E$ hordó. A hordók poláris jellemzése alapján van olyan $S \subseteq E'$ kiegyensúlyozott, $\sigma(E', E)$-korlátos halmaz, amelyre $T = S^\circ$. A $\beta(E, E')$ topológia definíciója alapján S° a 0-nak környezete a $\beta(E, E')$ topológia szerint. De az E reflexivitása folytán $\beta(E, E')$ egyenlő az E eredeti topológiájával, így T a 0-nak környezete az E eredeti topológiája szerint. Ezért E hordós tér.

(ii)⇒(i) Korábban láttuk, hogy ha E hordós tér, akkor az E topológiája megegyezik $\beta(E, E')$-vel, ezért félreflexív hordós tér szükségképpen reflexív.

(ii)⇔(iii) Ha E félreflexív, akkor E kváziteljes, és minden kváziteljes infrahordós tér hordós tér.

(iv)⇔(ii) A félreflexív terek jellemzési tétele alapján nyilvánvaló. ■

Az előző tételből következik, hogy ha egy félreflexív tér nem reflexív, akkor infrahordós sem lehet.

7.6.3. Állítás. *Reflexív tér erős duálisa reflexív tér.*

Bizonyítás. Reflexív tér félreflexív, ezért az erős duálisa hordós tér. Tehát a reflexivitás jellemzési tétele alapján elég azt igazolni, hogy reflexív tér erős duálisa félreflexív. Ez viszont nyilvánvaló, mert az E reflexivitása azt jelenti, hogy a $j_E : E \to E''$ kanonikus leképezés lineáris homeomorfizmus az E és $(E'_\beta)'_\beta$ topologikus vektorterek között, tehát ekkor a $j'_E : ((E'_\beta)'_\beta)' \to E'$ duális operátor lineáris bijekció, és $((E'_\beta)'_\beta)' = (E'_\beta)''$, valamint a j'_E duális operátor egyenlő a $j_{E'_\beta} : E'_\beta \to (E'_\beta)''$ kanonikus leképezés inverzével. ■

7.6.4. Állítás. *Metrizálható lokálisan konvex tér pontosan akkor reflexív, ha félreflexív.*

Bizonyítás. Félreflexív tér kváziteljes, tehát sorozatteljes. Ezért metrizálható félreflexív tér teljes metrizálható, vagyis Fréchet-tér, így hordós tér is. Ebből a reflexivitás jellemzési tétele alapján következik, hogy metrizálható félreflexív tér reflexív tér. ■

7.7. Montel-terek

7.7.1. Definíció. *Az E lokálisan konvex teret* **Montel-térnek** *nevezzük, ha E szeparált hordós tér, és az E minden korlátos és zárt részhalmaza kompakt.*

Világos, hogy minden véges dimenziós szeparált topologikus vektortér Montel-tér. Továbbá, ha egy Montel-tér normálható, akkor a 0-nak létezik korlátos és zárt környezete, így a tér lokálisan kompakt, tehát véges dimenziós. Ez azt jelenti, hogy a végtelen dimenziós Montel-terek biztosan nem normálhatók, de majd látni fogjuk, hogy metrizálhatók (sőt Fréchet-terek is) lehetnek.

7.7.2. Állítás. *Minden Montel-tér reflexív tér.*

Bizonyítás. Szeparált lokálisan konvex térben minden gyengén korlátos és gyengén zárt halmaz az eredeti topológia szerint is korlátos és zárt, mert a korlátos halmazok a kanonikus dualitással kompatibilis topológiák szerint ugyanazok. Ezért Montel-térben minden gyengén korlátos és gyengén zárt halmaz kompakt az eredeti topológia szerint, így gyengén is kompakt, hiszen az eredeti topológia majorálja a gyengített topológiát. A félreflexivitás jellemzése alapján ez azt jelenti, hogy minden Montel-tér félreflexív. Ugyanakkor Montel-tér hordós tér is, így a reflexivitás jellemzése alapján reflexív. ■

7.7.3. Állítás. *Ha E Montel tér, akkor minden $B \subseteq E$ korlátos halmazra teljesül az, hogy a $\sigma(E, E')|B$ altértopológia egyenlő az E topológiájának B-re vett leszűkítésével.*

Bizonyítás. Legyen $B \subseteq E$ korlátos halmaz. Ekkor a $\overline{B}$ halmaz korlátos és zárt az E Montel-térben, tehát kompakt az E eredeti topológiája szerint, amit $\mathscr{T}$-vel jelölünk. Ugyanakkor $\sigma(E, E') \subseteq \mathscr{T}$, tehát $\sigma(E, E')|\overline{B} \subseteq \mathscr{T}|\overline{B}$. Ez az összefüggés azt jelenti, hogy az $id_{\overline{B}} : \overline{B} \to \overline{B}$ leképezés folytonos a $\mathscr{T}|\overline{B}$ és $\sigma(E, E')|\overline{B}$ topológiák szerint. A $\mathscr{T}|\overline{B}$ topológia kompakt és Hausdorff-féle, valamint a $\sigma(E, E')|\overline{B}$ topológia Hausdorff-féle, ezért $\sigma(E, E')|\overline{B}$ is kompakt Hausdorff-topológia és az $id_{\overline{B}}$ függvény *homeomorfizmus* a $\mathscr{T}|\overline{B}$ és $\sigma(E, E')|\overline{B}$ topológiák szerint. Ez azt jelenti, hogy $\mathscr{T}|\overline{B} = \sigma(E, E')|\overline{B}$, amiből következik, hogy $\mathscr{T}|B = (\mathscr{T}|\overline{B})|B = (\sigma(E, E')|\overline{B})|B = \sigma(E, E')|B$. ■

7.7.4. Következmény. *Ha E Montel-tér és $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ olyan sorozat E-ben, amely a $\sigma(E, E')$ topológia szerint konvergál az $x \in E$ vektorhoz, akkor $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ az E topológiája szerint is konvergál x-hez. (Tehát Montel-térben a gyengén konvergens sorozatok megegyeznek a konvergens sorozatokkal.)*

Bizonyítás. A feltevés alapján a $B := \{x\} \cup \{x_n | n \in \mathbb{N}\}$ halmaz $\sigma(E, E')$-korlátos, tehát az E eredeti topológiája szerint is korlátos. Az előző állítás alapján $\sigma(E, E')|B$ egyenlő az $\mathscr{T}|B$-vel, ahol $\mathscr{T}$ az E eredeti topológiája. Az $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sorozat az x-hez konvergál a $\sigma(E, E')|B$ topológia szerint, ezért $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ az x-hez konvergál a $\mathscr{T}|B$ topológia szerint is. Ez azt jelenti, hogy $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ az x-hez konvergál $\mathscr{T}$ szerint. ■

7.7.5. Állítás. *Montel-tér erős duálisa Montel-tér.*

Bizonyítás. Montel-tér félreflexív, ezért az erős duálisa hordós tér. Tehát csak azt kell igazolni, hogy ha E Montel-tér, és $B \subseteq E'$ olyan halmaz, amely $\beta(E', E)$-korlátos és $\beta(E', E)$-zárt, akkor a B halmaz $\beta(E', E)$-kompakt. Legyen C a B halmaz konvex burkának $\beta(E', E)$ topológia szerinti lezártja. Az E félreflexivitása miatt $\beta(E', E)$ kompatibilis az E' és E közötti kanonikus dualitással, és a C halmaz konvex és $\beta(E', E)$-zárt, így ez a halmaz $\sigma(E', E)$ szerint is zárt. Ugyanakkor C korlátos a $\beta(E', E)$ szerint, és $\sigma(E', E) \subseteq \beta(E', E)$, ezért a C halmaz $\sigma(E', E)$-korlátos. Az E szeparált lokálisan konvex tér hordós, ezért E'-ben a $\sigma(E', E)$-korlátos és $\sigma(E', E)$-zárt halmazok $\sigma(E', E)$-kompaktak és ekvifolytonosak. Ezért a $\sigma(E', E)|C$ altértopológia megegyezik a kompakt konvergencia topológiájának C-re vett leszűkítésével. De E-ben a kompakt halmazok éppen a korlátos és zárt halmazok, tehát az E' feletti kompakt konvergencia topológiája egyenlő az E korlátos és zárt részhalmazain való egyenletes konvergencia topológiájával. Viszont ez utóbbi topológia, a definíció alapján, egyenlő a $\beta(E', E)$ topológiával. Tehát $\sigma(E', E)|C = \beta(E', E)|C$, így a C halmaz $\beta(E', E)$-kompakt. Mivel pedig B ennek a halmaznak $\beta(E', E)$-zárt részhalmaza; a B halmaz is $\beta(E', E)$-kompakt. ■

7.7.6. Állítás. (Montel-terek szigorú induktív limesze) *Ha az E szeparált lokálisan konvex tér az $(E_n)_{n\in\mathbb{N}}$ topologikus lineáris altér-sorozatának szigorú induktív limesze, valamint minden $n \in \mathbb{N}$ esetén az E_n topologikus lineáris altér Montel-tér, akkor E is Montel-tér.*

Bizonyítás. Tudjuk, hogy a hordós terekből induktívan előállított lokálisan konvex terek hordós terek. Minden $n \in \mathbb{N}$ esetén az E_n topologikus lineáris altér hordós tér, ezért E is hordós tér.

Legyen $B \subseteq E$ korlátos és zárt halmaz. A szigorú induktív limeszek korlátos részhalmazainak jellemzési tétele (5.5.1.) alapján van olyan $n \in \mathbb{N}$, hogy $B \subseteq E_n$ és B korlátos az E_n topologikus lineáris altérben. Ugyanakkor E_n zárt E-ben, ezért B zárt részhalmaza E_n-nek. Az E_n topologikus lineáris altér Montel-tér, ezért B kompakt E_n-ben, így E-ben is kompakt. Ez azt jelenti, hogy E Montel-tér. ■

7.7.7. Következmény. *Ha az E szeparált lokálisan konvex tér az $(E_n)_{n\in\mathbb{N}}$ lokálisan konvex tér-sorozat erős induktív limesze, valamint minden $n \in \mathbb{N}$ esetén E_n Montel-tér és $E_n \neq E$, akkor E nem metrizálható Montel-tér.*

Bizonyítás. Montel-tér kváziteljes (mert félreflexív), ezért sorozatteljes is, így Montel-terek szigorú induktív limesze sorozatteljes (5.5.3.). Az előző állítás és 5.5.4. alapján E nem metrizálható Montel-tér. ■

7.8. A kompakt konvergencia topológiája folytonos függvények terén

7.8.1. Lemma. *Ha K kompakt topologikus tér, F lokálisan konvex tér és $H \subseteq \mathscr{C}(K;F)$ olyan halmaz, amely kompakt az egyenletes konvergencia topológiája szerint, akkor H ekvifolytonos.*

Bizonyítás. Az F lokális konvexitása alapján vegyünk olyan $(p_i)_{i\in I}$ nem üres félnorma-rendszert F felett, amely az F topológiáját generálja. Minden $i \in I$ esetén tekintsük a

$$p_{i,K} : \mathscr{C}(K;F) \to \mathbb{R}_+; \quad f \mapsto \sup_{t\in K} p_i(f(t))$$

függvényt, amely félnorma $\mathscr{C}(K;F)$ felett, és a $\mathscr{C}(K;F)$ feletti egyenletes konvergencia topológiája egyenlő a $(p_{i,K})_{i\in I}$ félnorma-rendszer által generált lokálisan konvex topológiával.

Legyenek $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ és $i \in I$ rögzítettek. A $\left(B_{\varepsilon/3}(f;p_{i,K})\right)_{f\in H}$ halmazrendszer nyílt befedése H-nak $\mathscr{C}(K;F)$-ben az egyenletes konvergencia topológiája szerint, ezért van olyan $G \subseteq H$ véges halmaz, hogy $H \subseteq \bigcup_{g\in G} B_{\varepsilon/3}(g;p_{i,K})$, így

$$(\forall\ f \in H)(\exists\ g \in G)(\forall\ t \in K):\ \ p_i(f(t) - g(t)) < \varepsilon/3.$$

A $G \subseteq \mathscr{C}(T;F)$ függvényhalmaz véges, ezért ekvifolytonos, így minden $t \in K$ esetén létezik a t-nek olyan U_t nyílt környezete, hogy minden $U_t \ni t'$-re és minden $G \ni g$-re $p_i(g(t')-g(t)) < \varepsilon/3$, hiszen a $[p_i < \varepsilon/3]$ gömb a 0-nak környezete F-ben. Tehát, ha $t \in K$ és U_t ilyen környezete t-nek K-ban, akkor $f \in H$ esetén van olyan $g \in G$, hogy minden $K \ni t'$-re $p_i(f(t') - g(t')) < \varepsilon/3$; ugyanakkor minden $U_t \ni t'$-re $p_i(g(t') - g(t)) < \varepsilon/3$, következésképpen minden $t' \in U_t$ esetén

$$p_i(f(t') - f(t)) \le p_i(f(t') - g(t')) + p_i(g(t') - g(t)) + p_i(g(t) - f(t)) < \varepsilon.$$

Ezzel megmutattuk, hogy minden $i \in I$ és $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ esetén minden $t \in K$ pontnak van olyan U_t környezete a K topologikus térben, hogy minden $f \in H$ és $t' \in U_t$ esetén $p_i(f(t') - f(t)) < \varepsilon$.

Ha V tetszőleges környezete a 0-nak F-ben, akkor van olyan $J \subseteq I$ nem üres véges halmaz és $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$, hogy $\bigcap_{i\in J}[p_i(\cdot) < \varepsilon] \subseteq V$. Ha $t \in K$, akkor az iméntiek szerint minden $J \ni i$-hez van olyan $U_{t,i}$ környezete t-nek, hogy minden $U_{t,i} \ni t'$-re és $H \ni f$-re $p_i(f(t') - f(t)) < \varepsilon$; következésképpen $U_t := \bigcap_{i \in J} U_{t,i}$ olyan környezete t-nek, K-ban, hogy minden $J \ni i$-re és $U_t \ni t'$-re és $H \ni f$-re $p_i(f(t') - f(t)) < \varepsilon$, vagyis minden $U_t \ni t'$-re és $H \ni f$-re $f(t') - f(t) \in \bigcap_{i \in J} [p_i < \varepsilon] \subseteq V$. Ez azt jelenti, hogy H a K minden pontjában ekvifolytonos. ■

7.8.2. Tétel. (Harmadik Ascoli-tétel) *Legyen T topologikus tér és F topologikus vektortér. Egy $H \subseteq \mathscr{C}(T; F)$ halmaz kompakt konvergencia topológiája szerinti relatív kompaktságához elégséges a következő feltételek teljesülése:*

a) *H ekvifolytonos függvényhalmaz;*

b) *minden $t \in T$ esetén a $\{f(t) \in F | f \in H\}$ halmaz relatív kompakt F-ben.*

*Ha T lokálisan kompakt és F lokálisan konvex, akkor minden $H \subseteq \mathscr{C}(T; F)$ halmazra az*a) *és*b) *feltételek szükségesek is a H halmaz kompakt konvergencia topológiája szerinti relatív kompaktságához.*

Bizonyítás. (I) Tegyük fel, hogy a $H \subseteq \mathscr{C}(T; F)$ halmazra a) és b) teljesül. A b) hipotézis szerint minden $T \ni t$-re a $\overline{\{f(t) \in F | f \in H\}}$ halmaz kompakt F-ben, így a Tyihonov-tétel alapján a $\prod_{t \in T} \overline{\{f(t) \in F | f \in H\}}$ halmaz kompakt és zárt a szorzattopológia szerint, ami azt jelenti, hogy ez a függvényhalmaz (amely része $\mathscr{F}(T; F)$-nek) kompakt a pontonkénti konvergencia topológiája szerint. Világos, hogy $H \subseteq \prod_{t \in T} \overline{\{f(t) \in F | f \in H\}}$, ezért H relatív kompakt $\mathscr{F}(T; F)$-ben a pontonkénti konvergencia topológiája szerint. Tehát, ha $\overline{H}$ jelöli a H függvényhalmaz pontonkénti konvergencia topológiája szerinti lezártját, akkor $\overline{H}$ kompakt a pontonkénti konvergencia topológiája szerint, ugyanakkor az első Ascoli-tétel és az a) hipotézis alapján $\overline{H} \subseteq \mathscr{C}(T; F)$ és ez a halmaz ekvifolytonos is. Ezért a második Ascoli-tételt alkalmazva kapjuk, hogy a pontonkénti konvergencia topológiájának $\overline{H}$-ra vett leszűkítése egyenlő a kompakt konvergencia topológiájának $\overline{H}$-ra vett leszűkítésével. Az előbbi topológia kompakt, ezért az utóbbi is az, ami azt jelenti, hogy az $\overline{H}$ halmaz kompakt a kompakt konvergencia topológiája szerint. Ugyanakkor a $\mathscr{C}(T; F)$ feletti pontonkénti konvergencia topológiáját majorálja a kompakt konvergencia topológiája, és $\overline{H}$ az előbbi topológia szerint zárt, így $\overline{H}$ zárt a kompakt konvergencia topológiája szerint is. Ezért H relatív kompakt a kompakt konvergencia topológiája szerint.

(II) Tegyük fel, hogy a $H \subseteq \mathscr{C}(T; F)$ halmaz relatív kompakt a kompakt konvergencia topológiája szerint, és jelölje $\overline{H}$ a H halmaz lezártját a kompakt konvergencia topológiája szerint. Minden $t \in T$ esetén az $u_t : \mathscr{C}(T; F) \to F;\ f \mapsto f(t)$ leképezés még a $\mathscr{C}(T; F)$ feletti pontonkénti konvergencia topológiája szerint is folytonos lineáris operátor, ezért a $\mathscr{C}(T; F)$ feletti kompakt konvergencia topológiája szerint még inkább folytonos, hiszen ez utóbbi majorálja az előbbit. Tehát minden $T \ni t$-re $u_t\langle \overline{H} \rangle$ kompakt halmaz F-ben, és F reguláris topologikus tér, így $\overline{u_t\langle \overline{H} \rangle}$ is kompakt és zárt halmaz; továbbá ez a halmaz tartalmazza $u_t\langle H\rangle$-t, így $u_t\langle H\rangle$ relatív kompakt F-ben. Tehát a b) tulajdonság teljesül úgy, hogy T-re és F-re nem használtunk ki egyéb feltevést.

Minden $K \subseteq T$ kompakt halmazra legyen $u_K : \mathscr{C}(T;F) \to \mathscr{C}(K;F);\ f \mapsto f|_K$. Világos, hogy minden $K \subseteq T$ kompakt halmazra u_K folytonos a $\mathscr{C}(T;F)$ feletti kompakt konvergencia és a $\mathscr{C}(K;F)$ feletti egyenletes konvergencia topológiája szerint. Legyen most $K \subseteq T$ rögzített kompakt halmaz, és tekintsük az $u_K\langle\overline{H}\rangle \subseteq \mathscr{C}(K;F)$ halmazt, amely kompakt az egyenletes konvergencia topológiája szerint. Az előző lemma alapján, ha F lokálisan konvex, akkor az $u_K\langle\overline{H}\rangle$ függvényhalmaz ekvifolytonos, tehát a 0 minden F-beli V környezetéhez és minden $t \in K$ ponthoz van olyan U_t környezete t-nek a K topologikus altérben, amelyre minden $t' \in U_t$ és $f \in \overline{H}$ esetén $f(t') - f(t) \in V$.

Tegyük fel, hogy T lokálisan kompakt és legyen $t \in T$ rögzített pont, valamint W_t egy kompakt környezete t-nek T-ben. Legyen V a 0-nak tetszőleges környezete F-ben, és az előzőek alapján vegyük a t-nek olyan U_t környezetét a W_t topologikus altérben, amelyre minden $t' \in U_t$ és $f \in H$ esetén $f(t') - f(t) \in V$. Ekkor létezik a t-nek olyan U'_t környezete T-ben, hogy $U'_t \cap W_t = U_t$, és így U_t a t-nek T-ben is környezete, továbbá minden $t' \in U_t$ és $f \in H$ esetén $f(t') - f(t) \in V$. Ez azt jelenti, hogy H a T minden pontjában ekvifolytonos, vagyis H-ra a) is teljesül. (Ehhez már kihasználtuk az F lokális konvexitását és a T lokális kompaktságát.) ■

7.8.3. Következmény. *Ha T lokálisan kompakt tér és F Montel-tér, akkor egy $H \subseteq \mathscr{C}(T;F)$ halmaz pontosan akkor relatív kompakt a kompakt konvergencia topológiája szerint, ha H ekvifolytonos és minden $t \in T$ esetén az $\{f(t)|f \in H\}$ halmaz korlátos F-ben (vagyis H pontonként korlátos).*

Bizonyítás. Ha H pontonként korlátos, akkor minden $t \in T$ esetén az $\{f(t)|f \in H\}$ halmaz relatív kompakt F-ben, mert F Montel-tér, ezért a harmadik Ascoli-tétel alapján a H pontonkénti korlátossága és ekvifolytonossága elégséges ahhoz, hogy H relatív kompakt legyen a kompakt konvergencia topológiája szerint.

Ha H relatív kompakt a kompakt konvergencia topológiája szerint, akkor a T lokális kompaktsága és F lokális konvexitása folytán, a harmadik Ascoli-tétel alapján a H halmaz szükségképpen ekvifolytonos és minden $t \in T$ esetén az $\{f(t)|f \in H\}$ halmaz relatív kompakt, így korlátos F-ben. ■

7.8.4. Állítás. *Legyen T lokálisan kompakt tér, F normált tér, és a $T \to F$ folytonos függvények $\mathscr{C}(T;F)$ terét lássuk el a kompakt konvergencia topológiájával.*

a) *Ha a T lokálisan kompakt tér σ-kompakt, akkor $\mathscr{C}(T;F)$ metrizálható lokálisan konvex tér.*

b) *Ha F Banach-tér, akkor $\mathscr{C}(T;F)$ teljes szeparált lokálisan konvex tér.*

c) *Ha a T lokálisan kompakt tér σ-kompakt és F Banach-tér, akkor $\mathscr{C}(T;F)$ Fréchet-tér.*

Bizonyítás. Jelölje $\mathfrak{K}$ a T kompakt részhalmazainak halmazát, és minden $K \in \mathfrak{K}$ esetén legyen

$$|||\cdot|||_K : \mathscr{C}(T;F) \to \mathbb{R}_+; \quad f \mapsto \sup_{t\in K} \|f(t)\|.$$

Tudjuk, hogy a $\mathscr{C}(T;F)$ topológiája egyenlő a $(|||\cdot|||_K)_{K\in\mathfrak{K}}$ félnorma-rendszer által generált lokálisan konvex topológiával.

a) Legyen a T lokálisan kompakt tér σ-kompakt. Létezik a T kompakt részhalmazainak olyan $(K_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sorozata, hogy $T = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} K_n$ és minden $n \in \mathbb{N}$ esetén $K_n \subseteq \overset{\circ}{K}_{n+1}$ (27.12.2.). Ekkor a $(|||\cdot|||_{K_n})_{n\in\mathbb{N}}$ félnorma-sorozat szintén a kompakt konvergencia topológiáját generálja, mert minden $K \subseteq T$ kompakt halmazhoz van olyan $n \in \mathbb{N}$, hogy $K \subseteq K_n$, így $|||\cdot|||_K \leq |||\cdot|||_{K_n}$. Tehát, ha a T lokálisan kompakt tér σ-kompakt, akkor a $\mathscr{C}(T;F)$ függvénytér metrizálható lokálisan konvex tér.

b) Tegyük fel, hogy F Banach-tér, és legyen $(f_i)_{i\in I}$ tetszőleges általánosított Cauchy-sorozat $\mathscr{C}(T;F)$-ben. Ekkor minden $K \subseteq T$ kompakt halmazra teljesül az, hogy minden $\mathbb{R}^+ \ni \varepsilon$-hoz van olyan $i \in I$, hogy minden $j,k \in I$ esetén, ha $j \geq i$ és $k \geq i$, akkor $|||f_j - f_k|||_K \leq \varepsilon$. Speciálisan, ha $t \in T$, akkor ezt alkalmazva a $\{t\}$ kompakt halmazra kapjuk, hogy az F-ben haladó $(f_i(t))_{i\in I}$ általánosított sorozat Cauchy-sorozat, így az F teljessége miatt konvergens F-ben. Tehát az $(f_i)_{i\in I}$ általánosított függvénysorozat *pontonként konvergens* a T halmazon; legyen f a pontonkénti limeszfüggvény.

Legyen $K \subseteq T$ kompakt halmaz és $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$. Vegyünk olyan $i \in I$ indexet, amelyre $j,k \in I$ és $j \geq i$, $k \geq i$ esetén $|||f_j - f_k|||_K \leq \varepsilon$. Ha $k \in I$ olyan, hogy $k \geq i$, akkor $t \in K$ esetén minden $j \in I$ indexre, ha $j \geq i$, akkor $\|f_j(t) - f_k(t)\| \leq \varepsilon$, így $\|f(t) - f_k(t)\| = \lim_{j,I} \|f_j(t) - f_k(t)\| \leq \varepsilon$. Tehát $k \in I$ és $k \geq i$ esetén $\sup_{t\in K} \|f(t) - f_k(t)\| \leq \varepsilon$. Ez azt mutatja, hogy az $(f_i)_{i\in I}$ általánosított függvénysorozat az f-hez konvergál a T minden kompakt részhalmazán egyenletesen. De a T lokálisan kompakt, tehát minden pontjának létezik kompakt környezete, ezért $(f_i)_{i\in I}$ *lokálisan egyenletesen* konvergál f-hez. Ezért $f \in \mathscr{C}(T;F)$ (28.2.2.), így az $(f_i)_{i\in I}$ általánosított sorozat f-hez konvergál $\mathscr{C}(T;F)$-ben a kompakt konvergencia topológiája szerint.

c) Az a) és b) állítások összetevésével kapjuk. ■

Gyakran előforduló eset az, amikor T σ-kompakt lokálisan kompakt tér és F Banach-tér. Vigyázzunk arra, hogy ebben az esetben is csak annyit állíthatunk, hogy a $\mathscr{C}(T;F)$ függvénytér a kompakt konvergencia topológiájával *Fréchet-tér*, de előfordulhat az, hogy *nem normálható*, még akkor sem, ha F véges dimenziós. Pontosabban, a következő állítható.

7.8.5. Állítás. *Ha T nem kompakt, lokálisan kompakt tér és F nem nulla dimenziós normált tér, akkor a $\mathscr{C}(T;F)$ függvénytér a kompakt konvergencia topológiájával ellátva nem normálható szeparált lokálisan konvex tér.*

Bizonyítás. Ha $K \subseteq T$ kompakt halmaz és $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$, akkor a

$$W(K,\varepsilon) := \left\{ f \in \mathscr{C}(T;F) \,\middle|\, \sup_{t\in K} \|f(t)\| < \varepsilon \right\}$$

halmaz a 0-nak környezete $\mathscr{C}(T;F)$-ben a kompakt konvergencia topológiája szerint. Továbbá, ha $\mathfrak{K}$ a T kompakt részhalmazainak halmaza, akkor a

$$\{\ W(K,\varepsilon) \mid (K,\varepsilon) \in \mathfrak{K} \times \mathbb{R}^+\ \}$$

halmaz a 0-nak környezetbázisa $\mathscr{C}(T;F)$-ben a kompakt konvergencia topológiája szerint. Ugyanakkor e környezetbázis mindegyik tagja tartalmaz nem nulla dimenziós lineáris alteret, mert ha $K \subseteq T$ kompakt halmaz és $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$, akkor $t \in T \setminus K$ esetén a T topologikus tér teljes regularitása miatt vehetünk olyan $f \in \mathscr{C}(T;F)$ függvényt, hogy $f(t) \neq 0$ és $K \subseteq [f = 0]$; ekkor $\mathbb{K}.f \subseteq W(K,\varepsilon)$ és $\mathbb{K}.f$ egydimenziós lineáris altér $\mathscr{C}(T;F)$-ben. Ez azt jelenti, hogy a 0-nak van olyan környezetbázisa a $\mathscr{C}(T;F)$ függvénytérben, amelynek mindegyik tagja *nem korlátos.* Ezért $\mathscr{C}(T;F)$-ben a 0-nak nincs korlátos környezete a kompakt konvergencia topológiája szerint, így a topologikus vektorterek normálhatóságának kritériuma (5.2.1.) szerint a $\mathscr{C}(T;F)$ függvénytér a kompakt konvergencia topológiájával ellátva nem normálható. ■

7.9. A kompakt konvergencia topológiája holomorf függvények terén

7.9.1. Állítás. *Ha $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ nyílt halmaz, F komplex Banach-tér és az $\Omega \to F$ holomorf függvények $\mathscr{H}(\Omega;F)$ vektorterét ellátjuk a kompakt konvergencia topológiájával, akkor $\mathscr{H}(\Omega;F)$ Fréchet-tér, és ha F véges dimenziós, akkor Montel-tér.*

Bizonyítás. A $\mathscr{C}(\Omega;F)$ függvényteret szintén a kompakt konvergencia topológiájával látjuk el; ekkor $\mathscr{H}(\Omega;F)$ topologikus lineáris altere $\mathscr{C}(\Omega;F)$-nek.

Tudjuk, hogy $\mathscr{C}(\Omega;F)$ Fréchet-tér, ezért $\mathscr{H}(\Omega;F)$ pontosan akkor Fréchet-tér, ha *zárt* $\mathscr{C}(\Omega;F)$-ben. A $\mathscr{C}(\Omega;F)$ metrizálhatósága miatt a $\mathscr{H}(\Omega;F)$ zártsága ekvivalens a sorozatzártságával. A komplex függvénytanból tudjuk, hogy ha $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ olyan sorozat $\mathscr{H}(\Omega;F)$-ban, amely Ω-n lokálisan egyenletesen (vagyis az Ω minden kompakt részhalmazán egyenletesen) konvergál az $f : \Omega \to F$ függvényhez, akkor f is holomorf, ami éppen azt jelenti, hogy $\mathscr{H}(\Omega;F)$ sorozatzárt $\mathscr{C}(\Omega;F)$-ben a kompakt konvergencia topológiája szerint. Tehát $\mathscr{H}(\Omega;F)$ szintén Fréchet-tér.

Megmutatjuk, hogy $\mathscr{H}(\Omega;F)$-ban minden korlátos halmaz ekvifolytonos. Legyen $H \subseteq \mathscr{H}(\Omega;F)$ korlátos halmaz, tehát minden $K \subseteq \Omega$ kompakt halmazra teljesül az, hogy $\sup_{f\in H} \left(\sup_{z\in K} \|f(z)\|\right) < +\infty$. Legyen $\mathfrak{a} \in \Omega$ rögzített pont; megmutatjuk, hogy H

ekvifolytonos az $\mathfrak{a}$ pontban. Ehhez először vegyünk olyan $R \in \mathbb{R}^+$ számot, amelyre $\overline{B}_R(\mathfrak{a};\mathbb{C}) \subseteq \Omega$, és legyen $M := \sup_{f \in H} \left(\sup_{z \in \overline{B}_R(\mathfrak{a};\mathbb{C})} \|f(z)\| \right)$. Rögzítsünk egy $r \in]0,R[$ valós számot. Ha $f \in H$ és $z \in B_r(\mathfrak{a};\mathbb{C})$, akkor a Cauchy-egyenlőtlenség alapján

$$\|(Df)(z)\| \leq \frac{1}{R} \frac{1}{\left(1 - \frac{|z-\mathfrak{a}|}{R}\right)^2} \sup_{z' \in \mathbb{C};\ |z'-\mathfrak{a}|=R} \|f(z')\| \leq$$

$$\leq \frac{RM}{(R - |z-\mathfrak{a}|)^2} \leq \frac{RM}{(R-r)^2}.$$

Ebből és a véges növekmények formulájából következik, hogy bármely $\rho \in]0,r[$ valós számra, $B_\rho(\mathfrak{a};\mathbb{C}) \ni z$-re és $H \ni f$-re

$$\|f(z) - f(\mathfrak{a})\| \leq \left(\sup_{z' \in]\!]\mathfrak{a},z[\![} \|(Df)(z')\| \right) |z-\mathfrak{a}| \leq \frac{RM}{(R-r)^2} |z-\mathfrak{a}|.$$

Tehát, ha $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ tetszőleges és a $\rho \in \mathbb{R}^+$ számot úgy választjuk meg, hogy $\rho < r$ és $\frac{RM}{(R-r)^2}\rho < \varepsilon$ teljesüljön, akkor minden $f \in H$ és $z \in B_\rho(\mathfrak{a};\mathbb{C})$ esetén $\|f(z) - f(\mathfrak{a})\| < \varepsilon$, ami azt jelenti, hogy a H függvényhalmaz ekvifolytonos az $\mathfrak{a}$ pontban.

Legyen $B \subseteq \mathscr{H}(\Omega;F)$ korlátos és zárt halmaz. A $\mathscr{H}(\Omega;F)$ lineáris altér zárt $\mathscr{C}(\Omega;F)$-ben, ezért B zárt $\mathscr{C}(\Omega;F)$-ben. Ha B relatív kompakt volna $\mathscr{C}(\Omega;F)$-ben, akkor B kompakt lenne $\mathscr{C}(\Omega;F)$-ben és részhalmaza $\mathscr{H}(\Omega;F)$-nak, így kompakt volna $\mathscr{H}(\Omega;F)$-ben is. Az Ω topologikus tér (természetesen az euklidészi topológiával) lokálisan kompakt és F lokálisan konvex, így a harmadik Ascoli-tétel alapján a B halmaz pontosan akkor relatív kompakt $\mathscr{C}(\Omega;F)$-ben, ha ekvifolytonos és minden $z \in \Omega$ esetén az $\{f(z)|f \in B\}$ halmaz relatív kompakt F-ben. Ha F véges dimenziós, akkor ez utóbbi feltétel ekvivalens azzal, hogy minden $z \in \Omega$ esetén az $\{f(z)|f \in B\}$ halmaz korlátos F-ben. A B halmaz a kompakt konvergencia topológiája szerint korlátos ezért még inkább pontonként korlátos. Az előző bekezdésben láttuk, hogy B ekvifolytonos (még akkor is, ha F nem véges dimenziós). Ezért véges dimenziós F esetén B kompakt $\mathscr{H}(\Omega;F)$-ban. Ugyanakkor $\mathscr{H}(\Omega;F)$ Fréchet-tér, ezért szükségképpen hordós tér. Tehát véges dimenziós F esetén $\mathscr{H}(\Omega;F)$ Montel-tér. ∎

Megjegyezzük, hogy $\Omega \neq \emptyset$ esetén az F komplex Banach-tér véges dimenziósságának feltétele nem hagyható el annak bizonyításában, hogy $\mathscr{H}(\Omega;F)$ Montel-tér. Valóban, ha F végtelen dimenziós, akkor F-ben a 0 középpontú gömbök nem relatív kompaktak, ezért létezik olyan $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ korlátos sorozat F-ben, amelynek nincs konvergens részsorozata. Ha minden $n \in \mathbb{N}$ esetén $\tilde{v}_n$ jelöli a v_n értékű $\Omega \to F$ konstansfüggvényt, akkor $\{\tilde{v}_n|n \in \mathbb{N}\}$ olyan korlátos halmaz (még az egyenletes konvergencia topológiája szerint is korlátos), hogy létezik benne haladó sorozat, amelynek nincs konvergens részsorozata $\mathscr{H}(\Omega;F)$-ben; így ez a halmaz nem relatív kompakt $\mathscr{H}(\Omega;F)$-ben.

7.10. Differenciálható függvények tere

7.10.1. Jelölés. *Legyen E valós normált tér, $\Omega \subseteq E$ nyílt halmaz és F normált tér. Ekkor $C^\infty(\Omega; F)$ jelöli az $\Omega \to F$ végtelenszer $\mathbb{R}$-differenciálható függvények vektorterét (amely azon test felett vektortér, amely test felett az F vektortér), és minden $K \subseteq \Omega$ kompakt halmazra és $\mathbb{N} \ni p$-re*

$$|||\cdot|||_{K,p} : C^\infty(\Omega; F) \to \mathbb{R}_+; \quad f \mapsto \sup_{x\in K} \|(D^p f)(x)\|.$$

Könnyen látható, hogy ha E valós normált tér, $\Omega \subseteq E$ nyílt halmaz és F normált tér, akkor minden $K \subseteq \Omega$ kompakt halmazra és $\mathbb{N} \ni p$-re $|||\cdot|||_{K,p}$ félnorma $C^\infty(\Omega; F)$ felett, és ha $\mathscr{T}$ jelöli a $(|||\cdot|||_{K,p})_{(K,p)\in\mathfrak{K}\times\mathbb{N}}$ félnorma-rendszer által generált lokálisan konvex topológiát $C^\infty(\Omega; F)$ felett (ahol $\mathfrak{K}$ az Ω kompakt részhalmazainak halmaza), akkor

– egy $C^\infty(\Omega; F)$-ben haladó $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sorozat pontosan akkor konvergál az $f \in C^\infty(\Omega; F)$ függvényhez a $\mathscr{T}$ topológia szerint, ha minden $p \in \mathbb{N}$ esetén a $(D^p f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ függvénysorozat az Ω minden kompakt részhalmazán egyenletesen konvergál $D^p f$-hez;

– egy $H \subseteq C^\infty(\Omega; F)$ halmaz pontosan akkor korlátos a $\mathscr{T}$ topológia szerint, ha minden $p \in \mathbb{N}$ és $K \in \mathfrak{K}$ esetén $\sup\limits_{f\in H} \sup\limits_{x\in K} \|(D^p f)(x)\| < +\infty$.

7.10.2. Állítás. *Legyen E véges dimenziós valós normált tér, $\Omega \subseteq E$ nyílt halmaz, F normált tér és jelölje $\mathfrak{K}$ az Ω kompakt részhalmazainak halmazát. Lássuk el a $C^\infty(\Omega; F)$ függvényteret a $(|||\cdot|||_{K,p})_{(K,p)\in\mathfrak{K}\times\mathbb{N}}$ félnorma-rendszer által generált lokálisan konvex topológiával.*

a) *A $C^\infty(\Omega; F)$ lokálisan konvex tér metrizálható.*

b) *Ha F Banach-tér, akkor $C^\infty(\Omega; F)$ Fréchet-tér.*

c) *Ha F véges dimenziós, akkor $C^\infty(\Omega; F)$ Fréchet-tér és Montel-tér.*

Bizonyítás. a) Jelölje $\mathscr{T}$ a $(|||\cdot|||_{K,p})_{(K,p)\in\mathfrak{K}\times\mathbb{N}}$ félnorma-rendszer által generált lokálisan konvex topológiát $C^\infty(\Omega; F)$ felett. Az Ω topologikus tér lokálisan kompakt és σ-kompakt, ezért vehetjük az Ω kompakt részhalmazainak olyan $(K_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sorozatát, amelyre minden $n \in \mathbb{N}$ esetén $K_n \subseteq \overset{\circ}{K}_{n+1}$ és $\Omega = \bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} K_n$. Tehát ekkor minden $K \subseteq \Omega$ kompakt halmazhoz van olyan $n \in \mathbb{N}$, hogy $K \subseteq K_n$, tehát minden $\mathbb{N} \ni p$-re $|||\cdot|||_{K,p} \leq |||\cdot|||_{K_n,p}$. Ebből következik, hogy a $(|||\cdot|||_{K_n,p})_{(n,p)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N}}$ *megszámlálható* félnorma-rendszer által generált lokálisan konvex topológia $C^\infty(\Omega; F)$ felett egyenlő a $\mathscr{T}$ topológiával, így a $\mathscr{T}$ topológia félmetrizálható. Ugyanakkor a $\mathscr{C}(\Omega; F)$ feletti kompakt konvergencia topológiájának $C^\infty(\Omega; F)$-re vett leszűkítése megegyezik a $(|||\cdot|||_{K,0})_{K\in\mathfrak{K}}$ félnorma-rendszer által generált lokálisan konvex topológiával, ezért ezt majorálja a $\mathscr{T}$

topológia, így a $\mathscr{T}$ topológia Hausdorff-féle. Tehát $C^\infty(\Omega;F)$ a $\mathscr{T}$ topológiával ellátva metrizálható lokálisan konvex tér.

b) Tegyük fel, hogy F Banach-tér, és legyen $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ olyan sorozat $C^\infty(\Omega;F)$-ben, amely a $\mathscr{T}$ topológia szerint Cauchy-sorozat. Ekkor minden $p\in\mathbb{N}$ esetén $(D^pf_n)_{n\in\mathbb{N}}$ Cauchy-sorozat $\mathscr{C}(\Omega;F)$-ben a kompakt konvergencia topológiája szerint, és ez utóbbi tér teljes, tehát $(D^pf_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergens $\mathscr{C}(\Omega;F)$-ben a kompakt konvergencia topológiája szerint. Speciálisan, az $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ függvénysorozat is lokálisan egyenletesen konvergál egy $f:\Omega\to F$ folytonos függvényhez. A differenciálelmélet szerint, hogy ekkor az f függvény *végtelenszer differenciálható*, és minden $p\in\mathbb{N}$ esetén a $(D^pf_n)_{n\in\mathbb{N}}$ függvénysorozat lokálisan egyenletesen konvergál D^pf-hez. Ez azt jelenti, hogy $f\in C^\infty(\Omega;F)$ és az $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sorozat konvergál f-hez a $\mathscr{T}$ topológia szerint. Tehát $C^\infty(\Omega;F)$ a $\mathscr{T}$ topológiával ellátva teljes, így az a) alapján Fréchet-tér.

c) Először megmutatjuk, hogy ha $H\subseteq C^\infty(\Omega;F)$ tetszőleges $\mathscr{T}$-korlátos halmaz, akkor minden $p\in\mathbb{N}$ esetén a $\{D^pf|f\in H\}$ függvényhalmaz *ekvifolytonos*. Ehhez, legyen $p\in\mathbb{N}$ rögzítve, és vegyünk egy $\mathfrak{a}\in\Omega$ pontot; azt fogjuk igazolni, hogy $\{D^pf|f\in H\}$ ekvifolytonos az $\mathfrak{a}$ pontban. Először rögzítünk olyan $R\in\mathbb{R}^+$ számot, hogy $\overline{B}_R(\mathfrak{a})\subseteq\Omega$, majd a $\overline{B}_R(\mathfrak{a})$ kompakt halmazhoz és a $p+1$ számhoz elkészítjük az $M:=\sup\limits_{f\in H}\|f\|_{\overline{B}_R(\mathfrak{a}),p+1}<+\infty$ számot, ami azért véges, mert H korlátos a $\mathscr{T}$ szerint.
Ha $f\in H$ és $x\in\overline{B}_R(\mathfrak{a})$, akkor a $D^pf:\Omega\to\mathscr{L}_p(E^p;F)$ differenciálható függvényre alkalmazva a véges növekmények formuláját kapjuk, hogy

$$\|(D^pf)(x)-(D^pf)(\mathfrak{a})\|\le\left(\sup_{z\in]\!]\mathfrak{a},x[\![}\|(D(D^pf))(z)\|\right)\|x-\mathfrak{a}\|=$$

$$=\left(\sup_{z\in]\!]\mathfrak{a},x[\![}\|(D^{p+1}f)(z)\|\right)\|x-\mathfrak{a}\|\le M\|x-\mathfrak{a}\|.$$

Tehát, ha $\varepsilon\in\mathbb{R}^+$ és az $r\in\mathbb{R}^+$ számot úgy választjuk meg, hogy $r<R$ és $Mr<\varepsilon$, akkor minden $B_r(\mathfrak{a})\ni x$-re és $H\ni f$-re $\|(D^pf)(x)-(D^pf)(\mathfrak{a})\|<\varepsilon$, ami azt jelenti, hogy a $\{D^pf|f\in H\}$ függvényhalmaz ekvifolytonos az $\mathfrak{a}$ pontban.

Tehát, ha $H\subseteq C^\infty(\Omega;F)$ tetszőleges $\mathscr{T}$-korlátos halmaz, akkor minden $p\in\mathbb{N}$ esetén $\{D^pf|f\in H\}$ ekvifolytonos függvényhalmaz, és persze pontonként korlátos is, hiszen minden $x\in\Omega$ esetén $\sup\limits_{f\in H}\|(D^pf)(x)\|=\sup\limits_{f\in H}|\!|\!|f|\!|\!|_{\{x\},p}<+\infty$, így az F véges dimenzióssága esetén, a harmadik Ascoli-tétel alapján $\{D^pf|f\in H\}$ *relatív kompakt* $\mathscr{C}(\Omega;\mathscr{L}_p(E^p;F))$-ben a kompakt konvergencia topológiája szerint.

Most feltesszük, hogy F véges dimenziós, és $H\subseteq C^\infty(\Omega;F)$ tetszőleges $\mathscr{T}$-korlátos halmaz. Megmutatjuk, hogy H relatív kompakt $C^\infty(\Omega;F)$-ben a $\mathscr{T}$ topológia szerint. A $\mathscr{T}$ metrizálhatósága miatt alkalmazhatjuk a relatív kompaktság Bolzano–Weierstrass-kritériumát, tehát azt, hogy metrikus tér egy részhalmaza pontosan akkor relatív kompakt, ha minden benne haladó sorozatnak létezik konvergens részsorozata.

Legyen tehát $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tetszőleges olyan sorozat, amely H-ban halad. A kiválasztási axiómával kombinált rekurziós tétel alkalmazásával igazoljuk olyan $(\sigma_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sorozat létezését, amelyre a következők teljesülnek:

– minden $\mathbb{N} \ni n$-re $\sigma_n : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ szigorúan monoton növő függvény;

– minden $\mathbb{N} \ni n$-re σ_{n+1} részsorozata σ_n-nek, vagyis létezik olyan $\tau : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ szigorúan monoton növő függvény, hogy $\sigma_{n+1} = \sigma_n \circ \tau$;

– minden $n \in \mathbb{N}$ esetén, minden $p \leq n$ természetes számra a $(D^p f_{\sigma_n(k)})_{k\in\mathbb{N}}$ függvénysorozat lokálisan egyenletesen konvergens az Ω halmazon.

A $\sigma_0 : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ szigorúan monoton növő függvényre csak az a feltétel, hogy az $(f_{\sigma_0(k)})_{k\in\mathbb{N}}$ függvénysorozat lokálisan egyenletesen konvergens legyen az Ω halmazon. Ilyen σ_0 függvény azért létezik, mert H relatív kompakt $\mathscr{C}(\Omega; F)$-ben a kompakt konvergencia topológiája szerint, és az $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sorozat H-ban halad, így $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$-nek van olyan részsorozata, amely lokálisan egyenletesen konvergál egy $\Omega \to F$ folytonos függvényhez.

Legyen $n \in \mathbb{N}^+$ és $(\sigma_m)_{m\in n}$ olyan rendszer, hogy

– minden $m \in n$ esetén $\sigma_m : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ szigorúan monoton növő függvény;

– minden $m \in n$ esetén, ha $m + 1 < n$, akkor σ_{m+1} részsorozata σ_m-nek;

– minden $m \in n$ esetén, minden $p \leq m$ természetes számra a $(D^p f_{\sigma_m(k)})_{k\in\mathbb{N}}$ függvénysorozat lokálisan egyenletesen konvergens az Ω halmazon.

A $\{D^n f_{\sigma_{n-1}(k)} | k \in \mathbb{N}\}$ függvényhalmaz részhalmaza $\{D^n f | f \in H\}$-nak, amely relatív kompakt $\mathscr{C}(\Omega; \mathscr{L}_n(E^n; F))$-ben a kompakt konvergencia topológiája szerint, ezért a Bolzano–Weierstrass-tétel alapján van olyan $\tau : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ szigorúan monoton növő függvény, amelyre a $\left(D^n f_{\sigma_{n-1}(\tau(k))}\right)_{k\in\mathbb{N}}$ sorozat lokálisan egyenletesen konvergens az Ω halmazon. Ekkor $\sigma_n := \sigma_{n-1} \circ \tau : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ olyan szigorúan monoton növő függvény, amely részsorozata σ_{n-1}-nek és ha $p \leq n$ olyan természetes szám, hogy $p < n$, akkor $p \leq n - 1$, tehát a $(D^p f_{\sigma_{n-1}(k)})_{k\in\mathbb{N}}$ függvénysorozat lokálisan egyenletesen konvergens az Ω halmazon, így a $(D^p f_{\sigma_n(k)})_{k\in\mathbb{N}} = (D^p f_{\sigma_{n-1}(\tau(k))})_{k\in\mathbb{N}}$ függvénysorozat is lokálisan egyenletesen konvergens az Ω halmazon, hiszen ez részsorozata $(D^p f_{\sigma_{n-1}(k)})_{k\in\mathbb{N}}$-nek; ugyanakkor a $(D^n f_{\sigma_n(k)})_{k\in\mathbb{N}}$ a τ választása és a σ_n értelmezése alapján lokálisan egyenletesen konvergens az Ω halmazon. Tehát az imént értelmezett $(\sigma_m)_{m\in n+1}$ rendszerre teljesül az, hogy

– minden $m \in n + 1$ esetén $\sigma_m : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ szigorúan monoton növő függvény;

– minden $m \in n + 1$ esetén, ha $m + 1 < n + 1$, akkor σ_{m+1} részsorozata σ_m-nek;

– minden $m \in n + 1$ esetén, minden $p \leq m$ természetes számra a $(D^p f_{\sigma_m(k)})_{k\in\mathbb{N}}$ függvénysorozat lokálisan egyenletesen konvergens az Ω halmazon.

Tehát létezik olyan $(\sigma_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sorozatot, amely rendelkezik az előírt tulajdonságokkal. Képezzük most a $\sigma : \mathbb{N} \to \mathbb{N};\ n \mapsto \sigma_n(n)$ függvényt. Ez szigorúan monoton növő, mert $n \in \mathbb{N}$ esetén létezik olyan $\tau : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ szigorúan monoton növő függvény, hogy $\sigma_{n+1} = \sigma_n \circ \tau$, tehát $\tau(n + 1) \geq n + 1$ és a σ_n szigorú monoton növése miatt

$\sigma(n+1) := \sigma_{n+1}(n+1) = \sigma_n(\tau(n+1)) \geq \sigma_n(n+1) > \sigma_n(n) =: \sigma(n).$

A bizonyítás utolsó lépéseként megmutatjuk, hogy az $(f_{\sigma(k)})_{k\in\mathbb{N}}$ függvénysorozat (amely részsorozata $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$-nek) konvergens $C^\infty(\Omega; F)$-ben a $\mathscr{T}$ topológia szerint. Minden $n \in \mathbb{N}$ esetén legyen $g_n : \Omega \to F$ az a függvény, amelyhez az $(f_{\sigma_n(k)})_{k\in\mathbb{N}}$ függvénysorozat lokálisan egyenletesen konvergál Ω-n. A definíciók szerint $n \in \mathbb{N}$ esetén minden $p \leq n$ természetes számra a $(D^p f_{\sigma_n(k)})_{k\in\mathbb{N}}$ függvénysorozat lokálisan egyenletesen konvergens az Ω halmazon, így $g_n \in C^n(\Omega; F)$ és minden $p \leq n$ természetes számra a $(D^p f_{\sigma_n(k)})_{k\in\mathbb{N}}$ függvénysorozat lokálisan egyenletesen konvergál $D^p g_n$-hez az Ω halmazon. Speciálisan, minden $\mathbb{N} \ni n$-re a $(D^n f_{\sigma_n(k)})_{k\in\mathbb{N}}$ függvénysorozat lokálisan egyenletesen konvergál $D^n g_n$-hez az Ω halmazon. Legyen most $n \in \mathbb{N}$ és $K \in \mathfrak{K}$ rögzítve, és vegyünk tetszőleges $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ számot. Az iménti megjegyzés szerint van olyan $N \in \mathbb{N}$, hogy minden $k > N$ természetes számra és $K \ni x$-re $\|(D^n f_{\sigma_n(k)})(x) - (D^n g_n)(x)\| \leq \varepsilon$. Ha $k \in \mathbb{N}$ és $k \geq n$, akkor van olyan $\tau_k : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ szigorúan monoton növő függvény, hogy $\sigma_k = \sigma_n \circ \tau_k$, tehát, ha $k > N$ is teljesül, akkor $\tau_k(k) \geq k > N$ miatt minden $K \ni x$-re

$$\|(D^n f_{\sigma(k)})(x) - (D^n g_n)(x)\| := \|(D^n f_{\sigma_k(k)})(x) - (D^n g_n)(x)\| =$$

$$= \|(D^n f_{\sigma_n(\tau_k(k))})(x) - (D^n g_n)(x)\| \leq \varepsilon,$$

vagyis $k > \max(N, n)$ esetén $|||D^n f_{\sigma(k)} - D^n g_n|||_K \leq \varepsilon$. Ez azt jelenti, hogy minden $\mathbb{N} \ni n$-re a $(D^n f_{\sigma(k)})_{k\in\mathbb{N}}$ függvénysorozat lokálisan egyenletesen konvergens Ω-n, így $g_0 \in C^\infty(\Omega; F)$ és az $(f_{\sigma(k)})_{k\in\mathbb{N}}$ függvénysorozat g_0-hoz tart a $\mathscr{T}$ topológia szerint.

Ezzel megmutattuk, hogy $C^\infty(\Omega; F)$-ben minden korlátos halmaz relatív kompakt, továbbá ez a tér a b) szerint Fréchet-tér, így hordós tér is. Ez azt jelenti, hogy $C^\infty(\Omega; F)$ Montel-tér. ■

7.10.3. Jelölés. *Legyen E valós normált tér, $\Omega \subseteq E$ nyílt halmaz és F normált tér. Ha $K \subseteq \Omega$ kompakt halmaz, akkor*

$$C^\infty(\Omega, K; F) := \{f \in C^\infty(\Omega; F) \mid \mathrm{supp}(f) \subseteq K\},$$

továbbá

$$C_0^\infty(\Omega; F) := \bigcup_{K\in\mathfrak{K}} C^\infty(\Omega, K; F),$$

ahol $\mathfrak{K}$ az Ω kompakt részhalmazainak halmaza; tehát $C_0^\infty(\Omega; F)$ az $\Omega \to F$ kompakt tartójú, végtelenszer differenciálható függvények tere.

7.10.4. Következmény. *Legyen E véges dimenziós valós normált tér, $\Omega \subseteq E$ nyílt halmaz és F normált tér. A $C^\infty(\Omega; F)$ függvényteret ellátjuk a*

$$(|||\cdot|||_{K,p})_{(K,p)\in\mathfrak{K}\times\mathbb{N}}$$

félnorma-rendszer által generált lokálisan konvex topológiával, ahol $\mathfrak{K}$ az Ω kompakt részhalmazainak halmaza. Legyen $K \subseteq \Omega$ rögzített kompakt halmaz.

a) *A* $C^\infty(\Omega, K; F)$ *függvényhalmaz zárt lineáris altere a* $C^\infty(\Omega; F)$ *függvénytérnek. A* $C^\infty(\Omega, K; F)$ *topologikus lineáris altér metrizálható lokálisan konvex tér.*

b) *Ha* F *Banach-tér, akkor a* $C^\infty(\Omega, K; F)$ *topologikus lineáris altér Fréchet-tér.*

c) *Ha* F *véges dimenziós, akkor a* $C^\infty(\Omega, K; F)$ *topologikus lineáris altér Fréchet-tér és Montel-tér.*

d) *A* $C^\infty(\Omega; F)$ *függvénytér topológiájának* $C^\infty(\Omega, K; F)$*-re vett leszűkítése egyenlő a* $(|||\cdot|||_{K,p})_{p\in\mathbb{N}}$ *félnorma-sorozat* $C^\infty(\Omega, K; F)$*-re vett leszűkítései által generált lokálisan konvex topológiával.*

Bizonyítás. a) Ha a $C^\infty(\Omega, K; F)$ halmazban haladó $(f_i)_{i\in I}$ általánosított sorozat konvergál a $f \in C^\infty(\Omega; F)$ függvényhez $C^\infty(\Omega; F)$-ben, akkor minden $x \in \Omega$ esetén $\lim_{i,\ I} |||f_i - f|||_{\{x\},0} = 0$, vagyis $\lim_{i,\ I} \|f_i(x) - f(x)\| = 0$, ami azt jelenti, hogy $(f_i)_{i\in I}$ pontonként is konvergál f-hez, így $[f \neq 0] \subseteq \bigcup_{i\in I}[f_i \neq 0] \subseteq K$, tehát $f \in C^\infty(\Omega, K; F)$. Ezért $C^\infty(\Omega, K; F)$ zárt lineáris altere $C^\infty(\Omega; F)$-nek. Továbbá Ω σ-kompakt lokálisan kompakt tér, így az előző állítás a) pontja szerint a $C^\infty(\Omega, K; F)$ topologikus lineáris altér metrizálható lokálisan konvex tér, mert $C^\infty(\Omega; F)$ is metrizálható lokálisan konvex tér.

b) Ha F Banach-tér, akkor az előző állítás szerint $C^\infty(\Omega; F)$ teljes szeparált lokálisan konvex tér, és az a) alapján $C^\infty(\Omega, K; F)$ zárt lineáris altere $C^\infty(\Omega; F)$-nek, így a $C^\infty(\Omega, K; F)$ topologikus lineáris altér teljes. Ugyanakkor az a) szerint $C^\infty(\Omega, K; F)$ metrizálható is, így Fréchet-tér.

c) Legyen F véges dimenziós, és $B \subseteq C^\infty(\Omega, K; F)$ korlátos és zárt halmaz. Az a) szerint $C^\infty(\Omega, K; F)$ zárt $C^\infty(\Omega; F)$-ben, ezért B zárt halmaz $C^\infty(\Omega; F)$-ben is, továbbá természetesen korlátos is $C^\infty(\Omega; F)$-ben. Az előző állítás c) pontja szerint $C^\infty(\Omega; F)$ Montel-tér, ezért B kompakt $C^\infty(\Omega; F)$-ben. De $B \subseteq C^\infty(\Omega, K; F)$, ezért B kompakt a $C^\infty(\Omega, K; F)$ topologikus lineáris altérben is. Ugyanakkor a b) alapján a $C^\infty(\Omega, K; F)$ topologikus lineáris altér Fréchet-tér, így hordós tér is. Ez azt jelenti, hogy a $C^\infty(\Omega, K; F)$ topologikus lineáris altér Montel-tér.

d) Legyen $f \in C^\infty(\Omega, K; F)$. Ekkor $\Omega \setminus K \subseteq [f = 0]$ és itt a bal oldalon nyílt halmaz áll, ezért a magasabb rendű differenciálás lokalitása miatt minden $\mathbb{N} \ni p$-re $\Omega \setminus K \subseteq [D^p f = 0]$, vagyis $[D^p f \neq 0] \subseteq K$, így $\operatorname{supp}(D^p f) \subseteq K$. Ebből következik, hogy minden $L \subseteq \Omega$ kompakt halmazra és $\mathbb{N} \ni p$-re

$$|||f|||_{L,p} := \sup_{x\in L} \|(D^p f)(x)\| = \sup_{x\in L\cap K} \|(D^p f)(x)\| \leq \sup_{x\in K} \|(D^p f)(x)\| =: |||f\,|||_{K,p}\,.$$

Ebből látszik, hogy a

$$(|||\cdot|||_{L,p})_{(L,p)\in\mathfrak{K}\times\mathbb{N}}$$

félnorma-rendszer tagjainak $C^\infty(\Omega, K; F)$-re vett leszűkítései ugyanazt a lokálisan konvex topológiát generálják $C^\infty(\Omega, K; F)$ felett, mint a $(|||\cdot|||_{K,p})_{p\in\mathbb{N}}$ félnorma-sorozat tagjainak

$C^\infty(\Omega, K; F)$-re vett leszűkítései. ■

7.10.5. Állítás. *Legyen E véges dimenziós valós normált tér, $\Omega \subseteq E$ nyílt halmaz és F normált tér. A $C^\infty(\Omega; F)$ függvényteret ellátjuk a*

$$(|||\cdot|||_{K,p})_{(K,p)\in\mathfrak{K}\times\mathbb{N}}$$

félnorma-rendszer által generált lokálisan konvex topológiával, ahol $\mathfrak{K}$ az Ω kompakt részhalmazainak halmaza. Minden $K \subseteq \Omega$ kompakt halmazra a $C^\infty(\Omega, K; F)$ függvényteret ellátjuk a $C^\infty(\Omega; F)$ topológiájának leszűkítésével. Végül, a $C_0^\infty(\Omega; F)$ függvényteret ellátjuk a $(C^\infty(\Omega, K; F), id_{C^\infty(\Omega,K;F)})_{K\in\mathfrak{K}}$ rendszer által induktívan előállított lokálisan konvex topológiával.

a) *Ha $(K_n)_{n\in\mathbb{N}}$ az Ω kompakt részhalmazainak olyan sorozata, hogy $\Omega = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} K_n$ és minden $\mathbb{N} \ni n$-re $K_n \subseteq \overset{\circ}{K}_{n+1}$, akkor a $C_0^\infty(\Omega; F)$ függvénytér topológiája megegyezik a $(C^\infty(\Omega, K_n; F))_{n\in\mathbb{N}}$ lokálisan konvex tér-sorozat szigorú induktív limeszével.*

b) *Ha F Banach-tér, akkor $C_0^\infty(\Omega; F)$ sorozatteljes ultrabornologikus tér.*

c) *Ha F véges dimenziós, akkor $C_0^\infty(\Omega; F)$ ultrabornologikus Montel-tér.*

d) *Ha $\Omega \neq \emptyset$ és F nem nulla dimenziós Banach-tér, akkor $C_0^\infty(\Omega; F)$ nem metrizálható.*

Bizonyítás. a) Legyen $(K_n)_{n\in\mathbb{N}}$ az Ω kompakt részhalmazainak olyan sorozata, hogy $\Omega = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} K_n$ és minden $\mathbb{N} \ni n$-re $K_n \subseteq \overset{\circ}{K}_{n+1}$. Jelölje $\mathscr{T}$ a $C_0^\infty(\Omega; F)$ topológiáját, és $\mathscr{T}'$ a $(C^\infty(\Omega, K_n; F))_{n\in\mathbb{N}}$ lokálisan konvex tér-sorozat által induktívan elállított $C_0^\infty(\Omega; F)$ feletti topológiát. Minden $K \subseteq \Omega$ kompakt halmazra jelölje ι_K a $C^\infty(\Omega, K; F) \to C^\infty(\Omega; F)$ kanonikus injekciót.

Minden $n \in \mathbb{N}$ esetén az ι_{K_n} operátor folytonos a $C^\infty(\Omega; F)$ feletti $\mathscr{T}$ lokálisan konvex topológia szerint, ezért a $\mathscr{T}'$ definíciója alapján $\mathscr{T} \subseteq \mathscr{T}'$.

Ha $K \subseteq \Omega$ kompakt halmaz, akkor van olyan $n \in \mathbb{N}$, hogy $K \subseteq K_n$, következésképpen $C^\infty(\Omega, K; F) \subseteq C^\infty(\Omega, K_n; F)$, és az i_{K_n} lineáris operátor folytonos a $C^\infty(\Omega; F)$ feletti $\mathscr{T}'$ lokálisan konvex topológia szerint, így a ι_{K_n} leszűkítése a $C^\infty(\Omega, K; F)$ topologikus lineáris altérre, vagyis az ι_K operátor szintén folytonos a $\mathscr{T}'$ szerint. Ezért a $\mathscr{T}$ topológia definíciója alapján $\mathscr{T}' \subseteq \mathscr{T}$.

Az előző állítás szerint $n \in \mathbb{N}$ esetén $C^\infty(\Omega, K_n; F)$ zárt lineáris altere a $C^\infty(\Omega; F)$ függvénytérnek, így $C^\infty(\Omega, K_n; F)$ zárt lineáris altere a $C^\infty(\Omega, K_{n+1}; F)$-nek. Tehát a $C_0^\infty(\Omega; F)$ függvénytér topológiája megegyezik a $(C^\infty(\Omega, K_n; F))_{n\in\mathbb{N}}$ lokálisan konvex tér-sorozat szigorú induktív limeszével.

b) Legyen F Banach-tér; ekkor az előző állítás szerint minden $K \subseteq \Omega$ kompakt halmazra $C^\infty(\Omega, K; F)$ Fréchet-tér, így ultrabornologikus. Tehát $C_0^\infty(\Omega; F)$ előáll olyan zárt topologikus lineáris altereinek induktív limeszeként, amelyek ultrabornologikusak, így

$C_0^\infty(\Omega; F)$ is ultrabornologikus. Láttuk azt, hogy sorozatteljes lokálisan konvex terek szigorú induktív limesze sorozatteljes, ezért $C_0^\infty(\Omega; F)$ is sorozatteljes.

c) Ha F véges dimenziós, akkor az előző állítás szerint minden $K \subseteq \Omega$ kompakt halmazra $C^\infty(\Omega, K; F)$ Montel-tér. Montel-terek szigorú induktív limesze Montel-tér, tehát, ha F véges dimenziós, akkor az a) alapján $C_0^\infty(\Omega; F)$ is Montel-tér.

d) Ha $\Omega \neq \emptyset$ és F nem nulla dimenziós Banach-tér, akkor minden $K \subseteq \Omega$ kompakt halmazra $C^\infty(\Omega, K; F) \neq C_0^\infty(\Omega; F)$, így az a) állításból következik, hogy $C_0^\infty(\Omega; F)$ nem metrizálható. ■

Vigyázzunk arra, hogy az előző állítás feltételei mellett a $C_0^\infty(\Omega; F)$ függvénytér topológiája nyilvánvalóan majorálja a $C^\infty(\Omega; F)$ topológiájának leszűkítését, de ha $\Omega \neq \emptyset$ és $F \neq \{0\}$ Banach-tér, akkor e két topológia különböző, mert az utóbbi metrizálható, míg a d) szerint az előbbi nem olyan.

II. rész

Kompakt konvex halmazok

BEVEZETÉS

Az analízisben és az analízis alkalmazásaiban gyakran találkozunk *kompakt konvex* halmazokkal topologikus vektorterekben. A Banach–Alaoglu-tétel (5.11.3.) szerint egy E normált tér topologikus duálisában a funkcionálnorma szerint zárt egységgömb a $\sigma(E', E)$ topológia szerint kompakt és természetesen konvex halmaz. Ez az egyik legfontosabb kompakt konvex halmaztípus. A normált algebrákkal foglalkozó III. részben látni fogjuk, hogy egy A Banach-*-algebrán értelmezett, egynél kisebb-egyenlő normájú pozitív funkcionálok halmaza a $\sigma(A', A)$ topológia szerint szintén kompakt konvex halmaz. Az is kiderül majd, hogy approximatív egységes Banach-*-algebra esetében ennek a kompakt konvex halmaznak az elemei (a Gelfand-Najmark-Segal konstrukció által) szoros kapcsolatban állnak az algebra *ciklikus ábrázolásaival.* Az ortohálókkal foglalkozó függelékben látjuk majd, hogy egy ortoháló felett a *végesen additív mértékek* (másnéven: *ortoállapotok*) halmaza természetes struktúrával ellátva szintén kompakt konvex halmaz. Ez az észrevétel az alapja a kompakt konvex halmazokkal kapcsolatos eredmények alkalmazásának a *valószínűségelméletben*, és az ahhoz szorosan kötődő elméletekben, mint például a *matematikai statisztikában.* A valószínűségi alapokra helyezett *matematikai fizikában* és a *statisztikus mechanikában* a fizikai rendszerek *állapotainak* halmaza (az *állapottere*) sok esetben szintén kompakt konvex halmaz. Végül, említésre érdemes az, hogy a *véges dimenziós geometria* külön fejezetét képezik a kompakt konvex *poliéderek*, tehát a kompakt konvex halmazok elméletének érdekes geometriai vonatkozásai is vannak.

A konvex halmazokban kijelölhetők olyan pontok, amelyek bizonyos értelemben a legegyszerűbb elemei a halmaznak: ezek az *extremális pontok.* Például egy valószínűségi eseménytér (*ortoháló*) feletti végesen additív valószínűségi mértékek kompakt konvex halmazában az extremális pontok azok a valószínűségi mértékek, amelyek a leginkább determinisztikusak, vagyis a legkisebb mértékben mutatnak sztochasztikus vonásokat. A 8. fejezetben megadjuk az extremális pontok pontos definícióját és bebizonyítjuk a *Krein–Milman-tételt*, amely szerint szeparált lokálisan konvex térben minden kompakt konvex halmazban olyan sok extremális pont van, hogy azok halmazának konvex burka *sűrű* a halmazban. *Véges dimenziós* kompakt konvex halmazokra igazolunk egy ennél jóval erősebb állítást, a *Carathéodory-Minkowski-tételt*, amely szerint n dimenziós kompakt konvex halmaz minden pontja előáll legfeljebb $n + 1$ darab extremális pont konvex kombinációjaként.

A Carathéodory–Minkowski-tétel végtelen dimenziós általánosításával foglalkozik a *Choquet-tételkör.* Pontosabban: itt olyan operációt keresünk, amelynek alkalmazásával az extremális pontok halmazából kiindulva megkaphatjuk a kompakt konvex halmaz minden pontját. A Krein–Milman-tétel alapján a véges konvexkombináció-képzés és az azt követő általánosított határérték-képzés kompozíciója ilyen operáció. Ez érezhetően arra utal, hogy a kompakt konvex halmazok pontjai a halmaz identikus függvényének egyfajta *integráljaiként* állnak elő. A pontos definícióhoz szükségünk lesz a topologikus integrálelmélet alapvető objektumainak, a *Radon-mértékeknek* az ismeretére.

A 9. fejezetben értelmezzük a lokálisan kompakt tér feletti *pozitív Radon-mértékeket*, és magadjuk ezek *Lebesgue-féle kiterjesztését* a lokálisan kompakt tér feletti *összes* pozitív függvények halmazára. Érdekes és nem véletlen az, hogy a pozitív Radon-mérték által generált *felső integrál* előállítása, valamint annak tulajdonságai nagyon hasonlóak a halmazgyűrű feletti pozitív mérték által generált elemi integrál Lebesgue-féle kiterjesztésének előállításához és tulajdonságaihoz. Ennek az az oka, hogy létezik olyan absztrakt mérték- és felsőintegrál-fogalom, amelynek mindkét elméletben a speciális esetéről van szó. A felső integrálok additivitási tulajdonságait vizsgálva bebizonyítjuk a *mértékelméleti Riesz-féle reprezentációs-tétel* egzisztencia részét, amely szerint lokálisan kompakt tér feletti pozitív Radon-mérték megegyezik egy olyan integrállal a kompakt tartójú folytonos függvények terén, amely a relatív kompakt Baire-halmazok δ-gyűrűjén értelmezett pozitív mérték által generált.

Egy pozitív Radon-mérték által generált felső integrál segítségével könnyen előállítható egy *Carathéodory-féle külső mérték*, amellyel értelmezhető a pozitív Radon-mérték egyes halmazokon való *koncentráltságának* fogalma. Ezt, és a kompakt konvex halmazok feletti valószínűségi Radon-mérték *baricentrumának* fogalmát tárgyaljuk van szó a 10. fejezetben Szemléletesen szólva: egy valószínűségi Radon-mérték baricentruma nem más, mint a *várható értéke*. Ha a valószínűségi Radon-mértékeket egységnyi össztömegű *tömegeleoszlásnak* fogjuk fel, akkor a baricentruma nem más, mint a *tömegközéppontja*. Megmutatjuk, hogy szeparált lokálisan konvex térben minden kompakt konvex halmaz feletti mindegyik valószínűségi Radon-mértéknek egyértelműen létezik baricentruma.

Ezen a helyen fogalmazható meg pontosan a *baricentrális felbontás* problémája, amely így hangzik: igaz-e, hogy valós szeparált lokálisan konvex tér kompakt konvex részhalmazának minden pontja előáll egy olyan valószínűségi Radon-mérték baricentrumaként, amely az extremális pontok halmazán koncentrált? A 11. fejezetben erre a kédésre kapunk pozitív választ a *Choquet-tételben*, metrizálható kompakt konvex halmazok esetében. Látható lesz, hogy a bizonyítás felhasználja a kompakt konvex halmazokon értelmezett alulról félig folytonos konvex függvények felső integráljainak speciális tulajdonságait, a Banach–Alaoglu-tételt, valamint a lokálisan konvex terekre vonatkozó Hahn–Banach szétválasztási tételt. Természetesen lényegesek lesznek a metrizálható kompakt terek bizonyos általános topológiai sajátosságai is, amelyeket a IV. részben található függelékben részletesen tárgyaltunk. Azt is látni fogjuk, hogy metrizálható kompakt konvex halmaz extremális pontjainak halmaza G_δ-halmaz, tehát topológiai szempontból viszonylag egyszerű felépítésű.

A Choquet-tétel *nem metrizálható* kompakt konvex halmazokra vonatkozó általánosításával foglalkozunk az 12. fejezetben. Az általános Choquet-tétel bizonyítását készíti elő az első és második *Mokobodzki-lemma*, amelyek a kompakt konvex halmazok feletti alulról, illetve felülről félig folytonos konvex függvények speciális tulajdonságait mutatják meg. Az első Mokobodzki-lemma lehetővé teszi a baricentrumok *abszolút* (tehát a kompakt konvex halmazt tartalmazó topologikus vektortértől független) jellemzését. A második Mokobodzki-lemma viszont módot ad a *Bauer-féle maximum-minimum elv* bizonyítására, amelynek a Krein–Milman-tétel lényegében triviális speciális esete.

Az általános Choquet-tétel bizonyításának döntő mozzanata annak észrevétele, hogy egy kompakt konvex halmaz feletti valószínűségi mértékek halmazán létezik egy kitüntetett rendezés (a *Choquet-rendezés*), amely rendelkezik azzal a tulajdonsággal, hogy minden valószínűségi Radon-mértékhez létezik azt majoráló *maximális* valószínűségi Radon-mérték, továbbá, ha két valószínűségi Radon-mérték összehasonlítható a Choquet-rendezés szerint, akkor a baricentrumaik egyenlők. Ebből kapjuk, hogy szeparált lokálisan konvex térben kompakt konvex halmaz minden pontja előáll egy olyan valószínűségi Radon-mérték baricentrumaként, amely maximális a Choquet-rendezés szerint. Ezért a baricentrális felbontás problémája annak tisztázására redukálódik, hogy a Choquet-rendezés tekintetében maximális valószínűségi Radon-mértékek milyen értelemben koncentráltak az extremális pontok halmazán? A Bauer-féle maximum-minimum elv, a Hahn–Banach tétel általános algebrai formája, valamint a *Choquet-lemma* alapján erre azt a választ kapjuk, hogy minden maximális valószínűségi Radon-mérték *Baire-koncentrált* az extremális pontok halmazán, vagyis olyan, hogy a kompakt konvex halmaz minden olyan Baire-féle részhalmaza nullahalmaz, amely nem metszi az extremális pontok halmazát. Ebből a metrizálható esetre vonatkozó Choquet-tétel új bizonyítását származtatjuk.

A baricentrális felbontás *egyértelműségének* problémáját itt nem érintjük. A végtelen dimenziós *szimplexek* értelmezését, és a velük kapcsolatos unicitás-tételt a [22] könyv részletesen tárgyalja.

8. fejezet

Kompakt konvex halmaz extremális pontjai

8.1. Kompakt halmaz konvex burka

8.1.1. Állítás. *Ha E szeparált lokálisan konvex tér és $K \subseteq E$ olyan kompakt halmaz, amely előáll véges sok kompakt konvex halmaz uniójaként, akkor* $\mathrm{co}(K)$ *(tehát a K konvex burka) kompakt konvex halmaz.*

Bizonyítás. Legyen $(K_i)_{i \in I}$ az E kompakt konvex részhalmazainak nem üres véges rendszere. A 3.1.2. állításban láttuk, hogy

$$\mathrm{co}\left(\bigcup_{i \in I} K_i\right) = \left\{ \sum_{i \in J} \alpha_i . x_i \,\middle|\, (J \in \mathscr{P}_0(I)) \wedge ((\alpha_i)_{i \in J} \in (\mathbb{R}_+)^J) \wedge \left(\sum_{i \in J} \alpha_i = 1\right) \wedge \left((x_i)_{i \in J} \in \prod_{i \in J} K_i\right) \right\}$$

$$= \left\{ \sum_{i \in I} \alpha_i . x_i \,\middle|\, ((\alpha_i)_{i \in I} \in (\mathbb{R}_+)^I) \wedge \left(\sum_{i \in I} \alpha_i = 1\right) \wedge \left((x_i)_{i \in I} \in \prod_{i \in I} K_i\right) \right\},$$

ahol $\mathscr{P}_0(I)$ az I nem üres véges részhalmazainak halmaza. Ez azt jelenti, hogy ha

$$\Delta_I := \left\{ (\alpha_i)_{i \in I} \in [0,1]^I \,\middle|\, \sum_{i \in I} \alpha_i = 1 \right\},$$

és bevezetjük az

$$f : \mathbb{R}^I \times E^I \to E; \quad ((\alpha_i)_{i \in I}, (x_i)_{i \in I}) \mapsto \sum_{i \in I} \alpha_i . x_i$$

függvényt, akkor $f\left\langle \Delta_I \times \prod_{i \in I} K_i \right\rangle = \mathrm{co}\left(\bigcup_{i \in I} K_i\right)$. Ugyanakkor Δ_I kompakt halmaz $\mathbb{R}^I$-ben és f a szorzattopológia szerint folytonos, így $\mathrm{co}\left(\bigcup_{i \in I} K_i\right)$ kompakt halmaz. ■

Emlékeztetünk arra, hogy a szokásos definíció szerint, ha E vektortér és $x, y \in E$, akkor

$$[\![x, y]\!] := \{(1-\alpha).x + \alpha.y \mid \alpha \in [0,1]\},$$
$$]\!]x, y[\![:= \{(1-\alpha).x + \alpha.y \mid \alpha \in]0,1[\},$$

ahol $[0,1]$ (illetve $]0,1[$) a 0 kezdőpontú, 1 végpontú zárt (illetve nyílt) intervallum $\mathbb{R}$-ben. Ha $x, y \in E$, akkor az $[\![x, y]\!]$ (illetve $]\!]x, y[\![$) halmazt x és y végpontú *zárt* (illetve *nyílt*) *szakasznak* nevezzük E-ben. Vigyázzunk arra, hogy $E = \mathbb{R}$ esetén a szakaszokra imént alkalmazott jelölés nincs összhangban az *intervallumok* szokásos jelölésével. Ha például E vektortér, akkor $x, y \in E$ esetén $[\![x, y]\!] = [\![y, x]\!]$ és $]\!]x, y[\![=]\!]y, x[\![$, továbbá $]\!]x, x[\![= [\![x, x]\!] = \{x\}$; ugyanakkor $E = \mathbb{R}$ esetén az intervallumokra egyáltalán nem érvényesek ezek az egyenlőségek.

8.1.2. Állítás. *Legyen E topologikus vektortér. Ha $C \subseteq E$ konvex halmaz, $x \in \mathring{C}$ és $y \in \overline{C}$, akkor $]\!]x, y[\![\subseteq \mathring{C}$. Ha $C \subseteq E$ olyan konvex halmaz, hogy $\mathring{C} \neq \emptyset$, akkor*

$$\overline{\mathring{C}} = \overline{C}, \quad \mathring{\overline{C}} = \mathring{C}.$$

Bizonyítás. Legyen $C \subseteq E$ konvex halmaz, $x \in \mathring{C}$ és $y \in \overline{C}$. Legyen $z \in]\!]x, y[\![$ rögzített pont; ekkor egyértelműen van olyan $\alpha \in]0,1[$ valós szám, hogy $z = (1-\alpha).x + \alpha.y$. Az x-nek létezik olyan U nyílt környezete E-ben, hogy $U \subseteq C$. Értelmezzük az

$$f : E \to E; \quad x' \mapsto \left(1 - \frac{1}{\alpha}\right).x' + \frac{1}{\alpha}.z$$

függvényt. Ez a leképezés homeomorfizmus és $f(x) = y$, tehát $f\langle U\rangle$ az y pontnak környezete. Az $y \in \overline{C}$ feltevés alapján van olyan $x_0 \in U$, hogy $f(x_0) \in C$. Értelmezzük a

$$g : E \to E; \quad x' \mapsto (1-\alpha).x' + \alpha.f(x_0)$$

függvényt, amely szintén homeomorfizmus, és $g(x_0) = z$, tehát $g\langle U\rangle$ a z-nek környezete. Ugyanakkor $f(x_0) \in C$ és a C konvexitása folytán $g\langle U\rangle \subseteq g\langle C\rangle \subseteq C$, tehát $z \in \mathring{C}$.

Legyen $C \subseteq E$ olyan konvex halmaz, hogy $\mathring{C} \neq \emptyset$, és rögzítsünk egy $x_0 \in \mathring{C}$ pontot. Ekkor $y \in \overline{C}$ esetén az előzőek szerint $]\!]x, y[\![\subseteq \mathring{C}$, és világos, hogy $y \in \overline{]\!]x, y[\![}$, tehát $y \in \overline{\mathring{C}}$. Ez azt jelenti, hogy $\overline{C} \subseteq \overline{\mathring{C}}$, és persze $\overline{\mathring{C}} \subseteq \overline{C}$ is igaz, így $\overline{C} = \overline{\mathring{C}}$.

Legyen $C \subseteq E$ olyan konvex halmaz, hogy $\mathring{C} \neq \emptyset$. Megmutatjuk, hogy $\mathring{\overline{C}} \subseteq \mathring{C}$, amiből következik az $\mathring{\overline{C}} = \mathring{C}$ egyenlőség. Ehhez legyen $x \in \mathring{\overline{C}}$ rögzített, és vegyük a 0-nak olyan U szimmetrikus környezetét E-ben, hogy $x + U \subseteq \overline{C}$. Természetesen $x \in \overline{C}$, és az előzőek szerint $\overline{C} = \overline{\mathring{C}}$, ezért $\mathring{C} \cap (x + U) \neq \emptyset$; legyen y rözített eleme ennek a halmaznak. Ekkor

$x - y \in -U = U$, tehát $2x - y = x + (x - y) \in x + U \subseteq \overline{C}$, így $y \in \overset{\circ}{C}$ miatt fennáll az $]\!]y, 2x - y[\![\subseteq \overset{\circ}{C}$ tartalmazás. Ezért $x = \frac{1}{2}.y + \frac{1}{2}.(2x - y) \in]\!]y, 2x - y[\![\subseteq \overset{\circ}{C}$. ■

8.2. Extremális pontok és Krein–Milman-tétel

8.2.1. Definíció. *Legyen E vektortér és $C \subseteq E$ konvex halmaz. A $z \in C$ pontot a C halmaz* **extremális pontjának** *nevezzük, ha minden $x, y \in C$ pontra: $z \in]\!]x, y[\![$ esetén $x = y$. A C konvex halmaz extremális pontjainak halmazát* $\mathrm{Ext}(C)$ *jelöli.*

Legyen E vektortér és $C \subseteq E$ konvex halmaz. A definícióból látható, hogy egy $z \in C$ pont akkor és csak akkor extremális pontja C-nek, ha *nem léteznek* olyan $x, y \in C$ pontok és $\alpha \in [0, 1]$ valós szám, hogy $x \neq y$, $0 < \alpha < 1$ és $z = (1 - \alpha).x + \alpha.y$.

8.2.2. Tétel. (Krein–Milman-tétel) *Ha E olyan topologikus vektortér, hogy E' szétválasztó E felett, akkor minden $K \subseteq E$ kompakt konvex halmazra*

$$K = \overline{\mathrm{co}(\mathrm{Ext}(K))}.$$

Bizonyítás. Nevezzünk egy $H \subseteq K$ halmazt K-*extremálisnak*, ha H zárt, nem üres és minden $x, y \in K$ esetén, ha $]\!]x, y[\![\cap H \neq \emptyset$, akkor $x, y \in H$.

Az E topologikus vektortér szeparált, ezért nyilvánvaló, hogy $z \in K$ esetén ha a $\{z\}$ halmaz K-extremális, akkor $z \in \mathrm{Ext}(K)$.

Ha $(H_i)_{i \in I}$ K-extremális halmazoknak nem üres rendszere és $\bigcap_{i \in I} H_i \neq \emptyset$, akkor $\bigcap_{i \in I} H_i$ is K-extremális halmaz, mert ha $x, y \in K$ és $]\!]x, y[\![\cap \bigcap_{i \in I} H_i \neq \emptyset$, akkor minden $I \ni i$-re $]\!]x, y[\![\cap H_i \neq \emptyset$, így $x, y \in H_i$, vagyis $x, y \in \bigcap_{i \in I} H_i$.

Megmutatjuk, hogy ha a H halmaz K-extremális és $u \in E'$, akkor a

$$H_u := \left\{ z \in H \,\middle|\, u_{\mathbb{R}}(z) = \sup_{x' \in H} u_{\mathbb{R}}(x') \right\}$$

halmaz is K-extremális. Ehhez vezessük be a $c := \sup_{x' \in H} u_{\mathbb{R}}(x')$ jelölést, és legyenek $x, y \in K$ olyanok, hogy $]\!]x, y[\![\cap H_u \neq \emptyset$. Ekkor $H_u \subseteq H$ és a H halmaz K-extremalitása miatt $x, y \in H$, tehát $u_{\mathbb{R}}(x), u_{\mathbb{R}}(y) \leq c$. Ha $z \in]\!]x, y[\![\cap H_u$, akkor van olyan $\alpha \in]0, 1[$ valós szám. hogy $z = (1 - \alpha).x + \alpha.y$, így $c = u_{\mathbb{R}}(z) = (1 - \alpha)u_{\mathbb{R}}(x) + \alpha u_{\mathbb{R}}(y)$, következésképpen $u_{\mathbb{R}}(x) = u_{\mathbb{R}}(y)$, különben $c = u_{\mathbb{R}}(z) = (1 - \alpha)u_{\mathbb{R}}(x) + \alpha u_{\mathbb{R}}(y) < \max(u_{\mathbb{R}}(x), u_{\mathbb{R}}(y)) \leq c$ teljesülne, ami lehetetlen. Ezért $u_{\mathbb{R}}(x) = u_{\mathbb{R}}(y) = c$ is igaz, tehát $x, y \in H_u$.

Most bebizonyítjuk, hogy minden K-extremális halmaz tartalmazza a K valamelyik extremális pontját. Legyen H tetszőleges K-extremális halmaz, és jelölje $\mathscr{H}$ a H által tartalmazott K-extremális halmazok halmazát. A $\mathscr{H}$ halmazt rendezzük a $\supseteq$ relációval. Igazoljuk azt, hogy $\mathscr{H}$ *induktívan rendezett* halmaz. Legyen ugyanis $(H_i)_{i\in I}$ olyan nem üres rendszer $\mathscr{H}$-ban, amelyre minden $i, j \in I$ esetén $H_i \supseteq H_j$ vagy $H_j \supseteq H_i$. A $(H_i)_{i\in I}$ rendszer mindegyik tagja nem üres zárt halmaz a K kompakt térben, és a hipotézis alapján ez *centrált rendszer* (27.2.1.), így $\bigcap_{i\in I} H_i \neq \emptyset$. Ebből következik, hogy $\bigcap_{i\in I} H_i \in \mathscr{H}$, és természetesen $\bigcap_{i\in I} H_i$ a $(H_i)_{i\in I}$ rendszer mindegyik tagjánál nagyobb-egyenlő a $\supseteq$ rendezés szerint. A Kuratowski–Zorn-lemma alapján létezik $\mathscr{H}$-nak maximális eleme. Legyen M maximális eleme a $\mathscr{H}$ rendezett halmaznak, és legyenek $x, y \in M$. Ekkor $u \in E'$ esetén $M_u \in \mathscr{H}$ és $M \supseteq M_u$, így $M = M_u$, vagyis $u_{\mathbb{R}}(x) = u_{\mathbb{R}}(y)$. Ebből következik, hogy minden $E' \ni u$-ra $u(x) = u(y)$, hiszen a definíciók szerint $\Re \circ u = u_{\mathbb{R}}$, ugyanakkor $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ esetén $\Im \circ u = (-i.u)_{\mathbb{R}}$. Tehát $x = y$, mivel E' szétválasztó E felett. Ez azt jelenti, hogy M egy elemű halmaz, tehát, ha $z \in M$, akkor $z \in \mathrm{Ext}(K)$ és persze $z \in H$, vagyis $z \in H \cap \mathrm{Ext}(K)$.

Az előzőekből következik, hogy ha $K \neq \emptyset$, akkor $\mathrm{Ext}(K) \neq \emptyset$, mert K nyilvánvalóan K-extremális halmaz.

Most már könnyen belátható, hogy $K = \overline{\mathrm{co}(\mathrm{Ext}(K))}$. Ha nem így volna, akkor létezne $y \in K \setminus \overline{\mathrm{co}(\mathrm{Ext}(K))}$, tehát $\overline{\mathrm{co}(\mathrm{Ext}(K))}$ és $\{y\}$ nem üres diszjunkt kompakt konvex halmazok E-ben, így a Hahn–Banach szétválasztási-tétel alapján létezne olyan $u \in E'$ és $c \in \mathbb{R}$, hogy $\overline{\mathrm{co}(\mathrm{Ext}(K))} \subseteq [u_{\mathbb{R}} < c]$ és $\{y\} \subseteq [u_{\mathbb{R}} > c]$. Ekkor minden $x \in \overline{\mathrm{co}(\mathrm{Ext}(K))}$ esetén $u_{\mathbb{R}}(x) < c < u_{\mathbb{R}}(y)$, ugyanakkor a K_u halmaz K-extremális, tehát létezne egy $z \in K_u \cap \mathrm{Ext}(K)$ pont, így $u_{\mathbb{R}}(y) \leq \sup_{x'\in K} u_{\mathbb{R}}(x') = u_{\mathbb{R}}(z) < c < u_{\mathbb{R}}(y)$, ami természetesen lehetetlen. ■

A Krein–Milman-tételt rendszerint abban a speciális esetben alkalmazzuk, amikor E szeparált lokálisan konvex tér; a Hahn–Banach tételből következik, hogy ekkor E' szétválasztó E felett. Azonban *létezik* olyan E topologikus vektortér, amely nem lokálisan konvex, de E' szétválasztó E felett. Például, ha $p \in]0,1[$ tetszőleges valós szám, továbbá

$$\mathbf{l}^p_{\mathbb{K}} := \left\{ \mathbf{s} \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}} \,\middle|\, \sum_{k=0}^{\infty} |\mathbf{s}(k)|^p < +\infty \right\},$$

és $d : \mathbf{l}^p_{\mathbb{K}} \times \mathbf{l}^p_{\mathbb{K}} \to \mathbb{R}_+$ az a függvény, amelyre $\mathbf{s}, \mathbf{s}' \in \mathbf{l}^p_{\mathbb{K}}$ esetén

$$d(\mathbf{s}, \mathbf{s}') := \sum_{k=0}^{\infty} |\mathbf{s}(k) - \mathbf{s}'(k)|^p,$$

akkor teljesülnek a következők.

– $\mathbf{l}^p_{\mathbb{K}}$ lineáris altere a $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ sorozattérnek, és d olyan transzláció-invariáns metrika $\mathbf{l}^p_{\mathbb{K}}$ felett, hogy minden $\mathbb{R}^+ \ni r$-re a $B_r(0; d)$ gömb kiegyensúlyozott és elnyelő halmaz, így $\mathscr{T}_d$ *lineáris topológia* $\mathbf{l}^p_{\mathbb{K}}$ felett; a továbbiakban az $\mathbf{l}^p_{\mathbb{K}}$ vektoreret a $\mathscr{T}_d$ topológiával ellátva topologikus vektortérnek tekintjük.

– Minden $\mathbf{s} \in \mathbf{l}^\infty_{\mathbb{K}}$ esetén az

$$u_{\mathbf{s}} : \mathbf{l}^p_{\mathbb{K}} \to \mathbb{K}; \quad \mathbf{s}' \mapsto \sum_{k=0}^{\infty} \mathbf{s}(k)\mathbf{s}'(k)$$

leképezés folytonos lineáris funkcionál $\mathbf{l}^p_{\mathbb{K}}$ felett. Valóban, ha $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ és $\delta \in \mathbb{R}^+$ olyan, hogy $\delta < 1$ és $\|\mathbf{s}\|_\infty \delta < \varepsilon$, akkor minden $\mathbf{s}' \in B_\delta(0; d)$ esetén $|u_{\mathbf{s}}(\mathbf{s}')| < \varepsilon$, vagyis $u_{\mathbf{s}}$ a 0-ban folytonos a $\mathscr{T}_d$ topológia szerint.

– Az $\mathbf{l}^\infty_{\mathbb{K}} \to (\mathbf{l}^p_{\mathbb{K}})'$; $\mathbf{s} \mapsto u_{\mathbf{s}}$ leképezés *lineáris injekció* az $\mathbf{l}^\infty_{\mathbb{K}}$ és $(\mathbf{l}^p_{\mathbb{K}})'$ vektorterek között, ezért $(\mathbf{l}^p_{\mathbb{K}})'$ szétválasztó $\mathbf{l}^p_{\mathbb{K}}$ felett. Belátható, hogy ez a leképezés valójában *bijekció*, tehát írhatjuk, hogy $(\mathbf{l}^p_{\mathbb{K}})' = \mathbf{l}^\infty_{\mathbb{K}}$. Ugyanakkor a $\mathscr{T}_d$ topológia *nem lokálisan konvex*.

8.2.3. Állítás. *Ha E szeparált valós topologikus vektortér és $K \subseteq E$ kompakt konvex halmaz, akkor*

$$K = \mathrm{co}(\mathrm{Fr}(K)).$$

Bizonyítás. Az állítás nyilvánvalóan igaz, ha $E = \{0\}$. Legyen $e \in E \setminus \{0\}$ rögzített pont, és vegyünk egy $x \in K$ elemet. Ekkor az $u : \mathbb{R} \to E$; $\lambda \mapsto x + \lambda.e$ leképezés homeomorfizmus $\mathbb{R}$ és az $\mathrm{Im}(u) \subseteq E$ topologikus altér között. Az $\mathrm{Im}(u)$ halmaz egydimenziós affin altér E-ben, tehát zárt, így a $K \cap \mathrm{Im}(u)$ halmaz kompakt az $\mathrm{Im}(u)$ topologikus altérben. Ezért az $\overset{-1}{u}\langle K \cap \mathrm{Im}(u)\rangle$ halmaz kompakt $\mathbb{R}$-ben, és könnyen látható, hogy konvex és nem üres. Ezért léteznek olyan $\lambda_-, \lambda_+ \in \mathbb{R}$ számok, hogy $\lambda_- \leq \lambda_+$ és $[\lambda_-, \lambda_+] = \overset{-1}{u}\langle K \cap \mathrm{Im}(u)\rangle$. Ekkor az $x_- := u(\lambda_-)$ és $x_+ := u(\lambda_+)$ pontok elemei $\mathrm{Fr}(K)$-nak és $x \in [\![x_-, x_+]\!] \subseteq \mathrm{co}(\mathrm{Fr}(K))$. ■

Megjegyezzük, hogy ha E *végtelen dimenziós* szeparált topologikus vektortér és $K \subseteq E$ kompakt halmaz, akkor $\overset{\circ}{K} = \emptyset$, különben létezne E-ben olyan pont, amelynek van kompakt környezete, így E lokálisan kompakt, tehát véges dimenziós volna (1.6.9.). Tehát, ha E végtelen dimenziós szeparált valós topologikus vektortér, akkor minden $K \subseteq E$ kompakt halmazra $K = \mathrm{Fr}(K)$, így az előző állítás triviális. Másként fogalmazva: az előző állítás csak *véges dimenziós* E esetében fogalmaz meg nemtriviális tényt.

8.3. Véges dimenziós kompakt konvex halmaz extremális pontjai

8.3.1. Állítás. *Ha $E \neq \{0\}$ véges dimenziós szeparált topologikus vektortér és $C \subseteq E$ konvex halmaz, akkor $\overset{\circ}{C} \neq \emptyset$ pontosan akkor teljesül, ha E az egyetlen olyan affin altere E-nek, amely tartalmazza a C halmazt.*

Bizonyítás. Tegyük fel, hogy $\overset{\circ}{C} \neq \emptyset$, és legyen M olyan affin altere E-nek, hogy $C \subseteq E$. Ha $x \in \overset{\circ}{C}$, akkor az $F := M - x$ halmaz lineáris altere E-nek és $0 \in \overset{\circ}{F}$, ezért $F = E$, így

$M = E$. (Ez a következtetés akkor is helyes, ha E végtelen dimenziós.)

Megfordítva, tegyük fel, hogy E véges dimenziós, $n := \dim(E) > 0$ és E az egyetlen olyan affin altere E-nek, amelyre $C \subseteq E$. A C halmaz nem üres, különben $E = \{0\}$ teljesülne; legyen $x_n \in C$ rögzített. Jelölje F az $\{x - x_n | x \in C\}$ halmaz által generált lineáris alteret E-ben. Ekkor az $x_n + F$ affin altér tartalmazza a C halmazt, tehát a hipotézis alapján $x_n + F = E$. Ebből következik, hogy $F = E$, ezért az $\{x - x_n | x \in C\}$ halmaz tartalmazza az E-nek algebrai bázisát. Tehát létezik olyan C-ben haladó $(x_k)_{0 \leq k \leq n-1}$ rendszer, amelyre az $(x_k - x_n)_{0 \leq k \leq n-1}$ rendszer algebrai bázis E-ben. Tekintsük az $x := \dfrac{1}{n+1} \sum\limits_{k=0}^{n} x_k \in C$ pontot; erre fogjuk igazolni azt, hogy $x \in \overset{\circ}{C}$.

A definíciók szerint az $u : \mathbb{R}^n \to E;\ (\lambda_k)_{0 \leq k \leq n-1} \mapsto \sum\limits_{k=0}^{n-1} \lambda_k.(x_k - x_n)$ leképezés lineáris bijekció, ezért *homeomorfizmus* az euklidészi topológiával ellátott $\mathbb{R}^n$ tér és E között. Világos, hogy a

$$V := \left\{ (\lambda_k)_{0 \leq k \leq n-1} \in \mathbb{R}^n \;\middle|\; \sum_{k=0}^{n-1} |\lambda_k| < \frac{1}{n+1} \right\}$$

halmaz a 0-nak környezete $\mathbb{R}^n$-ben, ezért az $x + u\langle V \rangle$ halmaz az x-nek környezete E-ben. Állítjuk, hogy $x + u\langle V \rangle \subseteq C$, így $x \in \overset{\circ}{C}$ is teljesül. Valóban, ha $(\lambda_k)_{0 \leq k \leq n-1} \in V$, akkor

$$x + u\left((\lambda_k)_{0 \leq k \leq n-1}\right) := x + \sum_{k=0}^{n-1} \lambda_k.(x_k - x_n) := \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^{n} x_k + \sum_{k=0}^{n-1} \lambda_k.(x_k - x_n) =$$

$$= \sum_{k=0}^{n-1} \quad \frac{1}{n+1} + \lambda_k \quad .x_k + \left(\frac{1}{n+1} - \sum_{k=0}^{n-1} \lambda_k \right) .x_n,$$

és minden $k \leq n-1$ természetes számra $\dfrac{1}{n+1} + \lambda_k \geq 0$, továbbá $\dfrac{1}{n+1} \sum\limits_{k=0}^{n-1} \lambda_k \geq 0$, valamint

$$\sum_{k=0}^{n-1} \quad \frac{1}{n+1} + \lambda_k \quad + \left(\frac{1}{n+1} - \sum_{k=0}^{n-1} \lambda_k \right) = 1,$$

így a C konvexitása folytán $x + u\left((\lambda_k)_{0 \leq k \leq n-1}\right) \in C$. ■

Megjegyezzük, hogy a Banach–Alaoglu-tétel (5.11.3.) alapján nyilvánvaló, hogy *végtelen dimenziós* szeparált valós topologikus vektortérben létezhet olyan *kompakt* konvex halmaz, amelynek a lineáris burka egyenlő a térrel; egy ilyen konvex kompakt halmaz belseje szükségképpen üres.

8.3.2. Tétel. (Carathéodory-tétel) *Ha E véges dimenziós valós szeparált topologikus vektortér és $S \subseteq E$, akkor $x \in \mathrm{co}(S)$ esetén létezik olyan $H \subseteq S$ véges halmaz, hogy $x \in \mathrm{co}(H)$ és* $\mathrm{Card}(H) \leq \dim(E) + 1$, *Bizonyítás.* Azt mutatjuk meg, hogy ha $H \subseteq S$ olyan véges halmaz, hogy $\mathrm{Card}(H) > \dim(E) + 1$ és $x \in \mathrm{co}(H)$, akkor van olyan $H' \subseteq H$ véges halmaz, hogy $\mathrm{Card}(H') < \mathrm{Card}(H)$ és $x \in \mathrm{co}(H')$. Ebből már következik az állítás, mert az $x \in \mathrm{co}(S)$ ponthoz az $\mathbb{N}$ jólrendezettsége miatt létezik olyan $H \subseteq S$ véges halmaz, hogy $x \in \mathrm{co}(H)$ és H számossága a legkisebb az ilyen tulajdonságú H halmazok között; ekkor szükségképpen $\mathrm{Card}(H) \leq \dim(E) + 1$.

Legyen tehát $H \subseteq S$ olyan véges halmaz, hogy $\mathrm{Card}(H) > \dim(E) + 1$ és $x \in \mathrm{co}(H)$. Legyen $(\lambda_z)_{z\in H} \in [0,1]^H$ olyan rendszer, hogy $\sum\limits_{z\in H} \lambda_z = 1$ és $x = \sum\limits_{z\in H} \lambda_z.z$. Ha van olyan $z \in H$, hogy $\lambda_z = 0$, akkor a $H' := H \setminus \{z\}$ halmaz olyan, amelynek a létezését állítjuk (vagyis $\mathrm{Card}(H') < \mathrm{Card}(H)$ és $x \in \mathrm{co}(H')$), ezért feltehető, hogy minden $H \ni z$-re $\lambda_z > 0$. Legyen $z_0 \in H$ rögzített és $H_0 := H \setminus \{z_0\}$. Ekkor $\mathrm{Card}(H_0) = \mathrm{Card}(H) - 1 > \dim(E)$, ezért a $(z - z_0)_{z\in H_0}$ rendszer lineárisan összefüggő, így létezik olyan $(\beta_z)_{z\in H_0} \in \mathbb{R}^{H_0}$ rendszer, hogy $\sum\limits_{z\in H_0} \beta_z.(z - z_0) = 0$ és van olyan $z \in H_0$, amelyre $\beta_z \neq 0$. Legyen minden $H \ni z$-re $\alpha_z := \beta_z$, ha $z \neq z_0$, míg $\alpha_{z_0} := -\sum\limits_{z\in H_0} \beta_z$. Ekkor $(\alpha_z)_{z\in H} \in \mathbb{R}^H$ olyan rendszer, hogy $\sum\limits_{z\in H} \alpha_z.z = 0$ és $\sum\limits_{z\in H} \alpha_z = 0$, valamint létezik olyan $z \in H$ (sőt $z \in H_0$), hogy $\alpha_z \neq 0$. Legyen $z' \in H$ olyan, hogy minden $H \ni z$-re $\dfrac{|\alpha_z|}{\lambda_z} \leq \dfrac{|\alpha_{z'}|}{\lambda_{z'}}$; természetesen ekkor $\alpha_{z'} \neq 0$. A $H' := H \setminus \{z'\}$ halmaz minden z pontjára legyen $\lambda'_z := \lambda_z - \dfrac{\alpha_z}{\alpha_{z'}} \lambda_{z'}$. Ekkor $(\lambda'_z)_{z\in H'} \in \mathbb{R}^{H'}$ olyan rendszer, hogy minden $z \in H'$ esetén $\lambda'_z \geq 0$, továbbá $\sum\limits_{z\in H'} \lambda'_z = 1$, és $x = \sum\limits_{z\in H'} \lambda'_z.z$, vagyis $x \in \mathrm{co}(H')$, ugyanakkor $\mathrm{Card}(H') < \mathrm{Card}(H)$. ■

8.3.3. Következmény. *Ha E véges dimenziós szeparált topologikus vektortér és $K \subseteq E$ kompakt halmaz, akkor* $\mathrm{co}(K)$ *kompakt halmaz.*

Bizonyítás. Legyen $n := \dim(E)$, ha E valós, és $n := 2 \cdot \dim(E)$, ha E komplex vektortér (vagyis n az E alatt fekvő valós vektortér dimenziója). Vezessük be a

$$\Delta_n := \left\{ (\lambda_k)_{0\leq k\leq n} \in [0,1]^{n+1} \;\middle|\; \sum_{k=0}^{n} \lambda_k = 1 \right\}$$

halmazt, és Δ_n-t lássuk el az $\mathbb{R}^{n+1}$ euklidészi topológiájának leszűkítésével; ekkor Δ_n kompakt konvex halmaz. A Carathéodory-tétel alapján minden $x \in \mathrm{co}(K)$ ponthoz van olyan $(x_k)_{0\leq k\leq n} \in K^{n+1}$ és $(\lambda_k)_{0\leq k\leq n} \in \Delta_n$, hogy $x = \sum\limits_{k=0}^{n} \lambda_k.x_k$. Másként fogalmazva, a

$$f : \mathbb{R}^{n+1} \times E^{n+1} \to E; \quad ((\lambda_k)_{0\leq k\leq n}, (x_k)_{0\leq k\leq n}) \mapsto \sum_{k=0}^{n} \lambda_k.x_k$$

leképezésre $f\langle \Delta_n \times K^{n+1}\rangle = \mathrm{co}(K)$. Ugyanakkor f folytonos függvény, és $\Delta_n \times K^{n+1}$ a K kompaktsága miatt kompakt az $\mathbb{R}^{n+1} \times E^{n+1}$ topologikus szorzattérben, így $\mathrm{co}(K)$ kompakt halmaz. ■

Azonban a 10. fejezetben látunk majd példát végtelen dimenziós szeparált lokálisan konvex térre, amelyben van olyan kompakt halmaz, amelynek a konvex burka nem kompakt.

A következő tétel bizonyításában felhasználjuk a következő könnyen igazolható állítást: ha E vektortér és $u : E \to E$ affin bijekció, akkor minden $S \subseteq E$ halmazra $\mathrm{co}(u\langle S\rangle) = u\langle \mathrm{co}(S)\rangle$, továbbá minden $C \subseteq E$ konvex halmazra $\mathrm{Ext}(u\langle C\rangle) = u\langle \mathrm{Ext}(C)\rangle$.

8.3.4. Tétel. (Carathéodory–Minkowski-tétel) *Ha E véges dimenziós valós szeparált topologikus vektortér és $K \subseteq E$ kompakt konvex halmaz, akkor $K = \mathrm{co}(\mathrm{Ext}(K))$, és minden $x \in K$ esetén van olyan $H \subseteq \mathrm{Ext}(K)$ véges halmaz, amelyre $x \in \mathrm{co}(H)$ és* $\mathrm{Card}(H) \leq \dim(E) + 1$.

Bizonyítás. Ha a $K = \mathrm{co}(\mathrm{Ext}(K))$ egyenlőség igaz volna, akkor a Carathéodory-tételből az $S := \mathrm{Ext}(K)$ választással következne az állítás. Másfelől, tudjuk, hogy $K = \mathrm{co}(\mathrm{Fr}(K))$, ezért az $\mathrm{Fr}(K) \subseteq \mathrm{co}(\mathrm{Ext}(K))$ tartalmazásból következne a $K = \mathrm{co}(\mathrm{Ext}(K))$ egyenlőség. Ezért elég az $\mathrm{Fr}(K) \subseteq \mathrm{co}(\mathrm{Ext}(K))$ összefüggést igazolni.

(I) Először megmutatjuk, hogy ha $u \in E'$, $c \in \mathbb{R}$ és $K \subseteq [u \leq c]$, akkor

$$\mathrm{Ext}(K \cap [u = c]) \subseteq \mathrm{Ext}(K) \cap [u = c].$$

Valóban, legyen $x \in \mathrm{Ext}(K \cap [u = c])$, és az állítással ellentétben tegyük fel, hogy $x \notin \mathrm{Ext}(K)$. Ekkor léteznek olyan $y, z \in K$ és $\alpha \in [0, 1]$ szám, hogy $y \neq z$, $0 < \alpha < 1$ és $x = (1 - \alpha).y + \alpha.z$. Ekkor $c = u(x) = (1 - \alpha)u(y) + \alpha u(z)$, és $K \subseteq [u \leq c]$ miatt $u(y) \leq c$ és $u(z) \leq c$. Ebből azonnal következik, hogy $u(y) = c = u(z)$, tehát $y, z \in K \cap [u = c]$ olyan pontok, hogy $y \neq z$ és $x = (1 - \alpha).y + \alpha.z$, ami ellentmond annak, hogy x extremális pontja a $K \cap [u = c]$ konvex halmaznak. (Megjegyezzük, hogy az $\mathrm{Ext}(K \cap [u = c]) = \mathrm{Ext}(K) \cap [u = c]$ egyenlőség is igaz, de csak az imént bizonyított tartalmazást fogjuk alkalmazni.)

(II) Most megmutatjuk, hogy ha $\overset{\circ}{K} \neq \emptyset$ és $x \in \mathrm{Fr}(K)$, akkor létezik olyan $u \in E'$ és $c \in \mathbb{R}$, hogy $u \neq 0$, $u(x) = c$ és $K \subseteq [u \leq c]$. Valóban, a hipotézis alapján $\overset{\circ}{K}$ nem üres nyílt konvex halmaz E-ben és $\{x\}$ olyan affin altér E-ben, hogy $\{x\} \cap \overset{\circ}{K} = \emptyset$, tehát a Hahn–Banach-tétel geometriai formája szerint létezik olyan $u \in E'$ és $c \in \mathbb{R}$, hogy $\overset{\circ}{K} \subseteq [u < c]$ és $\{x\} \subseteq [u = c]$, azaz $u(x) = c$. Ebből azonnal látható, hogy $u \neq 0$, hiszen $\overset{\circ}{K} \neq \emptyset$. Továbbá, $\overline{\overset{\circ}{K}} \subseteq \overline{[u < c]} \subseteq [u \leq c]$, mert az u folytonossága miatt $[u \leq c]$ zárt halmaz. De K is zárt, és korábban láttuk, hogy $\overset{\circ}{K} \neq \emptyset$ következtében $\overline{K} = \overline{\overset{\circ}{K}}$, tehát $K \subseteq [u \leq c]$.

(III) Minden $\mathbb{N} \ni n$-re jelölje $\mathscr{A}(n)$ a következő kijelentést: minden n-dimenziós E szeparált valós topologikus vektortérre és minden $K \subseteq E$ kompakt konvex halmazra $K = \mathrm{co}(\mathrm{Ext}(K))$. Teljes indukcióval igazoljuk, hogy minden $\mathbb{N} \ni n$-re $\mathscr{A}(n)$.

Az $\mathscr{A}(0)$ kijelentés triviálisan igaz. Tegyük fel, hogy $n \in \mathbb{N}^+$ és minden $m < n$ természetes számra $\mathscr{A}(m)$ igaz. Legyen E olyan valós szeparált topologikus vektortér, amelyre $\dim(E) = n$. Legyen $K \subseteq E$ rögzített kompakt konvex halmaz.

Ha $\overset{\circ}{K} = \emptyset$, akkor létezik olyan M affin altér E-ben, hogy $K \subseteq M$ és $M \neq E$. Ha $x \in M$ rögzített, akkor $F := M - x$ olyan lineáris altere E-nek, hogy $\dim(F) < n$, továbbá $K - x$ kompakt konvex halmaz F-ben, így az indukciós hipotézis alapján $K - x = \mathrm{co}(\mathrm{Ext}(K - x))$. Ebből azonnal következik, hogy $K = \mathrm{co}(\mathrm{Ext}(K))$.

Tegyük fel, hogy $\overset{\circ}{K} \neq \emptyset$, és legyen $x \in \mathrm{Fr}(K)$. A (II) alapján vehetünk olyan $(u, c) \in E' \times \mathbb{R}$ párt, hogy $u \neq 0$, $u(x) = c$ és $K \subseteq [u \leq c]$. Ekkor $\mathrm{Ker}(u)$ olyan lineáris altere E-nek, amely $n - 1$ dimenziós, és a $(K - x) \cap \mathrm{Ker}(u)$ halmaz kompakt és konvex $\mathrm{Ker}(u)$-ban, így az indukciós hipotézis alapján

$$(K - x) \cap \mathrm{Ker}(u) = \mathrm{co}\left(Ext\left((K - x) \cap \mathrm{Ker}(u)\right)\right).$$

Az (I) állítást alkalmazva kapjuk, hogy $Ext\left((K - x) \cap \mathrm{Ker}(u)\right) \subseteq \mathrm{Ext}(K - x) \cap \mathrm{Ker}(u)$, így $0 \in (K-x) \cap \mathrm{Ker}(u)$ miatt

$$0 \in \mathrm{co}\left(\mathrm{Ext}(K-x) \cap \mathrm{Ker}(u)\right) \subseteq \mathrm{co}(\mathrm{Ext}(K)) - x,$$

vagyis $x \in \mathrm{co}(\mathrm{Ext}(K))$. ■

Az előző tétel alkalmazásával könnyen bebizonyíthatjuk a Carathéodory–Minkowski-tétel véges dimenziós *komplex* szeparált topologikus vektorterekre vonatkozó változatát.

8.3.5. Következmény. (Carathéodory–Minkowski-tétel) *Ha E véges dimenziós komplex szeparált topologikus vektortér és $K \subseteq E$ kompakt konvex halmaz, akkor* $K = \mathrm{co}(\mathrm{Ext}(K))$*, és minden $x \in K$ esetén van olyan $H \subseteq \mathrm{Ext}(K)$ véges halmaz, amelyre $x \in \mathrm{co}(H)$ és* $\mathrm{Card}(H) \leq 2 \cdot \dim(E) + 1$*, ahol* $\dim(E)$ *az E komplex vektortér dimenziója.*

Bizonyítás. A Carathéodory–Minkowski-tételt alkalmazzuk az E alatt fekvő $E_{\mathbb{R}}$ véges dimenziós valós szeparált topologikus vektortérre. Az E és $E_{\mathbb{R}}$ topologikus terek *egyenlők*, ezért K kompakt konvex halmaz $E_{\mathbb{R}}$-ben is, továbbá $\mathrm{Ext}(K)$ *ugyanaz a halmaz*, akár E-ben, akár $E_{\mathbb{R}}$-ben vesszük. Ezért a Carathéodory–Minkowski-tétel alapján $K = \mathrm{co}(\mathrm{Ext}(K))$, és minden $x \in K$ ponthoz létezik olyan $H \subseteq \mathrm{Ext}(K)$ halmaz, hogy $x \in \mathrm{co}(H)$ és $\mathrm{Card}(H) \leq \dim(E_{\mathbb{R}}) + 1 = 2 \cdot \dim(E) + 1$. ■

Tehát, ha E véges dimenziós szeparált topologikus vektortér és $K \subseteq E$ kompakt konvex halmaz, akkor $K = \mathrm{co}(\mathrm{Ext}(K))$, és minden $x \in K$ esetén van olyan $H \subseteq \mathrm{Ext}(K)$ véges halmaz, amelyre $x \in \mathrm{co}(H)$ és $\mathrm{Card}(H) \leq \dim(E_{\mathbb{R}}) + 1$, ahol $E_{\mathbb{R}}$ az E alatt fekvő valós vektortér.

9. fejezet

Pozitív Radon-mértékek lokálisan kompakt tér felett

9.1. Pozitív Radon-mértékek

9.1.1. Definíció. *Legyen T lokálisan kompakt tér, és jelölje $\mathscr{K}(T;\mathbb{R})$ a $T \to \mathbb{R}$ kompakt tartójú folytonos függvények valós vektorterét. Azt mondjuk, hogy egy $\mu : \mathscr{K}(T;\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ lineáris funkcionál* **pozitív***, ha minden $\varphi \in \mathscr{K}(T;\mathbb{R})$ függvényre: $\varphi \geq 0$ esetén $\mu(\varphi) \geq 0$. A $\mathscr{K}(T;\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ pozitív lineáris funkcionálokat T feletti* **pozitív Radon-mértékeknek** *nevezzük.*

Természetesen egy $\mu : \mathscr{K}(T;\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ lineáris funkcionál pontosan akkor pozitív, ha minden $\varphi, \varphi' \in \mathscr{K}(T;\mathbb{R})$ függvényre: $\varphi \leq \varphi'$ esetén $\mu(\varphi) \leq \mu(\varphi')$ teljesül, vagyis μ *monoton növő* a $\mathscr{K}(T;\mathbb{R})$ feletti természetes rendezés szerint.

9.1.2. Állítás. (Pozitív Radon-mérték monoton folytonossága) *Legyen μ pozitív Radon-mérték a T lokálisan kompakt tér felett. Ha $\Phi \subseteq \mathscr{K}(T;\mathbb{R})$ olyan nem üres függvényhalmaz, hogy $\sup\limits_{\varphi\in\Phi} \varphi \in \mathscr{K}(T;\mathbb{R})$ és Φ felfelé irányított (tehát minden $\Phi \ni \varphi_1, \varphi_2$-höz van olyan $\varphi \in \Phi$, hogy $\varphi_1, \varphi_2 \leq \varphi$), akkor*

$$\mu\left(\sup_{\varphi\in\Phi} \varphi\right) = \sup_{\varphi\in\Phi} \mu(\varphi).$$

Bizonyítás. Legyen $\psi := \sup\limits_{\varphi\in\Phi} \varphi$, $K := \operatorname{supp}(\psi)$, és $h \in \mathscr{K}(T;\mathbb{R})$ olyan függvény, hogy $0 \leq h \leq 1$ és $K \subseteq [h = 1]$. Ha Φ felett a természetes függvényrendezést vesszük rendezésként, akkor a $(\varphi|_K)_{\varphi\in\Phi}$ rendszer monoton növő általánosított függvénysorozat, tehát a Dini-tétel (28.4.5.) alapján ez *egyenletesen* konvergál a $\psi|_K$ függvényhez a K kompakt téren. Minden $\Phi \ni \varphi$-re $\operatorname{supp}(\varphi) \subseteq K$, ezért ebből következik, hogy

$\lim\limits_{\varphi,\Phi} |||\psi - \varphi||| = 0$. Ha $\varphi \in \Phi$, akkor nyilvánvalóan $- ||| \psi - \varphi ||| .h \leq \psi - \varphi \leq |||\psi - \varphi ||| .h$, tehát a μ monoton növése miatt

$$- ||| \psi - \varphi ||| \, \mu(h) \leq \mu(\psi - \varphi) \leq |||\psi - \varphi ||| \, \mu(h),$$

vagyis $|\mu(\psi) - \mu(\varphi)| \leq |||\psi - \varphi ||| \, \mu(h)$. Ebből következik, hogy $\lim\limits_{\varphi,\Phi} |\mu(\psi) - \mu(\varphi)| = 0$, vagyis

$$\sup_{\varphi\in\Phi} \mu(\varphi) = \lim_{\varphi,\Phi} \mu(\varphi) = \mu(\psi) = \mu\left(\sup_{\varphi\in\Phi} \varphi\right). \blacksquare$$

9.1.3. Következmény. *Legyen μ pozitív Radon-mérték a T lokálisan kompakt tér felett. Ha $\Phi \subseteq \mathscr{K}(T;\mathbb{R})$ olyan nem üres függvényhalmaz, hogy $\inf\limits_{\varphi\in\Phi} \varphi \in \mathscr{K}(T;\mathbb{R})$ és Φ lefelé irányított (tehát minden $\Phi \ni \varphi_1, \varphi_2$-höz van olyan $\varphi \in \Phi$, hogy $\varphi_1, \varphi_2 \geq \varphi$), akkor*

$$\mu \quad \inf_{\varphi\in\Phi} \varphi \quad = \inf_{\varphi\in\Phi} \mu(\varphi).$$

Bizonyítás. Ha $\psi := \inf\limits_{\varphi\in\Phi} \varphi$, akkor a $\{\psi - \varphi | \varphi \in \Phi\} \subseteq \mathscr{K}(T;\mathbb{R})$ függvényhalmaz felfelé irányított és $\sup\limits_{\varphi\in\Phi}(\psi - \varphi) = \psi - \inf\limits_{\varphi\in\Phi} \varphi = 0 \in \mathscr{K}(T;\mathbb{R})$. Az előző állítást alkalmazva

$$0 = \sup_{\varphi\in\Phi}(\mu(\psi) - \mu(\varphi)) = \mu(\psi) - \inf_{\varphi\in\Phi} \mu(\varphi) = \mu \quad \inf_{\varphi\in\Phi} \varphi \quad - \inf_{\varphi\in\Phi} \mu(\varphi)$$

adódik, amit bizonyítani kellett. $\blacksquare$

9.2. Pozitív alulról félig folytonos függvény felső integrálja

Ha T lokálisan kompakt tér, akkor $\mathscr{I}_+(T)$ jelöli a $T \to \overline{\mathbb{R}}_+$ alulról félig folytonos függvények halmazát, tehát $\mathscr{I}_+(T)$ azon $f : T \to \overline{\mathbb{R}}_+$ függvények halmaza, amelyekre minden $c \in \mathbb{R}$ esetén az $[f > c]$ halmaz nyílt T-ben. Ha T lokálisan kompakt tér és $f \in \mathscr{I}_+(T)$, akkor

$$f = \sup_{\substack{\varphi\in\mathscr{K}(T;\mathbb{R}) \\ 0\leq\varphi\leq f}} \varphi$$

teljesül (27.9.1.), és világos, hogy a $\{\varphi \in \mathscr{K}(T;\mathbb{R}) | 0 \leq \varphi \leq f\}$ függvényhalmaz nem üres és felfelé irányított.

9.2.1. Definíció. *Legyen μ pozitív Radon-mérték a T lokálisan kompakt tér felett. Minden $f \in \mathscr{I}_+(T)$ esetén legyen*

$$\int^\bullet f\ d\mu := \sup_{\substack{\varphi \in \mathscr{K}(T;\mathbb{R}) \\ 0 \leq \varphi \leq f}} \mu(\varphi),$$

és az $\int^\bullet f\ d\mu \in \overline{\mathbb{R}}_+$ elemet az f függvény μ szerinti **felső integráljának** *nevezzük.*

9.2.2. Állítás. *Legyen μ pozitív Radon-mérték a T lokálisan kompakt tér felett.*

a) *Ha $\varphi \in \mathscr{K}(T;\mathbb{R})$ és $\varphi \geq 0$, akkor $\int^\bullet f\ d\mu = \mu(\varphi)$.*

b) *Ha $f, g \in \mathscr{I}_+(T)$ és $f \leq g$, akkor $\int^\bullet f\ d\mu \leq \int^\bullet g\ d\mu$.*

c) *Ha $f \in \mathscr{I}_+(T)$ és $\alpha \in \mathbb{R}^+$, akkor $\alpha.f \in \mathscr{I}_+(T)$ és $\int^\bullet (\alpha.f)\ d\mu = \alpha \int^\bullet f\ d\mu$.*

d) *Ha $(f_i)_{i \in I}$ tetszőleges $\mathscr{I}_+(T)$-ben haladó rendszer, akkor $\sum_{i \in I} f_i \in \mathscr{I}_+(T)$ és*

$$\int^\bullet \left(\sum_{i \in I} f_i\right) d\mu = \sum_{i \in I} \int^\bullet f_i\ d\mu.$$

e) *Ha $(f_i)_{i \in I}$ olyan $\mathscr{I}_+(T)$-ben haladó nem üres rendszer, amely felfelé irányított (vagyis minden $i_1, i_2 \in I$ esetén van olyan $i \in I$, hogy $f_{i_1}, f_{i_2} \leq f_i$), akkor $\sup_{i \in I} f_i \in \mathscr{I}_+(T)$ és*

$$\int^\bullet \sup_{i \in I} f_i \quad d\mu = \sup_{i \in I} \int^\bullet f_i\ d\mu.$$

Bizonyítás. A μ monoton növése miatt a) és b) nyilvánvalóan igaz.
A c) bizonyításához legyen $f \in \mathscr{I}_+(T)$ és $\alpha \in \mathbb{R}^+$. Világos, hogy $\alpha.f = \sup_{\substack{\varphi \in \mathscr{K}(T;\mathbb{R}) \\ 0 \leq \varphi \leq f}} (\alpha.\varphi)$, ezért $\alpha.f \in \mathscr{I}_+(T)$. Ha $\varphi \in \mathscr{K}(T;\mathbb{R})$ és $0 \leq \varphi \leq f$, akkor $\alpha.\varphi \leq \alpha.f$ miatt $\alpha\mu(\varphi) = \mu(\alpha.\varphi) \leq \int^\bullet (\alpha.f)\ d\mu$, vagyis $\mu(\varphi) \leq \frac{1}{\alpha} \int^\bullet (\alpha.f)\ d\mu$. Ebből következik, hogy $\int^\bullet f\ d\mu \leq \frac{1}{\alpha} \int^\bullet (\alpha.f)\ d\mu$, vagyis $\alpha \int^\bullet f\ d\mu \leq \int^\bullet (\alpha.f)\ d\mu$. Ez az egyenlőtlenség minden $f \in \mathscr{I}_+(T)$ függvényre és $\alpha \in \mathbb{R}^+$ számra igaz. Ha $f \in \mathscr{I}_+(T)$ és $\alpha \in \mathbb{R}^+$, akkor ezt az egyenlőtlenséget felírva f helyett az $\alpha.f$ függvényre és α helyett az $\frac{1}{\alpha} \in \mathbb{R}^+$ számra kapjuk, hogy $\frac{1}{\alpha} \int^\bullet (\alpha.f)\ d\mu \leq \int^\bullet \frac{1}{\alpha}(\alpha.f) \quad d\mu = \int^\bullet f\ d\mu$, vagyis $\int^\bullet (\alpha.f)\ d\mu \leq \alpha \int^\bullet f\ d\mu$.

Most az e) állítást igazoljuk. A 27.4. 4) megjegyzés szerint alulról félig folytonos függvények bármely nem üres rendszerének a felső burkolója alulról félig folytonos. Legyen most $(f_i)_{i\in I}$ olyan $\mathscr{I}_+(T)$-ben haladó nem üres rendszer, amely felfelé irányított. A b) alapján a $\int^\bullet \ \sup_{i\in I} f_i \ \ d\mu \geq \sup_{i\in I}\int^\bullet f_i \ d\mu$ egyenlőtlenség még akkor is igaz, ha az $(f_i)_{i\in I}$ rendszer nem felfelé irányított. Minden $I \ni i$-re legyen $\Phi_i := \{\varphi \in \mathscr{K}(T;\mathbb{R}) | 0 \leq \varphi \leq f_i\}$ és $\Phi := \bigcup_{i\in I} \Phi_i$. Az $(f_i)_{i\in I}$ rendszer felfelé irányítottsága miatt a Φ függvényhalmaz is felfelé irányított. Valóban, ha $\varphi_1, \varphi_2 \in \Phi$, akkor léteznek olyan $i_i, i_2 \in I$, hogy $\varphi_1 \in \Phi_{i_1}$ és $\varphi_2 \in \Phi_{i_2}$; ekkor van olyan $i \in I$, hogy $f_{i_1} \leq f_i$ és $f_{i_2} \leq f_i$, ezért a $\sup(\varphi_1, \varphi_2) \in \mathscr{K}(T;\mathbb{R})$ függvény olyan, hogy $0 \leq \sup(\varphi_1,\varphi_2) \leq f_i$, így eleme Φ_i-nek, tehát Φ-nek is, és $\varphi_1, \varphi_2 \leq \sup(\varphi_1, \varphi_2)$.

Legyen $\psi \in \mathscr{K}(T;\mathbb{R})$ tetszőleges olyan függvény, amelyre $0 \leq \psi \leq \sup_{i\in I} f_i$. Ekkor

$$\psi = \inf \ \ \psi, \sup_{i\in I} f_i \ \ = \sup_{i\in I}\left(\inf\left(\psi, f_i\right)\right) = \sup_{i\in I}\left(\inf\left(\psi, \sup_{\varphi\in\Phi_i}\varphi\right)\right) =$$

$$= \sup_{i\in I}\left(\sup_{\varphi\in\Phi_i}\left(\inf(\psi,\varphi)\right)\right) = \sup_{\varphi\in\Phi}\left(\inf(\psi,\varphi)\right),$$

és természetesen az $\{\inf(\psi,\varphi) | \varphi \in \Phi\}$ függvényhalmaz is felfelé irányított. Ezért a pozitív Radon-mértékek monoton folytonosságából következik, hogy

$$\mu(\psi) = \sup_{\varphi\in\Phi}\mu\left(\inf(\psi,\varphi)\right) = \sup_{i\in I}\left(\sup_{\varphi\in\Phi_i}\mu(\inf(\psi,\varphi))\right) \leq \sup_{i\in I}\int^\bullet f_i \ d\mu.$$

Ebből kapjuk, hogy $\int^\bullet \ \sup_{i\in I} f_i \ \ d\mu \leq \sup_{i\in I}\int^\bullet f_i \ d\mu$.

Végül, a d) állítás bioznyításához legyen $(f_i)_{i\in I}$ tetszőleges rendszer $\mathscr{I}_+(T)$-ben. A $\sum_{i\in I} f_i$ függvény definíciója alapján $\sum_{i\in I} f_i := \sup_{J\in\mathscr{P}_0(I)}\sum_{i\in J} f_i$, ahol $\mathscr{P}_0(I)$ az I véges részhalmazainak halmaza. Világos, hogy a $\left(\sum_{i\in J} f_i\right)_{J\in\mathscr{P}_0(I)}$ függvényrendszer felfelé irányított, és mindegyik tagja eleme $\mathscr{I}_+(T)$-nek, ezért az e) alapján

$$\int^\bullet\left(\sum_{i\in I} f_i\right) d\mu = \int^\bullet\left(\sup_{J\in\mathscr{P}_0(I)}\sum_{i\in J} f_i\right) d\mu = \sup_{J\in\mathscr{P}_0(I)}\int^\bullet\left(\sum_{i\in J} f_i\right) d\mu.$$

Ha igaz volna az, hogy minden $J \in \mathscr{P}_0(I)$ halmazra teljesül a $\sum_{i\in J}\int^\bullet f_i \ d\mu = \int^\bullet\left(\sum_{i\in J} f_i\right) d\mu$ egyenlőség, akkor a fentiekből következne, hogy

$$\int^\bullet\left(\sum_{i\in I} f_i\right) d\mu = \sup_{J\in\mathscr{P}_0(I)}\int^\bullet\left(\sum_{i\in J} f_i\right) d\mu = \sup_{J\in\mathscr{P}_0(I)}\sum_{i\in J}\int^\bullet f_i \ d\mu =: \sum_{i\in I}\int^\bullet f_i \ d\mu.$$

Ez azt mutatja, hogy a d) állítást elegendő *véges* I indexhalmazra bizonyítani.

Legyen tehát $(f_i)_{i\in I}$ tetszőleges véges rendszer $\mathscr{I}_+(T)$-ben. Ha $(\varphi_i)_{i\in I}$ olyan rendszer $\mathscr{K}(T;\mathbb{R})$-ben, hogy minden $I \ni i$-re $0 \le \varphi_i \le f_i$, akkor $\sum\limits_{i\in I} \varphi_i \in \mathscr{K}(T;\mathbb{R})$ olyan, hogy $0 \le \sum\limits_{i\in I} \varphi_i \le \sum\limits_{i\in I} f_i$, tehát a μ additivitása miatt $\sum\limits_{i\in I} \mu(\varphi_i) = \mu\left(\sum\limits_{i\in I} \varphi_i\right) \le \int^\bullet \left(\sum\limits_{i\in I} f_i\right) d\mu$. Ebből következik, hogy

$$\sum_{i\in I} \int^\bullet f_i \, d\mu \le \int^\bullet \left(\sum_{i\in I} f_i\right) d\mu.$$

Megfordítva, legyen minden $I \ni i$-re $\Phi_i := \{\varphi \in \mathscr{K}(T;\mathbb{R}) | 0 \le \varphi \le f_i\}$ és $\Phi := \prod\limits_{i\in I} \Phi_i$. Könnyen látható, hogy $\sum\limits_{i\in I} f_i = \sup\limits_{(\varphi_i)_{i\in I}\in\Phi} \sum\limits_{i\in I} \varphi_i$, és nyilvánvaló, hogy a $\left(\sum\limits_{i\in I} \varphi_i\right)_{(\varphi_i)_{i\in I}\in\Phi}$ rendszer felfelé irányított. Ezért az e)-ből és a)-ból következik, hogy

$$\int^\bullet \left(\sum_{i\in I} f_i\right) d\mu = \sup_{(\varphi_i)_{i\in I}\in\Phi} \int^\bullet \left(\sum_{i\in I} \varphi_i\right) d\mu = \sup_{(\varphi_i)_{i\in I}\in\Phi} \mu\left(\sum_{i\in I} \varphi_i\right) =$$

$$= \sup_{(\varphi_i)_{i\in I}\in\Phi} \sum_{i\in I} \mu(\varphi_i) \le \sum_{i\in I} \int^\bullet f_i \, d\mu,$$

amiből kapjuk a

$$\int^\bullet \left(\sum_{i\in I} f_i\right) d\mu \le \sum_{i\in I} \int^\bullet f_i \, d\mu$$

egyenlőtlenséget. ■

9.3. Pozitív függvény felső integrálja – Fatou-tétel

A következő definíció előtt megjegyezzük, hogy ha T lokálisan kompakt tér, akkor a $T \to \overline{\mathbb{R}}_+$ azonosan $+\infty$ függvény nyilvánvalóan alulról félig folytonos, ezért minden $f \in \mathscr{F}(T;\overline{\mathbb{R}}_+)$ esetén van olyan $h \in \mathscr{I}_+(T)$, hogy $f \le h$.

9.3.1. Definíció. *Legyen μ pozitív Radon-mérték a T lokálisan kompakt tér felett. Minden $f \in \mathscr{F}(T;\overline{\mathbb{R}}_+)$ esetén legyen*

$$\int^* f \, d\mu := \inf_{\substack{h\in\mathscr{I}_+(T)\\ f\le h}} \int^\bullet h \, d\mu,$$

és az $\int^* f \, d\mu \in \overline{\mathbb{R}}_+$ elemet az f függvény μ szerinti **felső integráljának** *nevezzük.*

9.3.2. Tétel. (Fatou-tétel) *Legyen μ pozitív Radon-mérték a T lokálisan kompakt tér felett.*

a) *Ha $f \in \mathscr{I}_+(T)$, akkor $\int^* f \, d\mu = \int^\bullet f \, d\mu$.*

b) *Ha $f, g \in \mathscr{F}(T; \overline{\mathbb{R}}_+)$ és $f \leq g$, akkor $\int^* f \, d\mu \leq \int^* g \, d\mu$* **(monotonitás)**.

c) *Ha $f \in \mathscr{F}(T; \overline{\mathbb{R}}_+)$ és $\alpha \in \mathbb{R}^+$, akkor $\int^* (\alpha.f) \, d\mu = \alpha \int^* f \, d\mu$* **(pozitív homogenitás)**.

d) *Ha $(f_i)_{i \in I}$ tetszőleges véges $\mathscr{F}(T; \overline{\mathbb{R}}_+)$-ben haladó rendszer, akkor*

$$\int^* \left(\sum_{i \in I} f_i \right) d\mu \leq \sum_{i \in I} \int^* f_i \, d\mu$$

(véges szubadditivitás).

e) *Ha $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ olyan $\mathscr{F}(T; \overline{\mathbb{R}}_+)$-ben haladó sorozat, amely monoton növő, akkor*

$$\int^* \sup_{n \in \mathbb{N}} f_n \quad d\mu = \sup_{n \in \mathbb{N}} \int^* f_n \, d\mu$$

(monoton σ-folytonosság).

Bizonyítás. Az a) és b) állítások a definícióból azonnal következnek.

A c) bizonyításához legyen $f \in \mathscr{F}(T; \overline{\mathbb{R}}_+)$ és $\alpha \in \mathbb{R}^+$. Ha $h \in \mathscr{I}_+(T)$ és $f \leq h$, akkor $\alpha.f \leq \alpha.h$, tehát $\int^*(\alpha.f) d\mu \leq \int^\bullet (\alpha.h) d\mu = \alpha \int^\bullet h \, d\mu$, vagyis $\frac{1}{\alpha} \int^* (\alpha.f) d\mu \leq \int^\bullet h \, d\mu$. Ebből következik, hogy $\int^* (\alpha.f) \; d\mu \;\leq\; \alpha \int^* f \; d\mu$. Ez az egyenlőtlenség minden $f \in \mathscr{F}(T; \overline{\mathbb{R}}_+)$ és $\alpha \in \mathbb{R}^+$ esetén érvényes. Ha $f \in \mathscr{F}(T; \overline{\mathbb{R}}_+)$ és $\alpha \in \mathbb{R}^+$, akkor felírva az iménti egyenlőtlenséget f helyett az $\alpha.f \in \mathscr{F}(T; \overline{\mathbb{R}}_+)$ függvényre, és α helyett az $\frac{1}{\alpha} \in \mathbb{R}^+$ számra kapjuk, hogy $\int^* f \; d\mu = \int^* \frac{1}{\alpha}(\alpha.f) \quad d\mu \leq \frac{1}{\alpha} \int^* (\alpha.f) d\mu$, vagyis $\alpha \int^* f \, d\mu \leq \int^* (\alpha.f) d\mu$.

d) Elegendő azt megmutatni, hogy ha $f, f' \in \mathscr{F}(T; \overline{\mathbb{R}}_+)$, akkor

$$\int^* (f + f') \, d\mu \leq \int^* f \, d\mu + \int^* f' \, d\mu,$$

mert ebből az I indexhalmaz számossága szerinti teljes indukcióval következik a d) állítás. Ha $\int^* f \, d\mu = +\infty$ vagy $\int^* f' \, d\mu = +\infty$, akkor a bizonyítandó egyenlőtlenség triviális, ezért feltehető, hogy $\int^* f \, d\mu, \int^* f' \, d\mu < +\infty$. Ekkor nyilvánvalóan

$$\int^* f \, d\mu = \inf \left\{ \int^\bullet h \, d\mu \,\middle|\, (h \in \mathscr{I}_+(T)) \wedge (f \leq h) \wedge \left(\int^\bullet h \, d\mu < +\infty \right) \right\},$$

$$\int^* f' \, d\mu = \inf \quad \int^{\bullet} h' \, d\mu \,\Big|\, (h' \in \mathscr{I}_+(T)) \land (f' \leq h') \land \quad \int^{\bullet} h' \, d\mu < +\infty \quad .$$

Legyenek $h, h' \in \mathscr{I}_+(T)$ olyanok, hogy $f \leq h$, $f' \leq h'$, és $\int^{\bullet} h \, d\mu < +\infty$, valamint $\int^{\bullet} h' \, d\mu < +\infty$. Ekkor $f + f' \leq h + h' \in \mathscr{I}_+(T)$, ezért

$$\int^* (f + f') \, d\mu \leq \int^{\bullet} (h + h') \, d\mu \leq \int^{\bullet} h \, d\mu + \int^{\bullet} h' \, d\mu.$$

Legyen most $h \in \mathscr{I}_+(T)$ olyan függvény, hogy $f \leq h$ és $\int^{\bullet} h \, d\mu < +\infty$. Ekkor az iménti egyenlőtlenséget alkalmazva kapjuk, hogy minden $h' \in \mathscr{I}_+(T)$ esetén, ha $f' \leq h'$ és $\int^{\bullet} h' \, d\mu < +\infty$, akkor

$$\int^* (f + f') \, d\mu - \int^{\bullet} h \, d\mu \leq \int^{\bullet} h' \, d\mu,$$

amiből következik, hogy $\int^* (f + f') \, d\mu - \int^{\bullet} h \, d\mu \leq \int^* f' \, d\mu$. Tehát minden $h \in \mathscr{I}_+(T)$ függvényre, ha $f \leq h$ és $\int^{\bullet} h \, d\mu < +\infty$, akkor $\int^* (f + f') \, d\mu - \int^* f' \, d\mu \leq \int^{\bullet} h \, d\mu$, így $\int^* (f + f') \, d\mu - \int^* f' \, d\mu \leq \int^* f \, d\mu$ is teljesül, amit bizonyítani kellett.

e) A $\int^* \sup\limits_{n \in \mathbb{N}} f_n \, d\mu \geq \sup\limits_{n \in \mathbb{N}} \int^* f_n \, d\mu$ egyenlőtlenség a felső integrál monotonitásából következik. Ebből látható, hogy elég arra az esetre bizonyítani, amikor minden $\mathbb{N} \ni n$-re $\int^* f_n \, d\mu < +\infty$ (sőt még azt is feltehetnénk, hogy $\sup\limits_{n \in \mathbb{N}} \int^* f_n \, d\mu < +\infty$).

Legyen $(\varepsilon_n)_{n \in \mathbb{N}}$ tetszőleges $\mathbb{R}^+$-ban haladó *szigorúan monoton növő* sorozat. A kiválasztási axiómával kombinált rekurzió tételét alkalmazva igazoljuk, hogy létezik olyan $(h_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sorozat $\mathscr{I}_+(T)$-ben, amelyre minden $n \in \mathbb{N}$ esetén $f_n \leq h_n \leq h_{n+1}$ és $\int^* h_n \, d\mu < \int^* f_n \, d\mu + \varepsilon_n$.

A felső integrál definíciója, valamint $\int^* f_0 \, d\mu < +\infty$ és $\varepsilon_0 > 0$ miatt van olyan $h_0 \in \mathscr{I}_+(T)$, hogy $f_0 \leq h_0$ és $\int^* h_0 \, d\mu < \int^* f_0 \, d\mu + \varepsilon_0$.

Legyen $n \in \mathbb{N}^+$ és tegyük fel, hogy $(h_k)_{k \in n}$ olyan rendszer $\mathscr{I}_+(T)$-ben, hogy minden $k < n$ természetes számra $f_k \leq h_k$ és $\int^* h_k \, d\mu < \int^* f_k \, d\mu + \varepsilon_k$, valamint $k + 1 < n$ esetén $h_k \leq h_{k+1}$. Olyan $h_n \in \mathscr{I}_+(T)$ függvényt keresünk, amelyre $f_n \leq h_n$, $h_{n-1} \leq h_n$ és $\int^* h_n \, d\mu < \int^* f_n \, d\mu + \varepsilon_n$. Legyen $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ tetszőleges. Ekkor a felső integrál definíciója és $\int^* f_n \, d\mu < +\infty$ miatt létezik olyan $h \in \mathscr{I}_+(T)$, hogy $f_n \leq h$ és $\int^* h \, d\mu < \int^* f_n \, d\mu + \varepsilon$.

Ekkor $\inf(h_{n-1},h)+\sup(h_{n-1},h)=h_{n-1}+h$, és mind a négy itt szereplő függvény alulról félig folytonos. A felső integrál (teljesen) additív $\mathscr{I}_+(T)$-n, ezért

$$\int^* \inf(h_{n-1},h)\, d\mu + \int^* \sup(h_{n-1},h)\, d\mu = \int^* h_{n-1}\, d\mu + \int^* h\, d\mu.$$

Az $f_{n-1} \leq h_{n-1}$ és $f_{n-1} \leq f_n \leq h$ egyenlőtlenségek alapján $f_{n-1} \leq \inf(h_{n-1},h)$, ezért ebből és a felső integrál monotonitásából, valamint az $\int^* h_{n-1}\, d\mu < \int^* f_{n-1}\, d\mu + \varepsilon_{n-1}$ egyenlőtlenségből

$$\int^* f_{n-1}\, d\mu + \int^* \sup(h_{n-1},h)\, d\mu < \int^* f_{n-1}\, d\mu + \varepsilon_{n-1} + \int^* f_n\, d\mu + \varepsilon$$

adódik, tehát

$$\int^* \sup(h_{n-1},h)\, d\mu < \int^* f_n\, d\mu + \varepsilon + \varepsilon_{n-1}.$$

Ugyanakkor az $\sup(h_{n-1},h) \in \mathscr{I}_+(T)$ függvény olyan, hogy $h_{n-1} \leq \sup(h_{n-1},h)$ és $f_n \leq h \leq \sup(h_{n-1},h)$. Ez azt jelenti, hogy ha $\varepsilon < \varepsilon_n - \varepsilon_{n-1}$, akkor az ε-hoz imént megválasztott h függvényből konstruált $h_n := \sup(h_{n-1},h)$ függvényre teljesül az, hogy $h_n \in \mathscr{I}_+(T)$, $f_n \leq h_n$, $h_{n-1} \leq h_n$ és $\int^* h_n\, d\mu < \int^* f_n\, d\mu + \varepsilon_n$. Ezzel bebizonyítottuk az előírt tulajdonságú $(h_n)_{n\in\mathbb{N}}$ függvénysorozat létezését.

Legyen most $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ tetszőleges, és vegyünk olyan $(\varepsilon_n)_{n\in\mathbb{N}}$ szigorúan monoton növő sorozatot $\mathbb{R}^+$-ban, amelyre $\sup\limits_{n\in\mathbb{N}} \varepsilon_n < \varepsilon$. Az előzőek alapján vehetünk olyan $(h_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sorozatot, hogy minden $n \in \mathbb{N}$ esetén $h_n \in \mathscr{I}_+(T)$, $f_n \leq h_n \leq h_{n+1}$ és $\int^* h_n\, d\mu < \int^* f_n\, d\mu + \varepsilon_n$. Ekkor $\sup\limits_{n\in\mathbb{N}} f_n \leq \sup\limits_{n\in\mathbb{N}} h_n$, tehát a felső integrál monotonitása, valamint az $\mathscr{I}_+(T)$-n teljesülő monoton σ-folytonossága alapján kapjuk, hogy

$$\int^* \left(\sup_{n\in\mathbb{N}} f_n\right) d\mu \leq \int^* \left(\sup_{n\in\mathbb{N}} h_n\right) d\mu = \sup_{n\in\mathbb{N}} \int^* h_n\, d\mu \leq$$

$$\leq \sup_{n\in\mathbb{N}} \left(\int^* f_n\, d\mu + \varepsilon_n\right) \leq \sup_{n\in\mathbb{N}} \int^* f_n\, d\mu + \varepsilon,$$

amiből az ε tetszőlegessége miatt:

$$\int^* \left(\sup_{n\in\mathbb{N}} f_n\right) d\mu \leq \sup_{n\in\mathbb{N}} \int^* f_n\, d\mu. \blacksquare$$

9.3.3. Következmény. (A megszámlálható konvexitás tétele) *Ha μ pozitív Radon-mérték a T lokálisan kompakt tér felett és legyen $(f_k)_{k\in\mathbb{N}}$ tetszőleges $\mathscr{F}(T;\overline{\mathbb{R}}_+)$-ben haladó sorozat, akkor*

$$\int^* \left(\sum_{k=0}^{\infty} f_k\right) d\mu \leq \sum_{k=0}^{\infty} \int^* f_k\, d\mu.$$

Bizonyítás. A felső integrál monoton σ-folytonossága és véges szubadditivitása alapján

$$\int^* \left(\sum_{k=0}^{\infty} f_k\right) d\mu := \int^* \sup_{n\in\mathbb{N}} \left(\sum_{k=0}^{n} f_k\right) d\mu = \sup_{n\in\mathbb{N}} \int^* \left(\sum_{k=0}^{n} f_k\right) d\mu \leq$$

$$\leq \sup_{n\in\mathbb{N}} \sum_{k=0}^{n} \int^* f_k \; d\mu =: \sum_{k=0}^{\infty} \int^* f_k \; d\mu. \blacksquare$$

9.3.4. Következmény. (Fatou-lemma) *Ha μ pozitív Radon-mérték a T lokálisan kompakt tér felett és $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tetszőleges $\mathscr{F}(T;\overline{\mathbb{R}}_+)$-ben haladó sorozat, akkor*

$$\int^* \left(\liminf_{n\to\infty} f_n\right) d\mu \leq \liminf_{n\to\infty} \int^* f_n \; d\mu.$$

Bizonyítás. Az $\left(\inf_{\substack{k\in\mathbb{N}\\ k\geq n}} f_k\right)_{n\in\mathbb{N}}$ függvénysorozat monoton növő, ezért a felső integrál monoton σ-folytonossága és monotonitása miatt

$$\int^* \left(\liminf_{n\to\infty} f_n\right) d\mu := \int^* \sup_{n\in\mathbb{N}} \left(\inf_{\substack{k\in\mathbb{N}\\ k\geq n}} f_k\right) d\mu = \sup_{n\in\mathbb{N}} \int^* \left(\inf_{\substack{k\in\mathbb{N}\\ k\geq n}} f_k\right) d\mu \leq$$

$$\leq \sup_{n\in\mathbb{N}} \left(\inf_{\substack{k\in\mathbb{N}\\ k\geq n}} \int^* f_k \; d\mu\right) =: \liminf_{n\to\infty} \int^* f_n \; d\mu. \blacksquare$$

9.4. Additivitás- és szubtraktivitás-formulák

Pozitív Radon-mérték által generált felső integrál általában még végesen sem additív. Azonban bizonyos pozitív függvényekre érvényes additivitás-formula; ilyen esetről van szó a következő állításban.

9.4.1. Állítás. *Legyen μ pozitív Radon-mérték a T lokálisan kompakt tér felett. Ha $f : T \to \overline{\mathbb{R}}_+$ tetszőleges függvény és $g : T \to \mathbb{R}_+$ olyan alulról vagy felülről félig folytonos függvény, amelyre $g \leq f$, akkor*

$$\int^* (f-g) \; d\mu + \int^* g \; d\mu = \int^* f \; d\mu$$

(additivitás-formula), *és ha $\int^* g \; d\mu < +\infty$ is igaz, akkor*

$$\int^* (f-g) \; d\mu = \int^* f \; d\mu - \int^* g \; d\mu$$

(szubtraktivitás-formula).

Bizonyítás. (I) Legyen g alulról félig folytonos. A felső integrál véges szubadditivitása miatt

$$\int^* f\, d\mu = \int^* ((f-g)+g)\, d\mu \le \int^* (f-g)\, d\mu + \int^* g\, d\mu,$$

tehát az állítás igaz, ha $\int^* f\, d\mu = +\infty$. Ezért feltehető, hogy $\int^* f\, d\mu < +\infty$. Elég azt igazolni, hogy

$$\int^* (f-g)\, d\mu + \int^* g\, d\mu \le \int^* f\, d\mu.$$

A felső integrál definíciója és monoton növése alapján ehhez elég azt belátni, hogy minden $h \in \mathscr{I}_+(T)$ esetén, ha $f \le h$ és $\int^* h\, d\mu < +\infty$, akkor

$$\int^* (f-g)\, d\mu + \int^* g\, d\mu \le \int^* h\, d\mu.$$

Legyen tehát $h \in \mathscr{I}_+(T)$ olyan, hogy $f \le h$ és $\int^* h\, d\mu < +\infty$. Ha $\varphi, \psi \in \mathscr{K}(T;\mathbb{R})$ olyanok, hogy $0 \le \varphi \le g$ és $0 \le \psi \le h - \varphi$, akkor $\varphi + \psi \le h$, ezért $\mu(\varphi) + \mu(\psi) = \mu(\varphi + \psi) \le \int^* h\, d\mu$, vagyis

$$\mu(\psi) \le \int^* h\, d\mu - \mu(\varphi).$$

Tehát, ha $\varphi \in \mathscr{K}(T;\mathbb{R})$ olyan, hogy $0 \le \varphi \le g$, akkor ez az egyenlőtlenség minden olyan $\mathscr{K}(T;\mathbb{R}) \ni \psi$-re igaz, amelyre $0 \le \psi \le h - \varphi$, tehát a $h - \varphi$ függvény alulról félig folytonossága alapján

$$\int^* (h-g)\, d\mu \le \int^* (h-\varphi)\, d\mu = \sup_{\substack{\psi \in \mathscr{K}(T;\mathbb{R}) \\ 0 \le \psi \le h-\varphi}} \mu(\psi) \le \int^* h\, d\mu - \mu(\varphi),$$

tehát $\mu(\varphi) \le \int^* h\, d\mu - \int^* (h-g)\, d\mu$. Ez minden olyan $\mathscr{K}(T;\mathbb{R}) \ni \varphi$-re igaz, amelyre $0 \le \varphi \le g$, tehát a g alulról félig folytonossága miatt

$$\int^* g\, d\mu = \sup_{\substack{\varphi \in \mathscr{K}(T;\mathbb{R}) \\ 0 \le \varphi \le g}} \mu(\varphi) \le \int^* h\, d\mu - \int^* (h-g)\, d\mu,$$

amit bizonyítani kellett.

(II) Legyen g felülről félig folytonos és $h \in \mathscr{I}_+(T)$ olyan, hogy $f \le h$. Ha $m, n \in \mathbb{N}$ és $m \le n$, akkor $\inf(h,n) - \inf(g,m) : T \to \mathbb{R}_+$ olyan alulról félig folytonos függvény, hogy $\inf(h,n) - \inf(g,m) \le \inf(h,n)$, tehát az (I) állítást alkalmazva f helyett $\inf(h,n)$-re és g helyett az $\inf(h,n) - \inf(g,m)$ függvényre kapjuk, hogy

$$\int^* (\inf(h,n) - (\inf(h,n) - \inf(g,m)))d\mu +$$

$$+\int^* (\inf(h,n) - \inf(g,m))d\mu = \int^* \inf(h,n)d\mu,$$

vagyis

$$\int^* \inf(g,m)\ d\mu + \int^* (\inf(h,n) - \inf(g,m))d\mu = \int^* \inf(h,n)d\mu.$$

Ebből a felső integrál monoton σ-folytonossága alapján következik, hogy minden $m \in \mathbb{N}$ esetén

$$\int^* \inf(g,m)\ d\mu + \int^* (h - \inf(g,m))d\mu = \int^* \inf(g,m)\ d\mu +$$

$$+\int^* (\sup_{n\in\mathbb{N}}(\inf(h,n)) - \inf(g,m))d\mu = \int^* \inf(g,m)d\mu +$$

$$+\sup_{n\in\mathbb{N}} \int^* (\inf(h,n) - \inf(g,m))d\mu = \sup_{n\in\mathbb{N}} \int^* \inf(h,n)d\mu = \int^* h\ d\mu.$$

Ha $m \in \mathbb{N}$, akkor $f - g \leq h - \inf(g,m)$, ezért

$$\int^* \inf(g,m)\ d\mu + \int^* (f-g)d\mu \leq \int^* h\ d\mu.$$

Ebből ismét a felső integrál monoton σ-folytonosságát alkalmazva

$$\int^* g\ d\mu + \int^* (f-g)d\mu = \sup_{m\in\mathbb{N}} \int^* \inf(g,m)d\mu + \int^* (f-g)d\mu \leq \int^* h\ d\mu$$

adódik, amiből következik a bizonyítandó

$$\int^* (f-g)d\mu + \int^* g\ d\mu \leq \int^* h\ d\mu$$

egyenlőtlenség. ■

9.4.2. Következmény. *Legyen μ pozitív Radon-mérték a T lokálisan kompakt tér felett, és $(f_i)_{i\in I}$ olyan rendszer, hogy minden $I \ni i$-re $f_i : T \to \mathbb{R}_+$ felülről félig folytonos függvény. Ha az $(f_i)_{i\in I}$ függvény-rendszer lefelé irányított (vagyis minden $i_1, i_2 \in I$ esetén van olyan $i \in I$, hogy $f_i \leq f_{i_1}, f_{i_2}$), és létezik olyan $i \in I$, amelyre $\int^* f_i\ d\mu < +\infty$, akkor*

$$\int^* \inf_{i\in I} f_i \quad d\mu = \inf_{i\in I} \int^* f_i\ d\mu.$$

Bizonyítás. Legyen $i_0 \in I$ olyan, hogy $\int^* f_{i_0}\ d\mu < +\infty$, és vegyünk olyan $f \in \mathscr{I}_+(T)$ függvényt, amelyre $f_{i_0} \leq f$ és $\int^* f\ d\mu < +\infty$. Legyen $I_0 := \{i \in I | f_i \leq f_{i_0}\}$, és tekintsük az $(f - f_i)_{i\in I_0}$ függvény-rendszert, amelynek minden tagja eleme $\mathscr{I}_+(T)$-nek. Nyilvánvaló, hogy ez a függvény-rendszer felfelé irányított, ezért

$$\int^* \sup_{i\in I_0}(f - f_i) \quad d\mu = \sup_{i\in I_0} \int^* (f - f_i)d\mu.$$

Ugyanakkor $\sup_{i\in I_0}(f - f_i) = f - \inf_{i\in I_0} f_i$, és $\inf_{i\in I_0} f_i = \inf_{i\in I} f_i$, mert az $(f_i)_{i\in I}$ függvény-rendszer lefelé iranyított. Továbbá, $\inf_{i\in I} f_i$ felülről félig folytonos függvény és $\int^* \inf_{i\in I} f_i \, d\mu \leq \int^* f_{i_0} \, d\mu < +\infty$, ezért a szubtraktivitás-formula alapján

$$\int^* \sup_{i\in I_0}(f - f_i)d\mu = \int^* \left(f - \inf_{i\in I_0} f_i \right) d\mu = \int^* f \, d\mu - \int^* \inf_{i\in I_0} f_i \, d\mu.$$

Ha $i \in I_0$, akkor $f_i : T \to \mathbb{R}_+$ felülről félig folytonos függvény és $\int^* f_i \, d\mu \leq \int^* f_{i_0} \, d\mu < +\infty$, ezért a szubtraktivitás-formula alapján

$$\int^* (f - f_i)d\mu = \int^* f \, d\mu - \int^* f_i \, d\mu.$$

Az $\overline{\mathbb{R}}_+$-ban haladó $\left(\int^* f_i \, d\mu\right)_{i\in I}$ felsőintegrál-rendszer lefelé irányított, következésképpen $\inf_{i\in I_0} \int^* f_i \, d\mu = \inf_{i\in I} \int^* f_i \, d\mu$. Ez azt jelenti, hogy

$$\int^* f \, d\mu - \int^* \inf_{i\in I_0} f_i \, d\mu = \int^* \sup_{i\in I_0}(f - f_i)d\mu = \sup_{i\in I_0} \int^* (f - f_i)d\mu =$$

$$= \sup_{i\in I_0} \left(\int^* f \, d\mu - \int^* f_i \, d\mu \right) = \int^* f \, d\mu - \inf_{i\in I_0} \int^* f_i \, d\mu = \int^* f \, d\mu - \inf_{i\in I} \int^* f_i \, d\mu,$$

amiből $\int^* f \, d\mu < +\infty$ alapján kapjuk a bizonyítandó egyenlőtlenséget. ■

9.5. Halmaz külső mértéke

9.5.1. Definíció. *Legyen μ pozitív Radon-mérték a T lokálisan kompakt tér felett. Minden $H \subseteq T$ halmazra*

$$\mu^*(H) := \int^* \chi_H \, d\mu,$$

és a $\mu^*(H) \in \overline{\mathbb{R}}_+$ elemet a H halmaz μ szerinti **külső mértékének** *nevezzük. Azt mondjuk, hogy a $H \subseteq T$ halmaz μ-nullahalmaz, ha $\mu^*(H) = 0$.*

9.5.2. Állítás. *Legyen μ pozitív Radon-mérték a T lokálisan kompakt tér felett.*

a) *Minden $H \subseteq T$ relatív kompakt halmazra $\mu^*(H) < +\infty$.*

b) *Ha $H, H' \subseteq T$ és $H \subseteq H'$, akkor $\mu^*(H) \leq \mu^*(H')$.*

c) *Ha $(H_n)_{n\in\mathbb{N}}$ monoton növő sorozat $\mathscr{P}(T)$-ben, akkor*

$$\mu^*\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} H_n\right) = \sup_{n\in\mathbb{N}} \mu^*(H_n).$$

d) *Ha* $(H_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *tetszőleges sorozat* $\mathscr{P}(T)$*-ben, akkor*

$$\mu^*\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} H_n\right) \leq \sum_{n=0}^{\infty} \mu^*(H_n).$$

Bizonyítás. a) Ha $H \subseteq T$ relatív kompakt halmaz, akkor van olyan $\varphi \in \mathscr{K}(T;\mathbb{R})$, hogy $\chi_H \leq \varphi$, ezért a felső integrál monotonitása alapján $\mu^*(H) := \int^* \chi_H \, d\mu \leq \int^* \varphi \, d\mu = \mu(\varphi) < +\infty$.

b) A felső integrál monotonitása alapján nyilvánvaló.

c) Ha $(H_n)_{n\in\mathbb{N}}$ monoton növő sorozat $\mathscr{P}(T)$-ben, akkor $\left(\chi_{H_n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ monoton növő sorozat $\mathscr{F}(T;\overline{\mathbb{R}}_+)$-ban, és $\sup\limits_{n\in\mathbb{N}} \chi_{H_n}$ egyenlő az $\bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} H_n$ halmaz karakterisztikus függvényével, ezért az állítás nyilvánvalóan következik a felső integrál monoton σ-folytonosságából.

d) Ha $(H_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tetszőleges sorozat $\mathscr{P}(T)$-ben és $H := \bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} H_n$, akkor $\chi_H \leq \sum\limits_{n=0}^{\infty} \chi_{H_n}$, ezért a felső integrál monotonitása és megszámlálható konvexitás tétele alapján kapjuk, hogy

$$\mu^*\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} H_n\right) := \int^* \chi_H \, d\mu \leq \int^* \left(\sum_{n=0}^{\infty} \chi_{H_n}\right) d\mu \leq$$

$$\leq \sum_{n=0}^{\infty} \int^* \chi_{H_n} d\mu =: \sum_{n=0}^{\infty} \mu^*(H_n),$$

amit bizonyítani kellett. ■

Tehát az előző állítás b) és d) pontja szerint mondható, hogy ha μ pozitív Radon-mérték a T lokálisan kompakt tér felett, akkor a

$$\mu^* : \mathscr{P}(T) \to \overline{\mathbb{R}}_+; \quad H \mapsto \int^* \chi_H \, d\mu$$

függvény *Carathéodory-féle külső mérték* a T halmaz felett (30.2.1.).

9.5.3. Állítás. *Ha* μ *pozitív Radon-mérték a* T *lokálisan kompakt tér felett, akkor minden* $H \subseteq T$ *esetén*

$$\mu^*(H) = \inf_{\substack{\Omega\subseteq T \text{ nyílt} \\ H\subseteq\Omega}} \mu^*(\Omega),$$

amit úgy fejezünk ki, hogy a T *minden részhalmaza* **kívülről** μ^***-reguláris**.

Bizonyítás. Elég arra az esetre bizonyítani, amikor $\mu^*(H) < +\infty$. Legyen $\varepsilon \in]0,1[$ tetszőleges valós szám. A külső mérték és a felső integrál definíciója alapján létezik olyan $f \in \mathscr{I}_+(T)$, hogy $\chi_H \leq f$ és

$$\int^* f \, d\mu < \mu^*(H) + \varepsilon.$$

Ekkor az $[1-\varepsilon < f]$ halmaz nyílt és $H \subseteq [1-\varepsilon < f]$. Ugyanakkor $\chi_{[1-\varepsilon<f]} \leq \dfrac{f}{1-\varepsilon}$, tehát

$$\mu^*([1-\varepsilon < f]) \leq \frac{\displaystyle\int^* f\, d\mu}{1-\varepsilon} < \frac{\mu^*(H)+\varepsilon}{1-\varepsilon},$$

így teljesül az

$$\inf_{\substack{\Omega\subseteq T \text{ nyílt} \\ H\subseteq\Omega}} \mu^*(\Omega) < \frac{\mu^*(H)+\varepsilon}{1-\varepsilon}$$

egyenlőtlenség. Ebből következik, hogy

$$\inf_{\substack{\Omega\subseteq T \text{ nyílt} \\ H\subseteq\Omega}} \mu^*(\Omega) \leq \lim_{\varepsilon\to 0} \frac{\mu^*(H)+\varepsilon}{1-\varepsilon} = \mu^*(H),$$

amit bizonyítani kellett. ■

9.6. Moderáns halmazok és mérhető halmazok

9.6.1. Definíció. *Legyen μ pozitív Radon-mérték a T lokálisan kompakt tér felett. Azt mondjuk, hogy a $H \subseteq T$ halmaz μ-**moderáns**, ha létezik a T részhalmazainak olyan $(H_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sorozata, amelyre $H \subseteq \bigcup_{n\in\mathbb{N}} H_n$ és minden $\mathbb{N} \ni n$-re $\mu^*(H_n) < +\infty$.*

Természetesen μ-moderáns halmaz minden részhalmaza μ-moderáns, és megszámlálható sok μ-moderáns halmaz uniója is μ-moderáns. Tehát, ha μ pozitív Radon-mérték a T lokálisan kompakt tér felett, akkor a T halmaz μ-moderáns részhalmazainak halmaza σ-gyűrű (30.1.1.). Világos, hogy minden véges külső mértékű halmaz μ-moderáns, továbbá minden relatív kompakt halmaz *univerzálisan μ-moderáns* abban az értelemben, hogy *minden* μ pozitív Radon-mérték szerint μ-moderáns. Minden Baire-halmaz is univerzálisan μ-moderáns, mivel a kompakt G_δ halmazok (sőt a kompakt halmazok is) univerzálisan μ-moderánsak.

Megjegyezzük még, hogy ha μ pozitív Radon-mérték a T lokálisan kompakt tér felett és a $H \subseteq T$ halmaz μ-moderáns, akkor létezik a T *nyílt* részhalmazainak olyan $(\Omega_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sorozata, hogy $H \subseteq \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \Omega_n$ és minden $\mathbb{N} \ni n$-re $\mu^*(\Omega_n) < +\infty$. Ez azonnal következik a μ^* külső regularitásából, hiszen ha $(H_n)_{n\in\mathbb{N}}$ a T részhalmazainak olyan sorozata, amelyre $H \subseteq \bigcup_{n\in\mathbb{N}} H_n$ és minden $\mathbb{N} \ni n$-re $\mu^*(H_n) < +\infty$, akkor a μ^* külső regularitását alkalmazva kiválasztható a T nyílt részhalmazainak olyan $(\Omega_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sorozata, hogy minden $\mathbb{N} \ni n$-re $H_n \subseteq \Omega_n$ és $\mu^*(\Omega_n) < +\infty$; minden ilyen $(\Omega_n)_{n\in\mathbb{N}}$ halmazsorozat megfelel a követelményeknek.

9.6.2. Definíció. *Legyen μ pozitív Radon-mérték a T lokálisan kompakt tér felett. Azt mondjuk, hogy a $H \subseteq T$ halmaz* **μ-mérhető**, *ha minden $X \subseteq T$ halmazra*

$$\mu^*(X) = \mu^*(X \cap H) + \mu^*(X \setminus H).$$

A T halmaz μ-mérhető részhalmazainak halmazát $\mathfrak{B}(T, \mu)$ jelöli.

Tehát, ha μ pozitív Radon-mérték a T lokálisan kompakt tér felett, akkor $\mathfrak{B}(T, \mu) = \mathfrak{M}(T, \mu^*)$, vagyis a μ-mérhető halmazok éppen a μ^* Carathéodory-féle külső mérték szerint mérhető halmazok (30.2.2.).

9.6.3. Állítás. *Ha μ pozitív Radon-mérték a T lokálisan kompakt tér felett, akkor a T minden Borel-halmaza μ-mérhető, és $\mathfrak{B}(T, \mu)$ olyan σ-algebra T felett, hogy a*

$$\mathfrak{B}(T, \mu) \to \overline{\mathbb{R}}_+; \quad H \mapsto \mu^*(H)$$

leképezés σ-additív.

Bizonyítás. Az μ^* leképezés speciális Carthéodory-féle külső mérték, és a definíció szerint $\mathfrak{B}(T, \mu) = \mathfrak{M}(T, \mu^*)$, ezért $\mathfrak{B}(T, \mu)$ olyan σ-algebra T felett, hogy a $\mathfrak{B}(T, \mu) \to \overline{\mathbb{R}}_+$; $H \mapsto \mu^*(H)$ leképezés σ-additív (30.2.3.).

Azt kell még igazolni, hogy a T minden Borel-halmaza eleme $\mathfrak{B}(T, \mu)$-nek. Ehhez elég azt megmutatni, hogy minden $\Omega \subseteq T$ nyílt halmaz μ-mérhető. Legyen tehát $\Omega \subseteq T$ nyílt halmaz és $X \subseteq T$ tetszőleges halmaz. Ekkor minden $\Omega' \subseteq T$ nyílt halmazra, $X \subseteq \Omega'$ esetén

$$\mu^*(X \cap \Omega) + \mu^*(X \setminus \Omega) \leq \mu^*(\Omega' \cap \Omega) + \mu^*(\Omega' \setminus \Omega) =$$
$$= \int^* \chi_{\Omega' \cap \Omega} d\mu + \int^* \chi_{\Omega'} - \chi_{\Omega' \cap \Omega} \; d\mu,$$

és $\chi_{\Omega' \cap \Omega}$ alulról félig folytonos függvény, ezért a szubtraktivitás-formula szerint a fenti egyenlőtlenség jobb oldala egyenlő a $\int^* \chi_{\Omega'} d\mu =: \mu^*(\Omega')$ számmal. A μ^* külső regularitása alapján ez azt jelenti, hogy

$$\mu^*(X \cap \Omega) + \mu^*(X \setminus \Omega) \leq \inf_{\substack{\Omega' \subseteq T \text{ nyílt} \\ X \subseteq \Omega'}} \mu^*(\Omega') = \mu^*(X),$$

amiből már következik a $\mu^*(X \cap \Omega) + \mu^*(X \setminus \Omega) = \mu^*(X)$ egyenlőség. ■

9.6.4. Állítás. *Legyen μ pozitív Radon-mérték a T lokálisan kompakt tér felett. Ha a $H \subseteq T$ halmaz μ-mérhető és μ-moderáns, akkor*

$$\mu^*(H) = \sup_{\substack{K \subseteq T \text{ kompakt} \\ K \subseteq H}} \mu^*(K),$$

amit úgy fejezünk ki, hogy a T minden μ-mérhető és μ-moderáns részhalmaza **belülről μ^*-reguláris**.

Bizonyítás. (I) Először tegyük fel, hogy a $H \subseteq T$ halmaz μ-mérhető és $\mu^*(H) < +\infty$. A μ^* külső regularitása folytán létezik a T nyílt részhalmazainak olyan $(\Omega_n)_{n\in\mathbb{N}}$ monoton fogyó sorozata, hogy minden $\mathbb{N} \ni n$-re $H \subseteq \Omega_n$, $\mu^*(\Omega_n) < +\infty$ és $\mu^*(H) = \inf\limits_{n\in\mathbb{N}} \mu^*(\Omega_n)$. A H halmaz μ-mérhető, ezért minden $\mathbb{N} \ni n$-re

$$\mu^*(\Omega_n) = \mu^*(\Omega_n \cap H) + \mu^*(\Omega_n \setminus H) = \mu^*(H) + \mu^*(\Omega_n \setminus H),$$

tehát $\mu^*(\Omega_n \setminus H) = \mu^*(\Omega_n) - \mu^*(H)$, vagyis $\lim\limits_{n\to\infty} \mu^*(\Omega_n \setminus H) = 0$. Ez azt jelenti, hogy ha $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$, akkor létezik olyan $N \in \mathbb{N}$, hogy minden $n > N$ természetes számra $\int^* |\chi_{\Omega_n} - \chi_H| d\mu < \varepsilon$.

Másfelől, ha $\Omega \subseteq T$ nyílt halmaz és $\mu^*(\Omega) < +\infty$, akkor minden $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ esetén létezik olyan $\varphi \in \mathscr{K}(T;\mathbb{R})$, amelyre $0 \leq \varphi \leq \chi_\Omega$ és $\mu^*(\Omega) := \int^* \chi_\Omega d\mu < \mu(\varphi) + \varepsilon$, tehát a szubtraktivitás-formula alapján

$$\int^* |\chi_\Omega - \varphi| d\mu = \int^* (\chi_\Omega - \varphi)\, d\mu = \int^* \chi_\Omega d\mu - \int^* \varphi d\mu = \int^* \chi_\Omega d\mu - \mu(\varphi) < \varepsilon.$$

Tehát, ha $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ tetszőleges, akkor van olyan $n \in \mathbb{N}$, hogy $\int^* |\chi_{\Omega_n} - \chi_H| d\mu < \dfrac{\varepsilon}{2}$, és az Ω_n nyílt halmazhoz található olyan $\varphi \in \mathscr{K}(T;\mathbb{R})$, hogy $0 \leq \varphi \leq \chi_{\Omega_n}$ és $\int^* |\chi_{\Omega_n} - \varphi| d\mu < \dfrac{\varepsilon}{2}$; világos, hogy ekkor $\int^* |\chi_H - \varphi| d\mu < \varepsilon$.

Legyen most $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ rögzített, és $\varphi \in \mathscr{K}(T;\mathbb{R})$ olyan, hogy $\varphi \geq 0$ és fennáll a $\int^* |\chi_H - \varphi| d\mu < \varepsilon$ egyenlőtlenség. A felső integrál definíciója alapján létezik olyan $h \in \mathscr{I}_+(T)$, hogy $|\chi_H - \varphi| \leq h$ és $\int^* h\, d\mu < \varepsilon$. A $|\chi_H - \varphi|$ függvény korlátos, ezért feltehető, hogy h mindenütt véges (sőt, akár korlátos is). Világos, hogy $(\varphi - h)^+ \leq \chi_H \leq \varphi + h \leq (\varphi - h)^+ + 2h$. Ezért

$$\mu^*(H) \leq \int^* (\varphi - h)^+ d\mu + 2\int^* h\, d\mu < \int^* (\varphi - h)^+ d\mu + 2\varepsilon,$$

továbbá $(\varphi - h)^+$ pozitív *felülről félig folytonos* függvény. Minden $\delta \in \mathbb{R}^+$ esetén legyen

$$K_\delta := [\delta \leq (\varphi - h)^+],$$

ami kompakt részhalmaza H-nak, mert K_δ zárt a $(\varphi - h)^+$ függvény felülről félig folytonossága miatt, továbbá $K_\delta \subseteq [\varphi \neq 0]$ és $[\varphi \neq 0]$ relatív kompakt halmaz. Ha $\delta \in \mathbb{R}^+$, akkor

$$(\varphi - h)^+ \leq \chi_{K_\delta} + \delta.\chi_{H\setminus K_\delta} \leq \chi_{K_\delta} + \delta.\chi_H,$$

ezért $\int^* (\varphi - h)^+ d\mu \leq \mu^*(K_\delta) + \delta\mu^*(H)$. Ez azt jelenti, hogy minden $\mathbb{R}^+ \ni \delta$-ra

$$\mu^*(H) < \mu^*(K_\delta) + \delta\mu^*(H) + 2\varepsilon,$$

tehát, ha a δ számot úgy választjuk meg, hogy $\delta\mu^*(H) < \varepsilon$ legyen, akkor

$$\mu^*(H) < \mu^*(K_\delta) + 3\varepsilon \leq \sup_{\substack{K\subseteq T \text{ kompakt} \\ K\subseteq H}} \mu^*(K) + 3\varepsilon.$$

Az ε tetszőlegessége miatt ebből $\mu^*(H) \leq \sup\limits_{\substack{K\subseteq T \text{ kompakt} \\ K\subseteq H}} \mu^*(K)$ következik.

(II) Legyen most $H \subseteq T$ tetszőleges μ-mérhető és μ-moderáns halmaz. Legyen $(H_n)_{n\in\mathbb{N}}$ a T μ-mérhető részhalmazainak olyan monoton növő sorozata, hogy minden $\mathbb{N} \ni n$-re $\mu^*(H_n) < +\infty$ és $H \subseteq \bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} H_n$. Ekkor a $(H \cap H_n)_{n\in\mathbb{N}}$ halmazsorozat is monoton növő és $H = \bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} (H \cap H_n)$, továbbá minden $n \in \mathbb{N}$ esetén a $H \cap H_n$ halmaz μ-mérhető és $\mu^*(H \cap H_n) \leq \mu^*(H_n) < +\infty$. Ezért a μ^* külső mérték monoton σ-folytonossága és az (I) alapján

$$\mu^*(H) = \sup_{n\in\mathbb{N}} \mu^*(H \cap H_n) = \sup_{n\in\mathbb{N}} \sup_{\substack{K\subseteq T \text{ kompakt} \\ K\subseteq H\cap H_n}} \mu^*(K) \quad \leq$$

$$\leq \sup_{\substack{K\subseteq T \text{ kompakt} \\ K\subseteq H}} \mu^*(K) \leq \mu^*(H),$$

amit bizonyítani kellett. ■

9.7. A mértékelméleti Riesz-féle reprezentációs-tétel

9.7.1. Lemma. *Legyen μ pozitív Radon-mérték a T lokálisan kompakt tér felett. Ha $(H_i)_{i\in I}$ olyan diszjunkt véges halmazrendszer, hogy minden $I \ni i$-re $H_i \subseteq T$ μ-mérhető halmaz és $\mu^*(H_i) < +\infty$, akkor minden $\mathbb{R}_+^I \ni (c_i)_{i\in I}$-re*

$$\int^* \left(\sum_{i\in I} c_i \chi_{H_i} \right) d\mu = \sum_{i\in I} c_i \mu^*(H_i).$$

Bizonyítás. Természetesen feltehető, hogy $I \neq \emptyset$ és a $(c_i)_{i\in I} \in \mathbb{R}_+^I$ rendszer olyan, hogy minden $I \ni i$-re $c_i > 0$.

(I) Először arra az esetre bizonyítunk, amikor minden $i \in I$ esetén a H_i halmaz *kompakt*. Ekkor vehetünk olyan $(\Omega_i)_{i\in I}$ diszjunkt nyílt halmazrendszert, hogy minden $I \ni i$-re $H_i \subseteq \Omega_i$. Legyen $\varepsilon \in]0, 1[$ tetszőleges valós szám és $h \in \mathscr{I}_+(T)$ olyan, hogy $\sum\limits_{i\in I} c_i \cdot \chi_{H_i} \leq h$. Ekkor $i \in I$ esetén $H_i \subseteq [c_i \leq h] \subseteq \left[1 - \varepsilon < \dfrac{h}{c_i}\right]$ és a $\left[1 - \varepsilon < \dfrac{h}{c_i}\right]$ halmaz nyílt, mert h alulról félig folytonos. Minden $I \ni i$-re legyen $\varphi_i \in \mathscr{K}(T; \mathbb{R})$ olyan, hogy $0 \leq \varphi_i \leq 1$ és

$\text{supp}(\varphi_i) \subseteq \Omega_i \cap \quad 1 - \varepsilon < \dfrac{h}{c_i}$ és $H_i \subseteq [\varphi_i = 1]$. Ekkor $\sum\limits_{i \in I} c_i . \chi_{H_i} \leq \dfrac{h}{1-\varepsilon}$ és $i \in I$ esetén $\chi_{H_i} \leq \varphi_i$, tehát

$$\sum_{i\in I} c_i \mu^*(H_i) \leq \sum_{i\in I} c_i \int^* \varphi_i d\mu = \sum_{i\in I} c_i \mu(\varphi_i) = \mu\left(\sum_{i\in I} c_i . \varphi_i\right) \leq$$

$$\leq \int^* \frac{h}{1-\varepsilon} d\mu = \frac{\displaystyle\int^* h \, d\mu}{1-\varepsilon},$$

amiből ε-nal 0-hoz tartva $\sum\limits_{i\in I} c_i \mu^*(H_i) \leq \displaystyle\int^* h \, d\mu$ következik. Ez az egyenlőtlenség minden olyan $\mathscr{I}_+(T) \ni h$-ra igaz, amelyre $\sum\limits_{i\in I} c_i . \chi_{H_i} \leq h$, ezért

$$\sum_{i\in I} c_i \mu^*(H_i) \leq \int^* \left(\sum_{i\in I} c_i . \chi_{H_i}\right) d\mu.$$

A fordított egyenlőtlenség a felső integrál véges szubadditivitása és a külső mérték definíciója alapján nyilvánvaló.

(II) Áttérve az általános esetre, legyen $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ tetszőlges. Minden $I \ni i$-re az előző állítás szerint a H_i halmaz belülről μ^*-reguláris, tehát van olyan $K_i \subseteq H_i$ kompakt halmaz, hogy $\mu^*(H_i) < \mu^*(K_i) + \varepsilon$. Ekkor a $(K_i)_{i\in I}$ diszjunkt kompakt halmazrendszerre alkalmazva az (I) állítást kapjuk, hogy

$$\sum_{i\in I} c_i \mu^*(H_i) \leq \sum_{i\in I} c_i \mu^*(K_i) + \left(\sum_{i\in I} c_i\right) \varepsilon = \int^* \left(\sum_{i\in I} c_i . \chi_{K_i}\right) d\mu + \left(\sum_{i\in I} c_i\right) \varepsilon \leq$$

$$\leq \int^* \left(\sum_{i\in I} c_i . \chi_{Hi}\right) d\mu + \left(\sum_{i\in I} c_i\right) \varepsilon,$$

amiből ε-nal 0-hoz tartva $\sum\limits_{i\in I} c_i \mu^*(H_i) \leq \displaystyle\int^* \left(\sum_{i\in I} c_i . \chi_{H_i}\right) d\mu$ adódik. ■

Most megadjuk a mértékelméleti Riesz-féle reprezentációs-tétel egzisztencia-részének egyszerű bizonyítását. Emlékeztetünk arra, hogy $\mathscr{B}_0(T)$ jelöli a T Hausdorff-tér Baire-féle σ-gyűrűjét, tehát a T kompakt G_δ halmazai által generált σ-gyűrűt (30.1.1.). Továbbá, $\mathfrak{K}_0(T)$ fogja jelölni a T Hausdorff-tér relatív kompakt Baire-halmazainak δ-gyűrűjét.

9.7.2. Tétel. (Riesz-féle reprezentációs-tétel pozitív Radon-mértékekre) *Legyen μ pozitív Radon-mérték a T lokálisan kompakt tér felett. Létezik olyan $\mathfrak{m}$:*

$\mathfrak{K}_0(T) \to \mathbb{R}_+$ *σ-additív halmazfüggvény, hogy* $\mathscr{K}(T;\mathbb{R}) \subseteq \mathscr{L}^1_{\mathbb{R}}(T,\mathfrak{K}_0(T),\mathfrak{m})$ *és minden* $\varphi \in \mathscr{K}(T;\mathbb{R})$ *esetén*

$$\mu(\varphi) = \int\limits_T \varphi \; d\mathfrak{m}.$$

Bizonyítás. Tekintsük a μ által generált $\mu^* : \mathscr{P}(T) \to \overline{\mathbb{R}}_+$ külső mértéket, és legyen $\mathfrak{m} := \mu^*|_{\mathfrak{K}_0(T)}$. Tudjuk, hogy $\mathfrak{K}_0(T) \subseteq \mathscr{B}_0(T) \subseteq \mathfrak{B}(T,\mu)$ és μ^* a $\mathfrak{B}(T,\mu)$ σ-algebra felett σ-additív, ezért az $\mathfrak{m} : \mathfrak{K}_0(T) \to \mathbb{R}_+$ halmazfüggvény σ-additív. Továbbá, minden $H \subseteq T$ relatív kompakt Baire-halmazra $\mathfrak{m}(H) := \mu^*(H) < +\infty$, mert van olyan $\varphi \in \mathscr{K}(T;\mathbb{R})$, hogy $\varphi \geq 0$ és $\chi_{_H} \leq \varphi$, így $\mu^*(H) := \int^* \chi_{_H} d\mu \leq \mu(\varphi) < +\infty$.

Legyen $\varphi \in \mathscr{K}(T;\mathbb{R})$ tetszőleges olyan függvény, amelyre $\varphi \geq 0$. Minden $n \in \mathbb{N}^+$ esetén legyen

$$\varphi_n := \sum_{k=1}^{n2^n-1} \frac{k}{2^n} \cdot \chi_{\overset{-1}{\varphi}\langle [k\cdot 2^{-n},(k+1)\cdot 2^{-n}[\rangle}.$$

A $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}^+}$ rendszer monoton növő és $\varphi = \sup\limits_{n\in\mathbb{N}^+} \varphi_n$. Továbbá, minden $n \in \mathbb{N}^+$ esetén $\varphi_n \in \mathscr{L}^1_{\mathbb{R}}(T,\mathfrak{K}_0(T),\mathfrak{m})$, mert ha $a \in \mathbb{R}^+$ és $b \in [a,\to[$, akkor $\overset{-1}{\varphi}\langle [a,b[\rangle$ relatív kompakt Baire-halmaz (30.3.4.), így még $\varphi_n \in \mathscr{E}_+(T,\mathfrak{K}_0(T))$ is igaz. A Levi-tétel alapján $\varphi \in \mathscr{L}^1_{\mathbb{R}}(T,\mathfrak{K}_0(T),\mathfrak{m})$ pontosan akkor teljesül, ha $\sup\limits_{n\in\mathbb{N}^+} \int \varphi_n d\mathfrak{m} < +\infty$. Azonkívül, ha $\varphi \in \mathscr{L}^1_{\mathbb{R}}(T,\mathfrak{K}_0(T),\mathfrak{m})$, akkor $\int \varphi \; d\mathfrak{m} = \sup\limits_{n\in\mathbb{N}^+} \int \varphi_n d\mathfrak{m}$. A mérték által generált elemi integrál definíciója és az előző lemma szerint minden $n \in \mathbb{N}^+$ esetén

$$\int \varphi_n \; d\mathfrak{m} = \sum_{k=1}^{n2^n-1} \frac{k}{2^n} \mathfrak{m}\left(\overset{-1}{\varphi}\left\langle [k\cdot 2^{-n},(k+1)\cdot 2^{-n}[\right\rangle \right) :=$$

$$:= \sum_{k=1}^{n2^n-1} \frac{k}{2^n} \mu^*\left(\overset{-1}{\varphi}\left\langle [k\cdot 2^{-n},(k+1)\cdot 2^{-n}[\right\rangle \right) =$$

$$= \int^* \left(\sum_{k=1}^{n2^n-1} \frac{k}{2^n} \cdot \chi_{\overset{-1}{\varphi}\langle [k\cdot 2^{-n},(k+1)\cdot 2^{-n}[\rangle} \right) d\mu = \int^* \varphi_n \; d\mu.$$

A μ által generált felső integrál monoton σ-folytonossága következtében

$$\sup_{n\in\mathbb{N}^+} \int^* \varphi_n \; d\mu = \int^* \varphi \; d\mu = \mu(\varphi) < +\infty,$$

ezért $\varphi_n \in \mathscr{L}^1_{\mathbb{R}}(T,\mathfrak{K}_0(T),\mathfrak{m})$ és $\mu(\varphi) = \sup\limits_{n\in\mathbb{N}^+} \int^* \varphi_n \; d\mu = \sup\limits_{n\in\mathbb{N}^+} \int \varphi_n \; d\mathfrak{m} = \int \varphi \; d\mathfrak{m}$. ■

Megjegyezzük, hogy az előző tétel követelményeinek eleget tevő $\mathfrak{K}_0(T) \to \mathbb{R}_+$

mérték *egyértelműen* van meghatározva; ez a mértékelméleti Riesz-féle reprezentációs-tétel *unicitás része.* Ennek bizonyításához alapos vizsgálat alá kellene vetni a lokálisan kompakt terek Baire-féle σ-gyűrűjét és a Baire-mértékek regularitásának kérdését. Kiderül, hogy ha T lokálisan kompakt tér és $\mathfrak{m} : \mathscr{B}_0(T) \to \overline{\mathbb{R}}_+$ olyan σ-additív függvény, hogy minden $K \subseteq T$ kompakt G_δ-halmazra $\mathfrak{m}(K) < +\infty$ (vagyis $\mathfrak{m}$ *Baire-mérték* T felett), akkor minden $H \subseteq T$ halmazra

$$\mathfrak{m}(H) = \inf_{\substack{\Omega \subseteq T \text{ nyílt } F_\sigma\text{-halmaz} \\ H \subseteq \Omega}} \mathfrak{m}(\Omega) = \sup_{\substack{K \subseteq T \text{ kompakt } G_\delta\text{-halmaz} \\ K \subseteq H}} \mathfrak{m}(K)$$

teljesül: ez a *Baire-mértékek regularitásának tétele.* Teljes bizonyítás található például a [14] könyvben. A 24.5. pontban, az absztrakt spektráltétel bizonyításában hivatkozni fogunk a mértékelméleti Riesz-féle reprezentációs-tétel imént bizonyított egzisztencia részére; ugyanakkor az egyértelműséget *nem fogjuk kihasználni.* Azonban a nem metrizálható kompakt konvex halmazokra vonatkozó Choquet-tétel (12.7.3.) bizonyításában felhasználjuk az unicitást is. Szükségünk lesz viszont a spektrális C^*-algebrák elméletében (24.5.) a Riesz-féle reprezentációs-tétel következő változatára.

9.7.3. Tétel. (Riesz-féle reprezentációs-tétel korlátos pozitív Radon-mértékekre) *Legyen μ olyan pozitív Radon-mérték a T lokálisan kompakt tér felett, amely folytonos a $\mathscr{K}(T;\mathbb{R})$ feletti sup-norma szerint. Létezik olyan*

$$\mathfrak{m} : \mathscr{B}_0(T) \to \mathbb{R}_+$$

korlátos σ-additív halmazfüggvény, hogy $\overline{\mathscr{K}}(T;\mathbb{R}) \subseteq \mathscr{L}^1_{\mathbb{R}}(T, \mathscr{B}_0(T), \mathfrak{m})$ és minden $\varphi \in \overline{\mathscr{K}}(T;\mathbb{R})$ esetén

$$\widetilde{\mu}(\varphi) = \int_T \varphi \, d\mathfrak{m},$$

ahol $\overline{\mathscr{K}}(T;\mathbb{R})$ a $T \to \mathbb{R}$ végtelenben eltűnő folytonos függvények tere, és $\widetilde{\mu}$ jelöli a μ funkcionál sup-normában folytonos kiterjesztését $\mathscr{K}(T;\mathbb{R})$-ről $\overline{\mathscr{K}}(T;\mathbb{R})$-re.

Bizonyítás. A μ funkcionál sup-norma szerinti folytonossága miatt

$$C := \sup_{\substack{\varphi \in \mathscr{K}(T;\mathbb{R}) \\ 0 \leq \varphi \leq 1}} \mu(\varphi) \leq \sup_{\substack{\varphi \in \mathscr{K}(T;\mathbb{R}) \\ \|\|\varphi\|\| \leq 1}} |\mu(\varphi)| =: \|\mu\| < +\infty.$$

Nyilvánvaló, hogy $\sup\limits_{\substack{\varphi \in \mathscr{K}(T;\mathbb{R}) \\ 0 \leq \varphi \leq 1}} \varphi = 1$, tehát

$$\mu^*(T) = \int^* 1 \, d\mu = \sup_{\substack{\varphi \in \mathscr{K}(T;\mathbb{R}) \\ 0 \leq \varphi \leq 1}} \mu(\varphi) = C < +\infty.$$

Ebből következik, hogy a μ által generált $\mu^* : \mathscr{P}(T) \to \overline{\mathbb{R}}_+$ külső mérték *véges*, vagyis minden $H \subseteq T$ halmazra $\mu^*(H) < +\infty$, hiszen $\chi_H \leq 1$ és μ^* monoton növő. Sőt ebből még az is látható, hogy μ^* *korlátos* függvény, mert $\sup_{H \in \mathscr{P}(T)} \mu^*(H) \leq \mu^*(T) < +\infty$.

Értelmezzük az $\mathfrak{m} := \mu^*|_{\mathscr{B}_0(T)} : \mathscr{B}_0(T) \to \mathbb{R}_+$ függvényt. Tudjuk, hogy $\mathscr{B}_0(T) \subseteq \mathfrak{B}(T, \mu)$ és μ^* a $\mathfrak{B}(T, \mu)$ σ-algebra felett σ-additív, ezért az $\mathfrak{m} : \mathscr{B}_0(T) \to \mathbb{R}_+$ halmazfüggvény σ-additív és korlátos.

Az előző tétel bizonyítását követve egyszerűen belátható a $\overline{\mathscr{K}}(T; \mathbb{R}) \subseteq \mathscr{L}^1_{\mathbb{R}}(T, \mathscr{B}_0(T), \mathfrak{m})$ összefüggés, és az, hogy minden $\varphi \in \mathscr{K}(T; \mathbb{R})$ esetén

$$\mu(\varphi) = \int \varphi \; d\mathfrak{m}.$$

Legyen $\varphi \in \overline{\mathscr{K}}(T; \mathbb{R})$ olyan, hogy $\varphi \geq 0$. Létezik olyan $(\varphi_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sorozat, hogy minden $\mathbb{N} \ni n$-re $\varphi_n \in \mathscr{K}(T; \mathbb{R})$, $\varphi_n \leq \varphi_{n+1}$ és $\varphi = \sup_{n \in \mathbb{N}} \varphi_n$. A Levi-tétel alapján $\varphi \in \mathscr{L}^1_{\mathbb{R}}(T, \mathscr{B}_0(T), \mathfrak{m})$ pontosan akkor teljesül, ha $\sup_{n \in \mathbb{N}} \int \varphi_n d\mathfrak{m} < +\infty$. Ha $n \in \mathbb{N}$, akkor $\varphi_n \leq \varphi \leq |||\varphi|||$, ezért $\sup_{n \in \mathbb{N}} \int \varphi_n d\mathfrak{m} \leq |||\varphi\,|||\; \mu^*(T) < +\infty$. Tehát $\varphi \in \mathscr{L}^1_{\mathbb{R}}(T, \mathscr{B}_0(T), \mathfrak{m})$ és $\int \varphi \; d\mathfrak{m} = \sup_{n \in \mathbb{N}} \int \varphi_n d\mathfrak{m} = \sup_{n \in \mathbb{N}} \mu(\varphi_n)$. Ugyanakkor a $(\varphi_n)_{n \in \mathbb{N}}$ függvénysorozat egyenletesen (tehát a sup-norma szerint) konvergál φ-hez a T halmazon, így

$$\widetilde{\mu}(\varphi) = \lim_{n \to \infty} \mu(\varphi_n) = \sup_{n \in \mathbb{N}} \mu(\varphi_n) = \int \varphi \; d\mathfrak{m}. \blacksquare$$

10. fejezet

Valószínűségi Radon-mérték koncentráltsága és baricentruma

10.1. Pozitív Radon-mérték tartója

10.1.1. Állítás. *Ha μ pozitív Radon-mérték a T lokálisan kompakt tér felett, akkor létezik tartalmazás tekintében legnagyobb nyílt μ-nullahalmaz T-ben.*

Bizonyítás. Ha $(\Omega_i)_{i\in I}$ nyílt μ-nullahalmazok tetszőleges rendszere, akkor $\bigcup\limits_{i\in I} \Omega_i$ is nyílt μ-nullahalmaz, mert minden $I \ni i$-re $\chi_{\Omega_i} : T \to \mathbb{R}$ alulról félig folytonos függvény és

$$\mu^*\left(\bigcup_{i\in I} \Omega_i\right) := \int^* \chi_{\bigcup\limits_{i\in I} \Omega_i} d\mu \le \int^* \sum_{i\in I} \chi_{\Omega_i}\, d\mu =$$

$$= \sum_{i\in I} \int^* \chi_{\Omega_i}\, d\mu = \sum_{i\in I} \mu_i^*(\Omega_i) = 0,$$

hiszen a μ által generált felső integrál teljesen additív a pozitív alulról félig folytonos függvények halmazán. Ezért a T *összes* nyílt μ-nullahalmazának az uniója a tartalmazás tekintetében legnagyobb nyílt μ-nullahalmaz T-ben. ■

10.1.2. Definíció. *Ha μ pozitív Radon-mérték a T lokálisan kompakt tér felett, akkor* $\mathrm{supp}(\mu)$ *jelöli a T-nek azt a zárt részhalmazát, amelyre $T \setminus \mathrm{supp}(\mu)$ a tartalmazás tekintetében legnagyobb nyílt μ-nullahalmaz T-ben; a* $\mathrm{supp}(\mu)$ *halmazt a μ* **tartójának** *nevezzük.*

Láthatóan pozitív Radon-mérték tartóját a Radon-mérték által generált külső mérték segítségével értelmeztük. Azonban a tartó közvetlenül is jellemezhető, amit a következő állítás mutat.

10.1.3. Állítás. *Legyen μ pozitív Radon-mérték a T lokálisan kompakt tér felett. Az $\Omega \subseteq T$ nyílt halmazra $\mu^*(\Omega) = 0$ pontosan akkor teljesül, ha minden $\varphi \in \mathscr{K}(T;\mathbb{R})$ függvényre:* $\mathrm{supp}(\varphi) \subseteq \Omega$ *esetén* $\mu(\varphi) = 0$.

Bizonyítás. Ha $\mu^*(\Omega) = 0$ és $\varphi \in \mathscr{K}(T;\mathbb{R})$ olyan, hogy $\mathrm{supp}(\varphi) \subseteq \Omega$, akkor $|\varphi| \leq |||\varphi|||\chi_\Omega$, ezért

$$|\mu(\varphi)| \leq \mu(|\varphi|) = \int^* |\varphi|\, d\mu \leq \int^* |||\varphi\,|||\, \chi_\Omega\, d\mu = |||\varphi\,|||\, \mu^*(\Omega) = 0.$$

Megfordítva, tegyük fel, hogy minden $\varphi \in \mathscr{K}(T;\mathbb{R})$ esetén, ha $\varphi \geq 0$ és $\mathrm{supp}(\varphi) \subseteq \Omega$, akkor $\mu(\varphi) = 0$. A $\chi_\Omega : T \to \mathbb{R}$ függvény alulról félig folytonos, ezért

$$\mu^*(\Omega) := \int^* \chi_\Omega d\mu = \sup_{\substack{\varphi\in\mathscr{K}(T;\mathbb{R})\\ 0\leq\varphi\leq\chi_\Omega}} \mu(\varphi),$$

így a $\mu^*(\Omega) = 0$ egyenlőség bizonyításához elegendő azt igazolni, hogy minden $\varphi \in \mathscr{K}(T;\mathbb{R})$ és $0 \leq \varphi \leq \chi_\Omega$ esetén $\mu(\varphi) = 0$.

Legyen tehát $\varphi \in \mathscr{K}(T;\mathbb{R})$ olyan, hogy $0 \leq \varphi \leq \chi_\Omega$, továbbá legyen $(\varepsilon_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tetszőleges monoton fogyó zérussorozat $\mathbb{R}^+$-ban. Ekkor a $([\varphi \geq \varepsilon_n])_{n\in\mathbb{N}}$ halmazsorozat a T kompakt halmazainak monoton növő sorozata, és minden $n \in \mathbb{N}$ esetén $[\varphi \geq \varepsilon_n] \subseteq [\varphi \neq 0] \subseteq \Omega$, így létezik olyan $(\psi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ monoton növő sorozat $\mathscr{K}(T;\mathbb{R})$-ben, hogy minden $\mathbb{N} \ni n$-re $0 \leq \psi_n \leq 1$, $[\varphi \geq \varepsilon_n] \subseteq [\psi_n = 1]$ és $\mathrm{supp}(\psi_n) \subseteq \Omega$. Ekkor a $(\varphi\psi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ függvénysorozat monoton növő és $\sup_{n\in\mathbb{N}} \varphi\psi_n = \varphi \in \mathscr{K}(T;\mathbb{R})$. Ezért a pozitív Radon-mértékek monoton folytonossága alapján $\mu(\varphi) = \sup_{n\in\mathbb{N}} \mu(\varphi\psi_n)$, így $\mu(\varphi) = 0$, mert minden $n \in \mathbb{N}$ esetén $\mathrm{supp}(\varphi\psi_n) \subseteq \mathrm{supp}(\psi_n) \subseteq \Omega$, tehát $\mu(\varphi\psi_n) = 0$. ■

10.1.4. Állítás. *Legyen μ pozitív Radon-mérték a T lokálisan kompakt tér felett. Ha $\varphi, \psi \in \mathscr{K}(T;\mathbb{R})$ és* $\mathrm{supp}(\mu) \subseteq [\varphi = \psi]$*, akkor $\mu(\varphi) = \mu(\psi)$.*

Bizonyítás. Elég azt megmutatni, hogy ha $\varphi \in \mathscr{K}(T;\mathbb{R})$ és $\mathrm{supp}(\mu) \subseteq [\varphi = 0]$, akkor $\mu(\varphi) = 0$. Ez valóban így van, mert ha $\varphi \in \mathscr{K}(T;\mathbb{R})$ és $\mathrm{supp}(\mu) \subseteq [\varphi = 0]$, akkor $|\varphi| \leq |||\varphi\,|||\, .\chi_{T\setminus\mathrm{supp}(\varphi)}$, ezért

$$|\mu(\varphi)| \leq \mu(|\varphi|) = \int^* |\varphi| d\mu \leq |||\varphi\,|||\, \mu^*(T \setminus \mathrm{supp}(\mu)) = 0. ■$$

10.2. Pozitív Radon-mérték koncentráltsága

10.2.1. Definíció. *Legyen μ pozitív Radon-mérték a T lokálisan kompakt tér felett. Azt mondjuk, hogy a μ pozitív Radon-mérték*

– **topologikusan koncentrált** *a $H \subseteq T$ halmazon, ha* $\mathrm{supp}(\mu) \subseteq H$,

– **koncentrált** *a $H \subseteq T$ halmazon, ha $T \setminus H$ μ-nullahalmaz, vagyis $\mu^*(T \setminus H)$=0.*

Természetesen az adott halmazon való topologikus koncentráltságból következik a halmazon való koncentráltság, és ennek megfordítása általában nem igaz. A következő állítás megvilágítja azt, hogy az előző definícióban értelmezett második tulajdonságot miért nevezzük "koncentráltságnak".

10.2.2. Állítás. *Legyen μ pozitív Radon-mérték a T lokálisan kompakt tér felett. A μ pontosan akkor koncentrált a $H \subseteq T$ halmazon, ha minden $X \subseteq T$ halmazra*

$$\mu^*(X) = \mu^*(X \cap H).$$

Bizonyítás. Ha ez az egyenlőség igaz minden $X \subseteq T$ halmazra, akkor $T \setminus H$-ra is teljesül, tehát $\mu^*(T \setminus H) = \mu^*((T \setminus H) \cap H) = \mu^*(\emptyset) = 0$, így μ a H halmazon koncentrált.

Megfordítva, ha μ a H halmazon koncentrált és $X \subseteq T$, akkor a külső mérték véges szubadditivitása folytán

$$\mu^*(X) \leq \mu^*(X \setminus H) + \mu^*(X \cap H) = \mu^*(X \cap H) \leq \mu^*(X),$$

mert $\mu^*(X \setminus H) \leq \mu^*(T \setminus H) = 0$. Ezért $\mu^*(X) = \mu^*(X \cap H)$. ■

Nyilvánvaló, hogy ha μ pozitív Radon-mérték a T lokálisan kompakt tér felett, és $H \subseteq T$, akkor μ koncentráltsága a H halmazon ekvivalens a

$$(\forall\ X \in \mathscr{P}(T)) : \ (X \cap H = \emptyset \ \Rightarrow \ \mu^*(X) = 0)$$

állítással. Ebből látszik, hogy a koncentráltság fogalmának természetes gyengítéseit származtathatjuk a következő definícióval.

10.2.3. Definíció. *Legyen T lokálisan kompakt tér és $\mathfrak{S} \subseteq \mathscr{P}(T)$ tetszőleges halmaz. Azt mondjuk, hogy a T feletti μ pozitív Radon-mérték* **$\mathfrak{S}$-koncentrált** *a $H \subseteq T$ halmazon, ha*

$$(\forall\ X \in \mathfrak{S}) : \ (X \cap H = \emptyset \ \Rightarrow \ \mu^*(X) = 0).$$

Természetesen a μ pozitív Radon-mérték pontosan akkor koncentrált a H halmazon (az eredeti definíció szerint), ha $\mathscr{P}(T)$-koncentrált a H halmazon. Nyilvánvaló, hogy a fenti definíció csak akkor értékes, ha módunkban áll kijelölni lokálisan kompakt térben topológiai vagy mértékelméleti értelemben kitüntetett nemtriviális részhalmazokat $\mathscr{P}(T)$-ben. Ha T lokálisan kompakt tér, akkor tekinthetjük

– a $\mathscr{B}(T)$ Borel-féle σ-algebrát,

– a $\mathscr{B}_0(T)$ Baire-féle σ-gyűrűt,

– a kompakt halmazok $\mathfrak{K}(T)$ halmazát,

– a kompakt G_δ halmazok $\mathfrak{K}_0(T)$ halmazát,

amelyek *topológiai* szempontból kitüntetettek, és ha μ pozitív Radon-mérték T felett,

akkor tekinthetjük
– a μ-mérhető halmazok $\mathfrak{B}(T, \mu)$ σ-algebráját,
– a μ-moderáns és μ-mérhető halmazok σ-gyűrűjét,
– a μ-moderáns Borel-halmazok σ-gyűrűjét,
amelyek *topologikus mértékelméleti* szempontból kitüntetettek.

10.3. Kompakt konvex halmaz feletti valószínűségi Radon-mérték baricentruma

10.3.1. Definíció. *A T kompakt tér feletti μ pozitív Radon-mértéket* **valószínűségi Radon-mértéknek** *nevezzük, ha $\mu(1_T) = 1$, ahol 1_T a T halmazon értelmezett, 1 értékű konstansfüggvény. A T kompakt tér feletti valószínűségi Radon-mértékek halmazát $\mathscr{M}_+^1(T)$ fogja jelölni.*

Könnyen látható, hogy ha T kompakt tér, akkor minden $t \in T$ esetén az

$$\varepsilon_t : \mathscr{C}(T; \mathbb{R}) \to \mathbb{R}; \quad \varphi \mapsto \varphi(t)$$

leképezés valószínűségi Radon-mérték T felett; ezt nevezzük a t pontba koncentrált *egypontmértéknek*.

A következő mérték-approximációs tételt fogjuk felhasználni annak bizonyítására, hogy kompakt konvex halmaz feletti valószínűségi Radon-mértéknek *létezik* baricentruma.

10.3.2. Tétel. *Legyen μ pozitív Radon-mérték a T kompakt tér felett. Létezik olyan $(\mu_i)_{i \in I}$ általánosított sorozat, amelyre teljesülnek a következők.*

a) *Minden $i \in I$ esetén μ_i olyan pozitív Radon-mérték T felett, amely előáll véges sok egypontmérték pozitív együtthatós lineáris kombinációjaként, és* $\operatorname{supp}(\mu_i) \subseteq \operatorname{supp}(\mu)$, *valamint $\mu_i(1) = \mu(1)$.*

b) *Fennáll a $\mu = \lim\limits_{i,\ I} \mu_i$ egyenlőség, ahol a határértéket a $\sigma(\mathscr{C}(T; \mathbb{R})', \mathscr{C}(T; \mathbb{R}))$ topológia szerint kell venni (vagyis minden $\varphi \in \mathscr{C}(T; \mathbb{R})$ esetén $\mu(\varphi) = \lim\limits_{i,\ I} \mu_i(\varphi)$ teljesül).*

Bizonyítás. Vezessük be a következő halmazt:

$$I := \{\ (\Phi, \varepsilon) \mid \Phi \subseteq \mathscr{C}(T; \mathbb{R}) \text{ nem üres véges halmaz és } \varepsilon \in \mathbb{R}^+\ \}.$$

Az I halmazon bevezetjük a $\leq$ relációt úgy, hogy $(\Phi, \varepsilon), (\Phi', \varepsilon') \in I$ esetén $(\Phi, \varepsilon) \leq (\Phi', \varepsilon')$ pontosan akkor teljesül, ha $\Phi \subseteq \Phi'$ és $\varepsilon' \leq \varepsilon$. Világos, hogy az I halmaz a $\leq$ relációval ellátva felfelé irányított rendezett halmaz.

Minden $(\Phi,\varepsilon)\in I$ esetén legyen

$$W_{\Phi,\varepsilon}(\mu):=\{\ \nu\in\mathscr{C}(T;\mathbb{R})'\ |\ \max_{\varphi\in\Phi}|\mu(\varphi)-\nu(\varphi)|<\varepsilon\ \}.$$

A definíció szerint a $(W_{\Phi,\varepsilon}(\mu))_{(\Phi,\varepsilon)\in I}$ halmazrendszer a $\mu\in\mathscr{C}(T;\mathbb{R})'$ pont környezete a $\sigma(\mathscr{C}(T;\mathbb{R})',\mathscr{C}(T;\mathbb{R}))$ topológia szerint.

Először megmutatjuk, hogy minden $(\Phi,\varepsilon)\in I$ esetén van olyan $\nu\in W_{\Phi,\varepsilon}(\mu)$, hogy ν előáll véges sok egypontmérték pozitív együtthatós lineáris kombinációjaként, és $\mathrm{supp}(\nu)\subseteq\mathrm{supp}(\mu)$, valamint $\nu(1)=\mu(1)$. Legyen tehát $(\Phi,\varepsilon)\in I$ rögzített, és a továbbiakban természetesen feltehető, hogy $\mu\neq 0$.

Legyen $\varepsilon'\in\mathbb{R}^+$ egyelőre tetszőleges szám, amit majd az ε függvényében később konkrétan megválasztunk. Létezik a T-nek olyan $(\Omega_j)_{j\in J}$ véges nyílt befedése, hogy minden $\Phi\ni\varphi$-re és $J\ni j$-re és $\Omega_j\ni t,t'$-re $|\varphi(t)-\varphi(t')|<\varepsilon'$. Legyen $J':=\{j\in J|\Omega_j\cap\mathrm{supp}(\mu)\neq\emptyset\}$. Ekkor $(\Omega_j)_{j\in J'}$ véges nyílt befedése a $\mathrm{supp}(\mu)$ kompakt halmaznak, tehát létezik olyan $(\psi_j)_{j\in J'}$ rendszer $\mathscr{C}(T;\mathbb{R})$-ben, hogy minden $J'\ni j$-re $0\leq\psi\leq 1$, $\mathrm{supp}(\psi_j)\subseteq\Omega_j$ és $\mathrm{supp}(\mu)\subseteq\left[\sum_{j\in J'}\psi_j=1\right]$. Minden $j\in J'$ esetén legyen $t_j\in\Omega_j\cap\mathrm{supp}(\mu)$ tetszőleges pont, és képezzük a

$$\nu:=\sum_{j\in J'}\mu(\psi_j).\varepsilon_{t_j}$$

Radon-mértéket. A definíció szerint ν előáll véges sok egypontmérték pozitív együtthatós lineáris kombinációjaként, és $\mathrm{supp}(\nu)\subseteq\{t_j|j\in J'\}\subseteq\mathrm{supp}(\mu)$, továbbá $\sum_{j\in J'}\psi_j=1$ a $\mathrm{supp}(\mu)$ halmazon, tehát

$$\mu(1)=\mu\left(\sum_{j\in J'}\psi_j\right)=\sum_{j\in J'}\mu(\psi_j)=\nu(1).$$

Legyen $\varphi\in\Phi$ tetszőleges. Ekkor $\varphi=\sum_{j\in J'}\varphi\psi_j$ a $\mathrm{supp}(\mu)$ halmazon, ezért

$$|\mu(\varphi)-\nu(\varphi)|=\left|\sum_{j\in J'}\mu(\varphi\psi_j)-\sum_{j\in J'}\mu(\psi_j)\varphi(t_j)\right|=\left|\sum_{j\in J'}\mu\left((\varphi-\varphi(t_j))\,\psi_j\right)\right|\leq$$

$$\leq\sum_{j\in J'}\mu\left(|\varphi-\varphi(t_j)|\,\psi_j\right).$$

Ha $j\in J'$, akkor $|\varphi-\varphi(t_j)|\,\psi_j\leq\varepsilon'\psi_j$, mert $\mathrm{supp}(\psi_j)\subseteq\Omega_j$ és $t_j\in\Omega_j$ miatt minden $\Omega_j\ni t$-re $|\varphi(t)-\varphi(t_j)|<\varepsilon'$. Ebből következik, hogy

$$|\mu(\varphi)-\nu(\varphi)|\leq\varepsilon'\sum_{j\in J'}\mu(\psi_j)=\varepsilon'\mu(1).$$

Ez azt jelenti, hogy ha az $\varepsilon' \in \mathbb{R}^+$ számra $\varepsilon'\mu(1) < \varepsilon$ teljesül, akkor az ε'-höz imént előállított ν Radon-mértékre $\nu \in W_{\Phi,\varepsilon}(\mu)$.

A kiválasztási axióma alapján vehetünk olyan $(\mu_{\Phi,\varepsilon})_{(\Phi,\varepsilon)\in I}$ rendszert, hogy minden $(\Phi,\varepsilon) \in I$ esetén $\mu_{\Phi,\varepsilon} \in W_{\Phi,\varepsilon}(\mu)$ és $\mu_{\Phi,\varepsilon}$ előáll véges sok egypontmérték pozitív együtthatós lineáris kombinációjaként, és $\operatorname{supp}(\mu_{\Phi,\varepsilon}) \subseteq \operatorname{supp}(\mu)$, továbbá $\mu_{\Phi,\varepsilon}(1) = \mu(1)$. Azt állítjuk, hogy a $(\mu_i)_{i\in I}$ általánosított sorozatra teljesül a) és b). Az a) nyilvánvalóan igaz. Ha $\varphi \in \mathscr{C}(T;\mathbb{R})$ tetszőleges és $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$, akkor $(\{\varphi\},\varepsilon) \in I$ olyan, hogy ha $(\Phi',\varepsilon') \in I$ és $(\{\varphi\},\varepsilon) \leq (\Phi',\varepsilon')$, akkor $\varphi \in \Phi'$ és $\varepsilon' \leq \varepsilon$, tehát $\mu_{\Phi',\varepsilon'} \in W_{\Phi',\varepsilon'}(\mu)$ miatt

$$|\mu(\varphi) - \mu_{\Phi',\varepsilon'}(\varphi')| \leq \max_{\varphi'\in\Phi'} |\mu(\varphi') - \mu_{\Phi',\varepsilon'}(\varphi')| < \varepsilon' \leq \varepsilon,$$

vagyis $\mu(\varphi) = \lim\limits_{i,I} \mu_i(\varphi)$. ■

Emlékeztetünk arra, hogy ha E vektortér $\mathbb{K}$ felett és $u : E \to \mathbb{K}$ lineáris funkcionál, akkor a $\Re \circ u : E \to \mathbb{R}$ függvényt (ami $\mathbb{R}$-lineáris funkcionál E felett) az $u_{\mathbb{R}}$ szimbólummal jelöljük (4.2.2.), tehát $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ esetén $u_{\mathbb{R}} = u$, míg $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ esetén $u_{\mathbb{R}}$ az u függvény valós része. Megjegyezzük, hogy ha E vektortér $\mathbb{K}$ felett és $F \subseteq E^*$ olyan $\mathbb{K}$-lineáris altér, amely szétválasztó E felett, akkor az $\{u_{\mathbb{R}} | u \in F\}$ függvényhalmaz szintén szétválasztó E felett, mert $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ esetén minden $F \ni u$-ra $-\mathbf{i}.u \in F$, és a definíció szerint $u_{\mathbb{R}} = \Re \circ u$ és $(-\mathbf{i}.u)_{\mathbb{R}} = \Im \circ u$, tehát, ha $x, y \in E$ és minden $u \in F$ esetén $u_{\mathbb{R}}(x) = u_{\mathbb{R}}(y)$, akkor minden $F \ni u$-ra $u(x) = u(y)$.

10.3.3. Tétel. *Legyen E olyan topologikus vektortér, amelyre E' szétválasztó E felett. Minden $K \subseteq E$ kompakt konvex halmazhoz és minden K feletti μ valószínűségi Radon-mértékhez létezik egyetlen olyan $x \in K$, amelyre minden $u \in E'$ esetén $u_{\mathbb{R}}(x) = \mu((u_{\mathbb{R}})|_K)$.*

(**Megjegyzés**. Világos, hogy $u \in E'$ esetén $u_{\mathbb{R}} : E \to \mathbb{R}$ *folytonos* függvény, ezért $(u_{\mathbb{R}})|_K \in \mathscr{C}(T;\mathbb{R})$, vagyis a $\mu((u_{\mathbb{R}})|_K) \in \mathbb{R}$ szám jól értelmezett.) *Bizonyítás.* Legyen $K \subseteq E$ kompakt konvex halmaz és μ valószínűségi Radon-mérték K felett. Az adott tulajdonságú $x \in K$ pont egyértelműsége nyilvánvalóan következik abból, hogy E' szétválasztó E felett, ezért csak az egzisztenciát kell igazolni.

(I) Először tegyük fel, hogy létezik olyan $(x_i)_{i\in I}$ nem üres véges rendszer K-ban és olyan $(\alpha_i)_{i\in I}$ rendszer $\mathbb{R}_+$-ban, hogy $\sum\limits_{i\in I} \alpha_i = 1$ és $\mu = \sum\limits_{i\in I} \alpha_i.\varepsilon_{x_i}$. Ekkor a K konvexitása miatt $x := \sum\limits_{i\in I} \alpha_i.x_i \in K$, és természetesen minden $E' \ni u$-ra

$$u_{\mathbb{R}}(x) = \sum_{i\in I} \alpha_i u_{\mathbb{R}}(x_i) = \sum_{i\in I} \alpha_i \varepsilon_{x_i}((u_{\mathbb{R}})|_K) = \mu((u_{\mathbb{R}})|_K)$$

teljesül, tehát x olyan pont, amelynek a létezését állítottuk.

(II) Legyen most μ tetszőleges valószínűségi Radon-mérték K felett. Az előző állítás szerint van olyan $(\mu_i)_{i \in I}$ általánosított sorozat, amelyre

a) minden $i \in I$ esetén $\mu_i : \mathscr{C}(T; \mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ olyan pozitív lineáris funkcionál, amely előáll véges sok egypontmérték pozitív együtthatós lineáris kombinációjaként, és $\operatorname{supp}(\mu_i) \subseteq \operatorname{supp}(\mu)$, valamint $\mu_i(1) = \mu(1) = 1$,

b) $\mu = \lim_{i,I} \mu_i$ a $\sigma(\mathscr{C}(T; \mathbb{R})', \mathscr{C}(T; \mathbb{R}))$ topológia szerint.

Az a) alapján minden $I \ni i$-re μ_i olyan valószínűségi Radon-mérték K felett, amelyhez az (I) szerint egyértelműen létezik olyan $x_i \in K$, hogy minden $E' \ni u$-ra $u_{\mathbb{R}}(x_i) = \mu_i\left((u_{\mathbb{R}})|_K\right)$. Habár a K-ban haladó $(x_i)_{i \in I}$ általánosított sorozat nem feltétlenül konvergens K-ban, a K kompaktsága miatt létezik konvergens általánosított részsorozata (27.2.4.), tehát van olyan J felfelé irányított előrendezett halmaz és olyan $\sigma : J \to I$ monoton növő függvény, hogy $\operatorname{Im}(\sigma)$ kofinális I-vel és az $\left(x_{\sigma(j)}\right)_{j \in J}$ általánosított sorozat konvergens K-ban; legyen $x := \lim_{j,J} x_{\sigma(j)}$. Ekkor $u \in E'$ esetén $(u_{\mathbb{R}})|_K \in \mathscr{C}(K; \mathbb{R})$, tehát a b) alapján $\mu\left((u_{\mathbb{R}})|_K\right) = \lim_{i,I} \mu_i\left((u_{\mathbb{R}})|_K\right)$, ezért

$$u_{\mathbb{R}}(x) = \lim_{j,J} u_{\mathbb{R}}\left(x_{\sigma(j)}\right) = \lim_{j,J} \mu_{\sigma(j)}\left((u_{\mathbb{R}})|_K\right) = \lim_{i,I} \mu_i\left((u_{\mathbb{R}})|_K\right) = \mu\left((u_{\mathbb{R}})|_K\right),$$

tehát x olyan pont, amelynek a létezését állítottuk. ■

10.3.4. Definíció. *Ha K kompakt konvex halmaz az E szeparált topologikus vektortérben és μ valószínűségi Radon-mérték K felett, akkor a μ* **baricentrumának** *nevezünk minden olyan $x \in K$ pontot, amelyre minden $u \in E'$ esetén $u_{\mathbb{R}}(x) = \mu\left((u_{\mathbb{R}})|_K\right)$.*

Az előző tétel alapján állítható, hogy ha E olyan topologikus vektortér, amely felett E' szétválasztó, akkor minden $K \subseteq E$ kompakt konvex halmazra, minden K feletti valószínűségi Radon-mértéknek egyértelműen létezik baricentruma.

10.3.5. Jelölés. *Ha E olyan topologikus vektortér, hogy E' szétválasztó E felett, $K \subseteq E$ kompakt konvex halmaz és μ valószínűségi Radon-mérték K felett, akkor a μ baricentrumát $\mathbf{b}(\mu)$ jelöli; tehát $\mathbf{b}(\mu) \in K$ az a pont, amelyre minden $u \in E'$ esetén*

$$u_{\mathbb{R}}(\mathbf{b}(\mu)) = \mu\left((u_{\mathbb{R}})|_K\right).$$

Megjegyzések. Az alábbi megjegyzésekben feltesszük, hogy E olyan topologikus vektortér, hogy E' szétválasztó E felett, $K \subseteq E$ kompakt konvex halmaz, és $\mathscr{M}_+^1(K)$ jelöli a K feletti valószínűségi Radon-mértékek halmazát.

1) Ha μ valószínűségi Radon-mérték K felett, akkor $\mathbf{b}(\mu) \in \overline{\operatorname{co}(\operatorname{supp}(\mu))}$, hiszen a $\mathbf{b}(\mu)$ létezésének *bizonyításában* láttuk, hogy van olyan $\operatorname{co}(\operatorname{supp}(\mu))$-ben haladó általánosított

sorozat, amelynek a határértéke egyenlő $\mathbf{b}(\mu)$-vel.

2) Nyilvánvaló, hogy $\mathscr{M}^1_+(K)$ konvex halmaz a $\mathscr{C}(K;\mathbb{R})'$ valós vektortérben, és az

$$\mathscr{M}^1_+(K) \to K; \quad \mu \mapsto \mathbf{b}(\mu)$$

leképezés *konvex-kombináció-tartó*, hiszen $\mu, \nu \in \mathscr{M}^1_+(K)$ és $\alpha \in [0,1]$ esetén minden $E' \ni u$-ra

$$u_{\mathbb{R}}(\mathbf{b}((1-\alpha).\mu + \alpha.\nu)) = ((1-\alpha).\mu + \alpha.\nu)\,((u_{\mathbb{R}})|_K) = (1-\alpha)\mu\,((u_{\mathbb{R}})|_K) + \alpha\nu((u_{\mathbb{R}})|_K)$$

$$=: (1-\alpha)u_{\mathbb{R}}(\mathbf{b}(\mu)) + \alpha u_{\mathbb{R}}(\mathbf{b}(\nu)) = u_{\mathbb{R}}((1-\alpha)\mathbf{b}(\mu) + \alpha\mathbf{b}(\nu)),$$

és E' szétválasztó E felett, ezért $\mathbf{b}((1-\alpha).\mu + \alpha.\nu) = (1-\alpha)\mathbf{b}(\mu) + \alpha\mathbf{b}(\nu)$.

3) Az $\mathscr{M}^1_+(K)$ halmaz nyilvánvalóan zárt $\mathscr{C}(K;\mathbb{R})'$-ben a $\sigma(\mathscr{C}(K;\mathbb{R})', \mathscr{C}(K;\mathbb{R}))$ topológia szerint, és részhalmaza a funkcionálnorma szerinti zárt egységgömbnek $\mathscr{C}(K;\mathbb{R})'$-ben, így a Banach–Alaoglu tétel alapján kompakt a

$$\sigma(\mathscr{C}(K;\mathbb{R})', \mathscr{C}(K;\mathbb{R}))$$

topológia szerint. Tehát $\mathscr{M}^1_+(K)$ kompakt konvex halmaz a

$$\sigma(\mathscr{C}(K;\mathbb{R})', \mathscr{C}(K;\mathbb{R}))$$

topológiával ellátott $\mathscr{C}(K;\mathbb{R})'$ valós szeparált lokálisan konvex térben. Világos, hogy az

$$\mathscr{M}^1_+(K) \to K; \quad \mu \mapsto \mathbf{b}(\mu)$$

leképezés *folytonos*, ha $\mathscr{M}^1_+(K)$ felett a $\sigma(\mathscr{C}(K;\mathbb{R})', \mathscr{C}(K;\mathbb{R}))$ topológia leszűkítését és K felett a $\sigma(E,E')|K$ altértopológiát vesszük. Valóban, ha $(\mu_i)_{i\in I}$ olyan általánosított sorozat $\mathscr{M}^1_+(K)$-ban, amely a $\sigma(\mathscr{C}(K;\mathbb{R})', \mathscr{C}(K;\mathbb{R}))$ topológia szerint konvergál a $\mu \in \mathscr{M}^1_+(K)$ valószínűségi Radon-mértékhez, akkor minden $u \in E'$ esetén

$$u_{\mathbb{R}}(\mathbf{b}(\mu)) = \mu\,((u_{\mathbb{R}})|_K) = \lim_{i,\ I} \mu_i\,((u_{\mathbb{R}})|_K) = \lim_{i,\ I} u_{\mathbb{R}}(\mathbf{b}(\mu_i)).$$

Ebből következik, hogy $E' \ni u$-ra $u(\mathbf{b}(\mu)) = \lim\limits_{i,\ I} u(\mathbf{b}(\mu_i))$, ami éppen azt jelenti, hogy $\mathbf{b}(\mu) = \lim\limits_{i,\ I} \mathbf{b}(\mu_i)$ a $\sigma(E,E')$ topológia szerint.

4) Minden $x \in K$ esetén $\varepsilon_x \in \mathscr{M}^1_+(K)$ és $\mathbf{b}(\varepsilon_x) = x$. Ezért a

$$\mathscr{M}^1_+(K) \to K; \quad \mu \mapsto \mathbf{b}(\mu)$$

leképezés *szürjektív* és a

$$K \to \mathscr{M}^1_+(K); \quad x \mapsto \varepsilon_x$$

leképezés olyan kitüntetett *jobbinverze*, amely folytonos a K feletti altértopológia és a $\sigma(\mathscr{C}(K;\mathbb{R})', \mathscr{C}(K;\mathbb{R}))|\mathscr{M}^1_+(K)$ altértopológia szerint.

10.3.6. Állítás. *Minden T kompakt térhez létezik olyan E valós szeparált lokálisan konvex tér és olyan $K \subseteq E$ kompakt konvex halmaz, hogy T és az* $\mathrm{Ext}(K)$ *topologikus altér homeomorfak.*

Bizonyítás. Legyen $E := \mathscr{C}(T;\mathbb{R})'$ a $\sigma(\mathscr{C}(T;\mathbb{R})', \mathscr{C}(T;\mathbb{R}))$-topológiával ellátva és $K := \mathscr{M}_+^1(T)$. Ekkor K konvex halmaz az E valós vektortérben, és nyilvánvalóan zárt a pontonkénti konvergencia topológiája szerint, valamint része a funkcionálnorma szerinti zárt egységgömbnek, így a Banach–Alaoglu-tétel (5.11.3.) szerint K kompakt az E szeparált lokálisan konvex térben. Tekintsük a $T \to K$; $t \mapsto \varepsilon_t$ leképezést, amely nyilvánvalóan folytonos injekció. Ezért az állítás bizonyításához elég volna azt igazolni, hogy $\mathrm{Ext}(K) = \{\varepsilon_t | t \in T\}$.

Legyen $\mu \in \mathrm{Ext}(K)$. Megmutatjuk, hogy $\mathrm{supp}(\mu)$ *egy elemű* halmaz, amiből következik, hogy $\mu \in \{\varepsilon_t | t \in T\}$. Indirekt bizonyítunk, tehát feltesszük, hogy $t_1, t_2 \in \mathrm{supp}(\mu)$ és $t_1 \neq t_2$. Létezik olyan $\varphi \in \mathscr{C}(T;\mathbb{R})$, hogy $0 \leq \varphi \leq 1$ és $\varphi = 1$ a t_1 valamely környezetén, valamint $\varphi = 0$ a t_2 valamely környezetén. Ekkor $t_1 \in \mathrm{supp}(\mu)$ miatt $\mu(\varphi) > 0$, és $t_2 \in \mathrm{supp}(\mu)$ miatt $\mu(1-\varphi) > 0$, vagyis $\mu(\varphi) \in]0,1[$. Értelmezzük a

$$\mu_1 : \mathscr{C}(T;\mathbb{R}) \to \mathbb{R}; \quad \psi \mapsto \frac{\mu((1-\varphi)\psi)}{1-\mu(\varphi)},$$

$$\mu_2 : \mathscr{C}(T;\mathbb{R}) \to \mathbb{R}; \quad \psi \mapsto \frac{\mu(\varphi\psi)}{\mu(\varphi)}$$

leképezéseket. Ezek pozitív lineáris funkcionálok $\mathscr{C}(T;\mathbb{R})$ felett, és az azonosan 1 függvényhez az 1 értéket rendelik, tehát $\mu_1, \mu_2 \in \mathscr{M}_+^1(T) =: K$. Továbbá, a definíció szerint $\mu = (1-\mu(\varphi)).\mu_1 + \mu(\varphi).\mu_2$. Ha megmutatjuk, hogy $\mu_1 \neq \mu_2$, akkor azt kapjuk, hogy $\mu \notin \mathrm{Ext}(K)$, ami ellentmondás. Ha $\mu_1 = \mu_2$ teljesülne, akkor minden $\psi \in \mathscr{C}(T;\mathbb{R})$ esetén $\mu(\varphi)\mu((1-\varphi)\psi) = (1-\mu(\varphi))\mu(\varphi\psi)$. Ez azt jelentené, hogy minden $\psi \in \mathscr{C}(T;\mathbb{R})$ esetén $\mu(\varphi)\mu(\psi) = \mu(\varphi\psi)$. Ebből következne, hogy minden $\mathbb{N} \ni n$-re $\mu(\varphi^n) = \mu(\varphi)^n$, tehát $\mu(\varphi) \in]0,1[$ miatt $\lim_{n\to\infty} \mu(\varphi^n) = 0$. Ez viszont lehetetlen, mert ha V olyan nyílt környezete t_1-nek, hogy $\varphi = 1$ a V halmazon, és $\psi \in \mathscr{C}(T;\mathbb{R})$ olyan függvény, hogy $0 \leq \psi \leq 1$ és $\mathrm{supp}(\psi) \subseteq V$, akkor minden $\mathbb{N} \ni n$-re $\psi \leq \varphi^n$, tehát $\mu(\psi) \leq \mu(\varphi^n)$, így $\lim_{n\to\infty} \mu(\varphi^n) = 0$ esetén $V \subseteq T \setminus \mathrm{supp}(\mu)$, holott $t_1 \in V \cap \mathrm{supp}(\mu)$.

Megfordítva, legyen $t \in T$ és legyenek $\mu, \nu \in \mathscr{M}_+^1(T)$, $\alpha \in]0,1[$ olyanok, hogy $\varepsilon_t = (1-\alpha).\mu + \alpha.\nu$. Ekkor nyilvánvalóan $\mathrm{supp}(\mu), \mathrm{supp}(\nu) \subseteq \mathrm{supp}(\varepsilon_t) = \{t\}$, tehát $\mu = \nu = \varepsilon_t$, vagyis $\varepsilon_t \in \mathrm{Ext}(K)$. ■

10.4. Konvex függvények és konkáv függvények felső integráljai

10.4.1. Jelölés. *Ha K halmaz és $f : K \to \mathbb{R}$ függvény, akkor a*

$$\mathrm{gr}(f) := \{(x,t) \in K \times \mathbb{R} | f(x) = t\},$$

$$\mathrm{subgr}(f) := \{(x,t) \in K \times \mathbb{R} | f(x) \geq t\},$$
$$\mathrm{epigr}(f) := \{(x,t) \in K \times \mathbb{R} | f(x) \leq t\}$$

jelöléseket alkalmazzuk, és $\mathrm{gr}(f)$*-t az f gráfjának,* $\mathrm{subgr}(f)$*-t az f szubgráfjának, valamint* $\mathrm{epigr}(f)$*-t az f epigráfjának nevezzük.*

10.4.2. Lemma. *Ha K zárt konvex halmaz az E szeparált topologikus vektortérben és $f : K \to \mathbb{R}$ felülről félig folytonos konkáv (illetve alulról félig folytonos konvex) függvény, akkor* $\mathrm{subgr}(f)$ *(illetve* $\mathrm{epigr}(f)$*) zárt konvex halmaz az $E \times \mathbb{K}$ topologikus lineáris szorzattérben.*

Bizonyítás. Világos, hogy $\mathrm{epigr}(f) = J\langle \mathrm{subgr}(-f) \rangle$, ahol $J : E \times \mathbb{K} \to E \times \mathbb{K};\ (x,t) \mapsto (x,-t)$ lineáris homeomorfizmus, és f pontosan akkor felülről félig folytonos konkáv függvény, ha $-f$ alulról félig folytonos konvex függvény. Ezért elég arra az esetre bizonyítani, amikor f felülről félig folytonos konkáv függvény.

A $\mathrm{subgr}(f)$ halmaz konvexitása nyilvánvalóan következik abból, hogy f konkáv függvény. A $\mathrm{subgr}(f)$ halmaz zártságának bizonyításához legyen $(x,t) \in E \times \mathbb{K}$ és $((x_i,t_i))_{i \in I}$ olyan $\mathrm{subgr}(f)$-ben haladó általánosított sorozat, amely (x,t)-hez konvergál az $E \times \mathbb{K}$ topologikus szorzattérben. Ekkor $x = \lim\limits_{i,I} x_i$ teljesül E-ben, és $t = \lim\limits_{i,I} t_i$ teljesül $\mathbb{K}$-ban. Minden $I \ni i$-re $t_i \in \mathbb{R}$, ezért $t \in \mathbb{R}$. Minden $i \in I$ esetén $x_i \in K$ és K zárt, ezért $x = \lim\limits_{i,I} x_i \in K$. Azt kellene igazolni, hogy $(x,t) \in \mathrm{subgr}(f)$, vagyis $f(x) \geq t$. Minden $I \ni i$-re $(x_i,t_i) \in \mathrm{subgr}(f)$, vagyis $f(x_i) \geq t_i$. Legyen $c \in \mathbb{R}$ olyan, hogy $c > f(x)$. Az f felülről félig folytonossága miatt $[c > f]$ nyílt halmaz K-ban és $x \in [c > f]$, tehát van olyan $i_c \in I$, hogy minden $I \ni i$-re, ha $i \geq i_c$, akkor $x_i \in [c > f]$, vagyis $c > f(x_i) \geq t_i$. Ebből következik, hogy $c \geq \lim\limits_{i,I} t_i = t$. Ez minden olyan $c \in \mathbb{R}$ esetén igaz, amelyre $c > f(x)$, ezért $f(x) \geq t$, vagyis $(x,t) \in \mathrm{subgr}(f)$. ■

10.4.3. Állítás. *Legyen E olyan topologikus vektortér, hogy E' szétválasztó E felett, és $K \subseteq E$ nem üres kompakt konvex halmaz. Ha $f : K \to \mathbb{R}$ felülről korlátos és alulról félig folytonos konvex függvény, akkor*

$$f = \sup_{\substack{(c,u) \in \mathbb{R} \times E' \\ (c + u_{\mathbb{R}})|_K \leq f}} (c + u_{\mathbb{R}})\,|_K$$

teljesül, és ha $f \geq 0$, akkor minden K feletti μ valószínűségi Radon-mértékre

$$f(\mathbf{b}(\mu)) \leq \int^{*} f \, d\mu.$$

Bizonyítás. Először megjegyezzük, hogy a feltevés alapján f *alulról korlátos* (27.4.3.), ezért *létezik* olyan $(c, u) \in \mathbb{R} \times E'$, hogy $(c + u_{\mathbb{R}})|_K \leq f$. Rögzítsünk olyan $C_-, C_+ \in \mathbb{R}$ számokat, amelyekre minden $x \in K$ esetén $C_- \leq f(x) \leq C_+$.
Legyen $x \in K$ és $t \in \mathbb{R}$ olyan, hogy $t < f(x)$. Megmutatjuk olyan $(c, u) \in \mathbb{R} \times E'$ pár létezését, amelyre $(c + u_{\mathbb{R}})|_K \leq f$ és $t < (c + u_{\mathbb{R}})(x)$. Ehhez tekintsük az $\{(x, t)\}$ kompakt konvex és az $\mathrm{epigr}(f) \cap (K \times [C_-, C_+])$ kompakt konvex halmazt az $E \times \mathbb{K}$ topologikus lineáris szorzattérben. Ezek nem metszik egymást, ezért a Hahn–Banach szétválasztási-tétel alapján van olyan $v : E \times \mathbb{K} \to \mathbb{K}$ folytonos lineáris funkcionál és van olyan $\alpha \in \mathbb{R}$, hogy $\{(x, t)\} \in [v_{\mathbb{R}} < \alpha]$ és $\mathrm{epigr}(f) \cap (K \times [C_-, C_+]) \subseteq [v_{\mathbb{R}} > \alpha]$. Ekkor létezik olyan $u \in E'$ és $\lambda \in \mathbb{K}$, hogy minden $E \times \mathbb{K} \ni (x', t')$-ra $v(x', t') = u(x') + \lambda \cdot t'$, tehát $(x', t') \in E \times \mathbb{R}$ esetén $v_{\mathbb{R}}(x', t') = u_{\mathbb{R}}(x') + \beta \cdot t'$, ahol $\beta := \Re(\lambda)$. Ez azt jelenti, hogy

$$u_{\mathbb{R}}(x) + \beta \cdot t < \alpha,$$
$$(\forall\, x' \in K) : \; u_{\mathbb{R}}(x') + \beta \cdot f(x') > \alpha,$$

hiszen $x' \in K$ esetén $(x', f(x')) \in \mathrm{gr}(f) \subseteq \mathrm{epigr}(f) \cap (K \times [C_-, C_+])$. Nyilvánvaló, hogy $\beta \neq 0$, különben $\alpha < u_{\mathbb{R}}(x) < \alpha$ teljesülne. Ugyanakkor $\beta < 0$ is lehetetlen, különben $t < f(x)$ miatt $\alpha < u_{\mathbb{R}}(x) + \beta \cdot f(x) \leq u_{\mathbb{R}}(x) + \beta \cdot t < \alpha$ teljesülne. Ezért $\beta > 0$, így a $\left(\frac{\alpha}{\beta}, \frac{u}{\beta}\right) \in \mathbb{R} \times E'$ pár olyan, hogy minden $K \ni x'$-re $\frac{\alpha}{\beta} - \frac{u_{\mathbb{R}}(x')}{\beta} < f(x')$, ugyanakkor $t < \frac{\alpha}{\beta} - \frac{u_{\mathbb{R}}(x)}{\beta}$. Ezzel megmutattuk, hogy $f = \sup\limits_{(c,u) \in \mathbb{R} \times E';\; (c + u_{\mathbb{R}})|_K \leq f} (c + u_{\mathbb{R}})|_K$.

Legyen $(c, u) \in \mathbb{R} \times E'$ olyan pár, hogy $(c + u_{\mathbb{R}})|_K \leq f$. A baricentrum definíciója és $\mu(1) = 1$ alapján

$$(c + u_{\mathbb{R}})(\mathbf{b}(\mu)) = c + u_{\mathbb{R}}(\mathbf{b}(\mu)) = c + \mu((u_{\mathbb{R}})|_K) = \mu((c + u_{\mathbb{R}})|_K) \leq \int^{*} f \, d\mu,$$

tehát fennáll az

$$f(\mathbf{b}(\mu)) = \sup_{\substack{(c,u) \in \mathbb{R} \times E' \\ (c + u_{\mathbb{R}})|_K \leq f}} (c + u_{\mathbb{R}})(\mathbf{b}(\mu)) \leq \int^{*} f \, d\mu$$

egyenlőtlenség. ■

10.4.4. Következmény. *Legyen E olyan topologikus vektortér, hogy E' szétválasztó E felett, és $K \subseteq E$ nem üres kompakt konvex halmaz. Ha $f : K \to \mathbb{R}_+$ felülről félig folytonos konkáv függvény, akkor minden K feletti μ valószínűségi Radon-mértékre*

$$f(\mathbf{b}(\mu)) \geq \int^{*} f \, d\mu.$$

Bizonyítás. Az f függvény *felülről korlátos* (27.4.3.); legyen $c \in \mathbb{R}$ olyan, hogy $c \geq f$. Ekkor a $c - f$ függvény alulról félig folytonos, felülről korlátos, konvex és pozitív, ezért az előző állítás alapján

$$c - f(\mathbf{b}(\mu)) = (c - f)(\mathbf{b}(\mu)) \leq \int^* (c - f) d\mu,$$

ugyanakkor a szubtraktivitás-formula szerint

$$\int^* f\ d\mu = \int^* (c - (c - f)) d\mu = \int^* c\ d\mu - \int^* (c - f) d\mu = c - \int^* (c - f) d\mu,$$

tehát $c - f(\mathbf{b}(\mu)) \leq c - \int^* f\ d\mu$, azaz $\int^* f\ d\mu \leq f(\mathbf{b}(\mu))$. ■

11. fejezet

Metrizálható kompakt konvex halmaz baricentrális felbontása

11.1. Kompakt konvex halmaz topologikus baricentrális felbontása

11.1.1. Tétel. *Legyen E olyan topologikus vektortér, hogy E' szétválasztó E felett, $K \subseteq E$ kompakt konvex halmaz, és $X \subseteq K$ olyan zárt halmaz, amelyre $K = \overline{\mathrm{co}(X)}$. Ekkor minden $x \in K$ esetén létezik olyan μ valószínűségi Radon-mérték K felett, hogy $\mathbf{b}(\mu) = x$ és $\mathrm{supp}(\mu) \subseteq X$ (vagyis μ topologikusan koncentrált az X halmazon).*

Bizonyítás. Értelmezzük a következő halmazt

$$C := \{\ x \in K \mid (\exists\ \mu \in \mathscr{M}_+^1(K)) : \ (x = \mathbf{b}(\mu)) \wedge (\mathrm{supp}(\mu) \subseteq X)\ \}.$$

Megmutatjuk, hogy C olyan zárt konvex halmaz K-ban, amelyre $X \subseteq C$. Ha ez igaz, akkor $K = \overline{\mathrm{co}(X)} \subseteq C \subseteq K$, tehát $C = K$, ami megegyezik a bizonyítandó állítással.

Ha $x \in X$, akkor $\varepsilon_x \in \mathscr{M}_+^1(K)$ és $\mathrm{supp}(\varepsilon_x) = \{x\} \subseteq X$ és $x = \mathbf{b}(\varepsilon_x)$, vagyis $x \in C$, így $X \subseteq C$.

Legyenek $x, x' \in C$ és $\alpha \in [0,1]$. Vegyünk olyan $\mu, \mu' \in \mathscr{M}_+^1(K)$ valószínűségi Radon-mértékeket, hogy $x = \mathbf{b}(\mu)$, $x' = \mathbf{b}(\mu')$ és $\mathrm{supp}(\mu), \mathrm{supp}(\mu') \subseteq X$. Ekkor

$$(1-\alpha).x + \alpha.x' = (1-\alpha).\mathbf{b}(\mu) + \alpha.\mathbf{b}(\mu') = \mathbf{b}((1-\alpha).\mu + \alpha.\mu'),$$

és $(1-\alpha).\mu+\alpha.\mu' \in \mathscr{M}_+^1(K)$, valamint $\mathrm{supp}((1-\alpha).\mu+\alpha.\mu') \subseteq \mathrm{supp}(\mu)\cup\mathrm{supp}(\mu') \subseteq X$. Ez azt jelenti, hogy $(1-\alpha).x + \alpha.x' \in C$, vagyis C konvex halmaz.

Végül, a C zártságának bizonyításához legyen $x \in K$ és $(x_i)_{i\in I}$ olyan C-ben haladó általánosított sorozat, amely x-hez konvergál. A kiválasztási axióma alapján létezik olyan $(\mu_i)_{i\in I}$ rendszer, amelynek mindegyik tagja eleme $\mathscr{M}^1_+(K)$-nak, és minden $I \ni i$-re $x_i = \mathbf{b}(\mu_i)$, valamint $\operatorname{supp}(\mu_i) \subseteq X$. Az $\mathscr{M}^1_+(K)$ halmaz konvex és kompakt halmaz a $\sigma(\mathscr{C}(K;\mathbb{R})', \mathscr{C}(K;\mathbb{R}))$ topológiával ellátott $\mathscr{C}(K;\mathbb{R})'$ valós szeparált lokálisan konvex térben, és $(\mu_i)_{i\in I}$ egy $\mathscr{M}^1_+(K)$-ban haladó általánosított sorozat. Ezért létezik $(\mu_i)_{i\in I}$-nek $\sigma(\mathscr{C}(K;\mathbb{R})', \mathscr{C}(K;\mathbb{R}))$-konvergens általánosított részsorozata, vagyis van olyan J felfelé irányított előrendezett halmaz és olyan $\sigma : J \to I$ monoton növő függvény, hogy a $\sigma\langle J\rangle$ halmaz kofinális I-vel, továbbá van olyan $\mu \in \mathscr{M}^1_+(K)$, hogy $\mu = \lim\limits_{j,J} \mu_{\sigma(j)}$ a $\sigma(\mathscr{C}(K;\mathbb{R})', \mathscr{C}(K;\mathbb{R}))$ topológia szerint. Ekkor K-ban fennáll a

$$\mathbf{b}(\mu) = \lim_{j,J} \mathbf{b}\ \ \mu_{\sigma(j)}\ \ = \lim_{j,J} x_{\sigma(j)} = \lim_{i,I} x_i = x$$

egyenlőség, ahol mindegyik határértéket a $\sigma(E, E')$ topológia szerint kell venni. Továbbá, ha $\varphi \in \mathscr{C}(K;\mathbb{R})$ és $\operatorname{supp}(\varphi) \subseteq T \setminus X$, akkor minden $j \in J$ esetén $\mu_{\sigma(j)}(\varphi) = 0$, mert $\operatorname{supp}\ \ \mu_{\sigma(j)}\ \ \subseteq X$ és X zárt. Ezért $\varphi \in \mathscr{C}(K;\mathbb{R})$ és $\operatorname{supp}(\varphi) \subseteq T \setminus X$ esetén $\mu(\varphi) = \lim\limits_{j,J} \mu_{\sigma(j)}(\varphi) = 0$, így $\operatorname{supp}(\mu) \subseteq X$. Ez azt jelenti, hogy $x \in C$, vagyis C zárt halmaz. ■

Az előző tétel tekinthető a Choquet-tételkör legegyszerűbb állításának. A Krein–Milman tételből, a fenti tétel alkalmazásával kapjuk, hogy ha E olyan topologikus vektortér, hogy E' szétválasztó E felett és $K \subseteq E$ kompakt konvex halmaz, akkor minden $x \in K$ esetén létezik olyan μ valószínűségi Radon-mérték K felett, hogy $\mathbf{b}(\mu) = x$ és $\operatorname{supp}(\mu) \subseteq \overline{\operatorname{Ext}(K)}$. Ez abból látható, hogy a Krein–Milman-tétel alapján $K = \overline{\operatorname{co}(\operatorname{Ext}(K))}$, ezért $K = \overline{\operatorname{co}(\overline{\operatorname{Ext}(K)})}$ is igaz és $\overline{\operatorname{Ext}(K)} \subseteq K$ zárt halmaz, így elég az imént igazolt tételt alkalmazni az $X := \overline{\operatorname{Ext}(K)}$ választással. Azonban a kompakt konvex halmazok extremális pontjainak halmaza még véges dimenziós esetben sem szükségképpen zárt halmaz, tehát az előző állítás alapján még nem tudhatjuk, hogy adott $x \in K$ esetén létezik-e olyan K feletti μ valószínűségi Radon-mérték, amelyre $\mathbf{b}(\mu) = x$ és μ *koncentrált* az $\operatorname{Ext}(K)$ halmazon (vagyis a $K \setminus \operatorname{Ext}(K)$ halmaz μ-nullahalmaz).

11.2. Metrizálható kompakt konvex halmaz baricentrális felbontása – Choquet-tétel

11.2.1. Jelölés. *Legyen E topologikus vektortér, $K \subseteq E$ nem üres halmaz, és $f : K \to \mathbb{R}$ felülről korlátos függvény. Ekkor*

$$\overline{f} := \inf_{\substack{(c,u)\in\mathbb{R}\times E' \\ f \le (c+u_{\mathbb{R}})|_K}} (c + u_{\mathbb{R}})|_K .$$

Tehát, ha E topologikus vektortér, $K \subseteq E$ nem üres halmaz, és $f : K \to \mathbb{R}$ felülről korlátos függvény, akkor $\overline{f} : K \to \mathbb{R}$ olyan *felülről félig folytonos* és *konkáv* függvény, hogy $f \leq \overline{f}$.

11.2.2. Lemma. *Legyen E olyan topologikus vektortér, hogy E' szétválasztó E felett, $K \subseteq E$ nem üres kompakt konvex halmaz, és $f : K \to \mathbb{R}$ felülről korlátos, alulról félig folytonos konvex függvény. Ekkor* $\operatorname{subgr}(\overline{f}) \cap \operatorname{epigr}(f)$ *kompakt konvex halmaz az $E \times \mathbb{K}$ topologikus lineáris szorzattérben és* $\operatorname{gr}(f)$ *olyan részhalmaza a* $\operatorname{subgr}(\overline{f}) \cap \operatorname{epigr}(f)$ *halmaznak, hogy*

$$\overline{\operatorname{co}(\operatorname{gr}(f))} = \operatorname{subgr}(\overline{f}) \cap \operatorname{epigr}(f).$$

Bizonyítás. Azt tudjuk, hogy a $\operatorname{subgr}(\overline{f}) \cap \operatorname{epigr}(f)$ halmaz konvex és zárt az $E \times \mathbb{K}$ topologikus szorzattérben. Kompakt téren alulról félig folytonos függvény szükségképpen korlátos alulról, tehát vehetünk olyan $C_- \in \mathbb{R}$ számot, amelyre $C_- \leq f$. Az $\overline{f}$ függvény felülről korlátos, tehát van olyan $C_+ \in \mathbb{R}$, hogy $\overline{f} \leq C_+$. Ezért $\operatorname{subgr}(\overline{f}) \cap \operatorname{epigr}(f) \subseteq K \times [C_-, C_+]$, és a jobb oldalon álló halmaz kompakt az $E \times \mathbb{K}$ topologikus szorzattérben. Tehát $\operatorname{subgr}(\overline{f}) \cap \operatorname{epigr}(f)$ kompakt konvex halmaz az $E \times \mathbb{K}$ topologikus lineáris szorzattérben, következésképpen $\operatorname{gr}(f) \subseteq \operatorname{subgr}(\overline{f}) \cap \operatorname{epigr}(f)$ miatt fennáll a $\overline{\operatorname{co}(\operatorname{gr}(f))} \subseteq \operatorname{subgr}(\overline{f}) \cap \operatorname{epigr}(f)$ tartalmazás.

A $\overline{\operatorname{co}(\operatorname{gr}(f))} = \operatorname{subgr}(\overline{f}) \cap \operatorname{epigr}(f)$ egyenlőséget indirekt bizonyítjuk, tehát feltesszük, hogy $(x,t) \in \operatorname{subgr}(\overline{f}) \cap \operatorname{epigr}(f)$ olyan, hogy $(x,t) \notin \overline{\operatorname{co}(\operatorname{gr}(f))}$. Ekkor $\overline{\operatorname{co}(\operatorname{gr}(f))}$ és $\{(x,t)\}$ diszjunkt nem üres kompakt konvex halmazok az $E \times \mathbb{K}$ topologikus lineáris szorzattérben, ezért a Hahn–Banach szétválasztási tétel alapján létezik olyan $v : E \times \mathbb{K} \to \mathbb{K}$ folytonos lineáris funkcionál és $\alpha \in \mathbb{R}$, hogy $\overline{\operatorname{co}(\operatorname{gr}(f))} \subseteq [v_{\mathbb{R}} < \alpha]$ és $\{(x,t)\} \subseteq [v_{\mathbb{R}} > \alpha]$. Ekkor van olyan $u \in E'$ és $\lambda \in \mathbb{K}$, hogy minden $E \times \mathbb{K} \ni (x',t')$-re $v(x',t') = u(x') + \lambda \cdot t'$, tehát $(x',t') \in E \times \mathbb{K}$ esetén $v_{\mathbb{R}}(x',t') = u_{\mathbb{R}}(x') + \beta \cdot t'$, ahol $\beta := \Re(\lambda)$. Ekkor

$$(\forall\, x' \in K):\ u_{\mathbb{R}}(x') + \beta \cdot t' < \alpha,$$

$$u_{\mathbb{R}}(x) + \beta \cdot t > \alpha.$$

Világos, hogy $\beta = 0$ lehetetlen. Ha $\beta > 0$, akkor $f \leq ((-u_{\mathbb{R}} + \alpha)/\beta)|_K$, ezért az $\overline{f}$ definíciója alapján $\overline{f} \leq ((-u_{\mathbb{R}} + \alpha)/\beta)|_K$, így $\overline{f}(x) \leq (-u_{\mathbb{R}}(x) + \alpha)/\beta$, vagyis $(x,t) \in \operatorname{subgr}(\overline{f})$ miatt

$$\alpha < u_{\mathbb{R}}(x) + \beta \cdot t \leq u_{\mathbb{R}}(x) + \beta \cdot \overline{f}(x) \leq \alpha,$$

ami lehetetlen. Ezért szükségképpen $\beta < 0$. Ekkor viszont $(x,t) \in \operatorname{epigr}(f)$ miatt

$$\alpha < u_{\mathbb{R}}(x) + \beta \cdot t \leq u_{\mathbb{R}}(x) + \beta \cdot f(x) < \alpha,$$

ami szintén lehetelen, tehát ellentmondásra jutottunk. ■

11.2.3. Állítás. *Legyen E olyan topologikus vektortér, hogy E' szétválasztó E felett, $K \subseteq E$ nem üres kompakt konvex halmaz, és $f : K \to \mathbb{R}$ folytonos konvex függvény. Minden $x \in K$ esetén létezik olyan μ valószínűségi Radon-mérték K felett, hogy $\mathbf{b}(\mu) = x$ és μ koncentrált az $[f = \overline{f}]$ halmazon (vagyis az $[f < \overline{f}]$ halmaz μ-nullhalmaz).*

Bizonyítás. Minden $\mathbb{R} \ni c$-re nyilvánvalóan $\overline{f - c} = \overline{f} - c$ és f alulról korlátos, ezért feltehető, hogy $f \geq 0$.

Legyen $K_f := \mathrm{subgr}(\overline{f}) \cap \mathrm{epigr}(f)$, ami kompakt konvex halmaz az $E \times \mathbb{K}$ topologikus lineáris szorzattérben. Az $\mathrm{gr}(f)$ halmaz zárt és része K_f-nek, valamint az előző lemma szerint $K_f = \overline{\mathrm{co}(\mathrm{gr}(f))}$. Ezért minden $K_f \ni (x, t)$-hez van olyan K_f feletti ν valószínűségi Radon-mérték, amelyre $(x, t) = \mathbf{b}(\nu)$ és $\mathrm{supp}(\nu) \subseteq \mathrm{gr}(f)$.

Legyen $x \in K$ rögzített, és tekintsük az $(x, \overline{f}(x)) \in K_f$ pontot. Vegyünk ehhez olyan K_f feletti ν valószínűségi Radon-mértéket, amelyre $(x, \overline{f}(x)) = \mathbf{b}(\nu)$ és $\mathrm{supp}(\nu) \subseteq \mathrm{gr}(f)$. Képezzük a

$$\mu : \mathscr{C}(K; \mathbb{R}) \to \mathbb{R}; \quad \varphi \mapsto \nu(\varphi \circ pr_1)$$

leképezést, ahol $pr_1 : K_f \to K$ az $E \times \mathbb{K} \to E$ első projekció leszűkítése K_f-re. Nyilvánvaló, hogy μ olyan pozitív lineáris funkcionál $\mathscr{C}(K; \mathbb{R})$ felett, amely az azonosan 1 függvényhez az 1 értéket rendeli, tehát μ valószínűségi Radon-mérték K felett. Megmutatjuk, hogy μ olyan objektum, amelynek a létezését állítottuk.

Ha $u \in E'$, akkor az $\widehat{u} : E \times \mathbb{K} \to \mathbb{K};\ (x', t') \mapsto u(x')$ leképezés folytonos lineáris funkcionál $E \times \mathbb{K}$ felett, és nyilvánvalóan $\widehat{u}|_{K_f} = u \circ pr_1$. Ezért az $(x, \overline{f}(x)) = \mathbf{b}(\nu)$ egyenlőségből kapjuk, hogy

$$u_{\mathbb{R}}(x) = \widehat{u}_{\mathbb{R}}(x, \overline{f}(x)) = \widehat{u}_{\mathbb{R}}(\mathbf{b}(\nu)) = \nu\ \left(\widehat{u}_{\mathbb{R}}\right)|_{K_f}\ =$$

$$= \nu\left(\left((u_{\mathbb{R}})|_K\right) \circ pr_1\right) =: \mu\left((u_{\mathbb{R}})|_K\right) = u_{\mathbb{R}}(\mathbf{b}(\mu)),$$

tehát $x = \mathbf{b}(\mu)$, mert E' szétválasztó E felett.

Jelölje pr_2 az $E \times \mathbb{K} \to \mathbb{K}$ második projekció-függvényt. Ez folytonos lineáris funkcionál $E \times \mathbb{K}$ felett, ezért $(x, \overline{f}(x)) = \mathbf{b}(\nu)$ és $\overline{f}(x) \in \mathbb{R}$ miatt

$$\overline{f}(x) = pr_2(x, \overline{f}(x)) = (pr_2)_{\mathbb{R}}\,(x, \overline{f}(x)) = (pr_2)_{\mathbb{R}}\,(\mathbf{b}(\nu)) = \nu\ \ (pr_2)_{\mathbb{R}}\,|_{K_f}\ \ .$$

Ugyanakkor nyilvánvaló, hogy $pr_2|_{K_f} = (pr_2)_{\mathbb{R}}\,|_{K_f} = f \circ pr_1$ teljesül a $\mathrm{gr}(f)$ halmazon, hiszen ha $x \in K$, akkor $pr_2|_{K_f}\ \ (x, f(x)) = f(x) = (f \circ pr_1)(x, f(x))$. A $\mathrm{supp}(\nu) \subseteq \mathrm{gr}(f)$ tartalmazás miatt $\nu\ \ (pr_2)_{\mathbb{R}}\,|_{K_f}\ \ = \nu(f \circ pr_1) =: \mu(f)$, tehát $\overline{f}(x) = \overline{f}(\mathbf{b}(\mu)) = \mu(f)$. Az $\overline{f}$ függvény konkáv és felülről félig folytonos, ezért

$$\int^* \overline{f}\ d\mu \leq \overline{f}(\mathbf{b}(\mu)) = \mu(f) = \int^* f\ d\mu \leq \int^* \overline{f}\ d\mu,$$

így $\int^* f\,d\mu = \int^* \overline{f}\,d\mu$. Ebből az f alulról félig folytonossága és a szubtraktivitás-formula alapján kapjuk, hogy

$$\int^* (\overline{f} - f) d\mu = \int^* \overline{f}\,d\mu - \int^* f\,d\mu = 0.$$

Ugyanakkor $\chi_{[f \neq \overline{f}]} \leq \sup_{n \in \mathbb{N}} (n.(\overline{f} - f))$, ezért a felső integrál monoton σ-folytonossága és pozitív homogenitása miatt ebből

$$\mu^*([f \neq \overline{f}]) \leq \sup_{n \in \mathbb{N}} \left(n. \int^* (\overline{f} - f) d\mu \right) = 0$$

következik, vagyis $[f \neq \overline{f}]$ μ-nullahalmaz. ■

11.2.4. Lemma. *Ha K konvex halmaz az E szeparált topologikus vektortérben, és $f : K \to \mathbb{R}$ felülről korlátos, szigorúan konvex függvény, akkor $[f = \overline{f}] \subseteq \mathrm{Ext}(K)$.*

Bizonyítás. Legyen $x \in K \setminus \mathrm{Ext}(K)$. Ekkor léteznek olyan $x_1, x_2 \in K$ és $\alpha \in \mathbb{R}$, hogy $x_1 \neq x_2$, $0 < \alpha < 1$ és $x = (1-\alpha).x_1 + \alpha.x_2$. Az f szigorú konvexitása és az $\overline{f}$ konkavitása miatt

$$\begin{aligned} f(x) &= f\left((1-\alpha).x_1 + \alpha.x_2\right) < (1-\alpha) f(x_1) + \alpha f(x_2) \leq \\ &\leq (1-\alpha)\overline{f}(x_1) + \alpha \overline{f}(x_2) \leq \overline{f}\left((1-\alpha).x_1 + \alpha.x_2\right) = \overline{f}(x) \end{aligned}$$

teljesül, vagyis $x \in K \setminus [f = \overline{f}]$. ■

11.2.5. Jelölés. *Ha E topologikus vektortér és $K \subseteq E$ konvex halmaz, akkor $A(K)$ jelöli azon $f : K \to \mathbb{R}$ folytonos függvények halmazát, amelyekre teljesül az, hogy minden $x_1, x_2 \in K$ és $\alpha \in [0, 1]$ esetén*

$$f((1-\alpha).x_1 + \alpha.x_2) = (1-\alpha) f(x_1) + \alpha f(x_2).$$

Az $A(K)$ függvényhalmaz elemeit **folytonos affin függvényeknek** *nevezzük.*

11.2.6. Lemma. *Legyen E olyan topologikus vektortér, hogy E' szétválasztó E felett, és $K \subseteq E$ kompakt konvex halmaz. Ha létezik olyan $F \subseteq A(K)$ megszámlálható halmaz, amely szétválasztó K felett, akkor létezik $K \to \mathbb{R}$ szigorúan konvex folytonos függvény.*

Bizonyítás. Legyen $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ olyan sorozat $A(K)$-ban, hogy az $\{f_n | n \in \mathbb{N}\}$ halmaz szétválasztó K felett, vagyis minden $x, x' \in K$ ponthoz, ha $x \neq x'$, akkor létezik olyan $n \in \mathbb{N}$, hogy $f_n(x) \neq f_n(x')$. Legyen $(c_n)_{n \in \mathbb{N}}$ olyan valós számsorozat, hogy minden $n \in \mathbb{N}$ esetén $c_n > 0$ és a $\sum_{n \in \mathbb{N}} c_n$ sor konvergens $\mathbb{R}$-ben. Ha $n \in \mathbb{N}$, akkor minden $K \ni x_1, x_2$-ra és $\alpha \in [0, 1]$ valós számra

$$f_n^2\left((1-\alpha).x_1 + \alpha.x_2\right) = \left(f_n\left((1-\alpha).x_1 + \alpha.x_2\right)\right)^2 = \left((1-\alpha) f_n(x_1) + \alpha f_n(x_2)\right)^2 =$$

$$= (1-\alpha)^2 f_n^2(x_1) + 2(1-\alpha)\alpha f_n(x_1) f_n(x_2) + \alpha^2 f_n^2(x_2) =$$

$$=(1-\alpha) f_n^2(x_1) + \alpha f_n^2(x_2) - (1-\alpha)\alpha \left(f_n(x_1) - f_n(x_2)\right)^2 \leq (1-\alpha) f_n^2(x_1) + \alpha f_n^2(x_2),$$

amiből látszik, hogy az $f_n^2 : K \to \mathbb{R}$ függvény konvex. Legyen

$$f := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{c_n}{|||f_n^2\,||| + 1} . f_n^2.$$

A $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sorozat választása szerint a $\sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{c_n}{|||f_n^2\,||| + 1} . f_n^2$ függvénysor *normálisan konvergens* a K halmazon, tehát az $f : K \to \mathbb{R}$ függvény folytonos és az iméntiek alapján nyilvánvalóan konvex. Állítjuk, hogy az f függvény szigorúan konvex. Valóban, ha $x_1, x_2 \in K$ és $\alpha \in \mathbb{R}$ olyanok, hogy $x_1 \neq x_2$ és $0 < \alpha < 1$, akkor van olyan $m \in \mathbb{N}$, hogy $f_m(x_1) \neq f_m(x_2)$, tehát az előző egyenlőtlenség és $c_m > 0$ miatt

$$(1-\alpha) f(x_1) + \alpha f(x_2) - f\left((1-\alpha).x_1 + \alpha.x_2\right) =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{c_n}{|||f_n^2\,||| + 1} \left((1-\alpha) f_n^2(x_1) + \alpha f_n^2(x_2) - f_n^2\left((1-\alpha).x_1 + \alpha.x_2\right)\right) =$$

$$= (1-\alpha)\alpha \sum_{n=0}^{\infty} \frac{c_n}{|||f_n^2\,||| + 1} (f_n(x_1) - f_n(x_2))^2 \geq (1-\alpha)\alpha \frac{c_m}{|||f_m^2\,||| + 1} (f_m(x_1) - f_m(x_2))^2 > 0,$$

tehát $f\left((1-\alpha).x_1 + \alpha.x_2\right) < (1-\alpha) f(x_1) + \alpha f(x_2)$. ■

11.2.7. Lemma. *Ha E olyan topologikus vektortér, hogy E' szétválasztó E felett, és $K \subseteq E$ nem üres metrizálható kompakt konvex halmaz, akkor létezik $K \to \mathbb{R}$ szigorúan konvex folytonos függvény.*

Bizonyítás. Ekkor a $\mathscr{C}(K;\mathbb{R})$ vektortér a sup-normával ellátva *szeparábilis* Banach-tér (28.5.1.). Ebből következik, hogy az $A(K)$ vektortér a sup-normával ellátva szintén szeparábilis Banach-tér, tehát létezik olyan $F \subseteq A(K)$ megszámlálható halmaz, amely a sup-norma szerint sűrű. Ekkor F szétválasztó K felett, mert ha $x_1, x_2 \in K$ olyanok, hogy minden $f \in F$ esetén $f(x_1) = f(x_2)$, akkor minden $A(K) \ni f$-re fennáll az $f(x_1) = f(x_2)$ egyenlőség, így minden $u \in E'$ esetén $u_{\mathbb{R}}(x_1) = u_{\mathbb{R}}(x_2)$, vagyis $x_1 = x_2$, ugyanis E' szétválasztó E felett. ■

11.2.8. Tétel. (Choquet tétele metrizálható kompakt konvex halmazokra) *Legyen E olyan topologikus vektortér, hogy E' szétválasztó E felett, és $K \subseteq E$ metrizálható kompakt konvex halmaz. Minden $x \in K$ esetén létezik olyan μ valószínűségi Radon-mérték K felett, hogy $\mathbf{b}(\mu) = x$ és μ koncentrált az $\mathrm{Ext}(K)$ halmazon.*

Bizonyítás. Az előző lemma alapján létezik $f : K \to \mathbb{R}$ szigorúan konvex folytonos függvény. Ekkor $[f = \overline{f}] \subseteq \mathrm{Ext}(K)$ és $x \in K$ esetén van olyan μ valószínűségi Radon-mérték K felett, amelyre $x = \mathbf{b}(\mu)$ és μ koncentrált az $[f = \overline{f}]$ halmazon, vagyis μ koncentrált az $\mathrm{Ext}(K)$ halmazon is. ■

Hangsúlyozzuk, hogy a metrizálható kompakt konvex halmazokra vonatkozó Choquet-tételben a kompakt konvex halmaz *altértopológia* szerinti metrizálhatóságáról van szó; ekkor a halmazt tartalmazó topologikus vektortér lehet nem metrizálható. A tétel alkalmazásaiban éppen ez a tipikus eset. Például, ha E végtelen dimenziós szeparábilis normált tér és K a funkcionálnorma szerint zárt egységgömb E'-ben, akkor E' felett a $\sigma(E', E)$ topológia nem metrizálható, de K felett a $\sigma(E', E)|K$ altértopológia metrizálható.

11.2.9. Állítás. *Ha E olyan topologikus vektortér, hogy E' szétválasztó E felett, és $K \subseteq E$ metrizálható kompakt konvex halmaz, akkor az* $\mathrm{Ext}(K)$ *halmaz G_δ-halmaz a K kompakt térben.*

Bizonyítás. Tekintsük az

$$f : (K \times K) \times [0,1] \to K; \quad ((x,y),\lambda) \mapsto (1-\lambda).x + \lambda.y$$

folytonos függvényt. Az extremális pontok definíciója alapján

$$K \setminus \mathrm{Ext}(K) = f\langle((K \times K) \setminus \Delta_K) \times]0,1[\rangle,$$

ahol $\Delta_K := \{(x,x) | x \in K\}$. A K metrizálhatósága folytán a Δ_K halmaz G_δ-halmaz a $K \times K$ topologikus szorzattérben, következésképpen a

$$((K \times K) \setminus \Delta_K) \times]0,1[$$

halmaz F_σ-halmaz a $(K \times K) \times [0,1]$ topologikus szorzattérben. Ezért $K \setminus \mathrm{Ext}(K)$ előáll megszámlálható sok kompakt halmaz uniójaként, vagyis $\mathrm{Ext}(K)$ G_δ-halmaz a K topologikus térben. ■

Vigyázzunk arra, hogy az előző állítás feltételei mellett $\mathrm{Ext}(K)$ a K *altértopológiája* szerint G_δ-halmaz; ekkor lehetséges az, hogy K nem G_δ-halmaz E-ben.

12. fejezet

Kompakt konvex halmaz baricentrális felbontása

12.1. A baricentrum abszolút jellemzése

Legyen E olyan topologikus vektortér, hogy E' szétválasztó E felett, $K \subseteq E$ kompakt konvex halmaz, és μ valószínűségi Radon-mérték K felett. A definíció szerint a $\mathbf{b}(\mu)$ baricentrum az a pont K-ban, amelyre minden $u \in E'$ esetén $u_{\mathbb{R}}(\mathbf{b}(\mu)) = \mu((u_{\mathbb{R}})|_K)$. Ez azt jelenti, hogy a $\mathbf{b}(\mu) \in K$ pont (legalábbis formálisan) *függ* az E topologikus vektortértől, az E' topologikus duálison keresztül. Ezért pontosabb jelölés volna $\mathbf{b}(\mu)$ helyett például a $\mathbf{b}_{E'}(\mu)$ szimbólum. Előfordulhat az, hogy F is olyan topologikus vektortér, amelyre F' szétválasztó F felett, $K \subseteq F$, és K kompakt konvex halmaz F-ben is, így értelmezve van a $\mathbf{b}_{F'}(\mu)$ baricentrum is. Ugyanakkor E' és F' teljesen különböző objektumok lehetnek (például a dimenzióik sem egyenlők), ezért logikailag nem kizárt az, hogy $\mathbf{b}_{E'}(\mu) \neq \mathbf{b}_{F'}(\mu)$. A következőkben megadjuk a baricentrumok *abszolút* jellemzését, amelyből látható lesz, hogy ilyen esetben is fennáll a $\mathbf{b}_{E'}(\mu) = \mathbf{b}_{F'}(\mu)$ egyenlőség, vagyis a $\mathbf{b}(\mu)$ baricentrum valójában E-től is és E'-től *független*.

12.1.1. Jelölés. *Legyen K kompakt konvex halmaz az E szeparált topologikus vektortérben. A $K \to \mathbb{R}$ folytonos konvex függvények halmazát $S(K)$ jelöli, továbbá*

$$A(K, E') := \{ \ (c + u_{\mathbb{R}})|_K \mid (c \in \mathbb{R}) \wedge (u \in E') \ \}.$$

Nyilvánvaló, hogy $A(K, E') \subseteq A(K)$, és itt általában nincs egyenlőség, még akkor sem, ha E lokálisan konvex. Azonban $A(K, E')$ "elég nagy" részhalmaza $A(K)$-nak. A pontos állítás a következő.

12.1.2. Lemma. (Első Mokobodzki-lemma) *Ha E olyan topologikus vektortér, hogy E' szétválasztó E felett, és $K \subseteq E$ kompakt konvex halmaz, akkor $A(K, E')$ sűrű $A(K)$-ban a sup-norma szerint, vagyis minden $K \to \mathbb{R}$ folytonos affin függvény egyenletesen approximálható a K halmazon $A(K, E')$-beli függvényekkel.*

Bizonyítás. Legyen $f \in A(K)$ rögzített és $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ tetszőleges. Az f függvény korlátos; legyenek $C_-, C_+ \in \mathbb{R}$ olyanok, hogy minden $K \ni x$-re $C_- \leq f(x) < f(x) + \varepsilon \leq C_+$. Tekintsük az $\mathrm{epigr}(f + \varepsilon) \cap (K \times [C_-, C_+]) \subseteq E \times \mathbb{K}$ kompakt konvex, valamint a $\mathrm{subgr}(f) \cap (K \times [C_-, C_+]) \subseteq E \times \mathbb{K}$ kompakt konvex halmazokat, amelyek nem metszik egymást. A Hahn–Banach szétválasztási tétel alapján létezik olyan $v : E \times \mathbb{K} \to \mathbb{K}$ folytonos lineáris funkcionál és $\alpha \in \mathbb{R}$, hogy $\mathrm{epigr}(f + \varepsilon) \cap (K \times [C_-, C_+]) \subseteq [v_{\mathbb{R}} > \alpha]$ és $\mathrm{subgr}(f) \cap (K \times [C_-, C_+]) \subseteq [v_{\mathbb{R}} < \alpha]$. Van olyan $u \in E'$ és $\lambda \in \mathbb{K}$, hogy minden $K \times \mathbb{K} \ni (x', t')$-re $v(x', t') = u(x') + \lambda \cdot t'$, tehát $(x', t') \in K \times \mathbb{K}$ esetén $v_{\mathbb{R}}(x', t') = u_{\mathbb{R}}(x') + \beta t'$, ahol $\beta := \Re(\lambda)$. Ekkor minden $x \in K$ esetén $(x, f(x) + \varepsilon) \in [v_{\mathbb{R}} > \alpha]$ és $(x, f(x)) \in [v_{\mathbb{R}} < \alpha]$, vagyis

$$u_{\mathbb{R}}(x) + \beta(f(x) + \varepsilon) > \alpha,$$

$$u_{\mathbb{R}}(x) + \beta f(x) < \alpha.$$

Természetesen $K \neq \emptyset$ feltehető; ekkor a fenti egyenlőtlenségekből $\alpha > \alpha - \beta\varepsilon$, így $\beta > 0$ következik. Ezért a $g := ((\alpha - u_{\mathbb{R}})/\beta)|_K \in A(K, E')$ függvényre teljesül az, hogy minden $x \in K$ esetén

$$g(x) - \varepsilon < f(x) < g(x),$$

tehát az f és g távolsága kisebb-egyenlő ε-nál a sup-norma szerint. ■

12.1.3. Tétel. (A baricentrum abszolút jellemzése) *Legyen E olyan topologikus vektortér, hogy E' szétválasztó E felett, $K \subseteq E$ kompakt konvex halmaz, és μ valószínűségi Radon-mérték K felett. Ha $x \in K$, akkor $x = \mathbf{b}(\mu)$ pontosan akkor teljesül, ha minden $f \in A(K)$ esetén $f(x) = \mu(f)$.*

Bizonyítás. A feltétel *elégséges*, mert ha minden $f \in A(K)$ esetén $f(x) = \mu(f)$, akkor minden $E' \ni u$-ra $(u_{\mathbb{R}})|_K \in A(K, E')$ miatt $u_{\mathbb{R}}(x) = \mu\left((u_{\mathbb{R}})|_K\right)$, tehát a baricentrum definíciója alapján $x = \mathbf{b}(\mu)$, hiszen E' szétválasztó E felett.

A feltétel *szükségessége* az első Mokobodzki-lemmából következik. Ha ugyanis $f \in A(K)$, akkor az első Mokobodzki-lemma szerint van olyan $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sorozat $A(K, E')$-ben, amely f-hez egyenletesen konvergál a K halmazon. A baricentrum definíciója alapján minden $n \in \mathbb{N}$ esetén $f_n(x) = f_n(\mathbf{b}(\mu)) = \mu(f_n)$, tehát a kompakt terek feletti Radon-mértékek sup-norma szerinti folytonossága következtében

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x) = \lim_{n\to\infty} \mu(f_n) = \mu\left(\lim_{n\to\infty} f_n\right) = \mu(f). \ ■$$

12.1.4. Lemma. *Legyen E szeparált topologikus vektortér és $C \subseteq E \times \mathbb{K}$ olyan nem üres kompakt konvex halmaz, hogy $pr_2\langle C\rangle \subseteq \mathbb{R}$. Ekkor az*

$$f : pr_1\langle C\rangle \to \mathbb{R}; \quad x \mapsto \inf\{\ t \in \mathbb{R} \mid (x,t) \in C\ \}$$

függvény olyan felülről korlátos, alulról félig folytonos konvex függvény, amelyre $\mathrm{gr}(f) \subseteq C \subseteq \mathrm{epigr}(f)$.

Bizonyítás. Könnyen látható, hogy ha $x \in pr_1\langle C\rangle$, akkor a $\{t \in \mathbb{R}|(x,t) \in C\}$ halmaz nem üres kompakt intervallum $\mathbb{R}$-ben, tehát $f(x) \in \{t \in \mathbb{R}|(x,t) \in C\}$, vagyis $\mathrm{gr}(f) \subseteq C$. Az f definíciója alapján nyilvánvaló, hogy $C \subseteq \mathrm{epigr}(f)$.

Megmutatjuk, hogy az f függvény konvex. Legyenek $x_1, x_2 \in pr_1\langle C\rangle$ és $\alpha \in [0,1]$. Ha $t_1, t_2 \in \mathbb{R}$ olyanok, hogy $(x_1,t_1),(x_2,t_2) \in C$, akkor a C konvexitásából következik, hogy $(1-\alpha).(x_1,t_1) + \alpha.(x_2,t_2) \in C$, vagyis $((1-\alpha).x_1 + \alpha.x_2, (1-\alpha)t_1 + \alpha t_2) \in C$, így $f((1-\alpha).x_1 + \alpha.x_2) \leq (1-\alpha)t_1 + \alpha t_2$. Ebből kapjuk, hogy $f((1-\alpha)t_1 + \alpha t_2) \leq (1-\alpha)f(x_1) + \alpha f(x_2)$, vagyis f konvex függvény.

Megmutatjuk, hogy f alulról félig folytonos. Legyen $c \in \mathbb{R}$ és tekintsük az $[f \leq c]$ halmazt; azt kell igazolni, hogy ez zárt. Legyen $(x_i)_{i\in I}$ konvergens $[f \leq c]$-ben haladó általánosított sorozat, és $x := \lim\limits_{i,I} x_i$. Minden $i \in I$ esetén $(x_i, f(x_i)) \in \mathrm{gr}(f) \subseteq C$, ezért a C kompaktsága miatt létezik olyan J felfelé irányított előrendezett halmaz és olyan $\sigma : J \to I$ monoton növő függvény, hogy $\sigma\langle J\rangle$ kofinális I-vel és az $\quad x_{\sigma(j)}, f\ \ x_{\sigma(j)}\ \ _{j\in J}$ általánosított sorozat konvergens C-ben (vagyis az $E\times\mathbb{K}$ szorzattérben); legyen $(x', t') := \lim\limits_{j,J}\ \ x_{\sigma(j)}, f\ \ x_{\sigma(j)}$. Ekkor $x = \lim\limits_{i,I} x_i = \lim\limits_{j,J} x_{\sigma(j)} = x'$, tehát $(x,t') \in C \subseteq \mathrm{epigr}(f)$, ezért $f(x) \leq t'$. Ugyanakkor $t' = \lim\limits_{j,J} f\ \ x_{\sigma(j)}$, és minden $J \ni j$-re $f\ \ x_{\sigma(j)}\ \ \leq c$, tehát $t' \leq c$, így $x \in [f \leq c]$.

Végül, az f felülről korlátos is, mert a C kompatsága és $pr_2\langle C\rangle \subseteq \mathbb{R}$ miatt van olyan $c \in \mathbb{R}$, hogy $C \subseteq pr_1\langle C\rangle\times]\leftarrow, c]$, tehát minden $x \in pr_1\langle C\rangle$ esetén $f(x) \leq c$. ■

Megállapodunk abban, hogy ha K halmaz és $f, g : K \to \mathbb{R}$ függvénye, akkor azt írjuk, hogy "$f < g$", ha minden $x \in K$ esetén $f(x) < g(x)$; és ha $f < g$ teljesül, akkor azt mondjuk, hogy a g függvény *szigorúan majorálja* az f függvényt.

12.1.5. Lemma. (Második Mokobodzki-lemma) *Legyen E olyan topologikus vektortér, hogy E' szétválasztó E felett. Ha $K \subseteq E$ nem üres kompakt konvex halmaz és $f : K \to \mathbb{R}$ felülről félig folytonos konvex függvény, akkor*

$$f = \inf_{\substack{g\in S(K)\\ f<g}} g,$$

és a $\{g \in S(K)|f < g\}$ függvényhalmaz lefelé irányított.

Bizonyítás. (I) Először azt mutatjuk meg, hogy ha $h : K \to \mathbb{R}$ felülről korlátos, alulról félig folytonos konvex függvény és $f < h$, akkor létezik olyan $g \in S(K)$, hogy $f < g \leq h$.

Valóban, tudjuk, hogy $h = \sup\limits_{\substack{g \in A(K,E') \\ g \leq h}} g$, ezért minden $x \in K$ esetén $f(x) < h(x)$ miatt létezik olyan $g_x \in A(K, E')$, hogy $g_x \leq h$ és $f(x) < g_x(x)$, vagyis $x \in [f < g_x]$. Ha tehát $x \in K$, akkor az $[f < g_x]$ halmaz nyílt környezete x-nek, mert $[f < g_x] = [f - g_x < 0]$ és az $f - g_x$ függvény felülről félig folytonos. Ezért a K kompaktsága folytán létezik olyan $(x_i)_{i \in I}$ véges rendszer K-ban, hogy $K \subseteq \bigcup\limits_{i \in I} [f < g_{x_i}]$. Ekkor a $g := \sup\limits_{i \in I} g_{x_i}$ függvény eleme $S(K)$-nak (ez már nem feltétlenül affin függvény), és természetesen $g \leq h$, és ha $x \in K$, akkor van olyan $i \in I$, hogy $x \in [f < g_{x_i}]$, ezért $f(x) < g_{x_i}(x) \leq g(x)$, vagyis $f < g$.

(II) Most megmutatjuk, hogy ha $g_1, g_2 : K \to \mathbb{R}$ felülről korlátos, alulról félig folytonos konvex függvények és $f < g_1$, $f < g_2$, akkor létezik olyan $g : K \to \mathbb{R}$ felülről korlátos, alulról félig folytonos konvex függvény, hogy $g \leq g_1, g_2$ és $f < g$.

Valóban, legyen $c \in \mathbb{R}$ olyan, hogy $g_1, g_2 \leq c$, és képezzük a

$$G_1 := \{ \ (x,t) \in K \times \mathbb{R} \mid g_1(x) \leq t \leq c \ \},$$

$$G_2 := \{ \ (x,t) \in K \times \mathbb{R} \mid g_2(x) \leq t \leq c \ \}$$

halmazokat. Ezek kompakt konvex halmazok az $E \times \mathbb{K}$ topologikus lineáris szorzattérben, ezért a $\mathrm{co}(G_1 \cup G_2)$ halmaz is kompakt. Nyilvánvaló, hogy $pr_1\langle \mathrm{co}(G_1 \cup G_2) \rangle = K$ és $pr_2\langle \mathrm{co}(G_1 \cup G_2) \rangle \subseteq \mathbb{R}$. Most tekintsük a

$$g : K \to \mathbb{R}; \quad x \mapsto \inf\{ \ t \in \mathbb{R} \mid (x,t) \in \mathrm{co}(G_1 \cup G_2) \ \}$$

függvényt, amely az előző lemma alapján felülről korlátos, alulról félig folytonos, konvex és olyan, hogy $\mathrm{gr}(g) \subseteq \mathrm{co}(G_1 \cup G_2) \subseteq \mathrm{epigr}(f)$. Ha $x \in K$, akkor $(x, g_1(x)), (x, g_2(x)) \in \mathrm{co}(G_1 \cup G_2)$, tehát a g definíciója alapján $g(x) \leq g_1(x), g_2(x)$, vagyis $g \leq g_1, g_2$. Továbbá, $f < g$ is teljesül. Valóban, ha $x \in K$, akkor $(x, g(x)) \in \mathrm{co}(G_1 \cup G_2)$, vagyis léteznek olyan $x_1, x_2 \in K$, $t_1, t_2 \in \mathbb{R}$ és $\alpha \in [0,1]$, hogy

$$x = (1-\alpha).x_1 + \alpha.x_2,$$

$$g(x) = (1-\alpha)t_1 + \alpha t_2,$$

$$(x_1, t_1) \in G_1, \ (x_2, t_2) \in G_2 (\text{tehát } g_1(x) \leq t_1 \text{ és } g_2(x) \leq t_2).$$

Ekkor f konvexitása és $f < g_1$, $f < g_2$ miatt

$$f(x) \leq (1-\alpha)f(x_1) + \alpha f(x_2) < (1-\alpha)g_1(x_1) + \alpha g_2(x_2) \leq (1-\alpha)t_1 + \alpha t_2 = g(x),$$

vagyis $f(x) < g(x)$, ami azt jelenti, hogy g szigorúan majorálja az f függvényt.

(III) Az (I) és (II) alapján nyilvánvaló, hogy a $\{g \in S(K) | f < g\}$ függvényhalmaz lefelé irányított, hiszen ha $g_1, g_2 \in S(K)$ olyanok, hogy $f < g_1$ és $f < g_2$, akkor van olyan $g' : K \to \mathbb{R}$ felülről korlátos, alulról félig folytonos konvex függvény, hogy $g' \leq g_1, g_2$, és $f < g'$; ekkor az (I) alapján létezik olyan $g \in S(K)$, hogy $f < g \leq g'$, tehát $g \leq g_1, g_2$.

(IV) Az $f = \inf\limits_{\substack{g \in S(K) \\ f<g}} g$ egyenlőség bizonyításához legyen $x \in K$ és $t \in \mathbb{R}$ olyan, hogy $f(x) < t$. Olyan $g \in S(K)$ függvényt keresünk, amelyre $f < g$ és $g(x) \leq t$. Ehhez vegyünk olyan $c \in \mathbb{R}$ számot, hogy $t < c$ és $f < c$ a K halmazon, majd tekintsük az $\{(x,t)\}$ és $K \times \{c\}$ kompakt konvex halmazokat az $E \times \mathbb{K}$ topologikus lineáris szorzattérben. Nyilvánvaló, hogy a $\mathrm{co}\left(\{(x,t)\} \cup (K \times \{c\})\right)$ halmaz konvex és kompakt $E \times \mathbb{K}$-ban, és $K = pr_1\langle \mathrm{co}\left(\{(x,t)\} \cup (K \times \{c\})\right)\rangle$, valamint $pr_2\langle \mathrm{co}\left(\{(x,t)\} \cup (K \times \{c\})\right)\rangle \subseteq \mathbb{R}$, ezért az előző lemma alapján a

$$h : K \to \mathbb{R}; \quad x \mapsto \inf\{\, t \in \mathbb{R} \mid (x,t) \in \mathrm{co}\left(\{(x,t)\} \cup (K \times \{c\})\right) \,\}$$

függvény felülről korlátos, alulról félig folytonos, konvex, valamint teljesül az, hogy $\mathrm{gr}(h) \subseteq \mathrm{co}\left(\{(x,t)\} \cup (K \times \{c\})\right) \subseteq \mathrm{epigr}(h)$. A definíció alapján nyilvánvaló, hogy $h(x) \leq t$. Továbbá, a h függvény szigorúan majorálja az f függvényt. Valóban, legyen $x' \in K$ tetszőleges. Ekkor $(x', h(x')) \in \mathrm{co}\left(\{(x,t)\} \cup (K \times \{c\})\right)$, tehát van olyan $\alpha \in [0,1]$ és $y \in K$, hogy $x' = (1-\alpha).x + \alpha.y$ és $h(x') = (1-\alpha)t + \alpha c$. Az f konvexitása és $f(x) < t$, $f(y) < c$ miatt

$$f(x') = f\left((1-\alpha).x + \alpha.y\right) \leq (1-\alpha)f(x) + \alpha f(y) < (1-\alpha)t + \alpha c = h(x'),$$

vagyis h szigorúan majorálja az f függvényt. A (II) szerint van olyan $g \in S(K)$, hogy $f < g \leq h$. Ekkor $g(x) \leq h(x) \leq t$ automatikusan teljesül. ■

12.1.6. Következmény. *Legyen E olyan topologikus vektortér, hogy E' szétválasztó E felett, $K \subseteq E$ nem üres kompakt konvex halmaz, és μ valószínűségi Radon-mérték K felett.*

a) *Ha $f : K \to \mathbb{R}_+$ felülről félig folytonos konvex függvény vagy korlátos alulról félig folytonos konvex függvény, akkor $f(\mathbf{b}(\mu)) \leq \int^* f \, d\mu$.*

b) *Ha $f : K \to \mathbb{R}_+$ alulról vagy felülről félig folytonos konkáv függvény, akkor $f(\mathbf{b}(\mu)) \geq \int^* f \, d\mu$.*

c) *Ha $f : K \to \mathbb{R}_+$ felülről félig folytonos affin függvény vagy korlátos alulról félig folytonos affin függvény, akkor $f(\mathbf{b}(\mu)) = \int^* f \, d\mu$.*

Bizonyítás. a) 10.4.3.-ban bebizonyítottuk az állítást arra az esetre, amikor f korlátos alulról félig folytonos konvex függvény. Ha f konvex és felülről félig folytonos, akkor a második Mokobodzki-lemma alapján $f = \inf\limits_{\substack{g\in S(K)\\ f<g}} g$, és a $\{g \in S(K) |\ f < g\}$ halmaz lefelé irányított. Ekkor

$$\int^* f\ d\mu = \inf_{\substack{g\in S(K)\\ f<g}} \int^* g\ d\mu = \inf_{\substack{g\in S(K)\\ f<g}} \mu(g),$$

és minden $g \in S(K)$ pozitív függvényre $g(\mathbf{b}(\mu)) \leq \int^* g\ d\mu = \mu(g)$, tehát

$$f(\mathbf{b}(\mu)) = \inf_{\substack{g\in S(K)\\ f<g}} g(\mathbf{b}(\mu)) \leq \inf_{\substack{g\in S(K)\\ f<g}} \mu(g) = \int^* f\ d\mu.$$

b) 10.4.4.-ben bebizonyítottuk az állítást arra az esetre, amikor f felülről félig folytonos konkáv függvény. Tegyük fel, hogy f konkáv, alulról félig folytonos, és *felülről korlátos.* Legyen $c \in \mathbb{R}$ olyan, hogy $f \leq c$. Ekkor $c - f : K \to \mathbb{R}_+$ felülről félig folytonos konvex függvény, tehát az a) és a szubtraktivitás-formula alapján

$$c - f(\mathbf{b}(\mu)) = (c - f)(\mathbf{b}(\mu)) \leq \int^* (c - f) d\mu = c - \int^* f\ d\mu,$$

tehát $\int^* f\ d\mu \leq f(\mathbf{b}(\mu))$. Ha f tetszőleges (nem szükségképpen felülről korlátos) alulról félig folytonos konkáv függvény, akkor az előzőek és a felső integrál monoton σ-folytonossága miatt

$$\int^* f\ d\mu = \sup_{n\in\mathbb{N}} \int^* \inf(n, f) d\mu \leq \sup_{n\in\mathbb{N}} \left(\inf(n, f)\right)(\mathbf{b}(\mu)) = f(\mathbf{b}(\mu)),$$

hiszen minden $\mathbb{N} \ni n$-re $\inf(n, f)$ korlátos alulról félig folytonos konkáv függvény.

c) Nyilvánvalóan következik az a) és b) állításokból. ■

12.2. Extremális halmazok

12.2.1. Definíció. *Ha E olyan topologikus vektortér, hogy E' szétválasztó E felett és $K \subseteq E$ kompakt konvex halmaz, akkor egy $F \subseteq K$ halmazt* **extremálisnak** *nevezzük, ha $F \neq \emptyset$, F zárt és minden K feletti μ valószínűségi Radon-mértékre, ha $\mathbf{b}(\mu) \in F$, akkor* $\mathrm{supp}(\mu) \subseteq F$.

12.2.2. Lemma. *Legyen E olyan topologikus vektortér, hogy E' szétválasztó E felett, $K \subseteq E$ kompakt konvex halmaz, $F \subseteq K$ extremális halmaz és $f : K \to \mathbb{R}$ alulról félig folytonos konkáv függvény. Ekkor az*

$$F_f := \left. x \in F \ \right| f(x) = \inf_{x'\in F} f(x')$$

halmaz szintén extremális halmaz.

Bizonyítás. Kompakt tér felett alulról félig folytonos valós függvény alulról korlátos, továbbá világos, hogy $c \in \mathbb{R}$ esetén $F_{f-c} = F_f$, ezért feltehető, hogy $f \geq 0$.

Az $f|_F : F \to \mathbb{R}$ függvény alulról félig folytonos az F kompakt altéren, ezért $F \neq \emptyset$ miatt $F_f \neq \emptyset$ (27.4.3.), és F_f zárt halmaz F-ben, mivel $F_f = \ \ f|_F \leq \inf\limits_{x' \in F} f(x') \ \ $. Tehát F_f zárt K-ban is.

Legyen μ olyan valószínűségi Radon-mérték K felett, hogy $\mathbf{b}(\mu) \in F_f$; azt kell megmutatni, hogy $\mathrm{supp}(\mu) \subseteq F_f$, vagyis $K \setminus F_f$ μ-nullahalmaz. Az F halmaz extremális és $\mathbf{b}(\mu) \in F_f \subseteq F$, ezért $\mathrm{supp}(\mu) \subseteq F$ igaz, vagyis $K \setminus F$ μ-nullahalmaz. Ugyanakkor $K \setminus F_f = (K \setminus F) \cup (F \setminus F_f)$, ezért elég azt igazolni, hogy $F \setminus F_f$ μ-nullahalmaz.

A definíció szerint $F \subseteq \ \ f \geq \inf\limits_{x' \in F} f(x') \ \ $ és $F_f = F \cap \ \ f = \inf\limits_{x' \in F} f(x') \ \ $, tehát $F \setminus F_f \subseteq F \cap \ \ f > \inf\limits_{x' \in F} f(x') \ \ $. Ezért elég azt megmutatni, hogy az $F \cap \ \ f > \inf\limits_{x' \in F} f(x') \ \ $ halmaz μ-nullahalmaz. Az F halmaz zártsága miatt a $\chi_F . \inf\limits_{x' \in F} f(x') : K \to \mathbb{R}$ függvény felülről félig folytonos, és természetesen $\chi_F . f \geq \chi_F . \inf\limits_{x' \in F} f(x')$, ezért a szubtraktivitás-formula alapján

$$\int^* \ \ \chi_F . f - \chi_F . \inf_{x' \in F} f(x') \ \ d\mu = \int^* \chi_F . f \, d\mu - \int^* \ \ \chi_F . \inf_{x' \in F} f(x') \ \ d\mu =$$

$$= \int^* \chi_F . f \, d\mu - \inf_{x' \in F} f(x'),$$

mert $[f \neq \chi_F . f]$ μ-nullahalmaz és $\mu^*(F) = 1$. Az f alulról félig folytonos és konkáv, ezért $\mathbf{b}(\mu) \in F_f$ miatt

$$\inf_{x' \in F} f(x') = f(\mathbf{b}(\mu)) \geq \int^* f \, d\mu,$$

tehát az előzőek szerint

$$\int^* \ \ \chi_F . f - \chi_F . \inf_{x' \in F} f(x') \ \ d\mu = 0,$$

vagyis $\ \ \chi_F . f \neq \chi_F . \inf\limits_{x' \in F} f(x') \ \ $ μ-nullahalmaz. Ugyanakkor

$$F \cap \ \ f > \inf_{x' \in F} f(x') \ \ \subseteq \ \ \chi_F . f \neq \chi_F . \inf_{x' \in F} f(x') \ \ ,$$

ezért az $F \cap \ \ f > \inf\limits_{x' \in F} f(x') \ \ $ halmaz μ-nullahalmaz. ■

12.2.3. Állítás. *Legyen E olyan topologikus vektortér, hogy E' szétválasztó E felett és $K \subseteq E$ kompakt konvex halmaz.*

a) *Ha $(F_i)_{i\in I}$ olyan nem üres halmazrendszer, hogy minden $I \ni i$-re F_i extremális halmaz K-ban és $\bigcap_{i\in I} F_i \neq \emptyset$, akkor $\bigcap_{i\in I} F_i$ is extremális halmaz K-ban.*

b) *Ha $F \subseteq K$ tartalmazás tekintetében minimális extremális halmaz, akkor az F halmaz egy elemű.*

c) *Minden $F \subseteq K$ extremális halmazhoz létezik olyan $x \in K$ extremális pont, amelyre $x \in F$.*

Bizonyítás. a) A $\bigcap_{i\in I} F_i$ halmaz zárt és a feltevés szerint nem üres. Ha μ olyan valószínűségi Radon-mérték K felett, hogy $\mathbf{b}(\mu) \in \bigcap_{i\in I} F_i$, akkor minden $I \ni i$-re $\mathbf{b}(\mu) \in F_i$, tehát $\mathrm{supp}(\mu) \subseteq F_i$, így $\mathrm{supp}(\mu) \subseteq \bigcap_{i\in I} F_i$, vagyis $\bigcap_{i\in I} F_i$ is extremális halmaz.

b) Legyen $F \subseteq K$ legalább két elemű extremális halmaz; megmutatjuk, hogy F a tartalmazás tekintetében *nem minimális* extremális halmaz. Legyenek $x_1, x_2 \in F$ olyanok, hogy $x_1 \neq x_2$, és vegyünk olyan $u \in E'$ funkcionált, amelyre $u_{\mathbb{R}}(x_1) \neq u_{\mathbb{R}}(x_2)$. Az $f := (u_{\mathbb{R}})|_K : K \to \mathbb{R}$ függvény alulról félig folytonos és konkáv (valójában folytonos és affin), tehát az előző lemma alapján az

$$F_f := \left\{ x \in F \;\middle|\; f(x) = \inf_{x' \in F} f(x') \right\}$$

halmaz extremális. Ugyanakkor $F_f \subseteq F$ és $F_f \neq F$, különben f konstansfüggvény volna F-en, holott $f(x_1) \neq f(x_2)$. Tehát F a tartalmazás tekintetében nem minimális extremális halmaz K-ban.

c) Legyen $F \subseteq K$ extremális halmaz és $\mathscr{F}$ az F által tartalmazott extremális halmazok halmaza. Az $\mathscr{F}$ halmazt a $\supseteq$ relációval rendezzük. Ekkor $\mathscr{F}$ *induktívan rendezett* halmaz, mert ha $(F_i)_{i\in I}$ olyan nem üres rendszer $\mathscr{F}$-ben, hogy minden $I \ni i, j$-re $F_i \supseteq F_j$ vagy $F_j \supseteq F_i$, akkor a K kompaktsága és a Cantor-féle közösrész-tétel alapján $\bigcap_{i\in I} F_i \neq \emptyset$, így az a) szerint $\bigcap_{i\in I} F_i$ extremális halmaz K-ban, tehát ez olyan eleme $\mathscr{F}$-nek, amely felső korlátja (sőt szuprémuma) az $(F_i)_{i\in I}$ rendszernek. A Kuratowski–Zorn-lemma alkalmazásával vehetünk olyan $X \in \mathscr{F}$ elemet, amely maximális az $\mathscr{F}$ rendezett halmazban. Ekkor X a tartalmazás tekintetében minimális extremális halmaz K-ban, tehát a b) alapján van olyan $x \in K$, hogy $X = \{x\}$. Ebből következik, hogy $x \in \mathrm{Ext}(K)$ és $x \in X \subseteq F$. ∎

12.3. Az extremális pontok mértékelméleti jellemzése

Most megadjuk a kompakt konvex halmazok extremális pontjainak mértékelméleti jellemzését.

12.3.1. Állítás. *Legyen E olyan topologikus vektortér, hogy E' szétválasztó E felett, $K \subseteq E$ kompakt konvex halmaz, és $x \in K$.*

a) *Ha ε_x az egyetlen olyan valószínűségi Radon-mérték K felett, amelynek a baricentruma egyenlő x-szel, akkor $x \in \mathrm{Ext}(K)$.*

b) *Megfordítva, ha E lokálisan konvex és $x \in \mathrm{Ext}(K)$, akkor ε_x az egyetlen olyan valószínűségi Radon-mérték K felett, amelynek a baricentruma egyenlő x-szel.*

Bizonyítás. a) Tegyük fel, hogy $x \in K \setminus \mathrm{Ext}(K)$. Ekkor léteznek olyan $x_1, x_2 \in K$ és $\alpha \in \mathbb{R}$, hogy $x_1 \neq x_2$, $0 < \alpha < 1$ és $x = (1-\alpha).x_1 + \alpha.x_2$. Világos, hogy a $\mu := (1-\alpha).\varepsilon_{x_1} + \alpha.\varepsilon_{x_2}$ valószínűségi Radon-mértékre

$$\mathbf{b}(\mu) = (1-\alpha)\mathbf{b}(\varepsilon_{x_1}) + \alpha.\mathbf{b}(\varepsilon_{x_2}) = (1-\alpha).x_1 + \alpha.x_2 = x$$

teljesül és $\mu \neq \varepsilon_x$, mert $\{x, x_1, x_2\}$ három elemű halmaz (hiszen $0 < \alpha < 1$), tehát, ha $\varphi \in \mathscr{C}(T;\mathbb{R})$ olyan, hogy $\varphi(x_2) = 1$ és $\varphi(x) = \varphi(x_1) = 0$, akkor $\mu(\varphi) = \alpha > 0$ és $\varepsilon_x(\varphi) = \varphi(x) = 0$.

b) Tegyük fel, hogy E lokálisan konvex és μ olyan valószínűségi Radon-mérték K felett, hogy $\mathbf{b}(\mu) = x$ és $\mu \neq \varepsilon_x$; megmutatjuk, hogy ekkor $x \in K \setminus \mathrm{Ext}(K)$.

A $\mu \neq \varepsilon_x$ egyenlőség miatt van olyan $x' \in \mathrm{supp}(\mu)$, hogy $x \neq x'$. Az E szeparált lokálisan konvex tér, ezért létezik x'-nek olyan V *zárt konvex* környezete E-ben, hogy $x \notin V$. Ekkor a $K \cap \overset{\circ}{V}$ halmaz nyílt környezete x'-nek K-ban és $x' \in \mathrm{supp}(\mu)$, ezért $\mu^*(K \cap \overset{\circ}{V}) > 0$, következésképpen

$$0 < \int^* \chi_{K\cap\overset{\circ}{V}}\, d\mu = \sup_{\substack{\varphi\in\mathscr{C}(K;\mathbb{R})\\ 0\leq\varphi\leq\chi_{K\cap\overset{\circ}{V}}}} \mu(\varphi).$$

Ezért van olyan $\varphi' \in \mathscr{C}(K;\mathbb{R})$, hogy $0 \leq \varphi' \leq \chi_{K\cap\overset{\circ}{V}}$ és $\mu(\varphi') > 0$. Ha $c > 1$ tetszőleges valós szám és $\varphi := \dfrac{\varphi'}{c\mu(\varphi')}$, akkor $\varphi \in \mathscr{C}(K;\mathbb{R})$, $\varphi \geq 0$, $\mu(\varphi) \in]0,1[$ és $\mathrm{supp}(\varphi) = \mathrm{supp}(\varphi') \subseteq \overline{K \cap \overset{\circ}{V}} \subseteq K \cap V$. Értelmezzük a

$$\mu_1 : \mathscr{C}(K;\mathbb{R}) \to \mathbb{R}; \quad \psi \mapsto \frac{\mu((1-\varphi)\psi)}{1-\mu(\varphi)},$$

$$\mu_2 : \mathscr{C}(K;\mathbb{R}) \to \mathbb{R}; \quad \psi \mapsto \frac{\mu(\varphi\psi)}{\mu(\varphi)}$$

leképezéseket. Ezek pozitív lineáris funkcionálok $\mathscr{C}(K;\mathbb{R})$ felett és az azonosan 1 függvényhez az 1 értéket rendelik, tehát $\mu_1, \mu_2 \in \mathscr{M}^1_+(K)$. Nyilvánvaló, hogy $\mu = (1-\mu(\varphi)).\mu_1 + \mu(\varphi).\mu_2$, ezért

$$x = \mathbf{b}(\mu) = (1-\mu(\varphi)).\mathbf{b}(\mu_1) + \mu(\varphi).\mathbf{b}(\mu_2).$$

Továbbá nyilvánvaló, hogy

$$\mathbf{b}(\mu_2) \in \overline{\mathrm{co}(\mathrm{supp}(\mu_2))} \subseteq \overline{\mathrm{co}(\mathrm{supp}(\varphi) \cap \mathrm{supp}(\mu_2))} \subseteq$$

$$\subseteq \overline{\mathrm{co}(\mathrm{supp}(\varphi))} \subseteq \overline{\mathrm{co}(K \cap V)} = K \cap V,$$

tehát $\mathbf{b}(\mu_2) \in V$. Ebből következik, hogy $\mathbf{b}(\mu_1) = \mathbf{b}(\mu_2)$ lehetetlen, különben ez a közös érték x volna és $x \notin V$. Ezért $x \in K \setminus \mathrm{Ext}(K)$. ■

12.3.2. Következmény. *Legyen E olyan topologikus vektortér, hogy E' szétválasztó E felett, $K \subseteq E$ kompakt konvex halmaz, és $x \in K$. Ha $\{x\}$ extremális halmaz, akkor $x \in \mathrm{Ext}(K)$. Megfordítva, ha E lokálisan konvex és $x \in \mathrm{Ext}(K)$, akkor $\{x\}$ extremális halmaz.*

Bizonyítás. Tegyük fel, hogy $\{x\}$ extremális halmaz. Minden $\mu \in \mathscr{M}^1_+(K)$ esetén, ha $x = \mathbf{b}(\mu)$, akkor $\mathbf{b}(\mu) \subseteq \{x\}$, tehát $\mathrm{supp}(\mu) \subseteq \{x\}$, így $\mu = \varepsilon_x$. Ekkor az előző állítás alapján $x \in \mathrm{Ext}(K)$.

Megfordítva, tegyük fel, hogy E lokálisan konvex és $x \in \mathrm{Ext}(K)$. Ha $\mu \in \mathscr{M}^1_+(K)$ olyan, hogy $\mathbf{b}(\mu) \subseteq \{x\}$, akkor $\mathbf{b}(\mu) = x$, tehát az előző állítás szerint $\mu = \varepsilon_x$, így $\mathrm{supp}(\mu) = \{x\}$, vagyis $\{x\}$ extremális halmaz. ■

12.4. A Bauer-féle maximum-minimum elv

12.4.1. Tétel. (Bauer-féle maximum-minimum elv) *Legyen E olyan topologikus vektortér, hogy E' szétválasztó E felett, $K \subseteq E$ kompakt konvex halmaz, és $f : K \to \mathbb{R}$ alulról félig folytonos konkáv (illetve felülről félig folytonos konvex) függvény. Ha $c \in \mathbb{R}$ olyan, hogy $\mathrm{Ext}(K) \subseteq [c \leq f]$ (illetve $\mathrm{Ext}(K) \subseteq [f \leq c]$), akkor $c \leq f$ (illetve $f \leq c$) teljesül a K halmazon.*

Bizonyítás. Feltehető, hogy $K \neq \emptyset$; ekkor K extremális halmaz K-ban. Legyen $f : K \to \mathbb{R}$ alulról félig folytonos konkáv függvény és

$$K_f := \left\{ x \in K \,\middle|\, f(x) = \inf_{x' \in K} f(x') \right\}.$$

Az előző lemma szerint K_f is extremális halmaz K-ban, így az iménti állítás c) pontja alapján van olyan $x \in \mathrm{Ext}(K)$, hogy $x \in K_f$, így az $\mathrm{Ext}(K) \subseteq [c \leq f]$ hipotézis miatt

$c \leq f(x) = \inf_{x' \in K} f(x')$, ezért $c \leq f$ a K halmazon.

A felülről félig folytonos konvex függvényekre vonatkozó állítás ebből úgy kapható, hogy f-ről áttérünk a $-f$ függvényre. ■

12.4.2. Következmény. (Krein–Milman-tétel) *Ha E olyan topologikus vektortér, hogy E' szétválasztó E felett és $K \subseteq E$ kompakt konvex halmaz, akkor*

$$K = \overline{\mathrm{co}(\mathrm{Ext}(K))}.$$

Bizonyítás. Az állítás igaz, ha $K = \emptyset$. Tegyük fel, hogy $K \neq \emptyset$ és indirekt tegyük fel, hogy $\overline{\mathrm{co}(\mathrm{Ext}(K))} \neq K$. Legyen $x \in K \setminus \overline{\mathrm{co}(\mathrm{Ext}(K))}$ rögzített. A Hahn–Banach szétválasztási tétel alapján van olyan $u \in E'$ és $\alpha \in \mathbb{R}$, hogy $\{x\} \subseteq [u_{\mathbb{R}} < \alpha]$ és $\overline{\mathrm{co}(\mathrm{Ext}(K))} \subseteq [u_{\mathbb{R}} > \alpha]$. Ekkor az $(u_{\mathbb{R}})|_K : K \to \mathbb{R}$ függvény folytonos és affin (tehát alulról félig folytonos és konkáv), továbbá $\mathrm{Ext}(K) \subseteq [(u_{\mathbb{R}})|_K > \alpha]$, így a Bauer-féle minimum-elv alapján $K = [(u_{\mathbb{R}})|_K > \alpha]$, holott $u_{\mathbb{R}}(x) < \alpha$, ami ellentmondás. ■

12.5. Choquet-rendezés a valószínűségi Radon-mértékek halmazán

Legyen T kompakt tér és a $\mathscr{C}(T;\mathbb{R})$ függvényteret lássuk el a sup-normával. A $\mathscr{C}(T;\mathbb{R})'$ duálison megadható egy természetes rendezés: azt írjuk, hogy $\mu, \nu \in \mathscr{C}(T;\mathbb{R})'$ esetén $\mu \leq \nu$, ha minden $\varphi \in \mathscr{C}(T;\mathbb{R})$ függvényre, $\varphi \geq 0$ esetén $\mu(\varphi) \leq \nu(\varphi)$. Ez a rendezés abban az értelemben összhangban van a $\mathscr{C}(T;\mathbb{R})'$ topologikus duális vektortér-struktúrájával, hogy ha $\mu, \nu \in \mathscr{C}(T;\mathbb{R})'$ és $\mu \leq \nu$, akkor minden $\rho \in \mathscr{C}(T;\mathbb{R})'$ és $\alpha \in \mathbb{R}_+$ esetén $\mu + \rho \leq \nu + \rho$ és $\alpha.\mu \leq \alpha.\nu$.

Ha T kompakt tér, akkor $\mathscr{M}^1_+(T) \subseteq \mathscr{C}(T;\mathbb{R})'$, és a $\mathscr{C}(T;\mathbb{R})'$ feletti természetes rendezés $\mathscr{M}^1_+(T)$-re vett leszűkítése megegyezik az $=$ relációval (vagyis triviális). Valóban, legyenek $\mu, \nu \in \mathscr{M}^1_+(T)$ és tegyük fel, hogy $\mu \leq \nu$. Minden $\varphi \in \mathscr{C}(T;\mathbb{R})$ esetén van olyan $c \in \mathbb{R}$, hogy $c \leq \varphi$, tehát $\mu(\varphi) - c = \mu(\varphi - c) \leq \nu(\varphi - c) = \nu(\varphi) - c$, vagyis $\mu(\varphi) \leq \nu(\varphi)$. Ha $\varphi \in \mathscr{C}(T;\mathbb{R})$, akkor $-\varphi \in \mathscr{C}(T;\mathbb{R})$, tehát $\mu(-\varphi) \leq \nu(-\varphi)$, vagyis $\nu(\varphi) \leq \mu(\varphi)$; következésképpen $\mu = \nu$.

12.5.1. Definíció. *Legyen K kompakt konvex halmaz az E szeparált topologikus vektortérben és $\mu, \nu \in \mathscr{M}^1_+(K)$. Azt írjuk, hogy $\mu \preceq \nu$, ha minden $f \in S(K)$ esetén $\mu(f) \leq \nu(f)$. Az $\mathscr{M}^1_+(K)$ feletti $\preceq$ relációt* **Choquet-rendezésnek** *nevezzük.*

Nyilvánvaló, hogy a Choquet-rendezés reflexív és tranzitív reláció, de az antiszimmetrikussága egyáltalán nem triviális.

12.5.2. Állítás. *Legyen E olyan topologikus vektortér, hogy E' szétválasztó E felett. Ha $K \subseteq E$ kompakt konvex halmaz, akkor az $\mathscr{M}_+^1(K)$ feletti $\preceq$ reláció rendezés az $\mathscr{M}_+^1(K)$ halmaz felett.*

Bizonyítás. A $\preceq$ reláció antiszimmetrikusságát kell igazolni. Legyenek $\mu, \nu \in \mathscr{M}_+^1(K)$ olyanok, hogy $\mu \preceq \nu$ és $\nu \preceq \mu$. Ekkor minden $f \in S(K)$ esetén $\mu(f) = \nu(f)$, ezért az $S(K) - S(K)$ függvényhalmaz minden f elemére szintén teljesül a $\mu(f) = \nu(f)$ egyenlőség. Ezért a K feletti Radon-mértékek sup-normában való folytonossága alapján elegendő volna azt igazolni, hogy az $S(K)-S(K)$ halmaz a sup-normában sűrű $\mathscr{C}(K;\mathbb{R})$-ben.

Az $S(K) - S(K)$ halmaz nyilvánvalóan lineáris altér $\mathscr{C}(K;\mathbb{R})$-ben, és a Hahn–Banach tétel alapján szétválasztó K felett, hiszen már $A(K, E')$ is szétválasztó K felett és $A(K, E') \subseteq A(K) \subseteq S(K) \subseteq S(K) - S(K)$. Ezért a Stone-tétel alapján elég azt megmutatni, hogy $S(K) - S(K)$ *lineáris függvényháló* K felett (28.3.3.). Legyenek $f_1, f_2, g_1, g_2 \in S(K)$; ekkor

$$\sup(f_1 - f_2, g_1 - g_2) = \sup\left((f_1 - f_2) + (f_2 + g_2), (g_1 - g_2) + (f_2 + g_2)\right) - (f_2 + g_2)$$

$$= \sup(f_1 + g_2, g_1 + f_2) - (f_2 + g_2) \in S(K) - S(K),$$

tehát $S(K)-S(K)$ zárt a véges felsőburkoló-képzésre nézve, vagyis lineáris függvényháló K felett. ■

12.5.3. Állítás. *Legyen E olyan topologikus vektortér, hogy E' szétválasztó E felett és $K \subseteq E$ kompakt konvex halmaz.*

a) *Ha a $\mu, \nu \in \mathscr{M}_+^1(K)$ Radon-mértékek összehasonlíthatók a Choquet-rendezés szerint, akkor $\mathbf{b}(\mu) = \mathbf{b}(\nu)$.*

b) *Ha $x \in K$ és ε_x maximális elem $\mathscr{M}_+^1(K)$-ban a Choquet-rendezés szerint, akkor $x \in \mathrm{Ext}(K)$. Megfordítva, ha E lokálisan konvex és $x \in \mathrm{Ext}(K)$, akkor ε_x maximális elem $\mathscr{M}_+^1(K)$-ban a Choquet-rendezés szerint.*

c) *Minden $\nu \in \mathscr{M}_+^1(K)$ esetén létezik olyan $\mu \in \mathscr{M}_+^1(K)$, hogy $\nu \preceq \mu$ és μ maximális elem $\mathscr{M}_+^1(K)$-ban a Choquet-rendezés szerint.*

Bizonyítás. a) Ha $\mu, \nu \in \mathscr{M}_+^1(K)$ és $\mu \preceq \nu$, akkor minden $S(K) \ni f$-re $\mu(f) \leq \nu(f)$, ezért minden $f \in A(K)$ esetén $\mu(f) \leq \nu(f)$ és $-f \in A(K)$ miatt $\mu(-f) \leq \nu(-f)$, vagyis $\mu(f) \geq \nu(f)$. Tehát, ha a K feletti μ és ν valószínűségi Radon-mértékek összehaszonlíthatók, akkor minden $f \in A(K)$ esetén $\mu(f) = \nu(f)$, így a baricentrum abszolút jellemzése alapján $f(\mathbf{b}(\mu)) = \mu(f) = \nu(f) = f(\mathbf{b}(\nu))$, tehát $\mathbf{b}(\mu) = \mathbf{b}(\nu)$, hiszen $A(K)$ szétválasztó K felett.

b) Legyen ε_x maximális elem $\mathscr{M}_+^1(K)$-ban a Choquet-rendezés szerint, és $\mu \in \mathscr{M}_+^1(K)$ olyan, hogy $\mathbf{b}(\mu) = x$. Ekkor minden $S(K) \ni f$-re, ha $f \geq 0$, akkor $\varepsilon_x(f) = f(x) =$

$f(\mathbf{b}(\mu)) \leq \int^* f\, d\mu = \mu(f)$. Ha $f \in S(K)$ tetszőleges és $c \in \mathbb{R}$ olyan, hogy $c \leq f$, akkor $f - c \in S(K)$ pozitív függvény, tehát az előzőek alapján $f(x) - c = (f - c)(x) \leq \mu(f - c) = \mu(f) - c$, vagyis $\varepsilon_x(f) = f(x) \leq \mu(f)$. Ez azt jelenti, hogy $\varepsilon_x \preceq \mu$, így a μ maximalitása folytán $\varepsilon_x = \mu$. Ebből az extremális pontok mértékelméleti jellemzése alapján következik, hogy $x \in \mathrm{Ext}(K)$.

Megfordítva, legyen E lokálisan konvex, $x \in \mathrm{Ext}(K)$ és $\mu \in \mathscr{M}_+^1(K)$ olyan, hogy $\varepsilon_x \preceq \mu$. Ekkor az a) alapján $x = \mathbf{b}(\varepsilon_x) = \mathbf{b}(\mu)$, tehát az extremális pontok mértékelméleti jellemzése alapján $\varepsilon_x = \mu$, így ε_x maximális a Choquet-rendezés szerint.

c) Legyen $\nu \in \mathscr{M}_+^1(K)$ rögzített és $S_\nu := \{\mu \in \mathscr{M}_+^1(K) | \nu \preceq \mu\}$. Az S_ν halmazt ellátjuk a Choquet-rendezéssel; megmutatjuk, hogy ekkor S_ν *induktívan* rendezett halmaz. Legyen ugyanis $(\mu_i)_{i\in I}$ olyan nem üres rendszer S_ν-ben, amelyre minden $i, j \in I$ esetén $\mu_i \preceq \mu_j$ vagy $\mu_j \preceq \mu_i$. Az I halmazon bevezetjük azt a $\leq$ relációt, amelyre $i, j \in I$ esetén $i \leq j$ pontosan akkor teljesül, ha $\mu_i \preceq \mu_j$. Ekkor I felfelé irányított előrendezett halmaz. (Vigyázzunk arra, hogy a $\leq$ reláció nem feltétlenül antiszimmetrikus, bár trichotóm.) Tehát $(\mu_i)_{i\in I}$ egy $\mathscr{M}_+^1(K)$-ban haladó általánosított sorozat. A Banach–Alaoglu tétel alapján $\mathscr{M}_+^1(K)$ kompakt halmaz $\mathscr{C}(K;\mathbb{R})'$-ben a $\sigma(\mathscr{C}(K;\mathbb{R})', \mathscr{C}(K;\mathbb{R}))$ topológia szerint, ezért van olyan $\mu \in \mathscr{M}_+^1(K)$ és olyan J felfelé irányított előrendezett halmaz, valamint olyan $\sigma : J \to I$ monoton növő függvény, hogy $\sigma\langle J\rangle$ kofinális I-vel és $\mu = \lim_{j,J} \mu_{\sigma(j)}$ a $\sigma(\mathscr{C}(K;\mathbb{R})', \mathscr{C}(K;\mathbb{R}))$ topológia szerint. Ha $f \in S(K)$, akkor a $\left(\mu_{\sigma(j)}(f)\right)_{j\in J}$ általánosított sorozat monoton növő $\mathbb{R}$-ben, tehát

$$\mu(f) = \lim_{j,J} \mu_{\sigma(j)}(f) = \sup_{j,J} \mu_{\sigma(j)}(f).$$

A $\sigma\langle J\rangle$ halmaz kofinális I-vel, ezért $i \in I$ esetén van olyan $j \in J$, hogy $i \leq j$, vagyis $\mu_i \preceq \mu_{\sigma(j)}$, vagyis minden $f \in S(K)$ esetén $\mu_i(f) \preceq \mu_{\sigma(j)}(f) \leq \mu(f)$. Ez azt jelenti, hogy minden $I \ni i$-re $\mu_i \preceq \mu$. Ebből $I \neq \emptyset$ miatt az is következik, hogy $\nu \preceq \mu$, tehát $\mu \in S_\nu$. Ezért a $(\mu_i)_{i\in I}$ rendszer felülről korlátos S_ν-ben a Choquet-rendezés szerint.

A Kuratowski–Zorn-lemma alapján van olyan $\mu \in S_\nu$, amely maximális eleme az S_ν rendezett halmaznak. Ekkor μ maximális elem $\mathscr{M}_+^1(K)$-ban a Choquet-rendezés szerint, hiszen ha $\mu' \in \mathscr{M}_+^1(K)$ és $\mu \preceq \mu'$, akkor $\nu \preceq \mu'$ is teljesül, így $\mu' \in S_\nu$, így $\mu' = \mu$. ■

Most azt vizsgáljuk meg, hogy valószínűségi Radon-mérték Choquet-rendezés szerinti maximalitása milyen kapcsolatban van az extremális pontok halmazán való koncentráltságával.

12.5.4. Lemma. *Legyen E olyan topologikus vektortér, hogy E' szétválasztó E felett, $K \subseteq E$ kompakt konvex halmaz és $\mu \in \mathscr{M}_+^1(K)$.*

a) *Értelmezzük a*

$$p_\mu : \mathscr{C}(K;\mathbb{R}) \to \mathbb{R}; \quad f \mapsto \inf_{\substack{g \in -S(K) \\ f \leq g}} \mu(g)$$

leképezést. Ez olyan szublineáris funkcionál $\mathscr{C}(K;\mathbb{R})$ felett, hogy $\mu \leq p_\mu$, és minden $f \in -S(K)$ esetén $\mu(f) = p_\mu(f)$.

b) *Ha $\nu : \mathscr{C}(T;\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ lineáris funkcionál, akkor $\nu \leq p_\mu$ pontosan akkor teljesül, ha $\nu \in \mathscr{M}^1_+(K)$ és $\mu \preceq \nu$.*

Bizonyítás. a) Ha $f \in \mathscr{C}(K;\mathbb{R})$ és $\alpha \in \mathbb{R}^+$, akkor $g \in -S(K)$ és $\alpha.f \leq g$ esetén $f \leq \alpha^{-1}.g$ és $\alpha^{-1}.g \in -S(K)$, így $p_\mu(f) \leq \mu(\alpha^{-1}.g) = \alpha^{-1}\mu(g)$, vagyis $\alpha p_\mu(f) \leq p_\mu(\alpha.f)$. Ebből következik, hogy p_μ pozitív homogén. Ha $f_1, f_2 \in \mathscr{C}(K;\mathbb{R})$ és $g_1, g_2 \in -S(K)$ olyanok, hogy $f_1 \leq g_1$ és $f_2 \leq g_2$, akkor $g_1 + g_2 \in -S(K)$ és $f_1 + f_2 \leq g_1 + g_2$, így $p_\mu(f_1 + f_2) \leq \mu(g_1 + g_2) = \mu(g_1) + \mu(g_2)$, amiből látható, hogy p_μ szubadditív.

b) Legyen $\nu : \mathscr{C}(T;\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ olyan lineáris funkcionál, hogy $\nu \leq p_\mu$, vagyis minden $f \in \mathscr{C}(K;\mathbb{R})$ esetén $\nu(f) \leq p_\mu(f)$. Ha $f \in \mathscr{C}(K;\mathbb{R})$ és $f \geq 0$, akkor $-f \leq 0$ és persze $0 \in -S(K)$, így a definíció alapján $p_\mu(-f) \leq \mu(0) = 0$, következésképpen $\nu(-f) \leq 0$, vagyis $\nu(f) \geq 0$. Ez azt jelenti, hogy ν pozitív lineáris funkcionál $\mathscr{C}(K;\mathbb{R})$ felett, vagyis ν pozitív Radon-mérték K felett. Továbbá, $\nu(\pm 1) \leq p_\mu(\pm 1) \leq \mu(\pm 1) = \pm 1$, ezért $\nu(1) = 1$, így $\nu \in \mathscr{M}^1_+(K)$. Ha $f \in S(K)$, akkor $-\nu(f) = \nu(-f) \leq p_\mu(-f) \leq \mu(-f) = -\mu(f)$, tehát $\mu(f) \leq \nu(f)$. Ez azt jelenti, hogy $\mu \preceq \nu$.

Megfordítva, tegyük fel, hogy $\nu \in \mathscr{M}^1_+(K)$ és $\mu \preceq \nu$. Ekkor minden $g \in -S(K)$ esetén $-g \in S(K)$, tehát $\mu(-g) \leq \nu(-g)$, vagyis $\nu(g) \leq \mu(g)$. Ezért $f \in \mathscr{C}(K;\mathbb{R})$ és $g \in -S(K)$ esetén, ha $f \leq g$, akkor a ν pozitivitása folytán $\nu(f) \leq \nu(g) \leq \mu(g)$, vagyis $\nu(f) \leq \inf\limits_{\substack{g \in -S(K) \\ f \leq g}} \mu(g) =: p_\mu(f)$. Ez azt jelenti, hogy $\nu \leq p_\mu$. ∎

12.5.5. Állítás. *Legyen E olyan topologikus vektortér, hogy E' szétválasztó E felett és $K \subseteq E$ kompakt konvex halmaz. Ha $\mu \in \mathscr{M}^1_+(K)$, akkor minden $f \in \mathscr{C}(K;\mathbb{R})$ esetén*

$$p_\mu(f) = \sup_{\substack{\nu \in \mathscr{M}^1_+(K) \\ \mu \preceq \nu}} \nu(f).$$

A $\mu \in \mathscr{M}^1_+(K)$ Radon-mérték pontosan akkor maximális a Choquet-rendezés szerint, ha $p_\mu = \mu$.

Bizonyítás. A $p_\mu : \mathscr{C}(K;\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ leképezés szublineáris funkcionál $\mathscr{C}(K;\mathbb{R})$ felett, ezért a Hahn–Banach-tételből következik, hogy p_μ egyenlő az általa majorált $\mathscr{C}(K;\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ lineáris funkcionálok felső burkolójával (4.1.11.). Az előző lemma szerint viszont a p_μ által majorált $\mathscr{C}(K;\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ lineáris funkcionálok éppen azok a K feletti valószínűségi Radon-mértékek, amelyek μ-t majorálják a Choquet-rendezés szerint. Ebből kapjuk a bizonyítandó egyenlőséget, és azt, hogy ha μ maximális a Choquet-rendezés szerint, akkor $p_\mu = \mu$. Megfordítva, ha $p_\mu = \mu$ és $\nu \in \mathscr{M}^1_+(K)$ olyan, hogy $\mu \preceq \nu$, akkor az előző lemma szerint $\nu \leq p_\mu = \mu$, ezért $\nu = \mu$, vagyis μ maximális a Choquet-rendezés szerint. ∎

12.5.6. Következmény. *Legyen E olyan topologikus vektortér, hogy E' szétválasztó E felett és $K \subseteq E$ kompakt konvex halmaz. Ha $\mu \in \mathscr{M}^1_+(K)$ és μ maximális a Choquet-rendezés szerint, akkor minden $f \in \mathscr{C}(K;\mathbb{R})$ esetén*

$$\mu(f) = \sup_{\substack{g \in S(K) \\ g \leq f}} \mu(g)$$

teljesül, és minden $f \in \mathscr{C}(K;\mathbb{R})$ függvényre, ha $f \geq 0$, akkor

$$\mu(f) = \sup_{\substack{g \in S(K) \\ 0 \leq g \leq f}} \mu(g).$$

Bizonyítás. Az előző állítás szerint $p_\mu = \mu$, tehát, ha $f \in \mathscr{C}(K;\mathbb{R})$, akkor $p_\mu(-f) = \mu(-f)$, vagyis

$$-\mu(f) = \mu(-f) = p_\mu(-f) = \inf_{\substack{g \in -S(K) \\ -f \leq g}} \mu(g) = \inf_{\substack{g \in -S(K) \\ -g \leq f}} \mu(g) =$$

$$= \inf_{\substack{g \in S(K) \\ g \leq f}} \mu(-g) = -\sup_{\substack{g \in S(K) \\ g \leq f}} \mu(g). \blacksquare$$

12.6. Choquet-rendezés szerint maximális elemek

12.6.1. Jelölés. *Legyen K nem üres kompakt konvex halmaz az E szeparált topologikus vektortérben. Minden $f : K \to \mathbb{R}$ felülről korlátos függvényre*

$$\widehat{f} := \inf_{\substack{g \in -S(K) \\ f \leq g}} g,$$

tehát $\widehat{f}$ az f függvényt majoráló K feletti folytonos konkáv függvények halmazának alsó burkolója.

Nyilvánvaló, hogy $\widehat{f} : K \to \mathbb{R}$ felülről félig folytonos konkáv függvény, $f \leq \widehat{f}$ és ha f maga is folytonos konkáv függvény, akkor $f = \widehat{f}$. Továbbá, minden $f : K \to \mathbb{R}$ felülről korlátos függvényre a $\{g \in -S(K) | f \leq g\}$ függvényhalmaz nyilvánvalóan *lefelé irányított*, tehát, ha $f \geq 0$ és f folytonos, akkor $\mu \in \mathscr{M}^1_+(K)$ esetén

$$\int^* \widehat{f}\, d\mu = \inf_{\substack{g \in -S(K) \\ f \leq g}} \int^* g\, d\mu = \inf_{\substack{g \in -S(K) \\ f \leq g}} \mu(g) =: p_\mu(f).$$

12.6.2. Állítás. *Legyen E olyan topologikus vektortér, hogy E' szétválasztó E felett, $K \subseteq E$ nem üres kompakt konvex halmaz, és $\mu \in \mathscr{M}^1_+(K)$. A következő állítások ekvivalensek.*

(i) *μ maximális a Choquet-rendezés szerint.*

(ii) *Minden $f \in \mathscr{C}(K;\mathbb{R})$ esetén, ha $f \geq 0$, akkor $\mu(f) = \int^* \widehat{f}\, d\mu$.*

(ii)$'$ *Minden $f \in \mathscr{C}(K;\mathbb{R})$ esetén μ koncentrált az $[f = \widehat{f}]$ halmazon, vagyis az $[f \neq \widehat{f}]$ halmaz μ-nullahalmaz.*

(iii) *Minden $f \in S(K)$ esetén ha $f \geq 0$, akkor $\mu(f) = \int^* \widehat{f}\, d\mu$.*

(iii)$'$ *Minden $f \in S(K)$ esetén μ koncentrált az $[f = \widehat{f}]$ halmazon, vagyis az $[f \neq \widehat{f}]$ halmaz μ-nullahalmaz.*

Bizonyítás. (i)$\Rightarrow$(ii) Ha μ maximális, akkor $p_\mu = \mu$, tehát $f \in \mathscr{C}(K;\mathbb{R})$ és $f \geq 0$ esetén $\int^* \widehat{f}\, d\mu = p_\mu(f) = \mu(f)$.

(ii)$\Leftrightarrow$(ii)$'$ Ha $f \in \mathscr{C}(K;\mathbb{R})$, akkor van olyan $c \in \mathbb{R}$, hogy $f + c \geq 0$, ezért a (ii)-ből következik, hogy

$$\int^* (f+c)\, d\mu = \mu(f+c) = \int^* \widehat{f+c}\, d\mu = \int^* (\widehat{f}+c)\, d\mu,$$

tehát a szubtraktivitás-formula és $f \leq \widehat{f}$ alapján

$$\int^* (\widehat{f} - f)\, d\mu = \int^* ((\widehat{f}+c) - (f+c))\, d\mu = \int^* (f+c)\, d\mu - \int^* (f+c)\, d\mu = 0,$$

vagyis $[f \neq \widehat{f}]$ μ-nullahalmaz. Ezért (ii)$\Rightarrow$(ii)$'$ teljesül.

Megfordítva, ha (ii)$'$ igaz és $f \in \mathscr{C}(K;\mathbb{R})$, valamint $f \geq 0$, akkor $[f \neq \widehat{f}]$ μ-nullahalmaz, tehát a szubtraktivitás-formula szerint

$$0 = \int^* (\widehat{f} - f)\, d\mu = \int^* \widehat{f}\, d\mu - \int^* f\, d\mu = \int^* \widehat{f}\, d\mu - \mu(f),$$

vagyis (ii) is igaz. Ezért (ii)$'\Rightarrow$(ii) teljesül.

(iii)$\Leftrightarrow$(iii)$'$ Pontosan ugyanúgy bizonyítható, mint a (ii)$\Leftrightarrow$(ii)$'$ ekvivalencia.

(ii)$\Rightarrow$(iii) Triviális.

(iii)$\Rightarrow$(i) Ha $f \in S(K)$ és $f \geq 0$, akkor a (iii) alapján $\mu(f) = \int^* \widehat{f}\, d\mu = p_\mu(f)$, vagyis $p_\mu = \mu$ a pozitív folytonos konvex függvények halmazán. Legyen $\nu \in \mathscr{M}^1_+(K)$ olyan, hogy $\mu \preceq \nu$. Ekkor minden $f \in S(K)$ esetén, ha $f \geq 0$, akkor $\mu(f) \leq \nu(f)$, ugyanakkor $\nu \leq p_\mu$, tehát $\nu(f) \leq p_\mu(f) = \mu(f)$. Ezért $\mu = \nu$ a pozitív folytonos konvex függvények halmazán, így $S(K) - S(K) \subseteq [\mu = \nu]$. Az $S(K) - S(K)$ halmaz sup-normában sűrű altér $\mathscr{C}(K;\mathbb{R})$-ben, ezért $\mu = \nu$, vagyis μ maximális a Choquet-rendezés szerint. ■

12.6.3. Állítás. *Legyen E olyan topologikus vektortér, hogy E' szétválasztó E felett és $K \subseteq E$ nem üres kompakt konvex halmaz. Ekkor*

$$\mathrm{Ext}(K) \supseteq \bigcap_{f \in S(K)} [f = \widehat{f}] \supseteq \bigcap_{f \in \mathscr{C}(K;\mathbb{R})} [f = \widehat{f}],$$

és ha E lokálisan konvex, akkor ez a három halmaz egyenlő.

Bizonyítás. Tegyük fel, hogy $x \in \bigcap_{f \in S(K)} [f = \widehat{f}]$. Ekkor $f \in S(K)$ és $f \geq 0$ esetén $\varepsilon_x(f) = f(x) = \widehat{f}(x) = \int^* \widehat{f}\, d\varepsilon_x$, tehát ε_x a Choquet-rendezés tekintetében maximális. Ebből következik, hogy $x \in \mathrm{Ext}(K)$.
Tegyük fel, hogy E lokálisan konvex és $x \in \mathrm{Ext}(K)$. Ekkor ε_x maximális a Choquet-rendezés szerint, ezért ha $f \in \mathscr{C}(K;\mathbb{R})$ és $f \geq 0$, akkor $f(x) = \varepsilon_x(f) = \int^* \widehat{f}\, d\varepsilon_x = \widehat{f}(x)$, azaz $\mathrm{Ext}(K) \subseteq [f = \widehat{f}]$. Ebből következik, hogy $\mathrm{Ext}(K) \subseteq \bigcap_{f \in \mathscr{C}(K;\mathbb{R})} [f = \widehat{f}]$, így a három halmaz egyenlő. ■

12.7. Kompakt konvex halmaz baricentrális felbontása – Choquet-tétel

12.7.1. Lemma. (Choquet-lemma) *Legyen E olyan topologikus vektortér, hogy E' szétválasztó E felett, $K \subseteq E$ kompakt konvex halmaz és $\mu \in \mathscr{M}^1_+(K)$ maximális a Choquet-rendezés szerint. Ha $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ olyan $\mathscr{C}(K;\mathbb{R})$-ben haladó sorozat, amelyre minden $n \in \mathbb{N}$ esetén $0 \leq f_{n+1} \leq f_n$ a K halmazon és $\inf_{n\in\mathbb{N}} f_n = 0$ az $\mathrm{Ext}(K)$ halmazon, akkor $\inf_{n\in\mathbb{N}} \mu(f_n) = 0$.*

Bizonyítás. A μ maximális a Choquet-rendezés szerint, ezért minden $\mathbb{N} \ni n$-re

$$\mu(f_n) = \sup_{\substack{g \in S(K) \\ 0 \leq g \leq f_n}} \mu(g).$$

Legyen $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ tetszőleges és $(\varepsilon_n)_{n\in\mathbb{N}}$ olyan sorozat $\mathbb{R}^+$-ban, hogy a $\sum_{n\in\mathbb{N}} \varepsilon_n$ sor konvergens $\mathbb{R}$-ben és $\sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon_n < \varepsilon$. A kiválasztási axiómával kombinált rekurzió tételét alkalmazva megmutatjuk olyan $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sorozat létezését, hogy minden $\mathbb{N} \ni n$-re $g_n \in S(K)$, $0 \leq g_{n+1} \leq g_n \leq f_n$ és $\mu(f_{n+1} - g_{n+1}) \leq \mu(f_n - g_n) + \varepsilon_{n+1}$, valamint $\mu(f_0) \leq \mu(g_0) + \varepsilon_0$.

Az ε_0 szám szigorúan pozitív, ezért létezik olyan $g_0 \in S(K)$, hogy $0 \leq g_0 \leq f_0$ és

$\mu(f_0) \le \mu(g_0) + \varepsilon_0$.

Tegyük fel, hogy $n \in \mathbb{N}^+$ és $(g_k)_{0\le k\le n}$ olyan rendszer, hogy minden $k \le n$ természetes számra $g_k \in S(K)$, $0 \le g_k \le f_k$ és $k < n$ esetén $g_{k+1} \le g_k$, valamint $\mu(f_{k+1} - g_{k+1}) \le \mu(f_k - g_k) + \varepsilon_{k+1}$. Ekkor $\inf(f_{n+1}, g_n) \ge 0$ folytonos függvény K felett, ezért $\varepsilon_{n+1} > 0$ miatt létezik olyan $g \in S(K)$, hogy $0 \le g \le \inf(f_{n+1}, g_n)$ és $\mu(\inf(f_{n+1}, g_n)) \le \mu(g) + \varepsilon_{n+1}$. Világos, hogy $f_{n+1} \le f_n$ és $g_n \le f_n$ miatt $\sup(f_{n+1}, g_n) \le f_n$, így

$$f_{n+1} + g_n = \inf(f_{n+1}, g_n) + \sup(f_{n+1}, g_n) \le \inf(f_{n+1}, g_n) + f_n,$$

tehát $f_{n+1} - \inf(f_{n+1}, g_n) \le f_n - g_n$. Ugyanakkor $f_{n+1} \le f_n$ és $\inf(f_{n+1}, g_n) \ge g$, tehát

$$\mu(f_{n+1} - g) = \mu(f_{n+1} - \inf(f_{n+1}, g_n)) + \mu(\inf(f_{n+1}, g_n) - g) \le \mu(f_n - g_n) + \varepsilon_{n+1},$$

így $g_{n+1} := g$ olyan függvény, hogy minden $k \le n+1$ természetes számra $g_k \in S(K)$, $0 \le g_k \le f_k$ és $k < n+1$ esetén $g_{k+1} \le g_k$, valamint $\mu(f_{k+1} - g_{k+1}) \le \mu(f_k - g_k) + \varepsilon_{k+1}$.

Legyen tehát $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ olyan sorozat $S(K)$-ban, hogy minden $\mathbb{N} \ni n$-re $0 \le g_{n+1} \le g_n \le f_n$ és $\mu(f_{n+1} - g_{n+1}) \le \mu(f_n - g_n) + \varepsilon_{n+1}$, valamint $\mu(f_0) \le \mu(g_0) + \varepsilon_0$. Ekkor minden $n \in \mathbb{N}$ esetén

$$\mu(f_{n+1} - g_{n+1}) \le \sum_{k=0}^{n+1} \varepsilon_k < \varepsilon,$$

vagyis $\mu(f_{n+1}) < \mu(g_{n+1}) + \varepsilon$. Ugyanakkor $\mu(f_0) < \mu(g_0) + \varepsilon_0 < \mu(g_0) + \varepsilon$ is teljesül, tehát minden $\mathbb{N} \ni k$-ra $\mu(f_k) < \mu(g_k) + \varepsilon$. Továbbá, a $g := \inf\limits_{n\in\mathbb{N}} g_n : K \to \mathbb{R}$ függvény felülről félig folytonos és konvex (mert a $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ függvénysorozat monoton fogyó), valamint $0 \le g \le \inf\limits_{n\in\mathbb{N}} f_n = 0$ az $\operatorname{Ext}(K)$ halmazon. Ezért a Bauer-féle maximum-elv alapján $g \le 0$ a K halmazon, tehát $g = 0$. A pozitív Radon-mértékek monoton folytonossága alapján fennáll az $\inf\limits_{n\in\mathbb{N}} \mu(g_n) = 0$ egyenlőség. Ebből következik, hogy

$$0 \le \inf_{n\in\mathbb{N}} \mu(f_n) \le \inf_{n\in\mathbb{N}} \mu(g_n) + \varepsilon = \varepsilon,$$

ezért az $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ szám tetszőlegessége folytán $\inf\limits_{n\in\mathbb{N}} \mu(f_n) = 0$. ■

12.7.2. Állítás. *Legyen E olyan topologikus vektortér, hogy E' szétválasztó E felett, $K \subseteq E$ kompakt konvex halmaz és $\mu \in \mathscr{M}^1_+(K)$.*

a) *Ha μ maximális a Choquet-rendezés szerint, akkor minden $H \subseteq K$ Baire-halmazra, $H \cap \operatorname{Ext}(K) = \emptyset$ esetén $\mu^*(H) = 0$ (azaz μ Baire-koncentrált az $\operatorname{Ext}(K)$ halmazon).*

b) *Ha E lokálisan konvex és minden $C \subseteq K$ kompakt halmazra, $C \cap \operatorname{Ext}(K) = \emptyset$ esetén $\mu^*(C) = 0$ (azaz μ kompakt koncentrált az $\operatorname{Ext}(K)$ halmazon), akkor μ maximális a Choquet-rendezés szerint.*

Bizonyítás. a) Legyen $C \subseteq K$ olyan kompakt G_δ-halmaz K-ban, amelyre $C \cap \mathrm{Ext}(K) = \emptyset$. Létezik olyan $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sorozat $\mathscr{C}(K;\mathbb{R})$-ben, amely monoton fogyó és $\chi_C = \inf_{n\in\mathbb{N}} f_n$ (30.3.1.). Ekkor $C \subseteq K \setminus \mathrm{Ext}(K)$ miatt $\inf_{n\in\mathbb{N}} f_n = 0$ az $\mathrm{Ext}(K)$ halmazon, tehát a μ maximalitása és a Choquet-lemma alapján $\inf_{n\in\mathbb{N}} \mu(f_n) = 0$. Ugyanakkor minden $\mathbb{N} \ni n$-re $\chi_C \leq f_n$, ezért $\mu^*(C) \leq \mu(f_n)$, következésképpen $\mu^*(C) = 0$.

Legyen $H \subseteq K$ olyan Baire-halmaz, hogy $H \cap \mathrm{Ext}(K) = \emptyset$. Ekkor a Baire-mértékek belső regularitásának tétele (9.6.4.) alapján

$$\mu^*(H) = \sup_{\substack{C\subseteq H \\ C \text{ kompakt } G_\delta-\text{halmaz}}} \mu^*(C).$$

Ugyanakkor minden $C \subseteq H$ kompakt G_δ-halmazra $C \cap \mathrm{Ext}(K) = \emptyset$, így az előzőek alapján $\mu^*(C) = 0$. Ebből következik, hogy $\mu^*(H) = 0$, tehát μ Baire-koncentrált az $\mathrm{Ext}(K)$ halmazon.

b) Tegyük fel, hogy E lokálisan konvex és legyen $f \in \mathscr{C}(K;\mathbb{R})$. Ha $(\varepsilon_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tetszőleges zérussorozat $\mathbb{R}^+$-ban, akkor

$$[f \neq \widehat{f}] = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} [\widehat{f} - f \geq \varepsilon_n],$$

és minden $\mathbb{N} \ni n$-re az $\widehat{f}$ felülről félig folytonossága és az f folytonossága miatt $\widehat{f} - f$ felülről félig folytonos, így $[\widehat{f} - f \geq \varepsilon_n]$ zárt (tehát kompakt) halmaz K-ban. Ugyanakkor $\mathrm{Ext}(K) \subseteq [f = \widehat{f}]$, tehát minden $n \in \mathbb{N}$ esetén az $[\widehat{f} - f \geq \varepsilon_n]$ halmaz nem metszi $\mathrm{Ext}(K)$-t. A feltevés alapján minden $\mathbb{N} \ni n$-re $[\widehat{f} - f \geq \varepsilon_n]$ μ-nullahalmaz, ezért $[f \neq \widehat{f}]$ is μ-nullahalmaz. Ebből következik, hogy μ maximális a Choquet-rendezés szerint. ■

12.7.3. Tétel. (Choquet-tétel) *Legyen E olyan topologikus vektortér, hogy E' szétválasztó E felett és $K \subseteq E$ kompakt konvex halmaz. Minden $x \in K$ esetén létezik olyan μ valószínűségi Radon-mérték K felett, amelyre $\mathbf{b}(\mu) = x$ és μ Baire-koncentrált az* $\mathrm{Ext}(K)$ *halmazon.*

Bizonyítás. Ha $x \in K$, akkor létezik olyan $\mu \in \mathscr{M}^1_+(K)$, amely maximális a Choquet-rendezés szerint és $\varepsilon_x \preceq \mu$; ekkor $x = \mathbf{b}(\varepsilon_x) = \mathbf{b}(\mu)$ és μ Baire-koncentrált az $\mathrm{Ext}(K)$ halmazon. ■

Végül megmutatjuk, hogy a metrizálható kompakt konvex halmazokra vonatkozó Choquet-tétel az előzőek közvetlen következménye.

12.7.4. Állítás. *Legyen E olyan topologikus vektortér, hogy E' szétválasztó E felett és $K \subseteq E$ kompakt konvex halmaz. Tegyük fel, hogy létezik olyan $H \subseteq \mathscr{C}(K;\mathbb{R})$ nem üres megszámlálható halmaz, amelyre*

$$\mathrm{Ext}(K) \supseteq \bigcap_{f\in H} [f = \widehat{f}].$$

Ha μ olyan valószínűségi Radon-mérték K felett, amely maximális a Choquet-rendezés szerint, akkor μ koncentrált az extremális pontok halmazán. Ha E lokálisan konvex, akkor a K feletti μ valószínűségi Radon-mérték pontosan akkor maximális a Choquet-rendezés szerint, ha μ koncentrált az extremális pontok halmazán.

Bizonyítás. Ha μ maximális a Choquet-rendezés szerint, akkor minden $f \in H$ esetén $[f \neq \widehat{f}]$ μ-nullahalmaz, tehát H megszámlálhatósága miatt $\bigcup\limits_{f \in H} [f \neq \widehat{f}]$ is μ-nullahalmaz, és $K \setminus \mathrm{Ext}(K) \subseteq \bigcup\limits_{f \in H} [f \neq \widehat{f}]$, így $K \setminus \mathrm{Ext}(K)$ is μ-nullahalmaz, vagyis μ koncentrált az extremális pontok halmazán.

Megfordítva, ha μ koncentrált az extremális pontok halmazán és E lokálisan konvex, akkor az előző állítás b) részének hipotézise teljesül, így μ maximális a Choquet-rendezés szerint. ■

12.7.5. Tétel. (Choquet-tétel metrizálható kompakt konvex halmazokra) *Legyen E olyan topologikus vektortér, hogy E' szétválasztó E felett és $K \subseteq E$ metrizálható kompakt konvex halmaz. Minden $x \in K$ esetén létezik olyan μ valószínűségi Radon-mérték K felett, amelyre $\mathbf{b}(\mu) = x$ és μ koncentrált az $\mathrm{Ext}(K)$ halmazon.*

Bizonyítás. Ha K metrizálható, akkor létezik $f : K \to \mathbb{R}$ folytonos szigorúan konvex függvény (11.2.7.). Ha $x \in K \setminus \mathrm{Ext}(K)$, akkor léteznek $x_1, x_2 \in K$ és $\alpha \in \mathbb{R}$, hogy $x_1 \neq x_2$, $0 < \alpha < 1$ és $x = (1-\alpha).x_1 + \alpha.x_2$, tehát az f szigorú konvexitása és $\widehat{f}$ konkavitása miatt

$$f(x) < (1-\alpha)f(x_1) + \alpha f(x_2) \leq (1-\alpha)\widehat{f}(x_1) + \alpha \widehat{f}(x_2) \leq \widehat{f}(x),$$

vagyis $x \in [f \neq \widehat{f}]$. Ez azt jelenti, hogy $[f = \widehat{f}] \subseteq \mathrm{Ext}(K)$. Ha $\mu \in \mathscr{M}_+^1(K)$ maximális a Choquet-rendezés szerint, akkor az előző állítás szerint μ koncentrált az extremális pontok halmazán. Ha $x \in K$, akkor létezik olyan $\mu \in \mathscr{M}_+^1(K)$, amely maximális a Choquet-rendezés szerint és $\varepsilon_x \preceq \mu$; ekkor $x = \mathbf{b}(\varepsilon_x) = \mathbf{b}(\mu)$ és μ koncentrált az $\mathrm{Ext}(K)$ halmazon. ■

III. rész

Normált algebrák

BEVEZETÉS

A normált algebrák elmélete kivételesen fontos helyet foglal el az analízisben. Ennek a kijelentésnek indoklásaként három alapvető okot sorolunk fel.

A klasszikus valószínűségelmélet alapvető objektuma a klasszikus eseménytér, amely σ-algebra, ugyanakkor a kvantum-valószínűségelmélet alapvető objektuma a kvantum-eseménytér, ami egy Hilbert-tér zárt lineáris altereinek halmaza (az ún. Hilbert-háló). Mindkét eseménytér-típus természetes módon ellátható olyan hálóelméleti struktúrával, amellyel speciális eseteivé válnak a σ-teljes ortomoduláris hálók típusának. Kiderül, hogy bizonyos C^*-algebrák (pontosabban Rickart-C^*-algebrák) önadjungált idempotens elemeinek, vagyis *projektorainak* halmazán természetes módon bevezethető olyan ortohálóstruktúra, amellyel az olyan σ-teljes ortomoduláris hálóvá válik, hogy mind a σ-algebrák, mind a Hilbert-hálók (sőt azok természetes általánosításai: a Neumann-hálók) speciális esetei. Ez azt jelenti, hogy a Rickart-C^*-algebrákra vonatkozó ismeretek birtokában lehetőség nyílik egy olyan általános valószínűségelmélet alapjainak kidolgozására, amely még eléggé speciális ahhoz, hogy kezelhető legyen a funkcionálanalízis módszereivel, ugyanakkor már eléggé általános ahhoz, hogy részelméletként tartalmazza mind a klasszikus, mind a kvantum-valószínűségelméletet. A Rickart-C^*-algebrákkal, és azok projektorhálóival a 23. fejezetben részletesen foglalkozunk. Az ennek megértéséhez szükséges hálóelméleti ismeretek megtalálhatók a IV. részben.

A matematikai és a fizikai struktúrák szimmetriatulajdonságainak matematikai leírásában fontos szerepe van a csoportábrázolások elméletének. A véges csoportok ábrázolásainak algebrai elmélete mellett szükség van végtelen "folytonos" (*topologikus*) csoportok ábrázolásainak vizsgálatára is. Kiderül, hogy speciális topologikus csoportok (a *lokálisan kompakt csoportok*) bizonyos ábrázolásainak (a *folytonos unitér ábrázolásainak*) az elmélete azonosítható speciális normált *-algebrák (a *hű reprezentációval rendelkező approximatív egységes Banach-*-algebrák*) ábrázoláselméletének egy részével. Ezáltal a normált algebrák ábrázoláselméletéből nyert ismeretek alkalmazásával fontos tételeket nyerünk a csoportábrázolások elméletében. Valójában az absztrakt harmonikus analízis négy nagyon általános és nevezetes tétele: a Gelfand-Rajkov-tétel, a Stone-tétel, a Bochner-tétel, és a Choquet-tétel a Banach-*-algebrák ábrázoláselméletében bizonyítható (hasonló nevű) tételek viszonylag közvetlen következményei.

Ismeretes, hogy a Banach-terekben értelmezett bizonyos nem folytonos lineáris operátorok (a *spektrális operátorok*) elmélete visszavezethető folytonos lineáris operátorokat tartalmazó algebrák (az *operátoralgebrák*) elméletére. Ez különösen szembeszökő Hilberttér normális operátorainak esetében. Az operátoralgebrák elméletéből származó eredmények létfontosságúak az operátorelmélet számára. Ezen a téren a legfontosabb eredmény a *spektráltétel*, amelynek többféle változata létezik. A 24. fejezetben bevezetjük az *ultraspektrális C^*-algebrák* típusát, és megmutatjuk, hogy ezekkel az algebrákkal kapcsolatban a spektráltételnek van egy "absztrakt" formája, amely a mértékelméleti Riesz-féle reprezentációs tétel viszonylag közvetlen következménye, és amelynek alkalmazásával könnyen bizonyítható a Hilbert terek folytonos normális operátoraira vonatkozó klasszikus Hilbert-féle spektráltétel. Azt is megmutatjuk, hogy az "absztrakt" spektráltételnek (általános) valószínűségelméleti interpretációja is létezik, amennyiben éppen azt fejezi ki, hogy az ultraspektrális C^*-algebrák projektorhálói feletti komplex valószínűségi változók azonosíthatók az algebra normális elemeivel. Másként kifejezve: az ultraspektrális C^*-algebráknak valószínűségi módon nem interpretálható (*redundáns*) normális elemei nem léteznek.

Az előzőekben felsorolt három ok elegendőnek tűnik annak indoklására, hogy érdemes normált algebrákkal foglalkozni. Most részletezzük az egyes fejezetek tartalmát.

A 13. fejezetben összefoglaljuk azokat az algebrákkal kapcsolatos algebrai fogalmakat és tényeket, amelyeknek jelentőségük lesz a normált algebrák elméletében. Ismertnek tekintjük az *algebrák*, *részalgebrák*, *ideálok*, *faktoralgebrák*, *algebra-morfizmusok* és *algebra-izomorfizmusok* fogalmát. Bemutatjuk a három legfontosabb algebra-típust: a *függvényalgebrák*, az *operátoralgebrák* és a *konvolúciós algebrák* típusát. Lényeges, hogy az általános esetben a vizsgált algebrákra sem az egységelemességet, sem a kommutativitást nem írjuk elő, viszont kizárólag *asszociatív* algebrákkal foglalkozunk. A nem egységelemes algebrákkal kapcsolatos jelenségek jó része visszavezethető az egységelemes esetre; ehhez szükség van az algebrák *egységelemesítésének* fogalmára. Foglalkozunk a (nem feltétlenül kommutatív) algebrák *karaktereivel*, és megmutatjuk, hogy ezek létezésének problémája szoros kapcsolatban áll bizonyos ideálok létezésével. Bevezetjük a valós vagy komplex algebrák *karakterterét* és *Gelfand-reprezentációját*. A Gelfand-reprezentáció által minden algebra morfikus kapcsolatba hozható egy függvényalgebrával. A Gelfand-reprezentáció vizsgálata természetes módon vezet a *spektrum* és a *rezolvens-függvény* fogalmához. Megvizsgáljuk a spektrum elemi algebrai tulajdonságait, majd részletezzük a *polinomiális függvényszámítás* algebrai problémáját.

A 14. fejezetben bevezetjük a *normált algebrák* és a *Banach-algebrák* fogalmát. Bemutatjuk ezek legfontosabb típusait: a *normált függvényalgebrákat*, a *normált operátor-algebrákat* és a *normált konvolúciós-algebrákat*. Szó lesz a normált algebrák és a Banach-algebrák egységelemesítésének problémájáról, majd bevezetjük a *spektrálsugár* fogalmát, és az egységelemes Banach-algebrák *invertálható elemeinek* néhány tulajdonságát. Ebből fontos analitikus következtetések származtathatók Banach-algebra elemének spektrumára, valamint rezolvens-függvényére vonatkozóan. Komplex Banach-algebrák esetében az eredményeket tovább pontosítjuk. Döntő jelentőségű a *Gelfand–Mazur-tétel*, amelynek fontos következménye, hogy kommutatív komplex Banach-algebra nem nulla karakterei azonosíthatók a reguláris maximális ideálokkal. Végül érintjük a komplex egységelemes Banach-algebrák elemeivel kapcsolatos *egészfüggvény-számítás* témakörét. Ez a konstrukció jelentős mértékben általánosítható (*holomorf-függvény-számítás*), azonban erre a lényegesen nemtriviális általánosításra a továbbiakban nem lesz szükségünk, ezért ezt nem részletezzük.

A 15. fejezetben néhány alapvetően fontos tényt mutatunk be a Banach-algebrák Gelfand-reprezentációjával kapcsolatban. Banach-algebra karaktereinek halmazán bevezetjük a *Gelfand-topológiát.* Jellemezni fogjuk kommutatív komplex Banach-algebra Gelfand-reprezentációjának magját, és megmutatjuk, hogy ez megegyezik a Banach-algebra *radikáljával.* Kiszámítjuk a lokálisan kompakt terek feletti folytonos, végtelenben eltűnő függvények Banach-algebrájának karakterterét és Gelfand-reprezentációját. Ennek a viszonylag konkrét eredménynek különösen érdekes következményei lesznek a későbbiekben.

A 16. fejezetben bevezetjük a **-algebrák* fogalmát. Bemutatjuk a leggyakoribb *-algebra-konstrukciókat és a legfontosabb *-algebra-típusokat. Röviden tárgyaljuk a *-algebrák egységelemesítésének problémáját. A *-algebrákban értelmezhetők speciális tulajdonságú elemek: az *önadjungált*, *normális*, *projektor*, *unitér*, *parciális izometria* és *pozitív* elemek. Néhány általános érvényű, elemi algebrai megállapítást teszünk ezek tulajdonságaira, és egymással való kapcsolataikra vonatkozóan. Értelmezzük a *természetes előrendezést* *-algebra önadjungált elemeinek halmazán, valamint a *-algebra feletti önadjungált funkcionálok halmazán. Bevezetjük a *hű*, a *véges*, és az *Abel-projektorok* fogalmát, és ezek segítségével értelmezzük a *diszkrét*, a *félig véges*, a *folytonos*, a *tisztán végtelen*, a *valóban végtelen* és a *véges* *-algebrák elemi típusait. Ezáltal lehetővé válik az egységelemes *-algebrák osztályozása az I., II., illetve III. típusú *-algebrák szerint.

Az 17. fejezetben értelmezzük a *normált *-algebrákat* és ezek legfontosabb speciális eseteit: a *pre-C^*-algebrákat*, a *Banach-*-algebrákat* és a *C^*-algebrákat.* A leggyakoribb normált *-algebra-konstrukciók bemutatása után példákat láthatunk nevezetes normált *-algebra-típusokra. Ezek közül a legérdekesebbek a lokálisan kompakt terek feletti folytonos, végtelenben eltűnő függvények kommutatív C^*-algebrája, valamint a Hilbert-terek folytonos lineáris operátorai algebrájának *-részalgebrái, amelyek általában nem kommutatív pre-C^*-algebrák. A csoportok konvolúciós algebrái nevezetes példát adnak nemtriviális normált *-algebrákra és Banach-*-algebrákra, amelyek általában nem pre-C^*-algebrák. Ezt a példát az absztrakt harmonikus analízisben általánosítják; így nyerik a *lokálisan kompakt csoporok mértékelgebráit.* Részletesen tárgyaljuk a pre-C^*-algebrák egységelemesítésének egyáltalán nem triviális problémáját, majd bebizonyítjuk, hogy Banach-*-algebrán értelmezett, pre-C^*-algebrába ható *-algebra-morfizmus automatikusan folytonos a normákban, sőt norma nem-növelő. Ebből következik, hogy minden *-algebra felett legfeljebb egy C^*-norma létezik, továbbá C^*-algebrák között a *-izomorfizmusok szükségképpen izometriák a C^*-normák szerint. Megmutatjuk, hogy minden Banach-*-algebrához hozzárendelhető egy kitüntetett C^*-algebra (a *fedő C^*-algebra*), amely azzal az univerzalitási tulajdonsággal rendelkezik, hogy az adott Banach-*-algebra minden C^*-algebrába vezető *-algebra-morfizmusa egyértelműen felemelhető a fedő C^*-algebra, ugyanabba a C^*-algebrába ható *-algebra-morfizmusává.

A C^*-algebrák elméletében döntő jelentőségű az *első Gelfand-Najmark-tétel*, amely jellemzést ad a kommutatív C^*-algebrákra; ezzel a tétellel foglalkozunk a 18. fejezetben. Látjuk majd, hogy kommutatív C^*-algebra Gelfand-reprezentációja *-izomorfizmus a C^*-algebra és a karatertere feletti folytonos, végtelenben eltűnő függvények C^*-algebrája között. Ennek a ténynek érdekes, elvi jelentőségű következménye, hogy a kommutatív C^*-algebrák osztályozása *-izomorfia szerint egyenértékű a lokálisan kompakt terek osztályozásával homeomorfia szerint. Az első Gelfand-Najmark-tétel egyik legfontosabb alkalmazása a kommutatív Banach-*-algebrák fedő C^*-algebrájának jellemzése; ez az *absztrakt Stone-tétel*. Ehhez a jellemzéshez szükség van az *önadjungált Gelfand-reprezentáció* fogalmára, amelyről majd a harmonikus analízisben kiderül, hogy a kommutatív lokálisan kompakt csoportok *Fourier-transzformációjának* általánosítása. Azt is látni fogjuk, hogy a kommutatív lokálisan kompakt csoportokra vonatkozó nevezetes *Stone-tétel* az itt tárgyalt absztrakt Stone-tétel következménye. Ezután bemutatjuk az első Gelfand-Najmark-tétel két érdekes nemkommutatív alkalmazását. Az egyik, a C^*-algebrákon értelmezett, Banach-*-algebrákba érkező injektív *-algebra-morfizmusok inverzének folytonosságával kapcsolatos. A másik, a C^*-algebrák normális elemei által meghatározott *folytonosfüggvény-számítás* létezése és egyértelműsége. Részletesen elemezzük a folytonosfüggvény-számító operátorok algebrai és topológiai tulajdonságait, és megvilágítjuk azok kapcsolatát az egészfüggvényszámító operátorokkal. Az eredmények közvetlen topológiai alkalmazásaként bebizonyítjuk a teljesen reguláris Hausdorff-terek *Čech-Stone-kompaktifikációjának* létezését.

A 19. fejezetben, a folytonosfüggvény-számítás alkalmazásával bevezetjük a C^*-algebrák önadjungált elemeinek *pozitív-* és *negatív-részét*, valamint tetszőleges elem *abszolút értékét*. Az abszolút érték fogalmának birtokában megfogalmazzuk a *polárfelbontás* problémáját C^*-algebrákra. Ezután megadjuk a C^*-algebrák önadjungált elemei pozitivitásának spektrális jellemzését, és megvizsgáljuk a pozitív elemek halmazának néhány érdekes tulajdonságát. Jellemezni fogjuk a pozitivitást operátoralgebrák esetében, majd bevezetjük az *approximatív egységek* fogalmát, és megmutatjuk, hogy C^*-algebrában mindig létezik approximatív egység. A harmonikus analízisben látni fogjuk, hogy a lokálisan kompakt csoportok mértékalgebrái általában nem egységelemes, de approximatív egységes Banach-*-algebrák. A C^*-algebrák pozitív elemeire nyert ismeretek alkalmazásával megoldjuk a polárfelbontás problémáját egy speciális C^*-algebra-típusra: a *monoton sorozatteljes* (*MSC*) C^*-algebrákra.

A 20. fejezet ismét egy tisztán algebrai fogalomkörrel: a *-algebrák *ábrázolásaival* foglalkozik. Nem magától értetődő, hogy ennek a problémakörnek van jelentősége az analízisben; ez csak utólag válik világossá, az alkalmazások fényében. Az absztrakt harmonikus analízisben kiderül, hogy a lokálisan kompakt csoportok folytonos unitér ábrázolásainak elmélete azonosítható a hű ábrázolással rendelkező, approximatív egységes Banach-*-algebrák nemelfajult ábrázolásai elméletének egy részével. Ez a kijelentés tekinthető az absztrakt harmonikus analízis alaptételének. Ez az alapvető oka annak, hogy *-algebrák ábrázolásaival foglalkozunk. A funkcionálanalízis standard módszereinek (például a korábban bemutatott Hahn–Banach-tétel, Krein–Milman-tétel, Choquet-tétel) alkalmazásával sok nemtriviális eredmény származtatható a Banach-*-algebrák ábrázolásaival kapcsolatban. Ebben a fejezetben értelmezzük a *nemelfajult*, a *ciklikus* és az *irreducibilis* ábrázolások fogalmát, majd bevezetjük a legfontosabb operációt ábrázolásokra: az ábrázolások *Hilbert-összegzését*. Megmutatjuk, hogy minden ábrázolás egy nullábrázolás és egy nemelfajult ábrázolás Hilbert-összege, továbbá minden nemelfajult ábrázolás előáll ciklikus ábrázolások Hilbert-összegeként. Látjuk majd, hogy *-algebra minden ábrázolásához speciális tulajdonságú (*reguláris*) pozitív funkcionálok rendelhetők hozzá. Megvizsgáljuk a pozitív funkcionálok néhány nevezetes tulajdonságát, és jellemezzük ezek regularitását.

A Banach-*-algebrák és C^*-algebrák feletti pozitív tulajdonságú funkcionálok tulajdonságait vizsgáljuk a 21. fejezetben. Megmutatjuk, hogy Banach-*-algebra felett minden reguláris pozitív funkcionál, míg C^*-algebra felett minden pozitív funkcionál automatikusan folytonos. A *Gelfand-Najmark-Segal-tétel* olyan konstrukciót ad (a *GNS-konstrukciót*), amelynek segítségével szoros kapcsolatot lehet létesíteni egy Banach-*-algebra reguláris pozitív funkcionáljai és az algebra ciklikus ábrázolásai között. Jellemezzük a GNS-konstrukcióval előállított ábrázolások irreducibilitását, és a nyert eredmények alkalmazásaként bebizonyítjuk az *absztrakt Gelfand-Rajkov-tételt*, amely hű ábrázolással rendelkező Banach-*-algebra nemtriviális *irreducibilis* ábrázolásainak létezését mondja ki. A kompakt konvex halmazok baricentrális felbontási tételének (az *absztrakt Choquet-tételnek*) alkalmazásával igazoljuk szeparábilis Banach-*-algebra ciklikus ábrázolásának irreducibilis ábrázolások *Hilbert-integráljaként* való előállíthatóságát.

A GNS-konstrukció és a Hahn–Banach szétválasztási tétel alapján könnyen megmutatható, hogy minden C^*-algebrának létezik hű ábrázolása; ez a *második Gelfand-Najmark-tétel*, amit a 22. fejezetben bizonyítunk. Kiderül, hogy léteznek hű ábrázolással rendelkező Banach-*-algebrák, amelyek nem C^*-algebrák; természetesen ezeknek nem létezik *izometrikus* ábrázolása. Ilyen Banach-*-algebrák például a lokálisan kompakt csoportok mértékalgebrái. Megvizsgáljuk a második Gelfand-Najmark-tétel néhány érdekes következményét, többek között ábrázoláselméleti jellemzést adunk C^*-algebra pozitív elemeire. Látni fogjuk, hogy egy *-algebra felett a C^*-normát egyértelműen meghatározzák a *-algebra feletti reguláris pozitív funkcionálok. Bebizonyítjuk az *absztrakt Bochner-tételt*, amely Radon-mértékelméleti jellemzést ad a kommutatív Banach-*-algebrák folytonos pozitív funkcionáljaira.

A 23. fejezetben bevezetünk egy természetes rendezést és egy ortokomplementációt *-algebra projektorainak halmazán, majd megvizsgáljuk, hogy ez a rendezés milyen feltételek mellett *hálószerű*. Látni fogjuk, hogy egy viszonylag egyszerű projektoregzisztencia-axióma biztosíthatja a projektorok közötti természetes rendezés hálószerűségét; ezzel eljutunk a *Rickart-*-algebrák* fogalmához. Elemezzük a Rickart-*-algebrák Rickart-*-részalgebráit, és példákat adunk Rickart-*-algebrákra. Megmutatjuk, hogy a Rickart-

C^*-algebrák projektorhálója σ-teljes ortomoduláris háló. Az első Gelfand-Najmark-tétel segítségével jellemezzük a kommutatív Rickart-C^*-algebrákat, és megmutatjuk, hogy Rickart-C^*-algebrában minden elem approximálható projektorok lineáris kombinációival a C^*-norma szerint. Ez azt jelenti, hogy minden Rickart-C^*-algebra projektorokban gazdag *-algebra. Ennek alkalmazásaként igazoljuk a *topologikus Schur-lemmát*, amely szerint *-algebra ábrázolásainak algebrai és topologikus irreducibilitása egymással ekvivalens tulajdonságok.

A Hilbert-terek folytonos normális operátoraira régóta ismert Hilbert-féle *spektráltétel* új bizonyítását adjuk a 24. fejezetben. Ehhez bevezetjük az *infraspektrális*, *spektrális* és *ultraspektrális C^*-algebrákat*, továbbá nemtriviális páldákat adunk ilyen algebrákra. Bebizonyítjuk, hogy ultraspektrális C^*-algebra minden normális eleméhez egyértelműen hozzárendelhető egy *spektrálfelbontás*, másnéven *projektormérték*. Megvizsgáljuk a spektrálfelbontások elemi algebrai és topológiai tulajdonságait, majd megmutatjuk, hogy az ultraspektrális C^*-algebrák Rickart-C^*-algebrák. A vizsgálatot a kommutatív spektrális C^*-algebrák jellemzésével zárjuk.

Végül megemlítjük, hogy az algebrák analitikus elméletének létezik további általánosítása: a *lokálisan konvex algebrák*, valamint a *lokálisan konvex *-algebrák* elmélete. Ennek az általánosabb elméletnek a megértéséhez nélkülözhetetlen a fejezetben foglalt anyag ismerete.

13. fejezet

Algebrák

13.1. Elemi konstrukciók és példák algebrákra

A legelemibb algebra-konstrukciók a következők.

– Algebra minden *részalgebrája* szintén algebra a műveletek leszűkítésével ellátva. Most bemutatunk két nevezetes részalgebra-konstrukciót.

a) Legyen A algebra és $e \in A$ *idempotens* elem, vagyis $e^2 = e$. Ekkor az

$$eAe := \{eae \mid a \in A\}$$

halmaz olyan részalgebrája A-nak, amelynek e egységeleme; ezt nevezzük az e idempotens elem által *redukált részalgebrának* A-ban. Könnyen látható, hogy

$$eAe = \{a \in A \mid ea = ae = a\}.$$

b) Legyen A algebra és $S \subseteq A$. Ekkor a

$$C(S) := \{a \in A \mid (\forall s \in S) : \ as = sa\}$$

halmaz részalgebrája A-nak; ezt nevezzük az S halmaz *kommutánsának*. A $C(C(S))$ halmaz S-t tartalmazó részalgebra A-ban; $C(C(S))$-t az S halmaz *bikommutánsának* nevezzük. Ha S kommutatív halmaz (vagyis bármely két eleme felcserélhető), akkor az S bikommutánsa is kommutatív részalgebra A-ban. Megjegyezzük, hogy ha A kommutatív algebra, akkor minden $S \subseteq A$ halmazra $C(S) = A$, tehát a kommutáns-képzés csak nemkommutatív algebrában nemtriviális részalgebra-konstrukció.

– Adott test feletti algebrák tetszőleges rendszerének a *szorzata*, a komponensenként értelmezett műveletekkel ellátva algebra.

– Ha A algebra és $\mathfrak{m}$ *ideál* A-ban, akkor az $A/\mathfrak{m}$ lineáris faktortér felett egyértelműen létezik olyan szorzás, amellyel az $A/\mathfrak{m}$ algebra, és amely szerint a $\pi_{A/\mathfrak{m}} : A \to A/\mathfrak{m}$ kanonikus leképezés algebra-morfizmus; ezt az $A/\mathfrak{m}$ algebrát nevezzük az A algebra $\mathfrak{m}$ ideál szerinti *faktoralgebrájának*. Algebra ideálját *valódinak* nevezzük, ha különbözik az alaphalmaztól. Algebra valódi ideáljainak halmazán a tartalmazás-reláció rendezés; ennek a rendezett halmaznak a maximális elemeit nevezzük *maximális ideáloknak*.

Példák (algebrákra).

(I) Legyen T halmaz, K test, és tekintsük a $T \to K$ függvények $\mathscr{F}(T;K)$ halmazát. Ez a függvényhalmaz a pontonként értelmezett lineáris műveletekkel és a pontonként értelmezett szorzással ellátva kommutatív egységelemes algebra. Az ilyen alakú algebrák részalgebráit *függvényalgebráknak* nevezzük.

Függvényalgebrák kijelölésére szokásos módszer az, hogy a T halmazon és a K testen megadunk egy hasonló típusú struktúrát, és az adott struktúrákat megtartó $T \to K$ függvények algebráját vesszük. Ennek nevezetes speciális esetei a következők.

– Legyen T halmaz; ekkor a

$$K^{(T)} := \{f \in \mathscr{F}(T;K) | \text{"a } \{t \in T | f(t) \neq 0\} \text{ halmaz véges"}\}$$

halmaz részalgebrája $\mathscr{F}(T;K)$-nak. Továbbá az

$$\mathscr{F}^b(T;\mathbb{K}) := \{f \in \mathscr{F}(T;\mathbb{K}) | \text{"az } f \text{ függvény korlátos"}\}$$

halmaz részalgebrája az $\mathscr{F}(T;\mathbb{K})$ algebrának.

– Legyen T topologikus tér; ekkor a

$$\mathscr{C}(T;\mathbb{K}) := \{f \in \mathscr{F}(T;\mathbb{K}) | \text{"az } f \text{ függvény folytonos"}\}$$

halmaz, valamint a

$$\mathscr{C}^b(T;\mathbb{K}) := \{f \in \mathscr{F}(T;\mathbb{K}) | \text{"az } f \text{ függvény folytonos és korlátos"}\}$$

halmazok részalgebrái az $\mathscr{F}(T;\mathbb{K})$ algebrának.

– Legyen T lokálisan kompakt tér; ekkor a

$$\mathscr{K}(T;\mathbb{K}) := \{f \in \mathscr{F}(T;\mathbb{K}) | \text{"az } f \text{ függvény folytonos és kompakt tartójú"}\}$$

halmaz, valamint a

$$\overline{\mathscr{K}}(T;\mathbb{K}) := \{f \in \mathscr{F}(T;\mathbb{K}) | \text{"az } f \text{ függvény folytonos és végtelenben eltűnő"}\}$$

halmazok részalgebrái az $\mathscr{F}(T;\mathbb{K})$ algebrának.

– Legyen $\mathscr{R}$ halmazgyűrű a T halmaz felett; ekkor a $T \to \mathbb{K}$ $\mathscr{R}$-lépcsősfüggvények $\mathscr{E}_{\mathbb{K}}(T, \mathscr{R})$ halmaza, valamint a $T \to \mathbb{K}$ $\mathscr{R}$-egyszerű függvények $\mathscr{E}_{\mathbb{K}}(T, \mathscr{R})$ halmaza részalgebrája az $\mathscr{F}(T; \mathbb{K})$ algebrának.

– Legyen $\mathscr{A}$ σ-algebra a T halmaz felett; ekkor

$$\mathscr{F}(T, \mathscr{A}; \mathbb{K}) := \{f \in \mathscr{F}(T; \mathbb{K}) |\ \text{"az } f \text{ függvény } \mathscr{A} - \mathscr{B}(\mathbb{K}) \text{ mérhető"}\},$$

halmaz részalgebrája az $\mathscr{F}(T; \mathbb{K})$ algebrának, ahol $\mathscr{B}(\mathbb{K})$ a $\mathbb{K}$ Borel-féle σ-algebrája. Továbbá, a

$$\mathscr{F}^b(T, \mathscr{A}; \mathbb{K}) := \{f \in \mathscr{F}(T; \mathbb{K}) |\ \text{"az } f \text{ függvény } \mathscr{A} - \mathscr{B}(\mathbb{K}) \text{ mérhető és korlátos"}\}$$

halmaz szintén részalgebrája az $\mathscr{F}(T; \mathbb{K})$ algebrának.

– Legyen T metrikus tér; ekkor az

$$\mathfrak{A}(T, \mathbb{K}) := \{f \in \mathscr{F}(T; \mathbb{K}) |\ \text{"az } f \text{ függvény egyenletesen folytonos"}\}$$

halmaz részalgebrája az $\mathscr{F}(T; \mathbb{K})$ algebrának.

– Legyen Ω nyílt részhalmaza a $\mathbb{K}$ test feletti E normált térnek és $r \in \mathbb{N}$ vagy $r = \infty$. Ekkor a

$$C^r(\Omega; \mathbb{K}) :=$$
$$:= \{f \in \mathscr{F}(\Omega; \mathbb{K}) |\ \text{"az } f \text{ függvény } r-\text{szer folytonosan differenciálható"}\}$$

halmaz részalgebrája az $\mathscr{F}(\Omega; \mathbb{K})$ algebrának. Továbbá, a

$$C^{r,b}(\Omega; \mathbb{K}) :=$$
$$:= \{f \in \mathscr{F}(\Omega; \mathbb{K}) |\ \text{"az } f \text{ függvény } r-\text{szer folytonosan differenciálható,}$$
$$\text{és minden } 0 \le k \le r \text{ természetes számra } D^k f \text{ korlátos függvény"}\}$$

halmaz szintén részalgebrája az $\mathscr{F}(\Omega; \mathbb{K})$ algebrának.

– Legyen $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ nyílt halmaz; ekkor a

$$\mathscr{H}(\Omega; \mathbb{C}) := \{f \in \mathscr{F}(\Omega; \mathbb{C}) |\ \text{"az } f \text{ függvény holomorf"}\}$$

halmaz részalgebrája az $\mathscr{F}(\Omega; \mathbb{C})$ algebrának. Speciálisan, az

$$\mathscr{E}(\mathbb{C}) := \mathscr{H}(\mathbb{C}; \mathbb{C})$$

halmaz, vagyis a $\mathbb{C} \to \mathbb{C}$ *egészfüggvények* halmaza részalgebrája az $\mathscr{F}(\mathbb{C}; \mathbb{C})$ algebrának.

(II) Legyen E vektortér a K test felett, és $\mathbf{L}(E)$ az $E \to E$ K-lineáris operátorok halmaza. Ekkor $\mathbf{L}(E)$ a lineáris operátorműveletekkel és a függvénykompozícióval ellátva egységelemes algebra, amely nem kommutatív, ha E legalább két dimenziós. Az ilyen alakú algebrák részalgebráit nevezzük *operátoralgebráknak.* Ha $n \in \mathbb{N}$, akkor az $\mathbf{L}(K^n)$ operátoralgebrát $M_n(K)$ jelöli; az ilyen alakú operátoralgebrák részalgebrái a *mátrixalgebrák.*

Operátoralgebrák kijelölésére szokásos módszer az, hogy az E vektortéren megadunk valamilyen struktúrát és az azt megtartó lineáris operátorok halmazát vesszük. Ennek legfontosabb speciális esetei a következők.

– Ha E vektortér K felett, akkor az $E \to E$ *véges dimenziós értékkészletű* lineáris operátorok halmaza részalgebrája az $\mathbf{L}(E)$ algebrának.

– Ha E topologikus vektortér, akkor az

$$\mathscr{L}(E) := \{u \in \mathbf{L}(E) | \text{"}u \text{ folytonos operátor"}\},$$

valamint a

$$\mathscr{B}(E) := \{u \in \mathbf{L}(E) | \text{"}u \text{ korlátos operátor"}\},$$

halmazok részalgebrái az $\mathbf{L}(E)$ algebrának.

– Ha E normált tér, akkor a

$$\mathscr{C}(E) := \{u \in \mathbf{L}(E) | \text{"}u \text{ kompakt operátor"}\}$$

részalgebrája (sőt ideálja) az $\mathbf{L}(E)$ algebrának.

(III) Legyen S egységelemes félcsoport (azaz *monoid*), K test, és ismét tekintsük a

$$K^{(S)} := \{a \in \mathscr{F}(S;K) | \text{ "az } \{s \in S | a(s) \neq 0\} \text{ halmaz véges"}\}$$

halmazt. Ez lineáris altere az $\mathscr{F}(S;K)$ függvénytérnek, amit az S halmaz által generált *szabad vektortérnek* nevezünk K felett. Most a $K^{(S)}$ felett értelmezzük a $*$ műveletet úgy, hogy minden $a, b \in K^{(S)}$ és $s \in S$ esetén

$$(a * b)(s) = \sum_{(s', s'') \in S \times S,\ s's'' = s} a(s')b(s'').$$

Könnyen látható, hogy $a, b \in K^{(S)}$ esetén $a * b \in K^{(S)}$, és a $K^{(S)}$ vektortér a $*$ szorzással ellátva egységelemes algebra; ezt nevezzük az S monoid K feletti *konvolúciós algebrájának*, és $A_K(S)$-sel jelöljük. Legyen minden $s \in S$ esetén $\varepsilon_s \in K^{(S)}$ az az elem, amelyre minden $S \ni s'$-re, ha $s' \neq s$, akkor $\varepsilon_s(s') = 0$, és $\varepsilon_s(s) = 1$. Ekkor az $\{\varepsilon_s | s \in S\}$ halmaz algebrai bázisa $K^{(S)}$ vektortérnek, és a $j : S \to A_K(S)$ leképezés injektív egységelem-tartó félcsoport-morfizmus S és az $A_K(S)$ multiplikatív félcsoport között. Az $A_K(S)$ algebra pontosan akkor kommutatív, ha S kommutatív. Ha A egységelemes algebra K felett, akkor minden $f : S \to A$ egységelem-tartó félcsoport-morfizmushoz létezik egyetlen olyan $\tilde{f} : A_K(S) \to A$ egységelem-tartó algebra-morfizmus, amelyre $\tilde{f} \circ j = f$. Fontos speciális esetek a következők.

– $S := \mathbb{N}$ és S művelete az összeadás. Az így értelmezett $\mathbb{N}$ kommutatív monoid K test feletti konvolúciós algebráját a $K[X]$ szimbólummal is jelöljük, és X jelöli azt az elemet ebben az algebrában, amelyre $n \in \mathbb{N}$ esetén $\mathrm{X}(n) = 0$, ha $n \neq 1$, és $\mathrm{X}(1) = 1$ (vagyis $X := \varepsilon_1$). A $K[X]$ algebrát a K feletti *egyváltozós polinomok algebrájának* nevezzük. Nyilvánvaló, hogy az X elem generálja a $K[X]$ algebrát, és minden $P \in K[X]$ esetén fennáll a

$$P = \sum_{k=0}^{\infty} P(k) X^k$$

egyenlőség, ahol természetesen véges összegzés áll.

– $S := \mathbb{N}^n$, ahol $n \in \mathbb{N}^+$, és S művelete az összeadás. Az így értelmezett $\mathbb{N}^n$ kommutatív monoid K test feletti konvolúciós algebráját a $K[X_1, ..., X_n]$ szimbólummal is jelöljük, és minden $1 \leq k \leq n$ természetes számra X_k jelöli azt az elemet ebben az algebrában, amelyre $\alpha \in \mathbb{N}^n$ esetén $X_k(\alpha) = 0$, ha $\alpha \neq e_k$, és $X_k(e_k) = 1$, ahol e_k a k-adik kanonikus báziselem $\mathbb{N}^n$-ben (vagyis $X_k := \varepsilon_{e_k}$). A $K[X_1, ..., X_n]$ algebrát a K feletti *n-változós polinomok algebrájának* nevezzük. Nyilvánvaló, hogy az $X_1, ..., X_n$ elemek generálják a $K[X_1, ..., X_n]$ algebrát, és minden $P \in K[X_1, ..., X_n]$ esetén fennáll a

$$P = \sum_{\alpha \in \mathbb{N}^n}^{\infty} P(\alpha) \left(\prod_{k=1}^{n} X_k^{\alpha(k)} \right)$$

egyenlőség, ahol természetesen véges összegzés áll.

Megjegyezzük még, hogy ha G csoport, akkor az $A_K(G)$ algebrát a G csoport K feletti *csoport-algebrájának* nevezzük.

(IV) Legyen A vektortér a K test felett, és értelmezzük A felett a szorzást úgy, hogy minden $a, b \in A$ esetén $ab := 0$; ekkor A kommutatív algebra. Az ilyen alakú algebrákat *nulla-szorzású algebráknak* nevezzük.

13.2. Algebra egységelemesítése

A következő állítás megmutatja, hogy minden algebra természetes módon kibővíthető egységelemmel. Ezáltal az algebrákkal kapcsolatos problémák megoldásának jó része visszavezethető az egységelemes algebrák esetére.

13.2.1. Állítás. *Legyen A algebra a K test felett.*

a) *Létezik olyan B egységelemes algebra K felett, és olyan $j : A \to B$ algebra-morfizmus, amelyre teljesül az, hogy minden C egységelemes algebrához, és minden $\pi : A \to C$*

algebra-morfizmushoz egyértelműen létezik olyan $\tilde{\pi} : B \to C$ egységelem-tartó algebra-morfizmus, hogy $\tilde{\pi} \circ j = \pi$.

b) *Legyenek (B_1, j_1) és (B_2, j_2) olyan párok, hogy B_1 és B_2 egységelemes algebrák a K test felett, $j_1 : A \to B_1$ és $j_2 : A \to B_2$ algebra-morfizmusok, és minden C egységelemes algebrához, valamint minden $\pi_1 : A \to C$ és $\pi_2 : A \to C$ algebra-morfizmushoz egyértelműen létezik olyan $\tilde{\pi}_1 : B_1 \to C$ és $\tilde{\pi}_2 : B_2 \to C$ egységelem-tartó algebra-morfizmusok, hogy $\tilde{\pi}_1 \circ j_1 = \pi_1$ és $\tilde{\pi}_2 \circ j_2 = \pi_2$. Ekkor létezik egyetlen olyan $\pi : B_1 \to B_2$ algebra-morfizmus, amelyre $\pi \circ j_1 = j_2$, és ez a leképezés algebra-izomorfizmus.*

Bizonyítás. a) Legyen $\tilde{A} := K \times A$, és értelmezzük a

$$+ : \tilde{A} \times \tilde{A} \to \tilde{A}, \quad \cdot : \tilde{A} \times \tilde{A} \to \tilde{A}, \quad . : K \times \tilde{A} \to \tilde{A}$$

leképezéseket úgy, hogy minden $(\lambda, a), (\lambda', a') \in \tilde{A}$ és $\alpha \in K$ esetén

$$(\lambda, a) + (\lambda', a') := (\lambda + \lambda', a + a'),$$
$$(\lambda, a) \cdot (\lambda', a') := (\lambda\lambda', \lambda.a' + \lambda'.a + aa'),$$
$$\alpha.(\lambda, a) := (\alpha\lambda, \alpha.a).$$

Ekkor az $\tilde{A}$ halmaz a $+$, $\cdot$ és $.$ leképezésekkel ellátva egységelemes algebra K felett, amelyben $\mathbf{1} := (1, 0)$ az egységelem, továbbá a

$$j : A \to \tilde{A}; \quad a \mapsto (0, a)$$

leképezés injektív algebra-morfizmus, és $\mathrm{Im}(j)$ olyan 1-kodimenziós ideál $\tilde{A}$-ban, amelyre $\tilde{A} = (K.\mathbf{1}) \oplus \mathrm{Im}(j)$.

Legyen C egységelemes algebra K felett, és $\pi : A \to C$ algebra-morfizmus. Jelölje $\mathbf{1}_C$ a C egységelemét, és értelmezzük a

$$\tilde{\pi} : \tilde{A} \to C; \quad (\lambda, a) \mapsto \lambda.\mathbf{1}_C + \pi(a)$$

leképezést. Könnyen ellenőrizhető, hogy $\tilde{\pi}$ egységelem-tartó algebra-morfizmus, és nyilvánvalóan $\tilde{\pi} \circ j = \pi$. Ha $\tilde{\pi}' : \tilde{A} \to C$ szintén olyan egységelem-tartó algebra-morfizmus, amelyre $\tilde{\pi}' \circ j = \pi$, akkor $\tilde{\pi} = \tilde{\pi}'$ az $\mathrm{Im}(j)$ és $K.\mathbf{1}$ lineáris altereken, így $\tilde{\pi} = \tilde{\pi}'$, mert $\tilde{A} = (K.\mathbf{1}) \oplus \mathrm{Im}(j)$.

b) A feltevés szerint B_2 egységelemes algebra, és $j_2 : A \to B_2$ algebra-morfizmus, így egyértelműen létezik olyan $\pi : B_1 \to B_2$ egységelem-tartó algebra-morfizmus, amelyre $\pi \circ j_1 = j_2$. Ugyanakkor B_1 egységelemes algebra, és $j_1 : A \to B_1$ algebra-morfizmus, így egyértelműen létezik olyan $\pi' : B_2 \to B_1$ egységelem-tartó algebra-morfizmus, amelyre $\pi' \circ j_2 = j_1$. Ekkor $\pi' \circ \pi : B_1 \to B_1$ olyan egységelem-tartó algebra-morfizmus, amelyre $(\pi' \circ \pi) \circ j_1 = j_1$, és a feltevések alapján egyetlen ilyen létezhet. Mivel pedig az id_{B_1} függvény nyilvánvalóan ilyen tulajdonságú, így $\pi' \circ \pi = id_{B_1}$. Teljesen hasonló érveléssel kapható, hogy $\pi \circ \pi' = id_{B_2}$, ami azt jelenti, hogy $\pi : B_1 \to B_2$ algebra-izomorfizmus. ■

13.2.2. Definíció. *Ha A algebra a K test felett, akkor az A* **egységelemesítésének** *nevezünk minden olyan (B, j) párt, amelyre B egységelemes algebra K felett, $j : A \to B$ algebra-morfizmus, és minden C egységelemes algebrához, és minden $\pi : A \to C$ algebra-morfizmushoz egyértelműen létezik olyan $\tilde{\pi} : B \to C$ egységelem-tartó algebra-morfizmus, hogy $\tilde{\pi} \circ j = \pi$. Az előző állítás bizonyításának a) pontjában bevezetett $(\tilde{A}, j)$ párt az A* **standard egységelemesítésének** *nevezzük.*

Az előző állítás szerint minden algebrának létezik egységelemesítése, és bármely két egységelemesítése kitüntetett módon azonosítható, tehát lényegében egyetlen egységelemesítés létezik. Természetesen egységelemes algebrának is vehető az egységelemesítése. Tetszőleges algebrának mindig tekinthetjük a standard egységelemesítését, de nem mindig célszerű ez a választás. A következő példa megmutatja, hogy vannak olyan algebrák, amelyeknek természetes módon megadható nem standard egységelemesítése.

Példa. Legyen T lokálisan kompakt tér, és tekintsük a $T \to \mathbb{K}$ folytonos, végtelenben eltűnő függvények $\overline{\mathscr{K}}(T; \mathbb{K})$ algebráját. Könnyen látható, hogy a $\overline{\mathscr{K}}(T; \mathbb{K})$ algebra egységelemessége ekvivalens a T kompaktságával. Jelölje T' a T egypontú kompaktifikációját, és legyen ω a végtelen távoli pont T'-ben. Minden $f \in \overline{\mathscr{K}}(T; \mathbb{K})$ esetén jelölje f^0 az f függvény 0-val vett kiterjesztését T'-re. Értelmezzük a

$$j' : \overline{\mathscr{K}}(T; \mathbb{K}) \to \mathscr{C}(T'; \mathbb{K}); \quad f \mapsto f^0$$

leképezést. Ekkor a $(\overline{\mathscr{K}}(T; \mathbb{K}), j')$ pár – nem standard – egységelemesítése a $\overline{\mathscr{K}}(T; \mathbb{K})$ algebrának, ugyanis a

$$\pi : \mathscr{C}(T'; \mathbb{K}) \to \mathbb{K} \times \overline{\mathscr{K}}(T; \mathbb{K}); \quad g \mapsto (g(\omega), g|_T - g(\omega).1_T)$$

leképezés olyan algebra-izomorfizmus, amelyre $\pi \circ j' = j$.

13.3. Algebra karakterei és a reguláris ideálok

13.3.1. Definíció. *A K test feletti A algebra* **karakterének** *nevezünk minden $A \to K$ algebra-morfizmust, és az A karaktereinek halmazát $\mathrm{X}'(A)$, valamint az A nem nulla karaktereinek halmazát $\mathrm{X}(A)$ jelöli.*

13.3.2. Definíció. *Az A algebra $\mathfrak{m}$ ideálját* **regulárisnak** *nevezzük, ha $\mathfrak{m}$ valódi ideál A-ban (vagyis $\mathfrak{m} \neq A$), és létezik olyan $e \in A$, amelyre minden $a \in A$ esetén $ae - a \in \mathfrak{m}$ és $ea - a \in \mathfrak{m}$.*

Természesen egységelemes algebra *minden* valódi ideálja reguláris. Nyilvánvaló, hogy nulla-szorzású algebrának nincs reguláris ideálja.

13.3.3. Állítás. *Az A algebra $\mathfrak{m}$ ideálja pontosan akkor reguláris, ha az $A/\mathfrak{m}$ faktoralgebra nem nulla és egységelemes.*

Bizonyítás. Ha $\mathfrak{m}$ reguláris ideál, és $e \in A$ olyan elem, amelyre minden $a \in A$ esetén $ae - a \in \mathfrak{m}$ és $ea - a \in \mathfrak{m}$, akkor $\pi_{A/\mathfrak{m}}(e)$ multiplikatív neutrális elem az $A/\mathfrak{m}$ faktoralgebrában, továbbá a faktoralgebra nem nulla, mert $\mathfrak{m}$ valódi ideál. Megfordítva, ha $\mathfrak{m}$ olyan ideál A-ban, hogy az $A/\mathfrak{m}$ faktoralgebra nem nulla és egységelemes, akkor $\mathfrak{m}$ valódi ideál, és van olyan $e \in A$, amelyre $\pi_{A/\mathfrak{m}}(e)$ multiplikatív neutrális elem $A/\mathfrak{m}$-ben; természetesen ekkor minden $a \in A$ esetén

$$\pi_{A/\mathfrak{m}}(ae) = \pi_{A/\mathfrak{m}}(a)\pi_{A/\mathfrak{m}}(e) = \pi_{A/\mathfrak{m}}(a) = \pi_{A/\mathfrak{m}}(e)\pi_{A/\mathfrak{m}}(a) = \pi_{A/\mathfrak{m}}(ea),$$

tehát $ae - a, ea - a \in \mathrm{Ker}(\pi_{A/\mathfrak{m}}) = \mathfrak{m}$, vagyis $\mathfrak{m}$ reguláris ideál. ■

13.3.4. Állítás. *Legyen A algebra. Ha $\chi \in \mathrm{X}(A)$, akkor $\mathrm{Ker}(\chi)$ 1-kodimenziós reguláris ideál A-ban, és az A minden $\mathfrak{m}$ 1-kodimenziós reguláris ideáljához egyértelműen létezik olyan $\chi \in \mathrm{X}(A)$, amelyre $\mathrm{Ker}(\chi) = \mathfrak{m}$.*

Bizonyítás. Legyen $\chi \in \mathrm{X}(A)$. Az nyilvánvaló, hogy $\mathrm{Ker}(\chi)$ 1-kodimenziós ideál A-ban. A $\chi \neq 0$ feltétel miatt van olyan $e \in A$, hogy $\chi(e) = 1$; ekkor minden $a \in A$ esetén $\chi(ae) = \chi(a) = \chi(ea)$, vagyis $ae - a, ea - a \in \mathrm{Ker}(\chi)$, így $\mathrm{Ker}(\chi)$ reguláris ideál.

Legyen $\mathfrak{m}$ tetszőleges 1-kodimenziós reguláris ideál A-ban. Az előző állítás szerint $A/\mathfrak{m}$ nem nulla és egységelemes algebra K felett. Legyen $e \in A$ olyan, hogy minden $a \in A$ esetén $ae - a, ea - a \in \mathfrak{m}$; ekkor $\pi_{A/\mathfrak{m}}(e)$ az $A/\mathfrak{m}$-nek egységeleme. Ebből következik, hogy a

$$\sigma : K \to A/\mathfrak{m}; \quad \lambda \mapsto \lambda.\pi_{A/\mathfrak{m}}(e)$$

leképezés algebra-morfizmus, és ez *bijekció*, mert $A/\mathfrak{m}$ a K felett 1 dimenziós vektortér. Tehát σ algebra-izomorfizmus, így $\chi := \sigma^{-1} \circ \pi_{A/\mathfrak{m}} : A \to K$ algebra-morfizmus, és $\mathrm{Ker}(\chi) = \mathrm{Ker}(\pi_{A/\mathfrak{m}}) = \mathfrak{m}$, vagyis $\chi \in \mathrm{X}(A)$ és $\mathrm{Ker}(\chi) = \mathfrak{m}$. Ha $\chi' \in \mathrm{X}(A)$ szintén olyan, hogy $\mathrm{Ker}(\chi') = \mathfrak{m}$, akkor van olyan $\lambda \in K$, hogy $\chi' = \lambda.\chi$. Véve olyan $a \in A$ elemet, amelyre $\chi'(a) \neq 0$; ebből kapjuk, hogy $\chi(a) \neq 0$, valamint $\lambda \neq 0$, továbbá

$$\lambda^2\chi(a)^2 = (\chi'(a))^2 = \chi'(a^2) = \lambda\chi(a^2) = \lambda\chi(a)^2,$$

így $\lambda = 1$, vagyis $\chi' = \chi$. ■

Természetesen minden 1-kodimenziós ideál maximális ideál. Azonban maximális ideál nem szükségképpen 1-kodimenziós. Például az $\mathbb{R}[X]$ polinomalgebrában az $X^2 + 1$ polinom által generált főideál maximális, de 2-kodimenziós. A nulla-szorzású algebrák példája mutatja, hogy maximális, sőt még 1-kodimenziós ideál sem szükségképpen reguláris.

13.3.5. Állítás. *Egységelemes algebra minden valódi ideálja részhalmaza egy maximális ideálnak.*

Bizonyítás. Legyen $\mathfrak{m}$ valódi ideál az A egységelemes algebrában, és jelölje $S_\mathfrak{m}$ az A $\mathfrak{m}$-t tartalmazó valódi ideáljainak halmazát. Az $S_\mathfrak{m}$ halmazt a tartalmazás relációval rendezve, könnyen látható, hogy $S_\mathfrak{m}$ induktívan rendezett halmaz. Valóban, ha $(\mathfrak{n}_i)_{i\in I}$ olyan $S_\mathfrak{m}$-ben haladó rendszer, amelyre minden $i, j \in I$ esetén $\mathfrak{n}_i \subseteq \mathfrak{n}_j$ vagy $\mathfrak{n}_j \subseteq \mathfrak{n}_i$, akkor az $\mathfrak{n} := \bigcup_{i\in I} \mathfrak{n}_i$ halmaz olyan ideál A-ban, amely $\mathfrak{m}$-et tartalmazza, és valódi is, mert minden $I \ni i$-re $\mathbf{1} \notin \mathfrak{n}_i$, így $\mathbf{1} \notin \mathfrak{n}$; ezért $\mathfrak{n} \in S_\mathfrak{m}$, és $\mathfrak{n}$ felső korlátja (sőt szuprémuma) az $(\mathfrak{n}_i)_{i\in I}$ rendszernek. A Zorn-lemma alapján létezik $S_\mathfrak{m}$-nek maximális eleme; ez maximális ideál A-ban, amely $\mathfrak{m}$-et tartalmazza. ■

13.3.6. Állítás. *Ha A algebra K felett, és $\mathfrak{m}$ reguláris maximális ideál A-ban, akkor létezik olyan $\tilde{\mathfrak{m}}$ maximális ideál $\tilde{A}$-ban, amelyre $\mathfrak{m} = \tilde{\mathfrak{m}} \cap A$.*

Bizonyítás. Legyen $e \in A$ olyan elem, amelyre hogy minden $a \in A$ esetén $ae - a, ea - a \in \mathfrak{m}$, és vezessük be a

$$\mathfrak{n} := K.(\mathbf{1} - e) + \mathfrak{m}$$

lineáris alteret $\tilde{A}$-ban, ahol $\mathbf{1}$ az egységelemet jelöli $\tilde{A}$-ban. Ekkor a definíció alapján $\mathfrak{n} = \{(\lambda, a - \lambda.e) | (\lambda \in K) \wedge (a \in \mathfrak{m})\}$, amiből közvetlenül látható, hogy $\mathfrak{n}$ ideál $\tilde{A}$-ban, hiszen ha $(\lambda, a - \lambda.e) \in \mathfrak{n}$ és $(\lambda', a') \in \tilde{A}$, akkor

$$(\lambda, a - \lambda.e)(\lambda', a') = (\lambda\lambda', (\lambda.(a' - ea') + \lambda'.a + aa') - (\lambda'\lambda).e) \in \mathfrak{n},$$

$$(\lambda', a')(\lambda, a - \lambda.e) = (\lambda'\lambda, (\lambda.(a' - a'e) + \lambda'.a + a'a) - (\lambda'\lambda).e) \in \mathfrak{n},$$

hiszen $a' - ea', a' - a'e \in \mathfrak{m}$ és $aa', a'a \in \mathfrak{m}$.

Az $\mathfrak{n}$ ideál valódi, mert ha $\mathfrak{n} = \tilde{A}$ teljesülne, akkor $(0, e) \in \mathfrak{n}$ miatt létezne $\lambda \in K$ és $a \in \mathfrak{m}$ úgy, hogy $(\lambda, a - \lambda.e) = (0, e)$, tehát $\lambda = 0$ és $e = a \in \mathfrak{m}$, amiből (az e definíciója alapján) $\mathfrak{m} = A$ következne. Az előző állítás szerint vehetünk egy $\tilde{\mathfrak{m}}$ maximális ideált $\tilde{A}$-ban, amelyre $\mathfrak{n} \subseteq \tilde{\mathfrak{m}}$. Világos, hogy $\mathfrak{m} \subseteq \tilde{\mathfrak{m}} \cap A$. Ha itt nem állna egyenlőség, akkor $\tilde{\mathfrak{m}} \cap A = A$ teljesülne, mert $\tilde{\mathfrak{m}} \cap A$ ideál A-ban és $\mathfrak{m}$ maximális ideál A-ban; ekkor $e \in A \subseteq \tilde{\mathfrak{m}}$, ugyanakkor $\mathbf{1} - e \in \mathfrak{n} \subseteq \tilde{\mathfrak{m}}$, tehát $\mathbf{1} = e + (\mathbf{1} - e) \in \tilde{\mathfrak{m}}$, ami ellentmond annak, hogy $\tilde{\mathfrak{m}}$ valódi ideál $\tilde{A}$-ban. ■

13.3.7. Következmény. *Ha A kommutatív algebra a K test felett és $\mathfrak{m}$ reguláris maximális ideál A-ban, akkor $A/\mathfrak{m}$ testbővítése K-nak.*

Bizonyítás. Legyen $e \in A$ olyan elem, amelyre minden $a \in A$ esetén $ae - a, ea - a \in \mathfrak{m}$. Ekkor $\pi_{A/\mathfrak{m}}(e)$ egységeleme az $A/\mathfrak{m}$ kommutatív algebrának. Legyen $a \in A$ olyan, hogy $\pi_{A/\mathfrak{m}}(a) \neq 0$. Ekkor $a \notin \mathfrak{m}$, és az $Aa + \mathfrak{m}$ halmaz olyan ideál A-ban, amely $\mathfrak{m}$-t tartalmazza, így $\mathfrak{m} = Aa + \mathfrak{m}$ vagy $A = Aa + \mathfrak{m}$. De $\mathfrak{m} = Aa + \mathfrak{m}$ lehetetlen, különben $ea \in \mathfrak{m} - \mathfrak{m} \subseteq \mathfrak{m}$, így $a = ea + (a - ea) \in \mathfrak{m} + \mathfrak{m} \subseteq \mathfrak{m}$, holott $a \notin \mathfrak{m}$. Ezért $e \in A = Aa + \mathfrak{m}$, így létezik olyan $b \in A$, amelyre $e - ba \in \mathfrak{m}$, következésképpen $\pi_{A/\mathfrak{m}}(e) = \pi_{A/\mathfrak{m}}(b)\pi_{A/\mathfrak{m}}(a)$.

Ez azt jelenti, hogy a $\pi_{A/\mathfrak{m}}(a)$ elem invertálható $A/\mathfrak{m}$-ben, vagyis az $A/\mathfrak{m}$ gyűrű test. Továbbá, a

$$K \to A/\mathfrak{m}; \quad \lambda \mapsto \lambda.\pi_{A/\mathfrak{m}}(e)$$

leképezés injektív algebra-morfizmus, így $A/\mathfrak{m}$ testbővítése K-nak. ■

13.4. Algebra Gelfand-reprezentációja és elem spektruma

13.4.1. Definíció. *Ha A algebra a K test felett, akkor az A* **Gelfand-reprezentáció-jának** *nevezzük a*

$$\mathscr{G}_A : A \to \mathscr{F}(\mathrm{X}(A); K); \quad a \mapsto (\chi \mapsto \chi(a))$$

leképezést, és $a \in A$ esetén a $\mathscr{G}_A(a) : \mathrm{X}(A) \to K$ függvényt az $a \in A$ elem **Gelfand-reprezentáltjának** *hívjuk. Ha A algebra a $\mathbb{K}$ test felett, akkor a $\sigma(A^*, A)|\mathrm{X}(A)$ topológiát (vagyis a pontonkénti konvergencia topológiáját) az $\mathrm{X}(A)$ feletti* **Gelfand-topológiának** *nevezzük.*

Nyilvánvaló, hogy ha A algebra a K test felett, akkor a $\mathscr{G}_A : A \to \mathscr{F}(\mathrm{X}(A); K)$ Gelfand-reprezentáció *algebra-morfizmus* A és az $\mathscr{F}(\mathrm{X}(A); K)$ függvényalgebra között. Az általános esetben a Gelfand-reprezentáció nem injektív és nem szürjektív. Ha A algebra $\mathbb{K}$ felett, akkor minden $a \in A$ esetén a $\mathscr{G}_A(a) : \mathrm{X}(A) \to \mathbb{K}$ Gelfand-reprezentált *folytonos* függvény (természetesen az $\mathrm{X}(A)$ feletti Gelfand-topológia szerint), vagyis ekkor $\mathrm{Im}(\mathscr{G}_A) \subseteq \mathscr{C}(\mathrm{X}(A); \mathbb{K})$, és általában itt nincs egyenlőség.

13.4.2. Definíció. *Ha A egységelemes algebra, akkor $\mathbf{G}(A)$ jelöli az A invertálható elemeinek halmazát.*

Nyilvánvaló, hogy ha A egységelemes algebra, akkor $\mathbf{G}(A)$ az algebra szorzásának $\mathbf{G}(A) \times \mathbf{G}(A)$ halmazra vett leszűkítésével ellátva *csoport*. A továbbiakban $\mathbf{G}(A)$-t mindenütt csoportként fogjuk kezelni.

13.4.3. Definíció. *Legyen A egységelemes algebra a K test felett. Minden $a \in A$ esetén*

$$\mathrm{Sp}_A(a) := \{\lambda \in K \,|\lambda.\mathbf{1} - a \notin \mathbf{G}(A)\},$$

és az $\mathrm{Sp}_A(a)$ halmazt az $a \in A$ elem **spektrumának** *nevezzük, továbbá a $K \setminus \mathrm{Sp}_A(a)$ halmazt az $a \in A$ elem* **rezolvens halmazának** *hívjuk. Ha $a \in A$, akkor a*

$$K \setminus \mathrm{Sp}_A(a) \to A; \quad \lambda \mapsto (\lambda.\mathbf{1} - a)^{-1}$$

leképezést az $a \in A$ elem **rezolvens függvényének** *nevezzük. Ha A tetszőleges (nem feltétlenül egységelemes) algebra K felett, akkor $a \in A$ esetén*

$$\mathrm{Sp}'_A(a) := \mathrm{Sp}_{\tilde{A}}((0, a)),$$

és az $\mathrm{Sp}'_A(a)$ halmazt az $a \in A$ elem **vesszős spektrumának** *nevezzük.*

Megjegyzések. 1) Ha A egységelemes algebra és $a \in A$, akkor $0 \in \mathrm{Sp}_A(a)$ ekvivalens azzal, hogy az $a \in A$ elem nem invertálható.

2) Ha A algebra és $a \in A$, akkor $(0, a)$ nyilvánvalóan nem invertálható $\tilde{A}$-ban, hiszen $\{0\} \times A$ valódi ideál $\tilde{A}$-ban; ezért $0 \in \mathrm{Sp}_{\tilde{A}}((0, a))$, azaz $0 \in \mathrm{Sp}'_A(a)$. Ebből következik, hogy bármely A algebrára és $a \in A$ elemre $\mathrm{Sp}'_A(a) \neq \emptyset$, ugyanakkor van olyan A egységelemes algebra és $a \in A$, hogy $\mathrm{Sp}_A(a) = \emptyset$.

3) Ha A egységelemes algebra a K test felett, akkor $a \in A$ esetén

$$\mathrm{Sp}'_A(a) = \{0\} \cup \mathrm{Sp}_A(a).$$

Ennek bizonyításához elég azt igazolni, hogy $\lambda \in K \setminus \{0\}$ esetén a $\lambda.(1, 0) - (0, a) = (\lambda, -a) \in \tilde{A}$ elem pontosan akkor invertálható $\tilde{A}$-ban, ha a $\lambda.\mathbf{1} - a \in A$ elem invertálható A-ban, ahol $\mathbf{1}$ az A egységelemét jelöli. Ha $\lambda.\mathbf{1} - a$ invertálható A-ban, akkor egyszerű számolással kapjuk, hogy a $(\lambda^{-1}, \lambda^{-1}.(\lambda.\mathbf{1} - a)^{-1}a) \in \tilde{A}$ elem a $(\lambda, -a)$ elem inverze $\tilde{A}$-ban. Megfordítva, ha $(\sigma, b) \in \tilde{A}$ a $(\lambda, -a)$ elem inverze $\tilde{A}$-ban, akkor $\sigma = \lambda^{-1}$ és fennállnak a $\lambda.b - \lambda^{-1}.a - ab = 0 = \lambda.b - \lambda^{-1}.a - ba$ egyenlőségek, amiből következik, hogy a $\lambda^{-1}.\mathbf{1} + b \in A$ elem a $\lambda.\mathbf{1} - a$ elem inverze A-ban.

Példák (spektrumokra).

1) Ha T halmaz, K test és $A := \mathscr{F}(T; K)$, akkor $a \in A$ esetén $\mathrm{Sp}_A(a) = \mathrm{Im}(a)$. Ez azonnal következik abból, hogy egy $a \in A$ elem pontosan akkor invertálható A-ban, ha $0 \notin \mathrm{Im}(a)$.

2) Ha T halmaz és $A := \mathscr{F}^b(T; \mathbb{K})$, akkor $a \in A$ esetén $\mathrm{Sp}_A(a) = \overline{\mathrm{Im}(a)}$. Ez azonnal következik abból, hogy egy $a \in A$ elem pontosan akkor invertálható A-ban, ha $0 \notin \mathrm{Im}(a)$ és $1/a$ korlátos függvény, vagyis $0 \notin \overline{\mathrm{Im}(a)}$; így $\lambda \in \mathbb{K}$ és $a \in A$ esetén $\lambda.\mathbf{1} - a$ pontosan akkor invertálható A-ban, ha $0 \notin \overline{\mathrm{Im}(\lambda.\mathbf{1} - a)}$, azaz $\lambda \notin \overline{\mathrm{Im}(a)}$.

3) Ha T lokálisan kompakt tér és $A := \overline{\mathscr{K}}(T; \mathbb{K})$, akkor $a \in A$ esetén $\mathrm{Sp}'_A(a) = \{0\} \cup \overline{\mathrm{Im}(a)}$, és ha T kompakt, akkor $\mathrm{Sp}_A(a) = \mathrm{Im}(a)$, és $\mathrm{Sp}'_A(a) = \{0\} \cup \mathrm{Im}(a)$.

4) Ha E véges dimenziós vektortér a K test felett és $A := \mathbf{L}(E)$, akkor $a \in A$ esetén $\mathrm{Sp}_A(a)$ megegyezik az a operátor sajátértékeinek halmazával. Itt előfordulhat, hogy $a \in A$ esetén $\mathrm{Sp}_A(a) = \emptyset$, például akkor, ha $E = \mathbb{R}^2$ és az $a \in A$ elem egy nemtriviális forgatás.

5) Legyen K test és $A := K[X]$. Ekkor $a \in A$ esetén $\mathrm{Sp}_A(a) = K$, ha $deg(a) > 0$, míg $\mathrm{Sp}_A(a) = \{a(0)\}$, ha $deg(a) = 0$.

13.4.4. Lemma. (Jacobson-lemma) *Ha A egységelemes algebra, akkor bármely $a, b \in A$ esetén*

$$\{0\} \cup \mathrm{Sp}_A(ab) = \{0\} \cup \mathrm{Sp}_A(ba).$$

Ha A algebra a K test felett, akkor $a, b \in A$ esetén

$$\mathrm{Sp}'_A(ab) = \mathrm{Sp}'_A(ba).$$

Bizonyítás. A második állítás nyilvánvalóan következik az elsőből, és abból, hogy 0 eleme a vesszős spektrumoknak.

Legyen tehát A egységelemes algebra és $a, b \in A$. Azt mutatjuk meg, hogy ha $\lambda \in K$ olyan, hogy $\lambda \neq 0$ és $\lambda.\mathbf{1} - ab$ invertálható, akkor $\lambda.\mathbf{1} - ba$ is invertálható. Ehhez vezessük be a $c := (\lambda.\mathbf{1} - ab)^{-1}$ elemet, és olyan $\alpha, \beta \in K$ elemeket keresünk, amelyre $\alpha.\mathbf{1} + \beta.bca$ a $\lambda.\mathbf{1} - ba$ inverze. Ez a feltétel arra vezet, hogy

$$\mathbf{1} = (\lambda.\mathbf{1} - ba)(\alpha.\mathbf{1} + \beta.bca) = (\lambda\alpha).\mathbf{1} + (\beta - \alpha)ba,$$

ahol felhasználtuk azt, hogy $(\lambda.\mathbf{1} - ab)c = \mathbf{1}$ miatt $abc = \lambda.c - \mathbf{1}$. Ezért szükségképpen $\alpha = \beta$ és $\lambda\alpha = 1$. Egyszerű számolással ellenőrizhető, hogy a $\lambda^{-1}.(\mathbf{1} + bca)$ elem valóban inverze a $\lambda.\mathbf{1} - ba$ elemnek. ■

Azonban a következő példa szerint van olyan A egységelemes algebra, amelyben léteznek olyan $a, b \in A$ elemek, hogy $\mathrm{Sp}_A(ab) \neq \mathrm{Sp}_A(ba)$. Természetesen ilyen esetben a Jacobson-lemma alapján arról van szó, hogy az $\mathrm{Sp}_A(ab)$ és $\mathrm{Sp}_A(ba)$ spektrumok közül az egyiknek nem eleme a 0, a másiknak pedig eleme, vagyis az ab és ba elemek közül az egyik invertálható, de a másik nem invertálható.

Példa. Legyen $p \geq 1$ tetszőleges valós szám, és az $\mathbf{l}^p_{\mathbb{K}}$ sorozatteret lássuk el a $\|\cdot\|_p$ normával. Legyen $a : \mathbf{l}^p_{\mathbb{K}} \to \mathbf{l}^p_{\mathbb{K}}$ az a leképezés, amelyre $\mathbf{s} \in \mathbf{l}^p_{\mathbb{K}}$ és $n \in \mathbb{N}$ esetén $a(\mathbf{s})(n) := \mathbf{s}(n+1)$. Továbbá legyen $b : \mathbf{l}^p_{\mathbb{K}} \to \mathbf{l}^p_{\mathbb{K}}$ az a leképezés, amelyre $\mathbf{s} \in \mathbf{l}^p_{\mathbb{K}}$ és $n \in \mathbb{N}^+$ esetén $b(\mathbf{s})(n) := \mathbf{s}(n-1)$ és $b(\mathbf{s})(0) := 0$. Ekkor $a, b \in \mathscr{L}(\mathbf{l}^p_{\mathbb{K}}) =: A$ és $a \circ b = id_{\mathbf{l}^p_{\mathbb{K}}}$, tehát $0 \notin \mathrm{Sp}_A(a \circ b)$. Ugyanakkor $b \circ a$ nem injektív operátor, tehát nem invertálható elem az A operátoralgebrában, így $0 \in \mathrm{Sp}_A(b \circ a)$.

13.4.5. Állítás. *Ha A és B egységelemes algebrák, valamint $\pi : A \to B$ egységelem-tartó algebra-morfizmus, akkor minden $a \in A$ esetén*

$$\mathrm{Sp}_B(\pi(a)) \subseteq \mathrm{Sp}_A(a).$$

Ha A és B algebrák, valamint $\pi : A \to B$ algebra-morfizmus, akkor minden $a \in A$ esetén

$$\mathrm{Sp}'_B(\pi(a)) \subseteq \mathrm{Sp}'_A(a).$$

Bizonyítás. Legyenek A és B egységelemes algebrák a K test felett, valamint $\pi : A \to B$ egységelem-tartó algebra-morfizmus. Ha $a \in A$ és $\lambda \in K \setminus \mathrm{Sp}_A(a)$, akkor $\lambda.\mathbf{1}_A - a$ invertálható A-ban, és az $a' := (\lambda.\mathbf{1}_A - a)^{-1}$ elemre

$$\pi(\lambda.\mathbf{1}_A - a)\pi(a') = \pi((\lambda.\mathbf{1}_A - a)a') = \pi(\mathbf{1}_A) = \mathbf{1}_B,$$

és hasonlóan kapjuk, hogy

$$\pi(a')\pi(\lambda.\mathbf{1}_A - a) = \pi(a'(\lambda.\mathbf{1}_A - a)) = \pi(\mathbf{1}_A) = \mathbf{1}_B,$$

vagyis a $\lambda.\mathbf{1}_B - \pi(a) = \pi(\lambda.\mathbf{1}_A - a)$ elem invertálható B-ben, így $\lambda \in K \setminus \mathrm{Sp}_B(\pi(a))$.

Tegyük fel, hogy A és B tetszőleges algebrák, valamint $\pi : A \to B$ algebra-morfizmus. Értelmezzük a

$$\tilde{\pi} : \tilde{A} \to \tilde{B}; \quad (\lambda, a) \mapsto (\lambda, \pi(a))$$

leképezést, ami nyilvánvalóan egységelem-tartó algebra-morfizmus az $\tilde{A}$ és $\tilde{B}$ egységelemes algebrák között. Ha $a \in A$, akkor az előző bekezdés és a definició szerint

$$\mathrm{Sp}'_B(\pi(a)) := \mathrm{Sp}_{\tilde{B}}(0, \pi(a)) = \mathrm{Sp}_{\tilde{B}}(\tilde{\pi}(0, a)) \subseteq \mathrm{Sp}_{\tilde{A}}(0, a) =: \mathrm{Sp}'_A(a). \ \blacksquare$$

13.4.6. Következmény. *Ha A egységelemes algebra és B olyan részalgebrája A-nak, amelyre $\mathbf{1}_A \in B$, akkor minden $b \in B$ esetén $\mathrm{Sp}_A(b) \subseteq \mathrm{Sp}_B(b)$. Ha A tetszőleges algebra és B részalgebrája A-nak, akkor minden $b \in B$ esetén $\mathrm{Sp}'_A(b) \subseteq \mathrm{Sp}'_B(b)$.*

Bizonyítás. Az állítás nyilvánvalóan következik az előzőből, ha azt a $B \to A$ kanonikus injekcióra alkalmazzuk. $\blacksquare$

13.4.7. Következmény. *Ha A egységelemes algebra, akkor minden $\chi \in \mathrm{X}(A)$ és $a \in A$ esetén $\chi(a) \in \mathrm{Sp}_A(a)$, vagyis minden $A \ni a$-ra $\mathrm{Im}(\mathscr{G}_A(a)) \subseteq \mathrm{Sp}_A(a)$. Ha A tetszőleges algebra, akkor minden $\chi \in \mathrm{X}'(A)$ és $a \in A$ esetén $\chi(a) \in \mathrm{Sp}'_A(a)$, vagyis minden $A \ni a$-ra $\mathrm{Im}(\mathscr{G}_A(a)) \subseteq \mathrm{Sp}'_A(a)$.*

Bizonyítás. Ha A egységelemes algebra K felett, akkor a $\mathscr{G}_A : A \to \mathscr{F}(\mathrm{X}(A); K)$ leképezés *egységelem-tartó* algebra-morfizmus, mert minden A feletti nem nulla karakter az egységelemen 1 értéket vesz fel. Ezért a $B := \mathscr{F}(\mathrm{X}(A); K)$ választással kapjuk, hogy minden $a \in A$ esetén $\mathrm{Sp}_B(\mathscr{G}_A(a)) \subseteq \mathrm{Sp}_A(a)$, és a spektrumokra vonatkozó 1) példa alapján $\mathrm{Sp}_B(\mathscr{G}_A(a)) = \mathrm{Im}(\mathscr{G}_A(a))$.

Ha A tetszőleges algebra K felett, akkor $a \in A$ esetén $\mathrm{Sp}'_B(\mathscr{G}_A(a)) \subseteq \mathrm{Sp}'_A(a)$, ahol ismét $B := \mathscr{F}(\mathrm{X}(A); K)$. De B egységelemes, így $\mathrm{Sp}'_B(\mathscr{G}_A(a)) = \{0\} \cup \mathrm{Sp}_B(\mathscr{G}_A(a)) = \{0\} \cup \mathrm{Im}(\mathscr{G}_A(a))$, tehát $\mathrm{Im}(\mathscr{G}_A(a)) \subseteq \mathrm{Sp}'_A(a)$. $\blacksquare$

Egyébként közvetlenül is könnyen látható, hogy ha A egységelemes algebra, $a \in A$ és $\chi \in \mathrm{X}(A)$, akkor $\chi(\chi(a).\mathbf{1} - a) = 0$, ezért a $\chi(a).\mathbf{1} - a$ elem nem invertálható A-ban, így $\chi(a) \in \mathrm{Sp}_A(a)$. Ha A tetszőleges algebra, akkor $\chi \in \mathrm{X}(A)$ esetén $\tilde{\chi}$-mal jelölve a χ-nek azt a lineáris kiterjesztését $\tilde{A}$-ra, amely az $(1,0)$ párhoz az 1-t rendeli, azt kapjuk, hogy $\chi(a).(1,0) - (0,a) \in \mathrm{Ker}(\tilde{\chi})$, és persze $\tilde{\chi} \in \mathrm{X}(\tilde{A})$, így a $\chi(a).(1,0) - (0,a)$ elem nem invertálható $\tilde{A}$-ban, tehát $\chi(a) \in \mathrm{Sp}_{\tilde{A}}(0,a) =: \mathrm{Sp}'_A(a)$.

13.5. Polinomiális függvényszámítás

13.5.1. Definíció. *Legyen A egységelemes algebra a K test felett. Minden $P \in K[X]$ polinomra*

$$P_A : A \to A; \quad a \mapsto \sum_{k=0}^{\infty} P(k) a^k.$$

A P_A alakú függvényeket, ahol $P \in K[X]$, **polinomiális függvényeknek** *nevezzük.*

Ha A egységelemes algebra a K test felett, akkor a $K[X]$ polinomalgebra konvolúciós szorzásának definíciója alapján világos, hogy minden $a \in A$ esetén a

$$K[X] \to A; \quad P \mapsto P_A(a)$$

leképezés olyan egységelem-tartó algebra-morfizmus, amelynek értékkészlete megegyezik az $\{a, \mathbf{1}\}$ halmaz által generált részalgebrával A-ban. Valóban, e leképezésnek csak a multiplikativitása probléma, ami a következőképpen igazolható: $P, Q \in K[X]$ esetén

$$(P * Q)_A(a) := \sum_{k=0}^{\infty}(P * Q)(k)a^k := \sum_{k=0}^{\infty} \left(\sum_{j=0}^{k} P(j)Q(k-j) \right) a^k =$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \left(\sum_{j=0}^{k} P(j)Q(k-j)a^k \right) = \sum_{j=0}^{\infty} \left(\sum_{k=j}^{\infty} P(j)Q(k-j)a^k \right) =$$

$$= \sum_{j=0}^{\infty} P(j) \left(\sum_{k=j}^{\infty} Q(k-j)a^k \right) = \sum_{j=0}^{\infty} P(j) \left(\sum_{k=0}^{\infty} Q(k)a^{j+k} \right) =$$

$$= \sum_{j=0}^{\infty} P(j)a^j \left(\sum_{k=0}^{\infty} Q(k)a^k \right) = P_A(a)Q_A(a).$$

13.5.2. Állítás. *Legyen A egységelemes algebra a K test felett és $a \in A$. Minden $P \in K[X]$ esetén*

$$P_K\langle \mathrm{Sp}_A(a) \rangle \subseteq \mathrm{Sp}_A(P_A(a)),$$

és ha a K test algebrailag zárt, valamint $deg(P) > 0$, akkor

$$P_K\langle \mathrm{Sp}_A(a) \rangle = \mathrm{Sp}_A(P_A(a)).$$

Bizonyítás. Legyen $\lambda \in K$ tetszőleges; ekkor a polinomiális függvények értelmezése alapján

$$P_K(\lambda)\mathbf{1} - P_A(a) := \sum_{k=1}^{\infty} P(k)(\lambda^k \mathbf{1} - a^k) =$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} P(k) \left(\sum_{j=0}^{k-1} \lambda^j a^{k-1-j} \right) (\lambda \mathbf{1} - a) = b(\lambda \mathbf{1} - a) = (\lambda \mathbf{1} - a)b,$$

ahol leolvasható, hogy

$$b := \sum_{k=1}^{\infty} P(k) \left(\sum_{j=0}^{k-1} \lambda^j a^{k-1-j} \right).$$

Ha $\lambda \in \mathrm{Sp}_A(a)$, akkor $\lambda\mathbf{1} - a$ nem invertálható A-ban, így az előző egyenlőség alapján $P_K(\lambda)\mathbf{1} - P_A(a)$ sem lehet invertálható A-ban. Itt azt az elemi tényt használjuk fel, hogy ha S egységelemes félcsoport, és $a, b, c \in S$ páronként kommutáló elemek, és $c = ab$, akkor abból, hogy c invertálható S-ben következik, hogy a és b is invertálhatók S-ben. Ezzel igazoltuk a $P_K\langle \mathrm{Sp}_A(a)\rangle \subseteq \mathrm{Sp}_A(P_A(a))$ tartalmazást.

Tegyük fel, hogy a K test algebrailag zárt, valamint $deg(P) > 0$. Ekkor $\lambda \in K$ esetén van olyan $\sigma \in K \setminus \{0\}$ és olyan $N \subseteq K$ nem üres véges halmaz, hogy

$$\lambda - P = \sigma \prod_{\beta \in N} (\beta - X),$$

következésképpen

$$\lambda\mathbf{1} - P_A(a) = (\lambda - P)_A(a) = \sigma \prod_{\beta \in N} (\beta\mathbf{1} - a).$$

Ha $\lambda \in \mathrm{Sp}_A(P_A(a))$, akkor $\lambda\mathbf{1} - P_A(a)$ nem invertálható A-ban, így szükségképpen van olyan $\beta \in N$, hogy $\beta\mathbf{1} - a$ nem invertálható A-ban, tehát $\beta \in \mathrm{Sp}_A(a)$; ugyanakkor β a $\lambda - P$ polinom gyöke, tehát $\lambda = P_K(\beta) \in P_K\langle \mathrm{Sp}_A(a)\rangle$. ■

14. fejezet

Normált algebrák

14.1. Elemi konstrukciók normált algebrákra

14.1.1. Definíció. *Azt mondjuk, hogy A normált algebra, ha A algebra a $\mathbb{K}$ test felett és adott egy $\|\cdot\|$ norma A felett, amely* **szubmultiplikatív**, *vagyis minden $a, b \in A$ esetén*

$$\|ab\| \leq \|a\|\|b\|.$$

Az A normált algebrát **Banach-algebrának** *nevezzük, ha az A normált tér teljes.*

Most összefoglaljuk a legfontosabb normált algebra konstrukciókat.

– Normált algebra minden részalgebrája a norma leszűkítésével ellátva szintén normált algebra. Ha A normált algebra és $e \in A$ idempotens elem, akkor az eAe redukált részalgebra *zárt*, ezért ha A Banach-algebra, akkor eAe is Banach-algebra. Ha A normált algebra és $S \subseteq A$ tetszőleges halmaz, akkor a $C(S)$ kommutáns *zárt* részalgebra A-ban, tehát, ha A Banach-algebra, akkor $C(S)$ is Banach-algebra.

– Legyen $(A_i)_{i\in I}$ normált algebrák tetszőleges rendszere és

$$\prod_{i\in I}^{*} A_i := \left\{ a \in \prod_{i\in I} A_i \;\middle|\; \sup_{i\in I} \|a(i)\| < +\infty \right\}.$$

Ez a halmaz részalgebrája az $(A_i)_{i\in I}$ algebra-rendszer szorzatának, és a

$$\prod_{i\in I}^{*} A_i \to \mathbb{R}_+; \quad a \mapsto \sup_{i\in I} \|a(i)\|$$

leképezés olyan norma, amellyel ellátva $\prod_{i\in I}^{*} A_i$ normált algebra. Ezt a normált algebrát nevezzük az $(A_i)_{i\in I}$ normáltalgebra-rendszer *szorzatának*.

14.1.2. Állítás. *Ha $(A_i)_{i\in I}$ Banach-algebrák rendszere, akkor $\prod_{i\in I}^{*} A_i$ is Banach-algebra.*

Bizonyítás. Legyen $A := \prod_{i\in I}^{*} A_i$. Minden $i \in I$ esetén az $A \to A_i;\ a \mapsto a(i)$ leképezés folytonos (sőt norma-nem-növelő) lineáris operátor. Ezért ha $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ Cauchy-sorozat A-ban, akkor minden $I \ni i$-re az $(a_n(i))_{n\in\mathbb{N}}$ sorozat A_i-ben Cauchy-sorozat, így A_i teljessége folytán konvergens. Ezért jól értelmezett az az $a \in \prod_{i\in I} A_i$ rendszer, amelyre minden $i \in I$ esetén $a(i) = \lim_{n\to\infty} a_n(i)$. Az $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sorozat korlátos A-ban, tehát van olyan $C \in \mathbb{R}_+$, hogy minden $n \in \mathbb{N}$ és $i \in I$ esetén $\|a_n(i)\| \leq C$. Ekkor minden $i \in I$ esetén $\|a(i)\| = \lim_{n\to\infty} \|a_n(i)\| \leq C$, következésképpen $\sup_{i\in I} \|a(i)\| \leq C$, így $a \in A$. Legyen $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ tetszőleges, és vegyünk olyan $N \in \mathbb{N}$ számot, amelyre $m, n \in \mathbb{N}$ és $m, n > N$ esetén $\|a_m - a_n\| < \varepsilon$. Ha $i \in I$ és $m, n \in \mathbb{N}$ olyan számok, hogy $m, n > N$, akkor $\|a_m(i) - a_n(i)\| \leq \|a_m - a_n\| < \varepsilon$, amiből kapjuk, hogy $\|a(i) - a_n(i)\| = \lim_{m\to\infty} \|a_m(i) - a_n(i)\| \leq \varepsilon$. Ez $i \in I$ esetén minden olyan $\mathbb{N} \ni n$-re igaz, amelyre $n > N$. Tehát, ha $n \in \mathbb{N}$ és $n > N$, akkor $\|a - a_n\| := \sup_{i\in I} \|a(i) - a_n(i)\| \leq \varepsilon$, így $a = \lim_{n\to\infty} a_n$ teljesül A-ban. ■

– Legyen A normált algebra és $\mathfrak{m}$ *zárt* ideál A-ban. Ekkor az $A/\mathfrak{m}$ faktoralgebra felett a faktor-norma szubmultiplikatív, hiszen ha $a, b \in A$ és $x \in a + \mathfrak{m}$, $y \in b + \mathfrak{m}$, akkor $xy \in ab + \mathfrak{m}$, így

$$\|x\|\|y\| \geq \|xy\| \geq \|\pi_{A/\mathfrak{m}}(ab)\| = \|\pi_{A/\mathfrak{m}}(a)\pi_{A/\mathfrak{m}}(b)\|,$$

következésképpen

$$\|\pi_{A/\mathfrak{m}}(a)\|\|\pi_{A/\mathfrak{m}}(b)\| := \inf_{x\in a+\mathfrak{m}} \|x\| \quad \inf_{y\in b+\mathfrak{m}} \|y\| =$$

$$= \inf_{x\in a+\mathfrak{m},\ y\in b+\mathfrak{m}} \|x\|\|y\| \geq \|\pi_{A/\mathfrak{m}}(a)\pi_{A/\mathfrak{m}}(b)\|.$$

Tehát $A/\mathfrak{m}$ a faktornormával ellátva normált algebra. Az ilyen alakú normált algebrákat *normált faktoralgebráknak* nevezzük. Ha A Banach-algebra és $\mathfrak{m}$ zárt ideál A-ban, akkor az $A/\mathfrak{m}$ normált faktoralgebra Banach-algebra.

– Legyen A normált algebra és tekintsük a

$$\|\cdot\| : \tilde{A} \to \mathbb{R}_+; \quad (\lambda, a) \mapsto |\lambda| + \|a\|$$

leképezést. Könnyen látható, hogy ez az $\tilde{A}$ feletti norma szubmultiplikatív, mert ha $(\lambda, a), (\sigma, b) \in \tilde{A}$, akkor

$$\|(\lambda, a)(\sigma, b)\|| := \|(\lambda\sigma, \lambda.b + \sigma.a + ab)\| := |\lambda\sigma| + \|\lambda.b + \sigma.a + ab\| \leq$$

$$\leq |\lambda||\sigma| + |\lambda|\|b\| + |\sigma|\|a\| + \|a\|\|b\| = (|\lambda| + \|a\|)(|\sigma| + \|b\|) =: \|(\lambda, a)\|\|(\sigma, b)\|.$$

Ezért $\tilde{A}$ ezzel a normával ellátva egységelemes normált algebra, és az $A \to \tilde{A}$; $a \mapsto (0, a)$ leképezés *izometrikus* algebra-morfizmus. Megállapodunk abban, hogy ha A normált algebra, akkor $\tilde{A}$-t ezzel a normával ellátva normált algebrának tekintjük. Ha A Banach-algebra, akkor $\tilde{A}$ is Banach-algebra, mert ekkor az $\{(0, a) | a \in A\}$ halmaz véges kodimenziós (ti. 1-kodimenziós) teljes lineáris altere $\tilde{A}$-nak.

– Ha A normált algebra és $\hat{A}$ az A normált tér teljes burka, akkor $\hat{A}$-ra természetes módon kiterjeszthető az A szorzása, és az egyenlőségek folytatásának elve alapján az $\hat{A}$ Banach-tér ezzel a szorzással ellátva Banach-algebra.

14.2. Példák normált algebrákra

(I) *Normált függvényalgebrák.* Ha T halmaz, akkor a $T \to \mathbb{K}$ korlátos függvények $\mathscr{F}^b(T; \mathbb{K})$ algebrája a

$$\mathscr{F}^b(T; \mathbb{K}) \to \mathbb{R}_+; \quad f \mapsto \sup_{t \in T} |f(t)|$$

sup-normával ellátva egységelemes kommutatív Banach-algebra. Az ilyen típusú Banach-algebrák normált részalgebráit nevezzük *normált függvényalgebráknak.* Ennek a legfontosabb speciális esetei a következők.

– Ha T topologikus tér, akkor a $T \to \mathbb{K}$ korlátos folytonos függvények $\mathscr{C}^b(T; \mathbb{K})$ algebrája zárt részalgebra $\mathscr{F}^b(T; \mathbb{K})$-ban, így $\mathscr{C}^b(T; \mathbb{K})$ szintén kommutatív egységelemes Banach-algebra.

– Ha T lokálisan kompakt tér, akkor a $T \to \mathbb{K}$ kompakt tartójú folytonos függvények $\mathscr{K}(T; \mathbb{K})$ halmaza, valamint a $T \to \mathbb{K}$ végtelenben eltűnő folytonos függvények $\overline{\mathscr{K}}(T; \mathbb{K})$ halmaza részalgebrája a $\mathscr{C}^b(T; \mathbb{K})$ Banach-algebrának. Ha T nem kompakt, akkor a $\mathscr{K}(T; \mathbb{K})$ normált függvényalgebra nem egységelemes és nem teljes, de természetesen kommutatív. Ugyanakkor tetszőleges T lokálisan kompakt térre a $\overline{\mathscr{K}}(T; \mathbb{K})$ normált függvényalgebra olyan kommutatív Banach-algebra, amely pontosan akkor egységelemes, ha T kompakt.

– Ha $\mathscr{R}$ halmazgyűrű a T halmaz felett, akkor a $T \to \mathbb{K}$ $\mathscr{R}$-lépcsősfüggvények $\mathscr{E}_{\mathbb{K}}(T, \mathscr{R})$ halmaza, valamint a $T \to \mathbb{K}$ $\mathscr{R}$-egyszerű függvények $\overline{\mathscr{E}_{\mathbb{K}}}(T, \mathscr{R})$ halmaza részalgebrája a $\mathscr{F}^b(T; \mathbb{K})$ Banach-algebrának. Ezek kommutatív normált függvényalgebrák és $\overline{\mathscr{E}_{\mathbb{K}}}(T, \mathscr{R})$ Banach-algebra.

– Legyen Ω nyílt részhalmaza a $\mathbb{K}$ feletti E normált térnek, $r \in \mathbb{N}$ és tekintsük az $\Omega \to \mathbb{K}$ r-szer folytonosan differenciálható és r-ed rendig bezárólag korlátos deriváltakkal rendelkező függvények $C^{r,b}(\Omega; \mathbb{K})$ halmazát. Ez részalgebrája az $\Omega \to \mathbb{K}$ korlátos folytonos függvények $\mathscr{C}^b(\Omega;\mathbb{K})$ algebrájának. A $C^{r,b}(\Omega;\mathbb{K})$ algebrán értelmezzük a

$$C^{r,b}(\Omega;\mathbb{K}) \to \mathbb{R}_+; \quad f \mapsto \|f\|_r := \sum_{k=0}^{r} \frac{1}{k!} \sup_{x\in\Omega} \|(D^r f)(x)\|$$

leképezést. Könnyen ellenőrizhető, hogy ez szubmultiplikatív norma, így $C^{r,b}(\Omega;\mathbb{K})$ ezzel a normával ellátva normált algebra, és ez Banach-algebra.

– Legyen $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ relatív kompakt nyílt halmaz, és

$$A_\Omega := \{f \in \mathscr{C}(\overline{\Omega};\mathbb{C}) \mid \text{"}f|_\Omega \text{ holomorf függvény"}\}.$$

Ekkor A_Ω részalgebrája a $\mathscr{C}(\overline{\Omega};\mathbb{C})$ normált függvényalgebrának, és az A_Ω normált függvényalgebra egységelemes kommutatív komplex Banach-algebra. Ha Ω a nyílt euklidészi egységgömb $\mathbb{C}$-ben, akkor az A_Ω Banach-algebrát a *diszk-algebrának* nevezzük.

(II) *Normált operátoralgebrák.* Ha E normált tér, akkor az $E \to E$ folytonos lineáris operátorok $\mathscr{L}(E)$ algebrája az operátornormával ellátva egységelemes normált algebra. Az ilyen alakú normált algebrák normált részalgebráit *normált operátoralgebráknak* nevezzük. Ha E Banach-tér, akkor az $\mathscr{L}(E)$ normált operátoralgebra Banach-algebra.

(III) *Normált konvolúciós algebrák.* Legyen S monoid és tekintsük az $A_\mathbb{K}(S)$ konvolúciós algebrát. Ekkor az

$$A_\mathbb{K}(S) \to \mathbb{R}_+; \quad a \mapsto \|a\| := \sum_{s\in S} |a(s)|$$

leképezés szubmultiplikatív norma $A_\mathbb{K}(S)$ felett, hiszen minden $a, b \in \mathbb{K}^{(S)}$ esetén

$$\|a * b\| := \sum_{s\in S} |(a * b)(s)| := \sum_{s\in S} \left| \sum_{(s',s'')\in S\times S,\ s's''=s} a(s')b(s'') \right| \leq$$

$$\leq \sum_{s\in S} \sum_{(s',s'')\in S\times S,\ s's''=s} |a(s')||b(s'')| \quad = \sum_{(s',s'')\in S\times S} |a(s')||b(s'')| =$$

$$= \sum_{s'\in S} |a(s')| \quad \sum_{s''\in S} |b(s'')| \quad =: \|a\|\|b\|.$$

Az $A_\mathbb{K}(S)$ alakú algebrákat ezzel a normával ellátva *normált konvolúciós algebráknak* nevezzük.

(IV) *Nulla-szorzású normált algebrák.* Ha A tetszőleges normált tér, akkor az A vektortér a nulla szorzással, és az adott normával ellátva normált algebra; az ilyen alakú normált algebrák a *nulla-szorzású normált algebrák.*

14.3. Spektrálsugár

14.3.1. Definíció. *Ha A normált algebra, akkor minden $a \in A$ esetén*

$$\rho(a) := \inf_{n \in \mathbb{N}^+} \|a^n\|^{1/n},$$

és a $\rho(a)$ számot az a elem **spektrálsugarának** *nevezzük. Ha A normált algebra, akkor az $a \in A$ elemet* **kvázinilpotensnek** *nevezzük, ha $\rho(a) = 0$.*

Megjegyzések. 1) Ha A algebra, akkor az $a \in A$ elem *nilpotens*, ha van olyan $n \in \mathbb{N}^+$, hogy $a^n = 0$. Például az $M_2(\mathbb{K})$ mátrixalgebrában a $\begin{matrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{matrix}$ elem nem nulla, de nilpotens. Ugyanakkor függvényalgebrában nincs nem nulla nilpotens elem. Nyilvánvaló, hogy normált algebrában minden nilpotens elem kvázinilpotens, azonban létezhet nem niloptens, de kvázinilpotens elem (14.3.5.).

2) Ha A normált algebra és $a \in A$, akkor minden $n \in \mathbb{N}^+$ esetén $\|a^n\| \leq \|a\|^n$, következésképpen $\rho(a) \leq \|a\|$. Azonban itt általában nincs egyenlőség; például, ha $a := \begin{matrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{matrix} \in M_2(\mathbb{K})$, akkor $a^2 = 0$, ezért $\rho(a) = 0$ minden olyan $M_2(\mathbb{K})$ feletti normára, amellyel $M_2(\mathbb{K})$ normált algebra; ugyanakkor $a \neq 0$ miatt $\|a\| > 0$ minden $M_2(\mathbb{K})$ feletti normára.

3) Ha A normált algebra, akkor az $A \to \mathbb{R}$; $a \mapsto \rho(a)$ leképezés *felülről félig folytonos*, mert minden $n \in \mathbb{N}^+$ esetén a $\rho_n : A \to \mathbb{R}$; $a \mapsto \|a^n\|^{1/n}$ függvény folytonos, és $\rho = \inf_{n \in \mathbb{N}^+} \rho_n$. Azonban a ρ leképezés nem feltétlenül folytonos, mert előfordulhat az, hogy kvázinilpotens (sőt nilpotens) elemek sorozata konvergál nem kvázinilpotens elemhez (14.3.5.).

14.3.2. Állítás. *Ha A normált algebra és $a \in A$, akkor az $(\|a^n\|^{1/n})_{n \in \mathbb{N}^+}$ sorozat konvergens $\mathbb{R}$-ben, és*

$$\rho(a) = \lim_{n \to \infty} \|a^n\|^{1/n}.$$

Bizonyítás. Ha minden $n \in \mathbb{N}^+$ esetén $c_n := \|a^n\|$, akkor $(c_n)_{n \in \mathbb{N}^+}$ olyan sorozat $\mathbb{R}_+$-ban, amelyre minden $m, n \in \mathbb{N}^+$ esetén $c_{m+n} \leq c_m c_n$.

Megmutatjuk, hogy ha $(c_n)_{n \in \mathbb{N}^+}$ *tetszőleges* olyan $\mathbb{R}_+$-ban haladó sorozat, amelyre minden $m, n \in \mathbb{N}$ esetén $c_{m+n} \leq c_m c_n$, akkor a $({c_n}^{1/n})_{n \in \mathbb{N}^+}$ sorozat konvergens és

$$\lim_{n \to \infty} {c_n}^{1/n} = \inf_{n \in \mathbb{N}^+} {c_n}^{1/n}.$$

Ezt nyilvánvalóan elég arra az esetre bizonyítani, amikor minden $n \in \mathbb{N}^+$ esetén $c_n > 0$. Legyen $c_0 := 1$. Minden $m, n \in \mathbb{N}^+$ számhoz egyértelműen léteznek olyan

$q(m,n), p(m,n) \in \mathbb{N}$ számok, hogy $m = p(m,n) \cdot n + q(m,n)$ és $q(m,n) < n$. Ezért minden $m, n \in \mathbb{N}^+$ esetén

$$c_m \le c_n^{p(m,n)} \cdot c_{q(m,n)}$$

teljesül, továbbá

$$\frac{1}{n} = \frac{p(m,n)}{m} + \frac{q(m,n)}{m \cdot n},$$

következésképpen fennáll a

$$c_m{}^{1/m} \le c_n{}^{1/n} \cdot \left(\frac{\max\limits_{1 \le k < n} c_k}{\min\limits_{1 \le k < n} c_k^{k/n}} \right)^{1/m}$$

egyenlőtlenség. Ebből kapjuk, hogy

$$\limsup_{m\to\infty} c_m{}^{1/m} \le \inf_{n \in \mathbb{N}^+} c_n{}^{1/n} \le \liminf_{n\to\infty} c_n{}^{1/n}. \blacksquare$$

14.3.3. Állítás. *Legyen A normált algebra $\mathbb{K}$ felett.*

a) *Ha $a \in A$ és $\lambda \in \mathbb{K}$, akkor $\rho(\lambda.a) = |\lambda|\rho(a)$.*

b) *Ha $a \in A$ és $m \in \mathbb{N}^+$, akkor $\rho(a^m) = (\rho(a))^m$.*

c) *Ha $a, b \in A$ és $ab = ba$, akkor $\rho(ab) \le \rho(a)\rho(b)$.*

d) *Ha $a, b \in A$ és $ab = ba$, akkor $\rho(a+b) \le \rho(a) + \rho(b)$.*

Bizonyítás. a) Ha $a \in A$ és $\lambda \in \mathbb{K}$, akkor

$$\rho(\lambda.a) = \lim_{n\to\infty} \|(\lambda.a)^n\|^{1/n} = \lim_{n\to\infty} \left(|\lambda| \|a^n\|^{1/n} \right) = |\lambda| \lim_{n\to\infty} \|a^n\|^{1/n} = |\lambda|\rho(a).$$

b) Ha $a \in A$ és $m \in \mathbb{N}^+$, akkor

$$\rho(a^m) = \lim_{n\to\infty} \|(a^m)^n\|^{1/n} = \lim_{n\to\infty} \left(\|(a^{mn}\|^{1/(mn)} \right)^m =$$

$$= \left(\lim_{n\to\infty} \|(a^{mn}\|^{1/(mn)} \right)^m = \rho(a)^m.$$

c) Legyenek $a, b \in A$ olyanok, hogy $ab = ba$. Minden $n \in \mathbb{N}^+$ esetén $(ab)^n = a^n b^n$, ezért $\|(ab)^n\|^{1/n} \le \|a^n\|^{1/n} \|b^n\|^{1/n}$ is igaz, így

$$\rho(ab) = \lim_{n\to\infty} \|(ab)^n\|^{1/n} \le \left(\lim_{n\to\infty} \|a^n\|^{1/n} \right) \left(\lim_{n\to\infty} \|b^n\|^{1/n} \right) = \rho(a)\rho(b).$$

d) Legyenek $a, b \in A$ olyanok, hogy $ab = ba$. A $\rho(a+b) \le \rho(a) + \rho(b)$ egyenlőtlenség bizonyításához elegendő azt belátni, hogy minden $\alpha, \beta \in \mathbb{R}^+$ esetén, ha $\rho(a) < \alpha$ és

$\rho(b) < \beta$, akkor $\rho(a+b) \leq \alpha + \beta$ teljesül. Továbbá természetesen feltehető, hogy $a \neq 0$ és $b \neq 0$, különben az egyenlőtlenség nyilván igaz. Legyenek tehát $\alpha, \beta \in \mathbb{R}^+$ olyanok, hogy $\rho(a) < \alpha$ és $\rho(b) < \beta$, és vezessük be az $a_0 := \alpha^{-1}.a$ és $b_0 := \beta^{-1}.b$ elemeket, amelyekre az 1) alapján $\rho(a_0) < 1$ és $\rho(b_0) < 1$. Kiválaszthatunk olyan $\pi : \mathbb{N}^+ \to \mathbb{N}$ függvényt, amelyre teljesül az, hogy minden $\mathbb{N}^+ \ni n$-re $\pi(n) \leq n$ és

$$\|a_0^{\pi(n)}\|\|b_0^{n-\pi(n)}\| = \max\{\ \|a_0^k\|\|b_0^{n-k}\| \mid 0 \leq k \leq n\ \},$$

ahol természetesen azzal a konvencióval élünk, hogy $\|a_0^0\| := 1$ és $\|b_0^0\| := 1$. Ekkor minden $n \in \mathbb{N}^+$ esetén

$$\rho(a+b) \leq \|(a+b)^n\|^{1/n} = \left\|\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^k b^{n-k}\right\|^{1/n} = \left\|\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\alpha^k\beta^{n-k}a_0^k b_0^{n-k}\right\|^{1/n} \leq$$

$$\leq \left(\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\alpha^k\beta^{n-k}\|a_0^k\|\|b_0^{n-k}\|\right)^{1/n} \leq$$

$$\leq \left(\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\alpha^k\beta^{n-k}\right)^{1/n}\|a_0^{\pi(n)}\|^{1/n}\|b_0^{n-\pi(n)}\|^{1/n} = (\alpha+\beta)\|a_0^{\pi(n)}\|^{1/n}\|b_0^{n-\pi(n)}\|^{1/n}.$$

A $\left(\dfrac{\pi(n)}{n}\right)_{n\in\mathbb{N}^+}$ sorozat a $[0,1]$ kompakt intervallumban halad, így a Bolzano–Weierstrass-tétel miatt van olyan $\sigma : \mathbb{N}^+ \to \mathbb{N}^+$ szigorúan monoton növő függvény, amelyre a $\left(\dfrac{\pi(\sigma(m))}{\sigma(m)}\right)_{m\in\mathbb{N}^+}$ sorozat konvergens. Legyen

$$\delta := \lim_{m\to\infty}\frac{\pi(\sigma(m))}{\sigma(m)}.$$

Természetesen a $\pi' : \mathbb{N}^+ \to \mathbb{N};\ n \mapsto n - \pi(n)$ függvény olyan, hogy minden $\mathbb{N}^+ \ni n$-re $\pi'(n) \leq n$ és

$$1 - \delta = \lim_{m\to\infty}\frac{\pi'(\sigma(m))}{\sigma(m)},$$

továbbá minden $m \in \mathbb{N}^+$ esetén fennáll az

$$\rho(a+b) \leq (\alpha+\beta)\|a_0^{\pi(\sigma(m))}\|^{1/\sigma(m)}\|b_0^{\pi'(\sigma(m))}\|^{1/\sigma(m)}$$

egyenlőtlenség.

Ha $\delta > 0$, akkor szükségképpen $\lim\limits_{m\to\infty}\pi(\sigma(m)) = +\infty$, ezért

$$\lim_{m\to\infty}\|a_0^{\pi(\sigma(m))}\|^{1/\sigma(m)} = \lim_{m\to\infty}\left(\|a_0^{\pi(\sigma(m))}\|^{1/\pi(\sigma(m))}\right)^{\pi(\sigma(m))/\sigma(m)} = \rho(a_0)^\delta < 1,$$

mert $\delta > 0$ és $\rho(a_0) < 1$. Ha $\delta = 0$, akkor minden $m \in \mathbb{N}^+$ esetén

$$\|a_0^{\pi(\sigma(m))}\|^{1/\sigma(m)} \leq \|a_0\|^{\pi(\sigma(m))/\sigma(m)},$$

továbbá természetesen

$$\lim_{m\to\infty} \|a_0\|^{\pi(\sigma(m))/\sigma(m)} = 1,$$

mert $\|a_0\| > 0$. Ebből az következik, hogy a δ értékétől függetlenül, minden $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ esetén van olyan $M_\varepsilon \in \mathbb{N}^+$, hogy ha $m \in \mathbb{N}^+$ és $m \geq M_\varepsilon$, akkor

$$\|a_0^{\pi(\sigma(m))}\|^{1/\sigma(m)} \leq 1 + \varepsilon.$$

Fölcserélve π-t π'-vel és a_0-t b_0-lal; teljesen hasonló érveléssel adódik, hogy minden $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ esetén van olyan $M'_\varepsilon \in \mathbb{N}^+$, hogy ha $m \in \mathbb{N}^+$ és $m \geq M'_\varepsilon$, akkor

$$\|b_0^{\pi'(\sigma(m))}\|^{1/\sigma(m)} \leq 1 + \varepsilon.$$

Ez azt jelenti, hogy ha $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ és $m \in \mathbb{N}^+$, akkor $m \geq \max(M_\varepsilon, M'_\varepsilon)$ esetén

$$\rho(a+b) \leq (\alpha+\beta)\|a_0^{\pi(\sigma(m))}\|^{1/\sigma(m)}\|b_0^{\pi'(\sigma(m))}\|^{1/\sigma(m)} \leq (\alpha+\beta)(1+\varepsilon)^2.$$

tehát

$$\rho(a+b) \leq (\alpha+\beta)(1+\varepsilon)^2.$$

Ebből ε-nal 0-hoz tartva kapjuk, hogy $\rho(a+b) \leq \alpha+\beta$. ■

Az előző állítás a), c) és d) pontjából látható, hogy ha A *kommutatív* normált algebra, akkor az $A \to \mathbb{R}_+$; $a \mapsto \rho(a)$ spektrálsugár-függvény *szubmultiplikatív félnorma* az A vektortér felett.

14.3.4. Állítás. *Ha A egységelemes normált algebra és $\mathbf{G}(A)$ jelöli az A invertálható elemeinek halmazát, akkor az*

$$i_{\mathbf{G}(A)} : \mathbf{G}(A) \to \mathbf{G}(A); \quad a \mapsto a^{-1}$$

leképezés homeomorfizmus a $\mathbf{G}(A)$ feletti altér-topológia szerint.

Bizonyítás. Tekintettel arra, hogy $i_{\mathbf{G}(A)}$ olyan permutációja $\mathbf{G}(A)$-nak, amely megegyezik a saját inverzével; elegendő azt igazolni, hogy az $i_{\mathbf{G}(A)} : \mathbf{G}(A) \to A$ függvény folytonos. Legyen $a \in \mathbf{G}(A)$ rögzítve, és vegyünk tetszőleges olyan $x \in A$ elemet, amelyre $a + x \in \mathbf{G}(A)$. Ekkor az $y := (a+x)^{-1} - a^{-1}$ elemre $(a^{-1} + y)(a + x) = \mathbf{1}$ teljesül, tehát $\mathbf{1} + ya + a^{-1}x + yx = \mathbf{1}$, így fennáll az $y = -a^{-1}xa^{-1} - yxa^{-1}$ egyenlőség. Ebből következik, hogy $\|y\| \leq \|a^{-1}\|^2\|x\| + \|y\|\|x\|\|a^{-1}\|$, tehát ha $r \in]0, 1[$ egy rögzített valós szám, és $\|x\|\|a^{-1}\| < r$, akkor

$$\|(a+x)^{-1} - a^{-1}\| =: \|y\| \leq \frac{\|a^{-1}\|^2}{1 - \|x\|\|a^{-1}\|}\|x\| \leq \frac{\|a^{-1}\|^2}{1-r}\|x\|.$$

Ez azt jelenti, hogy léteznek olyan $r > 0$ és $C > 0$ valós számok, hogy minden $z \in \mathbf{G}(A) \cap B_r(a)$ esetén $\|z^{-1} - a^{-1}\| \leq C\|z - a\|$, ezért az $i_{\mathbf{G}(A)}$ függvény az $a \in \mathbf{G}(A)$ pontban folytonos. ■

14.3.5. Állítás. *Legyen $\mathscr{H}$ végtelen dimenziós szeparábilis Hilbert-tér $\mathbb{K}$ felett, és tekintsük az $\mathscr{L}(\mathscr{H})$ normált operátoralgebrát.*

a) *Létezik olyan kvázinilpotens elem $\mathscr{L}(\mathscr{H})$-ban, amely nem nilpotens.*

b) *A kvázinilpotens elemek halmaza nem zárt $\mathscr{L}(\mathscr{H})$-ban.*

c) *A spektrálsugár-függvény nem folytonos $\mathscr{L}(\mathscr{H})$ felett.*

Bizonyítás. A funkcionálanalízis elemeiből ismert, hogy izometrikus izomorfia erejéig az egyetlen végtelen dimenziós szeparábilis Hilbert-tér $\mathbb{K}$ felett az $\mathbf{l}^2_{\mathbb{K}}$ sorozattér, a $\|\cdot\|_2$ normával ellátva. Ezért feltehetjük, hogy $\mathscr{H} = \mathbf{l}^2_{\mathbb{K}}$ és $\mathscr{H}$ normája egyenlő $\|\cdot\|_2$-vel. Minden $n \in \mathbb{N}$ esetén legyen $\mathbf{e}_n \in \mathbf{l}^2_{\mathbb{K}}$ az a sorozat, amelyre minden $\mathbb{N} \ni m$-re $\mathbf{s}_n(m) = \delta_{m,n}$. Az $\{\mathbf{e}_n | n \in \mathbb{N}\}$ ortonormált bázishalmaz által generált sűrű lineáris altér $\mathbb{K}^{(\mathbb{N})}$, vagyis azon $\mathbb{K}$-ban haladó sorozatok halmaza, amelyek csak véges sok helyen vesznek fel nem nulla értéket.

a) Legyen $\mathbf{s} \in \mathbf{l}^\infty_{\mathbb{K}}$ rögzített sorozat. A sűrű altéren folytonos lineáris operátorok kiterjesztési tételéből következik, hogy létezik egyetlen olyan $v_{\mathbf{s}} \in \mathscr{L}(\mathbf{l}^2_{\mathbb{K}})$ operátor, amelyre minden $n \in \mathbb{N}$ esetén $v_{\mathbf{s}}(\mathbf{e}_n) = \mathbf{s}(n)\mathbf{e}_{n+1}$. Erre a $v_{\mathbf{s}}$ operátorra teljesül az, hogy ha $n \in \mathbb{N}^+$, akkor

$$\|v_{\mathbf{s}}^n\| = \sup_{m \in \mathbb{N}} \prod_{k=0}^{n-1} |\mathbf{s}(m+k)|.$$

Ebből látható, hogy ha $0 \notin \mathrm{Im}(\mathbf{s})$, akkor minden $\mathbb{N}^+ \ni n$-re $\|v_{\mathbf{s}}^n\| \geq \prod_{k=0}^{n-1} |\mathbf{s}(k)| > 0$, tehát $v_{\mathbf{s}}$ *nem nilpotens* operátor. Az is nyilvánvaló hogy $v_{\mathbf{s}}$ pontosan akkor kvázinilpotens, ha

$$\lim_{n \to \infty} \sup_{m \in \mathbb{N}} \left(\prod_{k=0}^{n-1} |\mathbf{s}(m+k)| \right)^{1/n} = 0.$$

Most megadunk olyan $\mathbf{s} \in \mathbf{l}^\infty_{\mathbb{K}}$ sorozatot, amelyre a $v_{\mathbf{s}}$ operátor kvázinilpotens, de nem nilpotens. Ehhez vegyünk egy $\alpha \in]0,1[$ valós számot, és legyen $\mathbf{s} : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ az a sorozat, amelyre minden $\mathbb{N} \ni m$-re $\mathbf{s}(m) := \alpha^m$. Ekkor minden $\mathbb{N}^+ \ni n$-re

$$\sup_{m \in \mathbb{N}} \left(\prod_{k=0}^{n-1} |\mathbf{s}(m+k)| \right)^{1/n} = \alpha^{(n-1)/2},$$

tehát $\lim\limits_{n \to \infty} \sup\limits_{m \in \mathbb{N}} \left(\prod\limits_{k=0}^{n-1} |\mathbf{s}(m+k)| \right)^{1/n} = 0$, ugyanakkor $0 \notin \mathrm{Im}(\mathbf{s})$, ezért az $\mathbf{s}$ sorozat megfelelő.

b) Legyenek $\sigma, \tau : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ azok az egyértelműen meghatározott sorozatok, amelyekre $\sigma(0) = 0 = \tau(0)$, és minden $\mathbb{N}^+ \ni n$-re $n = 2^{\sigma(n)}\tau(n)$ és $\tau(n)$ páratlan (tehát minden $\mathbb{N}^+ \ni n$-re $\sigma(n)$ az a legnagyobb természetes szám, amelyre $2^{\sigma(n)}$ osztója n-nek, és $\tau(n) := \dfrac{n}{2^{\sigma(n)}}$). Legyen ismét $\alpha \in]0,1[$ tetszőleges valós szám, és $\mathbf{s} : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ az a sorozat, amelyre minden $\mathbb{N} \ni m$-re $\mathbf{s}(m) := \alpha^{\sigma(m)}$. Megmutatjuk, hogy a $v_{\mathbf{s}}$ operátor nem kvázinilpotens. Valóban, ha $m, n \in \mathbb{N}^+$, akkor

$$\left(\prod_{k=0}^{n-1} |\mathbf{s}(m+k)|\right)^{1/n} = \left(\prod_{k=0}^{n-1} \alpha^{\sigma(m+k)}\right)^{1/n} = \alpha^{\dfrac{1}{n}\sum\limits_{k=0}^{n-1}\sigma(m+k)}.$$

A j természetes szám szerinti teljes indukcióval könnyen belátható, hogy

$$\sum_{k=0}^{2^j-1} \sigma(2^j + k) = 2^j - 1,$$

ezért minden $r \in \mathbb{N}$ esetén

$$\frac{1}{2^r}\sum_{k=0}^{2^r-1} \sigma(k) = \frac{1}{2^r}\sum_{j=0}^{r-1} \sum_{k=0}^{2^j-1} \sigma(2^j+k) = \frac{1}{2^r}\sum_{j=0}^{r-1} (2^j - 1) = 1 - \frac{r+1}{2^r} \leq 1.$$

Ebből $\alpha \in]0,1[$ alapján kapjuk, hogy minden $\mathbb{N} \ni r$-re

$$\|v_{\mathbf{s}}^{2^r}\|^{1/2^r} = \left(\sup_{m\in\mathbb{N}} \prod_{k=0}^{2^r-1} |\mathbf{s}(m+k)|\right)^{1/2^r} \geq \left(\prod_{k=0}^{2^r-1} |\mathbf{s}(k)|\right)^{1/2^r} = \alpha^{\dfrac{1}{2^r}\sum\limits_{k=0}^{2^r-1}\sigma(k)} \geq \alpha,$$

következésképpen fennáll a

$$\rho(v_{\mathbf{s}}) = \lim_{r\to\infty} \|v_{\mathbf{s}}^{2^r}\|^{1/2^r} \geq \alpha > 0$$

egyenlőtlenség, tehát $v_{\mathbf{s}}$ nem kvázinilpotens (itt még nem lényeges az, hogy az $\alpha < 1$ szigorú egyenlőtlenség is érvényes).

Legyen minden $\mathbb{N} \ni n$-re $\mathbf{s}_n \in \mathbf{l}^\infty_{\mathbb{K}}$ az a sorozat, amelyre minden $m \in \mathbb{N}$ esetén

$$\mathbf{s}_n(m) := \begin{cases} \mathbf{s}(m) & ; \text{ha } n \neq \sigma(m), \\ 0 & ; \text{ha } n = \sigma(m). \end{cases}$$

Ha $n \in \mathbb{N}$, akkor

$$\|v_{\mathbf{s}} - v_{\mathbf{s}_n}\| = \|v_{\mathbf{s}-\mathbf{s}_n}\| = \|\mathbf{s} - \mathbf{s}_n\|_\infty = \sup_{m\in\mathbb{N}} |\mathbf{s}(m) - \mathbf{s}_n(m)| = \alpha^n,$$

tehát $\alpha < 1$ miatt $\lim\limits_{n\to\infty} v_{\mathbf{s}_n} = v_{\mathbf{s}}$ az operátornorma szerint.

Megmutatjuk, hogy minden $\mathbb{N} \ni n$-re $v_{\mathbf{s}_n}^{2^{n+1}} = 0$, tehát $v_{\mathbf{s}_n}$ nilpotens operátor. Ehhez legyen $n \in \mathbb{N}$ rögzített; ekkor a $v_{\mathbf{s}_n}^{2^{n+1}} = 0$ egyenlőség azzal ekvivalens, hogy

$$0 = \|v_{\mathbf{s}_n}^{2^{n+1}}\| = \sup_{m\in\mathbb{N}} \prod_{k=0}^{2^{n+1}-1} |\mathbf{s}_n(m+k)|,$$

ami azt jelenti, hogy minden $\mathbb{N} \ni m$-hez létezik olyan $k < 2^{n+1}$ természetes szám, amelyre $|\mathbf{s}_n(m+k)| = 0$, vagyis (az $\mathbf{s}_n$ és $\mathbf{s}$ definíciója szerint) fennáll a $\sigma(m+k) = n$ egyenlőség. Legyen $m \in \mathbb{N}$ tetszőleges.

– Ha $\sigma(m) > n$, akkor $m+2^n = 2^{\sigma(m)}\tau(m)+2^n = 2^n(2^{\sigma(m)-n}\tau(m)+1)$, és $2^{\sigma(m)-n}\tau(m)+1$ páratlan szám, így $\sigma(m+2^n) = n$, vagyis $k := 2^n < 2^{n+1}$ olyan természetes szám, hogy fennáll a $\sigma(m+k) = n$ egyenlőség.

– Ha $\sigma(m) = n$, akkor $k := 0 < 2^{n+1}$ olyan természetes szám, hogy fennáll a $\sigma(m+k) = n$ egyenlőség.

– Ha $\sigma(m) < n$, akkor legyen $p := \min\{j \in \mathbb{N} | (j \text{ páratlan }) \wedge (2^n j > m))\}$, és $k := 2^n p - m$. Ekkor $m + k = 2^n p$ és p páratlan, tehát $\sigma(m+k) = n$. Ugyanakkor $p = 1$ esetén $k = 2^n - m \leq 2^n < 2^{n+1}$, míg $p \geq 3$ esetén $p-2$ páratlan, tehát a p minimalitása folytán $2^n(p-2) \leq m$, így $k = 2^n p - m \leq 2^{n+1}$, sőt $k < 2^{n+1}$ is igaz, különben $2^{n+1} = 2^n p - m$ teljesülne, azaz $m = 2^n(p-2)$, tehát $\sigma(m) = n$ teljesülne, holott $\sigma(n) < n$. Tehát $k < 2^{n+1}$ olyan természetes szám, hogy fennáll a $\sigma(m+k) = n$ egyenlőség.

c) Nyilvánvalóan következik b)-ből. ■

14.4. A Rickart-tétel és a Gelfand–Mazur-tétel

14.4.1. Tétel. (Rickart-tétel) *Ha A nem nulladimenziós egységelemes komplex normált algebra, akkor minden $a \in A$ esetén létezik olyan $z \in \mathrm{Sp}_A(a)$, hogy $\rho(a) \leq |z|$.*

Bizonyítás. Ha $a \in A$ olyan, hogy $\rho(a) = 0$, akkor a nem invertálható, különben $1 = \rho(\mathbf{1}) = \rho(a^{-1}a) \leq \rho(a^{-1})\rho(a) = 0$ teljesülne, ami lehetetlen. Tehát, ha $a \in A$ kvázinilpotens, akkor $0 \in \mathrm{Sp}_A(a)$, így a $z := 0$ választással $\rho(a) \leq |z|$ teljesül.

Ezért feltesszük, hogy $a \in A$ olyan, hogy $\rho(a) > 0$. Indirekt bizonyítunk, tehát az lesz a hipotézisünk, hogy $\mathrm{Sp}_A(a) \subseteq B_{\rho(a)}(0;\mathbb{C})$. Értelmezzük az

$$f : \mathbb{C} \setminus B_{\rho(a)}(0;\mathbb{C}) \to A; \quad z \mapsto (\mathbf{1} - z^{-1}a)^{-1}$$

leképezést, ami valóban jól értelmezett, mivel $z \in \mathbb{C}$ és $|z| \geq \rho(a)$ esetén (az indirekt hipotézis alapján) $z \notin \mathrm{Sp}_A(a)$, vagyis $z\mathbf{1}-a$ invertálható elem, így $\mathbf{1}-z^{-1}a$ is invertálható.

Az előző állítás alapján f folytonos függvény.

Megmutatjuk, hogy ha $z \in \mathbb{C}$ és $|z| \geq \rho(a)$, akkor minden $\mathbb{N}^+ \ni n$-re az $\mathbf{1} - (z^{-1}a)^n$ elem invertálható. Valóban, legyen $n \in \mathbb{N}^+$ és jelölje P az $X^n - 1$ polinomot. Ekkor $-P_A(z^{-1}a) = \mathbf{1} - (z^{-1}a)^n$, ugyanakkor P előáll $P = \prod_{k=0}^{n-1}(X - \omega_n^k)$ alakban, ahol $\omega_n := e^{2\pi i/n}$. Ezért a polinomiális függvényszámítás morfikus tulajdonságai szerint $P_A(z^{-1}a) = \prod_{k=0}^{n-1}(z^{-1}a - \omega_n^k\mathbf{1})$ is teljesül, tehát

$$\mathbf{1} - (z^{-1}a)^n = -\prod_{k=0}^{n-1}(-\omega_n^k)(\mathbf{1} - (\omega_n^k z)^{-1}a).$$

Minden $1 \leq k \leq n$ természetes számra $|\omega_n^k z| = |z| \geq \rho(a)$, ezért az indirekt hipotézis alapján $(\omega_n^k z)\mathbf{1} - a$ invertálható. Tehát $\mathbf{1} - (z^{-1}a)^n$ előáll invertálható elemek szorzataként, így maga is invertálható.

Legyen $z \in \mathbb{C}$ olyan, hogy $|z| \geq \rho(a)$. Ha $n \in \mathbb{N}^+$ és $0 \leq j \leq n-1$ természetes szám, akkor $\omega_n^n = 1$ miatt nyilvánvalóan fennáll az

$$\mathbf{1} - (z^{-1}a)^n = (\mathbf{1} - (\omega_n^j z)^{-1}a)\sum_{k=0}^{n-1} \left((\omega_n^j z)^{-1}a\right)^k$$

egyenlőség, amiből az $\mathbf{1} - (z^{-1}a)^n$ és $\mathbf{1} - (\omega_n^j z)^{-1}a$ elemek invertálhatósága miatt következik, hogy

$$f(\omega_n^j z) := (\mathbf{1} - (\omega_n^j z)^{-1}a)^{-1} = \left(\sum_{k=0}^{n-1} \left((\omega_n^j z)^{-1}a\right)^k\right)(\mathbf{1} - (z^{-1}a)^n)^{-1}.$$

Rögzített $n \in \mathbb{N}^+$ és $z \in \mathbb{C}$, $|z| \geq \rho(a)$ esetén ezt az n darab egyenlőséget összegezve a j változóban kapjuk, hogy

$$\sum_{j=0}^{n-1} f(\omega_n^j z) = \sum_{j=0}^{n-1}\sum_{k=0}^{n-1} \left((\omega_n^j z)^{-1}a\right)^k \quad (\mathbf{1} - (z^{-1}a)^n)^{-1} =$$

$$= \sum_{k=0}^{n-1} \left(\sum_{j=0}^{n-1}(\omega_n^j)^{-k}\right) (z^{-1}a)^k \quad (\mathbf{1} - (z^{-1}a)^n)^{-1},$$

és világos, hogy minden $0 \leq k \leq n-1$ természetes számra

$$\sum_{j=0}^{n-1}(\omega_n^j)^{-k} = \overline{\sum_{j=0}^{n-1}(\omega_n^k)^j} = \begin{cases} n, & \text{ha } k = 0, \\ 0, & \text{ha } k \neq 0, \end{cases}$$

következésképpen
$$\sum_{k=0}^{n-1} \quad \sum_{j=0}^{n-1}(\omega_n^j)^{-k} \quad (z^{-1}a)^k = n\mathbf{1},$$
így
$$(\mathbf{1}-(z^{-1}a)^n)^{-1} = \frac{1}{n}\sum_{j=0}^{n-1} f(\omega_n^j z).$$
Tehát ez az egyenlőség minden $\mathbb{N}^+ \ni n$-re és olyan $\mathbb{C} \ni z$-re igaz, amelyre $|z| \geq \rho(a)$.

Legyen most $R > \rho(a)$ egy rögzített valós szám. Az f függvény folytonos a $\{z \in \mathbb{C} \mid \rho(a) \leq |z| \leq R\}$ kompakt körgyűrűn, így a Heine-tétel alapján, adott $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ esetén vehetünk olyan $\delta \in \mathbb{R}^+$ számot, amelyre teljesül az, hogy minden $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ esetén, ha $\rho(a) \leq |z_1|, |z_2| \leq R$ és $|z_1 - z_2| \leq \delta$, akkor $\|f(z_1) - f(z_2)\| \leq \varepsilon$. Legyen $r \in \mathbb{R}^+$ olyan, hogy $r \leq \min(R - \rho(a), \delta))$. Ekkor minden $n \in \mathbb{N}^+$ esetén, minden $0 \leq j \leq n-1$ természetes számra $\rho(a) \leq |\omega_n^j \rho(a)|, |\omega_n^j(\rho(a)+r)| \leq R$ és $|\omega_n^j\rho(a) - \omega_n^j(\rho(a)+r)| = r \leq \delta$, így $\|f(\omega_n^j(\rho(a)+r)) - f(\omega_n^j\rho(a))\| \leq \varepsilon$, következésképpen
$$\| \ \mathbf{1} - ((\rho(a)+r)^{-1}a)^n \ {}^{-1} - \ \mathbf{1} - ((\rho(a))^{-1}a)^n \ {}^{-1} \ \| \leq$$
$$\leq \frac{1}{n}\sum_{j=0}^{n-1} \|f(\omega_n^j(\rho(a)+r)) - f(\omega_n^j\rho(a))\| \leq \varepsilon,$$
amiből kapjuk, hogy minden $\mathbb{N}^+ \ni n$-re
$$\| \ \mathbf{1} - ((\rho(a))^{-1}a)^n \ {}^{-1} - \mathbf{1}\| \leq \| \ \mathbf{1} - ((\rho(a)+r)^{-1}a)^n \ {}^{-1} - \mathbf{1}\| + \varepsilon.$$
Ugyanakkor minden $z \in \mathbb{C}$ számra, ha $|z| > \rho(a)$, akkor $1 > \rho(z^{-1}a)$, így a $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}}(z^{-1}a)^n$ sor *abszolút konvergens* A-ban, tehát $\lim\limits_{n\to\infty}(z^{-1}a)^n = 0$. Ez azt jelenti, hogy $\lim\limits_{n\to\infty}((\rho(a)+r)^{-1}a)^n = 0$, és az $i_{\mathbf{G}(A)}$ inverzió-függvény folytonos, így $\lim\limits_{n\to\infty}(\mathbf{1} - ((\rho(a)+r)^{-1}a)^n)^{-1} = \mathbf{1}$. Ezért az ε-hoz van olyan $N \in \mathbb{N}$, hogy minden $n \geq N$ természetes számra $\|(\mathbf{1} - ((\rho(a)+r)^{-1}a)^n)^{-1} - \mathbf{1}\| \leq \varepsilon$, így
$$\| \ \mathbf{1} - ((\rho(a))^{-1}a)^n \ {}^{-1} - \mathbf{1}\| \leq 2\varepsilon.$$
Ezzel megmutattuk, hogy
$$\lim_{n\to\infty} \ \mathbf{1} - ((\rho(a))^{-1}a)^n \ {}^{-1} = \mathbf{1}.$$
Ismét az inverzió-függvény folytonossága alapján ebből kapjuk, hogy
$$\lim_{n\to\infty} \ \mathbf{1} - ((\rho(a))^{-1}a)^n \ = \mathbf{1},$$
következésképpen $\lim\limits_{n\to\infty}((\rho(a))^{-1}a)^n = 0$. Ez viszont lehetetlen, mert minden $\mathbb{N}^+ \ni n$-re $\rho(a) \leq \|a^n\|^{1/n}$, tehát $\|((\rho(a))^{-1}a)^n\| \geq 1$. ■

14.4.2. Következmény. *Nem nulladimenziós egységelemes komplex normált algebrában minden elem spektruma nem üres.*

14.4.3. Tétel. (Gelfand–Mazur-tétel) *Ha A olyan egységelemes komplex normált algebra, amelyben minden nem nulla elem invertálható, akkor $A = \mathbb{C}\mathbf{1}$.*

Bizonyítás. Az állítás igaz akkor, ha $A = \{0\}$. Ha A nem nulla dimenziós és $a \in A$, akkor $\mathrm{Sp}_A(a) \neq \emptyset$, tehát van olyan $z \in \mathbb{C}$, hogy a $z\mathbf{1} - a$ elem nem invertálható A-ban, így a hipotézis szerint $z\mathbf{1} - a = 0$, vagyis $a \in \mathbb{C}\mathbf{1}$. ■

14.5. Carl Neumann-féle sorok

14.5.1. Állítás. *Legyen A egységelemes normált algebra és $a \in A$. A $\sum_{k \in \mathbb{N}} a^k$ (Carl Neumann-féle) sor pontosan akkor konvergens A-ban, ha $\lim_{k \to \infty} a^k = 0$ és az $\mathbf{1} - a$ elem invertálható A-ban. Ha a $\sum_{k \in \mathbb{N}} a^k$ sor konvergens A-ban, akkor*

$$\sum_{k=0}^{\infty} a^k = (\mathbf{1} - a)^{-1}.$$

Bizonyítás. Nyilvánvaló, hogy $a \in A$ és $n \in \mathbb{N}^+$ esetén

$$\left(\sum_{k=0}^{n-1} a^k\right)(\mathbf{1} - a) = (\mathbf{1} - a)\left(\sum_{k=0}^{n-1} a^k\right) = \mathbf{1} - a^n.$$

Ha a $\sum_{k \in \mathbb{N}} a^k$ sor konvergens A-ban, akkor szükségképpen $\lim_{k \to \infty} a^k = 0$, ezért a fenti egyenlőség és az A szorzásának folytonossága miatt

$$\left(\sum_{k=0}^{\infty} a^k\right)(\mathbf{1} - a) = (\mathbf{1} - a)\left(\sum_{k=0}^{\infty} a^k\right) = \mathbf{1},$$

így $\mathbf{1} - a$ invertálható A-ban, és $\sum_{k=0}^{\infty} a^k = (\mathbf{1} - a)^{-1}$.

Megfordítva, ha $\lim_{k \to \infty} a^k = 0$ és az $\mathbf{1} - a$ elem invertálható A-ban, akkor minden $n \in \mathbb{N}^+$ esetén $\sum_{k=0}^{n-1} a^k = (\mathbf{1} - a^n)(\mathbf{1} - a)^{-1}$, és a feltevés szerint $\lim_{n \to \infty} ((\mathbf{1} - a^n)(\mathbf{1} - a)^{-1}) = (\mathbf{1} - a)^{-1}$, így a $\sum_{k \in \mathbb{N}} a^k$ sor konvergens A-ban. ■

14.5.2. Következmény. *Legyen A egységelemes normált algebra. Ha $a \in A$ olyan, hogy $\rho(a) < 1$, akkor a $\sum_{k\in\mathbb{N}} a^k$ sor abszolút konvergens A-ban, és ha A Banach-algebra, akkor az $\mathbf{1} - a$ elem invertálható A-ban és $\sum_{k=0}^{\infty} a^k = (\mathbf{1} - a)^{-1}$.*

Bizonyítás. Az előző állítás szerint elég azt igazolni, hogy $\rho(a) < 1$ esetén a $\sum_{k\in\mathbb{N}} a^k$ sor abszolút konvergens A-ban. Ehhez vegyünk olyan $r \in \mathbb{R}$ számot, amelyre $\rho(a) < r < 1$; ekkor $\lim_{k\to\infty} \|a^k\|^{1/k} < r$ miatt van olyan $n \in \mathbb{N}$, hogy minden $k > n$ természetes számra $\|a^k\|^{1/k} < r$, vagyis $\|a^k\| < r^k$. A majoráns kritérium és $r \in]0, 1[$ miatt ebből következik a $\sum_{k\in\mathbb{N}} a^k$ sor abszolút konvergenciája. ■

Láttuk, hogy egységelemes normált algebra invertálható elemeinek halmazán az inverzió folytonos függvény, azonban előfordulhat, hogy az invertálható elemek halmaza nem nyílt, még akkor sem ha az algebra komplex és kommutatív. Tekintsük például a $\mathbb{K}[X]$ polinomalgebrát, és vegyük e felett a

$$\mathbb{K}[X] \to \mathbb{R}_+; \quad P \mapsto \sup_{t\in[0,1]} |P_{\mathbb{K}}(t)|$$

leképezést, amellyel $\mathbb{K}[X]$ egységelemes kommutatív normált algebra. Ekkor nyilvánvalóan $\lim_{\varepsilon\to 0}(\mathbf{1} + \varepsilon X) = \mathbf{1}$ az adott norma szerint, és minden $\varepsilon \in \mathbb{R}$ nem nulla számra $\mathbf{1} + \varepsilon X$ nem invertálható elem $\mathbb{K}[X]$-ben. Ezért $\mathbf{1}$ nem belső pontja a $\mathbb{K}[X]$ invertálható elemei halmazának.

Azonban egységelemes Banach-algebrában az invertálható elemek halmaza nyílt, és ekkor az inverzió nemcsak folytonos, hanem analitikus is. Erről szól a következő állítás.

14.5.3. Állítás. *Legyen A egységelemes Banach-algebra $\mathbb{K}$ felett, és jelölje $\mathbf{G}(A)$ az A invertálható elemeinek halmazát. Ekkor $a \in \mathbf{G}(A)$ esetén minden $B_{1/\|a^{-1}\|}(a) \subseteq \mathbf{G}(A)$, és a $\mathbf{G}(A)$ halmaz nyílt A-ban. Továbbá, az*

$$i_{\mathbf{G}(A)} : \mathbf{G}(A) \to A; \quad a \mapsto a^{-1}$$

leképezés $\mathbb{K}$-analitikus, és minden $a \in \mathbf{G}(A)$, $n \in \mathbb{N}^+$ és $(x_k)_{0\le k<n} \in A^n$ esetén

$$((D^n i_{\mathbf{G}(A)})(a))((x_k)_{0\le k<n}) = (-1)^n \sum_{\sigma\in\mathbf{S}_n} \left(\prod_{k=0}^{n-1} a^{-1} x_{\sigma(k)} \right) a^{-1},$$

ahol $\mathbf{S}_n$ az n halmaz permutációnak halmaza.

Bizonyítás. Először megmutatjuk, hogy ha $a \in \mathbf{G}(A)$, akkor $B_{1/\|a^{-1}\|}(a) \subseteq \mathbf{G}(A)$, vagyis $b \in A$ és $\|a - b\| < 1/\|a^{-1}\|$ esetén b invertálható elem A-ban. Valóban, ekkor

$$\rho(\mathbf{1} - a^{-1}b) \le \|\mathbf{1} - a^{-1}b\| = \|a^{-1}(a - b)\| \le \|a^{-1}\|\|a - b\| < 1,$$

így az előző állítás alapján $a^{-1}b = \mathbf{1} - (\mathbf{1} - a^{-1}b) \in \mathbf{G}(A)$, tehát $b = a(a^{-1}b) \in \mathbf{G}(A)$ is teljesül. Ebből azonnal következik, hogy a $\mathbf{G}(A)$ halmaz nyílt A-ban.

Az $i_{\mathbf{G}(A)}$ inverzió-függvény $\mathbb{K}$-analitikusságának bizonyításához legyen $a \in \mathbf{G}(A)$ rögzített, és minden $n \in \mathbb{N}^+$ esetén értelmezzük az

$$u_n : A^n \to A; \quad (x_k)_{0 \leq k < n} \mapsto \frac{(-1)^n}{n!} \sum_{\sigma \in \mathbf{S}_n} \left(\prod_{k=0}^{n-1} a^{-1} x_{\sigma(k)} \right) a^{-1}$$

leképezést. Könnyen látható, hogy minden $n \in \mathbb{N}^+$ esetén u_n folytonos szimmetrikus n-lineáris operátor, ugyanis ez megegyezik az

$$A^n \to A; \quad (x_k)_{0 \leq k < n} \mapsto (-1)^n \left(\prod_{k=0}^{n-1} a^{-1} x_{\sigma(k)} \right) a^{-1}$$

folytonos n-lineáris operátor szimmetrizáltjával. Legyen $u_0 := a^{-1}$, és tekintsük a

$$\sum_{k \in \mathbb{N}} u_k \circ (id_A - a)^{[k]}$$

hatványfüggvény-sort, és jelölje R ennek konvergencia-sugarát. Ha $n \in \mathbb{N}^+$, akkor $(x_k)_{0 \leq k < n} \in A^n$ esetén

$$\|u_n((x_k)_{0 \leq k < n})\| \leq \frac{1}{n!} \sum_{\sigma \in \mathbf{S}_n} \left(\prod_{k=0}^{n-1} \|a^{-1} x_{\sigma(k)}\| \right) \|a^{-1}\| \leq$$

$$\leq \frac{1}{n!} \sum_{\sigma \in \mathbf{S}_n} \|a^{-1}\|^{n+1} \left(\prod_{k=0}^{n-1} \|x_{\sigma(k)}\| \right) = \|a^{-1}\|^{n+1} \prod_{k=0}^{n-1} \|x_k\|,$$

ezért $\|u_n\| \leq \|a^{-1}\|^{n+1}$, így $\limsup_{n \to \infty} \|u_n\|^{1/n} \leq \|a^{-1}\|$, amiből az R definíciója alapján kapjuk, hogy $1/\|a^{-1}\| \leq R$. Láttuk, hogy $B_{1/\|a^{-1}\|}(a) \subseteq \mathbf{G}(A)$ és ha $x \in A$ olyan, hogy $\|x\| < 1/\|a^{-1}\|$, akkor

$$i_{\mathbf{G}(A)}(a + x) = (a + x)^{-1} = (\mathbf{1} - (-a^{-1}x))^{-1} a^{-1} = \left(\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k (a^{-1}x)^k \right) a^{-1} =$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k (a^{-1}x)^k a^{-1} = \sum_{k=0}^{\infty} u_k(x^{[k]}),$$

és az itt álló sorösszegek A-ban haladó abszolút konvergens sorok összegei. Ez azt jelenti, hogy a $B_{1/\|a^{-1}\|}(a)$ gömb részhalmaza a $\sum_{k \in \mathbb{N}} u_k \circ (id_A - a)^{[k]}$ hatványfüggvény-sor abszolútkonvergencia-tartományának, továbbá a $\mathbf{G}(A) =: \mathrm{Dom}(i_{\mathbf{G}(A)})$ halmaznak is részhalmaza, valamint

$$i_{\mathbf{G}(A)} = \sum_{k=0}^{\infty} u_k \circ (id_A - a)^{[k]}$$

a $B_{1/\|a^{-1}\|}(a)$ gömbön. Ebből azonnal kapjuk, hogy az $i_{\mathbf{G}(A)}$ függvény analitikus az a pontban, és minden $n \in \mathbb{N}$ esetén $n!u_n = (D^n i_{\mathbf{G}(A)})(a)$. ■

14.5.4. Következmény. *Banach-algebrában minden reguláris maximális ideál zárt.*

Bizonyítás. Legyen először A egységelemes Banach-algebra és $\mathfrak{m} \subseteq A$ maximális ideál (amely szükségképpen reguláris). Az $\mathfrak{m}$ ideál valódi, ezért $\mathfrak{m}$-nek nincs invertálható eleme, így $\mathfrak{m} \subseteq A \setminus \mathbf{G}(A)$. Az előző állítás szerint $A \setminus \mathbf{G}(A)$ zárt halmaz A-ban, így $\overline{\mathfrak{m}} \subseteq A \setminus \mathbf{G}(A)$ is teljesül. Ezért $\overline{\mathfrak{m}}$ is valódi ideál A-ban, így $\mathfrak{m}$ maximalitása folytán $\overline{\mathfrak{m}} = \mathfrak{m}$.

Legyen A tetszőleges (nem feltétlenül egységelemes) Banach-algebra, és $\mathfrak{m}$ reguláris maximális ideál A-ban. Tudjuk, hogy létezik olyan $\tilde{\mathfrak{m}}$ maximális ideál az $\tilde{A}$ standard egységelemesítésben, amelyre $\tilde{\mathfrak{m}} \cap A = \mathfrak{m}$. Az $\tilde{A}$ egységelemes algebrát az $\tilde{A} \to \mathbb{R}_+$; $(\lambda, a) \mapsto |\lambda| + \|a\|$ normával ellátva olyan egységelemes Banach-algebrát kapunk, amelyben A zárt halmaz. Az előző bekezdés szerint $\tilde{\mathfrak{m}}$ zárt ideál $\tilde{A}$-ban, ezért $\mathfrak{m}$ zárt $\tilde{A}$-ban, így A-ban is zárt. ■

14.5.5. Következmény. *Kommutatív komplex Banach-algebra minden reguláris maximális ideálja* 1*-kodimenziós.*

Bizonyítás. Ha A kommutatív komplex Banach-algebra és $\mathfrak{m} \subseteq A$ reguláris maximális ideál, akkor $\mathfrak{m}$ zárt A-ban, így az $A/\mathfrak{m}$ faktoralgebra egységelemes kommutatív komplex Banach-algebra, továbbá az $\mathfrak{m}$ maximalitása, valamint A kommutativitása folytán $A/\mathfrak{m}$ test, tehát a Gelfand–Mazur-tétel alapján $A/\mathfrak{m} = \mathbb{C}\mathbf{1}$. ■

Tehát kommutatív komplex Banach-algebrában az 1-kodimenziós reguláris ideálok, a reguláris maximális ideálok, és a nem nulla karakterek magjai ugyanazok. Azonban a legalább kétdimenziós nulla-szorzású komplex Banach-algebrák példája mutatja, hogy kommutatív komplex Banach-algebrában nem szükségképpen létezik reguláris ideál.

14.6. Spektrum és rezolvens Banach-algebra esetében

A következő tétel megvilágítja a spektrálsugár spektrummal való kapcsolatát Banach-algebrák esetében.

14.6.1. Tétel. *Legyen A egységelemes Banach-algebra $\mathbb{K}$-felett és $a \in A$.*

a) *Az $\mathrm{Sp}_A(a)$ halmaz kompakt $\mathbb{K}$-ban és $\mathrm{Sp}_A(a) \subseteq \overline{B}_{\rho(a)}(0;\mathbb{K})$. Továbbá, az a elem rezolvens-függvénye végtelenben eltűnő és $\mathbb{K}$-analitikus.*

b) *Ha $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, akkor $\rho(a) = \min\{r \in \mathbb{R}_+ | \mathrm{Sp}_A(a) \subseteq \overline{B}_r(0;\mathbb{C})\}$ (ez a* **spektrálsugár minimalitása***), és ha $A \neq \{0\}$, akkor $\mathrm{Sp}_A(a) \neq \emptyset$.*

Bizonyítás. a) Ha $\lambda \in \mathbb{K}$ és $|\lambda| > \rho(a)$, akkor $\rho(\lambda^{-1}a) = |\lambda|^{-1}\rho(a) < 1$, így a $\sum\limits_{k\in\mathbb{N}} \lambda^{-k}a^k$ sor abszolút konvergens A-ban, és $\mathbf{1} - \lambda^{-1}a$ invertálható A-ban, továbbá

$$(\mathbf{1} - \lambda^{-1}a)^{-1} = \sum_{k=0}^{\infty} \lambda^{-k}a^k,$$

ezért a $\lambda\mathbf{1} - a = \lambda(\mathbf{1} - \lambda^{-1}a)$ elem is invertálható, és

$$(\lambda\mathbf{1} - a)^{-1} = \lambda^{-1}(\mathbf{1} - \lambda^{-1}a)^{-1} = \frac{1}{\lambda}\sum_{k=0}^{\infty} \lambda^{-k}a^k.$$

Ebből következik, hogy $\mathbb{K} \setminus \overline{B}_{\rho(a)}(0;\mathbb{K}) \subseteq \mathbb{K} \setminus \mathrm{Sp}_A(a)$, vagyis $\mathrm{Sp}_A(a) \subseteq \overline{B}_{\rho(a)}(0;\mathbb{K})$.
Az $\mathrm{Sp}_A(a)$ halmaz zártságának és a rezolvens-függvény $\mathbb{K}$-analitikusságának bizonyításához természetesen feltehetjük, hogy $A \neq \{0\}$, vagyis $\mathbf{1} \neq 0$, és legyen $\lambda \in \mathbb{K} \setminus \mathrm{Sp}_A(a)$ és $r \in \mathbb{R}^+$ olyan, hogy $r\|\mathbf{1}\| < \dfrac{1}{\|(\lambda\mathbf{1} - a)^{-1}\|}$. Ekkor $\lambda' \in B_r(\lambda;\mathbb{K})$ esetén

$$\|(\lambda'\mathbf{1} - a) - (\lambda\mathbf{1} - a)\| = |\lambda' - \lambda|\|\mathbf{1}\| \leq r\|\mathbf{1}\| < \frac{1}{\|(\lambda\mathbf{1} - a)^{-1}\|},$$

így $\lambda'\mathbf{1} - a$ invertálható A-ban és $\|\mathbf{1}\| \geq 1$ miatt $\rho(-(\lambda' - \lambda)(\lambda\mathbf{1} - a)^{-1}) \leq \| - (\lambda' - \lambda)(\lambda\mathbf{1} - a)^{-1}\| \leq r\|(\lambda\mathbf{1} - a)^{-1}\| < \dfrac{1}{\|\mathbf{1}\|} \leq 1$, tehát

$$(\lambda'\mathbf{1} - a)^{-1} = ((\lambda' - \lambda)\mathbf{1} + (\lambda\mathbf{1} - a))^{-1} =$$

$$= \ \mathbf{1} - (-(\lambda' - \lambda)(\lambda\mathbf{1} - a)^{-1}) \ ^{-1}(\lambda\mathbf{1} - a)^{-1} =$$

$$= \left(\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k(\lambda' - \lambda)^k((\lambda\mathbf{1} - a)^{-1})^k\right)(\lambda\mathbf{1} - a)^{-1} =$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k(\lambda' - \lambda)^k((\lambda\mathbf{1} - a)^{-1})^{k+1}.$$

Tehát $B_r(\lambda;\mathbb{K}) \subseteq \mathbb{K} \setminus \mathrm{Sp}_A(a)$, és az a elem rezolvens-függvénye ezen a halmazon egyenlő a $\sum\limits_{k\in\mathbb{N}}(-1)^k(id_{\mathbb{K}} - \lambda)^k((\lambda\mathbf{1} - a)^{-1})^{k+1}$ hatványfüggvény-sor összegfüggvényével.
Ugyanakkor ennek a hatványfüggvény-sornak a konvergencia-sugara nagyobb-egyenlő az $\dfrac{1}{\|(\lambda\mathbf{1} - a)^{-1}\|}$ számnál, mert

$$\limsup_{k\to\infty}\|(-1)^k((\lambda\mathbf{1} - a)^{-1})^{k+1}\|^{1/k} \leq \limsup_{k\to\infty}\|(\lambda\mathbf{1} - a)^{-1}\|^{(k+1)/k} = \|(\lambda\mathbf{1} - a)^{-1}\|.$$

Ez azt jelenti, hogy $\mathrm{Sp}_A(a)$ zárt $\mathbb{K}$-ban, és az a elem rezolvens-függvénye $\mathbb{K}$-analitikus minden $\lambda \in \mathbb{K} \setminus \mathrm{Sp}_A(a)$ pontban.

Megmutatjuk, hogy az a elem rezolvens-függvénye végtelenben eltűnő. Legyen $r \in \mathbb{R}^+$ olyan szám, amelyre $\rho(a) < r$. Igazoljuk olyan $C_r \in \mathbb{R}^+$ létezését, amelyre minden $\lambda \in \mathbb{K}$ esetén, ha $|\lambda| \geq r$, akkor

$$\|(\lambda\mathbf{1} - a)^{-1}\| \leq \frac{C_r}{|\lambda|}.$$

Ebből nyilvánvalóan következik, hogy az a elem rezolvens-függvénye végtelenben eltűnő. Rögzítsünk olyan $s \in \mathbb{R}^+$ számot, amelyre $\rho(a) < s < r$. Legyen $\lambda \in \mathbb{K}$ olyan, hogy $|\lambda| \geq r$; ekkor

$$\lim_{k\to\infty} \| \quad \lambda^{-1}a \quad ^k \|^{1/k} = \rho(\lambda^{-1}a) = \frac{\rho(a)}{|\lambda|} < \frac{s}{r} < 1.$$

Tehát vehetünk olyan $n \in \mathbb{N}$ számot, amelyre $k \in \mathbb{N}$ és $k > n$ esetén $\| (\lambda^{-1}a)^k \|^{1/k} < \dfrac{s}{r}$, így $\| (\lambda^{-1}a)^k \| < \quad \dfrac{s}{r} \quad ^k$. Ez azt jelenti, hogy a $\sum\limits_{k\in\mathbb{N}} \| \quad \lambda^{-1}a \quad ^k \|$ sor konvergens, és

$$\|(\lambda\mathbf{1} - a)^{-1}\| = \left\| \frac{1}{\lambda} \sum_{k=0}^{\infty} \lambda^{-k}a^k \right\| \leq \frac{1}{|\lambda|} \sum_{k=0}^{\infty} \| \quad \lambda^{-1}a \quad ^k \| =$$

$$= \frac{1}{|\lambda|} \sum_{k=0}^{n} \| \quad \lambda^{-1}a \quad ^k \| + \frac{1}{|\lambda|} \sum_{k=n+1}^{\infty} \| \quad \lambda^{-1}a \quad ^k \| \leq$$

$$\leq \frac{1}{|\lambda|} \sum_{k=0}^{n} \frac{\|a^k\|}{r^k} + \frac{1}{|\lambda|} \sum_{k=n+1}^{\infty} \quad \frac{s}{r} \quad ^k = \frac{C_r}{|\lambda|},$$

ahol nyilvánvalóan

$$C_r := \sum_{k=0}^{n} \frac{\|a^k\|}{r^k} + \frac{\quad \frac{s}{r} \quad ^{n+1}}{1 - \frac{s}{r}},$$

amit igazolni kellett.

b) Tegyük fel, hogy $A \neq \{0\}$ egységelemes *komplex* Banach-algebra, és $a \in A$. A Rickart-tétel alapján van olyan $z \in \mathrm{Sp}_A(a)$, hogy $|z| \geq \rho(a)$; ugyanakkor az a) szerint $\mathrm{Sp}_A(a) \subseteq \overline{B}_{\rho(a)}(0;\mathbb{C})$. Ebből azonnal következik, hogy $\rho(a) = \min\{r \in \mathbb{R}_+ | \mathrm{Sp}_A(a) \subseteq \overline{B}_r(0;\mathbb{C})\}$. A Rickart-tételből kapjuk, hogy $\mathrm{Sp}_A(a) \neq \emptyset$ (még akkor is, ha A nem teljes). ■

Megjegyzések. 1) Most megadjuk az előző tétel b) pontjának Rickart-tételtől független bizonyítását, amely azonban felhasználja a holomorf függvények Taylor-sorfejtésének maximalitási tulajdonságáról szóló tételét, amely így hangzik: ha F komplex Banach-tér, $f : \mathbb{C} \rightarrowtail F$ holomorf függvény, $\mathfrak{a} \in \mathrm{Dom}(f)$ és $R_{\mathfrak{a}} := \sup\{r \in \mathbb{R}^+ | B_r(\mathfrak{a};\mathbb{C}) \subseteq$

$\mathrm{Dom}(f)\}$, akkor az f függvény $\mathfrak{a}$ pontbeli Taylor-sora a $B_{R_{\mathfrak{a}}}(\mathfrak{a};\mathbb{C})$ halmazon konvergens és az összegfüggvénye egyenlő f-fel.

Legyen A egységelemes komplex Banach-algebra és $a \in A$; megmutatjuk, hogy $\rho(a) = \min\{r \in \mathbb{R}_+ | \mathrm{Sp}_A(a) \subseteq \overline{B}_r(0;\mathbb{K})\}$. Indirekt bizonyítunk, tehát feltesszük, hogy létezik olyan $r \in \mathbb{R}_+$, amelyre $\mathrm{Sp}_A(a) \subseteq \overline{B}_r(0;\mathbb{K})$ és $r < \rho(a)$. Tekintsük az

$$f : B_{1/r}(0;\mathbb{C}) \to A; \quad z \mapsto \begin{cases} (z^{-1}\mathbf{1} - a)^{-1} & ; \text{ha } z \neq 0 \\ 0 & ; \text{ha } z = 0 \end{cases}$$

függvényt, amely jól értelmezett, mert ha $z \in \mathbb{C}$ olyan, hogy $0 < |z| < \dfrac{1}{r}$, akkor $|z^{-1}| > r$, tehát $z^{-1} \in \mathbb{C} \setminus \overline{B}_r(0;\mathbb{C}) \subseteq \mathbb{C} \setminus \mathrm{Sp}_A(a)$. Az f függvény a $B_{1/r}(0;\mathbb{C}) \setminus \{0\}$ halmazon holomorf, mert a rezolvens-függvény holomorfitása miatt f két holomorf függvény kompozíciójával egyenlő ezen a halmazon. Az f függvény a 0 pontban $\mathbb{C}$-analitikus. Valóban, ha $z \in B_{1/\rho(a)}(0;\mathbb{C}) \setminus \{0\}$, akkor $|z^{-1}| > \rho(a)$, ezért a $\sum\limits_{k\in\mathbb{N}} z^k a^k$ sor abszolút konvergens A-ban, és $z^{-1}\mathbf{1} - a \in \mathbf{G}(A)$, továbbá

$$f(z) := (z^{-1}\mathbf{1} - a)^{-1} = z \sum_{k=0}^{\infty} z^k a^k.$$

Ez azt jelenti, hogy a $\sum\limits_{k\in\mathbb{N}} id_{\mathbb{C}}^{k+1} a^k$ hatványfüggvény-sor összegfüggvénye értelmezve van a $B_{1/\rho(a)}(0;\mathbb{C})$ gömbön, és az összegfüggvény egyenlő f-fel ezen a halmazon. Továbbá, a $\sum\limits_{k\in\mathbb{N}} id_{\mathbb{C}}^{k+1} a^k$ hatványfüggvény-sor konvergencia-sugara egyenlő $\dfrac{1}{\rho(a)}$-val, ezért f a 0 pontban $\mathbb{C}$-analitikus, és ez a hatványfüggvény-sor egyenlő az f függvény Taylor-sorával a 0 pontban. A holomorf függvények Taylor-sorfejtésének maximalitási tulajdonságából következik, hogy az f függvény 0 pontbeli Taylor-sorának konvergencia-sugara nagyobb-egyenlő a $\sup\{s \in \mathbb{R}^+ | \overline{B}_s(0;\mathbb{C}) \subseteq \mathrm{Dom}(f)\} = \dfrac{1}{r}$ számnál. Tehát $\dfrac{1}{r} \leq \dfrac{1}{\rho(a)}$, holott $r < \rho(a)$, ami ellentmondás.

Azt kell még igazolni, hogy ha $A \neq \{0\}$, akkor $\mathrm{Sp}_A(a) \neq \emptyset$. Tegyük fel, hogy $\mathrm{Sp}_A(a) = \emptyset$ teljesül, vagyis az a elem rezolvens-halmaza egyenlő $\mathbb{C}$-vel. Ekkor az a rezolvens függvénye *egész függvény*, és végtelenben eltűnő, így korlátos, tehát a Liouville-tétel alapján állandó. Természetesen, a végtelenben eltűnőség miatt ez a konstans érték egyenlő 0-val. De a rezolvens-függvény értékei invertálható elemek, tehát 0 ivertálható elem A-ban, vagyis $A = \{0\}$.

2) Ha tudjuk azt, hogy minden nem nulla dimenziós egységelemes komplex Banach-algebrában minden elem spektuma nem üres, akkor könnyen belátható (a Rickart-tétel alkalmazása nélkül), hogy minden nem nulla dimenziós egységelemes komplex normált algebrában minden elem spektuma nem üres. Valóban, ha $\mathbf{A}$ nem nulla

dimenziós egységelemes komplex normált algebra, akkor A (tehát az A teljes burka) nem nulla dimenziós egységelemes komplex Banach-algebra, és minden $a \in A$ esetén $\mathrm{Sp}_{\widehat{A}}(a) \subseteq \mathrm{Sp}_A(a)$, így $\mathrm{Sp}_{\widehat{A}}(a) \neq \emptyset$ esetén $\mathrm{Sp}_A(a) \neq \emptyset$ is teljesül.

14.6.2. Tétel. *Legyen A Banach-algebra $\mathbb{K}$-felett és $a \in A$.*

a) *Az $\mathrm{Sp}'_A(a)$ halmaz kompakt $\mathbb{K}$-ban és $\mathrm{Sp}'_A(a) \subseteq \overline{B}_{\rho(a)}(0;\mathbb{K})$.*

b) *Ha $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, akkor $\rho(a) = \min\{r \in \mathbb{R}_+ | \mathrm{Sp}'_A(a) \subseteq \overline{B}_r(0;\mathbb{K})\}$ (ez a spektrálsugár minimalitási tulajdonsága).*

Bizonyítás. Az A Banach-algebra $\tilde{A}$ standard egységelemesítése az

$$\tilde{A} \to \mathbb{R}_+; \quad (\lambda, a) \mapsto |\lambda| + \|a\|$$

normával ellátva egységelemes Banach-algebra, és $a \in A$ esetén minden $\mathbb{N} \ni n$-re $\|(0,a)^n\| = \|a^n\|$, ezért az a elem spektrálsugara A-ban egyenlő a $(0,a)$ elem spektrálsugarával $\tilde{A}$-ban. Ezért mindkét állítás azonnal következik az előző tételből, ha azt A helyett az $\tilde{A}$ egységelemes Banach-algebrára és az $a \in A$ helyett a $(0,a) \in \tilde{A}$ elemre alkalmazzuk. ■

14.6.3. Következmény. *Ha A egységelemes Banach-algebra $\mathbb{K}$ felett és $a \in A$ olyan invertálható elem, hogy $\|a\| \leq 1$ és $\|a^{-1}\| \leq 1$, akkor*

$$\mathrm{Sp}_A(a) \subseteq \{\lambda \in \mathbb{K} \mid |\lambda| = 1\}.$$

Bizonyítás. Az $\mathrm{Sp}_A(a) \subseteq \overline{B}_{\rho(a)}(0;\mathbb{K})$ tartalmazás és $\rho(a) \leq \|a\| \leq 1$ miatt $\mathrm{Sp}_A(a) \subseteq \overline{B}_1(0;\mathbb{K})$. Hasonlóan, az $\mathrm{Sp}_A(a^{-1}) \subseteq \overline{B}_{\rho(a^{-1})}(0;\mathbb{K})$ tartalmazás és $\rho(a^{-1}) \leq \|a^{-1}\| \leq 1$ miatt $\mathrm{Sp}_A(a^{-1}) \subseteq \overline{B}_1(0;\mathbb{K})$. Ha $\lambda \in \mathrm{Sp}_A(a)$, akkor $\lambda \neq 0$ és $\lambda^{-1}\mathbf{1} - a^{-1} = -\lambda^{-1}(\lambda\mathbf{1} - a)a^{-1}$, így $\lambda^{-1} \in \mathrm{Sp}_A(a^{-1})$, következésképpen $|\lambda| \leq 1$ és $|\lambda^{-1}| \leq 1$, tehát $|\lambda| = 1$. ■

14.6.4. Lemma. *Legyen A egységelemes Banach-algebra és $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ az A invertálható elemeinek konvergens sorozata. A $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$ elem pontosan akkor invertálható A-ban, ha az $(a_n^{-1})_{n\in\mathbb{N}}$ sorozat korlátos.*

Bizonyítás. Ha $a := \lim\limits_{n\to\infty} a_n \in \mathbf{G}(A)$, akkor az A-beli inverzió folytonossága miatt az $(a_n^{-1})_{n\in\mathbb{N}}$ sorozat konvergál a^{-1}-hez, ezért ez a sorozat korlátos. Megfordítva, tegyük fel, hogy az $(a_n^{-1})_{n\in\mathbb{N}}$ sorozat korlátos. Ekkor természetesen fennáll az $\lim\limits_{n\to\infty} a_n^{-1}(a_n - a) = 0$ egyenlőség, vagyis $\lim\limits_{n\to\infty} a_n^{-1}a = \mathbf{1}$. Ezért létezik olyan $n \in \mathbb{N}$, hogy $\|\mathbf{1} - a_n^{-1}a\| < 1$, tehát $a_n^{-1}a \in \mathbf{G}(A)$, így $a = a_n(a_n^{-1}a) \in \mathbf{G}(A)$ is teljesül. ■

14.6.5. Állítás. *Legyen A egységelemes Banach-algebra $\mathbb{K}$ felett és $B \subseteq A$ olyan zárt részalgebra, amelyre $\mathbf{1} \in B$. Ekkor minden $b \in B$ esetén*

$$\mathrm{Fr}_{\mathbb{K}}(\mathrm{Sp}_B(b)) \subseteq \mathrm{Fr}_{\mathbb{K}}(\mathrm{Sp}_A(b)).$$

Bizonyítás. Legyen $\lambda \in \mathrm{Fr}_{\mathbb{K}}(\mathrm{Sp}_B(b))$; ekkor létezik olyan $(\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sorozat a $\mathbb{K} \setminus \mathrm{Sp}_B(b)$ halmazban, amely konvergál λ-hoz. A B-ben haladó $(\lambda_n \mathbf{1} - b)_{n\in\mathbb{N}}$ sorozat minden tagja invertálható B-ben (így A-ban is), és ez a sorozat konvergál a $\lambda\mathbf{1} - b$ elemhez B-ben (így A-ban is). Ugyanakkor $\lambda\mathbf{1} - b$ nem invertálható B-ben, ezért az előző lemma alapján a $((\lambda_n\mathbf{1} - b)^{-1})_{n\in\mathbb{N}}$ sorozat nem korlátos B-ben, így A-ban sem korlátos. Ismét a lemma alkalmazásával kapjuk, hogy $\lambda\mathbf{1} - b$ nem invertálható A-ban, tehát $\lambda \in \mathrm{Sp}_A(b)$. Továbbá, $\mathrm{Sp}_A(b) \subseteq \mathrm{Sp}_B(b)$ miatt $\mathrm{Int}(\mathrm{Sp}_A(b)) \subseteq \mathrm{Int}(\mathrm{Sp}_B(b))$, valamint $\lambda \notin \mathrm{Int}(\mathrm{Sp}_B(b))$. Ebből következik, hogy $\lambda \in \mathrm{Sp}_A(b) \setminus \mathrm{Int}(\mathrm{Sp}_A(b)) =: \mathrm{Fr}_{\mathbb{K}}(\mathrm{Sp}_A(b))$. ■

14.7. Egészfüggvény-számítás komplex Banach-algebrában

14.7.1. Lemma. (Vektorsorok Cauchy-szorzása) *Legyenek E, F, G normált terek, $u : E \times F \to G$ folytonos $\mathbb{R}$-bilineáris operátor, továbbá $(e_k)_{k\in\mathbb{N}}$ (illetve $(f_k)_{k\in\mathbb{N}}$) E-ben (illetve F-ben) haladó sorozat. Ha a $\sum_{k\in\mathbb{N}} e_k$ sor abszolút konvergens E-ben és a $\sum_{k\in\mathbb{N}} f_k$ sor abszolút konvergens F-ben, akkor a*

$$\sum_{n\in\mathbb{N}} \left(\sum_{k=0}^{n} u(e_k, f_{n-k}) \right)$$

sor abszolút konvergens G-ben. Ha E, F, G Banach-terek, és a $\sum_{k\in\mathbb{N}} e_k$ sor abszolút konvergens E-ben, valamint a $\sum_{k\in\mathbb{N}} f_k$ sor abszolút konvergens F-ben, akkor

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^{n} u(e_k, f_{n-k}) \right) = u\left(\sum_{k=0}^{\infty} e_k, \sum_{k=0}^{\infty} f_k \right).$$

Bizonyítás. Minden $N \in \mathbb{N}^+$ esetén

$$\sum_{n=0}^{N-1} \left\| \sum_{k=0}^{n} u(e_k, f_{n-k}) \right\| \leq \|u\| \sum_{n=0}^{N-1} \sum_{k=0}^{n} \|e_k\| \|f_{n-k}\| = \|u\| \sum_{k=0}^{N-1} \sum_{n=k}^{N-1} \|e_k\| \|f_{n-k}\| \leq$$

$$\leq \|u\| \sum_{k=0}^{N-1} \sum_{n=0}^{N-1} \|e_k\| \|f_n\| = \|u\| \left(\sum_{k=0}^{N-1} \|e_k\| \right) \left(\sum_{n=0}^{N-1} \|f_n\| \right),$$

tehát, ha a $\sum_{k\in\mathbb{N}} e_k$ sor abszolút konvergens E-ben és a $\sum_{k\in\mathbb{N}} f_k$ sor abszolút konvergens F-ben, akkor a

$$\sum_{n\in\mathbb{N}} \left(\sum_{k=0}^{n} u(e_k, f_{n-k}) \right)$$

sor abszolút konvergens G-ben. Ha még az is teljesül, hogy E, F és G Banach-terek, akkor az u folytonossága miatt nyilvánvalóan

$$u\left(\sum_{k=0}^{\infty} e_k, \sum_{k=0}^{\infty} f_k\right) = \lim_{n\to\infty} u\left(\sum_{k=0}^{n-1} e_k, \sum_{k=0}^{n-1} f_k\right).$$

Ugyanakkor minden $n \in \mathbb{N}^+$ esetén

$$u\left(\sum_{k=0}^{n-1} e_k, \sum_{k=0}^{n-1} f_k\right) = \sum_{k=0}^{n-1}\sum_{j=0}^{n-1} u(e_j, f_k) = \sum_{(j,k)\in n\times n} u(e_j, f_k) =$$

$$= \sum_{(j,k)\in n\times n,\ j+k\le n-1} u(e_j, f_k) + \sum_{(j,k)\in n\times n,\ j+k>n-1} u(e_j, f_k) =$$

$$= \sum_{k=0}^{n-1}\sum_{j=0}^{k} u(e_j, f_{k-j}) + \sum_{(j,k)\in n\times n,\ j+k>n-1} u(e_j, f_k).$$

Ha $n \in \mathbb{N}^+$, $(j,k) \in n \times n$ és $j + k > n - 1$, akkor $j > \dfrac{n-1}{2}$ vagy $k > \dfrac{n-1}{2}$, ezért

$$\left\| u\left(\sum_{k=0}^{n-1} e_k, \sum_{k=0}^{n-1} f_k\right) - \sum_{k=0}^{n-1}\sum_{j=0}^{k} u(e_j, f_{k-j}) \right\| \le$$

$$\le \|u\| \sum_{(j,k)\in n\times n,\ j>(n-1)/2} \|e_j\|\|f_k\| + \sum_{(j,k)\in n\times n,\ j\le(n-1)/2,\ k>(n-1)/2} \|e_j\|\|f_k\|$$

$$\le \|u\| \sum_{(n-1)/2<j<n} \|e_j\| \left(\sum_{k=0}^{n-1} \|f_k\|\right) + \|u\| \sum_{j=0}^{\left[\frac{n-1}{2}\right]} \|e_j\| \sum_{(n-1)/2<k<n} \|f_k\|$$

$$\le \|u\| \sum_{j=\left[\frac{n-1}{2}\right]+1}^{\infty} \|e_j\| \left(\sum_{k=0}^{\infty} \|f_k\|\right) + \|u\| \sum_{j=0}^{\infty} \|e_j\| \sum_{k=\left[\frac{n-1}{2}\right]+1}^{\infty} \|f_k\| \quad ,$$

és itt a jobb oldalon zérussorozat áll, így

$$\lim_{n\to\infty} u\left(\sum_{k=0}^{n-1} e_k, \sum_{k=0}^{n-1} f_k\right) = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n-1}\sum_{j=0}^{k} u(e_j, f_{k-j}) = \sum_{k=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{k} u(e_j, f_{k-j}),$$

amiből következik a bizonyítandó egyenlőség. ■

14.7.2. Állítás. *Ha A Banach-algebra, valamint $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ és $(b_k)_{k\in\mathbb{N}}$ olyan sorozatok A-ban, amelyekre a $\sum\limits_{k\in\mathbb{N}} a_k$ és $\sum\limits_{k\in\mathbb{N}} b_k$ sorok abszolút konvergensek, akkor az A-ban haladó*

$$\sum_{n\in\mathbb{N}}\left(\sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}\right)$$

sor abszolút konvergens, és

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}\right) = \left(\sum_{k=0}^{\infty} a_k\right)\left(\sum_{k=0}^{\infty} b_k\right).$$

Bizonyítás. Elég alkalmazni az előző lemmát, az $E := F := G := A$ választással, amikor u az $A \times A \to A$ szorzás-függvény. ■

14.7.3. Jelölés. *Legyen A egységelemes komplex Banach-algebra és $a \in A$. Minden $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ egészfüggvényre:*

$$f_A(a) := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(D^k f)(0)}{k!} a^k.$$

A definíció *értelmes*, mert ha $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ egészfüggvény, akkor az f függvény 0 pontbeli Taylor-sorának konvergenciasugara – a holomorf függvények Taylor sorfejtésének maximalitása miatt – egyenlő $+\infty$-nel, vagyis

$$\limsup_{k\to\infty}\left|\frac{(D^k f)(0)}{k!}\right|^{1/k} = 0,$$

így – a Cauchy-féle gyökkritérium alapján – minden $a \in A$ esetén a

$$\sum_{k\in\mathbb{N}} \frac{(D^k f)(0)}{k!} a^k$$

sor abszolút konvergens A-ban.

14.7.4. Állítás. *Legyen A egységelemes komplex Banach-algebra és jelölje $\mathscr{E}(\mathbb{C})$ a $\mathbb{C} \to \mathbb{C}$ egészfüggvények algebráját. Ekkor minden $a \in A$ esetén az*

$$\mathscr{E}(\mathbb{C}) \to A; \quad f \mapsto f_A(a)$$

leképezés olyan egységelem-tartó algebra-morfizmus, amely az $\mathrm{id}_{\mathbb{C}}$ függvényhez az a elemet rendeli. Továbbá, ha $a \in A$ és $P \in \mathbb{C}[X]$, akkor a $P_{\mathbb{C}} \in \mathscr{E}(\mathbb{C})$ polinomiális függvényre $(P_{\mathbb{C}})_A(a) = P_A(a)$.

Bizonyítás. Legyen $a \in A$ rögzített. Az nyilvánvaló, hogy a $\mathscr{E}(\mathbb{C}) \to A$; $f \mapsto f_A(a)$ leképezés $\mathbb{C}$-lineáris, és ha $P \in \mathbb{C}[X]$, akkor $(P_{\mathbb{C}})_A(a) = P_A(a)$. A multiplikativitás bizonyításához legyenek $f, g \in \mathscr{E}(\mathbb{C})$. Ekkor minden $\mathbb{N} \ni k$-ra

$$(D^k(fg))(0) = \sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} (D^j f)(0)(D^{k-j} g)(0),$$

továbbá a $\sum_{k\in\mathbb{N}} \frac{(D^k f)(0)}{k!} a^k$ és $\sum_{k\in\mathbb{N}} \frac{(D^k g)(0)}{k!} a^k$ sorok abszolút konvergensek A-ban, tehát Cauchy-szorzással kapjuk, hogy

$$f_A(a) g_A(a) := \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(D^k f)(0)}{k!} a^k \right) \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(D^k g)(0)}{k!} a^k \right) =$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{k} \frac{(D^j f)(0)}{j!} a^j \frac{(D^{k-j} g)(0)}{(k-j)!} a^{k-j} =$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \quad \sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} (D^j f)(0)(D^{k-j} g)(0) \quad a^k = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(D^k(fg))(0)}{k!} a^k = (fg)_A(a),$$

amit bizonyítani kellett. ■

Különös jelentősége van a komplex exponenciális függvényből származtatható elemeknek, ezért ezekkel részletesebben foglalkozunk.

14.7.5. Állítás. *Legyen A egységelemes komplex Banach-algebra. Ha $a \in A$, akkor*

$$\mathrm{Exp}_A(a) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} a^k.$$

Minden $a, b \in A$ esetén, ha $ab = ba$, akkor

$$\mathrm{Exp}_A(a + b) = \mathrm{Exp}_A(a)\mathrm{Exp}_A(b).$$

Minden $A \ni a$-ra $\mathrm{Exp}_A(a)$ invertálható elem A-ban és

$$\mathrm{Exp}_A(a)^{-1} = \mathrm{Exp}_A(-a).$$

Bizonyítás. Minden $k \in \mathbb{N}$ esetén $D^k Exp = Exp$, ezért $(D^k Exp)(0) = Exp(0) = 1$, amiből következik, hogy

$$\mathrm{Exp}_A(a) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} a^k.$$

Ha $a, b \in A$ és $ab = ba$, akkor minden $\mathbb{N} \ni k$-ra

$$(a+b)^k = \sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} a^j b^{k-j},$$

ami k szerinti teljes indukcióval ugyanúgy bizonyítható, mint amikor a és b egy test elemei voltak. Ezért

$$\mathrm{Exp}_A(a)\mathrm{Exp}_A(b) := \left(\sum_{k=0}^{\infty} a^k\right)\left(\sum_{k=0}^{\infty} b^k\right) = \sum_{k=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{k} \frac{1}{j!}a^j \frac{1}{(k-j)!}b^{k-j} =$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \quad \sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} a^j b^{k-j} \quad = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}(a+b)^k =: \mathrm{Exp}_A(a+b).$$

Ebből az is látható, hogy az $\mathrm{Exp}_A(a)$ és $\mathrm{Exp}_A(b)$ elemek felcserélhetők egymással.

Ha $a \in A$, akkor az imént igazolt egyenlőséget alkalmazva a $b := -a$ választással kapjuk, hogy $\mathrm{Exp}_A(a)\mathrm{Exp}_A(-a) = \mathrm{Exp}_A(a + (-a)) = \mathrm{Exp}_A(0)$, ugyanakkor a definíció alapján világos, hogy $\mathrm{Exp}_A(0) = \mathbf{1}$, ezért – figyelembe véve az $\mathrm{Exp}_A(a)$ és $\mathrm{Exp}_A(-a)$ elemek felcserélhetőségét – kapjuk, hogy $\mathrm{Exp}_A(a) \in \mathbf{G}(A)$ és $\mathrm{Exp}_A(a)^{-1} = \mathrm{Exp}_A(-a)$. ■

14.7.6. Állítás. *Ha A egységelemes komplex Banach-algebra, akkor minden $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ egészfüggvényre és $A \ni a$-ra*

$$f\langle \mathrm{Sp}_A(a)\rangle \subseteq \mathrm{Sp}_A(f_A(a)).$$

Bizonyítás. Minden $k \in \mathbb{N}$ esetén legyen $c_k := \dfrac{(D^k f)(0)}{k!}$, és legyen $z \in \mathbb{C}$ tetszőleges. Ekkor

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k z^k, \quad f_A(a) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k a^k,$$

és itt abszolút konvergens sorok összegei állnak. Világos, hogy

$$f(z)\mathbf{1} - f_A(a) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k(z^k\mathbf{1} - a^k) =$$

$$= (z\mathbf{1} - a)\sum_{k=1}^{\infty} c_k \quad \sum_{j=0}^{k-1} z^j a^{k-1-j} \quad = \sum_{k=1}^{\infty} c_k \quad \sum_{j=0}^{k-1} z^j a^{k-1-j} \quad (z\mathbf{1} - a),$$

ami azt jelenti, hogy a

$$b := \sum_{k=1}^{\infty} c_k \quad \sum_{j=0}^{k-1} z^j a^{k-1-j} \quad \in A$$

elemre $f(z)\mathbf{1}-f_A(a)=(z\mathbf{1}-a)b=b(z\mathbf{1}-a)$. Nyilvánvaló, hogy a b elem jól értelmezett, mert minden $k\in\mathbb{N}^+$ esetén

$$\left\| c_k \sum_{j=0}^{k-1} z^j a^{k-1-j} \right\| \leq |c_k| \sum_{j=0}^{k-1} |z|^j \|a\|^{k-1-j} \leq$$

$$\leq |c_k| \sum_{j=0}^{k-1} \binom{k-1}{j} |z|^j \|a\|^{k-1-j} = |c_k|(|z|+\|a\|)^{k-1},$$

és a $\sum\limits_{k\in\mathbb{N}^+} |c_k|(|z|+\|a\|)^{k-1}$ numerikus sor konvergens, tehát a $b\in A$ elemet összegként definiáló

$$\sum_{k\in\mathbb{N}^+} c_k \sum_{j=0}^{k-1} z^j a^{k-1-j}$$

vektorsor abszolút konvergens az A Banach-térben. Továbbá, a b elem felcserélhető a $z\mathbf{1}-a$ és az $f(z)\mathbf{1}-f_A(a)$ elemekkel, ezért $z\in\mathrm{Sp}_A(a)$ esetén $f(z)\mathbf{1}-f_A(a)$ nem lehet invertálható A-ban, így $f(z)\in\mathrm{Sp}_A(f_A(a))$. ■

14.7.7. Állítás. *Létezik olyan $(c_k)_{k\in\mathbb{N}}$ valós számsorozat, hogy a $\sum\limits_{k\in\mathbb{N}} c_k$ sor abszolút konvergens, és minden A egységelemes Banach-algebrára, és minden $a\in A$ elemre, ha $\|a\|\leq 1$, akkor*

$$\mathbf{1}+a=\left(\sum_{k=0}^{\infty} c_k a^k\right)^2$$

teljesül, tehát A-ban az egységelem 1 sugarú zárt gömbi környezetének minden eleme négyzetelem.

Bizonyítás. Az elemi analízisből ismert, hogy ha tetszőleges $z\in\mathbb{C}$ és $k\in\mathbb{N}$ esetén

$$\binom{z}{k} := \begin{cases} \dfrac{z(z-1)...(z-k+1)}{k!} & ; \text{ha } k>0 \\ 1 & ; \text{ha } k=0, \end{cases}$$

akkor a $\sum\limits_{k\in\mathbb{N}} \binom{z}{k} id_{\mathbb{C}}^k$ binomiális függvénysor $\Re(z)>0$ esetén a $[-1,1]$ intervallumon *normálisan konvergens*, és minden $t\in[-1,1]$ számra

$$(1+t)^z=\sum_{k=0}^{\infty}\binom{z}{k}t^k.$$

Speciálisan, ha $z := 1/2$, és minden $\mathbb{N} \ni k$-ra $c_k := \binom{1/2}{k}$, akkor a $(c_k)_{k\in\mathbb{N}}$ valós számsorozatra teljesül az, hogy a $\sum_{k\in\mathbb{N}} c_k$ sor abszolút konvergens $\mathbb{R}$-ben, és minden $t \in [-1, 1]$ esetén fennáll a

$$\sqrt{1+t} = \sum_{k=0}^{\infty} c_k t^k$$

egyenlőség, és itt a jobb oldalon abszolút konvergens sor összege áll. Ebből az abszolút konvergens sorok Cauchy-szorzatának talajdonságai alapján kapjuk, hogy minden $t \in [-1, 1]$ esetén

$$1 + t = \left(\sqrt{1+t}\right)^2 = \left(\sum_{k=0}^{\infty} c_k t^k\right)\left(\sum_{k=0}^{\infty} c_k t^k\right) = \sum_{k=0}^{\infty}\left(\sum_{j=0}^{k} c_j c_{k-j}\right) t^k,$$

amiből következik, hogy minden $\mathbb{N} \ni k$-ra

$$\sum_{j=0}^{k} c_j c_{k-j} = \begin{cases} 1 & ; \text{ha } k = 0 \text{ vagy } k = 1 \\ 0 & ; \text{ha } k \geq 2. \end{cases}$$

Tehát, ha $a \in A$ és $\|a\| \leq 1$, akkor a $\sum_{k\in\mathbb{N}} c_k a^k$ sor abszolút konvergens A-ban, így képezhető a $b := \sum_{k=0}^{\infty} c_k a^k \in A$ elem, és az általános Cauchy-szorzás tétele alapján

$$b^2 = \left(\sum_{k=0}^{\infty} c_k a^k\right)\left(\sum_{k=0}^{\infty} c_k a^k\right) = \sum_{k=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{k} c_j a^j c_{k-j} a^{k-j} =$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty}\left(\sum_{j=0}^{k} c_j c_{k-j}\right) a^k = \mathbf{1} + a,$$

amivel az állítást igazoltuk. ■

14.8. Szubmultiplikatív normák

Ha A nem nulla dimenziós egységelemes normált algebra, akkor az A normájának *szubmultiplikativitása* miatt $\|\mathbf{1}\| \geq 1$, de itt nem biztos, hogy egyenlőség van. Felmerül a kérdés, hogy megadható-e olyan $\|\cdot\|'$ szubmultiplikatív norma az A algebra felett, amely *ekvivalens* az A algebrán adott normával és $\|\mathbf{1}\|' = 1$. Látni fogjuk, hogy erre a kérdésre pozitív válasz adható.

14.8.1. Lemma. *Legyen A normált algebra és $S \subseteq A$ olyan halmaz, hogy $S \cdot S \subseteq S$ (vagyis S multiplikatív halmaz) és korlátos. Ekkor létezik olyan $\|\cdot\|'$ szubmultiplikatív norma az A algebra felett, amely ekvivalens az A algebrán adott normával, és minden $s \in S$ esetén $\|s\|' \leq 1$.*

Bizonyítás. (I) Először feltesszük, hogy A nem nulla dimenziós, egységelemes és $\mathbf{1} \in S$, Jelölje $\|\cdot\|$ az A algebra feletti eredeti normát, és legyen $C \in \mathbb{R}^+$ olyan szám, hogy minden $s \in S$ esetén $\|s\| \leq C$. Ha $a \in A$, akkora $\|\cdot\|$ norma szubmultiplikativitása miatt minden $s \in S$ esetén $\|sa\| \leq \|s\|\|a\| \leq C\|a\|$, ezért jól értelmezett a

$$\|\cdot\|_S : A \to \mathbb{R}_+; \quad a \mapsto \sup_{s\in S} \|sa\|$$

leképezés, amely nyilvánvalóan félnorma az A vektortér felett. Ha $a \in A$, akkor $\mathbf{1} \in S$ miatt $\|a\| = \|\mathbf{1}a\| \leq \|a\|_S$, tehát $\|\cdot\|_S$ is norma A felett és

$$\|\cdot\| \leq \|\cdot\|_S \leq C\|\cdot\|,$$

vagyis a $\|\cdot\|$ és $\|\cdot\|_S$ normák ekvivalensek. A $\|\cdot\|_S$ norma szubmultiplikatív, mert ha $a, b \in A$ és $s \in S$, akkor az előzőek szerint $\|b\| \leq \|b\|_S$ és a definíció alapján $\|sa\| \leq \|a\|_S$, ezért $\|s(ab)\| = \|(sa)b\| \leq \|sa\|\|b\| \leq \|a\|_S\|b\|_S$, amiből látható, hogy $\|ab\|_S := \sup\limits_{s\in S} \|s(ab)\| \leq \|a\|_S\|b\|_S$.

Jelölje A_S azt a normált algebrát, amelynek algebrája egyenlő A-val és normája megegyezik $\|\cdot\|_S$-sel. A $\|\cdot\|_S$ norma szubmultiplikativitása folytán minden $a \in A$ esetén az $L_a : A \to A;\ b \mapsto ab$ leképezés $\|\cdot\|_S$ szerint folytonos lineáris operátor, és az is nyilvánvaló, hogy $\|L_a\|_{op} \leq \|a\|_S$, ahol $\|L_a\|_{op}$ az L_a operátornormája $\|\cdot\|_S$ szerint, vagyis

$$\|L_a\|_{op} := \sup_{\substack{b\in A \\ \|b\|_S \leq 1}} \|ab\|_S.$$

Könnyen látható, hogy az $A \to \mathscr{L}(A_S);\ a \mapsto L_a$ leképezés algebra-morfizmus az A algebra és az A_S normált tér folytonos lineáris operátorainak algebrája között, továbbá ez a leképezés *injektív* is, mert A egységelemes algebra. Ebből következik, hogy a

$$\|\cdot\|' : A \to \mathbb{R}_+;\ a \mapsto \|L_a\|_{op}$$

leképezés szubmultiplikatív norma az A algebra felett, és erre teljesül az, hogy $\|\cdot\|' \leq \|\cdot\|_S \leq C\|\cdot\|$. Ha $a \in A$, akkor a definíció alapján

$$\|a\|' := \|L_a\|_{op} \geq \left\| a \frac{\mathbf{1}}{\|\mathbf{1}\|_S} \right\|_S = \frac{\|a\|_S}{\|\mathbf{1}\|_S} \geq \frac{\|a\|}{\|\mathbf{1}\|_S},$$

tehát $\dfrac{1}{\|\mathbf{1}\|_S} \|\cdot\| \leq \|\cdot\|'$. Ez azt jelenti, hogy $\|\cdot\|'$ olyan szubmultiplikatív norma az A algebra felett, amely ekvivalens az eredeti $\|\cdot\|$-val.

Legyen $s \in S$ rögzítve. Ha $b \in A$ tetszőleges olyan elem, hogy $\|b\|_S \leq 1$, akkor

$$\|sb\|_S := \sup_{s' \in S} \|s'(sb)\| \leq \sup_{s'' \in S} \|s''b\| =: \|b\|_S \leq 1,$$

ahol az első egyenlőtlenségnél felhasználtuk az $S \cdot S \subseteq S$ tartalmazást. Ebből következik, hogy

$$\|s\|' := \|L_s\|_{op} := \sup_{\substack{b \in A \\ \|b\|_S \leq 1}} \|sb\|_S \leq 1,$$

tehát $\| \cdot \|'$ olyan norma, amelynek a létezését állítottuk.

(II) Áttérünk az általános esetre, tehát A tetszőleges normált algebra és $S \subseteq A$ tetszőleges korlátos multiplikatív halmaz (akár üres is lehet). Jelölje $\| \cdot \|$ az A normáját és $\| \cdot \|^{\sim}$ az A standard egyégelemesítés normáját, vagyis minden $(\lambda, a) \in A$ esetén $\|(\lambda, a)\|^{\sim} := |\lambda| + \|a\|$. Legyen $S := (\{0\} \times S) \cup \{\widetilde{\mathbf{1}}\}$, ahol $\widetilde{\mathbf{1}}$ az A egységeleme, azaz $\widetilde{\mathbf{1}} := (1, 0)$. Ekkor S olyan korlátos multiplikatív halmaz A-ban, amelyre $\widetilde{\mathbf{1}} \in S$, tehát az (I) eredményét alkalmazva kapjuk olyan A feletti p szubmultiplikatív norma létezését, amely ekvivalens a $\| \cdot \|^{\sim}$ normával, és minden $\widetilde{s} \in S$ esetén $p(\widetilde{s}) \leq 1$. A $j : A \to A;\ a \mapsto (0, a)$ leképezés injektív algebra-morfizmus, ezért a $\| \cdot \|' := p \circ j$ leképezés szubmultiplikatív norma az A algebra felett. Ha $C, C' \in \mathbb{R}^+$ olyan számok, hogy $C\| \cdot \|^{\sim} \leq p \leq C'\| \cdot \|^{\sim}$, akkor nyilvánvaló, hogy $C\| \cdot \| \leq \| \cdot \|' \leq C'\| \cdot \|$, mivel $\| \cdot \|^{\sim} \circ j = \| \cdot \|$ és $p \circ j = \| \cdot \|'$. Tehát az A feletti $\| \cdot \|$ és $\| \cdot \|'$ normák ekvivalensek. Ha $s \in S$, akkor $(0, s) \in S$, ezért $1 \geq p(0, s) =: \|s\|'$, így $\| \cdot \|'$ olyan norma, amelynek a létezését állítottuk. ■

Most könnyen válaszolni tudunk a lemma előtt feltett kérdésre.

14.8.2. Állítás. *Ha A nem nulla dimenziós egységelemes normált algebra, akkor létezik olyan $\| \cdot \|'$ szubmultiplikatív norma az A algebra felett, amely ekvivalens az A algebrán adott normával és $\|\mathbf{1}\|' = 1$.*

Bizonyítás. Elég alkalmazni az előző lemmát az $S := \{\mathbf{1}\}$ halmazra. ■

A továbbiakban többször felhasználjuk azt, hogy ha A normált algebra, $a \in A$ és $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$, akkor

$$S := \left\{ \frac{a^n}{(\rho(a) + \varepsilon)^n} \,\middle|\, n \in \mathbb{N}^+ \right\}$$

halmaz *korlátos* A-ban. Valóban, a spektrálsugár definíciója szerint van olyan $N \in \mathbb{N}^+$, hogy minden $n \in \mathbb{N}$ esetén, ha $n \geq N$, akkor $\|a^n\|^{1/n} < \rho(a) + \varepsilon$, vagyis $\left\| \frac{a^n}{(\rho(a) + \varepsilon)^n} \right\| < 1$. Tehát S előáll egy véges halmaz és a 0 centrumú nyílt egységgömb egy részhalmazának uniójaként, ezért korlátos.

14.8.3. Állítás. *Legyen A normált algebra, és jelölje $\mathscr{N}$ az A algebrán adott normával ekvivalens szubmultiplikatív normák halmazát. Ekkor minden $a \in A$ esetén*

$$\rho(a) = \inf_{\|\cdot\|' \in \mathscr{N}} \|a\|'.$$

Bizonyítás. Jelölje $\|\cdot\|$ az A algebrán adott (eredeti) normát. Legyen $\|\cdot\|' \in \mathscr{N}$ és vegyünk olyan $C_-, C_+ \in \mathbb{R}^+$ számokat, hogy $C_-\|\cdot\| \le \|\cdot\|' \le C_+\|\cdot\|$. Ekkor minden $n \in \mathbb{N}^+$ esetén

$$C_-^{1/n}\|a^n\|^{1/n} \le (\|a^n\|')^{1/n} \le C_+^{1/n}\|a^n\|^{1/n},$$

amiből következik, hogy $\rho(a) = \lim\limits_{n\to\infty} (\|a^n\|')^{1/n}$. A $\|\cdot\|'$ norma szubmultiplikativitása miatt minden $a \in A$ és $n \in \mathbb{N}^+$ esetén $(\|a^n\|')^{1/n} \le \|a\|'$, ezért $\rho(a) \le \|a\|'$.

Legyen most $a \in A$ rögzítve és $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ tetszőleges. Olyan $\|\cdot\|' \in \mathscr{N}$ normát keresünk, amelyre $\|a\|' \le \rho(a) + \varepsilon$. Ehhez tekintsük az

$$S := \left\{ \frac{a^n}{(\rho(a)+\varepsilon)^n} \,\middle|\, n \in \mathbb{N}^+ \right\}$$

halmazt, amely nyilvánvalóan multiplikatív és korlátos is. A 14.8.1. lemma alkalmazásával vehetünk olyan $\|\cdot\|' \in \mathscr{N}$ normát, hogy minden $s \in S$ esetén $\|s\|' \le 1$. Speciálisan, $\left\|\dfrac{a}{\rho(a)+\varepsilon}\right\|' \le 1$ is teljesül, vagyis $\|a\|' \le \rho(a) + \varepsilon$. ■

Az előző állítás alkalmazásával könnyen adhatunk új bizonyítást a 14.3.3. c) és d) kijelentéseire. Figyeljük meg, hogy itt a d) bizonyítása mennyivel rövidebb lesz!

14.8.4. Következmény. *Ha A normált algebra és $a, b \in A$ olyan elemek, hogy $ab = ba$, akkor*

$$\rho(ab) \le \rho(a)\rho(b), \qquad \rho(a+b) \le \rho(a) + \rho(b).$$

Bizonyítás. Legyen $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ rögzített, és vezessük be a következő halmazokat:

$$S_a := \left\{ \frac{a^n}{(\rho(a)+\varepsilon)^n} \,\middle|\, n \in \mathbb{N}^+ \right\},$$

$$S_b := \left\{ \frac{b^n}{(\rho(b)+\varepsilon)^n} \,\middle|\, n \in \mathbb{N}^+ \right\},$$

$$S_{a,b} := \left\{ \frac{a^m}{(\rho(a)+\varepsilon)^m} \frac{b^n}{(\rho(b)+\varepsilon)^n} \,\middle|\, (m,n) \in \mathbb{N}^+ \times \mathbb{N}^+ \right\}.$$

(Vigyázzunk arra, hogy itt mindenütt $\mathbb{N}^+$ áll $\mathbb{N}$ helyett, mert lehetséges, hogy A nem egységelemes!) Az S_a és S_b halmazok korlátosak, így az A normájának szubmultiplikativitása miatt $S_{a,b}$ is korlátos. Tehát $S := S_a \cup S_b \cup S_{a,b}$ korlátos részhalmaza A-nak és nyilvánvalóan multiplikatív. Az előző állítás alapján vehetünk olyan A feletti $\|\cdot\|'$ szubmultiplikatív normát, amely ekvivalens az A eredeti normájával és minden $s \in S$ esetén $\|s\|' \leq 1$. Ekkor fennállnak a

$$\|a\|' \leq \rho(a) + \varepsilon, \quad \|b\|' \leq \rho(b) + \varepsilon, \quad \|ab\|' \leq (\rho(a) + \varepsilon)(\rho(b) + \varepsilon)$$

egyenlőtlenségek, amiből a 14.8.3. állítás ismételt alkalmazásával következik, hogy

$$\rho(ab) \leq \|ab\|' \leq (\rho(a) + \varepsilon)(\rho(b) + \varepsilon),$$

$$\rho(a + b) \leq \|a + b\|' \leq \|a\|' + \|b\|' \leq \rho(a) + \varepsilon + \rho(b) + \varepsilon.$$

Ezekből ε-nal 0-hoz tartva kapjuk a bizonyítandó egyenlőtlenségeket. ■

Nem nulla dimenziós egységelemes normált algebra esetén az előző állítás valamelyest élesíthető a közetkező módon.

14.8.5. Állítás. *Legyen A nem nulla dimenziós egységelemes normált algebra, és jelölje $\mathscr{N}_1$ azon A feletti szubmultiplikatív normák halmazát, amelyek ekvivalensek az A-n adott normával, és amelyek szerint az egységelem normája 1. Ekkor minden $a \in A$ esetén*

$$\rho(a) = \inf_{\|\cdot\|' \in \mathscr{N}_1} \|a\|'.$$

Bizonyítás. Jelölje $\mathscr{N}$ az A algebrán adott normával ekvivalens szubmultiplikatív normák halmazát. Ekkor $\mathscr{N}_1 \subseteq \mathscr{N}$, ezért az előző állítás alapján minden $a \in A$ esetén

$$\rho(a) = \inf_{\|\cdot\|' \in \mathscr{N}} \|a\|' \leq \inf_{\|\cdot\|' \in \mathscr{N}_1} \|a\|'.$$

Ha $a \in A$ és $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$, akkor az

$$S := \left\{ \frac{a^n}{(\rho(a) + \varepsilon)^n} \,\middle|\, n \in \mathbb{N} \right\}$$

halmaz multiplikatív és korlátos, ezért közvetlenül a 14.8.1. lemmát alkalmazva kapjuk olyan $\|\cdot\|' \in \mathscr{N}$ létezését, amelyre minden $s \in S$ esetén $\|s\|' \leq 1$. Mivel $\mathbf{1} \in S$, így $\|\mathbf{1}\|' \leq 1$. Ezért $\|\mathbf{1}\|' = 1$, vagyis $\|\cdot\|' \in \mathscr{N}_1$ és $\|a\|' \leq \rho(a) + \varepsilon$. Ebből következik, hogy $\inf\limits_{\|\cdot\|' \in \mathscr{N}_1} \|a\|' \leq \rho(a)$. ■

14.8.6. Állítás. (Ford-lemma) *Legyen A Banach-algebra és $a \in A$ olyan, hogy $\rho(a) < 1$. Ekkor létezik az*

$$x^2 - 2x + a = 0$$

egyenletnek olyan megoldása A-ban, hogy $\rho(x) < 1$ és $x \in \overline{\operatorname{span}(\{a^n | n \in \mathbb{N}\})}$, továbbá ennek az egyenletnek legfeljebb egy olyan megoldása van A-ban, amelyre $\rho(x) \leq 1$.

Bizonyítás. (*Egzisztencia.*) Legyen A Banach-algebra és $a \in A$ olyan, hogy $\rho(a) < 1$. Az 14.8.3. állítás alapján vehetünk olyan $\|\cdot\|'$ szubmultiplikatív normát az A algebra felett, amely ekvivalens az A eredeti normájával és $\|a\|' < 1$. Ekvivalens normák egyszerre Banach-normák vagy sem, ezért az A algebra a $\|\cdot\|'$ normával ellátva Banach-algebra. Jelölje A_* az $\{a^n | n \in \mathbb{N}^+\}$ halmaz által generált zárt lineáris alteret A-ban és $\|\cdot\|_*$ a $\|\cdot\|'$ norma leszűkítését A_*-ra. Ekkor A_* a $\|\cdot\|_*$ normával ellátva kommutatív Banach-algebra, és $a \in A_*$, valamint $\|a\|_* < 1$. Vezessük be az

$$f : A_* \to A_*; \quad x \mapsto \frac{1}{2}(x^2 + a)$$

leképezést, amelynek fixpontjai éppen azok az $x \in A_*$ elemek, amelyekre $x^2 - 2x + a = 0$.

Ha $r \in \mathbb{R}^+$, akkor $x, y \in A_*$ és $\|x\|_*, \|y\|_* \leq r$ esetén, az A_* algebra kommutativitása folytán írható, hogy

$$\|f(x) - f(y)\|_* = \frac{1}{2}\|x^2 - y^2\|_* = \frac{1}{2}\|(x - y)(x + y)\|_* \leq$$

$$\leq \frac{1}{2}(\|x\|_* + \|y\|_*)\|x - y\|_* \leq r\|x - y\|_*.$$

Ha $r \in \mathbb{R}$ olyan, hogy $\|a\|_* \leq r \leq 1$, akkor $x \in A_*$ és $\|x\|_* \leq r$ esetén

$$\|f(x)\|_* \leq \frac{1}{2}(\|x\|_*^2 + \|a\|_*) \leq \frac{1}{2}(r^2 + r) \leq r,$$

tehát az f függvény a 0 centrumú, r sugarú zárt gömböt önmagába képezi le.
Tehát, ha $r \in \mathbb{R}$ olyan szám, hogy $\|a\|_* \leq r < 1$, akkor az f függvény a 0 centrumú, r sugarú zárt gömböt önmagába képezi le és ezen a gömbön r Lipschitz-együtthatójú kontrakció, így Banach fixponttétele szerint létezik egyetlen olyan $x \in A_*$, hogy $\|x\|_* \leq r$ és $f(x) = x$, vagyis $x^2 - 2x + a = 0$. Ugyanakkor, az A normájának A_*-ra vett leszűkítése ekvivalens $\|\cdot\|_*$-gal, ezért $\rho(x) = \rho_{A_*}(x) \leq \|x\|_* \leq r < 1$, tehát $\rho(x) < 1$.

(*Unicitás.*) Legyenek $x \in A_*$ egy olyan rögzített elem, amelyre $x^2 - 2x + a = 0$ és $\rho(x) < 1$. (Az előbb igazoltuk ilyennek a létezését.) Vegyünk egy olyan $y \in A$ elemet, hogy $y^2 - 2y + a = 0$ és $\rho(y) \leq 1$. Meg fogjuk mutatni, hogy $y = x$.

Először megjegyezzük, hogy $y \in C(\{a\})$, hiszen $ya = 2y^2 - y^3 = ay$. Ebből következik, hogy $y \in C(\{a^n | n \in \mathbb{N}^+\}) = C(\mathrm{span}(\{a^n | n \in \mathbb{N}^+\})) = C(A_*)$, vagyis y kommutál az A_* minden elemével, ezért $xy = yx$ is igaz.

Képezzük az $u := x - y$ és $v := \frac{1}{2}(x + y)$ elemeket. Ekkor $vu = \frac{1}{2}(x^2 - y^2) = \frac{1}{2}((2x - a) - (2y - a)) = x - y =: u$, továbbá, $\rho(v) = \frac{1}{2}\rho(x + y) \leq \frac{1}{2}(\rho(x) + \rho(y)) < 1$ teljesül (14.3.3. vagy 14.8.4.), ezért a $\sum\limits_{k \in \mathbb{N}^+} v^k$ sor a Cauchy-féle gyökkritérium alapján abszolút konvergens

A-ban, így képezhető a $w := \sum_{k=1}^{\infty} v^k$ elem. Nyilvánvaló, hogy $wv = \sum_{k=2}^{\infty} v^k =: w - v$. Most a szorzás asszociativitását felhasználva, kétféle módon kiszámítjuk a wvu elemet. Egyfelől kapjuk, hogy $wvu = (wv)u = (w - v)u = wu - vu = wu - u$. Másfelől, $wvu = w(vu) = wu$, amiből következik, hogy $wu - u = wu$, vagyis $x - y =: u = 0$. ■

Könnyen látható, hogy ha A egységelemes Banach-algebra, akkor a Ford-lemmából következik, hogy A-ban az egységelem 1 sugarú *nyílt* gömbi környezetének minden eleme négyzetelem, mert ha $a \in A$ és $\|\mathbf{1} - a\| < 1$, akkor $\rho(\mathbf{1} - a) \leq \|\mathbf{1} - a\| < 1$, tehát a Ford-lemma alapján az $\mathbf{1} - a$ elemhez létezik $x \in A$, amelyre $\mathbf{1} - a = 2x - x^2$, tehát $a = \mathbf{1} - 2x + x^2 = (\mathbf{1} - x)^2$.)

15. fejezet

Banach-algebra Gelfand-reprezentációja

15.1. Banach algebra karaktertere – Gelfand-topológia

15.1.1. Állítás. *Ha A Banach-algebra és $\chi \in \mathrm{X}'(A)$, akkor minden $a \in A$ esetén*

$$|\chi(a)| \leq \rho(a) \leq \|a\|,$$

tehát az A minden karaktere 1-nél kisebb-egyenlő normájú folytonos lineáris funkcionál.

Bizonyítás. Ha $\chi \in \mathrm{X}'(A)$ és $a \in A$, akkor $\chi(a) \in \mathrm{Sp}'_A(a) \subseteq \overline{B}_{\rho(a)}(0; \mathbb{K})$, következésképpen $|\chi(a)| \leq \rho(a) \leq \|a\|$. ■

Az előző állításban lényeges az A normált algebra teljessége. Ennek bizonyításához a $\mathbb{K}[X]$ polinomalgebra felett tekintsük az

$$\mathbb{K}[X] \to \mathbb{R}_+; \quad P \mapsto \|P\| := \sup_{t \in [0,1]} |P_{\mathbb{K}}(t)|$$

leképezést, ami szubmultiplikatív norma a $\mathbb{K}[X]$ algebra felett. Minden $z \in \mathbb{K}$ esetén legyen

$$\chi_z : \mathbb{K}[X] \to \mathbb{K}; \quad P \mapsto P_{\mathbb{K}}(z).$$

Könnyen látható, hogy ha $z \in [0,1]$, akkor χ_z a $\|\cdot\|$ szerint folytonos karaktere $\mathbb{K}[X]$-nek, de $z \in \mathbb{K} \setminus [0,1]$ esetén van olyan $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sorozat $\mathbb{K}[X]$-ben, hogy $\lim\limits_{n\to\infty} \|P_n\| = 0$, de a $(\chi_z(P_n))_{n\in\mathbb{N}}$ számsorozat nem korlátos, így χ_z nem folytonos a $\|\cdot\|$ norma szerint.

15.1.2. Tétel. *Ha A Banach-algebra, akkor $\mathrm{X}'(A)$ kompakt és $\mathrm{X}(A)$ lokálisan kompakt részhalmaza A'-nek a $\sigma(A', A)$ topológia szerint. Ha A egységelemes Banach-algebra, akkor $\mathrm{X}(A)$ kompakt a $\sigma(A', A)$ topológia szerint.*

Bizonyítás. Az $\mathrm{X}'(A)$ halmaz részhalmaza a funkcionálnorma szerinti zárt egységgömbnek A'-ben, ami a Banach–Alaoglu-tétel alapján $\sigma(A',A)$-kompakt. Ezért az $\mathrm{X}'(A)$ halmaz $\sigma(A',A)$-kompaktsága ekvivalens a $\sigma(A',A)$-zártságával. Ez utóbbi viszont nyilvánvaló, hiszen ha $(\chi_i)_{i\in I}$ tetszőleges olyan általánosított sorozat $\mathrm{X}'(A)$-ban, amely a $\sigma(A',A)$ topológia szerint (vagyis pontonként) konvergál a $\chi : A \to \mathbb{K}$ függvényhez, akkor χ lineáris funkcionál A felett, és minden $a,b \in A$ esetén a $\mathbb{K}$-beli szorzás folytonossága miatt

$$\chi(ab) := \lim_{i,I} \chi_i(ab) = \lim_{i,I} (\chi_i(a)\chi_i(b)) = \left(\lim_{i,I} \chi_i(a)\right)\left(\lim_{i,I} \chi_i(b)\right) =: \chi(a)\chi(b)$$

tehát $\chi \in \mathrm{X}'(A)$. Ugyanakkor $\mathrm{X}(A) = \mathrm{X}'(A) \cap (A' \setminus \{0\})$, tehát $\mathrm{X}(A)$ előáll A'-ben egy $\sigma(A',A)$-kompakt és egy $\sigma(A',A)$-nyílt halmaz metszeteként, ezért *lokálisan kompakt* a $\sigma(A',A)$ topológia szerint.

Ha A egységelemes, akkor $\chi \in \mathrm{X}'(A)$ esetén $\chi \in \mathrm{X}(A)$ azzal ekvivalens, hogy $\chi(\mathbf{1}) = 1$, tehát $\mathrm{X}(A) = \mathrm{X}'(A) \cap \{u \in A' | u(\mathbf{1}) = 1\}$. Világos, hogy az $\{u \in A' | u(\mathbf{1}) = 1\}$ halmaz $\sigma(A',A)$-zárt, és az előzőek szerint az $\mathrm{X}'(A)$ halmaz $\sigma(A',A)$-kompakt, ezért $\mathrm{X}(A)$ is $\sigma(A',A)$-kompakt. ■

Megjegyezzük, hogy ha A nem egységelemes Banach-algebra, akkor még $\mathrm{X}(A)$ lehet kompakt a $\sigma(A',A)$ topológia szerint. Ez jól látható a nulla-szorzású Banach-algebrák esetén.

15.1.3. Definíció. *Ha A Banach-algebra, akkor az $\mathrm{X}(A)$ és $\mathrm{X}'(A)$ feletti* **Gelfand-topológiának** *nevezzük a $\sigma(A',A)|\mathrm{X}(A)$ és $\sigma(A',A)|\mathrm{X}'(A)$ altér-topológiát.*

Ha A Banach-algebra, akkor a $\sigma(A',A)$ topológia definíciója szerint, minden $\chi \in \mathrm{X}(A)$ esetén a χ pontnak Gelfand-topológia szerinti környezetbázisát alkotják a $\mathbf{W}_{H,\varepsilon}(\chi)$ alakú halmazok, ahol $H \subseteq A$ véges halmaz, $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ és

$$\mathbf{W}_{H,\varepsilon}(\chi) := \{\chi' \in \mathrm{X}(A) | (\forall a \in H) : |\chi'(a) - \chi(a)| < \varepsilon\}.$$

15.2. Banach-algebra Gelfand-reprezentációja

15.2.1. Állítás. *Ha A Banach-algebra $\mathbb{K}$ felett, akkor minden $a \in A$ esetén $\mathscr{G}_A(a) \in \overline{\mathscr{K}}(\mathrm{X}(A);\mathbb{K})$, vagyis a $\mathscr{G}_A(a) : \mathrm{X}(A) \to \mathbb{K}$ függvény folytonos és végtelenben eltűnő az $\mathrm{X}(A)$ feletti Gelfand-topológia szerint, továbbá $\{0\} \cup \mathrm{Im}(\mathscr{G}_A(a)) \subseteq \mathrm{Sp}'_A(a)$, valamint $\|\mathscr{G}_A(a)\| \leq \rho(a)$.*

Bizonyítás. Legyen $a \in A$ rögzített, és tekintsük a

$$\mathscr{G}'_A(a) : \mathrm{X}'(A) \to \mathbb{K}; \quad \chi \mapsto \chi(a)$$

leképezést. Ez a függvény nyilvánvalóan folytonos az $X'(A)$ feletti Gelfand-topológia szerint, valamint $\mathscr{G}'_A(a)(0) = 0$, és a Gelfand-reprezentáció értelmezése alapján $\mathscr{G}_A(a) := \mathscr{G}'_A(a)|_{X(A)}$. Ugyanakkor $X(A) = X'(A) \setminus \{0\}$, ezért a $\mathscr{G}_A(a) : X(A) \to \mathbb{K}$ függvény folytonos és végtelenben eltűnő az $X(A)$ feletti Gelfand-topológia szerint.

Továbbá, $0 \in \mathrm{Sp}'_A(a)$ és $\mathrm{Im}(\mathscr{G}_A(a)) = \{\chi(a)|\chi \in X(A)\} \subseteq \mathrm{Sp}'_A(a)$, következésképpen $\{0\} \cup \mathrm{Im}(\mathscr{G}_A(a)) \subseteq \mathrm{Sp}'_A(a)$. Ebből következik, hogy $\|\mathscr{G}_A(a)\| = \sup_{\chi \in X(A)} |\chi(a)| \leq \rho(a)$, mert $\mathrm{Sp}'_A(a) \subseteq \overline{B}_{\rho(a)}(0;\mathbb{K})$. ■

15.2.2. Állítás. *Ha A kommutatív komplex Banach-algebra, akkor minden $a \in A$ esetén $\{0\} \cup \mathrm{Im}(\mathscr{G}_A(a)) = \mathrm{Sp}'_A(a)$, valamint $\|\mathscr{G}_A(a)\| = \rho(a)$. Ha A egységelemes kommutatív komplex Banach-algebra, akkor minden $a \in A$ esetén $\mathrm{Im}(\mathscr{G}_A(a)) = \mathrm{Sp}_A(a)$.*

Bizonyítás. Először tegyük fel, hogy A egységelemes kommutatív komplex Banach-algebra és $a \in A$. Legyen $z \in \mathrm{Sp}_A(a)$ rögzített; ekkor $z\mathbf{1} - a$ nem invertálható A-ban és $A.(z\mathbf{1} - a)$ olyan valódi ideál A-ban, amelynek $z\mathbf{1} - a$ eleme. Létezik olyan $\mathfrak{m}$ maximális ideál A-ban, amelyre $A.(z\mathbf{1} - a) \subseteq \mathfrak{m}$, tehát $z\mathbf{1} - a \in \mathfrak{m}$. Ha $\mathfrak{m}$ ilyen, akkor $\mathfrak{m}$ 1-kodimenziós, tehát van (egyetlen) olyan $\chi \in X(A)$, amelyre $\mathfrak{m} = \mathrm{Ker}(\chi)$. Ekkor $\chi(z\mathbf{1} - a) = 0$, vagyis $z = \chi(a) = \mathscr{G}_A(a)(\chi) \in \mathrm{Im}(\mathscr{G}_A(a))$. Ez azt jelenti, hogy $\mathrm{Im}(\mathscr{G}_A(a)) = \mathrm{Sp}_A(a)$. A spektrálsugár minimalitási tulajdonsága alapján ebből következik, hogy
$$\|\mathscr{G}_A(a)\| = \sup_{\chi \in X(A)} |\chi(a)| = \sup_{z \in \mathrm{Sp}_A(a)} |z| = \rho(a).$$

Most tegyük fel, hogy A tetszőleges kommutatív komplex Banach-algebra. Ha $j : A \to \tilde{A}$ a kanonikus leképezés, akkor $\tilde{\chi} \in X(\tilde{A})$ esetén $\tilde{\chi} \circ j \in X'(A)$. Megfordítva, ha $\chi \in X'(A)$, akkor $\chi : A \to \mathbb{K}$ algebra-morfizmus, ezért egyértelműen létezik olyan $\tilde{\chi} : \tilde{A} \to \mathbb{K}$ egységelem-tartó algebra-morfizmus, amely eleget tesz a $\tilde{\chi} \circ j = \chi$ egyenlőségnek; ekkor $\tilde{\chi} \in X(\tilde{A})$. Ebből következik, hogy $a \in A$ esetén

$$\mathrm{Sp}'_A(a) := \mathrm{Sp}_{\tilde{A}}((0,a)) = \mathrm{Im}(\mathscr{G}_{\tilde{A}}(0,a)) = \{\tilde{\chi}(0,a)|\tilde{\chi} \in X(\tilde{A})\} =$$

$$= \{(\tilde{\chi} \circ j)(a)|\tilde{\chi} \in X(\tilde{A})\} = \{\chi(a)|\chi \in X'(A)\} =$$

$$= \{0\} \cup \{\chi(a)|\chi \in X(A)\} = \{0\} \cup \mathrm{Im}(\mathscr{G}_A(a)).$$

Ebből következik, hogy

$$\|\mathscr{G}_A(a)\| = \sup_{\chi \in X(A)} |\chi(a)| = \sup_{z \in \mathrm{Sp}'_A(a)} |z| = \sup_{z \in \mathrm{Sp}_{\tilde{A}}(0,a)} |z| = \rho(0,a) = \rho(a). \blacksquare$$

15.2.3. Következmény. *Legyen A kommutatív komplex Banach-algebra. Ekkor a $\mathscr{G}_A$ Gelfand-reprezentáció pontosan akkor izometria, ha minden $a \in A$ esetén $\|a^2\| = \|a\|^2$.*

Bizonyítás. Ha $\mathscr{G}_A$ izometria, akkor $a \in A$ esetén

$$\|a^2\| = \|\mathscr{G}_A(a^2)\| = \|\left(\mathscr{G}_A(a)\right)^2\| = \|\mathscr{G}_A(a)\|^2 = \|a\|^2,$$

ahol felhasználtuk azt a nyilvánvaló tényt, hogy minden $f : T \to \mathbb{K}$ korlátos függvényre $\|f^2\| = \|f\|^2$.

Megfordítva, ha minden $a \in A$ esetén $\|a^2\| = \|a\|^2$, akkor teljes indukcióval könnyen igazolható, hogy minden $\mathbb{N} \ni n$-re $\|a^{2^n}\| = \|a\|^{2^n}$. Ebből következik, hogy $a \in A$ esetén

$$\rho(a) = \lim_{n\to\infty} \|a^n\|^{1/n} = \lim_{n\to\infty} \|a^{2^n}\|^{2^{-n}} = \|a\|,$$

ezért az előző állítás alapján fennállnak a

$$\|\mathscr{G}_A(a)\|^2 = \|\mathscr{G}_A(a^2)\| = \rho(a^2) = \rho(a)^2 = \|a\|^2$$

egyenlőségek, tehát $\mathscr{G}_A$ izometria. ■

15.2.4. Következmény. *Legyen A kommutatív komplex Banach-algebra, és értelmezzük a következő halmazokat*

– $\mathfrak{n}_1 := \mathrm{Ker}\,(\mathscr{G}_A)$,

– $\mathfrak{n}_2 := \{a \in A | \rho(a) = 0\}$,

– $\mathfrak{n}_3 := \{a \in A | \mathrm{Sp}'_A(a) = \{0\}\}$,

– $\mathfrak{n}_4 := \bigcap\limits_{\chi \in \mathrm{X}'(A)} \mathrm{Ker}(\chi)$,

– $\mathfrak{n}_5$ *az A reguláris maximális ideáljainak metszete, ha létezik A-nak reguláris maximális ideálja, egyébként* $\mathfrak{n}_5 := A$.

Ezek a halmazok ideálok A-ban és fennáll az $\mathfrak{n}_1 = \mathfrak{n}_2 = \mathfrak{n}_3 = \mathfrak{n}_4 = \mathfrak{n}_5$ egyenlőség.

Bizonyítás. Kommutatív komplex Banach-algebrában minden a elemre $\|\mathscr{G}_A(a)\| = \rho(a)$, ezért $\mathfrak{n}_1 = \mathfrak{n}_2$. Komplex Banach-algebrában a spektrálsugár minimalitási tulajdonsága miatt $\mathfrak{n}_2 = \mathfrak{n}_3$. Kommutatív komplex Banach-algebrában a nem nulla karakterek magjai (vagyis az 1-kodimenziós reguláris ideálok) megegyeznek a reguláris maximális ideálokkal, ezért $\mathfrak{n}_4 = \mathfrak{n}_5$. A Gelfand-reprezentáció definíciója alapján $\mathfrak{n}_1 = \mathfrak{n}_4$ bármely algebrára igaz. Ezért $\mathfrak{n}_1 = \mathfrak{n}_2 = \mathfrak{n}_3 = \mathfrak{n}_4 = \mathfrak{n}_5$ teljesül, és természetesen $\mathfrak{n}_1$ ideál A-ban. ■

Megjegyezzük, hogy tetszőleges A algebra esetén az $\mathfrak{n}_5$ halmazt az A *radikáljának* nevezzük, és azt mondjuk, hogy A *radikálmentes*, ha az A radikálja $\{0\}$. Tehát kommutatív komplex Banach-algebra pontosan akkor radikálmentes, ha a Gelfand-reprezentációja injektív.

Korábban láttuk, hogy Banach-algebra minden karaktere folytonos; most ezt az állítást általánosítjuk.

15.2.5. Állítás. *Legyenek A, B Banach-algebrák, és tegyük fel, hogy a B Gelfand-reprezentációja injektív. Ekkor minden $A \to B$ algebra-morfizmus folytonos.*

Bizonyítás. Legyen $\pi : A \to B$ algebra morfizmus. Ekkor π lineáris operátor az A és B Banach-terek között, ezért a zártgráf-tétel a π folytonosságának bizonyításához elég azt megmutatni, hogy a π gráfja zárt.

Legyen $(a,b) \in A \times B$ és $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ olyan A-ban haladó sorozat, amelyre $(a,b) = \lim\limits_{n\to\infty}(a_n, \pi(a_n))$ teljesül az $A \times B$ normált szorzattérben, vagyis $a = \lim\limits_{n\to\infty} a_n$ az A-ban és $b = \lim\limits_{n\to\infty} \pi(a_n)$ a B-ben. Azt kell igazolni, hogy (a,b) eleme a π gráfjának, vagyis $\pi(a) = b$. A $\mathscr{G}_B$ Gelfand-reprezentáció injektivitása folytán ez az egyenlőség azzal ekvivalens, hogy $\mathscr{G}_B(\pi(a)) = \mathscr{G}_B(b)$, ami a Gelfand-reprezentáció értelmezése alapján azt jelenti, hogy minden $\chi \in \mathrm{X}(B)$ esetén $\chi(\pi(a)) = \chi(b)$. Ha $\chi \in \mathrm{X}(B)$, akkor χ folytonos, mert B Banach-algebra, ezért az átviteli elv alapján $\chi(b) = \lim\limits_{n\to\infty} \chi(\pi(a_n))$. Ugyanakkor $\chi \in \mathrm{X}(B)$ esetén a $\chi \circ \pi : A \to \mathbb{K}$ függvény algebra-morfizmus, vagyis $\chi \circ \pi \in \mathrm{X}'(A)$, ezért $\chi \circ \pi$ folytonos, hiszen A is Banach-algebra, így ismét az átviteli elv alapján $(\chi \circ \pi)(a) = \lim\limits_{n\to\infty}(\chi \circ \pi)(a_n)$. Ez azt jelenti, hogy minden $\chi \in \mathrm{X}(B)$ esetén $\chi(b) = \chi(\pi(a))$. ■

15.2.6. Következmény. *Ha A komplex Banach-algebra és B radikálmentes komplex Banach-algebra, akkor minden $A \to B$ algebra-morfizmus folytonos.*

15.3. A diszk-algebra karaktertere és Gelfand-reprezentációja

Emlékeztetünk arra, hogy ha $\mathbb{D} := \{z \in \mathbb{C} | |z| \leq 1\}$, és a $\mathbb{D}$ halmazt ellátjuk a $\mathbb{C}$ feletti euklidészi topológia leszűkítésével, akkor *diszk-algebrának* nevezzük azon $\mathbb{D} \to \mathbb{C}$ folytonos függvények algebráját, amelyek $\mathring{\mathbb{D}}$-re vett leszűkítései holomorfak. A diszk-algebrát mindig a sup-normával látjuk el, tehát a diszk-algebra egy normált függvényalgebra.

15.3.1. Állítás. *Legyen A a diszk-algebra.*

a) *Az A egységelemes kommutatív normált algebra teljes, vagyis Banach-algebra.*

b) *A $\mathbb{C} \to \mathbb{C}$ polinomális függvények $\mathbb{D}$-re vett leszűkítéseinek halmaza sűrű részalgebra A-ban.*

c) *Minden $z \in \mathbb{D}$ esetén a $\chi_z : A \to \mathbb{C};\ a \mapsto a(z)$ függvény nem nulla karaktere A-nak, és a $\sigma : \mathbb{D} \to \mathrm{X}(A);\ z \mapsto \chi_z$ leképezés homeomorfizmus.*

d) *A $\sigma^{\#} : \mathscr{C}(\mathrm{X}(A); \mathbb{C}) \to \mathscr{C}(\mathbb{D}; \mathbb{C});\ \varphi \mapsto \varphi \circ \sigma$ leképezés izometrikus izomorfizmus a* *sup-normával ellátott* $\mathscr{C}(\mathrm{X}(A);\mathbb{C})$ *és* $\mathscr{C}(\mathbb{D};\mathbb{C})$ *normált függvényalgebrák között, továbbá* $\mathscr{G}_A = \ \sigma^{\#}\ ^{-1}|_A$.

Bizonyítás. a) Ha $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ Cauchy-sorozat A-ban, akkor a $\mathscr{C}(\mathbb{D};\mathbb{C})$ normált függvényalgebra teljessége miatt van olyan $a \in \mathscr{C}(\mathbb{D};\mathbb{C})$, hogy $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergál a-hoz a $\mathbb{D}$ halmazon egyenletesen. Ekkor az $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ függvénysorozat az $\mathring{\mathbb{D}}$ halmazon egyenletesen konvergál a-hoz, így az a függvény $\mathring{\mathbb{D}}$-re vett leszűkítése holomorf, vagyis $a \in A$. Tehát az $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sorozat konvergens A-ban.

b) Minden $a \in A$ függvényre és $\delta \in]0,1[$ valós számra legyen $a_\delta : \mathbb{D} \to \mathbb{C};\ z \mapsto a((1-\delta)z)$; világos, hogy $a_\delta \in A$. Legyen $a \in A$ és $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ rögzített. A Heine-tétel alapján az a függvény egyenletesen folytonos a $\mathbb{D}$ kompakt halmazon, tehát van olyan $\delta \in]0,1[$ valós szám, hogy minden $z_1, z_2 \in \mathbb{D}$ esetén, ha $|z_1 - z_2| \le \delta$, akkor $|a(z_1) - a(z_2)| \le \varepsilon$. Ha $z \in \mathbb{D}$, akkor $|z - (1-\delta)z| \le \delta$, tehát $|a(z) - a_\delta(z)| \le \varepsilon$, vagyis $\|a - a_\delta\| \le \varepsilon$. Ez azt jelenti, hogy $a = \lim\limits_{\delta\to 0} a_\delta$ teljesül A-ban, tehát, ha megmutatjuk, hogy minden $a \in A$ függvényre és $\delta \in]0,1[$ valós számra az a_δ függvény a $\mathbb{D}$ halmazon egyenletesen approximálható $\mathbb{C} \to \mathbb{C}$ polinomális függvények $\mathbb{D}$-re vett leszűkítéseivel, akkor ez a függvényhalmaz sűrű A-ban. Legyen tehát $a \in A$ és $\delta \in]0,1[$ rögzített, és értelmezzük az

$$\tilde{a}_\delta : B_{1/(1-\delta)}(0;\mathbb{C}) \to \mathbb{C}; \quad z \mapsto a((1-\delta)z)$$

függvényt. Nyilvánvaló, hogy ez a függvény holomorf, mert előáll holomorf függvények kompozíciójaként. A holomorf függvények Taylor-sorfejtésének maximalitása miatt az $\tilde{a}_\delta$ függvény 0 pontbeli Taylor-sora konvergál $\tilde{a}_\delta$-hoz a $B_{1/(1-\delta)}(0;\mathbb{C})$ gömbön. A Cauchy-Hadamard tétel alapján ez a Taylor-sor egyenletesen konvergens a $\mathbb{D}$ halmazon, így $\tilde{a}_\delta|_{\mathbb{D}}$ előáll $\mathbb{C} \to \mathbb{C}$ polinomiális függvények $\mathbb{D}$-re vett leszűkítései egyenletesen konvergens sorozatának határértékeként. Ugyanakkor $\tilde{a}_\delta|_{\mathbb{D}} = a_\delta$, amivel az állítást igazoltuk.

c) Az nyilvánvaló, hogy $z \in \mathbb{D}$ esetén a $\chi_z : A \to \mathbb{C};\ a \mapsto a(z)$ függvény nem nulla karaktere A-nak. Ha $z \in \mathbb{D}$, akkor $z = \chi_z(id_{\mathbb{D}})$, ezért a $\sigma : \mathbb{D} \to \mathrm{X}(A);\ z \mapsto \chi_z$ leképezés injektív. Ha $\chi \in \mathrm{X}(A)$, akkor $\|id_{\mathbb{D}}\| = 1$ és $\|\chi\| \le 1$ miatt $|\chi(id_{\mathbb{D}})| \le 1$, továbbá a $z := \chi(id_{\mathbb{D}}) \in \mathbb{D}$ számra teljesül az, hogy $\chi_z(id_{\mathbb{D}}) = z = \chi(id_{\mathbb{D}})$, vagyis az $id_{\mathbb{D}}$ elem által generált részalgebrán χ_z és χ egyenlők. De az $id_{\mathbb{D}}$ által generált részalgebra A-ban egyenlő a $\mathbb{C} \to \mathbb{C}$ polinomális függvények $\mathbb{D}$-re vett leszűkítéseinek halmazával, ami a b) szerint sűrű A-ban. Tehát a Banach-algebrák karaktereinek folytonossága miatt minden $\chi \in \mathrm{X}(A)$ esetén $\chi_z = \chi$, ahol $z := \chi(id_{\mathbb{D}})$. Ez azt jelenti, hogy a $\sigma : \mathbb{D} \to \mathrm{X}(A)$ függvény szürjektív is, tehát bijekció. Ha $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ egy olyan $\mathbb{D}$-ben haladó sorozat, amely konvergál a $z \in \mathbb{D}$ ponthoz, akkor minden $a \in A$ esetén $\lim\limits_{n\to\infty} \chi_{z_n}(a) = \lim\limits_{n\to\infty} a(z_n) = a(z) = \chi_z(a)$, mert a folytonos függvény. Ez azt jelenti, hogy a σ függvény folytonos a $\mathbb{D}$ feletti euklidészi topológia és az $\mathrm{X}(A)$ feletti Gelfand-topológia szerint, tehát a $\mathbb{D}$ kompaktsága folytán σ homeomorfizmus.

d) A σ függvény homeomorfitása miatt a $\sigma^{\#} : \mathscr{C}(\mathrm{X}(A);\mathbb{C}) \to \mathscr{C}(\mathbb{D};\mathbb{C});\ \varphi \mapsto \varphi \circ \sigma$

leképezés izometrikus izomorfizmus a sup-normával ellátott $\mathscr{C}(\mathrm{X}(A);\mathbb{C})$ és $\mathscr{C}(\mathbb{D};\mathbb{C})$ normált függvényalgebrák között. Ha $a \in A$ és $z \in \mathbb{D}$, akkor a definíciók alapján

$$\left((\sigma^{\#} \circ \mathscr{G}_A)(a)\right)(z) = \left(\mathscr{G}_A(a) \circ \sigma\right)(z) = \mathscr{G}_A(a)(\chi_z) = \chi_z(a) = a(z),$$

tehát $\sigma^{\#} \circ \mathscr{G}_A = id_A$, amiből következik a $\mathscr{G}_A = \left(\sigma^{\#}\right)^{-1}|_A$ egyenlőség. ■

15.4. Végtelenben eltűnő folytonos függvények algebrájának karaktertere és Gelfand-reprezentációja

15.4.1. Állítás. *Legyen T lokálisan kompakt tér és $A := \overline{\mathscr{K}}(T;\mathbb{K})$. Minden $F \subseteq T$ esetén legyen*

$$\mathfrak{m}_F := \{a \in A \mid F \subseteq [a = 0]\}.$$

a) *Ha F_1 és F_2 zárt halmazok T-ben, akkor $F_1 \subseteq F_2$ ekvivalens azzal, hogy $\mathfrak{m}_{F_2} \subseteq \mathfrak{m}_{F_1}$.*

b) *Minden $F \subseteq T$ zárt halmazra $\mathfrak{m}_F$ zárt ideál az A Banach-algebrában, és az $F \mapsto \mathfrak{m}_F$ hozzárendelés bijekció a T zárt részhalmazainak halmaza és az A zárt ideáljainak halmaza között.*

c) *Ha $F \subseteq T$ zárt halmaz, akkor az $\mathfrak{m}_F$ ideál pontosan akkor reguláris, ha F kompakt és nem üres.*

d) *Minden $t \in T$ esetén értelmezzük az $\varepsilon_t : A \to \mathbb{K};\ a \mapsto a(t)$ függvényt. Ekkor $t \in T$ esetén ε_t nem nulla karaktere A-nak, és az*

$$\varepsilon_T : T \to \mathrm{X}(A); \quad t \mapsto \varepsilon_t$$

függvény homemorfizmus a T lokálisan kompakt tér és az $\mathrm{X}(A)$ karaktertér között.

e) *Vezessük be az*

$$\varepsilon_T^{\#} : \overline{\mathscr{K}}(\mathrm{X}(A);\mathbb{K}) \to \overline{\mathscr{K}}(T;\mathbb{K}); \quad \varphi \mapsto \varphi \circ \varepsilon_T$$

leképezést. Ekkor $\varepsilon_T^{\#}$ izometrikus algebra-izomorfizmus, és $\mathscr{G}_A = \left(\varepsilon_T^{\#}\right)^{-1}$.

Bizonyítás. a) Legyenek F_1 és F_2 zárt halmazok T-ben. A definíció szerint világos, hogy $F_1 \subseteq F_2$ esetén $\mathfrak{m}_{F_2} \subseteq \mathfrak{m}_{F_1}$. Megfordítva, ha $\mathfrak{m}_{F_2} \subseteq \mathfrak{m}_{F_1}$ és $t \in T \setminus F_2$, akkor a lokálisan kompakt terek teljes regularitása miatt van olyan $a \in A$, hogy $a(t) \neq 0$ és $F_2 \subseteq [a = 0]$; ekkor $a \in \mathfrak{m}_{F_2}$, tehát $a \in \mathfrak{m}_{F_1}$, így $t \in T \setminus F_1$.

b) Nyilvánvaló, hogy minden $F \subseteq T$ zárt halmazra $\mathfrak{m}_F$ zárt ideál A-ban, és az a) alapján az $F \mapsto \mathfrak{m}_F$ hozzárendelés injekció a T zárt részhalmazainak halmaza és az A zárt ideáljainak halmaza között. A szürjektivitásának bizonyításához legyen $\mathfrak{m}$ zárt ideál A-ban, és értelmezzük az

$$F := \bigcap_{a \in \mathfrak{m}} [a = 0]$$

zárt halmazt. Meg fogjuk mutatni, hogy $\mathfrak{m}_F = \mathfrak{m}$. Az nyilvánvaló, hogy $\mathfrak{m} \subseteq \mathfrak{m}_F$, ezért csak azt kell igazolni, hogy $\mathfrak{m}_F \subseteq \mathfrak{m}$. Az $\mathfrak{m}$ ideál zártsága miatt ehhez elég azt igazolni, hogy $\mathfrak{m}_F \subseteq \overline{\mathfrak{m}}$.

Legyen tehát $a \in \mathfrak{m}_F$ és $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ tetszőleges. Az a függvény végtelenben eltűnő, ezért az ε-hoz létezik olyan $K \subseteq T$ kompakt halmaz, hogy $T \setminus K \subseteq [|a| < \varepsilon]$, vagyis $[|a| \geq \varepsilon] \subseteq K$. Ezért az $[|a| \geq \varepsilon]$ halmaz kompakt, és $a \in \mathfrak{m}_F$ miatt $[|a| \geq \varepsilon] \subseteq T \setminus F$. Tehát az F definíciójából következik, hogy minden $t \in [|a| \geq \varepsilon]$ esetén van olyan $a_t \in \mathfrak{m}$, hogy $a_t(t) \neq 0$, és az a_t megválasztható úgy, hogy $|a_t(t)| > 1$ teljesüljön, hiszen $\mathfrak{m}$ zárt a pozitív számokkal való szorzásra nézve. Ilymódon a kiválasztási axiómával kiválasztunk olyan $(a_t)_{t \in [|a| \geq \varepsilon]}$ rendszert $\mathfrak{m}$-ben, amelyre minden $t \in [|a| \geq \varepsilon]$ esetén $|a_t(t)| > 1$. Ekkor minden $t \in [|a| \geq \varepsilon]$ pontra az $[|a_t| > 1]$ halmaz nyílt környezete t-nek, tehát a $[|a| \geq \varepsilon]$ halmaz kompaktsága miatt vehetünk olyan $H \subseteq [|a| \geq \varepsilon]$ véges halmazt, amelyre $[|a| \geq \varepsilon] \subseteq \bigcup_{t \in H} [|a_t| > 1]$. Ekkor $b := \sum_{t \in H} a_t \overline{a_t} \in \mathfrak{m}$, hiszen $\mathfrak{m}$ ideál és minden $H \ni t$-re $a_t \in \mathfrak{m}$. Világos, hogy

$$\left\| a - \frac{ab}{b + \varepsilon} \right\| = \varepsilon \sup_{t \in T} \quad \frac{|a(t)|}{b(t) + \varepsilon} \quad .$$

Ha $t \in [|a| \geq \varepsilon]$, akkor van olyan $s \in H$, hogy $|a_s(t)| > 1$, így $b(t) > 1$, tehát $|a(t)|/(b(t) + \varepsilon) \leq \|a\|$. Ha $t \in [|a| < \varepsilon]$, akkor $|a(t)|/(b(t) + \varepsilon) \leq \varepsilon/(b(t) + \varepsilon) \leq 1$. Ez azt jelenti, hogy

$$\left\| a - \frac{ab}{b + \varepsilon} \right\| \leq \varepsilon \max(\|a\|, 1),$$

és $b \in \mathfrak{m}$, valamint $a/(b + \varepsilon) \in A$ alapján $(ab)/(b + \varepsilon) \in \mathfrak{m}$. Ez azt jelenti, hogy az $a \in \mathfrak{m}_F$ elem tetszőleges pontossággal egyenletesen közelíthető T-n $\mathfrak{m}$-beli elemekkel, tehát $a \in \overline{\mathfrak{m}}$.

c) Legyen $F \subseteq T$ zárt halmaz, és tegyük fel, hogy az $\mathfrak{m}_F$ ideál reguláris. Ekkor $F \neq \emptyset$, mert $\mathfrak{m}_F \neq A$. Legyen $e \in A$ olyan, hogy minden $a \in A$ esetén $ae - a \in \mathfrak{m}_F$. Ha $t \in F$, akkor van olyan $a \in A$, hogy $a(t) \neq 0$, és ekkor $F \subseteq [ae - a = 0]$ miatt $e(t) = 1$. Ezért $F \subseteq [e = 1]$. Ugyanakkor az e végtelenben eltűnő, így van olyan $K \subseteq T$ kompakt halmaz, hogy $T \setminus K \subseteq [|e| < 1/2]$, tehát $F \subseteq [e = 1] \subseteq [|e| \geq 1/2] \subseteq K$, vagyis F kompakt halmaz.

Megfordítva, ha F nem üres kompakt halmaz, akkor van olyan $e \in A$, hogy $F \subseteq [e = 1]$; ekkor minden $a \in A$ esetén $F \subseteq [ae - a = 0]$, vagyis $ae - a \in \mathfrak{m}_F$. Ugyanakkor $\mathfrak{m}_F \neq A$, mert F nem üres, tehát $\mathfrak{m}_F$ reguláris ideál.

d) Nyilvánvaló, hogy $t \in T$ esetén $\varepsilon_t \in \mathrm{X}(A)$. Ha $t, t' \in T$ és $t \neq t'$, akkor van olyan $a \in A$, hogy $\varepsilon_t(a) := a(t) \neq a(t') =: \varepsilon_{t'}(a)$, tehát $\varepsilon_t \neq \varepsilon_{t'}$, vagyis a $T \to \mathrm{X}(A);\ t \mapsto \varepsilon_t$ leképezés injektív. Ez a leképezés szürjektív is. Legyen ugyanis $\chi \in \mathrm{X}(A)$; ekkor $\mathrm{Ker}(\chi)$ az A-ban 1-kodimenziós reguláris ideál. Természetesen $\mathrm{Ker}(\chi)$ maximális ideál is az A Banach-algebrában, ezért zárt, tehát a b) és c) alapján van olyan F nem üres kompakt részhalmaza T-nek, amelyre $\mathfrak{m}_F = \mathrm{Ker}(\chi)$. Ha $t \in F$, akkor az a) alapján $\mathfrak{m}_F \subseteq \mathfrak{m}_{\{t\}}$, ezért az $\mathfrak{m}_F$ maximalitása folytán $\mathfrak{m}_F = \mathfrak{m}_{\{t\}}$. Ismét az a) alapján ebből kapjuk, hogy F egy elemű halmaz, és ha t az F egyetlen eleme, akkor $\mathrm{Ker}(\chi) = \mathfrak{m}_F = \mathfrak{m}_{\{t\}} = \mathrm{Ker}(\varepsilon_t)$. Ebből következik, hogy $\chi = \varepsilon_t$, így a $T \to \mathrm{X}(A);\ t \mapsto \varepsilon_t$ leképezés bijekció.

Ha $(t_i)_{i \in I}$ olyan általánosított sorozat T-ben, amely konvergál a $t \in T$ ponthoz, akkor minden $a \in A$ esetén az a függvény folyonossága és az átviteli elv alapján $\lim\limits_{i,I} \varepsilon_{t_i}(a) = \lim\limits_{i,I} a(t_i) = a(t) = \varepsilon_t(a)$, vagyis $\lim\limits_{i,I} \varepsilon_{t_i} = \varepsilon_t$ teljesül az $\mathrm{X}(A)$ lokálisan kompakt térben. Ez azt jelenti, hogy a $T \to \mathrm{X}(A);\ t \mapsto \varepsilon_t$ leképezés folytonos.

A $T \to \mathrm{X}(A);\ t \mapsto \varepsilon_t$ leképezés *nyíltságának* bizonyításához legyen $t \in T$ tetszőleges pont és $\Omega \subseteq T$ olyan nyílt halmaz, hogy $t \in \Omega$. A T teljes regularitása miatt vehetünk olyan $a \in A$ függvényt, amelyre $a(t) = 1$ és $[a \neq 0] \subseteq \Omega$. Legyen $r \in]0, 1[$ rögzített valós szám, és $\chi \in \mathbf{W}_{\{a\},r}(\varepsilon_t)$ tetszőleges. Legyen $s \in T$ az a pont, amelyre $\varepsilon_T(s) = \varepsilon_s = \chi$. Ekkor $1 > r > |\chi(a) - \varepsilon_t(a)| = |a(s) - 1|$, így $s \in [a \neq 0]$, tehát $s \in \Omega$. Ez azt jelenti, hogy $\chi = \varepsilon_T(s) \in \varepsilon_T\langle\Omega\rangle$, tehát $\mathbf{W}_{\{a\},r}(\varepsilon_t)$ olyan környezete ε_t-nek $\mathrm{X}(A)$-ban, amelyre $\mathbf{W}_{\{a\},r}(\varepsilon_t) \subseteq \varepsilon_T\langle\Omega\rangle$. Ezért az ε_T függvény homeomorfizmus T és $\mathrm{X}(A)$ között.

e) Az ε_T függvény homeomorfitása miatt az $\varepsilon_T^{\#} : \overline{\mathscr{K}}(\mathrm{X}(A); \mathbb{K}) \to \overline{\mathscr{K}}(T; \mathbb{K})$ leképezés nyilvánvalóan algebra-izomorfizmus, és a definíciója alapján világos, hogy izometria a sup-normák szerint. Ha $\varphi \in \overline{\mathscr{K}}(\mathrm{X}(A); \mathbb{K})$ és $t \in T$, akkor

$$((\mathscr{G}_A \circ \varepsilon_T^{\#})(\varphi))(\varepsilon_t) = \varepsilon_t(\varphi \circ \varepsilon_T) = (\varphi \circ \varepsilon_T)(t) = \varphi(\varepsilon_t),$$

tehát $\{\varepsilon_t | t \in T\} = \mathrm{X}(A)$ miatt $\mathscr{G}_A \circ \varepsilon_T^{\#}$ egyenlő a $\overline{\mathscr{K}}(\mathrm{X}(A); \mathbb{K})$ algebra identikus függvényével, így a $\mathscr{G}_A$ Gelfand-reprezentáció is izometrikus algebra-izomorfizmus, és $\mathscr{G}_A = \left(\varepsilon_T^{\#}\right)^{-1}$. ■

15.4.2. Állítás. *Legyenek T és S lokálisan kompakt terek.*

a) *Minden $\pi : \overline{\mathscr{K}}(T; \mathbb{K}) \to \overline{\mathscr{K}}(S; \mathbb{K})$ algebra-izmorfizmushoz létezik egyetlen olyan $\sigma : S \to T$ homeomorfizmus, amelyre a*

$$\sigma^{\#} : \overline{\mathscr{K}}(T; \mathbb{K}) \to \overline{\mathscr{K}}(S; \mathbb{K}); \quad \varphi \mapsto \varphi \circ \sigma$$

leképezés egyenlő π-vel.

b) *A T és S lokálisan kompakt terek pontosan akkor homeomorfak, ha a $\overline{\mathscr{K}}(T; \mathbb{K})$ és $\overline{\mathscr{K}}(S; \mathbb{K})$ algebrák izomorfak.*

Bizonyítás. a) Ha σ_1 és σ_2 olyan $S \to T$ homeomorfizmusok, hogy $\sigma_1^\# = \sigma_2^\#$, akkor minden $\varphi \in \overline{\mathscr{K}}(T;\mathbb{K})$ függvényre $\varphi \circ \sigma_1 = \varphi \circ \sigma_2$, tehát minden $s \in S$ esetén $\sigma_1(s) = \sigma_2(s)$, mert a $\mathscr{K}(T;\mathbb{K})$ függvényhalmaz szétválasztó T felett; ezért $\sigma_1 = \sigma_2$.

Legyen $A := \overline{\mathscr{K}}(T;\mathbb{K})$, $B := \overline{\mathscr{K}}(S;\mathbb{K})$, és

$$\varepsilon_T : T \to \mathrm{X}(A); \quad t \mapsto \varepsilon_t$$

$$\varepsilon_S : S \to \mathrm{X}(B); \quad t \mapsto \varepsilon_s.$$

Az előző állítás szerint $\varepsilon_T : T \to \mathrm{X}(A)$ és $\varepsilon_S : S \to \mathrm{X}(B)$ homeomorfizmusok. Legyen $\pi : A \to B$ algebra-izomorfizmus; ekkor nyilvánvaló, hogy az

$$\mathrm{X}(\pi) : \mathrm{X}(B) \to \mathrm{X}(A); \quad \chi \mapsto \chi \circ \pi$$

leképezés homeomorfizmus. Ezért a $\sigma := \varepsilon_T^{-1} \circ \mathrm{X}(\pi) \circ \varepsilon_S : S \to T$ leképezés homeomorfizmus. Ekkor $\varphi \in \overline{\mathscr{K}}(T;\mathbb{K})$ és $s \in S$ esetén

$$(\sigma^\#(\varphi))(s) := \varphi(\sigma(s)) := \varphi(\varepsilon_T^{-1}(\mathrm{X}(\pi)(\varepsilon_s))) = \varphi(t),$$

ahol $t \in T$ az a pont, amelyre $\varepsilon_t = \mathrm{X}(\pi)(\varepsilon_s) = \varepsilon_s \circ \pi$. Világos, hogy $\varphi(t) = \varepsilon_t(\varphi) = \varepsilon_s(\pi(\varphi)) = (\pi(\varphi))(s)$, tehát $(\sigma^\#(\varphi))(s) = (\pi(\varphi))(s)$. Ez minden $\varphi \in \overline{\mathscr{K}}(T;\mathbb{K})$ és $s \in S$ esetén teljesül, tehát $\sigma^\# = \pi$.

b) Az a) állításból azonnal következik. ■

15.4.3. Definíció. *Ha S és T lokálisan kompakt terek, akkor egy $\sigma : S \to T$ függvényt* **valódinak** *nevezünk, ha minden $K \subseteq T$ kompakt halmazra $\overset{-1}{\sigma}\langle K\rangle \subseteq S$ kompakt halmaz.*

Nyilvánvaló, hogy ha S kompakt tér, akkor minden T lokálisan kompakt térre, minden $S \to T$ folytonos függvény valódi.

Ha S és T lokálisan kompakt terek, és $\sigma : S \to T$ folytonos valódi függvény, akkor minden $\varphi \in \overline{\mathscr{K}}(T;\mathbb{K})$ függvényre $\varphi \circ \sigma \in \overline{\mathscr{K}}(S;\mathbb{K})$, mert ha $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ és $K \subseteq T$ olyan kompakt halmaz, hogy minden $t \in T \setminus K$ esetén $|\varphi(t)| < \varepsilon$, akkor a σ valódisága miatt $\overset{-1}{\sigma}\langle K\rangle \subseteq S$ kompakt halmaz, és minden $s \in S \setminus \overset{-1}{\sigma}\langle K\rangle$ pontra $\sigma(s) \in T \setminus K$, így $|(\varphi \circ \sigma)(s)| < \varepsilon$.

15.4.4. Definíció. *Ha T és S lokálisan kompakt terek, akkor egy*

$$\pi : \overline{\mathscr{K}}(T;\mathbb{K}) \to \overline{\mathscr{K}}(S;\mathbb{K})$$

algebra-morfizmust **térszerűnek** *nevezünk, ha létezik olyan $\sigma : S \to T$ folytonos valódi függvény, hogy a*

$$\sigma^\# : \overline{\mathscr{K}}(T;\mathbb{K}) \to \overline{\mathscr{K}}(S;\mathbb{K}); \quad \varphi \mapsto \varphi \circ \sigma$$

leképezés egyenlő π-vel.

15.4.5. Állítás. *Ha T és S kompakt terek, akkor egy $\overline{\mathscr{K}}(T;\mathbb{K}) \to \overline{\mathscr{K}}(S;\mathbb{K})$ algebra-morfizmus pontosan akkor térszerű, ha egységelem-tartó.*

Bizonyítás. Az nyilvánvaló, hogy a $\overline{\mathscr{K}}(T;\mathbb{K}) \to \overline{\mathscr{K}}(S;\mathbb{K})$ térszerű algebra-morfizmusok egységelem tartók, ezért csak azt kell igazolni, hogy ha $\pi : \overline{\mathscr{K}}(T;\mathbb{K}) \to \overline{\mathscr{K}}(S;\mathbb{K})$ egységelem-tartó algebra-morfizmus, akkor π térszerű. Most is legyenek A, B, ε_T és ε_S ugyanazok az objektumok, mint az előző állítás a) részének bizonyításában. Ha $\chi \in \mathrm{X}(B)$, akkor $\chi \circ \pi \in \mathrm{X}(A)$, mert a π egységelem-tartó, így $(\chi \circ \pi)(\mathbf{1}_A) = \chi(\mathbf{1}_B) = 1$. Ezért jól értelmezett az

$$\mathrm{X}(\pi) : \mathrm{X}(B) \to \mathrm{X}(A); \quad \chi \mapsto \chi \circ \pi$$

leképezés, amely nyilvánvalóan folytonos. Ekkor a $\sigma := \varepsilon_T^{-1} \circ \mathrm{X}(\pi) \circ \varepsilon_S : S \to T$ függvény folytonos, és egyszerű számolással igazolható, hogy $\pi = \sigma^{\#}$. ■

16. fejezet

*-algebrák

16.1. Elemi konstrukciók *-algebrákra

16.1.1. Definíció. *Azt mondjuk, hogy A* ***-algebra***, ha A komplex algebra, és adott egy $A \to A$; $a \mapsto a^*$ egyváltozós művelet, amelyre teljesülnek a következők:*

*– minden $a \in A$ esetén $(a^*)^* = a$ (***involutivitás***),*

*– minden $a, b \in A$ és $z \in \mathbb{C}$ esetén $(a + z.b)^* = a^* + \overline{z}.b^*$ (***konjugált-linearitás***),*

*– minden $a, b \in A$ esetén $(ab)^* = b^*a^*$ (***antimultiplikativitás***).*

*A * egyváltozós műveletet az A *-algebra* **involúciójának** *nevezzük. Azt mondjuk, hogy az A *-algebra involúciója* **valódi***, ha minden $a \in A$ esetén, az $a^*a = 0$ feltétekből $a = 0$ következik.*

A legelemibb *-algebra-konstrukciók a következők.

– *-algebra minden olyan részalgebrája, amely zárt az involúcióra nézve (vagyis **-részalgebra*) a műveletek leszűkítésével ellátva *-algebra. Ha A *-algebra és $e \in A$ olyan idempotens eleme, amelyre $e^* = e$, akkor az e-vel redukált eAe részalgebra az A-nak *-részalgebrája. Ha S olyan részhalmaza az A *-algebrának, amely zárt az involúcióra nézve (amit úgy fejezünk ki, hogy az S halmaz önadjungált), akkor a $C(S)$ kommutáns az A-nak *-részalgebrája. Továbbá, ha S tetszőleges részhalmaza A-nak, akkor az A S-et tartalmazó *-részalgebráinak metszete szintén *-részalgebra A-ban; ezt nevezzük az S által generált *-részalgebrának.

– Ha $(A_i)_{i\in I}$ *-algebrák tetszőleges rendszere, akkor a szorzatalgebra a

$$\prod_{i\in I} A_i \to \prod_{i\in I} A_i; \quad (a_i)_{i\in I} \mapsto (a_i^*)_{i\in I}$$

leképezéssel ellátva *-algebra. Ezt a *-algebrát nevezzük az $(A_i)_{i\in I}$ *-algebra-rendszer *szorzatának.*

– Ha A *-algebra és $\mathfrak{m}$ olyan ideál A-ban, amely zárt az involúcióra nézve (vagyis $\mathfrak{m}$ *-ideál*), akkor az $A/\mathfrak{m}$ faktoralgebrán létezik egyetlen olyan $A/\mathfrak{m} \to A/\mathfrak{m}$; $\zeta \mapsto \zeta^*$ egyváltozós művelet, amelyre teljesül az, hogy minden $a \in A$ esetén $(\pi_{A/\mathfrak{m}}(a))^* = \pi_{A/\mathfrak{m}}(a^*)$. Az $A/\mathfrak{m}$ algebra ezzel a művelettel ellátva *-algebra; ezt nevezzük az A *-algebra $\mathfrak{m}$ *-ideál szerinti *faktor-*-algebrájának.*

16.2. Példák *-algebrákra

(I) Legyen T halmaz, és tekintsük az $\mathscr{F}(T;\mathbb{C})$ teljes függvényalgebrát. Az $\mathscr{F}(T;\mathbb{C})$ komplex algebra az

$$\mathscr{F}(T;\mathbb{C}) \to \mathscr{F}(T;\mathbb{C}); \quad f \mapsto \overline{f}$$

(konjugálás) egyváltozós művelettel ellátva kommutatív egységelemes *-algebra. Ennek a *-algebrának speciális *-részalgebrái a következők.

– A $T \to \mathbb{C}$ korlátos függvények $\mathscr{F}^b(T;\mathbb{C})$ halmaza *-részalgebrája $\mathscr{F}(T;\mathbb{C})$-nek. A $\mathbb{C}^{(T)} := \{f \in \mathscr{F}(T;\mathbb{C}) | "[f \neq 0] \text{ véges"}\}$ halmaz *-ideálja az $\mathscr{F}(T;\mathbb{C})$ *-algebrának.

– Ha T topologikus tér, akkor a $T \to \mathbb{C}$ folytonos (illetve korlátos és folytonos) függvények $\mathscr{C}(T;\mathbb{C})$ (illetve $\mathscr{C}^b(T;\mathbb{C})$) halmaza *-részalgebrája az $\mathscr{F}(T;\mathbb{C})$ *-algebrának.

– Ha T lokálisan kompakt tér, akkor a $T \to \mathbb{C}$ kompakt tartójú folytonos (illetve a végtelenben eltűnő folytonos) függvények $\mathscr{K}(T;\mathbb{C})$ (illetve $\overline{\mathscr{K}}(T;\mathbb{C})$) halmaza *-részalgebrája az $\mathscr{F}(T;\mathbb{C})$ *-algebrának.

– Ha $\mathscr{R}$ halmazgyűrű a T halmaz felett, akkor a $T \to \mathbb{C}$ $\mathscr{R}$-lépcsősfüggvények (illetve $\mathscr{R}$-egyszerű függvények) $\mathscr{E}_{\mathbb{C}}(T,\mathscr{R})$ (illetve $\mathscr{E}_{\mathbb{C}}(T,\mathscr{R})$) halmaza *-részalgebrája az $\mathscr{F}(T;\mathbb{C})$ *-algebrának.

(II) Legyen $\mathscr{H}$ komplex Hilbert-tér. Ekkor a $\mathscr{H} \to \mathscr{H}$ folytonos lineáris operátorok $\mathscr{L}(\mathscr{H})$ algebrája az operátoradjungálás művelettel ellátva egységelemes *-algebra, amely pontosan akkor kommutatív, ha $\mathscr{H}$ legfeljebb egydimenziós. Ennek a *-algebrának speciális *-részalgebrái a következők.

– A $\mathscr{H} \to \mathscr{H}$ folytonos és véges dimenziós értékű lineáris operátorok halmaza *-ideálja az $\mathscr{L}(\mathscr{H})$ *-algebrának.

– A $\mathscr{H} \to \mathscr{H}$ kompakt operátorok halmaza *-ideálja az $\mathscr{L}(\mathscr{H})$ *-algebrának.

– Ha $S \subseteq \mathscr{L}(\mathscr{H})$ önadjungált operátorhalmaz, tehát minden $s \in S$ esetén $s^* \in S$, akkor a $C(S)$ kommutáns *-részalgebrája az $\mathscr{L}(\mathscr{H})$ *-algebrának. Az ilyen alakú *-algebrákat $\mathscr{H}$ feletti *Neumann-algebráknak* nevezzük.

(III) Legyen G csoport, és tekintsük az $A_{\mathbb{C}}(G)$ konvolúciós algebrát, amely egységelemes komplex algebra. Minden $a \in A_{\mathbb{C}}(G)$ esetén értelmezzük az $a^* : G \to \mathbb{C}$; $s \mapsto \overline{a(s^{-1})}$ leképezést. Ekkor az $A_{\mathbb{C}}(G)$ algebra az $A_{\mathbb{C}}(G) \to A_{\mathbb{C}}(G)$; $a \mapsto a^*$ egyváltozós művelettel ellátva olyan egységelemes *-algebra, amely pontosan akkor kommutatív, ha a G csoport kommutatív.

(IV) *Speciális példák.*

– Legyen A komplex vektortér és $D : A \to A$ tetszőleges olyan konjugált lineáris operátor, hogy $D \circ D = id_A$. Legyen minden $a \in A$ esetén $a^* := D(a)$. Ekkor az A komplex vektortér a 0 szorzással és a * egyváltozós művelettel ellátva kommutatív *-algebra. Az ilyen alakú *-algebrákat *nulla-szorzású *-algebráknak* nevezzük.

– Jelölje A a diszk-algebrát és minden $a \in A$ esetén legyen

$$a^* : \overline{B}_1(0;\mathbb{C}) \to \mathbb{C}; \quad z \mapsto \overline{a(\overline{z})}.$$

Ekkor $a \in A$ esetén $a^* \in A$, és az A komplex algebra a * egyváltozós művelettel ellátva egységelemes kommutatív *-algebra. Ezt a teljesen konkrét *-algebrát szintén *diszk-algebrának* nevezzük. (Vigyázzunk arra, hogy a diszk-algebrában az involúció nem a konjugálás, mert a konjugálás elrontja a Cauchy-Riemann-egyenleteket, vagyis a holomorfitást, így a konjugálás kivezet a diszk-algebrából.)

– Legyen A egységelemes *-algebra és $j \in A$ olyan elem, amelyre $j = j^*$ és $j^2 = \mathbf{1}$. Ekkor az

$$A \to A; \quad a \mapsto a^{\#} := ja^*j$$

leképezés involúció az A komplex algebra felett, tehát A a $^{\#}$ involúcióval ellátva szintén egységelemes *-algebra. Azt mondjuk, hogy az így nyert *-algebra involúciója az eredeti involúció j-vel vett *elforgatásával* áll elő.

16.3. *-algebra egyégelemesítése

16.3.1. Definíció. *Ha A és B *-algebrák, akkor A és B közötti* ***-algebra-morfizmusnak** *nevezünk minden olyan $\pi : A \to B$ algebra-morfizmust, amely megtartja az A és B involúcióját, vagyis minden $a \in A$ esetén $\pi(a^*) = \pi(a)^*$. A bijektív *-algebra-morfizmusokat* ***-algebra-izomorfizmusoknak** *nevezzük.*

16.3.2. Állítás. *Legyen A *-algebra.*

a) *Létezik olyan (B, j) pár, hogy B egységelemes *-algebra és $j : A \to B$ *-algebra-morfizmus, és teljesül az, hogy minden C egységelemes *-algebrához és minden $\pi : A \to C$ *-algebra-morfizmushoz létezik egyetlen olyan $\tilde{\pi} : B \to C$ egységelem-tartó *-algebra-morfizmus, hogy $\tilde{\pi} \circ j = \pi$.*

b) *Legyenek (B_1, j_1) és (B_2, j_2) olyan párok, hogy B_1 és B_2 egységelemes *-algebrák, valamint $j_1 : A \to B_1$ és $j_2 : A \to B_2$ *-algebra-morfizmusok, és teljesül az, hogy minden C egységelemes *-algebrához és $\pi_1 : A \to C$ és $\pi_2 : A \to C$ *-algebra-morfizmushoz létezik egyetlen olyan olyan $\tilde{\pi}_1 : B_1 \to C$ egységelem-tartó *-algebra-morfizmus, hogy $\tilde{\pi}_1 \circ j_1 = \pi_1$,* *valamint létezik egyetlen olyan olyan* $\tilde{\pi}_2 : B_2 \to C$ *egységelem-tartó *-algebra-morfizmus, hogy* $\tilde{\pi}_2 \circ j_2 = \pi_2$*. Ekkor létezik egyetlen olyan* $\pi : B_1 \to B_2$ **-algebra-izomorfizmus, amelyre* $\pi \circ j_1 = j_2$*.*

Bizonyítás. a) Legyen $\tilde{A} := \mathbb{C} \times A$ és értelmezzük a

$$+ : \tilde{A} \times \tilde{A} \to \tilde{A}; \quad \cdot : \tilde{A} \times \tilde{A} \to \tilde{A}; \quad . : \mathbb{C} \times \tilde{A} \to \tilde{A}; \quad * : \tilde{A} \to \tilde{A}$$

leképezéseket úgy, hogy $(\lambda, a), (\sigma, b) \in \tilde{A}$ esetén legyen

$$(\lambda, a) + (\sigma, b) := (\lambda + \sigma, a + b), \quad (\lambda, a) \cdot (\sigma, b) := (\lambda\sigma, \lambda.b + \sigma.a + ab),$$

$$\sigma.(\lambda, a) := (\sigma\lambda, \sigma.a), \quad (\lambda, a)^* := (\overline{\lambda}, a^*).$$

Ekkor az $\tilde{A}$ halmaz a $+, \cdot, ., *$ műveletekkel ellátva egységelemes *-algebra, amelynek $(1, 0)$ az egységeleme, és a

$$j : A \to \tilde{A}; \quad a \mapsto (0, a)$$

leképezés *-algebra-morfizmus. Világos, hogy $\mathrm{Im}(j)$ olyan 1-kodimenziós *-ideál A-ban, hogy $\tilde{A} = \mathbb{C}.\mathbf{1} \oplus \mathrm{Im}(j)$.

Legyen C egységelemes *-algebra, $\pi : A \to C$ *-algebra-morfizmus, és jelölje $\mathbf{1}_C$ a C egységelemét. Könnyen látható, hogy a

$$\tilde{\pi} : \tilde{A} \to C; \quad (\lambda, a) \mapsto \lambda.\mathbf{1}_C + \pi(a)$$

leképezés az egyetlen olyan egységelem-tartó *-algebra-morfizmus $\tilde{A}$ és C között, amelyre $\tilde{\pi} \circ j = \pi$.

b) Legyenek (B_1, j_1) és (B_2, j_2) olyan párok, amelyekre teljesülnek a b)-ben megfogalmazott feltételek. Ekkor B_2 egységelemes *-algebra és $j_2 : A \to B_2$ *-algebra-morfizmus, ezért a (B_1, j_1) pár tulajdonsága szerint létezik egyetlen olyan $\overline{j}_2 : B_1 \to B_2$ egységelem-tartó *-algebra-morfizmus, amelyre $\overline{j}_2 \circ j_1 = j_2$. Továbbá, B_1 egységelemes *-algebra és $j_1 : A \to B_1$ *-algebra-morfizmus, ezért a (B_2, j_2) pár tulajdonsága szerint létezik egyetlen olyan $\overline{j}_1 : B_2 \to B_1$ egységelem-tartó *-algebra-morfizmus, amelyre $\overline{j}_1 \circ j_2 = j_1$. Ekkor $\overline{j}_1 \circ \overline{j}_2 : B_1 \to B_1$ olyan egységelem-tartó *-algebra-morfizmus, amelyre $(\overline{j}_1 \circ \overline{j}_2) \circ j_1 = j_1$. Ugyanakkor az id_{B_1} leképezés természetesen szintén olyan $B_1 \to B_1$ egységelem-tartó *-algebra-morfizmus, amelyre $id_{B_1} \circ j_1 = j_1$. De a (B_1, j_1) párra kirótt tulajdonság szerint csak egyetlen olyan $\pi : B_1 \to B_1$ egységelem-tartó *-algebra-morfizmus létezik, amelyre $\pi \circ j_1 = j_1$; ezért $\overline{j}_1 \circ \overline{j}_2 = id_{B_1}$. Teljesen hasonló érvelést alkalmazva kapjuk, hogy $\overline{j}_2 \circ \overline{j}_1 = id_{B_2}$. Ez azt jelenti, hogy az $\overline{j}_2 : B_1 \to B_2$ leképezés olyan *-izomorfizmus, amelyre $\overline{j}_2 \circ j_1 = j_2$, és a (B_1, j_1) párra vonatkozó tulajdonság miatt ilyen egységelem-tartó *-algebra-morfizmus csak egy létezhet. ■

16.3.3. Definíció. *Az A *-algebra* **egységelemesítésének** *nevezünk minden olyan (B, j) párt, amelyre B egységelemes *-algebra és $j : A \to B$ *-algebra-morfizmus, és teljesül az, hogy minden C egységelemes *-algebrához és minden $\pi : A \to C$ *-algebra-morfizmushoz létezik egyetlen olyan $\tilde{\pi} : B \to C$ egységelem-tartó *-algebra-morfizmus, hogy $\tilde{\pi} \circ j = \pi$. Az előző állítás bizonyításának a) részében előállított $(\tilde{A}, j)$ párt az A *-algebra* **standard egységelemesítésének** *nevezzük.*

Példa. Legyen T lokálisan kompakt tér, és jelölje T' a T egypontú kompaktifikációját. Tekintsük a $\mathscr{C}(T'; \mathbb{C})$ egységelemes *-algebrát és legyen $j : \overline{\mathscr{K}}(T; \mathbb{C}) \to \mathscr{C}(T'; \mathbb{C})$ az a leképezés, amely minden $T \to \mathbb{C}$ folytonos végtelenben eltűnő függvényhez hozzárendeli a 0-val vett kiterjesztését T'-re. Ekkor a $(\mathscr{C}(T'; \mathbb{C}), j)$ pár nem standard egységelemesítése a $\overline{\mathscr{K}}(T; \mathbb{C})$ *-algebrának.

16.4. Speciális elemek *-algebrákban

*-algebrákban értelmezhető néhány fontos elem-típus; most ezekről lesz szó.

16.4.1. Definíció. *Ha A *-algebra, akkor a következő elnevezéseket és jelöléseket alkalmazzuk.*

– Az $a \in A$ elemet **normálisnak** *nevezzük, ha $a^*a = aa^*$.*

– Az $x \in A$ elemet **önadjungáltnak** *vagy* **hermitikusnak** *nevezzük, ha $x^* = x$; az A önadjungált elemeinek halmazát A_{sa} vagy A_h jelöli.*

– Az $x \in A$ elemet **pozitívnak** *nevezzük, ha létezik A-ban olyan $(a_i)_{i \in I}$ véges rendszer, amelyre $x = \sum_{i \in I} a_i^* a_i$; az A pozitív elemeinek halmazát A_+ jelöli.*

– Az $e \in A$ elemet **projektornak** *nevezzük, ha $e^2 = e = e^*$; az A projektorainak halmazát $\mathbf{P}(A)$ jelöli.*

– Ha A egységelemes, akkor az $u \in A$ elemet **unitérnek** *nevezzük, ha $u^*u = uu^* = \mathbf{1}$; az A unitér elemeinek halmazát $\mathbf{U}(A)$ jelöli.*

Megjegyzések. Legyen A *-algebra.

1) Nyilvánvaló, hogy az A_{sa} halmaz $\mathbb{R}$-lineáris altere az A komplex vektortérnek, és minden $a \in A$ elemhez egyértelműen léteznek olyan $x, y \in A_{sa}$, amelyekre $a = x + \mathbf{i}.y$, ugyanis az $x := \frac{1}{2}(a + a^*)$ és $y := \frac{1}{2\mathbf{i}}(a - a^*)$ elemekre $a = x + \mathbf{i}.y$ teljesül és $x, y \in A_{sa}$; továbbá, ha $x, y \in A_{sa}$ olyanok, hogy $a = x + \mathbf{i}.y$, akkor $a^* = x - \mathbf{i}.y$, így szükségképpen $x = \frac{1}{2}(a + a^*)$ és $y = \frac{1}{2\mathbf{i}}(a - a^*)$.

Ez azt mutatja, hogy A megegyezik az A_{sa} valós vektortér *komplexifikációjával.* Tehát, ha F komplex vektortér, és $u : A_{sa} \to F$ $\mathbb{R}$-lineáris operátor, akkor létezik egyetlen olyan

$u_{\mathbb{C}} : A \to F$ $\mathbb{C}$-lineáris operátor, amely az u-nak kiterjesztése.

2) Az A_{sa} halmaz pontosan akkor zárt a szorzásra nézve, ha A kommutatív. Valóban, ha A kommutatív, akkor $x, y \in A_{sa}$ esetén $(xy)^* = y^*x^* = yx = xy$, tehát $xy \in A_{sa}$; továbbá, ha az A_{sa} halmaz zárt a szorzásra nézve, akkor $x, y \in A_{sa}$ esetén $xy \in A_{sa}$, vagyis $xy = (xy)^* = y^*x^* = yx$, így az A_{sa} halmaz bármely két eleme kommutál egymással, tehát az 1) alapján A kommutatív.

3) Legyen $a \in A$ és legyenek $x, y \in A_{sa}$ azok az elemek, amelyekre $a = x + \mathbf{i}.y$. Ekkor

$$a^*a = (x - \mathbf{i}.y)(x + \mathbf{i}.y) = x^2 + y^2 + \mathbf{i}.(xy - yx),$$

$$aa^* = (x + \mathbf{i}.y)(x - \mathbf{i}.y) = x^2 + y^2 - \mathbf{i}.(xy - yx),$$

amiből látható, hogy az a elem pontosan akkor normális, ha $xy - yx = 0$, vagyis ha x és y felcserélhetők egymással.

4) A definíciók alapján nyilvánvaló, hogy $\mathbf{P}(A) \subseteq A_+ \subseteq A_{sa}$. Később majd részletesen foglalkozunk *-algebra projektorainak halmazával.

5) Legyen A egységelemes *-algebra. Egy $u \in A$ elem pontosan akkor unitér, ha invertálható (azaz $u \in \mathbf{G}(A)$) és $u^{-1} = u^*$. Nyilvánvaló, hogy az A minden unitér eleme normális, és az unitér elemek $\mathbf{U}(A)$ halmaza részcsoportja az invertálható elemek $\mathbf{G}(A)$ csoportjának. Az $\mathbf{U}(A)$ alakú *unitér* csoportok a harmonikus analízis alapvetően fontos objektumai.

6) Egy $a \in A$ elem pontosan akkor normális, ha az $\{a\}$ halmaz által generált *-részalgebra kommutatív, vagyis ha létezik a-t tartalmazó kommutatív *-részalgebrája A-nak. Világos ugyanis, hogy az $a \in A$ normális elem által generált *-részalgebra egyenlő a

$$\sum_{(m,n) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}} z_{m,n} a^m (a^*)^n$$

alakú elemek halmazával, ahol $(z_{m,n})_{(m,n) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}} \in \mathbb{C}^{(\mathbb{N} \times \mathbb{N})}$ olyan rendszer, amelyre $z_{0,0} = 0$; és természetesen az ilyen alakú elemek egymással felcserélhetők. Ha A egységelemes és $a \in A$ normális elem, akkor az $\{a, \mathbf{1}\}$ halmaz által generált *-részalgebra egyenlő a fenti alakú elemek halmazával, ahol $(z_{m,n})_{(m,n) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}} \in \mathbb{C}^{(\mathbb{N} \times \mathbb{N})}$ tetszőleges, vagyis $z_{0,0} \neq 0$ is lehetséges.

7) Az A_+ halmaz 0 csúcspontú *konvex kúp* az A_{sa} valós vektortérben, hiszen a definíció alapján nyilvánvaló, hogy $\mathbb{R}_+.A_+ \subseteq A_+$ és $A_+ + A_+ \subseteq A_+$. Az A_{sa} halmazon értelmezzük azt a $\preceq$ relációt, amelyre $x, y \in A_{sa}$ esetén $x \preceq y$ azt jelenti, hogy $y - x \in A_+$. Nyilvánvaló, hogy ez a reláció *reflexív* és *tranzitív*, tehát *előrendezés* az A_{sa} halmaz felett, továbbá ez az előrendezés abban az értelemben összhangban áll az A_{sa} valós vektortér-struktúrájával, hogy

– minden $x, y, z \in A_{sa}$ esetén, ha $x \preceq y$, akkor $x + z \preceq y + z$;

– minden $x, y \in A$ és $\alpha \in \mathbb{R}_+$ esetén, ha $x \preceq y$, akkor $\alpha.x \preceq \alpha.y$.

Ezt a $\preceq$ relációt az A_{sa} feletti *természetes előrendezésnek* nevezzük. Nyilvánvaló, hogy a $\preceq$ előrendezés pontosan akkor *rendezés*, ha $A_+ \cap (-A_+) = \{0\}$, hiszen ez a feltétel ekvivalens a $\preceq$ reláció antiszimmetrikusságával.

Világos, hogy ha minden A-beli $(a_i)_{i\in I}$ véges rendszerre, a $\sum\limits_{i\in I} a_i^* a_i = 0$ feltételből következik, hogy minden $i \in I$ esetén $a_i = 0$, akkor $A_+ \cap (-A_+) = \{0\}$.

8) Ha $a, b \in A$, akkor

$$a^*b + b^*a \preceq a^*a + b^*b,$$

mert $a^*a + b^*b - a^*b - b^*a = (a-b)^*(a-b)$. Ebből következik, hogy ha $(a_i)_{i\in I}$ tetszőleges véges rendszer A-ban, akkor

$$\sum_{j,k\in I,\ j\neq k} a_j^* a_k \preceq (\mathrm{Card}(I) - 1) \sum_{j\in I} a_j^* a_j.$$

Ez könnyen igazolható, hiszen

$$\sum_{j,k\in I,\ j\neq k} a_j^* a_k = \frac{1}{2} \sum_{j,k\in I,\ j\neq k} (a_j^* a_k + a_k^* a_j) \preceq \frac{1}{2} \sum_{j,k\in I,\ j\neq k} (a_j^* a_j + a_k^* a_k) =$$

$$= \sum_{j,k\in I,\ j\neq k} a_j^* a_j = \sum_{k\in I} \quad \sum_{j\in I\setminus\{k\}} a_j^* a_j \quad = \sum_{k\in I} \quad \sum_{j\in I} a_j^* a_j \quad - a_k^* a_k \quad =$$

$$= \sum_{k\in I} \quad \sum_{j\in I} a_j^* a_j \quad - \sum_{k\in I} a_k^* a_k = (\mathrm{Card}(I) - 1) \sum_{j\in I} a_j^* a_j.$$

9) Ha $x, y \in A_{sa}$ és $x \preceq y$, akkor minden $a \in A$ esetén $a^*xa, a^*ya \in A_{sa}$ és

$$a^*xa \preceq a^*ya,$$

hiszen $y - x \in A$ esetén van olyan $(a_i)_{i\in I}$ véges rendszer A-ban, amelyre $y - x = \sum\limits_{i\in I} a_i^* a_i$, tehát

$$a^*ya - a^*xa = a^*(y-x)a = \sum_{i\in I} a^*(a_i^* a_i)a = \sum_{i\in I} (a_i a)^*(a_i a) \in A_+.$$

Ebből következik, hogy ha A egységelemes és $a \in \mathbf{G}(A)$, akkor az

$$A_{sa} \to A_{sa}; \quad x \mapsto a^*xa$$

leképezés olyan $\mathbb{R}$-*lineáris bijekció*, amelyre $x, y \in A_{sa}$ esetén $x \preceq y$ *ekvivalens* azzal, hogy $a^*xa \preceq a^*ya$, vagyis ez a leképezés *előrendezés-izomorfizmus*. Ez azon múlik, hogy ha $a \in A$ invertálható elem, akkor a^* is invertálható, és $(a^*)^{-1} = (a^{-1})^*$.

10) Legyen $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 3$, és $z_n := \operatorname{Exp}((2\pi\mathbf{i})/n)$. Ekkor $a, b \in A$ esetén

$$b^*a = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} z_n^k (a + z_n^k b)^*(a + z_n^k b).$$

Ez egyszerű számolással nyerhető, felhasználva a $\sum_{k=0}^{n-1} z_n^k = 0 = \sum_{k=0}^{n-1} z_n^{2k}$ egyenlőségeket. Speciálisan, az $n := 4$ esetben a

$$b^*a = \frac{1}{4}\sum_{k=0}^{3} \mathbf{i}^k (a + \mathbf{i}^k b)^*(a + \mathbf{i}^k b)$$

összefüggést kapjuk, amit *polarizációs formulának* nevezünk.

11) Ha A egységelemes, akkor $A_{sa} = A_+ - A_+$, vagyis az A minden önadjungált eleme előáll pozitív elemek különbségeként, hiszen $x \in A_{sa}$ esetén

$$x = \frac{1}{4}(x + \mathbf{1})^*(x + \mathbf{1}) - \frac{1}{4}(x - \mathbf{1})^*(x - \mathbf{1}) \in A_+ - A_+.$$

Ezért az A minden eleme előáll pozitív elemek komplex lineáris kombinációjaként. Ugyanakkor a nulla-szorzású *-algebrák példája mutatja, hogy $A_+ = \{0\}$ és $A_{sa} \neq \{0\}$ lehetséges.

12) Fennáll az $A_+ = \tilde{A}_+ \cap A$ egyenlőség, ami pontosan azt jelenti, hogy $\{0\} \times A_+ = \tilde{A}_+ \cap (\{0\} \times A)$. Legyen ugyanis $(\lambda, a) \in \tilde{A}_+$; ekkor vehetünk olyan $((\lambda_i, a_i))_{i \in I}$ véges rendszert $\tilde{A}$-ban, amelyre

$$(\lambda, a) = \sum_{i \in I}(\lambda_i, a_i)^*(\lambda_i, a_i) = \sum_{i \in I}(\overline{\lambda_i}, a_i^*)(\lambda_i, a_i) =$$

$$= \left(\sum_{i \in I}|\lambda_i|^2, \sum_{i \in I}\overline{\lambda_i}a_i + \sum_{i \in I}\lambda_i a_i^* + \sum_{i \in I}a_i^* a_i\right).$$

Ezért, ha $(\lambda, a) \in \{0\} \times A$ is teljesül, azaz $\lambda = 0$, akkor minden $i \in I$ esetén $\lambda_i = 0$, így $a = \sum_{i \in I} a_i^* a_i \in A_+$. Ebből az is következik, hogy $x, y \in A_{sa}$ esetén az $x \preceq y$ egyenlőtlenség pontosan akkor teljesül A-ban, ha $\tilde{A}$-ban is igaz.

16.5. Önadjungált funkcionálok

16.5.1. Definíció. *Legyen A *-algebra és $f : A \to \mathbb{C}$ lineáris funkcionál.*

– Az f **adjungáltjának** *nevezzük az*

$$f^* : A \to \mathbb{C}; \quad a \mapsto \overline{f(a^*)}$$

lineáris funkcionált. Azt mondjuk, hogy az f funkcionál **önadjungált**, *vagy* **hermitikus**, *ha* $f^* = f$.

– Ha $a \in A$, *akkor az*

$$a.f : A \to \mathbb{C}; \quad x \mapsto f(ax)$$

$$f.a : A \to \mathbb{C}; \quad x \mapsto f(xa)$$

jelöléseket alkalmazzuk. Továbbá, $a, b \in A$ *esetén* $a.f.b := (a.f).b$, *vagyis* $a.f.b : A \to \mathbb{C}$ *az a lineáris funkcionál, amelyre minden* $A \ni x$*-re* $(a.f.b)(x) = f(axb)$.

– Az f *funkcionált pozitívnak nevezzük, ha* $f\langle A_+\rangle \subseteq \mathbb{R}_+$, *vagy ami ugyanaz: minden* $a \in A$ *esetén* $f(a^*a) \in \mathbb{R}_+$.

Megjegyzések. Legyen A *-algebra és jelölje A^* az A komplex vektortér algebrai duálisát, vagyis az $A \to \mathbb{C}$ lineáris funkcionálok komplex vektorterét.

1) Az $A^* \to A^*$; $f \mapsto f^*$ leképezés olyan konjugált-lineáris bijekció, amely megegyezik a saját inverzével, vagyis minden $f \in A^*$ esetén $(f^*)^* = f$. Ebből az is következik, hogy az A feletti önadjungált funkcionálok halmaza az A^* komplex vektortérnek $\mathbb{R}$-lineáris altere. Továbbá, minden $f \in A^*$ funkcionálra

$$f = \frac{1}{2}(f + f^*) + \mathbf{i}\frac{1}{2\mathbf{i}}(f - f^*)$$

teljesül, és az $\frac{1}{2}(f + f^*)$ és $\frac{1}{2\mathbf{i}}(f - f^*)$ funkcionálok önadjungáltak, tehát minden $f \in A^*$ előáll $f = f_1 + \mathbf{i}f_2$ alakban, ahol f_1 és f_2 önadjungált funkcionálok A felett. Ez az előállítás egyértelmű is, mert ha $f \in A^*$ és $f = f_1 + \mathbf{i}f_2$, ahol f_1 és f_2 önadjungált funkcionálok A felett, akkor $f^* = f_1 - \mathbf{i}f_2$, így ebből a két egyenlőségből $f_1 = \frac{1}{2}(f + f^*)$ és $f_2 = \frac{1}{2\mathbf{i}}(f - f^*)$ következik.

2) Minden $f \in A^*$ esetén a következő állítások ekvivalensek.

(i) f önadjungált.

(ii) Minden $x \in A_{sa}$ esetén $f(x) \in \mathbb{R}$.

(iii) Létezik (egyértelműen) olyan $g : A_{sa} \to \mathbb{R}$ lineáris funkcionál, amelyre f a g kiterjesztése.

Valóban, (i)$\Rightarrow$(ii) azért igaz, mert ha $x \in A_{sa}$, akkor az (i) alapján $\overline{f(x)} = \overline{f(x^*)} =: f^*(x) = f(x)$, vagyis $f(x) \in \mathbb{R}$. Továbbá, ha (ii) teljesül, akkor a $g := f|_{A_{sa}} : A_{sa} \to \mathbb{R}$ leképezés az a lineáris funkcionál, amelynek f a kiterjesztése, ezért (ii)$\Rightarrow$(iii) teljesül. Ha (iii) igaz, és $g : A_{sa} \to \mathbb{R}$ olyan lineáris funkcionál, hogy f a g kiterjesztése, akkor $x, y \in A_{sa}$ esetén $f(x) = g(x) \in \mathbb{R}$ és $f(y) = g(y) \in \mathbb{R}$, tehát

$$f^*(x + \mathbf{i}y) := \overline{f((x + \mathbf{i}y)^*)} = \overline{f(x - \mathbf{i}y)} = \overline{f(x) - \mathbf{i}f(y)} =$$

$$= \overline{g(x) - \mathbf{i}g(y)} = g(x) + \mathbf{i}g(y) = f(x) + \mathbf{i}f(y) = f(x + \mathbf{i}y)$$

tehát $f^* = f$, így (iii)$\Rightarrow$(i) teljesül.

Ebből az is következik, hogy az $f \to f|_{A_{sa}}$ leképezés bijekció az A feletti önadjungált funkcionálok valós vektortere és az A_{sa} valós vektortér algebrai duálisa között.

3) Ha $a \in A$ és $f \in A^*$, akkor $(a.f)^* = f^*.a^*$ és $(f.a)^* = a^*.f^*$; ez egyszerű számolással igazolható.

4) Vigyázzunk arra, hogy pozitív funkcionál nem szükségképpen önadjungált. Például, nulla-szorzású *-algebra felett minden lineáris funkcionál triviálisan pozitív, de sok nem önadjungált lineáris funkcionál létezhet. A pozitív funkcionálokkal később részletesen foglalkozunk.

5) Az A feletti önadjungált funkcionálok valós vektortere felett értelmezzük azt a $\preceq$ relációt, amelyre $f \preceq g$ pontosan akkor teljesül, ha a $g - f$ funkcionál pozitív, vagyis minden $a \in A$ esetén $f(a^*a) \leq g(a^*a)$. Világos, hogy ez a $\preceq$ reláció reflexív és tranzitív, tehát előrendezés az A feletti önadjungált funkcionálok valós vektortere felett, amit a *természetes előrendezésnek nevezük.* Ez pontosan akkor rendezés, ha minden $f : A \to \mathbb{C}$ önadjungált funkcionálra, az $A_+ \subseteq \mathrm{Ker}(f)$ feltételből $f = 0$ következik. Speciálisan, ha A előáll az A_+ halmaz lineáris burkaként (például A egységelemes), akkor ez a reláció rendezés.

16.6. Egységelemes *-algebrák típusai

Most az egységelemes *-algebrák elemi és összetett tulajdonságait vizsgáljuk, és kijelöljük az egységelemes *-algebrák legfontosabb típusait. Ezután megfogalmazzuk a *struktúra-tétellel* kapcsolatos alapvető problémát egységelemes *-algebrákra.

16.6.1. Definíció. *Az A *-algebrát* **Abel-típusúnak** *nevezzük, ha az A minden projektora kommutál az A minden elemével, vagyis $\mathbf{P}(A) \subseteq C(A)$. Az A egységelemes *-algebrát* **végesnek** *nevezzük, ha minden $a \in A$ esetén az $a^*a = \mathbf{1}$ feltételből $aa^* = \mathbf{1}$ következik. Ha A *-algebra, akkor az $e \in \mathbf{P}(A)$ projektort* **Abel-projektornak** (*illetve* **véges projektornak**) *nevezzük, ha az eAe redukált *-algebra Abel-típusú* (*illetve véges*).

Nyilvánvaló, hogy minden kommutatív *-algebra Abel-típusú, és bármely *-algebrában a 0 elem egyszerre Abel-típusú és véges.

Ha $\mathscr{H}$ Hilbert-tér, akkor az $\mathscr{L}(\mathscr{H})$ operátor-*-algebra pontosan akkor véges, ha $\mathscr{H}$ véges dimenziós (innen származik az elnevezés). Valóban, ha $\mathscr{H}$ véges dimenziós és $a \in \mathscr{L}(\mathscr{H})$ olyan, hogy $a^* \circ a = id_{\mathscr{H}}$, akkor az a operátor injektív, így szürjektív is és $a^{-1} = a^*$, tehát $a \circ a^* = id_{\mathscr{H}}$ is teljesül. Az $\mathbf{l}^2_{\mathbb{C}}$ Hilbert-tér esetében megadható olyan $a \in \mathscr{L}(\mathbf{l}^2_{\mathbb{C}})$ operátor, amelyre $a^* \circ a = id_{\mathbf{l}^2_{\mathbb{C}}}$ és az $a \circ a^*$ operátor nem injektív. Ilyen például az az $a : \mathbf{l}^2_{\mathbb{C}} \to \mathbf{l}^2_{\mathbb{C}}$ operátor, amelyre $\mathbf{s} \in \mathbf{l}^2_{\mathbb{C}}$ és $n \in \mathbb{N}$ esetén $(a(\mathbf{s}))(n) := \mathbf{s}(n-1)$, ha $n > 0$, és $(a(\mathbf{s}))(0) := 0$. Ez azt jelenti, hogy az $\mathscr{L}(\mathbf{l}^2_{\mathbb{C}})$ *-algebra nem véges. Ebből kiindulva belátható, hogy bármely $\mathscr{H}$ végtelen dimenziós Hilbert-térre az $\mathscr{L}(\mathscr{H})$ operátor-*-algebra nem véges.

16.6.2. Állítás. *Minden Abel-típusú egységelemes *-algebra véges. Minden Abel-projektor véges projektor.*

Bizonyítás. Legyen A egységelemes Abel-típusú *-algebra, és legyen $a \in A$ olyan, hogy $a^*a = \mathbf{1}$. Világos, hogy $aa^* \in A_{sa}$ és $(aa^*)(aa^*) = a(a^*a)a^* = a\mathbf{1}a^* = aa^*$, tehát $aa^* \in \mathbf{P}(A) \subseteq C(A)$. Ezért fennállnak a következő egyenlőségek

$$\mathbf{1} = (a^*a)(a^*a) = (a^*(aa^*))a = ((aa^*)a^*)a = (aa^*)(a^*a) = aa^*.$$

Ez azt jelenti, hogy A véges *-algebra. Ebből következik, hogy minden Abel-típusú projektor véges. ■

16.6.3. Definíció. *Legyen A egységelemes *-algebra.*

– *Az $a \in A$ elemet* **centrálisnak** *nevezzük, ha a kommutál az A minden elemével, vagyis $a \in C(A)$. Az A centrális elemeinek halmazát az A* **centrumának** *nevezzük.*

– *Azt mondjuk, hogy az $e \in \mathbf{P}(A)$ projektor* **hű**, *ha minden $f \in \mathbf{P}(A)$ centrális projektorra, $e = ef$ esetén $f = \mathbf{1}$ teljesül.*

16.6.4. Definíció. *Azt mondjuk, hogy az A egységelemes *-algebra*

– **diszkrét**, *ha létezik hű Abel-projektor A-ban,*

– **folytonos**, *ha 0 az egyetlen Abel-projektor A-ban,*

– **félig-véges**, *ha létezik hű véges projektor A-ban,*

– **tisztán végtelen**, *ha 0 az egyetlen véges projektor A-ban,*

– **valóban végtelen**, *ha 0 az egyetlen centrális véges projektor A-ban,*

– **valóban nem Abel-típusú**, *ha 0 az egyetlen centrális Abel-projektor A-ban.*

*Azt mondjuk továbbá, hogy az A egységelemes *-algebra*

– **I. típusú**, *ha diszkrét,*

– **II. típusú**, *ha folytonos és félig-véges,*

– **III. típusú**, *ha tisztán végtelen.*

Azt mondjuk, hogy két tulajdonság, amelyek egységelemes *-algebrákra vonatkoznak egymás *komplementerei*, ha csak a 0 dimenziós *-algebra rendelkezik mindkét tulajdonsággal egyszerre. Könnyen látható, hogy következő tulajdonság-párok komplementerek:

– diszkrétség és folytonosság,

– félig végesség és tisztán végtelenség,

– végesség és valóban végtelenség,

– Abel-típusosság és valóban nem Abel-típusosság.

Ebből az is következik, hogy az I., II. és III. típusosság páronként komplementer tulajdonságok. Továbbá, a definíciók alapján nyilvánvalók a következő állítások:

– minden kommutatív *-algebra Abel-típusú;

– minden Abel-típusú *-algebra diszkrét *és* véges;

– minden diszkrét *vagy* véges *-algebra félig-véges;

– minden tisztán végtelen *-algebra folytonos *és* valóban végtelen;

– minden folytonos *vagy* valóban végtelen *-algebra valóban nem Abel-típusú.

Példa. Ha $\mathscr{H}$ Hilbert-tér, akkor az $\mathscr{L}(\mathscr{H})$ *-algebra I. típusú, mert minden $P \in \mathbf{P}(\mathscr{L}(\mathscr{H}))$ projektorra, ha $\dim(\mathrm{Im}(P)) = 1$, akkor P hű Abel-projektor $\mathscr{L}(\mathscr{H})$-ban.

Legyen $\mathfrak{M}$ egységelemes *-algebráknak tetszőleges osztálya. Azt mondjuk, hogy az $\mathfrak{M}$-re teljesül a *struktúra-tétel*, ha minden $A \in \mathfrak{M}$ algebrához léteznek olyan A_I, A_{II}, $A_{III} \in \mathfrak{M}$ algebrák, amelyekre $A = A_I \oplus A_{II} \oplus A_{III}$, és A_I I. típusú, A_{II} II. típusú, és A_{III} III. típusú *-algebrák.

17. fejezet

Normált *-algebrák

17.1. Elemi normált *-algebra konstrukciók

17.1.1. Definíció. *Azt mondjuk, hogy* A **normált *-algebra***, vagy* **involutív normált algebra***, ha* A **-algebra, és adott az* A *komplex vektortér felett egy* $\|\cdot\|$ *norma, amelyre teljesülnek a következők:*

– minden $a, b \in A$ *esetén* $\|ab\| \leq \|a\|\|b\|$*, vagyis a norma* **szubmultiplikatív***, és*

– minden $a \in A$ *esetén* $\|a^*\| = \|a\|$*, vagyis az* A *involúciója izometria.*

*A teljes normált *-algebrákat* **Banach-*-algebráknak** *nevezzük.*

17.1.2. Definíció. *Azt mondjuk, hogy az* A *normált *-algebra* **pre-C^*-algebra***, ha minden* $a \in A$ *esetén* $\|a^*a\| = \|a\|^2$*. A teljes pre-*C^**-algebrákat* **C^*-algebráknak** *nevezzük.*

Megjegyzések. 1) Legyen A *-algebra és $\|\cdot\|$ olyan norma az A komplex vektortér felett, amely szubmultiplikatív. Ekkor az A pontosan akkor pre-C^*-algebra, ha minden $a \in A$ esetén $\|a\|^2 \leq \|a^*a\|$ teljesül. Valóban, ha fennáll ez az egyenlőtlenség, akkor a norma szubmultiplikativitása miatt minden $a \in A$ esetén $\|a\|^2 \leq \|a^*a\| \leq \|a^*\|\|a\|$, tehát $\|a\| \leq \|a^*\|$. Ebből következik, hogy az A involúciója izometria, ezért $a \in A$ esetén $\|a\|^2 \leq \|a^*a\| \leq \|a^*\|\|a\| = \|a\|^2$, vagyis $\|a^*a\| = \|a\|^2$.

2) Legyen A normált *-algebra. Ha $e \in \mathbf{P}(A)$, akkor $e = e^*e$, így $\|e\| \leq \|e^*\|\|e\| = \|e\|^2$, tehát $e \neq 0$ esetén $\|e\| \geq 1$. Ha A pre-C^*-algebra és $e \in \mathbf{P}(A)$, akkor $\|e\| = \|e^*e\| = \|e\|^2$, tehát $e \neq 0$ esetén $\|e\| = 1$.

3) Ha A egységelemes normált *-algebra és $A \neq \{0\}$ (vagyis $\mathbf{1} \neq 0$), akkor $u \in \mathbf{U}(A)$ esetén $1 \leq \|\mathbf{1}\| = \|u^*u\| \leq \|u\|^2$, tehát $\|u\| \geq 1$. Ha A egységelemes pre-C^*-algebra, és $A \neq \{0\}$, akkor $u \in \mathbf{U}(A)$ esetén $1 \leq \|u\|^2 = \|u^*u\| = \|\mathbf{1}\| = 1$, tehát $\|u\| = 1$, hiszen a 2) alapján $\|\mathbf{1}\| = 1$.

4) Ha A pre-C^*-algebra, akkor involúciója valódi, mert minden $a \in A$ esetén, ha $a^*a = 0$,

akkor $\|a\|^2 = \|a^*a\| = 0$, így $a = 0$.

5) Legyen A egységelemes Banach-*-algebra. Ekkor $a \in A$ esetén

$$(\mathrm{Exp}_A(a))^* = \mathrm{Exp}_A(a^*),$$

hiszen az involúció folytonos a norma szerint, így

$$(\mathrm{Exp}_A(a))^* := \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{a^k}{k!}\right)^* = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{a^k}{k!}\right)^* = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(a^*)^k}{k!} =: \mathrm{Exp}_A(a^*).$$

Ebből következik, hogy ha $x \in A$ önadjungált, akkor $\mathrm{Exp}_A(\mathbf{i}.x)$ unitér, hiszen

$$(\mathrm{Exp}_A(\mathbf{i}.x))^* = \mathrm{Exp}_A((\mathbf{i}.x)^*) = \mathrm{Exp}_A(-\mathbf{i}.x) = (\mathrm{Exp}_A(\mathbf{i}.x))^{-1}.$$

Most összefoglaljuk a legfontosabb normált *-algebra konstrukciókat.

– Normált *-algebra (illetve pre-C^*-algebra) minden *-részalgebrája a norma leszűkítésével ellátva szintén normált *-algebra (illetve pre-C^*-algebra). Banach-*-algebra (illetve C^*-algebra) minden *zárt* *-részalgebrája Banach-*-algebra (illetve C^*-algebra). Ha A normált *-algebra és $e \in \mathbf{P}(A)$, akkor az eAe redukált részalgebra zárt *-részalgebra A-ban. Ha A normált *-algebra és $S \subseteq A$ tetszőleges *önadjungált* halmaz, vagyis minden $s \in S$ esetén $s^* \in S$, akkor a $C(S)$ kommutáns zárt *-részalgebra A-ban.

– Legyen $(A_i)_{i \in I}$ normált *-algebrák tetszőleges rendszere és

$$\prod_{i\in I}^{*} A_i := \left\{ a \in \prod_{i \in I} A_i \mid \sup_{i \in I} \|a(i)\| < +\infty \right\}.$$

Ez a halmaz *-részalgebrája az $(A_i)_{i \in I}$ *-algebra-rendszer szorzatának, és a

$$\prod_{i\in I}^{*} A_i \to \mathbb{R}_+; \quad a \mapsto \sup_{i \in I} \|a(i)\|$$

leképezés olyan norma, amellyel ellátva $\prod\limits_{i\in I}^{*} A_i$ normált *-algebra. Ezt a normált *-algebrát nevezzük az $(A_i)_{i \in I}$ normált-*-algebra-rendszer *szorzatának.* Ha minden $I \ni i$-re A_i pre-C^*-algebra (illetve Banach-*-algebra, illetve C^*-algebra), akkor a $\prod\limits_{i\in I}^{*} A_i$ normált *-algebra szintén pre-C^*-algebra (illetve Banach-*-algebra, illetve C^*-algebra).

– Legyen A normált *-algebra és $\mathfrak{m}$ *zárt* *-ideál A-ban. Tudjuk, hogy ekkor az $A/\mathfrak{m}$ faktoralgebra felett a faktornorma szubmultiplikatív, és könnyen látható, hogy az $A/\mathfrak{m}$ feletti természetes involúció izometria a faktornorma szerint, hiszen ha $\zeta \in A/\mathfrak{m}$ és $a \in \zeta$, vagyis $\zeta = \pi_{A/\mathfrak{m}}(a)$, akkor minden $x \in A$ esetén az $x \in a^* + \mathfrak{m}$ és $x^* \in a + \mathfrak{m}$ kijelentések ekvivalensek, mert $\mathfrak{m}$ *-ideál, és persze $\|x\| = \|x^*\|$, így

$$\|\zeta^*\| = \|\pi_{A/\mathfrak{m}}(a)^*\| = \|\pi_{A/\mathfrak{m}}(a^*)\| = \inf_{x \in a^* + \mathfrak{m}} \|x\| =$$

$$= \inf_{x \in A,\ x^* \in a + \mathfrak{m}} \|x^*\| = \inf_{x \in a + \mathfrak{m}} \|x\| = \|\pi_{A/\mathfrak{m}}(a)\| = \|\zeta\|.$$

Tehát $A/\mathfrak{m}$ a faktornormával ellátva normált *-algebra. Az ilyen alakú normált *-algebrákat *normált faktor-*-algebráknak* nevezzük. Ha A Banach-*-algebra és $\mathfrak{m}$ zárt *-ideál A-ban, akkor az $A/\mathfrak{m}$ normált faktor-*-algebra Banach-*-algebra. Egyáltalán nem triviális, de igaz az, hogy ha A C^*-algebra és $\mathfrak{m}$ zárt ideál A-ban, akkor $\mathfrak{m}$ *-ideál és az $A/\mathfrak{m}$ normált faktor-*-algebra is C^*-algebra. A 19.6. pontban megmutatjuk majd, hogy az ún. MSC-*algebrákban*, amelyek speciális C^*-algebrák, minden ideál automatikusan *-ideál.

– Ha A normált *-algebra (illetve pre-C^*-algebra) és $\hat{A}$ az A normált tér teljes burka, akkor $\hat{A}$-ra természetes módon kiterjeszthető az A szorzása és involúciója, továbbá az egyenlőségek folytatásának elve alapján az $\hat{A}$ Banach-tér ezzel a szorzással és involúcióval ellátva Banach-*-algebra (illetve C^*-algebra).

17.2. Példák normált *-algebrákra

(I) *Függvényalgebrák.* Ha T halmaz, akkor a $T \to \mathbb{C}$ korlátos függvények $\mathscr{F}^b(T;\mathbb{C})$ algebrája a

$$\mathscr{F}^b(T;\mathbb{C}) \to \mathbb{R}_+; \quad f \mapsto \sup_{t \in T} |f(t)|$$

sup-normával ellátva egységelemes kommutatív C^*-algebra. Ennek nevezetes normált *-részalgebrái a következők.

– Ha T topologikus tér, akkor a $T \to \mathbb{C}$ korlátos folytonos függvények $\mathscr{C}^b(T;\mathbb{C})$ halmaza zárt *-részalgebra $\mathscr{F}^b(T;\mathbb{C})$-ben, így $\mathscr{C}^b(T;\mathbb{C})$ szintén kommutatív egységelemes C^*-algebra.

– Ha T lokálisan kompakt tér, akkor a $T \to \mathbb{C}$ kompakt tartójú folytonos függvények $\mathscr{K}(T;\mathbb{C})$ halmaza, valamint a $T \to \mathbb{C}$ végtelenben eltűnő folytonos függvények $\overline{\mathscr{K}}(T;\mathbb{C})$ halmaza *-részalgebrája a $\mathscr{C}^b(T;\mathbb{C})$ C^*-algebrának. Ha T nem kompakt, akkor a $\mathscr{K}(T;\mathbb{C})$ pre-C^*-algebra nem egységelemes és nem teljes, de természetesen kommutatív. Ugyanakkor tetszőleges T lokálisan kompakt térre $\overline{\mathscr{K}}(T;\mathbb{C})$ olyan kommutatív C^*-algebra, amely pontosan akkor egységelemes, ha T kompakt.

– Ha $\mathscr{R}$ halmazgyűrű a T halmaz felett, akkor a $T \to \mathbb{C}$ $\mathscr{R}$-lépcsősfüggvények $\mathscr{E}_{\mathbb{C}}(T,\mathscr{R})$ halmaza, valamint a $T \to \mathbb{C}$ $\mathscr{R}$-egyszerű függvények $\mathscr{E}_{\mathbb{C}}(T,\mathscr{R})$ halmaza *-részalgebrája az $\mathscr{F}^b(T;\mathbb{C})$ C^*-algebrának. Világos, hogy $\mathscr{E}_{\mathbb{C}}(T,\mathscr{R})$ kommutatív pre-C^*-algebra és $\mathscr{E}_{\mathbb{C}}(T,\mathscr{R})$ kommutatív C^*-algebra.

(II) *Operátoralgebrák.* Ha $\mathscr{H}$ Hilbert-tér, akkor a $\mathscr{H} \to \mathscr{H}$ folytonos lineáris operátorok $\mathscr{L}(\mathscr{H})$ *-algebrája az operátornormával ellátva egységelemes C^*-algebra. Az ilyen alakú C^*-algebrák normált *-részalgebráit *normált operátor-*-algebráknak* nevezzük. A legfontosabb normált operátor-*-algebrák a *Neumann-algebrák*, amelyek speciális szerkezetű egységelemes C^*-algebrák.

(III) *Csoportalgebrák.* Legyen G csoport és tekintsük az $A_{\mathbb{C}}(G)$ konvolúciós *-algebrát. Ekkor az $A_{\mathbb{C}}(G)$ feletti

$$A_{\mathbb{C}}(G) \to \mathbb{R}_+; \quad a \mapsto \|a\| := \sum_{s\in G} |a(s)|$$

norma szerint az $A_{\mathbb{C}}(G)$ involúciója izometria, hiszen minden $a \in \mathbb{C}^{(G)}$ esetén

$$\|a^*\| := \sum_{s\in G} \left|\overline{a(s^{-1})}\right| = \sum_{s\in G} |a(s)| =: \|a\|.$$

Ezért az $A_{\mathbb{C}}(G)$ konvolúciós algebra ezzel a normával ellátva normált *-algebra; ez általában nem teljes és nem pre-C^*-algebra. Az $A_{\mathbb{C}}(G)$ alakú *-algebrákat ezzel a normával ellátva *csoportalgebráknak* nevezzük.

(IV) *Speciális példák.*

– Legyen A komplex normált tér, és $D : A \to A$ tetszőleges olyan konjugált-lineáris operátor, amely izometria és eleget tesz a $D \circ D = id_A$ feltételnek. Legyen minden $a \in A$ esetén $a^* := D(a)$. Ekkor az A komplex vektortér a 0 szorzással, a * involúcióval és az adott normával ellátva kommmutatív normált *-algebra. Az ilyen alakú normált *-algebrákat *nulla-szorzású normált *-algebráknak* nevezzük.

– A diszk-algebra a természetes involúcióval és a sup-normával ellátva egységelemes kommutatív Banach-*-algebra. Később megmutatjuk, hogy ez nem C^*-algebra.

17.3. Normált *-algebrák egységelemesítése

17.3.1. Lemma. *Ha az E normált térnek létezik véges kodimenziós teljes lineáris altere, akkor E Banach-tér.*

Bizonyítás. Legyen M véges kodimenziós teljes lineáris altere E-nek, és jelölje $\pi_{E/M}$ az $E \to E/M$ kanonikus szürjekciót. Az M altér teljes, ezért E/M felett a faktorfélnorma norma lesz; az E/M faktorteret ellátjuk a faktornormával. A $\pi_{E/M}$ kanonikus szürjekció folytonos lineáris operátor, és E/M véges dimenziós normált tér, így vehetünk olyan $v : E/M \to E$ folytonos lineáris operátort, amelyre $\pi_{E/M} \circ v = id_{E/M}$. Legyen $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$

Cauchy-sorozat E-ben. Ekkor $(\pi_{E/M}(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ is Cauchy-sorozat E/M-ben, és E/M teljes, tehát ez konvergens sorozat az E/M faktortérben, így a $(v\quad\pi_{E/M}(x_n)\quad)_{n\in\mathbb{N}}$ sorozat konvergens E-ben. Ebből következik, hogy $(v\quad\pi_{E/M}(x_n)\quad - x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ Cauchy-sorozat E-ben. Minden $\mathbb{N} \ni n$-re $\pi_{E/M}\quad v\quad\pi_{E/M}(x_n)\quad - x_n\quad = 0$, azaz $v\quad\pi_{E/M}(x_n)\quad - x_n \in M$, így az M teljessége folytán a $(v\quad\pi_{E/M}(x_n)\quad - x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sorozat konvergens E-ben (és a határértéke eleme M-nek). Ebből következik, hogy az $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sorozat konvergens E-ben, vagyis E teljes. ■

17.3.2. Állítás. *Legyen A normált *-algebra, és $\tilde{A}$ az A *-algebra standard egységelemesítése.*

a) *Az $\tilde{A}$ *-algebra az*

$$\tilde{A} \to \mathbb{R}_+; \quad (\lambda, a) \mapsto |\lambda| + \|a\|$$

*normával ellátva egységelemes normált *-algebra, és az $A \to \tilde{A}$; $a \mapsto (0, a)$ kanonikus leképezés izometrikus *-algebra-morfizmus. Ha A Banach-*-algebra, akkor $\tilde{A}$ ezzel a normával ellátva egységelemes Banach-*-algebra.*

b) *Ha A egységelemes pre-C^*-algebra, akkor az $\tilde{A}$ *-algebra az*

$$\tilde{A} \to \mathbb{R}_+; \quad (\lambda, a) \mapsto \max(|\lambda|, \|a + \lambda\mathbf{1}\|)$$

*normával ellátva egységelemes pre-C^*-algebra, és az $A \to \tilde{A}$; $a \mapsto (0, a)$ kanonikus leképezés izometrikus *-algebra-morfizmus. Ha A egységelemes C^*-algebra, akkor $\tilde{A}$ ezzel a normával ellátva egységelemes C^*-algebra.*

c) *Ha A nem egységelemes pre-C^*-algebra, akkor az $\tilde{A}$ *-algebra az*

$$\tilde{A} \to \mathbb{R}_+; \quad (\lambda, a) \mapsto \sup_{x\in A,\ \|x\|\leq 1} \|\lambda x + ax\|$$

*normával ellátva egységelemes pre-C^*-algebra, és az $A \to \tilde{A}$; $a \mapsto (0, a)$ kanonikus leképezés izometrikus *-algebra-morfizmus. Ha A nem egységelemes C^*-algebra, akkor $\tilde{A}$ ezzel a normával ellátva egységelemes C^*-algebra.*

Bizonyítás. a) Az $\tilde{A}$ involúciója izometria az

$$\tilde{A} \to \mathbb{R}_+; \quad (\lambda, a) \mapsto |\lambda| + \|a\|$$

norma szerint, mert $(\lambda, a) \in \tilde{A}$ esetén

$$\|(\lambda, a)^*\| = \|(\overline{\lambda}, a^*)\| := |\overline{\lambda}| + \|a^*\| = |\lambda| + \|a\| =: \|(\lambda, a)\|.$$

Ezért $\tilde{A}$ ezzel a normával ellátva normált *-algebra. Ha A teljes, akkor $\tilde{A}$ ezzel a normával ellátva szintén teljes, hiszen ez a norma a $\mathbb{C}$ feletti euklidészi norma és az A feletti norma szorzatával ekvivalens $\mathbb{C} \times A$ felett.

b) Legyen A egységelemes pre-C^*-algebra, és tekintsük a

$$\|\cdot\| : \tilde{A} \to \mathbb{R}_+; \quad (\lambda, a) \mapsto \max(|\lambda|, \|a + \lambda\mathbf{1}\|)$$

leképezést. Ezt úgy kapjuk, hogy a $\mathbb{C} \times A$ feletti szorzatnormának és a

$$\pi : \tilde{A} \to \mathbb{C} \times A; \quad (\lambda, a) \mapsto (\lambda, a + \lambda\mathbf{1})$$

leképezésnek a kompozícióját vesszük. Nyilvánvaló, hogy a π függvény *-algebra-izomorfizmus az $\tilde{A}$ *-algebra és a $\mathbb{C} \times A$ *-algebra-szorzat között. Ugyanakkor a $\mathbb{C} \times A$ *-algebra-szorzat a szorzatnormával ellátva pre-C^*-algebra, így $\tilde{A}$ a $\|\cdot\|$ függvénnyel ellátva szintén pre-C^*-algebra. Ha A egységelemes C^*-algebra, akkor a $\mathbb{C} \times A$ *-algebra-szorzat a szorzatnormával ellátva teljes, és $\mathbb{C} \times A$ a π által izometrikusan *-izomorf a $\|\cdot\|$ normával ellátott $\tilde{A}$ *-algebrával, így $\tilde{A}$ szintén teljes.

c) Tegyük fel, hogy A nem egységelemes pre-C^*-algebra, és tekintsük a

$$\|\cdot\| : \tilde{A} \to \mathbb{R}_+; \quad (\lambda, a) \mapsto \sup_{x \in A,\ \|x\| \leq 1} \|\lambda x + ax\|$$

leképezést. Minden $(\lambda, a) \in \tilde{A}$ elemre legyen

$$L_{(\lambda,a)} : A \to A; \quad x \mapsto \lambda x + ax.$$

Világos, hogy minden $\tilde{A} \ni (\lambda, a)$-ra $L_{(\lambda,a)} : A \to A$ folytonos lineáris operátor az A normált tér felett, és az imént bevezetett $\|\cdot\| : \tilde{A} \to \mathbb{R}_+$ leképezés úgy áll elő, mint az $\mathscr{L}(A)$ feletti operátornormának és a

$$\tau : \tilde{A} \to \mathscr{L}(A); \quad (\lambda, a) \mapsto L_{(\lambda,a)}$$

leképezésnek a kompozíciója. Ha tehát a $\tau : \tilde{A} \to \mathscr{L}(A)$ leképezés injektív algebra-morfizmus volna, akkor $\|\cdot\|$ olyan norma lenne $\tilde{A}$ felett, amellyel ellátva $\tilde{A}$ normált algebra lenne. Az világos, hogy τ lineáris operátor, ezért elég a multiplikativitását és injektivitását igazolni.

Ha $(\lambda, a), (\sigma, b) \in \tilde{A}$, akkor minden $x \in A$ esetén

$$L_{(\lambda,a)} \circ L_{(\sigma,b)}\ (x) = L_{(\lambda,a)}(\sigma x + bx) = \lambda(\sigma x + bx) + a(\sigma x + bx) =$$

$$= (\lambda\sigma)x + (\lambda b + \sigma a + ab)x = L_{(\lambda\sigma, \lambda b + \sigma a + ab)}(x) = L_{(\lambda,a)(\sigma,b)}(x),$$

tehát $L_{(\lambda,a)} \circ L_{(\sigma,b)} = L_{(\lambda,a)(\sigma,b)}$, vagyis a τ leképezés multiplikatív. (Eddig nem használtuk fel azt, hogy A *nem egységelemes*!)

A τ leképezés injektivitásának bizonyításához legyen $(\lambda, a) \in \tilde{A}$ olyan, hogy $L_{(\lambda,a)} = 0$, vagyis minden $A \ni x$-re $\lambda x + ax = 0$. Ha $\lambda \neq 0$ teljesülne, akkor ebből következne, hogy minden $x \in A$ esetén $(-\lambda^{-1}a)x = x$, tehát $-\lambda^{-1}a$ az A *baloldali* egységeleme volna, így A egységelemes lenne. Ezért $\lambda = 0$, így aztán minden $A \ni x$-re $ax = 0$. Speciálisan, $aa^* = 0$ is teljesül, tehát $\|a\|^2 = \|a^*\|^2 = \|aa^*\| = 0$, vagyis $a = 0$. Ez azt jelenti, hogy τ injekció, így a $\|\cdot\| : \tilde{A} \to \mathbb{R}_+$ függvény szubmultiplikatív norma az $\tilde{A}$ algebra felett.

Azt kell még igazolni, hogy minden $\tilde{A} \ni \tilde{a}$-ra $\|\tilde{a}^*\| = \|\tilde{a}\|$ és $\|\tilde{a}^*\tilde{a}\| = \|\tilde{a}\|^2$. Ha $(\lambda, a) \in \tilde{A}$ és $x \in A$, akkor

$$\left\|L_{(\lambda,a)}(x)\right\|^2 = \|\lambda x + ax\|^2 = \|(\lambda x + ax)^*(\lambda x + ax)\| = \|(\overline{\lambda}x^* + x^*a^*)(\lambda x + ax)\| =$$

$$= \||\lambda|^2 x^*x + \overline{\lambda}x^*ax + \lambda x^*a^*x + x^*a^*ax\| = \|x^*\ \ |\lambda|^2x + \overline{\lambda}ax + \lambda a^*x + a^*ax\ \ \| \leq$$

$$\leq \|x^*\|\||\lambda|^2x + \overline{\lambda}ax + \lambda a^*x + a^*ax\| = \|x\|\left\|L_{(|\lambda|^2, \overline{\lambda}a + \lambda a^* + a^*a)}(x)\right\| =$$

$$= \|x\|\left\|L_{(\lambda,a)^*(\lambda,a)}(x)\right\|.$$

Ebből következik, hogy minden $(\lambda, a) \in \tilde{A}$ esetén

$$\|(\lambda, a)\|^2 = \sup_{x \in A,\ \|x\| \leq 1} \left\|L_{(\lambda,a)}(x)\right\|^2 \leq \sup_{x \in A,\ \|x\| \leq 1} \left\|L_{(\lambda,a)^*(\lambda,a)}(x)\right\| = \|(\lambda, a)^*(\lambda, a)\|,$$

tehát az 1) megjegyzés alapján $\tilde{A}$ a $\|\cdot\|$ normával ellátva pre-C^*-algebra. Ha $a \in A$, akkor $\|(0, a)\| = \sup\limits_{x \in A,\ \|x\| \leq 1} \|ax\|$, amiből azonnal látható, hogy $\|(0, a)\| \leq \|a\|$. Ugyanakkor, $a \in A$ és $a \neq 0$ esetén $\left\|\dfrac{a^*}{\|a\|}\right\| = 1$, így $\|a\| = \|a^*\| = \left\|\dfrac{aa^*}{\|a\|}\right\| \leq \|(0, a)\|$, ami azt jelenti, hogy az $A \to \tilde{A}$; $a \mapsto (0, a)$ kanonikus leképezés izometrikus *-algebra-morfizmus. Ez úgy is megfogalmazható, hogy az $A \to \tilde{A}$; $a \mapsto (0, a)$ kanonikus leképezés izometrikus *-algebra izomorfizmus az A pre-C^*-algebra és a $\{0\} \times A$ normált *-részalgebra között. Ezért ha A teljes, akkor $\{0\} \times A$ 1-kodimenziós teljes lineáris altere az $\tilde{A}$ normált térnek, így az előző lemma szerint az $\tilde{A}$ pre-C^*-algebra is teljes. ■

De vigyázzunk arra, hogy ha A pre-C^*-algebra, akkor $\tilde{A}$ a

$$\tilde{A} \to \mathbb{R}_+; \quad (\lambda, a) \mapsto |\lambda| + \|a\|$$

normával ellátva általában *nem pre-C^*-algebra*. Pontosabban: ha A normált *-algebra, akkor $\tilde{A}$ a fenti normával ellátva pontosan akkor pre-C^*-algebra, ha A nulla dimenziós. Valóban, ha ez a norma pre-C^*-norma $\tilde{A}$ felett, akkor $a \in A$ és $t \in \mathbb{R}^+$ esetén $\|(\mathbf{i}t, a)^*(\mathbf{i}t, a)\| = \|(\mathbf{i}t, a)\|^2$, amiből egyszerű számolással kapjuk, hogy $\|\mathbf{i}t(a^* - a) + a^*a\| = 2t\|a\| + \|a\|^2$. Itt rögzítve a $a \in A$ elemet és osztva a tetszőleges $t \in \mathbb{R}^+$ számmal, majd t-vel $+\infty$-be tartva kapjuk, hogy $\|a^* - a\| = 2\|a\|$. Ebből következik, hogy az A minden önadjungált eleme 0, ezért A nulla dimenziós.

17.4. *-algebra morfizmusok folytonossága

A következő állítás bizonyítása előtt megjegyezzük, hogy ha A normált *-algebra, akkor minden $a \in A$ esetén $\rho(a^*) = \rho(a)$ nyilvánvalóan teljesül, mert minden $\mathbb{N}^+ \ni n$-re az involúció izometrikussága és $(a^*)^n = (a^n)^*$ miatt $\|(a^*)^n\| = \|(a^n)^*\| = \|a^n\|$, így

$$\rho(a^*) := \inf_{n\in\mathbb{N}^+} \|(a^*)^n\|^{1/n} = \inf_{n\in\mathbb{N}^+} \|a^n\|^{1/n} =: \rho(a).$$

17.4.1. Állítás. *Ha A pre-C^*-algebra, akkor minden $a \in A$ normális elemre $\rho(a) = \|a\|$.*

Bizonyítás. (I) Először legyen $x \in A_{sa}$. Teljes indukcióval igazoljuk, hogy minden $n \in \mathbb{N}$ esetén $\left\|x^{2^n}\right\| = \|x\|^{2^n}$. Valóban, ez triviálisan igaz az $n = 0$ esetben, és ha igaz az $n \in \mathbb{N}$ számra, akkor az x^{2^n} elem önadjungáltsága folytán

$$\left\|x^{2^{n+1}}\right\| = \left\|\left(x^{2^n}\right)^*\left(x^{2^n}\right)\right\| = \left\|x^{2^n}\right\|^2 = \left(\|x\|^{2^n}\right)^2 = \|x\|^{2^{n+1}},$$

vagyis az állítás igaz az $n+1$ számra is. Tehát minden $\mathbb{N} \ni n$-re $\left\|x^{2^n}\right\|^{1/2^n} = \|x\|$, és $\left(\left\|x^{2^n}\right\|^{1/2^n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ részsorozata az $\left(\|x^n\|^{1/n}\right)_{n\in\mathbb{N}^+}$ sorozatnak, amely $\rho(x)$-hez konvergál, így $\rho(x) = \|x\|$.

(II) Legyen $a \in A$ tetszőleges normális elem. Ekkor (I)-t alkalmazva az a^*a önadjungált elemre kapjuk, hogy

$$(\rho(a))^2 \leq \|a\|^2 = \|a^*a\| = \rho(a^*a) \leq \rho(a^*)\rho(a) = (\rho(a))^2$$

teljesül, hiszen $a \in A$ és $a^* \in A$ felcserélhető elemek és $\rho(a^*) = \rho(a)$. Ez azt jelenti, hogy $(\rho(a))^2 = \|a\|^2$, tehát $\rho(a) = \|a\|$. ■

17.4.2. Tétel. *Ha A Banach-*-algebra és B pre-C^*-algebra, akkor minden $\pi : A \to B$ *-algebra-morfizmusra, minden $a \in A$ esetén $\|\pi(a)\| \leq \|a\|$.*

Bizonyítás. (I) Először tegyük fel, hogy A egységelemes Banach-*-algebra, B egységelemes C^*-algebra, és $\pi : A \to B$ egységelem-tartó *-algebra-morfizmus. Minden $a \in A$ esetén

$$\|\pi(a)\|^2 = \|\pi(a)^*\pi(a)\| = \|\pi(a^*a)\|,$$

ugyanakkor $\|a^*a\| \leq \|a^*\|\|a\| = \|a\|^2$, ezért elég volna azt igazolni, hogy minden $x \in A$ elemre, ha $x = a^*a$ alakú (valamely $a \in A$ esetén), akkor $\|\pi(x)\| \leq \|x\|$.

Megmutatjuk, hogy minden $x \in A_{sa}$ esetén $\|\pi(x)\| \leq \|x\|$. Legyen $x \in A_{sa}$ rögzített. A π leképezés involúció tartása miatt $\pi(x) \in B_{sa}$, és B pre-C^*-algebra, így 17.4.1. miatt $\|\pi(x)\| = \rho(\pi(x))$. Továbbá $\rho(x) \leq \|x\|$, ezért a $\|\pi(x)\| \leq \|x\|$ egyenlőtlenség bizonyításához elég volna azt igazolni, hogy $\rho(\pi(x)) \leq \rho(x)$. Tudjuk, hogy fennáll $\mathrm{Sp}_B(\pi(x)) \subseteq \mathrm{Sp}_A(x)$ tartalmazás, mivel π *egységelem-tartó* algebra-morfizmus. Továbbá, A *egységelemes Banach-algebra*, ezért $\mathrm{Sp}_A(x) \subseteq \overline{B}_{\rho(x)}(0;\mathbb{C})$, így $\mathrm{Sp}_B(\pi(x)) \subseteq \overline{B}_{\rho(x)}(0;\mathbb{C})$ is teljesül. Ugyanakkor B egységelemes *komplex* Banach-algebra, ezért a spektrálsugár minimalitási tulajdonsága miatt $\rho(\pi(x)) \leq \rho(x)$.

(II) Most tegyük fel, hogy A tetszőleges Banach-*-algebra, B tetszőleges C^*-algebra, és $\pi : A \to B$ tetszőleges *-algebra-morfizmus. Tekintsük $\tilde{A}$-ot, tehát az A normált *-algebra standard egységelemesítését, és $\tilde{B}$-ot, tehát a B C^*-algebra standard egységelemesítését. Létezik egyetlen olyan $\tilde{\pi} : \tilde{A} \to \tilde{B}$ *-algebra-morfizmus, amely egységelem-tartó és a π-nek kiterjesztése. Most alkalmazzuk az (I) állítást A helyett $\tilde{A}$-ra, B helyett $\tilde{B}$-ra és π helyett $\tilde{\pi}$-re. Azt kapjuk, hogy minden $\tilde{a} \in \tilde{A}$ esetén $\|\tilde{\pi}(\tilde{a})\| \leq \|\tilde{a}\|$, amiből következik, hogy minden $a \in A$ esetén $\|\pi(a)\| \leq \|a\|$, hiszen az $A \to \tilde{A}$ és $B \to \tilde{B}$ kanonikus leképezések izometriák.

(III) Áttérve az általános esetre, jelölje B a B pre-C^*-algebra teljes burkát, és legyen $j : B \to B$ a kanonikus injekció, amely izometria. Ekkor a $j \circ \pi : A \to B$ leképezés *-algebra-morfizmus, tehát a (II) állítást alkalmazva B helyett a B C^*-algebrára és π helyett a $j \circ \pi$ *-algebra-morfizmusra kapjuk, hogy minden $a \in A$ esetén $\|\pi(a)\| = \|(j \circ \pi)(a)\| \leq \|a\|$ teljesül. ■

17.4.3. Következmény. *Ha A és B tetszőleges C^*-algebrák, akkor minden $A \to B$ *-algebra-izomorfizmus izometria.*

Bizonyítás. Ha $\pi : A \to B$ *-algebra-izomorfizmus, akkor az előző állítás szerint π norma-nem-növelő, ugyanakkor $\pi^{-1} : B \to A$ is *-algebra-morfizmus, tehát ez is norma-nem-növelő, így minden $a \in A$ esetén $\|\pi(a)\| = \|a\|$. ■

17.4.4. Következmény. *Ha A *-algebra, akkor legfeljebb egy olyan norma létezik A felett, amellyel A C^*-algebra.*

Bizonyítás. Legyen A *-algebra és $\|\cdot\|_1$, $\|\cdot\|_2$ C^*-normák A felett. Jelölje A_1 (illetve A_2) az A *-algebrát a $\|\cdot\|_1$ (illetve $\|\cdot\|_2$) normával ellátva. Ekkor A_1 és A_2 C^*-algebrák, továbbá az id_A leképezés *-algebra-izomorfizmus A_1 és A_2 között. Az előző állítás alapján id_A izometria, tehát minden $a \in A$ esetén $\|a\|_1 = \|a\|_2$, vagyis $\|\cdot\|_1 = \|\cdot\|_2$. ■

Az előző állításnak fontos elvi következménye az, hogy a C^*-algebrák értelmezhetőek úgy is, mint olyan *-algebrák, amelyek felett *létezik* C^*-norma.

17.5. C^*-félnormák és a fedő C^*-algebra

17.5.1. Definíció. *Legyen A *-algebra. Azt mondjuk, hogy egy A feletti norma* ***-norma** (*illetve* **Banach-*-norma**), *ha A ezzel a normával ellátva normált *-algebra* (*illetve Banach-*-algebra*). *Azt mondjuk, hogy egy A feletti norma* **pre-C^*-norma** (*illetve* **C^*-norma**), *ha A ezzel a normával ellátva pre-C^*-algebra* (*illetve C^*-algebra*). *Azt mondjuk, hogy az A feletti p félnorma* **C^*-félnorma**, *ha minden $a, b \in A$ esetén*

$$p(ab) \leq p(a)p(b), \quad p(a^*) = p(a), \quad p(a^*a) = p(a)^2.$$

17.5.2. Állítás. *Ha A *-algebra, akkor az A feletti p félnorma pontosan akkor C^*-félnorma, ha létezik olyan B C^*-algebra és létezik olyan $\pi : A \to B$ *-algebra-morfizmus, amelyre minden $a \in A$ esetén $p(a) = \|\pi(a)\|$.*

Bizonyítás. Nyilvánvaló, hogy egy C^*-norma kompozíciója egy *-algebra-morfizmussal szükségképpen C^*-félnorma, ezért a feltétel elégséges.

A szükségesség bizonyításához legyen $p : A \to \mathbb{R}_+$ tetszőleges C^*-félnorma, és $\mathfrak{m} := \{a \in A | p(a) = 0\}$. Ekkor $\mathfrak{m}$ *-ideál A-ban, mert p C^*-félnorma, tehát képezhetjük az $A/\mathfrak{m}$ faktor-*-algebrát, és e felett a $\dot{p} : A/\mathfrak{m} \to \mathbb{R}_+$ faktor-normát, amelyre minden $a \in A$ esetén $\dot{p}(\pi_{A/\mathfrak{m}}(a)) = p(a)$ teljesül, ahol $\pi_{A/\mathfrak{m}} : A \to A/\mathfrak{m}$ a kanonikus szürjekció. Tekintettel arra, hogy p C^*-félnorma; $A/\mathfrak{m}$ a $\dot{p}$ normával ellátva pre-C^*-algebra. Legyen B a teljes burka ennek a pre-C^*-algebrának, és jelölje $\| \cdot \|$ a $\dot{p}$ pre-C^*-norma kiterjesztését B-re. Ha π jelöli a $\pi_{A/\mathfrak{m}} : A \to A/\mathfrak{m}$ a kanonikus szürjekció kompozícióját az $A/\mathfrak{m} \to B$ kanonikus injekcióval, akkor π *-algebra-morfizmus A és a B C^*-algebra között, és $p = \| \cdot \| \circ \pi$ nyilvánvalóan teljesül. ■

17.5.3. Definíció. *Az A *-algebra* **fedő C^*-algebrájának** *nevezünk minden olyan (B, j) párt, amelyre B C^*-algebra, $j : A \to B$ *-algebra-morfizmus, és minden C C^*-algebrához, valamint minden $\pi : A \to C$ *-algebra-morfizmushoz egyértelműen létezik olyan $\tilde{\pi} : B \to C$ *-algebra-morfizmus, hogy $\pi = \tilde{\pi} \circ j$.*

17.5.4. Állítás. (A fedő C^*-algebrák egyértelműségének tétele) *Ha A *-algebra és (B_1, j_1), (B_2, j_2) fedő C^*-algebrái A-nak, akkor létezik egyetlen olyan $\pi : B_1 \to B_2$ *-algebra-izomorfizmus, amelyre $\pi \circ j_1 = j_2$.*

Bizonyítás. A feltevés szerint B_2 C^*-algebra és $j_2 : A \to B_2$ *-algebra-morfizmus, továbbá (B_1, j_1) fedő C^*-algebrája A-nak, ezért egyértelműen létezik olyan $\tilde{j}_2 : B_1 \to B_2$ *-algebra-morfizmus, amelyre $\tilde{j}_2 \circ j_1 = j_2$. Ugyanakkor B_1 C^*-algebra és $j_1 : A \to B_1$ *-algebra-morfizmus, továbbá (B_2, j_2) fedő C^*-algebrája A-nak, ezért egyértelműen létezik olyan $\tilde{j}_1 : B_2 \to B_1$ *-algebra-morfizmus, amelyre $\tilde{j}_1 \circ j_2 = j_1$. Ekkor $\tilde{j}_2 \circ \tilde{j}_1 \circ j_2 = j_2$ és $\tilde{j}_2 \circ \tilde{j}_1 : B_2 \to B_2$ *-algebra-morfizmus. De B_2 C^*-algebra és $j_2 : A \to B_2$ *-algebra-morfizmus, valamint (B_2, j_2) fedő C^*-algebrája A-nak, így létezik egyetlen olyan $\tau : B_2 \to B_2$ *-algebra-morfizmus, amelyre $\tau \circ j_2 = j_2$. Természetesen a τ-ra vonatkozó követelménynek id_{B_2} és $\tilde{j}_2 \circ \tilde{j}_1$ is eleget tesz, ezért $\tau = id_{B_2} = \tilde{j}_2 \circ \tilde{j}_1$. Hasonlóan kapjuk, hogy $id_{B_1} = \tilde{j}_1 \circ \tilde{j}_2$, tehát a $\pi := \tilde{j}_2 : B_1 \to B_2$ leképezés *-izomorfizmus és $\pi \circ j_1 = j_2$. Ennek a *-algebra-izomorfizmusnak az egyértelműsége következik abból, hogy (B_1, j_1) fedő C^*-algebrája A-nak. ■

17.5.5. Következmény. *Ha A *-algebra és (B, j) fedő C^*-algebrája A-nak, akkor* $\mathrm{Im}(j)$ *sűrű *-részalgebrája B-nek.*

Bizonyítás. A definíció alapján nyilvánvaló, hogy az $(\overline{\mathrm{Im}(j)}, j)$ pár is fedő C^*-algebrája A-nak, így az előző állítás alapján létezik egyetlen olyan $\pi : \overline{\mathrm{Im}(j)} \to B$ *-algebra-izomorfizmus, amelyre $\pi \circ j = j$. Ekkor $\pi = id_B$ az $\mathrm{Im}(j)$ halmazon, ezért $\pi = id_B$ az $\overline{\mathrm{Im}(j)}$ halmazon is. Tehát $B = \mathrm{Im}(\pi) = \overline{\mathrm{Im}(j)}$, vagyis $\mathrm{Im}(j)$ sűrű B-ben. ■

Azonban vigyázzunk arra, hogy ha A *-algebra és (B, j) fedő C^*-algebrája A-nak, akkor a j leképezés általában nem is injektív és nem is szürjektív.

17.5.6. Tétel. (A fedő C^*-algebrák létezésének tétele) *Az A *-algebrának pontosan akkor létezik fedő C^*-algebrája, ha létezik A felett legnagyobb C^*-félnorma. Minden olyan *-algebrának létezik fedő C^*-algebrája, amely felett létezik Banach-*-norma.*

Bizonyítás. Legyen (B, j) fedő C^*-algebrája A-nak, és jelölje $\|\cdot\|_B$ a B feletti C^*-normát. Ekkor a $p := \|\cdot\|_B \circ j$ leképezés C^*-félnorma A felett. Ez a legnagyobb C^*-félnorma A felett. Valóban, legyen q is C^*-félnorma A felett, és vegyünk olyan C C^*-algebrát, valamint $\pi : A \to C$ *-algebra-morfizmust, amelyre $q = \|\cdot\|_C \circ \pi$, ahol $\|\cdot\|_C$ a C feletti C^*-norma. Létezik egyetlen olyan $\tilde{\pi} : B \to C$ *-algebra-morfizmus, amelyre $\tilde{\pi} \circ j = \pi$. Ekkor $q = \|\cdot\|_C \circ \pi = \|\cdot\|_C \circ \tilde{\pi} \circ j \leq \|\cdot\|_B \circ j =: p$, mert $\tilde{\pi}$ norma-nem-növelő, vagyis $\|\cdot\|_C \circ \tilde{\pi} \leq \|\cdot\|_B$.

Megfordítva, legyen p a legnagyobb C^*-félnorma A felett. Vegyünk olyan B C^*-algebrát és $j : A \to B$ *-algebra-morfizmust, amelyre $p := \|\cdot\|_B \circ j$, ahol $\|\cdot\|_B$ a B feletti C^*-norma. Természetesen feltehetjük, hogy $\mathrm{Im}(j)$ sűrű B, ben, különben B-ről áttérhetünk $\overline{\mathrm{Im}(j)}$-re. Megmutatjuk, hogy (B, j) fedő C^*-algebrája A-nak. Valóban, legyen C tetszőleges C^*-algebra és $\pi : A \to C$ *-algebra-morfizmus. Ekkor a $\|\cdot\|_C \circ \pi$ leképezés C^*-félnorma A felett, ahol $\|\cdot\|_C$ a C feletti C^*-norma. Ezért $\|\cdot\|_C \circ \pi \leq p = \|\cdot\|_B \circ j$, így $\mathrm{Ker}(j) \subseteq \mathrm{Ker}(\pi)$. Ebből következik egyetlen olyan $\tilde{\pi}_0 : \mathrm{Im}(j) \to C$ lineáris operátor létezése, amelyre $\tilde{\pi}_0 \circ j = \pi$. A j és π leképezések *-algebra-morfizmusok, ezért $\tilde{\pi}_0$ is az. Ha $a \in A$, akkor $\|\tilde{\pi}_0(j(a))\|_C = \|\pi(a)\|_C \leq p(a) = \|j(a)\|_B$, ami azt jelenti, hogy a $\tilde{\pi}_0 : \mathrm{Im}(j) \to C$ leképezés norma-nem-növelő, tehát folytonos. Ugyanakkor, a feltevés szerint $\mathrm{Im}(j)$ sűrű B-ben, ezért létezik egyetlen olyan $\tilde{\pi} : B \to C$ *-algebra-morfizmus, amely $\tilde{\pi}_0$-nak kiterjesztése. Ekkor $\tilde{\pi} : B \to C$ olyan *-algebra-morfizmus, amelyre $\tilde{\pi} \circ j = \pi$, és $\tilde{\pi}$ egyértelműen van meghatározva, hiszen folytonos és $\mathrm{Im}(j)$ sűrű B-ben. Ezért (B, j) fedő C^*-algebrája A-nak.

Végül feltesszük, hogy A *-algebra és $\|\cdot\|$ Banach-*-norma A felett. Legyen p az A feletti C^*-félnorma, és vegyünk olyan B C^*-algebrát és $\pi : A \to B$ *-algebra-morfizmust, amelyre $p := \|\cdot\|_B \circ \pi$, ahol $\|\cdot\|_B$ a B feletti C^*-norma. A π leképezés norma-nem-növelő a $\|\cdot\|$ és $\|\cdot\|_B$ normák szerint, vagyis $p := \|\cdot\|_B \circ \pi \leq \|\cdot\|$. Tehát, ha $\mathcal{N}$ jelöli az A feletti C^*-félnormák halmazát, akkor minden $a \in A$ esetén $\sup\limits_{p \in \mathcal{N}} p(a) \leq \|a\| < +\infty$.

Nyilvánvaló, hogy az

$$A \to \mathbb{R}_+; \quad a \mapsto \sup_{p \in \mathcal{N}} p(a)$$

leképezés C^*-félnorma A felett, és ez a legnagyobb A feletti C^*-félnorma. ■

17.5.7. Jelölés. *Ha A olyan *-algebra, amelynek létezik fedő C^*-algebrája, akkor $\| \cdot \|_{\mathrm{St}}$ jelöli a legnagyobb A feletti C^*-félnormát.*

Tehát, ha A olyan *-algebra, amely felett létezik legnagyobb C^*-félnorma, akkor az A konkrét fedő C^*-algebráját kapjuk a következő módon.

– Képezzük az $\mathfrak{m}_{\mathrm{St}} := \{a \in A | \|a\|_{\mathrm{St}} = 0\}$ *-ideált A-ban, és az $A/\mathfrak{m}_{\mathrm{St}}$ faktor-*-algebrát ellátjuk a faktornormával.

– Elkészítjük az $A/\mathfrak{m}_{\mathrm{St}}$ pre-C^*-algebra teljes burkát; az így nyert C^*-algebrát jelölje $\mathrm{St}(A)$.

– Jelölje j_{St} az $A \to A/\mathfrak{m}_{\mathrm{St}}$ kanonikus szürjekció és az $A/\mathfrak{m}_{\mathrm{St}} \to \mathrm{St}(A)$ kanonikus injekció kompozícióját.

Ekkor az $(\mathrm{St}(A), j_{\mathrm{St}})$ pár az A-nak fedő C^*-algebrája; ezt nevezzük az A *standard* fedő C^*-algebrájának.

18. fejezet

Kommutatív C^*-algebrák

18.1. Kommutatív C^*-algebrák jellemzése – Első Gelfand-Najmark tétel

18.1.1. Állítás. *Ha A egységelemes C^*-algebra, és $u \in A$ unitér, akkor $\mathrm{Sp}_A(u) \subseteq \mathbb{U}$, továbbá, ha $x \in A$ önadjungált, akkor $\mathrm{Sp}_A(x) \subseteq \mathbb{R}$. Ha A tetszőleges C^*-algebra, és $x \in A$ önadjungált, akkor $\mathrm{Sp}'_A(x) \subseteq \mathbb{R}$.*

Bizonyítás. Ha A egységelemes C^*-algebra, és $u \in A$ unitér, akkor $\|u\| \leq 1$ és $u^{-1} = u^*$ miatt $\|u^{-1}\| = \|u^*\| = \|u\| \leq 1$, amiből következik, hogy $\mathrm{Sp}_A(u) \subseteq \mathbb{U}$.

Tegyük fel, hogy A egységelemes és $x \in A$ önadjungált. Az 17.1. pont 5) megjegyzés alapján az $\mathrm{Exp}_A(\mathbf{i}x)$ elem unitér A-ban, ezért $\mathrm{Sp}_A(\mathbf{i}x) = \mathbf{i}\mathrm{Sp}_A(x)$ és $\mathrm{Sp}_A(\mathrm{Exp}_A(\mathbf{i}x)) \subseteq \mathbb{U}$ miatt

$$\mathrm{Exp}\langle \mathbf{i}\mathrm{Sp}_A(x)\rangle = \mathrm{Exp}\langle \mathrm{Sp}_A(\mathbf{i}x)\rangle \subseteq \mathrm{Sp}_A(\mathrm{Exp}_A(\mathbf{i}x)) \subseteq \mathbb{U}.$$

Ez azt jelenti, hogy $z \in \mathrm{Sp}_A(x)$ esetén $|\mathrm{Exp}(\mathbf{i}z)| = 1$, tehát $z \in \mathbb{R}$.

Ha A tetszőleges C^*-algebra, akkor $x \in A_{sa}$ esetén $(0, x) \in \tilde{A}_{sa}$, tehát az előzőek alapján $\mathrm{Sp}'_A(x) := \mathrm{Sp}_{\tilde{A}}(0, x) \subseteq \mathbb{R}$. ■

18.1.2. Következmény. *Ha A egységelemes C^*-algebra, és $x \in A$ önadjungált elem, akkor*

$$\mathrm{Sp}_A(x) \subseteq [-\|x\|, \|x\|].$$

Ha A C^*-algebra, és $x \in A$ önadjungált elem, akkor

$$\mathrm{Sp}'_A(x) \subseteq [-\|x\|, \|x\|].$$

Bizonyítás. Ha A egységelemes C^*-algebra, és $x \in A$ önadjungált elem, akkor a spektrálsugár minimalitása (14.6.1.), valamint 18.1.1. és 17.4.1. alapján írható, hogy

$$\mathrm{Sp}_A(x) \subseteq \overline{B}_{\rho(x)}(0; \mathbb{C}) \cap \mathbb{R} = [-\rho(x), \rho(x)] = [-\|x\|, \|x\|].$$

Ha A C^*-algebra, és $x \in A$ önadjungált elem, akkor $(0,x) \in \tilde{A}_{sa}$, tehát az előzőek és $\|(0,x)\| = \|x\|$ alapján

$$\mathrm{Sp}'_A(x) := \mathrm{Sp}_{\tilde{A}}(0,x) \subseteq [-\|(0,x)\|, \|(0,x)\|] = [-\|x\|, \|x\|]. \blacksquare$$

18.1.3. Következmény. *Ha A C^*-algebra, akkor minden $\chi \in \mathrm{X}'(A)$ és $a \in A$ esetén $\chi(a^*) = \overline{\chi(a)}$, vagyis C^*-algebra minden karaktere önadjungált funkcionál.*

Bizonyítás. A $\chi \in \mathrm{X}'(A)$ karakter önadjungáltsága azzal ekvivalens, hogy minden $x \in A_{sa}$ esetén $\chi(x) \in \mathbb{R}$ (16.5. b) megjegyzés); ez pedig teljesül, mert $\chi(x) \in \mathrm{Sp}'_A(x)$ mindig igaz, és 18.1.1. alapján $\mathrm{Sp}'_A(x) \subseteq \mathbb{R}$. $\blacksquare$

Ezzel szemben Banach-*-algebrának létezhetnek nem önadjungált karakterei. Például legyen A a diszk-algebra, és minden $z \in \overline{B}_1(0;\mathbb{C})$ számra $\chi_z : A \to \mathbb{C};\ a \mapsto a(z)$. Ekkor $z \in \overline{B}_1(0;\mathbb{C})$ esetén χ_z nem nulla karaktere A-nak, és minden $A \ni a$-ra

$$\chi_z^*(a) := \overline{\chi_z(a^*)} = \overline{a^*(z)} = \overline{\overline{a(\overline{z})}} = a(\overline{z}) = \chi_{\overline{z}}(a)$$

teljesül, tehát $\chi_z^* = \chi_{\overline{z}}$. Ezért $z \in \overline{B}_1(0;\mathbb{C})$ esetén χ_z pontosan akkor önadjungált, ha z valós. Ebből a tényből és az előző következményből kapjuk, hogy a diszk algebra nem C^*-algebra.

Megjegyezzük még, hogy ha A Banach-*-algebra, akkor a

$$\mathscr{G}_A : A \to \overline{\mathscr{K}}(\mathrm{X}(A);\mathbb{C})$$

Gelfand-reprezentáció algebra-morfizmus ugyan, de nem szükségképpen involúció-tartó. Valóban, a $\mathscr{G}_A$ leképezés pontosan akkor involúció-tartó, ha minden $a \in A$ és $\chi \in \mathrm{X}(A)$ esetén

$$\chi(a^*) = \mathscr{G}_A(a^*)(\chi) = (\mathscr{G}_A(a))^*(\chi) = \overline{\mathscr{G}_A(a)(\chi)} = \overline{\chi(a)},$$

vagyis ha az A minden karaktere önadjungált. Ezért C^*-algebra esetében a Gelfand-reprezentáció *-algebra-morfizmus, de például a diszk-algebra esetében a Gelfand-reprezentáció nem involúció-tartó.

18.1.4. Tétel. (Első Gelfand-Najmark-tétel) *Ha A kommutatív C^*-algebra, akkor a*

$$\mathscr{G}_A : A \to \overline{\mathscr{K}}(\mathrm{X}(A);\mathbb{C})$$

*Gelfand-reprezentáció izometrikus *-izomorfizmus.*

Bizonyítás. Az előző bekezdés alapján $\mathscr{G}_A$ *-algebra-morfizmus, és izometria is, mert $a \in A$ esetén

$$\|\mathscr{G}_A(a)\|^2 = \|\mathscr{G}_A(a)^*\mathscr{G}_A(a)\| = \|\mathscr{G}_A(a^*a)\| = \rho(a^*a) = \|a^*a\| = \|a\|^2,$$

ahol kihasználtuk azt, hogy A kommutatív komplex Banach-algebra, így minden $a \in A$ esetén $\|\mathscr{G}_A(a)\| = \rho(a)$.

Tehát csak a $\mathscr{G}_A$ szürjektivitását kell igazolni. Világos, hogy $\mathrm{Im}(\mathscr{G}_A)$ *-részalgebrája a $\overline{\mathscr{K}}(\mathrm{X}(A);\mathbb{C})$ C^*-algebrának, ez a halmaz szétválasztó az $\mathrm{X}(A)$ felett, és minden $\chi \in \mathrm{X}(A)$ esetén van olyan $a \in A$, hogy $\mathscr{G}_A(a)(\chi) \neq 0$, hiszen $\mathrm{X}(A)$ elemei nem nulla karakterek. Ebből a Stone–Weierstrass-tétel alapján kapjuk, hogy $\mathrm{Im}(\mathscr{G}_A)$ sup-normában sűrű halmaz $\overline{\mathscr{K}}(\mathrm{X}(A);\mathbb{C})$-ben. Ugyanakkor Banach-téren értelmezett, normált térbe ható izometria értékkészlete szükségképpen zárt, ezért $\mathrm{Im}(\mathscr{G}_A)$ zárt is $\overline{\mathscr{K}}(\mathrm{X}(A);\mathbb{C})$-ben, így $\mathrm{Im}(\mathscr{G}_A) = \overline{\mathscr{K}}(\mathrm{X}(A);\mathbb{C})$. ■

Az első Gelfand-Najmark-tétel a C^*-algebrák elméletének egyik legfontosabb tétele. Ennek a tételnek két lényegesen nemtriviális része van:

– kommutatív C^*-algebra Gelfand-reprezentációja *izometria*, tehát, ha A kommutatív C^*-algebra, akkor minden $a \in A$ esetén $\|\mathscr{G}_A(a)\| = \|a\|$;

– kommutatív C^*-algebra Gelfand-reprezentációja *szürjektív*, tehát, ha A kommutatív C^*-algebra, akkor minden $\varphi : \mathrm{X}(A) \to \mathbb{C}$ végtelenben eltűnő folytonos függvényhez létezik olyan $a \in A$, amelyre $\varphi = \mathscr{G}_A(a)$, vagyis minden $\mathrm{X}(A) \ni \chi$-re $\varphi(\chi) = \chi(a)$.

Az első Gelfand-Najmark-tétel alkalmazásaiban rendszerint a kommutatív C^*-algebrák Gelfand-reprezentációjának fenti tulajdonságait használjuk fel.

Ugyanakkor az első Gelfand-Najmark-tételnek fontos elvi következménye az, hogy *-izomorfia erejéig a legáltalánosabb kommutatív C^*-algebra-típus éppen a lokálisan kompakt terek feletti folytonos végtelenben eltűnő függvények C^*-algebrájának típusa. Ez egyben azt is jelenti, hogy a lokálisan kompakt terek feletti *korlátos Radon-mértékek* elmélete azonosítható a kommutatív C^*-algebrák feletti folytonos lineáris funkcionálok elméletével.

A 15.4.2. és az előző bekezdés megállapításai szerint az is nyilvánvaló, hogy a kommutatív C^*-algebrák *-izomorfia szerinti ekvivalencia-osztályozásának problémája egyenértékű a lokálisan kompakt terek homeomorfia-osztályainak meghatározásával. Továbbá, az egységelemes kommutatív C^*-algebrák *-izomorfia szerinti osztályozása egyenértékű a kompakt terek homeomorfia szerinti osztályozásával.

18.2. Injektív *-algebra-morfizmus inverzének folytonossága

18.2.1. Állítás. *Ha A C^*-algebra, B normált *-algebra, és $\pi : A \to B$ injektív *-algebra-morfizmus, akkor minden $a \in A$ esetén $\|\pi(a)\| \geq \|a\|$.*

Bizonyítás. (I) Először feltesszük, hogy A egységelemes kommutatív C^*-algebra, B egységelemes kommutatív Banach-*-algebra, és $\pi : A \to B$ egységelem-tartó injektív

*-algebra-morfizmus. Minden $\chi \in \mathrm{X}(B)$ esetén $\chi \circ \pi \in \mathrm{X}(A)$, mert π egységelem-tartó, tehát jól értelmezett az

$$\mathrm{X}(\pi) : \mathrm{X}(B) \to \mathrm{X}(A); \quad \chi \mapsto \chi \circ \pi$$

leképezés. Nyilvánvaló, hogy ez a függvény folytonos az $\mathrm{X}(B)$ és $\mathrm{X}(A)$ kompakt terek között. Most indirekt bizonyítjuk az $\mathrm{X}(\pi)$ függvény *szürjektivitását*. Tegyük fel tehát, hogy az $\mathrm{Im}(\mathrm{X}(\pi)) \subseteq \mathrm{X}(A)$ kompakt halmaz nem egyenlő $\mathrm{X}(A)$-val, és legyen $\chi \in \mathrm{X}(A) \setminus \mathrm{Im}(\mathrm{X}(\pi))$ rögzített. Az $\mathrm{X}(A)$ kompakt tér teljes regularitása miatt vehetünk olyan $\varphi_0, \varphi_1 \in \mathscr{C}(\mathrm{X}(A); \mathbb{R})$ függvényeket, amelyekre $\mathrm{Im}(\mathrm{X}(\pi)) \subseteq [\varphi_0 = 1]$, $\chi \in [\varphi_1 = 1]$, és $\varphi_0\varphi_1 = 0$. Az első Gelfand-Najmark-tétel alapján a $\mathscr{G}_A$ Gelfand-reprezentáció szürjektív, tehát van olyan $a_0 \in A$ és $a_1 \in A$, hogy $\varphi_0 = \mathscr{G}_A(a_0)$ és $\varphi_1 = \mathscr{G}_A(a_1)$, Ekkor $\mathscr{G}_A(a_0a_1) = \mathscr{G}_A(a_0)\mathscr{G}_A(a_1) = \varphi_0\varphi_1 = 0$, így a $\mathscr{G}_A$ Gelfand-reprezentáció injektivitása folytán $a_0a_1 = 0$. Ebből következik, hogy $\pi(a_0)\pi(a_1) = 0$. Ugyanakkor B kommutatív komplex Banach-algebra, így

$$\mathrm{Sp}_B(\pi(a_0)) = \mathrm{Im}(\mathscr{G}_B(\pi(a_0))) = \{\chi'(\pi(a_0)) | \chi' \in \mathrm{X}(B)\} =$$
$$= \{\mathscr{G}_A(a_0)(\chi' \circ \pi) | \chi' \in \mathrm{X}(B)\} = \{\varphi_0(\chi' \circ \pi) | \chi' \in \mathrm{X}(B)\} =$$
$$= \{\varphi_0(\mathrm{X}(\pi)(\chi')) | \chi' \in \mathrm{X}(B)\} \subseteq \{1\},$$

hiszen $\mathrm{Im}(\mathrm{X}(\pi)) \subseteq [\varphi_0 = 1]$. Ebből következik, hogy $\pi(a_0)$ invertálható elem B-ben, így $\pi(a_0)\pi(a_1) = 0$ miatt $\pi(a_1) = 0$. A π injektív, ezért $a_1 = 0$, így $\varphi_1 := \mathscr{G}_A(a_1) = 0$, ami ellentmond annak, hogy $\varphi_1(\chi) = 1$.

Tehát az $\mathrm{X}(\pi)$ függvény szürjektív, vagyis $\{\chi' \circ \pi | \chi' \in \mathrm{X}(B)\} = \mathrm{X}(A)$. Ezért minden $a \in A$ esetén

$$\|\pi(a)\| \geq \rho(\pi(a)) = \|\mathscr{G}_B(\pi(a))\| = \sup_{\chi' \in \mathrm{X}(B)} |\chi'(\pi(a))| =$$
$$= \sup_{\chi \in \mathrm{X}(A)} |\chi(a)| = \|\mathscr{G}_A(a)\| = \|a\|.$$

(II) Most csak annyit teszünk fel, hogy A egységelemes C^*-algebra, B egységelemes Banach-*-algebra, és $\pi : A \to B$ egységelem-tartó injektív *-algebra-morfizmus. Elég azt igazolni, hogy minden $x \in A_{sa}$ esetén $\|\pi(x)\| \geq \|x\|$ teljesül, hiszen ha így van, akkor minden $A \ni a$-ra

$$\|\pi(a)\|^2 \geq \|\pi(a)^*\pi(a)\| = \|\pi(a^*a)\| \geq \|a^*a\| = \|a\|^2,$$

tehát $\|\pi(a)\| \geq \|a\|$.

Legyen $x \in A_{sa}$ rögzített, A_x az $\{x, \mathbf{1}_A\}$ halmaz által generált zárt *-részalgebra A-ban, $B_x := \overline{\pi\langle A_x\rangle}$, és $\pi_x := \pi|_{A_x}$. Ekkor A_x kommutatív egységelemes C^*-algebra, B_x kommutatív egységelemes Banach-*-algebra, és $\pi_x : A_x \to B_x$ egységelem-tartó injektív

*-algebra-morfizmus. Ezért az (I) alapján minden $a \in A_x$ esetén $\|\pi_x(a)\| \geq \|a\|$, tehát $\|\pi(x)\| = \|\pi_x(x)\| \geq \|x\|$.

(III) Áttérve az általános esetre, jelölje $\tilde{A}$ az A standard egységelemesítését az egyetlen C^*-normával ellátva, továbbá $\tilde{B}$ a B standard egységelemesítését a $\tilde{B} \to \mathbb{R}_+$; $(\lambda, b) \to |\lambda| + \|b\|$ normával ellátva. Jelölje $\widehat{\tilde{B}}$ a $\tilde{B}$ egységelemes normált *-algebra teljes burkát, és $\tilde{\pi} : \tilde{A} \to \widehat{\tilde{B}}$ a π egyértelmű egységelem-tartó *-algebra-morfikus kiterjesztését. Ekkor $\tilde{A}$ egységelemes C^*-algebra, $\widehat{\tilde{B}}$ egységelemes Banach-*-algebra és $\tilde{\pi} : \tilde{A} \to \widehat{\tilde{B}}$ egységelem-tartó injektív *-algebra morfizmus, így a (II) alapján minden $\tilde{A} \ni (\lambda, a)$-ra $\|\tilde{\pi}(\lambda, a)\| \geq \|(\lambda, a)\|$. Ezért $a \in A$ esetén $\|\pi(a)\| = \|(0, \pi(a))\| = \|\tilde{\pi}(0, a)\| \geq \|(0, a)\| = \|a\|$ ■

18.3. Kommutatív Banach-*-algebra fedő C^*-algebrája – Stone-tétel

Most jellemezni fogjuk a kommutatív Banach-*-algebrák fedő C^*-algebráit. Ehhez először bevezetjük a *-algebrák *önadjungált Gelfand-reprezentációjának* fogalmát.

18.3.1. Definíció. *Legyen A *-algebra.* $\mathrm{X}_{sa}(A)$ *jelöli az A nem nulla önadjungált karaktereinek halmazát, tehát*

$$\mathrm{X}_{sa}(A) := \{\chi \in \mathrm{X}(A) \mid (\forall a \in A) : \chi(a^*) = \overline{\chi(a)}\}.$$

Továbbá, minden $a \in A$ esetén $\mathscr{G}_{A,sa}(a)$ jelöli a $\mathscr{G}_A(a)$ függvény leszűkítését $\mathrm{X}_{sa}(A)$*-ra, és az így értelmezett*

$$\mathscr{G}_{A,sa} : A \to \mathscr{F}(\mathrm{X}_{sa}(A); \mathbb{C})$$

*leképezést az A *-algebra* **önadjungált Gelfand-reprezentációjának** *nevezzük.*

Megjegyzések. 1) Ha A *-algebra, akkor az $\mathrm{X}_{sa}(A)$ halmaz definíciójából következik, hogy $\mathscr{G}_{A,sa}$ *-algebra-morfizmus az A és $\mathscr{F}(\mathrm{X}_{sa}(A); \mathbb{C})$ *-algebrák között, vagyis az önadjungált Gelfand-reprezentáció *involúció-tartó*. Ugyanakkor láttuk, hogy a Gelfand-reprezentáció még kommutatív egységelemes Banach-*-algebra (például a diszk-algebra) esetében sem szükségkeppen involúció-tartó.

2) Ha A Banach-*-algebra, akkor $\mathrm{X}(A)$ a Gelfand-topológiával ellátva lokálisan kompakt tér, és $\mathrm{X}_{sa}(A)$ *zárt* részhalmaza az $\mathrm{X}(A)$ karaktertérnek, mert

$$\mathrm{X}_{sa}(A) = \bigcap_{a \in A} \{\chi \in \mathrm{X}(A) | \chi(a^*) = \overline{\chi(a)}\},$$

és minden $a \in A$ esetén az $\mathrm{X}(A) \to \mathbb{C}$; $\chi \mapsto \chi(a)$ függvény folytonos, tehát minden $A \ni a$-ra a $\{\chi \in \mathrm{X}(A) | \chi(a^*) = \overline{\chi(a)}\}$ halmaz zárt a Gelfand-topológia szerint. Ebből következik, hogy ha A Banach-*-algebra, akkor $\mathrm{X}_{sa}(A)$ a Gelfand-topológia leszűkítésével ellátva szintén lokálisan kompakt tér; a továbbiakban $\mathrm{X}_{sa}(A)$-t ezzel az altér-topológiával ellátva lokálisan kompakt térnek tekintjük.

3) Ha A Banach-*-algebra, akkor $a \in A$ esetén $\mathscr{G}_{A,sa}(a) \in \overline{\mathscr{K}}(\mathrm{X}_{sa}(A);\mathbb{C})$, és a

$$\mathscr{G}_{A,sa} : A \to \overline{\mathscr{K}}(\mathrm{X}_{sa}(A);\mathbb{C})$$

önadjungált Gelfand-reprezentáció *-algebra-morfizmus az A Banach-*-algebra és a $\overline{\mathscr{K}}(\mathrm{X}_{sa}(A);\mathbb{C})$ kommutatív C^*-algebra között. Valóban, könnyen látható, hogy ha T lokálisan kompakt tér és $S \subseteq T$ zárt topologikus altér, akkor minden $T \to \mathbb{C}$ folytonos végtelenben eltűnő függvény S-re vett leszűkítése szintén folytonos és végtelenben eltűnő, ezért a $T := \mathrm{X}(A)$ és $S := \mathrm{X}_{sa}(A)$ választással kapjuk, hogy minden $a \in A$ esetén $\mathscr{G}_{A,sa}(a) \in \overline{\mathscr{K}}(\mathrm{X}_{sa}(A);\mathbb{C})$.

4) Ha A Banach-*-algebra, akkor az $\mathrm{Im}(\mathscr{G}_A)$ halmaz olyan részalgebrája a $\overline{\mathscr{K}}(\mathrm{X}(A);\mathbb{C})$ C^*-algebrának, amely nem szükségképpen zárt a konjugálásra nézve, még akkor sem, ha A kommutatív és egységelemes. Azonban az $\mathrm{Im}(\mathscr{G}_{A,sa})$ halmaz *-részalgebrája a $\overline{\mathscr{K}}(\mathrm{X}_{sa}(A);\mathbb{C})$ C^*-algebrának, és minden $\chi \in \mathrm{X}_{sa}(A)$ esetén van olyan $a \in A$, hogy $\mathscr{G}_{A,sa}(a)(\chi) = \chi(a) \neq 0$. Továbbá, az $\mathrm{Im}(\mathscr{G}_{A,sa})$ halmaz triviálisan szétválasztó $\mathrm{X}_{sa}(A)$ felett, így a Stone–Weierstrass-tétel alapján kapjuk, hogy $\mathrm{Im}(\mathscr{G}_{A,sa})$ *sűrű *-részalgebrája* a $\overline{\mathscr{K}}(\mathrm{X}_{sa}(A);\mathbb{C})$ C^*-algebrának.

18.3.2. Tétel. (Absztrakt Stone-tétel) *Ha A kommutatív Banach-*-algebra, akkor a*

$$(\overline{\mathscr{K}}(\mathrm{X}_{sa}(A);\mathbb{C})\ ,\ \mathscr{G}_{A,sa})$$

*pár fedő C^*-algebrája A-nak, tehát, ha C tetszőleges C^*-algebra és $\pi : A \to C$ *-algebra-morfizmus, akkor létezik egyetlen olyan $\tilde{\pi} : \overline{\mathscr{K}}(\mathrm{X}_{sa}(A);\mathbb{C}) \to C$ *-algebra-morfizmus, amelyre $\pi = \tilde{\pi} \circ \mathscr{G}_{A,sa}$.*

Bizonyítás. Tekintsük az A Banach-*-algebra $(\mathrm{St}(A), j)$ standard fedő C^*-algebráját; ekkor $\mathrm{Im}(j)$ sűrű és kommutatív részhalmaza $\mathrm{St}(A)$-nak, ezért $\mathrm{St}(A)$ kommutatív C^*-algebra. Ha $\chi \in \mathrm{X}(\mathrm{St}(A))$, akkor χ nem nulla folytonos lineáris funkcionál $\mathrm{St}(A)$ felett, ezért $\mathrm{Im}(j)$ sűrűsége miatt χ az $\mathrm{Im}(j)$ halmazon sem nulla, így $\chi \circ j \in \mathrm{X}(A)$. Ugyanakkor a $j : A \to \mathrm{St}(A)$ leképezés *-algebra-morfizmus, és $\chi \in \mathrm{X}(\mathrm{St}(A))$ esetén χ önadjungált (hiszen $\mathrm{St}(A)$ C^*-algebra), tehát $\chi : \mathrm{St}(A) \to \mathbb{C}$ szintén *-algebra-morfizmus, így a $\chi \circ j : A \to \mathbb{C}$ leképezés is *-algebra-morfizmus, vagyis $\chi \circ j \in \mathrm{X}_{sa}(A)$. Tehát jól értelmezett az

$$\mathrm{X}(j) : \mathrm{X}(\mathrm{St}(A)) \to \mathrm{X}_{sa}(A); \quad \chi \mapsto \chi \circ j$$

leképezés. Megmutatjuk, hogy az $\mathrm{X}(j)$ függvény *homeomorfizmus* az $\mathrm{X}(\mathrm{St}(A))$ és $\mathrm{X}_{sa}(A)$ lokálisan kompakt terek között.

Ha $\chi_1, \chi_2 \in \mathrm{X}(\mathrm{St}(A))$ és $\chi_1 \circ j = \chi_2 \circ j$, akkor $\chi_1 = \chi_2$ az $\mathrm{Im}(j) \subseteq \mathrm{X}(\mathrm{St}(A))$ sűrű halmazon, és $\chi_1, \chi_2 : \mathrm{St}(A) \to \mathbb{C}$ folytonos lineáris funkcionálok, ezért $\chi_1 = \chi_2$, vagyis az $\mathrm{X}(j)$ függvény *injektív.*

Ha $\chi \in \mathrm{X}_{sa}(A)$, akkor $\chi : A \to \mathbb{C}$ *-algebra-morfizmus, ezért a fedő C^*-algebra értelmezése alapján létezik egyetlen olyan $\tilde{\chi} : \mathrm{St}(A) \to \mathbb{C}$ *-algebra-morfizmus, amelyre $\tilde{\chi} \circ j = \chi$. Ekkor $\tilde{\chi} \in \mathrm{X}(\mathrm{St}(A))$ és $\mathrm{X}(j)(\tilde{\chi}) = \chi$, ami azt jelenti, hogy az $\mathrm{X}(j)$ függvény *szürjektív.*

Az $\mathrm{X}(j)$ függvény nyilvánvalóan *folytonos*, mert ha $(\chi_i)_{i\in I}$ általánosított sorozat $\mathrm{X}(\mathrm{St}(A))$-ban, $\chi \in \mathrm{X}(\mathrm{St}(A))$ és $\lim\limits_{i,I} \chi_i = \chi$ a Gelfand-topológia szerint, akkor $(\chi_i)_{i\in I}$ a χ-hez pontonként konvergál $\mathrm{St}(A)$-n, tehát az $\mathrm{Im}(j)$ halmazon is, így a $(\chi_i \circ j)_{i\in I}$ általánosított sorozat $\chi \circ j$-hez pontonként konvergál A-n, vagyis $\lim\limits_{i,I}(\chi_i \circ j) = \chi \circ j$ az $\mathrm{X}_{sa}(A)$ feletti Gelfand-topológia szerint.

Az $\mathrm{X}(j)$ függvény *nyíltságának* bizonyításához legyen $(\chi_i)_{i\in I}$ általánosított sorozat $\mathrm{X}(\mathrm{St}(A))$-ban, $\chi \in \mathrm{X}(\mathrm{St}(A))$ és $\lim\limits_{i,I}(\chi_i \circ j) = \chi \circ j$ az $\mathrm{X}_{sa}(A)$ feletti Gelfand-topológia szerint. Ekkor a $(\chi_i)_{i\in I}$ általánosított sorozat minden tagja $\mathrm{St}(A) \to \mathbb{C}$ folytonos lineáris funkcionál, és az $\mathrm{Im}(j)$ halmazon pontonként konvergál a $\chi : \mathrm{St}(A) \to \mathbb{C}$ folytonos lineáris funkcionálhoz. Ugyanakkor $\mathrm{Im}(j)$ sűrű halmaz az $\mathrm{St}(A)$ Banach-térben, és a $(\chi_i)_{i\in I}$ általánosított sorozat funkcionálnormában *korlátos*, hiszen a fukcionálnorma szerinti egységgömbben halad. Ezért $(\chi_i)_{i\in I}$ az egész $\mathrm{St}(A)$-n pontonként konvergál χ-hez, vagyis $\lim\limits_{i,I} \chi_i = \chi$ az $\mathrm{X}(\mathrm{St}(A))$ feletti Gelfand-topológia szerint. Ez azt jelenti, hogy az $\mathrm{X}(j)$ függvény inverze folytonos, tehát $\mathrm{X}(j)$ nyílt leképezés.

Tehát igazoltuk, hogy az $\mathrm{X}(j) : \mathrm{X}(\mathrm{St}(A)) \to \mathrm{X}_{sa}(A)$ függvény homeomorfizmus; tekintsük most az

$$\mathrm{X}(j)^{\#} : \overline{\mathscr{K}}(\mathrm{X}_{sa}(A); \mathbb{C}) \to \overline{\mathscr{K}}(\mathrm{X}(\mathrm{St}(A)); \mathbb{C}); \quad \varphi \mapsto \varphi \circ \mathrm{X}(j)$$

leképezést, amely nyilvánvalóan *-izomorfizmus. Az első Gelfand-Najmark-tétel alapján a $\mathscr{G}_{\mathrm{St}(A)} : A \to \overline{\mathscr{K}}(\mathrm{X}(\mathrm{St}(A)); \mathbb{C})$ Gelfand-reprezentáció *-izomorfizmus, ezért a

$$\mathscr{G}_{\mathrm{St}(A)}^{-1} \circ \mathrm{X}(j)^{\#} : \overline{\mathscr{K}}(\mathrm{X}_{sa}(A); \mathbb{C}) \to \mathrm{St}(A)$$

leképezés szintén *-izomorfizmus. Ha $a \in A$ és $\chi \in \mathrm{X}(\mathrm{St}(A))$, akkor a definíciók alapján

$$(\mathrm{X}(j)^{\#} \circ \mathscr{G}_{A,sa})(a)\ \ (\chi) = (\mathscr{G}_{A,sa}(a) \circ \mathrm{X}(j))\,(\chi) = \mathscr{G}_{A,sa}(a)(\chi \circ j) =$$

$$\chi(j(a)) = \ \mathscr{G}_{\mathrm{St}(A)}(j(a))\ \ (\chi) = \ (\mathscr{G}_{\mathrm{St}(A)} \circ j)(a)\ \ (\chi),$$

így $\mathscr{G}_{\mathrm{St}(A)}^{-1} \circ \mathrm{X}(j)^{\#} \circ \mathscr{G}_{A,sa} = j$. Ezért a $(\overline{\mathscr{K}}(\mathrm{X}_{sa}(A); \mathbb{C}), \mathscr{G}_{A,sa})$ pár fedő C^*-algebrája A-nak. ■

18.4. Folytonosfüggvény-számítás egységelemes C^*-algebra normális elemeire

18.4.1. Állítás. *Legyen A egységelemes C^*-algebra és B olyan zárt *-részalgebrája A-nak, amelyre $\mathbf{1} \in B$. Ekkor minden $b \in B$ esetén* $\mathrm{Sp}_B(b) = \mathrm{Sp}_A(b)$.

Bizonyítás. Először tegyük fel, hogy $x \in B$ önadjungált elem. Tudjukk, hogy $\mathrm{Sp}_B(x) \subseteq \mathbb{R}$ és $\mathrm{Sp}_A(x) \subseteq \mathbb{R}$, hiszen B és A egységelemes C^*-algebrák. Ezért $\mathrm{Sp}_B(x) = \mathrm{Fr}(\mathrm{Sp}_B(x))$ és $\mathrm{Sp}_A(x) = \mathrm{Fr}(\mathrm{Sp}_A(x))$. Ugyanakkor azt is tudjuk, hogy $\mathrm{Fr}(\mathrm{Sp}_B(x)) \subseteq \mathrm{Fr}(\mathrm{Sp}_A(x))$, ezért $\mathrm{Sp}_B(x) \subseteq \mathrm{Sp}_A(x)$. A fordított tartalmazás nyilvánvalóan igaz, így $\mathrm{Sp}_B(x) = \mathrm{Sp}_A(x)$.

Legyen $b \in B$ olyan elem, amely A-ban invertálható; megmutatjuk, hogy ekkor b a B-ben is invertálható, vagyis a b elem A-beli inverze eleme B-nek. Valóban, ekkor b^* is invertálható A-ban, tehát a $b^*b \in B$ elem is invertálható A-ban. Ez azzal ekvivalens, hogy $0 \notin \mathrm{Sp}_A(b^*b)$. Az imént láttuk, hogy $\mathrm{Sp}_B(b^*b) = \mathrm{Sp}_A(b^*b)$, hiszen b^*b önadjungált elem B-ben. Ezért $0 \notin \mathrm{Sp}_B(b^*b)$, vagyis a $b^*b \in B$ elem invertálható B-ben. Természetesen ekkor a b^*b elem B-beli és A-beli inverzei egyenlők. Ekkor $(b^*b)^{-1}b^* \in B$ és nyilvánvaló, hogy ez *balinverze* b-nek B-ben. Hasonlóan kapjuk, hogy a $bb^* \in B$ elem invertálható B-ben, és $b^*(bb^*)^{-1}$ *jobbinverze* b-nek B-ben. Ezért b invertálható B-ben.

Legyen most $b \in B$ tetszőleges. Ha $z \notin \mathrm{Sp}_A(b)$, akkor a $z\mathbf{1} - b \in B$ elem invertálható A-ban, tehát az előző bekezdés alapján $z\mathbf{1} - b$ invertálható B-ben is, vagyis $z \notin \mathrm{Sp}_B(b)$. Ez azt jelenti, hogy $\mathrm{Sp}_B(b) \subseteq \mathrm{Sp}_A(b)$ teljesül, és a fordított tartalmazás nyilvánvalóan igaz. ■

18.4.2. Tétel. (A folytonosfüggvény-számítás tétele) *Legyen A egységelemes C^*-algebra és $a \in A$ normális elem. Ekkor létezik egyetlen olyan*

$$C_a : \mathscr{C}(\mathrm{Sp}_A(a); \mathbb{C}) \to A$$

*egységelem-tartó *-algebra-morfizmus, amelyre $C_a(id_{\mathrm{Sp}_A(a)}) = a$. A C_a leképezés izometria és $\mathrm{Im}(C_a)$ megegyezik az $\{a, \mathbf{1}\}$ halmaz által generált zárt *-részalgebrával.*

Bizonyítás. (*Egzisztencia.*) Jelölje B az $\{a, \mathbf{1}\}$ halmaz által generált zárt *-részalgebrát; ekkor B kommutatív egységelemes C^*-algebra, mert az a elem normális. A B kommutatív komplex Banach-algebra, ezért $\mathrm{Im}(\mathscr{G}_B(a)) = \mathrm{Sp}_B(a)$. Továbbá, ha $\chi_1, \chi_2 \in \mathrm{X}(B)$ olyanok, hogy $\chi_1(a) = \chi_2(a)$, akkor $\chi_1 = \chi_2$ az $\{a, \mathbf{1}\}$ halmaz által generált *-részalgebrán, mert χ_1 és χ_2 mindketten önadjungált funkcionálok és egységelem-tartók; ezért a χ_1 és χ_2 folytonossága miatt $\chi_1 = \chi_2$. Ez azt jelenti, hogy a $\mathscr{G}_B(a) : \mathrm{X}(B) \to \mathrm{Sp}_B(a)$ leképezés bijekció, és ez nyilvánvalóan folytonos is, tehát homeomorfizmus. Ezért a

$$(\mathscr{G}_B(a))^{\#} : \mathscr{C}(\mathrm{Sp}_B(a); \mathbb{C}) \to \mathscr{C}(\mathrm{X}(B); \mathbb{C}); \quad \varphi \mapsto \varphi \circ \mathscr{G}_B(a)$$

függvény *-izomorfizmus. Az első Gelfand-Najmark-tétel szerint a $\mathscr{G}_B : B \to \mathscr{C}(\mathrm{X}(B);\mathbb{C})$ Gelfand-reprezentáció is *-izomorfizmus, ezért a

$$\mathscr{G}_B^{-1} \circ (\mathscr{G}_B(a))^{\#} : \mathscr{C}(\mathrm{Sp}_B(a);\mathbb{C}) \to B$$

leképezés *-izomorfizmus. Ugyanakkor $\mathrm{Sp}_A(a) = \mathrm{Sp}_B(a)$ és B az A-nak zárt *-részalgebrája, így a

$$C_a := \mathscr{G}_B^{-1} \circ (\mathscr{G}_B(a))^{\#} : \mathscr{C}(\mathrm{Sp}_A(a);\mathbb{C}) \to A$$

leképezés olyan egységelem-tartó izometrikus *-algebra-morfizmus, amelyre $\mathrm{Im}(C_a) = B$. Továbbá, a definíciók szerint

$$C_a(id_{\mathrm{Sp}_A(a)}) := \ \mathscr{G}_B^{-1} \circ (\mathscr{G}_B(a))^{\#} \ \ (id_{\mathrm{Sp}_A(a)}) = \mathscr{G}_B^{-1}(id_{\mathrm{Sp}_A(a)} \circ \mathscr{G}_B(a)) = a$$

is teljesül.

(*Unicitás.*) Legyenek π_1 és π_2 olyan $\mathscr{C}(\mathrm{Sp}_A(a);\mathbb{C}) \to A$ egységelem-tartó *-algebra-morfizmusok, amelyekre $\pi_1(id_{\mathrm{Sp}_A(a)}) = a = \pi_2(id_{\mathrm{Sp}_A(a)})$. Ekkor az

$$\mathfrak{A} := \{\varphi \in \mathscr{C}(\mathrm{Sp}_A(a);\mathbb{C}) \mid \pi_1(\varphi) = \pi_2(\varphi)\}$$

halmaz olyan *-részalgebrája a $\mathscr{C}(\mathrm{Sp}_A(a);\mathbb{C})$ függvényalgebrának, amelynek eleme az azonosan 1 függvény, és amelyre $id_{\mathrm{Sp}_A(a)} \in \mathfrak{A}$, így $\mathfrak{A}$ szétválasztó az $\mathrm{Sp}_A(a)$ halmaz felett. Ezért a Stone–Weierstrass-tétel alapján $\mathfrak{A}$ a sup-norma szerint sűrű $\mathscr{C}(\mathrm{Sp}_A(a);\mathbb{C})$-ben. Ugyanakkor π_1 és π_2 a sup-norma szerint folytonosak, ezért $\mathfrak{A}$ a sup-normában zárt halmaz is, így $\mathfrak{A} = \mathscr{C}(\mathrm{Sp}_A(a);\mathbb{C})$, vagyis $\pi_1 = \pi_2$. ■

18.4.3. Definíció. *Ha A egységelemes C^*-algebra és $a \in A$ normális elem, akkor az előző tételben értelmezett $C_a : \mathscr{C}(\mathrm{Sp}_A(a);\mathbb{C}) \to A$ leképezést az a által meghatározott* **folytonosfüggvény-számító operátornak** *nevezzük, és minden $\varphi : \mathbb{C} \rightarrowtail \mathbb{C}$ függvényre, ha $\mathrm{Sp}_A(a) \subseteq \mathrm{Dom}(\varphi)$ és $\varphi|_{\mathrm{Sp}_A(a)} \in \mathscr{C}(\mathrm{Sp}_A(a);\mathbb{C})$, akkor a*

$$\varphi_A(a) := C_a(\varphi|_{\mathrm{Sp}_A(a)})$$

jelölést alkalmazzuk.

A jelölés következetességének igazolása céljából fogalmazzuk meg a következő állítást.

18.4.4. Állítás. *Legyen A egységelemes C^*-algebra és $a \in A$ normális elem. Minden $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ egészfüggvényre*

$$C_a(f|_{\mathrm{Sp}_A(a)}) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(D^k f)(0)}{k!} a^k.$$

Bizonyítás. Tudjuk, hogy ha $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ egészfüggvény, akkor az f függvény 0 pontbeli Taylor-sora a $\mathbb{C}$-n lokálisan egyenletesen konvergál f-hez, így a $\mathbb{C}$ minden kompakt részhalmazán egyenletesen konvergens. Tehát, ha $a \in A$, akkor a

$$\left(\sum_{k=0}^{n} \frac{(D^k f)(0)}{k!} id^k_{\mathrm{Sp}_A(a)}\right)_{n\in\mathbb{N}}$$

függvénysorozat egyenletesen konvergál az $f|_{\mathrm{Sp}_A(a)}$ függvényhez. Ha az $a \in A$ elem normális, akkor a C_a folytonosfüggvény-számító operátor a sup-norma szerint folytonos, ezért

$$C_a(f|_{\mathrm{Sp}_A(a)}) = \lim_{n\to\infty} C_a \left(\sum_{k=0}^{n} \frac{(D^k f)(0)}{k!} id^k_{\mathrm{Sp}_A(a)}\right) =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{(D^k f)(0)}{k!} a^k =: \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(D^k f)(0)}{k!} a^k. \blacksquare$$

18.4.5. Állítás. *Legyen A egységelemes C^*-algebra és $a \in A$ normális elem. Ha $\varphi : \mathbb{C} \rightarrowtail \mathbb{C}$ olyan függvény, hogy $\mathrm{Sp}_A(a) \subseteq \mathrm{Dom}(\varphi)$ és $\varphi|_{\mathrm{Sp}_A(a)} \in \mathscr{C}(\mathrm{Sp}_A(a); \mathbb{C})$, akkor*

$$\mathrm{Sp}_A(\varphi_A(a)) = \varphi\langle \mathrm{Sp}_A(a)\rangle.$$

Bizonyítás. Jelölje B az $\{a, \mathbf{1}\}$ halmaz által generált zárt *-részalgebrát A-ban. Tudjuk, hogy a C_a operátor algebra-izomorfizmus a $\mathscr{C}(\mathrm{Sp}_A(a); \mathbb{C})$ és B egységelemes algebrák között, ezért $\psi \in \mathscr{C}(\mathrm{Sp}_A(a); \mathbb{C})$ esetén $\mathrm{Sp}_B(C_a(\psi)) = \mathrm{Sp}_{\mathscr{C}(\mathrm{Sp}_A(a);\mathbb{C})}(\psi)$. Nyilvánvaló, hogy $\psi \in \mathscr{C}(\mathrm{Sp}_A(a); \mathbb{C})$ esetén

$$\mathrm{Sp}_{\mathscr{C}(\mathrm{Sp}_A(a);\mathbb{C})}(\psi) = \mathrm{Im}(\psi),$$

ugyanakkor $\mathrm{Sp}_A(C_a(\psi)) = \mathrm{Sp}_B(C_a(\psi))$. Ebből következik az állítás. $\blacksquare$

18.4.6. Állítás. *Legyen A egységelemes C^*-algebra és $a \in A$ normális elem. Ha $\psi : \mathbb{C} \rightarrowtail \mathbb{C}$ olyan függvény, hogy $\mathrm{Sp}_A(a) \subseteq \mathrm{Dom}(\psi)$ és $\psi|_{\mathrm{Sp}_A(a)} \in \mathscr{C}(\mathrm{Sp}_A(a); \mathbb{C})$, valamint $\varphi : \mathbb{C} \rightarrowtail \mathbb{C}$ olyan függvény, hogy $\psi\langle \mathrm{Sp}_A(a)\rangle \subseteq \mathrm{Dom}(\varphi)$ és $\varphi|_{\psi\langle \mathrm{Sp}_A(a)\rangle} \in \mathscr{C}(\psi\langle \mathrm{Sp}_A(a)\rangle; \mathbb{C})$, akkor*

$$(\varphi \circ \psi)_A(a) = \varphi_A(\psi_A(a)).$$

Bizonyítás. Legyen $\psi : \mathbb{C} \rightarrowtail \mathbb{C}$ olyan függvény, hogy $\mathrm{Sp}_A(a) \subseteq Dom(\psi)$, valamint $\psi|_{\mathrm{Sp}_A(a)} \in \mathscr{C}(\mathrm{Sp}_A(a); \mathbb{C})$. Az előző állítás szerint $\mathrm{Sp}_A(\psi_A(a)) = \psi\langle \mathrm{Sp}_A(a)\rangle$, ezért jól értelmezett a

$$\mathscr{C}(\mathrm{Sp}_A(\psi_A(a)); \mathbb{C}) \to A; \quad \varphi \mapsto (\varphi \circ \psi)_A(a)$$

leképezés, amely nyilvánvalóan olyan egységelem-tartó *-algebra-morfizmus, hogy az $id_{\mathrm{Sp}_A(\psi_A(a))}$ függvényhez a $\psi_A(a)$ elemet rendeli. Ezért a folytonosfüggvény-számító operátor egyértelműsége miatt ez a leképezés megegyezik a $C_{\psi_A(a)}$ operátorral. Ez azt jelenti, hogy minden $\varphi \in \mathscr{C}(\mathrm{Sp}_A(\psi_A(a))$ esetén $(\varphi \circ \psi)_A(a) = \varphi_A(\psi_A(a))$. Ha $\varphi : \mathbb{C} \rightarrowtail \mathbb{C}$ olyan függvény, hogy $\psi\langle \mathrm{Sp}_A(a)\rangle \subseteq Dom(\varphi)$ és $\varphi|_{\psi\langle \mathrm{Sp}_A(a)\rangle} \in \mathscr{C}(\psi\langle \mathrm{Sp}_A(a)\rangle; \mathbb{C})$, akkor az előzőeket alkalmazva a $\varphi|_{\psi\langle \mathrm{Sp}_A(a)\rangle}$ függvényre kapjuk a bizonyítandó egyenlőséget. $\blacksquare$

18.4.7. Állítás. *Legyenek A és B egységelemes C^*-algebrák, $\pi : A \to B$ egységelem-tartó *-algebra-morfizmus, és $a \in A$ normális elem. Ha $\varphi : \mathbb{C} \rightarrowtail \mathbb{C}$ olyan függvény, hogy $\mathrm{Sp}_A(a) \subseteq Dom(\varphi)$ és $\varphi|_{\mathrm{Sp}_A(a)} \in \mathscr{C}(\mathrm{Sp}_A(a);\mathbb{C})$, akkor*

$$\pi(\varphi_A(a)) = \varphi_B(\pi(a)).$$

Bizonyítás. A π leképezés *-algebra-morfizmus, ezért ha $a \in A$ normális elem, akkor $\pi(a) \in B$ is normális elem. Tudjuk, hogy $\mathrm{Sp}_B(\pi(a)) \subseteq \mathrm{Sp}_A(a)$, ezért ha $\varphi : \mathbb{C} \rightarrowtail \mathbb{C}$ olyan függvény, hogy $\mathrm{Sp}_A(a) \subseteq Dom(\varphi)$ és $\varphi|_{\mathrm{Sp}_A(a)} \in \mathscr{C}(\mathrm{Sp}_A(a);\mathbb{C})$, akkor $\mathrm{Sp}_B(\pi(a)) \subseteq Dom(\varphi)$ és $\varphi|_{\mathrm{Sp}_B(\pi(a))} \in \mathscr{C}(\mathrm{Sp}_B(\pi(a));\mathbb{C})$, így a $\varphi_B(\pi(a))$ elem jól értelmezett. Értelmezzük a

$$\sigma : \mathscr{C}(\mathrm{Sp}_A(a);\mathbb{C}) \to \mathscr{C}(\mathrm{Sp}_B(\pi(a));\mathbb{C}); \quad \varphi \mapsto \varphi|_{\mathrm{Sp}_B(\pi(a))}$$

leképezést, amely egységelem-tartó *-algebra-morfizmus. Tehát a $C_{\pi(a)} \circ \sigma$ és $\pi \circ C_a$ leképezések mindketten $\mathscr{C}(\mathrm{Sp}_A(a);\mathbb{C})$-n értelmezettek, B-be érkeznek, és egységelem-tartó *-algebra-morfizmusok. Ezért az

$$\mathfrak{A} := \{\varphi \in \mathscr{C}(\mathrm{Sp}_A(a);\mathbb{C}) \mid (C_{\pi(a)} \circ \sigma)(\varphi) = (\pi \circ C_a)(\varphi)\}$$

halmaz *-részalgebrája a $\mathscr{C}(\mathrm{Sp}_A(a);\mathbb{C})$ függvényalgebrának. A $C_{\pi(a)} \circ \sigma$ és $\pi \circ C_a$ leképezések folytonosak a sup-norma szerint, ezért $\mathfrak{A}$ zárt, továbbá $1_{\mathrm{Sp}_A(a)} \in \mathfrak{A}$ és könnyen látható, hogy $id_{\mathrm{Sp}_A(a)} \in \mathfrak{A}$, ezért $\mathfrak{A}$ szétválasztó $\mathrm{Sp}_A(a)$ felett. A Stone–Weierstrass-tétel alapján $\mathfrak{A}$ sűrű $\mathscr{C}(\mathrm{Sp}_A(a);\mathbb{C})$-ben a sup-norma szerint, így $\mathfrak{A} = \mathscr{C}(\mathrm{Sp}_A(a);\mathbb{C})$, tehát $C_{\pi(a)} \circ \sigma = \pi \circ C_a$. ■

Most röviden összefoglaljuk a folytonosfüggvény-számító operátor algebrai és topológiai tulajdonságait. Legyen A egységelemes C^*-algebra és $a \in A$ normális elem. Legyenek $\varphi, \psi : \mathbb{C} \rightarrowtail \mathbb{C}$ olyan függvények, hogy $\mathrm{Sp}_A(a) \subseteq Dom(\varphi) \cap Dom(\psi)$ és $\varphi|_{\mathrm{Sp}_A(a)}, \psi|_{\mathrm{Sp}_A(a)} \in \mathscr{C}(\mathrm{Sp}_A(a);\mathbb{C})$, valamint legyen $c \in \mathbb{C}$. Ekkor teljesülnek a következők.

$$(\varphi + \psi)_A(a) = \varphi_A(a) + \psi_A(a);$$
$$(\varphi \cdot \psi)_A(a) = \varphi_A(a) \cdot \psi_A(a);$$
$$(c.\varphi)_A(a) = c.\varphi_A(a);$$
$$(\varphi_A(a))^* = \overline{\varphi}_A(a);$$
$$\|\varphi_A(a)\| = \sup_{z \in \mathrm{Sp}_A(a)} |\varphi(z)|;$$
$$\mathrm{Sp}_A(\varphi_A(a)) = \varphi\langle \mathrm{Sp}_A(a)\rangle;$$
$${1_{\mathrm{Sp}_A(a)}}_A(a) = \mathbf{1}; \qquad {id_{\mathrm{Sp}_A(a)}}_A(a) = a.$$

A fenti összefüggésekből látható az is, hogy ha minden $z \in \mathrm{Sp}_A(a)$ esetén $|\varphi(z)| = 1$, akkor $\varphi_A(a)$ unitér elem A-ban. Ennek érdekes következménye a következő állítás.

18.4.8. Állítás. *Egységelemes C^*-algebra minden eleme előáll unitér elemek komplex lineáris kombinációjaként.*

Bizonyítás. *-algebra minden eleme előáll két önadjungált elem komplex lineáris kombinációjaként, és normált *-algebrának minden öndjungált eleme előáll 1-nél kisebb-egyenlő normájú elem pozitív számszorosaként. Ezért elég azt igazolni, hogy egységelemes C^*-algebra minden 1-nél kisebb-egyenlő normájú önadjungált eleme előáll unitér elemek komplex lineáris kombinációjaként.

Legyen tehát A egységelemes C^*-algebra és $x \in A_{sa}$ olyan, hogy $\|x\| \leq 1$. Ekkor $\mathrm{Sp}_A(x) \subseteq [-1, 1]$, tehát az

$$\varphi_{\pm} := id_{[-1,1]} \pm \mathbf{i}\sqrt{1 - id^2_{[-1,1]}} : [-1, 1] \to \mathbb{C}$$

folytonos függvények (közös) definíciós tartománya tartalmazza az $\mathrm{Sp}_A(x)$ halmazt. Minden $t \in [-1, 1]$ esetén $|\varphi_{\pm}(t)| = 1$, ezért $u_{\pm} := (\varphi_{\pm})_A(x)$ unitér elemek. A folytonosfüggvény-számító operátor algebrai tulajdonságai miatt

$$x = (id_{\mathrm{Sp}_A(x)})_A(x) = \ id_{[-1,1]} \ {}_A(x) = \ \frac{1}{2}(\varphi_+ + \varphi_-) \ {}_A(x) = \frac{1}{2}u_+ + \frac{1}{2}u_-$$

teljesül, tehát x előáll két unitér elem valós lineáris kombinációjaként. ■

Az előző állítás bizonyításából kiolvasható, hogy egységelemes C^*-algebra minden eleme előáll *négy* unitér elem komplex lineáris kombinációjaként.

18.5. Folytonosfüggvény-számítás C^*-algebra normális elemeire

18.5.1. Tétel. *Legyen A tetszőleges C^*-algebra, $a \in A$ normális elem, és vezessük be a $\mathscr{C}'(\mathrm{Sp}'_A(a); \mathbb{C}) := \{\varphi \in \mathscr{C}(\mathrm{Sp}'_A(a); \mathbb{C}) \mid \varphi(0) = 0\}$ halmazt, amely zárt *-részalgebra a $\mathscr{C}(\mathrm{Sp}'_A(a); \mathbb{C})$ függvényalgebrában. Ekkor létezik egyetlen olyan*

$$C'_a : \mathscr{C}'(\mathrm{Sp}'_A(a); \mathbb{C}) \to A$$

**-algebra-morfizmus, amelyre $C'_a(id_{\mathrm{Sp}_A(a)}) = a$. Ez a C'_a leképezés izometria és $\mathrm{Im}(C'_a)$ egyenlő az $\{a\}$ halmaz által generált zárt *-részalgebrával.*

Bizonyítás. (*Egzisztencia.*) Tekintsük az $\tilde{A}$ egységelemes C^*-algebrát, és jelölje j az $A \to \tilde{A}$; $a \mapsto (0, a)$ injekciót, amely izometrikus *-algebra-morfizmus. Az a elem normális A-ban, tehát $(0, a) \in \tilde{A}$ is normális, így az egységelemes C^*-algebrákra vonatkozó folytonosfüggvény-számítás tétel alapján képezhető a $C_{(0,a)} : \mathscr{C}(\mathrm{Sp}_{\tilde{A}}((0, a)); \mathbb{C}) \to \tilde{A}$ folytonosfüggvény-számító operátor, ugyanakkor definíció szerint $\mathrm{Sp}'_A(a) := \mathrm{Sp}_{\tilde{A}}((0, a))$.

Megmutatjuk, hogy $C_{(0,a)}\langle\mathscr{C}'(\mathrm{Sp}'_A(a);\mathbb{C})\rangle \subseteq \mathrm{Im}(j)$. Ehhez vezessük be az

$$\mathfrak{A} := \{\sum_{(m,n)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N}} c_{m,n} id^m_{\mathrm{Sp}'_A(a)} \overline{id_{\mathrm{Sp}'_A(a)}}^n \mid (c_{m,n})_{(m,n)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N}} \in \mathbb{C}^{(\mathbb{N}\times\mathbb{N})} \ \wedge \ c_{0,0} = 0\}$$

függvényhalmazt. Nyilvánvaló, hogy $\mathfrak{A} \subseteq \mathscr{C}'(\mathrm{Sp}'_A(a);\mathbb{C})$ olyan *-részalgebra, amelynek eleme az $id_{\mathrm{Sp}'_A(a)}$ függvény, ezért $\mathfrak{A}$ szétválasztó $\mathrm{Sp}'_A(a)$ felett, valamint minden $z \in \mathrm{Sp}'_A(a) \setminus \{0\}$ esetén $id_{\mathrm{Sp}'_A(a)}(z) \neq 0$. Ezért a Stone–Weierstrass-tétel alapján $\mathfrak{A}$ supnormában sűrű $\mathscr{C}'(\mathrm{Sp}'_A(a);\mathbb{C})$-ben. Továbbá nyilvánvaló, hogy minden $\varphi \in \mathfrak{A}$ esetén $C_{(0,a)}(\varphi) \in \mathrm{Im}(j)$, hiszen ha $(c_{m,n})_{(m,n)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N}} \in \mathbb{C}^{(\mathbb{N}\times\mathbb{N})}$, $c_{(0,0)} = 0$ és

$$\varphi = \sum_{(m,n)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N}} c_{m,n} id^m_{\mathrm{Sp}'_A(a)} \ \overline{id_{\mathrm{Sp}'_A(a)}}^{\,n},$$

akkor

$$C_{(0,a)}(\varphi) = \sum_{(m,n)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N}} c_{m,n}(0,a)^m(0,a^*)^n = \left(0, \sum_{(m,n)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N}} c_{m,n}a^m(a^*)^n\right) \in \mathrm{Im}(j),$$

mert $C_{(0,a)}(id_{\mathrm{Sp}'_A(a)}) = (0,a)$ és $C_{(0,a)}$ *-algebra-morfizmus. Így a $C_{(0,a)}$ operátor supnorma szerinti folytonosságából kapjuk, hogy

$$C_{(0,a)}\langle\mathscr{C}'(\mathrm{Sp}'_A(a);\mathbb{C})\rangle = C_{(0,a)}\langle\overline{\mathfrak{A}}\rangle \subseteq \overline{C_{(0,a)}\langle\mathfrak{A}\rangle} \subseteq \overline{\mathrm{Im}(j)} = \mathrm{Im}(j),$$

ahol kihasználtuk azt a nyilvánvaló tényt, hogy $\mathrm{Im}(j)$ zárt halmaz $\tilde{A}$-ban.

Tehát a $j^{-1} \circ C_{(0,a)}$ operátor definíciós tartománya tartalmazza $\mathscr{C}'(\mathrm{Sp}'_A(a);\mathbb{C})$-t; jelölje C'_a a $j^{-1} \circ C_{(0,a)}$ leszűkítését $\mathscr{C}'(\mathrm{Sp}'_A(a);\mathbb{C})$-re. A $C_{(0,a)}$ leképezés tulajdonságai alapján $C'_a : \mathscr{C}'(\mathrm{Sp}'_A(a);\mathbb{C}) \to A$ olyan *-algebra-morfizmus, amelyre $C'_a(id_{\mathrm{Sp}'_A(a)}) = a$. A j és $C_{(0,a)}$ operátorok izometrikussága miatt C'_a is izometria. Ebből következik, hogy $\mathrm{Im}(C'_a)$ zárt *-részalgebra A-ban, és $a \in \mathrm{Im}(C'_a)$, így $\mathrm{Im}(C'_a)$ tartalmazza az $\{a\}$ halmaz által generált zárt *-részalgebrát. Ha B olyan zárt *-részalgebra A-ban, amelyre $a \in B$, akkor $(c_{m,n})_{(m,n)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N}} \in \mathbb{C}^{(\mathbb{N}\times\mathbb{N})}$ és $c_{(0,0)} = 0$ esetén $\sum\limits_{(m,n)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N}} c_{m,n}a^m(a^*)^n \in B$, tehát $C'_a\langle\mathfrak{A}\rangle \subseteq B$, következésképpen $\mathrm{Im}(C'_a) = C'_a\langle\mathscr{C}'(\mathrm{Sp}'_A(a);\mathbb{C})\rangle = C'_a\langle\overline{\mathfrak{A}}\rangle \subseteq \overline{C'_a\langle\mathfrak{A}\rangle} \subseteq \overline{B} = B$. Ez azt jelenti, hogy $\mathrm{Im}(C'_a)$ egyenlő az $\{a\}$ halmaz által generált zárt *-részalgebrával.

(*Unicitás.*) Legyenek $\pi, \pi' : \mathscr{C}'(\mathrm{Sp}'_A(a);\mathbb{C}) \to A$ olyan *-algebra-morfizmusok, amelyekre $\pi(id_{\mathrm{Sp}'_A(a)}) = a = \pi'(id_{\mathrm{Sp}'_A(a)})$. Ekkor π és π' megegyeznek az $\mathfrak{A}$ függvényhalmazon. Ugyanakkor π és π' folytonosak (sőt norma-nem-növelők) a C^*-normák szerint, ezért $\mathscr{C}'(\mathrm{Sp}'_A(a);\mathbb{C}) = \overline{\mathfrak{A}} \subseteq [\pi = \pi']$, vagyis $\pi = \pi'$. ■

18.5.2. Definíció. *Ha A C^*-algebra és $a \in A$ normális elem, akkor az előző tételben értelmezett $C'_a : \mathscr{C}'(\mathrm{Sp}'_A(a);\mathbb{C}) \to A$ leképezést az a által meghatározott* **folytonosfüggvény-számító operátornak** *nevezzük.*

Tegyük fel, hogy A egységelemes C^*-algebra és $a \in A$ normális elem. Ekkor képezhetők a $C_a : \mathscr{C}(\mathrm{Sp}_A(a);\mathbb{C}) \to A$ és $C'_a : \mathscr{C}'(\mathrm{Sp}'_A(a);\mathbb{C}) \to A$ operátorok és $\mathrm{Sp}'_A(a) = \mathrm{Sp}_A(a) \cup \{0\}$. Ekkor a C_a és C'_a operátorok kapcsolatáról a következők mondhatók.

– Minden $\varphi \in \mathscr{C}'(\mathrm{Sp}'_A(a);\mathbb{C})$ esetén $C_a(\varphi|_{\mathrm{Sp}_A(a)}) = C'_a(\varphi)$, mert a

$$\mathscr{C}'(\mathrm{Sp}'_A(a);\mathbb{C}) \to A; \quad \varphi \mapsto C_a(\varphi|_{\mathrm{Sp}_A(a)})$$

leképezés olyan *-algebra-morfizmus, amely az $id_{\mathrm{Sp}'_A(a)}$ függvényhez az a elemet rendeli, ezért a C'_a operátor unicitása alapján ez a leképezés megegyezik C'_a-val.

– Tegyük fel, hogy $0 \notin \mathrm{Sp}_A(a)$, vagyis az a elem invertálható A-ban. Ekkor 0 izolált pontja az $\mathrm{Sp}'_A(a)$ kompakt halmaznak. Minden $\varphi \in \mathscr{C}(\mathrm{Sp}_A(a);\mathbb{C})$ esetén jelölje φ^0 a φ függvény 0-val vett kiterjesztését $\mathrm{Sp}'_A(a)$-ra; ekkor $\varphi^0 \in \mathscr{C}'(\mathrm{Sp}'_A(a);\mathbb{C})$. Minden $\varphi \in \mathscr{C}(\mathrm{Sp}_A(a);\mathbb{C})$ esetén teljesül a $C'_a(\varphi^0) = C_a(\varphi)$ egyenlőség, mert a

$$\mathscr{C}(\mathrm{Sp}_A(a);\mathbb{C}) \to A; \quad \varphi \mapsto C'_a(\varphi^0)$$

leképezés olyan *-algebra-morfizmus, amely az $id_{\mathrm{Sp}_A(a)}$ függvényhez az a elemet rendeli, ezért a C_a operátor unicitása alapján ez a leképezés megegyezik C_a-val.

– Tegyük fel, hogy $0 \in \mathrm{Sp}_A(a)$, vagyis az a elem nem invertálható A-ban. Ekkor $\mathrm{Sp}'_A(a) = \mathrm{Sp}_A(a)$, így nyilvánvalóan $\mathscr{C}'(\mathrm{Sp}'_A(a);\mathbb{C}) \subseteq \mathscr{C}(\mathrm{Sp}_A(a);\mathbb{C})$. Minden $\varphi \in \mathscr{C}'(\mathrm{Sp}'_A(a);\mathbb{C})$ esetén $C'_a(\varphi) = C_a(\varphi)$ (vagyis $C'_a \subseteq C_a$), mert a

$$\mathscr{C}'(\mathrm{Sp}'_A(a);\mathbb{C}) \to A; \quad \varphi \mapsto C_a(\varphi)$$

leképezés olyan *-algebra-morfizmus, amely az $id_{\mathrm{Sp}'_A(a)}$ függvényhez az a elemet rendeli, ezért a C'_a operátor unicitása alapján ez a leképezés megegyezik C'_a-val.

A fentiek alapján a következő jelölési konvenció van a korábban bevezetett jelöléssel.

18.5.3. Jelölés. *Legyen A C^*-algebra és $a \in A$ normális elem. Ha $\varphi : \mathbb{C} \rightarrowtail \mathbb{C}$ olyan függvény, hogy $\mathrm{Sp}'_A(a) \subseteq Dom(\varphi)$, $\varphi|_{\mathrm{Sp}'_A(a)} \in \mathscr{C}(\mathrm{Sp}'_A(a);\mathbb{C})$ és $\varphi(0) = 0$, akkor a*

$$\varphi_A(a) := C'_a(\varphi|_{\mathrm{Sp}'_A(a)})$$

jelölést alkalmazzuk.

18.6. Alkalmazás – Čech-Stone kompaktifikáció

Most megmutatjuk az első Gelfand-Najmark-tétel egy érdekes általános topológiai alkalmazását.

18.6.1. Állítás. *Legyen T teljesen reguláris Hausdorff-tér. Létezik olyan K kompakt tér és olyan $j : T \to K$ folytonos függvény, hogy*

– minden S kompakt térhez és minden $f : T \to S$ folytonos függvényhez létezik egyetlen olyan $\tilde{f} : K \to S$ folytonos függvény, amelyre $\tilde{f} \circ j = f$;

– $\mathrm{Im}(j)$ sűrű K-ban;

– j homeomorfizmus T és az $\mathrm{Im}(j)$ topologikus altér között.

(**Megjegyzés**. Ha T teljesen reguláris Hausdorff-tér, akkor minden ilyen tulajdonságú (K, j) párt a T tér *Čech-Stone kompaktifikációjának* nevezünk.)

Bizonyítás. Legyen $A := \mathscr{C}^b(T;\mathbb{C})$, vagyis A a $T \to \mathbb{C}$ korlátos folytonos függvények kommutatív egységelemes C^*-algebrája. Minden $t \in T$ esetén az $A \to \mathbb{C}$; $a \mapsto a(t)$ függvény nyilvánvalóan eleme $\mathrm{X}(A)$-nak, ezért jól értelmezett a

$$j : T \to \mathrm{X}(A); \quad t \mapsto (a \mapsto a(t))$$

leképezés. Az $\mathrm{X}(A)$ feletti Gelfand-topológia a pontonkénti konvergencia topológiája, és A elemei folytonos függvények, így az átviteli elv alapján j folytonos függvény a T topologikus tér és az $\mathrm{X}(A)$ kompakt tér között. Minden $H \subseteq A$ véges halmazra, $\mathbb{R}^+ \ni \varepsilon$-ra és $\mathrm{X}(A) \ni \chi$-re legyen

$$W_{H,\varepsilon}(\chi) := \{\chi' \in \mathrm{X}(A) \mid (\forall\, a \in H) : |\chi'(a) - \chi(a)| < \varepsilon\}.$$

A Gelfand-topológia definíciója szerint minden $\chi \in \mathrm{X}(A)$ esetén a $W_{H,\varepsilon}(\chi)$ alakú halmazok a χ-nek környezetbázisát alkotják, ahol $H \subseteq A$ tetszőleges véges halmaz és $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ tetszőleges. (Eddig nem használtuk ki sem azt, hogy T teljesen reguláris tér sem azt, hogy Hausdorff-tér.)

A j függvény injektivitása azzal ekvivalens, hogy az A függvényhalmaz szétválasztó T felett. Ha T teljesen reguláris Hausdorff-tér, akkor még a $\mathscr{C}(T;[0,1])$ függvényhalmaz is szétválasztó T felett.

Megmutatjuk, hogy ha T teljesen reguláris (nem feltétlenül Hausdorff-) tér, akkor a $j : T \to \mathrm{Im}(j)$ leképezés *nyílt* a T topologikus tér és az $\mathrm{Im}(j)$ topologikus altér között. Ehhez legyen $t \in T$ rögzített, és $\Omega \subseteq T$ tetszőleges nyílt halmaz, amelyre $t \in \Omega$. Azt kell igazolni, hogy létezik olyan $H \subseteq A$ véges halmaz és $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$, amelyre $W_{H,\varepsilon}(j(t)) \cap \mathrm{Im}(j) \subseteq j\langle\Omega\rangle$. A T teljes regularitása miatt létezik olyan $a \in \mathscr{C}(T;[0,1]) \subseteq A$, hogy $a(t) = 1$ és $[a \neq 0] \subseteq \Omega$. Ha $\varepsilon \in]0,1[$ tetszőleges valós szám, akkor $W_{\{a\},\varepsilon}(j(t)) \cap \mathrm{Im}(j) \subseteq j\langle\Omega\rangle$, mert ha $t' \in T$ és $j(t') \in W_{\{a\},\varepsilon}(j(t))$, akkor $|a(t') - a(t)| = |j(t)(a) - j(t')(a)| < \varepsilon < 1$, tehát $a(t') \neq 0$, így $t' \in \Omega$, vagyis $j(t') \in j\langle\Omega\rangle$. Tehát, ha T teljesen reguláris Hausdorff-tér, akkor a $j : T \to \mathrm{Im}(j)$ függvény homeomorfizmus.

Igazoljuk, hogy az $\mathrm{Im}(j)$ halmaz sűrű az $\mathrm{X}(A)$ kompakt térben. Indirekt bizonyítunk, tehát feltesszük, hogy $\overline{\mathrm{Im}(j)} \neq \mathrm{X}(A)$; ekkor létezik olyan $\varphi \in \mathscr{C}(\mathrm{X}(A);\mathbb{C})$, hogy $\varphi \neq 0$

és $\overline{\mathrm{Im}(j)} \subseteq [\varphi = 0]$. A $\mathscr{G}_A : A \to \mathscr{C}(\mathrm{X}(A); \mathbb{C})$ Gelfand-reprezentáció az első Gelfand-Najmark-tétel alapján szürjektív, így van olyan $a \in A$, hogy $\mathscr{G}_A(a) = \varphi$, és $\varphi \neq 0$ miatt $a \neq 0$. Ekkor van olyan $t \in T$, hogy $a(t) \neq 0$, vagyis $\varphi(j(t)) = (\mathscr{G}_A(a))(j(t)) = j(t)(a) = a(t) \neq 0$, ugyanakkor $\varphi \circ j = 0$, ami ellentmondás.

Megmutatjuk, hogy ha S kompakt tér és $f : T \to S$ folytonos függvény, akkor létezik olyan $\tilde{f} : \mathrm{X}(A) \to S$ folytonos függvény, amelyre $\tilde{f} \circ j = f$. Ehhez vegyük az

$$f^{\#} : \mathscr{C}(S; \mathbb{C}) \to \mathscr{C}^b(T; \mathbb{C}); \quad \varphi \mapsto \varphi \circ f$$

leképezést, amely nyilvánvalóan egységelem-tartó *-algebra-morfizmus. Ekkor a $\mathscr{G}_A \circ f^{\#} : \mathscr{C}(S; \mathbb{C}) \to \mathscr{C}(\mathrm{X}(A); \mathbb{C})$ leképezés is egységelem-tartó *-algebra-morfizmus, továbbá S és $\mathrm{X}(A)$ kompakt terek. A 15.4.5. szerint $\mathscr{G}_A \circ f^{\#}$ *térszerű*, vagyis egyértelműen létezik olyan $\tilde{f} : \mathrm{X}(A) \to S$ folytonos függvény, amelyre az

$$\tilde{f}^{\#} : \mathscr{C}(S; \mathbb{C}) \to \mathscr{C}(\mathrm{X}(A); \mathbb{C}); \quad \varphi \mapsto \varphi \circ \tilde{f}$$

leképezés egyenlő $\mathscr{G}_A \circ f^{\#}$-tel. Ha $t \in T$, akkor minden $\varphi \in \mathscr{C}(S; \mathbb{C})$ esetén

$$\varphi((\tilde{f} \circ j)(t)) = \varphi(\tilde{f}(j(t))) = (\varphi \circ \tilde{f})(j(t)) = (\tilde{f}^{\#}(\varphi))(j(t)) =$$

$$= ((\mathscr{G}_A \circ f^{\#})(\varphi))(j(t)) = j(t)(f^{\#}(\varphi)) = \varphi(f(t)),$$

amiből következik, hogy $(\tilde{f} \circ j)(t) = f(t)$, mert $\mathscr{C}(S; \mathbb{C})$ szétválasztó S felett. Tehát $\tilde{f} \circ j = f$, és $\overline{\mathrm{Im}(j)} = \mathrm{X}(A)$ miatt $\tilde{f}$ az egyetlen olyan folytonos függvény $\mathrm{X}(A)$ felett, amelyre ez teljesül. Ez azt jelenti, hogy a $K := \mathrm{X}(A)$ kompakt tér a j leképezéssel együtt eleget tesz a követelményeknek. ■

19. fejezet

Pozitív elemek C^*-algebrában

19.1. C^*-algebra pozitív elemeinek hatványai

A C^*-algebrák normális elemeivel kapcsolatos folytonosfüggvény-számítás egyik legfontosabb speciális esete a pozitív spektrumú önadjungált elemek hatványozása.

19.1.1. Definíció. *Legyen A C^*-algebra és $x \in A$ önadjungált elem. Ekkor*

$$x^+ := \ id^+_{\mathbb{R}}{}_A(x), \quad x^- := \ id^-_{\mathbb{R}}{}_A(x), \quad |x| := |id_{\mathbb{R}}|(x)$$

és az x^+ (illetve x^-) elemet az x **pozitív részének** (*illetve* **negatív részének**, *illetve* **abszolút értékének**) *nevezzük. Továbbá, ha $\mathrm{Sp}'_A(x) \subseteq \mathbb{R}_+$, akkor minden $\alpha \in \mathbb{R}^+$ esetén*

$$x^\alpha := (id^\alpha_{\mathbb{R}^+})_A\,(x),$$

és x^α-t az x elem **α-adik hatványának** *nevezzük.*

Természetesen a definíció értelmes, mert

– az $id^\pm_{\mathbb{R}}$ és $|id_{\mathbb{R}}|$ függvények olyan $\mathbb{C} \rightarrowtail \mathbb{C}$ folytonos függvények, amelyek definíciós tartománya tartalmazza az $\mathbb{R}$ halmazt, így az önadjungált elemek vesszős spektrumait is, és a 0-hoz a 0 értéket rendelik, továbbá

– $\alpha \in \mathbb{R}^+$ esetén az $id^\alpha_{\mathbb{R}^+}$ függvény olyan $\mathbb{C} \rightarrowtail \mathbb{C}$ folytonos függvény, amelynek definíciós tartománya tartalmazza az $\mathbb{R}_+$ halmazt, és a 0-hoz a 0 értéket rendeli.

Megjegyezzük, hogy ha A C^*-algebra és $x \in A_{sa}$, akkor a folytonosfüggvény-számító operátor algebrai tulajdonságai szerint

$$x = x^+ - x^-, \quad |x| = x^+ + x^-, \quad x^+x^- = x^-x^+ = 0.$$

Ha még $\mathrm{Sp}'_A(x) \subseteq \mathbb{R}_+$ is igaz, akkor $\alpha, \beta \in \mathbb{R}^+$ esetén $\mathrm{Sp}'_A(x^\alpha) \subseteq \mathbb{R}_+$ és fennáll az

$$(x^\alpha)^\beta = x^{\alpha\beta}$$

egyenlőség. Világos továbbá, hogy ha $x \in A_{sa}$ olyan, hogy $\mathrm{Sp}'_A(x) \subseteq \mathbb{R}_+$, akkor minden $\mathbb{N}^+ \ni n$-re, az itt értelmezett x^n hatvány megegyezik az x elem n-edik algebrai hatványával.

Ha A egységelemes C^*-algebra és $x \in A_{sa}$ olyan invertálható elem, hogy $\mathrm{Sp}_A(x) \subseteq \mathbb{R}_+$, akkor $\mathrm{Sp}_A(x) \subseteq \mathbb{R}^+$, ezért *bármely* $\alpha \in \mathbb{R}$ esetében értelmezhető az $(id_{\mathbb{R}}^\alpha)_A(x) \in A$ elem, amit szintén x^α-val jelölünk, és az x^α szimbólummal jelölünk, mert ez a jelölés nem vezethet félreértésre.

19.1.2. Állítás. *Legyen A C^*-algebra és $y \in A_{sa}$ olyan, hogy $\mathrm{Sp}'_A(y) \subseteq \mathbb{R}_+$. Ekkor minden $\alpha \in \mathbb{R}^+$ számhoz létezik egyetlen olyan $x \in A_{sa}$, amelyre $\mathrm{Sp}'_A(x) \subseteq \mathbb{R}_+$ és $x^\alpha = y$ teljesül.*

Bizonyítás. Képezhető az $x := y^{1/\alpha} \in A_{sa}$ elem, és erre $\mathrm{Sp}'_A(x) \subseteq \mathbb{R}_+$, valamint $x^\alpha = y$ teljesül. Ha $z \in A_{sa}$ szintén olyan, hogy $\mathrm{Sp}'_A(z) \subseteq \mathbb{R}_+$ és $z^\alpha = y$, akkor ebből

$$x := y^{1/\alpha} = (z^\alpha)^{1/\alpha} = (id_{\mathbb{R}_+})_A(z) = z$$

adódik, tehát x egyértelműen van meghatározva. ■

19.1.3. Következmény. *Ha A C^*-algebra, akkor*

$$\{x \in A_{sa} | \mathrm{Sp}'_A(x) \subseteq \mathbb{R}_+\} \subseteq A_+.$$

Bizonyítás. Ha $x \in A_{sa}$ és $\mathrm{Sp}'_A(x) \subseteq \mathbb{R}_+$, akkor $x^{1/2} \in A_{sa}$ olyan, hogy

$$x = (x^{1/2})^2 = (x^{1/2})^*(x^{1/2}) \in A_+. \blacksquare$$

19.1.4. Következmény. *Ha A C^*-algebra, $x \in A_{sa}$ és $\varphi \in \mathscr{C}(\mathrm{Sp}'_A(x); \mathbb{R}_+)$ olyan függvény, hogy $\varphi(0) = 0$, akkor $\varphi_A(x) \in A_+$.*

Bizonyítás. Az előző állítás alapján nyilvánvaló, mert $\mathrm{Sp}'_A(\varphi_A(x)) = \mathrm{Im}(\varphi) \subseteq \mathbb{R}_+$. ■

19.1.5. Következmény. *C^*-algebra minden eleme előáll pozitív elemek komplex lineáris kombinációjaként. C^*-algebra felett önadjungált funkcionálok között a természetes előrendezés rendezés.*

Bizonyítás. Az első állítás az előzőek alapján triviális, míg a második állítás az elsőnek nyilvánvaló következménye. ■

19.1.6. Állítás. (A pozitivitás jellemzése teljes operátoralgebrában) *Ha $\mathscr{H}$ Hilbert-tér és $x \in \mathscr{L}(\mathscr{H})$, akkor az x elem pontosan akkor pozitív az $\mathscr{L}(\mathscr{H})$ C^*-algebrában, ha minden $\zeta \in \mathscr{H}$ esetén $(x(\zeta)|\zeta) \in \mathbb{R}_+$.*

Bizonyítás. Legyen $A := \mathscr{L}(\mathscr{H})$. Ha $x \in A_+$, akkor létezik olyan $(a_i)_{i\in I}$ véges rendszer A-ban, amelyre $x = \sum\limits_{i\in I} a_i^* a_i$, és ekkor minden $\zeta \in \mathscr{H}$ esetén

$$(x(\zeta)|\zeta) = \sum_{i\in I} ((a_i^* a_i)(\zeta) \,|\, \zeta) = \sum_{i\in I} (a_i(\zeta) \,|\, a_i(\zeta)) = \sum_{i\in I} \|a_i(\zeta)\|^2 \in \mathbb{R}_+.$$

Megfordítva, tegyük fel, hogy minden $\zeta \in \mathscr{H}$ esetén $(x(\zeta)|\zeta) \in \mathbb{R}_+$. Ebből következik, hogy $x \in A_{sa}$, sőt ehhez még az is elég volna, hogy minden $\zeta \in \mathscr{H}$ esetén $(x(\zeta)|\zeta) \in \mathbb{R}$ teljesüljön. Valóban, ekkor minden $\zeta, \eta \in \mathscr{H}$ vektorra könnyen ellenőrizhető, hogy

$$(x(\zeta)|\eta) = \frac{1}{4}\sum_{k=0}^{3} \mathbf{i}^k (x(\zeta + \mathbf{i}^k\eta)|\zeta + \mathbf{i}^k\eta) = \frac{1}{4}\sum_{k=0}^{3} \bar{\mathbf{i}}^k (x(\zeta + \bar{\mathbf{i}}^k\eta)|\zeta + \bar{\mathbf{i}}^k\eta) =$$

$$= \frac{1}{4}\sum_{k=0}^{3} \bar{\mathbf{i}}^k (x(\mathbf{i}^k\zeta + \eta)|\mathbf{i}^k\zeta + \eta) \overset{*}{=} \frac{1}{4}\sum_{k=0}^{3} \bar{\mathbf{i}}^k \overline{(x(\eta + \mathbf{i}^k\zeta)|\eta + \mathbf{i}^k\zeta)} =$$

$$= \overline{\frac{1}{4}\sum_{k=0}^{3} \mathbf{i}^k (x(\eta + \mathbf{i}^k\zeta)|\eta + \mathbf{i}^k\zeta)} = \overline{(x(\eta)|\zeta)} = (\zeta|x(\eta)) = (x^*(\zeta)|\eta),$$

ahol a $\overset{*}{=}$ egyenlőségnél használtuk ki a hipotézist. Tehát $x \in A_{sa}$, így felírható rá az $x = x^+ - x^-$ egyenlőség. Ha $\zeta \in \mathscr{H}$, akkor $x^+x^- = 0$ és a hipotézis miatt

$$0 \leq \; x(x^-(\zeta))\,\big|\,x^-(\zeta) \; = \; (x^+ - x^-)(x^-(\zeta))\,\big|\,x^-(\zeta) \; =$$

$$= - \; (x^-)^2(\zeta))\,\big|\,x^-(\zeta) \; = - \; (x^-)^3(\zeta))\,\big|\,\zeta \; .$$

Ugyanakkor $(x^-)^3 = ((x^-)^{3/2})^2 \in A_+$, ezért az előzőek alapján minden $\mathscr{H} \ni \zeta$-ra $((x^-)^3(\zeta))\,|\,\zeta) \geq 0$. Ezért $\zeta \in \mathscr{H}$ esetén $((x^-)^3(\zeta))\,|\,\zeta) = 0$. Ebből azt kapjuk, hogy minden $\zeta, \eta \in \mathscr{H}$ vektorra

$$(x^-)^3(\zeta))\,\big|\,\eta \; = \frac{1}{4}\sum_{k=0}^{3} \mathbf{i}^k ((x^-)^3(\zeta + \mathbf{i}^k\eta)|\zeta + \mathbf{i}^k\eta) = 0,$$

tehát $(x^-)^3 = 0$. Ebből következik, hogy $(x^-)^4 = 0$, tehát $0 = \|(x^-)^4\| = \|x^-\|^4$, vagyis $x^- = 0$. Ezért $x = x^+ \in A_+$. ■

19.2. A pozitivitás spektrális jellemzése

19.2.1. Lemma. *Legyen A egységelemes C^*-algebra és $x \in A$ önadjungált elem.*

a) *Ha* $\|\mathbf{1} - x\| \leq 1$, *akkor* $\mathrm{Sp}_A(x) \subseteq \mathbb{R}_+$.

b) *Ha* $\mathrm{Sp}_A(x) \subseteq \mathbb{R}_+$ *és* $\|x\| \leq 1$, *akkor* $\|\mathbf{1} - x\| \leq 1$.

c) *Az* $\|\|x\|.\mathbf{1} - x\| \leq \|x\|$ *egyenlőtlenség ekvivalens azzal, hogy* $\mathrm{Sp}_A(x) \subseteq \mathbb{R}_+$.

Bizonyítás. a) Láttuk azt, hogy ha A egységelemes algebra a K algebrailag zárt test felett, akkor minden $P \in K[X]$ nem nulladfokú polinom és $a \in A$ esetén $\mathrm{Sp}_A(P_A(a)) = P_K\langle \mathrm{Sp}_A(a)\rangle$. Ebből következik, hogy $\mathrm{Sp}_A(\mathbf{1} - x) = 1 - \mathrm{Sp}_A(x)$ és ha $\|\mathbf{1} - x\| \leq 1$, akkor $\mathrm{Sp}_A(\mathbf{1} - x) \subseteq [-1, 1]$, ezért $\mathrm{Sp}_A(x) \subseteq \mathbb{R}_+$.

b) Ha $\mathrm{Sp}_A(x) \subseteq \mathbb{R}_+$ és $\|x\| \leq 1$, akkor $\mathrm{Sp}_A(x) \subseteq [0, 1]$, ezért $\mathrm{Sp}_A(\mathbf{1} - x) = 1 - \mathrm{Sp}_A(x) \subseteq [0, 1]$, következésképpen $\|\mathbf{1} - x\| \leq 1$.

c) Ha $\|x\| \leq 1$, akkor az a) és b) alapján a $\|\mathbf{1} - x\| \leq 1$ egyenlőtlenség ekvivalens az $\mathrm{Sp}_A(x) \subseteq \mathbb{R}_+$ tartalmazással. Ha tehát $x \neq 0$, akkor ezt alkalmazva az $x/\|x\|$ elemre kapjuk, hogy az $\|\mathbf{1} - (x/\|x\|)\| \leq 1$, vagyis $\|\|x\|.\mathbf{1} - x\| \leq \|x\|$ egyenlőtlenség ekvivalens az $\mathrm{Sp}_A(x/\|x\|) \subseteq \mathbb{R}_+$, vagyis $\mathrm{Sp}_A(x) \subseteq \mathbb{R}_+$ tartalmazással. ■

19.2.2. Következmény. *Ha A egységelemes C^*-algebra és $x, y \in A_{sa}$ olyanok, hogy* $\mathrm{Sp}_A(x) \subseteq \mathbb{R}_+$ *és* $\mathrm{Sp}_A(y) \subseteq \mathbb{R}_+$, *akkor* $\mathrm{Sp}_A(x + y) \subseteq \mathbb{R}_+$.

Bizonyítás. Először tegyük fel, hogy $x, y \in A_{sa}$, $\mathrm{Sp}_A(x) \subseteq \mathbb{R}_+$, $\mathrm{Sp}_A(y) \subseteq \mathbb{R}_+$, és $\|x\| \leq 1$ és $\|y\| \leq 1$. A előző állítás b) pontja szerint $\|\mathbf{1}-x\| \leq 1$ és $\|\mathbf{1}-y\| \leq 1$, következésképpen

$$\left\|\mathbf{1} - \frac{1}{2}(x + y)\right\| = \frac{1}{2}\|(\mathbf{1} - x) + (\mathbf{1} - y)\| \leq 1,$$

így az előző állítás a) pontja alapján $(1/2)\mathrm{Sp}_A(x + y) = \mathrm{Sp}_A((1/2)(x + y)) \subseteq \mathbb{R}_+$, tehát $\mathrm{Sp}_A(x + y) \subseteq \mathbb{R}_+$.

Ha $x, y \in A_{sa}$ tetszőleges olyan elemek, amelyekre $\mathrm{Sp}_A(x) \subseteq \mathbb{R}_+$ és $\mathrm{Sp}_A(y) \subseteq \mathbb{R}_+$, akkor van olyan $\alpha \in \mathbb{R}^+$, hogy $\|\alpha x\| \leq 1$ és $\|\alpha y\| \leq 1$, és persze $\mathrm{Sp}_A(\alpha x) = \alpha\mathrm{Sp}_A(x) \subseteq \mathbb{R}_+$, valamint $\mathrm{Sp}_A(\alpha y) = \alpha\mathrm{Sp}_A(y) \subseteq \mathbb{R}_+$, így az előző bekezdésben foglalt eredményt alkalmazva αx-re és αy-ra kapjuk, hogy

$$\alpha\mathrm{Sp}_A(x + y) = \mathrm{Sp}_A(\alpha x + \alpha y) \subseteq \mathbb{R}_+,$$

vagyis $\mathrm{Sp}_A(x + y) \subseteq \mathbb{R}_+$. ■

19.2.3. Tétel. (A pozitivitás spektrális jellemzése) *Legyen A egységelemes C^*-algebra és $x \in A$ önadjungált elem. A következő állítások ekvivalensek.*

(i) $\mathrm{Sp}_A(x) \subseteq \mathbb{R}_+$, *vagyis az x elem pozitív spektrumú.*

(ii) *Létezik olyan $y \in A$ önadjungált elem, amelyre $x = y^2$.*

(iii) *Létezik olyan $a \in A$, amelyre $x = a^*a$.*

(iv) *$x \in A_+$, vagyis az x elem pozitív.*

Továbbá, az A_+ halmaz zárt a C^*-norma szerint és $A_+ \cap (-A_+) = \{0\}$.

Bizonyítás. Először rögzített $x \in A_{sa}$ elemre igazoljuk, hogy az (i), (ii), (iii) és (iv) állítások ekvivalensek.

(i)⇒(ii) Az $x \in A_{sa}$ és $\mathrm{Sp}_A(x) \subseteq \mathbb{R}_+$ feltételek alapján elkészíthető a $x^{1/2}$ elem, amely önadjungált és eleget tesz az $x = (x^{1/2})^2$ egyenlőségnek.

(ii)⇒(iii) és (iii)⇒(iv) triviális.

(iv)⇒(i) Az $x \in A_+$ kijelentés azzal ekvivalens, hogy létezik olyan $(a_i)_{i\in I}$ véges rendszer A-ban, amelyre $x = \sum\limits_{i\in I} a_i^* a_i$. Ugyanakkor láttuk, hogy pozitív spektrumú önadjungált elemek összege pozitív spektrumú, ezért elég azt igazolni, hogy $a \in A$ esetén $\mathrm{Sp}_A(a^*a) \subseteq \mathbb{R}_+$.

Legyen tehát $a \in A$ rögzített, és értelmezzük az $u := ((a^*a)^+)^{1/2}$ és $v := ((a^*a)^-)^{1/2}$ elemeket, amelyekre $u, v \in A_{sa}$, $a^*a = u^2 - v^2$ és $uv = vu = 0$ nyilvánvalóan teljesül. Legyenek $s, t \in A_{sa}$ azok az elemek, amelyekre $av = s + \mathbf{i}t$. Ekkor

$$(av)^*(av) = v(a^*a)v = v(u^2 - v^2)v = -v^4,$$

továbbá

$$(av)^*(av) + (av)(av)^* = (s - \mathbf{i}t)(s + \mathbf{i}t) + (s + \mathbf{i}t)(s - \mathbf{i}t) = 2s^2 + 2t^2,$$

amiből következik, hogy

$$(av)(av)^* = -(av)^*(av) + 2s^2 + 2t^2 = v^4 + 2s^2 + 2t^2.$$

Világos, hogy a v^4, $2s^2$ és $2t^2$ elemek pozitív spektrumúak, így $(av)(av)^*$ is pozitív spektrumú. A Jacobson-lemma alapján

$$\{0\} \cup \mathrm{Sp}_A((av)^*(av)) = \{0\} \cup \mathrm{Sp}_A((av)(av)^*) \subseteq \mathbb{R}_+,$$

vagyis az $(av)^*(av) = -v^4$ elem pozitív spektrumú. Ez azt jelenti, hogy $\mathrm{Sp}_A(-v^4) \subseteq \mathbb{R}_+$, ugyanakkor $\mathrm{Sp}_A(-v^4) = -\mathrm{Sp}_A(v^4) \subseteq -\mathbb{R}_+$, vagyis $\mathrm{Sp}_A(-v^4) \subseteq \{0\}$. Ebből következik, hogy $\|v\|^4 = \|v^4\| = \|-v^4\| = \rho(-v^4) = 0$, vagyis $v = 0$, így $a^*a = u^2$. Ezért az a^*a elem pozitív spektrumú.

Az előző lemma c) pontja szerint

$$A_+ = A_{sa} \cap \{x \in A \mid \|\|x\|\mathbf{1} - x\| \leq \|x\|\},$$

és a jobb oldalon álló halmazok zártak a C^*-norma szerint, így A_+ is zárt a C^*-norma szerint. Továbbá, $x \in A_+ \cap (-A_+)$ esetén $\mathrm{Sp}_A(x) \subseteq \mathbb{R}_+$ és $-\mathrm{Sp}_A(x) = \mathrm{Sp}_A(-x) \subseteq \mathbb{R}_+$, így $\mathrm{Sp}_A(x) \subseteq \{0\}$, tehát $\|x\| = \rho(x) = 0$, azaz $x = 0$. Ezért $A_+ \cap (-A_+) = \{0\}$. ■

19.2.4. Következmény. *Ha A egységelemes C^*-algebra, akkor minden $a \in A$ esetén az $\mathbf{1} + a^*a$ elem invertálható A-ban.*

Bizonyítás. Az előző tétel szerint $\mathrm{Sp}_A(\mathbf{1}+a^*a) = 1+\mathrm{Sp}_A(a^*a) \subseteq 1+\mathbb{R}_+ = [1, \to [$, vagyis $0 \notin \mathrm{Sp}_A(\mathbf{1} + a^*a)$, tehát $\mathbf{1} + a^*a$ invertálható elem. ∎

Speciálisan, ha A egységelemes C^*-algebra, akkor minden $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ és $a \in A$ esetén az $\varepsilon\mathbf{1} + a^*a$ elem invertálható A-ban.

19.2.5. Következmény. *Ha A egységelemes C^*-algebra, $x \in A_{sa}$ és $y \in A_+$, akkor $\mathrm{Sp}_A(xy) \subseteq \mathbb{R}$ és $\mathrm{Sp}_A(yx) \subseteq \mathbb{R}$ (holott sem xy, sem yx nem szükségképpen önadjungált elem).*

Bizonyítás. A pozitivitás jellemzése szerint van olyan $z \in A_{sa}$, hogy $y = z^2$, tehát a Jacobson-lemma alapján

$$\mathrm{Sp}_A(yx) \setminus \{0\} = \mathrm{Sp}_A(xy) \setminus \{0\} = \mathrm{Sp}_A((xz)z) \setminus \{0\} = \mathrm{Sp}_A(z(xz)) \setminus \{0\} \subseteq \mathbb{R},$$

mert $zxz \in A_{sa}$, és C^*-algebrában önadjungált elem spektruma valós. Ezért $\mathrm{Sp}_A(xy) \subseteq \mathbb{R}$ és $\mathrm{Sp}_A(yx) \subseteq \mathbb{R}$ is teljesül. ∎

19.2.6. Következmény. *Ha A egységelemes C^*-algebra, akkor A_{sa} felett a természetes előrendezés rendezés (vagyis antiszimmetrikus).*

Bizonyítás. Nyilvánvalóan következik abból, hogy $A_+ \cap (-A_+) = \{0\}$. ∎

19.2.7. Következmény. *Ha A egységelemes C^*-algebra és B olyan zárt *-részalgebra A-ban, amelyre $\mathbf{1} \in B$, akkor $B_+ = B \cap A_+$, továbbá minden $x, y \in B$ esetén $x \preceq y$ pontosan akkor teljesül B-ben, ha $x \preceq y$ teljesül A-ban.*

Bizonyítás. Nyilvánvalóan elég azt igazolni, hogy $B \cap A_+ \subseteq B_+$. Ez így van, mert ha $x \in B \cap A_+$, akkor $x \in B \cap A_{sa} = B_{sa}$ és $\mathrm{Sp}_B(x) = \mathrm{Sp}_A(x) \subseteq \mathbb{R}_+$, tehát x pozitív spektrumú önadjungált elem B-ben, így a tétel alapján $x \in B_+$. ∎

19.2.8. Következmény. *Legyen A egységelemes C^*-algebra.*

a) *Ha $x \in A_{sa}$, akkor $x \preceq \|x\|\mathbf{1}$.*

b) *Ha $x, y \in A_+$, akkor $x \preceq y$ esetén $\|x\| \leq \|y\|$.*

c) *Ha $x, y \in A_+$ invertálható elemek, akkor $x \preceq y$ esetén $y^{-1} \preceq x^{-1}$.*

Bizonyítás. a) Ha $x \in A_{sa}$, akkor $\mathrm{Sp}_A(\|x\|\mathbf{1} - x) = \|x\| - \mathrm{Sp}_A(x) \subseteq \mathbb{R}_+$, hiszen $\mathrm{Sp}_A(x) \subseteq [-\|x\|, \|x\|]$. Ezért a pozitivitás spektrális jellemzése alapján $\|x\|\mathbf{1} - x \in A_+$, vagyis $x \preceq \|x\|\mathbf{1}$.

b) Legyenek $x, y \in A_+$ és $x \preceq y$. Az a) alapján $y \preceq \|y\|\mathbf{1}$, így $x \preceq \|y\|\mathbf{1}$. Ez azt jelenti, hogy $\|y\| - \mathrm{Sp}_A(x) = \mathrm{Sp}_A(\|y\|\mathbf{1} - x) \subseteq \mathbb{R}_+$, tehát $\mathrm{Sp}_A(x) \subseteq [0, \|y\|] \subseteq [-\|y\|, \|y\|]$. Ebből a spektrálsugár minimalitási tulajdonsága alapján kapjuk, hogy $\|x\| = \rho(x) \leq \|y\|$.

c) Először tegyük fel, hogy $z \in A_+$ invertálható elem és $\mathbf{1} \preceq z$; megmutatjuk, hogy ekkor $z^{-1} \preceq \mathbf{1}$. Valóban, az $\mathbf{1} \preceq z$ egyenlőtlenségből következik, hogy

$$z^{-1} = z^{-1/2}\mathbf{1}z^{-1/2} \preceq z^{-1/2}zz^{-1/2} = \mathbf{1},$$

ahol ki kell használni a hatványozás elemi algebrai tulajdonságait.

Az általános esetben legyenek $x, y \in A_+$ invertálható elemek, és tegyük fel, hogy $x \preceq y$. Ekkor

$$\mathbf{1} = x^{-1/2}xx^{-1/2} \preceq x^{-1/2}yx^{-1/2},$$

és itt a jobb oldalon invertálható elem áll. Ezért az előzőek alapján

$$x^{1/2}y^{-1}x^{1/2} = \quad x^{-1/2}yx^{-1/2} \quad {}^{-1} \preceq \mathbf{1},$$

amiből azonnal következik, hogy

$$y^{-1} = x^{-1/2} \quad x^{1/2}y^{-1}x^{1/2} \quad x^{-1/2} \preceq x^{-1/2}\mathbf{1}x^{-1/2} = x^{-1}. \blacksquare$$

19.3. Approximatív egységek

19.3.1. Definíció. *Ha A normált algebra, akkor egy A-ban haladó $(e_i)_{i \in I}$ általánosított sorozatot* **approximatív egységnek** *nevezünk A-ban, ha $(e_i)_{i \in I}$ korlátos és minden $a \in A$ esetén*

$$\lim_{i,I}(ae_i) = a = \lim_{i,I}(e_i a).$$

Azt mondjuk, hogy az A normált algebra **approximatív egységes**, *ha létezik A-ban approximatív egység.*

Példák (approximatív egységekre).

1) Nyilvánvaló, hogy minden egységelemes normált algebra approximatív egységes. Ugyanakkor egy nem nulla dimenziós, nulla-szorzású normált algebra nem approximatív egységes.

2) Legyen T lokálisan kompakt tér, és tekintsük az $A := \overline{\mathscr{K}}(T; \mathbb{K})$ függvényalgebrát a sup-normával ellátva. Ha T kompakt, akkor A egységelemes. Ha T nem kompakt, akkor A nem egységelemes, de megmutatjuk, hogy approximatív egységes. Ehhez jelölje $\mathfrak{K}(T)$ a T kompakt részhalmazainak halmazát, amit a $\subseteq$ relációval rendezünk, tehát $\mathfrak{K}(T)$ felfelé irányított rendezett halmaz. A lokálisan kompakt terekre vonatkozó Uriszon-tétel és a kiválasztási axióma alkalmazásával vehetünk olyan $(e_K)_{K \in \mathfrak{K}(T)}$ rendszert $\mathscr{K}(T; \mathbb{K})$-ban, amelyre teljesül az, hogy minden $K \in \mathfrak{K}(T)$ esetén $\mathrm{Im}(e_K) \subseteq [0, 1]$ és $K \subseteq [e_K = 1]$.

Ekkor $(e_K)_{K\in\mathfrak{K}(T)}$ approximatív egység az A normált algebrában, mert ha $a \in A$ és $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$, akkor van olyan $K_\varepsilon \in \mathfrak{K}(T)$, hogy minden $t \in T \setminus K_\varepsilon$ esetén $|a(t)| < \varepsilon$. Ekkor minden $K \in \mathfrak{K}(T)$ halmazra, ha $K_\varepsilon \subseteq K$, akkor $\|a - e_K a\| \leq \varepsilon$, ezért $a = \lim\limits_{K,\ \mathfrak{K}(T)} (e_K a)$ teljesül.

3) Legyen A normált algebra és A_0 sűrű részalgebra A-ban. Megmutatjuk, hogy ha $(e_i)_{i\in I}$ approximatív egység A_0-ban, akkor $(e_i)_{i\in I}$ approximatív egység A-ban is. Valóban, legyen $a \in A$ és $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$. Vegyünk olyan $a_0 \in A_0$ elemet, amelyre $\|a - a_0\| < \varepsilon$. Vezessük be a $C := \sup\limits_{i\in I} \|e_i\| \in \mathbb{R}_+$ számot, és vegyünk olyan $i_\varepsilon \in I$ indexet, amelyre minden $i \in I$, $i \geq i_\varepsilon$ esetén $\|a_0 - a_0 e_i\| < \varepsilon$ és $\|a_0 - e_i a_0\| < \varepsilon$. Ekkor $i \in I$ és $i \geq i_\varepsilon$ esetén

$$\|a - ae_i\| \leq \|a - a_0\| + \|a_0 - a_0 e_i\| + \|a_0 e_i - ae_i\| \leq$$

$$\leq \|a - a_0\| + \|a_0 - a_0 e_i\| + \|a_0 - a\|\|e_i\| < (2 + C)\varepsilon,$$

és hasonlóan kapjuk, hogy

$$\|a - e_i a\| \leq \|a - a_0\| + \|a_0 - e_i a_0\| + \|e_i a_0 - e_i a\| \leq$$

$$\leq \|a - a_0\| + \|a_0 - e_i a_0\| + \|e_i\|\|a_0 - a\| < (2 + C)\varepsilon,$$

amiből következik, hogy

$$\lim_{i,I} (ae_i) = a = \lim_{i,I} (e_i a).$$

19.3.2. Tétel. *Ha A C^*-algebra és $\mathfrak{m}$ baloldali ideál A-ban, akkor létezik olyan $(e_i)_{i\in I}$ általánosított sorozat, amelyre teljesülnek a következők:*

– minden $i \in I$ esetén $e_i \in \mathfrak{m} \cap A_+$ és $\|e_i\| \leq 1$;

– minden $i, j \in I$ esetén, ha $i \leq j$, akkor $e_i \preceq e_j$, vagyis az $(e_i)_{i\in I}$ általánosított sorozat monoton növő;

– minden $a \in \overline{\mathfrak{m}}$ elemre $a = \lim\limits_{i,I} (ae_i)$.

Bizonyítás. Jelölje I az $\mathfrak{m}$ nem üres véges részhalmazainak halmazát, és minden $i \in I$ esetén legyen $n(i) := \mathrm{Card}(i)$. Az I halmazt a $\subseteq$ relációval rendezzük; ekkor I felfelé irányított rendezett halmaz. Minden $i \in I$ esetén legyen

$$e_i := \left(\frac{\tilde{\mathbf{1}}}{n(i)} + \sum_{a\in i} a^* a \right)^{-1} \sum_{a\in i} a^* a,$$

ahol $\tilde{\mathbf{1}}$ az $\tilde{A}$ standard egységelemesítés egységeleme. Könnyen látható, hogy minden $i \in I$ esetén $e_i \in \mathfrak{m}$, mert A ideál $\tilde{A}$-ban és $\mathfrak{m}$ baloldali ideál A-ban, így e_i előáll véges sok $\mathfrak{m}$-beli elem összegeként.

Minden $n \in \mathbb{N}^+$ esetén vezessük be a

$$\varphi_n : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+; \quad t \mapsto \left(\frac{1}{n} + t\right)^{-1} t$$

leképezést, amely természetesen folytonos, és nyilvánvaló, hogy minden $i \in I$ esetén

$$e_i = (\varphi_{n(i)})_{\tilde{A}} \left(\sum_{a \in i} a^* a \right).$$

Ebből azonnal látható, hogy minden $I \ni i$-re $e_i \in \tilde{A}_+ \cap A = A_+$, továbbá

$$\|e_i\| = \sup_{t \in \mathrm{Sp}_{\tilde{A}}\left(\sum\limits_{a \in i} a^* a\right)} \left(\left(\frac{1}{n} + t\right)^{-1} t \right) \leq 1.$$

Megmutatjuk, hogy az $(e_i)_{i \in I}$ általánosított sorozat monoton növő. Ehhez legyen $i, j \in I$ és $i \leq j$, vagyis $i \subseteq j$. Minden $n \in \mathbb{N}^+$ esetén legyen $\psi_n := 1 - \varphi_n$, vagyis

$$\psi_n : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+; \quad t \mapsto \frac{1}{n}\left(\frac{1}{n} + t\right)^{-1}.$$

Nyilvánvaló, hogy $m, n \in \mathbb{N}^+$ és $m \leq n$ esetén $\psi_m \geq \psi_n$, tehát

$$\left(\psi_{n(j)}\right)_{\tilde{A}}\left(\sum_{a \in j} a^* a\right) \preceq \left(\psi_{n(i)}\right)_{\tilde{A}}\left(\sum_{a \in j} a^* a\right),$$

amiből $\sum\limits_{a \in i} a^* a \preceq \sum\limits_{a \in j} a^* a$ alapján következik, hogy

$$\frac{1}{n(j)}\left(\frac{\tilde{\mathbf{1}}}{n(j)} + \sum_{a \in j} a^* a\right)^{-1} \preceq \frac{1}{n(i)}\left(\frac{\tilde{\mathbf{1}}}{n(i)} + \sum_{a \in j} a^* a\right)^{-1} \preceq \frac{1}{n(i)}\left(\frac{\tilde{\mathbf{1}}}{n(i)} + \sum_{a \in i} a^* a\right)^{-1}.$$

Ebből kapjuk, hogy

$$e_j := \left(\frac{\tilde{\mathbf{1}}}{n(i)} + \sum_{a \in j} a^* a\right)^{-1} \sum_{a \in j} a^* a = (\varphi_{n(j)})_{\tilde{A}}\left(\sum_{a \in j} a^* a\right) =$$

$$= \left(1 - \psi_{n(j)}\right)_{\tilde{A}}\left(\sum_{a \in j} a^* a\right) = \mathbf{1} - \left(\psi_{n(j)}\right)_{\tilde{A}}\left(\sum_{a \in j} a^* a\right) =$$

$$= \mathbf{1} - \frac{1}{n(j)}\left(\frac{\tilde{\mathbf{1}}}{n(j)} + \sum_{a \in j} a^* a\right)^{-1} \succeq \mathbf{1} - \frac{1}{n(i)}\left(\frac{\tilde{\mathbf{1}}}{n(i)} + \sum_{a \in i} a^* a\right)^{-1} =$$

$$= \mathbf{1} - \ \psi_{n(i)}\ _{\tilde{A}}\left(\sum_{a\in i} a^*a\right) = \ 1 - \psi_{n(i)}\ _{\tilde{A}}\left(\sum_{a\in i} a^*a\right) = (\varphi_{n(i)})_{\tilde{A}}\left(\sum_{a\in i} a^*a\right) = e_i.$$

Legyen most $i \in I$ és $a \in i$; megmutatjuk, hogy

$$\|a - ae_i\| \leq \frac{1}{2\sqrt{n(i)}}.$$

Valóban

$$0 \preceq (a - ae_i)^*(a - ae_i) = (\tilde{\mathbf{1}} - e_i)(a^*a)(\tilde{\mathbf{1}} - e_i) \preceq (\tilde{\mathbf{1}} - e_i) \quad \sum_{b\in i} b^*b \quad (\tilde{\mathbf{1}} - e_i)$$

$$= \ \psi_{n(i)}\ _{\tilde{A}} \quad \sum_{b\in i} b^*b \quad (id_{\mathbb{R}_+})_{\tilde{A}} \quad \sum_{b\in i} b^*b \quad \psi_{n(i)}\ _{\tilde{A}} \quad \sum_{b\in i} b^*b \quad =$$

$$= \ \psi^2_{n(i)} id_{\mathbb{R}_+}\ _{\tilde{A}} \quad \sum_{b\in i} b^*b \quad = \left(\frac{1}{n(i)^2} \quad \frac{1}{n(i)} + id_{\mathbb{R}_+} \quad ^{-2} id_{\mathbb{R}_+}\right)_{\tilde{A}} \quad \sum_{b\in i} b^*b \quad \preceq$$

$$\preceq \quad \frac{1}{4n(i)}\ _{\tilde{A}} \quad \sum_{b\in i} b^*b \quad \preceq \frac{\tilde{\mathbf{1}}}{4n(i)},$$

ahol felhasználtuk azt, hogy $n \in \mathbb{N}^+$ esetén az

$$\mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+; \quad t \mapsto \frac{1}{n^2} \quad \frac{1}{n} + t \quad ^{-2} t$$

függvénynek a $t := 1/n$ pontban van maximuma, amelynek értéke $1/(4n)$. Ebből következik, hogy

$$\|a - ae_i\|^2 = \|(a - ae_i)^*(a - ae_i)\| \leq \left\|\frac{\tilde{\mathbf{1}}}{4n(i)}\right\| = \frac{1}{4n(i)},$$

amit bizonyítani akartunk.

Legyen most $a \in \mathfrak{m}$ és $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$. Vegyünk olyan $n \in \mathbb{N}^+$ számot, amelyre $1/(2\sqrt{n}) < \varepsilon$. Ha $i_\varepsilon \in I$ olyan, hogy $a \in i_\varepsilon$ és $n \leq n(i_\varepsilon)$, akkor minden $i \in I$, $i \geq i_\varepsilon$ esetén $\|a - ae_i\| \leq 1/2\sqrt{n(i)} \leq 1/2\sqrt{n(i_\varepsilon)} \leq 1/2\sqrt{n} < \varepsilon$, tehát $a = \lim_{i,I}(ae_i)$.

Végül, legyen $a \in \overline{\mathfrak{m}}$ tetszőleges és $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$. Vegyünk olyan $a_0 \in \mathfrak{m}$ elemet, amelyre $\|a - a_0\| < \varepsilon/3$, és legyen $i_\varepsilon \in I$ olyan index, amelyre minden $i \in I$ és $i \geq i_\varepsilon$ esetén $\|a_0 - a_0e_i\| < \varepsilon/3$. Ekkor $i \in I$ és $i \geq i_\varepsilon$ esetén

$$\|a - ae_i\| \leq \|a - a_0\| + \|a_0 - a_0e_i\| + \|a_0e_i - ae_i\| < \varepsilon$$

teljesül, mert $\|a_0e_i - ae_i\| \leq \|a_0 - a\|\|e_i\| \leq \|a_0 - a\| < \varepsilon/3$, hiszen $\|e_i\| \leq 1$. Ez azt jelenti, hogy $a = \lim_{i,I}(ae_i)$. ■

19.3.3. Következmény. *Ha A C^*-algebra és $\mathfrak{m}$ sűrű baloldali ideál A-ban, akkor létezik A-nak olyan $(e_i)_{i \in I}$ approximatív egysége, amelyre minden $i \in I$ esetén $e_i \in \mathfrak{m} \cap A_+$ és $\|e_i\| \leq 1$, továbbá $(e_i)_{i \in I}$ monoton növő.*

Bizonyítás. Az előző tétel alapján létezik olyan $(e_i)_{i \in I}$ monoton növő általánosított sorozat, amelyre minden $i \in I$ esetén $e_i \in \mathfrak{m} \cap A_+$ és $\|e_i\| \leq 1$, továbbá minden $a \in \overline{\mathfrak{m}} = A$ esetén $a = \lim_{i,I}(ae_i)$. Ha $a \in A$, akkor $a^* = \lim_{i,I}(a^*e_i)$ is teljesül, tehát az A involúciójának folytonossága miatt $a = (a^*)^* = \lim_{i,I}(a^*e_i)^* = \lim_{i,I}(e_i a)$. Ez azt jelenti, hogy $(e_i)_{i \in I}$ approximatív egysége A-nak. ■

19.3.4. Következmény. *C^*-algebrában minden zárt ideál $*$-ideál.*

Bizonyítás. Legyen $\mathfrak{m}$ zárt ideál az A C^*-algebrában, és $(e_i)_{i \in I}$ olyan általánosított sorozat, amelyre minden $i \in I$ esetén e_i önadjungált elem A-ban, és minden $a \in \mathfrak{m}$ esetén $a = \lim_{i,I}(ae_i)$. Ha $a \in \mathfrak{m}$, akkor az A involúciójának folytonossága következtében $a^* = \lim_{i,I}(e_i a^*)$, és minden $i \in I$ esetén $e_i a^* \in \mathfrak{m}A \subseteq \mathfrak{m}$, így $a^* \in \overline{\mathfrak{m}} = \mathfrak{m}$. ■

19.4. A polárfelbontás problémája

Most a polárfelbontás problémájával foglalkozunk C^*-algebrákban. Ehhez először bevezetjük az *abszolút érték* fogalmát C^*-algebra tetszőleges elemére, majd bevezetünk egy olyan C^*-algebra típust, amelyre a polárfelbontás problémája megoldható.

19.4.1. Definíció. *Ha A C^*-algebra és $a \in A$, akkor az*

$$|a| := (a^*a)^{1/2}$$

(pozitív) elemet az a **abszolút értékének** *nevezzük.*

Figyeljük meg, hogy az abszolút érték fogalmát azért lehet bevezetni, mert C^*-algebrában a pozitív elemek pozitív spektrumúak. A folytonosfüggvényszámító-operátor tulajdonságai alapján világos, hogy ha A C^*-algebra és $x \in A_{sa}$, akkor $|x| = x^+ + x^-$ teljesül, vagyis $|x| = (|id_{\mathbb{R}}|)_A(x)$.

19.4.2. Definíció. *Ha A C^*-algebra és $a \in A$, akkor azt mondjuk, hogy a-nak* **létezik polárfelbontása** *A-ban, ha van olyan $w \in A$, amelyre teljesülnek az*

$$a = w|a|, \qquad |a| = w^*a$$

egyenlőségek.

Ha A egységelemes C^*-algebra és $a \in A$ *invertálható* elem, akkor $|a|$ is invertálható, és egyértelműen létezik olyan $w \in A$ elem, amelyre $a = w|a|$ és $|a| = w^*a$, továbbá ez a w elem *unitér*. Valóban, legyen $w \in A$ olyan, hogy $a = w|a|$ és $|a| = w^*a$. Ekkor $ww^*a = w|a| = a$, tehát az a invertálhatósága miatt $ww^* = \mathbf{1}$. Ugyanakkor a^* is invertálható, így a^*a is az, tehát $|a| := (a^*a)^{1/2}$ szintén invertálható elem. Továbbá, $w^*w|a| = w^*a = |a|$ teljesül, így az $|a|$ invertálhatósága folytán $w^*w = \mathbf{1}$. Ez azt jelenti, hogy $w \in A$ unitér elem, továbbá w nyilvánvalóan egyértelmű, hiszen $w = a|a|^{-1}$. Megfordítva, ha $a \in A$ invertálható, akkor $w := a|a|^{-1}$ olyan elem, amelyre $a = w|a|$ nyilvánvalóan igaz, ugyanakkor $w^*a = |a|^{-1}a^*a = |a|^{-1}|a||a| = |a|$ is teljesül, tehát létezik a-nak polárfelbontása.

Azonban nem minden C^*-algebrában létezik minden elemnek polárfelbontása. Legyen például T lokálisan kompakt tér és $A := \overline{\mathscr{K}}(T;\mathbb{C})$. Ha $a \in A$ és $w \in A$ olyan, hogy $a = w|a|$ és $|a| = w^*a$, akkor $[a \neq 0] = [|a| \neq 0] \subseteq [|w| = 1]$ és w végtelenben eltűnő, így van olyan $K \subseteq T$ kompakt halmaz, hogy $T \setminus K \subseteq [|w| \leq 1/2]$; ekkor $[a \neq 0] \subseteq K$, vagyis az a függvény *kompakt tartójú*. Tehát az A kommutatív C^*-algebrában egy elem polárfelbontása létezésének *szükséges* feltétele az, hogy kompakt tartójú legyen. Továbbá, egy $a \in A$ elem polárfelbontása létezésének *elégséges* feltétele az, hogy a kompakt tartójú, és az $a/|a| : [a \neq 0] \to \mathbb{C}$ függvény folytonosan kiterjeszthető T-re.

19.5. MSC-algebrák és MC-algebrák

19.5.1. Definíció. *Az A C^*-algebrát* **MSC-algebrának** *nevezzük, ha bármely A_{sa}-ban haladó monoton növő és C^*-normában korlátos sorozatnak létezik szuprémuma A_{sa}-ban a természetes rendezés szerint. Az A C^*-algebrát* **MC-algebrának** *nevezzük, ha bármely A_{sa}-ban haladó monoton növő és C^*-normában korlátos általánosított sorozatnak létezik szuprémuma A_{sa}-ban a természetes rendezés szerint.*

Az MSC (illetve MC) szimbólum a *monotone sequentially complete* (illetve *monotone complete*) kifejezés rövidítése.

Példák (MSC- és MC-algebrákra).

1) Legyen $(T, \mathscr{B})$ mérhető-tér, vagyis $\mathscr{B}$ σ-algebra a T halmaz felett, és jelölje A a $T \to \mathbb{C}$ korlátos $\mathscr{B} - \mathscr{B}(\mathbb{C})$-mérhető függvények C^*-algebráját. Könnyen látható, hogy A MSC-algebra. Ha ugyanis $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ olyan sorozat A_{sa}-ban, amely monoton növő és C^*-normában korlátos, akkor minden $n \in \mathbb{N}$ esetén x_n *valós értékű* korlátos mérhető függvény, és az $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ függvénysorozat *egyenletesen korlátos.* Ezért az $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ függvénysorozat *felső burkolója* olyan $T \to \mathbb{R}$ korlátos mérhető függvény, amely az adott sorozatnak szuprémuma A_{sa}-ban.

2) Legyen $(T, \mathscr{B})$ olyan mérhető-tér, hogy $\mathscr{B} \neq \mathscr{P}(T)$ és minden $t \in T$ esetén $\{t\} \in \mathscr{B}$.

Ekkor a $T \to \mathbb{C}$ korlátos $\mathscr{B} - \mathscr{B}(\mathbb{C})$-mérhető függvények A C^*-algebrája olyan MSC-algebra, amely nem MC-algebra. Ennek bizonyításához legyen $E \in \mathscr{P}(T) \setminus \mathscr{B}$ és jelölje I az E véges részhalmazainak halmazát a $\subseteq$ relációval rendezve. Ekkor a $(\chi_i)_{i \in I}$ rendszer A_{sa}-ban halad, monoton növő és egyenletesen korlátos, azonban ennek a rendszernek nem létezik szuprémuma A_{sa}-ban a természetes rendezés szerint. Valóban, ha $x \in A_{sa}$ a $(\chi_i)_{i \in I}$ rendszernek felső korlátja, akkor $\chi_E \leq x$, azonban $x \neq \chi_E$, hiszen $\chi_E \notin A$. Ezért van olyan $t \in T$, hogy $\chi_E(t) < x(t)$. Ha $t \in T$ ilyen pont, akkor minden $t' \in T \setminus \{t\}$ esetén legyen $x'(t') := x(t')$, továbbá $t \in E$ esetén $x'(t) := 1$, míg $t \notin E$ esetén $x'(t) := 0$. Ekkor $\{t\} \in \mathscr{B}$ miatt $x' \in A_{sa}$, és x' felső korlátja a $(\chi_i)_{i \in I}$ rendszernek A_{sa}-ban, és $x' < x$. Ez azt jelenti, hogy a $(\chi_i)_{i \in I}$ rendszernek nincs legkisebb felső korlátja A_{sa}-ban a természetes rendezés szerint.

3) Legyen A Neumann-algebra a $\mathscr{H}$ Hilbert-tér felett; megmutatjuk, hogy A MC-algebra. Ehhez legyen $(x_i)_{i \in I}$ olyan monoton növő általánosított sorozat A_{sa}-ban, amely operátornormában korlátos. Vezessük be a $C := \sup\limits_{i \in I} \|x_i\|$ számot. Ha $\zeta \in \mathscr{H}$, akkor minden $i \in I$ esetén $|(x_i(\zeta)|\zeta)| \leq C\|\zeta\|^2$, tehát az $((x_i(\zeta)|\zeta))_{i \in I}$ általánosított sorozat korlátos és monoton növő, vagyis konvergens $\mathbb{R}$-ben. Ha $\zeta, \eta \in \mathscr{H}$, akkor a polarizációs formula szerint minden $i \in I$ esetén

$$(x_i(\zeta)|\eta) = \frac{1}{4} \sum_{k=0}^{3} \mathbf{i}^k (x_i(\zeta + \mathbf{i}^k \eta)|\zeta + \mathbf{i}^k \eta),$$

amiből következik, hogy az $((x_i(\zeta)|\eta))_{i \in I}$ komplex általánosított sorozat konvergens $\mathbb{C}$-ben. Ezért jól értelmezett a

$$b : \mathscr{H} \times \mathscr{H} \to \mathbb{C}; \quad (\zeta, \eta) \mapsto \lim_{i,I} (x_i(\zeta)|\eta)$$

függvény. Nyilvánvaló, hogy b hermitikus konjugált bilineáris leképezés, és minden $\zeta, \eta \in \mathscr{H}$ esetén

$$|b(\zeta, \eta)| = \lim_{i,I} |(x_i(\zeta)|\eta)| \leq \sup_{i \in I} |(x_i(\zeta)|\eta)| \leq C\|\zeta\|\|\eta\|,$$

ami azt jelenti, hogy b folytonos. Ezért egyértelműen létezik az az $x \in \mathscr{L}(\mathscr{H})$ önadjungált operátor, amelyre minden $\zeta, \eta \in \mathscr{H}$ esetén $(x(\zeta)|\eta) = b(\zeta, \eta)$. Világos, hogy $x \in A$, mert ha $a \in C(A)$, akkor minden $i \in I$ esetén $x_i \circ a = a \circ x_i$, ezért minden $\mathscr{H} \ni \zeta, \eta$-ra

$$((x \circ a)(\zeta)|\eta) = (x(a(\zeta))|\eta) = \lim_{i,I} (x_i(a(\zeta))|\eta) = \lim_{i,I} (a(x_i(\zeta))|\eta) =$$

$$= \lim_{i,I} (x_i(\zeta)|a^*(\eta)) = (x(\zeta)|a^*(\eta)) = ((a \circ x)(\zeta)|\eta),$$

vagyis $x \circ a = a \circ x$, így $x \in C(C(A)) = A$. Ha $\zeta \in \mathscr{H}$, akkor az $((x_i(\zeta)|\zeta))_{i \in I}$ rendszer monoton növése miatt

$$(x(\zeta)|\zeta) = \lim_{i,I}(x_i(\zeta)|\zeta) = \sup_{i \in I}(x_i(\zeta)|\zeta),$$

tehát minden $i \in I$ esetén $(x_i(\zeta)|\zeta) \leq (x(\zeta)|\zeta)$. Ez azt jelenti, hogy minden $i \in I$ indexre $x_i \preceq x$ az $\mathscr{L}(\mathscr{H})_{sa}$-ban, így $x_i \preceq x$ az A_{sa}-ban is. Tehát x felső korlátja az $(x_i)_{i \in I}$ rendszernek A_{sa}-ban. Ha $x' \in A_{sa}$ olyan, hogy minden $i \in I$ esetén $x_i \preceq x'$ az A_{sa}-ban, akkor minden $\mathscr{H} \ni \zeta$-ra és $I \ni i$-re $(x_i(\zeta)|\zeta) \leq (x'(\zeta)|\zeta)$, így $(x(\zeta)|\zeta) = \lim_{i,I}(x_i(\zeta)|\zeta) \leq (x'(\zeta)|\zeta)$, vagyis minden $i \in I$ esetén $x \preceq x'$ az $\mathscr{L}(\mathscr{H})_{sa}$-ban, azaz $x \preceq x'$ az A_{sa}-ban.

19.5.2. Állítás. *Legyen A C^*-algebra.*

a) *Ha $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ monoton fogyó sorozat A_+-ban és $\inf_{n \in \mathbb{N}} x_n = 0$, akkor $\alpha \in \mathbb{R}_+$ esetén az $(\alpha x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sorozat A_+-ban halad, monoton fogyó és $\inf_{n \in \mathbb{N}}(\alpha x_n) = 0$.*

b) *Ha $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ és $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ monoton fogyó sorozatok A_+-ban és $\inf_{n \in \mathbb{N}} x_n = 0 = \inf_{n \in \mathbb{N}} y_n$, akkor $\inf_{n \in \mathbb{N}}(x_n + y_n) = 0$.*

c) *Ha A egységelemes, $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ monoton fogyó sorozat A_+-ban és $\inf_{n \in \mathbb{N}} x_n = 0$, akkor minden $a \in A$ esetén az $(a^* x_n a)_{n \in \mathbb{N}}$ sorozat A_+-ban halad, monoton fogyó és $\inf_{n \in \mathbb{N}}(a^* x_n a) = 0$.*

d) *Ha A egységelemes és $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ olyan A_{sa}-ban haladó sorozat, amely a C^*-norma szerint konvergál az $x \in A_{sa}$ elemhez, akkor minden $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ esetén van olyan $N \in \mathbb{N}$, hogy minden $n > N$ természetes számra $x_n \preceq \varepsilon \mathbf{1} + x$ és $x \preceq \varepsilon \mathbf{1} + x_n$ teljesül A_{sa}-ban.*

Bizonyítás. a) Az állítás triviálisan igaz, ha $\alpha = 0$. Ha $\alpha > 0$, akkor az $A_{sa} \to A_{sa};\ x \mapsto \alpha x$ leképezés *rendezés-izomorfizmus*, ezért ha $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ monoton fogyó sorozat A_+-ban, és $\inf_{n \in \mathbb{N}} x_n = 0$, akkor az $(\alpha x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sorozat A_+-ban halad, monoton fogyó, és $\inf_{n \in \mathbb{N}}(\alpha x_n) = 0$.

b) Legyen $z \in A_{sa}$ olyan, hogy minden $n \in \mathbb{N}$ esetén $z \preceq x_n + y_n$; azt kell igazolni, hogy $z \preceq 0$. Ha $m, n \in \mathbb{N}$ és $m \leq n$, akkor $z \preceq x_n + y_n \preceq x_n + y_m$, tehát $z - y_m \preceq x_n$. Az $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sorozat monoton fogyásából következik, hogy minden $m \in \mathbb{N}$ esetén $0 = \inf_{n \in \mathbb{N}} x_n = \inf_{n \in \mathbb{N},\ n \geq m} x_n$, ezért $z - y_m \preceq 0$, azaz $z \preceq y_m$. Ez minden $m \in \mathbb{N}$ esetén igaz, így $\inf_{m \in \mathbb{N}} y_m = 0$ miatt $z \preceq 0$.

c) Tegyük fel, hogy A egységelemes és $u \in A$ unitér. Ekkor az $A_{sa} \to A_{sa};\ x \mapsto u^* x u$ leképezés *rendezés-izomorfizmus*, ezért ha $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ monoton fogyó sorozat A_+-ban, és $\inf_{n \in \mathbb{N}} x_n = 0$, akkor az $(u^* x_n u)_{n \in \mathbb{N}}$ sorozat A_+-ban halad, monoton fogyó, és $\inf_{n \in \mathbb{N}}(u^* x_n u) = 0$. Tehát az állítás igaz akkor, ha az $a \in A$ elem *unitér*.

Tegyük most fel, hogy A egységelemes, és $a \in A$ tetszőleges. Tudjuk, hogy ekkor van olyan $(z_i)_{i\in I}$ véges rendszer $\mathbb{C}$-ben, és unitér elemeknek olyan $(u_i)_{i\in I}$ nem üres rendszere, hogy $a = \sum_{i\in I} z_i u_i$. Ekkor minden $x \in A_+$ esetén fennállnak a következők:

$$0 \preceq a^* x a = \left(\sum_{i\in I} z_i u_i\right)^* x \left(\sum_{i\in I} z_i u_i\right) = \sum_{(i,j)\in I\times I} (\overline{z}_i u_i^*) x (z_j u_j) =$$

$$= \sum_{(i,j)\in I\times I} \left(z_i x^{1/2} u_i\right)^* \left(z_j x^{1/2} u_j\right) \preceq \mathrm{Card}(I) \sum_{i\in I} \left(z_i x^{1/2} u_i\right)^* \left(z_i x^{1/2} u_i\right),$$

és természetesen

$$\sum_{i\in I} \left(z_i x^{1/2} u_i\right)^* \left(z_i x^{1/2} u_i\right) = \sum_{i\in I} |z_i|^2 u_i^* x u_i.$$

Tehát minden $n \in \mathbb{N}$ esetén

$$0 \preceq a^* x_n a \preceq \mathrm{Card}(I) \sum_{i\in I} |z_i|^2 u_i^* x_n u_i,$$

és minden $I \ni i$-re az előző bekezdés alapján az $(u_i^* x_n u_i)_{n\in I}$ sorozat A_+-ban halad, monoton fogyó, és $\inf_{n\in\mathbb{N}} (u_i^* x_n u_i) = 0$. Ezért az a) és b) alapján

$$\inf_{n\in\mathbb{N}} \left(\mathrm{Card}(I) \sum_{i\in I} |z_i|^2 u_i^* x_n u_i\right) = 0$$

teljesül, következésképpen $\inf_{n\in\mathbb{N}} (a^* x_n a) = 0$.

d) Ha $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$, akkor van olyan $N \in \mathbb{N}$, hogy minden $n > N$ természetes számra $\|x_n - x\| < \varepsilon$; ekkor $n \in \mathbb{N}$ és $n > N$ esetén $x_n - x \preceq \|x_n - x\|\mathbf{1} \preceq \varepsilon\mathbf{1}$ teljesül A_{sa}-ban, így $x_n \preceq \varepsilon\mathbf{1} + x$ és $x \preceq \varepsilon\mathbf{1} + x_n$. ■

19.6. Elem faktorizációja MSC-algebrában és a polárfelbontás tétele

19.6.1. Tétel. *Legyen A egységelemes*MSC-*algebra. Ha $a, b \in A$ olyan elemek, amelyekre $a^*a \preceq b^*b$, akkor létezik olyan $c \in A$, hogy $a = cb$. Ha $a, b \in A$ olyan elemek, amelyekre $a^*a = b^*b$, akkor létezik olyan $c \in A$, hogy $a = cb$ és $c^*a = b$.*

Bizonyítás. Tegyük fel, hogy $a, b \in A$ olyan elemek, amelyekre $a^*a \preceq b^*b$. Minden $n \in \mathbb{N}^+$ esetén legyen

$$c_n := a \left(\frac{\mathbf{1}}{n} + b^*b\right)^{-1} b^*.$$

Nyilvánvaló, hogy minden $\mathbb{N}^+ \ni n$-re c_n jól értelmezett elem és a definíció alapján világos, hogy minden $\mathbb{N}^+ \ni n$-re

$$c_n = \left(\left(\frac{\mathbf{1}}{n} + b^*b \right)^{-1/2} a^* \right)^* \left(\left(\frac{\mathbf{1}}{n} + b^*b \right)^{-1/2} b^* \right).$$

A polarizációs formula szerint minden $x, y \in A$ esetén

$$y^*x = \frac{1}{4} \sum_{k=0}^{3} \mathbf{i}^k (x + \mathbf{i}^k y)^* (x + \mathbf{i}^k y),$$

amiből minden $n \in \mathbb{N}^+$ számra az

$$x := \left(\frac{\mathbf{1}}{n} + b^*b \right)^{-1/2} b^*, \quad y := \left(\frac{\mathbf{1}}{n} + b^*b \right)^{-1/2} a^*$$

választással kapjuk, hogy

$$c_n = \frac{1}{4} \sum_{k=0}^{3} \mathbf{i}^k (b + \overline{\mathbf{i}^k} a) \left(\frac{\mathbf{1}}{n} + b^*b \right)^{-1} (b^* + \mathbf{i}^k a^*).$$

Legyen minden $k \in \{0, 1, 2, 3\}$ és $n \in \mathbb{N}^+$ esetén

$$c_{n,k} := (b + \overline{\mathbf{i}^k} a) \left(\frac{\mathbf{1}}{n} + b^*b \right)^{-1} (b^* + \mathbf{i}^k a^*);$$

világos, hogy $c_{n,k} \in A_+$, és rögzített $k \in \{0, 1, 2, 3\}$ esetén a $(c_{n,k})_{n \in \mathbb{N}}$ sorozat monoton növő A-ban.

Megmutatjuk, hogy minden $k \in \{0, 1, 2, 3\}$ esetén a $(c_{n,k})_{n \in \mathbb{N}}$ sorozat C^*-normában korlátos. Ehhez legyen $z \in \mathbb{C}$ olyan, hogy $|z| = 1$; ekkor $n \in \mathbb{N}^+$ esetén

$$\left\| (b + za) \left(\frac{\mathbf{1}}{n} + b^*b \right)^{-1} (b^* + \overline{z} a^*) \right\| =$$

$$= \left\| \left(\left(\frac{\mathbf{1}}{n} + b^*b \right)^{-1/2} (b^* + \overline{z} a^*) \right)^* \left(\left(\frac{\mathbf{1}}{n} + b^*b \right)^{-1/2} (b^* + \overline{z} a^*) \right) \right\| =$$

$$= \left\| \left(\left(\frac{\mathbf{1}}{n} + b^*b \right)^{-1/2} (b^* + \overline{z} a^*) \right) \left(\left(\frac{\mathbf{1}}{n} + b^*b \right)^{-1/2} (b^* + \overline{z} a^*) \right)^* \right\| =$$

$$= \left\| \left(\frac{\mathbf{1}}{n} + b^*b \right)^{-1/2} (b^* + \overline{z} a^*)(b + za) \left(\frac{\mathbf{1}}{n} + b^*b \right)^{-1/2} \right\| =$$

$$= \left\| \left(\frac{\mathbf{1}}{n} + b^*b\right)^{-1/2} (b^*b + (za)^*b + b^*(za) + a^*a) \left(\frac{\mathbf{1}}{n} + b^*b\right)^{-1/2} \right\|.$$

Tekintettel arra, hogy az $a^*a \preceq b^*b$ feltétel alapján

$$b^*b + (za)^*b + b^*(za) + a^*a \preceq b^*b + (za)^*(za) + b^*b + b^*b = 4b^*b,$$

ebből kapjuk, hogy

$$0 \preceq \left(\frac{\mathbf{1}}{n} + b^*b\right)^{-1/2} (b^*b + (za)^*b + b^*(za) + a^*a) \left(\frac{\mathbf{1}}{n} + b^*b\right)^{-1/2} \preceq$$

$$\preceq 4 \left(\frac{\mathbf{1}}{n} + b^*b\right)^{-1/2} (b^*b) \left(\frac{\mathbf{1}}{n} + b^*b\right)^{-1/2} = 4\,(\varphi_n)_A\,(b^*b),$$

ahol bevezettük a

$$\varphi_n : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+; \quad t \mapsto \left(\frac{1}{n} + t\right)^{-1} t$$

függvényt. Természetesen minden $t \in \mathbb{R}_+$ esetén $0 \leq \varphi_n(t) \leq 1$, ezért $(\varphi_n)_A\,(b^*b) \preceq \mathbf{1}$, amiből kapjuk, hogy

$$\left\| \left(\frac{\mathbf{1}}{n} + b^*b\right)^{-1/2} (b^*b + (za)^*b + b^*(za) + a^*a) \left(\frac{\mathbf{1}}{n} + b^*b\right)^{-1/2} \right\| \leq 4.$$

Ebből következik, hogy minden $k \in \{0, 1, 2, 3\}$ és $n \in \mathbb{N}^+$ esetén $\|c_{n,k}\| \leq 4$. Az A C^*-algebra MSC-algebra, ezért minden $k \in \{0, 1, 2, 3\}$ számra képezhető a

$$c_{\infty,k} := \sup_{n \in \mathbb{N}^+} c_{n,k}$$

elem, tehát értelmezhetjük a

$$c := \frac{1}{4} \sum_{k=0}^{3} \mathbf{i}^k c_{\infty.k}$$

elemet. Megmutatjuk, hogy $c \in A$ olyan elem, amelyre $a = cb$, sőt ha $a^*a = b^*b$, akkor még a $c^*a = b$ egyenlőség is teljesül.

Először igazoljuk azt, hogy a $(c_n b)_{n \in \mathbb{N}^+}$ sorozat a C^*-norma szerint konvergál a-hoz. Valóban, $n \in \mathbb{N}^+$ esetén a definíció szerint $c_n b = a \left(\frac{\mathbf{1}}{n} + b^*b\right)^{-1} b^*b$, tehát

$$\|a - c_n b\|^2 = \|(a - c_n b)^*(a - c_n b)\| =$$

$$= \left\| \left(\mathbf{1} - \left(\frac{\mathbf{1}}{n} + b^*b\right)^{-1} b^*b\right) (a^*a) \left(\mathbf{1} - \left(\frac{\mathbf{1}}{n} + b^*b\right)^{-1} b^*b\right) \right\| \leq$$

$$\leq \left\| \left(\mathbf{1} - \left(\frac{\mathbf{1}}{n} + b^*b\right)^{-1} b^*b\right)(b^*b)\left(\mathbf{1} - \left(\frac{\mathbf{1}}{n} + b^*b\right)^{-1} b^*b\right) \right\| =$$
$$= \|(\psi_n)_A(b^*b)\| = \sup_{t \in \mathrm{Sp}_A(b^*b)} |\psi_n(t)|,$$

ahol felhasználtuk azt, hogy $a^*a \preceq b^*b$ miatt

$$0 \preceq \left(\mathbf{1} - \left(\frac{\mathbf{1}}{n} + b^*b\right)^{-1} b^*b\right)(a^*a)\left(\mathbf{1} - \left(\frac{\mathbf{1}}{n} + b^*b\right)^{-1} b^*b\right) \preceq$$
$$\preceq \left(\mathbf{1} - \left(\frac{\mathbf{1}}{n} + b^*b\right)^{-1} b^*b\right)(b^*b)\left(\mathbf{1} - \left(\frac{\mathbf{1}}{n} + b^*b\right)^{-1} b^*b\right),$$

ezért fennáll a

$$\left\| \left(\mathbf{1} - \left(\frac{\mathbf{1}}{n} + b^*b\right)^{-1} b^*b\right)(a^*a)\left(\mathbf{1} - \left(\frac{\mathbf{1}}{n} + b^*b\right)^{-1} b^*b\right) \right\| \leq$$
$$\leq \left\| \left(\mathbf{1} - \left(\frac{\mathbf{1}}{n} + b^*b\right)^{-1} b^*b\right)(b^*b)\left(\mathbf{1} - \left(\frac{\mathbf{1}}{n} + b^*b\right)^{-1} b^*b\right) \right\|$$

egyenlőtlenség, valamint bevezettük a

$$\psi_n : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+; \quad t \mapsto \left(1 - \left(\frac{1}{n} + t\right)^{-1} t\right) t \left(1 - \left(\frac{1}{n} + t\right)^{-1} t\right)$$

függvényt. Természetesen minden $n \in \mathbb{N}^+$ és $t \in \mathbb{R}_+$ esetén

$$\psi_n(t) = \frac{1}{n^2} \frac{t}{\left(\frac{1}{n} + t\right)^2},$$

amiből látható, hogy ψ_n-nek az $\frac{1}{n}$ pontban van globális maximuma, és a maximum értéke $\frac{1}{4n}$, így $\|a - c_n b\|^2 \leq \frac{1}{4n}$, vagyis $\|a - c_n b\| \leq \frac{1}{2\sqrt{n}}$.

Tehát a $(c_n b)_{n \in \mathbb{N}^+}$ sorozat a C^*-norma szerint konvergál a-hoz, amiből azonnal következik, hogy a $(cb - c_n b)_{n \in \mathbb{N}^+}$ sorozat a C^*-norma szerint konvergál az $cb - a$ elemhez, így

$$(cb - a)^*(cb - a) = \lim_{n \to \infty} (cb - c_n b)^*(cb - c_n b) = \lim_{n \to \infty} b^*(c - c_n)^*(c - c_n)b$$

teljesül az A feletti C^*-norma szerint. Legyen $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ tetszőleges, és az előző állítás d) pontja alapján legyen $N \in \mathbb{N}$ olyan, hogy minden $n > N$ természetes számra

$$0 \preceq (cb - a)^*(cb - a) \preceq \varepsilon\mathbf{1} + b^*(c - c_n)^*(c - c_n)b.$$

Minden $n \in \mathbb{N}^+$ esetén, a c_n és c elemek értelmezése alapján

$$(c - c_n)^*(c - c_n) = \frac{1}{4^2} \sum_{j,k=0}^{3} \left(\mathbf{i}^j(c_{\infty,j} - c_{n,j})\right)^* \left(\mathbf{i}^k(c_{\infty,k} - c_{n,k})\right) \preceq$$

$$\preceq \frac{1}{4} \sum_{k=0}^{3} \left(\mathbf{i}^k(c_{\infty,k} - c_{n,k})\right)^* \left(\mathbf{i}^k(c_{\infty,k} - c_{n,k})\right) = \frac{1}{4} \sum_{k=0}^{3} (c_{\infty,k} - c_{n,k})^2,$$

ahol felhasználtuk azt, hogy *-algebrában bármely $(a_k)_{k\in K}$ véges rendszerre $\sum\limits_{j,k\in K} a_j^* a_k \preceq \operatorname{Card}(K) \sum\limits_{k\in K} a_k^* a_k$. Ha $n \in \mathbb{N}^+$ és $k \in \{0, 1, 2, 3\}$, akkor

$$0 \preceq (c_{\infty,k} - c_{n,k})^2 \leq \|c_{\infty,k} - c_{n,k}\|(c_{\infty,k} - c_{n,k}) \preceq \|c_{\infty,k}\|(c_{\infty,k} - c_{n,k}),$$

ezért minden $\mathbb{N}^+ \ni n$-re

$$b^*(c - c_n)^*(c - c_n)b \preceq \frac{1}{4} \sum_{k=0}^{3} b^*(c_{\infty,k} - c_{n,k})^2 b \preceq \sum_{k=0}^{3} \frac{\|c_{\infty,k}\|}{4} b^*(c_{\infty,k} - c_{n,k})b,$$

tehát minden $n > N$ természetes számra

$$(cb - a)^*(cb - a) - \varepsilon\mathbf{1} \preceq \sum_{k=0}^{3} \frac{\|c_{\infty,k}\|}{4} b^*(c_{\infty,k} - c_{n,k})b.$$

Az előző állítás c) pontja szerint minden $k \in \{0, 1, 2, 3\}$ esetén

$$\inf_{n\in\mathbb{N}^+} b^*(c_{\infty,k} - c_{n,k})b = 0,$$

hiszen a $c_{\infty,k}$ definíciója szerint $c_{\infty,k} := \sup\limits_{n\in\mathbb{N}^+} c_{n,k}$. Ezért az előző állítás a) pontját alkalmazva

$$\inf_{n\in\mathbb{N}^+} \sum_{k=0}^{3} \frac{\|c_{\infty,k}\|}{4} b^*(c_{\infty,k} - c_{n,k})b = 0$$

adódik, így $0 \preceq (cb - a)^*(cb - a) \preceq \varepsilon\mathbf{1}$. Ebből következik, hogy minden $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ esetén

$$\|cb - a\|^2 = \|(cb - a)^*(cb - a)\| \leq \varepsilon\|\mathbf{1}\| \leq \varepsilon,$$

ezért $a = cb$.

Tegyük fel, hogy $a^*a = b^*b$. Ekkor az összes előző állítás érvényben marad az a és b elemek felcserélése után. Tehát, ha $n \in \mathbb{N}^+$ és $k \in \{0, 1, 2, 3\}$, akkor

$$c'_{n,k} := (a + \overline{\mathbf{i}^k}b)\left(\frac{\mathbf{1}}{n} + a^*a\right)^{-1}(a^* + \mathbf{i}^k b^*)$$

olyan pozitív elem A-ban, hogy $k \in \{0, 1, 2, 3\}$ esetén a $(c'_{n,k})_{n \in \mathbb{N}^+}$ sorozat monoton növő A_{sa}-ban és C^*-normában korlátos. Tehát minden $k \in \{0, 1, 2, 3\}$ esetén képezhető a $c'_{\infty,k} := \sup_{n \in \mathbb{N}} c'_{n,k} \in A$ elem, és ha

$$c' := \frac{1}{4} \sum_{k=0}^{3} \mathbf{i}^k c'_{\infty,k},$$

akkor $b = c'a$. Ha $k \in \{0, 1, 2, 3\}$, akkor $\overline{\mathbf{i}^k} = \mathbf{i}^{4-k}$, ezért $a^*a = b^*b$ miatt minden $\mathbb{N}^+ \ni n$-re $c'_{n,k} = c_{n,4-k}$, ahol bevezetjük a $c_{n,4} := c_{n,0}$ jelölést. Ebből következik, hogy $k \in \{0, 1, 2, 3\}$ esetén $c'_{\infty,k} := c_{\infty,4-k}$, ahol $c_{\infty,4} := c_{\infty,0}$. Ezért

$$c' = \frac{1}{4} \sum_{k=0}^{3} \mathbf{i}^k c'_{\infty.k} = \frac{1}{4} \sum_{k=0}^{3} \mathbf{i}^k c_{\infty,4-k} = \frac{1}{4} \sum_{k=0}^{3} \overline{\mathbf{i}^k} c_{\infty,k} = \left(\frac{1}{4} \sum_{k=0}^{3} \mathbf{i}^k c_{\infty,k} \right)^* = c^*,$$

vagyis $b = c^*a$. ■

19.6.2. Tétel. (A polárfelbontás tétele) *Ha A egységelemes*MSC-*algebra, akkor minden $a \in A$ esetén van olyan $w \in A$, hogy $a = w|a|$ és $w^*a = |a|$, vagyis létezik a-nak polárfelbontása.*

Bizonyítás. Ha $a \in A$, akkor az $|a|$ definíciója szerint $a^*a = |a|^*|a|$, ezért az imént igazolt tétel alapján van olyan $w \in A$, amelyre $a = w|a|$ és $w^*a = |a|$. ■

19.6.3. Következmény. *Egységelemes*MSC-*algebrában minden ideál *-ideál.*

Bizonyítás. Legyen $\mathfrak{m}$ ideál az A egységelemes MSC-algebrában és $a \in \mathfrak{m}$. Legyen $w \in A$ olyan elem, amelyre $a = w|a|$ és $w^*a = |a|$. Ekkor $|a| = w^*a \in A\mathfrak{m} \subseteq \mathfrak{m}$, tehát $a^* = |a|w^* \in \mathfrak{m}A \subseteq \mathfrak{m}$. ■

20. fejezet

*-algebrák ábrázolásai és pozitív funkcionálok

20.1. *-algebrák ábrázolásai

20.1.1. Definíció. *Azt mondjuk, hogy* π **ábrázolása** *az* A **-algebrának a* $\mathscr{H}$ *Hilbert-térben, ha* $\pi : A \to \mathscr{L}(\mathscr{H})$ **-algebra-morfizmus; a* $\mathscr{H}$ *Hilbert-teret a* π *ábrázolás* **terének**, *és a* $\mathscr{H}$ *Hilbert-dimenzióját a* π *ábrázolás* **dimenziójának** *nevezzük. Az injektív ábrázolásokat* **hű ábrázolásoknak** *nevezzük.*

Példa. Legyen $\mathscr{H}$ Hilbert-tér és A *-részalgebrája az $\mathscr{L}(\mathscr{H})$ operátoralgebrának. Ekkor az $A \to \mathscr{L}(\mathscr{H})$ kanonikus injekció hű ábrázolása az A *-algebrának a $\mathscr{H}$ Hilbert-térben. Ezt nevezzük az A operátoralgebra *önábrázolásának*.

20.1.2. Definíció. *Legyen* A **-algebra és* π_1 *(illetve* π_2*) ábrázolása* A*-nak a* $\mathscr{H}_1$ *(illetve* $\mathscr{H}_2$*) Hilbert-térben. Ekkor*

$$C(\pi_1; \pi_2) := \{u \in \mathscr{L}(\mathscr{H}_1; \mathscr{H}_2) \mid (\forall a \in A) : u \circ \pi_1(a) = \pi_2(a) \circ u\},$$

és $C(\pi_1; \pi_2)$ *elemeit a* π_1 *és* π_2 *ábrázolásokat* **összekötő operátoroknak** *nevezzük. Azt mondjuk, hogy a* π_1 *és* π_2 *ábrázolások* **unitér ekvivalensek**, *ha* $C(\pi_1; \pi_2)$*-ben van unitér operátor. A* π_1 *és* π_2 *ábrázolásokat* **diszjunktaknak** *nevezzük, ha* $C(\pi_1; \pi_2) = \{0\}$.

20.1.3. Definíció. *Legyen* π *ábrázolása az* A **-algebrának a* $\mathscr{H}$ *Hilbert-térben. Egy* $H \subseteq \mathscr{H}$ *halmazt* π**-invariánsnak** *nevezünk, ha minden* $a \in A$ *esetén* $\pi(a)\langle H \rangle \subseteq H$. *Ha* $H \subseteq \mathscr{H}$ π*-invariáns zárt lineáris altér* $\mathscr{H}$*-ban, akkor az* $A \to \mathscr{L}(H);\ a \mapsto \pi(a)|_H$ *leképezést* $\pi|H$ *jelöli, és ezt a* π *ábrázolás* H *által meghatározott* **részábrázolásának** *nevezzük.*

Nyilvánvaló, hogy ha π ábrázolása az A *-algebrának a $\mathscr{H}$ Hilbert-térben, és $H \subseteq \mathscr{H}$ zárt π-invariáns lineáris altér, akkor $\pi|H$ ábrázolása A-nak a H Hilbert-térben, továbbá $H^\perp$ is zárt π-invariáns lineáris altér, mert $a \in A$ és $\zeta \in H^\perp$ esetén minden $\eta \in H$ vektorra

$$(\pi(a)\zeta|\eta) = (\zeta|\pi(a)^*\eta) = (\zeta|\pi(a^*)\eta) = 0,$$

hiszen a H altér π-invarianciája folytán $\pi(a^*)\eta \in H$; ezért $\pi(a)\zeta \in H^\perp$.

20.1.4. Definíció. *Legyen π ábrázolása az A *-algebrának a $\mathscr{H}$ Hilbert-térben. Azt mondjuk, hogy a π ábrázolás*

– **nullábrázolás**, *ha minden $a \in A$ esetén $\pi(a) = 0$;*

– **nemelfajult**, *ha a $\{\pi(a)\zeta|(a \in A) \wedge (\zeta \in \mathscr{H})\}$ halmaz lineáris burka sűrű a $\mathscr{H}$ Hilbert-térben;*

– **ciklikus**, *ha létezik olyan $\zeta \in \mathscr{H}$, amelyre a $\{\pi(a)\zeta|a \in A\} \subseteq \mathscr{H}$ altér sűrű a $\mathscr{H}$ Hilbert-térben; minden ilyen $\zeta \in \mathscr{H}$ vektort π-ciklikusnak nevezünk;*

– **geometriailag irreducibilis**, *ha csak $\{0\}$ és $\mathscr{H}$ zárt π-invariáns lineáris altér a $\mathscr{H}$ Hilbert-térben;*

– **algebrailag irreducibilis**, *ha $C(\pi;\pi) = \mathbb{C}.id_{\mathscr{H}}$.*

Megjegyzések. 1) Később megmutatjuk, hogy az ábrázolások geometriai és algebrai irreducibilitása egymással *ekvivalens* tulajdonságok, ezért egyszerűen *irreducibilitásról* beszélünk. Addig, amíg ezt az ekvivalenciát nem bizonyítjuk, a kétféle irreducibilitás-fogalmat gondosan megkülönböztetjük egymástól. Egyébként könnyen látható, hogy minden algebrailag irreducibilis ábrázolás geometriailag is irreducibilis. Ha ugyanis π algebrailag irreducibilis ábrázolása az A *-algebrának a $\mathscr{H}$ Hilbert-térben, és $H \subseteq \mathscr{H}$ zárt π-invariáns lineáris altér, akkor a H-ra vetítő P_H ortogonális projektorra $P_H \in C(\pi;\pi)$ nyilvánvalóan teljesül, tehát van olyan $c \in \mathbb{C}$, hogy $P_H = c.id_{\mathscr{H}}$; ekkor $\mathscr{H} \neq \{0\}$ esetén $P_H \circ P_H = P_H$ következtében $c^2 = c$, tehát $c = 0$ vagy $c = 1$, azaz $H = \{0\}$ vagy $H = \mathscr{H}$.

2) Triviális az, hogy *-algebra egydimenziós nullábrázolása algebrailag irreducibilis, de nem ciklikus. Ha azonban π geometriailag irreducibilis, nem nullábrázolása az A *-algebrának a $\mathscr{H}$ Hilbert-térben, akkor π ciklikus ábrázolás. Valóban, ha $\zeta \in \mathscr{H}$, akkor nyilvánvalóan $\overline{\{\pi(a)\zeta|a \in A\}}$ zárt π-invariáns lineáris altér $\mathscr{H}$-ban, ezért $\overline{\{\pi(a)\zeta|a \in A\}} = \{0\}$, vagy $\overline{\{\pi(a)\zeta|a \in A\}} = \mathscr{H}$. Ugyanakkor π nem nullábrázolás, ezért van olyan $a \in A$ és $\zeta \in \mathscr{H}$, hogy $\pi(a)\zeta \neq 0$, így szükségképpen ilyen ζ vektorra $\overline{\{\pi(a)\zeta|a \in A\}} = \mathscr{H}$ teljesül, vagyis ζ a π ábrázolásnak ciklikus vektora.

3) Természetesen ciklikus ábrázolás szükségképpen nemelfajult, azonban nemelfajult ábrázolás nem feltétlenül ciklikus.

4) Legyen π ábrázolása az A *-algebrának a $\mathscr{H}$ Hilbert-térben, $\zeta \in \mathscr{H}$, és

$$\mathscr{H}_{\pi,\zeta} := \overline{\{\pi(a)\zeta|a \in A\}}.$$

Jelölje ζ_0 a ζ vektor ortogonális vetületét a $\mathscr{H}_{\pi,\zeta}$ zárt π-invariáns lineáris altérre. Ekkor $\pi|\mathscr{H}_{\pi,\zeta}$ *ciklikus* részábrázolása π-nek, és ζ_0 ennek a részábrázolásnak ciklikus vektora. Legyen ugyanis $\eta \in \mathscr{H}_{\pi,\zeta}$ olyan vektor, hogy minden $a \in A$ esetén $(\pi(a)\zeta_0|\eta) = 0$. Ekkor minden $A \ni a$-ra

$$(\pi(a)\zeta|\eta) = (\pi(a)(\zeta - \zeta_0)|\eta) + (\pi(a)\zeta_0|\eta) = (\zeta - \zeta_0|\pi(a^*)\eta) = 0,$$

hiszen $\pi(a^*)\eta \in \mathscr{H}_{\pi,\zeta}$ és $\zeta - \zeta_0 \in \mathscr{H}_{\pi,\zeta}^{\perp}$. Ez azt jelenti, hogy $\eta \in \mathscr{H}_{\pi,\zeta}^{\perp}$, így $\eta = 0$, vagyis a ζ_0 vektor $\pi|\mathscr{H}_{\pi,\zeta}$-ciklikus.

20.1.5. Állítás. *Legyen A normált *-algebra és π olyan ábrázolása A-nak a $\mathscr{H}$ Hilbert-térben, hogy minden $\zeta, \eta \in \mathscr{H}$ esetén a $(\pi(\cdot)\zeta|\eta) : A \to \mathbb{C}$ lineáris funkcionál folytonos. Ha π nemelfajult és $B \subseteq A$ sűrű *-részalgebra, akkor a $\pi|_B$ leszűkített ábrázolás is nemelfajult.*

Bizonyítás. Legyen $\eta \in \mathscr{H}$ olyan, hogy minden $\zeta \in \mathscr{H}$ és $a \in B$ esetén $\eta \perp \pi(a)\zeta$. Ekkor minden $\zeta \in \mathscr{H}$ vektorra a $(\pi(\cdot)\zeta|\eta) : \mathscr{H} \to \mathbb{C}$ lineáris funkcionál 0 a B altéren és a hipotézis szerint folytonos, így az egyenlőségek folytatásának elve (26.1.4.) alapján $(\pi(\cdot)\zeta|\eta) = 0$ a $\mathscr{H}$ Hilbert-téren. Ezért minden $\zeta \in \mathscr{H}$ és $a \in A$ esetén $\eta \perp \pi(a)\zeta$, tehát a π nemelfajultsága folytán $\eta = 0$. Ez azt jelenti, hogy $\pi|_B$ nemelfajult ábrázolása B-nek $\mathscr{H}$-ban. ■

Az előző állításban π-re megfogalmazott folytonossági tulajdonság automatikusan teljesül akkor, ha A Banach-*-algebra, mivel ekkor π norma-nem-növelő (17.4.2.), így minden $\zeta, \eta \in \mathscr{H}$ és $a \in A$ esetén $|(\pi(a)\zeta|\eta)| \leq \|a\|\|\zeta\|\|\eta\|$, tehát a $(\pi(\cdot)\zeta|\eta) : A \to \mathbb{C}$ lineáris funkcionál folytonos.

20.2. Szummálható ábrázolások

20.2.1. Definíció. *Az A *-algebra $(\pi_i)_{i\in I}$ ábrázolás-rendszerét* **szummálhatónak** *nevezzük, ha minden $a \in A$ esetén a $(\|\pi_i(a)\|)_{i\in I}$ rendszer korlátos $\mathbb{R}$-ben.*

Példák (szummálható ábrázolásokra)

1) Nyilvánvalóan *-algebra bármely *véges* ábrázolás-rendszere szummálható.

2) Ha π ábrázolása az A *-algebrának, akkor a π *részábrázolásainak* bármely $(\pi_i)_{i\in I}$ rendszere szummálható, mert minden $a \in A$ és $i \in I$ esetén $\|\pi_i(a)\| \leq \|\pi(a)\|$.

3) Ha A Banach-*-algebra, akkor az A ábrázolásainak bármely $(\pi_i)_{i\in I}$ rendszere szummálható, hiszen ekkor minden $a \in A$ és $i \in I$ esetén $\|\pi_i(a)\| \leq \|a\|$.

4) Van olyan pre-C^*-algebra, amelynek létezik nem szummálható ábrázolás-rendszere.

Tekintsük például a $[0,1] \to \mathbb{C}$ folytonos függvények C^*-algebráját, és legyen A az $id_{[0,1]}$ elem által generált $*$-részalgebra, vagyis

$$A := \left\{ \sum_{k=0}^{\infty} c_k . id_{[0,1]}^k \,\middle|\, (c_k)_{k\in\mathbb{N}} \in \mathbb{C}^{(\mathbb{N})} \right\}.$$

Minden $a \in A$ esetén egyértelműen létezik olyan $\tilde{a} : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ polinomiális függvény, amely az a-nak kiterjesztése. Minden $t \in \mathbb{R}$ esetén a

$$\pi_t : A \to \mathscr{L}(\mathbb{C}); \quad a \mapsto \tilde{a}(t).id_{\mathbb{C}}$$

leképezés egydimenziós ábrázolása az A pre-C^*-algebrának, és a $(\pi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ábrázolás-sorozat *nem szummálható*, mert

$$\sup_{n\in\mathbb{N}} \|\pi_n(id_{[0,1]})\| = \sup_{n\in\mathbb{N}} |id_{\mathbb{C}}(n)| = +\infty.$$

20.2.2. Állítás. (Ábrázolások Hilbert-összege) *Legyen $(\pi_i)_{i\in I}$ az A $*$-algebra ábrázolásainak szummálható rendszere, és minden $i \in I$ esetén jelölje $\mathscr{H}_i$ a π_i ábrázolás terét, és $(\cdot|\cdot)_i$ a $\mathscr{H}_i$ feletti skalárszorzást. Ekkor a*

$$(\cdot|\cdot) : \bigoplus_{i\in I} \mathscr{H}_i \times \bigoplus_{i\in I} \mathscr{H}_i \to \mathbb{C}; \quad ((\zeta_i)_{i\in I}, (\eta_i)_{i\in I}) \mapsto \sum_{i\in I} (\zeta_i|\eta_i)_i$$

leképezés skalárszorzás a $\bigoplus_{i\in I} \mathscr{H}_i$ vektortér felett; jelölje $\widehat{\bigoplus_{i\in I}} \mathscr{H}_i$ a $\bigoplus_{i\in I} \mathscr{H}_i, (\cdot|\cdot)$ prehilbert-tér teljes burkát (amit a $(\mathscr{H}_i)_{i\in I}$ **Hilbert-tér rendszer Hilbert-összegének** *nevezünk). Ekkor létezik az A $*$-algebrának egyetlen olyan π ábrázolása a $\widehat{\bigoplus_{i\in I}} \mathscr{H}_i$ Hilbert-térben, amelyre minden $a \in A$ és $(\zeta_i)_{i\in I} \in \bigoplus_{i\in I} \mathscr{H}_i$ esetén*

$$\pi(a)((\zeta_i)_{i\in I}) = (\pi_i(a)\zeta_i)_{i\in I}.$$

Bizonyítás. Nyilvánvaló, hogy a $(\cdot|\cdot)$ leképezés skalárszorzás a $\bigoplus_{i\in I} \mathscr{H}_i$ vektortér felett. Minden $a \in A$ esetén a

$$\bigoplus_{i\in I} \pi_i(a) : \bigoplus_{i\in I} \mathscr{H}_i \to \bigoplus_{i\in I} \mathscr{H}_i; \quad (\zeta_i)_{i\in I} \mapsto (\pi_i(a)\zeta_i)_{i\in I}$$

leképezés lineáris, és folytonos a $(\cdot|\cdot)$ skalárszorzás által meghatározott $\|\cdot\|$ norma szerint, hiszen $(\zeta_i)_{i\in I} \in \bigoplus_{i\in I} \mathscr{H}_i$ esetén

$$\left\| \bigoplus_{i\in I} \pi_i(a) \quad (\zeta_i)_{i\in I} \right\|^2 := \|(\pi_i(a)\zeta_i)_{i\in I}\|^2 = \sum_{i\in I} \|\pi_i(a)\zeta_i\|_i^2 \leq$$

$$\leq \sum_{i\in I} \|\pi_i(a)\|^2 \|\zeta_i\|_i^2 \leq \left(\sup_{i\in I} \|\pi_i(a)\|\right)^2 \sum_{i\in I} \|\zeta_i\|_i^2 = \left(\sup_{i\in I} \|\pi_i(a)\|\right)^2 \|(\zeta_i)_{i\in I}\|^2,$$

ahol minden $I \ni i$-re $\|\cdot\|_i$ jelöli a $(\cdot|\cdot)_i$ skalárszorzás által meghatározott normát $\mathscr{H}_i$ felett. Ebből következik, hogy minden $A \ni a$-hoz létezik egyetlen olyan $\pi(a) : \widehat{\bigoplus_{i\in I}} \mathscr{H}_i \to \widehat{\bigoplus_{i\in I}} \mathscr{H}_i$ folytonos lineáris operátor, amelyre minden $(\zeta_i)_{i\in I} \in \bigoplus_{i\in I} \mathscr{H}_i$ esetén

$$\pi(a)((\zeta_i)_{i\in I}) = (\pi_i(a)\zeta_i)_{i\in I}.$$

Könnyen ellenőrizhető, hogy az így értelmezett

$$\pi : A \to \mathscr{L}(\widehat{\bigoplus_{i\in I}} \mathscr{H}_i); \quad a \mapsto \pi(a)$$

leképezés ábrázolása az A *-algebrának a $\widehat{\bigoplus_{i\in I}} \mathscr{H}_i$ Hilbert-térben. ■

20.2.3. Definíció. *Ha A *-algebra és $(\pi_i)_{i\in I}$ az A ábrázolásainak szummálható rendszere, akkor az előző állításban értelmezett π ábrázolást a $(\pi_i)_{i\in I}$* **ábrázolás-rendszer Hilbert-összegének** *nevezzük, és a $\widehat{\bigoplus_{i\in I}} \pi_i$ szimbólummal jelöljük.*

20.3. Ábrázolások elemi felbontásai

20.3.1. Állítás. *Legyen π ábrázolása az A *-algebrának a $\mathscr{H}$ Hilbert-térben. Ekkor egyértelműen léteznek olyan $\mathscr{H}_0, \mathscr{H}_1 \subseteq \mathscr{H}$ zárt π-invariáns lineáris alterek, hogy $\mathscr{H}_0 \perp \mathscr{H}_1$, $\mathscr{H}_0 \oplus \mathscr{H}_1 = \mathscr{H}$, és $\pi|\mathscr{H}_0$ nullábrázolása, valamint $\pi|\mathscr{H}_1$ nemelfajult ábrázolása A-nak. Továbbá, a $(\pi|\mathscr{H}_0) \oplus (\pi|\mathscr{H}_1)$ Hilbert-összeg unitér ekvivalens π-vel.*

Bizonyítás. (*Egzisztencia.*) Legyen

$$\mathscr{H}_0 := \bigcap_{a\in A} \operatorname{Ker}(\pi(a)), \quad \mathscr{H}_1 := \mathscr{H}_0^{\perp}.$$

Világos, hogy $\mathscr{H}_0$ és $\mathscr{H}_1$ zárt π-invariáns lineáris alterek $\mathscr{H}$-ban, továbbá nyilvánvalóan $\pi|\mathscr{H}_0$ nullábrázolása A-nak.

Megmutatjuk, hogy $\pi|\mathscr{H}_1$ nemelfajult ábrázolása A-nak. Ehhez legyen $\zeta \in \mathscr{H}_1$ olyan vektor, amelyre minden $a \in A$ és $\eta_1 \in \mathscr{H}_1$ esetén $(\zeta|\pi(a)\eta_1) = 0$; azt kell belátni, hogy $\zeta = 0$. Ehhez elég azt igazolni, hogy minden $a \in A$ esetén $\pi(a)\zeta = 0$, hiszen ez azt jelenti, hogy $\zeta \in \mathscr{H}_0$, így $\zeta \in \mathscr{H}_0 \cap \mathscr{H}_1 = \{0\}$. Tehát azt fogjuk igazolni, hogy $\eta \in \mathscr{H}$ és $a \in A$ esetén $(\pi(a)\zeta|\eta) = 0$. Valóban, ha $\eta \in \mathscr{H}$ tetszőleges, akkor η egyértelműen előáll $\eta_0 + \eta_1$ alakban, ahol $\eta_0 \in \mathscr{H}_0$ és $\eta_1 \in \mathscr{H}_1$; ekkor minden $a \in A$ esetén

$$(\pi(a)\zeta|\eta) = (\pi(a)\zeta|\eta_0) + (\pi(a)\zeta|\eta_1) =$$

$$= (\zeta|\pi(a)^*\eta_0) + (\zeta|\pi(a)^*\eta_1) = (\zeta|\pi(a^*)\eta_0) + (\zeta|\pi(a^*)\eta_1) = 0,$$

amit bizonyítani hellett. Ezzel megmutattuk, hogy $\pi|\mathscr{H}_1$ nemelfajult ábrázolása A-nak.

Könnyen ellenőrizhető, hogy az

$$u : \mathscr{H}_0 \oplus \mathscr{H}_1 \to \mathscr{H}; \quad (\zeta_0, \zeta_1) \mapsto \zeta_0 + \zeta_1$$

leképezés olyan unitér operátor, amely összeköti a $(\pi|\mathscr{H}_0) \oplus (\pi|\mathscr{H}_1)$ és π ábrázolásokat, így ezek unitér ekvivalens ábrázolások.

(*Unicitás.*) Tegyük fel, hogy $\mathscr{K}_0$ és $\mathscr{K}_1$ olyan zárt π-invariáns lineáris alterek, amelyekre $\mathscr{K}_0 \perp \mathscr{K}_1$, $\mathscr{H} = \mathscr{K}_0 \oplus \mathscr{K}_1$, és $\pi|\mathscr{K}_0$ nullábrázolása, valamint $\pi|\mathscr{K}_1$ nemelfajult ábrázolása A-nak. Ekkor $a \in A$ esetén $\mathscr{K}_0 \subseteq \mathrm{Ker}(\pi(a))$, mert $\pi|\mathscr{K}_0$ nullábrázolás, tehát $\mathscr{K}_0 \subseteq \mathscr{H}_0$. Legyen $\zeta \in \mathscr{H}_0$; ekkor $\mathscr{H} = \mathscr{K}_0 \oplus \mathscr{K}_1$ miatt ζ egyértelműen előáll $\zeta_0 + \zeta_1$ alakban, ahol $\zeta_0 \in \mathscr{K}_0$ és $\zeta_1 \in \mathscr{K}_1$. Ekkor a $\mathscr{K}_0 \subseteq \mathscr{H}_0$ tartalmazás miatt $\zeta_1 = \zeta - \zeta_0 \in \mathscr{H}_0$, tehát minden $a \in A$ esetén $\pi(a^*)\zeta_1 = 0$. Ezért minden $a \in A$ és $\eta \in \mathscr{K}_1$ esetén

$$(\zeta_1|\pi(a)\eta) = (\pi(a)^*\zeta_1|\eta) = (\pi(a^*)\zeta_1|\eta) = 0,$$

tehát $\pi|\mathscr{K}_1$ nemelfajultsága és $\zeta_1 \in \mathscr{K}_1$ folytán $\zeta_1 = 0$. Ezért $\zeta = \zeta_0 \in \mathscr{K}_0$, amiből következik, hogy $\mathscr{K}_0 = \mathscr{H}_0$, így $\mathscr{H}_1 = \mathscr{H}_0^\perp = \mathscr{K}_0^\perp = \mathscr{K}_1$ is teljesül. ■

20.3.2. Állítás. *Legyen π nemelfajult ábrázolása az A *-algebrának a $\mathscr{H}$ Hilbert-térben. Ekkor létezik a π részábrázolásainak olyan $(\pi_i)_{i \in I}$ rendszere, amelyre minden $i \in I$ esetén π_i ciklikus ábrázolása A-nak, és $\widehat{\bigoplus_{i \in I}} \pi_i$ unitér ekvivalens π-vel.*

Bizonyítás. Jelölje $\mathfrak{S}$ azon $S \subseteq \mathscr{P}(\mathscr{H})$ halmazok halmazát, amelyekre teljesülnek a következők:

– minden $H \in S$ halmaz olyan zárt π-invariáns lineáris altér $\mathscr{H}$-ban, amelyre a $\pi|H$ részábrázolás ciklikus;

– minden $H, H' \in S$ esetén, ha $H \neq H'$, akkor $H \perp H'$.

Az $\mathfrak{S}$ halmazt a $\subseteq$ relációval rendezzük. Világos, hogy $\{\{0\}\} \in \mathfrak{S}$, ezért $\mathfrak{S} \neq \emptyset$, továbbá nyilvánvaló, hogy $\mathfrak{S}$ induktívan rendezett halmaz, így a Zorn-lemma alapján van olyan $S \in \mathfrak{S}$, amely tartalmazás tekintetében maximális eleme $\mathfrak{S}$-nek. Ekkor $(\pi|H)_{H \in S}$ a π részábrázolásainak olyan rendszere, hogy minden $H \in S$ esetén $\pi|H$ ciklikus ábrázolása A-nak.

Megmutatjuk, hogy π unitér ekvivalens a $\widehat{\bigoplus_{H \in S}} (\pi|H)$ Hilbert-összeggel. Ehhez tekintsük a

$$W : \bigoplus_{H \in S} H \to \mathscr{H}; \quad (\zeta_H)_{H \in S} \mapsto \sum_{H \in S} \zeta_H$$

lineáris operátort, amely izometria, tehát egyértelműen kiterjeszthető egy

$$W : \widehat{\bigoplus_{H\in S}} H \to \mathscr{H}$$

izometriává. Természetesen $\mathrm{Im}(W) \subseteq \mathrm{Im}(W)$, ezért ha $\mathrm{Im}(W)$ sűrű lineáris altere volna $\mathscr{H}$-nak, akkor $\mathrm{Im}(W)$ zártsága miatt $\mathrm{Im}(W) = \mathscr{H}$ teljesülne, tehát W unitér operátor lenne.

Indirekt bizonyítjuk a W operátor uniteritását, tehát feltesszük, hogy $\mathrm{Im}(W)$ nem sűrű $\mathscr{H}$-ban. Ekkor vehetünk olyan $\zeta \in \mathscr{H}$ vektort, amely nem nulla, és ortogonális az $\mathrm{Im}(W)$ halmazra. Értelmezzük a $\mathscr{H}_{\pi,\zeta} := \overline{\{\pi(a)\zeta | a \in A\}}$ halmazt. Ha $a \in A$, akkor minden $H \in S$ és $\eta \in H$ esetén $(\pi(a)\zeta|\eta) = (\zeta|\pi(a^*)\eta) = 0$, mert $\pi(a^*)\eta \in \pi(a^*)\langle H\rangle \subseteq H$ és $\zeta \perp H$. Ez azt jelenti, hogy minden $a \in A$ esetén $\pi(a)\zeta \in \mathrm{Im}(W)^\perp$, ezért $\{\pi(a)\zeta | a \in A\} \subseteq \mathrm{Im}(W)^\perp$. Ebből az $\mathrm{Im}(W)^\perp$ zártsága miatt következik, hogy $\overline{\{\pi(a)\zeta | a \in A\}} \subseteq \mathrm{Im}(W)^\perp$, tehát $\mathscr{H}_{\pi,\zeta} \perp \mathrm{Im}(W)$. Ugyanakkor minden $H \in S$ halmazra $H \subseteq \mathrm{Im}(W)$, ezért $\mathscr{H}_{\pi,\zeta} \perp H$. Továbbá, $\mathscr{H}_{\pi,\zeta} \neq \{0\}$, különben minden $a \in A$ és $\eta \in \mathscr{H}$ esetén $(\zeta|\pi(a)\eta) = (\zeta|\pi(a^*)^*\eta) = (\pi(a^*)\zeta|\eta) = (0|\eta) = 0$ teljesülne, hiszen $\pi(a^*)\zeta \in \mathscr{H}_{\pi,\zeta}$, amiből a π nemelfajultsága alapján $\zeta = 0$ következne. Ebből adódik, hogy $\mathscr{H}_{\pi,\zeta} \in S$ lehetetlen, tehát az $S' := S \cup \{\mathscr{H}_{\pi,\zeta}\}$ halmaznak az S valódi része. Továbbá, $S' \in \mathfrak{S}$, hiszen a $\mathscr{H}_{\pi,\zeta} \subseteq \mathscr{H}$ olyan zárt π-invariáns lineáris altér, amelyre $\pi|\mathscr{H}_{\pi,\zeta}$ ciklikus ábrázolás, és minden $S \ni H$-ra $\mathscr{H}_{\pi,\zeta} \perp H$. Ez viszont ellentmond az S halmaz maximalitásának, ami azt igazolja, hogy W unitér operátor.

Végül megmutatjuk, hogy W összeköti a $\widehat{\bigoplus_{H\in S}}(\pi|H)$ és π ábrázolásokat. Legyen $a \in A$ rögzített, és $(\zeta_H)_{H\in S} \in \bigoplus_{H\in S} H$ tetszőleges. Ekkor a definíciók alapján

$$W \circ \quad \widehat{\bigoplus_{H\in S}}(\pi|H) \quad (a) \quad ((\zeta_H)_{H\in S}) = W\left((\pi(a)\zeta_H)_{H\in S}\right) = \sum_{H\in S}(\pi(a)\zeta_H) =$$

$$= \pi(a)\left(\sum_{H\in S}\zeta_H\right) = \pi(a)(W((\zeta_H)_{H\in S})) = (\pi(a)\circ W)((\zeta_H)_{H\in S}).$$

Ez azt jelenti, hogy minden $a \in A$ esetén

$$W \circ \quad \widehat{\bigoplus_{H\in S}}(\pi|H) \quad (a) = \pi(a) \circ W$$

a $\bigoplus_{H\in S} H$ halmazon, amely sűrű lineáris altere a $\widehat{\bigoplus_{H\in S}} H$ Hilbert-térnek, így az egyenlőségek folytatásának elve alapján ez az egyenlőség mindenütt teljesül. ■

20.4. Ábrázolható funkcionálok

A következő állítás megmutatja, hogy *-algebra ábrázolása egyszerű formulával sok olyan lineáris funkcionált generál a *-algebra felett, amely egészen speciális tulajdonságokkal rendelkezik.

20.4.1. Állítás. *Legyen π ábrázolása az A *-algebrának a $\mathscr{H}$ Hilbert-térben és $\zeta \in \mathscr{H}$. Ekkor a*

$$\Phi_{\pi,\zeta} : A \to \mathbb{C}; \quad a \mapsto (\pi(a)\zeta|\zeta)$$

függvény olyan lineáris funkcionál A felett, amelyre minden $a \in A$ esetén teljesülnek a következők:

$$\Phi_{\pi,\zeta}(a^*a) \in \mathbb{R}_+, \quad \Phi_{\pi,\zeta}(a^*) = \overline{\Phi_{\pi,\zeta}(a)}, \quad |\Phi_{\pi,\zeta}(a)|^2 \leq \|\zeta\|^2 \Phi_{\pi,\zeta}(a^*a).$$

Bizonyítás. Ha $a \in A$, akkor a π multiplikativitása, involúció-tartása, és a Cauchy–Schwarz-egyenlőtlenség alapján

$$\Phi_{\pi,\zeta}(a^*a) := (\pi(a^*a)\zeta|\zeta) = (\pi(a)^*(\pi(a)\zeta)|\zeta) = (\pi(a)\zeta|\pi(a)\zeta) = \|\pi(a)\zeta\|^2 \in \mathbb{R}_+,$$

$$\Phi_{\pi,\zeta}(a^*) := (\pi(a^*)\zeta|\zeta) = (\pi(a)^*\zeta|\zeta) = (\zeta|\pi(a)\zeta) = \overline{(\pi(a)\zeta|\zeta)} =: \overline{\Phi_{\pi,\zeta}(a)},$$

$$|\Phi_{\pi,\zeta}(a)|^2 := |(\pi(a)\zeta|\zeta)|^2 \leq \|\pi(a)\zeta\|^2\|\zeta\|^2 = \Phi_{\pi,\zeta}(a^*a)\|\zeta\|^2. \ \blacksquare$$

Tehát, ha π ábrázolása az A *-algebrának a $\mathscr{H}$ Hilbert-térben, akkor minden $\zeta \in \mathscr{H}$ esetén az előző állításban értelmezett $\Phi_{\pi,\zeta}$ leképezés olyan önadjungált pozitív funkcionál A felett, amelyhez létezik $C \in \mathbb{R}_+$ úgy, hogy minden $a \in A$ esetén $|\Phi_{\pi,\zeta}(a)|^2 \leq C\Phi_{\pi,\zeta}(a^*a)$. Fontosságuk miatt, az ilyen tulajdonságú lineáris funkcionáloknak nevet adunk.

20.4.2. Definíció. *Ha A *-algebra, akkor egy $f : A \to \mathbb{C}$ lineáris funkcionált* **ábrázolhatónak** *nevezünk, ha létezik A-nak olyan π ábrázolása, és a π ábrázolás terének létezik olyan ζ eleme, hogy $f = \Phi_{\pi,\zeta}$.*

Megjegyzés. Legyen A *-algebra, π ábrázolása A-nak a $\mathscr{H}$ Hilbert-térben, és $\zeta \in \mathscr{H}$. Jelölje ζ_0 a ζ vektor ortogonális vetületét a $\mathscr{H}_{\pi,\zeta} := \overline{\{\pi(a)\zeta|a \in A\}}$ zárt π-invariáns lineáris altérre. Láttuk, hogy ζ_0 ciklikus vektora a $\pi|\mathscr{H}_{\pi,\zeta}$ részábrázolásnak; most megmutatjuk, hogy

$$\Phi_{\pi,\zeta} = \Phi_{\pi|\mathscr{H}_{\pi,\zeta},\zeta_0}.$$

Valóban, ha $a \in A$, akkor

$$\Phi_{\pi,\zeta}(a) := (\pi(a)\zeta|\zeta) = (\pi(a)\zeta_0|\zeta_0) + (\pi(a)(\zeta - \zeta_0)|\zeta_0) + (\pi(a)\zeta|\zeta - \zeta_0) =$$

$$= (\pi(a)\zeta_0|\zeta_0) = ((\pi|\mathscr{H}_{\pi,\zeta})(a)\zeta_0|\zeta_0) =: \Phi_{\pi|\mathscr{H}_{\pi,\zeta},\zeta_0}(a),$$

ugyanis $(\pi(a)(\zeta-\zeta_0)|\zeta_0)=(\zeta-\zeta_0|\pi(a^*)\zeta_0)=0$, mert $\pi(a^*)\zeta_0 \in \mathscr{H}_{\pi,\zeta}$ és $\zeta-\zeta_0 \in \mathscr{H}_{\pi,\zeta}^{\perp}$, továbbá $(\pi(a)\zeta|\zeta-\zeta_0)=0$, mert $\pi(a)\zeta \in \mathscr{H}_{\pi,\zeta}$ és $\zeta-\zeta_0 \in \mathscr{H}_{\pi,\zeta}^{\perp}$.

Ez azt jelenti, hogy ha f az A *-algebrának ábrázolható funkcionálja, akkor létezik A-nak olyan π *ciklikus* ábrázolása, és a π ábrázolás terének létezik olyan ζ eleme, amely ciklikus vektora π-nek, és $f=\Phi_{\pi,\zeta}$. Ez a tény úgy is kifejezhető, hogy *-algebra minden ábrázolható funkcionálja *ciklikusan ábrázolható*.

20.4.3. Állítás. **-algebra feletti ábrázolható funkcionál pozitív számszorosa, valamint ábrázolható funkcionálok összege is ábrázolható.*

Bizonyítás. Ha π ábrázolása az A *-algebrának a $\mathscr{H}$ Hilbert-térben, és $\zeta \in \mathscr{H}$, akkor $\lambda \in \mathbb{R}_+$ esetén, a definíció szerint $\lambda.\Phi_{\pi,\zeta}=\Phi_{\pi,\sqrt{\lambda}.\zeta}$ nyilvánvalóan teljesül.

Legyen π_1 (illetve π_2) ábrázolása az A *-algebrának a $\mathscr{H}_1$ (illetve $\mathscr{H}_2$) Hilbert-térben, továbbá legyen $\zeta_1 \in \mathscr{H}_1$ (illetve $\zeta_2 \in \mathscr{H}_2$). Ekkor $\pi_1 \oplus \pi_2$ olyan ábrázolása A-nak a $\mathscr{H}_1 \oplus \mathscr{H}_2$ Hilbert-térben, hogy a $(\zeta_1,\zeta_2) \in \mathscr{H}_1 \oplus \mathscr{H}_2$ vektorra teljesül az, hogy minden $a \in A$ esetén

$$\Phi_{\pi_1\oplus\pi_2,(\zeta_1,\zeta_2)}(a) := ((\pi_1\oplus\pi_2)(a)(\zeta_1,\zeta_2)|(\zeta_1,\zeta_2)) = ((\pi_1(a)\zeta_1,\pi_2(a)\zeta_2)|(\zeta_1,\zeta_2)) =$$

$$= (\pi_1(a)\zeta_1|\zeta_1)+(\pi_2(a)\zeta_2|\zeta_2) =: \Phi_{\pi_1,\zeta_1}(a)+\Phi_{\pi_2,\zeta_2}(a),$$

ami azt jelenti, hogy $\Phi_{\pi_1,\zeta_1}+\Phi_{\pi_2,\zeta_2}=\Phi_{\pi_1\oplus\pi_2,(\zeta_1,\zeta_2)}$, tehát $\Phi_{\pi_1,\zeta_1}+\Phi_{\pi_2,\zeta_2}$ ábrázolható funkcionál. ■

Az előző állításnak az a geometriai tartalma, hogy egy *-algebra feletti ábrázolható funkcionálok halmaza 0 *csúcspontú konvex kúp* a szóbanforgó *-algebra algebrai duálisában.

Megjegyezzük, hogy ha A *-algebra és $f,g : A \to \mathbb{C}$ olyan ábrázolható funkcionálok, hogy $f-g$ pozitív funkcionál A felett, akkor $f-g$ is ábrázolható funkcionál. Ezt a kevésbé triviális tényt 21.5.1.-ben fogjuk igazolni.

20.5. Pozitív funkcionál által meghatározott skalárszorzás

20.5.1. Állítás. *Ha A *-algebra és f pozitív funkcionál A felett, akkor minden $a,b \in A$ esetén*

$$f(b^*a)=\overline{f(a^*b)},$$

valamint

$$|f(b^*a)|^2 \leq f(a^*a)f(b^*b)$$

teljesül.

Bizonyítás. Legyenek $a, b \in A$. Minden $z \in \mathbb{C}$ esetén, az f pozitivitása miatt

$$\mathbb{R}_+ \ni f((a+zb)^*(a+zb)) = f(a^*a + \overline{z}b^*a + za^*b + |z|^2 b^*b) =$$
$$= f(a^*a) + \overline{z}f(b^*a) + zf(a^*b) + |z|^2 f(b^*b).$$

Ebből a $z := \mathbf{i}$ választással következik, hogy

$$\mathbf{i}(-f(b^*a) + f(a^*b)) = f((a+\mathbf{i}b)^*(a+\mathbf{i}b)) - f(a^*a) - f(b^*b) \in \mathbb{R},$$

és a $z := 1$ választással kapjuk, hogy

$$f(b^*a) + f(a^*b) = f((a+b)^*(a+b)) - f(a^*a) - f(b^*b) \in \mathbb{R}.$$

Ezért $0 = \Im(\mathbf{i}(-f(b^*a) + f(a^*b))) = \Re(-f(b^*a) + f(a^*b))$ és $0 = \Im(f(b^*a) + f(a^*b))$, amiből következik, hogy $\Re(f(b^*a)) = \Re(f(a^*b))$ és $\Im(f(b^*a)) = -\Im(f(a^*b))$, vagyis $f(b^*a) = \overline{f(a^*b)}$.

Tegyük fel, hogy $f(b^*a) \neq 0$. Minden $t \in \mathbb{R}$ esetén a $z := t(f(b^*a)/|f(b^*a)|)$ választással kapjuk, hogy

$$f(a^*a) + \left(t\frac{\overline{f(b^*a)}}{|f(b^*a)|}\right) f(b^*a) + \quad t\frac{f(b^*a)}{|f(b^*a)|} \quad f(a^*b) + t^2 f(b^*b) \in \mathbb{R}_+.$$

Kihasználva az $f(b^*a) = \overline{f(a^*b)}$ egyenlőséget, ebből kapjuk, hogy minden $t \in \mathbb{R}$ esetén

$$f(a^*a) + 2t|f(b^*a)| + t^2 f(b^*b) \in \mathbb{R}_+,$$

vagyis az

$$\mathbb{R} \to \mathbb{R}; \quad t \mapsto f(a^*a) + 2t|f(b^*a)| + t^2 f(b^*b)$$

másodfokú valós polinomiális függvény *állandó előjelű*, tehát a diszkriminánsa nem lehet szigorúan pozitív, így

$$4|f(b^*a)|^2 - 4f(a^*a)f(b^*b) \leq 0,$$

ami azt jelenti, hogy $|f(b^*a)|^2 \leq f(a^*a)f(b^*b)$. ■

20.5.2. Következmény. *Egységelemes *-algebra felett minden pozitív funkcionál önadjungált.*

Bizonyítás. Az előző állításban szereplő első összefüggésben az $a := \mathbf{1}$ választással kapjuk, hogy az f pozitív funkcionálra és minden $A \ni b$-re $f(b^*) = \overline{f(b)}$ teljesül, ezért $f^* = f$. ■

20.5.3. Következmény. *Ha A *-algebra és f pozitív funkcionál A felett, akkor a*

$$(\cdot|\cdot)_f : A \times A \to \mathbb{C}; \quad (a,b) \mapsto f(b^*a)$$

leképezés konjugált bilineáris, hermitikus és pozitív, továbbá a

$$\|\cdot\|_f : A \to \mathbb{R}_+; \quad a \mapsto \sqrt{f(a^*a)}$$

leképezés olyan félnorma A felett, amelyre minden $a \in A$ esetén $\|a\|_f = \sqrt{(a|a)_f}$.

Bizonyítás. Nyilvánvaló, hogy minden $a, b \in A$ esetén az $(\cdot|b)_f : A \to \mathbb{C}$ leképezés lineáris, és az $(a|\cdot) : A \to \mathbb{C}$ leképezés konjugált lineáris. Továbbá, minden $a, b \in A$ esetén $\overline{(a|b)_f} := \overline{f(b^*a)} = f(a^*b) =: (b|a)_f$, tehát $(\cdot|\cdot)_f$ hermitikus. Az f pozitivitása miatt minden $A \ni a$-ra $(a|a)_f := f(a^*a) \in \mathbb{R}_+$, vagyis $(\cdot|\cdot)_f$ pozitív.

A $\|\cdot\|_f$ leképezésre teljesül az, hogy minden $z \in \mathbb{C}$ és $a \in A$ esetén

$$\|z.a\|_f := \sqrt{f((z.a)^*(z.a))} = \sqrt{f(|z|^2 a^*a)} = |z| \sqrt{f(a^*a)} =: |z|\|a\|_f,$$

továbbá minden $a, b \in A$ esetén

$$\|a+b\|_f^2 := f((a+b)^*(a+b)) = f(a^*a) + f(b^*a) + f(a^*b) + f(b^*b) =$$

$$= \|a\|_f^2 + 2\Re(f(b^*a)) + \|b\|_f^2 \leq \|a\|_f^2 + 2|f(b^*a)| + \|b\|_f^2 \leq$$

$$\leq \|a\|_f^2 + 2\sqrt{f(a^*a)f(b^*b)} + \|b\|_f^2 \leq \|a\|_f^2 + 2\|a\|_f\|b\|_f + \|b\|_f^2 = (\|a\|_f + \|b\|_f)^2,$$

tehát $\|\cdot\|_f$-re a háromszög-egyenlőtlenség is teljesül. ■

Megjegyezzük, hogy az E komplex vektortér feletti p félnormát *Hilbert-félnormának* nevezzük E felett, ha létezik olyan $(\cdot|\cdot) : E \times E \to \mathbb{C}$ konjugált bilineáris, hermitikus, pozitív leképezés, amelyre minden $x \in E$ esetén $p(x) = \sqrt{(x|x)}$. Tehát az előzőek alapján mondható, hogy ha A *-algebra, és $f : A \to \mathbb{C}$ pozitív funkcionál, akkor $\|\cdot\|_f$ Hilbert-félnorma A felett.

20.6. Reguláris pozitív funkcionál normája

Látható, hogy ha π ábrázolása az A *-algebrának a $\mathscr{H}$ Hilbert-térben, és $\zeta \in \mathscr{H}$, akkor a $\Phi_{\pi,\zeta}$ leképezés olyan pozitív funkcionál A felett, amely folytonos a $\|\cdot\|_{\Phi_{\pi,\zeta}}$ Hilbert-félnorma szerint, hiszen minden $a \in A$ esetén

$$|\Phi_{\pi,\zeta}(a)| \leq \|\zeta\|\|a\|_{\Phi_{\pi,\zeta}}.$$

A 21.5. pontban majd igazoljuk, hogy ha A Banach-*-algebra, akkor egy $f : A \to \mathbb{C}$ pozitív funkcionál *pontosan akkor* ábrázolható, ha folytonos a $\|\cdot\|_f$ Hilbert-félnorma szerint.

20.6.1. Definíció. *Ha A *-algebra, és f olyan pozitív funkcionál A felett, amely a $\|\cdot\|_f$ Hilbert-félnorma szerint folytonos (az ilyen funkcionálokat* **regulárisaknak** *is nevezzük (, akkor*

$$\|f\|_* := \inf\{C \in \mathbb{R}_+ | (\forall a \in A) : |f(a)|^2 \leq C f(a^*a)\}.$$

20.6.2. Állítás. *Legyen A *-algebra. Ha f olyan pozitív funkcionál A felett, amely a $\|\cdot\|_f$ Hilbert-félnorma szerint folytonos, akkor minden $a \in A$ esetén*

$$|f(a)|^2 \leq \|f\|_* f(a^*a)$$

teljesül, továbbá ekkor minden $\lambda \in \mathbb{R}_+$ számra az $\lambda.f$ funkcionál is folytonos a $\|\cdot\|_{\lambda.f}$ Hilbert-félnorma szerint, és

$$\|\lambda.f\|_* = \lambda\|f\|_*.$$

Ha f olyan pozitív funkcionál A felett, amely a $\|\cdot\|_f$ Hilbert-félnorma szerint folytonos, és g olyan pozitív funkcionál A felett, amely a $\|\cdot\|_g$ Hilbert-félnorma szerint folytonos, akkor az $f+g$ funkcionál folytonos a $\|\cdot\|_{f+g}$ Hilbert-félnorma szerint, és

$$\|f+g\|_* \leq \|f\|_* + \|g\|_*.$$

Bizonyítás. Legyen f olyan pozitív funkcionál A felett, amely a $\|\cdot\|_f$ Hilbert-félnorma szerint folytonos. Nyilvánvaló, hogy a $\{C \in \mathbb{R}_+ | (\forall a \in A) : |f(a)|^2 \leq Cf(a^*a)\}$ halmaz zárt $\mathbb{R}$-ben, ezért az infimuma eleme neki, így minden $a \in A$ esetén $|f(a)|^2 \leq \|f\|_* f(a^*a)$. Ebből az is látható, hogy ha f olyan pozitív funkcionál A felett, amely a $\|\cdot\|_f$ Hilbert-félnorma szerint folytonos, akkor $\|f\|_* = 0$ ekvivalens azzal, hogy $f = 0$.

Legyen f olyan pozitív funkcionál A felett, amely a $\|\cdot\|_f$ Hilbert-félnorma szerint folytonos, és $\lambda \in \mathbb{R}_+$. Ha $\lambda = 0$, akkor $\|\lambda.f\|_* = 0 = \lambda\|f\|_*$, tehát feltehető, hogy $\lambda > 0$. Ha $a \in A$, akkor

$$|(\lambda.f)(a)|^2 = \lambda^2|f(a)|^2 \leq \lambda^2\|f\|_* f(a^*a) = (\lambda\|f\|_*)(\lambda.f)(a^*a),$$

tehát az $\lambda.f$ funkcionál is folytonos a $\|\cdot\|_{\lambda.f}$ Hilbert-félnorma szerint, és $\|\lambda.f\|_* \leq \lambda\|f\|_*$. Ezt az egyenlőtlenséget felírva f helyett $\lambda.f$-re és λ helyett λ^{-1}-re kapjuk, hogy $\|f\|_* = \|\lambda^{-1}.(\lambda.f)\|_* \leq \lambda^{-1}\|\lambda.f\|_*$, tehát $\lambda.\|f\|_* \leq \|\lambda.f\|_*$ is igaz.

Tegyük fel, hogy f olyan pozitív funkcionál A felett, amely a $\|\cdot\|_f$ Hilbert-félnorma szerint folytonos, és g olyan pozitív funkcionál A felett, amely a $\|\cdot\|_g$ Hilbert-félnorma szerint folytonos. Ha $\|f\|_* + \|g\|_* = 0$, akkor az előzőek alapján $f = 0 = g$, így $f+g$ folytonos a $\|\cdot\|_{f+g}$ Hilbert-félnorma szerint, és $\|f+g\|_* = 0 = \|f\|_* + \|g\|_*$. Ezért feltehető, hogy $\|f\|_* + \|g\|_* > 0$. Ha $a \in A$, akkor minden $z \in \mathbb{C}$ esetén

$$0 \leq \left(|z|\sqrt{\|f\|_*} - \sqrt{f(a^*a)}\right)^2 + \left(|z|\sqrt{\|g\|_*} - \sqrt{g(a^*a)}\right)^2 =$$

$$= |z|^2(\|f\|_* + \|g\|_*) + (f+g)(a^*a) - 2|z|(\sqrt{\|f\|_* f(a^*a)} + \sqrt{\|g\|_* g(a^*a)}) \leq$$

$$\leq |z|^2(\|f\|_* + \|g\|_*) + (f+g)(a^*a) - 2|z|(|f(a)| + |g(a)|) \leq$$

$$\leq |z|^2(\|f\|_* + \|g\|_*) + (f+g)(a^*a) - 2\Re(\overline{z}(f(a) + g(a))).$$

Tehát, ha $a \in A$, akkor ebből a

$$z := \frac{f(a) + g(a)}{\|f\|_* + \|g\|_*}$$

választással kapjuk, hogy

$$0 \leq \frac{\|f\|_* + \|g\|_*}{(\|f\|_* + \|g\|_*)^2}|(f+g)(a)|^2 + (f+g)(a^*a) - \frac{2|(f+g)(a)|^2}{\|f\|_* + \|g\|_*},$$

amiből átrendezéssel kapjuk, hogy

$$|(f+g)(a)|^2 \leq (\|f\|_* + \|g\|_*)(f+g)(a^*a).$$

Ez azt jelenti, hogy az $f+g$ funkcionál folytonos a $\|\cdot\|_{f+g}$ Hilbert-félnorma szerint, és láthatóan $\|f+g\|_* \leq \|f\|_* + \|g\|_*$. ■

20.6.3. Jelölés. *Legyen A *-algebra.* K(A) *jelöli azon $f : A \to \mathbb{C}$ pozitív funkcionálok halmazát, amelyekre teljesül az, hogy f folytonos a $\|\cdot\|_f$ Hilbert-félnorma szerint és $\|f\|_* \leq 1$. Továbbá* K$_r(A)$ *jelöli azon $f : A \to \mathbb{C}$ ábrázolható funkcionálok halmazát, amelyekre $\|f\|_* \leq 1$.*

Nyilvánvaló, hogy ha A *-algebra, akkor K(A) megegyezik azon $f : A \to \mathbb{C}$ pozitív funkcionálok halmazával, amelyekre minden $a \in A$ esetén $|f(a)|^2 \leq f(a^*a)$ teljesül, továbbá K$_r(A) \subseteq$ K(A).

20.6.4. Következmény. *Ha A *-algebra, akkor* K(A) *és* K$_r(A)$ *konvex részhalmazok az A algebrai duálisában.*

Bizonyítás. Ha $f, g \in$ K(A) és $\lambda \in [0,1]$, akkor az előző állítás alapján

$$\|(1-\lambda).f + \lambda.g\|_* \leq \|(1-\lambda).f\|_* + \|\lambda.g\|_* = (1-\lambda)\|f\|_* + \lambda\|g\|_* \leq 1,$$

tehát $(1-\lambda).f + \lambda.g \in$ K(A), így K(A) konvex. Továbbá, a definíció szerint, K$_r(A)$ egyenlő a K(A) konvex halmaz és az A feletti ábrázolható funkcionálok konvex halmazának a metszetével, így K$_r(A)$ is konvex. ■

20.6.5. Állítás. *Legyen π ábrázolása az A *-algebrának a $\mathscr{H}$ Hilbert-térben és $\zeta \in \mathscr{H}$. Ekkor $\|\Phi_{\pi,\zeta}\|_* \leq \|\zeta\|^2$, és ha a ζ vektor π-ciklikus, akkor $\|\Phi_{\pi,\zeta}\|_* = \|\zeta\|^2$.*

Bizonyítás. Láttuk, hogy minden $a \in A$ esetén $|\Phi_{\pi,\zeta}(a)|^2 \leq \|\zeta\|^2\Phi_{\pi,\zeta}(a^*a)$, ezért $\|\Phi_{\pi,\zeta}\|_* \leq \|\zeta\|^2$. Tegyük fel, hogy ζ ciklikus vektora a π ábrázolásnak, és nyilvánvalóan $\zeta \neq 0$ is feltehető. Legyen $\varepsilon \in]0, \|\zeta\|[$ tetszőleges valós szám. A $\{\pi(a)\zeta | a \in A\}$ halmaz sűrű $\mathscr{H}$-ban, ezért vehetünk olyan $a \in A$ elemet, amelyre $\|\pi(a)\zeta - \zeta\| < \varepsilon$. Ekkor a Cauchy–Schwarz-egyenlőtlenség alapján

$$|\Phi_{\pi,\zeta}(a) - \|\zeta\|^2| = |(\pi(a)\zeta - \zeta|\zeta)| \leq \|\pi(a)\zeta - \zeta\|\|\zeta\| < \varepsilon\|\zeta\|,$$

amiből következik, hogy $0 < \|\zeta\|(\|\zeta\| - \varepsilon) < |\Phi_{\pi,\zeta}(a)|$. Ugyanakkor $\Phi_{\pi,\zeta}(a^*a) = \|\pi(a)\zeta\|^2 < (\|\zeta\| + \varepsilon)^2$, ezért

$$\|\zeta\|^2(\|\zeta\| - \varepsilon)^2 < |\Phi_{\pi,\zeta}(a)|^2 \leq \|\Phi_{\pi,\zeta}\|_* \Phi_{\pi,\zeta}(a^*a) < \|\Phi_{\pi,\zeta}\|_*(\|\zeta\| + \varepsilon)^2,$$

következésképpen fennáll a

$$\frac{\|\zeta\|^2(\|\zeta\| - \varepsilon)^2}{(\|\zeta\| + \varepsilon)^2} < \|\Phi_{\pi,\zeta}\|_*$$

egyenlőtlenség. Ebből ε-nal 0-hoz tartva kapjuk, hogy $\|\zeta\|^2 \leq \|\Phi_{\pi,\zeta}\|_*$. ■

21. fejezet

A GNS-konstrukció és alkalmazásai

21.1. Pozitív funkcionálok ábrázolhatóságának jellemzése

Ebben a pontban jellemzést adunk a *-algebra feletti pozitív funkcionálok ábrázolhatóságára. Először a C^*-félnorma szerint folytonos pozitív funkcionálok egy speciális tulajdonságát mutatjuk meg.

21.1.1. Lemma. *Legyen f pozitív funkcionál az A *-algebra felett. Ha p olyan szubmultiplikatív félnorma A felett, amely szerint f folytonos, akkor minden $A \ni a, b$-re*

$$f(b^*a^*ab) \leq p(a^*a)f(b^*b).$$

Bizonyítás. Először megmutatjuk, hogy ha f pozitív funkcionál az A *-algebra felett, akkor minden $a, b \in A$ elemre és $n \in \mathbb{N}$ számra

$$f(b^*a^*ab)^{2^n} \leq f(b^*(a^*a)^{2^n}b) \cdot f(b^*b)^{2^n-1}.$$

Ez $n = 0$ esetén nyilvánvaló; tegyük fel, hogy az $n \in \mathbb{N}$ számra igaz. Ekkor a $(\cdot|\cdot)_f$ skalárszorzás értelmezése alapján

$$f(b^*(a^*a)^{2^n}b)^2 = |((a^*a)^{2^n}b|b)_f|^2 \leq \|(a^*a)^{2^n}b\|_f^2\|b\|_f^2 = f(b^*(a^*a)^{2^{n+1}}b) \cdot f(b^*b),$$

ezért az indukciós hipotézis szerint

$$f(b^*a^*ab)^{2^{n+1}} = (f(b^*a^*ab)^{2^n})^2 \leq f(b^*(a^*a)^{2^n}b)^2 f(b^*b)^{2^{n+1}-2} \leq$$

$$\leq f(b^*(a^*a)^{2^{n+1}}b)f(b^*b)^{2^{n+1}-1},$$

vagyis az állítás $n+1$-re is igaz.

Legyen most p olyan szubmultiplikatív félnorma A felett, amely szerint f folytonos, és vegyünk olyan $C \in \mathbb{R}_+$ számot, hogy minden $x \in A$ esetén $|f(x)| \leq Cp(x)$. Ekkor az előzőek szerint minden $\mathbb{N}^+ \ni n$-re

$$f(b^*a^*ab) \leq f(b^*(a^*a)^{2^n}b)^{1/2^n} f(b^*b)^{1-(1/2^n)} \leq C^{1/2^n} p(b^*(a^*a)^{2^n}b)^{1/2^n} f(b^*b)^{1-(1/2^n)} \leq$$

$$\leq C^{1/2^n} \left(p(b^*)p(a^*a)^{2^n}p(b) \right)^{1/2^n} f(b^*b)^{1-(1/2^n)} = (Cp(b^*)p(b))^{1/2^n} p(a^*a)f(b^*b)^{1-(1/2^n)}.$$

Ebből $n \to \infty$ határátmenettel kapjuk, hogy

$$f(b^*a^*ab) \leq p(a^*a)f(b^*b),$$

hiszen $\lim\limits_{n\to\infty} (Cp(b^*)p(b))^{1/2^n} \leq 1$. ■

21.1.2. Tétel. (A pozitív funkcionálok ábrázolhatóságának kritériuma) *Ha f pozitív funkcionál az A *-algebra felett, akkor a következő állítások ekvivalensek.*

(i) *f ábrázolható, tehát létezik A-nak olyan π ábrázolása a $\mathscr{H}$ Hilbert-térben, és létezik olyan $\zeta \in \mathscr{H}$, hogy minden $a \in A$ esetén $f(a) = (\pi(a)\zeta|\zeta)$ teljesül, vagyis $f = \Phi_{\pi,\zeta}$.*

(ii) *f folytonos a $\|\cdot\|_f$ Hilbert-félnorma szerint és létezik A felett olyan C^*-félnorma, amely szerint f folytonos.*

(iii) *f folytonos a $\|\cdot\|_f$ Hilbert-félnorma szerint és létezik A felett olyan szubmultiplikatív félnorma, amely szerint f folytonos.*

(iv) *f ciklikusan ábrázolható, tehát létezik A-nak olyan π ábrázolása a $\mathscr{H}$ Hilbert-térben, és létezik olyan $\zeta \in \mathscr{H}$ vektor, amely π-ciklikus, és minden $a \in A$ esetén $f(a) = (\pi(a)\zeta|\zeta)$ teljesül, vagyis $f = \Phi_{\pi,\zeta}$.*

Bizonyítás. A (ii)⇒(iii) és (iv)⇒(i) implikációk logikai tételek. Az (i)⇒(ii) következtetés nyilvánvalóan helyes, mert ha π olyan ábrázolása A-nak a $\mathscr{H}$ Hilbert-térben és $\zeta \in \mathscr{H}$ olyan vektor, hogy minden $A \ni a$-ra $f(a) = (\pi(a)\zeta|\zeta)$ teljesül, akkor a Cauchy–Schwarz-egyenlőtlenség alapján minden $a \in A$ esetén

$$|f(a)|^2 = |(\pi(a)\zeta|\zeta)|^2 \leq \|\pi(a)\zeta\|^2\|\zeta\|^2 = (\pi(a)\zeta|\pi(a)\zeta)\|\zeta\|^2 =$$

$$= (\pi(a^*a)\zeta|\zeta)\|\zeta\|^2 = f(a^*a)\|\zeta\|^2 = \|\zeta\|^2\|a\|_f^2,$$

tehát f folytonos a $\|\cdot\|_f$ Hilbert-félnorma szerint; továbbá, a

$$p : A \to \mathbb{R}_+;\ a \mapsto \|\pi(a)\|$$

leképezés C^*-félnorma A felett, és minden $a \in A$ esetén a Cauchy–Schwarz-egyenlőtlenség alapján

$$|f(a)| = |(\pi(a)\zeta|\zeta)| \leq \|\zeta\|^2\|\pi(a)\| = \|\zeta\|^2 p(a),$$

így f folytonos p szerint.

Tehát csak a (iii)⇒(iv) következtetést kell igazolni. Tegyük fel, hogy f folytonos a $\|\cdot\|_f$ félnorma szerint, és legyen p olyan szubmultiplikatív félnorma A felett, amely szerint f szintén folytonos. Minden $a \in A$ elemre legyen

$$L_a : A \to A; \quad b \mapsto ab.$$

Ha $a \in A$, akkor az előző állítás alkalmazásával kapjuk, hogy minden $A \ni b$-re

$$\|L_a(b)\|_f^2 = \|ab\|_f^2 = f(b^*a^*ab) \leq p(a^*a)f(b^*b) = p(a^*a)\|b\|_f^2,$$

tehát $\|L_a(b)\|_f \leq \sqrt{p(a^*a)}\|b\|_f$. Ez azt jelenti, hogy $a \in A$ esetén az $L_a : A \to A$ operátor folytonos a $\|\cdot\|_f$ Hilbert-félnorma szerint, így létezik egyetlen olyan $\pi_0(a) : A/Ker\|\cdot\|_f \to A/Ker\|\cdot\|_f$ lineáris operátor, hogy minden $A \ni b$-re $\pi_0(a)(\dot{b}) = (\dot{ab})$, ahol $b \in A$ esetén $\dot{b}$ jelöli a b elem ekvivalencia-osztályát $A/Ker\|\cdot\|_f$-ben. Az is látható, hogy $a \in A$ esetén a $\pi_0(a)$ operátor folytonos a $\|\cdot\|_f^{\cdot}$ faktornorma szerint.

Az $A/Ker\|\cdot\|_f$ lineáris faktortér a $\|\cdot\|_f^{\cdot}$ faktornormával ellátva prehilbert-tér, és nyilvánvaló, hogy a $\pi_0 : A \to \mathscr{L}(A/Ker\|\cdot\|_f)$; $a \mapsto \pi_0(a)$ leképezés algebra-morfizmus. Jelölje $\mathscr{H}$ az $A/Ker\|\cdot\|_f$ prehilbert-tér teljes burkát, és minden $A \ni a$-ra $\pi(a)$ a $\pi_0(a)$ operátor egyetlen folytonos lineáris kiterjesztését $A/Ker\|\cdot\|_f$-ről $\mathscr{H}$-ra. Ekkor a $\pi : A \to \mathscr{L}(\mathscr{H})$; $a \mapsto \pi(a)$ leképezés algebra-morfizmus, és ez involúció-tartó is, tehát *ábrázolása* az A *-algebrának, mert $a, b, c \in A$ esetén

$$(\pi_0(a^*)\dot{b}|\dot{c})_f^{\cdot} = ((a^*b)^{\cdot}|\dot{c})_f^{\cdot} =$$

$$= (a^*b|c)_f = f(c^*(a^*b)) = f((ac)^*b) = (b|ac)_f = (\dot{b}|\pi_0(a)\dot{c})_f^{\cdot},$$

ami azt jelenti, hogy minden $A/Ker\|\cdot\|_f \ni \zeta, \eta$-ra és $A \ni a$-ra

$$(\pi(a^*)\zeta|\eta)_f^{\cdot} = (\zeta|\pi(a)\eta)_f^{\cdot} = (\pi(a)^*\zeta|\eta)_f^{\cdot},$$

így $\mathscr{H} = \overline{A/Ker\|\cdot\|_f}$ miatt $\pi(a^*) = \pi(a)^*$.

Az f funkcionál a $\|\cdot\|_f$ félnorma szerint folytonos, ezért létezik egyetlen olyan $\dot{f} : \mathscr{H} \to \mathbb{C}$ folytonos lineáris funkcionál, amelyre $a \in A$ esetén $\dot{f}(\dot{a}) = f(a)$. A Riesz-féle reprezentációs-tétel alapján egyértelműen létezik olyan $\zeta \in \mathscr{H}$, hogy minden $A \ni a$-ra

$$\dot{f}(\dot{a}) = (\dot{a}|\zeta) = f(a),$$

ahol $(\cdot|\cdot)$ jelöli a $\mathscr{H}$ Hilbert-tér skalárszorzását. (Megjegyezzük, hogy általában $\zeta \notin A/Ker\|\cdot\|_f$). Ha $a, b \in A$, akkor

$$(\dot{a}|\dot{b}) = (a|b)_f = f(b^*a) = ((b^*a)^{\cdot}|\zeta) = (\pi(b^*)\dot{a}|\zeta) = (\pi(b)^*\dot{a}|\zeta) = (\dot{a}|\pi(b)\zeta),$$

így $\mathscr{H} = \overline{A/Ker\|\cdot\|_f}$ miatt minden $A \ni b$-re $\pi(b)\zeta = \dot{b}$. Ezért

$$\{\pi(b)\zeta \mid b \in A\} = \{\dot{b} \mid b \in A\} = A/Ker\|\cdot\|_f,$$

tehát ζ π-ciklikus vektor. Továbbá, minden $A \ni a$-ra

$$(\pi(a)\zeta|\zeta) = (\dot{a}|\zeta) = \dot{f}(\dot{a}) = f(a),$$

így f ciklikusan ábrázolható. ■

21.1.3. Definíció. *Ha f olyan pozitív funkcionál az A *-algebra felett, amely folytonos a $\|\cdot\|_f$ félnorma szerint, és létezik olyan A feletti C^*-félnorma, amely szerint f folytonos, akkor az előző tételben előállított ciklikus ábrázolást π_f jelöli, és azt mondjuk, hogy ez az f által* **Gelfand-Najmark-Segal-konstrukcióval** (*vagy röviden* **GNS-konstrukcióval**) *meghatározott ábrázolás; továbbá a π_f ábrázolási terét $\mathscr{H}_f$ és a $\mathscr{H}_f$-ben kijelölt π_f-ciklikus vektort ζ_f jelöli.*

21.1.4. Következmény. *Ha A *-algebra, akkor $\mathrm{K}_r(A)$ megegyezik $\mathrm{K}(A)$ azon elemeinek halmazával, amelyek folytonosak valamilyen A feletti C^*-félnorma (illetve szubmultiplikatív félnorma) szerint.*

Bizonyítás. A $\mathrm{K}(A)$ és $\mathrm{K}_r(A)$ halmazok definíciója, valamint az ábrázolhatóság előző tételben megfogalmazott (ii) és (iii) kritériumai alapján nyilvánvaló. ■

21.1.5. Állítás. *Legyen f olyan pozitív funkcionál az A *-algebra felett, amely folytonos a $\|\cdot\|_f$ Hilbert-félnorma szerint. A következő állítások ekvivalensek.*

(i) *Létezik olyan A feletti szubmultiplikatív félnorma, amely szerint f folytonos.*

(ii) $(\forall a \in A)(\exists \lambda \in \mathbb{R}_+)(\forall b \in A): \ f(b^*a^*ab) \leq \lambda f(b^*b)$.

(iii) *Létezik A felett olyan C^*-félnorma, amely szerint f folytonos.*

Bizonyítás. (i)⇒(ii) Tudjuk, hogy ha p olyan szubmultiplikatív félnorma A felett, amely szerint az f pozitív funkcionál folytonos, akkor minden $a \in A$ esetén a $\lambda := p(a^*a) \in \mathbb{R}_+$ szám olyan, hogy minden $A \ni b$-re $f(b^*a^*ab) \leq \lambda f(b^*b)$. (Még akkor is, ha f nem folytonos $\|\cdot\|_f$ szerint.)

(ii)⇒(iii) Tegyük fel, hogy (ii) teljesül, és legyen $C \in \mathbb{R}_+$ olyan szám, amelyre $a \in A$ esetén $|f(a)|^2 \leq Cf(a^*a)$. Ilyen létezik, mert f folytonos a $\|\cdot\|_f$ félnorma szerint.

Ha $a \in A$, és $\lambda \in \mathbb{R}_+$ olyan, hogy minden $B \ni b$-re $f(b^*a^*ab) \leq \lambda f(b^*b)$, akkor minden $b \in A$ esetén, ha $\|b\|_f \leq 1$, akkor $f(b^*a^*ab) \leq \lambda$. Ezért minden $a \in A$ elemre

$$\sup_{b\in A,\ \|b\|_f\leq 1} \overline{f(b^*a^*ab)} < +\infty.$$

Értelmezzük most a

$$p : A \to \mathbb{R}_+; \quad a \mapsto \sup_{b\in A,\ \|b\|_f\leq 1} \sqrt{f(b^*a^*ab)}$$

leképezést. Meg fogjuk mutatni, hogy p olyan C^*-félnorma A felett, amely szerint f folytonos.

Ha $a \in A$ és $z \in \mathbb{C}$, akkor

$$p(z.a) = \sup_{b\in A,\ \|b\|_f\leq 1} \sqrt{f(b^*(z.a)^*(z.a)b)} = \sup_{b\in A,\ \|b\|_f\leq 1} \sqrt{f(|z|^2.b^*a^*ab)} = |z|p(a).$$

Ha $a_1, a_2 \in A$, akkor minden $b \in A$, $\|b\|_f \leq 1$ esetén

$$\sqrt{f(b^*(a_1+a_2)^*(a_1+a_2)b)} = \|(a_1+a_2)b\|_f \leq$$

$$\leq \|a_1b\|_f + \|a_2b\|_f = \sqrt{f(b^*a_1^*a_1b)} + \sqrt{f(b^*a_2^*a_2b)} \leq p(a_1) + p(a_2),$$

így $p(a_1+a_2) \leq p(a_1) + p(a_2)$, vagyis p félnorma A felett.

Megmutatjuk, hogy minden $a, b \in A$ esetén $f(b^*a^*ab) \leq p(a)^2 f(b^*b)$. Valóban, ha $b \in A$ olyan, hogy $f(b^*b) > 0$, akkor

$$f\left(\left(\frac{b}{\sqrt{f(b^*b)}}\right)^*\left(\frac{b}{\sqrt{f(b^*b)}}\right)\right) = 1,$$

ezért minden $A \ni a$-ra

$$\frac{f(b^*a^*ab)}{f(b^*b)} = f\left(\left(\frac{b}{\sqrt{f(b^*b)}}\right)^* a^*a \left(\frac{b}{\sqrt{f(b^*b)}}\right)\right) \leq p(a)^2,$$

így $f(b^*a^*ab) \leq p(a)^2 f(b^*b)$. Ha viszont $f(b^*b) = 0$, akkor az $a \in A$ elemhez véve olyan $\alpha \in \mathbb{R}_+$ számot, hogy minden $A \ni c$-re: $f(c^*a^*ac) \leq \alpha f(c^*c)$; a $c := b$ választással kapjuk, hogy $0 \leq f(b^*a^*ab) \leq \alpha f(b^*b) = 0$, így $f(b^*a^*ab) = 0 \leq p(a)^2 f(b^*b)$.

Legyenek most $a_1, a_2 \in A$, és legyen $b \in A$ olyan, hogy $\|b\|_f \leq 1$. Ekkor

$$f(b^*(a_1a_2)^*(a_1a_2)b) = f(b^*a_2^*(a_1^*a_1)a_2b) = f((a_2b)^*(a_1^*a_1)(a_2b)) \leq$$

$$\leq p(a_1)^2 f((a_2b)^*(a_2b)) = p(a_1)^2 f(b^*(a_2^*a_2)b) \leq p(a_1)^2 p(a_2)^2 f(b^*b) \leq p(a_1)^2 p(a_2)^2.$$

Ebből következik, hogy

$$p(a_1a_2) = \sup_{b\in A,\ \|b\|_f\leq 1} \sqrt{f(b^*(a_1a_2)^*(a_1a_2)b)} \leq p(a_1)p(a_2),$$

vagyis a p félnorma szubmultiplikatív.

Ha $a, b \in A$, akkor

$$f(b^*a^*ab) = |(a^*ab|b)_f| \leq \|b\|_f \|a^*ab\|_f =$$
$$= \|b\|_f \sqrt{f(b^*(a^*a)^*(a^*a)b)} \leq \|b\|_f^2 p(a^*a),$$

következésképpen

$$f(b^*a^*ab) \leq p(a^*a) f(b^*b).$$

Ebből kapjuk, hogy minden $A \ni a$-ra

$$p(a)^2 = \sup_{b \in A,\ \|b\|_f \leq 1} f(b^*a^*ab) \leq p(a^*a) \leq p(a^*)p(a).$$

Ebből következik, hogy minden $a \in A$ esetén $p(a^*) = p(a)$ és $p(a^*a) = p(a)^2$, tehát p az A felett C^*-félnorma.

Végül, ha $a \in A$, akkor az előzőek szerint $f(a^*aa^*a) \leq p(a^*a)f(a^*a) = p(a)^2 f(a^*a)$, így a C szám értelmezése alapján

$$f(a^*a) \leq \sqrt{C} \sqrt{f(a^*aa^*a)} \leq \sqrt{C} p(a) \sqrt{f(a^*a)},$$

ezért $\sqrt{f(a^*a)} \leq \sqrt{C} p(a)$. Tehát minden $A \ni a$-ra

$$|f(a)| \leq \sqrt{C} \sqrt{f(a^*a)} \leq C p(a),$$

vagyis f folytonos p szerint.

(iii)$\Rightarrow$(i) Triviális, mert minden C^*-félnorma szubmultiplikatív. ■

21.2. Ábrázolható funkcionálok Banach-*-algebra felett

21.2.1. Állítás. *Ha f pozitív funkcionál az A Banach-*-algebra felett, akkor minden $a, b \in A$ esetén*

$$f(b^*a^*ab) \leq \|a^*a\| f(b^*b).$$

Bizonyítás. Ha $x \in A_{sa}$ és $\|x\| \leq 1$, akkor $\widetilde{\mathbf{1}} - x \in A_+$, mert létezik olyan $(c_k)_{k \in \mathbb{N}}$ sorozat $\mathbb{R}$-ben, hogy a $\sum\limits_{k \in \mathbb{N}} c_k$ sor abszolút konvergens, és $\widetilde{\mathbf{1}} - x = \left(\sum\limits_{k=0}^{\infty} c_k x^k \right)^2$, valamint $\sum\limits_{k=0}^{\infty} c_k x^k \in A_{sa}$.

Tehát, ha $a \in A$ és $\|a^*a\| \leq 1$, akkor $\widetilde{\mathbf{1}} - a^*a \in A_+$, így minden $A \ni b$-re

$$b^*b - b^*a^*ab = b^*(\widetilde{\mathbf{1}} - a^*a)b \in A_+ \cap A = A_+,$$

tehát $f(b^*a^*ab) \leq f(b^*b)$. Ebből következik, hogy ha $a \in A$ és $a^*a \neq 0$, akkor

$$f\left(b^*\left(\frac{a}{\sqrt{\|a^*a\|}}\right)^*\left(\frac{a}{\sqrt{\|a^*a\|}}\right)b\right) \leq f(b^*b),$$

tehát $f(b^*a^*ab) \leq \|a^*a\| f(b^*b)$. Ha viszont $a \in A$ és $a^*a = 0$, akkor $f(b^*a^*ab) = 0 = \|a^*a\| f(b^*b)$. ■

A Ford-lemma (14.8.6.) alkalmazásával megmutatjuk, hogy az előző állításban felírt egyenlőtlenség élesíthető a következőképpen: ha f pozitív funkcionál az A Banach-*-algebra felett, akkor minden $a, b \in A$ esetén

$$f(b^*a^*ab) \leq \rho(a^*a) f(b^*b).$$

Valóban, először megjegyezzük, hogy minden $y \in A_{sa}$ elemhez, $\rho(y) < 1$ esetén van olyan $x \in A_{sa}$, hogy $x^2 - 2x + y = 0$. Ugyanis a Ford-lemma $\mathbb{K}$ feletti Banach-algebrákra érvényes, tehát ha az A komplex Banach-algebra alatt fekvő valós Banach-algebrára alkalmazzuk a Ford-lemmát, akkor azt kapjuk, hogy y-hoz létezik olyan $x \in \overline{\operatorname{span}\{y^n | n \in \mathbb{N}^+\}}$ elem, amely megoldása az $x^2 - 2x + y = 0$ egyenletnek, és itt $\operatorname{span}\{y^n | n \in \mathbb{N}^+\}$ az $\{y^n | n \in \mathbb{N}^+\}$ halmaz $\mathbb{R}$-lineáris burka, ezért $\overline{\operatorname{span}\{y^n | n \in \mathbb{N}^+\}} \subseteq A_{sa}$. Ezután megjegyezzük, hogy $y \in A_{sa}$ és $\rho(y) < 1$ esetén $\widetilde{\mathbf{1}} - y \in A_+$, hiszen az előzőek szerint van olyan $x \in A_{sa}$, hogy $x^2 - 2x + y = 0$, és ekkor $\widetilde{\mathbf{1}} - y = (\widetilde{\mathbf{1}} - x)^2$.
Végül, legyenek $a, b \in A$ rögzítettek, és $r \in \mathbb{R}^+$ tetszőleges olyan szám, hogy $\rho(a^*a) < r$. Ekkor $\rho\left(\frac{a^*a}{r}\right) < 1$, tehát $\widetilde{\mathbf{1}} - \frac{a^*a}{r} \in A_+$, így

$$b^*\left(\widetilde{\mathbf{1}} - \frac{a^*a}{r}\right)b \in A_+ \cap A = A_+,$$

vagyis $rb^*b - b^*a^*ab \in A_+$, ezért $f(b^*a^*ab) \leq rf(b^*b)$. Ebben az egyenlőtlenségben r-rel felülről $\rho(a^*a)$-hoz tartva kapjuk az $f(b^*a^*ab) \leq \rho(a^*a)f(b^*b)$ egyenlőtlenséget.

Azonban a továbbiakban nem fogjuk alkalmazni ezt az élesebb alakot, tehát a további állítások sem függenek a Ford-lemmától.

21.2.2. Következmény. *Az A Banach-*-algebra feletti f pozitív funkcionál pontosan akkor ábrázolható, ha f folytonos a $\|\cdot\|_f$ Hilbert-félnorma szerint. Speciálisan:* $\mathrm{K}_r(A) = \mathrm{K}(A)$ *is teljesül.*

Bizonyítás. Ha f olyan pozitív funkcionál az A Banach-*-algebra felett, amely a $\|\cdot\|_f$ félnorma szerint folytonos, akkor 21.2.1. és 21.1.5. alapján van olyan A feletti C^*-félnorma, amely szerint f folytonos, ezért a *-algebrák feletti pozitív funkcionálok ábrázolhatóságának kritériuma (21.1.2.) szerint f ábrázolható. ■

21.2.3. Következmény. *Ha f olyan pozitív funkcionál az A Banach-*-algebra felett, amely a $\|\cdot\|_f$ félnorma szerint folytonos, akkor f önadjungált.*

Bizonyítás. Az előző következmény szerint f ábrázolható, és az ábrázolható funkcionálok mind önadjungáltak. ■

21.2.4. Állítás. *Ha A Banach-*-algebra és f ábrázolható funkcionál A felett, akkor f folytonos és $\|f\| \leq \|f\|_*$. Ha A approximatív egységes Banach-*-algebra és f folytonos pozitív funkcionál A felett, akkor f ábrázolható. Ha A olyan Banach-*-algebra, amelynek létezik $(e_i)_{i\in I}$ approximatív egysége úgy, hogy minden $I \ni i$-re $\|e_i^* e_i\| \leq 1$, akkor minden A feletti f folytonos pozitív funkcionálra $\|f\| = \|f\|_*$.*

Bizonyítás. Legyen A Banach-*-algebra és f ábrázolható funkcionál A felett. Legyen π olyan ábrázolása A-nak, és ζ olyan π-ciklikus vektor a π ábrázolás terében, hogy $f = \Phi_{\pi,\zeta}$. Ekkor minden $a \in A$ esetén

$$|f(a)| = |\Phi_{\pi,\zeta}(a)| = |(\pi(a)\zeta|\zeta)| \leq \|\pi(a)\|\|\zeta\|^2 \leq \|\zeta\|^2\|a\|,$$

mert π norma-nem-növelő, tehát f folytonos, és láthatóan

$$\|f\| \leq \|\zeta\|^2 = \|\Phi_{\pi,\zeta}\|_* = \|f\|_*.$$

Legyen A approximatív egységes Banach-*-algebra, f folytonos pozitív funkcionál A felett, és $(e_i)_{i\in I}$ approximatív egység A-ban. Ha $a \in A$, akkor $\lim_{i,I}(a^* e_i) = a^*$ teljesül az A normája szerint, így az involúció folytonossága miatt $\lim_{i,I}(e_i^* a) = a$ is igaz, vagyis

$$|f(a)|^2 = \lim_{i,I} |f(e_i^* a)|^2 \leq \sup_{i\in I}(f(a^* a) f(e_i^* e_i)) = \left(\sup_{i\in I} f(e_i^* e_i)\right) f(a^* a),$$

és az f folytonossága miatt $\sup_{i\in I} f(e_i^* e_i) < +\infty$, mert az $(e_i^* e_i)_{i\in I}$ rendszer normában korlátos. Ez azt jelenti, hogy f folytonos a $\|\cdot\|_f$ Hilbert-félnorma szerint, így ábrázolható, és láthatóan

$$\|f\|_* \leq \sup_{i\in I} f(e_i^* e_i) \leq \|f\| \sup_{i\in I} \|e_i^* e_i\|.$$

Világos, hogy ha az $(e_i)_{i\in I}$ approximatív egység olyan, hogy minden $i \in I$ esetén $\|e_i^* e_i\| \leq 1$, akkor $\|f\|_* \leq \|f\|$, következésképpen $\|f\| = \|f\|_*$. ■

Tehát approximatív egységes Banach-*-algebra felett a pozitív funkcionálok esetében az ábrázolhatóság és a folytonosság ugyanazt jelentik. Azonban a 0-szorzású Banach-*-algebrák példája mutatja, hogy léteznek olyan Banach-*-algebrák, amelyek felett nem minden folytonos pozitív funkcionál ábrázolható.

21.2.5. Következmény. *Ha A Banach-*-algebra, akkor $\mathrm{K}_r(A) = \mathrm{K}(A) \subseteq A'$ olyan konvex, $\sigma(A', A)$-kompakt halmaz, amely részhalmaza a funkcionálnorma szerinti zárt egységgömbnek.*

Bizonyítás. Korábban igazoltuk, hogy ha A tetszőleges *-algebra, akkor $\mathrm{K}(A)$ konvex halmaz (20.6.4.). Az imént láttuk, hogy ha A Banach-*-algebra, akkor minden A feletti ábrázolható f pozitív funkcionál folytonos és $\|f\| \leq \|f\|_*$. Továbbá, az A Banach-*-algebra esetében $\mathrm{K}(A)$ elemei ábrázolható funkcionálok, így $\mathrm{K}(A)$ részhalmaza A'-ben a funkcionálnorma szerinti zárt egységgömbnek.
A Banach–Alaoglu-tétel szerint A'-ben a funkcionálnorma szerinti zárt egységgömb $\sigma(A', A)$-kompakt, ezért a $\mathrm{K}(A)$ halmaz $\sigma(A', A)$-kompaktsága ekvivalens a $\sigma(A', A)$-zártságával. Ha $(f_i)_{i \in I}$ olyan általánosított sorozat, amely $\mathrm{K}(A)$-ban halad, és a $\sigma(A', A)$ topológia szerint konvergál az $f \in A'$ funkcionálhoz, akkor f pozitív funkcionál, mert minden $a \in A$ esetén $f(a^*a) = \lim\limits_{i,I} f_i(a^*a) \in \mathbb{R}_+$, továbbá f folytonos a $\|\cdot\|_f$ félnorma szerint és $\|f\|_* \leq 1$, hiszen minden $a \in A$ és $i \in I$ esetén $|f_i(a)|^2 \leq f_i(a^*a)$, így

$$|f(a)|^2 = \lim_{i,I} |f_i(a)|^2 \leq \lim_{i,I} f_i(a^*a) = f(a^*a).$$

Ez azt jelenti, hogy a $\mathrm{K}(A)$ halmaz $\sigma(A', A)$-zárt. ■

21.3. Önadjungált és pozitív funkcionálok C^*-algebra felett

21.3.1. Tétel. *C^*-algebra felett minden pozitív funkcionál folytonos.*

Bizonyítás. Legyen f pozitív funkcionál az A C^*-algebra felett. Először megmutatjuk, hogy

$$C := \sup_{x \in A_+,\ \|x\| \leq 1} f(x) < +\infty.$$

Ez az egyenlőtlenség azzal ekvivalens, hogy minden A_+-ban haladó $(x_k)_{k \in \mathbb{N}}$ sorozatra, ha minden $k \in \mathbb{N}$ esetén $\|x_k\| \leq 1$, akkor az $(f(x_k))_{k \in \mathbb{N}}$ számsorozat korlátos. Legyen tehát $(x_k)_{k \in \mathbb{N}}$ olyan A_+-ban haladó sorozat, amelyre minden $k \in \mathbb{N}$ esetén $\|x_k\| \leq 1$. Az $(f(x_k))_{k \in \mathbb{N}}$ számsorozat pontosan akkor korlátos, ha minden $(\alpha_k)_{k \in \mathbb{N}}$ *abszolút szummálható* számsorozatra a $\sum\limits_{k \in \mathbb{N}} \alpha_k f(x_k)$ numerikus sor konvergens. Ez a feltétel természetesen azzal ekvivalens, hogy minden $(\alpha_k)_{k \in \mathbb{N}}$ pozitív tagú számsorozatra, ha a $\sum\limits_{k \in \mathbb{N}} \alpha_k$ sor konvergens, akkor a $\sum\limits_{k \in \mathbb{N}} \alpha_k f(x_k)$ sor is konvergens.
Tehát vegyünk olyan $(x_k)_{k \in \mathbb{N}}$ sorozatot A_+-ban, és olyan $(\alpha_k)_{k \in \mathbb{N}}$ pozitív tagú számsorozatot, amelyekre minden $k \in \mathbb{N}$ esetén $\|x_k\| \leq 1$, valamint a $\sum\limits_{k \in \mathbb{N}} \alpha_k$ sor konvergens.

Minden $k \in \mathbb{N}$ esetén $\alpha_k x_k \in A_+$, így minden $H \subseteq \mathbb{N}$ véges halmazra $\sum_{k \in H} \alpha_k x_k \in A_+$. Továbbá, a $\sum_{k \in \mathbb{N}} \alpha_k x_k$ vektorsor abszolút konvergens A-ban, tehát konvergens, és

$$\sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k x_k = \lim_{n \to \infty} \sum_{k=0}^{n} \alpha_k x_k \in A_+,$$

hiszen A_+ az A-ban zárt a C^*-norma szerint. Ugyanakkor minden $\mathbb{N} \ni n$-re

$$\sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k x_k - \sum_{k=0}^{n} \alpha_k x_k = \sum_{k=n+1}^{\infty} \alpha_k x_k = \lim_{m \to \infty} \sum_{k=n+1}^{n+m+1} \alpha_k x_k \in A_+,$$

ezért az f funkcionál pozitivitása miatt

$$\sum_{k=0}^{n} \alpha_k f(x_k) = f\left(\sum_{k=0}^{n} \alpha_k x_k\right) \leq f\left(\sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k x_k\right).$$

Ebből látszik, hogy a $\sum_{k \in \mathbb{N}} \alpha_k f(x_k)$ sor konvergens.

Tehát a C elem véges; legyen most $x \in A_{sa}$ olyan, hogy $\|x\| \leq 1$. Ekkor $x = x^+ - x^-$, és $\|x^{\pm}\| \leq \|x\| \leq 1$, ezért $|f(x)| \leq f(x^+) + f(x^-) \leq 2C$. Ha $a \in A$ és $\|a\| \leq 1$, akkor $a = x + \mathbf{i}y$, ahol $x := \frac{1}{2}(a + a^*)$ és $y := \frac{1}{2\mathbf{i}}.(a - a^*)$, így $\|x\| \leq 1$ és $\|y\| \leq 1$, következésképpen $|f(a)| \leq |f(x)| + |f(y)| \leq 4C$. Ez azt jelenti, hogy

$$\sup_{a \in A,\ \|a\| \leq 1} |f(a)| \leq 4C < +\infty,$$

tehát f folytonos. ■

21.3.2. Következmény. *C^*-algebra felett minden pozitív funkcionál ábrázolható.*

Bizonyítás. C^*-algebrának létezik approximatív egysége (19.3.3.) és a 21.3.1. szerint C^*-algebra felett minden pozitív funkcionál folytonos. Ezért az állítás a 21.2.4. állítás közvetlen következménye. ■

21.3.3. Állítás. *Legyen A egységelemes C^*-algebra. Egy $f : A \to \mathbb{C}$ lineáris funkcionál pontosan akkor pozitív, ha folytonos és $f(\mathbf{1}) = \|f\|$.*

Bizonyítás. Tegyük fel, hogy az f lineáris funkcionál pozitív. Az A *-algebra egységelemessége miatt f önadjungált, továbbá 21.3.1. alapján f folytonos is. Továbbá, $\|\mathbf{1}\| \leq 1$ teljesül, mert A pre-C^*-algebra, ezért $\mathbf{1} \in A_+$ miatt $f(\mathbf{1}) = |f(\mathbf{1})| \leq \|f\|$. Ugyanakkor, az f pozitivitása és folytonossága alapján minden $a \in A$ esetén

$$|f(a)|^2 = |f(\mathbf{1}^* a)|^2 \leq f(a^* a) f(\mathbf{1}^* \mathbf{1}) =$$

$$= f(\mathbf{1})f(a^*a) \leq f(\mathbf{1})\|f\|\|a^*a\| = f(\mathbf{1})\|f\|\|a\|^2,$$

következésképpen $\|f\|^2 \leq f(\mathbf{1})\|f\|$, így $\|f\| \leq f(\mathbf{1})$. Ezért fennáll az $f(\mathbf{1}) = \|f\|$ egyenlőség.

Megfordítva, tegyük fel, hogy az f lineáris funkcionál folytonos és $f(\mathbf{1}) = \|f\|$.

Először megmutatjuk, hogy f *önadjungált.* Ehhez elegendő azt igazolni, hogy $x \in A_{sa}$ esetén $f(x) \in \mathbb{R}$. Ennek bizonyításához legyenek $t, s \in \mathbb{R}$ azok a számok, amelyekre $f(x) = t + \mathbf{i}s$. Legyen $r \in \mathbb{R}$ tetszőleges. Ekkor 18.1.2. szerint

$$\mathrm{Sp}(x + \mathbf{i}r\mathbf{1}) = \mathrm{Sp}(x) + \mathbf{i}r \subseteq [-\|x\|, \|x\|] + \mathbf{i}r \subseteq \overline{B}_{\sqrt{\|x\|^2+r^2}}(0; \mathbb{C}).$$

Az $x + \mathbf{i}r\mathbf{1}$ elem normális, ezért ebből a 17.4.1. és a spektrálsugár minimalitása (14.6.1.) alapján következik, hogy

$$\|x + \mathbf{i}r\mathbf{1}\| = \rho(x + \mathbf{i}r\mathbf{1}) \leq \sqrt{\|x\|^2 + r^2}.$$

Ugyanakkor, az $f(\mathbf{1}) = \|f\|$ hipotézis alapján

$$|s + r\|f\|| \leq |t + \mathbf{i}(s + r\|f\|)| = |f(x + \mathbf{i}r\mathbf{1})| \leq \|f\|\|x + \mathbf{i}r\mathbf{1}\|$$

is teljesül, tehát minden $\mathbb{R} \ni r$-re fennáll az $|s + r\|f\|| \leq \|f\|\sqrt{\|x\|^2 + r^2}$, vagyis az

$$s^2 + 2sr\|f\| \leq \|f\|^2\|x\|^2$$

egyenlőtlenség. Ezt osztva az $r > 0$ valós számmal, és r-rel tartva $+\infty$-be kapjuk, hogy $s \leq 0$, majd osztva az $r < 0$ valós számmal, és r-rel tartva $-\infty$-be kapjuk, hogy $s \geq 0$. Tehát $s = 0$, így $f(x) = t \in \mathbb{R}$.

Most indirekt bizonyítjuk azt, hogy f pozitív; tehát feltesszük olyan $x \in A_+$ létezését, amelyre $f(x) \notin \mathbb{R}_+$. Az f önadjungáltsága alapján $f(x) \in \mathbb{R}$, tehát $f(x)$ negatív valós szám. Ekkor $f \neq 0$, tehát $f_0 := \dfrac{f}{\|f\|}$ olyan önadjungált és folytonos lineáris funkcionál A felett, amelyre $f_0(\mathbf{1}) = 1 = \|f_0\|$ és $f_0(x)$ szintén negatív valós szám. Ugyanakkor $x \in A_+$, így az x elem *pozitív spektrumú*, vagyis $\mathrm{Sp}(x) \subseteq \mathbb{R}_+$, ezért van olyan $\lambda_0 \in \mathbb{R}^+$ és $r \in \mathbb{R}^+$, hogy $\mathrm{Sp}(x) \subseteq [\lambda_0 - r, \lambda_0 + r] \subseteq \mathbb{R}_+$, így $f_0(x) \notin [\lambda_0 - r, \lambda_0 + r]$. Ekkor $\mathrm{Sp}(x - \lambda_0.\mathbf{1}) = \mathrm{Sp}(x) - \lambda_0 \subseteq [-r, r]$, és természetesen $x - \lambda_0.\mathbf{1}$ önadjungált elem, ezért $\|x - \lambda_0.\mathbf{1}\| = \rho(x - \lambda_0.\mathbf{1}) \leq r$. Ebből és az $f_0(\mathbf{1}) = 1 = \|f_0\|$ egyenlőségekből következik, hogy

$$|f_0(x) - \lambda_0| = |f_0(x - \lambda_0.\mathbf{1})| \leq \|f_0\|\|x - \lambda_0.\mathbf{1}\| \leq r,$$

ami ellentmond annak, hogy $f_0(x) \notin [\lambda_0 - r, \lambda_0 + r]$. ■

21.4. Az ábrázolható funkcionálok kapcsolatai – Godement-tétel

21.4.1. Tétel. (Godement-tétel) *Legyen A *-algebra és π_1 (illetve π_2) ciklikus ábrázolása A-nak a $\mathscr{H}_1$ (illetve $\mathscr{H}_2$) Hilbert-térben, és $\zeta_1 \in \mathscr{H}_1$ (illetve $\zeta_2 \in \mathscr{H}_2$) π_1-ciklikus (illetve π_2-ciklikus) vektor.*

a) *Legfeljebb egy olyan $u : \mathscr{H}_1 \to \mathscr{H}_2$ lineáris operátor létezik, amelyre $u \in C(\pi_1; \pi_2)$ és $u(\zeta_1) = \zeta_2$.*

b) *Akkor és csak akkor létezik olyan $u:\mathscr{H}_1 \to \mathscr{H}_2$ unitér operátor, hogy $u \in C(\pi_1; \pi_2)$ és $u(\zeta_1) = \zeta_2$, ha $\Phi_{\pi_1,\zeta_1} = \Phi_{\pi_2,\zeta_2}$.*

Bizonyítás. Ha $u, u' \in C(\pi_1; \pi_2)$ és $u(\zeta_1) = \zeta_2 = u'(\zeta_1)$, akkor minden $a \in A$ esetén

$$u(\pi_1(a)\zeta_1) = \pi_2(a)(u(\zeta_1)) = \pi_2(a)(\zeta_2) = \pi_2(a)(u'(\zeta_1)) = u'(\pi_1(a)\zeta_1),$$

tehát $\{\pi_1(a)\zeta_1 | a \in A\} \subseteq [u = u']$. A hipotézis szerint a $\{\pi_1(a)\zeta_1 | a \in A\}$ halmaz sűrű $\mathscr{H}_1$-ben, így ebből $u = u'$ következik.

Ha $u : \mathscr{H}_1 \to \mathscr{H}_2$ olyan unitér operátor, hogy $u \in C(\pi_1; \pi_2)$ és $u(\zeta_1) = \zeta_2$, akkor minden $A \ni a$-ra

$$\Phi_{\pi_2,\zeta_2}(a) = (\pi_2(a)\zeta_2 | \zeta_2) = ((\pi_2(a) \circ u)(\zeta_1) | u(\zeta_1)) =$$
$$= ((u \circ \pi_1(a))(\zeta_1) | u(\zeta_1)) = (\pi_1(a)\zeta_1 | \zeta_1) = \Phi_{\pi_1,\zeta_1}(a),$$

vagyis $\Phi_{\pi_1,\zeta_1} = \Phi_{\pi_2,\zeta_2}$.

Megfordítva, tegyük fel, hogy $\Phi_{\pi_1,\zeta_1} = \Phi_{\pi_2,\zeta_2}$, és jelölje $\mathscr{H}_0$ a $\{\pi_1(a)\zeta_1 | a \in A\}$ halmazt, ami sűrű lineáris altér $\mathscr{H}_1$-ben. Ha $a \in A$, akkor

$$\|\pi_1(a)\zeta_1\|^2 = \Phi_{\pi_1,\zeta_1}(a^*a) = \Phi_{\pi_2,\zeta_2}(a^*a) = \|\pi_2(a)\zeta_2\|^2$$

teljesül, ezért $\pi_1(a)\zeta_1 = 0$ esetén $\pi_2(a)\zeta_2 = 0$ is igaz. Ebből következik olyan $u_0 : \mathscr{H}_0 \to \mathscr{H}_2$ lineáris operátor létezése, amelyre minden $a \in A$ esetén $u_0(\pi_1(a)\zeta_1) = \pi_2(a)\zeta_2$. Az is látszik, hogy u_0 *izometria*, így létezik egyetlen olyan $u : \mathscr{H}_1 \to \mathscr{H}_2$ folytonos lineáris operátor, amely u_0-nak kiterjesztése, és ez az operátor is izometria. Ezért $\mathrm{Im}(u)$ zárt lineáris altere $\mathscr{H}_2$-nek, és a definíció alapján $\{\pi_2(a)\zeta_2 | a \in A\} \subseteq \mathrm{Im}(u)$, vagyis $\mathrm{Im}(u)$ sűrű is $\mathscr{H}_2$-ben. Ezért u izometrikus bijekció $\mathscr{H}_1$ és $\mathscr{H}_2$ között, így u unitér operátor.

Ha $a \in A$, akkor minden $A \ni b$-re

$$(u \circ \pi_1(a))(\pi_1(b)\zeta_1) = u(\pi_1(ab)\zeta_1) := \pi_2(ab)\zeta_2 =$$

$$= \pi_2(a)(\pi_2(b)\zeta_2) =: \pi_2(a)(u(\pi_1(b)\zeta_1)) = (\pi_2(a) \circ u)(\pi_1(b)\zeta_1)$$

tehát $u \circ \pi_1(a) = \pi_2(a) \circ u$ a $\mathscr{H}_0$ altéren, így $u \circ \pi_1(a) = \pi_2(a) \circ u$. Ez azt jelenti, hogy $u \in C(\pi_1; \pi_2)$, tehát elég azt igazolni, hogy $u(\zeta_1) = \zeta_2$. Ha $a \in A$, akkor az u definíciója és uniteritása miatt

$$(\pi_2(a)\zeta_2|u(\zeta_1)) = (u(\pi_1(a)\zeta_1)|u(\zeta_1)) = (\pi_1(a)\zeta_1|\zeta_1) =$$

$$= \Phi_{\pi_1,\zeta_1}(a) = \Phi_{\pi_2,\zeta_2}(a) = (\pi_2(a)\zeta_2|\zeta_2).$$

Ebből következik, hogy a $\zeta_2 - u(\zeta_1)$ vektor ortogonális az $\{\pi_2(a)\zeta_2|a \in A\}$ halmazra, ami sűrű lineáris altér $\mathscr{H}_2$-ben, ezért $\zeta_2 - u(\zeta_1) = 0$. ■

21.4.2. Következmény. *Ha A *-algebra, π ciklikus ábrázolása A-nak a $\mathscr{H}$ Hilbert-térben, és $\zeta \in \mathscr{H}$ egy π-ciklikus vektor, akkor egyértelműen létezik olyan $f : A \to \mathbb{C}$ ábrázolható funkcionál, és olyan $u : \mathscr{H} \to \mathscr{H}_f$ unitér operátor, amelyre $u \in C(\pi; \pi_f)$ és $u(\zeta) = \zeta_f$.*

Bizonyítás. Ha $f := \Phi_{\pi,\zeta}$, akkor f olyan pozitív funkcionál A felett, amely nyilvánvalóan ábrázolható, továbbá minden $a \in A$ esetén

$$\Phi_{\pi,\zeta}(a) =: f(a) = (\pi_f(a)\zeta_f|\zeta_f) = \Phi_{\pi_f,\zeta_f}(a),$$

vagyis $\Phi_{\pi,\zeta} = \Phi_{\pi_f,\zeta_f}$. Ezért a Godement-tétel alapján egyértelműen létezik olyan $u \in C(\pi; \pi_f)$, hogy u unitér operátor és $u(\zeta) = \zeta_f$. Ha g olyan ábrázolható funkcionál A felett, és $v \in C(\pi; \pi_g)$ olyan unitér operátor, hogy $v(\zeta) = \zeta_g$, akkor a Godement-tétel alapján $\Phi_{\pi,\zeta} = \Phi_{\pi_g,\zeta_g}$, és $f = \Phi_{\pi,\zeta}$, valamint $g = \Phi_{\pi_g,\zeta_g}$, így $f = g$, tehát $u = v$ is igaz, mert $u, v \in C(\pi; \pi_f)$ mindketten olyan unitér operátorok, amelyekre $u(\zeta) = \zeta_f = v(\zeta)$, és a Godement-tétel szerint csak egy ilyen létezik. ■

Tehát a *-algebrák ciklikus ábrázolásai unitér ekvivalencia erejéig megegyeznek a GNS-konstrukcióval előállítható ábrázolásokkal.

21.5. A GNS-konstrukcióval előállított ábrázolások irreducibilitásának jellemzése

Most megvizsgáljuk a GNS-konstrukcióval előállított ábrázolások irreducibilitásának kritériumát. Ehhez szükségünk lesz a következő lemmára.

21.5.1. Lemma. *Legyen A *-algebra, és $f, g : A \to \mathbb{C}$ ábrázolható funkcionálok. Ha létezik olyan $\alpha \in \mathbb{R}_+$, amelyre a $\alpha.f - g$ funkcionál pozitív, akkor van olyan $w \in C(\pi_f; \pi_f)$, amelyre minden $a \in A$ esetén $g(a) = (w(\pi_f(a)\zeta_f)|\zeta_f)$ és az $\alpha.f - g$ funkcionál is ábrázolható.*

Bizonyítás. Legyen $\mathscr{H}_0 := \{\pi_f(a)\zeta_f | a \in A\}$, ami sűrű lineáris altér $\mathscr{H}_f$-ben, és rögzítsünk olyan $\alpha \in \mathbb{R}_+$ számot, amelyre az $\alpha.f - g$ funkcionál pozitív. Ha $a \in A$, akkor

$$\|\pi_g(a)\zeta_g\|^2 = (\pi_g(a^*a)\zeta_g|\zeta_g) = g(a^*a) \leq$$

$$\leq \alpha f(a^*a) = \alpha(\pi_f(a^*a)\zeta_f|\zeta_f) = \alpha\|\pi_f(a)\zeta_f\|^2,$$

tehát $\|\pi_g(a)\zeta_g\| \leq \sqrt{\alpha}\|\pi_f(a)\zeta_f\|$, amiből következik egyetlen olyan $v_0 : \mathscr{H}_0 \to \mathscr{H}_g$ folytonos lineáris operátor létezése, amelyre minden $a \in A$ esetén $v_0(\pi_f(a)\zeta_f) = \pi_g(a)\zeta_g$. A sűrű altéren folytonos lineáris operátorok kiterjesztési tétele alapján létezik egyetlen olyan $v \in \mathscr{L}(\mathscr{H}_f; \mathscr{H}_g)$ operátor, amely a v_0-nak kiterjesztése. A definíció alapján nyilvánvaló, hogy $\|v_0\| \leq \sqrt{\alpha}$, amiből következik, hogy $\|v\| \leq \sqrt{\alpha}$ is teljesül, vagyis minden $\zeta \in \mathscr{H}_f$ esetén $\|v(\zeta)\| \leq \sqrt{\alpha}\|\zeta\|$.

Megmutatjuk, hogy $v \in C(\pi_f; \pi_g)$ és $v(\zeta_f) = \zeta_g$. Valóban, ha $a \in A$, akkor minden $A \ni b$-re

$$(v \circ \pi_f(a))(\pi_f(b)\zeta_f) = v(\pi_f(ab)\zeta_f) = \pi_g(ab)\zeta_g =$$

$$= \pi_g(a)(\pi_g(b)\zeta_g) = \pi_g(a)(v(\pi_f(b)\zeta_f)) = (\pi_g(a) \circ v)(\pi_f(b)\zeta_f),$$

ami azt jelenti, hogy $v \circ \pi_f(a) = \pi_g(a) \circ v$ teljesül a $\mathscr{H}_0 \subseteq \mathscr{H}_f$ sűrű altéren, így $v \in C(\pi_f; \pi_g)$. Továbbá, minden $a \in A$ esetén

$$(v(\zeta_f)|\pi_g(a)\zeta_g) = (\pi_g(a)^*(v(\zeta_f))|\zeta_g) = ((\pi_g(a^*) \circ v)(\zeta_f)|\zeta_g) =$$

$$= ((v \circ \pi_f(a^*))(\zeta_f)|\zeta_g) = (v(\pi_f(a^*)\zeta_f)|\zeta_g) = (\pi_g(a^*)\zeta_g|\zeta_g) = (\zeta_g|\pi_g(a)\zeta_g),$$

tehát $v(\zeta_f) - \zeta_g \in \{\pi_g(a)\zeta_g | a \in A\}^\perp = \{0\}$, így $v(\zeta_f) = \zeta_g$.

Legyen most $w := v^* \circ v$. Az előzőek alapján nyilvánvaló, hogy $w \in C(\pi_f; \pi_f)$, és minden $a \in A$ esetén

$$g(a) = (\pi_g(a)\zeta_g|\zeta_g) = (v(\pi_f(a)\zeta_f)|v(\zeta_f)) =$$

$$= (v^*(v(\pi_f(a)\zeta_f))|\zeta_f) = (w(\pi_f(a)\zeta_f)|\zeta_f).$$

Továbbá, $\|v\| \leq \sqrt{\alpha}$ miatt, az $\alpha.id_{\mathscr{H}_f} - w$ önadjungált operátor *pozitív* az $\mathscr{L}(\mathscr{H}_f)$ operátoralgebrában, mert $\zeta \in \mathscr{H}_f$ esetén

$$((\alpha.id_{\mathscr{H}_f} - w)(\zeta)|\zeta) = \alpha\|\zeta\|^2 - (w(\zeta)|\zeta) = \alpha\|\zeta\|^2 - \|v(\zeta)\|^2 \geq 0.$$

Ezért képezhető az $(\alpha.id_{\mathscr{H}_f} - w)^{\frac{1}{2}} \in \mathscr{L}(\mathscr{H}_f)$ operátor, és mivel $\alpha.id_{\mathscr{H}_f} - w \in C(\pi_f; \pi_f)$, így $(\alpha.id_{\mathscr{H}_f} - w)^{\frac{1}{2}} \in C(\pi_f; \pi_f)$ is teljesül. Ezért minden $A \ni a$-ra:

$$(\alpha.f - g)(a) = ((\alpha.id_{\mathscr{H}_f} - w)(\pi_f(a)\zeta_f)|\zeta_f) =$$

$$= (((\alpha.id_{\mathscr{H}_f} - w)^{\frac{1}{2}} \circ (\alpha.id_{\mathscr{H}_f} - w)^{\frac{1}{2}})(\pi_f(a)\zeta_f)|\zeta_f) =$$

$$= ((\alpha.id_{\mathscr{H}_f} - w)^{\frac{1}{2}}(\pi_f(a)\zeta_f)|(\alpha.id_{\mathscr{H}_f} - w)^{\frac{1}{2}}\zeta_f) =$$

$$= (\pi_f(a)((\alpha.id_{\mathscr{H}_f} - w)^{\frac{1}{2}}\zeta_f)|(\alpha.id_{\mathscr{H}_f} - w)^{\frac{1}{2}}\zeta_f)$$

teljesül, ami azt jelenti, hogy a $\zeta := (\alpha.id_{\mathscr{H}_f} - w)^{\frac{1}{2}}\zeta_f \in \mathscr{H}_f$ vektorra

$$\alpha.f - g = \Phi_{\pi_f,\zeta}$$

teljesül, tehát az $\alpha.f - g$ funkcionál ábrázolható. ■

Megjegyezzük, hogy az $\alpha := 1$ választással az előző lemmából következik, hogy ha A *-algebra és $f, g : A \to \mathbb{C}$ olyan ábrázolható funkcionálok, hogy $f - g$ pozitív funkcionál A felett, akkor $f - g$ is ábrázolható funkcionál.

A következő tétel előtt emlékeztetünk arra, hogy ha A *-algebra, akkor $\mathrm{K}_r(A)$ jelöli azon $f : A \to \mathbb{C}$ ábrázolható funkcionálok halmazát, amelyekre $\|f\|_* \leq 1$. Láttuk, hogy ez konvex részhalmaza a szóbanforgó *-algebra algebrai duálisának.

21.5.2. Tétel. (A GNS-konstrukcióval előállított ábrázolások irreducibilitásának kritériuma) *Legyen A *-algebra és $f \in \mathrm{K}_r(A)$. Tekintsük a következő kijelentéseket.*

a) *A π_f ábrázolás algebrailag irreducibilis és $\|f\|_* = 1$.*

b) *$f \in \mathrm{Ext}(\mathrm{K}_r(A)) \setminus \{0\}$.*

c) *A π_f ábrázolás geometriailag irreducibilis és $\|f\|_* = 1$.*

Ekkor teljesülnek az a)⇒b) és b)⇒c) következtetések.

(**Megjegyzés**. Később bebizonyítjuk, hogy a *-algebrák ábrázolásaira a geometriai és algebrai irreducibilitás ekvivalens tulajdonságok (23.3.4.), így c)⇒a) is igaz, vagyis a három állítás ekvivalens egymással.)

Bizonyítás. a)⇒b) Elég azt igazolni, hogy ha $f \notin \mathrm{Ext}(\mathrm{K}_r(A))$ és $\|f\|_* = 1$, akkor π_f nem algebrailag irreducibilis, vagyis létezik olyan $w \in C(\pi_f; \pi_f)$, amelyre $w \notin \mathbb{C}.id_{\mathscr{H}_f}$.

Az $f \notin \mathrm{Ext}(\mathrm{K}_r(A))$ feltétel alapján van olyan $f_1, f_2 \in \mathrm{K}_r(A)$ és $\alpha \in \mathbb{R}$, hogy $f_1 \neq f_2$, $0 < \alpha < 1$, és $f = (1-\alpha).f_1 + \alpha.f_2$. Ekkor $\alpha^{-1}.f - f_2 = (\alpha^{-1} - 1).f_1$, tehát $\alpha^{-1}.f - f_2$ pozitív funkcionál, így az előző lemma alapján létezik olyan $w \in C(\pi_f; \pi_f)$, amelyre minden $a \in A$ esetén $f_2(a) = (w(\pi_f(a)\zeta_f)|\zeta_f)$. Állítjuk, hogy $w \in \mathbb{C}.id_{\mathscr{H}_f}$ lehetetlen. Ha ugyanis $\sigma \in \mathbb{C}$ olyan szám volna, amelyre $w = \sigma.id_{\mathscr{H}_f}$, akkor minden $a \in A$ esetén

$$f_2(a) = (w(\pi_f(a)\zeta_f)|\zeta_f) = \sigma(\pi_f(a)\zeta_f|\zeta_f) = (\sigma.f)(a),$$

vagyis $f_2 = \sigma.f$. Az f funkcionál nem nulla, mert a hipotézis szerint $\|f\|_* = 1$, így van olyan $a \in A$, amelyre $f(a^*a) > 0$; ekkor $\sigma = f_2(a^*a)/f(a^*a) \in \mathbb{R}_+$, hiszen f_2 pozitív funkcionál. Továbbá, $1 = \|f\|_* \leq (1-\alpha)\|f_1\|_* + \alpha\|f_2\|_*$, így szükségképpen

$\|f_1\|_* = 1 = \|f_2\|_*$, tehát $1 = \|f\|_* = \sigma\|f_2\|_* = \sigma$, vagyis $f = f_2$. Ekkor viszont $\alpha < 1$ miatt $f_1 = f_2$, ami ellentmondás.

b)⇒c) Ha $f \in \mathrm{K}_r(A)$ és $0 < \|f\|_* < 1$, akkor a $g := \|f\|_*^{-1}.f$ funkcionálra $g \in \mathrm{K}_r(A)$, $g \neq 0$, és $f = \|f\|_*.g + (1 - \|f\|_*)0$ teljesül, tehát f nem extremális pontja $\mathrm{K}_r(A)$-nak. Tehát b)-ből következik, hogy $\|f\|_* = 1$. Ezért elég azt igazolni, hogy ha $f \in \mathrm{K}_r(A)$ olyan, hogy $\|f\|_* = 1$ és π_f nem geometriailag irreducibilis, akkor $f \notin \mathrm{Ext}(\mathrm{K}_r(A))$.

A feltétel szerint vehetünk olyan $H \subseteq \mathscr{H}_f$ zárt π_f-invariáns lineáris alteret, amelyre $H \neq \{0\}$ és $H \neq \mathscr{H}_f$. Legyenek $\zeta_1 \in H$ és $\zeta_2 \in H^\perp$ azok a vektorok, amelyekre $\zeta_f = \zeta_1 + \zeta_2$, továbbá $\pi_1 := \pi_f|H$ és $\pi_2 := \pi_f|H^\perp$.

Először megmutatjuk, hogy ζ_1 (illetve ζ_2) π_1-ciklikus (illetve π_2-ciklikus) vektor.

Legyen $\eta \in H$ olyan, hogy minden $a \in A$ esetén $(\eta|\pi_1(a)\zeta_1) = 0$. Ha $a \in A$, akkor $\pi_f(a)\zeta_2 \in \pi_f(a)\langle H^\perp\rangle \subseteq H^\perp$ miatt $(\eta|\pi_f(a)\zeta_2) = 0$, így

$$0 = (\eta|\pi_1(a)\zeta_1) = (\eta|\pi_f(a)\zeta_1) = (\eta|\pi_f(a)\zeta_1) + (\eta|\pi_f(a)\zeta_2) = (\eta|\pi_f(a)\zeta_f),$$

amiből $\eta = 0$ következik, hiszen a ζ_f vektor π_f-ciklikus. Ezért a ζ_1 vektor π_1-ciklikus.

Legyen $\eta \in H^\perp$ olyan, hogy minden $a \in A$ esetén $(\eta|\pi_2(a)\zeta_2) = 0$. Ha $a \in A$, akkor $\pi_f(a)\zeta_1 \in \pi_f(a)\langle H\rangle \subseteq H$ miatt $(\eta|\pi_f(a)\zeta_1) = 0$, így

$$0 = (\eta|\pi_2(a)\zeta_2) = (\eta|\pi_f(a)\zeta_2) = (\eta|\pi_f(a)\zeta_1) + (\eta|\pi_f(a)\zeta_2) = (\eta|\pi_f(a)\zeta_f),$$

amiből $\eta = 0$ következik, mert a ζ_f vektor π_f-ciklikus. Ezért a ζ_2 vektor π_2-ciklikus.

Könnyen látható, hogy $\zeta_1 \neq 0$, különben a ζ_1 vektor π_1-ciklikussága miatt $H = \{0\}$ teljesülne. Hasonlóan, $\zeta_2 \neq 0$, különben a ζ_2 vektor π_2-ciklikussága miatt $H^\perp = \{0\}$, vagyis $H = \mathscr{H}_f$ teljesülne.

Ha $a \in A$, akkor $\pi_f(a)\zeta_1 \in H$ és $\pi_f(a)\zeta_2 \in H^\perp$ miatt

$$f(a) = (\pi_f(a)\zeta_f|\zeta_f) = (\pi_f(a)\zeta_1|\zeta_1) + (\pi_f(a)\zeta_1|\zeta_2) + (\pi_f(a)\zeta_2|\zeta_1) + (\pi_f(a)\zeta_2|\zeta_2) =$$

$$= (\pi_f(a)\zeta_1|\zeta_1) + (\pi_f(a)\zeta_2|\zeta_2) = (\pi_1(a)\zeta_1|\zeta_1) + (\pi_2(a)\zeta_2|\zeta_2) = f_1(a) + f_2(a),$$

ahol bevezettük az $f_1 := \Phi_{\pi_1,\zeta_1}$ és $f_2 := \Phi_{\pi_2,\zeta_2}$ funkcionálokat. Tehát $f = f_1 + f_2$, továbbá a ζ_1 vektor π_1-ciklikussága, és a ζ_2 vektor π_2-ciklikussága miatt $\|f_1\|_* = \|\zeta_1\|^2 > 0$ és $\|f_2\|_* = \|\zeta_2\|^2 > 0$. Egyidejűleg az is látható, hogy $\zeta_f = \zeta_1 + \zeta_2$ és $\zeta_1 \perp \zeta_2$ miatt

$$1 = \|f\|_* = \|\zeta_f\|^2 = \|\zeta_1\|^2 + \|\zeta_2\|^2 = \|f_1\|_* + \|f_2\|_*.$$

Értelmezzük most a $g_1 := \|f_1\|_*^{-1} f_1 \in \mathrm{K}_r(A)$ és $g_2 := \|f_2\|_*^{-1} f_2 \in \mathrm{K}_r(A)$ funkcionálokat, és az $\alpha := \|f_2\|_* \in]0,1[$ valós számot. Ezekre nyilvánvalóan fennáll az $f = (1-\alpha).g_1 + \alpha.g_2$ egyenlőség. Ha igazoljuk azt, hogy $g_1 \neq g_2$, akkor ebből következik, hogy $f \notin$

$\mathrm{Ext}(\mathrm{K}_r(A))$. A $g_1 = g_2$ összefüggés ekvivalens olyan $\sigma \in \mathbb{R}^+$ létezésével, amelyre $f_2 = \sigma.f_1$, ezért azt kell igazolni hogy nincs olyan $\sigma \in \mathbb{R}^+$, amelyre $f_2 = \sigma.f_1$.

Indirekt bizonyítunk, tehát feltesszük, hogy $\sigma \in \mathbb{R}^+$ olyan, amelyre $f_2 = \sigma.f_1$. Legyen $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ olyan valós szám, amelyre $\varepsilon < \|\zeta_1\|$. Ekkor a ζ_f vektor π_f-ciklikussága folytán vehetünk olyan $a \in A$ elemet, amelyre $\|\zeta_1 - \pi_f(a)\zeta_f\| < \varepsilon$. Világos, hogy $\pi_f(a)\zeta_2 \in \pi_f(a)\langle H^\perp\rangle \subseteq H^\perp$ és $\zeta_1 \in H$, így $(\pi_f(a)\zeta_2|\zeta_1) = 0$, tehát $f_1(a) = (\pi_1(a)\zeta_1|\zeta_1) = (\pi_f(a)(\zeta_f - \zeta_2)|\zeta_1) = (\pi_f(a)\zeta_f|\zeta_1)$, következésképpen

$$|f_1(a) - \|\zeta_1\|^2| = |(\pi_f(a)\zeta_f|\zeta_1) - (\zeta_1|\zeta_1)| = |(\pi_f(a)\zeta_f - \zeta_1|\zeta_1)| \leq$$

$$\leq \|\pi_f(a)\zeta_f - \zeta_1\|\|\zeta_1\| < \varepsilon\|\zeta_1\|.$$

Ebből kapjuk, hogy fennáll a

$$\|\zeta_1\|(\|\zeta_1\| - \varepsilon) < |f_1(a)|$$

egyenlőtlenség. Ugyanakkor $\pi_f(a)\zeta_1 \in \pi_f(a)\langle H\rangle \subseteq H$ és $\zeta_2 \in H^\perp$, így $(\pi_f(a)\zeta_1|\zeta_2) = 0$, tehát $f_2(a) = (\pi_2(a)\zeta_2|\zeta_2) = (\pi_f(a)(\zeta_f - \zeta_1)|\zeta_2) = (\pi_f(a)\zeta_f|\zeta_2)$, következésképpen

$$|f_2(a)| = |((\pi_f(a)\zeta_f|\zeta_2)) - (\zeta_1|\zeta_2)| \leq \|\pi_f(a)\zeta_f - \zeta_1\|\|\zeta_2\| < \varepsilon\|\zeta_2\|,$$

hiszen $(\zeta_1|\zeta_2) = 0$. Mivel $|f_2(a)| = \sigma|f_1(a)|$; ebből következik, hogy

$$\sigma\|\zeta_1\|(\|\zeta_1\| - \varepsilon) < \sigma|f_1(a)| = |f_2(a)| < \varepsilon\|\zeta_2\|$$

teljesül minden $\varepsilon \in]0, \|\zeta_1\|[$ valós számra, ami természetesen lehetetlen, mert $\sigma > 0$ és $\|\zeta_1\| > 0$. ■

Megjegyezzük, hogy ha A *-algebra, akkor $0 \in \mathrm{Ext}(\mathrm{K}_r(A))$, mert ha $f_1, f_2 \in \mathrm{K}_r(A)$ és $\alpha \in]0,1[$ olyanok, hogy $0 = (1-\alpha).f_1 + \alpha.f_2$, akkor minden $a \in A$ esetén $f_1(a^*a) = 0 = f_2(a^*a)$, így $f_1 = 0 = f_2$.

21.6. Banach-*-algebra irreducibilis ábrázolásainak létezése – Gelfand-Rajkov tétel

21.6.1. Tétel. (Absztrakt Gelfand-Rajkov-tétel) *Ha A Banach-*-algebra és $a \in A$, akkor a következő állítások ekvivalensek.*

a) *Létezik olyan f ábrázolható funkcionál A felett, amelyre $f(a) \neq 0$.*

b) *Létezik az A-nak olyan π geometriailag irreducibilis ábrázolása, hogy $\pi(a) \neq 0$.*

c) *Létezik az A-nak olyan π ábrázolása, amelyre $\pi(a) \neq 0$.*

Továbbá, ha A-nak létezik hű ábrázolása, akkor ezek az állítások ekvivalensek azzal, hogy $a \neq 0$.

Bizonyítás. Nyilvánvaló, hogy az a), b) és c) kijelentések bármelyikéből következik az, hogy $a \neq 0$. Megfordítva, ha A-nak létezik hű ábrázolása, és $a \neq 0$, akkor c) teljesül. Ezért elegendő az a), b) és c) kijelentések ekvivalenciáját igazolni.

a)$\Rightarrow$b) Ha f olyan ábrázolható funkcionál A felett, amelyre $f(a) \neq 0$, akkor $f(a^*a) > 0$ és $f \neq 0$. Tehát, ha $\sigma \in \mathbb{R}^+$ olyan, hogy $\sigma\|f\|_* \leq 1$, akkor $\sigma.f \in \mathrm{K}(A)$, és $(\sigma.f)(a^*a) > 0$. Ezért létezik olyan f ábrázolható pozitív funkcionál A felett, amelyre $f \in \mathrm{K}(A)$ és $f(a^*a) > 0$. A Krein–Milman-tétel alapján $\mathrm{K}(A) = \overline{\mathrm{co}}(\mathrm{Ext}(\mathrm{K}(A)))$, ahol a lezárást a $\sigma(A', A)$ topológia szerint kell venni. Ezért van olyan $g \in \mathrm{Ext}(\mathrm{K}(A))$, hogy $g(a^*a) > 0$. Természetesen ekkor $g \neq 0$, vagyis $g \in \mathrm{Ext}(\mathrm{K}(A)) \setminus \{0\}$, így az előző tétel alapján π_g geometriailag irreducibilis ábrázolása A-nak, továbbá nyilvánvalóan $\|\pi_g(a)\zeta_g\|^2 = (\pi_g(a^*a)\zeta_g|\zeta_g) = g(a^*a) > 0$, következésképpen $\pi_g(a) \neq 0$.

b)$\Rightarrow$c) Triviális.

c)$\Rightarrow$a) Legyen π olyan ábrázolása A-nak a $\mathscr{H}$ Hilbert-térben, amelyre $\pi(a) \neq 0$. Minden $\zeta, \eta \in \mathscr{H}$ esetén

$$(\pi(a)\zeta|\eta) = \frac{1}{4}\sum_{k=0}^{3} \mathbf{i}^k(\pi(a)(\zeta + \mathbf{i}^k\eta)|\zeta + \mathbf{i}^k\eta),$$

és $\pi(a) \neq 0$ miatt léteznek olyan $\zeta, \eta \in \mathscr{H}$ vektorok, hogy $(\pi(a)\zeta|\eta) \neq 0$, így van olyan $\zeta \in \mathscr{H}$, hogy $(\pi(a)\zeta|\zeta) \neq 0$. Ekkor $\Phi_{\pi,\zeta}$ olyan ábrázolható funkcionál A felett, amelyre $\Phi_{\pi,\zeta}(a) = (\pi(a)\zeta|\zeta) \neq 0$. ∎

21.6.2. Következmény. *Az A Banach-*-algebrának pontosan akkor létezik hű ábrázolása, ha minden $a \in A \setminus \{0\}$ elemhez létezik A-nak olyan π geometriailag irreducibilis ábrázolása, amelyre $\pi(a) \neq 0$, vagyis az A geometriailag irreducibilis ábrázolásai szétválasztják az A elemeit.*

Bizonyítás. A feltétel szükségessége az absztrakt Gelfand-Rajkov-tételből következik. Megfordítva, ha a feltétel teljesül, akkor kiválasztható olyan $(\pi_a)_{a\in A\setminus\{0\}}$ rendszer, hogy minden $a \in A \setminus \{0\}$ esetén π_a geometriailag irreducibilis ábrázolása A-nak és $\pi_a(a) \neq 0$. Nyilvánvaló, hogy ekkor a $(\pi_a)_{a\in A\setminus\{0\}}$ ábrázolás-rendszer π Hilbert-összege az A-nak hű ábrázolása, hiszen ha $a \in A \setminus \{0\}$ és ζ olyan vektor a π_a ábrázolási terében, amelyre $\pi_a(a)\zeta \neq 0$, akkor (a Hilbert-összeg értelmezése alapján) $\pi(a)\tilde{\zeta} \neq 0$ (ezért $\pi(a) \neq 0$), ahol $\tilde{\zeta}$ az a vektor az ábrázolási terek *direkt összegében*, amelynek a-adik komponense ζ, és a többi komponense 0. ∎

21.7. Banach-*-algebra ciklikus ábrázolásának redukciója – Choquet-tétel

Korábban láttuk, hogy *-algebra minden ábrázolása egyértelműen előáll egy nullábrázolás és egy nemelfajult ábrázolás Hilbert-összegeként. Továbbá, *-algebra minden nemelfajult ábrázolása előáll ciklikus ábrázolások Hilbert-összegeként. Most megmutatjuk, hogy *szeparábilis* Banach-*-algebra minden ciklikus ábrázolása előáll geometriailag irreducibilis ábrázolások – alkalmasan értelmezett – *Hilbert-integráljaként.* Ez a tétel az absztrakt Gelfand-Rajkov-tétel pontosításának tekinthető szeparábilis Banach-*-algebrák esetében. Megállapodunk abban, hogy ha A Banach-*-algebra, akkor a $\mathrm{K}(A)$ konvex halmazt mindig a $\sigma(A', A)|\mathrm{K}(A)$ topológiával látjuk el, tehát $\mathrm{K}(A)$ kompakt konvex halmaz.

21.7.1. Állítás. *Legyen A Banach-*-algebra, és minden $a \in A$ esetén*

$$\mathbf{v}_a := (\pi_f(a)\zeta_f)_{f\in\mathrm{K}(A)} \in \prod_{f\in\mathrm{K}(A)} \mathscr{H}_f.$$

Értelmezzük továbbá a $\mathscr{H}_A := \{\mathbf{v}_a | a \in A\}$ halmazt.

a) *$\mathscr{H}_A$ lineáris altere a $\prod\limits_{f\in\mathrm{K}(A)} \mathscr{H}_f$ lineáris szorzattérnek, és minden $x, y \in \mathscr{H}_A$ esetén a $\mathrm{K}(A) \to \mathbb{C}$; $f \mapsto (x(f)|y(f))_{\mathscr{H}_f}$ leképezés folytonos, ahol $f \in \mathrm{K}(A)$ esetén $(\cdot|\cdot)_{\mathscr{H}_f}$ jelöli a $\mathscr{H}_f$ Hilbert-tér skalárszorzását.*

b) *Minden $a \in A$ és $x \in \mathscr{H}_A$ esetén $(\pi_f(a)x(f))_{f\in\mathrm{K}(A)} \in \mathscr{H}_A$.*

c) *Ha μ pozitív Radon-mérték a $\mathrm{K}(A)$ kompakt tér felett, akkor a*

$$\|\cdot\|_\mu : \mathscr{H}_A \to \mathbb{R}_+; \quad x \mapsto \sqrt{\int\limits_{\mathrm{K}(A)} \|x(f)\|^2_{\mathscr{H}_f}\, d\mu(f)}$$

leképezés Hilbert-félnorma a $\mathscr{H}_A$ vektortér felett, ahol $f \in \mathrm{K}(A)$ esetén $\|\cdot\|_{\mathscr{H}_f}$ jelöli a $\mathscr{H}_f$ Hilbert-tér normáját.

d) *Legyen μ pozitív Radon-mérték a $\mathrm{K}(A)$ kompakt tér felett. Jelölje $\mathscr{H}_\mu$ a $\mathscr{H}_A/Ker\|\cdot\|_\mu$ prehilbert-tér teljes burkát. Minden $x \in \mathscr{H}_A$ esetén legyen $x^\bullet$ az x elem ekvivalencia-osztálya $\mathscr{H}_A/Ker\|\cdot\|_\mu$-ben. Ekkor az $A \to \mathscr{H}_\mu$; $a \mapsto \mathbf{v}_a^\bullet$ leképezés a normák szerint folytonos lineáris operátor, és létezik egyetlen olyan π_μ ábrázolása A-nak a $\mathscr{H}_\mu$ Hilbert-térben, amelyre minden $x, y \in \mathscr{H}_A$ és $a \in A$ esetén*

$$(\pi_\mu(a)x^\bullet|y^\bullet)_\mu = \int\limits_{\mathrm{K}(A)} (\pi_f(a)x(f)|y(f))_{\mathscr{H}_f}\, d\mu(f)$$

teljesül, ahol $(\cdot|\cdot)_\mu$ jelöli a $\mathscr{H}_\mu$ Hilbert-tér skalárszorzását.

Bizonyítás. a) Ha $a, b \in A$, akkor minden $f \in \mathrm{K}(A)$ esetén

$$(\mathbf{v}_a(f)|\mathbf{v}_b(f))_{\mathscr{H}_f} = (\pi_f(a)\zeta_f|\pi_f(b)\zeta_f)_{\mathscr{H}_f} = (\pi_f(b^*a)\zeta_f|\zeta_f)_{\mathscr{H}_f} = f(b^*a),$$

vagyis a $\mathrm{K}(A) \to \mathbb{C};\ f \mapsto (\mathbf{v}_a(f)|\mathbf{v}_b(f))_{\mathscr{H}_f}$ leképezés egyenlő a $\mathrm{K}(A) \to \mathbb{C};\ f \mapsto f(b^*a)$ függvénnyel, ami folytonos a $\sigma(A', A)|\mathrm{K}(A)$ topológia szerint.

b) Ha $a, b \in A$, akkor minden $f \in \mathrm{K}(A)$ esetén

$$\pi_f(a)\mathbf{v}_b(f) = \pi_f(a)(\pi_f(b)\zeta_f) = \pi_f(ab)\zeta_f = \mathbf{v}_{ab}(f),$$

ezért minden $A \ni a$-ra és $\mathscr{H}_A \ni x$-re $(\pi_f(a)x(f))_{f\in\mathrm{K}(A)} \in \mathscr{H}_f$.

c) Ha μ pozitív Radon-mérték a $\mathrm{K}(A)$ kompakt tér felett, akkor az a) szerint jól értelmezett a

$$(\cdot|\cdot)_\mu : \mathscr{H}_A \times \mathscr{H}_A \to \mathbb{C}; \quad (x, y) \mapsto \int\limits_{\mathrm{K}(A)} (x(f)|y(f))_{\mathscr{H}_f}\, d\mu(f)$$

leképezés (ahol természetesen nincs szó valódi integrálról), és nyilvánvaló, hogy ez a leképezés konjugált bilineáris, hermitikus és pozitív, így a

$$\|\cdot\|_\mu : \mathscr{H}_A \to \mathbb{R}_+; \quad x \mapsto \sqrt{(x|x)_\mu} = \sqrt{\int\limits_{\mathrm{K}(A)} \|x(f)\|^2_{\mathscr{H}_f}\, d\mu(f)}$$

leképezés Hilbert-félnorma $\mathscr{H}_A$ felett.

d) Legyen μ pozitív Radon-mérték a $\mathrm{K}(A)$ kompakt tér felett, és tekintsük az állításban értelmezett $\mathscr{H}_\mu$ Hilbert-teret. Ha $a \in A$, akkor

$$\|\mathbf{v}^\bullet_a\|^2_\mu = \int\limits_{\mathrm{K}(A)} \|\mathbf{v}_a(f)\|^2_{\mathscr{H}_f}\, d\mu(f) = \int\limits_{\mathrm{K}(A)} \|\pi_f(a)\zeta_f\|^2_{\mathscr{H}_f}\, d\mu(f) =$$

$$= \int\limits_{\mathrm{K}(A)} f(a^*a)\, d\mu(f) \leq |\|a^*a\|\mu(1_{\mathrm{K}(A)}) \leq \mu(1_{\mathrm{K}(A)})\|a\|^2,$$

amiből látszik, hogy az $A \to \mathscr{H}_\mu;\ a \mapsto \mathbf{v}^\bullet_a$ leképezés a normák szerint folytonos lineáris operátor.

Legyen $a \in A$ rögzítve; ekkor a b) szerint tekinthetjük a

$$\mathscr{H}_A \to \mathscr{H}_A; \quad x \mapsto (\pi_f(a)x(f))_{f\in\mathrm{K}(A)}$$

lineáris operátort. Ha $b \in A$ tetszőleges, akkor

$$\|(\pi_f(a)\mathbf{v}_b(f))_{f\in\mathrm{K}(A)}\|^2_\mu = \int\limits_{\mathrm{K}(A)} \|\pi_f(ab)\zeta_f\|^2_{\mathscr{H}_f}\, d\mu(f) = \int\limits_{\mathrm{K}(A)} f(b^*a^*ab)\, d\mu(f) \leq$$

$$\leq \int\limits_{\mathrm{K}(A)} \|a^*a\|f(b^*b)\, d\mu(f) = \|a^*a\| \int\limits_{\mathrm{K}(A)} \|\mathbf{v}_b(f)\|^2_{\mathscr{H}_f}\, d\mu(f) \leq \|a\|^2\|\mathbf{v}_b\|^2_\mu,$$

amiből következik egyetlen olyan $\pi_\mu(a) : \mathscr{H}_\mu \to \mathscr{H}_\mu$ folytonos lineáris operátor létezése, amelyre minden $x \in \mathscr{H}_A$ esetén

$$\pi_\mu(a)x^\bullet = \left(\pi_f(a)x(f)\right)_{f\in \mathrm{K}(A)}^{\bullet}.$$

A definíció alapján nyilvánvaló, hogy az $A \to \mathscr{L}(\mathscr{H}_\mu);\ a \mapsto \pi_\mu(a)$ leképezés lineáris operátor. Ha $a, b \in A$ és $x \in \mathscr{H}_A$, akkor

$$(\pi_\mu(a) \circ \pi_\mu(b))x^\bullet = \pi_\mu(a)(\pi_\mu(b)x^\bullet) := \pi_\mu(a)\left(\left(\pi_f(b)x(f)\right)_{f\in \mathrm{K}(A)}^{\bullet}\right) :=$$

$$:= \left(\pi_f(a)(\pi_f(b)x(f))\right)_{f\in \mathrm{K}(A)}^{\bullet} = \left(\pi_f(ab)x(f)\right)_{f\in \mathrm{K}(A)}^{\bullet} =: \pi_\mu(ab)x^\bullet,$$

és az $\{x^\bullet | x \in \mathscr{H}_A\}$ altér – a definíció szerint – sűrű a $\mathscr{H}_\mu$ Hilbert-térben, ezért $\pi_\mu(a) \circ \pi_\mu(b) = \pi_\mu(ab)$. Végül, ha $a \in A$ és $x, y \in \mathscr{H}_A$, akkor

$$(\pi_\mu(a)x^\bullet | y^\bullet)_\mu = \int\limits_{\mathrm{K}(A)} (\pi_f(a)x(f)|y(f))_{\mathscr{H}_f}\, d\mu(f) =$$

$$= \int\limits_{\mathrm{K}(A)} (x(f)|\pi_f(a^*)y(f))_{\mathscr{H}_f}\, d\mu(f) = (x^\bullet|\pi_\mu(a^*)y^\bullet)_\mu = ((\pi_\mu(a^*))^* x^\bullet | y^\bullet)_\mu,$$

ezért ismét a $\{x^\bullet | x \in \mathscr{H}_A\}$ altér sűrűsége folytán $\pi_\mu(a) = (\pi_\mu(a^*))^*$, ezért a $\pi_\mu : A \to \mathscr{L}(\mathscr{H}_\mu)$ leképezés ábrázolása A-nak a $\mathscr{H}_\mu$ Hilbert-térben. ■

21.7.2. Definíció. *Ha A Banach-*-algebra, és μ pozitív Radon-mérték a $\mathrm{K}(A)$ kompakt tér felett, akkor ez előző állításban értelmezett π_μ ábrázolást a $(\pi_f)_{f\in\mathrm{K}(A)}$ ábrázolás-rendszer μ-szerinti* **Hilbert-integráljának** *nevezzük, és az*

$$\int\limits_{\mathrm{K}(A)} \pi_f\, d\mu(f)$$

szimbólummal is jelöljük.

21.7.3. Állítás. *Legyen A Banach-*-algebra, és μ valószínűségi Radon-mérték a $\mathrm{K}(A)$ kompakt tér felett. Ha $\mathbf{b}(\mu)$ a μ baricentruma a $\mathrm{K}(A)$ kompakt konvex halmazban, akkor az $\int\limits_{\mathrm{K}(A)} \pi_f\, d\mu(f)$ és $\pi_{\mathbf{b}(\mu)}$ ábrázolások unitér ekvivalensek.*

Bizonyítás. Minden $a \in A$ esetén a $\varphi_a : A' \to \mathbb{C};\ f \mapsto f(a^*a)$ lineáris funkcionál folytonos a $\sigma(A', A)$ topológia szerint, tehát a baricentrum definícióját alkalmazva kapjuk, hogy minden $a \in A$ esetén

$$\|\mathbf{v}_a(\mathbf{b}(\mu))\|^2_{\mathscr{H}_{\mathbf{b}(\mu)}} = \|\pi_{\mathbf{b}(\mu)}(a)\zeta_{\mathbf{b}(\mu)}\|^2_{\mathscr{H}_{\mathbf{b}(\mu)}} = \mathbf{b}(\mu)(a^*a) = \varphi_a(\mathbf{b}(\mu)) =$$

$$= \int\limits_{\mathrm{K}(A)} \varphi_a|_{\mathrm{K}(A)} \, d\mu = \int\limits_{\mathrm{K}(A)} \varphi_a(f) \, d\mu(f) = \int\limits_{\mathrm{K}(A)} f(a^*a) \, d\mu(f) =$$

$$= \int\limits_{\mathrm{K}(A)} \|\pi_f(a)\zeta_f\|^2_{\mathscr{H}_f} \, d\mu(f) = \|\mathbf{v}_a\|^2_\mu.$$

Ebből következik egyetlen olyan $u_0 : \mathscr{H}_A/Ker\|\cdot\|_\mu \to \mathscr{H}_{\mathbf{b}(\mu)}$ lineáris operátor létezése, amelyre minden $x \in \mathscr{H}_A$ esetén $u_0(x^\bullet) = x(\mathbf{b}(\mu))$ teljesül, és láthatóan ez az operátor izometria. Ezért létezik egyetlen olyan $u : \mathscr{H}_\mu \to \mathscr{H}_{\mathbf{b}(\mu)}$ lineáris izometria, amely az u_0-nak kiterjesztése. Továbbá

$$\mathrm{Im}(u) \supseteq \mathrm{Im}(u_0) = \{x(\mathbf{b}(\mu)) | x \in \mathscr{H}_A\} =$$

$$= \{\mathbf{v}_a(\mathbf{b}(\mu)) | a \in A\} = \{\pi_{\mathbf{b}(\mu)}(a)\zeta_{\mathbf{b}(\mu)} | a \in A\},$$

tehát az $\mathrm{Im}(u)$ halmaz sűrű $\mathscr{H}_{\mathbf{b}(\mu)}$-ben, mert a $\zeta_{\mathbf{b}(\mu)}$ vektor $\pi_{\mathbf{b}(\mu)}$-ciklikus; így u unitér operátor.

Ha $a \in A$ és $x \in \mathscr{H}_A$, akkor a π_μ Hilbert-integrál és az u operátor értelmezése alapján

$$\pi_{\mathbf{b}(\mu)}(a)(u(x^\bullet)) = \pi_{\mathbf{b}(\mu)}(a)(x(\mathbf{b}(\mu))) = u((\pi_f(a)x(f))^\bullet_{f \in \mathrm{K}(A)}) = u(\pi_\mu(a)x^\bullet),$$

ami azt jelenti, hogy $\pi_{\mathbf{b}(\mu)}(a) \circ u = u \circ \pi_\mu(a)$ az $\{x^\bullet | x \in \mathscr{H}_A\}$ altéren, ami sűrű $\mathscr{H}_\mu$-ben. Ez azt jelenti, hogy $u \in C(\pi_\mu; \pi_{\mathbf{b}(\mu)})$, így π_μ és $\pi_{\mathbf{b}(\mu)}$ az u által unitér ekvivalensek. ■

Tehát, ha A Banach-*-algebra, és μ *valószínűségi* Radon-mérték a $\mathrm{K}(A)$ kompakt tér felett, akkor az $\int\limits_{\mathrm{K}(A)} \pi_f \, d\mu(f)$ ábrázolás *ciklikus*, hiszen unitér ekvivalens a $\pi_{\mathbf{b}(\mu)}$ ciklikus ábrázolással.

21.7.4. Tétel. (Choquet-tétel) *Ha A szeparábilis Banach-*-algebra, és π az A-nak ciklikus ábrázolása, akkor létezik a* $\mathrm{K}(A)$ *kompakt tér felett olyan μ valószínűségi Radon-mérték, amely az* $\mathrm{Ext}(\mathrm{K}(A))$ *halmazon koncentrált és amelyre az* $\int\limits_{\mathrm{K}(A)} \pi_f \, d\mu(f)$ *Hilbert-integrál unitér ekvivalens π-vel.*

Bizonyítás. Legyen ζ olyan π-ciklikus vektor a π ábrázolási terében, amelyre $\|\zeta\| \leq 1$; ekkor $\Phi_{\pi,\zeta} \in \mathrm{K}(A)$, hiszen $\|\Phi_{\pi,\zeta}\|_* = \|\zeta\|^2 \leq 1$. Az A szeparabilitása miatt az A' zárt egységgömbje a $\sigma(A', A)$ topológia leszűkítésével *metrizálható* topologikus tér, így $\mathrm{K}(A)$ a $\sigma(A', A)|\mathrm{K}(A)$ topológiával metrizálható kompakt konvex halmaz. A metrizálható Choquet-tétel szerint van olyan μ valószínűségi Radon-mérték $\mathrm{K}(A)$ felett, amelyre $\mathbf{b}(\mu) = \Phi_{\pi,\zeta}$ és amely az $\mathrm{Ext}(\mathrm{K}(A))$ halmazon koncentrált. Ugyanakkor $\mathbf{b}(\mu) = f_{\pi_{\mathbf{b}(\mu)}, \zeta_{\mathbf{b}(\mu)}}$, ezért a Godement-tétel alapján $\pi_{\mathbf{b}(\mu)}$ és π unitér ekvivalensek. Az előző állítás szerint viszont $\int\limits_{\mathrm{K}(A)} \pi_f \, d\mu(f)$ és $\pi_{\mathbf{b}(\mu)}$ unitér ekvivalensek. Ezért μ olyan Radon-mérték, amelynek a létezését állítottuk. ■

Az előző tétel jelöléseit alkalmazva; az $\int\limits_{\mathrm{K}(A)} \pi_f \; d\mu(f)$ szimbólum helyett az

$$\int\limits_{\mathrm{Ext}(\mathrm{K}(A))} \pi_f \; d\mu(f)$$

jelölést is alkalmazhatjuk, hiszen a $\mathrm{K}(A)\backslash\mathrm{Ext}(\mathrm{K}(A))$ halmaz μ-nullahalmaz. Ugyanakkor minden $f \in \mathrm{Ext}(\mathrm{K}(A))$ esetén π_f geometriailag irreducibilis ábrázolása A-nak, ezért a π ciklikus ábrázolást geometriailag irreducibilis ábrázolások Hilbert-integráljára bontottuk fel.

21.8. Kommutatív Banach-*-algebra ábrázolható funkcionáljai – Bochner-tétel

A következő tételből kiderül, hogy a *kommutatív* Banach-*-algebrák feletti ábrázolható pozitív funkcionálok elmélete azonosítható a lokálisan kompakt terek feletti korlátos pozitív Radon-mértékek elméletével. Ezért a Banach-*-algebrák feletti ábrázolható pozitív funkcionálok elmélete a (korlátos) Radon-mértékelmélet nemkommutatív általánosításának nevezhető.

21.8.1. Tétel. (Absztrakt Bochner-tétel) *Legyen A kommutatív Banach-*-algebra, és jelölje $\mathscr{M}_+^b(\mathrm{X}_{sa}(A))$ a $\overline{\mathscr{K}}(\mathrm{X}_{sa}(A);\mathbb{C})$ függvény-C^*-algebra feletti pozitív funkcionálok halmazát. Legyen továbbá $A^\#$ az A feletti ábrázolható pozitív funkcionálok halmaza. Ekkor minden $\mu \in \mathscr{M}_+^b(\mathrm{X}_{sa}(A))$ esetén $\mu \circ \mathscr{G}_{A,sa} \in A^\#$, és az*

$$\mathscr{M}_+^b(\mathrm{X}_{sa}(A)) \to A^\#; \quad \mu \mapsto \mu \circ \mathscr{G}_{A,sa}$$

leképezés olyan bijekció, amelyre minden $\mu \in \mathscr{M}_+^b(\mathrm{X}_{sa}(A))$ esetén $\|\mu \circ \mathscr{G}_{A,sa}\| \leq \|\mu\|$. Ha az A kommutatív Banach--algebrának létezik olyan $(e_i)_{i\in I}$ approximatív egysége, hogy minden $I \ni i$-re $\|e_i^* e_i\| \leq 1$, akkor minden $\mu \in \mathscr{M}_+^b(\mathrm{X}_{sa}(A))$ esetén $\|\mu \circ \mathscr{G}_{A,sa}\| = \|\mu\|$.*

Bizonyítás. Legyen $\mu \in \mathscr{M}_+^b(\mathrm{X}_{sa}(A))$. Ekkor a μ leszűkítése $\mathscr{K}(\mathrm{X}_{sa}(A);\mathbb{R})$-re olyan pozitív Radon-mérték az $\mathrm{X}_{sa}(A)$ lokálisan kompakt tér felett, amely sup-normában folytonos, hiszen C^*-algebra felett minden pozitív funkcionál folytonos; jelölje μ_0 ezt a leszűkítést. Könnyen látható, hogy ha $\varphi : \mathrm{X}_{sa}(A) \to \mathbb{R}_+$ folytonos végtelenben eltűnő függvény, akkor $\mu(\varphi) = \int^* \varphi \; d\mu$, mert létezik olyan $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sorozat $\mathscr{K}(\mathrm{X}_{sa}(A);\mathbb{R})$-ben, amely pozitív függvényekből áll, monoton növő, és egyenletesen konvergál φ-hez $\mathrm{X}_{sa}(A)$-n és $\varphi = \sup_{n\in\mathbb{N}} \varphi_n$; ekkor a μ sup-norma szerinti folytonossága és a μ_0 által generált felső integrál monoton σ-folytonossága alapján

$$\mu(\varphi) = \lim_{n\to\infty} \mu(\varphi_n) = \sup_{n\in\mathbb{N}} \mu(\varphi_n) = \sup_{n\in\mathbb{N}} \mu_0(\varphi_n) =$$

$$= \sup_{n\in\mathbb{N}} \int^* \varphi_n d\mu_0 = \int^* \sup_{n\in\mathbb{N}} \varphi_n \, d\mu_0 = \int^* \varphi \, d\mu_0.$$

Továbbá, fennáll a $\|\mu\| = \int^* 1_{\mathrm{X}_{sa}(A)} d\mu_0$ egyenlőség, ahol $1_{\mathrm{X}_{sa}(A)}$ jelöli az $\mathrm{X}_{sa} \to \mathbb{R}$ azonosan 1 függvényt. Valóban, ha $\varphi \in \overline{\mathscr{K}}(\mathrm{X}_{sa}(A);\mathbb{C})$ és $|\varphi| \le 1_{\mathrm{X}_{sa}(A)}$, akkor az előző egyenlőtlenség alkalmazásával kapjuk, hogy

$$|\mu(\varphi)| \le \mu(|\varphi|) = \int^* |\varphi| d\mu_0 \le \int^* 1_{\mathrm{X}_{sa}(A)} d\mu_0,$$

ezért $\|\mu\| \le \int^* 1_{\mathrm{X}_{sa}(A)} d\mu_0$. Megfordítva, ha $\varphi \in \overline{\mathscr{K}}(\mathrm{X}_{sa}(A);\mathbb{R})$ és $0 \le \varphi \le 1_{\mathrm{X}_{sa}(A)}$, akkor $\mu_0(\varphi) = \mu(\varphi) \le \|\mu\|$, ezért

$$\int^* 1_{\mathrm{X}_{sa}(A)} d\mu_0 = \sup\{\mu_0(\varphi) | (\varphi \in \overline{\mathscr{K}}(\mathrm{X}_{sa}(A);\mathbb{R})) \wedge (0 \le \varphi \le 1_{\mathrm{X}_{sa}(A)})\} \le \|\mu\|,$$

ahol kihasználtuk, hogy $1_{\mathrm{X}_{sa}(A)}$ pozitív (alulról félig) folytonos függvény $\mathrm{X}_{sa}(A)$ felett.

A $\mathscr{G}_{A,sa}{:}A{\to}\overline{\mathscr{K}}(\mathrm{X}_{sa}(A);\mathbb{C})$ önadjungált Gelfand-reprezentáció *-algebra morfizmus, ezért $\mu\circ\mathscr{G}_{A,sa} : A \to \mathbb{C}$ pozitív funkcionál. Ugyanakkor μ és $\mathscr{G}_{A,sa}$ folytonosak a $\overline{\mathscr{K}}(\mathrm{X}_{sa}(A);\mathbb{C})$ feletti sup-norma és az A feletti C^*-norma szerint, ezért a $\mu \circ \mathscr{G}_{A,sa}$ pozitív funkcionál folytonos is. Azonban A nem szükségképpen approximatív egységes, ezért a $\mu \circ \mathscr{G}_{A,sa}$ funkcionál ábrázolhatósága még bizonyításra szorul. Ha $a \in A$, akkor

$$|(\mu \circ \mathscr{G}_{A,sa})(a)| \le \mu(|\mathscr{G}_{A,sa}(a)|) = \int^* |\mathscr{G}_{A,sa}(a)| d\mu_0 = \int^* |\mathscr{G}_{A,sa}(a)| 1_{\mathrm{X}_{sa}(A)} d\mu_0 \le$$

$$\le \sqrt{\int^* |\mathscr{G}_{A,sa}(a)|^2 d\mu_0} \sqrt{\int^* 1^2_{\mathrm{X}_{sa}(A)} d\mu_0} = \sqrt{\mu(\mathscr{G}_{A,sa}(a^*a))} \sqrt{\|\mu\|},$$

ahol a μ_0 által generált felső integrálra alkalmaztuk a Hölder-egyenlőtlenséget. Ez azt jelenti, hogy minden $a \in A$ esetén $|(\mu \circ \mathscr{G}_{A,sa})(a)|^2 \le \|\mu\| (\mu \circ \mathscr{G}_{A,sa})(a^*a)$, vagyis $\mu \circ \mathscr{G}_{A,sa} \in A^\#$.

Az $\mathscr{M}^b_+(\mathrm{X}_{sa}(A)) \to A^\#;\ \mu \mapsto \mu \circ \mathscr{G}_{A,sa}$ leképezés injektív, mert ha $\mu, \mu' \in \mathscr{M}^b_+(\mathrm{X}_{sa}(A))$ és $\mu \circ \mathscr{G}_{A,sa} = \mu' \circ \mathscr{G}_{A,sa}$, akkor $\mathrm{Im}(\mathscr{G}_{A,sa}) \subseteq [\mu = \mu']$, és tudjuk, hogy $\mathrm{Im}(\mathscr{G}_{A,sa})$ sűrű $\overline{\mathscr{K}}(\mathrm{X}_{sa}(A);\mathbb{C})$-ben a sup-norma szerint, így az egyenlőségek folytatásának elve alapján $\mu = \mu'$. Ha $a \in A$ és $\|a\| \le 1$, akkor $|\mathscr{G}_{A,sa}(a)| \le \|a\| \le 1$, ezért

$|(\mu \circ \mathscr{G}_{A,sa})(a)| \leq \mu(|\mathscr{G}_{A,sa}(a)|) \leq \|\mu\|$, amiből következik, hogy $\|\mu \circ \mathscr{G}_{A,sa}\| \leq \|\mu\|$.

Az $\mathscr{M}_+^b(\mathrm{X}_{sa}(A)) \to A^\#;\ \mu \mapsto \mu \circ \mathscr{G}_{A,sa}$ leképezés szürjektivitásának bizonyításához legyen $f \in A^\#$ rögzítve. Ekkor tekinthetjük a GNS-konstrukcióval előállított $\pi_f : A \to \mathscr{L}(\mathscr{H}_f)$ ábrázolást, amelyhez az absztrakt Stone-tétel alapján létezik olyan $P_f : \overline{\mathscr{K}}(\mathrm{X}_{sa}(A);\mathbb{C}) \to \mathscr{L}(\mathscr{H}_f)$ ábrázolás, hogy $\pi_f = P_f \circ \mathscr{G}_{A,sa}$. Ekkor a $\mu := (P_f(\cdot)\zeta_f|\zeta_f) : \overline{\mathscr{K}}(\mathrm{X}_{sa}(A);\mathbb{C}) \to \mathbb{C}$ leképezés sup-normában folytonos pozitív funkcionál $\overline{\mathscr{K}}(\mathrm{X}_{sa}(A);\mathbb{C})$ felett, tehát $\mu \in \mathscr{M}_+^b(\mathrm{X}_{sa}(A))$. Ugyanakkor a definíció alapján $\mu \circ \mathscr{G}_{A,sa} = ((P_f \circ \mathscr{G}_{A,sa})(\cdot)\zeta_f|\zeta_f) = (\pi_f(\cdot)\zeta_f|\zeta_f) = f$.

Tegyük fel, hogy $(e_i)_{i\in I}$ olyan approximatív egység A-ban, amelyre minden $i \in I$ esetén $\|e_i^* e_i\| \leq 1$. A $\mathscr{M}_+^b(\mathrm{X}_{sa}(A)) \to A^\#;\ \mu \mapsto \mu \circ \mathscr{G}_{A,sa}$ leképezés izometrikusságának bizonyításához legyen $\mu \in \mathscr{M}_+^b(\mathrm{X}_{sa}(A))$ rögzítve. Jelölje ν a μ leszűkítését az $\mathrm{Im}(\mathscr{G}_{A,sa})$ lineáris altérre. A ν funkcionál folytonos a sup-norma szerint és $\mathrm{Im}(\mathscr{G}_{A,sa})$ sűrű $\overline{\mathscr{K}}(\mathrm{X}_{sa}(A);\mathbb{C})$-ben a sup-norma szerint, ezért a folytonos lineáris operátorok kiterjesztési tétele alapján $\|\mu\| = \|\nu\|$, ami azt jelenti, hogy

$$\|\mu\| = \sup\{|\mu(\mathscr{G}_{A,sa}(a))| | (a \in A) \wedge (|\mathscr{G}_{A,sa}(a)| \leq 1_{\mathrm{X}_{sa}(A)})\},$$

hiszen itt az egyenlőség jobb oldalán éppen $\|\nu\|$ áll. Az A-ra vonatkozó hipotézisből következik, hogy $\|\mu \circ \mathscr{G}_{A,sa}\| = \|\mu \circ \mathscr{G}_{A,sa}\|_*$, tehát minden $a \in A$ esetén

$$|(\mu \circ \mathscr{G}_{A,sa})(a)|^2 \leq \|\mu \circ \mathscr{G}_{A,sa}\|(\mu \circ \mathscr{G}_{A,sa})(a^*a) = \|\mu \circ \mathscr{G}_{A,sa}\|\mu(|\mathscr{G}_{A,sa}(a)|^2).$$

Ha $a \in A$ olyan, hogy $|\mathscr{G}_{A,sa}(a)| \leq 1_{\mathrm{X}_{sa}(A)}$, akkor $|\mathscr{G}_{A,sa}(a)|^2 \leq 1_{\mathrm{X}_{sa}(A)}$, így az előző egyenlőtlenségből $|\mu(\mathscr{G}_{A,sa}(a))|^2 \leq \|\mu \circ \mathscr{G}_{A,sa}\|\mu(|\mathscr{G}_{A,sa}(a)|^2) \leq \|\mu \circ \mathscr{G}_{A,sa}\|\|\mu\|$ adódik, tehát

$$\|\mu\| = \sup\{|\mu(\mathscr{G}_{A,sa}(a))| | (a \in A) \wedge (|\mathscr{G}_{A,sa}(a)| \leq 1_{\mathrm{X}_{sa}(A)})\} \leq \overline{\|\mu \circ \mathscr{G}_{A,sa}\|}\ \overline{\|\mu\|}.$$

Ebből $\|\mu\| \leq \|\mu \circ \mathscr{G}_{A,sa}\|$ következik, ezért $\|\mu\| = \|\mu \circ \mathscr{G}_{A,sa}\|$. ■

22. fejezet

Banach-*-algebrák hű ábrázolásai

22.1. C^*-algebra hű ábrázolásának létezése – Második Gelfand-Najmark tétel

Egy A *-algebra hű ábrázolása létezésének triviális szükséges feltétele az A involúciójának valódisága, hiszen ha π hű ábrázolása A-nak a $\mathscr{H}$ Hilbert-térben, akkor $a \in A$ és $a^*a = 0$ esetén $\pi(a)^*\pi(a) = \pi(a^*a) = 0$, ezért $\pi(a) = 0$, hiszen $\pi(a) \in \mathscr{L}(\mathscr{H})$ és $\mathscr{L}(\mathscr{H})$ C^*-algebra, így szükségképpen $a = 0$.

Megjegyezzük azt, hogy C^*-algebra minden hű ábrázolása *izometria*, mert Banach-*-algebrából pre-C^*-algebrába vezető *-algebra-morfizmus norma-nem-növelő (17.4.2.), és C^*-algebrából normált *-algebrába vezető injektív *-algebra-morfizmus norma-nem-csökkentő (18.2.1.).

22.1.1. Tétel. (Második Gelfand-Najmark tétel) *Minden C^*-algebrának létezik hű ábrázolása.*

Bizonyítás. Először megmutatjuk, hogy ha $a \in A \setminus \{0\}$, akkor létezik olyan $f : A \to \mathbb{C}$ pozitív funkcionál, amelyre $f(a^*a) > 0$. Ehhez tekintsük az A_{sa} valós Banach-térben az A_+ nem üres zárt konvex halmazt és a $\{-a^*a\}$ nem üres kompakt konvex halmazt. Ezek diszjunktak, különben $-a^*a \in (-A_+) \cap A_+ = \{0\}$ teljesülne, tehát $a^*a = 0$ lenne, így $a = 0$, holott $a \neq 0$. Ezért a lokálisan konvex terekre vonatkozó Hahn–Banach szétválasztási-tétel (4.6.2.) alapján létezik olyan $u : A_{sa} \to \mathbb{R}$ folytonos lineáris funkcionál és olyan $c \in \mathbb{R}$, hogy $\{-a^*a\} \subseteq [u < c]$ és $A_+ \subseteq [u > c]$. Ekkor $0 \in A_+$ miatt $0 = u(0) > c$, így $u(a^*a) > -c > 0$. Ha $x \in A_+$, akkor minden $r \in \mathbb{R}^+$ esetén $r.x \in A_+$, így $r.u(x) = u(r.x) > c$, tehát $u(x) > c/r$, amiből $r \to \infty$ után kapjuk, hogy $u(x) \geq 0$. Tehát az $u : A_{sa} \to \mathbb{R}$ lineáris funkcionál olyan, hogy $u(a^*a) > 0$ és minden $x \in A_+$ esetén $u(x) \geq 0$. Ha f jelöli az u egyetlen $\mathbb{C}$-lineáris kiterjesztését A-ra, akkor f olyan pozitív funkcionál A felett, amelyre $f(a^*a) > 0$.

Most a kiválasztási axióma alkalmazásával választunk olyan $(f_a)_{a \in A \setminus \{0\}}$ rendszert, hogy minden $a \in A \setminus \{0\}$ esetén f_a pozitív funkcionál A felett és $f_a(a^*a) > 0$. Minden $a \in A \setminus \{0\}$ elemre jelölje π_a az f_a által GNS-konstrukcióval meghatározott ábrázolást, $\mathscr{H}_a$ a π_a ábrázolás terét, és ζ_a a $\mathscr{H}_a$-ban meghatározott π_a-ciklikus vektort. Legyen π a $(\pi_a)_{a \in A \setminus \{0\}}$ ábrázolás-rendszer Hilbert-összege, és $\mathscr{H}$ a π ábrázolás tere. A Hilbert-összeg definíciója alapján $\mathscr{H}_0 := \bigoplus_{a \in A \setminus \{0\}} \mathscr{H}_a \subseteq \mathscr{H}$. Minden $a \in A \setminus \{0\}$ esetén legyen $\overline{\zeta}_a \in \mathscr{H}_0$ az az elem, amelynek a-adik komponense ζ_a, és a többi komponense 0.

Ezután könnyen belátható, hogy π az A-nak hű ábrázolása. Ha ugyanis $a \in A$ olyan, hogy $a \neq 0$, akkor a π értelmezése alapján $\pi(a)\overline{\zeta_a} := \overline{\pi_a(\zeta_a)}$, tehát

$$\|\pi(a)\overline{\zeta_a}\|^2 = \|\pi_a(\zeta_a)\|^2 = (\pi_a(a^*a)\zeta_a|\zeta_a) = f_a(a^*a) > 0,$$

ezért $\pi(a) \neq 0$. ■

A második Gelfand-Najmark-tétel fontos elvi következménye az, hogy izometrikus *-izomorfia erejéig a Hilbert-terek folytonos lineáris operátorai algebrájának C^*-részalgebrái a legáltalánosabb típusú C^*-algebrák. A továbbiakban bebizonyítunk néhány olyan állítást, amely megmutatja, hogy ennek a tételnek fontos gyakorlati alkalmazásai is vannak.

22.1.2. Következmény. *Az A *-algebrának pontosan akkor létezik hű ábrázolása, ha létezik A felett pre-C^*-norma.*

Bizonyítás. Ha π hű ábrázolása A-nak, akkor az $A \to \mathbb{R}_+$; $a \mapsto \|\pi(a)\|$ leképezés A felett pre-C^*-norma. Megfordítva, ha $\|\cdot\|$ az A felett pre-C^*-norma, akkor létezik olyan B C^*-algebra, és olyan $\pi : A \to B$ *-algebra-morfizmus, amelyre $\|\cdot\| = \|\cdot\|_B \circ \pi$, ahol $\|\cdot\|_B$ a B feletti C^*-norma (17.5.2.). Ekkor π szükségképpen injektív, és a második Gelfand-Najmark-tétel alapján vehetjük B-nek egy σ hű ábrázolását, így $\sigma \circ \pi$ az A-nak hű ábrázolása. ■

22.1.3. Következmény. *Az A Banach-*-algebrának pontosan akkor létezik hű ábrázolása, ha az $A \to \mathrm{St}(A)$ kanonikus leképezés injektív.*

Bizonyítás. Ha j az $A \to \mathrm{St}(A)$ kanonikus leképezés, és π az A-nak hű ábrázolása, akkor az $\mathrm{St}(A)$-nak van olyan $\tilde{\pi}$ ábrázolása, amelyre $\tilde{\pi} \circ j = \pi$; világos, hogy ekkor a π injektivitásából következik a j injektivitása. Megfordítva, a második Gelfand-Najmark-tétel alapján vehetjük az $\mathrm{St}(A)$ C^*-algebrának egy σ hű ábrázolását, tehát, ha j injektív, akkor $\sigma \circ j$ az A-nak hű ábrázolása. ■

Példa. Korábban láttuk, hogy az A diszk-algebra esetében a $\mathscr{C}([-1,1];\mathbb{C})$ függvényalgebra a

$$j : A \to \mathscr{C}([-1,1];\mathbb{C}); \quad a \mapsto a|_{[-1,1]}$$

leképezéssel együtt az A-nak fedő C^*-algebrája. A holomorf függvények tulajdonságai szerint ez a j függvény injektív, így a fentiek alapján A-nak létezik hű ábrázolása, holott A nem C^*-algebra.

22.1.4. Következmény. *Az A kommutatív Banach-*-algebrának pontosan akkor létezik hű ábrázolása, ha minden $a \in A \setminus \{0\}$ elemhez létezik A-nak olyan χ önadjungált karaktere, amelyre $\chi(a) \neq 0$, vagyis $\mathrm{X}_{sa}(A)$ szétválasztó A felett.*

Bizonyítás. Az absztrakt Stone-tétel (18.3.2.) alapján a $\mathscr{G}_{A,sa}$ önadjungált Gelfand-reprezentáció az A kommutatív Banach-*-algebrának fedő leképezése. Ezért az előzőek szerint az A-nak pontosan akkor létezik hű ábrázolása, ha $\mathscr{G}_{A,sa}$ injektív. Ugyanakkor a $\mathscr{G}_{A,sa}$ leképezés injektivitása nyilvánvalóan ekvivalens azzal, hogy az $\mathrm{X}_{sa}(A)$ halmaz szétválasztó A felett. ■

22.2. A fedő C^*-algebra normájának kiszámítása

Korábban láttuk, hogy ha az A *-algebra felett létezik Banach-*-norma, akkor létezik A felett legnagyobb C^*-félnorma (17.5.6.); ez az észrevétel vezetett Banach-*-algebra fedő C^*-algebrájának konstrukciójához. Most a GNS-konstrukció és a második Gelfand-Najmark-tétel alkalmazásával jellemezni fogjuk ezt a legnagyobb C^*-félnormát. Ugyanakkor, a következő tétel C^*-algebrák esetében az absztrakt Gelfand-Rajkov-tétel pontosításának tekinthető.

22.2.1. Tétel. *Legyen A Banach-*-algebra, és jelölje $\|\cdot\|_{\mathrm{St}}$ a legnagyobb A feletti C^*-félnormát. Legyen továbbá $\mathrm{Rep}(A)$ az A ábrázolásainak osztálya és $\mathrm{Irr}(A)$ az A geometriailag irreducibilis ábrázolásainak osztálya. Ekkor minden $a \in A$ esetén*

$$\sup_{f \in \mathrm{Ext}(\mathrm{K}(A))} \overline{f(a^*a)} = \sup_{\pi \in \mathrm{Irr}(A)} \|\pi(a)\| = \sup_{\pi \in \mathrm{Rep}(A)} \|\pi(a)\| =$$

$$= \sup_{f \in \mathrm{K}(A)} \overline{f(a^*a)} = \|a\|_{\mathrm{St}}.$$

Bizonyítás. Legyen $a \in A$ rögzítve, és ezt az öt számot jelölje rendre α, β, γ, δ és ε.

Először megmutatjuk, hogy $\alpha \leq \beta \leq \gamma \leq \delta \leq \alpha$, tehát az első négy szám egyenlő.

$(\alpha \leq \beta)$ Ha $f \in \mathrm{Ext}(\mathrm{K}(A))$, akkor az f által GNS-konstrukcióval meghatározott π_f ábrázolás geometriailag irreducibilis, vagyis $\pi_f \in \mathrm{Irr}(A)$, és

$$\overline{f(a^*a)} = \|\pi_f(a)\zeta_f\| \leq \|\pi_f(a)\|\|\zeta_f\| = \|\pi_f(a)\| \leq \beta,$$

ezért $\alpha \leq \beta$. Láthatóan itt azt használtuk fel, hogy $f \in \mathrm{Ext}(\mathrm{K}(A)) \setminus \{0\}$ esetén $1 = \|f\|_* = \|\Phi_{\pi_f,\zeta_f}\|_* = \|\zeta_f\|^2$, ezért $\|\zeta_f\| = 1$.

$(\beta \leq \gamma)$ Triviális, mert $\mathrm{Irr}(A) \subseteq \mathrm{Rep}(A)$.

$(\gamma \leq \delta)$ Legyen $\pi \in \mathrm{Rep}(A)$ és ζ a π ábrázolási terének olyan eleme, amelyre $\|\zeta\| \leq 1$. Ekkor $\Phi_{\pi,\zeta} \in \mathrm{K}(A)$, hiszen $\|\Phi_{\pi,\zeta}\|_* \leq \|\zeta\|^2 \leq 1$, tehát $\|\pi(a)\zeta\| = \sqrt{\Phi_{\pi,\zeta}(a^*a)} \leq \delta$. Ebből következik, hogy $\|\pi(a)\| \leq \delta$, tehát $\gamma \leq \delta$.

$(\delta \leq \alpha)$ Legyen $c \in \mathbb{R}_+$ olyan, hogy $c < \delta$. Ekkor létezik olyan $f \in \mathrm{K}(A)$, hogy $c < \sqrt{f(a^*a)}$, vagyis $c^2 < f(a^*a)$. A Krein–Milman-tétel alapján $\mathrm{K}(A) = \overline{\mathrm{co}}(\mathrm{Ext}(\mathrm{K}(A)))$, ahol a lezárást a $\sigma(A', A)$ topológia szerint kell venni. Ezért van olyan $g \in \mathrm{Ext}(\mathrm{K}(A))$, hogy $c^2 < g(a^*a)$, vagyis $c < \sqrt{g(a^*a)} \leq \alpha$. Ez azt jelenti, hogy $\delta \leq \alpha$.

A *algebrák feletti C^*-félnormák jellemzési tétele (17.5.2.) alapján a $\|\cdot\|_{\mathrm{St}}$ C^*-félnormához létezik olyan B C^*-algebra, és olyan $\sigma : A \to B$ *-algebra-morfizmus, amelyre $\|\cdot\|_{\mathrm{St}} = \|\cdot\|_B \circ \sigma$, ahol $\|\cdot\|_B$ a B feletti C^*-norma. A második Gelfand-Najmark-tétel alapján B-nek létezik egy π hű ábrázolása. Ekkor minden $a \in A$ esetén $\|a\|_{\mathrm{St}} = \|\sigma(a)\|_B = \|(\pi \circ \sigma)(a))\| \leq \gamma$, hiszen π izometria, és $\pi \circ \sigma \in \mathrm{Rep}(A)$. Ezért $\varepsilon \leq \gamma$.

Végül, ha $\pi \in \mathrm{Rep}(A)$, akkor az $A \to \mathbb{R}_+$; $a' \mapsto \|\pi(a')\|$ leképezés az A felett C^*-félnorma, így $\|\pi(a)\| \leq \|a\|_{\mathrm{St}}$, hiszen $\|\cdot\|_{\mathrm{St}}$ a legnagyobb C^*-félnorma A felett. Ezért $\gamma \leq \varepsilon$ is teljesül. ■

22.2.2. Következmény. *Ha A C^*-algebra, akkor létezik az A geometriailag irreducibilis ábrázolásainak olyan $(\pi_i)_{i\in I}$ rendszere, amelyre minden $a \in A$ esetén $\|a\| = \sup_{i\in I} \|\pi_i(a)\|$. Ha A szeparábilis C^*-algebra, akkor létezik az A geometriailag irreducibilis ábrázolásainak olyan $(\pi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sorozata, amelyre minden $a \in A$ esetén $\|a\| = \sup_{n\in\mathbb{N}} \|\pi_n(a)\|$.*

Bizonyítás. Az A feletti C^*-norma egyenlő $\|\cdot\|_{\mathrm{St}}$-vel, ezért az előző állítás alapján minden $a \in A$ elemhez létezik az A geometriailag irreducibilis ábrázolásainak olyan $(\pi_{a,n})_{n\in\mathbb{N}}$ sorozata, amelyre $\|a\| = \sup_{n\in\mathbb{N}} \|\pi_{a,n}(a)\|$. Ekkor a $(\pi_{a,n})_{(a,n)\in A\times\mathbb{N}}$ ábrázolás-rendszer eleget tesz a feltételnek.

Ha D megszámlálható sűrű halmaz A-ban, akkor már a $(\pi_{a,n})_{(a,n)\in D\times\mathbb{N}}$ ábrázolás-rendszer is eleget tesz a feltételnek, ugyanakkor $D \times \mathbb{N}$ megszámlálható halmaz. ■

22.3. A pozitivitás ábrázoláselméleti jellemzése C^*-algebrában

22.3.1. Állítás. (A pozitivitás ábrázoláselméleti jellemzése) *Ha A C^*-algebra és $x \in A_{sa}$, akkor a következő állítások ekvivalensek.*

a) *$x \in A_+$.*

b) *Minden $f : A \to \mathbb{C}$ pozitív funkcionálra $f(x) \in \mathbb{R}_+$.*

c) *Az A minden π ábrázolására $\pi(x)$ pozitív operátor.*

d) *Létezik az A-nak olyan π hű ábrázolása, amelyre $\pi(x)$ pozitív operátor.*

Bizonyítás. a)$\Rightarrow$b) Triviális.

b)$\Rightarrow$c) Legyen π ábrázolása A-nak, és ζ tetszőleges eleme a π ábrázolás terének. Ekkor $\Phi_{\pi,\zeta} : A \to \mathbb{C}$ pozitív funkcionál, ezért a b) hipotézis alapján $(\pi(x)\zeta|\zeta) = \Phi_{\pi,\zeta}(x) \in \mathbb{R}_+$, ami a pozitívitás operátoralgebrai jellemzése szerint azt jelenti, hogy a $\pi(x)$ operátor pozitív.

c)$\Rightarrow$d) Nyilvánvaló, mert a második Gelfand-Najmark-tétel alapján létezik A-nak hű ábrázolása.

d)$\Rightarrow$a) Legyen π olyan hű ábrázolása A-nak a $\mathscr{H}$ Hilbert-térben, hogy $\pi(x)$ operátor pozitív. Ekkor $\mathrm{Im}(\pi)$ az $\mathscr{L}(\mathscr{H})$ operátoralgebrának olyan C^*-részalgebrája, amely a π által *-izomorf A-val. Ezért $x \in A_+$ pontosan akkor teljesül, ha $\pi(x)$ pozitív elem az $\mathrm{Im}(\pi)$ C^*-algebrában. A pozitivitás spektrális jellemzése alapján $\pi(x)$ pontosan akkor pozitív az $\mathrm{Im}(\pi)$ C^*-algebrában, ha $\mathrm{Sp}'_{\mathrm{Im}(\pi)}(\pi(x)) \subseteq \mathbb{R}_+$. Azonban $\mathrm{Sp}'_{\mathscr{L}(\mathscr{H})}(\pi(x)) \subseteq \mathbb{R}_+$, mivel $\pi(x)$ pozitív operátor, és tudjuk azt, hogy $\mathrm{Sp}'_{\mathscr{L}(\mathscr{H})}(\pi(x)) = \mathrm{Sp}'_{\mathrm{Im}(\pi)}(\pi(x))$, így $\pi(x)$ pozitív $\mathrm{Im}(\pi)$-ben. ■

22.4. C^*-algebra önadjungált funkcionáljai

22.4.1. Definíció. *Ha A C^*-algebra, akkor*

$$\mathrm{E}(A) := \{f \in \mathrm{K}(A) \mid \|f\| = 1\}, \quad \mathrm{P}(A) := \mathrm{Ext}(\mathrm{K}(A)) \setminus \{0\},$$

és az $\mathrm{E}(A)$ *halmaz elemeit A feletti* **állapotoknak**, *míg a* $\mathrm{P}(A)$ *halmaz elemeit A feletti* **tiszta állapotoknak** *nevezzük.*

22.4.2. Állítás. *Legyen A C^*-algebra, és a* $\mathrm{P}(A)$, $\mathrm{E}(A)$, *valamint* $\mathrm{K}(A)$ *halmazokat lássuk el a* $\sigma(A', A)$ *topológia leszűkítésével (tehát* $\mathrm{K}(A)$ *kompakt tér,* $\mathrm{P}(A)$ *és* $\mathrm{E}(A)$ *teljesen reguláris Hausdorff-terek). Lássuk el a* $\mathscr{C}(\mathrm{K}(A);\mathbb{R})$, $\mathscr{C}^b(\mathrm{E}(A);\mathbb{R})$ *és* $\mathscr{C}^b(\mathrm{P}(A);\mathbb{R})$ *valós függvénytereket a sup-normával és a pontonkénti rendezéssel. Ekkor az*

$$A_{sa} \to \mathscr{C}(\mathrm{K}(A);\mathbb{R}); \quad x \mapsto (f \mapsto f(x)),$$

$$A_{sa} \to \mathscr{C}^b(\mathrm{E}(A);\mathbb{R}); \quad x \mapsto (f \mapsto f(x)),$$

$$A_{sa} \to \mathscr{C}^b(\mathrm{P}(A);\mathbb{R}); \quad x \mapsto (f \mapsto f(x))$$

leképezések szigorúan rendezéstartó, lineáris izometriák, továbbá az első operátor értékkészlete egyenlő azon $\mathrm{K}(A) \to \mathbb{R}$ *folytonos affin függvények halmazával, amelyek a 0-ban a 0 értéket veszik fel. Ha A egységelemes, akkor* $\mathrm{E}(A)$ *kompakt konvex halmaz, és a második operátor értékkészlete egyenlő az* $\mathrm{E}(A) \to \mathbb{R}$ *folytonos affin függvények halmazával.*

Bizonyítás. A $\mathrm{K}(A)$ elemei pozitív funkcionálok, ezért minden $x \in A_+$ esetén minden $\mathrm{K}(A) \ni f$-re $f(x) \geq 0$, így ezek a leképezések rendezéstartók (vagyis monoton növők). Megfordítva, ha $x \in A_{sa}$ olyan, hogy minden $f \in \mathrm{P}(A)$ esetén $f(x) \in \mathbb{R}_+$, akkor minden $f \in \mathrm{co}(\mathrm{Ext}(\mathrm{K}(A)))$ funkcionálra $f(x) \in \mathbb{R}_+$, így a Krein–Milman-tétel alapján minden $\mathrm{K}(A) \ni f$-re $f(x) \in \mathbb{R}_+$. Ugyanakkor $\mathrm{K}(A)$ egyenlő az A feletti, egynél kisebb-egyenlő normájú pozitív funkcionálok halmazával, mert A C^*-algebra. Ezért az x-re vonatkozó feltevésből következik, hogy minden A feletti f pozitív funkcionálra $f(x) \in \mathbb{R}_+$, így az előző állítás szerint $x \in A_+$. Ugyanakkor $\mathrm{P}(A) \subseteq \mathrm{E}(A) \subseteq \mathrm{K}(A)$, tehát $x \in A_{sa}$ esetén az $x \in A_+$, a $(\forall f \in \mathrm{K}(A)) : (f(x) \in \mathbb{R}_+)$, a $(\forall f \in \mathrm{E}(A)) : (f(x) \in \mathbb{R}_+)$ és a $(\forall f \in \mathrm{P}(A)) : (f(x) \in \mathbb{R}_+)$ kijelentések *ekvivalensek*, vagyis a szóbanforgó leképezések szigorúan rendezéstartók. (Azonban vigyázzunk arra, hogy ebből még az injektivitásukra sem lehet következtetni, mert az A_{sa} rendezése általában nem trichotóm.)

Világos, hogy $x \in A_{sa}$ esetén

$$\sup_{f \in \mathrm{P}(A)} |f(x)| \leq \sup_{f \in \mathrm{E}(A)} |f(x)| \leq \sup_{f \in \mathrm{K}(A)} |f(x)| \leq \sup_{f \in A',\ \|f\| \leq 1} |f(x)| = \|x\|$$

ezért az izometrikusság bizonyításához elég azt megmutatni, hogy minden $x \in A_{sa}$ esetén $\|x\| \leq \sup\limits_{f \in \mathrm{P}(A)} |f(x)|$.

Legyen tehát $x \in A_{sa}$ és $c < \|x\|$ tetszőleges. A második Gelfand-Najmark-tétel alapján vehetjük az A-nak egy π hű ábrázolását a $\mathscr{H}$ Hilbert-térben; ekkor π izometria, tehát $c < \|x\| = \|\pi(x)\|$. A $\pi(x)$ operátor önadjungált, ezért a funkcionálanalízis elemeiből ismert formula szerint:

$$\|\pi(x)\| = \sup_{\zeta \in \mathscr{H},\ \|\zeta\| \leq 1} |(\pi(x)\zeta|\zeta)|.$$

Ebből következik olyan $\zeta \in \mathscr{H}$ létezése, amelyre $\|\zeta\| \leq 1$, és $c < |(\pi(x)\zeta|\zeta)| = |\Phi_{\pi,\zeta}(x)|$. Ekkor $\|\Phi_{\pi,\zeta}\|_* \leq \|\zeta\|^2 \leq 1$, tehát $\Phi_{\pi,\zeta} \in \mathrm{K}(A)$, így ismét a Krein–Milman-tétel alapján létezik olyan $g \in \mathrm{Ext}(\mathrm{K}(A))$, hogy $c < |g(x)|$. Természetesen $g \neq 0$, így $g \in \mathrm{P}(A)$, tehát $c < |g(x)| \leq \sup\limits_{f \in \mathrm{P}(A)} |f(x)|$.

Jelölje A'_σ az A' duális teret a $\sigma(A', A)$ topológiával ellátva. Ekkor $\mathrm{K}(A)$ olyan kompakt konvex halmaz A'_σ-ban, hogy a $\tau : A_{sa} \to \mathscr{C}(\mathrm{K}(A); \mathbb{R});\ x \mapsto (f \mapsto f(x))$ leképezés értékkészletében található függvények valós folytonos affin függvények a $\mathrm{K}(A)$-n, és a 0-hoz a 0 értéket rendelik. Legyen $\phi : \mathrm{K}(A) \to \mathbb{R}$ olyan folytonos affin függvény, amelyre $\phi(0) = 0$. Az első Mokobodzki-lemma (12.1.2.) alapján vehetünk olyan $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sorozatot $(A'_\sigma)'$-ben és olyan $(c_n)_{n \in \mathbb{N}}$ valós számsorozatot, hogy az $((u_n)_{\mathbb{R}} + c_n)_{n \in \mathbb{N}}$ függvénysorozat egyenletesen konvergál $\mathrm{K}(A)$-n ϕ-hez. Ez a függvénysorozat pontonként is konvergál $\mathrm{K}(A)$-n ϕ-hez, így $0 = \phi(0) = \lim\limits_{n \to \infty} ((u_n)_{\mathbb{R}} + c_n)(0) = \lim\limits_{n \to \infty} c_n$, vagyis $(c_n)_{n \in \mathbb{N}}$ zérussorozat. Ebből következik, hogy az $((u_n)_{\mathbb{R}})_{n \in \mathbb{N}}$ függvénysorozat is egyenletesen konvergál $\mathrm{K}(A)$-n ϕ-hez. De $(A'_\sigma)'$ azonosul A-val az $A \to (A'_\sigma)';\ a \mapsto (f \mapsto f(a))$ leképezés által, ezért egyértelműen létezik olyan $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sorozat A-ban, amelyre minden $n \in \mathbb{N}$ és $f \in A'$

esetén $u_n(f) = f(a_n)$. Világos, hogy minden $\mathbb{N} \ni n$-re és minden $f \in A'$ önadjungált funkcionálra

$$(u_n)_{\mathbb{R}}(f) = \Re(f(a_n)) = \frac{1}{2}(f(a_n) + \overline{f(a_n)}) = \frac{1}{2}(f(a_n) + f(a_n^*)) = f(x_n),$$

ahol $x_n := \dfrac{1}{2}(a_n + a_n^*) \in A_{sa}$. Ez azt jelenti, hogy $n \in \mathbb{N}$ esetén az $(u_n)_{\mathbb{R}}$ függvény $\mathrm{K}(A)$-ra vett leszűkítése egyenlő $\tau(x_n)$-nel, így a $(\tau(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ függvénysorozat egyenletesen konvergál ϕ-hez $\mathrm{K}(A)$-n. Kihasználva a τ izometrikusságát, ebből következik, hogy minden $m, n \in \mathbb{N}$ esetén $\|x_m - x_n\| = |||\tau(x_m) - \tau(x_n)|||$, tehát $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ Cauchy-sorozat az A_{sa} valós Banach-térben. Legyen $x \in A_{sa}$ az az elem, amelyre $x = \lim\limits_{n\to\infty} x_n$ az A feletti C^*-norma szerint. A τ leképezés normákban való folytonossága miatt ekkor a $(\tau(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ függvénysorozat egyenletesen konvergál $\tau(x)$-hez $\mathrm{K}(A)$-n, következésképpen $\phi = \tau(x) \in \mathrm{Im}(\tau)$.

Most tegyük fel, hogy A egységelemes, és ismét jelölje A'_σ az A' duális teret a $\sigma(A', A)$ topológiával ellátva. Az $\mathrm{E}(A)$ halmaz *konvex*, mert $f, g \in \mathrm{E}(A)$ esetén minden $\alpha \in [0, 1]$ valós számra

$$\|(1-\alpha).f + \alpha.g\| = ((1-\alpha).f + \alpha.g)(\mathbf{1}) = (1-\alpha)f(\mathbf{1}) + \alpha.g(\mathbf{1}) =$$

$$= (1-\alpha)\|f\| + \alpha\|g\| = 1,$$

tehát $(1-\alpha).f + \alpha.g \in \mathrm{E}(A)$. Tehát $\mathrm{E}(A)$ kompakt konvex halmaz az A'_σ lokálisan konvex térben és a $\tau : A_{sa} \to \mathscr{C}(\mathrm{E}(A); \mathbb{R});\ x \mapsto (f \mapsto f(x))$ leképezés értékkészletében található függvények valós folytonos affin függvények az $\mathrm{E}(A)$ halmazon. Legyen $\phi : \mathrm{E}(A) \to \mathbb{R}$ tetszőleges folytonos affin függvény. Az első Mokobodzki-lemma (12.1.2.) alapján vehetünk olyan $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sorozatot $(A'_\sigma)'$-ben és olyan $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ valós számsorozatot, hogy az $((u_n)_{\mathbb{R}} + c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ függvénysorozat egyenletesen konvergál $\mathrm{E}(A)$-n ϕ-hez. Az $(A'_\sigma)'$ vektortér ismét azonosul A-val az $A \to (A'_\sigma)';\ a \mapsto (f \mapsto f(a))$ leképezés által, ezért egyértelműen létezik olyan $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sorozat A-ban, amelyre minden $n \in \mathbb{N}$ és $f \in A'$ esetén $u_n(f) = f(a_n)$. Világos, hogy minden $\mathbb{N} \ni n$-re és minden $f \in \mathrm{E}(A)$ funkcionálra $f(\mathbf{1}) = \|f\| = 1$ miatt

$$((u_n)_{\mathbb{R}} + c_n)(f) = \Re(f(a_n + c_n.\mathbf{1})) = f(x_n),$$

ahol most $x_n := \dfrac{1}{2}(a_n + a_n^*) + c_n\mathbf{1} \in A_{sa}$. Ez azt jelenti, hogy $n \in \mathbb{N}$ esetén az $(u_n)_{\mathbb{R}} + c_n$ függvény $\mathrm{E}(A)$-ra vett leszűkítése egyenlő $\tau(x_n)$-nel, így a $(\tau(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ függvénysorozat egyenletesen konvergál ϕ-hez $\mathrm{E}(A)$-n. Világos, hogy innen a bizonyítást ugyanúgy lehet befejezni, mint az előző bekezdésben. ■

Megjegyezzük, hogy az állításban szereplő lineáris izometriák értékkészletei *sup-normában zárt* lineáris alterek a $\mathscr{C}(\mathrm{K}(A); \mathbb{R})$ függvénytérben, mert a C^*-norma leszűkítésével A_{sa} Banach-tér.

22.4.3. Lemma. *Ha A normált *-algebra és $f : A \to \mathbb{C}$ folytonos önadjungált funkcionál, akkor $\|f\| = \|f|_{A_{sa}}\|$.*

Bizonyítás. Az nyilvánvaló, hogy $\|f|_{A_{sa}}\| \leq \|f\|$. Megfordítva, legyen $c \in \mathbb{R}_+$ olyan, hogy $c < \|f\|$. Vegyünk olyan $a \in A$ elemet, amelyre $\|a\| \leq 1$ és $c < |f(a)|$. Ekkor $f(a) \neq 0$, így jól értelmezett a $z := |f(a)|/f(a)$ szám, amelyre $f(z.a) = |f(a)|$ teljesül. Az f önadjungáltsága miatt $f((z.a)^*) = \overline{f(z.a)} = f(z.a)$, ezért az $x := (1/2)(z.a+(z.a)^*)$ elem olyan, hogy $x \in A_{sa}$, $\|x\| \leq 1$, és $\|f|_{A_{sa}}\| \geq f(x) = f(z.a) = |f(a)| > c$. ■

A következő állítás bizonyításában felhasználjuk a lokálisan kompakt terek feletti valós Radon-mértékek pozitív és negatív részének fogalmát és elemi tulajdonságait. Ennek részletes kifejtése megtalálható például [19, 4.2.4.]-ben.

22.4.4. Állítás. *Ha A C^*-algebra, akkor minden $f : A \to \mathbb{C}$ folytonos önadjungált funkcionálhoz léteznek olyan f^+ és f^- pozitív funkcionálok A felett, amelyekre $f = f^+ - f^-$ és $\|f\| = \|f^+\| + \|f^-\|$.*

Bizonyítás. Vezessük be a

$$\tau : A_{sa} \to \mathscr{C}(\mathrm{K}(A); \mathbb{R}); \quad x \mapsto (f \mapsto f(x))$$

leképezést, amelyről láttuk, hogy szigorúan rendezéstartó lineáris izometria. Legyen f folytonos önadjungált funkcionál A felett. Világos, hogy az $f \circ \tau^{-1} : \mathrm{Im}(\tau) \to \mathbb{R}$ függvény sup-normában folytonos valós lineáris funkcionál az $\mathrm{Im}(\tau) \subseteq \mathscr{C}(\mathrm{K}(A); \mathbb{R})$ lineáris altér felett. A Hahn–Banach-tétel alapján létezik olyan $\mu : \mathscr{C}(\mathrm{K}(A); \mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ sup-normában folytonos lineáris funkcionál, amely $f \circ \tau^{-1}$-nek kiterjesztése, és $\|\mu\| = \|f \circ \tau^{-1}\|$. Ekkor μ valós Radon-mérték a $\mathrm{K}(A)$ kompakt tér felett, tehát vehetjük a μ Hahn-Jordan felbontását: $\mu = \mu^+ - \mu^-$, és tudjuk, hogy fennáll a $\|\mu\| = \|\mu^+\| + \|\mu^-\|$ egyenlőség is. Jelölje f^+ (illetve f^-) a $\mu^+ \circ \tau : A_{sa} \to \mathbb{R}$ (illetve $\mu^- \circ \tau : A_{sa} \to \mathbb{R}$) folytonos lineáris funkcionál egyértelmű $\mathbb{C}$-lineáris kiterjesztését A-ra. Világos, hogy f^+ és f^- pozitív funkcionálok A felett, és $f^+ - f^- = (\mu^+ - \mu^-) \circ \tau = \mu \circ \tau = f$ az A_{sa} halmazon, ezért $f^+ - f^- = f$.

Ebből az egyenlőségből azonnal következik, hogy $\|f\| \leq \|f^+\| + \|f^-\|$. A fordított egyenlőtlenség is könnyen igazolható, mert az előző lemma alapján

$$\|f^+\| + \|f^-\| = \|f^+|_{A_{sa}}\| + \|f^-|_{A_{sa}}\| = \|\mu^+ \circ \tau\| + \|\mu^- \circ \tau\| \leq$$
$$\leq \|\mu^+\| + \|\mu^-\| = \|\mu\| = \|f \circ \tau^{-1}\| \leq \|f\|. \blacksquare$$

22.4.5. Következmény. *C^*-algebra felett egy lineáris funkcionál pontosan akkor folytonos, ha előáll pozitív funkcionálok lineáris kombinációjaként.*

Bizonyítás. C^*-algebra felett a pozitív funkcionálok folytonosak, ezért a pozitív funkcionálok lineáris kombinációi is folytonosak. Ugyanakkor normált *-algebra feletti folytonos lineáris funkcionál előáll folytonos önadjungált funkcionálok lineáris kombinációjaként, és az előző állítás szerint C^*-algebra esetében a folytonos önadjungált funkcionálok pozitív funkcionálok lineáris kombinációi. ■

23. fejezet

Rickart-C^*-algebrák

23.1. Természetes rendezés *-algebra projektorainak halmazán

Emlékeztetünk arra, hogy az A *-algebra projektorainak, vagyis önadjungált idempotens elemeinek halmazát $\mathbf{P}(A)$-val jelöljük. Ha A egységelemes, akkor az A egységelemét $\mathbf{1}$ jelöli.

23.1.1. Definíció. *Ha A *-algebra, akkor $e, f \in \mathbf{P}(A)$ esetén azt írjuk, hogy $e \leq f$, ha $e = ef$; ezt a $\mathbf{P}(A)$ feletti $\leq$ relációt a $\mathbf{P}(A)$* **természetes rendezésének** *nevezzük.*

Megjegyzések. 1) Az elnevezést az indokolja, hogy ha A *-algebra, akkor a $\leq$ reláció rendezés a $\mathbf{P}(A)$ halmaz felett. Valóban, a $\leq$ reláció:

– *reflexív*, mert a $\mathbf{P}(A)$ elemei idempotensek;

– *antiszimmetrikus*, mert $e \leq f$ és $f \leq e$ esetén $e = ef$ és $f = fe$, tehát az e és f elemek önadjungáltsága miatt $f = fe = f^*e^* = (ef)^* = e^* = e$;

– *tranzitív*, mert $e \leq f$ és $f \leq g$ esetén $e = ef$ valamint $f = fg$, így az A szorzásának asszociativitása miatt $e = ef = e(fg) = (ef)g = eg$, vagyis $e \leq g$.

A továbbiakban a $\mathbf{P}(A)$ halmazt mindig rendezett halmaznak tekintjük, amelynek rendezése a $\mathbf{P}(A)$ feletti természetes rendezés.

2) Ha A *-algebra, akkor nyilvánvalóan 0 a $\mathbf{P}(A)$ legkisebb eleme, és ha A egységelemes, akkor természetesen $\mathbf{1}$ a $\mathbf{P}(A)$ legnagyobb eleme, tehát ekkor $\mathbf{P}(A)$ a $\leq$ relációval ellátva *korlátos rendezett halmaz.*

3) Ha A *-algebra, akkor $e, f \in \mathbf{P}(A)$ esetén $e \leq f$ pontosan akkor teljesül, ha $f - e \in \mathbf{P}(A)$. Valóban, ha $e \leq f$, akkor $e = ef$, ezért $ef = e = e^* = f^*e^* = fe$, vagyis

e és f kommutálnak egymással, így $(f-e)^2 = f^2 + e^2 - ef - fe = f + e - 2ef = f - e$, tehát $f - e \in \mathbf{P}(A)$. Megfordítva, ha $f - e \in \mathbf{P}(A)$, akkor $(f-e)^2 = f - e$, azaz $f + e - ef - fe = f - e$, vagyis $2e = ef + fe$. Ezt az egyenlőséget jobbról szorozva f-fel kapjuk, hogy $2ef = ef + fef$, tehát $ef = fef$. Ebből adjungálással nyerjük, hogy $ef = fe$, ezért $2e = ef + fe = 2ef$, vagyis $e = ef$, ami azt jelenti, hogy $e \leq f$.

4) Legyen A *-algebra. Ekkor $\mathbf{P}(A) \subseteq A_{sa}$, és az A_{sa} halmazon a 16.4. pont 7) megjegyzésében bevezettük azt a $\preceq$ relációt, amelyre teljesül az, hogy ha $x, y \in A_{sa}$, akkor $x \preceq y$ definíció szerint ekvivalens azzal, hogy $y - x \in A_+$, vagyis létezik olyan $(a_i)_{i\in I}$ véges rendszer A-ban, amelyre $y - x = \sum\limits_{i\in I} a_i^* a_i$. Tudjuk, hogy a $\preceq$ reláció nem szükségképpen antiszimmetrikus, bár reflexív és tranzitív (vagyis *előrendezés* A_{sa} felett). A 3. példában majd megmutatjuk, hogy a $\preceq$ reláció $\mathbf{P}(A)$-ra vett leszűkítése és a $\leq$ rendezés *nem szükségképpen egyenlőek*, mert a $\preceq$ reláció még a $\mathbf{P}(A)$ halmazon sem feltétlenül antiszimmetrikus. Azonban nyilvánvaló, hogy $e, f \in \mathbf{P}(A)$ és $e \leq f$ esetén $e \preceq f$, hiszen a 3) megjegyzés szerint $f - e \in \mathbf{P}(A)$, így $f - e = (f-e)^*(f-e) \in A_+$, vagyis $e \preceq f$.

Példák (a projektorok közötti rendezésre).

1) Legyen T lokálisan kompakt tér és $A := \overline{\mathscr{K}}(T;\mathbb{C})$. Ekkor $\mathbf{P}(A) = \{\chi_{_E} |"E \subseteq T \text{ kompakt-nyílt"}\}$, tehát $\mathbf{P}(A)$ az $E \mapsto \chi_{_E}$ leképezés által azonosítható a T kompakt-nyílt részhalmazainak halmazával. Világos, hogy ha $E, F \subseteq T$ kompakt-nyílt halmazok, akkor $\chi_{_E} \leq \chi_{_F}$ pontosan akkor teljesül, ha $E \subseteq F$. Az is látható, hogy a $\mathbf{P}(A)$ halmazon a $\leq$ és $\preceq$ relációk egyenlők. Később megmutatjuk, hogy ez nem véletlen.

2) Legyen $\mathscr{H}$ Hilbert-tér és $A := \mathscr{L}(\mathscr{H})$. Ekkor $\mathbf{P}(A)$ egyenlő a $\mathscr{H}$ Hilbert-tér *ortogonális projektorainak* halmazával, amely az $e \mapsto \mathrm{Im}(e)$ leképezés által azonosítható a $\mathscr{H}$ zárt lineáris altereinek halmazával. Nyilvánvaló, hogy $e, f \in \mathbf{P}(A)$ esetén $e \leq f$ ekvivalens azzal, hogy $\mathrm{Im}(e) \subseteq \mathrm{Im}(f)$. Hamarosan igazoljuk, hogy $\mathbf{P}(A)$ felett a $\leq$ és $\preceq$ relációk ebben az esetben is egyenlők.

3) Tekintsük az $M_2(\mathbb{C})$ mátrixalgebrát, és jelölje $\#$ az *euklidészi involúciót* $M_2(\mathbb{C})$ felett, vagyis $m \in M_2(\mathbb{C})$ esetén $m^\#$ az m mátrix transzponált-konjugáltja. Legyen $j := \begin{matrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{matrix}$, és minden $m \in M_2(\mathbb{C})$ esetén $m^* := jm^\# j$. Ekkor az $M_2(\mathbb{C})$ komplex algebra a * leképezéssel ellátva egységelemes *-algebra; jelölje A ezt a *-algebrát. Tekintsük a következő mátrixokat:

$$e := \begin{pmatrix} \frac{3}{2} & \mathbf{i}\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \mathbf{i}\frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}, \quad f := \begin{pmatrix} \frac{3}{2} & -\mathbf{i}\frac{\sqrt{3}}{2} \\ -\mathbf{i}\frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}, \quad a_\pm := \begin{pmatrix} 1 & \mp\mathbf{i}\frac{\sqrt{3}}{2} \\ 1 & \pm\mathbf{i}\frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix}.$$

Ekkor $e, f \in \mathbf{P}(A)$, $f - e = a_+^* a_+$ és $e - f = a_-^* a_-$, tehát $e \preceq f$ és $f \preceq e$. Ugyanakkor $e \neq ef$, így nem igaz az $e \leq f$ egyenlőtlenség. Természetesen $e \neq f$, tehát a $\preceq$ reláció

$\mathbf{P}(A)$-ra vett leszűkítése nem antiszimmetrikus.

23.1.2. Állítás. *Ha A olyan *-algebra, amelynek létezik hű ábrázolása, akkor a $\mathbf{P}(A)$ feletti $\leq$ és $\preceq$ relációk egyenlőek.*

Bizonyítás. Legyen π hű ábrázolása A-nak a $\mathscr{H}$ Hilbert-térben, és legyenek $e, f \in \mathbf{P}(A)$ olyanok, hogy $e \preceq f$. Ekkor $\pi(e), \pi(f) \in \mathbf{P}(\mathscr{L}(\mathscr{H}))$, és a $\pi(f-e)$ operátor pozitív az $\mathscr{L}(\mathscr{H})$ *-algebrában, tehát minden $\zeta \in \mathscr{H}$ esetén

$$\|\pi(f)\zeta\|^2 - \|\pi(e)\zeta\|^2 = (\pi(f)\zeta|\zeta) - (\pi(e)\zeta|\zeta) = (\pi(f-e)\zeta|\zeta) \in \mathbb{R}_+,$$

vagyis $\|\pi(e)\zeta\| \leq \|\pi(f)\zeta\|$. Ebből következik, hogy $\mathrm{Ker}(\pi(f)) \subseteq \mathrm{Ker}(\pi(e))$, tehát

$$\mathrm{Im}(\pi(e)) = (\mathrm{Ker}(\pi(e)))^{\perp} \subseteq (\mathrm{Ker}(\pi(f))^{\perp} = \mathrm{Im}(\pi(f)).$$

Ez azt jelenti, hogy $\pi(e) \preceq \pi(f)$ az $\mathscr{L}(\mathscr{H})$ *-algebrában, tehát $\pi(ef) = \pi(e)\pi(f) = \pi(e)$. Ebből a π injektivitása folytán $ef = e$, vagyis $e \leq f$ következik. ■

23.1.3. Következmény. *Ha A pre-C^*-algebra, akkor a $\mathbf{P}(A)$ feletti $\preceq$ és $\leq$ relációk egyenlőek.*

Bizonyítás. Láttuk, hogy egy *-algebrának pontosan akkor létezik hű ábrázolása, ha létezik felette pre-C^*-norma (22.1.2.). Ezért az előző állításból azonnal kapjuk, hogy egy pre-C^*-algebra projektorainak halmazán a $\preceq$ és $\leq$ relációk egyenlők. ■

Az előző következmény indokolja azt, hogy pre-C^*-algebrák esetében a $\preceq$ szimbólumot nem használjuk, hanem helyette a $\leq$ jelet alkalmazzuk. De vigyázzunk arra, hogy ez a konvenció félreértésre vezet akkor ha a szóbanforgó *-algebra projektorainak halmazán a $\preceq$ és $\leq$ relációk nem egyenlőek.

Most azt a problémát vizsgáljuk, hogy ha A *-algebra, akkor a $\mathbf{P}(A)$ feletti $\leq$ rendezés szerint milyen szuprémumok és infimumok léteznek? Megállapodunk abban, hogy a szuprémumokra és az infimumokra a szokásos hálóelméleti jelölést alkalmazzuk, tehát, ha A *-algebra és $e, f \in \mathbf{P}(A)$, akkor az $\{e, f\}$ halmaz $\leq$ reláció szerinti szuprémumát (illetve infimumát) $e \vee f$ (illetve $e \wedge f$) jelöli, ha létezik.

23.1.4. Állítás. *Legyen A *-algebra és $e, f \in \mathbf{P}(A)$.*

a) *Ha $ef = fe$, akkor $e \vee f$ és $e \wedge f$ léteznek $\mathbf{P}(A)$-ban, és*

$$e \vee f = e + f - ef, \quad e \wedge f = ef.$$

Speciálisan, ha $ef = 0$, akkor $e \vee f$ és $e \wedge f$ léteznek $\mathbf{P}(A)$-ban, és $e \vee f = e + f$, valamint $e \wedge f = 0$.

b) *Ha $e \leq f$, akkor $f - e \in \mathbf{P}(A)$ és $e \vee (f - e) = f$.*

c) *Ha $ef = 0$ és $g \in \mathbf{P}(A)$ olyan, hogy $e \leq g \leq e \vee f$, akkor $g - e \leq f$.*

Bizonyítás. a) Tegyük fel, hogy $ef = fe$. Ekkor $ef \in \mathbf{P}(A)$, mert $(ef)^* = f^*e^* = fe = ef$ és $(ef)^2 = e(fe)f = e(ef)f = ef$. Világos továbbá, hogy $(ef)e = e(fe) = e(ef) = ef$ és $(ef)f = ef$, tehát ef alsó korlátja az $\{e, f\}$ halmaznak. Ha $g \in \mathbf{P}(A)$ olyan projektor, amely alsó korlátja az $\{e, f\}$ halmaznak, akkor $g(ef) = (ge)f = gf = g$, tehát $g \leq ef$. Ezért ef a legnagyobb alsó korlátja az $\{e, f\}$ halmaznak, vagyis $e \wedge f = ef$.

Továbbá, ha $ef = fe$, akkor $e + f - ef \in \mathbf{P}(A)$, mert $(e + f - ef)^* = e^* + f^* - (ef)^* = e + f - f^*e^* = e + f - fe = e + f - ef$, valamint $(e + f - ef)^2 = e^2 + fe - (ef)e + ef + f^2 - (ef)f - e(ef) - f(ef) + (ef)(ef) = e + fe - ef + ef + f - ef - ef - ef + ef = e + f - ef$. Világos, hogy $e(e + f - ef) = e^2 + ef - e(ef) = e + ef - ef = e$ és $f(e + f - ef) = fe + f^2 - f(ef) = fe + f - ef = f$, vagyis $e + f - ef$ felső korlátja az $\{e, f\}$ halmaznak. Ha $g \in \mathbf{P}(A)$ olyan projektor, amely felső korlátja az $\{e, f\}$ halmaznak, akkor $(e + f - ef)g = eg + fg - e(fg) = e + f - ef$, tehát $e + f - ef \leq g$. Ez azt jelenti, hogy $e + f - ef$ a legkisebb felső korlátja az $\{e, f\}$ halmaznak, vagyis $e \vee f = e + f - ef$.

Ha $ef = 0$, akkor $fe = f^*e^* = (ef)^* = 0 = ef$, tehát az előzőek alapján $e \vee f = e + f$ és $e \wedge f = 0$.

b) Tegyük fel, hogy $e \leq f$. Ekkor a 3) megjegyzés alapján $f - e \in \mathbf{P}(A)$, és világos, hogy $e(f - e) = ef - e^2 = e - e = 0$, így az a) szerint $e \vee (f - e)$ létezik és $e \vee (f - e) = e + (f - e) = f$.

c) Tegyük fel, hogy $ef = 0$ és $g \in \mathbf{P}(A)$ olyan, hogy $e \leq g \leq e \vee f$. Ekkor az a) alapján $g = g(e \vee f) = g(e + f) = ge + gf = e + gf$, tehát $g - e = gf$. Ugyanakkor $e \leq g$ miatt $g - e \in \mathbf{P}(A)$, tehát ez az elem önadjungált, így $fg = (gf)^* = (g - e)^* = g - e = gf$, vagyis az a)-ból következik, hogy $f \wedge g$ létezik és $f \wedge g = fg$. Ebből látható, hogy $g - e = gf = fg = f \wedge g \leq f$. ■

23.1.5. Következmény. *Ha A *-algebra és $(e_i)_{i \in I}$ nem üres véges kommutatív rendszer $\mathbf{P}(A)$-ban, akkor $\bigvee_{i \in I} e_i$ és $\bigwedge_{i \in I} e_i$ léteznek $\mathbf{P}(A)$-ban, valamint*

$$\bigvee_{i \in I} e_i = \sum_{H \subseteq I,\ H \neq \emptyset} (-1)^{\mathrm{Card}(H)+1} \left(\prod_{i \in H} e_i \right), \qquad \bigwedge_{i \in I} e_i = \prod_{i \in I} e_i.$$

*Ha A kommutatív *-algebra, akkor $\mathbf{P}(A)$ a $\leq$ relációval ellátva alulról korlátos disztributív háló.*

Bizonyítás. Az előző állítás a) pontja alapján, az I halmaz számossága szerinti teljes indukcióval igazolható. ■

23.1.6. Állítás. *Ha A egységelemes *-algebra, akkor a*

$$\mathbf{P}(A) \to \mathbf{P}(A); \quad e \mapsto e^{\perp} := \mathbf{1} - e$$

leképezés ortokomplementáció a $\mathbf{P}(A)$ korlátos rendezett halmaz felett (29.1.2.).

Bizonyítás. Világos, hogy $e \in \mathbf{P}(A)$ esetén $\left(e^{\perp}\right)^{\perp} = \mathbf{1}-(\mathbf{1}-e) = e$, és minden $e, f \in \mathbf{P}(A)$ esetén, ha $e \leq f$, akkor $f^{\perp}e^{\perp} = (\mathbf{1}-f)(\mathbf{1}-e) = \mathbf{1}-e-f+fe = \mathbf{1}-f = f^{\perp}$, vagyis $f^{\perp} \leq e^{\perp}$. Ha $e \in \mathbf{P}(A)$, akkor $ee^{\perp} = 0$ miatt $e \vee e^{\perp} = e + (\mathbf{1}-e) = \mathbf{1}$. ■

23.1.7. Definíció. *Ha A egységelemes *-algebra, akkor $e, f \in \mathbf{P}(A)$ esetén azt mondjuk, hogy e és f* **ortogonálisak egymásra**, *ha $e \leq f^{\perp}$ teljesül; ezt a tényállást az $e \perp f$ szimbólummal jelöljük.*

Nyilvánvaló, hogy ha A egységelemes *-algebra, akkor $e, f \in \mathbf{P}(A)$ esetén $e \perp f$ pontosan akkor teljesül, ha $ef = 0$. Valóban, $ef^{\perp} = e(\mathbf{1}-f) = e - ef$, ezért $e = ef^{\perp}$ (vagyis $e \perp f$) azzal egyenértékű, hogy $e = e - ef$ (vagyis $ef = 0$).

23.1.8. Állítás. *Ha A egységelemes *-algebra, akkor $\mathbf{P}(A)$ a $\leq$ rendezéssel és $\perp$ leképezéssel ellátva olyan ortokomplementált rendezett halmaz, amelyben bármely véges ortogonális rendszernek létezik szuprémuma, és amelyben minden $e, f \in \mathbf{P}(A)$ elemre, ha $e \leq f$, akkor egyértelműen létezik olyan $g \in \mathbf{P}(A)$, amelyre $e \perp g$ és $e \vee g = f$; ez a g projektor egyenlő az $f \wedge e^{\perp}$ elemmel. Ha A kommutatív egységelemes *-algebra, akkor $\mathbf{P}(A)$ Boole-háló.*

Bizonyítás. Ha $(e_i)_{i \in I}$ nem üres ortogonális rendszer $\mathbf{P}(A)$-ban, az $(e_i)_{i \in I}$ rendszer kommutatív, így $\bigvee_{i \in I} e_i$ létezik a $\mathbf{P}(A)$ rendezett halmazban. Ha $e, f \in \mathbf{P}(A)$ és $e \leq f$, akkor $f - e \in \mathbf{P}(A)$ és $e \perp f - e$, mert $e(f-e) = ef - e = 0$, továbbá $e \vee (f-e) = e + (f-e) = f$. Ha $e, f \in \mathbf{P}(A)$, $e \leq f$ és $g \in \mathbf{P}(A)$ olyan, hogy $e \perp g$ és $e \vee g = f$, akkor $e \vee g = e + g$ miatt $g = f - e$, tehát g egyértelműen van meghatározva. Továbbá, ekkor $(f-e)f = f^2 - fe = f - e$ és $(f-e)e^{\perp} = (f-e)(\mathbf{1}-e) = f-e-fe+e^2 = f-e-e+e = f-e$, tehát $f-e$ alsó korlátja az $\{f, e^{\perp}\}$ halmaznak. Ha $g \in \mathbf{P}(A)$ alsó korlátja az $\{f, e^{\perp}\}$ halmaznak, akkor $g \leq e^{\perp}$ miatt $ge = 0$, így $g(f-e) = gf - ge = g$, vagyis $g \leq f - e$. Ez azt jelenti, hogy $e \leq f$ esetén $f - e = f \wedge e^{\perp}$.

Legyen A kommutatív egységelemes *-algebra és $e, f \in \mathbf{P}(A)$. Ekkor

$$(e \vee f) \wedge g = (e + f - ef)g = eg + fg - efg,$$

ugyanakkor

$$(e \wedge g) \vee (f \wedge g) = eg + fg - (eg)(fg) = eg + fg - efg,$$

ami azt jelenti, hogy

$$(e \wedge g) \vee (f \wedge g) = (e \vee f) \wedge g,$$

vagyis a $\mathbf{P}(A)$ ortoháló disztributív. ■

23.2. Rickart-*-algebrák és ortomoduláris projektorhálók

Algebrai szempontból érdekes kérdés, hogy egy *-algebra projektorainak halmazán a $\leq$ rendezés milyen algebrai feltételek teljesülése esetén *hálószerű*. Az alábbiakban olyan *elégséges feltételt* adunk, amely jó motivációt ad majd a Rickart-*-algebrák bevezetéséhez.

23.2.1. Állítás. *Legyen A *-algebra és $e, f \in \mathbf{P}(A)$. Ekkor a következő állítások ekvivalensek.*

(i) *Az $R_{e,f} := \{h \in \mathbf{P}(A) | (eh = 0) \wedge ((f - fe)h = f - fe)\}$ halmaznak létezik legkisebb eleme $\mathbf{P}(A)$-ban.*

(ii) *Létezik az $e \vee f$ elem $\mathbf{P}(A)$-ban.*

Továbbá, ha(i) *teljesül, akkor $e \vee f = e + \min(R_{e,f})$.*

Bizonyítás. (i)$\Rightarrow$(ii) Legyen $g := \min(R_{e,f})$. Ekkor $g \in R_{e,f}$, így $eg = 0$, tehát $e \vee g$ létezik $\mathbf{P}(A)$-ban és $e \vee g = e + g$. Állítjuk, hogy $e + g$ egyenlő az $\{e, f\}$ halmaz legkisebb felső korlátjával. Valóban, $e \leq e \vee g = e + g$, továbbá $eg = 0$ és $(f - fe)g = f - fe$ miatt $fg = f - fe$, így $f(e + g) = f$, vagyis $f \leq e + g$. Ez azt jelenti, hogy $e + g$ felső korlátja az $\{e, f\}$ halmaznak. Legyen $h \in \mathbf{P}(A)$ felső korlátja az $\{e, f\}$ halmaznak. Ekkor $e \leq h$, tehát $h - e \in \mathbf{P}(A)$, és világos, hogy $e(h - e) = eh - e^2 = 0$, valamint $f = fh$ miatt $(f - fe)(h - e) = fh - (fe)h - fe + (fe)e = f - fe$, vagyis $h - e \in R_{e,f}$. A g definíciója alapján $g \leq h - e$, tehát $g = g(h - e) = gh - ge = gh$, azaz $g \leq h$. Ugyanakkor $e \leq h$ is teljesül, tehát $e + g = e \vee g \leq h$. Ez azt jelenti, hogy $e + g$ az $\{e, f\}$ halmaz legkisebb felső korlátja, és azt is látjuk, hogy $e \vee f = e + \min(R_{e,f})$.

(ii)$\Rightarrow$(i) Tegyük fel, hogy $e \vee f$ létezik $\mathbf{P}(A)$-ban, és legyen $g := (e \vee f) - e$. Állítjuk, hogy g az $R_{e,f}$ halmaz legkisebb eleme. Valóban, $eg = e((e \vee f) - e) = e(e \vee f) - e^2 = 0$ és $(f - fe)g = (f - fe)((e \vee f) - e) = f(e \vee f) - (fe)(e \vee f) - fe + (fe)e = f - fe$, ezért $g \in R_{e,f}$. Legyen $h \in R_{e,f}$ tetszőleges; azt kell igazolni, hogy $g \leq h$. Világos, hogy $eh = 0$ miatt $e + h \in \mathbf{P}(A)$ és $e \leq e \vee h = e + h$. Továbbá, $f - fe = (f - fe)h = fh$, vagyis $f = f(e+h)$, így $f \leq h$. Ebből következik, hogy $e \vee f \leq e + g$, így $e \vee f = (e \vee f)(e + h) = (e \vee f)e + (e \vee f)h = e + (e \vee f)h$, azaz $(e \vee f) - e = (e \vee f)h = ((e \vee f) - e)h$. Ez azt jelenti, hogy $g = gh$, vagyis $g \leq h$. ■

23.2.2. Következmény. *Ha A egységelemes *-algebra és $e, f \in \mathbf{P}(A)$ olyan elemek, amelyekre az $\{h \in \mathbf{P}(A) | (f - fe)h = f - fe\}$ halmaznak létezik legkisebb eleme $\mathbf{P}(A)$-ban, akkor $e \vee f$ létezik $\mathbf{P}(A)$-ban, és $e \vee f = e + \min(\{h \in \mathbf{P}(A) | (f - fe)h = f - fe\})$.*

Bizonyítás. Legyen $R'_{e,f} := \{h \in \mathbf{P}(A) | (f - fe)h = f - fe\}$ és $g := \min(R'_{e,f})$. Világos, hogy $R_{e,f} := \{h \in \mathbf{P}(A) | (eh = 0) \wedge ((f - fe)h = f - fe)\} \subseteq R'_{e,f}$, így g az $R_{e,f}$

halmaz minden eleménél kisebb-egyenlő $\mathbf{P}(A)$-ban. Ezért ha $g \in R_{e,f}$, akkor g az $R_{e,f}$ halmaz legkisebb eleme, így elég hivatkozni az előző állításra. A $g \in R_{e,f}$ kijelentés azzal ekvivalens, hogy $eg = 0$, vagyis $g \leq e^\perp$. Ez utóbbi egyenlőtlenség viszont igaz, mert $(f - fe)e^\perp = fe^\perp - (fe)e^\perp = fe^\perp = f(\mathbf{1} - e) = f - fe$, azaz $e^\perp \in R'_{e,f}$. ∎

23.2.3. Következmény. *Legyen A egységelemes *-algebra és vezessük be az $S := \{f - fe | e, f \in \mathbf{P}(A)\}$ halmazt. Ha minden $s \in S$ esetén a $\{h \in \mathbf{P}(A) | sh = s\}$ halmaznak létezik legkisebb eleme $\mathbf{P}(A)$-ban, akkor $\mathbf{P}(A)$ ortomoduláris háló.*

Bizonyítás. Ha a feltétel teljesül, akkor az előző állítás alapján minden $e, f \in \mathbf{P}(A)$ esetén $e \vee f$ létezik $\mathbf{P}(A)$-ban. Az ortokomplementáció tulajdonságaiból következik, hogy minden $e, f \in \mathbf{P}(A)$ esetén $e \wedge f$ is létezik $\mathbf{P}(A)$-ban, hiszen $e^\perp \vee f^\perp\ ^\perp$ az $\{e, f\}$ halmaz legkisebb felső korlátja (*de Morgan-egyenlőtlenség*) (29.1.4.), így $\mathbf{P}(A)$ ortomoduláris háló. ∎

23.2.4. Definíció. *Ha A *-algebra, akkor az $a \in A$ elem* **jobboldali projektorának** *nevezünk minden olyan $e \in \mathbf{P}(A)$ projektort, amelyre minden $x \in A$ esetén az $ax = 0$ és $ex = 0$ kijelentések ekvivalensek (vagyis az a elem és az e projektor* **jobboldali anullátorai** *egyenlőek A-ban).*

Megjegyezzük, hogy *-algebrában nem szükségképpen létezik minden elemnek jobboldali projektora: erre a jelenségre hamarosan példákat látunk. Azonban *egységelemes* *-algebrában minden elemnek *legfeljebb egy* jobboldali projektora létezik. Valóban, ha A egységelemes *-algebra és $e, f \in \mathbf{P}(A)$ olyanok, hogy minden $A \ni x$-re $ex = 0$ ekvivalens azzal, hogy $fx = 0$, akkor $ee^\perp = 0$ miatt $0 = fe^\perp = f - fe$, azaz $f \leq e$, továbbá $ff^\perp = 0$ miatt $0 = ef^\perp = e - ef$, azaz $e \leq f$, így $e = f$.

23.2.5. Definíció. *Ha A egységelemes *-algebra, akkor az $a \in A$ elem jobboldali projektorát $RP(a)$ jelöli, ha létezik. Az A egységelemes *-algebrát* **Rickart-*-algebrának** *nevezzük, ha az A minden elemének létezik jobboldali projektora.*

Megjegyezzük, hogy ha A egységelemes *-algebra, és az $a \in A$ elemnek létezik jobboldali projektora, akkor $RP(a)$ a $\{h \in \mathbf{P}(A) | ah = a\}$ halmaz legkisebb eleme $\mathbf{P}(A)$-ban, hiszen $RP(a)RP(a)^\perp = 0$ miatt $0 = aRP(a)^\perp = a - aRP(a)$, így $RP(a) \in \{h \in \mathbf{P}(A) | ah = a\}$, továbbá, ha $h \in \mathbf{P}(A)$ és $ah = a$, akkor $ah^\perp = a - ah = 0$, így $0 = RP(a)h^\perp = RP(a) - RP(a)h$, vagyis $RP(a) \leq h$.

23.2.6. Állítás. *Ha A Rickart-*-algebra, akkor $\mathbf{P}(A)$ ortomoduláris háló, és minden $e, f \in \mathbf{P}(A)$ esetén*

$$e \vee f = e + RP(f - fe)$$

$$e \wedge f = e - RP(e - fe).$$

Bizonyítás. Legyenek $e, f \in \mathbf{P}(A)$. Ekkor $RP(f - fe)$ a $\{h \in \mathbf{P}(A) | (f - fe)h = f - fe\}$ halmaz legkisebb eleme, így $e \vee f$ létezik $\mathbf{P}(A)$-ban, és $e \vee f = e + RP(f - fe)$. A de Morgan egyenlőség alapján egyszerű számolással kapjuk, hogy

$$e \wedge f = \left(e^{\perp} \vee f^{\perp}\right)^{\perp} = \mathbf{1} - ((\mathbf{1} - e) + RP((\mathbf{1} - f) - (\mathbf{1} - f)(\mathbf{1} - e)) = e - RP(e - fe). \blacksquare$$

Példák (Rickart-*-algebrákra).

1) Legyen T halmaz és $\mathscr{B}$ σ-algebra T felett. (Ilyenkor azt is mondjuk, hogy a $(T, \mathscr{B})$ pár *mérhető tér.*) Legyen $A := \mathscr{E}_{\mathbb{C}}(T, \mathscr{B})$, vagyis A a $T \to \mathbb{C}$ $\mathscr{B}$-egyszerű függvények *-algebrája. Könnyen igazolható, hogy egy $f : T \to \mathbb{C}$ függvény pontosan akkor eleme A-nak, ha minden $E \subseteq \mathbb{C}$ Borel-halmazra $\overset{-1}{f}\langle E \rangle \in \mathscr{B}$. Állítjuk, hogy A Rickart-*-algebra. Valóban, ha $a \in A$, akkor nyilvánvaló, hogy minden $A \ni x$-re

$$ax = 0 \;\Leftrightarrow\; [a \neq 0] \subseteq [x = 0] \;\Leftrightarrow\; \chi_{[a \neq 0]} x = 0,$$

és $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ Borel-halmaz $\mathbb{C}$-ben (mert nyílt), így $[a \neq 0] = \overset{-1}{a}\langle \mathbb{C} \setminus \{0\} \rangle \in \mathscr{B}$, következésképpen $\chi_{[a \neq 0]} \in \mathbf{P}(A)$. Látható, hogy $a \in A$ esetén $RP(a) = \chi_{[a \neq 0]}$.

2) Legyen $\mathscr{H}$ Hilbert-tér; ekkor az $A := \mathscr{L}(\mathscr{H})$ operátoralgebra Rickart-*-algebra. Valóban, ha $a \in A$ és e jelöli a $(\mathrm{Ker}(a))^{\perp}$ zárt lineáris altérre vetítő ortogonális projektort, akkor minden $A \ni x$-re

$$ax = 0 \;\Leftrightarrow\; \mathrm{Im}(x) \subseteq \mathrm{Ker}(a) \;\Leftrightarrow\; (\mathrm{Ker}(a))^{\perp} \subseteq (\mathrm{Im}(x))^{\perp} = \mathrm{Ker}(x^*) \;\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\; \mathrm{Im}(e) \subseteq \mathrm{Ker}(x^*) \;\Leftrightarrow\; x^* e = 0 \;\Leftrightarrow\; ex = 0$$

teljesül, ezért $e = RP(a)$.

23.2.7. Definíció. *Az A Rickart-*-algebra* **Rickart-*-részalgebrájának** *nevezzük az A minden olyan B *-részalgebráját, amely egységelemes, és minden $b \in B$ esetén $RP(b) \in B$. (Azonban nem követeljük meg, hogy a B egységeleme megegyezzen az A egységelemével.)*

23.2.8. Állítás. *Ha A Rickart-*-algebra és B Rickart-*-részalgebrája A-nak, akkor B az A műveleteinek leszűkítésével ellátva olyan Rickart-*-algebra, amelyre minden $b \in B$ esetén az b jobboldali projektora B-ben ugyanaz, mint A-ban.*

Bizonyítás. Nyilvánvaló következménye annak, hogy minden $b \in B$ esetén a b elem jobboldali anullátora B-ben egyenlő az A-beli jobboldali anullátorának B-vel vett metszetével. $\blacksquare$

Példák (Rickart-*-részalgebrákra).

1) Legyen A Rickart-*-algebra és $e \in \mathbf{P}(A)$. Ekkor az eAe redukált algebra az A-nak Rickart-*-részalgebrája. Valóban, eAe az A-nak egységelemes *-részalgebrája (amelynek az egységeleme e, ami az érdekes esetben nem egyenlő az A egységelemével), továbbá, ha $b \in eAe$, akkor $be^{\perp} = b - be = 0$, így a jobboldali projektor értelmezése alapján $RP(b)e^{\perp} = 0$, vagyis $RP(b)e = RP(b)$, tehát $RP(b) \in eAe$.

2) Legyen A Rickart-*-algebra és $S \subseteq A$ önadjungált halmaz, vagyis minden $s \in S$ esetén $s^* \in S$. Ekkor a $C(S)$ kommutáns az A-nak Rickart-*-részalgebrája. Valóban, $C(S)$ olyan *-részalgebrája A-nak, amelynek eleme az A egységeleme, továbbá, ha $b \in C(S)$ és $s \in S$, akkor $bRP(b) = b$ miatt $b(sRP(b) - s) = (bs)RP(b) - bs = (sb)RP(b) - bs = sb - bs = 0$, így a jobboldali projektor értelmezése alapján $RP(b)(sRP(b) - s) = 0$, vagyis $RP(b)s = RP(b)sRP(b)$. Tehát $b \in C(S)$ és $s \in S$ esetén $RP(b)s^* = RP(b)s^*RP(b)$ is teljesül, hiszen $s^* \in S$, amiből adjungálással nyerjük, hogy $sRP(b) = RP(b)sRP(b) = RP(b)s$, azaz $RP(b) \in C(S)$.

Az előző példa alapján világos, hogy minden *Neumann-algebra* Rickart-*-algebra.

23.3. Rickart-C^*-algebrák és σ-teljes ortomoduláris projektorhálók

23.3.1. Definíció. *Az A C^*-algebrát* **Rickart-C^*-algebrának** *nevezzük, ha az A *-algebra Rickart-*-algebra. Az A Rickart-C^*-algebra* **Rickart-C^*-részalgebrájának** *nevezzük az A minden olyan Rickart-*-részalgebráját, amely zárt a C^*-norma szerint.*

Nyilvánvaló, hogy ha B Rickart-C^*-részalgebrája az A Rickart-C^*-algebrának, akkor B az A struktúrájának leszűkítésével ellátva olyan Rickart-C^*-algebra, amelyben minden $b \in B$ esetén a b jobboldali projektora A-ban és B-ben ugyanaz.

Könnyen látható, hogy ha A Rickart-C^*-algebra és $e \in \mathbf{P}(A)$, akkor eAe Rickart-C^*-részalgebrája A-nak. Továbbá, ha A Rickart-C^*-algebra és $S \subseteq A$ önadjungált halmaz, akkor a $C(S)$ kommutáns Rickart-C^*-részalgebrája A-nak. Speciálisan, minden Neumann-algebra Rickart-C^*-algebra.

23.3.2. Állítás. *Ha T kompakt tér, akkor a következő állítások ekvivalensek.*

(i) *A $\mathscr{C}(T;\mathbb{C})$ függvényalgebra Rickart-C^*-algebra.*

(ii) *Minden $f \in \mathscr{C}(T;\mathbb{C})$ esetén a $\mathrm{supp}(f)$ halmaz nyílt (tehát nyílt-zárt).*

(iii) *A nyílt-zárt halmazok topologikus bázist alkotnak T-ben, és a T megszámlálható sok nyílt-zárt részhalmaza uniójának lezártja nyílt halmaz.*

Bizonyítás. Legyen T tetszőleges kompakt tér; ekkor $\mathbf{P}(\mathscr{C}(T;\mathbb{C}))$ azon χ_E karakterisztikus függvények halmaza, amelyekre E nyílt-zárt halmaz T-ban. Ezért $f \in \mathscr{C}(T;\mathbb{C})$

esetén $RP(f)$ pontosan akkor létezik, ha létezik olyan $E \subseteq T$ nyílt-zárt halmaz, amelyre minden $\mathscr{C}(T;\mathbb{C}) \ni g$-re $fg = 0$ és $\chi_E g = 0$ ekvivalensek. Ha $f, g \in \mathscr{C}(T;\mathbb{C})$, akkor

$$fg = 0 \;\Leftrightarrow\; [f \neq 0] \subseteq [g = 0] \;\Leftrightarrow\; \mathrm{supp}(f) := \overline{[f \neq 0]} \subseteq [g = 0] \;\Leftrightarrow\; \chi_{\mathrm{supp}(f)} g = 0.$$

Tehát, ha $f \in \mathscr{C}(T;\mathbb{C})$ olyan, hogy $\mathrm{supp}(f)$ nyílt-zárt halmaz, akkor $RP(f)$ létezik a $\mathscr{C}(T;\mathbb{C})$ *-algebrában, és $RP(f) = \chi_{\mathrm{supp}(f)}$. Ebből következik, hogy (ii)⇒(i).

Megfordítva, tegyük fel, hogy $f \in \mathscr{C}(T;\mathbb{C})$ olyan, amelyre $RP(f)$ létezik a $\mathscr{C}(T;\mathbb{C})$ *-algebrában. Ekkor egyértelműen létezik olyan $E \subseteq T$ nyílt-zárt halmaz, hogy minden $\mathscr{C}(T;\mathbb{C}) \ni g$-re $\chi_{\mathrm{supp}(f)} g = 0$ ekvivalens azzal, hogy $\chi_E g{=}0$, hiszen az $fg = 0$ és $\chi_{\mathrm{supp}(f)} g = 0$ kijelentések egyenértékűek. Ekkor $\chi_{T \setminus E} \in \mathscr{C}(T;\mathbb{C})$ miatt $\chi_{\mathrm{supp}(f)} \chi_{T \setminus E} = 0$, azaz $\mathrm{supp}(f) \cap (T \setminus E) = \emptyset$, vagyis $\mathrm{supp}(f) \subseteq E$. Ha volna olyan $t \in E$, hogy $t \notin \mathrm{supp}(f)$, akkor az E nyíltsága és $\mathrm{supp}(f)$ zártsága miatt $E \setminus \mathrm{supp}(f)$ a t-nek nyílt környezete volna, így a kompakt terek teljes regularitása miatt létezne olyan $g \in \mathscr{C}(T;\mathbb{C})$, hogy $g(t) \neq 0$ és $[g \neq 0] \subseteq E \setminus \mathrm{supp}(f)$; ekkor $\chi_{\mathrm{supp}(f)} g = 0$, azaz $fg = 0$, ugyanakkor $\chi_E g \neq 0$, holott $\chi_E = RP(f)$. Ez az ellentmondás azt mutatja, hogy $\mathrm{supp}(f) = E$, tehát $\mathrm{supp}(f)$ nyílt-zárt halmaz. Ebből következik, hogy (i)⇒(ii).

A (ii)⇒(iii) következtetés bizonyításához először megjegyezzük, hogy a kompakt terek teljes regularitása miatt minden $T \ni t$-hez és a t minden Ω nyílt környezetéhez létezik olyan $g \in \mathscr{C}(T;\mathbb{C})$, hogy $g(t) \neq 0$ és $\mathrm{supp}(g) \subseteq \Omega$, ezért ha (ii) teljesül, akkor T-ben a nyílt-zárt halmazok topologikus bázist alkotnak. Legyen $(E_k)_{k \in \mathbb{N}}$ a T nyílt-zárt részhalmazainak tetszőleges sorozata. Vegyünk olyan $\mathbb{R}^+$-ban haladó $(\varepsilon_k)_{k \in \mathbb{N}}$ sorozatot, amelyre a $\sum\limits_{k \in \mathbb{N}} \varepsilon_k$ sor konvergens $\mathbb{R}$-ben. Nyilvánvaló, hogy a $\sum\limits_{k \in \mathbb{N}} \varepsilon_k \chi_{E_k}$ függvénysor normálisan konvergens a T halmazon, ezért a Weierstrass-kritérium alapján egyenletesen is konvergens T-n, így az összegfüggvénye folytonos. Világos, hogy

$$\mathrm{supp}\left(\sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon_k \chi_{E_k}\right) := \overline{\left(\left[\sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon_k \chi_{E_k} \neq 0\right]\right)} = \overline{\bigcup_{k \in \mathbb{N}} E_k},$$

tehát a (ii) alapján az $\overline{\bigcup\limits_{k \in \mathbb{N}} E_k}$ halmaz nyílt.

A (iii)⇒(ii) következtetés bizonyításához legyen $f \in \mathscr{C}(T;\mathbb{C})$ tetszőleges, és vegyünk egy $\mathbb{R}^+$-ban haladó szigorúan monoton fogyó $(\varepsilon_n)_{n \in \mathbb{N}}$ zérussorozatot. Minden $n \in \mathbb{N}$ esetén $[|f| \geq \varepsilon_n] \subseteq [|f| > \varepsilon_{n+1}]$, és itt a bal oldalon kompakt és a jobb oldalon nyílt halmaz áll. A (iii) alapján T-ben a nyílt-zárt halmazok topologikus bázist alkotnak, amiből következik, hogy minden $K \subseteq T$ kompakt és $\Omega \subseteq T$ nyílt halmazhoz, $K \subseteq \Omega$ esetén létezik olyan $E \subseteq T$ nyílt-zárt halmaz, hogy $K \subseteq E \subseteq \Omega$. Ezért kiválaszthatjuk a T nyílt-zárt részhalmazainak olyan $(E_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sorozatát, amelyre minden $n \in \mathbb{N}$ esetén $[|f| \geq \varepsilon_n] \subseteq E_n \subseteq [|f| > \varepsilon_{n+1}]$. Ekkor

$$\mathrm{supp}(f) := \overline{[f \neq 0]} = \overline{\bigcup_{n \in \mathbb{N}} [|f| > \varepsilon_n]} = \overline{\bigcup_{n \in \mathbb{N}} E_n},$$

és a (iii) alapján az $\overline{\bigcup_{k\in\mathbb{N}} E_k}$ halmaz nyílt, így $\mathrm{supp}(f)$ nyílt-zárt. ■

Megjegyezzük, hogy az első Gelfand-Najmark-tétel és a Stone–Weierstrass-tétel alkalmazásával könnyen belátható, hogy ha A kommutatív C^*-algebra, akkor a következő állítások ekvivalensek.
(i) A $\mathbf{P}(A)$ halmaz lineáris burka sűrű A-ban a C^*-norma szerint.
(ii) Bármely két $\chi, \chi' \in \mathrm{X}(A)$ különböző karakterhez léteznek olyan $E, E' \subseteq \mathrm{X}(A)$ diszjunkt kompakt-nyílt halmazok, hogy $\chi \in E$ és $\chi' \in E'$.

23.3.3. Tétel. *Rickart-C^*-algebrában a projektorok halmazának lineáris burka a C^*-norma szerint sűrű.*

Bizonyítás. (I) Először legyen T olyan kompakt tér, hogy $\mathscr{C}(T;\mathbb{C})$ Rickart-C^*-algebra; megmutatjuk, hogy a $\mathbf{P}(\mathscr{C}(T;\mathbb{C}))$ halmaz lineáris burka a sup-norma szerint sűrű $\mathscr{C}(T;\mathbb{C})$-ben. Világos, hogy a $\mathbf{P}(\mathscr{C}(T;\mathbb{C}))$ halmaz lineáris burka egyenlő a $\mathscr{E}_{\mathbb{C}}(T,\mathscr{R})$ lépcsősfüggvény-halmazzal, ahol $\mathscr{R}$ a T nyílt-zárt részhalmazainak halmazgyűrűje. Triviális az, hogy $\mathscr{E}_{\mathbb{C}}(T,\mathscr{R})$ olyan részalgebrája $\mathscr{C}(T;\mathbb{C})$-nek, amely zárt a konjugálásra nézve és eleme a $T \to \mathbb{C}$ azonosan 1 függvény. Ezért a Stone–Weierstrass-tétel alapján $\mathscr{E}_{\mathbb{C}}(T,\mathscr{R})$ pontosan akkor sűrű $\mathscr{C}(T;\mathbb{C})$-ben a sup-norma szerint, ha szétválasztja a T pontjait. Ez viszont következik abból, hogy az előző állítás alapján T-ben a nyílt-zárt halmazok topologikus bázist alkotnak.

(II) Ha A kommutatív Rickart-C^*-algebra, akkor az első Gelfand-Najmark-tétel alapján van olyan T kompakt tér, hogy az A és $\mathscr{C}(T;\mathbb{C})$ *-algebrák izometrikusan izomorfak; ekkor az (I) alapján a $\mathbf{P}(\mathscr{C}(T;\mathbb{C}))$ halmaz lineáris burka a sup-norma szerint sűrű $\mathscr{C}(T;\mathbb{C})$-ben, így a $\mathbf{P}(A)$ halmaz lineáris burka a C^*-norma szerint sűrű A-ban.

(III) Legyen A tetszőleges Rickart-C^*-algebra. Ha az A minden normális eleme a C^*-norma szerint approximálható projektorok lineáris kombinációval, akkor ugyanez igaz minden elemre, hiszen az A minden eleme előáll normális (sőt önadjungált) elemek lineáris kombinációjaként. Legyen $a \in A$ normális elem, és tekintsük az $\{a, a^*\}$ önadjungált és kommutatív halmazt. Ekkor a $B := C(C(\{a, a^*\}))$ bikommutáns kommutatív Rickart-C^*-részalgebrája A-nak és $a \in B$. A (II) alapján B minden eleme a B C^*-normája szerint approximálható B-beli projektorok lineáris kombinációival. De $\mathbf{P}(B) = B \cap \mathbf{P}(A)$ és a B C^*-normája egyenlő az A C^*-normájának B-re vett leszűkítésével, így az a elem az A C^*-normája szerint közelíthető az A projektorainak komplex lineáris kombinációival. ■

Ebből a tételből jól látható, hogy sok egységelemes C^*-algebra létezik, amely nem Rickart-C^*-algebra. Például, ha T legalább két elemű összefüggő kompakt tér (ekkor T nem megszámlálhatóan végtelen), akkor a $\mathscr{C}(T;\mathbb{C})$ *-algebrában csak triviális projektorok vannak, de $\mathscr{C}(T;\mathbb{C})$ legalább kétdimenziós (sőt nem megszámlálhatóan végtelen dimenziós), így $\mathscr{C}(T;\mathbb{C})$ biztosan nem Rickart-C^*-algebra.

23.3.4. Lemma. (Topologikus Schur-lemma) *Legyen $\mathscr{H}$ Hilbert-tér és $\mathfrak{M} \subseteq \mathscr{L}(\mathscr{H})$ olyan operátorhalmaz, amelyre minden $u \in \mathfrak{M}$ esetén $u^* \in \mathfrak{M}$. Ekkor a következő állítások ekvivalensek.*

(i) *Ha $v \in \mathscr{L}(\mathscr{H})$ olyan, hogy minden $\mathfrak{M} \ni u$-ra $v \circ u = u \circ v$, akkor van olyan $\lambda \in \mathbb{C}$, hogy $v = \lambda.id_{\mathscr{H}}$ (vagyis az $\mathfrak{M}$ operátorhalmaz* **algebrailag irreducibilis**).

(ii) *Ha $H \subseteq \mathscr{H}$ olyan zárt lineáris altér, hogy minden $\mathfrak{M} \ni u$-ra $u\langle H\rangle \subseteq H$, akkor $H = \{0\}$ vagy $H = \mathscr{H}$ (vagyis az $\mathfrak{M}$ operátorhalmaz* **geometriailag irreducibilis**).

Bizonyítás. Nyilvánvaló, hogy az (i) feltétel azzal ekvivalens, hogy a $C(\mathfrak{M})$ kommutáns egyenlő $\mathbb{C}.id_{\mathscr{H}}$-val. Könnyen látható továbbá, hogy ha $H \subseteq \mathscr{H}$ zárt lineáris altér és P_H a H-ra vetítő ortogonális projektor, akkor a $P_H \in C(\mathfrak{M})$ feltétel éppen azt jelenti, hogy minden $\mathfrak{M} \ni u$-ra $u\langle H\rangle \subseteq H$. Ezért a (ii) feltétel azzal ekvivalens, hogy a $C(\mathfrak{M})$ kommutánsban csak triviális projektorok vannak. Világos, hogy a $\mathbb{C}.id_{\mathscr{H}}$ *-algebrának csak triviális projektorai vannak, ezért (i)$\Rightarrow$(ii) teljesül. Megfordítva, ha (ii) igaz és $A := C(\mathfrak{M})$, akkor a $\mathbf{P}(A)$ halmaz lineáris burka egyenlő $\mathbb{C}.id_{\mathscr{H}}$-val. De ez a halmaz operátornormában zárt A-ban, és A Rickart-C^*-algebra, így $A = \mathbb{C}.id_{\mathscr{H}}$, vagyis (i) teljesül. ■

Speciálisan, ha π ábrázolása az A *-algebrának az $\mathscr{H}$ Hilbert-térben, akkor a π algebrai és geometriai irreducibilitása ekvivalens tulajdonságok, mert $\mathrm{Im}(\pi)$ az $\mathscr{L}(\mathscr{H})$ operátoralgebrának olyan részhalmaza, hogy minden $a \in A$ esetén $(\pi(a))^* = \pi(a^*) \in \mathrm{Im}(\pi)$, így elég a topologikus Schur-lemmát alkalmazni az $\mathfrak{M} := \mathrm{Im}(\pi)$ választással.

23.3.5. Következmény. *Rickart-C^*-algebra projektorhálója pontosan akkor disztributív, ha az algebra kommutatív.*

Bizonyítás. Azt tudjuk, hogy tetszőleges egységelemes kommutatív *-algebra projektorhálója disztributív. Tegyük fel, hogy A olyan Rickart-C^*-algebra, amelynek a projektorhálója disztributív. Ha a $\mathbf{P}(A)$ halmaz kommutatív volna, akkor ennek lineáris burka is kommutatív volna és sűrű A-ban, ezért a szorzás folytonossága miatt A is kommutatív volna. Ezért elég azt igazolni, hogy $e, f \in \mathbf{P}(A)$ esetén $ef = fe$.

Ehhez először megjegyezzük, hogy $e \wedge f \leq f$, a de Morgan egyenlőség, és a $\mathbf{P}(A)$ háló disztributivitása folytán

$$f - (e \wedge f) = f \wedge (e \wedge f)^\perp = f \wedge (e^\perp \vee f^\perp) = (f \wedge e^\perp) \vee (f \wedge f^\perp) = f \wedge e^\perp.$$

Ezt az egyenlőséget balról e-vel szorozva kapjuk, hogy $ef - (e \wedge f) = e(f \wedge e^\perp)$. Ugyanakkor $f \wedge e^\perp \leq e^\perp$, vagyis $f \wedge e^\perp \perp e$, tehát $e(f \wedge e^\perp) = 0$. Ebből következik, hogy $ef = e \wedge f$. Ez bármely két $e, f \in \mathbf{P}(A)$ elemre igaz, tehát az e és f felcserélésével nyerjük, hogy $fe = f \wedge e$. Ezért minden $\mathbf{P}(A) \ni e, f$-re $ef = e \wedge f = f \wedge e = fe$. ■

23.3.6. Állítás. *Rickart-C^*-algebra projektorhálója σ-teljes ortomoduláris háló.*

Bizonyítás. Legyen A Rickart-C^*-algebra. Ekkor $\mathbf{P}(A)$ ortomoduláris háló, ezért a σ-teljessége ekvivalens a σ-additivitásával (29.2.5.). Ezért elég azt igazolni, hogy ha $(e_k)_{k\in\mathbb{N}}$ ortogonális sorozat A-ban, akkor $\bigvee_{k\in\mathbb{N}} e_k$ létezik $\mathbf{P}(A)$-ban.

Vegyünk olyan $(\varepsilon_k)_{k\in\mathbb{N}}$ sorozatot $\mathbb{R}^+$-ban, amelyre a $\sum_{k\in\mathbb{N}} \varepsilon_k$ sor konvergens $\mathbb{R}$-ben. Minden $k \in \mathbb{N}$ esetén $\|e_k\| \leq 1$, ezért a $\sum_{k\in\mathbb{N}} \varepsilon_k e_k$ sor abszolút konvergens az A C^*-algebrában, így konvergens is, tehát képezhető az $a := \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon_k e_k$ elem. Megmutatjuk, hogy az $e := RP(a)$ projektor az $\{e_k | k \in \mathbb{N}\}$ halmaz szuprémuma.

A jobboldali projektorok értelmezése alapján nyilvánvaló, hogy

$$\sum_{k=0}^{\infty}(\varepsilon_k e_k e) = \left(\sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon_k e_k\right) e = ae = a = \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon_k e_k,$$

és minden $j \in \mathbb{N}$ esetén ezt az egyenlőséget balról szorozva e_j-vel kapjuk, hogy

$$\varepsilon_j e_j e = e_j \left(\sum_{k=0}^{\infty}(\varepsilon_k e_k e)\right) = e_j \left(\sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon_k e_k\right) = \varepsilon_j e_j$$

hiszen az $(e_k)_{k\in\mathbb{N}}$ projektorsorozat ortogonális. Ez azt jelenti, hogy minden $\mathbb{N} \ni j$-re $e_j e = e_j$, tehát $e_j \leq e$. Ezért az e projektor felső korlátja a $\{e_k | k \in \mathbb{N}\}$ halmaznak.

Legyen $g \in \mathbf{P}(A)$ felső korlátja a $\{e_k | k \in \mathbb{N}\}$ halmaznak, vagyis minden $k \in \mathbb{N}$ esetén $e_k = e_k g$. Ekkor

$$a := \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon_k e_k = \sum_{k=0}^{\infty}(\varepsilon_k e_k g) = \left(\sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon_k e_k\right) g = ag,$$

tehát $ag^{\perp} = 0$, így $eg^{\perp} = 0$, következésképpen $e \leq g$. ■

24. fejezet

Spektrális C^*-algebrák

24.1. Projektor-értékű additív függvények

Emlékeztetünk arra, hogy ha $\mathscr{R}$ halmazgyűrű a T halmaz felett és F vektortér, akkor egy $\mathbf{m} : \mathscr{R} \to F$ leképezést *additívnak* nevezünk, ha minden $E, E' \in \mathscr{R}$ esetén, ha $E \cap E' = \emptyset$, akkor $\mathbf{m}(E \cup E') = \mathbf{m}(E) + \mathbf{m}(E')$. Most olyan additív halmazfüggvényekkel foglalkozunk, amelyek *-algebrába érkeznek és *projektor-értékűek.*

24.1.1. Állítás. *Legyen $\mathscr{R}$ halmazgyűrű a T halmaz felett, A *-algebra és $\mathfrak{p} : \mathscr{R} \to A$ projektor-értékű additív függvény.*

a) *Minden $E, F \in \mathscr{R}$ halmazra, ha $E \subseteq F$, akkor $\mathfrak{p}(E) \leq \mathfrak{p}(F)$.*

b) *Minden $E, F \in \mathscr{R}$ esetén*

$$\mathfrak{p}(E \cap F) = \mathfrak{p}(E)\mathfrak{p}(F) = \mathfrak{p}(E) \wedge \mathfrak{p}(F),$$

és $\mathrm{Im}(\mathfrak{p})$ *kommutatív részhalmaza* $\mathbf{P}(A)$*-nak.*

c) *Minden $E, F \in \mathscr{R}$ esetén*

$$\mathfrak{p}(E \cup F) = \mathfrak{p}(E) + \mathfrak{p}(F) - \mathfrak{p}(E \cap F) = \mathfrak{p}(E) \vee \mathfrak{p}(F).$$

Bizonyítás. a) Ha $E, F \in \mathscr{R}$ és $E \subseteq F$, akkor a $\mathfrak{p}$ additív halmazfüggvény szubtraktivitása folytán $\mathfrak{p}(F) - \mathfrak{p}(E) = \mathfrak{p}(F \setminus E) \in \mathbf{P}(A)$, ezért $\mathfrak{p}(E) \leq \mathfrak{p}(F)$.

b) Ha $E, F \in \mathscr{R}$, akkor a $\mathfrak{p}$ halmazfüggvény additivitása és szubtraktivitása, valamint $E \cup F = (E \setminus (E \cap F)) \cup (F \setminus (E \cap F)) \cup (E \cap F)$ miatt

$$\mathfrak{p}(E \cup F) = \mathfrak{p}(E \setminus (E \cap F)) + \mathfrak{p}(F \setminus (E \cap F)) + \mathfrak{p}(E \cap F) =$$

$$= \mathfrak{p}(E) - \mathfrak{p}(E \cap F) + \mathfrak{p}(F) - \mathfrak{p}(E \cap F) + \mathfrak{p}(E \cap F) = \mathfrak{p}(E) + \mathfrak{p}(F) - \mathfrak{p}(E \cap F).$$

Ezt az egyenlőséget jobbról szorozva $\mathfrak{p}(F)$-fel, és kihasználva, hogy az a) szerint $\mathfrak{p}(F) \leq \mathfrak{p}(E \cup F)$ és $\mathfrak{p}(E \cap F) \leq \mathfrak{p}(F)$, kapjuk, hogy

$$\mathfrak{p}(F) = \mathfrak{p}(E \cup F)\mathfrak{p}(F) = \mathfrak{p}(E)\mathfrak{p}(F) + \mathfrak{p}(F)^2 - \mathfrak{p}(E \cap F)\mathfrak{p}(F) = \mathfrak{p}(E)\mathfrak{p}(F) + \mathfrak{p}(F) - \mathfrak{p}(E \cap F),$$

ezért $\mathfrak{p}(E \cap F) = \mathfrak{p}(E)\mathfrak{p}(F)$. Ebből látható, hogy $E, F \in \mathscr{R}$ esetén $\mathfrak{p}(E)\mathfrak{p}(F) = \mathfrak{p}(E \cap F) = \mathfrak{p}(F \cap E) = \mathfrak{p}(F)\mathfrak{p}(E)$, így $\mathrm{Im}(\mathfrak{p})$ kommutatív részhalmaza $\mathbf{P}(A)$-nak, és ekkor $\mathfrak{p}(E \cap F) = \mathfrak{p}(E)\mathfrak{p}(F) = \mathfrak{p}(E) \wedge \mathfrak{p}(F)$.

c) A b) állítás bizonyításában láttuk, hogy minden $E, F \in \mathscr{R}$ esetén $\mathfrak{p}(E \cup F) = \mathfrak{p}(E) + \mathfrak{p}(F) - \mathfrak{p}(E \cap F)$, így $\mathfrak{p}(E \cap F) = \mathfrak{p}(E)\mathfrak{p}(F)$ következtében $\mathfrak{p}(E \cup F) = \mathfrak{p}(E) + \mathfrak{p}(F) - \mathfrak{p}(E)\mathfrak{p}(F) = \mathfrak{p}(E) \vee \mathfrak{p}(F)$, hiszen $\mathfrak{p}(E)$ és $\mathfrak{p}(F)$ felcserélhetők.■

A következő tétel előtt emlékeztetünk arra, hogy ha $\mathscr{R}$ halmazgyűrű a T halmaz felett, akkor $\mathscr{E}_{\mathbb{C}}(T, \mathscr{R})$ jelöli a $T \to \mathbb{C}$ $\mathscr{R}$-lépcsősfüggvények terét, és $\mathscr{E}_{\mathbb{C}}(T, \mathscr{R})$ az $\mathscr{E}_{\mathbb{C}}(T, \mathscr{R})$ függvényhalmaz sup-norma szerinti lezártja, tehát $\mathscr{E}_{\mathbb{C}}(T, \mathscr{R})$ elemei azok a $T \to \mathbb{C}$ függvények, amelyek a T halmazon egyenletesen közelíthetők $\mathscr{R}$-lépcsősfüggvényekkel; nyilvánvaló, hogy $\mathscr{E}_{\mathbb{C}}(T, \mathscr{R})$ kommutatív függvény-C^*-algebra.

Felidézzük továbbá *a Riemann-integrálás alaptételét*, amely így hangzik: ha $\mathscr{R}$ halmazgyűrű a T halmaz felett, F komplex normált tér, és $\mathbf{m} : \mathscr{R} \to F$ normában korlátos additív halmazfüggvény, akkor az $\mathbf{m}$ által generált $\mathscr{E}_{\mathbb{C}}(T, \mathscr{R})$ feletti elemi integrál sup-normában folytonos, ezért ha F teljes, akkor egyértelműen kiterjeszthető $\mathscr{E}_{\mathbb{C}}(T, \mathscr{R}) \to F$ sup-normában folytonos lineáris operátorrá; ezt a kiterjesztést nevezzük az $\mathbf{m}$ által generált *egyszerű integrálnak*, és $\varphi \in \mathscr{E}_{\mathbb{C}}(T, \mathscr{R})$ esetén a φ függvény $\mathbf{m}$ szerinti egyszerű integrálját az

$$\int_T \varphi \, d\mathbf{m}$$

szimbólummal jelöljük.

24.1.2. Tétel. *Legyen $\mathscr{R}$ halmazgyűrű a T halmaz felett és A olyan Banach-*-algebra, hogy a $\mathbf{P}(A)$ halmaz korlátos az A normája szerint.*

a) *Minden $\mathfrak{p} : \mathscr{R} \to A$ projektor-értékű additív függvényhez létezik egyetlen olyan $\pi_{\mathfrak{p}} : \mathscr{E}_{\mathbb{C}}(T, \mathscr{R}) \to A$ folytonos *-algebra-morfizmus, hogy minden $E \in \mathscr{R}$ esetén $\pi_{\mathfrak{p}}(\chi_E) = \mathfrak{p}(E)$.*

b) *Minden $\pi : \mathscr{E}_{\mathbb{C}}(T, \mathscr{R}) \to A$ folytonos *-algebra-morfizmushoz létezik egyetlen olyan $\mathfrak{p}_\pi : \mathscr{R} \to A$ projektor-értékű additív függvény, hogy minden $E \in \mathscr{R}$ esetén $\mathfrak{p}_\pi(E) = \pi(\chi_E)$.*

Bizonyítás. a) Legyen $\mathfrak{p} : \mathscr{R} \to A$ projektor-értékű additív függvény, és jelölje $\mathbf{I}_{\mathfrak{p}} : \mathscr{E}_{\mathbb{C}}(T, \mathscr{R}) \to A$ a $\mathfrak{p}$ által generált elemi integrált. A feltevés alapján $\mathfrak{p}$ normában korlátos additív halmazfüggvény és A Banach-tér, ezért a Riemann-integrálás alaptétele szerint az $\mathbf{I}_{\mathfrak{p}}$ operátor egyértelműen kiterjeszthető sup-normában folytonos $\mathscr{E}_{\mathbb{C}}(T, \mathscr{R}) \to A$ lineáris operátorrá; jelölje $\pi_{\mathfrak{p}}$ ezt a kiterjesztést. Az nyilvánvaló, hogy minden $E \in \mathscr{R}$ esetén $\pi_{\mathfrak{p}}(\chi_{_E}) = \mathfrak{p}(E)$. Ha az $\mathbf{I}_{\mathfrak{p}}$ leképezés *-algebra-morfizmus volna, akkor az A szorzásának és involúciójának folytonossága, valamint az egyenlőségek folytatásának elve alapján $\pi_{\mathfrak{p}}$ is *-algebra-morfizmus volna. Megmutatjuk, hogy $\mathbf{I}_{\mathfrak{p}}$ valóban *-algebra-morfizmus. Ehhez először legyen $\varphi \in \mathscr{E}_{\mathbb{C}}(T, \mathscr{R})$, és vegyünk olyan $(E_i)_{i\in I}$ véges rendszert $\mathscr{R}$-ben és olyan $(c_i)_{i\in I}$ rendszert $\mathbb{C}$-ben, hogy $\varphi = \sum\limits_{i\in I} c_i \chi_{_{E_i}}$. Ekkor

$$\mathbf{I}_{\mathfrak{p}}(\overline{\varphi}) = \mathbf{I}_{\mathfrak{p}}\left(\sum_{i\in I} \overline{c_i}\chi_{_{E_i}}\right) = \sum_{i\in I} \overline{c_i}\mathfrak{p}(E_i) =$$

$$= \sum_{i\in I} \overline{c_i}\mathfrak{p}(E_i)^* = \left(\sum_{i\in I} c_i\mathfrak{p}(E_i)\right)^* = (\mathbf{I}_{\mathfrak{p}}(\varphi))^*,$$

tehát $\mathbf{I}_{\mathfrak{p}}$ involúció-tartó leképezés. (Láthatóan itt az volt lényeges, hogy $\mathfrak{p}$ értékei önadjungált elemek.) Az $\mathbf{I}_{\mathfrak{p}}$ elemi integrál multiplikativitásának bizonyításához legyenek $\varphi, \varphi' \in \mathscr{E}_{\mathbb{C}}(T, \mathscr{R})$. Vegyünk olyan $(E_i)_{i\in I}$ és $(E'_j)_{j\in J}$ véges rendszereket $\mathscr{R}$-ben, valamint olyan $(c_i)_{i\in I}$ és $(c'_j)_{j\in J}$ rendszereket $\mathbb{C}$-ben, hogy $\varphi = \sum\limits_{i\in I} c_i\chi_{_{E_i}}$ és $\varphi' = \sum\limits_{j\in J} c'_j\chi_{_{E'_j}}$. Az előző állítás b) pontja szerint minden $i \in I$ és $j \in J$ esetén $\mathfrak{p}(E_i \cap E'_j) = \mathfrak{p}(E_i)\mathfrak{p}(E'_j)$, ezért

$$\mathbf{I}_{\mathfrak{p}}(\varphi\varphi') = \mathbf{I}_{\mathfrak{p}}\left(\sum_{(i,j)\in I\times J} c_i c'_j \chi_{_{E_i\cap E'_j}}\right) = \sum_{(i,j)\in I\times J} c_i c'_j \mathfrak{p}(E_i \cap E'_j) =$$

$$= \sum_{(i,j)\in I\times J} c_i c'_j \mathfrak{p}(E_i)\mathfrak{p}(E'_j) = \left(\sum_{i\in I} c_i\mathfrak{p}(E_i)\right)\left(\sum_{j\in J} c'_j\mathfrak{p}(E'_j)\right) = \mathbf{I}_{\mathfrak{p}}(\varphi)\mathbf{I}_{\mathfrak{p}}(\varphi').$$

Ezzel az előírt tulajdonságú $\pi_{\mathfrak{p}} : \mathscr{E}_{\mathbb{C}}(T, \mathscr{R}) \to A$ leképezés létezését igazoltuk. Az unicitás nyilvánvaló, ugyanis $\mathscr{E}_{\mathbb{C}}(T, \mathscr{R})$ a definíció alapján sűrű altér $\mathscr{E}_{\mathbb{C}}(T, \mathscr{R})$-ben a sup-norma szerint.

b) Legyen $\pi : \mathscr{E}_{\mathbb{C}}(T, \mathscr{R}) \to A$ folytonos *-algebra-morfizmus. A Riemann-integrálás alaptétele szerint létezik egyetlen olyan $\mathfrak{p}_\pi : \mathscr{R} \to A$ korlátos additív függvény, hogy minden $E \in \mathscr{R}$ esetén $\mathfrak{p}_\pi(E) = \pi(\chi_{_E})$. Ha $E \in \mathscr{R}$, akkor $\chi_{_E} \in \mathbf{P}(\mathscr{E}_{\mathbb{C}}(T, \mathscr{R}))$ és π *-algebra-morfizmus, így $\mathfrak{p}_\pi(E) = \pi(\chi_{_E}) \in \mathbf{P}(A)$, vagyis $\mathfrak{p}$ korlátos, projektor-értékű additív függvény. ■

Megjegyzések. 1) Megjegyezzük, hogy ha A C^*-algebra, akkor $\mathbf{P}(A)$ korlátos a C^*-norma szerint, és ekkor az előző tétel a) és b) pontjában a "folytonos" jelző felesleges, mert a C^*-algebrák közötti *-algebra-morfizmusok automatikusan folytonosak. Tehát, ha A C^*-algebra és $\mathscr{R}$ halmazgyűrű a T halmaz felett, akkor az $\mathscr{R} \to A$ projektor-értékű additív függvények halmaza és az $\mathscr{E}_{\mathbb{C}}(T, \mathscr{R}) \to A$ *-algebra-morfizmusok halmaza között létezik egy kitüntetett bijekció: az a leképezés, amely minden $\mathfrak{p} : \mathscr{R} \to A$ projektor-értékű additív halmazfüggvényhez a $\mathfrak{p}$ által generált egyszerű integrált rendeli.

2) A Riemann-integrálás alaptételére való hivatkozás nélkül megmutatjuk, hogy ha $\mathscr{R}$ halmazgyűrű a T halmaz felett és A C^*-algebra, akkor minden $\mathfrak{p} : \mathscr{R} \to A$ projektor-értékű additív halmazfüggvényre a $\mathfrak{p}$ által generált elemi integrál folytonos a sup-norma szerint. Legyen ugyanis $\mathfrak{p} : \mathscr{R} \to A$ projektor-értékű additív halmazfüggvény és $\varphi \in \mathscr{E}_{\mathbb{C}}(T, \mathscr{R})$. Vegyünk olyan $(E_i)_{i\in I}$ *diszjunkt* véges rendszert $\mathscr{R}$-ben és olyan $(c_i)_{i\in I}$ rendszert $\mathbb{C}$-ben, hogy $\varphi = \sum_{i\in I} c_i \chi_{E_i}$. Feltehető, hogy $I \neq \emptyset$, és minden $I \ni i$-re, ha $E_i = \emptyset$, akkor $c_i = 0$. Ekkor $\|\varphi\| = \max_{i\in I} |c_i|$, ahol $\|\varphi\|$ a φ függvény sup-normája a T halmazon. Világos, hogy

$$\left\| \int_T \varphi \, d\mathfrak{p} \right\|^2 = \left\| \left(\int_T \varphi \, d\mathfrak{p} \right)^* \left(\int_T \varphi \, d\mathfrak{p} \right) \right\| = \left\| \left(\int_T \overline{\varphi} \, d\mathfrak{p} \right) \left(\int_T \varphi \, d\mathfrak{p} \right) \right\| =$$

$$= \left\| \int_T |\varphi|^2 d\mathfrak{p} \right\| = \left\| \sum_{i\in I} |c_i|^2 \mathfrak{p}(E_i) \right\|.$$

Ugyanakkor az A C^*-algebrában nyilvánvalóan teljesülnek a következő egyenlőtlenségek:

$$0 \preceq \sum_{i\in I} |c_i|^2 \mathfrak{p}(E_i) \preceq \left(\max_{i\in I} |c_i| \right)^2 \sum_{i\in I} \mathfrak{p}(E_i) = \|\varphi\|^2 \mathfrak{p}\left(\bigcup_{i\in I} E_i \right),$$

és C^*-algebrában minden projektor normája 1-nél kisebb-egyenlő, így

$$\left\| \sum_{i\in I} |c_i|^2 \mathfrak{p}(E_i) \right\| \leq \|\varphi\|^2 \left\| \mathfrak{p}\left(\bigcup_{i\in I} E_i \right) \right\| \leq \|\varphi\|^2,$$

tehát fennáll az

$$\left\| \int_T \varphi \, d\mathfrak{p} \right\| \leq \|\varphi\|$$

egyenlőtlenség.

3) Legyen T lokálisan kompakt tér és $\mathscr{B}_0(T)$ a T Baire-féle σ-gyűrűje (30.1.1.). Ekkor $\overline{\mathscr{K}}(T;\mathbb{C}) \subseteq \mathscr{E}(T, \mathscr{B}_0(T))$ teljesül (30.3.5.), tehát, ha A C^*-algebra, akkor minden $\mathfrak{p} : \mathscr{B}_0(T) \to A$ projektor-értékű additív függvényre a $\mathfrak{p}$ által generált egyszerű integrál értelmezve van a $T \to \mathbb{C}$ végtelenben eltűnő folytonos függvényeken. Speciálisan, ha T kompakt, akkor $T \in \mathscr{B}_0(T)$, vagyis $\mathscr{B}_0(T)$ σ-algebra és $\overline{\mathscr{K}}(T;\mathbb{C}) = \mathscr{C}(T;\mathbb{C})$, így minden A C^*-algebrára és $\mathfrak{p} : \mathscr{B}_0(T) \to A$ projektor-értékű additív függvényre a $\mathfrak{p}$ által generált egyszerű integrál értelmezve van a $T \to \mathbb{C}$ folytonos függvényeken, és világos, hogy ennek

az egyszerű integrálnak a $\mathscr{C}(T;\mathbb{C})$-re vett leszűkítése *-algebra-morfizmus a $\mathscr{C}(T;\mathbb{C})$ és A C^*-algebrák között. Nyilvánvaló, hogy ha T kompakt tér és A egységelemes C^*-algebra, akkor egy $\mathfrak{p} : \mathscr{B}_0(T) \to A$ projektor-értékű additív függvényre a $\mathfrak{p}(T) = \mathbf{1}$ egyenlőség pontosan akkor teljesül, ha a $\mathfrak{p}$ által generált egyszerű integrál *egységelem-tartó* *-algebra morfizmus. Megjegyezzük még, hogy ha T *metrizálható* kompakt tér, akkor a T Baire-féle σ-algebrája egyenlő a $\mathscr{B}(T)$ Borel-féle σ-algebrával, ezért ilyen esetben a $\mathscr{B}_0(T)$ szimbólum helyett mindenütt a $\mathscr{B}(T)$ szimbólumot használjuk.

24.2. Infraspektrális, spektrális és ultraspektrális C^*-algebrák

24.2.1. Definíció. *Az A egységelemes C^*-algebrát* **infraspektrálisnak** *nevezzük, ha minden $a \in A$ normális elemhez van olyan $\mathfrak{p} : \mathscr{B}(\mathrm{Sp}(a)) \to A$ projektor-értékű additív függvény, hogy minden $\varphi \in \mathscr{C}(\mathrm{Sp}(a);\mathbb{C})$ esetén*

$$C_a(\varphi) = \int\limits_{\mathrm{Sp}(a)} \varphi \, d\mathfrak{p}$$

teljesül, ahol $C_a : \mathscr{C}(\mathrm{Sp}(a);\mathbb{C}) \to A$ az adott normális elem által meghatározott folytonosfüggvény-számító operátor.

24.2.2. Állítás. *Az A egységelemes C^*-algebra pontosan akkor infraspektrális, ha minden $a \in A$ normális elemhez van olyan $\mathscr{E}_{\mathbb{C}}(\mathrm{Sp}(a), \mathscr{B}(\mathrm{Sp}(a))) \to A$ *-algebra-morfizmus, amely a $C_a : \mathscr{C}(\mathrm{Sp}(a);\mathbb{C}) \to A$ folytonosfüggvény-számító operátor kiterjesztése.*

Bizonyítás. A 24.1. 3) megjegyzés és a definíciók alapján nyilvánvaló. ■

Megjegyezzük, hogy az infraspektralitás definíciójában az $a \in A$ normális elemre csak egy olyan $\mathfrak{p} : \mathscr{B}(\mathrm{Sp}(a)) \to A$ projektor-értékű additív függvény *létezését* írjuk elő, amelyre minden $\varphi \in \mathscr{C}(\mathrm{Sp}(a);\mathbb{C})$ esetén

$$C_a(\varphi) = \int\limits_{\mathrm{Sp}(a)} \varphi \, d\mathfrak{p}$$

teljesül, de a $\mathfrak{p}$ *egyértelműségét* nem követeljük meg.

Később látni fogjuk, hogy nagyon sok infraspektrális C^*-algebra létezik. Most azt mutatjuk meg, hogy az infraspektralitás valóban korlátozó feltétel C^*-algebrák esetében, vagyis nem teljesül automatikusan minden C^*-algebrára.

24.2.3. Állítás. *Infraspektrális C^*-algebrában a projektorok halmazának lineáris burka a C^*-norma szerint sűrű.*

Bizonyítás. Elég azt igazolni, hogy ha A infraspektrális C^*-algebra, akkor minden $a \in A$ normális elem benne van a $\mathbf{P}(A)$ halmaz lineáris burkának C^*-norma szerinti lezártjában. Ez valóban így van, mert ha $\mathfrak{p} : \mathscr{B}(\mathrm{Sp}(a)) \to A$ olyan projektor-értékű additív függvény, hogy minden $\varphi \in \mathscr{C}(\mathrm{Sp}(a); \mathbb{C})$ esetén

$$C_a(\varphi) = \int\limits_{\mathrm{Sp}(a)} \varphi \, d\mathfrak{p}$$

teljesül, akkor speciálisan fennáll a

$$a = C_a(id_{\mathrm{Sp}(a)}) = \int\limits_{\mathrm{Sp}(a)} id_{\mathrm{Sp}(a)} \, d\mathfrak{p}$$

egyenlőség is. A 24.1. 3) megjegyzés alapján

$$id_{\mathrm{Sp}(a)} \in \mathscr{C}(\mathrm{Sp}(a); \mathbb{C}) \subseteq \mathscr{E}_{\mathbb{C}}(\mathrm{Sp}(a), \mathscr{B}(\mathrm{Sp}(a))),$$

tehát van olyan $(\varphi_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sorozat $\mathscr{E}_{\mathbb{C}}(\mathrm{Sp}(a), \mathscr{B}(\mathrm{Sp}(a)))$-ban, amely egyenletesen konvergál az $\mathrm{Sp}(a)$ halmazon az $id_{\mathrm{Sp}(a)}$ függvényhez. A $\mathfrak{p}$ által generált egyszerű integrál sup-norma szerinti folytonossága miatt

$$a = \int\limits_{\mathrm{Sp}(a)} id_{\mathrm{Sp}(a)} \, d\mathfrak{p} = \lim_{n \to \infty} \int\limits_{\mathrm{Sp}(a)} \varphi_n d\mathfrak{p}$$

a C^*-norma szerint. De minden $n \in \mathbb{N}$ esetén $\varphi_n \in \mathscr{E}_{\mathbb{C}}(\mathrm{Sp}(a), \mathscr{B}(\mathrm{Sp}(a)))$, így nyilvánvalóan

$$\int\limits_{\mathrm{Sp}(a)} \varphi_n d\mathfrak{p} \in \mathrm{span}(\mathbf{P}(A)),$$

tehát $a \in \overline{\mathrm{span}(\mathbf{P}(A))}$. ■

Ha például T legalább két elemű összefüggő kompakt tér, akkor a $\mathscr{C}(T; \mathbb{C})$ kommutatív C^*-algebra nem infraspektrális.

Ha A egységelemes C^*-algebra, akkor az A infraspektralitása azt jelenti, hogy létezik *metrizálható kompakt tereknek* olyan $\mathfrak{T}$ halmaza (ti. az A normális elemei spektrumainak halmaza), hogy minden $T \in \mathfrak{T}$ térhez létezik olyan $\mathscr{C}(T; \mathbb{C}) \to A$ egységelem-tartó *-algebra-morfizmusokból álló halmaz (ti. a C_a folytonosfüggvény-számító operátorok halmaza, ahol $a \in A$ olyan normális elem, amelyre $\mathrm{Sp}(a) = T$), hogy minden ilyen *-algebra-morfizmus kiterjeszthető $\mathscr{E}_{\mathbb{C}}(T, \mathscr{B}_0(T)) \to A$ *-algebra-morfizmussá. Ezért az infraspektralitásnál formálisan erősebb feltétel lehet az, hogy *minden* T kompakt térre, *minden* $\mathscr{C}(T; \mathbb{C}) \to A$ *-algebra-morfizmushoz létezzen $\mathscr{E}_{\mathbb{C}}(T, \mathscr{B}_0(T)) \to A$ *-algebramorfikus kiterjesztés. Így jutunk el a következő definícióhoz.

24.2.4. Definíció. *Az A egységelemes C^*-algebrát* **spektrálisnak** *nevezzük, ha minden T kompakt térre, minden $\mathscr{C}(T;\mathbb{C}) \to A$ *-algebra-morfizmus kiterjeszthető valamilyen $\mathscr{E}_{\mathbb{C}}(T, \mathscr{B}_0(T)) \to A$ *-algebra-morfizmussá.*

Nyilvánvaló, hogy minden spektrális C^*-algebra infraspektrális. Jelenleg nem ismert az, hogy igaz-e ennek a következtetésnek a megfordítása.

Az infraspektralitás túlságosan gyenge feltétel ahhoz, hogy nemtriviális tényeket fogalmazhassunk meg infraspektrális C^*-algebrákra. Ezzel szemben spektrális C^*-algebrákra bizonyítható néhány tartalmas állítás; ezek közül a későbbiekben bemutatunk egyet. Azonban még a spektralitásnál is erősebb követelményre van szükségünk arra, hogy kellően teljes spektráltételt igazolhassunk C^*-algebrákra. Ilyen erősebb feltétel lesz az *ultraspektralitás*.

A definíció előtt emlékeztetünk arra, hogy ha A *-algebra és $f : A \to \mathbb{C}$ lineáris funkcionál, akkor f^* jelöli az f *adjungáltját*, tehát f^* az az $A \to \mathbb{C}$ lineáris funkcionál, amelyre minden $a \in A$ esetén $f^*(a) := \overline{f(a^*)}$. Továbbá, minden $f : A \to \mathbb{C}$ lineáris funkcionálra és $A \ni a$-ra $a.f$ és $f.a$ azok az $A \to \mathbb{C}$ lineáris funkcionálok, amelyekre minden $b \in A$ esetén $(a.f)(b) := f(ab)$ és $(f.a)(b) := f(ba)$.

24.2.5. Definíció. *Az A egységelemes C^*-algebrát* **ultraspektrálisnak** *nevezzük, ha létezik olyan $M \subseteq A'$ lineáris altér, amelyre teljesülnek a következők.*

($\mathrm{SP_I}$) *Az M halmaz szétválasztja A elemeit (tehát minden $a \in A \setminus \{0\}$ esetén van olyan $f \in M$, hogy $f(a) \neq 0$), valamint minden $A \ni a$ és $M \ni f$ esetén $a.f \in M$ és $f^* \in M$ teljesül.*

($\mathrm{SP_{II}}$) *Az A sorozatteljes a $\sigma(A, M)$ topológia szerint, tehát, ha $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ olyan A-ban haladó sorozat, hogy minden $f \in M$ esetén az $(f(a_n))_{n\in\mathbb{N}}$ számsorozat konvergens, akkor létezik olyan $a \in A$, amelyre minden $M \ni f$-re $f(a) = \lim\limits_{n\to\infty} f(a_n)$.*

Megjegyezzük, hogy az ultraspektralitás definíciójában az A C^*-algebrától csak azt követeljük meg, hogy *létezzen* olyan $M \subseteq A'$ lineáris altér, amelyre teljesülnek az ($\mathrm{SP_I}$) és ($\mathrm{SP_{II}}$) tulajdonságok, de *nem jelölünk ki* egyetlen ilyen tulajdonságú M alteret sem. Ennek az az oka, hogy az ultraspektrális C^*-algebrák tulajdonságait illetően lényegtelennek bizonyul egy ($\mathrm{SP_I}$) és ($\mathrm{SP_{II}}$) feltételeknek eleget tevő $M \subseteq A'$ lineáris altér kitüntetése; csak ilyennek a *létezése* számít. Egyébként utólag kiderül, hogy általában nem egyetlen ilyen tulajdonságú M lineáris altér létezik A'-ben; ezt majd a Neumann-algebrák kapcsán igazoljuk.

24.2.6. Állítás. *Legyen A C^*-algebra és $M \subseteq A'$ olyan lineáris altér, amelyre* ($\mathrm{SP_I}$) *teljesül.*

a) *Minden $f \in M$ és $a \in A$ esetén $f.a \in M$.*

b) *Az A involúciója folytonos a $\sigma(A, M)$ topológia szerint.*

c) *Az* A *szorzása változóiban folytonos a* $\sigma(A, M)$ *topológia szerint.*

d) *Ha* $\overline{M}$ *jelöli az* M *lezártját* A'*-ben a funkcionálnorma szerint, akkor* $\overline{M}$*-ra* $(\mathrm{SP_I})$ *szintén teljesül, és minden* $B \subseteq A$ C^**-normában korlátos halmazra* $\sigma(A, M)|B = \sigma(A, \overline{M})|B$.

e) *Ha* M*-re* $(\mathrm{SP_{II}})$ *is teljesül, és minden* A*-ban haladó,* $\sigma(A, M)$ *topológia szerint konvergens sorozat* C^**-normában korlátos, akkor* $\overline{M}$*-ra is teljesül az* $(\mathrm{SP_{II}})$ *tulajdonság.*

Bizonyítás. a) Ha $a \in A$ és $f \in M$, akkor $f^* \in M$, ezért $a^*.f^* \in M$, így $f.a = (a^*.f^*)^* \in M$.

b) Legyen $(a_i)_{i\in I}$ általánosított sorozat A-ban, $a \in A$, és tegyük fel, hogy $a = \lim_{i,I} a_i$ a $\sigma(A, M)$ topológia szerint. Ekkor minden $M \ni f$-re $f(a) = \lim_{i,I} f(a_i)$ teljesül $\mathbb{C}$-ben, tehát minden $f \in M$ esetén $f^* \in M$ miatt

$$f(a^*) = \overline{f^*(a)} = \overline{\lim_{i,I} f^*(a_i)} = \overline{\lim_{i,I} \overline{f(a_i^*)}} = \lim_{i,I} f(a_i^*),$$

vagyis $a^* = \lim_{i,I} a_i^*$ a $\sigma(A, M)$ topológia szerint.

c) Legyen $(a_i)_{i\in I}$ általánosított sorozat A-ban, $a \in A$, és tegyük fel, hogy $a = \lim_{i,I} a_i$ a $\sigma(A, M)$ topológia szerint. Ha $b \in A$, akkor minden $f \in M$ esetén $b.f, f.b \in M$, ezért $f(ba) =: (b.f)(a) = \lim_{i,I}(b.f)(a_i) = \lim_{i,I} f(ba_i)$, valamint $f(ab) =: (f.b)(a) = \lim_{i,I}(f.b)(a_i) = \lim_{i,I} f(a_i b)$ teljesül, ami azt jelenti, hogy $ba = \lim_{i,I}(ba_i)$ és $ab = \lim_{i,I}(a_i b)$ a $\sigma(A, M)$ topológia szerint.

d) Természetesen $\overline{M}$ is lineáris altér A'-ben, és $M \subseteq \overline{M}$ miatt $\overline{M}$ is szétválasztó A felett. Legyen $f \in \overline{M}$ és $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ olyan sorozat M-ben, amely a funkcionálnorma szerint konvergál f-hez. Minden $n \in \mathbb{N}$ esetén $\|f^* - f_n^*\| = \|f - f_n\|$, ezért az M-ben haladó $(f_n^*)_{n\in\mathbb{N}}$ sorozat a funkcionálnorma szerint konvergál f^*-hoz, így $f^* \in \overline{M}$. Ha $a \in A$, akkor minden $\mathbb{N} \ni n$-re nyilvánvalóan $\|a.f - a.f_n\| \leq \|a\|\|f - f_n\|$, ezért az M-ben haladó $(a.f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sorozat a funkcionálnorma szerint konvergál $a.f$-hez, így $a.f \in \overline{M}$.

Legyen $B \subseteq A$ egy C^*-normában korlátos halmaz, $b \in B$, és $(b_i)_{i\in I}$ olyan B-ben haladó általánosított sorozat, amelyre $b = \lim_{i,I} b_i$ a $\sigma(A, M)$ topológia szerint. Megmutatjuk, hogy ekkor $b = \lim_{i,I} b_i$ a $\sigma(A, \overline{M})$ topológia szerint is, amiből már következik, hogy $\sigma(A, M)|B = \sigma(A, \overline{M})|B$. Ehhez legyen $f \in \overline{M}$ és $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ tetszőleges. Létezik olyan $f' \in M$, hogy $\sup_{i\in I} \|b_i\| \quad \|f - f'\| < \varepsilon/3$. A feltevés alapján $f'(b) = \lim_{i,I} f'(b_i)$, ezért van olyan $i_\varepsilon \in I$, hogy minden $i \in I$ esetén, ha $i \geq i_\varepsilon$, akkor $|f'(b) - f'(b_i)| < \varepsilon/3$. Tehát, ha $i \in I$ és $i \geq i_\varepsilon$, akkor

$$|f(b) - f(b_i)| \leq |f(b) - f'(b)| + |f'(b) - f'(b_i)| + |f'(b_i) - f(b_i)| \leq$$

$$\leq \|f - f'\| \|b\| + |f'(b) - f'(b_i)| + \|f' - f\| \|b_i\| < 3(\varepsilon/3) = \varepsilon,$$

vagyis $f(b) = \lim_{i,I} f(b_i)$, ami azt jelenti, hogy $b = \lim_{i,I} b_i$ a $\sigma(A, \overline{M})$ topológia szerint.

e) Tegyük fel, hogy M-re $(\mathrm{SP_{II}})$ teljesül, és minden A-ban haladó, $\sigma(A, M)$ topológia szerint konvergens sorozat C^*-normában korlátos. Legyen $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ olyan sorozat A-ban, hogy minden $\overline{M} \ni f$-re az $(f(a_n))_{n\in\mathbb{N}}$ sorozat konvergens $\mathbb{C}$-ben. Ekkor minden $f \in M$ esetén az $(f(a_n))_{n\in\mathbb{N}}$ sorozat konvergens $\mathbb{C}$-ben, így az M-re vonatkozó $(\mathrm{SP_{II}})$ feltétel alapján létezik olyan $a \in A$, hogy $a = \lim_{i,I} a_i$ a $\sigma(A, M)$ topológia szerint. A feltevés alapján az $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sorozat a C^*-normában korlátos, így a d)-ből következik, hogy $a = \lim_{i,I} a_i$ a $\sigma(A, \overline{M})$ topológia szerint is, vagyis $\overline{M}$ is eleget tesz az $(\mathrm{SP_{II}})$ feltételnek (M helyett $\overline{M}$-t írva). ∎

24.3. Példák ultraspektrális C^*-algebrákra

Most két olyan állítást bizonyítunk, amelyek fontos nemtriviális példákat szolgáltatnak ultraspektrális C^*-algebrákra.

Az első példa előtt megjegyezzük, hogy ha $\mathscr{R}$ halmazgyűrű a T halmaz felett, akkor a Riemann-integálás alaptétele szerint a sup-normával ellátott $\mathscr{E}_{\mathbb{C}}(T, \mathscr{R})$ Banach-tér topologikus duálisa megegyezik az $\mathscr{R} \to \mathbb{C}$ korlátos additív függvények által generált egyszerű integrálok halmazával. Ebből látható, hogy az $\mathscr{E}_{\mathbb{C}}(T, \mathscr{R})'$ topologikus duális tartalmaz egy nemtriviális kitüntetett halmazt: az $\mathscr{R} \to \mathbb{C}$ korlátos *σ-additív* függvények által generált egyszerű integrálok halmazát. Megjegyezzük, hogy minden $\mathscr{R} \to \mathbb{C}$ korlátos additív függvény relatív korlátos, így korlátos változású is, ezért ha σ-additív, akkor *komplex mérték* $\mathscr{R}$ felett.

24.3.1. Jelölés. *Ha $\mathscr{R}$ halmazgyűrű a T halmaz felett, akkor $M(T, \mathscr{R})$ jelöli az $\mathscr{R} \to \mathbb{C}$ korlátos σ-additív függvények által generált egyszerű integrálok halmazát (tehát $M(T, \mathscr{R}) \subseteq \mathscr{E}_{\mathbb{C}}(T, \mathscr{R})'$).*

24.3.2. Lemma. *Ha $\mathscr{R}$ halmazgyűrű a T halmaz felett, akkor $M(T, \mathscr{R})$ olyan funkcionálnormában zárt lineáris altér $\mathscr{E}_{\mathbb{C}}(T, \mathscr{R})'$-ben, amely szétválasztja $\mathscr{E}_{\mathbb{C}}(T, \mathscr{R})$ elemeit, továbbá minden $\mathscr{E}_{\mathbb{C}}(T, \mathscr{R})$-ben haladó $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sorozatra és $\varphi \in \mathscr{E}_{\mathbb{C}}(T, \mathscr{R})$ függvényre $\varphi = \lim_{n\to\infty} \varphi_n$ pontosan akkor teljesül a*

$$\sigma(\mathscr{E}_{\mathbb{C}}(T, \mathscr{R}), M(T, \mathscr{R}))$$

topológia szerint, ha a $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ függvénysorozat sup-normában korlátos és a T halmazon pontonként konvergál φ-hez.

Bizonyítás. Minden $\theta : \mathscr{R} \to \mathbb{C}$ korlátos σ-additív függvényre $\hat{\theta}$ fogja jelölni a θ által generált egyszerű integrált, tehát $\hat{\theta} : \mathscr{E}_{\mathbb{C}}(T, \mathscr{R}) \to \mathbb{C}$ az az egyetlen sup-normában folytonos lineáris funkcionál, amelyre minden $E \in \mathscr{R}$ esetén $\hat{\theta}(\chi_{_E}) = \theta(E)$.

Ha $t \in T$, akkor a $\delta_t : \mathscr{R} \to \mathbb{C};\ E \mapsto \chi_{_E}(t)$ *Dirac-mértékre* teljesül az, hogy $\delta_t \in M(T, \mathscr{R})$, és könnyen látható, hogy minden $\varphi \in \mathscr{E}_{\mathbb{C}}(T, \mathscr{R})$ esetén $\hat{\delta}_t(\varphi) = \varphi(t)$. Tehát, ha $\varphi, \varphi' \in \mathscr{E}_{\mathbb{C}}(T, \mathscr{R})$ és $\varphi \neq \varphi'$, akkor van olyan $t \in T$, hogy $\hat{\delta}_t(\varphi) = \varphi(t) \neq \varphi'(t) = \hat{\delta}_t(\varphi)$. Ezért $M(T, \mathscr{R})$ szétválasztó $\mathscr{E}_{\mathbb{C}}(T, \mathscr{R})$ felett.

Megmutatjuk, hogy $M(T, \mathscr{R})$ olyan lineáris altere $\mathscr{E}_{\mathbb{C}}(T, \mathscr{R})'$-nek, amely *zárt* a funkcionálnorma szerint. Ehhez legyen $(\theta_n)_{n\in\mathbb{N}}$ olyan sorozat, amelynek minden tagja $\mathscr{R} \to \mathbb{C}$ korlátos σ-additív függvény, és legyen $f \in \mathscr{E}_{\mathbb{C}}(T, \mathscr{R})'$ olyan funkcionál, hogy $f = \lim\limits_{n\to\infty} \hat{\theta}_n$ a funkcionálnorma szerint. Olyan $\theta : \mathscr{R} \to \mathbb{C}$ korlátos σ-additív függvényt keresünk, amelyre $f = \hat{\theta}$. Ha θ ilyen volna, akkor minden $E \in \mathscr{R}$ esetén

$$\theta(E) = \hat{\theta}(\chi_{_E}) = f(\chi_{_E}) = \lim_{n\to\infty} \hat{\theta}_n(\chi_{_E})$$

teljesülne, hiszen a $(\hat{\theta}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ funkcionál-sorozat pontonként is konvergál f-hez. Ezért a keresett $\theta : \mathscr{R} \to \mathbb{C}$ halmazfüggvényt úgy *értelmezzük*, hogy minden $E \in \mathscr{R}$ esetén legyen

$$\theta(E) := f(\chi_{_E}) \ \Big(= \lim_{n\to\infty} \hat{\theta}_n(\chi_{_E})\Big).$$

Azt kell igazolni, hogy θ korlátos σ-additív függvény és $f = \hat{\theta}$. A θ korlátossága abból következik, hogy a $(\hat{\theta}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ funkcionál-sorozat korlátos a funkcionálnorma szerint, hiszen a θ definíciója alapján

$$\sup_{E\in\mathscr{R}} |\theta(E)| \leq \sup_{E\in\mathscr{R}} \ \sup_{n\in\mathbb{N}} |\hat{\theta}_n(\chi_{_E})| \ = \sup_{n\in\mathbb{N}} \ \sup_{E\in\mathscr{R}} |\hat{\theta}_n(\chi_{_E})| \ \leq \sup_{n\in\mathbb{N}} \|\hat{\theta}_n\| < +\infty.$$

A θ halmazfüggvény additivitása nyilvánvalóan következik a θ definíciójából és az f funkcionál linearitásából. A θ halmazfüggvény σ-additivtásának bizonyításához legyen $(E_n)_{n\in\mathbb{N}}$ olyan monoton fogyó sorozat $\mathscr{R}$-ben, hogy $\bigcap\limits_{n\in\mathbb{N}} E_n = \emptyset$; azt kell igazolni, hogy $\lim\limits_{n\to\infty} \theta(E_n) = 0$. Legyen $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ tetszőleges. Létezik olyan $M \in \mathbb{N}$, hogy minden $m > M$ természetes számra

$$\sup_{\substack{\varphi\in\widehat{\mathscr{E}_{\mathbb{C}}}(T,\mathscr{R}) \\ |\varphi|\leq 1}} |f(\varphi) - \hat{\theta}_m(\varphi)| = \|f - \hat{\theta}_m\| < \varepsilon/2.$$

Legyen $m \in \mathbb{N}$ olyan rögzített szám, amelyre $m > M$. A $\theta_m : \mathscr{R} \to \mathbb{C}$ halmazfüggvény σ-additív, ezért $\lim\limits_{n\to\infty} \theta_m(E_n) = 0$, így van olyan $N \in \mathbb{N}$, hogy minden $n > N$ természetes számra $|\theta_m(E_n)| < \varepsilon/2$. Ekkor $n \in \mathbb{N}$ és $n > N$ esetén

$$|\theta(E_n)| \leq |\theta(E_n) - \theta_m(E_n)| + |\theta_m(E_n)| = |f(\chi_{_{E_n}}) - \hat{\theta}_m(\chi_{_{E_n}})| + |\theta_m(E_n)| \leq$$

$$\leq \|f - \hat{\theta}_m\| + |\theta_m(E_n)| < \varepsilon,$$

ami azt jelenti, hogy $\lim_{n\to\infty} \theta(E_n) = 0$, tehát a θ halmazfüggvény σ-additív. A definíció szerint minden $E \in \mathscr{R}$ esetén $\hat{\theta}(\chi_E) = \theta(E) = f(\chi_E)$, tehát $\hat{\theta} = f$ az $\mathscr{E}_{\mathbb{C}}(T, \mathscr{R})$ altéren, ugyanakkor ez a lineáris altér sup-normában sűrű $\mathscr{E}_{\mathbb{C}}(T, \mathscr{R})$-ben, és a $\hat{\theta}$ és f funkcionálok sup-normában folytonosak, ezért $\hat{\theta} = f$.

Tegyük fel, hogy $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ olyan sorozat $\mathscr{E}_{\mathbb{C}}(T, \mathscr{R})$-ben és $\varphi \in \mathscr{E}_{\mathbb{C}}(T, \mathscr{R})$ olyan függvény, hogy a $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sorozat sup-normában korlátos, azaz

$$C := \sup_{n\in\mathbb{N}} \left(\sup_{t\in T} |\varphi_n(t)| \right) < +\infty,$$

és pontonként konvergál a T halmazon φ-hez. Az $\mathscr{E}_{\mathbb{C}}(T, \mathscr{R})$ minden eleme előáll $\mathscr{R}$-lépcsősfüggvények *pontonkénti limeszeként* is, ezért minden $\psi \in \mathscr{E}_{\mathbb{C}}(T, \mathscr{R})$ esetén van olyan $H \subseteq T$ halmaz, amely előáll megszámlálható sok $\mathscr{R}$-beli halmaz uniójaként, és $\{t \in T | \psi(t) \neq 0\} \subseteq H$. Ebből következik olyan $H \subseteq T$ halmaz létezése, amely előáll megszámlálható sok $\mathscr{R}$-beli halmaz uniójaként, és $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} \{t \in T | \varphi_n(t) \neq 0\} \subseteq H$. Ekkor minden $\mathbb{N} \ni n$-re $|\varphi_n| \leq C\chi_H$. A Beppo-Levi-tétel alapján minden $n \in \mathbb{N}$ esetén $C\chi_H \in \mathscr{L}^1_{\mathbb{C}}(T, \mathscr{R}, \theta)$, így a Lebesgue-tételből következik, hogy ha $\theta : \mathscr{R} \to \mathbb{C}$ korlátos mérték, akkor

$$\int_T \varphi \, d\theta = \lim_{n\to\infty} \int_T \varphi_n \, d\theta,$$

ahol az integrál a θ szerinti *Lebesgue-integrált* jelöli. Könnyen látható, hogy minden $\theta : \mathscr{R} \to \mathbb{C}$ korlátos mértékre és $\psi \in \mathscr{E}_{\mathbb{C}}(T, \mathscr{R})$ függvényre $\psi \in \mathscr{L}^1_{\mathbb{C}}(T, \mathscr{R}, \theta)$, valamint

$$\left| \int_T \varphi \, d\theta \right| \leq \int_T |\varphi| \, d|\theta| \leq \left(\sup_{t\in T} |\varphi(t)| \right) \left(\sup_{E\in\mathscr{R}} |\theta(E)| \right),$$

tehát a θ szerinti Lebesgue-integrál folytonos az $\mathscr{E}_{\mathbb{C}}(T, \mathscr{R})$ feletti sup-norma szerint, és az $\mathscr{E}_{\mathbb{C}}(T, \mathscr{R})$ altéren megegyezik $\hat{\theta}$-pal, ezért a θ szerinti Lebesgue-integrál $\mathscr{E}_{\mathbb{C}}(T, \mathscr{R})$-re vett leszűkítése *egyenlő* $\hat{\theta}$-pal. Tehát minden $\theta : \mathscr{R} \to \mathbb{C}$ korlátos mértékre $\hat{\theta}(\varphi) = \lim_{n\to\infty} \hat{\theta}(\varphi_n)$, így $\varphi = \lim_{n\to\infty} \varphi_n$ a $\sigma(\mathscr{E}_{\mathbb{C}}(T, \mathscr{R}), M(T, \mathscr{R}))$ topológia szerint.

Megfordítva, tegyük fel, hogy $\varphi = \lim_{n\to\infty} \varphi_n$ a $\sigma(\mathscr{E}_{\mathbb{C}}(T, \mathscr{R}), M(T, \mathscr{R}))$ topológia szerint. Minden $t \in T$ esetén $\hat{\delta}_t \in M(T, \mathscr{R})$, tehát a feltevés alapján $\varphi(t) = \hat{\delta}_t(\varphi) = \lim_{n\to\infty} \hat{\delta}_t(\varphi_n) = \lim_{n\to\infty} \varphi_n(t)$, vagyis a $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ függvénysorozat pontonként konvergál a T halmazon φ-hez. Lássuk el az $M(T, \mathscr{R})$ vektorteret a funkcionálnormával, és legyen minden $n \in \mathbb{N}$ esetén

$$\tilde{\varphi}_n : M(T, \mathscr{R}) \to \mathbb{C}; \quad f \mapsto f(\varphi_n).$$

Világos, hogy minden $\mathbb{N} \ni n$-re $\tilde{\varphi}_n$ folytonos lineáris funkcionál $M(T,\mathscr{R})$ felett, és a hipotézis alapján a $(\tilde{\varphi}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ funkcionál-sorozat pontonként konvergál a $\tilde{\varphi} : M(T,\mathscr{R}) \to \mathbb{C};\ f \mapsto f(\varphi)$ funkcionálhoz. Ugyanakkor $M(T,\mathscr{R})$ a funkcionálnormával ellátva *Banach-tér*, mert $M(T,\mathscr{R})$ a funkcionálnorma szerint *zárt* lineáris altere az $\mathscr{E}_{\mathbb{C}}(T,\mathscr{R})'$ Banach-térnek. Ezért Banach egyenletes korlátosság tétele alapján $\sup\limits_{n\in\mathbb{N}} \|\tilde{\varphi}_n\| < +\infty$, és

$$\sup_{n\in\mathbb{N}} \sup_{t\in T} |\varphi_n(t)| = \sup_{n\in\mathbb{N}} \sup_{t\in T} |\hat{\delta}_t(\varphi_n)| = \sup_{n\in\mathbb{N}} \sup_{t\in T} |\tilde{\varphi}_n(\hat{\delta}_t)| \leq$$

$$\leq \sup_{n\in\mathbb{N}} \sup_{\substack{f\in M(T,\mathscr{R})\\ \|f\|\leq 1}} |\tilde{\varphi}_n(f)| = \sup_{n\in\mathbb{N}} \|\tilde{\varphi}_n\|,$$

így a $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ függvénysorozat a sup-normában korlátos. ■

24.3.3. Lemma. *Legyen $\mathscr{B}$ σ-algebra a T halmaz felett és $\varphi : T \to \mathbb{C}$ korlátos függvény. Ha létezik olyan $\mathscr{E}_{\mathbb{C}}(T,\mathscr{B})$-ben haladó $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sorozat, amely pontonként konvergál φ-hez a T halmazon, akkor $\varphi \in \mathscr{E}_{\mathbb{C}}(T,\mathscr{B})$.*

Bizonyítás. Elég azt igazolni, hogy minden $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ nyílt halmazra $\overset{-1}{\varphi}\langle\Omega\rangle \in \mathscr{B}$. Ehhez legyen $(\Omega_k)_{k\in\mathbb{N}}$ olyan halmazsorozat, hogy minden $\mathbb{N} \ni k$-ra Ω_k nyílt halmaz $\mathbb{C}$-ben, $\overline{\Omega_k} \subseteq \Omega_{k+1}$ és $\Omega = \bigcup\limits_{k\in\mathbb{N}} \Omega_k$. Ilyen halmazsorozat létezik, mert Ω a $\mathbb{C}$ euklidészi topológiájának leszűkítésével ellátva σ-kompakt lokálisan kompakt tér (27.12.2.). Könnyen látható, hogy ekkor

$$\overset{-1}{\varphi}\langle\Omega\rangle = \bigcup_{k\in\mathbb{N}} \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \bigcap_{\substack{m\in\mathbb{N}\\ m\geq n}} \overset{-1}{\varphi}_m\langle\Omega_k\rangle \qquad ,$$

és itt a jobb oldalon álló halmaz eleme $\mathscr{B}$-nek, mert $k, m \in \mathbb{N}$ esetén az imént említett gyakorlat szerint $\overset{-1}{\varphi}_m\langle\Omega_k\rangle \in \mathscr{B}$, és $\mathscr{B}$ σ-algebra T felett. ■

24.3.4. Állítás. *Ha $\mathscr{B}$ σ-algebra a T halmaz felett, akkor az $M(T,\mathscr{B}) \subseteq \mathscr{E}_{\mathbb{C}}(T,\mathscr{B})'$ lineáris altérre* $(\mathrm{SP_I})$ *és* $(\mathrm{SP_{II}})$ *teljesül, tehát $\mathscr{E}_{\mathbb{C}}(T,\mathscr{B})$ ultraspektrális C^*-algebra.*

Bizonyítás. Minden $\theta : \mathscr{B} \to \mathbb{C}$ korlátos σ-additív függvényre $\hat{\theta}$ fogja jelölni a θ által generált egyszerű integrált.

Ha $\theta : \mathscr{B} \to \mathbb{C}$ korlátos σ-additív függvény, akkor a

$$\overline{\theta} : \mathscr{B} \to \mathbb{C}; \quad E \mapsto \overline{\theta(E)}$$

leképezés szintén korlátos σ-additív függvény, és könnyen látható, hogy $\hat{\theta}^* = \hat{\overline{\theta}} \in M(T,\mathscr{B})$, ugyanis ezek a sup-normában folytonos funkcionálok megegyeznek az $\mathscr{E}_{\mathbb{C}}(T,\mathscr{B})$

téren, ami a sup-norma szerint sűrű $\mathscr{E}_{\mathbb{C}}(T,\mathscr{B})$-ben.

Legyen $\varphi \in \mathscr{E}_{\mathbb{C}}(T,\mathscr{B})$ és $\theta : \mathscr{B} \to \mathbb{C}$ korlátos σ-additív függvény. Tudjuk, hogy a $\hat{\theta}$ funkcionál egyenlő a θ szerinti Lebesgue-integrál $\mathscr{E}_{\mathbb{C}}(T,\mathscr{B})$-re vett leszűkítésével. Ebből a Lebesgue-tétel alkalmazásával könnyen adódik, hogy a

$$\varphi.\theta : \mathscr{B} \to \mathbb{C}; \quad E \mapsto \int_T \chi_E \varphi \, d\theta$$

leképezés σ-additív és nyilvánvalóan korlátos halmazfüggvény. Világos, hogy a $\varphi.\theta$ és $\varphi.\hat{\theta}$ sup-normában folytonos lineáris funkcionálok megegyeznek az $\mathscr{E}_{\mathbb{C}}(T,\mathscr{B})$ téren, ami a sup-norma szerint sűrű $\mathscr{E}_{\mathbb{C}}(T,\mathscr{B})$-ben, így $\varphi.\theta = \varphi.\hat{\theta}$. Ez azt jelenti, hogy $M(T,\mathscr{B})$-re $(\mathrm{SP_I})$ teljesül.

Legyen $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ olyan sorozat $\mathscr{E}_{\mathbb{C}}(T,\mathscr{B})$-ben, amely a $\sigma(\mathscr{E}_{\mathbb{C}}(T,\mathscr{B}), M(T,\mathscr{B}))$ topológia szerint Cauchy-sorozat, vagyis minden $\theta : \mathscr{B} \to \mathbb{C}$ korlátos σ-additív függvényre a $(\hat{\theta}(\varphi_n))_{n\in\mathbb{N}}$ számsorozat konvergens. Minden $t \in T$ esetén $\delta_t : \mathscr{B} \to \mathbb{C}$ korlátos σ-additív függvény, így a $(\hat{\delta}_t(\varphi_n))_{n\in\mathbb{N}}$, vagyis a $(\varphi_n(t))_{n\in\mathbb{N}}$ számsorozat konvergens. Ez azt jelenti, hogy a $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ függvénysorozat pontonként konvergens a T halmazon; legyen $\varphi := \lim\limits_{n\to\infty} \varphi_n$. Minden $n \in \mathbb{N}$ esetén legyen

$$\tilde{\varphi}_n : M(T,\mathscr{R}) \to \mathbb{C}; \quad f \mapsto f(\varphi_n).$$

Világos, hogy minden $\mathbb{N} \ni n$-re $\tilde{\varphi}_n$ folytonos lineáris funkcionál a funkcionálnormával ellátott $M(T,\mathscr{R})$ vektortér felett, és a hipotézis alapján a $(\tilde{\varphi}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ funkcionál-sorozat *pontonként korlátos.* Ugyanakkor $M(T,\mathscr{R})$ a funkcionálnormával ellátva *Banach-tér*, mert $M(T,\mathscr{R})$ a funkcionálnorma szerint *zárt* lineáris altere az $\mathscr{E}_{\mathbb{C}}(T,\mathscr{R})'$ Banach-térnek. Ezért Banach egyenletes korlátosság tétele alapján $\sup\limits_{n\in\mathbb{N}} \|\tilde{\varphi}_n\| < +\infty$. Ebből következik, hogy a φ függvény korlátos, hiszen minden $t \in T$ esetén

$$|\varphi(t)| = \lim_{n\to\infty} |\varphi_n(t)| \le \sup_{n\in\mathbb{N}} |\varphi_n(t)| = \sup_{n\in\mathbb{N}} |\hat{\delta}_t(\varphi_n)| = \sup_{n\in\mathbb{N}} |\tilde{\varphi}_n(\hat{\delta}_t)| \le \sup_{n\in\mathbb{N}} \|\tilde{\varphi}_n\|.$$

Az előző lemma alapján $\varphi \in \mathscr{E}_{\mathbb{C}}(T,\mathscr{B})$. Továbbá $n \in \mathbb{N}$ esetén $\|\tilde{\varphi}_n\| = \sup\limits_{t\in T} |\varphi_n(t)|$, így a $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ függvénysorozat sup-normában korlátos. Ebből következik, hogy $\varphi = \lim\limits_{n\to\infty} \varphi_n$ a $\sigma(\mathscr{E}_{\mathbb{C}}(T,\mathscr{B}), M(T,\mathscr{B}))$ topológia szerint, tehát $M(T,\mathscr{B})$-re $(\mathrm{SP_{II}})$ is teljesül. ■

24.3.5. Állítás. *Ha T σ-kompakt lokálisan kompakt tér, akkor az $\mathscr{E}_{\mathbb{C}}(T,\mathscr{B}_0(T))$ C^*-algebra ultraspektrális.*

Bizonyítás. Ha T σ-kompakt lokálisan kompakt tér, akkor $T \in \mathscr{B}_0(T)$ (30.3.3.), tehát a $\mathscr{B}_0(T)$ σ-gyűrű valójában σ-algebra, így az előző állítás szerint $\mathscr{E}_{\mathbb{C}}(T,\mathscr{B}_0(T))$ ultraspektrális C^*-algebra. ■

A fentiek szerint sokféle *kommutatív* ultraspektrális C^*-algebra létezik. A következő állításban példát mutatunk sokféle *nemkommutatív* ultraspektrális C^*-algebrára.

24.3.6. Állítás. *Legyen A Neumann-algebra a $\mathscr{H}$ Hilbert-tér felett. Minden $\zeta, \eta \in \mathscr{H}$ esetén legyen*

$$\omega_{\zeta,\eta} : \mathscr{L}(\mathscr{H}) \to \mathbb{C}; \quad u \mapsto (u(\zeta)|\eta).$$

Jelölje M_A az $\{\omega_{\zeta,\eta}|_A | \zeta, \eta \in \mathscr{H}\}$ funkcionál-halmaz lineáris burkát. Ekkor M_A olyan lineáris altér A'-ben, amelyre $(\mathrm{SP_I})$ *és* $(\mathrm{SP_{II}})$ *teljesül, és ha $\overline{M_A}$ jelöli az M_A halmaz funkcionálnorma szerinti lezártját A'-ben, akkor $\overline{M_A}$-ra is teljesül* $(\mathrm{SP_I})$ *és* $(\mathrm{SP_{II}})$.

Bizonyítás. Nyilvánvaló, hogy $\zeta, \eta \in \mathscr{H}$ esetén $\omega_{\zeta,\eta} : \mathscr{L}(\mathscr{H}) \to \mathbb{C}$ operátornormában folytonos lineáris funkcionál, így M_A lineáris altere A'-nek.

Ha $u \in \mathscr{L}(\mathscr{H})$ és $u \neq 0$, akkor léteznek olyan $\zeta, \eta \in \mathscr{H}$ vektorok, hogy $\omega_{\zeta,\eta}(u) = (u(\zeta)|\eta) \neq 0$. Ezért M_A szétválasztó A felett. Ha $\zeta, \eta \in \mathscr{H}$ és $v \in \mathscr{L}(\mathscr{H})$, akkor minden $\mathscr{L}(\mathscr{H}) \ni u$-ra

$$\omega^*_{\zeta,\eta}(u) = \overline{\omega_{\zeta,\eta}(u^*)} = \overline{(u^*(\zeta)|\eta)} = (u(\eta)|\zeta) = \omega_{\eta,\zeta}(u),$$

$$(v.\omega_{\zeta,\eta})(u) = \omega_{\zeta,\eta}(v \circ u) = (v(u(\zeta))|\eta) = (u(\zeta)|v^*(\eta)) = \omega_{\zeta,v^*(\eta)}(u).$$

Ez azt jelenti, hogy $\zeta, \eta \in \mathscr{H}$ és $v \in \mathscr{L}(\mathscr{H})$ esetén $\omega^*_{\zeta,\eta} = \omega_{\eta,\zeta}$ és $v.\omega_{\zeta,\eta} = \omega_{\zeta,v^*(\eta)}$, következésképpen M_A-ra $(\mathrm{SP_I})$ teljesül.

Legyen $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ olyan sorozat A-ban, hogy minden $f \in M_A$ esetén az $(f(a_n))_{n\in\mathbb{N}}$ sorozat konvergens $\mathbb{C}$-ben. Ekkor minden $\zeta, \eta \in \mathscr{H}$ esetén az $((a_n(\zeta)|\eta))_{n\in\mathbb{N}}$ sorozat konvergens $\mathbb{C}$-ben, ezért jól értelmezett a

$$\beta : \mathscr{H} \times \mathscr{H} \to \mathbb{C}; \quad (\zeta, \eta) \mapsto \lim_{n\to\infty} (a_n(\zeta)|\eta)$$

leképezés. Nyilvánvaló, hogy β konjugált bilineáris. Ha $\zeta \in \mathscr{H}$, akkor a $\mathscr{H} \to \mathbb{C}$ folytonos lineáris funkcionálokból álló $\{(\cdot|a_n(\zeta))|n \in \mathbb{N}\}$ halmaz pontonként konvergens, így pontonként korlátos is, tehát Banach egyenletes korlátosság tétele szerint ez a halmaz funkcionálnormában is korlátos, vagyis

$$\sup_{n\in\mathbb{N}} \|a_n(\zeta)\| = \sup_{n\in\mathbb{N}} \|(\cdot|a_n(\zeta))\| < +\infty.$$

Ez azt jelenti, hogy az $\{a_n|n \in \mathbb{N}\}$ operátorhalmaz $\mathscr{H}$-n pontonként korlátos, tehát ismét Banach egyenletes korlátosság tétele alapján operátornormában is korlátos. Ezért minden $\zeta, \eta \in \mathscr{H}$ esetén

$$|\beta(\zeta, \eta)| = \lim_{n\to\infty} |(a_n(\zeta)|\eta)| \leq \sup_{n\in\mathbb{N}} \|a_n\| \quad \|\zeta\| \|\eta\|,$$

tehát a β konjugált bilineáris funkcionál folytonos. Ebből következik olyan $a \in \mathscr{L}(\mathscr{H})$ operátor létezése, amelyre minden $\zeta, \eta \in \mathscr{H}$ esetén $\beta(\zeta, \eta) = (a(\zeta)|\eta)$, vagyis $\omega_{\zeta,\eta}(a) = \lim_{n\to\infty} \omega_{\zeta,\eta}(a_n)$. Ha $u \in C(A)$, akkor minden $\mathbb{N} \ni n$-re $a_n \circ u = u \circ a_n$, így minden $\zeta, \eta \in \mathscr{H}$ esetén

$$((a \circ u)(\zeta)|\eta) = (a(u(\zeta))|\eta) = \lim_{n\to\infty}(a_n(u(\zeta))|\eta) = \lim_{n\to\infty}(u(a_n(\zeta))|\eta) =$$

$$= \lim_{n\to\infty}(a_n(\zeta)|u^*(\eta)) = (a(\zeta)|u^*(\eta)) = ((u \circ a)(\zeta)|\eta),$$

amiből következik, hogy $a \circ u = u \circ a$. Ez azt jelenti, hogy $a \in C(C(A)) = A$, és az a definíciója szerint minden $M_A \ni f$-re $f(a) = \lim_{n\to\infty} f(a_n)$, vagyis $a = \lim_{n\to\infty} a_n$ a $\sigma(A, M_A)$ topológia szerint. Tehát M_A-ra $(\mathrm{SP_{II}})$ is teljesül.

A bizonyításból az is látható, hogy ha $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ olyan sorozat A-ban, hogy minden $f \in M_A$ esetén az $(f(a_n))_{n\in\mathbb{N}}$ sorozat konvergens $\mathbb{C}$-ben, akkor $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ korlátos az operátornormában, tehát az A C^*-normája szerint korlátos. Ekkor viszont az $\overline{M_A}$-ra is teljesül $(\mathrm{SP_I})$ és $(\mathrm{SP_{II}})$. ■

24.4. Ultraspektrális C^*-algebrák tulajdonságai

Láttuk, hogy minden Neumann-algebra ultraspektrális C^*-algebra, és kiderült, hogy az A Neumann-algebra esetében rendszerint két olyan lineáris altere van A'-nek, amelyre $(\mathrm{SP_I})$ és $(\mathrm{SP_{II}})$ teljesül: ezek M_A és $\overline{M_A}$. Ez utóbbit az A Neumann-algebra *preduálisának* is nevezzük, és a preduális elemeit A feletti *ultragyengén folytonos* lineáris funkcionáloknak mondjuk. A $\sigma(A, M_A)$ (illetve $\sigma(A, \overline{M_A})$) topológiát az A feletti *gyenge* (illetve *ultragyenge*) *topológiának* nevezzük. A Neumann-algebra feletti gyenge topológia általában szigorúan gyengébb az ultragyenge topológiánál, de e két topológia leszűkítése C^*-normában korlátos halmazra ugyanaz. Nyilvánvaló, hogy az A feletti $\sigma(A, A')$ topológia majorálja az A feletti ultragyenge topológiát.

A következő állítás megmutatja, hogy az ultraspektralitás nem minden C^*-algebrára teljesül.

24.4.1. Állítás. *Minden ultraspektrális C^*-algebra Rickart-C^*-algebra.*

Bizonyítás. Legyen A ultraspektrális C^*-algebra, és $M \subseteq A'$ olyan lineáris altér, amelyre $(\mathrm{SP_I})$ és $(\mathrm{SP_{II}})$ teljesül. Legyen $a \in A$ rögzítve; olyan $e \in \mathbf{P}(A)$ elemet keresünk, amelyre minden $b \in A$ esetén az $ab = 0$ és $eb = 0$ egyenlőségek ekvivalensek.

Legyen $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tetszőleges olyan függvénysorozat, hogy minden $n \in \mathbb{N}$ esetén $\varphi_n : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ folytonos függvény, és $\varphi_n \leq \varphi_{n+1}$, és $\varphi_n(0) = 0$, valamint $\sup_{n\in\mathbb{N}} \varphi_n = 1$ az $\mathbb{R}^+$ halmazon.

Például, ha $(\varepsilon_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tetszőleges $\mathbb{R}^+$-ban haladó monoton fogyó zérussorozat, és minden $n \in \mathbb{N}$ esetén $\varphi_n := (id_{\mathbb{R}_+})(id_{\mathbb{R}_+} + \varepsilon_n)^{-1}$, akkor a $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ függvénysorozat rendelkezik az előírt tulajdonságokkal. Tudjuk, hogy $\mathrm{Sp}(a^*a) \subseteq \mathbb{R}_+$, ezért minden $\mathbb{N} \ni n$-re jól értelmezett az $x_n := (\varphi_n)_A(a^*a) \in A_+$ elem, és világos, hogy $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ olyan monoton növő sorozat A_{sa}-ban, hogy minden $n \in \mathbb{N}$ esetén $x_n \leq \mathbf{1}$. Tehát, ha $f : A \to \mathbb{C}$ pozitív funkcionál, akkor az $(f(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ pozitív számsorozat monoton növő, és az $f(\mathbf{1})$ szám által felülről korlátos, így $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n)$ létezik $\mathbb{R}$-ben. Ha $f \in A'$, akkor f előáll A feletti pozitív funkcionálok lineáris kombinációjaként, így az $(f(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ számsorozat konvergens $\mathbb{C}$-ben. Ez azt jelenti, hogy $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ Cauchy-sorozat a $\sigma(A, A')$ topológia szerint. Ugyanakkor $\sigma(A, M) \leq \sigma(A, A')$, így az $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sorozat a $\sigma(A, M)$ topológia szerint még inkább Cauchy-sorozat. Az $(\mathrm{SP_{II}})$ alapján van olyan $e \in A$, hogy $e = \lim\limits_{n\in\mathbb{N}} x_n$ a $\sigma(A, M)$ topológia szerint, vagyis minden $M \ni f$-re $f(e) = \lim\limits_{n\in\mathbb{N}} f(x_n)$. Megmutatjuk, hogy $e = RP(a)$.

Először azt igazoljuk, hogy $e \in \mathbf{P}(A)$. Ehhez legyen $m \in \mathbb{N}$ rögzített, és tekintsük a $(\varphi_m\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ függvénysorozatot. Ez a függvénysorozat monoton növő, minden tagja folytonos függvény, és $\sup\limits_{n\in\mathbb{N}}(\varphi_m\varphi_n) = \varphi_m$. A Dini-tétel (28.4.5.) alapján ez a függvénysorozat *egyenletesen konvergál* φ_m-hez az $\mathrm{Sp}(a^*a) \subseteq \mathbb{R}_+$ kompakt halmazon. Ebből a folytonosfüggvény-számító operátor tulajdonságai alapján kapjuk, hogy

$$x_m := (\varphi_m)_A(a^*a) = \lim_{n\to\infty}(\varphi_m\varphi_n)_A(a^*a)$$

az A algebra C^*-normája szerint. Ugyanakkor $n \in \mathbb{N}$ esetén $(\varphi_m\varphi_n)_A(a^*a) = (\varphi_m)_A(a^*a)(\varphi_n)_A(a^*a) = x_m x_n$, tehát $\lim\limits_{n\to\infty}(x_m x_n) = x_m$ a C^*-norma szerint. Ezért $\lim\limits_{n\to\infty}(x_m x_n) = x_m$ teljesül a $\sigma(A, M)$ topológia szerint is, hiszen a C^*-norma által generált topológia majorálja a $\sigma(A, M)$ topológiát. A definíció alapján $e = \lim\limits_{n\to\infty} x_n$ a $\sigma(A, M)$ topológia szerint. Az A szorzása a $\sigma(A, M)$ topológia szerint változóiban folytonos, így az előzőek szerint $x_m e = x_m \lim\limits_{n\to\infty} x_n = \lim\limits_{n\to\infty}(x_m x_n) = x_m$ a $\sigma(A, M)$ topológia szerint. Ezzel megmutattuk, hogy minden $\mathbb{N} \ni m$-re $x_m e = x_m$. Ebből ismét az A szorzásának $\sigma(A, M)$ topológia szerinti változóiban folytonossága alapján kapjuk, hogy $e := \lim\limits_{m\to\infty} x_m = \lim\limits_{m\to\infty}(x_m e) = \left(\lim\limits_{m\to\infty} x_m\right) e =: e^2$, vagyis e idempotens elem. Továbbá, minden $n \in \mathbb{N}$ esetén x_n önadjungált, és az A involúciója a $\sigma(A, M)$ topológia szerint folytonos, tehát e sorozat $\sigma(A, M)$ szerinti határértéke, vagyis az e elem szintén önadjungált. Ez azt jelenti, hogy $e \in \mathbf{P}(A)$.

Most igazoljuk az $(a^*a)e = a^*a$ egyenlőséget. Az A algebra szorzása balról folytonos a $\sigma(A, M)$ topológia szerint és $e := \lim\limits_{n\to\infty} x_m$ ugyanezen topológia szerint, így

$$(a^*a)e = \lim_{n\to\infty}((a^*a)x_n) := \lim_{n\to\infty}((a^*a)(\varphi_n)_A(a^*a)) = \lim_{n\to\infty}((id_{\mathrm{Sp}(a^*a)}\varphi_n)_A(a^*a)),$$

ahol a határértéket a $\sigma(A, M)$ topológia szerint kell venni. Az $(id_{\mathrm{Sp}(a^*a)}\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ függvénysorozat monoton növő és a felső burkolója egyenlő $id_{\mathrm{Sp}(a^*a)}$-val. Ezért a Dini-tételből (28.4.5.) kapjuk, hogy az $(id_{\mathrm{Sp}(a^*a)}\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ függvénysorozat egyenletesen konvergál $id_{\mathrm{Sp}(a^*a)}$-hoz, tehát a folytonosfüggvény-számító operátor C^*-normákban való folytonossága miatt

$$\lim_{n\to\infty}((id_{\mathrm{Sp}(a^*a)}\varphi_n)_A(a^*a)) = (id_{\mathrm{Sp}(a^*a)})_A(a^*a) = a^*a,$$

ahol a határértéket a C^*-norma szerint kell venni. A $\sigma(A, M)$ topológia gyengébb a C^*-norma által generált topológiánál, ezért az iménti határérték-egyenlőség a $\sigma(A, M)$ topológia szerint is teljesül, következésképpen $(a^*a)e = a^*a$.

Az $(a^*a)e = a^*a$ egyenlőségből nyilvánvalóan következik, hogy $(ae - a)^*(ae - a) = 0$, ezért $ae = a$. Ebből azonnal kapjuk, hogy az e elem jobboldali anullátora részhalmaza az a elem jobboldali anullátorának. Megfordítva, tegyük fel, hogy $b \in A$ olyan, hogy $ab = 0$; megmutatjuk, hogy ekkor $eb = 0$ is teljesül. Ehhez legyen $T := \{0\} \cup \mathrm{Sp}(a^*a)$, és tekintsük az

$$\mathfrak{A}_b := \{\psi \in \mathscr{C}(T; \mathbb{C}) \mid (\psi_A(a^*a)b = 0) \wedge (b^*\psi_A(a^*a) = 0) \wedge \psi(0) = 0\}$$

függvényhalmazt. Nyilvánvaló, hogy $\mathfrak{A}_b$ olyan *-részalgebrája $\mathscr{C}(T; \mathbb{C})$-nek, amelyre $id_T \in \mathfrak{A}_b$, tehát $\mathfrak{A}_b$ szétválasztja a T kompakt tér pontjait, és minden $t \in T \setminus \{0\}$ esetén $id_{\mathrm{Sp}(a^*a)}(t) \neq 0$. A Stone–Weierstrass-tétel lokálisan kompakt terekre vonatkozó változata szerint $\mathfrak{A}_b$ a sup-normában sűrű a $\{\psi \in \mathscr{C}(T; \mathbb{C}) | \psi(0) = 0\}$ függvénytérben. Ugyanakkor a folytonosfüggvény-számító operátor C^*-normákban való folytonossága miatt $\mathfrak{A}_b$ nyilvánvalóan zárt a sup-norma szerint. Ezért $\mathfrak{A}_b = \{\psi \in \mathscr{C}(T; \mathbb{C}) | \psi(0) = 0\}$, így minden $\mathbb{N} \ni n$-re $(\varphi_n)|_T \in \mathfrak{A}_b$, tehát $x_nb := (\varphi_n)_A(a^*a)b = 0$. Az A szorzása balról folytonos a $\sigma(A, M)$ topológia szerint, ezért $eb = \lim\limits_{n\to\infty}(x_nb) = 0$. Tehát az a elem jobboldali anullátora részhalmaza az e jobboldali anullátorának, így $e = RP(a)$. ■

Egyáltalán nem nyilvánvaló, hogy az ultraspektralitásnak van valami köze a spektralitáshoz. Meg fogjuk mutatni, hogy minden ultraspektrális C^*-algebra spektrális, sőt ultraspektrális C^*-algebra esetében minden T lokálisan kompakt térre, minden $\overline{\mathscr{K}}(T; \mathbb{C})$-n értelmezett, az adott algebrába érkező *-algebra-morfizmusnak létezik *kitüntetett* kiterjesztése $\mathscr{E}_{\mathbb{C}}(T, \mathscr{B}_0(T))$-re *-algebra morfizmusként.

Megállapodunk abban, hogy egy X Hausdorff-tér H részhalmazát *sorozatzártnak* nevezzük, ha minden H-ban haladó, X-ben konvergens sorozat határértéke eleme H-nak. Világos, hogy minden zárt halmaz sorozatzárt, de ennek megfordítása általában nem igaz. Nyilvánvaló továbbá, hogy egy Hausdorff-tér sorozatzárt részhalmazai tetszőleges nem üres rendszerének a metszete is sorozatzárt, ezért a tér minden részhalmazához létezik azt tartalmazó legkisebb sorozatzárt halmaz.

24.4.2. Állítás. *Ha T lokálisan kompakt tér, és $H \subseteq \mathscr{E}_{\mathbb{C}}(T, \mathscr{B}_0(T))$ olyan részhalmaz, amely sorozatzárt a $\sigma(\mathscr{E}_{\mathbb{C}}(T, \mathscr{B}_0(T)), M(T, \mathscr{B}_0(T)))$ topológia szerint és $\mathscr{K}(T; \mathbb{C}) \subseteq H$, akkor $H = \mathscr{E}_{\mathbb{C}}(T, \mathscr{B}_0(T))$.*

Bizonyítás. Legyen $\mathbf{E}$ az a tartalmazás tekintetében legkisebb részhalmaz $\mathscr{E}_{\mathbb{C}}(T,\mathscr{B}_0(T))$-ben, amely $\sigma(\mathscr{E}_{\mathbb{C}}(T,\mathscr{B}_0(T)),M(T,\mathscr{B}_0(T)))$-sorozatzárt és amely tartalmazza a $\mathscr{K}(T;\mathbb{C})$ függvényteret. Meg fogjuk mutatni, hogy $\mathbf{E} = \mathscr{E}_{\mathbb{C}}(T,\mathscr{B}_0(T))$, ezért $\mathbf{E} \subseteq H$ miatt $H = \mathscr{E}_{\mathbb{C}}(T,\mathscr{B}_0(T))$.

Először bebizonyítjuk, hogy $\mathbf{E}$ részalgebrája $\mathscr{E}_{\mathbb{C}}(T,\mathscr{B}_0(T))$-nek. Ehhez legyen rögzítve egy $\varphi \in \mathscr{K}(T;\mathbb{C})$ függvény és legyen $\mathbf{E}_\varphi := \{\psi \in \mathscr{E}_{\mathbb{C}}(T;\mathscr{B}_0(T)) \mid \varphi\psi \in \mathbf{E}\}$. Ekkor $\mathscr{K}(T;\mathbb{C}) \subseteq \mathbf{E}_\varphi$, mivel $\mathscr{K}(T;\mathbb{C}) \subseteq \mathbf{E}$. Könnyen belátható, hogy $\mathbf{E}_\varphi$ sorozatzárt a $\sigma(\mathscr{E}_{\mathbb{C}}(T,\mathscr{B}_0(T)),M(T,\mathscr{B}_0(T)))$ topológia szerint, mert ha $\psi \in \mathscr{E}_{\mathbb{C}}(T,\mathscr{B}_0(T))$ és $(\psi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ olyan $\mathbf{E}_\varphi$-ben haladó sorozat, amely a $\sigma(\mathscr{E}_{\mathbb{C}}(T,\mathscr{B}_0(T)),M(T,\mathscr{B}_0(T)))$ topológia szerint konvergál ψ-hez, vagyis a $(\psi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ függvénysorozat pontonként konvergál ψ-hez és egyenletesen korlátos, akkor a $(\varphi\psi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ függvénysorozat pontonként konvergál $\varphi\psi$-hez és egyenletesen korlátos, vagyis a $(\varphi\psi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sorozat konvergál $\varphi\psi$-hez a $\sigma(\mathscr{E}_{\mathbb{C}}(T,\mathscr{B}_0(T)),M(T,\mathscr{B}_0(T)))$ topológia szerint, így $\varphi\psi \in \mathbf{E}$, hiszen minden $\mathbb{N} \ni n$-re $\varphi\psi_n \in \mathbf{E}$ és $\mathbf{E}$ sorozatzárt a $\sigma(\mathscr{E}_{\mathbb{C}}(T,\mathscr{B}_0(T)),M(T,\mathscr{B}_0(T)))$ topológia szerint. Ugyanakkor minden $\psi \in \mathscr{K}(T;\mathbb{C})$ esetén $\varphi\psi \in \mathscr{K}(T;\mathbb{C}) \subseteq \mathbf{E}$, vagyis $\psi \in \mathbf{E}_\varphi$. Tehát $\mathbf{E}_\varphi$ olyan halmaz, amely a $\sigma(\mathscr{E}_{\mathbb{C}}(T,\mathscr{B}_0(T)),M(T,\mathscr{B}_0(T)))$ topológia szerint sorozatzárt és $\mathscr{K}(T;\mathbb{C}) \subseteq \mathbf{E}_\varphi$. Ezért az $\mathbf{E}$ definíciója alapján $\mathbf{E} \subseteq \mathbf{E}_\varphi$. Ezzel igazoltuk, hogy minden $\varphi \in \mathscr{K}(T;\mathbb{C})$ és $\psi \in \mathbf{E}$ esetén $\varphi\psi \in \mathbf{E}$. Értelmezzük most a $\{\varphi \in \mathscr{E}_{\mathbb{C}}(T,\mathscr{B}_0(T)) | (\forall\psi \in \mathbf{E}) : \varphi\psi \in \mathbf{E}\}$ függvényhalmazt, amelyre az előzőekhez hasonlóan könnyen igazolható, hogy sorozatzárt a $\sigma(\mathscr{E}_{\mathbb{C}}(T,\mathscr{B}_0(T)),M(T,\mathscr{B}_0(T)))$ topológia szerint, valamint tartalmazza a $\mathscr{K}(T;\mathbb{C})$ halmazt. Ezért $\mathbf{E}$ részhalmaza ennek a függvényhalmaznak, ami éppen azt jelenti, hogy $\mathbf{E}$ zárt a pontonkénti szorzásra nézve. Az $\mathbf{E}$ függvényhalmaz az összedásra és a komplex számokkal való szorzásra is zárt; ez az iméntiek mintájára igazolható; tehát $\mathbf{E}$ részalgebrája az $\mathscr{E}_{\mathbb{C}}(T;\mathscr{B}_0(T))$ függvényalgebrának.

Legyen most $\mathscr{B} := \{E \in \mathscr{B}_0(T) | \chi_E \in \mathbf{E}\}$. Világos, hogy $\mathscr{B}$ halmazgyűrű T felett, mert $E_1, E_2 \in \mathscr{B}$ esetén $\chi_{E_1\cup E_2} = \chi_{E_1} + \chi_{E_2} - \chi_{E_1}\chi_{E_2} \in \mathbf{E}$ és $\chi_{E_1\setminus E_2} = \chi_{E_1} - \chi_{E_1}\chi_{E_2} \in \mathbf{E}$. A $\mathscr{B}$ halmaz σ-gyűrű is, mert ha $(E_n)_{n\in\mathbb{N}}$ monoton növő sorozat $\mathscr{B}$-ben és $E := \bigcup_{n\in\mathbb{N}} E_n$, akkor χ_E egyenlő az $\mathbf{E}$-ben haladó $(\chi_{E_n})_{n\in\mathbb{N}}$ egyenletesen korlátos függvénysorozat pontonkénti limeszével, tehát a $(\chi_{E_n})_{n\in\mathbb{N}}$ sorozat konvergál χ_E-hez a $\sigma(\mathscr{E}_{\mathbb{C}}(T,\mathscr{B}_0(T)),M(T,\mathscr{B}_0(T)))$ topológia szerint, így $\mathbf{E}$ sorozatzártsága miatt $\chi_E \in \mathbf{E}$, vagyis $E \in \mathscr{B}$.

A $\mathscr{B}$ halmaz tartalmazza a T kompakt G_δ-halmazait. Legyen ugyanis $K \subseteq T$ kompakt G_δ-halmaz, és vegyünk olyan $(\Omega_n)_{n\in\mathbb{N}}$ nyílthalmaz-sorozatot T-ben, amelyre $K = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \Omega_n$. A lokálisan kompakt terekre vonatkozó Uriszon-tétel alkalmazásával kiválaszthatunk olyan $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sorozatot $\mathscr{K}(T;\mathbb{C})$-ben, hogy minden $n \in \mathbb{N}$ esetén $\mathrm{Im}(\varphi_n) \subseteq [0,1]$, $K \subseteq [\varphi_n = 1]$ és $\mathrm{supp}(\varphi_n) \subseteq \Omega_n$. Ekkor az $\mathbf{E}$-ben haladó $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ egyenletesen korlátos függvénysorozat pontonként konvergál a χ_K függvényhez, következésképpen a $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sorozat konvergál χ_K-hoz a $\sigma(\mathscr{E}_{\mathbb{C}}(T,\mathscr{B}_0(T)),M(T,\mathscr{B}_0(T)))$ topológia szerint, így $\mathbf{E}$ sorozatzártsága miatt $\chi_K \in \mathbf{E}$, vagyis $K \in \mathscr{B}$.

Ezzel megmutattuk, hogy $\mathscr{B} = \mathscr{B}_0(T)$, amiből következik, hogy

$$\mathscr{E}_{\mathbb{C}}(T, \mathscr{B}_0(T)) = \mathscr{E}_{\mathbb{C}}(T, \mathscr{B}) \subseteq \mathbf{E}.$$

Ha $\varphi \in \mathscr{E}_{\mathbb{C}}(T, \mathscr{B}_0(T))$, akkor vehetünk olyan $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sorozatot $\mathscr{E}_{\mathbb{C}}(T, \mathscr{B}_0(T))$-ben, amely egyenletesen konvergál a T halmazon φ-hez. Ekkor a $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sorozat konvergál φ-hez a $\sigma(\mathscr{E}_{\mathbb{C}}(T, \mathscr{B}_0(T)), M(T, \mathscr{B}_0(T)))$ topológia szerint is, tehát $\mathscr{E}_{\mathbb{C}}(T, \mathscr{B}_0(T)) \subseteq \mathbf{E}$, és $\mathbf{E}$ sorozatzártsága miatt $\varphi \in \mathbf{E}$. ■

24.4.3. Tétel. (A spektráltétel alapformája) *Legyen T lokálisan kompakt tér, A ultraspektrális C^*-algebra, és*

$$\pi : \overline{\mathscr{K}}(T; \mathbb{C}) \to A$$

**-algebra-morfizmus. Ekkor minden $M \subseteq A'$ lineáris altérhez, amelyre* $(\mathrm{SP_I})$ *és* $(\mathrm{SP_{II}})$ *teljesül: egyértelműen létezik olyan*

$$\pi_M : \mathscr{E}_{\mathbb{C}}(T, \mathscr{B}_0(T)) \to A$$

*függvény, amely folytonos a $\sigma(\mathscr{E}_{\mathbb{C}}(T, \mathscr{B}_0(T)), M(T, \mathscr{B}_0(T)))$ és $\sigma(A, M)$ topológiák szerint, és kiterjesztése π-nek; ez a π_M leképezés *-algebra-morfizmus.*

Bizonyítás. Legyen $M \subseteq A'$ olyan lineáris altér, amelyre $(\mathrm{SP_I})$ és $(\mathrm{SP_{II}})$ teljesül. Megmutatjuk, hogy π folytonos a $\sigma(\mathscr{E}_{\mathbb{C}}(T, \mathscr{B}_0(T)), M(T, \mathscr{B}_0(T)))|\overline{\mathscr{K}}(T; \mathbb{C})$ és $\sigma(A, M)$ topológiák szerint. Ehhez azt kell igazolni, hogy minden $f \in M$ funkcionálhoz létezik olyan $\theta : \mathscr{B}_0(T) \to \mathbb{C}$ korlátos σ-additív függvény, amelyre minden $\varphi \in \overline{\mathscr{K}}(T; \mathbb{C})$ esetén

$$(f \circ \pi)(\varphi) = \int_T \varphi \, d\theta.$$

Ha $f \in M$, akkor $f \circ \pi : \overline{\mathscr{K}}(T; \mathbb{C}) \to \mathbb{C}$ sup-normában folytonos lineáris funkcionál, ezért a mértékelméleti Riesz-féle reprezentációs tétel alapján létezik olyan $\theta : \mathscr{B}_0(T) \to \mathbb{C}$ korlátos σ-additív függvény, amelyre $\overline{\mathscr{K}}(T; \mathbb{C}) \subseteq \mathscr{L}^1_{\mathbb{C}}(T, \mathscr{B}_0(T), \theta)$, és minden $\varphi \in \overline{\mathscr{K}}(T; \mathbb{C})$ esetén

$$(f \circ \pi)(\varphi) = \int_T \varphi \, d\theta,$$

ahol az integrál-jel a Lebesgue-integrált jelenti $\mathscr{L}^1_{\mathbb{C}}(T, \mathscr{B}_0(T), \theta)$ felett. Ugyanakkor az $\mathscr{L}^1_{\mathbb{C}}(T, \mathscr{B}_0(T), \theta)$ feletti Lebesgue-integrál sup-normában folytonos, mert θ korlátos mérték, így $|\theta|$ korlátos pozitív mérték, továbbá minden $\varphi \in \overline{\mathscr{K}}(T; \mathbb{C})$ esetén van olyan $E \in \mathscr{B}_0(T)$, hogy $|\varphi| \leq |||\varphi|||\, \chi_E$, következésképpen

$$\left| \int_T \varphi \, d\theta \right| \leq \int_T |\varphi| \, d|\theta| \leq |||\varphi|||\, |\theta|(E) \leq |||\varphi||| \sup_{H \in \mathscr{B}_0(T)} |\theta|(H),$$

és $\sup_{H\in\mathscr{B}_0(T)}|\theta|(H)<+\infty$. Ebből következik, hogy az $\mathscr{L}^1_{\mathbb{C}}(T,\mathscr{B}_0(T),\theta)$ feletti Lebesgue-integrál leszűkítése $\overline{\mathscr{K}}(T;\mathbb{C})$-re egyenlő a θ által generált $\mathscr{E}_{\mathbb{C}}(T,\mathscr{B}_0(T))$ feletti egyszerű integrál $\overline{\mathscr{K}}(T;\mathbb{C})$-re vett leszűkítésével.

Tehát a $\pi:\overline{\mathscr{K}}(T;\mathbb{C})\to A$ operátor a $\sigma(\mathscr{E}_{\mathbb{C}}(T,\mathscr{B}_0(T)),M(T,\mathscr{B}_0(T)))|\overline{\mathscr{K}}(T;\mathbb{C})$ és $\sigma(A,M)$ topológiák szerint folytonos. (Valójában azt az ennél erősebb kijelentést igazoltuk, hogy ez az operátor folytonos a

$$\sigma(\mathscr{E}_{\mathbb{C}}(T,\mathscr{B}_0(T)),M(T,\mathscr{B}_0(T)))|\overline{\mathscr{K}}(T;\mathbb{C})$$

és a $\sigma(A,A')$ topológiák szerint is.)

Most értelmezzük a következő objektumokat:

$$E_1:=\mathscr{E}_{\mathbb{C}}(T,\mathscr{B}_0(T)),\quad F_1:=M(T,\mathscr{B}_0(T)),$$

$$E_2:=A,\quad F_2:=M,$$

$$E_0:=\overline{\mathscr{K}}(T;\mathbb{C}),\quad u_0:=\pi.$$

Ezekre az objektumokra teljesülnek a gyengén folytonos lineáris operátorok gyengén folytonos kiterjesztési tételének (6.12.1.) feltételei, ezért egyértelműen létezik olyan $u:E_1\to E_2$ leképezés, amely u_0-nak kiterjesztése, és amely folytonos a $\sigma(E_1,F_1)$ és $\sigma(E_2,F_2)$ topológiák szerint. Továbbá, ha μ az $\mathscr{E}_{\mathbb{C}}(T,\mathscr{B}_0(T))$ algebra szorzása, ν az A algebra szorzása, i az $\mathscr{E}_{\mathbb{C}}(T,\mathscr{B}_0(T))$ algebra involúciója, valamint j az A algebra involúciója, akkor ezekre teljesülnek az 6.12.2. állítás feltételei, ezért az u lineáris operátor megtartja a μ és ν szorzásokat, valamint az i és j involúciókat. Tehát a $\pi_M:=u$ leképezés éppen az az objektum, amelynek az egyértelmű létezését állítottuk. ■

24.4.4. Következmény. *Minden ultraspektrális C^*-algebra spektrális.*

Bizonyítás. A definíciókból és az előző tételből azonnal következik. ■

24.5. Spektráltétel ultraspektrális C^*-algebrákra

24.5.1. Lemma. *Legyen A ultraspektrális C^*-algebra és $(e_k)_{k\in\mathbb{N}}$ ortogonális projektor-sorozat A-ban. Ha $M\subseteq A'$ tetszőleges olyan lineáris altér, amelyre* ($\mathrm{SP_I}$) *és* ($\mathrm{SP_{II}}$) *teljesül, akkor a $\sum_{k\in\mathbb{N}}e_k$ sor konvergens A-ban a $\sigma(A,M)$ topológia szerint, és*

$$\sum_{k=0}^{\infty}e_k=\sup_{k\in\mathbb{N}}e_k$$

teljesül, ahol a sorösszeget a $\sigma(A,A')$ topológia szerint kell venni.

Bizonyítás. Legyen minden $n \in \mathbb{N}$ esetén $e'_n := \sum_{k=0}^{n} e_k$; ekkor $(e'_n)_{n\in\mathbb{N}}$ olyan sorozat $\mathbf{P}(A)$-ban, amely monoton növő a természetes projektor-rendezés szerint, és $\sup_{n\in\mathbb{N}} e'_n = \sup_{k\in\mathbb{N}} e_k$. Ugyanakkor $(e'_n)_{n\in\mathbb{N}}$ olyan A_+-ban haladó sorozat, amely monoton növő és az $\mathbf{1}$ által felülről korlátos az A_{sa} halmaz természetes előrendezése szerint (ami rendezés, hiszen A C^*-algebra). Tehát, ha $f : A \to \mathbb{C}$ pozitív funkcionál, akkor az $(f(e'_n))_{n\in\mathbb{N}}$ valós számsorozat $\mathbb{R}_+$-ban halad, monoton növő és $f(\mathbf{1})$ által felülről korlátos, így ez a számsorozat konvergens. Másfelől tudjuk, hogy C^*-algebra felett a folytonos lineáris funkcionálok előállnak pozitív funkcionálok lineáris kombinációjaként (22.4.5.). Ezért minden $f \in A'$ esetén az $(f(e'_n))_{n\in\mathbb{N}}$ komplex számsorozat konvergens, vagyis az $(e'_n)_{n\in\mathbb{N}}$ projektorsorozat Cauchy-sorozat a $\sigma(A, A')$ topológia szerint. Tehát $\sigma(A, M) \leq \sigma(A, A')$ miatt ez a sorozat a $\sigma(A, M)$ topológia szerint még inkább Cauchy-sorozat, így az $(\mathrm{SP_{II}})$ alapján konvergens a $\sigma(A, M)$ topológia szerint.

Legyen $e := \lim_{n\to\infty} e'_n$ a $\sigma(A, M)$ topológia szerint. Minden $\mathbb{N} \ni n$-re $e'_n \in A_{sa}$, és az A involúciója folytonos a $\sigma(A, M)$ topológia szerint, így $e \in A_{sa}$. Ha $m \in \mathbb{N}$ rögzített szám, akkor minden $n \geq m$ természetes számra $e'_m e_n = e'_m$, és az A szorzása jobbról folytonos a $\sigma(A, M)$ topológia szerint, így $e'_m e = \lim_{n\to\infty}(e'_m e'_n) = \lim_{n\to\infty} e'_n =: e$. Ez minden $m \in \mathbb{N}$ esetén igaz, és az A szorzása balról is folytonos a $\sigma(A, M)$ topológia szerint, így $e^2 = \lim_{m\to\infty}(e'_m e) = e$. Tehát $e \in \mathbf{P}(A)$, és minden $m \in \mathbb{N}$ esetén $e_m \leq e$. Ha $g \in \mathbf{P}(A)$ olyan, hogy minden $m \in \mathbb{N}$ esetén $e_m \leq g$, azaz $e_m g = e_m$, akkor $eg = \lim_{m\to\infty}(e_m g) = \lim_{m\to\infty} e_m =: e$, azaz $e \leq g$, hiszen az A szorzása balról folytonos a $\sigma(A, M)$ topológia szerint. Ez azt jelenti, hogy $e = \sup_{n\in\mathbb{N}} e'_n = \sum_{k=0}^{n} e_k$. Világos továbbá, hogy $e = \sum_{k=0}^{\infty} e_k$, ahol a sorösszeget a $\sigma(A, M)$ topológia szerint kell venni, következésképpen

$$\sum_{k=0}^{\infty} e_k = \sup_{k\in\mathbb{N}} e_k. \blacksquare$$

24.5.2. Állítás. *Legyen $\mathscr{R}$ halmazgyűrű a T halmaz felett, A ultraspektrális C^*-algebra, és*

$$\pi : \mathscr{E}_{\mathbb{C}}(T, \mathscr{R}) \to A$$

**-algebra-morfizmus. Jelölje $\mathfrak{p}$ azt az $\mathscr{R} \to A$ projektor-értékű additív függvényt, amelyre teljesül az, hogy a $\mathfrak{p}$ által generált egyszerű integrál egyenlő π-vel. A következő állítások ekvivalensek.*

(i) *A π operátor a $\sigma(\mathscr{E}_{\mathbb{C}}(T, \mathscr{R}), M(T, \mathscr{R}))$ és $\sigma(A, M)$ topológiák szerint folytonos, minden olyan $M \subseteq A'$ lineáris altérre, amelyre* $(\mathrm{SP_I})$ *és* $(\mathrm{SP_{II}})$ *teljesül.*

(ii) *Létezik olyan $M \subseteq A'$ lineáris altér, amelyre* $(\mathrm{SP_I})$ *és* $(\mathrm{SP_{II}})$ *teljesül, és amelyre a π*

operátor folytonos a $\sigma(\mathscr{E}_{\mathbb{C}}(T,\mathscr{R}), M(T,\mathscr{R}))$ és $\sigma(A,M)$ topológiák szerint.

(iii) *A $\mathfrak{p} : \mathscr{R} \to A$ projektor-értékű additív függvényre teljesül az, hogy minden $\mathscr{R}$-ben haladó $(E_k)_{k\in\mathbb{N}}$ diszjunkt sorozatra, ha $\bigcup\limits_{k\in\mathbb{N}} E_k \in \mathscr{R}$, akkor $\sup\limits_{k\in\mathbb{N}} \mathfrak{p}(E_k)$ létezik a $\mathbf{P}(A)$ feletti természetes rendezés szerint, és*

$$\mathfrak{p} \quad \bigcup_{k\in\mathbb{N}} E_k \quad = \sup_{k\in\mathbb{N}} \mathfrak{p}(E_k).$$

Bizonyítás. (i)$\Rightarrow$(ii) Azért igaz, mert *létezik* olyan $M \subseteq A'$ lineáris altér, amelyre $(\mathrm{SP_I})$ és $(\mathrm{SP_{II}})$ teljesül.

(ii)$\Rightarrow$(iii) Legyen $M \subseteq A'$ olyan lineáris altér, amelyre $(\mathrm{SP_I})$ és $(\mathrm{SP_{II}})$ teljesül, továbbá π folytonos a $\sigma(\mathscr{E}_{\mathbb{C}}(T,\mathscr{R}), M(T,\mathscr{R}))$ és $\sigma(A,M)$ topológiák szerint. Legyen $(E_k)_{k\in\mathbb{N}}$ olyan $\mathscr{R}$-ben haladó diszjunkt sorozat, amelyre $\bigcup\limits_{k\in\mathbb{N}} E_k \in \mathscr{R}$. Ha $f \in M$, akkor a π-re vonatkozó folytonossági feltétel alapján egyértelműen van olyan $\theta_f : \mathscr{R} \to \mathbb{C}$ korlátos σ-additív függvény, hogy $f \circ \pi$ egyenlő a θ_f által generált egyszerű integrállal. Ha $E \in \mathscr{R}$, akkor minden $M \ni f$-re $f(\mathfrak{p}(E)) = (f \circ \pi)(\chi_E) = \theta_f(E)$, vagyis $\theta_f = f \circ \mathfrak{p}$. Ezért minden $M \ni f$-re, a θ_f σ-addivitása alapján

$$f \quad \mathfrak{p} \quad \bigcup_{k\in\mathbb{N}} E_k \qquad = \theta_f \quad \bigcup_{k\in\mathbb{N}} E_k \quad = \sum_{k=0}^{\infty} \theta_f(E_k) =$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} f(\mathfrak{p}(E_k)) = f\left(\sum_{k=0}^{\infty} \mathfrak{p}(E_k)\right) = f \quad \sup_{k\in\mathbb{N}} \mathfrak{p}(E_k) \quad ,$$

ahol az ortogonális projektorsor-összegzést a $\sigma(A,M)$ topológia szerint kell venni, és fel kell használni az előző lemma eredményét. Ebből következik, hogy

$$\mathfrak{p} \quad \bigcup_{k\in\mathbb{N}} E_k \quad = \sup_{k\in\mathbb{N}} \mathfrak{p}(E_k),$$

hiszen M szétválasztó A felett.

(iii)$\Rightarrow$(i) Legyen $M \subseteq A'$ tetszőleges olyan lineáris altér, amelyre $(\mathrm{SP_I})$ és $(\mathrm{SP_{II}})$ teljesül. Ha $f \in M$, akkor $f \circ \mathfrak{p} : \mathscr{R} \to \mathbb{C}$ olyan korlátos additív függvény, amelyre minden $E \in \mathscr{R}$ esetén $(f \circ \mathfrak{p})(E) = (f \circ \pi)(\chi_E)$, így az $f \circ \mathfrak{p}$ által generált egyszerű integrál egyenlő az $f \circ \pi : \mathscr{E}_{\mathbb{C}}(T,\mathscr{R}) \to \mathbb{C}$ sup-normában folytonos funkcionállal. Ugyanakkor a (iii) feltétel és az előző lemma alapján minden $M \ni f$-re az $f \circ \mathfrak{p}$ halmazfüggvény σ-additív, így $f \circ \pi \in M(T,\mathscr{R})$. Ez azt jelenti, hogy a π operátor folytonos a $\sigma(\mathscr{E}_{\mathbb{C}}(T,\mathscr{R}), M(T,\mathscr{R}))$ és $\sigma(A,M)$ topológiák szerint. ■

24.5.3. Definíció. *Ha $\mathscr{R}$ halmazgyűrű a T halmaz felett és A *-algebra, akkor egy $\mathfrak{p} : \mathscr{R} \to A$ projektor-értékű függvényt* σ**-ortoadditívnak** *nevezünk, ha minden $\mathscr{R}$-ben haladó $(E_k)_{k\in\mathbb{N}}$ diszjunkt sorozatra, ha $\bigcup\limits_{k\in\mathbb{N}} E_k \in \mathscr{R}$, akkor $\sup\limits_{k\in\mathbb{N}} \mathfrak{p}(E_k)$ létezik a $\mathbf{P}(A)$ feletti természetes rendezés szerint, és*

$$\mathfrak{p}\left(\bigcup_{k\in\mathbb{N}} E_k\right) = \sup_{k\in\mathbb{N}} \mathfrak{p}(E_k).$$

Nyilvánvaló, hogy ha $\mathscr{R}$ halmazgyűrű a T halmaz felett és A *-algebra, akkor egy $\mathfrak{p} : \mathscr{R} \to A$ projektor-értékű σ-ortoadditív függvény szükségképpen additív is.

24.5.4. Tétel. (Spektráltétel) *Legyen A ultraspektrális C^*-algebra, T lokálisan kompakt tér, és*

$$\pi : \overline{\mathscr{K}}(T;\mathbb{C}) \to A$$

**-algebra-morfizmus. Ekkor létezik egyetlen olyan*

$$\mathfrak{p} : \mathscr{B}_0(T) \to A$$

projektor-értékű σ-ortoadditív függvény, amelyre minden $\varphi \in \overline{\mathscr{K}}(T;\mathbb{C})$ esetén

$$\pi(\varphi) = \int_T \varphi \, d\mathfrak{p}.$$

Ez a $\mathfrak{p}$ függvény rendelkezik a következő tulajdonságokkal.

a) *Minden $\varphi \in \overline{\mathscr{K}}(T;\mathbb{C})$ és $E \in \mathscr{B}_0(T)$ esetén $\pi(\varphi)\mathfrak{p}(E) = \mathfrak{p}(E)\pi(\varphi)$.*

b) *Minden $\varphi \in \overline{\mathscr{K}}(T;\mathbb{C})$ és $E \in \mathscr{B}_0(T)$ esetén $\mathrm{Sp}_{\mathfrak{p}(E)A\mathfrak{p}(E)}(\mathfrak{p}(E)\pi(\varphi)) \subseteq \overline{E}$.*

c) *Az $\mathrm{Im}(\pi)$ és $\mathrm{Im}(\mathfrak{p})$ halmazok A-beli kommutánsa egyenlő.*

d) *Ha π injektív, akkor minden $\Omega \subseteq T$ nem üres nyílt Baire-halmazra $\mathfrak{p}(\Omega) \neq 0$.*

Bizonyítás. Rögzítsünk olyan $M \subseteq A'$ lineáris alteret, amelyre $(\mathrm{SP_I})$ és $(\mathrm{SP_{II}})$ teljesül. Jelölje π_M azt az egyértelműen létező $\mathscr{E}_\mathbb{C}(T, \mathscr{B}_0(T)) \to A$ *-algebra-morfizmust, amely kiterjesztése π-nek, és folytonos a

$$\sigma(\mathscr{E}_\mathbb{C}(T, \mathscr{B}_0(T)), M(T, \mathscr{B}_0(T)))$$

és $\sigma(A, M)$ topológiák szerint (24.4.3.). Jelölje $\mathfrak{p}_M$ azt a $\mathscr{B}_0(T) \to A$ projektor-értékű additív függvényt, amelyre π_M megegyezik a $\mathfrak{p}_M$ által generált egyszerű integrállal. A π_M *-algebra-morfizmus folytonossági tulajdonsága, és az előző állítás alapján $\mathfrak{p}_M$ σ-ortoadditív. Ezzel az előírt tulajdonságú halmazfüggvény *létezését* igazoltuk.

Az *egyértelműség* bizonyításához legyenek $\mathfrak{p}, \mathfrak{p}' : \mathscr{B}_0(T) \to A$ olyan projektor-értékű σ-ortoadditív függvények, amelyekre minden $\varphi \in \overline{\mathscr{K}}(T;\mathbb{C})$ esetén

$$\int\limits_T \varphi \; d\mathfrak{p} = \int\limits_T \varphi \; d\mathfrak{p}'.$$

Jelölje $\pi_{\mathfrak{p}}$ (illetve $\pi_{\mathfrak{p}'}$) a $\mathfrak{p}$ (illetve $\mathfrak{p}'$) által generált egyszerű integrált. Ha $M \subseteq A'$ olyan lineáris altér, amelyre ($\mathrm{SP_I}$) és ($\mathrm{SP_{II}}$) teljesül, akkor az előző állítás szerint $\pi_{\mathfrak{p}}$ és $\pi_{\mathfrak{p}'}$ mindketten folytonosak a $\sigma(\mathscr{E}_{\mathbb{C}}(T, \mathscr{B}_0(T)), M(T, \mathscr{B}_0(T)))$ és $\sigma(A, M)$ topológiák szerint. A hipotézis alapján $\pi_{\mathfrak{p}} = \pi_{\mathfrak{p}'}$ az $\overline{\mathscr{K}}(T;\mathbb{C}) \subseteq \mathscr{E}_{\mathbb{C}}(T, \mathscr{B}_0(T))$ altéren, amely sűrű a $\sigma(\mathscr{E}_{\mathbb{C}}(T, \mathscr{B}_0(T)), M(T, \mathscr{B}_0(T)))$ topológia szerint. Ezért $\pi_{\mathfrak{p}} = \pi_{\mathfrak{p}'}$, így minden $E \in \mathscr{B}_0(T)$ esetén $\mathfrak{p}(E) = \pi_{\mathfrak{p}}(\chi_{_E}) = \pi_{\mathfrak{p}'}(\chi_{_E}) = \mathfrak{p}'(E)$, azaz $\mathfrak{p} = \mathfrak{p}'$.

Legyen $\mathfrak{p} : \mathscr{B}_0(T) \to A$ az a projektor-értékű σ-ortoadditív függvény, amelyre minden $\varphi \in \overline{\mathscr{K}}(T;\mathbb{C})$ esetén

$$\pi(\varphi) = \int\limits_T \varphi \; d\mathfrak{p},$$

továbbá jelölje $\pi_{\mathfrak{p}}$ a $\mathfrak{p}$ által generált egyszerű integrált.

Világos, hogy $\mathrm{Im}(\mathfrak{p}) \subseteq \mathrm{Im}(\pi_{\mathfrak{p}})$, és $\mathrm{Im}(\pi) \subseteq \mathrm{Im}(\pi_{\mathfrak{p}})$, továbbá az $\mathscr{E}_{\mathbb{C}}(T, \mathscr{B}_0(T))$ algebra kommutativitása és $\pi_{\mathfrak{p}}$ multiplikativitása miatt $\mathrm{Im}(\pi_{\mathfrak{p}}) \subseteq A$ kommutatív halmaz, így a) teljesül.

A b) állítás bizonyításához legyen $\varphi \in \overline{\mathscr{K}}(T;\mathbb{C})$, $E \in \mathscr{B}_0(T)$ és $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \overline{\varphi\langle E\rangle}$. Ekkor van olyan $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$, hogy minden $\lambda' \in \varphi\langle E\rangle$ esetén $|\lambda' - \lambda| \geq \varepsilon$, vagyis minden $t \in E$ esetén $|\varphi(t) - \lambda| \geq \varepsilon$. Világos, hogy ekkor a

$$\psi : T \to \mathbb{C}; \quad t \mapsto \begin{cases} 1/(\varphi(t) - \lambda) & ; \text{ha } t \in E, \\ \quad 0 & ; \text{ha } t \in T \setminus E \end{cases}$$

függvény eleme $\mathscr{E}_{\mathbb{C}}(T, \mathscr{B}_0(T))$-nek, és teljesülnek rá a $\chi_{_E}\psi = \psi$, valamint $(\varphi - \lambda)\psi = \chi_{_E}$ egyenlőségek. Ebből kapjuk, hogy

$$(\pi(\varphi)\mathfrak{p}(E) - \lambda\mathfrak{p}(E)) \int\limits_T \psi \; d\mathfrak{p} = \int\limits_T \psi \; d\mathfrak{p} \;\; (\pi(\varphi)\mathfrak{p}(E) - \lambda\mathfrak{p}(E)) = \mathfrak{p}(E),$$

és $\int\limits_T \psi \; d\mathfrak{p} \in \mathfrak{p}(E)A\mathfrak{p}(E)$. Ezért $\pi(\varphi)\mathfrak{p}(E) - \lambda\mathfrak{p}(E)$ invertálható eleme a $\mathfrak{p}(E)A\mathfrak{p}(E)$ redukált algebrának, így b) teljesül.

A c) állítás bizonyításához először legyen $a \in C(\mathrm{Im}(\pi))$. Ekkor

$$\overline{\mathscr{K}}(T;\mathbb{C}) \subseteq \{\psi \in \mathscr{E}_{\mathbb{C}}(T, \mathscr{B}_0(T)) \mid a\pi_{\mathfrak{p}}(\psi) = \pi_{\mathfrak{p}}(\psi)a\},$$

és a jobb oldalon álló halmaz zárt a $\sigma(\mathscr{E}_{\mathbb{C}}(T, \mathscr{B}_0(T)), M(T, \mathscr{B}_0(T)))$ topológia szerint, mert az A szorzása változóiban folytonos e topológia szerint. Ezért

$$\{\psi \in \mathscr{E}_{\mathbb{C}}(T, \mathscr{B}_0(T)) \mid a\pi_{\mathfrak{p}}(\psi) = \pi_{\mathfrak{p}}(\psi)a\} = \mathscr{E}_{\mathbb{C}}(T, \mathscr{B}_0(T)),$$

vagyis $a \in C(\mathrm{Im}(\pi_{\mathfrak{p}}))$. Ez azt jelenti, hogy $C(\mathrm{Im}(\pi)) \subseteq C(\mathrm{Im}(\pi_{\mathfrak{p}}))$, és $\mathrm{Im}(\mathfrak{p}) \subseteq \mathrm{Im}(\pi_{\mathfrak{p}})$ következtében $C\,(\mathrm{Im}(\pi_{\mathfrak{p}})) \subseteq C(\mathrm{Im}(\mathfrak{p}))$, így $C(\mathrm{Im}(\pi)) \subseteq C(\mathrm{Im}(\mathfrak{p}))$.

Megfordítva, legyen $a \in C(\mathrm{Im}(\mathfrak{p}))$. Ekkor minden $E \in \mathscr{B}_0(T)$ esetén $a\mathfrak{p}(E) = \mathfrak{p}(E)a$, ezért minden $\varphi \in \mathscr{E}_{\mathbb{C}}(T, \mathscr{B}_0(T))$ lépcsősfüggvényre $a\pi_{\mathfrak{p}}(\varphi) = \pi_{\mathfrak{p}}(\varphi)a$. Ha $\varphi \in \mathscr{E}_{\mathbb{C}}(T, \mathscr{B}_0(T))$ tetszőleges, akkor van olyan $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sorozat $\mathscr{E}_{\mathbb{C}}(T, \mathscr{B}_0(T))$-ben, amelyre egyenletesen konvergál φ-hez a T halmazon, ezért $\lim\limits_{n\to\infty} \pi_{\mathfrak{p}}(\varphi_n) = \pi_{\mathfrak{p}}(\varphi)$ a C^*-norma szerint. Ebből következik, hogy $a\pi_{\mathfrak{p}}(\varphi) = \pi_{\mathfrak{p}}(\varphi)a$, mert az A szorzása folytonos a C^*-norma szerint. Ez azt jelenti, hogy $a \in C(\mathrm{Im}(\pi_{\mathfrak{p}}))$, így $C(\mathrm{Im}(\mathfrak{p})) \subseteq C(\mathrm{Im}(\pi_{\mathfrak{p}}))$. Ugyanakkor $\mathrm{Im}(\pi) \subseteq \mathrm{Im}(\pi_{\mathfrak{p}})$ miatt $C(\mathrm{Im}(\pi_{\mathfrak{p}})) \subseteq C(\mathrm{Im}(\pi))$, következésképpen $C(\mathrm{Im}(\mathfrak{p})) \subseteq C(\mathrm{Im}(\pi))$. Ezzel igazoltuk a c) állítást.

A d) állítás bizonyításához tegyük fel, hogy $\Omega \subseteq T$ nem üres nyílt Baire-halmaz. Ekkor a lokálisan kompakt terek teljes regularitása miatt van olyan $\varphi \in \mathscr{K}(T; \mathbb{R})$, hogy $0 \leq \varphi \leq 1$ és $\{t \in T | \varphi(t) \neq 0\} \subseteq \Omega$, valamint $\varphi \neq 0$. Ekkor $\varphi\chi_\Omega = \varphi$, ezért a π injektivitása folytán

$$0 \neq \pi(\varphi) = \int_T \varphi\chi_\Omega \; d\mathfrak{p} = \left(\int_T \varphi \; d\mathfrak{p}\right)\left(\int_T \chi_\Omega \; d\mathfrak{p}\right) = \pi(\varphi)\mathfrak{p}(\Omega),$$

így $\mathfrak{p}(\Omega) \neq 0$. ■

24.6. Spektráltétel ultraspektrális C^*-algebra normális elemére

24.6.1. Tétel. (Spektráltétel normális elemekre) *Legyen A ultraspektrális C^*-algebra és $a \in A$ normális elem. Létezik egyetlen olyan $\mathfrak{p} : \mathscr{B}_0(\mathrm{Sp}_A(a)) \to A$ projektor-értékű σ-ortoadditív függvény, amelyre $\mathfrak{p}(\mathrm{Sp}_A(a)) = \mathbf{1}$ és*

$$\int_{\mathrm{Sp}_A(a)} id_{\mathrm{Sp}_A(a)} \; d\mathfrak{p} = a.$$

Minden $\Omega \subseteq \mathrm{Sp}_A(a)$ nem üres, $\mathrm{Sp}_A(a)$-ban nyílt halmazra $\mathfrak{p}(\Omega) \neq 0$.

Bizonyítás. Jelölje C_a az $a \in A$ normális elem folytonosfüggvény-számító operátorát. Az A ultraspektralitása miatt, a spektráltétel (24.5.4.) szerint a $C_a : \mathscr{C}(\mathrm{Sp}_A(a); \mathbb{C}) \to A$ *-algebra-morfizmushoz egyértelműen létezik olyan $\mathfrak{p} : \mathscr{B}_0(\mathrm{Sp}_A(a)) \to A$ projektor-értékű

σ-ortoadditív függvény, amelyre minden $\varphi \in \mathscr{C}(\mathrm{Sp}_A(a);\mathbb{C})$ esetén

$$\int_{\mathrm{Sp}_A(a)} \varphi \, d\mathfrak{p} = C_a(\varphi).$$

Ekkor az $1_{\mathrm{Sp}_A(a)}, id_{\mathrm{Sp}_A(a)} \in \mathscr{C}(\mathrm{Sp}_A(a);\mathbb{C})$ választással, a C_a tulajdonságai alapján kapjuk, hogy

$$\mathfrak{p}(\mathrm{Sp}_A(a)) = \int_{\mathrm{Sp}_A(a)} 1_{\mathrm{Sp}_A(a)} d\mathfrak{p} = C_a(1_{\mathrm{Sp}_A(a)}) = \mathbf{1},$$

$$\int_{\mathrm{Sp}_A(a)} id_{\mathrm{Sp}_A(a)} d\mathfrak{p} = C_a(id_{\mathrm{Sp}_A(a)}) = a,$$

tehát $\mathfrak{p}$ olyan objektum, amelynek létezését állítottuk.

Az egyértelműség bizonyításához legyenek $\mathfrak{p}, \mathfrak{p}' : \mathscr{B}_0(\mathrm{Sp}_A(a)) \to A$ olyan projektor-értékű σ-ortoadditív függvények, amelyekre $\mathfrak{p}(\mathrm{Sp}_A(a)) = \mathbf{1} = \mathfrak{p}'(\mathrm{Sp}_A(a))$ és

$$\int_{\mathrm{Sp}_A(a)} id_{\mathrm{Sp}_A(a)} \, d\mathfrak{p} = a = \int_{\mathrm{Sp}_A(a)} id_{\mathrm{Sp}_A(a)} \, d\mathfrak{p}'.$$

Ekkor a $\mathfrak{p}$ és $\mathfrak{p}'$ által generált egyszerű integrálok leszűkítései a $\mathscr{C}(\mathrm{Sp}_A(a);\mathbb{C})$ függvényalgebrára mindketten olyan egységelem-tartó *-algebra-morfizmusok, amelyek az $id_{\mathrm{Sp}_A(a)}$ függvényhez az a-t rendelik. A folytonosfüggvény-számító operátor egyértelműsége alapján ez azt jelenti, hogy a $\mathfrak{p}$ és $\mathfrak{p}'$ által generált egyszerű integrálok leszűkítései a $\mathscr{C}(\mathrm{Sp}_A(a);\mathbb{C})$ függvényalgebrára egyenlők C_a-val, így minden $\varphi \in \mathscr{C}(\mathrm{Sp}_A(a);\mathbb{C})$ esetén

$$\int_{\mathrm{Sp}_A(a)} \varphi \, d\mathfrak{p} = \int_{\mathrm{Sp}_A(a)} \varphi \, d\mathfrak{p}'.$$

Ekkor fennáll az, hogy

$$\mathscr{C}(\mathrm{Sp}_A(a);\mathbb{C}) \subseteq \left\{ \psi \in \mathscr{E}_{\mathbb{C}}(\mathrm{Sp}_A(a), \mathscr{B}_0(\mathrm{Sp}_A(a))) \,\middle|\, \int_{\mathrm{Sp}_A(a)} \psi \, d\mathfrak{p} = \int_{\mathrm{Sp}_A(a)} \psi \, d\mathfrak{p}' \right\},$$

és nyilvánvaló, hogy a

$$\left\{ \psi \in \mathscr{E}_{\mathbb{C}}(\mathrm{Sp}_A(a), \mathscr{B}_0(\mathrm{Sp}_A(a))) \,\middle|\, \int_{\mathrm{Sp}_A(a)} \psi \, d\mathfrak{p} = \int_{\mathrm{Sp}_A(a)} \psi \, d\mathfrak{p}' \right\}$$

halmaz zárt a $\sigma(\mathscr{E}_{\mathbb{C}}(\mathrm{Sp}_A(a), \mathscr{B}_0(\mathrm{Sp}_A(a))), M(\mathrm{Sp}_A(a), \mathscr{B}_0(\mathrm{Sp}_A(a))))$ topológia szerint, hiszen ha $M \subseteq A'$ olyan lineáris altér, amelyre ($\mathrm{SP_I}$) és ($\mathrm{SP_{II}}$) teljesül, akkor a $\mathfrak{p}$ és $\mathfrak{p}'$ által generált egyszerű integrálok mindketten *folytonosak* a

$$\sigma(\mathscr{E}_{\mathbb{C}}(\mathrm{Sp}_A(a), \mathscr{B}_0(\mathrm{Sp}_A(a))), M(\mathrm{Sp}_A(a), \mathscr{B}_0(\mathrm{Sp}_A(a))))$$

és $\sigma(A, M)$ topológiák szerint, mert $\mathfrak{p}$ és $\mathfrak{p}'$ mindketten σ-ortoadditívak. Ebből következik, hogy

$$\left\{\psi \in \mathscr{E}_{\mathbb{C}}(\mathrm{Sp}_A(a), \mathscr{B}_0(\mathrm{Sp}_A(a))) \,\middle|\, \int\limits_{\mathrm{Sp}_A(a)} \psi \; d\mathfrak{p} = \int\limits_{\mathrm{Sp}_A(a)} \psi \; d\mathfrak{p}'\right\} =$$

$$= \mathscr{E}_{\mathbb{C}}(\mathrm{Sp}_A(a), \mathscr{B}_0(\mathrm{Sp}_A(a))),$$

vagyis a $\mathfrak{p}$ és $\mathfrak{p}'$ által generált egyszerű integrálok *egyenlők*, így $\mathfrak{p} = \mathfrak{p}'$.

Végül, a C_a folytonosfüggvény-számító operátor injektív, ezért az előző tétel d) pontja alapján minden $\Omega \subseteq \mathrm{Sp}_A(a)$ nem üres, $\mathrm{Sp}_A(a)$-ban nyílt halmaz esetében $\mathfrak{p}(\Omega) \neq 0$. ■

24.6.2. Definíció. *Ha A ultraspektrális C^*-algebra, akkor az $a \in A$ normális elem* **spektrálfelbontásának** *nevezzük és $\mathfrak{p}_a$-val jelöljük azt a*

$$\mathfrak{p}_a : \mathscr{B}_0(\mathrm{Sp}_A(a)) \to A$$

projektor-értékű σ-ortoadditív függvényt, amelyre $\mathfrak{p}_a(\mathrm{Sp}_A(a)) = \mathbf{1}$ és

$$\int\limits_{\mathrm{Sp}_A(a)} id_{\mathrm{Sp}_A(a)} \; d\mathfrak{p}_a = a.$$

24.7. A klasszikus operátorelméleti spektráltétel

24.7.1. Állítás. *Legyen $\mathscr{R}$ halmazgyűrű a T halmaz felett, A ultraspektrális C^*-algebra, és $\mathfrak{p} : \mathscr{R} \to A$ projektor-értékű σ-ortoadditív függvény. Ha $\varphi \in \mathscr{E}_{\mathbb{C}}(T, \mathscr{R})$ és $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ olyan $\mathscr{E}_{\mathbb{C}}(T, \mathscr{R})$-ben haladó sorozat, amely egyenletesen korlátos, és pontonként konvergál φ-hez a T halmazon, akkor*

$$\int\limits_T \varphi \; d\mathfrak{p} = \lim_{n\to\infty} \int\limits_T \varphi_n \; d\mathfrak{p}$$

teljesül a $\sigma(A, M)$ topológia szerint, minden olyan $M \subseteq A'$ lineáris altérre, amelyre $(\mathrm{SP_I})$ *és* $(\mathrm{SP_{II}})$ *igaz.*

Bizonyítás. A feltevés azt jelenti, hogy a $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ függvénysorozat φ-hez konvergál a $\sigma(\mathscr{E}_{\mathbb{C}}(T, \mathscr{R}), M(T, \mathscr{R}))$ topológia szerint, ezért

$$\int\limits_T \varphi \; d\mathfrak{p} = \lim_{n\to\infty} \int\limits_T \varphi_n \; d\mathfrak{p}$$

teljesül a $\sigma(A, M)$ topológia szerint, hiszen a $\mathfrak{p}$ által generált egyszerű integrál a $\mathfrak{p}$ σ-ortoadditivitása következtében folytonos a $\sigma(\mathscr{E}_{\mathbb{C}}(T, \mathscr{R}), M(T, \mathscr{R}))$ és $\sigma(A, M)$ topológiák szerint. ■

24.7.2. Állítás. *Legyen $\mathscr{R}$ halmazgyűrű a T halmaz felett, $\mathscr{H}$ Hilbert-tér, és $\mathfrak{p} : \mathscr{R} \to \mathscr{L}(\mathscr{H})$ projektor-értékű σ-ortoadditív függvény. Ha $\varphi \in \mathscr{E}_{\mathbb{C}}(T, \mathscr{R})$ és $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ olyan $\mathscr{E}_{\mathbb{C}}(T, \mathscr{R})$-ben haladó sorozat, amely egyenletesen korlátos, és pontonként konvergál φ-hez a T halmazon, akkor*

$$\int_T \varphi \, d\mathfrak{p} = \lim_{n\to\infty} \int_T \varphi_n \, d\mathfrak{p}$$

teljesül a pontonkénti konvergencia topológiája szerint.

Bizonyítás. Az előző állításból következik, hogy

$$\int_T \varphi \, d\mathfrak{p} = \lim_{n\to\infty} \int_T \varphi_n \, d\mathfrak{p}$$

teljesül a $\sigma(\mathscr{L}(\mathscr{H}), M_{\mathscr{L}(\mathscr{H})})$ topológia szerint, ahol $M_{\mathscr{L}(\mathscr{H})}$ az $\{\omega_{\zeta,\eta} | \zeta, \eta \in \mathscr{H}\}$ funkcionálhalmaz által generált lineáris altér $\mathscr{L}(\mathscr{H})'$-ben. Tehát minden $\zeta, \eta \in \mathscr{H}$ esetén

$$\int_T \varphi \, d\mathfrak{p} \quad \zeta \Big| \eta \quad = \lim_{n\to\infty} \quad \int_T \varphi_n \, d\mathfrak{p} \quad \zeta \Big| \eta$$

teljesül, vagyis minden $\mathscr{H} \ni \zeta$-ra

$$\int_T \varphi \, d\mathfrak{p} \quad \zeta = \lim_{n\to\infty} \quad \int_T \varphi_n \, d\mathfrak{p} \quad \zeta$$

a $\sigma(\mathscr{H}, \mathscr{H}')$ topológia szerint; azt kell igazolni, hogy ez a határérték-egyenlőség teljesül a $\mathscr{H}$ Hilbert-normája szerint is. Tudjuk, hogy adott $\zeta \in \mathscr{H}$ esetén ennek az a szükséges és elégséges feltétele, hogy

$$\left\| \quad \int_T \varphi \, d\mathfrak{p} \quad \zeta \right\|^2 = \lim_{n\to\infty} \left\| \quad \int_T \varphi_n \, d\mathfrak{p} \quad \zeta \right\|^2$$

teljesüljön. Ha $\psi \in \mathscr{E}_{\mathbb{C}}(T, \mathscr{R})$ és $\zeta \in \mathscr{H}$, akkor a $\mathfrak{p}$ által generált egyszerű integrál involúció-tartása és multiplikativitása folytán

$$\left\| \quad \int_T \psi \, d\mathfrak{p} \quad \zeta \right\|^2 = \quad \int_T \psi \, d\mathfrak{p} \quad ^* \quad \int_T \psi \, d\mathfrak{p} \quad \zeta \Big| \zeta \quad = \quad \int_T |\psi|^2 \, d\mathfrak{p} \quad \zeta \Big| \zeta \quad .$$

A feltevés szerint a $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ függvénysorozat egyenletesen korlátos és pontonként konvergál φ-hez a T halmazon, ezért a $(|\varphi_n|^2)_{n\in\mathbb{N}}$ függvénysorozat is egyenletesen korlátos és pontonként konvergál $|\varphi|^2$-hez a T halmazon, így az előző állítás alapján

$$\int_T |\varphi|^2 \, d\mathfrak{p} = \lim_{n\to\infty} \int_T |\varphi_n|^2 \, d\mathfrak{p}$$

teljesül a $\sigma(\mathscr{L}(\mathscr{H}), M_{\mathscr{L}(\mathscr{H})})$ topológia szerint. Ebből látszik, hogy minden $\zeta \in \mathscr{H}$ esetén

$$\left\| \left(\int\limits_T \varphi \; d\mathfrak{p} \right) \zeta \right\|^2 = \left(\left(\int\limits_T |\varphi|^2 \; d\mathfrak{p} \right) \zeta \middle| \zeta \right) =$$

$$= \lim_{n \to \infty} \left(\left(\int\limits_T |\varphi_n|^2 \; d\mathfrak{p} \right) \zeta \middle| \zeta \right) = \lim_{n \to \infty} \left\| \left(\int\limits_T \varphi_n \; d\mathfrak{p} \right) \zeta \right\|^2,$$

amit bizonyítani kellett. ■

24.7.3. Tétel. (Klasszikus spektráltétel) *Legyen $\mathscr{H}$ Hilbert-tér és $a \in \mathscr{L}(\mathscr{H})$ normális operátor. Ekkor létezik egyetlen olyan*

$$\mathfrak{p} : \mathscr{B}(\mathrm{Sp}(a)) \to \mathscr{L}(\mathscr{H})$$

projektor-értékű additív függvény, amelyre teljesülnek a következők.

a) $\mathfrak{p}(\mathrm{Sp}(a)) = id_{\mathscr{H}}$.

b) *Minden $\mathscr{B}(\mathrm{Sp}(a))$-ban haladó $(E_k)_{k \in \mathbb{N}}$ diszjunkt halmazsorozatra a $\sum\limits_{k \in \mathbb{N}} \mathfrak{p}(E_k)$ operátorsor pontonként konvergens, és*

$$\mathfrak{p}\left(\bigcup_{k \in \mathbb{N}} E_k \right) = \sum_{k=0}^{\infty} \mathfrak{p}(E_k)$$

teljesül a pontonkénti konvergencia topológiája szerint.

c) *Fennáll az*

$$\int\limits_{\mathrm{Sp}(a)} id_{\mathrm{Sp}(a)} \; d\mathfrak{p} = a$$

egyenlőség.

Bizonyítás. Tudjuk, hogy $\mathscr{L}(\mathscr{H})$ ultraspektrális C^*-algebra, így az $a \in \mathscr{L}(\mathscr{H})$ normális elemnek vehetjük a $\mathfrak{p}_a$ spektrálfelbontását (24.6.1.), amely olyan $\mathscr{B}(\mathrm{Sp}(a)) \to \mathscr{L}(\mathscr{H})$ projektor-értékű σ-ortoadditív függvény, hogy $\mathfrak{p}_a(\mathrm{Sp}(a)) = id_{\mathscr{H}}$ és

$$\int\limits_{\mathrm{Sp}(a)} id_{\mathrm{Sp}(a)} \; d\mathfrak{p}_a = a.$$

Tehát $\mathfrak{p}_a$-ra a) és c) teljesül. Ha $(E_k)_{k \in \mathbb{N}}$ diszjunkt halmazsorozat $\mathscr{B}(\mathrm{Sp}(a))$-ban és $E := \bigcup\limits_{k \in \mathbb{N}} E_k$, akkor a $(\sum\limits_{k=0}^{n} \chi_{E_k})_{n \in \mathbb{N}}$ függvénysorozat $\mathscr{E}_{\mathbb{C}}(\mathrm{Sp}(a), \mathscr{B}(\mathrm{Sp}(a)))$-ban halad, egyenletesen korlátos és pontonként konvergál χ_E-hez, ezért

$$\int\limits_{\mathrm{Sp}(a)} \chi_E \; d\mathfrak{p}_a = \lim_{n \to \infty} \int\limits_{\mathrm{Sp}(a)} \sum_{k=0}^{n} \chi_{E_k} \; d\mathfrak{p}_a = \lim_{n \to \infty} \sum_{k=0}^{n} \int\limits_{\mathrm{Sp}(a)} \chi_{E_k} \; d\mathfrak{p}_a$$

teljesül a pontonkénti konvergencia topológiája szerint, ami azt jelenti, hogy a $\sum_{k\in\mathbb{N}} \mathfrak{p}(E_k)$ operátorsor pontonként konvergens, és

$$\mathfrak{p}\left(\bigcup_{k\in\mathbb{N}} E_k\right) = \sum_{k=0}^{\infty} \mathfrak{p}(E_k)$$

a pontonkénti konvergencia topológiája szerint. Tehát $\mathfrak{p}_a$-ra b) is igaz.

Legyen most $\mathfrak{p} : \mathscr{B}(\mathrm{Sp}(a)) \to \mathscr{L}(\mathscr{H})$ tetszőleges olyan projektor-értékű additív függvény, amelyre a), b) és c) teljesül. Megmutatjuk, hogy $\mathfrak{p}$ σ-ortoadditív. Valóban, legyen $(E_k)_{k\in\mathbb{N}}$ diszjunkt halmazsorozat $\mathscr{B}(\mathrm{Sp}(a))$-ban. A b) szerint a $(\mathfrak{p}(E_k))_{k\in\mathbb{N}}$ ortogonális projektor-sor pontonként konvergens és

$$\mathfrak{p}\left(\bigcup_{k\in\mathbb{N}} E_k\right) = \sum_{k=0}^{\infty} \mathfrak{p}(E_k)$$

teljesül a pontonkénti konvergencia topológiája szerint. Ekkor a $(\mathfrak{p}(E_k))_{k\in\mathbb{N}}$ projektor-sor a $\sigma(\mathscr{L}(\mathscr{H}), M_{\mathscr{L}(\mathscr{H})})$ topológia szerint még inkább konvergens, ahol $M_{\mathscr{L}(\mathscr{H})}$ az $\{\omega_{\zeta,\eta} | \zeta, \eta \in \mathscr{H}\}$ funkcionálhalmaz által generált lineáris altér $\mathscr{L}(\mathscr{H})'$-ben; továbbá mindkét topológia szerint ugyanaz az összege. De láttuk azt, hogy

$$\sup_{k\in\mathbb{N}} \mathfrak{p}(E_k) = \sum_{k=0}^{\infty} \mathfrak{p}(E_k),$$

ahol az összegzést a $\sigma(\mathscr{L}(\mathscr{H}), M_{\mathscr{L}(\mathscr{H})})$ topológia szerint vesszük. Ez azt jelenti, hogy

$$\sup_{k\in\mathbb{N}} \mathfrak{p}(E_k) = \mathfrak{p}\left(\bigcup_{k\in\mathbb{N}} E_k\right),$$

így $\mathfrak{p}$ σ-ortoadditív. Ugyanakkor $\mathfrak{p}$-re a) és c) is igaz, következésképpen $\mathfrak{p} = \mathfrak{p}_a$, így $\mathfrak{p}$ egyértelműen van meghatározva. ■

24.8. Az önadjungált elemek rendezett vektortere ultraspektrális C^*-algebrában

Most megvizsgáljuk az ultraspektrális C^*-algebrák kapcsolatát az MSC-algebrákkal. Megállapodunk abban, hogy ha A tetszőleges C^*-algebra, akkor $A^\#$ jelöli az A feletti pozitív lineáris funkcionálok halmazát.

24.8.1. Lemma. *Legyen A C^*-algebra és $P \subseteq A^\#$ olyan halmaz, amelyre teljesülnek a következők.*

(I) *Minden $x \in A_+$ és $f \in P$ esetén $x.f.x \in P$.*

(II) *Minden $x \in A_+ \setminus \{0\}$ esetén van olyan $f \in P$, hogy $f(x) > 0$.*

Ekkor $x, y \in A_{sa}$ esetén $x \preceq y$ pontosan akkor teljesül, ha minden $P \ni f$-re $f(x) \leq f(y)$ (amit úgy fejezünk ki, hogy a P funkcionál-halmaz **rendezés-determináns***).*

Bizonyítás. Legyen $x \in A_{sa}$ olyan, amelyre minden $f \in P$ esetén $f(x) \geq 0$; megmutatjuk, hogy ekkor $x \in A_+$. Valóban, ha $f \in P$, akkor az (I) miatt $(x^-)^{1/2}.f.(x^-)^{1/2} \in P$, továbbá $(x^-)^{1/2}x^+ = 0$ és $(x^-)^{1/2}x^-(x^-)^{1/2} = (x^-)^2 = (x^-)^*x^-$, ezért az x-re vonatkozó feltevés alapján

$$0 \leq \left((x^-)^{1/2}.f.(x^-)^{1/2}\right)(x) = f\left((x^-)^{1/2}(x^+ - x^-)(x^-)^{1/2}\right) = -f\left((x^-)^2\right) \leq 0.$$

Tehát minden $P \ni f$-re $f\left((x^-)^2\right) = 0$, így a (II) miatt $(x^-)^2 = 0$, következésképpen $x^- = 0$, vagyis $x = x^+ \in A_+$. ■

24.8.2. Állítás. *Legyen A ultraspektrális C^*-algebra, és tegyük fel olyan $M \subseteq A'$ lineáris altér létezését, amelyre* ($\mathrm{SP_I}$), ($\mathrm{SP_{II}}$) *és az alábbi feltétel teljesül.*

($\mathrm{SP_{III}}$) *Minden $x \in A_+ \setminus \{0\}$ esetén van olyan $f \in M \cap A^\#$, hogy $f(x) > 0$.*

Ekkor AMSC*-algebra, és ha $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ az A önadjungált elemeinek tetszőleges monoton növő, C^*-normában korlátos sorozata, akkor $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergens a $\sigma(A, M)$ topológia szerint és $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \sup\limits_{n\in\mathbb{N}} x_n$.*

Bizonyítás. Vegyünk olyan $M \subseteq A'$ lineáris alteret, amelyre ($\mathrm{SP_I}$), ($\mathrm{SP_{II}}$) és ($\mathrm{SP_{III}}$) teljesül. Az ($\mathrm{SP_I}$) alapján a $P := M \cap A^\#$ halmazra teljesül az előző lemma (I) feltétele, ezért az ($\mathrm{SP_{III}}$)-ból következik, hogy $x, y \in A_{sa}$ esetén $x \preceq y$ pontosan akkor teljesül, ha minden $M \cap A^\# \ni f$-re $f(x) \leq f(y)$.

Legyen $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ az A önadjungált elemeinek tetszőleges monoton növő, C^*-normában korlátos sorozata. Ha $f \in A^\#$, akkor az $(f(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ valós számsorozat monoton növő és az $\|f\| \sup\limits_{n\in\mathbb{N}} \|x_n\| \in \mathbb{R}_+$ szám által felülről korlátos, tehát konvergens $\mathbb{R}$-ben. A 22.4.5. utolsó állítása szerint C^*-algebra felett minden folytonos lineáris funkcionál előáll pozitív funkcionálok lineáris kombinációjaként, ezért $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ Cauchy-sorozat a $\sigma(A, A')$ topológia szerint. Ekkor $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ a $\sigma(A, M)$ topológia szerint még inkább Cauchy-sorozat, ezért ($\mathrm{SP_{II}}$) következtében $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergens a $\sigma(A, M)$ topológia szerint; legyen $x := \lim\limits_{n\to\infty} x_n$.

Az A involúciója folytonos a $\sigma(A, M)$ topológia szerint, és minden $\mathbb{N} \ni n$-re $x_n \in A_{sa}$, ezért $x \in A_{sa}$. Ha $m \in \mathbb{N}$, akkor minden $M \cap A^\# \ni f$-re $f(x) = \lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = \sup\limits_{n\in\mathbb{N}} f(x_n) \geq f(x_m)$, ezért $x_m \preceq x$. Ha $y \in A_{sa}$ és minden $n \in \mathbb{N}$ esetén $x_n \preceq y$, akkor minden

$M \cap A^{\#} \ni f$-re $f(x_n) \leq f(y)$, ezért $f(y) \geq \sup_{n\in\mathbb{N}} f(x_n) = \lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(x)$, így $x \preceq y$. Ez azt jelenti, hogy x az $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sorozat szuprémuma A_{sa}-ban a természetes rendezés szerint. ■

24.8.3. Állítás. *Legyen A ultraspektrális C^*-algebra, és tegyük fel, hogy $M \subseteq A'$ olyan lineáris altér, amelyre* $(\mathrm{SP_I})$ *és* (SP_{II}) *teljesül, továbbá az A pozitív elemeinek halmaza $\sigma(A, M)$-zárt. Ekkor M-re* $(\mathrm{SP_{III}})$ *is teljesül.*

Bizonyítás. Legyen $M \subseteq A'$ olyan lineáris altér, amelyre $(\mathrm{SP_I})$ és (SP_{II}) teljesül, továbbá az A_+ halmaz $\sigma(A, M)$-zárt. Legyen $x \in A_+ \setminus \{0\}$ rögzített elem. Ekkor $-x \notin A_+$, különben $-x \in A_+ \cap (-A_+) = \{0\}$ teljesülne, tehát $x = 0$. Tekintsük most az A_{sa} valós vektorteret, és jelölje F az M önadjungált elemeinek A_{sa}-re vett leszűkítéseinek halmazát. Ekkor (A_{sa}, F) duális pár és a hipotézis alapján az A_+ halmaz $\sigma(A_{sa}, F)$-zárt konvex halmaz. Ugyanakkor $\{-x\}$ olyan konvex, $\sigma(A_{sa}, F)$-kompakt halmaz, amely nem metszi A_+-t, így a lokálisan konvex terekre vonatkozó Hahn–Banach szétválasztási tétel alapján kapjuk olyan A_{sa} feletti $\sigma(A_{sa}, F)$-folytonos $u : A_{sa} \to \mathbb{R}$ lineáris funkcionál és $c \in \mathbb{R}$ létezését, hogy $\{-x\} \subseteq [u < c]$ és $A_+ \subseteq [u \geq c]$. Tekintettel arra, hogy az A_{sa} feletti $\sigma(A_{sa}, F)$-folytonos lineáris funkcionálok halmaza egyenlő F-fel, ez olyan $f \in M$ önadjungált funkcionál és $c \in \mathbb{R}$ szám létezését jelenti, amelyekre $f(x) > -c$, valamint $A_+ \subseteq [f \geq c]$. Ekkor $0 \in A_+$ miatt $0 \geq c$, így $f(x) > -c \geq 0$. Ugyanakkor, $z \in A_+$ esetén minden $r \in \mathbb{R}^+$ számra $rz \in A_+ \subseteq [f \geq c]$, tehát $f(z) \geq \frac{c}{r}$, így az $r \to +\infty$ határátmenettel kapjuk, hogy $f(z) \geq 0$. Ez azt jelenti, hogy f pozitív lineáris funkcionál A felett, és $f \in M$, valamint $f(x) > 0$, vagyis M-re $(\mathrm{SP_{III}})$ teljesül. ■

Megjegyezzük, hogy ha A Neumann-algebra, akkor mind M_A-ra, mind $\overline{M_A}$-ra nyilvánvalóan teljesül $(\mathrm{SP_I})$, $(\mathrm{SP_{II}})$ és $(\mathrm{SP_{III}})$. Továbbá, ha $\mathscr{B}$ σ-algebra a T halmaz felett, akkor $M(T, \mathscr{B})$-re szintén teljesül $(\mathrm{SP_I})$, $(\mathrm{SP_{II}})$ és $(\mathrm{SP_{III}})$.

24.9. A spektrális C^*-algebrák jellemzése

Most egy karakterizációs tételt bizonyítunk spektrális C^*-algebrákra. Először a kommutatív esetet vizsgáljuk. Ehhez néhány egyszerű észrevételt teszünk a kompakt terek feletti korlátos komplex Baire-függvények C^*-algebrájával kapcsolatban.

Legyen T kompakt tér. Ekkor $\chi \in \mathrm{X}(\mathscr{E}_{\mathbb{C}}(T, \mathscr{B}_0(T)))$ esetén $\chi|_{\mathscr{C}(T;\mathbb{C})} \in \mathrm{X}(\mathscr{C}(T;\mathbb{C}))$, mert $\mathscr{C}(T;\mathbb{C})$ tartalmazza az $\mathscr{E}_{\mathbb{C}}(T, \mathcal{B}_0(T))$ algebra egységelemét, így $\chi|_{\mathscr{C}(T;\mathbb{C})} \neq 0$. Ezért minden $\chi \in \mathrm{X}(\mathscr{E}_{\mathbb{C}}(T, \mathscr{B}_0(T)))$ esetén létezik egyetlen olyan $t \in T$, hogy minden $\mathscr{C}(T;\mathbb{C}) \ni \varphi$-re $\chi(\varphi) = \varphi(t)$, így létezik egy kitüntetett

$$\rho_T : \mathrm{X}(\mathscr{E}_{\mathbb{C}}(T, \mathscr{B}_0(T))) \to T$$

leképezés, amely minden $\chi \in \mathrm{X}(\mathscr{E}_{\mathbb{C}}(T, \mathscr{B}_0(T)))$ karakterhez azt a $\rho_T(\chi) \in T$ pontot rendeli, amelyre minden $\mathscr{C}(T;\mathbb{C}) \ni \varphi$ esetén $\chi(\varphi) = \varphi(\rho_T(\chi))$. Ez a ρ_T függvény nyilvánvalóan szürjektív és folytonos a Gelfand-topológia szerint. A ρ_T jobbinverzei között szintén létezik egy kitüntetett leképezés: az, amely minden $T \ni t$-hez az $\mathscr{E}_{\mathbb{C}}(T, \mathscr{B}_0(T)) \to \mathbb{C};\ \varphi \mapsto \varphi(t)$ nem nulla karaktert rendeli. Azonban ez a jobbinverz csakis akkor folytonos, ha $\mathscr{E}_{\mathbb{C}}(T, \mathscr{B}_0(T)) = \mathscr{C}(T;\mathbb{C})$.

24.9.1. Állítás. *Ha T kompakt tér, akkor a következő állítások ekvivalensek.*

a) $\mathscr{C}(T;\mathbb{C})$ *spektrális C^*-algebra.*

b) *Létezik olyan $\mathscr{E}_{\mathbb{C}}(T, \mathscr{B}_0(T)) \to \mathscr{C}(T;\mathbb{C})$ *-algebra-morfizmus, amely kiterjesztése az $id_{\mathscr{C}(T;\mathbb{C})}$ függvénynek.*

c) *A $\rho_T : \mathrm{X}(\mathscr{E}_{\mathbb{C}}(T, \mathscr{B}_0(T))) \to T$ leképezésnek létezik folytonos jobbinverze.*

Bizonyítás. a)⇒b) Triviális, mert $id_{\mathscr{C}(T;\mathbb{C})} : \mathscr{C}(T;\mathbb{C}) \to \mathscr{C}(T;\mathbb{C})$ *-algebra-morfizmus.

b)⇒c) Legyen $\sigma : \mathscr{E}_{\mathbb{C}}(T, \mathscr{B}_0(T)) \to \mathscr{C}(T;\mathbb{C})$ olyan *-algebra-morfizmus, amelyre $\sigma|_{\mathscr{C}(T;\mathbb{C})} = id_{\mathscr{C}(T;\mathbb{C})}$. Ekkor az

$$\mathrm{X}(\sigma) : \mathrm{X}(\mathscr{C}(T;\mathbb{C})) \to \mathrm{X}(\mathscr{E}_{\mathbb{C}}(T, \mathscr{B}_0(T))); \quad \chi \mapsto \chi \circ \sigma$$

leképezés folytonos. Ugyanakkor tudjuk, hogy az $\varepsilon_T : T \to \mathrm{X}(\mathscr{C}(T;\mathbb{C}));\ t \mapsto (\varphi \mapsto \varphi(t))$ függvény *homeomorfizmus*. Könnyen látható, hogy az $\mathrm{X}(\sigma) \circ \varepsilon_T : T \to \mathrm{X}(\mathscr{E}_{\mathbb{C}}(T, \mathscr{B}_0(T)))$ folytonos leképezés jobbinverze ρ_T-nek.

c)⇒a) Legyen $j : T \to \mathrm{X}(\mathscr{E}_{\mathbb{C}}(T, \mathscr{B}_0(T)))$ folytonos jobbinverze ρ_T-nek, S kompakt tér és $\pi : \mathscr{C}(S;\mathbb{C}) \to \mathscr{C}(T;\mathbb{C})$ tetszőleges *-algebra-morfizmus. Nyilvánvaló, hogy a

$$C(j) : \mathscr{C}(\mathrm{X}(\mathscr{E}_{\mathbb{C}}(T, \mathscr{B}_0(T)));\mathbb{C}) \to \mathscr{C}(T;\mathbb{C}); \quad a \mapsto a \circ j$$

leképezés *-algebra-morfizmus, tehát

$$C(j) \circ \mathscr{G}_{\widehat{\mathscr{E}_{\mathbb{C}}(T,\mathscr{B}_0(T))}} : \mathscr{E}_{\mathbb{C}}(T, \mathscr{B}_0(T)) \to \mathscr{C}(T;\mathbb{C})$$

szintén *-algebra-morfizmus, amelyről könnyen látható, hogy az $id_{\mathscr{C}(T;\mathbb{C})}$ kiterjesztése. Az $\mathscr{E}_{\mathbb{C}}(T, \mathscr{B}_0(T))$ C^*-algebra spektrális (sőt ultraspektrális), ezért létezik olyan $\overline{\pi} : \mathscr{E}_{\mathbb{C}}(S, \mathscr{B}_0(S)) \to \mathscr{E}_{\mathbb{C}}(T, \mathscr{B}_0(T))$ *-algebra-morfizmus, amely π-nek kiterjesztése. Ekkor

$$C(j) \circ \mathscr{G}_{\widehat{\mathscr{E}_{\mathbb{C}}(T,\mathscr{B}_0(T))}} \circ \overline{\pi} : \mathscr{E}_{\mathbb{C}}(S, \mathscr{B}_0(S)) \to \mathscr{C}(T;\mathbb{C})$$

olyan *-algebra-morfizmus, amely π-nek kiterjesztése. Ezért $\mathscr{C}(T;\mathbb{C})$ spektrális C^*-algebra. ■

Vegyük észre, hogy az előző állítás b) feltétele ekvivalens olyan sup-normában zárt $\mathfrak{m} \subseteq \mathscr{E}_{\mathbb{C}}(T, \mathscr{B}_0(T))$ ideál létezésével, amelyre $\mathscr{C}(T;\mathbb{C}) \oplus \mathfrak{m} = \mathscr{E}_{\mathbb{C}}(T, \mathscr{B}_0(T))$.

24.9.2. Tétel. *Egységelemes C^*-algebra pontosan akkor spektrális, ha minden maximális kommutatív *-részalgebrája spektrális.*

(**Megjegyzés**. Egységelemes C^*-algebra maximális kommutatív *-részalgebrája szükségképpen zárt a C^*-norma szerint és tartalmazza az algebra egységelemét.)

Bizonyítás. Legyen A spektrális C^*-algebra és B maximális kommutatív *-részalgebra A-ban. Ekkor $\mathrm{X}(B)$ kompakt tér és $\mathscr{G}_B^{-1} : \mathscr{C}(\mathrm{X}(B);\mathbb{C}) \to B$ *-izomorfizmus. Ennek a leképezésnek a $B \to A$ kanonikus injekcióval vett kompozíciója *-algebra-morfizmus, így az A spektralitása miatt létezik ennek egy $\pi : \mathscr{E}_{\mathbb{C}}(\mathrm{X}(B), \mathscr{B}_0(\mathrm{X}(B))) \to A$ kiterjesztése, amely *-algebra-morfizmus. Világos, hogy $\mathrm{Im}(\pi)$ az A-nak olyan kommutatív *-részalgebrája, amely tartalmazza az $\mathrm{Im}(\mathscr{G}_B^{-1})$ halmazt, vagyis $B \subseteq \mathrm{Im}(\pi)$. A B maximalitása miatt $\mathrm{Im}(\pi) \subseteq B$, tehát az előző állítás alapján B kommutatív spektrális C^*-algebra.

Megfordítva, tegyük fel, hogy az A egységelemes C^*-algebra minden maximális kommutatív *-részalgebrája spektrális. Legyen T kompakt tér és $\pi : \mathscr{C}(T;\mathbb{C}) \to A$ *-algebra-morfizmus; ekkor $\mathrm{Im}(\pi)$ kommutatív *-részalgebrája A-nak. Ha $\mathrm{Im}(\pi) = A$, akkor A kommutatív, így a hipotézis szerint A spektrális. Ha $\mathrm{Im}(\pi) \neq A$, akkor a Zorn-lemma alkalmazásával kapjuk olyan $B \subseteq A$ maximális kommutatív *-részalgebra létezését, amelyre $\mathrm{Im}(\pi) \subseteq B$. A hipotézis szerint B spektrális C^*-algebra, tehát létezik olyan $\overline{\pi} : \mathscr{E}_{\mathbb{C}}(T, \mathscr{B}_0(T)) \to B$ *-algebra-morfizmus, amely π-nek kiterjesztése. Ekkor a $B \to A$ kanonikus injekció $\overline{\pi}$-sal vett kompozíciója olyan *-algebra-morfizmus, amely π-nek kiterjesztése, tehát A spektrális C^*-algebra. ∎

IV. rész

Függelék: Topologikus terek

25. fejezet

Topologikus terek és folytonos függvények

25.1. Topológiák

25.1.1. Definíció. *Legyen T halmaz. Egy $\mathscr{T} \subseteq \mathscr{P}(T)$ halmazt T feletti* **topológiának** *nevezünk, ha teljesülnek a következők.*

$(\mathrm{O_I})$ $T \in \mathscr{T}$.

$(\mathrm{O_{II}})$ *Minden $\mathscr{T}$-beli nem üres véges rendszer metszete eleme $\mathscr{T}$-nek.*

$(\mathrm{O_{III}})$ *Minden $\mathscr{T}$-beli rendszer uniója eleme $\mathscr{T}$-nek.*

A $(T, \mathscr{T})$ párt **topologikus térnek** *nevezzük, ha $\mathscr{T}$ topológia a T halmaz felett. Ha $(T, \mathscr{T})$ topologikus tér, akkor a $\mathscr{T}$ topológia elemeit a T halmaz* **$\mathscr{T}$-nyílt** *részhalmazainak nevezzük, és egy $F \subseteq T$ halmazt* **$\mathscr{T}$-zártnak** *nevezünk, ha a $T \setminus F$ halmaz $\mathscr{T}$-nyílt.*

Ha $\mathscr{T}$ topológia a T halmaz felett, akkor az $(\mathrm{O_{III}})$ miatt az üres rendszer uniója, vagyis az $\emptyset$ halmaz szintén eleme $\mathscr{T}$-nek.

A definícióból és a halmazelméleti de Morgan-egyenlőségekből következik, hogy a $(T, \mathscr{T})$ topologikus térben az $\emptyset$ és T halmazok $\mathscr{T}$-zártak, továbbá $\mathscr{T}$-zárt halmazok bármely nem üres rendszerének a metszete $\mathscr{T}$-zárt, valamint véges sok $\mathscr{T}$-zárt halmaz uniója $\mathscr{T}$-zárt.

Példák (topologikus terekre).

1) Legyen T halmaz. Ekkor az $\{\emptyset, T\}$ és a $\mathscr{P}(T)$ halmazok nyilvánvalóan topológiák T felett. A $\{\emptyset, T\}$ topológiát T feletti *antidiszkrét* topológiának nevezzük és a $\mathscr{T}_{ind}(T)$ szimbólummal jelöljük. A $\mathscr{P}(T)$ topológiát T feletti *diszkrét* topológiának nevezzük és a $\mathscr{T}_{dis}(T)$ szimbólummal jelöljük. Nyilvánvaló, hogy minden T feletti $\mathscr{T}$ topológiára $\mathscr{T}_{ind}(T) := \{\emptyset, T\} \subseteq \mathscr{T} \subseteq \mathscr{P}(T) =: \mathscr{T}_{dis}(T)$.

2) Ha (M, d) metrikus tér, akkor a d által meghatározott nyílt halmazok $\mathscr{T}_d$ halmaza topológia M felett; ezt nevezzük a *d metrika által generált topológiának.* A T halmaz feletti $\mathscr{T}$ topológiát *metrizálhatónak* nevezzük, ha létezik olyan T feletti d metrika, amelyre $\mathscr{T} = \mathscr{T}_d$. A T halmaz feletti $\mathscr{T}$ topológiát *teljesen metrizálhatónak* nevezzük, ha létezik olyan T feletti d metrika, amelyre $\mathscr{T} = \mathscr{T}_d$ és (T, d) teljes metrikus tér. Világos, hogy bármely halmaz felett a diszkrét topológia teljesen metrizálható, míg az antidiszkrét topológia biztosan nem metrizálható, ha az alaphalmaz legalább két elemű.

3) Ha K test és $|\cdot|$ abszolútérték-függvény K felett, akkor a

$$d_{|\cdot|} : K \times K \to \mathbb{R}_+; \quad (x, y) \mapsto |x - y|$$

függvény metrika K felett, tehát $\mathscr{T}_{d_{|\cdot|}}$ topológia K felett; ezt nevezzük az $|\cdot|$ *abszolútérték-függvény által generált* topológiának, és erre a $\mathscr{T}_{|\cdot|}$ egyszerűsített jelölést alkalmazzuk. Speciálisan, ha $|\cdot|$ jelöli az euklidészi abszolútérték-függvényt $\mathbb{K}$ felett, akkor a $\mathscr{T}_{|\cdot|}$ topológiát $\mathbb{K}$ feletti *euklidészi topológiának* nevezzük. Az $\mathbb{R}$ (illetve $\mathbb{C}$) feletti euklidészi topolóigát gyakran az $\mathscr{E}_{\mathbb{R}}$ (illetve $\mathscr{E}_{\mathbb{C}}$) szimbólummal jelöljük.

4) Ha $(E, \|\cdot\|)$ normált tér, akkor a

$$d_{\|\cdot\|} : E \times E \to \mathbb{R}_+ \quad (x, y) \mapsto \|x - y\|$$

függvény metrika E felett, tehát $\mathscr{T}_{d_{\|\cdot\|}}$ topológia E felett; ezt nevezzük a $\|\cdot\|$ *norma által generált topológiának*, és a $\mathscr{T}_{\|\cdot\|}$ szimbólummal jelöljük. A $\mathbb{K}$ feletti E vektortér alaphalmaza feletti $\mathscr{T}$ topológiát *normálhatónak* nevezzük, ha létezik olyan $\|\cdot\|$ norma E felett, amelyre $\mathscr{T} = \mathscr{T}_{\|\cdot\|}$. A $\mathbb{K}$ feletti E vektortér alaphalmaza feletti $\mathscr{T}$ topológiát *teljesen normálhatónak* nevezzük, ha létezik olyan $\|\cdot\|$ norma E felett, amelyre $\mathscr{T} = \mathscr{T}_{\|\cdot\|}$ és $(E, \|\cdot\|)$ Banach-tér.

5) Legyen E vektortér $\mathbb{K}$ felett. Két E feletti norma ekvivalenciája – a definíció szerint – azt jelenti, hogy az általuk generált topológiák egyenlők. Ha E véges dimenziós, akkor bármely két E feletti norma ekvivalens, és létezik norma E felett, tehát létezik egyértelműen olyan E feletti topológia, amelyet bármelyik E feletti norma generál; ezt a topológiát nevezzük az E véges dimenziós valós vagy komplex vektortér *euklidészi topológiájának.*

6) (*Topológia inverz képe.*) Legyen T halmaz, $(T', \mathscr{T}')$ topologikus tér és $f : T \to T'$ függvény. Ekkor az

$$\overset{-1}{f}[\mathscr{T}'] := \{ \overset{-1}{f}\langle \Omega' \rangle \mid \Omega' \in \mathscr{T}' \}$$

halmaz nyilvánvalóan topológia T felett; ezt nevezzük a $\mathscr{T}'$ topológia f függvény által létesített *inverz képének.* Speciálisan, ha $E \subseteq T$ és $\mathrm{in}_{E,T}$ jelöli az $E \to T$ kanonikus injekciót, akkor a $\mathscr{T}$ topológia $\mathrm{in}_{E,T}$ által létesített inverz képe topológia az E részhalmaz felett; ezt nevezzük a $\mathscr{T}$ topológia E-re vett *leszűkítésének* és a $\mathscr{T}|E$ szimbólummal jelöljük. A definíció alapján világos, hogy

$$\mathscr{T}|E = \{\Omega \cap E | \Omega \in \mathscr{T}\}.$$

A $(T, \mathscr{T})$ topologikus tér *topologikus alterének* nevezünk minden olyan $(T', \mathscr{T}')$ topologikus teret, amelyre $T' \subseteq T$ és $\mathscr{T}' = \mathscr{T}|T'$.

7) (*Topológia képe.*) Legyen T halmaz, $(T', \mathscr{T}')$ topologikus tér és $f : T' \to T$ függvény. Ekkor az

$$f[\mathscr{T}'] := \{\Omega \in \mathscr{P}(T) \mid \overset{-1}{f}\langle\Omega\rangle \in \mathscr{T}'\}$$

halmaz nyilvánvalóan topológia T felett; ezt nevezzük a $\mathscr{T}'$ topológia f függvény által létesített *képének*. Speciálisan, ha $(T, \mathscr{T})$ topologikus tér, R ekvivalencia-reláció T felett és $\pi_{T/R}$ jelöli a $T \to T/R$ kanonikus szürjekciót, akkor a $\mathscr{T}$ topológia $\pi_{T/R}$ által létesített képe topológia a T/R faktorhalmaz felett; ezt nevezzük a $\mathscr{T}$ topológia R ekvivalencia-reláció szerinti *faktortopológiájának* és a $\mathscr{T}/R$ szimbólummal jelöljük. A $(T, \mathscr{T})$ topologikus tér *topologikus faktorterének* nevezünk minden olyan $(T', \mathscr{T}')$ topologikus teret, amelyhez van olyan T feletti R ekvivalencia-reláció, hogy $T' = T/R$ és $\mathscr{T}' = \mathscr{T}/R$.

25.2. Környezetek, környezetbázisok, rácsok és szűrők

25.2.1. Definíció. *Legyen $(T, \mathscr{T})$ topologikus tér. Minden $t \in T$ esetén*

$$\mathscr{T}(t) := \{V \in \mathscr{P}(T) \mid (\exists\, \Omega \in \mathscr{T}) : t \in \Omega \subseteq V\},$$

és az $\mathscr{T}(t)$ halmaz elemeit a t pont **környezeteinek** *nevezzük a $\mathscr{T}$ topológia szerint. Ha $t \in T$, akkor egy $\mathfrak{R} \subseteq \mathscr{T}(t)$ halmazt a t pont* **környezetbázisának** *nevezünk a $\mathscr{T}$ topológia szerint, ha minden $V \in \mathscr{T}(t)$ esetén van olyan $U \in \mathfrak{R}$, hogy $U \subseteq V$.*

A környezetek és az altértopológia definíciója alapján nyilvánvaló, hogy ha $(T, \mathscr{T})$ topologikus tér és $E \subseteq T$, akkor $t \in E$ esetén $(\mathscr{T}|E)(t) = \{V \cap E | V \in \mathscr{T}(t)\}$.

25.2.2. Definíció. *Ha $(T, \mathscr{T})$ topologikus tér, akkor egy $\mathfrak{B} \subseteq \mathscr{T}$ halmazt a $\mathscr{T}$* **topológia bázisának** *nevezünk, ha minden $\mathscr{T} \ni \Omega$-hoz létezik olyan $\mathfrak{B}$-ben haladó $(\Omega_i)_{i\in I}$ rendszer, amelyre $\Omega = \bigcup_{i\in I} \Omega_i$.*

25.2.3. Definíció. *Azt mondjuk, hogy a $(T, \mathscr{T})$ topologikus tér* **$\mathbf{M_1}$-tér***, ha a T minden pontjának létezik megszámlálható környezetbázisa $\mathscr{T}$ szerint. Azt mondjuk, hogy az $(T, \mathscr{T})$ topologikus tér* **$\mathbf{M_2}$-tér***, vagy* **megszámlálható bázisú***, ha a $\mathscr{T}$ topológiának létezik megszámlálható bázisa.*

Ha $(T, \mathscr{T})$ topologikus tér és $\mathfrak{B}$ bázisa a $\mathscr{T}$ topológiának, akkor nyilvánvaló, hogy minden $t \in T$ esetén az $\{\Omega \in \mathfrak{B} | t \in \Omega\}$ halmaz a t pontnak környezetbázisa $\mathscr{T}$ szerint. Ebből következik, hogy minden M_2-tér M_1-tér.

Minden metrizálható topologikus tér M_1-tér, mert ha (M, d) metrikus tér és $(r_n)_{n\in\mathbb{N}}$

tetszőleges $\mathbb{R}^+$-ban haladó zérussorozat, akkor minden $T \ni t$-re a $\{B_{r_n}(t;d)|n \in \mathbb{N}\}$ halmaz megszámlálható környezetbázisa t-nek a $\mathscr{T}_d$ topológia szerint. A 25.3. pontban példát mutatunk majd olyan topologikus térre, amely nem metrizálható M_1-tér és nem M_2-tér.

Létezik olyan topologikus tér, amely nem M_1-tér. Ilyenre példa minden nem félmetrizálható *topologikus vektortér.*

25.2.4. Definíció. *Legyen T halmaz.*

– *Egy $\mathfrak{F} \subseteq \mathscr{P}(T)$ halmazt* **szűrőnek** *nevezünk T felett, ha teljesülnek rá a következő állítások.*

($\mathrm{FT_I}$) *$\mathfrak{F} \neq \emptyset$ és minden $V \in \mathfrak{F}$ esetén $V \neq \emptyset$, vagyis $\emptyset \notin \mathfrak{F}$.*

($\mathrm{FT_{II}}$) *Minden $V, V' \in \mathfrak{F}$ esetén $V \cap V' \in \mathfrak{F}$.*

($\mathrm{FT_{III}}$) *Minden $E \subseteq T$ halmazra, ha van olyan $V \in \mathfrak{F}$, hogy $V \subseteq E$, akkor $E \in \mathfrak{F}$.*

– *Egy $\mathfrak{R} \subseteq \mathscr{P}(T)$ halmazt rácsnak nevezünk T felett, ha teljesülnek rá a következő állítások.*

($\mathrm{R_I}$) *$\mathfrak{R} \neq \emptyset$ és minden $R \in \mathfrak{R}$ esetén $R \neq \emptyset$, vagyis $\emptyset \notin \mathfrak{R}$.*

($\mathrm{R_{II}}$) *Minden $R, R' \in \mathfrak{R}$ halmazhoz van olyan $S \in \mathfrak{R}$, hogy $S \subseteq R \cap R'$.*

25.2.5. Állítás. *Legyen $(T, \mathscr{T})$ topologikus tér. Ha $t \in T$, akkor $\mathscr{T}(t)$ olyan szűrő T felett, hogy minden $\mathscr{T}(t) \ni V$-re $t \in V$. Ha $t \in T$, akkor a t pont minden $\mathscr{T}$ szerinti $\mathfrak{B}$ környezetbázisa olyan rács T felett, amelyre minden $V \in \mathfrak{B}$ esetén $t \in V$.*

Bizonyítás. ($\mathrm{FT_I}$) és ($\mathrm{FT_{III}}$) a $\mathscr{T}(t)$ definíciójából következik, míg ($\mathrm{FT_{II}}$) azon múlik, hogy két $\mathscr{T}$-nyílt halmaz metszete szintén $\mathscr{T}$-nyílt. Ha $\mathfrak{B}$ környezetbázisa a $t \in T$ pontnak a $\mathscr{T}$ topológia szerint, akkor $V, V' \in \mathfrak{B}$ esetén léteznek olyan Ω és Ω' $\mathscr{T}$-nyílt halmazok, hogy $t \in \Omega \subseteq V$ és $t \in \Omega' \subseteq V'$. Ekkor $t \in \Omega \cap \Omega' \in \mathscr{T}$, tehát $\Omega \cap \Omega' \in \mathscr{T}(t)$, így van olyan $W \in \mathfrak{B}$, hogy $W \subseteq \Omega \cap \Omega'$, így $W \subseteq V \cap V'$. Ebből következik, hogy a $\mathfrak{B}$ halmaz rács. ■

Ha $(T, \mathscr{T})$ topologikus tér, akkor a definíciók alapján nyilvánvaló, hogy

$$\mathscr{T} = \{\Omega \in \mathscr{P}(T) \mid (\forall\, t \in \Omega) : \Omega \in \mathscr{T}(t)\}.$$

Valóban, ha $\Omega \in \mathscr{T}$, akkor minden $t \in \Omega$ esetén, a $\mathscr{T}(t)$ értelmezése alapján, $\Omega \in \mathscr{T}(t)$ teljesül. Megfordítva, ha $\Omega \subseteq T$ olyan halmaz, hogy minden $t \in \Omega$ esetén $\Omega \in \mathscr{T}(t)$, akkor kiválasztható olyan $(\Omega_t)_{t\in\Omega}$ rendszer, amelynek mindegyik tagja eleme $\mathscr{T}$-nek és minden $\Omega \ni t$-re $t \in \Omega_t \subseteq \Omega$; ekkor $\Omega = \bigcup\limits_{t\in\Omega} \Omega_t$ teljesül, tehát az ($\mathrm{O_{III}}$) alapján $\Omega \in \mathscr{T}$. Ez azt jelenti, hogy a topológiát egyértelműen meghatározzák a pontok környezetei. Felvetődik a kérdés, hogy ha minden $t \in T$ ponthoz hozzárendelünk egy T feletti $\mathfrak{F}_t$ szűrőt úgy, hogy minden $t \in T$ és $V \in \mathfrak{F}_t$ esetén $t \in V$, akkor létezik-e olyan T feletti

$\mathscr{T}$ topológia, hogy minden $T \ni t$-re $\mathscr{T}(t) = \mathfrak{F}_t$. Erre a kérdésre ad választ a következő állítás.

25.2.6. Állítás. *Legyen T halmaz és $(\mathfrak{F}_t)_{t \in T}$ olyan rendszer, hogy minden $t \in T$ esetén $\mathfrak{F}_t$ szűrő T felett és minden $\mathfrak{F}_t \ni V$-re $t \in V$. Akkor és csak akkor létezik olyan T feletti $\mathscr{T}$ topológia, amelyre minden $t \in T$ esetén $\mathscr{T}(t) = \mathfrak{F}_t$, ha teljesül a következő állítás:*

$$(\forall\ t \in T)(\forall\ V \in \mathfrak{F}_t)(\exists\ V' \in \mathfrak{F}_t)(\forall\ t' \in V') : V \in \mathfrak{F}_{t'}.$$

Ha ez a feltétel teljesül, akkor a

$$\mathscr{T} := \{\Omega \in \mathscr{P}(T) \mid (\forall\ t \in \Omega) : \Omega \in \mathfrak{F}_t\}$$

halmaz az egyetlen olyan T feletti topológia, amelyre minden $t \in T$ esetén $\mathscr{T}(t) = \mathfrak{F}_t$.

Bizonyítás. A feltétel *szükséges*, mert ha $\mathscr{T}$ olyan topológia T felett, hogy minden $T \ni t$-re $\mathscr{T}(t) = \mathfrak{F}_t$, akkor $t \in T$ és $V \in \mathfrak{F}_t$ esetén van olyan $\Omega \in \mathscr{T}$, hogy $t \in \Omega \subseteq \mathfrak{F}_t$, és ekkor minden $\Omega \ni t'$-re $\Omega \in \mathscr{T}(t') = \mathfrak{F}_{t'}$, tehát $V \in \mathfrak{F}_{t'}$, ami azt jelenti, hogy a $V' := \Omega$ halmazra $V' \in \mathfrak{F}_t$ és minden $V' \ni t'$-re $V \in \mathfrak{F}_{t'}$.
A feltétel *elégségességének* bizonyításához értelmezzük a $\mathscr{T}$ halmazt az állításban megfogalmazott módon. Világos, hogy $T \in \mathscr{T}$, mert minden $t \in T$ esetén $T \in \mathfrak{F}_t$ (a szűrők definíciója alapján). Ha $(\Omega_i)_{i \in I}$ tetszőleges rendszer $\mathscr{T}$-ben és $t \in \bigcup_{i \in I} \Omega_i$, akkor van olyan $j \in I$, hogy $t \in \Omega_j$ és $\mathfrak{F}_t$ szűrő T felett, így $\Omega_j \subseteq \bigcup_{i \in I} \Omega_i$ miatt $\bigcup_{i \in I} \Omega_i \in \mathfrak{F}_t$; ezért $\bigcup_{i \in I} \Omega_i \in \mathscr{T}$. Ha $(\Omega_i)_{i \in I}$ tetszőleges nem üres véges rendszer $\mathscr{T}$-ben és $t \in \bigcap_{i \in I} \Omega_i$, akkor minden $I \ni i$-re $\Omega_i \in \mathfrak{F}_t$, így $\bigcap_{i \in I} \Omega_i \in \mathfrak{F}_t$, hiszen $\mathfrak{F}_t$ szűrő T felett; ezért $\bigcap_{i \in I} \Omega_i \in \mathscr{T}$. Ez azt jelenti, hogy $\mathscr{T}$ topológia T felett.

A $\mathscr{T}$ topológia, valamint a környezetszűrők definíciója alapján nyilvánvaló, hogy $t \in T$ esetén $\mathscr{T}(t) \subseteq \mathfrak{F}_t$. Valóban, ha $V \in \mathscr{T}(t)$, akkor van olyan $\Omega \in \mathscr{T}$, hogy $t \in \Omega \subseteq V$, tehát $\Omega \in \mathfrak{F}_t$, így $V \in \mathfrak{F}_t$, mert $\mathfrak{F}_t$ szűrő T felett.

Megmutatjuk, hogy $t \in T$ esetén $\mathfrak{F}_t \subseteq \mathscr{T}(t)$. Legyen $V \in \mathfrak{F}_t$ és értelmezzük az $\Omega := \{t' \in T | V \in \mathfrak{F}_{t'}\}$ halmazt. Ha teljesülne az, hogy $t \in \Omega \subseteq V$ és $\Omega \in \mathscr{T}$, akkor $V \in \mathscr{T}(t)$ is igaz volna (amit bizonyítani kell). A definíció és $V \in \mathfrak{F}_t$ miatt $t \in \Omega$. Ha $t' \in \Omega$, akkor $V \in \mathfrak{F}_{t'}$, ezért $t' \in V$, vagyis $\Omega \subseteq V$. Az $\Omega \in \mathscr{T}$ összefüggés bizonyításához legyen $t' \in \Omega$ tetszőleges. Ekkor $V \in \mathfrak{F}_{t'}$, ezért a hipotézist alkalmazva a t' pontra és a V halmazra kapjuk olyan $V' \in \mathfrak{F}_{t'}$ létezését, amelyre minden $t'' \in V'$ esetén $V \in \mathfrak{F}_{t''}$, azaz $t'' \in \Omega$. Tehát $V' \in \mathfrak{F}_{t'}$ olyan, hogy $V' \subseteq \Omega$, így $\Omega \in \mathfrak{F}_{t'}$, mert $\mathfrak{F}_{t'}$ szűrő T felett. Ez azt jelenti, hogy minden $t' \in \Omega$ esetén $\Omega \in \mathfrak{F}_{t'}$, tehát $\Omega \in \mathscr{T}$.

Végül, a környezetek egyértelműen meghatározzák a topológiát, ezért legfeljebb egy olyan T feletti $\mathscr{T}$ topológia létezhet, amelyre minden $t \in T$ esetén $\mathscr{T}(t) = \mathfrak{F}_t$. ■

25.3. Halmaz belseje és lezártja

25.3.1. Állítás. *Legyen* $(T, \mathscr{T})$ *topologikus tér. Minden* $E \subseteq T$ *halmazhoz létezik olyan tartalmazás tekintetében legnagyobb* (*illetve legkisebb*) $\mathscr{T}$*-nyílt (illetve* $\mathscr{T}$*-zárt) halmaz, amely része* E*-nek* (*illetve tartalmazza* E*-t*).

Bizonyítás. Az E által tartalmazott $\mathscr{T}$-nyílt halmazok uniója $\mathscr{T}$-nyílt, és a tartalmazás tekintetében ez a legnagyobb mindazon $\mathscr{T}$-nyílt halmazok közül, amelyek részhalmazai E-nek. Az E halmazt tartalmazó $\mathscr{T}$-zárt halmazok metszete $\mathscr{T}$-zárt, és a tartalmazás tekintetében ez a legkisebb mindazon $\mathscr{T}$-zárt halmazok közül, amelyeknek E részhalmaza. ■

25.3.2. Definíció. *Legyen* $(T, \mathscr{T})$ *topologikus tér és* $E \subseteq T$*. Az* E *halmaz* **belsejének** (*illetve* **lezártjának**) *nevezzük a* $\mathscr{T}$ *topológia szerint a tartalmazás tekintetében legnagyobb* (*illetve legkisebb*) $\mathscr{T}$*-nyílt* (*illetve* $\mathscr{T}$*-zárt*) *halmazt, amely része* E*-nek* (*illetve tartalmazza* E*-t*)*. Az* E *halmaz* $\mathscr{T}$ *szerinti belsejét* (*illetve lezártját*) *az* $\mathrm{Int}(E)$ *vagy* $\overset{\circ}{E}$ (*illetve* $\mathrm{Cl}(E)$ *vagy* $\overline{E}$) *szimbólum jelöli. Az* $\mathrm{Int}(E)$ (*illetve* $\mathrm{Cl}(E)$) *elemeit az* E *halmaz* **belső pontjainak** (*illetve* **érintési pontjainak**) *nevezzük a* $\mathscr{T}$ *topológia szerint. Az* $\overline{E} \setminus \overset{\circ}{E}$ *halmazt az* E **határának** *nevezzük a* $\mathscr{T}$ *topológia szerint, és az* $\mathrm{Fr}(E)$ *vagy* $\overset{\bullet}{E}$ *szimbólummal jelöljük. Azt mondjuk, hogy a* $t \in T$ *pont* **torlódási pontja** E*-nek a* $\mathscr{T}$ *topológia szerint, ha* $t \in \overline{E \setminus \{t\}}$.

Megjegyezzük, hogy ha $(T, \mathscr{T})$ topologikus tér és $E \subseteq T$, akkor

$$\overset{\circ}{E} = \{t \in T \mid (\exists\, V \in \mathscr{T}(t)) : V \subseteq E\},$$

$$\overline{E} = \{t \in T \mid (\forall\, V \in \mathscr{T}(t)) : V \cap E \neq \emptyset\}.$$

Ezek az egyenlőségek a környezetek értelmezése valamint az előző definíció alapján könnyen bizonyíthatók. Az is könnyen belátható, hogy ha $(T, \mathscr{T})$ topologikus tér és $E \subseteq T$, akkor

$$\overset{\circ}{E} = T \setminus \overline{T \setminus E}, \qquad \overline{E} = T \setminus (T \overset{\circ}{\setminus} E),$$

továbbá, ha $(E_i)_{i \in I}$ a T részhalmazainak tetszőleges nem üres *véges* rendszere, akkor

$$\overset{\circ}{\bigcap_{i \in I} E_i} = \bigcap_{i \in I} \overset{\circ}{E}_i, \qquad \overline{\bigcup_{i \in I} E_i} = \bigcup_{i \in I} \overline{E}_i,$$

és ez utóbbi összefüggés természetesen $I = \emptyset$ esetén is (triviálisan) igaz.

25.3.3. Definíció. *Ha* $(T, \mathscr{T})$ *topologikus tér, akkor az* $E \subseteq T$ *halmazt* **sűrűnek** *nevezzük a* $\mathscr{T}$ *topológia szerint, ha* $\overline{E} = T$*. A* $(T, \mathscr{T})$ *topologikus teret* **szeparábilisnak** *nevezzük, ha létezik* T*-nek megszámlálható sűrű részhalmaza.*

25.3.4. Állítás. *Metrizálható topologikus tér pontosan akkor szeparábilis, ha megszámlálható bázisú.*

Bizonyítás. Tegyük fel, hogy (M,d) szeparábilis metrikus tér, és legyen $D \subseteq M$ olyan megszámlálható halmaz, amelyre $\overline{D} = M$. Legyen $(r_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tetszőleges olyan $\mathbb{R}^+$-ban haladó sorozat, amelyre $\inf\limits_{n\in\mathbb{N}} r_n = 0$. Értelmezzük az

$$\mathfrak{S} := \{B_{r_n}(\mathfrak{a};d) | (n\in\mathbb{N}) \wedge (\mathfrak{a}\in D)\}$$

halmazt. Ekkor $\mathfrak{S} \subseteq \mathscr{T}_d$, és $\mathfrak{S}$ megszámlálható, mert az

$$\mathbb{N}\times D \to \mathfrak{S}; \quad (n,\mathfrak{a}) \mapsto B_{r_n}(\mathfrak{a};d)$$

leképezés szürjekció, és az $\mathbb{N}\times D$ halmaz megszámlálható. Könnyen látható, hogy az M minden d szerint nyílt részhalmaza előáll $\mathfrak{S}$-ben haladó rendszer uniójaként.

Valóban, legyen $\Omega \in \mathscr{T}_d$ és $x \in \Omega$. Vehetünk olyan $r > 0$ valós számot, amelyre $B_r(x;d) \subseteq \Omega$; ekkor $\inf\limits_{n\in\mathbb{N}} r_n = 0$ miatt van olyan $n \in \mathbb{N}$, amelyre $r_n < r/2$. A D halmaz sűrű d szerint, így $B_{r_n}(x;d) \cap D \neq \emptyset$; legyen $\mathfrak{a}$ eleme ennek a metszetnek. Ekkor $B_{r_n}(\mathfrak{a};d) \in \mathfrak{S}$, és

$$x \in B_{r_n}(\mathfrak{a};d) \subseteq B_r(x;d) \subseteq \Omega,$$

hiszen $y \in B_{r_n}(\mathfrak{a};d)$ esetén $d(y,x) \leq d(y,\mathfrak{a}) + d(\mathfrak{a},x) < 2\cdot r_n < r$. Ez azt jelenti, hogy ha $I := \{H\in\mathfrak{S} | H \subseteq \Omega\}$, akkor $\Omega = \bigcup\limits_{H\in I} H$.

Megfordítva, tegyük fel, hogy $\mathfrak{S} \subseteq \mathscr{T}_d$ olyan megszámlálható halmaz, hogy az M minden d szerint nyílt részhalmaza előáll $\mathfrak{S}$-ben haladó rendszer uniójaként. Legyen $\mathfrak{S}_0 := \mathfrak{S} \setminus \{\emptyset\}$, és tekintsük az $(S)_{S\in\mathfrak{S}_0}$ halmazrendszert, amelynek minden tagja nem üres halmaz. A kiválasztási axióma szerint vehetünk egy

$$f \in \prod_{S\in\mathfrak{S}_0} S$$

kiválasztó-függvényt. Ekkor $\mathrm{Im}(f)$ megszámlálható halmaz, mert $\mathrm{Dom}(f) = \mathfrak{S}_0$ megszámlálható. Továbbá $\mathrm{Im}(f)$ sűrű d szerint, mert ha $x \in M$ és Ω az x-nek nyílt környezete, akkor a feltevés szerint van olyan $S \in \mathfrak{S}$ halmaz, amelyre $x \in S \subseteq \Omega$; ekkor $S \in \mathfrak{S}_0$ és $f(S) \in S$, vagyis $f(S) \in Im(f) \cap \Omega$. ■

Könnyen látható, hogy minden megszámlálható bázisú topologikus tér szeparábilis. Valóban, ha a $(T,\mathscr{T})$ topologikus tér M_2-tér és $\mathfrak{B} \subseteq \mathscr{T}$ megszámlálható bázis, akkor a $\mathfrak{B}_0 := \mathfrak{B} \setminus \{\emptyset\}$ halmazra a kiválasztási axióma alapján $\prod\limits_{\Omega\in\mathfrak{B}_0} \Omega \neq \emptyset$, és ha f eleme ennek a szorzathalmaznak, akkor $\mathrm{Im}(f)$ megszámlálható és sűrű részhalmaza T-nek. Ugyanis $t \in T$ és $V \in \mathscr{T}(t)$ esetén van olyan $\Omega \in \mathscr{T}$, hogy $t \in \Omega \subseteq V$, tehát van olyan $\Omega' \in \mathfrak{B}$, hogy $t \in \Omega' \subseteq \Omega$, így $\Omega' \in \mathfrak{B}_0$ és $f(\Omega') \in \Omega'$, vagyis $f(\Omega') \in V \cap \mathrm{Im}(f)$.

Megjegyezzük, hogy létezik olyan (szükségképpen nem metrizálható) topologikus tér, amely szeparábilis, de nem megszámlálható bázisú. Ilyen térre példát látunk majd 27.5-ben.

25.3.5. Definíció. *Legyen* $(T, \mathscr{T})$ *topologikus tér és* $(T_i)_{i\in I}$ *a* T *részhalmazainak rendszere. Azt mondjuk, hogy* $(T_i)_{i\in I}$ **pontonként véges**, *ha minden* $T \ni t$*-re az* $\{i \in I | t \in T_i\}$ *halmaz véges. Azt mondjuk, hogy* $(T_i)_{i\in I}$ **lokálisan véges** *a* $\mathscr{T}$ *topológia szerint, ha minden* $T \ni t$*-nek van olyan* V *környezete* $\mathscr{T}$ *szerint, hogy az* $\{i \in I | T_i \cap V \neq \emptyset\}$ *halmaz véges.*

25.3.6. Állítás. *Ha* $(T, \mathscr{T})$ *topologikus tér és* $(F_i)_{i\in I}$ *a* T *halmaz* $\mathscr{T}$*-zárt részhalmazainak lokálisan véges rendszere, akkor a* $\bigcup_{i\in I} F_i$ *halmaz is* $\mathscr{T}$*-zárt.*

Bizonyítás. Feltehető, hogy $I \neq \emptyset$, különben az állítás nyilvánvalóan igaz. Legyen $t \in T \setminus \bigcup_{i\in I} F_i$; megmutatjuk, hogy t belső pontja a $T \setminus \bigcup_{i\in I} F_i$ halmaznak a $\mathscr{T}$ topológia szerint, vagyis a $T \setminus \bigcup_{i\in I} F_i$ halmaz $\mathscr{T}$-nyílt. Az $(F_i)_{i\in I}$ halmazrendszer lokálisan véges, ezért létezik olyan $V \in \mathscr{T}(t)$, hogy a $J := \{i \in I | V \cap F_i \neq \emptyset\}$ halmaz véges. Ha $J = \emptyset$, akkor $V \subseteq T \setminus \bigcup_{i\in I} F_i$, tehát t belső pontja a $T \setminus \bigcup_{i\in I} F_i$ halmaznak a $\mathscr{T}$ topológia szerint. Tegyük fel, hogy $J \neq \emptyset$. Ha $i \in J$, akkor $T \setminus F_i \in \mathscr{T}(t)$, mivel a $T \setminus F_i$ halmaz $\mathscr{T}$-nyílt és $t \in T \setminus F_i$. Ezért $V \cap \bigcap_{i\in J}(T \setminus F_i)$ olyan környezete a t pontnak a $\mathscr{T}$ topológia szerint, amely része a $T \setminus \bigcup_{i\in I} F_i$ halmaznak, így t belső pontja a $T \setminus \bigcup_{i\in I} F_i$ halmaznak a $\mathscr{T}$ topológia szerint. ■

25.4. Folytonos függvények

25.4.1. Definíció. *Legyenek* $(T, \mathscr{T})$ *és* $(T', \mathscr{T}')$ *topologikus terek. Egy* $f : T \to T'$ *függvényt* **folytonosnak** *nevezünk a* $t \in T$ *pontban a* $\mathscr{T}$ *és* $\mathscr{T}'$ *topológiák szerint, ha minden* $V' \in \mathscr{T}'(f(t))$ *környezethez van olyan* $V \in \mathscr{T}(t)$*, amelyre* $f\langle V \rangle \subseteq V'$ *teljesül (vagy ami ugyanaz: minden* $\mathscr{T}'(f(t)) \ni V'$*-re* $\overset{-1}{f}\langle V' \rangle \in \mathscr{T}(t)$*). Azt mondjuk, hogy az* $f : T \to T'$ *függvény* **folytonos** *a* $\mathscr{T}$ *és* $\mathscr{T}'$ *topológiák szerint, ha* f *a* T *minden pontjában folytonos a* $\mathscr{T}$ *és* $\mathscr{T}'$ *topológiák szerint. A* T*-n értelmezett,* T'*-be érkező,* $\mathscr{T}$ *és* $\mathscr{T}'$ *topológiák szerint folytonos függvények halmazát* $\mathscr{C}(T, \mathscr{T}; T', \mathscr{T}')$ *jelöli.*

Ha $(T, \mathscr{T})$ és $(T', \mathscr{T}')$ topologikus terek, akkor a $\mathscr{C}(T, \mathscr{T}; T', \mathscr{T}')$ jelölés helyett az egyszerűbb $\mathscr{C}(T; T')$ jelölést is alkalmazzuk, ha világos, hogy mely topológiák szerint folytonos függvények halmazáról van szó.

25.4.2. Állítás. (A folytonosság lokalitása) *Legyenek* $(T, \mathscr{T})$ *és* $(T', \mathscr{T}')$ *topologikus terek, valamint* $f, g : T \to T'$ *függvények. Legyen* $t \in T$ *olyan pont, amelyhez van olyan*

$V \in \mathscr{T}(t)$, amelyre $f = g$ a V halmazon. Az f függvény pontosan akkor folytonos a t pontban a $\mathscr{T}$ és $\mathscr{T}'$ topológiák szerint, ha g folytonos a t pontban a $\mathscr{T}$ és $\mathscr{T}'$ topológiák szerint.

Bizonyítás. Tegyük fel, hogy f folytonos a t pontban a $\mathscr{T}$ és $\mathscr{T}'$ topológiák szerint, és legyen $V_t \in \mathscr{T}(t)$ olyan, hogy $f = g$ a V_t halmazon. Ha $V' \in \mathscr{T}'(g(t))$, akkor $g(t) = f(t)$ miatt $V' \in \mathscr{T}'(f(t))$, tehát létezik olyan $V \in \mathscr{T}(t)$, amelyre $f\langle V\rangle \subseteq V'$; ekkor $V \cap V_t \in \mathscr{T}(t)$ és $f = g$ a $V \cap V_t$ halmazon, így $g\langle V \cap V_t\rangle = f\langle V \cap V_t\rangle \subseteq f\langle V\rangle \subseteq V'$, vagyis g folytonos a t pontban a $\mathscr{T}$ és $\mathscr{T}'$ topológiák szerint. ■

25.4.3. Állítás. *Legyenek $(T, \mathscr{T})$, $(T', \mathscr{T}')$ és $(T'', \mathscr{T}'')$ topologikus terek, valamint $f : T \to T'$ és $g : T' \to T''$ függvények. Ha f folytonos a $t \in T$ pontban a $\mathscr{T}$ és $\mathscr{T}'$ topológiák szerint, valamint g folytonos az $f(t)$ pontban a $\mathscr{T}'$ és $\mathscr{T}''$ topológiák szerint, akkor $g \circ f$ folytonos a t pontban a $\mathscr{T}$ és $\mathscr{T}''$ topológiák szerint. Ha f folytonos a $\mathscr{T}$ és $\mathscr{T}'$ topológiák szerint és g folytonos a $\mathscr{T}'$ és $\mathscr{T}''$ topológiák szerint, akkor $g \circ f$ folytonos a $\mathscr{T}$ és $\mathscr{T}''$ topológiák szerint.*

Bizonyítás. A második állítás nyilvánvalóan következik az elsőből. Az első állítás bizonyításához legyen $V'' \in \mathscr{T}''((g \circ f)(t))$ tetszőleges. A g függvény folytonos az $f(t)$ pontban a $\mathscr{T}'$ és $\mathscr{T}''$ topológiák szerint, ezért van olyan $V' \in \mathscr{T}'(g(t))$, hogy $g\langle V'\rangle \subseteq V''$. Ha V' ilyen környezet, akkor van olyan $V \in \mathscr{T}(t)$, hogy $f\langle V\rangle \subseteq V'$, mert f folytonos a t pontban a $\mathscr{T}$ és $\mathscr{T}'$ topológiák szerint. Ekkor $(g \circ f)\langle V\rangle = g\langle f\langle V\rangle\rangle \subseteq g\langle V'\rangle \subseteq V''$, tehát $g \circ f$ folytonos a t pontban a $\mathscr{T}$ és $\mathscr{T}''$ topológiák szerint. ■

25.4.4. Definíció. *Ha $(T, \mathscr{T})$ és $(T', \mathscr{T}')$ topologikus terek, akkor egy $f : T \to T'$ függvényt* **homeomorfizmusnak** *nevezünk a $\mathscr{T}$ és $\mathscr{T}'$ topológiák szerint, ha f bijekció, és f folytonos a $\mathscr{T}$ és $\mathscr{T}'$ topológiák szerint, valamint f^{-1} folytonos a $\mathscr{T}'$ és $\mathscr{T}$ topológiák szerint. A $(T, \mathscr{T})$ és $(T', \mathscr{T}')$ topologikus tereket* **homeomorfaknak** *nevezzük, ha létezik olyan $f : T \to T'$ függvény, amely homeomorfizmus a $\mathscr{T}$ és $\mathscr{T}'$ topológiák szerint.*

Könnyen látható, hogy a topologikus terek bármely halmazán a homeomorfia ekvivalencia-reláció, ugyanis

– a $(T, \mathscr{T})$ topologikus tér homeomorf önmagával, mert az $id_T : T \to T$ függvény homeomorfizmus a $\mathscr{T}$ és $\mathscr{T}$ topológiák szerint (a homeomorfia *reflexív*);

– ha a $(T, \mathscr{T})$ és $(T', \mathscr{T}')$ topologikus terek homeomorfak és $f : T \to T'$ homeomorfizmus a $\mathscr{T}$ és $\mathscr{T}'$ topológiák szerint, akkor az $f^{-1} : T' \to T$ függvény homeomorfizmus a $\mathscr{T}'$ és $\mathscr{T}$ topológiák szerint, így a $(T', \mathscr{T}')$ és $(T, \mathscr{T})$ topologikus terek homeomorfak (a homeomorfia *szimmetrikus*);

– ha a $(T, \mathscr{T})$ és $(T', \mathscr{T}')$ topologikus terek homeomorfak, valamint a $(T', \mathscr{T}')$ és $(T'', \mathscr{T}'')$ topologikus terek homeomorfak, akkor van olyan $f : T \to T'$ függvény, amely homeomorfizmus a $\mathscr{T}$ és $\mathscr{T}'$ topológiák szerint, valamint van olyan $g : T' \to T''$ függvény, amely homeomorfizmus a $\mathscr{T}'$ és $\mathscr{T}''$ topológiák szerint; ekkor a $g \circ f : T \to T''$ függvény homeomorfizmus a $\mathscr{T}$ és $\mathscr{T}''$ topológiák szerint, tehát a $(T, \mathscr{T})$ és $(T'', \mathscr{T}'')$ topologikus terek homeomorfak (a homeomorfia *tranzitív*).

25.4.5. Állítás. (A folytonosság topologikus jellemzése) *Ha $(T, \mathscr{T})$ és $(T', \mathscr{T}')$ topologikus terek, akkor az $f : T \to T'$ függvény pontosan akkor folytonos a $\mathscr{T}$ és $\mathscr{T}'$ topológiák szerint, ha minden $\Omega' \in \mathscr{T}'$ halmazra $\overset{-1}{f}\langle \Omega' \rangle \in \mathscr{T}$ teljesül (vagy ami ugyanaz: $\overset{-1}{f}[\mathscr{T}'] \subseteq \mathscr{T}$).*

Bizonyítás. Tegyük fel, hogy f folytonos a $\mathscr{T}$ és $\mathscr{T}'$ topológiák szerint, és legyen $\Omega' \in \mathscr{T}'$ tetszőleges. Ha $t \in \overset{-1}{f}\langle \Omega' \rangle$, akkor $f(t) \in \Omega'$, ezért $\Omega' \in \mathscr{T}'$ miatt $\Omega' \in \mathscr{T}'(f(t))$, így az f függvény t pontbeli folytonossága következtében létezik olyan $V \in \mathscr{T}(t)$, hogy $f\langle V \rangle \subseteq \Omega'$, vagyis $V \subseteq \overset{-1}{f}\langle \Omega' \rangle$. Ez azt jelenti, hogy az $\overset{-1}{f}\langle \Omega' \rangle$ halmaz minden pontja belső pont a $\mathscr{T}$ topológia szerint, tehát $\overset{-1}{f}\langle \Omega' \rangle \in \mathscr{T}$.

Megfordítva, tegyük fel, hogy minden $\Omega' \in \mathscr{T}'$ halmazra $\overset{-1}{f}\langle \Omega' \rangle \in \mathscr{T}$. Legyen $t \in T$ és $V' \in \mathscr{T}'(f(t))$. Ekkor van olyan $\Omega' \in \mathscr{T}'$, hogy $f(t) \in \Omega' \subseteq V'$, vagyis $t \in \overset{-1}{f}\langle \Omega' \rangle \subseteq \overset{-1}{f}\langle V' \rangle$. A feltevésből következik, hogy $\overset{-1}{f}\langle \Omega' \rangle \in \mathscr{T}$, így $V := \overset{-1}{f}\langle V' \rangle \in \mathscr{T}(t)$ és $f\langle V \rangle \subseteq V'$, azaz f folytonos a t pontban a $\mathscr{T}$ és $\mathscr{T}'$ topológiák szerint. ■

Ha T, T' halmazok és $f : T \to T'$ függvény, akkor minden $F' \subseteq T'$ halmazra $\overset{-1}{f}\langle T' \setminus F' \rangle = T \setminus \overset{-1}{f}\langle F' \rangle$. Ebből és az előző állításból következik, hogy ha $(T, \mathscr{T})$ és $(T', \mathscr{T}')$ topologikus terek, akkor az $f : T \to T'$ függvény pontosan akkor folytonos a topológiák szerint, ha minden $F' \subseteq T'$ $\mathscr{T}'$-zárt halmazra az $\overset{-1}{f}\langle F' \rangle$ halmaz $\mathscr{T}$-zárt.

25.4.6. Következmény. *Legyenek $(T, \mathscr{T})$ és $(T', \mathscr{T}')$ topologikus terek és $f : T \to T'$ függvény. Ha f folytonos a $\mathscr{T}$ és $\mathscr{T}'$ topológiák szerint, akkor minden $E \subseteq T$ halmazra az $f|_E : E \to T'$ függvény folytonos a $\mathscr{T}|E$ és $\mathscr{T}'$ topológiák szerint. Ha $(T_i)_{i \in I}$ a T halmaz $\mathscr{T}$-zárt részhalmazainak lokálisan véges befedése a $\mathscr{T}$ topológia szerint, és minden $I \ni i$-re az $f|_{T_i} : T_i \to T'$ függvény folytonos a $\mathscr{T}|T_i$ és $\mathscr{T}'$ topológiák szerint, akkor f folytonos a $\mathscr{T}$ és $\mathscr{T}'$ topológiák szerint.*

Bizonyítás. Az első állítás bizonyításához tegyük fel, hogy f folytonos a $\mathscr{T}$ és $\mathscr{T}'$ topológiák szerint, és legyen $E \subseteq T$ tetszőleges. Ha az $\Omega' \subseteq T'$ halmaz $\mathscr{T}'$-nyílt, akkor a folytonosság topologikus jellemzése alapján az $\overset{-1}{f}\langle \Omega' \rangle$ halmaz $\mathscr{T}$-nyílt, ugyanakkor nyilvánvalóan $\overset{-1}{f|_E}\langle \Omega' \rangle = E \cap \overset{-1}{f}\langle \Omega' \rangle$, tehát az altértopológia értelmezése alapján $\overset{-1}{f|_E}\langle \Omega' \rangle \in \mathscr{T}|E$. Ismét a folytonosság topologikus jellemzésére hivatkozva kapjuk, hogy az $f|_E : E \to T'$ függvény folytonos a $\mathscr{T}|E$ és $\mathscr{T}'$ topológiák szerint.

A második állítás bizonyításához tegyük fel, hogy minden $I \ni i$-re az $f|_{T_i} : T_i \to T'$ függvény folytonos a $\mathscr{T}|T_i$ és $\mathscr{T}'$ topológiák szerint. Legyen $F' \subseteq T'$ tetszőleges $\mathscr{T}'$-zárt halmaz. Ekkor $\overset{-1}{f}\langle F'\rangle = \bigcup_{i \in I} \overset{-1}{f|_{T_i}}\langle F'\rangle$, és minden $i \in I$ esetén a folytonosság topologikus jellemzése alapján az $\overset{-1}{f|_{T_i}}\langle F'\rangle$ halmaz $\mathscr{T}|T_i$-zárt részhalmaza T_i-nek. De minden $I \ni i$-re T_i a T-nek $\mathscr{T}$-zárt részhalmaza, ezért az $\overset{-1}{f|_{T_i}}\langle F'\rangle$ halmaz $\mathscr{T}$-zárt is. Továbbá, a $(T_i)_{i \in I}$ rendszer lokálisan véges a $\mathscr{T}$ topológia szerint, és minden $i \in I$ esetén $\overset{-1}{f|_{T_i}}\langle F'\rangle \subseteq T_i$, így az $\left(\overset{-1}{f|_{T_i}}\langle F'\rangle\right)_{i \in I}$ halmazrendszer is lokálisan véges a $\mathscr{T}$ topológia szerint. Ezért $\bigcup_{i \in I} \overset{-1}{f|_{T_i}}\langle F'\rangle$ a T-nek $\mathscr{T}$-zárt részhalmaza, tehát a folytonosság topologikus jellemzése alapján az f függvény folytonos a $\mathscr{T}$ és $\mathscr{T}'$ topológiák szerint. ■

25.4.7. Állítás. *Legyen $(T, \mathscr{T})$ topologikus tér és $(F, \|\cdot\|)$ normált tér $\mathbb{K}$ felett.*

a) *Ha az $f, g : T \to F$ függvények folytonosak a $t_0 \in T$ pontban a $\mathscr{T}$ és $\mathscr{T}_{\|\cdot\|}$ topológiák szerint, akkor az $f + g : T \to F;\ t \mapsto f(t) + g(t)$ függvény folytonos a t_0 pontban a $\mathscr{T}$ és $\mathscr{T}_{\|\cdot\|}$ topológiák szerint.*

b) *Ha az $f : T \to F$ függvény folytonos a $t_0 \in T$ pontban a $\mathscr{T}$ és $\mathscr{T}_{\|\cdot\|}$ topológiák szerint, valamint a $\lambda : T \to \mathbb{K}$ függvény folytonos a $t_0 \in T$ pontban a $\mathscr{T}$ és $\mathscr{E}_{\mathbb{K}}$ topológiák szerint, akkor a $\lambda.f : T \to F;\ t \mapsto \lambda(t).f(t)$ függvény folytonos a $t_0 \in T$ pontban a $\mathscr{T}$ és $\mathscr{T}_{\|\cdot\|}$ topológiák szerint.*

c) *Ha az $f : T \to F$ függvény folytonos a $t_0 \in T$ pontban a $\mathscr{T}$ és $\mathscr{T}_{\|\cdot\|}$ topológiák szerint, akkor az $\|f\| : T \to \mathbb{R};\ t \mapsto \|f(t)\|$ függvény folytonos a t_0 pontban a $\mathscr{T}$ és $\mathscr{E}_{\mathbb{R}}$ topológiák szerint.*

d) *Ha az $f : T \to \mathbb{K}$ függvény folytonos a $t_0 \in T$ pontban a $\mathscr{T}$ és $\mathscr{E}_{\mathbb{K}}$ topológiák szerint és minden $t \in T$ esetén $f(t) \neq 0$, akkor az $1/f : T \to \mathbb{K};\ t \mapsto 1/f(t)$ függvény folytonos a $t_0 \in T$ pontban a $\mathscr{T}$ és $\mathscr{E}_{\mathbb{K}}$ topológiák szerint.*

e) *Ha az $f, g : T \to \mathbb{R}$ függvények folytonosak a $t_0 \in T$ pontban a $\mathscr{T}$ és $\mathscr{E}_{\mathbb{R}}$ topológiák szerint, akkor a $\sup(f, g) : T \to \mathbb{R};\ t \mapsto \max(f(t), g(t))$ és az $\inf(f, g) : T \to \mathbb{R};\ t \mapsto \min(f(t), g(t))$ függvények folytonosak a $t_0 \in T$ pontban a $\mathscr{T}$ és $\mathscr{E}_{\mathbb{R}}$ topológiák szerint.*

Bizonyítás. Mindegyik esetre felírjuk azokat az egyenlőtlenségeket, amelyekből nyilvánvalóan következik az állítás.

a) Ha $t \in T$, akkor

$$\|(f + g)(t) - (f + g)(t_0)\| := \|(f(t) + g(t)) - (f(t_0) + g(t_0))\| \leq$$

$$\leq \|f(t) - f(t_0)\| + \|g(t) - g(t_0)\|.$$

b) Ha $t \in T$, akkor

$$\|(\lambda.f)(t) - (\lambda.f)(t_0)\| := \|\lambda(t).f(t) - \lambda(t_0).f(t_0)\| \leq$$

$$\leq |\lambda(t) - \lambda(t_0)|\|f(t) - f(t_0)\| + |\lambda(t) - \lambda(t_0)|\|f(t_0)\| + |\lambda(t_0)|\|f(t) - f(t_0)\|.$$

c) Ha $t \in T$, akkor

$$|\|f\|(t) - \|f\|(t_0)| := |\|f(t)\| - \|f(t_0)\|| \leq \|f(t) - f(t_0)\|.$$

d) Ha $t \in T$, akkor

$$|(1/f)(t) - (1/f)(t_0)| := \left|\frac{1}{f(t)} - \frac{1}{f(t_0)}\right| = \frac{|f(t_0) - f(t)|}{|f(t)||f(t_0)|}.$$

Az f függvény folytonos a t_0 pontban és $|f(t_0)| > 0$, ezért bármely $c \in]0, |f(t_0)|[$ rögzített számhoz létezik olyan $V \in \mathscr{T}(t_0)$, hogy minden $V \ni t$-re $|f(t_0)| - |f(t)| \leq |f(t_0) - f(t)| < c$, így $|f(t)| > |f(t_0)| - c$, vagyis

$$|(1/f)(t) - (1/f)(t_0)| \leq \frac{|f(t_0) - f(t)|}{(|f(t_0)| - c)\,|f(t_0)|}.$$

Tehát, ha $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ és $W \in \mathscr{T}(t_0)$ olyan, hogy minden $t \in W$ esetén $|f(t_0) - f(t)| < \varepsilon\,(|f(t_0)| - c)\,|f(t_0)|$, akkor a fenti egyenlőtlenség alapján minden $W \cap V \ni t$-re $|(1/f)(t) - (1/f)(t_0)| < \varepsilon$ és $W \cap V \in \mathscr{T}(t_0)$, tehát $1/f$ folytonos a $t_0 \in T$ pontban a $\mathscr{T}$ és $\mathscr{E}_{\mathbb{K}}$ topológiák szerint.

e) Ha $t \in T$, akkor

$$|\max(f,g)(t) - \max(f,g)(t_0)| := |\max(f(t), g(t)) - \max(f(t_0), g(t_0))| \leq$$

$$\leq |f(t) - f(t_0)| + |g(t) - g(t_0)|,$$

$$|\min(f,g)(t) - \min(f,g)(t_0)| := |\min(f(t), g(t)) - \min(f(t_0), g(t_0))| \leq$$

$$\leq |f(t) - f(t_0)| + |g(t) - g(t_0)|. \blacksquare$$

Vigyázzunk arra, hogy nyílt (illetve zárt) halmaz folytonos függvény által létesített képe nem szükségképpen nyílt (illetve zárt). Ezért tartalmas a következő definíció.

25.4.8. Definíció. *Ha $(T, \mathscr{T})$ és $(T', \mathscr{T}')$ topologikus terek, akkor egy $f : T \to T'$ függvényt* **nyíltnak** (*illetve* **zártnak**) *nevezünk, ha minden $\Omega \subseteq T$ $\mathscr{T}$-nyílt (illetve $F \subseteq T$ $\mathscr{T}$-zárt) halmazra az $f\langle\Omega\rangle \subseteq T'$ (illetve $f\langle F\rangle \subseteq T'$) halmaz $\mathscr{T}$-nyílt (illetve $\mathscr{T}$-zárt).*

25.5. Rendezés a topológiák halmazában

25.5.1. Állítás. *Ha T halmaz, akkor a T feletti topológiák halmaza a $\subseteq$ relációval ellátva olyan rendezett halmaz, amelynek a T feletti antidiszkrét topológia a legkisebb és a T feletti diszkrét topológia a legnagyobb eleme, továbbá a T feletti topológiák tetszőleges $(\mathscr{T}_i)_{i\in I}$ rendszerére létezik a $\sup\limits_{i\in I} \mathscr{T}_i$ felső határ és az $\inf\limits_{i\in I} \mathscr{T}_i$ alsó határ a $\subseteq$ reláció szerint. (Ezt úgy is megfogalmazhatjuk, hogy a T feletti topológiák halmaza a $\subseteq$ relációval ellátva teljes rendezett halmaz.)*

Bizonyítás. Legyen $(\mathscr{T}_i)_{i\in I}$ T feletti topológiák tetszőleges rendszere. Ha $I = \emptyset$, akkor a T feletti diszkrét topológia a $(\mathscr{T}_i)_{i\in I}$ rendszer legnagyobb alsó korlátja a $\subseteq$ rendezés szerint. Ha $I \neq \emptyset$, akkor könnyen látható, hogy $\bigcap\limits_{i\in I} \mathscr{T}_i$ olyan topológia T felett, amely alsó korlátja a $(\mathscr{T}_i)_{i\in I}$ rendszernek a $\subseteq$ rendezés szerint, és ha $\mathscr{T}$ olyan topológia T felett, hogy minden $I \ni i$-re $\mathscr{T} \subseteq \mathscr{T}_i$, akkor természetesen $\mathscr{T} \subseteq \bigcap\limits_{i\in I} \mathscr{T}_i$, ezért $\bigcap\limits_{i\in I} \mathscr{T}_i$ a $(\mathscr{T}_i)_{i\in I}$ rendszer legnagyobb alsó korlátja a $\subseteq$ rendezés szerint. Tehát a T feletti topológiák tetszőleges rendszerének létezik infimuma a $\subseteq$ rendezés szerint. Ebből már következik, hogy a $(\mathscr{T}_i)_{i\in I}$ topológia-rendszer felső korlátjai halmazának az infimuma létezik és egyenlő a $(\mathscr{T}_i)_{i\in I}$ rendszer szuprémumával a $\subseteq$ rendezés szerint. ∎

Megállapodunk abban, hogy a továbbiakban minden T halmazra a T feletti topológiák halmazát a $\subseteq$ rendezéssel ellátva (teljes) rendezett halmaznak tekintjük. Az előző állítás szerint a T halmaz feletti topológiák bármely $(\mathscr{T}_i)_{i\in I}$ nem üres rendszerére $\inf\limits_{i\in I} \mathscr{T}_i = \bigcap\limits_{i\in I} \mathscr{T}_i$, ugyanakkor a $\sup\limits_{i\in I} \mathscr{T}_i$ topológiára nem adtunk ilyen explicit formulát. A következő állítás teljes jellemzést ad a topológia-szuprémumra.

25.5.2. Állítás. *Legyen T halmaz, $(\mathscr{T}_i)_{i\in I}$ T feletti topológiák tetszőleges nem üres rendszere, és értelmezzük a*

$$\prod_{i\in I}^{*} \mathscr{T}_i := \left\{ (\Omega_i)_{i\in I} \in \prod_{i\in I} \mathscr{T}_i \;\middle|\; \{i \in I | \Omega_i \neq T\} \text{ véges halmaz} \right\}$$

halmazt. Ekkor a

$$\mathfrak{B} := \left\{ \bigcap_{i\in I} \Omega_i \;\middle|\; (\Omega_i)_{i\in I} \in \prod_{i\in I}^{*} \mathscr{T}_i \right\}$$

halmaz bázisa a $\sup\limits_{i\in I} \mathscr{T}_i$ topológiának.

Bizonyítás. Először megmutatjuk, hogy bármely $\mathfrak{B}$-ben haladó nem üres véges rendszer metszete eleme $\mathfrak{B}$-nek. Legyen ugyanis $((\Omega_{\alpha,i})_{i\in I})_{\alpha\in A}$ nem üres véges rendszer $\prod\limits_{i\in I}^{*} \mathscr{T}_i$-ben.

Minden $i \in I$ esetén $\bigcap\limits_{\alpha\in A} \Omega_{\alpha,i} \in \mathscr{T}_i$, mert $\mathscr{T}_i$-re $(\mathrm{O_{II}})$ teljesül, ezért $\left(\bigcap\limits_{\alpha\in A} \Omega_{\alpha,i}\right)_{i\in I} \in \prod\limits_{i\in I} \mathscr{T}_i$.

Továbbá, minden $\alpha \in A$ esetén van olyan $I_\alpha \subseteq I$ véges halmaz, hogy minden $I \ni i$-re: $\Omega_{\alpha,i} \neq T$ esetén $i \in I_\alpha$. Ha $i \in I$ és $\bigcap_{\alpha \in A} \Omega_{\alpha,i} \neq T$, akkor van olyan $\alpha \in A$, hogy $\Omega_{\alpha,i} \neq T$, így $i \in I_\alpha$. Ez azt jelenti, hogy

$$\left\{ i \in I \,\middle|\, \bigcap_{\alpha \in A} \Omega_{\alpha,i} \neq T \right\} \subseteq \bigcup_{\alpha \in A} I_\alpha,$$

és itt a jobb oldalon véges halmaz áll, ezért $\left(\bigcap_{\alpha \in A} \Omega_{\alpha,i}\right)_{i \in I} \in \prod_{i \in I}^{*} \mathscr{T}_i$. Ebből következik, hogy

$$\bigcap_{\alpha \in A} \left(\bigcap_{i \in I} \Omega_{\alpha,i} \right) = \bigcap_{i \in I} \left(\bigcap_{\alpha \in A} \Omega_{\alpha,i} \right) \in \mathfrak{B}.$$

Értelmezzük a

$$\mathscr{T}' := \left\{ \bigcup_{H \in \mathfrak{B}'} H \,\middle|\, \mathfrak{B}' \subseteq \mathfrak{B} \right\}$$

halmazt, és vezessük be a $\mathscr{T} := \sup_{i \in I} \mathscr{T}_i$ jelölést. Világos, hogy a $\mathscr{T}' = \mathscr{T}$ egyenlőséget kell igazolni.

Minden $i \in I$ esetén $\mathscr{T}_i \subseteq \mathscr{T}$, ezért a $\mathscr{T}$-re vonatkozó $(\mathrm{O_{II}})$ feltétel és a $\mathfrak{B}$ értelmezése alapján $\mathfrak{B} \subseteq \mathscr{T}$, amiből azonnal következik, hogy $\mathscr{T}' \subseteq \mathscr{T}$ is teljesül, mert $\mathscr{T}$-re $(\mathrm{O_{III}})$ teljesül.

Minden $I \ni i$-re $\mathscr{T}_i \subseteq \mathfrak{B} \subseteq \mathscr{T}'$ nyilvánvalóan igaz, ezért ha $\mathscr{T}'$ topológia lenne T felett, akkor $\mathscr{T} \subseteq \mathscr{T}'$ is teljesülne, amit bizonyítani kell. A $\mathscr{T}'$-re $(\mathrm{O_I})$ és $(\mathrm{O_{III}})$ triviálisan igaz. Az $(\mathrm{O_{II}})$ bizonyításához legyen $(H_\alpha)_{\alpha \in A}$ nem üres véges rendszer $\mathscr{T}'$-ben; azt kell belátni, hogy $\bigcap_{\alpha \in A} H_\alpha \in \mathscr{T}'$. Minden $A \ni \alpha$-hoz van olyan $\mathfrak{B}_\alpha \subseteq \mathfrak{B}$ halmaz, hogy $H_\alpha = \bigcup_{H \in \mathfrak{B}_\alpha} H$. Legyen $F := \prod_{\alpha \in A} \mathfrak{B}_\alpha$; ekkor az ismert disztributivitás-formula alapján

$$\bigcap_{\alpha \in A} H_\alpha = \bigcap_{\alpha \in A} \left(\bigcup_{H \in \mathfrak{B}_\alpha} H \right) = \bigcup_{f \in F} \left(\bigcap_{\alpha \in A} f(\alpha) \right) \in \mathscr{T}',$$

mert a definíció szerint minden $f \in F$ esetén minden $A \ni \alpha$-ra $f(\alpha) \in \mathfrak{B}_\alpha \subseteq \mathfrak{B}$, ezért $\bigcap_{\alpha \in A} f(\alpha) \in \mathfrak{B}$, mert láttuk, hogy bármely $\mathfrak{B}$-ben haladó nem üres véges rendszer metszete eleme $\mathfrak{B}$-nek. ■

25.6. Projektíven előállított topológiák

25.6.1. Tétel. *Legyen T halmaz, $((T_i, \mathscr{T}_i))_{i \in I}$ topologikus terek rendszere és $(f_i)_{i \in I}$ olyan rendszer, hogy minden $i \in I$ esetén $f_i : T \to T_i$ függvény. Ekkor létezik T felett olyan*

$\mathscr{T}$ topológia, amely a legkisebb mindazon T feletti topológiák között, amelyekre minden $i \in I$ esetén az $f_i : T \to T_i$ függvény folytonos a $\mathscr{T}$ és $\mathscr{T}_i$ topológiák szerint.

Bizonyítás. Minden $I \ni i$-re legyen $\overset{-1}{f_i}[\mathscr{T}_i] := \left\{ \overset{-1}{f_i}\langle \Omega_i \rangle \,\middle|\, \Omega_i \in \mathscr{T}_i \right\}$. Ekkor $i \in I$ esetén $\overset{-1}{f_i}[\mathscr{T}_i]$ topológia T felett; legyen $\mathscr{T} := \sup_{i \in I} \overset{-1}{f_i}[\mathscr{T}_i]$. Ha $i \in I$ és $\Omega_i \in \mathscr{T}_i$, akkor a definíció szerint $\overset{-1}{f_i}\langle \Omega_i \rangle \in \overset{-1}{f_i}[\mathscr{T}_i] \subseteq \mathscr{T}$, tehát minden $i \in I$ esetén az $f_i : T \to T_i$ függvény folytonos a $\mathscr{T}$ és $\mathscr{T}_i$ topológiák szerint. Ha $\mathscr{T}'$ olyan topológia T felett, hogy minden $i \in I$ esetén az $f_i : T \to T_i$ függvény folytonos a $\mathscr{T}'$ és $\mathscr{T}_i$ topológiák szerint, akkor minden $I \ni i$-re és $\mathscr{T}_i \ni \Omega_i$-re $\overset{-1}{f_i}\langle \Omega_i \rangle \in \mathscr{T}'$, így $\overset{-1}{f_i}[\mathscr{T}_i] \subseteq \mathscr{T}'$, vagyis a $\mathscr{T}$ definíciója alapján $\mathscr{T} \subseteq \mathscr{T}'$. Ez azt jelenti, hogy $\mathscr{T}$ az a topológia, amely a legkisebb mindazon T feletti topológiák között, amelyekre minden $i \in I$ esetén az $f_i : T \to T_i$ függvény folytonos a $\mathscr{T}$ és $\mathscr{T}_i$ topológiák szerint. ■

25.6.2. Definíció. *Legyen T halmaz, $((T_i, \mathscr{T}_i))_{i \in I}$ topologikus terek rendszere és $(f_i)_{i \in I}$ olyan rendszer, hogy minden $i \in I$ esetén $f_i : T \to T_i$ függvény. Ekkor a $((T_i, \mathscr{T}_i), f_i)_{i \in I}$ rendszer által* **projektíven előállított** (*vagy* **iniciális**) *T feletti topológiának nevezzük azt a legkisebb T feletti $\mathscr{T}$ topológiát, amelyre minden $i \in I$ esetén az $f_i : T \to T_i$ függvény folytonos a $\mathscr{T}$ és $\mathscr{T}_i$ topológiák szerint.*

Az előző tétel bizonyításából látható, hogy ha T halmaz, $((T_i, \mathscr{T}_i))_{i \in I}$ topologikus terek nem üres rendszere és $(f_i)_{i \in I}$ olyan rendszer, hogy minden $i \in I$ esetén $f_i : T \to T_i$ függvény, akkor a $((T_i, \mathscr{T}_i), f_i)_{i \in I}$ rendszer által előállított T feletti $\mathscr{T}$ iniciális topológiára $\mathscr{T} = \sup_{i \in I} \overset{-1}{f}_i[\mathscr{T}_i]$ teljesül, ezért a topológiák inverz képének definíciója és a szuprémum-topológiák jellemzésére vonatkozó korábbi állításunk szerint a

$$\left\{ \bigcap_{i \in I} \overset{-1}{f}_i\langle \Omega_i \rangle \,\middle|\, \left((\Omega_i)_{i \in I} \in \prod_{i \in I} \mathscr{T}_i \right) \wedge (\{ i \in I | \Omega_i \neq T_i \} \text{ véges halmaz}) \right\}$$

halmaz bázisa a $\mathscr{T}$ topológiának.

Tehát, ha T halmaz, $(T', \mathscr{T}')$ topologikus tér és $f : T \to T'$ függvény, akkor az $\overset{-1}{f}[\mathscr{T}']$ topológia megegyezik a $((T', \mathscr{T}'), f)$ rendszer által előállított T feletti iniciális topológiával. Speciálisan, ha $(T, \mathscr{T})$ topologikus tér és $E \subseteq T$, akkor a $\mathscr{T}|E$ altértopológia megegyezik a $((T, \mathscr{T}), \mathrm{in}_{E,T})$ rendszer által előállított E feletti iniciális topológiával, ahol $\mathrm{in}_{E,T}$ az $E \to T$ kanonikus injekció.

25.6.3. Állítás. *Legyen T halmaz, $((T_i, \mathscr{T}_i))_{i \in I}$ topologikus terek rendszere és $(f_i)_{i \in I}$ olyan rendszer, hogy minden $i \in I$ esetén $f_i : T \to T_i$ függvény.*

a) *Ha $\mathscr{T}$ a $((T_i, \mathscr{T}_i), f_i)_{i \in I}$ rendszer által előállított T feletti iniciális topológia, akkor* *minden $(T', \mathscr{T}')$ topologikus térre és $f : T' \to T$ függvényre: az f pontosan akkor folytonos a $\mathscr{T}'$ és $\mathscr{T}$ topológiák szerint, ha minden $I \ni i$-re a $f_i \circ f : T' \to T_i$ függvény folytonos a $\mathscr{T}'$ és $\mathscr{T}_i$ topológiák szerint.*

b) *Ha $\mathscr{T}$ olyan topológia T felett, hogy minden $(T', \mathscr{T}')$ topologikus térre és $f : T' \to T$ függvényre: az f pontosan akkor folytonos a $\mathscr{T}'$ és $\mathscr{T}$ topológiák szerint, ha minden $I \ni i$-re a $f_i \circ f : T' \to T_i$ függvény folytonos a $\mathscr{T}'$ és $\mathscr{T}_i$ topológiák szerint, akkor $\mathscr{T}$ megegyezik a $((T_i, \mathscr{T}_i), f_i)_{i \in I}$ rendszer által előállított T feletti iniciális topológiával.*

Bizonyítás. a) Ha az $f : T' \to T$ függvény folytonos a $\mathscr{T}'$ és $\mathscr{T}$ topológiák szerint, akkor minden $i \in I$ esetén az $f_i \circ f : T' \to T_i$ függvény folytonos a $\mathscr{T}'$ és $\mathscr{T}_i$ topológiák szerint, mert $f_i : T \to T_i$ folytonos a $\mathscr{T}$ és $\mathscr{T}_i$ topológiák szerint, és folytonos függvények kompozíciója folytonos.

Megfordítva, tegyük fel, hogy minden $I \ni i$-re a $f_i \circ f : T' \to T_i$ függvény folytonos a $\mathscr{T}'$ és $\mathscr{T}_i$ topológiák szerint. Ha $i \in I$ és $\Omega_i \in \mathscr{T}_i$, akkor a folytonosság topologikus jellemzése alapján

$$\overset{-1}{f}\langle \overset{-1}{f_i}\langle \Omega_i \rangle\rangle = (\overset{-1}{f_i \circ f})\langle \Omega_i \rangle \in \mathscr{T}',$$

tehát $\overset{-1}{f_i}\langle \Omega_i \rangle \in f[\mathscr{T}'] := \left\{ \Omega \in \mathscr{P}(T) \,\middle|\, \overset{-1}{f}\langle \Omega \rangle \in \mathscr{T}' \right\}$. Ez azt jelenti, hogy minden $i \in I$ esetén az $f_i : T \to T_i$ függvény folytonos az $f[\mathscr{T}']$ és $\mathscr{T}_i$ topológiák szerint. Az iniciális topológia definíciója alapján $\mathscr{T} \subseteq f[\mathscr{T}']$, vagyis minden $\Omega \in \mathscr{T}$ esetén $\overset{-1}{f}\langle \Omega \rangle \in \mathscr{T}'$, tehát f folytonos a $\mathscr{T}'$ és $\mathscr{T}$ topológiák szerint.

b) Legyen $\mathscr{T}$ olyan topológia T felett, hogy minden $(T', \mathscr{T}')$ topologikus térre és $f : T' \to T$ függvényre: az f pontosan akkor folytonos a $\mathscr{T}'$ és $\mathscr{T}$ topológiák szerint, ha minden $I \ni i$-re a $f_i \circ f : T' \to T_i$ függvény folytonos a $\mathscr{T}'$ és $\mathscr{T}_i$ topológiák szerint.

Az $id_T : T \to T$ függvény folytonos a $\mathscr{T}$ és $\mathscr{T}$ topológiák szerint, így a feltételt alkalmazva a $(T', \mathscr{T}') := (T, \mathscr{T})$ topologikus térre és az $f := id_T$ függvényre kapjuk, hogy minden $I \ni i$-re az $f_i = f_i \circ id_T : T \to T_i$ függvény folytonos a $\mathscr{T}$ és $\mathscr{T}_i$ topológiák szerint.

Megfordítva, ha $\mathscr{T}'$ olyan topológia T felett, hogy minden $I \ni i$-re az $f_i \circ id_T = f_i : T \to T_i$ függvény folytonos a $\mathscr{T}'$ és $\mathscr{T}_i$ topológiák szerint, akkor a feltételt alkalmazva a $(T, \mathscr{T}')$ topologikus térre és az id_T függvényre kapjuk, hogy id_T folytonos a $\mathscr{T}'$ és $\mathscr{T}$ topológiák szerint, ami azzal ekvivalens, hogy $\mathscr{T} \subseteq \mathscr{T}'$. Ez azt jelenti, hogy $\mathscr{T}$ a legkisebb topológia T felett, amelyre minden $i \in I$ esetén az $f_i : T \to T_i$ függvény folytonos a $\mathscr{T}$ és $\mathscr{T}_i$ topológiák szerint. ∎

25.6.4. Következmény. *Ha $(T, \mathscr{T})$ topologikus tér, $E \subseteq T$ és $(T', \mathscr{T}')$ topologikus tér, akkor egy $f : T' \to E$ függvény pontosan akkor folytonos a $\mathscr{T}'$ és $\mathscr{T}|E$ topológiák szerint, ha f folytonos a $\mathscr{T}'$ és $\mathscr{T}$ topológiák szerint.*

25.7. Topologikus szorzatterek

25.7.1. Definíció. *Legyen* $((T_i, \mathscr{T}_i))_{i\in I}$ *topologikus terek rendszere, és minden* $I \ni j$*-re jelölje* pr_j *a* $\prod_{i\in I} T_i \to T_j$ *projekció-függvényt. A* $((T_i, \mathscr{T}_i), pr_i)_{i\in I}$ *rendszer által előállított* $\prod_{i\in I} T_i$ *feletti iniciális topológiát a* $(\mathscr{T}_i)_{i\in I}$ **topológia-rendszer szorzatának** *nevezzük, és a* $\times_{i\in I} \mathscr{T}_i$ *szimbólummal jelöljük. Ekkor a* $\left(\prod_{i\in I} T_i, \times_{i\in I} \mathscr{T}_i\right)$ *topologikus teret a* $((T_i, \mathscr{T}_i))_{i\in I}$ *topologikus tér-rendszer szorzatának nevezzük. Ha minden* $i \in I$ *esetén* $(T_i, \mathscr{T}_i) = (T, \mathscr{T})$ *ugyanaz a topologikus tér, akkor* $\prod_{i\in I} T_i = \mathscr{F}(I;T) = T^I$*, és ekkor a* $\times_{i\in I} \mathscr{T}_i$ *topológiát a* $\mathscr{T}^I$ *szimbólummal jelöljük, továbbá a* $T^I, \mathscr{T}^I$ *alakú topologikus tereket* **topologikus kockáknak** *nevezzük. Speciálisan, a* $[0,1]^I, (\mathscr{E}_{\mathbb{R}}|[0,1])^I$ *alakú topologikus kockákat* **euklidészi kockáknak** *nevezzük.*

Figyeljük meg, hogy a definíció szerint tetszőleges $(T, \mathscr{T})$ topologikus térre és tetszőleges I halmazra, az *összes* $I \to T$ függvények halmaza (vagyis T^I-n) felett van értelmezve a $\mathscr{T}^I$ szorzattopológia; ez a legkisebb olyan $\mathscr{F}(I;T)$ feletti topológia, amelyre teljesül az, hogy minden $i \in I$ esetén a $\mathscr{F}(I;T) \to T;\ f \mapsto f(i)$ függvény folytonos. A függvényhalmazok feletti topológiákkal az 5. fejezetben foglalkozunk részletesen.

Az előzőek alapján nyilvánvaló, hogy ha $((T_i, \mathscr{T}_i))_{i\in I}$ topologikus terek nem üres rendszere, akkor a

$$\left\{ \bigcap_{i\in I} \overset{-1}{pr_i}\langle \Omega_i \rangle \,\middle|\, \left((\Omega_i)_{i\in I} \in \prod_{i\in I} \mathscr{T}_i\right) \wedge (\{i \in I | \Omega_i \neq T_i\} \text{ véges halmaz}) \right\}$$

halmaz bázisa a $\times_{i\in I} \mathscr{T}_i$ topológiának.

Az alábbiakban alkalmazzuk a következő jelölést: ha $(T_i)_{i\in I}$ tetszőleges rendszer, $t = (t_i)_{i\in I} \in \prod_{i\in I} T_i$ és $k \in I$, akkor $\mathrm{in}_{k,t}$ jelöli azt a $T_k \to \prod_{i\in I} T_i$ függvényt, amelynek k-adik komponens-függvénye egyenlő a $T_k \to T_k$ identikus függvénnyel, és minden $I \setminus \{k\} \ni i$-re az i-edik komponens-függvénye egyenlő a t_i értékű $T_k \to T_i$ konstansfüggvénnyel.

25.7.2. Állítás. *Ha* $((T_i, \mathscr{T}_i))_{i\in I}$ *topologikus terek rendszere,* $(T', \mathscr{T}')$ *topologikus tér és* $f : \prod_{i\in I} T_i \to T'$ *olyan függvény, amely a* $t = (t_i)_{i\in I} \in \prod_{i\in I} T_i$ *pontban folytonos a* $\times_{i\in I} \mathscr{T}_i$ *és* $\mathscr{T}'$ *topológiák szerint, akkor minden* $I \ni k$*-ra az* $f \circ \mathrm{in}_{k,t} : T_k \to T'$ *függvény folytonos a* t_k *pontban a* $\mathscr{T}_k$ *és* $\mathscr{T}'$ *topológiák szerint.*

Bizonyítás. A folytonos függvények kompozíciójának folytonossága miatt az állítás *ekvivalens* azzal, hogy minden $t = (t_i)_{i\in I} \in \prod_{i\in I} T_i$ pontra és $I \ni k$-ra az $\mathrm{in}_{k,t} : T_k \to \prod_{i\in I} T_i$

függvény folyonos a t_k pontban a $\mathscr{T}_k$ és $\underset{i\in I}{\times}\mathscr{T}_i$ topológiák szerint. Ennek bizonyításához elég azt igazolni, hogy minden $j,k\in I$ és $t=(t_i)_{i\in I}\in\prod_{i\in I}T_i$ esetén a $pr_j\circ \mathrm{in}_{k,t}:T_k\to T_j$ függvény folytonos a $\mathscr{T}_k$ és $\mathscr{T}_j$ topológiák szerint. Ez viszont igaz, mert ha $j=k$, akkor $pr_j\circ\mathrm{in}_{k,t}=id_{T_k}$ folytonos a $\mathscr{T}_k$ és $\mathscr{T}_j$ topológiák szerint, míg $j\neq k$ esetén $pr_j\circ\mathrm{in}_{k,t}$ egyenlő a t_j értékű $T_k\to T_j$ konstansfüggvénnyel, ami szintén folytonos a $\mathscr{T}_k$ és $\mathscr{T}_j$ topológiák szerint. ■

25.7.3. Állítás. *Legyenek $((T_i,\mathscr{T}_i))_{i\in I}$ és $((T_i',\mathscr{T}_i'))_{i\in I}$ topologikus terek rendszerei (ugyanazzal az I indexhalmazzal), és $(f_i)_{i\in I}$ olyan rendszer, hogy minden $I\ni i$-re $f_i:T_i\to T_i'$ folytonos függvény a $\mathscr{T}_i$ és $\mathscr{T}_i'$ topológiák szerint. Ekkor a*

$$\underset{i\in I}{\times} f_i:\prod_{i\in I}T_i\to\prod_{i\in I}T_i',\quad (t_i)_{i\in I}\mapsto(f_i(t_i))_{i\in I}$$

függvény folytonos a $\underset{i\in I}{\times}\mathscr{T}_i$ és $\underset{i\in I}{\times}\mathscr{T}_i'$ topológiák szerint.

Bizonyítás. Minden $j\in I$ esetén legyen pr_j a $\prod_{i\in I}T_i\to T_j$ projekció-függvény, és pr_j' a $\prod_{i\in I}T_i'\to T_j'$ projekció-függvény. Tudjuk, hogy a $\underset{i\in I}{\times} f_i$ függvény pontosan akkor folytonos a $\underset{i\in I}{\times}\mathscr{T}_i$ és $\underset{i\in I}{\times}\mathscr{T}_i'$ topológiák szerint, ha minden $I\ni j$-re a $pr_j'\circ\left(\underset{i\in I}{\times} f_i\right):\prod_{i\in I}T_i\to T_j'$ függvény folytonos a $\underset{i\in I}{\times}\mathscr{T}_i$ és $\mathscr{T}_j'$ topológiák szerint. A $\underset{i\in I}{\times} f_i$ függvény definíciója alapján nyilvánvaló, hogy minden $j\in I$ esetén

$$pr_j'\circ\left(\underset{i\in I}{\times} f_i\right)=f_j\circ pr_j,$$

továbbá a $pr_j:\prod_{i\in I}T_i\to T_j$ függvény folytonos a $\underset{i\in I}{\times}\mathscr{T}_i$ és $\mathscr{T}_j$ topológiák szerint, valamint $f_j:T_j\to T_j'$ a hipotézis alapján folytonos a $\mathscr{T}_j$ és $\mathscr{T}_j'$ toplógiák szerint, ezért az $f_j\circ pr_j:\prod_{i\in I}T_i\to T_j'$ függvény folytonos a $\underset{i\in I}{\times}\mathscr{T}_i$ és $\mathscr{T}_j'$ topológiák szerint, hiszen folytonos függvények kompozíciója folytonos. ■

25.7.4. Állítás. *Ha $((T_i,\mathscr{T}_i))_{i\in I}$ topologikus terek rendszere, J halmaz és $\sigma:J\to I$ bijekció, akkor az*

$$f:\prod_{i\in I}T_i\to\prod_{j\in J}T_{\sigma(j)};\quad (t_i)_{i\in I}\mapsto(t_{\sigma(j)})_{j\in J}$$

függvény homeomorfizmus a $\left(\prod_{i\in I}T_i,\underset{i\in I}{\times}\mathscr{T}_i\right)$ és $\left(\prod_{j\in J}T_{\sigma(j)},\underset{j\in J}{\times}\mathscr{T}_{\sigma(j)}\right)$ topologikus terek között.

Bizonyítás. Vezessük be a $T := \prod_{i\in I} T_i$, $T' := \prod_{j\in J} T_{\sigma(j)}$, $\mathscr{T} := \bigtimes_{i\in I} \mathscr{T}_i$ és $\mathscr{T}' := \bigtimes_{j\in J} \mathscr{T}_{\sigma(j)}$ jelöléseket, továbbá $i \in I$ és $j \in J$ esetén legyenek $pr_i : T \to T_i$ és $pr'_j : T' \to T_{\sigma(j)}$ a projekció-függvények. Az f függvény pontosan akkor folytonos a $\mathscr{T}$ és $\mathscr{T}'$ topológiák szerint, ha minden $J \ni j$-re a $pr'_j \circ f : T \to T_{\sigma(j)}$ függvény folytonos a $\mathscr{T}$ és $\mathscr{T}_{\sigma(j)}$ topológiák szerint. Az f definíciójából látható, hogy $j \in J$ esetén $pr'_j \circ f = pr_{\sigma(j)}$, és a szorzattopológia értelmezése alapján $pr_{\sigma(j)}$ folytonos a $\mathscr{T}$ és $\mathscr{T}_{\sigma(j)}$ topológiák szerint. Tehát f folytonos a $\mathscr{T}$ és $\mathscr{T}'$ topológiák szerint. Világos, hogy a

$$g : \prod_{j\in J} T_{\sigma(j)} \to \prod_{i\in I} T_i; \quad (t'_j)_{j\in J} \mapsto \left(t'_{\sigma^{-1}(i)}\right)_{i\in I}$$

függvény az f inverze, és g pontosan akkor folytonos a $\mathscr{T}'$ és $\mathscr{T}$ topológiák szerint, ha minden $I \ni i$-re a $pr_i \circ g : T' \to T_i$ függvény folytonos a $\mathscr{T}'$ és $\mathscr{T}_i$ topológiák szerint. A g definíciójából látható, hogy minden $i \in I$ esetén $pr_i \circ g = pr'_{\sigma^{-1}(i)}$ és a szorzattopológia értelmezése alapján a $pr'_{\sigma^{-1}(i)}$ projekció-függvény folytonos a $\mathscr{T}'$ és $\mathscr{T}_i$ topológiák szerint. Tehát f^{-1} folytonos a $\mathscr{T}'$ és $\mathscr{T}$ topológiák szerint. ■

A következő állításban felhasználjuk azt a könnyen ellenőrizhető állítást, hogy ha d metrika az M halmaz felett, akkor a $d' : M \times M \to \mathbb{R}_+;\ (x,y) \mapsto \min(d(x,y),1)$ függvény olyan metrika M felett, hogy $\mathscr{T}_d = \mathscr{T}_{d'}$ és $d' \leq 1$.

25.7.5. Állítás. *Metrizálható terek megszámlálható rendszerének topologikus szorzata metrizálható topologikus tér.*

Bizonyítás. Legyen $((T_i, \mathscr{T}_i))_{i\in I}$ topologikus terek olyan rendszere, hogy I megszámlálható halmaz és minden $I \ni i$-re a $(T_i, \mathscr{T}_i)$ topologikus tér metrizálható. *Kiválaszthatunk* olyan $(d_i)_{i\in I}$ rendszert, hogy minden $i \in I$ esetén d_i metrika T_i felett és $\mathscr{T}_i = \mathscr{T}_{d_i}$, valamint minden $(t,t') \in T_i \times T_i$ párra $d_i(t,t') \leq 1$. Legyen $T := \prod_{i\in I} T_i$, $\mathscr{T} := \bigtimes_{i\in I} \mathscr{T}_i$, és minden $I \ni i$-re pr_i a $T \to T_i$ projekció-függvény. A $(T, \mathscr{T})$ topologikus tér metrizálhatóságát három lépésben bizonyítjuk.

(I) Először feltesszük, hogy I *véges.* Ekkor képezhető a

$$\left(\prod_{i\in I} T_i\right) \times \left(\prod_{i\in I} T_i\right) \to \mathbb{R}_+; \quad ((t_i)_{i\in I}, (t'_i)_{i\in I}) \mapsto \max_{i\in I} d_i(t_i, t'_i)$$

leképezésről közvetlenül látható, hogy olyan metrika a $\prod_{i\in I} T_i$ szorzathalmaz felett, amely a szorzattopológiát generálja.

(II) Most feltesszük, hogy $I = \mathbb{N}$. Legyen $(c_k)_{k\in\mathbb{N}}$ olyan sorozat $\mathbb{R}^+$-ban, hogy a $\sum_{k\in\mathbb{N}} c_k$ sor konvergens $\mathbb{R}$-ben, és értelmezzük a

$$d : T \times T \to \mathbb{R}_+; \quad ((t_k)_{k\in\mathbb{N}}, (t'_k)_{k\in\mathbb{N}}) \mapsto \sum_{k=0}^{\infty} c_k d_k(t_k, t'_k)$$

függvényt. Könnyen látható, hogy d metrika a T szorzathalmaz felett; megmutatjuk, hogy $\mathscr{T} = \mathscr{T}_d$.

Legyen $t := (t_k)_{k\in\mathbb{N}} \in T$ és $V \in \mathscr{T}_d(t)$. Rögzítsünk olyan $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ számot, hogy $B_\varepsilon(t;d) \subseteq V$. Vegyünk olyan $N \in \mathbb{N}$ számot, hogy $\sum\limits_{k=N+1}^{\infty} c_k < \dfrac{\varepsilon}{2}$, és legyen minden $k \leq N$ természetes számra $\varepsilon_k := \dfrac{\varepsilon/2}{(N+1)c_k}$. Minden $\mathbb{N} \ni k$-ra legyen $\Omega_k := B_{\varepsilon_k}(t_k; d_k)$, ha $k \leq N$, és $\Omega_k := T_k$, ha $k > N$. Ekkor $k \in \mathbb{N}$ esetén $\Omega_k \in \mathscr{T}_{d_k} = \mathscr{T}_k$, és $\{k \in \mathbb{N} | \Omega_k \neq T_k\} \subseteq \{k \in \mathbb{N} | k \leq N\}$ véges halmaz, tehát a szorzattopológia értelmezése alapján $\prod\limits_{k\in\mathbb{N}} \Omega_k \in \mathscr{T}$. Ugyanakkor $t \in \prod\limits_{k\in\mathbb{N}} \Omega_k$, tehát $\prod\limits_{k\in\mathbb{N}} \Omega_k \in \mathscr{T}(t)$. Állítjuk, hogy $\prod\limits_{k\in\mathbb{N}} \Omega_k \subseteq B_\varepsilon(t;d)$. Valóban, ha $(t'_k)_{k\in\mathbb{N}} \in \prod\limits_{k\in\mathbb{N}} \Omega_k$, akkor $k \in \mathbb{N}$ és $k \leq N$ esetén $t'_k \in B_{\varepsilon_k}(t_k; d_k)$, tehát

$$d\left((t_k)_{k\in\mathbb{N}}, (t'_k)_{k\in\mathbb{N}}\right) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k d_k(t_k, t'_k) = \sum_{k=0}^{N} c_k d_k(t_k, t'_k) + \sum_{k=N+1}^{\infty} c_k d_k(t_k, t'_k) <$$

$$< \sum_{k=0}^{N} c_k \varepsilon_k + \sum_{k=N+1}^{\infty} c_k = \sum_{k=0}^{N} c_k \frac{\varepsilon/2}{(N+1)c_k} + \sum_{k=N+1}^{\infty} c_k = \frac{\varepsilon}{2} + \sum_{k=N+1}^{\infty} c_k < \varepsilon,$$

amint állítottuk. Ebből következik, hogy $V \in \mathscr{T}(t)$. Ezért $\mathscr{T}_d \subseteq \mathscr{T}$.

Megfordítva, legyen $t := (t_k)_{k\in\mathbb{N}} \in T$ és $V \in \mathscr{T}(t)$. Létezik olyan $(\Omega_k)_{k\in\mathbb{N}}$ sorozat, hogy minden $\mathbb{N} \ni k$-ra $\Omega_k \in \mathscr{T}_k = \mathscr{T}_{d_k}$, és $\{k \in \mathbb{N} | \Omega_k \neq T_k\}$ véges halmaz, és $t \in \prod\limits_{k\in\mathbb{N}} \Omega_k \subseteq V$. Legyen $N \in \mathbb{N}$ olyan, hogy minden $k > N$ természetes számra $\Omega_k = T_k$. Minden $k \leq N$ természetes számhoz válasszunk olyan $\varepsilon_k \in \mathbb{R}^+$ számot, amelyre $B_{\varepsilon_k}(t_k; d_k) \subseteq \Omega_k$, és legyen $\varepsilon := \min\limits_{0\leq k\leq N} (c_k \varepsilon_k)$. Állítjuk, hogy $B_\varepsilon(t;d) \subseteq \prod\limits_{k\in\mathbb{N}} \Omega_k$. Valóban, ha $(t'_k)_{k\in\mathbb{N}} \in B_\varepsilon(t;d)$, akkor minden $k \leq N$ természetes számra $d_k(t_k, t'_k) < \varepsilon_k$, hiszen ha $n \leq N$ olyan természetes szám volna, hogy $d_n(t_n, t'_n) \geq \varepsilon_n$, akkor

$$\varepsilon := \min_{0\leq k\leq N} (c_k \varepsilon_k) \leq c_n \varepsilon_n \leq c_n d_n(t_n, t'_n) \leq$$

$$\leq \sum_{k=0}^{N} c_k d_k(t_k, t'_k) \leq d\left((t_k)_{k\in\mathbb{N}}, (t'_k)_{k\in\mathbb{N}}\right) < \varepsilon$$

teljesülne, ami lehetetlen. Ebből következik, hogy $V \in \mathscr{T}_d(t)$. Ezért $\mathscr{T} \subseteq \mathscr{T}_d$.

(III) Végül feltesszük, hogy I *megszámlálhatóan végtelen* halmaz. Ekkor létezik $\sigma : \mathbb{N} \to I$ bijekció, így az előző állításból következik, hogy a $\left(\prod\limits_{i\in I} T_i, \mathop{\times}\limits_{i\in I} \mathscr{T}_i\right)$ és $\prod\limits_{k\in\mathbb{N}} T_{\sigma(k)}, \mathop{\times}\limits_{k\in\mathbb{N}} \mathscr{T}_{\sigma(k)}$

topologikus terek homeomorfak, ugyanakkor az utóbbi a (II) alapján metrizálható, ezért $\left(\prod_{i\in I} T_i, \bigtimes_{i\in I} \mathscr{T}_i\right)$ metrizálható topologikus tér. ■

25.8. Induktívan előállított topológiák

25.8.1. Tétel. *Legyen T halmaz, $((T_i, \mathscr{T}_i))_{i\in I}$ topologikus terek rendszere, és $(f_i)_{i\in I}$ olyan rendszer, hogy minden $i \in I$ esetén $f_i : T_i \to T$ függvény. Ekkor létezik olyan T feletti legnagyobb $\mathscr{T}$ topológia, amelyre teljesül az, hogy minden $I \ni i$-re az $f_i : T_i \to T$ függvény folytonos a $\mathscr{T}_i$ és $\mathscr{T}$ topológiák szerint.*

Bizonyítás. Minden $i \in I$ esetén $f_i[\mathscr{T}_i] := \left\{ \Omega \in \mathscr{P}(T) \,\middle|\, \overset{-1}{f_i}\langle\Omega\rangle \in \mathscr{T}_i \right\}$ topológia T felett; legyen $\mathscr{T} := \inf_{i\in I} f_i[\mathscr{T}_i]$. Ha $i \in I$ és $\Omega \in \mathscr{T}$, akkor a definíció szerint $\Omega \in f_i[\mathscr{T}_i]$, vagyis $\overset{-1}{f_i}\langle\Omega\rangle \in \mathscr{T}_i$, tehát az $f_i : T_i \to T$ függvény folytonos a $\mathscr{T}_i$ és $\mathscr{T}$ topológiák szerint. Ha $\mathscr{T}'$ olyan topológia T felett, hogy minden $I \ni i$-re az $f_i : T_i \to T$ függvény folytonos a $\mathscr{T}_i$ és $\mathscr{T}$ topológiák szerint, akkor minden $i \in I$ és $\Omega \in \mathscr{T}'$ esetén $\overset{-1}{f_i}\langle\Omega\rangle \in \mathscr{T}_i$, vagyis $\Omega \in f_i[\mathscr{T}_i]$, tehát $\Omega \in \mathscr{T}$, így $\mathscr{T}' \subseteq \mathscr{T}$. Ez azt jelenti, hogy $\mathscr{T}$ a legnagyobb T feletti topológia, amelyre minden $i \in I$ esetén az $f_i : T_i \to T$ függvény folytonos a $\mathscr{T}_i$ és $\mathscr{T}$ topológiák szerint. ■

25.8.2. Definíció. *Legyen T halmaz, $((T_i, \mathscr{T}_i))_{i\in I}$ topologikus terek rendszere, és $(f_i)_{i\in I}$ olyan rendszer, hogy minden $i \in I$ esetén $f_i : T_i \to T$ függvény. Ekkor a $((T_i, \mathscr{T}_i), f_i)_{i\in I}$ rendszer által* **induktívan előállított** *(vagy* **finális***) T feletti topológiának nevezzük azt a legnagyobb T feletti $\mathscr{T}$ topológiát, amelyre minden $i \in I$ esetén az $f_i : T_i \to T$ függvény folytonos a $\mathscr{T}_i$ és $\mathscr{T}$ topológiák szerint.*

Az előző tétel bizonyításából látszik, hogy ha T halmaz, $((T_i, \mathscr{T}_i))_{i\in I}$ topologikus terek rendszere, és $(f_i)_{i\in I}$ olyan rendszer, hogy minden $i \in I$ esetén $f_i : T_i \to T$ függvény, akkor a $((T_i, \mathscr{T}_i), f_i)_{i\in I}$ rendszer által induktívan előállított T feletti $\mathscr{T}$ topológiára $\mathscr{T} = \inf_{i\in I} f_i[\mathscr{T}_i]$, ezért a topológiák képének definíciója szerint

$$\mathscr{T} = \{ \Omega \in \mathscr{P}(T) \mid (\forall\, i \in I) : \overset{-1}{f}_i\langle\Omega\rangle \in \mathscr{T}_i \}.$$

Tehát, ha T halmaz, $(T', \mathscr{T}')$ topologikus tér és $f : T' \to T$ függvény, akkor az $f[\mathscr{T}']$ topológia megegyezik a $((T', \mathscr{T}'), f)$ rendszer által induktívan előállított T feletti topológiával. Speciálisan, ha $(T, \mathscr{T})$ topologikus tér és R ekvivalencia-reláció T felett, akkor a $\mathscr{T}/R$ faktortopológia megegyezik a $((T, \mathscr{T}), \pi_{T/R})$ rendszer által induktívan előállított T/R feletti topológiával, ahol $\pi_{T/R}$ a $T \to T/R$ kanonikus szürjekció.

25.8.3. Állítás. *Legyen T halmaz, $((T_i, \mathscr{T}_i))_{i\in I}$ topologikus terek rendszere és $(f_i)_{i\in I}$ olyan rendszer, hogy minden $i \in I$ esetén $f_i : T_i \to T$ függvény.*

a) *Ha $\mathscr{T}$ a $((T_i, \mathscr{T}_i), f_i)_{i\in I}$ rendszer által induktívan előállított T feletti topológia, akkor minden $(T', \mathscr{T}')$ topologikus térre és $f : T \to T'$ függvényre: az f pontosan akkor folytonos a $\mathscr{T}$ és $\mathscr{T}'$ topológiák szerint, ha minden $I \ni i$-re a $f \circ f_i : T_i \to T'$ függvény folytonos a $\mathscr{T}_i$ és $\mathscr{T}'$ topológiák szerint.*

b) *Ha $\mathscr{T}$ olyan topológia T felett, hogy minden $(T', \mathscr{T}')$ topologikus térre és $f : T \to T'$ függvényre: az f pontosan akkor folytonos a $\mathscr{T}$ és $\mathscr{T}'$ topológiák szerint, ha minden $I \ni i$-re a $f \circ f_i : T_i \to T'$ függvény folytonos a $\mathscr{T}_i$ és $\mathscr{T}'$ topológiák szerint, akkor $\mathscr{T}$ megegyezik a $((T_i, \mathscr{T}_i), f_i)_{i\in I}$ rendszer által induktívan előállított T feletti topológiával.*

Bizonyítás. a) Ha az $f : T \to T'$ függvény folytonos a $\mathscr{T}$ és $\mathscr{T}'$ topológiák szerint, akkor minden $I \ni i$-re az $f \circ f_i : T_i \to T'$ függvény folytonos a $\mathscr{T}_i$ és $\mathscr{T}'$ topológiák szerint, mert folytonos függvények kompozíciója folytonos, és minden $i \in I$ esetén az f_i függvény folytonos a $\mathscr{T}_i$ és $\mathscr{T}$ topológiák szerint.

Megfordítva, tegyük fel, hogy minden $i \in I$ esetén az $f \circ f_i : T_i \to T'$ függvény folytonos a $\mathscr{T}_i$ és $\mathscr{T}'$ topológiák szerint. Legyen $\Omega' \in \mathscr{T}'$; ekkor a folytonosság topologikus jellemzésének ismeretében azt kell igazolni, hogy $\overset{-1}{f}\langle\Omega'\rangle \in \mathscr{T}$. Az $\overset{-1}{f}\langle\Omega'\rangle \subseteq T$ halmaz olyan, hogy minden $i \in I$ esetén

$$\overset{-1}{f_i}\langle \overset{-1}{f}\langle\Omega'\rangle\rangle = (\overset{-1}{f \circ f_i})\langle\Omega'\rangle \in \mathscr{T}_i,$$

hiszen $f \circ f_i$ folytonos a $\mathscr{T}_i$ és $\mathscr{T}'$ topológiák szerint. Ez azt jelenti, hogy minden $I \ni i$-re $\overset{-1}{f}\langle\Omega'\rangle \in f_i[\mathscr{T}_i]$, tehát az induktívan előállított topológiák értelmezése alapján $\overset{-1}{f}\langle\Omega'\rangle \in \inf_{i\in I} f_i[\mathscr{T}_i] = \mathscr{T}$.

b) Legyen $\mathscr{T}$ olyan topológia T felett, hogy minden $(T', \mathscr{T}')$ topologikus térre és $f : T \to T'$ függvényre: az f pontosan akkor folytonos a $\mathscr{T}$ és $\mathscr{T}'$ topológiák szerint, ha minden $I \ni i$-re a $f \circ f_i : T_i \to T'$ függvény folytonos a $\mathscr{T}_i$ és $\mathscr{T}'$ topológiák szerint. Az $id_T : T \to T$ függvény folytonos a $\mathscr{T}$ és $\mathscr{T}$ topológiák szerint, ezért a feltételt alkalmazva a $(T', \mathscr{T}') := (T, \mathscr{T})$ topologikus térre és $f := id_T$ függvényre kapjuk, hogy minden $I \ni i$-re az $f_i = id_T \circ f_i : T_i \to T$ függvény folytonos a $\mathscr{T}_i$ és $\mathscr{T}$ topológiák szerint.

Ha $\mathscr{T}'$ olyan topológia T felett, hogy minden $i \in I$ esetén az $f_i = id_T \circ f_i$ függvény folytonos a $\mathscr{T}_i$ és $\mathscr{T}'$ topológiák szerint, akkor a hipotézist alkalmazva a $(T, \mathscr{T}')$ topologikus térre és az id_T függvényre kapjuk, hogy id_T folytonos a $\mathscr{T}$ és $\mathscr{T}'$ topológiák szerint, ami azzal ekvivalens, hogy $\mathscr{T}' \subseteq \mathscr{T}$. Tehát $\mathscr{T}$ a legnagyobb topológia T felett, amelyre minden $i \in I$ esetén az f_i függvény folytonos $\mathscr{T}_i$ és $\mathscr{T}$ szerint. ■

25.8.4. Következmény. *Ha $(T, \mathscr{T})$ topologikus tér, R ekvivalencia-reláció T felett, és $(T', \mathscr{T}')$ topologikus tér, akkor egy $f : T/R \to T'$ függvény pontosan akkor folytonos a*

$\mathscr{T}/R$ és $\mathscr{T}'$ topológiák szerint, ha az $f \circ \pi_{T/R} : T \to T'$ függvény folytonos a $\mathscr{T}$ és $\mathscr{T}'$ topológiák szerint. ■

25.8.5. Definíció. *Legyen $((T_i, \mathscr{T}_i))_{i \in I}$ topologikus terek rendszere. Vezessük be a $T := \bigcup_{i \in I} (\{i\} \times T_i)$ halmazt, és minden $I \ni i$-re értelmezzük az $f_i : T_i \to T;\ t \mapsto (i,t)$ függvényt. A $((T_i, \mathscr{T}_i), f_i)_{i \in I}$ rendszer által előállított T feletti finális topológiát a $(\mathscr{T}_i)_{i \in I}$* **topológia-rendszer összegének** *nevezzük, és a $\bigvee_{i \in I} \mathscr{T}_i$ szimbólummal jelöljük.*

Az $\left(\bigcup_{i \in I} (\{i\} \times T_i), \bigvee_{i \in I} \mathscr{T}_i \right)$ topologikus teret a $((T_i, \mathscr{T}_i))_{i \in I}$ **topologikus tér-rendszer összegének** *nevezzük.*

Megjegyezzük, hogy ha $(T_i)_{i \in I}$ tetszőleges rendszer, akkor a $\bigcup_{i \in I} (\{i\} \times T_i)$ halmazt a $\bigvee_{i \in I} T_i$ szimbólummal is jelöljük, és a $(T_i)_{i \in I}$ rendszer *halmazösszegének* vagy *diszjunkt uniójának* nevezzük.

25.9. Összefüggő terek

25.9.1. Definíció. *Legyen $(T, \mathscr{T})$ topologikus tér. Azt mondjuk, hogy a $C \subseteq T$ halmaz* **összefüggő** *a $\mathscr{T}$ topológia szerint, ha nem léteznek olyan $E, F \subseteq T$ halmazok, amelyekre $C = E \cup F$, $E \neq \emptyset \neq F$ és $E \cap \overline{F} = \emptyset = \overline{E} \cap F$. Azt mondjuk, hogy a $(T, \mathscr{T})$ topologikus tér* **összefüggő***, ha a T halmaz összefüggő a $\mathscr{T}$ topológia szerint.*

Könnyen belátható, hogy ha $(T, \mathscr{T})$ topologikus tér, akkor a $C \subseteq T$ halmaz pontosan akkor összefüggő a $\mathscr{T}$ topológia szerint, ha a $(C, \mathscr{T}|C)$ topologikus altér összefüggő topologikus tér.

25.9.2. Állítás. *Ha $(T, \mathscr{T})$ topologikus tér, akkor a következő állítások ekvivalensek.*

(i) *$(T, \mathscr{T})$ összefüggő topologikus tér.*

(ii) *Minden $E \subseteq T$ halmazra, ha E nyílt és zárt a $\mathscr{T}$ topológia szerint, akkor $E = \emptyset$ vagy $E = T$,*

(iii) *Minden $E \subseteq T$ halmazra, ha $E \neq \emptyset$ és $E \neq T$, akkor* $\mathrm{Fr}(E) \neq \emptyset$.

Bizonyítás. (i)⇒(ii) Tegyük fel, hogy (ii) nem igaz, és legyen $E \subseteq T$ olyan nyílt-zárt halmaz, amelyre $E \neq \emptyset$ és $E \neq T$. Ekkor az $F := T \setminus E$ halmaz olyan, hogy $F \neq \emptyset$ és $F \neq T$, továbbá $T = E \cup F$, és F is nyílt-zárt részhalmaza T-nek, így $\overline{E} \cap F = E \cap F = \emptyset$ és $E \cap \overline{F} = E \cap F = \emptyset$, tehát T nem összefüggő halmaz, így (i) nem igaz.

(ii)⇒(iii) Tegyük fel, hogy (iii) nem igaz, és legyen $E \subseteq T$ olyan halmaz, amelyre $E \neq \emptyset$, $E \neq T$, azonban $\mathrm{Fr}(E) = \emptyset$. Ekkor E nyílt-zárt halmaz, és $E \neq \emptyset$, valamint $E \neq T$, tehát (ii) nem igaz.

(iii)⇒(i) Tegyük fel, hogy (i) nem igaz, és legyenek $E, F \subseteq T$ olyan halmazok, amelyekre $T = E \cup F$, $E \neq \emptyset \neq F$ és $\overline{E} \cap F = \emptyset = E \cap \overline{F}$. Ekkor $E \neq \emptyset$ és $E \neq T$, továbbá $\overline{E} \subseteq T \setminus F = E$ miatt $\overline{E} = E$. Ugyanakkor $\overline{F} \subseteq T \setminus E = F$ miatt $\overline{F} = F$, így $\mathrm{Int}(E) = T \setminus \overline{T \setminus E} = T \setminus F = E$. Ezért $\mathrm{Fr}(E) = \emptyset$, vagyis (iii) nem igaz. ■

25.9.3. Tétel. (Bolzano-tétel) *Ha $(T, \mathscr{T})$ és $(T', \mathscr{T}')$ topologikus terek, az $f : T \to T'$ függvény folytonos a $\mathscr{T}$ és $\mathscr{T}'$ topológiák szerint, és a $C \subseteq T$ halmaz összefüggő $\mathscr{T}$ szerint, akkor az $f\langle C\rangle \subseteq T'$ halmaz összefüggő $\mathscr{T}'$ szerint.*

Bizonyítás. Tegyük fel, hogy $C \subseteq T$ olyan halmaz, amelyre $f\langle C\rangle$ nem összefüggő $\mathscr{T}'$ szerint; megmutatjuk, hogy ekkor C sem összefüggő $\mathscr{T}$ szerint.

A feltevés alapján léteznek olyan $E', F' \subseteq M'$ halmazok, hogy $f\langle C\rangle = E' \cup F'$, $E' \neq \emptyset \neq F'$ és $\overline{E'} \cap F' = \emptyset = E' \cap \overline{F'}$. Legyenek $E := C \cap \overset{-1}{f}\langle E'\rangle$ és $F := C \cap \overset{-1}{f}\langle F'\rangle$; ekkor nyilvánvalóan $C = E \cup F$. A folytonosság topologikus jellemzése szerint $\overset{-1}{f}\langle \overline{E'}\rangle$ és $\overset{-1}{f}\langle \overline{F'}\rangle$ zárt halmazok a $\mathscr{T}$ topológia szerint, ezért $\overline{\overset{-1}{f}\langle E'\rangle} \subseteq \overset{-1}{f}\langle \overline{E'}\rangle$, valamint $\overline{\overset{-1}{f}\langle F'\rangle} \subseteq \overset{-1}{f}\langle \overline{F'}\rangle$. Ebből következik, hogy

$$\overline{E} \cap F := \overline{C \cap \overset{-1}{f}\langle E'\rangle} \cap (C \cap \overset{-1}{f}\langle F'\rangle) \subseteq \overline{\overset{-1}{f}\langle E'\rangle} \cap \overset{-1}{f}\langle F'\rangle \subseteq$$

$$\subseteq \overset{-1}{f}\langle \overline{E'}\rangle \cap \overset{-1}{f}\langle F'\rangle = \overset{-1}{f}\langle \overline{E'} \cap F'\rangle = \emptyset,$$

és teljesen hasonlóan kapjuk, hogy $E \cap \overline{F} = \emptyset$, ezért $\overline{E} \cap F = \emptyset = E \cap \overline{F}$, tehát C nem összefüggő a $\mathscr{T}$ topológia szerint. ■

25.9.4. Állítás. *Legyen $(T, \mathscr{T})$ topologikus tér.*

a) *Ha $C \subseteq T$ összefüggő halmaz a $\mathscr{T}$ topológia szerint, akkor $\overline{C}$ is összefüggő a $\mathscr{T}$ topológia szerint.*

b) *Ha $(C_i)_{i \in I}$ olyan nem üres rendszer, hogy minden $i \in I$ esetén $C_i \subseteq T$ összefüggő halmaz a $\mathscr{T}$ topológia szerint és $\bigcap_{i \in I} C_i \neq \emptyset$, akkor az $\bigcup_{i \in I} C_i$ halmaz összefüggő a $\mathscr{T}$ topológia szerint.*

c) *Minden $C \subseteq T$ nem üres, $\mathscr{T}$ szerint összefüggő halmazhoz létezik olyan tartalmazás tekintetében legnagyobb $C \subseteq T$ halmaz, amely összefüggő a $\mathscr{T}$ topológia szerint és $C \subseteq C$ (ez a C halmaz* **összefüggő komponense** *a $\mathscr{T}$ topológia szerint).*

Bizonyítás. a) Tegyük fel, hogy $C \subseteq t$ olyan halmaz, amelyre $\overline{C}$ nem összefüggő; megmutatjuk, hogy ekkor C sem összefüggő.

A feltevés alapján ugyanis vehetünk olyan $E, F \subseteq T$ halmazokaz, amelyekre $\overline{C} = E \cup F$, $E \neq \emptyset \neq F$ és $\overline{E} \cap F = \emptyset = E \cap \overline{F}$. Ekkor $C = (C \cap E) \cup (C \cap F)$, továbbá $\overline{C \cap E} \cap (C \cap F) \subseteq \overline{E} \cap F = \emptyset$ és $(C \cap E) \cap \overline{C \cap F} \subseteq E \cap \overline{F} = \emptyset$, tehát a C halmaz nem összefüggő, ha $C \cap E \neq \emptyset$ *és* $C \cap F \neq \emptyset$.

Ha $C \cap E = \emptyset$ volna, akkor $C = C \cap F$, azaz $C \subseteq F$, így $\overline{C} \subseteq \overline{F}$ teljesülne. Ekkor $\overline{C} = \overline{C} \cap \overline{F} = (E \cup F) \cap \overline{F} = (E \cap \overline{F}) \cup (F \cap \overline{F}) = F$, hiszen $E \cap \overline{F} = \emptyset$. Ebből $\overline{C} = E \cup F$ miatt $E = \emptyset$ következne, holott $E \neq \emptyset$; ezért $C \cap E \neq \emptyset$.

Ha $C \cap F = \emptyset$ volna, akkor $C = C \cap E$, azaz $C \subseteq E$, így $\overline{C} \subseteq \overline{E}$ teljesülne. Ekkor $\overline{C} = \overline{C} \cap \overline{E} = (E \cup F) \cap \overline{E} = (E \cap \overline{E}) \cup (F \cap \overline{E}) = E$, hiszen $F \cap \overline{E} = \emptyset$. Ebből $\overline{C} = E \cup F$ miatt $F = \emptyset$ következne, holott $F \neq \emptyset$; ezért $C \cap F \neq \emptyset$.

Ez viszont azt jelenti, hogy C nem összefüggő.

b) Ha $I = \emptyset$, akkor $\bigcup\limits_{i \in I} C_i = \emptyset$, tehát az állítás igaz, így feltehető, hogy $I \neq \emptyset$.

Indirekt bizonyítunk, tehát feltesszük, hogy $\bigcup\limits_{i \in I} C_i$ nem összefüggő, és veszünk olyan $E, F \subseteq T$ halmazokat, amelyekre $\bigcup\limits_{i \in I} C_i = E \cup F$, $E \neq \emptyset \neq F$ és $\overline{E} \cap F = \emptyset = \overline{F} \cap E$. Ha $i \in I$, akkor nyilvánvalóan $C_i = (C_i \cap E) \cup (C_i \cap F)$ és $\overline{C_i \cap E} \cap (C_i \cap F) \subseteq \overline{E} \cap F = \emptyset$, valamint $(C_i \cap E) \cap \overline{C_i \cap F} \subseteq E \cap \overline{F} = \emptyset$, így C_i összefüggősége miatt $C_i \cap E = \emptyset$ *vagy* $C_i \cap F = \emptyset$. Legyen $t \in \bigcap\limits_{i \in I} C_i$ rögzített elem. Ekkor $t \in E \cup F$, tehát t az E és F diszjunkt halmazok közül pontosan az egyiknek eleme. Ha $t \in E$, akkor minden $i \in I$ esetén $t \in C_i \cap E$, ezért $C_i \cap F = \emptyset$. Ekkor $F = \bigcup\limits_{i \in I} (C_i \cap F) = \emptyset$, holott $F \neq \emptyset$. Ezért $t \in F$, következésképpen minden $i \in I$ esetén $t \in C_i \cap F$, így $C_i \cap E = \emptyset$. Ekkor viszont $E = \bigcup\limits_{i \in I} (C_i \cap E) = \emptyset$, holott $E \neq \emptyset$, és ez ellentmondás.

c) Az előző állítás szerint a C halmazt tartalmazó T-beli összefüggő részhalmazok *uniója* összefüggő, és természetesen tartalmazza a T minden olyan összefüggő részhalmazát, amely tartalmazza C-t. ■

25.9.5. Következmény. *Ha $(T, \mathscr{T})$ topologikus tér, akkor minden $t \in T$ ponthoz létezik olyan tartalmazás tekintetében legnagyobb $C \subseteq T$ halmaz, amely összefüggő a $\mathscr{T}$ topológia szerint és $t \in C$ (ez a t pont* **összefüggő komponense** *a $\mathscr{T}$ topológia szerint).*

Bizonyítás. Nyilvánvalóan következik az előző állítás c) pontjából és abból a trivialitásból, hogy minden topologikus térben minden egy elemű halmaz összefüggő. ■

25.9.6. Következmény. *Topologikus tér nem üres összefüggő részhalmazának halmaz összefüggő komponense zárt halmaz.*

Bizonyítás. Egy C nem üres összefüggő halmaz összefüggő komponensének a lezártja összefüggő az előző állítás a) pontja szerint, valamint tartalmazza a C halmazt, ezért részhalmaza a C összefüggő komponensének. ■

26. fejezet

Szétválasztási tulajdonságok

26.1. Elemi szétválasztási tulajdonságok

26.1.1. Definíció. *Azt mondjuk, hogy a $(T, \mathscr{T})$ topologikus tér:*

– T_0**-tér**, *ha minden $t, t' \in T$ pontra, $t \neq t'$ esetén létezik olyan $V \in \mathscr{T}(t)$ hogy $t' \notin V$ vagy létezik olyan $V' \in \mathscr{T}(t')$, hogy $t \notin V'$;*

– T_1**-tér**, *ha minden $t, t' \in T$ pontra, $t \neq t'$ esetén létezik olyan $V \in \mathscr{T}(t)$ hogy $t' \notin V$ és létezik olyan $V' \in \mathscr{T}(t')$, hogy $t \notin V'$;*

– T_2**-tér**, *ha minden $t, t' \in T$ pontra, $t \neq t'$ esetén létezik olyan $V \in \mathscr{T}(t)$ és $V' \in \mathscr{T}(t')$, hogy $V \cap V' = \emptyset$.*

Megemlítjük, hogy a T_1-tereket *Kolmogorov-tereknek*, míg a T_2-tereket *Hausdorff-tereknek* is nevezzük. E két elnevezés közül csak az utóbbi terjedt el széles körben. A Hausdorff-tereket még *szeparált topologikus tereknek* is nevezzük.

Logikai okok miatt nyilvánvaló, hogy minden T_1-tér T_0-tér és minden T_2-tér T_1-tér. Antidiszkrét topologikus tér nem T_0-tér, ha az alaphalmaz legalább két elemű, hiszen ilyen térben bármely két pontnak ugyanazok a környezetei.

Létezik olyan T_0-tér, amely nem T_1-tér. Legyen például $\mathscr{T}$ azon $\Omega \subseteq \mathbb{R}$ halmazok halmaza, amelyekre teljesül az, hogy minden $t \in \Omega$ esetén $[t, \to[\subseteq \Omega$. Ekkor $\mathscr{T}$ topológia $\mathbb{R}$ felett, és az $(\mathbb{R}, \mathscr{T})$ topologikus tér T_0-tér, de nem T_1-tér. Valóban, ha $t, t' \in \mathbb{R}$ és $t \neq t'$, akkor $t < t'$ vagy $t' < t$; az első esetben $[t', \to[\in \mathscr{T}(t')$ és $t \notin [t', \to[$, míg a második esetben $[t, \to[\in \mathscr{T}(t)$ és $t' \notin [t, \to[$. Ugyanakkor $t < t'$ esetén *minden* $\mathscr{T}(t) \ni V$-re $t' \in V$, és $t' < t$ esetén *minden* $\mathscr{T}(t') \ni V'$-re $t \in V'$, ezért $(\mathbb{R}, \mathscr{T})$ nem T_1-tér.

Létezik olyan T_1-tér, amely nem T_2-tér. Tekintsük például azt az R relációt a $[-1, 1] \subseteq \mathbb{R}$ intervallum felett, amelyet úgy értelmezünk, hogy $R := \{(t, t) | t \in [-1, 1]\} \cup \{(t, -t) | t \in]-1, 1[\}$. Ekkor R ekvivalencia-reláció $[-1, 1]$ felett, és könnyen ellenőrizhető, hogy a

$([-1,1]/R, (\mathscr{E}_{\mathbb{R}}|[-1,1])/R)$ topologikus faktortér T_1-tér, de nem T_2-tér.

Nyilvánvaló, hogy minden metrizálható topologikus tér Hausdorff-tér.

26.1.2. Állítás. *A $(T, \mathscr{T})$ topologikus tér pontosan akkor T_1-tér, ha minden $t \in T$ esetén a $\{t\}$ halmaz $\mathscr{T}$-zárt.*

Bizonyítás. Legyen $(T, \mathscr{T})$ T_1-tér és $t \in T$. Ha $t' \in T \setminus \{t\}$, akkor $t \neq t'$, tehát létezik olyan $V \in \mathscr{T}(t)$, hogy $t' \notin V$, és létezik olyan $V' \in \mathscr{T}(t')$, hogy $t \notin V'$; ekkor $V' \subseteq T \setminus \{t\}$, tehát t' belső pontja a $T \setminus \{t\}$ halmaznak $\mathscr{T}$ szerint. Ez azt jelenti, hogy $T \setminus \{t\}$ nyílt a $\mathscr{T}$ topológia szerint, tehát a $\{t\}$ halmaz $\mathscr{T}$-zárt.

Megfordítva, tegyük fel, hogy minden $t \in T$ esetén a $\{t\}$ halmaz $\mathscr{T}$-zárt. Legyenek $t, t' \in T$ olyanok, hogy $t \neq t'$. A hipotézis szerint $V := T \setminus \{t'\}$ és $V' := T \setminus \{t\}$ mindketten nyílt halmazok, és $t \in V$ (tehát $V \in \mathscr{T}(t)$), $t' \in V'$ (tehát $V' \in \mathscr{T}(t')$), valamint nyilvánvalóan $t \notin V'$ és $t' \notin V$. Ez azt jelenti, hogy a $(T, \mathscr{T})$ topologikus tér T_1-tér. ■

26.1.3. Állítás. *Legyen $(T, \mathscr{T})$ topologikus tér és $(T', \mathscr{T}')$ Hausdorff-tér. Ha $f, g : T \to T'$ olyan függvények, amelyek folytonosak a $\mathscr{T}$ és $\mathscr{T}'$ topológiák szerint, akkor a $\{t \in T | f(t) = g(t)\}$ halmaz $\mathscr{T}$-zárt.*

Bizonyítás. Legyen $t_0 \in T \setminus \{t \in T | f(t) = g(t)\}$ rögzített. Ekkor $f(t_0) \neq g(t_0)$, és $(T', \mathscr{T}')$ Hausdorff-tér, tehát létezik olyan $V' \in \mathscr{T}'(f(t_0))$ és $W' \in \mathscr{T}'(g(t_0))$, hogy $V' \cap W' = \emptyset$. Az f és g függvények t_0 pontbeli folytonossága miatt van olyan $V \in \mathscr{T}(t_0)$ és $W \in \mathscr{T}(t_0)$, hogy $f\langle V\rangle \subseteq V'$ és $g\langle W\rangle \subseteq W'$. Ekkor $V \cap W \in \mathscr{T}(t_0)$, és ha $t \in V \cap W$, akkor $f(t) \in V'$ és $g(t) \in W'$, így $V' \cap W' = \emptyset$ miatt $f(t) \neq g(t)$. Ez azt jelenti, hogy $V \cap W \subseteq T \setminus \{t \in T | f(t) = g(t)\}$, tehát t_0 belső pontja a $T \setminus \{t \in T | f(t) = g(t)\}$ halmaznak $\mathscr{T}$ szerint, így a $\{t \in T | f(t) = g(t)\}$ halmaz $\mathscr{T}$-zárt. ■

26.1.4. Következmény. (Az egyenlőségek folytatásának elve) *Legyen $(T, \mathscr{T})$ topologikus tér és $(T', \mathscr{T}')$ Hausdorff-tér. Ha $f, g : T \to T'$ olyan függvények, amelyek folytonosak a $\mathscr{T}$ és $\mathscr{T}'$ topológiák szerint, és $E \subseteq T$ olyan halmaz, hogy $f = g$ az E halmazon, akkor $f = g$ az $\overline{E}$ halmazon.*

Bizonyítás. Az előző állítás szerint a $\{t \in T | f(t) = g(t)\}$ halmaz $\mathscr{T}$-zárt, és a hipotézis alapján $E \subseteq \{t \in T | f(t) = g(t)\}$, ezért $\overline{E} \subseteq \{t \in T | f(t) = g(t)\}$. ■

26.1.5. Állítás. *Hausdorff-terek topologikus szorzata Hausdorff-tér.*

Bizonyítás. Legyen $((T_i, \mathscr{T}_i))_{i \in I}$ Hausdorff-terek tetszőleges rendszere, valamint legyenek $(t_i)_{i \in I}, (t'_i)_{i \in I} \in \prod_{i \in I} T_i$ olyan pontok, hogy $(t_i)_{i \in I} \neq (t'_i)_{i \in I}$. Legyen $k \in I$ olyan, hogy $t_k \neq t'_k$. A $(T_k, \mathscr{T}_k)$ topologikus tér Hausdorff-tér, így léteznek olyan $\Omega_k, \Omega'_k \in \mathscr{T}_k$

halmazok, hogy $\Omega_k \cap \Omega'_k = \emptyset$ és $t_k \in \Omega_k$, valamint $t'_k \in \Omega'_k$. Ekkor $(t_i)_{i\in I} \in \overset{-1}{pr_k}\langle\Omega_k\rangle \in \underset{i\in I}{\times} \mathscr{T}_i$ és $(t'_i)_{i\in I} \in \overset{-1}{pr_k}\langle\Omega'_k\rangle \in \underset{i\in I}{\times} \mathscr{T}_i$, továbbá $\Omega_k \cap \Omega'_k = \emptyset$ miatt $\overset{-1}{pr_k}\langle\Omega_k\rangle \cap \overset{-1}{pr_k}\langle\Omega'_k\rangle = \overset{-1}{pr_k}\langle\Omega_k \cap \Omega'_k\rangle = \emptyset$. Ez azt jelenti, hogy $\left(\prod_{i\in I} T_i, \underset{i\in I}{\times} \mathscr{T}_i\right)$ Hausdorff-tér. ∎

26.2. Függvény határértéke

26.2.1. Definíció. *Legyenek $(T,\mathscr{T})$, $(T',\mathscr{T}')$ topologikus terek, $f : T \rightarrowtail T'$ (nem feltétlenül mindenütt értelmezett) függvény, és $t \in T$ a $Dom(f)$ halmaznak torlódási pontja a $\mathscr{T}$ topológia szerint. Azt mondjuk, hogy az f függvénynek* **létezik határértéke** *a t pontban a $\mathscr{T}$ és $\mathscr{T}'$ topológiák szerint, ha*

$$(\exists\, t' \in T')(\forall\, V' \in \mathscr{T}'(t'))(\exists\, V \in \mathscr{T}(t)) :\ f\langle V \setminus \{t\}\rangle \subseteq V'.$$

26.2.2. Állítás. *Legyenek $(T,\mathscr{T})$, $(T',\mathscr{T}')$ topologikus terek, $f : T \rightarrowtail T'$ függvény, és $t \in T$ a $Dom(f)$ halmaznak torlódási pontja a $\mathscr{T}$ topológia szerint. Ha $(T',\mathscr{T}')$ Hausdorff-tér, akkor legfeljebb egy olyan $t' \in T'$ létezik, amelyre*

$$(\forall\, V' \in \mathscr{T}'(t'))(\exists\, V \in \mathscr{T}(t)) :\ f\langle V \setminus \{t\}\rangle \subseteq V'.$$

Bizonyítás. Indirekt bizonyítunk, tehát feltesszük, hogy $t'_1, t'_2 \in T'$ olyan pontok, amelyekre $t'_1 \neq t'_2$, de teljesülnek a következő állítások

$$(\forall\, V' \in \mathscr{T}'(t'_1))(\exists\, V \in \mathscr{T}(t)) :\ f\langle V \setminus \{t\}\rangle \subseteq V',$$

$$(\forall\, V' \in \mathscr{T}'(t'_2))(\exists\, V \in \mathscr{T}(t)) :\ f\langle V \setminus \{t\}\rangle \subseteq V'.$$

A $(T',\mathscr{T}')$ topologikus tér Hausdorff-tér, ezért vehetünk olyan $V'_1 \in \mathscr{T}'(t'_1)$ és $V'_2 \in \mathscr{T}'(t'_2)$ környezeteket, hogy $V'_1 \cap V'_2 = \emptyset$. A hipotézis alapján legyenek $V_1 \in \mathscr{T}(t)$ és $V_2 \in \mathscr{T}(t)$ olyan környezetek, amelyekre $f\langle V_1 \setminus \{t\}\rangle \subseteq V'_1$ és $f\langle V_2 \setminus \{t\}\rangle \subseteq V'_2$. Ekkor $V_1 \cap V_2 \in \mathscr{T}(t)$ és t torlódási pontja $Dom(f)$-nek, ezért választhatunk egy $s \in ((V_1 \cap V_2) \setminus \{t\}) \cap Dom(f)$ pontot. Világos, hogy $f(s) \in f\langle V_1 \setminus \{t\}\rangle \cap f\langle V_2 \setminus \{t\}\rangle \subseteq V'_1 \cap V'_2$, ami ellentmond annak, hogy $V'_1 \cap V'_2 = \emptyset$. ∎

26.2.3. Definíció. *Legyenek $(T,\mathscr{T})$, $(T',\mathscr{T}')$ topologikus terek, $f : T \rightarrowtail T'$ függvény, és $t \in T$ a $Dom(f)$ halmaznak torlódási pontja a $\mathscr{T}$ topológia szerint. Ha $(T',\mathscr{T}')$ Hausdorff-tér és létezik az f függvénynek határértéke a $\mathscr{T}$ és $\mathscr{T}'$ topológiák szerint, akkor $\lim_t f$ jelöli azt az egyértelműen meghatározott pontot T'-ben, amelyre teljesül az, hogy minden $V' \in \mathscr{T}'\ \lim_t f$ esetén van olyan $V \in \mathscr{T}(t)$, hogy $f\langle V \setminus \{t\}\rangle \subseteq V'$; és ezt a $\lim_t f \in T'$ pontot az f függvény* **határértékének** *nevezzük a t pontban a $\mathscr{T}$ és $\mathscr{T}'$ topológiák szerint.*

A topologikus terek között ható függvények határértékére vonatkozóan könnyen igazolható az elemi analízisből ismert állítások nagy része, csak arra kell vigyázni, hogy az érkezési tér mindig Hausdorff-tér legyen. A továbbiakban nem használjuk a határérték általános fogalmát, viszont szükségünk lesz a metrikus térben haladó (általánosított) sorozatok konvergenciája fogalmának topologikus általánosítására.

26.3. Konvergens általánosított sorozatok

26.3.1. Definíció. *A reflexív és tranzitív relációkat* **előrendezéseknek** *nevezzük. Azt mondjuk, hogy I* **előrendezett halmaz**, *ha adott I felett egy előrendezés. Az I halmaz feletti $\leq$ előrendezést* **felfelé irányítottnak** *nevezzük, ha minden $i_1, i_2 \in I$ esetén van olyan $i \in I$, hogy $i_1 \leq i$ és $i_2 \leq i$.*

Például egy halmaz feletti *lineáris rendezés* nyilvánvalóan felfelé irányított rendezés. Ennek leggyakrabban előforduló speciális esete az, amikor a halmaz $\mathbb{N}$ és a lineáris rendezés az $\mathbb{N}$ feletti természetes rendezés.

Az $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ halmaz felett vezessük be azt a $\leq$ relációt, amelyre $(i, j), (i', j') \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ esetén $(i, j) \leq (i', j')$ azt jelenti, hogy $i < i'$ (az $\mathbb{N}$ természetes rendezése szerint), vagy $i = i'$ és $j \leq j'$ (az $\mathbb{N}$ természetes rendezése szerint). Könnyen látható, hogy $\leq$ olyan felfelé irányított rendezés $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ felett, amely nem lineáris rendezés.

26.3.2. Definíció. **Általánosított sorozatnak** *nevezünk minden olyan $(t_i)_{i \in I}$ rendszert, amelynek I indexhalmaza nem üres, felfelé irányított előrendezett halmaz. Ha $(T, \mathscr{T})$ topologikus tér, akkor azt mondjuk, hogy a T-ben haladó $(t_i)_{i \in I}$ általánosított sorozat* **konvergál a $t \in T$ ponthoz** *a $\mathscr{T}$ topológia szerint, ha*

$$(\forall\ V \in \mathscr{T}(t))(\exists\ i \in I)(\forall\ j \in I) :\ (i \leq j) \Rightarrow (t_j \in V)$$

teljesül, és minden ilyen tulajdonságú $t \in T$ pontot a $(t_i)_{i \in I}$ általánosított sorozat **limeszpontjának** *nevezünk. Ha $(T, \mathscr{T})$ topologikus tér, akkor azt mondjuk, hogy a T-ben haladó $(t_i)_{i \in I}$ általánosított sorozat* **konvergens** *a $\mathscr{T}$ topológia szerint, ha létezik olyan $t \in T$, amelyhez $(t_i)_{i \in I}$ konvergál $\mathscr{T}$ szerint.*

Vigyázzunk arra, hogy ha $(T, \mathscr{T})$ topologikus tér, akkor egy T-ben haladó általánosított sorozat *több* ponthoz is konvergálhat $\mathscr{T}$ szerint; sőt ha $\mathscr{T}$ egyenlő a T feletti antidiszkrét topológiával, akkor *minden* T-ben haladó általánosított sorozat konvergál *minden* $t \in T$ ponthoz $\mathscr{T}$ szerint.

26.3.3. Állítás. *A $(T, \mathscr{T})$ topologikus tér pontosan akkor Hausdorff-tér, ha minden T-ben haladó általánosított sorozathoz legfeljebb egy olyan pont létezik T-ben, amelyhez az adott általánosított sorozat konvergál $\mathscr{T}$ szerint.*

Bizonyítás. Tegyük fel, hogy $(T, \mathscr{T})$ Hausdorff-tér, és legyen $(t_i)_{i\in I}$ olyan T-ben haladó általánosított sorozat, amely konvergál a $\mathscr{T}$ topológia szerint a $t \in T$ és $t' \in T$ pontokhoz. Ha $t \neq t'$ volna, akkor léteznek olyan $V \in \mathscr{T}(t)$ és $V' \in \mathscr{T}(t')$, hogy $V \cap V' = \emptyset$. Ekkor léteznek olyan $i_V \in I$ és $i_{V'} \in I$, hogy minden $i \in I$ esetén, ha $i \geq i_V$, akkor $t_i \in V$, illetve, ha $i \geq i_{V'}$, akkor $t_i \in V'$. Az I előrendezett halmaz felfelé irányított, ezért volna olyan $i \in I$, hogy $i \geq i_V$ és $i \geq i_{V'}$ egyszerre teljesülne; ekkor $t_i \in V \cap V'$, holott $V \cap V' = \emptyset$.

Tegyük fel, hogy $(T, \mathscr{T})$ nem Hausdorff-tér; olyan T-ben haladó általánosított sorozatot keresünk, amely különböző pontokhoz konvergál a $\mathscr{T}$ topológia szerint. A hipotézis alapján vehetünk olyan $t, t' \in T$ pontokat, hogy $t \neq t'$, de minden $V \in \mathscr{T}(t)$ és minden $V' \in \mathscr{T}(t')$ esetén $V \cap V' \neq \emptyset$. A kiválasztási axióma szerint a $\prod_{(V,V')\in\mathscr{T}(t)\times\mathscr{T}(t')} (V \cap V')$ nem üres; legyen $(t_{V,V'})_{(V,V')\in\mathscr{T}(t)\times\mathscr{T}(t')}$ eleme ennek a szorzathalmaznak. A $\mathscr{T}(t) \times \mathscr{T}(t')$ halmaz felett bevezetjük a $\leq$ relációt úgy, hogy $(V, V'), (W, W') \in \mathscr{T}(t) \times \mathscr{T}(t')$ esetén $(V, V') \leq (W, W')$ pontosan akkor teljesüljön, ha $W \subseteq V$ és $W' \subseteq V'$. Ekkor $(\mathscr{T}(t) \times \mathscr{T}(t'), \leq)$ olyan rendezett halmaz, amely felfelé irányított, mert $\mathscr{T}(t)$ és $\mathscr{T}(t')$ rácsok. Állítjuk, hogy a $(t_{V,V'})_{(V,V')\in\mathscr{T}(t)\times\mathscr{T}(t')}$ általánosított sorozat t-hez is és t'-höz is konvergál a $\mathscr{T}$ topológia szerint. Valóban, ha $V \in \mathscr{T}(t)$, akkor $(V, T) \in \mathscr{T}(t) \times \mathscr{T}(t')$ olyan, minden $(W, W') \in \mathscr{T}(t) \times \mathscr{T}(t')$ esetén, ha $(V, T) \leq (W, W')$, akkor $W \subseteq V$, így $t_{W,W'} \in W \cap W' \subseteq W \subseteq V$; tehát $(t_{V,V'})_{(V,V')\in\mathscr{T}(t)\times\mathscr{T}(t')}$ konvergál a t ponthoz a $\mathscr{T}$ topológia szerint. Ugyanakkor $V' \in \mathscr{T}(t')$ esetén $(T, V') \in \mathscr{T}(t) \times \mathscr{T}(t')$ olyan, minden $(W, W') \in \mathscr{T}(t) \times \mathscr{T}(t')$ esetén, ha $(T, V') \leq (W, W')$, akkor $W' \subseteq V'$, így $t_{W,W'} \in W \cap W' \subseteq W' \subseteq V'$; tehát $(t_{V,V'})_{(V,V')\in\mathscr{T}(t)\times\mathscr{T}(t')}$ konvergál a t' ponthoz a $\mathscr{T}$ topológia szerint. ■

26.3.4. Definíció. *Ha $(T, \mathscr{T})$ Hausdorff-tér és $(t_i)_{i\in I}$ olyan T-ben haladó általánosított sorozat, amely konvergens $\mathscr{T}$ szerint, akkor $\lim_{i,\ I} t_i$ jelöli a T-nek azt az egyetlen pontját, amelyhez $(t_i)_{i\in I}$ konvergál $\mathscr{T}$-szerint, és ezt a $\lim_{i,\ I} t_i \in T$ pontot a $(t_i)_{i\in I}$ általánosított sorozat* **határértékének**, *vagy* **limeszpontjának** *nevezzük $\mathscr{T}$ szerint.*

Példa. (szummálható rendszerekre normált térben). Legyen $(E, \|\cdot\|)$ normált tér és $(x_i)_{i\in I}$ tetszőleges nem üres E-ben haladó rendszer. Jelölje $\mathscr{P}_0(I)$ az I nem üres véges részhalmazainak halmazát, és rendezzük a $\mathscr{P}_0(I)$ halmazt a $\subseteq$ relációval; ekkor felfelé irányított rendezett halmazt kapunk. Tekintsük az E-ben haladó $\left(\sum_{i\in J} x_i\right)_{J\in\mathscr{P}_0(I)}$ általánosított sorozatot (azzal a konvencióval, hogy $\sum_{i\in\emptyset} x_i := 0$). Ez az általánosított sorozat pontosan akkor konvergens E-ben a $\mathscr{T}_{\|\cdot\|}$ topológia szerint, ha létezik olyan $x \in E$, amelyre minden $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ esetén van olyan $J \subseteq I$ véges halmaz, hogy minden $H \subseteq I$ véges halmazra, ha $J \subseteq H$, akkor $\left\| x - \sum_{i\in H} x_i \right\| < \varepsilon$. Ilyenkor azt mondjuk, hogy az $(x_i)_{i\in I}$

rendszer *szummálható* E-ben a $\|\cdot\|$ norma szerint, és ekkor a

$$\sum_{i,\ I} x_i := \lim_{J,\ \mathscr{P}_0(I)} \sum_{i \in J} x_i$$

jelölést alkalmazzuk, és ezt a vektort az $(x_i)_{i\in I}$ szummálható rendszer *összegének* nevezzük a $\|\cdot\|$ norma szerint.

Könnyen látható, hogy ha $(t_i)_{i\in I}$ olyan $\mathbb{R}$-ben haladó nem üres általánosított sorozat, amely monoton növő (tehát $i, j \in I$ és $i \leq j$ esetén $t_i \leq t_j$) és $\sup\limits_{i\in I} t_i < +\infty$, akkor $(t_i)_{i\in I}$ konvergens az $\mathscr{E}_{\mathbb{R}}$ topológia szerint, és $\lim\limits_{i,\ I} t_i = \sup\limits_{i\in I} t_i$.

26.3.5. Állítás. (Érintési pontok jellemzése általánosított sorozatokkal) *Ha $(T, \mathscr{T})$ topologikus tér, $E \subseteq T$ és $t \in T$, akkor $t \in \overline{E}$ ekvivalens azzal, hogy létezik olyan E-ben haladó $(t_i)_{i\in I}$ általánosított sorozat, amely konvergál t-hez a $\mathscr{T}$ topológia szerint.*

Bizonyítás. Ha $(t_i)_{i\in I}$ olyan E-ben haladó általánosított sorozat, amely t-hez konvergál a $\mathscr{T}$ topológia szerint, akkor minden $V \in \mathscr{T}(t)$ környezethez van olyan $i \in I$, hogy $t_i \in V$, tehát $V \cap E \neq \emptyset$, így $t \in \overline{E}$.

Megfordítva, legyen $t \in \overline{E}$. Ekkor minden $V \in \mathscr{T}(t)$ környezetre $V \cap E \neq \emptyset$, így a kiválasztási axióma szerint $\prod\limits_{V\in\mathscr{T}(t)} (V \cap E) \neq \emptyset$; legyen $(t_V)_{V\in\mathscr{T}(t)}$ eleme ennek a szorzathalmaznak. A $\mathscr{T}(t)$ halmazt a $\supseteq$ relációval ellátva felfelé irányított rendezett halmazt kapunk. Világos, hogy az E-ben haladó $(t_V)_{V\in\mathscr{T}(t)}$ általánosított sorozat t-hez konvergál a $\mathscr{T}$ topológia szerint, hiszen minden $\mathscr{T}(t) \ni V$-re igaz az, hogy ha $W \in \mathscr{T}$ és $V \supseteq W$, akkor $t_W \in W \subseteq V$. ∎

26.3.6. Definíció. *Legyen $(t_i)_{i\in I}$ általánosított sorozat. Ha J felfelé irányított előrendezett halmaz és $\sigma : J \to I$ olyan monoton növő függvény, hogy* $\mathrm{Im}(\sigma)$ *kofinális I-vel (vagyis minden $i \in I$ esetén van olyan $j \in J$, hogy $i \leq \sigma(j)$), akkor a $(t_{\sigma(j)})_{j\in J}$ általánosított sorozatot a $(t_i)_{i\in I}$ általánosított sorozat* **általánosított részsorozatának** *nevezzük. (Megjegyezzük, hogy az* $\mathrm{Im}(\sigma)$ *halmaz I-vel való kofinalitása és $I \neq \emptyset$ miatt $J \neq \emptyset$.)*

26.3.7. Állítás. *Ha $(T, \mathscr{T})$ topologikus tér és $(t_i)_{i\in I}$ olyan T-ben haladó általánosított sorozat, amely konvergál a $t \in T$ ponthoz $\mathscr{T}$ szerint, akkor a $(t_i)_{i\in I}$ minden általánosított részsorozata konvergál t-hez $\mathscr{T}$ szerint.*

Bizonyítás. Legyen J felfelé irányított előrendezett halmaz és $\sigma : J \to I$ olyan monoton növő függvény, amelyre $\mathrm{Im}(\sigma)$ kofinális I-vel. Legyen $V \in \mathscr{T}(t)$, és vegyünk olyan $i_V \in I$ indexet, amelyre minden $i \in I$ esetén, ha $i \geq i_V$, akkor $t_i \in V$. Az $\mathrm{Im}(\sigma)$ halmaz kofinális I-vel, ezért van olyan $j_V \in J$, hogy $i_V \leq \sigma(j_V)$. Ha $j \in J$ és $j \geq j_V$, akkor a σ monotonitása folytán $\sigma(j) \geq \sigma(j_V) \geq i_V$, így $t_{\sigma(j)} \in V$. Ez azt jelenti, hogy a $\ t_{\sigma(j)}\ {}_{j\in J}$ általánosított sorozat konvergál t-hez a $\mathscr{T}$ topológia szerint. ■

26.3.8. Állítás. (Átviteli elv) *Legyenek $(T, \mathscr{T})$ és $(T', \mathscr{T}')$ topologikus terek. Az $f : T \to T'$ függvény pontosan akkor folytonos a $t \in T$ pontban a $\mathscr{T}$ és $\mathscr{T}'$ topológiák szerint, ha minden T-ben haladó, $\mathscr{T}$ szerint t-hez konvergáló $(t_i)_{i\in I}$ általánosított sorozatra a T'-ben haladó $(f(t_i))_{i\in I}$ általánosított sorozat konvergál $f(t)$-hez $\mathscr{T}'$ szerint.*

Bizonyítás. Tegyük fel, hogy f folytonos a $t \in T$ pontban a $\mathscr{T}$ és $\mathscr{T}'$ topológiák szerint, és legyen $(t_i)_{i\in I}$ olyan általánosított sorozat T-ben, amely t-hez konvergál a $\mathscr{T}$ topológia szerint. Legyen $V' \in \mathscr{T}'(f(t))$ tetszőleges. Ekkor van olyan $V \in \mathscr{T}(t)$, hogy $f\langle V\rangle \subseteq V'$, és a V-hez van olyan $i_V \in I$, hogy minden $I \ni i$-re, ha $i \geq i_V$, akkor $t_i \in V$, tehát $f(t_i) \in f\langle V\rangle \subseteq V'$. Ez azt jelenti, hogy a T'-ben haladó $(f(t_i))_{i\in I}$ általánosított sorozat konvergál $f(t)$-hez $\mathscr{T}'$ szerint.

Tegyük fel, hogy f nem folytonos a t pontban a $\mathscr{T}$ és $\mathscr{T}'$ topológiák szerint. Ekkor létezik olyan $V' \in \mathscr{T}'(f(t))$, hogy minden $\mathscr{T}(t) \ni V$-re $f\langle V\rangle \nsubseteq V'$, vagyis $V \setminus \overset{-1}{f}\langle V'\rangle \neq \emptyset$. A kiválasztási axióma szerint $\prod_{V\in\mathscr{T}(t)} \ V \setminus \overset{-1}{f}\langle V'\rangle \ \neq \emptyset$; legyen $(t_V)_{V\in\mathscr{T}(t)}$ eleme ennek a szorzathalmaznak. A $\mathscr{T}(t)$ halmazt a $\supseteq$ relációval ellátva felfelé irányított rendezett halmazt kapunk. Világos, hogy a T-ben haladó $(t_V)_{V\in\mathscr{T}(t)}$ általánosított sorozat t-hez konvergál a $\mathscr{T}$ topológia szerint, hiszen minden $\mathscr{T}(t) \ni V$-re igaz az, hogy ha $W \in \mathscr{T}$ és $V \supseteq W$, akkor $t_W \in W \subseteq V$. Ugyanakkor minden $V \in \mathscr{T}(t)$ esetén $t_V \in V \setminus \overset{-1}{f}\langle V'\rangle$, azaz $f(t_V) \notin V'$, ezért az $(f(t_V))_{V\in\mathscr{T}(t)}$ általánosított sorozat nem konvergál $f(t)$-hez a $\mathscr{T}'$ topológia szerint. ■

A konvergens általánosított sorozatok *jellemzik* a topológiákat. Pontosabban, a következő fontos tényről van szó.

26.3.9. Állítás. *Tegyük fel, hogy $\mathscr{T}$ és $\mathscr{T}'$ topológiák a T halmaz felett. A $\mathscr{T} = \mathscr{T}'$ egyenlőség pontosan akkor teljesül, ha minden $t \in T$ pontra, és minden T-ben haladó, $(t_i)_{i\in I}$ általánosított sorozatra: a "$(t_i)_{i\in I}$ konvergál t-hez a $\mathscr{T}$ topológia szerint" kijelentés ekvivalens a "$(t_i)_{i\in I}$ konvergál t-hez a $\mathscr{T}'$ topológia szerint" kijelentéssel.*

Bizonyítás. Tegyük fel, hogy $\mathscr{T} \neq \mathscr{T}'$; ekkor van olyan $\Omega \in \mathscr{T}$, hogy $\Omega \notin \mathscr{T}'$, *vagy* van olyan $\Omega' \in \mathscr{T}'$, hogy $\Omega' \notin \mathscr{T}$. A meghatározottság kedvéért tegyük fel az utóbbit, tehát legyen $\Omega' \in \mathscr{T}'$, hogy $\Omega' \notin \mathscr{T}$. Az Ω' halmaz nem $\mathscr{T}$-nyílt, ezért vehetünk olyan $t \in \Omega'$ pontot, amely a $\mathscr{T}$ topológia szerint nem belső pontja Ω'-nek, vagyis minden $V \in \mathscr{T}(t)$ esetén $V \setminus \Omega' \neq \emptyset$. A kiválasztási axióma szerint $\prod_{V\in\mathscr{T}(t)} (V \setminus \Omega') \neq \emptyset$; legyen $(t_V)_{V\in\mathscr{T}(t)}$ eleme ennek a szorzathalmaznak. A $\mathscr{T}(t)$ halmazt a $\supseteq$ relációval ellátva felfelé irányított rendezett halmazt kapunk. Világos, hogy a T-ben haladó $(t_V)_{V\in\mathscr{T}(t)}$ általánosított sorozat t-hez konvergál a $\mathscr{T}$ topológia szerint, hiszen minden $\mathscr{T}(t)\ni V$-re igaz az, hogy ha $W\in\mathscr{T}$ és $V\supseteq W$, akkor $t_W\in W\subseteq V$. Ugyanakkor a $(t_V)_{V\in\mathscr{T}(t)}$ általánosított sorozat nem konvergál t-hez a $\mathscr{T}'$ topológia szerint, hiszen $\Omega'\in\mathscr{T}'(t)$ és minden $\mathscr{T}(t)\ni V$-re $t_V\notin\Omega'$. ■

Megjegyezzük, hogy az előző állításban lényeges, hogy *általánosított sorozatokról* van szó, nem pedig természetes számokkal indexezett sorozatokról. A 7.7. pontban, a Montel-terekkel kapcsolatban példát látunk olyan különböző topológiákra (adott halmaz felett), amelyek szerint ugyanazok a konvergens sorozatok, de (az előző állítás alapján) nem ugyanazok a konvergens *általánosított* sorozatok.

26.4. Reguláris, teljesen reguláris és normális topologikus terek

Megállapodunk abban, hogy ha T halmaz, $f:T\to\overline{\mathbb{R}}$ függvény, és $c\in\overline{\mathbb{R}}$, akkor az

$$\overset{-1}{f}\langle\{c\}\rangle,\quad \overset{-1}{f}\langle\overline{\mathbb{R}}\setminus\{c\}\rangle,\quad \overset{-1}{f}\langle]\leftarrow,c[\rangle,\quad \overset{-1}{f}\langle]c,\to[\rangle,\quad \overset{-1}{f}\langle]\leftarrow,c]\rangle,\quad \overset{-1}{f}\langle[c,\to[\rangle$$

halmazokat a továbbiakban rendre a következő szimbólumokkal jelöljük

$$[f=c],\quad [f\neq c],\quad [f<c],\quad [f>c],\quad [f\leq c],\quad [f\geq c].$$

26.4.1. Definíció. *Azt mondjuk, hogy a $(T,\mathscr{T})$ topologikus tér*

– **reguláris**, *ha minden $F\subseteq T$ $\mathscr{T}$-zárt halmazhoz és $t\in T\setminus F$ ponthoz léteznek olyan $\Omega,\Omega'\subseteq T$ diszjunkt $\mathscr{T}$-nyílt halmazok, amelyekre $F\subseteq\Omega$ és $t\in\Omega'$;*

– **teljesen reguláris**, *ha minden $F\subseteq T$ $\mathscr{T}$-zárt halmazhoz és $t\in T\setminus F$ ponthoz létezik olyan $f:T\to\mathbb{R}$ függvény, amely folytonos a $\mathscr{T}$ és $\mathscr{E}_{\mathbb{R}}$ topológiák szerint, $0\leq f\leq 1$, $F\subseteq[f=0]$ és $f(t)\neq 0$;*

– **normális**, *ha bármely két $F,F'\subseteq T$ diszjunkt $\mathscr{T}$-zárt halmazhoz léteznek olyan $\Omega,\Omega'\subseteq T$ diszjunkt $\mathscr{T}$-nyílt halmazok, amelyekre $F\subseteq\Omega$ és $F'\subseteq\Omega'$.*

Nyilvánvaló, hogy a $(T,\mathscr{T})$ topologikus tér pontosan akkor teljesen reguláris, ha minden $\Omega\subseteq T$ $\mathscr{T}$-nyílt halmazhoz és $t\in\Omega$ ponthoz létezik olyan $f:T\to\mathbb{R}$ függvény, amely folytonos a $\mathscr{T}$ és $\mathscr{E}_{\mathbb{R}}$ topológiák szerint, $0\leq f\leq 1$, $f(t)=1$ és $[f\neq 0]\subseteq\Omega$.

26.4.2. Állítás. *T_0-tér (illetve T_1-tér, illetve Hausdorff-tér) minden topologikus altere T_0-tér (illetve T_1-tér, illetve Hausdorff-tér). Teljesen reguláris tér minden topologikus altere teljesen reguláris. Reguláris (illetve normális) tér minden zárt topologikus altere reguláris (illetve normális).*

Bizonyítás. Az első állítás nyilvánvalóan következik abból, hogy ha $(T, \mathscr{T})$ topologikus tér és $t \in E$, akkor minden $V \in \mathscr{T}(t)$ esetén $V \cap E \in (\mathscr{T}|E)(t)$.

Legyen $(T, \mathscr{T})$ teljesen reguláris tér, $E \subseteq T$, $t \in E$ és $F \subseteq E$ olyan $\mathscr{T}|E$-zárt halmaz, hogy $t \notin F$. Ekkor van olyan $G \subseteq T$ $\mathscr{T}$-zárt halmaz, hogy $F = G \cap E$, és természetesen $t \in T \setminus G$, ezért a $(T, \mathscr{T})$ topologikus tér teljes regularitása miatt van olyan $f : T \to \mathbb{R}$ függvény, amely folytonos a $\mathscr{T}$ és $\mathscr{E}_{\mathbb{R}}$ topológiák szerint, $0 \leq f \leq 1$, $G \subseteq [f = 0]$ és $f(t) \neq 0$. Ekkor $f|_E : E \to \mathbb{R}$ olyan függvény, amely folytonos a $\mathscr{T}|E$ és $\mathscr{E}_{\mathbb{R}}$ topológiák szerint, valamint $F = G \cap E \subseteq [f = 0] \cap E = [f|_E = 0]$ és $(f|_E)(t) = f(t) \neq 0$, tehát $(E, \mathscr{T}|E)$ teljesen reguláris tér.

Legyen $(T, \mathscr{T})$ reguláris tér, $E \subseteq T$ $\mathscr{T}$-zárt halmaz, $t \in E$ és $F \subseteq E$ olyan $\mathscr{T}|E$-zárt halmaz, hogy $t \notin F$. Ekkor az F halmaz $\mathscr{T}$-zárt is, ezért a $(T, \mathscr{T})$ topologikus tér regularitása folytán léteznek olyan $\Omega, \Omega' \subseteq T$ $\mathscr{T}$-nyílt halmazok, hogy $F \subseteq \Omega$ és $t \notin \Omega'$. Ekkor $\Omega \cap E$ és $\Omega' \cap E$ diszjunkt $\mathscr{T}|E$-nyílt halmazok, és természetesen $F \subseteq \Omega \cap E$, valamint $t \in \Omega' \cap E$, így $(E, \mathscr{T}|E)$ reguláris tér.

Legyen $(T, \mathscr{T})$ normális tér, $E \subseteq T$ $\mathscr{T}$-zárt halmaz, és $F, F' \subseteq E$ diszjunkt $\mathscr{T}|E$-zárt halmazok. Ekkor az F és F' halmazok $\mathscr{T}$-zártak is, így a $(T, \mathscr{T})$ topologikus tér normálissága miatt léteznek olyan $\Omega, \Omega' \subseteq T$ $\mathscr{T}$-nyílt halmazok, hogy $F \subseteq \Omega$ és $F' \subseteq \Omega'$. Világos, hogy ekkor $\Omega \cap E$ és $\Omega' \cap E$ diszjunkt $\mathscr{T}|E$-nyílt halmazok, és természetesen $F \subseteq \Omega \cap E$, valamint $F' \subseteq \Omega' \cap E$, tehát $(E, \mathscr{T}|E)$ normális tér. ■

26.4.3. Állítás. *A $(T, \mathscr{T})$ topologikus tér pontosan akkor reguláris, ha a T minden pontjának létezik $\mathscr{T}$-zárt halmazokból álló környezetbázisa a $\mathscr{T}$ topológia szerint.*

Bizonyítás. Legyen $(T, \mathscr{T})$ reguláris tér, $t \in T$ és $V \in \mathscr{T}(t)$. Ekkor létezik olyan $\Omega \in \mathscr{T}$, amelyre $t \in \Omega \subseteq V$. Tehát $t \notin T \setminus \Omega$ és $T \setminus \Omega$ $\mathscr{T}$-zárt halmaz, így a $(T, \mathscr{T})$ topologikus tér regularitása miatt léteznek olyan $\Omega_t, \Omega' \subseteq T$ diszjunkt $\mathscr{T}$-nyílt halmazok, hogy $t \in \Omega_t$ és $T \setminus \Omega \subseteq \Omega'$. Ekkor $t \in \Omega_t \subseteq T \setminus \Omega' \subseteq \Omega \subseteq V$, tehát $V' := T \setminus \Omega'$ olyan $\mathscr{T}$-zárt környezete t-nek, amelyre $V' \subseteq V$. Ez azt jelenti, hogy a $\{V \in \mathscr{T}(t) | V \text{ zárt } \mathscr{T} \text{ szerint}\}$ halmaz zárt halmazokból álló környezetbázisa t-nek a $\mathscr{T}$ topológia szerint.

Megfordítva, tegyük fel, hogy a T minden pontjának létezik $\mathscr{T}$-zárt halmazokból álló környezetbázisa a $\mathscr{T}$ topológia szerint. Legyen $t \in T$ és $F \subseteq T$ olyan $\mathscr{T}$-zárt halmaz, hogy $t \notin F$. Ekkor $T \setminus F$ a t-nek $\mathscr{T}$-nyílt környezete, így a hipotézis szerint van olyan $V \in \mathscr{T}(t)$, hogy $V \subseteq T \setminus F$ és a V halmaz $\mathscr{T}$-zárt. Legyen $\Omega \in \mathscr{T}$ olyan, hogy $t \in \Omega \subseteq V$, valamint legyen $\Omega' := T \setminus V$. Ekkor Ω és Ω' diszjunkt $\mathscr{T}$-nyílt halmazok, és $t \in \Omega$, valamint $F \subseteq T \setminus V =: \Omega'$, tehát $(T, \mathscr{T})$ reguláris tér. ■

Most megmutatjuk, hogy topologikus tér regularitása, bizonyos megszámlálhatósági feltétellel együtt, maga után vonja a normálisságot. Ehhez bevezetünk egy nevezetes topologikustér-típust.

26.4.4. Definíció. *A $(T, \mathscr{T})$ topologikus tér* $\mathscr{T}$**-nyílt befedésének** *nevezünk minden olyan $(\Omega_i)_{i \in I}$ rendszert, amelyre $T = \bigcup_{i \in I} \Omega_i$ és minden $I \ni i$-re Ω_i $\mathscr{T}$-nyílt részhalmaza*

T-nek. A $(T, \mathscr{T})$ topologikus teret **Lindelöf-térnek** *nevezzük, ha a T halmaz bármely $(\Omega_i)_{i\in I}$ $\mathscr{T}$-nyílt befedéséhez létezik olyan $J \subseteq I$ megszámlálható halmaz, hogy $(\Omega_i)_{i\in J}$ is befedése T-nek.*

26.4.5. Tétel. (Lindelöf-tétel) *Minden megszámlálható bázisú topologikus tér Lindelöf-tér.*

Bizonyítás. Legyen $\mathfrak{B}$ megszámlálható bázisa a $(T, \mathscr{T})$ topologikus térnek, és legyen $(\Omega_i)_{i\in I}$ a T-nek tetszőleges $\mathscr{T}$-nyílt befedése. *Kiválasztható* olyan $(\mathfrak{B}_i)_{i\in I}$ rendszer, hogy minden $i \in I$ esetén $\mathfrak{B}_i \subseteq \mathfrak{B}$ és $\Omega_i = \bigcup_{\Omega\in\mathfrak{B}_i} \Omega$. Ekkor a $\mathfrak{B}' := \bigcup_{i\in I} \mathfrak{B}_i$ halmaz megszámlálható, mert $\mathfrak{B}' \subseteq \mathfrak{B}$, továbbá nyilvánvalóan $T = \bigcup_{\Omega\in\mathfrak{B}'} \Omega$. A $\mathfrak{B}'$ definíciója szerint minden $\Omega \in \mathfrak{B}'$ esetén van olyan $i \in I$, hogy $\Omega \in \mathfrak{B}_i$. Ezért *kiválasztható* olyan $f : \mathfrak{B}' \to I$ függvény, hogy minden $\mathfrak{B}' \ni \Omega$-ra $\Omega \in \mathfrak{B}_{f(\Omega)}$. Ekkor $\mathrm{Im}(f) \subseteq I$ megszámlálható részhalmaz és $T = \bigcup_{i\in\mathrm{Im}(f)} \Omega_i$. ■

Később látni fogjuk, hogy minden kompakt tér is Lindelöf-tér, de létezik nem megszámlálható bázisú kompakt tér. Ezért az előző állításban található következtetés nem fordítható meg.

26.4.6. Állítás. (Tyihonov-lemma) *Minden reguláris Lindelöf-tér normális.*

Bizonyítás. Legyen $(T, \mathscr{T})$ reguláris Lindelöf-tér, és legyenek $F, F' \subseteq T$ nem üres, diszjunkt $\mathscr{T}$-zárt halmazok. Ha $t \in F$, akkor $t \in T\setminus F'$ és a $T\setminus F'$ halmaz $\mathscr{T}$-nyílt, ezért a regulartitás miatt létezik t-nek olyan V $\mathscr{T}$-nyílt környezete $\mathscr{T}$ szerint, hogy $\overline{V} \subseteq T \setminus F'$, azaz $\overline{V} \cap F' = \emptyset$. Ezért *kiválasztható* olyan $(V_t)_{t\in F}$ rendszer, hogy minden $F \ni t$-re $V_t \in \mathscr{T}(t)$ és a V_t halmaz $\mathscr{T}$-nyílt, valamint $\overline{V_t} \cap F' = \emptyset$. Az F és F' halmazok szerepét felcserélve hasonlóan kapjuk olyan $(V_t)_{t\in F'}$ rendszer létezését, hogy minden $F' \ni t$-re $V_t \in \mathscr{T}(t)$ és a V_t halmaz $\mathscr{T}$-nyílt, valamint $\overline{V_t} \cap F = \emptyset$. Legyen ω olyan halmaz, hogy $\omega \notin F \cup F'$, és legyen $V_\omega := T \setminus (F \cup F')$. Ekkor $(V_t)_{t\in F\cup F'\cup\{\omega\}}$ a T halmaznak $\mathscr{T}$-nyílt befedése, és $(T, \mathscr{T})$ Lindelöf-tér, ezért létezik olyan $D \subseteq F \cup F' \cup \{\omega\}$ megszámlálható halmaz, hogy $T = \bigcup_{t\in D} V_t$. Ha $t \in F$, akkor van olyan $s \in D$, hogy $t \in V_s$, és nyilvánvaló, hogy $s \notin F'$ (mert $t \in V_s \cap F$ és $s \in F'$ esetén még $\overline{V_s} \cap F = \emptyset$ is igaz), továbbá természetesen $s \neq \omega$ (mert $t \notin T \setminus (F \cup F') =: V_\omega$). Ez azt jelenti, hogy $t \in F$ esetén van olyan $s \in D\cap F$, hogy $t \in V_s$, vagyis $F \subseteq \bigcup_{s\in D\cap F} V_s$. Felcserélve az F és F' halmazok szerepét hasonlóan kapjuk, hogy $F' \subseteq \bigcup_{s\in D\cap F'} V_s$. Feltettük, hogy $F \neq \emptyset$, ezért $D \cap F$ nem üres megszámlálható halmaz, így létezik olyan $\sigma : \mathbb{N} \to D \cap F$ függvény, amely szürjekció. Hasonlóan adódik $\sigma' : \mathbb{N} \to D \cap F'$ szürjekció létezése is. Legyen minden $n \in \mathbb{N}$ esetén

$$\Omega_n := V_{\sigma(n)} \setminus \bigcup_{k=0}^{n} \overline{V_{\sigma'(k)}}, \qquad \Omega'_n := V_{\sigma'(n)} \setminus \bigcup_{k=0}^{n} \overline{V_{\sigma(k)}},$$

továbbá értelmezzük az

$$\Omega := \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \Omega_n, \qquad \Omega' := \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \Omega'_n$$

halmazokat. Világos, hogy minden $\mathbb{N} \ni n$-re Ω_n és Ω'_n mindketten $\mathscr{T}$-nyílt halmazok T-ben, ezért Ω és Ω' szintén $\mathscr{T}$-nyílt halmazok. Ha $m, n \in \mathbb{N}$ és $m \leq n$, akkor $\Omega_n \cap V_{\sigma'(m)} = \emptyset$ és $\Omega'_m \subseteq V_{\sigma'(m)}$, ezért $\Omega_n \cap \Omega'_m = \emptyset$. Ha $m, n \in \mathbb{N}$ és $n \leq m$, akkor $\Omega'_m \cap V_{\sigma(n)} = \emptyset$ és $\Omega_n \subseteq V_{\sigma(n)}$, ezért $\Omega'_m \cap \Omega_n = \emptyset$. Ez azt jelenti, hogy minden $\mathbb{N} \ni m, n$-re $\Omega_n \cap \Omega'_m = \emptyset$, amiből következik, hogy $\Omega \cap \Omega' = \emptyset$. Minden $k \in \mathbb{N}$ esetén $F \cap \overline{V_{\sigma'(k)}} = \emptyset$, ugyanakkor $F \subseteq \bigcup_{t\in D\cap F} V_t = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} V_{\sigma(n)}$, ezért $F \subseteq \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \Omega_n =: \Omega$. Minden $k \in \mathbb{N}$ esetén $F' \cap \overline{V_{\sigma(k)}} = \emptyset$, ugyanakkor $F' \subseteq \bigcup_{t\in D\cap F'} V_t = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} V_{\sigma'(n)}$, ezért $F' \subseteq \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \Omega'_n =: \Omega'$. ■

A Lindelöf-tétel és a Tyihonov-lemma összetevéséből kapjuk, hogy minden megszámlálható bázisú reguláris tér normális.

26.4.7. Állítás. *Minden teljesen reguláris T_1-tér Hausdorff-tér.*

Bizonyítás. Legyen $(T, \mathscr{T})$ teljesen reguláris T_1-tér, és legyenek $t, t' \in T$ olyanok, hogy $t \neq t'$. Ekkor a $\{t'\}$ halmaz $\mathscr{T}$-zárt, tehát $T \setminus \{t'\}$ a t-nek nyílt környezete $\mathscr{T}$-szerint. A teljes regularitás miatt van olyan $f : T \to \mathbb{R}$ függvény, amely folytonos a $\mathscr{T}$ és $\mathscr{E}_{\mathbb{R}}$ topológiák szerint, valamint $0 \leq f \leq 1$, $[f \neq 0] \subseteq T \setminus \{t'\}$ és $f(t) > 0$. Ekkor bármely $r \in]0, f(t)[$ valós számra $t \in \overset{-1}{f}\langle]r, \to [\rangle$ és $t' \in \overset{-1}{f}\langle]\leftarrow, r[\rangle$, továbbá az $\overset{-1}{f}\langle]r, \to [\rangle$ és $\overset{-1}{f}\langle]\leftarrow, r[\rangle$ halmazok diszjunktak és $\mathscr{T}$-nyíltak, tehát ezek diszjunkt $\mathscr{T}$-nyílt környezetei t-nek, illetve t'-nek. ■

Másként fogalmazva: ha egy teljesen reguláris tér nem Hausdorff-tér, akkor már T_1-tér sem lehet (de előfordulhat az, hogy T_0-tér). Megemlítjük, hogy a teljesen reguláris T_1-tereket *Tyihonov-tereknek* is nevezik.

Legyen (M, d) metrikus tér. Minden nem üres $E \subseteq M$ halmazra és $x \in M$ pontra értelmezzük a

$$d(x, E) := \inf_{y\in E} d(x, y)$$

számot, amit *az x pont és az E halmaz távolságának* nevezünk. Könnyen látható, hogy ha $E \subseteq M$ nem üres halmaz, akkor az

$$d(\cdot, E) : M \to \mathbb{R}; \quad x \mapsto d(x, E)$$

leképezés folytonos a $\mathscr{T}_d$ és az $\mathscr{E}_{\mathbb{R}}$ euklidészi topológia szerint, ugyanis minden $x, y \in M$ esetén fennáll, hogy $|d(x, E) - d(y, E)| \leq d(x, y)$. Egyszerűen bizonyítható az is, hogy ha $E \subseteq M$ nem üres halmaz, akkor $\overline{E} = [d(\cdot, E) = 0]$.

26.4.8. Állítás. *Minden metrizálható topologikus tér normális.*

Bizonyítás. Legyen (M, d) metrikus tér, továbbá legyenek F és F' olyan nem üres diszjunkt zárt halmazok M-ben. A $d(\cdot, F) + d(\cdot, F') : M \to \mathbb{R}$ függvény mindenütt nullánál nagyobb értéket vesz föl, mert ha az $x \in M$ pontban az értéke nulla volna, akkor $d(x, F) = 0 = d(x, F')$, így az F és F' halmazok zártsága miatt $x \in F \cap F'$ teljesülne. Továbbá, a $d(\cdot, F) + d(\cdot, F') : M \to \mathbb{R}$ függvény folytonos is, így az

$$f := \frac{d(\cdot, F)}{d(\cdot, F) + d(\cdot, F')} : M \to \mathbb{R}$$

függvény jól értelmezett és folytonos. Nyilvánvaló, hogy

$$F = [d(\cdot, F) = 0] \subseteq [f = 0], \quad F' \subseteq [f = 1].$$

Ezért bármely $r \in]0, 1[$ valós számra az $\Omega := [f < r]$ és $\Omega' := [f > r]$ halmazok olyan diszjunkt nyílt halmazok M-ben, amelyekre $F \subseteq \Omega$ és $F' \subseteq \Omega'$. ■

26.5. Normális terek jellemzése I – Uriszon-tétel

Most először a normálisság és teljes regularitás kapcsolatát tisztázzuk. Ebből a szempontból a legfontosabb eredmény az Uriszon-tétel, amely megmutatja, hogy normális téren "elég sok" folytonos valós függvény létezik. Nemtriviális folytonos függvények létezése általában nem szükségszerű; például az antidiszkrét terekről induló, T_0-terekbe érkező folytonos függvények nyilvánvalóan mind triviálisak (vagyis állandók).

26.5.1. Tétel. (Uriszon-tétel) *Ha $(T, \mathscr{T})$ topologikus tér, akkor a következő kijelentések ekvivalensek.*

(i) *$(T, \mathscr{T})$ normális tér.*

(ii) *Minden $F \subseteq T$ $\mathscr{T}$-zárt halmazhoz és minden $\Omega \subseteq T$ $\mathscr{T}$-nyílt halmazhoz, $F \subseteq \Omega$ esetén létezik olyan $U \subseteq T$ $\mathscr{T}$-nyílt halmaz, hogy $F \subseteq U \subseteq \overline{U} \subseteq \Omega$.*

(iii) *Minden $F \subseteq T$ $\mathscr{T}$-zárt halmazhoz és minden $\Omega \subseteq T$ $\mathscr{T}$-nyílt halmazhoz, $F \subseteq \Omega$ esetén létezik olyan $(\Omega_\alpha)_{\alpha \in [0,1]}$ rendszer, hogy minden $\alpha \in [0, 1]$ számra Ω_α $\mathscr{T}$-nyílt részhalmaza T-nek, és $F \subseteq \Omega_\alpha \subseteq \overline{\Omega_\alpha} \subseteq \Omega$, továbbá minden $[0, 1] \ni \alpha, \beta$-ra, ha $\alpha < \beta$, akkor $\overline{\Omega_\alpha} \subseteq \Omega_\beta$.*

(iv) *Minden $F \subseteq T$ $\mathscr{T}$-zárt halmazhoz és minden $\Omega \subseteq T$ $\mathscr{T}$-nyílt halmazhoz, $F \subseteq \Omega$ esetén létezik olyan $f : T \to \mathbb{R}$ függvény, amely folytonos a $\mathscr{T}$ és $\mathscr{E}_{\mathbb{R}}$ topológiák szerint, $0 \leq f \leq 1$, valamint $F \subseteq [f = 1] \subseteq \overline{[f \neq 0]} \subseteq \Omega$.*

(v) *Bármely két $F, F' \subseteq T$ diszjunkt $\mathscr{T}$-zárt halmazhoz létezik olyan $f : T \to \mathbb{R}$ függvény, amely folytonos a $\mathscr{T}$ és $\mathscr{E}_{\mathbb{R}}$ topológiák szerint, $0 \leq f \leq 1$, valamint $F \subseteq [f = 1]$ és $F' \subseteq [f = 0]$.*

Bizonyítás. (i)⇒(ii) Legyen az $F \subseteq T$ halmaz $\mathscr{T}$-zárt, az $\Omega \subseteq T$ halmaz $\mathscr{T}$-nyílt, és tegyük fel, hogy $F \subseteq \Omega$. Ekkor F és $T \setminus \Omega$ diszjunkt $\mathscr{T}$-zárt halmazok, ezért az (i) miatt léteznek olyan $U, V \in \mathscr{T}$ diszjunkt halmazok, hogy $F \subseteq U$ és $T \setminus \Omega \subseteq V$. Ekkor $U \subseteq T \setminus V$ és a $T \setminus V$ halmaz $\mathscr{T}$-zárt, ezért $F \subseteq U \subseteq \overline{U} \subseteq T \setminus V \subseteq \Omega$.

(ii)⇒(iii) Legyen az $F \subseteq T$ halmaz $\mathscr{T}$-zárt, az $\Omega \subseteq T$ halmaz $\mathscr{T}$-nyílt, és tegyük fel, hogy $F \subseteq \Omega$. Minden $n \in \mathbb{N}$ esetén értelmezzük a

$$D_n := \left\{ \frac{k}{2^n} \,\middle|\, (k \in \mathbb{N}) \wedge (k \leq 2^n) \right\}$$

halmazt, és legyen $D := \bigcup_{n \in \mathbb{N}} D_n$. (A D halmaz elemeit a $[0,1]$ intervallum *diadikusan racionális* elemeinek nevezzük.) Világos, hogy minden $n \in \mathbb{N}$ esetén $D_n \subseteq D_{n+1}$, mert ha $k \in \mathbb{N}$ és $k \leq 2^n$, akkor $2k \leq 2^{n+1}$, és $\frac{k}{2^n} = \frac{2k}{2^{n+1}} \in D_{n+1}$. Továbbá, a D halmaz *megszámlálható*, és *sűrű* a $[0,1]$ intervallumban, mert $t \in [0,1]$ esetén van olyan $(c_k)_{k \in \mathbb{N}}$ sorozat, hogy minden $\mathbb{N} \ni k$-ra $c_k \in \{0,1\}$ és $t = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{c_k}{2^k}$ (ez a t szám felírása a kettes számrendszerben), tehát, ha $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$, akkor van olyan $n \in \mathbb{N}$, hogy $\left| t - \sum_{k=0}^{n} \frac{c_k}{2^k} \right| < \varepsilon$, ugyanakkor nyilvánvalóan $\sum_{k=0}^{n} \frac{c_k}{2^k} = \frac{1}{2^n} \sum_{k=0}^{n} 2^{n-k} c_k \in D_n$, hiszen $0 \leq \sum_{k=0}^{n} \frac{c_k}{2^k} \leq t \leq 1$, vagyis $0 \leq \sum_{k=0}^{n} 2^{n-k} c_k \leq 2^n$.

A kiválasztási axiómával kombinált rekurzió tételét alkalmazva megmutatjuk olyan $\left((\Omega_{n,r})_{r \in D_n} \right)_{n \in \mathbb{N}}$ sorozat létezését, amelyre minden $n \in \mathbb{N}$ esetén $(\Omega_{n,r})_{r \in D_n}$ olyan (véges) $\mathscr{T}$-ben haladó rendszer, hogy minden $D_n \ni r$-re $F \subseteq \Omega_{n,r} \subseteq \overline{\Omega_{n,r}} \subseteq \Omega$, valamint minden $r, s \in D_n$ esetén, ha $r < s$, akkor $\overline{\Omega_{n,r}} \subseteq \Omega_{n,s}$, továbbá minden $D_n \ni r$-re $\Omega_{n+1,r} = \Omega_{n,r}$.

A (ii) hipotézis alapján az F és Ω halmazokhoz létezik olyan $U \in \mathscr{T}$, hogy $F \subseteq U \subseteq \overline{U} \subseteq \Omega$. Ismét a (ii) hipotézist alkalmazva az $\overline{U}$ és Ω halmazokra kapjuk olyan $V \in \mathscr{T}$ létezését, hogy $\overline{U} \subseteq V \subseteq \overline{V} \subseteq \Omega$. Ha $\Omega_{0,0} := U$ és $\Omega_{0,1} := V$, akkor $(\Omega_{0,r})_{r \in D_0}$ olyan rendszer $\mathscr{T}$-ben, hogy minden $D_0 \ni r$-re $F \subseteq \Omega_{0,r} \subseteq \overline{\Omega_{0,r}} \subseteq \Omega$, továbbá minden $r, s \in D_0 = \{0,1\}$ esetén, ha $r < s$, akkor $\overline{\Omega_{0,r}} \subseteq \Omega_{0,s}$.

Tegyük fel, hogy $n \in \mathbb{N}^+$ és $\left((\Omega_{k,r})_{r \in D_k} \right)_{k \in n}$ olyan rendszer, hogy minden $k \in n$ esetén $(\Omega_{k,r})_{r \in D_k}$ olyan $\mathscr{T}$-ben haladó rendszer, amelyre minden $r \in D_k$ esetén $F \subseteq \Omega_{k,r} \subseteq \overline{\Omega_{k,r}} \subseteq \Omega$, valamint minden $r, s \in D_k$ esetén, ha $r < s$, akkor $\overline{\Omega}_{k,r} \subseteq \Omega_{k,s}$, továbbá minden $n \ni k$-ra, ha $k + 1 < n$ és $r \in D_k$, akkor $\Omega_{k+1,r} = \Omega_{k,r}$. Minden $r \in D_{n-1}$ esetén legyen $\Omega_{n,r} := \Omega_{n-1,r}$. Legyen $r \in D_n \setminus D_{n-1}$ rögzített; ekkor egyérteműen létezik olyan $k \in \mathbb{N}$, hogy $2k + 1 \leq 2^n$ és $r = \frac{2k+1}{2^n}$. Világos, hogy $k < 2^{n-1}$, tehát $r_0 := \frac{k}{2^{n-1}} \in D_{n-1}$

és $r_1 := \dfrac{k+1}{2^{n-1}} \in D_{n-1}$, továbbá $r_0 < r < r_1$, és r a D_n egyetlen eleme, amely r_0 és r_1 közé esik. Az $(\Omega_{k,r})_{r\in D_k \;\; k\in n}$ rendszer tulajdonságai alapján $\overline{\Omega_{n-1,r_0}} \subseteq \Omega_{n-1,r_1}$, így a (ii) hipotézist alkalmazva az $\overline{\Omega_{n-1,r_0}}$ és Ω_{n-1,r_1} halmazokra kapjuk olyan $\Omega_{n,r} \in \mathscr{T}$ létezését, hogy $\overline{\Omega_{n-1,r_0}} \subseteq \Omega_{n,r} \subseteq \overline{\Omega_{n,r}} \subseteq \Omega_{n-1,r_1}$. Ebből látszik, hogy a most értelmezett $(\Omega_{k,r})_{r\in D_k \;\; k\in n+1}$ rendszer teljesíti ugyanazokat a feltételeket, mint az $(\Omega_{k,r})_{r\in D_k \;\; k\in n}$ rendszer, ha az n helyére az $n+1$ számot írjuk.

Legyen tehát $(\Omega_{n,r})_{r\in D_n \;\; n\in\mathbb{N}}$ olyan sorozat, amelynek a létezését imént igazoltuk. Ha $r \in D$, akkor minden $\mathbb{N} \ni m,n$-re, $r \in D_m \cap D_n$ esetén $\Omega_{m,r} = \Omega_{n,r}$. Ezért minden $r \in D$ számra értelmezhetjük az Ω_r halmazt úgy, hogy $\Omega_r := \Omega_{n,r}$ minden olyan $\mathbb{N} \ni n$-re, amelyre $r \in D_n$. Világos, hogy minden $r \in D$ esetén $F \subseteq \Omega_r \subseteq \overline{\Omega_r} \subseteq \Omega$. Továbbá, $r, s \in D$ esetén van olyan $n \in \mathbb{N}$, hogy $r, s \in D_n$, tehát, ha $r < s$, akkor $\overline{\Omega_r} := \overline{\Omega_{n,r}} \subseteq \Omega_{n,s} =: \Omega_s$. Legyen minden $\alpha \in [0,1] \setminus D$ esetén $\Omega_\alpha := \bigcup_{\substack{r\in D\\ r\leq\alpha}} \Omega_r$. Ekkor minden $\alpha \in [0,1] \setminus D$ esetén $\Omega_\alpha \in \mathscr{T}$ és $F \subseteq \Omega_0 \subseteq \Omega_\alpha$, valamint $\overline{\Omega_\alpha} \subseteq \Omega$ is teljesül, mert $\alpha < 1$ (hiszen $1 \in D$), tehát a D sűrűsége miatt van olyan $s \in D$, hogy $\alpha < s$, így $\Omega_\alpha \subseteq \Omega_s$, vagyis $\overline{\Omega_\alpha} \subseteq \overline{\Omega_s} \subseteq \Omega$. Továbbá, ha $\alpha, \beta \in [0,1]$ és $\alpha < \beta$, akkor ismét a D sűrűségéből következik olyan $r, s \in D$ számok létezése, hogy $\alpha < r < s < \beta$, és ekkor $\overline{\Omega_\alpha} \subseteq \overline{\Omega_r} \subseteq \Omega_s \subseteq \Omega_\beta$. Ez azt jelenti, hogy $(\Omega_\alpha)_{\alpha\in[0,1]}$ olyan rendszer, amelynek a létezését (iii)-ban állítottuk.

(iii)⇒(iv) Legyen az $F \subseteq T$ halmaz $\mathscr{T}$-zárt, az $\Omega \subseteq T$ halmaz $\mathscr{T}$-nyílt, és tegyük fel, hogy $F \subseteq \Omega$. A (iii) alapján vegyünk olyan $(\Omega_\alpha)_{\alpha\in[0,1]}$ rendszert, hogy minden $\alpha \in [0,1]$ számra Ω_α $\mathscr{T}$-nyílt részhalmaza T-nek, és $F \subseteq \Omega_\alpha \subseteq \overline{\Omega_\alpha} \subseteq \Omega$, továbbá minden $[0,1] \ni \alpha, \beta$-ra, ha $\alpha < \beta$, akkor $\overline{\Omega_\alpha} \subseteq \Omega_\beta$.

Értelmezzük a $g : T \to \mathbb{R}$ függvényt úgy, hogy minden $t \in \Omega_1$ esetén

$$g(t) := \inf\{\ \gamma \in [0,1] \mid t \in \Omega_\gamma\ \},$$

és minden $T \setminus \Omega_1 \ni t$-re $g(t) := 1$. Világos, hogy $T \setminus \Omega \subseteq T \setminus \Omega_1 \subseteq [g = 1]$, és minden $t \in T$ esetén $0 \leq g(t) \leq 1$.

Megmutatjuk, hogy ha $\alpha, \beta \in [0,1]$ és $\alpha < \beta$, akkor

$$\overset{-1}{g}\langle]\alpha,\beta[\rangle \subseteq \Omega_\beta \setminus \overline{\Omega_\alpha} \subseteq \overset{-1}{g}\langle [\alpha,\beta] \rangle.$$

Valóban, ha $t \in \overset{-1}{g}\langle]\alpha,\beta[\rangle$, akkor $g(t) := \inf\{\gamma \in [0,1] | t \in \Omega_\gamma\} < \beta$ miatt van olyan $\gamma \in [0,1]$, hogy $t \in \Omega_\gamma$ és $\gamma < \beta$; ekkor $\Omega_\gamma \subseteq \Omega_\beta$ miatt $t \in \Omega_\beta$. Ugyanakkor $t \notin \overline{\Omega_\alpha}$, különben minden $\gamma \in [0,1]$ számra, $\alpha < \gamma$ esetén $t \in \overline{\Omega_\alpha} \subseteq \Omega_\gamma$, tehát $g(t) \leq \gamma$ teljesülne, így fennállna a $g(t) \leq \alpha$ egyenlőtlenség, holott $g(t) > \alpha$. Továbbá, ha $t \in \Omega_\beta \setminus \overline{\Omega_\alpha}$, akkor $t \in \Omega_\beta$, így $g(t) := \inf\{\gamma \in [0,1] | t \in \Omega_\gamma\} \leq \beta$, valamint $g(t) \geq \alpha$, különben volna olyan $\gamma \in [0,1]$, hogy $\gamma < \alpha$ és $t \in \Omega_\gamma$, ami lehetetlen, mert ekkor $t \in \Omega_\gamma \subseteq \overline{\Omega_\gamma} \subseteq \Omega_\alpha \subseteq \overline{\Omega_\alpha}$

teljesülne, holott $t \notin \overline{\Omega_\alpha}$.

Megmutatjuk, hogy $\overline{\Omega_0} \subseteq [g = 0]$. Valóban, ha $t \in [g \neq 0]$ és $t \in \Omega_1$, akkor $g(t) := \inf\{\gamma \in [0,1] | t \in \Omega_\gamma\} > 0$, és ha $\beta \in]0, g(t)[$, akkor $t \notin \Omega_\beta$, így $t \notin \overline{\Omega_0}$, mert $\overline{\Omega_0} \subseteq \Omega_\beta$. Ha pedig $t \in [g \neq 0]$ és $t \notin \Omega_1$, akkor $t \notin \overline{\Omega_0}$, mert $\overline{\Omega_0} \subseteq \Omega_1$.

Most bebizonyítjuk, hogy a $g : T \to \mathbb{R}$ függvény folytonos a $\mathscr{T}$ és $\mathscr{E}_\mathbb{R}$ topológiák szerint. Ehhez legyen $t \in T$ rögzített pont; ekkor három eset lehetséges.

– Ha $t \in \overset{-1}{g}\langle]0,1[\rangle$, akkor bármely $\varepsilon \in]0, \min(g(t), 1 - g(t))]$ valós számra az előzőek alapján

$$t \in \overset{-1}{g}\langle]g(t) - \varepsilon, g(t) + \varepsilon[\rangle \subseteq \Omega_{g(t)+\varepsilon} \setminus \overline{\Omega_{g(t)-\varepsilon}} \subseteq \overset{-1}{g}\langle [g(t) - \varepsilon, g(t) + \varepsilon] \rangle,$$

tehát a $V_\varepsilon := \Omega_{g(t)+\varepsilon} \setminus \overline{\Omega_{g(t)-\varepsilon}}$ halmaz a t pontnak olyan $\mathscr{T}$-nyílt környezete, amelyre $g\langle V_\varepsilon \rangle \subseteq [g(t) - \varepsilon, g(t) + \varepsilon]$, így g folytonos a t pontban a $\mathscr{T}$ és $\mathscr{E}_\mathbb{R}$ topológiák szerint.

– Ha $t \in [g = 0]$, vagyis $0 = g(t) := \inf\{\gamma \in [0,1] | t \in \Omega_\gamma\}$, akkor vegyünk tetszőleges $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ számot. Rögzítsünk olyan $\gamma \in [0,1]$ számot, amelyre $\gamma < \varepsilon$. Állítjuk, hogy Ω_γ olyan $\mathscr{T}$-nyílt környezete t-nek, hogy $g\langle \Omega_\gamma \rangle \subseteq [-\varepsilon, \varepsilon]$. Valóban, az előzőek alapján $\Omega_\gamma \setminus \overline{\Omega_0} \subseteq \overset{-1}{g}\langle [0, \gamma] \rangle \subseteq \overset{-1}{g}\langle [0, \varepsilon] \rangle$, továbbá $\Omega_\gamma \cap \overline{\Omega_0} \subseteq \overline{\Omega_0} \subseteq [g = 0] \subseteq \overset{-1}{g}\langle [0, \varepsilon] \rangle$, ezért

$$\Omega_\gamma = \ \Omega_\gamma \setminus \overline{\Omega_0} \ \cup \ \Omega_\gamma \cap \overline{\Omega_0} \ \subseteq \overset{-1}{g}\langle [0, \varepsilon] \rangle = \overset{-1}{g}\langle [-\varepsilon, \varepsilon] \rangle,$$

vagyis $g\langle \Omega_\gamma \rangle \subseteq [-\varepsilon, \varepsilon]$. Ebből következik, hogy g folytonos a t pontban a $\mathscr{T}$ és $\mathscr{E}_\mathbb{R}$ topológiák szerint.

– Ha $t \in [g = 1]$, akkor két alternatíva van: $t \notin \overline{\Omega_1}$ vagy $t \in \overline{\Omega_1}$. Az első esetben $T \setminus \overline{\Omega_1}$ olyan $\mathscr{T}$-nyílt környezete t-nek, amelyen $g = 1$, ezért a folytonosság lokalitása miatt g folytonos a t pontban a $\mathscr{T}$ és $\mathscr{E}_\mathbb{R}$ topológiák szerint. Ezért feltehető, hogy $t \in \overline{\Omega_1}$. Legyen $\varepsilon \in]0, 1[$ tetszőleges valós szám. Ekkor $t \in T \setminus \overline{\Omega_{1-\varepsilon}}$, különben véve egy $\gamma \in]1 - \varepsilon, 1[$ számot kapnánk, hogy $t \in \overline{\Omega_{1-\varepsilon}} \subseteq \Omega_\gamma$, így $g(t) \leq \gamma < 1$, holott $g(t) = 1$. Tehát $T \setminus \overline{\Omega_{1-\varepsilon}}$ a t pontnak $\mathscr{T}$-nyílt környezete, és az előzőek alkalmazásával

$$g\langle T \setminus \overline{\Omega_{1-\varepsilon}} \rangle = g\langle T \setminus \Omega_1 \rangle \cup g\langle \Omega_1 \setminus \overline{\Omega_{1-\varepsilon}} \rangle \subseteq \{1\} \cup [1 - \varepsilon, 1] \subseteq [1 - \varepsilon, 1 + \varepsilon],$$

tehát g folytonos a t pontban a $\mathscr{T}$ és $\mathscr{E}_\mathbb{R}$ topológiák szerint.

Ezzel megmutattuk, hogy a $g : T \to \mathbb{R}$ függvény folytonos a $\mathscr{T}$ és $\mathscr{E}_\mathbb{R}$ topológiák szerint, $0 \leq g \leq 1$, valamint $\Omega_0 \subseteq [g = 0]$ és $T \setminus \Omega_1 \subseteq [g = 1]$. Ezért az $f := 1 - g : T \to \mathbb{R}$ függvény is folytonos a $\mathscr{T}$ és $\mathscr{E}_\mathbb{R}$ topológiák szerint, $0 \leq f \leq 1$, valamint $F \subseteq \Omega_0 \subseteq [g = 0] = [f = 1]$ és $\overline{[f \neq 0]} = \overline{[g \neq 1]} \subseteq \overline{\Omega_1} \subseteq \Omega$, vagyis az f függvény eleget tesz a (iv) követelményeinek.

(iv)$\Rightarrow$(v) Legyenek $F, F' \subseteq T$ diszjunkt $\mathscr{T}$-zárt halmazok. Ekkor $\Omega := T \setminus F'$ olyan $\mathscr{T}$-nyílt halmaz, hogy $F \subseteq \Omega$, így a (iv) alapján van olyan $f : T \to \mathbb{R}$ függvény, amely folytonos a $\mathscr{T}$ és $\mathscr{E}_\mathbb{R}$ topológiák szerint, $0 \leq f \leq 1$, valamint $F \subseteq [f = 1]$ és $[f \neq 0] \subseteq \Omega$, vagyis $F' \subseteq [f = 0]$.

(v)⇒(i) Legyenek $F, F' \subseteq T$ diszjunkt $\mathscr{T}$-zárt halmazok, és az (v) alapján legyen $f : T \to \mathbb{R}$ olyan függvény, amely folytonos a $\mathscr{T}$ és $\mathscr{E}_{\mathbb{R}}$ topológiák szerint, $0 \leq f \leq 1$, valamint $F \subseteq [f = 1]$ és $F' \subseteq [f = 0]$. Ekkor bármely $r \in]0, 1[$ valós számra $F \subseteq [f < r]$ és $F' \subseteq [f > r]$, továbbá $[f < r] := \overset{-1}{f} \langle] \leftarrow, r[\rangle$ és $[f > r] := \overset{-1}{f} \langle]r, \to [\rangle$ diszjunkt $\mathscr{T}$-nyílt halmazok. Ezért a $(T, \mathscr{T})$ topologikus tér normális. ■

26.5.2. Következmény. *Minden normális T_1-tér teljesen reguláris Hausdorff-tér.*

Bizonyítás. Legyen $(T, \mathscr{T})$ normális T_1-tér, $F \subseteq T$ $\mathscr{T}$-zárt halmaz és $t \in T \setminus F$. Ekkor a $\{t\}$ halmaz $\mathscr{T}$-zárt, mert $(T, \mathscr{T})$ T_1-tér, így az Uriszon-tétel szerint van olyan $f : T \to \mathbb{R}$ függvény, amely folytonos a $\mathscr{T}$ és $\mathscr{E}_{\mathbb{R}}$ topológiák szerint, $0 \leq f \leq 1$, valamint $\{t\} \subseteq [f = 1]$ és $F \subseteq [f = 0]$. Ez azt jelenti, hogy $(T, \mathscr{T})$ teljesen reguláris tér, és korábban láttuk, hogy minden teljesen reguláris T_1-tér szükségképpen Hausdorff-tér. ■

26.6. Normális terek jellemzése II – Tietze-tétel

A következő tétel előtt megjegyezzük, hogy ha $(T, \mathscr{T})$ topologikus tér, az $F \subseteq T$ halmaz $\mathscr{T}$-zárt és $f : F \to \mathbb{R}$ olyan függvény, amely folytonos a $\mathscr{T}|F$ és $\mathscr{E}_{\mathbb{R}}$ topológiák szerint, akkor f nem szükségképpen terjeszthető ki $T \to \mathbb{R}$ függvénnyé úgy, hogy a kiterjesztés folytonos legyen a $\mathscr{T}$ és $\mathscr{E}_{\mathbb{R}}$ topológiák szerint. Másként fogalmazva: topologikus tér zárt topologikus alterén folytonos valós függvény nem feltétlenül terjeszthető ki a térre folytonosan. A Tietze-tétel éppen azt mondja, hogy a zárt topologikus altereken folytonos valós függvények folytonos kiterjeszthetősége *ekvivalens* a tér normálisságával.

26.6.1. Tétel. (Tietze-tétel) *Ha $(T, \mathscr{T})$ topologikus tér, akkor a következő kijelentések ekvivalensek.*

(i) *$(T, \mathscr{T})$ normális tér.*

(ii) *Ha az $F \subseteq T$ halmaz $\mathscr{T}$-zárt, $f : F \to \mathbb{R}$ folytonos függvény a $\mathscr{T}|F$ és $\mathscr{E}_{\mathbb{R}}$ topológiák szerint, és minden $F \ni t$-re $|f(t)| \leq 1$, akkor minden $c \in]0, 1/3]$ valós számhoz létezik olyan $g : T \to \mathbb{R}$ függvény, amely folytonos a $\mathscr{T}$ és $\mathscr{E}_{\mathbb{R}}$ topológiák szerint, és minden $t \in T$ esetén $|g(t)| \leq c$, valamint minden $t \in F$ esetén $|f(t) - g(t)| \leq 1 - c$.*

(iii) *Ha az $F \subseteq T$ halmaz $\mathscr{T}$-zárt és $f : F \to \mathbb{R}$ olyan függvény, amely folytonos a $\mathscr{T}|F$ és $\mathscr{E}_{\mathbb{R}}$ topológiák szerint, akkor létezik olyan $\widetilde{f} : T \to \mathbb{R}$ függvény, amely folytonos a $\mathscr{T}$ és $\mathscr{E}_{\mathbb{R}}$ topológiák szerint és $f = \widetilde{f}|_F$.*

Bizonyítás. (i)⇒(ii) Legyen az $F \subseteq T$ halmaz $\mathscr{T}$-zárt és $f : F \to \mathbb{R}$ olyan függvény, amely folytonos a $\mathscr{T}|F$ és $\mathscr{E}_{\mathbb{R}}$ topológiák szerint, valamint $-1 \leq f \leq 1$. Rögzítsünk egy

$c \in]0, 1/3]$ valós számot. Az folytonosság topologikus jellemzése alapján az $\overset{-1}{f}\langle[-1, -c]\rangle$ halmaz $\mathscr{T}|F$-zárt és F a T-ben $\mathscr{T}$-zárt, ezért az $\overset{-1}{f}\langle[-1, -c]\rangle$ halmaz is $\mathscr{T}$-zárt. Ugyanígy, az $\overset{-1}{f}\langle[c, 1]\rangle$ halmaz $\mathscr{T}$-zárt T-ben, és természetesen $\overset{-1}{f}\langle[-1, -c]\rangle \cap \overset{-1}{f}\langle[c, 1]\rangle = \emptyset$. A $(T, \mathscr{T})$ topologikus tér normálissága és az Uriszon-tétel alapján létezik olyan $h : T \to \mathbb{R}$ függvény, amely folytonos a $\mathscr{T}$ és $\mathscr{E}_{\mathbb{R}}$ topológiák szerint, $0 \leq h \leq 1$, valamint $\overset{-1}{f}\langle[-1, -c]\rangle \subseteq [h = 1]$ és $\overset{-1}{f}\langle[c, 1]\rangle \subseteq [h = 0]$. Értelmezzük a $g := -c(2h - 1)$ függvényt, amely szintén folytonos a $\mathscr{T}$ és $\mathscr{E}_{\mathbb{R}}$ topológiák szerint, valamint $[h = 1] = [g = -c]$ és $[h = 0] = [g = c]$. Ebből következik, hogy $\overset{-1}{f}\langle[-1, -c]\rangle \subseteq [g = -c]$ és $\overset{-1}{f}\langle[c, 1]\rangle \subseteq [g = c]$. Világos, hogy $0 \leq h \leq 1$ miatt $|2h - 1| \leq 1$, ezért $|g| \leq c$. Továbbá, $t \in F$ esetén

– ha $t \in \overset{-1}{f}\langle[-1, -c]\rangle$, akkor $-1 \leq f(t) \leq -c$ és $g(t) = -c$, tehát $-1 + c \leq f(t) - g(t) \leq 0 \leq 1 - c$;

– ha $t \in \overset{-1}{f}\langle[c, 1]\rangle$, akkor $c \leq f(t) \leq 1$ és $g(t) = c$, tehát $-1+c \leq 0 \leq f(t)-g(t) \leq 1-c$;

– ha $t \in \overset{-1}{f}\langle] - c, c[\rangle$, akkor $-c < f(t) < c$, $-c \leq g(t) \leq c$ és $c \leq 1/3$, így $-1 + c \leq -2c < f(t) - g(t) < 2c \leq 1 - c$,

ami azt jelenti, hogy $|f(t) - g(t)| \leq 1 - c$ teljesül, tehát g olyan függvény, amelynek a létezését állítottuk.

(ii)⇒(iii) Legyen az $F \subseteq T$ halmaz $\mathscr{T}$-zárt és $f : F \to \mathbb{R}$ olyan függvény, amely folytonos a $\mathscr{T}|F$ és $\mathscr{E}_{\mathbb{R}}$ topológiák szerint. Az f megfelelő kiterjesztésének létezését három lépésben fogjuk igazolni.

(I) Először feltesszük, hogy az F halmazon $|f| \leq 1$, és megmutatjuk olyan $\widetilde{f} : T \to \mathbb{R}$ függvény létezését, amely folytonos a $\mathscr{T}$ és $\mathscr{E}_{\mathbb{R}}$ topológiák szerint, $\widetilde{f}|_F = f$, valamint a T halmazon eleget tesz a $|\widetilde{f}| \leq 1$ egyenlőtlenségnek.

Legyen $c \in]0, 1/3]$ rögzített valós szám. A kiválasztási axiómával kombinált rekurzió tételének alkalmazásával bebizonyítjuk olyan $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sorozat létezését, hogy minden $\mathbb{N} \ni n$-re $f_n : T \to \mathbb{R}$ folytonos függvény a $\mathscr{T}$ és $\mathscr{E}_{\mathbb{R}}$ topológiák szerint, továbbá a T halmazon $|f_n| \leq 1 - (1 - c)^{n+1}$ és $|f_n - f_{n+1}| \leq c \cdot (1 - c)^{n+1}$, valamint az F halmazon $|f - f_n| \leq (1 - c)^{n+1}$ teljesül.

Az $f_0 : T \to \mathbb{R}$ függvénynek olyannak kell lennie, hogy folytonos a $\mathscr{T}$ és $\mathscr{E}_{\mathbb{R}}$ topológiák szerint, $|f_0| \leq c$ és az F halmazon $|f - f_0| \leq 1 - c$ teljesül. A (ii) állítás éppen ilyen tulajdonságú függvény létezését mondja ki.

Legyen $n \in \mathbb{N}^+$ és $(f_k)_{0 \leq k < n}$ olyan rendszer, hogy minden $k < n$ természetes számra $f_k : T \to \mathbb{R}$ folytonos függvény a $\mathscr{T}$ és $\mathscr{E}_{\mathbb{R}}$ topológiák szerint, továbbá a T halmazon a $|f_k| \leq 1 - (1 - c)^{k+1}$ és $k + 1 < n$ esetén $|f_k - f_{k+1}| \leq c \cdot (1 - c)^{k+1}$, valamint az F halmazon $|f - f_k| \leq (1 - c)^{k+1}$ teljesül. Ekkor az $(1 - c)^{-n}(f - f_{n-1})|_F : F \to \mathbb{R}$

függvényre alkalmazva a (ii) állítást kapjuk olyan $g : T \to \mathbb{R}$ függvény létezését, amely folytonos a $\mathscr{T}$ és $\mathscr{E}_{\mathbb{R}}$ topológiák szerint, továbbá a T halmazon $|g| \leq c$ és az F halmazon $|(1-c)^{-n}(f - f_{n-1}) - g| \leq 1 - c$ teljesül. Ekkor az $f_n := f_{n-1} + (1-c)^n.g : T \to \mathbb{R}$ függvény folytonos a $\mathscr{T}$ és $\mathscr{E}_{\mathbb{R}}$ topológiák szerint, továbbá a definíció szerint az F halmazon $|f - f_n| \leq (1-c)^{n+1}$ teljesül. Továbbá, a T halmazon $|f_{n-1}| \leq 1 - (1-c)^n$ és $|g| \leq c$ is igaz, ezért

$$|f_n| \leq |f_{n-1}| + (1-c)^n |g| \leq 1 - (1-c)^n + (1-c)^n c = 1 - (1-c)^{n+1}.$$

Ugyanakkor, a definíció szerint, a T halmazon $|f_n - f_{n-1}| = (1-c)^n |g| \leq c(1-c)^n$. Ez azt jelenti, hogy az $(f_k)_{0 \leq k < n+1}$ rendszer olyan, hogy minden $k < n+1$ természetes számra $f_k : T \to \mathbb{R}$ folytonos függvény a $\mathscr{T}$ és $\mathscr{E}_{\mathbb{R}}$ topológiák szerint, továbbá a T halmazon a $|f_k| \leq 1 - (1-c)^{k+1}$ és $k+1 < n+1$ esetén $|f_k - f_{k+1}| \leq c \cdot (1-c)^{k+1}$, valamint az F halmazon $|f - f_k| \leq (1-c)^{k+1}$ teljesül. Ezért van olyan függvénysorozat, amelynek a létezését állítottuk; legyen $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ilyen sorozat.

Ha $m, n \in \mathbb{N}$ olyanok, hogy $m < n$, akkor minden $t \in T$ esetén

$$|f_n(t) - f_m(t)| \leq \sum_{k=m+1}^{n} |f_k(t) - f_{k-1}(t)| \leq \sum_{k=m+1}^{n} c(1-c)^k =$$

$$= c(1-c)^{m+1} \sum_{k=0}^{n-m-1} (1-c)^k = c(1-c)^{m+1} \frac{1 - (1-c)^{n-m}}{c} \leq (1-c)^{m+1}.$$

Ebből következik, hogy minden $T \ni t$-re az $(f_n(t))_{n \in \mathbb{N}}$ sorozat Cauchy-sorozat $\mathbb{R}$-ben, így konvergens is az $\mathscr{E}_{\mathbb{R}}$ topológia szerint, tehát jól értelmezett az

$$\widetilde{f} : T \to \mathbb{R}; \quad t \mapsto \lim_{n \to \infty} f_n(t)$$

függvény. Minden $n \in \mathbb{N}$ és $t \in F$ esetén $|f(t) - f_n(t)| \leq (1-c)^{n+1}$ és $1 - c \in]0,1[$, ezért $\widetilde{f}(t) := \lim_{n \to \infty} f_n(t) = f(t)$, vagyis $\widetilde{f}$ az f függvény kiterjesztése. Világos továbbá, hogy minden $t \in T$ esetén $|\widetilde{f}(t)| \leq 1$, mert minden $\mathbb{N} \ni n$-re $|f_n(t)| \leq 1 - (1-c)^{n+1} \leq 1$, így $|\widetilde{f}(t)| = \lim_{n \to \infty} |f_n(t)| \leq 1$.

Megmutatjuk, hogy $\widetilde{f}$ folytonos a $\mathscr{T}$ és $\mathscr{E}_{\mathbb{R}}$ topológiák szerint. Ehhez legyen $t \in T$ rögzített és $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ tetszőleges. Legyen $N \in \mathbb{N}$ olyan, hogy minden $k > N$ természetes számra $(1-c)^{k+1} < \dfrac{\varepsilon}{3}$. Az előzőek alapján minden $m, n > N$ temészetes számra és $T \ni t'$-re $|f_n(t') - f_m(t')| \leq (1-c)^{\min(m,n)+1} < \dfrac{\varepsilon}{3}$. A definíció szerint minden $n > N$ természetes számra és minden $T \ni t'$-re

$$|f_n(t') - \widetilde{f}(t')| = \lim_{m \to \infty} |f_n(t') - f_m(t')| \leq \frac{\varepsilon}{3}.$$

Ugyanakkor $\widetilde{f}(t) = \lim_{n\to\infty} f_n(t)$, ezért van olyan $n \in \mathbb{N}$, hogy $n > N$ és $|\widetilde{f}(t) - f_n(t)| < \dfrac{\varepsilon}{3}$; legyen $n \in \mathbb{N}$ ilyen szám. Ekkor az f_n függvény t pontbeli folytonosságát kihasználva kapjuk olyan $V \in \mathscr{T}(t)$ környezet létezését, hogy minden $t' \in V$ esetén $|f_n(t) - f_n(t')| < \dfrac{\varepsilon}{3}$. Ha $t' \in V$, akkor

$$|\widetilde{f}(t) - \widetilde{f}(t')| \leq |\widetilde{f}(t) - f_n(t)| + |f_n(t) - f_n(t')| + |f_n(t') - \widetilde{f}(t')| < \varepsilon$$

teljesül, ami azt jelenti, hogy $\widetilde{f}$ folytonos a t pontban a $\mathscr{T}$ és $\mathscr{E}_{\mathbb{R}}$ topológiák szerint.

(II) Most feltesszük, hogy az $f : F \to \mathbb{R}$ függvényre minden $t \in F$ esetén teljesül az $|f(t)| < 1$ szigorú egyenlőtlenség, és megmutatjuk olyan $\widetilde{f} : T \to \mathbb{R}$ függvény létezését, amely folytonos a $\mathscr{T}$ és $\mathscr{E}_{\mathbb{R}}$ topológiák szerint, $\widetilde{f}|_F = f$ és minden $t \in T$ esetén $|\widetilde{f}(t)| < 1$.

Tekintettel arra, hogy a feltevés alapján minden $F \ni t$-re $|f(t)| \leq 1$ is teljesül, az (I) alapján van olyan $\widetilde{f}_0 : T \to \mathbb{R}$ függvény, amely folytonos a $\mathscr{T}$ és $\mathscr{E}_{\mathbb{R}}$ topológiák szerint, $\widetilde{f}_0|_F = f$ és minden $t \in T$ esetén $|\widetilde{f}_0(t)| \leq 1$. Ekkor az F, $[\widetilde{f}_0 = -1]$ és $[\widetilde{f}_0 = 1]$ halmazok páronként diszjunktak és $\mathscr{T}$-zártak T-ben, ezért az

$$f_1 : F \cup [\widetilde{f}_0 = -1] \cup [\widetilde{f}_0 = 1] \to \mathbb{R}; \quad t \mapsto \begin{cases} f(t) & \text{, ha } t \in F \\ 1 & \text{, ha } t \in [\widetilde{f}_0 = -1], \\ -1 & \text{, ha } t \in [\widetilde{f}_0 = 1] \end{cases}$$

függvény jól értelmezett és folytonos a $\mathscr{T}|(F \cup [\widetilde{f}_0 = -1] \cup [\widetilde{f}_0 = 1])$ és $\mathscr{E}_{\mathbb{R}}$ topológiák szerint, hiszen a leszűkítései a F, $[\widetilde{f}_0 = -1]$ és $[\widetilde{f}_0 = 1]$ halmazokra folytonosak a megfelelő altértopológia és $\mathscr{E}_{\mathbb{R}}$ szerint. Nyilvánvaló, hogy minden $t \in F \cup [\widetilde{f}_0 = -1] \cup [\widetilde{f}_0 = 1]$ esetén $|f_1(t)| \leq 1$, ezért ismét az (I) állítást alkalmazva az f_1 függvényre kapjuk olyan $\widetilde{f}_1 : T \to \mathbb{R}$ függvény létezését, amely folytonos a $\mathscr{T}$ és $\mathscr{E}_{\mathbb{R}}$ topológiák szerint, $\widetilde{f}_1 \Big|_{F\cup[\widetilde{f}_0=-1]\cup[\widetilde{f}_0=1]} = f_1$ és minden $t \in T$ esetén $|\widetilde{f}_1(t)| \leq 1$. Ekkor az

$$\widetilde{f} : T \to \mathbb{R}; \quad t \mapsto \frac{\widetilde{f}_0(t) + \widetilde{f}_1(t)}{2}$$

függvény folytonos a $\mathscr{T}$ és $\mathscr{E}_{\mathbb{R}}$ topológiák szerint, $\widetilde{f}|_F = f$ és nyilvánvaló, hogy minden $t \in T$ esetén $|\widetilde{f}(t)| < 1$.

(III) Áttérve az általános esetre; legyen $f : F \to \mathbb{R}$ olyan függvény, amely folytonos a $\mathscr{T}|F$ és $\mathscr{E}_{\mathbb{R}}$ topológiák szerint. Vegyünk egy olyan $g : \mathbb{R} \to]-1, 1[$ függvényt, amely *homeomorfizmus* a $\mathscr{E}_{\mathbb{R}}$ és $\mathscr{E}_{\mathbb{R}}|]-1, 1[$ topológiák szerint. Ilyen például a

$$g : \mathbb{R} \to]-1, 1[; \quad x \mapsto \frac{x}{1 + |x|}$$

függvény, de a továbbiakban a g konkrét alakja lényegtelen. Természetesen a $g \circ f : T \to \mathbb{R}$ függvény folytonos a $\mathscr{T}|F$ és $\mathscr{E}_{\mathbb{R}}$ topológiák szerint, és minden $t \in F$ esetén

$|(g \circ f)(t)| < 1$. A (II) alapján van olyan $h : T \to \mathbb{R}$ függvény, amely folytonos a $\mathscr{T}$ és $\mathscr{E}_{\mathbb{R}}$ topológiák szerint, $h|_F = g \circ f$ és minden $t \in T$ esetén $|h(t)| < 1$. Ekkor h folytonos a $\mathscr{T}$ és $\mathscr{E}_{\mathbb{R}}|]-1,1[$ topológiák szerint is, tehát az $\widetilde{f} := g^{-1} \circ h : T \to \mathbb{R}$ függvény folytonos a $\mathscr{T}$ és $\mathscr{E}_{\mathbb{R}}$ topológiák szerint, és $\widetilde{f}|_F = g^{-1} \circ (h|_F) = g^{-1} \circ (g \circ f) = f$.

(iii)⇒(i) Legyenek $F, F' \subseteq T$ diszjunkt $\mathscr{T}$-zárt halmazok, és értelmezzük az

$$f : F \cup F' \to \mathbb{R}; \quad t \mapsto \begin{cases} 1 & , \text{ha } t \in F, \\ 0 & , \text{ha } t \in F' \end{cases}$$

függvényt. Az F halmaz $\mathscr{T}|(F \cup F')$-nyílt, mert $F = (F \cup F') \cap (T \setminus F')$ és a $T \setminus F'$ halmaz $\mathscr{T}$-nyílt. Az F és F' szerepét felcserélve kapjuk, hogy az F' halmaz $\mathscr{T}|(F \cup F')$-nyílt. Ezért a folytonosság lokalitását alkalmazva nyilvánvaló, hogy f folytonos a $\mathscr{T}|(F \cup F')$ és $\mathscr{E}_{\mathbb{R}}$ topológiák szerint, és az $F \cup F'$ halmaz $\mathscr{T}$-zárt, így a (iii) alapján van olyan $\widetilde{f} : T \to \mathbb{R}$ függvény, amely folytonos a $\mathscr{T}$ és $\mathscr{E}_{\mathbb{R}}$ topológiák szerint, valamint $\widetilde{f}|_{F \cup F'} = f$. Ekkor bármely $r \in]0,1[$ valós számra $F \subseteq [\widetilde{f} > r]$ és $F' \subseteq [\widetilde{f} < r]$, továbbá $[\widetilde{f} < r]$ és $[\widetilde{f} > r]$ diszjunkt $\mathscr{T}$-nyílt halmazok. Ezért a $(T, \mathscr{T})$ topologikus tér normális. ■

Megjegyezzük, hogy ha $(T, \mathscr{T})$ normális tér, az $F \subseteq T$ halmaz $\mathscr{T}$-zárt, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $\alpha \le \beta$ és $f : F \to \mathbb{R}$ olyan függvény, amely folytonos a $\mathscr{T}|F$ és $\mathscr{E}_{\mathbb{R}}$ topológiák szerint és $\alpha \le f \le \beta$, akkor létezik olyan $\widetilde{f} : T \to \mathbb{R}$ függvény, amely folytonos a $\mathscr{T}$ és $\mathscr{E}_{\mathbb{R}}$ topológiák szerint és $f = \widetilde{f}|_F$, valamint $\alpha \le \widetilde{f} \le \beta$. Valóban, a Tietze-tétel alapján van olyan $g : T \to \mathbb{R}$ függvény, amely folytonos a $\mathscr{T}$ és $\mathscr{E}_{\mathbb{R}}$ topológiák szerint és $g|_F = f$; ekkor az $\widetilde{f} := \sup(\alpha, \inf(g, \beta)) : T \to \mathbb{R}$ függvény folytonos a $\mathscr{T}$ és $\mathscr{E}_{\mathbb{R}}$ topológiák szerint, $f = \widetilde{f}|_F$, valamint $\alpha \le \widetilde{f} \le \beta$.

26.7. Normális terek jellemzése III – Egységosztás-tétel

26.7.1. Definíció. *Legyen $(T, \mathscr{T})$ topologikus tér, F vektortér és $f : T \to F$ függvény. Ekkor a $\overline{\{t \in T | f(t) \neq 0\}}$ halmazt az f függvény* **tartójának** *nevezzük a $\mathscr{T}$ topológia szerint, és a* $\operatorname{supp}(f)$ *szimbólummal jelöljük.*

Nyilvánvaló, hogy ha $(T, \mathscr{T})$ topologikus tér, F vektortér a K test felett, és $f, g : T \to F$ függvények, valamint $\lambda \in K$, akkor

$$\operatorname{supp}(f+g) \subseteq \operatorname{supp}(f) \cup \operatorname{supp}(g), \quad \operatorname{supp}(\lambda.f) \subseteq \operatorname{supp}(f).$$

Továbbá, ha $(T, \mathscr{T})$ topologikus tér, K test és $f, g : T \to K$ függvények, akkor

$$\operatorname{supp}(f \cdot g) \subseteq \operatorname{supp}(f) \cap \operatorname{supp}(g).$$

Ha $(T, \mathscr{T})$ normális tér, az $F \subseteq T$ halmaz $\mathscr{T}$-zárt, az $\Omega \subseteq T$ halmaz $\mathscr{T}$-nyílt és $F \subseteq \Omega$, akkor az Uriszon-tétel szerint van olyan $f : T \to \mathbb{R}$ függvény, amely folytonos a $\mathscr{T}$ és $\mathscr{E}_{\mathbb{R}}$ topológiák szerint, $0 \leq f \leq 1$, valamint $F \subseteq [f = 1]$ és $\operatorname{supp}(f) \subseteq \Omega$.

26.7.2. Definíció. *Ha $(T, \mathscr{T})$ topologikus tér és $(T_i)_{i \in I}$ a T halmaz befedése, akkor $(T_i)_{i \in I}$-nek alárendelt* **folytonos egységosztásnak** *nevezünk minden olyan $(f_i)_{i \in I}$ függvényrendszert, amelyre teljesül azt, hogy minden $I \ni i$-re $f_i : T \to \mathbb{R}$ folytonos függvény a $\mathscr{T}$ és $\mathscr{E}_{\mathbb{R}}$ topológiák szerint, $0 \leq f_i \leq 1$, $\operatorname{supp}(f_i) \subseteq T_i$, és a $(\operatorname{supp}(f_i))_{i \in I}$ halmazrendszer lokálisan véges a $\mathscr{T}$ topológia szerint, valamint minden $t \in T$ esetén $\sum\limits_{i \in I} f_i(t) = 1$ (azzal a konvencióval, hogy az üres indexhalmazra vett összeg egyenlő 0-val).*

Megjegyezzük, hogy az előző definícióban szereplő $\sum\limits_{i \in I} f_i(t)$ kifejezés *értelmes*, mert a feltevés alapján a $(\operatorname{supp}(f_i))_{i \in I}$ halmazrendszer lokálisan véges a $\mathscr{T}$ topológia szerint, így pontonként is véges, ezért minden $T \ni t$-re az $\{i \in I | f_i(t) \neq 0\}$ halmaz *véges*.

26.7.3. Tétel. (Egységosztás-tétel normális terekre) *Ha $(T, \mathscr{T})$ topologikus tér, akkor a következő kijelentések ekvivalensek.*

(i) *$(T, \mathscr{T})$ normális tér.*

(ii) *A $(T, \mathscr{T})$ topologikus tér bármely $(\Omega_i)_{i \in I}$ pontonként véges $\mathscr{T}$-nyílt befedéséhez létezik a T-nek olyan $(U_i)_{i \in I}$ $\mathscr{T}$-nyílt befedése (ugyanazzal az I indexhalmazzal), amelyre minden $i \in I$ esetén $\overline{U_i} \subseteq \Omega_i$.*

(iii) *A $(T, \mathscr{T})$ topologikus tér bármely lokálisan véges $\mathscr{T}$-nyílt befedéséhez létezik annak alárendelt folytonos egységosztás.*

Bizonyítás. Először azt fogjuk megmutatni, hogy az (i) és (ii) állítások *ekvivalensek* egymással.

(i)$\Rightarrow$(ii) Tegyük fel, hogy $(T, \mathscr{T})$ normális tér és legyen $(\Omega_i)_{i \in I}$ a T-nek pontonként véges $\mathscr{T}$-nyílt befedése. Jelölje $\mathfrak{S}$ a T azon $(U_i)_{i \in I}$ $\mathscr{T}$-nyílt befedéseinek halmazát, amelyekre minden $i \in I$ esetén $\overline{U_i} \subseteq \Omega_i$ vagy $U_i = \Omega_i$. (Megjegyezzük, hogy ha $(U_i)_{i \in I} \in \mathfrak{S}$, akkor létezhet olyan $i \in I$, hogy $\overline{U_i} \subseteq \Omega_i$ és $U_i = \Omega_i$ *egyszerre* teljesül; ekkor Ω_i egyszerre $\mathscr{T}$-nyílt és $\mathscr{T}$-zárt halmaz.) Nyilánvaló, hogy $(\Omega_i)_{i \in I} \in \mathfrak{S}$, tehát $\mathfrak{S} \neq \emptyset$. Az $\mathfrak{S}$ halmazon bevezetjük azt a $\leq$ relációt, amelyre $(U_i)_{i \in I}, (V_i)_{i \in I} \in \mathfrak{S}$ esetén $(U_i)_{i \in I} \leq (V_i)_{i \in I}$ pontosan akkor teljesül, ha minden $I \ni i$-re: ha $\overline{U_i} \subseteq \Omega_i$, akkor $U_i = V_i$. Esetszétválasztásokkal könnyen ellenőrizhető, hogy a $\leq$ reláció rendezés a $\mathfrak{S}$ halmaz felett.

Megmutatjuk, hogy $(\mathfrak{S}, \leq)$ *induktívan* rendezett halmaz. Legyen $\left((U_{j,i})_{i \in I}\right)_{j \in J}$ olyan nem üres rendszer, amelyre minden $j \in J$ esetén $(U_{j,i})_{i \in I} \in \mathfrak{S}$, és minden $J \ni j_1, j_2$-re $(U_{j_1,i})_{i \in I} \leq (U_{j_2,i})_{i \in I}$ vagy $(U_{j_2,i})_{i \in I} \leq (U_{j_1,i})_{i \in I}$. Minden $I \ni i$-re legyen $U_i := \bigcap\limits_{j \in J} U_{j,i}$. Állítjuk, hogy $(U_i)_{i \in I} \in \mathfrak{S}$, és minden $J \ni j$-re $(U_{j,i})_{i \in I} \leq (U_i)_{i \in I}$, vagyis $(U_i)_{i \in I}$ felső korlátja az $\left((U_{j,i})_{i \in I}\right)_{j \in J}$ rendszernek az $(\mathfrak{S}, \leq)$ rendezett halmazban. Legyen $i \in I$

rögzített és $J_i := \{j \in J | \overline{U_{j,i}} \subseteq \Omega_i\}$. Ha $J_i = \emptyset$, akkor minden $j \in J$ esetén $U_{j,i} = \Omega_i$ (a $\mathfrak{S}$ halmaz definíciója és $(U_{j,i})_{i \in I} \in \mathfrak{S}$ miatt), ezért $U_i = \Omega_i$. Ha $j_1, j_2 \in J_i$, akkor $\overline{U_{j_1,i}} \subseteq \Omega_i$ és $\overline{U_{j_2,i}} \subseteq \Omega_i$, ugyanakkor $(U_{j_1,i})_{i \in I} \leq (U_{j_2,i})_{i \in I}$ vagy $(U_{j_2,i})_{i \in I} \leq (U_{j_1,i})_{i \in I}$ teljesül, így szükségképpen $U_{j_1,i} = U_{j_2,i}$ (a $\leq$ rendezés értelmezése alapján). Ez azt jelenti, hogy ha $J_i \neq \emptyset$, akkor bármely $j \in J$ esetén $U_i = U_{j,i}$. Tehát minden $I \ni i$-re $U_i \in \mathscr{T}$, és ha $J_i = \emptyset$, akkor $U_i = \Omega_i$, míg $J_i \neq \emptyset$ esetén bármely $J_i \ni j$-re $U_i = U_{j,i}$, így $\overline{U_i} = \overline{U_{j,i}} \subseteq \Omega_i$. Ezért $(U_i)_{i \in I} \in \mathfrak{S}$ pontosan akkor teljesül, ha $(U_i)_{i \in I}$ befedése T-nek, azaz $T = \bigcup_{i \in I} U_i$. Ennek igazolásához először megjegyezzük, hogy az előzőek szerint minden $I \ni i$-hez létezik olyan $j \in J$, hogy $U_i = U_{j,i}$, ezért a kiválasztási axióma alkalmazásával vehetünk olyan $\tau : I \to J$ függvényt, hogy minden $I \ni i$-re $U_i = U_{\tau(i),i}$. Legyen $t \in T$ rögzített pont. Az $(\Omega_i)_{i \in I}$ rendszer pontonként véges befedése T-nek, ezért az $I_t := \{i \in I | t \in \Omega_i\}$ halmaz véges és nem üres. A $\tau\langle I_t \rangle \subseteq J$ halmaz szintén véges és nem üres, ezért az $\{(U_{j,i})_{i \in I} | j \in \tau\langle I_t \rangle\}$ halmaz $\leq$ szerinti *lineáris rendezettsége* folytán van olyan $j_0 \in \tau\langle I_t \rangle$, hogy minden $\tau\langle I_t \rangle \ni j$-re $(U_{j,i})_{i \in I} \leq (U_{j_0,i})_{i \in I}$. Az $(U_{j_0,i})_{i \in I}$ rendszer befedése T-nek, ezért van olyan $i_0 \in I$, hogy $t \in U_{j_0,i_0}$. De $U_{j_0,i_0} \subseteq \Omega_{i_0}$, ezért $t \in \Omega_{i_0}$, vagyis $i_0 \in I_t$. Tehát $\tau(i_0) \in \tau\langle I_t \rangle$, így a j_0 értelmezése alapján $(U_{\tau(i_0),i})_{i \in I} \leq (U_{j_0,i})_{i \in I}$. Ebből következik, hogy ha $\overline{U_{\tau(i_0),i_0}} \subseteq \Omega_{i_0}$, akkor $t \in U_{j_0,i_0} = U_{\tau(i_0),i_0} = U_{i_0}$, ugyanakkor $U_{\tau(i_0),i_0} = \Omega_{i_0}$ esetén $t \in \Omega_{i_0} = U_{\tau(i_0),i_0} = U_{i_0}$. Ez azt jelenti, hogy $t \in U_{i_0}$, tehát $(U_i)_{i \in I}$ befedése T-nek. Ezzel megmutattuk, hogy $(U_i)_{i \in I} \in \mathfrak{S}$; azt kell még igazolni, hogy minden $J \ni j$-re $(U_{j,i})_{i \in I} \leq (U_i)_{i \in I}$. Ez azonban nyilvánvaló, mert ha $j \in J$ és $i \in I$ olyanok, hogy $\overline{U_{j,i}} \subseteq \Omega_i$, akkor az előzőek alapján $U_{j,i} = U_i$.

A Zorn-lemma alapján vehetünk olyan $(U_i)_{i \in I} \in \mathfrak{S}$ elemet, amely maximális a $\leq$ rendezés szerint. Megmutatjuk, hogy minden $i \in I$ esetén $\overline{U_i} \subseteq \Omega_i$, tehát az $(U_i)_{i \in I}$ rendszer olyan $\mathscr{T}$-nyílt befedése T-nek, amelynek létezését a (ii)-ben állítottuk. Indirekt bizonyítunk, tehát feltesszük, hogy $i_0 \in I$ olyan, amelyre nem igaz az $\overline{U_{i_0}} \subseteq \Omega_{i_0}$ tartalmazás: ekkor $U_{i_0} = \Omega_{i_0}$ és $\overline{U_{i_0}} \neq U_{i_0}$. A $T \setminus \bigcup_{\substack{i \in I \\ i \neq i_0}} U_i$ halmaz $\mathscr{T}$-zárt és $T \setminus \bigcup_{\substack{i \in I \\ i \neq i_0}} U_i \subseteq U_{i_0}$, mert $(U_i)_{i \in I}$ befedése T-nek. A $(T, \mathscr{T})$ topologikus tér normális, ezért van olyan $U \in \mathscr{T}$, hogy $T \setminus \bigcup_{\substack{i \in I \\ i \neq i_0}} U_i \subseteq U \subseteq \overline{U} \subseteq U_{i_0}$. Értelmezzük a $(V_i)_{i \in I}$ rendszert úgy, hogy minden $i \in I \setminus \{i_0\}$ esetén $V_i := U_i$, továbbá $V_{i_0} := U$. Világos, hogy $(V_i)_{i \in I} \in \mathfrak{S}$ és $(U_i)_{i \in I} \leq (V_i)_{i \in I}$, valamint $(U_i)_{i \in I} \neq (V_i)_{i \in I}$, különben $U_{i_0} = V_{i_0} = U$, így $\overline{U_{i_0}} = U_{i_0}$ teljesülne, holott $\overline{U_{i_0}} \neq U_{i_0}$. Ez azt jelenti, hogy $(V_i)_{i \in I} \in \mathfrak{S}$ olyan elem, amely nagyobb $(U_i)_{i \in I}$-nél a $\leq$ rendezés szerint; ez viszont ellentmond az $(U_i)_{i \in I}$ maximalitásának.

(ii)⇒(i) Legyenek F és F' diszjunkt $\mathscr{T}$-zárt halmazok T-ben. Legyen $I := \{0, 1\}$, $\Omega_0 := T \setminus F'$ és $\Omega_1 := T \setminus F$. Ekkor $(\Omega_i)_{i \in I}$ véges, tehát pontonként véges $\mathscr{T}$-nyílt befedése a T halmaznak. A (ii) alapján vehetjük a T-nek olyan $(U_i)_{i \in I}$ $\mathscr{T}$-nyílt befedését, amelyre minden $i \in I$ esetén $\overline{U_i} \subseteq \Omega_i$. Ekkor $\Omega := T \setminus \overline{U_1}$ és $\Omega' := T \setminus \overline{U_0}$ olyan $\mathscr{T}$-nyílt halmazok, amelyekre $F = T \setminus \Omega_1 \subseteq T \setminus \overline{U_1} =: \Omega$ és $F' = T \setminus \Omega_0 \subseteq T \setminus \overline{U_0} =: \Omega'$, valamint $\Omega \cap \Omega' = \emptyset$. Ez azt jelenti, hogy a $(T, \mathscr{T})$ topologikus tér normális.

(ii)⇒(iii) Legyen $(\Omega_i)_{i\in I}$ a $\mathscr{T}$ topológia szerint lokálisan véges és nyílt befedése a T halmaznak. Ekkor $(\Omega_i)_{i\in I}$ pontonként is véges, tehát a (ii) alapján vehetjük a a T-nek olyan $(U_i)_{i\in I}$ $\mathscr{T}$-nyílt befedését, amelyre minden $i \in I$ esetén $\overline{U_i} \subseteq \Omega_i$. (Megjegyezzük, hogy itt még csak az $(\Omega_i)_{i\in I}$ pontonkénti végességét használjuk ki, de később szükség lesz a $\mathscr{T}$ topológia szerinti lokális végességére is.) Minden $I \ni i$-re $U_i \subseteq \Omega_i$, ezért az $(\Omega_i)_{i\in I}$ rendszer pontonkénti végessége folytán az $(U_i)_{i\in I}$ rendszer is pontonként véges. Ezért ismét a (ii) állítást alkalmazva az $(U_i)_{i\in I}$ rendszerre kapjuk a T olyan $(V_i)_{i\in I}$ $\mathscr{T}$-nyílt befedését, amelyre minden $i \in I$ esetén $\overline{V_i} \subseteq U_i$. Láttuk, hogy (ii)⇒(i) teljesül, tehát a $(T, \mathscr{T})$ topologikus tér normális, így az Uriszon-tétel alapján minden $I \ni i$-hez van olyan $g : T \to \mathbb{R}$ függvény, amely folytonos a $\mathscr{T}$ és $\mathscr{E}_{\mathbb{R}}$ topológiák szerint, $0 \leq g \leq 1$, és $\overline{V_i} \subseteq [g = 1] \subseteq [g \neq 0] \subseteq U_i$; ekkor $\operatorname{supp}(g) := \overline{[g \neq 0]} \subseteq \overline{U_i} \subseteq \Omega_i$ is igaz. Tehát a kiválasztási axióma alkalmazásával vehetünk olyan $(g_i)_{i\in I}$ rendszert, hogy minden $I \ni i$-re $g_i : T \to \mathbb{R}$ folytonos függvény a $\mathscr{T}$ és $\mathscr{E}_{\mathbb{R}}$ topológiák szerint, $0 \leq g_i \leq 1$, valamint $\overline{V_i} \subseteq [g_i = 1]$ és $\operatorname{supp}(g_i) \subseteq \overline{U_i} \subseteq \Omega_i$. Világos, hogy minden $I \ni i$-re $V_i \subseteq U_i \subseteq \Omega_i$, ezért az $(\Omega_i)_{i\in I}$ rendszer $\mathscr{T}$ topológia szerinti lokális végessége miatt az $(U_i)_{i\in I}$ és $(V_i)_{i\in I}$ rendszerek szintén lokálisan végesek $\mathscr{T}$ szerint. A $(V_i)_{i\in I}$ rendszer $\mathscr{T}$ szerint lokálisan véges befedése T-nek, ezért minden $T \ni t$-hez van olyan $i \in I$, hogy $g_i(t) = 1$, így a $\{i \in I | g_i(t) \neq 0\}$ halmaz nem üres és véges. Legyen minden $I \ni i$-re

$$f_i : T \to \mathbb{R}; \quad t \mapsto \frac{g_i(t)}{\sum\limits_{\substack{j\in I \\ g_j(t)\neq 0}} g_j(t)}.$$

Nyilvánvaló, hogy $i \in I$ esetén $\operatorname{supp}(f_i) \subseteq \operatorname{supp}(g_i) \subseteq \overline{U_i} \subseteq \Omega_i$, és minden $T \ni t$-re $0 \leq f_i(t) \leq 1$, valamint $\sum\limits_{\substack{i\in I \\ f_i(t)\neq 0}} f_i(t) = 1$. Tehát, ha minden $I \ni i$-re az f_i függvény folytonos volna a $\mathscr{T}$ és $\mathscr{E}_{\mathbb{R}}$ topológiák szerint, akkor az $(f_i)_{i\in I}$ rendszer az $(\Omega_i)_{i\in I}$ befedésnek alárendelt folytonos egységosztás volna. A definícióból látható, hogy ha a

$$G : T \to \mathbb{R}; \quad t \mapsto \sum_{\substack{i\in I \\ g_i(t)\neq 0}} g_i(t)$$

függvény folytonos volna a $\mathscr{T}$ és $\mathscr{E}_{\mathbb{R}}$ topológiák szerint, akkor minden $I \ni i$-re f_i is folytonos lenne ugyanezen topológiák szerint.

A G függvény folytonosságának bizonyításához legyen $t \in T$ rögzített. Az $(\Omega_i)_{i\in I}$ rendszer $\mathscr{T}$ szerinti lokális végessége miatt van olyan $V \in \mathscr{T}(t)$ környezete, hogy $I_V := \{i \in I | V \cap \Omega_i \neq \emptyset\}$ véges halmaz. Ha $t' \in V$, akkor $\{i \in I | g_i(t') \neq 0\} \subseteq I_V$, tehát $G(t') = \sum\limits_{i\in I_V} g_i(t')$. Másként fogalmazva: G egyenlő a $\sum\limits_{i\in I_V} g_i$ összegfüggvénnyel a V környezeten. Tehát a folytonosság lokalitása miatt G folytonos a t pontban a $\mathscr{T}$ és $\mathscr{E}_{\mathbb{R}}$ topológiák szerint.

(iii)⇒(i) Tegyük fel, hogy a $(T,\mathscr{T})$ topologikus tér olyan, hogy a T bármely $\mathscr{T}$ szerint lokálisan véges és nyílt befedéséhez létezik annak alárendelt folytonos egységosztás. Legyenek F és F' diszjunkt $\mathscr{T}$-zárt halmazok T-ben. Legyen $I := \{0,1\}$ és $\Omega_0 := T \setminus F'$, valamint $\Omega_1 := T \setminus F$. Ekkor $(\Omega_i)_{i\in I}$ véges, tehát a $\mathscr{T}$ szerint lokálisan véges $\mathscr{T}$-nyílt befedése T-nek. Legyen $(f_i)_{i\in I}$ egy $(\Omega_i)_{i\in I}$-nek alárendelt folytonos egységosztás. Ekkor $[f_0 \neq 0] \subseteq T \setminus F'$, tehát $F' \subseteq [f_0 = 0]$, továbbá $[f_1 \neq 0] \subseteq T \setminus F$, tehát $F \subseteq [f_1 = 0]$. Minden $t \in T$ esetén $f_0(t)+f_1(t) = 1$, így bármely $r \in]0,1[$ valós számra az $\Omega := [f_0 > r]$ és $\Omega' := [f_0 < r]$ halmazok $\mathscr{T}$-nyíltak, diszjunktak, valamint $F \subseteq \Omega$ és $F' \subseteq \Omega'$, tehát a $(T,\mathscr{T})$ topologikus tér normális. ■

26.8. Félmetrizálható terek és teljesen reguláris terek jellemzése

26.8.1. Definíció. *A T halmaz feletti* **félmetrikának** (*vagy* **eltérésnek**) *nevezünk minden olyan $d : T \times T \to \mathbb{R}_+$ függvényt, amelyre teljesülnek a következők.*

($\mathrm{SM_I}$) *Minden $t \in T$ esetén $d(t,t) = 0$.*

($\mathrm{SM_{II}}$) *Minden $t,t' \in T$ esetén $d(t,t') = d(t',t)$* **(szimmetrikusság)**.

($\mathrm{SM_{III}}$) *Minden $t,t',t'' \in T$ esetén $d(t,t'') \leq d(t,t') + d(t',t'')$* **(háromszög-egyenlőtlenség)**.

A (T,d) párt **félmetrikus térnek** *nevezzük, ha d félmetrika a T halmaz felett. Ha (T,d) félmetrikus tér, akkor minden $\mathbb{R}^+ \ni r$-re és $T \ni t$-re*

$$B_r(t;d) := \{t' \in T | d(t,t') < r\},$$

$$\overline{B}_r(t;d) := \{t' \in T | d(t,t') \leq r\},$$

$$S_r(t;d) := \{t' \in T | d(t,t') = r\}.$$

Példák (félmetrikus terekre). 1) Ha T halmaz, akkor minden T feletti metrika félmetrika, továbbá a $T \times T \to \mathbb{R}_+$ azonosan 0 függvény olyan félmetrika T felett, amely nem metrika, ha T legalább két elemű. Minden metrikus tér félmetrikus tér.

2) Legyen T halmaz és $f : T \to \mathbb{R}$ tetszőleges függvény. Ekkor a

$$d_f : T \times T \to \mathbb{R}_+; \quad (t,t') \mapsto |f(t) - f(t')|$$

leképezés félmetrika T felett; ezt nevezzük az f *függvény által generált félmetrikának.*

3) A 2. példa általánosításaként legyen T halmaz, F normált tér és $f : T \to F$ tetszőleges függvény. Ekkor a

$$d_f : T \times T \to \mathbb{R}_+; \quad (t,t') \mapsto \|f(t) - f(t')\|$$

leképezés szintén félmetrika T felett.

4) Legyen p félnorma az E valós vagy komplex vektortér felett. Ekkor az

$$E \times E \to \mathbb{R}_+; \quad (x, x') \mapsto p(x - x')$$

leképezés félmetrika E felett. Ez a félmetrika pontosan akkor metrika, ha a p félnorma norma.

26.8.2. Állítás. *Ha d félmetrika a T halmaz felett, akkor egyértelműen létezik olyan $\mathscr{T}$ topológia T felett, amely szerint minden $t \in T$ esetén a $\{B_r(t; d) | r \in \mathbb{R}^+\}$ halmaz környezetbázisa a t pontnak.*

Bizonyítás. Ha létezik ilyen $\mathscr{T}$ topológia, akkor szükségképpen

$$\mathscr{T} = \{ \ \Omega \subseteq T \mid (\forall \ t \in \Omega)(\exists \ r \in \mathbb{R}^+) : \ B_r(t; d) \subseteq \Omega \ \},$$

ezért a keresett topológia egyértelműsége nyilvánvaló, ugyanakkor a létezése azon múlik, hogy az imént felírt $\mathscr{T}$ halmaz topológia-e T felett, és ha igen, akkor igaz-e, hogy minden $t \in T$ és $r \in \mathbb{R}^+$ esetén a $B_r(t; d)$ gömb környezete a t pontnak a $\mathscr{T}$ topológia szerint. Az előbbi könnyen ellenőrizhető, míg az utóbbi azon múlik, hogy $t \in T$ és $r \in \mathbb{R}^+$ esetén $B_r(t; d) \in \mathscr{T}$, ami azért igaz, mert ha $t' \in B_r(t; d)$ és $r' \in \mathbb{R}^+$ olyan, hogy $r' < r - d(t, t')$, akkor a háromszög-egyenlőtlenség alapján $B_{r'}(t'; d) \subseteq B_r(t; d)$. ■

26.8.3. Definíció. *Ha d félmetrika a T halmaz felett, akkor $\mathscr{T}_d$ jelöli azt a T feletti topológiát, amely szerint minden $t \in T$ esetén a $\{B_r(t; d) | r \in \mathbb{R}^+\}$ halmaz környezetbázisa a t pontnak; ezt a topológiát a d* **félmetrika által generált topológiának** *nevezzük. Azt mondjuk, hogy a T halmaz feletti $\mathscr{T}$ topológia* **félmetrizálható**, *ha létezik olyan T feletti d félmetrika, amelyre $\mathscr{T}_d = \mathscr{T}$.*

Megjegyezzük, hogy ha T halmaz és $d : T \times T \to \mathbb{R}_+$ az azonosan 0 függvény, akkor $\mathscr{T}_d$ egyenlő a T feletti antidiszkrét topológiával.

26.8.4. Definíció. *Ha (M, d) félmetrikus tér, akkor egy M-ben haladó $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sorozatot* **Cauchy-sorozatnak** *nevezünk a d félmetrika szerint, ha minden $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ esetén van olyan $N \in \mathbb{N}$, hogy minden $m, n > N$ természetes számra $d(x_m, x_n) < \varepsilon$. Azt mondjuk, hogy az (M, d) félmetrikus tér teljes, ha minden M-ben haladó, d szerinti Cauchy-sorozat konvergens a $\mathscr{T}_d$ topológia szerint. Azt mondjuk, hogy a $(T, \mathscr{T})$ topologikus tér* **teljesen félmetrizálható**, *ha létezik olyan T feletti d félmetrika, amelyre $\mathscr{T} = \mathscr{T}_d$ és (M, d) teljes félmetrikus tér.*

Megjegyezzük, hogy ha (M, d) félmetrikus tér, akkor minden M-ben haladó, $\mathscr{T}_d$ szerint konvergens sorozat Cauchy-sorozat a d félmetrika szerint; ez ugyanúgy igazolható, mint metrikus terek esetében.

26.8.5. Definíció. *Ha $(d_i)_{i\in I}$ a T halmaz feletti félmetrikák tetszőleges rendszere, akkor a $\sup_{i\in I} \mathscr{T}_{d_i}$ topológiát a $(d_i)_{i\in I}$* **félmetrika-rendszer által generált topológiának** *nevezzük és a $\mathscr{T}_{(d_i)_{i\in I}}$ szimbólummal jelöljük. Ha $(f_i)_{i\in I}$ a T halmazon értelmezett valós értékű függvények tetszőleges rendszere, akkor a $(d_{f_i})_{i\in I}$ félmetrika-rendszer által generált T feletti topológiát az $(f_i)_{i\in I}$* **függvényrendszer által generált topológiának** *nevezzük és a $\mathscr{T}_{(f_i)_{i\in I}}$ szimbólummal jelöljük.*

Legyen $(d_i)_{i\in I}$ a T halmaz feletti félmetrikák nem üres rendszere. A topológia-szuprémumra vonatkozó korábbi ismereteink és a $\mathscr{T}_{(d_i)_{i\in I}}$ topológia értelmezése alapján a

$$\mathfrak{B} := \left\{ \bigcap_{i\in I} \Omega_i \,\middle|\, (\Omega_i)_{i\in I} \in \prod_{i\in I}^{*} \mathscr{T}_{d_i} \right\}$$

halmaz bázisa a $\mathscr{T}_{(d_i)_{i\in I}}$ topológiának, ahol

$$\prod_{i\in I}^{*} \mathscr{T}_{d_i} := \left\{ (\Omega_i)_{i\in I} \in \prod_{i\in I} \mathscr{T}_{d_i} \,\middle|\, \{i \in I | \Omega_i \neq T\} \text{ véges halmaz} \right\}.$$

Ha $(\Omega_i)_{i\in I} \in \prod_{i\in I}^{*} \mathscr{T}_{d_i}$ és $J := \{i \in I | \Omega_i \neq T\}$, akkor $J \neq \emptyset$ esetén $\bigcap_{i\in I} \Omega_i = \bigcap_{i\in J} \Omega_i$, míg $J = \emptyset$ esetén $\bigcap_{i\in I} \Omega_i = T$. Ha $J \neq \emptyset$, akkor $t \in \bigcap_{i\in I} \Omega_i$ esetén van olyan $(r_i)_{i\in I}$ rendszer $\mathbb{R}^+$-ban, amelyre minden $i \in J$ esetén $B_{r_i}(t; d_i) \subseteq \Omega_i$, tehát $\bigcap_{i\in J} B_{r_i}(t; d_i) \subseteq \bigcap_{i\in J} \Omega_i = \bigcap_{i\in I} \Omega_i$. Ebből következik, hogy egy $\Omega \subseteq T$ halmaz pontosan akkor nyílt a $(d_i)_{i\in I}$ félmetrika-rendszer által generált topológia szerint, ha minden $t \in \Omega$ ponthoz létezik olyan $J \subseteq I$ nem üres véges halmaz, és olyan $(r_i)_{i\in J}$ rendszer $\mathbb{R}^+$-ban, hogy $\bigcap_{i\in J} B_{r_i}(t; d_i) \subseteq \Omega$ (vagy ami ugyanaz: minden $t \in \Omega$ ponthoz létezik olyan $J \subseteq I$ nem üres véges halmaz, és olyan $r \in \mathbb{R}^+$, hogy $\bigcap_{i\in J} B_r(t; d_i) \subseteq \Omega$). Továbbá, a $\mathscr{T}_{(d_i)_{i\in I}} := \sup_{i\in I} \mathscr{T}_{d_i}$ topológia megegyezik a $((T, \mathscr{T}_{d_i}), id_T)_{i\in I}$ rendszer által projektíven előállított T feletti topológiával, ezért minden $(T', \mathscr{T}')$ topologikus térre, és minden $f : T' \to T$ függvényre, az f pontosan akkor folytonos a $\mathscr{T}'$ és $\mathscr{T}_{(d_i)_{i\in I}}$ topológiák szerint, ha minden $I \ni i$-re az f függvény folytonos a $\mathscr{T}'$ és $\mathscr{T}_{d_i}$ topológiák szerint.

Az előzőek alapján könnyen látható, hogy ha $(d_i)_{i\in I}$ a T halmaz feletti félmetrikák nem üres rendszere, akkor a $\mathscr{T}_{(d_i)_{i\in I}}$ topológia pontosan akkor Hausdorff-topológia, ha minden $t, t' \in T$ ponthoz, $t \neq t'$ esetén létezik olyan $i \in I$, hogy $d_i(t, t') > 0$.

26.8.6. Állítás. *Ha T halmaz és $(f_i)_{i\in I}$ olyan rendszer, hogy minden $i \in I$ esetén $f_i : T \to \mathbb{R}$ függvény, akkor a $\mathscr{T}_{(f_i)_{i\in I}}$ topológia egyenlő az $((\mathbb{R}, \mathscr{E}_\mathbb{R}), f_i)_{i\in I}$ rendszer által projektíven előállított T feletti topológiával, vagyis $\mathscr{T}_{(f_i)_{i\in I}}$ az a legkisebb T feletti topológia, amelyre minden $i \in I$ esetén az $f_i : T \to \mathbb{R}$ függvény folytonos a $\mathscr{T}_{(f_i)_{i\in I}}$ és $\mathscr{E}_\mathbb{R}$ topológiák szerint.*

Bizonyítás. Ha $I = \emptyset$, akkor a definíció alapján $\mathscr{T}_{(f_i)_{i\in I}}$ megegyezik az T feletti antidiszkrét topológiával; ugyanakkor minden $I \ni i$-re az f_i függvény folytonos a T feletti antidiszkrét topológia és $\mathscr{E}_{\mathbb{R}}$ szerint, tehát az $((\mathbb{R}, \mathscr{E}_{\mathbb{R}}), f_i)_{i\in I}$ rendszer által projektíven előállított T feletti topológia egyenlő a T feletti antidiszkrét topológiával. Ezért feltehető, hogy $I \neq \emptyset$.

Jelölje $\mathscr{T}$ az $((\mathbb{R}, \mathscr{E}_{\mathbb{R}}), f_i)_{i\in I}$ rendszer által projektíven előállított T feletti topológiát és $\mathscr{T}' := \mathscr{T}_{(f_i)_{i\in I}}$. Minden $i \in I$ esetén legyen $d_i := d_{f_i}$. Ha $i \in I$ és $r_i \in \mathbb{R}^+$, akkor minden $T \ni t$-re $B_{r_i}(t; d_i) = [|f_i - f_i(t)| < r_i]$, és a jobb oldalon álló halmaz $\mathscr{T}$-nyílt, hiszen f_i folytonos a $\mathscr{T}$ és $\mathscr{E}_{\mathbb{R}}$ topológiák szerint. Ebből következik, hogy ha $J \subseteq I$ nem üres véges halmaz és $(r_i)_{i\in J}$ $\mathbb{R}^+$-ban haladó rendszer, akkor minden $T \ni t$-re a $\bigcap_{i\in J} B_{r_i}(t; d_i)$ halmaz $\mathscr{T}$-nyílt. Az állítás előtt álló megjegyzés szerint ezek a halmazok topologikus bázisát alkotják a $\mathscr{T}'$ topológiának, ezért $\mathscr{T}' \subseteq \mathscr{T}$.

A fordított tartalmazás bizonyításához elég azt megmutatni, hogy minden $i \in I$ esetén az $f_i : T \to \mathbb{R}$ függvény folytonos a $\mathscr{T}'$ és $\mathscr{E}_{\mathbb{R}}$ topológiák szerint, hiszen a definíció szerint $\mathscr{T}$ a legkisebb ilyen tulajdonságú T feletti topológia. Legyen $i \in I$, $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ és $t \in T$. A $B_\varepsilon(t; d_i)$ gömb $\mathscr{T}'$-nyílt környezete t-nek, és világos, hogy $f_i\langle B_\varepsilon(t; d_i)\rangle \subseteq B_\varepsilon(f_i(t); \mathbb{R})$, tehát f_i a t pontban folytonos a $\mathscr{T}'$ és $\mathscr{E}_{\mathbb{R}}$ topológiák szerint. ■

26.8.7. Tétel. (Teljesen reguláris terek jellemzése) *Ha $(T, \mathscr{T})$ topologikus tér, akkor a következő állítások ekvivalensek.*

(i) *$(T, \mathscr{T})$ teljesen reguláris.*

(ii) *Létezik $T \to [0, 1]$ függvényeknek olyan $(f_i)_{i\in I}$ rendszere, hogy $\mathscr{T} = \mathscr{T}_{(f_i)_{i\in I}}$.*

(iii) *Létezik T feletti félmetrikáknak olyan $(d_i)_{i\in I}$ rendszere, hogy $\mathscr{T} = \mathscr{T}_{(d_i)_{i\in I}}$.*

Továbbá, ha $(T, \mathscr{T})$ teljesen reguláris tér és $I \subseteq \mathscr{F}(T; [0, 1])$ olyan halmaz, hogy minden $f \in I$ esetén f folytonos a $\mathscr{T}$ és $\mathscr{E}_{\mathbb{R}}|[0, 1]$ topológiák szerint, valamint minden $F \subseteq T$ $\mathscr{T}$-zárt halmazhoz és $T \setminus F \ni t$-hez létezik olyan $f \in I$, hogy $F \subseteq [f = 0]$ és $f(t) = 1$, akkor $\mathscr{T} = \mathscr{T}_{(f)_{f\in I}}$.

Bizonyítás. Az állítás triviálisan igaz akkor, amikor $\mathscr{T}$ a T feletti antidiszkrét topológia.

(i)⇒(ii) A $(T, \mathscr{T})$ topologikus tér teljesen reguláris, ezért van olyan $I \subseteq \mathscr{F}(T; [0, 1])$ halmaz, hogy minden $f \in I$ függvény folytonos a $\mathscr{T}$ és $\mathscr{E}_{\mathbb{R}}|[0, 1]$ topológiák szerint, valamint minden $F \subseteq T$ $\mathscr{T}$-zárt halmazhoz és $T \setminus F \ni t$-hez van olyan $f \in I$, hogy $f(t) = 1$ és $F \subseteq [f = 0]$. Megmutatjuk, hogy bármely ilyen tulajdonságú I halmazra az $(f)_{f\in I}$ függvényrendszer által generált T feletti topológia egyenlő $\mathscr{T}$-vel.

Jelölje $\mathscr{T}'$ az $(f)_{f\in I}$ függvényrendszer által generált T feletti topológiát, és legyen $t \in T$ rögzített pont.

Legyen $V \in \mathscr{T}(t)$; ekkor van olyan $\Omega \in \mathscr{T}$, hogy $t \in \Omega \subseteq V$. A $T \setminus \Omega$ halmaz $\mathscr{T}$-zárt és $t \notin T \setminus \Omega$, így az I függvényhalmaz választása szerint van olyan $f \in I$, hogy $f(t) = 1$ és $T \setminus \Omega \subseteq [f = 0]$. Az f függvény folytonos a $\mathscr{T}'$ és $\mathscr{E}_{\mathbb{R}}$ topológiák szerint, ezért bármely $r \in]0, 1[$ valós számra az $[f > r] = \overset{-1}{f}\langle]r, \rightarrow [\rangle$ halmaz $\mathscr{T}'$-nyílt és $t \in [f = 1] \subseteq [f > r] \subseteq [f \neq 0] \subseteq \Omega \subseteq V$, így $V \in \mathscr{T}'(t)$. Ez azt jelenti, hogy $\mathscr{T}(t) \subseteq \mathscr{T}'(t)$.

Megfordítva, legyen $V \in \mathscr{T}'(t)$; ekkor van olyan $\Omega \in \mathscr{T}'$, hogy $t \in \Omega' \subseteq V$. Legyen $J \subseteq I$ olyan nem üres véges halmaz és $r \in \mathbb{R}^+$ olyan, hogy $\bigcap_{f \in J} B_r(t; d_f) \subseteq V$. Ha $f \in J$, akkor $B_r(t; d_f) = [|f - f(t)| < r]$, és az f függvény folytonos a $\mathscr{T}$ és $\mathscr{E}_{\mathbb{R}}$ topológiák szerint, így a $[|f - f(t)| < r]$ halmaz $\mathscr{T}$-nyílt. Ebből következik, hogy $\bigcap_{f \in J} B_r(t; d_f) \in \mathscr{T}$, így $V \in \mathscr{T}(t)$. Ez azt jelenti, hogy $\mathscr{T}'(t) \subseteq \mathscr{T}(t)$.

Tehát minden $t \in T$ esetén $\mathscr{T}(t) = \mathscr{T}'(t)$, így $\mathscr{T} = \mathscr{T}'$. Ezzel nemcsak az (i)⇒(ii) implikációt, hanem az utolsó állításunkat is igazoltuk.

(ii)⇒(iii) Triviális.

(iii)⇒(i) Legyen $(d_i)_{i \in I}$ a T halmaz feletti félmetrikáknak olyan rendszere, hogy $\mathscr{T} = \mathscr{T}_{(d_i)_{i \in I}}$. Ha $i \in I$ és $t \in T$, akkor $d_i(\cdot, t) : T \to \mathbb{R}$ függvény folytonos a $\mathscr{T}$ és $\mathscr{E}_{\mathbb{R}}$ topológiák szerint, mert a d_i-re vonatkozó háromszög-egyenlőtlenség és szimmetria alapján minden $T \ni t_1, t_2$-re fennáll a $|d_i(t_1, t) - d_i(t_2, t)| \leq d_i(t_1, t_2)$ egyenlőtlenség.

Legyen az $F \subseteq T$ halmaz $\mathscr{T}$-zárt és $t \in T \setminus F$. Ekkor a $T \setminus F$ halmaz a t pontnak $\mathscr{T}$-nyílt környezete, ezért van olyan $J \subseteq I$ nem üres véges halmaz és $r \in \mathbb{R}^+$, hogy $\bigcap_{i \in J} B_r(t; d_i) \subseteq T \setminus F$. Ekkor az

$$f := 1 - \inf \left(1, \frac{1}{r} \sup_{i \in J} d_i(\cdot, t)\right) : T \to \mathbb{R}$$

függvény folytonos a $\mathscr{T}$ és $\mathscr{E}_{\mathbb{R}}$ topológiák szerint, továbbá $0 \leq f \leq 1$, és $F \subseteq [f = 0]$, valamint $f(t) = 1$. A definíció alapján ez azt jelenti, hogy a $(T, \mathscr{T})$ topologikus tér teljesen reguláris. ■

Az iménti tétel bizonyításának (i)⇒(ii) részéből látható, hogy ha $(T, \mathscr{T})$ teljesen reguláris tér és $I \subseteq \mathscr{F}(T; [0, 1])$ olyan halmaz, hogy minden $f \in I$ esetén f folytonos a $\mathscr{T}$ és $\mathscr{E}_{\mathbb{R}}|[0, 1]$ topológiák szerint, valamint minden $F \subseteq T$ $\mathscr{T}$-zárt halmazhoz és $T \setminus F \ni t$-hez létezik olyan $f \in I$, hogy $F \subseteq [f = 0]$ és $f(t) = 1$, akkor $\mathscr{T} = \mathscr{T}_{(f)_{f \in I}}$. Másfelől láttuk, hogy a $\mathscr{T}_{(f)_{f \in I}}$ topológia megegyezik az $((\mathbb{R}, \mathscr{E}_{\mathbb{R}}), f)_{f \in I}$ rendszer által előállított T feletti iniciális topológiával. Ebből azonnal következik, hogy ha I ilyen tulajdonságú függvényhalmaz, akkor minden $(T', \mathscr{T}')$ topologikus térre, és minden $g : T' \to T$ függvényre: a g pontosan akkor folytonos a $\mathscr{T}'$ és $\mathscr{T}$ topológiák szerint, ha minden $I \ni f$-re az $f \circ g : T' \to \mathbb{R}$ függvény folytonos a $\mathscr{T}'$ és $\mathscr{E}_{\mathbb{R}}$ topológiák szerint.

26.9. Beágyazási tételek

26.9.1. Tétel. (Teljesen reguláris terek beágyazási tétele) *Ha $(T, \mathscr{T})$ teljesen reguláris Hausdorff-tér és $I \subseteq \mathscr{F}(T; [0,1])$ olyan halmaz, hogy minden $f \in I$ esetén f folytonos a $\mathscr{T}$ és $\mathscr{E}_{\mathbb{R}}|[0,1]$ topológiák szerint, valamint minden $F \subseteq T$ $\mathscr{T}$-zárt halmazhoz és $T \setminus F \ni t$-hez létezik olyan $f \in I$, hogy $F \subseteq [f = 0]$ és $f(t) = 1$, akkor a $\left([0,1]^I, (\mathscr{E}_{\mathbb{R}}|[0,1])^I\right)$ topologikus kockának van olyan topologikus altere, amely homeomorf $(T, \mathscr{T})$-vel (amit úgy fejezünk ki, hogy a $(T, \mathscr{T})$ teljesen reguláris tér beágyazható a $\left([0,1]^I, (\mathscr{E}_{\mathbb{R}}|[0,1])^I\right)$ topologikus kockába).*

Bizonyítás. Legyen $\mathscr{T}' := (\mathscr{E}_{\mathbb{R}}|[0,1])^I$, és értelmezzük a

$$\varphi : T \to [0,1]^I; \quad t \mapsto (f \mapsto f(t))$$

leképezést, tehát $t \in T$ esetén $\varphi(t) \in [0,1]^I$ az a függvény, amely minden $f \in I$ függvényhez az $f(t)$ értéket rendeli.

Legyenek $t, t' \in T$ és $t \neq t'$; akkor $t \in T \setminus \{t'\}$ és a $\{t'\}$ halmaz $\mathscr{T}$-zárt, mert a $(T, \mathscr{T})$ topologikus tér T_1-tér. Ezért az I választása szerint van olyan $f \in I$, hogy $f(t) = 1$ és $\{t'\} \subseteq [f = 0]$, azaz $f(t') = 0$. Tehát $\varphi(t)(f) = 1 \neq 0 = f(t') = \varphi(t')(f)$, vagyis a φ függvény injektív.

Minden $f \in I$ esetén jelölje pr_f az f által meghatározott $[0,1]^I \to [0,1]$ projekciót. A szorzattopológia definíciója alapján a φ függvény pontosan akkor folytonos a $\mathscr{T}$ és $\mathscr{T}'$ topológiák szerint, ha minden $I \ni f$-re a $pr_f \circ \varphi : T \to [0,1]$ függvény folytonos a $\mathscr{T}$ és $\mathscr{E}_{\mathbb{R}}|[0,1]$ topológiák szerint. De $f \in I$ esetén minden $T \ni t$-re $(pr_f \circ \varphi)(t) = f(t)$, azaz $pr_f \circ \varphi = f$, és f folytonos a $\mathscr{T}$ és $\mathscr{E}_{\mathbb{R}}|[0,1]$ topológiák szerint. Ezért a $\varphi : T \to [0,1]^I$ leképezés folytonos a $\mathscr{T}$ és $\mathscr{T}'$ topológiák szerint. Tehát a $\varphi : T \to \mathrm{Im}(\varphi)$ függvény olyan bijekció, amely folytonos a $\mathscr{T}$ és $\mathscr{T}'|\mathrm{Im}(\varphi)$ topológiák szerint.

A bizonyítás utolsó lépéseként megmutatjuk, hogy a $\varphi^{-1} : \mathrm{Im}(\varphi) \to T$ függvény folytonos a $\mathscr{T}'|\mathrm{Im}(\varphi)$ és $\mathscr{T}$ topológiák szerint. Az állítás előtt álló megjegyzés alapján φ^{-1} pontosan akkor folytonos a $\mathscr{T}'|\mathrm{Im}(\varphi)$ és $\mathscr{T}$ topológiák szerint, ha minden $I \ni f$-re az $f \circ \varphi^{-1} : \mathrm{Im}(\varphi) \to \mathbb{R}$ függvény folytonos a $\mathscr{T}'|\mathrm{Im}(\varphi)$ és $\mathscr{E}_{\mathbb{R}}$ topológiák szerint. Ha $f \in I$, akkor nyilvánvalóan $f \circ \varphi^{-1} = pr_f|_{\mathrm{Im}(\varphi)}$, vagyis $f \circ \varphi^{-1}$ egyenlő a $pr_f : [0,1]^I \to [0,1]$ projekció-függvény $\mathrm{Im}(\varphi)$-re vett leszűkítésével. A szorzattopológia értelmezése alapján minden $f \in I$ esetén a pr_f függvény folytonos a $\mathscr{T}'$ és $\mathscr{E}_{\mathbb{R}}|[0,1]$ topológiák szerint, így $pr_f|_{\mathrm{Im}(\varphi)}$ folytonos a $\mathscr{T}'|\mathrm{Im}(\varphi)$ és $\mathscr{E}_{\mathbb{R}}|[0,1]$ topológiák szerint. Ezért minden $I \ni f$-re $f \circ \varphi^{-1}$ folytonos a $\mathscr{T}'|\mathrm{Im}(\varphi)$ és $\mathscr{E}_{\mathbb{R}}$ topológiák szerint. ■

26.9.2. Tétel. (Uriszon beágyazási tétele) *Minden megszámlálható bázisú reguláris T_1-tér homeomorf a $\left([0,1]^{\mathbb{N}}, (\mathscr{E}_{\mathbb{R}}|[0,1])^{\mathbb{N}}\right)$ euklidészi kocka valamelyik topologikus alterével.*

Bizonyítás. Legyen $(T, \mathscr{T})$ megszámlálható bázisú reguláris T_1-tér. A Lindelöf-tétel szerint minden megszámlálható bázisú topologikus tér Lindelöf-tér, és a Tyihonov-lemma szerint minden reguláris Lindelöf-tér normális. Ezért $(T, \mathscr{T})$ normális T_1-tér, így $(T, \mathscr{T})$ teljesen reguláris Hausdorff-tér. Ha létezne olyan $I \subseteq \mathscr{F}(T; [0, 1])$ *megszámlálható* halmaz, hogy minden $f \in I$ esetén f folytonos a $\mathscr{T}$ és $\mathscr{E}_{\mathbb{R}}|[0, 1]$ topológiák szerint, valamint minden $F \subseteq T$ $\mathscr{T}$-zárt halmazhoz és $T \setminus F \ni t$-hez létezik olyan $f \in I$, hogy $F \subseteq [f = 0]$ és $f(t) = 1$, akkor a teljesen reguláris terek beágyazási tétele (26.9.1.) szerint a $\ [0, 1]^I, (\mathscr{E}_{\mathbb{R}}|[0, 1])^I\ $ topologikus kockának van olyan topologikus altere, amely homeomorf $(T, \mathscr{T})$-vel. Ekkor I véges, vagy ekvipotens $\mathbb{N}$-nel. Az első esetben $\ [0, 1]^I, (\mathscr{E}_{\mathbb{R}}|[0, 1])^I\ $ homeomorf a $\ [0, 1]^{\mathbb{N}}, (\mathscr{E}_{\mathbb{R}}|[0, 1])^{\mathbb{N}}\ $ euklidészi kocka valamelyik topologikus alterével, míg a második esetben $\ [0, 1]^I, (\mathscr{E}_{\mathbb{R}}|[0, 1])^I\ $ és $\ [0, 1]^{\mathbb{N}}, (\mathscr{E}_{\mathbb{R}}|[0, 1])^{\mathbb{N}}\ $ homeomorfak. Ezért $(T, \mathscr{T})$ is homeomorf volna a $\ [0, 1]^{\mathbb{N}}, (\mathscr{E}_{\mathbb{R}}|[0, 1])^{\mathbb{N}}\ $ euklidészi kocka valamelyik topologikus alterével.

Egy ilyen tulajdonságú I függvényhalmaz előállítása céljából vegyük a $(T, \mathscr{T})$ topologikus térnek egy $\mathfrak{B}$ megszámlálható topologikus bázisát, és legyen $\mathfrak{I} := \{(U, V) \in \mathfrak{B} \times \mathfrak{B} | \overline{U} \subseteq V\}$. A $(T, \mathscr{T})$ topologikus tér normális, ezért az Uriszon-tétel alapján minden $\mathfrak{I} \ni (U, V)$-hez van olyan $f : T \to \mathbb{R}$ függvény, amely folytonos a $\mathscr{T}$ és $\mathscr{E}_{\mathbb{R}}$ topológiák szerint, $0 \leq f \leq 1$, $\overline{U} \subseteq [f = 1]$ és $[f \neq 0] \subseteq V$. Ezért kiválaszthatunk olyan $\ f_{U,V}\ {}_{(U,V)\in\mathfrak{I}}$ rendszert, hogy minden $\mathfrak{I} \ni (U, V)$-re $f_{U,V} : T \to \mathbb{R}$ folytonos függvény a $\mathscr{T}$ és $\mathscr{E}_{\mathbb{R}}$ topológiák szerint, $\overline{U} \subseteq [f_{U,V} = 1]$ és $[f_{U,V} \neq 0] \subseteq V$. Az $\mathfrak{I}$ halmaz megszámlálható, ezért $I := \ f_{U,V} \,\big|\, (U, V) \in \mathfrak{I}\ \subseteq \mathscr{F}(T; [0, 1])$ olyan megszámlálható függvényhalmaz, amelynek minden eleme folytonos a $\mathscr{T}$ és $\mathscr{E}_{\mathbb{R}}$ topológiák szerint. Legyen az $F \subseteq T$ halmaz $\mathscr{T}$-zárt és $t \in T \setminus F$. A $\mathfrak{B}$ halmaz topologikus bázisa a $(T, \mathscr{T})$ topologikus térnek, ezért vehetünk olyan $V \in \mathfrak{B}$ halmazt, hogy $t \in V \subseteq T \setminus F$. A $(T, \mathscr{T})$ topologikus tér reguláris, ezért a $V \in \mathscr{T}(t)$ környezethez van olyan $W \in \mathscr{T}(t)$, amely $\mathscr{T}$-zárt és $W \subseteq V$. Ekkor $t \in \overset{\circ}{W} \in \mathscr{T}$, így ismét kihasználva azt, hogy $\mathfrak{B}$ topologikus bázisa $(T, \mathscr{T})$-nek kapunk olyan $U \in \mathfrak{B}$ halmazt, hogy $t \in U \subseteq \overset{\circ}{W}$. Világos, hogy $\overline{U} \subseteq W \subseteq V$, tehát $(U, V) \in \mathfrak{I}$, és $f_{U,V}(t) = 1$, valamint $F \subseteq T \setminus V \subseteq [f_{U,V} = 0]$. Ez azt jelenti, hogy I olyan függvényhalmaz, amelynek a létezését állítottuk. ■

26.9.3. Tétel. (Uriszon metrizációs tétele) *Ha $(T, \mathscr{T})$ T_1-tér, akkor a következő állítások ekvivalensek.*

(i) *$(T, \mathscr{T})$ reguláris és megszámlálható bázisú.*

(ii) *$(T, \mathscr{T})$ homeomorf a $\ [0, 1]^{\mathbb{N}}, (\mathscr{E}_{\mathbb{R}}|[0, 1])^{\mathbb{N}}\ $ euklidészi kocka valamelyik topologikus alterével.*

(iii) *$(T, \mathscr{T})$ metrizálható és szeparábilis.*

Bizonyítás. (i)⇒(ii) Ez a következtetés ekvivalens Uriszon beágyazási tételével (a T_1 terek körében).

(ii)⇒(iii) A $\ [0, 1]^{\mathbb{N}}, (\mathscr{E}_{\mathbb{R}}|[0, 1])^{\mathbb{N}}\ $ euklidészi kocka metrizálható, és nyilvánvaló, hogy metrizálható topologikus tér bármely topologikus altere metrizálható.

(iii)$\Rightarrow$(i) Láttuk, hogy szeparábilis metrizálható tér megszámlálható bázisú (25.3.4.) és normális (26.4.8.) Hausdorff-tér, ezért szükségképpen reguláris. ■

27. fejezet

Kompakt terek és lokálisan kompakt terek

27.1. A kompakt halmazok tulajdonságai

Ettől kezdve áttérünk a topologikus terek jelölésével kapcsolatos szokásos konvencióra. Tehát minden topologikus teret egyetlen szimbólummal, az alaphalmaz jelével jelölünk, ha ez nem okoz félreértést. Hasonló megállapodáshoz tartottuk magunkat a testek, a vektorterek, a metrikus terek és a normált terek esetében is. Továbbá, a $\mathbb{K}$ test minden részhalmazát az euklidészi topológia (vagyis $\mathscr{E}_{\mathbb{K}}$) leszűkítésével ellátva topologikus térnek tekintjük. Tehát a $\mathbb{K}$ részhalmazain más topológiát nem veszünk; ha arra mégis szükség volna, akkor azt külön megemlítjük.

27.1.1. Definíció. *A T topologikus teret* **kompaktnak** *nevezzük, ha a T bármely nyílt befedésének létezik véges részbefedése. A T topologikus tér E részhalmazát kompaktnak mondjuk, ha E a T topológiájának leszűkítésével ellátva kompakt tér. A T topologikus tér E részhalmazát* **relatív kompaktnak** *nevezzük, ha az $\overline{E}$ halmaz kompakt T-ben.*

Kompakt tér nem feltétlenül Hausdorff-tér. Például minden antidiszkrét tér nyilvánvalóan kompakt, de ha az alaphalmaz legalább két elemű, akkor nem Hausdorff-tér, sőt nem is T_0-tér.

27.1.2. Állítás. *Legyen T topologikus tér. Az $E \subseteq T$ halmaz pontosan akkor kompakt, ha a T nyílt részhalmazainak bármely $(\Omega_i)_{i \in I}$ rendszerére teljesül az, hogy ha $E \subseteq \bigcup_{i \in I} \Omega_i$, akkor létezik olyan $J \subseteq I$ véges halmaz, amelyre $E \subseteq \bigcup_{i \in J} \Omega_i$.*

Bizonyítás. Tegyük fel, hogy az $E \subseteq T$ halmaz kompakt, és legyen $(\Omega_i)_{i \in I}$ a T nyílt részhalmazainak olyan rendszere, hogy $E \subseteq \bigcup_{i \in I} \Omega_i$. Az altértopológia tulajdonságai szerint ekkor az $(E \cap \Omega_i)_{i \in I}$ halmazrendszer mindegyik tagja nyílt az E topologikus altérben, és $E = \bigcup_{i \in I} (E \cap \Omega_i)$. Az E kompaktsága miatt van olyan $J \subseteq I$ véges halmaz, hogy $E = \bigcup_{i \in J} (E \cap \Omega_i)$. Természetesen ekkor $E \subseteq \bigcup_{i \in J} \Omega_i$ is teljesül.

Megfordítva, tegyük fel, hogy a T nyílt részhalmazainak bármely $(\Omega_i)_{i \in I}$ rendszerére teljesül az, hogy $E \subseteq \bigcup_{i \in I} \Omega_i$ esetén van olyan $J \subseteq I$ véges halmaz, hogy $E \subseteq \bigcup_{i \in J} \Omega_i$. Legyen $(\Omega'_i)_{i \in I}$ olyan halmazrendszer, hogy minden $i \in I$ esetén Ω'_i nyílt részhalmaza az E topologikus altérnek és $E = \bigcup_{i \in I} \Omega'_i$. Az altértopológia definíciója alapján kiválaszthatunk olyan $(\Omega_i)_{i \in I}$ rendszert, hogy minden $I \ni i$-re Ω_i nyílt részhalmaza T-nek és $\Omega'_i = E \cap \Omega_i$. Világos, hogy ekkor $E = \bigcup_{i \in I} \Omega'_i = \bigcup_{i \in I} (E \cap \Omega_i) \subseteq \bigcup_{i \in I} \Omega_i$, tehát a feltevés alapján van olyan $J \subseteq I$ véges halmaz, hogy $E \subseteq \bigcup_{i \in J} \Omega_i$. Ezért $E = \bigcup_{i \in J} (E \cap \Omega_i) = \bigcup_{i \in J} \Omega'_i$, így E kompakt halmaz T-ben. ■

Legyen T topologikus tér, $E \subseteq T$ kompakt halmaz, és $(V_t)_{t \in E}$ olyan rendszer, hogy minden $E \ni t$-re V_t a t-nek környezete. Ekkor van olyan $H \subseteq E$ véges halmaz, hogy $E \subseteq \bigcup_{t \in H} V_t$. Valóban, a környezetek értelmezése alapján kiválaszthatjuk a T nyílt részhalmazainak olyan $(\Omega_t)_{t \in E}$ rendszerét, amelyre minden $t \in E$ esetén $t \in \Omega_t \subseteq V_t$, tehát $E \subseteq \bigcup_{t \in E} \Omega_t$. Ez azt jelenti, hogy $(\Omega_t)_{t \in E}$ nyílt befedése E-nek, így az E kompaktsága folytán van olyan $H \subseteq E$ véges halmaz, hogy $E \subseteq \bigcup_{t \in H} \Omega_t \subseteq \bigcup_{t \in H} V_t$. Ezt az állítást a következőkben gyakran alkalmazzuk.

27.1.3. Állítás. *Legyen T topologikus tér és $T' \subseteq T$. Az $E \subseteq T'$ halmaz pontosan akkor kompakt T-ben, ha kompakt a T' topologikus altérben.*

Bizonyítás. Tegyük fel, hogy az $E \subseteq T'$ halmaz kompakt a T' topologikus altérben, és legyen $(\Omega_i)_{i \in I}$ a T nyílt részhalmazainak olyan rendszere, hogy $E \subseteq \bigcup_{i \in I} \Omega_i$. Ekkor a $(T' \cap \Omega_i)_{i \in I}$ rendszer a T' altértopológiája szerint nyílt részhalmazainak olyan rendszere, hogy $E \subseteq \bigcup_{i \in I} (T' \cap \Omega_i)$. Ezért van olyan $J \subseteq I$ véges halmaz, hogy $E \subseteq \bigcup_{i \in J} (T' \cap \Omega_i) \subseteq \bigcup_{i \in J} \Omega_i$. Ez azt jelenti, hogy E kompakt a T topologikus térben.

Megfordítva, tegyük fel, hogy az $E \subseteq T'$ halmaz kompakt a T topologikus térben, és legyen $(\Omega'_i)_{i \in I}$ a T' topologikus altérben nyílt halmazok olyan rendszere, hogy $E \subseteq \bigcup_{i \in I} \Omega'_i$. Az altértopológia tulajdonságai szerint kiválasztható a T nyílt részhalmazainak olyan $(\Omega_i)_{i \in I}$ rendszere, hogy minden $i \in I$ esetén $\Omega'_i = T' \cap \Omega_i$. Ekkor $E \subseteq \bigcup_{i \in I} \Omega_i$, így létezik olyan $J \subseteq I$ véges halmaz, hogy $E \subseteq \bigcup_{i \in J} \Omega_i$. Minden $I \ni i$-re $\Omega'_i \subseteq T'$, ezért ebből következik, hogy $E \subseteq T' \cap \left(\bigcup_{i \in J} \Omega_i \right) = \bigcup_{i \in J} (T' \cap \Omega_i) = \bigcup_{i \in J} \Omega'_i$. Ez azt jelenti, hogy E kompakt a T' topologikus altérben. ■

Véges sok véges halmaz uniója véges, ezért nyilvánvaló, hogy topologikus tér véges sok kompakt részhalmazának uniója kompakt. Továbbá, topologikus tér bármely véges részhalmaza nyilvánvalóan kompakt halmaz.

27.1.4. Állítás. *Hausdorff-tér minden kompakt részhalmaza zárt. Kompakt tér minden zárt részhalmaza kompakt. Kompakt Hausdorff-térben egy halmaz pontosan akkor kompakt, ha zárt.*

Bizonyítás. A harmadik állítás nyilvánvalóan következik az első kettőből.

Legyen E nem üres kompakt halmaz a T Hausdorff-térben, és $t_0 \in T \setminus E$ rögzített pont. Minden $t \in E$ esetén $t \neq t_0$, ezért létezik t-nek olyan V környezete és t_0-nak olyan U környezete, hogy $V \cap U = \emptyset$. Tehát kiválaszthatunk olyan $(V_t)_{t \in E}$ és $(U_t)_{t \in E}$ rendszereket, hogy minden $E \ni t$-re V_t a t-nek és U_t a t_0-nak olyan környezete T-ben, hogy $V_t \cap U_t = \emptyset$. Az E kompaktsága miatt létezik olyan $H \subseteq E$ véges halmaz, hogy $E \subseteq \bigcup_{t \in H} V_t$. Az $E \neq \emptyset$ feltétel alapján $H \neq \emptyset$, így az $U := \bigcap_{t \in H} U_t$ halmaz a t_0-nak olyan környezete T-ben, hogy $U \cap \left(\bigcup_{t \in H} V_t \right) = \emptyset$, következésképpen $U \cap E = \emptyset$, azaz $U \subseteq T \setminus E$. Ez azt jelenti, a $T \setminus E$ halmaz minden pontja belső pont, tehát E zárt halmaz T-ben.

Legyen T kompakt tér és $E \subseteq T$ zárt halmaz. Legyen $(\Omega_i)_{i \in I}$ a T nyílt részhalmazainak olyan rendszere, amelyre $E \subseteq \bigcup_{i \in I} \Omega_i$. Legyen α olyan halmaz, hogy $\alpha \notin I$, és $\Omega_\alpha := T \setminus E$, tehát az E zártsága miatt Ω_α nyílt részhalmaza T-nek. Ekkor $(\Omega_i)_{i \in I \cup \{\alpha\}}$ a T nyílt befedése, így a T kompaktsága folytán létezik olyan $J \subseteq I \cup \{\alpha\}$ véges halmaz, amelyre $T = \bigcup_{i \in J} \Omega_i$. Világos, hogy $E \cap \Omega_\alpha = \emptyset$, ezért $E = \bigcup_{i \in J} (E \cap \Omega_i) = \bigcup_{i \in J \setminus \{\alpha\}} (E \cap \Omega_i) \subseteq \bigcup_{i \in J \setminus \{\alpha\}} \Omega_i$. Tehát $J \setminus \{\alpha\} \subseteq I$ olyan véges halmaz, hogy $E \subseteq \bigcup_{i \in J \setminus \{\alpha\}} \Omega_i$. Ez azt jelenti, hogy E kompakt halmaz T-ben. ■

Vigyázzunk arra, hogy kompakt térben létezhet nem zárt kompakt részhalmaz; például ha T kompakt, de nem T_1-tér, akkor van olyan $t \in T$, hogy a $\{t\}$ halmaz nem zárt, de kompakt.

27.1.5. Következmény. *Ha T topologikus tér, $E \subseteq T$ kompakt halmaz és $F \subseteq T$ zárt halmaz, akkor $E \cap F$ kompakt halmaz T-ben.*

Bizonyítás. Az altértopológiák tulajdonságai alapján az $E \cap F$ halmaz zárt az E kompakt topologikus altérben, így az előző állítás szerint $E \cap F$ kompakt az E altértopológiája szerint. Ezért $E \cap F$ kompakt T-ben is. ■

27.1.6. Állítás. *Reguláris topologikus térben minden kompakt halmaz relatív kompakt.*

Bizonyítás. Legyen T reguláris topologikus tér és $K \subseteq T$ kompakt halmaz. Legyen $(\Omega_i)_{i \in I}$ nyílt befedése $\overline{K}$-nak T-ben. Ha $t \in K$, akkor van olyan $i \in I$, hogy $t \in \Omega_i$, tehát a T regularitása miatt van olyan V *zárt* környezete t-nek, hogy $V \subseteq \Omega_i$. Tehát kiválasztható olyan $(V_t)_{t \in K}$ rendszer, hogy minden $t \in K$ esetén V_t zárt környezete t-nek és van olyan $i \in I$, amelyre $V_t \subseteq \Omega_i$. Ekkor $(V_t)_{t \in K}$ környezetekkel való befedése a K kompakt halmaznak, ezért van olyan $H \subseteq K$ véges halmaz, hogy $K \subseteq \bigcup_{t \in H} V_t$. Itt a jobb oldalon zárt halmaz áll, ezért $\overline{K} \subseteq \bigcup_{t \in H} V_t$. Ha $f : H \to I$ olyan függvény, hogy minden $t \in H$ esetén $V_t \subseteq \Omega_{f(t)}$, akkor $\mathrm{Im}(f)$ olyan véges részhalmaza I-nek, hogy $\overline{K} \subseteq \bigcup_{i \in \mathrm{Im}(f)} \Omega_i$, tehát $\overline{K}$ kompakt halmaz T-ben. ■

27.1.7. Állítás. *Minden kompakt Hausdorff-tér normális.*

Bizonyítás. Először megmutatjuk, hogy minden kompakt Hausdorff-tér *reguláris*. Legyen ugyanis T kompakt Hausdorff-tér, $F \subseteq T$ nem üres zárt halmaz, valamint $t \in T \setminus F$. Minden $s \in F$ esetén $t \neq s$, ezért van olyan U nyílt környezete t-nek és olyan V nyílt környezete s-nek, hogy $U \cap V = \emptyset$. Kiválaszthatunk tehát olyan $(U_s)_{s \in F}$ és $(V_s)_{s \in F}$ rendszereket, hogy minden $F \ni s$-re U_s a t-nek nyílt környezete és V_s az s-nek nyílt környezete és $U_s \cap V_s = \emptyset$. Az F halmaz zárt a T kompakt térben, tehát F kompakt halmaz, így van olyan $S \subseteq F$ véges halmaz, hogy $F \subseteq \bigcup_{s \in S} V_s$. Az $F \neq \emptyset$ feltétel alapján $S \neq \emptyset$, ezért $U := \bigcap_{s \in S} U_s$ a t-nek nyílt környezete T-ben. Világos, hogy $\Omega := U$ és $\Omega' := \bigcup_{s \in S} V_s$ olyan diszjunk nyílt halmazok T-ben, amelyekre $t \in \Omega$ és $F \subseteq \Omega'$. Ez azt jelenti, hogy T reguláris tér.

Legyen T kompakt Hausdorff-tér, és legyenek $F, F' \subseteq T$ nem üres diszjunkt zárt halmazok T-ben. A T regularitása miatt minden $t \in F$ esetén van olyan U nyílt környezete t-nek és olyan $\Omega' \subseteq T$ nyílt halmaz, hogy $F' \subseteq \Omega'$ és $U \cap \Omega' = \emptyset$. Kiválaszthatunk tehát olyan $(U_t)_{t \in F}$ és $(\Omega'_t)_{t \in F}$ rendszereket, hogy minden $F \ni t$-re U_t nyílt környezete t-nek, Ω'_t nyílt halmaz T-ben, valamint $F' \subseteq \Omega'_t$ és $U_t \cap \Omega'_t = \emptyset$. Az F halmaz zárt a T kompakt térben, ezért F kompakt halmaz, így van olyan $H \subseteq F$ véges halmaz, hogy $F \subseteq \bigcup_{t \in H} U_t$. Az $F \neq \emptyset$ feltétel alapján $H \neq \emptyset$. Ekkor $\Omega := \bigcup_{t \in H} U_t$ és $\Omega' := \bigcap_{t \in H} \Omega'_t$ olyan nyílt halmazok, hogy $F \subseteq \Omega$, $F' \subseteq \Omega'$ és $\Omega \cap \Omega' = \emptyset$. Ez azt jelenti, hogy T normális tér. ■

Megjegyezzük, hogy kompakt tér triviálisan Lindelöf-tér (26.4.4.), és a Tyihonov-lemma (26.4.6.) szerint reguláris Lindelöf-tér normális. Ezért az iménti bizonyítás első részéből a Tyihonov-lemma alapján is következik az állítás. Azonban a fenti bizonyítás nem követeli meg sem a Lindelöf-terek fogalmának, sem a Tyihonov-lemmának az ismeretét.

Tehát láttuk, hogy kompakt Hausdorff-tér szükségképpen reguláris is. Azonban létezik olyan kompakt T_1-tér, amely nem Hausdorff-tér (és akkor még kevésbé reguláris, hiszen reguláris T_1-tér szükségképpen Hausdorff-tér). Később konkrét példát adunk ilyen térre.

27.1.8. Állítás. *Ha T, T' topologikus terek, $f : T \to T'$ folytonos függvény és $K \subseteq T$ kompakt halmaz, akkor $f\langle K\rangle \subseteq T'$ kompakt halmaz.*

Bizonyítás. Legyen $(\Omega'_i)_{i\in I}$ az T' nyílt részhalmazainak olyan rendszere, amelyre $f\langle K\rangle \subseteq \bigcup\limits_{i\in I} \Omega'_i$. Ekkor $K \subseteq \bigcup\limits_{i\in I} \overset{-1}{f}\langle\Omega'_i\rangle$, tehát K kompaktsága miatt vehetünk olyan $J \subseteq I$ véges halmazt, amelyre $K \subseteq \bigcup\limits_{i\in J} \overset{-1}{f}\langle\Omega'_i\rangle$. Világos, hogy ekkor $f\langle K\rangle \subseteq \bigcup\limits_{i\in J} f\langle \overset{-1}{f}\langle\Omega'_i\rangle\rangle \subseteq \bigcup\limits_{i\in J} \Omega'_i$, ezért $f\langle K\rangle$ kompakt halmaz T'-ben. ■

27.1.9. Következmény. *Legyen T kompakt tér, T' Hausdorff-tér és $f : T \to T'$ folytonos bijekció. Ekkor T Hausdorff-tér, T' kompakt tér és f homeomorfizmus T és T' között.*

Bizonyítás. Ha $F \subseteq T$ zárt halmaz, akkor F kompakt, tehát $f\langle F\rangle \subseteq T'$ szintén kompakt, így zárt is, mert T' Hausdorff-tér. Ez azt jelenti, hogy minden $F \subseteq T$ zárt halmazra az $(\overset{-1}{f^{-1}})\langle F\rangle = f\langle F\rangle$ halmaz zárt T'-ben. Tehát a folytonosság topologikus jellemzése alapján az f^{-1} függvény folytonos. ■

Megjegyezzük, hogy a nem Hausdorff-féle kompakt terek elmélete különös jelentőséggel bír az általános topológia algebrai topológiai alkalmazásaiban. Azonban az analízisben, majdnem minden természetes módon megjelenő kompakt tér Hausdorff-tér. Ezért az analízisben szokásos az a konvenció, hogy egy topologikus tér kompaktsága azt jelenti, hogy a tér kompakt Hausdorff-tér. Mi is ezt a konvenciót követjük az I., II. és III. részben, azonban ebben a Függelékben a kompaktság fogalmába nem értjük bele azt, hogy a tér Hausdorff-féle.

27.2. A kompaktság jellemzései

27.2.1. Definíció. *Azt mondjuk, hogy $\mathfrak{C}$* **centrált halmaz**, *ha $\mathfrak{C}$ olyan nem üres halmaz, hogy minden $\mathfrak{C}' \subseteq \mathfrak{C}$ nem üres véges halmazra $\bigcap\limits_{C\in\mathfrak{C}'} C \neq \emptyset$. Azt mondjuk, hogy $(E_i)_{i\in I}$* **centrált halmazrendszer**, *ha $(E_i)_{i\in I}$ olyan halmazrendszer, hogy $\{E_i | i \in I\}$ centrált halmaz.*

27.2.2. Állítás. *Ha T topologikus tér, akkor a következő állítások ekvivalensek.*

(i) *T kompakt tér.*

(ii) *Minden $\mathfrak{C} \subseteq \mathscr{P}(T)$ centrált halmazra $\bigcap\limits_{C\in\mathfrak{C}} \overline{C} \neq \emptyset$.*

(iii) *Minden $\mathfrak{R} \subseteq \mathscr{P}(T)$ rácsra $\bigcap\limits_{R\in\mathfrak{R}} \overline{R} \neq \emptyset$.*

(iv) *Ha* $(F_i)_{i\in I}$ *a* T *zárt részhalmazainak nem üres lefelé irányított rendszere (vagyis minden* $j,k\in I$ *esetén van olyan* $i\in I$*, hogy* $F_i\subseteq F_j\cap F_k$*) és* $\bigcap_{i\in I} F_i=\emptyset$*, akkor van olyan* $i\in I$*, hogy* $F_i=\emptyset$.

(v) *Ha* $(\Omega_i)_{i\in I}$ *a* T *nyílt részhalmazainak felfelé irányított rendszere (vagyis minden* $j,k\in I$ *esetén van olyan* $i\in I$*, hogy* $\Omega_j\cup\Omega_k\subseteq\Omega_i$*) és* $\bigcup_{i\in I}\Omega_i=T$*, akkor van olyan* $i\in I$*, hogy* $\Omega_i=T$.

Bizonyítás. (i)⇒(ii) Tegyük fel, hogy T kompakt tér és $\mathfrak{C}\subseteq\mathscr{P}(T)$ centrált halmaz. Indirekt bizonyítunk, tehát feltesszük, hogy $\bigcap_{C\in\mathfrak{C}}\overline{C}=\emptyset$. Ekkor $T\neq\emptyset$ és a $(T\setminus\overline{C})_{C\in\mathfrak{C}}$ rendszer nyílt befedése T-nek, ezért van olyan $\mathfrak{C}'\subseteq\mathfrak{C}$ véges halmaz, amelyre $T=\bigcup_{C\in\mathfrak{C}'}(T\setminus\overline{C})$. De $T\neq\emptyset$, ezért $\mathfrak{C}'\neq\emptyset$, így $T=\bigcup_{C\in\mathfrak{C}'}(T\setminus\overline{C})=T\setminus\left(\bigcap_{C\in\mathfrak{C}'}\overline{C}\right)$, vagyis $\bigcap_{C\in\mathfrak{C}'}\overline{C}=\emptyset$. Ugyanakkor $\bigcap_{C\in\mathfrak{C}'}C\subseteq\bigcap_{C\in\mathfrak{C}'}\overline{C}$, ezért $\bigcap_{C\in\mathfrak{C}'}C=\emptyset$ is teljesül, ami ellentmond annak, hogy $\mathfrak{C}$ centrált. Tehát, ha T kompakt tér és $\mathfrak{C}\subseteq\mathscr{P}(T)$ centrált halmaz, akkor $\bigcap_{C\in\mathfrak{C}}\overline{C}\neq\emptyset$.

(ii)⇒(iii) Nyilvánvaló, mert minden rács centrált halmaz.

(iii)⇒(iv) Indirekt bizonyítunk, tehát feltesszük, hogy az $(F_i)_{i\in I}$ halmazrendszerre teljesülnek a (iv) állítás feltételei, de minden $I\ni i$-re $F_i\neq\emptyset$. Ekkor az $\{F_i|i\in I\}$ halmaz a T zárt részhalmazaiból álló rács, tehát a (iii) alapján $\bigcap_{i\in I}F_i\neq\emptyset$, ami ellentmond a $\bigcap_{i\in I}F_i=\emptyset$ hipotézisnek.

(iv)⇒(v) Indirekt bizonyítunk, tehát feltesszük, hogy az $(\Omega_i)_{i\in I}$ halmazrendszerre teljesülnek az (v) állítás feltételei, de minden $I\ni i$-re $\Omega_i\neq T$. Ekkor a $(T\setminus\Omega_i)_{i\in I}$ nem üres halmazrendszer nyilvánvalóan lefelé irányított, és mindegyik tagja nem üres zárt halmaz T-ben. Ezért a (iv) alapján $\bigcap_{i\in I}(T\setminus\Omega_i)=\emptyset$ lehetetlen, így a de Morgan egyenlőség szerint $\bigcup_{i\in I}\Omega_i\neq T$, ami ellentmond a $\bigcup_{i\in I}\Omega_i=T$ feltételnek.

(v)⇒(i) Legyen $(\Omega_i)_{i\in I}$ nyílt befedése T-nek és A az I nem üres véges részhalmazainak halmaza (ami nem üres, mert $\emptyset\in A$). Minden $A\ni\alpha$-ra legyen $U_\alpha:=\bigcup_{i\in\alpha}\Omega_i$. Ekkor $\alpha,\beta\in A$ esetén a $\gamma:=\alpha\cup\beta$ halmazra $\gamma\in A$ és $U_\alpha\cup U_\beta=U_\gamma$ teljesül, tehát az $(U_\alpha)_{\alpha\in A}$ halmazrendszer felfelé irányított. Ugyanakkor $\bigcup_{\alpha\in A}U_\alpha:=\bigcup_{\alpha\in A}\left(\bigcup_{i\in\alpha}\Omega_i\right)=\bigcup_{i\in I}\Omega_i=T$. Tehát az $(U_\alpha)_{\alpha\in A}$ halmazrendszer nem üres, felfelé irányított és nyílt befedése T-nek. Ezért az (v) alapján van olyan $\alpha\in A$, hogy $T=U_\alpha:=\bigcup_{i\in\alpha}\Omega_i$, vagyis $(\Omega_i)_{i\in\alpha}$ véges részbefedés. Ez azt jelenti, hogy T kompakt tér. ■

Példa. Legyen T tetszőleges halmaz és

$$\mathscr{T}:=\{\emptyset\}\cup\{\,\Omega\in\mathscr{P}(T)\mid T\setminus\Omega\text{ véges halmaz }\}.$$

Ekkor $\mathscr{T}$ topológia T felett, és $(T,\mathscr{T})$ kompakt tér. Valóban, $\mathscr{T}$-re $(\mathrm{O_I})$ teljesül, és ha $(\Omega_i)_{i\in I}$ nem üres véges rendszer $\mathscr{T}$-ben, és minden $I \ni i$-re $\Omega_i \neq \emptyset$, akkor $T \setminus \bigcap_{i\in I} \Omega_i = \bigcup_{i\in I}(T\setminus\Omega_i)$ véges halmaz T-ben, tehát $\bigcap_{i\in I}\Omega_i \in \mathscr{T}$, hiszen véges sok véges halmaz uniója véges, így $\mathscr{T}$-re $(\mathrm{O_{II}})$ is teljesül. Ha $(\Omega_i)_{i\in I}$ tetszőleges nem üres rendszer $\mathscr{T}$-ben és van olyan $i \in I$, hogy $\Omega_i \neq \emptyset$, akkor $T \setminus \bigcup_{i\in I}\Omega_i = \bigcap_{i\in I}(T\setminus\Omega_i)$, tehát $\bigcup_{i\in I}\Omega_i \in \mathscr{T}$, hiszen véges halmaz minden részhalmaza véges, így $\mathscr{T}$-re $(\mathrm{O_{III}})$ is teljesül. Tehát $\mathscr{T}$ topológia T felett, és könnyen látható, hogy egy $F \subseteq T$ halmaz pontosan akkor $\mathscr{T}$-zárt, ha $F = T$ vagy F véges. A $(T,\mathscr{T})$ topologikus tér kompaktságának bizonyításához legyen $(F_i)_{i\in I}$ a T nem üres $\mathscr{T}$-zárt halmazainak tetszőleges lefelé irányított nem üres rendszere; azt kell igazolni, hogy $\bigcap_{i\in I} F_i \neq \emptyset$. Legyen $I_0 := \{i \in I | F_i \neq T\}$. Ha $I_0 = \emptyset$, akkor $\bigcap_{i\in I} F_i = T \neq \emptyset$, ezért feltehető, hogy $I_0 \neq \emptyset$. Természetesen ekkor $\bigcap_{i\in I} F_i = \bigcap_{i\in I_0} F_i$ teljesül, és minden $I_0 \ni i$-re F_i véges halmaz. A $\{\mathrm{Card}(F_i) | i \in I\} \subseteq \mathbb{N}$ halmaz nem üres, ezért van olyan $i_0 \in I_0$, hogy minden $I_0 \ni i$-re $\mathrm{Card}(F_{i_0}) \leq \mathrm{Card}(F_i)$. Ha $i \in I$, akkor van olyan $j \in I$, hogy $F_j \subseteq F_{i_0} \cap F_i$, így $F_j \subseteq F_{i_0}$, tehát $\mathrm{Card}(F_j) = \mathrm{Card}(F_{i_0})$, vagyis $F_{i_0} = F_j \subseteq F_i$. Ebből következik, hogy $\bigcap_{i\in I_0} F_i = F_{i_0} \neq \emptyset$, így $(T,\mathscr{T})$ kompakt tér. Világos, hogy a $(T,\mathscr{T})$ topologikus tér T_1-tér, mert a T minden egy elemű (sőt véges) részhalmaza zárt $\mathscr{T}$ szerint. Ha T véges, akkor $\mathscr{T}$ egyenlő a T feletti diszkrét topológiával. Azonban végtelen T esetében a $(T,\mathscr{T})$ topologikus tér nem Hausdorff-tér (de kompakt T_1-tér). Legyenek ugyanis $t, t' \in T$ olyan pontok, hogy $t \neq t'$. tegyük fel olyan diszjunkt $\Omega, \Omega' \in \mathscr{T}$ halmazok létezését, amelyekre $t \in \Omega$ és $t' \in \Omega'$. Ekkor $\Omega \neq T$, mert $t' \notin \Omega$, így $T \setminus \Omega$ véges halmaz és $\Omega' \subseteq T \setminus \Omega$, ezért Ω' véges. Hasonlóan, $\Omega' \neq T$, mert $t \notin \Omega'$, így $T \setminus \Omega'$ véges halmaz és $\Omega \subseteq T \setminus \Omega'$, ezért Ω véges. Ebből következik, hogy a $T = \Omega \cup (T \setminus \Omega)$ halmaz is véges. Tehát, ha T végtelen, akkor a T bármely két pontjának bármely környezetei metszik egymást, így T nem Hausdorff-tér.

27.2.3. Tétel. (Cantor-féle közösrész-tétel) *Legyen T topologikus tér és $(K_\alpha)_{\alpha\in A}$ a T nem üres, zárt és kompakt részhalmazainak lefelé irányított nem üres rendszere. Ekkor $\bigcap_{\alpha\in A} K_\alpha \neq \emptyset$.*

Bizonyítás. Legyen $\alpha_0 \in A$ rögzített. Ha $A' \subseteq A$ nem üres véges halmaz, akkor a $(K_\alpha)_{\alpha\in A}$ halmazrendszer lefelé irányítottsága miatt van olyan $\beta \in A$, hogy $K_\beta \subseteq \bigcap_{\alpha\in A'} K_\alpha$, tehát $\emptyset \neq K_\beta \cap K_{\alpha_0} \subseteq \bigcap_{\alpha\in A'}(K_\alpha \cap K_{\alpha_0})$. Ezért a $\{K_\alpha \cap K_{\alpha_0} | \alpha \in A\}$ halmaz *centrált.* Minden $A \ni \alpha$-ra a $K_\alpha \cap K_{\alpha_0}$ halmaz kompakt és zárt T-ben (mert K_α és K_{α_0} mindketten zártak és kompaktak), ezért $K_\alpha \cap K_{\alpha_0}$ kompakt a K_{α_0} kompakt topologikus altérben is, így az 27.2.2. állítás (ii) pontja szerint $\emptyset \neq \bigcap_{\alpha\in A} \overline{K_\alpha \cap K_{\alpha_0}} = \bigcap_{\alpha\in A}(K_\alpha \cap K_{\alpha_0}) \subseteq \bigcap_{\alpha\in A} K_\alpha$. ■

27.2.4. Tétel. (Bolzano–Weierstrass-tétel) *A T topologikus tér pontosan akkor kompakt, ha minden T-ben haladó általánosított sorozatnak létezik olyan általánosított részsorozata, amely konvergens T-ben.*

Bizonyítás. Tegyük fel, hogy T kompakt, és legyen $(t_i)_{i\in I}$ tetszőleges T-ben haladó általánosított sorozat. Minden $I \ni i$-re legyen $F_i := \overline{\{t_j|(j \in I) \wedge (j \geq i)\}}$. Ekkor az $(F_i)_{i\in I}$ halmazrendszer minden tagja nem üres zárt halmaz T-ben, és az I halmaz felfelé irányítottsága miatt minden $i_1, i_2 \in I$ esetén van olyan $i \in I$, hogy $F_i \subseteq F_{i_1}$ és $F_i \subseteq F_{i_2}$; vagyis az $(F_i)_{i\in I}$ rendszer a tartalmazás tekintetében lefelé irányított. Minden $i \in I$ esetén F_i kompakt T-ben, mert zárt és T kompakt. A Cantor-féle közösrész-tétel alapján $\bigcap\limits_{i\in I} F_i \neq \emptyset$. Megmutatjuk, hogy bármely $t \in \bigcap\limits_{i\in I} F_i$ ponthoz létezik a $(t_i)_{i\in I}$-nek olyan általánosított részsorozata, amely t-hez konvergál.

Valóban, legyen $t \in \bigcap\limits_{i\in I} F_i$ rögzített, $\mathfrak{F}$ a t pont környezeteinek halmaza T-ben, és $J := \{(i, V)|(V \in \mathfrak{F}) \wedge (t_i \in V)\}$. A J halmazon bevezetjük a $\leq$ relációt úgy, hogy $(i_1, V_1), (i_2, V_2) \in J$ esetén $(i_1, V_1) \leq (i_2, V_2)$ definíció szerint jelentse azt, hogy $i_1 \leq i_2$ és $V_1 \supseteq V_2$. Az I felfelé irányítottsága és az $\mathscr{F}$ szűrő tartalmazás szerinti lefelé irányítottsága miatt J a $\leq$ relációval ellátva felfelé irányított előrendezett halmaz. Értelmezzük most a $\sigma : J \to I$; $(i, V) \mapsto i$ leképezést; ez nyilvánvalóan monoton növő függvény. Az $\mathrm{Im}(\sigma)$ halmaz nyilvánvalóan kofinális I-vel, mert $i \in I$ esetén $(i, T) \in J$ olyan, hogy $\sigma((i, T)) := i$ (tehát még $\mathrm{Im}(\sigma) = I$ is igaz). Ezért $t_{\sigma(j)}\;{}_{j\in J}$ általánosított részsorozata $(t_i)_{i\in I}$-nek. Megmutatjuk, hogy a $t_{\sigma(j)}\;{}_{j\in J}$ általánosított sorozat konvergál t-hez T-ben. Valóban, ha V a t-nek környezete T-ben, azaz $V \in \mathfrak{F}$, akkor van olyan $i_V \in I$, hogy $(i_V, V) \in J$, mert $I \neq \emptyset$, és ha $i_0 \in I$ rögzített, akkor $t \in F_{i_0} := \overline{\{t_j|(j \in I) \wedge (j \geq i_0)\}}$ miatt $V \cap \{t_j|(j \in I) \wedge (j \geq i_0)\} \neq \emptyset$, így van olyan $i \in I$, hogy $t_i \in V$, azaz $(i, V) \in J$. Ha $(i_V, V) \in J$, akkor $(i, W) \in J$ és $(i_V, V) \leq (i, W)$ esetén $t_{\sigma(i,W)} = t_i \in W \subseteq V$. Ez azt jelenti, hogy a $t_{\sigma(j)}\;{}_{j\in J}$ általánosított sorozat konvergál t-hez T-ben.

Megfordítva, tegyük fel, hogy minden T-ben haladó általánosított sorozatnak létezik konvergens általánosított részsorozata. Legyen $(F_i)_{i\in I}$ a T nem üres zárt részhalmazainak nem üres, tartalmazás tekintetében lefelé irányított rendszere; megmutatjuk, hogy ekkor $\bigcap\limits_{i\in I} F_i \neq \emptyset$. Ehhez először a kiválasztási axióma alkalmazásával veszünk egy $(t_i)_{i\in I} \in \prod\limits_{i\in I} F_i$ rendszert, és az I halmazon bevezetjük a $\leq$ relációt úgy, hogy $i_1, i_2 \in I$ esetén $i_1 \leq i_2$ azt jelentse, hogy $F_{i_1} \supseteq F_{i_2}$. Természetesen ekkor I a $\leq$ relációval ellátva felfelé irányított előrendezett halmaz (amelyen a $\leq$ előrendezés nem szükségképpen antiszimmetrikus), tehát $(t_i)_{i\in I}$ általánosított sorozat T-ben. A feltevés alapján létezik olyan J felfelé irányított előrendezett halmaz és olyan $\sigma : J \to I$ monoton növő függvény, hogy az $\mathrm{Im}(\sigma)$ halmaz kofinális I-vel, és a $(t_{\sigma(j)})_{j\in J}$ általánosított sorozat konvergál T-ben egy t ponthoz. Állítjuk, hogy bármely ilyen t pontra $t \in \bigcap\limits_{i\in I} F_i$ teljesül, vagyis minden $I \ni i$-re

$t \in F_i$, ami az F_i halmaz zártsága miatt azzal ekvivalens, hogy a t minden V környezetére $V \cap F_i \neq \emptyset$. Legyen ugyanis V környezete t-nek és $i \in I$. A hipotézis szerint a $(t_{\sigma(j)})_{j \in J}$ általánosított sorozat konvergál T-ben t-hez, ezért létezik olyan $j_1 \in J$, hogy minden $j \in J$ esetén, ha $j \geq j_1$, akkor $t_{\sigma(j)} \in V$. Az $\mathrm{Im}(\sigma)$ halmaz kofinális I-vel, ezért az i-hez van olyan $j_2 \in J$, hogy $\sigma(j_2) \geq i$. A J halmaz előrendezése felfelé irányított, ezért van olyan $j_0 \in J$, hogy $j_0 \geq j_1$ és $j_0 \geq j_2$. Ekkor $j \in J$ és $j \geq j_0$ esetén $j \geq j_1$, tehát $t_{\sigma(j)} \in V$, és a σ monoton növése miatt $\sigma(j) \geq \sigma(j_2) \geq i$, következésképpen az I halmazon adott előrendezés definíciója alapján $t_{\sigma(j)} \in F_{\sigma(j)} \subseteq F_i$, így $t_{\sigma(j)} \in V \cap F_i$. ■

27.3. Kompakt terek szorzata – Tyihonov-tétel

27.3.1. Lemma. *Ha T halmaz és $\mathfrak{C} \subseteq \mathscr{P}(T)$ centrált halmaz, akkor létezik olyan T feletti $\mathfrak{F}$ szűrő, amely tartalmazza $\mathfrak{C}$-t és egyetlen olyan T feletti szűrőnek sem valódi része, amely tartalmazza $\mathfrak{C}$-t (vagyis $\mathfrak{F}$ tartalmazás tekintében maximális $\mathfrak{C}$-t tartalmazó T feletti szűrő).*

Bizonyítás. Jelölje $\mathfrak{F}_{\mathfrak{C}}$ azon $E \subseteq T$ halmazok halmazát, amelyekhez van olyan $\mathfrak{C}' \subseteq \mathfrak{C}$ nem üres véges halmaz, hogy $\bigcap\limits_{C \in \mathfrak{C}'} C \subseteq E$. Könnyen látható, hogy $\mathfrak{F}_{\mathfrak{C}}$ szűrő T felett és $\mathfrak{C} \subseteq \mathfrak{F}_{\mathfrak{C}}$, sőt az is nyilvánvaló, hogy $\mathfrak{F}_{\mathfrak{C}}$ a tartalmazás tekintetében legkisebb T feletti szűrő, amely $\mathfrak{C}$-t tartalmazza. Tehát *létezik* T feletti szűrő, amely $\mathfrak{C}$-t tartalmazza, vagyis $\mathfrak{S} := \{\mathfrak{F} | \mathfrak{F} \text{ szűrő } T \text{ felett és } \mathfrak{C} \subseteq \mathfrak{F}\}$ nem üres halmaz. Az $\mathfrak{S}$ halmazt a $\subseteq$ relációval rendezzük, és megmutatjuk, hogy ez a rendezett halmaz *induktívan* rendezett; ekkor a Zorn-lemma alapján létezik $\mathfrak{S}$-nek maximális eleme, ami olyan szűrő lesz T felett, amelynek a létezését állítottuk.

Legyen $(\mathfrak{F}_i)_{i \in I}$ olyan $\mathfrak{S}$-ben haladó nem üres rendszer, amelyre minden $i, j \in I$ esetén $\mathfrak{F}_i \subseteq \mathfrak{F}_j$ vagy $\mathfrak{F}_j \subseteq \mathfrak{F}_i$. Értelmezzük az $\mathfrak{F} := \bigcup\limits_{i \in I} \mathfrak{F}_i$ halmazt; megmutatjuk, hogy $\mathfrak{F} \in \mathfrak{S}$. Ha $F_1, F_2 \in \mathfrak{F}$, akkor van olyan $i_1 \in I$ és $i_2 \in I$, hogy $F_1 \in \mathfrak{F}_{i_1}$ és $F_2 \in \mathfrak{F}_{i_2}$; ekkor $\mathfrak{F}_{i_1} \subseteq \mathfrak{F}_{i_2}$ esetén $F_1, F_2 \in \mathfrak{F}_{i_2}$, így $F_1 \cap F_2 \in \mathfrak{F}_{i_2} \subseteq \mathfrak{F}$, illetve $\mathfrak{F}_{i_2} \subseteq \mathfrak{F}_{i_1}$ esetén $F_1, F_2 \in \mathfrak{F}_{i_1}$, így $F_1 \cap F_2 \in \mathfrak{F}_{i_1} \subseteq \mathfrak{F}$. Továbbá, ha $E \subseteq T$ olyan halmaz, amelyhez van olyan $F \in \mathfrak{F}$, hogy $F \subseteq E$, akkor van olyan $i \in I$, hogy $F \in \mathfrak{F}_i$, így $E \in \mathfrak{F}_i \subseteq \mathfrak{F}$, hiszen $\mathfrak{F}_i$ szűrő T felett. Minden $I \ni i$-re $\emptyset \notin \mathfrak{F}_i$, ezért $\emptyset \notin \mathfrak{F}$. Végül, $I \neq \emptyset$ miatt $\mathfrak{C} \subseteq \mathfrak{F}$. Nyilvánvaló, hogy ekkor az $\mathfrak{F}$ szűrő a tartalmazás tekintetében felső korlátja az $(\mathfrak{F}_i)_{i \in I}$ rendszernek az $\mathfrak{S}$ rendezett halmazban. ■

27.3.2. Tétel. (Tyihonov-tétel) *Kompakt terek topologikus szorzata kompakt tér.*

Bizonyítás. Legyen $(T_i)_{i \in I}$ kompakt terek tetszőleges rendszere, $T := \prod\limits_{i \in I} T_i$, és $\mathfrak{C} \subseteq \mathscr{P}(T)$ centrált halmaz. Bebizonyítjuk, hogy $\bigcap\limits_{C \in \mathfrak{C}} \overline{C} \neq \emptyset$, ami azt jelenti, hogy a T topologikus szorzattér kompakt.

Az előző lemma alapján vehetünk olyan T feletti $\mathfrak{F}$ szűrőt, hogy $\mathfrak{C} \subseteq \mathfrak{F}$ és $\mathfrak{F}$ egyetlen $\mathfrak{C}$-t tartalmazó T feletti szűrőnek sem valódi része. Ha $E \subseteq T$ olyan halmaz, hogy minden $\mathfrak{F} \ni F$-re $E \cap F \neq \emptyset$, akkor $E \in \mathfrak{F}$, hiszen ekkor $\{E\} \cup \mathfrak{F} \subseteq \mathscr{P}(T)$ centrált halmaz, tehát létezik olyan T feletti $\mathfrak{F}'$ szűrő, hogy $\{E\} \cup \mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{F}'$; ekkor az $\mathfrak{F}$ maximalitása folytán $\mathfrak{F}' = \mathfrak{F}$, tehát $E \in \mathfrak{F}$, mert $E \in \mathfrak{F}'$ nyilvánvalóan igaz.

Megmutatjuk, hogy

$$\prod_{i \in I} \bigcap_{F \in \mathfrak{F}} \overline{pr_i\langle F \rangle} \subseteq \bigcap_{F \in \mathfrak{F}} \overline{F} \subseteq \bigcap_{C \in \mathfrak{C}} \overline{C}.$$

Legyen $t \in \prod_{i \in I} \bigcap_{F \in \mathfrak{F}} \overline{pr_i\langle F \rangle}$ rögzített pont, $F \in \mathfrak{F}$ és V a t-nek környezete a T topologikus szorzattérben; azt kell igazolni, hogy $V \cap F \neq \emptyset$. A szorzattopológia definíciója szerint van olyan $J \subseteq I$ nem üres véges halmaz és olyan $(V_i)_{i \in J}$ rendszer, hogy minden $J \ni i$-re V_i környezete $pr_i(t)$-nek T_i-ben és $\bigcap_{i \in J} \overset{-1}{pr_i}\langle V_i \rangle \subseteq V$. Ha $i \in J$, akkor minden $E \in \mathfrak{F}$ esetén $pr_i(t) \in \overline{pr_i\langle E \rangle}$, ezért $V_i \cap pr_i\langle E \rangle \neq \emptyset$. Ez azt jelenti, hogy $i \in J$ esetén minden $\mathfrak{F} \ni E$-re $E \cap \overset{-1}{pr_i}\langle V_i \rangle \neq \emptyset$, így $\overset{-1}{pr_i}\langle V_i \rangle \in \mathfrak{F}$, ezért a J végessége folytán $\bigcap_{i \in J} \overset{-1}{pr_i}\langle V_i \rangle \in \mathfrak{F}$. Ebből következik, hogy $V \in \mathfrak{F}$, mert $\mathfrak{F}$ szűrő T felett, így $V \cap F \neq \emptyset$.

Végül igazoljuk, hogy $\prod_{i \in I} \bigcap_{F \in \mathfrak{F}} \overline{pr_i\langle F \rangle} \neq \emptyset$. Minden $I \ni i$-re a $\{pr_i\langle F \rangle | F \in \mathfrak{F}\}$ halmaz centrált részhalmaza $\mathscr{P}(T_i)$-nek, mert minden $\mathfrak{F}$-ben haladó $(F_j)_{j \in J}$ nem üres véges rendszerre $F := \bigcap_{j \in J} F_j \in \mathfrak{F}$, tehát $F \neq \emptyset$, így $\emptyset \neq pr_i\langle F \rangle \subseteq \bigcap_{j \in J} pr_i\langle F_j \rangle$. Tehát $i \in I$ esetén a T_i kompaktsága miatt $\bigcap_{F \in \mathfrak{F}} \overline{pr_i\langle F \rangle} \neq \emptyset$. Ebből a kiválasztási axióma alkalmazásával kapjuk, hogy $\prod_{i \in I} \bigcap_{F \in \mathfrak{F}} \overline{pr_i\langle F \rangle} \neq \emptyset$. ■

27.3.3. Következmény. *Ha T kompakt tér és I halmaz, akkor a T^I topologikus kocka kompakt tér. Ha T metrizálható kompakt tér és I megszámlálható halmaz, akkor a T^I topologikus kocka szintén metrizálható kompakt tér. A $[0,1]^{\mathbb{N}}$ euklidészi kocka metrizálható kompakt tér.*

Bizonyítás. Az első állítás a Tyihonov-tételből és a topologikus kockák értelmezéséből következik. Metrizálható terek megszámlálható rendszerének a topologikus szorzata metrizálható, ezért a második állítás következik az elsőből. A harmadik állítás következik a másodikból és abból, hogy a $[0,1] \subseteq \mathbb{R}$ intervallum (az euklidészi topológiával) metrizálható kompakt tér. ■

27.4. Félig folytonos függvények – Weierstrass-féle maximum-minimum elv

27.4.1. Tétel. (Weierstrass-féle maximum-minimum elv) *Ha T topologikus tér, $f : T \to \mathbb{R}$ folytonos függvény és $K \subseteq T$ nem üres kompakt halmaz, akkor* $\inf(f\langle K\rangle) \in f\langle K\rangle$ *és* $\sup(f\langle K\rangle) \in f\langle K\rangle$*, vagyis f a K halmazban minimális és maximális értéket is felvesz.*

Bizonyítás. Az előző állításból következik, hogy $f\langle K\rangle$ kompakt halmaz $\mathbb{R}$-ben az $\mathscr{E}_{\mathbb{R}}$ topológia szerint, és $(\mathbb{R}, \mathscr{E}_{\mathbb{R}})$ Hausdorff-tér, tehát $f\langle K\rangle$ zárt halmaz $\mathbb{R}$-ben, így $\overline{f\langle K\rangle} = f\langle K\rangle$. Az infimum és szuprémum definíciója, valamint az $\mathscr{E}_{\mathbb{R}}$ topológia értelmezése alapján $\inf(f\langle K\rangle) \in \overline{f\langle K\rangle}$ és $\sup(f\langle K\rangle) \in \overline{f\langle K\rangle}$. ■

Most általánosítani fogjuk a Weierstrass-féle maximum-minimum elvet. Ehhez bevezetjük az alulról- és felülről félig folytonos függvények fogalmát.

27.4.2. Definíció. *Ha T topologikus tér és $f : T \to \overline{\mathbb{R}}$ függvény, akkor azt mondjuk, hogy f* **alulról** *(illetve* **felülről***)* **félig folytonos***, ha minden $c \in \mathbb{R}$ esetén az $[f > c]$ (illetve $[f < c]$) halmaz nyílt T-ben. A pozitív $T \to \overline{\mathbb{R}}$ alulról félig folytonos függvények halmazát $\mathscr{I}_+(T)$ jelöli.*

Megjegyzések. 1) A definíció alapján nyilvánvaló, hogy ha T topologikus tér, akkor az $f : T \to \overline{\mathbb{R}}$ függvény pontosan akkor alulról (illetve felülről) félig folytonos, ha a $-f$ függvény felülről (illetve alulról) félig folytonos.

2) Könnyen látható, hogy ha T topologikus tér, akkor az $f : T \to \mathbb{R}$ függvény pontosan akkor folytonos, ha alulról is és felülről is félig folytonos. Valóban, a feltétel szükségessége a folytonosság topologikus jellemzéséből következik, míg az elégségesség azért igaz, mert ha f alulról is és felülről is félig folytonos, akkor minden $a, b \in \mathbb{R}$ esetén $\overset{-1}{f}\langle]a,b[\rangle = [f > a] \cap [f < b]$ nyílt halmaz T-ben, ezért minden $\Omega \subseteq \mathbb{R}$ nyílt halmazra $\overset{-1}{f}\langle \Omega\rangle$ nyílt halmaz T-ben, hiszen $\mathbb{R}$-ben minden nyílt halmaz előáll (megszámlálható sok) korlátos nyílt intervallum uniójaként.
3) Ha T topologikus tér és $E \subseteq T$, akkor a $\chi_E : T \to \mathbb{R}$ karakterisztikus függvény pontosan akkor alulról (illetve felülről) félig folytonos, ha E nyílt (illetve zárt) halmaz T-ben. Speciálisan, a $\chi_E : T \to \mathbb{R}$ karakterisztikus függvény pontosan akkor folytonos, ha E nyílt-zárt halmaz T-ben.

4) Ha T topologikus tér és $(f_i)_{i\in I}$ olyan nem üres függvényrendszer, hogy minden $i \in I$ esetén $f_i : T \to \overline{\mathbb{R}}$ alulról (illetve felülről) félig folytonos függvény, akkor a $\sup_{i\in I} f_i : T \to \overline{\mathbb{R}}$ felső burkoló (illetve az $\inf_{i\in I} f_i : T \to \overline{\mathbb{R}}$ alsó burkoló) szintén alulról (illetve felülről) félig folyonos. Ez nyilvánvalóan következik abból, hogy minden $c \in \mathbb{R}$ esetén $\sup_{i\in I} f_i > c = \bigcup_{i\in I}[f_i > c]$ és $\inf_{i\in I} f_i < c = \bigcup_{i\in I}[f_i < c]$, valamint nyílt halmazok

uniója nyílt.

5) Ha T topologikus tér és $(f_i)_{i\in I}$ olyan nem üres *véges* függvényrendszer, hogy minden $i \in I$ esetén $f_i : T \to \overline{\mathbb{R}}$ alulról (illetve felülről) félig folytonos függvény, akkor az $\inf\limits_{i\in I} f_i : T \to \overline{\mathbb{R}}$ alsó burkoló (illetve az $\sup\limits_{i\in I} f_i : T \to \overline{\mathbb{R}}$ felső burkoló) szintén alulról (illetve felülről) félig folyonos. Ez nyilvánvalóan következik abból, hogy I végessége miatt minden $c \in \mathbb{R}$ esetén $\left[\inf\limits_{i\in I} f_i > c\right] = \bigcap\limits_{i\in I} [f_i > c]$ és $\left[\sup\limits_{i\in I} f_i < c\right] = \bigcap\limits_{i\in I} [f_i < c]$, valamint nyílt halmazok nem üres véges rendszerének metszete nyílt.

27.4.3. Tétel. *Legyen T topologikus tér, $K \subseteq T$ kompakt halmaz és $f : T \to \overline{\mathbb{R}}$ olyan alulról (illetve felülről) félig folytonos függvény, amelyre $-\infty \notin \mathrm{Im}(f)$ (illetve $+\infty \notin \mathrm{Im}(f)$). Ekkor f alulról (illetve felülről) korlátos a K halmazon, és ha $K \neq \emptyset$ és zárt, akkor $\inf(f\langle K\rangle) \in f\langle K\rangle$ (illetve $\sup(f\langle K\rangle) \in f\langle K\rangle$), vagyis f a K halmazban felvesz minimális (illetve maximális) értéket.*

Bizonyítás. Legyen $f : T \to \overline{\mathbb{R}}$ olyan alulról félig folytonos függvény, amelyre $-\infty \notin \mathrm{Im}(f)$. Minden $n \in \mathbb{N}$ esetén az $\Omega_n := [f > -n]$ halmaz nyílt, mert f alulról félig folytonos, és $T = \bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} \Omega_n$, mert $-\infty \notin \mathrm{Im}(f)$. Ugyanakkor világos, hogy az $(\Omega_n)_{n\in\mathbb{N}}$ halmazsorozat monoton növő. A K halmaz kompaktsága miatt van olyan $n \in \mathbb{N}$, hogy $K \subseteq \Omega_n$, ezért $f\langle K\rangle$ alulról korlátos halmazt $\mathbb{R}$-ben. Tegyük fel, hogy K zárt is és nem üres. Legyen $c := \inf(f\langle K\rangle)$ és vegyünk tetszőleges $\mathbb{R}^+$-ban haladó $(\varepsilon_n)_{n\in\mathbb{N}}$ monoton fogyó zérussorozatot. Legyen minden $\mathbb{N} \ni n$-re $K_n := [f \leq c + \varepsilon_n] \cap K$. Minden $n \in \mathbb{N}$ esetén $[f \leq c + \varepsilon_n]$ zárt halmaz, mert f alulról félig folytonos, így K_n kompakt halmaz T-ben, és $K_{n+1} \subseteq K_n$, valamint $K_n \neq \emptyset$. Továbbá, minden $\mathbb{N} \ni n$-re K_n zárt, mert a K zárt. A Cantor-féle közösrész-tételből következik, hogy $\bigcap\limits_{n\in\mathbb{N}} K_n \neq \emptyset$. Ha $t \in \bigcap\limits_{n\in\mathbb{N}} K_n$, akkor minden $\mathbb{N} \ni n$-re $c \leq f(t) \leq c + \varepsilon_n$, ezért $\lim\limits_{n\to\infty} \varepsilon_n = 0$ miatt $c = f(t)$, így $\inf(f\langle K\rangle) \in f\langle K\rangle$. Ebből már következik a felülről félig folytonos függvényekre vonatkozó állítás is (áttérve f-ről a $-f$ függvényre). ■

27.4.4. Definíció. *Legyen T topologikus tér. Egy $E \subseteq T$ halmazt* G_δ**-halmaznak** *(illetve* F_σ**-halmaznak***) nevezünk, ha E előáll megszámlálható sok T-beli nyílt halmaz metszeteként (illetve megszámlálható sok T-beli zárt halmaz uniójaként).*

Metrizálható topologikus térben minden zárt halmaz G_δ-halmaz és minden nyílt halmaz F_σ-halmaz. Valóban, legyen T metrizálható topologikus tér és d olyan metrika, amely a tér topológiáját generálja. Ha $F \subseteq T$ zárt halmaz, akkor bármely $\mathbb{R}^+$-ban haladó $(\varepsilon_n)_{n\in\mathbb{N}}$ zérussorozatra

$$F = [d(\cdot, F) = 0] = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} [d(\cdot, F) < \varepsilon_n],$$

és a $d(\cdot, F) : T \to \mathbb{R}$ függvény folytonossága miatt minden $n \in \mathbb{N}$ esetén $[d(\cdot, F) < \varepsilon_n]$ nyílt részhalmaza T-nek. A halmazelméleti de Morgan-egyenlőségből ez már maga után vonja, hogy a T minden nyílt részhalmaza F_σ-halmaz.

27.4.5. Állítás. *Legyen T metrizálható topologikus tér és $f : T \to \overline{\mathbb{R}}$ alulról félig folytonos függvény. Ekkor létezik olyan $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ függvénysorozat, hogy minden $n \in \mathbb{N}$ esetén $f_n : T \to \mathbb{R}$ folytonos függvény, és minden $T \ni t$-re $f_n(t) \leq f_{n+1}(t)$ és $f = \sup\limits_{n\in\mathbb{N}} f_n$.*

Bizonyítás. Jelöljön d egy olyan metrikát a T halmaz felett, amely a T topológiáját generálja.

(I) Először tegyük fel, hogy $\Omega \subseteq T$ nyílt halmaz, és $f = \chi_\Omega$. A Ω halmaz F_σ-halmaz, tehát létezik a T zárt részhalmazainak olyan $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sorozata, hogy $\Omega = \bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} F_n$, és feltehető, hogy minden $n \in \mathbb{N}$ esetén $F_n \subseteq F_{n+1}$. Metrizálható tér normális (26.4.8.), ezért az Uriszon-tétel alapján minden $n \in \mathbb{N}$ esetén az F_n zárt halmazhoz, és az ezt tartalmazó Ω nyílt halmazhoz van olyan $g : T \to \mathbb{R}$ folytonos függvény, hogy minden $t \in T$ esetén $0 \leq g(t) \leq 1$, és $\mathrm{supp}(g) \subseteq \Omega$, valamint $F_n \subseteq [g = 1]$. Tehát kiválaszthatunk olyan $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ függvénysorozatot, hogy minden $n \in \mathbb{N}$ esetén $g_n : T \to \mathbb{R}$ folytonos függvény, és minden $t \in T$ esetén $0 \leq g_n(t) \leq 1$, és $\mathrm{supp}(g_n) \subseteq \Omega$, valamint $F_n \subseteq [g_n = 1]$. Minden $n \in \mathbb{N}$ esetén legyen $f_n := \sup\limits_{0\leq k\leq n} g_k$. Ekkor nyilvánvaló, hogy $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ olyan függvénysorozat, hogy minden $n \in \mathbb{N}$ esetén $f_n : T \to \mathbb{R}$ folytonos függvény, és minden $T \ni t$-re $0 \leq f_n(t) \leq f_{n+1}(t) \leq 1$, valamint $\chi_\Omega = \sup\limits_{n\in\mathbb{N}} f_n$.

(II) Most tegyük fel, hogy $f : T \to \mathbb{R}$ olyan alulról félig folytonos függvény, hogy minden $t \in T$ esetén $0 \leq f(t) \leq 1$. Minden $\mathbb{N}^+ \ni n$-re és $1 \leq k \leq n$ természetes számra legyen $\Omega_{n,k} := \left[f > \dfrac{k}{n+1}\right]$ és

$$g_n := \frac{1}{n+1} \sum_{k=1}^{n} \chi_{\Omega_{n,k}}.$$

Megmutatjuk, hogy minden $\mathbb{N} \ni n$-re és $T \ni t$-re $0 \leq f(t) - g_n(t) \leq \dfrac{1}{n+1}$. Ehhez legyen $n \in \mathbb{N}$ és $t \in T$ rögzített. Ha $0 \leq f(t) \leq \dfrac{1}{n+1}$, akkor minden $1 \leq k \leq n$ természetes számra $t \notin \Omega_{n,k}$, így $g_n(t) = 0$, vagyis $0 \leq f(t) - g_n(t) \leq \dfrac{1}{n+1}$. Ha $\dfrac{1}{n+1} < f(t) \leq 1$, akkor egyértelműen létezik olyan $1 \leq j \leq n$ természetes szám, hogy $\dfrac{j}{n+1} < f(t) \leq \dfrac{j+1}{n+1}$; ekkor a definíció szerint $t \in \Omega_{n,k}$, ha $1 \leq k \leq j$ és $t \notin \Omega_{n,k}$, ha $j + 1 \leq k \leq n$, így a definíció alapján

$$g_n(t) := \frac{1}{n+1} \sum_{k=1}^{n} \chi_{\Omega_{n,k}}(t) = \frac{1}{n+1} \sum_{k=1}^{j} \chi_{\Omega_{n,k}}(t) = \frac{j}{n+1},$$

tehát
$$0 < f(t) - \frac{j}{n+1} = f(t) - g_n(t) \leq \frac{1}{n+1}.$$
Ebből következik, hogy $f = \sup\limits_{n\in\mathbb{N}} g_n$. Az f alulról félig folytonossága miatt minden $\mathbb{N} \ni n$-re és $1 \leq k \leq n$ természetes számra $\Omega_{n,k}$ nyílt halmaz T-ben, így az (I) alapján vehetünk olyan $(h_{n,m})_{m\in\mathbb{N}}$ sorozatot, hogy minden $m \in \mathbb{N}$ esetén $h_{n,m} : T \to \mathbb{R}$ folytonos függvény, és minden $T \ni t$-re $0 \leq h_{n,m}(t) \leq 1$, és $g_n = \sup\limits_{m\in\mathbb{N}} h_{n,m}$. Minden $n \in \mathbb{N}$ esetén legyen $f_k := \sup\limits_{\substack{m\leq k\\ n\leq k}} h_{n,m}$; ekkor $(f_k)_{k\in\mathbb{N}}$ olyan függvénysorozat, hogy minden $k \in \mathbb{N}$ esetén $f_k : T \to \mathbb{R}$ folytonos függvény, és minden $T \ni t$-re $0 \leq f_k(t) \leq f_{k+1}(t) \leq 1$, és $f = \sup\limits_{k\in\mathbb{N}} f_k$.

(III) Most tegyük fel, hogy $f : T \to \mathbb{R}$ *korlátos* alulról félig folytonos függvény, és legyenek $a, b \in \mathbb{R}$ olyanok, hogy $a < b$ és minden $t \in T$ esetén $a \leq f(t) \leq b$. Legyen $g := \dfrac{f-a}{b-a}$; ekkor $g : T \to \mathbb{R}$ olyan alulról félig folytonos függvény, hogy minden $t \in T$ esetén $0 \leq g(t) \leq 1$, így a (II) alapján van olyan $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ függvénysorozat, hogy minden $n \in \mathbb{N}$ esetén $g_n : T \to \mathbb{R}$ folytonos függvény, és minden $T \ni t$-re $0 \leq g_n(t) \leq g_{n+1}(t)$, és $g = \sup\limits_{n\in\mathbb{N}} g_n$. Legyen minden $\mathbb{N} \ni n$-re $f_n := a + (b-a)g_n$; ekkor $f_n : T \to \mathbb{R}$ folytonos függvény, és minden $T \ni t$-re $a \leq f_n(t) \leq f_{n+1} \leq b$, és $f = \sup\limits_{n\in\mathbb{N}} f_n$.

(IV) Végül, legyen $f : T \to \overline{\mathbb{R}}$ *tetszőleges* alulról félig folytonos függvény. Minden $n \in \mathbb{N}$ esetén $g_n := \inf(n, \sup(f, -n)) : T \to \mathbb{R}$ korlátos alulról félig folytonos függvény, ezért a (III) szerint van olyan $(g_{n,m})_{m\in\mathbb{N}}$ sorozat, hogy minden $\mathbb{N} \ni m$-re $g_{n,m} : T \to \mathbb{R}$ folytonos függvény, és minden $T \ni t$-re $-n \leq g_{n,m}(t) \leq g_{n,m+1}(t) \leq n$, valamint $g_n = \sup\limits_{m\in\mathbb{N}} g_{n,m}$. Világos, hogy minden $n \in \mathbb{N}$ és $t \in T$ esetén $g_n(t) \leq g_{n+1}(t)$ és $f = \sup\limits_{n\in\mathbb{N}} g_n$. Ebből következik, hogy ha minden $\mathbb{N} \ni k$-ra $f_k := \sup\limits_{\substack{n\leq k\\ m\leq k}} g_{n,m}$, akkor $(f_k)_{k\in\mathbb{N}}$ olyan függvénysorozat, hogy minden $k \in \mathbb{N}$ esetén $f_k : T \to \mathbb{R}$ folytonos függvény, és minden $T \ni t$-re $f_k(t) \leq f_{k+1}(t)$, és $f = \sup\limits_{k\in\mathbb{N}} f_k$. ■

27.5. Kompakt terek metrizálhatósága

27.5.1. Tétel. (Kompakt terek metrizálhatósága) *Ha T kompakt Hausdorff-tér, akkor a következő állítások ekvivalensek.*

(i) *T megszámlálható bázisú.*

(ii) *T homeomorf a $[0,1]^{\mathbb{N}}, (\mathscr{E}_{\mathbb{R}}|[0,1])^{\mathbb{N}}$ euklidészi kocka valamelyik zárt topologikus alterével.*

(iii) *T metrizálható.*

Bizonyítás. (i)$\Rightarrow$(ii) Kompakt Hausdorff-tér reguláris T_1-tér, tehát, ha (i) teljesül, akkor T megszámlálható bázisú reguláris T_1-tér. Ezért Uriszon beágyazási tétele alapján T homeomorf a $[0,1]^{\mathbb{N}}$ euklidészi kocka valamelyik K topologikus alterével. Ekkor K szükségképpen kompakt, tehát zárt is a $[0,1]^{\mathbb{N}}$ Hausdorff-térben.

(ii)$\Rightarrow$(iii) A $[0,1]^{\mathbb{N}}$ euklidészi kocka metrizálható, és metrizálható topologikus tér bármely topologikus altere metrizálható, ezért (ii)-ből nyilvánvalóan következik (iii).

(iii)$\Rightarrow$(i) Legyen d olyan metrika T felett, amely a T topológiát generálja, és $(\varepsilon_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tetszőleges $\mathbb{R}^+$-ban haladó zérussorozat. Világos, hogy minden $\mathbb{N} \ni n$-re a $(B_{\varepsilon_n}(t;d))_{t\in T}$ gömb-rendszer nyílt befedése T-nek, ezért T kompaktsága folytán létezik olyan $D \subseteq T$ véges halmaz, hogy $T = \bigcup\limits_{t\in D} B_{\varepsilon_n}(t;d)$. Kiválaszthatunk tehát a T véges részhalmazainak olyan $(D_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sorozatát, amelyre minden $n \in \mathbb{N}$ esetén $T = \bigcup\limits_{t\in D_n} B_{\varepsilon_n}(t;d)$. Legyen $D := \bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} D_n$ és $\mathfrak{B} := \{B_{\varepsilon_n}(t;d) | (n \in \mathbb{N}) \wedge (t \in D_n)\}$. Világos, hogy $\mathfrak{B}$ olyan megszámlálható halmaz, amelynek minden eleme nyílt részhalmaz T-ben.

Megmutatjuk, hogy $\mathfrak{B}$ a T-nek topologikus bázisa, tehát T megszámlálható bázisú. Ehhez legyen Ω nyílt halmaz T-ben és $t \in \Omega$. Olyan $n \in \mathbb{N}$ számot és $t' \in D_n$ pontot keresünk, hogy $t \in B_{\varepsilon_n}(t';d) \subseteq \Omega$. Ehhez először veszünk olyan $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ számot, amelyre $B_\varepsilon(t;d) \subseteq \Omega$, majd választunk olyan $n \in \mathbb{N}$ számot, hogy $\varepsilon_n \leq \dfrac{\varepsilon}{2}$. Ekkor $t \in T = \bigcup\limits_{t'\in D_n} B_{\varepsilon_n}(t';d)$ miatt van olyan $t' \in D_n$, hogy $t \in B_{\varepsilon_n}(t';d)$. Könnyen látható, hogy ekkor $B_{\varepsilon_n}(t';d) \subseteq \Omega$, mert ha $t'' \in B_{\varepsilon_n}(t';d)$, akkor $d(t'',t) \leq d(t'',t') + d(t',t) < \varepsilon_n + \varepsilon_n \leq \varepsilon$, vagyis $t'' \in B_\varepsilon(t;d) \subseteq \Omega$. ■

Azonban létezik olyan kompakt Hausdorff-tér, amely szeparábilis M_1-tér, de nem metrizálható (mert nem megszámlálható bázisú). Legyen például

$$\mathscr{T} := \{ \Omega \in \mathscr{P}(\mathbb{R}) \mid (\forall\, t \in \Omega)(\exists\, \varepsilon \in \mathbb{R}^+) :] - t - \varepsilon, -t[\cup[t, t+\varepsilon[\subseteq \Omega \}.$$

Ekkor $\mathscr{T}$ topológia $\mathbb{R}$ felett és a $([-1,1], \mathscr{T}|[-1,1])$ topologikus altér kompakt szeparábilis M_1-tér, de nem M_2-tér.

Megjegyezzük, hogy az előző metrizációs tétel szerint a $[0,1]^{\mathbb{N}}$ euklidészi kocka olyan metrizálható kompakt tér, amely abban az értelemben *univerzális* a metrizálható kompakt terek számára, hogy a zárt topologikus alterei (homeomorfia erejéig) az összes metrizálható kompakt teret megadják.

27.6. Lokálisan kompakt terek alaptulajdonságai

27.6.1. Definíció. *Egy topologikus teret* **lokálisan kompaktnak** *nevezünk, ha Hausdorff-tér és minden pontjának létezik kompakt környezete. Egy T topologikus tér E*

részhalmazát lokálisan kompaktnak mondjuk, ha az E topologikus altér lokálisan kompakt tér.

27.6.2. Állítás. *Minden lokálisan kompakt tér reguláris. Lokálisan kompakt térben minden pontnak létezik kompakt halmazokból álló környezetbázisa.*

Bizonyítás. Legyen T lokálisan kompakt tér, $F \subseteq T$ zárt halmaz és $t \in T \setminus F$. Legyen V a t-nek kompakt környezete. Ha $V \cap F = \emptyset$, akkor $\Omega := \overset{\circ}{V}$ és $\Omega' := T \setminus V$ olyan diszjunkt nyílt halmazok T-ben, hogy $t \in \Omega$ és $F \subseteq \Omega'$. (Itt kihasználtuk, hogy a V kompakt halmaz zárt, mert T Hausdorff-tér.) Tegyük fel, hogy $V \cap F \neq \emptyset$; ekkor $V \cap F$ nem üres kompakt halmaz T-ben és $t \in T \setminus (V \cap F)$. A T topologikus tér Hausdorff-tér, ezért kiválaszthatunk olyan $(\Omega_s)_{s \in V \cap F}$ és $(V_s)_{s \in V \cap F}$ rendszereket, hogy minden $V \cap F \ni s$-re V_s nyílt környezete s-nek, Ω_s nyílt környezete t-nek és $\Omega_s \cap V_s = \emptyset$. Ekkor $V \cap F \subseteq \bigcup_{s \in V \cap F} V_s$, tehát a $V \cap F$ kompaktsága folytán van olyan $S \subseteq V \cap F$ véges halmaz, amelyre $V \cap F \subseteq \bigcup_{s \in S} V_s$. A $V \cap F \neq \emptyset$ feltétel alapján $S \neq \emptyset$. Értelmezzük az $\Omega := \overset{\circ}{V} \cap \bigcap_{s \in S} \Omega_s$ és $\Omega' := (T \setminus V) \cup \bigcup_{s \in S} V_s$ halmazokat. Az Ω halmaz véges sok nyílt halmaz metszete, tehát nyílt, és világos, hogy $t \in \Omega$. A V halmaz kompakt, így zárt a T Hausdorff-térben, így Ω' nyílt halmazok (véges) rendszerének az uniója, tehát nyílt. Nyilvánvaló, hogy $F \subseteq \Omega'$, mert ha $t' \in F$ és $t' \in V$, akkor $t' \in V \cap F \subseteq \bigcup_{s \in S} V_s \subseteq \Omega'$, míg $t' \in F$ és $t' \notin V$ esetén $t' \in T \setminus V \subseteq \Omega'$. Végül, $\Omega \cap \Omega' = \emptyset$ is teljesül, mert ha $t' \in \Omega$, akkor $t' \in \overset{\circ}{V} \subseteq V$, tehát $t' \notin T \setminus V$, valamint $t' \notin \bigcup_{s \in S} V_s$ is igaz, mert $t' \in \bigcap_{s \in S} \Omega_s$, és a $\bigcap_{s \in S} \Omega_s$ és $\bigcup_{s \in S} V_s$ halmazok diszjunktak, ezért $t' \notin \Omega'$. Ezzel megmutattuk, hogy T reguláris tér.

Legyen $t \in T$ és V a t tetszőleges környezete. Legyen V' a t-nek kompakt környezete. Láttuk, hogy T reguláris, ezért létezik t-nek olyan V'' környezete, amely zárt és $V'' \subseteq V$. Ekkor $V' \cap V''$ olyan kompakt környezete t-nek, amely részhalmaza V-nek, tehát a t kompakt környezeteinek halmaza a t-nek környezetbázisa T-ben. ■

27.6.3. Következmény. *Ha T lokálisan kompakt tér és $\mathfrak{B}$ topologikus bázisa T-nek, akkor a $\mathfrak{B}_c := \{U \in \mathfrak{B} | U$ relatív kompakt$\}$ halmaz is topologikus bázisa T-nek.*

Bizonyítás. Legyen Ω nyílt halmaz T-ben és $t \in \Omega$. A $\mathfrak{B}$ halmaz topologikus bázis T-ben, ezért van olyan $V \in \mathfrak{B}$, hogy $t \in V \subseteq \Omega$. A V halmaz nyílt, tehát környezete t-nek, így a T lokális kompaktsága és az előző állítás szerint van olyan W kompakt környezete t-nek, hogy $W \subseteq V$. Ekkor $\overset{\circ}{W}$ a t-nek nyílt környezete, ezért van olyan $U \in \mathfrak{B}$, hogy $t \in U \subseteq \overset{\circ}{W}$. A W halmaz zárt, mert T Hausdorff-tér, következésképpen $\overline{U} \subseteq W$, tehát $\overline{U}$ kompakt halmaz. Ezért $U \in \mathfrak{B}$ relatív kompakt halmaz és $t \in U \subseteq \Omega$. ■

27.6.4. Következmény. *Ha T lokálisan kompakt tér, $K \subseteq T$ kompakt halmaz és $\Omega \subseteq T$ olyan nyílt halmaz, hogy $K \subseteq \Omega$, akkor létezik olyan $U \subseteq T$ relatív kompakt nyílt halmaz, amelyre $K \subseteq U \subseteq \overline{U} \subseteq \Omega$.*

Bizonyítás. Ha $t \in K$, akkor Ω nyílt környezete t-nek, ezért létezik a t-nek olyan V kompakt környezete, hogy $V \subseteq \Omega$; ekkor $\overset{\circ}{V}$ olyan relatív kompakt nyílt halmaz, amelyre $t \in \overset{\circ}{V}$ és $\overline{\overset{\circ}{V}} \subseteq \Omega$. Ezért kiválaszthatunk olyan $(U_t)_{t \in K}$ rendszert, amelyre minden $t \in K$ esetén U_t relatív kompakt nyílt környezete t-nek és $\overline{U_t} \subseteq \Omega$. Ekkor $(U_t)_{t \in K}$ nyílt befedése K-nak, így a K kompaktsága miatt létezik olyan $H \subseteq K$ véges halmaz, hogy $K \subseteq \bigcup\limits_{t \in H} U_t$. Az $U := \bigcup\limits_{t \in H} U_t$ halmaz nyílt, $K \subseteq U$, és $\overline{U} = \bigcup\limits_{t \in H} \overline{U_t}$, tehát $\overline{U}$ kompakt (mert véges sok kompakt halmaz uniója kompakt), így $\overline{U} \subseteq \Omega$ is teljesül. ■

27.6.5. Állítás. *Ha T Hausdorff-tér és $E \subseteq T$ lokálisan kompakt halmaz, akkor van olyan $\Omega \subseteq T$ nyílt halmaz, hogy $E = \overline{E} \cap \Omega$. Ha T lokálisan kompakt tér, akkor egy $E \subseteq T$ halmaz pontosan akkor lokálisan kompakt, ha létezik olyan $\Omega \subseteq T$ nyílt és $F \subseteq T$ zárt halmaz, hogy $E = \Omega \cap F$.*

Bizonyítás. Legyen E Hausdorff-tér és $E \subseteq T$ lokálisan kompakt halmaz. Kiválasztható olyan $(V_t)_{t \in E}$ rendszer, hogy minden $E \ni t$-re V_t a t-nek kompakt környezete az E topologikus altérben. Az altértopológia és a környezetek definíciója szerint kiválasztható olyan $(\Omega_t)_{t \in E}$ rendszer, hogy minden $E \ni t$-re Ω_t nyílt halmaz T-ben és $t \in E \cap \Omega_t \subseteq V_t$. Legyen $\Omega := \bigcup\limits_{t \in E} \Omega_t$; ez olyan nyílt halmaz T-ben, amelyre megmutatjuk, hogy $E = \overline{E} \cap \Omega$. Valóban, legyen $t \in \overline{E} \cap \Omega$ tetszőleges. Létezik olyan $s \in E$, hogy $t \in \Omega_s$. Ha a V halmaz környezete t-nek T-ben, akkor $V \cap \Omega_s$ is környezete t-nek T-ben, tehát $t \in \overline{E}$ miatt $E \cap (V \cap \Omega_s) \neq \emptyset$, vagyis $V \cap (E \cap \Omega_s) \neq \emptyset$. Ez azt jelenti, hogy t eleme az $E \cap \Omega_s$ halmaz T-beli lezártjának, tehát $E \cap \Omega_s \subseteq V_s$ miatt $t \in \overline{V_s}$. De V_s kompakt az E topologikus altérben, így T-ben is kompakt, tehát zárt T-ben, mert T Hausdorff-tér. Ezért $t \in V_s$ és $V_s \subseteq E$, vagyis $t \in E$. Ez azt jelenti, hogy $\overline{E} \cap \Omega \subseteq E$. A fordított tartalmazás triviálisan igaz.

Tegyük fel, hogy T lokálisan kompakt tér, $\Omega \subseteq T$ nyílt halmaz és $F \subseteq T$ zárt halmaz. Megmutatjuk, hogy $F \cap \Omega$ lokálisan kompakt halmaz T-ben. Legyen ugyanis $t \in F \cap \Omega$ tetszőleges; ekkor Ω környezete t-nek T-ben, tehát létezik t-nek olyan V kompakt környezete T-ben, amelyre $V \subseteq \Omega$. Az F halmaz zártsága miatt az $F \cap V$ halmaz kompakt T-ben és $F \cap V = F \cap (V \cap \Omega) = (F \cap \Omega) \cap V$, vagyis $F \cap V$ olyan környezete t-nek az $F \cap \Omega$ topologikus altérben, amely T-ben kompakt. De $F \cap V \subseteq F \cap \Omega$, így $F \cap V$ kompakt az $F \cap \Omega$ topologikus altérben is. Ezért az $F \cap \Omega$ topologikus altér lokálisan kompakt. ■

27.6.6. Következmény. *Hausdorff-tér lokálisan kompakt sűrű részhalmaza nyílt.*

Bizonyítás. Ha T Hausdorff-tér és $E \subseteq T$ lokálisan kompakt sűrű halmaz T-ben, akkor az előző állítás szerint van olyan $\Omega \subseteq T$ nyílt halmaz, hogy $E = \overline{E} \cap \Omega = T \cap \Omega = \Omega$, tehát E nyílt halmaz T-ben. ■

Az előző állításból következik, hogy $\mathbb{Q}$ nem lokálisan kompakt halmaz $\mathbb{R}$-ben.

27.6.7. Állítás. *Legyen T lokálisan kompakt tér, T' Hausdorff-tér és $\pi : T \to T'$ folytonos és nyílt szürjekció. Ekkor minden $K' \subseteq T'$ kompakt halmazhoz van olyan $K \subseteq T$ kompakt halmaz, amelyre $\pi\langle K\rangle = K'$.*

Bizonyítás. Legyen $K' \subseteq T'$ kompakt halmaz. A T lokális kompaktsága miatt van olyan $(V_t)_{t\in T}$ rendszer, hogy minden $T \ni t$-re V_t kompakt környezete a t pontnak. A π függvény nyílt szürjekció, ezért a $(\pi\langle \overset{\circ}{V_t}\rangle)_{t\in T}$ halmazrendszer nyílt befedése T'-nek. A K' kompaktsága folytán van olyan $H \subseteq T$ véges halmaz, hogy $K' \subseteq \bigcup_{t\in H} \pi\langle \overset{\circ}{V_t}\rangle$. Legyen $K := \overset{-1}{\pi}\langle K'\rangle \cap \left(\bigcup_{t\in H} V_t\right)$. A K' halmaz zárt T'-ben, mert kompakt és T' Hausdorff-tér. A π függvény folytonos, ezért $\overset{-1}{\pi}\langle K'\rangle \subseteq T$ zárt halmaz, ugyanakkor $\bigcup_{t\in H} V_t$ kompakt halmaz T-ben, így $K \subseteq T$ kompakt halmaz. Állítjuk, hogy $\pi\langle K\rangle = K'$. Valóban, $\pi\langle K\rangle \subseteq \pi\langle \overset{-1}{\pi}\langle K'\rangle\rangle \subseteq K'$; továbbá $t' \in K' \subseteq \bigcup_{t\in H} \pi\langle \overset{\circ}{V_t}\rangle$ esetén van olyan $t \in H$, hogy $t' \in \pi\langle \overset{\circ}{V_t}\rangle$; ekkor létezik olyan $s \in V_t$, hogy $\pi(s) = t' \in K'$, tehát $s \in \overset{-1}{\pi}\langle K'\rangle \cap V_t \subseteq K$, vagyis $t' = \pi(s) \in \pi\langle K\rangle$, ami azt jelenti, hogy $K' \subseteq \pi\langle K\rangle$ is teljesül. ■

27.7. Egypontú kompaktifikáció

27.7.1. Tétel. (Egypontú kompaktifikáció létezése és egyértelműsége) *Legyen T lokálisan kompakt tér.*

a) *Létezik olyan T' kompakt Hausdorff-tér, hogy T topologikus altere T'-nek és $T' \setminus T$ egy elemű halmaz.*

b) *Ha T' és T'' olyan kompakt Hausdorff-terek, amelyeknek T topologikus altere, és amelyekre $T' \setminus T$ és $T'' \setminus T$ egy elemű halmazok, akkor létezik egyetlen olyan $f : T' \to T''$ homeomorfizmus, amelyre $f|_T = id_T$.*

Bizonyítás. a) Legyen ω olyan halmaz, hogy $\omega \notin T$ (ilyen létezik, különben T az összes halmazok halmaza volna), és $T' := T \cup \{\omega\}$. Jelölje $\mathscr{T}$ a T topológiáját és $\mathscr{T}_\omega := \{T' \setminus K | K \text{ kompakt halmaz } T\text{-ben}\}$. Megmutatjuk, hogy $\mathscr{T}' := \mathscr{T} \cup \mathscr{T}_\omega$ olyan topológia T' felett, hogy $(T', \mathscr{T}')$ kompakt Hausdorff-tér és $\mathscr{T}'|T = \mathscr{T}$.

Vilgos, hogy $T' = T' \setminus \emptyset \in \mathscr{T}_\omega \subseteq \mathscr{T}'$, tehát $\mathscr{T}'$-re $(\mathrm{O_I})$ teljesül. Két $\mathscr{T}$-beli halmaz metszete eleme $\mathscr{T}$-nek, mert $\mathscr{T}$-re $(\mathrm{O_{II}})$ teljesül. Két $\mathscr{T}_\omega$-beli halmaz metszete eleme

$\mathscr{T}_\omega$-nak, mert a T bármely két kompakt részhalmazának az uniója kompakt T-ben. Ha $\Omega \in \mathscr{T}$ és $K \subseteq T$ kompakt halmaz, akkor $\Omega \cap (T' \setminus K) = \Omega \cap (T \setminus K) \in \mathscr{T}$, mert Ω nyílt T-ben és K zárt T-ben, hiszen K kompakt és T Hausdorff-tér. Ezért $\mathscr{T}'$-re teljesül az $(\mathrm{O_{II}})$ tulajdonság. A $\mathscr{T}$-re teljesül $(\mathrm{O_{III}})$, továbbá a T kompakt részhalmazai tetszőleges nem üres rendszerének a metszete kompakt T-ben, így bármely $\mathscr{T}_\omega$-ban haladó nem üres rendszer uniója eleme $\mathscr{T}_\omega$-nak. Ha $\Omega \subseteq T$ nyílt halmaz és $K \subseteq T$ kompakt halmaz, akkor $\Omega \cup (T' \setminus K) = \{\omega\} \cup (\Omega \cup (T \setminus K)) = \{\omega\} \cup (T \setminus (K \setminus \Omega)) \in \mathscr{T}_\omega$, mert $K \setminus \Omega$ kompakt halmaz T-ben. Ezért $\mathscr{T}'$-re $(\mathrm{O_{III}})$ is teljesül, vagyis $\mathscr{T}'$ topológia T felett.

Ha $\Omega \in \mathscr{T}$, akkor $\Omega = \Omega \cap T \in \mathscr{T}'|T$, hiszen $\Omega \in \mathscr{T}'$. Megfordítva, legyen $\Omega \in \mathscr{T}'|T$; ekkor van olyan $\Omega' \in \mathscr{T}'$, hogy $\Omega = \Omega' \cap T$. Ha $\Omega' \in \mathscr{T}$, akkor $\Omega = \Omega' \in \mathscr{T}$. Ha $\Omega' \in \mathscr{T}_\omega$, akkor van olyan $K \subseteq T$ kompakt halmaz, hogy $\Omega' = T' \setminus K$; ekkor $\Omega = (T' \setminus K) \cap T = T \setminus K \in \mathscr{T}$. Ez azt jelenti, hogy $\mathscr{T} = \mathscr{T}'|T$.

Megmutatjuk, hogy $(T', \mathscr{T}')$ kompakt Hausdorff-tér. Legyen $(\Omega'_i)_{i\in I}$ olyan halmazrendszer, hogy minden $i \in I$ esetén az $\Omega'_i \subseteq T'$ halmaz $\mathscr{T}'$-nyílt és $T' = \bigcup\limits_{i\in I} \Omega'_i$. Létezik olyan $i(\omega) \in I$, amelyre $\omega \in \Omega'_{i(\omega)}$. Természetesen ekkor $\Omega'_{i(\omega)} \in \mathscr{T}_\omega$, így van olyan $K \subseteq T$ kompakt halmaz, hogy $\Omega'_{i(\omega)} = T' \setminus K$. A K halmaz a $\mathscr{T}'$ topológia szerint is kompakt, mert $\mathscr{T}'|T = \mathscr{T}$ és K kompakt a $\mathscr{T}$ topológia szerint. Ezért van olyan $J \subseteq I$ véges halmaz, hogy $K \subseteq \bigcup\limits_{i\in J} \Omega'_i$. Világos, hogy az $(\Omega'_i)_{i\in\{i(\omega)\}\cup J}$ halmaz véges részbefedés, ami azt jelenti, hogy $(T', \mathscr{T}')$ kompakt tér. Ha $t \in T$, akkor a T lokális kompaktsága folytán van olyan $V \in \mathscr{T}(t) \subseteq \mathscr{T}'(t)$ környezet, amely kompakt a $\mathscr{T}$ szerint; ekkor $\omega \in T' \setminus V \in \mathscr{T}_\omega$, így $T' \setminus V \in \mathscr{T}'(\omega)$ és $V \in \mathscr{T}'(t)$, és ezek diszjunkt halmazok. Ezért $(T', \mathscr{T}')$ Hausdorff-tér.

b) Legyenek T' és T'' olyan kompakt Hausdorff-terek, hogy T topologikus altere T'-nek és T''-nek, valamint a $T' \setminus T$ és $T'' \setminus T$ halmazok egy eleműek. Legyen $\{\omega'\} = T' \setminus T$ és $\{\omega''\} = T'' \setminus T$, továbbá értelmezzük azt az $f : T' \to T''$ függvényt, amelyre $f(\omega') := \omega''$ és minden $t \in T$ esetén $f(t) := t$. Ez az egyetlen olyan $T' \to T''$ függvény, amely kiterjesztése az id_T identikus függvénynek. Minden $t \in T$ esetén a T halmaz nyílt környezete t-nek T'-ben, ezért a folytonosság lokalitása alapján f folytonos t-ben. Tehát azt kell igazolni, hogy f az ω' pontban folytonos. Legyen V környezete az $f(\omega') = \omega''$ pontnak T''-ben. Létezik olyan $\Omega \subseteq T''$ nyílt halmaz, hogy $\omega'' \in \Omega \subseteq V$. A $K := T'' \setminus \Omega$ halmaz zárt, tehát kompakt a T'' kompakt térben, és $\omega'' \in \Omega$ miatt $K \subseteq T$, így K kompakt T-ben is, hiszen T topologikus altere T''-nek. Ezért K kompakt T'-ben, mert T topologikus altere T'-nek is, következésképpen K zárt T'-ben, mert T' Hausdorff-tér. Tehát $T' \setminus K$ nyílt környezete ω'-nek T'-ben, és $\omega' \in T' \setminus K = T' \setminus \overset{-1}{f}\langle K\rangle = \overset{-1}{f}\langle T'' \setminus K\rangle = \overset{-1}{f}\langle \Omega\rangle \subseteq \overset{-1}{f}\langle V\rangle$, tehát $\overset{-1}{f}\langle V\rangle$ az ω' pontnak környezete T'-ben, így f folytonos az ω' pontban. Tehát az $f : T' \to T''$ függvény folytonos bijekció, így homeomorfizmus a T' és T'' kompakt terek között. ■

27.7.2. Definíció. *A T lokálisan kompakt tér* **egypontú** (*vagy* **Alekszandrov-féle**)

kompaktifikációjának *nevezünk minden olyan* T' *kompakt Hausdorff-teret, amelynek* T *topologikus altere, és amelyre* $T' \setminus T$ *egy elemű halmaz. Ha* T' *egypontú kompaktifikációja a* T *lokálisan kompakt térnek, akkor a* $T' \setminus T$ *halmaz elemét a* **végtelen távoli pontnak** *nevezzük* T'*-ben.*

Tehát minden lokálisan kompakt térnek *létezik* egypontú kompaktifikációja és bármely két egypontú kompaktifikációja kitüntetett módon, topologikusan azonosítható egymással, tehát az egypontú kompaktifikáció (ilyen értelemben) *egyértelmű.* Az egypontú kompaktifikáció fogalmának alkalmazásaként azonnal bizonyítható a következő állítás.

27.7.3. Állítás. *Minden lokálisan kompakt tér teljesen reguláris.*

Bizonyítás. Minden lokálisan kompakt tér homeomorf bármely egypontú kompaktifikációjának egyik topologikus alterével. Ugyanakkor kompakt Hausdorff-tér normális T_1-tér, tehát teljesen reguláris, továbbá teljesen reguláris tér minden topologikus altere teljesen reguláris. ■

27.8. Uriszon-tétel, Tietze-tétel és egységosztás-tétel lokálisan kompakt terekre

Láttuk, hogy a kompakt Hausdorff-terek normálisak, ezért alkalmazható rájuk az Uriszon-tétel, a Tietze-tétel, és az egységosztás-tétel. Azonban a lokálisan kompakt terek nem szükségképpen normálisak, ezért az imént említett tételekben megfogalmazott tulajdonságok csak korlátozott formában teljesülhetnek rájuk. Az egypontú kompaktifikáció fogalmának alkalmazásával könnyen bebizonyíthatjuk ezeknek a tételeknek lokálisan kompakt terekre vonatkozó változatát.

27.8.1. Tétel. (Uriszon-tétel lokálisan kompakt terekre) *Ha* T *lokálisan kompakt tér,* $K \subseteq T$ *kompakt halmaz és* $\Omega \subseteq T$ *olyan nyílt halmaz, hogy* $K \subseteq \Omega$*, akkor létezik olyan* $f : T \to \mathbb{R}$ *kompakt tartójú folytonos függvény, hogy* $0 \leq f \leq 1$*,* $K \subseteq [f = 1]$ *és* $\mathrm{supp}(f) \subseteq \Omega$*.*

Bizonyítás. Legyen $U \subseteq T$ olyan relatív kompakt nyílt halmaz, amelyre $K \subseteq U \subseteq \overline{U} \subseteq \Omega$. Legyen T' egypontú kompaktifikációja T-nek. A K halmaz kompakt T'-ben, tehát zárt is T'-ben, mert T' Hausdorff-tér. Az U halmaz nyílt T'-ben, mert T nyílt topologikus altere T'-nek. A T' kompakt Hausdorff-tér normális, ezért az Uriszon-tétel alapján van olyan $f' : T' \to \mathbb{R}$ folytonos függvény, hogy $0 \leq f' \leq 1$, $K \subseteq [f' = 1]$ és $[f' \neq 0] \subseteq U$. Ekkor az $f := f'|_T : T \to \mathbb{R}$ függvény folytonos, $0 \leq f \leq 1$, $K \subseteq [f = 1]$ és $[f \neq 0] = [f' \neq 0] \cap T \subseteq U$, így $\mathrm{supp}(f) := \overline{[f \neq 0]} \subseteq \overline{U}$, tehát f kompakt tartójú és $\overline{U} \subseteq \Omega$ miatt $\mathrm{supp}(f) \subseteq \Omega$. ■

27.8.2. Tétel. (Tietze-tétel lokálisan kompakt terekre) *Legyen T lokálisan kompakt tér, $K \subseteq T$ kompakt halmaz és $\Omega \subseteq T$ olyan nyílt halmaz, hogy $K \subseteq \Omega$. Ha az $f : K \to \mathbb{R}$ függvény folytonos a K altértopológiája szerint, akkor létezik olyan $g : T \to \mathbb{R}$ kompakt tartójú folytonos függvény, amelyre $g|_K = f$ és $\mathrm{supp}(g) \subseteq \Omega$.*

Bizonyítás. Legyen T' egypontú kompaktifikációja T-nek. A lokálisan kompakt terekre vonatkozó Uriszon-tétel alapján rögzítünk olyan $\varphi : T \to \mathbb{R}$ kompakt tartójú folytonos függvényt, hogy $0 \leq \varphi \leq 1$, $K \subseteq [\varphi = 1]$ és $\mathrm{supp}(\varphi) \subseteq \Omega$. A K halmaz kompakt T'-ben is, ezért zárt, mert T' Hausdorff-tér. Alkalmazva a Tietze-tételt a T' normális térre, a $K \subseteq T'$ zárt halmazra, és az $f : K \to \mathbb{R}$ altéren folytonos függvényre kapjuk olyan $f' : T \to \mathbb{R}$ folytonos függvény létezését, amelyre $f'|_K = f$. Ekkor a $g := \varphi.(f'|_T) : T \to \mathbb{R}$ függvény folytonos kiterjesztése f-nek és $\mathrm{supp}(g) \subseteq \mathrm{supp}(\varphi) \subseteq \Omega$, tehát g kompakt tartójú. ■

Legyen T lokálisan kompakt tér, $K \subseteq T$ kompakt halmaz, $\Omega \subseteq T$ olyan nyílt halmaz, hogy $K \subseteq \Omega$, és $f : K \to \mathbb{R}$ olyan függvény, amely folytonos a K altértopológiája szerint, valamint $\alpha \leq f \leq \beta$, ahol $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ olyan számok, hogy $\alpha \leq \beta$. Ekkor van olyan $g : T \to \mathbb{R}$ folytonos kompakt tartójú függvény, amely f-nek kiterjesztése, $\mathrm{supp}(g) \subseteq \Omega$ és $\alpha \leq g \leq \beta$. Valóban, a lokálisan kompakt terekre vonatkozó Tietze-tétel szerint van olyan $g' : T \to \mathbb{R}$ kompakt tartójú folytonos függvény, amely kiterjesztése f-nek és $\mathrm{supp}(g') \subseteq \Omega$. Ekkor a $g := \inf(\beta, \sup(\alpha, g'))$ függvény szintén folytonos kiterjesztése f-nek, $\mathrm{supp}(g) \subseteq \mathrm{supp}(g') \subseteq \Omega$, és $\alpha \leq g \leq \beta$ nyilvánvalóan teljesül.

27.8.3. Tétel. (Dieudonné-féle egységosztás-tétel lokálisan kompakt terekre) *Legyen T lokálisan kompakt tér, $K \subseteq T$ kompakt halmaz és $(\Omega_i)_{i \in I}$ a T nyílt részhalmazainak olyan véges rendszere, hogy $K \subseteq \bigcup_{i \in I} \Omega_i$. Ekkor létezik olyan $(f_i)_{i \in I}$ rendszer, hogy minden $I \ni i$-re $f_i : T \to \mathbb{R}$ kompakt tartójú folyonos függvény, $0 \leq f_i \leq 1$, $\mathrm{supp}(f_i) \subseteq \Omega_i$, és $K \subseteq \left[\sum_{i \in I} f_i = 1\right]$, valamint $\sum_{i \in I} f_i \leq 1$ a T halmazon mindenütt.*

Bizonyítás. Először megmutatjuk olyan $(U_i)_{i \in I}$ halmazrendszer létezését, hogy minden $I \ni i$-re U_i relatív kompakt nyílt részhalmaza T-nek, $\overline{U_i} \subseteq \Omega_i$, és $K \subseteq \bigcup_{i \in I} U_i$. Valóban, kiválaszthatunk olyan $(V_t)_{t \in K}$ halmazrendszert, hogy minden $K \ni t$-re V_t olyan relatív kompakt nyílt környezete t-nek, amelyhez létezik olyan $i \in I$, hogy $\overline{V_t} \subseteq \Omega_i$. A K kompaktsága miatt van olyan $H \subseteq K$ véges halmaz, hogy $K \subseteq \bigcup_{t \in H} V_t$. Minden $i \in I$ esetén legyen $H_i := \{t \in H | \overline{V_t} \subseteq \Omega_i\}$, és értelmezzük az $U_i := \bigcup_{t \in H_i} V_t$ halmazt. Nyilvánvaló, hogy minden $i \in I$ esetén U_i olyan nyílt halmaz, hogy $\overline{U_i} = \bigcup_{t \in H_i} \overline{V_t} \subseteq \Omega_i$, és láthatóan U_i relatív kompakt, mert minden $H_i \ni t$-re $\overline{V_t}$ kompakt halmaz. Ha $t \in K$, akkor van olyan $s \in H$, hogy $t \in V_s$, és létezik olyan $i \in I$, hogy $\overline{V_s} \subseteq \Omega_i$; ekkor $s \in H_i$ és $t \in V_s \subseteq U_i$. Ez azt jelenti, hogy $K \subseteq \bigcup_{i \in I} U_i$, tehát $(U_i)_{i \in I}$ olyan halmazrendszer, amelynek a létezését állítottuk.

Minden $I \ni i$-re alkalmazzuk a lokálisan kompakt terekre vonatkozó Uriszon-tétel az $\overline{U_i}$ kompakt halmazra és Ω_i nyílt halmazra; tehát kiválasztunk olyan $g_i : T \to \mathbb{R}$ folytonos függvényt, hogy $0 \leq g_i \leq 1$, $\overline{U_i} \subseteq [g_i = 1]$ és $\operatorname{supp}(g_i) \subseteq \Omega_i$. Újra alkalmazzuk az Uriszon-tételt a K kompakt halmazra és az $\bigcup_{i \in I} U_i$ nyílt halmazra; tehát veszünk olyan $g : T \to \mathbb{R}$ kompakt tartójú folytonos függvényt, hogy $0 \leq g \leq 1$, $K \subseteq [g = 1]$ és $\operatorname{supp}(g) \subseteq \bigcup_{i \in I} U_i$. Ezután minden $I \ni i$-re értelmezzük az

$$f_i : T \to \mathbb{R}; \quad t \mapsto \begin{cases} \dfrac{g(t) g_i(t)}{\sum\limits_{j \in I} g_j(t)} & ; \text{ha } t \in \bigcup\limits_{j \in I} U_j, \\ 0 & ; \text{ha } t \in T \setminus \bigcup\limits_{j \in I} U_j \end{cases}$$

függvényt, amelyre $0 \leq f_i \leq 1$ és $\operatorname{supp}(f_i) \subseteq \operatorname{supp}(g_i) \subseteq \Omega_i$ nyilvánvalóan teljesül, továbbá

$$K = K \cap [g = 1] \subseteq \left(\bigcup_{i \in I} U_i \right) \cap [g = 1] \subseteq \left[\sum_{i \in I} f_i = 1 \right],$$

és természetesen $\sum\limits_{i \in I} f_i \leq g \leq 1$. Ezért elég azt igazolni, hogy minden $i \in I$ esetén f_i *folytonos* függvény. Legyen $i \in I$ rögzített. A folytonosság lokalitása alapján nyilvánvaló, hogy f_i folytonos az $\bigcup\limits_{j \in I} U_j$ nyílt halmaz minden pontjában. Továbbá, $f_i = 0$ a $T \setminus \operatorname{supp}(g_i)$ halmazon, ami a $T \setminus \bigcup\limits_{j \in I} U_j$ halmaz minden pontjának nyílt környezete, ezért ismét a folytonosság lokalitása miatt f_i folytonos a $T \setminus \bigcup\limits_{j \in I} U_j$ halmaz minden pontjában. Tehát

$T = (T \setminus \operatorname{supp}(g)) \cup \bigcup\limits_{j \in I} U_j$ miatt f_i folytonos függvény. ■

27.9. Félig folytonos függvények lokálisan kompakt tér felett

27.9.1. Állítás. *Legyen T lokálisan kompakt tér és jelölje $\mathscr{K}(T; \mathbb{R})$ a $T \to \mathbb{R}$ kompakt tartójú folytonos függvények halmazát.*

a) *Ha $f : T \to \overline{\mathbb{R}}_+$ alulról félig folytonos függvény, akkor*

$$f = \sup_{\substack{\varphi \in \mathscr{K}(T;\mathbb{R}) \\ 0 \leq \varphi \leq f}} \varphi.$$

b) *Ha $f : T \to \mathbb{R}_+$ kompakt tartójú felülről félig folytonos függvény, akkor*

$$f = \inf_{\substack{\varphi \in \mathscr{K}(T;\mathbb{R}) \\ f \leq \varphi}} \varphi.$$

Bizonyítás. a) Legyenek $t \in T$ és $c \in \mathbb{R}$ olyanok, hogy $c < f(t)$. Elegendő olyan $\varphi \in \mathscr{K}(T;\mathbb{R})$ függvényt találni, amelyre $0 \leq \varphi \leq f$ és $c \leq \varphi(t)$. Az f alulról félig folytonossága miatt a $[c < f]$ halmaz nyílt környezete t-nek. A lokálisan terekre vonatkozó Uriszon-tételt alkalmazzuk a $\{t\}$ kompakt halmazra és $[c < f]$ nyílt halmazra. Létezik tehát olyan $\psi \in \mathscr{K}(T;\mathbb{R})$, hogy $0 \leq \psi \leq 1$, $\psi(t) = 1$ és $\mathrm{supp}(\psi) \subseteq [c < f]$. Ekkor a $\varphi := c\psi$ függvény kompakt tartójú, folytonos, és $\varphi(t) = c$. Ha $s \in [c < f]$, akkor nyilvánvaló, hogy $0 \leq \varphi(s) := c\psi(s) \leq c < f(s)$, ugyanakkor $s \in T \setminus [c < f]$ esetén $\varphi(s) = 0 \leq f(s)$, tehát $0 \leq \varphi \leq f$.

b) Először megjegyezzük, hogy f *felülről korlátos*, mert az f felülről félig folytonossága miatt az $([f < n])_{n\in\mathbb{N}}$ monoton növő halmazsorozat mindegyik tagja nyílt halmaz, és $+\infty \notin \mathrm{Im}(f)$ miatt $T = \bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} [f < n]$, így a $\mathrm{supp}(f)$ kompakt halmazhoz van olyan $n \in \mathbb{N}$, amelyre $\mathrm{Im}(f) \subseteq [f < n]$, tehát minden $T \ni t$-re $f(t) < n$. A lokálisan kompakt terekre vonatkozó Uriszon-tételt alkalmazva a $\mathrm{supp}(f)$ kompakt halmazra és T nyílt halmazra kapjuk olyan $\psi_0 \in \mathscr{K}(T;\mathbb{R})$ létezését, amelyre $0 \leq \psi \leq 1$ és $\mathrm{supp}(f) \subseteq [\psi_0 = 1]$. Ha $C \in \mathbb{R}_+$ olyan, hogy $f \leq C$, akkor a $\psi := C\psi_0 \in \mathscr{K}(T;\mathbb{R})$ függvényre $f \leq \psi$ nyilvánvalóan teljesül.

Rögzítsünk olyan $\psi \in \mathscr{K}(T;\mathbb{R})$ függvényt, amelyre $f \leq \psi$. Ekkor $\psi - f : T \to \mathbb{R}_+$ alulról félig folytonos függvény, tehát az a) alapján írható, hogy

$$f = \psi - (\psi - f) = \psi - \sup_{\substack{\varphi\in\mathscr{K}(T;\mathbb{R})\\ 0\leq\varphi\leq\psi-f}} \varphi = \inf_{\substack{\varphi\in\mathscr{K}(T;\mathbb{R})\\ 0\leq\varphi\leq\psi-f}} (\psi - \varphi) =$$

$$= \inf_{\substack{\varphi\in\mathscr{K}(T;\mathbb{R})\\ 0\leq\varphi\\ f\leq\psi-\varphi}} (\psi - \varphi) = \inf_{\substack{\varphi'\in\mathscr{K}(T;\mathbb{R})\\ f\leq\varphi'\leq\psi}} \varphi',$$

ahol kihasználtuk azt a nyilvánvaló tényt, hogy

$$\{\psi - \varphi | (\varphi \in \mathscr{K}(T;\mathbb{R})) \wedge (0 \leq \varphi) \wedge (f \leq \psi - \varphi)\} =$$

$$= \{\varphi' | (\varphi' \in \mathscr{K}(T;\mathbb{R})) \wedge (f \leq \varphi' \leq \psi)\}.$$

Ugyanakkor

$$\inf_{\substack{\varphi\in\mathscr{K}(T;\mathbb{R})\\ f\leq\varphi}} \varphi \leq \inf_{\substack{\varphi'\in\mathscr{K}(T;\mathbb{R})\\ f\leq\varphi'\leq\psi}} \varphi'$$

nyilvánvalóan igaz, ezért

$$\inf_{\substack{\varphi\in\mathscr{K}(T;\mathbb{R})\\ f\leq\varphi}} \varphi \leq f.$$

A fordított egyenlőtlenség triviális, ezért itt egyenlőség áll. ■

27.10. Baire-terek és a kategóriatétel

27.10.1. Definíció. *Legyen T topologikus tér. Azt mondjuk, hogy az $E \subseteq T$ halmaz*

– **sehol sem sűrű**, *ha* $\overset{\circ}{\overline{E}} = \emptyset$*;*

– **első kategóriájú**, *ha E előállítható megszámlálható sok sehol sem sűrű halmaz uniójaként;*

– **második kategóriájú**, *ha nem első kategóriájú.*

27.10.2. Definíció. *Azt mondjuk, hogy a T topologikus tér* **Baire-tér**, *ha a T minden nem üres nyílt részhalmaza második kategóriájú.*

Megjegyzések. 1) Sehol sem sűrű (illetve első kategóriájú) halmaz minden részhalmaza sehol sem sűrű (illetve első kategóriájú). Egy halmaz pontosan akkor sehol sem sűrű, ha a lezártja sehol sem sűrű. Első kategóriájú halmazok *megszámlálható* rendszerének az uniója szintén első kategóriájú. Ezek az állítások a definícióból nyilvánvalóan következnek.

2) Ha T topologikus tér, akkor egy $E \subseteq T$ halmaz pontosan akkor sehol sem sűrű, ha az $T \setminus \overline{E}$ halmaz sűrű T-ben. Ez azonnal látható az $\overset{\circ}{\overline{E}} = T \setminus \overline{(T \setminus \overline{E})}$ egyenlőségből.

3) *Véges* sok sehol sem sűrű halmaz uniója sehol sem sűrű. Ezt elegendő két sehol sem sűrű halmaz uniójára igazolni. Legyen T topologikus tér és legyenek $E, E' \subseteq T$ sehol sem sűrű halmazok. Azt kell megmutatni, hogy az $T \setminus \overline{E \cup E'}$ halmaz sűrű T-ben, vagyis $\overline{E \cup E'} = \overline{E} \cup \overline{E'}$ és a de Morgan egyenlőség alapján azt, hogy $(T \setminus \overline{E}) \cap (T \setminus \overline{E'})$ sűrű halmaz. Ennek bizonyításához legyen $t \in T$ és V nyílt környezete T-nek. A E halmaz sehol sem sűrű, ezért $T \setminus \overline{E}$ sűrű T-ben, tehát $(T \setminus \overline{E}) \cap V \neq \emptyset$; legyen $t' \in (T \setminus \overline{E}) \cap V$. Az $(T \setminus \overline{E}) \cap V$ halmaz nyílt környezete t'-nek, ugyanakkor E' sehol sem sűrű, tehát $T \setminus \overline{E'}$ sűrű T-ben, így $(T \setminus \overline{E'}) \cap (T \setminus \overline{E}) \cap V \neq \emptyset$. Ez azt jelenti, hogy $(T \setminus \overline{E \cup E'}) \cap V \neq \emptyset$, így $T \setminus \overline{E \cup E'}$ sűrű halmaz, vagyis $E \cup E'$ sehol sem sűrű.

4) *Megszámlálhatóan végtelen* sok sehol sem sűrű halmaz uniója nem szükségképpen sehol sem sűrű (csak első kategóriájú). Például $\mathbb{R}$-ben az euklidészi metrika szerint minden egy elemű halmaz sehol sem sűrű, így $\mathbb{Q}$ első kategóriájú halmaz, de természetesen $\mathbb{Q}$ nem sehol sem sűrű $\mathbb{R}$-ben.

5) Ha T topologikus tér, akkor egy $E \subseteq T$ halmaz pontosan akkor első kategóriájú, ha létezik az T *zárt* sehol sem sűrű részhalmazainak olyan $(F_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sorozata, hogy $E \subseteq \bigcup\limits_{n \in \mathbb{N}} F_n$. Valóban, ha E első kategóriájú, és $(E_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sehol sem sűrű halmazok olyan sorozata, hogy $E = \bigcup\limits_{n \in \mathbb{N}} E_n$, akkor a $(\overline{E_n})_{n \in \mathbb{N}}$ halmazsorozat mindegyik tagja sehol sem sűrű zárt halmaz, továbbá $E \subseteq \bigcup\limits_{n \in \mathbb{N}} \overline{E_n}$. Megfordítva, ha $(F_n)_{n \in \mathbb{N}}$ az T zárt sem sűrű

részhalmazainak olyan sorozata, hogy $E \subseteq \bigcup_{n\in\mathbb{N}} F_n$, akkor $E = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} (E \cap F_n)$, és minden $n \in \mathbb{N}$ esetén $F_n \cap E$ sehol sem sűrű halmaz, tehát E első kategóriájú.

27.10.3. Tétel. (Baire-féle kategóriatétel) *Minden teljesen félmetrizálható és minden lokálisan kompakt tér Baire-tér.*

Bizonyítás. (I) Legyen T teljesen félmetrizálható topologikus metrikus tér, és d olyan félmetrika T felett, amely a T topológiáját generálja. Legyen $\Omega \subseteq T$ nem üres nyílt halmaz, és $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ az T zárt sehol sem sűrű részhalmazainak tetszőleges sorozata. Megmutatjuk, hogy ekkor $\Omega \setminus \bigcup_{n\in\mathbb{N}} F_n \neq \emptyset$, így az 5) megjegyzés alapján Ω nem lehet első kategóriájú.

Először megjegyezzük, hogy 3) megjegyzés szerint minden $n \in \mathbb{N}$ esetén $\bigcup_{k=0}^{n} F_k$ sehol sem sűrű zárt halmaz, vagyis $\operatorname{Int}\left(\bigcup_{k=0}^{n} F_k\right) = \emptyset$, így $\Omega \setminus \bigcup_{k=0}^{n} F_k \neq \emptyset$, különben $\emptyset \neq \Omega \subseteq \bigcup_{k=0}^{n} F_k$ teljesülne, tehát $\operatorname{Int}\left(\bigcup_{k=0}^{n} F_k\right) \neq \emptyset$ igaz volna.

Most a kiválasztási axiómával kombinált rekurzió tételét alkalmazva igazoljuk olyan $T \times \mathbb{R}^+$-ban haladó $((t_n, r_n))_{n\in\mathbb{N}}$ sorozat létezését, amelyre

$$\overline{B}_{r_0}(t_0; d) \subseteq \Omega \setminus F_0,$$

és minden $n \in \mathbb{N}$ esetén

$$\overline{B}_{r_{n+1}}(t_{n+1}; d) \subseteq B_{r_n}(t_n; d) \setminus \bigcup_{k=0}^{n+1} F_k,$$

valamint $r_{n+1} < \dfrac{r_n}{2}$.

Az $\Omega \setminus F_0$ halmaz nyílt és nem üres, így van olyan $t_0 \in T$ és $r_0 \in \mathbb{R}^+$, hogy $\overline{B}_{r_0}(t_0; d) \subseteq \Omega \setminus F_0$. Legyen $n \in \mathbb{N}$ és $((t_m, r_m))_{0\leq m\leq n}$ olyan rendszer $T \times \mathbb{R}^+$-ban, hogy $\overline{B}_{r_0}(t_0; d) \subseteq \Omega \setminus F_0$, és minden $0<m<n$ természetes számra $\overline{B}_{r_{m+1}}(t_{m+1}; d) \subseteq B_{r_m}(t_m; d) \setminus \bigcup_{k=0}^{m+1} F_k$, valamint minden $m < n$ természetes számra $r_{m+1} < \dfrac{r_m}{2}$. Ekkor $\Omega \setminus \bigcup_{k=0}^{n+1} F_k \neq \emptyset$ és ez nyílt halmaz, így van olyan $t \in T$ és $r \in \mathbb{R}^+$, hogy $\overline{B}_r(t; d) \subseteq \Omega \setminus \bigcup_{k=0}^{n+1} F_k$. Legyen $t_{n+1} := t$ és $r_{n+1} \in \mathbb{R}^+$ tetszőleges olyan szám, amelyre $r_{n+1} < \min(r, r_n/2)$. Ekkor az $((t_m, r_m))_{0\leq m\leq n+1}$ rendszer $T \times \mathbb{R}^+$-ben halad, és minden $m < n+1$ természetes számra $\overline{B}_{r_{m+1}}(t_{m+1}; d) \subseteq B_{r_m}(t_m; d) \setminus \bigcup_{k=0}^{m+1} F_k$, valamint minden $m < n$ természetes számra $r_{m+1} < \dfrac{r_m}{2}$. Ezért a kiválasztási atiómával kombinált rekurzió tétele szerint vehetünk olyan $T \times \mathbb{R}^+$-ban haladó $((t_n, r_n))_{n\in\mathbb{N}}$ sorozatot, amely rendelkezik az előírt tulajdonságokkal.

Könnyen látható, hogy $m, n \in \mathbb{N}$ és $m \leq n$ esetén $t_n \in \overline{B}_{r_n}(t_n; d) \subseteq \overline{B}_{r_m}(t_m; d)$, így $d(t_m, t_n) \leq r_m$. Ebből látszik, hogy minden $\mathbb{N} \ni m, n$-re $d(t_m, t_n) \leq r_{\min(m,n)}$. Ugyanakkor minden $n \in \mathbb{N}^+$ esetén $r_n < \frac{r_0}{2^n}$, vagyis az $(r_n)_{n\in\mathbb{N}}$ számsorozat 0-hoz tart $\mathbb{R}$-ben. Ezért $(t_n)_{n\in\mathbb{N}}$ Cauchy-sorozat T-ben, így vehetjünk *egy olyan* $t \in T$ pontot, amelyhez a $(t_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sorozat konvergál. Ha $m \in \mathbb{N}$, akkor az $(t_{m+n})_{n\in\mathbb{N}}$ részsorozat az $\overline{B}_{r_m}(t_m; d)$ zárt halmazban halad, és szintén konvergál t-hez, ezért $t \in \overline{B}_{r_m}(t_m; d)$. Tehát minden $\mathbb{N} \ni m$-re $t \in \overline{B}_{r_m}(t_m; d)$, ugyanakkor $\overline{B}_{r_m}(t_m; d) \cap \bigcup_{k=0}^{m} F_k = \emptyset$. Ez azt jelenti, hogy $t \in \Omega \setminus \bigcup_{k\in\mathbb{N}} F_k$.

(II) Legyen T lokálisan kompakt tér, és indirekt feltesszük, hogy $\Omega \subseteq T$ nem üres, első kategóriájú nyílt halmaz. Legyen $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ olyan halmazsorozat, amelynek mindegyik tagja sehol sem sűrű zárt halmaz T-ben és $\Omega \subseteq \bigcup_{n\in\mathbb{N}} F_n$.

A kiválasztási axiómával kombinált rekurzió tételét alkalmazva igazoljuk olyan $(K_n)_{n\in\mathbb{N}}$ halmazsorozat létezését, hogy $K_0 \subseteq \Omega \setminus F_0$, és minden $\mathbb{N} \ni n$-re $K_n \subseteq T$ kompakt halmaz, $\mathring{K}_n \neq \emptyset$, valamint $K_{n+1} \subseteq \mathring{K}_n \setminus \left(\bigcup_{k=0}^{n+1} F_k \right)$.

A F_0 halmaz sehol sem sűrű és zárt, így $\mathring{F}_0 = \emptyset$, tehát $\Omega \neq \emptyset$ miatt $\Omega \setminus F_0 \neq \emptyset$. Ha $t \in \Omega \setminus F_0$, akkor $\Omega \setminus F_0$ nyílt környezete t-nek, tehát létezik olyan $U \subseteq T$ relatív kompakt nyílt halmaz, hogy $t \in U \subseteq \overline{U} \subseteq \Omega \setminus F_0$. Legyen $K_0 := \overline{U}$; ekkor K_0 kompakt halmaz T-ben, $K_0 \subseteq \Omega \setminus F_0$ és $\mathring{K}_0 \supseteq U \neq \emptyset$.

Legyen $n \in \mathbb{N}^+$, és tegyük fel, hogy $(K_j)_{j\in n}$ olyan rendszer, hogy $K_0 \subseteq \Omega \setminus F_0$, és minden $n \ni j$-re $K_j \subseteq T$ kompakt halmaz, $\mathring{K}_j \neq \emptyset$, valamint $j + 1 < n$ esetén $K_{j+1} \subseteq \mathring{K}_j \setminus \left(\bigcup_{k=0}^{j+1} F_k \right)$. Az $\mathring{K}_{n-1}$ halmaz nyílt és nem üres, továbbá $\bigcup_{k=0}^{n} F_k$ sehol sem sűrű zárt halmaz, ezért $\mathring{K}_{n-1} \setminus \left(\bigcup_{k=0}^{n} F_k \right) \neq \emptyset$. Ha t eleme ennek a halmaznak, akkor létezik olyan $U \subseteq T$ relatív kompakt nyílt halmaz, amelyre $t \in U \subseteq \overline{U} \subseteq \mathring{K}_{n-1} \setminus \left(\bigcup_{k=0}^{n} F_k \right)$. Legyen $K_n := \overline{U}$; ekkor K_n kompakt részhalmaza T-nek, $K_n \subseteq \mathring{K}_{n-1} \setminus \left(\bigcup_{k=0}^{n} F_k \right)$ és $\mathring{K}_n \supseteq U \neq \emptyset$. Tehát a $(K_j)_{j\in n+1}$ rendszer olyan, hogy $K_0 \subseteq \Omega \setminus F_0$, és minden $n+1 \ni j$-re $K_j \subseteq T$ kompakt halmaz, $\mathring{K}_j \neq \emptyset$, valamint $j+1 < n+1$ esetén $K_{j+1} \subseteq \mathring{K}_j \setminus \left(\bigcup_{k=0}^{j+1} F_k \right)$.

Rögzítsünk egy olyan $(K_n)_{n\in\mathbb{N}}$ halmazsorozatot, amelynek létezését igazoltuk az imént. Minden $\mathbb{N} \ni n$-re $K_{n+1} \subseteq K_n$ és $K_n \neq \emptyset$ kompakt halmaz, ezért a Cantor-féle közösrész-tétel alapján $\bigcap\limits_{n\in\mathbb{N}} K_n \neq \emptyset$; legyen $t \in \bigcap\limits_{n\in\mathbb{N}} K_n$. Ekkor $t \in K_0 \subseteq \Omega$, ugyanakkor minden $n \in \mathbb{N}^+$ esetén $t \in K_n \subseteq \left(\overset{\circ}{K}_{n-1} \setminus \left(\bigcup\limits_{k=0}^{n} F_k\right)\right)$, tehát $t \notin \bigcup\limits_{k=0}^{n} F_k$. Ezért $t \notin \bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} F_n$, vagyis $t \in \Omega \setminus \left(\bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} F_n\right)$, ami ellentmond az $\Omega \subseteq \bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} F_n$ feltételnek. ■

27.11. Parakompakt terek

27.11.1. Definíció. *Ha $(U_i)_{i\in I}$ és $(V_j)_{j\in J}$ halmazrendszerek, akkor azt mondjuk, hogy $(V_j)_{j\in J}$ finomítása $(U_i)_{i\in I}$-nek, ha minden $j \in J$ esetén van olyan $i \in I$, hogy $V_j \subseteq U_i$. Azt mondjuk, hogy a T topologikus tér* **parakompakt**, *ha a T bármely nyílt befedésének létezik olyan finomítása, amely lokálisan véges nyílt befedése T-nek. A T topologikus tér E részhalmazát parakompaktnak mondjuk, ha az E topologikus altér parakompakt tér.*

Például, ha $(U_i)_{i\in I}$ tetszőleges halmazrendszer, akkor minden $J \subseteq I$ halmazra $(U_i)_{i\in J}$ finomítása $(U_i)_{i\in I}$-nek. Ugyanakkor topologikus tér részhalmazainak bármely véges rendszere nyilvánvalóan lokálisan véges. Ezért minden kompakt tér parakompakt, vagyis a parakompaktság a kompaktság fogalmának általánosítása.

27.11.2. Lemma. *Legyen T parakompakt tér és $F, F' \subseteq T$ olyan zárt halmazok, hogy minden $t \in F$ pontnak van olyan V környezete és van olyan $\Omega' \subseteq T$ nyílt halmaz, hogy $F' \subseteq \Omega'$ és $V \cap \Omega' = \emptyset$. Ekkor léteznek olyan $\Omega, \Omega' \subseteq T$ nyílt halmazok, hogy $F \subseteq \Omega$, $F' \subseteq \Omega'$ és $\Omega \cap \Omega' = \emptyset$.*

Bizonyítás. A hipotézis alapján kiválaszthatunk olyan $(V_t)_{t\in F}$ és $(\Omega'_t)_{t\in F}$ rendszereket, hogy minden $t \in F$ esetén V_t nyílt környezete t-nek és $\Omega'_t \subseteq T$ olyan nyílt halmaz, hogy $F' \subseteq \Omega'_t$ és $V_t \cap \Omega'_t = \emptyset$. Legyen ω olyan halmaz, hogy $\omega \notin F$ és $V_\omega := T \setminus F$. Ekkor $(V_t)_{t\in\{\omega\}\cup F}$ nyílt befedése T-nek tehát a T parakompaktsága miatt vehetjük a T-nek olyan $(\Omega_i)_{i\in I}$ lokálisan véges nyílt befedését, amely finomítása a $(V_t)_{t\in\{\omega\}\cup F}$ halmazrendszernek. Ha $i \in I$, akkor van olyan $t \in \{\omega\} \cup F$, hogy $\Omega_i \subseteq V_t$, és ha $F \cap \Omega_i \neq \emptyset$, akkor $t \neq \omega$, különben $\Omega_i \subseteq V_\omega = T \setminus F$, vagyis $F \cap \Omega_i = \emptyset$ teljesülne. Legyen $J := \{i \in I | F \cap \Omega_i \neq \emptyset\}$ és $\Omega := \bigcup\limits_{i\in J} \Omega_i$. A J definíciója szerint $F \subseteq \Omega$, mert $(\Omega_i)_{i\in I}$ befedése T-nek. Kiválasztunk olyan $\tau : J \to F$ függvényt, hogy minden $i \in J$ esetén $\Omega_i \subseteq V_{\tau(i)}$.

Bebizonyítjuk olyan $\Omega' \subseteq T$ nyílt halmaz létezését, amelyre $F' \subseteq \Omega'$ és $\Omega \cap \Omega' = \emptyset$. Az $(\Omega_i)_{i\in I}$ halmazrendszer lokális végessége miatt kiválaszthatunk olyan $(V_{t'})_{t'\in F'}$ rendszert, hogy minden $F' \ni t'$-re $V_{t'}$ olyan nyílt környezete t'-nek, hogy az $\{i \in I | V_{t'} \cap \Omega_i \neq \emptyset\}$ halmaz véges. Minden $t' \in F'$ esetén legyen $I(t') := J \cap \{i \in I | V_{t'} \cap \Omega_i \neq \emptyset\}$; ez is véges halmaz. Ha $t' \in F'$ olyan, hogy $I(t') = \emptyset$, akkor minden $J \ni i$-re $V_{t'} \cap \Omega_i = \emptyset$; legyen ekkor $U_{t'} := V_{t'}$. Ha $t' \in F'$ olyan, hogy $I(t') \neq \emptyset$, akkor minden $J \ni i$-re az

$U_{t'} := V_{t'} \cap \bigcap_{j \in I(t')} \Omega'_{\tau(j)}$ halmaz nem metszi Ω_i-t. Valóban, $\Omega_i \subseteq V_{\tau(i)}$ miatt

$$\Omega_i \cap V_{t'} \cap \bigcap_{j \in I(t')} \Omega'_{\tau(j)} = \left(\Omega_i \cap V_{\tau(i)}\right) \cap V_{t'} \cap \bigcap_{j \in I(t')} \Omega'_{\tau(j)} =$$

$$= (\Omega_i \cap V_{t'}) \cap \left(\bigcap_{j \in I(t')} \Omega'_{\tau(j)} \cap V_{\tau(i)}\right),$$

és ha ez nem volna üres, akkor $\Omega_i \cap V_{t'} \neq \emptyset$, így $i \in I(t')$, tehát $\Omega'_{\tau(i)} \cap V_{\tau(i)} \neq \emptyset$ is teljesülne, holott minden $F \ni t$-re (így a $t := \tau(t)$ pontra is) $V_t \cap \Omega'_t = \emptyset$. Ugyanakkor $t' \in F'$ és $I(t') \neq \emptyset$ esetén minden $I(t') \ni j$-re $F' \subseteq \Omega'_{\tau(j)}$, ezért a $V_{t'} \cap \bigcap_{j \in I(t')} \Omega'_{\tau(j)}$ halmaz nyílt környezete t'-nek; legyen ekkor $U_{t'} := V_{t'} \cap \bigcap_{j \in I(t')} \Omega'_{\tau(j)}$. Tehát $(U_{t'})_{t' \in F'}$ olyan halmazrendszer, hogy minden $F' \ni t'$-re $U_{t'}$ nyílt környezete t'-nek, és minden $i \in J$ esetén $\Omega_i \cap U_{t'} = \emptyset$. Ezért $t' \in F'$ esetén $\Omega \cap U_{t'} = \emptyset$ is teljesül, így az $\Omega' := \bigcup_{t' \in F'} U_{t'}$ halmaz nyílt, $F' \subseteq \Omega'$ és $\Omega \cap \Omega' = \emptyset$. ■

27.11.3. Állítás. *Minden parakompakt Hausdorff-tér normális.*

Bizonyítás. Legyen T parakompakt Hausdorff-tér és $F, F' \subseteq T$ diszjunkt zárt halmazok. Ha $t' \in F'$, akkor az előző lemmát alkalmazhatjuk az F és $\{t'\}$ zárt halmazokra, mert T Hausdorff-tér. Tehát minden $t' \in F'$ ponthoz léteznek olyan $\Omega, \Omega' \subseteq T$ diszjunkt nyílt halmazok, hogy $F \subseteq \Omega$ és $t' \in \Omega'$. Ezért ismét alkalmazhatjuk az előző lemmát az F és F' diszjunkt zárt halmazokra, amiből következik az állítás. ■

Korábban láttuk, hogy normális terekre érvényes az egységosztás-tétel c) pontjában megfogalmazott állítás. A parakompakt Hausdorff-terek speciális normális terek, ezért várható, hogy ezekre erősebb egységosztás-tétel is igaz. A pontos állítás a következő.

27.11.4. Tétel. (Egységosztás-tétel parakompakt terekre) *Parakompakt Hausdorff-tér bármely nyílt befedéséhez létezik annak alárendelt folytonos egységosztás.*

Bizonyítás. Legyen $(\Omega_i)_{i \in I}$ nyílt befedése a T parakompakt Hausdorff-térnek, és vegyük a T-nek olyan $(U_\alpha)_{\alpha \in A}$ lokálisan véges nyílt befedését, amely finomítása $(\Omega_i)_{i \in I}$-nek. Az előző állítás szerint T normális tér, ezért a normális terekre vonatkozó egységosztás-tétel alapján létezik $(U_\alpha)_{\alpha \in A}$-nak alárendelt folytonos egységosztás; legyen $(g_\alpha)_{\alpha \in A}$ ilyen függvényrendszer. Tehát minden $A \ni \alpha$-ra $g_\alpha : T \to \mathbb{R}$ folytonos függvény, $0 \leq g_\alpha \leq 1$, $\mathrm{supp}(g_\alpha) \subseteq U_\alpha$, és minden $t \in T$ esetén $\sum_{\substack{\alpha \in A \\ g_\alpha(t) \neq 0}} g_\alpha(t) = 1$. Kiválasztunk olyan $\iota : A \to I$ függvényt, hogy minden $A \ni \alpha$-ra $U_\alpha \subseteq \Omega_{\iota(\alpha)}$. Minden $i \in I \setminus \mathrm{Im}(\iota)$ esetén legyen f_i a $T \to \mathbb{R}$ azonosan nulla függvény, továbbá minden $\mathrm{Im}(\iota) \ni i$-re legyen $f_i : T \to \mathbb{R}$ az a függvény, amely minden $t \in T$ ponthoz az

$$f_i(t) := \sum_{\substack{\alpha \in A \\ g_\alpha(t) \neq 0 \\ \iota(\alpha)=i}} g_\alpha(t)$$

értéket rendeli. Megmutatjuk, hogy az $(f_i)_{i \in I}$ függvényrendszer $(\Omega_i)_{i \in I}$-nek alárendelt folytonos egységosztás.

Ha $i \in \mathrm{Im}(\iota)$, $t \in T$ és V olyan környezete t-nek, hogy az $A_V := \{\alpha \in A | V \cap U_\alpha \neq \emptyset\}$ halmaz véges, akkor $f_i = \sum\limits_{\alpha \in A_V;\ \iota(\alpha)=i} g_\alpha$ teljesül a V halmazon, ezért a folytonosság lokalitása miatt f_i folytonos a t pontban. Ebből látható, hogy minden $I \ni i$-re az $f_i : T \to \mathbb{R}$ függvény folytonos.

Ha $i \in \mathrm{Im}(\iota)$, akkor

$$[f_i \neq 0] \subseteq \bigcup_{\substack{\alpha \in A \\ \iota(\alpha)=i}} [g_\alpha \neq 0] \subseteq \bigcup_{\substack{\alpha \in A \\ \iota(\alpha)=i}} \mathrm{supp}(g_\alpha) \subseteq \bigcup_{\substack{\alpha \in A \\ \iota(\alpha)=i}} U_\alpha \subseteq \Omega_i,$$

továbbá a $(\mathrm{supp}(g_\alpha))_{\alpha \in A;\ \iota(\alpha)=i}$ halmazrendszer lokálisan véges, és mindegyik tagja zárt, így $\bigcup\limits_{\substack{\alpha \in A \\ \iota(\alpha)=i}} \mathrm{supp}(g_\alpha)$ is zárt halmaz T-ben, következésképpen fennállnak a $\mathrm{supp}(f_i) := \overline{[f_i \neq 0]} \subseteq \bigcup\limits_{\substack{\alpha \in A \\ \iota(\alpha)=i}} \mathrm{supp}(g_\alpha) \subseteq \Omega_i$ összefüggések. Ez azt jelenti, hogy minden $I \ni i$-re $\mathrm{supp}(f_i) \subseteq \Omega_i$.

Az $\left(\bigcup\limits_{\substack{\alpha \in A \\ \iota(\alpha)=i}} \mathrm{supp}(g_\alpha)\right)_{i \in I}$ halmazrendszer lokálisan véges. Valóban, ha $t \in T$ és V olyan környezete t-nek, hogy az $A_V := \{\alpha \in A | V \cap U_\alpha \neq \emptyset\}$ halmaz véges, akkor $i \in I$ és $V \cap \bigcup\limits_{\substack{\alpha \in A \\ \iota(\alpha)=i}} \mathrm{supp}(g_\alpha) \neq \emptyset$ esetén van olyan $\alpha \in A$, hogy $\iota(\alpha) = i$ és $\emptyset \neq V \cap \mathrm{supp}(g_\alpha) \subseteq V \cap U_\alpha$, így $\alpha \in A_V$, vagyis

$$\left\{ i \in I \,\middle|\, V \cap \bigcup_{\substack{\alpha \in A \\ \iota(\alpha)=i}} \mathrm{supp}(g_\alpha) \neq \emptyset \right\} \subseteq \iota\langle A_V \rangle,$$

és persze $\iota\langle A_V \rangle$ véges halmaz. Ebből következik, hogy a $(\mathrm{supp}(f_i))_{i \in I}$ halmazrendszer is lokálisan véges, hiszen láttuk, hogy minden $i \in I$ esetén $\mathrm{supp}(f_i) \subseteq \bigcup\limits_{\substack{\alpha \in A \\ \iota(\alpha)=i}} \mathrm{supp}(g_\alpha)$.

Végül, ha $t \in T$, akkor könnyen látható, hogy

$$1 = \sum_{\substack{\alpha \in A \\ g_\alpha(t) \neq 0}} g_\alpha(t) = \sum_{\substack{i \in I \\ f_i(t) \neq 0}} \quad \sum_{\substack{\alpha \in A \\ g_\alpha(t) \neq 0 \\ \iota(\alpha) = i}} g_\alpha(t) \quad = \sum_{\substack{i \in I \\ f_i(t) \neq 0}} f_i(t)$$

teljesül ■

27.11.5. Állítás. *Ha $(T_\alpha)_{\alpha \in A}$ olyan pontonként véges (például diszjunkt) befedése a T topologikus térnek, hogy minden $\alpha \in A$ esetén T_α parakompakt nyílt részhalmaza T-nek, akkor T is parakompakt.*

Bizonyítás. Legyen $(\Omega_i)_{i \in I}$ tetszőleges nyílt befedése T-nek. Minden $\alpha \in A$ esetén $(T_\alpha \cap \Omega_i)_{i \in I}$ nyílt befedése a T_α topologikus altérnek, ezért a T_α halmaz parakompaktsága folytán kiválaszthatunk olyan $((\Omega_{\alpha,j})_{j \in J_\alpha})_{\alpha \in A}$ rendszert, hogy minden $A \ni \alpha$-ra $(\Omega_{\alpha,j})_{j \in J_\alpha}$ olyan lokálisan véges nyílt befedés a T_α topologikus altérben, amely finomítása a $(T_\alpha \cap \Omega_i)_{i \in I}$ halmazrendszernek.

Minden $A \ni \alpha$-ra T_α nyílt T-ben, ezért az $(\Omega_{\alpha,j})_{j \in J_\alpha}$ halmazrendszer mindegyik tagja T-ben is nyílt, így az $(\Omega_{\alpha,j})_{\alpha \in A,\ j \in J_\alpha}$ halmazrendszer nyílt befedése T-nek. Továbbá, minden $\alpha \in A$ és $j \in J_\alpha$ esetén van olyan $i \in I$, hogy $\Omega_{\alpha,i} \subseteq T_\alpha \cap \Omega_i \subseteq \Omega_i$, tehát az $(\Omega_{\alpha,j})_{\alpha \in A,\ j \in J_\alpha}$ halmazrendszer finomítása az $(\Omega_i)_{i \in I}$ halmazrendszernek.

Megmutatjuk, hogy az $(\Omega_{\alpha,j})_{\alpha \in A,\ j \in J_\alpha}$ halmazrendszer lokálisan véges. Legyen ugyanis $t \in T$ rögzített pont. A $(T_\alpha)_{\alpha \in A}$ halmazrendszer pontonkénti végessége folytán az $A(t) := \{\alpha \in A | t \in T_\alpha\}$ halmaz véges és persze nem üres, hiszen $(T_\alpha)_{\alpha \in A}$ befedése T-nek. Ha $\alpha \in A(t)$, akkor az $(\Omega_{\alpha,j})_{j \in J_\alpha}$ halmazrendszer lokális végessége miatt létezik t-nek olyan U_α környezete T_α-ban, hogy $J'_\alpha := \{j \in J_\alpha | U_\alpha \cap \Omega_{\alpha,j} \neq \emptyset\}$ véges halmaz. Ekkor $U := \bigcap_{\alpha \in A(t)} U_\alpha$ környezete t-nek T-ben. Ha $\alpha \in A$ és $j \in J_\alpha$ olyanok, hogy $U \cap \Omega_{\alpha,j} \neq \emptyset$, akkor $\Omega_{\alpha,j} \cap U_\alpha \neq \emptyset$, tehát $j \in J'_\alpha$, vagyis

$$\{(\alpha, j) | (\alpha \in A) \wedge (j \in J_\alpha) \wedge (U \cap \Omega_{\alpha,j} \neq \emptyset)\} \subseteq \bigcup_{\alpha \in A(t)} (\{\alpha\} \times J'_\alpha)$$

teljesül, és itt a jobb oldalon véges halmaz áll. ■

27.12. Lokálisan kompakt tér parakompaktságának jellemzése

27.12.1. Definíció. *A T topologikus teret* **σ-kompaktnak** *nevezzük, ha létezik a T kompakt részhalmazainak olyan $(K_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sorozata, amelyre $T = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} K_n$. A T topologikus tér E részhalmazát σ-kompaktnak mondjuk, ha az E topologikus altér σ-kompakt tér.*

Ha T nem megszámlálhatóan végtelen halmaz, akkor T a diszkrét topológiával ellátva lokálisan kompakt, de nem σ-kompakt topologikus tér, tehát lokálisan kompakt tér nem feltétlenül σ-kompakt. Nyilvánvaló, hogy minden kompakt tér σ-kompakt, tehát a σ-kompaktság a kompaktság fogalmának általánosítása. Vigyázzunk arra, hogy σ-kompakt Hausdorff-tér nem szükségképpen lokálisan kompakt.

Ha T topologikus tér és $E \subseteq T$, akkor az E egy részhalmaza pontosan akkor kompakt T-ben, ha kompakt az E topologikus altérben; ezért E pontosan akkor σ-kompakt halmaz T-ben, ha előáll a T megszámlálható sok kompakt részhalmazának uniójaként.

27.12.2. Lemma. *Ha T σ-kompakt lokálisan kompakt tér, akkor létezik a T relatív kompakt nyílt részhalmazainak olyan $(\Omega_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sorozata, amelyre $T = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \Omega_n$ és minden $\mathbb{N} \ni n$-re $\overline{\Omega_n} \subseteq \Omega_{n+1}$.*

Bizonyítás. Legyen $(K_n)_{n\in\mathbb{N}}$ a T kompakt részhalmazainak olyan sorozata, hogy $T = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} K_n$. A kiválasztási axiómával kombinált rekurzió tételét alkalmazva megmutatjuk olyan $(\Omega_n)_{n\in\mathbb{N}}$ halmazsorozat létezését, hogy minden $\mathbb{N} \ni n$-re Ω_n relatív kompakt nyílt halmaz T-ben és $\overline{\Omega_n} \cup K_n \subseteq \Omega_{n+1}$; egy ilyen halmazsorozat nyilvánvalóan eleget tesz a követelményeknek.

Az Ω_0 halmaz a T tetszőleges relatív kompakt nyílt részhalmaza lehet, például $\Omega_0 := \emptyset$ is megfelel. Tegyük fel, hogy $n \in \mathbb{N}^+$, és legyen $(\Omega_i)_{0\leq i<n}$ olyan rendszer, hogy minden $i < n$ természetes számra Ω_i relatív kompakt nyílt halmaz T-ben és $i + 1 < n$ esetén $\overline{\Omega_i} \cup K_i \subseteq \Omega_{i+1}$. Ekkor $\overline{\Omega_{n-1}} \cup K_{n-1}$ kompakt részhalmaza T-nek, tehát van olyan $\Omega_n \subseteq T$ relatív kompakt nyílt halmaz, hogy $\overline{\Omega_{n-1}} \cup K_{n-1} \subseteq \Omega_n$. Ekkor az $(\Omega_i)_{0\leq i\leq n}$ rendszer olyan, hogy minden $i \leq n$ természetes számra Ω_i relatív kompakt nyílt halmaz T-ben és $i + 1 < n + 1$ esetén $\overline{\Omega_i} \cup K_i \subseteq \Omega_{i+1}$. ■

Megjegyezzük, hogy az előző lemmát gyakran a következő ekvivalens megfogalmazásban használjuk: Ha T σ-kompakt lokálisan kompakt tér, akkor létezik a T kompakt részhalmazainak olyan $(K_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sorozata, amelyre $T = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} K_n$ és minden $\mathbb{N} \ni n$-re $K_n \subseteq \mathrm{Int}(K_{n+1})$.

27.12.3. Állítás. *Minden σ-kompakt lokálisan kompakt tér parakompakt.*

Bizonyítás. Legyen T σ-kompakt lokálisan kompakt tér, és $(U_i)_{i\in I}$ nyílt befedése T-nek; megmutatjuk, hogy $(U_i)_{i\in I}$-nek létezik olyan finomítása, amely lokálisan véges nyílt befedése T-nek.

Először vegyük a T relatív kompakt nyílt részhalmazainak olyan $(\Omega_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sorozatát, amely befedése T-nek és minden $\mathbb{N} \ni n$-re $\overline{\Omega_n} \subseteq \Omega_{n+1}$. Legyen minden $m \in \mathbb{Z}$ *negatív* egész számra $\Omega_m := \emptyset$. Természetesen ekkor minden $\mathbb{Z} \ni m$-re $\overline{\Omega_m} \subseteq \Omega_{m+1}$.

Legyen $n \in \mathbb{N}$ rögzített és $K_n := \overline{\Omega_n} \setminus \Omega_{n-1}$. A K_n halmaz kompakt T-ben és

$K_n \subseteq \Omega_{n+1} \setminus \overline{\Omega_{n-2}}$. Ha $t \in K_n$, akkor van olyan $i \in I$, hogy $t \in U_i$, tehát $U_i \cap \Omega_{n+1} \setminus \overline{\Omega_{n-2}}$ olyan nyílt környezete t-nek, amely részhalmaza $\Omega_{n+1} \setminus \overline{\Omega_{n-2}}$-nek. Ezért kiválaszthatunk olyan $(W_t)_{t \in K_n}$ rendszert, hogy minden $t \in K_n$ pontra W_t nyílt környezete t-nek és $W_t \subseteq \Omega_{n+1} \setminus \overline{\Omega_{n-2}}$, és van olyan $i \in I$, hogy $W_t \subseteq U_i$. Ekkor K_n kompaktsága miatt van olyan $H \subseteq K_n$ véges halmaz, hogy $K_n \subseteq \bigcup_{t \in H} W_t$.

Az előzőek alapján kiválaszthatunk olyan $(H_n)_{n \in \mathbb{N}}$ és $((V_{n,t})_{t \in H_n})_{n \in \mathbb{N}}$ sorozatokat, hogy minden $\mathbb{N} \ni n$-re $H_n \subseteq K_n$ véges halmaz, és $(V_{n,t})_{t \in H_n}$ a T nyílt részhalmazainak olyan rendszere, hogy $K_n \subseteq \bigcup_{t \in H_n} V_{n,t}$, valamint minden $H_n \ni t$-re $t \in V_{n,t} \subseteq \Omega_{n+1} \setminus \overline{\Omega_{n-2}}$ és létezik a t-hez (és n-hez) olyan $i \in I$, hogy $V_{n,t} \subseteq U_i$. Legyen $J := \bigcup_{n \in \mathbb{N}} (\{n\} \times H_n)$. Nyilvánvaló, hogy a $(V_{n,t})_{(n,t) \in J}$ halmazrendszer nyílt befedése T-nek, mert $(K_n)_{n \in \mathbb{N}}$ befedése T-nek. Triviális továbbá az, hogy $(V_{n,t})_{(n,t) \in J}$ finomítása az $(U_i)_{i \in I}$ halmazrendszernek, ezért a T parakompaktságához elég volna azt igazolni, hogy $(V_{n,t})_{(n,t) \in J}$ lokálisan véges T-ben.

Ehhez legyen $t \in T$ rögzített és $m := \min\{n \in \mathbb{N} | t \in \Omega_n\}$. Az m definíciója szerint $t \in \Omega_m$ és $t \notin \Omega_{m-1}$, következésképpen $t \notin \overline{\Omega_{m-2}}$, hiszen $\overline{\Omega_{m-2}} \subseteq \Omega_{m-1}$. Ez az jelenti, hogy a $V := \Omega_m \setminus \overline{\Omega_{m-2}}$ nyílt környezete t-nek. Ha $(n,s) \in J$ olyan, hogy $V_{n,s} \cap V \neq \emptyset$, akkor $V_{n,s} \subseteq \Omega_{n+1} \setminus \overline{\Omega_{n-2}} \subseteq T \setminus \Omega_{n-2}$ és $V \subseteq \Omega_m$ miatt $n \leq m+1$, különben $n-2 \geq m$ teljesülne, így $\Omega_{n-2} \supseteq \Omega_m$, tehát igaz volna a $V_{n,s} \cap V \subseteq (T \setminus \Omega_{n-2}) \cap \Omega_m = \emptyset$ összefüggés. Ez azt jelenti, hogy

$$\{\, (n,s) \in J \mid V_{n,s} \cap V \neq \emptyset \,\} \subseteq \bigcup_{n \in m+2} (\{n\} \times H_n)\,,$$

és itt a jobb oldalon véges halmaz áll. Ebből következik, hogy a $(V_{n,t})_{(n,t) \in J}$ halmazrendszer lokálisan véges. ■

A bizonyításból látható, hogy σ-kompakt lokálisan kompakt tér bármely nyílt befedésének létezik olyan megszámlálható (indexhalmazú) finomítása, amely lokálisan véges nyílt befedés.

27.12.4. Tétel. (Lokálisan kompakt tér parakompaktságának jellemzése) *Ha T lokálisan kompakt tér, akkor a következő állítások ekvivalensek.*

(i) *T parakompakt tér.*

(ii) *Létezik a T-nek relatív kompakt nyílt halmazokból álló lokálisan véges befedése.*

(iii) *Létezik a T-nek σ-kompakt nyílt halmazokból álló diszjunkt befedése.*

(iii)′ *Létezik a T-nek σ-kompakt nyílt halmazokból álló pontonként véges befedése.*

Bizonyítás. (i)⇒(ii) Jelölje $\mathscr{T}_c$ a T relatív kompakt nyílt részhalmazainak halmazát. Ekkor $(U)_{U \in \mathscr{T}_c}$ nyílt befedése T-nek, ezért a T parakompaktsága miatt vehetjük a T-nek olyan $(\Omega_i)_{i \in I}$ nyílt befedését, amely lokálisan véges finomítása az $(U)_{U \in \mathscr{T}_c}$

halmazrendszernek. Tehát minden $I \ni i$-hez van olyan $U \subseteq T$ relatív kompakt nyílt halmaz, hogy $\Omega_i \subseteq U$, így Ω_i is relatív kompakt nyílt halmaz.

(ii)$\Rightarrow$(iii) Legyen $(\Omega_i)_{i\in I}$ a T relatív kompakt nyílt halmazokból álló lokálisan véges befedése. Jelölje R azon $(t,t') \in T \times T$ párok halmazát, amelyekhez van olyan $n \in \mathbb{N}$ és olyan $(i_k)_{k\in n+1}$ rendszer I-ben, hogy $t \in \Omega_{i_0}$, $t' \in \Omega_{i_n}$ és minden $k < n$ természetes számra $\Omega_{i_k} \cap \Omega_{i_{k+1}} \neq \emptyset$. Könnyen látható, hogy R ekvivalencia-reláció T felett. Az $(\Omega)_{\Omega\in T/R}$ halmazrendszer diszjunkt befedése T-nek, ezért elég volna azt igazolni, hogy minden $\Omega \in T/R$ halmaz *nyílt* és *σ-kompakt* halmaz T-ben.

Ha $\Omega \in T/R$, akkor $t \in \Omega$ esetén van olyan $i \in I$, hogy $t \in \Omega_i$; ekkor az R reláció értelmezése alapján triviális, hogy minden $\Omega_i \ni t'$-re $(t,t') \in R$, vagyis $t' \in \Omega$, így $\Omega_i \subseteq \Omega$. Ezért minden $\Omega \in T/R$ halmaz nyílt T-ben, és ebből az is következik, hogy minden $\Omega \in T/R$ halmaz zárt is T-ben, hiszen $T \setminus \Omega = \bigcup\limits_{\substack{\Omega'\in T/R \\ \Omega'\neq\Omega}} \Omega'$ is nyílt T-ben. Tehát csak azt kell igazolni, hogy minden $\Omega \in T/R$ halmaz σ-kompakt.

Legyen $\Omega \in T/R$ és $t \in \Omega$ rögzített. Rekurzióval értelmezzük *azt* az $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ halmazsorozatot, amelyre $U_0 := \bigcup\limits_{\substack{i\in I \\ t\in\Omega_i}} \Omega_i$ és minden $\mathbb{N}^+ \ni n$-re $U_n := \bigcup\limits_{\substack{i\in I \\ \Omega_i\cap U_{n-1}\neq\emptyset}} \Omega_i$.

Teljes indukcióval igazoljuk, hogy minden $n \in \mathbb{N}$ esetén van olyan $I_n \subseteq I$ *véges* halmaz, hogy $U_n = \bigcup\limits_{i\in I_n} \Omega_i$ és minden $I_n \ni i$-re $\Omega_i \subseteq \Omega$. Ez $n = 0$ esetén igaz, mert $I_0 := \{i \in I | t \in \Omega_i\}$ véges halmaz, hiszen az $(\Omega_i)_{i\in I}$ befedés pontonként (sőt lokálisan) véges, és a definíció szerint $U_0 = \bigcup\limits_{i\in I_0} \Omega_i$, továbbá $t \in \Omega$ miatt és az R reláció értelmezése alapján minden $I_0 \ni i$-re $\Omega_i \subseteq \Omega$. Legyen most $n \in \mathbb{N}$ és $I_n \subseteq$ olyan véges halmaz, hogy $U_n = \bigcup\limits_{i\in I_n} \Omega_i$ és minden $I_n \ni i$-re $\Omega_i \subseteq \Omega$. A rekurzív definíció szerint $U_{n+1} = \bigcup\limits_{\substack{i\in I \\ \Omega_i\cap U_n\neq\emptyset}} \Omega_i$.

Az $\overline{U_n}$ halmaz kompakt, mert az indukciós hipotézis alapján U_n véges sok relatív kompakt halmaz uniója. Az $(\Omega_i)_{i\in I}$ befedés lokális végessége miatt kiválaszthatunk olyan $(V_s)_{s\in\overline{U_n}}$ rendszert, hogy minden $\overline{U_n} \ni s$-re V_s nyílt környezete s-nek, és az $\{i \in I | \Omega_i \cap V_s \neq \emptyset\}$ halmaz véges. Legyen $H \subseteq \overline{U_n}$ olyan véges halmaz, hogy $\overline{U_n} \subseteq \bigcup\limits_{s\in H} V_s$. Ekkor

$$\{\ i \in I \mid \Omega_i \cap U_n \neq \emptyset\ \} \subseteq \{\ i \in I \mid \Omega_i \cap \bigcup_{s\in H} V_s \neq \emptyset\ \} \subseteq \bigcup_{s\in H} \{\ i \in I \mid \Omega_i \cap V_s \neq \emptyset\ \},$$

tehát az $I_{n+1} := \{i \in I | \Omega_i \cap U_n \neq \emptyset\}$ halmaz véges, és a rekurzív definíció alapján $U_{n+1} = \bigcup\limits_{i\in I_{n+1}} \Omega_i$. Ha $i \in I_{n+1}$ és $t' \in \Omega_i \cap U_n$, akkor $t' \in \Omega$, hiszen az indukciós hipotézis következtében $U_n \subseteq \Omega$; ezért az R reláció értelmezése alapján $\Omega_i \subseteq \Omega$. Ezzel a teljes indukciót végrehajtottuk.

Tehát minden $n \in \mathbb{N}$ esetén U_n relatív kompakt nyílt halmaz T-ben, mert véges sok relatív kompakt nyílt halmaz uniója relatív kompakt nyílt halmaz, továbbá $U_n \subseteq \Omega$.

Megmutatjuk, hogy $\Omega = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} U_n$. Valóban, legyen $t' \in \Omega$, és vegyünk olyan $n \in \mathbb{N}$ számot és olyan I-ben haladó $(i_k)_{k\in n+1}$ rendszert, hogy $t \in \Omega_{i_0}$, $t' \in \Omega_{i_n}$ és minden $k < n+1$ természetes számra $\Omega_{i_k} \cap \Omega_{i_{k+1}} \neq \emptyset$. Ekkor minden $k \leq n$ természetes számra $\Omega_{i_k} \subseteq U_k$. Ha nem így volna, akkor értelmezhetnének az

$$m := \min\{\ k \in \mathbb{N} \mid (k \leq n) \wedge (\Omega_{i_k} \setminus U_k \neq \emptyset)\ \}$$

számot. Világos, hogy $\Omega_{i_0} \subseteq U_0$, hiszen $t \in \Omega_{i_0}$; ezért $m > 0$. Ekkor viszont $\Omega_{i_{m-1}} \subseteq U_{m-1}$ és $\Omega_{i_{m-1}} \cap \Omega_{i_m} \neq \emptyset$, tehát $U_{m-1} \cap \Omega_{i_m} \neq \emptyset$, így az U_m értelmezése szerint $\Omega_{i_m} \subseteq U_m$, holott $\Omega_{i_m} \setminus U_m \neq \emptyset$. Tehát minden $k \leq n$ természetes számra $\Omega_{i_k} \subseteq U_k$, így $t' \in \Omega_{i_n} \subseteq U_n$. Ezzel megmutattuk, hogy $\Omega = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} U_n$.

Minden $n \in \mathbb{N}$ esetén $U_n \subseteq \Omega$ és Ω zárt T-ben, ezért $\overline{U_n} \subseteq \Omega$, így $\Omega = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \overline{U_n}$ is teljesül. De minden $\mathbb{N} \ni n$-re $\overline{U_n}$ kompakt halmaz T-ben, ezért az Ω halmaz σ-kompakt.

(iii)$\Rightarrow$(iii)$'$ Nyilvánvaló, mert minden diszjunkt halmazrendszer pontonként véges.

(iii)$'$ $\Rightarrow$(i) Ha $(T_\alpha)_{\alpha\in A}$ pontonként véges nyílt befedése T-nek és minden $A \ni \alpha$-ra T_α σ-kompakt részhalmaza T-nek, akkor minden $\alpha \in A$ esetén a T_α topologikus altér lokálisan kompakt és σ-kompakt, így az előző állítás szerint parakompakt nyílt halmaz T-ben; tehát T is parakompakt. ■

27.12.5. Következmény. *Ha a T lokálisan kompakt tér parakompakt és összefüggő, akkor T σ-kompakt.*

Bizonyítás. A hipotézis és az előző tétel alapján létezik olyan $(T_\alpha)_{\alpha\in A}$ diszjunkt halmazrendszer, amely befedése T-nek és minden $A \ni \alpha$-ra a T_α halmaz nyílt és σ-kompakt T-ben. Minden $\alpha \in A$ esetén $T \setminus T_\alpha = \bigcup_{\beta\in A\setminus\{\alpha\}} T_\beta$, ezért T_α zárt T-ben. A T összefüggősége alapján minden $A \ni \alpha$-ra $T_\alpha = T$ vagy $T_\alpha = \emptyset$. Tehát $A \neq \emptyset$ esetén van olyan $\alpha \in A$, hogy $T = T_\alpha$, így T σ-kompakt. Ha $A = \emptyset$, akkor $T = \emptyset$, tehát T σ-kompakt. ■

27.13. Megszámlálható bázisú lokálisan kompakt terek jellemzése

27.13.1. Tétel. (Megszámlálható bázisú lokálisan kompakt terek jellemzése) *Ha T lokálisan kompakt tér, és T' egypontú kompaktifikációja T-nek, akkor a következő állítások ekvivalensek.*

(i) *T megszámlálható bázisú.*

(ii) *T' metrizálható kompakt tér.*

(iii) *T metrizálható és σ-kompakt.*

Bizonyítás. (i)⇒(ii) A kompakt terek metrizálhatóságának jellemzési tétele alapján elég azt megmutatni, hogy ha T megszámlálható bázisú, akkor T' is megszámlálható bázisú. Jelölje ω a végtelen távoli pontot T'-ben, és legyen $\mathfrak{B}$ megszámlálható topologikus bázisa T-nek. Tudjuk, hogy a $\mathfrak{B}_c := \{U \in \mathfrak{B} | U \text{ relatív kompakt}\}$ halmaz szintén topologikus bázisa T-nek. Ebből következik, hogy $T = \bigcup_{U \in \mathfrak{B}_c} \overline{U}$, ezért a T topologikus tér σ-kompakt. Ezért létezik a T relatív kompakt nyílt részhalmazainak olyan $(\Omega_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sorozata, hogy $T = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \Omega_n$ és minden $\mathbb{N} \ni n$-re $\overline{\Omega_n} \subseteq \Omega_{n+1}$.

Megmutatjuk, hogy a $\mathfrak{B} \cup \{T' \setminus \overline{\Omega_n} | n \in \mathbb{N}\}$ halmaz topologikus bázisa a T' kompakt térnek. Valóban, legyen Ω' tetszőleges nyílt részhalmaza T'-nek. Ha $\omega \in \Omega'$, akkor $T' \setminus \Omega'$ olyan kompakt halmaz T'-ben, amely része T-nek, tehát ez T-ben is kompakt halmaz, így létezik olyan $n \in \mathbb{N}$, hogy $T' \setminus \Omega' \subseteq \Omega_n \subseteq \overline{\Omega_n}$, tehát $\omega \in T' \setminus \overline{\Omega_n} \subseteq \Omega'$. Ha $t \in T \cap \Omega'$, akkor van olyan $U \in \mathfrak{B}$, hogy $t \in U \subseteq T \cap \Omega'$, mert a $T \cap \Omega'$ halmaz nyílt T-ben, és $\mathfrak{B}$ topologikus bázisa T-nek.

(ii)⇒(iii) Metrizálható topologikus tér minden topologikus altere metrizálható, ezért ha (ii) teljesül, akkor T metrizálható, hiszen T topologikus altere T'-nek. Továbbá, metrizálható topologikus tér M_1-tér, ezért ha ω a végtelen távoli pont T'-ben és (ii) teljesül, akkor létezik az ω nyílt környezeteinek olyan $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sorozata, hogy az $\{U_n | n \in \mathbb{N}\}$ halmaz környezetbázisa ω-nak T'-ben. Ekkor a $(T' \setminus U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ halmazsorozat befedése T-nek, hiszen $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} U_n = \{\omega\}$. Továbbá, minden $\mathbb{N} \ni n$-re $T' \setminus U_n$ kompakt halmaz T'-ben és részhalmaza T-nek, ezért T-ben is kompakt. Ebből következik, hogy a T topologikus tér σ-kompakt.

(iii)⇒(i) Legyen $(K_n)_{n\in\mathbb{N}}$ a T kompakt részhalmazainak olyan sorozata, amely befedése T-nek. A hipotézis alapján minden $\mathbb{N} \ni n$-re a K_n topologikus altér kompakt és metrizálható, ezért a kompakt terek metrizálhatóságának jellemzése alapján a K_n topologikus altér megszámlálható bázisú, így szeparábilis is. Kiválasztunk olyan $(D_n)_{n\in\mathbb{N}}$ halmazsorozatot, hogy minden $n \in \mathbb{N}$ esetén $D_n \subseteq K_n$ megszámlálható sűrű halmaz a K_n topologikus altérben. Ha $t \in T$ és V környezete t-nek T-ben, akkor van olyan $n \in \mathbb{N}$, hogy $t \in K_n$, és ekkor $V \cap K_n$ környezete t-nek a K_n topologikus altérben, következésképpen $\emptyset \neq (V \cap K_n) \cap D_n = V \cap D_n$. Ez azt jelenti, hogy az $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} D_n$ megszámlálható halmaz sűrű a T topologikus térben, vagyis T szeparábilis. Ugyanakkor T metrizálható is, ezért megszámlálható bázisú. ■

28. fejezet

Folytonos függvények lokálisan kompakt terek felett

28.1. Pontonként és egyenletesen konvergens általánosított függvénysorozatok

28.1.1. Jelölés. *Ha T és T' topologikus terek, akkor $\mathscr{C}(T;T')$ jelöli a $T \to T'$ folytonos függvények halmazát.*

28.1.2. Definíció. *Legyen T halmaz, T' Hausdorff-tér és $(f_i)_{i\in I}$ olyan általánosított sorozat, hogy minden $I \ni i$-re $f_i : T \to T'$ függvény. Ekkor $\lim\limits_{i,\ I} f_i$ jelöli azt a $T \rightarrowtail T'$ függvényt, amelynek definíciós tartománya a*

$$\{t \in T|\ \textit{az } (f_i(t))_{i\in I} \textit{ általánosított sorozat konvergens } T'\textit{-ben}\},$$

halmaz, és minden $t \in Dom\ \left(\lim\limits_{i,\ I} f_i\right)$ esetén

$$\left(\lim_{i,\ I} f_i\right)(t) := \lim_{i,\ I} f_i(t).$$

A $\lim\limits_{i,\ I} f_i$ függvényt az $(f_i)_{i\in I}$ olyan általánosított függvénysorozat **pontonkénti limeszfüggvényének** *nevezzük. Azt mondjuk, hogy az $(f_i)_{i\in I}$ általánosított függvénysorozat* **pontonként konvergens** *az $E \subseteq T$ halmazon, ha $E \subseteq Dom\ \left(\lim\limits_{i,\ I} f_i\right)$.*

Tehát az előző definíció feltételei mellett az $(f_i)_{i\in I}$ általánosított függvénysorozat akkor és csak akkor pontonként konvergens az $E \subseteq T$ halmazon, ha

$$(\forall\ t \in E)(\exists\ t' \in T')(\forall\ V' \in \mathscr{T}'(t'))(\exists\ j \in I)(\forall\ i \in I):\ (i \geq j\ \Rightarrow\ f_i(t) \in V'),$$

ahol $\mathscr{T}'$ jelöli a T' topológiáját.

A *pontonkénti approximáció problémája* a következőképpen fogalmazható meg. Legyen T halmaz, T' Hausdorff-tér és $H \subseteq \mathscr{F}(T;T')$. Azt kérdezzük, hogy milyen tulajdonságúak azok az $f : T \rightarrowtail T'$ függvények, amelyekhez létezik olyan H-ban haladó $(f_i)_{i\in I}$ általánosított sorozat, hogy $f = \lim\limits_{i,\ I} f_i$; ezeket a függvényeket mondjuk H-beli függvényekkel *pontonként approximálhatóknak*.

Metrikus térbe érkező függvények általánosított sorozatára értelmezhető az egyenletes konvergencia fogalma.

28.1.3. Definíció. *Legyen T halmaz, M metrikus tér, és $(f_i)_{i\in I}$ olyan általánosított sorozat, hogy minden $I \ni i$-re $f_i : T \to M$ függvény. Azt mondjuk, hogy az $(f_i)_{i\in I}$ általánosított függvénysorozat* **egyenletesen konvergens** *az $E \subseteq T$ halmazon, ha pontonként konvergens az E halmazon, és az $f := \lim\limits_{i,\ I} f_i$ pontonkénti limeszfüggvényre*

$$\lim_{i,\ I} \left(\sup_{t\in E} d(f_i(t), f(t)) \right) = 0.$$

Tehát – az előző definíció feltételei mellett – az $(f_i)_{i\in I}$ általánosított függvénysorozat pontosan akkor egyenletesen konvergens az $E \subseteq T$ halmazon, ha pontonként konvergens az E halmazon, és az $f := \lim\limits_{i,\ I} f_i$ pontonkénti limeszfüggvényre

$$(\forall\ \varepsilon \in \mathbb{R}^+)(\exists\ j \in I)(\forall\ i \in I) : \ (i \geq j \ \Rightarrow\ \sup_{t\in E} d(f_i(t), f(t)) \leq \varepsilon)$$

teljesül, ahol d jelöli az M metrikáját. Ez úgy is írható, hogy

$$(\forall\ \varepsilon \in \mathbb{R}^+)(\exists\ j \in I)(\forall\ i \in I)(\forall\ t \in E) : \ (i \geq j \Rightarrow\ d(f_i(t), f(t)) \leq \varepsilon).$$

Legyen T halmaz, M metrikus tér, és $(f_i)_{i\in I}$ olyan általánosított sorozat, hogy minden $I \ni i$-re $f_i : T \to M$ függvény. Ha az $(f_i)_{i\in I}$ egyenletesen konvergens az $E \subseteq T$ halmazon, akkor $(f_i)_{i\in I}$ az E minden részhalmazán is egyenletesen konvergens. Ha $(E_\alpha)_{\alpha\in A}$ olyan *véges* rendszer, hogy minden $\alpha \in A$ esetén $E_\alpha \subseteq T$ és $(f_i)_{i\in I}$ egyenletesen konvergens az E_α halmazon, akkor $(f_i)_{i\in I}$ egyenletesen konvergens az $\bigcup\limits_{\alpha\in A} E_\alpha$ halmazon is.

28.1.4. Állítás. *Legyen T halmaz, M metrikus tér és $\mathscr{F}^b(T;M)$ a $T \to M$ korlátos függvények halmaza a*

$$\mathbf{d} : \mathscr{F}^b(T;M) \times \mathscr{F}^b(T;M) \to \mathbb{R}_+; \quad (f,g) \mapsto \sup_{t\in T} d(f(t), g(t))$$

sup-metrikával ellátva, ahol d az M metrikája. Legyen $f \in \mathscr{F}^b(T;M)$ és $(f_i)_{i\in I}$ egy $\mathscr{F}^b(T;M)$-ben haladó általánosított sorozat. Az $(f_i)_{i\in I}$ általánosított függvénysorozat pontosan akkor konvergál f-hez a sup-metrika szerint, ha $f = \lim\limits_{i,\ I} f_i$ és az $(f_i)_{i\in I}$ általánosított függvénysorozat egyenletesen konvergens a T halmazon.

Bizonyítás. Tegyük fel, hogy $(f_i)_{i\in I}$ konvergál f-hez a $\mathscr{T}_{\mathbf{d}}$ topológia szerint, ahol $\mathbf{d}$ a sup-metrika $\mathscr{F}^b(T;M)$ felett. Minden $T \ni t$-re és $I \ni i$-re $d(f_i(t), f(t)) \leq \mathbf{d}(f_i, f)$, ahol d jelöli az M feletti metrikát. Ebből látható, hogy minden $t \in T$ esetén $f(t) = \lim_{i,\ I} f_i(t)$, vagyis $f = \lim_{i,\ I} f_i$. Ha $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ tetszőleges, akkor van olyan $i_\varepsilon \in I$, hogy minden $I \ni i$-re, ha $i \geq i_\varepsilon$, akkor $\sup_{t\in T} d(f_i(t), f(t)) \leq \mathbf{d}(f_i, f) \leq \varepsilon$, tehát minden $T \ni t$-re $d(f_i(t), f(t)) \leq \varepsilon$. Ez azt jelenti, hogy az $(f_i)_{i\in I}$ általánosított függvénysorozat egyenletesen konvergens a T halmazon.

Megfordítva, tegyük fel, hogy $f = \lim_{i,\ I} f_i$ és az $(f_i)_{i\in I}$ általánosított függvénysorozat egyenletesen konvergens a T halmazon. Legyen V az f környezete $\mathscr{F}^b(T;M)$-ben a $\mathscr{T}_{\mathbf{d}}$ topológia szerint. Vegyünk olyan $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ számot, hogy $\overline{B}_\varepsilon(f;\mathbf{d}) \subseteq V$. Az $(f_i)_{i\in I}$ általánosított függvénysorozat egyenletes konvergenciája miatt van olyan $i_\varepsilon \in I$, hogy minden $i \in I$ és $t \in T$ esetén, ha $i \geq i_\varepsilon$, akkor $d(f_i(t), f(t)) \leq \varepsilon$, vagyis minden $i \in I$ esetén, ha $i \geq i_\varepsilon$, akkor $\mathbf{d}(f_i, f) := \sup_{t\in T} d(f_i(t), f(t)) \leq \varepsilon$. Ez azt jelenti, hogy $i \in I$ és $i \geq i_\varepsilon$ esetén $f_i \in \overline{B}_\varepsilon(f;\mathbf{d}) \subseteq V$, azaz $(f_i)_{i\in I}$ konvergál f-hez a sup-metrika szerint. ■

28.1.5. Definíció. *Legyen T topologikus tér, M metrikus tér és $(f_i)_{i\in I}$ olyan általánosított sorozat, hogy minden $I \ni i$-re $f_i : T \to M$ függvény. Azt mondjuk, hogy az $(f_i)_{i\in I}$ általánosított függvénysorozat* **lokálisan egyenletesen konvergens** *az $E \subseteq T$ halmazon, ha minden $t \in E$ pontnak létezik olyan V környezete T-ben, hogy $(f_i)_{i\in I}$ egyenletesen konvergens az $E \cap V$ halmazon.*

Tehát – az előző definíció feltételei mellett – az $(f_i)_{i\in I}$ általánosított függvénysorozat pontosan akkor lokálisan egyenletesen konvergens az $E \subseteq T$ halmazon, ha pontonként konvergens az E halmazon, és az $f := \lim_{i,\ I} f_i$ pontonkénti limeszfüggvényre

$$(\forall\, t \in E)(\exists\, V \in \mathscr{T}(t))(\forall\, \varepsilon \in \mathbb{R}^+)(\exists\, j \in I)(\forall\, i \in I):$$

$$(i \geq j \Rightarrow \sup_{s\in E\cap V} d(f_i(s), f(s)) \leq \varepsilon)$$

teljesül, ahol $\mathscr{T}$ jelöli a T topológiáját és d jelöli az M metrikáját. Ez úgy is írható, hogy

$$(\forall\, t \in E)(\exists\, V \in \mathscr{T}(t))(\forall\, \varepsilon \in \mathbb{R}^+)(\exists\, j \in I)(\forall\, i \in I)(\forall\, s \in E \cap V):$$

$$(i \geq j \;\Rightarrow\; d(f_i(s), f(s)) \leq \varepsilon).$$

28.1.6. Állítás. *Legyen T topologikus tér, M metrikus tér és $(f_i)_{i\in I}$ olyan általánosított sorozat, hogy minden $I \ni i$-re $f_i : T \to M$ függvény. Ha az $(f_i)_{i\in I}$ általánosított függvénysorozat lokálisan egyenletesen konvergens a T halmazon, akkor $(f_i)_{i\in I}$ a T minden kompakt részhalmazán egyenletesen konvergens. Ha T lokálisan kompakt és $(f_i)_{i\in I}$ a T minden kompakt részhalmazán egyenletesen konvergens, akkor $(f_i)_{i\in I}$ lokálisan egyenletesen konvergens a T halmazon.*

Bizonyítás. Tegyük fel, hogy az $(f_i)_{i\in I}$ általánosított függvénysorozat lokálisan egyenletesen konvergens a T halmazon és legyen $f := \lim_{i,\ I} f_i$. Rögzítünk egy $K \subseteq T$ kompakt halmazt, és kiválasztunk egy olyan $(V_t)_{t\in T}$ rendszert, hogy minden $t \in K$ pontra V_t nyílt környezete t-nek, és $(f_i)_{i\in I}$ egyenletesen konvergens V_t-n. Ekkor a K kompaktsága miatt van olyan $H \subseteq K$ véges halmaz, hogy $K \subseteq \bigcup_{t\in K} V_t$. Világos, hogy $(f_i)_{i\in I}$ egyenletesen konvergens az $\bigcup_{t\in H} V_t$ halmazon, ezért a K halmazon is egyenletesen konvergens.

Megfordítva, ha $(f_i)_{i\in I}$ a T minden kompakt részhalmazán egyenletesen konvergens és T lokálisan kompakt, akkor $(f_i)_{i\in I}$ a T minden pontjának valamely környezetén egyenletesen konvergens, így $(f_i)_{i\in I}$ lokálisan egyenletesen konvergens a T halmazon. ■

Az *egyenletes* (illetve *lokálisan egyenletes*) *approximáció problémája* a következőképpen fogalmazható meg. Legyen T halmaz (illetve topologikus tér), M metrikus tér és $H \subseteq \mathscr{F}(T;M)$. Azt kérdezzük, hogy milyen tulajdonságúak azok az $f : T \rightarrowtail M$ függvények, amelyekhez létezik olyan H-ban haladó $(f_i)_{i\in I}$ általánosított sorozat, hogy $f = \lim_{i,\ I} f_i$, és $(f_i)_{i\in I}$ egyenletesen (illetve lokálisan egyenletesen) konvergens a $\mathrm{Dom}(f)$ halmazon; ezeket a függvényeket mondjuk H-beli függvényekkel *egyenletesen* (illetve *lokálisan egyenletesen*) *approximálhatóknak.*

28.2. A folytonosság öröklődése pontonkénti limeszfüggvényre

A következő tétel teljes jellemzést ad arra, hogy topologikus tér egy pontjában folytonos függvények általánosított sorozatának pontonkénti limeszfüggvénye folytonos legyen az adott pontban.

28.2.1. Tétel. *Legyen T topologikus tér, M metrikus tér és $(f_i)_{i\in I}$ olyan általánosított sorozat, hogy minden $I \ni i$-re $f_i : T \to M$ függvény. Tegyük fel, hogy $(f_i)_{i\in I}$ pontonként konvergens a T halmazon, és legyen $f := \lim_{i,\ I} f_i$. Ha $t \in T$ olyan pont, hogy minden $I \ni i$-re f_i folytonos t-ben, akkor a következő állítások ekvivalensek:*

(i) *Az f függvény folytonos a t pontban.*

(ii) *Minden $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ számhoz létezik olyan olyan $j \in I$, hogy minden $i \in I$, $i \geq j$ indexhez létezik t-nek olyan V környezete T-ben, hogy minden $V \ni t'$ -re $d(f_i(t'), f(t')) < \varepsilon$.*

(iii) *Minden $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ és $j \in I$ esetén létezik olyan $i \in I$, $i \geq j$ index, és létezik a t-nek olyan V környezete T-ben, hogy minden $V \ni t'$-re $d(f_i(t'), f(t')) < \varepsilon$.*

(iv) *Minden $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ számhoz létezik olyan $i \in I$ és olyan V környezete t-nek T-ben, hogy minden $V \ni t'$ -re $d(f_i(t'), f(t')) < \varepsilon$.*

Bizonyítás. (i)⇒(ii) Legyen $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ rögzített, és az f függvény t-beli folytonossága alapján vegyük a t-nek olyan $V(\varepsilon)$ környezetét T-ben, hogy minden $V(\varepsilon) \ni t'$-re $d(f(t'), f(t)) < \varepsilon/3$. Az f definíciója alapján az $(f_i(t))_{i\in I}$ általánosított sorozat konvergál $f(t)$-hez M-ben, így van olyan $j \in I$, hogy minden $i \in I$, $i \geq j$ indexre $d(f_i(t), f(t)) < \varepsilon/3$. Ha $i \in I$ olyan, hogy $i \geq j$, akkor az f_i függvény t-beli folytonossága alapján létezik t-nek olyan V_i környezete T-ben, hogy minden $V_i \ni t'$-re $d(f_i(t'), f_i(t)) < \varepsilon/3$ teljesül; ekkor a $V := V(\varepsilon) \cap V_i$ halmaz olyan környezete t-nek T-ben, hogy minden $V \ni t'$-re

$$d(f_i(t'), f(t')) \leq d(f_i(t'), f_i(t)) + d(f_i(t), f(t)) + d(f(t), f(t')) < \varepsilon.$$

Tehát minden $\mathbb{R}^+ \ni \varepsilon$-hoz találtunk olyan $I \ni j$-t, hogy minden $i \in I$, $i \geq j$ indexhez létezik a t-nek olyan V környezete, amelynek minden t' elemére $d(f_i(t'), f(t')) < \varepsilon$ teljesül, így (ii) következik (i)-ből.

(ii)⇒(iii) Legyen $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ és a (ii) alapján vegyünk olyan $j_\varepsilon \in I$ indexet, hogy minden $i \in I$, $i \geq j_\varepsilon$ indexhez létezik t-nek olyan V környezete T-ben, hogy minden $V \ni t'$-re $d(f_i(t'), f(t')) < \varepsilon$. Ekkor minden $j \in I$ esetén az I felfelé irányítottsága miatt vehetünk olyan $I \ni i$-t, hogy $i \geq j$ és $i \geq j_\varepsilon$; ekkor az i-hez létezik t-nek olyan V környezete T-ben, hogy minden $V \ni t'$-re $d(f_i(t'), f(t')) < \varepsilon$. Ezért (iii) közetkezik (ii)-ből.

(iii)⇒(iv) Logikai trivialitás, mert $I \neq \emptyset$.

(iv)⇒(i) Legyen $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ rögzített, és az $\varepsilon/3$ számhoz a (iv) alapján vegyünk olyan $i \in I$ indexet és a t-nek olyan V' környezetét T-ben, hogy minden $V' \ni t'$-re $d(f_i(t'), f(t')) < \varepsilon/3$. Speciálisan, $t \in V'$ miatt $d(f_i(t), f(t)) < \varepsilon/3$ is teljesül. Az f_i függvény folytonos t-ben, ezért létezik t-nek olyan V'' környezete T-ben, hogy minden $V'' \ni t'$-re $d(f_i(t'), f_i(t)) < \varepsilon/3$. Ekkor $V := V' \cap V''$ olyan környezete t-nek T-ben, hogy minden $t' \in V$ pontra

$$d(f(t'), f(t)) \leq d(f(t'), f_i(t')) + d(f_i(t'), f_i(t)) + d(f_i(t), f(t)) < \varepsilon$$

teljesül, ami azt jelenti, hogy f folytonos a t pontban. ■

28.2.2. Tétel. *Legyen T topologikus tér, M metrikus tér és $(f_i)_{i\in I}$ olyan általánosított sorozat, hogy minden $I \ni i$-re $f_i \in \mathscr{C}(T; M)$. Ha az $(f_i)_{i\in I}$ általánosított függvénysorozat lokálisan egyenletesen konvergens a T halmazon, akkor $\lim_{i,\ I} f_i \in \mathscr{C}(T; M)$.*

Bizonyítás. Jelölje d az M metrikáját, $f := \lim_{i,\ I} f_i$, és legyen $t \in T$ rögzített pont. Vegyünk tetszőleges $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ számot. A t pontnak olyan V környezetét keressük T-ben, amelyre $f\langle V\rangle \subseteq B_\varepsilon(f(t); d)$.

Először vegyük a t-nek olyan V_1 környezetét, amelyen az $(f_i)_{i\in I}$ általánosított függvénysorozat egyenletesen konvergens, vagyis $\lim_{i,\ I} \left(\sup_{t'\in V_1} d(f_i(t'), f(t'))\right) = 0$. Ekkor az

$\varepsilon/3$ számhoz vehetünk olyan $j \in I$ indexet, hogy minden $I \ni i$-re, ha $i \geq j$, akkor $\sup_{t' \in V_1} d(f_i(t'), f(t')) \leq \varepsilon/3$. Tehát, ha $i \in I$ és $i \geq j$, akkor minden $V_1 \ni t'$-re $d(f_i(t'), f(t')) \leq \varepsilon/3$. Ezért $i \in I$ és $i \geq j$ esetén $d(f_i(t), f(t)) \leq \varepsilon/3$ is igaz, hiszen $t \in V_1$. A hipotézis alapján az $f_j : T \to M$ függvény folytonos a t pontban, tehát a t-nek van olyan V_2 környezete T-ben, hogy minden $t' \in V_2$ esetén $d(f_j(t'), f_j(t)) < \varepsilon/3$. Tehát $V := V_1 \cap V_2$ olyan környezete t-nek T-ben, hogy minden $V \ni t'$-re

$$d(f(t'), f(t)) \leq d(f(t'), f_j(t')) + d(f_j(t'), f_j(t)) + d(f_j(t), f(t)) < 3 \cdot \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon,$$

vagyis $f\langle V \rangle \subseteq B_\varepsilon(f(t); d)$. ■

Figyeljük meg, hogy az előző állítás bizonyításában csak azt használtuk fel, hogy $f = \lim_{i,\ I} f_i$, és minden $t \in T$ pontnak létezik olyan V környezete T-ben, amelyre $\inf_{i \in I} \left(\sup_{t' \in V} d(f_i(t'), f(t')) \right) = 0$. Ez határozottan gyengébb feltételnek tűnik annál, hogy $(f_i)_{i \in I}$ lokálisan egyenletesen konvergál f-hez a T halmazon.

28.2.3. Jelölés. *Ha E halmaz, F normált tér és f olyan függvény, hogy $E \subseteq Dom(f)$ és* $\mathrm{Im}(f) \subseteq F$, *akkor*

$$|||f|||_E := \sup_{t \in E} \|f(t)\|,$$

ha $E \neq \emptyset$, míg $|||f|||_\emptyset := 0$; továbbá a $|||f|||_{Dom(f)}$ szimbólum helyett az egyszerűbb $|||f|||$ jelet alkalmazzuk.

Ha T halmaz és F normált tér, akkor a $T \to F$ korlátos függvények $\mathscr{F}^b(T; F)$ halmaza a pontonként értelmezett műveletekkel ellátva vektortér ugyanazon test felett, amely felett F vektortér, és az $\mathscr{F}^b(T; F) \to \mathbb{R}_+;\ f \mapsto |||f|||_T$ *sup-normával* ellátva normált tér, és a $|||\cdot|||_T$ norma éppen a sup-metrikát generálja.

28.2.4. Definíció. *Ha T lokálisan kompakt tér és F normált tér, akkor egy $f : T \to F$ függvényt* **végtelenben eltűnőnek** *nevezünk, ha minden $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ esetén van olyan $K \subseteq T$ kompakt halmaz, hogy minden $T \setminus K \ni t$-re $\|f(t)\| < \varepsilon$. Ha T lokálisan kompakt tér és F normált tér, akkor $\mathscr{K}(T; F)$ jelöli a $T \to F$ kompakt tartójú folytonos függvények halmazát, és $\overline{\mathscr{K}}(T; F)$ jelöli a $T \to F$ végtelenben eltűnő folytonos függvények halmazát.*

28.2.5. Állítás. *Ha T lokálisan kompakt tér és F normált tér, akkor $\overline{\mathscr{K}}(T; F)$ egyenlő a $\mathscr{K}(T; F)$ függvényhalmaz sup-norma szerinti lezártjával $\mathscr{F}^b(T; F)$-ben.*

Bizonyítás. Legyen $f \in \overline{\mathscr{K}}(T; F)$. Vegyünk tetszőleges $(\varepsilon_n)_{n \in \mathbb{N}}$ zérussorozatot $\mathbb{R}^+$-ban. Az f függvény végtelenben eltűnő, ezért kiválaszthatjuk a T kompakt részhalmazainak olyan $(K_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sorozatát, hogy minden $n \in \mathbb{N}$ és $t \in T \setminus K_n$ esetén $\|f(t)\| < \varepsilon_n$. A lokálisan kompakt terekre vonatkozó Uriszon-tételt alkalmazva kiválasztunk olyan $(\varphi_n)_{n \in \mathbb{N}}$

sorozatot, hogy minden $n \in \mathbb{N}$ esetén $\varphi_n : T \to \mathbb{R}$ kompakt tartójú folytonos függvény, $0 \leq \varphi_n \leq 1$ és $K_n \subseteq [\varphi_n = 1]$. Ekkor a $\mathscr{K}(T;F)$-ben haladó $(\varphi_n f)_{n\in\mathbb{N}}$ függvénysorozat egyenletesen konvergál f-hez a T halmazon. Valóban, ha $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ és $N \in \mathbb{N}$ olyan, hogy minden $n > N$ természetes számra $\varepsilon_n < \varepsilon$, akkor minden $n > N$ természetes számra és $T \setminus K_n \ni t$-re $\|f(t) - (\varphi_n f)(t)\| = (1 - \varphi_n(t))\|f(t)\| < \varepsilon_n < \varepsilon$, míg $\varphi_n f = f$ a K_n halmazon.

Legyen $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ olyan sorozat $\mathscr{K}(T;F)$-ben, amely egyenletesen konvergál az $f : T \to F$ függvényhez a T halmazon. Az előző tétel alapján f folytonos. Legyen $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ és vegyünk olyan $n \in \mathbb{N}$ számot, hogy minden $T \ni t$-re $\|f_n(t) - f(t)\| < \varepsilon$. Ha $t \in T \setminus \mathrm{supp}(f_n)$, akkor $f_n(t) = 0$ miatt $\|f(t)\| \leq \|f(t) - f_n(t)\| + \|f_n(t)\| < \varepsilon$, vagyis az ε számhoz a $K := \mathrm{supp}(f_n)$ kompakt halmaz olyan, hogy minden $T \setminus K \ni t$-re $\|f(t)\| < \varepsilon$. Ez azt jelenti, hogy f végtelenben eltűnő. ■

A topologikus tér zárt részhalmazainak általánosított sorozatokkal való jellemzése alapján az előző állítás úgy is megfogalmazható, hogy lokálisan kompakt téren értelmezett, normált térbe ható korlátos függvény pontosan akkor végtelenben eltűnő és folytonos, ha egyenletesen approximálható kompakt tartójú folytonos függvényekkel. Tehát az előbbi állítás szintén az egyenletes approximáció témakörébe tartozik.

28.3. Stone-féle approximációs tétel

28.3.1. Definíció. *Ha T halmaz és H olyan halmaz, amelynek elemei T-n értelmezett függvények, akkor azt mondjuk, hogy H* **szétválasztó** T **felett**, *ha minden $T \ni t, t'$-re, $t \neq t'$ esetén létezik olyan $f \in H$, hogy $f(t) \neq f(t')$.*

Például, a Hahn–Banach-tételből következik, hogy egy normált tér felett a folytonos lineáris funkcionálok halmaza szétválasztó. A definíció szerint nyilvánvaló, hogy ha T teljesen reguláris T_1-tér, akkor a $\mathscr{C}(T;[0,1])$ függvényhalmaz szétválasztó T felett.

A következő állításban megfogalmazzuk a pontonkénti approximáció problémája megoldhatóságának természetes *szükséges* feltételét, abban a speciális esetben, amikor lokálisan kompakt téren értelmezett, $\mathbb{K}$-ba érkező függvények approximációjáról van szó.

28.3.2. Állítás. *Ha T lokálisan kompakt tér és $H \subseteq \mathscr{F}(T;\mathbb{K})$ olyan részhalmaz, hogy minden $f : T \to [0,1]$ kompakt tartójú folytonos függvényhez van olyan H-ban haladó $(f_i)_{i\in I}$ általánosított sorozat, hogy $f = \lim_{i,\ I} f_i$, akkor H szétválasztó T felett.*

Bizonyítás. Ha $t, t' \in T$ és $t \neq t'$, akkor a lokálisan kompakt terekre vonatkozó Uriszon-tétel szerint a $\{t\}$ kompakt halmazhoz és a $T \setminus \{t'\}$ nyílt halmazhoz van olyan $f : T \to [0,1]$ kompakt tartójú folytonos függvény, amelyre $\{t\} \subseteq [f = 1]$ (azaz $f(t) = 1$) és $\mathrm{supp}(f) \subseteq T \setminus \{t'\}$, tehát $f(t') = 0$. A hipotézis szerint van olyan H-ban haladó $(f_i)_{i\in I}$

általánosított sorozat, hogy $f := \lim_{i,\ I} f_i$. Ekkor $1 = f(t) := \lim_{i,\ I} f_i(t)$, így van olyan $i_1 \in I$, hogy minden $I \ni i$-re, ha $i \geq i_1$, akkor $f_i > 1/2$. Ugyanakkor $0 = f(t') := \lim_{i,\ I} f_i(t')$, így van olyan $i_2 \in I$, hogy minden $I \ni i$-re, ha $i \geq i_2$, akkor $f_i < 1/2$. Az I előrendezett halmaz felfelé irányított, ezért van olyan $i \in I$, hogy $i \geq i_1, i_2$; ekkor $f_i(t) > 1/2 > f_i(t')$ és $f_i \in H$. ■

28.3.3. Definíció. *Ha T halmaz, akkor egy $H \subseteq \mathscr{F}(T;\mathbb{R})$ függvényhalmazt T feletti* **lineáris függvényhálónak** *nevezünk, ha H lineáris altere a $\mathscr{F}(T;\mathbb{R})$ függvénytérnek, és minden $h \in H$ esetén a $|h| : T \to \mathbb{R};\ t \mapsto |h(t)|$ függvény eleme H-nak.*

28.3.4. Állítás. *Ha T halmaz és $H \subseteq \mathscr{F}(T;\mathbb{R})$ lineáris altér, akkor a következő állítások ekvivalensek.*

(i) *H lineáris függvényháló T felett.*

(ii) *Minden $f, f' \in H$ esetén az $\inf(f, f') : T \to \mathbb{R};\ t \mapsto \min(f(t), f'(t))$ függvény eleme H-nak.*

(iii) *Minden $f, f' \in H$ esetén a $\sup(f, f') : T \to \mathbb{R};\ t \mapsto \max(f(t), f'(t))$ függvény eleme H-nak.*

(iv) *Minden $f \in H$ esetén az $f^+ : T \to \mathbb{R};\ t \mapsto \max(f(t), 0)$ függvény eleme H-nak.*

(v) *Minden $f \in H$ esetén az $f^- : T \to \mathbb{R};\ t \mapsto \max(-f(t), 0)$ függvény eleme H-nak.*

Bizonyítás. Ha $f, f' : T \to \mathbb{R}$ függvények, akkor

$$\inf(f, f') = \frac{1}{2}(f + f' - |f - f'|), \quad \sup(f, f') = \frac{1}{2}(f + f' + |f - f'|),$$

$$\sup(f, f') = -\inf(-f, -f'), \quad f^+ = \sup(f, 0), \quad f^- = f^+ - f, \quad |f| = f + 2f^-.$$

Ezekből azonnal következik az állítás. ■

Ha H lineáris függvényháló a T halmaz felett és $(f_i)_{i\in I}$ tetszőleges nem üres véges rendszer H-ban, akkor a

$$\sup_{i\in I} f_i : T \to \mathbb{R}; \quad t \mapsto \max_{i\in I} f_i(t),$$

$$\inf_{i\in I} f_i : T \to \mathbb{R}; \quad t \mapsto \min_{i\in I} f_i(t)$$

függvények elemei H-nak. Ez az előző állításból az I indexhalmaz számossága szerinti teljes indukcióval következik.

28.3.5. Jelölés. *Ha T halmaz, akkor a $T \to \mathbb{R}$ azonosan 1 függvényt 1_T jelöli.*

28.3.6. Tétel. (Stone-tétel) *Legyen T kompakt Hausdorff-tér és H olyan lineáris függvényháló T felett, hogy $1_T \in H \subseteq \mathscr{C}(T;\mathbb{R})$. A H halmaz pontosan akkor sűrű $\mathscr{C}(T;\mathbb{R})$-ben a sup-norma szerint, ha H szétválasztó T felett.*

Bizonyítás. Ha $T = \emptyset$, akkor az állítás triviálisan igaz (és érdektelen), ezért feltehető, hogy $T \neq \emptyset$. Csak az elégségesség szorul bizonyításra, tehát feltesszük, hogy H szétválasztó T felett.

Először megjegyezzük, hogy minden $t, t' \in T$ és $\alpha, \alpha' \in \mathbb{R}$ esetén, ha $t \neq t'$, akkor létezik olyan $f \in H$, hogy $f(t) = \alpha$ és $f(t') = \alpha'$. Valóban, a H halmaz szétválasztó T felett, tehát van olyan $h \in H$, hogy $h(t) \neq h(t')$; ekkor az $f := \dfrac{\alpha h(t') - \alpha' h(t)}{h(t') - h(t)} .1_T + \dfrac{\alpha' - \alpha}{h(t') - h(t)} .h \in H$ függvényre $f(t) = \alpha$ és $f(t') = \alpha'$.

Legyen $f \in \mathscr{C}(T; \mathbb{R})$ rögzített függvény és $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$. Megmutatjuk, hogy létezik olyan $h \in H$, amelyre $|||f - h||| \leq \varepsilon$.

Ha $t, t' \in T$ és $t \neq t'$, akkor létezik olyan $h \in H$, hogy $h(t) = f(t)$ és $h(t') = f(t')$. Ha $t, t' \in T$ és $t = t'$, akkor $h := f(t).1_T \in H$ olyan, hogy $h(t) = f(t)$ és $h(t') = f(t')$. Ezért kiválaszthatunk olyan $(h_{(t,t')})_{(t,t') \in T \times T}$ rendszert, hogy minden $(t, t') \in T \times T$ esetén $h_{(t,t')}(t) = f(t)$ és $h_{(t,t')}(t') = f(t')$.

Legyen $t' \in T$ rögzített pont. Ha $t \in T$, akkor $h_{(t,t')}(t) = f(t) < f(t) + \varepsilon$, vagyis $t \in [h_{(t,t')} - f < \varepsilon]$, és a $h_{(t,t')} - f : T \to \mathbb{R}$ függvény folytonos, tehát a $[h_{(t,t')} - f < \varepsilon]$ halmaz nyílt környezete t-nek. A T kompaktsága miatt létezik olyan $(t_i)_{i \in I}$ véges rendszer T-ben, amelyre $T = \bigcup\limits_{i \in I} [h_{(t_i,t')} - f < \varepsilon]$. Világos, hogy $I \neq \emptyset$, mert $T \neq \emptyset$. Legyen $h := \inf\limits_{i \in I} h_{(t_i,t')}$; ekkor $h \in H$ és $t \in I$ esetén van olyan $i \in I$, hogy $h_{(t_i,t')}(t) < f(t) + \varepsilon$, tehát $h(t) < f(t) + \varepsilon$. Ugyanakkor $h(t') := \min\limits_{i \in I} h_{(t_i,t')}(t') = f(t')$.

Ezzel megmutattuk, hogy minden $t' \in T$ esetén van olyan $h \in H$, hogy minden $T \ni t$-re $h(t) < f(t) + \varepsilon$ és $h(t') = f(t')$. Kiválaszthatunk tehát olyan $(h_{t'})_{t' \in T}$ rendszert, hogy minden $T \ni t'$-re $h_{t'} \in H$, $h_{t'}(t') = f(t')$ és minden $T \ni t$-re $h_{t'}(t) < f(t) + \varepsilon$.

Ha $t' \in T$, akkor $h_{t'}(t') = f(t') > f(t') - \varepsilon$, vagyis $t' \in [h_{t'} - f > -\varepsilon]$, és a $h_{t'} - f : T \to \mathbb{R}$ függvény folytonos, így $[h_{t'} - f > -\varepsilon]$ nyílt környezete t'-nek. A T kompaktsága miatt létezik olyan $(t'_j)_{j \in J}$ véges rendszer T-ben, hogy $T = \bigcup\limits_{j \in J} [h_{t'_j} - f > -\varepsilon]$. Világos, hogy $J \neq \emptyset$, mert $T \neq \emptyset$. Értelmezzük a $h := \sup\limits_{j \in J} h_{t'_j}$ függvényt. Ekkor $h \in H$, és $t \in T$ esetén van olyan $j \in J$, hogy $h_{t'_j}(t) > f(t) - \varepsilon$, tehát $h(t) > f(t) - \varepsilon$. Ugyanakkor minden $T \ni t$-re és $J \ni j$-re $h_{t'_j}(t) < f(t) + \varepsilon$, tehát $h(t) < f(t) + \varepsilon$. Ez azt jelenti, hogy minden $T \ni t$-re $f(t) - \varepsilon < h(t) < f(t) + \varepsilon$, következésképpen $|||h - f||| \leq \varepsilon$. ■

28.4. Stone–Weierstrass approximációs tétel

Ha T halmaz, akkor az $\mathscr{F}(T; \mathbb{K})$ függvényhalmaz a pontonként értelmezett összeadással, számmal vett szorzással és a szorzással ellátva *algebra* a $\mathbb{K}$ test felett; ennek részalgebráit nevezzük T feletti *függvényalgebráknak*. Tehát egy $A \subseteq \mathscr{F}(T;\mathbb{K})$ halmaz pontosan akkor függvényalgebra T felett, ha minden $f, g \in A$ és $\lambda \in \mathbb{K}$ esetén $f+g, fg, \lambda f \in A$ és $A \neq \emptyset$.

Megjegyezzük, hogy ha T halmaz és A lineáris altere $\mathscr{F}(T;\mathbb{K})$-nak, akkor A pontosan akkor függvényalgebra T felett, ha minden $f \in A$ esetén $f^2 \in A$. Ez abból következik, hogy minden $f, g : T \to \mathbb{K}$ függvényre $fg = \dfrac{1}{4}\left((f+g)^2 - (f-g)^2\right)$.

28.4.1. Lemma. *Minden $K \subseteq \mathbb{R}$ kompakt halmazhoz létezik $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ polinomiális függvényeknek olyan $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sorozata, amely egyenletesen konvergál az euklidészi abszolútérték-függvényhez a K halmazon, és minden $\mathbb{N} \ni n$-re $p_n(0) = 0$.*

Bizonyítás. (I) Először megmutatjuk, hogy elegendő olyan $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sorozat létezését igazolni, amelynek mindegyik tagja $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ polinomiális függvény, és egyenletesen konvergál az euklidészi abszolútérték-függvényhez a $[-1,1]$ intervallumon, és minden $\mathbb{N} \ni n$-re $p_n(0) = 0$. Valóban, legyen $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ilyen sorozat és $K \subseteq \mathbb{R}$ tetszőleges kompakt halmaz. Ekkor van olyan $c \in \mathbb{R}^+$, hogy $K \subseteq [-c, c]$, és ha minden $n \in \mathbb{N}$ esetén bevezetjük a

$$\widetilde{p}_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}; \quad t \mapsto c \cdot p_n(t/c)$$

függvényt, akkor $(\widetilde{p}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ olyan sorozat, amelynek minden tagja $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ polinomiális függvény, minden $\mathbb{N} \ni n$-re $\widetilde{p}_n(0) = 0$, valamint

$$\sup_{t\in K} |\widetilde{p}_n(t) - |t|| \leq \sup_{t\in[-c,c]} |c \cdot p_n(t/c) - |t|| = c \cdot \sup_{t\in[-c,c]} |p_n(t/c) - |t/c|| =$$

$$= c \cdot \sup_{t\in[-1,1]} |p_n(t) - |t||,$$

és a jobb oldal tart 0-hoz, ha n tart végtelenhez, ezért $(\widetilde{p}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ egyenletesen konvergál az euklidészi abszolútérték-függvényhez a K halmazon.

(II) Megmutatjuk, hogy ha létezik $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ polinomiális függvényeknek olyan $(q_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sorozata, amely egyenletesen konvergál a $\sqrt{\cdot}$ függvényhez a $[0,1]$ intervallumon és minden $\mathbb{N} \ni n$-re $q_n(0) = 0$, akkor létezik $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ polinomiális függvényeknek olyan $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sorozata, amely egyenletesen konvergál az euklidészi abszolútérték-függvényhez a $[-1,1]$ intervallumon, és minden $\mathbb{N} \ni n$-re $p_n(0) = 0$. Valóban, a $(q_n \circ id_{\mathbb{R}}^2)_{n\in\mathbb{N}}$ függvénysorozat mindegyik tagja $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ polinomiális függvény, és minden $n \in \mathbb{N}$ esetén $(q_n \circ id_{\mathbb{R}}^2)(0) = 0$, valamint minden $n \in \mathbb{N}$ és $t \in [-1,1]$ esetén $\left|q_n(t^2) - \sqrt{t^2}\right| = |q_n(t^2) - |t||$, amiből következik, hogy

$$\lim_{n\to\infty} \left(\sup_{t\in[-1,1]} \left|q_n(t^2) - |t|\right| \right) = 0,$$

vagyis $(q_n \circ id_{\mathbb{R}}^2)_{n\in\mathbb{N}}$ egyenletesen konvergál $|\cdot|_{\mathbb{R}}$-hez a $[-1,1]$ intervallumon.

Ezért az (I) alapján elegendő ilyen tulajdonságú $(q_n)_{n\in\mathbb{N}}$ függvénysorozatot találni.

(III) Legyen $\mathfrak{P}$ az $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ polinomiális függvények halmaza, és értelmezzük a

$$g : \mathfrak{P} \to \mathfrak{P}; \quad q \mapsto q + \frac{1}{2} \ \ id_{\mathbb{R}} - q^2$$

leképezést. Jelölje $(q_n)_{n\in\mathbb{N}}$ a g függvény és az $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ azonosan 0 függvény, mint kezdőpont által generált iterációs sorozatot. Tehát $(q_n)_{n\in\mathbb{N}}$ az a sorozat, amelyre q_0 az $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ azonosan 0 függvény, és minden $\mathbb{N} \ni n$-re $q_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ polinomiális függvény és

$$q_{n+1} = q_n + \frac{1}{2} \ \ id_{\mathbb{R}} - q_n^2 \ \ .$$

Megmutatjuk, hogy a $(q_n)_{n\in\mathbb{N}}$ függvénysorozatra teljesülnek a (II)-ben megfogalmazott tulajdonságok, vagyis minden $\mathbb{N} \ni n$-re $q_n(0) = 0$ és $(q_n)_{n\in\mathbb{N}}$ egyenletesen konvergál az $\sqrt{\cdot}$ függvényhez a $[0,1]$ intervallumon, vagyis

$$\lim_{n\to\infty} \left(\sup_{t\in[0,1]} \left| q_n(t) - \sqrt{t} \right| \right) = 0.$$

A definíció szerint $q_0(0) = 0$, és ha az $n \in \mathbb{N}$ számra $q_n(0) = 0$ teljesül, akkor $q_{n+1}(0) = q_n(0) + \frac{1}{2}(-q_n(0)^2) = 0$, ezért a teljes indukció elve alapján minden $\mathbb{N} \ni n$-re $q_n(0) = 0$.

Teljes indukcióval igazoljuk, hogy minden $n \in \mathbb{N}$ esetén minden $[0,1] \ni t$-re $0 \leq q_n(t) \leq \sqrt{t}$. Ez triviálisan teljesül, ha $n = 0$, mert minden $\mathbb{R} \ni t$-re $q_0(t) = 0$. Tegyük fel, hogy $n \in \mathbb{N}$ olyan, hogy minden $[0,1] \ni t$-re $0 \leq q_n(t) \leq \sqrt{t}$. Ekkor

$$\sqrt{t} - q_{n+1}(t) = \sqrt{t} - q_n(t) - \frac{1}{2} \ \ t - q_n(t)^2 \ \ =$$

$$= \sqrt{t} - q_n(t) - \frac{1}{2}(\sqrt{t} - q_n(t))(\sqrt{t} + q_n(t)) = (\sqrt{t} - q_n(t)) \ \ 1 - \frac{1}{2}(\sqrt{t} + q_n(t)) \ \ ,$$

és az indukciós hipotézis szerint $\sqrt{t} - q_n(t) \geq 0$, valamint $\frac{1}{2}(\sqrt{t} + q_n(t)) \leq \frac{1}{2}(\sqrt{t} + \sqrt{t}) = \sqrt{t} \leq 1$, ezért $\sqrt{t} - q_{n+1}(t) \geq 0$ teljesül, továbbá $0 \leq q_n(t) \leq \sqrt{t}$ alapján $q_{n+1}(t) = q_n(t) + \frac{1}{2}(t - q_n(t)^2) \geq q_n(t) \geq 0$. Ebből az is látható, hogy a $(q_n(t))_{n\in\mathbb{N}}$ számsorozat monoton növő.

Ugyancsak teljes indukcióval igazoljuk, hogy $t \in [0,1]$ esetén minden $\mathbb{N} \ni n$-re

$$\sqrt{t} - q_n(t) \leq \frac{2\sqrt{t}}{2 + n\sqrt{t}}.$$

Ha $n = 0$, akkor itt triviális egyenlőség van, mert $q_0(t) = 0$. Tegyük fel, hogy $n \in \mathbb{N}$ olyan, amelyre teljesül ez az egyenlőtlenség. Ekkor az indukciós hipotézis és $q_n(t) \geq 0$ miatt

$$\sqrt{t} - q_{n+1}(t) = (\sqrt{t} - q_n(t)) \quad 1 - \frac{1}{2}(\sqrt{t} + q_n(t)) \quad \leq$$

$$\leq \frac{2\sqrt{t}}{2 + n\sqrt{t}} \quad 1 - \frac{1}{2}(\sqrt{t} + q_n(t)) \quad \leq \frac{2\sqrt{t}}{2 + n\sqrt{t}} \quad 1 - \frac{1}{2}\sqrt{t} \quad \leq \frac{2\sqrt{t}}{2 + (n+1)\sqrt{t}},$$

mert átrendezéssel triviálisan adódik, hogy

$$\frac{1 - \frac{1}{2}\sqrt{t}}{2 + n\sqrt{t}} \leq \frac{1}{2 + (n+1)\sqrt{t}}.$$

Nyilvánvaló, hogy $n \in \mathbb{N}^+$ és $t \in [0,1]$ esetén $\dfrac{2\sqrt{t}}{2 + n\sqrt{t}} \leq \dfrac{2}{n}$, ezért $0 \leq \sqrt{t} - q_n(t) \leq \dfrac{2}{n}$, amiből következik, hogy minden $n \in \mathbb{N}^+$ számra

$$\sup_{t \in [0,1]} \left|\sqrt{t} - q_n(t)\right| \leq \frac{2}{n}$$

teljesül, így $\lim\limits_{n \to \infty} \left(\sup\limits_{t \in [0,1]} \left|\sqrt{t} - q_n(t)\right| \right) = 0$. ■

28.4.2. Jelölés. *Ha T halmaz és $f : T \to \mathbb{K}$ függvény, akkor $\overline{f}$ jelöli a $T \to \mathbb{K};\ t \mapsto \overline{f(t)}$ függvényt, és az $\overline{f}$ függvényt az f* **konjugáltjának** *nevezzük.*

28.4.3. Tétel. (Stone–Weierstrass-tétel) *Legyen T kompakt Hausdorff-tér és A olyan függvényalgebra T felett, amelyre $1_T \in A \subseteq \mathscr{C}(T;\mathbb{K})$ és minden $f \in A$ esetén $\overline{f} \in A$. Az A halmaz pontosan akkor sűrű $\mathscr{C}(T;\mathbb{K})$-ban a sup-norma szerint, ha A szétválasztó T felett.*

(**Megjegyzés**. Természetesen $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ esetén minden $A \ni f$-re $\overline{f} = f \in A$ automatikusan teljesül, azonban $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ esetén a konjugáltakra vonatkozó feltétel nem triviális és szükséges.)

Bizonyítás. Csak az elégségességet kell igazolunk, tehát feltesszük, hogy A szétválasztó T felett.

(I) Először a $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ esetre bizonyítunk. Jelölje $\overline{A}$ az A halmaz sup-norma szerinti lezártját $\mathscr{C}(T;\mathbb{R})$-ben. Ekkor $\overline{A}$ lineáris altere $\mathscr{C}(T;\mathbb{R})$-nek, mert normált tér lineáris alterének lezártja lineáris altér. Továbbá, $1_T \in A \subseteq \overline{A}$ teljesül. Az A szétválasztó T felett, ezért $A \subseteq \overline{A}$ miatt $\overline{A}$ még inkább szétválasztó T felett. Ezért a Stone-tétel alapján elég azt igazolni, hogy $\overline{A}$ lineáris függvényháló T felett, vagyis minden $f \in \overline{A}$

esetén $|f| \in \overline{A}$. Valóban, ha így volna, akkor a Stone-tétel alapján $\overline{A}$ sűrű volna $\mathscr{C}(T;\mathbb{R})$-ben a sup-norma szerint, ugyanakkor zárt is, tehát $\overline{A} = \mathscr{C}(T;\mathbb{R})$ teljesülne.

Megmutatjuk, hogy ha minden $f \in A$ esetén $|f| \in \overline{A}$ teljesül, akkor $\overline{A}$ lineáris függvényháló T felett. Valóban, legyen $f \in \overline{A}$, és $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ olyan A-ban haladó sorozat, amelyre $\lim\limits_{n\to\infty} |||f_n - f||| = 0$. A feltevés szerint minden $\mathbb{N} \ni n$-re $|f_n| \in \overline{A}$, továbbá $|||\,|f_n| - |f|\,||| \le |||f_n - f|||$, ezért az $\overline{A}$-ben haladó $(|f_n|)_{n\in\mathbb{N}}$ sorozat a sup-normában konvergál $|f|$-hez. Ebből következik, hogy $|f| \in \overline{A}$, hiszen $\overline{A}$ zárt $\mathscr{C}(T;\mathbb{R})$-ben a sup-norma szerint.

Tehát elég azt igazolni, hogy $f \in A$ esetén $|f| \in \overline{A}$, vagyis $|f|$ egyenletesen approximálható a T halmazon A-beli függvényekkel. Legyen $f \in A$ rögzített. Az $\mathrm{Im}(f)$ halmaz kompakt $\mathbb{R}$-ben, ezért az előző lemma szerint létezik $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ polinomiális függvényeknek olyan $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sorozata, amely egyenletesen konvergál az $|\cdot|_{\mathbb{R}}$ függvényhez az $\mathrm{Im}(f)$ halmazon. Minden $n \in \mathbb{N}$ esetén

$$|||p_n \circ f - |f|\,||| = \sup_{t\in T} |p_n(f(t)) - |f(t)|| = \sup_{\lambda\in \mathrm{Im}(f)} |p_n(\lambda) - |\lambda|| = |||p_n - |\cdot|_{\mathbb{R}}|||,$$

tehát a $(p_n \circ f)_{n\in\mathbb{N}}$ függvénysorozat a sup-norma szerint konvergál az $|f|$ függvényhez. Ugyanakkor minden $p : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ polinomiális függvényhez van olyan $n \in \mathbb{N}$ és $(c_k)_{k\in n} \in \mathbb{R}^n$, hogy $p = \sum\limits_{k\in n} c_k id_{\mathbb{R}}^k$, következésképpen $p \circ f = \sum\limits_{k\in n} c_k f^k \in A$, mert A valós függvényalgebra T felett és $1_T \in A$. Ezért minden $\mathbb{N} \ni n$-re $p_n \circ f \in A$, így $|f| \in \overline{A}$.

(II) Most feltesszük, hogy $\mathbb{K} = \mathbb{C}$. Legyen $A_{\mathbb{R}} := \{f \in A | \mathrm{Im}(f) \subseteq \mathbb{R}\}$. Nyilvánvaló, hogy $A_{\mathbb{R}}$ valós függvényalgebra T felett, és $A_{\mathbb{R}} \subseteq \mathscr{C}(T;\mathbb{R})$, valamint $1_T \in A_{\mathbb{R}}$. Továbbá, minden $f \in A$ esetén $\Re\circ f = \dfrac{1}{2}(f+\overline{f}) \in A$ és $\Im\circ f = \dfrac{1}{2i}(f-\overline{f}) \in A$, ezért $\Re\circ f, \Im\circ f \in A_{\mathbb{R}}$. Ez azt jelenti, hogy minden $A \ni f$-hez léteznek olyan $f_1, f_2 \in A_{\mathbb{R}}$, amelyekre $f = f_1 + if_2$. Ebből triviálisan következik, hogy ha A szétválasztó T felett, akkor $A_{\mathbb{R}}$ is szétválasztó T felett. A valós függvényalgebrákra vonatkozó Stone–Weierstrass-tételt (vagyis az (I) állítást) alkalmazva $A_{\mathbb{R}}$-re kapjuk, hogy ha A szétválasztó T felett, akkor $A_{\mathbb{R}}$ a sup-norma szerint sűrű $\mathscr{C}(T;\mathbb{R})$-ben. Ekkor $f \in \mathscr{C}(T;\mathbb{C})$ esetén minden $\mathbb{R}^+ \ni \varepsilon$-hoz léteznek olyan $g_1, g_2 \in A_{\mathbb{R}}$, hogy $|||\Re \circ f - g_1||| < \varepsilon/2$ és $|||\Im \circ f - g_2||| < \varepsilon/2$, így a $g := g_1 + ig_2 \in A$ függvényre

$$|||f - g||| \le |||\Re \circ f - g_1\,||| + |||\,\Im \circ f - g_2||| < \varepsilon.$$

Ez azt jelenti, hogy A sűrű $\mathscr{C}(T;\mathbb{C})$-ben a sup-norma szerint. ■

28.4.4. Tétel. (Stone–Weierstrass-tétel lokálisan kompakt terekre) *Legyen T lokálisan kompakt tér és A olyan függvényalgebra T felett, amelyre $A \subseteq \overline{\mathscr{K}}(T;\mathbb{K})$ és minden $f \in A$ esetén $\overline{f} \in A$. Az A halmaz pontosan akkor sűrű $\overline{\mathscr{K}}(T;\mathbb{K})$-ban a sup-norma szerint, ha A szétválasztó T felett és minden $T \ni t$-hez van olyan $f \in A$, hogy $f(t) \neq 0$.*

Bizonyítás. Csak az elégségességet kell igazolnunk, tehát feltesszük, hogy A szétválasztó T felett, és minden $T \ni t$-hez van olyan $f \in A$, hogy $f(t) \neq 0$. Legyen T' egypontú kompaktifikációja T-nek, és jelölje ω a végtelen távoli pontot T'-ben. Legyen

$$A := \{ \ c.1_{T'} + f^\circ \mid (c \in \mathbb{K}) \wedge (f \in A) \ \},$$

ahol $f \in A$ esetén f° jelöli az f függvény 0-val vett kiterjesztését T-ről T'-re, tehát $f^\circ(\omega) := 0$ és minden $T \ni t$-re $f^\circ(t) = f(t)$. Nyilvánvaló, hogy A olyan függvényalgebra T' felett, amelyre $1_{T'} \in A \subseteq \mathscr{C}(T';\mathbb{K})$, valamint minden $A \ni f$-re $\overline{f} \in A$. Az A halmaz szétválasztó T felett, és minden $T \ni t$-hez van olyan $f \in A$, hogy $f(t) \neq 0$, ezért A szétválasztó T' felett. Valóban, A nyilvánvalóan szétválasztja a T pontjait, és ha $t \in T$, valamint $f \in A$ olyan, hogy $f(t) \neq 0$, akkor $f^\circ \in A$ és $f^\circ(t) = f(t) \neq 0 = f^\circ(\omega)$. A Stone–Weierstrass-tételt alkalmazzuk a T' kompakt Hausdorff-térre és az A függvényalgebrára; tehát A sűrű $\mathscr{C}(T';\mathbb{K})$-ban a sup-norma szerint.

Legyen $f \in \overline{\mathscr{K}}(T;\mathbb{K})$ rögzített függvény. Ekkor $f^\circ \in \mathscr{C}(T';\mathbb{K})$, tehát van olyan $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sorozat $\mathbb{K}$-ban és olyan $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sorozat A-ban, hogy $\lim\limits_{n\to\infty} |||c_n.1_{T'} + f_n^\circ - f^\circ||| = 0$. Ekkor a $(c_n.1_{T'} + f_n^\circ)_{n\in\mathbb{N}}$ függvénysorozat pontonként is konvergens a T' halmazon, ezért $0 = f^\circ(\omega) = \lim\limits_{n\to\infty}(c_n + f_n^\circ(\omega)) = \lim\limits_{n\to\infty} c_n$. Ebből következik, hogy $\lim\limits_{n\to\infty} |||f_n^\circ - f^\circ||| = 0$. Ha $n \in \mathbb{N}$, akkor nyilvánvalóan $|||f_n - f||| = |||f_n^\circ - f^\circ|||$, ezért f eleme az A halmaz sup-norma szerinti lezártjának. ■

Emlékeztetünk arra, hogy ha T halmaz és $(f_i)_{i\in I}$ olyan rendszer, hogy minden $I \ni i$-re $f_i : T \to \overline{\mathbb{R}}$ függvény, akkor a

$$\sup_{i\in I} f_i : T \to \mathbb{R}; \quad t \mapsto \sup_{i\in I} f_i(t), \ \inf_{i\in I} f_i : T \to \mathbb{R}; \quad t \mapsto \inf_{i\in I} f_i(t)$$

függvényeket az $(f_i)_{i\in I}$ függvényrendszer *felső* (illetve *alsó*) *burkolójának* nevezzük. Itt a jobb oldalon álló szuprémumot és infimumot az $\overline{\mathbb{R}}$ rendezett halmazban kell venni.

28.4.5. Tétel. (Dini-tétel) *Legyen T lokálisan kompakt tér és $(f_i)_{i\in I}$ olyan $\mathscr{K}(T;\mathbb{R})$-ben haladó általánosított sorozat, amely monoton növő (tehát minden $I \ni i, j$-re, ha $i \leq j$, akkor $f_i \leq f_j$). Ha $f := \sup\limits_{i\in I} f_i \in \mathscr{K}(T;\mathbb{R})$, akkor $f = \lim\limits_{i,\ I} f_i$ és az $(f_i)_{i\in I}$ általánosított függvénysorozat egyenletesen konvergens a T halmazon, vagyis minden $\mathbb{R}^+ \ni \varepsilon$-hoz létezik olyan $i_\varepsilon \in I$, hogy minden $i \in I$, $i \geq i_\varepsilon$ és $t \in T$ esetén $|f_i(t) - f(t)| < \varepsilon$.*

Bizonyítás. Ha $t \in T$, akkor az $\mathbb{R}$-ben haladó $(f_i(t))_{i\in I}$ általánosított sorozat monoton növő, és a hipotézis szerint $\sup\limits_{i\in I} f_i(t) = f(t) < +\infty$, ezért $(f_i(t))_{i\in I}$ konvergens $\mathbb{R}$-ben és $f(t) = \lim\limits_{i,\ I} f_i(t)$. Tehát csak azt kell igazolni, hogy az $(f_i)_{i\in I}$ általánosított függvénysorozat egyenletesen konvergens a T halmazon.

Először arra a speciális esetre bizonyítunk, amikor minden $I \ni i$-re $f_i \geq 0$. A hipotézis szerint f kompakt tartójú és minden $I \ni i$-re $0 \leq f_i \leq f$, ezért $\mathrm{supp}(f_i) \subseteq \mathrm{supp}(f)$. Legyen $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ tetszőleges. Minden $i \in I$ esetén az f (előírt) folytonossága miatt az $\Omega_i(\varepsilon) := [f - f_i < \varepsilon]$ halmaz nyílt T-ben, és világos, hogy $\mathrm{supp}(f) \subseteq \bigcup_{i \in I} \Omega_i(\varepsilon)$. Ebből a $\mathrm{supp}(f)$ kompaktsága miatt következik olyan $J \subseteq I$ véges halmaz létezése, amelyre $\mathrm{supp}(f) \subseteq \bigcup_{i \in J} \Omega_i(\varepsilon)$. Ugyanakkor az $(\Omega_i(\varepsilon))_{i \in I}$ általánosított halmazsorozat a tartalmazás tekintetében monoton növő, mert az $(f_i)_{i \in I}$ általánosított függvénysorozat monoton növő. Továbbá, az I előrendezett halmaz felfelé irányított, nem üres, és J véges, ezért van olyan $i_\varepsilon \in I$, hogy minden $i \in J$ esetén $i \leq i_\varepsilon$; ekkor $\bigcup_{i \in J} \Omega_i(\varepsilon) \subseteq \Omega_{i_\varepsilon}(\varepsilon)$. Tehát $i \in I$ és $i \geq i_\varepsilon$ esetén $\mathrm{supp}(f) \subseteq \Omega_{i_\varepsilon}(\varepsilon) \subseteq \Omega_i(\varepsilon)$, ezért $T = \Omega_i(\varepsilon)$, hiszen f és f_i a $T \setminus \mathrm{supp}(f)$ halmazon a 0-val egyenlők. Tehát, ha $i \in I$ és $i \geq i_\varepsilon$, akkor minden $T \ni t$-re $f_i(t) - \varepsilon < f_i(t) \leq f(t) < f_i(t) + \varepsilon$, vagyis $|f_i(t) - f(t)| < \varepsilon$. Ez azt jelenti, hogy az $(f_i)_{i \in I}$ általánosított függvénysorozat egyenletesen konvergens a T halmazon.

Most elvetjük azt a hipotézist, hogy minden $I \ni i$-re $f_i \geq 0$. Legyen $\alpha \in I$ rögzített és $I_\alpha := \{i \in I | i \geq \alpha\}$. Az I_α halmaz az I felett előrendezés leszűkítésével ellátva szintén felfelé irányított előrendezett halmaz, továbbá az $(f_i - f_\alpha)_{i \in I_\alpha}$ általánosított függvénysorozat $\mathscr{K}(T;\mathbb{R})$-ben halad, monoton növő, és $\sup_{i \in I_\alpha}(f_i - f_\alpha) = \left(\sup_{i \in I_\alpha} f_i\right) - f_\alpha \in \mathscr{K}(T;\mathbb{R})$, mert nyilvánvalóan $\sup_{i \in I_\alpha} f_i = \sup_{i \in I} f_i$. Ugyanakkor minden $I_\alpha \ni i$-re $f_i - f_\alpha \geq 0$, ezért az előzőek alapján az $(f_i - f_\alpha)_{i \in I_\alpha}$ általánosított függvénysorozat egyenletesen konvergens a T halmazon. Ebből azonnal következik, hogy az $(f_i)_{i \in I}$ általánosított függvénysorozat is egyenletesen konvergens a T halmazon. ■

A Dini-tétel gyakran alkalmazott speciális esete a következő: ha T lokálisan kompakt tér és $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ olyan $\mathscr{K}(T;\mathbb{R})$-ben haladó sorozat, amely monoton növő és $f := \sup_{n \in \mathbb{N}} f_n \in \mathscr{K}(T;\mathbb{R})$, akkor f egyenlő az $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ függvénysorozat pontonkénti limeszfüggvényével, és az $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ függvénysorozat egyenletesen konvergens a T halmazon.

28.5. Kompakt terek metrizálhatóságának jellemzése folytonos függvényekkel

28.5.1. Tétel. (Kompakt terek metrizálhatósága) *Ha T kompakt Hausdorff-tér, akkor a következő állítások ekvivalensek.*

(i) *T metrizálható.*

(ii) *Minden M szeparábilis metrikus térre a $\mathscr{C}(T;M)$ függvénytér a sup-metrikával ellátva szeparábilis.*

(iii) *A $\mathscr{C}(T;[0,1])$ függvénytér a sup-metrikával ellátva szeparábilis.*

(iv) *Létezik olyan $H \subseteq \mathscr{C}(T;[0,1])$ megszámlálható halmaz, amely szétválasztó T felett.*

Bizonyítás. (i)⇒(ii) Jelölje d_M az M metrikáját, és legyen d olyan metrika T felett, amely a T topológiáját generálja. Rögzítsünk egy $\mathbb{R}^+$-ban haladó zérussorozatot, és minden $m, n \in \mathbb{N}$ esetén legyen

$$C_{m,n} := \{f \in \mathscr{C}(T; M) | (\forall (t, t') \in T \times T) : d(t, t') \leq \varepsilon_m \Rightarrow d_M(f(t), f(t')) \leq \varepsilon_n\}.$$

A (T, d) pár kompakt metrikus tér, ezért a Heine-tétel alapján minden $T \to M$ folytonos függvény egyenletesen folytonos a d és d_M metrikák szerint. Tehát minden $\mathbb{N} \ni n$-hez és $\mathscr{C}(T; M) \ni f$-hez van olyan $\delta \in \mathbb{R}^+$, hogy minden $(t, t') \in T \times T$ esetén, ha $d(t, t') < \delta$, akkor $d_M(f(t), f(t')) < \varepsilon_n$; ugyanakkor $\lim\limits_{m \to \infty} \varepsilon_m = 0$ miatt van olyan $m \in \mathbb{N}$, hogy $\varepsilon_m < \delta$, ezért $f \in C_{m,n}$. Ez azt jelenti, hogy minden $n \in \mathbb{N}$ esetén $\mathscr{C}(T; M) = \bigcup\limits_{m \in \mathbb{N}} C_{m,n}$. A T halmaz teljesen korlátos a d metrika szerint, ezért kiválasztható olyan $(T_m)_{m \in \mathbb{N}}$ halmazsorozat, hogy minden $\mathbb{N} \ni m$-re $T_m \subseteq T$ véges halmaz és $T = \bigcup\limits_{t \in T_m} B_{\varepsilon_m}(t; d)$. Legyen $D \subseteq M$ megszámlálható sűrű halmaz (a d_M metrika szerint). Minden $m, n \in \mathbb{N}$ esetén minden $\varphi : T_m \to D$ függvényre legyen

$$C_{m,n,\varphi} := \{ \ f \in C_{m,n} \mid (\forall \ t \in T_m) : \ d_M(f(t), \varphi(t)) \leq \varepsilon_n \ \}.$$

Ha $m, n \in \mathbb{N}$ és $f : T \to M$ tetszőleges függvény, akkor $\overline{D} = M$ miatt minden $t \in T_m$ pontra $D \cap \overline{B}_{\varepsilon_n}(f(t); d_M) \neq \emptyset$, tehát a T_m végessége folytán $\prod\limits_{t \in T_m} D \cap \overline{B}_{\varepsilon_n}(f(t); d_M) \ \neq \emptyset$, és ha φ eleme ennek a szorzathalmaznak, akkor $\varphi : T_m \to D$ olyan függvény, hogy minden $T_m \ni t$-re $d_M(f(t), \varphi(t)) \leq \varepsilon_n$. Ebből következik, hogy minden $\mathbb{N} \ni m, n$-re

$$C_{m,n} = \bigcup_{\varphi \in \mathscr{F}(T_m; D)} C_{m,n,\varphi}.$$

Értelmezzük most a

$$\Phi := \{ \ (m, n, \varphi) \mid (m \in \mathbb{N}) \wedge (n \in \mathbb{N}) \wedge (\varphi \in \mathscr{F}(T_m; D)) \wedge (C_{m,n,\varphi} \neq \emptyset) \ \} \subseteq$$
$$\subseteq \bigcup_{m \in \mathbb{N}} (\{m\} \times \mathbb{N} \times \mathscr{F}(T_m; D))$$

halmazt. Minden $\mathbb{N} \ni m$-re $\{m\} \times \mathbb{N} \times \mathscr{F}(T_m; D)$ megszámlálható halmaz, ezért Φ is megszámlálható. A kiválasztási axióma alkalmazásával vegyünk egy

$$f_{(m,n,\varphi)} \ {}_{(m,n,\varphi) \in \Phi} \in \prod_{(m,n,\varphi) \in \Phi} C_{m,n,\varphi}$$

elemet. Megmutatjuk, hogy az $\{f_{(m,n,\varphi)} | (m, n, \varphi) \in \Phi\}$ megszámlálható halmaz sűrű $\mathscr{C}(T; M)$-ben a d_M által meghatározott sup-metrika szerint. Legyen $f \in \mathscr{C}(T; M)$ rögzített, és $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ tetszőleges. Legyen $n \in \mathbb{N}$ olyan, hogy $\varepsilon_n \leq \varepsilon/4$. Láttuk, hogy

$$\mathscr{C}(T; M) = \bigcup_{m \in \mathbb{N}} C_{m,n} = \bigcup_{m \in \mathbb{N}} \quad \bigcup_{\varphi \in \mathscr{F}(T_m; D)} C_{m,n,\varphi} \quad ,$$

ezért vehetünk olyan $m \in \mathbb{N}$ számot és $\varphi \in \mathscr{F}(T_m; D)$ függvényt, hogy $f \in C_{m,n,\varphi}$. Ekkor $C_{m,n,\varphi} \neq \emptyset$, ezért $(m, n, \varphi) \in \Phi$. Állítjuk, hogy $\sup\limits_{t \in T} d_M(f(t), f_{(m,n,\varphi)}(t)) \leq \varepsilon$. Legyen ugyanis $t \in T$ tetszőleges; ekkor $T = \bigcup\limits_{s \in T_m} B_{\varepsilon_m}(s; d)$ miatt létezik olyan $s \in T_m$, hogy $t \in B_{\varepsilon_m}(s; d)$, vagyis $d(t, s) < \varepsilon_m$. A definíció szerint $C_{m,n,\varphi} \subseteq C_{m,n}$, ezért $f \in C_{m,n}$, így $d_M(f(t), f(s)) \leq \varepsilon_n$. Ugyanakkor a $C_{m,n,\varphi}$ halmaz definíciója, $f \in C_{m,n,\varphi}$ és $s \in T_m$ alapján $d_M(f(s), \varphi(s)) \leq \varepsilon_n$. Továbbá, $f_{(m,n,\varphi)} \in C_{m,n,\varphi}$, tehát $s \in T_m$ miatt $d_M\left(f_{(m,n,\varphi)}(s), \varphi(s)\right) \leq \varepsilon_n$, és $f_{(m,n,\varphi)} \in C_{m,n}$, valamint $d(t, s) < \varepsilon_m$ miatt $d_M\left(f_{(m,n,\varphi)}(t), f_{(m,n,\varphi)}(s)\right) \leq \varepsilon_n$. Ezekből az egyenlőtlenségekből következik, hogy

$$d_M(f(t), f_{(m,n,\varphi)}(t)) \leq d_M(f(t), f(s)) + d_M(f(s), \varphi(s)) +$$

$$+ d_M\left(\varphi(s), f_{(m,n,\varphi)}(s)\right) + d_M\left(f_{(m,n,\varphi)}(s), f_{(m,n,\varphi)}(t)\right) \leq 4\varepsilon_n \leq \varepsilon.$$

Ezért $\sup\limits_{t \in T} d_M(f(t), f_{(m,n,\varphi)}(t)) \leq \varepsilon$.

(ii)⇒(iii) Triviális, mert a $[0, 1]$ intervallum az euklidészi metrikával ellátva szeparábilis.

(iii)⇒(iv) Ha $H \subseteq \mathscr{C}(T; [0, 1])$ olyan halmaz, amely sűrű a sup-metrika szerint, akkor H szükségképpen szétválasztó T felett.

(iv)⇒(i) A (iv)-ből következik olyan $\mathscr{C}(T; [0, 1])$-ben haladó $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sorozat létezése, hogy az $\{f_n | n \in \mathbb{N}\}$ függvényhalmaz szétválasztó T felett. Ekkor a

$$\varphi : T \to [0, 1]^{\mathbb{N}}; \quad t \mapsto (f_n(t))_{n \in \mathbb{N}}$$

függvény injektív és folytonos a $[0, 1]^{\mathbb{N}}$ feletti szorzattopológia szerint, mert ha $n \in \mathbb{N}$ esetén $pr_n : [0, 1]^{\mathbb{N}} \to [0, 1]$; $f \mapsto f(n)$ az n-edik projekció-függvény, akkor $pr_n \circ \varphi = f_n : T \to [0, 1]$ folytonos függvény. Az $\mathrm{Im}(\varphi)$ topologikus altér Hausdorff-tér, és láttuk, hogy $\varphi : T \to \mathrm{Im}(\varphi)$ folytonos bijekció. Tehát a T kompaktsága miatt φ *homeomorfizmus* a T topologikus tér és az $\mathrm{Im}(\varphi)$ topologikus altér között. Ugyanakkor az $\mathrm{Im}(\varphi)$ topologikus altér metrizálható, mert a $[0, 1]^{\mathbb{N}}$ euklidészi kocka is az. Ezért T metrizálható topologikus tér. ■

V. rész

Függelék: Ortohálók

BEVEZETÉS

Ebben a függelékben azokat a hálóelméleti definíciókat és állításokat gyűjtöttük egybe, amelyek nélkülözhetetlenek a spektráltétel maradéktalan megértéséhez. Ilyen korlátozott terjedelemben a teljesség legcsekélyebb igényét sem támaszthatjuk; csak arra vállalkozunk, hogy bemutassunk néhány nemtriviális tényt az ortohálókkal kapcsolatban, valamint érintsünk néhány problémát a topologikus terek Borel- illetve Baire-halmazainak hálójával kapcsolatban.

29. fejezet

Ortohálók, ortoállapotok és ortoadditív függvények

29.1. Ortokomplementációk és ortokomplementált rendezett halmazok

29.1.1. Definíció. *Az L rendezett halmazt* **hálónak** *nevezzük, ha az L minden nem üres véges részhalmazának létezik szuprémuma és infimuma L-ben. Azt mondjuk, hogy az L halmaz feletti $\leq$ rendezés* **hálószerű***, ha L a $\leq$ rendezéssel ellátva háló.*

Ha L háló, akkor $e, f \in L$ esetén a hálóelméletben szokásos

$$e \vee f := \sup\{e, f\},$$

$$e \wedge f := \inf\{e, f\}$$

jelöléseket alkalmazzuk. Könnyen látható, hogy az

$$L \times L \to L; \quad (e, f) \mapsto e \vee f,$$

$$L \times L \to L; \quad (e, f) \mapsto e \wedge f$$

leképezések olyan műveletek L felett, amelyek *asszociatívak, kommutatívak, idempotensek* (vagyis $e \in L$ esetén $e \vee e = e = e \wedge e$) és *elnyelők* (vagyis minden $e, f \in L$ esetén $e \wedge (e \vee f) = e = e \vee (e \wedge f)$). Megfordítva, ha $\vee$ és $\wedge$ olyan kétváltozós műveletek az L halmaz felett, amelyek asszociatívak, kommutatívak, idempotensek, és elnyelők, akkor létezik L felett egyetlen olyan hálószerű rendezés, amelyre minden $e, f \in L$ esetén $e \vee f = \sup\{e, f\}$ és $e \wedge f = \inf\{e, f\}$.

A hálók algebrai elméletében lényeges a disztributivitás fogalma, valamint annak természetes gyengítései. Azt mondjuk, hogy az L háló *disztributív*, ha a $\vee$ művelet disztributív a $\wedge$ műveletre nézve, vagyis minden $e, f, g \in L$ esetén $e \vee (f \wedge g) = (e \vee f) \wedge (e \vee g)$. Könnyen belátható, hogy ez a feltétel ekvivalens azzal, hogy a $\wedge$ művelet disztributív a $\vee$ műveletre nézve, vagyis minden $e, f, g \in L$ esetén $e \wedge (f \vee g) = (e \wedge f) \vee (e \wedge g)$. Világos, hogy minden *lineárisan rendezett halmaz* disztributív háló.

A továbbiakban egy L rendezett halmazt *korlátosnak* nevezünk, ha létezik L-nek legnagyobb és legkisebb eleme. Korlátos rendezett halmaz legnagyobb (illetve legkisebb) elemét az $\mathbf{1}$ (illetve $\mathbf{0}$) szimbólummal jelöljük, ha ez a jelölés nem vezet félreértésre.

29.1.2. Definíció. *Ha L korlátos rendezett halmaz, akkor egy*

$$L \to L; \quad e \mapsto e^{\perp}$$

leképezést **ortokomplementációnak** *nevezünk L felett, ha teljesülnek a következők:*

$(\mathrm{ORT_I})$ *minden $e \in L$ esetén $(e^{\perp})^{\perp} = e$;*

$(\mathrm{ORT_{II}})$ *minden $e, f \in L$ esetén, ha $e \leq f$, akkor $f^{\perp} \leq e^{\perp}$;*

$(\mathrm{ORT_{III}})$ *minden $e \in L$ esetén* $\sup\{e, e^{\perp}\} = \mathbf{1}$.

Azt mondjuk, hogy L **ortokomplementált rendezett halmaz***, ha L korlátos rendezett halmaz, és adott egy L feletti ortokomplementáció. Azt mondjuk, hogy L* **ortoháló***, ha L olyan ortokomplementált rendezett halmaz, amelynek a rendezése hálószerű. A disztributív ortohálókat* **Boole-hálóknak** *nevezzük.*

29.1.3. Definíció. *Legyen L ortokomplementált rendezett halmaz. Az $(e, f) \in L \times L$ párt* **ortogonálisnak** *nevezzük, ha $e \leq f^{\perp}$, és ekkor azt írjuk, hogy $e \perp f$. Az L-ben haladó $(e_i)_{i \in I}$ rendszert ortogonálisnak nevezzük, ha minden $i, j \in I$, $i \neq j$ esetén $e_i \perp e_j$.*

29.1.4. Állítás. *Ha L ortokomplementált rendezett halmaz, akkor teljesülnek a következő állítások.*

a) $\mathbf{0}^{\perp} = \mathbf{1}$ *és* $\mathbf{1}^{\perp} = \mathbf{0}$.

b) *Minden $e \in L$ esetén* $\inf\{e, e^{\perp}\} = \mathbf{0}$.

c) *Minden L-ben haladó $(e_i)_{i \in I}$ rendszerre, ha $\sup\limits_{i \in I} e_i$ létezik L-ben, akkor $\inf\limits_{i \in I} e_i^{\perp}$ létezik L-ben, és*

$$\left(\sup_{i \in I} e_i\right)^{\perp} = \inf_{i \in I} e_i^{\perp}.$$

(de Morgan-egyenlőség).

d) *Minden L-ben haladó $(e_i)_{i \in I}$ rendszerre, ha $\inf\limits_{i \in I} e_i$ létezik L-ben, akkor $\sup\limits_{i \in I} e_i^{\perp}$ létezik L-ben, és*

$$\left(\inf_{i \in I} e_i\right)^{\perp} = \sup_{i \in I} e_i^{\perp}.$$

(de Morgan-egyenlőség).

Bizonyítás. a) Minden $e \in L$ esetén $\mathbf{0} \leq e^\perp$, ezért az (ORT$_\mathrm{I}$) és (ORT$_\mathrm{II}$) alapján $e = (e^\perp)^\perp \leq \mathbf{0}^\perp$, ami azt jelenti, hogy $\mathbf{0}^\perp$ az L rendezett halmaz legnagyobb eleme, vagyis $\mathbf{0}^\perp = \mathbf{1}$. Ebből az (ORT$_\mathrm{I}$) alkalmazásával nyerjük, hogy $\mathbf{1}^\perp = (\mathbf{0}^\perp)^\perp = \mathbf{0}$.

b) Ha $e, f \in L$, $f \leq e$ és $f \leq e^\perp$, akkor az (ORT$_\mathrm{I}$) és (ORT$_\mathrm{II}$) alapján $e^\perp \leq f^\perp$ és $e = (e^\perp)^\perp \leq f^\perp$, tehát $f^\perp$ felső korlátja az $\{e, e^\perp\}$ halmaznak, így az (ORT$_\mathrm{III}$) szerint $f^\perp = \mathbf{1}$. Ebből az (ORT$_\mathrm{I}$) és az a) alkalmazásával $f = (f^\perp)^\perp = \mathbf{1}^\perp = \mathbf{0}$ adódik.

c) Tegyük fel, hogy $(e_i)_{i\in I}$ olyan L-ben haladó rendszer, amelynek létezik a szuprémuma; legyen $e := \sup\limits_{i\in I} e_i$. Megmutatjuk, hogy $e^\perp$ az $(e_i^\perp)_{i\in I}$ rendszer infimuma L-ben, vagyis a legnagyobb alsó korlátja. Valóban, minden $i \in I$ esetén $e_i \leq e$, ezért az (ORT$_\mathrm{II}$) alapján $e^\perp \leq e_i^\perp$, tehát $e^\perp$ alsó korlátja az $(e_i^\perp)_{i\in I}$ rendszernek. Ha $f \in L$ alsó korlátja az $(e_i^\perp)_{i\in I}$ rendszernek, akkor minden $I \ni i$-re $f \leq e_i^\perp$, így az (ORT$_\mathrm{I}$) és (ORT$_\mathrm{II}$) alapján $e_i = (e_i^\perp)^\perp \leq f^\perp$, így $e \leq f^\perp$, hiszen e az $(e_i^\perp)_{i\in I}$ rendszer legkisebb felső korlátja; ezért ismét az (ORT$_\mathrm{I}$) és (ORT$_\mathrm{II}$) alkalmazásával kapjuk, hogy $f = (f^\perp)^\perp \leq e^\perp$. Tehát $e^\perp$ az $(e_i^\perp)_{i\in I}$ rendszer legnagyobb alsó korlátja L-ben.

d) Tegyük fel, hogy $(e_i)_{i\in I}$ olyan L-ben haladó rendszer, amelynek létezik a infimuma; legyen $e := \inf\limits_{i\in I} e_i$. Megmutatjuk, hogy $e^\perp$ az $(e_i^\perp)_{i\in I}$ rendszer szuprémuma L-ben, vagyis a legkisebb felső korlátja. Valóban, minden $i \in I$ esetén $e \leq e_i$, ezért az (ORT$_\mathrm{II}$) alapján $e_i^\perp \leq e^\perp$, tehát $e^\perp$ felső korlátja az $(e_i^\perp)_{i\in I}$ rendszernek. Ha $f \in L$ felső korlátja az $(e_i^\perp)_{i\in I}$ rendszernek, akkor minden $I \ni i$-re $e_i^\perp \leq f$, így az (ORT$_\mathrm{I}$) és (ORT$_\mathrm{II}$) alapján $f^\perp \leq (e_i^\perp)^\perp = e_i$, így $f^\perp \leq e$, hiszen e az $(e_i^\perp)_{i\in I}$ rendszer legnagyobb alsó korlátja; ezért ismét az (ORT$_\mathrm{I}$) és (ORT$_\mathrm{II}$) alkalmazásával kapjuk, hogy $e^\perp \leq (f^\perp)^\perp = f$. Tehát $e^\perp$ az $(e_i^\perp)_{i\in I}$ rendszer legkisebb felső korlátja L-ben. ■

29.1.5. Következmény. *Korlátos disztributív háló felett legfeljebb egy ortokomplementáció létezik.*

Bizonyítás. Legyen L korlátos disztributív háló. Az (ORT$_\mathrm{III}$) feltétel és az előző állítás b) pontja alapján elegendő azt igazolni, hogy minden $e \in L$ esetén legfeljebb egy olyan $e' \in L$ létezik, amelyre $e \wedge e' = \mathbf{0}$ és $e \vee e' = \mathbf{1}$. Valóban, legyen $e \in L$ rögzített elem, és $f, g \in L$ olyanok, hogy $e \vee f = e \vee g = \mathbf{1}$ és $e \wedge f = e \wedge g = \mathbf{0}$. Az L disztributivitása folytán

$$g = g \wedge (e \vee g) = g \wedge (e \vee f) = (g \wedge e) \vee (g \wedge f) = \mathbf{0} \vee (g \wedge f) = g \wedge f \leq f,$$

tehát $g \leq f$. Szintén az L disztributivitása miatt

$$f = f \wedge (e \vee f) = f \wedge (e \vee g) = (f \wedge e) \vee (f \wedge g) = \mathbf{0} \vee (f \wedge g) = f \wedge g \leq g,$$

tehát $f \leq g$. Ebből következik, hogy $f = g$. ■

Figyeljük meg, hogy az előző állítás bizonyításában megmutattuk, hogy ha L korlátos disztributív háló és $e, f, g \in L$ olyanok, hogy $e \vee f = e \vee g$ és $e \wedge f = e \wedge g = \mathbf{0}$, akkor $f = g$.

Könnyen látható, hogy ha L ortoháló és $(e, f) \in L \times L$ ortogonális pár, akkor $e \wedge f = \mathbf{0}$, de ha $e, f \in L$ olyanok, hogy $e \wedge f = \mathbf{0}$, akkor (e, f) nem szükségképpen ortogonális pár. Azonban Boole-háló esetében az $e \wedge f = \mathbf{0}$ és $e \perp f$ összefüggések ekvivalensek, mert ha $e \wedge f = \mathbf{0}$, akkor

$$e \leq f^{\perp} \vee e = (f^{\perp} \vee e) \wedge \mathbf{1} = (f^{\perp} \vee e) \wedge (f^{\perp} \vee f) = f^{\perp} \vee (e \wedge f) = f^{\perp} \vee \mathbf{0} = f^{\perp},$$

vagyis $e \leq f^{\perp}$.

29.2. Moduláris és ortomoduláris hálók

29.2.1. Definíció. *Ha L háló, akkor azt mondjuk, hogy $(e, f) \in L \times L$* **moduláris pár**, *ha minden $g \in L$, $g \leq f$ esetén $g \vee (e \wedge f) = (g \vee e) \wedge f$. Az L hálót* **modulárisnak** *nevezzük, ha minden L-beli elempár moduláris. Az L ortohálót* **ortomodulárisnak** *nevezzük, ha az L minden ortogonális elempárja moduláris pár.*

Nyilvánvaló, hogy minden disztributív háló moduláris, vagyis a modularitás a disztributivitás gyengítése. Valóban, ha L disztributív háló, és $e, f, g \in L$ olyanok, hogy $g \leq f$, akkor $g \vee (e \wedge f) = (g \vee e) \wedge (g \vee f) = (g \vee e) \wedge f$, hiszen $g \vee f = f$. Azonban létezik nem disztributív moduláris háló. Például, ha E legalább kétdimenziós és véges dimenziós vektortér a K test felett, akkor az E lineáris altereinek halmaza a $\subseteq$ relációval ellátva nem disztributív moduláris háló.

Világos, hogy minden moduláris ortoháló ortomoduláris, tehát az ortohálók körében az ortomodularitás a modularitás gyengítése. Azonban létezik nem moduláris ortomoduláris háló. Például, ha $\mathscr{H}$ végtelen dimenziós Hilbert-tér, akkor a $\mathscr{H}$ zárt lineáris altereinek halmaza a $\subseteq$ relációval és az altér-ortokomplementációval ellátva nem moduláris ortomoduláris háló. Vigyázzunk arra, hogy a modularitás fogalmát tetszőleges hálóra értelmezzük, de az ortomodularitás az ortokomplementációhoz kötött fogalom.

29.2.2. Állítás. (Az ortomodularitás jellemzése) *Ha L ortoháló, akkor a következő állítások ekvivalensek.*

(i) *L ortomoduláris.*

(ii) *Minden $e \in L$ esetén az $(e, e^{\perp})$ pár moduláris.*

(iii) *Minden $e, f \in L$ esetén, ha $e \leq f$, akkor $e \vee (e^{\perp} \wedge f) = f$.*

(iv) *Minden $e, f \in L$ esetén, ha $e \leq f$, akkor létezik olyan $g \in L$, amelyre $e \perp g$ és $e \vee g = f$.*

(v) *Minden $e, f, g \in L$ esetén, ha $e \leq f$, $e \perp g$ és $e \vee g = f$, akkor $g = e^{\perp} \wedge f$.*

(vi) *Minden $e, f \in L$ esetén, ha $e \perp f$ és $e \vee f = \mathbf{1}$, akkor $f = e^{\perp}$.*

Bizonyítás. (i)⇒(ii) Nyilvánvaló, mert az ($\mathrm{ORT_I}$) alapján minden $L \ni e$-re $e = (e^\perp)^\perp$, tehát az $(e, e^\perp)$ pár ortogonális.

(ii)⇒(iii) Legyenek $e, f \in L$ olyanok, hogy $e \leq f$. Az ($\mathrm{ORT_{II}}$) alapján $f^\perp \leq e^\perp$ és a (ii) szerint az $(e, e^\perp)$ pár moduláris, ezért $f^\perp = f^\perp \vee \mathbf{0} = f^\perp \vee (e \wedge e^\perp) = (f^\perp \vee e) \wedge e^\perp$. Ebből a de Morgan-egyenlőség és az ($\mathrm{ORT_I}$) alkalmazásával $f = (f^\perp)^\perp = ((f^\perp)^\perp \wedge e^\perp) \vee (e^\perp)^\perp = (f \wedge e^\perp) \vee e = e \vee (e^\perp \wedge f)$ következik.

(iii)⇒(iv) Ha $e, f \in L$ és $e \leq f$, akkor $g := e^\perp \wedge f$ a (iii) alapján olyan, hogy $e \vee g = f$ és $g \leq e^\perp$, vagyis $g \perp e$.

(iv)⇒(v) Legyenek $e, f, g \in L$ olyanok, hogy $e \leq f$, $e \perp g$ és $e \vee g = f$. Ekkor $e \leq g^\perp$, tehát az ($\mathrm{ORT_I}$) és ($\mathrm{ORT_{II}}$) alapján $g = (g^\perp)^\perp \leq e^\perp$. Továbbá $g \leq e \vee g = f$, tehát $g \leq e^\perp \wedge f$. Ezért a (iv) alapján van olyan $h \in L$, hogy $g \perp h$ és $g \vee h = e^\perp \wedge f$; megmutatjuk, hogy $h = \mathbf{0}$, amiből következik a bizonyítandó $g = e^\perp \wedge f$ egyenlőség. A h-ra vonatkozó feltételek alapján $h \leq g \vee h \leq e^\perp$ és $g \perp h$ miatt $h \perp g$, vagyis $h \leq g^\perp$. Ezért a de Morgan-egyenlőtlenség alkalmazásával $h \leq e^\perp \wedge g^\perp = (e \vee g)^\perp = f^\perp$. Ugyanakkor $h \leq g \vee h \leq f$, így $h \leq f \wedge f^\perp = \mathbf{0}$, vagyis $h = \mathbf{0}$.

(v)⇒(vi) A (vi) állítás az (v)-ből alkalmas szereposztással nyilvánvalóan következik.

(vi)⇒(i) Legyenek $e, f \in L$ és $g \in L$ olyanok, hogy $e \perp f$ és $g \leq f$. Azt kell igazolni, hogy ha (vi) teljesül, akkor $g \vee (e \wedge f) = (g \vee e) \wedge f$, ami $e \wedge f = \mathbf{0}$ miatt azzal egyenértékű, hogy $g = (g \vee e) \wedge f$. Az nyilvánvaló, hogy fennáll a $g \leq (g \vee e) \wedge f$ egyenlőtlenség, ami az ($\mathrm{ORT_I}$) miatt úgy is írható, hogy $g \perp ((g \vee e) \wedge f)^\perp$. Ha $g \vee ((g \vee e) \wedge f)^\perp = \mathbf{1}$ teljesülne, akkor a (vi)-ból és ($\mathrm{ORT_I}$)-ből következne, hogy $g = (((g \vee e) \wedge f)^\perp)^\perp = (g \vee e) \wedge f$, es éppen ezt kell igazolni. A $g \vee ((g \vee e) \wedge f)^\perp = \mathbf{1}$ egyenlőség bizonyításához háromszor alkalmazva a de Morgan-egyenlőtlenséget és kihasználva, hogy $e^\perp \geq f$ kapjuk, hogy

$$g \vee ((g \vee e) \wedge f)^\perp = g \vee ((g \vee e)^\perp \vee f^\perp) = g \vee ((g^\perp \wedge e^\perp) \vee f^\perp) = (g \vee f^\perp) \vee (g^\perp \wedge e^\perp) \geq$$

$$\geq (g \vee f^\perp) \vee (g^\perp \wedge f) = (g^\perp \wedge f)^\perp \vee (g^\perp \wedge f) = \mathbf{1},$$

tehát $g \vee ((g \vee e) \wedge f)^\perp = \mathbf{1}$. ■

Könnyen igazolható az ortomodularitás következő jellemzése: az L ortoháló pontosan akkor ortomoduláris, ha *nem léteznek* olyan $e, f \in L$ elemek, amelyekre $\mathbf{0} < e < f < \mathbf{1}$ és $e \wedge f^\perp = \mathbf{0}$.

29.2.3. Állítás. (Ortomoduláris háló monoton disztributivitása) *Legyen L ortomoduláris háló, $(f_i)_{i \in I}$ monoton növő általánosított sorozat L-ben, és $g \in L$ olyan elem, amelyhez létezik olyan $i \in I$, hogy $g \leq f_i$. Ekkor $\sup_{i \in I} f_i$ pontosan akkor létezik L-ben, ha $\sup_{i \in I}(f_i \wedge g^\perp)$ létezik L-ben. Továbbá, ha $\sup_{i \in I} f_i$ létezik L-ben, akkor*

$$\left(\sup_{i \in I} f_i\right) \wedge g^\perp = \sup_{i \in I}(f_i \wedge g^\perp).$$

Bizonyítás. (I) Tegyük fel, hogy $f := \sup\limits_{i\in I} f_i$ létezik L-ben. Minden $I \ni i$-re $f_i \leq f$, ezért $f_i \wedge g^{\perp} \leq f \wedge g^{\perp}$, vagyis $f \wedge g^{\perp}$ felső korlátja az $(f_i \wedge g^{\perp})_{i\in I}$ rendszernek. Legyen $h \in L$ tetszőleges felső korlátja a $(f_i \wedge g^{\perp})_{i\in I}$ rendszernek. Ekkor minden $i \in I$ esetén $f_i \wedge g^{\perp} \leq h \wedge g^{\perp}$. Rögzítsünk olyan $i_0 \in I$ indexet, amelyre minden $i \in I$ esetén, ha $i \geq i_0$, akkor $g \leq f_i$. Ha $i \in I$ és $i \geq i_0$, akkor az L ortomodularitása és $g \leq f_i$ miatt

$$f_i = g \vee (f_i \wedge g^{\perp}) \leq g \vee (h \wedge g^{\perp}),$$

következésképpen $f := \sup\limits_{i\in I} f_i = \sup\limits_{\substack{i\in I\\ i_0\leq i}} f_i \leq g \vee (h \wedge g^{\perp})$, hiszen az $(f_i)_{i\in I}$ általánosított sorozat monoton növő. Ugyanakkor $h \wedge g^{\perp} \leq g^{\perp}$, tehát $g \leq (h \wedge g^{\perp})^{\perp}$, így ismét az L ortomodularitása szerint $(h \wedge g^{\perp})^{\perp} = g \vee (g^{\perp} \wedge (h \wedge g^{\perp})^{\perp}) = g \vee (g^{\perp} \wedge (h^{\perp} \vee g))$. Ebből ortokomplementálással kapjuk, hogy $h \wedge g^{\perp} = g^{\perp} \wedge (g \vee (h \wedge g^{\perp}))$. Ezért $f \wedge g^{\perp} \leq g^{\perp} \wedge (g \vee (h \wedge g^{\perp})) = h \wedge g^{\perp} \leq h$, vagyis $f \wedge g^{\perp}$ a legkisebb felső korlátja az $(f_i \wedge g^{\perp})_{i\in I}$ rendszernek.

(II) Tegyük fel, hogy $f' := \sup\limits_{i\in I}(f_i \wedge g^{\perp})$ létezik. Ismét legyen $i_0 \in I$ olyan, hogy minden $I \ni i$-re, ha $i \geq i_0$, akkor $g \leq f_i$, tehát az L ortomodularitása miatt $f_i = g \vee (f_i \wedge g^{\perp}) \leq g \vee f'$. Ebből az I előrendezett halmaz felfelé irányítottsága és az $(f_i)_{i\in I}$ rendszer monoton növése alapján kapjuk, hogy minden $I \ni i$-re $f_i \leq g \vee f'$, vagyis $g \vee f'$ felső korlátja az $(f_i)_{i\in I}$ rendszernek. Tegyük fel, hogy $h \in L$ felső korlátja az $(f_i)_{i\in I}$ rendszernek. Ekkor $i \in I$ esetén $f_i \wedge g^{\perp} \leq h \wedge g^{\perp}$, tehát $f' \leq h \wedge g^{\perp} \leq h$. Ugyanakkor $g \leq f_{i_0} \leq h$, tehát $g \vee f' \leq h$, ami azt jelenti, hogy $g \vee f'$ az $(f_i)_{i\in I}$ rendszer legkisebb felső korlátja, vagyis létezik a $\sup\limits_{i\in I} f_i$ elem L-ben. ■

29.2.4. Definíció. *Az L ortohálót* **σ-additívnak** *nevezzük, ha minden L-ben haladó ortogonális sorozatnak létezik szuprémuma L-ben. Az L hálót* **σ-teljesnek** (*illetve* **teljesnek**) *nevezzük, ha minden L-ben haladó sorozatnak* (*illetve L-ben haladó rendszernek*) *létezik szuprémuma L-ben.*

Nyilvánvaló, hogy minden σ-teljes ortoháló σ-additív. A következő állítás szerint ennek megfordítása is igaz, ha L ortomoduláris, vagyis az ortomoduláris hálók körében a σ-teljesség és σ-additivitás ekvivalens tulajdonságok.

29.2.5. Állítás. *Ortomoduláris háló pontosan akkor σ-teljes, ha σ-additív.*

Bizonyítás. Legyen L σ-additív ortomoduláris háló, és $(e_k)_{k\in\mathbb{N}}$ tetszőleges L-ben haladó sorozat. Legyen $f_0 := e_0$, és minden $\mathbb{N}^{+} \ni n$-re

$$f_n := \sup_{0\leq k\leq n} e_k \quad \wedge \quad \sup_{0\leq k\leq n-1} e_k \quad {}^{\perp} .$$

Könnyen látható, hogy $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ortogonális sorozat L-ben, mert $m,n \in \mathbb{N}$ és $m < n$ esetén

$$f_m \leq \sup_{0\leq k\leq m} e_k \leq \sup_{0\leq k\leq n-1} e_k \leq \left(\sup_{0\leq k\leq n} e_k\right)^{\perp} \vee \sup_{0\leq k\leq n-1} e_k = f_n^{\perp}.$$

Teljes indukcióval igazoljuk, hogy minden $n \in \mathbb{N}$ esetén $\sup\limits_{0\leq k\leq n} e_k = \sup\limits_{0\leq k\leq n} f_k$. Ez $n = 0$ esetén igaz; tegyük fel, hogy $n \in \mathbb{N}^+$ és $\sup\limits_{0\leq k\leq n} e_k = \sup\limits_{0\leq k\leq n} f_k$. Ekkor

$$\sup_{0\leq k\leq n+1} f_k = \left(\sup_{0\leq k\leq n} e_k\right) \vee f_{n+1} =$$

$$= \left(\sup_{0\leq k\leq n} e_k\right) \vee \left(\left(\sup_{0\leq k\leq n+1} e_k\right) \wedge \left(\sup_{0\leq k\leq n} e_k\right)^{\perp}\right) = \sup_{0\leq k\leq n+1} e_k,$$

ahol az utolsó egyenlőségnél kihasználtuk az L ortomodularitását. Az L σ-additivitása folytán $\sup\limits_{k\in\mathbb{N}} f_k$ létezik L-ben, ezért az imént bizonyított egyenlőségből következik, hogy $\sup\limits_{k\in\mathbb{N}} e_k$ is létezik L-ben (és még $\sup\limits_{k\in\mathbb{N}} e_k = \sup\limits_{k\in\mathbb{N}} f_k$ is teljesül). ■

29.3. Ortoállapotok és ortoháló duálisa

29.3.1. Definíció. *Ha L ortoháló, akkor egy $p : L \to [0,1]$ függvényt L feletti* **ortoállapotnak** *nevezünk, ha $p(\mathbf{1}) = 1$ és minden $e,f \in L$ esetén, ha $e \perp f$, akkor $p(e \vee f) = p(e) + p(f)$. Az L ortoháló feletti ortoállapotok halmazát L^* jelöli, és ezt a halmazt az L ortoháló* **duálisának** *nevezzük.*

Nyilvánvaló, hogy ha L ortoháló, és $p \in L^*$, akkor $p(\mathbf{0}) = 0$, mert $(\mathbf{0},\mathbf{0})$ ortogonális pár L-ben, tehát $p(\mathbf{0}) = p(\mathbf{0} \vee \mathbf{0}) = p(\mathbf{0}) + p(\mathbf{0})$. Könnyen látható továbbá, hogy ha L ortoháló és $p \in L^*$, akkor minden L-ben haladó $(e_i)_{i\in I}$ *véges ortogonális* rendszerre

$$p\left(\sup_{i\in I} e_i\right) = \sum_{i\in I} p(e_i)$$

teljesül; ez az I indexhalmaz számossága szerinti teljes indukcióval igazolható.

29.3.2. Állítás. *Legyen L ortoháló és $p \in L^*$.*

a) *Ha $e \in L$, akkor $p(e^{\perp}) = 1 - p(e)$.*

b) *Ha $e,f \in L$ és $e \leq f$, akkor $p(e) \leq p(f)$, vagyis p monoton növő.*

c) *Ha L ortomoduláris, akkor $e,f \in L$ és $e \leq f$ esetén $p(f \wedge e^{\perp}) = p(f) - p(e)$, vagyis p szubtraktív.*

Bizonyítás. a) Ha $e \in L$, akkor $e \perp e^{\perp}$ és $e \vee e^{\perp} = \mathbf{1}$, ezért $1 = p(\mathbf{1}) = p(e \vee e^{\perp}) = p(e) + p(e^{\perp})$.

b) Ha $e, f \in L$ és $e \leq f$, akkor $e \perp f^{\perp}$, ezért az a) szerint $1 \geq p(e \vee f^{\perp}) = p(e) + p(f^{\perp}) = p(e) + 1 - p(f)$, amiből $p(f) \geq p(e)$ következik.

c) Ha L ortomoduláris, akkor $e, f \in L$ és $e \leq f$ esetén $e \vee (e^{\perp} \wedge f) = f$ és $e \perp e^{\perp} \wedge f$, tehát fennáll a $p(f) = p(e) + p(e^{\perp} \wedge f)$ egyenlőség. ■

A következő állítás szerint az ortomodularitás *szükséges* ahhoz, hogy egy ortoháló felett "elég sok" ortoállapot létezzen.

29.3.3. Állítás. *Ha L olyan ortoháló, hogy L^* szétválasztja az L pontjait, vagyis minden $e, f \in L$, $e \neq f$ esetén van olyan $p \in L^*$, hogy $p(e) \neq p(f)$, akkor L ortomoduláris.*

Bizonyítás. Tegyük fel, hogy L *nem* ortomoduláris. Az ortomodularitás jellemzési tétele alapján ekkor léteznek olyan $e, f \in L$, hogy $e \perp f$ és $e \vee f = \mathbf{1}$, de $f \neq e^{\perp}$. Ha $p \in L^*$, akkor $1 = p(\mathbf{1}) = p(e \vee f) = p(e) + p(f)$, tehát $p(f^{\perp}) = 1 - p(f) = p(e)$, így az L^* halmaz az e és $f^{\perp}$ különböző elmeket nem választja szét, tehát L^* *nem* szétválasztó L felett. ■

Azonban van olyan véges alaphalmazú ortomoduláris háló, amely felett egyáltalán nem létezik ortoállapot ([1]), vagyis az ortomodularitás imént igazolt elégséges feltétele nem szükséges.

29.3.4. Állítás. *Ha L ortoháló, akkor L^* olyan kompakt konvex halmaz a pontonkénti konvergencia topológiájával ellátott $\mathscr{F}(L;\mathbb{R})$ függvénytérben, hogy minden $e \in L$ esetén az $L^* \to \mathbb{R}$; $p \mapsto p(e)$ leképezés folytonos.*

Bizonyítás. A definíció szerint $L^* \subseteq [0,1]^L$, és a Tyihonov-tétel (27.3.2.) alapján a $[0,1]^L$ halmaz kompakt a szorzattopológia szerint (természetesen a $[0,1]$ intervallumon az $\mathbb{R}$ euklidészi topológiájának leszűkítését véve). Az $\mathscr{F}(L;\mathbb{R})$ függvénytér feletti pontonkénti konvergencia topológiája megegyezik az $\mathbb{R}^L$ szorzattopológiájával, és könnyen látható, hogy ennek a topológiának $[0,1]^L$-re vett leszűkítése egyenlő a $[0,1]^L$ feletti szorzattopológiával. Ez azt jelenti, hogy a $[0,1]^L$ halmaz kompakt a pontonkénti konvergencia topológiájával ellátott $\mathscr{F}(L;\mathbb{R})$ függvénytérben, tehát L^* pontosan akkor kompakt, ha *zárt* a pontonkénti konvergencia topológiája szerint. Ez viszont az L^* értelmezése alapján triviális. ■

Legyen L ortoháló és $(e_k)_{k\in\mathbb{N}}$ olyan ortogonális sorozat L-ben, amelyre $\sup\limits_{k\in\mathbb{N}} e_k$ létezik L-ben. Ekkor minden $p \in L^*$ esetén a $\sum\limits_{k\in\mathbb{N}} p(e_k)$ valós sor konvergens $\mathbb{R}$-ben és

$$\sum_{k=0}^{\infty} p(e_k) \leq p \quad \sup_{k\in\mathbb{N}} e_k \quad ,$$

hiszen minden $\mathbb{N}^+ \ni n$-re a p ortoadditivitása és monotonitása folytán

$$\sum_{k\in n} p(e_k) = p\left(\sup_{k\in n} e_k\right) \leq p\left(\sup_{k\in\mathbb{N}} e_k\right).$$

Azonban létezhet olyan $p \in L^*$, amelyhez van olyan $(e_k)_{k\in\mathbb{N}}$ ortogonális sorozat L-ben, hogy $\sup\limits_{k\in\mathbb{N}} e_k$ létezik L-ben, de

$$\sum_{k=0}^{\infty} p(e_k) < p\left(\sup_{k\in\mathbb{N}} e_k\right).$$

Ilyen ortohálókra két fontos példát mutatunk a következőkben. Tehát kifejezetten tartalmas definíció a következő.

29.3.5. Definíció. *Ha L ortoháló, akkor egy $p \in L^*$ ortoállapotot* σ**-additívnak** *nevezünk, ha minden L-ben haladó $(e_k)_{k\in\mathbb{N}}$ ortogonális sorozatra, ha $\sup\limits_{k\in\mathbb{N}} e_k$ létezik L-ben, akkor*

$$\sum_{k=0}^{\infty} p(e_k) = p\left(\sup_{k\in\mathbb{N}} e_k\right).$$

Az L ortoháló feletti σ-additív ortoállapotok halmazát $L^{\#}$ jelöli.

29.3.6. Állítás. *(Ortoállapot σ-additivitásának jellemzése.) Legyen L ortomoduláris háló és $p \in L^*$. A következő állítások ekvivalensek.*

(i) *Minden L-ben haladó $(e_k)_{k\in\mathbb{N}}$ monoton növő sorozatra, ha $\sup\limits_{k\in\mathbb{N}} e_k$ létezik L-ben, akkor*

$$p\left(\sup_{k\in\mathbb{N}} e_k\right) = \sup_{k\in\mathbb{N}} p(e_k).$$

(ii) *Minden L-ben haladó $(e_k)_{k\in\mathbb{N}}$ monoton fogyó sorozatra, ha $\inf\limits_{k\in\mathbb{N}} e_k$ létezik L-ben, akkor*

$$p\left(\inf_{k\in\mathbb{N}} e_k\right) = \inf_{k\in\mathbb{N}} p(e_k).$$

(iii) *Minden L-ben haladó $(e_k)_{k\in\mathbb{N}}$ monoton fogyó sorozatra, ha $\inf\limits_{k\in\mathbb{N}} e_k = \mathbf{0}$, akkor*

$$\inf_{k\in\mathbb{N}} p(e_k) = 0.$$

(iv) *Minden L-ben haladó $(e_k)_{k\in\mathbb{N}}$ ortogonális sorozatra, ha $\sup\limits_{k\in\mathbb{N}} e_k$ létezik L-ben, akkor*

$$\sum_{k=0}^{\infty} p(e_k) = p\left(\sup_{k\in\mathbb{N}} e_k\right)$$

(vagyis a p ortoállapot σ-additív).

Bizonyítás. (i)⇒(ii) Legyen $(e_k)_{k\in\mathbb{N}}$ olyan monoton fogyó L-ben haladó sorozat, amelyre $\inf_{k\in\mathbb{N}} e_k$ létezik L-ben. Ekkor a de Morgan-tétel szerint az $(e_k^\perp)_{k\in\mathbb{N}}$ sorozat monoton növő L-ben, és $\sup_{k\in\mathbb{N}} e_k^\perp$ létezik L-ben, valamint $\sup_{k\in\mathbb{N}} e_k^\perp = (\inf_{k\in\mathbb{N}} e_k)^\perp$. Ebből a p ortoadditivitása és az (i) alapján következik, hogy

$$1 - p\left(\inf_{k\in\mathbb{N}} e_k\right) = p\left(\left(\inf_{k\in\mathbb{N}} e_k\right)^\perp\right) = p\left(\sup_{k\in\mathbb{N}} e_k^\perp\right) = \sup_{k\in\mathbb{N}} p(e_k^\perp) =$$

$$= \sup_{k\in\mathbb{N}}(1 - p(e_k)) = 1 - \inf_{k\in\mathbb{N}} p(e_k),$$

tehát $p\left(\inf_{k\in\mathbb{N}} e_k\right) = \inf_{k\in\mathbb{N}} p(e_k)$.

(ii)⇒(iii) Nyilvánvaló, mert $p(\mathbf{0}) = 0$.

(iii)⇒(iv) Legyen $(e_k)_{k\in\mathbb{N}}$ olyan ortogonális sorozat L-ben, amelyre $e := \sup_{k\in\mathbb{N}} e_k$ létezik, továbbá minden $n \in \mathbb{N}$ esetén legyen $f_n := \sup_{0\le k\le n} e_k$. Ekkor $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ olyan monoton növő sorozat L-ben, amelyre $\sup_{n\in\mathbb{N}} f_n = \sup_{k\in\mathbb{N}} e_k$. Minden $\mathbb{N} \ni n$-re $f_n \le e$, ezért az L ortomodularitása miatt $f_n \vee (f_n^\perp \wedge e) = e$ és persze $f_n \perp f_n^\perp \wedge e$, tehát a p ortoadditivitása folytán

$$\sum_{k=0}^{n} p(e_k) + p(f_n^\perp \wedge e) = p(f_n) + p(f_n^\perp \wedge e) = p(e) = p\left(\sup_{k\in\mathbb{N}} e_k\right).$$

Ebből látható, hogy a bizonyítandó

$$\sum_{k=0}^{\infty} p(e_k) = p\left(\sup_{k\in\mathbb{N}} e_k\right)$$

egyenlőség ekvivalens azzal, hogy $\lim_{n\to\infty} p(f_n^\perp \wedge e) = 0$. Ugyanakkor az $(f_n^\perp \wedge e)_{n\in\mathbb{N}}$ sorozat monoton fogyó L-ben, tehát a $(p(f_n^\perp \wedge e))_{n\in\mathbb{N}}$ valós számsorozat is monoton fogyó, így azt kell igazolni, hogy $\inf_{n\in\mathbb{N}} p(f_n^\perp \wedge e) = 0$. A (iii) alapján ehhez elegendő azt megmutatni, hogy $\inf_{n\in\mathbb{N}}(f_n^\perp \wedge e) = \mathbf{0}$. Ez viszont így van, mert ha $g \in L$ alsó korlátja az $(f_n^\perp \wedge e)_{n\in\mathbb{N}}$ sorozatnak, akkor minden $n \in \mathbb{N}$ esetén $g \le f_n^\perp$, tehát $f_n \le g^\perp$, így $e := \sup_{k\in\mathbb{N}} e_k = \sup_{n\in\mathbb{N}} f_n \le g^\perp$, vagyis $g \le e^\perp$, ugyanakkor $g \le e$, következésképpen $g \le e \wedge e^\perp = \mathbf{0}$, azaz $g = \mathbf{0}$.

(iv)⇒(i) Legyen $(e_k)_{k\in\mathbb{N}}$ monoton növő sorozat L-ben, és tegyük fel, hogy $\sup_{k\in\mathbb{N}} e_k$ létezik. Legyen $f_0 := e_0$ és minden $n \in \mathbb{N}^+$ esetén $f_n := e_n \wedge e_{n-1}^\perp$. Az $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sorozat ortogonális, mert $m, n \in \mathbb{N}$ és $m < n$ esetén az $(e_k)_{k\in\mathbb{N}}$ sorozat monoton növése miatt

$$f_n^\perp = (e_n \wedge e_{n-1}^\perp)^\perp = e_n^\perp \vee e_{n-1} \ge e_{n-1} \ge e_m \ge f_m,$$

azaz $f_m \perp f_n$. Teljes indukcióval könnyen igazolható, hogy minden $n \in \mathbb{N}$ esetén $\sup\limits_{0 \leq k \leq n} f_k = e_n$, hiszen ez igaz, ha $n = 0$, továbbá, ha az $n \in \mathbb{N}$ számra igaz, akkor $e_n \leq e_{n+1}$ és az L ortomodularitása miatt

$$e_{n+1} = e_n \vee (e_n^{\perp} \wedge e_{n+1}) = \quad \sup_{0 \leq k \leq n} f_k \quad \vee f_{n+1} = \sup_{0 \leq k \leq n+1} f_k.$$

Ezért $\sup\limits_{n \in \mathbb{N}} f_n$ létezik L-ben és $\sup\limits_{n \in \mathbb{N}} f_n = \sup\limits_{k \in \mathbb{N}} e_k$. Az L ortomodularitása miatt p szubtraktív, így minden $k \in \mathbb{N}^+$ esetén $p(f_k) = p(e_k) - p(e_{k-1})$, ezért minden $\mathbb{N}^+ \ni n$-re

$$\sum_{k=0}^{n} p(f_k) = p(f_0) + \sum_{k=1}^{n} p(f_k) = p(e_0) + \sum_{k=1}^{n} (p(e_k) - p(e_{k-1})) = p(e_n).$$

A (iv) feltételből következik, hogy

$$p \quad \sup_{k \in \mathbb{N}} e_k \quad = p \quad \sup_{k \in \mathbb{N}} f_k \quad = \sum_{k=0}^{\infty} p(f_k) =$$

$$= \sup_{n \in \mathbb{N}^+} \left(\sum_{k=0}^{n} p(f_k) \right) = \sup_{n \in \mathbb{N}^+} p(e_n) = \sup_{n \in \mathbb{N}} p(e_n),$$

amit bizonyítani kellett. ■

29.3.7. Állítás. *Legyen L olyan ortomoduláris háló, amelyre teljesülnek a következő állítások.*

a) *Minden $e \in L \setminus \{\mathbf{0}\}$ esetén $\sup\limits_{p \in L^{\#}} p(e) = 1$.*

b) *Létezik olyan $(e_n)_{n \in \mathbb{N}}$ monoton fogyó sorozat L-ben, amelyre $\inf\limits_{n \in \mathbb{N}} e_n = \mathbf{0}$, és minden $\mathbb{N} \ni n$-re $e_n \neq \mathbf{0}$.*

Ekkor az $L^* \setminus L^{\#}$ halmaz nem üres, vagyis létezik L felett nem σ-additív ortoállapot.

Bizonyítás. Megmutatjuk, hogy *nem létezik* olyan $L^{\#}$ feletti kompakt topológia, amely szerint minden $L \ni e$-re az $L^{\#} \to \mathbb{R};\ p \mapsto p(e)$ leképezés folytonos. Tegyük fel, hogy az állítással ellentétben $\mathscr{T}$ ilyen tulajdonságú $L^{\#}$ feletti kompakt topológia. A b) alapján vegyünk olyan $(e_n)_{n \in \mathbb{N}}$ monoton fogyó sorozatot L-ben, amelyre $\inf\limits_{n \in \mathbb{N}} e_n = \mathbf{0}$, és minden $\mathbb{N} \ni n$-re $e_n \neq \mathbf{0}$. Minden $\mathbb{N} \ni n$-re értelmezzük az $e_n^{\#} : L^{\#} \to \mathbb{R};\ p \mapsto p(e_n)$ függvényt. Az indirekt hipotézis szerint minden $n \in \mathbb{N}$ esetén $e_n^{\#}$ folytonos a $\mathscr{T}$ topológia szerint. Ugyanakkor az $\ e_n^{\#} \ _{n \in \mathbb{N}}$ függvénysorozat monoton fogyó, és az ortoállapotok σ-additivitásának jellemzési tétele alapján ez a függvénysorozat az $L^{\#}$ halmazon pontonként konvergál az $L^{\#} \to \mathbb{R}$ azonosan 0 függvényhez, hiszen $p \in L^{\#}$ esetén a p ortoállapot σ-additivitása miatt $\inf\limits_{n \in \mathbb{N}} e_n^{\#}(p) = \inf\limits_{n \in \mathbb{N}} p(e_n) = 0$. A Dini-tételből

(28.4.5.) következik, hogy az $\left(e_n^{\#}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ függvénysorozat *egyenletesen konvergál* az $L^{\#}$ halmazon az $L^{\#} \to \mathbb{R}$ azonosan 0 függvényhez, tehát

$$\lim_{n\to\infty}\left(\sup_{p\in L^{\#}} p(e_n)\right) = \lim_{n\to\infty}\left(\sup_{p\in L^{\#}} e_n^{\#}(p)\right) = \lim_{n\to\infty} |||e_n^{\#}|||_{L^{\#}} = 0.$$

Azonban az a) feltétel alapján minden $n \in \mathbb{N}$ esetén $|||e_n^{\#}|||_{L^{\#}} = \sup\limits_{p\in L^{\#}} p(e_n) = 1$, ami ellentmondás.

Tehát nem létezik olyan $L^{\#}$ feletti kompakt topológia, amely szerint minden $L \ni e$-re az $L^{\#} \to \mathbb{R};\ p \mapsto p(e)$ leképezés folytonos. Ugyanakkor L^* felett a pontonkénti konvergencia topológiája olyan kompakt topológia, amely szerint minden $L \ni e$-re az $L^* \to \mathbb{R};\ p \mapsto p(e)$ leképezés folytonos. Ebből azonnal következik, hogy $L^{\#} \neq L^*$, tehát az $L^* \setminus L^{\#}$ halmaz nem üres. ■

Ha $\mathscr{H}$ *végtelen dimenziós* Hilbert-tér, akkor az $L := \mathbf{P}(\mathscr{L}(\mathscr{H}))$ projektorhálóra teljesülnek az előző állítás a) és b) feltételei. Ha T nem kompakt, de σ-kompakt Hausdorff-tér, akkor az $L := \mathscr{B}(T)$ Borel-féle σ-algebrára szintén teljesülnek az előző állítás a) és b) feltételei.

29.4. Ortoadditív függvények

29.4.1. Definíció. *Legyen $\mathscr{R}$ halmazgyűrű és L ortokomplementált rendezett halmaz. Egy $u : \mathscr{R} \to L$ függvényt* **ortoadditívnak** *nevezünk, ha minden $E, F \in \mathscr{R}$ esetén, ha $E \cap F = \emptyset$, akkor $u(E) \perp u(F)$ és $u(E \cup F) = u(E) \vee u(F)$. Azt mondjuk, hogy az $u : \mathscr{R} \to L$ függvény* **σ-ortoadditív**, *ha minden $\mathscr{R}$-ben haladó $(E_k)_{k\in\mathbb{N}}$ diszjunkt sorozatra, $\bigcup\limits_{k\in\mathbb{N}} E_k \in \mathscr{R}$ esetén az $(u(E_k))_{k\in\mathbb{N}}$ rendszer ortogonális L-ben, és $u\left(\bigcup\limits_{k\in\mathbb{N}} E_k\right) = \sup\limits_{k\in\mathbb{N}} u(E_k)$.*

Legyen $\mathscr{R}$ halmazgyűrű, L ortokomplementált rendezett halmaz, és $u : \mathscr{R} \to L$ ortoadditív függvény. Ekkor $u(\emptyset) = \mathbf{0}$, mert a feltevés alapján $u(\emptyset) \perp u(\emptyset)$, hiszen $\emptyset \in \mathscr{R}$ és $\emptyset \cap \emptyset = \emptyset$. De ha $T \in \mathscr{R}$, akkor $u(T) \neq \mathbf{1}$ lehetséges; például a $\mathscr{R} \to L$ azonosan $\mathbf{0}$ függvény nyilvánvalóan σ-ortoadditív.

A 24.1. pontban értelmeztük a halmazgyűrűn értelmezett, egységelemes *-algebrába ható, projektor-értékű ortoadditív (illetve σ-ortoadditív) függvények fogalmát. Azt a definíciót összevetve a fentivel látható, hogy ha $\mathscr{R}$ halmazgyűrű és A egységelemes *-algebra, akkor $\mathbf{P}(A)$ a természetes rendezéssel és ortokomplementációval ellátva ortokomplementált rendezett halmaz, és az $\mathscr{R} \to A$ projektor-értékű ortoadditív (illetve σ-ortoadditív) függvények halmaza megegyezik az itt értelmezett $\mathscr{R} \to \mathbf{P}(A)$ ortoadditív (illetve σ-ortoadditív) függvények halmazával.

29.4.2. Állítás. *Legyen $\mathscr{R}$ halmazgyűrű, L ortoháló, és $u : \mathscr{R} \to L$ ortoadditív függvény.*

a) *Ha $E, F \in \mathscr{R}$ és $E \subseteq F$, akkor $u(E) \leq u(F)$, tehát u monoton növő.*

b) *Ha $(E_i)_{i \in I}$ véges (nem feltétlenül diszjunkt) rendszer $\mathscr{R}$-ben, akkor*

$$u\left(\bigcup_{i \in I} E_i\right) = \sup_{i \in I} u(E_i).$$

c) *Ha L ortomoduláris, akkor $E, F \in \mathscr{R}$ és $E \subseteq F$ esetén $u(F \setminus E) = u(F) \wedge u(E)^{\perp}$, tehát u szubtraktív.*

Bizonyítás. a) Ha $E, F \in \mathscr{R}$ és $E \subseteq F$, akkor $F \setminus E \in \mathscr{R}$, $E \cap (F \setminus E) = \emptyset$ és $E \cup (F \setminus E) = F$, tehát az u ortoadditivitása miatt $u(E) \leq u(E) \vee u(F \setminus E) = u(F)$.

b) Az ortoadditivitás definíciójából látható, hogy ha $(E_i)_{i \in I}$ véges *diszjunkt* rendszer $\mathscr{R}$-ben, akkor $u\left(\bigcup_{i \in I} E_i\right) = \sup_{i \in I} u(E_i)$; ez az I halmaz számossága szerinti teljes indukcióval könnyen igazolható.

Legyenek $E, F \in \mathscr{R}$ tetszőleges halmazok. Ekkor $E \setminus F$, $F \setminus E$ és $E \cap F$ olyan páronként diszjunkt halmazok $\mathscr{R}$-ben, amelyekre

$$E = (E \setminus F) \cup (E \cap F), \quad F = (F \setminus E) \cup (E \cap F), \quad E \cup F = (E \setminus F) \cup (F \setminus E) \cup (E \cap F),$$

ezért

$$\begin{aligned} u(E) \vee u(F) &= (u(E \setminus F) \vee u(E \cap F)) \vee (u(F \setminus E) \vee u(E \cap F)) = \\ &= u(E \setminus F) \vee u(F \setminus E) \vee u(E \cap F) = u(E \cup F). \end{aligned}$$

Ebből kapjuk, hogy ha $(E_i)_{i \in I}$ véges (nem feltétlenül diszjunkt rendszer) $\mathscr{R}$-ben, akkor $u\left(\bigcup_{i \in I} E_i\right) = \sup_{i \in I} u(E_i)$; ez az I halmaz számossága szerinti teljes indukcióval könnyen igazolható.

c) Ha $E, F \in \mathscr{R}$ és $E \subseteq F$, akkor az a) iménti bizonyítása szerint $u(E) \vee u(F \setminus E) = u(F)$ és $u(E) \perp u(F \setminus E)$, ezért ha L ortomoduláris, akkor $u(F \setminus E) = u(F) \wedge u(E)^{\perp}$. ■

29.4.3. Állítás. *Legyen $\mathscr{R}$ halmazgyűrű, L ortoháló, és $u : \mathscr{R} \to L$ σ-ortoadditív függvény. Ekkor minden $\mathscr{R}$-ben haladó (nem feltétlenül diszjunkt) $(E_k)_{k \in \mathbb{N}}$ sorozatra, ha $\bigcup_{k \in \mathbb{N}} E_k \in \mathscr{R}$, akkor $\sup_{k \in \mathbb{N}} u(E_k)$ létezik L-ben, és $u\left(\bigcup_{k \in \mathbb{N}} E_k\right) = \sup_{k \in \mathbb{N}} u(E_k)$.*

Bizonyítás. Legyen $(E_k)_{k \in \mathbb{N}}$ tetszőleges olyan sorozat $\mathscr{R}$-ben, amelyre $\bigcup_{k \in \mathbb{N}} E_k \in \mathscr{R}$. Legyen $F_0 := E_0$ és minden $n \in \mathbb{N}^+$ esetén

$$F_n := E_n \setminus \left(\bigcup_{k=0}^{n-1} E_k\right).$$

Nyilvánvaló, hogy $(F_k)_{k\in\mathbb{N}}$ olyan diszjunkt sorozat $\mathscr{R}$-ben, hogy $\bigcup\limits_{k\in\mathbb{N}} F_k = \bigcup\limits_{k\in\mathbb{N}} E_k \in \mathscr{R}$, ezért az u függvény σ-ortoadditivitása miatt létezik az $e := \sup\limits_{k\in\mathbb{N}} u(F_k)$ elem L-ben és

$$e := u\left(\bigcup_{k\in\mathbb{N}} F_k\right) = u\left(\bigcup_{k\in\mathbb{N}} E_k\right).$$

Minden $k \in \mathbb{N}$ esetén $F_k \subseteq E_k$, ezért $u(F_k) \leq u(E_k)$. Ebből következik, hogy ha $f \in L$ az $(u(E_k))_{k\in\mathbb{N}}$ sorozatnak felső korlátja L-ben, akkor f az $(u(F_k))_{k\in\mathbb{N}}$ sorozatnak is felső korlátja, így $e \leq f$. Ugyanakkor, teljes indukcióval könnyen belátható, hogy az $e \in L$ elem az $(u(E_k))_{k\in\mathbb{N}}$ sorozatnak felső korlátja L-ben, mert $u(E_0) = u(F_0) \leq e$, és ha $n \in \mathbb{N}^+$ olyan, hogy minden $k < n$ természetes számra $u(E_k) \leq e$, akkor $E_n = F_n \cup \left(\bigcup\limits_{k=0}^{n-1} (E_k \cap E_n)\right)$ miatt

$$u(E_n) = u(F_n) \vee \sup_{0\leq k\leq n-1} u(E_k \cap E_n) \leq u(F_n) \vee \sup_{0\leq k\leq n-1} u(E_k) \leq e,$$

ahol felhasználtuk, hogy u monoton növő, és minden $\mathscr{R}$-ben haladó $(H_i)_{i\in I}$ véges rendszerre $u\left(\bigcup\limits_{i\in I} H_i\right) = \sup\limits_{i\in I} u(H_i)$. Tehát az $e \in L$ elem a legkisebb felső korlátja L-ben az $(u(E_k))_{k\in\mathbb{N}}$ sorozatnak, így $\sup\limits_{k\in\mathbb{N}} u(E_k)$ létezik L-ben és $u\left(\bigcup\limits_{k\in\mathbb{N}} E_k\right) = e = \sup\limits_{k\in\mathbb{N}} u(E_k)$. ■

29.4.4. Következmény. *Legyen $\mathscr{R}$ olyan halmazgyűrű a T halmaz felett, amelyre $T \in \mathscr{R}$. Legyen L ortomoduláris háló, és $u : \mathscr{R} \to L$ olyan ortoadditív függvény, amelyre $u(T) = \mathbf{1}$.*

a) *Minden $E \in \mathscr{R}$ esetén $u(T \setminus E) = u(E)^\perp$.*

b) *Ha u σ-ortoadditív, akkor minden $\mathscr{R}$-ben haladó $(E_k)_{k\in\mathbb{N}}$ sorozatra, $\bigcap\limits_{k\in\mathbb{N}} E_k \in \mathscr{R}$ esetén $\inf\limits_{k\in\mathbb{N}} u(E_k)$ létezik L-ben, és $u\left(\bigcap\limits_{k\in\mathbb{N}} E_k\right) = \inf\limits_{k\in\mathbb{N}} u(E_k)$.*

Bizonyítás. a) Az L ortomodularitása és $u(T) = \mathbf{1}$ miatt minden $E \in \mathscr{R}$ esetén $u(T \setminus E) = u(T) \wedge u(E)^\perp = u(E)^\perp$, ahol kihasználtuk az u szubtraktivitását.

b) Ha $(E_k)_{k\in\mathbb{N}}$ olyan sorozat $\mathscr{R}$-ben, hogy $\bigcap\limits_{k\in\mathbb{N}} E_k \in \mathscr{R}$, akkor a feltevés alapján $(T \setminus E_k)_{k\in\mathbb{N}}$ olyan $\mathscr{R}$-ben haladó sorozat, hogy $\bigcup\limits_{k\in\mathbb{N}} (T \setminus E_k) = T \setminus \left(\bigcap\limits_{k\in\mathbb{N}} E_k\right) \in \mathscr{R}$, tehát, ha az u függvény σ-ortoadditív, akkor az előző állításból kapjuk, hogy $\sup\limits_{k\in\mathbb{N}} u(T \setminus E_k)$ létezik L-ben és $\sup\limits_{k\in\mathbb{N}} u(T \setminus E_k) = u\left(\bigcup\limits_{k\in\mathbb{N}} (T \setminus E_k)\right)$. Az a) alapján minden $\mathbb{N} \ni k$-ra $u(T \setminus E_k) = u(E_k)^\perp$, tehát a de Morgan-egyenlőségből kapjuk, hogy $\inf\limits_{k\in\mathbb{N}} u(E_k)$ létezik L-ben és $\left(\inf\limits_{k\in\mathbb{N}} u(E_k)\right)^\perp = \sup\limits_{k\in\mathbb{N}} u(E_k)^\perp = u\left(T \setminus \left(\bigcap\limits_{k\in\mathbb{N}} E_k\right)\right) = u\left(\bigcap\limits_{k\in\mathbb{N}} E_k\right)^\perp$. ■

30. fejezet

σ-gyűrűk és σ-algebrák

30.1. Baire-halmazok és Borel-halmazok

A σ-teljes Boole-hálók legfontosabb speciális esetei a σ-algebrák. Ezek közül is a legnevezetesebbek a topologikus terek Borel-féle σ-algebrái. A spektrálelméletben gyakran előfordulnak még a Hausdorff-terek Baire-féle σ-gyűrűi. Ebben a pontban ezeket az objektumokat vizsgáljuk meg közelebbről.

Korábban láttuk, hogy *metrizálható* topologikus tér minden zárt részhalmaza G_δ-halmaz és minden nyílt részhalmaza F_σ-halmaz (27.4.). Ha T Hausdorff-tér, akkor T-ben minden kompakt halmaz zárt, következésképpen a T minden σ-kompakt részhalmaza F_σ halmaz.

Emlékeztetünk arra, hogy egy $\mathscr{R}$ halmazgyűrűt σ-gyűrűnek nevezünk, ha $\mathscr{R}$ a megszámlálható unió-képzésre nézve zárt, vagyis minden $\mathscr{R}$-ben haladó $(E_i)_{i\in I}$ megszámlálható rendszerre $\bigcup_{i\in I} E_i \in \mathscr{R}$. Könnyen látható, hogy ha $\mathscr{R}$ σ-gyűrű, akkor minden $\mathscr{R}$-ben haladó $(E_i)_{i\in I}$ megszámlálható rendszerre, $I \neq \emptyset$ esetén $\bigcap_{i\in I} E_i \in \mathscr{R}$ is teljesül, mert ha $\alpha \in I$ rözített index, akkor

$$\bigcap_{i\in I} E_i = E_\alpha \setminus \left(E_\alpha \setminus \bigcap_{i\in I} E_i\right) = E_\alpha \setminus \bigcup_{i\in I}(E_\alpha \setminus E_i) \in \mathscr{R},$$

hiszen minden $i \in I$ esetén $E_\alpha \setminus E_i \in \mathscr{R}$.

Emlékeztetünk arra is, hogy a $\mathscr{B}$ halmazt σ-algebrának nevezzük a T halmaz felett, ha $\mathscr{B}$ olyan σ-gyűrű a T halmaz felett, amelyre $T \in \mathscr{B}$.

30.1.1. Definíció. *A T topologikus tér* **Borel-féle σ-algebrájának** *nevezzük a T zárt részhalmazainak halmaza által generált T feletti σ-algebrát; ezt a σ-algebrát $\mathscr{B}(T)$-vel* *jelöljük. A T Hausdorff-tér* **Baire-féle σ-gyűrűjének** *nevezzük a T kompakt G_δ-részhalmazainak halmaza által generált σ-gyűrűt; ezt a σ-gyűrűt $\mathscr{B}_0(T)$-vel jelöljük. Ha T topologikus tér (illetve Hausdorff-tér), akkor egy $E \subseteq T$ halmazt* **Borel-halmaznak** *(illetve* **Baire-halmaznak***) nevezünk T-ben, ha $E \in \mathscr{B}(T)$ (illetve $E \in \mathscr{B}_0(T)$).*

Hausdorff-tér minden kompakt részhalmaza zárt, és minden σ-algebra σ-gyűrű, ezért ha T Hausdorff-tér, akkor $\mathscr{B}_0(T) \subseteq \mathscr{B}(T)$, és általában itt nincs egyenlőség, mert $T \notin \mathscr{B}_0(T)$ lehetséges, ugyanakkor $T \in \mathscr{B}(T)$ mindig igaz. Ha például T diszkrét tér, akkor T metrizálható, tehát a T kompakt G_δ-halmazai megegyeznek a T kompakt részhalmazaival, vagyis a T véges részhalmazaival; ezért $\mathscr{B}_0(T)$ egyenlő a T megszámlálható részhalmazainak halmazával; ugyanakkor $\mathscr{B}(T)$ egyenlő a T hatványhalmazával. Tehát, ha T nem megszámlálhatóan végtelen diszkrét tér, akkor $T \notin \mathscr{B}_0(T)$.

30.1.2. Állítás. *Megszámlálható bázisú lokálisan kompakt tér Baire- és Borel-részhalmazai ugyanazok.*

Bizonyítás. Megszámlálható bázisú lokálisan kompakt tér metrizálható és σ-kompakt (27.13.1.), ezért minden zárt részhalmaza előáll megszámlálható sok kompakt G_δ-halmaz uniójaként, így Baire-halmaz. ■

Gyakran előfordul, hogy egy T Hausdorff-térben bevezetünk egy $\mathscr{R} \subseteq \mathscr{B}_0(T)$ halmazt, és azt kérdezzük, hogy $\mathscr{R} = \mathscr{B}_0(T)$ teljesül-e? Ehhez természetesen szükséges az, hogy $\mathscr{R}$ halmazgyűrű legyen, és tartalmazza a T kompakt G_δ-halmazait. Ha ezek mellett még az is igaz, hogy $\mathscr{R}$ zárt a megszámlálható unióra nézve, akkor $\mathscr{R}$ σ-gyűrű, így a $\mathscr{B}_0(T)$ definíciója alapján $\mathscr{R} = \mathscr{B}_0(T)$. A következő állítás megmutatja, hogy ebben az esetben elegendő azt igazolni, hogy minden $\mathscr{R}$-ben haladó *diszjunkt* sorozat uniója eleme $\mathscr{R}$-nek.

30.1.3. Állítás. *Az $\mathscr{R}$ halmazgyűrű pontosan akkor σ-gyűrű, ha minden $\mathscr{R}$-ben haladó $(E_k)_{k\in\mathbb{N}}$ diszjunkt sorozatra $\bigcup_{k\in\mathbb{N}} E_k \in \mathscr{R}$.*

Bizonyítás. Csak az elégségesség szorul bizonyításra. Legyen $(E_k)_{k\in\mathbb{N}}$ tetszőleges sorozat $\mathscr{R}$-ben. Minden $\mathbb{N} \ni n$-re legyen $F_n := \bigcup_{k=0}^{n} E_k$, továbbá $n > 0$ esetén $G_n := F_n \setminus F_{n-1}$, valamint $G_0 := F_0$. Az $\mathscr{R}$ halmazgyűrű, ezért minden $\mathbb{N} \ni n$-re $F_n, G_n \in \mathscr{R}$, és nyilvánvalóan igazak az $\bigcup_{k\in\mathbb{N}} E_k = \bigcup_{k\in\mathbb{N}} F_k = \bigcup_{k\in\mathbb{N}} G_k$ egyenlőségek. Ugyanakkor a $(G_k)_{k\in\mathbb{N}}$ halmazsorozat nyilvánvalóan diszjunkt, ezért a hipotézis alapján $\bigcup_{k\in\mathbb{N}} G_k \in \mathscr{R}$, így $\bigcup_{k\in\mathbb{N}} E_k \in \mathscr{R}$. ■

30.1.4. Következmény. *Legyen T Hausdorff-tér, és $\mathscr{R}$ olyan halmazgyűrű T felett, amelynek minden eleme Baire-halmaz és a T minden kompakt G_δ-halmaza eleme $\mathscr{R}$-nek. Ha minden $\mathscr{R}$-ben haladó diszjunkt sorozat uniója eleme $\mathscr{R}$-nek, akkor $\mathscr{R}$ megegyezik a T Baire-féle σ-gyűrűjével.*

30.2. A mérhető halmazok σ-algebrája és a Carathéodory-féle külső mérték

Most szükségünk lesz néhány olyan tény ismeretére, amelyek tetszőleges Carathéodory-féle külső mértékre is érvényesek. Ezeket gyűjtjük egybe a következő állításban.

30.2.1. Definíció. *Legyen T halmaz. Egy*

$$\mathfrak{m} : \mathscr{P}(T) \to \overline{\mathbb{R}}_+$$

függvényt T feletti **Carathéodory-féle külső mértéknek** *nevezünk, ha teljesülnek rá a következők.*

$(\mathrm{C_I})$ $\mathfrak{m}(\emptyset) = 0$.

$(\mathrm{C_{II}})$ *Minden $H \subseteq T$ halmazra, és a T részhalmazainak bármely $(H_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sorozatára, ha $H \subseteq \bigcup\limits_{n=0}^{\infty} H_n$, akkor fennáll az*

$$\mathfrak{m}\,(H) \leq \sum_{n=0}^{\infty} \mathfrak{m}(H_n)$$

egyenlőtlenség.

30.2.2. Definíció. *Legyen T halmaz. Ha $\mathfrak{m} : \mathscr{P}(T) \to \overline{\mathbb{R}}_+$ Carathéodory-féle külső mérték T felett, akkor*

$$\mathfrak{M}(T, \mathfrak{m}) := \{H \in \mathscr{P}(T) \mid (\forall X \in \mathscr{P}(T)) : \ \mathfrak{m}(X) = \mathfrak{m}(X \cap H) + \mathfrak{m}(X \setminus H)\},$$

és $\mathfrak{M}(T, \mathfrak{m})$ elemeit **$\mathfrak{m}$-mérhető** *halmazoknak nevezzük.*

30.2.3. Állítás. *Legyen T halmaz és $\mathfrak{m} : \mathscr{P}(T) \to \overline{\mathbb{R}}_+$ Carathéodory-féle külső mérték T felett. Ekkor $\mathfrak{M}(T, \mathfrak{m})$ σ-algebra T felett, és az*

$$\mathfrak{M}(T, \mathfrak{m}) \to \overline{\mathbb{R}}_+; \quad H \mapsto \mathfrak{m}(H)$$

függvény **σ-additív***, tehát, ha $(H_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tetszőleges diszjunkt sorozat $\mathfrak{M}(T, \mathfrak{m})$-ben, akkor*

$$\mathfrak{m}\left(\bigcup_{n=0}^{\infty} H_n\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \mathfrak{m}(H_n).$$

Bizonyítás. Az $\mathfrak{M}(T, \mathfrak{m})$ halmaz zárt a komplementum-képzésre nézve, mert $H \in \mathfrak{M}(T, \mathfrak{m})$ esetén minden $X \subseteq T$ halmazra

$$\mathfrak{m}(X) = \mathfrak{m}(X \cap H) + \mathfrak{m}(X \setminus H) = \mathfrak{m}(X \setminus (T \setminus H)) + \mathfrak{m}(X \cap (T \setminus H)),$$

így $T \setminus H \in \mathfrak{M}(T, \mathfrak{m})$.

Az $\mathfrak{M}(T, \mathfrak{m})$ halmaz zárt a véges unió-képzésre nézve. Valóban, legyenek $H, H' \in \mathfrak{M}(T, \mathfrak{m})$, és $X \subseteq T$ tetszőleges halmaz. Ekkor $H \in \mathfrak{M}(T, \mathfrak{m})$ miatt

$$\mathfrak{m}(X \cap (H \cup H')) = \mathfrak{m}((X \cap (H \cup H')) \cap H) + \mathfrak{m}((X \cap (H \cup H')) \setminus H) =$$

$$= \mathfrak{m}(X \cap H) + \mathfrak{m}(X \cap (H' \setminus H)) = \mathfrak{m}(X \cap H) + \mathfrak{m}((X \setminus H) \cap H'),$$

továbbá $H' \in \mathfrak{M}(T, \mathfrak{m})$ miatt

$$\mathfrak{m}(X \setminus H) = \mathfrak{m}((X \setminus H) \cap H') + \mathfrak{m}((X \setminus H) \setminus H') = \mathfrak{m}((X \setminus H) \cap H') + \mathfrak{m}(X \setminus (H \cup H')),$$

következésképpen

$$\mathfrak{m}(X) = \mathfrak{m}(X \cap H) + \mathfrak{m}(X \setminus H) = \mathfrak{m}(X \cap H) + \mathfrak{m}((X \setminus H) \cap H') +$$

$$+ \mathfrak{m}(X \setminus (H \cup H')) = \mathfrak{m}(X \cap (H \cup H')) + \mathfrak{m}(X \setminus (H \cup H')),$$

vagyis $H \cup H' \in \mathfrak{M}(T, \mathfrak{m})$.

Az $\mathfrak{M}(T, \mathfrak{m})$ halmaz zárt a halmazkülönbség-képzésre nézve, mert $H, H' \in \mathfrak{M}(T, \mathfrak{m})$ esetén $T \setminus H \in \mathfrak{M}(T, \mathfrak{m})$, tehát $(T \setminus H) \cup H' \in \mathfrak{M}(T, \mathfrak{m})$, amiből következik, hogy $H \setminus H' = H \cap (T \setminus H') = T \setminus ((T \setminus H) \cup H') \in \mathfrak{M}(T, \mathfrak{m})$.

(Figyeljük meg, hogy eddig egyáltalán nem használtuk ki azt, hogy $\mathfrak{m}$ Carathéodory-féle külső mérték T felett. Tehát *bármely* $\mathfrak{m} : \mathscr{P}(T) \to \overline{\mathbb{R}}_+$ függvényre teljesül az, hogy $H, H' \in \mathfrak{M}(T, \mathfrak{m})$ esetén $T \setminus H \in \mathfrak{M}(T, \mathfrak{m})$, $H \cup H' \in \mathfrak{M}(T, \mathfrak{m})$, valamint $H \setminus H' \in \mathfrak{M}(T, \mathfrak{m})$.)

Ha $\mathfrak{m}$-re $(\mathrm{C_I})$ teljesül, vagyis $\mathfrak{m}(\emptyset) = 0$, akkor nyilvánvaló, hogy $\emptyset, T \in \mathfrak{M}(T, \mathfrak{m})$.

Most megmutatjuk, hogy ha $\mathfrak{m} : \mathscr{P}(T) \to \overline{\mathbb{R}}_+$ tetszőleges függvény, akkor minden $(H_i)_{i \in I}$ *diszjunkt véges* $\mathfrak{M}(T, \mathfrak{m})$-beli rendszerre és minden $X \subseteq T$ halmazra

$$\mathfrak{m}\left(X \cap \left(\bigcup_{i \in I} H_i\right)\right) = \sum_{i \in I} \mathfrak{m}(X \cap H_i).$$

Ezt elegendő arra az esetre igazolni, amikor I két elemű, mert ebből az I indexhalmaz számossága szerinti teljes indukcióval könnyen kapjuk az általános állítást. Legyenek tehát $H, H' \in \mathfrak{M}(T, \mathfrak{m})$ diszjunkt halmazok, és $X \subseteq T$ tetszőleges. Ekkor $H' \in \mathfrak{M}(T, \mathfrak{m})$ miatt

$$\mathfrak{m}(X \cap (H \cup H')) = \mathfrak{m}((X \cap (H \cup H')) \cap H') +$$

$$+ \mathfrak{m}((X \cap (H \cup H')) \setminus H') = \mathfrak{m}(X \cap H') + \mathfrak{m}(X \cap H),$$

hiszen $H \cap H' = \emptyset$ folytán $(X \cap (H \cup H')) \setminus H' = X \cap H$.

A továbbiakban már feltesszük, hogy az $\mathfrak{m} : \mathscr{P}(T) \to \overline{\mathbb{R}}_+$ függvényre $(\mathrm{C_I})$ és $(\mathrm{C_{II}})$

teljesül, tehát $\mathfrak{m}$ Carathéodory-féle külső mérték T felett. Továbbá, ki fogjuk használni azt, hogy ekkor $\mathfrak{m}$ *monoton növő*, tehát $H, H' \subseteq T$ és $H \subseteq H'$ esetén $\mathfrak{m}(H) \leq \mathfrak{m}(H')$. Ez a $(\mathrm{C_{II}})$-ből triviálisan következik.

Megmutatjuk, hogy ha $(H_n)_{n\in\mathbb{N}}$ diszjunkt sorozat $\mathfrak{M}(T,\mathfrak{m})$-ben, akkor $\bigcup\limits_{n=0}^{\infty} H_n \in \mathfrak{M}(T,\mathfrak{m})$, és

$$\mathfrak{m}\left(\bigcup_{n=0}^{\infty} H_n\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \mathfrak{m}(H_n).$$

Valóban, legyen $N \in \mathbb{N}$ és $X \subseteq T$. Ekkor az előzőek alapján $\bigcup\limits_{n=0}^{N} H_n \in \mathfrak{M}(T,\mathfrak{m})$, és felhasználva $\mathfrak{m}$ monotonitását:

$$\mathfrak{m}(X) = \mathfrak{m}\left(X \cap \left(\bigcup_{n=0}^{N} H_n\right)\right) + \mathfrak{m}\left(X \setminus \bigcup_{n=0}^{N} H_n\right) \geq \sum_{n=0}^{N} \mathfrak{m}(X \cap H_n) + \mathfrak{m}\left(X \setminus \bigcup_{n=0}^{\infty} H_n\right).$$

Ebből és $(\mathrm{C_{II}})$-ből következik, hogy

$$\mathfrak{m}(X) \geq \sup_{N\in\mathbb{N}}\left(\sum_{n=0}^{N} \mathfrak{m}(X\cap H_n)\right) + \mathfrak{m}\left(X \setminus \bigcup_{n=0}^{\infty} H_n\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \mathfrak{m}(X\cap H_n) + \mathfrak{m}\left(X \setminus \bigcup_{n=0}^{\infty} H_n\right) \geq$$

$$\geq \mathfrak{m}\left(\bigcup_{n=0}^{\infty}(X\cap H_n)\right) + \mathfrak{m}\left(X \setminus \bigcup_{n=0}^{\infty} H_n\right) \geq \mathfrak{m}\left(\left(X \cap \bigcup_{n=0}^{\infty} H_n\right) \cup \left(X \setminus \bigcup_{n=0}^{\infty} H_n\right)\right) = \mathfrak{m}(X),$$

tehát $\bigcup\limits_{n=0}^{\infty} H_n \in \mathfrak{M}(T,\mathfrak{m})$, és még az

$$\mathfrak{m}(X) = \sum_{n=0}^{\infty} \mathfrak{m}(X \cap H_n) + \mathfrak{m}\left(X \setminus \bigcup_{n=0}^{\infty} H_n\right)$$

egyenlőség is teljesül. Ebből az $X := \bigcup\limits_{n=0}^{\infty} H_n$ választással, $\mathfrak{m}(\emptyset) = 0$ alapján kapjuk, hogy

$$\mathfrak{m}\left(\bigcup_{n=0}^{\infty} H_n\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \mathfrak{m}(H_n).$$

Legyen most $(H_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tetszőleges (nem feltétlenül diszjunkt) sorozat $\mathfrak{M}(T,\mathfrak{m})$-ben, és legyen $H'_0 := H_0$, valamint minden $n \in \mathbb{N}^+$ esetén $H'_n := H_n \setminus H_{n-1}$. Ekkor $(H'_n)_{n\in\mathbb{N}}$ olyan diszjunkt sorozat $\mathfrak{M}(T,\mathfrak{m})$-ben, amelyre $\bigcup\limits_{n=0}^{\infty} H_n = \bigcup\limits_{n=0}^{\infty} H'_n$, és az előzőek alapján $\bigcup\limits_{n=0}^{\infty} H'_n \in \mathfrak{M}(T,\mathfrak{m})$. Ezért $\mathfrak{M}(T,\mathfrak{m})$ σ-algebra. ■

30.3. Lokálisan kompakt tér Baire-féle σ-gyűrűje

A lokálisan kompakt terek kompakt G_δ-halmazainak legfontosabb analitikus tulajdonságát írja le a következő állítás.

30.3.1. Állítás. *Ha T lokálisan kompakt tér és $K \subseteq T$ kompakt G_δ-halmaz, akkor létezik olyan $\mathscr{K}(T;\mathbb{R})$)-ben haladó monoton fogyó $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sorozat, amely pontonként konvergál a χ_K karakterisztikus függvényhez.*

Bizonyítás. Legyen $(\Omega_n)_{n\in\mathbb{N}}$ olyan monoton fogyó nyílthalmaz-sorozat T-ben, hogy $K = \bigcap\limits_{n\in\mathbb{N}} \Omega_n$. A lokálisan kompakt terekre vonatkozó Uriszon-tétel (27.8.1.) alapján kiválaszthatunk olyan $(\psi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sorozatot $\mathscr{K}(T,\mathbb{R})$-ben, hogy minden $\mathbb{N} \ni n$-re $0 \leq \psi_n \leq 1$, $K \subseteq [\psi_n = 1]$ és $\operatorname{supp}(\psi_n) \subseteq \Omega_n$. Nyilvánvaló, hogy a $(\psi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ függvénysorozat pontonként konvergál a χ_K karakterisztikus függvényhez. Ha minden $n \in \mathbb{N}$ esetén $\varphi_n := \inf\limits_{0\leq k\leq n} \psi_k$, akkor a $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ függvénysorozat szintén pontonként konvergál a χ_K karakterisztikus függvényhez, és monoton fogyó. ■

30.3.2. Lemma. *Legyen T lokálisan kompakt tér, $K \subseteq T$ kompakt halmaz, és $\Omega \subseteq T$ olyan nyílt halmaz, amelyre $K \subseteq \Omega$. Ekkor létezik olyan $K' \subseteq T$ kompakt G_δ-halmaz és olyan $\Omega' \subseteq T$ relatív kompakt σ-kompakt nyílt halmaz, hogy $K \subseteq K' \subseteq \Omega' \subseteq \Omega$.*

Bizonyítás. A lokálisan kompakt terekre vonatkozó Uriszon-tétel (27.8.1.) alapján vegyünk olyan $\varphi \in \mathscr{K}(T;\mathbb{R})$ függvényt, amelyre $0 \leq \varphi \leq 1$, $K \subseteq [\varphi = 1]$ és $\operatorname{supp}(\varphi) \subseteq \Omega$. Legyen $r \in]0,1[$ rözített valós szám, és legyen $K' := [\varphi \geq r]$, valamint $\Omega' := [\varphi > 0]$. Nyilvánvaló, hogy $K \subseteq K' \subseteq \Omega' \subseteq \Omega$, továbbá K' kompakt, mert zárt és részhalmaza a $\operatorname{supp}(\varphi)$ kompakt halmaznak, továbbá Ω' nyílt és relatív kompakt, mert ez is részhalmaza $\operatorname{supp}(\varphi)$-nek. A K' halmaz G_δ halmaz, mert ha $(\varepsilon_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tetszőleges zérussorozat $\mathbb{R}^+$-ban, akkor $K' = \bigcap\limits_{n\in\mathbb{N}} [\varphi > r - \varepsilon_n]$, és minden $\mathbb{N} \ni n$-re a $[\varphi > r - \varepsilon_n]$ halmaz nyílt T-ben. Az Ω' halmaz σ-kompakt, mert ha $(\varepsilon_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tetszőleges zérussorozat $\mathbb{R}^+$-ban, akkor $\Omega' = \bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} [\varphi \geq \varepsilon_n]$, és minden $\mathbb{N} \ni n$-re a $[\varphi \geq \varepsilon_n]$ halmaz kompakt T-ben, hiszen zárt és részhalmaza a $\operatorname{supp}(\varphi)$ kompakt halmaznak. ■

30.3.3. Állítás. *Lokálisan kompakt térben minden nyílt σ-kompakt halmaz Baire-halmaz. Minden σ-kompakt lokálisan kompakt tér Baire-féle σ-gyűrűje σ-algebra.*

Bizonyítás. Legyen T lokálisan kompakt tér és Ω σ-kompakt nyílt halmaz. Legyen $(K_n)_{n\in\mathbb{N}}$ a T kompakt részhalmazainak olyan sorozata, amelyre $\Omega = \bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} K_n$. Az előző lemma alapján kiválaszthatunk olyan $(C_n)_{n\in\mathbb{N}}$ halmazsorozatot, amelyre minden $n \in \mathbb{N}$ esetén $C_n \subseteq T$ kompakt G_δ-halmaz és $K_n \subseteq C_n \subseteq \Omega$. Ekkor $\Omega = \bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} C_n$, ezért $\Omega \in \mathscr{B}_0(T)$, hiszen minden $\mathbb{N} \ni n$-re $C_n \in \mathscr{B}_0(T)$ és $\mathscr{B}_0(T)$ σ-gyűrű. ■

30.3.4. Lemma. *Ha T lokálisan kompakt tér és $\varphi : T \to \mathbb{R}$ kompakt tartójú folytonos függvény, akkor minden $a, b \in \mathbb{R}$, $0 < a \leq b$ esetén $\overset{-1}{\varphi}\langle [a, b[\rangle \in \mathscr{B}_0(T)$.*

Bizonyítás. Csak az $a < b$ eset érdekes. Legyen $(\varepsilon_n)_{n\in\mathbb{N}}$ olyan zérussorozat $\mathbb{R}^+$-ban, amelyre minden $n \in \mathbb{N}$ esetén $\varepsilon_n < b - a$. Minden $\mathbb{N} \ni n$-re $\overset{-1}{\varphi}\langle [a, b - \varepsilon_n]\rangle$ kompakt halmaz T-ben és $\overset{-1}{\varphi}\langle]a-\varepsilon_n, b[\rangle$ nyílt halmaz T-ben, továbbá $\overset{-1}{\varphi}\langle [a, b-\varepsilon_n]\rangle \subseteq \overset{-1}{\varphi}\langle]a-\varepsilon_n, b[\rangle$. Ezért kiválaszthatjuk a T kompakt G_δ-részhalmazainak olyan $(K_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sorozatát, amelyre minden $n \in \mathbb{N}$ esetén

$$\overset{-1}{\varphi}\langle [a, b - \varepsilon_n]\rangle \subseteq K_n \subseteq \overset{-1}{\varphi}\langle]a - \varepsilon_n, b[\rangle.$$

Nyilvánvaló, hogy

$$\bigcup_{n\in\mathbb{N}} \overset{-1}{\varphi}\langle [a, b - \varepsilon_n]\rangle = \overset{-1}{\varphi}\langle [a, b[\rangle = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \overset{-1}{\varphi}\langle]a - \varepsilon_n, b[\rangle,$$

amiből könnyen kapjuk a

$$\overset{-1}{\varphi}\langle [a, b[\rangle = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \quad \bigcup_{m\in\mathbb{N};\ m\geq n} K_m$$

egyenlőséget, és itt a jobb oldalon Baire-halmaz áll. ■

30.3.5. Tétel. *Ha T lokálisan kompakt tér, akkor minden $T \to \mathbb{C}$ végtelenben eltűnő folytonos függvény egyenletesen approximálható a T halmazon $T \to \mathbb{C}$ kompakt tartójú Baire-lépcsősfüggvényekkel, így $\overline{\mathscr{K}}(T; \mathbb{C}) \subseteq \mathscr{E}_{\mathbb{C}}(T, \mathscr{B}_0(T))$.*

Bizonyítás. Legyen $\varphi \in \mathscr{K}_+(T)$ tetszőleges, és minden $n \in \mathbb{N}^+$ esetén

$$\varphi_n := \sum_{k=1}^{n2^n-1} \frac{k}{2^n} \chi_{\overset{-1}{\varphi}\langle [\frac{k}{2^n}, \frac{k+1}{2^n}[\rangle}.$$

A $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ függvénysorozat monoton növő, $\varphi = \sup\limits_{n\in\mathbb{N}} \varphi_n$, és a φ korlátossága miatt egyenletesen konvergens a T halmazon. Továbbá, minden $n \in \mathbb{N}^+$ esetén az előző lemma alapján $\varphi_n \in \mathscr{E}_{\mathbb{C}}(T, \mathscr{B}_0(T))$, és természetesen $[\varphi_n \neq 0] \subseteq \overset{-1}{\varphi}\langle [1/2^n, n[\rangle \subseteq [\varphi \neq 0]$, vagyis φ_n kompakt tartójú. Ebből már következik az állítás, mert minden $T \to \mathbb{C}$ kompakt tartójú folytonos függvény előáll pozitív kompakt tartójú folytonos függvények lineáris kombinációjaként, így $\mathscr{K}(T; \mathbb{C}) \subseteq \mathscr{E}_{\mathbb{C}}(T, \mathscr{B}_0(T))$, továbbá az $\mathscr{E}_{\mathbb{C}}(T, \mathscr{B}_0(T))$ függvénytér sup-normában zárt, és $\overline{\mathscr{K}}(T; \mathbb{C})$ egyenlő a $\mathscr{K}(T; \mathbb{C})$ sup-norma szerinti lezártjával (28.2.5.). ■

30.3.6. Állítás. *Legyen T topologikus tér és S topologikus altere T-nek.*

a) *$\mathscr{B}(S) \subseteq \mathscr{B}(T)$ pontosan akkor teljesül, ha $S \in \mathscr{B}(T)$.*

b) *Ha T lokálisan kompakt és $S \in \mathscr{B}_0(T)$, akkor $\mathscr{B}_0(S) \subseteq \mathscr{B}_0(T)$.*

Bizonyítás. a) Ha $\mathscr{B}(S) \subseteq \mathscr{B}(T)$, akkor $S \in \mathscr{B}(S)$ miatt $S \in \mathscr{B}(T)$. Megfordítva, tegyük fel, hogy $S \in \mathscr{B}(T)$, és legyen $\mathscr{A} := \{E \in \mathscr{P}(S) | E \in \mathscr{B}(T)\}$. Nyilvánvaló, hogy $\mathscr{A}$ halmazgyűrű S felett, és zárt a megszámlálható unió-képzésre nézve. Az $S \in \mathscr{B}(T)$ feltétel alapján $S \in \mathscr{A}$, tehát $\mathscr{A}$ σ-algebra S felett. Ha $\Omega \subseteq S$ olyan halmaz, amely nyílt az S topologikus altérben, akkor van olyan $\Omega' \subseteq T$ nyílt halmaz, hogy $\Omega = \Omega' \cap S$; ekkor $\Omega', S \in \mathscr{B}(T)$, tehát $\Omega \in \mathscr{B}(T)$. Ezért az S feletti $\mathscr{A}$ σ-algebra tartalmazza az S altértopológiája szerinti nyílt halmazokat, így $\mathscr{B}(S) \subseteq \mathscr{A} \subseteq \mathscr{B}(T)$.

b) Tegyük fel, hogy T lokálisan kompakt és $S \in \mathscr{B}_0(T)$. Legyen $\mathscr{A} := \{E \in \mathscr{P}(S) | E \in \mathscr{B}_0(T)\}$. Nyilvánvaló, hogy $\mathscr{A}$ σ-gyűrű S felett, ezért a $\mathscr{B}_0(S) \subseteq \mathscr{B}_0(T)$ állítás bizonyításához elég azt igazolni, hogy az S topologikus altér minden kompakt G_δ halmaza eleme $\mathscr{A}$-nak (vagyis eleme $\mathscr{B}_0(T)$-nek). Legyen K kompakt G_δ-halmaz az S topologikus altérben. Ekkor K kompakt a T topologikus térben is, és létezik az S topologikus altér nyílt részhalmazainak olyan $(\Omega_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sorozata, amelyre $K = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \Omega_n$. Ha $n \in \mathbb{N}$, akkor van olyan $\Omega' \subseteq T$ nyílt halmaz, hogy $\Omega_n = \Omega' \cap S$; ekkor K kompakt halmaz T-ben és Ω' olyan nyílt halmaz T-ben, amely tartalmazza K-t, így van olyan $\Omega'' \subseteq T$ nyílt Baire-halmaz, hogy $K \subseteq \Omega'' \subseteq \Omega'$. Ebből következik olyan $(\Omega''_n)_{n\in\mathbb{N}}$ halmazrendszer létezése, hogy minden $\mathbb{N} \ni n$-re Ω''_n nyílt Baire-halmaz T-ben és $K \subseteq \Omega''_n \subseteq \Omega_n$. Ekkor $K = S \cap \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \Omega''_n$, és itt a jobb oldalon Baire-halmaz áll T-ben, tehát $K \in \mathscr{B}_0(T)$, így $K \in \mathscr{A}$. ■

Vigyázzunk arra, hogy ha T lokálisan kompakt tér és S olyan topologikus altere T-nek, amelyre $\mathscr{B}_0(S) \subseteq \mathscr{B}_0(T)$, akkor előfordulhat az, hogy $S \notin \mathscr{B}_0(T)$ (például akkor, ha $S := T$ és $T \notin \mathscr{B}_0(T)$).

30.4. Projektormérték leszűkítése szerinti egyszerű integrál

30.4.1. Állítás. (Projektormérték leszűkítése szerinti egyszerű integrálás). *Legyen T lokálisan kompakt tér és $S \in \mathscr{B}_0(T)$. Ha A egységelemes C^*-algebra, és $\mathfrak{p} : \mathscr{B}_0(T) \to A$ olyan projektor-értékű σ-ortoadditív függvény, hogy $\mathfrak{p}(S) = \mathbf{1}$, akkor $\mathfrak{p}|_{\mathscr{B}_0(S)} : \mathscr{B}_0(S) \to A$ szintén projektor-értékű σ-ortoadditív függvény, és minden $\varphi \in \mathscr{E}_{\mathbb{C}}(T, \mathscr{B}_0(T))$ esetén $\varphi|_S \in \mathscr{E}_{\mathbb{C}}(S, \mathscr{B}_0(S))$, valamint fennáll az*

$$\int_T \varphi \, d\mathfrak{p} = \int_S (\varphi|_S) d(\mathfrak{p}|_{\mathscr{B}_0(S)})$$

egyenlőség.

Bizonyítás. Az előző állítás szerint $\mathscr{B}_0(S) \subseteq \mathscr{B}_0(T)$, ezért a $\mathfrak{p}|_{\mathscr{B}_0(S)}$ leszűkítés $\mathscr{B}_0(S)$-en értelmezett, és nyilvánvalóan projektor-értékű σ-ortoadditív függvény. Ha $E \in \mathscr{B}_0(T)$, akkor $E \cap S \in \mathscr{B}_0(S)$ és $\mathfrak{p}|_{\mathscr{B}_0(S)}(E \cap S) = \mathfrak{p}(E \cap S) = \mathfrak{p}(E)\mathfrak{p}(S) = \mathfrak{p}(E)$. Ebből azonnal következik, hogy minden $\varphi \in \mathscr{E}_{\mathbb{C}}(T, \mathscr{B}_0(T))$ lépcsősfüggvényre $\varphi|_S \in \mathscr{E}_{\mathbb{C}}(S, \mathscr{B}_0(S))$ és

$$\int\limits_T \varphi \, d\mathfrak{p} = \int\limits_S (\varphi|_S) d(\mathfrak{p}|_{\mathscr{B}_0(S)}).$$

Legyen $\varphi \in \mathscr{E}_{\mathbb{C}}(T, \mathscr{B}_0(T))$ tetszőleges és $(\varphi_n)_{n \in \mathbb{N}}$ olyan sorozat $\mathscr{E}_{\mathbb{C}}(T, \mathscr{B}_0(T))$-ben, amely egyenletesen konvergál φ-hez. Ekkor a $(\varphi_n|_S)_{n \in \mathbb{N}}$ függvénysorozat $\mathscr{E}_{\mathbb{C}}(S, \mathscr{B}_0(S))$-ben halad, és egyenletesen konvergál $\varphi|_S$-hez. Ebből következik, hogy $\varphi|_S \in \mathscr{E}_{\mathbb{C}}(S, \mathscr{B}_0(S))$ és az egyszerű integrálok sup-norma és C^*-norma szerinti folytonossága alapján

$$\int\limits_T \varphi \, d\mathfrak{p} = \lim_{n \to \infty} \int\limits_T \varphi_n \, d\mathfrak{p} = \lim_{n \to \infty} \int\limits_S (\varphi_n|_S) d(\mathfrak{p}|_{\mathscr{B}_0(S)}) = \int\limits_S (\varphi|_S) d(\mathfrak{p}|_{\mathscr{B}_0(S)}),$$

ahol a határértéket az A C^*-normája szerint kell venni. ■

Irodalomjegyzék

[1] L. Beran, *Orthomodular Lattices (algebraic approach)*, Reidel Pub. Co., Dordrecht, Holland, 1984.

[2] S. K. Berberian, *Baer *-rings*, Springer-Verlag, New York-Heidelberg-Berlin, 1972.

[3] M. Berger, *Géometrie*, CEDIC, Paris, 1977-1978.

[4] G. Birkhoff, *Lattice Theory*, Providence, Rhode Island, 1967.

[5] N. Bourbaki, *Éléments de mathématique. Théorie des ensembles.*, Springer–Verlag, Berlin–Heidelberg, 2007.

[6] N. Bourbaki, *Éléments de mathématique. Algébre.*, Springer–Verlag, Berlin–Heidelberg, 2007.

[7] N. Bourbaki, *Éléments de mathématique. Topologie générale.*, Springer–Verlag, Berlin–Heidelberg, 2007.

[8] N. Bourbaki, *Éléments de mathématique. Espaces vectoriels topologiques*, Springer–Verlag, Berlin–Heidelberg, 2007.

[9] N. Bourbaki, *Éléments de mathématique. Intégration*, Springer–Verlag, Berlin–Heidelberg, 2007.

[10] N. Bourbaki, *Éléments de mathématique. Théories spectrales*, Hermann, Paris, 1967.

[11] O. Bratteli – D. W. Robinson, *Operator Algebras and Quantum Statistical Mechanics*, Vols. I-II, Springer–Verlag, New York–Heidelberg–Berlin, 1979.

[12] J. Dixmier, *Les C^*-algébres et leurs représentations*, Gauthier-Villard Éditeur, Paris, 1964.

[13] J. Dixmier, *Les algébres d'opérateurs dans l'espace hilbertien (algébres de von Neumann)*, Gauthier-Villard Éditeur, Paris, 1969.

[14] P. R. Halmos, *Mértékelmélet*, Gondolat, Budapest, 1984.

[15] А. Я. Хелемский, *Банаховы и полинормированные алгебры: общая теория, представления, гомологии*, Наука, Москва, 1989.

[16] E. Hewitt–K. A. Ross, *Abstract Harmonic Analysis*, Springer-Verlag, 1963-1970.

[17] В. М. Копытов, *Решеточно упорядоченные группы*, Наука, Москва, 1984.

[18] А. А. Кириллов, *Элементы теории представлений*, Наука, Москва, 1978.

[19] J. Kristóf, *Absztrakt harmonikus analízis*, elektronikus jegyzet, 2013.

[20] F. Maeda – S. Maeda, *The Theory of Symmetric Lattices*, Springer-Verlag, New York-Heidelberg-Berlin, 1971.

[21] A. Mallios, *Topological Algebras. Selected Topics*, North Holland Math. Studies, **124** (1986), Notas de matemática, 109., Amsterdam-New York-Oxford-Tokyo

[22] P. A. Meyer, *Probability and Potentials*, Blaisdell Pub. Co., 1966.

[23] М. А. Наймарк, *Теория представлений групп*, Наука, Москва, 1976.

[24] T. W. Palmer, *Banach Alberas and The General Theory of *-Algebras*, Vols. I-II, Cambridge Academic Press, 1994-2001.

[25] G. K. Pedersen, *C*-Algebras and their Automorphism Groups*, Academic Press, London-New York-San Francisco, 1979.

[26] Л. С. Понтрягин, *Непрерывные группы*, Наука, Москва, 1973.

[27] H. Rasiowa – R. Sikorski, *The Mathematics of Metamathematics*, Warszawa, 1963.

[28] M. Reed – B. Simon, Methods of Modern Mathematical Physics, Vol. I, Academic Press, Inc., New York–London-Tokyo, 1980.

[29] C. E. Rickart, *General Theory of Banach Algebras*, Van Nostrand Reinhold Co., New York, 1974.

[30] W. Rudin, *Functional Analysis*, McGraw-Hill Book Co., New York, 1973.

[31] S. Sakai, *C*-Algebras and W*-Algebras*, Springer-Verlag, New York-Heidelberg-Berlin, 1971.

[32] Т. А. Сарымсаков – Ш. А. Аюпов – Дж. Хаджиев – В. И. Чилин, *Упорядоченные алгебры*, Ташкент, Фан УзССР, 1983.

[33] H. H. Schaefer, *Topological Vector Spaces*, MacMillan Co., New York, 1966.

[34] M. Takesaki, Theory of Operator Algebras, Vols I-II-III, Springer–Verlag, New York–Heidelberg–Berlin, 2001.

[35] M. Valdivia – A Class of Bornological Barrelled Spaces which Are not Ultraborono-logical, Math. Ann., 194, 43-51 (1971)

JELÖLÉSEK

Logikai jelölések

$:=$ és $=:$	definiáló egyenlőség
$\neg\mathbf{A}$	nem **A**, ahol **A** kijelentés
$\mathbf{A} \vee \mathbf{B}$	**A** vagy **B**, ahol **A** és **B** kijelentések
$\mathbf{A} \wedge \mathbf{B}$	**A** és **B**, ahol **A** és **B** kijelentések
$\mathbf{A} \Rightarrow \mathbf{B}$	**A**-ból következik **B**, ahol **A** és **B** kijelentések
$\mathbf{A} \Leftrightarrow \mathbf{B}$	**A** és **B** ekvivalensek, ahol **A** és **B** kijelentések
$(\exists x \in E) : \mathscr{A}(x)$	létezik olyan x eleme az E halmaznak, amelyre $\mathscr{A}(x)$ teljesül
$(\forall x \in E) : \mathscr{A}(x)$	az E halmaz minden x elemére $\mathscr{A}(x)$ teljesül

Halmazelméleti jelölések

$x \in E$	x eleme E-nek
$x \notin E$	x nem eleme E-nek
$E \subseteq F$	E részhalmaza F-nek
$E \supseteq F$	E tartalmazza F-t
$\{x \in E \| \mathscr{A}(x)\}$	az E azon x elemeinek halmaza, amelyekre $\mathscr{A}(x)$
$\emptyset$	üres halmaz
$\{x, y\}$	az x és y halmazokból alkotott rendezetlen pár
$\{x\}$	egyelemű halmaz
(x, y)	az x és y halmazokból alkotott rendezett pár
$E \cup F$	E és F uniója (egyesítése)
$E \cap F$	E és F metszete (közös része)
$E \setminus F$	E és F különbsége
$E \times F$	E és F Descartes-szorzata
$\mathscr{P}(E)$ vagy 2^E	hatványhalmaz
$\prod_{i \in I} E_i$	halmazrendszer Descartes-szorzata
$\mathrm{Dom}(f)$	függvény értelmezési (vagy definíciós) tartománya
$\mathrm{Im}(f)$	függvény értékkészlete (vagy érkezési halmaza)
$f : E \to F$	f függvény, amelyre $\mathrm{Dom}(f) = E$ és $\mathrm{Im}(f) \subseteq F$

$f : E \rightarrowtail F$	f függvény, amelyre $\mathrm{Dom}(f) \subseteq E$ és $\mathrm{Im}(f) \subseteq F$
E/R	faktorhalmaz
$\pi_{E/R}$	az $E \to E/R$ kanonikus szürjekció
χ_E	halmaz karakterisztikus függvénye
id_T	identikus függvény
1_T	az 1 értékű konstansfüggvény
pr_i	i-edik projekció-függvény
$f\vert_E$	függvény leszűkítése
f^0	függvény 0-val vett kiterjesztése
f^{-1}	függvény inverze
$f \circ g$	függvények kompozíciója
$\mathscr{F}(E;F)$ vagy F^E	E-n értelmezett, F-be érkező függvények halmaza
$f\langle E\rangle$	halmaz függvény által létesített képe
$\overset{-1}{f}\langle E\rangle$	halmaz függvény által létesített őspéke
$\bigcup\limits_{i\in I} E_i$	halmazrendszer uniója (egyesítése)
$\bigvee\limits_{i\in I} E_i$	halmazrendszer diszjunkt uniója (halmazösszege)
$\bigcap\limits_{i\in I} E_i$	halmazrendszer metszete (közös része)
$\mathop{\times}\limits_{i\in I} f_i$	függvényrendszer szorzata
$\sup\limits_{i\in I} x_i$	elemrendszer felső határa (szuprémuma)
$\inf\limits_{i\in I} x_i$	elemrendszer alsó határa (infimuma)
$\max\limits_{i\in I} x_i$	elemrendszer legnagyobb tagja (maximuma)
$\min\limits_{i\in I} x_i$	elemrendszer legkisebb tagja (minimuma)
$\sup\limits_{i\in I} f_i$	valós függvények rendszerének felső burkolója
$\inf\limits_{i\in I} f_i$	valós függvények rendszerének alsó burkolója
$\mathrm{Card}(E)$	halmaz számossága
$\mathbb{N}$	a természetes számok halmaza
$\mathbb{N}^+$	a nem nulla természetes számok halmaza
$]x,y[$	nyílt intervallum
$[x,y[$	balról zárt, jobbról nyílt intervallum
$]x,y]$	jobbról zárt, balról nyílt intervallum
$[x,y]$	zárt intervallum
$]x,\to[$	jobbról nem korlátozott nyílt intervallum
$[x,\to[$	jobbról nem korlátozott zárt intervallum
$]\leftarrow,x[$	balról nem korlátozott nyílt intervallum
$]\leftarrow,x]$	balról nem korlátozott zárt intervallum

Algebrai jelölések

i_G		csoport inverzió-függvénye
x^{-1}		elem inverze multiplikatívan jelölt művelet szerint
$-x$		elem inverze additívan jelölt művelet szerint
$\dim(E)$		vektortér algebrai dimenziója
$A+B$		halmazok komplexus-összege vektortérben
$A-B$		halmazok komplexus-különbsége vektortérben
$H.A$		halmazok komplexus-szorzata vektortérben
$\sum\limits_{i\in I} x_i$		véges rendszer összege
$\sum\limits_{i\in I} M_i$		altér-rendszer komplexus-összege
$M\oplus N$		lineáris alterek direkt összege vektortérben
$\bigoplus\limits_{i\in I} E_i$		vektortér-rendszer direkt összege
E/M		lineáris faktortér
E^*		vektortér algebrai duálisa
$\mathbb{Z}$		az egész számok halmaza
$\mathbb{Q}$		a racionális számok halmaza
$\mathbb{R}$		a valós számok halmaza
$\mathbb{R}_+$		a 0-nál nagyobb-egyenlő valós számok halmaza
$\mathbb{R}^+$		a 0-nál szigorúan nagyobb valós számok halmaza
$\overline{\mathbb{R}}$		$\mathbb{R}\cup\{+\infty\}\cup\{-\infty\}$
$\overline{\mathbb{R}}_+$		$\mathbb{R}_+\cup\{+\infty\}$
$\mathbb{C}$		a komplex számok halmaza
$\mathbb{U}$		az egységnyi abszolút értékű komplex számok halmaza
$\mathbb{D}$		az 1-nél kisebb-egyenlő abszolút értékű komplex számok halmaza
$\mathbb{K}$		a valós vagy komplex számok halmaza
$\mathbf{i}$		$\sqrt{-1}$
$\Re(\lambda)$		komplex szám valós része
$\Im(\lambda)$		komplex szám képzetes része
$\overline{\lambda}$		komplex szám konjugáltja
$\lvert\cdot\rvert$		abszolútérték-függvény test felett
$\mathrm{span}(E)$		halmaz lineáris burka
$\mathrm{co}(E)$		halmaz konvex burka
$\mathrm{Ker}(u)$		lineáris operátor magja
$\mathrm{eq}(E)$	1.1.	halmaz kiegyensúlyozott burka
$\mathrm{Ext}(K)$	8.2.1.	extremális pontok halmaza

$E_{\mathbb{R}}$	4.1.	komplex vektortér alatt fekvő valós vektortér
$\rrbracket x, y \llbracket$	8.1.	nyílt szakasz valós vektortérben
$\llbracket x, y \rrbracket$	8.1.	zárt szakasz valós vektortérben
$\langle \cdot, \cdot \rangle$	6.1.1.	dualitás vektorterek között
A°	6.1.2.	halmaz polárisa dualitás szerint
$A^{\circ\circ}$	6.1.2.	halmaz bipolárisa dualitás szerint
p_C	3.4.4.	Minkowski-funkcionál
$u_{\mathbb{R}}$ vagy $\Re(u)$	4.1.	lineáris funkcionál valós része
$\Im(u)$	4.1.	lineáris funkcionál képzetes része
$C(S)$	13.1.	halmaz kommutánsa algebrában
$A/\mathfrak{m}$	13.1.	ideál szerinti faktoralgebra
$\mathscr{F}(T, \mathscr{A}; \mathbb{K})$	13.1.	mérhető függvények algebrája
$\mathscr{F}^b(T, \mathscr{A}; \mathbb{K})$	13.1.	korlátos mérhető függvények algebrája
$\mathscr{F}(T; K)$	13.1.	függvényalgebra
$\mathfrak{A}(T; \mathbb{K})$	13.1.	egyenletesen folytonos függvények algebrája
$C^{r,b}(\Omega; \mathbb{K})$	13.1.	korlátos deriváltú, r-szer folytonosan differenciálható függvények algebrája
$\mathscr{H}(\Omega; \mathbb{C})$	13.1.	holomorf függvények algebrája
$\mathbf{L}(E)$	13.1.	vektortér lineáris operátorainak algebrája
$M_n(K)$	13.1.	mátrixalgebra
$A_K(S)$	13.1.	konvolúciós félcsoport-algebra
$A_K(G)$	13.1.	konvolúciós csoport-algebra
$P * Q$	13.1.	polinomok konvolúciója
$K[X]$	13.1.	egyváltozós polinomok algebrája
$K[X_1, ..., X_n]$	13.1.	n-változós polinomok algebrája
A	13.2.2.	algebra standard egyégelemesítése
$\widetilde{\mathbf{1}}$	13.2.2.	standard egyégelemesítés egységeleme
$\mathbf{1}$ vagy $\mathbf{1}_A$		algebra egységeleme
$\mathrm{X}'(A)$	13.3.1.	algebra karaktereinek halmaza
$\mathrm{X}(A)$	13.3.1.	algebra nemnulla karaktereinek halmaza
$\mathscr{G}_A$	13.4.1.	algebra Gelfand-reprezentációja
$\mathscr{G}_A(a)$	13.4.1.	algebra elemének Gelfand-reprezentáltja
$\mathbf{G}(A)$	13.4.2.	algebra invertálható elemeinek csoportja
$\mathrm{Sp}_A(a)$	13.4.3.	algebra elemének spektruma
$\mathrm{Sp}'_A(a)$	13.4.3.	algebra elemének vesszős spektruma
P_A	13.5.1.	polinomiális függvények
a^*	16.1.1.	elem adjungáltja *-algebrában
A_{sa}	16.4.1.	*-algebra önadjungált elemeinek valós vektortere
A_+	16.4.1.	*-algebra pozitív elemeinek halmaza
$\mathbf{P}(A)$	16.4.1.	*-algebra önadjungált idempotens elemeinek

		(projektorainak) halmaza
$\mathbf{U}(A)$	16.4.1.	*-algebra unitér elemeinek csoportja
$\preceq$	16.4.	természetes előrendezés *-algebra önadjungált elemeinek valós vektorterén
f^*	16.5.1.	lineáris funkcionál adjungáltja
$a.f$	16.5.1.	elem szorzata lineáris funkcionállal
$C(A)$	16.6.3.	algebra kommutánsa (vagy centruma)
$\mathrm{X}_{sa}(A)$	18.3.1.	önadjungált karakterek halmaza
$\mathscr{G}_{A,sa}$	18.3.1.	*-algebra önadjungált Gelfand-reprezentációja
$C(\pi_1;\pi_2)$	20.1.2.	ábrázolásokat összekötő operátorok halmaza
$\pi\|H$	20.1.3.	részábrázolás
$e\vee f$	23.1.	elemek szuprémuma hálóban
$e\wedge f$	23.1.	elemek infimuma hálóban
$\bigvee_{i\in I} e_i$	23.1.5.	véges elemrendszer szuprémuma hálóban
$\bigwedge_{i\in I} e_i$	23.1.5.	véges elemrendszer infimuma hálóban
$RP(a)$	23.2.5	jobboldali projektor *-algebrában
$e^\perp$	29.1.	ortokomplementáció
$e\perp f$	29.1.	ortogonalitás ortokomplementáció szerint
L^*	29.3.1.	ortoállapotok halmaza
$L^\#$	29.3.5.	σ-additív ortoállapotok halmaza

Topológiai jelölések

$\mathscr{E}_{\mathbb{K}}$		az euklidészi topológia $\mathbb{K}$ felett
$B_r(x;\mathbb{K})$		nyílt euklidészi gömb $\mathbb{K}$-ban
$\overline{B}_r(x;\mathbb{K})$		zárt euklidészi gömb $\mathbb{K}$-ban
$\mathscr{T}_{ind}$	25.1.	antidiszkrét topológia
$\mathscr{T}_{dis}$	25.1.	diszkrét topológia
$\overset{-1}{f}[\mathscr{T}']$	25.1.	topológia inverz képe
$\mathscr{T}\|E$	25.1.	altértopológia
$f[\mathscr{T}]$	25.1.	topológia képe
$\mathscr{T}(t)$	5.2.1	környezetszűrő
M_1	5.2.3.	első megszámlálhatósági feltétel
M_2	5.2.3.	második megszámlálhatósági feltétel
$\overline{E}$ vagy $\mathrm{Cl}(E)$	25.3.2.	halmaz lezártja
$\overset{\circ}{E}$ vagy $\mathrm{Int}(E)$	25.3.2.	halmaz belseje
$\overset{\bullet}{E}$ vagy $\mathrm{Fr}(E)$	25.3.2.	halmaz határa
$\mathscr{T}\times\mathscr{T}'$	25.7.	két topológia szorzata

$\mathop{\times}\limits_{i\in I} \mathscr{T}_i$	25.7.1.	topológia-rendszer szorzata
$\mathscr{T}^I$	25.7.1.	topológia hatványa
$\bigvee\limits_{i\in I} \mathscr{T}_i$	25.8.5.	topológia-rendszer öszege
$\mathscr{C}(T;T')$	25.4.1.	folytonos függvények halmaza
T_0	26.1.1.	
T_1	26.1.1.	Kolmogorov-tér
T_2	26.1.1.	Hausdorff-tér
$\lim\limits_{t} f$	26.2.3.	függvény határértéke
$\lim\limits_{n\to\infty} x_n$	26.3.2.	sorozat határértéke
$\lim\limits_{i,\ I} x_i$	26.3.2.	általánosított sorozat határértéke
$d(x,E)$	26.4	pont távolsága halmaztól
$\mathrm{supp}(f)$	26.7.1.	függvény tartója
$B_r(x;d)$	26.8.1	x nyílt gömb félmetrika szerint
$\overline{B}_r(x;d)$	26.8.1	zárt gömb félmetrika szerint
$\mathscr{T}_d$	26.8.3	félmetrika által generált topológia
$\mathscr{T}_p$	26.8.1	félnorma által generált topológia
d_f	26.8.	függvény által meghatározott félmetrika
$\mathscr{T}_{(d_i)_{i\in I}}$	26.8.5.	félmetrika-rendszer által generált topológia
$\mathscr{T}_{(f_i)_{i\in I}}$	26.8.5.	függvényrendszer által generált topológia
$\lim\limits_{n\to\infty} f_n$	28.1.2.	függvénysorozat pontonkénti limeszfüggvénye
$\lim\limits_{i,\ I} f_i$	28.1.2.	általánosított függvénysorozat pontonkénti limeszfüggvénye
$\mathscr{F}^b(T;M)$	28.1.4	a korlátos függvények halmaza
$\mathbf{d}$	28.1.4.	sup-metrika
$\mathfrak{K}(T)$	10.2.	a kompakt halmazok halmaza
$\mathscr{B}(T)$	30.1.1.	a Borel-féle σ-algebra
$\mathscr{B}_0(T)$	30.1.1.	a Baire-féle σ-gyűrű
$\mathfrak{K}_0(T)$	10.2.	relatív kompakt Baire-halmazok δ-gyűrűje
$\mathscr{I}_+(T)$	27.4.2.	pozitív alulról félig folytonos függvények halmaza

Topologikus algebrai jelölések

$\|\cdot\|$	norma-függvény vektortér felett
$\|\cdot\|_p$	p-norma $\mathbb{K}^n$ felett
$\mathbf{l}^p_{\mathbb{K}}$	p-edik hatványon abszolút szummálható numerikus sorozatok halmaza

$\mathbf{l}^{\infty}_{\mathbb{K}}$		korlátos numerikus sorozatok halmaza
Exp		komplex exponenciális függvény
$D^k f$		k-ad rendű deriváltfüggvény
$d_{\Vert\cdot\Vert}$	25.1.	norma által meghatározott metrika
$d_{\vert\cdot\vert}$	25.1.	abszolútérték által meghatározott metrika
$\mathscr{L}(E;F)$	1.3.2.	folytonos lineáris operátorok halmaza
E'	1.3.2.	topologikus vektortér topologikus duálisa
E'^{*}		topologikus vektortér topologikus duálisának algebrai duálisa
$\mathscr{B}(E;F)$	5.3.1.	korlátos lineáris operátorok halmaza
$\mathscr{H}(\Omega;F)$	7.9.1.	holomorf függvények halmaza
E	1.9.3.	topologikus vektortér szeparált teljes burka
$[f = c]$	26.4	$\{x \in \mathrm{Dom}(f) \mid f(x) = c\}$
$[f = c]$	26.4	$\{x \in \mathrm{Dom}(f) \mid f(x) \neq c\}$
$[f > c]$	26.4	$\{x \in \mathrm{Dom}(f) \mid f(x) > c\}$
$[f \geq c]$	26.4	$\{x \in \mathrm{Dom}(f) \mid f(x) \geq c\}$
$[f < c]$	26.4	$\{x \in \mathrm{Dom}(f) \mid f(x) < c\}$
$[f \leq c]$	26.4	$\{x \in \mathrm{Dom}(f) \mid f(x) \leq c\}$
$\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} x_n$		sor
$\sum\limits_{n=0}^{\infty} x_n$		sor összege
$(\cdot \mid \cdot)$		skalárszorzás prehilbert-térben
$H^{\perp}$		halmaz ortogonális komplementere prehilbert-térben
$\mathscr{K}(T;F)$	3.9.	folytonos kompakt tartójú függvények vektortere
$\overline{\mathscr{K}}(T;F)$	28.2.4.	végtelenben eltűnő folytonos kompakt tartójú függvények vektortere
$C^{\infty}_0(\Omega;F)$	3.9.	kompakt tartójú végtelenszer differenciálható függvények vektortere
$C^{\infty}(\Omega;F)$	7.10.1	végtelenszer differenciálható függvények vektortere
$\mathbf{W}(V)$	5.6.1.	függvényhalmaz
$\mathscr{F}^b(T;F)$	5.6.1.	topologikusan korlátos függvények vektortere
$\mathscr{F}^b_{\mathfrak{S}}(T;F)$	5.7.1.	$\mathfrak{S}$-korlátos függvények vektortere
$\mathbf{W}(S,V)$	5.7.3.	függvényhalmaz
$\sigma(E,F)$	6.7.2.	gyenge topológia
$\tau(E,F)$	6.7.2.	a Mackey-topológia
$\beta(E,F)$	6.7.3.	erős topológia
u'	6.11.2.	gyengén folytonos lineáris operátor duálisa
E'_{β}	7.4.1.	erős duális
E''	7.4.1.	biduális
$\vert\vert\vert \cdot \vert\vert\vert_{E}$	28.2.3.	sup-norma az E halmazon

$\vert\vert\vert \cdot \vert\vert\vert$	28.2.3.	sup-norma az alaphalmazon
$\vert\vert\vert \cdot \vert\vert\vert_{K,p}$	7.10.1.	sup-norma p-edik deriváltig a K halmazon
$\int^* f\, d\mu$	9.3.1.	felső integrál
$\int_T^* f\, d\mu$	9.3.1.	felső integrál
$\mu^*(E)$	9.5.1.	halmaz külső mértéke
$\mathrm{supp}(\mu)$	10.1.2.	Radon-mérték tartója
ε_t	10.2.	egypontmérték
$\mathfrak{B}(T,\mu)$	9.6.2.	mérhető halmazok halmaza
$\mathfrak{B}(T,\mathfrak{m})$	30.2.2.	mérhető halmazok halmaza
$\mathscr{M}_+^1(T)$	10.3.	a valószínűségi Radon-mértékek halmaza
$\mathbf{b}(\mu)$	10.3.3.	valószínűségi Radon-mérték baricentruma
$\mathrm{gr}(f)$	10.4.1.	függvény grafikonja
$\mathrm{epigr}(f)$	10.4.1.	függvény epigráfja
$\mathrm{subgr}(f)$	10.4.1.	függvény szubgráfja
$A(K)$	11.2.5.	valós folytonos affin függvények halmaza
$A(K,E')$	12.1.1.	valós folytonos affin függvények halmaza
$S(K)$	12.1.1.	folytonos konvex függvények halmaza
$\preceq$	12.5.1.	Choquet-rendezés $\mathscr{M}_+^1(K)$ felett
$\prod_{i\in I}^* A_i$	14.1.	normált algebrák szorzata
$\mathscr{E}(\mathbb{C})$	13.1.	egészfüggvények algebrája
$\mathscr{L}(E)$	13.1.	folytonos lineáris operátorok algebrája
$\mathscr{L}(\mathscr{H})$	13.1.	Hilbert-tér folytonos lineáris operátorainak algebrája
$\mathscr{B}(E)$	13.1.	korlátos lineáris operátorok algebrája
$\mathscr{C}(E)$	13.1.	kompakt operátorok algebrája
$\rho(a)$	14.3.1.	spektrálsugár
f_A	14.7.2.	egészfüggvény Banach-algebra felett
Exp_A	14.7.4.	Banach-algebra exponenciális függvénye
$\Vert \cdot \Vert_{\mathrm{St}}$	17.5.7.	legnagyobb C^*-félnorma
$\mathfrak{m}_{\mathrm{St}}$	17.5.7.	legnagyobb C^*-félnorma magja
$(\mathrm{St}(A), j_{\mathrm{St}})$	17.5.7.	standard fedő C^*-algebra
C_a	18.4.3.	normális elem folytonosfüggvény-számító operátora
$\varphi_A(a)$	18.4.3.	normális elem folytonos függvény által létesített képe
C'_a	18.5.2.	normális elem folytonosfüggvény-számító operátora
$x^{\pm}$	19.1.1.	önadjungált elem pozitív/negatív része C^*-algebrában
x^{α}	19.1.1.	pozitív spektrumú elem α-adik hatványa C^*-algebrában
$\vert x\vert$	19.1.1.	önadjungált elem abszolút értéke C^*-algebrában
$(e_i)_{i\in I}$	19.3.1.	approximatív egység
$\vert a\vert$	19.4.1.	elem abszolút értéke C^*-algebrában

$\widehat{\bigoplus\limits_{i\in I}} \mathscr{H}_i$	20.2.2.	Hilbert-terek Hilbert-összege
$\widehat{\bigoplus\limits_{i\in I}} \pi_i$	20.2.3.	ábrázolások Hilbert-összege
$\Phi_{\pi,\zeta}$	20.4.1.	ábrázolás által meghatározott pozitív funkcionál
$(\cdot\|\cdot)_f$	20.5.3.	pozitív funkcionál által meghatározott skalárszorzás
$\\| \cdot \\|_f$	20.5.3.	pozitív funkcionál által meghatározott Hilbert-félnorma
$\\|f\\|_*$	20.6.1.	reguláris funkcionál *-normája
$\mathrm{K}(A)$	20.6.3	reguláris funkcionálok halmaza
$\mathrm{K}_r(A)$	20.6.3	ábrázolható funkcionálok halmaza
π_f	21.1.3	GNS-konstrukcióval meghatározott ábrázolás
$\mathscr{H}_f$	21.1.3	GNS-konstrukcióval meghatározott ábrázolás tere
ζ_f	21.1.3	GNS-konstrukcióval meghatározott ábrázolás ciklikus vektora
$\int\limits_{\mathrm{K}(A)} \pi_f \, d\mu(f)$	21.7.2.	ábrázolások Hilbert-integrálja
$\mathrm{E}(A)$	22.4.1.	állapotok halmaza
$P(A)$	22.4.1.	tiszta állapotok halmaza
$\mu^{\pm}$	22.4.4.	valós Radon-mérték pozitív/negatív része
$\mathscr{E}_{\mathbb{C}}(T,\mathscr{R})$	24.1.	komplex lépcsősfüggvények halmaza
$\mathscr{E}_{+}(T,\mathscr{R})$	24.1.	pozitív lépcsősfüggvények halmaza
$\mathscr{E}_{\mathbb{C}}(T,\mathscr{R})$	24.1.	komplex lépcsősfüggvényekkel egyenletesen approximálható függvények halmaza
$\mathscr{E}_{+}(T,\mathscr{R})$	24.1.	pozizív lépcsősfüggvényekkel egyenletesen approximálható függvények halmaza
$M(T,\mathscr{R})$	24.3.1.	korlátos komplex mértékek által generált integrálok halmaza
δ_t	24.3.2	Dirac-mérték
$\|\theta\|$	24.3.2.	komplex mérték abszolút értéke (teljes variációja)
$\mathfrak{M}(T,\mathfrak{m})$	30.2.2.	mérhető halmazok σ-algebrája