MŰEGYETEM 1782

TYPOTEX

Babcsányi István

ALGEBRAI AUTOMATAELMÉLET

2011

A jegyzet az automaták algebrai elméletének alapjait tárgyalja, rámutat a véges automaták és a formális nyelvek közötti kapcsolatokra. A munka hiánypótlónak számít, mert hasonló jellegű tankönyvet utoljára a korán elhunyt Peák István (1938-1989) publikált a hetvenes évek végén. Mondhatjuk, hogy a jegyzet III. és IV. része magyar területnek is tekinthető Gécseg Ferenc akadémikus és munkatársai munkássága alapján. A szerző saját eredményeit is felhasználva, több újdonságot tartalmaz az I., II. és főleg az V. rész is. Az eredmények és a bizonyítások mutatják az univerzális algebra ill. az absztrakt algebra (csoportelmélet, félcsoportelmélet, hálóelmélet) hatékony alkalmazhatóságát az automataelméletben.

A jegyzet matematikus és informatikus hallgatóknak (MSc, PhD) készült, de haszonnal forgathatják a téma iránt érdeklődő oktatók és kutatók is.

Kulcsszavak: Mealy automaták, Moore automaták, kimenő jel nélküli automaták, automaták kongruenciái, karakterisztikus félcsoport, automataleképezések, automaták ekvivalenciája, automaták szorzatai, Gluskov szorzat, automaták teljes rendszerei, Krohn–Rhodes tétel, erősen összefüggő automaták, egyszerű automaták, irányítható (szinkronizálható) automaták, reguláris nyelvek, nyelvfelismerő automaták, Kleene tétele.

Támogatás:
Készült a TÁMOP-4.1.2-08/2/A/KMR-2009-0028 számú, a „Természettudományos (matematika és fizika) képzés a műszaki és informatikai felsőoktatásban” című projekt keretében.

ÚJ SZÉCHENYI TERV

Készült:
a BME TTK Matematika Intézet gondozásában

Szakmai felelős vezető:
Ferenczi Miklós

Lektorálta:
Dömösi Pál

Az elektronikus kiadást előkészítette:
Busai Ágota

Címlap grafikai terve:
Csépány Gergely László, Tóth Norbert

ISBN: 978-963-279-461-7

Tartalomjegyzék

ELŐSZÓ

Automatán a mindennapi életben olyan rendszert szokás érteni, amely a külvilágból bizonyos ingereket (bemenő jeleket) kaphat, a bemenő jelek hatására megváltozhat az automata (belső) állapota, tulajdonsága. Az automata általában valamilyen módon válaszol (kimenő jelek) is ezekre a külső hatásokra. Ha a rendszert halmazelméleti fogalomnak tekintjük, akkor eljutunk az automata matematikai fogalmához. Ez lehetőséget ad arra, hogy az algebra eredményeit és szokásos vizsgálati módszereit az automaták szerkezeti vizsgálatára alkalmazzuk. Az automaták algebrai vizsgálata az 1950-es években kezdődött. Az automaták algebrai elmélete ma már az algebrának és a számítástudománynak egyaránt fontos önálló fejezete.

A hazai kutatások az 1960-as évek elején kezdődtek elsősorban Gécseg Ferenc és Peák István munkásságával. 1972-ben jelent meg máig is jól használható munkájuk, a [14] monográfia.

Mi az automatákat elsősorban, mint információátalakító illetve nyelvfelismerő rendszereket tanulmányozzuk. Megadjuk az automata matematikai, pontosabban algebrai modelljét. E modell segítségével absztrakt algebrai módszerekkel vizsgáljuk az automaták szerkezetét, más egyszerűbb automatákból való felépithetőségét. Megpróbáljuk az olvasót az automaták strukturális vizsgálatába bevezetni, de rá szeretnénk mutatni a v éges automaták és a nyelvek közötti kapcsolatokra is. Néhány speciális automataosztályt az V. részben részletesebben is vizsgálunk. Ez a rész a K77476 számú OTKA támogatásával készült.

A jegyzet a felsőbb éves és doktorandusz matematikus hallgatóknak több éven keresztül tartott *Automataelmélet* és *Nyelvek és automaták* előadások anyaga alapján készült.

A Függelékben a felhasznált halmazelméleti és algebrai fogalmakat és tételeket foglaltuk össze. A Tárgymutató ezeket az adatokat nem tartalmazza. A lineáris algebra, a számelmélet és a kombinatorika alapfogalmait és alapvető eredményeit azonban ismertnek tételezzük fel. Legtöbb fejezet végén feladatok is találhatók. A feladatokhoz megoldási útmutatót adunk. Sok esetben közöljük a teljes megoldást.

Hálás vagyok barátaimnak, Dömösi Pál egyetemi tanárnak lelkiismeretes lektori munkájáért és Nagy Attila egyetemi docensnek értékes észrevételeiért. Köszönettel tartozom Sági Gábor egyetemi docensnek a rajzok körültekintő elkészítéséért és Wettl Ferenc egyetemi docensnek LATEX tudásom fejlesztéséért, ami azt hiszem elég nagy fáradságot okozott neki. Végül köszönöm Busai Ágotának a jegyzet végső formájának kialakítását. Ő tette lehetővé, hogy számomra saját jegyzetem olvasása esztétikai élményt is jelent.

I. AUTOMATÁK

Az automaták algebrai vizsgálatának igénye már a fogalom kialakulásakor is természetes módon vetődött fel. Az automaták szerkezetének leírására hatékonynak bizonyultak az univerzális algebrai módszerek. Az olyan klasszikus algebrai fogalmak, mint a homomorfia, izomorfia, kongruencia, generátorrendszer, részstruktúra ill. olyan klasszikus algebrai struktúrák, mint a félcsoportok, csoportok, hálók jelentős szerepet játszottak az automaták algebrai elméletének kiépítésében. Az I. részben ennek az elméletnek az alapjait tárgyaljuk.

1. Az automata fogalma

Először megadjuk a Mealy automata fogalmát, amelyből specializálással további automatafogalmakat kapunk. Végül ezeket a fogalmakat szükséges módon általánosítjuk.

*Mealy automatá*nak vagy röviden *automatá*nak nevezünk minden olyan $\mathbf{A} = (A, X, Y, \delta, \lambda)$ rendszert, amely áll az A, X és Y halmazokból, valamint a $\delta : A \times X \to A$ és $\lambda : A \times X \to Y$ függvényekből. Az A, X és Y halmaz elemeit rendre az $\mathbf{A}$ automata *(belső) állapotai*nak, *bemenő jelei*nek és *kimenő jelei*nek mondjuk, magukat a halmazokat pedig $\mathbf{A}$ *állapothalmazá*nak, *bemenő halmazá*nak és *kimenő halmazá*nak, a δ és λ függvényeket pedig $\mathbf{A}$ *átmenetfüggvény*ének ill. *kimenetfüggvény*ének nevezzük. Adott X halmaz ill. X és Y halmazok esetén azt is mondjuk, hogy egy automata X *feletti* ill.(X, Y) *feletti*, ha bemenő halmaza X ill. bemenő halmaza X, a kimenő halmaza pedig Y egy részhalmaza.

Egy Mealy automata működését a következőképpen gondoljuk el. Ha az automata valamely időpillanatban az $a \in A$ állapotban van és ebben az időpillanatban az $x \in X$ bemenő jelet kapja, akkor ennek hatására átmegy a $\delta(a, x) \in A$ állapotba és közben kiadja a $\lambda(a, x) \in Y$ jelet. A továbbiakban azt is feltételezzük, hogy az automata diszkrét időskálában dolgozik, azaz csak meghatározott, egymástól elkülöníthető időpontokban kaphat bemenő jelet.

Ha az $\mathbf{A} = (A, X, Y, \delta, \lambda)$ Mealy automata átmenet- és kimenetfüggvénye minden (a, x) $(a \in A, x \in X)$ párra értelmezve van, akkor az automatát *teljesen definiált*nak, ellenkező esetben pedig *parciális*nak mondjuk. Ha $\delta(a, x)$ $(a \in A, x \in X)$ nincs értelmezve, akkor feltételezzük azt is, hogy $\lambda(a, x)$ sincs értelmezve. Néhány kivételtől eltekintve teljesen definiált automatákkal foglalkozunk, ezért a továbbiakban automata mindig teljesen definiált automatát jelent. Külön jelezzük, amikor parciális automatáról van szó.

Az X bemenő halmazról mindig feltesszük, hogy nem üres. Az $X = \emptyset$ esetben elképzelhetnénk az automata működését úgy, hogy ha az automata az $a \in A$ állapotban van, akkor egy meghatározott időpontban átmegy egy $b \in A$ állapotba, miközben kiad egy $y \in Y$ jelet, vagyis az átmenetfüggvényét $\delta : A \to A$, a kimenetfüggvényét pedig $\lambda : A \to Y$ alakban adnánk meg. Ez azonban azt jelentené, hogy az $\mathbf{A} = (A, \emptyset, Y, \delta, \lambda)$ automata helyett tekinthetnénk az $\mathbf{A}' = (A, \{x\}, Y, \delta', \lambda')$ automatát, ahol minden $a \in A$ állapotra $\delta'(a, x) = \delta(a)$ és a $\lambda'(a, x) = \lambda(a)$.

A λ kimenetfüggvényt minden esetben szürjektívnek tekintjük. Ez az utóbbi feltételezés csupán azt jelenti, hogy ne legyenek olyan kimenő jelek, amelyeket az automata nem adhat ki.

Az $\mathbf{A} = (A, X, Y, \delta, \lambda)$ Mealy automatát *Moore automatá*nak nevezzük, ha bármely $a \in A$ állapotra és $x_1, x_2 \in X$ bemenő jelekre

$$\lambda(a, x_1) = \lambda(a, x_2).$$

Ebben az esetben λ helyett tekinthetjük a

$$\mu(a) = \lambda(a, x) \quad (a \in A,\ x \in X)$$

feltétellel definiált $\mu : A \to Y$ szürjektív leképezést. A μ függvényt a Moore automata *jelfüggvény*ének nevezzük és Moore automatákra az $\mathbf{A} = (A, X, Y, \delta, \mu)$ jelölést használjuk.

Moore automata működését úgy képzeljük el, hogy ha az automata valamely időpillanatban az $a \in A$ állapotban van, akkor kiadja a $\mu(a)$ jelet, s ha ebben az időpillanatban az $x \in X$ bemenő jelet kapja, akkor átmegy a $\delta(a, x) \in A$ állapotba.

Ha az $\mathbf{A} = (A, X, Y, \delta, \lambda)$ Mealy automata teljesíti a

$$\delta(a_1, x_1) = \delta(a_2, x_2) \implies \lambda(a_1, x_1) = \lambda(a_2, x_2) \quad (a \in A,\ x_1, x_2 \in X) \tag{1.1}$$

*Moore kritérium*ot, akkor van olyan $\mu : R_\delta \to Y$ függvény, amelyre

$$\lambda(a, x) = \mu(\delta(a, x)) \quad (a \in A,\ x \in X), \tag{1.2}$$

ahol $R_\delta = \{\delta(a, x); a \in A, x \in X\}$. Ha az automatát a $\mathbf{A}_\mu = (A, X, Y, \delta, \mu)$ alakban, vagyis a λ kimenetfüggvény helyett a μ jelfüggvény segítségével adjuk meg, akkor olyan parciális Moore automatához jutunk, amely csak annyiban különbözik az eredeti Mealy automatától, hogy a jeleket késleltetve adja ki. Ezt a Moore automatát az (1.1) feltételt kielégítő $\mathbf{A}$ *Mealy automatához tartozó Moore automatá*nak nevezzük.

Megfordítva, ha $\mathbf{A} = (A, X, Y, \delta, \mu)$ tetszőleges Moore automata, akkor a $\lambda = \mu\delta$ függvényt kimenetfüggvénynek tekintve, a Moore kritériumnak eleget tevő

$$\mathbf{A}_\lambda = (A, X, R_\lambda, \delta, \lambda)$$

Mealy automatához jutunk, ahol $R_\lambda = \{\lambda(a, x); a \in A, x \in X\}$ Az $\mathbf{A}_\lambda$ Mealy automatát az $\mathbf{A}$ *Moore automatához tartozó Mealy automatá*nak nevezzük. A $\lambda = \mu\delta$ függvényt az $\mathbf{A}$ *Moore automata kimenetfüggvényének* is mondjuk.

Az egyszerűbb tárgyalás miatt szükségünk lesz az üres automata ($\emptyset$) fogalmára. *Üres automatá*nak nevezzük azt az automatát, amelynek állapothalmaza az üres halmaz. Ebben az esetben a bemenő halmaz tetszőlegesen választható, a kimenő halmaz üres, átmenet- és kimenetfüggvény pedig nincs értelmezve. (Ez azt is jelenti, hogy egyetlen üres automata van.) Ha külön nem említjük, akkor a jegyzetben automatán mindig nemüres automatát értünk.

Ha az Y kimenő halmaz üres, s így a λ kimenetfüggvény nincs értelmezve, akkor az automatát *kimenő jel nélküli automatá*nak nevezzük, amelynek a jelölése $\mathbf{A} = (A, X, \delta)$. Természetesen a kimenő jel nélküli automata felfogható olyan automataként is, amely mindig az üres jelet bocsátja ki. (Az üres jelet a későbbiekben *üres szó*nak is nevezzük.) Ezért, ha egy automatának egyetlen kimenő jele van, akkor kimenő jel nélküli automatának is tekinthető. Így a kimenő jeles automaták esetében a kimenő halmazról feltesszük, hogy legalább kételemű halmaz. Az $\mathbf{A} = (A, X, \delta)$ kimenő jel nélküli automata tekinthető olyan $\mathbf{A} = (A, X, Y, \delta, \lambda)$ Mealy automatának is, amelyre $\lambda = \delta$ teljesül. Ebben a felfogásban $Y = R_\delta$. Ha mást nem mondunk, akkor Mealy automatákra feltételezzük, hogy $\lambda \neq \delta$. Az $\mathbf{A} = (A, X, \delta)$ kimenő jel nélküli automata felfogható az $\mathbf{A} = (A, X, Y, \delta, \mu)$ Moore automataként is, ahol $\mu = \iota_A$. Ebből következik, hogy $Y = A$. Ha Moore automatáról beszélünk és mást nem mondunk, akkor mindig feltesszük, hogy $\mu \neq \iota_A$. Az $\mathbf{A} = (A, X, \delta)$ kimenő jel nélküli automatát olyan $\mathbf{A} = (A, X, Y, \delta, \lambda)$ Mealy automatának is tekinthető, amelyre $Y = A \times X$ és $\lambda = \iota_{A\times X}$. Ebben a felfogásban egy (a, x) kimenő jel az automata $a \in A$ állapotának és $x \in X$ bemenő jelének kijelölését jelenti. Ennek a felfogásnak a hasznát az automaták szuperpozíciójánál 13. fejezet) látjuk majd.

Az $\mathbf{A} = (A, X, Y, \delta, \lambda)$ Mealy automatát *redukált bemenetű*nek nevezzük, ha nincsenek un. *felesleges bemenő jelek*, vagyis minden $a \in A$ állapotra, ha $\delta(a, x_1) = \delta(a, x_2)$ és $\lambda(a, x_1) = \lambda(a, x_2)$, akkor $x_1 = x_2$. Redukált bemenetű Moore vagy kimenő jel nélküli automata esetén definíciójában a második összefüggés természetesen nem szerepel.

Sok esetben nem vizsgáljuk az $\mathbf{A}$ Mealy automata kimeneti viselkedését, ezért az Y kimenő halmazt és a λ kimenetfüggvényt elhagyhatjuk. Igy az $\mathbf{A}_v = (A, X, \delta)$ kimenő jel nélküli automatát kapjuk, amelyet az $\mathbf{A}$ Mealy automata *vetület*ének vagy *projekciójá*nak hívunk. Megegyezünk abban, hogy azokat a fogalmakat, amelyekben az automata kimeneti viselkedése nem játszik szerepet az egyszerűség kedvéért csak kimenő jel nélküli automatákra adjuk meg. Ezeket a fogalmakat Mealy [Moore] automatákra vetületükkel definiáljuk. Ebben az esetben a tételeket is kimenő jel nélküli automatákra mondjuk ki. Igy például a következő fogalmak is Mealy [Moore] automatákra a vetületük segítségével adhatók meg.

Az $\mathbf{A} = (A, X, \delta)$ automatát *teljes beállító automatá*nak nevezzük, ha bármely $a, b \in A$ és $x \in X$ esetén $\delta(a, x) = \delta(b, x)$ teljesül. Az $\mathbf{A}$ automatát *autonóm*nak hívjuk, ha bármely $a \in A$ és $x_1, x_2 \in X$ esetén $\delta(a, x_1) = \delta(a, x_2)$. (Speciálisan minden egy bemenő jeles automata autonóm.)

Az $\mathbf{A} = (A, X, Y, \delta, \lambda)$ $(Y \neq \emptyset)$ Mealy automatához egy másik kimenő jel nélküli automatát is rendelünk, amely leírja az automata kimeneti viselkedését is. Az $\mathbf{A}$ Mealy automata *vázá*n azt az $\mathbf{A}_Y = (A \times Y, X, \delta_Y)$ kimenő jel nélküli automatát értjük, amelyre δ_Y-t minden $(a, y) \in A \times Y,\ x \in X$ esetén az

$$\delta_Y((a, y), x) = (\delta(a, x), \lambda(a, x)) \tag{1.3}$$

egyenlőséggel definiáljuk.

Az $\mathbf{A} = (A, X, Y, \delta, \lambda)$ automatát *iniciális automatá*nak nevezzük, ha az A állapothalmazának valamely a_0 állapotát kijelöljük. Ekkor az $\mathbf{A} = (A, a_0, X, Y, \delta, \lambda)$ vagy a $(\mathbf{A}, a_0)$ jelölést használjuk. A kijelölt a_0 állapotot az $\mathbf{A}$ automata *kezdő állapotá*nak vagy *iniciális állapotá*nak mondjuk és megállapodunk abban, hogy az automata működése kezdetén ebben az állapotban van. Előfordul, hogy több kezdő állapotot is kijelölünk, vagyis megadjuk az állapothalmaz egy nemüres valódi A_0 részhalmazát. Ebben az esetben a $\mathbf{A} = (A, A_0, X, Y, \delta, \lambda)$ vagy a $(\mathbf{A}, A_0)$ jelölést használjuk és úgy tekintjük, hogy az automata működése kezdetén valamelyik kezdő állapotban van. (Ha $A_0 = A$, akkor minden állapot lehet kezdő állapot.)

Egy automatát *A-véges*nek mondunk, ha állapothalmaza véges, és *véges*nek, ha minden hozzá tartozó halmaz véges. Hasonlóan beszélhetünk *X-véges*, *Y-véges*, *XY-véges* és *AY-véges* automatákról is. Az AX-véges automaták a véges automaták, mivel ebben az esetben az automata véges sok kimenő jelet képes kibocsátani. Az egyállapotú automatákat *triviális auto-*

matáknak is nevezzük. Nyilvánvaló, hogy minden A-véges redukált bemenetű kimenő jel nélküli automata véges.

Az $\mathbf{A} = (A, X, Y, \delta, \lambda)$ véges Mealy automata *átmenet-kimenettáblázatán* olyan téglalap alakú táblázatot értünk, amelynek sorait $\mathbf{A}$ bemenő jeleivel, oszlopait pedig $\mathbf{A}$ állapotaival jelöljük meg. Az $x \in X$ bemenő jellel megjelölt sor és az $a \in A$ állapottal megjelölt oszlop metszetébe a $(\delta(a, x), \lambda(a, x))$ rendezett párt írjuk:

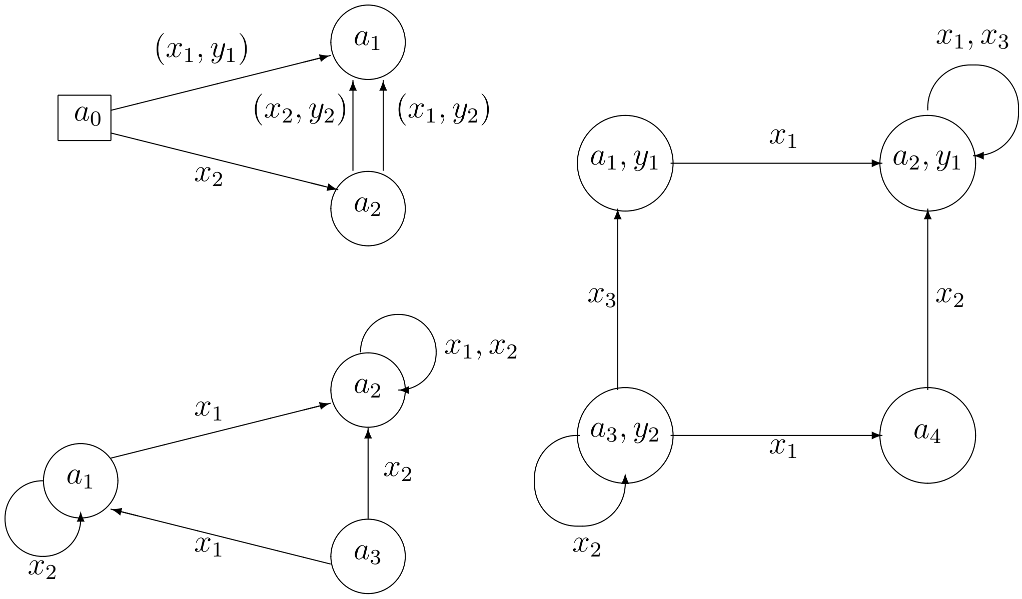
$$
\begin{array}{c|ccc}
A & & a & \\
\hline
 & & \vdots & \\
x & \cdots & (\delta(a,x), \lambda(a,x)) & \cdots \\
 & & \vdots &
\end{array}
$$

Megállapodunk abban, hogy ha az automata iniciális, akkor az oszlopok megjelölését a kezdő állapotokkal kezdjük. Az $\mathbf{A} = (A, X, Y, \delta, \mu)$ Moore automata átmenettáblázata (bal oldali táblázat) abban különbözik az előző táblázattól, hogy az x-szel jelölt sor és az a-val jelölt oszlop metszetében csak a $\delta(a, x)$ állapot áll és az a állapot fölé a $\mu(a)$ kimenő jel kerül. E táblázatokból értelemszerűen adódik a kimenő jel nélküli automata *átmenettáblázata* (jobb oldali tábla):

$$
\begin{array}{c|ccc}
 & & \mu(a) & \\
\cline{2-4}
\mathbf{A} & & a & \\
\hline
 & & \vdots & \\
x & \cdots & \delta(a,x) & \cdots \\
 & & \vdots &
\end{array}
\qquad
\begin{array}{c|ccc}
\mathbf{A} & & a & \\
\hline
 & & \vdots & \\
x & \cdots & \delta(a,x) & \cdots \\
 & & \vdots &
\end{array}
$$

Parciális automaták esetén a táblázatokban azokat a helyeket nem töltjük ki, ahol az egyes függvények nincsenek értelmezve.

A véges automaták működését megadhatjuk irányított gráffal is. Az $\mathbf{A} = (A, X, Y, \delta, \lambda)$ Mealy automata *átmenet-kimenetgráfján* azt az irányított gráfot értjük, amelynek kis körökkel ábrázolt csúcsait megjelöljük az automata állapotaival. Az $a \in A$ állapottal megjelölt csúcsból akkor és csak akkor vezet a $b \in A$ állapottal megjelölt csúcsba az (x, y) rendezett párral megjelölt irányított él, ha az $x \in X$ bemenő jel hatására az automata az a állapotból átmegy a b állapotba, miközben kiadja az y jelet, azaz $\delta(a, x) = b$ és $\lambda(a, x) = y$. Parciális automata esetén előfordulhat, hogy nem minden x bemenő jelre vezet az a állapottal megjelölt csúcsból valamilyen (x, y) rendezett párral megjelölt irányított él egy másik csúcsba. Az is lehet, hogy az irányított él csak az x bemenő jellel van megjelölve. Ez azt jelenti, hogy az automata nem ad ki jelet ennél az átmenetnél. Megállapodunk abban, hogy iniciális automata kezdő állapotait kör helyett egy kis négyzet ábrázolja. Az $\mathbf{A} = (A, X, Y, \delta, \mu)$ Moore automata átmenet-kimenetgráfja az előbbi gráftól annyiban tér el, hogy az $a \in A$ állapot $\mu(a)$ jelét az a-val megjelölt csúcshoz írjuk. Az a-val megjelölt csúcsból, röviden a-ból, akkor és csak akkor vezet $x \in X$ bemenő jellel megjelölt irányított él b-be, ha $\delta(a, x) = b$. Ezek alapján nyilvánvalóan adódik egy kimenő jel nélküli automata *átmenetgráfja*. Az 1. ábrán egy Mealy, Moore ill. kimenő jel nélküli automata gráfja látható.



1. ábra

Ha egy automatát vizsgálunk, akkor általában nem egyetlen bemenő jelre adott reakciójára vagyunk kíváncsiak, hanem az automata időbeli működésének leírására, azaz hogy miként reagál időpontok egymásutánjaiban vele közölt jelsorozatra.

Legyen $\mathbf{A} = (A, X, Y, \delta, \lambda)$ tetszőleges Mealy automata. Az X^* és Y^* szabad monoidokat $\mathbf{A}$ *bemenő félcsoport*jának ill. *kimenő félcsoport*jának, elemeiket pedig $\mathbf{A}$ *bemenő szavai*nak ill. ill. *kimenő szavai*nak fogjuk mondani.

A δ és λ függvények értelmezését kiterjesztjük a következő módon. Az egyszerűség kedvéért a függvényeket a kiterjesztés után is δ ill. λ jelöli. Legyenek

$$\delta : A \times X^* \to A^+ \quad \text{és} \quad \lambda : A \times X^* \to Y^*$$

olyanok, hogy tetszőleges $a \in A$ állapotra és az e üres szóra teljesüljenek

$$\delta(a, e) = a \quad \text{és} \quad \lambda(a, e) = e, \tag{1.4}$$

feltételek, továbbá tetszőleges $p = x_1x_2 \dots x_k \quad (x_1, \dots, x_k \in X)$ bemenő szó esetén legyen

$$\delta(a, p) = a_1a_2 \dots a_k \quad \text{és} \quad \lambda(a, p) = y_1y_2 \dots y_k, \tag{1.5}$$

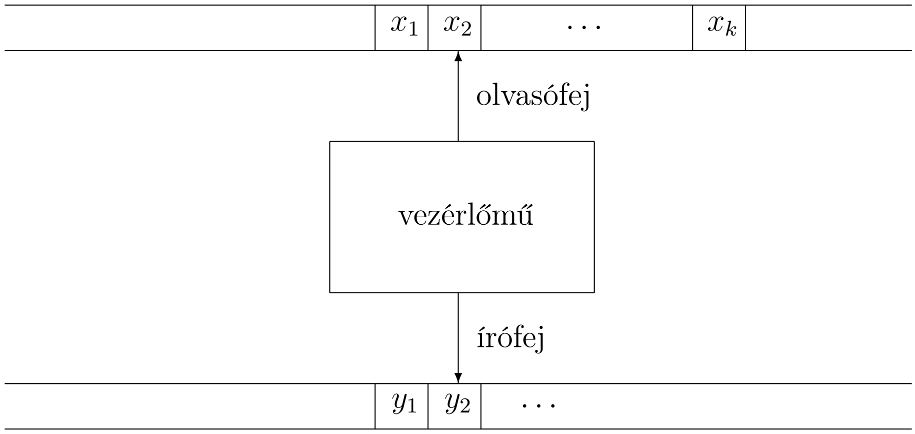
ahol

$$a_1 = \delta(a, x_1),\ a_2 = \delta(a_1, x_2),\ \dots,\ a_k = \delta(a_{k-1}, x_k),$$

$$y_1 = \lambda(a, x_1),\ y_2 = \lambda(a_1, x_2),\ \dots,\ y_k = \lambda(a_{k-1}, x_k).$$

A Mealy automata átmenetfüggvényének és kimenetfüggvényének ez a kiterjesztése azt mutatja, hogy ha az automata nem kap bemenő jelet, vagyis az üres szót kapja, akkor állapotát nem változtatja meg és nem ad ki jelet, azaz az üres szót adja ki. Ha pedig egy k jelből álló jelsorozatot kap, akkor ennek hatására ugyancsak k jelből álló jelsorozatot bocsát ki. Az automata úgy működik, hogy a bemenő szó jeleit balról jobbra egymásután „olvassa el”, állapotok egy sorozatán megy keresztül és közben a kimenő jeleket is egymásután adja ki. E tulajdonság alapján azt mondjuk, hogy az automata *szekvenciális működésű gép*. Ezt a 2. ábra alapján szemléletesen például úgy képzelhetjük el, hogy az automatának (vezérlőműnek) van egy olvasófeje és egy írófeje. Az olvasófej előtt egy rekeszekre osztott szalag (bemenő szalag) mozog. A bemenő szalag egyes rekeszeibe legfeljebb egy betű írható. A szalagra sorra rá vannak írva a bemenő szó betűi. Az automata az olvasófej segítségével egymás után beolvassa a szó betűit, a leolvasás ütemében állapotok sorozatán megy át, s ebben az ütemben az állapotátmenetekkel vezérli az írófejet, az írófej az előtte mozgó másik szalagra (kimenő szalag) kiírja a megfelelő szót.

A definícióban szereplő $a_1, a_2, \dots, a_{k-1}$ állapotokat az $a, \underline{a_1, a_2, \dots} a_{k-1}, a_k$ állapotsorozat *közbülső állapotai*nak is nevezzük, az $a_k = \overline{\delta(a, p)}$ állapotra pedig az $(ap)_\mathbf{A}$ jelölést is használjuk. Ha nem vezet ellentmondásra, azaz csak egy automatát vizsgálunk, akkor $(ap)_\mathbf{A}$-t helyett a rövidebben ap jelölést használjuk.Így minden $a \in A$ állapotra és $x \in X$ bemenő jelre $\delta(a, x)$ helyett ax is írható. A $\delta(a, p)$ és az ap kifejezések között tehát az a különbség, hogy az előbbi feltünteti az egész állapotváltozás „útját”, az utóbbi viszont nem tartalmazza a közbülső állapotokat. Ez alapján mondjuk azt, hogy $\delta(a, p)$ *az a állapotból az ap állapotba vezető út.* Megemlítjük, hogy szokásos a $\delta(a, p) = ap$ $(a \in A,\ p \in X^*)$ feltétellel megadott $\delta : A \times X^* \to A$ kiterjesztés is. Ha az $a, b \in A$ állapotokhoz van olyan $p \in X^*$ bemenő szó, amelyre $b = ap$ teljesül, akkor azt mondjuk, hogy *a b állapot (a p szóval) elérhető az a állapotból.* Ha pedig $a \in A$ állapotra és a $p \in X^*$ bemenő szóra



2. ábra

az ap állapot létezik, akkor azt mondjuk, hogy *az automata az a állapotban elfogadja az p bemenő szót.*

A (1.5) formulákat sokszor az alábbi egyszerűbben kezelhető ekvivalens alakban adjuk meg:

Bármely $a \in A,\ p, q \in X^+$ esetén teljesüljenek a

$$\delta(a, pq) = \delta(a, p)\delta(ap, q), \quad \lambda(a, pq) = \lambda(a, p)\lambda(ap, q), \tag{1.6}$$

feltételek.

Ha az $\mathbf{A} = (A, X, Y, \delta, \mu)$ Moore automata esetében a δ átmenetfüggvény kiterjesztését a Mealy automatákra megismert módon végezzük el, μ jelfüggvény értelmezését pedig homomorf módon terjesztjük ki az A^+ szabad félcsoportra, vagyis úgy, hogy minden $a_1 \dots a_k \in A^+$ állapotsorozatra

$$\mu(a_1 \dots a_k) = \mu(a_1) \dots \mu(a_k) \tag{1.7}$$

teljesüljön, akkor $\lambda = \mu\delta$ kimenetfüggvénnyel megadott $\mathbf{A}_\lambda = (A, X, Y, \delta, \lambda)$ Mealy automata kimenetfüggvényének is az (1.5)-ben megadott kiterjesztését kapjuk. Ez részletesebben azt jelenti, hogy minden $a \in A$ állapotra és $p \in X^+$ bemenő szóra

$$\lambda(a, e) = e \quad \text{és} \quad \lambda(a, p) = \mu(\delta(a, p)) \tag{1.8}$$

teljesül. A λ átmenetfüggvény értelmezését az $A \times X^*$ halmazra Moore automaták esetén nem lehet úgy kiterjeszteni, hogy minden $a \in A$ állapotra és $p \in X^*$ bemenő szóra $\lambda(a,p) = \mu(\delta(a,p))$ igaz legyen. Ebben az esetben ugyanis azt kapnánk, hogy

$$\lambda(a,e) = \mu(\delta(a,e)) = \mu(a),$$

azaz az automata az a állapotában bár nem kap bemenő jelet, mégis kiadja a $\mu(a)$ jelet. Ez pedig a λ (1.4) kiterjesztése miatt nem lehetséges.

Az $\mathbf{A} = (A, X, Y, \delta, \lambda)$ Mealy automata *hatványautomatájá*nak nevezzük a $\mathbf{P}(\mathbf{A})^+ = (P(A)^+, X, P'(Y), \delta', \lambda')$ Mealy automatát, ha $P(A)$ az A hatványhalmaza, $P(A)^+ = P(A) - \emptyset$ és $P'(Y)$ az Y $P(Y)$ hatványhalmazának részhalmaza, valamint minden $A' \in P(A)^+$ és $x \in X$ esetén

$$\delta'(A', x) = \{\delta(a,x); a \in A'\}, \quad \lambda'(A', x) = \{\lambda(a,x); a \in A'\}. \tag{1.9}$$

Ha $\mathbf{A} = (A, X, Y, \delta, \mu)$ Moore automata, akkor a

$$\mathbf{P}(\mathbf{A})^+ = (P(A)^+, X, P'(Y), \delta', \mu')$$

hatványautomatára

$$\delta'(A', x) = \{\delta(a,x); a \in A'\}, \quad \mu'(A') = \{\mu(a); a \in A'\} \tag{1.10}$$

feltételek teljesülnek. Ha $\mathbf{A}$ kimenő jel nélküli automata, akkor természetesen a második feltétel hiányzik. Ha az automata parciális, akkor előfordulhat, hogy $\delta'(A', x), \lambda'(A', x)$ vagy a $\mu'(A')$ halmaz $A' \neq \emptyset$ esetben is üres. Ezért *parciális automata hatványautomatájá*nak a $\mathbf{P}(\mathbf{A}) = (P(A), X, P'(Y), \delta', \lambda')$ automatát tekintjük az (**??**eq:1.9) ill. az (1.10) definíciókkal. Ez azt jelenti, hogy minden $x \in X$ bemenő jelre

$$\delta'(\emptyset, x) = \lambda'(\emptyset, x) = \mu'(\emptyset) = \emptyset.$$

Az egyszerűség kedvéért sokszor $P(A)$ és $P(Y)$ egyelemű részhalmazait azonosítjuk az elemükkel. Ha a δ' és λ' függvények értelmezését (1.4) és (1.5) szerint kiterjesztjük a $P(A) \times X^*$ szorzathalmazra, akkor nem nehéz belátni, hogy minden $A' \in P(A)$ és $p \in X^*$ esetén

$$\delta'(A', p) = \{\delta(a,p); a \in A'\}, \quad \lambda'(A', p) = \{\lambda(a,p); a \in A'\}, \tag{1.11}$$

s így

$$A'p = \{ap; a \in A'\}, \quad \overline{\lambda'(A', p)} = \{\overline{\lambda(a,p)}; a \in A'\}. \tag{1.12}$$

Az eddigi automaták mind olyanok, hogy ha egy adott állapotban egy adott bemenő jelet elfogadnak, akkor egyértelműen megmondható, hogy melyik állapotba mennek át, s ha adnak ki kimenő jelet, akkor melyiket. Az ilyen automatákat *determinisztikus automaták*nak nevezzük. Szükségünk lesz azonban a következőkben leírt nemdeterminisztikus automatákra is.

Az $\mathbf{A} = (A, X, Y, \delta, \lambda)$ *nemdeterminisztikus Mealy automata* fogalmát a determinisztikus Mealy automata fogalmából úgy kapjuk, hogy a δ átmenetfüggvény és a λ kimenetfüggvény értelmezését módosítjuk, mégpedig legyenek

$$\delta : A \times X \to P(A), \quad \lambda : A \times X \to P(Y) \tag{1.13}$$

alakúak. Látható, hogy egy determinisztikus $\mathbf{A} = (A, X, Y, \delta, \lambda)$ Mealy automata olyan nemdeterminisztikus Mealy automatának tekinthető, amelyben minden $a \in A$ és $x \in X$ esetén

$$|\delta(a, x)| \le 1, \quad |\lambda(a, x)| \le 1 \tag{1.14}$$

Az $\mathbf{A} = (A, X, Y, \delta, \mu)$ *nemdeterminisztikus Moore automata* annyiban különbözik egy nemdeterminisztikus Mealy automatától, hogy a $\lambda : A \times X \to P(Y)$ kimenetfüggvény helyett az

$$\mu : A \to P(Y) \tag{1.15}$$

jelfüggvény szerepel. Egy *nemdeterminisztikus kimenő jel nélküli automata* olyan nemdeterminisztikus Mealy vagy Moore automata, amelynek kimenő halmaza üres, s így a kimenet- vagy jelfüggvény nincs definiálva. A nemdeterminisztikus automatákat is inicializálhatjuk, azaz kijelölhetünk kezdő állapotot vagy kezdő állapotoknak egy halmazát.

Mivel alapvetően a determinisztikus automatákat tanulmányozzuk, ezért a továbbiakban automatán mindig determinisztikus automatát értünk, és jelezük, ha nemdeterminisztikus automatáról lesz szó. Minden nemdeterminisztikus $\mathbf{A} = (A, X, Y, \delta, \lambda)$ Mealy automata felfogható a teljesen definiált determinisztikus $\mathbf{A} = (P(A), X, P'(Y), \delta, \lambda)$ $(P'(Y) \subseteq P(Y))$ Mealy automataként is, amelyben, ha $A' \in P(A), |A'| \ne 1$ és $x \in X$, akkor

$$\delta(A', x) = \lambda(A', x) = \emptyset.$$

Hasonlóan minden nemdeterminisztikus Moore és kimenő jel nélküli automata tekinthető teljesen definiáltnak és determinisztikusnak.

A teljesen definiált nemdeterminisztikus automata működése annyiban különbözik a teljesen definiált determinisztikus automata működésétől, hogy ha az automata az $a \in A$ állapotban az $x \in X$ bemenő jelet kapja, akkor valamelyik $\delta(a, x)$-beli állapotba megy át és kiad egy $\lambda(a, x)$-beli jelet. A parciális nemdeterminisztikus automata pedig lehet olyan a állapotban, amelyben nem fogad el minden bemenő jelet, vagy ha minden bemenő jelet el is fogad, előfordulhat olyan x bemenő jel, hogy miközben az automata átmegy a $\delta(a, x)$ állapotok egyikébe, nem ad kimenő jelet.

Nemdeterminisztikus automata átmenet-kimenetgráfja olyan, hogy egy csúcsból több olyan irányított él is vezethet csúcsokba, amelyeket megjelölő rendezett párok első vagy második tagja megegyezik.

Definiáljuk az $\mathbf{A} = (A, X, Y, \delta, \lambda)$ nemdeterminisztikus Mealy automata $\mathbf{P}(\mathbf{A}) = (P(A), X, P'(Y), \delta', \lambda')$ hatványautomatáját is. A δ' átmenetfüggvényt és a λ' kimenetfüggvényt minden $A' \in P(A)$ és $x \in X$ esetén a

$$\delta'(A', x) = \cup_{a \in A'} \delta(a, x), \quad \lambda'(A', x) = \cup_{a \in A'} \lambda(a, x) \tag{1.16}$$

összefüggésekkel adjuk meg. Sokszor egy nemdeterminisztikus automatát a hatványautomatájával adunk meg, amely teljesen definiált és determinisztikus. Ha $\mathbf{A}$ iniciális és kezdő állapotainak halmaza A_0, akkor $\mathbf{P}(\mathbf{A})$-t is iniciálisnak tekintjük, mégpedig A_0 kezdő állapottal. A nemdeterminisztikus Moore automata ill. kimenő jel nélküli automata hatványautomatájának definícióját ezek alapján könnyen megadhatjuk. A δ' és λ' függvények értelmezését, ha nem mondunk mást, akkor a következő módon terjesztjük ki a $P(A) \times X^*$ halmaz azon részhalmazára, ahol ez lehetséges: Legyen minden $a \in A$ állapotra

$$\delta'(a, e) = a, \quad \lambda'(a, e) = e, \tag{1.17}$$

ahol e az üres szó. Tetszőleges $a \in A, x \in X$ és $p \in X^*$ esetén pedig

$$\delta'(a, px) = \cup_{b \in \delta'(a,p)} \delta'(b, x), \quad \lambda'(a, px) = \cup_{b \in \delta'(a,p)} \lambda'(b, x). \tag{1.18}$$

Végül, ha $A' \in P(A)$ és $p \in X^*$, akkor legyen

$$\delta'(A', p) = \cup_{a \in A'} \delta'(a, p), \quad \lambda'(A', p) = \cup_{a \in A'} \lambda'(a, p). \tag{1.19}$$

Nem nehéz belátni, hogy determinisztikus esetben ez a kiterjesztés azt mutatja meg, hogy egy p bemenő szó hatására, ha ezt elfogadja, valamely a állapotból melyik állapotba megy át az automata és ha ad ki jeleket, akkor melyik jelet adja ki utoljára, azaz $\delta'(a, p) = ap$ és $\lambda'(a, p) = \overline{\lambda(a, p)}$. Megmutatható, hogy ez a kiterjesztés nemdeterminisztikus esetben is ezt jelenti. Ha az $\mathbf{A}$ nemdeterminisztikus automata az $a \in A$ állapotban van és a $p \in X^*$ bemenő szót elfogadja, akkor $\delta'(a, p)$ az a állapotból a p szóval elérhető állapotok halmaza és $\lambda(a, p)$ a p szó hatására az automata által kibocsátható jelsorozatok utolsó betűinek halmaza.

A δ' és λ' függvények értelmezését a $P(A) \times X^*$ szorzathalmaz azon részhalmazára, ahol ez lehetséges, úgy is ki lehet terjeszteni, amely megmutatja, hogy a bemenő jelsorozatokra hatására az automata állapok milyen sorozatain mehet át és milyen jelsorozatokat adhat ki. Erre a kiterjesztésre azonban nem lesz szükségünk, ezért ezzel nem foglalkozunk.

Az $\mathbf{A} = (A, X, \delta)$ nemdeterminisztikus automata *duálisá*nak nevezzük az $\mathbf{A}_d = (A, X, \delta_d)$ nemdeterminisztikus automatát, ha minden $a, b \in A, x \in X$ esetén

$$b \in \delta_d(a, x) \quad \Longleftrightarrow \quad a \in \delta(b, x). \tag{1.20}$$

Megemlítjük, hogy a hatványautomata fogalmát következőképpen általánosíthatjuk. Például az $\mathbf{A} = (A, X, Y, \delta, \lambda)$ Mealy automata *általánosított hatványautomatájá*nak nevezzük a $\mathbf{P}(\mathbf{A})' = (P(A)^+, P(X)^+, P'(Y), \delta', \lambda')$ Mealy automatát, ha $P(A)$ és $P(X)$ az A ill. X hatványhalmaza, $P(A)^+ = P(A) - \emptyset$ $P(X)^+ = P(X) - \emptyset$ és $P'(Y)$ az Y $P(Y)$ hatványhalmazának részhalmaza, valamint minden $A' \in P(A)^+$ és $X' \in P(X)^+$ esetén

$$\delta'(A', X') = \{\delta(a, x); a \in A', x \in X'\},$$

$$\lambda'(A', X') = \{\lambda(a, x); a \in A', x \in X'\}. \tag{1.21}$$

Ez alapján más típusú automaták esetén is könnyen megadható ez a fogalom.

A teljesség kedvéért megadjuk még a sztochasztikus automata fogalmát is, bár ebben a munkában sztochasztikus automatákkal nem foglalkozunk. Jelölje $[0, 1]$ a $0 \leq r \leq 1$ valós számok halmazát. Az $\mathbf{A} = (A, X, Y, \nu)$ rendszert *sztochasztikus automatá*nak nevezzük, ha

$$\nu : A \times X \times A \times Y \to [0, 1],$$

továbbá minden $a \in A$ állapotra és $x \in X$ bemenő jelre

$$\sum_{b \in A, y \in Y} \nu(a, x, b, y) = 1.$$

Ez azt jelenti, hogy ha az automata az a állapotban van és az x bemenő jelet kapja, akkor $\nu(a, x, b, y)$ valószínűséggel megy át a b állapotba és adja ki az y jelet.

Az $\mathbf{A}$ sztochasztikus automatát *iniciális*nak nevezzük és ebben az esetben az $\mathbf{A} = (A, \kappa, X, Y, \nu)$ jelölést használjuk, ha adott egy $\kappa : A \to [0, 1]$ függvény, amelyre

$$\sum_{b \in A} \kappa(b) = 1.$$

Ezt úgy értelmezzük, hogy egy $b \in A$ állapot $\kappa(b)$ valószínűséggel lesz kezdő állapota az automatának. Ha minden $a, b \in A$, $x \in X$ és $y \in Y$ esetén

$$\nu(a, x, b, y) = \left(\sum_{y' \in Y} \nu(a, x, b, y') \right) \left(\sum_{b' \in A} \nu(a, x, b', y) \right),$$

akkor **A**-t *sztochasztikus Mealy automatá*nak hívjuk. Az **A** sztochasztikus Mealy automatát *sztochasztikus Moore automatá*nak mondjuk, ha bármely $a \in A$ állapotra, $x_1, x_2 \in X$ bemenő jelekre és $y \in Y$ kimenő jelre

$$\sum_{b' \in A} \nu(a, x_1, b', y) = \sum_{b' \in A} \nu(a, x_2, b', y).$$

Az $\mathbf{A} = (A, X, \nu)$ rendszert *sztochasztikus kimenő jel nélküli automatá*nak nevezzük, ha

$$\nu : A \times X \times A \to [0, 1]$$

és minden $a \in A$, $x \in X$ párra

$$\sum_{b \in A} \nu(a, x, b) = 1.$$

Megemlítjük még a lineáris automata fogalmát, bár ezekkel az automatákkal sem foglalkozunk. Az $\mathbf{A} = (A, X, Y, \delta, \lambda)$ Mealy automatát *lineáris Mealy automatá*nak nevezzük, ha A, X, Y egy T test feletti vektorterek, a δ és λ függvények pedig lineáris leképezések. Hasonlóan beszélhetünk *lineáris Moore automatá*ról vagy *lineáris kimenő jel nélküli automatá*ról is.

Megjegyezzük, hogy a Mealy automatákhoz hasonlóan a különböző típusú automatákat, ha nem vezet félreértésre, sokszor röviden csak *automatá*knak nevezzük.

2. Generátorrendszer, részautomata

Azt mondjuk, hogy egy $B \subseteq A$ halmaz az $\mathbf{A} = (A, X, \delta)$ kimenő jel nélküli automata *generátorrendszer*e, ha minden $a \in A$ állapothoz van olyan $b \in B$ és $p \in X^*$, hogy $a = bp$. Mealy [Moore] automata generátorrendszerén vetületének generátorrendszerét értjük. A definíció szerint az automata állapothalmaza mindig generátorrendszere az automatának. A B generátorrendszert **A** *minimális generátorrendszeré*nek nevezzük, ha **A**-nak nincs olyan generátorrendszere, amely valódi részhalmaza B-nek. Az **A** automatát *minimálisan (végesen) generálható*nak nevezzük, ha van minimális (véges) generátorrendszere és *ciklikus*nak ha létezik egyelemű generátorrendszere, röviden *generátoreleme*. Egy iniciális automatát akkor mondunk *iniciálisan összefüggő*nek ha valamely kezdő állapota generátoreleme az automatának. Ez azt jelenti, hogy minden iniciálisan összefüggő automata ciklikus. Egy automatát *erősen összefüggő*nek nevezünk, ha minden állapota generátoreleme az automatának, azaz, ha átmenetgráfja erősen összefüggő. Azt mondjuk, hogy az

$\mathbf{A} = (A, X, \delta)$ automata *irányítottan összefüggő*, ha bármely $a, b \in A$ állapotpárhoz van olyan $p \in X^*$, hogy $ap = b$ vagy $bp = a$, azaz ha az automata átmenetgráfja összefüggő. Minden ciklikus, s így minden erősen összefüggő automata irányítottan összefüggő.

2.1. TÉTEL
Bármely automata minden minimális generátorrendszere egyenlő számosságú.

Bizonyítás. Először megjegyezzük, hogy ha G az $\mathbf{A} = (A, X, \delta)$ automata minimális generátorrendszere, akkor bármely $a \in A$ és $p \in X^*$ esetén $a, ap \in G$ akkor és csak akkor, ha $ap = a$. Ha ugyanis $ap \neq a$ teljesülne, akkor $G - \{ap\}$ is generátorendszer lenne. Legyenek G_1 és G_2 az $\mathbf{A}$ automata minimális generátorrendszerei. Minthogy G_1 az $\mathbf{A}$ automata generátorrendszere, ezért minden $b \in G_2$ állapothoz van olyan $a \in G_1$ állapot és olyan $p \in X^*$ bemenő szó, amelyekre $ap = b$. Jelölje G_{12} ezeknek az a állapotoknak a halmazát. Mivel G_2 az $\mathbf{A}$ automata generátorrendszere, így G_{12} is az. De $G_{12} \subseteq G_1$ és G_1 minimális generátorrendszer, ezért $G_{12} = G_1$. Ez azt jelenti, hogy minden $a \in G_1$ állapothoz van olyan $p \in X^*$, amelyre $ap \in G_2$. A G_1 és G_2 szerepét felcserélve kapjuk, hogy minden $a \in G_1$ állapothoz van olyan $b \in G_2$ állapot és $q \in X^*$ bemenő szó, hogy $bq = a$, és minden G_2-beli b-hez van olyan $q \in X^*$, hogy $bq \in G_1$. Definiáljuk a $\varphi \subseteq G_1 \times G_2$ megfeleltetést a következő módon:

$$(a, b) \in \varphi \iff (\exists p \in X^*)(ap = b).$$

Megmutatjuk, hogy φ G_1 bijektív leképezése G_2-re, ami azt jelenti, hogy $|G_1| = |G_2|$. Ha az $a \in G_1$ és $b, b' \in G_2$ állapotokra $(a, b), (a, b') \in \varphi$, akkor vannak olyan $p, p' \in X^*$ bemenő szavak, hogy $ap = b$ és $ap' = b'$. Az előző meggondolások szerint valamilyen $q \in X^*$ esetén $apq = bq \in G_1$, s így $a = bq$. Amiből $b' = ap' = bqp'$. De G_2 is minimális generátorrendszer, ezért $b' = b$. Ha az $a, a' \in G_1$ és $b \in G_2$ állapotokra $(a, b), (a', b) \in \varphi$, akkor vannak olyan $p, p' \in X^*$ bemenő szavak, amelyekre $ap = a'p' = b$. Van olyan $q \in X^*$, hogy $bq \in G_1$, azaz

$$apq = a'p'q = bq \in G_1.$$

Mivel G_1 minimális generátorrendszer, ezért $a = bq = a'$. Így φ valóban G_1 bijektív leképezése G_2-re. □

Felhívjuk a figyelmet arra, hogy a tétel csak azt állítja, hogy ha egy automatának vannak minimális generátorrendszerei, akkor azok mind egyenlő számosságúak. A következő egyszerű példa mutatja, hogy nem minden automatának van minimális generátorrendszere. Jelölje Z az egész számok halmazát. Legyen $X = \{x\}$ és minden $n \in Z$ egész számra $\delta(n, x) = n + 1$.

Könnyen belátható, hogy a $\mathbf{Z} = (Z, X, \delta)$ automatának nincs minimális generátorrendszere. Ha ugyanis $B(\subseteq Z)$ a $\mathbf{Z}$ automata egy generátorrendszere és $n \in B$, akkor van olyan $m < n(m \in Z)$, hogy $m \in B$. De $mx^{n-m} = n$, ezért $B - \{n\}$ is generátorrendszere $\mathbf{Z}$-nek. Egy automatát *minimálisan generálható*nak nevezzük, ha van minimális generátorrrendszere. Minden A-véges automata minimálisan generálható.

A következő meggondolásokból egy eljárás kapható minimálisan generálható automaták, például A-véges automaták minimális generátorrendszereinek szerkesztésére. Tetszőleges $\mathbf{A} = (A, X, \delta)$ automatára definiáljuk a $\kappa_A \subseteq A \times A$ relációt az alábbi módon:

$$(a, b) \in \kappa_A \iff (\exists p, q \in X^*)(b = ap,\ a = bq). \tag{2.1}$$

A κ_A relációt a *kölcsönös elérhetőség relációjá*nak nevezzük. Könnyen belátható, hogy κ_A ekvivalencia az A állapothalmazon. Jelölje $\kappa_A[a]$ az $a \in A$ állapotot tartalmazó κ_A-osztályt. Vezessük be az

$$A/\kappa_A = \{\kappa_A[a];\ a \in A\}$$

faktorhalmazon a $\leq$ részbenrendezést a következőképpen:

$$\kappa_A[a] \leq \kappa_A[b] \iff (\exists p \in X^*)(ap = b). \tag{2.2}$$

Nem nehéz belátni, hogy ez valóban a A/κ_A halmaz egy részbenrendezése. Gondoljuk meg, hogy az $\mathbf{A}$ automatának akkor és csak akkor van minimális generátorrendszere, ha a (2.2) részbenrendezés mellett A/κ_A bármely $\kappa_A[a]$ eleméhez A/κ_A-nak van olyan $\kappa_A[b]$ minimális eleme, hogy $\kappa_A[b] \leq \kappa_A[a]$. Nevezzük el ezeket a minimális elemeket minimális κ_A-osztályoknak. Tegyük fel, hogy $\mathbf{A}$-nak van minimális generátorrendszere. A minimális κ_A-osztályok segítségével meg is adhatjuk $\mathbf{A}$ minimális generátorrendszereit. Az $\mathbf{A}$ automata B generátorrendszere akkor és csak akkor minimális, ha minden minimális κ_A-osztálynak pontosan egy elemét tartalmazza, s más elemeket nem tartalmaz.

Az $\mathbf{A}' = (A', X, Y', \delta', \lambda')$ automatát az $\mathbf{A} = (A, X, Y, \delta, \lambda)$ automata *részautomatá*jának, nevezzük, ha $A' \subseteq A$, $Y' \subseteq Y$, a δ' és λ' függvények pedig a δ ill. λ függvények szűkítései a $A' \times X$ halmazra, Y' pedig λ' értékkészlete. Ha nem vezet ellentmondásra, akkor δ'-t és λ'-t is egyszerűen δ-val ill. λ-val jelöljük. Hasonlóan beszélhetünk Moore és kimenő jel nélküli automaták részautomatáiról is. Az $\mathbf{A}$ automata egy fontos részautomatája az $\mathbf{A}_1 = (A_1, X, Y_1, \delta_1, \lambda_1)$ automata, ahol $A_1 = R_\delta$ Ezt az automatát az $\mathbf{A}$ *automata értékkészleté*nek nevezzük.

Egy $\mathbf{A} = (A, X, \delta)$ automata részautomatáinak $Sub(\mathbf{A})$ halmaza a $\cup$ és $\cap$ műveletekre teljes háló, ahol $\mathbf{A}$ bármely $\mathbf{A}_1 = (A_1, X, \delta)$ és $\mathbf{A}_2 = (A_2, X, \delta)$ részautomatája esetén legyen

$$\mathbf{A}_1 \cup \mathbf{A}_2 = (A_1 \cup A_2, X, \delta) \quad \mathbf{A}_1 \cap \mathbf{A}_2 = (A_1 \cap A_2, X, \delta). \tag{2.3}$$

A $Sub\mathbf{A}$ háló legkisebb eleme az üres automata és a legnagyobb eleme pedig $\mathbf{A}$. A $Sub(\mathbf{A})$ hálót az $\mathbf{A}$ *részautomatahálójá*nak nevezzük. Ha $Sub(\mathbf{A})$-t részbenrendezett halmazként adjuk meg, akkor a $\subseteq$ részbenrendezést az

$$\mathbf{A}_1 \subseteq \mathbf{A}_2 \quad \Longleftrightarrow \quad A_1 \subseteq A_2 \quad (\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2 \in Sub(\mathbf{A})) \tag{2.4}$$

feltétellel definiáljuk.

Az $\mathbf{A}_i = (A_i, X, Y, \delta_i, \lambda_i)$ $(i \in I)$ közös bemenő és kimenő halmazú automaták *egyesítésé*nek nevezzük az $\mathbf{A} = (A, X, Y, \delta, \lambda)$ automatát, ha $A = \cup_{i \in I} A_i$, továbbá minden $a_i \in A_i$ állapotra és $x \in X$ bemenő jelre

$$\delta(a_i, x) = \delta_i(a_i, x) \quad \text{és} \quad \lambda(a_i, x) = \lambda_i(a_i, x) \tag{2.5}$$

teljesül. Ebben az esetben $\mathbf{A}$-ra a $\cup_{i \in I} \mathbf{A}_i$ jelölést is használjuk. Azt is mondjuk, hogy $\mathbf{A}$ *lefedhető* az $\{A_i;\ i \in I\}$ automatákkal. Az $\mathbf{A} = \cup_{i \in I} \mathbf{A}_i$ *lefedés*t *minimális*nak mondjuk, ha nincs olyan $I' \subset I$, amelyre $\mathbf{A} = \cup_{i \in I'} \mathbf{A}_i$ teljesülne.

Ha az $\{A_i;\ i \in I\}$ halmazrendszer páronként diszjunkt, akkor az $\cup_{i \in I} \mathbf{A}_i$ automata létezik, amelyet az $\mathbf{A}_i$ automaták *direkt összegé*nek nevezzük, s rá a

$$\bigoplus_{i \in I} \mathbf{A}_i$$

jelölést használjuk. Az $\mathbf{A}_i$ automatákat a *direkt összeg tagjai*nak mondjuk. Minden automata önmagának egytagú direkt összege.

Az $\mathbf{A} = (A, X, \delta)$ automata $c \in A$ állapotát az automata *csapdá*jának nevezzük, ha minden $x \in X$ bemenő jelre teljesül a $\delta(c, x) = c$ összefüggés. Ez nyilvánvalóan ekvivalens azzal, hogy az automatának van olyan részautomatája, amelynek egyetlen állapota van. Az egyállapotú részautomatákat is *csapdá*nak mondjuk. Jelölje $Cs(A)$ az $\mathbf{A}$ automata csapdáinak halmazát. Ha az $\mathbf{A}$ automatának van csapdája, akkor *csapdás automatá*nak, ha n csapdája van, akkor *n-csapdás automatá*nak, ha pedig minden állapota csapda, azaz $Cs(A) = A$, akkor *diszkrét automatá*nak hívjuk. A $\mathbf{Cs}(\mathbf{A}) = (Cs(A), X, \delta)$ automata $\mathbf{A}$ diszkrét részautomatája. A $\mathbf{Cs}(\mathbf{A})$ automatát a $\mathbf{A}$ *diszkrét részé*nek is nevezzük. Egy $\mathbf{A} = (A, X, \delta)$ automata c csapdáját az $\mathbf{A}$ *adjungált csapdájá*nak mondjuk, ha $\mathbf{A}' = (A - \{c\}, X, \delta)$ az $\mathbf{A}$-nak részautomatája. Például az $\emptyset$ egy parciális automata hatványautomatájának adjungált csapdája.

Bármely $\mathbf{A} = (A, X, \delta)$ automata tekinthető olyan $\mathbf{B} = (B, X, \delta')$ automata részautomatájának, amely diszkrét részének állapothalmaza nemüres és tetszőleges számosságú. Vegyünk ugyanis tetszőleges olyan $\mathbf{D} = (D, X, \delta'')$ diszkrét automatát, amelyre $A \cap D = \emptyset$, és legyen $\mathbf{B}$ a $\mathbf{A}$ és a $\mathbf{D}$ automata direkt összege. Ebben az esetben azt mondjuk, hogy $\mathbf{A}$-hoz *csapdákat adjungáltunk*. Az $\mathbf{A} = (A, X, \delta)$ egycsapdás automatát, amelyben $c \in A$ a csapda, *erősen csapda-összefüggő*nek hívjuk, ha bármely $a \in A - \{c\}$ és $b \in A$ állapotpárhoz van olyan $p \in X^*$, hogy $ap = b$.

Legyen $B \subseteq A$ és jelölje $[B]$ azoknak az $a \in A$ állapotoknak a halmazát, amelyekhez van olyan $b \in B$ és $p \in X^*$, hogy $a = bp$. Ha $B = \{b\}$, akkor $[B]$ helyett egyszerűen $[b]$-t írunk. A $[\mathbf{B}] = ([B], X, Y', \delta, \lambda)$ automatát az $\mathbf{A}$ automata $\mathbf{B}$ *által generált részautomatá*jának nevezzük. Ha $B = \{b\}$, akkor azt mondjuk, hogy $[\mathbf{b}]$ az $\mathbf{A}$ b által generált ciklikus részautomatája. Bármely $\mathbf{A}$ automatára $\mathbf{A} = \cup_{a \in A}[\mathbf{a}]$, azaz minden automata lefedhető ciklikus automatákkal.

A definíciók alapján azonnal belátható az alábbi egyszerű tétel.

2.2. Tétel
Egy automata akkor és csak akkor erősen összefüggő, ha nincs valódi részautomatája. Egycsapdás automata akkor és csak akkor erősen csapda-összefüggő, ha nincs legalább kétállapotú valódi részautomatája.

Az $\mathbf{A} = (A, X, \delta)$ automata $a \in A$ állapotát az automata *reverzibilis állapot*ának nevezzük, ha bármely $p \in X^*$ bemenő szóhoz van olyan $q \in X^*$ bemenő szó, amelyekre $apq = a$ teljesül. Jelölje $\mathbf{A}$ reverzibilis állapotainak halmazát $Rev(A)$. Az automatát *reverzibilis*nek mondjuk, ha $Rev(A) = A$.

2.3. Következmény
A $\mathbf{Rev}(\mathbf{A}) = (Rev(A), X, \delta)$ rendszer az $\mathbf{A} = (A, X, \delta)$ automata reverzibilis részautomatája.

Bizonyítás. Az üres automata nyilvánvalóan reverzibilis. Tegyük fel, hogy $Rev(A) \neq \emptyset$. Ha $a \in Rev(A)$ és $x \in X$, akkor minden $p \in X^*$ bemenő szóhoz van olyan $q \in X^*$ bemenő szó, hogy $a(xp)q = a$. Ebből következik, hogy $(ax)p(qx) = ax$, azaz $\delta(a, x) = ax \in Rev(A)$. Ez azt jelenti, hogy $\mathbf{Rev}(\mathbf{A})$ részautomatája $\mathbf{A}$-nak. □

A $\mathbf{Rev}(\mathbf{A})$ automatát az $\mathbf{A}$ *reverzibilis részé*nek nevezzük. (A $Rev(A) = \emptyset$ esetben az $\mathbf{A}$ reverzibilis része az üres automata.)

2.4. Tétel
Egy automata akkor és csak akkor reverzibilis, ha erősen összefüggő automaták direkt összege.

A tétel bizonyítását, annak egyszerűsége miatt, elhagyjuk. Minden reverzibilis automata minimálisan generálható. Reverzibilis automata minimális generátorrendszerei az állapothalmazának azok a részhalmazai, amelyek az automata minden erősen összefüggő részautomatájának pontosan egy állapotát tartalmazzák.

A későbbiekben szükségünk lesz a részautomata fogalom következő általánosítására is. Az $\mathbf{A}' = (A', X', Y', \delta', \lambda')$ automatát az $\mathbf{A} = (A, X, Y, \delta, \lambda)$ automata *AX-részautomatá*jának nevezzük, ha $A' \subseteq A$, $X' \subseteq X$, $Y' \subseteq Y$, a δ' és λ' függvények pedig a δ ill. λ függvények szűkítései a $A' \times X'$ halmazra, Y' pedig λ' értékkészlete. Ha nem vezet ellentmondásra, akkor δ'-t és λ'-t is δ-val ill. λ-val jelöljük. A Moore és a kimenő jel nélküli automaták AX-részautomatáit hasonlóan definiálhatjuk. Az $\mathbf{A}'$ *valódi AX-részautomatája* $\mathbf{A}$-nak, ha az A' és X' halmazok közül legalább az egyik valódi részhalmaza $\mathbf{A}$ megfelelő halmazának. A definíció alapján nyilvánvaló, hogy az üres automata minden automatának AX-részautomatája.

Ha $X' = X$, akkor az $\mathbf{A}'$ automata az $\mathbf{A}$ automata már definiált részautomatája. Ha pedig $A' = A$, akkor $\mathbf{A}'$-t az $\mathbf{A}$ automata *X-részautomatá*jának mondjuk. Ha $X' \neq \emptyset$ az X bemenő halmaz egy nemüres részhalmaza, akkor $(A, X', Y', \delta, \lambda)$ az $\mathbf{A}$ automata egy X-részautomatája. Ha egy automata bemenő jelei közül töröljük a felesleges bemenő jeleket, akkor az automata egy redukált bemenetű X-részautomatájához jutunk. Ezt az X-részautomatát *az automatához tartozó redukált bemenetű automatá*nak nevezzük.

Feladatok

2.1. A $B \subseteq A$ halmazt az $\mathbf{A} = (A, X, Y, \delta, \lambda)$ Mealy automata *kimeneti generátorrendszeré*nek nevezzük, ha minden $y \in Y$ kimenő jelhez van olyan $b \in B$ és $p \in X^+$, hogy y a $\lambda(b, p)$ kimenő szó utolsó betűje. Ha $B \subseteq A$ halmaz $\mathbf{A}$ egy generátorrendszere, akkor B kimeneti generátorrendszere is $\mathbf{A}$-nak. (→ Megoldás)

2.2. Ha B egy [minimális] kimeneti generátorrendszere az $\mathbf{A} = (A, X, Y, \delta, \lambda)$ Mealy automatának, akkor $\mathbf{A}$-nak van olyan részautomatája, amelynek B egy [minimális] generátorrendszere. (→ Megoldás)

2.3. A 2.1. Tétel igaz-e Mealy automaták minimális kimeneti generátorrendszereire? (→ Megoldás)

2.4. Igaz-e az, hogy Mealy automata minimális generátorrendszere minimális kimeneti generátorrendszere is az automatának? (→ Megoldás)

3. Homomorfizmus, izomorfizmus

A gyakorlatban sokszor mondjuk azt, hogy bizonyos automaták ugyanúgy vagy hasonlóan működnek. Ebben a fejezetben ezeknek a hétköznapi fogalmaknak algebrai megfelelőivel foglalkozunk.

Legyen $\mathbf{A} = (A, X, \delta)$ tetszőleges kimenő jel nélküli automata. Definiáljuk minden $x \in X$ bemenő jelhez a $\delta_x : A \to A$ leképezést az alábbi módon:

$$\forall a \in A : \delta_x(a) = \delta(a, x). \tag{3.1}$$

Az $\mathbf{A}$ automata tekinthető az (A, F) unér algebrának is, ahol az egyváltozós műveletek F halmaza egyenlő a (3.1) transzformációk halmazával.

Adjuk meg az $\mathbf{A} = (A, X, \delta)$ és $\mathbf{A}' = (A', X, \delta')$ közös bemenő halmazú, kimenő jel nélküli automatákat a (3.1) műveletek segítségével (A, F) ill. (A', F') unér algebraként. Legyen α az (A, F) unér algebra homomorf leképezése az (A', F') unér algebrába, azaz minden $a \in A$ és $x \in X$ esetén teljesüljön a

$$\alpha(\delta_x(a)) = \delta'_x(\alpha(a)) \tag{3.2}$$

feltétel. A (3.2) feltétel minden $a \in A$ állapotra és $x \in X$ bemenő jelre az

$$\alpha(\delta(a, x)) = \delta'(\alpha(a), x) \tag{3.3}$$

ekvivalens alakba is írható. Ez az átírás módot ad az algebrai struktúrák elméletében alapvető fontosságú homomorfia és izomorfia fogalmak automatákra való megadására. Így lehetővé válik, hogy automatákat algebrai módszerekkel vizsgáljunk. Bár nem hangsúlyoztuk, de olyan fontos algebrai fogalmakat, mint generátorrendszer vagy részalgebra, már az előző fejezetben is definiáltunk automatákra. Például az $\mathbf{A} = (A, X, \delta)$ automata részautomatái megegyeznek az (A, F) unér algebra részalgebráival.

Ezek után megadjuk Mealy és Moore automatákra a homomorfizmus és az izomorfizmus fogalmát. Legyenek $\mathbf{A} = (A, X, Y, \delta, \lambda[\mu])$ és $\mathbf{A}' = (A', X, Y, \delta', \lambda'[\mu'])$ tetszőleges Mealy [Moore] automaták. Azt mondjuk, hogy az $\alpha : A \to A'$ leképezés az $\mathbf{A}$ *automatának az* $\mathbf{A}'$ *automatába való homomorfizmusa* vagy *homomorf leképezése*, ha minden $a \in A$, $x \in X$ párra

$$\alpha(\delta(a, x)) = \delta'(\alpha(a), x), \tag{3.4}$$

$$\lambda(a,x)=\lambda'(\alpha(a),x) \quad [\mu(a)=\mu'(\alpha(a))]. \tag{3.5}$$

Ebben az esetben azt is mondjuk, hogy $\mathbf{A}$ *homomorfan beágyazható az* $\mathbf{A}'$ *automatába*. Ha még α szürjektív is, akkor azt mondjuk, hogy az $\mathbf{A}'$ automata az $\mathbf{A}$ automata *homomorf képe*, aminek a jelölése: $\mathbf{A}\sim\mathbf{A}'$. Két automata hasonló működése az automataelméletben azt jelenti, hogy az egyik automata homomorf képe a másik automatának.

Ha α injektív, akkor a α-t $\mathbf{A}$-*nak* $\mathbf{A}'$-*be való izomorfizmusá*nak vagy *izomorf leképezésé*nek nevezzük. Ezt úgy is mondjuk, hogy $\mathbf{A}$ *izomorfan beágyazható* $\mathbf{A}'$-*be*. Ha emellett még α szürjektív, akkor azt mondjuk, hogy az $\mathbf{A}'$ automata az $\mathbf{A}$ automata *izomorf képe*, aminek a jelölése: $\mathbf{A}\simeq\mathbf{A}'$. Az izomorf automaták felelnek meg az automataelméletben annak a kijelentésnek, hogy az automaták ugyanúgy működnek. Ha egy homomorfizmus nem izomorfizmus, akkor *valódi homomorfizmus*nak nevezzük.

A $\sim$ homomorfia reláció reflexív és tranzitív, az $\simeq$ izomorfia reláció pedig ekvivalencia. Az automaták algebrai elméletében is használjuk az algebrából ismert *izomorfiaelv*et, azaz izomorf automatákat algebrai szempontból nem tekintünk különbözőknek, hiszen lényegében azonos viselkedésűek, csak a hozzájuk tartozó halmazok elemeinek jelölésében térnek el egymástól. Bizonyos vizsgálatokban azonban, így például automata izomorf részautomatái esetében, az izomorfiaelvet nem célszerű alkalmazni.

Automaták valamely homomorfizmusát *iniciális homomorfizmus*nak nevezzük, ha kezdő állapot homomorf képe is kezdő állapot.

A $\mathbf{B}=(B,X',Y',\delta',\lambda')$ *automata homomorfan reprezentálható az* $\mathbf{A}=(A,X,Y,\delta,\lambda)$ *automatával*, ha $\mathbf{B}$ az $\mathbf{A}$ automata egy részautomatájának homomorf képe. Úgy is mondjuk, hogy $\mathbf{A}$ *homomorfan reprezentálja* $\mathbf{B}$-t vagy $\mathbf{A}$ *a* $\mathbf{B}$ *egy homomorf reprezentációja*. Ha $\mathbf{B}$ az $\mathbf{A}$ automata egy részautomatájával izomorf, akkor azt mondjuk, hogy $\mathbf{B}$ *izomorfan reprezentálható* $\mathbf{A}$ *-val* vagy $\mathbf{A}$ *izomorfan reprezentálja* $\mathbf{B}$-t vagy $\mathbf{A}$ *az* $\mathbf{B}$ *egy izomorf reprezentációja*. Ez pontosan azt jelenti, hogy $\mathbf{B}$ izomorfan beágyazható $\mathbf{A}$-ba.

Ha $\mathbf{A}$ homomorfan [izomorfan] reprezentálható $\mathbf{A}'$-vel és $\mathbf{A}'$ homomorfan [izomorfan] reprezentálható $\mathbf{A}''$-vel, akkor $\mathbf{A}$ homomorfan [izomorfan] reprezentálható $\mathbf{A}''$-vel, azaz a homomorf [izomorf] reprezentáció tranzitív.

3.1. Tétel
Moore automata bármely homomorfizmusa a hozzá tartozó Mealy automata egy homomomorfizmusa.

Bizonyítás. Legyen α az $\mathbf{A}=(A,X,Y,\delta,\mu)$ Moore automata homomorf leképezése az $\mathbf{A}'=(A',X,Y,\delta',\mu')$ Moore automatába. Definiáljuk az $\mathbf{A}$ és $\mathbf{A}'$ Moore automaták λ ill. λ' kimenetfüggvényeit (1.2) szerint. Akkor bármely

$a \in A$ és $x \in X$ párra

$$\lambda(a,x) = \mu(\delta(a,x)) = \mu'(\alpha(\delta(a,x))) =$$
$$= \mu'(\delta'(\alpha(a),x)) = \lambda'(\alpha(a),x).$$

□

Ha egy Mealy automata nem teljesíti az (1.1) Moore kritériumot, akkor egyetlen homomorf képe sem teljesíti azt. A Moore kritériumot teljesítő Mealy automaták izomorf képei is teljesítik a Moore kritériumot. Ez azonban nem igaz általában a homomorf képekre. A (3.4) és a (3.5) egyenlőségek teljesülését ellenőrizve láthatjuk, hogy az

$\mathbf{A}'$	1	2	3
x_1	$(2, y_1)$	$(1, y_1)$	$(1, y_1)$
x_2	$(2, y_2)$	$(3, y_1)$	$(2, y_2)$

automata az

$\mathbf{A}$	a	b	c	d
x_1	(b, y_1)	(a, y_1)	(d, y_1)	(a, y_1)
x_2	(c, y_2)	(d, y_1)	(d, y_1)	(c, y_2)

automatának homomorf képe, mégpedig az

$$\alpha(a) = 1, \quad \alpha(b) = \alpha(c) = 2, \quad \alpha(d) = 3$$

összefüggésekkel definiált α leképezés $\mathbf{A}$-nak $\mathbf{A}'$-re való homomorfizmusa. Észrevehetjük azt is, hogy $\mathbf{A}$ eleget tesz az (1.1) Moore kritériumnak, $\mathbf{A}'$ viszont nem.

Ha az $\mathbf{A}' = (A', X, Y', \delta', \lambda')$ Mealy automata az $\mathbf{A} = (A, X, Y, \delta, \mu)$ Moore automatához tartozó $\mathbf{A}_\lambda$ Mealy automata homomorf képe, akkor azt mondjuk, hogy az $\mathbf{A}'$ *Mealy automata az* $\mathbf{A}$ *Moore automata homomorf képe.* Megmutatjuk, hogy minden Mealy automatához van olyan Moore automata, amelynek a Mealy automata homomorf képe, azaz hasonlóan működik, mint az adott Mealy automata.

Legyen $\mathbf{A} = (A, X, Y, \delta, \lambda)$ tetszőleges Mealy automata és $\mathbf{A}_Y = (A \times Y, X, \delta_Y)$ az $\mathbf{A}$ automata (1.3)-ban definiált váza. Az $\mathbf{A}_Y$ kimenő jel nélküli automatát lássuk el az Y kimenő halmazzal és azzal a λ_Y kimenetfüggvénnyel, amelyre

$$\lambda_Y((a,y),x) = \lambda(a,x) \quad (a \in A,\ y \in Y,\ x \in X) \tag{3.6}$$

teljesül. Jelölje az így kapott Mealy automatát $\mathbf{A}_{\lambda_Y}$. Legyen $\mathcal{M}(\mathbf{A})$ az $\mathbf{A}_{\lambda_Y}$ Mealy automata azon $\mathbf{M} = (M, X, Y, \delta_Y, \lambda_Y)$ részautomatáinak halmaza, amelyekre minden $a \in A$ állapot-hoz létezik $y \in Y$, amelyre $(a, y) \in M$. A definícióból látható, hogy $\mathbf{A}_{\lambda_Y} \in \mathcal{M}(\mathbf{A})$.

3.2. Tétel
Bármely $\mathbf{A}$ Mealy automatára minden $\mathbf{B} \in \mathcal{M}(\mathbf{A})$ teljesíti a Moore kritériumot. Az $\mathbf{A}$ Mealy automata akkor és csak akkor homomorf képe a $\mathbf{B}$ Moore automatának, ha $\mathbf{B}$-nek van $\mathcal{M}(\mathbf{A})$-beli homomorf képe.

Bizonyítás. Először megmutatjuk, hogy bármely $\mathbf{M} \in \mathcal{M}(\mathbf{A})$ is teljesíti a Moore kritériumot. Legyenek $(a_1, y_1), (a_2, y_2) \in M$ és

$$\delta_Y((a_1, y_1), x_1) = \delta_Y((a_2, y_2), x_2).$$

Akkor (1.3) szerint

$$(\delta(a_1, x_1), \lambda(a_1, x_1)) = (\delta(a_2, x_2), \lambda(a_2, x_2)),$$

azaz

$$\lambda_Y((a_1, y_1), x_1) = \lambda(a_1, x_1) = \lambda(a_2, x_2) = \lambda_Y((a_2, y_2), x_2).$$

Ez (1.1) szerint azt jelenti, hogy $\mathbf{M}$ teljesíti a Moore kritériumot.

Nem nehéz megmutatni, hogy a $\varphi(a, y) = a \quad ((a, y) \in M)$ leképezés $\mathbf{M}$ homomorf leképezése az $\mathbf{A}$ automatára.

Legyen $\mathbf{B} = (B, X, Y, \delta_B, \mu_B)$ $(\mu_B \neq \iota_B)$ egy Moore automata és $\lambda_B = \mu_B \delta_B$ a $\mathbf{B}$ kimenetfüggvénye. Ha $\mathbf{B}$-nek van $\mathcal{M}(\mathbf{A})$-beli homomorf képe, akkor az előzőek szerint $\mathbf{A}$ a $\mathbf{B}$ automata homomorf képe.

Megfordítva, tegyük fel, hogy φ a $\mathbf{B}_{\lambda_B} = (B, X, Y, \delta_B, \lambda_B)$ automatának $\mathbf{A}$-ra való homomorfizmusa. Ha $M = \{(\varphi(b), \mu_B(b)); b \in B\}$, akkor $\mathbf{M} = (M, X, Y, \delta_Y, \lambda_Y)$ egy $\mathcal{M}(\mathbf{A})$-beli automata. Megmutatjuk, hogy a

$$\psi(b) = (\varphi(b), \mu_B(b)) \quad (b \in B)$$

megfeleltetés $\mathbf{B}_{\lambda_B}$-nak $\mathbf{M}$-re való homomorf leképezése. A ψ megfeleltetés nyilvánvalóan B-nek M-re való leképezése. Legyenek $b \in B$ és $x \in X$ tetszőlegesek. Akkor

$$\psi(\delta_B(b, x)) = (\varphi(\delta_B(b, x)), \mu_B(\delta_B(b, x))) = (\delta(\varphi(b), x), \lambda_B(b, x)) =$$

$$= (\delta(\varphi(b), x), \lambda(\varphi(b), x)) = \delta_Y((\varphi(b), \mu_B(b)), x) = \delta_Y(\psi(b), x),$$

$$\lambda_B(b, x) = \lambda(\varphi(b), x) = \lambda_Y((\varphi(b), \mu_B(b)), x) = \lambda_Y(\psi(b), x),$$

azaz ψ homomorfizmus. $\square$

Az $\mathbf{A}_{\lambda_Y}$ Mealy automata helyett megadhatjuk azt az

$$\mathbf{A}_{\mu_Y} = (A \times Y, X, Y, \delta_Y, \mu_Y)$$

Moore automatát, amely $\mu_Y : A \times Y \to Y$ jelfüggvénye teljesíti a

$$\mu_Y(a, y) = y \quad (a \in A,\ y \in Y,\ x \in X) \tag{3.7}$$

feltételt. Nem nehéz belátni ugyanis, hogy a két automata izomorf. Továbbá bármely $\mathbf{A} = (A, X, Y, \delta, \mu)$ Moore automatához van olyan $\mathcal{M}(\mathbf{A}_\lambda)$-beli automata, amely izomorf $\mathbf{A}$-val. (Ha $M = \{(a, \mu(a)); a \in A\}$, akkor $\mathbf{A}_Y$-nak azon részautomatája, amelynek M állapothalmaza, izomorf $\mathbf{A}$-val.)

Megmutatjuk, hogy mindig van olyan $\mathcal{M}(\mathbf{A})$-beli automata, amely minden $\mathcal{M}(\mathbf{A})$-beli automatának homomorf képe. Használjuk továbbra is az $A_1 = R_\delta$ jelölést. Ha $A = A_1$, akkor egyetlen ilyen automata van. Ha pedig $A \neq A_1$, akkor ezek az automaták izomorfak.

Ha $A \neq A_1$, akkor adjunk meg egy $\kappa : A - A_1 \to Y$ leképezést. Definiáljuk továbbá minden $a \in A_1$ állapotra az $Y_a (\subseteq Y)$ halmazt a következő módon:

$$\lambda(b, x) \in Y_a \quad \Longleftrightarrow \quad \delta(b, x) = a \quad (b \in A, x \in X). \tag{3.8}$$

Legyen $M(\mathbf{A}) = \cup_{a \in A} M_a$, ahol $M_a = \{(a, y); y \in Y_a\}$, ha $a \in A_1$, és $M_a = \{(a, \kappa(a))\}$, ha $a \in A - A_1$. Jelöljön $\mathbf{M}(\mathbf{A})$ egy $\mathcal{M}(\mathbf{A})$-beli automatát, amelynek állapothalmaza $M(\mathbf{A})$. A definícióból látható, hogy ha $A = A_1$, akkor egyetlen ilyen $\mathbf{M}(\mathbf{A})$ automata van.

3.3. Következmény
Ha $A \neq A_1$, akkor az $\mathbf{M}(\mathbf{A})$ automaták izomorfak.

Bizonyítás. Tegyük fel, hogy $A \neq A_1$. Legyenek κ_1 és κ_2 az $A - A_1$ halmaznak Y-ba való leképezései, valamint $\mathbf{M}_1(\mathbf{A})$ és $\mathbf{M}_2(\mathbf{A})$ a tétel előtt a segítségükkel definiált $\mathbf{M}(\mathbf{A})$ automaták. Nem nehéz megmutatni, hogy a

$$\varphi(a, y) = \begin{cases} (a, y), & \text{ha } y \neq \kappa_1(a), \\ (a, \kappa_2(a)), & \text{ha } y = \kappa_1(a) \end{cases}$$

feltétellel definiált $\varphi : M_1 \to M_2$ leképezés $\mathbf{M}_1(\mathbf{A})$-nak $\mathbf{M}_2(\mathbf{A})$-ra való izomorf leképezése. $\square$

3.4. Tétel
Az $\mathbf{M}(\mathbf{A}) = (M(\mathbf{A}), X, Y, \delta_Y, \lambda_Y)$ automata bármely $\mathcal{M}(\mathbf{A})$-beli automatának homomorf képe.

Bizonyítás. Legyen a $\mathbf{B} = (B, X, Y, \delta_Y, \lambda_Y)$ tetszőleges $\mathcal{M}(\mathbf{A})$-beli automata. Legyen minden $a \in A$ állapotra $B_a = \{(a, y); (a, y) \in B\}$. Adjuk meg az $\mathbf{M}(\mathbf{A})$ automata $M(\mathbf{A}) = \cup_{a \in A} M_a$ állapothalmazát úgy, hogy minden $a \in A$ állapotra $M_a \subseteq B_a$ teljesüljön. (Ha $a \in A_1$, akkor $M_a \subseteq B_a$. Ha $a \in A - A_1$, akkor válasszuk κ-t úgy, hogy $(a, \kappa(a)) \in B_a$.) Legyen továbbá φ a B halmaz tetszőleges olyan leképezése az $M(\mathbf{A})$ halmazra, amely minden B_a halmazt M_a-ra képez le és minden $c \in M_a$ $(a \in A)$ elemre teljesíti a $\varphi(c) = c$ feltételt. Nem nehéz számolással megmutatható, hogy φ a $\mathbf{B}$ automata homomorf leképezése az $\mathbf{M}(\mathbf{A})$ automatára. □

A 3.2. és a 3.4. Tétel alapján kimondhatjuk a következő tételt.

3.5. Tétel
Minden $\mathbf{A}$ Mealy automatához létezik olyan Moore automata, amelynek az $\mathbf{A}$ Mealy automata homomorf képe. Továbbá azon Moore automatákhoz tartozó Mealy automaták között, amelyeknek $\mathbf{A}$ homomorf képe, (izomorfiától eltekintve egyértelműen) megadható olyan Mealy automata, amely a többinek homomorf képe.

A 3.5. Tétel gyakorlatilag azt mondja ki, hogy egy Mealy automata helyettesíthető egy egyszerűbben működő Moore automatával. Ez azonban nem mindig előnyös, mert a Moore automatának több állapota van, mint a Mealy automatának, azaz bonyolultabb szerkezetű.

Legyenek $B, X (\neq \emptyset)$ tetszőleges halmazok. A *B és X halmazok feletti szabad automatá*nak nevezzük az $\mathbf{B}_X = (B \times X^*, X, \delta)$ automatát, ahol minden $b \in B$, $p \in X^*$ és $x \in X$ esetén

$$\delta((b, p), x) = (b, px) \tag{3.9}$$

teljesül. Az üres automata nyilvánvalóan szabad automata. Ha a $\mathbf{B}_X$ automatát tetszőleges Y kimenő halmazzal és λ kimenetfüggvénnyel [μ jelfüggvénnyel] látjuk el, akkor *szabad Mealy automatá*ról [*Moore automatá*ról] beszélünk. Speciálisan, ha $B = \{e\}$, ahol e az üres szó, minden (e, p) állapotot azonosítjuk a p szóval, s így a $B \times X^*$ halmazt az X^* halmazzal. A $\mathbf{B}_X$ szabad automatára pedig egyszerűen $\mathbf{X}^* = (X^*, X, \delta)$ jelölést használjuk, ahol $p \in X^*$ és $x \in X$ esetén

$$\delta(p, x) = px. \tag{3.10}$$

Nyilvánvaló, hogy $\mathbf{X}^*$ szabad automata iniciálisan összefüggő.

Nemüres szabad automaták átmenet-kimenetgráfjai irányított végtelen fákból álló erdők.

3.6. Tétel
Bármely $\mathbf{A}$ automatához van olyan szabad automata, amelynek $\mathbf{A}$ homomorf képe.

Bizonyítás. Legyen $\mathbf{A} = (A, X, \delta)$ tetszőleges kimenő jel nélküli automata és B egy generátorrendszere (például $B = A$). Megmutatjuk, hogy a $\varphi : B \times X^* \to A$ leképezés, amelyet bármely $b \in B$ és $p \in X^*$ elemekre a $\varphi(b, p) = bp$ összefüggéssel definiálunk, $\mathbf{B}_X = (B \times X^*, X, \delta')$ homomorf leképezése az $\mathbf{A}$ automatára. Mivel B az $\mathbf{A}$ automata egy generátorrendszere, ezért φ szürjektív. Ha $x \in X$ tetszőleges bemenő jel, akkor

$$\varphi(\delta'((b, p), x)) = \varphi(b, px) = bpx = \delta(bp, x) = \delta(\varphi(b, p), x),$$

azaz φ valóban homomorfizmus. Ha az $\mathbf{A}$ automatát az Y kimenő halmazzal és a λ $[\mu]$ kimenetfüggvénnyel [jelfüggvénnyel] látjuk el, akkor a $\mathbf{B}_X$ automatát lássuk el azzal a λ' $[\mu']$ kimenetfüggvénnyel [jelfüggvénnyel], amelyre bármely $b \in B$, $p \in X^*$ és $x \in X$ esetén

$$\lambda'((b, p), x) = \lambda(bp, x) \quad [\mu'(b, p) = \mu(bp)]$$

teljesül. Tehát φ ezekben az esetekben is homomorfizmus. $\square$

A 3.6. Tétel bizonyítása alapján nem nehéz belátni, hogy ha egy $\mathbf{A} = (A, X, \delta)$ automatára teljesül az

$$ap = bq \iff a = b \quad \text{és} \quad p = q \quad (a, b \in A,\ p, q \in X^*) \tag{3.11}$$

feltétel, akkor izomorf egy szabad automatával.

Automaták homomorf képei közül adott esetben fontosak lehetnek adott $\mathcal{K}$ osztályba eső automaták, amelyeket az automata *$\mathcal{K}$-homomorf kép*einek nevezünk. Előfordul, hogy léteznek olyan automaták, amelyek az adott automata $\mathcal{K}$-homomorf képei, de nem valódi homomorf képei az adott automata egyetlen $\mathcal{K}$-homomorf képének sem. Az ilyen automatát az adott automata *maximális $\mathcal{K}$-homomorf kép*ének nevezzük. Egy automata *legnagyobb $\mathcal{K}$-homomorf kép*ének nevezzük az automata egy $\mathcal{K}$-homomorf képét, ha homomorf módon leképezhető az adott automata minden $\mathcal{K}$-homomorf képére.

Egy $\mathbf{A}$ automata önmagába való homomorf leképezéseit az automata *endomorfizmusai*nak mondjuk. Az $\mathbf{A}$ automata önmagára való izomorfizmusait pedig az automata *automorfizmusai*nak nevezzük. Legyen $E(\mathbf{A})$ az $\mathbf{A}$ automata endomorfizmusainak, $G(\mathbf{A})$ pedig az automorfizmusainak halmaza. Értelmezzük tetszőleges α és β endomorfizmusok $\alpha\beta$ szorzatát szokásosan úgy, hogy minden $a \in A$ állapotra legyen $\alpha\beta(a) = \alpha(\beta(a))$. Erre a szorzásra $E(\mathbf{A})$ $[G(\mathbf{A})]$ monoid [csoport], amelyet $\mathbf{A}$ *endomorfizmusfélcsoport*jának [*automorfizmuscsoport*jának] nevezünk. A $G(\mathbf{A})$ automorfizmuscsoport az $E(\mathbf{A})$ endomorfizmusfélcsoport részcsoportja.

3.7. Lemma

Izomorf automaták endomorfizmusfélcsoportjai és automorfizmuscsoportjai izomorfak.

Bizonyítás. Legyen φ az $\mathbf{A} = (A, X, \delta)$ automata izomorf leképezése a $\mathbf{B} = (B, X, \delta')$ automatára. Nem nehéz megmutatni, hogy az $\alpha \to \varphi\alpha\varphi^{-1}$ ($\alpha \in E(\mathbf{A})$ $[G(\mathbf{A})]$) leképezés $E(\mathbf{A})$ $[G(\mathbf{A})]$) izomorf leképezése $E(\mathbf{B})$-re $[G(\mathbf{B})$-re$]$. □

Végül megadjuk a homomorfizmus ill. izomorfizmus fogalmának következő általánosítását. Azt mondjuk, hogy az

$$\alpha : A \to A', \quad \beta : X \to X', \quad \gamma : Y \to Y'$$

leképezésekből álló (α, β, γ) leképezésrendszer az $\mathbf{A} = (A, X, Y, \delta, \lambda[\mu])$ *Mealy [Moore] automatának az* $\mathbf{A}' = (A', X', Y', \delta', \lambda'[\mu'])$ *Mealy [Moore] automatába való általános homomorfizmusa*, ha minden $a \in A$, $x \in X$ párra teljesülnek a

$$\alpha(\delta(a, x)) = \delta'(\alpha(a), \beta(x)), \tag{3.12}$$

$$\gamma(\lambda(a, x)) = \lambda'(\alpha(a), \beta(x)) \quad [\gamma(\mu(a)) = \mu'(\alpha(a))] \tag{3.13}$$

feltételek. Természetesen kimenő jel nélküli automatákra csak a (3.12) feltétel vonatkozik. Ha az α és a β leképezések szürjektívek, akkor a kimenetfüggvények szürjektivitása miatt szükségképpen γ is szürjektiv. Ekkor azt mondjuk, hogy az $\mathbf{A}'$ automata az $\mathbf{A}$ automata *általános homomorf képe* .

Ha az α, β és γ leképezések injektívek, akkor az (α, β, γ) leképezésrendszert az $\mathbf{A}$*-nak* $\mathbf{A}'$*-be való általános izomorfizmusá*nak nevezzük. Ha még emellett α és β szürjektív, s így γ is szürjektív, akkor azt mondjuk, hogy az $\mathbf{A}'$ automata az $\mathbf{A}$ automata *általános izomorf képe.*

Ha az $\mathbf{A}$ és $\mathbf{A}'$ automatákra $X = X'$ és $Y = Y'$ teljesül, továbbá a β és γ leképezések az X ill. Y halmazok identikus leképezései, akkor a β és γ leképezésektől eltekintünk, azaz az (α, β, γ) általános homomorfizmus megegyezik a (3.12) és a (3.13) összefüggésekkel definiált α homomorfizmussal. Ekkor azt is mondják, hogy α *A-homomorfizmus* vagy *állapot-homomorfizmus*, mi azonban ezt az elnevezést nem használjuk. Könnyen definiálható a többi speciális homomorfizmust is, mint például az *X-homomorfizmus* vagy *bemenet-homomorfizmus*, az *AY-izomorfizmus* vagy *állapotkimenet-izomorfizmus*. Mivel a kimenetfüggvényeket szürjektíveknek tekintjük, ezért a kimenet-homomorfizmusok természetesen mindig szürjektívek.

Feladatok

3.1. Mealy automata általános homomorf [izomorf] képének váza a Mealy automata vázának általános homomorf [izomorf] képe. (→ Megoldás)

3.2. Legyen (α, β) az $\mathbf{A} = (A, X, \delta)$ automata általános homomorf leképezése az $\mathbf{A}' = (A', X', \delta')$ automatára. Ha α bijektív, akkor β az $\mathbf{A}$ automata X-homomorfizmusa az $\tilde{\mathbf{A}} = (A, X', \tilde{\delta})$ automatára és α a $\tilde{\mathbf{A}}$ automata homomorfizmusa az $\mathbf{A}'$ automatára, ahol

$$\tilde{\delta}(a, \beta(x)) = \delta(a, x) \quad (a \in A,\ x \in X).$$

(→ Megoldás)

4. Az automaták kongruenciái

Emlékeztetünk arra, hogy egy $\mathbf{A} = (A, X, \delta)$ kimenő jel nélküli automata tekinthető egy (A, F) unér algebrának is, ahol az egyváltozós műveletek F halmaza a (3.1) transzformációk halmaza. Így az algebrai struktúrák elméletében fontos kongruenciafogalom is átvihető automatákra. Legyen ρ egy ekvivalencia az A állapothalmazon. A ρ relációt az $\mathbf{A}$ automata *kongruenciájának* nevezzük, ha minden $a, b \in A$ állapotpárra és $x \in X$ bemenő jelre teljesül az

$$(a, b) \in \rho \quad \Longrightarrow \quad (\delta(a, x), \delta(b, x)) \in \rho \tag{4.1}$$

implikáció. A ρ kongruenciához tartozó osztályozást az A állapothalmaz *kompatibilis osztályozásának* hívjuk. Mivel (4.1) ekvivalens az

$$(a, b) \in \rho \quad \Longrightarrow \quad (\delta_x(a), \delta_x(b)) \in \rho$$

implikációval, ezért ρ az (A, F) unér algebra egy kongruenciája. Ezt a kongruenciafogalmat általánosítjuk Mealy és Moore automatákra.

Legyen $\mathbf{A} = (A, X, Y, \delta, \lambda[\mu])$ tetszőleges Mealy [Moore] automata. A $\rho \subseteq A^2$ ekvivalenciát $\mathbf{A}$ *kongruenciájának* nevezzük, ha bármely $a, b \in A$ állapotpárra és $x \in X$ bemenő jelre (4.1) fennáll, továbbá még a

$$(a, b) \in \rho \quad \Longrightarrow \quad \lambda(a, x) = \lambda(b, x) \quad [\mu(a) = \mu(b)] \tag{4.2}$$

feltétel is teljesül. Ez parciális automata esetén jelentse azt is, hogy $\delta(a, x)$ $[\lambda(a, x),\ \mu(a)]$ akkor és csak akkor van értelmezve, ha $\delta(b, x)$ $[\lambda(b, x),\ \mu(b)]$ is értelmezve van. Szokás ρ-t *A-kongruenciának* vagy *állapotkongruenciának* is nevezni. A $\rho(\subseteq A^2)$ ekvivalencia akkor és csak akkor kongruencia, ha az $(a, b) \in \rho$ feltételből minden $p \in X^*$ bemenő szóra következik, hogy

$$(ap, bp) \in \rho \quad \text{és} \quad \lambda(a, p) = \lambda(b, p) \quad [\mu(\delta(a, p)) = \mu(\delta(b, p))]. \tag{4.3}$$

A (4.3)-beli állítások helyettesíthetők a következőkkel:

$$(ap, bp) \in \rho \quad \text{és} \quad \overline{\lambda(a,p)} = \overline{\lambda(b,p)} \quad [\mu(ap) = \mu(bp)]. \tag{4.4}$$

Legyen $\mathbf{A} = (A, X, Y, \delta, \mu)$ Moore automata és $\pi(\subseteq A^2)$, amelyre

$$(a,b) \in \pi \quad \Longleftrightarrow \quad \mu(a) = \mu(b) \ (a, b \in A). \tag{4.5}$$

A π reláció az A állapothalmaz egy ekvivalenciája, amelyet az $\mathbf{A}$ Moore automata *jelekvivalenciájá*nak nevezzük.

4.1. KÖVETKEZMÉNY
Ha ρ az $\mathbf{A} = (A, X, Y, \delta, \mu)$ Moore automata kongruenciája, akkor $\rho \subseteq \pi$ és ρ az $\mathbf{A}_\lambda$ Mealy automatának is kongruenciája. Megforditva, ha ρ az $\mathbf{A}_\lambda$ Mealy automata egy kongruenciája, akkor $\rho \cap \pi$ az $\mathbf{A}$ Moore automata egy kongruenciája.

Bizonyítás. Legyen ρ az $\mathbf{A} = (A, X, Y, \delta, \mu)$ Moore automata kongruenciája. Ha $(a,b) \in \rho$ és $x \in X$, akkor (4.2) szerint $(\delta(a,x), \delta(b,x)) \in \rho$ és $\mu(a) = \mu(b)$, amiből ismét (4.2) szerint $\mu(\delta(a,x) = \mu(\delta(b,x))$. Így $\rho \subseteq \pi$, s mivel $\mu\delta = \lambda$, ezért ρ az $\mathbf{A}_\lambda$ Mealy automata kongruenciája.

Megfordítva, legyen ρ az $\mathbf{A}_\lambda$ Mealy automata egy kongruenciája. Ha $(a,b) \in \rho \cap \pi$ és $x \in X$, akkor $\mu(a) = \mu(b)$, továbbá a (4.3) szerint, a $\lambda = \mu\delta$ összefüggést is felhasználva, $(\delta(a,x), \delta(b,x)) \in \rho$ és $\mu(\delta(a,x)) = \mu(\delta(b,x))$. Amiből $((\delta(a,x), \delta(b,x)) \in \rho \cap \pi$, azaz $\rho \cap \pi$ az $\mathbf{A}$ Moore automata kongruenciája. □

Legyen ρ az $\mathbf{A} = (A, X, Y, \delta, \lambda[\mu])$ Mealy [Moore] automata egy kongruenciája és A/ρ az A állapothalmaz ρ-szerinti faktorhalmaza. Definiáljuk az $\mathbf{A}/\rho = (A/\rho, X, Y, \delta_\rho, \lambda_\rho[\mu_\rho])$ Mealy [Moore] automatát, amelyre a δ_ρ átmenetfüggvényt és a λ_ρ kimenetfüggvényt [μ_ρ jelfüggvényt] minden $a \in A$ állapotra és $x \in X$ bemenő jelre a

$$\delta_\rho(\rho[a], x) = \rho[\delta(a,x)], \tag{4.6}$$

$$\lambda_\rho(\rho[a], x) = \lambda(a,x) \quad [\mu_\rho(\rho[a]) = \mu(a)] \tag{4.7}$$

összefüggésekkel értelmezzük. Könnyen belátható, hogy az $\mathbf{A}/\rho$ automata jól definiált. $\mathbf{A}/\rho$-t az $\mathbf{A}$ automata *ρ szerinti faktorautomatájá*nak nevezzük. Természetesen kimenő jel nélküli automatákra csak a (4.6) feltételt kell tekinteni.

Az $\alpha_\rho : a \to \rho[a]$ leképezés az $\mathbf{A}$ automatának az $\mathbf{A}/\rho$ faktorautomatára való homomorfizmusa. Ezt az $\mathbf{A}$ automatának az $\mathbf{A}/\rho$ faktorautomatára való *természetes* (vagy *kanonikus*) *homomorfizmus*ának nevezzük. Érvényes az alábbi ún. *homomorfiatétel*, amely kimenő jel nélküli automatákra ekvivalens az unér algebrákra vonatkozó homomorfiatétellel. A homomorfiatételt és az utána következő két izomorfiatételt csak Mealy automatákra mondjuk ki, bár nyilvánvalóan Moore automatákra is igaz.

4.2. Tétel
Ha $\mathbf{A} = (A, X, Y, \delta, \lambda)$ és $\mathbf{A}' = (A', X, Y, \delta', \lambda')$ Mealy automaták és α az $\mathbf{A}$-nak $\mathbf{A}'$-re való homomorfizmusa, akkor $\ker\alpha$ kongruencia az $\mathbf{A}$-n és $\mathbf{A}' \cong \mathbf{A}/\ker\alpha$.

Igazak az alábbi ún. *izomorfiatételek* is, amelyek kimenő jel nélküli automatákra szintén ekvivalensek az unér algebrákra vonatkozó izomorfiatételekkel:

4.3. Tétel
Ha $\mathbf{A} = (A, X, Y, \delta, \lambda)$ egy Mealy automata, ρ egy kongruenciája és $\mathbf{B} = (B, X, Y', \delta, \lambda)$ olyan részautomatája $\mathbf{A}$-nak, hogy minden $a \in A$-ra $B \cap \rho[a] \neq \emptyset$, akkor $\mathbf{A}/\rho \cong \mathbf{B}/\rho_B$.

4.4. Tétel
Ha ρ és τ az $\mathbf{A}$ Mealy automata olyan kongruenciái, hogy $\tau \subseteq \rho$, akkor ρ/τ kongruencia az $\mathbf{A}/\tau$ faktorautomatán és $\mathbf{A}/\rho \cong (\mathbf{A}/\tau)/(\rho/\tau)$.

Hasonlóan, az algebrai struktúrákhoz, tetszőleges $\mathbf{A}$ automata kongruenciái is teljes hálót alkotnak a Függelékben megadott műveletekre, amelyet az $\mathbf{A}$ automata *kongruenciahálójá*nak hívunk és $C(\mathbf{A})$-val jelölünk. Egy algebrai struktúra kongruenciahálójának ι_A és ω_A, az ún. triviális kongruenciák, a legkisebb ill. a legnagyobb eleme. Az algebrai struktúrát egyszerűnek nevezzük, ha csak triviális kongruenciái vannak. Minthogy minden kimenő jel nélküli automata a (3.1)-ben definiált müveletekre unér algebrának is tekinthető, ezért egy kimenő jel nélküli automatát is akkor nevezünk *egyszerű*nek, ha csak triviális kongruenciái vannak. Minden legfeljebb kétállapotú kimenő jel nélküli automata egyszerű.

Természetesen ι_A identikus reláció minden automata esetén kongruencia. Ha azonban az automata kimenő jeles, akkor az ω_A univerzális reláció csak nagyon speciális esetben kongruenciája az automatának. Az egyszerűség kérdése kimenő jeles automaták esetében is lényeges, ezért megvizsgáljuk, hogy az univerzális reláció milyen Mealy [Moore] automatákra kongruencia.

Ha a kimenő jel csak a pillanatnyi bemenő jel függvénye, azaz bármely $a, b \in A$ állapotokra és $x \in X$ bemenő jelre

$$\lambda(a, x) = \lambda(b, x),$$

akkor az $\mathbf{A}$ Mealy automatát *memória nélküli automatá*nak nevezzük. Egy Moore automatát akkor nevezünk *memória nélküli*nek, ha a hozzá tartozó Mealy automata memória nélküli. Könnyen belátható a

4.5. Lemma
Az $\mathbf{A} = (A, X, Y, \delta, \lambda)$ Mealy automatára ω_A akkor és csak akkor kongruencia, ha $\mathbf{A}$ memória nélküli automata.

Az egyszerű kimenő jeles automaták definícióját a 9. fejezetben adjuk meg. Ezekkel az automatákkal a II. részben foglalkozunk. Az egyszerű kimenő jel nélküli automatákat pedig a 24. fejezetben vizsgáljuk részletesebben.

Definiáljuk az $\mathbf{A} = (A, X, \delta)$ automata A állapothalmazán a következő τ_k $(k \in N)$ binér relációkat:

$$(a, b) \in \tau_k \quad \Longleftrightarrow \quad (\forall p \in X^k)\ (ap = bp). \tag{4.8}$$

4.6. Tétel
Bármely $k \in N$ esetén τ_k az $\mathbf{A} = (A, X, \delta)$ automata kongruenciája és $\tau_k \subseteq \tau_{k+1}$. Ha $\tau_k = \tau_{k+1}$, akkor minden i pozitív egész számra $\tau_k = \tau_{k+i}$. Ha $|A| = n$, akkor van olyan $0 \leq k \leq n-1$, amelyre $\tau_k = \tau_{k+1}$.

Bizonyítás. Minden $k \in N$ esetén τ_k ekvivalencia és $\tau_k \subseteq \tau_{k+1}$. $\tau_0 = \iota_A$ nyilvánvalóan kongruencia. Ha $1 \leq k$, $x, y \in X$ és $q \in X^{k-1}$, akkor

$$(ax)(qy) = (axq)y = (bxq)y = (bx)(qy),$$

vagyis τ_k kongruencia. A második állításhoz elegendő megmutatni, hogy ha $\tau_k = \tau_{k+1}$, akkor $\tau_{k+1} = \tau_{k+2}$. Mivel $\tau_{k+1} \subseteq \tau_{k+2}$, ezért csak azt kell megmutatni, $\tau_{k+2} \subseteq \tau_{k+1}$. Ehhez legyenek $p \in X^k$ és $x, y \in X$ tetszőlegesek. Ha $(a, b) \in \tau_{k+2}$, akkor

$$(ax)(py) = axpy = bxpy = (bx)(py),$$

azaz $(ax, bx) \in \tau_{k+1} = \tau_k$. Amiből következik, hogy $axp = bxp$, azaz $(a, b) \in \tau_{k+1}$. Ha $|A| = n$ és c_k a τ_k-osztályok száma, akkor $1 \leq c_k \leq n$. Legyen $k \in N$ a legkisebb, amelyre $\tau_k = \tau_{k+1}$. De

$$\iota_A = \tau_0 \subset \tau_1 \subset \tau_k = \tau_{k+1} \subseteq \omega_A,$$

amiből következik az utolsó állítás. □

Az $\mathbf{A} = (A, X, \delta)$ automatát *definit*nek nevezzük, ha van olyan $k \in N$, amelyre $\tau_k = \omega_A$. A definit automatákkal a 29. fejezetben foglalkozunk részletesebben.

Az $\mathbf{A} = (A, X, \delta)$ automatát *redukált állapotú*nak nevezzük, ha $\tau_1 = \iota_A$, azaz, ha

$$(\forall x \in X)\ (\delta(a, x) = \delta(b, x)) \iff a = b. \tag{4.9}$$

Bármely $\mathbf{A} = (A, X, \delta)$ automatának az $\mathbf{A}/\tau_1$ faktorautomata redukált állapotú homomorf képe. Nyilvánvaló, hogy minden legalább háromállapotú egyszerű automata redukált állapotú. A következő egyszerű példa is mutatja, hogy az állítás megfordítása nem igaz.

4.7. Példa

Az $\mathbf{A} = (A, X, \delta)$ automata redukált állapotú, de nem egyszerű, ahol $A = \{1, 2, 3\}$, $X = \{x\}$ és

$$\delta(1, x) = 2, \quad \delta(2, x) = 1, \quad \delta(3, x) = 3.$$

Feladatok

4.1. Legyen ρ az $\mathbf{A} = (A, X, \delta)$ automata kongruenciája. Az $\mathbf{A}/\rho$ faktorautomata akkor és csak akkor egyszerű, ha $\mathbf{A}$-nak nincs olyan τ kongruenciája, amelyre $\rho \subset \tau \subset \omega_A$. (→ Megoldás)

4.2. Ha $\mathbf{B}$ az $\mathbf{A}$ automata homomorf képe, akkor $C(\mathbf{B})$ izomorfan beágyazható $C(\mathbf{A})$-ba. (→ Megoldás)

5. Automatabővítések

Szükséges egy speciális kongruenciafogalom bevezetése, amely a későbbi vizsgálatokban alapvető szerepet játszik. A gruppoidokra (speciálisan félcsoportokra) definiált Rees kongruenciákról van szó. Ezek kimenő jel nélküli automatákra (unér algebrákra) is megadhatók, ha a gruppoidok ideáljait az automaták részautomatáival helyettesítjük.

Legyen $\mathbf{B} = (B, X, \delta)$ az $\mathbf{A} = (A, X, \delta)$ automata egy részautomatája és ρ a $\mathbf{B}$-nek egy kongruenciája. Ha $\mathbf{B}$ az üres automata, akkor $\rho = \emptyset$. Azt mondjuk, hogy $R(\rho)$ *a* ρ*-nak* $\mathbf{A}$*-ra való Rees kiterjesztés*e, ha

$$R(\rho) = \rho \cup \iota_A. \tag{5.1}$$

Speciálisan $R(\omega_B)$-t az $\mathbf{A}$ *automata* $\mathbf{B}$ *szerinti Rees kongruenciáján*ak nevezzük. Az $A/R(\omega_B)$ halmazt A/B-vel is jelöljük. A definícióból látható, hogy bármely $a, b \in A$ állapotokra

$$(a, b) \in R(\omega_B) \iff a, b \in B \quad \text{vagy} \quad a = b. \tag{5.2}$$

Az $\mathbf{A}/R(\omega_B)$ faktorautomatát az $\mathbf{A}$ $\mathbf{B}$ *szerinti Rees-faktorá*nak hívjuk, s röviden $\mathbf{A}/\mathbf{B}$-vel jelöljük. Ha $B \neq \emptyset$, akkor B az $\mathbf{A}/\mathbf{B}$ Rees-faktor egy csapdája. Ha $B = \emptyset$, akkor $\mathbf{A}/\mathbf{B}$ izomorf $\mathbf{A}$-val, azaz minden automata önmaga üres automata szerinti Rees-faktora.

Jelöljük $Rees(\mathbf{A})$-val az $\mathbf{A}$ automata Rees kongruenciáinak halmazát. A $Rees(\mathbf{A})$ az $\mathbf{A}$ automata $C(\mathbf{A})$ kongruenciahálójának teljes részhálója, amelynek legkisebb eleme $R(\omega_\emptyset) = \iota_A$ és legnagyobb eleme $R(\omega_A) = \omega_A$. Ha a_0 az $\mathbf{A}$ automata egy csapdája, akkor $R(\omega_{\{a_0\}}) = \iota_A$. Ha $\mathbf{A}$-nak nincs csapdája, akkor $Sub(\mathbf{A})$ részautomatahálója izomorf $Rees(\mathbf{A})$-val.

A Rees kongruenciák segítségével megadjuk az automaták más automatákkal való bővítésének algebrai fogalmát. Az $\mathbf{A}$ automatát *a* $\mathbf{B}$ *automatának a* $\mathbf{C} = (C, X, \delta')$ *automatával való bővítésé*nek nevezzük, ha $\mathbf{C}$ izomorf $\mathbf{A}/\mathbf{B}$-vel. Ha $\mathbf{A}$ nemüres, akkor $\mathbf{A}/\mathbf{A}$ egyállapotú automata. Továbbá $\mathbf{A}/\emptyset$ izomorf $\mathbf{A}$-val. Ezért bármely $\mathbf{A}$ nemüres automata önmagának egyállapotú automatával vagy az üres automatának $\mathbf{A}$-val való bővítése. Ha $B \neq \emptyset, A$, akkor *valódi bővítés*ről beszélünk.

Szükségünk lesz az összefüggőség fogalmának következő általánosítására. Az $\mathbf{A} = (A, X, \delta)$ automatát *összefüggő*nek nevezzük, ha bármely $a, b \in A$ állapotpárhoz vannak olyan $p, q \in X^*$ bemenő szavak, amelyekre $ap = bq$ teljesül. (Ha minden $a, b \in A$ esetén $p = e$ vagy $q = e$, akkor a összefüggő automata irányítottan összefüggő.) Összefüggő automata minden részautomatája összefüggő és legfeljebb egy csapdája van.

Legyen tetszőleges $p \in X^*$ bemenő szóra $Ap = \{ap; \quad a \in A\}$. Azt mondjuk, hogy az $\mathbf{A} = (A, X, \delta)$ automata *irányítható* vagy *szinkronizálható*, ha van olyan $p \in X^*$, amelyre $|Ap| = 1$. Ilyenkor p-t *az* $\mathbf{A}$ *irányító* vagy *szinkronizáló szavá*nak, azt a d állapotot pedig, amelyre $Ap = \{d\}$, *az* $\mathbf{A}$ *irányított* vagy *szinkronizált állapotá*nak hívjuk. Úgy is mondjuk, hogy *az* $\mathbf{A}$ *automata a p szóval irányítható a d állapothoz.* Minden triviális automata olyan irányítható automata, amelynek állapota irányított és minden bemenő szó irányító szó. Továbbá minden $\mathbf{A} = (A, X, \delta)$ $(A \neq \emptyset)$ teljes beállító automata olyan irányítható automata, amelyben X^+ minden eleme irányító szó és az irányított állapotok halmaza a δ átmenetfüggvény értékkészlete. Ha az irányítható automatának van csapdája, akkor a csapda az egyetlen irányított állapot. Az irányítható automaták vizsgálatára a 28. fejezetben visszatérünk. A definícióból látható, hogy minden irányítható automata összefüggő. A következő lemma szerint A-véges csapdás automaták esetén igaz az állítás megfordítása.

5.1. LEMMA
A-véges csapdás automata akkor és csak akkor összefüggő, ha irányítható.

Bizonyítás. Legyen az $\mathbf{A} = (A, X, \delta)$ A-véges csapdás automata összefüggő és $a_0 \in A$ az automata csapdája. (Mint azt már megjegyeztük, összefüggő automatának legfeljebb egy csapdája van.) Ha $|A| = 1$, akkor $\mathbf{A}$ nyilvánvalóan irányítható.

Tegyük fel, hogy $|A| > 1$, és legyen $a_1 \neq a_0$ $(a_1 \in A)$. Mivel A összefüggő, ezért van olyan $p_1 \in X^+$, hogy $a_1 p_1 = a_0 p_1 = a_0$. Ez azt jelenti, hogy $|Ap_1| < |A|$. Ha $Ap_1 = \{a_0\}$, akkor $\mathbf{A}$ irányítható. Tegyük fel, hogy $|Ap_1| > 1$, és legyen $a_2 \in A$ olyan, amelyre $a_2 p_1 \neq a_0$. De $\mathbf{A}$ összefüggő, ezért van olyan $p_2 \in X^+$, hogy $(a_2 p_1) p_2 = a_0 p_2 = a_0$. Ebből következik, hogy $|Ap_1 p_2| < |Ap_1|$. Ha $Ap_1 p_2 = \{a_0\}$, akkor $\mathbf{A}$ irányítható. Ha $|Ap_1 p_2| > 1$, akkor folytatjuk az előbbi eljárást Ap_1 helyett $Ap_1 p_2$-vel. Az A halmaz végessége miatt van olyan $1 \leq k < |A|$ és vannak olyan $p_1, p_2, \ldots p_k \in X^+$, amelyekre $Ap_1 p_2 \ldots p_k = \{a_0\}$, azaz $\mathbf{A}$ irányítható. □

5.2. LEMMA
Egy automata akkor és csak adható meg egy reverzibilis automatának összefüggő automatával való bővítéseként, ha minden ciklikus részautomatájának van reverzibilis állapota.

Bizonyítás. Legyen $\mathbf{A} = (A, X, \delta_A)$ a $\mathbf{B} = (B, X, \delta_B)$ reverzibilis automatának a $\mathbf{C} = (C, X, \delta_C)$ összefüggő automatával való bővítése. Az izomorfiaelv miatt feltehetjük, hogy $\mathbf{B}$ az $\mathbf{A}$ automata reverzibilis részautomatája és $\mathbf{C} = \mathbf{A}/\mathbf{B}$ összefüggő. Ebből kapjuk, hogy B a $\mathbf{C}$ egyetlen csapdája és minden $a \in A$ állapot-hoz van olyan $p \in X^*$ bemenő szó, hogy $ap \in B$, azaz ap az $\mathbf{A}$ automata a állapota által generált ciklikus részautomatájának reverzibilis állapota.

Megfordítva, tegyük fel $\mathbf{A}$ minden ciklikus részautomatájának van reverzibilis állapota. Akkor az $\mathbf{A}$ automata $\mathbf{Rev}(\mathbf{A})$ reverzibilis része, amely a 2.3. Következmény szerint az $\mathbf{A}$-nak reverzibilis részautomatája, nemüres. Továbbá minden $a \in A$ állapothoz van olyan $p \in X^*$ bemenő szó, hogy $ap \in Rev(A)$. Ez azt jelenti, hogy $\mathbf{A}/\mathbf{Rev}(\mathbf{A})$ összefüggő automata. □

5.3. TÉTEL
Minden A-véges automata megadható reverzibilis automatának irányítható automatával való bővítéseként.

Bizonyítás. Legyen $\mathbf{A} = (A, X, \delta)$ tetszőleges A-véges automata. Megmutatjuk, hogy minden $[\mathbf{a}]$ $(a \in A)$ ciklikus részautomatájának van reverzibilis állapota. Ha $[\mathbf{a}]$ erősen összefüggő, akkor minden állapota reverzibilis állapot. Ha $[\mathbf{a}]$ nem erősen összefüggő, akkor van olyan $a_1 \in [a]$, amelyre $[a_1] \subset [a]$.

Ha $[\mathbf{a_1}]$ erősen összefüggő, akkor minden eleme reverzibilis állapot. Ha $[\mathbf{a_1}]$ nem erősen összefüggő, akkor van olyan $a_2 \in [a_1]$, amelyre $[a_2] \subset [a_1]$. Az előbbi meggondolást a_1 helyett a_2-vel megismételve, az $\mathbf{A}$ végessége miatt léteznek olyan a_i $(i = 1, \ldots, k)$ állapotok, hogy

$$[a_k] \subset [a_{k-1}] \subset \ldots [a_1] \subset [a],$$

és $[\mathbf{a_k}]$ erősen összefüggő, s így minden állapota reverzibilis.

Az 5.2. Lemma szerint ez azt jelenti, hogy $\mathbf{A}$ megadható egy reverzibilis automatának összefüggő automatával való bővítéseként. Amiből az 5.1. Lemmát felhasználva adódik az állítás. □

Mint már a 4. fejezetben is mondtuk, az $\mathbf{A} = (A, X, \delta)$ automatát akkor nevezzük *egyszerű*nek, ha csak triviális kongruenciái vannak. Most kicsit általánosabban azokat az automatákat vizsgáljuk, amelyeknek kongruenciahálója véges. Az egyszerű automaták az ilyen automatáknak speciális esetei, mégpedig azok, amelyek kongruenciahálója legfeljebb kételemű. Az előzőekben leírtakból nyilvánvalóan adódik az

5.4. Lemma

Ha az $\mathbf{A} = (A, X, \delta)$ automata $C(\mathbf{A})$ kongruenciahálója véges, akkor véges sok részautomatája van, és minden részautomatájának kongruenciahálója is véges.

5.5. Következmény

Ha az $\mathbf{A}$ automata kongruenciahálója véges, akkor $\mathbf{A}$ végesen generálható.

Bizonyítás. A 2. fejezetben beszéltünk arról, hogy minden automata lefedhető ciklikus részautomatáival. Az előző lemma szerint $\mathbf{A}$-nak véges sok részautomatája, s így véges sok ciklikus részautomatája van. Ez azt jelenti, hogy $\mathbf{A}$ végesen generálható. □

5.6. Tétel

Ha az $\mathbf{A} = (A, X, \delta)$ automata $C(\mathbf{A})$ kongruenciahálója véges, akkor $E(\mathbf{A})$ endomorfizmusfélcsoportja is véges.

Bizonyítás. Először megmutatjuk, hogy a $G(\mathbf{A})$ automorfizmuscsoport véges. Tegyük fel, hogy $G(\mathbf{A})$ végtelen. Legyen $\alpha \in G(\mathbf{A})$ végtelen rendű. Legyen m teszőleges pozitív egész szám. Nem nehéz belátni, hogy

$$\{\alpha^{lm}(a); l \in Z\},\ \{\alpha^{lm+1}(a); l \in Z\},\ \ldots,\ \{\alpha^{lm+m-1}(a); l \in Z\}, \quad a \in A$$

minden m-re kompatibilis osztályozás. Jelölje a megfelelő kongruenciákat ρ_{α^m}. Ezek a kongruenciák mind különbözőek. Ez ellentmond annak, hogy $C(\mathbf{A})$ véges. Így $G(\mathbf{A})$ minden eleme véges rendű.

Legyen $\alpha \in G(\mathbf{A})$ rendje r. Akkor

$$\{a,\ \alpha(a),\ \ldots,\ \alpha^{r-1}\},\quad a \in A$$

kompatibilis osztályozás. Jelölje a hozzá tartozó kongruenciát ρ_α. A feltétel miatt véges sok különböző

$$\rho_{\alpha_1},\ \rho_{\alpha_2},\ \ldots,\ \rho_{\alpha_n}$$

kongruencia van.

Legyen a $\beta \in G(\mathbf{A})$ automorfizmusra $\rho_\beta = \rho_{\alpha_i}$ $(1 \leq i \leq n)$. Az 5.5. Következmény szerint $\mathbf{A}$ végesen generálható. Ha $\{a_1, \ldots, a_k\}$ az $\mathbf{A}$ automata egy generátorrendszere, akkor

$$\rho_\beta[a_1] = \rho_{\alpha_i}[a_1],\ \rho_\beta[a_2] = \rho_{\alpha_i}[a_2],\ \ldots,\ \rho_\beta[a_k] = \rho_{\alpha_i}[a_k],$$

vagyis

$$\beta(a_1) = {\alpha_i}^{j_1}(a_1),\ \beta(a_2) = {\alpha_i}^{j_2}(a_2),\ \ldots,\ \beta(a_k) = {\alpha_i}^{j_k}(a_k)$$

$$(0 \leq j_1, j_2, \ldots, j_k \leq r-1).$$

Így minden $p \in X^*$ bemenő szóra

$$\beta(a_1p) = {\alpha_i}^{j_1}(a_1p),\ \beta(a_2p) = {\alpha_i}^{j_2}(a_2p),\ \ldots,\ \beta(a_kp) = {\alpha_i}^{j_k}(a_kp)$$

$$(0 \leq j_1, j_2, \ldots, j_k \leq r-1).$$

Ez azt jelenti, hogy β az az endomorfizmus, amely az a_i $(i = 1, 2, \ldots k)$ állapot által generált ciklikus részautomatán megegyezik az ${\alpha_i}^{j_1}$ endomorfizmussal. Ebből következik, hogy minden α_i $(i = 1, 2, \ldots, n)$ automorfizmushoz véges sok olyan $\beta \in E(\mathbf{A})$ automorfizmus van, amelyre $\rho_\beta = \rho_{\alpha_i}$. Tehát $G(\mathbf{A})$ véges, a feltevésünkkel ellentétben.

Most megmutatjuk, hogy az $E(\mathbf{A})$ endomorfizmusfélcsoport is véges. Az nyilvánvaló, hogy $\mathbf{A}_\alpha = (\alpha(A), X, \delta')$ az $\mathbf{A}$ automata részautomatája. A feltétel miatt véges sok különböző

$$\ker\alpha_1,\ \ker\alpha_2,\ \ldots,\ \ker\alpha_l \quad (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_l \in E(\mathbf{A}))$$

kongruencia van. Minden $\ker\alpha_i$ $(1 \leq i \leq l)$ kongruenciához véges sok különböző

$$\mathbf{A}_{\beta_1},\ \mathbf{A}_{\beta_2},\ \ldots,\ \mathbf{A}_{\beta_m}$$

részautomata létezik, amelyekre

$$\ker\beta_1 = \ker\beta_2 = \cdots = \ker\beta_m = \ker\alpha_i \quad (\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_m \in E(\mathbf{A})).$$

Legyen $\gamma \in E(\mathbf{A}_\alpha)$ endomorfizmusra

$$\ker \gamma = \ker \beta_j, \quad \mathbf{A}_\gamma = \mathbf{A}_{\beta_j}.$$

Definiáljuk a $\varphi_{j,\gamma} : A \to A$ leképezést úgy, minden $a \in A$ állapotra

$$\varphi_{j,\gamma}(\beta_j(a)) = \gamma(a)$$

teljesüljön, vagyis $\varphi_{j,\gamma}\beta_j = \gamma$ $(1 \leq j \leq m)$. Mivel $\ker \beta_j = \ker \gamma$, ezért $\varphi_{j,\gamma}$ bijektív. Továbbá minden $a \in A$ állapotra és $x \in X$ bemenő jelre

$$\varphi_{j,\gamma}(\delta(\beta_j(a), x) = \varphi_{j,\gamma}(\beta_j(\delta(a, x))) =$$

$$= \gamma(\delta(a, x)) = \delta(\gamma(a), x) = \delta(\varphi_{j,\gamma}(\beta_j(a)), x),$$

azaz $\varphi_{j,\gamma} \in G(\mathbf{A}_{\beta_j})$.

Ha $\gamma, \gamma' \in E(\mathbf{A}_\alpha)$ endomorfizmusokra

$$\ker \gamma = \ker \gamma' = \ker \beta_j, \quad \mathbf{A}_\gamma = \mathbf{A}_{\gamma'} = \mathbf{A}_{\beta_j},$$

és

$$\varphi_{j,\gamma} = \varphi_{j,\gamma'},$$

akkor $\gamma = \gamma'$. Az 5.4. Lemmát és a bizonyítás első részét alkalmazva kapjuk, hogy $G(\mathbf{A}_{\beta_j})$ véges, ezért minden α_i $(i = 1, 2, \ldots, l)$ endomorfizmushoz véges sok olyan β endomorfizmus van, hogy $\ker \alpha_i = \ker \beta$, azaz $E(\mathbf{A})$ véges. □

Feladatok

5.1. Tetszőleges $\mathbf{A}$ automata esetén $Rees(\mathbf{A})$ homomorf képe $Sub(\mathbf{A})$-nak, és $Rees(\mathbf{A})$ akkor és csak akkor izomorf $Sub(\mathbf{A})$-val, ha az $\mathbf{A}$ automatának nincs csapdája. (→ Megoldás)

5.2. Egyszerű Mealy [Moore] automata minden részautomatája is egyszerű. (→ Megoldás)

6. Karakterisztikus félcsoport

Az algebrai struktúrákhoz bizonyos kísérő struktúrákat rendelünk, amelyek szerkezetéből következtetünk az adott struktúra szerkezetére. Automatákat kísérő struktúrákat eddig is vizsgáltunk, mégpedig az endomorfizmusfélcsoportokat, az automorfizmuscsoportokat, a kongruenciahálókat és a részautomatahálókat. Ebben a fejezetben megadjuk az automaták legfontosabb kísérő struktúrájának, a karakterisztikus félcsoportnak a fogalmát, s a rá vonatkozó alapvető eredményeket. A karakterisztikus félcsoport segítségével az automaták bizonyos osztályai félcsoportelméleti eszközökkel vizsgálhatók.

Legyen $\mathbf{A} = (A, X, \delta)$ tetszőleges kimenő jel nélküli automata. Definiáljuk az X^* szabad monoidon a $\rho_{\mathbf{A},a}$ $(a \in A)$ relációkat a

$$(p, q) \in \rho_{\mathbf{A},a} \iff ap = aq \quad (p, q \in X^*) \tag{6.1}$$

feltétellel. Legyen továbbá $\rho_{\mathbf{A}} = \cap\{\rho_{\mathbf{A},a}; a \in A\}$, azaz

$$(p, q) \in \rho_{\mathbf{A}} \iff (\forall a \in A)\ (ap = aq) \quad (p, q \in X^*). \tag{6.2}$$

6.1. Lemma
Bármely $a \in A$ állapot esetén $\rho_{\mathbf{A},a}$ az X^* szabad monoid jobb kongruenciája, $\rho_{\mathbf{A}}$ pedig X^* kongruenciája.

Bizonyítás. Nyilvánvaló, hogy $\rho_{\mathbf{A}}$ és minden $a \in A$ állapotra $\rho_{\mathbf{A},a}$ ekvivalencia. Ha az $a \in A$ állapotra és a $p, q \in X^*$ bemenő szavakra $ap = aq$ teljesül, akkor (1.6) alapján bármely $r \in X^+$ bemenő szóra

$$a(pr) = (ap)r = (aq)r = a(qr),$$

azaz $(pr, qr) \in \rho_{\mathbf{A},a}$. Ez azt jelenti, hogy $\rho_{\mathbf{A},a}$ jobb kongruencia.

Ha $(p, q) \in \rho_{\mathbf{A}}$, akkor minden $a \in A$ állapotra és $r \in X^+$ bemenő szóra $(p, q) \in \rho_{\mathbf{A},ar}$, azaz

$$a(rp) = (ar)p = (ar)q = a(rq).$$

Ezzel megmutattuk, hogy $\rho_{\mathbf{A}}$ kongruencia. □

A (6.2) feltétellel definiált $\rho_{\mathbf{A}}$ kongruenciát az $\mathbf{A} = (A, X, \delta)$ automata *Myhill-Nerode kongruenciájá*nak nevezzük. A $\rho_{\mathbf{A}}$ reláció X^+-ra való szűkítését az egyszerűség kedvéért szintén $\rho_{\mathbf{A}}$-val jelöljük. Az $X^+/\rho_{\mathbf{A}}$ faktorfélcsoportot pedig $\mathbf{A}$ *karakterisztikus félcsoport*jának nevezzük. Ha a karakterisztikus félcsoport csoport, akkor $\mathbf{A}$ *karakterisztikus csoport*jának mondjuk. Ha $\rho_{\mathbf{A}}[e] = \{e\}$, ahol e az üres szó, akkor $X^*/\rho_{\mathbf{A}} = X^+/\rho_{\mathbf{A}} \cup \{e\}$. Ha pedig

$|\rho[e]| > 1$, azaz van olyan $r \in X^+$, hogy minden $a \in A$ állapotra $ar = a$, akkor $X^*/\rho_{\mathbf{A}} = X^+/\rho_{\mathbf{A}}$. (A $\rho[e]$ osztályt (amely X^* egy részmonoidja is) azonosítjuk azzal az $X^+/\rho_{\mathbf{A}}$-beli osztállyal, amely $\rho[e]$-ből e elhagyásával kapható.) Az $X^*/\rho_{\mathbf{A}}$ faktorfélcsoportot $\mathbf{A}$ *karakterisztikus monoidjá*nak hívjuk. Az előbbi megjegyzés szerint a karakterisztikus monoid vagy megegyezik a karakterisztikus félcsoporttal, vagy abból egységelem adjungálásával kapható. Ha a karakterisztikus félcsoport csoport és megegyezik a karakterisztikus monoiddal, akkor az automata reverzibilis. Felhívjuk a figyelmet arra, hogy ha a karakterisztikus félcsoport monoid, akkor ebből nem következik, hogy megegyezik a karakterisztikus monoiddal. (Például, ha $\mathbf{A} = (\{1,2\}, x, \delta)$, ahol $\delta(1,x) = \delta(2,x) = 2$, akkor $X^+/\rho_{\mathbf{A}} = \{X^+\}$ és $X^*/\rho_{\mathbf{A}} = \{X^+, \{e\}\}$.) Automata karakterisztikus félcsoportja [monoidja] megegyezik hatványautomatájának karakterisztikus félcsoportjával [monoidjával].

Megmutatjuk, hogy $X^+/\rho_{\mathbf{A}}$ izomorf egy A feletti transzformációfélcsoporttal is. Definiáljuk minden $p \in X^+$ bemenő szóra az A állapothalmaz δ_p transzformációját a

$$\delta_p(a) = ap \quad (a \in A) \tag{6.3}$$

feltétellel. Jelölje $T(A)$ a δ_p $(p \in X^+)$ transzformációk halmazát. Előfordulhat, hogy van olyan $r \in X^+$, amelyre $\delta_r = \iota_A$, azaz $\iota_A \in T(A)$. Ha X^+ helyett X^*-ot tekintjük, akkor $\iota_A \in T(A)$, mivel $\delta_e = \iota_A$.

6.2. Lemma
Az $\mathbf{A} = (A, X, \delta)$ automata karakterisztikus félcsoportja [monoidja] izomorf $T(A)$-val.

Bizonyítás. Ha $p, q \in X^+$ tetszőleges bemenő szavak és $a \in A$ tetszőleges állapot, akkor

$$(\delta_p \circ \delta_q)(a) = \delta_q(\delta_p(a)) = \delta_q(ap) = (ap)q = a(pq) = \delta_{pq}(a),$$

azaz $\delta_p \circ \delta_q = \delta_{pq}$. Így $T(A)$ zárt a leképezések kompozíciójára, amiből már következik, hogy A feletti transzformációfélcsoport. Könnyen ellenőrizhető, hogy a

$$\varphi(\delta_p) = \rho_{\mathbf{A}}[p] \quad (p \in X^+) \tag{6.4}$$

összefüggéssel definiált $\varphi : T(A) \to X^+/\rho_{\mathbf{A}}$ leképezés $T(A)$-nak $X^+/\rho_{\mathbf{A}}$-ra való izomorfizmusa.

Ha az előbbi bizonyításban X^+ helyett X^*-ot tekintjük, akkor (6.4) leképezés $T(A)$-nak $X^*/\rho_{\mathbf{A}}$-ra való izomorfizmusa. $\square$

Nem nehéz belátni, hogy $T(A)$ egy generátorrendszere az $M = \{\delta_x; x \in X\}$ rendszer. A továbbiakban az $\mathbf{A} = (A, X, \delta)$ automata karakterisztikus félcsoportját $S(\mathbf{A})$-val jelöljük és a célnak megfelelően azonosítjuk egy vele izomorf félcsoporttal, például $X^+/\rho_{\mathbf{A}}$-val vagy $T(A)$-val. Mivel véges halmaz feletti minden transzformációfélcsoport véges, ezért A-véges automata karakterisztikus félcsoportja véges. Az $\mathbf{A}$ automata karakterisztikus monoidját $S_1(\mathbf{A})$-val fogjuk jelölni. A karakterisztikus félcsoport [monoid] központi szerepet játszik az automaták vizsgálatában. Azt is mondhatjuk, hogy a karakterisztikus félcsoport [monoid] az automata működését írja le.

A következőkben a karakterisztikus félcsoport és monoid fogalmát általánosítjuk Mealy automatákra olyan módon, hogy az automata kimeneti viselkedése is szerepet játszon. Legyen $\mathbf{A} = (A, X, Y, \delta, \lambda)$ tetszőleges Mealy automata. Vezessük be az X^* szabad félcsoporton a $\tau_{\mathbf{A},a}$ $(a \in A)$ ekvivalenciakat a

$$(p, q) \in \tau_{\mathbf{A},a} \iff \overline{\lambda(a, p)} = \overline{\lambda(a, q)} \quad (p, q \in X^*) \tag{6.5}$$

feltétellel. A λ kimenetfüggvény (1.4) és (1.5) kiterjesztése szerint $\tau_{\mathbf{A},a}[e] = \{e\}$. (Megállapodás szerint $\overline{e} = e$.) Legyenek továbbá

$$\tau_{\mathbf{A}} = \cap\{\tau_{\mathbf{A},a}; a \in A\}, \tag{6.6}$$

$$\rho'_{\mathbf{A},a} = \rho_{\mathbf{A},a} \cap \tau_{\mathbf{A},a} \quad \text{és} \quad \rho'_{\mathbf{A}} = \cap\{\rho'_{\mathbf{A},a}; a \in A\}. \tag{6.7}$$

6.3. Lemma

Bármely $\mathbf{A} = (A, X, Y, \delta, \lambda)$ Mealy automatára $\rho'_{\mathbf{A},a}$ $(a \in A)$ az X^* szabad félcsoport jobb kongruenciája, $\tau_{\mathbf{A}}$ bal kongruenciája, $\rho'_{\mathbf{A}}$ pedig X^* kongruenciája és

$$\rho'_{\mathbf{A}} = \rho_{\mathbf{A}} \cap \tau_{\mathbf{A}}. \tag{6.8}$$

Bizonyítás. Ha $(p, q) \in \rho_{\mathbf{A},a}$ $(p, q \in X^*)$, akkor a 6.1. Lemma szerint minden $r \in X^+$-ra $(pr, qr) \in \rho_{\mathbf{A},a}$. Továbbá

$$\overline{\lambda(a, pr)} = \overline{\lambda(ap, r)} = \overline{\lambda(aq, r)} = \overline{\lambda(a, qr)},$$

így $(pr, qr) \in \tau_{\mathbf{A},a}$, azaz $(pr, qr) \in \rho'_{\mathbf{A},a}$. De $\rho'_{\mathbf{A},a} \subseteq \rho_{\mathbf{A},a}$, ezért az előzőek szerint $\rho'_{\mathbf{A},a}$ jobb kongruencia.

Ha $(p, q) \in \tau_{\mathbf{A}}$, akkor minden $a \in A$ és $r \in X^+$ esetén

$$\overline{\lambda(a, rp)} = \overline{\lambda(ar, p)} = \overline{\lambda(ar, q)} = \overline{\lambda(a, rq)},$$

így $(rp, rq) \in \tau_{\mathbf{A}}$, azaz $\tau_{\mathbf{A}}$ bal kongruencia. A 6.1. Lemma bizonyításához hasonló módon megmutatható, hogy $\rho'_{\mathbf{A}}$ kongruencia. A definíciókból látható, hogy $\rho'_{\mathbf{A}} = \rho_{\mathbf{A}} \cap \tau_{\mathbf{A}}$. □

A (6.7) feltétellel definiált $\rho'_{\mathbf{A}}$ kongruenciát az $\mathbf{A}$ Mealy automata *Peák kongruenciá*jának nevezzük. A $\rho'_{\mathbf{A}}$ X^+-ra való szűkítését, amely kongruencia X^+-on, szintén $\rho'_{\mathbf{A}}$-val jelölünk. Az $X^*/\rho'_{\mathbf{A}}$ faktorfélcsoportot $\mathbf{A}$ *karakterisztikus monoidjá*nak, $X^+/\rho'_{\mathbf{A}}$ faktorfélcsoportot pedig $\mathbf{A}$ *karakterisztikus félcsoport*jának nevezzük. A definícióból adódik, hogy

$$X^*/\rho'_{\mathbf{A}} = X^+/\rho'_{\mathbf{A}} \cup \{e\}.$$

A (6.8) összefüggés miatt $\rho'_{\mathbf{A}} \subseteq \rho_{\mathbf{A}}$, vagyis Mealy automata vetületének karakterisztikus félcsoportja [monoidja] a Mealy automata karakterisztikus félcsoportjának [monoidjának] homomorf képe.

A (6.5)-ben definiált $\tau_{\mathbf{A},a}$ relációt egy $\mathbf{A} = (A, X, Y, \delta, \mu)$ Moore automata esetén a

$$(p, q) \in \tau_{\mathbf{A},a} \iff \mu(ap) = \mu(aq) \quad (p, q \in X^*)$$

feltétellel adjuk meg, azaz (6.2)-ben és (6.6)-ban definiált $\rho_{\mathbf{A}}$ ill. $\tau_{\mathbf{A}}$ relációkra $\rho_{\mathbf{A}} \subseteq \tau_{\mathbf{A}}$, s így (6.8) miatt $\rho'_{\mathbf{A}} = \rho_{\mathbf{A}}$. Ezek alapján *Moore automaták karakterisztikus félcsoportján* [*monoidján*] vetületük karakterisztikus félcsoportját [monoidját] értjük.

6.4. Tétel
Mealy automata karakerisztikus félcsoportja [monoidja] egyenlő vázának karakterisztikus félcsoportjával [monoidjával].

Bizonyítás. Legyen $\mathbf{A} = (A, X, Y, \delta, \lambda)$ tetszőleges Mealy automata és $\mathbf{A}_Y = (A \times Y, X, \delta_Y)$ az $\mathbf{A}$ automata váza. (1.3) alapján a $p \in X^+$ hossza szerinti teljes indukcióval megmutatható, hogy tetszőleges $a \in A$, $y \in Y$, $p \in X^+$ esetén

$$(a, y)p = (ap, \overline{\lambda(a, p)}).$$

Mivel (1.4) szerint $\delta_Y((a, y), e) = (a, y)$ $(a \in A, y \in Y)$, ezért $\rho_{\mathbf{A}_Y} = \rho'_{\mathbf{A}}$. $\square$

A (6.8) összefüggésből adódik a következő tétel, amely összhangban van azzal, hogy Moore automaták karakterisztikus félcsoportján vetületük karakterisztikus félcsoportját értjük.

6.5. Tétel
Ha egy Mealy automata teljesíti a Moore kritériumot, akkor karakterisztikus félcsoportja egyenlő vetületének karakterisztikus félcsoportjával.

Bizonyítás. Teljesítse az $\mathbf{A} = (A, X, Y, \delta, \lambda)$ Mealy automata a Moore kritériumot. Tegyük fel, hogy $(p, q) \in \rho_{\mathbf{A}}$ $(p, q \in X^+)$. Legyenek $p', q' \in X^*$ és $x, z \in X$, amelyekre $p = p'x$ és $q = q'z$. Akkor minden $a \in A$ állapotra

$$\delta(ap', x) = ap = aq = \delta(aq', z)$$

teljesül. Ebből (1.1) szerint

$$\overline{\lambda(a,p)} = \lambda(ap', x) = \lambda(aq', z) = \overline{\lambda(a,q)},$$

azaz $\rho_{\mathbf{A}} \subseteq \tau_{\mathbf{A}}$, tehát ${\rho'}_{\mathbf{A}} = \rho_{\mathbf{A}}$. □

Láttuk, hogy ${\rho'}_{\mathbf{A}}[e] = \{e\}$, ezért az előző tétel karakterisztikus monoidokra csak abban az esetben igaz, ha $\rho_{\mathbf{A}}[e] = \{e\}$.

Most megadjuk, hogy milyen strukturális kapcsolat van Mealy automaták és vetületük karakterisztikus félcsoportjai között. Ehhez először megadjuk Mealy automaták karakterisztikus félcsoportját bizonyos leképezéspárok félcsoportjaként is. Definiáljuk minden $p \in X^+$ bemenő szóra az A állapothalmaz λ_p ($p \in X^+$) leképezéseit az Y kimenő halmazba olyan módon, hogy minden $a \in A$ állapotra

$$\lambda_p(a) = \overline{\lambda(a,p)} \tag{6.9}$$

teljesüljön. Jelölje $T'(A)$ a (δ_p, λ_p) ($p \in X^+$) leképezéspárok halmazát, ahol δ_p ($p \in X^+$) az A halmaz (6.3) transzformációja. Vezessük be a $T'(A)$ halmazon a $\triangleright$ műveletet a

$$(\delta_p, \lambda_p) \triangleright (\delta_q, \lambda_q) = (\delta_p \circ \delta_q, \delta_p \circ \lambda_q) \quad (p, q \in X^+) \tag{6.10}$$

összefüggéssel.

6.6. Lemma
Az $\mathbf{A} = (A, X, Y, \delta, \lambda)$ Mealy automata karakterisztikus félcsoportja izomorf $T'(A)$-val.

Bizonyítás. Először megmutatjuk, hogy $T'(A)$ a $\triangleright$ műveletre félcsoport. Bármely $a \in A$ és $p, q \in X^+$ esetén, (1.6) összefüggést is felhasználva,

$$\lambda_{pq}(a) = \overline{\lambda(a,pq)} = \overline{\lambda(ap,q)} = \lambda_q(\delta_p(a)) = (\delta_p \circ \lambda_q)(a),$$

azaz

$$\lambda_{pq} = \delta_p \circ \lambda_q.$$

Ez azt jelenti, hogy $T'(A)$ zárt a $\triangleright$ műveletre. Nem nehéz számolással megmutatható, hogy a $\triangleright$ művelet asszociatív. A

$$\varphi(\delta_p, \lambda_p)) = {\rho'}_{\mathbf{A}}[p] \quad (p \in X^+) \tag{6.11}$$

összefüggéssel definiált $\varphi : T'(A) \to X^+/\rho_{\mathbf{A}'}$ leképezés $T'(A)$-nak $X^+/\rho_{\mathbf{A}'}$-re való izomorfizmusa. □

A $T'(A)$ egy generátorrendszere az $M' = \{(\delta_x, \lambda_x); x \in X\}$ rendszer. Az $\mathbf{A} = (A, X, Y, \delta, \lambda)$ Mealy automata karakterisztikus félcsoportját $S'(\mathbf{A})$-val fogjuk jelölni, és adott esetben azonosítjuk egy vele izomorf félcsoporttal, például $X^+/\rho'_{\mathbf{A}}$-val vagy $T'(A)$-val. Ha $T'(A)$-hoz egységelemként adjungáljuk a (δ_e, λ_e) leképezéspárt, akkor $\mathbf{A}$ karakterisztikus monoidjával izomorf félcsoportot kapunk. Ha azonban (6.10)-ben X^+ helyett X^*-ot vesszük, akkor (δ_e, λ_e) nem lesz egységelem.

Legyenek S és T tetszőleges félcsoportok és φ az S-nek $E(T)$-be való tetszőleges homomorf leképezése. Jelölje az $s \in S$ képét φ_s a φ leképezésnél. Ekkor minden $s_1, s_2 \in S$ esetén $\varphi_{s_1 s_2} = \varphi_{s_1}\varphi_{s_2}$. Definiáljuk az $S \times T$ halmazon a $(s_1, t_1)(s_2, t_2) = (s_1 s_2, t_1\varphi_{s_1}(t_2))$ szorzást. Az $S \times T$ halmaz erre a műveletre félcsoportot alkot, amelyet *S és T φ szerinti szemidirekt szorzat*ának nevezünk, s $S *_\varphi T$-sel jelölünk. A szemidirekt szorzat a direkt szorzat egy általánosítása. Ha ugyanis $\varphi(S) = \iota_T$, akkor $S *_\varphi T = S \times T$. Egy S' félcsoport a *S és T félcsoportok szubszemidirekt szorzat*a, jelekben $S' = S *_\varphi^{sub} T$, ha S' részfélcsoportja a $S *_\varphi T$ szemidirekt szorzatnak és minden $s \in S$ elemhez van olyan $t \in T$, hogy $(s, t) \in S'$.

6.7. Tétel (Dao tétele)
Ha $S'(\mathbf{A})$ az $\mathbf{A} = (A, X, Y, \delta, \lambda)$ Mealy automata, $S(\mathbf{A})$ pedig $\mathbf{A}$ vetületének karakterisztikus félcsoportja, akkor van olyan U jobbzéró félcsoport és olyan $\varphi : S(\mathbf{A}) \to E(U)$ homomorfizmus, hogy $S'(\mathbf{A})$ egyenlő egy $S(\mathbf{A}) *_\varphi^{sub} U$ szubszemidirekt szorzattal.

Bizonyítás. Legyen $U = \{\lambda_q; q \in X^+\}$ és vezessük be az U halmazon a $\diamond$ műveletet úgy, hogy erre a műveletre U jobbzéró félcsoport legyen. A 6.2. Lemma szerint azonosítsuk az $S(\mathbf{A})$ karakterisztikus félcsoportot a $T(A)$ transzformációfélcsoporttal. Definiáljuk minden $p \in X^+$ bemenő szóra a $\psi_p : U \to U$ leképezést a

$$\psi_p(\lambda_q) = \lambda_{pq} \quad (q \in X^+)$$

összefüggéssel. Bármely $q_1, q_2 \in X^+$ párra

$$\psi_p(\lambda_{q_1} \diamond \lambda_{q_2}) = \psi_p(\lambda_{q_2}) = \lambda_{pq_2} = \lambda_{pq_1} \diamond \lambda_{pq_2} = \psi_p(\lambda_{q_1}) \diamond \psi_p(\lambda_{q_2}),$$

azaz $\psi_p \in E(U)$. Tekintsük azt a $\varphi : S(\mathbf{A}) \to E(U)$ leképezést, amelyre tetszőleges $\delta_p \in S(\mathbf{A})$ $(p \in X^+)$ esetén $\varphi(\delta_p) = \psi_p$ teljesül. (Nem nehéz belátni, hogy φ valóban leképezés.) Bármely $p_1, p_2, q \in X^+$ bemenő szavakra

$$\psi_{p_1p_2}(\lambda_q) = \lambda_{(p_1p_2)q} = \lambda_{p_1(p_2q)} = \psi_{p_1}(p_2q) = \psi_{p_1}(\psi_{p_2}(\lambda_q)),$$

vagyis $\psi_{p_1p_2} = \psi_{p_1}\psi_{p_2}$. Ez azt jelenti, hogy φ az $S(\mathbf{A})$-nak $E(U)$-ba való homomorfizmusa.

Megmutatjuk, hogy $S'(\mathbf{A}) = S(\mathbf{A}) *_{\varphi}^{sub} U$. Azonosítsuk a 6.6. Lemma szerint $S'(\mathbf{A})$-t $T'(A)$-val. Így $S'(\mathbf{A})$ az $S(\mathbf{A}) *_{\varphi} U$ szemidirekt szorzat részhalmaza. Mivel minden $\delta_p \in S(\mathbf{A})$ elemre $(\delta_p, \lambda_p) \in S'(\mathbf{A})$, ezért csupán azt kell igazolni, hogy az $S'(\mathbf{A})$-beli és a $S(\mathbf{A}) *_{\varphi} U$-beli műveletek megegyeznek. De az $S'(\mathbf{A})$-ban

$$(\delta_p, \lambda_p) \triangleright (\delta_q, \lambda_q) = (\delta_p \circ \delta_q, \delta_p \circ \lambda_q) = (\delta_{pq}, \lambda_{pq}),$$

az $S(\mathbf{A}) *_{\varphi} U$ félcsoportban pedig

$$(\delta_p, \lambda_p)(\delta_q, \lambda_q) = (\delta_p \circ \delta_q, \lambda_p \diamond \psi_p(\lambda_q)) = (\delta_{pq}, \psi_p(\lambda_q)) = (\delta_{pq}, \lambda_{pq}),$$

amivel az utóbbi állítást is igazoltuk. □

Legyen az α leképezés az $\mathbf{A} = (A, X, Y, \delta, \lambda)$ automatának az $\mathbf{A}' = (A', X, Y', \delta', \lambda')$ automatába való homomorfizmusa. Ha az α leképezést homomorfan kiterjesztjük az A^+ félcsoportra, a kiterjesztéseket ugyanúgy jelölve, akkor (1.4), (1.5), (3.6) és (3.7) alapján bármely $a \in A$ állapotra és $p \in X^*$ bemenő szóra

$$\alpha(\delta(a, p)) = \delta'(\alpha(a), p), \tag{6.12}$$

$$\lambda(a, p) = \lambda'(\alpha(a), p). \tag{6.13}$$

Megmutatjuk, hogy (6.12) igaz. Az (1.4) és (1.5) jelöléseit alkalmazva:

$$\alpha(\delta(a, e)) = \alpha(a) = \delta'(\alpha(a), e),$$

$$\begin{aligned} \alpha(\delta(a, p)) = \alpha(a_1 a_2 \dots a_k) = \alpha(a_1)\alpha(a_2) \dots \alpha(a_k) = \\ = \alpha(\delta(a, x_1))\alpha(\delta(a_1, x_2)) \dots \alpha(\delta(a_{k-1}, x_k)) = \\ \delta'(\alpha(a), x_1)\delta'(\alpha(a_1), x_2) \dots \delta'(\alpha(a_{k-1}), x_k) = \\ = \delta'(\alpha(a), x_1 x_2 \dots x_k) = \delta(\alpha(a), p)). \end{aligned}$$

A (6.13) érvényességét hasonlóan igazolhatjuk.

Természetesen kimenő jel nélküli automatákra csak (6.12) érvényes. Mivel $\delta(a, p)$ utolsó betűjét ap jelöli, ezért a (6.12) összefüggésből nyilvánvalóan következik, hogy bármely $a \in A$ és $p \in X^+$ esetén

$$\alpha(ap) = \alpha(a)p. \tag{6.14}$$

6.8. Tétel
Ha az $\mathbf{A}'$ automata az $\mathbf{A}$ automata homomorf képe, akkor $\mathbf{A}'$ karakterisztikus félcsoportja [monoidja] homomorf képe $\mathbf{A}$ karakterisztikus félcsoportjának [monoidjának].

Bizonyítás. Mealy automata homomorf képének váza a vázának homomorf képe. A 6.4. Tétel szerint Mealy automata karakterisztikus félcsoportja [monoidja] egyenlő vázának karakterisztikus félcsoportjával [monoidjával]. Továbbá Moore automata homomorf képének vetülete a vetületének homomorf képe. A 6.5. Tétel szerint Moore automata karakterisztikus félcsoportja [monoidja] megegyezik vetületének karakterisztikus félcsoportjával [monoidjával]. Ezért elegendő az állítást kimenő jel nélküli automatákra bebizonyítani.

Legyen α az $\mathbf{A} = (A, X, \delta)$ automata homomorf leképezése az $\mathbf{A}' = (A', X', \delta')$ automatára. Terjesszük ki az α leképezést az A^+ szabad élcsoportra homomorf módon. A (6.3) feltétel és a 6.2. Lemma szerint $S(\mathbf{A}) = \{\delta_p; p \in X^+\}$ és $S(A') = \{\delta'_p; p \in X^+\}$. Adjuk meg a $\varphi : S(\mathbf{A}) \to S(\mathbf{A}')$ megfeleltetést a $\varphi(\delta_p) = \delta'_p$ $(p \in X^+)$ feltétellel. A φ megfeleltetés $S(\mathbf{A})$-nek $S(\mathbf{A}')$-re való egyértelmű leképezése. Legyenek $p, q \in X^+$ tetszőleges bemenő szavak. Akkor (6.7) szerint

$$\varphi(\delta_p \circ \delta_q) = \varphi(\delta_{pq}) = \delta'_{pq} = \delta'_p \circ \delta'_q = \varphi(\delta_p) \circ \varphi(\delta_q),$$

azaz φ homomorfizmus.

A bizonyítás karakterisztikus monoidokra is nyilvánvalóan igaz. (Legyen ebben az esetben $\varphi(\delta_e) = \delta'_e$.) □

A 6.8. Tétel segítségével könnyen igazolható a

6.9. Tétel
Izomorf automaták karakterisztikus félcsoportjai [karakterisztikus monoidjai] egyenlők.

6.10. Tétel
Ha az $\mathbf{A}'$ automata az $\mathbf{A}$ automata AX-részautomatája, akkor $\mathbf{A}'$ karakterisztikus félcsoportja [monoidja] homomorf képe $\mathbf{A}$ karakterisztikus félcsoportja [monoidja] egy részfélcsoportjának [részmonoidjának].

Bizonyítás. Mealy automata AX-részautomatájának váza a vázának részautomatája, Moore automata AX-részautomatájának vetülete pedig a vetületének AX-részautomatája. Így a 6.4. és a 6.5. Tétel szerint elegendő az állítást kimenő jel nélküli automatákra bebizonyítani.

Legyen $\mathbf{A}' = (A', X', \delta')$ az $\mathbf{A} = (A, X, \delta)$ automata AX-részautomatája. Adjuk meg az $S(\mathbf{A})$ félcsoportot a 6.2. Lemma alapján a $T(A)$ transzformációfélcsoportként. Könnyen belátható, hogy $S' = \{\delta_p; p \in X'^+\}$ az $S(\mathbf{A})$ karakterisztikus félcsoportnak részfélcsoportja. A

$$\varphi(\delta_p) = \delta'_p \ (p \in X'^+)$$

feltétellel definiált φ megfeleltetés S'-nek $S(A')$-re való homomorf leképezése.

A bizonyítás karakterisztikus monoidokra annyiban különbözik az előző bizonyítástól, hogy S'-ben szerepel a δ_e identikus leképezés. $\square$

6.11. Tétel

Ha $\mathbf{A}'$ automata az $\mathbf{A}$ automata részautomatája, akkor $\mathbf{A}'$ karakterisztikus félcsoportja [monoidja] homomorf képe $\mathbf{A}$ karakterisztikus félcsoportjának-nak. [monoidjának]

Bizonyítás. Mealy automata részautomatájának váza a vázának részautomatája és Moore automata részautomatájának vetülete a vetületének részautomatája. Így a 6.4. és a 6.5. Tétel szerint elegendő az állítást most is kimenő jel nélküli automatákra bebizonyítani.

Legyen $\mathbf{A}' = (A', X, \delta')$ az $\mathbf{A} = (A, X, \delta)$ automata részautomatája. A 6.10. Tétel bizonyításából nyilvánvalóan adódik az állítás, mivel a bizonyításban szereplő S' egyenlő $S(\mathbf{A})$-val. $\square$

6.12. Tétel

Ha $\mathbf{A}'$ az $\mathbf{A}$ automata X-részautomatája, akkor $\mathbf{A}'$ karakterisztikus félcsoportja [monoidja] $\mathbf{A}$ karakterisztikus félcsoportjának [monoidjának] részfélcsoportja [részmonoidja].

Bizonyítás. Legyen az $\mathbf{A}' = (A, X', Y', \delta', \lambda')$ Mealy automata X-részautomatája az $\mathbf{A} = (A, X, Y, \delta, \lambda)$ Mealy automata. Az (1.3) definíció alapján nem nehéz belátni, hogy az $(A \times Y', X', \delta')$ automata az $\mathbf{A}$ vázának olyan AX-részautomatája, amelynek karakterisztikus félcsoportja [monoidja] megegyezik a váz $(A \times Y, X', \delta')$ X-részautomatájának karakterisztikus félcsoportjával [monoidjával]. Moore automata X-részautomatájának vetülete a vetületének X-részautomatája. Ezért a 6.4. és a 6.5. Tétel szerint elegendő az állítást ebben az esetben is kimenő jel nélküli automatákra bebizonyítani.

Ha $\mathbf{A}' = (A, X', \delta')$ az $\mathbf{A} = (A, X, \delta)$ automata X-részautomatája, akkor a 6.10. Tétel bizonyításában szereplő φ leképezés S' identikus leképezése, azaz $S(A') = S'$ $\square$

6.13. Tétel

Egy A-véges automata karakterisztikus félcsoportja akkor és csak akkor bal reduktív, ha izomorf értékkészletének karakterisztikus félcsoportjával.

Bizonyítás. A 6.4. és a 6.5. Tétel szerint elegendő kimenő jel nélküli automatákra szorítkozni. Az $\mathbf{A} = (A, X, \delta)$ automata $\mathbf{A_1} = (A_1, X, \delta_1)$ értékkészlete $\mathbf{A}$-nak részautomatája. A 6.11. Tétel szerint az $S(\mathbf{A_1})$ karakterisztikus félcsoport az $S(\mathbf{A})$ karakterisztikus félcsoport homomorf képe. A $\varphi(\delta_p) = (\delta_1)_p$ $(p \in X^+)$ leképezés egy megfelelő homomorfizmus.

Tegyük fel, hogy $S(\mathbf{A}) \cong S(\mathbf{A_1})$. Mivel $S(\mathbf{A})$ véges, ezért φ izomorfizmus. Legyenek δ_p és δ_q $(p, q \in X^+)$ az $S(\mathbf{A})$ karakterisztikus félcsoport olyan elemei, amelyekre minden $r \in X^+$ esetén

$$\delta_{rp} = \delta_r \circ \delta_p = \delta_r \circ \delta_q = \delta_{rq}$$

teljesül. Ebből kapjuk, hogy minden $a \in A$ állapotra

$$(ar)p = a(rp) = a(rq) = (ar)q,$$

azaz $(\delta_1)_p = (\delta_1)_q$, így

$$\delta_p = \varphi^{-1}((\delta_1)_p) = \varphi^{-1}((\delta_1)_q) = \delta_q.$$

Ez azt jelenti, hogy $S(\mathbf{A})$ bal reduktív.

Megfordítva, legyen $S(\mathbf{A})$ bal reduktív. Azt kell csak megmutatni, hogy φ bijektív. Legyen e célból

$$(\delta_1)_p = (\delta_1)_q \quad (p, q \in X^+),$$

azaz minden $a \in A$ állapotra és $r \in X^+$ bemenő szóra

$$a(rp) = (ar)p = (ar)q = a(rq).$$

Így

$$\delta_r \circ \delta_p = \delta_r \circ \delta_q.$$

De $S(\mathbf{A})$ bal reduktív, ezért $\delta_p = \delta_q$, azaz φ valóban bijektív. □

Egy elegendő feltételt könnyen adhatunk arra, hogy egy automata karakterisztikus félcsoportja mikor bal reduktív.

6.14. Tétel

Ha egy automata átmenetfüggvénye szürjektív, akkor karakterisztikus félcsoportja bal reduktív.

Bizonyítás. Tegyük fel, hogy az $\mathbf{A} = (A, X, \delta)$ automata δ átmenetfüggvénye szürjektív. Ebből következik, hogy $A = \{a\,r; a \in A, r \in X^+\}$.

Legyenek δ_p és δ_q $(p, q \in X^+)$ az $S(\mathbf{A})$ karakterisztikus félcsoport olyan elemei, amelyekre minden $r \in X^+$ esetén

$$\delta_r \circ \delta_p = \delta_r \circ \delta_q.$$

Így minden $a \in A$ állapotra

$$(ar)p = a(rp) = a(rq) = (ar)q,$$

azaz $\delta_p = \delta_q$. □

Feladatok

6.1. Legyen az $\mathbf{A} = (A, X, \delta)$ automata $S(\mathbf{A})$ karakterisztikus félcsoportja egységelemes. $S(\mathbf{A})$ akkor és csak akkor egyenlő az $S_1(\mathbf{A})$ karakterisztikus monoiddal, ha δ szürjektív. (→ Megoldás)

6.2. Egy $\mathbf{A} = (A, X, \delta)$ automata karakterisztikus félcsoportja akkor és csak akkor jobbzéró félcsoport, ha $\mathbf{A}$ teljes beállító automaták direkt összege. (→ Megoldás)

6.3. Egy Mealy automata karakterisztikus félcsoportjának akkor és csak akkor van jobb oldali egységeleme [egységeleme], ha teljesíti a Moore kritériumot és vetülete karakterisztikus félcsoportjának van jobb oldali egységeleme [egységeleme]. (→ Megoldás)

II. AUTOMATALEKÉPEZÉSEK

Ebben a részben az automatákat mint információátalakító rendszereket vizsgáljuk. Megadjuk az információátalakítás algebrai fogalmát és megmutatjuk, hogy minden információátalakítást a tárgyalt automatatípusokkal meg lehet oldani.

7. Az automataleképezés fogalma

Legyen X^* a nemüres X halmaz feletti szabad félcsoport, amely az e üres szót is tartalmazza. Az X halmaz elemeivel megfogalmazott *információk*on az X elemeiből képezett véges sorozatokat, azaz az X^*-beli szavakat értjük. Ha a p és q olyan X^*-beli szavak, amelyekhez vannak olyan r és t X^*-beli szavak, hogy $p = rqt$, akkor a q szót a p szó *részszavá*nak nevezzük. Ha emellett $q \neq p$, akkor q-t p *valódi részszavá*nak hívjuk. Ha $r = e$, akkor azt mondjuk, hogy a q részszó a p *kezdőszelete* vagy *prefix*e. Ha pedig $t = e$, akkor q a p *zárószelet*e vagy *szuffix*e. Így az üres szó bármely szó részszava (prefixe, szuffixe). Ha $q \neq p$, akkor q-t a p *valódi kezdőszeleté*nek [*zárószeleté*nek hívjuk.

*Alfabetikus leképezések*nek nevezzük az $\alpha : X^* \to Y^*$ alakú leképezéseket, azaz az X^* szabad félcsoportnak az Y^* szabad félcsoportba való leképezéseit. Ebben a részben is tekintsünk el az $|Y| = 1$ triviális esettől, azaz tegyük fel, hogy $|Y| \geq 2$. *Információátalakítás*on egy alfabetikus leképezés megadását értjük. Az α alfabetikus leképezést *szóhossztartó*nak hívjuk, ha minden $p \in X^*$ szóra $|\alpha(p)| = |p|$ teljesül. Azt mondjuk, hogy az α alfabetikus leképezés *prefixtartó*, ha tetszőleges szó bármely kezdőszeletét a képszó egy kezdőszeletébe viszi át. Ezt úgy is megfogalmazhatjuk, hogy bármely $p(\in X^*)$ szóhoz van olyan $\alpha_p : X^* \to Y^*$ alfabetikus leképezés, amely minden $q \in X^*$ szóra teljesíti a

$$\alpha(pq) = \alpha(p)\alpha_p(q) \tag{7.1}$$

feltételt. Az α_p ($p \in X^*$) leképezéseket az α leképezés *állapotai*nak nevezzük. Megmutatjuk, hogy az α szóhossz- és prefixtartó alfabetikus leképezés állapotai is szóhossz- és prefixtartó alfabetikus leképezések. A definícióból könnyen adódik, hogy az α_p $(p \in X^*)$ leképezések szóhossztartóak. Ha $q, r \in X^*$, akkor

$$\alpha(p)\alpha_p(qr) = \alpha(pqr) = \alpha(pq)\alpha_{pq}(r) = \alpha(p)\alpha_p(q)\alpha_{pq}(r),$$

ezért

$$\alpha_p(qr) = \alpha_p(q)\alpha_{pq}(r),$$

azaz az α_p leképezések a szó kezdőszeleteit a képszó kezdőszeleteibe viszik át, és így $(\alpha_p)_q = \alpha_{pq}$. Bármely $\alpha : X \to Y$ leképezés homomorf kiterjesztése X^*-ra olyan $\alpha : X^* \to Y^*$ automataleképezés, amelynek egyetlen állapota önmaga.

Egy $\mathbf{A} = (A, X, Y', \delta, \lambda)$ $(\emptyset \subset Y' \subseteq Y)$ Mealy automata tetszőleges $a \in A$ állapotához rendeljük hozzá azt az $\alpha_{\mathbf{A},a} : X^* \to Y^*$ alfabetikus leképezést, amelyre

$$\alpha_{\mathbf{A},a}(p) = \lambda(a, p) \quad (p \in X^*) \tag{7.2}$$

teljesül. Az $\alpha_{\mathbf{A},a}$ leképezést az $\mathbf{A}$ *automata* (*a állapota*) *által indukált leképezésé*nek nevezzük. Azt is mondjuk, hogy $\alpha_{\mathbf{A},a}$-t az $\mathbf{A}$ automata (az a állapotával) indukálja. Ha nem vezet félreértésre, akkor $\alpha_{\mathbf{A},a}$ helyett a rövidebb α_a jelölést használjuk.

Az $\alpha : X^* \to Y^*$ alfabetikus leképezést *automataleképezés*nek nevezzük, ha létezik olyan $\mathbf{A} = (A, X, Y', \delta, \lambda)$ $(Y' \subseteq Y)$ Mealy automata és olyan $a \in A$ állapot, hogy $\alpha = \alpha_{\mathbf{A},a}$ teljesül. Ha az $\mathbf{A}$ Mealy automata iniciális az a_0 kezdő állapottal, akkor az α_{a_0} leképezést az $\mathbf{A}$ *iniciális automata által indukált leképezés*nek mondjuk és rá az $\alpha_{\mathbf{A}}$ jelölést is használjuk. Természetesen, ha az $\mathbf{A} = (A, X, Y', \delta, \lambda)$ automata indukálja az α automataleképezést az $a \in A$ állapotával, akkor $\mathbf{A}$-t inicializálhatjuk a-val, azaz írhatjuk $\mathbf{A} = (A, a, X, Y', \delta, \lambda)$ alakban.

7.1. Tétel

Egy $\alpha : X^* \to Y^*$ alfabetikus leképezés akkor és csak akkor automataleképezés, ha szóhossz- és prefixtartó leképezés.

Bizonyítás. Először megmutatjuk a feltétel szükségességét. Az (1.4) és az (1.5) összefüggésből adódik, hogy bármely $a \in A$ állapotra az α_a leképezés szóhossztartó. Ha $p, q \in X^*$, akkor (1.6) szerint

$$\alpha_a(pq) = \lambda(a, pq) = \lambda(a, p)\lambda(ap, q) = \alpha_a(p)\alpha_{ap}(q).$$

Ez azt jelenti, hogy α_a a szó kezdőszeleteit a képszó kezdőszeleteibe viszi át, azaz α_a prefixtartó leképezés és $(\alpha_a)_p = \alpha_{ap}$.

Az elegendőség bizonyításához tegyük fel, hogy az $\alpha : X^* \to Y^*$ alfabetikus leképezés szóhossz- és prefixtartó. Legyen A_α az α állapotainak halmaza, azaz

$$A_\alpha = \{\alpha_p; p \in X^*\}. \tag{7.3}$$

Alkossuk meg azt az $\mathbf{A}_\alpha = (A_\alpha, \alpha, X, Y_\alpha, \delta_\alpha, \lambda_\alpha)$ iniciális automatát, amelyre $Y_\alpha = \{\alpha_p(x); p \in X^*, x \in X\}$,

$$\delta_\alpha(\alpha_p, x) = \alpha_{px}, \quad \lambda_\alpha(\alpha_p, x) = \alpha_p(x). \tag{7.4}$$

Először az X^*-beli szavak hossza szerinti teljes indukcióval belátjuk, hogy az átmenet- és a kimenetfüggvény (1.4)-(1.5) kiterjesztéséből következnek az

$$(\alpha_p)q = \alpha_{pq}, \quad \lambda_\alpha(\alpha_p, q) = \alpha_p(q) \quad (p, q \in X^*) \tag{7.5}$$

összefüggések. Az (1.4) kiterjesztés szerint bármely $p \in X^*$ bemenő szóra

$$(\alpha_p)e = \alpha_p, \quad \lambda_\alpha(\alpha_p, e) = e = \alpha_p(e).$$

Tegyük fel, hogy minden legfeljebb n hosszúságú $q \in X^*$ bemenő szóra

$$(\alpha_p)q = \alpha_{pq}, \quad \lambda_\alpha(\alpha_p, q) = \alpha_p(q).$$

Akkor tetszőleges $x \in X$ bemenő jelre, az (1.5) kiterjesztést is felhasználva,

$$(\alpha_p)qx = ((\alpha_p)q)x = \alpha_{pq}x = \delta_\alpha(a_{pq}, x) = \alpha_{pqx},$$

$$\lambda_\alpha(\alpha_p, qx) = \lambda_\alpha(\alpha_p, q)\lambda_\alpha((\alpha_p)q, x) =$$
$$= \alpha_p(q)\lambda_\alpha(\alpha_{pq}, x) = \alpha_p(q)\alpha_{pq}(x) = \alpha_p(qx).$$

Ezek alapján már nem nehéz belátni, hogy δ_α és λ_α jól definiáltak. Ezekből az is következik, hogy minden $q \in X^*$ bemenő szóra

$$\alpha_{\mathbf{A}_\alpha}(q) = \lambda_\alpha(\alpha_e, q) = \alpha_e(q) = \alpha(q),$$

azaz $\alpha_{\mathbf{A}_\alpha} = \alpha$, vagyis $\mathbf{A}_\alpha$ indukálja az $\alpha = \alpha_e$ leképezést. □

Az előbbi bizonyításban megkonstruált $\mathbf{A}_\alpha$ automatát az α leképezéshez tartozó *alsó automatá*nak nevezzük. A 7.1. Tétel bizonyítása alapján nyilvánvalóan igaz alábbi következmény.

7.2. Következmény
Egy automataleképezés akkor és csak akkor indukálható véges automatával, ha állapotainak száma véges.

Az $\alpha : X^* \to Y^*$ automataleképezés indukálható azzal az

$$\mathbf{A}^\alpha = (X^*, e, X, Y_\alpha, \delta^\alpha, \lambda^\alpha)$$

iniciális automatával is amelynek kimenő halmaza megegyezik α automataleképezéshez tartozó alsó automata kimenő halmazával, átmenet- és kimenetfüggvénye pedig a

$$\delta^\alpha(p,x) = px, \quad \lambda^\alpha(p,x) = \alpha_p(x) \quad (p \in X^*,\ x \in X) \tag{7.6}$$

összefüggésekkel van definiálva. A bizonyítás szintén elvégezhető az X^*-beli szavak hossza szerinti teljes indukcióval.

Az $\mathbf{A}^\alpha$ automata egy szabad automata, amelyet az α automataleképezéshez tartozó *felső automatá*nak nevezzük. Vegyük észre, hogy tetszőleges automataleképezéshez tartozó alsó és felső automata iniciálisan összefüggő.

7.3. Tétel
Egy kezdő állapotot tartalmazó $\mathbf{A}$ iniciálisan összefüggő Mealy automata akkor és csak akkor indukálja az α automataleképezést, ha $\mathbf{A}$ iniciális homomorf képe az $\mathbf{A}^\alpha$ felső automatának és az $\mathbf{A}_\alpha$ alsó automata az $\mathbf{A}$ automata iniciális homomorf képe.

Bizonyítás. Indukálja az $\mathbf{A} = (A, a_0, X, Y', \delta, \lambda)$ iniciálisan összefüggő automata az α automataleképezést, azaz legyen $\alpha = \alpha_{a_0}$. Mivel

$$\lambda(a_0 p, x) = \alpha_{a_0 p}(x) = \alpha_p(x) \quad (p \in X^*,\ x \in X),$$

ezért $Y' = Y_\alpha$. Definiáljuk a $\varphi : X^* \to A$ és $\psi : A \to A_\alpha$ leképezéseket úgy, hogy minden $p \in X^*$ bemenő szóra $\varphi(p) = a_0 p$ és $\psi(a_0 p) = \alpha_p$ teljesüljön. A φ leképezés az $\mathbf{A}^\alpha$ felső automatának $\mathbf{A}$-ra, ψ pedig az $\mathbf{A}$ automatának az $\mathbf{A}_\alpha$ alsó automatára való homomorf leképezése.

A feltétel elegendő, mivel iniciális automata iniciális homomorf képének kezdő állapota az iniciális automata kezdő állapotának homomorf képe. $\square$

7.4. Példa
Legyenek $X = \{x\}$, $Y = \{y, z\}$, $\alpha : X^* \to Y^*$, amelyre $\alpha(e) = e$ és $\alpha(x^n) = yz^{n-1}$ $(n \in N_+,\ z^0 = e)$.

Az α alfabetikus leképezés automataleképezés, $\alpha_x(x^n) = z^n$ $(n \in N_+)$ és $\alpha_x(e) = e$. Ezenkívül $\alpha_{x^k} = \alpha_x$ $(k \in N_+)$. Tehát $A_\alpha = \{\alpha, \alpha_x\}$, $Y_\alpha = Y$, az α-hoz tartozó alsó automata átmenet- és kimenetfüggvénye:

$$\delta_\alpha(\alpha, x) = \delta_\alpha(\alpha_x, x) = \alpha_x,$$

$$\lambda_\alpha(\alpha, x) = y, \quad \lambda_\alpha(\alpha_x, x) = z.$$

Az α-hoz tartozó felső automata átmenet- és kimenetfüggvénye:

$$\delta^\alpha(e, x) = x, \quad \delta^\alpha(x^k, x) = x^{k+1},$$

$$\lambda^\alpha(e, x) = y, \quad \lambda^\alpha(x^k, x) = z \quad (k \in N_+.$$

Ha $X = \{x_1, x_2, \dots, x_k\}$ és $Y = \{y_1, y_2, \dots, y_n\}$, azaz véges halmazok, akkor bármely $\alpha : X^* \to Y^*$ automataleképezés egyértelműen megadható egy végtelen irányított fával. Vegyük fel a fa gyökérpontját. A gyökérpontból indítsunk ki k irányított élt úgy, hogy balról jobbra haladva az i-edik él feleljen meg az x_i jelnek. Jelöljük meg ezt az élt az $\alpha(x_i)$ jellel. Az i-edik irányított él végpontját az első szint i-edik pontjának nevezzük. Az első szint j-edik pontjából ($j = 1, 2, \dots, k$) ismét indítsunk k irányított élt úgy, hogy balról jobbra haladva az i-edik él feleljen meg az x_i jelnek, s amelyet $\alpha(x_j x_i)$ szó utolsó betűjével jelölünk meg. Az eljárást folytatva olyan végtelen irányitott fához jutunk, amelynek l-edik szintjén a j-edik pontjából kiinduló a i-edik irányitott él az $\alpha(px_i)$ szó utolsó betűjével van megjelölve, ahol $p(\in X^*)$ az az egyetlen szó, amelyhez tartozó irányított út a gyökérpontból az l-edik szint j pontjához vezet. Az élek ilyen megjelölésével kapott fát az α *automataleképezés gráfjá*nak nevezzük. E gráfról egy $p \in X^+$ szó $\alpha(p)$ képét úgy olvassuk le, hogy végigmegyünk a gyökérpontból kiindulva a p szó által meghatározott úttal elérhető pontig és sorban leolvassuk az út éleihez írt jeleket. (Ez a gráf tulajdonképpen a felső automata átmenetgráfja.)

Világos, hogy véges X és Y halmazok esetén minden $\alpha : X^* \to Y^*$ automataleképezéshez megadhatunk a fenti módon egy végtelen irányított fát. Megfordítva, minden végtelen irányitott fa egyértelműen meghatároz egy $\alpha : X^* \to Y^*$ automataleképezést. Az α automataleképezés gráfjáról leolvashatjuk α állapotait. Valóban, tetszőleges $p \in X^+$ szóra az α_p állapot gráfja az α gráfjának az a részgráfja, amelynek gyökérpontja az α gráfjának gyökérpontjából a p szó által meghatározott úttal elérhető pontja.

7.5. Lemma

Ha $\alpha : X^* \to Y^*$ és $\beta : Y^* \to Z^*$ automataleképezések, akkor $\alpha \circ \beta$ is automataleképezés és minden $p \in X^*$ esetén

$$(\alpha \circ \beta)_p = \alpha_p \circ \beta_{\alpha(p)}.$$

Bizonyítás. Definíció szerint minden $p \in X^*$ szóra $\alpha \circ \beta(p) = \beta(\alpha(p))$, amiből látható, hogy $\alpha \circ \beta$ szóhossztartó leképezés.

Tetszőleges $q \in X^*$ szóra

$$\alpha \circ \beta(pq) = \beta(\alpha(pq)) = \beta(\alpha(p)\alpha_p(q)) =$$

$$= \beta(\alpha(p))\beta_{\alpha(p)}(\alpha_p(q)) = \alpha \circ \beta(p)\alpha_p \circ \beta_{\alpha(p)}(q),$$

vagyis $\alpha \circ \beta$ prefixtartó leképezés és $(\alpha \circ \beta)_p = \alpha_p \circ \beta_{\alpha(p)}$. □

*Moore automata által indukált automataleképezések*en értjük a Moore automatához tartozó Mealy automata által indukált automataleképezéseket. Az $\mathbf{A} = (A, X, Y, \delta, \mu)$ Moore automata kimenetfüggvénye (1.2) szerint $\lambda = \mu\delta$, ezért az $\mathbf{A}$ Moore automata $a \in A$ állapota által indukált α_a automataleképezés (1.8) szerint minden $p \in X^+$ bemenő szóra teljesíti a

$$\alpha_a(p) = \mu(\delta(a, p)) \tag{7.7}$$

összefüggést. A (7.7) összefüggés az e üres szóra nem teljesül, mert $\alpha_a(e) = e$, de $\mu(\delta(a, e)) = \mu(a)$.

Az 1. fejezetben említettük, hogy egy $\mathbf{A} = (A, X, \delta)$ kimenő jel nélküli automata tekinthető olyan Mealy automatának is, amelynek δ átmenetfüggvénye egyúttal kimenetfüggvény is. Ez alapján az $\mathbf{A}$ *kimenő jel nélküli automata által indukált automataleképezések*en értjük azokat az $\alpha_a : X^* \to A^* (a \in A)$ lekepezéseket, amelyekre $\alpha_a(p) = \delta(a, p)$ $(p \in X^+)$ és $\alpha(e) = e$ teljesülnek.

Legyen ξ X-nek X'-re, ill. η Y-nak Y'-re való kölcsönösen egyértelmű leképezése, azaz X és X', ill. Y és Y' ekvivalens halmazok. Terjesszük ki ξ-t X^*-ra, ill. η-t Y^*-ra monoid-homomorfizmussá. Az $\alpha : X^* \to Y^*$ alfabetikus leképezéshez definiáljuk azt az $\alpha_{\xi,\eta} : X'^* \to Y'^*$ alfabetikus leképezést, amely minden $p \in X^*$ szóra teljesíti az

$$\alpha_{\xi,\eta}(\xi(p)) = \eta(\alpha(p))$$

feltételt. Nyilvánvaló, hogy α akkor és csak akkor automataleképezés, ha $\alpha_{\xi,\eta}$ is az. Jelöljük az $\alpha : X^* \to Y^*$ automataleképezések halmazát $\mathcal{AL}[X, Y]$-nal. Az $\mathcal{AL}[X, Y]$ és az $\mathcal{AL}[X', Y']$ halmaz számossága egyenlő. Indukálja az $\alpha : X^* \to Y^*$ automataleképezést az $\mathbf{A} = (A, X, Y, \delta, \lambda)$ Mealy automata $a_0 \in A$ állapota. Definiáljuk az $\mathbf{A}' = (A, X', Y', \delta', \lambda')$ Mealy automata δ' átmenet- és λ' kimenetfüggvényét a

$$\delta'(a, \xi(x)) = \delta(a, x), \quad \lambda'(a, \xi(x)) = \eta(\lambda(a, x)) \quad (a \in A,\ x \in X)$$

összefüggésekkel. Az $\mathbf{A}'$ Mealy automata az $\alpha_{\xi,\eta}$ automataleképezést szintén az a_0 állapotával indukálja. A δ' és a λ' függvények definíciójából következik, hogy (ξ, η) az $\mathbf{A}$ automata bemenetkimenet-izomorf leképezése az $\mathbf{A}'$ automatára. Ez azt jelenti, hogy az automataleképezésekkel kapcsolatos vizsgálatokban elegendő olyan automatákra és homorfizmusaikra szorítkozni, amelyeknek bemenő halmazai és hasonlóan kimenő halmazai nem ekvivalensek.

Megmutatjuk, hogy tetszőleges információátalakítás megadható automataleképezés segítségével.

7.6. Tétel
Legyenek X, Y tetszőleges nemüres halmazok és $u \notin X$, $v \notin Y$ tetszőleges jelek, továbbá $X' = X \cup \{u\}$, $Y' = Y \cup \{v\}$. Bármely $\alpha : X^* \to Y^*$ alfabetikus leképezéshez kölcsönösen egyértelmű módon megadható olyan $\alpha' : X'^* \to Y'^*$ automataleképezés, amelyre

$$\alpha'(pu^k) = v^n \alpha(p) \quad (|p| = n,\ |\alpha(p)| = k,\ p \in X^*) \tag{7.8}$$

teljesül.

Bizonyítás. Adjuk meg az $\alpha : X^* \to Y^*$ alfabetikus leképezéshez az $\alpha' : X'^* \to Y'^*$ alfabetikus leképezést a következő módon:

Ha $|p| = n$, $(p \in X^*)$ és $|\alpha(p)| = k$, akkor $\alpha(p)$ bármely l hosszúságú q kezdőszeletére legyen

$$\alpha'(pu^l) = v^n q \quad (0 \le l \le k). \tag{7.9}$$

Ebből adódik, hogy $\alpha'(pu^k) = v^n \alpha(p)$ és $\alpha'(p) = v^n$. Ha $p = e$, akkor azt is kapjuk, hogy $\alpha'(e) = e$.

Minden más $p' \in X'^+$ szóra pedig legyen

$$\alpha'(p') = \alpha'(r')v^m \quad (p' = r'q',\ |q'| = m,\ r', q' \in X'^*), \tag{7.10}$$

ahol r' a p'-nek az a leghosszabb kezdőszelete, amelyre $\alpha'(r')$ a (7.9) összefüggéssel már definiálva van. Könnyen belátható, hogy α' automataleképezés.

Tegyük fel, hogy az $\alpha : X^* \to Y^*$ és $\beta : X^* \to Y^*$ automataleképezésekre $\alpha' = \beta'$. Legyen $p \in X^*$ tetszőleges szó, $|p| = n \ge 0$, $|\alpha(p)| = i$, $|\beta(p)| = j$ és $p' \in X'^*$ olyan, hogy $p' = pu^k$, ahol $i, j < k$. Akkor (7.9) és (7.10) szerint

$$v^n \alpha(p) v^{k-i} = \alpha'(pu^i) v^{k-i} = \alpha'(p') =$$

$$= \beta'(p') = \beta'(pu^j) v^{k-j} = v^n \beta(p) v^{k-j},$$

amiből következik, hogy $\alpha(p) = \beta(p)$, azaz $\alpha = \beta$. □

Egy $\alpha : X^* \to Y^*$ alfabetikus leképezéshez az α' automataleképezés fenti módszerrel való megszerkesztése, nem mindig gazdaságos. Ahhoz, hogy erről meggyőződjünk, elegendő azt az esetet tekinteni, amikor α maga is automataleképezés.

Feladatok

7.1. Az $\mathbf{A} = (A, a, X, Y, \delta, \lambda)$ iniciálisan összefüggő automata által indukált α_a leképezés akkor és csak akkor homomorfizmus, ha $\mathbf{A}$ memória nélküli. (→ Megoldás)

7.2. Legyen α_p $(p \in X^*)$ a (7.1) feltétellel definiált automataleképezés és $q \in X^+$. Mutassuk meg, hogy $\alpha_p = \alpha_{pq}$ akkor és csak ha akkor minden $r \in X^*$ bemenő szóra $\alpha_p(qr) = \alpha_p(q)\alpha_p(r)$. (→ Megoldás)

7.3. Tetszőleges (nemüres) X halmaz esetén X^* önmagába való α automataleképezéseinek A(X) halmaza a függvények kompozíciójára a $\mathcal{T}(X)$ teljes transzformációfélcsoport részmonoidja. Az X^* bijektív automataleképezéseinek $\mathcal{A}'(X)$ halmaza a függvények kompozíciójára az $\mathcal{S}(X)$ teljes permutációcsoport részcsoportja. (→ Megoldás)

7.4. Legyen X tetszőleges véges (nemüres) halmaz. A 7.3. feladat jelöléseit alkalmazva, ha α injektív vagy szürjektív, akkor $\alpha \in \mathcal{A}'(X)$ és bármely $p \in X^+$ szó esetén $\alpha_p \in \mathcal{A}'(X)$. (→ Megoldás)

7.5. Legyen X tetszőleges véges (nemüres) halmaz és $\mathcal{V}(X)$ a véges automatákkal indukált $\alpha : X^* \to X^*$ bijektív automataleképezések halmaza. A 7.3. feladat jelöléseit alkalmazva, $\mathcal{V}(X)$ a függvények kompozíciójára $\mathcal{A}'(X)$ részcsoportja és bármely $p \in X^+$ szó esetén $\alpha_p \in \mathcal{V}(X)$. (→ Megoldás)

(Megemlítjük, hogy még máig megoldatlan Csákány Béla és Gécseg Ferenc által a 60-as évek közepén felvetett következő probléma. Véges (nemüres) X halmaz esetén az $\mathcal{A}'(X)$ és a $\mathcal{V}(X)$ csoportok minimálisan generálhatók-e? ([14], 206. oldal.))

7.6. Legyen $\alpha : X^* \to Y^*$ egy automataleképezés. Definiáljuk a az $Y^* \times X^*$ halmazon a szorzás műveletét a következő módon:

$$(p, q) \cdot (r, t) = (p\alpha_q(t), qt) \; (p, r \in Y^*, \; q, t \in X^*).$$

$(Y^* \times X^*, \cdot)$ olyan félcsoport, amelynek vannak jobb oldali egységelemei. Határozzuk meg a jobb oldali egységelemeket. (→ Megoldás)

8. Állapotok megkülönböztethetősége

Kimenőjeles automaták működését általában kimeneti viselkedése alapján ítéljük meg. Ezért a (belső) állapotok egymástól való megkülönböztetésének egy természetes módja annak vizsgálata, hogy van-e olyan olyan bemenő jelsorozat, amelynek a hatására különböző jelsorozatot adnak ki az automaták, ha ezek az állapotok a kezdő állapotok.

Legyenek $\mathbf{A} = (A, X, Y, \delta, \lambda)$ és $\mathbf{B} = (B, X, Y, \delta', \lambda')$ közös bemenő és kimenő halmazzal rendelkező Mealy automaták. Azt mondjuk, hogy az $\mathbf{A}$ automata a és a $\mathbf{B}$ automata b állapota *megkülönböztethető a $p \in X^+$ szóval*, ha $\lambda(a,p) \neq \lambda'(b,p)$. Ha $|p| = n$, akkor úgy is mondjuk, hogy az a és b állapot *n lépésben megkülönböztethetők*. Az a és b állapotokat *megkülönböztethető*knek nevezzük, ha

$$(\exists p \in X^+) \quad \lambda(a,p) \neq \lambda'(b,p), \tag{8.1}$$

azaz van olyan p szó, amellyel megkülönböztethetők. Ellenkező esetben azt mondjuk, hogy a *megkülönböztethetetlen* b-től. Másképpen mondva, a és b *megkülönböztethetetlen* akkor és csak akkor, ha ugyanazt az automataleképezést indukálják. Ha $\mathbf{A}$ vagy $\mathbf{B}$ Moore automata, akkor a definícióban a hozzájuk tartozó $\mathbf{A}_\lambda$ vagy $\mathbf{B}_{\lambda'}$ Mealy automata szerepel.

8.1. Tétel
Ha az n állapotú $\mathbf{A}$ Mealy automata a és b állapota megkülönböztethető, akkor megkülönböztethető legfeljebb $n-1$ hosszúságú bemenő szóval is. Az általános esetben a szóhosszra vonatkozó felső korlát nem csökkenthető.

Bizonyítás. Definiáljuk az $\mathbf{A} = (A, X, Y, \delta, \lambda)$ automata A állapothalmazán minden k nemnegatív egész számra az η_k relációt úgy, hogy tetszőleges $a, b \in A$ párra $(a,b) \in \eta_k$ akkor és csak akkor teljesüljön, ha a és b nem különböztethető meg egyetlen legfeljebb k hosszúságú szóval sem, azaz, ha $p \in X^*$ és $|p| \leq k$, akkor $\lambda(a,p) = \lambda(b,p)$. Ez azt jelenti, hogy $\eta_0 = \omega_A$. Könnyen belátható, hogy η_k ekvivalencia. Jelölje c_k az η_k-osztályok számát. A definícióból látható, hogy $\eta_{k+1} \leq \eta_k$ és $c_k \leq c_{k+1}$. Az η_k-osztályok száma legfeljebb n, ezért

$$1 = c_0 \leq c_1 \leq c_2 \leq \cdots \leq c_k \leq c_{k+1} \leq \cdots \leq n.$$

Így van olyan $m \leq n-1$, hogy $\eta_m = \eta_{m+1}$. Megmutatjuk, hogy ekkor minden i pozitív egész számra $\eta_m = \eta_{m+i}$. Ehhez elegendő azt bebizonyítani, hogy ha valamely k nemnegatív egész számra $\eta_k = \eta_{k+1}$, akkor $\eta_{k+1} = \eta_{k+2}$ is teljesül. Mivel $\eta_{k+2} \leq \eta_{k+1}$, ezért csak azt kell megmutatni, hogy $\eta_{k+1} \leq \eta_{k+2}$.

Legyen $(a,b) \in \eta_{k+1}$, valamint legyenek $x_1, x_2 \in X$ tetszőleges bemenő jelek és $p \in X^*$ tetszőleges bemenő szó, amelyre $|p| \leq k$ teljesül. Akkor

$$\lambda(a,x_1)\lambda(\delta(a,x_1),p) = \lambda(a,x_1p) = \lambda(b,x_1p) = \lambda(b,x_1)\lambda(\delta(b,x_1),p),$$

vagyis $\lambda(a,x_1) = \lambda(b,x_1)$ és

$$\lambda(\delta(a,x_1),p) = \lambda(\delta(b,x_1),p),$$

azaz $(\delta(a,x_1),\delta(b,x_1)) \in \eta_k = \eta_{k+1}$, amiből

$$\lambda(\delta(a,x_1),x_2p) = \lambda(\delta(b,x_1),x_2p)$$

adódik. Így

$$\begin{aligned} \lambda(a,x_1x_2p) &= \lambda(a,x_1)\lambda(\delta(a,x_1),x_2p) = \\ &= \lambda(b,x_1)\lambda(\delta(b,x_1),x_2p) = \lambda(a,x_1x_2p). \end{aligned}$$

Ami azt jelenti, hogy $\eta_{k+1} \leq \eta_{k+2}$.

Legyen m az a legkisebb nemnegatív egész szám, amelyre minden i pozitív egész szám esetén $\eta_m = \eta_{m+i}$ teljesül. Már láttuk, hogy $m \leq n-1$. Ha $a \in A$ és $b \in A$ megkülönböztethető, akkor létezik olyan m hosszúságú p bemenő szó, hogy $\lambda(a,p) \neq \lambda(b,p)$, amit bizonyítanunk kellett.

Tekintsük most azt az $\mathbf{A} = (A,X,Y,\delta,\lambda)$ automatát, amelyre $A = \{1,2,\ldots,n\}$ $(n \geq 2)$, $X = \{x_1,x_2\}$, $Y = \{y_1,y_2\}$. A δ és a λ függvényeket a következő egyenletekkel definiáljuk:

$$\delta(i,x_1) = i+1, \quad \lambda(i,x_1) = y_1 \quad (i = 1,2,\ldots,n-1),$$

$$\begin{gathered} \delta(n,x_1) = \delta(n,x_2) = n-1, \quad \lambda(n,x_1) = \lambda(n,x_2) = y_2, \\ \delta(j,x_2) = j-1, \quad \lambda(j,x_2) = y_1 \quad (j = n-1,n-2,\ldots,2), \\ \delta(1,x_2) = 1, \quad \lambda(1,x_2) = y_1. \end{gathered}$$

Ha elkészítjük az automata átmenet-kimenetgráfját, akkor arról leolvasható, hogy az 1 és a 2 állapotok megkülönböztethetők például az $n-1$ hosszúságú x_1^{n-1} bemenő szóval, de nem különböztethető meg egyetlen $(n-1)$-nél kisebb hosszúságú szóval sem. Ezzel megmutattuk, hogy a tételben megadott $n-1$ felső korlát az általános esetben nem csökkenthető. $\square$

8.2. Tétel

Legyen $\mathbf{A} = (A,X,Y,\delta,\lambda)$ m állapotú és $\mathbf{B} = (B,X,Y,\delta',\lambda')$ n állapotú Mealy automata. Ha az $a \in A$ és $b \in B$ állapot megkülönböztethető, akkor megkülönböztethető legfeljebb $m+n-1$ hosszúságú bemenő szóval. A szóhosszra vonatkozó $m+n-1$ felső korlát általában nem csökkenthető.

Bizonyítás. Az általánosság megszorítása nélkül feltehetjük, hogy $A \cap B = \emptyset$. Tekintsük az $\mathbf{A}$ és $\mathbf{B}$ Mealy automaták $\mathbf{A} \oplus \mathbf{B}$ direkt összegét. Az $\mathbf{A}$ automata a állapota akkor és csak akkor különböztethető meg a $\mathbf{B}$ automata b állapotától, ha a és b megkülönböztethető az $\mathbf{A} \oplus \mathbf{B}$ automatában. Mivel $|A \cup B| = m + n$, ezért a tétel első fele a 8.1. Tételből következik.

Legyen most az $\mathbf{A} = (A, X, Y, \delta, \lambda)$ automata ugyanaz, mint a 8.1. Tétel második részének bizonyításában és $B = \{b_1, \ldots, b_n\}$, amelyre $A \cap B = \emptyset$. Definiáljuk a $\mathbf{B} = (B, X, Y, \delta', \lambda')$ automata δ' átmenet- és λ' kimenetfüggvényét az alábbi módon:

$$\delta'(b_1, x_1) = b_1, \quad \delta'(b_1, x_2) = b_2, \quad \lambda'(b_1, x_1) = \lambda'(b_1, x_2) = y_1,$$

minden más esetben

$$\delta'(b_i, x_j) = b_{\delta(i, x_j)}, \quad \lambda'(b_i, x_j) = \lambda(i, x_j).$$

Az n és a b_n állapotok megkülönböztethetők a $2n - 1$ hosszúságú $x_2^n x_1^{n-1}$ szóval, de ennél rövidebb szóval nem. Tehát a tételben megadott felső korlát általában nem csökkenthető. □

Legyenek $\mathbf{A} = (A, X, Y, \delta, \mu)$ és $\mathbf{B} = (B, X, Y, \delta', \mu')$ tetszőleges Moore automaták. Emlékeztetünk arra, hogy a $\lambda = \mu\delta$ és a $\lambda' = \mu'\delta'$ függvényeket $\mathbf{A}$, ill. $\mathbf{A}'$ kimenetfüggvényének is nevezzük. Így a Mealy automatákra megadott definícióval összhangban, $a \in A$ és $b \in B$ állapot *a* $p \in X^*$ *szóval megkülönböztethető* vagy $|p|$ *lépésben megkülönböztethető*, ha $\mu(\delta(a, p)) \neq \mu'(\delta'(b, p))$. Az a és b állapot *megkülönböztethető*, ha

$$(\exists p \in X^*) \quad \mu(\delta(a, p)) \neq \mu'(\delta'(b, p)). \tag{8.2}$$

Ellenkező esetben azt mondjuk, hogy a és b *megkülönböztethetetlen.* A Mealy automaták állapotainak (8.1)-ben definiált megkülönböztethetőségéből következik, hogy a Moore automatákhoz tartozó Mealy automaták megkülönböztethető állapotai a Moore automatáknak is megkülönböztethető állapotai, a Moore automaták megkülönböztethetetlen állapotai pedig a hozzájuk tartozó Mealy automatáknak is megkülönböztethetetlen állapotai. Megadjuk az előbbi két tétel Moore automatákra vonatkozó megfelelőit.

8.3. Tétel
Ha az n állapotú és l kimenő jeles $\mathbf{A}$ Moore automata a és b állapota megkülönböztethető, akkor megkülönböztethető legfeljebb $n - l$ hosszúságú bemenő szóval. Az általános esetben a szóhosszra vonatkozó felső korlát nem csökkenthető.

Bizonyítás. A 8.1. Tétel bizonyításából Moore automatákra is következik az állítás első része, ha $\lambda = \mu\delta$ és az η_k relációk helyett a $\zeta_k = \pi \cap \eta_k$ relációkat tekintjük, ahol a π a **A** Moore automata (4.5)-ben definiált jelekvivalenciája, azaz az $a, b \in A$ állapotokra $(a, b) \in \pi$ akkor és csak akkor, ha $\mu(a) = \mu(b)$. (A definícióból látható, hogy $\zeta_0 = \pi$.) Mivel $|Y| = l$, ezért

$$l = c_0 \leq c_1 \leq c_2 \leq \cdots \leq c_k \leq c_{k+1} \leq \cdots \leq n.$$

Így $m \leq n - l$. (Moore automatákra az $|Y| \leq |A|$ feltétel mindig teljesül.)

Vegyük azt az $\mathbf{A} = (A, X, Y, \delta, \mu)$ Moore automatát, amelyre

$$A = \{1, 2, \ldots, n\} \; (n \geq 2), \quad X = \{x\}, \quad Y = \{y_1, y_2, \ldots, y_l\} \; (2 \leq l \leq n).$$

A δ és a λ függvényeket a

$$\delta(i, x) = i + 1 \quad (i = 1, 2, \ldots, n-1), \quad \delta(n, x) = 1,$$

$$\mu(j) = y_1 \quad (j = 1, 2, \ldots, n - l + 1), \quad \mu(n - l + j) = y_j \quad (j = 2, \ldots, l)$$

összefüggésekkel értelmezzük. Az 1 és 2 állapotok nem különböztethetők meg az x^{n-l-1} szóval, de az x^{n-l} szóval megkülönböztethetők. Tehát a tételben megadott $n - l$ felső korlát az általános esetben nem csökkenthető. □

8.4. Tétel

Legyenek az $\mathbf{A} = (A, X, Y, \delta, \mu)$ és $\mathbf{B} = (B, X, Y, \delta', \mu')$ Moore automatákra $|A| = m$, $|B| = n$ és $|Y| = l$. Ha az $a \in A$ és $b \in B$ állapot megkülönböztethető, akkor megkülönböztethető legfeljebb $m + n - l$ hosszúságú bemenő szóval. A szóhosszra vonatkozó $m + n - l$ felső korlát általában nem csökkenthető.

Bizonyítás. A 8.2. Tétel bizonyításából Moore automatákra is következik az állítás első része.

Tekintsük azokat az $\mathbf{A} = (A, X, Y, \delta, \mu)$ és $\mathbf{B} = (B, X, Y, \delta', \mu')$ Moore automatákat, amelyekre $A = \{1, 2, \ldots, 2n\}$, $B = \{b_1, b_2, \ldots, b_n\}$, $A \cap B = \emptyset$, $(2 \leq n)$, $X = \{x\}$, $Y = \{y_1, y_2, \ldots, y_n\}$, azaz $m = 2n$ és $l = n$. Az átmenet- és kimenetfüggvényeket a

$$\delta(i, x) = i + 1 \quad (i = 1, 2, \ldots, 2n - 1), \quad \delta(n, x) = 1\ ,$$

$$\delta'(b_j, x) = b_{j+1} \quad (j = 1, 2, \ldots, n - 1), \quad \delta'(b_n, x) = b_2,$$

$$\mu(k) = \mu'(b_k) = y_k \quad (k = 1, 2, \ldots, n - 1), \quad \mu(n) = y_1, \quad \mu'(b_n) = y_n,$$

$$\mu(n + t) = \mu'(b_{m+t}) \quad (t = 1, 2, \ldots, n)$$

összefüggésekkel értelmezzük. Az n és b_n állapotok nem különböztethetők meg az x^{2n-1} szóval, de az x^{2n} szóval megkülönböztethetők, azaz a tételben megadott felső korlát általában nem csökkenthető. □

9. Automaták ekvivalenciája

Tetszőleges X és Y nemüres halmazokra jelölje $\mathcal{AL}[X,Y]$-val az $\alpha : X^* \to Y^*$ automataleképezések halmazát. Legyen tetszőleges $\mathbf{A} = (A, X, Y, \delta, \lambda)$ Mealy automatájára $\Phi_{\mathbf{A}} = \{\alpha_a; a \in A\}$, ahol α_a az automata a állapota által indukált leképezés. Azt mondjuk, hogy egy $\mathbf{A}$ Mealy automata indukálja $\mathcal{AL}[X,Y]$ egy Φ részhalmazát, ha $\Phi = \Phi_{\mathbf{A}}$. Ha $\mathbf{A}$ Moore automata, akkor $\Phi_{\mathbf{A}} = \Phi_{\mathbf{A}_\lambda}$.

Ha az $\mathbf{A}$ automatát inicializáljuk, azaz kijelölünk kezdő állapotokat, akkor ez azzal jár, hogy a $\Phi_{\mathbf{A}}$ halmazban kitüntetjük azokat a leképezéseket, amelyeket ezek az állapotok indukálnak.

Az $\mathbf{A} = (A, X, Y, \delta, \lambda)$ és $\mathbf{B} = (B, X, Y, \delta', \lambda')$ Mealy automatákat *ekvivalens*nek nevezzük, jelekben $\mathbf{A} \equiv \mathbf{B}$, ha $\Phi_{\mathbf{A}} = \Phi_{\mathbf{B}}$. Ha $\mathbf{A}$ vagy $\mathbf{B}$ Moore automata, akkor $\mathbf{A}$-t és $\mathbf{B}$-t abban az esetben mondjuk *ekvivalens*nek, ha a hozzájuk tartozó Mealy automaták ekvivalensek.

Iniciális automatákra bevezetünk egy másik ekvivalencia fogalmat is. Két iniciális automatát akkor nevezünk *iniciálisan ekvivalens*nek, ha kezdő állapotaik ugyanazokat az automateleképezéseket indukálják. Minden egy kezdő állapotú iniciális automata iniciálisan ekvivalens a kezdő állapot által generált részautomatájával. Ez az részautomata nyilvánvalóan iniciálisan összefüggő.

Moore automatákra megadunk egy további ekvivalenciát is. Definiáljuk az $\mathbf{A} = (A, X, Y, \delta, \mu)$ Moore automata $a \in A$ állapotaira az

$$\alpha'_a(p) = \mu(\delta(a, p)) \quad (p \in X^*) \tag{9.1}$$

leképezéseket. A (7.7) összefüggés szerint minden $p \in X^+$ bemenő szóra $\alpha'_a = \alpha_a$. Nyilvánvaló, hogy bármely $a, b \in A$ esetén $\alpha'_a = \alpha'_b$ akkor és csak akkor ha $(\alpha_a, \mu(a)) = (\alpha_b, \mu(b))$. Vezessük be a $\Phi'_{\mathbf{A}} = \{(\alpha_a, \mu(a)); a \in A\}$ jelölést. Azt mondjuk, hogy az $\mathbf{A} = (A, X, Y, \delta, \mu)$ és $\mathbf{B} = (B, X, Y, \delta', \mu')$ Moore automaták *Moore ekvivalensek*, jelekben $\mathbf{A} \equiv_M \mathbf{B}$, ha $\Phi'_{\mathbf{A}} = \Phi'_{\mathbf{B}}$. Ha $\Phi'_{\mathbf{A}} = \Phi'_{\mathbf{B}}$, akkor $\Phi_{\mathbf{A}} = \Phi_{\mathbf{B}}$, vagyis igaz a

9.1. Tétel
Moore ekvivalens Moore automaták ekvivalensek is.

Két iniciális Moore automatát *iniciálisan Moore ekvivalens*nek nevezünk, ha kezdő állapotaikra ugyanazokat a (9.1)-beli leképezéseket kapjuk.

9.2. Tétel
Egy kezdő állapotot tartalmazó iniciálisan ekvivalens [Moore ekvivalens] iniciálisan összefüggő automaták ekvivalensek [Moore ekvivalensek].

Bizonyítás. Legyenek az $\mathbf{A} = (A, a_0, X, Y, \delta, \lambda)$ és a $\mathbf{B} = (B, b_0, X, Y, \delta', \lambda')$ iniciálisan összefüggő Mealy automaták iniciálisan ekvivalensek, azaz $\alpha_{a_0} = \alpha_{b_0}$. Így (1.6) szerint minden $r, p \in X^*$ párra

$$\lambda(a_0, r)\lambda(a_0r, p) = \lambda(a_0, rp) = \lambda'(b_0, rp) = \lambda'(b_0, r)\lambda'(b_0r, p)$$

teljesül. Amiből kapjuk, hogy

$$\alpha_{a_0r}(p) = \lambda(a_0r, p) = \lambda'(b_0r, p) = \alpha_{b_0r}(p),$$

azaz minden $r \in X^*$ bemenő szóra az a_0r és a b_0r állapot megkülönböztethetetlen. Mivel az $\mathbf{A}$ és a $\mathbf{B}$ automaták iniciálisan összefüggők, ez éppen azt jelenti, hogy ekvivalensek is. Moore automatákra a bizonyítás hasonló. □

9.3. Tétel
Mealy [Moore] automata homomorf képei ekvivalensek [Moore ekvivalensek].

Bizonyítás. Elegendő megmutatni, hogy Mealy [Moore] automata és bármely homomorf képe ekvivalens. Legyen φ az $\mathbf{A} = (A, X, Y, \delta, \lambda)$ Mealy automata homomorf leképezése a $\mathbf{B} = (B, X, Y, \delta', \lambda')$ Mealy automatára. Megmutatjuk, hogy bármely $a \in A$ állapot megkülönböztethetlen a $\varphi(a)$ állapottól, vagyis minden $p \in X^*$ szóra

$$\lambda(a, p) = \lambda'(\varphi(a), p).$$

A bizonyítást a bemenő szavak hossza szerinti teljes indukcióval végezzük el. Ha $|p| = 0$, azaz $p = e$, akkor minden $a \in$ állapotra

$$\lambda(a, e) = e = \lambda'(\varphi(a), e).$$

Legyen n tetszőleges nemnegatív egész szám. Tegyük fel, hogy minden $a \in A$ állapotra és $k(\leq n)$ hosszúságú p szóra

$$\lambda(a, p) = \lambda'(\varphi(a), p)$$

teljesül. Ha $x \in X$ tetszőleges bemenő jel, akkor

$$\lambda(a, xp) = \lambda(a, x)\lambda(\delta(a, x), p) = \lambda'(\varphi(a), x)\lambda'(\varphi(\delta(a, x)), p) =$$

$$= \lambda'(\varphi(a), x)\lambda'(\delta'(\varphi(a), x)), p) = \lambda'(\varphi(a), xp).$$

Ez azt jelenti, hogy minden $n + 1$ hosszúságú szóra is igaz az állítás.

Moore automatákra a bizonyítás hasonlóan végezhető el. □

A 9.3. Tétel iniciális automaták iniciális homomorfizmusaira is igaz, ha ekvivalencia helyett iniciális ekvivalenciát mondunk. A 9.3. Tétel triviális következménye, hogy izomorf Mealy [Moore] automaták ekvivalensek [Moore ekvivalensek].

Jelölje $C_{ME}(\mathbf{A})$ az $\mathbf{A}$ Mealy automata kongruenciahálóját. Definiáljuk az A állapothalmazon a $\rho_{\mathbf{A},\max}$, vagy rövidebben a $\rho_{\max}$ (binér) relációt úgy, hogy minden $p(\in X^*)$ bemenő szóra

$$(a,b) \in \rho_{\mathbf{A},\max} \quad \Longleftrightarrow \quad \lambda(a,p) = \lambda(b,p) \quad (a,b \in A). \tag{9.2}$$

azaz ha az a és b állapotok megkülönböztethetetlenek. Másképpen kifejezve, ha $\alpha_a = \alpha_b$, azaz ha a és b ugyanazt az automataleképezést indukálják. A (9.2) helyett a vele ekvivalens

$$(a,b) \in \rho_{\mathbf{A},\max} \quad \Longleftrightarrow \quad \overline{\lambda(a,p)} = \overline{\lambda(b,p)} \quad (a,b \in A) \tag{9.3}$$

feltétel is írható ($\overline{e} = e$). Nem nehéz megmutatni, hogy $\rho_{\max}$ kongruencia és $C_{ME}(\mathbf{A})$ legnagyobb eleme. Ha $C(\mathbf{A}_{pr})$ az $\mathbf{A}$ Mealy automata vetületének kongruenciahálója, akkor (4.3) szerint

$$C_{ME}(\mathbf{A}) = \{\rho \cap \rho_{\max}; \rho \in C(\mathbf{A}_{pr})\}.$$

A $\rho_{\max}$ relációt az $\mathbf{A}$ automata *megkülönböztethetlenségi relációjá*nak, az $\mathbf{A}/\rho_{\max}$ faktorautomatát pedig, s bármely vele izomorf automatát, az $\mathbf{A}$ *Mealy automatához tartozó egyszerű automatá*nak nevezzük. Ha $\rho_{\mathbf{A},\max} = \iota_A$, akkor azt mondjuk, hogy $\mathbf{A}$ *egyszerű Mealy automata.*

Legyen $\mathbf{A} = (A, X, Y, \delta, \mu)$ tetszőleges Moore automata. Jelölje $C_{MO}(\mathbf{A})$ az $\mathbf{A}$ kongruenciáinak hálóját. Ha az $\mathbf{A}$ Moore automatát a $\lambda = \mu\delta$ kimenetfüggvényű Mealy automatának tekintjük, akkor a 4.1. Következmény szerint $C_{MO}(\mathbf{A})$ az $C_{ME}(\mathbf{A}_\lambda)$ kongruenciaháló részhálója, mégpedig

$$C_{MO}(\mathbf{A}) = \{\rho \cap \pi; \rho \in C_{ME}(\mathbf{A}_\lambda)\}.$$

Definiáljuk az A állapothalmazon a $\pi_{\mathbf{A},\max}$, vagy rövidebben a $\pi_{\max}$ (binér) relációt úgy, hogy minden $p \in X^*$ bemenő szóra

$$(a,b) \in \pi_{\max} \quad \Longleftrightarrow \quad \mu(\delta(a,p)) = \mu(\delta(b,p)) \quad (a,b \in A), \tag{9.4}$$

Mivel $\lambda = \mu\delta$ az $\mathbf{A}$ Moore automata kimenetfüggvénye, ezért (9.2) szerint (9.4) pontosan azt jelenti, hogy

$$\pi_{\max} = \pi \cap \rho_{\max}, \tag{9.5}$$

és $\pi_{\max}$ a $C_{MO}(\mathbf{A})$ kongruenciaháló legnagyobb eleme. Azt mondjuk, hogy a $\pi_{\max}$ reláció az $\mathbf{A}$ Moore automata *megkülönböztethetetlenségi relációja*. Az

$\mathbf{A}/\pi_{\max}$ faktorautomatát, s bármely vele izomorf automatát az $\mathbf{A}$ *Moore automatához tartozó egyszerű automatának* nevezzük. Ha $\pi_{\mathbf{A},\max} = \iota_A$, akkor $\mathbf{A}$-t *egyszerű Moore automatának* nevezzük. Véges Moore automaták egyszerűségével foglalkozik Ádám András [7] monográfiájában.

Ha az $\mathbf{A}$ Mealy automata memória nélküli, akkor $\rho_{\mathbf{A},\max} = \omega_A$. Ebből következik, hogy az egyszerű memória nélküli automaták a triviális automaták. A (4.1) és a (4.2) definíciókból látható, hogy egy Mealy automata kongruenciája vetületének is kongruenciája. Ezért, ha a Mealy automata nem memória nélküli és vetülete egyszerű, akkor a Mealy automata is egyszerű.

Két automata ekvivalenciájának kérdése visszavezethető egyszerű automatáik vizsgálatára, amint ezt a következő tétel mutatja.

9.4. Lemma
Két Mealy [Moore] automata akkor és csak akkor ekvivalens [Moore ekvivalens], ha a hozzájuk tartozó egyszerű automaták izomorfak.

Bizonyítás. Az elegendőség közvetlenül adódik 9.3. Tételből.

A szükségesség bizonyítása céljából tegyük fel, hogy az $\mathbf{A} = (A, X, Y, \delta, \lambda)$ és a $\mathbf{B} = (B, X, Y, \delta', \lambda')$ Mealy automaták ekvivalensek. Jelölje $\rho_{\max}$ az $\mathbf{A}$ automata, $\tau_{\max}$ pedig a $\mathbf{B}$ megkülönböztethetetlenségi relációját. Legyen $\varphi \subseteq A/\rho_{\max} \times B/\tau_{\max}$ az a megfeleltetés, amelyre minden $a \in A$ és $b \in B$ esetén $(\rho_{\max}[a], \tau_{\max}[b]) \in \varphi$ akkor és csak akkor, ha a megkülönböztethetetlen b-től. Világos, hogy φ bijektív leképezés. Könnyű számolással adódik az is, hogy φ izomorfizmus. Moore automatákra a bizonyítás ugyanígy megy, csak $\rho_{\max}$ helyett a $\pi_{\max}$ relációval. □

Az előző lemma közvetlen következménye a

9.5. Tétel
Az $\mathbf{A}$ Mealy [Moore] automatával ekvivalens [Moore ekvivalens] automaták $\mathcal{M}_{\mathbf{A}}$ halmazában létezik egy izomorfiától eltekintve egyértelműen meghatározott $\mathbf{A}_0$ automata, amely homomorf képe bármely $\mathcal{M}_{\mathbf{A}}$-beli automatának. Az $\mathbf{A}_0$ automataként választható tetszőleges $\mathcal{M}_{\mathbf{A}}$-beli automatához tartozó egyszerű automata.

Jellemezzük az $\alpha : X^* \to Y^*$ automataleképezések $\mathcal{AL}[X, Y]$ halmazának Mealy automatákkal indukálható részhalmazait. Az $\mathcal{AL}[X, Y]$ halmaz egy Φ részhalmazát *zártnak* nevezzük, ha bármely $\alpha \in \Phi$ és $p \in X^*$ esetén $\alpha_p \in \Phi$, azaz Φ az automataleképezések állapotait is tartalmazza ($\alpha_e = \alpha$). Maga az $\mathcal{AL}[X, Y]$ halmaz is zárt halmaz. (A definíció szerint az $\emptyset$ halmaz is zárt halmaz, amelyet az üres automata indukál.)

Legyen Φ az $\mathcal{AL}[X, Y]$ halmaz egy zárt részhalmaza. Legyen továbbá

$$\mathbf{\Phi} = (\Phi, X, Y_\Phi, \delta_\Phi, \lambda_\Phi)$$

az a Mealy automata, amelyre $Y_\Phi = \{\alpha_p(x); \alpha \in \Phi, p \in X^*, x \in X\}$, s úgy mint (7.4)-ben,

$$\delta_\Phi(\alpha_p, x) = \alpha_{px}, \quad \lambda_\Phi(\alpha_p, x) = \alpha_p(x). \tag{9.6}$$

Tegyük fel, hogy

$$\alpha_p = \beta_q \quad (\alpha, \beta \in \Phi,\ p, q \in X^*).$$

Akkor bármely $x \in X$ és $r \in X^*$ esetén, (7.5)-öt is felhasználva,

$$\alpha_p(x)\alpha_{px}(r) = \alpha_p(xr) = \beta_q(xr) = \beta_q(x)\beta_{qx}(r).$$

Ebből következik, hogy $\alpha_{px} = \beta_{qx}$, azaz δ_Φ és λ_Φ jól definiáltak. Jelölje $\Phi_{\mathbf{A}}$ az $\mathbf{A} = (A, X, Y, \delta, \lambda)$ Mealy automata állapotai által indukált automataleképezéseinek halmazát, azaz $\Phi_{\mathbf{A}} = \{\alpha_a; a \in A\}$.

9.6. Tétel

Bármely $\mathbf{A} = (A, X, Y, \delta, \lambda)$ Mealy automatára a $\mathbf{\Phi_A}$ Mealy automata izomorf az $\mathbf{A}/\rho_{\max}$ egyszerű automatával. Speciálisan, ha az egy kezdő állapotú $\mathbf{A}$ iniciálisan összefüggő Mealy automata indukálja az α automataleképezést, akkor az $\mathbf{A}_\alpha$ alsó automata iniciálisan izomorf $\mathbf{A}/\rho_{\max}$ egyszerű automatával.

Bizonyítás. Megmutatjuk, hogy minden $a \in A$ állapotra a $\varphi(\alpha_a) = \rho_{\max}[a]$ összefüggéssel definiált φ leképezés $\mathbf{\Phi_A}$ izomorf leképezése az $\mathbf{A}/\rho_{\max}$ egyszerű automatára. Az nyilvánvaló, hogy φ bijektív leképezés. Ha $\alpha_a \in \Phi_{\mathbf{A}}$ és $x \in X$, akkor (4.7)-et is használva

$$\varphi(\delta_{\Phi_{\mathbf{A}}}(\alpha_a, x)) = \varphi(\alpha_{\delta(a,x)}) = \rho_{\max}[\delta(a, x)] =$$

$$= \delta_{\rho_{\max}}(\rho_{\max}[a], x) = \delta_{\rho_{\max}}(\varphi(\alpha_a), x),$$

$$\lambda_{\Phi_{\mathbf{A}}}(\alpha_a, x) = \alpha_a(x) = \lambda(a, x) = \lambda_{\rho_{\max}}(\rho_{\max}[a], x) = \lambda_{\rho_{\max}}(\varphi(\alpha_a), x),$$

azaz φ izomorfizmus.

Legyen $\mathbf{A} = (A, a_0, X, Y, \delta, \lambda)$ iniciálisan összefüggő és legyen $\alpha = \alpha_{a_0}$. Mivel $\mathbf{A}$ iniciálisan összefüggő, ezért bármely $a \in A$ állapothoz van olyan $p \in X^*$ bemenő szó, hogy $a = a_0p$. A (7.3) és (7.4) definíciók alapján jelölje az α-hoz tartozó alsó automatát $\mathbf{A}_\alpha = (A_\alpha, \alpha, X, Y, \delta_\alpha, \lambda_\alpha)$. A (9.6) definícióból kapjuk, hogy $\mathbf{A}_\alpha = \mathbf{\Phi_A}$. Ha az $\mathbf{A}/\rho_{\max}$ faktorautomatában kezdőállapotként $\rho_{\max}[a_0]$-t adjuk meg, akkor a tétel első állításából következik a második állítás. $\square$

9.7. Következmény

Az $\mathcal{AL}[X, Y]$ halmaz egy Φ részhalmaza akkor és csak akkor indukálható Mealy automatával, ha zárt.

Bizonyítás. Legyen $\mathbf{A} = (A, X, Y, \delta, \lambda)$ tetszőleges Mealy automata. A $\Phi_\mathbf{A}$ halmaz definíciójából következik, hogy ha $\alpha_a \in \Phi_\mathbf{A}$, akkor minden $p \in X^*$ bemenő szóra

$$(\alpha_a)_p = \alpha_{ap} \in \Phi_\mathbf{A},$$

azaz $\Phi_\mathbf{A}$ zárt.

Megfordítva, tegyük fel, hogy Φ zárt. A 9.3. Tétel bizonyítása alapján nyilvánvaló, hogy Φ-t indukálja a $\boldsymbol{\Phi}$ Mealy automata. □

A 9.3. Tétel és a 9.7. Következmény Moore automatákra is igaz, ha $\rho_{\max}$ helyett a $\pi_{\max}$ kongruenciát tekintjük. Továbbá az $\mathbf{A} = (A, X, Y, \delta, \mu)$ Moore automatára $\Phi_\mathbf{A}$ helyett vegyük az (9.1)-ben definiált α'_a leképezések $\Phi'_\mathbf{A}$ halmazát, amelyet a (9.1) definíció után megadott $(\alpha_a, \mu(a))$ párok halmazaként tekintünk. A $\boldsymbol{\Phi}_\mathbf{A}$ Moore automatát definiáljuk a

$$\delta_\mathbf{A}((\alpha_a, \mu(a)), x) = (\alpha_{ax}, \mu(ax)), \quad \mu_\mathbf{A}(\alpha_a, \mu(a)) = \mu(a) \quad (a \in A) \tag{9.7}$$

feltétellel megadott átmenet-, ill. jelfüggvénnyel. Az előző fejezet tételeiből közvetlenül adódik a

9.8. Tétel
A véges Mealy [Moore] automaták ekvivalenciaproblémája algoritmikusan megoldható.

Legyen $\mathbf{A}_0$ a 9.5. Tételben megadott automaták egyike és $\mathbf{M}(\mathbf{A}_0)$ a 3.4. Tételben szereplő automata.

9.9. Tétel
Az $\mathbf{A}$ Mealy automatával ekvivalens Moore automaták $\mathcal{MO}_\mathbf{A}$ halmazában létezik egy izomorfiától eltekintve egyértelműen meghatározott $\mathbf{B}_0$ Moore automata, amely homomorf képe bármely $\mathcal{MO}_\mathbf{A}$-beli automatának. Az $\mathbf{B}_0$ automataként választható $\mathbf{M}(\mathbf{A}_0)$ vagy tetszőleges $\mathcal{MO}_\mathbf{A}$-beli Moore automatához tartozó egyszerű automata.

Bizonyítás. Ha $\mathbf{B} \in \mathcal{MO}_\mathbf{A}$, akkor $\mathbf{B}/\pi_{\mathbf{B},max} \in \mathcal{MO}_\mathbf{A}$, mivel a 9.1. Tétel szerint $\mathbf{B}$ és $\mathbf{B}/\pi_{\mathbf{B},max}$ ekvivalensek. A 9.5. Tétel szerint az $\mathbf{A}$ Mealy automatával ekvivalens Mealy automaták $\mathcal{M}_\mathbf{A}$ halmazában létezik egy izomorfiától eltekintve egyértelműen meghatározott $\mathbf{A}_0$ automata, amely homomorf képe bármely $\mathcal{M}_\mathbf{A}$-beli automatának. Legyen $\mathcal{MO}'_\mathbf{A}$ az $\mathcal{MO}_\mathbf{A}$-beli automatákhoz tartozó Mealy automaták halmaza. Nyilvánvaló, hogy $\mathcal{MO}'_\mathbf{A} \subseteq \mathcal{M}_\mathbf{A}$. A 3.5. Tételben szereplő $\mathbf{M}(\mathbf{A}_0)$ Moore automata minden olyan Moore automatának homomorf képe, amelynek $\mathbf{A}_0$ is homomorf képe. De $\mathbf{A}_0$ az $\mathbf{B}/\pi_{\mathbf{B},max}$ Moore automata homomorf képe, mivel ez utóbbi automata ekvivalens $\mathbf{A}$-val. Ebből következik, hogy $\mathbf{M}(\mathbf{A}_0)$ homomorf képe $\mathbf{B}/\pi_{\mathbf{B},max}$ egyszerű Moore automatának, ezért izomorf vele. Így $\mathbf{M}(\mathbf{A}_0)$ az $\mathbf{B}$ Moore automatának is homomorf képe. □

Felhívjuk a figyelmet arra, hogy egy adott $\mathbf{A}$ Mealy automatával ekvivalens Moore automaták $\mathcal{MO}_{\mathbf{A}}$ halmaza Moore automaták bizonyos Moore ekvivalens osztályainak egyesítése.

Feladatok

9.1. Az $\mathbf{A} = (A, X, Y, \delta, \lambda)$ Mealy automata minden homomorf képe akkor és csak akkor teljesíti az (1.1) Moore kritériumot, ha bármely $a_1, a_2 \in A$ és $x_1, x_2 \in X$ esetén

$$(\delta(a_1, x_1), \delta(a_2, x_2)) \in \rho_{\max} \quad \Longrightarrow \quad \lambda(a_1, x_1) = \lambda(a_2, x_2).$$

(→ Megoldás)

10. Véges automaták minimalizálása

Ekvivalens Mealy automaták között a hozzájuk tartozó egyszerű automaták a legkisebb számosságúak. Minden véges Mealy automatához meg tudunk szerkeszteni egy hozzá tartozó egyszerű automatát. Ezt az algoritmust az *automata minimalizálásá*nak is nevezzük. Az algoritmus ismertetéséhez néhány további fogalmat kell bevezetnünk.

A 8.1. Tétel bizonyításában véges Mealy automatákra definiáltuk az $\eta_k \subseteq A^2$ $(k \in N)$ ekvivalenciákat az

$$(a, b) \in \eta_k \quad \Longleftrightarrow \quad (\forall p \in X(k)) \quad \lambda(a, p) = \lambda(b, p) \tag{10.1}$$

feltételekkel $(\omega_A = \eta_0)$. Ez természetesen tetszőleges Mealy automatára is definiálható. (Az η_1 relációt az $\mathbf{A}$ Mealy automata *kimeneti ekvivalenciájá*nak nevezzük.) Minden k nemnegatív egész számra

$$\eta_{k+1} \subseteq \eta_k, \quad \cap_{k=0}^{\infty} \eta_k = \rho_{\max}.$$

Ha $(a, b) \in \eta_k$, akkor azt is mondjuk, hogy az a és b állapot k *lépésben megkülönböztethetetlen.* Az η_k reláció akkor és csak akkor kongruencia, ha $\eta_k = \rho_{\max}$. Az $\eta_k = \rho_{\max}$ egyenlőség azt jelenti, hogy ha két állapot k lépésben megkülönböztethetetlen, akkor megkülönböztethetetlen. Ha van olyan $k \in N$, amelyre $\eta_k = \rho_{\max}$, akkor azt mondjuk, hogy az $\mathbf{A}$ Mealy automata *uniform.* Ha $k \in N$ olyan, amelyre $\eta_k = \rho_{\max}$, de $\eta_{k-1} \neq \rho_{\max}$, akkor az $\mathbf{A}$ Mealy automatát k*-uniform*nak hívjuk. Minden véges Mealy automatához van olyan $k \in N$, hogy az automata k-uniform. Ha egy k-uniform $\mathbf{A}$ Mealy automata egyszerű, akkor $\mathbf{A}$-t k*-egyszerű*nek nevezzük.

A 8.3. Tétel bizonyításában véges Moore automatákra definiáltuk az $\zeta_k \subseteq A^2$ $(k \in N)$ ekvivalenciákat. Ezek a relációk is definiálhatók tetszőleges Moore automatára is, azaz

$$\zeta_k = \pi \cap \eta_k. \tag{10.2}$$

Minden $k \in N$ esetén

$$(a, b) \in \zeta_k \quad \Longleftrightarrow \quad (\forall p \in X(k)) \quad \mu(\delta(a, p)) = \mu(\delta(b, p)). \tag{10.3}$$

Nyilvánvaló, hogy

$$\zeta_{k+1} \subseteq \zeta_k, \quad \cap_{k=0}^{\infty} \zeta_k = \pi_{\max}.$$

Továbbá $\zeta_0 = \pi$, azaz az $\mathbf{A}$ automata jelekvivalenciája. Egy ζ_k reláció akkor és csak akkor kongruencia, ha $\zeta_k = \pi_{\max}$. Emlékeztetünk arra, hogy ha $(a, b) \in \zeta_k$, akkor azt is mondjuk, hogy az a és b állapot k *lépésben megkülönböztethetetlen.* Ha van olyan $k \in N$, amelyre $\zeta_k = \pi_{\max}$, akkor az $\mathbf{A}$ Moore automatát *uniform*nak nevezzük. Ha $k \in N$ olyan, amelyre $\zeta_k = \pi_{\max}$ és $\eta_{k-1} \neq \pi_{\max}$, akkor az $\mathbf{A}$ Moore automatát k*-uniform*nak hívjuk. Természetesen minden véges Moore automatához valamilyen $k \in N$ esetén k-uniform. Ha a k-uniform $\mathbf{A}$ Moore automata egyszerű, akkor $\mathbf{A}$-t k*-egyszerű*nek nevezzük.

Az 1. fejezetben tetszőleges $\mathbf{A} = (A, X, Y, \delta, \mu)$ Moore automatához definiáltuk az $\mathbf{A}_\lambda = (A, X, R_\lambda, \delta, \lambda)$ Mealy automatát, ahol $\lambda = \mu\delta$ függvény a Moore automata kimenetfüggvénye. A következő három lemma állítását (10.2) szerint elegendő Mealy automatákra bizonyítani.

10.1. Lemma

Az $\mathbf{A}$ Mealy [Moore] automata bármely a és b állapotára $(a, b) \in \eta_k$ $[\zeta_k]$ akkor és csak akkor, ha minden $p \in X^k$ szóra

$$\lambda(a, p) = \lambda(b, p) \quad [\mu(a) = \mu(b),\ \mu(\delta(a, p)) = \mu(\delta(b, p))].$$

Bizonyítás. Ha $(a, b) \in \eta_k$, akkor definíció szerint minden k hosszúságú p szóra igaz a $\lambda(a, p) = \lambda(b, p)$ egyenlet. Moore automatákra természetesen az $(a, b) \in \zeta_k$ feltételből $\mu(a) = \mu(b)$ mindig következik.

Megfordítva, tegyük fel, hogy minden k hosszúságú szóra teljesül az előbbi egyenlet. Legyen $q \in X^*$ tetszőleges olyan szó, amelyre $|q| \leq k$. Ha $p \in X^*$ olyan k hosszúságú szó, amelynek q kezdőszelete, azaz $p = qr$ valamilyen $k - |q|$ hosszúságú $r \in X^*$ szóra, akkor (1.6) szerint

$$\lambda(a, q)\lambda(aq, r) = \lambda(a, qr) = \lambda(a, p) = \lambda(b, p) = \lambda(b, qr) = \lambda(b, q)\lambda(bq, r).$$

Mivel $|\lambda(a, q)| = |\lambda(b, q)|$, ezért $\lambda(a, q) = \lambda(b, q)$. □

10.2. Lemma
Az **A** Mealy [Moore] automata bármely a és b állapotára $(a, b) \in \eta_{k+1}$ $(k \in N_+)$ $[\zeta_{k+1}$ $(k \in N)]$ akkor és csak akkor, ha $(a, b) \in \eta_k$ $[\zeta_k]$ és minden $x \in X$ bemenő jelre

$$(\delta(a, x), \delta(b, x)) \in \eta_k \ [\zeta_k].$$

Bizonyítás. Ha $(a, b) \in \eta_{k+1}$ $(k \in N_+)$, akkor a 10.1. Lemma szerint, bármely $p \in X^k$ szóra és $x \in X$ bemenő jelre $\lambda(a, xp) = \lambda(b, xp)$. Az (1.6) összefüggés alapján

$$\lambda(a, x)\lambda(\delta(a, x), p) = \lambda(b, x)\lambda(\delta(b, x), p).$$

Mivel $|\lambda(a, x)| = |\lambda(b, x)| = 1$, ezért $\lambda((\delta(a, x), p) = \lambda((\delta(a, x), p)$, így a 10.1. Lemma alapján, $(\delta(a, x), \delta(b, x)) \in \eta_k$.

Megfordítva, tegyük fel, hogy $(a, b) \in \eta_k$ $(k \in N_+)$ és minden $x \in X$ bemenő jelre $(\delta(a, x), \delta(b, x)) \in \eta_k$. Legyen $p \in X^{k+1}$ tetszőleges bemenő szó, $x \in X$ és $q \in X^k$ pedig olyanok, hogy $p = xq$. Akkor

$$\lambda(a, x) = \lambda(b, x) \quad \text{és} \quad \lambda(\delta(a, x), q) = \lambda(\delta(b, x), q),$$

ezért (1.7) miatt $\lambda(a, p) = \lambda(b, p)$. Ez azt jelenti, hogy $(a, b) \in \eta_{k+1}$.

Látható, hogy Moore automatákra $k = 0$ esetben is igaz az állítás. □

10.3. Lemma
Valamely k nemnegatív egész számra $\eta_k = \eta_{k+1}$ $[\zeta_k = \zeta_{k+1}]$ akkor és csak akkor teljesül, ha $\eta_k = \rho_{\max}$ $[\zeta_k = \pi_{\max}]$.

Bizonyítás. Mivel minden $k \in N$ esetén $\rho_{\max} \subseteq \eta_{k+1} \subseteq \eta_k$, ezért, ha $\eta_k = \rho_{\max}$, akkor $\eta_k = \eta_{k+1}$.

Megfordítva, tegyük fel, hogy $k \in N$ olyan, amelyre $\eta_{k+1} = \eta_k$ teljesül. Ha $k = 0$, akkor $\eta_{k+1} = \eta_k = \omega_A$, így η_k kongruencia, ezért $\eta_k = \rho_{\max}$. Legyen $1 \leq k$. Tudjuk, hogy $\rho_{\max} \subseteq \eta_k$. Megmutatjuk, hogy η_k az **A** automata kongruenciája. Amiből viszont következik, hogy $\eta_k = \rho_{\max}$. Legyenek $p \in X^k$ és $x \in X$ tetszőlegesek. Tegyük fel, hogy $(a, b) \in \eta_k$. Akkor $\eta_k = \eta_{k+1}$ miatt $(a, b) \in \eta_{k+1}$, ezért $\lambda(a, xp) = \lambda(b, xp)$. Ebből az egyenletből (1.6) alapján kapjuk, hogy $\lambda(\delta(a, x), p) = \lambda(\delta(b, x), p)$, azaz $(\delta(a, x), \delta(b, x)) \in \eta_k$. Ez azt jelenti, hogy η_k kongruencia. Moore automaták esetén a bizonyításban nem kell megkülönböztetni a $k = 0$ és a $1 \leq k$ eseteket. □

10.4. Lemma
Ha $(a, b) \in \eta_{k+1}$, akkor minden $x \in X$ bemenő jelre

$$(\delta(a, x), \delta(b, x)) \in \zeta_k \quad (k \in N).$$

Bizonyítás. Tegyük fel, hogy $(a,b) \in \eta_{k+1}$. Ebből bármely $p \in X^{k+1}$ bemenő szóra

$$\mu(\delta(a,p)) = \lambda(a,p) = \lambda(b,p) = \mu(\delta(b,p)).$$

Ha $p = xq$ $(x \in X, q \in X^k)$, akkor (1.6) alapján

$$\mu(\delta(\delta(a,x),q)) = \mu(\delta(\delta(b,x),q)),$$

azaz $(\delta(a,x), \delta(b,x)) \in \zeta_k$. □

10.5. Tétel
Ha az $\mathbf{A} = (A, X, Y, \delta, \mu)$ Moore automata valamely $k \in N$ esetén teljesíti a $\zeta_k = \pi_{\max}$ feltételt, akkor az $\mathbf{A}_\lambda$ Mealy automata teljesíti az $\eta_{k+1} = \rho_{\max}$ feltételt. Továbbá, ha $\mathbf{A}$ k-uniform, akkor az $\mathbf{A}_\lambda$ k- vagy $(k+1)$-uniform.

Bizonyítás. Legyen $k \in N$ olyan, amelyre az $\mathbf{A} = (A, X, Y, \delta, \mu)$ Moore automata teljesíti $\zeta_k = \pi_{\max}$ feltételt. Ha $(a,b) \in \eta_{k+1}$, akkor a 10.4. Lemma szerint minden $x \in X$ bemenő jelre $(\delta(a,x), \delta(b,x)) \in \zeta_k$. Mivel $\zeta_k = \pi_{\max}$, ezért minden $r \in X^+$ bemenő szóra

$$\lambda(\delta(a,x), r) = \mu(\delta(\delta(a,x),r)) = \mu(\delta(\delta(b,x),r)) = \lambda(\delta(b,x), r),$$

azaz $(\delta(a,x), \delta(b,x)) \in \eta_{k+1}$, így η_{k+1} kongruencia, tehát $\eta_{k+1} = \rho_{\max}$.

A tétel második állításának bizonyításához legyen $\mathbf{A}$ k-uniform. Ha $\eta_l = \rho_{\max}$ $(l \in N)$, akkor (9.5) és (10.2) miatt

$$\zeta_l = \eta_l \cap \pi = \rho_{\max} \cap \pi = \pi_{\max},$$

azaz $k \leq l$. A tétel első állításából következik, hogy $l \leq k+1$. □

Az automaták minimalizálasa szempontjából jelentős a következő tétel.

10.6. Tétel
Egy $\mathbf{A} = (A, X, Y, \delta, \mu)$ egyszerű véges Moore automata akkor és csak akkor ekvivalens egy nála kevesebb állapotú Mealy automatával, ha vannak olyan különböző a_1 és a_2 állapotai, hogy minden $x \in X$ bemenő jelre $\delta(a_1,x) = \delta(a_2,x)$ teljesül.

Bizonyítás. A szükségesség bizonyítása céljából tegyük fel, hogy létezik olyan $\mathbf{A}$-val ekvivalens $\mathbf{B} = (B, X, Y, \delta', \lambda')$ Mealy automata, amelyre $|B| < |A|$. Akkor $\mathbf{A}$-nak vannak olyan a_1 és a_2 állapotai, hogy $a_1 \neq a_2$ és $\alpha_{a_1} = \alpha_{a_2}$. Ebből következik, hogy minden $x \in X$ bemenő jelre és $p \in X^+$ bemenő szóra

$$\mu(\delta(a_1,x)) = \lambda(a_1,x) = \lambda(a_2,x) = \mu(\delta(a_2,x)),$$

$$\mu(\delta(a_1,x))\mu(\delta(\delta(a_1,x),p)) = \mu(\delta(a_1,xp)) = \lambda(a_1,xp) =$$
$$= \lambda(a_2,xp) = \mu(\delta(a_2,xp)) = \mu(\delta(a_2,x))\mu(\delta(\delta(a_2,x),p)),$$

ahol $\lambda = \mu\delta$ az **A** Moore automata kimenetfüggvényét jelöli. Így minden $p \in X^*$ bemenő szóra

$$\mu(\delta(\delta(a_1,x),p)) = \mu(\delta(\delta(a_2,x),p)).$$

Mivel **A** egyszerű, ezért minden $x \in X$ bemenő jelre

$$\delta(a_1,x) = \delta(a_2,x).$$

Az elegendőség bizonyításához tegyük fel, hogy van **A**-nak van két olyan állapota, hogy $a_1 \neq a_2$ és minden $x \in X$ bemenő jelre $\delta(a_1,x) = \delta(a_2,x)$. Akkor (1.6) alapján bármely $p \in X^+$ szóra megmutatható, hogy

$$\delta(a_1,p) = \delta(a_2,p),$$

amiből $\lambda = \mu\delta$, továbbá (1.6) és (1.7) felhasználásával nyerjük, hogy

$$\lambda(a_1,p) = \lambda(a_2,p),$$

azaz $(a_1,a_2) \in \rho_{\max}$. Ez viszont azt jelenti, hogy a $(\mathbf{A}_\lambda)/\rho_{\max}$ egyszerű Mealy automatának kevesebb állapota van, mint **A**-nak. A 9.3. Tétel szerint az $(\mathbf{A}_\lambda)/\rho_{\max}$ automata ekvivalens **A**-val. □

A 10.2. és 10.3. Lemmák bizonyításából kiolvashatunk egy algoritmust a véges automatákhoz tartozó egyszerű automaták meghatározására. Ezt az *automaták minimalizálásá*nak nevezik. Az algoritmus lényege, adott véges **A** Mealy automatára az

$$\omega_A = \eta_0 \supset \eta_1 \supset \eta_2 \supset \cdots \supset \eta_k = \eta_{k+1} = \rho_{\max}, \tag{10.4}$$

ill. Moore automatára a

$$\pi = \zeta_0 \supset \zeta_1 \supset \zeta_2 \supset \cdots \supset \zeta_k = \zeta_{k+1} = \pi_{\max} \tag{10.5}$$

ekvivalenciák meghatározása. Ebből már megszerkeszthető az **A**-hoz tartozó egyszerű $\mathbf{A}/\rho_{\max}$, ill. $\mathbf{A}/\pi_{\max}$ automata. Az eljárást *Aufenkamp–Hohn algoritmus*nak is nevezik.

A 10.6. Tétel jelentősége abban van, hogy ha egy véges Moore automatát Moore automataként minimalizáltuk, akkor célszerű meggyőződnünk arról, hogy teljesül-e az igy kapott egyszerű Moore automatára a tételben megadott feltétel. Ha teljesül, akkor Mealy automataként még tovább minimalizálva, kevesebb állapotot tartalmazó automatához jutunk. Ennek illusztrálására tekintsük a következő példát.

10.7. PÉLDA
Minimalizáljuk az

$$\begin{array}{c|cccccc} \mathbf{A} & y_1 & y_1 & y_2 & y_2 & y_3 & y_3 \\ \cline{2-7} & a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & a_5 & a_6 \\ \hline x_1 & a_1 & a_2 & a_1 & a_2 & a_2 & a_5 \\ x_2 & a_2 & a_3 & a_2 & a_3 & a_3 & a_5, \end{array}$$

táblázattal megadott Moore automatát. Mivel

$$\mu(a_1) = \mu(a_2) = y_1, \quad \mu(a_3) = \mu(a_4) = y_2, \quad \mu(a_5) = \mu(a_6) = y_3,$$

ezért az $\pi = \zeta_0$ jelekvivalencia osztályai:

$$\{a_1, a_2\}, \quad \{a_3, a_4\}, \quad \{a_5, a_6\}.$$

De $\delta(a_1, x_2) = a_2$, $\delta(a_2, x_2) = a_3$ és $\zeta_0[a_2] \neq \zeta_0[a_3]$ miatt $\zeta_1[a_1] = \{a_1\}$ és $\zeta_1[a_2] = \{a_2\}$. Hasonlóan mutatható meg, hogy minden ζ_1-osztály egyelemű, azaz

$$\pi = \zeta_0 \supset \zeta_1 = \pi_{\max} = \iota_A,$$

azaz **A** egyszerű Moore automata.

Az a_4 és a_5 azonban teljesíti a 10.6. Tétel

$$\delta(a_4, x_1) = \delta(a_5, x_1) = a_2, \quad \delta(a_4, x_2) = \delta(a_5, x_2) = a_3.$$

feltételét, vagyis Mealy automataként még tovább minimalizálhatjuk. E célból irjuk fel az automatát Mealy automataként:

$$\begin{array}{c|cccccc} \mathbf{A}_\lambda & a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & a_5 & a_6 \\ \hline x_1 & (a_1, y_1) & (a_2, y_1) & (a_1, y_1) & (a_2, y_1) & (a_2, y_1) & (a_5, y_3) \\ x_2 & (a_2, y_1) & (a_3, y_2) & (a_2, y_1) & (a_3, y_2) & (a_3, y_2) & (a_5, y_3) \end{array} \quad ,$$

E táblázatból kapjuk, hogy az η_1 kimeneti ekvivalencia osztályai:

$$\{a_1, a_3\}, \quad \{a_2, a_4, a_5\}, \quad \{a_6\}.$$

Minthogy

$$\delta(a_1, x_1) = \delta(a_3, x_1) = a_1, \quad \delta(a_1, x_2) = \delta(a_3, x_2) = a_2,$$

ezért $\eta_2[a_1] = \{a_1, a_3\}$. Hasonlóan kapható, hogy $\eta_2[a_2] = \{a_2, a_4, a_5\}$ és $\eta_2[a_6] = \{a_6\}$, azaz $\eta_1 = \eta_2 = \rho_{\max}$. Ha bevezetjük az

$$a = \eta_1[a_1], \quad b = \eta_1[a_2], \quad c = \eta_1[a_6]$$

jelöléseket, akkor az

B	a	b	c
x_1	(a, y_1)	(b, y_1)	(b, y_3)
x_2	(b, y_1)	(a, y_2)	(b, y_3)

,

egyszerű Mealy automatához jutunk. Így a Moore automaták körében már egyszerű hatállapotú automatához találtunk egy vele ekvivalens egyszerű háromállapotú Mealy automatát.

Ez a példa is mutatja, hogy bár a Moore automaták működése egyszerűbb, mint a Mealy automatáké, azonban ugyanaz az információátalakítás sokszor Mealy automatákkal kevesebb állapottal is megvalósítható, ezért nem célszerű csupán Moore automatákra szorítkoznunk.

Az automataleképezésekkel kapcsolatosan megfogalmazunk két természetes problémát. Az egyik az, hogy tetszőleges automatához hogyan lehet meghatározni azokat az automataleképezéseket, amelyeket az automata állapotai indukálnak. A problémának a megoldása tulajdonképpen egy adott automata viselkedésének, információátalakító képességének kivizsgálását jelenti, ezért a problémát *az automaták analízis-problémájá*nak nevezzük. Ehhez természetesen valamilyen módon meg kell adni az automatát. Ez véges esetben nem okoz gondot, mert az automatát megadhatjuk pl. átmenet-kimenettáblázatával vagy gráfjával, s ebből véges számú lépésben leolvasható, hogy az általa indukált automataleképezések a vizsgált bemenő szót melyik kimenő szóba viszik át. Végtelen esetben azonban általában még az is probléma, hogy az automatát milyen módon adjuk meg. Egyszerűbb esetekben ez megtehető végtelen átmenet-kimenettáblázat vagy gráf vagy az átmenet- és kimenetfüggvények képlettel vagy valamilyen utasítással való megadásával.

A másik probléma az, hogy egy alfabetikus leképezésről hogyan lehet eldönteni, hogy automataleképezés-e, s ha igen, hogyan lehet megkonstruálni olyan iniciális automatát, amely ezt a leképezést indukálja. Ez *az automaták szintézis-problémája.* Ez a probléma még véges automaták esetén is nehezebb, mert egy alfabetikus leképezés értelmezési tartománya mindig végtelen halmaz, ezért már az alfabetikus leképezés megadása is kérdéses. Egyszerűbb esetekben megadhatjuk formulával, irányított fával vagy valamilyen utasítással. A szintézis problémáját véges automatákra a 32. fejezetben megoldjuk.

Feladatok

10.1. Ha $\mathbf{A}_\lambda$ $(k+1)$-egyszerű Mealy automata, akkor az $\mathbf{A} = (A, X, Y, \delta, \mu)$ Moore automata k- vagy $(k+1)$-egyszerű. Bármely $\mathbf{A}$ k-egyszerű Moore automatára $\mathbf{A}_\lambda$ akkor és csak akkor l-egyszerű, ha $k \leq l \leq k+1$, $\eta_l \subseteq \pi$ és $l = k+1$ esetben $\eta_k \not\subseteq \pi$. (→ Megoldás)

10.2. Egy k-uniform Mealy automata minden homomorf képe is k-uniform. Ha a Mealy automata nem uniform, akkor egyetlen homomorf képe sem uniform. (→ Megoldás)

10.3. Az $\mathbf{A} = (A, X, Y, \delta, \lambda)$ Mealy automata valamely k pozitiv egész számra akkor és csak akkor k-uniform [k-egyszerű, egyszerű], ha a (3.7)-ben definiált $\mathbf{A}_{\mu_Y}$ Moore automata k-uniform [k-egyszerű, egyszerű]. (→ Megoldás)

11. Univerzális automaták

Ebben a fejezetben minden nemüres X és Y $(|Y| \geq 2)$ halmazhoz megadunk egy olyan egyszerű Mealy [Moore] automatát, amelynek állapotai az összes $\alpha : X^* \to Y^*$ automataleképezést indukálják. (Ezzel izomorf automatával már a 9.6. Tételben is találkoztunk, nevezetesen a $\Phi = \mathcal{AL}[X, Y]$ esetben.) Ennek az automatának van olyan, mégpedig pontosan egy részautomatája, amely izomorf egy tetszőleges egyszerű $\mathbf{A} = (A, X, Y', \delta, \lambda[\mu])$ $(Y' \subseteq Y)$ Mealy [Moore] automatával. Ezzel tulajdonképpen megadjuk azokat az egyszerű Mealy [Moore] automatákat, amelyekben az univerzális reláció nem kongruencia.

11.1. Lemma
Egyszerű Mealy [Moore] automata részautomatái is egyszerűek. Továbbá egy részautomatája akkor és csak akkor homomorf képe egy másik részautomatájának, ha egyenlőek.

Bizonyítás. Bármely $\mathbf{A}$ Mealy [Moore] automata $\rho_{\max}$ $[\pi_{\max}]$ maximális kongruenciáját egy részautomatájára szűkítve, annak megkülönböztethetetlenségi relációját kapjuk. Ebből már adódik az első állítás.

Ha φ az $\mathbf{A}$ egy $\mathbf{A}_1$ részautomatájának homomorf leképezése az $\mathbf{A}_2$ részautomatájára, akkor bármely $a \in A_1$ állapotra $(a, \varphi(a)) \in \rho_{\max}[\pi_{\max}]$. Mivel $\rho_{\max}[\pi_{\max}] = \iota_A$, ezért $\varphi(a) = a$, azaz $\mathbf{A}_1 = \mathbf{A}_2$. □

Ha a bizonyítás második részében φ az $\mathbf{A}$ automata egy endomorfizmusa, akkor azt kapjuk, hogy $\varphi = \iota_A$, azaz egyszerű kimenő jeles automata endomorfizmusfélcsoportja egyelemű.

Most megadjuk az automataleképezéseknek egy olyan előállítását, amely segítségével, véges (nemüres) X és Y halmazok esetén, meg is tudjuk adni azt az egyszerű Mealy automatát, amelynek állapotai indukálják az összes $\alpha : X^* \to Y^*$ automataleképezést.

Legyen X és Y tetszőleges (nemüres) halmazok esetén $\mathcal{A}^{(j)}[X,Y]$ $(j \in N)$ az $\alpha^{(j)} : X^j \to Y$ leképezések halmaza. Ha $j = 0$, akkor $X^0 = \{e\}$, ahol e az üres szó, azaz $\alpha^{(0)}$ leképezés az Y halmaz egy $\alpha^{(0)}(e)$ elemének kijelölését jelenti. Az $\alpha^{(0)}$ leképezést *konstans leképezés*nek is nevezzük, mivel úgy is felfogható, mint X-nek Y-ba való olyan leképezése, amely X minden eleméhez Y-nak ugyanazt az elemét rendeli. Legyen a továbbiakban $\mathcal{A}[X,Y] = \prod_{j=1}^{\infty} \mathcal{A}^{(j)}[X,Y]$.

Jelölje $\mathcal{AL}[X,Y]$ az $\alpha : X^* \to Y^*$ automataleképezések halmazát. Minden $\alpha \in \mathcal{AL}[X,Y]$ leképezésnek feleltessük meg leképezéseknek azt az

$$(\alpha^{(1)}, \dots, \alpha^{(j)}, \dots) \in \mathcal{A}[X,Y] \tag{11.1}$$

sorozatát, amelyre minden $x_1, \dots, x_j \in X$ elem esetén

$$\alpha^{(j)}(x_1, \dots, x_j) = \alpha_{x_1 \dots x_{j-1}}(x_j). \tag{11.2}$$

teljesül. ($x_0 = e$ az üres szó, vagyis $\alpha_{x_0} = \alpha$.) Jelölje ezt a megfeleltetést $\varphi_{X,Y}$.

11.2. Lemma
A $\varphi_{X,Y}$ megfeleltetés bijektív leképezés.

Bizonyítás. A $\varphi_{X,Y}$ megfeleltetés nyilvánvalóan egyértelmű. Legyenek $\alpha, \beta \in \mathcal{AL}[X,Y]$ olyanok, hogy $\varphi_{X,Y}(\alpha) = \varphi_{X,Y}(\beta)$. Így (7.1) és a 7.1. Tétel szerint $\alpha(e) = e = \beta(e)$, és tetszőleges $x_1, \dots, x_j \in X$ $(j \in N_+)$ elemekre

$$\alpha(x_1 \dots x_j) = \alpha(x_1)\alpha_{x_1}(x_2) \dots \alpha_{x_1 \dots x_{j-1}}(x_j) =$$

$$= \alpha^{(1)}(x_1)\alpha^{(2)}(x_1, x_2) \dots \alpha^{(j)}(x_1, \dots, x_j) =$$

$$= \beta^{(1)}(x_1)\beta^{(2)}(x_1, x_2) \dots \beta^{(j)}(x_1, \dots, x_j) =$$

$$= \beta(x_1)\beta_{x_1}(x_2) \dots \beta_{x_1 \dots x_{j-1}}(x_j) = \beta(x_1 \dots x_j),$$

azaz $\alpha = \beta$. Ez azt jelenti, hogy $\varphi_{X,Y}$ injektív.

Legyen most $(\alpha^{(1)},\dots,\alpha^{(j)},\dots)\in\mathcal{A}[X,Y]$ tetszőleges. Definiáljuk az $\alpha: X^*\to Y^*$ alfabetikus leképezést a következő módon. Legyen $\alpha(e)=e$ és minden $x_1,\dots,x_j\in X$ $(j\in N_+)$ elemre

$$\alpha(x_1\dots x_j)=\alpha^{(1)}(x_1)\alpha^{(2)}(x_1,x_2)\dots\alpha^{(j)}(x_1,\dots,x_j) \tag{11.3}$$

Az α leképezés szóhossz- és prefixtartó. A 7.1. Tétel szerint $\alpha\in\mathcal{AL}[X,Y]$ és $\varphi_{X,Y}(\alpha)=(\alpha^{(1)},\dots,\alpha^{(j)},\dots)$, tehát $\varphi_{X,Y}$ szürjektív. □

A 11.2. Lemma lehetőséget nyújt arra, hogy a leképezések (11.1) típusú sorozatát az automataleképezések egy előállításának tekintsük. Ezt a továbbiakban meg is tesszük, azaz minden $\alpha\in\mathcal{AL}[X,Y]$ leképezést azonosítjuk a $\varphi_{X,Y}(\alpha)$ függvénysorozattal:

$$\alpha=(\alpha^{(1)},\dots,\alpha^{(j)},\dots)\quad(\alpha\in\mathcal{AL}[X,Y]). \tag{11.4}$$

Ez azt jelenti, hogy

$$\alpha_x=(\alpha_x^{(1)},\dots,\alpha_x^{(j)},\dots)\quad(x\in X), \tag{11.5}$$

ahol (7.1) és (11.3) szerint, bármely $x_1,\dots,x_j\in X$ $(j\in N_+)$ esetén

$$\alpha_x^{(j)}(x_1,\dots,x_j)=\alpha^{(j+1)}(x,x_1,\dots,x_j). \tag{11.6}$$

Ezek után definiáljuk az

$$\underline{\mathcal{A}}[X,Y]=(\mathcal{A}[X,Y],X,Y,\delta,\lambda)$$

Mealy automata δ átmenet- és λ kimenetfüggvényeit úgy, hogy minden $\alpha\in\mathcal{A}[X,Y]$ állapotra és $x\in X$ bemenő jelre legyen

$$\delta(\alpha,x)=\alpha_x\quad\text{és}\quad\lambda(\alpha,x)=\alpha^{(1)}(x). \tag{11.7}$$

Ezek a függvények (11.4) miatt, az adott halmazokra szűkítve, megegyeznek (7.4)-ben és (9.6)-ban megadott függvényekkel.

A továbbiakban használjuk minden $p\in X^*$ szóra és $x\in X$ jelre $(\alpha_p)_x$ helyett az α_{px} rövidebb írásmódot, ahol az e üres szóra legyen $\alpha_e=\alpha$.

11.3. Tétel
Az $\underline{\mathcal{A}}[X,Y]$ Mealy automata egyszerű és állapotai indukálják az összes $\alpha: X^*\to Y^*$ automataleképezést. Bármely $\mathbf{A}=(A,X,Y',\delta_A,\lambda_A)$ $(Y'\subseteq Y)$ egyszerű Mealy automata izomorf $\underline{\mathcal{A}}[X,Y]$ valamely részautomatájával.

Bizonyítás. Először megmutatjuk, hogy $\underline{\mathcal{A}}[X,Y]$ egyszerű. A Mealy automaták átmenet- és kimenetfüggvényének (1.5) és (1.6) kiterjesztése és a tétel előtti megjegyzés szerint bármely $\alpha \in \mathcal{A}[X,Y]$ állapotra és $p = x_1 \dots x_j \in X^+$ bemenő szóra

$$\delta(\alpha, p) = \alpha_{x_1}\alpha_{x_1x_2}\dots\alpha_{x_1\dots x_j}, \tag{11.8}$$

$$\lambda(\alpha, p) = \alpha^{(1)}(x_1)\alpha^{(1)}_{x_1}(x_2)\dots\alpha^{(1)}_{x_1\dots x_{j-1}}(x_j). \tag{11.9}$$

Így (11.6) szerint

$$\lambda(\alpha, p) = \alpha^{(1)}(x_1)\alpha^{(2)}(x_1,x_2)\dots\alpha^{(j)}(x_1,\dots,x_j). \tag{11.10}$$

Mivel (11.3) szerint $\alpha(p) = \lambda(\alpha, p)$, ezért $\underline{\mathcal{A}}[X,Y]$ automata α állapota indukálja az $\alpha : X^* \to Y^*$ automataleképezést.

Legyenek $\alpha, \beta \in \mathcal{A}[X,Y]$ tetszőlegesek. Tegyük fel, hogy minden $p \in X^+$ bemenő szóra

$$\lambda(\alpha, p) = \lambda(\beta, p).$$

Az előbbiek szerint ez azt jelenti, hogy minden $j \in N_+$ esetén $\alpha^{(j)} = \beta^{(j)}$, azaz $\alpha = \beta$. Így (9.2) miatt $\underline{\mathcal{A}}[X,Y]$ egyszerű.

Ha az $\mathbf{A} = (A, X, Y', \delta_A, \lambda_A)$ egyszerű Mealy automata indukálja az automataleképezések egy Φ halmazát, akkor a 9.6. Tétel szerint $\mathbf{A}$ izomorf $\underline{\mathcal{A}}[X,Y]$ azon részautomatájával, amelynek állapothalmaza Φ. □

Az $\underline{\mathcal{A}}[X,Y]$ Mealy automatával izomorf Mealy automatákat ((X,Y) *feletti*) *univerzális Mealy automaták*nak nevezzük. A 11.1. Lemma szerint az $\underline{\mathcal{A}}[X,Y]$ Mealy automata részautomatái akkor és csak akkor izomorfak, ha egyenlők.

Ezek után eljárást adunk az (X,Y) feletti véges egyszerű automaták megszerkesztésére. Vezessük be az $\mathcal{A}_n[X,Y] = \prod_{j=1}^{n} \mathcal{A}^{(j)}$ jelölést. Legyen $g : \mathcal{A}_n[X,Y] \to \mathcal{A}^{(n+1)}$ tetszőleges leképezés. Legyenek

$$\alpha_n = (\alpha^{(1)}, \dots, \alpha^{(n-1)}, \alpha^{(n)}) \in \mathcal{A}_n[X,Y], \quad g(\alpha_n) = \alpha^{(n+1)}, \tag{11.11}$$

$$\alpha_{n,g,x} = (\alpha^{(1)}_x, \dots, \alpha^{(n-1)}_x, \alpha^{(n)}_x), \quad (x \in X), \tag{11.12}$$

ahol minden $\alpha^{(j)}_x$ $(j = 1, \dots, n-1, n)$ teljesítse a (11.6) feltételt.

Definiáljuk az

$$\underline{\mathcal{A}}_{n,g}[X,Y] = (\mathcal{A}_n[X,Y], X, Y, \delta_n, \lambda_n)$$

véges Mealy automata δ átmenet- és λ kimenetfüggvényét a

$$\delta_n(\alpha_n, x) = \alpha_{n,g,x}, \quad \lambda_n(\alpha_n, x) = \alpha^{(1)}(x). \tag{11.13}$$

feltételekkel minden $\alpha_n \in \mathcal{A}_n[X,Y]$ állapotra és $x \in X$ bemenő jelre.

11.4. Lemma
Az $\underline{\mathcal{A}}_{n,g}[X,Y]$ Mealy automata minden pozitív egész szám és $g : \mathcal{A}_n[X,Y] \to \mathcal{A}^{(n+1)}$ függvény esetén egyszerű.

Bizonyítás. A bizonyítás a 11.3. Tétel megfelelő állításának bizonyításához hasonlóan végezhető el. □

11.5. Tétel
Az $\mathbf{A} = (A, X, Y, \delta_A, \lambda_A)$ véges Mealy automata akkor és csak akkor egyszerű, ha van olyan n pozitív egész szám és olyan $g : \mathcal{A}_n[X,Y] \to \mathcal{A}^{(n+1)}$ függvény, amelyekre $\mathbf{A}$ izomorf $\underline{\mathcal{A}}_{n,g}$ egy részautomatájával.

Bizonyítás. A 11.3. Tétel szerint feltehetjük, hogy $\mathbf{A}$ az $\underline{\mathcal{A}}[X,Y]$ univerzális Mealy automata részautomatája. Legyen $\alpha \in A$ és α (11.4) előállítását használva, minden k pozitív egész számra

$$\alpha_k = (\alpha^{(1)}, \alpha^{(2)}, \ldots, \alpha^{(k)}).$$

Definiáljuk az η_k ekvivalenciát A-n a következőképpen:

$$(\alpha, \beta) \in \eta_k \quad \Longleftrightarrow \quad \alpha_k = \beta_k.$$

Nyilvánvaló, hogy $\eta_{k+1} \subseteq \eta_k$ és

$$\cap_{k=1}^{\infty} \eta_k = \rho_{\mathbf{A},max}.$$

De $\mathbf{A}$ egyszerű, ezért $\rho_{\mathbf{A},max} = \iota_A$. Mivel A véges, ezért van olyan $k \in N_+$, amelyre $\eta_k = \iota_A$. Legyen n a legkisebb ilyen k, továbbá $H = \{\alpha_n;\ \alpha \in A\}$ és $g : \mathcal{A}_n[X,Y] \to \mathcal{A}^{(n+1)}$ olyan függvény, amelyre $g(\alpha_n) = \alpha^{n+1}$ $(\alpha \in A)$. Mivel $\mathbf{A}$ az $\underline{\mathcal{A}}[X,Y]$ automata részautomatája, ezért minden $\alpha_n \in H$ és $x \in X$ esetén $\alpha_{n,g,x} \in H$. Így $\mathbf{H} = (H, X, Y', \delta_n, \lambda_n)$ az $\underline{\mathcal{A}}_{n,g}[X,Y]$ automata részautomatája, ahol

$$Y' = \{\alpha^{(1)}(x);\ \alpha_n \in H, x \in X\}.$$

A $\varphi : A \to H$ leképezés, amelyre $\varphi(\alpha) = \alpha_n$ $(\alpha \in A)$, $\mathbf{A}$ izomorf leképezése $\mathbf{H}$-ra. □

Az Aufenkamp–Hohn algoritmussal megkonstruálhatjuk bármely véges Mealy automata egy egyszerű homomorf képét. A 11.4. Lemma és a 11.5. Tétel segítségével egy algoritmus kapható tetszőleges n pozitív egész számra véges (nemüres) X és Y halmazok esetén (izomorfiától eltekintve egyértelműen) a véges k-egyszerű $\mathbf{A} = (A, X, Y, \delta_A, \lambda_A)$ Mealy automaták megkonstruálására, amelyekre $1 \leq k \leq n$. Legyen ugyanis H_0 az $\mathcal{A}_n[X,Y]$ halmaz tetszőleges nemüres részhalmaza és

$$H_j = \{\alpha_{n,g,x};\ \alpha_n \in H_{j-1}, x \in X\}, \quad j = 1, 2, 3, \ldots.$$

Ha $H^{(j)} = H_0 \cup H_1 \cup \cdots \cup H_j$, akkor $\mathcal{A}_n[X,Y]$ végessége miatt van olyan $j \in N_+$, amelyre $H^{(j)} \subseteq H^{(j-1)}$. Ebben az esetben a

$$\mathbf{H}^{(j-1)} = (H^{(j-1)}, X, Y', \delta_n, \lambda_n)$$

Mealy automata az $\underline{\mathcal{A}}_{n,g}[X,Y]$ Mealy automata részautomatája, ahol

$$Y' = \{\alpha^{(1)}(x);\ \alpha_n \in H^{(j-1)}, x \in X\}.$$

Az is nyilvánvaló, hogy így $\underline{\mathcal{A}}_{n,g}[X,Y]$ minden részautomatáját megkapjuk.

A 3.5. és a 9.1. Tétel szerint minden Mealy automata ekvivalens egy Moore automatával. Ez azt jelenti, hogy minden automataleképezés megvalósítható Moore automatával is. A Moore automaták szerkezete egyszerűbb, ezért az automataleképezések Moore automatákkal való előállítása gyakorlati szempontból is fontos feladat. Ha egy egyszerű Mealy automatával megvalósitható automataleképezéseket Moore automatával valósítjuk meg, akkor szeretnénk azokat minimális állapotszámú Moore automatával megvalósítani. A fejezet további részében ezzel a kérdéssel foglalkozunk.

Az $\mathbf{A}$ Mealy automata váza segítségével adjuk meg a (3.7) feltétellel definiált $\mathbf{A}_{\mu_Y}$ Moore automatát. A 3.2. , a 9.1. és a 9.3. Tételek szerint $\mathbf{A}$ és $\mathbf{A}_{\mu_Y}$ ekvivalensek. Ha $\mathbf{A} = \underline{\mathcal{A}}[X,Y]$ vagy $\mathbf{A} = \underline{\mathcal{A}}_{n,g}$, akkor $\mathbf{A}_{\mu_Y}$ helyett az egyszerűség kedvéért a $\tilde{\mathcal{A}}[X,Y]$ ill. a $\tilde{\mathcal{A}}_{n,g}[X,Y]$ jelölést használjuk.

11.6. LEMMA

Az $\mathbf{A}_{\mu_Y}$ Moore automata akkor és csak akkor egyszerű, ha az $\mathbf{A}$ Mealy automata egyszerű.

Bizonyítás. Hasonlóan, mint a 6.4. Tétel bizonyításában, a $p \in X^+$ hossza szerinti teljes indukcióval megmutatható, hogy tetszőleges $a \in A,\ y \in Y,\ p \in X^+$ esetén

$$\delta_Y((a,y),p) = (\delta(a,p), \lambda(a,p)), \quad \mu_Y(\delta_Y((a,y),p)) = \lambda(a,p). \tag{11.14}$$

Tegyük fel, hogy $\mathbf{A}$ egyszerű és

$$((a,y_1),(b,y_2)) \in \pi_{\mathbf{A}_{\mu_Y},max}.$$

Akkor $y_1 = \mu_Y(a,y_1) = \mu_Y(b,y_2) = y_2$ és minden $p \in X^+$ bemenő szóra $\lambda(a,p) = \lambda(b,p)$, azaz $(a,b) \in \rho_{\mathbf{A},max}$. Mivel $\rho_{\mathbf{A},max} = \iota_A$, így $a = b$, amiből kapjuk, hogy $((a,y_1) = (b,y_2))$, vagyis $\pi_{\mathbf{A}_{\mu_Y},max} = \iota_{A\times Y}$, tehát $\mathbf{A}_{\mu_Y}$ egyszerű.

Megfordítva, legyen $\mathbf{A}_{\mu_Y}$ egyszerű. Ha $(a,b) \in \rho_{\mathbf{A},max}$, akkor tetszőleges $y \in Y$ kimenő jelre

$$((a,y),(b,y)) \in \pi_{\mathbf{A}_{\mu_Y},max} = \iota_{A\times Y},$$

amiből következik, hogy $a = b$, azaz $\rho_{\mathbf{A},max} = \iota_A$, azaz $\mathbf{A}$ egyszerű. □

Az $\mathbf{A}$ egyszerű Mealy automata és az $\mathbf{A}_{\mu_Y}$ egyszerű Moore automata ugyanazokat az automataleképezéseket állítja elő, mint azt (11.14) is mutatja. Az $\mathbf{A}$ automata állapotai különböző automataleképezéseket állítanak elő. Ez azonban az $\mathbf{A}_{\mu_Y}$ automatára nem igaz. A (11.14) második egyenlete szerint bármely $a \in A$ állapotra

$$\alpha_{\mathbf{A},a} = \alpha_{\mathbf{A}_{\mu_Y},(a,y)} \quad (y \in Y).$$

Azonban a 3.5. Tétel alkalmazásával kaphatunk az $\mathbf{A}_{\mu_Y}$ automatából vele ekvivalens minimális állapotszámú Moore automatát.

11.7. Tétel
Az $\tilde{\mathcal{A}}[X,Y]$ Moore automata egyszerű, és állapotai minden $\alpha : X^* \to Y^*$ automataleképezést indukálnak. Minden $\mathbf{A} = (A, X, Y', \delta, \mu)$ $(Y' \subseteq Y)$ egyszerű Moore automata izomorf $\tilde{\mathcal{A}}[X,Y]$ valamely részautomatájával.

Bizonyítás. A 11.3. Tétel és a 11.6. Lemma szerint az $\tilde{\mathcal{A}}[X,Y]$ Moore automata egyszerű. A 3.2. és a 9.3. Tétel segítségével kapjuk, hogy állapotai minden $\alpha : X^* \to Y^*$ automataleképezést indukálnak. A 11.1. Lemma szerint $\tilde{\mathcal{A}}[X,Y]$ minden részautomatája is egyszerű.

A 9.6. Tétel Moore automatákra vonatkozó megfelelője szerint, minden egyszerű Moore automata izomorf $\tilde{\mathcal{A}}[X,Y]$ valamely részautomatájával. □

A 11.6. Lemma és a 11.7. Tétel alapján megadhatunk minden egyszerű Mealy automatához egy vele ekvivalens egyszerű Moore automatát. Ezek az automaták $\tilde{\mathcal{A}}[X,Y]$ részautomatái. $\tilde{\mathcal{A}}[X,Y]$ Moore automatát és a vele izomorf Moore automatákat *univerzális Moore automaták*nak nevezzük.

A 11.4. és a 11.6. Lemmákból következik a

11.8. Lemma
Az $\tilde{\mathcal{A}}_{n,g}[X,Y]$ Moore automata minden pozitív egész szám és $g : \mathcal{A}_n[X,Y] \to \mathcal{A}^{(n+1)}$ függvény esetén egyszerű.

11.9. Tétel
Az $\mathbf{A} = (A, X, Y, \delta_A, \mu_A)$ véges Moore automata akkor és csak akkor egyszerű, ha van olyan n pozitív egész szám és olyan $g : \mathcal{A}_n[X,Y] \to \mathcal{A}^{(n+1)}$ függvény, amelyekre $\mathbf{A}$ izomorf $\tilde{\mathcal{A}}_{n,g}$ egy részautomatájával.

Bizonyítás. A 11.7. Tétel szerint elegendő megmutatni, hogy a $\tilde{\mathcal{A}}[X,Y]$ univerzális Moore automata minden véges részautomatája izomorf $\tilde{\mathcal{A}}_{n,g}$ egy részautomatájával valamilyen n pozitív egész számra és

$$g : \mathcal{A}_n[X,Y] \to \mathcal{A}^{(n+1)}$$

függvényre. Hasonlóan a 11.5. Tétel bizonyításához nem nehéz belátni, hogy a $\varphi : A \times Y' \to H \times Y'$ leképezés, amelyre

$$\varphi(\alpha, y) = (\alpha_n, y) \quad (\alpha \in A, y \in Y'),$$

A izomorf leképezése **H**-ra. □

Feladatok

11.1. Az $\underline{A}[X, Y]$ automata **A** részautomatája akkor és csak akkor teljesíti a Moore kritériumot, ha

$$\alpha^{(1)}(x_1) \neq \beta^{(1)}(x_2) \quad (\alpha, \beta \in A,\ x_1, x_2 \in X),$$

akkor van olyan $j \in N_+$ és vannak olyan $z_1, \ldots z_j \in X$ bemenő jelek, hogy

$$\alpha^{(j+1)}(x_1, z_1, \ldots z_j) \neq \beta^{(j+1)}(x_2, z_1, \ldots, z_j).$$

(→ Megoldás)

11.2. Az $\underline{A}_{n,g}[X, Y]$ automata **A** részautomatája akkor és csak akkor teljesíti a Moore kritériumot, ha

$$\alpha^{(1)}(x_1) \neq \beta^{(1)}(x_2) \quad (\alpha, \beta \in A,\ x_1, x_2 \in X),$$

akkor vagy van olyan $j \in \{1, 2, \ldots, n\}$ és vannak olyan $z_1, \ldots z_j \in X$ bemenő jelek, amelyekre

$$\alpha^{(j+1)}(x_1, z_1, \ldots z_j) \neq \beta^{(j+1)}(x_2, z_1, \ldots, z_j),$$

ahol $\alpha^{(n+1)} = g(\alpha_n)$ $(\alpha_n \in A)$. (→ Megoldás)

III. AUTOMATÁK SZORZATAI

Az algebrai struktúrák elméletében központi szerepet játszik a direkt szorzat fogalma. Ebben a részben a direkt szorzattal és az automataelméletben használatos különböző általánosításaival foglalkozunk.

12. Direkt és szubdirekt szorzat

Adjuk meg az $\mathbf{A} = (A, X, \delta)$ és az $\mathbf{A}_k = (A_k, X, \delta_k)$ $(k \in I)$ kimenő jel nélküli automatákat (A, F) ill. (A_k, F_k) $(k \in I)$ unér algebrákként, ahol $F = \{\delta_x; x \in X\}$ ill. $F_k = \{(\delta_k)_x\ ; x \in X\}$ a (3.1) transzformációk halmazai.

Az $\mathbf{A}$ automatát az $\mathbf{A}_k$ $(k \in I)$ automaták *direkt szorzat*ának nevezzük, ha az (A, F) unér algebra az (A_k, F_k) $(k \in I)$ unér algebrák direkt szorzata. Más szóval az $\mathbf{A} = (A, X, \delta)$ automata az $\mathbf{A}_k = (A_k, X, \delta_k)$ $(k \in I)$ automaták *direkt szorzat*a, ha $A = \prod_{k \in I} A_k$, továbbá minden $\mathbf{a} \in A$ állapotra és $x \in X$ bemenő jelre

$$\delta(\mathbf{a}, x)(k) = \delta_k(\mathbf{a}(k), x) \quad (k \in I) \tag{12.1}$$

teljesül. Erre az $\mathbf{A} = \prod_{k \in I} \mathbf{A}_k$, $I = [n]$ vagy $I = N_+$ esetekben pedig az $\mathbf{A} = \prod_{k=1}^{n} \mathbf{A}_k$ ill. a $\mathbf{A} = \prod_{k=1}^{\infty} \mathbf{A}_k$ jelölést használjuk.

Mivel minden $k \in I$-re a π_k k-adik projekció az (A, F) direkt szorzat (A_k, F_k)-ra való homomorf leképezése, ezért π_k az $\mathbf{A}$ direkt szorzat $\mathbf{A}_k$-ra való homomorf leképezése.

Ha minden $A_k = B$ $(k \in I)$, akkor $\mathbf{B}$ *direkt hatványáról* beszélünk és a $\mathbf{B}^I$ jelölést használjuk. Azt mondjuk, hogy a $\mathbf{C} = (C, X, \delta')$ automata *felbontható az* $\mathbf{A}_k$ $(k \in I)$ *automaták direkt szorzatára*, ha $\mathbf{C}$ izomorf az $\mathbf{A} = \prod_{k \in I} \mathbf{A}_k$ direkt szorzattal. Ebben az esetben $\mathbf{A}$-t a $\mathbf{C}$ automata egy *direkt felbontás*ának, az $\mathbf{A}_k$ $(k \in I)$ automatákat pedig a *felbontás komponensei*nek nevezzük. Azt mondjuk, hogy a $\mathbf{C}$ automata egy direkt felbontása *valódi*, ha egyik komponense sem izomorf $\mathbf{C}$-vel. Az $\mathbf{C}$ automatát *direkt irreducibilis*nek [*reducibilis*nek] mondjuk, ha nincs [van] valódi direkt felbontása, azaz ha unér algebraként direkt irreducibilis [reducibilis].

Legyenek $H_k \neq \emptyset$ $(k \in I)$ tetszőleges halmazok, π az I indexhalmaz permutációja, $H = \prod_{k\in I} H_k$ és $H_\pi = \prod_{k\in I} H_{\pi(k)}$. Definiáljuk az $\alpha_{H,\pi} : H \to H_\pi$ leképezést az

$$\alpha_{H,\pi}(\mathbf{h}) = \mathbf{h}_\pi \quad (\mathbf{h} \in H) \tag{12.2}$$

összefüggéssel, ahol $\mathbf{h}_\pi(k) = \mathbf{h}(\pi(k))$ $(k \in I)$. Nyilvánvaló, hogy $\alpha_{H,\pi}$ a H halmaz bijektív leképezése H_π-re.

12.1. Lemma
Legyenek $\mathbf{A}_k = (A_k, X, \delta_k)$ $(k \in I)$ tetszőleges automaták. Az I indexhalmaz bármely π permutációjára az $\mathbf{A} = \prod_{k\in I} \mathbf{A}_k$ direkt szorzat izomorf az $\mathbf{A}_\pi = \prod_{k\in I} \mathbf{A}_{\pi(k)}$ direkt szorzattal.

Bizonyítás. A (12.2) összefüggéssel definiált $\alpha_{A,\pi}$ leképezés az $\mathbf{A}$ direkt szorzat izomorf leképezése az $\mathbf{A}_\pi$ direkt szorzatra. □

A 12.1. Lemmából következik, hogy tetszőleges $\mathbf{A}_k = (A_k, X, \delta_k)$ $(k = 1, 2)$ automaták $\mathbf{A}_1 \times \mathbf{A}_2$ direkt szorzata izomorf $\mathbf{A}_2 \times \mathbf{A}_1$ direkt szorzattal, amit úgy is mondunk, hogy a direkt szorzat (*izomorfia erejéig*) *kommutatív*. (Az $A_1 \times A_2$ halmaznak az $A_2 \times A_1$ halmazra való

$$\alpha(a_1, a_2) = (a_2, a_1) \quad ((a_1, a_2) \in A_1 \times A_2)$$

összefüggéssel definiált leképezése izomorfizmus.)

Legyenek H_j $(j \in J)$ tetszőleges nemüres halmazok és $\mathcal{C} = \{I_k; \quad k \in I\}$ a J indexhalmaz osztályozása. A J halmaz ekvivalens a $J(\mathcal{C}) = \{(k, l); \quad k \in I,\ l \in I_k\}$ halmazzal. Indexeljük át a H_j halmazokat $J(\mathcal{C})$ elemeivel úgy, hogy minden $j \in J$ indexre $H_j = H_{\kappa_\mathcal{C}(j)}$ teljesüljön, ahol $\kappa_\mathcal{C}$ a J indexhalmaznak $J(\mathcal{C})$-re való kölcsönösen egyértelmű leképezése, amelyre minden $j \in J$ esetén $\kappa_\mathcal{C}(j) = (k, j)$ akkor és csak akkor, ha $j \in I_k$.

Legyen

$$H_k = \prod_{l\in I_k} H_{k,l}, \quad H = \prod_{k\in I} H_k, \quad H' = \prod_{(k,l)\in J(\mathcal{C})} H_{k,l}.$$

Definiáljuk az $\alpha_{H,\mathcal{C}} : H \to H'$ leképezést úgy, hogy minden $\mathbf{h} \in H$ elemre

$$\alpha_{H,\mathcal{C}}(\mathbf{h}) = \mathbf{h}' \tag{12.3}$$

teljesüljön, ahol minden $k \in I$ és $l \in I_k$ esetén $(\mathbf{h}(k))(l) = \mathbf{h}'(k, l)$. Nyilvánvaló, hogy az $\alpha_{H,\mathcal{C}}$ leképezés bijektív.

12.2. Lemma
Legyenek $\mathbf{A}_j = (A_j, X, \delta_j)$ $(j \in J)$ tetszőleges automaták. A J indexhalmaz bármely $\mathcal{C} = \{I_k; \quad k \in I\}$ osztályozására a $\prod_{k\in I}(\prod_{l\in I_k} \mathbf{A}_{k,l})$ direkt szorzat izomorf a $\prod_{(k,l)\in J(\mathcal{C})} \mathbf{A}_{k,l}$ direkt szorzattal.

Bizonyítás. Nem nehéz belátni, hogy $\alpha_{A,\mathcal{C}}$ leképezés egy megfelelő izomorfizmus. □

A 12.2. Lemma szerint tetszőleges $\mathbf{A}_k = (A_k, X, \delta_k)$ $(k = 1,2,3)$ automaták $(\mathbf{A}_1 \times \mathbf{A}_2) \times \mathbf{A}_3$ és $\mathbf{A}_1 \times (\mathbf{A}_2 \times \mathbf{A}_3)$ direkt szorzata izomorf, mivel mindkettő izomorf az $\mathbf{A}_1 \times \mathbf{A}_2 \times \mathbf{A}_3$ direkt szorzattal. Ezt úgy is mondjuk, hogy a direkt szorzat (*izomorfia erejéig*) *asszociatív.* (Közvetlenül is belátható, hogy az $(\mathbf{A}_1 \times \mathbf{A}_2) \times \mathbf{A}_3$ direkt szorzat izomorf az $\mathbf{A}_1 \times (\mathbf{A}_2 \times \mathbf{A}_3)$ direkt szorzattal. Az

$$\alpha((a_1, a_2), a_3) = (a_1, (a_2, a_3)) \quad (a_k \in A_k \ (k = 1,2,3))$$

összefüggéssel definiált α leképezés izomorfizmus.)

Az alábbi tétel az algebrai struktúrák direkt felbonthatóságára vonatkozó tétel kimenő jel nélküli automatákra vonatkozó megfogalmazása. A tétel bizonyítása tetszőleges algebrai struktúra esetén ugyanúgy végezhető el, mint ebben a speciális esetben.

12.3. Tétel

Az $\mathbf{A} = (A, X, \delta)$ automata akkor és csak akkor bontható fel az $\mathbf{A}_k = (A_k, X, \delta_k)$ $(k \in I)$ automaták direkt szorzatára, ha $\mathbf{A}$-nak vannak olyan ρ_k $(k \in I)$ kongruenciái, hogy minden $k \in I$ indexre $\mathbf{A}/\rho_k$ izomorf $\mathbf{A}_k$-val,

$$\cap_{k\in I}\, \rho_k = \iota_A \tag{12.4}$$

és ha $a_k \in A$ $(k \in I)$, akkor

$$\cap_{k\in I}\, \rho_k[a_k] \neq \emptyset. \tag{12.5}$$

Bizonyítás. Ha $\mathbf{A}$ felbontható az $\mathbf{A}_k$ $(k \in I)$ automaták direkt szorzatára, akkor az izomorfiaelv miatt feltehetjük, hogy $A = \prod_{k\in I} A_k$. Ha π_k az $\mathbf{A}$ k-adik projekciója, akkor minden $k \in I$ indexre $\mathbf{A}/\ker \pi_k$ izomorf $\mathbf{A}_k$-val és $\cap_{k\in I} \ker \pi_k = \iota_A$. Ha $\mathbf{a}_k \in A$ $(k \in I)$, akkor

$$\cap_{k\in I} \ker \pi_k[\mathbf{a}_k] = \cap_{k\in I} \ker \pi_k[\mathbf{a}] = \mathbf{a},$$

ahol $\mathbf{a}(k) = (\mathbf{a}_k)(k)$ $(k \in I)$.

Megfordítva, tegyük fel, hogy a ρ_k $(k \in I)$ relációk az $\mathbf{A}$ automata olyan kongruenciái, amelyekre (12.4) és (12.5) teljesül. A (12.4) feltételből következik, hogy ha $a_k \in A$ $(k \in I)$, akkor $|\cap_{k\in I}\, \rho_k[a_k]| \leq 1$. Amiből (12.5) miatt kapjuk, hogy $|\cap_{k\in I}\, \rho_k[a_k]| = 1$. Definiáljuk a $\varphi : A \to \prod_{k\in I} A/\rho_k$ leképezést, úgy, hogy minden $b \in A$ állapotra $(\varphi(b))(k) = \rho_k[a_k]$ $(k \in I)$ akkor és csak akkor teljesüljön, ha $\cap_{k\in I}\rho_k[a_k] = \{b\}$ $(a_k \in A)$. A φ leképezés az $\mathbf{A}$ automata izomorf leképezése az $\prod_{k\in I} \mathbf{A}/\rho_k$ direkt szorzatra. □

Legyen $\{\rho_k;\ k \in I\}$ legkisebb felső korlátja ρ, azaz $\rho = \bigvee_{k\in I} \rho_k$. A (12.5) feltételből az is következik, hogy bármely $a, b \in A$ állapotra és $k, l \in I$ indexre $\rho_k[a] \cap \rho_l[b] \neq \emptyset$. Amiből kapjuk, hogy ha $k \neq l$, akkor

$$\omega_A \subseteq \rho_k \circ \rho_l \subseteq \rho_k \vee \rho_l \subseteq \rho \subseteq \omega_A,$$

vagyis bármely $k, l \in I$ $(k \neq l)$ indexre

$$\rho = \rho_k \circ \rho_l = \rho_l \circ \rho_k = \rho_k \vee \rho_l = \omega_A.$$

Továbbá, ha $I' \neq \emptyset$ az I indexhalmaz olyan részhalmaza, hogy $\cap_{k\in I'}\rho_k = \iota_A$, akkor a ρ_k $(k \in I')$ kongruenciák teljesítik a (12.5) feltételt is, vagyis $\mathbf{A}$ felbontható az $\mathbf{A}/\rho_k$ $(k \in I')$ automaták direkt szorzatára is.

12.4. KÖVETKEZMÉNY

Az A-véges $\mathbf{A} = (A, X, \delta)$ automata akkor és csak akkor direkt reducibilis, ha az $\mathbf{A}$ automatának vannak olyan ρ és τ nemtriviális kongruenciái, amelyekre

$$\rho \cap \tau = \iota_A \quad \text{és} \quad \rho \circ \tau = \tau \circ \rho = \omega_A \tag{12.6}$$

teljesül. Ebben az esetben $\mathbf{A}$ felbontható $\mathbf{A}/\rho$ és $\mathbf{A}/\tau$ direkt szorzatára.

Bizonyítás. Tegyük fel, hogy az $\mathbf{A} = (A, X, \delta)$ automata direkt reducibilis, azaz felbontható legalább két nemtriviális automata direkt szorzatára. A 12.3. Tétel szerint $\mathbf{A}$-nak vannak olyan

$$\rho_k \neq \iota_A \quad (k \in I, \quad 2 \leq |I| < \infty)$$

kongruenciái, amelyekre (12.4) és (12.5) teljesül. Tegyük fel először, hogy I-nek nincs olyan $I' \neq \emptyset$ valódi részhalmaza, amelyre $\cap_{k\in I'}\rho_k = \iota_A$. Legyen az I indexhalmaz egy $\{I_1, I_2\}$ osztályozására $\rho = \cap_{k\in I_1}\rho_k$ és $\tau = \cap_{k\in I_2}\rho_k$. A (12.4) feltételből következik, hogy $\rho \cap \tau = \iota_A$. Mivel $\rho \circ \tau \subseteq \omega_A$, ezért (12.6) igazolásához azt kell megmutatni, hogy $\omega_A \subseteq \rho \circ \tau$. Ha $a, b \in A$, akkor (12.5) miatt,

$$\rho[a] \cap \tau[b] = (\cap_{k\in I_1}\rho_k[a]) \cap (\cap_{k\in I_2}\rho_k[b]) \neq \emptyset,$$

amiből következik, hogy $(a, b) \in \rho \circ \tau$, azaz $\omega_A \subseteq \rho \circ \tau$. Hasonlóan látható be, hogy $\omega_A \subseteq \tau \circ \rho$.

Tegyük fel másodszor, hogy I-nek van olyan $I' \neq \emptyset$ legalább kételemű valódi részhalmaza, amelyre $\cap_{k\in I'}\rho_k = \iota_A$. A ρ_k $(k \in I')$ kongruenciák is teljesítik a (12.5) feltételt. Ha $|I'| = 2$, akkor (12.6) teljesül. Ha $2 < |I'|$, akkor az előbbieket I helyett I'-re megismételjük. Nem nehéz belátni, hogy véges számú lépésben megkapjuk, hogy (12.6) valóban igaz.

Megfordítva, tegyük fel, hogy az $\mathbf{A}$ automatának vannak olyan ρ és τ nemtriviális kongruenciái, amelyekre

$$\rho \cap \tau = \iota_A, \quad \rho \circ \tau = \tau \circ \rho = \omega_A.$$

Mivel $\rho \circ \tau = \omega_A$, ezért bármely két $a, b \in A$ állapothoz van olyan $c \in A$ állapot, hogy $(a, c) \in \rho$ és $(c, b) \in \tau$. A $\rho \cap \tau = \iota_A$ feltételből következik, hogy $\rho[a] \cap \tau[b] = \{c\}$. A 12.3. Tétel szerint ez azt jelenti, hogy az $\alpha : A \to A/\rho \times A/\tau$ leképezés, amelyre minden $a \in A$ állapot esetén $\alpha(a) = (\rho[a], \tau[a])$ teljesül, az $\mathbf{A}$ automata izomorf leképezése az $\mathbf{A}/\rho$ és $\mathbf{A}/\tau$ faktorautomaták direkt szorzatára. □

Ha az A halmaz ρ és τ ekvivalenciárelációja teljesíti a $\rho \circ \tau = \omega_A$ feltételt, akkor a $\rho \circ \tau = \tau \circ \rho$ feltétel is teljesül. Ha (A, F) tetszőleges algebrai struktúra (speciálisan kimenő jel nélküli automata) ρ és τ kongruenciáira $\rho \cap \tau = \iota_A$ és $\rho \circ \tau = \omega_A$, akkor ρ és τ uniform kongruenciák. Pontosabban, minden $a \in A$ elemre $|\rho[a]| = |A/\tau|$ és $|\tau[a]| = |A/\rho|$.

12.5. Tétel
Bármely A-véges automata felbontható direkt irreducibilis automaták direkt szorzatára.

Bizonyítás. Legyen $\mathbf{A} = (A, X, \delta)$ tetszőleges A-véges automata. A bizonyítást $\mathbf{A}$ állapotainak száma szerinti teljes indukcióval végezzük el. Ha az $\mathbf{A}$ automata triviális, akkor saját magának egytényezős direkt szorzata. Tegyük fel, hogy $\mathbf{A}$ olyan nemtriviális A-véges automata, hogy minden olyan $\mathbf{B} = (B, X, \delta')$, amelyre $|B| < |A|$, direkt irreducibilis automaták direkt szorzata. Ha $\mathbf{A}$ direkt irreducibilis, akkor a bizonyítással készen vagyunk. Ellenkező esetben a 12.4. Következmény szerint $\mathbf{A} \cong \mathbf{A}_1 \times \mathbf{A}_2$, ahol $1 < |A_1|, |A_2|$. Akkor $|A_1|, |A_2| < |A|$, így az indukciós feltevés értelmében

$$\mathbf{A}_1 \cong \mathbf{B}_1 \times \mathbf{B}_2 \times \cdots \times \mathbf{B}_m \quad \text{és} \quad \mathbf{A}_2 \cong \mathbf{C}_1 \times \mathbf{C}_2 \times \cdots \times \mathbf{C}_n,$$

ahol a $\mathbf{B}_i$ $(i = 1, 2, \ldots, m)$ és a $\mathbf{C}_j$ $(j = 1, 2, \ldots, n)$ automaták mindegyike direkt irreducibilis. A 12.2. Lemmát felhasználva kapjuk, hogy

$$\mathbf{A} \cong \mathbf{B}_1 \times \mathbf{B}_2 \times \cdots \times \mathbf{B}_m \times \mathbf{C}_1 \times \mathbf{C}_2 \times \cdots \times \mathbf{C}_n.$$

□

A 12.5. Tétel végtelen automatákra nem igaz. Ez azt jelenti, hogy a direkt irreducibilis automaták segítségével a végtelen automatákat nem tudjuk felépíteni. Most megadjuk az automaták szubdirekt szorzatának fogalmát, amellyel, ha nem is egyértelműen, de ezt meg tudjuk tenni. A kimenő jel nélküli automaták szubdirekt szorzata megegyezik az automatáknak megfelelő unér algebrák szubdirekt szorzatával. Ennek megfelelően az automatát *szubdirekt irreducibilis*nek [*reducibilis*nek] mondjuk, ha unér algebraként szubdirekt irreducibilis [reducibilis].

Legyen az $\mathbf{A} = (A, X, \delta)$ automata az $\mathbf{A}_k = (A_k, X, \delta_k)$ $(k \in I)$ automaták direkt szorzata. Az $\mathbf{A}' = (A', X, \delta')$ automatát az $\mathbf{A}_k$ $(k \in I)$ automaták *szubdirekt szorzat*ának nevezzük, ha $\mathbf{A}'$ az $\mathbf{A}$ automata egy részautomatája és minden $k \in I$ esetén $\pi_k(A') = A_k$. Azt mondjuk, hogy a $\mathbf{B} = (B, X, \delta')$ automata *felbontható az* $\mathbf{A}_k$ $(k \in I)$ *automaták szubdirekt szorzatára*, ha $\mathbf{B}$ izomorf az $\mathbf{A}_k$ $(k \in I)$ automaták egy szubdirekt szorzatával. A 12.1. és a 12.2. Lemma szubdirekt szorzatokra is igaz. Ami azt is jelenti, hogy a szubdirekt szorzat (izomorfia erejéig) kommutatív és asszociatív.

Az $\mathbf{A}$ direkt szorzat több egymással nem izomorf részautomatája is lehet az $\mathbf{A}_k$ automaták szubdirekt szorzata, így a szubdirekt szorzat általában nem egyértelmű.

Minden direkt szorzat szubdirekt szorzat is, ezért minden szubdirekt irreducibilis automata direkt irreducibilis is. A legfeljebb kétállapotú automaták nyilvánvalóan szubdirekt irreducibilisek.

Az algebrai struktúrák szubdirekt felbonthatóságára Garett Birkhoff adott szükséges és elégséges feltételt, és egyben igazolta azt is, hogy bármely algebrai struktúra előállítható ugyanolyan típusú szubdirekt irreducibilis algebrai struktúrák szubdirekt szorzataként. Az azonos típusú unér algebrák varietást alkotnak, ezért ezek az eredmények unér algebrákra, azaz kimenő jel nélküli automatákra is érvényesek. Most ezeket az eredményeket fogalmazzuk meg és bizonyítjuk be. Az alábbi tétel a 12.3. Tétel általánosítása automaták szubdirekt szorzatára.

12.6. Tétel

Az $\mathbf{A} = (A, X, \delta)$ automata akkor és csak akkor bontható fel az $\mathbf{A}_k = (A_k, X, \delta_k)$ $(k \in I)$ automaták szubdirekt szorzatára, ha $\mathbf{A}$-nak vannak olyan ρ_k $(k \in I)$ kongruenciái, hogy minden $k \in I$ indexre $\mathbf{A}/\rho_k$ izomorf $\mathbf{A}_k$-val, és amelyekre (12.4) teljesül.

Bizonyítás. Ha $\mathbf{A}$ felbontható a $\mathbf{A}_k$ $(k \in I)$ automaták szubdirekt szorzatára, akkor az izomorfiaelv miatt feltehetjük, hogy $\mathbf{A}$ a $\prod_{k\in I} \mathbf{A}_k$ direkt szorzat részautomatája. Ha π_k a k-adik projekció, akkor minden $k \in I$ indexre $\mathbf{A}/\ker(\pi_k|A)$ izomorf $\mathbf{A}_k$-val és $\cap_{k\in I} \ker(\pi_k|A) = \iota_A$, ahol $\pi_k|A$ a π_k projekció A-ra való szűkítése.

Megfordítva, legyenek a ρ_k $(k \in I)$ relációk az $\mathbf{A}$ automata olyan kongruenciái, amelyekre (12.4) teljesül. Ebből következik, hogy ha $\mathbf{a} \in A^I$ tetszőleges kiválasztási függvény, akkor $|\cap_{k\in I} \rho_k[\mathbf{a}(k)]| \leq 1$. Legyen

$$A' = \{(\rho_k[\mathbf{a}(k)]; k \in I); \quad |\cap_{k\in I} \rho_k[\mathbf{a}(k)]| = 1, \ \mathbf{a} \in A^I\}. \tag{12.7}$$

Nem nehéz belátni, hogy $\mathbf{A}'$ a

$$\prod_{k\in I} \mathbf{A}/\rho_k$$

direkt szorzat részautomatája. Megmutatjuk, hogy $\mathbf{A}$ izomorf $\mathbf{A}'$-vel. Definiáljuk az φ leképezést ugyanúgy, mint a 12.3. Tétel bizonyításában. A (12.4) feltételből kapjuk, hogy φ $\mathbf{A}$-nak $\mathbf{A}'$-re való izomorf leképezése. □

Ha $I' \neq \emptyset$ a 12.6. Tételben szereplő I indexhalmaz olyan részhalmaza, amelyre $\cap_{k\in I'}\rho_k = \iota_A$, akkor $\mathbf{A}$ felbontható az $\mathbf{A}/\rho_k$ $(k \in I')$ automaták szubdirekt szorzatára is. Az $\mathbf{A}$ automata akkor és csak akkor szubdirekt irreducibilis, ha kongruenciáinak bármely ρ_k $(k \in I)$ rendszerére a $\cap_{k\in I}\rho_k = \iota_A$ feltételből következik, hogy van olyan $l \in I$, hogy $\rho_l = \iota_A$. Jelöljük $C(\mathbf{A})$-val az $\mathbf{A}$ automata kongruenciáinak hálóját. Ebből közvetlenül kapjuk a következő tételt.

12.7. Tétel

Az $\mathbf{A} = (A, X, \delta)$ automata akkor és csak akkor szubdirekt irreducibilis, ha $C(\mathbf{A}) - \{\iota_A\}$ halmaznak van legkisebb eleme.

Az előző tételből látható, hogy minden egyszerű automata szubdirekt irreducibilis.

12.8. Tétel

Bármely $\mathbf{A} = (A, X, \delta)$ automata felbontható szubdirekt irreducibilis automaták szubdirekt szorzatára.

Bizonyítás. Mivel minden triviális automata szubdirekt irreducibilis, feltehető, hogy $\mathbf{A} = (A, X, \delta)$ nemtriviális. Tekintsük az $\mathbf{A}$ automata tetszőleges $a \neq b$ állapotait és $\mathbf{A}$-nak azon kongruenciáit, amelyek nem tartalmazzák az (a, b) párt. Ezeknek a kongruenciáknak $\mathcal{C}_{a,b}$ halmaza a tartalmazásra $(\subseteq)$, mint részbenrendezésre tartalmazza tetszőleges láncának egyesítését is. A Zorn lemma miatt létezik közöttük maximális kongruencia. Legyen $\theta_{a,b}$ az $\mathbf{A}$ egy ilyen maximális kongruenciája. A $\Theta(a, b)$ főkongruenciára a $\Theta(a, b) \vee \theta_{a,b}$ kongruencia a $[\theta_{a,b}, \omega_A] - \{\theta_{a,b}\}$ halmaz legkisebb eleme a tartalmazásra. A megfeleltetési tétel és a 12.7. Tétel szerint az $\mathbf{A}/\theta_{a,b}$ faktorautomata szubdirekt irreducibilis. Mivel $\cap\{\theta_{a,b}; a \neq b \in A\} = \iota_A$, ezért a 12.6. Tétel bizonyításához hasonló módon látható be, hogy $\mathbf{A}$ az $\mathbf{A}/\theta_{a,b}$ $(a \neq b \in A)$ automaták szubdirekt szorzatára bontható. □

A következő egyszerű eredmény is érvényes tetszőleges varietásokra. A bizonyítás ugyanúgy végezhető el, mint unér algebrákra, azaz kimenő jel nélküli automatákra.

12.9. Lemma
Ha az $\mathbf{A} = (A, X, \delta)$ automata izomorf módon beágyazható az $\mathbf{A}_k = (A_k, X, \delta_k)$ $(k \in I)$ automaták direkt szorzatába, akkor $\mathbf{A}$ izomorf az $\mathbf{A}_k$ $(k \in I)$ automaták valamely $\mathbf{A}'_k$ részautomatáinak szubdirekt szorzatával.

Bizonyítás. Az izomorfiaelv miatt feltehetjük, hogy $\mathbf{A}$ a $\prod_{k\in I} \mathbf{A}_k$ direkt szorzat részautomatája. Legyen $A'_k = \pi_k(A)$ $(k \in I)$. Az $\mathbf{A}'_k = (A'_k, X, \delta_k)$ rendszer az $\mathbf{A}_k$ automata részautomatája. Nyilvánvaló, hogy $\mathbf{A}$ az $\mathbf{A}'_k$ $(k \in I)$ automaták szubdirekt szorzata. □

Legyen $D \neq \emptyset$ az $\mathbf{A} = (A, X, \delta)$ automata A állapothalmazának részhalmaza. Az $\mathbf{A}$ automata ρ kongruenciáját $\mathbf{A}$ D-*kongruenciájá*nak hívjuk, ha $\rho_D = \iota_D$.

Az $\mathbf{A} = (A, X, \delta)$ automata $\mathbf{B} = (B, X, \delta)$ részautomatáját az $\mathbf{A}$ *sűrű részautomatájá*nak nevezzük, ha $\mathbf{A}$-nak ι_A az egyetlen B-kongruenciája. A $\mathbf{B}$-t az $\mathbf{A}$ *retrakt részautomatájá*nak nevezzük, ha van $\mathbf{A}$-nak olyan ρ kongruenciája, hogy bármely $a \in A$ állapotra $|\rho[a] \cap B| = 1$. Ezt másképpen úgy is mondhatjuk, hogy $\mathbf{B}$ *retrakt*, ha van $\mathbf{A}$-nak olyan φ homomorfizmusa $\mathbf{B}$-re, amelyre $\varphi_B = \iota_B$. A ρ-t az $\mathbf{A}$ automata $\mathbf{B}$ *szerinti retrakt kongruenciájá*nak, ill. a φ-t az $\mathbf{A}$ automata $\mathbf{B}$-re való *retrakt homomorfizmus*ának mondjuk. Az nyilvánvaló, hogy $\mathbf{A}$ önmagának retrakt részautomatája. A definícióból látható, hogy az $\mathbf{A}$ automata tetszőleges $\mathbf{B} = (B, X, \delta)$ részautomatája szerinti retrakt kongruenciája $\mathbf{A}$-nak egy B-kongruenciája.

Az $\mathbf{A}$ automatát *a* $\mathbf{B}$ *automata* $\mathbf{C}$*-vel való sűrű* [*retrakt*] *bővítésé*nek nevezzük, ha $\mathbf{B}$ az $\mathbf{A}$ automata sűrű [retrakt] részautomatája és $\mathbf{C} \cong \mathbf{A}/\mathbf{B}$. Minden kimenő jel nélküli automata önmagának egy triviális automatával való sűrű bővítése, ami egyúttal retrakt bővítés is. Minden más esetben, egy bővítés nem lehet egyszerre retrakt és sűrű.

12.10. Tétel
Ha $\mathbf{B} = (B, X, \delta)$ az $\mathbf{A} = (A, X, \delta)$ automata részautomatája, akkor $\mathbf{A}$ felbontható az $\mathbf{A}/\mathbf{B}$ Rees-faktorának és $\mathbf{B}$ valamely sűrű bővítésének szubdirekt szorzatára.

Bizonyítás. Legyen $C_B(\mathbf{A})$ az $\mathbf{A}$ automata B-kongruenciáinak halmaza. Mivel ι_A B-kongruencia, így $C_B(\mathbf{A}) \neq \emptyset$. A B-kongruenciák bármely láncának halmazelméleti egyesítése szintén B-kongruencia. A Zorn lemma szerint $C_B(\mathbf{A})$-nak van maximális eleme. Legyen ρ egy maximális B-kongruencia. Mivel ρ B-kongruencia, ezért $\mathbf{B}$ izomorf az $\mathbf{A}/\rho$ faktorautomatának azzal a $\mathbf{B}'$ részautomatájával, amelynek állapothalmaza $B' = \{\rho[b]; b \in B\}$. Ez azt jelenti, hogy $\mathbf{A}/\rho$ a $\mathbf{B}'$ bővítése.

Megmutatjuk, hogy ez sűrű bővítés. A megfeleltetési tétel szerint a $\varphi : \tau \to \tau/\rho$ $(\rho \subseteq \tau)$ leképezés a $C(\mathbf{A})$ kongruenciaháló $[\rho, \omega_A]$ intervallumának izomorf leképezése $C(\mathbf{A}/\rho)$-ra. Legyen a $\tau \in [\rho, \omega_A]$ kongruenciára τ/ρ az $\mathbf{A}/\rho$ automata B'-kongruenciája. Ha valamely $a, b \in B$ esetén $(a, b) \in \tau$, akkor $\rho[a], \rho[b] \in B'$ és $(\rho[a], \rho[b]) \in \tau/\rho$, s innen $\rho[a] = \rho[b]$. De ρ B-kongruencia, így $a = b$. Ez azt jelenti, hogy τ olyan B-kongruencia, amelyre $\rho \subseteq \tau$. Azonban ρ maximális B-kongruencia, ezért $\tau = \rho$, azaz $\tau/\rho = \iota_{A/\rho}$, vagyis $\mathbf{A}/\rho$ a $\mathbf{B}'$ sűrű bővítése. Ha $\mathbf{B}$-t azonosítjuk $\mathbf{B}'$-vel, akkor $\mathbf{A}/\rho$ a $\mathbf{B}$ sűrű bővítése.

Mivel $\rho \cap R(\omega_B) = \iota_A$, ezért a 12.6. Tétel szerint $\mathbf{A}$ felbontható $\mathbf{A}/\mathbf{B}$ és $\mathbf{A}/\rho$ szubdirekt szorzatára. □

Az előző tétel bizonyításában leírt szubdirekt felbontás akkor és csak akkor valódi, ha $\mathbf{B}$ az $\mathbf{A}$ olyan legalább kétállapotú részautomatája, amelynek $\mathbf{A}$ nem sűrű bővítése.

12.11. Következmény

Ha $\mathbf{B}$ az $\mathbf{A}$ retrakt részautomatája, akkor az $\mathbf{A}$ automata $\mathbf{A}/\mathbf{B}$ és $\mathbf{B}$ szubdirekt szorzata.

Bizonyítás. Először megmutatjuk, hogy az $\mathbf{A}$ automata minden $\mathbf{B}$ szerinti ρ retrakt kongruenciája az $\mathbf{A}$ maximális B-kongruenciája. Legyen τ az $\mathbf{A}$ automata olyan B-kongruenciája, amelyre $\rho \subseteq \tau$. Tegyük fel, hogy $(a, b) \in \tau$ $(a, b \in A)$. Mivel a ρ reláció $\mathbf{B}$ szerinti retrakt kongruencia $\mathbf{A}$-n, ezért vannak olyan $c, d \in B$, amelyekre $(a, c) \in \rho$ és $(b, d) \in \rho$ teljesül. Így $(a, c), (b, d) \in \tau$, amiből $(c, d) \in \tau$ következik. De τ az $\mathbf{A}$ automata B-kongruenciája, ezért $c = d$, ami azt jelenti, hogy $(a, b) \in \rho$, azaz $\tau = \rho$, vagyis ρ az $\mathbf{A}$ automata maximális B-kongruenciája.

Legyen ρ az $\mathbf{A}$ automata $\mathbf{B}$ szerinti retrakt kongruenciája. Az előbbiek szerint ρ az $\mathbf{A}$ automata maximális B-kongruenciája. A 12.10. Tétel bizonyításában láttuk, hogy $\mathbf{A}$ felbontható $\mathbf{A}/\mathbf{B}$ és $\mathbf{A}/\rho$ szubdirekt szorzatára. De ρ az $\mathbf{A}$ $\mathbf{B}$ szerinti retrakt kongruenciája, ezért $\mathbf{A}/\rho$ izomorf $\mathbf{B}$-vel. □

12.12. Tétel

Szubdirekt irreducibilis automata minden részautomatája is szubdirekt irreducibilis.

Bizonyítás. Tegyük fel, hogy az $\mathbf{A}$ szubdirekt irreducibilis automata $\mathbf{B}$ részautomatája nem szubdirekt irreducibilis. A 12.6. Tétel szerint vannak olyan $\rho_k (k \in I)$ nemtriviális kongruenciái, amelyekre $\cap_{k \in I} \rho_k = \iota_B$. Ez azonban azt jelenti, hogy az (5.1)-ben definiált $R(\rho_k) = \rho_k \cup \iota_A$ Rees kiterjesztések az $\mathbf{A}$ automata nemtriviális kongruenciái és

$$\cap_{k \in I} R(\rho_k) = \cap_{k \in I} (\rho_k \cup \iota_A) = (\cap_{k \in I} \rho_k) \cup \iota_A = \iota_B \cup \iota_A = \iota_A,$$

ami ellentmond annak, hogy $\mathbf{A}$ szubdirekt irreducibilis. □

12.13. TÉTEL
Ha **B** az **A** automata legalább kétállapotú részautomatája, az **A** automata akkor és csak akkor szubdirekt irreducibilis, ha **B** is szubdirekt irreducibilis és **A** a **B** sűrű bővítése.

Bizonyítás. Ha **A** szubdirekt irreducibilis, akkor a 12.12. Tétel szerint **B** is szubdirekt irreducibilis. Legyen ρ az **A** automata B-kongruenciája. Nyilvánvaló, hogy $R(\omega_B) \cap \rho = \iota_A$, ahol $R(\omega_B)$ az (5.2)-ben definiált Rees kongruencia. Mivel **B** legalább kétállapotú, ezért $R(\omega_B) \neq \iota_A$. A 12.6. Tételből következik, hogy $\rho = \iota_A$, azaz **A** a **B** sűrű bővítése.

Megfordítva, tegyük fel, hogy **B** szubdirekt irreducibilis és **A** a **B** sűrű bővítése. Legyenek a ρ_k $(k \in I)$ relációk az **A** automata olyan kongruenciái, amelyekre $\cap_{k\in I}\rho_k = \iota_A$. A ρ_k relációk B-re való $\rho_k|B$ szűkítései a **B** automata olyan kongruenciái, amelyekre $\cap_{k\in I}(\rho_k|B) = \iota_B$. Mivel **B** szubdirekt irreducibilis, ezért van olyan $l \in I$, amelyre $(\rho_l)|B = \iota_B$, azaz ρ_l az **A** automata B-kongruenciája. Azonban **A** a **B**-nek sűrű bővitése, ezért $\rho_l = \iota_A$. A 12.6. Tétel utáni megjegyzésből következik, hogy **A** szubdirekt irreducibilis. $\square$

Az $\mathbf{A} = (A, X, \delta)$ automata A állapothalmazának tetszőleges D részhalmaza segítségével definiáljuk a $\tau(D)$ binér relációt az A állapothalmazon úgy, hogy bármely $b, c \in A$ esetén

$$(b, c) \in \tau(D) \iff (\forall p \in X^*)(bp \in D \iff cp \in D). \tag{12.8}$$

Megjegyezzük, hogy $\tau(D) = \tau(A - D)$ és $\tau(D) = \omega_A$ akkor és csak akkor, ha $D = \emptyset$ vagy $D = A$. A $\tau(D)$ reláció az **A** automata legnagyobb olyan τ kongruenciája, amelynél D felbontható τ-osztályok egyesítésére. A $\tau(D)$ reláció **A**-nak akkor és csak akkor D-kongruenciája, ha minden D-beli $\tau(D)$-osztály egyelemű.

A D-t az **A** automata *diszjunktív részhalmazá*nak nevezzük, ha $\tau(D) = \iota_A$. Ha $D = \{a\}$, azaz $\tau(a) = \iota_A$, akkor a-t az **A** automata *diszjunktív állapotá*nak hívjuk. (A $\tau(\{a\})$ helyett a $\tau(a)$ jelölést használtuk.) Az **A** automatát *k-diszjunktív*nak $(k \in N_+)$ nevezzük, ha állapothalmazának minden legfeljebb k elemű részhalmaza diszjunktív. Az 1-diszjunktív automatákat egyszerűen *diszjunktív automaták*nak nevezzük. Mivel minden $(k+1)$-diszjunktív automata k-diszjunktív, ezért minden k-diszjunktív automata diszjunktív. A diszjunktív automatákkal most nem foglalkozunk, de a 24. fejezetben az egyszerű automaták vizsgálatában szerepet játszanak. Nyilvánvaló ugyanis, hogy minden legalább háromállapotú $\mathbf{A} = (A, X, \delta)$ egyszerű automata diszjunktív. Ehhez csak azt kell belátni, hogy bármely $a \in A$ állapotra $\tau(a)[a] = \{a\}$, ezért $\tau(a) \neq \omega_A$.

Az **A** automata ρ D-kongruenciáját *szeparáló D-kongruenciá*nak hívjuk, ha D bármely elemét tartalmazó ρ-osztály egyelemű.

A (12.8) definíció szerint bármely $a \in A$ állapot esetén **A** legnagyobb olyan kongruenciája, amelynek a-t tartalmazó osztálya az $\{a\}$ egyelemű halmaz a fentebb definiált $\tau(a)$ reláció, azaz:

$$(b,c) \in \tau(a) \iff (bp = a \iff cp = a) \tag{12.9}$$

minden $b, c \in A$ és $p \in X^*$ esetén.

A definíciókból közvetlenül adódik a

12.14. Lemma
Az $\mathbf{A} = (A, X, \delta)$ automata A állapothalmazának $D \neq \emptyset$ részhalmazára $\cap_{a \in D} \tau(a)$ a legnagyobb szeparáló D-kongruencia.

12.15. Lemma
Az $\mathbf{A} = (A, X, \delta)$ automata bármely $\mathbf{B} = (B, X, \delta)$ nemtriviális részautomatája és ρ kongruenciája esetén

$$(R(\omega_B) \cap \rho = \iota_A,\ R(\omega_B) \circ \rho = \rho \circ R(\omega_B)) \iff \rho \subseteq \cap_{a \in B} \tau(a). \tag{12.10}$$

Bizonyítás. Tegyük fel, hogy $R(\omega_B) \cap \rho = \iota_A$ és $R(\omega_B) \circ \rho = \rho \circ R(\omega_B)$. Legyen $a \in B$. Az $R(\omega_B) \cap \rho = \iota_A$ feltételből következik, hogy $\rho[a] \cap B = \{a\}$. A **B** automata nemtriviális, ezért van olyan $b \in B$, amelyre $b \neq a$. Tegyük fel, hogy van olyan $c \in A - B$, amelyre $(a,c) \in \rho$. Ebből kapjuk, hogy $(b,c) \in R(\omega_B) \circ \rho$, s így $(b,c) \in \rho \circ R(\omega_B)$, azaz van olyan $d \in A$, hogy $(b,d) \in \rho$ és $(d,c) \in R(\omega_B)$. Mivel $c \notin B$, ezért $d = c$, amiből $(b,c) \in \rho$, azaz $(b,a) \in \rho$. Az $R(\omega_B) \cap \rho = \iota_A$ feltételből következik, hogy $b = a$, ami lehetetlen. Így $\rho[a] = \{a\}$, azaz $\rho \subseteq \tau(a)$. De $a \in B$ tetszőleges volt, ezért $\rho \subseteq \cap_{a \in B} \tau(a)$.

Megfordítva, ha $\rho \subseteq \cap_{a \in B} \tau(a)$, akkor $R(\omega_B) \cap \rho = \iota_A$. Legyenek $b, c \in A$ olyanok, amelyekre $(b,c) \in R(\omega_B) \circ \rho$. Ez azt jelenti, hogy van olyan $d \in A$, hogy $(b,d) \in R(\omega_B)$ és $(d,c) \in \rho$. Ha $d = b$, akkor $(b,c) \in \rho \circ R(\omega_B)$. Ha $d \neq b$, akkor $b, d \in B$ és $d = c$, amiből ismét azt kapjuk, hogy $(b,c) \in \rho \circ R(\omega_B)$. Tehát

$$R(\omega_B) \circ \rho \subseteq \rho \circ R(\omega_B),$$

s így $R(\omega_B) \circ \rho = \rho \circ R(\omega_B)$. □

Ha az $\mathbf{A} = (A, X, \delta)$ automata részautomatáinak [legalább kétállapotú részautomatáinak] metszete nemüres [legalább kétállapotú], akkor azt **A** *magjá*nak [*szívé*nek] nevezzük.

12.16. Tétel
Automata magja (ha létezik) erősen összefüggő automata. Automata szíve (ha létezik) erősen összefüggő vagy erősen csapda-összefüggő vagy kétállapotú diszkrét automata.

Bizonyítás. Ha az $\mathbf{A} = (A, X, \delta)$ automata $\mathbf{K}_1(\mathbf{A})$ magja létezik, akkor bármely $b \in K_1(A)$ esetén $K_1(A) \subseteq [b] \subseteq K_1(A)$. Ez azt jelenti, hogy $\mathbf{K}_1(\mathbf{A})$ erősen összefüggő.

Tegyük fel, hogy az $\mathbf{A}$ automata $\mathbf{K}_2(\mathbf{A})$ szíve létezik. A definíció miatt a $\mathbf{K}_2(\mathbf{A})$ automatának legfeljebb egyelemű valódi részautomatái vannak. Ezért, ha $\mathbf{A}$-nak nincs csapdája, akkor $\mathbf{K}_2(\mathbf{A})$ erősen összefüggő. Ha $\mathbf{A}$-nak az $a \in A$ az egyetlen csapdája és $\mathbf{K}_2(\mathbf{A})$ nem erősen összefüggő, akkor $a \in K_2(A)$. Az előbbiek szerint $\mathbf{K}_2(\mathbf{A})$-nak nincs legalább kétállapotú valódi részautomatája. Ez azt jelenti, hogy $\mathbf{K}_2(\mathbf{A})$ erősen csapda-összefüggő. Ha $\mathbf{A}$-nak két csapdája van, akkor $K_2(A)$ a csapdák halmaza. Ezzel minden esetet kimerítettünk, mert ha az automata szíve létezik, akkor az automata legfeljebb kétcsapdás. □

A bizonyításból az is következik, hogy egy $\mathbf{B}$ automata az $\mathbf{A}$ automatának akkor és csak akkor magja, ha $\mathbf{B}$ az $\mathbf{A}$ automatának egyetlen (nemüres) erősen összefüggő részautomatája és $\mathbf{B}$ állapotai az $\mathbf{A}$ állapotaiból elérhetők. Az $\mathbf{A}$ csapda nélküli automatának $\mathbf{B}$ akkor és csak akkor a szíve, ha $\mathbf{B}$ az $\mathbf{A}$ magja. Ebben az esetben azt mondjuk, hogy $\mathbf{B}$ *az* $\mathbf{A}$ *erősen összefüggő szíve*. Az $\mathbf{A}$ egycsapdás automatának $\mathbf{B}$ akkor és csak akkor szíve, ha vagy megkapható az előbb leírt automatából egy kétállapotú diszkrét automatával való bővítéseként, vagy $\mathbf{B}$ az $\mathbf{A}$-nak egyetlen legalább kétállapotú erősen csapda-összefüggő részautomatája és $\mathbf{B}$ állapotai az $\mathbf{A}$ csapdán kívüli állapotaiból elérhetők. Az első esetben $\mathbf{B}$-*t az* $\mathbf{A}$ *adjungált csapdás erősen összefüggő szív*ének, a második esetben pedig $\mathbf{B}$-*t az* $\mathbf{A}$ *erősen csapda-összefüggő szív*ének hívjuk. (Az első esetben az automatának nincs magja, a második esetben az automata magja a csapdát tartalmazó triviális részautomata, amely része az automata szívének.) Az $\mathbf{A}$ kétcsapdás automatának $\mathbf{B}$ akkor és csak akkor szíve, ha a $\mathbf{B}$ az $\mathbf{A}$ kétállapotú diszkrét részautomatája és $\mathbf{B}$ állapotai (a két csapda) az $\mathbf{A}$ csapdákon kívüli állapotaiból elérhetőek. Ilyenkor azt mondjuk, hogy $\mathbf{B}$ *az* $\mathbf{A}$ *kétállapotú diszkrét szív*e. (Ebben az esetben az automatának nincs magja.)

12.17. LEMMA
Minden legalább kétállapotú szubdirekt irreducibilis automatának van legalább két diszjunktív állapota.

Bizonyítás. Legyen $\mathbf{A} = (A, X, \delta)$ legalább kétállapotú szubdirekt irreducibilis automata. Legyenek $\tau(a)$ $(a \in A)$ a (12.9)-ben definiált kongruenciák. Nyilvánvaló, hogy $\cap_{a\in A}\tau(a) = \iota_A$. A 12.7. Tételből következik, hogy van olyan $b \in A$, amelyre $\tau(b) = \iota_A$. Ez azt jelenti, hogy b diszjunktív állapot. A 12.14. Lemma szerint $\cap_{a\in A-\{b\}}\tau(a)$ a legnagyobb szeparáló $(A - \{b\})$-kongruencia. Ebből kapjuk, hogy $\cap_{a\in A-\{b\}}\tau(a) = \iota_A$. Újra a 12.7. Tétel szerint van olyan $c \in A - \{a\}$, amelyre $\tau(c) = \iota_A$, azaz c is diszjunktív állapot. $\square$

12.18. Lemma
Ha az $\mathbf{A} = (A, X, \delta)$ automatának van legalább két diszjunktív állapota, akkor az automata szíve létezik, és minden diszjunktív állapot benne van az automata szívében.

Bizonyítás. Ha $\mathbf{B} = (B, X, \delta)$ az $\mathbf{A}$ legalább kétállapotú részautomatája, akkor $R(\omega_B) \neq \iota_A$. Ha $a \in A - B$, akkor $R(\omega_B)$ szeparáló $\{a\}$-kongruencia, ezért (12.9) szerint $R(\omega_B) \subseteq \tau(a)$. Ez azt jelenti, hogy $\tau(a) \neq \iota_A$, azaz a nem diszjunktív állapot. Tehát $\mathbf{A}$ minden diszjunktív állapota benne van $\mathbf{A}$ minden legalább kétállapotú részautomatájában. Ami éppen azt jelenti, hogy az automata szíve létezik, és minden diszjunktív állapot benne van az automata szívében. $\square$

A 12.17. és a 12.18. Lemmákból, valamint a 12.16. Tételből közvetlenül adódik a

12.19. Következmény
Minden legalább kétállapotú szubdirekt irreducibilis automata legfeljebb kétcsapdás és van szíve.

12.20. Tétel
A legalább kétállapotú $\mathbf{A} = (A, X, \delta)$ automata akkor és csak akkor szubdirekt irreducibilis, ha $\mathbf{A}$ olyan $\mathbf{B} = (B, X, \delta)$ szubdirekt irreducibilis automatának egy összefüggő csapdás automatával való sűrű bővítése amely teljesíti az alábbi feltételek egyikét:

(i) $\mathbf{B}$ az $\mathbf{A}$ erősen összefüggő szíve;
(ii) $\mathbf{B}$ az $\mathbf{A}$ erősen csapda-összefüggő szíve;
(iii) $\mathbf{B}$ az $\mathbf{A}$ erősen összefüggő szívének egy kétállapotú diszkrét automatával való bővítése;
(iv) $\mathbf{B}$ az $\mathbf{A}$ kétállapotú diszkrét szíve.

Bizonyítás. Először tegyük fel, hogy $\mathbf{A}$ szubdirekt irreducibilis. A 12.19. Következmény szerint $\mathbf{A}$ legfeljebb kétcsapdás és van szíve. A 12.16. Tétel szerint az automata $K_2(A)$ szíve az automata erősen összefüggő vagy erősen csapda-összefüggő vagy kétállapotú diszkrét részautomatája.

Legyen $\mathbf{K}_2(\mathbf{A})$ erősen összefüggő. Mivel minden $a \in A$ állapotra $K_2(A) \subseteq [a]$, ahol $[\mathbf{a}]$ az $\mathbf{A}$ automata a által generált ciklikus részautomatája, ezért ha $\mathbf{B} = \mathbf{K}_2(\mathbf{A})$, akkor $\mathbf{A}/\mathbf{B}$ összefüggő csapdás automata.

Tegyük fel most, hogy $\mathbf{A}$ egycsapdás automata, s legyen $c \in A$ csapda. Ebben az esetben minden $a \in A - \{c\}$ állapotra $K_2(A) \subseteq [a]$. Ha $c \in K_2(A)$, akkor $\mathbf{K}_2(\mathbf{A})$ erősen csapda-összefüggő, ezért $\mathbf{B} = \mathbf{K}_2(\mathbf{A})$ választással $\mathbf{A}/\mathbf{B}$ ekkor is összefüggő csapdás automata. Ha pedig $c \notin K_2(A)$, akkor $\mathbf{K}_2(\mathbf{A})$ erősen összefüggő. Legyen $\mathbf{B}$ a $\mathbf{K}_2(\mathbf{A})$-ból c adjungálásával kapott automata. Nyilvánvaló, hogy $\mathbf{B}$ a $\mathbf{K}_2(\mathbf{A})$ automatának kétállapotú diszkrét automatával való bővítése és $\mathbf{A}/\mathbf{B}$ összefüggő csapdás automata.

Végül, ha $\mathbf{A}$ kétcsapdás, akkor $\mathbf{K}_2(\mathbf{A})$ a csapdákat tartalmazó kétállapotú diszkrét automata, s ebben az esetben is, ha $\mathbf{B} = \mathbf{K}_2(\mathbf{A})$, akkor $\mathbf{A}/\mathbf{B}$ összefüggő csapdás automata.

A 12.12. Tétel miatt $\mathbf{B}$ minden esetben szubdirekt irreducibilis. A 12.13. Tétel szerint a bővítés minden esetben sűrű.

Az állítás megfordítása nyilvánvalóan következik a 12.13. Tételből. □

A 12.20. Tétel szerint, ha ismernénk az erősen összefüggő és az erősen csapda-összefüggő szubdirekt irreducibilis automatákat, akkor ezek és a kétállapotú diszkrét automaták segítségével meg tudnánk adni minden szubdirekt irreducibilis automatát. Ezért is fontos az erősen összefüggő automaták vizsgálata.

12.21. Tétel

Egy kétcsapdás automata akkor és csak akkor szubdirekt irreducibilis, ha csapdái diszjunktívek.

Bizonyítás. Legyenek c és d az $\mathbf{A} = (A, X, \delta)$ automata csapdái. Ha $\mathbf{A}$ szubdirekt irreducibilis, akkor a 12.19. Következmény szerint $K_2(A) = \{c, d\}$. A 12.17. és a 12.18. Lemmákból következik, hogy $\mathbf{A}$-nak két diszjunktív állapota van, s ezek benne vannak az automata szívében. Ez azt jelenti, hogy mind a két csapda diszjunktív.

Megfordítva, tegyük fel, hogy az c és az d csapdák diszjunktívek. A 12.18. Lemma szerint $c, d \in K_2(A)$, azaz $K_2(A) = \{c, d\}$. Legyen ρ az $\mathbf{A}$ automata $K_2(A)$-kongruenciája. Tegyük fel, hogy $(a, b) \in \rho$, ahol $a, b \notin K_2(A)$ és $a \neq b$. Mivel $K_2(A) \subseteq [a] \cap [b]$ és c diszjunktív, ezért van olyan $p \in X^*$ bemenő szó, hogy $ap = c \neq bp$ vagy $ap \neq c = bp$. Ezenkívül az első esetben $bp \neq d$ és a második esetben $ap \neq d$, mert különben $(c, d) \in \rho$ lenne. Mindkét esetben $(ap, bp) \in \rho$, azaz $(c, bp) \in \rho$ vagy $(d, bp) \in \rho$. Ha például $(c, bp) \in \rho$, akkor minden $q \in X^*$ bemenő szóra $(c, bpq) \in \rho$. Mivel $(c, d) \notin \rho$, ezért minden $q \in X^*$ esetén $cq, bpq \neq d$, azaz $(c, bp) \in \tau(d)$. Ez azonban lehetetlen, mivel d diszjunktív. Ebből következik, hogy $\rho = \iota_A$, azaz $\mathbf{A}$ a $\mathbf{K}_2(\mathbf{A})$ automata sűrű bővítése. A $\mathbf{K}_2(\mathbf{A})$ kétállapotú diszkrét automata nyilvánvalóan szubdirekt irreducibilis, ezért a 12.13. Tétel szerint $\mathbf{A}$ is szubdirekt irreducibilis. □

Végül értelmezzük a direkt szorzatot Mealy [Moore] automatákra is. Azt mondjuk, hogy $\mathbf{A} = (A, X, Y, \delta, \lambda[\mu])$ az $\mathbf{A}_k = (A_k, X, Y_k, \delta_k, \lambda_k[\mu_k])$ $(k \in I)$

Mealy [Moore] automaták *direkt szorzata*, ha az $\mathbf{A}_v$ vetület az $(\mathbf{A}_k)_v$ $(k \in I)$ vetületek direkt szorzata, $Y = \prod_{k \in I} Y_k$ és minden $\mathbf{a} \in A$, $x \in X$ párra

$$\lambda(\mathbf{a}, x) = (\lambda_k(a_k, x),\ k \in I) \quad [\mu(\mathbf{a}) = (\mu_k(a_k);\ k \in I)]. \tag{12.11}$$

Így a szubdirekt szorzat fogalma is átvihető Mealy [Moore] automatákra. A fejezet eredményei Mealy [Moore] automatákra is érvényesek.

A (12.1) definíciót is felhasználva terjesszük ki δ és λ értelmezését minden $(\mathbf{a}, p) \in A \times X^*$ párra a következő módon:

$$\delta(\mathbf{a}, p) = (\delta_k(a_k, p);\ k \in I), \quad \lambda(\mathbf{a}, p) = (\lambda_k(a_k, p);\ k \in I). \tag{12.12}$$

Természetesen ekkor

$$\mathbf{a}p = (a_k p;\ k \in I), \quad \overline{\lambda(\mathbf{a}, p)} = (\overline{\lambda_k(a_k, p)};\ k \in I). \tag{12.13}$$

A fejezet utolsó tételét Mealy automaták karakterisztikus félcsoportjaira mondjuk ki, de érvényesek a karakterisztikus monoidokra, továbbá a kimenő jel nélküli automaták karakterisztikus félcsoportjaira [monoidjaira] is.

12.22. Tétel

Ha az $\mathbf{A}$ Mealy automata az $\mathbf{A}_k$ $(k \in I)$ Mealy automaták direkt szorzata, akkor akkor az $S'(\mathbf{A})$ karakterisztikus félcsoport izomorf az $S'(\mathbf{A}_k)$ $(k \in I)$ karakterisztikus félcsoportok egy szubdirekt szorzatával.

Bizonyítás. Legyen az $\mathbf{A} = (A, X, Y, \delta, \lambda)$ Mealy automata az

$$\mathbf{A}_k = (A_k, X, Y_k, \delta_k, \lambda_k)\ (k \in I)$$

Mealy automaták direkt szorzata. A (6.8) összefüggést is felhasználva nem nehéz belátni, hogy a

$$\varphi({\rho'}_{\mathbf{A}}[p]) = ({\rho'}_{\mathbf{A}_k}[p];\ k \in I) \quad (p \in X^+)$$

feltétellel megadott φ leképezés $S'(\mathbf{A})$ karakterisztikus félcsoport izomorf leképezése az $S'(\mathbf{A}_k)$ $(k \in I)$ karakterisztikus félcsoportok egy szubdirekt szorzatára. $\square$

Feladatok

12.1. Ha az $\mathbf{A} = (A, X, \delta)$ nemtriviális automata izomorf az $\mathbf{A_1} = (A_1, X, \delta_1)$ és $\mathbf{A_2} = (A_2, X, \delta_2)$ automaták direkt szorzatának egy részautomatájával, akkor izomorf az egyik automata valamely részautomatájával vagy felbontható nemtriviális automaták szubdirekt szorzatára. (→ Megoldás)

12.2. Az irányítható automaták osztálya pszeudovarietás. (→ Megoldás)

12.3. Legyen ρ az $\mathbf{A} = (A, X, \delta)$ automata egy kongruenciája. Ha a ρ-osztályok a H_i $(i \in I)$ halmazok, akkor

$$\rho = \cap_{i \in I} \tau(H_i),$$

ahol $\tau(H_i)$ $(i \in I)$ relációk a (12.8)-ban definiált kongruenciák. (→ Megoldás)

12.4. Legyen az $\mathbf{A} = (A, X, \delta)$ automata szubdirekt irreducibilis. Ha $\mathcal{C}$ az A állapothalmaz olyan osztályozása, amelyben legfeljebb egy osztály diszjunktív részhalmaza $\mathbf{A}$-nak, akkor $\mathcal{C}$-nek van nemtriviális kompatibilis finomítása. (→ Megoldás)

13. Párhuzamos és soros kapcsolás

A fejezetben az automaták gyakorlati szempontból alapvető két összekapcsolási módját, s ezeknek általánosításait vizsgáljuk algebrai eszközökkel.

Legyenek $\mathbf{A}_k = (A_k, X_k, Y_k, \delta_k, \lambda_k[\mu_k])$ $(k \in I)$ tetszőleges Mealy [Moore] automaták. Az $\mathbf{A} = (A, X, Y, \delta, \lambda[\mu])$ Mealy [Moore] automatát az $\mathbf{A}_k$ $(k \in I)$ automaták *párhuzamos kapcsolás*ának vagy *heterogén direkt szorzat*ának nevezzük, ha $A = \prod_{k \in I} A_k$, $X = \prod_{k \in I} X_k$, $Y = \prod_{k \in I} Y_k$ és bármely $\mathbf{a} = (a_k; k \in I) \in A$, $\mathbf{x} = (x_k; k \in I) \in X$ párra

$$\delta(\mathbf{a}, \mathbf{x}) = (\delta_k(a_k, x_k);\ k \in I), \tag{13.1}$$

$$\lambda(\mathbf{a}, \mathbf{x}) = (\lambda_k(a_k, x_k);\ k \in I) \quad [\mu(\mathbf{a}) = (\mu_k(a_k);\ k \in I)] \tag{13.2}$$

teljesül. A párhuzamos kapcsolásra, ugyanúgy mint direkt szorzat esetén, az $\mathbf{A} = \prod_{k \in I} \mathbf{A}_k$ jelölést használjuk. A párhuzamos kapcsolás természetesen kimenő jel nélküli automatákra is definiálható. Ebben az esetben csak a (13.1) feltételt írjuk elő. Azt mondjuk, hogy a $\mathbf{B} = (B, X, Y, \delta', \lambda')$ automata *megadható az* $\mathbf{A}_k$ $(k = 1, 2, \dots, n)$ *automaták párhuzamos kapcsolásaként* vagy *felbontható az* $\mathbf{A}_k$ $(k \in [n])$ *automaták heterogén direkt szorzatára*, ha $\mathbf{B}$ izomorf $\mathbf{A}$-val. Ekkor $\mathbf{A}$-t a $\mathbf{B}$ automata *párhuzamos felbontás*ának nevezzük. Minden automata saját magának egytényezős párhuzamos kapcsolása.

A következő két lemmából, amelyek a 12.1. és a 12.2. Lemmák megfelelői, speciális esetként adódik, hogy a párhuzamos kapcsolás (*általános izomorfia erejéig*) *kommutatív* és *asszociatív.* A lemmák kimenő jel nélküli automatákra is igazak.

13.1. Lemma

Legyenek $\mathbf{A}_k = (A_k, X_k, Y_k, \delta_k, \lambda_k[\mu_k])$ $(k \in I)$ tetszőleges Mealy [Moore] automaták. Az I indexhalmaz bármely π permutációjára a $\mathbf{A} = \prod_{k \in I} \mathbf{A}_k$ párhuzamos kapcsolás általánosan izomorf a $\mathbf{A}_\pi = \prod_{k \in I} \mathbf{A}_{\pi(k)}$ párhuzamos kapcsolással.

Bizonyítás. Tegyük fel, hogy $A = \prod_{k \in I} A_k$, $X = \prod_{k \in I} X_k$ és $Y = \prod_{k \in I} Y_k$. Ha $\alpha_{A,\pi}$, $\alpha_{X,\pi}$ és $\alpha_{Y,\pi}$ a (12.2) feltétellel definiált leképezések, akkor

$$(\alpha_{A,\pi}, \alpha_{X,\pi}, \alpha_{Y,\pi})$$

az $\mathbf{A}$ direkt szorzat általános izomorf leképezése az $\mathbf{A}_\pi$ direkt szorzatra. □

13.2. Lemma

Legyenek $\mathbf{A}_j = (A_j, X_j, Y_j, \delta_j, \lambda_j[\mu_j])$ $(j \in J)$ tetszőleges Mealy [Moore] automaták. A J indexhalmaz bármely $\mathcal{C} = \{I_k;\quad k \in I\}$ osztályozására a $\prod_{k \in I}(\prod_{l \in I_k} \mathbf{A}_{k,l}) = (A, X, \delta)$ párhuzamos kapcsolás általánosan izomorf a $\prod_{(k,l) \in J(\mathcal{C})} \mathbf{A}_{k,l} = (A', X, \delta')$ párhuzamos kapcsolással.

Bizonyítás. Egy megfelelő általános izomorfizmus $(\alpha_{A,\mathcal{C}}, \alpha_{X,\mathcal{C}}, \alpha_{Y,\mathcal{C}})$, ahol $\alpha_{A,\mathcal{C}}$, $\alpha_{X,\mathcal{C}}$ és $\alpha_{Y,\mathcal{C}}$ a 12.3 feltétellel definiált leképezések. □

Most bebizonyítjuk a 12.22. Tétel párhuzamos kapcsolásokra vonatkozó megfelelőjét. Ez a tétel is érvényes karakterisztikus monoidokra, továbbá kimenő jel nélküli automatákra is.

13.3. Tétel

Ha az $\mathbf{A}$ Mealy automata az $\mathbf{A}_k$ $(k \in I)$ Mealy automaták párhuzamos kapcsolása, akkor az $S'(\mathbf{A})$ karakterisztikus félcsoport izomorf az $S'(\mathbf{A}_k)$ $(k \in I)$ karakterisztikus félcsoportok egy szubdirekt szorzatával.

Bizonyítás. Legyen az $\mathbf{A} = (A, X, Y, \delta, \lambda)$ Mealy automata az

$$\mathbf{A}_k = (A_k, X_k, Y_k, \delta_k, \lambda_k) \quad (k \in I)$$

Mealy automaták direkt szorzata. Akkor $X = \prod_{k\in I} X_k$ és

$$p = ({x_k}^{(1)}; k \in I)({x_k}^{(2)}; k \in I) \dots ({x_k}^{(n)}; k \in I)$$

az X^+ szabad félcsoport tetszőleges eleme. A (6.8) összefüggést is felhasználva, könnyen belátható, hogy a

$$\psi({\rho'}_{\mathbf{A}}[p]) = ({\rho'}_{\mathbf{A}_k}[{x_k}^{(1)}{x_k}^{(2)} \dots {x_k}^{(n)}];\ k \in I) \quad (p \in X^+)$$

feltétellel megadott ψ leképezés $S'(\mathbf{A})$ karakterisztikus félcsoport izomorf leképezése az $S'(\mathbf{A}_k)$ $(k \in I)$ karakterisztikus félcsoportok egy szubdirekt szorzatára. □

13.4. TÉTEL
Az X feletti $\mathbf{A}_k$ $(k \in I)$ Mealy [Moore] automaták direkt szorzata bemenet-izomorf párhuzamos kapcsolásuk egy X-részautomatájával.

Bizonyítás. A $\varphi : X \to X^I$ leképezés, amelyre minden $x \in X$ esetén

$$\varphi(x) = (x;\ k \in I) \tag{13.3}$$

teljesül, egy megfelelő bemenet-izomorfizmus. □

Legyenek H és H_k $(k \in I)$ tetszőleges nemüres halmazok és φ a H halmaznak a $\prod_{k\in I} H_k$ halmazba való leképezése. A $\varphi_k : H \to H_k$ leképezést φ k*-adik komponensé*nek nevezzük, ha minden $h \in H$ elemre

$$\varphi_k(h) = h_k \ (k \in I) \quad \Leftrightarrow \quad \varphi(h) = (h_k; k \in I). \tag{13.4}$$

Ekkor a $\varphi = (\varphi_k; k \in I)$ jelölést is használjuk. Ha a (13.3)-ban definiált leképezés, akkor minden $k \in I$ indexre $\varphi_k = \iota_X$. Az I indexhalmaz tetszőleges π permutációjára definiáljuk a $\varphi_{H,\pi} : H \to \prod_{k\in I} H_k$ leképezést minden $h \in H$ elemre következőképpen:

$$\varphi_{H,\pi}(h) = (h_{\pi(k)};\ k \in I) \quad \Longleftrightarrow \quad \varphi(h) = (h_k;\ k \in I) \tag{13.5}$$

Most megadjuk a párhuzamos kapcsolás egy olyan általánosítását, amely jól használható az automataelméleti vizsgálatokban. A 13.4. Tétel szerint, amely kimenő jel nélküli automatákra is érvényes, ez az új szorzatfogalom a direkt szorzat általánosítása is.

Azt mondjuk, hogy az $\mathbf{A} = (A, X, Y, \delta, \lambda[\mu])$ Mealy [Moore] automata az $\mathbf{A}_k = (A_k, X_k, Y_k, \delta_k, \lambda_k[\mu_k])$ $(k \in I)$ Mealy [Moore] automaták egy *kvázidirekt szorzata*, ha létezik $\mathbf{A}$-nak egy $\varphi : X \to \prod_{k\in I} X_k$ bemenet-homomorf leképezése az $\mathbf{A}_k$ $(k \in I)$ automaták párhuzamos kapcsolásába. Erre a szorzatra az $\mathbf{A} = \prod_{k\in I} \mathbf{A}_k[X, \varphi]$ jelölést használjuk. A kvázidirekt szorzat definiálható kimenő jel nélküli automatákra is.

Ha $X = \prod_{k\in I} X_k$, akkor a $\prod_{k\in I} \mathbf{A}_k$ párhuzamos kapcsolás megegyezik a $\prod_{k\in I} \mathbf{A}_k[X, \iota_X]$ kvázidirekt szorzattal. Ha pedig $X = X_k$ $(k \in I)$, akkor a $\prod_{k\in I} \mathbf{A}_k$ direkt szorzat éppen a $\prod_{k\in I} \mathbf{A}_k[X, \varphi]$ kvázidirekt szorzat, ahol φ a (13.3) leképezés.

A következő egyszerűen bizonyítható tétel mutatja, hogy automaták kvázidirekt szorzata megkapható bizonyos automaták ugyanannyi tényezős direkt szorzataként is. A tétel állítása Moore automatákra és kimenő jel nélküli automatákra is igaz.

13.5. Tétel

Legyenek $\mathbf{A}_k = (A_k, X_k, Y_k, \delta_k, \lambda_k)$ $(k \in I)$ tetszőleges Mealy automaták, X tetszőleges (nemüres) halmaz. A $\prod_{k\in I} \mathbf{A}_k[X, \varphi]$ kvázidirekt szorzat megegyezik az $\mathbf{A}_k^* = (A_k, X, Y_k, \delta_k^*, \lambda_k^*)$ $(k \in I)$ Mealy automaták direkt szorzatával, ahol minden $a_k \in A_k$ állapotra és $x \in X$ bemenő jelre

$$\delta_k^*(a_k, x) = \delta_k(a_k, \varphi_k(x)), \quad \lambda_k^*(a_k, x) = \lambda_k(a_k, \varphi_k(x)).$$

Az előbbi tételben φ (13.4)-ben definiált φ_k $(k \in I)$ komponensei a tételben szereplő $\mathbf{A}_k^*$ automaták bemenet-homomorf leképezései az $\mathbf{A}_k$ automatákba.

13.6. Lemma

Legyenek $\mathbf{A}_k = (A_k, X_k, Y_k, \delta_k, \lambda_k)$ $(k \in I)$ tetszőleges Mealy automaták. Ha π az I indexhalmaz permutációja, $\varphi_{X,\pi}$ pedig (13.5)-beli leképezés, akkor $\mathbf{A} = \prod_{k\in I} \mathbf{A}_k[X, \varphi]$ kvázidirekt szorzat AY-izomorf az

$$\mathbf{A}_\pi = \prod_{k\in I} \mathbf{A}_{\pi(k)}[X, \varphi_{X,\pi}]$$

kvázidirekt szorzattal.

Bizonyítás. A (12.2) feltétellel definiált $\alpha_{A,\pi}$-re és $\alpha_{Y,\pi}$-re $(\alpha_{A,\pi}, \alpha_{Y,\pi})$ az $\mathbf{A}$ kvázidirekt szorzat AY-izomorf leképezése az $\mathbf{A}_\pi$ kvázidirekt szorzatra. Legyen ugyanis az $\mathbf{A}$ kvázidirekt szorzat átmenet- és kimenetfüggvénye δ ill. λ, az $\mathbf{A}_\pi$ kvázidirekt szorzaté pedig δ_π ill. λ_π. Akkor minden $\mathbf{a}$ és $x \in X$ esetén

$$\alpha_{A,\pi}(\delta(\mathbf{a}, x)) = \alpha_{A,\pi}((\delta_k(a_k, \varphi_k(x)); k \in I)) =$$

$$= (\delta_{\pi(k)}(a_{\pi(k)}, \varphi_{\pi(k)}(x)); k \in I) = \delta_\pi(\alpha_{A,\pi}(\mathbf{a}), x),$$

$$\alpha_{Y,\pi}(\lambda(\mathbf{a},x)) = \alpha_{Y,\pi}((\lambda_k(a_k,\varphi_k(x)); k \in I)) =$$
$$= (\lambda_{\pi(k)}(a_{\pi(k)},\varphi_{\pi(k)}(x)); k \in I) = \lambda_\pi(\alpha_{A,\pi}(\mathbf{a}),x).$$

□

13.7. Lemma

Legyenek $\mathbf{A}_j = (A_j, X_j, Y_j, \delta_j, \lambda_j)$ $(j \in J)$ tetszőleges Mealy automaták és $\mathcal{C} = \{I_k; \quad k \in I\}$ a J indexhalmaz egy osztályozása. Az

$$\mathbf{A}^{(k)} = \prod_{l \in I_k} \mathbf{A}_{k,l}[X^{(k)}, \varphi^{(k)}] = (A^{(k)}, X^{(k)}, Y^{(k)}, \delta^{(k)}, \lambda^{(k)})$$

kvázidirekt szorzatok

$$\mathbf{A} = \prod_{k \in I} \mathbf{A}^{(k)}[X, \varphi] = (A, X, Y, \delta, \lambda)$$

kvázidirekt szorzata AY-izomorf az

$$\mathbf{A}' = \prod_{(k,l) \in J(\mathcal{C})} \mathbf{A}_{k,l}[X, \varphi'] = (A', X, Y', \delta', \lambda')$$

kvázidirekt szorzattal, ahol ${\varphi'}_{k,l} = \varphi_k \circ {\varphi^{(k)}}_l$ $((k,l) \in J(\mathcal{C}))$.

Bizonyítás. Ha $\mathbf{a} = (\mathbf{a}^{(k)}; k \in I) \in A = \prod_{k \in I} A^{(k)}$, $\mathbf{a}^{(k)} = (a_{k,l}; l \in I_k) \in A^{(k)} = \prod_{l \in I_k} A_{k,l}$ és $x \in X$, akkor

$$\alpha_{A,\mathcal{C}}(\delta(\mathbf{a},x)) = \alpha_{A,\mathcal{C}}((\delta^{(k)}(\mathbf{a}^{(k)}, \varphi_k(x)); k \in I)) =$$
$$= \alpha_{A,\mathcal{C}}(((\delta_{k,l}(a_{k,l}, {\varphi^{(k)}}_l(\varphi_k(x)); l \in I_k); k \in I)) =$$
$$= (\delta_{k,l}(a_{k,l}, \varphi_k \circ {\varphi^{(k)}}_l(x)); \ (k,l) \in J(\mathcal{C})) = \delta'(\alpha_{A,\mathcal{C}}(\mathbf{a}),x),$$

$$\alpha_{Y,\mathcal{C}}(\lambda(\mathbf{a},x)) = \alpha_{Y,\mathcal{C}}((\lambda^{(k)}(\mathbf{a}^{(k)}, \varphi_k(x)); k \in I)) =$$
$$= \alpha_{Y,\mathcal{C}}(((\lambda_{k,l}(a_{k,l}, {\varphi^{(k)}}_l(\varphi_k(x)); l \in I_k); \ k \in I)) =$$
$$= (\lambda_{k,l}(a_{k,l}, \varphi_k \circ {\varphi^{(k)}}_l(x)); (k,l) \in J(\mathcal{C})) = \lambda'(\alpha_{A,\mathcal{C}}(\mathbf{a}),x).$$

Ez azt jelenti, hogy $(\alpha_{A,\mathcal{C}}, \alpha_{Y,\mathcal{C}})$ az $\mathbf{A}$ kvázidirekt szorzat (A,Y)-izomorf leképezése az $\mathbf{A}'$ kvázidirekt szorzatra. □

A 13.7. Lemma igaz Moore automatákra és kimenő jel nélküli automatákra is. A lemmából az is következik, hogy a kvázidirekt szorzat *(AY-izomorfizmus erejéig) asszociatív.*

13.8. TÉTEL
Ha az $\mathbf{A} = (A, X, Y, \delta, \lambda)$ automata az $\mathbf{A}_k$ $(k \in I)$ automaták kvázidirekt szorzata, akkor az $S(\mathbf{A})$ karakterisztikus félcsoport homomorfan beágyazható az $S(\mathbf{A}_k)$ $(k \in I)$ karakterisztikus félcsoportok egy szubdirekt szorzatába.

Bizonyítás. Legyen $\mathbf{A} = \prod_{k\in I} \mathbf{A}_k[X, \varphi]$. Jelöljük a φ leképezés X^+-ra való homomorf kiterjesztését szintén φ-vel. Legyen $p = x^{(1)}x^{(2)} \ldots x^{(n)} \in X^+$ és $\varphi(p) = (x_k^{(1)}; k \in I)(x_k^{(2)}; k \in I) \ldots (x_k^{(n)}; k \in I)$. A 13.3. Tétel bizonyításához hasonlóan kapjuk, hogy a

$$\psi({\rho'}_{\mathbf{A}}[p]) = ({\rho'}_{\mathbf{A}_k}[x_k^{(1)} x_k^{(2)} \ldots x_k^{(n)}]; k \in I) \quad (p \in X^+)$$

feltétellel megadott ψ leképezés $S'(\mathbf{A})$ karakterisztikus félcsoport homomorf leképezése az $S'(\mathbf{A}_k)$ $(k \in I)$ karakterisztikus félcsoportok egy szubdirekt szorzatába. □

Ez a tétel is érvényes karakterisztikus monoidokra, továbbá kimenő jel nélküli automatákra is.

Most megadjuk az automaták soros kapcsolásának algebrai fogalmát. Tekintsük az $\mathbf{A}_k = (A_k, X_k, Y_k, \delta_k, \lambda_k)$ $(k = 1, 2, \ldots, n)$ Mealy automatákat és tegyük fel, hogy $Y_k = X_{k+1}$ $(k = 1, 2, \ldots, n-1)$. Azt mondjuk, hogy az $\mathbf{A} = (A, X, Y, \delta, \lambda)$ Mealy automata az $\mathbf{A}_k$ $(k = 1, 2, \ldots, n)$ Mealy automaták *soros kapcsolás*a vagy *szuperpozíció*ja, ha $A = A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_n$, $X = X_1$, $Y = Y_n$, továbbá ha $(a_1, a_2, \ldots, a_n) \in A$ és $x \in X$, akkor

$$\delta((a_1, a_2, \ldots, a_n), x) = (b_1, b_2, \ldots, b_n), \quad \lambda((a_1, \ldots, a_n), x) = y_n, \tag{13.6}$$

ahol

$$b_1 = \delta_1(a_1, x), \quad y_1 = \lambda_1(a_1, x),$$

$$b_k = \delta_k(a_k, y_{k-1}), \quad y_k = \lambda_k(a_k, y_{k-1}) \quad (k = 2, \ldots, n)$$

teljesül. Az $\mathbf{A}$ soros kapcsolásra használjuk az $\mathbf{A} = \prod_{k=1}^{n} \mathbf{A}_k[X_1, Y_n]$ jelölést is. A definícióból következik, hogy a soros kapcsolás nem kommutatív. Azt mondjuk, hogy a $\mathbf{B} = (B, X, Y, \delta', \lambda')$ automata *megadható az* $\mathbf{A}_k$ $(k \in [n])$ *soros kapcsolásaként* vagy *felbontható az* $\mathbf{A}_k$ $(k \in [n])$ *automaták szuperpozíciójára*, ha $\mathbf{B}$ izomorf $\mathbf{A}$-val. Minden Mealy automata saját magának egytényezős soros kapcsolása.

Moore automaták szuperpozícióján a hozzájuk tartozó Mealy automaták szuperpozícióját értjük. A soros kapcsolás kimenő jel nélküli automatákra is átvihető, ha az $\mathbf{A} = (A, X, \delta)$ kimenő jel nélküli automatát az

$$\mathbf{A} = (A, X, A \times X, \delta, \lambda)$$

Mealy automatának tekintjük, ahol minden $a \in A$ és $x \in X$ esetén $\lambda(a,x) = (a,x)$. Azt mondjuk, hogy az $\mathbf{A} = (A, X, \delta)$ kimenő jel nélküli automata az $\mathbf{A}_k = (A_k, X_k, \delta_k)$ $(k = 1, \ldots, n)$ automaták *soros kapcsolás*a vagy *szuperpozíció*ja, ha

$$A = A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_n,\ X = X_1,\ A_k \times X_k = X_{k+1} \quad (k = 1, 2, \ldots, n-1)$$

és, ha $(a_1, a_2, \ldots, a_n) \in A,\ x \in X$, akkor

$$\delta((a_1, a_2, \ldots, a_n), x) = \tag{13.7}$$

$$= (\delta_1(a_1, x), \delta_2(a_2, (a_1, x)), \ldots, \delta_n(a_n, (a_{n-1}, (a_{n-2}, \ldots (a_2, (a_1, x)) \ldots)).$$

A szuperpozíció megszámlálhatóan végtelen sok automatára is megfogalmazható. Ez csak annyiban különbözik az n tényezős szuperpozíciótól, hogy Mealy automaták szuperpozíciójának kimenetfüggvényét tetszőlegesen adjuk meg.

13.9. Lemma

Legyenek $0 = n_0 < n_1 < \cdots < n_{k-1} < n_k$ tetszőleges egész számok. Ha $\mathbf{A}_l{}' = (A_l{}', X_l{}', Y_l{}', \delta_l{}', \lambda_l{}')$ $(l = 1, 2, \ldots, k)$ az

$$\mathbf{A}_{n_{l-1}+t} = (A_{n_{l-1}+t}, X_{n_{l-1}+t}, Y_{n_{l-1}+t}, \delta_{n_{l-1}+t}, \lambda_{n_{l-1}+t})\ (t = 1, 2, \ldots, n_l - n_{l-1})$$

automaták soros kapcsolása és $\mathbf{A} = (A, X, Y, \delta, \lambda)$ az $\mathbf{A}_l{}'$ $(l = 1, 2, \ldots, k)$ automaták soros kapcsolása, akkor $\mathbf{A}$ izomorf az $\mathbf{A}_s$ $(s = 1, 2, \ldots, n_k)$ automaták $\mathbf{A}' = (A', X, Y, \delta', \lambda')$ soros kapcsolásával.

Bizonyítás. A feltételekből adódik, hogy

$$A_l{}' = A_{n_{l-1}+1} \times A_{n_{l-1}+2} \times \cdots \times A_{n_l},$$

$$X_l{}' = X_{n_{l-1}+1},\ Y_l{}' = Y_{n_l}\ (l = 1, 2, \ldots, k),$$

$$A = A_1{}' \times A_2{}' \times \cdots \times A_k{}',$$

$$A' = A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_{n_k},\ X = X_1,\ Y = Y_{n_k}.$$

Továbbá

$$Y_{n_l} = Y_l{}' \subseteq X_{l+1}{}' = X_{n_l+1} \quad (l = 1, 2, \ldots, k-1).$$

Az $\alpha : A \to A'$ leképezés, amely minden $a_s \in A_s$ $(s = 1, 2, \ldots, n_k)$ esetén teljesíti az

$$\alpha((a_1, \ldots, a_{n_1}), (a_{n_1+1}, \ldots, a_{n_2}), \ldots, (a_{n_{k-1}+1}, \ldots, a_{n_k})) = (a_1, a_2, \ldots, a_{n_k})$$

feltételt, egy megfelelő izomorfizmus. □

Legyenek $\mathbf{A}_k = (A_k, X_k, Y_k, \delta_k, \lambda_k)$ $(k = 1, 2, 3)$ olyan automaták, hogy $Y_1 = X_2$ és $Y_2 = X_3$. A 13.9. Lemma szerint az $(\mathbf{A}_1 \times \mathbf{A}_2) \times \mathbf{A}_3[X_1, Y_3]$ soros kapcsolás és az $\mathbf{A}_1 \times (\mathbf{A}_2 \times \mathbf{A}_3)[X_1, Y_3]$ soros kapcsolás izomorf az $\mathbf{A}_1 \times \mathbf{A}_2 \times \mathbf{A}_3[X_1, Y_3]$ soros kapcsolással, ezért egymással is izomorfak. Ezt úgy mondjuk, hogy a soros kapcsolás *izomorfia erejéig asszociatív.*

13.10. TÉTEL
Az $\mathbf{A} = (A, X, Y, \delta, \lambda)$ Mealy automata akkor és csak akkor bontható fel nemtriviális Mealy automaták szuperpozíciójára, ha vetületének van nemtriviális uniform kongruenciája.

Bizonyítás. Tegyük fel először, hogy az $\mathbf{A} = (A, X, Y, \delta, \lambda)$ Mealy automata felbontható legalább két nemtriviális Mealy automata szuperpozíciójára. Az izomorfiaelv miatt feltehetjük, hogy $\mathbf{A}$ egyenlő ezzel a szuperpozícióval. Legyen a szuperpozíció első tényezője $\mathbf{A}_1 = (A_1, X, Y_1, \delta_1, \lambda_1)$. A (13.6) definícióból következik, hogy a π_1 projekció az $\mathbf{A}$ vetületének homomorfizmusa. Nem nehéz belátni, hogy $\ker \pi_1$ az $\mathbf{A}$ vetületének nemtriviális uniform kongruenciája.

Megfordítva, tegyük fel, hogy ρ az $\mathbf{A} = (A, X, Y, \delta, \lambda)$ Mealy automata vetületének nemtriviális uniform kongruenciája, azaz $|A/\rho| > 1$ és bármely $a, b \in A$ állapotra $|\rho[a]| = |\rho[b]| > 1$. Tekintsük az

$$\mathbf{A}_1 = (A/\rho, X, A/\rho \times X, \delta_\rho, \lambda_\rho)$$

Mealy automatát, ahol minden $a \in A$ állapotra és $x \in X$ bemenő jelre

$$\delta_\rho(\rho[a], x) = \rho[\delta(a, x)], \quad \lambda_\rho(\rho[a], x) = (\rho[a], x).$$

Legyen továbbá H tetszőleges olyan halmaz, amelynek számossága egyenlő a ρ-osztályok számosságával és $\varphi_{\rho[a]}$ $(a \in A)$ a $\rho[a]$ osztály bijektív leképezése a H halmazra.

Minthogy $\varphi_{\rho[c]}$ a $\rho[c]$ halmaz bijektív leképezése a H halmazra, ezért minden $a, c \in A$ és $b \in \rho[a]$ esetén pontosan egy olyan $d \in A$ van, amelyre

$$\rho[c] = \rho[d] \quad \text{és} \quad \varphi_{\rho[a]}(b) = \varphi_{\rho[d]}(d). \tag{13.8}$$

Legyenek $a', c' \in A$ és $b' \in \rho[a']$ olyanok, hogy

$$\rho[c] = \rho[c'] \quad \text{és} \quad \varphi_{\rho[a]}(b) = \varphi_{\rho[a']}(b').$$

Az előző meggondolást az a', b' és c' állapotokra alkalmazva kapjuk, hogy egyetlen olyan $d' \in A$ állapot van, amelyre

$$\rho[c'] = \rho[d'] \quad \text{és} \quad \varphi_{\rho[a']}(b') = \varphi_{\rho[d']}(d').$$

Amiből
$$\varphi_{\rho[c]}(d) = \varphi_{\rho[a]}(b) = \varphi_{\rho[a']}(b') = \varphi_{\rho[c']}(d') = \varphi_{\rho[c]}(d').$$
Ebből $d = d'$ következik. Így definiálhatjuk a $\delta_H : H \times ((A/\rho) \times X) \to H$ és a $\lambda_H : H \times ((A/\rho) \times X) \to Y$ leképezéseket a következő módon:
$$\delta_H(\varphi_{\rho[a]}(b), (\rho[c], x)) = \varphi_{\rho[\delta(d,x)]}(\delta(d, x)),$$
$$\lambda_H(\varphi_{\rho[a]}(b), (\rho[c], x)) = \lambda(d, x) \quad (a, c \in A, b \in \rho[a], x \in X),$$
ahol $\rho[c] = \rho[d]$ és $\varphi_{\rho[a]}(b) = \varphi_{\rho[d]}(d)$. Ezek azt is jelentik, hogy az
$$\alpha(a) = (\rho[a], \varphi_{\rho[a]}(a)) \quad (a \in A)$$
összefüggéssel értelmezett α leképezés az A halmaznak az $(A/\rho)\times H$ halmazra való bijektív leképezése.

Felhasználva, hogy ha $b = c = a$, akkor (13.8)-ban $d = a$, megmutatjuk, hogy α $\mathbf{A}$-nak az $\mathbf{A}_1$ és az $\mathbf{A}_2 = (H, (A/\rho) \times X, Y, \delta_H, \lambda_H)$ Mealy automaták $\mathbf{A}' = ((A/\rho) \times H, X, Y, \delta', \lambda')$ szuperpozíciójára való izomorf leképezése. Ha $a \in A$ és $x \in X$, akkor
$$\alpha(\delta(a, x)) = (\rho[\delta(a, x)], \varphi_{\rho[\delta(a,x)]}(\delta(a, x))) =$$
$$= (\delta_\rho(\rho[a], x), \delta_H(\varphi_{\rho[a]}(a), (\rho[a], x)) = \delta'((\rho[a], \varphi_{\rho[a]}(a)), x) = \delta'(\alpha(a), x),$$
$$\lambda(a, x) = \lambda_H(\varphi_{\rho[a]}(a), (\rho[a], x)) =$$
$$= \lambda'((\rho[a], \varphi_{\rho[a]}(a)), x) = \lambda'(\alpha(a), x),$$
azaz α izomorfizmus. □

13.11. Következmény
Az $\mathbf{A} = (A, X, \delta)$ kimenő jel nélküli automata akkor és csak akkor bontható fel nemtriviális automaták szuperpozíciójára, ha van nemtriviális uniform kongruenciája.

Bizonyítás. Ha a 13.10. Tétel bizonyításában a kimenetfüggvényekre vonatkozó részeket, az $\mathbf{A}_1$ kimenetfüggvénye kivételével, töröljük, akkor a 13.11. Következmény bizonyítását kapjuk. Az $\mathbf{A}_1$ Mealy automata ugyanis nem más mint az $\mathbf{A}/\rho$ kimenő jel nélküli automata a kimenő jel nélküli automaták szuperpozíciójánál szokásos kimenetfüggvénnyel ellátva. □

Mealy [Moore] automatákra és kimenő jel nélküli automatákra egyaránt érvényes a

13.12. TÉTEL
Egy A-véges automata akkor és csak akkor bontható fel nála kevesebb állapottal rendelkező két automata szuperpozíciójára, ha van nemtriviális uniform kongruenciája.

13.13. TÉTEL
Ha egy automata felbontható nemtriviális automaták direkt szorzatára, akkor felbontható nemtriviális automaták szuperpozíciójára is.

Bizonyítás. A 12.4. Következményből, a következmény bizonyítása utáni megjegyzésből, a 13.10. Tételből és a 13.11. Következményből adódik az állítás. Utalunk arra, hogy a 12. fejezet végén kiterjesztettük a direkt szorzatot Mealy [Moore] automatákra. A kiterjesztés alapján a 12.4. Következmény érvényes Mealy [Moore] automatákra is. □

Feladatok

13.1. Legyenek α és β az X^* $(X \neq \emptyset)$ szabad monoid önmagába való olyan automataleképezései, amelyeket az $\mathbf{A}$ ill. a $\mathbf{B}$ automata indukál, akkor az $\alpha \circ \beta$ automataleképezést indukálja az $\mathbf{A}$ és $\mathbf{B}$ automaták szuperpozíciója. (→ Megoldás)

14. Általános szorzat, rendezett szorzat

A következőkben megadjuk az automaták összekapcsolásának általános matematikai fogalmát. Ez az automaták eddig megismert összekapcsolási típusainak közös általánosítása. Ezt a szorzatfogalmat V. M. GLUSKOV úgy vezette be, hogy figyelembe vette az egyes automaták közötti kapcsolatokat (csatolásokat).

Legyenek $\mathbf{A}_k = (A_k, X_k, \delta_k)$ $(k \in I)$ tetszőleges kimenő jel nélküli automaták, $X \neq \emptyset$ tetszőleges halmaz és φ a $(\prod_{k\in I} A_k) \times X$ szorzathalmaznak az $\prod_{k\in I} X_k$ szorzathalmazba való leképezése. Az $\mathbf{A}_k$ $(k \in I)$ automatáknak az X halmazzal és a φ függvénnyel megadott *Gluskov szorzatán* vagy *általános szorzatán* értjük az $\mathbf{A} = (A, X, \delta)$ automatát, ha $A = \prod_{k\in I} A_k$, a δ függvény bármely $\mathbf{a} \in A$ és $x \in X$ elemekre teljesíti a

$$\delta(\mathbf{a}, x) = (\delta_k(a_k, x_k);\ k \in I), \tag{14.1}$$

feltételt, ahol

$$\varphi(\mathbf{a}, x) = \mathbf{x} = (x_k;\ k \in I). \tag{14.2}$$

Az $\mathbf{A}$ automatát X *feletti automataszorzat*nak is nevezzük. Az előbbi szorzatfogalomra az

$$\mathbf{A} = \prod_{k \in I} \mathbf{A}_k[X, \varphi] \tag{14.3}$$

jelölést használjuk. A φ függvényt $\mathbf{A}$ *visszacsatolási függvény*ének hívjuk.

Ha minden $k \in I$ indexre $\mathbf{A}_k = \mathbf{B}$, akkor a (14.3) szorzatra az

$$\mathbf{A} = \mathbf{B}^I[X, \varphi]$$

jelölést használjuk, s $\mathbf{A}$-t $\mathbf{B}$ I*-edik hatvány*ának mondjuk.

Ha az $\mathbf{A} = (A, X, Y, \delta, \lambda[\mu])$ $(Y \neq \emptyset)$ Mealy [Moore] automata $\mathbf{A}_v$ vetülete az $\prod_{k \in I} \mathbf{A}_k[X, \varphi]$ Gluskov szorzat, akkor $\mathbf{A}$-t *az* $\mathbf{A}_k$ $(k \in I)$ *automaták* X*,* Y *halmazokkal és* φ*,* λ *függvényekkel megadott Gluskov szorzatá*nak nevezzük. Ekkor az $\mathbf{A} = \prod_{k \in I} \mathbf{A}_k[X, Y, \varphi, \lambda]$ jelölést használjuk. Másképpen úgy is mondhatjuk, hogy tetszőleges $Y \neq \emptyset$ halmaz és $\lambda : A \times X \to Y$ szürjektív leképezés segítségével a $\prod_{k \in I} \mathbf{A}_k[X, \varphi]$ Gluskov szorzatot kibővítjük a $\mathbf{A} = \prod_{k \in I} \mathbf{A}_k[X, Y, \varphi, \lambda]$ Gluskov szorzattá. Ebben az esetben (X, Y) *feletti automataszorzat*ról is beszélünk. Ha $Y = \emptyset$, s így λ nincs definiálva, akkor $\prod_{k \in I} \mathbf{A}_k[X, Y, \varphi, \lambda] = \prod_{k \in I} \mathbf{A}_k[X, \varphi]$.

Ha két Gluskov szorzat esetén az indexhalmazok számossága egyenlő, akkor azt mondjuk, hogy a két Gluskov szorzat *ugyanannyi tényezős.* A szorzat helyett *kompozíció*t is mondunk.

Ha az $\mathbf{A}_k$ automaták iniciálisak és kezdő állapotuk a_{k0}, akkor $\mathbf{A}$-t is *iniciális*nak tekintjük az $\mathbf{a}_0 = (a_{k0};\ k \in I)$ kezdő állapottal.

Ha β az X' bijektív leképezése X-re és γ Y' bijektív leképezése Y-ra, továbbá minden $\mathbf{a} \in A$ és $x \in X$ esetén

$$\varphi'(\mathbf{a}, \beta(x)) = \mathbf{x},$$

valamint

$$\lambda'(\mathbf{a}, \beta(x)) = \gamma(\lambda(\mathbf{a}, x)),$$

akkor $\prod_{k \in I} \mathbf{A}_k[X, Y, \varphi, \lambda]$ és a $\prod_{k \in I} \mathbf{A}_k[X', Y', \varphi', \lambda']$ szorzat XY-izomorf, ezért elegendő olyan (X, Y) feletti automataszorzatokat vizsgálni, ahol az X vagy az Y halmazok nem ekvivalensek. Ezt a továbbiakban mindig feltesszük.

Az $\mathbf{A} = (A, X, Y, \delta, \lambda[\mu])$ Mealy [Moore] automatát az

$$\mathbf{A}_k = (A_k, X_k, Y_k, \delta_k, \lambda_k[\mu_k]) \quad (k \in I)$$

Mealy [Moore] automaták *Gluskov szorzatá*nak nevezzük, ha $Y = \prod_{k\in I} Y_k$ és minden $a_k \in A_k$ $(k \in I)$, $x \in X$ esetén (14.1) és (14.2), továbbá

$$\lambda(\mathbf{a}, x) = (\lambda_k(a_k, x_k);\ k \in I) \quad [\mu(\mathbf{a}) = (\mu_k(a_k);\ k \in I)] \tag{14.4}$$

teljesül. Ekkor X *feletti szorzat*ról beszélünk, amelyre az

$$\mathbf{A} = \prod_{k\in I} \mathbf{A}_k[X, \varphi]$$

jelölést használjuk. Feltételeztük, hogy az Y_k kimenő halmazok egyike sem üres. Ha van olyan $k \in I$, amelyre $Y_k = \emptyset$, akkor az $\mathbf{A}_k$ automaták vetületeinek Gluskov szorzatát értelmezzük, s a Gluskov szorzatot tetszőleges Y kimenő halmazzal és λ kimenetfüggvénnyel látjuk el.

Az automataszorzat definíciójában a φ visszacsatolási függvény megadható

$$\varphi(\mathbf{a}, x) = (\varphi_k(\mathbf{a}, x);\ k \in I) \tag{14.5}$$

alakban is, vagyis (14.2) szerint $\varphi_k(\mathbf{a}, x) = x_k \quad (k \in I)$. A φ visszacsatolási függvény

$$\varphi_k : \left(\prod_{j\in I} A_j\right) \times X \to X_k \quad (k \in I)$$

k-adik komponensét a szorzat *k-adik visszacsatolási függvény*ének is nevezzük. A $\varphi = (\varphi_k;\ k \in I)$ jelölést is használjuk. A φ_k $(k \in I)$ visszacsatolási függvények értelmezését kiterjesztjük a $\left(\prod_{j\in I} A_j\right) \times X^*$ szorzathalmazra a következő módon. (Az egyszerűség kedvéért a függvényeket a kiterjesztés után is φ_k jelöli.) Legyenek a φ_k függvények olyanok, hogy tetszőleges $\mathbf{a} \in \prod_{j\in I} A_j$ állapotokra, az e üres szóra a

$$\varphi_k(\mathbf{a}, e) = e, \tag{14.6}$$

továbbá bármely $p \in X^*$ bemenő szóra és $x \in X$ bemenő jelre a

$$\varphi_k(\mathbf{a}, xp) = \varphi_k(\mathbf{a}, x)\varphi_k(\delta(\mathbf{a}, x), p), \tag{14.7}$$

s ilyen módon a

$$\delta(\mathbf{a}, p) = (\delta_k(a_k, \varphi_k(\mathbf{a}, p));\ k \in I), \tag{14.8}$$

és (14.5) teljesülése esetén a

$$\lambda(\mathbf{a}, p) = (\lambda_k(a_k, \varphi_k(\mathbf{a}, p));\ k \in I) \tag{14.9}$$

feltételek teljesüljenek. Ez pedig azt jelenti, hogy

$$\mathbf{a}p = (a_k\varphi_k(\mathbf{a}, p); k \in I), \quad \overline{\lambda(\mathbf{a}, p)} = (\overline{\lambda_k(a_k, \varphi_k(\mathbf{a}, p))}; \quad k \in I). \tag{14.10}$$

Az automataszorzatok természetes hierarchiái adhatók meg az indexhalmaz segítségével. Jelölje $P(I)$ az I indexhalmaz hatványhalmazát. Nyilvánvalóan megadható olyan $\sigma : I \to P(I)$ függvény úgy, hogy φ_k $(k \in I)$ nem függ az $\mathbf{A}_j$ automata állapotaitól, ha $j \notin \sigma(k)$. Ebben az esetben az $\mathbf{A} = \prod_{k\in I} \mathbf{A}_k[X, \varphi]$ szorzatot az $\mathbf{A}_k$ $(k \in I)$ automaták (X feletti) *σ-szorzat*ának is nevezzük. Ha $\mathbf{A} = \prod_{k\in I} \mathbf{A}_k[X, Y, \varphi, \lambda]$, akkor (X, Y) feletti *σ-szorzat*ról beszélünk.

Vezessük be a $P(I)^I$ halmazon a $\leq$ parciális rendezést a következő módon. Legyen

$$\sigma_1 \leq \sigma_2 \quad (\sigma_1, \sigma_2 \in P(I)^I) \tag{14.11}$$

akkor és csak akkor, ha minden $j \in I$ esetén $\sigma_1(j) \subseteq \sigma_2(j)$ teljesül. Ha $\sigma_1 \leq \sigma_2$ $(\sigma_1, \sigma_2 \in P(I)^I)$ és $\prod_{k\in I} \mathbf{A}_k[X, Y, \varphi, \lambda]$ az $\mathbf{A}_k$ $(k \in I)$ automaták σ_1-szorzata, akkor ezeknek az automatáknak σ_2-szorzata is.

A $\sigma \in P(I)^I$ függvényt az $\mathbf{A}$ Gluskov szorzat *szomszédsági függvény*ének mondjuk, ha $\mathbf{A}$ σ-szorzat, de nincs olyan $\sigma' \in P(I)^I$, amelyre $\sigma' < \sigma$ és $\mathbf{A}$ σ'-szorzat. (Minden Gluskov szorzathoz pontosan egy szomszédsági függvény tartozik.) Ha σ az $\mathbf{A}$ Gluskov szorzat szomszédsági függvénye, akkor bármely $k \in I$ indexre az $\mathbf{A}_l$ $(l \in \sigma(k))$ automatákat az $\mathbf{A}_k$ automata *szomszédai*nak is mondjuk.

Ha egy Gluskov szorzat szomszédsági függvénye a minden $k \in I$ esetén a $\sigma(k) = I$ feltételt kielégítő σ függvény, akkor a Gluskov szorzatot *teljes*nek nevezzük.

A φ visszacsatolási függvény akkor és csak akkor képezi le bemenethomomorfan a $\prod_{k\in I} \mathbf{A}_k[X, \varphi]$ Gluskov szorzatot az $\mathbf{A}_k$ $(k \in I)$ automaták párhuzamos kapcsolásába, azaz a Gluskov szorzat kvázidirekt szorzat, ha a σ-szomszédsági függvényére minden $k(\in I)$ esetén $\sigma(k) = \emptyset$ teljesül. Részletesebben kifejtve, ha az $\mathbf{A} = \prod_{k\in I} \mathbf{A}_k[X, \varphi]$ kvázidirekt szorzat, akkor a (14.5)-ben megadott φ_k visszacsatolási függvények függetlenek az állapotoktól, azaz bármely $\mathbf{a} \in A$ és $x \in X$ esetén φ_k megadható

$$\varphi_k(\mathbf{a}, x) = \varphi_k(x)$$

alakban. A φ_k függvények (14.7) kiterjesztései ebben az esetben az X^+ szabad félcsoport homomorf leképezései az X_k^+ szabad félcsoportokba.

Ha az $\mathbf{A}$ kvázidirekt szorzat direkt szorzat, akkor a (14.2)-ben definiált φ visszacsatolási függvényre minden $\mathbf{a} \in A$ és $x \in X$ esetén

$$\varphi(\mathbf{a}, x) = (x;\ k \in I)$$

teljesül.

Azt mondjuk, hogy egy $\mathbf{A}$ automata *előállítható* az $\mathbf{A}_k$ $(k \in I)$ automaták σ-szorzataként, ha $\mathbf{A}$ izomorf ezen automaták σ-szorzatával. Ebben az esetben azt is mondjuk, hogy $\mathbf{A}$ *felbontható az* $\mathbf{A}_k$ $(k \in I)$ *automaták* σ*-szorzatára* vagy $\mathbf{A}$ az $\mathbf{A}_k$ $(k \in I)$ automaták σ- *felbontása.* Az $\mathbf{A}_k$ $(k \in I)$ automatákat az előállítás vagy felbontás *komponensei*nek hívjuk. Ha egyik komponens sem izomorf $\mathbf{A}$-val, akkor felbontást *valódi*nak nevezzük. Az $\mathbf{A}$ automatát a σ*-szorzatra reducibilis*nek vagy *felbontható*nak, röviden σ*-reducibilis*nek nevezzük, ha van valódi felbontása automaták egy σ-szorzatára. Ellenkező esetben $\mathbf{A}$-t a σ*-szorzatra irreducibilis*nek [*felbonthatatlan*nak], röviden σ*-irreducibilis*nek hívjuk. Ez pontosan azt jelenti, hogy ha az $\mathbf{A}$ bármely σ-szorzatra való felbontásában van $\mathbf{A}$-val izomorf automata. Nyilvánvaló, hogy ha $|A| = 1$ vagy $|A|$ prímszám, akkor az $\mathbf{A} = (A, X, \delta)$ automata σ-irreducibilis.

Jelölje $\mathbf{H}$, $\mathbf{I}, \mathbf{S}, \mathbf{P}_\sigma$ rendre a homomorfizmus, az izomorfizmus, a részautomata és a σ-szorzat operátorokat. A σ_2-szorzatot a σ_1-szorzatnál *homomorfan* [*izomorfan*] *általánosabb*nak nevezzük, ha van olyan K automataosztály, amelyre

$$\mathbf{HSP}_{\sigma_1}(K) \subset \mathbf{HSP}_{\sigma_2}(K) \quad [\mathbf{ISP}_{\sigma_1}(K) \subset \mathbf{ISP}_{\sigma_2}(K)].$$

A σ_1-szorzat *homomorfan* [*izomorfan*] *ekvivalens* a σ_2-szorzattal, ha minden K automataosztályra

$$\mathbf{HSP}_{\sigma_1}(K) = \mathbf{HSP}_{\sigma_2}(K) \quad [\mathbf{ISP}_{\sigma_1}(K) = \mathbf{ISP}_{\sigma_2}(K)].$$

Legyen $\Sigma \neq \emptyset$ a $P(I)^I$ halmaz tetszőleges részhalmaza. Azt mondjuk, hogy Σ *szorzathierarchiát alkot a homomorf* [*izomorf*] *reprezentációra*, ha bármely Σ-beli σ_1 és σ_2 elemre a σ_1- és σ_2-szorzat homomorfan [izomorfan] ekvivalens vagy az egyik szorzat homomorfan [izomorfan] általánosabb a másiknál. A Σ szorzathierarchiát *valódi*nak nevezzük a homomorf [izomorf] reprezentációra, ha bármely $\sigma_1, \sigma_2 \in \Sigma$ párra a σ_1-szorzat akkor és csak akkor ekvivalens homomorfan [izomorfan] a σ_2-szorzattal, ha $\sigma_1 = \sigma_2$.

Ha a fenti definíciókban K mindig egy adott M automataosztály része, akkor azt mondjuk, hogy M*-re a* σ_2*-szorzat homomorfan* [*izomorfan*] *általánosabb a* σ_1*-szorzatnál.* Hasonlóan beszélünk σ*-szorzatok ekvivalenciájáról* és *szorzathierarchiáról* M*-re.*

A (14.11) részbenrendezésre $P(I)^I$ bármely részlánca szorzathierarchiát alkot a homomorf és az izomorf reprezentációra.

Ha I indexhalmaz parciálisan rendezett halmaz, akkor a Gluskov szorzatot *parciálisan rendezett szorzat*nak is nevezzük az adott parciális rendezésre. A parciális rendezésre, ha mást nem mondunk, a $\leq$ jelölést használjuk. Azt mondjuk, hogy az $\mathbf{A}_k$ *automata megelőzi az* $\mathbf{A}_l$ *automatát*, ha $k < l$ $(k, l \in I)$. Ha I rendezett, akkor a Gluskov- szorzatot *rendezett szorzat*nak hívjuk. Ha $\leq'$ az I indexhalmaz olyan rendezése, amelyre $\leq \subseteq \leq'$, akkor azt mondjuk, hogy $\leq$ *részbenrendezés* I*-n kiterjeszthető a* $\leq'$ *rendezéssé*, a $\leq'$ rendezést pedig $\leq$ *rendezés egy kiterjesztésé*nek nevezzük I-n. A $\leq'$ rendezés szerinti rendezett szorzatot a $\leq$ szerint parciálisan rendezett szorzat $\leq'$ *szerint rendezett szorzattá való kiterjesztésé*nek mondjuk.

14.1. LEMMA
Bármely $H \neq \emptyset$ halmaz minden részbenrendezése kiterjeszthető a H halmazon rendezéssé.

Bizonyítás. Legyen $\rho \subseteq H^2$ részbenrendezés H-n. Ha ρ rendezés H-n, akkor nyilvánvalóan teljesül az állítás. Tegyük fel, hogy ρ nem rendezés. Ez azt jelenti, hogy vannak olyan $a, b \in H$, amelyekre $\rho \cap \{(a,b),(b,a)\} = \emptyset$. Nem nehéz ellenőrizni, hogy a

$$\rho_{a,b} = \rho \cup \{(x,y) \in H^2; (x,a) \in \rho, (b,y) \in \rho\}$$

(binér) reláció is H egy részbenrendezése. Mivel $(a,b) \in \rho_{a,b}$, ezért $\rho \subset \rho_{a,b}$. Legyen D a H azon ρ' részbenrendezéseinek halmaza, amelyekre $\rho \subseteq \rho'$ teljesül. A D halmaz a $\subseteq$ halmazelméleti tartalmazásra részbenrendezett halmaz. Ha $\{\rho'_k; k \in I\}$ a D egy részlánca, akkor $\cup_{k\in I}\rho'_k$ is eleme D-nek. A Zorn lemma szerint D-nek van maximális eleme. Legyen τ a D egy maximális eleme. Ekkor szükségképpen τ a H halmaz egy rendezése. Ha ugyanis nem az, akkor vannak olyan $a, b \in H$ állapotok, hogy $\tau \cap \{(a,b),(b,a)\} = \emptyset$, azaz $\tau_{a,b} \in D$ és $\tau \subset \tau_{a,b}$, ami ellentmond annak, hogy τ maximális eleme D-nek. □

Véges halmazok esetén a 14.1. Lemma bizonyításából egy algoritmus kapható részbenrendezés rendezéssé való kiterjesztésére.

Legyen $\leq$ az I indexhalmaz egy parciális rendezése. Definiáljuk a $\sigma : I \to P(I)$ leképezést úgy, hogy minden $j \in I$ esetén legyen $\sigma(j) = \{k \in I; k < j\}$. Látható, hogy ilyen σ-szorzatok φ_j visszacsatolási függvényei nem függenek azoktól az A_k-beli állapotoktól, amelyekre a k index nem kisebb j-nél az adott $\leq$ parciális rendezésnél. Ezeket a σ-szorzatokat az adott parciális rendezésre *hurokmentes szorzatok*nak nevezzük. A σ függvény nem biztos, hogy a szorzat szomszédsági függvénye. A hurokmentes szorzat az automaták visszacsatolás nélküli összekapcsolása legáltalánosabb algebrai megfogalmazásának tekinthető.

Ha $\leq$ az I halmaz rendezése, akkor az $\mathbf{A}_k$ $(k \in I)$ automaták hurokmentes szorzatát az automaták *kaszkád szorzat*ának nevezzük.

14.2. TÉTEL
Automaták minden parciálisan rendezett [hurokmentes] szorzata kiterjeszthető rendezett [kaszkád] szorzattá.

Bizonyítás. A 14.1. Lemmából következik, hogy minden parciálisan rendezett szorzat kiterjeszthető rendezett szorzattá.

Legyen $\mathbf{A}$ az $\mathbf{A}_k$ $(k \in I)$ automaták hurokmentes szorzata az I indexhalmaz $\leq_1$ parciális rendezésére, azaz olyan σ_1-szorzat, amelyre minden $j \in I$ esetén $\sigma_1(j) = \{k \in I; k <_1 j\}$. A 12.1. Lemma szerint I-nek van olyan $\leq_2$ rendezése, amelyre $\leq_1 \subseteq \leq_2$. Tekintsük azt a $\sigma_2 : I \to P(I)$ leképezést úgy, amelyre minden $j \in I$ esetén $\sigma_2(j) = \{k \in I; k <_2 j\}$. Mivel $\sigma_1 \leq \sigma_2$, ezért $\mathbf{A}$ σ_2-szorzat, amely egy kaszkád szorzat. □

A 14.2. Tétel szerint parciálisan rendezett szorzatok vizsgálatánál elegendő rendezett szorzatokra szorítkozni, ezért a továbbiakban csak rendezett szorzatokat vizsgálunk.

Ha $|I| = n$, akkor a Gluskov szorzatot *véges sok tényezős szorzat*nak, pontosabban n *tényezős szorzat*nak nevezzük. A továbbiakban az egyszerűség kedvéért $|I| = n$ esetben mindig feltesszük, hogy $I = [n]$ $(n \in N_+)$. Ebben az esetben az

$$\mathbf{A} = \prod_{k=1}^{n} \mathbf{A}_k[X, Y, \varphi, \lambda] \tag{14.12}$$

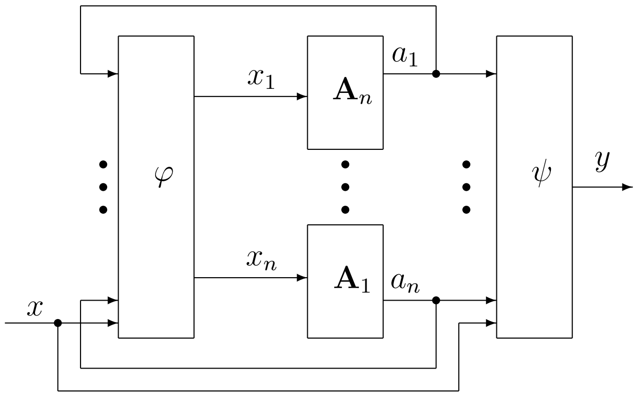
jelölést használjuk. Természetesen a véges sok tényezős szorzatok végtelen automaták, ha a tényezők közül legalább egy végtelen automata. Az alkalmazások szempontjából véges automaták véges tényezős szorzatai kitüntetett szerepet játszanak. Hasonlóan, ha I megszámlálhatóan végtelen, akkor a Gluskov szorzatról azt mondjuk, hogy *megszámlálhatóan végtelen sok tényezős szorzat.* Továbbá feltesszük, hogy $I = N_+$, és az

$$\mathbf{A} = \prod_{k=1}^{\infty} \mathbf{A}_k[X, Y, \varphi, \lambda] \tag{14.13}$$

jelölést használjuk. A (14.12) és a (14.13) szorzatokat rendezett szorzatoknak tekintjük, ahol az I indexhalmaz rendezése a pozitív egész számok szokásos rendezése.

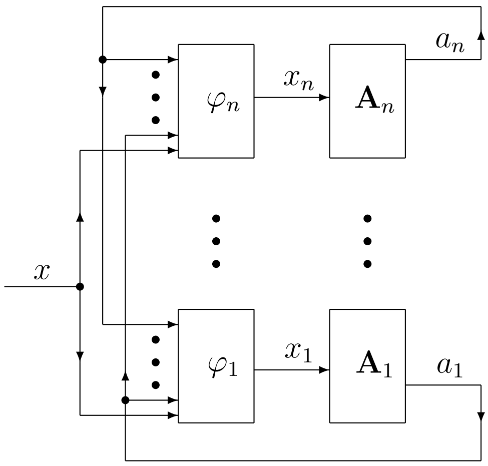
Az egyszerűség kedvéért $(A_1 \times \cdots \times A_n) \times X$ és $\varphi((a_1, \ldots, a_n), x)$ helyett az $A_1 \times \cdots \times A_n \times X$ ill. a $\varphi(a_1, \ldots, a_n, x)$ jelöléseket használjuk. Ha $\mathbf{A}_k = \mathbf{B}$ $(k \in [n])$, akkor az $\mathbf{A}$ automataszorzatot $\mathbf{B}$ n*-edik hatvány*ának nevezzük, amelyet $\mathbf{B}^n[X, \varphi]$-vel jelölünk. Az n-edik hatványokat *véges hatványok*nak is mondjuk.

A 3. ábrán a $\prod_{k=1}^{n} \mathbf{A}_k[X, Y, \varphi, \lambda]$ szorzat működésének sémáját láthatjuk.



3. ábra

A 4. ábrán a $\prod_{k=1}^{n} \mathbf{A}_k[X,\varphi]$ szorzat működésének sémáját mutatjuk be, ahol. a φ visszacsatolási függvényt a (14.5)-ben definiált $\varphi = (\varphi_1, \ldots, \varphi_n)$ alakban adtuk meg.



4. ábra

Legyen I rendezett gruppoid, amelyben a műveletet jelölje a $+$ összeadás.

Definiáljuk az $\alpha_i : I \to P(I)$ leképezést úgy, hogy minden $i \in I$ esetén legyen

$$\alpha_i(k) = \{j \in I; j < i + k\}.$$

Ez azt jelenti, hogy $\mathbf{A}_j$ $(j \in I)$ automaták α_i-szorzatában (az adott rendezésre) a (14.5)-ben definiált φ_k visszacsatolási függvények nem függenek azoktól az A_j-beli állapotoktól, amelyekre a j index nem kisebb $i+k$-nál az adott $\leq$ rendezésnél. Nem nehéz látni, hogy ha $i \leq i'$, akkor egy α_i-szorzat $\alpha_{i'}$-szorzat is. Definiáljuk az $\alpha_0 : I \to P(I)^I$ leképezést úgy, hogy legyen $\alpha_0(k) = \{j \in I; j < k\}$. Látható, hogy az α_0-szorzatok kaszkád szorzatok, továbbá, ha egy Gluskov szorzat α_0-szorzat, akkor bármely $i \in I$ indexre α_i-szorzat is. Az α_0-szorzat definíciójában nem szükséges az I indexhalmazt gruppoidnak tekinteni, azaz mondhatjuk, hogy az α_0-szorzatok éppen a kaszkád szorzatok.

Az α_i-szorzatok szorzathierarchiát alkotnak a homomorf [izomorf] reprezentációra. Ezt a hierarchiát *Gécseg szorzathierarchiá*nak nevezzük.

Legyen $\mathbf{A} = \prod_{k\in I} \mathbf{A}_k[X, Y, \varphi, \lambda]$ az $\mathbf{A}_k = (A_k, X_k, Y_k, \delta_k, \lambda_k)$ $(k \in I)$ automaták Gluskov szorzata. Legyen $Y = \prod_{k\in I} Y_k$ akkor és csak akkor, ha az Y_k kimenő halmazok egyike sem üres. Az I indexhalmaz tetszőleges π permutációjára legyen $A_\pi = \prod_{k\in I} A_{\pi(k)}$. Ha $Y = \prod_{k\in I} Y_k$, akkor $Y_\pi = \prod_{k\in I} Y_{\pi(k)}$, ha pedig $Y \neq \prod_{k\in I} Y_k$, akkor $Y_\pi = Y$. Ha $\varphi = (\varphi_k; k \in I)$, akkor $\varphi_\pi = \{\varphi_{\pi(k)};\ k \in I\}$.

Bebizonyítjuk a 13.1. Lemma következő általánosítását.

14.3. Lemma
Az $\mathbf{A} = \prod_{k\in I} \mathbf{A}_k[X, Y, \varphi, \lambda]$ Gluskov szorzat az I halmaz bármely π permutációjára általánosan izomorf egy

$$\mathbf{A}_\pi = \prod_{k\in I} \mathbf{A}_{\pi(k)}[X_\pi, Y_\pi, \varphi_\pi, \lambda_\pi]$$

szorzattal. Ha $\mathbf{A}$ σ-szorzat és minden $k \in I$ indexre $\sigma(k) = \sigma(\pi(k))$, akkor $\mathbf{A}_\pi$ is σ-szorzat.

Bizonyítás. Jelölje δ az $\mathbf{A}$ Gluskov szorzat, δ_π pedig a $\mathbf{A}_\pi$ Gluskov szorzat átmenetfüggvényét. Tegyük fel, hogy $X = \prod_{k\in I} X_k$ és $Y = \prod_{k\in I} Y_k$. Tekintsük a (14.2)-ben definiált $\alpha_{A,\pi}$, $\alpha_{X,\pi}$ és $\alpha_{Y,\pi}$ leképezéseket. Ha az $\mathbf{a} \in A$ állapotra és $\mathbf{x} \in X$ bemenő jelre $\varphi(\mathbf{a}, \mathbf{x}) = \mathbf{x}'$, akkor legyen $\varphi_\pi(\mathbf{a}_\pi, \mathbf{x}_\pi) = \mathbf{x}'_\pi$, s így

$$\alpha_{A,\pi}(\delta(\mathbf{a}, \mathbf{x})) = \delta(\mathbf{a}, \mathbf{x})_\pi =$$
$$= (\delta_{\pi(k)}(a_{\pi(k)}, {x'}_{\pi(k)});\ k \in I) = \delta_\pi(\alpha_{A,\pi}(\mathbf{a}), \alpha_{X,\mathcal{C}}(\mathbf{x})),$$
$$\alpha_{Y,\pi}(\lambda(\mathbf{a}, \mathbf{x})) = \lambda(\mathbf{a}, \mathbf{x})_\pi =$$

$$= (\lambda_{\pi(k)}(a_{\pi(k)}, {x'}_{\pi(k)});\ k \in I) = \lambda_\pi(\alpha_{A,\pi}(\mathbf{a}), \alpha_{X,\mathcal{C}}(\mathbf{x})),$$

azaz $(\alpha_{A,\pi}, \alpha_{X,\pi}, \alpha_{Y,\pi})$ az $\mathbf{A}$ szorzat általános izomorf leképezése az $\mathbf{A}_\pi$ szorzatra.

Ha $X \neq \prod_{k\in I} X_k$ és $Y = \prod_{k\in I} Y_k$, akkor legyen $X_\pi = X$, s ha az $\mathbf{a}(\in A)$ állapotra és az $x \in X$ bemenő jelre $\varphi(\mathbf{a}, x) = \mathbf{x}'$, akkor legyen $\varphi_\pi(\mathbf{a}_\pi, x) = \mathbf{x}'_\pi$. Az előzőekhez hasonlóan mutatható meg, hogy $(\alpha_{A,\pi}, \alpha_{Y,\pi})$ az $\mathbf{A}$ szorzat AY-izomorf leképezése az $\mathbf{A}_\pi$ szorzatra.

Ha $Y \neq \prod_{k\in I} Y_k$, akkor legyen $Y_\pi = Y$. Az $X = \prod_{k\in I} X_k$ esetben az $(\alpha_{A,\pi}, \alpha_{X,\pi})$ AX-izomorfizmussal ill. $X \neq \prod_{k\in I} X_k$ esetben pedig $X_\pi = X$ feltevéssel és az $\alpha_{A,\pi}$ izomorfizmussal bizonyítható az állítás, feltéve, hogy $\lambda_\pi(\mathbf{a}_\pi, \mathbf{x}_\pi) = \lambda(\mathbf{a}, \mathbf{x})$, ill. $\lambda_\pi(\mathbf{a}_\pi, x) = \lambda(\mathbf{a}, x)$.

Ha $\mathbf{A}$ olyan σ-szorzat, hogy minden $k \in I$ indexre $\sigma(k) = \sigma(\pi(k))$, akkor nyilvánvaló, hogy $\mathbf{A}_\pi$ is σ-szorzat. $\square$

Azt mondjuk, hogy egy σ-szorzat *kommutatív*, ha bármely $\mathbf{A}_1$ és $\mathbf{A}_2$ automatára σ-szorzatuk általánosan izomorf az $\mathbf{A}_2$ és $\mathbf{A}_1$ automata σ-szorzatával. Minden kéttényezős Gluskov szorzat α_2-szorzat, ezért a 14.3. Lemmából következik, hogy az α_2-szorzat kommutatív.

Legyen i tetszőleges pozitív egész szám. Egy σ-szorzatot ν_i*-szorzat*nak nevezünk, ha van olyan $\sigma' \in P(I)^I$, amelyre (14.11) szerint $\sigma \leq \sigma'$ és minden $k \in I$ indexre $|\sigma'(k)| = i$. Minden n tényezős α_0-szorzat egy ν_{n-1}-szorzat. Könnyen belátható, hogy a (14.3.) Lemma ν_i-szorzatokra is igaz. Ebből következik, hogy minden ν_0-, ν_1- és ν_2-szorzat kommutatív. A ν_0-szorzatok pedig éppen a kvázidirekt szorzatok. Természetesen, ha a σ-szorzat ν_i-szorzat és j olyan pozitív egész szám, amelyre $i < j$, akkor a σ-szorzat ν_j-szorzat is. Ez a fogalom véges automaták esetén a sejtautomaták egy olyan modelljének tekinthető, amelyben a szomszédok számát korlátozzuk.

Igaz a 13.2. Lemma általánosítása is.

14.4. LEMMA
Legyenek $\mathbf{A}_j = (A_j, X_j, Y_j, \delta_j, \lambda_j)$ $(j \in J)$ tetszőleges automaták és $\mathcal{C} = \{I_k;\quad k \in I\}$ a J indexhalmaz egy osztályozása. Az

$$\mathbf{A}_k = \prod_{l \in I_k} \mathbf{A}_{k,l}[X_k, Y_k, \varphi^{(k)}, \lambda^{(k)}] \quad (k \in I)$$

Gluskov $[\alpha_0]$ szorzatok

$$\mathbf{A} = \prod_{k \in I} \mathbf{A}_k[X, Y, \varphi, \lambda]$$

Gluskov $[\alpha_0]$ szorzata általánosan izomorf egy

$$\mathbf{A}' = \prod_{(k,l) \in J(\mathcal{C})} \mathbf{A}_{k,l}[X', Y', \varphi', \lambda']$$

Gluskov $[\alpha_0]$ szorzattal.

Bizonyítás. Legyenek $\mathbf{A} = (A, X, Y, \delta)$, $\mathbf{A}_k = (A_k, X_k, Y_k, \delta_k, \lambda_k)$ $(k \in I)$ és $\mathbf{A}' = (A', X', Y', \delta', \lambda')$, továbbá $\varphi = (\varphi_k; k \in I)$, $\varphi^{(k)} = ({\varphi_l}^{(k)};\ l \in I_k)$ és $\varphi' = (\varphi_{k,l};\ (k,l) \in J(\mathcal{C}))$

Ha $X = \prod_{k \in I} X_k$, $Y = \prod_{k \in I} Y_k$, $X_k = \prod_{l \in I_k} X_{k,l}$ és $Y_k = \prod_{l \in I_k} Y_k$, akkor legyenek $X' = \prod_{(k,l) \in J(\mathcal{C})} X_{k,l}$ és $Y' = \prod_{(k,l) \in J(\mathcal{C})} Y_{k,l}$, továbbá $\alpha_{A,\mathcal{C}}, \alpha_{X,\mathcal{C}}$ és $\alpha_{Y,\mathcal{C}}$ a (12.3)-ban definiált leképezések. Jelölje az $\mathbf{a}(\in A)$ állapot k-adik komponensét $\mathbf{a}_k \in A_k$ $(k \in I)$, az $\mathbf{a}_k$ állapot l-edik komponensét $a_{k,l} \in A_{k,l}$ $(l \in I_k)$. Értelmezzük (14.2) szerint az $\mathbf{x} \in X$, $\mathbf{x}_k \in X_k$, $x_{k,l} \in X_{k,l}$ bemenő jeleket és hasonlóan az $\mathbf{y} \in Y$, $\mathbf{y}_k \in Y_k$, $y_{k,l} \in Y_{k,l}$ kimenő jeleket. (Például, $\lambda(\mathbf{a}, x) = \mathbf{y}$ (14.4) szerint jelentse azt, hogy $\mathbf{y} = (\lambda_k(a_k, x_k);\ k \in I)$, ahol $(x_k;\ k \in I) = \mathbf{x}$.) Tegyük fel, hogy minden $(k,l) \in J(\mathcal{C})$ párra, $\mathbf{a} \in A$ állapotra és $\mathbf{x} \in X$ bemenő jelre, ha $\alpha_{A,\mathcal{C}}(\mathbf{a}) = \mathbf{a}'$ és $\alpha_{X,\mathcal{C}}(\mathbf{x}) = \mathbf{x}'$, akkor

$$\varphi'_{k,l}(\mathbf{a}', \mathbf{x}') = {\varphi_l}^{(k)}(\mathbf{a}_k, \varphi_k(\mathbf{a}, \mathbf{x})) \tag{14.14}$$

teljesül. Amiből

$$\alpha_{A,\mathcal{C}}(\delta(\mathbf{a}, \mathbf{x})) = \alpha_{A,\mathcal{C}}((\delta_k(\mathbf{a}_k, \varphi_k(\mathbf{a}, \mathbf{x}));\ k \in I)) =$$
$$= (\delta_{k,l}(a_{k,l},\ {\varphi_l}^{(k)}(\mathbf{a}_k, \varphi_k(\mathbf{a}, \mathbf{x})));\ (k,l) \in J(\mathcal{C})) =$$
$$= \delta'(\alpha_{A,\mathcal{C}}(\mathbf{a}), \alpha_{X,\mathcal{C}}(\mathbf{x})),$$
$$\alpha_{Y,\mathcal{C}}(\lambda(\mathbf{a}, \mathbf{x})) = \alpha_{Y,\mathcal{C}}((\lambda_k(\mathbf{a}_k, \varphi_k(\mathbf{a}, \mathbf{x}));\ k \in I)) =$$
$$= (\lambda_{k,l}(a_{k,l}, {\varphi_l}^{(k)}(\mathbf{a}_k, \varphi_k(\mathbf{a}, \mathbf{x})));\ (k,l) \in J(\mathcal{C})) =$$

$$= \lambda'(\alpha_{A,\mathcal{C}}(\mathbf{a}), \alpha_{X,\mathcal{C}}(\mathbf{x})),$$

azaz $(\alpha_{A,\mathcal{C}}, \alpha_{X,\mathcal{C}}, \alpha_{Y,\mathcal{C}})$ az $\mathbf{A}$ szorzat általános izomorf leképezése az $\mathbf{A}'$ szorzatra.

Ha $X \neq \prod_{k\in I} X_k,\ Y = \prod_{k\in I} Y_k$ és $Y_k = \prod_{l\in I_k} Y_k$, akkor legyen $X' = X$ Ha minden $(k,l) \in J(\mathcal{C})$ párra, $\mathbf{a} \in A$ állapotra és $x \in X$ bemenő jelre

$$\varphi'_{k,l}(\mathbf{a}', x) = \varphi_l{}^{(k)}(\mathbf{a}_k, \varphi_k(\mathbf{a}, \mathbf{x})), \tag{14.15}$$

akkor az előző számításhoz hasonlóan látható, hogy $(\alpha_{A,\mathcal{C}}, \alpha_{Y,\mathcal{C}})$ az $\mathbf{A}$ szorzat AY-izomorf leképezése az $\mathbf{A}'$ szorzatra.

Ha pedig $X \neq \prod_{k\in I} X_k$ és $Y \neq \prod_{k\in I} Y_k$, akkor legyen $X' = X$ és $Y' = Y$. Ha φ' komponenseit a (14.15) feltétellel definiáljuk és minden $\mathbf{a} \in A$ állapotra és $x \in X$ bemenő jelre $\lambda'(\alpha_{A,\mathcal{C}}(\mathbf{a}), x) = \lambda(\mathbf{a}, x)$, akkor $\alpha_{A,\mathcal{C}}$ az $\mathbf{A}$ szorzat izomorf leképezése az $\mathbf{A}'$ szorzatra.

Tegyük fel, hogy az $\mathbf{A}$ és az $\mathbf{A}_k$ $(k \in I)$ automataszorzatok α_0-szorzatok. Akkor I és I_k $(k \in I)$ rendezett halmazok. Jelölje a rendezési relációkat mindegyik halmazon $\leq$. Vezessük be a $J(\mathcal{C})$ halmazon a $\leq$ parciális rendezést a következőképpen:

$$(k,l) \leq (k',l') \quad \Longleftrightarrow \quad k < l \quad \text{vagy} \quad k = l,\ k' \leq l'.$$

Ez a parciális rendezés nyilvánvalóan $J(\mathcal{C})$ egy rendezése. Mivel $\mathbf{A}$ α_0-szorzat, ezért a $\varphi_k(k \in I)$ visszacsatolási függvények nem függenek azoktól az A_j-beli állapotoktól, amelyekre a j index nem kisebb k-nál. De az $\mathbf{A}_k$ automaták α_0-szorzatok, ezért a $\varphi'_{k,l}$ visszacsatolási fügvények sem függenek azoknak az $\mathbf{A}_{k,s}$ automatáknak az állapotaitól, amelyekre az (k,s) index nem kisebb (k,l)-nél, azaz $\mathbf{A}'$ α_0-szorzat. □

Egy σ-szorzatot *asszociatív*nak nevezünk, ha az $\mathbf{A}_k$ $(k = 1,2,3)$ automaták bármely $(\mathbf{A}_1 \times \mathbf{A}_2) \times \mathbf{A}_3$ σ-szorzata általánosan izomorf egy $\mathbf{A}_1 \times (\mathbf{A}_2 \times \mathbf{A}_3)$ σ-szorzattal. A 14.4. Lemma szerint az automaták α_0-szorzata asszociatív, mert tetszőleges $\mathbf{A}_k$ $(k = 1,2,3)$ automaták bármely (X,Y) feletti $(\mathbf{A}_1 \times \mathbf{A}_2) \times \mathbf{A}_3$ α_0-szorzata izomorf egy $\mathbf{A}_1 \times (\mathbf{A}_2 \times \mathbf{A}_3)$ α_0-szorzattal . (A 14.4. Lemma szerint ugyanis mind a két szorzat izomorf egy $\mathbf{A}_1 \times \mathbf{A}_2 \times \mathbf{A}_3$ α_0-szorzattal.) Az α_1- és α_2-szorzatokra ez nem igaz. Minden háromtényezős Gluskov szorzat háromtényezős α_3-szorzat, ezért a 14.4. Lemma szerint α_3-szorzatok is asszociatívak.

Feladatok

14.1. Ha $\mathbf{A}_k = (A_k, X_k, \delta_k)$ $(k \in I)$ tetszőleges automaták, X tetszőleges (nemüres) halmaz és minden $k \in I$ esetén a φ_k visszacsatolási függvények nem függenek az $\mathbf{A}_l$ automata állapotaitól, ha $l \neq k$, akkor a $\prod_{k \in I} \mathbf{A}_k[X, \varphi]$ szorzat megegyezik egy ugyanannyi tényezős direkt szorzattal. (→ Megoldás)

14.2. Legyenek $\mathbf{A}_k$ $(k \in I)$, $\mathbf{A}$ és $\mathbf{A}'$ a 14.4. Lemmában szereplő automataszorzatok, amelyekre teljesül (14.14). Tegyük fel, hogy a φ_k visszacsatolási függvények szürjektívek és az $\mathbf{A}$ automata kvázidirekt szorzat. $\mathbf{A}'$ akkor és csak akkor kvázidirekt szorzat, ha az $\mathbf{A}_k$ $(k \in I)$ automaták kvázidirekt szorzatok. (→ Megoldás)

15. α_i-szorzatok

Ebben a fejezetben a véges sok tényezős és a megszámlálhatóan végtelen sok tényezős α_i-szorzatokkal foglalkozunk.

Ha I egyenlő az $[n] = \{1, 2, \ldots, n\}$ vagy az N_+ halmazzal, és a rendezés az egész számok szokásos rendezése, akkor az α_0-szorzat egy olyan kaszkád szorzat, amelynek φ_k $(k \in N_+)$ visszacsatolási függvényei

$$\varphi_k(\mathbf{a}, x) = \varphi_k(a_1, a_2, \ldots, a_{k-1}, x) \tag{15.1}$$

alakúak, ahol $\mathbf{a} = (a_1, \ldots, a_n)$ vagy $\mathbf{a} = (a_1, \ldots, a_k, \ldots)$. Általánosabban az α_i-szorzat k-adik visszacsatolási függvénye bármely $\mathbf{a} \in A$, $x \in X$ esetén

$$\varphi_k(\mathbf{a}, x) = \varphi_k(a_1, \ldots, a_{i+k-1}, x) \tag{15.2}$$

alakú, azaz minden φ_k függvény független azoktól az állapotoktól, amelyeknek indexe nagyobb vagy egyenlő, mint $i+k$ $(i = 0, 1, 2, \ldots)$, a pozitív egész számok szokásos rendezése mellett. Ez azt jelenti, hogy az α_i függvény minden $k \in N_+$ esetén teljesíti az $\alpha_i(k) = [i+k-1]$ feltételt. Úgy is mondhatjuk, hogy ebben az esetben α_i-szorzatokban korlátozott, legfeljebb i hosszúságú visszacsatolások lehetségesek. Ha $I = [n]$, akkor természetesen $i + k - 1 > n$ esetén $\alpha_i(k) = [n]$.

Ha $I = [1]$, akkor az $\mathbf{A}_1$ automata Gluskov szorzatai egytényezős szorzatok, az α_0-szorzatai pontosan azok az $\mathbf{A}$ automaták, amelyek φ visszacsatolási függvényei $\mathbf{A}$-nak $\mathbf{A}_1$-be való bemenet-homomorf leképezései.

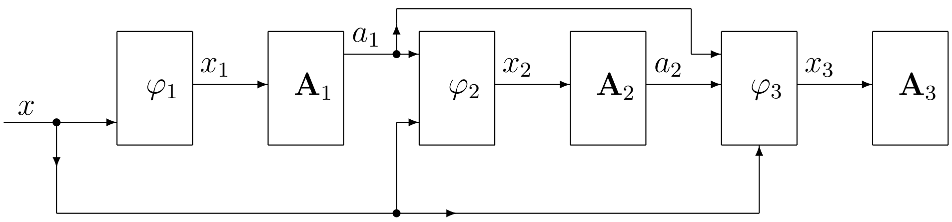
A (13.6) definícióból következik, hogy minden szuperpozíció α_0-szorzat. Megfordítva, a $\prod_{k=1}^{n} \mathbf{A}_k[X_1, Y_n, \varphi, \lambda]$ α_0-szorzat az $\mathbf{A}_1, \ldots, \mathbf{A}_n$ automaták soros kapcsolása, ha a φ és λ függvények

$$\varphi(a_1, \ldots, a_n, x) = (x, y_1, \ldots, y_{n-1}) \quad \text{és} \quad \lambda((a_1, \ldots, a_n), x) = y_n \tag{15.3}$$

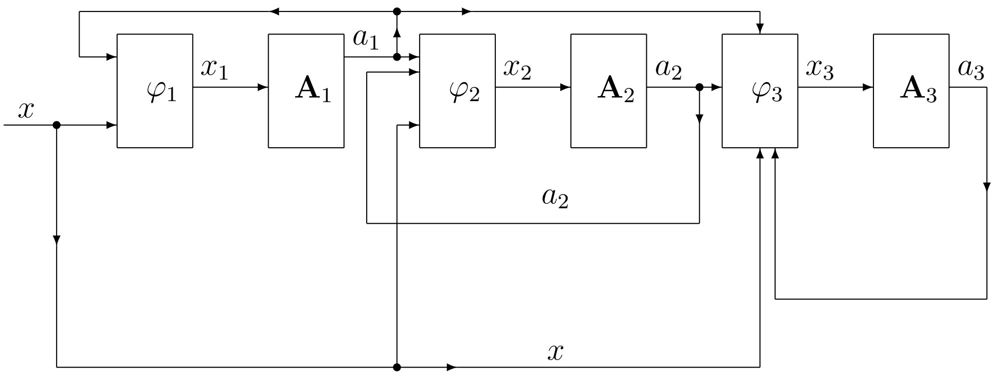
alakúak, ahol $a_k \in A_k$ és $x \in X_1$, továbbá

$$y_1 = \lambda_1(a_1, x) \quad y_k = \lambda_k(a_k, y_{k-1}) \quad (k = 2, \ldots, n).$$

Az 5., 6. ill. 7. ábrákon az α_0, az α_1 ill. az α_2-szorzatok működését szemléltettük.

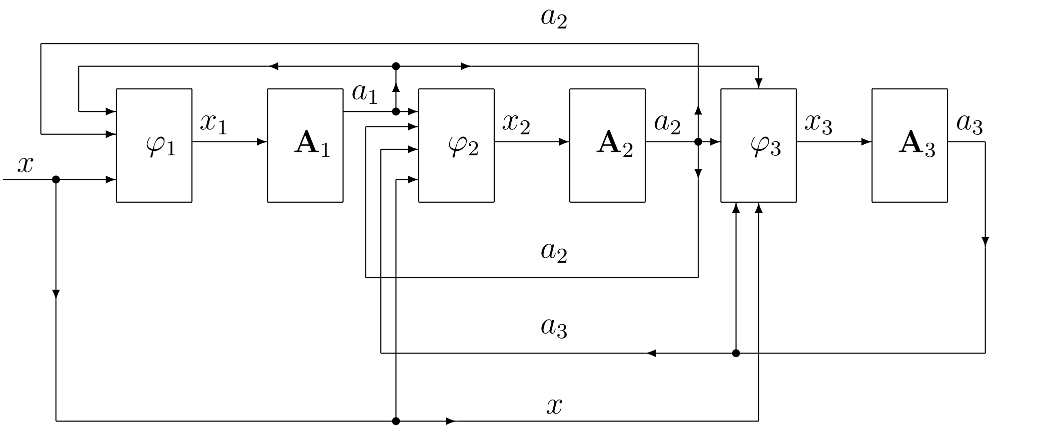


5. ábra



6. ábra

15.1. Tétel
Bármely Mealy automata váza megegyezik a vetületének és egy teljes beállító automatának α_0-szorzatával. Megfordítva, egy kimenő jel nélküli automata és egy teljes beállító automata α_0-szorzata megegyezik egy Mealy automata vázával.



7. ábra

Bizonyítás. Legyen $\mathbf{A} = (A, X, Y, \delta, \lambda)$ tetszőleges Mealy automata. Definiáljuk az $\mathbf{Y}_{be} = (Y, A \times X, \delta_{be})$ teljes beállító automata átmenetfüggvényét a

$$\delta_{be}(y, (a, x)) = \lambda(a, x) \quad (a \in A,\ x \in X, y \in Y).$$

egyenletekkel. Tekintsük az $\mathbf{A}$ automata $\mathbf{A}_v = (A, X, \delta)$ vetületének és az $\mathbf{Y}_{be}$ automatának az X halmazzal és az alábbi visszacsatolási függvénnyel megadott $\mathbf{A}_v \times \mathbf{Y}_{be}[X, \varphi] = (A \times Y, X, \delta')$ α_0-szorzatát:

$$\varphi(a, y, x) = (x, (a, x)) \quad (a \in A,\ x \in X,\ y \in Y).$$

Az α_0-szorzat (15.1) definíciója és (1.3) szerint minden $x \in X$ bemenő jelre

$$\delta'((a, y), x) = (\delta(a, x), \delta_{be}(y, (a, x))) = (\delta(a, x), \lambda(a, x)) = \delta_Y((a, y), x).$$

Ez azt jelenti, hogy $\mathbf{A}_v \times \mathbf{Y}_{be}[X, \varphi] = \mathbf{A}_Y$. (Megjegyezzük, hogy ez az α_0-szorzat egy szuperpozíció.)

Megfordítva, legyen az $\mathbf{A} \times \mathbf{Y}[X, \varphi] = (A \times Y, X, \delta')$ az $\mathbf{A}_1 = (A, X_1, \delta_1)$ kimenő jel nélküli automata és az $\mathbf{A}_2 = (Y, X_2, \delta_2)$ teljes beállító automata egy α_0-szorzata. Ez (15.1) szerint azt jelenti, hogy bármely $a \in A,\ y \in Y$ és $x \in X$ elemekre

$$\varphi(a, y, x) = (\varphi_1(x), \varphi_2(a, x)),$$

ahol $\varphi_1 : X \to X_1$ és $\varphi_2 : A \times X \to X_2$ alakú függvények. Definiáljuk a $\delta : A \times X \to A$ és $\lambda : A \times X \to Y$ függvényeket úgy, hogy minden $a \in A$ állapotra és $x \in X$ bemenő jelre teljesüljenek a

$$\delta(a, x) = \delta_1(a, \varphi_1(x)), \quad \lambda(a, x) = \delta_2(y, \varphi_2(a, x))$$

feltételek. Legyen $\mathbf{A}_Y = (A\times Y, X, \delta_Y)$ a $\mathbf{A} = (A, X, Y, \delta, \lambda)$ Mealy automata váza. (1.3) szerint

$$\delta_Y((a, y), x) = (\delta(a, x), \lambda(a, x)) =$$

$$= (\delta_1(a, \varphi_1(x)), \delta_2(y, \varphi_2(a, x))) = \delta'((a, y), x),$$

azaz $\delta_Y = \delta'$. Ebből következik, hogy $\mathbf{A}_Y = \mathbf{A} \times \mathbf{Y}[X, \varphi]$. □

A 15.1. Tétel szerint kimenő jel nélküli automaták α_i-szorzataira szorítkozhatunk. Ezt a továbbiakban meg is tesszük. Gécseg Ferenc szükséges és elegendő feltételt adott A-véges automaták izomorf beágyazhatóságára adott m-nél kisebb állapotszámú automaták egy hurokmentes szorzatába (l. [12]). Mivel a 14.2. Tétel szerint minden hurokmentes szorzat kiterjeszthető kaszkád, azaz α_0-szorzattá, ezért számunkra elegendő Gécseg tételét csak α_0-szorzatokra megadni. Ez a tétel feltételeinek és bizonyításának bizonyos egyszerűsítését vonja maga után. Mivel egy Gluskov szorzat kimenő halmazát és kimenetfüggvényét általában a komponensek kimeneti viselkedése nem befolyásolja, ezért az egyszerűség kedvéért az automataszorzatok vizsgálatakor sokszor kimenő jel nélküli automatákra szorítkozunk.

15.2. Tétel (Gécseg tétele)
Az $\mathbf{A} = (A, X, \delta)$ A-véges automata akkor és csak akkor reprezentálható izomorfan m-nél kevesebb állapotú automaták egy α_0-szorzatával, ha $\mathbf{A}$-nak vannak olyan $\rho_0 \geq \rho_1 \geq \cdots \geq \rho_{n-1} \geq \rho_n$ kongruenciái, hogy $\rho_0 = \omega_A$, $\rho_n = \iota_A$ és minden $1 \leq k \leq n$ esetén m-nél kevesebb ρ_k-osztály van benne minden ρ_{k-1}-osztályban.

Bizonyítás. Tegyük fel először, hogy az $\mathbf{A} = (A, X, \delta)$ A-véges automata izomorfan reprezentálható az $\mathbf{A}_k = (A_k, X_k, \delta_k)$ $(k = 1, 2, \ldots, n)$ automaták $\mathbf{B} = \prod_{k=1}^{n} \mathbf{A}_k[X, \varphi]$ α_0-szorzatával, ahol $|A_k| < m$ $(k = 1, 2, \ldots, n)$. Ekkor az izomorfiaelv miatt feltehetjük, hogy $\mathbf{A}$ a $\mathbf{B}$ automata részautomatája. Definiáljuk az A állapothalmazon a ρ_k $(k = 1, 2, \ldots, n)$ binér relációkat úgy, hogy minden $\mathbf{a} = (a_1, \ldots, a_n), \mathbf{b} = (b_1, \ldots, b_n) \in A$ esetén $(\mathbf{a}, \mathbf{b}) \in \rho_k$ akkor és csak akkor ha $a_1 = b_1, a_2 = b_2, \ldots, a_k = b_k$. Világos, hogy ρ_k $(k = 1, 2, \ldots, n)$ ekvivalencia az A állapothalmazon. Legyen $(\mathbf{a}, \mathbf{b}) \in \rho_k$ és $x \in X$. A (14.1), (14.2), (14.5) és (15.1) összefüggésekből következik, hogy $(\delta(\mathbf{a}, x), \delta(\mathbf{b}, x)) \in \rho_k$, azaz ρ_k a $\mathbf{A}$ automata kongruenciája. A definícióból látható, hogy $\rho_n = \iota_A$.

Legyen $\rho_0 = \omega_A$. Megmutatjuk, hogy ha $1 \leq k \leq n$, akkor m-nél kevesebb ρ_k-osztály van benne bármely ρ_{k-1}-osztályban. Legyen $\mathbf{a} \in A$ tetszőleges állapot és $\mathbf{b} \in A$ olyan állapot, hogy $a_1 = b_1, a_2 = b_2, \ldots, a_{k-1} = b_{k-1}$ és

$a_k \neq b_k$. Világos, hogy $\rho_k[\mathbf{a}], \rho_k[\mathbf{b}] \subseteq \rho_{k-1}[\mathbf{a}]$ és $\rho_k[\mathbf{a}] \neq \rho_k[\mathbf{b}]$. Minden $\mathbf{a} \in A$ állapothoz pontosan $|A_k|$ számú olyan ρ_k-osztály létezik, amelyek elemeinek első $k-1$ komponense rendre megegyezik $\mathbf{a}$ első $k-1$ komponensével. Ez pedig azt jelenti, hogy bármely ρ_{k-1}-osztályba eső ρ_k-osztályok száma valóban kisebb, mint m.

Megfordítva, tegyük fel, hogy az $\mathbf{A}$ automatának vannak olyan $\rho_0 \geq \rho_1 \geq \cdots \geq \rho_{n-1} \geq \rho_n$ kongruenciái, amelyekre $\rho_0 = \iota_A$, $\rho_n = \omega_A$ és minden $1 \leq k \leq n$ esetén m-nél kevesebb ρ_k-osztály van benne minden ρ_{k-1}-osztályban. Konstruálunk olyan $\mathbf{A}_k = (A_k, X_k, \delta_k)$ $(k = 1, 2, \ldots, n)$ automatákat, amelyekre $|A_k| < m$ és amelyek egy α_0-szorzatával $\mathbf{A}$ izomorfan reprezentálható. Legyen M_k $(k = 1, \ldots, n)$ a ρ_k-osztályok halmaza. Tetszőleges $a \in A$ állapotra jelölje $M_{k,a}(\subseteq M_k)$ azoknak a ρ_k-osztályoknak a halmazát, amelyek részhalmazai a $\rho_{k-1}[a]$ osztálynak. (Minden $a \in A$ állapotra $M_{1,a} = M_1$, mivel $\rho_0 = \omega_A$.) Legyen m_k az $|M_{k,a}|(a \in A)$ pozitív egész számok közül a legnagyobb és A_k egy olyan halmaz, hogy $|A_k| = m_k$. Ez azt jelenti, hogy $|A_k| < m$. Legyen továbbá $X_k = A_1 \times A_2 \times A_{k-1} \times X$ $(X_1 = X.)$ Adjuk meg a ρ_k-osztályok M_k halmazának olyan g_k leképezését az A_k halmazra, amely minden $a \in A$ állapotra egy-egyértelmű az $M_{k,a}$ halmazon. Legyen a δ_k átmenetfüggvény a

$$\delta_k(a_k, (a_1, a_2, \ldots, a_{k-1}, x)) = g_k(\rho_k[\delta(a, x)]) \quad (a_j \in A_j,\ j = 1, 2, \ldots, k)$$

összefüggéssel definiálva, ha létezik olyan $a \in A$, hogy

$$g_j(\rho_j[a]) = a_j \quad (j = 1, 2, \ldots, k),$$

és legyen egyébként $\delta_k(a_k, (a_1, a_2, \ldots, a_{k-1}, x))$ tetszőlegesen választott, majd rögzített A_k-beli elem. Megmutatjuk, hogy ha a

$$g_j(\rho_j[a]) = a_j \quad (j = 1, 2, \ldots, k)$$

feltételeket kielégítő $a \in A$ állapot létezik, akkor a g_k $(k = 1, 2, \ldots, n)$ leképezések rögzítése után a $\rho_k[a]$ osztály már egyértelműen meghatározott. Tegyük fel, hogy az $b \in A$ állapotra teljesülnek a

$$g_j(\rho_j[b]) = a_j \quad (j = 1, 2, \ldots, k)$$

feltételek. Elegendő belátni, hogy $\rho_k[b] = \rho_k[a]$. Mivel ρ_k kongruencia, ebből már következik, hogy $\rho_k[\delta(b, x)] = \rho_k[\delta(a, x)]$. Ezt j szerinti indukcióval mutatjuk meg. Mivel g_1 egy-egyértelmű az $M_{1,a} = M_1$ halmazon, ezért $\rho_1[b] = \rho_1[a]$. Tegyük fel, hogy $\rho_j[b] = \rho_j[a]$ $(1 \leq j < k)$. Ez azt jelenti, hogy $\rho_{j+1}[b] \in M_{j+1,a}$. De

$$g_{j+1}(\rho_{j+1}[b]) = g_{j+1}(\rho_{j+1}[a])$$

és g_{j+1} egy-egyértelmű az $M_{j+1,a}$ halmazon, ezért $\rho_{j+1}[b] = \rho_{j+1}[a]$. Így $\rho_k[b] = \rho_k[a]$.

Tekintsük az $\mathbf{A}_k$ $(k = 1, 2, \ldots, n)$ automaták $\mathbf{B} = \prod_{k=1}^{n} \mathbf{A}_k[X, \varphi]$ α_0-szorzatát. A (15.1) definíciót is használva, nem nehéz belátni, hogy az

$$\alpha(a) = (g_1(\rho_1[a]), g_2(\rho_2[a]), \ldots, g_n(\rho_n[a])) \quad (a \in A)$$

összefüggésekkel definiált α leképezés az $\mathbf{A}$ automata izomorf leképezése $\mathbf{B}$-be. $\square$

A következő tétel Gécseg tételének egy természetes általánosítása, a bizonyítás pedig a Gécseg tétel bizonyításának módosítása, ezért ezt a bizonyítást csak vázoljuk. A két tétel érdektelen az $m = 2$ esetben, ugyanis ekkor $\omega_A = \iota_A$, vagyis triviális, azaz egyállapotú automatákról van szó.

15.3. Tétel
Az $\mathbf{A} = (A, X, \delta)$ A-véges automata akkor és csak akkor reprezentálható izomorfan m-nél kevesebb állapotú automaták egy α_i-szorzatával $(i \geq 1)$, ha vannak olyan $\rho_0 \geq \rho_1 \geq \cdots \geq \rho_{n-1} \geq \rho_n$ ekvivalenciák az A állapothalmazon, hogy $\rho_0 = \omega_A$, $\rho_n = \iota_A$ és minden $1 \leq k \leq n$ esetén m-nél kevesebb ρ_k-osztály van benne minden ρ_{k-1}-osztályban, továbbá minden $i - 1 \leq k \leq n$, $a, b \in A$, $x \in X$ esetén $(a, b) \in \rho_k$ feltételből következik, hogy $(\delta(a, x), \delta(b, x)) \in \rho_{k-i+1}$.

Bizonyítás. A (14.1), (14.2), (14.5) és (15.2) összefüggések alapján megmutatható, hogy a 15.2. Tétel szükségességének bizonyításában definiált ρ_k $(k = 1, 2, \ldots, n)$ relációk olyan ekvivalenciák, amelyek teljesítik a követelményeket.

Megfordítva, a (15.2.) Tétel elegendőségének bizonyításában megadott $\mathbf{A}_k = (A_k, X_k, \delta_k)$ $(k = 1, 2, \ldots, n)$ automaták definícióját az alábbiak szerint módosítjuk. Ha $k + i - 1 \leq n$, akkor

$$X_k = A_1 \times \cdots \times A_{k+i-1} \times X.$$

Ha pedig $k + i - 1 > n$, akkor

$$X_k = A_1 \times \cdots \times A_n \times X.$$

A $k + i - 1 \leq n$ esetekben δ_k átmenetfüggvényt a

$$\delta_k(a_k, (c_1, c_2, \ldots, c_k, x)) = g_k(\rho_k[\delta(a, x)]) \quad (a_j \in A_j,\ j = 1, 2, \ldots, k + i - 1)$$

összefüggéssel definiáljuk, ha $a_k = c_k$ és létezik olyan $a \in A$, hogy

$$g_j(\rho_j[a]) = c_j \quad (j = 1, 2, \dots, k + i - 1).$$

A $k + i - 1 > n$ esetekben legyen a δ_k átmenetfüggvény a

$$\delta_k(a_k, (c_1, c_2, \dots, c_n, x)) = g_k(\rho_k[\delta(a, x)]) \quad (a_j \in A_j,\ j = 1, 2, \dots, k)$$

összefüggéssel definiálva, ha $a_k = c_k$ és létezik olyan $a \in A$, hogy

$$g_j(\rho_j[a]) = c_j \ (j = 1, 2, \dots, n).$$

Minden más esetben $\delta_k(a_k, (c_1, c_2, \dots, c_n, x))$ legyen egy tetszőlegesen választott A_k-beli elem. A 15.2. Tétel elegendőségének bizonyítását alkalmazva látható, ha a $k + i - 1 \leq n$ esetekben

$$\varphi_k(\mathbf{a}, x) = (a_1, a_2, \dots, a_{k+i-1}, x) \quad (\mathbf{a} \in A_1 \times A_2 \times \dots A_n,\ x \in X),$$

a $k + i - 1 > n$ esetekben pedig

$$\varphi_k(\mathbf{a}, x) = (a_1, a_2, \dots, a_n, x) \quad (\mathbf{a} \in A_1 \times A_2 \times \dots A_n,\ x \in X),$$

akkor a $\mathbf{B} = \prod_{k=1}^{n} \mathbf{A}_k[X, \varphi]$ α_i-szorzattal $\mathbf{A}$ izomorfan reprezentálható. □

Könnyen meggyőződhetünk arról, hogy ha $i = 1$, akkor a 15.3. Tétel feltételeit kielégítő ρ_k ekvivalenciák kongruenciák, és a tétel feltételei megegyeznek Gécseg tételének feltételeivel. Ebből nyilvánvalóan kapjuk a következő állítást.

15.4. Következmény
Egy A-véges automata akkor és csak akkor reprezentálható izomorfan m-nél kevesebb állapotú automaták n tényezős α_0-szorzatával, ha izomorfan reprezentálható m-nél kevesebb állapotú automaták n tényezős α_1-szorzatával.

15.5. Következmény
Minden $3 \leq m$ állapotú A-véges automata bármely $2 \leq i$ esetén izomorfan reprezentálható m-nél kevesebb állapotú automaták α_i-szorzatával.

Bizonyítás. Legyen $\mathbf{A} = (A, X, \delta)$ tetszőleges $3 \leq m$ állapotú A-véges automata, és ρ_1 olyan ekvivalencia az A állapothalmazon, amelyre $\omega_A > \rho_1 > \iota_A$. Mivel $3 \leq m$, ezért ilyen ρ_1 létezik. Az $\rho_0 = \omega_A, \rho_1, \rho_2 = \iota_A$ relációk m-re $2 \leq i$ esetben teljesítik a 15.3. Tétel feltételeit, ezért $\mathbf{A}$ izomorfan reprezentálható m-nél kevesebb állapotú automaták α_i-szorzatával. □

A szuperpozíció (soros kapcsolás) központi szerepet játszik a visszacsatolás nélküli felbonthatósági vizsgálatokban. Mivel automaták szuperpozíciója α_0-szorzat és a 15.2. Tétel elegendőségének bizonyításában a megkonstruált α_0-szorzat egy szuperpozíció, ezért a 15.2. Tétel speciálisan szuperpozíciókra is kimondható, amiből nyilvánvalóan kapjuk a következő eredményt.

15.6. Tétel

Az $\mathbf{A} = (A, X, \delta)$ A-véges automata akkor és csak akkor reprezentálható izomorfan m-nél kevesebb állapotú automaták n tényezős α_0-szorzatával, ha izomorfan reprezentálható m-nél kevesebb állapotú automaták n tényezős szuperpozíciójával.

Végül megadunk egy egyszerű, de a későbbi teljességi vizsgálatokban fontos lemmát az automaták egytényezős σ-szorzatokkal való izomorf reprezentációira. Ebben az esetben az I indexhalmaz egyelemű, ezért az egytényezős σ-szorzatok α_1-szorzatok, s egyúttal általános szorzatok vagy α_0-szorzatok, amelyek ekkor kvázidirekt szorzatok.

15.7. Lemma

Legyenek $\mathbf{A}_j = (A_j, X_j, \delta_j)$ $(j = 1, 2, 3)$ tetszőleges automaták. Ha $\mathbf{A}_1$ izomorfan reprezentálható $\mathbf{A}_2$ egytényezős α_1 $[\alpha_0]$-szorzatával és $\mathbf{A}_2$ izomorfan reprezentálható $\mathbf{A}_3$ egytényezős α_1 $[\alpha_0]$-szorzatával, akkor $\mathbf{A}_1$ izomorfan reprezentálható $\mathbf{A}_3$ egytényezős α_1 $[\alpha_0]$-szorzatával.

Bizonyítás. Legyen ψ az $\mathbf{A}_1$ automata izomorf leképezése az $\mathbf{A}_2[X_1, \varphi] = (A_2, X_1, \delta)$, ψ' az $\mathbf{A}_2$ automata izomorf leképezése az $\mathbf{A}_3[X_2, \varphi'] = (A_3, X_2, \delta')$ egytényezős α_1-szorzatba. Definiáljuk az $\mathbf{A}_3[X_1, \varphi''] = (A_3, X_1, \delta'')$ egytényezős α_1-szorzatot úgy, hogy minden $a \in A_1$, $x \in X_1$ párra legyen

$$\varphi''(\psi'\psi(a), x) = \varphi'(\psi'\psi(a), \varphi(\psi(a), x)).$$

Ha pedig $c \in A_3 - \psi'\psi(A_1)$ és $x \in X_1$, akkor legyen $\varphi''(c, x)$ tetszőleges X_3-beli elem. Mivel ψ és ψ' injektív, ezért φ'' jól definiált. Ha $a \in A_1$ és $x \in X_1$, akkor

$$\psi'\psi(\delta_1(a, x)) = \psi'(\delta(\psi(a), x)) = \psi'(\delta_2(\psi(a), \varphi(\psi(a), x))) =$$

$$= \delta'(\psi'\psi(a), \varphi(\psi(a), x)) = \delta_3(\psi'\psi(a), \varphi'(\psi'\psi(a), \varphi(\psi(a), x))) =$$

$$= \delta_3(\psi'\psi(a), \varphi''(\psi'\psi(a), x)) = \delta''(\psi'\psi(a), x),$$

azaz $\psi \circ \psi'$ az $\mathbf{A}_1$ automata izomorf leképezése $\mathbf{A}_3[X_1, \varphi'']$-ba.

A α_0-szorzatokra $\varphi'' = \varphi \circ \varphi'$. $\square$

Feladatok

15.1. Legyen $J = [n]$ vagy $J = N_+$ és $\{I_k; k \in I\}$ a J egy osztályozása, továbbá $\mathbf{A}_k = (A_k, X_k, \delta_k$ $(k \in I)$, $\mathbf{A} = (A, X, \delta)$ és $\mathbf{A}' = (A', X', \delta')$ a 14.4. Lemmában szereplő automataszorzatok, amelyekre teljesül (14.14). Tegyük fel, hogy φ_k visszacsatolási függvények szürjektívek és az $\mathbf{A}_k$ $(k \in I)$ automaták α_i-szorzatok. Ha $\mathbf{A}$ α_0-szorzat, akkor $\mathbf{A}'$ α_i-szorzat. Ha pedig $\mathbf{A}'$ α_i-szorzat, akkor $\mathbf{A}$ α_1-szorzat. (→ Megoldás)

15.2. Legyen $J = [n]$ vagy $J = N_+$ és $\{I_k; k \in I\}$ a J egy osztályozása, továbbá $\mathbf{A}_k = (A_k, X_k, \delta_k)$ $(k \in I)$, $\mathbf{A} = (A, X, \delta)$ és $\mathbf{A}' = (A', X', \delta')$ a 14.4. Lemmában szereplő automataszorzatok, amelyekre teljesül (14.14). Tegyük fel, hogy a φ_k visszacsatolási függvények szürjektívek és az $\mathbf{A}$ automata α_0-szorzat. $\mathbf{A}'$ akkor és csak akkor α_i-szorzat, ha az $\mathbf{A}_k$ $(k \in I)$ automaták α_i-szorzatok. (→ Megoldás)

15.3. Legyenek $\mathbf{A}_j = (A_j, X_j, \delta_j)$ $(j = 1, 2)$ tetszőleges automaták. A $\psi : A_1 \to A_2$ leképezés az $\mathbf{A}_1$ automata homomorf leképezése az $\mathbf{A}_2[X, \varphi]$ egytényezős α_0-szorzatba akkor és csak akkor, ha (ψ, φ) $\mathbf{A}_1$ általános homomorf leképezése $\mathbf{A}_2$-be. (→ Megoldás)

IV. TELJES RENDSZEREK

Gyakorlati szempontból is felvetődik a kérdés, hogy megadható-e automatáknak olyan rendszere, amelynek elemeiből bizonyos automataszorzással létrehozott automaták elvégzik azokat az információátalakításokat (megadják azokat az automataleképezéseket), amelyek számunkra szükségesek. Természetesen, ha léteznek ilyen rendszerek, akkor az is fontos, hogy ezek gazdaságosak legyenek, azaz lehetőleg kevés automatából álljanak, s ezek az automaták viszonylag egyszerű felépítésűek legyenek. Ebben a részben ezeknek a kérdéseknek algebrai megoldásával foglalkozunk. Ezt a területet kis túlzással az automataelmélet magyar területének is nevezhetjük, amit Gécseg Ferenc [12] összefoglaló munkája, valamint Dömösi Pál és Chrystopher L. Nehaniv [9] monográfiája is alátámaszt.

16. Homomorfan teljes rendszerek

Legyen $\mathcal{M}$ Mealy automaták tetszőleges rendszere. Azt mondjuk, hogy a kimenő jel nélküli automaták egy $\mathcal{K}$ rendszere az $\mathcal{M}$ *teljes rendszere az automataszorzatok valamely típusára*, ha bármely $\mathcal{M}$-beli $\mathbf{A} = (A, X, Y, \delta, \lambda)$ automatához létezik $\mathcal{K}$-beli automatáknak olyan adott típusú szorzata, amelynek van $\mathbf{A}$-val ekvivalens részautomatája. Ha ez a szorzat egy σ-szorzat, akkor azt mondjuk, hogy $\mathcal{K}$ az $\mathcal{M}$ *σ-teljes rendszer*e. A σ-teljes rendszereket vizsgáljuk a gyakorlati szempontból fontos véges tényezős σ-szorzatokra is. Ha σ-szorzat az általános szorzat, akkor $\mathcal{K}$-t $\mathcal{M}$ *teljes rendszer*ének mondjuk. Ha pedig $\mathcal{M}$ az összes Mealy automatát tartalmazza, akkor $\mathcal{K}$-t egyszerűen *teljes rendszer*nek hívjuk.

$\mathcal{K}$-t az $\mathcal{M}$ *minimális teljes rendszer*ének nevezzük *az adott szorzatra*, ha nincs olyan valódi részrendszere, amely szintén $\mathcal{M}$ teljes rendszere lenne erre a szorzatra. Ilyen módon, ha $\mathcal{M}$ az összes Mealy automatát tartalmazza, akkor beszélünk *minimális σ-teljes* ill. *minimális teljes rendszerek*ről is. Minden $\mathbf{A} = (A, X, Y, \delta, \lambda)$ Mealy automata egyenlő az $\mathbf{A}_v = (A, X, \delta)$ vetületének egytényezős $\mathbf{A}_v[X, Y, \iota_X, \lambda]$ szorzatával. Ez azt jelenti, hogy az összes kimenő jel nélküli automaták rendszere az összes Mealy automaták rendszerének teljes rendszere. Ez a triviális megállapítás a később definiált teljességi fogalmakra is igaz.

Ha $\mathcal{K}$ a Mealy automaták egy $\mathcal{M}$ rendszerének teljes rendszere bizonyos típusú szorzatra, akkor bármely részrendszerének is teljes rendszere erre a szorzatra. Ha ez a szorzat egy másik szorzatnak speciális esete, akkor teljes rendszere, $\mathcal{K}$ az $\mathcal{M}$-nek teljes rendszere erre a másik szorzatra is. Ezek a megjegyzések az alábbiakban bevezetett teljességi fogalmakra is érvényesek. Felvetődik a probléma, természetesen a későbbi teljességi fogalmaknál is, hogy melyek azok a teljes rendszerek, amelyekből csak az általunk vizsgált automaták rendszerét lehet előállítani.

Ezek után bevezetünk egy másik teljességi fogalmat, amely az algebra alapvető fogalmaival is összhangban van. Megmutatjuk, hogy ez a két teljességi fogalom bármely σ-szorzatra ekvivalens, ha az összes Mealy automatát figyelembe vesszük.

A kimenő jel nélküli automaták $\mathcal{K}$ rendszere *a Mealy automaták $\mathcal{M}$ rendszerének homomorfan teljes rendszere valamely automataszorzatra*, ha minden $\mathcal{M}$-beli automata homomorfan reprezentálható $\mathcal{K}$-beli automaták adott típusú szorzatával, azaz ha minden $\mathcal{M}$-beli automata homomorf képe bizonyos $\mathcal{K}$-beli automaták adott típusú szorzata egy részautomatájának. Ha $\mathcal{M}$ csak A-véges [véges] automatákat tartalmaz, akkor megköveteljük, hogy $\mathcal{K}$ A-véges [véges] automatákat tartalmazzon. Ha a szorzat egy σ-szorzat, akkor azt mondjuk, hogy a $\mathcal{K}$ rendszer az $\mathcal{M}$ *homomorfan σ-teljes rendszer*e. Ezt röviden úgy is írhatjuk, hogy $\mathcal{M} \subseteq \mathbf{HSP}_\sigma(\mathcal{K})$. Ha a szorzat a Gluskov szorzat, akkor $\mathcal{K}$-t az $\mathcal{M}$ *homomorfan teljes rendszer*ének hívjuk. Ha $\mathcal{M}$ minden Mealy automatát tartalmaz, akkor $\mathcal{K}$-t *homomorfan σ-teljes*nek, és ha σ-szorzat a Gluskov szorzat, akkor $\mathcal{K}$-t *homomorfan teljes*nek mondjuk. $\mathcal{K}$-t az $\mathcal{M}$ *minimális homomorfan teljes rendszer*ének nevezzük *az adott szorzatra*, ha nincs olyan valódi részrendszere, amely szintén $\mathcal{M}$ homomorfan teljes rendszere lenne erre a szorzatra. Hasonló módon beszélünk *minimális homomorfan σ-teljes* ill. *minimális homomorfan teljes rendszerek*ről. Természetesen ezek a fogalmak Moore automatákra és kimenő jel nélküli automatákra is könnyen megadhatók.

A minimális teljes rendszerek, speciálisan a véges teljes rendszerek létezésének vizsgálata különböző típusú automataszorzatokra gyakorlati szempontból is fontos. Ebben a fejezetben az Gluskov szorzatra ezt a kérdést is megvizsgáljuk. A 9.3. Tétel segítségével közvetlenül kapjuk a következő állítást.

16.1. Lemma

Ha $\mathcal{K}$ a Mealy automaták egy $\mathcal{M}$ rendszerének homomorfan teljes rendszere valamely automataszorzatra, akkor $\mathcal{M}$-nek teljes rendszere is erre az automataszorzatra.

Ha $\mathcal{M}$ minden Mealy automatát tartalmaz, akkor σ-szorzatokra, speciálisan α_i-, ν_i- és kvázidirekt szorzatokra is igaz a 16.1. Lemma megfordítása, vagyis ebben az esetben a két teljességi fogalom ekvivalens:

16.2. Tétel
A $\mathcal{K}$ rendszer a Mealy automatáknak akkor és csak akkor σ-teljes rendszere, ha homomorfan σ-teljes rendszere is.

Bizonyítás. A 16.1. Lemma szerint elegendő megmutatni, ha $\mathcal{K}$ a Mealy automatáknak σ-teljes rendszere, akkor homomorfan σ-teljes rendszere is. Tegyük fel, hogy $\mathcal{K}$ a Mealy automatáknak egy σ-teljes rendszere. Legyen $\mathbf{B} = (B, X, Y, \delta_B, \lambda_B)$ tetszőleges Mealy automata. Definiáljuk a

$$\mathbf{B}' = (B, X, B, \delta_B, \lambda'_B)$$

Mealy automatát úgy, hogy minden $b \in B$ állapotra és $x \in X$ bemenő jelre $\lambda'_B(b, x) = b$ teljesüljön. Mivel $\mathcal{K}$ a Mealy automaták egy σ-teljes rendszere, ezért vannak olyan $\mathcal{K}$-beli $\mathbf{A}_k$ $(k \in I)$ automaták, amelyek egy $\mathbf{C} = (A, X, B, \delta', \lambda') = \prod_{k \in I} \mathbf{A}_k[X, B, \varphi, \lambda']$ σ-szorzatának van $\mathbf{B}'$-vel ekvivalens $\mathbf{C}' = (C', X, B, \delta', \lambda')$ részautomatája. Nem nehéz belátni, hogy $\mathbf{B}'$ egyszerű. A 9.5. Tétel szerint ez azt jelenti, hogy $\mathbf{B}'$ az $\mathbf{C}'$ automata homomorf képe. Legyen τ a $\mathbf{C}'$ automata egy homomorf leképezése $\mathbf{B}'$-re. Legyen továbbá $\mathbf{A} = (A, X, Y, \delta, \lambda) = \prod_{k \in I} \mathbf{A}_k[X, Y, \varphi, \lambda]$ olyan σ-szorzat, amelynek λ kimenetfüggvényét válasszuk meg úgy, hogy ha $\tau(\mathbf{a}) = b$ $(\mathbf{a} \in C'$, akkor minden $x \in X$ esetén legyen $\lambda(\mathbf{a}, x) = \lambda_B(b, x)$. Ha pedig $\mathbf{a} \notin C'$, akkor $\lambda(\mathbf{a}, x)$ legyen Y tetszőleges eleme. Nyilvánvaló, hogy τ az $\mathbf{A}$ σ-szorzat $\mathbf{A}' = (C', X, Y, \delta, \lambda)$ részautomatájának homomorf leképezése $\mathbf{B}$-re. Ez azt jelenti, hogy $\mathcal{K}$ a Mealy automaták homomorfan σ-teljes rendszere. $\square$

A bizonyításból látható, hogy a 16.1. Lemma és a 16.2. Tétel véges tényezős σ-szorzatokra vonatkoztatva is érvényben marad. Igazak maradnak az állítások A-véges Mealy automaták σ-teljes rendszereire is.

16.3. Lemma
Ha $\mathcal{K}$ Mealy automaták egy homomorfan teljes rendszere, akkor tartalmaz olyan $\mathbf{C} = (C, X_C, \delta_C)$ automatát, amely C állapothalmazának vannak olyan C_1 és C_2 (nem feltétlenül különböző) nemüres részhalmazai, hogy bármely $c \in C_j$ $(j = 1, 2)$ állapothoz léteznek olyan $x_1, x_2 \in X_C$ bemenő jelek, amelyekre

$$\delta_C(c, x_1) \in C_1 \quad \text{és} \quad \delta_C(c, x_2) \in C_2 \tag{16.1}$$

teljesül. Továbbá van olyan $c \in C_1$, amelyre teljesül (16.1) és $\delta_C(c, x_1) \neq \delta_C(c, x_2)$.

Bizonyítás. Tekintsük például az $\mathbf{A}_0 = (\{1,2\}, \{x_1, x_2\}, \delta_0)$ erősen összefüggő automatát, amelyre

$$\delta_0(1, x_1) = \delta_0(2, x_2) = 1, \quad \delta_0(1, x_2) = \delta_0(2, x_1) = 2.$$

Mivel $\mathcal{K}$ homomorfan teljes rendszer, ezért vannak olyan $\mathbf{A}_k = (A_k, X_k, \delta_k)$ $(k \in I)$ $\mathcal{K}$-beli automaták, amelyekre egy

$$\prod_{k \in I} \mathbf{A}_k[\{x_1, x_2\}, \varphi] = (A, \{x_1, x_2\}, \delta)$$

szorzat valamely $\mathbf{B}$ részautomatájának $\mathbf{A}_0$ homomorf képe. Legyen α egy megfelelő homomorfizmus. Minden $k \in I$ esetén legyenek A_{kj} $(j = 1, 2)$ az A_k állapothalmaznak azok a részhalmazai, amelyek elemei komponensként szerepelnek valamely $\mathbf{a} \in \alpha^{-1}(j)$ állapotban. Ha például $\mathbf{a} \in \alpha^{-1}(1)$, akkor $\delta(\mathbf{a}, x_1) \in \alpha^{-1}(1)$ és $(\delta(\mathbf{a}, x_2) \in \alpha^{-1}(2)$. Így minden $a_k \in A_{k1}$ állapothoz vannak olyan $x_{k1}, x_{k2} \in X_k$ bemenő jelek, hogy $\delta_k(a_k, x_{k1}) \in A_{k1}$ és $\delta(a_k, x_{k2}) \in A_{k2}$. Hasonlóan látható, hogy A_{k2} is ugyanilyen tulajdonságú. Mivel $\alpha^{-1}(1) \cap \alpha^{-1}(2) = \emptyset$, ezért van olyan $k \in I$ index, amelyre léteznek olyan $a_k \in A_{k1}$ és $x_{k1}, x_{k2} \in X_k$, hogy $\delta_k(a_k, x_{k1}) \neq \delta_k(a_k, x_{k2})$ és $\delta_k(a_k, x_{k1}) \in A_{k1}$, $\delta_k(a_k, x_{k2}) \in A_{k2}$. Ez azt jelenti, hogy az $\mathbf{A}_k$ automata teljesíti a feltételeket. □

Megoldatlan az a probléma, hogy a lemmában szereplő feltétel elegendő-e ahhoz, hogy az adott rendszer homomorfan teljes legyen. Igaz azonban a homomorfan teljesség következő elegendő feltétele.

16.4. Lemma
Ha kimenő jel nélküli automaták egy $\mathcal{K}$ rendszere tartalmaz olyan $\mathbf{C} = (C, X_C, \delta_C)$ automatát, amely C állapothalmazának vannak olyan C_1 és C_2 nemüres diszjunkt részhalmazai, amelyek teljesítik a (16.1) feltételt, akkor $\mathcal{K}$ homomorfan teljes rendszer.

Bizonyítás. Kimenő jel nélküli automaták $\mathcal{K}$ rendszere teljesítse a feltételeket. Legyen $\mathbf{B} = (B, X, Y, \delta_B, \lambda_B)$ tetszőleges automata és I olyan indexhalmaz, amelynek számossága egyenlő B számosságával. Tekintsük az $\{1,2\}^I$ halmazt, s legyen κ a B állapothalmaz $\{1,2\}^I$-be való egy-egyértelmű leképezése. (Ilyen nyilvánvalóan létezik, mivel $\{1,2\}^I$ számossága egyenlő B hatványhalmazának számosságával.) Vegyük a (16.1) feltételt teljesítő $\mathbf{C}$ automata $\mathbf{C}^I[X, Y, \varphi, \lambda] = (C^I, X, Y, \delta, \lambda)$ hatványát, ahol a φ visszacsatolási függvényt és a λ kimenetfüggvényt a következő módon definiáljuk:

Ha valamely $b \in B$ állapotra és $x \in X$ bemenő jelre

$$\kappa(b) = (j_k;\ k \in I) \quad \text{és} \quad \kappa(\delta_B(b, x)) = (l_k;\ k \in I)$$

$(j_k, l_k \in \{1,2\})$, továbbá $\mathbf{c} = (c_k \in C_{j_k};\ k \in I)$, akkor legyen

$$\varphi(\mathbf{c}, x) = \mathbf{x} \quad \text{és} \quad \lambda(\mathbf{c}, x) = \lambda_B(b, x),$$

ahol $\mathbf{x} = (x_k; k \in I)$, $x_k \in X_C$ olyan bemenő jele $\mathbf{C}$-nek, amelyre $\delta_C(c_k, x_k) \in C_{l_k}$ teljesül. Minden más esetben legyen φ és λ tetszőlegesen értelmezve. A

$$D = \cup_{b \in B}\Big(\prod_{j_k \in \kappa(b)} C_{j_k}\Big)$$

halmaz nyilvánvalóan $\mathbf{C}^I$ egy részautomatájának állapothalmaza. Definiáljuk D-nek B-re való α leképezést úgy, hogy

$$\alpha(\mathbf{c}) = b \quad \Longleftrightarrow \quad \mathbf{c} \in \prod_{j_k \in \kappa(b)} C_{j_k}.$$

Legyenek $\mathbf{c} \in D$ és $x \in X$ tetszőlegesek. Akkor

$$\alpha(\delta(\mathbf{c}, x)) = \alpha((\delta_C(c_k, x_k);\ k \in I)) = \delta_B(b, x) = \delta_B(\alpha(b), x),$$

$$\lambda(\mathbf{c}, x) = \lambda_B(b, x) = \lambda_B(\alpha(\mathbf{c}), x),$$

azaz α homomorfizmus. $\square$

Az alábbi tétel A-véges Mealy automaták véges automatákból álló homomorfan teljes rendszereit jellemzi abban az esetben, ha csak véges tényezős szorzatokat engedünk meg. (Elegendő csak véges automatákra szorítkozni.)

16.5. TÉTEL (LETICSEVSZKIJ KRITÉRIUM)
Véges automaták egy $\mathcal{K}$ rendszere az A-véges Mealy automaták homomorfan teljes rendszere a véges tényezős szorzatokra akkor és csak akkor, ha létezik olyan $\mathcal{K}$-beli $\mathbf{C} = (C, X_C, \delta_C)$ automata, amelynek van olyan $c(\in C)$ állapota, vannak olyan $x_1, x_2(\in X_C)$ bemenő jelei és $p_1, p_2(\in X_C^*)$ bemenő szavai, amelyekre

$$\delta_C(c, x_1) \neq \delta_C(c, x_2) \quad \text{és} \quad c x_1 p_1 = c x_2 p_2 = c. \tag{16.2}$$

Bizonyítás. Legyen $\mathcal{K}$ a véges Mealy automaták homomorfan teljes rendszere a véges tényezős szorzatokra és $\mathbf{B} = (B, X, \delta_B)$ tetszőleges A-véges erősen összefüggő kimenő jel nélküli automata. Legyen $\mathbf{B}$ homomorf képe $\mathcal{K}$-beli $\mathbf{A}_k = (A_k, X_k, \delta_k)$ $(k = 1, \ldots, n)$ Mealy automaták

$$\mathbf{A} = (A, X, \delta) = \prod_{k=1}^{n} \mathbf{A}_k[X, \varphi]$$

szorzata valamely **D** részautomatájának. A **B** automata erősen összefüggő, ezért a 2.2. Tétel szerint, **B** homomorf képe **D** bármely részautomatájának is. Az A-végesség miatt **D**-nek van erősen összefüggő részautomatája. Az előbbiek szerint **B** ennek is homomorf képe.

A továbbiakban legyen **B** olyan erősen összefüggő kimenő jel nélküli A-véges automata, amelynek van olyan $b \in B$ állapota és vannak olyan $x, x' \in X_B$ bemenő jelei, amelyekre $\delta_B(b, x) \neq \delta_B(b, x')$. Legyen α az **A** szorzat valamely $\mathbf{D} = (D, X, \delta)$ erősen összefüggő részautomatájának homomorf leképezése **B**-re és $\mathbf{d} \in D$ olyan állapot, amelyre $\alpha(\mathbf{d}) = b$. Így

$$\alpha(\delta(\mathbf{d}, x)) = \delta_B(\alpha(\mathbf{d}), x) \neq \delta_B(\alpha(\mathbf{d}), x') = \alpha(\delta(\mathbf{d}, x')),$$

ezért

$$\delta(\mathbf{d}, x) \neq \delta(\mathbf{d}, x').$$

Mivel **D** erősen összefüggő, ezért vannak olyan $p, p' \in X^*$ bemenő szavak, amelyekre $\mathbf{d}xp = \mathbf{d}x'p' = \mathbf{d}$, azaz (14.10)-et is felhasználva, van olyan $k \in [n]$, amelyre

$$\delta_k(d_k, x_k) \neq \delta_k(d_k, x'_k) \quad \text{és} \quad d_k x_k p_k = d_k x'_k p'_k = d_k,$$

ahol

$$x_k = \varphi_k(\mathbf{d}, x), \quad x'_k = \varphi_k(\mathbf{d}, x'), \quad p_k = \varphi_k(\mathbf{d}x, p), \quad p'_k = \varphi_k(\mathbf{d}x', p').$$

Megfordítva, tegyük fel, hogy a Mealy automaták egy $\mathcal{K}$ rendszere teljesíti a (16.2) feltételt. Legyen $\mathbf{A}_0 = (A_0, X_0, \delta_0)$ olyan $\mathcal{K}$-beli automata, amelynek van olyan $a_0 (\in A_0)$ állapota, vannak olyan $x_0, x'_0 (\in X_0)$ bemenő jelei és $p = x_1 \ldots x_m, p' = x'_1 \ldots x'_n (\in X_0^*)$ bemenő szavai, amelyekre

$$\delta_0(a_0, x_0) \neq \delta_0(a_0, x'_0) \quad \text{és} \quad a_0 x_0 p = a_0 x' p' = a_0. \tag{16.3}$$

(Ha $p = e$ vagy $p' = e$, akkor legyen $m = 0$ vagy $n = 0$.) Vezessük be a következő jelöléseket:

$$a_{i+1} = \delta_0(a_i, x_i), \quad a'_{j+1} = \delta_0(a'_j, x'_j)$$

$(i = 0, 1, \ldots, m-1,\ j = 0, 1, \ldots, n-1,\ a'_0 = a_0)$. Ha

$$a_1 = \delta_0(a_0, x_0) \neq a_0 \quad \text{és} \quad a'_1 = \delta_0(a_0, x'_0) \neq a_0,$$

akkor $p, p' \in X^+$. Tegyük fel, hogy p és p' minimális hosszúságú a (16.2) feltételt teljesítő szavak között. Ez azt jelenti, hogy $a_1, \ldots, a_m, a'_1, \ldots, a'_n$ állapotok egyike sem egyenlő a_0-lal, és az $a_2, \ldots, a_m, a'_2, \ldots, a'_n$ állapotok között pedig nem szerepel sem az a_1, sem az a'_1 állapot. Ha mondjuk $\delta_0(a_0, x_0) = a_0$, akkor $\delta_0(a_0, x_0') \neq a_0$ és $p' \in X^+$. Legyen ebben az esetben $p = e$, azaz $m = 0$ és p' minimális hosszúságú a (16.2) feltételt teljesítő szavak között. Ez azt jelenti, hogy $a_1 = a_0$ és az $a_1', \ldots, a_n'$ állapotok között a_0, az $a_2', \ldots, a_n'$ állapotok között pedig a_1' nem szerepel.

Legyen $\mathbf{B} = (B, X, Y, \delta', \lambda')$ tetszőleges Mealy automata és I olyan indexhalmaz, amelynek számossága egyenlő az $[m + n + 2] \times B$ halmaz számosságával. Legyen τ az $[m+n+2] \times B$ halmaz bijektív leképezése az I halmazra. Az egyszerűség kedvéért jelöljük b_k-val az I indexhalmaz $\tau(k, b)$ elemét. Legyen A' az A_0^I halmaz azon $\mathbf{a}$ elemeinek halmaza, amelyekre teljesül, hogy bármely $b \in B$ esetén $a_{b_1}, \ldots, a_{b_{m+n+2}}$ állapotok között $a_1, \ldots, a_m, a_1', \ldots a_n'$ egyszer, az a_0 állapot pedig kétszer fordul elő. Jelölje $T_{\mathbf{a}}$ azon $b \in B$ állapotok halmazát, amelyekre $a_{b_r} = a_1, a_{b_s} = a_1'$ $(r < s)$ teljesül. Tekintsük A' következő $\mathcal{C}$ osztályozását:

$$\mathcal{C}[\mathbf{a}] = \mathcal{C}[\mathbf{a}'] \iff T_{\mathbf{a}} = T_{\mathbf{a}'} \quad (\mathbf{a}, \mathbf{a}' \in A').$$

Megmutatjuk, hogy A' tetszőleges $\mathbf{a}$ és $\mathbf{a}'$ elemeihez van olyan $\mathbf{x} \in X_0^I$, amelyre $\mathbf{ax} \in \mathcal{C}[\mathbf{a}']$, ahol $\mathbf{ax}_{b_k} = \mathbf{a}_{b_k} x_{b_k}$ $(x_{b_k} \in X_0)$. Legyen $a_{b_r} = a_{b_s} = a_0$ $(r < s)$. Ha $b \notin T_{\mathbf{a}'}$, akkor legyen $x_{b_r} = x_0'$ és $x_{b_s} = x_0$. Ha pedig $b \in T_{\mathbf{a}'}$, akkor legyen $x_{b_r} = x_0$ és $x_{b_s} = x_0'$. Minden más esetben legyen $x_{b_k} = x_i$, ha $a_{b_k} = a_i$ $(i = 1, \ldots m)$ és $x_{b_k} = x_j'$, ha $a_{b_k} = a_j'$ $(j = 1, \ldots, n)$. Nyilvánvaló, hogy az így definiált $\mathbf{ax} \in \mathcal{C}[\mathbf{a}']$

A $\mathcal{C}$-osztályok halmazának számossága egyenlő B hatványhalmazának számosságával, ezért nagyobb, mint B számossága. Legyen κ a B halmaz egy injektív leképezése a $\mathcal{C}$-osztályok halmazába és $B' = \cup\{\kappa(b); b \in B\}$. Definiáljuk B' halmaznak B-re való α leképezését a

$$\alpha(\mathbf{a}) = b \iff \mathbf{a} \in \kappa(b) \quad (b \in B)$$

feltétellel. Teljesítse az $\mathbf{A}_0^I[X, Y, \varphi, \lambda] = (A_0^I, X, Y, \delta, \lambda)$ hatvány φ visszacsatolási függvénye és λ kimenetfüggvénye a következő feltételeket. Tetszőleges $b \in B$ állapotra és $x \in X$ bemenő jelre, ha $\mathbf{a} \in \kappa(b)$ és $\mathbf{a}' = \kappa(\delta'(b, x))$, akkor legyen

$$\varphi(\mathbf{a}, x) = \mathbf{x} \quad \text{és} \quad \lambda(\mathbf{a}, x) = \lambda'(b, x).$$

Ez azt jelenti, hogy ha $\mathbf{a} \in B'$, akkor $\delta(\mathbf{a}, x) = \mathbf{ax}$. Ha $\mathbf{a} \notin B'$, akkor $\varphi(\mathbf{a}, x)$ legyen x, $\lambda(\mathbf{a}, x)$ pedig Y tetszőleges eleme. Így bármely $\mathbf{a} \in B'$ és $x \in X$ esetén:

$$\alpha(\delta(\mathbf{a}, x) = \alpha(\mathbf{ax}) = \delta'(b, x) = \delta'(\alpha(\mathbf{a}), x),$$

azaz α az $\mathbf{A}_0^I[X, Y, \varphi, \lambda]$ hatvány $\mathbf{B}' = (B', X, Y, \delta, \lambda)$ részautomatájának $\mathbf{B}$-re való homomorf leképezése. $\square$

Felhívjuk a figyelmet arra, hogy a Leticsevszkij kritérium elegendőségének bizonyítása minden Mealy automatára tetszőleges tényezős szorzatok esetén is érvényes. Ezek szerint a Mealy automatáknak vannak minimális homomorfan teljes rendszerei, és ezek a rendszerek mind egyeleműek. (Ezek a Moore automatáknak és a kimenő jel nélküli automatáknak is minimális homomorfan teljes rendszerei.) Egy ilyen rendszer egy két állapotú, két bemenő jelű

$$\mathbf{A}_0 = (\{1, 2\}, \{x_1, x_2\}, \delta_0)$$

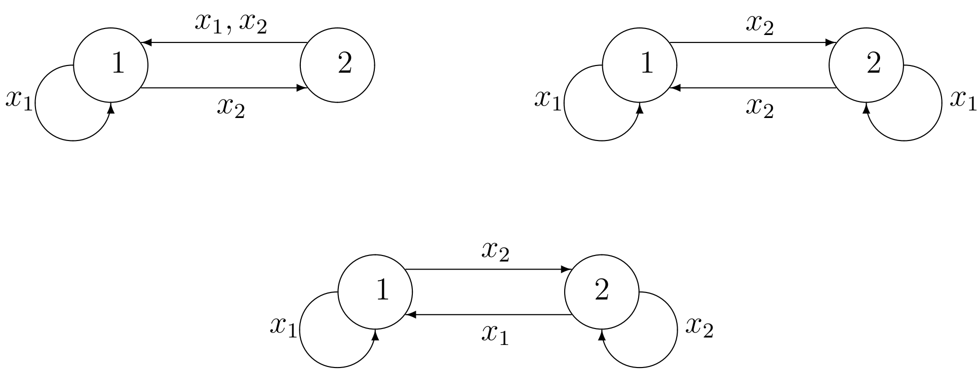
kimenő jel nélküli automata, amely átmenetfüggvénye teljesíti a

$$\delta_0(1, x_1) = \delta_0(2, x_1) = \delta_0(2, x_2) = 1, \quad \delta_0(1, x_2) = 2, \tag{16.4}$$

$$\delta_0(1, x_1) = \delta_0(2, x_2) = 1, \quad \delta_0(1, x_2) = \delta_0(2, x_1) = 2, \tag{16.5}$$

$$\delta_0(1, x_1) = \delta_0(2, x_1) = 1, \quad \delta_0(1, x_2) = \delta_0(2, x_2) = 2. \tag{16.6}$$

feltételek valamelyikét. Látható, hogy $\mathbf{A}_0$ mind a három esetben erősen összefüggő. Ez is mutatja az erősen összefüggő automaták fontos szerepét az automaták algebrai elméletében. Megjegyezzük, hogy a (16.5) feltételt teljesítő $\mathbf{A}_0$ automata a (16.3. Lemma bizonyításában is szerepel. Ezeknek az automatáknak az átmenetgráfjait a 8. ábrán láthatjuk.



8. ábra

A fejezetet egy egyszerű lemmával zárjuk, amely azonban fontos szerepet játszik automaták teljes rendszereinek vizsgálatában. A lemmából is következik, hogy egy minimális homomorfan teljes rendszer nem tartalmazhatja egyetlen elemének sem tőle különböző homomorf képét és valódi részautomatáinak homomorf képeit.

16.6. Lemma
Ha

$$\mathbf{A}_k = (A_k, X_k, \delta_k),\ \mathbf{B}_k = (B_k, X_k, \delta_k),\ \mathbf{C}_k = (C_k, X_k, \delta'_k) \quad (k \in I)$$

olyan automaták, hogy minden $k \in I$ indexre $\mathbf{B}_k$ a $\mathbf{A}_k$ részautomatája és $\mathbf{C}_k$ a $\mathbf{B}_k$ homomorf képe, akkor minden $\prod_{k\in I} \mathbf{C}_k[X, \varphi]$ σ-szorzat homomorfan reprezentálható egy $\prod_{k\in I} \mathbf{A}_k[X, \varphi']$ σ-szorzattal. Ha minden $k \in I$ indexre $\mathbf{B}_k$ és $\mathbf{C}_k$ izomorfak, akkor a $\prod_{k\in I} \mathbf{C}_k[X, \varphi]$ σ-szorzat izomorfan is reprezentálható egy $\prod_{k\in I} \mathbf{A}_k[X, \varphi']$ σ-szorzattal.

Bizonyítás. Legyen minden $k \in I$ indexre ψ_k a $\mathbf{B}_k$ automata egy homomorf leképezése $\mathbf{C}_k$-ra. Az $\mathbf{C} = (C, X, \delta) = \prod_{k\in I} \mathbf{C}_k[X, \varphi]$ σ-szorzathoz szerkesszük meg a $\mathbf{A} = (A, X, \delta') = \prod_{k\in I} \mathbf{A}_k[X, \varphi']$ σ-szorzat φ' visszacsatolási függvényét a következő módon:

Ha $\mathbf{b} \in \prod_{k\in I} B_k$ és $x \in X$, akkor legyen $\varphi'(\mathbf{b}, x) = \varphi(\mathbf{c}, x)$, ahol

$$\mathbf{b} = (b_k; k \in I) \quad \text{és} \quad \mathbf{c} = (\psi_k(b_k); k \in I).$$

Minden más $\mathbf{a} \in \prod_{k\in I} \mathbf{A}_k$ esetén legyen $\varphi'(\mathbf{a}, x) = \chi(x)$, ahol χ az X halmaz tetszőleges leképezése az $\prod_{k\in I} X_k$ halmazba. Ha $B = \prod_{k\in I} B_k$, akkor $\mathbf{B} = (B, X, \delta')$ a $\mathbf{A}$ automata egy részautomatája. Definiáljuk B-nek C-re való ψ leképezését úgy, hogy minden $\mathbf{b} \in B$ állapotra $\psi(\mathbf{b}) = (\psi_k(b_k);\ k \in I)$. Nyilvánvaló, hogy ψ homomorfizmus. Ha minden ψ_k izomorfizmus, akkor ψ is izomorfizmus. □

Feladatok

16.1. Azt mondjuk, hogy az $\mathbf{A} = (A, X, \delta)$ automata teljesíti a *fél Leticsevszkij kritériumot*, ha nem teljesíti a (16.2) Leticsevszkij kritériumot, de van olyan $a \in A$ állapota, $p \in X^*$ bemenő szava és vannak olyan $x, z \in X$ bemenő jelei, amelyekre

$$\delta(a, x) \neq \delta(a, z), \quad axp = a. \tag{16.7}$$

Az $\mathbf{A} = (A, X, \delta)$ automata akkor és csak akkor nem teljesíti a Leticsevszkij és a fél Leticsevszkij kritériumot, ha bármely $a \in A$, $p \in X^*$ és $x, z \in X$ esetén

$$axp = a \quad \Longrightarrow \quad \delta(a, x) = \delta(a, z).$$

(→ Megoldás)

16.2. Ha egy $\mathbf{A} = (A, X, \delta)$ automatának van olyan $a \in A$ állapota, vannak olyan $x_1, x_2 \in X$ bemenő jelei és $v \in X^+$, $w \in X^*$ bemenő szavai, amelyekre

$$av = a, \quad awx_1 \neq awx_2, \tag{16.8}$$

akkor $\mathbf{A}$ teljesíti a Leticsevszkij vagy a fél Leticsevszkij kritériumot. (→ Megoldás)

17. Izomorfan teljes rendszerek

Ebben a fejezetben a homomorfan teljességnél az automaták egy erősebb teljességét az ún. izomorfan teljességet vizsgáljuk.

A kimenő jel nélküli automaták $\mathcal{K}$ rendszere a Mealy automaták $\mathcal{M}$ *rendszerének izomorfan teljes rendszere valamely automataszorzatra*, ha minden $\mathcal{M}$-beli automata izomorfan reprezentálható K-beli automaták adott típusú szorzatával, azaz ha minden $\mathcal{M}$-beli automata izomorf bizonyos K-beli automaták adott típusú szorzatának egy részautomatájával. Ha ez a szorzat egy σ-szorzat, azaz $\mathcal{M} \subseteq \mathbf{IS}\ \mathbf{P}_\sigma(\mathcal{K})$, akkor *izomorfan σ-teljes rendszer*ről beszélünk. Ha a σ szorzat az Gluskov szorzat, akkor $\mathcal{K}$-t az $\mathcal{M}$ *izomorfan teljes rendszer*ének hívjuk. Ha $\mathcal{M}$ minden Mealy automatát tartalmaz, akkor $\mathcal{K}$-t *izomorfan σ-teljes*nek, és ha σ-szorzat az Gluskov szorzat, akkor $\mathcal{K}$-t egyszerűen *izomorfan teljes*nek mondjuk. $\mathcal{K}$-t az $\mathcal{M}$ *minimális izomorfan teljes rendszer*ének nevezzük *valamely automataszorzatra*, ha nincs olyan valódi részrendszere, amely szintén $\mathcal{M}$ izomorfan teljes rendszere erre a szorzatra.

Megjegyezzük, hogy minden izomorfan σ-teljes rendszer homomorfan σ-teljes rendszer is.

Ezek a fogalmak ugyanúgy, mint a homomorfan teljes rendszereknél, Moore automatákra és kimenő jel nélküli automatákra is megadhatók. A definíciókból látható, hogy a szubdirekt irreducibilis automaták a kimenő jel nélküli automaták izomorfan teljes rendszerét alkotják a direkt szorzatra.

A következő tétel Mealy automaták izomorfan teljes rendszereit jellemzi. A tételt V. M. Gluskov véges automatákra bizonyította, de a bizonyítása megfelelően átfogalmazva érvényes tetszőleges Mealy automatákra, és nyilvánvalóan Moore automatákra és kimenő jel nélküli automatákra is.

17.1. Tétel (Gluskov kritérium)
Kimenő jel nélküli automaták egy $\mathcal{K}$ rendszere Mealy automatáknak akkor és csak akkor izomorfan teljes rendszere, ha létezik olyan $\mathcal{K}$-beli $\mathbf{A} = (A, X, \delta)$ automata, amelynek vannak olyan különböző $a_1, a_2 (\in A)$ állapotai és (nem feltétlenül különböző) $x_1, x_2, x_3, x_4 (\in X)$ bemenő jelei, amelyekre

$$\delta(a_1, x_1) = a_1, \quad \delta(a_1, x_2) = a_2 \quad \delta(a_2, x_3) = a_2, \quad \delta(a_2, x_4) = a_1. \tag{17.1}$$

Bizonyítás. A szükségesség bizonyítása céljából tekintsük a (16.5) feltétellel definiált

$$\mathbf{A}_0 = (\{1, 2\}, \{x_1, x_2\}, \delta_0)$$

kimenő jel nélküli automatát, azaz amelyre

$$\delta_0(1, x_1) = \delta_0(2, x_2) = 1, \quad \delta_0(1, x_2) = \delta_0(2, x_1) = 2.$$

(Minden kimenő jel nélküli automata egy Mealy automata.) Mivel $\mathcal{K}$ izomorfan teljes, ezért vannak olyan $\mathcal{K}$-beli $\mathbf{A}_k = (A_k, X_k, \delta_k)$ $(k \in I)$ automaták, amelyek $\prod_{k \in I} \mathbf{A}_k[\{x_1, x_2\}, \varphi] = (A, \{x_1, x_2\}, \delta)$ szorzatának egy $\mathbf{B}$ részautomatája izomorf az $\mathbf{A}_0$ automatával. Legyen α egy megfelelő izomorfizmus. Tegyük fel, hogy $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in B$ állapotokra $\alpha(\mathbf{a}) = 1$ és $\alpha(\mathbf{b}) = 2$. Ebből

$$\delta(\mathbf{a}, x_1) = \delta(\mathbf{b}, x_2) = \mathbf{a}, \quad \delta(\mathbf{a}, x_2) = \delta(\mathbf{b}, x_1) = \mathbf{b},$$

azaz minden $k \in I$ indexre

$$\delta_k(a_k, \varphi_k(\mathbf{a}, x_1)) = \delta_k(b_k, \varphi_k(\mathbf{b}, x_2)) = a_k,$$

$$\delta_k(a_k, \varphi_k(\mathbf{a}, x_2)) = \delta_k(b_k, \varphi_k(\mathbf{b}, x_1)) = b_k.$$

Mivel $1 \neq 2$, ezért van olyan $k \in I$, amelyre $a_k \neq b_k$. Legyen

$$\varphi_k(\mathbf{a}, x_1) = x_{k1}, \quad \varphi_k(\mathbf{a}, x_2) = x_{k2},$$

$$\varphi_k(\mathbf{b}, x_1) = x_{k3}, \quad \varphi_k(\mathbf{b}, x_2) = x_{k4}.$$

Az $\mathbf{A}_k$ automata a_k, b_k állapotai és $x_{k1}, x_{k2}, x_{k3}, x_{k4}$ bemenő jelei teljesítik a (17.1) feltételt.

Az elegendőség bizonyításához tegyük fel, hogy $\mathbf{A} = (A, X, \delta)$ olyan $\mathcal{K}$-beli automata, amelynek vannak olyan különböző $a_1, a_2 (\in A)$ állapotai és (nem feltétlenül különböző) $x_1, x_2, x_3, x_4 (\in X)$ bemenő jelei, amelyekre

$$\delta(a_1, x_1) = a_1, \quad \delta(a_1, x_2) = a_2 \quad \delta(a_2, x_3) = a_2, \quad \delta(a_2, x_4) = a_1.$$

Legyen $\mathbf{B} = (B, X', Y', \delta', \lambda')$ tetszőleges Mealy automata és I olyan indexhalmaz, amelynek számossága egyenlő B számosságával. Legyen α a B

halmaz egy injektiv leképezése az A^I halmazba. (Az A^I halmaz számossága nagyobb a B halmaz számosságánál, ezért ilyen leképezés létezik.) Definiáljuk az $\mathbf{A}^I[X,Y,\varphi,\lambda] = (A^I, X, Y, \delta, \lambda)$ hatvány $\varphi = (\varphi_k; k \in I)$ visszacsatolási függvényét és λ kimenetfüggvényét úgy, hogy minden $b \in B$ állapotra és $x \in X'$ bemenő jelre

$$\varphi_k(\alpha(b), x) = x_j \iff \delta(\alpha(b)(k), x_j) = \alpha(\delta'(b,x))(k) \quad (j = 1,2,3,4),$$
$$\lambda(\alpha(b), x) = \lambda'(b, x)$$

teljesüljön, s minden más esetben tetszőleges. Nyilvánvaló, hogy

$$\alpha(\delta'(b,x)) = \delta(\alpha(b), x) \quad (b \in B,\ x \in X'),$$

azaz α izomorfizmus. □

A Gluskov kritérium szerint az Mealy automatáknak vannak minimális izomorfan teljes rendszerei, s ezek mind egyeleműek. Egy ilyen rendszert alkot például egy két állapotú, legfeljebb négy bemenő jelű, kimenő jel nélküli automata, amelynek átmenetfüggvénye teljesíti (17.1)-et. A (17.1) feltételből következik, hogy $x_1 \neq x_2$ és $x_3 \neq x_4$. Egy ilyen automatának legalább kettő és legfeljebb négy bemenő jele van. Ez azt jelenti, hogy Mealy automaták leggazdaságosabb izomorfan teljes rendszerei a (16.5) ill. a (16.6) feltételt teljesítő $\mathbf{A}_0$ automatákból álló egyelemű rendszer. Természetesen ezek bármely automataosztálynak, így a Moore automatáknak, a kimenő jel nélküli automatáknak, az A-véges automatáknak és a véges automatáknak is minimális izomorfan teljes rendszerei.

Az alábbi két állítás az előbbi megjegyzések alapján nyilvánvalóan következik a Gluskov kritériumból.

17.2. Következmény
Minden $\mathbf{A} = (A, X, Y, \delta', \lambda')$ Mealy automata izomorf egy $\mathbf{A}_0^I[X,Y,\varphi,\lambda]$ hatvány valamely részautomatájával, ahol $|I| = |A|$.

17.3. Következmény
Minden $\mathbf{A} = (A, X, Y, \delta', \lambda')$ A-véges Mealy automata izomorf egy $\mathbf{A}_0^n[X,Y,\varphi,\lambda]$ hatvány valamely részautomatájával, ahol $n \geq \log_2 |A|$.

A 17.3. Következményből kapjuk, hogy a (16.5) ill. a (16.6) feltételt teljesítő $\mathbf{A}_0$ automatákból álló egyelemű rendszerek az A-véges automatáknak, speciálisan a véges automatáknak minimális izomorfan teljes rendszerei a véges tényezős szorzatokra.

A továbbiakban A-véges automaták izomorfan teljes rendszereivel foglalkozunk véges tényezős α_i-szorzatokra. Az erdmények Imreh Balázstól származnak. Először az α_0-szorzatokra izomorfan teljes rendszerek vizsgálatában kulcsszerepet játszó $\mathbf{T}_n$ automatákat adjuk meg.

Az $[n] = \{1, 2, \ldots, n\}$ $(n \geq 1)$ halmaz T_n teljes transzformációfélcsoportjára definiáljuk az $\mathbf{T}_n = ([n], T_n, \delta_n)$ automatát, ahol minden $k \in [n]$ és $t \in T_n$ párra $\delta_n(k, t) = t(k)$. A $\mathbf{T}_n$ automatát (*n állapotú*) *teljes transzformációautomatá*nak nevezzük.

17.4. Lemma
Minden n pozitív egész számra a $\mathbf{T}_n$ teljes transzformáció automata egyszerű.

Bizonyítás. Ha $n \leq 2$, akkor $\mathbf{T}_n$ nyilvánvalóan egyszerű. Tegyük fel, hogy $n \geq 3$. Legyen $\rho \neq \iota_{[n]}$ a $\mathbf{T}_n$ egy kongruenciája. Akkor vannak olyan $k', l' \in [n]$, hogy $k' \neq l'$ és $(k', l') \in \rho$. Legyenek $k, l \in [n]$ tetszőlegesek és $t_{k,l}$ az $[n]$ halmaznak olyan transzformációja, amelyre $t_{k,l}(k') = k$ és $t_{k,l}(l') = l$. Ez azt jelenti, hogy $(k, l) \in \rho$, azaz $\rho = \omega_{[n]}$. □

17.5. Tétel
Az automaták egy $\mathcal{K}$ rendszere az A-véges automaták izomorfan teljes rendszere a véges tényezős α_0-szorzatra akkor és csak akkor, ha minden pozitív egész n-re van olyan $\mathbf{A} \in \mathcal{K}$, hogy $\mathbf{T}_n$ izomorfan reprezentálható $\mathbf{A}$ egytényezős α_0-szorzatával.

Bizonyítás. Tegyük fel, hogy $\mathcal{K}$ az A-véges automaták izomorfan teljes rendszere a véges tényezős α_0-szorzatra. akkor $\mathbf{T}_n$ $(n \geq 1)$ izomorfan reprezentálható egy

$$\mathbf{B} = (B, T_n, \delta) = \mathbf{B}_1 \times \cdots \times \mathbf{B}_m[T_n, \varphi] \quad (\mathbf{B}_j = (B_j, X_j, \delta_j) \in \mathcal{K},\ j = 1, \ldots, m)$$

α_0-szorzattal. Legyen ψ az $\mathbf{T}_n$ automata egy izomorfizmusa $\mathbf{B}$-be. Megmutatjuk, hogy $\mathbf{T}_n$ izomorf módon reprezentálható valamely $\mathbf{B}_j$ komponens egytényezős α_0-szorzatával. Ha $n = 1$, akkor minden $1 \leq j \leq m$ esetén van olyan $b_j \in B_j$ és $x_j \in X_j$, hogy $\delta_j(b_j, x_j) = b_j$. Ezért $\mathbf{T}_1$ izomorfan reprezentálható bármelyik $\mathbf{B}_j$ komponens egytényezős α_0-szorzatával. Ha pedig $m = 1$, akkor magára $\mathbf{B}$-re teljesül a tétel állítása. Így feltehetjük, hogy $n, m > 1$.

Legyen $\mathbf{B}' = (B', T_n, \delta)$ a $\mathbf{B}$-nek az az részautomatája, amelyre $B' = \psi([n])$. Definiáljuk a ρ_j $(j = 1, \ldots, m)$ relációkat B'-n pontosan úgy, mint a 15.2. Tétel bizonyításában. Minden ρ_j reláció a $\mathbf{B}'$ automata kongruenciája. A 17.4. Lemma szerint $\mathbf{T}_n$-nek csak triviális kongruenciái vannak, ezért ezért minden ρ_j egyenlő $\iota_{B'}$-vel vagy $\omega_{B'}$-vel. Legyen r a legkisebb egész szám, amelyre $\rho_r \neq \omega_{B'}$. (Mivel $n > 1$, ezért ilyen r létezik.) Megmutatjuk, hogy $\mathbf{T}_n$ izomorfan reprezentálható a $\mathbf{B}_r$ komponens egytényezős α_0-szorzatával.

E célból legyen $\psi(j) = (b_{j_1}, \ldots, b_{j_m})$ $(j = 1, \ldots, m)$. Az r választása miatt $b_{k_s} = b_{l_s}$ minden $k, l \in [n]$ és $s \in [r-1]$ egész számra. Tekintsük $\mathbf{B}_r[T_n, \varphi']$ egytényezős α_0-szorzatot, ahol $\varphi'(t) = \varphi_r(b_{1_1}, \ldots, b_{1_{r-1}}, t)$ $(t \in T_n)$. (φ_r a (15.1)-ben definiált visszacsatolási függvény.) Mivel $\rho_r = \iota_{B'}$, ezért a $\psi'(j) = j_r$ $(j = 1, \ldots, n)$ öszefüggéssel definiált ψ' megfeleltetés az $\mathbf{T}_n$ automatának $\mathbf{B}_r[T_n, \varphi']$-be való izomorf leképezése.

Megfordítva, legyen $\mathbf{A} = (A, X, \delta)$ egy m állapotú automata, továbbá ψ az A-nak egy injektív leképezése $[n]$-be, ahol $n \geq m$. Definiáljuk azt a $\mathbf{B} = ([n], X, \delta') = \mathbf{T}_n[X, \varphi]$ egytényezős α_0-szorzat $\varphi : X \to T_n$ visszacsatolási függvényét úgy. hogy minden $a \in A$ és $x \in X$ esetén

$$\psi(\delta(a, x)) = \delta_{[n]}(\psi(a), \varphi(x))$$

teljesüljön. Akkor

$$\psi(\delta(a, x)) = \delta_{[n]}(\psi(a), \varphi(x)) = \delta'(\psi(a), x),$$

azaz ψ az $\mathbf{A}$ automata izomorf leképezése $\mathbf{B}$-be. A feltétel miatt van olyan $\mathbf{C} \in \mathcal{K}$, hogy $\mathbf{T}_n$ leképezhető izomorf módon $\mathbf{C}$ valamely egytényezős α_0-szorzatába. A 16.6. Lemmát is használva kapjuk, hogy $\mathbf{A}$ leképezhető izomorf módon $\mathbf{C}$ egy egytényezős α_0-szorzatába. $\square$

A 17.5. Tételből következik, hogy $\{\mathbf{T}_n;\ n = 2, 3, \ldots\}$ az A-véges [véges] automaták egy izomorfan teljes rendszere.

17.6. Következmény
Az A-véges automatáknak nem létezik minimális izomorfan teljes rendszere a véges tényezős α_0-szorzatra.

Bizonyítás. Legyen $\mathcal{K}$ az A-véges automaták egy izomorfan teljes rendszere a véges tényezős α_0-szorzatra. Ha $\mathbf{A} \in \mathcal{K}$ m állapotú automata, akkor, mint azt a 17.5. Tétel bizonyításában láttuk, minden $n (\geq m)$ pozitív egész számra $\mathbf{A}$ izomorfan reprezentálható $\mathbf{T}_n$ egy egytényezős α_0-szorzatával. Legyen $n > m$. A 17.5. Tétel szerint $\mathbf{T}_n$ izomorfan reprezentálható egy $\mathcal{K}$-beli $\mathbf{B}$ automata egytényezős α_0-szorzatával. A 16.6. Lemma alapján $\mathbf{B}$ valamely egytényezős α_0-szorzata izomorfan reprezentálja $\mathbf{A}$-t. Így $\mathcal{K} - \{\mathbf{A}\}$ is izomorfan teljes rendszere a A-véges [véges] automatáknak a véges tényezős α_0-szorzatra. $\square$

Az α_i-szorzatokra $(i \geq 1)$ izomorfan teljes rendszerek vizsgálatában alapvető szerepet játszanak azok a $\mathbf{V}_n = ([n], X_n, \delta_n)$ automaták, amelyekre $X_n = \{x_{uv}; u, v \in [n]\}$ és minden $k \in [n]$, $x_{uv} \in X_n$ párra az $u = k$ esetben $\delta_n(k, x_{uv}) = v$, minden más esetben pedig $\delta_n(k, x_{uv}) = k$ teljesül.

17.7. Tétel
Az automaták egy $\mathcal{K}$ rendszere az A-véges automatáknak akkor és csak akkor izomorfan teljes rendszere a véges tényezős α_i-szorzatra ($i \geq 1$), ha minden pozitív egész n-re van olyan $\mathbf{A} \in \mathcal{K}$, hogy $\mathbf{V}_n$ izomorfan reprezentálható $\mathbf{A}$ egytényezős α_1-szorzatával.

Bizonyítás. Legyen $\mathcal{K}$ az A-véges automaták izomorfan teljes rendszere a véges tényezős α_i-szorzatra ($i \geq 1$). Először megmutatjuk, hogy ha $\mathbf{V}_n$ izomorfan reprezentálható $\mathcal{K}$-beli automaták egy véges tényezős α_i-szorzatával, akkor izomorfan reprezentálható $\mathcal{K}$-beli automaták legfeljebb i tényezős α_i-szorzatával is. Mivel $\mathbf{V}_1$ izomorf a $\mathbf{T}_1$ transzformációautomatával és minden α_0-szorzat α_i-szorzat ($i \geq 1$), ezért $n = 1$ esetben a 17.5. Tétel szerint igaz az állítás. Ezért feltehetjük, hogy $n > 1$. Tekintsük a

$$\mathbf{B} = (B, X_n, \delta) = \mathbf{B}_1 \times \cdots \times \mathbf{B}_m[X_n, \varphi],$$

$$\mathbf{B}_j = (B_j, X'_j, \delta'_j) \in \mathcal{K}, \quad j = 1, \ldots, m$$

α_i-szorzatot. Tegyük fel, hogy $\mathbf{V}_n$ izomorf a $\mathbf{B}$ egy $\mathbf{B}' = (B', X_n, \delta)$ részautomatájával és legyen $\psi : [n] \to B'$ egy alkalmas izomorfizmus. Legyen

$$\psi(k) = (b_{k_1}, \ldots, b_{k_m}) \quad (k = 1, \ldots, n).$$

Feltehetjük, hogy van olyan $1 \leq r, s \leq n$, amelyekre $b_{r_1} \neq b_{s_1}$. (Ellenkező esetben vehetnénk a $\mathbf{B}_2, \ldots, \mathbf{B}_m$ automaták egy $m - 1$ tényezős nekünk megfelelő α_i-szorzatát.) Ha $m \leq i$, akkor $\mathbf{B}$ teljesíti a kívánt feltételt.

Tegyük fel, hogy $m > i$. Belátjuk, hogy a

$$\mathbf{b}_k = (b_{k_1}, \ldots, b_{k_i}) \quad (k = 1, \ldots, n)$$

vektorok páronként különbözőek. Tegyük fel, hogy

$$u \neq v \quad (u, v \in [n]) \quad \text{és} \quad (b_{u_1}, \ldots, b_{u_i}) = (b_{v_1}, \ldots, b_{v_i}).$$

Következésképpen (15.2) szerint, minden $x \in X_n$ elemre

$$\varphi_1(b_{u_1}, \ldots, b_{u_i}, x) = \varphi_1(b_{v_1}, \ldots, b_{v_i}, x).$$

Mivel ψ izomorfizmus az $x = x_{u_r}$ választással nyerjük, hogy

$$\delta'_1(b_{u_1}, \varphi_1(b_{u_1}, \ldots, b_{u_i}, x)) = b_{r_1}, \quad \delta'_1(b_{v_1}, \varphi_1(b_{v_1}, \ldots, b_{v_i}, x)) = b_{v_1}.$$

Így $b_{r_1} = b_{v_1}$. Az $x = x_{v_s}$ választással kapjuk, hogy $b_{s_1} = b_{u_1}$. Mivel $b_{u_1} = b_{v_1}$, ezért $b_{r_1} = b_{s_1}$, ami viszont a feltevés szerint lehetetlen. Tehát a $\mathbf{b}_k = (b_{k_1}, \ldots, b_{k_i})$ ($k = 1, \ldots, n$) vektorok valóban páronként különbözőek.

Legyen $\psi'(k) = \mathbf{b}_k$ $(k = 1, \ldots, n)$ az $[n]$ halmaznak az $\{\mathbf{b}_k; k \in [n]\}$ halmazra való bijektív leképezését. Ezenkívül tetszőleges (u, v) $(u, v \in [n])$ párra létezik egy

$$\mathbf{y}_{uv} = (y_{uv}^{(1)}, \ldots, y_{uv}^{(i)}) \in X_1' \times \cdots \times X_i'$$

vektor, amelyre $\delta_t'(b_{ut}, y_{uv}^{(t)}) = b_{vt}$ $(t = 1, \ldots, i)$. Tekintsük a

$$\mathbf{C} = (C, X_n, \overline{\delta}) = \mathbf{B}_1 \times \cdots \times \mathbf{B}_i[X_n, \varphi']$$

α_i-szorzatot, amelyre tetszőleges $u, v, t \in [n]$ esetén $\varphi(b_{t_1}, \ldots, b_{t_i}, x_{uv}) = \mathbf{y}_{uv}$, ha $t = u$, és $\varphi(b_{t_1}, \ldots, b_{t_i}, x_{uv}) = \mathbf{y}_{tt}$ minden más esetben. A φ' leképezés a $\mathbf{V}_n$ automata izomorf leképezése $\mathbf{C}$-be.

Legyen $\sqrt[i]{n}$ egészrésze l. Megmutatjuk, hogy ha $\mathbf{V}_n$ izomorfan reprezentálható $\mathcal{K}$-beli automaták legfeljebb i tényezős α_i-szorzatával, akkor $\mathbf{V}_l$ izomorfan reprezentálható $\mathcal{K}$-beli automata egytényezős α_1-szorzatával.

Tekintsük újra a fenti $\mathbf{B}$ α_i-szorzatot és $\mathbf{V}_n$ ψ izomorf leképezését $\mathbf{B}$-be. Tegyük fel továbbá, hogy $m \leq i$. Ismét legyen minden $k \in [n]$ pozitív egész számra $\psi(k) = (b_{k_1}, \ldots, b_{k_m})$. Mivel ψ injektív, ezért létezik legalább egy $s \in [n]$, amelyre a $b_{1_s}, \ldots, b_{n_s}$ elemek között legalább l különböző. Feltehetjük, hogy ezek az elemek $b_{1_s}, \ldots, b_{t_s}$ $(t \geq l)$. Adjuk meg a $\varphi' : [l] \to \{b_{1_s}, \ldots, b_{l_s}\}$ leképezést a $\psi'(k) = b_{k_s}$ $(k \in [l])$ összefüggéssel. Mivel ψ izomorfizmus, tetszőleges $u, v \in [l]$ létezik olyan $x_{uv}^{(s)} \in X_s'$ bemenő jel, amelyre $\delta_s'(b_{u_s}, x_{uv}^{(s)}) = b_{v_s}$. Tekintsük most a $\mathbf{B}_s[X_t, \varphi']$ egytényezős α_i-szorzatot, ahol $k = u$ esetben $\varphi'(b_{k_s}), x_{uv}) = x_{uv}^{(s)}$, s minden más esetben $\varphi'(b_{k_s}, x_{uv}) = x_{kk}^{(s)}$. A ψ' leképezés $\mathbf{V}_l$ izomorf leképezése $\mathbf{B}_s[X_l, \varphi']$-be.

Ha most $\mathbf{V}_n$ helyett a $\mathbf{V}_{n^i}$ automatát tekintjük, akkor az előbbiekből kapjuk, hogy $\mathbf{V}_n$ izomorfan reprezentálható egy $\mathcal{K}$-beli automata valamely egytényezős α_i-szorzatával.

Megfordítva, nyilvánvaló, hogy minden n állapotú automata izomorfan reprezentálható $\mathbf{V}_n$ egy egytényezős α_1-szorzatával. Így, ha a $\mathcal{K}$ rendszer teljesíti a tétel feltételeit, akkor az A-véges automaták egy izomorfan teljes rendszere a véges tényezős α_i-szorzatra. $\square$

A 17.7. Tétel bizonyításából következik, hogy bármely i pozitív egész számra a $\mathcal{K} = \{\mathbf{V}_n; n = 1, 2, \ldots\}$ rendszer az A-véges automaták izomorfan teljes rendszere a véges tényezős α_i-szorzatra. A tételből kapjuk az alábbi következményt.

17.8. KÖVETKEZMÉNY
Automaták egy rendszere akkor és csak akkor izomorfan teljes rendszere az A-véges automatáknak a véges tényezős α_1 szorzatra, ha bármely α_i-szorzatra $(i \geq 1)$ is az.

A következő triviális lemma azt mondja ki, hogy egy automata minden AX-részautomatája izomorfan reprezentálható az automata egy egytényezős α_0-szorzatával.

17.9. Lemma
Ha az $\mathbf{A}' = (A', X', \delta')$ automata az $\mathbf{A} = (A, X, \delta)$ automata AX-részautomatája, akkor $\mathbf{A}'$ a $\mathbf{A}[X', \iota_{X'}]$ egytényezős α_0-szorzat egy részautomatája.

17.10. Következmény
Nem létezik az A-véges [véges] automatáknak minimális izomorfan teljes rendszere $i \geq 1$ esetekben a véges tényezős α_i-szorzatokra.

Bizonyítás. Bármely $m \leq n$ esetén $\mathbf{V}_m$ izomorf a $\mathbf{V}_n$ automata egy AX-részautomatájával, ezért a 17.9. Lemma szerint izomorf módon beágyazható $\mathbf{V}_n$ egy egytényezős α_i-szorzatába. Ez alapján a 17.7. Tételből már adódik az állítás. □

17.11. Tétel
Létezik az A-véges automatáknak olyan izomorfan teljes $\mathcal{K}$ rendszere a véges tényezős α_i-szorzatra ($i \geq 1$), amely az A-véges automatáknak nem izomorfan teljes rendszere a véges tényezős α_0-szorzatra.

Bizonyítás. Megmutatjuk, hogy a $\mathcal{K} = \{\mathbf{V}_n; n = 2, 3, \dots\}$ rendszer az A-véges automaták nem izomorfan teljes rendszere a véges tényezős α_0-szorzatra. A 17.5. Tétel szerint elegendő megmutatni, hogy a $\mathbf{T}_m$ ($m \geq 2$) transzformációautomata nem reprezentálható izomorfan egyetlen $\mathbf{V}_n$ automata egytényezős α_0-szorzatával. Az állítást indirekt módon bizonyítjuk. Tegyük fel, hogy ψ az $\mathbf{T}_m = ([m], T_m, \delta)$ ($m \geq 2$) automata izomorf leképezése egy $\mathbf{V}_n = ([n], X_n, \delta')$ automata $\mathbf{V}_n[T_n, \varphi] = ([n], T_m, \delta'')$ egytényezős α_0-szorzatába. Nyilvánvaló, hogy $m \leq n$. Legyen $\tau \in T_m$ az $[m]$ halmaz egy olyan transzformációja, hogy minden $k \in [m]$ elemre $\tau(k) \neq k$. Ha $\varphi(\tau) = x_{uv}$ ($1 \leq u, v \leq n$) és $k \in [m]$ olyan, amelyre $\psi(k) \neq u$ ($k \in [m]$), akkor

$$\psi(\tau(k)) = \psi(\delta(k, \tau)) = \delta''(\psi(k), \tau) = \delta'(\psi(k), x_{uv}) = \psi(k).$$

Mivel a ψ leképezés injektív, ezért $\tau(k) = k$, ami ellentmond τ választásának. □

Tekintsük most a (16.5) feltétellel megadott $\mathbf{A}_0 = (\{1, 2\}, \{x_1, x_2\}, \delta_0)$ automatát. A 17.3. Következmény után megjegyeztük, hogy, hogy $\{\mathbf{A}_0\}$ az A-véges automaták izomorfan teljes rendszere a véges tényezős Gluskov szorzatra.

17.12. Lemma

Bármely $(1 \leq)i$ pozitív egész számra $\mathbf{V}_n$ akkor és csak akkor reprezentálható izomorfan $\mathbf{A}_0$ egy véges α_i-hatványával, ha $1 \leq n \leq 2^i$.

Bizonyítás. Tegyük fel, hogy $\mathbf{V}_n$ $(n \geq 1)$ izomorfan reprezentálható $\mathbf{A}_0$ egy m tényezős α_i-hatványával $(i \geq 1)$. Nyilvánvaló, hogy $n \leq 2^m$. A 17.7. Tétel bizonyítása szerint feltehető, hogy $m \leq i$. Így valóban $1 \leq n \leq 2^i$.

Az elegendőség bizonyításához tegyük fel, hogy $1 \leq i$ és $1 \leq n \leq 2^i$. Tekintsük az $[n]$ halmaz egy injektív ψ leképezését az $\{1,2\}^i$ halmazba. Minden $k \in [n]$ esetén legyen $\psi(k) = (k_1, \dots k_i)$. Nyilvánvaló, hogy minden $u, v \in [n]$ párhoz van olyan $\mathbf{Y}_{uv} = (y_{uv}^{(1)}, \dots, y_{uv}^{(i)}) \in \{x_1, x_2\}^i$, amelyre $\delta_0(u_t, y_{uv}^{(t)}) = v_t$ $(t \in [i])$. Vegyük azt az $\mathbf{A} = \mathbf{A}_0^i[X_n, \varphi]$ α_i-hatványt, ahol tetszőleges $t, u, v \in [n]$ hármasra a $t = u$ esetben $\varphi(t_1, \dots, t_i, x_{uv}) = \mathbf{y}_{uv}$, s minden más esetben $\varphi(t_1, \dots, t_i, x_{uv}) = \mathbf{y}_{tt}$. A ψ leképezés a $\mathbf{V}_n$ automata izomorf leképezése $\mathbf{A}$-ba. □

17.13. Tétel

A véges tényezős α_{i+1}-szorzat izomorfan általánosabb a véges tényezős α_i-szorzatnál. Továbbá a véges tényezős Gluskov szorzat izomorfan általánosabb minden véges tényezős α_i-szorzatnál.

Bizonyítás. A 17.7. Tétel bizonyításából kaptuk, hogy bármely i pozitív egész számra a $\mathcal{K} = \{\mathbf{V}_n; n = 2, 3, \dots\}$ rendszer az A-véges automaták izomorfan teljes rendszere a véges tényezős α_i-szorzatra $(i \geq 1)$. A 17.11. Tétel bizonyításában láthattuk, hogy $\mathcal{K}$ az A-véges automatáknak nem izomorfan teljes rendszere a véges tényezős α_0-szorzatra. Ezekből, a 17.12. Lemmát is felhasználva, kapjuk, hogy minden véges tényezős α_{i+1}-szorzat izomorfan általánosabb a véges tényezős α_i-szorzatnál. Végül a 17.12. Lemmából az is következik, hogy az $\{\mathbf{A}_0\}$ rendszer az A-véges automatáknak nem izomorfan teljes rendszere a véges tényezős α_i-szorzatokra $(i \geq 1)$. Ez azt jelenti, hogy véges tényezős Gluskov szorzat izomorfan általánosabb minden véges tényezős α_i-szorzatnál. □

A 17.13. Tételt úgy is kimondhatjuk, hogy a Gécseg szorzathierarchia a véges tényezős szorzatok izomorf reprezentációjára egy valódi hierarchia, még akkor is, ha hozzávesszük a véges tényezős Gluskov szorzatot.

Emlékeztetünk arra, hogy az egytényezős α_0-szorzatok pontosan az egytényezős kvázidirekt szorzatok. A Mealy automaták kvázidirekt szorzatokra vonatkozó izomorfan teljes rendszereiben is fontos szerepet játszanak az egytényező szorzatok. A következő lemma mutatja, hogy ezek a rendszerek szoros kapcsolatban vannak a szubdirekt irreducibilis automatákkal. Megjegyezzük, hogy a 17.6. Következmény szerint az A-véges [véges] automatáknak nem létezik minimális izomorfan teljes rendszere a véges tényezős

α_0-szorzatra, s így a véges tényezős kvázidirekt [heterogén direkt, direkt] szorzatra, valamint a véges tényezős szuperpozícióra sem.

17.14. Tétel
Az automaták egy $\mathcal{K}$ rendszere akkor és csak akkor izomorfan teljes rendszer a kvázidirekt szorzatra, ha minden szubdirekt irreducibilis automata izomorfan reprezentálható egy $\mathcal{K}$-beli automata egytényezős kvázidirekt szorzatával.

Bizonyítás. Tegyük fel, hogy $\mathcal{K}$ izomorfan teljes rendszer a kvázidirekt szorzatra. Legyen $\mathbf{A} = (A, X, \delta)$ tetszőleges szubdirekt irreducibilis automata. Akkor vannak olyan $\mathcal{K}$-beli $\mathbf{A}_k = (A_k, X_k, \delta_k)$ $(k \in I)$ automaták, hogy $\mathbf{A}$ izomorf módon beágyazható a $\prod_{k\in I} \mathbf{A}_k[X, \varphi]$ kvázidirekt szorzatba. A 13.5. Tétel szerint ez a kvázidirekt szorzat egyenlő az $\mathbf{A}^*_k = (A_k, X, \delta^*_k)$ $(k \in I)$ automaták direkt szorzatával, ahol minden $a_k \in A_k$ állapotra és $x \in X$ bemenő jelre $\delta^*_k(a_k, x) = \delta_k(a_k, \varphi_k(x))$ teljesül. A 12.9. Lemma szerint $\mathbf{A}$ izomorf az $\mathbf{A}^*_k$ $(k \in I)$ automaták bizonyos $\mathbf{B}^*_k$ részautomatáinak szubdirekt szorzatával. Mivel $\mathbf{A}$ szubdirekt irreducibilis, ezért van olyan $k \in I$ index, hogy $\mathbf{A}$ izomorf a $\mathbf{B}^*_k$ automatával. Ez azt jelenti, hogy $\mathbf{A}$ izomorfan reprezentálható $\mathbf{A}_k[X, \varphi_k]$ egytényezős kvázidirekt szorzattal.

Megfordítva, legyen $\mathcal{K}$ az automaták olyan rendszere, hogy minden szubdirekt irreducibilis automata izomorfan reprezentálható egy $\mathcal{K}$-beli automata egytényezős kvázidirekt szorzatával. Minthogy minden direkt szorzat kvázidirekt szorzat, a 13.5. és a 12.8. Tételekből, valamint a 13.7. Lemmából kapjuk, hogy $\mathcal{K}$ izomorfan teljes rendszer a kvázidirekt szorzatra. □

A 13.5. és a 17.14. Tételek segítségével könnyen beláthatjuk a következő állítást.

17.15. Következmény
Az automaták egy $\mathcal{K}$ rendszere akkor és csak akkor izomorfan teljes rendszer a direkt szorzatra, ha minden szubdirekt irreducibilis automata izomorf egy $\mathcal{K}$-beli automata valamely részautomatájával.

A 17.15. Következményből is látható, amint azt már megjegyeztük, hogy a szubdirekt irreducibilis automaták izomorfan teljes rendszert alkotnak a direkt szorzatra.

17.16. Lemma
Bármely n állapotú $\mathbf{A} = (A, X, \delta)$ automata izomorf a

$$\mathbf{T}_n = ([n], T_n, \delta_n)$$

teljes transzformációautomata egy $\mathbf{T}_n[X, \varphi]$ egytényezős kvázidirekt szorzatával.

Bizonyítás. Az általánosság megszorítása nélkül feltehetjük, hogy $A = [n]$. Adjuk meg a $\varphi : X \to T_n$ visszacsatolási függvényt a $\varphi(x) = \delta_x$ $(x \in X)$ feltétellel, ahol δ_x az A állapothalmaz (3.1)-ben definiált transzformációja. Tekintsük a $\mathbf{T}_n[X, \varphi] = ([n], X, \delta')$ egytényezős kvázidirekt szorzatot. Akkor minden $j \in [n]$ és $x \in X$ esetén

$$\delta'(j, x) = \delta_n(j, \varphi(x)) = \delta_n(j, \delta_x) = \delta_x(j) = \delta(j, x),$$

azaz $\delta' = \delta$. □

17.17. Tétel
Az automaták egy $\mathcal{K}$ rendszere az A-véges automaták izomorfan teljes rendszere a véges tényezős kvázidirekt szorzatra akkor és csak akkor, ha minden pozitív egész n-re $\mathbf{T}_n$ teljes transzformáció automata izomorfan reprezentálható valamely $\mathcal{K}$-beli automata egytényezős kvázidirekt szorzatával.

Bizonyítás. A 17.4. Lemma szerint minden n pozitív egész számra a $\mathbf{T}_n$ teljes transzformáció automata egyszerű, s így szubdirekt irreducibilis. Mivel a kvázidirekt szorzat asszociatív, ezért a 17.14. Tételből és a 17.16. Lemmából könnyen következik az állítás. □

Minden egytényezős σ-szorzat egytényezős kvázidirekt szorzat, ezért a 17.5. és a 17.17. Tételekből azonnal adódik a

17.18. Tétel
Az automaták egy $\mathcal{K}$ rendszere az A-véges automaták izomorfan teljes rendszere a véges tényezős α_0-szorzatra akkor és csak akkor, ha izomorfan teljes rendszere a véges tényezős kvázidirekt szorzatra.

17.19. Következmény
Az automaták egy $\mathcal{K}$ rendszere az A-véges automaták izomorfan teljes rendszere a véges tényezős direkt szorzatra akkor és csak akkor, ha minden pozitív egész n-re $\mathbf{T}_n$ teljes transzformáció automata izomorf egy $\mathcal{K}$-beli automata valamely részautomatájával.

18. A Krohn–Rhodes tétel

A fejezet célja az automataelmélet egyik legmélyebb eredményének az ún. Krohn–Rhodes tételnek ismertetése. A tételből az is következik, hogy az A-véges Mealy automatáknak, s így a Mealy automatáknak nincs véges homomorfan teljes rendszere a véges tényezős α_0-szorzatokra. A tétel bizonyításához néhány csoportelméleti eredményt is felhasználunk. Ezeket, mivel az algebra alapkurzusai általában nem tartalmazzák, a teljesség kedvéért be is bizonyítjuk.

Egy természetes definícióval kezdjük a vizsgálatokat. Egy *félcsoport részcsoportján* olyan részfélcsoportját értjük, amely csoport az adott műveletre.

18.1. Lemma

Ha φ az S véges félcsoport homomorf leképezése a G csoportra, akkor S-nek van olyan K részcsoportja, hogy φ_K a K csoport homomorf leképezése G-re.

Bizonyítás. Legyen E az S félcsoport idempotens elemeinek halmaza. Az S végességéből következik, hogy $E \neq \emptyset$. Legyen St az $S_E = \{Su; u \in E\}$ halmaz egy minimális eleme a halmazelméleti tartalmazásra. Nem nehéz látni, hogy tSt az S részfélcsoportja és t a tSt egységeleme. Ha $f \in E$ olyan, amelyre $f \in tSt$, azaz $f = tut$ valamilyen $u \in S$ elemre, akkor $Sf = Stut \subseteq St$. Mivel St minimális elem, ezért $Sf = St$. Így, mivel $t \in St$, van olyan $s' \in S$, hogy $t = s'f$. Innen

$$t = s'f = s'ff = tf = ttut = tut = f,$$

azaz t a tSt egyetlen idempotens eleme. Mivel tSt véges, ezért bármely $s \in S$ esetén van olyan n pozitív egész szám, hogy $(tst)^n$ a tSt idempotens eleme, azaz $(tst)^n = t$. Feltehető, hogy $n > 1$, ha ugyanis $tst = t$, akkor $(tst)^2 = t$ is teljesül. Ez azt jelenti, hogy $(tst)^{n-1}$ az tst elem inverze, következésképpen tSt csoport.

Minthogy idempotens elem homomorf képe is idempotens és csoportban az egységelem az egyetlen idempotens elem, ezért bármely $s \in S$ elemre

$$\varphi(tst) = \varphi(t)\varphi(s)\varphi(t) = \varphi(s),$$

azaz φ_{tSt} a tSt részcsoport homomorf leképezése G-re. $\square$

Legyen S az $A \neq \emptyset$ halmaz egy transzformációfélcsoportja, $S' \neq \emptyset$ S-nek, $A' \neq \emptyset$ pedig A-nak egy részhalmaza. Vezessük be az

$$S'_{A'} = \{\tau_{A'}; \tau \in S'\}$$

jelölést. Ha $\tau, \tau' \in S'$ elemekre $\tau_{A'}$ és $\tau'_{A'}$ az A' transzformációi, akkor $(\tau \circ \tau')_{A'}$ is transzformációja A'-nek és $(\tau \circ \tau')_{A'} = \tau_{A'} \circ \tau'_{A'}$. Ha S' és A' olyanok, hogy minden $\tau \in S'$ esetén $\tau_{A'}$ az A' egy transzformációja, akkor a $\varphi(\tau) = \tau_{A'}$ $(\tau \in S')$ megfeleltetés $< S' >$ homomorf leképezése $< S_{A'} >$-re. Ha S' részfélcsoportja is S-nek, akkor $< S' >= S'$ és $< S'_{A'} >= S'_{A'}$.

18.2. Lemma

Legyen $A \neq \emptyset$ tetszőleges véges halmaz és S az A egy transzformációfélcsoportja. Ha K az S egy részcsoportja, akkor A-nak van olyan A' részhalmaza, hogy $K_{A'}$ az A' egy olyan permutációcsoportja, amelyik izomorf K-val.

Bizonyítás. Legyen κ a K egységeleme és $A' = \kappa(A)$. Nyilvánvaló, hogy $\kappa_{A'} = \iota_{A'}$. Ha $\tau \in K$, akkor

$$\tau(A') = \tau(\kappa(A)) = (\kappa \circ \tau)(A) = \tau(A),$$

amiből

$$A' = \kappa(A') = (\tau^{-1} \circ \tau)(A') = \tau(\tau^{-1}(A')) \subseteq \tau(A) = \tau(A').$$

Hasonlóan $A' \subseteq \tau^{-1}(A')$, így

$$A' \subseteq \tau(A') \subseteq \tau(\tau^{-1}(A')) = (\tau^{-1} \circ \tau)(A') = \kappa(A') = A',$$

ezért $\tau(A') = A'$. Az A végességéből következik, hogy $\tau_{A'}$ a az A' egy permutációja.

Az előzőekből látszik, hogy $\tau_{A'} \circ (\tau^{-1})_{A'} = (\tau^{-1})_{A'} \circ \tau_{A'} = \kappa_{A'}$, azaz $K_{A'}$ az A' egy permutációcsoportja, amelynek egységeleme $\kappa_{A'}$ és tetszőleges $\tau_{A'}$ elemének inverze $(\tau^{-1})_{A'}$, vagyis $(\tau_{A'})^{-1} = (\tau^{-1})_{A'}$.

A $\varphi(\tau) = \tau_{A'}$ $(\tau \in K)$ megfeleltetés K-nak $K_{A'}$-re való leképezése. Megmutatjuk, hogy φ egy-egyértelmű. Legyenek $\tau, \tau' \in K$, amelyekre $\tau_{A'} = \tau'_{A'}$. Akkor minden $a \in A$ elemre

$$\tau(a) = (\kappa \circ \tau)(a) = \tau(\kappa(a)) = \tau_{A'}(\kappa(a)) =$$

$$= \tau'_{A'}(\kappa(a)) = \tau'(\kappa(a)) = (\kappa \circ \tau')(a) = \tau'(a),$$

azaz $\tau = \tau'$. De $(\tau \circ \tau')_{A'} = \tau_{A'} \circ \tau'_{A'}$ $(\tau, \tau' \in K)$, ezért φ K-nak $K_{A'}$-re való izomorfizmusa. □

18.3. Lemma

Legyen $A \neq \emptyset$ tetszőleges véges halmaz, S az A egy transzformációfélcsoportja és $A' \neq \emptyset$ A egy részhalmaza. Jelölje S' az S félcsoportnak azt a részhalmazát, amelyre $S'_{A'}$ elemei A' permutációi. Ha $S' \neq \emptyset$, akkor van S-nek olyan K részcsoportja, amelynek az A' részhalmaz $S'_{A'}$ által generált $< S'_{A'} >$ permutációcsoportja homomorf képe.

Bizonyítás. Jelölje $< S' >$ az S félcsoport S' részhalmaza által generált részfélcsoportját. Legyen E az $< S' >$ idempotens elemeinek halmaza. Az S végessége miatt $E \neq \emptyset$. Legyen $< S' > \circ t$ az $S_E = \{< S' > \circ u; u \in E\}$ halmaz egy minimális eleme a halmazelméleti tartalmazásra. Legyen $K = t \circ < S' > \circ t$. Ugyanúgy, mint a 18.1. Lemma bizonyításában, megmutatható, hogy K az $< S' >$-nek, s így S-nek is részcsoportja, amelynek t az egységeleme.

Mivel minden $b \in A'$ elemhez van olyan $a \in A'$, hogy $t(a) = b$, s így

$$b = t(a) = (t \circ t)(a) = t(t(a)) = t(b),$$

ezért $t_{A'} = \iota_{A'}$.

Definiáljuk a $\varphi : K \to< S'_{A'} >$ megfeleltetést úgy, hogy minden $s \in< S' >$ esetén $\varphi(t \circ s \circ t) = s_{A'}$ teljesüljön. Ha $s = s_1 \circ s_2 \circ \cdots \circ s_l$ $(s_1, s_2, \ldots, s_l \in S')$, akkor $s_{A'} = (s_1 \circ s_2 \circ \cdots \circ s_l)_{A'} = (s_1)_{A'} \circ (s_2)_{A'} \circ \cdots \circ (s_l)_{A'}$, ezért φ a K részcsoport $< S'_{A'} >$-re való leképezése. Ha $s, v \in< S' >$, akkor

$$\varphi((t \circ s \circ t) \circ (t \circ v \circ t)) = \varphi(t \circ s \circ t \circ t \circ v \circ t) = \varphi(t \circ s \circ t \circ v \circ t) =$$

$$= (s \circ t \circ v)_{A'} = s_{A'} \circ t_{A'} \circ v_{A'} = s_{A'} \circ v_{A'} = \varphi(t \circ s \circ t) \circ \varphi(t \circ v \circ t),$$

azaz φ homomorfizmus. □

Legyen $(S, \cdot)$ tetszőleges félcsoport. Definiáljuk az $\mathbf{S} = (S^1, S, \delta)$ automata δ átmenetfüggvényét a

$$\delta(s, t) = s \cdot t \quad (s \in S^1,\ t \in S) \tag{18.1}$$

feltétellel. Az $\mathbf{S}$ automatát *félcsoportautomatá*nak fogjuk nevezni. Ha S monoid, akkor $\mathbf{S} = (S, S, \delta)$ félcsoportautomatát *monoidautomatá*nak, ha pedig G [egyszerű] csoport, akkor a $\mathbf{G} = (G, G, \delta)$ félcsoportautomatát [*egyszerű*] *csoportautomatá*nak mondjuk. Az $\mathbf{S}'$ félcsoportautomatát az $\mathbf{S}$ félcsoportautomata *részfélcsoportautomatájá*nak nevezzük, nevezzük, ha S' részfélcsoportja S-nek. A G' csoportautomatát az G csoportautomata *részcsoportautomatájá*nak mondjuk, ha G' részcsoportja G-nek. Minden félcsoportautomata ciklikus és minden csoportautomata erősen összefüggő. Ha $\alpha : S \to S'$ leképezés az S félcsoport homomorf leképezése S'-be, akkor azt mondjuk, hogy α az $\mathbf{S}$ félcsoportautomata *homomorf leképezése* $\mathbf{S}'$ félcsoportautomatába. Ez tulajdonképpen az $\mathbf{S}$ félcsoportautomata általános homomorf leképezése $\mathbf{S}'$-be. Értelemszerűen beszélünk homomorfizmusról, homomorf képről, izomorfizmusról.

A definícióból nyilvánvalóan következik, hogy bármely S félcsoport [monoid] esetén az $\mathbf{S}$ félcsoportautomata [monoidautomata] $S(\mathbf{S})$ karakterisztikus félcsoportja [monoidja] S.

Egy $\mathbf{A} = (A, X, \delta)$ automata $x \in X$ bemenő jelét *beállító jel*nek nevezzük, ha van olyan $c_x \in A$ állapot, hogy minden $a \in A$ esetén $\delta(a, x) = c_x$. Ebben az esetben $\mathbf{A}$ nyilvánvalóan irányítható automata. Ha a (3.1)-ben definiált δ_x leképezés A egy permutációja, akkor x-t *permutáció jel*nek mondjuk. Speciálisan, ha $\delta_x = \iota_A$, akkor x-et *identikus jel*nek hívjuk. Jelölje rendre X_b, X_p, X_i az $\mathbf{A}$ automata beállító, permutáció ill. identikus jeleinek halmazát. Nyilvánvalóan $X_i \subseteq X_p$. A $\kappa : X_b \to A$ függvényt, amelyre $\kappa(x) = c_x$

teljesül, *beállító függvény*nek nevezzük. Ha $X_b \neq \emptyset$ és $X = X_i \cup X_b$, akkor az $\mathbf{A}$ automatát *beállító automatá*nak nevezzük. Emlékeztetünk arra, hogy az $\mathbf{A} = (A, X, \delta)$ automatát *teljes beállító automatá*nak neveztük, ha bármely $a, b \in A$ és $x \in X$ esetén $\delta(a, x) = \delta(b, x)$ teljesül. Ez azt jelenti, hogy $\mathbf{A}$ minden bemenő jele beállító jel, azaz $X_b = X$, vagyis minden teljes beállító automata beállító automata. Ha $X_i = X$, akkor pedig $\mathbf{A}$-t *diszkrét*nek hívtuk. Így minden diszkrét automata is beállító automata. Ha $X_p = X$, akkor $\mathbf{A}$-t *permutációautomatá*nak nevezzük. A-véges permutációautomata karakterisztikus félcsoportja állapothalmazának egy permutációcsoportja. Ebből következik, hogy minden A-véges permutációautomata reverzibilis, s így a 2.4. Tétel szerint erősen összefüggő automaták direkt összege. Általában, ha $X_p \cup X_b = X$, akkor pedig $\mathbf{A}$ *permutáció-beállító automata*. Így minden beállító és minden permutációautomata permutáció-beállító automata. Minden csoportautomata permutáció-beállító automata. Ha $X_i \neq \emptyset, X_b \neq \emptyset$ és $X_i \cup X_b = X$, akkor $\mathbf{A}$ *identikus-beállító automata*. Látható, hogy minden identikus-beállító automata egy permutáció-beállító automata. Ha $\mathbf{A}$ permutáció-beállító automata, akkor a $\{\delta_x; x \in X_p\}$ halmaz, ha nemüres, akkor az $S^1(\mathbf{A})$ karakterisztikus monoid egy részcsoportját generálja. Jelöljük ezt a részcsoportot $S_p(\mathbf{A})$-val. A (6.3) definíció szerint $S_p(\mathbf{A}) = \{\delta_q; q \in X_p^*\}$.

A (16.4), (16.5), ill. (16.6) feltételekkel definiált kétállapotú erősen összefüggő automaták rendre permutáció-beállító, permutáció- ill. teljes beállító automaták. A Leticsevszkij és Gluskov kritériumok szerint ezek az automatatípusok jelentős szerepet játszanak az elmélet kiépítésében.

Legyen $\mathbf{A} = (A, X, \delta)$ tetszőleges automata. Az A állapothalmaz részhalmazainak egy $\mathcal{M}$ rendszerét *A feletti halmazrendszer*nek hívjuk, ha

$$\cup_{H \in \mathcal{M}} H = A.$$

Az $\mathcal{M}$ halmazrendszer *triviális*, ha minden $H \in \mathcal{M}$ esetén $|H| = 1$. Az $\mathcal{M}$ elemeit *blokkok*nak fogjuk nevezni. Ha A egy részhalmaza többször is szerepel $\mathcal{M}$-ben, akkor ezeket jelölésben megkülönböztetjük egymástól, azaz $\mathcal{M}$-et halmaznak tekintjük. A $H \in \mathcal{M}$ blokkot *maximális blokk*nak mondjuk, ha minden $H' \in \mathcal{M}$ blokk esetén $|H'| \leq |H|$. Nyilvánvaló, hogy minden maximális blokk egyenlő számosságú. Ha az $\mathbf{A}$ automata A-véges, akkor bármely halmazrendszerének vannak maximális blokkjai. Azt mondjuk, hogy $\mathcal{M}$ az $\mathbf{A}$ automatának *lefedő halmazrendszer*e, ha minden $H \in \mathcal{M}$ blokkhoz és $x \in X$ bemenő jelhez van olyan $H' \in \mathcal{M}$ blokk, hogy

$$\delta(H, x) = \{\delta(a, x); a \in H\} \subseteq H'. \tag{18.2}$$

Az $\mathbf{M} = (\mathcal{M}, X, \delta')$ automatát az $\mathbf{A}$ automata *M-faktor*ának nevezzük, ha $\mathcal{M}$ az $\mathbf{A}$ automata egy lefedő halmazrendszere, továbbá minden $H, H' \in \mathcal{M}$

és $x \in X$ esetén

$$\delta'(H,x) = H' \quad \Longrightarrow \quad \delta(H,x) \subseteq H'. \tag{18.3}$$

Bármely $H \in \mathcal{M}$ és $p \in X^*$ esetén legyen $Hp = \{ap; a \in H\}$. Így a (18.2)-ben definiált $\delta(H,x)$ halmaz írható Hx alakban is. Könnyen látható, hogy minden $H \in \mathcal{M}$ és $p \in X^*$ párhoz van olyan $H' \in \mathcal{M}$, hogy $Hp \subseteq H'$.

Vegyük észre, hogy a lefedő halmazrendszer fogalma a kompatibilis osztályozás általánosítása. Ha ugyanis $\mathcal{M}$ az A állapothalmaz osztályozása, akkor $\mathcal{M}$ kompatibilis osztályozás. Lássuk be azt is, hogy egy $\mathcal{M}$ lefedő halmazrendszerhez, ha az nem kompatibilis osztályozás, több $\mathcal{M}$-faktor is tartozhat, azaz egy $\mathcal{M}$-faktor az $\mathcal{M}$ lefedő halmazrendszer által nincs feltétlenül egyértelműen meghatározva.

18.4. Példa

A	1	2	3	4	5	6	7	8
x	6	8	5	3	5	4	6	7
y	2	2	2	7	2	1	5	3

Tekintsük a $H_1\{1,2,3\}$, $H_2 = \{3,5,6,8\}$ és $H_3 = \{2,4,5,7\}$ halmazokból álló $\mathcal{M}$ halmazredszert. A

$$\delta(H_1,x) = \{5,6,8\} \subseteq H_2, \quad \delta(H_1,y) = \{2\} = H_1 \cap H_3,$$

$$\delta(H_2,x) = \{4,5,7\} \subseteq H_3, \quad \delta(H_2,y) = \{1,2,3\} = H_1$$

$$\delta(H_3,x) = \{3,5,6,8\} = H_2, \quad \delta(H_3,y) = \{2,5,7\} \subseteq H_3$$

összefüggések mutatják, hogy $\mathcal{M}$ az **A** automata lefedő halmazrendszere. Az $\mathcal{M}$-hez az **A** automata

B	H_1	H_2	H_3
x	H_2	H_3	H_2
y	H_1	H_1	H_3

C	H_1	H_2	H_2
x	H_2	H_3	H_2
y	H_3	H_1	H_3

$\mathcal{M}$-faktorait tudjuk megszerkeszteni.

18.5. Tétel
Legyen $\mathcal{M}$ az $\mathbf{A} = (A, X, \delta)$ A-véges automata egy nemtriviális véges lefedő halmazrendszere. Ha $\mathbf{M} = (\mathcal{M}, X, \delta_M)$ az $\mathbf{A}$ automata egy $\mathcal{M}$-faktora, akkor létezik olyan $\mathbf{B} = (B, X', \delta_B)$ A-véges permutáció-beállító automata és $\mathbf{A}$-nak olyan $\mathbf{M}' = (\mathcal{M}', X, \delta_{M'})$ $\mathcal{M}'$-faktora, hogy teljesülnek a következő feltételek:

(i) $\mathcal{M}'$ az $\mathbf{A}$ olyan lefedő halmazrendszere, amely valódi finomítása $\mathcal{M}$-nek;
(ii) $\mathbf{M}'$ homomorfan reprezentálható $\mathbf{M}$ és $\mathbf{B}$ szuperpozíciójával;
(iii) $S_p(\mathbf{B})$ az $S^1(\mathbf{A})$ karakterisztikus monoid egy részcsoportjának homomorf képe.

Bizonyítás. Legyen $\mathcal{M}$ az $\mathbf{A} = (A, X, \delta)$ A-véges automata egy nemtriviális lefedő halmazrendszere és $\mathbf{M} = (\mathcal{M}, X, \delta_M)$ az $\mathbf{A}$ automata egy $\mathcal{M}$-faktora. Mindenekelőtt megmutatjuk, hogy van $\mathcal{M}$ maximális elemeinek olyan $\overline{\mathcal{M}} = \{H_1, H_2, \ldots, H_m\}$ halmaza, amely kielégíti a következő feltételeket:

(1) Nincs olyan $H \in \mathcal{M} - \overline{\mathcal{M}}$, hogy alkalmas $H_i \in \overline{\mathcal{M}}$ és $p \in X^*$ párra $Hp = H_i$ teljesülne;
(2) Bármely $H_i, H_j \in \overline{\mathcal{M}}$ párhoz létezik olyan $p \in X^*$, hogy $H_i p = H_j$.

Legyen e célból $\mathcal{C}$ az $\mathcal{M}$ halmazrendszer maximális elemeinek az az osztályozása, amelynél H_i és H_j akkor és csak akkor vannak ugyanabban a C-osztályban, ha vannak olyan $p, q \in X^*$, hogy $H_i p = H_j$ és $H_j q = H_i$. Definiáljuk a $\mathcal{C}$-osztályok halmazán $\leq$ parciális rendezést úgy, hogy $\mathcal{C}[H_i] \leq \mathcal{C}[H_j]$ akkor és csak akkor, ha van olyan $r \in X^*$, hogy $H_i r = H_j$. A $\leq$ parciális rendezésre bármely minimális elem teljesíti az (1) és a (2) feltételeket. Legyen $\overline{\mathcal{M}} = \{H_1, H_2, \ldots, H_m\}$ egy tetszőleges minimális elem a $\leq$ parciális rendezésre. Tekintsük minden $H_i \in \overline{\mathcal{M}}$ elemre azoknak az Hp $(p \in X^*)$ halmazoknak a $\overline{H}_i$ halmazát, amelyekre $H \in \mathcal{M}$ és $Hp \subseteq H_i$. A $p = e$ választással kapjuk, hogy $H_i \in \overline{H}_i$, azaz $\overline{H}_i \neq \emptyset$. Bővítsük ezután $\overline{H}_i$-t H_i egyelemű részhalmazaival, és töröljük belőle H_i-t. Legyen végül H_i' az így kapott halmaz azon elemeinek halmaza, amelyek maximálisak a halmazelméleti tartalmazásra.

Ha $\mathcal{M} - \overline{\mathcal{M}} = \{H_{m+1}, \ldots, H_k\}$, akkor az $\mathcal{M}'$ halmazrendszert úgy származtatjuk $\mathcal{M}$-ből, hogy $H_{m+1}, \ldots, H_k \in \mathcal{M}'$, és minden $\overline{\mathcal{M}}$-beli H_i elemet kicseréljük H_i' elemeivel. (Ha egy részhalmaz többször is előfordul $\mathcal{M}'$ szerkesztésekor, akkor azokat jelölésben megkülönböztetjük egymástól.) A szerkesztésből látható, hogy $\mathcal{M}'$ valódi finomítása $\mathcal{M}$-nek. Megmutatjuk, hogy $\mathcal{M}'$ az $\mathbf{A}$ automata lefedő halmazrendszere. Azt nem nehéz belátni, hogy $\cup_{H \in \mathcal{M}'} = A$. A $\mathcal{M}'$ konstrukciójából látható, hogy bármely $H \in \mathcal{M}'$ és $x \in X$ esetén Hx vagy egy $(\mathcal{M} - \overline{\mathcal{M}})$-beli blokk része, vagy pedig valódi része egy $\overline{\mathcal{M}}$-beli blokknak. Ez a $H \in \mathcal{M} - \overline{\mathcal{M}}$ esetben a konstrukcióból közvetlenül látható. Ha $H \in H_i'$, ahol $H_i \in \overline{\mathcal{M}}$, akkor $H \subset H_i$. Ezért van olyan $H' \in \mathcal{M}$, hogy $Hx \subset H_i x \subseteq H'$. Ha $H' \in \mathcal{M} - \overline{\mathcal{M}}$, akkor $H' \in \mathcal{M}'$. Ha pedig $H' \in \overline{\mathcal{M}}$, akkor $H' = H_j$, ahol $j \in \{1, 2, \ldots, m\}$. Így van olyan $H'' \in H_j'$, amelyre $Hx \subset H_i x \subseteq H''$. (A Hx halmaz csak abban az esetben lehetne $\overline{\mathcal{M}}$-beli blokk, ha $H \in \overline{\mathcal{M}}$, azonban ezeket a blokkokat töröltük.)

Most megmutatjuk, hogy minden $H_i \in \overline{\mathcal{M}}$ esetén H_i' ugyanannyi elemet tartalmaz. Az egyszerűség kedvéért bármely $p \in X^*$ esetén jelöljük szintén p-vel A bármely nemüres A' részhalmazára az $a \to ap$ ($a \in A'$) leképezést. Legyen $H_i' = \{H_{i1}, H_{i2}, \ldots, H_{in_i}\}$ $(i = 1, 2, \ldots, m)$. Az $\overline{\mathcal{M}}$ definíciójából következik, hogy vannak olyan $p_{ij} \in X^*$, amelyekre $H_i p_{ij} = H_j$ $(i, j = 1, 2, \ldots, m)$. Így $H_i p_{ij} p_{ji} = H_i$. Mivel $|H_i| = |H_j|$, ezért p_{ij}-k bijekciók. Ez azt jelenti, hogy $p_{ij}p_{ji}$-k a H_i halmazok permutációi. A H_i halmazok végességéből következik, hogy vannak olyan k_{ij} pozitív egész számok, amelyekre $(p_{ij}p_{ji})^{k_{ij}} = \iota_{H_i}$. Ezért $(p_{ij}p_{ji})^{k_{ij}-1}p_{ji}$ H_i-nek H_j-re való leképezése. A $\mathcal{M}'$ lefedő halmazrendszer, ezért $(p_{ij}p_{ji})^{k_{ij}-1}p_{ij}$ minden H_{is} $(s = 1, 2, \ldots, n_i\})$ blokkot leképez egy H_{jt} $(t \in \{1, 2, \ldots, n_j\}$ blokkba. Azonban

$$H_{is} = H_{is}(p_{ij}p_{ji})^n = (H_{is}(p_{ij}p_{ji})^{k_{ij}-1}p_{ij})p_{ji} \subseteq H_{jt}p_{ji}.$$

A p_{ji} leképezés H_j-t H_i-re képezi és $\mathcal{M}'$ lefedő halmazrendszer, ezért van olyan $u \in \{1, 2, \ldots, n_i\}$, hogy $H_{jt}p_{ji} \subseteq H_{iu}$. De a H_{iv} $(v = 1, 2, \ldots, n_i)$ halmazok definíció szerint a halmazelméleti tartalmazásra maximálisak, így $H_{is} = H_{iu} = H_{jt}p_{ji}$. Mivel p_{ji} bijekció, ebből kapjuk, hogy $|H_{is}| = |H_{jt}|$. De $(p_{ij}p_{ji})^{k_{ij}-1}p_{ij}$ is bijekció, ezért $H_{is}(p_{ij}p_{ji})^{k_{ij}-1}p_{ij} = H_{jt}$. Legyen $H_{is'} \neq H_{is}$. Az előzőek szerint $(p_{ij}p_{ji})^{k_{ij}-1}p_{ij}$ egy-egyértelműen képezi le $H_{is'}$-t egy $H_{jt'}$ blokkra. Mivel $|H_{is} \cup H_{is'}| > |H_{is}| = |H_{jt}|$, ezért $H_{jt} \neq H_{jt'}$. A H_i és H_j blokkok szerepét felcserélve kapjuk, hogy $n_i = n_j = n$. Jelöljük át úgy a blokkokat, hogy

$$H_{is} = H_{1s}(p_{1i}p_{i1})^{k_{1i}-1}p_{1i} \quad i = 1, 2, \ldots, m, \ s = 1, 2, \ldots, n.$$

Ebben az esetben

$$H_{1s} = H_{is}p_{i1} \quad i = 1, 2, \ldots, m \ s = 1, 2, \ldots, n.$$

Akkor

$$H_{js} = H_{1s}(p_{1j}p_{j1})^{k_{1j}-1}p_{1j} = (H_{is}p_{i1})(p_{1j}p_{j1})^{k_{1j}-1}p_{1j} \quad (j = 1, 2, \ldots, m).$$

Nyilvánvaló, hogy $q_{ij} = p_{i1}(p_{1j}p_{j1})^{k_{1j}-1}p_{1j}$ a H_i blokk egy bijektív leképezése a H_j blokkra és

$$H_{is}q_{ij} = H_{js} \quad (i, j = 1, 2, \ldots, m, \ s = 1, 2, \ldots, n).$$

Az **A** automata $\mathbf{M} = (\mathcal{M}, X, \delta_M)$ $\mathcal{M}$-faktora segítségével definiáljuk az **A** automata $\mathbf{M}' = (\mathcal{M}', X, \delta_{M'})$ $\mathcal{M}'$-faktorát a következő módon: Legyenek $H_i \in \mathcal{M}$, $x \in X$ tetszőlegesek és $\delta_M(H_i, x) = H_j$. Ha $1 \leq i, j \leq m$ és $H_i x = H_j$, akkor minden $1 \leq s \leq n$ esetén legyen $\delta_{M'}(H_{is}, x) = H_{is}x$. (Már láttuk, hogy ebben az esetben x a H_i blokk bijektív leképezése a H_j blokkra és van olyan H_{jt} $(t \in \{1, 2, \ldots, n\})$, hogy $H_{is}x = H_{jt}$.) Ha $H_i x \subset H_j$, akkor létezik olyan H_{ju} $(u \in \{1, 2, \ldots, n\})$, amelyre $H_i x \subseteq H_{ju}$. Rögzítsünk az előbbi feltételt kielégítő H_{ju} blokkok közül egyet, s legyen erre a rögzített H_{ju}-ra $\delta_{M'}(H_{is}, x) = H_{ju}$ $(s = 1, 2, \ldots, n)$. Ha $1 \leq i \leq m$ és $m < j \leq k$, akkor minden $1 \leq s \leq n$ esetén legyen $\delta_{M'}(H_{is}, x) = H_j$. Ha pedig $m < i, j \leq n$, akkor legyen $\delta_{M'}(H_i, x) = H_j$. Végül, ha $m < i \leq n$ és $1 \leq j \leq m$, akkor létezik olyan H_{jv} $(v \in \{1, 2, \ldots, n\})$, hogy $H_i x \subseteq H_{jv}$. Ekkor legyen $\delta_{M'}(H_i, x) = H_{jv}$ egy ilyen rögzített H_{jv}-re. A konstrukció alapján belátható, hogy $\mathbf{M}' = (\mathcal{M}, X, \delta_{M'})$ az **A** automata $\mathcal{M}'$-faktora. Definiáljuk az $\mathbf{B} = (B, X', \delta_B)$ automatát az alábbi módon: Legyen $B = \{b_1, b_2, \ldots, b_n\}$ tetszőleges halmaz. (Felhívjuk a figyelmet arra, hogy az n pozitív egész szám továbbra is megegyezik a H_i' halmazok elemeinek számával.) Legyen továbbá $X' = \{(H_i, x); H_i \in \mathcal{M}, x \in X\}$. Értelmezzük a $g : \mathcal{M}' \to B$ leképezést úgy, hogy minden H_{is} $(i = 1, 2, \ldots, m,\ s = 1, 2, \ldots, n)$ esetén $g(H_{is}) = b_s$ teljesüljön. Ha pedig $m < i \leq k$, akkor legyen $g(H_i) = b_1$. Definiáljuk a δ_B függvényt a

$$\delta_B(b_s, (H_i, x)) = g(\delta_{M'}(H_{is}, x)) \quad i = 1, 2, \ldots, m,\ s = 1, 2, \ldots, n,$$

$$\delta_B(b_s, (H_i, x)) = g(\delta_{M'}(H_i, x)) \quad i = m + 1, \ldots, k,\ s = 1, 2, \ldots, n$$

összefüggések által. Tekintsük az **M** és a **B** automaták $\mathbf{C} = (\mathcal{M} \times B, X, \delta_C)$ szuperpozícióját. Legyen

$$C' = \{(H_i, b_s); 1 \leq i \leq m,\ 1 \leq s \leq n\} \cup \{(H_i, b_1); m < i \leq n\}$$

és $x \in X$. Ha $1 \leq i \leq m$ és $1 \leq s \leq n$, akkor

$$\delta_C((H_i, b_s), x) = (\delta_M(H_i, x), \delta_B(b_s, (H_i, x))) = (H_j, g(\delta_{M'}(H_{is}, x))).$$

Ha $1 \leq j \leq m$, akkor

$$g(\delta_{M'}(H_{is}, x)) = g(H_{jt}) = b_t \quad (t \in \{1, 2, \ldots, n\}).$$

Ha pedig $m < j \leq n$, akkor $g(\delta_{M'}(H_{is}, x)) = g(H_j) = b_1$. Továbbá, ha $m < i \leq n$, akkor

$$\delta_C((H_i, b_1), x) = (\delta_M(H_i, x), \delta_B(b_1, (H_i, x))) = (H_j, g(\delta_{M'}(H_i, x))).$$

Ha $m < j \leq k$, akkor $g(\delta_{M'}(H_i, x)) = g(H_j) = b_1$. Ha pedig $1 \leq j \leq m$, akkor $g(\delta_{M'}(H_i, x)) = g(H_{jv}) = b_v$. Ez azt jelenti, hogy $\mathbf{C}' = (C', X, \delta_C)$ a $\mathbf{C}$ automata részautomatája.

Legyen $\alpha : C' \to \mathcal{M}'$ az

$$\alpha(H_i, b_s) = H_{is} \quad i = 1, 2, \ldots, m,\ s = 1, 2, \ldots, n,$$

$$\alpha(H_i, b_1) = H_i \quad i = m + 1 \ldots, k$$

feltételekkel definiálva.

Ha $1 \leq i \leq m$, $1 \leq s \leq n$ és $1 \leq j \leq m$, akkor

$$\alpha(\delta_C((H_i, b_s), x)) = \alpha(\delta_M(H_i, x), \delta_B(b_s, (H_i, x))) = \alpha(H_j, g(\delta_{M'}(H_{is}, x))) =$$

$$= \alpha(H_j, g(H_{jt})) = \alpha(H_j, b_t) = H_{jt} = \delta_{M'}(H_{is}, x) = \delta_{M'}(\alpha(H_i, b_s), x).$$

Ha $1 \leq i \leq m$, $1 \leq s \leq n$ és $m < j \leq n$, akkor

$$\alpha(\delta_C((H_i, b_s), x)) = \alpha(\delta_M(H_i, x), \delta_B(b_s, (H_i, x))) = \alpha(H_j, g(\delta_{M'}(H_{is}, x))) =$$

$$= \alpha(H_j, g(H_j)) = \alpha(H_j, b_1) = H_j = \delta_{M'}(H_{is}, x) = \delta_{M'}(\alpha(H_i, b_s), x).$$

Ha $m < i \leq n$ és $m < j \leq n$, akkor

$$\alpha(\delta_C((H_i, b_1), x)) = \alpha(\delta_M(H_i, x), \delta_B(b_1, (H_i, x))) = \alpha(H_j, g(\delta_{M'}(H_i, x))) =$$

$$= \alpha(H_j, g(H_j)) = \alpha(H_j, b_1) = H_j = \delta_{M'}(H_i, x) = \delta_{M'}(\alpha(H_i, b_1), x).$$

Ha $m < i \leq n$ és $1 \leq j \leq m$, akkor

$$\alpha(\delta_C((H_i, b_1), x)) = \alpha(\delta_M(H_i, x), \delta_B(b_1, (H_i, x))) = \alpha(H_j, g(\delta_{M'}(H_i, x))) =$$

$$= \alpha(H_j, g(H_{jv})) = \alpha(H_j, b_v) = H_{jv} =$$
$$= \delta_{M'}(H_i, x) = \delta_{M'}(\alpha(H_i, b_1), x).$$

Ez azt jelenti, hogy α a $\mathbf{C}'$ automata homomorf leképezése $\mathbf{M}'$-re.

Azt kell még megmutatnunk, hogy $\mathbf{B}$ olyan permutáció-beállító automata, amely teljesíti az (iii) feltételt. Egy (H_i, x) bemenő jel a $\mathbf{B}$ automatának akkor és csak akkor permutáció jele, ha $\delta_M(H_i, x) = H_j$, $H_i x = H_j$ és $1 \leq i, j \leq m$. Ugyanis ebben az esetben tetszőleges $b_s \in B$ állapotra

$$\delta_B(b_s, (H_i, x)) = g(\delta_{M'}(H_{is}, x)) = g(H_{is}x),$$

és a $H_{is} \to H_{is}x$ $(s = 1, 2, \ldots, n)$ megfeleltetés a H_i' halmaznak H_j'-re való bijektív leképezése, továbbá, g is bijektív leképezése H_j'-nek B-re.

Megmutatjuk még, hogy minden más esetben a (H_i, x) bemenő jel beállító jel. Legyen $\delta(H_i, x) = H_j$.

Ha $H_i x \subset H_j$ és $1 \leq i, j \leq m$, akkor

$$\delta_B(b_s, (H_i, x)) = g(\delta_{M'}(H_{is}, x)) = g(H_{ju}) = b_u$$

egy rögzített u-ra.

Ha $1 \leq i \leq m$ és $m < j \leq k$, akkor minden $1 \leq s \leq n$

$$\delta_B(b_s, (H_i, x)) = g(\delta_{M'}(H_{is}, x)) = g(H_j) = b_1.$$

Ha $m < i \leq k$ és $1 \leq j \leq m$, akkor

$$\delta_B(b_s, (H_i, x)) = g(\delta_{M'}(H_i, x)) = g(H_{jv}) = b_v$$

egy rögzített v-re.

Ha pedig $m < i, j \leq n$, akkor legyen $\delta_{M'}(H_i, x) = H_j$.

$$\delta_B(b_s, (H_i, x)) = g(\delta_{M'}(H_i, x)) = g(Hj) = b_1.$$

Legyen (H_i, x) a $\mathbf{B}$ automata tetszőleges permutáció jele, azaz $(H_i, x) \in X'_p$. Ez azt jelenti, hogy $\delta_M(H_i, x) = H_j$, $H_i x = H_j$, $1 \leq i, j \leq m$ és minden $b_s \in B$ állapotra

$$\delta_B(b_s, (H_i, x)) = g(H_{is} x) = g(H_{jv}) = b_v.$$

Akkor $q_{1i} x q_{j1}$ a H_1 halmaz permutációja és

$$H_{1s} q_{1i} x q_{j1} = H_{is} x q_{j1} = H_{jv} q_{j1} = H_{1v},$$

azaz $q_{1i} x q_{j1}$ ugyanúgy permutálja H'_1 elemeit, mint (H_i, x) a B elemeit. Tehát a

$$\delta_{q_{1i} x q_{j1}} \to (\delta_B)_{(H_i, x)} \quad ((H_i, x) \in X'_p)$$

megfeleltetés a H'_1 halmaz $\{\delta_{q_{1i} x q_{j1}}; (H_i, x) \in X'_p\}$ által generált G permutációcsoportjának $S_p(\mathbf{B})$-re való izomorf leképezése. A 18.3. Lemma szerint van $S^1(\mathbf{A})$-nak olyan részcsoportja, amelynek G homomorf képe. Megjegyezzük, hogy most egy automata karakterisztikus félcsoportját 6.2. Lemma alapján a (6.3) feltétellel definiált transzformációfélcsoportnak tekintettük. □

18.6. Tétel

Minden $\mathbf{A}$ A-véges permutáció-beállító automata előállítható egy $\mathbf{B}$ A-véges permutációautomata és egy $\mathbf{C}$ A-véges beállító automata szuperpozíciójának homomorf képeként úgy, hogy az $S^1(\mathbf{B})$ karakterisztikus monoid izomorf az $S^1(\mathbf{A})$ karakterisztikus monoid $\mathbf{A}$ permutáció jelei által generált $S_p(\mathbf{A})$ részcsoportjával.

Bizonyítás. Legyen $\mathbf{A} = (A, X, \delta)$ tetszőleges A-véges permutáció-beállító automata. Jelölje X_p az $\mathbf{A}$ permutáció jeleinek halmazát és X_b pedig $\mathbf{A}$ beállító jeleinek halmazát. Akkor $X = X_p \cup X_b$. A fejezet elején már megjegyeztük, hogy $S_p(\mathbf{A}) = \{\delta_q; q \in X_p^*\}$.

Tekintsük a $\mathbf{B} = (S_p(A), X, \delta_B)$ automatát, amelynek δ_B átmenetfüggvénye tetszőleges $\delta_q \in S_p(A),\ x \in X$ párra a

$$\delta_B(\delta_q, x) = \begin{cases} \delta_{qx}, & \text{ha } x \in X_p, \\ \delta_q, & \text{ha } x \in X_b \end{cases}$$

összefüggéssel van definiálva. Alkossuk meg a $\mathbf{C} = (A, S_p(A) \times X, \delta_C)$ automatát úgy, hogy tetszőleges $a \in A$ és $(\delta_q, x) \in S_p(A) \times X$ esetén

$$\delta_C(a, (\delta_q, x)) = \begin{cases} a, & \text{ha } x \in X_p, \\ \delta_q^{-1}(\delta(a, x)), & \text{ha } x \in X_b \end{cases}$$

teljesüljön. Világos, hogy $\mathbf{B}$ A-véges permutációautomata, $\mathbf{C}$ pedig A-véges beállító automata.

Megmutatjuk, hogy a $\varphi(\delta_q, a) = \delta_q(a)$ $(\delta_q \in S_p(A),\ a \in A)$ leképezés a $\mathbf{B}$ és $\mathbf{C}$ automaták $\mathbf{D} = (S_p(A) \times A, X, \delta_D)$ szuperpozíciójának az $\mathbf{A}$ automatára való homomorfizmusa. Minthogy minden $a \in A$ állapotra $\delta_e(a) = a$, ahol e az üres szó, ezért φ szürjektív. Legyenek $\delta_q \in S_p(A)$ és $x \in X$ tetszőleges elemek. Akkor $x \in X_p$ esetén nyerjük, hogy

$$\varphi(\delta_D((\delta_q, a), x)) = \varphi(\delta_B(\delta_q, x), \delta_C(a, (\delta_q, x))) = \varphi(\delta_{qx}, a) =$$

$$= \delta_{qx}(a) = aqx = \delta(aq, x) = \delta(\delta_q(a), x) = \delta(\varphi(\delta_q, a), x).$$

Ha pedig $x \in X_b$, akkor

$$\varphi(\delta_D((\delta_q, a), x)) = \varphi(\delta_B(\delta_q, x), \delta_C(a, (\delta_q, x))) = \varphi(\delta_q, \delta_q^{-1}(\delta(a, x))) =$$

$$= \delta_q(\delta_q^{-1}(\delta(a, x))) = \delta(a, x) = \delta(aq, x) = \delta(\delta_q(a), x) = \delta(\varphi(\delta_q, a), x)$$

adódik. Ezzel megmutattuk, hogy φ homomorfizmus.

Igazoljuk még, hogy $S^1(\mathbf{B})$ izomorf $S_p(\mathbf{A})$-val, mégpedig egy alkalmas izomorfizmus az az

$$\alpha : (\delta_B)_q \to \delta_{q'} \quad ((\delta_B)_q \in S_1(B), \delta_{q'} \in S_p(\mathbf{A}))$$

megfeleltetés, ahol $q \in X^*$ és q' a q szóból úgy áll elő, hogy töröljük belőle az X_b-beli betűket. Világos, hogy α szürjektív leképezés. Tegyük fel, hogy

$$\delta_{q'} = \alpha((\delta_B)_q) = \alpha((\delta_B)_r) = \delta_{r'} \quad (q, r \in X^*).$$

A (6.3) definícióból következik, hogy minden $s \in X_p^*$ bemenő szóra $\delta_{sq'} = \delta_{sr'}$. Ezért (1.5) és (1.6) miatt a δ_B átmenetfüggvény definíciójából kapjuk, hogy

$$(\delta_s q)_{\mathbf{B}} = \delta_{sq'} = \delta_{sr'} = (\delta_s r)_{\mathbf{B}},$$

azaz $(\delta_B)_q = (\delta_B)_r$, vagyis a φ leképezés bijektív. Bármely $(\delta_B)_q, (\delta_B)_r \in S^1(\mathbf{B})$ párra

$$\varphi((\delta_B)_q \circ (\delta_B)_r) = \varphi((\delta_B)_{qr}) = \delta_{(qr)'} = \delta_{q'r'} =$$

$$= \delta_{q'} \circ \delta_{r'} = \varphi((\delta_B)_q) \circ \varphi((\delta_B)_r),$$

ami azt jelenti, hogy α izomorfizmus. □

18.7. Tétel
Bármely A-véges beállító automata felbontható kétállapotú beállító automaták szubdirekt szorzatára.

Bizonyítás. Tekintsük az $\mathbf{A} = (A, X, \delta)$ A-véges beállító automatát. Triviális automatákra nyilvánvalóan igaz az állítás, ezért feltehetjük, hogy $|A| \geq 2$. Legyen minden $a \in A$ állapotra $\tau(a)$ az $\mathbf{A}$ automata (12.9) feltétellel megadott kongruenciája. Mivel $\mathbf{A}$ beállító automata, ezért bármely $a \in A$ állapotra két $\tau(a)$-osztály van, mégpedig $\{a\}$ és $A - \{a\}$. Ez alapján világos, hogy $\cap_{a \in A} \tau(a) = \iota_A$. Az $\mathbf{A}/\tau(a)$ $(a \in A)$ faktorautomaták kétállapotú beállító automaták. Legyen $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$. A 12.6. Tétel szerint $\mathbf{A}$ felbontható $\mathbf{A}/\tau(a_i)$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ automaták egy szubdirekt szorzatára. □

A 18.7. Tétel szerint szubdirekt irreducibilis A-véges beállító automaták a legfeljebb kétállapotú beállító automaták. A szubdirekt szorzatok a direkt szorzatok bizonyos részautomatái, ezért megfogalmazhatjuk az előbbi tétel érdekes következményeit.

18.8. Következmény
Bármely A-véges beállító automata izomorfan reprezentálható kétállapotú beállító automaták direkt szorzatával.

Ha $\mathbf{A} = (A, X, \delta)$ A-véges beállító automatát izomorfan reprezentálunk kétállapotú beállító automaták direkt szorzatával, akkor ezeknek a automatáknak is X a bemenő halmaza. Ez azt jelenti, hogy az A-véges beállító automaták rendszerében nincs véges izomorfan teljes rendszer a direkt szorzatra. Ez azt is jelenti, hogy ha csak véges beállító automatákra szorítkozunk, akkor is ugyanezt az eredményt kapjuk.

A 18.8. Következményből adódik, hogy a szubdirekt irreducibilis A-véges beállító automaták az A-véges beállító automatáknak a direkt szorzatra izomorfan teljes rendszere.

A kétállapotú beállító automaták rendszerében 5 különböző működésű, azaz nem izomorf redukált bemenetű automata van. Ha az állapotok halmaza $\{1, 2\}$, akkor ezek a következők:

$\mathbf{D}_0$	1	2
x_1	1	1
x_2	2	2
x_3	1	2

$\mathbf{D}_1$	1	2
x_1	1	1
x_2	2	2

$\mathbf{D}_2$	1	2
x_1	1	1
x_2	1	2

$\mathbf{D}_3$	1	2
x_1	1	1

$\mathbf{D}_4$	1	2
x_1	1	2

Utalunk arra, hogy a $\mathbf{D}_1$ (teljes) beállító automatát már a (16.6)-ban is definiáltuk. A $\mathbf{D}_0$ automatát *flip-flop automatá*nak, a $\mathbf{D}_2$ automatát pedig (*kétállapotú*) *elevátor*nak is nevezik.

18.9. Tétel
Minden A-véges beállító automata homomorfan reprezentálható a $\mathbf{D}_0$ kétállapotú beállító automata egy kvázidirekt hatványaként.

Bizonyítás. Legyen $\mathbf{A} = (A, X, \delta)$ A-véges beállító automata. A 18.8. Következmény szerint $\mathbf{A}$ izomorfan reprezentálható kétállapotú beállító automaták egy kvázidirekt szorzatával. (Minden direkt szorzat kvázidirekt szorzat.) Az kvázidirekt szorzat asszociativitása miatt ezért elegendő a kétállapotú beállító automatákra megmutatni az állítást.

Legyen először $\mathbf{A} = (A, X, \delta)$ legalább három bemenő jeles kétállapotú beállító automata. Feltehetjük, hogy $A = \{1, 2\}$. Definiáljuk a $\varphi : X \to X_3 = \{x_1, x_2, x_3\}$ leképezést úgy, hogy minden $x \in X$ és $x_i \in X_3$ esetén

$$\varphi(x) = x_i \quad \Longleftrightarrow \quad \delta(1, x) = \delta_0(1, x_i) \quad \text{és} \quad \delta(2, x) = \delta_0(2, x_i),$$

ahol δ_0 a $\mathbf{D}_0$ automata átmenetfüggvénye. Nem nehéz belátni, hogy $\mathbf{A}$ megegyezik a $\mathbf{D}_0[X, \varphi]$ egytényezős kvázidirekt szorzattal.

Legyen most $\mathbf{A}$ kétállapotú legfeljebb két bemenő jeles beállító automata. Ebben az esetben $\mathbf{A}$ izomorfiától eltekintve a $\mathbf{D}_i$ $(i = 1, 2, 3, 4)$ automaták valamelyike. Jelöljük a $\mathbf{D}_i$ automata átmenetfüggvényét δ_i-vel. Definiáljuk a $\varphi^{(i)}$ függvényeket a következő módon:

$$\varphi^{(1)}(x_1) = x_1,\ \varphi^{(1)}(x_2) = x_2, \quad \varphi^{(2)}(x_1) = x_1,\ \varphi^{(2)}(x_2) = x_3,$$

$$\varphi^{(3)}(x_1) = x_1, \quad \varphi^{(4)}(x_1) = x_3.$$

Látható, hogy a $\mathbf{D}_i$ $(i = 1,2,3,4)$ automaták megegyeznek a $\mathbf{D}_0$ automata $\varphi^{(i)}$ visszacsatolási függvényekkel megadott egytényezős kvázidirekt szorzataival. □

A 18.9. Tétel bizonyítása szerint $\{\mathbf{D}_0\}$ az A-véges beállító automaták egyelemű homomorfan teljes rendszere a kvázidirekt szorzatra, s ezzel együtt az α_0-szorzatra is. Ebből kapjuk, hogy az A-véges beállító automatáknak van véges, s így minimális homomorfan teljes rendszere a kvázidirekt szorzatra, s így az α_0-szorzatra is.

Nemtriviális beállító automata karakterisztikus monoidja egy jobbzéró félcsoportból egységelem adjungálásával kapott félcsoport. Jelöljük U_i-vel az i elemű jobbzéró félcsoportot. Könnyen belátható, hogy kételemű beállító automaták karakterisztikus monoidja U_1, U_1^1 vagy U_2^1, ahol U_i $(i = 1,2)$ az i elemű jobbzéró félcsoport. A $\mathbf{D}_0$ automata karakterisztikus monoidja nyilvánvalóan izomorf az U_2^1 monoiddal.

18.10. Lemma

Ha U_i^1 félcsoport egy S véges félcsoport homomorf képe, akkor U_i^1 izomorf S egy részfélcsoportjával.

Bizonyítás. Legyen $U_i = \{u_0, u_1, \ldots, u_i\}$ és u_i az U_i^1 monoid egységeleme, továbbá $\varphi : S \to U_i^1$ egy alkalmas homomorfizmus. Az $u_k \in U_i^1$ $(k = 0,1,2,\ldots i)$ elemekre alkossuk meg az S $\{T_k = \varphi^{-1}(u_k); k = 0,1,\ldots,i\}$ kompatibilis osztályozását. Világos, hogy $T_i = \varphi^{-1}(u_i)$ az S félcsoport egy részfélcsoportja. Ha t_i az T_i egy idempotens eleme, akkor t_iSt_i részfélcsoportja S-nek és t_i az t_iSt_i egységeleme. Akkor

$$\varphi(t_iSt_i) = \varphi(t_i)\varphi(S)\varphi(t_i) = \varphi(S) = U_i^1,$$

vagyis φ t_iSt_i-t U_i^1-re képezi le. Legyen S_i' az t_iSt_i olyan minimális részfélcsoportja, amelyre $U_i \subseteq \varphi(S_i')$. Akkor bármely $s \in S_i'$ elemre sS_i' az S_i', s így t_iSt_i részfélcsoportja, továbbá $\varphi(sS_i') = \varphi(s)\varphi(S_i') \supseteq u_iU_i = U_i$. Az S_i' minimalitása miatt $sS_i' = S_i'$. Nyilvánvaló, hogy $S_i' \cap T_k \neq \emptyset$ $(k = 0,1,\ldots,i-1)$ és $S_i' \cap T_k$ az S egy részfélcsoportja. Tekintsük most a $v_k \in S_i' \cap T_k$ $(k = 0,1,\ldots,i-1)$ idempotens elemeket. Akkor van olyan $w_{kl} \in S'$, hogy $v_kw_{kl} = v_l$, s így $v_kv_{kl} = v_kv_kw_{kl} = v_kw_{kl} = v_l$. Következésképpen $\{v_0, v_1, \ldots, v_{i-1}, t_i\}$ az S-nek U_i^1-vel izomorf részfélcsoportja. □

Tekintsünk egy G csoportot, s legyen N normális részcsoport G-ben. Definiáljuk a $\mathbf{G}/N = (G/N, G, \delta_{G/N})$ automata $\delta_{G/N}$ átmenetfüggvényét a

$$\delta_{G/N}(Ng, h) = Ngh \quad (Ng \in G/N,\ h \in G) \tag{18.4}$$

feltétellel. Legyenek továbbá $\mathbf{G} = (G, G, \delta_G)$ és $\mathbf{N} = (N, N, \delta_N)$ csoportautomaták (18.1).

18.11. TÉTEL
Ha N a G véges csoport egy normális részcsoportja, akkor a $\mathbf{G}$ csoportautomata a $\mathbf{G}/N$ automata és az $\mathbf{N}$ csoportautomata egy α_0-szorzatának homomorf képe, továbbá $S^1(\mathbf{G}/N) \cong G/N$ és $S^1(\mathbf{N}) \cong N$.

Bizonyítás. Legyen $N = \{h_1, h_2, \ldots, h_n\}$ és $G/N = \{Ng_1, Ng_2, \ldots Ng_m\}$ $(g_1, g_2, \ldots, g_m \in G)$, ahol g_1 a G csoport egységeleme. Tekintsük az $(\mathbf{G}/N) \times \mathbf{N}[G, \varphi] = ((G/N) \times N, G, \delta)$ α_0-szorzatot, ahol a (15.1)-beli φ_k $(k = 1, 2)$ visszacsatolási függvényeket értelmezzük a következő módon: Legyen $\varphi_1 = \iota_G$. A $\varphi_2 : (G/N) \times G \to N$ pedig minden Ng_i $(i = 1, 2, \ldots, m)$ és $g \in G$ esetén teljesítse a $\varphi_2(Ng_i, g) = g_i g g_u^{-1}$ feltételt, ahol $\delta_{G/N}(Ng_i, g) = Ng_u$, azaz $Ng_i g = Ng_u$ $(u \in \{1, 2, \ldots, m\})$. A φ_2 visszacsatolási függvény nyilvánvalóan jól definiált, mivel minden $g_i, g \in G$ párhoz egyetlen ilyen g_u tartozik és $g_i g g_u^{-1} \in N$.

Megmutatjuk, hogy az

$$\alpha(Ng_i, h_j) = h_j g_i \quad (i = 1, 2, \ldots, m,\ j = 1, 2, \ldots, n)$$

egyenlőséggel értelmezett $\alpha : (G/N) \times N \to G$ megfeleltetés a $(\mathbf{G}/N) \times \mathbf{N}[G, \varphi]$ α_0-szorzatnak a $\mathbf{G}$ csoportautomatára való homomorfizmusa. Mivel G/N a G egy osztályozása, ezért α szürjektív leképezés. Legyenek $Ng_i \in G/N$, $h_j \in N$ és $g \in G$ tetszőlegesek. Akkor

$$\alpha(\delta((Ng_i, h_j), g)) = \alpha(\delta_{G/N}(Ng_i, g), \delta_N(h_j, g_i g g_u^{-1})) = \alpha(Ng_u, h_j g_i g g_u^{-1}) =$$

$$= h_j g_i g g_u^{-1} g_u = h_j g_i g = \delta_G(h_j g_i, g) = \delta(\alpha(Ng_i, h_j), g),$$

azaz α homomorfizmus.

Az $S^1(\mathbf{G}/N) \cong G/N$ és az $S^1(\mathbf{N}) \cong N$ állítások is könnyen adódnak. $\square$

18.12. LEMMA
Ha a G' egyszerű csoport a G csoport homomorf képe és N a G csoport egy normális részcsoportja, akkor G' az N és G/N csoportok valamelyikének homomorf képe.

Bizonyítás. Jelölje φ a G csoport egy homomorf leképezését a G' egyszerű csoportra. Ha N a G egy normális részcsoportja, akkor $\varphi(N)$ ugyancsak normális részcsoportja G'-nek. Így G' egyszerűsége miatt $\varphi(N) = G'$ vagy $\varphi(N) = \{e'\}$, ahol e' a G' egységeleme. A $\varphi(N) = G'$ esetben készen vagyunk bizonyítással.

Megmutatjuk, hogy $\varphi(N) = \{e'\}$ esetén G' a G/N homomorf képe. Tekintsük ehhez azt a $\psi : G/N \to G'$ megfeleltetést, amely tetszőleges $Ng \in G/N$ mellékosztályra a $\psi(Ng) = \varphi(g)$ egyenlőséggel van értelmezve. Ha $g_1, g_2 \in G$ elemekre $Ng_1 = Ng_2$ teljesül, akkor $g_1 g_2^{-1} \in N$ és így $\varphi(g_1 g_2^{-1}) = e'$, tehát $\varphi(g_1)\varphi(g_2)^{-1} = e'$, vagyis $\varphi(g_1) = \varphi(g_2)$. Ezzel megmutattuk, hogy ψ leképezés. Világos, hogy ψ szürjektív. Végül, a

$$\psi(NgNh) = \psi(Ngh) = \varphi(gh) = \varphi(g)\varphi(h) = \psi(Ng)\psi(Nh) \quad (g, h \in G)$$

számolás mutatja, hogy ψ homomorfizmus. □

18.13. Lemma
Ha G a G_1 és G_2 csoportok $G_1 \times G_2$ direkt szorzatának részcsoportja, akkor van a G-nek olyan N normális részcsoportja, amely izomorf G_1 egy részcsoportjával és G/N pedig izomorf G_2 egy részcsoportjával.

Bizonyítás. Jelölje e_2 a G_2 egységelemét. Könnyen belátható, hogy az $N = \{(g_1, e_2); (g_1, e_2) \in G\}$ halmaz olyan normális részcsoportja G-nek, amely izomorf G_1 egy részcsoportjával. Képezzük most a G/N faktorcsoportot és tekintsük azt a $\varphi : G/N \to G_2$ megfeleltetést, amely tetszőleges G/N-beli $N(g_1, g_2)$ mellékosztályhoz a g_2 elemet rendeli. De $N(g_1, g_2) = N(h_1, h_2)$ akkor és csak akkor, ha

$$(g_1, g_2)(h_1, h_2)^{-1} = (g_1, g_2)(h_1^{-1}, h_2^{-1}) = (g_1 h_1^{-1}, g_2 h_2^{-1}) \in N.$$

Ez akkor és csak akkor teljesül, ha $g_2 h_2^{-1} = e_2$, azaz $g_2 = h_2$, tehát a φ megfeleltetés egy-egyértelmű leképezés. Emellett világos, hogy homomorfizmus, így G/N faktorcsoport valóban izomorf G_2 egy részcsoportjával. □

A direkt szorzat asszociativitása miatt a következő lemma bármely véges tényezős direkt szorzatra is érvényes.

18.14. Lemma
Ha a G egyszerű csoport a G_1 és G_2 csoportok $G_1 \times G_2$ direkt szorzata valamely részcsoportjának homomorf képe, akkor G előállítható G_1 vagy G_2 egy részcsoportjának homomorf képeként.

Bizonyítás. Legyen H a $G_1 \times G_2$ olyan részcsoportja, amelynek G homomorf képe. A 18.13. Lemma szerint van a H-nak olyan N normális részcsoportja, amely izomorf G_1 egy részcsoportjával és H/N izomorf G_2 egy részcsoportjával. Mivel G egyszerű csoport, ezért a 18.12. Lemma szerint N-nek vagy H/N-nek homomorf képe. □

18.15. Tétel (Krohn–Rhodes tétel)
Minden A-véges $\mathbf{A}$ automata homomorfan reprezentálható a $\mathbf{D}_0$ kétállapotú beállító automata és olyan véges egyszerű csoportautomaták véges tényezős α_0-szorzatával, amelyek karakterisztikus csoportjai az $S^1(\mathbf{A})$ karakterisztikus monoid bizonyos részcsoportjainak homomorf képei.

Megfordítva tegyük fel, hogy az A-véges $\mathbf{A}$ automata homomorfan reprezentálható az $\mathbf{A}_k$ $(k = 1, 2, \ldots, n)$ véges automaták egy α_0-szorzatával. Ha a G véges egyszerű csoport $S^1(\mathbf{A})$ valamely részcsoportjának homomorf képe, akkor van olyan $1 \leq i \leq n$, hogy G az $S^1(\mathbf{A}_i)$ egy részcsoportjának homomorf képe. Hasonlóan, ha a H monoid izomorf az U_2^1 monoiddal és $S^1\mathbf{A}$ valamely részfélcsoportjának homomorf képe, akkor van olyan $1 \leq j \leq n$, hogy H izomorf $S^1(\mathbf{A}_j)$ egy részfélcsoportjával.

Bizonyítás. Legyen $\mathbf{A} = (A, X, \delta)$ tetszőleges A-véges automata. Ha $|A| = 1$ akkor az állítás triviálisan teljesül, mivel minden automata egy egytényezős α_0-szorzat. Tegyük fel ezért, hogy $|A| > 1$, és jelölje $\mathcal{M}_1$ az $\mathbf{A}$ automatának azt a nemtriviális lefedő halmazrendszerét, amely egyetlen blokkból áll, azaz legyen $\mathcal{M}_1 = \{A\}$. Az $\mathbf{A}$ automata $\mathbf{M}_1 = (M_1, X, \delta_{M_1})$ $\mathcal{M}_1$-faktora triviális automata, ezért izomorf egy triviális $\mathbf{B}_1$ csoportautomatával, amelyre $S^1(\mathbf{B}_1) = S_p(\mathbf{B}_1)$ izomorf az $S^1(\mathbf{A})$ karakterisztikus monoid egységcsoportjával. A 18.5. Tétel szerint létezik az $\mathbf{A}$ automatának olyan $\mathcal{M}_2$ lefedő halmazrendszere, amely valódi finomítása $\mathcal{M}_1$-nek, továbbá olyan $\mathbf{B}_2$ véges permutáció-beállító automata és $\mathbf{A}$-nak olyan $\mathbf{M}_2$ $\mathcal{M}_2$-faktora, hogy $\mathbf{M}_2$ homomorfan reprezentálható $\mathbf{B}_1$ és $\mathbf{B}_2$ szuperpozíciójával, azaz egy α_0-szorzatával. Ezenkívül $S_p(\mathbf{B}_2)$ az $S^1(\mathbf{A})$ karakterisztikus monoid egy részcsoportjának homomorf képe.

Ha $\mathcal{M}_2$ az $\mathbf{A}$ automata nemtriviális lefedő halmazrendszere, akkor alkalmazzuk a 18.5. Tételt $\mathcal{M}_1$ helyett $\mathcal{M}_2$-re. Ha $\mathbf{M}_2$ az $\mathbf{A}$ előző lépésben definiált $\mathcal{M}_2$-faktora, akkor van az $\mathbf{A}$ automatának olyan $\mathcal{M}_3$ lefedő halmazrendszere, amely valódi finomítása $\mathcal{M}_2$-nek, valamint olyan $\mathbf{B}_3$ véges permutáció-beállító automata és $\mathbf{A}$-nak olyan $\mathbf{M}_3$ $\mathcal{M}_3$-faktora, hogy $\mathbf{M}_3$ homomorfan reprezentálható $\mathbf{M}_2$ és $\mathbf{B}_3$ szuperpozíciójával, azaz egy α_0-szorzatával, továbbá $S_p(\mathbf{B}_3)$ az $S^1(\mathbf{A})$ karakterisztikus monoid egy részcsoportjának homomorf képe.

Ebből az α_0-szorzat asszociativitása miatt könnyen adódik, hogy $\mathbf{M}_3$ homomorfan reprezentálható a $\mathbf{B}_1$, $\mathbf{B}_2$ és $\mathbf{B}_3$ véges permutáció-beállító automaták egy α_0-szorzatával.

Ismételjük meg az eljárást addig, amig az $\mathbf{A}$ automata $\mathcal{M}_n$ triviális lefedő halmazrendszeréhez nem jutunk. Vegyük $\mathbf{A}$ egy $\mathbf{M}_n$ $\mathcal{M}_n$-faktorát. Kapjuk, hogy $\mathbf{M}_n$ homomorfan reprezentálható olyan $\mathbf{B}_1$, $\mathbf{B}_2$, $\ldots$, $\mathbf{B}_n$ véges permutáció-beállító automaták egy α_0-szorzatával, hogy a $S_p(\mathbf{B}_1)$, $S_p(\mathbf{B}_2)$,

$\dots, S_p(\mathbf{B}_n)$ csoportok az $S^1(\mathbf{A}$ katakterisztikus monoid bizonyos részcsoportjainak homomorf képei. Mivel $\mathcal{M}_n$ egyelemű blokkokból áll. ezért $\mathbf{A}$ az $\mathbf{M}_n$ automata homomorf képe, ezért $\mathbf{A}$ is reprezentálható homomorfan ezeknek az automatáknak egy α_0-szorzatával.

A 18.6. Tétel szerint mindegyik $\mathbf{B}_i$ $(i = 1, 2, \dots, n)$ automata előállítható egy $\mathbf{C}_i$ véges permutációautomata és egy $\mathbf{E}_i$ véges beállító automata szuperpozíciójának homomorf képeként úgy, hogy $S^1(\mathbf{B}_i)$ karakterisztikus csoport izomorf $S_p(\mathbf{B}_i)$-vel. Ebből kapjuk, hogy az $\mathbf{A}$ automata homomorfan reprezentálható $\mathbf{E}_1, \mathbf{E}_2, \dots, \mathbf{E}_n$ véges beállító automaták és olyan $\mathbf{C}_1, \mathbf{C}_2, \dots, \mathbf{C}_n$ véges permutációautomaták egy alkalmas sorrendben vett α_0-szorzatával, amelyek karakterisztikus csoportjai az $S^1(\mathbf{A})$ bizonyos részcsoportjáinak homomorf képei.

Ha a $\mathbf{B}_i$ automaták $\mathbf{B}_i = (B_i, X_i, \delta_i)$ $(i = 1, 2, \dots, n)$ alakúak, akkor a 18.6. Tétel bizonyítása szerint $\mathbf{C}_i$-k megadhatók $\mathbf{C}_i = (G_i X_i, \delta_i')$ alakban, ahol $G_i = S_p(\mathbf{B}_i)$ és

$$\delta_i'((\delta_i)_q, x) = \begin{cases} (\delta_i)_{qx}, & \text{ha } x \in (X_i)_p, \\ (\delta_i)_q, & \text{ha } x \in (X_i)_b \end{cases}$$

Tekintsük a $\mathbf{G}_i(G_i, G_i, \delta_{G_i})$ csoportautomatákat. A $\mathbf{C}_i$ automaták megegyeznek azokkal az egytényezős $\mathbf{G}_i[X_i, \varphi^{(i)}]$ α_0-szorzatokkal, amelyeknél a $\varphi^{(i)} : G_i \times X_i \to G_i$ visszacsatolási függvények tetszőleges $(\delta_i)_q \in G_i, x \in X_i$ párra

$$\varphi^{(i)}((\delta_i)_q, x) = \begin{cases} (\delta_i)_x, & \text{ha } x \in (X_i)_p, \\ (\delta_i)_e, & \text{ha } x \in (X_i)_b \end{cases}$$

összefüggéssel van értelmezve, ahol e az üres szó. Az $S^1(\mathbf{G}_i)$ karakterisztikus csoportok izomorfak a G_i csoportokkal.

Összefoglalva, az eddigiek során azt kaptuk, hogy $\mathbf{A}$ homomorfan reprezentálható az $\mathbf{E}_1, \mathbf{E}_2, \dots, \mathbf{E}_n$ véges beállító automaták és a $\mathbf{G}_1, \mathbf{G}_2, \dots, \mathbf{G}_n$ véges csoportautomaták egy alkalmas α_0-szorzatával úgy, hogy minden G_i karakterisztikus csoport homomorf képe $S^1(\mathbf{A})$ valamely részcsoportjának.

Legyenek N_i-k a G_i véges csoportok maximális normális részcsoportjai. Akkor a G_i/N_i faktorcsoportok egyszerű csoportok. A 18.11. Tétel szerint a $\mathbf{G}_i$ csoportautomaták a $\mathbf{G}_i/N_i$ és az $\mathbf{N}_i$ csoportautomaták α_0-szorzatainak homomorf képei, továbbá $S^1(\mathbf{G}_i/N_i) \cong G_i/N_i$ és $S^1(\mathbf{N}_i) \cong N_i$. Nem nehéz belátni, hogy a $\mathbf{G}_i/N_i$ automaták megegyeznek a $\mathbf{G_i}/\mathbf{N_i} = (G_i/N_i, G_i/N_i, \overline{\delta}_i)$ egyszerű csoportautomatákból a G_i halmazokkal és azokkal a $\psi^{i)} : (G_i/N_i) \times G_i \to G_i/N_i$ visszacsatolási függvényekkel képezett $\mathbf{G_i}/\mathbf{N_i}[G_i, \psi^{(i)}]$ egytényezős α_0-szorzatokkal, amelyeknél tetszőleges $N_i g \in G_i/N_i, h \in G_i$ párra $\psi^{(i)}(N_i g, h) = N_i h$ teljesül.

Azokkal az N_i csoportokkal, amelyek nem egyszerűek, ismételjük meg az előbbi eljárást G_i-k helyett az N_i csoportokkal. Folytassuk ezt mindaddig, amig egyszerű részcsoporthoz jutunk. Ezzel nyerjük, hogy a $\mathbf{G}_i$ csoportautomaták mindegyike homomorfan reprezentálható olyan egyszerű csoportautomaták α_0-szorzatával, amelyek karakterisztikus csoportjai $S^1(\mathbf{A})$ bizonyos részcsoportjainak homomorf képei.

Másrészt a 18.9. Tétel szerint a $\mathbf{E}_i$ véges beállító automaták mindegyike homomorfan reprezentálható $\mathbf{D}_0$ kétállapotú beállító automaták egy α_0-hatványával. (Minden direkt szorzat α_0-szorzat.) Végül a 16.6. Lemma és α_0-szorzat asszociativitásának felhasználásával adódik a tétel első részének állítása.

Most megmutatjuk, hogy ha az A-véges $\mathbf{A} = (A, X, \delta)$ automata homomorfan reprezentálható az $\mathbf{A}_k = (A_k, X_k, \delta_k)$ $(k = 1, 2, \ldots, n)$ véges automaták egy $\mathbf{B} = (B, X, \delta') = \prod_{k=1}^{n} \mathbf{A}_k[X, \varphi]$ α_0-szorzatával, és a G véges egyszerű csoport $S^1(\mathbf{A})$ valamely részcsoportjának homomorf képe, akkor van olyan $1 \leq i \leq n$, hogy G az $S^1(\mathbf{A}_i)$ egy részcsoportjának homomorf képe. Hasonlóan, ha a H monoid izomorf az U_2^1 monoiddal és $S^1(\mathbf{A})$ valamely részfélcsoportjának homomorf képe, akkor van olyan $1 \leq j \leq n$, hogy H izomorf $S^1(\mathbf{A}_j)$ egy részfélcsoportjával. A karakterisztikus monoidokat továbbra is a 6.2. Lemmában megadott transzformációfélcsoportoknak tekintjük.

A 6.11. és 6.8. Tételek szerint $S^1(\mathbf{A})$ az $S^1(\mathbf{B})$-nek homomorf képe, ezért a 18.1. és a 18.10. Lemmát felhasználva kapjuk, hogy G $S^1(\mathbf{B})$ valamely G' részcsoportjának homomorf képe ill. U_2^1 izomorf $S^1(\mathbf{B})$ egy részfélcsoportjával.

Ha $n = 1$, akkor $\mathbf{A}$ az $\mathbf{A}_1$ egy részautomatájának homomorf képe, ezért az állítások nyilvánvalóan igazak.

Tegyük fel, hogy $n = 2$. Először megadjuk $S^1(\mathbf{B})$ elemeit. Az egységelem $\delta'_e = ((\delta_1)_e, (\delta_2)_e)$, ahol e az üres szó. Ha $q \in X^+$, akkor a φ_k $(k = 1, 2)$ visszacsatolási függvények (14.7) kiterjesztését figyelembe véve (14.10) szerint $S^1(\mathbf{B})$ (6.3)-ban definiált δ'_q elemére minden $(a_1, a_2) \in B$ esetén

$$\delta'_q(a_1, a_2) = ((a_1, a_2)q)_{\mathbf{B}} = ((a_1\varphi_1(q))_{\mathbf{A}_1}, (a_2\varphi_2(a_1, q))_{\mathbf{A}_2}) =$$

$$= ((\delta_1)_{\varphi_1(q)}, (\delta_2)_{\varphi_2(a_1,q)})(a_1, a_2)$$

teljesül. Vagyis

$$\delta'_q = ((\delta_1)_{\varphi_1(q)}, (\delta_2)_{\varphi_2(a_1,q)}).$$

Mivel (14.7) szerint, ha $q = x_1x_2 \ldots x_l$ $(x_1, x_2, \ldots, x_l \in X$, akkor $\varphi_1(q) = \varphi_1(x_1)\varphi_1(x_2) \ldots \varphi_1(x_l)$, ezért φ_1 X^+ homomorf leképezése X_1^+-ba.

A 18.2. Lemma szerint B-nak van olyan B' részhalmaza, hogy G' elemeinek B'-re való leszűkítése az B' egy olyan permutációcsoportját alkotják, amelyik izomorf G'-vel. Jelöljük ezt a permutációcsoportot is az egyszerűség kedvéért G'-vel, s jelöljük a $B = A_1 \times A_2$ Descartes szorzat k-adik projekcióját π_k-val ($k = 1, 2$)). Legyen $C_k = \pi_k(B')$ ($k = 1, 2$). Jelölje G'_1 a G' csoport azon g elemeinek halmazát, amelyek a B' elemeit úgy permutálják, hogy első komponensüket változatlanul hagyják, azaz amelyekre $\pi_1 g = \iota_{C_1}$. Könnyen belátható, hogy G'_1 a G' normális részcsoportja és emellett bármely $q, r \in X^*$ esetén az $S^1(\mathbf{B})$-beli δ'_q és δ'_r elemek pontosan akkor esnek ugyanabba a G'_1-szerinti mellékosztályba, ha $(\delta_1)_{\varphi_1(q)} = (\delta_1)_{\varphi_1(r)}$ teljesül. Mivel φ_1 X^+ homomorf leképezése X_1^+-ba, ezért $S' = \{(\delta_1)_{\varphi_1(q)}; q \in X^*\}$ az $S^1(\mathbf{A}_1)$ egy részfélcsoportja. Nem nehéz belátni, hogy S' izomorf a G'/G'_1 faktorcsoporttal.

Ha η a G' csoport homomorf leképezése G-re, akkor $\eta(G'_1)$ a G csoport normális részcsoportja. Mivel G egyszerű, ezért $\eta(G'_1) = G$ vagy $\eta(G'_1)$ a G egységeleme. Ha $\eta(G'_1)$ a G egységeleme, akkor G a G'/G'_1 faktorcsoport homomorf képe, s így $S^1(\mathbf{A}_1)$ egy részcsoportjának homomorf képe (18.12. Lemma).

Tegyük fel, hogy $\eta(G'_1) = G$. Tekintsünk most egy tetszőleges $c \in C_1$ elemet, s legyen $d_1, d_2, \ldots, d_t$ az összes olyan C_2-beli elem, amelyre $(c, d_i) \in B'$ ($i = 1, 2, \ldots, t$). Akkor tetszőleges $\delta'_q \in G'_1$ esetén kapjuk, hogy

$$\delta'_q(c, d_i) = (c, (\delta_2)_{\varphi_2(c,q)}(d_i)),$$

tehát az $S^1(\mathbf{B})$-beli δ'_q elem ugyanúgy permutálja a $\{(c, d_1), (c, d_2), \ldots, (c, d_t)\}$ halmazt, mint az $S^1(\mathbf{A}_2)$-beli $(\delta_2)_{\varphi_2(c,q)}$ a $\{d_1, d_2, \ldots, d_t\}$ halmazt. Jelölje G_c az $S^1(\mathbf{A}_2)$ karakterisztikus monoid azon részcsoportját, amelyet azok a $(\delta_2)_{\varphi_2(c,q)}$ elemek generálnak, amelyekre $\delta'_q \in G'_1$ teljesül. Legyen $C_1 = \{c_1, c_2, \ldots, c_s\}$ és tekintsük a $G_{c_1}, G_{c_2}, \ldots, G_{c_s}$ csoportokat. A

$$((\delta_2)_{\varphi_2(c_1,q)}, (\delta_2)_{\varphi_2(c_2,q)}, \ldots, (\delta_2)_{\varphi_2(c_s,q)}) \to \delta'_q \quad (\delta'_q \in G'_1)$$

leképezés a $G_{c_1} \times G_{c_2} \times \cdots \times G_{c_s}$ direkt szorzat egy részcsoportjának G'_1-re való homomorfizmusa. A 6.2. Lemma szerint ugyanis minden $q, r \in X^*$ párra

$$((\delta_2)_{\varphi_2(c_i,qr)} = (\delta_2)_{\varphi_2(c_i,q)\varphi_2((c_iq)_{\mathbf{A}_2},r)} =$$

$$= (\delta_2)_{\varphi_2(c_i,q)} \circ (\delta_2)_{\varphi_2(c_i,r)}.$$

De $G = \eta(G'_1)$, ezért a 18.14. Lemma szerint G előállítható valamely G_{c_i} ($1 \leq i \leq s$} részcsoportjának homomorf képeként, s így $S^1(\mathbf{A}_2)$ egy részcsoportjának homomorf képeként.

Foglalkozzunk most azzal az esettel, amikor U_2^1 izomorf $S^1(\mathbf{B})$ egy részfélcsoportjával. Legyen $\{\delta'_q, \delta'_r, \delta_s\}$ az $S^1(\mathbf{B})$-nek U_2^1 félcsoporttal izomorf részfélcsoportja. Legyen $U_2^1 = \{u_0, u_1, u_2\}$, ahol u_2 az egységelem. Legyen továbbá az

$$\alpha(\delta'_q) = u_0, \quad \alpha(\delta'_r) = u_1, \quad \alpha(\delta'_s) = u_2$$

egyenletekkel definiált α leképezés izomorfizmus. Minthogy $\delta'_q \neq \delta'_r$, ezért létezik olyan $(a_1, a_2) \in B$ állapot, hogy

$$((a_1, a_2)s)_{\mathbf{B}} = (a_1, a_2),$$

$$((a_1, a_2)q)_{\mathbf{B}} = (b_1, b_2) \neq (c_1, c_2) = ((a_1, a_2)r)_{\mathbf{B}},$$

és

$$((a_1, a_2)q)_{\mathbf{B}} = ((a_1\varphi_1(q))_{\mathbf{A}_1}, (a_2\varphi_2(a_1, q))_{\mathbf{A}_2}),$$
$$((a_1, a_2)r)_{\mathbf{B}} = ((a_1\varphi_1(r))_{\mathbf{A}_1}, (a_2\varphi_2(a_1, r))_{\mathbf{A}_2}).$$

Világos, hogy $b_1 \neq c_1$ esetén az $S^1(\mathbf{A}_1)$ félcsoport $\{(\delta_1)_q, (\delta_1)_r, (\delta_1)_s\}$ részfélcsoportja izomorf az U_2^1 félcsoporttal. Ha pedig $b_1 = c_1$, akkor szükségképpen $b_2 \neq c_2$ és ekkor, mint némi számolással belátható, hogy $S^1(\mathbf{A}_2)$ félcsoport

$$\{(\delta_2)_{\varphi_2(b_1,q)}, (\delta_2)_{\varphi_2(b_1,r)}, (\delta_2)_{\varphi_2(b_1,s)}\}$$

részfélcsoportja izomorf U_2^1 félcsoporttal. Ezzel a tétel második részének bizonyítását $n = 2$ esetre befejeztük.

Ha $n > 2$, akkor az α_0-szorzat asszociativitása miatt például n szerinti indukcióval fejezhető be a bizonyítás. $\square$

Mielőtt a Krohn–Rhodes tétel egy másik alakját megadnánk, néhány megjegyzést teszünk. Egy csoportautomata részautomatáin a részcsoportautomatáit, homomorfizmusai alatt pedig a csoport homomorfizmusait fogjuk érteni. Ha a $\mathbf{G}$ csoportautomata a G' csoportautomata egy részcsoportautomatájának homomorf képe, akkor azt mondjuk, hogy $\mathbf{G}$ homomorfan reprezentálható $\mathbf{G}'$-vel. Most megadjuk a Krohn–Rhodes tétel egy ekvivalens alakját:

18.16. Tétel

Jelölje $\mathcal{K}$ az összes véges egyszerű csoportautomatából valamint a $\mathbf{D}_0$ kétállapotú beállító automatából álló rendszert és legyen $\mathbf{A}$ tetszőleges A-véges automata. Legyen továbbá $G_1, G_2, \ldots, G_n$ az összes olyan egyszerű csoport, amely előállítható az $S^1(\mathbf{A})$ karakterisztikus monoid valamely részcsoportjának homomorf képeként. Akkor $\mathbf{A}$ homomorfan reprezentálható a $\mathbf{G}_1, \mathbf{G}_2, \ldots, \mathbf{G}_n$ egyszerű csoportautomaták és a $\mathbf{D}_0$ automata egy véges tényezős α_0-szorzatával.

Megfordítva, minden $\mathcal{K}$-beli $\mathbf{B}$ automata $\mathcal{K}$-beli automaták véges tényezős α_0-szorzatával való homomorf reprezentációjában szükségképpen fel kell lépnie olyan $\mathbf{B}_i$ komponensnek, amely homomorfan reprezentálja $\mathbf{B}$-t, ha $\mathbf{B} = \mathbf{D}_0$, akkor a komponensek között $\mathbf{D}_0$-nak is elő kell fordulnia.

Bizonyítás. Az első állítás nyilvánvalóan következik a 18.15. Tétel első állításából.

A második állítás bizonyításához tegyük fel először, hogy $\mathbf{B} = \mathbf{D}_0$. Ez az eset következik a 18.15. Tétel első részének állításából, mivel az U_2^1-nek csak triviális csoport homomorf képe van, s ezért bármely $\mathcal{K}$-beli automaták α_0-szorzatával való homomorf reprezentációjában csak triviális csoportautomaták szerepelhetnek.

Legyen $\mathbf{B} \neq \mathbf{D}_0$. Ebben az esetben $\mathbf{B} = \mathbf{G}$ véges egyszerű csoportautomata, amelynek karakterisztikus csoportja G. A 18.15. Tétel második állításából következik, hogy $\mathbf{G}$ bármely bármely $\mathcal{K}$-beli automaták α_0-szorzatával való homomorf reprezentációjában van olyan $\mathbf{B_i}$ komponens, hogy G az $S^1(\mathbf{B}_i)$ egy részcsoportjának homomorf képe. Ha $\mathbf{B}_i = \mathbf{D}_0$, akkor G csak az egységcsoport lehet. Ebben az esetben $\mathbf{G}$ nyilvánvalóan előállítható $\mathbf{D}_0$ egytényezős α_0-szorzata egy homomorf reprezentációjaként. Ha $\mathbf{B}_i \neq \mathbf{D}_0$, akkor $\mathbf{B}_i = \mathbf{G}'$ véges egyszerű csoportautomata, amely saját magának egytényezős α_0-szorzata, és G a G' egy G'' részcsoportjának homomorf képe. Ha α egy alkalmas homomorfizmus, akkor $\mathbf{G}$ a $\mathbf{G}''$ csoportautomatának homomorf képe. □

A 18.16. Tételből kapjuk, hogy véges egyszerű csoportautomatákból és a $\mathbf{D}_0$ automatából álló $\mathcal{K}$ rendszer az A-véges automaták, speciálisan a véges automaták egy homomorfan α_0-teljes rendszere. Nyilvánvalóan elegendő az egymással nem izomorf véges egyszerű csoportautomatákat tekinteni. Mivel egy véges egyszerű csoport elemeinek száma akármilyen nagy lehet, ezért $\mathcal{K}$-ból nem lehet kiválasztani véges homomorfan α_0-teljes rendszert. A tételből az is következik, hogy a véges automatáknak minden homomorfan α_0-teljes rendszerének tartalmaznia kell véges egyszerű csoportautomatákat és a $\mathbf{D}_0$ automatát, ezért a véges [A-véges] automatáknak nincs véges homomorfan α_0-teljes rendszere, s így nincs véges izomorfan α_0-teljes rendszere sem. A 16.6. Lemmából következik, hogy a véges automatáknak $\mathcal{K}$ nem minimális homomorfan α_0-teljes rendszere. Ugyanis, ha egy G véges egyszerű csoportautomata egy G' véges egyszerű csoportautomata valamely valódi részcsoportautomatájának homomorf képe, akkor G-t elhagyva $\mathcal{K}$-ból ismét a véges automaták egy homomorfan α_0-teljes rendszerét kapjuk.

A következő fejezetben megmutatjuk, hogy az A-véges automatáknak van minimális homomorfan teljes rendszere az α_0-szorzatra.

Feladatok

18.1. A véges beállító automatáknak a direkt szorzatra van minimális izomorfan teljes rendszere. (→ Megoldás)

19. Homomorfan α_0-teljes rendszerek

Először megadjuk az automatáknak egy önmagában is érdekes $\mathcal{K}$ osztályát, amelynek elemei három bemenő jeles automaták és minden $n(>1)$ állapotú automata homomorfan reprezentálható legfeljebb n állapotú $\mathcal{K}$-beli automaták egy véges tényezős α_0-szorzatával.

Egy automatát (n *állapotú*) *standard automatá*nak nevezünk, ha izomorf az $\mathbf{A} = (A, X, \delta)$ automatával, ahol $A = [n]$ $(n > 1)$, $X = \{x_1, x_2, x_3\}$, x_3 identikus jel és

$$\delta(k, x_1) = k + 1 \ (1 \leq k < n), \quad \delta(n, x_1) = 1,$$

$$\delta(1, x_2) = 2, \quad \delta(2, x_2) = 1, \quad \delta(k, x_2) = k \ (3 \leq k \leq n).$$

Nyilvánvaló, hogy minden standard automata erősen összefüggő permutációautomata. Az n állapotú standard automata karakterisztikus félcsoportja, amely egyben a karakterisztikus monoid is, az $[n]$ állapothalmaz S_n teljes permutációcsoportja, amelynek a (6.3)-ban definiált δ_{x_1} és δ_{x_2} egy generátorrendszerét alkotják.

Egy automatát (n *állapotú*) *számláló*nak hívunk, ha izomorf az $\mathbf{A} = ([n], \{x\}, \delta)$ automatával, ahol

$$\delta(k, x) = k + 1 \ (1 \leq k < n), \quad \delta(n, x) = 1. \tag{19.1}$$

Azt mondjuk, hogy egy automata (n *állapotú*) *általánosított számláló*, ha izomorf az $\mathbf{A} = ([n], X, \delta)$ automatával, ahol (19.1) minden $x \in X$ bemenő jelre teljesül. Az n állapotú általánosított számlálók permutációautomaták és egymással bemenet-izomorfak, ha bemenő halmazaik ekvivalensek. Karakterisztikus csoportjuk, amely karakterisztikus monoid is, az n elemű ciklikus permutációcsoport.

Az $\mathbf{A}$ n állapotú standard automatának az $\mathbf{A}' = (A, \{x_1\}, \delta)$ számláló X-részautomatája, azaz $\mathbf{A}'$ megegyezik $\mathbf{A}$ egytényezős $\mathbf{A}[\{x_1\}, \iota_{\{x_1\}}]$ α_0-szorzatával.

19.1. Lemma
Bármely $n > 1$ és k pozitív egész számra az n^k állapotú számláló homomorfan reprezentálható az n állapotú standard automata egy α_0-hatványával.

Bizonyítás. Legyen $n > 1$ és k pozitív egész számra $\mathbf{A} = ([n^k], \{x\}, \delta)$ számláló. Ha $k = 1$, akkor $\mathbf{A}$ izomorf egy n állapotú standard automata egytényezős α_0-hatványával.

Tegyük fel, hogy $k > 1$. Az α_0-szorzat asszociativitása miatt a 16.6. Lemma szerint elegendő megmutatni, hogy $\mathbf{A}$ homomorfan reprezentálható egy n^{k-1} állapotú számláló és az n állapotú standard automata egy α_0-szorzatával.

Legyen $\mathbf{B} = ([n^{k-1}], \{x\}, \delta')$ számláló és $\mathbf{C} = ([n], \{x_1, x_2, x_3\}, \delta'')$ standard automata. Tekintsük a $\mathbf{D} = (D, \{x\}, \delta_D) = \mathbf{B} \times \mathbf{C}[\{x\}, \varphi]$ α_0-szorzatot, ahol a (15.1)-beli visszacsatolásai függvényekre teljesüljenek a

$$\varphi_1(x) = x, \quad \varphi_2(j, x) = x_3 \quad (1 \le j < n^{k-1}), \quad \varphi_2(n^{k-1}, x) = x_1$$

feltételek. Akkor minden $1 \le j < n^{k-1}$ és $1 \le l \le n$ párra

$$\delta_D((j, l), x) = (\delta'(j, x), \delta''(l, x_3)) = (j + 1, l),$$

továbbá minden $1 \le l < n$ esetén

$$\delta_D((n^{k-1}, l), x) = (\delta'(n^{k-1}, x), \delta''(l, x_1)) = (1, l + 1),$$

s végül

$$\delta_D((n^{k-1}, n), x) = (\delta'(n^{k-1}, x), \delta''(n, x_1)) = (1, 1).$$

Ezekből leolvasható, hogy $\mathbf{D}$ n^k állapotú számláló. $\square$

Legyenek X és Y tetszőleges nemüres halmazok. Tekintsünk egy adott pozitív egész számra egy $\tau : X^n \to Y^n$ leképezést. Definiáljuk az $\mathbf{R}_\tau = (R_\tau, X, \delta_\tau)$ automatát úgy, hogy

$$R_\tau = \{(p, q) \in X^+ \times Y^*;\ |q| \le n,\ |p| + |q| = n + 1\},$$

és minden $(p, yq) \in R_\tau$ $(y \in Y)$ és $x \in X$ párra

$$\delta_\tau((p, yq), x) = \begin{cases} (px, q), & \text{ha } |p| < n, \\ (x, \tau(p)), & \text{ha } |p| = n. \end{cases}$$

Az $\mathbf{R}_\tau$ automatát *transzformátor*nak, pontosabban (X, Y) *feletti* τ *által generált* n*-transzformátor*nak nevezzük.

19.2. LEMMA
Minden $\tau : X^n \to Y^n$ $(n > 0)$ leképezésre $\mathbf{R}_\tau$ homomorfan reprezentálható egy n állapotú számláló és a $\mathbf{D}_0$ kétállapotú beállító automata valamely véges tényezős α_0-szorzatával.

Bizonyítás. A 16.6. Lemma és 18.9. Tétel felhasználásával az α_0-szorzat asszociativitása miatt elegendő belátni, hogy $\mathbf{R}_\tau$ homomorfan reprezentálható egy n állapotú számláló és bizonyos A-véges beállító automaták véges tényezős α_0-szorzatával.

Konstruálunk egy megfelelő α_0-szorzatot. Az

$$\mathbf{A}_j = (A_j, X_j, \delta_j) \quad (j = 1, 2, \ldots, 2n + 1)$$

automatákat adjuk meg az alábbi módon: Legyen $A_1 = [n],\ X_1 = \{\overline{x}\}$ és $\mathbf{A}_1$ egy számláló,

$$A_j = X \cup \{*\},\ X_j = [n] \times X\ (j = 2, \ldots, n + 1),$$

$$A_{n+1+j} = Y \cup \{*\},\ X_{n+1+j} = (X \cup \{*\})^n \times (Y \cup \{*\}),\ (j = 1, \ldots, n),$$

ahol tetszőleges

$$a \in X \cup \{*\},\ a', b \in Y \cup \{*\},\ x \in X,\ p \in (X \cup \{*\})^n$$

elemekre, ha $1 \leq j = k+1 \leq n$, vagy $j = 1$ és $k = n$, akkor $\delta_{1+j}(a, (k, x)) = x$, ha pedig $j > 1$ és $k = n$, akkor $\delta_{1+j}(a, (k, x)) = *$. Minden más $1 \leq j, k \leq n$ esetén legyen $\delta_{1+j}(a, (k, x)) = a$. Továbbá, ha $1 \leq j \leq n$, akkor $p \notin X^n$ esetén legyen $\delta_{n+1+j}(a', (p, b)) = b$, ha pedig $p \in X^n$, akkor $\delta_{n+1+j}(a', (p, b)) = y$, ahol y a $\tau(p)$ szó $(n - j + 1)$-edik betűje. Nyilvánvaló, hogy az $\mathbf{A}_j = (A_j, X_j, \delta_j)$ $(j = 2, \ldots, 2n + 1)$ automaták beállító automaták.

Tekintsük a $\mathbf{B} = (B, X, \delta) = \prod_{j=1}^{2n+1} \mathbf{A}_j[X, \varphi]$ α_0-szorzatot, ahol a (15.1)-beli φ_j visszacsatolási függvényekre minden $x \in X,\ k \in A_1,\ a_j \in A_j$ $(j = 2, \ldots, 2n + 1)$ elemre teljesüljenek a következők:

$$\varphi_1(x) = \overline{x}, \quad \varphi_j(k, a_2, \ldots, a_{j-1}, x) = (k, x) \quad (j = 2, \ldots, n + 1),$$

$$\varphi_{n+2}(k, a_2, \ldots, a_{n+1}, x) = (a_2 \ldots a_{n+1}, *),$$

$$\varphi_{n+j}(k, a_2, \ldots, a_{n+j-1}, x) = (a_2 \ldots a_{n+1}, a_{n+j-1}) \quad (j = 3, \ldots, n + 1).$$

Legyen most B' azoknak a B-beli

$$\mathbf{b} = (k, x_1, x_2, \ldots, x_k, *, \ldots, *, y_{n+1-k}, \ldots, y_1)$$

elemeknek a halmaza, amelyekre $x_1, \dots, x_k \in X$, $y_1, \dots, y_{n+1-k} \in Y$ és $1 \leq k, n+1-k \leq n$ teljesül. (A **b**-ben $n-1$ $*$ komponens van.) Nyilvánvalóan $\mathbf{b} \in B'$ akkor és csak akkor, ha $(x_1 \dots x_k, y_1 \dots y_{n+1-k}) \in R_\tau$, azaz

$$\psi(\mathbf{b}) = (x_1 \dots x_k, y_1 \dots y_{n+1-k}) \quad (\mathbf{b} \in B')$$

a B' bijektív leképezése R_τ-ra.

Legyen $\mathbf{b} \in B'$ és $x \in X$. Ha $k < n$, akkor

$$\delta(\mathbf{b}, x) = (k+1, x_1, \dots, x_k, x, *, \dots, *, y_{n-k}, \dots, y_1),$$

ha pedig $k = n$, akkor

$$\delta(\mathbf{b}, x) = (1, x, *, \dots, *, y'_n, \dots, y'_1),$$

ahol $y'_1 \dots y'_n = \tau(x_1 \dots x_n)$. Ezekből következik, hogy $\delta(\mathbf{b}, x) \in B'$, azaz $\mathbf{B}' = (B', X, \delta)$ a $\mathbf{B}$ α_0-szorzat részautomatája. Megmutatjuk, hogy ψ homomorfizmus. Legyen $\mathbf{b} \in B', x \in X$ és $\psi(\mathbf{b}) = (p, yq)$ $(p \in X^+, y \in Y, q \in Y^*)$. Ha $|p| < n$, akkor

$$\psi(\delta(\mathbf{b}, x)) = (px, q) = \delta_\tau((p, yq), x) = \delta(\psi(\mathbf{b}), x).$$

Ha pedig $|p| = n$, akkor

$$\psi(\delta(\mathbf{b}, x)) = (x, \tau(p)) = \delta_\tau((p, yq), x) = \delta(\psi(\mathbf{b}), x),$$

azaz ψ valóban $\mathbf{B}'$ izomorf leképezése $\mathbf{R}_\tau$-ra. □

19.3. Lemma

Legyenek $\mathbf{A} = (A, X, \delta)$ és $\mathbf{B} = (A, Y, \delta')$ tetszőleges automaták. Ha van olyan $\tau : X^n \to Y^n$ $(n > 0)$ leképezés, hogy

$$A = \{(((aq)_{\mathbf{B}})p)_{\mathbf{A}};\ a \in A,\ (p, q) \in R_\tau\}$$

és minden $a \in A$, $p \in X^n$ párra

$$\delta(a, p) = \delta'(a, \tau(p)),$$

akkor **A** homomorf képe az $\mathbf{R}_\tau$ és **B** egy α_0-szorzatának.

Bizonyítás. Legyen $\mathbf{C} = (C, X, \delta'') = \mathbf{R}_\tau \times \mathbf{B}[X, \varphi]$ a

$$\varphi_1(x) = x, \quad \varphi_2((p, yq), x) = y \quad ((p, yq) \in R_\tau,\ y \in Y)$$

visszacsatolási függvényekkel megadott α_0-szorzat. A

$$\psi((p, yq), a) = (((ayq)_{\mathbf{B}})p)_{\mathbf{A}} \quad ((p, yq) \in R_\tau,\ y \in Y,\ a \in A)$$

megfeleltetés C-nek A-ra való leképezése. Legyen $x \in X$. Ha $|p| < n$, akkor

$$\psi(\delta''(((p,yq),a),x)) = \psi(\delta_\tau((p,yq),x),\delta'(a,y)) = \psi((px,q),\delta'(a,y)) =$$

$$= (((ayq)_{\mathbf{B}})px)_{\mathbf{A}} = \delta((((ayq)_{\mathbf{B}})p)_{\mathbf{A}},x) = \delta(\psi((p,yq),a),x).$$

Ha pedig $|p| = n$, akkor $q = e$, s így

$$\psi(\delta''(((p,yq),a),x)) = \psi(\delta_\tau((p,yq),x),\delta'(a,y)) = \psi((x,\tau(p)),\delta'(a,y)) =$$

$$= (((ay\tau(p))_{\mathbf{B}})x)_{\mathbf{A}} = (((ay)_{\mathbf{B}}px)_{\mathbf{A}}) = \delta((((ay)_{\mathbf{B}})p)_{\mathbf{A}},x) = \delta(\psi((p,yq),a),x).$$

Kaptuk, hogy ψ homomorfizmus. □

19.4. Lemma

Ha a G csoport homomorf képe az $[n]$ halmaz egy permutációcsoportjának, akkor van olyan n állapotú $\mathbf{A}$ permutációautomata, hogy a $\mathbf{G}$ csoportautomata homomorfan reprezentálható $\mathbf{A}$ egy direkt hatványával.

Bizonyítás. Legyen a $G = \{g_1,\ldots,g_m\}$ csoport az $[n]$ halmaz H permutációcsoportjának homomorf képe és φ egy megfelelő homomorfizmus. Definiáljuk az $\mathbf{A} = ([n],G,\delta)$ automatát úgy, hogy minden $i \in [n]$ és $g_j \in G$ párra $\delta(i,g_j) = \overline{h}_j(i)$ teljesüljön, ahol $\overline{h}_j$ a $\varphi^{-1}(g_j)$ tetszőleges, de rögzített eleme. Látható, hogy $\mathbf{A}$ permutációautomata. Legyen $\mathbf{A}^n = ([n]^n,G,\delta')$ az $\mathbf{A}$ automata direkt n-edik hatványa. Tekintsük az $[n]^n$ halmaz $B = \{(h(1),\ldots,h(n)); h \in H\}$ részhalmazát. Nyilvánvaló, hogy $\mathbf{B} = (B,G,\delta')$ az $\mathbf{A}^n$ automata részautomatája. Megmutatjuk, hogy a $\mathbf{G} = (G,G,\delta'')$ csoportautomata a $\mathbf{B}$ automata homomorf képe. Adjuk meg a $\psi : B \to G$ megfeleltetést a

$$\psi(h(1),\ldots h(n)) = \varphi(h) \quad (h \in H)$$

összefüggéssel. Világos, hogy ψ szürjektív leképezés. Ha $h \in H$ és $\varphi(h) = g_i$, akkor bármely $g_j \in G$ elemre

$$\psi(\delta'((h(1),\ldots,h(n)),g_j)) = \psi(\delta(h(1),g_j),\ldots,\delta(h(n),g_j)) =$$

$$= \psi(\overline{h}_j(h(1)),\ldots,\overline{h}_j(h(n))) = \psi(h\circ\overline{h}_j(1),\ldots,h\circ\overline{h}_j(n)) = \varphi(h\circ\overline{h}_j) =$$

$$= \varphi(h)\varphi(\overline{h}_j) = g_ig_j = \delta''(g_i,g_j) = \delta''(\varphi(h),g_j) = \delta(\psi(h(1),\ldots,h(n)),g_j),$$

ami azt jelenti, hogy φ homomorfizmus. □

19.5. Tétel

Minden $n > 1$ állapotú automata homomorfan reprezentálható a $\mathbf{D}_0$ kétállapotú beállító automata és az n állapotú standard automata egy véges tényezős α_0-szorzatával.

Bizonyítás. Legyen $\mathbf{A} = (A, X, \delta)$ tetszőleges $1 < n$ állapotú automata. A Krohn–Rhodes tétel felhasználásával a 18.2. és a 19.4. Lemmákból kapjuk, hogy $\mathbf{A}$ homomorfan reprezentálható a $\mathbf{D}_0$ kétállapotú beállító automata és az n állapotú permutációautomata egy véges tényezős α_0-szorzatával. Felhasználva az α_0-szorzat asszociativitását, a 16.6. Lemmából következik, hogy az állítást elegendő n állapotú permutációautomatákra bebizonyítani.

Tekintsük az egyszerűség kedvéért a $\mathbf{A} = ([n], X, \delta)$ $(n > 1)$ permutációautomatát. Legyen $\mathbf{B} = ([n], Y, \delta')$ az n állapotú standard automata, ahol $Y = \{x_1, x_2, x_3\}$ és x_3 az identikus jel. A $\mathbf{B}$ karakterisztikus monoidja az $[n]$ halmaz S_n teljes permutációcsoportja, amelynek a (6.3)-ban definiált δ'_{x_1} és δ'_{x_2} elemei egy generátorrendszerét alkotják. Legyen t az a legkisebb pozitív egész szám, amelyre S_n minden eleme megadható δ'_{x_1} és δ'_{x_2} legfeljebb t tényezős kompozíciójaként. Minden $t \leq m$ pozitív egész számra létezik olyan $\tau : X^m \to Y^m$ leképezés, amelyre $(kp)_{\mathbf{A}} = (k\tau(p))_{\mathbf{B}}$ $(p \in X^m)$ teljesül. Adjuk meg ezekhez az X, Y halmazokhoz és τ leképezéshez a $\mathbf{R}_\tau$ transzformátort. Válasszuk az m-et úgy, hogy valamilyen k pozitív egész számra $m = n^k$ legyen és τ teljesítse erre az m-re is az előbbi feltételt. Mivel $\mathbf{A}$ és $\mathbf{B}$ permutációautomaták, ezért $[n] = \{(((kq)_{\mathbf{B}})p)_{\mathbf{A}}; k \in [n],\ (p, q) \in R_\tau\}$. Így a 19.3. Lemma szerint $\mathbf{A}$ homomorfan reprezentálható $\mathbf{R}_\tau$ és $\mathbf{B}$ egy α_0-szorzatával. Végül felhasználva a 16.6. Lemmát és az α_0-szorzat asszociativitását, a 19.1. és a 19.2. Lemmák alapján kapjuk, hogy $\mathbf{A}$ homomorfan reprezentálható a $\mathbf{D}_0$ kétállapotú beállító automata és az n állapotú standard automata egy véges tényezős α_0-szorzatával. $\square$

A 19.5. Tételből következik, hogy a $\mathbf{D}_0$ automatából és a véges standard automatákból álló rendszer az A-véges automaták egy homomorfan teljes rendszere a véges tényezős α_0-szorzatra. Egy ilyen rendszert már a 18.16. Tételben is megadtunk. A $\mathbf{D}_0$ automatából és a véges standard automatákból álló rendszer az A-véges automaták nem minimális homomorfan teljes rendszere véges tényezős α_0-szorzatra. Ezt elég könnyen beláthatjuk. Gondoljuk meg, hogy minden n állapotú automata izomorf módon beágyazható valamilyen n-nél nagyobb k állapotú $\mathbf{B}$ automatába. A 19.5. Tétel szerint $\mathbf{B}$, s így az n állapotú standard automata is, homomorfan reprezentálható a $\mathbf{D}_0$ és a k állapotú standard automata egy véges tényezős α_0-szorzatával. Ez azt jelenti, hogy ha az n állapotú standard automatát elhagyjuk a rendszerből továbbra is az A-véges automaták egy homomorfan teljes rendszerét kapjuk a véges tényezős α_0-szorzatra. A 19.5. Tétel azonban azért jelentős, mert azt mondja ki, hogy minden n állapotú automata felépíthető két speciális típusú legfeljebb n állapotú automata segítségével.

19.6. Lemma
Ha G az $[n]$ halmaz egy permutációcsoportja és $|G| > 1$, akkor van G-nek olyan valódi H részcsoportja, amelyre $G : H \leq n$.

Bizonyítás. Az általánosság megszorítása nélkül feltehetjük, hogy n a legkisebb olyan m pozitív egész szám, amelyre G az $[m]$ halmaz egy permutációcsoportja. Legyen $H = \{h \in G;\ h(1) = 1\}$. A H a G egy valódi részcsoportja. Könnyen látható, hogy ha a $g_1, g_2 \in G$ elemekre $g_1(1) = g_2(1)$, akkor $Hg_1 = Hg_2$. Ezért $G : H \leq n$. □

19.7. Lemma
Ha G az $[n]$ halmaz egy permutációcsoportja és a G' egyszerű csoport G homomorf képe, akkor G' izomorf a $[k]$ halmaz egy permutációcsoportjával, ahol $k \leq n$.

Bizonyítás. Ha $|G'| = 1$, akkor az állítás nyilvánvalóan igaz.

Tegyük fel, hogy $|G'| > 1$. Ebből következik, hogy $n > 1$. Az általánosság megszorítása nélkül feltehetjük, hogy n a legkisebb olyan m pozitív egész szám, amelyre G az $[m]$ halmaz olyan permutációcsoportja, hogy G' a G homomorf képe. Legyen most is $H = \{h \in G;\ h(1) = 1\}$. A H a G valódi részcsoportja és $G : H \leq n$. Jelölje H' a H képét a G-nek G'-re való homomorf leképezésénél. Akkor H' valódi részcsoportja G'-nek, ellenkező esetben ugyanis G' egy $[k]$ $(k < n)$ halmaz egy permutációcsoportnak lenne homomorf képe. Ezenkívül $G' : H' \leq n$ szintén igaz.

Tekintsük az $M = \{H'g';\ g' \in G'\}$ halmazt és minden $g \in G'$ elemre definiáljuk az M halmaz egy h_g permutációját a $h_g(H'g') = H'g'g$ $(g' \in G')$ összefüggéssel. Jelölje $\overline{G}$ a h_g $(g \in G')$ permutációk halmazát. $\overline{G}$ nyilvánvalóan csoport és $|\overline{G}| > 1$. A $\psi(g) = h_g$ $(g \in G')$ megfeleltetés G' homomorf leképezése $\overline{G}$-re. Mivel G' egyszerű és $|\overline{G}| > 1$, ezért $G' \cong \overline{G}$. □

A következő tétel szükséges és elegendő feltételt ad arra, hogy egy $n > 2$ állapotú automata mikor reprezentálható homomorfan n kevesebb állapotú automaták véges tényezős α_0-szorzatával. Ez az eredmény egy algoritmust is szolgáltat annak eldöntésére, hogy egy n állapotú automata reprezentálható-e homomorfan n-nél kevesebb állapotú automaták véges tényezős α_0-szorzatával.

19.8. Tétel
Az $n > 2$ állapotú $\mathbf{A}$ automata akkor és csak akkor reprezentálható homomorfan n-nél kevesebb állapotú automaták egy véges tényezős α_0-szorzatával, ha minden olyan egyszerű csoport, amely az $S^1(\mathbf{A})$ karakterisztikus monoid egy részcsoportjának homomorf képe izomorf az $[n-1]$ halmaz egy permutációcsoportjával.

Bizonyítás. A feltétel elegendőség a Krohn–Rhodes tételből következik a 19.4. Lemma felhasználásával.

A feltétel szükségessége szintén a Krohn–Rhodes tételből adódik a 18.2. és a 19.7. Lemmák segítségével. □

A következő tétel DÖMÖSI PÁLtól származik.

19.9. TÉTEL
Az A-véges automatáknak létezik minimális homomorfan teljes rendszere a véges tényezős α_0-szorzatra.

Bizonyítás. Legyen $\mathcal{K}$ az egymással nem általánosan izomorf véges kimenő jel nélküli automaták halmaza. Nem nehéz látni, hogy $\mathcal{K}$ megszámlálhatóan végtelen számosságú. Legyen $\mathcal{K} = \{\mathbf{A}_k = (A_k, X_k, \delta_k); k = 1, 2, \dots\}$. Tekintsük prímszámok olyan $p_0, p_1, \dots$ végtelen sorozatát, amelyekre $p_1 > p_0$ és $p_j > p_{j-1} + p_0 \dots p_{j-2}|A_{j-1}|$ $(j > 1)$. Szerkesszük meg az automaták $\mathcal{K}' = \{\mathbf{B}_i = (B_i, X_i', \delta_i'); i = 0, 1, 2, \dots\}$ rendszerét a következő módon:

Legyen $\mathbf{B}_0 = (B_0, X_0', \delta_0')$ egy általánosított számláló, ahol $B_0 = [p_0]$ és X_0' egy véges (nemüres) halmaz.

Ha $i = 1, 2, \dots,$ akkor $B_i = D_i \cup (C_i \times A_i)$, $X_i' = C_i \times X_i$, ahol $C_i = [p_0 \dots p_{i-1}]$ és $D_i = [p_i]$. Ezenkívül tetszőleges $d \in D_i$, $(c, a) \in C_i \times A_i$ és $(c', x) \in C_i \times X_i$ elemekre

$$\delta_i'(d, (c', x)) = d + 1 \ (d < p_i), \quad \delta_i'(p_i, (c', x)) = 1,$$

$$\delta_i'((c, a), (c', x)) = \begin{cases} (c+1, \delta_i(a, x)) & \text{ha } c = c' < p_0 \dots p_{i-1}, \\ (1, \delta_i(a, x)), & \text{ha } c = c' = p_0 \dots p_{i-1}, \\ 1 (\in D_i), & \text{ha } c \neq c'. \end{cases}$$

Megjegyezzük, hogy $\mathbf{D}_i = (D_i, C_i \times X_i, \delta_j')$ $(1 \leq j)$ a $\mathbf{B}_i$ automata olyan részautomatája, amely általánosított számláló. Ezenkívül az állapothalmaz $C_i \times A_i$ részét egy $p_0 \dots p_{i-1}$ állapotú általánosított számláló vezérli olyan módon, hogy valahányszor az állapot és a bemenő jel első komponense megegyezik, mindannyiszor a második komponensek az $\mathbf{A}_i$ átmeneti viselkedését követik. Ha pedig az állapot és a bemenő jel első komponense nem egyenlő, akkor $\mathbf{B}_i$-t egy $\mathbf{D}_i$-beli állapotba irányítja, s a $\mathbf{B}_i$ automata ezután már mindig $\mathbf{D}_i$-beli állapotban marad és általánosított számlálóként viselkedik. Az is látható, hogy ha egy p szóban egy betű egymásután legalább kétszer szerepel és (c, a) a $\mathbf{B}_i$ állapota, akkor $(c, a)p \in D_i$.

Először belátjuk, hogy $\mathcal{K}'$ az A- véges automaták egy homomorfan teljes rendszere a véges tényezős α_0-szorzatra. Ehhez megmutatjuk, hogy minden

$\mathbf{C} = ([p_0 \dots p_{i-1}], X, \delta')$ általánosított számláló homomorfan reprezentálható a $\mathbf{B}_0, \dots \mathbf{B}_{i-1}$ automaták egy α_0-szorzatával. Vegyük a $\mathbf{B}_0, \mathbf{D}_1, \dots, \mathbf{D}_{i-1}$ egy kvázidirekt szorzatát. Tekintsük a $\mathbf{B}_0 \times \mathbf{D}_1 \cdots \times \mathbf{D}_{i-1}[X, \varphi'] = (D, X, \delta)$ kvázidirekt szorzat állapothalmazának

$$D' = \{(1, \dots, 1)x^t;\ 0 \le t \le p_0 \dots p_{i-1}\}$$

részhalmazát tetszőleges $x \in X$ esetén, ahol x^0 legyen az e üres szó. (Az általánosított számláló definíciója miatt bármely $x, x' \in X$ párra $(1, \dots, 1)x^t = (1, \dots, 1)(x')^t$.) A $\mathbf{D}' = (D', X, \delta)$ automata a $\mathbf{D}$ kvázidirekt szorzat egy részautomatája. A

$$\psi((1, \dots, 1)x^t) = t + 1 \quad (0 \le t < p_0 \dots p_{i-1})$$

összefüggésekkel definiált ψ megfeleltetés $\mathbf{D}'$-nek $\mathbf{C}$-re való homomorf leképezése. Tekintsünk egy tetszőleges $\mathbf{A}_i \in \mathcal{K}$ automatát. Vegyük a

$$\mathbf{A} = (A, X_i, \delta) = \mathbf{C} \times \mathbf{B}_i[X_i, \varphi]$$

α_0-szorzatot, ahol a (15.1)-ben definiált φ_1 és φ_2 visszacsatolási függvények teljesítsék a következő feltételeket. Minden $x \in X_i$ bemenő jelre $\varphi_1(x)$ legyen X egy tetszőleges, de rögzített eleme és $\varphi_2(c, x) = (c, x)$ $(c \in C, x \in X_i)$. Könnyen látható, hogy a $(c, (c, a))$ $(c \in C, a \in A_i)$ állapotok halmaza az $\mathbf{A}$ α_0-szorzat egy $\mathbf{A}'$ részautomatájának állapothalmaza és a $\psi(c, (c, a)) = a$ $(c \in C, a \in A_i)$ megfeleltetés $\mathbf{A}'$ homomorf leképezése $\mathbf{A}_i$-re. A $\mathcal{K}$ választása miatt az α_0-szorzat asszociativitásából és a 16.6. Lemmából kapjuk, hogy $\mathcal{K}'$ a véges automaták homomorfan teljes rendszere a véges tényezős α_0-szorzatra.

A $\mathcal{K}'$ minimalitásának megmutatásához minden $0 \le i$ egész számra legyen $\mathcal{K}_i = \mathcal{K}' - \{\mathbf{B}_i\}$. Megmutatjuk, hogy a p_i állapotú számláló nem reprezentálható homomorfan $\mathcal{K}_i$-beli automaták véges tényezős α_0-szorzatával. Először megjegyezzük, hogy ha egy $\mathbf{C} = (C, \{x\}, \delta_C)$ számláló homomorf képe egy $\mathbf{A} = (A, \{x\}, \delta_A)$ automatának, akkor $\mathbf{A}$-nak van olyan $\mathbf{A}' = (A', \{x\}, \delta_A)$ részautomatája, amelyik izomorf egy számlálóval és amelyiknek $\mathbf{C}$ homomorf képe. Továbbá $|C|$ osztója $|A'|$-nek.

Ezek szerint elegendő belátni, hogy ha $\mathbf{A}' = (A', \{x\}, \delta)$ az

$$\mathbf{A} = (A, \{x\}, \delta) = (\mathbf{B}_{i_1} \times \cdots \times \mathbf{B}_{i_k})[\{x\}, \varphi] \quad (\mathbf{B}_{i_j} \in \mathcal{K}_i,\ j = 1, \dots, k)$$

α_0-szorzat olyan részautomatája, amelyik izomorf egy számlálóval, akkor p_i nem osztója $|A'|$-nek.

Legyen $\mathbf{b} = (b_{i_1}, \dots, b_{i_k}) \in A'$. Minden $1 \le j \le k$ esetén jelölje l_j azt a legkisebb pozitív egész számot, amelyre

$$\delta'_{i_t}(b_{i_t}, \varphi_t(b_{i_1}, \dots, b_{i_{t-1}}, x^{l_j}) = b_{i_t} \quad (t = 1, \dots, j).$$

Megmutatjuk, hogy l_j $(j = 1, \ldots, k)$ nem osztható p_i-vel. Ez $j = k$ esetben azt jelenti, hogy $|A'|$ nem osztható p_i-vel.

Ha $j = 1$, akkor $b_{i_1} \in D_{i_1}$ és így $l_j = p_{i_1}$. Ha $i_1 = 0$, akkor ez nyilvánvalóan igaz. Minden más esetben, $\mathbf{B}_{i_1}$ definíciója utáni megjegyzésünk szerint, $\delta'_{i_1}(b_{i_1}, \varphi(x)\varphi(x)) \in D_{i_1}$. Ezért ekkor is $b_{i_1} \in D_{i_1}$.

Tegyük fel, hogy egy adott $j \leq k$ pozitív egész szám esetén minden $t < j$ pozitív egész számra már megmutattuk, hogy l_t nem osztható p_i-vel. Különböztessünk meg két esetet.

Legyen először $i_j < i$. Minden $1 \leq t \leq k$ pozitív egész számra definiáljuk A'-n a ρ_t binér relációt a következő módon:

$$(\mathbf{b}, \mathbf{c}) \in \rho_t \quad \Longleftrightarrow \quad \pi_s(\mathbf{b}) = \pi_s(\mathbf{c}),\ s = 1, \ldots, t,$$

ahol π_s a vektorok s-edik projekciója. Mivel $\mathbf{A}$ egy α_0-szorzat, ezért ρ_t a $\mathbf{A}'$ automata kongruenciája. Ezért, minthogy $\mathbf{A}'$ izomorf egy számlálóval, minden ρ_t-osztály ugyanannyi állapotot tartalmaz $(1 \leq t \leq k)$. Ezenkívül,

$$\rho_1 \supseteq \rho_2 \supseteq \cdots \supseteq \rho_k$$

és minden $1 \leq t < k$ esetén a (ρ_t/ρ_{t+1})-osztályok is egyenlő számosságúak. Legyen ez a számosság t'. Figyeljük meg, hogy l_t megegyezik a ρ_t-osztályok számával. Ebből következik, hogy

$$l_{t+1} = l_t t' \quad (t = 1, \ldots, k-1).$$

Az szintén nyilvánvaló, hogy ha $i_{t+1} \neq 0$, akkor

$$t' \leq |D_{i_{t+1}} \cup (C_{i_{t+1}} \times A_{i_{t+1}})|.$$

Ha pedig $i_{t+1} = 0$, akkor $t' \leq p_0$. De $p_i > p_0$ és ha $i_j \neq 0$, akkor

$$p_i > |D_{i_j} \cup (C_{i_j} \times A_{i_j})|.$$

Amiből következik, hogy l_j nem osztható p_i-vel.

Tételezzük fel másodszor, hogy $i_j > i$. Ha $b_{i_j} \in D_{i_j}$, akkor l_j az l_{j-1} és p_{i_j} legkisebb közös többszöröse, ezért nem osztható p_i-vel. Tegyük fel, hogy $b_{i_j} = (c, a)$ $(c \in C_{i_j}, a \in A_{i_j})$ Legyen

$$\varphi_j(b_{i_1}, \ldots, b_{i_{j-1}}, x^{l_j - 1}) = p, \quad \delta'_{i_j}((c, a), p) = (c', a').$$

Ha $c' = c$, akkor $p_0 \ldots p_{i_j - 1}$ osztója l_{j-1}-nek és így l_{j-1} osztható p_i-vel. Ez azonban a feltevésünk miatt lehetetlen. Ezért $c' \neq c$. De, a (14.7) kiterjesztést is felhasználva, $\varphi_j(b_{i_1}, \ldots, b_{i_{j-1}}, x)$ megegyezik $\varphi_j(b_{i_1}, \ldots, b_{i_{j-1}}, x^{l_j-1}x)$ utolsó betűjével. Következésképpen, $\mathbf{B}_{i_j}$ definíciója szerint,

$$\delta'_{i_j}((c, a), \varphi_j(b_{i_1}, \ldots, b_{i_{j-1}}, x)), \quad \delta'_{i_j}((c, a), \varphi_j(b_{i_1}, \ldots, b_{i_{j-1}}, x^{l_j-1}x))$$

közül legalább az egyik D_{i_j}-beli állapot. Így $b_{i_j} \in D_{i_j}$, ami ismét lehetetlen. $\square$

Megmutatjuk, hogy egy véges tényezős α_1-szorzat megadható ugyanannyi tényezős α_0-szorzatként is.

19.10. Lemma
Minden $\mathbf{A} = (A, X, \delta) = \mathbf{A}_1 \times \cdots \times \mathbf{A}_n[X, \varphi]$ α_1-szorzat megegyezik egy olyan $\mathbf{B} = (B, X, \delta') = \mathbf{B}_1 \times \cdots \times \mathbf{B}_n[X, \varphi']$ α_0-szorzattal, amelyben minden $\mathbf{B}_k$ automata az $\mathbf{A}_k$ automata egytényezős α_1-szorzata.

Bizonyítás. Adjuk meg az $\mathbf{A}_k = (A_k, X_k, \delta_k)$ $(k = 1, \ldots, n)$ automaták egytényezős $\mathbf{B}_k$ α_1-szorzatait a (15.2) visszacsatolási függvények segítségével a következő módon:

$$\mathbf{B}_1 = \mathbf{A}_1[X, \varphi_1], \ldots, \mathbf{B}_k = \mathbf{A}_k[A_1 \times \cdots \times A_{k-1} \times X, \varphi_k^*] \ (k = 2, \ldots, n),$$

ahol

$$\varphi_k^*(a_k, (a_1, \ldots, a_{k-1}, x)) = \varphi_k(a_1, \ldots, a_k, x) \ (k = 2, \ldots, n).$$

Jelölje a $\mathbf{B}_k$ automata átmenetfüggvényét δ_k'. A (15.1)-beli φ_k' visszacsatolási függvények legyenek

$$\varphi_k'(a_1, \ldots, a_{k-1}, x) = (a_1, \ldots, a_{k-1}, x)$$

alakúak. Akkor minden $a_1 \in A_1, \ldots a_n \in A_n, x \in X$ esetén

$$\delta((a_1, \ldots a_n), x) =$$

$$= (\delta_1(a_1, \varphi_1(a_1, x)), \delta_2(a_2, \varphi_2(a_1, a_2, x)), \ldots, \delta_n(a_n, \varphi_n(a_1, \ldots, a_n, x))) =$$

$$(\delta_1(a_1, \varphi_1(a_1, x)), \delta_2(a_2, \varphi_2^*(a_2, (a_1, x))), \ldots, \delta_n(a_n, \varphi_n^*(a_n, (a_1 \ldots, a_{n-1}, x)))$$

$$= (\delta_1'(a_1, x), \delta_2'(a_2, (a_1, x)), \ldots, \delta_n'(a_n, (a_1 \ldots, a_{n-1}, x)) = \delta'((a_1, \ldots, a_n), x),$$

azaz $\mathbf{A} = \mathbf{B}$. $\square$

A 19.10. Lemmából nyilvánvalóan következik a

19.11. Tétel
Tetszőleges n állapotú automata akkor és csak akkor reprezentálható homomorfan n-nél kevesebb állapotú automaták véges tényezős α_1-szorzatával, ha homomorfan reprezentálható n-nél kevesebb állapotú automaták véges tényezős α_0-szorzatával.

A 19.11. és a 19.9. Tételekből következik olyan algoritmus amelynek segítségével eldönthető, hogy egy n állapotú automata reprezentálható-e homomorfan n-nél kevesebb állapotú automaták véges tényezős α_1-szorzatával.

19.12. Tétel
Az α_1-szorzat homomorfan általánosabb az α_0-szorzatnál.

Bizonyítás. Tekintsük az alábbi átmenettáblázattal megadott $\mathbf{A}$ automatát:

$\mathbf{A}$	1	2	3
x	2	2	3
y	1	3	1

Nem nehéz belátni, hogy $\mathbf{A}$ tetszőleges α_0-hatványának minden olyan részautomatája, amely izomorf egy számlálóval egyállapotú automata. Ezért egy háromállapotú számláló nem eleme $\mathbf{HSP}_{\alpha_0}(\{\mathbf{A}\})$-nak. Megmutatjuk, hogy egy háromállapotú számláló eleme $\mathbf{HSP}_{\alpha_1}(\{\mathbf{A}\})$-nek. Tekintsük az $\mathbf{A}^3[\{x\},\varphi]$ α_1-hatványt, ahol

$$\varphi_1(1,x)=x,\quad \varphi_1(2,x)=\varphi_1(3,x)=y,$$

$$\varphi_2(1,1,x)=x,\quad \varphi_2(2,2,x)=\varphi_2(3,3,x)=y,$$

$$\varphi_3(1,1,1,x)=x,\quad \varphi_3(2,2,2,x)=\varphi_3(3,3,3,x)=y,$$

minden más esetben φ_j $(j=1,2,3)$ tetszőleges értéket vegyen fel. Legyen $B=\{(j,j,j); j=1,2,3\}$. Nyilvánvaló, hogy $\mathbf{B}$ az $\mathbf{A}^3[\{x\},\varphi]$ α_1-hatvány részautomatája és a $\psi(j,j,j)=j$ $(j=1,2,3)$ leképezés $\mathbf{B}$ izomorf leképezése a $\mathbf{B}=([3],\{x\},\delta)$ számlálóra. Ez azt jelenti, hogy az α_1-szorzat homomorfan általánosabb az α_0-szorzatnál. $\square$

Ennek a munkának a terjedelme nem teszi lehetővé, hogy a homomorfan teljességet α_1-szorzatokra vizsgáljuk. Ezek vizsgálatok megtalálhatók például Gécseg Ferenc [12] monográfiájában. A teljesség kedvéért azonban bizonyítás nélkül megemlítjük az elmélet egy másik mély eredményét, amely Ésik Zoltántól és Horváth Gyulától származik. Ennek az eredménynek a bizonyítása is megtalálható az [12] monográfiában.

19.13. Tétel
Automaták $\mathcal{K}$ rendszere az A-véges automaták homomorfan teljes rendszere a véges tényezős Gluskov szorzatra akkor és csak akkor, ha homomorfan teljes rendszere a véges tényezős α_2-szorzatra.

Ebből kapható a következő eredmény:

19.14. Tétel
A-véges automatákra a véges tényezős α_2-szorzat homomorfan ekvivalens a véges tényezős Gluskov szorzattal.

A tétel segítségével bizonyítható, hogy A-véges automatákra az α_2-szorzat homomorfan általánosabb az α_1-szorzatnál. Ez azt jelenti, hogy az α_0-, az α_1-, és α_2-szorzat A-véges automatákra olyan valódi hierarchiát alkot, ammelyben az α_2-szorzat homomorfan ekvivalens az Gluskov szorzattal.

Végül megadunk egy lemmát, amelynek bizonyítása egy jól használható algoritmust ad n állapotú automatáknak n-nél kevesebb állapotú automaták véges tényezős α_0-szorzatával való homomorf reprezentációjára. Az algoritmus az automaták lefedő halmazrendszereit használja, s lényegében a 18.5. Tételben szereplő eljárás egy egyszerűsítése. Ennél az eljárásnál a lefedő halmazrendszer legyen mindig halmaz.

19.15. Lemma
Legyen $\mathbf{A} = (A, X, \delta)$ tetszőleges A-véges automata és $\mathcal{M} = \{A_1, \ldots, A_k\}$ az $\mathbf{A}$ egy lefedő halmazrendszere. Jelölje l az $|A_j|$ $(j = 1, \ldots, k)$ számok közül a legnagyobbat. Akkor $\mathbf{A}$ homomorfan reprezentálható $\mathbf{A}$ egy $\mathcal{M}$-faktora és egy l állapotú automata szuperpozíciójával.

Bizonyítás. Legyen az $\mathbf{M} = (\mathcal{M}, X, \delta')$ automata az $\mathbf{A}$ egy $\mathcal{M}$-faktora. Legyenek továbbá τ_j $(j = 1, \ldots, k)$ leképezések az A_j halmazok $[l]$-be való egy-egyértelmű leképezései. Definiáljuk a $\mathbf{C} = ([l], \mathcal{M} \times X, \delta'')$ automata δ'' átmenetfüggvényét a következőképpen. Legyenek $s \in [l]$ és $(A_j, x) \in \mathcal{M} \times X$ tetszőleges elemek. Ha van olyan $a \in A_j$, hogy $\tau_j(a) = s$ és $\delta'(A_j, x) = A_t$, akkor legyen $\delta''(s, (A_j, x)) = \tau_t(\delta(a, x))$. Minden más esetben legyen $\delta''(s, (A_j, x)) = s_0$, ahol s_0 a $[l]$ halmaz tetszőleges, de rögzített eleme. A $\mathbf{C}$ nyilvánvalóan jól definiált.

Legyen $\varphi = (\varphi_1, \varphi_2)$, ahol $\varphi_1 = \iota_X$ és $\varphi_2(A_j, x) = (A_j, x)$ minden $(A_j, x) \in \mathcal{M} \times X$ elemre. Tekintsük a $\mathbf{D} = (\mathcal{M} \times [l], X, \delta_D) = \mathbf{M} \times \mathbf{C}[X, \varphi]$ szuperpozíciót. Vegyük azon $(\mathcal{M} \times [l])$-beli (A_j, s) elemek D' halmazát, amelyekre van olyan $a \in A_j$, hogy $\tau_j(a) = s$. Az $\mathbf{M}$ és a $\mathbf{C}$ automaták definíciójából következik, hogy $\mathbf{D}' = (D', X, \delta_D)$ a $\mathbf{D}$ szuperpozíció részautomatája. Adjuk meg $\psi : D' \to A$ megfeleltetést úgy, hogy minden $(A_j, s) \in D'$ esetén $\psi(A_j, s) = a$ akkor és csak akkor, ha $\tau_j(a) = s$. Nem nehéz belátni, hogy ψ a $\mathbf{D}'$ automata homomorf leképezése $\mathbf{A}$-ra. □

A 17.6. Következmény szerint az A-véges automatáknak nem létezik minimális izomorfan teljes rendszere a véges tényezős α_0-szorzatra, s ezért a véges tényezős kvázidirekt szorzatra sem. Viszont a 19.9. Tétel szerint az A-véges automatáknak van minimális homomorfan teljes rendszere a véges tényezős α_0-szorzatra. Dömösi Pál megmutatta, hogy az A-véges automatáknak nincs minimális homomorfan teljes rendszere a véges tényezős kvázidirekt szorzatra, s így speciálisan a véges tényezős heterogén direkt és direkt szorzatra sem. Az eredmény bizonyításásával, annak hosszadalmassága miatt, nem foglalkozunk. A bizonyítás megtalálható Peák István [17] egyetemi jegyzetében.

Feladatok

19.1. Minden $n > 1$ állapotú automata homomorfan reprezentálható az n állapotú standard automata egy α_0-hatványával. (→ Megoldás)

19.2. Adjunk meg a véges automatáknak olyan homomorfan teljes rendszerét a véges tényezős α_0-szorzatra, amelynek nincs minimális homomorfan teljes részrendszere erre a szorzatra. (→ Megoldás)

19.3. Az

A	1	2	3	4
x	2	3	4	1
y	2	3	1	4

négyállapotú automata homomorfan reprezentálható három négynél kevesebb állapotú automata α_0-szorzatával, de nem reprezentálható homomorfan két négynél kevesebb állapotú automata α_0-szorzatával. (→ Megoldás)

20. Metrikusan teljes rendszerek

Tegyük fel, hogy az $\alpha : X^* \to Y^*$ egy automataleképezést indukálja az $\mathbf{A} = (A, a_0, X, Y, \delta, \lambda)$ iniciális Mealy automata. Adott esetben fontos lehet az $\mathbf{A}$ automatát kicserélni vele iniciálisan ekvivalens és számunkra jobb tulajdonságokkal rendelkező automatával. Ilyen feladatot oldottunk meg a 9., 10. és 11. fejezetekben. Gyakorlati szempontból azonban olyan $\mathbf{B} = (B, b_0, X, Y, \delta', \lambda')$ iniciális automatával is megelégedhetünk, amely ugyan nem iniciálisan ekvivalens az eredeti $\mathbf{A}$ automatával, de a nem túlságosan hosszú bemenő szavakra az általa indukált automataleképezés megegyezik az α automataleképezéssel. Konkrétabban, ha számunkra elegendő valamely k pozitív egész számra az $\alpha(p)$ ($p \in X(k)$) értékeket megadni, akkor olyan számunkra jobb $\mathbf{B}$ automata is megfelelő amelyre $\alpha_{\mathbf{B}}(p) = \alpha(p)$ ($p \in X(k)$). Ez a gyakorlati megközelítés vezet a következő definícióhoz.

Azt mondjuk, hogy az $\alpha : X^* \to Y^*$ automataleképezést az $\mathbf{B}$ automata *k hosszban indukálja*, ha van olyan $b \in B$, hogy minden $p \in X(k)$ bemenő szóra $\alpha_{\mathbf{B},b}(p) = \alpha(p)$.

A kimenő jel nélküli automaták $\mathcal{K}$ rendszere a Mealy automaták $\mathcal{M}$ rendszerének *metrikusan teljes rendszere az automataszorzatok valamely típusára*, ha bármely $\mathcal{M}$-beli automata által indukált α automataleképezéshez és minden k nemnegatív egész számhoz létezik $\mathcal{K}$-beli automatáknak olyan adott típusú szorzata, amely k hosszban indukálja α-t. Ha a szorzat egy σ-szorzat, akkor azt mondjuk, hogy $\mathcal{K}$ az $\mathcal{M}$ *metrikusan σ-teljes rendszere*. Ha σ-szorzat az Gluskov szorzat, akkor $\mathcal{K}$-t $\mathcal{M}$ *metrikusan teljes rendszer*ének mondjuk. Ha pedig $\mathcal{M}$ az összes Mealy automatát tartalmazza, akkor $\mathcal{K}$-t *metrikusan teljes rendszer*nek hívjuk. A minimális teljes redszerekhez hasonlóan definiáljuk a minimális metrikusan teljes rendszereket.

A definíciókból látható, hogy minden teljes rendszer, így a 16.1. Lemma szerint minden homomorfan teljes rendszer is, metrikusan teljes rendszer. Ez azt jelenti, hogy a (16.4), a (16.5) és a (16.6) feltétellel definiált automaták Mealy automatáknak egyelemű metrikusan teljes rendszerét alkotják, azaz a Mealy automatáknak van véges, s így minimális metrikusan teljes rendszere az Gluskov szorzatra.

Megindokoljuk, hogy a teljes rendszereknek ezeket a típusait miért nevezzük metrikus teljes rendszereknek. Az $\alpha : X^* \to Y^*$ automataleképezések $\mathcal{AL}[X, Y]$ halmazában vezessünk be egy metrikát a következő módon.

Az $\alpha, \beta \in \mathcal{AL}[X, Y]$ leképezések *távolság*án azt a $d(\alpha, \beta)$ számot fogjuk érteni, amelyre teljesülnek az alábbi feltételek. Ha $\alpha = \beta$, akkor $d(\alpha, \beta) = 0$, ellenkező esetben pedig legyen $d(\alpha, \beta) = \frac{1}{k}$ pontosan akkor, ha minden $p(\in X^*, |p| < k)$ bemenő szóra $\alpha(p) = \beta(p)$ és van olyan $q(\in X^*, |q| = k)$ bemenő szó, hogy $\alpha(q) \neq \beta(q)$. Nyilvánvaló, hogy $\mathcal{AL}[X, Y]$ a d távolságfüggvénnyel metrikus teret alkot. Látható, hogy az α és β automataleképezések távolsága akkor és csak akkor maximális, s ez a maximum 1, ha van olyan $x \in X$, hogy $\alpha(x) \neq \beta(x)$.

Legyen $h > 0$ tetszőleges valós szám. Azt mondjuk, hogy az $\mathbf{A} = (A, X, Y, \delta, \lambda)$ automata az $\alpha : X^* \to Y^*$ automataleképezést *h pontossággal* vagy *h-nál kisebb hibával előállítja*, ha van olyan $a \in A$ állapot, hogy $d(\alpha_{\mathbf{A},a}, \alpha) < h$. Ha $\mathcal{K}$ a Mealy automaták $\mathcal{M}$ rendszerének metrikusan teljes rendszere az automataszorzatok valamely típusára, akkor bármely $\mathcal{M}$-beli automata által indukált α automataleképezés tetszőleges h pontossággal előállítható $\mathcal{K}$-beli automatáknak adott típusú szorzatával.

Legyenek $\mathbf{A} = (A, X, \delta)$ és $\mathbf{B} = (B, X, \delta')$ tetszőleges automaták, k egy pozitív egész szám, $A_a(k) = \{ap; p \in X(k)\}$ és $B_b(k) = \{bp; p \in X(k)\}$. Azt mondjuk, hogy $\psi_{a,b} : A_a(k) \to B_b(k)$ leképezés az $(\mathbf{A}, a)$ iniciális automata *k-homomorf leképezés*e vagy *k-homomorfizmus*a a $(\mathbf{B}, b)$ iniciális automatába, ha

$$\psi_{a,b}((ap)_{\mathbf{A}}) = (bp)_{\mathbf{B}} \quad (p \in X(k)). \tag{20.1}$$

és $(\mathbf{B}, b)$-t $(\mathbf{A}, a)$ *k-homomorf képé*nek nevezzük. Ennek megfelelően beszélünk *k-izomorfizmus*ról is. A fejezet GÉCSEG FERENC eredményeit tartalmazza.

Az automataleképezések (7.2) jelölését használva nem nehéz belátni a következő állítást.

20.1. LEMMA
Ha $\mathbf{A} = (A, X, \delta)$ és $\mathbf{B} = (B, X, \delta')$, továbbá $(\mathbf{A}, a)$-nak $(\mathbf{B}, b)$ k-homomorf képe, akkor minden $\mathbf{B}' = (B, X, Y, \delta', \lambda')$ Mealy automatához van olyan $\mathbf{A}' = (A, X, Y, \delta, \lambda)$ Mealy automata, hogy minden $p \in X(k)$ bemenő szóra $\alpha_{\mathbf{A}',a}(p) = \alpha_{\mathbf{B}',b}(p)$.

Bizonyítás. Válasszuk meg a λ kimenetfüggvényt úgy, hogy minden $q \in X(k-1)$ és $x \in X$ esetén

$$\lambda((aq)_{\mathbf{A}}, x) = \lambda'((bq)_{\mathbf{B}}, x)$$

teljesüljön. $\square$

Legyen k pozitív egész szám. Tekintsünk egy legalább $n > 0$ állapotú $\mathbf{A} = (A, X, \delta)$ automatát. Az állapothalmaz $A' = \{a_1, \ldots, a_n\}$ részhalmazát az $\mathbf{A}$ automata egy *(n állapotú) k-szabad részé*nek nevezzük, ha $j \neq l$ $(1 \leq j, l \leq n)$ vagy $p \neq q$ $(p, q \in X(k))$, akkor $a_j p \neq a_l q$. Ha $|A| = n$, akkor $A' = A$. Ebben az esetben $\mathbf{A}$-t *k-szabad automatá*nak hívjuk. A (3.11) összefüggés szerint bármely szabad automata minden k pozitív egész számra k-szabad automata.

20.2. LEMMA
Legyenek $\mathbf{A} = (A, X, \delta)$ és $\mathbf{B} = (B, X, \delta')$ tetszőleges automaták. Ha $\{a\}$ az $\mathbf{A}$ automata k-szabad része, akkor bármely $b \in B$ állapotra a $(\mathbf{B}, b)$ iniciális automata az $(\mathbf{A}, a)$ iniciális automata k-homomorf képe.

Bizonyítás. A (20.1)-ben definiált $\psi_{a,b}$ leképezés k homomorfizmus. $\square$

A 14. fejezetben definiáltuk a $\mathbf{P}_\sigma$ σ-szorzat operátort. A következő lemmában ez az operátor szerepel $\sigma = \alpha_0$ esetben.

20.3. LEMMA
Legyen $\mathcal{K}$ kimenő jel nélküli automaták egy rendszere és k egy nemnegatív egész szám. Ha létezik olyan $\mathcal{K}$-beli $\mathbf{A} = (A, X, \delta)$ automata, amelynek valamely $a_0 \in A$ állapotára, $p_0 \in X^k$ bemenő szavára és $y_1, y_2 \in X$ bemenő jeleire $a_0 p_0 y_1 \neq a_0 p_0 y_2$, akkor bármely $X' \neq \emptyset$ véges halmazra és n pozitív egész számra $\mathbf{P}_{\alpha_0}(\mathcal{K})$ tartalmaz olyan $\mathbf{B} = (B, X', \delta_B)$ automatát, amelynek van n állapotú k-szabad része.

Bizonyítás. Először azt látjuk be, hogy ha $n = 1$, akkor minden $l \leq k + 1$ esetén $\mathbf{P}_{\alpha_0}(\mathcal{K})$-ban van olyan legalább két bemenő jelű $\mathbf{C} = (C', Z, \delta')$ automata, amelynek van egyelemű $\{c'\}$ l szabad része. A bizonyítást l szerinti teljes indukcióval végezzük. Ha $l = 0$, akkor az állítás nyilvánvalóan igaz.

Tegyük fel, hogy az állítás igaz minden $l \leq k$ esetén. Legyen $\{c_l\}$ l-szabad rendszere egy $\mathbf{P}_{\alpha_0}(\mathcal{K})$-beli $\mathbf{C}_l = (C_l, Z, \delta_l)$ automatának. Tekintsünk két különböző $Z(l+1)$-beli p és q szót, amelyekre $|p| = l+1$ vagy $|q| = l+1$. Tekintsük a

$$\overline{\mathbf{C}} = (\overline{C}, Z, \overline{\delta}) = \mathbf{C}_l \times \mathbf{A}[Z, \varphi]$$

α_0-szorzatot, ahol a (14.5)-ben definiált φ_j $(j = 1, 2)$ visszacsatolási függvényeket definiáljuk az alábbi módon. Legyen $\varphi_1 = \iota_Z$. Legyen továbbá

$$p_0 = x_1 \dots x_{k-l} x_{k-l+1} \dots x_k \quad (x_1, \dots, x_k \in X),$$

$$p = z_1 \dots z_u, \quad q = z'_1 \dots z'_v \quad (z_1, \dots, z_u, z'_1, \dots, z'_v \in Z).$$

A φ_2 visszacsatolási függvény definiálására két esetet különböztetünk meg. Ha $u < v = l + 1$, akkor

$$\varphi_2(\delta_l(c_l, z_1 \dots z_{j-1}), z_j) = x_{k-l+j} \quad (j = 1, \dots, u),$$

$$\varphi_2(\delta_l(c_l, z'_1 \dots z'_{j-1}), z'_j) = x_{k-l+j} \quad (j = 1, \dots, l),$$

$$\varphi_2(\delta_l(c_l, z'_1 \dots z'_l), z'_{l+1}) = \begin{cases} y_1, & \text{ha } a_0 p_0 y_1 \neq a_0 x_1 \dots x_{k-l+u}, \\ y_2, & \text{különben.} \end{cases}$$

Ha $u = v = l + 1$, akkor pedig

$$\varphi_2(\delta_l(c_l, z_1 \dots z_{j-1}), z_j) = \varphi_2(\delta_l(c_l, z'_1 \dots z'_{j-1}), z'_j) = x_{k-l+j} \quad (j = 1, \dots, l),$$

$$\varphi_2(\delta_l(c_l, z_1 \dots z_l), z_{l+1}) = y_1, \quad \varphi_2(\delta_l(c_l, z'_1 \dots z'_l), z'_{l+1}) = y_2.$$

Mivel $\{c_l\}$ a $\mathbf{C}_l$ automata egy l szabad része, ezért φ_2 jól definiált.

Megmutatjuk, hogy $((c_l, a_0 x_1 \dots x_{k_l})p)_{\overline{\mathbf{C}}} \neq ((c_l, a_0 x_1 \dots x_{k_l})q)_{\overline{\mathbf{C}}}$. Az $u < v = l + 1$ esetben

$$((c_l, a_0 x_1 \dots x_{k-l})p)_{\overline{\mathbf{C}}} = ((c_l p)_{\mathbf{C}_l}, a_0 x_1 \dots x_{k-l+u}),$$

és

$$((c_l, a_0 x_1 \dots x_{k-l})q)_{\overline{\mathbf{C}}} = ((c_l q)_{\mathbf{C}_l}, a_0 p_0 y_2)$$

vagy

$$((c_l, a_0 x_1 \dots x_{k-l})q)_{\overline{\mathbf{C}}} = ((c_l q)_{\mathbf{C}_l}, a_0 p_0 y_1),$$

attól függően, hogy $y_1a_0x_1\dots x_{k-l+u} = a_0p_0y_1$ vagy nem. Az $u = v = l+1$ esetben

$$((c_l, a_0x_1\dots x_{k-l})p)_{\overline{\mathbf{C}}} = ((c_lp)_{\mathbf{C}_l}, a_0p_0y_1),$$

$$((c_l, a_0x_1\dots x_{k-l})q)_{\overline{\mathbf{C}}} = ((c_lq)_{\mathbf{C}_l}, a_0p_0y_2).$$

Ebből már könnyen következik, hogy tetszőleges két különböző $Z(l+1)$-beli p és q szóra van olyan $\mathbf{C}_{p,q} = (C_{p,q}, Z, \delta_{p,q}) \in \mathbf{P}_{\alpha_0}(\mathcal{K})$ és $c_{p,q} \in C_{p,q}$, hogy $(c_{p,q}p)_{\mathbf{C}_{p,q}} \neq (c_{p,q}q)_{\mathbf{C}_{p,q}}$. Ha ugyanis $|p|, |q| < l+1$, akkor legyen $\mathbf{C}_{p,q} = \mathbf{C}_l$ és $c_{p,q} = c_l$, máskülönben pedig legyen $\mathbf{C}_{p,q} = \overline{\mathbf{C}}$ és $c_{p.q} = (c_l, a_0x_1\dots x_{k-l})$.

Tekintsük most az $I = \{(p,q); p,q \in Z(l+1), p \neq q\}$ indexhalmazra a

$$\mathbf{C}' = (C', Z, \delta') = \prod_{(p,q)\in I} \mathbf{C}_{p,q}$$

direkt szorzatot és a C'-beli $\mathbf{c}' = (c_{p,q}; (p,q) \in I)$ elemet. Nyilvánvaló, hogy $\{\mathbf{c}'\}$ a $\mathbf{C}'$ automata egy $(l+1)$ szabad része és $\mathbf{C}' \in \mathbf{P}_{\alpha_0}(\mathcal{K})$. Így létezik olyan $\mathbf{C} = (C, Z, \delta_C) \in \mathbf{P}_{\alpha_0}(\mathrm{K})$ és $c \in C$, amelyre $\{c\}$ a $\mathbf{C}$ egy $(k+1)$ szabad része.

Legyen most z_1 és z_2 két különböző bemenő jel Z-ből és $\delta_C(c, z_t) = c_t$ $(t = 1, 2)$. Nem nehéz belátni, hogy $\{c_1, c_2\}$ a $\mathbf{C}$ egy k-szabad része. Tekintsük a $\mathbf{D} = \mathbf{C}^{m'}[\{z_1, z_2\}, \varphi']$ kvázidirekt hatványt, ahol $m' \geq \log_2 n$ $(n > 1)$ és $\varphi'_j(z_t) = z_t$ $(j = 1, \dots, m',\ t = 1, 2)$. Válasszuk a $\mathbf{b}' = \mathbf{b}_1, \dots, \mathbf{b}_n) \in D^n$ vektort úgy, hogy $\pi_i(\mathbf{b}_j) \in \{c_1, c_2\}$ $(i = 1, \dots, m')$ és $\mathbf{b}_{j_1} \neq \mathbf{b}_{j_2}$, ha $j_1 \neq j_2$ $(1 \leq j_1, j_2 \leq m')$. ($\pi_i(\mathbf{b}_j)$ a $\mathbf{b}_j$ vektor i-edik komponense.) Nyilvánvaló, hogy $\mathbf{D} \in \mathbf{P}_{\alpha_0}(\mathcal{K})$ és $\mathbf{b}'$ a $\mathbf{D}$ automata k-szabad része.

Végül legyen $m \geq \log_2 |X'|$, és tekintsük

$$\mathbf{B} = (B, X', \delta_B) = \mathbf{D}^m[X', \varphi'']$$

kvázidirekt hatványt, ahol φ'' az X' halmaz bijektív leképezése $\{z_1, z_2\}^m$-be. Ezenkívül $\mathbf{b} = (\mathbf{b}^{(1)}, \dots, \mathbf{b}^{(n)}) \in B^n$ vektort definiáljuk a $\pi_s(\mathbf{b}^{(j)}) = \mathbf{b}_j$ $(s = 1, \dots, m,\ j = 1, \dots, n)$ összefüggésekkel. Természetesen $\mathbf{B} \in \mathbf{P}_{\alpha_0}(\mathcal{K})$. Megmutatjuk, hogy $\mathbf{b}$ a $\mathbf{B}$ automata k-szabad része. Ehhez, legyen $p, q \in X'(k)$. Ha $j_1 \neq j_2$ $(1 \leq j_1, j_2 \leq n)$, akkor $(\mathbf{b}^{(j_1)}p)_{\mathbf{B}}$ és $(\mathbf{b}^{(j_2)}q)_{\mathbf{B}}$ minden komponense különböző. Tegyük fel, hogy $j_1 = j_2$ és $p \neq q$. Akkor van olyan $1 \leq s \leq m)$, amelyre $\varphi''_s(p) \neq \varphi''_s(q)$. Így $(\mathbf{b}^{(j_1)}p)_{\mathbf{B}}$ és $(\mathbf{b}q^{(j_2)})_{\mathbf{B}}$ s-edik komponense különböző. □

20.4. Tétel

Az automaták $\mathcal{K}$ rendszere akkor és csak akkor metrikusan σ-teljes rendszer, ha bármely $X \neq \emptyset$ halmazhoz és k nemnegatív egész számhoz van olyan $\mathbf{A} = (A, X, \delta)$ automata és $a \in A$ állapot, hogy $\mathbf{A} \in \mathbf{P}_\sigma(\mathcal{K})$ és $\{a\}$ az $\mathbf{A}$ automata k-szabad része.

Bizonyítás. Ha $\mathcal{K}$ teljesíti a feltételeket, akkor a 20.1. és a 20.2. Lemma szerint metrikusan σ-teljes rendszer.

Megfordítva, legyen $\mathcal{K}$ metrikusan σ-teljes rendszer. Tegyük fel, hogy az $X \neq \emptyset$ halmazhoz és az k nemnegatív egész számhoz nincs olyan $\mathbf{A} = (A, X, \delta)$ automata, hogy $\mathbf{A} \in \mathbf{P}_\sigma(\mathcal{K})$ és valamely $a \in A$ állapotra $\{a\}$ az $\mathbf{A}$ automata k-szabad része. (Egy automata bármely állapota az automata egy 0-szabad részét alkotja, ezért feltehetjük, hogy $k > 0$.) Tekintsünk egy olyan $\mathbf{B} = (B, X, \delta')$ automatát, amelynek $b \in B$ állapota az automata egy $(k+1)$-szabad részét alkotja. Vegyük a $\mathbf{B}' = (B, X, B, \delta', \lambda')$ Mealy automatát a $\lambda'(b', x) = b'$ $(b' \in B,\ x \in X)$ kimenetfüggvénnyel. Mivel $\mathcal{K}$ metrikusan σ-teljes rendszer, ezért van olyan $\mathbf{A} = (A, X, \delta) \in \mathbf{P}_\sigma(\mathcal{K})$ automata és $a \in A$, hogy egy $\mathbf{A}' = (A, X, B, \delta, \lambda)$ Mealy automatára és minden $p \in X(k+1)$ bemenő szóra $\alpha_{\mathbf{B}',b}(p) = \alpha_{\mathbf{A}',a}(p)$, azaz $\mathbf{A}'$ $(k+1)$ lépésben indukálja $\alpha_{\mathbf{B}',b}$-t. A feltevésünk miatt $\{a\}$ az $\mathbf{A}$ automatának nem k-szabad része, így vannak olyan különböző $p, q \in X(k)$ bemenő szavak, amelyekre $(ap)_\mathbf{A} = (aq)_\mathbf{A}$. Ez azt jelenti, hogy tetszőleges $x \in X$ bemenő jelre $\lambda(a, px)$ és $\lambda(a, qx)$ utolsó betűje megegyezik, ami nyilvánvalóan nem igaz $\lambda'(a, px)$-re és $\lambda'(a, qx)$-re. Ez pedig lehetetlen. Vagyis bármely $X \neq \emptyset$ halmazhoz és k nemnegatív egész számhoz van olyan $\mathbf{A} = (A, X, \delta)$ automata és $a \in A$ állapot, hogy $\mathbf{A} \in \mathbf{P}_\sigma(\mathcal{K})$ és $\{a\}$ az $\mathbf{A}$ automata k-szabad része. $\square$

A 20.4. Tételt felhasználva a következő tételben a metrikusan σ-teljes rendszerek egy másik jellemzését adjuk.

20.5. Tétel

Az automaták $\mathcal{K}$ rendszere akkor és csak akkor metrikusan teljes a Gluskov szorzatra vagy bármely α_i-szorzatra $(i \geq 0)$, ha minden k nemnegatív egész számhoz van olyan $\mathbf{A} = (A, X, \delta) \in \mathcal{K}$ automata, amelynek valamely $a \in A$ állapotára, $p \in X^k$ bemenő szavára és $y_1, y_2 \in X$ bemenő jeleire $apy_1 \neq apy_2$.

Bizonyítás. Ha $\mathcal{K}$ teljesíti a feltételeket, akkor a 20.3. Lemmát is felhasználva a 20.4. Tételből kapjuk, hogy $\mathcal{K}$ metrikusan teljes rendszer az α_0-szorzatra, s így metrikusan teljes rendszer minden α_i-szorzatra és a Gluskov szorzatra is.

Megfordítva, legyen $\mathcal{K}$ metrikusan teljes rendszer a Gluskov szorzatra vagy valamely α_i-szorzatra. Tegyük fel, hogy van olyan nemnegatív egész k, amelyre bármely $\mathbf{A} = (A, X, \delta) \in \mathcal{K}$, $a \in A$, $p \in X^k$ és $y_1, y_2 \in X$ esetén $apy_1 = apy_2$. Ebből következik, hogy tetszőleges véges X' $(|X'| > 1)$ halmaz esetén egy $\mathbf{B} = (B, X', \delta') \in \mathbf{P}(\mathcal{K})$ $[\mathbf{P}_{\alpha_i}(\mathcal{K})]$ automata bármely $b \in B$ állapotára, $q \in X'^k$ bemenő szavára és $y_1', y_2' \in X'$ bemenő jeleire $(bqy_1')_\mathbf{B} = (bqy_2')_\mathbf{B}$. Ezért $\mathcal{K}$-beli automaták egyetlen $\mathbf{B} = (B, X', \delta')$ Gluskov

$[\alpha_i]$ szorzatának sincs olyan $b \in B$ állapota, amelyre $\{b\}$ a szorzat $(k+1)$-szabad része lenne. A 20.4. Tétel szerint $\mathcal{K}$ nem metrikusan teljes rendszer a Gluskov $[\alpha_i]$ szorzatra, ami ellentmond a feltevésünknek. Így bármely k nemnegatív egész számhoz van olyan $\mathbf{A} = (A, X, \delta) \in \mathcal{K}$ automata, amelynek valamely $a \in A$ állapotára, $p \in X^k$ bemenő szavára és $y_1, y_2 \in X$ bemenő jeleire $apy_1 \neq apy_2$. □

20.6. Következmény
Az automaták $\mathcal{K}$ rendszere akkor és csak akkor metrikusan teljes az Gluskov szorzatra, ha metrikusan teljes az α_0-szorzatra.

Megjegyezzük, hogy a 20.5. Tétel alapján könnyen kaphatunk egy algoritmust annak eldöntésére, hogy kimenő jel nélküli automaták egy véges $\mathcal{K}$ rendszere metrikusan teljes-e az Gluskov szorzatra, s így bármely α_i-szorzatra.

Mint a következő példa is mutatja, az automatáknak van véges, sőt egyelemű metrikusan teljes rendszere az α_0-szorzatra, s így minden α_i-szorzatra és a Gluskov szorzatra is.

20.7. Példa
A 18. fejezetben definiált $\mathbf{D}_2 = (\{1,2\}, \{x_1, x_2\}, \delta)$ kétállapotú beállító automatából álló rendszer, ahol

$$\delta(1, x_1) = \delta(1, x_2) = \delta(2, x_1) = 1, \quad \delta(2, x_2) = 2,$$

az automaták metrikusan teljes rendszere az α_0-szorzatra.

Ugyanis minden k nemnegatív egész számra $2x_2^k x_1 \neq 2x_2^k x_2$, azaz teljesülnek a 20.5. Tétel feltételei.

V. SPECIÁLIS AUTOMATÁK

Ebben a részben részletesebben vizsgálunk néhány olyan automataosztályt, amelyek fontos szerepet játszanak az elmélet kiépítésében. A vizsgálatokban általában félcsoportelméleti és csoportelméleti eredményeket használunk. Legtöbbször kimenő jel nélküli automatákat tekintünk. Mint már az 1. fejezetben megjegyeztük, ha az adott definícióban az automata kimeneti viselkedése nem játszik szerepet, akkor a Mealy vagy Moore automatát akkor nevezzük adott típusúnak, ha vetülete is ugyanolyan típusú.

21. Ciklikus automaták

A ciklikus automaták az információátalakító és a nyelvfelismerő rendszereknél alapvető jelentőségűek. Rájuk vonatkozó néhány egyszerű eredményt megadtunk a 2. fejezetben, mint például azt is, hogy minden automata lefedhető ciklikus automatákkal.

Egy automatát *ciklikus*nak neveztünk, ha van egyelemű generátorrendszere, röviden mondva generátoreleme. Ciklikus automaták közé tartoznak az iniciálisan összefüggő automaták is, speciálisan a 7. fejezetben definiált alsó és felső automaták. Ciklikus automata homomorf képe ciklikus, generátorelem homomorf képe generátorelem.

Ha az $\mathbf{A} = (A, X, \delta)$ ciklikus automata egy a_0 generátoreleméhez van olyan $r \in X^+$ bemenő szó, hogy $a_0 r = a_0$, akkor δ szürjektív és

$$A = \{a_0 p; p \in X^+\}.$$

Ekkor az mondjuk, hogy az $\mathbf{A}$ automata *az üres szó nélkül ciklikus*. Ha nincs ilyen $r \in X^+$, akkor

$$A = \{a_0 p; p \in X^*\}.$$

Ez utóbbi esetben a_0 az automatának egyetlen generátoreleme és δ nem szürjektív. Ebben azt esetben pedig az mondjuk, hogy az $\mathbf{A}$ automata *az üres szóval ciklikus*.

Legyen ρ az X^* $(X \neq \emptyset)$ szabad monoid jobb kongruenciája. Definiáljuk az $\mathbf{X}^*/\rho = (X^*/\rho, X, \delta_\rho)$ automata átmenetfüggvényét a

$$\delta_\rho(\rho[p], x) = \rho[px] \quad (p \in X^*, x \in X) \tag{21.1}$$

feltétellel. Nem nehéz belátni, hogy $\mathbf{X}^*/\rho$ ciklikus automata és $\rho[e]$ az automata egy generátoreleme. Most megmutatjuk, hogy az $\mathbf{A} = (A, X, \delta)$ ciklikus automaták izomorfiától eltekintve éppen az $\mathbf{X}^*/\rho$ automaták, ahol a ρ relációk X^* jobb kongruenciái. Ehhez szükségünk lesz a (6.1) feltétellel definiált $\rho_{\mathbf{A},a}$ $(a \in A)$ relációkra.

21.1. Tétel
Ha a_0 az $\mathbf{A} = (A, X, \delta)$ ciklikus automata egy generátoreleme, akkor $\mathbf{A} \cong \mathbf{X}^*/\rho_{\mathbf{A},a_0}$.

Bizonyítás. Definiáljuk a $\varphi : A \to X^*/\rho_{\mathbf{A},a_0}$ leképezést a

$$\varphi(a_0 p) = \rho_{\mathbf{A},a_0}[p], \quad p \in X^*$$

feltétellel. Könnyen megmutatható, hogy φ az $\mathbf{A}$ automata izomorf leképezése az $\mathbf{X}^*/\rho_{\mathbf{A},a_0}$ automatára. □

Jelölje szokásosan $S_1(\mathbf{A}) = X^*/\rho_{\mathbf{A}}$ $[S(\mathbf{A}) = X^+/\rho_{\mathbf{A}}]$ az $\mathbf{A} = (A, X, \delta)$ automata karakterisztikus monoidját [félcsoportját] (l. 6. fejezet). Ha $\mathbf{A}$ az üres szóval ciklikus és az a_0 generátorelemére $\rho_{\mathbf{A},a_0}$ kongruencia, akkor $S_1(\mathbf{A}) = S(\mathbf{A}) \cup \{e\}$. Ha pedig $\mathbf{A}$ az üres szó nélkül ciklikus és egy a_0 generátorelemére $\rho_{\mathbf{A},a_0}$ kongruencia, akkor $S_1(\mathbf{A}) \cong S(\mathbf{A})$.

Ha az $\mathbf{A} = (A, X, \delta)$ ciklikus automata a_0 generátorelemére $\rho_{\mathbf{A},a_0}$ kongruencia, akkor az $\mathbf{A}$ automatát *karakterisztikus automatá*nak nevezzük. Ha $\rho_{\mathbf{A},a_0}$ kongruencia, akkor $\rho_{\mathbf{A},a_0} = \rho_{\mathbf{A}}$. A 21.1. Tétel szerint $\mathbf{A} \cong \mathbf{X}^*/\rho_{\mathbf{A}}$. Az a_0 generátorelemet *karakterisztikus generátorelem*nek nevezzük. Az elnevezés onnan származik, hogy $\mathbf{X}^*/\rho_{\mathbf{A}}$ az $\mathbf{A}$ automata karakterisztikus monoidja.

Ha ρ az X^* szabad monoid kongruenciája, akkor $\mathbf{X}^*/\rho$ ciklikus automata karakterisztikus automata, amelynek karakterisztikus monoidja X^*/ρ és $\rho[e]$ egy karakterisztikus generátoreleme. Így az X feletti karakterisztikus automaták (izomorfia erejéig) az $\mathbf{X}^*/\rho$ automaták, ahol $\rho \in C(X^*)$.

21.2. Lemma
Ha $\mathbf{A} = (A, X, \delta)$ karakterisztikus automata, akkor $E(\mathbf{A}) \cong S_1(\mathbf{A})$.

Bizonyítás. Legyen $a_0 \in A$ karakterisztikus generátorelem. Az X^* szabad monoid minden p eleméhez rendeljük hozzá azt a $\varphi_p : A \to A$ megfeleltetést, amelyre bármely $a = a_0q \in A$ $(q \in X^*)$ esetén $\varphi_p(a_0q) = a_0pq$ teljesül. Mivel $\mathbf{A}$ karakterisztikus automata, ezért φ_p leképezés. Ha $x \in X$, akkor

$$\varphi_p(\delta(a, x)) = \varphi_p(\delta(a_0q, x)) = \varphi_p(a_0qx) = a_0pqx =$$

$$= \delta(a_0pq, x) = \delta(\varphi_p(a_0q), x) = \delta(\varphi_p(a), x),$$

vagyis $\varphi_p \in E(\mathbf{A})$.

Megmutatjuk, hogy $E(\mathbf{A}) = \{\varphi_p; p \in X^*\}$. Legyen e célból $\varphi \in E(\mathbf{A})$ és $\varphi(a_0) = a_0t$ $(t \in X^*)$. Bármely $a = a_0q$ $(q \in X^*)$ esetén

$$\varphi(a) = \varphi(a_0q) = \varphi(a_0)q = a_0tq = \varphi_t(a_0q) = \varphi_t(a),$$

tehát $\varphi = \varphi_t$.

Minthogy $\rho_{\mathbf{A},a_0} = \rho_{\mathbf{A}}$, így az $\eta : \varphi_p \to \rho_{\mathbf{A}}[p]$ $(p \in X^*)$ leképezés bijekció. Legyenek végül $s, r \in X^*$ tetszőlegesek. Akkor bármely $a = a_0q$ állapotra

$$\varphi_s(\varphi_r(a)) = \varphi_s(a_0rq) = a_0srq = \varphi_{sr}(a),$$

azaz $\varphi_s\varphi_r = \varphi_{sr}$, vagyis η izomorfizmus. □

21.3. Lemma
Bármely $\mathbf{A} = (A, X, \delta)$ ciklikus automatára

$$|E(\mathbf{A})| \leq |A| \leq |S_1(\mathbf{A})|.$$

Ha az $\mathbf{A}$ karakterisztikus automata, akkor

$$|E(\mathbf{A})| = |A| = |S_1(\mathbf{A})|.$$

Bizonyítás. Ha a_0 az $\mathbf{A}$ automata egy generátoreleme, akkor az $\alpha \to \alpha(a_0)$ $(\alpha \in E(\mathbf{A}))$ leképezés injektív, s így $|E(\mathbf{A})| \leq |A|$. Ha a $p, q \in X^*$ bemenő szavakra $a_0p \neq a_0q$, akkor $\rho_{\mathbf{A}}[p] \neq \rho_{\mathbf{A}}[q]$. Amiből következik, hogy $|A| \leq |S_1(\mathbf{A})|$.

Ha $\rho_{\mathbf{A},a_0}$ kongruencia, akkor a 21.3. Lemma szerint $E(\mathbf{A}) \cong S_1(\mathbf{A})$, ezért $|E(\mathbf{A})| = |A| = |S_1(\mathbf{A})|$. □

21.4. Lemma
Ha az $\mathbf{A} = (A, X, \delta)$ karakterisztikus automata $C(\mathbf{A})$ kongruenciahálója véges, akkor az $\mathbf{A}$ automata A-véges.

Bizonyítás. Ha az $\mathbf{A}$ ciklikus automata valamely $a_0 \in A$ generátorelemére $\rho_{\mathbf{A},a_0}$ kongruencia, akkor a 21.2. és a 21.3. Lemmák valamint az 5.6. Tétel felhasználásával kapjuk az eredményt. □

Az $\mathbf{A}_k = (A_k, X, \delta_k)$ $(k \in I)$ automatákat *kapcsoltak*nak nevezzük, ha van olyan $\mathbf{a}_0 \in \prod_{k\in I} A_k$ vektor, hogy bármely $\mathbf{a} \in \prod_{k\in I} A_k$ vektorhoz létezik olyan $p \in X^*$ bemenő szó, hogy $\mathbf{a} = \mathbf{a}_0 p$. Az $\mathbf{A}_k$ $(k \in I)$ kapcsolt automaták ciklikusak, mivel egy generátorelemük $\mathbf{a}_0$ k-adik komponense. Nyilvánvalóan igaz a

21.5. Tétel
Az $\mathbf{A}_k = (A_k, X, \delta_k)$ $(k \in I)$ automaták direkt szorzata akkor és csak akkor ciklikus, ha az $\mathbf{A}_k$ automaták kapcsoltak.

A lemmából következik, hogy ciklikus automata csak ciklikus automaták direkt szorzatára bontható fel. A 6.14. Tételből kapjuk a következő eredményt.

21.6. Következmény
Az üres szó nélkül ciklikus automaták karakterisztikus félcsoportjai bal reduktívek.

Végül általánosítjuk a 21.1. Tételt ciklikus Mealy automatákra. Ehhez szükségünk lesz tetszőleges $\mathbf{A} = (A, X, Y, \delta, \lambda)$ Mealy automata esetén a (6.1) feltétellel definiált $\rho_{\mathbf{A},a}$ és a (6.5) feltétellel definiált $\tau_{\mathbf{A},a}$ $(a \in A)$ relációkra. Legyen ρ az X^* szabad monoid egy binér relációja és $\rho^+ = \rho_{X^+}$, azaz ρ szűkítése X^+-ra. Definiáljuk az X^+ szabad félcsoport ρ' binér relációját a következőképpen: Tetszőleges $p, q \in X^+$ szavakra $(p, q) \in \rho'$ akkor és csak akkor, ha vannak olyan $u, v \in X^*$ és $r \in X^+$ szavak, amelyekre $p = ur$, $q = vr$ és $(u, v) \in \rho$. Ha ρ az X^* szabad monoid jobb kongruenciája, akkor ρ' az X^+ szabad félcsoport jobb kongruenciája és $\rho' \subseteq \rho^+$.

Legyen továbbá ξ olyan ekvivalencia X^+-on, amelyre $\rho' \subseteq \xi$. Definiáljuk az

$$\mathbf{X}^*/(\rho, \xi) = (X^*/\rho, X, X^+/\xi, \delta_{\rho,\xi}, \lambda_{\rho,\xi}) \tag{21.2}$$

Mealy automatát a

$$\delta_{\rho,\xi}(\rho[p], x) = \rho[px], \quad \lambda_{\rho,\xi}(\rho[p], x) = \xi[px], \quad (p \in X^*, x \in X)$$

átmenet- és kimenetfüggvénnyel. Világos, hogy $\mathbf{X}^*/(\rho, \xi)$ olyan ciklikus Mealy automata, amelynek $\rho[e]$ egy generátoreleme és

$$\rho = \rho_{\mathbf{X}^*/(\rho,\xi),\rho[e]}, \quad \xi = (\tau_{\mathbf{X}^*/(\rho,\xi),\rho[e]})^+.$$

Ha $\rho^+ \subseteq \xi$, akkor $\mathbf{X}^*/(\rho, \xi)$ teljesíti a Moore kritériumot.

A következő tételben megmutatjuk, hogy az $\mathbf{A} = (A, X, Y, \delta, \lambda)$ ciklikus Mealy automaták AY-izomorfiától eltekintve éppen az $\mathbf{X}^*/(\rho, \xi)$ automaták, ahol a ρ relációk X^* jobb kongruenciái, a ξ relációk pedig X^+ olyan ekvivalenciái, amelyekre $\rho' \subseteq \xi$. Továbbá pontosan akkor teljesítik a Moore kritériumot, ha $\rho^+ \subseteq \xi$.

21.7. Tétel
Ha a_0 az $\mathbf{A} = (A, X, Y, \delta, \lambda)$ ciklikus Mealy automata egy generátoreleme, akkor
$$(\rho_{\mathbf{A},a_0})' \subseteq (\tau_{\mathbf{A},a_0})^+$$
és $\mathbf{A}$ AY-izomorf az $\mathbf{X}^*/(\rho_{\mathbf{A},a_0}, (\tau_{\mathbf{A},a_0})^+)$ automatával. Ha $\mathbf{A}$ teljesíti a Moore kritériumot, akkor
$$(\rho_{\mathbf{A},a_0})^+ \subseteq (\tau_{\mathbf{A},a_0})^+.$$

Bizonyítás. Legyen a_0 az $\mathbf{A} = (A, X, Y, \delta, \lambda)$ ciklikus Mealy automata egy generátoreleme. Ha $(p, q) \in \rho_{\mathbf{A},a_0}$ $(p, q \in X^*)$ és $r \in X^+$, akkor
$$\overline{\lambda(a_0, pr)} = \overline{\lambda(a_0, p)\lambda(a_0p, r)} = \overline{\lambda(a_0p, r)} =$$
$$= \overline{\lambda(a_0q, r)} = \overline{\lambda(a_0, q)\lambda(a_0q, r)} = \overline{\lambda(a_0, qr)},$$
amiből következik a
$$(\rho_{\mathbf{A},a_0})' \subseteq (\tau_{\mathbf{A},a_0})^+$$
tartalmazás.

Ha $\mathbf{A}$ teljesíti a Moore kritériumot és $(p, q) \in (\rho_{\mathbf{A},a_0})^+$ $(p, q \in X^*)$, akkor
$$p = p_1x, \quad q = q_1z \quad (p_1, q_1 \in X^*,\ x, z \in X),$$
ezért
$$\delta(a_0p_1, x) = a_0p = a_0q = \delta(a_0q_1, z),$$
$$\overline{\lambda(a_0, p)} = \lambda(a_0p_1, x) = \lambda(a_0q_1, z) = \overline{\lambda(a_0, q)},$$
vagyis $(\rho_{\mathbf{A},a_0})^+ \subseteq (\tau_{\mathbf{A},a_0})^+$.

Definiáljuk a
$$\varphi : A \to X^*/\rho_{\mathbf{A},a_0}, \quad \psi : Y \to X^+/(\tau_{\mathbf{A},a_0})^+$$
leképezéseket minden $p \in X^*$ és $q \in X^+$ esetén a
$$\varphi(a_0p) = \rho_{\mathbf{A},a_0}[p], \quad \psi(\overline{\lambda(a_0, q)}) = (\tau_{\mathbf{A},a_0})^+[q]$$
feltételekkel. Mivel $\mathbf{A}$ ciklikus és λ szürjektív, ezért φ és ψ is szürjektív. Az nyilvánvaló, hogy mind a két leképezés injektív. Könnyen megmutatható, hogy (φ, ι_X, ψ) az $\mathbf{A}$ automata AY-izomorf leképezése az $\mathbf{X}^*/(\rho_{\mathbf{A},a_0}, (\tau_{\mathbf{A},a_0})^+)$ automatára. □

21.8. Példa
Legyen $X = \{x, y\}$. Ha az X^* szabad monoid ρ jobb kongruenciájának osztályai:
$$e,\ xX^*,\ yX^*,$$

akkor a ρ' jobb kongruencia osztályai:

$$x,\ xX^*x,\ xX^*y,\ y,\ yX^*x,\ yX^*y,$$

ρ^+ osztályai:

$$xX^*,\ yX^*,$$

Ha az X^+ szabad félcsoport $(\rho' \subseteq)\xi$ ekivalenciájának osztályai:

$$xX^*,\ y,\ yX^*x,\ yX^*y,$$

akkor $\mathbf{X}^*/(\rho,\xi)$ ciklikus Mealy automata átmenet-kimenettáblázata:

	e	xX^*	yX^*
x	(xX^*, xX^*)	(xX^*, xX^*)	(yX^*, yX^*x)
y	(yX^*, y)	(xX^*, xX^*)	(yX^*, yX^*y)

De $\xi \subset \rho^+$, ezért $\mathbf{X}^*/(\rho,\xi)$ nem teljesíti a Moore kritériumot. Az $\mathbf{X}^*/(\rho,\rho^+)$ automata átmenet-kimenettáblázata:

	e	xX^*	yX^*
x	(xX^*, xX^*)	(xX^*, xX^*)	(yX^*, yX^*)
y	(yX^*, yX^*)	(xX^*, xX^*)	(yX^*, yX^*)

Ez az automata teljesíti a Moore kritériumot.

Feladatok

21.1. Ha ρ_1, ρ_2 az X^* szabad monoid jobb kongruenciái és ξ_1, ξ_2 az X^+ szabad félcsoport ekvivalenciái, amelyekre a

$$\rho_1 \subseteq \rho_2, \quad \xi_1 \subseteq \xi_2, \quad \rho_1' \subseteq \xi_1, \quad \rho_2' \subseteq \xi_2 \tag{21.3}$$

feltételek teljesülnek, akkor $\mathbf{X}^*/(\rho_2,\xi_2)$ AY-homomorf képe az $\mathbf{X}^*/(\rho_1,\xi_1)$ automatának (l. (21.2)). Megfordítva, ha az $\mathbf{A} = (A, X, Y, \delta, \lambda)$ Mealy automata AY-homomorf képe az $\mathbf{X}^*/(\rho_1,\xi_1)$ automatának, akkor van olyan $\mathbf{X}^*/(\rho_2,\xi_2)$ automata, amelyre a (21.3) feltételek teljesülnek és $\mathbf{X}^*/(\rho_2,\xi_2)$ AY-izomorf az $\mathbf{X}^*/(\rho_1,\xi_1)$ automatával. (→ Megoldás)

21.2. Az $\mathbf{X}^*/(\rho, \xi)$ ciklikus Mealy automata AY-homomorf képe az $\mathbf{X}^*/(\rho, \rho')$ ciklikus Mealy automatának. Ha $\mathbf{X}^*/(\rho, \xi)$ Moore automata, akkor AY-homomorf képe az $\mathbf{X}^*/(\rho, \rho^+)$ ciklikus Moore automatának. (→ Megoldás)

21.3. Az $\mathbf{A} = (A, X, \delta)$ végesen generálható automata akkor és csak akkor véges, ha karakterisztikus félcsoportja véges. (→ Megoldás)

22. Erősen összefüggő automaták

Az erősen összefüggő automata, mint a 2. fejezetben is definiáltuk, olyan ciklikus automata, amelynek minden állapota generátorelem, vagyis bármely állapotából elérhető minden állapot. Ezek szerint az erősen összefüggő automaták átmenetfüggvénye szürjektív. Erősen összefüggő automata minden homomorf képe is erősen összefüggő. Az eddigi vizsgálatok is azt mutatják, hogy az erősen összefüggő automaták osztálya az egyik legfontosabb automataosztály. A 2.4. Tételben megmutattuk, hogy egy automata akkor és csak akkor reverzibilis, ha erősen összefüggő automaták direkt összege. A 2.2. Tételben az erősen összefüggő automaták egy egyszerű jellemzését adtuk. Nevezetesen beláttuk, hogy egy automata akkor és csak akkor erősen összefüggő, ha nincs valódi részautomatája. Ebből adódik a következő állítás.

22.1. Lemma
Erősen összefüggő automata minden endomorfizmusa szürjektív. A-véges erősen összefüggő automata minden endomorfizmusa automorfizmus.

Bizonyítás. Legyen α az $\mathbf{A} = (A, X, \delta)$ erősen összefüggő automata egy endomorfizmusa és

$$\alpha(A) = \{\alpha(a); a \in A\}.$$

Minthogy $(\alpha(A), X, \delta)$ az $\mathbf{A}$ automata részautomatája, ezért a 2.2. Tételből következik, hogy $\alpha(A) = A$, azaz α szürjektív. Ha az $\mathbf{A}$ automata A-véges, akkor ez azt jelenti, hogy α bijektív. $\square$

Valamely $H \neq \emptyset$ halmaz egy G transzformációfélcsoportja *reguláris*, ha bármely $\alpha, \beta \in G$ és $a \in H$ esetén $\alpha(a) = \beta(a)$ akkor és csak akkor, ha $\alpha = \beta$. Ha G reguláris, akkor bármely $\alpha \in G$ és $a \in H$ esetén $\alpha(a) = a$ akkor és csak akkor, ha $\alpha = \iota_H$. A $H \neq \emptyset$ halmaz egy G permutációcsoportja nyilvánvalóan akkor és csak akkor reguláris, ha bármely $\alpha \in G$ és $a \in H$ esetén $\alpha(a) = a$ akkor és csak akkor, ha $\alpha = \iota_H$.

22.2. Lemma
Bármely $\mathbf{A} = (A, X, \delta)$ erősen összefüggő automata $E(\mathbf{A})$ endomorfizmusfélcsoportja reguláris.

Bizonyítás. Legyenek $\alpha, \beta \in E(\mathbf{A})$. Tegyük fel, hogy van olyan $a \in A$, amelyre $\alpha(a) = \beta(a)$. Tekintsünk most egy tetszőleges $b \in A$ állapotot. Mivel $\mathbf{A}$ erősen összefüggő, ezért van olyan $r \in X^*$, hogy $b = ar$. Így

$$\alpha(b) = \alpha(ar) = \alpha(a)r = \beta(a)r = \beta(br) = \beta(b),$$

azaz $\alpha = \beta$. □

22.3. Következmény
Ha az A-véges $\mathbf{A} = (A, X, \delta)$ automata erősen összefüggő, akkor $|G(\mathbf{A})|$ osztója $|A|$-nak.

Bizonyítás. Definiáljuk az A állapothalmazon a ρ binér relációt a következő módon:

$$(a, b) \in \rho \quad \Longleftrightarrow \quad (\exists \alpha \in G(\mathbf{A}))\ (\alpha(a) = b). \tag{22.1}$$

Az előző lemma alapján nem nehéz megmutatni, hogy ρ uniform ekvivalencia (amely kongruencia is), s minden $a \in A$ állapotra $|\rho[a]| = |G(\mathbf{A})|$. □

Most megadunk a véges csoportok segítségével egy speciális automataosztályt, s megmutatjuk, hogy az A-véges erősen összefüggő automaták osztálya (izomorfia erejéig) részosztálya ennek az automataosztálynak.

Legyen G tetszőleges véges csoport. Jelölje G egységelemét 1. Adjungáljunk G-hez egy 0-val jelölt zéruselemet. Az így kapott algebrai struktúra legyen G^0. Vezessünk be G^0-n egy összeadásnak (+) nevezett (binér) parciális műveletet úgy, hogy minden $g \in G^0$ elem esetén legyen

$$g + 0 = 0 + g = g.$$

A G csoport elemeire az összeadást nem definiáljuk.

Legyen n tetszőleges pozitív egész szám. Jelölje G_n a G^0 elemeiből képezett $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ vektorok azon halmazát, amelyek pontosan egy komponense G-beli elem. Jelöljük ezeket a vektorokat röviden (g_k)-val, ha $g \in G$ a vektor k-adik komponense. Bármely $h, g \in G$ elemekre legyen $h(g_k) = ((hg)_k)$. Legyen továbbá $G_{n\times n}$ azon $n \times n$-es mátrixok halmaza, amelyek sorvektorai G_n-beli vektorok. Ezeket a mátrixokat jelölje röviden (g_{kl}), ahol g_{kl} a mátrix k-adik sorának l-edik eleme. $G_{n\times n}$ a mátrixok

$$(g_{kl})(h_{kl}) = (\sum_{j=1}^{n} g_{kj}h_{jl})$$

szorzására monoidot alkot. Az egységelem az a (g_{kl}) mátrix, amelyre $g_{kk} = 1$ $(k = 1, 2, \ldots, n)$ és $g_{kl} = 0$, ha $k \neq l$. Értelmezzük G_n és $G_{n\times n}$ elemeinek szorzatát (ilyen sorrendben) szintén szokásosan, azaz

$$(a_1, \ldots, a_n)(h_{kl}) = (\sum_{j=1}^{n} a_j h_{j1}, \ldots, \sum_{j=1}^{n} a_j h_{jn}).$$

Legyen $X \neq \emptyset$ és $\Psi : X \to G_{n\times n}$. Jelölje $\Psi_{kl}(x)$ a $\Psi(x)$ mátrix k-adik sorának l-edik elemét, azaz $\Psi(x) = (\Psi_{kl}(x))$. Az $\mathbf{A} = (G_n, X, \delta_\psi)$ automatát (*G feletti n-edrendű*) *csoport-mátrix automatá*nak vagy röviden *(n, G) automatá*nak nevezzük, ha minden $(g_k) \in G_n$ és $x \in X$ esetén

$$\delta((g_k), x) = (g_k)\Psi(x). \tag{22.2}$$

Ha Ψ X^*-ra való monoid-homomorf kiterjesztését szintén Ψ-vel jelöljük, akkor nem nehéz megmutatni, hogy bármely $(g_k) \in G_n$ állapotra és $p \in X^*$ bemenő szóra $(g_k)p = (g_k)\Psi(p)$.

22.4. Lemma
Az $\mathbf{A} = (G_n, X, \delta_\Psi)$ csoport-mátrix automata akkor és csak akkor redukált bemenetű, ha Ψ injektív.

Bizonyítás. Ha $\mathbf{A}$ redukált bemenetű, akkor Ψ nyilvánvalóan injektív.

Megfordítva, tegyük fel, hogy Ψ injektív. Legyenek az x_1 és x_2 bemenő jelek olyanok, hogy minden $(g_k) \in G_n$ állapotra

$$(g_k)\Psi(x_1) = \delta_\Psi((g_k), x_1) = \delta_\Psi((g_k), x_2) = (g_k)\Psi(x_2).$$

Ha (g_k) helyére sorra azokat a G_n-beli vektorokat írjuk, amelyeknek első, második, ..., n-edik komponense 1, akkor azt kapjuk, hogy $\Psi(x_1)$ és $\Psi(x_2)$ első, második, ..., n-edik sora megegyezik. Így $\Psi(x_1) = \Psi(x_2)$. De Ψ injektív, ezért $x_1 = x_2$, vagyis $\mathbf{A}$ redukált bemenetű. □

22.5. Tétel
Ha $\mathbf{A} = (G_n, X, \delta_\Psi)$ csoport-mátrix automata, akkor G izomorf $G(\mathbf{A})$ egy részcsoportjával.

Bizonyítás. Tetszőleges $g \in G$ elemre definiáljuk a $\varphi_g : G_n \to G_n$ leképezést úgy, hogy minden $h \in G$ elem esetén $\varphi_g((h_k)) = ((gh)_k)$ teljesüljön. Nyilvánvaló, hogy φ_g a G_n halmaz egy permutációja.

Megmutatjuk, hogy $\varphi_g \in G(\mathbf{A})$. Ha $h \in G$ és $x \in X$, akkor

$$\varphi_g(\delta_\Psi((h_k), x)) = \varphi_g((h_k)\Psi(x)) = g((h_k)\Psi(x)) =$$

$$= ((gh)_k)\Psi(x) = \varphi_g((h_k))\Psi(x) = \delta_\Psi(\varphi_g((h_k)), x),$$

ami azt jelenti, hogy $\varphi_g \in G(\mathbf{A})$.

Az $\eta(g) = \varphi_g \ \ (g \in G)$ leképezés G injektív leképezése $G(\mathbf{A})$-ba. Továbbá minden $f, g, h \in G$ esetén

$$\varphi_{fg}((h_k)) = (((fg)h)_k) = ((f(gh))_k) = \varphi_f\varphi_g((h_k)),$$

azaz $\varphi_{fg} = \varphi_f\varphi_g$, vagyis η G izomorf leképezése $G(\mathbf{A})$-ba. □

Az $\mathbf{A} = (G_n, X, \delta_\Psi)$ csoport-mátrix automatát *reguláris*nak nevezzük, ha erősen összefüggő és G izomorf $G(\mathbf{A})$-val.

22.6. Következmény
Minden $\mathbf{A} = (G_1, X, \delta_\Psi)$ $(1, G)$ automata permutációautomata. Ha $\mathbf{A}$ erősen összefüggő, akkor reguláris.

Bizonyítás. Ha $\mathbf{A}$ $(1, G)$ automata, akkor $G_1 = G_{1\times 1} = G$. Így, ha a $g, h \in G$ állapotokra és az $x \in X$ bemenő jelre

$$g\Psi(x) = \delta_\Psi(g, x) = \delta_\Psi(h, x) = h\Psi(x),$$

akkor $g = h$. Ez azt jelenti, hogy $\mathbf{A}$ permutációautomata.

Ha $\mathbf{A}$ erősen összefüggő, akkor a 22.3. Következmény szerint $|G(\mathbf{A})|$ osztója $|G|$-nek. Ezért a 22.5. Tételből következik, hogy G izomorf $G(\mathbf{A})$-val. □

22.7. Tétel
Minden A-véges erősen összefüggő $\mathbf{A} = (A, X, \delta)$ automatához van vele izomorf reguláris (n, G) automata, ahol $|A| = n|G(\mathbf{A})|$.

Bizonyítás. Azt mutatjuk meg, hogy van olyan $(n, G(\mathbf{A}))$ automata, amely izomorf $\mathbf{A}$-val. Tekintsük a (22.1) feltétellel definiált ρ uniform kongruenciát. Legyenek a ρ-osztályok

$$\rho[a_1], \rho[a_2], \ldots, \rho[a_n].$$

Bármely a_k állapothoz és $x \in X$ bemenő jelhez egyetlen olyan a_l állapot és $\beta \in G(\mathbf{A})$ van, amelyekre $\delta(a_k, x) = \beta(a_l)$. Legyen $\Psi : X \to G(\mathbf{A})_{n\times n}$ az a leképezés, amelyre $\Psi_{kl}(x) = \beta$ és $\Psi_{kj}(x) = 0$, ha $j \neq l$.

Megmutatjuk, hogy az $\mathbf{A}' = (G(\mathbf{A})_n, X, \delta_\Psi)$ izomorf $\mathbf{A}$-val. Legyen $a \in A$ és $a \in \rho[a_k]$. Egyetlen olyan $\alpha \in G(\mathbf{A})$ van, amelyre $a = \alpha(a_k)$. Definiáljuk a $\varphi : A \to G(\mathbf{A})_n$ leképezést minden $a \in A$ állapotra a $\varphi(a) = (\alpha_k)$ feltétellel. A 22.2. Lemmából és (22.1)-ből következik, hogy φ bijektív. Továbbá

$$\delta(a, x) = \delta(\alpha(a_k), x) = \alpha(\delta(a_k, x)) = \alpha\beta(a_l),$$

ezért

$$\varphi(\delta(a,x)) = ((\alpha\beta)_l) = (\alpha_k)\Psi(x) = \delta_\Psi((\alpha_k),x) = \delta_\Psi(\varphi(a),x),$$

vagyis φ az $\mathbf{A}$ automata izomorf leképezése $\mathbf{A}'$-re. □

22.8. LEMMA
Az $\mathbf{A} = (G_n, X, \delta_\Psi)$ csoport-mátrix automata akkor és csak akkor erősen összefüggő, ha minden k,l $(1 \le k,l \le n)$ párhoz és $g \in G$ elemhez van olyan $p \in X^*$, hogy $\Psi_{kl}(p) = g$.

Bizonyítás. Legyen $\mathbf{A}$ erősen összefüggő és $g \in G$. Jelölje $(1_k) \in G_n$ azt a vektort, amelynek k-adik komponense 1, $(g_l) \in G_n$ pedig azt, amelynek l-edik komponense g. Mivel $\mathbf{A}$ erősen összefüggő, ezért van olyan $p \in X^*$, hogy

$$(g_l) = (1_k)p = (1_k)\Psi(p).$$

Ez pontosan azt jelenti, hogy $\Psi(p)$ k-adik sorának l-edik eleme g, azaz $\Psi_{kl}(p) = g$.

Megfordítva, tegyük fel, hogy minden k,l $(1 \le k,l \le n)$ párhoz és G minden eleméhez, így tetszőleges $g,h \in G$ esetén a $g^{-1}h$ elemhez is van olyan $p \in X^*$, hogy $\Psi_{kl}(p) = g^{-1}h$. Akkor

$$(h_l) = (g_k)\Psi(p) = (g_k)p,$$

ami éppen azt jelenti, hogy $\mathbf{A}$ erősen összefüggő. □

A csoport-mátrix automatákat részletesen tárgyalja MASAMI ITO [10] könyvében. Erősen összefüggő automatákra még néhány egyszerűbb eredményt közlünk. Könnyen belátható a következő lemma.

22.9. LEMMA
Erősen összefüggő automata karakterisztikus félcsoportja bal reduktív.

22.10. LEMMA
Erősen összefüggő permutáció automata minden kongruenciája uniform.

Bizonyítás. Legyen ρ az $\mathbf{A}$ tetszőleges kongruenciája és $a,b \in A$ tetszőleges állapotok. Mivel $\mathbf{A}$ erősen összefüggő, ezért vannak olyan $p,q \in X^*$ bemenő szavak, amelyekre $b = ap$ és $a = qb$. Akkor

$$\rho[a]p \subseteq \rho[b], \quad \rho[b]q \subseteq \rho[a].$$

De minden bemenő jel permutációjel, így

$$|\rho[a]| = |\rho[a]p| \le |\rho[b]| = |\rho[b]q| \le |\rho[a]|,$$

azaz $|\rho[a]| = |\rho[b]|$. □

Az $\mathbf{A}_k = (A_k, X, \delta_k)$ $(k \in I)$ automatákat *erősen kapcsoltak*nak nevezzük, ha bármely $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in \prod_{k \in I} A_k$ vektorpárhoz létezik olyan $p \in X^*$ bemenő szó, hogy $\mathbf{a}p = \mathbf{b}$. Az $\mathbf{A}_k$ $(k \in I)$ erősen kapcsolt automaták kapcsoltak is és nyilvánvalóan erősen összefüggők. Nem nehéz belátni a következő állítást.

22.11. LEMMA
Az $\mathbf{A}_k$ $(k \in I)$ automaták direkt szorzata akkor és csak akkor erősen összefüggő, ha az $\mathbf{A}_k$ automaták erősen kapcsoltak.

A lemma szerint erősen összefüggő automata csak erősen összefüggő automaták direkt szorzatára bontható fel.

Feladatok

22.1. Ha $\mathbf{A} = (A, X, \delta)$ A-véges erősen összefüggő automata, akkor $|S_1(\mathbf{A})| \leq |A|^{\frac{|A|}{|G(\mathbf{A})|}}$. (→ Megoldás)

22.2. Az erősen összefüggő $\mathbf{A} = (A, X, \delta)$ automata $a, b \in A$ állapotaira legyen

$$U(a, b) = \{p \in X^*;\ ap = b\}.$$

Az A halmaz egy π permutációjára $\pi \in G(\mathbf{A})$ akkor és csak akkor, ha van olyan $a \in A$ állapot, hogy minden $b \in A$ állapotra $U(a, b) = U(\pi(a), \pi(b))$. (→ Megoldás)

22.3. Az előző feladat jelöléseit használva, legyen az $a \in A$ állapotra

$$U(a) = \{U(a, \alpha(a));\ \alpha \in G(\mathbf{A})\}.$$

Vezessük be az $U(a)$ halmazon $*_a$ műveletet a következőképpen:

$$U(a, \alpha(a)) *_a U(a, \beta(a)) = U(a, \alpha\beta(a))\ (\alpha, \beta \in G(A)).$$

$U(a)$ a $*_a$ műveltre $G(A)$-val izomorf csoport. (→ Megoldás)

23. Kommutatív automaták

Az $\mathbf{A} = (A, X, \delta)$ automatát *kommutatív*nak nevezzük, ha bármely $a \in A$ állapotra és $x, z \in X$ bemenő jelekre

$$\delta(\delta(a, x), z) = \delta(\delta(a, z), x) \tag{23.1}$$

teljesül. A (23.1) egyenletet $axz = azx$ alakban is írhatjuk. Kommutatív automata részautomatái és homomorf képei is kommutatívak. Nem nehéz belátni a következő lemmát.

23.1. Lemma
Ha az $\mathbf{A}$ automata kommutatív, $x_1, \ldots, x_k$ pedig az X bemenő halmaz tetszőleges elemei, akkor bármely $a \in A$ állapotra és az $1, \ldots, k$ indexek bármely π permutációjára

$$ax_1 \ldots x_k = ax_{\pi(1)} \ldots x_{\pi(k)}.$$

23.2. Következmény
Az $\mathbf{A}$ automata akkor és csak akkor kommutatív, ha karakterisztikus félcsoportja kommutatív.

Bizonyítás. A 23.1. Lemmából következik, hogy minden $a \in A$ állapotra és $p, q \in X^+$ bemenő szavakra $apq = aqp$, ami éppen azt jelenti, hogy a karakterisztikus félcsoport kommutatív.

Megfordítva, ha a karakterisztikus félcsoport kommutatív, akkor nyilvánvalóan teljesül a (23.1) feltétel. □

A $Z(S) = \{t \in S; (\forall s \in S)(st = ts)\}$ halmazt az S félcsoport *centralizátor*ának nevezzük. Ha $Z(S) \neq \emptyset$, akkor nyilvánvalóan kommutatív részfélcsoportja S-nek.

Adjuk meg az $\mathbf{A} = (A, X, \delta)$ kommutatív automata $S_1(\mathbf{A})$ karakterisztikus monoidját a (6.3) feltétellel, azaz legyen $S_1(\mathbf{A}) = T(A)$.

23.3. Tétel
Az $\mathbf{A} = (A, X, \delta)$ kommutatív automata $T(A)$ karakterisztikus monoidja az $E(\mathbf{A})$ endomorfizmusfélcsoport centralizátorának részmonoidja. Ha $\mathbf{A}$ ciklikus kommutatív automata, akkor $T(A) = E(\mathbf{A})$ és $|E(\mathbf{A})| = |A| = |T(A)|$.

Bizonyítás. Ha $p \in X^*$, akkor minden $a \in A$ állapotra és $x \in X$ bemenő jelre

$$\delta_p(ax) = axp = apx = \delta_p(a)x,$$

vagyis $\delta_p \in E(\mathbf{A})$. Ha $\alpha \in E(\mathbf{A})$, akkor minden $a \in A$ állapotra

$$\alpha\delta_p(a) = \alpha(ap) = \alpha(a)p = \delta_p\alpha(a),$$

amiből $\alpha\delta_p = \delta_p\alpha$, azaz $\delta_p \in Z(E(\mathbf{A}))$. Ha $p, q \in X^*$, akkor

$$\delta_p\delta_q = \delta_{qp} = \delta_{pq} = \delta_p \circ \delta_q,$$

ami azt jelenti, hogy $T(A)$ a $Z(E(\mathbf{A}))$ centralizátor részmonoidja.

Tegyük fel, hogy $\mathbf{A}$ ciklikus és a_0 egy generátoreleme. Akkor $\mathbf{A}$ bármely α endomorfizmusához van olyan $p \in X^*$, hogy $\alpha(a_0) = a_0p$. Minden $q \in X^*$ bemenő szóra

$$\alpha(a_0q) = \alpha(a_0)q = a_0pq = a_0qp = \delta_p(a_0q),$$

így $\alpha = \delta_p$, azaz $T(A) = E(\mathbf{A})$. Ciklikus kommutatív automata karakterisztikus automata, ezért a 21.4. Lemmából következik, hogy $|E(\mathbf{A})| = |A| = |T(A)|$. □

23.4. Következmény

Ha $E(\mathbf{A}) = \{\iota_A\}$ és $1 < |A|$, akkor az $\mathbf{A} = (A, X, \delta)$ automata nem kommutatív.

23.5. Tétel

Ha az $\mathbf{A} = (A, X, \delta)$ kommutatív automata $C(\mathbf{A})$ kongruenciahálója véges, akkor az $\mathbf{A}$ automata A-véges.

Bizonyítás. Az 5.5. Következmény szerint $\mathbf{A}$ előáll véges sok ciklikus részautomatájának egyesítéseként, amelyeknek szintén véges a kongruenciahálójuk. Legyenek ezek az $\mathbf{A}_i = (A_i, X, \delta_i)$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ automaták. Legyenek az $a_i \in A_i$ állapotok az $\mathbf{A}_i$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ automaták generátorelemei. Mivel az $\mathbf{A}_i$ automaták is kommutatívak, ezért a $\rho_{\mathbf{A}_i, a_i}$ relációk kongruenciák. A 21.5. Tétel szerint az $\mathbf{A}_i$ automaták A-végesek, így $\mathbf{A}$ is A-véges. □

Könnyű megmutatni a következő állítást.

23.6. Tétel

Az $\mathbf{A}_k$ $(k \in I)$ automaták direkt szorzata akkor és csak akkor kommutatív, ha az $\mathbf{A}_k$ automaták kommutatívak.

E szerint kommutatív automata csak kommutatív automaták direkt szorzatára bontható fel.

Definiáljuk tetszőleges $\mathbf{A} = (A, X, \delta)$ automata A állapothalmazán az *összefüggőségi ρ relációt* a következő módon:

$$(a, b) \in \rho \ (a, b \in A) \quad \Longleftrightarrow \quad (\exists p, q \in X^*) \ (ap = bq). \tag{23.2}$$

A ρ reláció nyilvánvalóan reflexív és szimmetrikus. A $\rho[a] (a \in A)$ halmazok az automata maximális összefüggő halmazai.

23.7. Tétel
Minden kommutatív automata összefüggő (kommutatív) automaták direkt összege.

Bizonyítás. Ha az $\mathbf{A}$ automata kommutatív, akkor a (23.2)-ben definiált ρ összefüggőségi reláció ekvivalencia. Valóban, ha $(a, b) \in \rho$ és $(b, c) \in \rho$, vagyis vannak olyan $p, q, r, t \in X^*$ bemenő szavak, amelyekre $ap = bq$ és $br = ct$, akkor

$$a(pr) = (ap)r = (bq)r = b(qr) = b(rq) = (br)q = (ct)q = c(tq),$$

azaz $(a, c) \in \rho$. Tehát ρ valóban tranzitív, s így ekvivalencia.

Nyilvánvaló, hogy minden $a \in A$ állapot és $x \in X$ bemenő jel esetén $(a, ax) \in \rho$, amiből következik, hogy minden $\rho[a]$ osztály $\mathbf{A}$ egy részautomatájának állapothalmaza. □

Feladatok

23.1. Az $\mathbf{A} = (A, X, \delta)$ automatának akkor és csak akkor van kommutatív részautomatája, ha van olyan $a \in A$ állapota, amelyre minden $p, q \in X^*$ esetén $apq = aqp$ teljesül. (→ Megoldás)

23.2. Az $\mathbf{A} = (A, X, \delta)$ automatát (m, n)-*kommutatív*nak nevezzük, ha minden $a \in A$ állapotra és minden legalább m hosszúságú $p \in X^+$, valamint minden legalább n hosszúságú $q \in X^+$ bemenő szóra $apq = aqp$. (Az $(1, 1)$-kommutatív automaták nyilván a kommutatív automaták.) Minden (m, n)-kommutatív automata $(1, m + n)$-kommutatív és (m', n')-kommutatív bármely $m' \geq m$ és $n' \geq n$ esetén. (→ Megoldás)

23.3. Minden (m, n)-kommutatív automata (m, n)-kommutatív összefüggő automaták direkt összege. (A 23.7. Tétel általánosítása.) (→ Megoldás)

23.4. Bármely automata karakterisztikus monoidjának és endomorfizmusfélcsoportjának metszete egyenlő karakterisztikus monoidjának centralizátorával. Továbbá az automata akkor és csak akkor kommutatív, ha karakterisztikus monoidja része endomorfizmusfélcsoportjának. (A 23.3. Tétel általánosítása.) (→ Megoldás)

23.5. Bármely ciklikus kommutatív automata kongruenciahálója izomorf karakterisztikus monoidjának kongruenciahálójával. (→ Megoldás)

24. Egyszerű automaták

A 17.4. Lemma és a 17.5. Tétel szerint A-véges automaták izomorfan teljes rendszerei a véges tényezős α_0-szorzatra lényegében egyszerű automaták bizonyos rendszerei.

A legfeljebb kétállapotú automaták mindig egyszerűek, ezért ebben a fejezetben a legalább háromállapotú egyszerű automatákat vizsgáljuk. Megjegyezzük, hogy az egyszerű Mealy- vagy Moore automaták definíciójában a kimeneti viselkedés is szerepet játszik, azaz nem akkor nevezzük ezeket egyszerűeknek, ha vetületük egyszerű (l. 4. fejezet).

Legyen $H \neq \emptyset$ az $\mathbf{A} = (A, X, \delta)$ automata A állapothalmazának egy részhalmaza. Bármely $p \in X^*$ bemenő szóra használjuk a $Hp = \{ap; a \in H\}$ jelölést. A H halmazt az $\mathbf{A}$ *automata szeparátorá*nak nevezzük, ha minden $p \in X^*$ bemenő szóra

$$Hp \subseteq H \quad \text{vagy} \quad Hp \cap H = \emptyset.$$

Az A egyelemű részhalmazai és maga az A mindig szeparátorai az automatának. Ezeket *triviális szeparátorok*nak nevezzük.

Legyenek

$$S(H) = \{p \in X^*; Hp \subseteq H\} \quad \text{és} \quad T(H) = \{p \in X^*; Hp \cap H = \emptyset\}.$$

A definícióból azonnal adódik, hogy

$$S(H) \cap T(H) = \emptyset \quad \text{és} \quad S(H) \cup T(H) = X^*.$$

Ha $\mathbf{A}' = (A', X, \delta)$ az $\mathbf{A}$ automata részautomatája, akkor A' az $\mathbf{A}$ olyan szeparátora, amelyre $S(A') = X^*$ és $T(A') = \emptyset$.

24.1. Lemma
Ha H az $\mathbf{A} = (A, X, \delta)$ automata szeparátora, akkor $S(H)$ az X^* bemenő félcsoport bal unitér részmonoidja.

Bizonyítás. Mivel $He = H$, ezért $e \in S(H)$. Ha $p, q \in S(H)$, akkor $Hpq \subseteq Hq \subseteq H$, azaz $pq \in S(H)$, vagyis $S(H)$ az X^* bemenő félcsoport részmonoidja. Ha $p, pr \in S(H)$, akkor $Hpr \subseteq Hr$ miatt $Hpr \subseteq H \cap Hr$. Így $H \cap Hr \neq \emptyset$. Minthogy H az $\mathbf{A}$ automata szeparátora, ezért $Hr \subseteq H$, azaz $r \in S(H)$. Kaptuk, hogy $S(H)$ bal unitér részmonoidja az X^*-nak. □

24.2. Lemma
Az $\mathbf{A}$ automata akkor és csak akkor egyszerű, ha csak triviális szeparátorai vannak.

Bizonyítás. Tegyük fel, hogy az **A** automatának csak triviális szeparátorai vannak. Nyilvánvaló, hogy ha ρ az **A** automata egy kongruenciája, akkor minden ρ-osztály szeparátora **A**-nak. Ebből következik, hogy $\rho = \iota_A$ vagy $\rho = \omega_A$, vagyis **A** egyszerű.

Megfordítva, tegyük fel, hogy **A** egyszerű. Legyen H az **A** egy szeparátora. Könnyen belátható, a (12.8) definíció utáni megjegyzéseket is felhasználva, hogy H egy $\tau(H)$-osztály, ahol $\tau(H)$ az **A** automata (12.8) feltétellel definiált kongruenciája. De $\tau(H) = \iota_A$ vagy $\tau(H) = \omega_A$, ezért H az **A** automata triviális szeparátora. □

Az előző bizonyítás szerint egy automata szeparátorai éppen az automata kongruenciáinak osztályai. A következőkben azt látjuk be, hogy az automaták egyszerűségének vizsgálatánál elegendő a (12.8)-ban definiált kongruenciákra szorítkozni. A 12. fejezetben bevezettük a k-diszjunktív, speciálisan a diszjunktív automata fogalmát. A következőkben szükségünk lesz ezekre a fogalmakra is.

24.3. Lemma
Minden legalább háromállapotú diszjunktív automata erősen összefüggő vagy erősen csapda-összefüggő.

Bizonyítás. Tegyük fel, hogy a legalább háromállapotú $\mathbf{A} = (A, X, \delta)$ diszjunktív automata nem erősen összefüggő. A 2.2. Tétel szerint, akkor van valódi részautomatája. Legyen egy valódi részautomatájának állapothalmaza B. Ha $|B| > 1$ és $d \in A - B$, akkor d nem diszjunktív állapot. Ugyanis bármely $a, b \in B$ esetén $(a, b) \in \tau(d)$. Ezért $|B| = 1$. Legyen $B = \{c\}$, azaz c az automata csapdája. Jelölje továbbá $[\mathbf{a}]$ az **A** automata $a \in A - \{c\}$ állapota által generált ciklikus részautomatáját. Az a állapot nem lehet csapda, mert akkor $(\{a, c\}, X, \delta)$ az **A** egy kétállapotú részautomatája lenne. Ez pedig azt jelenti, hogy $[a] = A$, vagyis **A** erősen csapda-összefüggő automata. □

A 12. fejezetben már megemlítettük, hogy minden legalább háromállapotú egyszerű automata diszjunktív, ezért igaz az alábbi következmény.

24.4. Következmény
Minden legalább háromállapotú egyszerű automata erősen összefüggő vagy erősen csapda-összefüggő.

A (12.9) feltétellel definiált kongruenciát használjuk a következő tételben.

24.5. Tétel
Az **A** legalább háromállapotú erősen csapda-összefüggő automata akkor és csak akkor egyszerű, ha a csapdája diszjunktív.

Bizonyítás. Legyen az $\mathbf{A}$ automata csapdája c. Először megmutatjuk, hogy $\mathbf{A}$ bármely $\rho \neq \omega_A$ kongruenciája esetén $\rho[c] = \{c\}$. Legyenek $a, b \in A$ tetszőleges állapotok. Tegyük fel, hogy $(a, c) \in \rho$. Ha $a \neq c$, akkor van olyan $p \in X^*$, amelyre $ap = b$. Így

$$(b, c) = (ap, cp) \in \rho.$$

Ebből következik, hogy $\rho = \omega_A$. A feltevés miatt azonban ez lehetetlen. Ez pedig azt jelenti, hogy $a = c$, azaz $\rho[c] = \{c\}$. Legyenek továbbá $a, b \in A - \{c\}$ olyan állapotok, amelyekre $(a, b) \in \rho$. Mivel $\rho[c] = \{c\}$, ezért $(a, b) \in \tau(c)$. Vagyis $\rho \subseteq \tau(c)$. Minthogy $\mathbf{A}$ legalább háromállapotú erősen csapda-összefüggő, ezért $\tau(c) \neq \omega_A$, tehát $\tau(c) = \iota_A$, azaz c diszjunktív. □

24.6. Lemma

Ha $\rho \neq \iota_A$ az $\mathbf{A} = (A, X, \delta)$ k-diszjunktív automata kongruenciája, akkor minden ρ-osztály legalább $k + 1$ elemű.

Bizonyítás. Tegyük fel, hogy van olyan H ρ-osztály, amely legfeljebb k elemű. Mivel $\mathbf{A}$ k-diszjunktív, ezért a $\tau(H) = \iota_A$, ahol $\tau(H)$ a (12.8) feltétellel definiált kongruencia. Legyen $(a, b) \in \rho$. De H ρ-osztály, így minden $p \in X^*$ bemenő szóra $ap \in H$ akkor és csak akkor, ha $bp \in H$, azaz $(a, b) \in \tau(H)$. De $\tau(H) = \iota_A$, ezért $a = b$, vagyis $\rho = \iota_A$. Ami ellentmond a feltételünknek. Tehát minden ρ-osztály legalább $k + 1$ elemű. □

24.7. Tétel

Az $\mathbf{A}$ legalább háromállapotú A-véges erősen összefüggő automata akkor és csak akkor egyszerű, ha k-diszjunktív, ahol k egyenlő $\frac{|A|}{2}$ egészrészével.

Bizonyítás. Ha $\mathbf{A}$ egyszerű, akkor nyilvánvalóan minden $1 \leq k < |A|$ esetén k-diszjunktív.

Megfordítva, tegyük fel, hogy $\mathbf{A}$ k-diszjunktív, ahol k egyenlő $\frac{|A|}{2}$ egészrészével. A 24.6. Lemma szerint $\mathbf{A}$ minden $\rho \neq \iota_A$ kongruenciája legalább $k + 1$ elemű. A feltétel szerint $|A| < 2(k + 1)$, ezért egyetlen ρ-osztály van. Ami azt jelenti, hogy $\rho = \omega_A$, azaz $\mathbf{A}$ egyszerű. □

Jelölje az $\mathbf{A} = (A, X, \delta)$ automata endomorfizmusfélcsoportját $E(\mathbf{A})$, automorfizmuscsoportját $G(\mathbf{A})$. Ha az $\mathbf{A}$ automatának $c \in A$ egy csapdája, akkor az az $\alpha_c : A \to A$ leképezés, amelyre minden $a \in A$ esetén $\alpha_c(a) = c$ teljesül, az $\mathbf{A}$ egy endomorfizmusa. (Az α_c endomorfizmus $E(\mathbf{A})$ egy bal oldali zéruseleme.)

24.8. TÉTEL
Legyen az $\mathbf{A}$ legalább háromállapotú automata egyszerű. Ha $\mathbf{A}$ erősen összefüggő, akkor $E(\mathbf{A}) = \{\iota_A\}$ és $\mathbf{A}$ nem kommutatív vagy $E(\mathbf{A}) = G(\mathbf{A})$ prímrendű ciklikus csoport és $\mathbf{A}$ kommutatív. Ha pedig $\mathbf{A}$ erősen csapda-összefüggő és c az $\mathbf{A}$ csapdája, akkor $G(\mathbf{A}) = \{\iota_A\}$, $E(\mathbf{A}) = \{\iota_A, \alpha_c\}$ és $\mathbf{A}$ nem kommutatív.

Bizonyítás. Legyen először az $\mathbf{A}$ egyszerű automata erősen összefüggő. Akkor az 5.6. Tétel szerint $E(\mathbf{A})$ véges. Ha $\alpha \in E(\mathbf{A})$, akkor $\ker\alpha$ az automata egy kongruenciája. Mivel $\mathbf{A}$ egyszerű, ezért $\ker\alpha = \iota_A$ vagy $\ker\alpha = \omega_A$. A 22.1. Lemma szerint α szürjektív, ezért $\ker\alpha = \iota_A$. Ebből kapjuk, hogy α injektív, azaz $\alpha \in G(\mathbf{A})$, vagyis $E(\mathbf{A}) = G(\mathbf{A})$.

Legyen $E(\mathbf{A}) = \{\iota_A\}$. Tegyük fel, hogy $\mathbf{A}$ kommutatív. Mivel $\mathbf{A}$ erősen összefüggő, így van olyan $a \in A$ és $x \in X$, hogy $ax \neq a$. Akkor a 23.3. Tétel szerint a (6.3)-ban definiált $\delta_x \neq \iota_A$ leképezés endomorfizmus. Ami a 23.4. Következmény miatt lehetetlen. Tehát $\mathbf{A}$ nem kommutatív.

Legyen most $E(\mathbf{A}) = G(\mathbf{A}) \neq \{\iota_A\}$ és $\alpha \in G(\mathbf{A}) - \{\iota_A\}$. Tekintsük A 5.6. Tétel bizonyításában definiált következő kompatibilis osztályozását:

$$\{a, \alpha(a), \ldots, \alpha^{r-1}(a)\}, \quad a \in A.$$

Jelölje a megfelelő kongruenciát ρ_α. Mivel $\mathbf{A}$ egyszerű, ezért $\rho_\alpha = \iota_A$ vagy $\rho_\alpha = \omega_A$. Ha $\rho_\alpha = \iota_A$, akkor $\alpha = \iota_A$. Ha $\rho_\alpha = \omega_A$, akkor tetszőleges $a \in A$ állapotra

$$A = \{a, \alpha(a), \ldots, \alpha^{r-1}(a)\}.$$

Ez utóbbi esetben legyen $\beta \in G(\mathbf{A})$. Van olyan $0 \leq j \leq r-1$, hogy $\beta(a) = \alpha^j(a)$. A 22.2. Lemma szerint $\beta = \alpha^j$, vagyis $G(\mathbf{A}) = \{\iota_A, \alpha, \ldots, \alpha_{r-1}\}$ ciklikus permutációcsoport.

Bármely két $x, z \in X$ bemenő jelre és $k \in Z$ egész számra legyen $ax = \alpha^l(a)$ és $az = \alpha^m(a)$ $(l, m \in Z)$. Akkor

$$\alpha^k(a)xz = \alpha^k(ax)z = \alpha^k\alpha^l(a)z = \alpha^k\alpha^l(az) = \alpha^k\alpha^l\alpha^m(a) = \alpha^k\alpha^m\alpha^l(a) =$$

$$= \alpha^k\alpha^m(ax) = \alpha^k\alpha^m(a)x = \alpha^k(az)x = \alpha^k(a)zx,$$

azaz $\mathbf{A}$ kommutatív.

Tegyük fel, hogy r nem prímszám. Legyen

$$r = ln, \quad 1 < l, n < r.$$

Tekintsük A következő osztályozását:

$$A_j = \{\alpha^{j+kl}(a); k = 0, 1, \ldots, n-1\} \quad (j = 0, 1, \ldots, l-1).$$

Hasonlóan, mint az előbb, megmutatható, hogy az osztályozás kompatibilis. Ami szintén lehetetlen. Amiből következik, hogy r prímszám, vagyis $G(\mathbf{A})$ prímrendű ciklikus csoport.

Másodszor tegyük fel, hogy $\mathbf{A}$ egyszerű erősen csapda-összefüggő és c az $\mathbf{A}$ csapdája. Tegyük fel, hogy $\mathbf{A}$ kommutatív. Legyenek $a, b \in A - \{c\}$ és $a \neq b$. Mivel $\mathbf{A}$ erősen csapda-összefüggő, így vannak olyan $q, r \in X^+$ bemenő szavak, hogy $aq = b$ és $br = a$. Így minden $p \in X^*$ bemenő szóra $bp = c$ akkor és csak akkor, ha $ap = c$, azaz $(a, b) \in \tau_c$. Ez azonban lehetetlen, ezért $\mathbf{A}$ nem kommutatív.

Ha $\alpha \in E(\mathbf{A})$, akkor minden $p \in X^*$ bemenő szóra

$$\alpha(c)p = \alpha(cp) = \alpha(c),$$

vagyis $\alpha(c)$ is csapda, azaz $\alpha(c) = c$. Ha $a \in A - \{c\}$ és $\alpha(a) = c$, akkor minden $p \in X^*$ bemenő szóra

$$\alpha(ap) = \alpha(a)p = cp = c,$$

azaz $\alpha = \alpha_c$. Nem nehéz megmutatni, hogy

$$G_a = \{\alpha(a); \alpha \in E(\mathbf{A}) - \{\alpha_c\}\} \quad (a \in A)$$

kompatibilis osztályozás. Az $\mathbf{A}$ automata egyszerűsége miatt minden G_a osztály egyelemű. Ebből következik, hogy $E(\mathbf{A}) = \{\iota_A, \alpha_c\}$ és $G(\mathbf{A}) = \{\iota_A\}$.
□

Az n állapotú $\mathbf{A} = (A, X, \delta)$ automatát (n*-edrendű*) *ciklikus permutációautomatá*nak nevezzük, ha minden bemenő jele permutációjel és van olyan $a \in A$ és $x \in X$, hogy

$$A = \{a, ax, \ldots, ax^{n-1}\} \quad \text{és} \quad ax^n = a.$$

Az x bemenő jelet *ciklikus permutációjel*nek nevezzük. Nyilvánvaló, hogy az $\mathbf{A}$ automata $\mathbf{A}' = (A, X', \delta)$ X-részautomatája, amelyben X' az $\mathbf{A}$ automata ciklikus permutációjeleinek halmaza, n állapotú általánosított számláló.

24.9. Következmény
Az $\mathbf{A} = (A, X, \delta)$ legalább háromállapotú kommutatív automata akkor és csak akkor egyszerű, ha prímszámrendű ciklikus permutációautomata.

A 24.9. Következmény szerint nincs végtelen kommutatív egyszerű automata. A következő példa mutatja, hogy végtelen nem kommutatív egyszerű automata létezik.

24.10. Példa

Legyen $A = \{1, 2, \ldots, n, \ldots\}$, $X = \{x, y\}$, $\delta(n, x) = n + 1$ $(n \in A)$. Továbbá $\delta(n, y) = 2$, ha n prímszám és $\delta(n, y) = 1$, ha n nem prímszám. Az $\mathbf{A} = (A, X, \delta)$ automata egyszerű és nem kommutatív.

Az $\mathbf{A}$ automata erősen összefüggő, de nem kommutatív, mert például $2xy = 2$ és $2yx = 3$. Legyen $\rho \neq \iota_A$ az $\mathbf{A}$ automata egy kongruenciája. Tegyük fel, hogy $(m, n) \in \rho$ $(m \neq n)$. Nyilvánvaló, hogy van olyan k nemnegatív egész szám, amelyre mondjuk nx^k prímszám és mx^k pedig nem. Így $(1, 2) = (mx^k y, nx^k y) \in \rho$, azaz minden l pozitív egész számra $(l, l + 1) = (1x^{l-1}, 2x^{l-1}) \in \rho$, vagyis $\rho = \omega_A$.

Feladatok

24.1. Egészítsük ki a 24.10. Példában szereplő automatát egy 0-val jelölt csapdával és módosítsuk a δ átmenetfüggvényt úgy, hogy a kapott automata erősen csapda-összefüggő és egyszerű legyen, de ne legyen kommutatív. (→ Megoldás)

24.2. Az $\mathbf{A} = (A, X, \delta)$ automatát *erősen n-összefüggő*nek nevezzük ($1 \leq n < |A|$), ha A bármely H és K n elemű részhalmazához van olyan $p \in X^*$, amelyre $Hp = K$ teljesül. (Az erősen 1-összefüggő automaták az erősen összefüggő automaták.) Minden erősen n-összefüggő automata erősen összefüggő. (→ Megoldás)

24.3. Minden erősen 2-összefüggő automata egyszerű. (→ Megoldás)

24.4. Annak igazolására, hogy az előző feladat állítása erősen 3-összefüggő automatákra nem igaz, adjunk meg olyan négyállapotú és két bemenő jeles erősen összefüggő automatát, amely erősen 3-összefüggő, de nem egyszerű. (→ Megoldás)

24.5. Tegyük fel, hogy az $\mathbf{A} = (A, X, \delta)$ automatának van legalább kétállapotú valódi részautomatája. Az $\mathbf{A}$ automata $C(\mathbf{A})$ kongruenciahálója akkor és csak akkor háromelemű, ha egy legalább kételemű egyszerű automata sűrű bővítése egy egyszerű (csapdás) automatával. (→ Megoldás)

25. Állapotfüggetlen automaták

Az $\mathbf{A} = (A, X, \delta)$ automatát *állapotfüggetlen*nek nevezzük, ha

$$(\forall a, b \in A, p, q \in X^*)\ (ap = aq \iff bp = bq). \tag{25.1}$$

Másképpen mondva az $\mathbf{A}$ automatát *állapotfüggetlen*nek nevezzük, ha

$$(\forall a, b \in A)\ (\rho_{\mathbf{A},a} = \rho_{\mathbf{A},b}),$$

vagyis

$$(\forall a \in A)\ (\rho_{\mathbf{A},a} = \rho_{\mathbf{A}}),$$

ahol $\rho_{\mathbf{A},a}$ $(a \in A)$ az X^* szabad monoidon (6.1) feltétellel értelmezett jobb kongruenciák és $\rho_{\mathbf{A}}$ az X^*-on a (6.2) feltétellel definiált kongruencia.

Állapotfüggetlen automata homomorf képe nem biztos, hogy állapotfüggetlen. A következő fejezet 26.9. Példájában az $\mathbf{A}_1$ nem állapotfüggetlen automata homomorf képe az $\mathbf{A}$ állapotfüggetlen automatának. Állapotfüggetlen automaták direkt szorzata mindig állapotfüggetlen. Állapotfüggetlen automata azonban nemcsak állapotfüggetlen automaták direkt szorzatára bontható fel. Ennek illusztrálására szintén a 26.9. Példára utalunk.

Jelölje most is $S_1(\mathbf{A}) = X^*/\rho_{\mathbf{A}}$ $[S(\mathbf{A}) = X^+/\rho_{\mathbf{A}}]$ az $\mathbf{A}$ automata karakterisztikus monoidját [félcsoportját]. Ha van olyan $r \in X^+$ bemenő szó, hogy minden $a \in A$ állapotra $ar = a$, akkor $\rho_{\mathbf{A}}[e] = \rho_{\mathbf{A}}[r]$, s így $S_1(\mathbf{A}) \cong S(\mathbf{A})$. Ha nincs ilyen $r \in X^+$ szó, akkor $\rho_{\mathbf{A}}[e] = \{e\}$, azaz $S_1(\mathbf{A}) = S(\mathbf{A}) \cup \{e\}$.

Az állapotfüggetlenség definíciójából nyilvánvalóan adódik a következő lemma.

25.1. Lemma
Állapotfüggetlen automata minden AX-részautomatája is állapotfüggetlen és bármely részautomatájának karakterisztikus monoidja megegyezik az automata karakterisztikus monoidjával.

25.2. Lemma
Minden állapotfüggetlen automata karakterisztikus monoidja bal kancellatív.

Bizonyítás. Legyen az $\mathbf{A} = (A, X, \delta)$ automata állapotfüggetlen. Ha $(rp, rq) \in \rho_{\mathbf{A}}$ $(p, q, r \in X^*)$, akkor bármely $a \in A$ állapotra

$$(ar)p = a(rp) = a(rq) = (ar)q.$$

Mivel $\mathbf{A}$ állapotfüggetlen, ezért minden $a \in A$ állapotra $ap = aq$, azaz $(p, q) \in \rho_{\mathbf{A}}$. Így a karakterisztikus monoid bal kancellatív. $\square$

25.3. Következmény

Az $\mathbf{A} = (A, X, \delta)$ ciklikus automata akkor és csak akkor állapotfüggetlen, ha karakterisztikus automata és karakterisztikus monoidja bal kancellatív.

Bizonyítás. Ha $\mathbf{A}$ állapotfüggetlen, akkor definíció szerint $\rho_{\mathbf{A},a_0}$ kongruencia $\mathbf{A}$ minden a_0 generátorelemére. A 25.2. Lemma szerint $\mathbf{A}$ karakterisztikus monoidja bal kancellatív.

Megfordítva, tegyük fel, hogy $\mathbf{A}$ karakterisztikus automata és karakterisztikus monoidja bal kancellatív. Legyen a_0 az $\mathbf{A}$ automata egy karakterisztikus generátoreleme. Ha az $a \in A$ állapotra és a $p, q, r \in X^*$ bemenő szavakra $ap = aq$ és $a = a_0r$, akkor $(rp, rq) \in \rho_{\mathbf{A},a_0}$. De $\rho_{\mathbf{A},a_0}$ kongruencia, ezért $\rho_{\mathbf{A},a_0} = \rho_{\mathbf{A}}$, vagyis $(rp, rq) \in \rho_{\mathbf{A}}$. Amiből $(p, q) \in \rho_{\mathbf{A}}$, mivel $\mathbf{A}$ karakterisztikus monoidja bal kancellatív. Ez azt jelenti, hogy minden $b \in A$ állapotra $bp = bq$, azaz $\mathbf{A}$ állapotfüggetlen. □

25.4. Lemma

Ha az $\mathbf{A} = (A, X, \delta)$ automata állapotfüggetlen, akkor ciklikus részautomatái izomorfak és bármely $a \in A$ állapotra $|[a]| = |S_1(\mathbf{A})|$.

Bizonyítás. Az állapotfüggetlenség miatt bármely $a, b \in A$ esetén az $ap \to bp$ ($p \in X^*$) leképezés $[\mathbf{a}]$ izomorf leképezése $[\mathbf{b}]$-re. A $\rho[p] \to ap$ ($p \in X^*$) leképezés az $S_1(\mathbf{A})$ karakterisztikus monoid bijektív leképezése $[a]$-ra. □

Ha egy automata karakterisztikus monoidja csoport, akkor az automata nyilvánvalóan reverzibilis. Állapotfüggetlen automatákra ez az állítás megfordítható:

25.5. Tétel

Az $\mathbf{A} = (A, X, \delta)$ állapotfüggetlen automata akkor és csak akkor reverzibilis, ha az $S_1(\mathbf{A})$ karakterisztikus monoid csoport. Ha az $\mathbf{A}$ állapotfüggetlen automata reverzibilis, akkor $S(\mathbf{A}) \cong S_1(\mathbf{A})$. Ha még $\mathbf{A}$ erősen összefüggő is, akkor $|A| = |S_1(\mathbf{A})|$.

Bizonyítás. Ha $S_1(\mathbf{A})$ csoport, akkor $\mathbf{A}$ reverzibilis. Megfordítva, tegyük fel, hogy $\mathbf{A}$ reverzibilis. Legyen $a \in A$ és $p \in X^*$ tetszőleges bemenő szó. Mivel $\mathbf{A}$ reverzibilis, van olyan $q \in X^*$, hogy $apq = a = ae$, azaz $(pq, e) \in \rho_{\mathbf{A}}$. Ez azt jelenti, hogy $S(\mathbf{A}) \cong S_1(\mathbf{A})$. Továbbá

$$(pqp, ep) = (pqp, pe) = (pqp, p) \in \rho_{\mathbf{A}}.$$

A 25.2. Lemma szerint $S_1(\mathbf{A})$ bal kancellatív, ezért $(qp, e) \in \rho_{\mathbf{A}}$, vagyis $S_1(\mathbf{A})$ csoport. Ha $\mathbf{A}$ speciálisan erősen összefüggő, akkor a 25.4. Lemmából következik, hogy $|A| = |S_1(\mathbf{A})|$. □

Egy ciklikus állapotfüggetlen automatát *félperfekt*nek nevezünk, ha karakterisztikus monoidja csoport.

25.6. Lemma
Ciklikus állapotfüggetlen automata akkor és csak akkor félperfekt, ha erősen összefüggő.

Bizonyítás. Ha az $\mathbf{A} = (A, X, \delta)$ félperfekt automata egy generátoreleme a_0, akkor bármely $a, b \in A$ állapotpárhoz vannak olyan $p, q \in X^*$ bemenő szavak, hogy $a = a_0 p$ és $b = a_0 q$. Mivel az $S_1(\mathbf{A})$ karakterisztikus monoid csoport, ezért van olyan $p' \in X^*$, hogy $ap' = a_0 pp' = a_0 e = a_0$. S így $ap'q = a_0 q = b$, azaz $\mathbf{A}$ erősen összefüggő.

Ha az $\mathbf{A}$ állapotfüggetlen automata erősen összefüggő, akkor a 25.5. Tétel szerint karakterisztikus monoidja csoport, azaz $\mathbf{A}$ félperfekt. $\square$

25.7. Tétel
Az $\mathbf{A} = (A, X, \delta)$ automata akkor és csak akkor reverzibilis állapotfüggetlen automata, ha egymással izomorf $\mathbf{A}_i = (A_i, X, \delta_i)$ $(i \in I)$ félperfekt automaták direkt összege.

Bizonyítás. Legyen $\mathbf{A}$ reverzibilis állapotfüggetlen automata. A 2.4. Tétel szerint egy automata akkor és csak akkor reverzibilis, ha valamely $\mathbf{A}_i$ $(i \in I)$ erősen összefüggő automaták direkt összege. A 25.1. és a 25.6. Lemmák szerint az $\mathbf{A}_i$ automaták félperfektek. Legyenek $a_i \in A_i$ és $a_j \in A_j$ rögzített állapotok és $\varphi_{i,j}$ $(1 \leq i, j \leq k)$ az A_i állapothalmazok olyan leképezései az A_j állapothalmazokra, amelyekre minden $p \in X^*$ bemenő szóra

$$\varphi_{i,j}(a_i p) = b_j p.$$

Mivel az $\mathbf{A}_i$ automaták erősen összefüggők, állapotfüggetlenek és karakterisztikus monoidjuk megegyezik, ezért a $\varphi_{i,j}$ leképezések az $\mathbf{A}_i$ automaták izomorf leképezései az $\mathbf{A}_j$ automatákra.

Megfordítva, tegyük fel, hogy $\mathbf{A}$ az $\mathbf{A}_i = (A_i, X, \delta_i)$ $(i \in I)$ egymással izomorf félperfekt automaták direkt összege. A 2.4. Tétel szerint $\mathbf{A}$ reverzibilis. Legyenek $\eta_{i,j}$ $(i, j \in I)$ az $\mathbf{A}_i$ automaták izomorf leképezései az $\mathbf{A}_j$ automatákra. Ha $ap = aq$ valamely $a \in A_i$ és $p, q \in X^*$ esetén, akkor minden $j \in I$ indexre

$$\eta_{i,j}(a)p = \eta_{i,j}(ap) = \eta_{i,j}(aq) = \eta_{i,j}(a)q,$$

amiből már adódik, hogy $\mathbf{A}$ állapotfüggetlen. $\square$

25.8. Következmény
Minden A-véges ciklikus állapotfüggetlen automata félperfekt.

Bizonyítás. Ha az $\mathbf{A}$ automata állapotfüggetlen, akkor a 25.4. Lemma szerint ciklikus részautomatái izomorfak. Ha $\mathbf{A}$ ciklikus, akkor ez azt jelenti, hogy izomorf minden ciklikus részautomatájával. Ha $\mathbf{A}$ A-véges, akkor ebből az következik, hogy $\mathbf{A}$ egyenlő minden ciklikus részautomatájával, vagyis erősen összefüggő. A 25.6. Lemma szerint $\mathbf{A}$ félperfekt. □

25.9. Tétel
Legyen az $\mathbf{A}$ automata A-véges és $|S(\mathbf{A})| = n$. Az $\mathbf{A}$ automata akkor és csak akkor állapotfüggetlen, ha véges sok izomorf n állapotú félperfekt automata direkt összege.

Bizonyítás. Ha $\mathbf{A}$ állapotfüggetlen, akkor a 25.4. Lemma és a 25.8. Következmény szerint ciklikus részautomatái izomorfak és félperfektek. Így $\mathbf{A}$ ezek direkt összege. A 25.5. Tétel szerint ezek a félperfekt automaták n állapotúak.

Megfordítva, tegyük fel, hogy $\mathbf{A}$ az $\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2, \ldots, \mathbf{A}_k$ izomorf n állapotú félperfekt automaták direkt összege. A 25.7. Tétel szerint $\mathbf{A}$ állapotfüggetlen. □

25.10. Tétel
Állapotfüggetlen automata akkor és csak akkor A-véges, ha kongruenciahálója véges.

Bizonyítás. Ha az $\mathbf{A}$ állapotfüggetlen automata A-véges, akkor kongruenciahálója nyilvánvalóan véges. Megfordítva, ha $\mathbf{A}$ kongruenciahálója véges, akkor az 5.4. Lemma szerint véges sok ciklikus részautomatája van és minden ciklikus részautomatájának is véges a kongruenciahálója. Mivel $\mathbf{A}$ állapotfüggetlen, ezért a 21.4. Lemma és a 25.3. Következmény miatt $\mathbf{A}$ minden ciklikus részautomatája A-véges, s így $\mathbf{A}$ is A-véges. □

Feladatok

25.1. Ha a (25.1) definícióban csak az X^+ szabad félcsoport szerepel, akkor azt mondjuk, hogy az $\mathbf{A} = (A, X, \delta)$ automata *az üres szó nélkül állapotfüggetlen.* (Nyilvánvaló, hogy ha az automata állapotfüggetlen, akkor az üres szó nélkül is állapotfüggetlen.) Az üres szó nélkül állapotfüggetlen $\mathbf{A} = (A, X, \delta)$ automata akkor és csak akkor állapotfüggetlen, ha nincs olyan $b \in A$ és $r \in X^+$, amelyre $br = b$ vagy van olyan $t \in X^+$, hogy minden $a \in A$ állapotra $at = a$. (→ Megoldás)

25.2. Az üres szó nélkül állapotfüggetlen ciklikus automata akkor és csak akkor félperfekt, ha karakterisztikus monoidja csoport. (→ Megoldás)

26. Félperfekt automaták

Ebben a fejezetben a félperfekt automatákat vizsgáljuk az automorfizmuscsoportjaik felhasználásával. Definíció szerint minden félperfekt automata ciklikus, a 25.6. Lemma szerint speciálisan erősen összefüggő. Egy szükséges és elégséges feltételt adunk az automorfizmuscsoport segítségével arra, hogy egy ciklikus automata mikor félperfekt.

26.1. Lemma
Félperfekt automata minden endomorfizmusa automorfizmus.

Bizonyítás. Legyen az $\mathbf{A} = (A, X, \delta)$ félperfekt automata egy endomorfizmusa α. A 22.1. Lemma szerint α szürjektív. Tegyük fel, hogy az $a, b \in A$ állapotokra $\alpha(a) = \alpha(b)$. Az $\mathbf{A}$ automata erősen összefüggősége miatt van olyan $p \in X^*$, amelyre $b = ap$. Ezért

$$\alpha(a)e = \alpha(a) = \alpha(b) = \alpha(ap) = \alpha(a)p.$$

De $\mathbf{A}$ állapotfüggetlen, így $a = ae = ap = b$, vagyis α bijektív. □

Egy $H \neq \emptyset$ halmaz G permutációcsoportja *tranzitív*, ha bármely $a, b \in H$ párhoz van olyan $\alpha \in G$, amelyre $\alpha(a) = b$.

26.2. Lemma
Ha az $\mathbf{A} = (A, X, \delta)$ automata $G(\mathbf{A})$ automorfizmuscsoportja tranzitív, akkor $\mathbf{A}$ állapotfüggetlen.

Bizonyítás. Legyen az $a \in A$ állapotra és a $p, q \in X^*$ bemenő szavakra $ap = aq$. Mivel $G(\mathbf{A})$ tranzitív, bármely $b \in A$ állapothoz van olyan $\alpha \in G(\mathbf{A})$, hogy $\alpha(a) = b$. Ezért

$$bp = \alpha(a)p = \alpha(ap) = \alpha(aq) = \alpha(a)q = bq,$$

azaz $\mathbf{A}$ állapotfüggetlen. □

26.3. Tétel
Ciklikus automata akkor és csak akkor félperfekt, ha automorfizmuscsoportja tranzitív.

Bizonyítás. Legyen az $\mathbf{A} = (A, X, \delta)$ automata félperfekt. Bármely $a, b \in A$ állapotpár esetén legyen $\alpha(ap) = bp$ $(p \in X^*)$. Könnyen megmutatható, hogy $\alpha \in G(\mathbf{A})$, azaz $G(\mathbf{A})$ tranzitív. (Hasonlóan, mint 25.7. Tétel bizonyításában megmutattuk, hogy $\varphi_{i,j}$ izomorfizmus.)

Legyen most az $\mathbf{A}$ ciklikus automata automorfizmuscsoportja tranzitív. A 26.2. Lemma szerint $\mathbf{A}$ állapotfüggetlen. Tekintsük most $\mathbf{A}$ egy a_0 generátorelemét. Tetszőleges $p \in X^*$ bemenő szóhoz van olyan $\alpha \in G(\mathbf{A})$, amelyre $a_0 p = \alpha(a_0)$ és van olyan $q \in X^*$ bemenő szó, hogy $a_0 q = \alpha^{-1}(a_0)$. Így

$$a_0(pq) = (a_0 p)q = \alpha(a_0)q = \alpha(a_0 q) = \alpha\alpha^{-1}(a_0) = a_0.$$

Hasonlóan mutatható meg, hogy $a_0(qp) = a_0$. Mivel $\mathbf{A}$ állapotfüggetlen, ezért karakterisztikus monoidja csoport. Ez azt jelenti, hogy $\mathbf{A}$ félperfekt. $\square$

26.4. Lemma

Ha a $H \neq \emptyset$ halmaz egy G reguláris permutációcsoportja tranzitív, akkor $|G| = |H|$. Megfordítva, ha H véges és a G reguláris permutációcsoportra $|G| = |H|$, akkor G tranzitív.

Bizonyítás. Legyen a $H \neq \emptyset$ halmaz G reguláris permutációcsoportja tranzitív és $a \in H$ tetszőleges, de rögzített elem. A tranzitivitás miatt az $\alpha \to \alpha(a)$ $(\alpha \in G)$ leképezés szürjektív, a regularitás miatt pedig injektív. Így ez a leképezés bijektív, azaz $|G| = |H|$.

Megfordítva, legyen H véges és a G reguláris permutációcsoportra $|G| = |H|$. Ez azt jelenti, hogy

$$H = \{\alpha(a); \alpha \in G\} \quad (a \in H).$$

Ha $b, c \in H$, akkor vannak olyan $\alpha, \beta \in G$, amelyekre $b = \alpha(a)$ és $c = \beta(a)$, vagyis $c = \beta\alpha^{-1}(b)$, tehát G tranzitív. $\square$

26.5. Tétel

Ha az $\mathbf{A} = (A, X, \delta)$ automata félperfekt, akkor $G(\mathbf{A}) \cong S_1(\mathbf{A})$. Megfordítva, ha az A-véges erősen összefüggő $\mathbf{A} = (A, X, \delta)$ automatára $G(\mathbf{A}) \cong S_1(\mathbf{A})$, akkor $\mathbf{A}$ félperfekt.

Bizonyítás. Legyen $a \in A$ az $\mathbf{A}$ félperfekt automata egy rögzített állapota. Minden $\alpha \in G(\mathbf{A})$ automorfizmushoz van olyan $p_\alpha \in X^*$ bemenő szó, amelyre $\alpha(a) = ap_\alpha$. Mivel $G(\mathbf{A})$ a 22.2. Lemma és a 26.3. Tétel szerint reguláris és tranzitív, ezért az

$$\varphi : \alpha \to \rho_{\mathbf{A}}[p_\alpha] \quad (\alpha \in G(\mathbf{A}))$$

leképezés $G(\mathbf{A})$ bijektív leképezése $S_1(\mathbf{A})$-ra. Megmutatjuk, hogy a leképezés izomorfizmus. Mivel $S_1(\mathbf{A})$ csoport, így bármely $\alpha, \beta \in G(\mathbf{A})$ esetén van olyan $q \in X^*$, hogy

$$\rho_{\mathbf{A}}[p_{\alpha\beta}] = \rho_{\mathbf{A}}[p_\alpha]\rho_{\mathbf{A}}[q].$$

Akkor

$$\alpha\beta(a) = ap_{\alpha\beta} = ap_\alpha q = \alpha(a)q = \alpha(aq),$$

azaz $\beta(a) = aq$, vagyis

$$\rho_{\mathbf{A}}[q] = \rho_{\mathbf{A}}[p_\beta],$$

tehát

$$\rho_{\mathbf{A}}[p_{\alpha\beta}] = \rho_{\mathbf{A}}[p_\alpha]\rho_{\mathbf{A}}[p_\beta].$$

Ez azt jelenti, hogy φ izomorfizmus.

Megfordítva, legyen az A-véges erősen összefüggő $\mathbf{A} = (A, X, \delta)$ automatára $G(\mathbf{A}) \cong S_1(\mathbf{A})$. A 22.1. és a 21.3. Lemmák szerint

$$|G(\mathbf{A})| \leq |A| \leq |S_1(\mathbf{A})| = |G(\mathbf{A})|,$$

azaz $|G(\mathbf{A})| = |A|$. A 22.2. és a 26.4. Lemmák szerint $G(\mathbf{A})$ tranzitív. A 26.3. Tétel szerint $\mathbf{A}$ félperfekt. □

A tétel második részének bizonyítása szerint $G(\mathbf{A}) \cong S_1(\mathbf{A})$ helyett elegendő lenne feltenni azt, hogy $|G(\mathbf{A})| = |S_1(\mathbf{A})|$.

Tetszőleges automatákra igaz az alábbi egyszerű lemma.

26.6. Lemma

Ha az $\mathbf{A} = (A, X, \delta)$ automata az $\mathbf{A}_k = (A_k, X, \delta_k)$ $(k \in I)$ automaták direkt szorzata, akkor

$$\prod_{k\in I} E(\mathbf{A}_k) \subseteq E(\mathbf{A}) \quad [\prod_{k\in I} G(\mathbf{A}_k) \subseteq G(\mathbf{A})].$$

Bizonyítás. Legyen $\alpha \in \prod_{k\in I} E(\mathbf{A}_k)$ $[\prod_{k\in I} G(\mathbf{A}_k)]$, $\mathbf{a} \in A$ és $x \in X$. Ha α_k és a_k $(k \in I)$ α ill. $\mathbf{a}$ k-adik komponensét jelenti, akkor

$$\alpha(\delta(\mathbf{a}, x)) = \alpha((\delta_k(a_k, x); k \in I)) = (\alpha_k(\delta_k(a_k, x)); k \in I) =$$

$$= (\delta_k(\alpha_k(a_k), x); k \in I) = \delta(\alpha(\mathbf{a}), x),$$

azaz $\alpha \in E(\mathbf{A})$ $[G(\mathbf{A})]$. □

26.7. Lemma

Ha $\mathbf{A} = (A, X, \delta)$ ciklikus automata az $\mathbf{A}_k = (A_k, X, \delta_k)$ $(k \in I)$ állapotfüggetlen automaták direkt szorzata, akkor az $E(\mathbf{A})$ endomorfizmusfélcsoport az $E(\mathbf{A}_k)$ $(k \in I)$ endomorfizmusfélcsoportok direkt szorzata.

Bizonyítás. A 26.6. Lemma szerint $\prod_{k\in I} E(\mathbf{A}_k) \subseteq E(\mathbf{A})$.

Legyen $\gamma \in E(\mathbf{A})$. Jelölje most is $a_k \in A_k$ $(k \in I)$ az $\mathbf{a} \in A$ állapot k-adik komponensét. Definiáljuk az $\alpha_k : A_k \to A_k$ $(k \in I)$ megfeleltetéseket a következőképpen:

$$\forall(\mathbf{a} \in A)\ (\alpha_k(a_k) = c_k\ (k \in I) \quad \Longleftrightarrow \quad \gamma(\mathbf{a}) = \mathbf{c}).$$

Legyenek $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in A$ olyan állapotok, amelyeknek k-adik komponense megegyezik, azaz $a_k = b_k$. Legyen $\mathbf{a}_0$ az $\mathbf{A}$ automata egy generátoreleme és a_{0k} $(k \in I)$ $\mathbf{a}_0$ k-adik komponense. Legyenek továbbá a $p, q \in X^*$ bemenő szavakra $\mathbf{a}_0 p = \mathbf{a}$ és $\mathbf{a}_0 q = \mathbf{b}$. Így $a_{0k} p = a_k = b_k = a_{0k} q$. Ha $\gamma(\mathbf{a}) = \mathbf{c}$ és $\gamma(\mathbf{b}) = \mathbf{d}$, akkor

$$\mathbf{c} = \gamma(\mathbf{a}) = \gamma(\mathbf{a}_0 p) = \gamma(\mathbf{a}_0)p,$$
$$\mathbf{d} = \gamma(\mathbf{b}) = \gamma(\mathbf{a}_0 q) = \gamma(\mathbf{a}_0)q.$$

Mivel $\mathbf{A}_k$ állapotfüggetlen, ezért $a_{0k} p = a_{0k} q$ egyenletből következik, hogy $c_k = d_k$ Ez azt jelenti, hogy az α_k $(k \in I)$ megfeleltetések leképezések.

Ha $\mathbf{a} \in A$ és $x \in X$, akkor

$$\gamma(\delta(\mathbf{a}, x)) = \delta(\gamma(\mathbf{a}), x),$$

azaz

$$\alpha_k(\delta(a_k, x)) = \delta_k(\alpha(a_k), x) \quad (k \in I),$$

vagyis $\alpha_k \in E(\mathbf{A}_k)$. Az α_k megfeleltetések definícója miatt $\gamma = (\alpha_k : k \in I)$, vagyis $\gamma \in \prod_{k\in I} E(\mathbf{A}_k)$. Ami azt jelenti, hogy $E(\mathbf{A}) = \prod_{k\in I} E(\mathbf{A}_k)$. □

A lemma feltételei mellett az $\mathbf{A}$ és az $\mathbf{A}_k$ $(k \in I)$ automaták mindegyike ciklikus állapotfüggetlen. A 26.7. Lemma és a 26.1. Lemma szerint igaz az alábbi állítás.

26.8. Következmény

Ha az $\mathbf{A}$ félperfekt automata az $\mathbf{A}_k$ $(k \in I)$ félperfekt automaták direkt szorzata, akkor a $G(\mathbf{A})$ automorfizmuscsoport a $G(\mathbf{A}_k)$ $(k \in I)$ automorfizmuscsoportok direkt szorzata.

Nem csak félperfekt automaták direkt szorzata lehet félperfekt, ezért szükséges az előbbi következményben feltenni az $\mathbf{A}_k$ automatákról azt, hogy félperfektek. Erre vonatkozik a következő példa, amely azt is mutatja, hogy félperfekt automata homomorf képe nem biztos, hogy félperfekt.

26.9. Példa

Az

$\mathbf{A}_1$	1	2	3
x	1	3	2
y	2	3	1

$\mathbf{A}_2$	1	2
x	2	1
y	1	2

táblázatokkal definiált $\mathbf{A}_1$ és $\mathbf{A}_2$ automaták direkt szorzata az alábbi táblázattal megadott $\mathbf{A}$ automata:

$\mathbf{A}$	$(1,1)$	$(1,2)$	$(2,1)$	$(2,2)$	$(3,1)$	$(3,2)$
x	$(1,2)$	$(1,1)$	$(3,2)$	$(3,1)$	$(2,2)$	$(2,1)$
y	$(2,1)$	$(2,2)$	$(3,1)$	$(3,2)$	$(1,1)$	$(1,2)$

Az $\mathbf{A}$ automata félperfekt, de $\mathbf{A}_1$ nem állapotfüggetlen, s így nem félperfekt. Mivel $\mathbf{A}$ homomorf képe $\mathbf{A}_1$, ez azt is szemlélti, hogy félperfekt automata homomorf képe nem biztos, hogy félperfekt. Meggyőződhetünk arról is, hogy

$$E(\mathbf{A}_1) = G(\mathbf{A}_1) = \iota_{A_1}, \quad E(\mathbf{A}_2) = G(\mathbf{A}_2) = \{\iota_{A_2}, \alpha\},$$

ahol α az (12) ciklus. Így $G(\mathbf{A}_1) \times G(\mathbf{A}_2) \neq G(\mathbf{A})$, mivel a 26.4. Lemma szerint $|G(\mathbf{A})| = 6$.

Legyen $\mathbf{A} = (A, X, \delta)$ tetszőleges automata és K a $G(\mathbf{A})$ automorfizmuscsoport egy részcsoportja. Definiáljuk a $\kappa_K \subseteq A^2$ binér relációt a következő módon:

$$(a, b) \in \kappa_K \quad \Leftrightarrow \quad (\exists \alpha \in K)(b = \alpha(a)). \tag{26.1}$$

Nem nehéz belátni, hogy κ_K az $\mathbf{A}$ automata kongruenciája. Jelölje röviden A/K az A/κ_K halmazt és $\mathbf{A}/K = (A/K, X, \delta_K)$ az $\mathbf{A}/\kappa_K$ faktorautomatát.

26.10. Lemma

Az $\mathbf{A} = (A, X, \delta)$ félperfekt automata $G(\mathbf{A})$ automorfizmuscsoportjának bármely K normális részcsoportjára $G(\mathbf{A})/K \cong G(\mathbf{A}/K)$.

Bizonyítás. Legyen $a \in A$ tetszőleges rögzített állapot. Definiáljuk az $\alpha \in G(\mathbf{A})$ automorfizmusra a $\varphi_\alpha : A/K \to A/K$ megfeleltetést a következőképpen:

$$(\forall p \in X^*) \ (\varphi_\alpha(\kappa_K[ap]) = \kappa_K[\alpha(ap)]).$$

Ha $q \in X^*$ bemenő szóra $\kappa_K[ap] = \kappa_K[aq]$, akkor van olyan $\beta \in K$, hogy $\beta(ap) = aq$. Ezért

$$\alpha\beta\alpha^{-1}\alpha(ap) = \alpha(aq).$$

De $\alpha\beta\alpha^{-1} \in K$, mivel K a $G(\mathbf{A})$ normális részcsoportja, ezért $\kappa_K[\alpha(ap)] = \kappa_K[\alpha(aq)]$, azaz a φ_α megfeleltetés leképezés.

A 25.6. Lemma szerint $\mathbf{A}$ erősen összefüggő, így minden $b \in A$ állapothoz van olyan $r \in X^*$ bemenő szó, hogy $\alpha^{-1}(b) = ar$. Ezért

$$\varphi_\alpha(\kappa_K[ar]) = \kappa_K[\alpha(ar)] = \kappa_K[b],$$

azaz φ_α szürjektív.

Tegyük fel, hogy $q \in X^*$ bemenő szóra

$$\kappa_K[\alpha(ap)] = \kappa_K[\alpha(aq)].$$

Akkor van olyan $\beta \in K$, hogy

$$\beta\alpha(ap) = \alpha(aq).$$

Amiből $\alpha^{-1}\beta\alpha(ap) = aq$, vagyis $\kappa_K[ap] = \kappa_K[aq]$. Ezzel megmutattuk, hogy φ_α injektív. Mivel bármely $p \in X^*$ és $x \in X$ esetén

$$\varphi_\alpha(\delta_K(\kappa_K[ap], x)) = \varphi_\alpha(\kappa_K[apx]) = \kappa_K[\alpha(apx)] =$$

$$= \kappa_K[\alpha(ap)x] = \delta_K(\kappa_K[\alpha(ap)], x) = \delta_K(\varphi_\alpha(\kappa_K[ap]), x),$$

ezért $\varphi_\alpha \in G(\mathbf{A}/K)$.

Legyen most $\eta \in G(\mathbf{A}/K)$ és $\eta(\kappa_K[a]) = \kappa_K[b]$ $(b \in A)$. Minthogy a 26.3. Tétel szerint $G(\mathbf{A})$ tranzitív, van olyan $\alpha \in G(\mathbf{A})$, hogy $b = \alpha(a)$. Így minden $p \in X^*$ bemenő szóra

$$\eta(\kappa_K[ap]) = \eta(\kappa_K[a]p) = \eta(\kappa_K[a])p =$$

$$= \kappa_K[b]p = \kappa_K[\alpha(a)]p = \kappa_K[\alpha(ap)] = \varphi_\alpha(\kappa_K[ap]),$$

vagyis $\eta = \varphi_\alpha$. Kaptuk, hogy

$$G(\mathbf{A}/K) = \{\varphi_\alpha;\ \alpha \in G(\mathbf{A})\}.$$

Megmutatjuk, hogy a φ megfeleltetés, amelyre $\varphi(K\alpha) = \varphi_\alpha$ $(\alpha \in G(\mathbf{A}))$, $G(\mathbf{A})/K$ izomorf leképezése $G(\mathbf{A}/K)$-re. Ha $K\alpha = K\beta$ $(\alpha, \beta \in G(\mathbf{A}))$, akkor nyilvánvalóan $\varphi_\alpha = \varphi_\beta$. Ha $\varphi_\alpha = \varphi_\beta$, akkor $\kappa_K[\alpha(a)] = \kappa_K[\beta(a)]$. Így van olyan $\gamma \in G(\mathbf{A})$, hogy $\gamma\alpha(a) = \beta(a)$. De $G(\mathbf{A})$ a 22.2. Lemma szerint reguláris, ezért $\gamma\alpha = \beta$, ami éppen azt jelenti, hogy $K\alpha = K\beta$. Tehát φ $G(\mathbf{A})/K$ bijektív leképezése $G(\mathbf{A}/K)$-re.

Bármely $\alpha, \beta \in G(\mathbf{A})$ és $p \in X^*$ esetén

$$\varphi_{\alpha\beta}(\kappa_K[ap]) = \kappa_K[\alpha\beta(ap)] =$$

$$= \varphi_\alpha(\kappa_K[\beta(ap)]) = \varphi_\alpha\varphi_\beta(\kappa_K[ap]),$$

vagyis $\varphi_{\alpha\beta} = \varphi_\alpha\varphi_\beta$, azaz φ izomorfizmus. □

26.11. Lemma

Ha K és L az $\mathbf{A} = (A, X, \delta)$ félperfekt automata $G(\mathbf{A})$ automorfizmuscsoportjának olyan normális részcsoportjai, amelyekre $KL = G(\mathbf{A})$ és $K \cap L = \iota_A$, akkor $\mathbf{A}/K$, $\mathbf{A}/L$ félperfekt automaták, $G(\mathbf{A}/K) \cong L$, $G(\mathbf{A}/L) \cong K$ és $\mathbf{A}/K \times \mathbf{A}/L \cong \mathbf{A}$.

Bizonyítás. Legyen $a \in A$ tetszőleges rögzített állapot. A $KL = G(\mathbf{A})$ feltételből következik, hogy $A = \{\alpha\beta(a); \alpha \in K, \beta \in L\}$. Ha

$$\alpha\beta(a) = \alpha'\beta'(a) \quad (\alpha, \alpha' \in K, \beta, \beta' \in L),$$

akkor $\alpha\beta = \alpha'\beta'$, azaz ${\alpha'}^{-1}\alpha = \beta'\beta^{-1}$. De $K \cap L = \iota_A$, ezért $\alpha = \alpha'$ és $\beta = \beta'$.

Ha $\kappa_K[\beta(a)] = \kappa_K[\beta'(a)]$ $(\beta, \beta' \in L)$, akkor van olyan $\alpha \in K$, hogy $\beta' = \alpha\beta$. Amiből $\alpha = \beta'\beta^{-1} \in K$, azaz $\alpha = \iota_A$, vagyis $\beta = \beta'$. Így $A/K = \{K\beta(a); \beta \in L\}$. Hasonlóan kapjuk, hogy $A/L = \{L\alpha(a); \alpha \in K\}$.

Ezekből a meggondolásokból látható, hogy az a φ megfeleltetés, amelyre

$$\varphi(K\beta(a), L\alpha(a)) = \alpha\beta(a) \quad (\alpha \in K, \beta \in L),$$

$\mathbf{A}/K \times \mathbf{A}/L$ bijektív leképezése $\mathbf{A}$-ra. Megmutatjuk, hogy φ izomorfizmus. Legyenek $\alpha \in K$, $\beta \in L$ és $x \in X$ tetszőlegesek. Ha δ' jelöli $\mathbf{A}/K \times \mathbf{A}/L$ átmenetfüggvényét, akkor

$$\varphi(\delta'((K\beta(a), L\alpha(a)), x)) = \varphi(K\beta(\delta(a,x)), L\alpha(\delta(a,x))) =$$

$$= \alpha\beta(\delta(a,x)) = \delta(\alpha\beta(a), x) = \delta(\varphi(K\beta(a), L\alpha(a)), x),$$

azaz φ valóban izomorfizmus. Mivel erősen összefüggő automata homomorf képe is erősen összefüggő, ezért $\mathbf{A}/K$ és $\mathbf{A}/L$ erősen összefüggő. Legyen a $\beta \in L$ automorfizmusra és a $p, q \in X^*$ bemenő szavakra $K\beta(a)p = K\beta(a)q$. Akkor van olyan $\alpha \in K$, hogy $\beta(ap) = \alpha\beta(aq)$. Bármely $\gamma \in L$ automorfizmushoz van olyan $\beta' \in L$ automorfizmus, hogy $\gamma = \beta'\beta$. De $\beta'\alpha = \alpha\beta'$, ezért

$$\gamma(ap) = \beta'\beta(ap) = \beta'\alpha\beta(aq) = \alpha\beta'\beta(aq) = \alpha\gamma(aq),$$

vagyis $K\gamma(a)p = K\gamma(a)q$. Ez azt jelenti, hogy $\mathbf{A}/K$ állapotfüggetlen. Hasonlóan mutatható meg, hogy $\mathbf{A}/L$ is állapotfüggetlen. A 25.6. Lemma szerint mind a két automata félperfekt.

Mivel $G(\mathbf{A})/K \cong L$ és $G(\mathbf{A})/L \cong K$, ezért a 26.10. Lemma szerint $G(\mathbf{A}/K) \cong L$ és $G(\mathbf{A}/L) \cong K$. □

A csoportelméletből ismeretes, hogy egy G csoport akkor és csak akkor bontható fel a $G_1, G_2, \ldots, G_n$ csoportok direkt szorzatára, ha vannak olyan $K_1, K_2, \ldots, K_n$ normális részcsoportjai, amelyekre

$$G_1 \cong K_1, G_2 \cong K_2, \ldots G_n \cong K_n,$$

$$G = K_1K_2 \cdots K_n, \quad K_i \cap K_1 \cdots K_{i-1}K_{i+1} \cdots K_n = e_G \ (i = 1, 2, \ldots, n),$$

ahol e_G a G csoport egységeleme. Ez pontosan azt jelenti, hogy minden $g \in G$ sorrendtől eltekintve egyértelműen állítható elő $g = g_1 g_2 \cdots g_k$ alakban, ahol $g_i \in K_i$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$. (Az előbbi lemmában szereplő bármely $\alpha \in K$ és $\beta \in L$ esetén is $\alpha\beta = \beta\alpha$.)

Ezeket felhasználva bizonyítjuk a következő állítást, amely véges sok tényezős direkt szorzat esetén a 26.8. Következmény megfordításának tekinthető.

26.12. Tétel
Ha $K_1, K_2, \ldots, K_n$ $(2 \leq n)$ az $\mathbf{A} = (A, X, \delta)$ félperfekt automata $G(\mathbf{A})$ automorfizmuscsoportjának olyan normális részcsoportjai, amelyekre

$$G(\mathbf{A}) = K_1 K_2 \cdots K_n, \quad K_i \cap K_1 \cdots K_{i-1} K_{i+1} \cdots K_n = \iota_A,$$

akkor $\mathbf{A}$ felbontható olyan $\mathbf{A}_i = (A_i, X, \delta_i)$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ félperfekt automaták direkt szorzatára, amelyekre $G(\mathbf{A}_i) \cong K_i$.

Bizonyítás. Az állítást n szerinti teljes indukcióval bizonyítjuk. Ha $n = 2$, akkor a 26.11. Lemma szerint igaz az állítás. Tegyük fel, hogy $2 \leq n$ esetén igaz az állítás.

Legyenek $K_1, K_2, \ldots, K_n, K_{n+1}$ az $\mathbf{A}$ félperfekt automata $G(\mathbf{A})$ automorfizmuscsoportjának olyan normális részcsoportjai, amelyekre

$$G(\mathbf{A}) = K_1 K_2 \cdots K_n K_{n+1},$$

$$K_i \cap K_1 \cdots K_{i-1} K_{i+1} \cdots K_n K_{n+1} = \iota_A, \quad (i = 1, 2, \ldots, n+1).$$

Könnyen belátható, hogy $K_1 K_2 \cdots K_n$ a $G(\mathbf{A})$ automorfizmuscsoport normális részcsoportja. A 26.11. Lemma szerint $\mathbf{A}/K_1 K_2 \cdots K_n$, $\mathbf{A}/K_{n+1}$ félperfekt automaták, $G(\mathbf{A}/K_1 K_2 \cdots K_n) \cong K_{n+1}$, $G(\mathbf{A}/K_{n+1}) \cong K_1 K_2 \cdots K_n$ és $\mathbf{A}/K_1 K_2 \cdots K_n \times \mathbf{A}/K_{n+1} \cong \mathbf{A}$.

Az indukciós feltevés szerint $\mathbf{A}/K_{n+1}$ felbontható olyan $\mathbf{A}_i$ $(i = 1, \ldots, n)$ félperfekt automaták direkt szorzatára, amelyekre $G(\mathbf{A}_i) \cong K_i$. □

Feladatok

26.1. Legyen $\mathbf{P}(\mathbf{A})^+ = (P(A)^+, X, \delta')$ az $\mathbf{A} = (A, X, \delta)$ félperfekt automata hatványautomatája,

$$K(B) = \{\rho_{\mathbf{A}}[r] \in S_1(\mathbf{A}); Br = B\},$$

$$F(B) = \{C \in P(A)^+; |C| = |B|\} \quad (B \in P(A)^+).$$

$K(B)$ az $S_1(\mathbf{A})$ karakterisztikus csoport részcsoportja és

$$\cap_{C\in F(B)} K(C) = \rho[e] \quad (B \neq A).$$

Bármely $p, q \in X^*$ bemenő szavakra

$$Bp = Bq \quad \Leftrightarrow \quad \rho_{\mathbf{A}}[p]K(B) = \rho_{\mathbf{A}}[q]K(B).$$

(→ Megoldás)

26.2. Ha G az $\mathbf{A}$ félperfekt automata $S_1(\mathbf{A})$ karakterisztikus csoportjának részcsoportja, akkor van olyan $B \in P(A)^+$, amelyre $K(B) = G$. ($K(B)$-t a 26.1. feladatban definiáltuk.) (→ Megoldás)

26.3. A 26.1. feladat jelölései mellett legyen $\underline{\mathbf{B}} = (\underline{B}, X, \delta')$ a $\mathbf{P}(\mathbf{A})^+$ automata B állapota által generált ciklikus részautomatája és

$$N(B) = \{\rho_{\mathbf{A}}[r] \in S_1(\mathbf{A}); (\forall C \in \underline{B})(Cr = C)\}.$$

$N(B)$ az $S_1(\mathbf{A})$ karakterisztikus csoport normális részcsoportja,

$$N(B) \subseteq K(B), \quad S_1(\underline{\mathbf{B}}) \cong S_1(\mathbf{A})/N(B).$$

(→ Megoldás)

26.4. Ha N az $\mathbf{A}$ félperfekt automata $S_1(\mathbf{A})$ karakterisztikus csoportjának normális részcsoportja, akkor van olyan $B \in P(A)^+$, amelyre $N(B) = N$. ($N(B)$-t a 26.3. feladatban definiáltuk.) (→ Megoldás)

26.5. Minden félperfekt automata hatványautomatája olyan erősen összefüggő automaták direkt összege, amelyek karakterisztikus monoidja csoport. (→ Megoldás)

27. Perfekt automaták

Az erősen összefüggő kommutatív automatákat *perfekt automaták*nak is nevezzük. Perfekt automaták közé tartoznak például a ciklikus permutációautomaták.

27.1. Lemma
Minden perfekt automata félperfekt.

Bizonyítás. Legyen az $\mathbf{A} = (A, X, \delta)$ perfekt automata $a \in A$ állapotára és $p, q \in X^*$ bemenő szavaira $ap = aq$. Mivel $\mathbf{A}$ erősen összefüggő, ezért bármely $b \in A$ állapothoz van olyan $r \in X^*$ bemenő szó, hogy $b = ar$. Az automata kommutativitása miatt

$$bp = (ar)p = arp = apr = (ap)r = (aq)r = aqr = arq = (ar)q = bq,$$

vagyis $\mathbf{A}$ állapotfüggetlen, s így a (25.6.) Lemma szerint félperfekt. □

A 23.2. Következmény valamint a 26.5. Tétel alapján nyilvánvaló az alábbi állítás.

27.2. Következmény
Félperfekt automata akkor és csak akkor perfekt, ha karakterisztikus csoportja [automorfizmuscsoportja] Abel-csoport.

Adjuk meg az $\mathbf{A} = (A, X, \delta)$ automata karakterisztikus monoidját a 6.2. Lemmát felhasználva a $T(A)$ monoiddal. A 27.2. Következményből a 23.3. Tétel segítségével kapjuk az alábbi eredményt:

27.3. Következmény
Ha az $\mathbf{A} = (A, X, \delta)$ automata perfekt, akkor $G(\mathbf{A}) = T(A)$ és így $\mathbf{A}$ permutációautomata.

27.4. Lemma
Az $\mathbf{A} = (A, X, \delta)$ ciklikus automata karakterisztikus monoidja akkor és csak akkor prímhatványrendű ciklikus csoport, ha $\mathbf{A}$ ugyanolyan prímhatványrendű ciklikus permutációautomata.

Bizonyítás. Tegyük fel, hogy $\mathbf{A}$ karakterisztikus monoidja t^n prímhatványrendű ciklikus csoport. A 23.2. Következmény szerint $\mathbf{A}$ kommutatív. A 23.3. Tétel szerint $\mathbf{A}$ t^n prímhatványrendű perfekt automata. A 21.1. Tétel $\mathbf{A} \cong \mathbf{X}^*/\rho_{\mathbf{A}}$. Vezessük be a rövid $\rho_{\mathbf{A}}[p] = \overline{p}$ $(p \in X^*)$ jelölést. Mivel $X^*/\rho_{\mathbf{A}}$ ciklikus csoport, ezért van olyan $r \in X^+$ bemenő szó, hogy

$$X^*/\rho_{\mathbf{A}} = \{\overline{e}, \overline{r}, \ldots, \overline{r}^{t^n-1}\} \quad (\overline{r}^{t^n} = \overline{e}).$$

Bármely $q \in X^*$ bemenő szóra $X^*/\rho_{\mathbf{A}}$ $\overline{q}$ által generált ciklikus részcsoportjának rendje t^n osztója, azaz egyenlő valamilyen t^k prímhatvánnyal, ahol $0 \leq k \leq n$. Legyen $r = x_1 x_2 \ldots x_l$ $(x_1, x_2, \ldots, x_l \in X)$. Legyen továbbá t^{k_i}

az $\overline{x_i}$ $(i = 1, 2, \ldots, l)$ által generált ciklikus részcsoport rendje. Az $\mathbf{A}$ automata kommutativitása miatt feltehető, hogy $t^{k_1} \leq t^{k_2} \leq \cdots \leq t^{k_l}$. Ezért t^{k_i} osztója $t^{k_{i+1}}$-nek $(i = 1, 2, \ldots, l)$. Ezek szerint

$$\overline{r}^{t_{k_l}} = \overline{x_1}^{t_{k_l}} \overline{x_2}^{t_{k_l}} \ldots \overline{x_l}^{t_{k_l}} = \overline{e},$$

amiből következik, hogy $k_l = n$, vagyis x_l ciklikus permutációjel.

Megfordítva, legyen $\mathbf{A}$ t^n prímhatványrendű ciklikus permutációautomata. Ha $x \in X$ egy ciklikus permutációjel, akkor

$$X^*/\rho_{\mathbf{A}} = \{\overline{e}, \overline{x}, \ldots, \overline{x}^{t^n - 1}\}, \quad (\overline{x}^{t^n} = \overline{e}),$$

azaz a karakterisztikus félcsoport t^n prímhatványrendű ciklikus csoport. □

27.5. Tétel
Minden A-véges perfekt automata felbontható prímhatványrendű ciklikus permutációautomaták direkt szorzatára, amelyek rendje sorrendtől eltekintve egyértelműen meghatározott.

Bizonyítás. A 27.2. Következmény szerint az $\mathbf{A} = (A, X, \delta)$ A-véges perfekt automata $G(\mathbf{A})$ automorfizmuscsoportja véges Abel-csoport. A véges Abel-csoportok alaptétele szerint

$$G(\mathbf{A}) = K_1 K_2 \cdots K_n, \quad K_i \cap K_1 K_2 \cdots K_{i-1} K_{i+1} \cdots K_n \ (i = 1, 2, \ldots, n),$$

ahol a K_i-k prímhatványrendű ciklikus csoportok, amelyek rendje sorrendtől eltekintve egyértelműen meghatározott. A 26.12. Tétel szerint $\mathbf{A}$ felbontható olyan $\mathbf{A}_i = (A_i, X, \delta_i)$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ félperfekt automaták direkt szorzatára, amelyekre $G(\mathbf{A}_i) \cong K_i$. A 26.5. Tétel szerint $G(\mathbf{A}_i) \cong S_1(\mathbf{A}_i)$. A 22.11. Lemmából és a 23.6. Tételből következik, hogy perfekt automata csak perfekt automaták direkt szorzatára bontható fel, ezért az $\mathbf{A}_i$ automaták perfektek. A 27.4. Lemma szerint az $\mathbf{A}_i$ automaták ciklikus permutációautomaták. □

A tételben a komponensekről nem kell feltenni a perfektséget, mert perfekt automata csak perfekt automaták direkt szorzatára bontható fel. Ha az $\mathbf{A}_i$ automaták legalább háromállapotúak, akkor a 24.9. Következmény szerint ezek pontosan akkor egyszerűek, ha prímszámrendű ciklikus permutációautomaták. Tehát a legalább háromállapotú kommutatív egyszerű automaták perfektek. A 21.3. Lemma és a 24.8. Tétel szerint a legalább háromállapotú nem kommutatív egyszerű automaták nem lehetnek karakterisztikus automaták.

27.6. Tétel
A-véges perfekt automata akkor és csak akkor szubdirekt irreducibilis, ha prímhatványrendű ciklikus permutációautomata.

Bizonyítás. A triviális automatákra nyilvánvalóan teljesül a tétel állítása, ezért feltehetjük, hogy $2 \leq |A|$.

27.5. Tétel szerint minden A-véges perfekt automata felbontható prímhatványrendű ciklikus permutációautomaták direkt szorzatára. Ha az $\mathbf{A} = (A, X, \delta)$ A-véges perfekt automata felbomlik legalább két ilyen nem triviális automata direkt szorzatára, akkor direkt reducibilis, s így szubdirekt reducibilis.

Tegyük fel, hogy $|X^*/\rho_{\mathbf{A}}| = t^n$, ahol t prímszám és $n \in N_+$. Használjuk a 27.4. Lemma bizonyításának a jelöléseit, azaz legyen

$$X^*/\rho_{\mathbf{A}} = \{\overline{e}, \overline{r}, \ldots, \overline{r}^{t^n-1}\} \quad (\overline{r}^{t^n} = \overline{e}) \ (r \in X^+).$$

Mivel minden perfekt automata karakterisztikus automata, ezért 21.1. Tétel szerint $\mathbf{A} \cong \mathbf{X}^*/\rho_{\mathbf{A}}$. De $\mathbf{A}$ erősen összefüggő permutációautomata, ezért a 22.10. Lemma szerint minden $\rho \in C(\mathbf{A})$ kongruencia uniform. Ha $\rho \neq \iota_A$, akkor van olyan $1 \leq l < t^n$, hogy $\underline{(\overline{e}, \overline{r}^l)} \in \rho$. Legyen k a legkisebb ilyen l. Ebből az következik, hogy $\overline{e}, \overline{r}, \ldots, \overline{r^{k-1}}$ mind különböző ρ-osztályban vannak és a ρ-osztályok száma k. Ami azt jelenti, hogy k osztója t^n-nek, vagyis $k = t^u$ $(0 \leq u < n)$. Azt is kaptuk, hogy ρ az $\mathbf{X}^*/\rho_{\mathbf{A}}$ $\overline{e}$ és $\overline{r^k}$ állapotai által generált főkongruencia.

Legyenek ρ_k $(k = 0, 1, \ldots, n-1)$ a $\mathbf{X}^*/\rho_{\mathbf{A}}$ automata $\overline{e}, \overline{r^k}$ állapotai által generált főkongruenciák. Az előbbiek szerint

$$C(\mathbf{X}^*/\rho_{\mathbf{A}}) = \{\rho_0, \rho_1, \ldots, \rho_{n-1}\}, \quad \omega_A = \rho_0 > \rho_1 > \cdots > \rho_{n-1} > \iota_A.$$

A 12.7. Tétel szerint $\mathbf{A}$ szubdirekt irreducibilis. □

A 12.5. Tétel szerint bármely A-véges automata felbontható direkt irreducibilis automaták direkt szorzatára. Tudjuk, hogy minden szubdirekt irreducibilis automata direkt irreducibilis. Ezért a 27.5. és a 27.6. Tételek alapján perfekt automatákra kimondhatjuk az alábbi mélyebb eredményt:

27.7. KÖVETKEZMÉNY
Minden A-véges perfekt automata felbontható szubdirekt irreducibilis perfekt automaták direkt szorzatára.

Feladatok

27.1. Ha $\mathbf{A}$ perfekt automata, akkor a **26.3** feladatban $S_1(\underline{\mathbf{B}}) \cong S_1(\mathbf{A})/K(B)$. (→ Megoldás)

27.2. Minden perfekt automata hatványautomatája perfekt automaták direkt összege. (→ Megoldás)

27.3. Erősen összefüggő automata akkor és csak akkor (m, n)-kommutatív, ha perfekt. (→ Megoldás)

28. Irányítható automaták

Az irányítható automaták fontos szerepet töltenek be az automatabővítésekben. Például az 5.3. Tétel szerint minden A-véges automata megadható egy reverzibilis automatának egy irányítható automatával való bővítéseként. Az 5. fejezetben megadtuk az irányítható automata definícióját. Az $\mathbf{A} = (A, X, \delta)$ automatát irányíthatónak vagy szinkronizálhatónak neveztük, ha van olyan $p \in X^*$ bemenő szó és $d \in A$ állapot, hogy minden $a \in A$ állapot esetén $ap = d$. Az ilyen p szót $\mathbf{A}$ irányító vagy szinkronizáló szavának, d-t $\mathbf{A}$ irányított vagy szinkronizált állapotának neveztük. Másképpen azt is mondtuk, hogy az $\mathbf{A}$ automata a p szóval irányítható a d állapothoz. Jelölje $D(\mathbf{A})$ az $\mathbf{A}$ automata irányított állapotainak halmazát.

28.1. Lemma
Az $\mathbf{A} = (A, X, \delta)$ irányítható automata egyetlen (nem üres) erősen összefüggő részautomatája $\mathbf{D}(\mathbf{A}) = (D(\mathbf{A}), X, \delta)$.

Bizonyítás. Ha $d \in D(\mathbf{A})$, akkor van olyan $p \in X^*$ bemenő szó, hogy minden $a \in A$ állapotra $ap = d$. Így minden $x \in X$ esetén $apx = dx$, azaz $\delta(d, x) \in D(\mathbf{A})$, vagyis $\mathbf{D}(\mathbf{A})$ az $\mathbf{A}$ automata részautomatája. Nyilvánvaló, hogy $\mathbf{D}(\mathbf{A})$ az $\mathbf{A}$ automata minden részautomatájának részautomatája. Ez azt jelenti, hogy $\mathbf{D}(\mathbf{A})$ az $\mathbf{A}$ automata egyetlen (nemüres) erősen összefüggő részautomata. □

Egy S félcsoport J ideálját *jobb zéró ideál*nak nevezzük, ha minden eleme S jobb oldali zéruseleme. Jelölje $U(\mathbf{A})$ az $\mathbf{A} = (A, X, \delta)$ irányítható automata irányító szavainak halmazát. $U(\mathbf{A})$ nyilvánvalóan X^* ideálja.

28.2. Lemma
Ha a $\mathbf{A} = (A, X, \delta)$ automata irányítható, akkor

$$B\overline{U}(\mathbf{A})(= \{\rho_{\mathbf{A}}[p]; p \in U(\mathbf{A})\}$$

az $S_1(\mathbf{A})$ karakterisztikus monoid jobb zéró ideálja és $\overline{U}(\mathbf{A})| = |D(\mathbf{A})|$.

Bizonyítás. Ha $p \in U(\mathbf{A})$ és $q \in X^*$, akkor

$$\rho_{\mathbf{A}}[q]\rho_{\mathbf{A}}[p] = \rho_{\mathbf{A}}[qp] = \rho_{\mathbf{A}}[p], \quad \rho_{\mathbf{A}}[p]\rho_{\mathbf{A}}[q] = \rho_{\mathbf{A}}[pq] \in \overline{U}(\mathbf{A}),$$

amiből következik, hogy $\overline{U}(\mathbf{A})$ az $S_1(\mathbf{A})$ karakterisztikus monoid jobb zéró ideálja.

Ha $d_1, d_2 \in D(\mathbf{A})$, $d_1 \neq d_2$ és az $\mathbf{A}$ automata a p_1 szóval irányítható d_1 állapothoz, a p_2-vel pedig d_2-höz, akkor $\rho_{\mathbf{A}}[p_1] \neq \rho_{\mathbf{A}}[p_2]$. Ha pedig q_1 és q_2 $\mathbf{A}$-t ugyanahhoz a d állapothoz irányítja, akkor $\rho_{\mathbf{A}}[q_1] = \rho_{\mathbf{A}}[q_2]$. Ez azt jelenti, hogy $|\overline{U}(\mathbf{A})| = |D(\mathbf{A})|$. □

Az előző lemma szerint irányítható automata karakterisztikus monoidjának van jobb oldali zéruseleme. A következő tétel ezt az állítást általánosítja:

28.3. Tétel
Véges sok irányítható automata direkt összegének karakterisztikus monoidja jobb oldali zéruselemes. Megfordítva, ha egy automata karakterisztikus monoidja jobb oldali zéruselemes, akkor az automata irányítható automaták direkt összege.

Bizonyítás. Legyen $\mathbf{A} = (A, X, \delta)$ az $\mathbf{A}_k = (A_k, X, \delta_k)$ $(k = 1, 2, \ldots, n)$ irányítható automaták direkt összege. Legyenek továbbá $a \in A$ és $p \in X^*$ tetszőlegesek és $p_k \in X^*$ az $\mathbf{A}_k$ $(k = 1, 2, \ldots, n)$ automata egy irányító szava. Legyen $a \in A_k$, akkor

$$a(pp_1 \ldots p_{k-1}p_kp_{k+1} \ldots p_n) =$$

$$= ((app_1 \ldots p_{k-1})p_k)(p_{k+1} \ldots p_n) = (ap_k)(p_{k+1} \ldots p_n) =$$

$$= ((ap_1 \ldots p_{k-1})p_k)(p_{k+1} \ldots p_n) = a(p_1 \ldots p_{k-1}p_kp_{k+1} \ldots p_n).$$

Ez azt jelenti, hogy

$$\rho_{\mathbf{A}}[p]\rho_{\mathbf{A}}[p_1 \ldots p_n] = \rho_{\mathbf{A}}[p_1 \ldots p_n],$$

azaz $\rho_{\mathbf{A}}[p_1 \ldots p_n]$ a karakterisztikus monoid egy jobb oldali zéruseleme.

Megfordítva, tegyük fel, hogy az $\mathbf{A} = (A, X, \delta)$ automata $X^*/\rho_{\mathbf{A}}$ karakterisztikus monoidjának $\rho_{\mathbf{A}}[p]$ jobb oldali zéruseleme. Definiáljuk az A állapothalmazon a ρ binér relációt a következő módon:

$$(a, b) \in \rho \iff ap = bp.$$

A ρ reláció nyilvánvalóan ekvivalencia. Mivel $(ap)p = a(pp) = ap$, ezért $ap \in \rho[a]$. De minden $x \in X$ bemenő jelre $(ax)p = a(xp) = ap$, azaz $ax \in \rho[a]$. Ez éppen azt jelenti, hogy minden $a \in A$ állapotra $(\rho[a], X, \delta)$ az $\mathbf{A}$ automata irányítható automata és $\mathbf{A}$ ezeknek direkt összege. □

A 28.3. Tételből könnyen adódik az alábbi két állítás:

28.4. Következmény
A-véges automata akkor és csak akkor irányítható automaták direkt összege, ha karakterisztikus monoidjának van jobb oldali zéruseleme.

Az 5. fejezetben megadtuk az összefüggő automata fogalmát. Az $\mathbf{A} = (A, X, \delta)$ automatát összefüggőnek neveztük, ha bármely $a, b \in A$ állapotpárhoz vannak olyan $p, q \in X^*$ bemenő szavak, amelyekre $ap = bq$ teljesül. Például az erősen összefüggő automaták összefüggőek. Minden irányítható automata is összefüggő.

28.5. Következmény
Összefüggő automata akkor és csak akkor irányítható, ha karakterisztikus monoidjának van jobb oldali zéruseleme.

28.6. Következmény
Összefüggő automata akkor és csak akkor irányítható csapdás automata, ha karakterisztikus monoidja zéruselemes.

Bizonyítás. Legyen az $\mathbf{A} = (A, X, \delta)$ összefüggő automata karakterisztikus monoidja zéruselemes és $\rho_{\mathbf{A}}[p]$ a zéruseleme. Mivel $\mathbf{A}$ összefüggő, ezért bármely $a, b \in A$ állapotpárhoz vannak olyan $q, r \in X^*$ bemenő szavak, amelyekre

$$c = ap = a(pq) = (ap)q = (bp)r = b(pr) = bp,$$

azaz $Ap = \{c\}$. Tehát $\mathbf{A}$ irányítható p-vel c-hez. De bármely $q \in X^*$ bemenő szóra

$$cq = (cp)q = c(pq) = cp = c,$$

vagyis c $\mathbf{A}$ csapdája.

Megfordítva, legyen $\mathbf{A}$ irányítható csapdás automata. Minden összefüggő csapdás automatának, így speciálisan irányítható csapdás automatának is egyetlen csapdája van. Legyen $\mathbf{A}$ csapdája c. Irányítható csapdás automatának egyetlen irányított állapota a csapdája. Tegyük fel, hogy $\mathbf{A}$ a $p \in X^*$ szóval irányítható c-hez. Akkor minden $a \in A$ állapotra és $q \in X^*$ bemenő szóra

$$a(qp) = (aq)p = c = ap, \quad a(pq) = (ap)q = cq = c = ap,$$

vagyis

$$\rho_{\mathbf{A}}[q]\rho_{\mathbf{A}}[p] = \rho_{\mathbf{A}}[p] = \rho_{\mathbf{A}}[p]\rho_{\mathbf{A}}[q].$$

Ez azt jelenti, hogy $\rho_{\mathbf{A}}[p]$ a karakterisztikus monoid zéruseleme. $\square$

Az $\mathbf{A} = (A, X, \delta)$ automatát *szimmetrikusan összefüggő*nek nevezzük, ha bármely $a, b \in A$ állapotpárhoz van olyan $p \in X^*$ bemenő szó, amelyre $ap = bp$. A definíció szerint minden irányítható automata szimmetrikusan összefüggő. A-véges automatákra az állítás megfordítható:

28.7. Tétel
Az A-véges $\mathbf{A} = (A, X, \delta)$ automata akkor és csak akkor szimmetrikusan összefüggő, ha irányítható.

Bizonyítás. Ha $\mathbf{A}$ irányítható, akkor az automata egy p irányító szava teljesíti a feltételt.

Megfordítva, tegyük fel, hogy $\mathbf{A}$ szimmetrikusan összefüggő. Legyen T az A állapothalmaz egy olyan maximális részhalmaza, amelyhez van olyan $p \in X^*$, hogy $|Tp| = 1$. Tegyük fel, hogy $T \neq A$. Ha $b \in A - T$, akkor van olyan $a \in T$, hogy $ap \neq bp$. A feltétel szerint van olyan $q \in X^*$, amelyre

$$a(pq) = (ap)q = (bp)q = b(pq).$$

Így $|(T \cup b)pq| = 1$ és $T \subset T \cup b$. Ez azonban lehetetlen, tehát $T = A$, azaz $\mathbf{A}$ irányítható automata. □

Már láttuk, hogy az $\mathbf{A} = (A, X, \delta)$ irányítható automata irányító szavainak $U(\mathbf{A})$ halmaza az X^* szabad monoid ideálja. Legyen

$$d(\mathbf{A}) = \min\{|p|; p \in U(\mathbf{A})\}, \tag{28.1}$$

azaz $d(\mathbf{A})$ legyen az $\mathbf{A}$ egy legrövidebb hosszúságú irányító szavának hossza. Jelölje $\mathcal{D}_n$ az n állapotú irányítható automaták osztályát. Legyen $\mathcal{K}$ olyan automataosztály, amelyre $\mathcal{D}_n \cap \mathcal{K} \neq \emptyset$. Továbbá legyen

$$d_{\mathcal{K}}(n) = \max\{d(\mathbf{A}); \mathbf{A} \in \mathcal{D}_n \cap \mathcal{K}\}. \tag{28.2}$$

Az nyilvánvaló, hogy $d_{\mathcal{K}}(1) = 0$. Ha $\mathcal{D}_n = \mathcal{K}$, akkor $d_{\mathcal{K}}(n)$ helyett egyszerűen a $d(n)$ jelölést használjuk. Jan Černý egy 1964-ben írt dolgozatában azt sejtette, hogy ha $n \in N_+$, akkor $d(n) = (n-1)^2$. Úgy is mondjuk, hogy a *Černý sejtés* igaz az n állapotú $\mathbf{A} = (A, X, \delta)$ irányítható automatára, ha $d(\mathbf{A}) \leq (n-1)^2$. A Černý sejtés az automaták algebrai elméletének egyik legrégebben megoldatlan problémája. (A Černý sejtést méltán nevezhetjük az automataelmélet Szent Gráljának.)

28.8. Tétel
Ha $2 \leq n$, akkor $(n-1)^2 \leq d(n) \leq 1 + (n-2)\binom{n}{2}$.

Bizonyítás. Először megadunk egy olyan n állapotú $\mathbf{A} = (A, X, \delta)$ irányítható automatát, amelyre $d(\mathbf{A}) = (n-1)^2$. Ebből kapjuk azt, hogy $(n-1)^2 \leq d(n)$.

Legyen $A = \{1, 2, \ldots, n\}$ $(2 \leq n)$, $X = \{x, y\}$,

$$\delta(i, x) = i + 1 \ (i = 1, 2, \ldots, n-1), \quad \delta(n, x) = 1,$$

$$\delta(i, y) = i \ (i = 1, 2, \ldots, n-2, n), \quad \delta(n-1, y) = n.$$

Legyen $p \in X^+$ egy legrövidebb irányító szó. Ha $n = 2$, akkor $p = y$, azaz $d(\mathbf{A}) = 1 = (2-1)^2$. Legyen $3 \leq n$ és $p = qx$ $(q \in X^*)$. Mivel p egy legrövidebb irányító szó, ezért $|Aq| \neq 1$. De x permutációjel, így $|Aq| = |Aqx| = |Ap|$, ami lehetetlen. Vagyis $p = qy$. Ebből következik, hogy $Aq = \{n-1, n\}$ és $q \in X^+$. De q utolsó betűje nem lehet y, mert nincs olyan állapot, amelyből az automata y hatására az $n-1$ állapotba menne át. Szükségképpen $q = q_1 x^{n-1}$, $Aq_1 = \{n, 1\}$ és $(q_1 \in X^+)$. Ebből következik, hogy $q_1 = r_1 y$, $Ar_1 = \{n-1, n, 1\}$ és ha $4 \leq |A|$, akkor $r_1 \in X^+$. Ugyanazt az eljárást folytatva, mint az előbb kapjuk, hogy

$$q_1 = q_2 x^{n-1} y, \quad Aq_2 = \{n, 1, 2\}, \quad q_2 = r_2 y.$$

Folytatva az eljárást, végül kapjuk, hogy

$$p = y(x^{n-1}y)^{n-2} = (yx^{n-1})^{n-2} y,$$

azaz $|p| = (n-1)^2$.

Most megmutatjuk, hogy $d(n) \leq 1 + (n-2)\binom{n}{2}$. Az nyilvánvaló, hogy az állítás $n = 2$-re igaz. Tegyük fel, hogy $3 \leq n$. Legyen $\mathbf{A} = (A, X, \delta)$ n állapotú irányítható automata. Mivel $\mathbf{A}$ irányítható automata, létezik legalább egy $x \in X$ nem permutációjel. Ez azt jelenti, hogy $|Ax| < |A|$. Legyenek $a_1, b_1 \in Ax$ és $a_1 \neq b_1$. Ezenkívül legyen $q_1 \in X^*$ egy legrövidebb hosszúságú szó, amelyre $a_1 q_1 = b_1 q_1$. Tegyük fel, hogy $\binom{n}{2} + 1 \leq |q_1|$. Akkor vannak olyan $r_1, t_1 \in X^*$ és $v_1 \in X^+$, hogy $r_1 t_1 \in X^+$, $q_1 = r_1 v_1 t_1$, $a_1 r_1 = a_1 r_1 v_1$ és $b_1 r_1 = b_1 r_1 v_1$. Ebből következik, hogy $a_1 r_1 t_1 = b_1 r_1 t_1$. Ez ellentmond q_1 választásának. Innen $|q_1| \leq \binom{n}{2}$. Ezt az eljárást Ax helyett Axq_1-gyel megismételve kapjuk, hogy $|Axq_1q_2| < |Axq_1|$ és $|q_2| \leq \binom{n}{2}$. Folytatva az eljárást, $k \leq n-2$ lépésben kapunk egy olyan $p = xq_1q_2 \ldots q_k$ irányító szót, amelyre $|p| \leq 1 + (n-2)\binom{n}{2}$. □

Megjegyezzük, hogy $n \geq 4$ esetben az irodalomban az előbbi tételben szereplő felső korlátnál kisebb $\frac{n^3-n}{6}$ felső korlát is ismert. A bizonyítás bonyolultsága miatt ezt azonban itt nem mutatjuk meg.

A (28.1) és (28.2) definíciókban szorítkozzunk csak kommutatív irányítható automatákra és $d(n)$ helyett használjuk a $d_{kom}(n)$ jelölést.

28.9. TÉTEL
Ha $n \in N_+$, akkor $d_{kom}(n) = n - 1$.

Bizonyítás. Ha $n = 1$, akkor nyilvánvalóan igaz az állítás. Legyen $\mathbf{A} = (A, X, \delta)$ $2 \le n$ állapotú kommutatív irányítható automata. Tegyük fel, hogy $p = x_1x_2 \dots x_k$ $(x_1, x_2, \dots, x_k \in X)$ egy legrövidebb hosszúságú irányító szó. Mivel $\mathbf{A}$ kommutatív, ezért

$$A \supseteq Ax_1 \supseteq Ax_1x_2 \supseteq \cdots \supseteq Ap.$$

Nem nehéz megmutatni, hogy minden tartalmazás valódi. Ha ugyanis

$$Ax_1x_2 \dots x_{i-1} = Ax_1x_2 \dots x_{i-1}x_i$$

valamilyen $1 \le i \le k$ esetén $(x_0 = e)$, akkor

$$x_1x_2 \dots x_{i-1}x_{i+1} \dots x_k$$

is irányító szó, ami p választása miatt lehetetlen. Ebből pedig következik, hogy $k \le n - 1$.

Most megadunk egy $\mathbf{A} = (A, X, \delta)$ n állapotú kommutatív irányítható automatát, amelyre $d_{kom}(n) = n - 1$. Legyen $A = \{1, 2, \dots, n\}$, $X = \{x\}$ és

$$\delta(i, x) = i + 1 \ (i = 1, 2, \dots, n - 1), \quad \delta(n, x) = n.$$

Az $\mathbf{A}$ automata irányítható csapdás automata, amelynek egyetlen irányított állapota az n csapda. A legrövidebb irányító szó pedig x^{n-1}. □

Az 5.1. Lemma szerint A-véges csapdás automata akkor és csak akkor összefüggő, ha irányítható. Nem nehéz belátni, hogy minden kommutatív irányítható automata csapdás. A 28.1. Lemma segítségével kapjuk, hogy az $\mathbf{A} = (A, X, \delta)$ irányítható automatának $c \in A$ akkor és csak akkor csapdája, ha c az $\mathbf{A}$ automata egyetlen irányított állapota. Adjuk meg a (28.1) és a (28.2) definiciókat csak irányítható csapdás automatákra és használjuk $d(n)$ helyett a $d_{cs}(n)$ jelölést.

28.10. TÉTEL
Ha $n \in N_+$, akkor $d_{cs}(n) = \binom{n}{2}$.

Bizonyítás. Mivel $d_{cs}(1) = 0$, ezért az állítás $n = 1$-re igaz. Így feltehetjük, hogy $2 \le n$. Legyen $\mathbf{A} = (A, X, \delta)$ n állapotú irányítható csapdás automata és $c \in A$ az $\mathbf{A}$ automata csapdája. Már említettük, hogy ebben az esetben c az $\mathbf{A}$ automata egyetlen irányított állapota.

Bármely $a \in A$ állapotra jelöljön $p_a \in X^*$ egy legrövidebb hosszúságú szót, amelyre $ap_a = c$. Legyen $b \in A$ olyan állapot, amelyre minden $a \in A$ állapot esetén $|p_a| \leq |p_b|$. Nyilvánvalóan $1 \leq |p_b| \leq n-1$. Ha

$$p_b = x_1 x_2 \dots x_{n-k} \quad (1 \leq k \leq n-1),$$

akkor a

$$b,\ bx_1,\ bx_1x_2,\ \dots,\ bx_1x_2\dots x_{n-k-1}$$

állapotok mind különbözőek és nem egyenlők c-vel. Ha

$$b,\ bx_1,\ bx_1x_2,\ \dots,\ bx_1x_2\dots x_{n-k-1} \notin Ax_{n-k},$$

akkor $|Ax_{n-k}| \leq k$. Tegyük fel, hogy

$$bx_1x_2\dots x_{n-k-i} \in Ax_{n-k}, \quad 1 \leq i \leq n-k,\ (x_0 = e),$$

továbbá, ha $1 < i$, akkor

$$bx_1x_2\dots x_{n-k-i+1} \notin Ax_{n-k}.$$

Ebben az esetben

$$|Ax_{n-k}x_{n-k-i+1}\dots x_{n-k}| \leq k+i-1.$$

Ezt folytassuk az Ax_{n-k} halmaz helyett $Ax_{n-k}x_{n-k-i+1}\dots x_{n-k}$ halmazzal, a $b, bx_1, bx_1x_2, \dots, bx_1x_2\dots x_{n-k-1}$ állapotok helyett pedig a

$$b,\ bx_1,\ bx_1x_2,\ \dots, bx_1x_2\ \dots x_{n-k-i}$$

állapotokkal. Legfeljebb $n-k$ lépésben kapjuk, hogy van olyan $q \in X^+$ szó, amelyre

$$|Aq| \leq k, \quad |q| \leq \frac{(n-k)(1+n-k)}{2}.$$

Mivel $c \in Aq$, így vannak olyan $q_1, \dots, q_{k-1} \in X^*$ szavak, hogy $|q_1|, \dots, |q_{k-1}| \leq n-k$ és

$$Aqq_1\dots q_{k-1} = c,$$

azaz

$$|qq_1\dots q_{k-1}| \leq \frac{(n-k)(1+n-k)}{2} + (n-k)(k-1) =$$

$$= \frac{(n-1)n}{2} + \frac{k(1-k)}{2} \leq \frac{(n-1)n}{2}.$$

Amiből következik, hogy

$$d_{cs}(n) \leq \frac{(n-1)n}{2}.$$

Legyenek

$$A = \{0, 1, 2, \ldots, n-1\}, \quad X = \{x_1, x_2, \ldots x_{n-1}\} \quad (2 \leq n).$$

Továbbá

$$\delta(i, x_i) = i - 1, \quad \delta(0, x_i) = 0 \quad (i = 1, 2, \ldots, n-1),$$

$$\delta(i, x_{i+1}) = i + 1 \quad (i = 1, 2, \ldots, n-2),$$
$$\delta(i, x_s) = i \quad (i = 1, 2, \ldots, n-2, \ s \neq i, i+1),$$
$$\delta(n-1, x_s) = n - 1 \quad (s \neq n-1).$$

Nyilvánvaló, hogy 0 az $\mathbf{A} = (A, X, \delta)$ automata csapdája. Belátható, hogy $r = x_i \ldots x_2 x_1$ legrövidebb hosszúságú szó, amelyre

$$\{0, i, \ldots, n-1\}r = \{0, i+1, \ldots, n-1\} \quad (1 \leq i \leq n-1).$$

Ez alapján meggyőződhetünk arról, hogy

$$p = x_1 x_2 x_1 x_3 x_2 x_1 \ldots x_{n-2} \ldots x_2 x_1 x_{n-1} x_{n-2} \ldots x_2 x_1$$

legrövidebb hosszúságú irányító szó. De $|p| = \frac{(n-1)n}{2}$, ezért

$$d_{cs}(n) = \frac{(n-1)n}{2} \quad (n \in N_+).$$

□

28.11. Következmény
A Černý sejtés akkor és csak akkor igaz, ha erősen összefüggő irányítható automatákra igaz.

Bizonyítás. Ha a Cerný sejtés igaz, akkor természetesen erősen összefüggő irányítható automatákra is igaz.

Megfordítva tegyük fel, hogy a Černý sejtés erősen összefüggő irányítható automatákra igaz. Legyen $\mathbf{A} = (A, X, \delta)$ n állapotú irányítható automata. Triviális automatákra nyilvánvalóan igaz a sejtés, ezért feltehető, hogy $2 \leq n$. Legyen $D(\mathbf{A})$ az $\mathbf{A}$ automata irányított állapotainak halmaza. A 28.1. Lemma szerint $\mathbf{D}(\mathbf{A}) = (D(\mathbf{A}), X, \delta)$ az $\mathbf{A}$ automata egyetlen (nemüres) erősen összefüggő részautomatája. Az $\mathbf{A}/\mathbf{D}(\mathbf{A})$ Rees-faktor irányítható csapdás automata és csapdája $D(\mathbf{A})$. Ha $|D(\mathbf{A})| = k$ $(1 \leq k \leq n)$ és $p \in X^+$ egy legrövidebb hosszúságú irányító szó a Rees-faktorban, akkor $Ap \subseteq D(\mathbf{A})$ és a 28.10. Tétel szerint

$$|p| \leq \frac{(n-k+1)(n-k)}{2}.$$

Legyen a $\mathbf{D}(\mathbf{A})$ automatában $q \in X^+$ egy legrövidebb irányító szó. A feltétel szerint $|q| \leq (k-1)^2$. Mivel $Ap \subseteq D(\mathbf{A})$, ezért

$$|Apq| = |(Ap)q| \leq |D(\mathbf{A})q| = 1,$$

vagyis pq az $\mathbf{A}$ automata egy irányító szava. Ha $1 \leq k \leq n$, akkor

$$2(n-1)^2-(n-k+1)(n-k) = 2(n-1)^2-((n-1)-(k-2))((n-1)-(k-1)) =$$

$$= (n-1)^2+(n-1)(k-1)+(n-k)(k-2) \geq 2(k-1)^2,$$

ezért

$$|pq| \leq \frac{(n-k+1)(n-k)}{2} + (k-1)^2 \leq (n-1)^2.$$

□

A 28.1. Lemma alapján könnyen bizonyítható a következő állítás is:

28.12. Tétel
Egy automata akkor és csak akkor irányítható, ha erősen összefüggő irányítható automatának irányítható (csapdás) automatával való bővítése.

28.13. Tétel
Az $\mathbf{A} = (A, X, \delta)$ irányítható automata bármely endomorfizmusának $D(\mathbf{A})$-ra való szűkítése $D(\mathbf{A})$ identikus leképezése. Ha $\mathbf{A}$ erősen összefüggő irányítható automata, akkor $E(\mathbf{A}) = \iota_A$.

Bizonyítás. Legyen $\alpha \in E(\mathbf{A})$ tetszőleges endomorfizmus. Ha a $p \in X^*$ irányító szó az $\mathbf{A}$ automatát az $a \in D(\mathbf{A})$ állapothoz irányítja, akkor

$$a = \alpha(a)p = \alpha(ap) = \alpha(a).$$

A 22.2. és 28.1. Lemmák szerint $\alpha|D(\mathbf{A}) = \iota_{D(\mathbf{A})}$. □

28.14. Következmény
Ha az $\mathbf{A} = (A, X, \delta)$ irányítható automatára

$$E'(\mathbf{A}) = \{\alpha \in E(\mathbf{A}); \alpha(A) = D(\mathbf{A}\} \neq \emptyset,$$

akkor $E'(\mathbf{A})$ az $E(\mathbf{A})$ endomorfizmusfélcsoport jobb zéró ideálja.

Bizonyítás. Ha $\alpha \in E'(\mathbf{A})$ és $\beta \in E(\mathbf{A})$, akkor a 28.13. Tétel alapján tetszőleges $a \in A$ állapotra kapjuk, hogy

$$\beta\alpha(a) = \beta(\alpha(a)) = \alpha(a),$$

vagyis $\beta\alpha = \alpha$, tehát α jobb oldali zéruselem $E(\mathbf{A})$-ban.

Másrészt, $\alpha\beta(a) = \alpha(\beta(a)) \in D(\mathbf{A})$, azaz szintén a 28.13. Tétel szerint $\alpha\beta(A) = D(\mathbf{A})$, tehát $\alpha\beta \in E'(\mathbf{A})$. Ez azt jelenti, hogy $E'(\mathbf{A})$ az $E(\mathbf{A})$ endomorfizmusfélcsoport jobb zéró ideálja. □

Feladatok

28.1. Bármely $\mathbf{A} = (A, X, \delta)$ irányítható automatára $E(\mathbf{A})$ homomorf módon beágyazható $E(\mathbf{A}/\mathbf{D}(\mathbf{A}))$-ba. (→ Megoldás)

28.2. Az $\mathbf{A}$ automata általánosított hatványautomatája akkor és csak akkor erősen összefüggő irányítható automata, ha $\mathbf{A}$ is erősen összefüggő irányítható automata. (→ Megoldás)

28.3. Ha a Černý sejtés igaz az $\mathbf{A} = (A, X, \delta)$ A-véges irányítható automata egy $\mathbf{B} = (B, X, \delta)$ részautomatájára, akkor igaz az $\mathbf{A}$ automatára is. (→ Megoldás)

28.4. Ha a Černý sejtés igaz az $\mathbf{A}_i = (A_i, X, \delta_i)$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ irányítható automatákra, akkor az $\mathbf{A}_1 \times \mathbf{A}_2 \times \cdots \times \mathbf{A}_n$ direkt szorzatra is igaz. (→ Megoldás)

28.5. Legyen φ az $\mathbf{A} = (A, X, \delta)$ A-véges erősen összefüggő irányítható automata homomorf leképezése a nemtriviális $\mathbf{B} = (B, X, \delta')$ automatára, amelynek van olyan $b \in B$ állapota, hogy $|\varphi^{-1}(b)| \leq 2$. Ha a Černý sejtés igaz $\mathbf{B}$-re, akkor igaz $\mathbf{A}$-ra is. (→ Megoldás)

29. Nilpotens és definit automaták

Ebben a fejezetben az irányítható automaták két nevezetes részosztályát, a nilpotens és a definit automatákat vizsgáljuk. Az $\mathbf{A} = (A, X, \delta)$ automatát k-*nilpotens*nek nevezzük, ha van olyan $k \in N$ és $c \in A$, hogy

$$\forall (a \in A, p \in X^k)\ (ap = c). \tag{29.1}$$

Ha az $\mathbf{A}$ automata k-nilpotens, akkor nyilvánvalóan $(k+1)$-nilpotens is. Az $\mathbf{A}$ automatát *nilpotens*nek mondjuk, ha k-nilpotens valamilyen $k \in N$ számra. A legkisebb ilyen k számot $\mathbf{A}$ *nilpotenciafoká*nak nevezzük. Azt is mondjuk, hogy az $\mathbf{A}$ automata *k-adfokban nilpotens*. Nem nehéz belátni, hogy $\mathbf{A}$ irányítható csapdás automata és c az automata csapdája.

A nulladfokban nilpotens automaták a triviális automaták. A kétállapotú nilpotens automaták elsőfokban nilpotensek. Az is világos, hogy a legfeljebb másodfokban nilpotens automaták kommutatívak.

Szükségünk lesz a nilpotencia félcsoportelméleti definíciójára is. Legyen S zéruselemes félcsoport és 0 S zéruseleme. Az S félcsoportot *nilpotens*nek nevezzük, ha van olyan $k \in N$, amelyre $S^k = 0$. A legkisebb ilyen k számot S *nilpotenciafoká*nak, S-et pedig *k-adfokban nilpotens*nek nevezzük.

29.1. Tétel

Az $\mathbf{A}$ automata karakterisztikus félcsoportja akkor és csak akkor nilpotens, ha $\mathbf{A}$ valamely $\mathbf{A}_i$ $(i \in I)$ nilpotens automaták direkt összege és van olyan $k \in N$, hogy az $\mathbf{A}_i$ $(i \in I)$ automaták nilpotenciafoka legfeljebb k.

Bizonyítás. Tegyük fel először, hogy az $\mathbf{A} = (A, X, \delta)$ automata

$$\mathbf{A}_i = (A_i, X, \delta_i) \quad (i \in I)$$

nilpotens automaták direkt összege. Legyen

$$k = \max\{k_i;\ i \in I\},$$

ahol k_i az $\mathbf{A}_i$ automata nilpotenciafoka. Vegyük fel (6.2) szerint az $S(\mathbf{A})$ karakterisztikus félcsoportot $X^+/\rho_{\mathbf{A}}$ alakban. Belátható, hogy $S(\mathbf{A})$ olyan k-adfokban nilpotens félcsoport, amelynek zéruseleme a legalább k hosszúságú bemenő szavakból álló $\rho_{\mathbf{A}}$-osztály.

Megfordítva, tegyük fel, hogy az $\mathbf{A} = (A, X, \delta)$ automata $S(\mathbf{A}) = X^+/\rho_{\mathbf{A}}$ karakterisztikus félcsoportja k-adfokban nilpotens. A legalább k hosszúságú bemenő szavak egy $\rho_{\mathbf{A}}$-osztályt alkotnak, amely a karakterisztikus félcsoport zéruseleme. Jelölje ezt az osztályt C_0. Legyen p_0 a C_0 osztály tetszőleges, de rögzített eleme.

Minden $a \in A$ állapotra definiáljuk az

$$A_a = \{b \in A;\ (\exists q \in C_0)(bq = ap_0)\}$$

halmazokat. Világos, hogy minden $a \in A$ állapotra $a \in A_a$. Ha

$$d \in A_a \cap A_b \quad (a, b \in A),$$

akkor vannak olyan $p, q \in C_0$ szavak, hogy $dp = ap_0$ és $dq = bp_0$. Így

$$ap_0 = dp = dq = bp_0,$$

azaz $A_a = A_b$. Ez azt jelenti, hogy A_a $(a \in A)$ az A állapothalmaz egy osztályozása.

Világos továbbá az is, hogy minden $a \in A$ állapotra $\mathbf{A}_a = (A_a, X, \delta)$ az $\mathbf{A}$ automata részautomatája, vagyis $\mathbf{A}$ ezek direkt összege. Az $\mathbf{A}_a$ $(a \in A)$ definíciójából látható, hogy legfeljeb k-adfokban nilpotens automata és csapdája ap_0. □

29.2. Következmény
Ha egy automata k-adfokban nilpotens, akkor karakterisztikus félcsoportja is k-adfokban nilpotens. Megfordítva, ha egy ciklikus automata karakterisztikus félcsoportja k-adfokban nilpotens, akkor az automata is k-adfokban nilpotens.

Ha egy S monoid egységelemtől különböző elemei S-nek egy S' részfélcsoportját alkotják, akkor azt mondjuk, hogy S *az* S'*-ből előállítható egységelem külső adjunkciójával.*

29.3. Tétel
Ha egy ciklikus automata k-adfokban nilpotens $(k \geq 2)$, akkor endomorfizmusfélcsoportja előállítható egy legfeljebb k-adfokban nilpotens félcsoportból egységelem külső adjunkciójával.

Bizonyítás. Legyen az $\mathbf{A} = (A, X, \delta)$ ciklikus automata k-adfokban nilpotens. Jelölje a_0 az automata egy generátorelemét és c a csapdáját. Mivel $k \geq 2$, ezért $a_0 \neq c$. Legyen $\alpha \in E(\mathbf{A})$. Mivel $D(\mathbf{A}) = \{c\}$, ezért a 28.13. Tétel szerint $\alpha(c) = c$. (Az állítás a 28.13. Tételre való hivatkozás nélkül is egyszerűen belátható.) Már a 24. fejezetben láttuk, hogy az $\alpha_c : A \to A$ leképezés, amelyre minden $a \in A$ esetén $\alpha_c(a) = c$ teljesül, az $\mathbf{A}$ automata egy endomorfizmusa. Bármely $\alpha \in E(\mathbf{A})$ és $a \in A$ esetén

$$\alpha\alpha_c(a) = \alpha(c) = c = \alpha_c\alpha(a),$$

azaz

$$\alpha\alpha_c = \alpha_c = \alpha_c\alpha,$$

vagyis α_c az $E(\mathbf{A})$ endomorfizmusfélcsoport zéruseleme. Ha $\alpha \in E(\mathbf{A})$ és $\alpha(a_0) = a_0$, akkor minden $p \in X^*$ bemenő szóra

$$\alpha(a_0p) = \alpha(a_0)p = a_0p.$$

Mivel $\mathbf{A}$ ciklikus és a_0 egy generátoreleme, ezért $\alpha = \iota_A$.

Ha $\alpha, \beta \in E(\mathbf{A}) - \{\iota_A\}$, akkor $\alpha(a_0) \neq a_0$ és $\beta(a_0) \neq a_0$, ezért van olyan $p, q \in X^+$ bemenő szavak, hogy $\alpha(a_0) = a_0 p$ és $\beta(a_0) = a_0 q$. Így

$$\alpha\beta(a_0) = \alpha(a_0 q) = \alpha(a_0)q = a_0 pq.$$

Ebből következik, hogy $a_0 pq \neq a_0$, azaz $\alpha\beta(a_0) \neq a_0$. (Ha ugyanis $a_0 pq = a_0$ lenne, akkor $c = a_0(pq)^k = a_0$, ami lehetetlen.) Ez viszont azt jelenti, hogy $\alpha\beta \in E(\mathbf{A}) - \{\iota_A\}$, vagyis $E(\mathbf{A}) - \{\iota_A\}$ az $E(\mathbf{A})$ endomorfizmusfélcsoport részfélcsoportja.

Ha $\alpha \in E(\mathbf{A})$ olyan endomorfizmus, amelyre $\alpha(a_0) = c$, akkor minden $p \in X^*$ esetén

$$\alpha(a_0 p) = \alpha(a_0)p = cp = c,$$

vagyis $\alpha = \alpha_c$. Ezt a tényt használjuk fel a tétel bizonyításának befejezéséhez. Ha $\alpha_i \in E(\mathbf{A}) - \{\iota_A\}$, akkor vannak olyan $p_i \in X^+$, amelyekre $\alpha_i(a_0) = a_0 p_i$ $(i = 1, 2, \ldots, k)$. Amiből

$$\alpha_1\alpha_2 \ldots \alpha_k(a_0) = a_0 p_1 p_2 \ldots p_k = c,$$

vagyis

$$\alpha_1\alpha_2 \ldots \alpha_k = \alpha_c.$$

Ez viszont azt jelenti, hogy $E(\mathbf{A}) - \{\iota_A\}$ legfeljebb k-adfokban nilpotens félcsoport. $\square$

Az $\mathbf{A} = (A, X, \delta)$ automatát k-*definit*nek nevezzük, ha van olyan $k \in N$, hogy

$$\forall(p \in X^k)\ (|Ap| = 1) \tag{29.2}$$

implikáció. Nem nehéz belátni, hogy ha $\mathbf{A}$ k-definit, akkor $(k+1)$-definit is. Az $\mathbf{A}$ automatát *definit*nek mondjuk, ha k-definit valamilyen $k \in N$ számra. A legkisebb ilyen k számot $\mathbf{A}$ *definitségi foká*nak nevezzük és $df(\mathbf{A})$-val jelöljük. Azt is mondjuk, hogy az $\mathbf{A}$ automata *k-adfokban definit.* Egy $\mathbf{A}$ automata tehát pontosan akkor k-adfokban definit, ha tetszőleges legalább k hosszúságú bemenő szó hatására $\mathbf{A}$ minden állapotból egy csak ettől a szótól függő állapotba megy át és van olyan $k-1$ hosszúságú bemenő szó, valamint $\mathbf{A}$-nak legalább két olyan állapota, hogy e két állapotból e szó hatására egymástól különböző állapotokba megy át. Szemléletesen azt mondhatjuk, hogy ha egy $\mathbf{A} = (A, X, \delta)$ automata k-adfokban definit, akkor egy legalább k hosszúságú $p \in X^*$ szó hatására eljutva az ap állapotba, „nem emlékszik" a kiindulási $a \in A$ állapotra. Ezért a definit automatákat *véges memóriájú automaták*nak is nevezzük. A definit automata fogalmát már a 4. fejezetben bevezettük. Nyilvánvaló, hogy az ott megadott definíció ekvivalens a most megadott definícióval.

Megemlítjük, hogy a triviális automaták a nulladfokban definit automaták. Az 1. fejezetben definiált legalább kétállapotú teljes beállító automaták az elsőfokban definit automaták.

Minden k-adfokban nilpotens automata k-adfokban definit és minden k-adfokban definit automata olyan irányítható automata, amely bármely állapotból minden legalább k hosszúságú szóval egy irányított állapotba jut. A 28.1. Lemmát felhasználva, nem nehéz bebizonyítani az alábbi állítást.

29.4. Tétel
Ha az $\mathbf{A} = (A, X, \delta)$ automata k-adfokban definit, akkor az $\mathbf{A}/\mathbf{D}(\mathbf{A})$ Rees-faktor legfeljebb k-adfokban nilpotens.

Végül megmutatjuk a következő egyszerű eredményt:

29.5. Tétel
Bármely n állapotú definit [nilpotens] automata definitségi foka [nilpotencia-foka] legfeljebb $n-1$. Az általános esetben a felső korlát nem csökkenthető.

Bizonyítás. Legyen $\mathbf{A} = (A, X, \delta)$ tetszőleges k-adfokban definit [nilpotens] automata. Mivel a triviális automaták nulladfokban definitek [nilpotensek], ezért feltehetjük, hogy $2 \leq n$. Tekintsük a (4.8) feltétellel definiált τ_l relációkat. Mivel $\mathbf{A}$ k-adfokban definit [nilpotens], ezért

$$\iota_A \subset \tau_1 \subset \cdots \subset \tau_{k-1} \subset \tau_k = \omega_A.$$

Ebből nyilvánvalóan adódik, hogy $k \leq n-1$.

Annak belátásához, hogy általában a felső korlát nem csökkenthető, tekintsük a 28.9. Tétel bizonyításában is szereplő $\mathbf{A} = (A, X, \delta)$ automatát, ahol $A = \{1, 2, \dots n\}$, $X = \{x\}$ és

$$\delta(i, x) = i + 1 \quad (i = 1, 2, \dots, n-1), \quad \delta(n, x) = n.$$

Nyilvánvalóan $\mathbf{A}$ $(n-1)$-edfokban nilpotens [definit]. □

(A 28.1) és (28.2) definíciókban definit [nilpotens] automatákra szorítkozva és $d(n)$ helyett a $d_{def}(n)$ $[d_{nil}(n)]$ jelölést használva, igaz a

29.6. Következmény
Ha $n \in N_+$, akkor $d_{def}(n) = d_{nil}(n) = n - 1$.

Feladatok

29.1. Az $\mathbf{A} = (A, X, Y, \delta, \lambda)$ Mealy automata $\mathbf{A}_Y$ váza (l. (1.3)) akkor és csak akkor nilpotens, ha $\mathbf{A}$ olyan nilpotens automata, amelynek $c \in A$ a csapdája és $|\{\lambda(c, x);\ x \in X\}| = 1$. (Emlékeztetünk arra, hogy Mealy automatát akkor nevezünk adott típusúnak, ha vetülete ugyanolyan típusú.) (→ Megoldás)

29.2. Egy Mealy automata váza akkor és csak akkor definit, ha a Mealy automata is definit. (→ Megoldás)

30. Összefüggő automaták

A fejezetben tovább vizsgáljuk az 5. fejezetben definiált összefüggő automatákat. Az $\mathbf{A} = (A, X, \delta)$ automata A állapothalmazának B részhalmazát *összefüggő*nek nevezzük, ha bármely $a, b \in B$ állapotokhoz vannak olyan $p, q \in X^*$ bemenő szavak, amelyekre $ap = bq$ teljesül. Összefüggő halmaz minden részhalmaza összefüggő. A B összefüggő részhalmazt *maximális*nak nevezzük, ha $\mathbf{A}$-nak nincs olyan összefüggő részhalmaza, amelynek B valódi része. Azt mondjuk, hogy az $\mathbf{A} = (A, X, \delta)$ automata $\mathbf{B} = (B, X, \delta)$ részautomatája *összefüggő*, ha az állapothalmaza összefüggő. Végül a $\mathbf{B}$ összefüggő részautomatát *maximális*nak nevezzük, ha $\mathbf{A}$-nak nincs olyan összefüggő részautomatája, amelynek $\mathbf{B}$ valódi részautomatája. Ha $\mathbf{A}$ összefüggő automata, akkor az A állapothalmaz egyetlen maximális összefüggő részhalmaza. Az 5. fejezetben azt is megjegyeztük, hogy egy összefüggő automata legfeljebb egycsapdás és minden részautomatája összefüggő. A definícióból látható, hogy minden erősen összefüggő és minden irányítható automata összefüggő. Nyilvánvalóan igaz a

30.1. Lemma
Egy automata akkor és csak akkor összefüggő, ha bármely két nemüres részautomatájának közös része sem üres.

30.2. Lemma
Bármely automata minden összefüggő részhalmaza [részautomatája] részhalmaza [részautomatája] az automata egy maximális összefüggő részhalmazának [részautomatájának].

Bizonyítás. Legyen B az $\mathbf{A}$ automata tetszőleges összefüggő részhalmaza és $\mathcal{B}$ a B-t tartalmazó összefüggő részhalmazok halmaza. A $\mathcal{B}$ halmaz a halmazelméleti tartalmazásra részbenrendezett halmaz. Összefüggő részhalmazok bármely láncának egyesítése szintén összefüggő részhalmaz, ezért a Zorn lemma szerint $\mathcal{B}$-ben van maximális elem, azaz van olyan maximális összefüggő részhalmaz, amely tartalmazza B-t.

Felhasználva (2.3)-at és (2.4)-et összefüggő részautomatákra a bizonyítás ugyanígy végezhető el. □

30.3. Lemma
Ha B az $\mathbf{A} = (A, X, \delta)$ automata maximális összefüggő részhalmaza, akkor

$$ap \in B \ (a \in A, p \in X^*) \quad \Longrightarrow \quad a \in B. \tag{30.1}$$

Bizonyítás. Tegyük fel, hogy az $a \in A$ állapotra és a $p \in X^*$ bemenő szóra $ap \in B$. Mivel B az $\mathbf{A}$ automata összefüggő részhalmaza, ezért bármely $b \in B$ állapothoz vannak olyan $q, r \in X^*$ bemenő szavak, hogy $a(pq) = (ap)q = br$. Ez azt jelenti, hogy $B \cup \{a\}$ is összefüggő részhalmaza $\mathbf{A}$-nak. De B maximális összefüggő részhalmaz, ezért $a \in B$. □

Az eddigiek alapján nem nehéz belátni a következő lemmát sem:

30.4. Lemma
Ha $\mathbf{A}_1$ és $\mathbf{A}_2$ egy összefüggő $\mathbf{A}$ automata részautomatái, akkor az $\mathbf{A}$ automata $\mathbf{A}_1 \cap \mathbf{A}_2$ részautomatája is összefüggő. Továbbá $\mathbf{A}_1 \cup \mathbf{A}_2$ az $\mathbf{A}$ automatának akkor és csak akkor összefüggő részautomatája, ha $\mathbf{A}_1 \cap \mathbf{A}_2 \neq \emptyset$. Ha pedig $\mathbf{A}_1$ és $\mathbf{A}_2$ különböző maximális összefüggő részautomaták, akkor $\mathbf{A}_1 \cap \mathbf{A}_2 = \emptyset$.

30.5. Lemma
Ha az $\mathbf{A}' = (A', X, \delta)$ automata az $\mathbf{A} = (A, X, \delta)$ automata nemüres összefüggő részautomatája, akkor $\mathbf{A}$-nak egyetlen olyan $\mathbf{B} = (B, X, \delta)$ maximális összefüggő részautomatája és C maximális összefüggő részhalmaza van, amelyre $A' \subseteq B \subseteq C$.

Bizonyítás. Legyen $\mathbf{A}' = (A', X, \delta)$ az $\mathbf{A} = (A, X, \delta)$ automata összefüggő részautomatája, akkor a 30.2. Lemma szerint $\mathbf{A}$-nak van olyan $\mathbf{B} = (B, X, \delta)$ maximális összefüggő részautomatája, hogy $A' \subseteq B$. Szintén a 30.2. Lemma szerint $\mathbf{A}$-nak van olyan C maximális összefüggő részhalmaza, hogy $B \subseteq C$. A 30.4. Lemma szerint egyetlen ilyen $\mathbf{B}$ automata van. Legyen C' az $\mathbf{A}$ maximális összefüggő részhalmaza és $B \subseteq C'$. Legyen $d \in C'$ és $b \in B$. Mivel $b \in C'$, ezért vannak olyan $p, q \in X^*$, amelyekre $c'p = bq$. De $bq \in B \subseteq C$, ezért a 30.3. Lemma szerint $d \in C$, vagyis $C' \subseteq C$. De C' maximális összefüggő részhalmaz, így $C' = C$. □

30.6. Lemma
Ha $\{B_j; j \in J\}$ az $\mathbf{A} = (A, X, \delta)$ automata maximális összefüggő részhalmazainak halmaza és $I \subseteq J$, akkor

$$B_I = A - (\cup_{i \in I} B_i) = (\cup_{j \in J} B_j) - (\cup_{i \in I} B_i) \tag{30.2}$$

$\mathbf{A}$ egy részautomatájának állapothalmaza.

Az $\mathbf{A}$ automata minden $\mathbf{B} = (B, X, \delta)$ részautomatájához egyetlen olyan $I \subseteq J$ indexhalmaz van, amelyre $B \subseteq B_I$ és

$$K \not\subseteq I \Longrightarrow B \not\subseteq B_K \quad (K \subset J).$$

Bizonyítás. Mivel $A = \cup_{j \in J} B_j$, ezért

$$A - (\cup_{i \in I} B_i) = (\cup_{j \in J} B_j) - (\cup_{i \in I} B_i).$$

Ha $A - (\cup_{i \in I} B_i) = \emptyset$, akkor ez az üres automata állapothalmaza. Tegyük fel, hogy $A - (\cup_{i \in I} B_i) \neq \emptyset$. Legyenek $a \in A - (\cup_{i \in I} B_i)$ és $x \in X$. Ha $\delta(a, x) \in \cup_{i \in I} B_i$, akkor valamely $i \in I$ indexre $\delta(a, x) \in B_i$. A 30.3. Lemma szerint $a \in B_i$. Ez azonban lehetetlen, így $\delta(a, x) \in A - (\cup_{i \in I} B_i)$, vagyis $A - (\cup_{i \in I} B_i)$ az $\mathbf{A}$ automata egy részautomatájának állapothalmaza.

Ha $\mathbf{B} = (B, X, \delta)$ az $\mathbf{A}$ automata egy nemüres részautomatája és

$$I = \{j \in J; B_j \cap B = \emptyset\},$$

akkor $B \subseteq B_I$. Nyilvánvaló, hogy ha $K \not\subseteq I$, akkor $B \not\subseteq B_K$. □

30.7. Következmény
Tetszőleges $\mathbf{A}$ automata maximális összefüggő részautomatáinak állapothalmazai a nemüres

$$B'_k = A - (\cup_{j \in J - \{k\}} B_j) = B_k - (\cup_{j \in J - \{k\}} B_j) \quad (k \in J) \tag{30.3}$$

halmazok.

Bizonyítás. A 30.6. Lemma szerint B'_k $(k \in J)$ az $\mathbf{A}$ automata egy részautomatájának állapothalmaza. Mivel $B'_k \subseteq B_k$ és összefüggő (halmaz minden részhalmaza összefüggő, ezért B'_k $(k \in J)$ egy összefüggő részautomata állapothalmaza. A 30.5. Lemma szerint van az $\mathbf{A}$ automatának olyan maximális összefüggő részautomatája, amelynek B állapothalmaza tartalmazza B'_k-t. Ha B'_k valódi részhalmaza B-nek, akkor van olyan $j \in J - \{k\}$, hogy $B \cap B_j \neq \emptyset$. Ez azonban a 30.5. Lemma szerint lehetetlen. Így $B'_k = B$.

Megfordítva, ha $\mathbf{B} = (B, X, \delta)$ az $\mathbf{A}$ automata maximális összefüggő részautomatája, akkor a 30.5. Lemma szerint van olyan $k \in J$, amelyre $B \subseteq B_k$ és minden $j \in I = J - \{k\}$ esetén $B \cap B_j = \emptyset$. Akkor a (30.3) jelölést használva, az előzőek szerint $B \subseteq B_I = B'_k$, azaz $B = B'_k$. □

Az üres halmaz és az állapothalmaz egyelemű részhalmazai minden automatának összefüggő részhalmazai. A 30.2. Lemma szerint ez azt jelenti, hogy minden állapot benne van egy maximális összefüggő részhalmazban, azaz minden automata állapothalmaza megkapható maximális összefüggő részhalmazok egyesítéseként. Úgy is mondjuk, hogy az automata *maximális összefüggő részhalmazokkal lefedhető*.

Azt mondjuk, hogy az $\mathbf{A} = (A, X, \delta)$ *egyértelműen fedhető le* a B_i $(i \in I)$ maximális összefüggő részhalmazokkal, ha nincsenek olyan C_k $(k \in K)$ maximális összefüggő részhalmazok amelyekkel lefedhető $\mathbf{A}$ és

$$\{B_i; i \in I\} \neq \{C_k; k \in K\}.$$

Az automatát a B_i $(i \in I)$ maximális összefüggő részhalmazokkal *minimálisan lefedhető*nek nevezzük, ha nincs olyan $K \subset I$, hogy $\mathbf{A}$ lefedhető a B_k $(k \in K)$ maximális összefüggő részhalmazokkal. Az üres automatát nyilvánvalóan az egyetlen maximális összefüggő részhalmaza az üres halmaz minimálisan lefedi.

A 30.5. Lemma szerint bármely automata tetszőleges maximális összefüggő részhalmaza vagy az automata egy maximális összefüggő nemüres részautomatájának állapothalmazát tartalmazza vagy nem tartalmazza az automata egyetlen nemüres összefüggő részautomatájának állapothalmazát sem. Nevezzük az első típust *lokálisan összefüggő részhalmaz*nak . Az automatát *lokálisan összefüggő*nek mondjuk, ha van lokálisan összefüggő részhalmaza. Az automatát *összefüggésmentes*nek mondjuk, ha nincs lokálisan összefüggő részhalmaza, azaz, ha nem lokálisan összefüggő.

30.8. Tétel

Legyen az $\mathbf{A}$ nemüres automata lefedhető a B_i $(i \in I)$ maximálisan összefüggő részhalmazokkal. Az $\mathbf{A}$ automata a B_i halmazokkal akkor és csak akkor fedhető le minimálisan, ha $\{B_i;\ i \in I\}$ az $\mathbf{A}$ automata lokálisan összefüggő részhalmazainak halmaza. Minden A-véges automata minimálisan lefedhető maximális összefüggő részhalmazokkal.

Bizonyítás. Tegyük fel, hogy az $\mathbf{A} = (A, X, \delta)$ nemüres automata minimálisan lefedhető a B_i $(i \in I)$ maximálisan összefüggő részhalmazokkal. Ez azt jelenti, hogy bármely $k \in I$ esetén $B'_k = B_k - (\cup_{i \in I - \{k\}} B_i) \neq \emptyset$. A 30.7. Következmény szerint $B'_k (\subseteq B_k)$ az $\mathbf{A}$ automata egy maximális összefüggő részautomatájának állapothalmaza. A 30.5. Lemma miatt $\{B_i; i \in I\}$ az $\mathbf{A}$ automata lokálisan összefüggő részhalmazainak halmaza.

Megfordítva, tegyük fel, hogy $\{B_i; i \in I\}$ az $\mathbf{A}$ automata lokálisan összefüggő részhalmazainak halmaza. A 30.4. Lemma szerint $A - B_i \subset A$, vagyis az $\mathbf{A}$ automata minimálisan fedhető le a B_i halmazokkal.

Ha A véges halmaz, akkor az $\mathbf{A}$ automatának véges sok maximális összefüggő részhalmaza van. Könnyen belátható, hogy kiválaszthatók közülük olyan $B_1, B_2, \dots, B_n$ halmazok, hogy $A = B_1 \cup B_2 \cup \dots \cup B_n$ és $A - B_i \neq A$ $(i = 1, 2, \dots, n)$. □

30.9. LEMMA
Egy automata akkor és csak akkor fedhető le egyértelműen maximális összefüggő részhalmazokkal, ha ezekkel minimálisan lefedhető.

Bizonyítás. Az üres automatára nyilvánvalóan igaz az állítás, mivel az egyetlen maximális összefüggő részhalmaza, az üres halmaz lefedi.

Ha az $\mathbf{A}$ nemüres automata egyértelműen lefedhető a B_i $(i \in I)$ maximális összefüggő részhalmazokkal, akkor bármely $k \in I$ indexre a B_i $(i \in I - \{k\})$ halmazokkal nem fedhető le. Azaz $B'_k = B_k - (\cup_{l \in I - \{k\}} B_l) \neq \emptyset$. A 30.8. Tétel bizonyítása szerint a B_i $(i \in I)$ halmazokkal $\mathbf{A}$ minimálisan lefedhető.

Ha az $\mathbf{A}$ nemüres automata minimálisan lefedhető a B_i $(i \in I)$ maximális összefüggő részhalmazokkal, akkor a 30.8. Tétel bizonyítása alapján bármely $k \in I$ indexre $B'_k = B_k - (\cup_{l \in I - \{k\}} B_l) \neq \emptyset$ az $\mathbf{A}$ automata egy maximális összefüggő részautomatájának állapothalmaza. A 30.7. Következmény szerint így megkapjuk az $\mathbf{A}$ automata összes nemüres maximális összefüggő részautomatájának állapothalmazát és a $B'_k (\subseteq B_k)$ $(k \in I)$ halmazok egyértelműen meghatározzák a B_k halmazokat. □

A 30.8. Tétel szerint minden összefüggésmentes automata végtelen. Ha a bemenő halmaz legalább kételemű, akkor a (3.9) feltétellel definiált szabad automata összefüggésmentes.

30.10. TÉTEL
Lokálisan összefüggő automata megadható összefüggő automaták és egy összefüggésmentes automata direkt összegének összefüggő automatával való bővítéseként.

Bizonyítás. Legyen $\{B_j; j \in J\}$ az $\mathbf{A}$ automata lokálisan összefüggő részhalmazainak halmaza. Legyen továbbá B'_j az $\mathbf{A}$ automata egy maximális összefüggő $\mathbf{B}'_j$ részautomatájának állapothalmaza és $B'_j \subseteq B_j$. A 30.4. Lemma szerint, ha $j \neq k$ $(j, k \in J)$, akkor $B'_j \cap B'_k = \emptyset$.

Tekintsük az $\mathbf{A}$ automata maximális összefüggő részhalmazainak olyan $\{B_i; i \in I\}$ halmazát, amelyre $A = \cup_{i \in I} B_i$ és $J \subseteq I$. A 30.6. Lemma szerint $B = A - (\cup_{j \in J} B_j)$ az $\mathbf{A}$ automata egy $\mathbf{B}$ részautomatájának állapothalmaza. A $\mathbf{B}$ automata összefüggésmentes. ($B = \emptyset$ is lehetséges.)

Legyen $\mathbf{C}$ automata a $\mathbf{B}$ és a $\mathbf{B}'_j$ $(j \in J)$ automaták direkt összege. Az összefüggőség miatt minden $b \in B_j$ és $a \in B'_j$ $(i \in J)$ állapothoz vannak olyan $p, q \in X^*$ bemenő szavak, amelyekre $bp = aq \in B'_j$. Ez azt jelent, hogy az $\mathbf{A}$ automata a $\mathbf{C}$ automatának az összefüggő $\mathbf{A}/\mathbf{C}$ automatával való bővítése. □

30.11. Következmény
Bármely A-véges automata megadható összefüggő automaták direkt összegének összefüggő automatával való bővítéseként.

Megjegyezzük, hogy az 5.3. Tétel a 2.4. Tétel, az 5.1. Lemma és a 30.8. Tétel felhasználásával megkapható a 30.11. Következményből is.

Definiáljuk tetszőleges $\mathbf{A} = (A, X, \delta)$ automata A állapothalmazán az *összefüggőségi ρ relációt* a következő módon:

$$(a, b) \in \rho \ (a, b \in A) \quad \Longleftrightarrow \quad (\exists p, q \in X^*) \ (ap = bq). \tag{30.4}$$

A ρ reláció nyilvánvalóan reflexív és szimmetrikus. A $\rho[a](a \in A)$ halmazok az automata maximális összefüggő halmazai.

30.12. Lemma
Az $\mathbf{A} = (A, X, \delta)$ automata ρ összefüggőségi relációja akkor és csak akkor ekvivalencia (egyúttal kongruencia is), ha minden $\rho[a](a \in A)$ halmaz az automata egy részautomatájának állapothalmaza.

Bizonyítás. Ha ρ ekvivalencia, akkor a 30.3. Lemma miatt minden $\rho[a](a \in A)$ halmaz $\mathbf{A}$ valamely részautomatájának állapothalmaza.

Megfordítva, ha minden $\rho[a](a \in A)$ halmaz $\mathbf{A}$ egy részautomatájának állapothalmaza, akkor a 30.4. Lemma szerint ρ ekvivalencia. □

30.13. Tétel
Minden kommutatív automata összefüggő (kommutatív) automaták direkt összege.

Bizonyítás. Ha az $\mathbf{A}$ automata kommutatív, akkor a (30.4)-ben definiált ρ összefüggőségi reláció ekvivalencia. Valóban, ha $(a, b) \in \rho$ és $(b, c) \in \rho$, vagyis vannak olyan $p, q, r, t \in X^*$ bemenő szavak, amelyekre $ap = bq$ és $br = ct$, akkor

$$a(pr) = (ap)r = (bq)r = b(qr) = b(rq) = (br)q = (ct)q = c(tq),$$

azaz $(a, c) \in \rho$. Tehát ρ valóban tranzitív, s így ekvivalencia. A 30.12. Lemma szerint $\mathbf{A}$ a (maximális) összefüggő részautomatáinak direkt összege. □

Feladatok

30.1. Minden (m, n)-kommutatív automata (l. 22.3. feladatot!) (m, n)-kommutatív összefüggő automaták direkt összege. (A 30.13. Tétel általánosítása.) (→ Megoldás)

30.2. Minden A-véges automata állapothalmazának van olyan osztályozása, amelynek minden osztálya az automata egy összefüggő részhalmaza. (→ Megoldás)

31. Retraktálható automaták

Ebben a fejezetben az erősen összefüggő és az erősen csapda-összefüggő automaták egy érdekes általánosításával foglalkozunk. Egy $\mathbf{A} = (A, X, \delta)$ automata $\mathbf{B} = (B, X, \delta)$ részautomatáját *retrakt*nak nevezzük, ha $\mathbf{A}$-nak van olyan φ homomorfizmusa $\mathbf{B}$-re, amelyre $\varphi_B = \iota_B$, azaz B-re való leszűkítése fixen hagyja B elemeit. A φ-t *retrakt homomorfizmus*nak nevezzük. Ezek a fogalmak szerepeltek a 12. fejezetben is. Az $\mathbf{A}$ automatát *retraktálható*nak mondjuk, ha minden részautomatája retrakt.

A definícióból látható, hogy minden erősen összefüggő és erősen csapda-összefüggő automata retraktálható. A fejezetben megmutatjuk, hogy ezekből az automatákból A-véges esetben hogyan szerkeszthetők meg a retraktálható automaták.

31.1. Lemma
Retraktálható [ciklikus retraktálható] automata minden részautomatája is retraktálható [ciklikus retraktálható] automata.

Bizonyítás. Legyen $\mathbf{B} = (B, X, \delta)$ automata az $\mathbf{A} = (A, X, \delta)$ retraktálható automata részautomatája. Ha a $\mathbf{C} = (C, X, \delta)$ automata $\mathbf{B}$ egy részautomatája, akkor $\mathbf{C}$ az $\mathbf{A}$ automatának is részautomatája. Így van $\mathbf{A}$-nak egy φ retrakt homomorfizmusa $\mathbf{C}$-re. Nyilvánvaló, hogy a φ homomorfizmus B-re való leszűkítése $\mathbf{B}$-nek $\mathbf{C}$-re való retrakt homomorfizmusa.

Mivel ciklikus automata homomorf képe is ciklikus, ezért ciklikus retraktálható automata minden részautomatája is ciklikus retraktálható automata. □

Azt mondjuk, hogy az $\mathbf{A} = (A, X, \delta)$ automata a $\mathbf{B} = (B, X, \delta)$ részautomatájának *dilatáció*ja, ha van A-nak olyan B-re való ψ leképezése, amely B elemeit fixen hagyja és minden $a \in A, x \in X$ párra

$$\delta(a, x) = \delta(\psi(a), x)$$

teljesül.

31.2. Tétel
Retraktálható automata minden dilatációja is retraktálható.

Bizonyítás. Legyen az $\mathbf{A} = (A, X, \delta)$ automata a $\mathbf{B} = (B, X, \delta)$ retraktálható részautomatájának dilatációja. Akkor létezik A-nak olyan B-re való ψ leképezése, amely B elemeit fixen hagyja és minden $a \in A, x \in X$ párra $\delta(a, x) = \delta(\psi(a), x)$. Ha $\mathbf{A}' = (A', X, \delta)$ az $\mathbf{A}$ automata tetszőleges részautomatája, akkor minden $a' \in A'$ és $x \in X$ esetén $\delta(a', x) \in A' \cap B$. Jelölje φ a $\mathbf{B}$ automata egy retrakt homomorfizmusát $\mathbf{A}' \cap \mathbf{B}$-re. Definiáljuk A-nak A'-re való α leképezését a következőképpen. Legyen $\alpha(a) = a$, ha $a \in A'$ és $\alpha(a) = \varphi(\psi(a))$, ha $a \notin A'$. Megmutatjuk, hogy α homomorfizmus. Legyenek $a \in A$ és $x \in X$ tetszőlegesek. Ha $a \in A'$, akkor

$$\delta(\alpha(a), x) = \delta(a, x) = \alpha(\delta(a, x)).$$

Ha pedig $a \notin A'$, akkor

$$\delta(\alpha(a), x) = \delta(\varphi(\psi(a)), x) = \varphi(\delta(\psi(a), x)) = \alpha(\delta(a, x)),$$

mivel $\alpha(a), \delta(a, x) \in B$ és α B-re való szűkítése megegyezik φ-vel. Ami azt jelenti, hogy α az $\mathbf{A}$ automata homomorf leképezése $\mathbf{A}'$-re. Mivel α az A' elemeit fixen hagyja, ezért retrakt homomorfizmus. Következésképpen az $\mathbf{A}$ automata retraktálható. □

Egy $\mathbf{A} = (A, X, \delta)$ automata δ átmenetfüggvényét *erősen szürjektív*nek nevezzük, ha az $\mathbf{A}$ automata minden részautomatájára való szűkítése szürjektív.

31.3. Tétel
Minden retraktálható automata dilatációja egy olyan retraktálható automatának, amelynek átmenetfüggvénye erősen szürjektív.

Bizonyítás. Legyen $\mathbf{A} = (A, X, \delta)$ retraktálható automata és $B = R_\delta$ a δ átmenet függvény értékkészlete, azaz

$$B = \delta(A, X) = \{\delta(a, x); \quad a \in A, \; x \in X\}.$$

$\mathbf{B} = (B, X, \delta)$ az $\mathbf{A}$ automata részautomatája, ezért van $\mathbf{A}$-nak $\mathbf{B}$-re való φ retrakt homomorfizmusa. Minden $a \in A$ és $x \in X$ esetén

$$\delta(a, x) = \varphi(\delta(a, x)) = \delta(\varphi(a), x),$$

vagyis φ az $\mathbf{A}$ automata $\mathbf{B}$ egy dilatációja.

A 31.1. Lemma szerint $\mathbf{B}$ retraktálható automata. Legyen $\mathbf{B}' = (B', X, \delta)$ a $\mathbf{B}$ automata tetszőleges részautomatája és α az $\mathbf{A}$ automatának egy retrakt homomorfizmusa $\mathbf{B}'$-re. Ha $b \in B'$, akkor vannak olyan $a \in A$ és $x \in X$ elemek, hogy $b = \delta(a, x)$. Akkor $\alpha(a) \in B'$ és

$$b = \alpha(b) = \alpha(\delta(a, x)) = \delta(\alpha(a), x),$$

azaz $\delta(B', X) = B'$, vagyis δ erősen szürjektív. $\square$

A 31.2. és a 31.3. Tételekből kapjuk a következő eredményt.

31.4. Következmény
Egy automata akkor és csak akkor retraktálható, ha dilatációja egy olyan retraktálható automatának, amelynek átmenetfüggvénye erősen szürjektív.

A 31.4. Következmény szemléltetésére nagyon egyszerű példák a kétállapotú nilpotens automaták. Ezek az automaták a triviális automaták dilatációi.

A 12. fejezetben egy $\mathbf{A}$ automata részautomatáinak metszetét, ha az nemüres, az automata magjának neveztük. A 12.16. Tétel és az utána következő megjegyzések szerint, ha az automata magja létezik, akkor az az automata egyetlen (nemüres) erősen összefüggő részautomatája. Az $\mathbf{A}$ automata magjának állapotai $\mathbf{A}$ minden állapotából elérhetők. A-véges ciklikus automatának mindig van magja. Továbbá, egy automata két A-véges részautomatájának magja akkor és csak akkor különböző, ha metszetük üres. Az $\mathbf{A}_i$ $(i \in I)$ automaták direkt összegét *erős direkt összeg*nek nevezzük, ha minden $i, j \in I$ pár esetén létezik $\mathbf{A}_i$-nek $\mathbf{A}_j$-be való homomorf leképezése.

31.5. Tétel
Retraktálható automaták erős direkt összege is rektraktálható.

Bizonyítás. Tegyük fel, hogy az $\mathbf{A} = (A, X, \delta)$ automata az $\mathbf{A}_i = (A_i, X, \delta_i)$ $(i \in I)$ retraktálható automaták erős direkt összege. Legyen $\varphi_{i,j}$ $(i, j \in I)$ az $\mathbf{A}_i$ automata egy homomorf leképezése az $\mathbf{A}_j$ automatába. Legyen továbbá $\mathbf{B} = (B, X, \delta)$ az $\mathbf{A}$ automata egy részautomatája és $B_i = B \cap A_i$. Nyilvánvaló, hogy $\mathbf{B}_i = (B_i, X, \delta)$ az $\mathbf{A}_i$ automata egy részautomatája. Ha

$B_i \neq \emptyset$, akkor jelölje α_i az $\mathbf{A}_i$ automata egy retrakt homomorfizmusát $\mathbf{B}_i$-re. Rögzítsünk egy olyan $i_0 \in I$ indexet, amelyre $B_{i_0} \neq \emptyset$. Definiáljuk a $\varphi : A \to B$ leképezést a következő módon. Ha $a \in A_i$ és $B_i = \emptyset$, akkor legyen

$$\varphi(a) = \alpha_{i_0}(\varphi_{i,i_0}(a)).$$

Ha $a \in A_i$ és $B_i \neq \emptyset$, akkor pedig legyen

$$\varphi(a) = \alpha_i(a).$$

Nyilvánvaló, hogy φ az A állapothalmazt B-re képezi és B elemeit fixen hagyja.

Legyenek most $a \in A_i$ $(i \in I)$ és $x \in X$ tetszőlegesek. Ha $B_i = \emptyset$, akkor

$$\varphi(\delta(a,x)) = \alpha_{i_0}(\varphi_{i,i_0}(\delta_i(a,x))) = \alpha_{i_0}(\delta_{i_0}(\varphi_{i,i_0}(a),x)) = \delta(\varphi(a),x).$$

Ha pedig $B_i \neq \emptyset$, akkor

$$\varphi(\delta(a,x)) = \alpha_i(\delta_i(a,x)) = \delta_i(\alpha_i(a),x) = \delta(\varphi(a),x).$$

Ezek azt jelentik, hogy φ az $\mathbf{A}$ automata retrakt homomorf leképezése a $\mathbf{B}$ automatára. $\square$

31.6. TÉTEL

Az $\mathbf{A} = (A, X, \delta)$ A-véges automatára a következő állítások ekvivalensek:
(1) $\mathbf{A}$ retraktálható.
(2) $\mathbf{A}$ véges sok olyan A-véges retraktálható automata direkt összege, amelyek magjai egymással izomorfak.
(3) $\mathbf{A}$ véges sok olyan A-véges retraktálható automata erős direkt összege, amelyek mindegyikének van magja.

Bizonyítás. (1) $\Longrightarrow$ (2): Tegyük fel, hogy $\mathbf{A}$ retraktálható. Az A állapothalmaz véges, ezért minden $a \in A$ állapot esetén az $[\mathbf{a}]$ részautomatának van erősen összefüggő részautomatája. De $[\mathbf{a}]$ ciklikus, ezért egyetlen erősen összefüggő részautomatája van. Legyenek

$$\mathbf{B}_i = (B_i, X, \delta) \quad (i = 1, 2, \ldots, k)$$

az $\mathbf{A}$ automata erősen összefüggő részautomatái. Legyen továbbá

$$A_i \quad (i = 1, 2, \ldots, k)$$

azon $[a]$ $(a \in A)$ halmazok egyesítése, amelyekre $B_i \subseteq [a]$. Könnyen belátható, hogy $A = \cup_{i=1}^{k} A_i$ és ha $i \neq j$, akkor $A_i \cap A_j = \emptyset$. Vagyis $\mathbf{A}$ az

$$\mathbf{A}_i = (A_i, X, \delta) \quad (i = 1, 2, \ldots, k)$$

részautomaták direkt összege. A 31.1. Lemma szerint az $\mathbf{A}_i$ automaták retraktálhatók.

Legyenek $i, j \in \{1, 2, \dots, k\}$ tetszőleges indexek és φ_i az $\mathbf{A}$ automata retrakt homomorf leképezése a $\mathbf{B}_i$ automatára. Az erősen összefüggőség miatt φ_i a $\mathbf{B}_j$ automatát is $\mathbf{B}_i$-re képezi (homomorf módon). Ebből következik, hogy $|B_j| \geq |B_i|$. De B_i és B_j szerepét felcserélve azt kapjuk, hogy $|B_i| \geq |B_j|$, s így $|B_i| = |B_j|$. Ez azt jelenti, hogy φ_i a $\mathbf{B}_i$ automatát izomorf módon képezi $\mathbf{B}_j$-re.
(2) $\Longrightarrow$ (3): Tegyük fel, hogy az $\mathbf{A}$ automata az

$$\mathbf{A}_i = (A_i, X, \delta_i) \quad (i = 1, 2, \dots, k)$$

A-véges retraktálható automaták direkt összege, amelyek erősen összefüggő $\mathbf{B}_i = (B_i, X, \delta_i)$ részautomatái egymással izomorfak. Legyen

$$\alpha_{i,j} \quad (i, j \in \{1, 2, \dots, k\})$$

a $\mathbf{B}_i$ automata izomorf leképezése a $\mathbf{B}_j$ automatára. Jelölje β_i az $\mathbf{A}_i$ automata retrakt homomorf leképezését $\mathbf{B}_i$-re. Könnyen belátható, hogy $\alpha_{i,j}\beta_i$ az $\mathbf{A}_i$ automata homomorf leképezése a $\mathbf{A}_j$ automatába.
(3) $\Longrightarrow$ (1): A 31.5. Tétel alapján nyilvánvaló. □

A 31.4. Következmény és a 31.6. Tétel szerint az A-véges retraktálható automaták jellemzéséhez elegendő azokat az A-véges retraktálható automatákat jellemezni, amelyeknek van magjuk és átmenetfüggvényük erősen szürjektív. A továbbiakban ezzel a kérdéssel foglalkozunk. Ehhez azonban szükségesek az alábbi fogalmak és eredmények.

Jelölje szokásunk szerint $[\mathbf{a}] = ([a], X, \delta)$ az $\mathbf{A}$ automata $a \in A$ állapota által generált ciklikus részautomatáját, vagyis legyen

$$[a] = \{ap;\ p \in X^*\}.$$

31.7. Lemma
Legyen $\mathbf{A} = (A, X, \delta)$ retraktálható automata és $H \subseteq A$. Ha $\{[\mathbf{a}]; a \in H\}$ felülről korlátos halmaz $\mathbf{A}$ ciklikus részautomatáinak halmazában az automaták (2.4) tartalmazására, akkor az $\mathbf{A}$ automata $\sum_{a \in H} [\mathbf{a}]$ részautomatája ciklikus.

Bizonyítás. Legyen $\mathbf{A} = (A, X, \delta)$ retraktálható automata, $H \subseteq A$ és $b \in A$ olyan állapot, hogy minden $a \in H$ állapotra $[a] \subseteq [b]$. Legyen $H' = \cup_{a \in H}[a]$. Mivel $\mathbf{H}' = (H', X, \delta)$ az $\mathbf{A}$ retraktálható automata részautomatája, ezért van $\mathbf{A}$-nak $\mathbf{H}'$-re való φ retrakt homomorfizmusa. De $\varphi(b) \in H'$ miatt van olyan $a' \in H'$, amelyre $\varphi(b) \in [a']$, s így $\varphi([b]) \subseteq [a']$. Minden $a \in H$ esetén $[a] \subseteq H' \cap [b]$, amiből $[a] = \varphi([a]) \subseteq [a']$. Amiből kapjuk, hogy a $\sum_{a \in H} [\mathbf{a}] = [\mathbf{a}']$. □

Legyen $(H, \leq)$ olyan részben rendezett halmaz, hogy H bármely kételemű részhalmazának van H-beli alsó korlátja és bármely H-ban felülről korlátos nemüres részhalmazának van legnagyobb eleme. Legyenek a H elemei egy gráf pontjai. Minden $a < b$ $(a, b \in H)$ esetben, ha nincs olyan $c \in H$, amelyre $a < c < b$, kössük össze a-t b-vel olyan irányított éllel, amelynek kezdőpontja a és végpontja b. Így egy irányított fát kapunk. Ebben az esetben a H részben rendezett halmazt is a $\leq$ részben rendezésre egyszerűen *fának* nevezzük. Nyilvánvaló, hogy minden véges fának van legkisebb eleme. A 31.7. Lemmát és az állapothalmaz végességét felhasználva könnyen megmutatható a

31.8. Következmény

A-véges retraktálható automatának akkor és csak akkor van magja, ha ciklikus részautomatáinak halmaza a (2.4) tartalmazásra fa.

Legyen tetszőleges $\mathbf{A} = (A, X, \delta)$ automata esetén κ_A a (2.1)-ben definiált kölcsönös elérhetőség relációja. A κ_A relációt úgy is definiálhatjuk, hogy

$$(a, b) \in \kappa_A \iff [a] = [b] \quad (a, b \in A). \tag{31.1}$$

Ebből következik, hogy minden $a \in A$ állapotra $\kappa_A[a] \subseteq [a]$. Vezessük be a

$$(a) = [a] - \kappa_A[a]$$

jelölést. Ha $b \in (a)$ és $x \in X$, akkor $\delta(b, x) \in (a)$, vagyis $(\mathbf{a}) = ((a), X, \delta)$ az $[\mathbf{a}]$ automata részautomatája. Ha $\mathbf{A}$ retraktálható, akkor a 31.1. Lemma szerint (a) minden $a \in A$ esetén ciklikus. Megjegyezzük, hogy $(a) = \emptyset$ akkor és csak akkor, ha $[\mathbf{a}]$ erősen összefüggő. Az $[\mathbf{a}]/(\mathbf{a})$ $(a \in A)$ Rees-faktorokat az $\mathbf{A}$ *automata főfaktora*inak nevezzük. (Ha $(a) = \emptyset$, akkor $[\mathbf{a}]/(\mathbf{a}) = [\mathbf{a}]$.)

A definíció alapján nem nehéz belátni, hogy egy automata főfaktorai erősen összefüggők vagy erősen csapda-összefüggők. Ha egy erősen csapda-összefüggő főfaktor legalább háromállapotú, akkor minden állapothoz van olyan nemüres szó, amely az adott állapotot önmagába viszi. Ha egy erősen csapda-összefüggő főfaktor kétállapotú, akkor előfordulhat, hogy ahhoz az állapothoz, amelyik nem csapda, nincs olyan nemüres szó, amely azt önmagába vinné. Ebből nyilvánvalóan következik, hogy egy automata átmenetfüggvénye akkor és csak akkor erősen szürjektív, ha főfaktorai erősen összefüggők vagy olyan erősen csapda-összefüggők, amelyek között nincsenek kétállapotú nilpotens automaták.

Legyen most $\mathbf{A} = (A, X, \delta)$ legfeljebb egycsapdás automata. Legyen $A^0 = A$, ha $|A| = 1$ vagy ha $\mathbf{A}$-nak nincs csapdája és $A^0 = A - \{c\}$, ha $|A| \geq 2$ és c az $\mathbf{A}$ automata csapdája. Definiáljuk az $\mathbf{A^0} = (A^0, X, \delta^0)$ parciális automata δ^0 átmenetfüggvényét a következőképpen. Legyen

$$\delta^0(a, x) = \delta(a, x) \iff \delta(a, x) \in A^0 \quad (a \in A, x \in X).$$

A $\varphi : A^0 \to B^0$ leképezést az $\mathbf{A^0} = (A^0, X, {\delta_A}^0)$ parciális automatának a a $\mathbf{B^0} = (B^0, X, {\delta_B}^0)$ parciális automatába való *parciális homomorfizmus*ának nevezzük, ha minden $a \in A^0$, $x \in X$ párra ${\delta_A}^0(a, x) \in A^0$ feltételből következik, hogy ${\delta_B}^0(\varphi(a), x) \in B^0$ és ${\delta_B}^0(\varphi(a), x) = \varphi({\delta_A}^0(a, x))$.

A 31.6. Tétel szerint az A-véges retraktálható automaták pontosan azok az A-véges automaták, amelyek véges sok A-véges retraktálható automata direkt összege, amelyeknek magjai egymással izomorfak. A 31.4. Következmény szerint a direkt összeg minden tagja olyan retraktálható automata dilatációja, amelynek van magja és átmenetfüggvénye erősen szürjektív. A retraktálható automaták vizsgálatát azzal fejezzük be, hogy az A-véges erősen összefüggő és erősen csapda-összefüggő automaták felhasználásával megszerkesztjük ezeket az automatákat.

Legyen e célból $(T, \leq)$ egy véges fa és $i_0 \in T$ a legkisebb eleme. Jelölje $j \prec i$ $(i, j \in T)$ azt a tényt, hogy $j < i$ és nincs olyan $k \in T$, amelyre $j < k < i$. Legyenek az $\mathbf{A}_i = (A_i, X, \delta_i)$ $(i \in T)$ automaták állapothalmazai páronként diszjunktak és teljesülnek a következő feltételek:
(1) Az $\mathbf{A}_{i_0}$ automata erősen összefüggő és az $\mathbf{A}_i$ $(i \in T - i_0)$ automaták erősen csapda-összefüggők és nincs közöttük kétállapotú nilpotens automata;
(2) Minden $i \in T$ esetén $\varphi_{i,i} = \iota_{A_i}$;
(3) Ha $j \prec i$ $(i, j \in T)$, akkor az $\mathbf{A}_i$ automatának létezik egy $\varphi_{i,j}$ parciális homomorfizmusa $\mathbf{A}_j$-be, amelyhez vannak olyan $a \in {A_i}^0$ és $x \in X$ elemek, hogy $\delta_i(a, x) \notin {A_i}^0$ és $\delta_j(\varphi_{i,j}(a), x) \in {A_j}^0$.
(4) Ha $j \prec k_1 \prec k_2 \prec \cdots \prec k_n \prec i$, akkor legyen $\varphi_{i,j} = \varphi_{k_n,j}\varphi_{k_{n-1},j} \dots \varphi_{k_1,j}$. (Megjegyezzük, hogy így tetszőleges $k \leq j \leq i$ T-beli elemekre $\varphi_{i,k} = \varphi_{j,k}\varphi_{i,j}$.)
(5) Legyen $A = \cup_{i \in T} {A_i}^0$. Definiáljuk $\delta : A \times X \to A$ függvényt a következőképpen: Ha $a \in {A_i}^0$ és $x \in X$, akkor legyen

$$\delta(a, x) = \delta_{i(a,x)}(\varphi_{i,i(a,x)}(a), x),$$

ahol $i(a, x)$ jelölje a $\{j \in T;\ \delta_j(\varphi_{i,j}(a), x) \in {A_j}^0\}$ halmaz legnagyobb elemét.

Könnyen belátható, hogy az (A, X, δ) automata jól definiált. Vezessük be erre az automatára az $(A_i, X, \delta_i; \varphi_{i,j}, T)$ jelölést.

31.9. TÉTEL
Egy A-véges $\mathbf{A} = (A, X, \delta)$ automata akkor és csak akkor olyan retraktálható automata, amelynek van magja és állapotfüggvénye erősen szürjektív, ha $\mathbf{A}$ izomorf egy $(A_i, X, \delta_i; \varphi_{i,j}, T)$ automatával.

Bizonyítás. Legyen $\mathbf{B} = (B, X, \delta)$ az $(A_i, X, \delta_i; \varphi_{i,j}, T)$ automata egy részautomatája. Mivel az $\mathbf{A}_{i_0}$ automata erősen összefüggő és az $\mathbf{A}_i$ $(i \in T - i_0)$

automaták erősen csapda-összefüggők, ezért T valamilyen $\Gamma \neq \emptyset$ részhalmazára $B = \cup_{j\in\Gamma} {A_j}^0$. Legyen $i \in \Gamma$ és $i \neq i_0$. Ha $j \prec i$ $(j \in T)$, akkor (3) szerint vannak olyan $a \in {A_i}^0$ és $x \in X$ elemek, hogy $\delta_i(a,x) \notin {A_i}^0$ és $\delta_j(\varphi_{i,j}(a),x) \in {A_j}^0$, azaz $\delta(a,x) \in {A_j}^0$, vagyis ${A_j}^0 \cap B \neq \emptyset$. Amiből következik, hogy ${A_j}^0 \subseteq B$, s így $j \in \Gamma$.

Legyen minden $i \in T$ esetén

$$\pi(i) = \max\{k \in \Gamma;\ k \leq i\}.$$

Mivel $(T, \leq)$ fa, ezért π a T-nek Γ-ra való leképezése és π a Γ elemeit fixen hagyja. Legyen $\alpha : A \to B$, amelyre minden $a \in A_i$ $(i \in T)$ esetén

$$\alpha(a) = \varphi_{i,\pi(i)}(a)$$

teljesül. Nyilvánvaló, hogy α szürjektív és a **B** automata állapotait fixen hagyja. Megmutatjuk, hogy α homomorfizmus. Felhasználva, hogy (5) szerint

$$\delta(a,x) = \delta_{i(a,x)}(\varphi_{i,i(a,x)}(a),x) \in (A_{i(a,x)})^0,$$

valamint azt, hogy $\varphi_{i(a,x),\pi(i(a,x))}$ parciális homomorfizmus, kapjuk, hogy

$$\alpha(\delta(a,x)) = \alpha(\delta_{i(a,x)}(\varphi_{i,i(a,x)}(a),x)) =$$

$$= \varphi_{i(a,x),\pi(i(a,x))}(\delta_{i(a,x)}(\varphi_{i,i(a,x)}(a),x)) =$$
$$= \delta_{\pi(i(a,x))}(\varphi_{i,\pi(i(a,x))}(a),x) \in (A_{\pi(i(a,x))})^0.$$

Továbbá $\varphi_{i,\pi(i)}(a) \in A_{\pi(i(a,x))}$ miatt

$$\delta(\alpha(a),x) = \delta(\varphi_{i,\pi(i)}(a),x) =$$

$$= \delta_{\pi(i)(\varphi_{i,\pi(i)}(a),x)}(\varphi_{\pi(i),\pi(i)(\varphi_{i,\pi(i)}(a),x}(\varphi_{i,\pi(i)}(a)),x) =$$
$$= \delta_{\pi(i)(\varphi_{i,\pi(i)}(a),x)}(\varphi_{i,\pi(i)(\varphi_{i,\pi(i)}(a),x)},x) \in (A_{\pi(i)(\varphi_{i,\pi(i)}(a),x)})^0.$$

Az $\alpha(\delta(a,x)) = \delta(\alpha(a),x)$ egyenlőség bizonyításához elegendő megmutatni, hogy

$$\pi(i)(\varphi_{i,\pi(i)}(a),x) = \pi(i(a,x)).$$

Először tegyük fel, hogy $\pi(i) \leq i(a,x)$ (és így $\pi(i(a,x)) = \pi(i)$). Mivel $\varphi_{i(a,x),\pi(i)}$ az $(\mathbf{A}_{i(a,x)})^0$ automata parciális homomorfizmusa ${\mathbf{A}_{\pi(i)}}^0$-ba és

$$\delta_{i(a,x)}(\varphi_{i,i(a,x)}(a),x) \in (A_{i(a,x)})^0,$$

ezért

$$\delta_{\pi(i)}(\varphi_{i,\pi(i)}(a),x) = \delta_{\pi(i)}(\varphi_{i(a,x),\pi(i)}\varphi_{i,i(a,x)}(a),x) =$$

$$= \varphi_{i(a,x),\pi(i)}(\delta_{i(a,x)}(\varphi_{i,i(a,x)}(a),x)) \in {A_{\pi(i)}}^0,$$

s így

$$\pi(i)(\varphi_{i,\pi(i)}(a),x) = \pi(i) = \pi(i(a,x)).$$

Most tekintsük a $\pi(i) > i(a,x)$ esetet (és így $\pi(i(a,x)) = i(a,x)$.) Ha $\pi(i) \geq j \geq i(a,x)$ $(j \in T)$, akkor

$$\delta_j(\varphi_{\pi(i),j}\varphi_{i,\pi(i)}(a),x) = \delta_j(\varphi_{i,j}(a),x) \notin {A_j}^0.$$

Akkor

$$\pi(i)(\varphi_{i,\pi(i)}(a),x) \leq i(a,x).$$

Mivel

$$\delta_{i(a,x)}(\varphi_{\pi(i),i(a,x)}\varphi_{i,\pi(i)}(a),x) = \delta_{i(a,x)}(\varphi_{i,i(a,x)}(a),x) \in {A_{i(a,x)}}^0,$$

kapjuk, hogy

$$\pi(i)(\varphi_{i,\pi(i)}(a),x) \geq i(a,x).$$

Innen

$$\pi(i)(\varphi_{i,\pi(i)}(a),x) = i(a,x) = \pi(i(a,x)).$$

Következésképpen $\pi(i)(\varphi_{i,\pi(i)}(a),x) = \pi(i(a,x))$ mindkét esetben. Vagyis α retrakt homomrfizmus és így $(A_i, X, \delta_i; \varphi_{i,j}, T)$ retraktálható automata.

Az (1) feltételből adódik, hogy δ erősen szürjektív. Minthogy $i_0 \in \Gamma$ minden esetben, ezért $A_{i_0} \subseteq B$, azaz $\mathbf{A}_{i_0}$ az $(A_i, X, \delta_i; \varphi_{i,j}, T)$ automata magja.

Megfordítva, tegyük fel, hogy az $\mathbf{A} = (A, X, \delta)$ A-véges retraktálható automatának van magja és állapotfüggvénye erősen szürjektív. Jelölje $F(\mathbf{A})$ az $\mathbf{A}$ automata főfaktorainak halmazát. Definiáljuk $F(\mathbf{A})$ halmazon a $\leq$ részben rendezést a következő módon:

$$[a]/(a) \leq [b]/(b) \quad \Longleftrightarrow \quad [a] \subseteq [b] \quad (a, b \in A).$$

A 31.8. Következmény szerint $(F(\mathbf{A}), \leq)$ véges fa, amelynek legkisebb eleme erősen összefüggő, a többi eleme erősen csapda-összefüggő, de nincs közöttük kétállapotú nilpotens automata.

Legyen T tetszőleges halmaz, amelyre $|T| = |F(\mathbf{A})|$. Jelölje f a T halmaz egy bijektív leképezését $F(\mathbf{A})$-ra. Legyen $i \leq j$ akkor és csak akkor, ha $f(i) \leq f(j)$ $(i, j \in T)$. Nyilvánvalóan $(T, \leq)$ véges fa, amelynek a legkisebb eleme legyen i_0. Minden $i \in T$ elem esetén rögzítsünk le egy $a_i \in A$ állapotot, amelyre $f(i) = [a_i]/(a_i)$. (Ez azt jelenti, hogy $[a_i]/(a_i) = [a_j]/(a_j)$ akkor és csak akkor, ha $i = j$.)

Minthogy $[a_{i_0}]/(a_{i_0})$ erősen összefüggő, a többi $[a_i]/(a_i)$ eleme erősen csapda-összefüggő, de nincs közöttük kétállapotú nilpotens automata, ezért az (1) feltétel teljesül.

Legyen φ_i $(i \in T)$ az $\mathbf{A}$ automata egy retrakt homomorfizmusa $[\mathbf{a_i}]$-re. Minden $i \succeq j$ $(i, j \in T)$ párra legyen $\varphi_{i,j}$ a φ_j leképezés szűkítése $[a_i]$-re. Minden $i \succeq j$ $(i, j \in T)$ párra $\varphi_{i,j}$ az $[\mathbf{a_i}]$ automata retrakt homomorfizmusa $[\mathbf{a_j}]$-re. Ezenkívül $\varphi_{i,i} = \iota_{[a_i]}$ $(i \in T)$, ami (2) teljesülését jelenti.

Most megmutatjuk, hogy $\varphi_{i,j}$ az $\kappa_A[a_i]$ osztály elemeit $\kappa_A[a_j]$ osztály elemeibe viszi. Tegyük fel ugyanis, hogy $\varphi_{i,j}(a) \in (a_j) = [a_j] - \kappa_A[a_j]$ valamilyen $a \in \kappa_A[a_i]$ állapotra. Akkor minden $p \in X^*$ bemenő szóra

$$\varphi_{i,j}(ap) = \varphi_{i,j}(a)p \in (a_j),$$

mivel (a_j) az $[a_j]$ automata részautomatája. De $[a_i] = \{ap;\ p \in X^*\}$, ezért $\varphi_{i,j}([a_i]) \subseteq (a_j)$. Ez azonban lehetlen, mivel

$$(a_j) \subset [a_j] = \varphi_{i,j}([a_i]).$$

Ez viszont azt jelenti, hogy $\varphi_{i,j}$ tekinthető egy olyan leképezésnek, amely $([a_i]/(a_i))^0$-t $([a_j]/(a_j))^0$-ba viszi. Ha $\delta(a, x) \in \kappa_A[a_i]$ valamilyen $a \in \kappa_A[a_i]$ és $x \in X$ elemekre, akkor

$$\delta(\varphi_{i,j}(a), x) = \varphi_{i,j}(\delta(a, x)) \in \kappa_A[a_j],$$

ezért $\varphi_{i,j}$ a $([\mathbf{a_i}]/(\mathbf{a_i}))^0$ parciális homomorf leképezése $([\mathbf{a_j}]/(\mathbf{a_j}))^0$.

Tegyük fel, hogy $i \succ j$. Legyen $b \in \kappa_A[a_j]$. Akkor $a_i \neq b \in [a_i]$ és így van olyan $p = x_1x_2 \dots x_k \in X^+$ $(x_1, x_2, \dots, x_k \in X)$ bemenő szó, hogy $b = a_ip$. Legyen m a legkisebb index, amelyre $a_ix_1x_2 \dots x_m \in \kappa[a_j]$. Akkor $a = a_ix_ix_2 \dots x_{m-1} \in \kappa_A[a_i] = ([a_i]/(a_i))^0$. (Az x^0 legyen az e üres szó.) Akkor

$$\delta(a, x_m) \notin \kappa_A[a_i] = ([a_i]/(a_i))^0.$$

Másrészről,

$$\delta(\varphi_{i,j}(a), x_m) = \varphi_{i,j}(\delta(a, x_m)) = \delta(a, x_m) \in \kappa_A[a_j] = ([a_j]/(a_j))^0,$$

mivel $\varphi_{i,j}$ az $[a_j]$ elemeit fixen hagyja. Ezzel megmutattuk, hogy a (3) feltétel is teljesül.

Konstruáljuk meg tetszőleges $i \geq j$ $(i, j \in T)$ elemekre (4) szerint a $\varphi_{i,j}$ függvényeket. A $\varphi_{i,j}$ függvény az $[\mathbf{a_i}]$ automata olyan retrakt homomorf leképezése $[\mathbf{a_j}]$-be, amely $\kappa_A[a_i]$-t $\kappa_A[a_j]$-be viszi. Így $\varphi_{i,j}$ tekinthető az $([\mathbf{a_i}]/(\mathbf{a_i}))^0$ főfaktor parciális homomorf leképezésének a $([\mathbf{a_i}]/(\mathbf{a_i}))^0$ főfaktorba. Ezenkívül, ha $k \leq j \leq i$ $(i, j, k \in T)$, akkor $\varphi_{i,k} = \varphi_{j,k}\varphi_{i,j}$.

Konstruáljuk meg (5) szerint a

$$\mathbf{B} = (B, X, \delta') = ([a_i]/(a_i), X, \delta_i; \varphi_{i,j}, T)$$

automatát. Nyilvánvaló, hogy $\mathbf{A}$ és $\mathbf{B}$ állapotai megegyeznek. Megmutatjuk, hogy $\delta = \delta'$. Legyenek $i \in T$, $a \in \kappa_A[a_i] = ([a_i]/(a_i))^0$ és $x \in X$ tetszőleges elemek. Tegyük fel, hogy $\delta(a, x) \in \kappa_A[a_j]$ $(i \geq j, j \in T)$. Legyen $i \geq k > j$ $(k \in T)$. Akkor $\delta(a, x) \in (a_k) \subset [a_k]$ és így

$$\delta(\varphi_{i,k}(a), x) = \varphi_{i,k}(\delta(a, x)) = \delta(a, x) \notin \kappa_A[a_k] = ([a_k]/(a_k))^0,$$

mivel $\varphi_{i,k}$ az $[a_k]$ elemeit fixen hagyja. Ha $j \geq k$, akkor

$$\delta(\varphi_{i,k}(a), x) = \varphi_{i,k}(\delta(a, x)) =$$

$$= \varphi_{j,k}\varphi_{i,j}(\delta(a, x)) = \varphi_{j,k}(\delta(a, x)) \in \kappa_A[a_k] = ([a_k]/(a_k))^0,$$

mivel $\varphi_{i,j}$ a

$$\delta(a, x) \in \kappa_A[a_j] = ([a_j]/(a_j))^0$$

elemet fixen hagyja és $\varphi_{j,k} : \kappa_A[a_j] \to \kappa_A[a_k]$. Következésképpen $i(a, x) = j$. Innen

$$\delta(a, x) = \varphi_{i,j}(\delta(a, x)) = \delta(\varphi_{i,j}(a), x) =$$

$$= \delta_{i(a,x)}(\varphi_{i,i(a,x)}(a), x) = \delta'(a, x).$$

Ezzel a tételt bebizonyítottuk. □

Feladatok

31.1. Ha az $\mathbf{A} = (A, X, \delta)$ automata kongruenciahálója komplementumos, akkor az $\mathbf{A}$ automata retraktálható. (→ Megoldás)

31.2. Legyen $\mathbf{B} = (B, X, Y', \delta, \lambda)$ az $\mathbf{A} = (A, X, Y, \delta, \lambda)$ Mealy automata részautomatája. Definiáljuk az $\mathbf{A}$ *automata* $\mathbf{B}$ *szerinti* $R'(B)$ *Rees kongruenciáját* a $R'(B) = R(\omega_B) \cap \rho_{max}$ feltétellel, ahol $R(\omega_B)$ az $\mathbf{A}$ automata vetületének (5.2)-ben definiált Rees kongruenciája és ρ_{max} az $\mathbf{A}$ automata (9.2)-ben definiált maximális kongruenciája. A $\mathbf{B}$ automata $\mathbf{A}$-nak akkor és csak akkor retrakt részautomatája, ha minden $a \in A$ állapotra $B \cap \rho_{max}[a] \neq \emptyset$ és $\mathbf{A}$-nak van olyan τ kongruenciája, amelyre $\tau \vee R'(B) = \rho_{max}$ és $\tau \wedge R'(B) = \iota_A$. (→ Megoldás)

VI. AUTOMATÁK ÉS NYELVEK

A II. részben láttuk, hogy az automataleképezések megadása a mindig végtelen értelmezési tartomány miatt általában problémát okoz. Egyszerűbb esetekben automataleképezést megadhatunk formulával vagy egy irányított fával. Adott esetben az automataleképezés megadásához az irányított fát elég magas szintig meg kell rajzolni, amely az áttekinthetőséget nehézkessé teszi. Egy kényelmes algoritmust először STEPHEN C. KLEENE adott a véges automatákkal indukálható automataleképezések megadására az ún. reguláris esemény (mai szóhasználattal: reguláris nyelv) segítségével. KLEENE ilyen irányú vizsgálatai jelentősen hozzájárultak a formális nyelvek algebrai elméletének kialakulásához. A formális nyelvek algebrai elmélete ma már a számítástudománynak fontos önálló területe, amelynek megalapozásában a döntő lépést NOAM CHOMSKY tette meg a generatív grammatikák fogalmának bevezetésével. CHOMSKY a generatív grammatika fogalmát a természetes nyelvek szintaktikai (nyelvtani) elemzése céljából vezette be. Egy természetes nyelv tekinthető az ábécéje (beleértve az írásjeleket és a szóközt is) feletti szabad félcsoport szintaktikailag és szemantikailag (jelentéstanilag) helyes mondatokból álló részhalmazának. A generatív grammatikák a programozási nyelvek, mint speciális formális nyelvek, esetén is alapvető fontosságúak. Egy programozási nyelvhez meg kell adni azon szabályok összeségét, amelyek segítségével definiálható, hogy egy ezen nyelven írott programot mikor tekintünk helyesnek. Ezeknek a szabályoknak az összeségét a programozási nyelv *szintaxis*ának nevezzük. A legelterjedtebb módszer egy programozási nyelv szintaxisának megadására a generatív grammatikával való megadás. Ezekkel a kérdésekkel nem foglalkozunk, de a véges automatáknak, mint nyelvfelismerő rendszereknek egy rövid megalapozását adjuk. Így a véges automaták analízisének és szintézisének problémáját kimenő jel nélküli automaták vizsgálatára tudjuk visszavezetni. A formális nyelvek szintaktikus elemzésének jó bevezetését adja magyarul FÜLÖP ZOLTÁN [11] jegyzete.

A formális nyelvek elméletének alapjait tárgyalja ARTO SALOMAA [18] ma is jól használható munkája. A [8] (www.math.bme.hu/~babcs/) jegyzetben magyar nyelven adunk részletesebb bevezetést a formális nyelvek elméletébe. A formális nyelvek egy jól kezelhető osztálya, a környezetfüggetlen nyelvek és az automaták kapcsolatáról tájékozódhatunk a www.inf.unideb.hu/~domosi/hallgato.html és a www.inf.u-szeged.hu/~fulop/oktatas/afl_jegyzet.pdf jegyzetekből.

32. Nyelvalgebrák

Legyen U tetszőleges nemüres halmaz. Összhangban a természetes nyelvek nyelvtani fogalmaival, a formális nyelvek elméletében U-t *ábécé*nek is mondjuk. Az U elemeit betűknek vagy jeleknek is nevezzük. Az U^* szabad monoid bármely L részhalmazát *(U feletti) formális nyelv*nek vagy röviden *nyelv*nek nevezzük. Ha $L' \subseteq L$, akkor azt mondjuk, hogy L' az L nyelv *résznyelve*. Az L nyelv elemeit *mondatok*nak is nevezzük. Ha L véges halmaz, akkor *véges nyelv*nek, ha pedig végtelen halmaz, akkor *végtelen nyelv*nek mondjuk. Az $\emptyset$ üres halmazt *üres nyelv*nek, az U^*-ot pedig *univerzális nyelv*nek nevezzük U felett.

A természetes nyelvek valamilyen véges ábécé feletti formális nyelvek. Legyen például U a magyar ábécé betűit, az írásjeleket és az elválasztó üres jelet tartalmazó halmaz. (Az elválsztó üres jel nem az üres szó!) A magyar nyelv az az $L(\subset U^*)$ nyelv, amelynek elemei az értelmes magyar szavak és mondatok halmaza, beleértve a betűket, az írásjeleket és az elválasztó üres jelet is.

Nyelvek egyesítésén, metszetén, különbségén halmazelméleti egyesítésüket, metszetüket, különbségüket értjük. Egy U halmaz feletti nyelvek halmaza, azaz U^* halmaz $P(U^*)$ hatványhalmaza a halmazelméleti egyesítés metszet és komplementerképzés műveletekre Boole algebra. Az üres szót továbbra is e-vel jelöljük. Az egyesítés, a metszet és komplementerképzés műveleteket *Boole műveletek*nek nevezzük. A nyelvek egyesítésének műveletét a nyelvek *összeadás*ának is nevezzük és a $+$ műveleti jelet is használjuk a formális nyelvek algebrai elméletében. Megállapodunk az egyszerűbb írásmód kedvéért abban is, hogy az $\{u\}$ $(u \in U \cup \{e\})$ egyelemű nyelveket azonositjuk u elemükkel, azaz $\{u\} = u$. Az U halmaz elemeit *elemi nyelvek*nek is hívjuk.

A nyelvek között további műveleteket vezetünk be. Az L_1 és L_2 nyelv *szorzatá*n vagy *konkatenációjá*n az

$$L_1L_2 = \{uv; u \in L_1, v \in L_2\}$$

nyelvet értjük. Egy U halmaz feletti nyelvek $\mathcal{L}(U)$ halmaza az összeadás $(+)$ és a konkatenáció $(\cdot)$ műveletére félgyűrűt alkot, amelynek $\emptyset$ a zéruseleme és e az egységeleme. Továbbá

$$(L_1 \cap L_2)L_3 \subseteq L_1L_3 \cap L_2L_3, \quad L_3(L_1 \cap L_2) \subseteq L_3L_1 \cap L_3L_2.$$

Definiáljuk egy L nyelv nemnegatív egész kitevős hatványait, mégpedig az

$$L^0 = e, \quad L^{k+1} = L^k L \quad (k \in N)$$

összefüggésekkel. Egy L nyelv *iteráltján* azt az L^* nyelvet értjük, amely azokból és csak azokból szavakból áll, amelyek előállíthatók véges sok L-beli szó szorzataként, beleértve az L elemeit, mint egytényezős és az üres szót, mint nullatényezős L-beli elemek szorzatát, azaz

$$L^* = \sum_{k=0}^{\infty} L^k.$$

A $*$ (egyváltozós) műveletet *iterációnak* nevezzük. Nem nehéz belátni, hogy bármely L nyelvre $(L^*)^* = L^*$, valamint $\emptyset^* = e^* = e$. Egy L nyelv *e-mentes iteráltján* értjük az $L^+ = \sum_{k=1}^{\infty} L^k$ nyelvet. Ez azt jelenti, hogy ha $e \in L$, akkor $L^+ = L^*$, ha pedig $e \notin L$, akkor $L^+ = L^* - e$. Az összeadás, a konkatenáció és a iteráció műveletét *reguláris műveletek*nek nevezzük. Az $\mathcal{L}(U) = (P(U^*), +, ., *)$ algebrai struktúrát (*az U halmaz feletti*) *nyelvalgebrának* nevezzük. $\mathcal{L}(U)$ nyelvalgebra tetszőleges L_1 és L_2 elemére

$$(L_1 \cap L_2)^* \subseteq L_1^* \cap L_2^*, \quad L_1^* + L_2^* \subseteq (L_1 + L_2)^*.$$

Egyszerűen bizonyítható a

32.1. Lemma
Ha L, L_1 és L_2 tetszőleges nyelvek, akkor teljesülnek az

$$L^* = e + LL^*, \quad LL^* = L^*L, \quad (L_1 + L_2)^* = (L_1^* L_2^*)^*,$$

$$L^* = (e + L + \cdots + L^{k-1})(L^k)^* \ (k \in N_+)$$

azonosságok.

Egy U halmaz feletti nyelvet *reguláris nyelv*nek nevezünk, ha előállítható az U elemeiből és az $\emptyset$ üres nyelvből a reguláris műveletek véges számú alkalmazásával. Ezek szerint minden véges nyelv, így minden elemi nyelv is reguláris. Az $\emptyset$ üres nyelvet is regulárisnak tekintjük. Mivel $e = \emptyset^*$, ezért az e nyelv is reguláris.

Ha $U = \{u_1, u_2, \ldots, u_n\}$, azaz U véges ábécé, akkor U^* és U^+ is reguláris nyelv , ugyanis

$$U^* = (u_1 + u_2 + \cdots + u_n)^*,$$

$$U^+ = (u_1 + u_2 + \cdots + u_n)(u_1 + u_2 + \cdots + u_n)^*.$$

Minden reguláris nyelvhez hozzárendelhetünk egy ún. (U *feletti*) *reguláris kifejezés*t az alábbi módon: Egy L nyelv reguláris kifejezésén értsünk olyan kifejezést, amely azt mutatja meg, hogyan állítható elő az L nyelv az U elemeiből és az $\emptyset$ üres nyelvből a reguláris műveletek véges számú alkalmazásával. Egy reguláris kifejezés tehát véges sok $u \in U$ és az $\emptyset$ szimbólumokból, a reguláris műveletek műveleti jeleiből és a műveletek elvégzésének sorrendjét meghatározó zárójelpárokból épül fel, azaz maga is egy szó az $U \cup \{\emptyset, +, ., *, (,)\}$ ábécé felett. Így az üres nyelv reguláris kifejezése az $\emptyset$ szimbólum, az $u \in U$ elemi nyelv reguláris kifejezése pedig az u szimbólum. A definícióból látható, hogy nyelvekből reguláris műveletek véges számú alkalmazásával kapott nyelvek egy reguláris kifejezését megkapjuk, ha a nyelvek reguláris kifejezéseit ugyanúgy kapcsoljuk össze reguláris műveletekkel, mint a nyelveket.

Ha a műveletek sorrendjét zárójelekkel nem adjuk meg egy kifejezésben, akkor megállapodás szerint először az iterációt, majd a szorzást, s végül az összeadást végezzük el. A definícióból látható, hogy minden reguláris kifejezés egyértelműen meghatároz egy reguláris nyelvet, ezért a reguláris nyelveket megadhatjuk reguláris kifejezésükkel is. A reguláris nyelvek nem határozzák meg egyértelműen reguláris kifejezésüket. Ha $U = \{u_1, u_2, \ldots, u_n\}$, akkor például az U^* univerzális nyelv az $(u_1 + u_2 + \cdots + u_n)^*$ és a

$$(u_1 + u_2 + \cdots + u_n)(u_1 + u_2 + \cdots + u_n)^* + \emptyset^*$$

reguláris kifejezéssel is megadható. Amikor egy reguláris nyelvet reguláris kifejezéssel adunk meg, a nyelv és a reguláris kifejezés közé egyenlőség jelet teszünk. Ekkor tulajdonképpen helytelenül járunk el, mivel az egyenlőség egyik oldalán szavaknak egy halmaza, a másik oldalon pedig egy formális kifejezés áll. Ebből azonban nem származik ellentmondás, a tárgyalásmódot viszont egyszerűbbé teszi.

Az U^*-beli $p^{-1} = u_{i_k} \ldots u_{i_2} u_{i_1}$ szót az U^*-beli $p = u_{i_1} u_{i_2} \ldots u_{i_k}$ szó *tükörképé*nek nevezzük. Ha $p_1, p_2, \ldots, p_k \in U^*$, akkor

$$(p_1 p_2 \ldots p_k)^{-1} = p_k^{-1} \ldots p_2^{-1} p_1^{-1}.$$

Egy L nyelv *tükörképe* pedig az pedig az $L^{-1} = \{p^{-1}; p \in L\}$ nyelv. Természetesen $(L^{-1})^{-1} = L$. Egy nyelvet (speciálisan egy szót) *palindrom*nak mondunk, ha megegyezik tükörképével. Egyszerű példák a palindromokra az $\emptyset$, e, U^*, U^+ nyelvek. Az összes (U^*-beli) palindromot tartalmazó nyelvet az (U *feletti*) *palindromok nyelvé*nek hívjuk. A palindromok nyelvének résznyelvei is palindromok. Azt az egyváltozós műveletet, amely minden szóhoz ill. nyelvhez a tükörképét rendeli, *tükrözés*nek hívjuk.

Jelölje $R(U)$ az U halmaz feletti reguláris nyelvek halmazát. $R(U)$ az U feletti nyelvek halmazának az a legszűkkebb részhalmaza, amely tartalmazza az U feletti véges nyelveket, zárt véges sok nyelv egyesítésére és szorzására, továbbá a nyelvek iterációjára. Ez azt is jelenti, hogy az $\mathcal{R}(U) = (R(U), +, ., *)$ algebrai struktúra az U feletti $\mathcal{L}(U)$ nyelvalgebra részalgebrája, amelyet *reguláris nyelvalgebrá*nak nevezünk. A definícióból az is látható, hogy minden reguláris nyelv tükörképe is reguláris, azaz $\mathcal{R}(U)$ zárt a tükrözésre. Később megmutatjuk, hogy a reguláris nyelvek Boole algebrát alkotnak az egyesítés, a metszet és a komplementerképzés műveletére.

Legyen L egy U halmaz feletti nyelv és $p \in U^*$ tetszőleges szó. Az L nyelv *p szerinti bal oldali deriváltjá*n az

$$L_p^{(b)} = \{q \in U^*; pq \in L\} \tag{32.1}$$

nyelvet értjük. Hasonló módon, L *p szerinti jobb oldali deriváltja* az

$$L_p^{(j)} = \{q \in U^*; qp \in L\} \tag{32.2}$$

nyelv. Nyilvánvaló, hogy $L_e^{(b)} = L_e^{(j)} = L$. Azokat az egyváltozós műveleteket, amelyek minden nyelvhez a $p \in U^*$ szerinti bal [jobb] oldali deriváltját rendeli, *p szerinti bal [jobb] oldali deriválás*nak nevezzük.

Tetszőleges U feletti L, L_1, L_2 nyelvekre és $u \in U$ betűre érvényesek az

$$(L^*)_u^{(b)} = L_u^{(b)} L^*, \quad (L^*)_u^{(j)} = L^* L_u^{(j)}, \tag{32.3}$$

$$(L_1 + L_2)_u^{(b)} = (L_1)_u^{(b)} + (L_2)_u^{(b)}, \quad (L_1 + L_2)_u^{(j)} = (L_1)_u^{(j)} + (L_2)_u^{(j)}, \tag{32.4}$$

$$\begin{aligned} (L_1 L_2)_u^{(b)} &= (L_1)_u^{(b)} L_2 + \varepsilon(L_1)(L_2)_u^{(b)}, \\ (L_1 L_2)_u^{(j)} &= L_1 (L_2)_u^{(j)} + (L_1)_u^{(j)} \varepsilon(L_2), \end{aligned} \tag{32.5}$$

$$L = \sum_{u \in U} u L_u^{(b)} + \varepsilon(L) = \sum_{u \in U} L_u^{(j)} u + \varepsilon(L) \tag{32.6}$$

azonosságok, ahol

$$\varepsilon(L) = \begin{cases} e, & \text{ha } e \in L, \\ \emptyset, & \text{ha } e \notin L. \end{cases}$$

Tetszőleges U feletti L, L_1, L_2 nyelvekre és $p \in U^*$ szóra fennállnak a következő azonosságok is:

$$(L_1 + L_2)^{-1} = L_1^{-1} + L_2^{-1},\ (L_1 L_2)^{-1} = L_2^{-1} L_1^{-1},\ (L^*)^{-1} = (L^{-1})^*, \tag{32.7}$$

$$(L_p^{(b)})^{-1} = (L^{-1})_{p^{-1}}^{(j)}, \quad (L_p^{(j)})^{-1} = (L^{-1})_{p^{-1}}^{(b)}. \tag{32.8}$$

Reguláris nyelv bal [jobb] oldali deriváltjai is regulárisak. (Ezt a 34.3. Tétel bizonyításában mutatjuk meg.) Ez azt jelenti, hog az U feletti reguláris nyelvek $\mathcal{R}_U$ halmaza zárt bármely $p \in U^*$ szó szerinti bal [jobb] oldali deriválás műveletére.

Legyenek U_k $(k \in I)$ tetszőleges ($U = \{u_k;\ k \in I\}$-től nem feltétlenül különböző) halmazok, legyen továbbá $V = \cup_{k\in I} U_k$. Definiáljunk egy $h : U \to P(V^*)$ leképezést úgy, hogy minden $u_k \in U$ elemre $h(u_k) \in P(U_k^*)$ teljesüljön, azaz minden u_k elemhez egy U_k feletti nyelvet rendeljen. A h leképezés értelmezését terjesszük ki az U^* szabad monoidra úgy, hogy (a kiterjesztés után is megtartva a h jelölést) legyen $h : U^* \to P(V^*)$, amelyre teljesüljenek a

$$h(e) = e, \quad h(pq) = h(p)h(q) \quad (p, q \in U^*)$$

feltételek. A h leképezést *helyettesítés*nek nevezzük. A helyettesítés fogalmát szavakról nyelvekre is kiterjesztjük úgy, hogy minden $L \subseteq U^*$ nyelvre legyen

$$h(L) = \sum_{p\in L} h(p).$$

Azt mondjuk, hogy a h helyettesítés *reguláris*, ha minden $h(u_k)$ $(k \in I)$ nyelv reguláris. Továbbá, h *e-mentes helyettesítés*, ha az e üres szót egyik $h(u_k)$ nyelv sem tartalmazza. Végül a h helyettesítést *homomorfizmus*nak nevezzük, ha minden $h(u_k)$ nyelv egyelemű. Látható, hogy ebben az esetben h az U^* szabad monoidnak az V^* szabad monoidba való monoid-homomorfizmusa. Ebben az esetben a $h(L)$ nyelvet az $L \subseteq U^*$ nyelv *homomorf képé*nek nevezzük. A reguláris kifejezés és a helyettesítés definíciójából közvetlenül adódik a következő tétel.

32.2. TÉTEL
A reguláris nyelvek halmaza zárt a reguláris helyettesítésre. Speciálisan, reguláris nyelv homomorf képe is reguláris.

33. Nyelvek felismerése automatákban

Ha az $\mathbf{A} = (A, A_0, X, \delta)$ iniciális kimenő jel nélküli automata $A \neq \emptyset$ állapot halmazának egy F részhalmazát kitüntetjük, akkor a *felismerő automata* vagy *akceptor* fogalmához jutunk. Az F halmazt a *végállapotok halmazá*nak nevezzük, az automatára pedig az $\mathbf{A}_F = (A, A_0, X, \delta; F)$ jelölést használjuk. Ha $F = \emptyset$, akkor az $\mathbf{A}_F$ automatát azonosítjuk $\mathbf{A}$-val. Azt mondjuk, hogy az X feletti L nyelv *felismerhető* az $\mathbf{A}_F = (A, A_0, X, \delta; F)$ automatában, vagy más szóval az $\mathbf{A}$ automata *előállítja* vagy *elfogadja* az L nyelvet, ha

$$L = \{p \in X^*; a_0p \in F, a_0 \in A_0\}. \tag{33.1}$$

Ebben az esetben használjuk az $L = L(\mathbf{A}, A_0, F)$ jelölést. Úgy is mondjuk, hogy az L nyelvet az $\mathbf{A} = (A, A_0, X, \delta)$ automata (az $F(\subseteq A)$ halmazzal) *felismeri* vagy *előállítja* vagy *elfogadja.* Az $\emptyset$ üres nyelvet bármely iniciális kimenő jel nélküli automata felismeri, mégpedig az $\emptyset$ üres halmazzal. Ha $F = \{a\}$, akkor az $F = a$ jelölést is használjuk és úgy beszélünk, hogy $\mathbf{A}$ felismeri az L nyelvet az a állapottal.

A (33.1) definícióból adódik, hogy

$$L(\mathbf{A}, A_0, F) = \cup_{a_0 \in A_0} L(\mathbf{A}, a_0, F),$$

azaz elegendő egy kezdő állapotú automatákat tekinteni. Az egy kezdő állapotú felismerő automatákat *Rabin–Scott automaták*nak nevezzük. A definícióból az is látható, hogy elegendő iniciálisan összefüggő Rabin–Scott automatákra szorítkozni.

Bármely X feletti L nyelv felismerhető iniciálisan összefüggő szabad automatában. Ha ugyanis $\mathbf{X}^* = (X^*, X, \delta)$ a (3.10) feltétellel definiált iniciális összefüggő szabad automata, akkor az ${\mathbf{X}^*}_L = (X^*, e, X, \delta; L)$ Rabin–Scott automata pontosan az L nyelvet ismeri fel.

Megállapodunk abban is, hogy felismerő automata homomorf képe is felismerő automata legyen, mégpedig úgy, hogy a homomorfizmus iniciális homomorfizmus legyen. Továbbá egy állapot képe akkor és csak akkor legyen végállapot, ha az állapot maga is végállapot. Az $\mathbf{A}_F = (A, a_0, X, \delta; F)$ Rabin–Scott automatát kiegészítjük az $\mathbf{A}_{F,\mu} = (A, a_0, X, Y, \delta, \mu)$ Moore automatává, ahol $Y = \{0, 1\}$, továbbá bármely $a \in A$ állapot esetén $\mu(a) = 1$, ha $a \in F$ és $\mu(a) = 0$, ha $a \notin F$. Az $\mathbf{A}_{F,\mu}$-t az $\mathbf{A}_F$ *Rabin–Scott automatához rendelt Moore automatá*nak nevezzük. A Rabin–Scott automatához rendelt Moore automata működését úgy képzelhetjük el, hogy „igen”-t mond akkor, ha $p \in L$ ($\mu(a_0p) = 1$) ill. „nem”-et mond, ha $p \notin L$ ($\mu(a_0p) = 0$). Vagyis, ha $\alpha_{a_0} : X^* \to \{0, 1\}^*$ az $\mathbf{A}_{F,\mu}$ Moore automata által indukált, (7.7)-ben definiált automataleképezés, akkor

$$L = \{p \in X^*; \alpha_{a_0}(p) \in \{0, 1\}^*1\}.$$

*Rabin–Scott automata kongruenciái*n a hozzárendelt Moore automata kongruenciáit értjük. Felismerő automatát *egyszerű*nek nevezzük, ha a hozzá tartozó Moore automata egyszerű. Az $\mathbf{A}_F = (A, a_0, X, \delta; F)$ és $\mathbf{B}_{F'} = (B, b_0, X, \delta'; F')$ Rabin–Scott automatákat akkor nevezzük *ekvivalens*nek, ha ugyanazt a nyelvet ismerik fel.

Az $\mathbf{A}_F = (A, a_0, X, \delta; F)$ Rabin–Scott automata karakterisztikus félcsoportján az $\mathbf{A} = (A, X, \delta)$ kimenő jel nélküli automata karakterisztikus félcsoportját értjük. A 6.5. Tétel szerint ez egyenlő a Rabin–Scott automatához rendelt Moore automata karakterisztikus félcsoportjával.

A definícióból nyilvánvaló, hogy minden Rabin–Scott automata egyetlen nyelvet ismer fel, de egy nyelvet több automata is felismerhet. Igaz azonban a következő tétel.

33.1. Lemma
Rabin–Scott automaták akkor és csak akkor ekvivalensek, ha a hozzájuk rendelt Moore automaták iniciálisan Moore-ekvivalensek.
Iniciálisan összefüggő ekvivalens Rabin–Scott automatákhoz rendelt Moore automaták Moore-ekvivalensek.

Bizonyítás. Legyenek az $\mathbf{A}_F = (A, a_0, X, \delta; F)$ és a $\mathbf{B}_{F'} = (B, b_0, X, \delta'; F')$ Rabin–Scott automatákhoz rendelt $\mathbf{A}_{F,\mu}$ és $\mathbf{B}_{F',\mu'}$ Moore automaták iniciálisan Moore-ekvivalensek. Akkor ebből, (9.4)-et is felhasználva, következik, hogy bármely $p \in X^*$ szóra

$$a_0 p \in F \quad \Longleftrightarrow \quad b_0 p \in F',$$

s így $L(\mathbf{A}, F) = L(\mathbf{B}, F')$.

Megfordítva, tegyük fel, hogy az $\mathbf{A}_F$ és a $\mathbf{B}_{F'}$ Rabin–Scott automatákra $L(\mathbf{A}, F) = L(\mathbf{B}, F')$, azaz minden $p \in X^*$ bemenő szóra $\mu(a_0 p) = \mu'(b_0 p)$ teljesül. Az átmenetfüggvény (1.5) és a jelfüggvény (1.7) kiterjesztése szerint minden $p = x_1 x_2 \dots x_k \in X^+$ bemenő szóra

$$\mu(\delta(a_0, p)) = \mu((a_0 x_1)(a_0 x_1 x_2) \dots (a_0 x_1 x_2 \dots x_k)) =$$

$$= \mu(a_0 x_1)\mu(a_0 x_1 x_2) \dots \mu(a_0 x_1 x_2 \dots x_k) =$$

$$= \mu'(b_0 x_1)\mu'(b_0 x_1 x_2) \dots \mu'(b_0 x_1 x_2 \dots x_k) =$$

$$= \mu'((b_0 x_1)(b_0 x_1 x_2) \dots (b_0 x_1 x_2 \dots x_k)) = \mu'(\delta'(b_0, p)).$$

Ez, (9.7)-et is felhasználva azt jelenti, hogy $\mathbf{A}_{F,\mu}$ és $\mathbf{B}_{F',\mu'}$ iniciálisan Moore-ekvivalensek.

A 9.2. Tétel szerint iniciálisan összefüggő iniciálisan Moore-ekvivalens automaták Moore-ekvivalensek is. □

Legyen L tetszőleges X ábécé feletti nyelv. Definiáljuk az X^* szabad félcsoporton a τ_L és a ϑ_L (binér) relációkat a

$$(p, q) \in \tau_L \quad \Longleftrightarrow \quad (\forall r \in X^*)(pr \in L \iff qr \in L) \tag{33.2}$$

illetve a

$$(p, q) \in \vartheta_L \quad \Longleftrightarrow \quad (\forall r, s \in X^*)(spr \in L \iff sqr \in L) \tag{33.3}$$

feltételekkel. Nem nehéz belátni, hogy τ_L jobb kongruencia, ϑ_L pedig kongruencia X^*-on, továbbá $\vartheta_L \subseteq \tau_L$. Ha $L = \emptyset$, akkor $\vartheta_L = \tau_L = \omega_{X^*}$. Az is látható, hogy L τ_L-osztályok, s így ϑ_L-osztályok egyesítése is.

33.2. Lemma
Legyen τ tetszőleges jobb kongruencia [kongruencia] X^*-on és $L \neq \emptyset$ tetszőleges nyelv X felett. Az L nyelv akkor és csak akkor τ-osztályok egyesítése, ha $\tau \subseteq \tau_L$ [$\tau \subseteq \vartheta_L$].

Bizonyítás. Legyen τ egy jobb kongruencia X^*-on és az $L \neq \emptyset$ egy X feletti nyelv. Tegyük fel, hogy $(p, q) \in \tau$ $(p, q \in X^*)$. Akkor minden $r \in X^*$ szóra $(pr, qr) \in \tau$. Ha L τ-osztályok egyesítése, úgy $pr \in L$ akkor és csak akkor, ha $qr \in L$, azaz $(p, q) \in \tau_L$, vagyis $\tau \subseteq \tau_L$. Hasonlóan látható be, hogy ha τ kongruencia és L τ-osztályok egyesítése, akkor $\tau \subseteq \vartheta_L$. Az állítás megfordítása nyilvánvalóan igaz. □

33.3. Lemma
Az X^* szabad monoid tetszőleges ϑ bal kongruenciájára, $\vartheta \subseteq \tau_L$ akkor és csak akkor, ha $\vartheta \subseteq \vartheta_L$.

Bizonyítás. Ha ϑ bal kongruencia X^*-on és $\vartheta \subseteq \vartheta_L$, akkor $\vartheta \subseteq \tau_L$. Megfordítva, legyen ϑ bal kongruencia X^*-on és $\vartheta \subseteq \tau_L$. Tegyük fel, hogy $(p, q) \in \vartheta$ $(p, q \in X^*)$. Ez azt jelenti, hogy minden $s \in X^*$ szóra $(sp, sq) \in \vartheta$. Mivel $\vartheta \subseteq \tau_L$, ezért $(sp, sq) \in \tau_L$, így minden $r \in X^*$ szóra $spr \in L$ akkor és csak akkor, ha $sqr \in L$, azaz $(p, q) \in \vartheta_L$. Amiből kapjuk, hogy $\vartheta \subseteq \vartheta_L$. □

A ϑ_L kongruenciát *szintaktikus kongruenciá*nak nevezzük, s X^+-ra való szűkítését az egyszerűség kedvéért továbbra is ϑ_L-lel jelöljük. Az $S(L)$ félcsoportot L *szintaktikus félcsoportjá*nak nevezzük, ha izomorf az X^+/ϑ_L faktorfélcsoporttal. Hasonlóan beszélhetünk L *szintaktikus monoidjá*ról is, ha ϑ_L-et X^+ helyett X^*-n tekintjük. Hasonlóan a τ_L jobb kongruenciát *szintaktikus jobb kongruenciá*nak hívjuk,

Legyen $\mathbf{A} = (A, a_0, X, \delta)$ tetszőleges iniciális kimenő jel nélküli automata és $\rho_{\mathbf{A},a_0}$ az X^* bemenő félcsoporton a (6.1) feltétellel definiált jobb kongruencia, azaz tetszőleges $p, q \in X^*$ bemenő szavakra

$$(p, q) \in \rho_{\mathbf{A},a_0} \iff a_0p = a_0q.$$

Legyen továbbá $\rho_{\mathbf{A}}$ az X^* bemenő félcsoporton a (6.2) feltétellel megadott kongruencia, vagyis

$$(p, q) \in \rho_{\mathbf{A}} \iff (\forall a \in A)(ap = aq).$$

33.4. Tétel
Bármely X feletti $L \neq \emptyset$ nyelv esetén ekvivalensek a következő állítások:

(i) Az L nyelv felismerhető az $\mathbf{A} = (A, a_0, X, \delta)$ automatában az állapothalmaz valamely részhalmazával;
(ii) Az L nyelv előállítható $\rho_{\mathbf{A},a_0}$-osztályok egyesítéseként;
(iii) $\rho_{\mathbf{A},a_0} \subseteq \tau_L$.

Bizonyítás. Az $(i) \Longrightarrow (ii)$ implikáció igazolásához tegyük fel, hogy az L nyelv felismerhető az $\mathbf{A}_F$ Rabin–Scott automatában. Tetszőleges $p, q \in X^*$ szavakra a $p \in L$ és a $(p, q) \in \rho_{\mathbf{A},a_0}$ feltételekből következik, hogy $a_0p \in F$ és $a_0p = a_0q$. Ez azt jelenti, hogy $q \in L$, ezért L $\rho_{\mathbf{A},a_0}$-osztályok egyesítése.

Megfordítva, az $(ii) \Longrightarrow (i)$ implikáció megmutatásához tegyük fel, hogy az L nyelv előállítható a C_i $(i \in I)$ $\rho_{\mathbf{A},a_0}$-osztályok egyesítéseként. Válasszunk ki az I indexhalmaz minden i elemére a C_i osztályból egy p_i szót. Ha $F = \{a_0p_i; i \in I\}$, akkor az $\mathbf{A}_F$ Rabin–Scott automata felismeri az L nyelvet.

Az $(ii) \Longleftrightarrow (iii)$ ekvivalencia könnyen következik a 33.2. Lemmából. □

33.5. Lemma

Ha az X feletti $L \neq \emptyset$ nyelv felismerhető az $\mathbf{A} = (A, a_0, X, \delta)$ automatában az állapothalmaz valamely részhalmazával, akkor $\rho_\mathbf{A} \subseteq \vartheta_L$.

Bizonyítás. Mivel $\rho_\mathbf{A} \subseteq \rho_{\mathbf{A},a_0}$, ezért a 33.4. Tétel (iii) állításából következik, hogy $\rho_\mathbf{A} \subseteq \tau_L$.A 33.3. Lemma szerint $\rho_\mathbf{A} \subseteq \vartheta_L$. □

A 33.2. Lemma alapján ez azt is jelenti, hogy az L nyelv előállítható $\rho_\mathbf{A}$-osztályok egyesítéseként is.

33.6. Tétel

Ha az X feletti $L \neq \emptyset$ nyelv felismerhető az $\mathbf{A} = (A, a_0, X, \delta)$ automatában az állapothalmaz valamely részhalmazával, akkor az $S(L)$ szintaktikus félcsoport [monoid] az $S(\mathbf{A})$ karakterisztikus félcsoport [monoid] homomorf képe. Ha $\mathbf{A}$ egyszerű iniciálisan összefüggő automata, akkor $S(\mathbf{A}) = S(L)$.

Bizonyítás. A 33.5. Lemmából következik, hogy $\rho_\mathbf{A} \subseteq \vartheta_L$. Ebből a második izomorfiatételt alkalmazva, kapjuk a tétel első állítását.

Legyen a $\mathbf{A}_F$ automata iniciálisan összefüggő és a hozzá rendelt $\mathbf{A}_{F,\mu}$ Moore automata egyszerű. Megmutatjuk, hogy $\vartheta_L \subseteq \rho_\mathbf{A}$. Legyen $(p, q) \in \vartheta_L$ $(p, q \in X^*)$, azaz minden $s, r \in X^*$ párra $spr \in L$ akkor és csak akkor, ha $sqr \in L$. Ha az $\mathbf{A}$ automata az L nyelvet az $F(\subseteq A)$ halmazzal ismeri fel, akkor ebből következik, hogy minden $s, r \in X^*$ párra $a_0spr \in F$ akkor és csak akkor, ha $a_0sqr \in F$. Mivel $\mathbf{A}$ iniciálisan összefüggő, azaz $A = \{a_0s; s \in X^*\}$, ezért minden $a \in A$ állapotra és $r \in X^*$ bemenő szóra $apr \in F$ akkor és csak akkor, ha $aqr \in F$, azaz $\mu(apr) = \mu(aqr)$. A μ jelfüggvény (1.7) kiterjesztését is figyelembe véve, kapjuk, hogy minden $a \in A$ és $r \in X^*$ esetén $\mu(\delta(ap, r)) = \mu(\delta(aq, r))$. De az $\mathbf{A}$-hoz rendelt Moore automata egyszerű, így minden $a \in A$ állapotra $ap = aq$, azaz $(p, q) \in \rho_\mathbf{A}$, vagyis $\vartheta_L \subseteq \rho_\mathbf{A}$, s így $\vartheta_L = \rho_\mathbf{A}$. Ezzel bebizonyítottuk, hogy $S(\mathbf{A}) = S(L)$. □

33.7. Tétel

Ekvivalens iniciálisan összefüggő Rabin–Scott automaták között izomorfiától eltekintve egyetlen olyan automata van, amely a többi homomorf képe.

Bizonyítás. Legyen L tetszőleges X feletti nyelv. Definiáljuk az $\mathbf{X}^*/\tau_L = (X^*/\tau_L, \tau_L[e], X, \delta)$ iniciális automata δ átmenetfüggvényét úgy, hogy minden $\tau_L[p] \in X^*/\tau_L$ és $x \in X$ esetén

$$\delta(\tau_L[p], x) = \tau_L[px] \tag{33.4}$$

teljesüljön, ahol e szokásosan az üres szót jelenti. Mivel τ_L jobb kongruencia X^*-on, ezért δ jól definiált. Az átmenetfüggvény (1.4) és (1.5) kiterjesztése szerint $\delta(\tau_L[e], e) = \tau_L[e]$ és minden $p = x_1x_2 \dots x_k \in X^+$ bemenő szóra

$$\delta(\tau_L[e], p) = \tau_L[x_1]\tau_L[x_1x_2] \dots \tau_L[p].$$

Így az L nyelv felismerhető az állapothalmaz $\{\tau_L[p]; p \in L\}$ részhalmazával.

Tegyük fel, hogy L-et felismeri az $\mathbf{A}_F = (A, a_0, X, \delta; F)$ iniciálisan összefüggő Rabin–Scott automata. Tekintsük az $\mathbf{A}_F$ automatához rendelt $\mathbf{A}_{F,\mu}$ Moore automatát. Legyen $\pi_{\max}$ az $\mathbf{A}_{F,\mu}$ Moore automata (9.4)-ben definiált maximális kongruenciája. Nem nehéz megmutatni, hogy tetszőleges $p, q \in X^*$ bemenő szavakra $(a_0p, a_0q) \in \pi_{\max}$ akkor és csak akkor, ha $(p, q) \in \tau_L$. Az a $\varphi : A/\pi_{\max} \to X^*/\tau_L$ leképezés, amelyre minden $p \in X^*$ esetén $\varphi(\pi_{\max}[a_0p]) = \tau_L[p]$ teljesül, az $\mathbf{A}/\pi_{\max}$ egyszerű Moore automata izomorf leképezése az $\mathbf{X}^*/\tau_L$ automatára. Továbbá, ha a kezdő állapot $\pi_{\max}[a_0]$, akkor az L nyelv felismerhető az állapothalmaz $\{\pi_{\max}[a_0p]; p \in L\}$ részhalmazával. Vagyis $\mathbf{X}^*/\tau_L$ az $\mathbf{A}_F$ Rabin–Scott automata homomorf képe. □

A 33.7. Tétel szerint $\mathbf{X}^*/\tau_L$ minimális abban az értelemben, hogy ha $\mathbf{A}_F = (A, a_0, X, \delta; F)$ tetszőleges L-et felismerő Rabin–Scott automata, akkor $|X^*/\tau_L| \le |A|$.

Gyakorlati szempontból fontosak a véges automatákban felismerhető nyelvek. Az alábbi tétel nyelvek véges automatákban való felismerésének néhány szükséges és elégséges feltételét adja. A tételből az is látható, hogy egy nyelv akkor és csak akkor ismerhető fel véges automatában, ha szintaktikus félcsoportja véges.

33.8. Tétel

Bármely X véges ábécé feletti $L \neq \emptyset$ nyelv esetén ekvivalensek a következő állítások:

(i) Az L nyelv felismerhető véges iniciális automatában az állapothalmaz valamely nemüres részhalmazával;
(ii) Az L nyelv megadható X^* egy véges indexű kompatibilis osztályozásához tartozó osztályok egyesítéseként;
(iii) A τ_L jobb kongruencia véges indexű;
(iv) Az ϑ_L szintaktikus kongruencia véges indexű.

Bizonyítás. Megmutatjuk, hogy az (i) feltételből következik az (ii) feltétel. Tegyük fel, hogy az L nyelv felismerhető az $\mathbf{A} = (A, a_0, X, \delta)$ automatában az $F \neq \emptyset$ halmazzal. A $\rho_{\mathbf{A},a}$ jobb kongruencia (6.1) definíciójából látható, hogy minden $a \in A$ állapotra $|X^*/\rho_{\mathbf{A},a}| \leq |A|$, azaz minden $\rho_{\mathbf{A},a}$ jobb kongruencia véges indexű. Véges sok véges indexű jobb kongruencia közös része is véges indexű, ezért, (6.2) szerint, a $\rho_{\mathbf{A}}$ kongruencia is véges indexű. A 33.4. Tétel (ii) állítása szerint L megadható $\rho_{\mathbf{A},a_0}$-osztályok egyesítéseként. Mivel $\rho_{\mathbf{A}} \subseteq \rho_{\mathbf{A},a_0}$, ezért L megadható $\rho_{\mathbf{A}}$-osztályok egyesítéseként is.

Az $(ii) \implies (iii)$ implikáció igazolásához tegyük fel, hogy az L nyelv megadható ρ-osztályok egyesítéseként, ahol ρ az X^* egy véges indexű kongruenciája. A 33.2. Lemma szerint $\rho \subseteq \tau_L$, ezért τ_L is véges indexű.

A 33.7. Tétel bizonyítása szerint a (iii) feltételből következik az (i) feltétel.

Az $(i) \implies (iv)$ implikáció igazolásához tegyük fel, hogy az L nyelv felismerhető az $\mathbf{A} = (A, a_0, X, \delta)$ véges iniciális automatában az állapothalmaz valamely nemüres részhalmazával. A 6.2. Lemma alapján az A állapothalmaz végességéből következik, hogy az $S(\mathbf{A})$ karakterisztikus félcsoport is véges. A 33.6. Tétel felhasználásával kapjuk, hogy az $S(L)$ szintaktikus félcsoport is véges, azaz ϑ_L véges indexű.

Legyen a ϑ_L kongruencia véges indexű. $\vartheta_L \subseteq \tau_L$, ezért τ_L is véges indexű. Tehát az (iv) feltételből következik az (iii) feltétel. □

Tegyük fel, hogy az X ábécé feletti L nyelv felismerhető véges automatában. Az L nyelv *súlyán* azt az $s(L)$ nemnegatív egész számot értjük, amelyre L felismerhető $s(L)$ állapotú automatában és ha L felismerhető valamely $\mathbf{A} = (A, X, \delta)$ automatában, akkor $s(L) \leq |A|$.

33.9. Tétel
Valamely X ábécé feletti véges automatában felismerhető L nyelv súlya megegyezik a τ_L jobb kongruencia indexével.

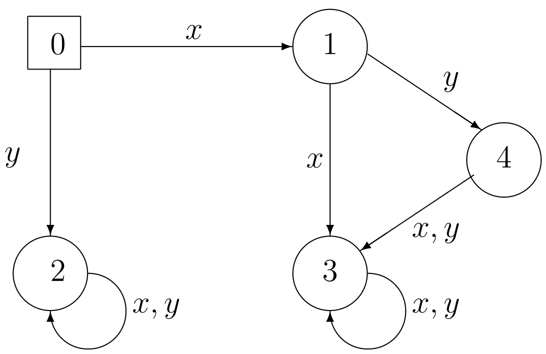
Bizonyítás. A 33.7. és a 33.8. Tételek alapján, ha egy X feletti L nyelv felismerhető véges automatával, akkor az X^*/τ_L automata a legkisebb állapotszámú L-et felismerő automata. □

A 33.7. Tétel bizonyítása szerint, ha az $\mathbf{A}_F = (A, a_0, X, \delta; F)$ véges iniciálisan összefüggő Rabin–Scott automata felismeri az L nyelvet, akkor a $\mathbf{A}_F$ automatához rendelt $\mathbf{A}_{F,\mu}$ Moore automatából az Aufenkamp-Hohn algoritmussal megkonstruálható az $\mathbf{A}_{F,\mu}/\pi_{\max}$ egyszerű Moore automata, amelyből $\pi_{\max}[a_0]$ kezdő állapottal és a végállapotok $\{\pi_{\max}[a]; a \in F\}$ halmazával a $\mathbf{X}^*/\tau_L$ Rabin–Scott automatával izomorf Rabin–Scott automatát kapunk. Megjegyezzük, hogy a μ jelfüggvény definíciója miatt a (10.3)-ban definiált

ζ_0-osztályok F és $A-F$. Továbbá 10.2. Lemma szerint $(a,b) \in \zeta_{i+1}$ akkor és csak akkor, ha $(a,b) \in \zeta_i$ és minden $x \in X$ bemenő jelre $(\delta(a,x), \delta(b,x)) \in \zeta_i$.

33.10. Példa

Az alábbi átmenetgráffal megadott, 0 kezdő állapotú iniciálisan összefüggő automata a végállapotok $\{3,4\}$ halmazával az $L = x\{x,y\}^+$ nyelvet ismeri fel.



9. ábra

Az Aufenkamp-Hohn algoritmussal megadjuk meg az L nyelvet felismerő egyszerű automatát.

A ζ_0-osztályok: $\{0,1,2\}, \{3,4\}$, a ζ_1-osztályok: $\{0,2\}, \{1\}, \{3,4\}$, a ζ_2-osztályok: $\{0\}, \{1\}, \{2\}, \{3,4\}$. Továbbá $\zeta_3 = \zeta_2$, azaz $\pi_{\max} = \zeta_2$. Tehát az egyszerű automata négyállapotú, állapotai: $a = \{0\}, b = \{1\}, c = \{2\}, d = \{3,4\}$. A kezdő állapot a és a végállapot d. Az egyszerű automata átmenetgráfját is könnyen felrajzolhatjuk.

Formális nyelvek nemdeterminisztikus automatákkal is felismerhetők. A fejezetet e fogalom ismertetésével zárjuk. Azt mondjuk, hogy az X feletti L nyelvet az $\mathbf{A} = (A, A_0, X, \delta)$ nemdeterminisztikus kimenő jel nélküli iniciális automata az $F(\subseteq A)$ halmazzal *felismeri* vagy *előállítja* vagy *elfogadja*, ha

$$L = \{p \in X^*; \delta'(A_0, p) \cap F \neq \emptyset\}, \tag{33.5}$$

ahol az (1.19) definíció szerint $\delta'(A_0, p)$ a kezdő állapotok A_0 halmazából p szóval elérhető állapotok halmazát jelöli. Determinisztikus esetben ez a definíció megegyezik a (33.1) definícióval. (Az egyelemű halmazokat azonosítjuk elemükkel.)

Az $\mathbf{A} = (A, A_0, X, \delta)$ iniciális nemdeterminisztikus automata akkor és csak akkor ismeri fel az L nyelvet az F halmazzal, ha az (1.16)-(1.19) feltételekkel megadott $\mathbf{P}(A) = (P(A), A_0, X, \delta')$ iniciális hatványautomatája felismeri L-t a

$$T = \{B \in P(A); B \cap F \neq \emptyset\} \tag{33.6}$$

halmazzal.

Mivel minden X feletti nyelv felismerhető determinisztikus automatával, sőt (3.10) szerint speciálisan iniciálisan összefüggő automatával is, ezért a nemdeterminisztikus automatákkal felismert X feletti nyelvek megyegyeznek a determinisztikus automatákkal felismert X feletti nyelvekkel, azaz az X feletti nyelvekkel. Az 1. fejezetben megállapodtunk abban, hogy egy automata, ha mást nem mondunk, akkor teljesen definiált és determinisztikus, s így a nemdeterminisztikus automaták osztályának valódi részosztálya. Ezért azt várnánk, hogy a véges nemdeterminisztikus automatákkal felismerhető nyelvek osztálya bővebb a véges automatákkal felismerhető nyelvek osztályánál. Az alábbiakban megmutatjuk, hogy ez nincs így. Ennek ellenére azért foglalkozunk a nemdeterminisztikus automatákkal, mert ezek és több analogonjuk későbbi konstrukciókban fontos szerepet játszanak.

33.11. Tétel
A véges nemdeterminisztikus automatákkal felismerhető nyelvek megegyeznek a véges automatákkal felismerhető nyelvekkel.

Bizonyítás. Mivel minden véges automata megállapodás szerint teljesen definiált és determinisztikus, így definíció szerint nem determinisztikus is. Ezért, ha egy nyelv felismerhető véges automatával, akkor felismerhető véges nemdeterminisztikus automatával is.

Megfordítva, tegyük fel, hogy az X feletti L nyelv felismerhető az $\mathbf{A} = (A, A_0, X, \delta)$ $(A_0 \subseteq A)$ véges iniciális nemdeterminisztikus automatában az $F(\subseteq A)$ halmazzal. Inicializáljuk az $\mathbf{P}(\mathbf{A})$ hatványautomatát az A_0 állapottal, azaz legyen $\mathbf{P}(\mathbf{A}) = (P(A), A_0, X, \delta')$. Akkor (33.6) szerint az $\mathbf{P}(A)$ véges automata felismeri L-t a $T = \{B \in P(A); B \cap F \neq \emptyset\}$ halmazzal. □

Feladatok

33.1. Az $\mathbf{A} = (A, a_0, X, \delta)$ véges automatában az állapothalmaz F részhalmazával felismerhető L nyelv akkor és csak akkor véges, ha a $\delta(a_0, p)$ $(a_0p \in F)$ sorozatok különböző állapotokból állnak. (→ Megoldás)

33.2. Egy X ábécé feletti L nyelvet *kommutatív nyelv*nek nevezünk, ha valahányszor $x_1 x_2 \dots x_n \in L$ $(x_1, x_2, \dots, x_n \in X)$, mindannyiszor $x_{\pi(1)} x_{\pi(2)} \dots x_{\pi(n)} \in L$ az $\{1, 2, \dots, n\}$ halmaz bármely π permutácójára. Egy nyelv akkor és csak akkor kommutatív, ha felismerhető kommutatív automatában. (→ Megoldás)

33.3. Ha az $L \neq \emptyset$ nyelv felismerhető az $\mathbf{A} = (A, A_0, X, \delta)$ nemdeterminisztikus automatában az F halmazzal, akkor az L nyelv L^{-1} tükörképe felismerhető az $\mathbf{A}_d = (A, F, X, \delta_d)$ duális automatában az A_0 halmazzal. (→ Megoldás)

34. Kleene tétele

A 33.8. és a 33.11. Tételekben a véges automatákkal felismerhető nyelvekkel foglalkoztunk. A következő tételben megmutatjuk, hogy a véges ábécé feletti reguláris nyelvek éppen a véges automatákban felismerhető nyelvek.

34.1. Tétel (Kleene tétele)
Véges ábécé feletti nyelv akkor és csak akkor reguláris, ha felismerhető véges automatában.

Bizonyítás. Először megmutatjuk azt, hogy bármely $X = \{x_1, x_2, \dots, x_m\}$ ábécé feletti reguláris nyelv felismerhető véges automatában. A bizonyítást úgy végezzük el, hogy megadunk olyan véges automatákat, amelyek felismerik az $\emptyset$ üres nyelvet, az e nyelvet és az x_j $(j = 1, 2, \dots m)$ elemi nyelveket. Ezután megmutatjuk, hogy a véges automatákban felismerhető X feletti nyelvek halmaza zárt a reguláris műveletekre. Ez pontosan azt jelenti, hogy az X feletti reguláris nyelvek felismerhetők véges automatákban.

Az $\emptyset$ üres nyelv tetszőleges véges automatában felismerhető az állapothalmaz üres részhalmazával.

Az e üres szóból álló egyelemű nyelv felismerhető abban az

$$\mathbf{A} = (\{a_0, a\}, a_0, X, \delta)$$

kétállapotú (beállító) automatában az a_0 állapottal, amelyben minden $x \in X$ bemenő jelre

$$\delta(a_0, x) = \delta(a, x) = a$$

teljesül.

Bármely $x_i \in X$ egyelemű nyelv felismerhető az

$$\mathbf{A}_i = (\{a_0, a_1, a_2\}, a_0, X, \delta_i)$$

automatában az a_1 állapottal, amelynek állapotfüggvényét minden $x_j \in X$ bemenő jelre a

$$\delta_i(a_k, x_j) = \begin{cases} a_1, & \text{ha } k = 0,\ j = i, \\ a_2, & \text{ha } k = 0,\ j \neq i, \\ a_2, & \text{ha } k = 1, 2 \end{cases}$$

összefüggéssel definiáljuk.

Legyenek L_1 és L_2 olyan X feletti nyelvek, amelyek felismerhetők az $\mathbf{A}_1 = (A_1, a_{10}, X, \delta_1)$ ill. az $\mathbf{A}_2 = (A_2, a_{20}, X, \delta_2)$ véges automatákban az F_1 ill. F_2 halmazokkal. Feltehetjük, hogy $L_1 \neq L_2$. (Az $L_1 = L_2$ esetben $L_1 + L_2 = L_1 = L_2$) Megmutatjuk, hogy az $L_1 + L_2$ nyelv felismerhető az $\mathbf{A} = \mathbf{A}_1 \times \mathbf{A}_2$ direkt szorzatban, amely szintén véges, az $F = (F_1 \times A_2) \cup (A_1 \times F_2)$ halmazzal. (A kezdő állapot természetesen (a_{10}, a_{20}).) Legyen először $p \in L_1 + L_2$. Akkor $p \in L_1$ vagy $p \in L_2$. Szimmetria okokból elegendő a $p \in L_1$ esettel foglalkozni. Ekkor $a_{10}p \in F_1$, s (12.13) szerint

$$(a_{10}, a_{20})p = (a_{10}p, a_{20}p) \in F_1 \times A_2.$$

Ezzel megmutattuk, hogy $L_1 + L_2 \subseteq L(\mathbf{A}, F)$. Megfordítva, legyen $p \in L(\mathbf{A}, F)$. Ekkor

$$(a_{10}p, a_{20}p) = (a_{10}, a_{20})p \in F.$$

Ezért $a_{10}p \in F_1$ vagy $a_{20}p \in F_2$, azaz $p \in L_1$ vagy $p \in L_2$, vagyis $p \in L_1 + L_2$, amivel beláttuk az $L(\mathbf{A}, F) \subseteq L_1 + L_2$ tartalmazást, s így $L_1 + L_2 = L(\mathbf{A}, F)$. Tehát a véges automatákban felismerhető X feletti nyelvek halmaza zárt az összeadás műveletére.

Legyenek továbbra is L_1 és L_2 olyan X feletti nyelvek, amelyek felismerhetők az $\mathbf{A}_1 = (A_1, a_{10}, X, \delta_1)$ ill. az $\mathbf{A}_2 = (A_2, a_{20}, X, \delta_2)$ véges automatákban az F_1 ill. F_2 halmazokkal. Feltehetjük, hogy $L_1 \neq \emptyset$ és $L_2 \neq \emptyset$. (Ha $L_1 = \emptyset$ vagy $L_2 = \emptyset$, akkor $L_1L_2 = \emptyset$.) Vegyük fel az $\mathbf{A}_2$ automata $\mathbf{P}(A_2) = (P(A_2), X, \delta'_2)$ hatványautomatáját (l. (1.9)). Definiáljuk a

$$\mathbf{B} = (A_1 \times P(A_2), (a_{10}, \emptyset), X, \delta)$$

véges iniciális automatát úgy, hogy minden $a_1 \in A_1$, $B_2 \in P(A_2)$ és $x \in X$ esetén

$$\delta((a_1, B_2), x) = \begin{cases} (\delta_1(a_1, x), \delta'_2(B_2, x)) & \text{ha } \delta_1(a_1, x) \notin F_1, \\ (\delta_1(a_1, x), \delta'_2(B_2, x) \cup a_{20}), & \text{ha } \delta_1(a_1, x) \in F_1 \end{cases}$$

teljesüljön. Terjesszük ki a δ átmenetfüggvény értelmezését az $(A_1 \times P(A_2)) \times X^*$ halmazra (1.4) és (1.5) szerint a szokásos módon, felhasználva azt, hogy minden $x \in X$ bemenő jelre $\delta_2'(\emptyset, x) = \emptyset$.

Bármely $a_1 \in A_1$ állapotra és $p \in X^*$ bemenő szóra definiáljuk az

$$R_2(p) = \{a_{20}r; p = qr,\ a_1q \in F_1\}$$

halmazt. A δ átmenetfüggvény definíciójából következik, hogy

$$(a_{10}, \emptyset)p = (a_{10}p, R_2(p)).$$

Azt állítjuk, hogy a $\mathbf{B}$ automata felismeri az L_1L_2 nyelvet az $F = A_1 \times T_2$ halmazzal, ahol $T_2 = \{B_2 \in P(A_2); B_2 \cap F_2 \neq \emptyset\}$. Ha ugyanis $p \in L_1L_2$, akkor $p = qr$, ahol $q \in L_1$ és $r \in L_2$. Ezért $R_2(p) \neq \emptyset$ és

$$(a_{10}, \emptyset)p = (a_{10}p, R_2(p)) \in A_1 \times T_2.$$

Kaptuk, hogy $L_1L_2 \subseteq L(\mathbf{B}, F)$. Legyen $p \in L(\mathbf{B}, F)$, azaz

$$(a_{10}p, R_2(p)) = (a_{10}, \emptyset)p \in A_1 \times T_2.$$

Ha p minden q kezdőszeletére $a_{10}q \notin F_1$, akkor $R_2(p) = \emptyset$, ami T_2 definíciója miatt lehetetlen. Ezért vannak olyan $q, r \in X^*$, hogy $p = qr$ és $a_{10}q \in F_1$. Ez azt jelenti, hogy $R_2(p) \cap F_2 \neq \emptyset$. Így vannak olyan $q, r \in X^*$, hogy $p = qr$, $a_{10}q \in F_1$ és $a_{20}r \in F_2$, vagyis $p \in L_1L_2$. Ami az $L(\mathbf{B}, F) \subseteq L_1L_2$ tartalmazást bizonyítja. Tehát $L_1L_2 = L(\mathbf{B}, F)$. Ezzel megmutattuk, hogy a véges automatákban felismerhető X feletti nyelvek halmaza zárt a konkatenáció műveletére.

Legyen végül az X feletti L nyelv olyan, amely felismerhető az $\mathbf{A} = (A, a_0, X, \delta)$ véges automatában az állapothalmaz F részhalmazával. Feltehetjük, hogy $L \neq \emptyset$ és $L \neq e$. (Ha $L = \emptyset$ vagy $L = e$, akkor $L^* = e$.) Definiáljuk a $\tilde{\mathbf{A}} = (P(A), a_0, X, \tilde{\delta})$ nemdeterminisztikus automata $\tilde{\delta}$ átmenetfüggvényét úgy, hogy minden $a \in A$ állapotra és $x \in X$ bemenő jelre teljesüljön a

$$\tilde{\delta}(a, x) = \begin{cases} \delta(a, x), & \text{ha } \delta(a, x) \notin F, \\ \{\delta(a, x), a_0\}, & \text{ha } \delta(a, x) \in F \end{cases}$$

összefüggés. Az (1.16) alapján adjuk meg az $\tilde{\mathbf{A}}$ automata

$$\mathbf{P}(\mathbf{A}) = (P(A), X, a_0, \delta')$$

hatványautomatáját. Legyen $T = \{B \in P(A); B \cap F \neq \emptyset\}$. Megmutatjuk, hogy az L nyelv L^+ e-mentes iteráltja felismerhető a $\mathbf{P}(\mathbf{A})$ automatában a T halmazzal. Először azt látjuk be a kitevő szerinti teljes indukcióval, hogy L minden pozitiv egész kitevős hatványa részhalmaza az $L(\mathbf{P}(A), T)$ halmaznak. Legyen $p \in L$, azaz $a_0p \in F$. Az (1.17)-(1.19) feltételeket felhasználva kapjuk, hogy $a_0p \in \delta'(a_0, p)$. (Ha $p = e$, akkor $a_0p = a_0 = \delta'(a_0, p)$.) Ezért $\delta'(a_0, p) \in T$. Ezzel megmutattuk, hogy $L \subseteq L(\mathbf{P}(\mathbf{A}), T)$. Tegyük fel minden $1 \leq i < n$ egész számra, hogy $L^i \subseteq L(\mathbf{P}(\mathbf{A}), T)$, és legyen $p \in L^n$. Akkor van olyan $q \in L$ és $r \in L^{n-1}$, hogy $p = qr$. Definíció szerint $a_0q \in F$, az indukciós feltevés szerint pedig $\delta'(a_0, r) \in T$. Mivel $a_0q \in F$, ezért $\tilde{\delta}$ függvény definíciója miatt $a_0 \in \delta'(a_0, q)$. Így $\delta'(a_0, r) \subseteq \delta'(a_0, p)$, ezért $\delta'(a_0, p) \in T$. Ami azt jelenti, hogy minden pozitiv egész n-re $L^n \subseteq L(\mathbf{P}(\mathbf{A}), T)$, azaz $L^+ \subseteq L(\mathbf{P}(\mathbf{A}), T)$.

Legyen most $p \in L(\mathbf{P}(\mathbf{A}), T)$, vagyis $\delta'(a_0, p) \in T$, amiből következik, hogy $\delta'(a_0, p) \cap F \neq \emptyset$. Ha $p = e$, akkor $a_0 \in F$, s ezért $p \in L$. Tegyük fel, hogy $p \neq e$. A p szónak van olyan $q \in X^+$ prefixe, amelyre $a_0q \in F$. (Ellenkező esetben $\delta'(a_0, p) = a_0p$, s így $a_0p \in F$, ami lehetetlen.) Legyen $q_1 \in X^+$ a p szó legrövidebb prefixe, amelyre $a_0q_1 \in F$. Ha $q_1 = p$, akkor $p \in L$. Ha $p = q_1p_1$ ($p_1 \in X^+$), akkor, (1.19)-et is felhasználva, kapjuk, hogy

$$\delta'(a_0, p) = \delta'(\{a_0q_1, a_0\}, p_1) = \delta'(a_0q_1, p_1) \cup \delta'(a_0, p_1).$$

A p_1 szónak van olyan $q' \in X^+$ prefixe, hogy $a_0q_1q' \in F$ vagy $a_0q' \in F$. (Ellenkező esetben $\delta'(a_0q_1, p_1) = a_0q_1p_1$ vagy $\delta'(a_0, p_1) = a_0p_1$, de $\delta'(a_0, p) \cap F \neq \emptyset$ miatt $a_0q_1p_1 \in F$ vagy $a_0p_1 \in F$, ami lehetetlen.) Legyen $q_2 \in X^+$ a p_1 szó legrövidebb prefixe, amelyre $a_0q_1q_2 \in F$ vagy $a_0q_2 \in F$. Ha $q_1q_2 = p$, akkor $p \in L + L^2$. Ha $p = q_1q_2p_2$ ($p_2 \in X^+$), akkor

$$\delta'(a_0, p) = \delta'(a_0q_1, p_1) \cup \delta'(a_0, p_1) = \delta'(a_0q_1q_2, p_2) \cup \delta'(a_0q_2, p_2) \cup \delta'(a_0, p_2).$$

Az eljárást véges sokszor megismételve azt kapjuk, hogy van olyan n pozitív egész szám, hogy $p \in L + L^2 + \cdots + L^n$. Ebből következik, hogy $L(\mathbf{P}(\mathbf{A}), T) \subseteq L^+$, s így $L(\mathbf{P}(\mathbf{A}), T) = L^+$. Mivel a véges automatákban felismerhető X feletti nyelvek halmaza zárt az összeadás műveletére és $L^* = L^+ + e$, ezért L^* is feismerhető véges automatában. Ezzel beláttuk azt is, hogy a véges automatákban felismerhető X feletti nyelvek halmaza zárt az iteráció műveletére.

Most bebizonyítjuk az állítás megfordítását, azaz azt, hogy minden véges automatában felismerhető nyelv reguláris. Tegyük fel, hogy az X feletti L nyelv felismerhető az $\mathbf{A}_F = (A, a_0, X, \delta)$ véges automatában az F halmazzal, azaz $L = L(\mathbf{A}, F)$. Ha $L = \emptyset$, akkor definíció szerint reguláris. Tegyük fel, hogy $L \neq \emptyset$. Az egyszerűbb írásmód kedvéért legyen $A = \{1, 2, \ldots, n\}$ és $a_0 = 1$. Ha $F = \{i_1, i_2, \ldots i_k\}$, akkor nyilvánvalóan érvényes az

$$L(\mathbf{A}_F) = L(\mathbf{A}, i_1) + L(\mathbf{A}, i_2) + \cdots + L(\mathbf{A}, i_k) \tag{34.1}$$

összefüggés. Ez azt jelenti, hogy ha az $L(\mathbf{A}, i_j)$ $(j = 1, 2, \ldots, k)$ nyelvek regulárisak, akkor $L = L(\mathbf{A}, F)$ is az. Ezért elegendő bebizonyítani, hogy az automata állapothalmazának egyelemű részhalmazaival felismert nyelvek regulárisak.

Tetszőleges $i, j = 1, 2, \ldots, n$ és $k = 0, 1 \ldots, n$ egész számokra jelölje $L_{i,j}^{(k)}$ azt az X feletti nyelvet, amelyek azokból és csak azokból X^*-beli szavakból áll, amelyek hatására az $\mathbf{A}$ automata az i állapotából a j állapotába megy át úgy, hogy az átmenet során közbülső állapotként legfeljebb az $1, 2, \ldots, k$ állapotok léphetnek fel. Speciálisan $L_{i,j}^{(0)}$ pontosan azokat a bemenő szavakat tartalmazza, amelyek az $\mathbf{A}$ automatát az i állapotból közbülső állapot nélkül viszi át a j állapotba. Ilyen jelölés mellett

$$L(\mathbf{A}, i) = L_{1,i}^{(n)}, \tag{34.2}$$

ezért elegendő megmutatni, hogy az $L_{1,i}^{(n)}$ nyelv reguláris. Ennél többet fogunk belátni, mégpedig k szerinti teljes indukcióval megmutatjuk ezt minden $L_{i,j}^{(k)}$ $(1 \leq i, j \leq n,\ 0 \leq k \leq n)$ nyelvre.

Legyen $k = 0$. Nyilvánvaló, hogy ebben az esetben

$$L_{i,j}^{(0)} = \{x \in X; \delta(i, x) = j\}. \tag{34.3}$$

Mivel X véges halmaz, ezért szükségképpen $L_{i,j}^{(0)}$ is véges. ($L_{i,j}^{(0)} = \emptyset$ is lehetséges.) De minden véges nyelv reguláris, így $k = 0$ esetre igaz az állítás. Legyen $k \geq 1$. Tegyük fel, hogy az

$$L_{i,j}^{(k-1)} \quad (1 \leq i, j \leq n)$$

nyelvek mind regulárisak. Megmutatjuk, hogy

$$L_{i,j}^{(k)} = L_{i,j}^{(k-1)} + L_{i,k}^{(k-1)} \left(L_{k,k}^{(k-1)}\right)^* L_{k,j}^{(k-1)} \tag{34.4}$$

igaz, ami azt jelenti, hogy $L_{i,j}^{(k)}$ is reguláris. A definíció alapján világos, hogy a jobb oldali halmaz része a bal oldalinak. Annak megmutatásához, hogy a bal oldali halmaz is része a jobb oldalinak, tekintsünk egy tetszőleges $p \in L_{i,j}^{(k)}$ szót. Ha nincs ilyen p szó, akkor ez triviális, mivel $L_{i,j}^{(k)} = \emptyset$. Ha van ilyen p szó, akkor különböztessünk meg két esetet. Ha p úgy viszi át az $\mathbf{A}$ automatát az i állapotból a j állapotba, hogy a közbülső állapotok között nem fordul elő a k állapot, akkor $p \in L_{i,j}^{(k-1)}$. Ha pedig p úgy viszi át az $\mathbf{A}$ automatát az i állapotból a j állapotba, hogy közbülső állapotként a k állapot is fellép, akkor $p \in L_{i,k}^{(k-1)} \left(L_{k,k}^{(k-1)}\right)^* L_{k,j}^{(k-1)}$. Ebből már látható, hogy, a bal oldali halmaz része a jobb oldalinak. Ezzel megmutattuk, hogy minden $k = 0, 1, \ldots, n$ számra minden $L_{i,j}^{(k)}$ $(1 \leq i, j \leq n)$ nyelv reguláris. Ami azt jelenti, hogy minden véges automatában felismerhető nyelv reguláris. □

Tetszőleges $\mathbf{A} = (A, a_0, X, \delta)$ véges iniciálisan összefüggő automata esetén jelölje $R(X, \mathbf{A})$ az automatában előállítható nyelvek halmazát.

34.2. Tétel
Az X feletti reguláris nyelvek $R(X)$ halmaza a halmazelméleti egyesítés, metszet és komplementerképzés műveletekre Boole algebra, amelynek, bármely $\mathbf{A} = (A, a_0, X, \delta)$ véges iniciálisan összefüggő automata esetén, $R(X, \mathbf{A})$ véges részalgebrája.

Bizonyítás. Ahhoz, hogy $R(X)$ Boole algebra, elegendő megmutatni, hogy zárt az egyesítés, metszet és komplementerképzésre. Legyenek $L_1, L_2, L \in R(X)$ $(L_1 \neq L_2)$ tetszőlegesek. A Kleene tétel bizonyítása során már megmutattuk, hogy ha L_1 és L_2 felismerhető az $\mathbf{A}_1 = (A_1, a_{10}, X, \delta_1)$ ill. az $\mathbf{A}_2 = (A_2, a_{20}, X, \delta_2)$ véges automatákban az F_1 ill. F_2 halmazokkal, akkor $L_1 + L_2$ felismerhető az $\mathbf{A} = \mathbf{A}_1 \times \mathbf{A}_2$ direkt szorzatban $F = (F_1 \times A_2) \cup (A_1 \times F_2)$ halmazzal. Nem nehéz belátni, hogy $L_1 \cap L_2$ is felismerhető az $\mathbf{A}$ automatában az $F_1 \times F_2$ halmazzal.

Továbbá, ha L felismerhető az $\mathbf{A} = (A, a_0, X, \delta)$ véges iniciálisan összefüggő automatában az állapothalmaz F részhalmazával, akkor az L nyelv $\overline{L} = X^* - L$ komplementere felismerhető ugyanebben az automatában az $\overline{F}(= A - F)$ halmazzal.

Kleene tétele értelmében ezek azt jelentik, hogy a reguláris nyelvek $R(X)$ halmaza zárt a Boole műveletekre.

Most megmutatjuk, hogy bármely $\mathbf{A} = (A, a_0, X, \delta)$ véges iniciálisan összefüggő automatában felismerhető nyelvek $R(X, \mathbf{A})$ halmaza $\mathcal{R}(X)$ véges részalgebrája. Definíció szerint egy X feletti L nyelv akkor és csak akkor ismerhető fel $\mathbf{A}$-ban az A állapothalmaz egy F részhalmazával, ha $L = \{p \in X^*; a_0 p \in F\}$. Legyenek $L, L_1, L_2 \in R(X, \mathbf{A})$ olyanok, amelyek az állapothalmaz F, F_1 ill. F_2 részhalmazával előállíthatók. Nyilvánvaló, hogy $L_1 = L_2$ akkor és csak akkor, ha $F_1 = F_2$. Ebből következik, hogy $|R(X, \mathbf{A})| = |P(A)| = 2^n$, ahol $n = |A|$, azaz $R(X, \mathbf{A})$ véges halmaz. A definícióból az is látható, hogy $L_1 + L_2, L_1 \cap L_2$ és $\overline{L}$ felismerhető az $F_1 \cup F_2, F_1 \cap F_2$ ill. az $\overline{F}$ halmazzal. Így $R(X, \mathbf{A})$ zárt a Boole műveletekre nézve, tehát Boole algebra. □

A 34.2. Tételből azonnal adódik, hogy a reguláris nyelvek $R(X)$ halmaza zárt a kivonásra. ($L_1 - L_2 = L_1 \cap \overline{L}_2$ miatt $L_1 - L_2$ is felismerhető a bizonyításban szereplő $\mathbf{A}$ automatában az $F_1 \times (A_2 - F_2)$ halmazzal.)

Már a 32. fejezetben említettük, hogy $R(X)$ zárt a tükrözésre és minden $p \in X^*$ szó szerinti bal [jobb] oldali deriválásra. A következő tétel egy újabb szükséges és elégséges feltétel a nyelvek regularitására.

34.3. Tétel
Egy véges ábécé feletti nyelv akkor és csak akkor reguláris, ha véges sok egymástól különböző bal [jobb] oldali deriváltja van.

Bizonyítás. Legyen L reguláris nyelv X felett. Akkor Kleene tétele szerint létezik olyan $\mathbf{A} = (A, a_0, X, \delta)$ véges iniciális automata, amelyben L felismerhető az állapothalmaz valamely F részhalmazával. Világos, hogy bármely $p \in X^*$ szóra az L nyelv (32.1)-ben definiált p szerinti bal oldali $L_p^{(b)}$ deriváltja felismerhető az

$$F_p^{(b)} = \{a_0pq; pq \in L\}$$

halmazzal abban a véges iniciális automatában, amelyet $\mathbf{A}$-ból úgy kapunk, hogy benne kezdő állapotként a_0 helyett a_0p-t választjuk. Nyilvánvaló, hogy $F_p^{(b)}$ az F halmaz egy részhalmaza. Mivel F véges halmaz, ezért véges sok különböző részhalmaza van. Ez azt jelenti, hogy L-nek véges sok egymástól különböző bal oldali deriváltja van.

Tekintsük most az L (32.2)-ben definiált p szerinti $L_p^{(j)}$ jobb oldali deriváltját. A (32.8) azonosságot is felhasználva, az

$$L_p^{(j)} = \left((L_p^{(j)})^{-1}\right)^{-1} = \left((L^{-1})_{p^{-1}}^{(b)}\right)^{-1}$$

összefüggéshez jutunk. Ez azt jelenti, hogy L-nek pontosan annyi egymástól különböző jobb oldali deriváltja van, mint amennyi egymástól különböző bal oldali deriváltja L^{-1}-nek. Mivel L reguláris nyelv, ezért L^{-1} is reguláris nyelv X felett. Így L^{-1}-nek is véges sok egymástól különböző bal oldali deriváltja van. Amiből következik, hogy L-nek véges sok egymástól különböző jobb oldali deriváltja van.

Megfordítva, tegyük fel, hogy az X feletti L nyelvnek összes különböző bal oldali deriváltja

$$L_{p_1}^{(b)}, L_{p_2}^{(b)}, \ldots, L_{p_n}^{(b)}.$$

Legyen τ_L a (33.2)-ben definiált jobb kongruencia. Bármely p és q X^*-beli szóra

$$L_p^{(b)} = L_q^{(b)} \quad \Longleftrightarrow \quad (p, q) \in \tau_L.$$

Ez azt jelenti, hogy τ_L véges indexű. Amiből a 33.8. Tétel és Kleene tétele szerint következik, hogy L reguláris.

Tegyük fel most, hogy L-nek véges sok egymástól különböző jobb oldali deriváltja van. Akkor (32.8) szerint az L^{-1} nyelvnek véges sok egymástól különböző bal oldali deriváltja van. Ami az előbbiek szerint azt jelenti, hogy L^{-1} reguláris nyelv. Ebből következik, hogy L is reguláris nyelv. $\square$

Az automaták analízísének és szintézisének problémájához hasonló módon megfogalmazható a véges kimenő jel nélküli automaták analízisének és szintézisének problémája. A véges *kimenő jel nélküli automaták analízis*én olyan algoritmust értünk, amely tetszőleges véges iniciális kimenő jel nélküli automatában felismert nyelvnek megadja egy reguláris kifejezését.

A *véges kimenő jel nélküli automaták szintézisén* pedig olyan algoritmust értünk, amely egy reguláris kifejezéssel megadott nyelvhez megad egy iniciális véges kimenő jel nélküli automatát, amely állapothalmazának valamely részhalmazával felismeri a nyelvet.

A Kleene tétel bizonyításából látható, hogy a véges kimenő jel nélküli automaták analízisének és szintézisének problémája megoldható. Az analízis probléma egy algoritmikus megoldását a (34.1)-(34.4) összefüggések alkalmazásával kapjuk. A szintézis problémájának egy algoritmikus megoldása is leolvasható a bizonyításból. A bizonyításból az algoritmus lépéseinek sorrendje is megkapható. Ez az algoritmus azonban meglehetősen nehézkes, és még egyszerűbb szerkezetű reguláris kifejezéssel megadott nyelv esetén is nagy állapotszámú automatát eredményezhet. Az algoritmus nagymértékben egyszerűsíthető, ha a konstrukciókban csak iniciálisan összefüggő automatákkal dolgozunk, vagyis csak a kezdő állapotból elérhető állapotokat írjuk fel. Nézzük meg ezt az egyszerűsített eljárást a következő példában.

34.4. Példa

Megadunk olyan automatát, amelyben az $X = \{x, y\}$ halmaz feletti xy reguláris kifejezéssel megadott nyelv felismerhető.

A Kleene tétel bizonyításában használt algoritmus szerint először is meg kell konstruálni az $\mathbf{A}_x$ és $\mathbf{A}_y$ háromállapotú automatákat az x ill. y elemi nyelvek felismeréséhez. Adjuk meg ezeket az automatákat átmenettáblázatukkal:

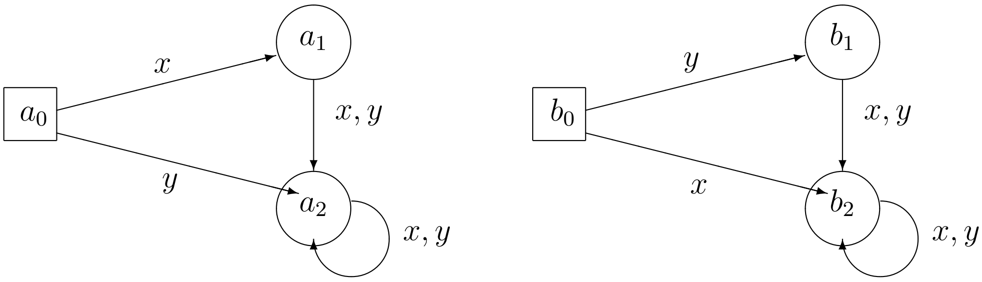
$\mathbf{A}_x$	a_0	a_1	a_2
x	a_1	a_2	a_2
y	a_2	a_2	a_2

$\mathbf{A}_y$	b_0	b_1	b_2
x	b_2	b_2	b_2
y	b_1	b_2	b_2,

vagy a szemléletesebb 10. ábrán látható átmenetgráfjukkal.

Azután a bizonyításból leolvasott algoritmus szerint venni kell az $\mathbf{A}_x$ automata és a $\mathbf{P}(\mathbf{A_y})$ hatványautomata direkt szorzatát az $(a_0, \emptyset)$ kezdő állapottal. Könnyen belátható, hogy ennek az automatának 24 állapota van. Nekünk azonban csak az $(a_0, \emptyset)$ állapotból elérhető állapotokra van szükségünk, ezért elegendő a direkt szorzat $0 = (a_0, \emptyset)$ kezdő állapotú iniciálisan összefüggő $\mathbf{C} = (C, 0, X, \delta)$ részautomatáját megkonstruálni. Ehhez meghatározzuk az 0 állapotból elérhető állapotokat:

$$\delta(0, x) = (a_1, b_0) = 1, \quad \delta(0, y) = (a_2, \emptyset) = 2,$$



10. ábra

$$\delta(1, x) = (a_2, b_2) = 3, \quad \delta(1, y) = (a_2, b_1) = 4,$$

$$\delta(2, x) = \delta(2, y) = 2,$$

$$\delta(3, x) = \delta(3, y) = \delta(4, x) = \delta(4, y) = 3.$$

A **C** automata átmenettáblázata:

C	0	1	2	3	4
x	1	3	2	3	3
y	2	4	2	3	3.

Megjegyezzük, hogy a **C** automata átmenetgráfját a 9. ábrán láthatjuk. A **C** automata előállítja az xy nyelvet a 4 állapottal.

Még ez az egyszerűsített eljárás sem biztosítja azt, hogy a legkisebb állapotszámú automatát kapjuk meg a nyelvet felismerő automaták közül.

Nem nehéz belátni, hogy az xy nyelv felismerhető az $\mathbf{D} = (D, d_0, X, \delta')$ négyállapotú automatában is a d_2 állapottal, ahol az automata átmenettáblázata:

D	d_0	d_1	d_2	d_3
x	d_1	d_3	d_3	d_3
y	d_3	d_2	d_3	d_3,

A **D** automata a **C** automata homomorf képe. (A $\varphi : C \to D$ leképezés, amelyre $\varphi(0) = d_0$, $\varphi(1) = d_1$, $\varphi(2) = \varphi(3) = d_3, \varphi(4) = d_2$, homomorfizmus.) Az olvasóra bízzuk annak átgondolását, hogy az xy nyelv négynél kevesebb állapotú automatában nem ismerhető fel.

Most a véges iniciális automaták szintézisproblémájának megoldására egy Gluskovtól származó, az előzőnél sokkal hatékonyabb algoritmust ismertetünk. Ráadásul ez az algoritmus alkalmas arra is, hogy véges sok, reguláris kifejezéssel megadott nyelvhez egyszerre szerkesszünk meg olyan véges iniciálisan összefüggő automatát, amelyben az adott nyelvek mindegyike felismerhető az állapothalmaz alkalmas részhalmazaival. A későbbiekben megmutatjuk, hogy ez az eljárás alkalmas a véges automatákkal indukálható automataleképezések meghatározására.

Gluskov algoritmus: Legyen $L_1, L_2, \ldots, L_k$ olyan véges X ábécé feletti reguláris nyelvek sorozata, amelyek reguláris kifejezésekkel vannak megadva. (Korábbi megállapodásunk szerint az adott nyelveket azonosítjuk reguláris kifejezésükkel, azaz $L_1, L_2, \ldots, L_k$ az eljárás során nyelveket és reguláris kifejezéseket is jelölnek.) A reguláris és a Boole műveletekkel hozzuk a reguláris kifejezéseket lehetőség szerint minél rövidebb alakra. (Így esetleg csökkenthető a szerkesztendő automata állapotainak száma.)

Az $L_1, L_2, \ldots, L_k$ sorozatban indexezzük meg (mondjuk alulról) balról jobb felé haladva a bennük előforduló X-beli betűket az $1, 2, \ldots$ pozitív egész számokkal úgy, hogy az azonos betűk különböző előfordulási helyeiken különböző indexet kapjanak. Az ilyen betűket ezután *indexezett betűk*nek fogjuk hívni. Legyenek u és v indexezett betűk. Azt mondjuk, hogy az u indexezett betű *megelőzi* a v indexezett betűt, ha van olyan $p \in X^*$ szó legalább egy L_i $(i = 1, 2, \ldots, k)$ nyelvben, amelyik $p = quvr$ $(q, r \in X^*)$ alakú. Az u-t *kezdő betű*nek nevezzük, ha első betűje legalább egy L_i-beli szónak, s végül v-t *záró betű*nek nevezzük, ha utolsó betűje legalább egy L_i-beli szónak. Jelölje K és Z a kezdő ill. záró betűk halmazát. Ezek után a keresett $\mathbf{A} = (A, a_0, X, \delta)$ automatát a következőképpen szerkesztjük meg: Legyen $a_0 \in A$ tetszőleges szimbólum. Bármely $x \in X$ esetén a $\delta(a_0, x) = a_0x \in A$ állapot legyen a K-beli indexezett x betűk halmaza. (Az a_0x lehet üres is.) Az $\mathbf{A}$ automata többi állapotát ezekből kiindulva rekurzióval definiáljuk a következő módon: Ha már az $a \in A$ állapot definiálva van, akkor bármely $x \in X$ elemre a $\delta(a, x) = ax$ állapot legyen azoknak az indexezett x betűknek a halmaza, amelyeket megelőz legalább egy a-beli indexezett betű. A konstrukcióból világos, hogy $\mathbf{A} = (A, a_0, X, \delta)$ véges iniciálisan összefüggő automata az a_0 kezdő állapottal. Az állapotok száma legfeljebb $2^m + 1$, ahol m az indexezésre felhasznált legnagyobb pozitív egész szám. (Ez indokolja azt, hogy a reguláris kifejezéseket az eljárás elején hozzuk minél rövidebb alakra, ami esetleg kisebb állapotszámú automatát eredményez.) Tetszőleges $i(= 1, 2, \ldots k)$ esetén legyen F_i azoknak az állapotoknak a halmaza, amelyek legalább egy L_i-beli záró betűt tartalmaz, valamint $a_0 \in F_i$ akkor és csak akkor, ha $e \in L_i$. Könnyű belátni, hogy az L_i nyelv felismerhető az $\mathbf{A}$ automatában az F_i halmazzal.

Ellenőrizhetjük, hogy a 34.4. Példában szereplő $\mathbf{D}$ automata a Gluskov algoritmussal megkapható. A következő példában is a Gluskov algoritmust alkalmazzuk.

34.5. PÉLDA

Megadunk egy véges iniciálisan összefüggő automatát, amelyben az $L_1 = x^*y^*$ és $L_2 = x^2y + x$ reguláris kifejezésekkel adott nyelvek felismerhetők. (Látható, hogy ezek a reguláris kifejezések az $L_1 = \{x^iy^j; i, j \in N\}$ és $L_2 = \{x^2y, x\}$ nyelveket határozzák meg.)

Indexezzük meg balról jobb felé haladva a kifejezésekben előforduló betűket:

$$L_1 = x_1^*y_2^*, \quad L_2 = x_3x_4y_5 + x_6.$$

Akkor $K = \{x_1, y_2, x_3, x_6\}$ és $Z = \{x_1, y_2, y_5, x_6\}$. Legyen a_0 tetszőleges szimbólum.

$$a_0x = \{x_1, x_3, x_6\} = a_1, \quad a_0y = \{y_2\} = a_2,$$

$$a_1x = \{x_1, x_4\} = a_3, \quad a_1y = \{y_2\} = a_2,$$

$$a_2x = \emptyset = a_4, \quad a_2y = \{y_2\} = a_2,$$

$$a_3x = \{x_1\} = a_5, \quad a_3y = \{y_2, y_5\} = a_6,$$

$$a_4x = \emptyset = a_4, \quad a_4y = \emptyset = a_4,$$

$$a_5x = \{x_1\} = a_5, \quad a_5y = \{y_2\} = a_2,$$

$$a_6x = \emptyset = a_4, \quad a_6y = \{y_2\} = a_2.$$

Az $\mathbf{A} = (A, a_0, X, \delta)$ automata állapot táblázata:

$\mathbf{A}$	a_0	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6
x	a_1	a_3	a_4	a_5	a_4	a_5	a_4
y	a_2	a_2	a_2	a_6	a_4	a_2	a_2,

átmenetgráfja pedig a 11. ábrán látható.

Az L_1 és L_2 nyelvek előállíthatók $\mathbf{A}$-ban az $F_1 = \{a_0, a_1, a_2, a_3, a_5, a_6\}$ ill. az $F_2 = \{a_1, a_6\}$ halmazokkal.

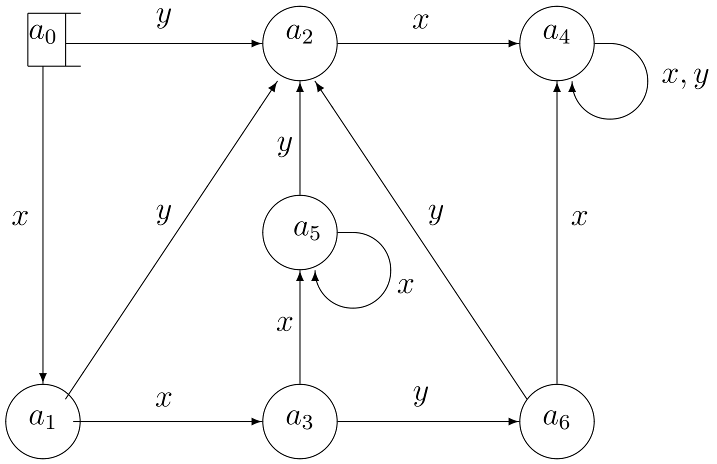
Mint említettük, a véges kimenő jel nélküli automaták analízis problémájának egy algoritmikus megoldását a (34.1)-(34.4) összefüggések alkalmazásával kapjuk. A következő példában ezt mutatjuk be.

34.6. PÉLDA

Felírjuk annak az L nyelvnek egy reguláris kifejezését, amely felismerhető az

$\mathbf{A}$	1	2	3
x	1	3	3
y	2	1	1

átmenettáblázattal megadott $\mathbf{A} = (\{1, 2, 3\}, 1, \{x, y\}, \delta)$ iniciális automatában az 3 állapottal.



11. ábra

A (34.1) és (34.2) összefüggések jelölései szerint $L = L(\mathbf{A}, 3) = L_{1,3}^{(3)}$. A (34.4) rekurziós formula és a 32.1. Lemma felhasználásával kapjuk, hogy

$$L = L_{1,3}^{(2)} + L_{1,3}^{(2)} \left(L_{3,3}^{(2)}\right)^* L_{3,3}^{(2)} = L_{1,3}^{(2)} \left(e + \left(L_{3,3}^{(2)}\right)^* L_{3,3}^{(2)}\right) = L_{1,3}^{(2)} \left(L_{3,3}^{(2)}\right)^*.$$

De

$$L_{1,3}^{(2)} = L_{1,3}^{(1)} + L_{1,2}^{(1)} \left(L_{2,2}^{(1)}\right)^* L_{2,3}^{(1)}.$$

Megrajzolva **A** átmenetgráfját, a (34.3) összefüggés felhasználásával az átmenetgráfról könnyen leolvasható, hogy

$$L_{1,3}^{(1)} = L_{1,3}^{(0)} + L_{1,1}^{(0)} \left(L_{1,1}^{(0)}\right)^* L_{1,3}^{(0)} = \emptyset + xx^*\emptyset = \emptyset,$$

$$L_{1,2}^{(1)} = L_{1,2}^{(0)} + L_{1,1}^{(0)} \left(L_{1,1}^{(0)}\right)^* L_{1,2}^{(0)} = y + xx^*y = (e + xx^*)y = x^*y,$$

$$L_{2,2}^{(1)} = L_{2,2}^{(0)} + L_{2,1}^{(0)} \left(L_{1,1}^{(0)}\right)^* L_{1,2}^{(0)} = \emptyset + yx^*y = yx^*y,$$

$$L_{2,3}^{(1)} = L_{2,3}^{(0)} + L_{2,1}^{(0)} \left(L_{1,1}^{(0)}\right)^* L_{1,3}^{(0)} = x + yx^*\emptyset = x,$$

ezért

$$L_{1,3}^{(2)} = \emptyset + x^*y(yx^*y)^*x = x^*y(yx^*y)^*x.$$

Továbbá

$$L_{3,3}^{(2)} = L_{3,3}^{(1)} + L_{3,2}^{(1)} \left(L_{2,2}^{(1)}\right)^* L_{2,3}^{(1)},$$

és
$$L^{(1)}_{3,3} = L^{(0)}_{3,3} + L^{(0)}_{3,1}\left(L^{(0)}_{1,1}\right)^* L^{(0)}_{1,3} = x + yx^*\emptyset = x,$$
$$L^{(1)}_{3,2} = L^{(0)}_{3,2} + L^{(0)}_{3,1}\left(L^{(0)}_{1,1}\right)^* L^{(0)}_{1,2} = \emptyset + yx^*y = yx^*y,$$
ezért
$$L^{(2)}_{3,3} = x + yx^*y(yx^*y)^*x.$$
Következésképpen
$$L = L^{(2)}_{1,3}\left(L^{(2)}_{3,3}\right)^* = x^*y(yx^*y)^*x(x + yx^*y(yx^*y)^*x)^*$$
a keresett nyelv egy reguláris kifejezése.

A következő lemma egy szükséges feltételt ad arra, hogy egy nyelv reguláris legyen. Tudjuk, hogy minden véges nyelv reguláris, ezért a lemma véges nyelvekre nyilvánvalóan teljesül. A segítségével azonban bizonyos végtelen nyelvekről be tudjuk bizonyítani, hogy nem regulárisak. A lemmát *reguláris nyelvekre vonatkozó pumpáló lemmá*nak nevezik.

34.7. Lemma
Ha L reguláris nyelv a véges X ábécé felett, akkor van olyan (L-től függő) n pozitív egész szám, hogy ha $p \in L$ és $|p| \geq n$, akkor p előállítható $p = uvw$ $(u, v, w \in X^*)$ alakban, ahol $0 < |v| \leq |uv| \leq n$, és minden m nemnegatív egész számra $uv^m w \in L$.

Bizonyítás. Mivel L reguláris, a 33.8. Tétel és Kleene tétele értelmében van olyan $\mathbf{A}_F = (A, a_0, X, \delta; F)$ véges Rabin–Scott automata, amelyre $L = L(\mathbf{A}, F)$. Legyen $|A| = n$. Megmutatjuk, hogy n eleget tesz a tétel állításának.

Legyen $p \in L$ olyan, hogy $|p| \geq n$, vagyis
$$p = x_1x_2\dots x_k \ (x_1, x_2, \dots, x_k \in X, n \leq k).$$
Az (1.5) definíció szerint
$$\delta(a_0, p) = a_1a_2\dots a_k, \quad \text{ahol} \quad \delta(a_{l-1}, x_l) = a_l, l = 1, 2, \dots, k.$$
Mivel $k \geq n$, ezért az állapotok $a_0, a_1, \dots, a_k$ sorozatában van legalább két megegyező állapot, vagyis vannak olyan $0 \leq i < j \leq k$ számok, hogy $a_i = a_j$. Továbbá, i és j választhatók úgy, hogy az $a_0, \dots, a_{j-1}$ sorozatban már nincsenek megegyező elemek. Legyenek $u = x_1 \dots x_i$, $v = x_{i+1} \dots x_j$ és $w = x_{j+1} \dots x_k$. (Ha $i = 0$, akkor $u = e$, ha pedig $j = k$, akkor $w = e$.) Belátjuk, hogy u, v és w kielégítik a tétel feltételeit. Az, hogy $p = uvw$ és

$v \neq e$, nyilvánvaló. Tegyük fel, hogy $|uv| = j > n$, azaz $j - 1 \geq n$. Ez azt jelenti, hogy az $a_0, \ldots, a_{j-1}$ sorozatban van legalább két megegyező állapot. Ez azonban lehetetlen, ezért $|uv| \leq n$. Mivel $a_i = a_j$, ezért minden $m \geq 0$ egész számra $a_i v^m = a_j$. (A v^0 az e üres szót jelenti.) Így minden $m \geq 0$ egész számra

$$a_k = a_0 p = a_0 uvw = a_0 uv^m w.$$

Mivel $p \in L$, ezért $a_0 p \in F$. Ebből következik, hogy $a_0 uv^m w \in F$. Ami azt jelenti, hogy $uv^m w \in L$. □

Az alábbiakban többek között annak eldöntésére adunk algoritmust véges automaták segítségével, hogy egy reguláris nyelv üres, véges vagy végtelen.

34.8. Lemma

Ha az $L \neq \emptyset$ nyelv felismerhető egy n állapotú automatában, akkor van L-ben legfeljebb $n - 1$ hosszúságú szó.

Bizonyítás. Tegyük fel, hogy az L nyelv felismerhető az $\mathbf{A} = (A, a_0, X, \delta)$ n állapotú automatában az állapothalmaz F részhalmazával. Válasszuk ki L egy tetszőleges p elemét. Ha $|p| \leq n-1$, akkor készen vagyunk a bizonyítással. Ha $|p| \geq n$, akkor $|A| = n$ miatt létezik p-nek olyan q kezdőszelete, hogy $|q| \leq n - 1$ és $a_0 q = a_0 p$. Mivel $p \in L$, ezért $a_0 q = a_0 p \in F$, s így $q \in L$. □

34.9. Lemma

Egy n állapotú automatában felismerhető L nyelv akkor és csak akkor végtelen, ha van L-ben olyan p szó, amelyre $n \leq |p| < 2n$.

Bizonyítás. Ha van ilyen p szó L-ben, akkor a pumpáló lemma alapján L végtelen.

Megfordítva, tegyük fel, hogy az X feletti végtelen L nyelv felismerhető az $\mathbf{A} = (A, a_0, X, \delta)$ n állapotú automatában az állapothalmaz F részhalmazával. Mivel L végtelen, van olyan $p \in L$, hogy $n \leq |p|$. Ha $|p| < 2n$, akkor készen vagyunk a bizonyítással. Legyen $|p| \geq 2n$. Akkor a pumpáló lemmában szereplő jelöléseket alkalmazva, vannak olyan $u, v, w \in X^*$ szavak, hogy $p = uvw$, $0 < |v| \leq |uv| \leq n$, és $q = uw \in L$, vagyis $n \leq |q| = |p| - |v| < |p|$. Ha $|q| < 2n$, akkor a bizonyítást befejeztük. Ha $|q| \geq 2n$, akkor alkalmazzuk a pumpáló lemmát q-ra. Ezt folytatva, véges számú lépés után kapunk olyan $r \in L$ szót, amelyre $n \leq |r| < 2n$. □

34.10. Tétel

Létezik olyan algoritmus, amelynek alkalmazásával eldönthető, hogy egy véges automatában felismerhető nyelv üres, véges vagy végtelen.

Bizonyítás. Tegyük fel, hogy az L nyelv felismerhető az $\mathbf{A} = (A, a_0, X, \delta)$ n állapotú automatában az állapothalmaz F részhalmazával. Jelölje $X(k)$ az X^* legfeljebb k hosszúságú szavainak részhalmazát, és legyen

$$A(k) = \{a_0p;\ p \in X(k)\}.$$

A 34.8. Lemma szerint, $L \neq \emptyset$ akkor és csak akkor, ha $A(n-1) \cap F \neq \emptyset$. Minden k nemnegatív egész számra $X(k)$ véges halmaz. Ezért véges számú lépésben eldönthető, hogy L üres vagy nem. Legyen $L \neq \emptyset$. A 34.9. Lemma szerint, L akkor és csak akkor végtelen, ha

$$(A(2n-1) - A(n-1)) \cap F \neq \emptyset.$$

Ez szintén eldönthető véges számú lépésben. □

34.11. TÉTEL
Létezik véges automatákban felismerhető nyelvek egyenlőségét eldöntő algoritmus.

Bizonyítás. Ha az L_1 és L_2 nyelvek regulárisak, akkor a 34.2. Tétel szerint az

$$L = (L_1 \cap \overline{L}_2) + (L_2 \cap \overline{L}_1)$$

nyelv is reguláris. Világos, hogy

$$L_1 = L_2 \Longleftrightarrow L = \emptyset.$$

A 34.10. Tétel szerint az algoritmikusan eldönthető, hogy $L = \emptyset$. □

34.12. TÉTEL
Létezik olyan algoritmus, amellyel eldönthető, hogy két véges automatában felismerhető nyelv közül valamelyik tartalmazza-e a másikat.

Bizonyítás. Ha az L_1 és L_2 nyelvek regulárisak, akkor a 34.2. Tétel szerint az $L_1 \cap \overline{L}_2$ nyelv is az. Továbbá

$$L_1 \subseteq L_2 \Longleftrightarrow L_1 \cap \overline{L}_2 = \emptyset.$$

Az utóbbi állítás pedig a 34.10. Tétel szerint algoritmikusan eldönthető. □

Feladatok

34.1. Konstruáljunk meg olyan véges (teljesen definiált determinisztikus) automatát, amely felismeri az $x(x+y)((x+y)^3)^*y - (x+y)^*x^3(x+y)^*$ nyelvet. (→ Megoldás)

34.2. Tegyük fel, hogy az L nyelv felismerhető egy n állapotú véges automatában az állapothalmaz valamely részhalmazával. Az L nyelv akkor és csak akkor véges, ha minden $p \in L$ szó legfeljebb $n-1$ hosszúságú. (→ Megoldás)

34.3. Adjunk felső korlátot arra, hány lépésben dönthető el, hogy egy n állapotú és k bemenő jelű automata állapothalmazának valamely l elemű részhalmazával felismerhető nyelv üres, véges vagy végtelen. (→ Megoldás)

34.4. Legalább kételemű X ábécé esetén az $L = \{pp^{-1}; p \in X^*\}$ nyelv nem reguláris. (→ Megoldás)

35. A véges automaták által indukálható automataleképezések

Az automaták szintézisének 10. fejezetben megfogalmazott problémájához visszatérve, ebben a fejezetben a reguláris nyelvek segítségével ezt a problémát megoldjuk véges automatákra. Ez a 9.6. Tétel szerint azt jelenti, hogy a véges automatákkal megvalósítható információátalakításoknak egy teljes leírását adjuk.

Legyenek X és Y nemüres halmazok, továbbá $\alpha : X^* \to Y^*$ tetszőleges olyan automataleképezés, hogy minden $y \in Y$ szerepel valamely $\alpha(p)$ ($p \in X^*$) szóban. Ez az utóbbi feltétel az α leképezésre nem jelent megszorítást, hiszen azok a jelek, amelyek nem szerepelnek egyetlen képszóban sem, az Y halmazból nyilvánvalóan elhagyhatók. Ebben a fejezetben végig feltesszük, hogy Y ilyen felesleges jeleket nem tartalmaz.

Ezt felhasználva, a következő lemmában azt mutatjuk meg, hogy az automataleképezések megadhatók szabad félcsoportok osztályozásai segítségével.

35.1. Lemma
Bármely $\alpha : X^* \to Y^*$ automataleképezéshez hozzárendelhető az X^+ szabad félcsoportnak egy $|Y|$ számosságú $\mathcal{C}_\alpha$ osztályozása. Megfordítva, ha $\mathcal{C}$ az X^+ egy osztályozása és Y tetszőleges $|\mathcal{C}|$ számosságú halmaz, akkor Y elemeinek jelölésétől eltekintve egyértelműen megadható az az $\alpha : X^* \to Y^*$ automataleképezés, amelyre $\mathcal{C} = \mathcal{C}_\alpha$ teljesül.

Bizonyítás. Legyen $\alpha : X^* \to Y^*$ tetszőleges automataleképezés. Bármely $y \in Y$ jelre legyen L_y azoknak a $p \in X^+$ szavaknak a halmaza, amelyekre az $\alpha(p)$ szó az y jelre végződik. A

$$\mathcal{C}_\alpha = \{L_y; y \in Y\} \tag{35.1}$$

halmaz nyilvánvalóan X^+ egy osztályozása és $|\mathcal{C}_\alpha| = |Y|$.

Megfordítva, legyen $\mathcal{C} = \{L_i; i \in I\}$ az X^+ szabad félcsoport egy osztályozása. Tekintsük azt az $\alpha : X^* \to I^*$ alfabetikus leképezést, amelyre $\alpha(e) = e$ és tetszőleges $p = x_1x_2 \dots x_n \in X^+$ szó esetén $\alpha(p) = i_1i_2 \dots i_n$ teljesül, ahol

$$x_1 \in L_{i_1}, x_1x_2 \in L_{i_2}, \dots, x_1x_2 \dots x_n \in L_{i_n}.$$

Az α konstrukciójából következik, hogy α automataleképezés és $\mathcal{C} = \mathcal{C}_\alpha$. $\square$

A (35.1) osztályozást az α *automataleképezés által indukált osztályozás*nak nevezzük. A 35.1. Lemmából nyilvánvalóan következik az alábbi lemma:

35.2. Lemma
Ha $X \neq \emptyset$ és $Y \neq \emptyset$ véges halmazok, akkor bármely $\alpha : X^* \to Y^*$ automataleképezés által indukált $\mathcal{C}_\alpha$ osztályozás véges. Megfordítva, a véges $X \neq \emptyset$ feletti X^+ szabad félcsoport tetszőleges $\mathcal{C}$ véges osztályozása a véges Y halmaz elemeinek jelölésétől eltekintve egyértelműen meghatározza azt az $\alpha : X^* \to Y^*$ automataleképezés, amelyre $\mathcal{C} = \mathcal{C}_\alpha$ teljesül.

Az $X \neq \emptyset$ véges ábécé feletti nyelvek $\{L_1, L_2, \dots, L_n\}$ rendszerét *X feletti reguláris teljes rendszer*nek nevezzük, ha a rendszer az X^+ szabad félcsoport osztályozása és minden eleme reguláris nyelv. A következő tételt fontossága miatt *a véges automaták alaptételé*nek is nevezzük:

35.3. Tétel
A véges $X \neq \emptyset$ és $Y \neq \emptyset$ halmazok esetén egy $\alpha : X^* \to Y^*$ automataleképezés akkor és csak akkor indukálható véges iniciális automatával, ha az α által indukált $\mathcal{C}_\alpha$ osztályozás X feletti reguláris teljes rendszer.

Bizonyítás. A 35.2. Lemma szerint az $\alpha : X^* \to Y^*$ automataleképezés és a $\mathcal{C}_\alpha$ osztályozás az Y halmaz elemeinek jelölésétől eltekintve kölcsönösen egyértelműen meghatározzák egymást.

A szükségesség kimutatása céljából tegyük fel, hogy az $\alpha : X^* \to Y^*$ automataleképezés indukálható az $\mathbf{A} = (A, a_0, X, Y, \delta, \lambda)$ véges iniciális Mealy automatával. Feltehetjük, hogy $\mathbf{A}$ iniciálisan összefüggő. Legyen minden $y \in Y$ kimenő jelre

$$A_y = \{a_0p; p \in L_y\}.$$

Nyilvánvaló, hogy L_y felismerhető az $\mathbf{A}_v = (A, a_0, X, \delta)$ automatában az A_y halmazzal. Minthogy $\mathbf{A}$ véges automata, ezért Kleene tétele miatt $\mathcal{C}_\alpha$ reguláris teljes rendszer X felett.

Megfordítva, az elegendőség bizonyításához tegyük fel, hogy az α automataleképezés által indukált $\mathcal{C}_\alpha = \{L_y; y \in Y\}$ véges osztályozás reguláris teljes rendszer X felett. A Gluskov algoritmussal meg tudunk adni olyan $\mathbf{A}' = (A, a_0, X, \delta)$ véges iniciálisan összefüggő kimenő jel nélküli automatát, amelyben $\mathcal{C}_\alpha$ minden osztálya felismerhető. Tegyük fel, hogy az L_y $(y \in Y)$ nyelvet $\mathbf{A}'$-ben az A_y halmazzal állíthatjuk elő. Egészítsük ki $\mathbf{A}'$-t az $\mathbf{A} = (A, a_0, X, Y, \delta, \lambda)$ Mealy automatává úgy, hogy minden $a \in A$ és $x \in X$ esetén

$$\lambda(a, x) = y \quad \Longleftrightarrow \quad \delta(a, x) \in A_y \tag{35.2}$$

Megmutatjuk, hogy λ jól definiált. Tegyük fel, hogy $a_1, a_2 \in A$ állapotokra és $x_1, x_2 \in X$ bemenő jelekre

$$\delta(a_1, x_1) = \delta(a_2, x_2) \in A_y.$$

Mivel $\mathbf{A}$ iniciálisan összefüggő, ezért vannak olyan $p_1, p_2 \in X^*$ bemenő szavak, hogy $a_1 = a_0p_1$ és $a_2 = a_0p_2$. Így

$$a_0p_1x_1 = \delta(a_1, x_1) = \delta(a_2, x_2) = a_0p_2x_2 \in A_y,$$

azaz $p_1x_1, p_2x_2 \in L_y$. Ez azt jelenti, hogy $\alpha(p_1x_1)$ és $\alpha(p_2x_2)$ szavak y-ra végződnek, amiből adódik, hogy

$$\lambda(a_1, x_1) = y = \lambda(a_2, x_2).$$

Tehát λ valóban jól definiált. ($\mathbf{A}$ teljesíti az (1.1) Moore kritériumot, azaz Moore automata.) Nem nehéz belátni, hogy $\mathbf{A}$ iniciális automata indukálja az α automataleképezést, azaz $\alpha = \alpha_{\mathbf{A}}$. □

A 35.2. Lemma és a véges automaták alaptétele a *véges automaták szintézisproblémájának algoritmikus megoldásá*t adja:

Legyenek $X = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ és $Y = \{y_1, y_2, \dots y_k\}$ tetszőleges nemüres véges halmazok.

Adjunk meg egy $\alpha : X^* \to Y^*$ automataleképezést egy X feletti

$$\mathcal{C} = \{L_1, L_2, \dots, L_k\}$$

reguláris teljes rendszerrel és a rendszer elemeinek Y elemeivel való valamilyen átindexelésével azaz legyen

$$\mathcal{C} = \{L_{y_1}, L_{y_2}, \dots, L_{y_k}\}.$$

Határozzuk meg a rendszer elemeinek (lehetőleg a legegyszerűbb) reguláris kifejezéseit.

A Gluskov algoritmussal szerkesszünk meg egy $\mathbf{A}' = (A, a_0, X, \delta)$ véges iniciálisan összefüggő kimenő jel nélküli automatát, amelyben az adott regulárisan teljes rendszer L_{y_i} $(i = 1, 2, \dots, k)$ elemei felismerhetők az A_{y_i}-vel jelölt halmazokkal. (Mivel $e \notin L_{y_i}$, ezért a Gluskov algoritmusból következik, hogy $a_0 \notin A_{y_i}$. Nyilvánvaló az is, hogy $\{A_{y_1}, A_{y_2}, \dots A_{y_k}\}$ az $A - a_0$ halmaz egy osztályozása.)

A (35.2) utasítással határozzuk meg a λ kimenetfüggvényt.

Adjuk meg az $\mathbf{A} = (A, a_0, X, Y, \delta, \lambda)$ automatát állapotkimenet táblázattal vagy gráffal. A 35.3. Tétel bizonyítása szerint $\mathbf{A}$ teljesíti az (1.1) Moore kritériumot, ezért $\mathbf{A}$ megadható Moore automataként is, azaz λ helyett egy megfelelő μ jelfüggvényt adunk meg. Ezt (1.2) szerint úgy tehetjük meg, hogy az A_{y_i} $(i = 1, 2, \dots, k)$ halmazban lévő állapotokhoz az y_i kimenő jelet rendeljük, az a_0 kezdő állapothoz pedig egy tetszőleges Y-beli kimenő jelet rendelünk.

Az $\mathbf{A}$ automata indukálja az α automataleképezést.

35.4. Példa

Legyen $X = \{x, y\}$ és $Y = \{u, v, w\}$, továbbá

$$L_1 = \{x^l; l = 1, 2, \dots\},\ L_2 = \{y^m; m = 1, 2, \dots\},\ L_3 = X^+ - (L_1 + L_2).$$

Nem nehéz belátni, hogy

$$L_1 = xx^*, \quad L_2 = yy^*, \quad L_3 = (xx^*y + yy^*x)(x + y)^*,$$

azaz $\mathcal{C} = \{L_1, L_2, L_3\}$ reguláris teljes rendszer X felett.

Indexeljük át $\mathcal{C}$ elemeit Y elemeivel a következő módon:

$$L_1 = L_u, \quad L_2 = L_v, \quad L_3 = L_w.$$

A Gluskov algoritmus alkalmazásával kapjuk, hogy a következő átmenettáblázattal adott $\mathbf{A}' = (A, a_0, X, \delta)$ iniciálisan összefüggő automatában az L_u

nyelv az $\{a_1, a_3\}$, az L_v nyelv az $\{a_2, a_6\}$ és az L_w nyelv az $\{a_4, a_5, a_7, a_8\}$ halmazzal ismerhető fel:

$\mathbf{A}'$	a_0	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6	a_7	a_8
x	a_1	a_3	a_5	a_3	a_7	a_7	a_5	a_7	a_7
y	a_2	a_4	a_6	a_4	a_8	a_8	a_6	a_8	a_8.

Az $\{L_u, L_v, L_w\}$ reguláris teljes rendszerrel megadott α automataleképezést az a_0 iniciális állapottal indukálja az alábbi átmenet-kimenettáblázattal megadott Moore automata:

$\mathbf{A}$	u	u	v	u	w	w	v	w	w
	a_0	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6	a_7	a_8
x	a_1	a_3	a_5	a_3	a_7	a_7	a_5	a_7	a_7
y	a_2	a_4	a_6	a_4	a_8	a_8	a_6	a_8	a_8 .

A következő tételben azt mutatjuk meg, hogy a véges Mealy és Moore automatákkal megvalósítható információátalakítások, azaz az általuk indukált automataleképezések reguláris nyelveket reguláris nyelvekké alakítanak át.

35.5. Tétel
Ha az X ábécé feletti L nyelv reguláris és $\alpha : X^* \to Y^*$ automataleképezés, akkor az Y ábécé feletti $\alpha(L) = \{\alpha(p);\ p \in L\}$ nyelv is reguláris.

Bizonyítás. Kleene tétele szerint van olyan véges $\mathbf{A} = (A, a_0, X, \delta_A)$ automata, amely felismeri az L nyelvet az állapothalmaz valamely F részhalmazával. Legyen $\mathbf{B} = (B, b_0, X, Y, \delta_B, \lambda_B)$ egy olyan véges Mealy automata, amely indukálja az $\alpha : X^* \to Y^*$ automataleképezést, azaz $\alpha = \alpha_{\mathbf{B},b_0}$ (l. a 7. fejezetet). Vegyük a következő nemdeterminisztikus véges automatát:

$$\mathbf{C} = (A \times B, (a_0, b_0), Y, \delta_C),$$

ahol

$$(a', b') \in \delta_C((a, b), y) \iff \delta_A(a, x) = a',\ \delta_B(b, x) = b',\ \lambda_B(b, x) = y \quad (35.3)$$

valamilyen $x \in X$ bemenő jel esetén. Megmutatjuk, hogy $\mathbf{C}$ állapothalmazának $F \times B$ részhalmazával felismeri az $\alpha(L)$ nyelvet.

Legyen $p \in L$. Ha $p = e$, akkor $\alpha(p) = e \in \alpha(L)$. De $(a_0, b_0) \in F \times B$, ezért $e \in L(\mathbf{C}, F \times B)$. Ha pedig $p = x_1x_2 \dots x_k$ és $\alpha(p) = y_1y_2 \dots y_k$, ahol $x_j \in X,\ y_j \in Y$ $(j = 1, 2 \dots, k)$, akkor (1.5) és (33.1) szerint vannak olyan $a_i \in A$ és $b_i \in B$ állapotok, hogy minden $i \in \{0, 1, 2, \dots, k-1\}$ esetén

$$\delta_A(a_i, x_{i+1}) = a_{i+1}, \quad \delta_B(b_i, x_{i+1}) = b_{i+1}, \quad \lambda_B(b_i, x_{i+1}) = y_{i+1}$$

teljesülnek. Az (1.18) definíciót is felhasználva, ezekből adódik, hogy

$$(a_{i+1}, b_{i+1}) \in \delta_C((a_i, b_i), y_{i+1}), \quad i = 0, 1, \ldots, k-1,$$

azaz

$$(a_k, b_k) \in \delta_C((a_0, b_0), \alpha(p)) \cap F \times B.$$

Ez a (33.5) definíció szerint azt jelenti, hogy $\alpha(p) \in L(\mathbf{C}, F \times B)$.

Megfordítva, tegyük fel, hogy $q \in L(\mathbf{C}, F \times B)$, azaz

$$\delta_C((a_0, b_0), q) \cap F \times B \neq \emptyset.$$

Ha $q = e$, akkor $(a_0, b_0) \in F \times B$, azaz $a_0 \in F$, ezért $e \in L$, s így $e = \alpha(e) \in \alpha(L)$. Ha $q = y_1 y_2 \ldots y_k$ $(y_1, y_2, \ldots, y_k \in Y)$, akkor vannak olyan $(a_i, b_i) \in A \times B$ $(i = 1, 2, \ldots k)$ állapotok, hogy $(a_k, b_k) \in F \times B$ és

$$(a_{i+1}, b_{i+1}) \in \delta_C((a_i, b_i), y_{i+1}), \quad i = 0, 1, \ldots, k-1,$$

s így (35.3) szerint vannak olyan $x_{i+1} \in X$ bemenő jelek, hogy

$$\delta_A(a_i, x_{i+1}) = a_{i+1}, \quad \delta_B(b_i, x_{i+1}) = b_{i+1}, \quad \lambda_B(b_i, x_{i+1}) = y_{i+1}.$$

Ez azt jelenti, hogy $q = \alpha(p)$, ahol $p = x_1 x_2 \ldots x_k \in L$, amiből következik, hogy $q \in \alpha(L)$.

Ezzel megmutattuk, hogy $\alpha(L) = L(\mathbf{C}, F \times B)$. $\square$

MEGOLDÁSOK, ÚTMUTATÓK

2.1. A λ kimenetfüggvény szürjektív, ezért minden $y \in Y$ kimenő jelhez van olyan $a \in A$ és $x \in X$, hogy $y = \lambda(a, x)$. Legyenek $b \in B$ és $p \in X^*$ olyanok, hogy $a = bp$. Így $y = \lambda(bp, x)$, amely (1.6) szerint a $\lambda(b, px)$ kimeneti szó utolsó betűje.
2.2. A B halmaz generátorrendszere az $\mathbf{A}$ automata $[\mathbf{B}]$ részautomatájának. Legyen B az $\mathbf{A}$ minimális kimeneti generátorrendszere és $C \subseteq B$ a $[\mathbf{B}]$ automata egy generátorrendszere. Így minden $b \in B$ állapothoz van olyan $c \in C$ és $q \in X^*$, hogy $b = cq$. Az előző feladat megoldását is felhasználva, kapjuk, hogy C az $\mathbf{A}$ automata kimeneti generátorrendszere, így $C = B$.
2.3. Nem. Ezt a következő példa is mutatja:

$\mathbf{A}$	1	2	3
x_1	$(1, y_1)$	$(2, y_2)$	$(3, y_1)$
x_2	$(1, y_1)$	$(2, y_2)$	$(3, y_2)$

Az $\{1, 2\}$ és a $\{3\}$ halmazok az $\mathbf{A}$ minimális kimeneti generátorrendszerei.
2.4. Nem. Az előző megoldásban szereplő automata egyetlen minimális generátorrrendszere az állapothalmaz. Ez azonban nem minimális kimeneti generátorrendszer.
3.1. Ha (α, β, γ) az $\mathbf{A} = (A, X, Y, \delta, \lambda)$ Mealy automata általános homomorf [izomorf] leképezése az $\mathbf{A}' = (A', X', Y', \delta', \lambda')$ automatára, akkor az $((\alpha, \gamma), \beta)$ leképezés $\mathbf{A}_Y$-nak $\mathbf{A}'_{Y'}$-re való általános homomorf [izomorf] leképezése.
3.2. A $\tilde{\delta}$ függvény jól definiált. Legyen ugyanis $\beta(x_1) = \beta(x_2)$ $(x_1, x_2 \in X$. Akkor minden $a \in A$ állapotra

$$\alpha(\delta(a, x_1)) = \delta'(\alpha(a), \beta(x_1)) = \delta'(\alpha(a), \beta(x_2)) = \alpha(\delta(a, x_2)).$$

Mivel α injektív, ezért minden $a \in A$ állapotra $\delta(a, x_1) = \delta(a, x_2)$.
4.1.

$$\iota_A \subset \rho \subset \tau \subset \omega_A \iff \iota_{A/\rho} \subset \tau/\rho \subset \omega_{A/\rho}.$$

4.2. Legyen φ **A** homomorf leképezése **B**-re és ρ **B** tetszőleges kongruenciája. Definiáljuk a ρ' relációt a következő módon:

$$(a,b) \in \rho' \ (a,b \in A) \quad \Longleftrightarrow \quad (\varphi(a),\varphi(b)) \in \rho.$$

A $\rho \to \rho'$ megfeleltetés $C(\mathbf{B})$ izomorf leképezése $C(\mathbf{A})$-ba.
5.1. A $\varphi(\mathbf{B}) = R(\omega_B)$ feltétellel definiált $\varphi : Sub(\mathbf{A}) \to Rees(\mathbf{A})$ leképezés $Sub(\mathbf{A})$ homomorf leképezése $Rees(\mathbf{A})$-ra. Az **A** automata legalább kételemű **B** és **C** részautomatáira $R(\omega_B) = R(\omega_C)$ akkor és csak akkor, ha $\mathbf{B} = \mathbf{C}$. Ha pedig az **A**-nak **D** részautomatájára $R(\omega_D) = R(\omega_\emptyset) = \iota_A$, akkor $|D| \leq 1$.
5.2. Legyen $\mathbf{A} = (A, X, \delta, \lambda[\mu])$ egyszerű Mealy [Moore] automata. Ez azt jelenti, hogy **A**-nak ι_A-n és esetleg ω_A-n kívül nincs más kongruenciája. Tegyük fel, hogy az **A** automata $\mathbf{A}' = (A', X, Y', \delta, \lambda')$ részautomatája nem egyszerű. Akkor $\mathbf{A}'$-nek van olyan ρ kongruenciája, hogy $\iota_{A'} \neq \rho$, valamint, ha $\omega_{A'}$ kongruencia, akkor $\omega_{A'} \neq \rho$. Ha $R(\rho)$ a ρ-nak **A**-ra való (5.1-beli Rees kiterjesztése, akkor $R(\rho) \neq \iota_A$ és $R(\rho) \neq \omega_A$. Ez azonban lehetetlen, mert **A** egyszerű.
6.1. Legyen δ szürjektív és $\rho_{\mathbf{A}}[r]$ $S(\mathbf{A}) = X^+/\rho_{\mathbf{A}}$ egységeleme. Minden $a \in A$ hoz van olyan $b \in A$ és $x \in X$, hogy $a = \delta(b,x)$, azaz $ar = bxr = bx = a = ae$. Amiből $\rho_{\mathbf{A}}[r] = \rho_{\mathbf{A}}[e]$, vagyis $S(\mathbf{A}) = S_1(\mathbf{A})$. Megfordítva, ha $S(\mathbf{A}) = S_1(\mathbf{A})$, akkor δ nyilvánvalóan szürjektív.
6.2. Legyen $S(\mathbf{A})$ jobbzéró félcsoport. Definiáljuk A-n a ρ ekvivalenciát, úgy, hogy minden $a, b \in A$ esetén $(a,b) \in \rho$ akkor és csak akkor, ha minden $x \in X$ bemenő jelre $\delta(a,x) = \delta(b,x)$. Mivel minden $x_1, x_2 \in X$ bemenő jelre

$$\rho_{\mathbf{A}}[x_1x_2] = \rho_{\mathbf{A}}[x_1]\rho_{\mathbf{A}}[x_2] = \rho_{\mathbf{A}}[x_2],$$

ezért ρ az **A** olyan kongruenciája, hogy minden $a \in A$ állapotra $(\rho[a], X, \delta)$ az **A**-nak részautomatája. A ρ definíciójából látható, hogy ezek beállító automaták.

Megfordítva, ha **A** az $\mathbf{A}_i = (A_i, X, \delta_i)$ $(i \in I)$ beállító automaták direkt összege, akkor minden $a \in A$ állapotra és $p, q \in X^+$ bemenő szavakra van olyan $i \in I$, hogy $a, ap, aqp \in A_i$. Ha $p = p'x$ $(p' \in X^*, x \in X)$, akkor $ap', aqp' \in A_i$. Mivel $\mathbf{A}_i$ beállító automata, ezért $ap = a(p'x) = (ap')x = (aqp')x = a(qp'x) = a(qp)$, azaz $\rho_{\mathbf{A}}[q]\rho_{\mathbf{A}}[p] = \rho_{\mathbf{A}}[qp] = \rho_{\mathbf{A}}[p]$.
6.3. Ha az $\mathbf{A} = (A, X, Y, \delta, \lambda)$ Mealy automata karakterisztikus félcsoportjának van jobb oldali egységeleme [egységeleme], akkor van olyan $r \in X^+$, hogy minden $p \in X^+$ bemenő szóra $\delta_p = \delta_{pr}[= \delta_{rp}]$ és $\lambda_p = \lambda pr[= \lambda_{rp}]$ (l. (6.10)). Ebből már látható, hogy **A** vetülete karakterisztikus félcsoportjának van jobb oldali egységeleme [egységeleme]. Ha

$$\delta_{x_1}(a_1) = \delta(a_1, x_1) = \delta(a_2, x_2) = \delta_{x_2}(a_2) \quad (a_1, a_2 \in A,\ x_1, x_2 \in X),$$

akkor

$$\lambda(a_1, x_1) = \lambda_{x_1}(a_1) = \lambda_{x_1 r}(a_1) = (\delta_{x_1} \circ \lambda_r)(a_1) = \lambda_r(\delta_{x_1}(a_1)) =$$

$$= \lambda_r(\delta_{x_2}(a_2)) = (\delta_{x_2} \circ \lambda_r)(a_2) = \lambda_{x_2 r}(a_2) = \lambda_{x_2}(a_2) = \lambda(a_2, x_2),$$

azaz **A** teljesíti a Moore kritériumot.

Megfordítva, tegyük fel, hogy **A** teljesíti a Moore kritériumot és vetülete karakterisztikus félcsoportja van jobb oldali egységeleme. Az utóbbi feltételből következik, hogy van olyan $r \in X^+$, hogy minden $p \in X^+$ bemenő szóra $\delta_p = \delta_{pr}[= \delta_{rp}]$. Minden $p \in X^+$ szó magadható $p = p'x$ ($p' \in X^*$, $x \in X$) alakban. Ha $r = r'z$ ($r' \in X^*$, $z \in X$), akkor minden $a \in A$ állapotra $\delta(ap', x) = \delta_p(a) = \delta_{pr}(a) = \delta(apr', z)$, ezért

$$\lambda_p(a) = \overline{\lambda(a, p)} = \lambda(ap', x) = \lambda(apr', z) = \lambda_{pr}(a),$$

azaz $\lambda_p = \lambda_{pr}$. Ez azt jelenti, hogy (δ_r, λ_r) az **A** Mealy automata karakterisztikus félcsoportjának jobb oldaliegységeleme. Ha **A** vetületének karakterisztikus félcsoportja egységelemes, akkor hasonlóan látható, hogy a **A** karakterisztikus félcsoportja is egységelemes.

7.1. Ha **A** memória nélküli automata, akkor minden $p \in X^*$ és $x \in X$ esetén

$$\alpha_{ap}(x) = \lambda(ap, x) = \lambda(a, x) = \alpha_a(x),$$

azaz $\alpha_{ap} = \alpha_a$. így tetszőleges $p, q \in X^*$ bemenő szavakra

$$\alpha_a(pq) = \alpha_a(p)\alpha_{ap}(q) = \alpha_a(p)\alpha_a(q),$$

vagyis α_a homomorfizmus.

Megfordítva legyen α_a homomorfizmus. Minden $b \in A$ hoz van olyan $p \in X^*$ bemenőn szó, hogy $b = ap$. Ezért minden $x \in X$ esetén

$$\lambda(a, p)\lambda(a, x) = \alpha_a(p)\alpha_a(x) = \alpha_a(px) = \lambda(a, px) = \lambda(a, p)\lambda(b, x).$$

Amiből $\lambda(a, x) = \lambda(b, x)$, vagyis **A** memória nélküli.

7.2. Ha $\alpha_p = \alpha_{pq}$ és $r \in X^*$, akkor

$$\alpha(p)\alpha_p(q)\alpha_p(r) = \alpha(pq)\alpha_p(r) = \alpha(pq)\alpha_{pq}(r) = \alpha(pqr) = \alpha(p)\alpha_p(qr),$$

amiből $\alpha_p(qr) = \alpha_p(q)\alpha_p(r)$. A megfordítás hasonlóan igazolható.

7.3. A feladat első része következik a 7.5. Lemmából. A második rész bizonyításához mutassuk meg, hogy ha $\alpha \in \mathcal{A}'(X)$, akkor α^{-1} is automataleképezés.

7.4. Az $X^k = \{p \in X^*; |p| = k$ $(k \in N_+$ halmazokra való α_{X^k} restrikciók is injektívek vagy szürjektívek. Az X^k halmazok is végesek, így minden α_{X^k} bijektív, vagyis $\alpha \in \mathcal{A}'(X)$. Ha

$$\alpha_p(x_1x_2\dots x_k) = \alpha_p(z_1z_2\dots z_k)(x_i, z_i \in X, i = 1, 2, \dots k),$$

akkor

$$\alpha(px_1x_2\dots x_k) = \alpha(p)\alpha_p(x_1x_2\dots x_k)\alpha(p)\alpha_p(z_1z_2\dots z_k) = \alpha(pz_1z_2\dots z_k),$$

így $px_1x_2\dots x_k = pz_1z_2\dots z_k$, azaz $x_1 = z_1, x_2 = z_2, \dots x_k = z_k$. Tehát α_p injektív. De α_p is automataleképezés, ezért $\alpha_p \in \mathcal{A}'(X)$.
7.5. A 7.2. Következmény szerint az α_p állapotok száma véges. A 7.4. feladat szerint $\alpha_p \in \mathcal{A}'(X)$. Legyen $A_{\alpha_p} = \{\alpha_{pq}; q \in X^*\}$. Az α_p leképezés indukálható az

$$\mathbf{A}_{\alpha_p} = (A_{\alpha_p}, \alpha_p, X, X, \delta_\alpha, \lambda_\alpha)$$

alsó automatával. Mivel $\mathbf{A}_{\alpha_p}$ az $\mathbf{A}_\alpha$ automata részautomatája, így maga is véges, ezért $\alpha_p \in \mathcal{V}(X)$. Lássuk be, hogy $(\alpha^{-1})_{\alpha(p)} = (\alpha_p)^{-1}$, vagyis α^{-1} állapotainak száma szintén véges, így $\alpha^{-1} \in \mathcal{V}(X)$.
7.6. Minden $q, t, v \in X^*$ esetén $\alpha_q(tv) = \alpha_q(t)\alpha_{qt}(v)$, amivel az asszociativitás igazolható. A jobb oldali egységelemek: (p, e) $(p \in Y^*)$, ahol e az üres szó.
9.1. A ρ_{max} definíciójából nyilvánvalóan következik.
10.1. Ha $\mathbf{A}_\lambda$ $(k+1)$-egyszerű, akkor (10.2) miatt $\zeta_{k+1} = \iota_A$. Ha $\zeta_{k-1} = \iota_A$, akkor a 10.5. Tétel szerint $\eta_k = \rho_{max} = \iota_A$, ami lehetetlen. Tehát $\mathbf{A}$ Moore automata k- vagy $(k+1)$-egyszerű.

Ha $\mathbf{A}$ k-egyszerű, akkor (10.2) miatt $\eta_{k-1} \neq \iota_A$. Ha $\eta_k \subseteq \pi$ és $(a, b) \in \eta_k$, akkor $\mu(a) = \mu(b)$, s így $(a, b) \in \zeta_k$, vagyis $a = b$, azaz $\eta_k = \iota_A$, ezért $\mathbf{A}_\lambda$ k-egyszerű. Ha $\eta_k \nsubseteq \pi$ és $\eta_{k+1} \subseteq \pi$. Akkor $(a, b) \in \zeta_{k+1}$, s a 10.3. Lemma szerint $a = b$, vagyis $\eta_{k+1} = \iota_A$, azaz az $\mathbf{A}_\lambda$ Mealy automata $(k+1)$-egyszerű.

Ha $\mathbf{A}_\lambda$ l-egyszerű, akkor $\eta_l = \iota_A$, s így $\eta_l \subseteq \pi$. (10.2) miatt $\zeta_l = \iota_A$, s így $k \leq l$. A feladat első állítása miatt $l \geq k+1$. Ha $l = k+1$, $\eta_k \subseteq \pi$, $a \neq b$ $(a, b \in A)$ és $(a, b) \in \eta_k$, akkor (10.2) miatt $(a, b) \in \zeta_k$. De $\zeta_k = \iota_A$, így $a = b$, ami lehetetlen. Legyen $l = k$. Ha $\eta_{k-1} \nsubseteq \pi$, akkor $\eta_{k-1} \neq \iota_A$. Ha $\eta_{k-1} \subseteq \pi$, akkor $\zeta_{k-1} = \eta_{k-1} \cap \pi = \eta_{k-1}$, s így ismét $\eta_{k-1} \neq \iota_A$, azaz $\mathbf{A}_\lambda$ k-egyszerű.
10.2. Legyen φ az $\mathbf{A} = (A, X, Y, \delta, \lambda)$ Mealy automata homomorf leképezése a $\mathbf{B} = (B, X, Y, \delta', \lambda')$ Mealy automatára. Jelölje $\eta_k \subseteq A^2$, ill. $\eta'_k \subseteq B^2$ a (10.1)-ben definiált ekvivalenciákat. Elegendő megmutatni, hogy bármely $k \in N$ egész számra $\eta_k = \eta_{k+1}$ akkor és csak akkor, ha $\eta'_k = \eta'_{k+1}$. Használjuk fel a 10.1. Lemmát.

10.3. A 6.5. Tétel bizonyítása alapján minden $a \in A$, $y \in Y$ és $p \in X^+$ esetén

$$\delta_Y((a,y),p) = (\delta(a,p), \lambda(a,p)), \quad \lambda_Y((a,y),p) = \lambda(a,p).$$

Legyen az **A** Mealy automata k-uniform $(k \in N_+)$. Ha $((a,y_1),(b,y_2)) \in \zeta_k$, akkor 10.1. Lemma és a (3.10) definíció szerint

$$y_1 = \mu_Y(a,y_1) = \mu_Y(b,y_2) = y_2$$

és minden $p \in X^k$ bemenő szóra

$$\lambda(a,p) = \lambda_Y(a,p) = \lambda_Y(b,p) = \lambda(a,p),$$

azaz $(a,b) \in \eta_k = \rho_{max}$. Így minden $q \in X^{k+1}$ bemenő szóra

$$\lambda_Y(a,q) = \lambda(a,q) = \lambda(b,q) = \lambda_Y(a,q),$$

vagyis $((a,y_1),(b,y_2)) \in \zeta_{k+1}$. A 10.3. Lemma szerint $\zeta_k = \pi_{max}$. Ha $\zeta_{k-1} = \pi_{max}$ és $(a,b) \in \eta_{k-1}$, akkor minden $y \in Y$ esetén $((a,y),(b,y)) \in \zeta_{k-1}$, vagyis $\eta_{k-1} = \rho_{max}$, ami lehetetlen. Tehát $\mathbf{A}_{\mu_Y}$ k-uniform. Hasonlóan bizonyítható, hogy ha **A** k-egyszerű [egyszerű], akkor $\mathbf{A}_{\mu_Y}$ is k-egyszerű [egyszerű].

Megfordítva, $\mathbf{A}_{\mu_Y}$ k-uniform $(k \in N_+)$ és $(a,b) \in \eta_k$, akkor bármely $y \in Y$ kimenő jelre $((a,y),(b,y)) \in \zeta_k = \pi_{max}$, vagyis $(a,b) \in \rho_{max}$, azaz $\eta_k = \rho_{max}$. Ha $\eta_{k-1} = \rho_{max}$, akkor (9.5) szerint $\zeta_{k-1} = \pi_{max}$. Ez azonban lehetetlen, ezért **A** k-uniform. Hasonlóan mutatható meg, hogy **A** k-egyszerű [egyszerű].

11.1. Ha $\underline{A}[X,Y]$ automata $\mathbf{A} = (A,X,Y,\delta,\lambda)$ részautomatája teljesíti a Moore kritériumot, továbbá

$$\alpha^{(1)}(x_1) \neq \beta^{(1)}(x_2) \quad (\alpha,\beta \in A,\ x_1,x_2 \in X).$$

és minden $j \in N_+$ és $z_1,\ldots,z_j \in X$ esetén

$$\alpha^{(j+1)}(x_1,z_1,\ldots z_j) = \beta^{(j+1)}(x_2,z_1,\ldots,z_j),$$

akkor (11.4)-(11.7) szerint

$$\delta(\alpha,x_1) = \alpha_{x_1} = \beta_{x_2} = \delta(\beta,x_2),$$

azaz (1.1) alapján

$$\alpha^{(1)}(x_1) = \lambda(\alpha,x_1) = \lambda(\beta,x_2) = \beta^{(1)}(x_2),$$

ami lehetetlen.

Megfordítva, ha

$$\alpha^{(1)}(x_1) \neq \beta^{(1)}(x_2) \quad (\alpha, \beta \in A,\ x_1, x_2 \in X),$$

továbbá van olyan $j \in N_+$ és vannak olyan $z_1, \ldots z_j \in X$ bemenő jelek, hogy

$$\alpha^{(j+1)}(x_1, z_1, \ldots z_j) \neq \beta^{(j+1)}(x_2, z_1, \ldots, z_j),$$

de $\mathbf{A}$ nem teljesíti a Moore kritériumot, vannak olyan $\alpha, \beta \in A$ és $x_1, x_2 \in X$, amelyekre

$$\delta(\alpha, x_1) = \delta(\beta, x_2), \quad \alpha^{(1)}(x_1) = \lambda(\alpha, x_1) \neq \lambda(\beta, x_2) = \beta^{(1)}(x_2).$$

Ezért szintén (11.4)-(11.7) szerint

$$\alpha_{x_1} = \delta(\alpha, x_1) = \delta(\beta, x_2) = \beta_{x_2},$$

azaz minden $j \in N_+$ és $z_1, \ldots, z_j \in X$ esetén

$$\alpha^{(j+1)}(x_1, z_1, \ldots z_j) = \beta^{(j+1)}(x_2, z_1, \ldots, z_j),$$

ami a feltétel miatt lehetetlen.

11.2. A (11.11) és (11.12) feltételek alapján a 11.5. Tételt is felhasználva a 11.1. feladathoz hasonlóan bizonyítható.

12.1. Feltehető, hogy az $\mathbf{A}$ automata az $\mathbf{A}_1 \times \mathbf{A}_2$ részautomatája. Tekintsük a $\pi_i : A \to A_i$ $(i = 1, 2$ projekciókat. Ha valamelyik π_i az A minden elemét A_i egyetlen elemére képezi le, akkor π_j $(j \neq i)$ az $\mathbf{A}$ izomorf leképezése az $\mathbf{A}_j$ automatába. Ellenkező esetben $\mathbf{A}$ felbontható az $\mathbf{A}/\ker \alpha_i$ nemtriviális automaták szubdirekt szorzatára.

12.2. Ha az $\mathbf{A} = (A, X, \delta)$ automata $p \in X^*$ bemenő szavára $|Ap| = 1$, akkor $\mathbf{A}$ bármely $\mathbf{A}' = (A', X, \delta)$ részautomatájára $|A'p| = 1$ és bármely φ homomorfizmusára $|\varphi(A)p| = 1$. Ha az $\mathbf{A}_i = (A_i, X, \delta_i)$ automata egy irányító szava p_i $(i = 1, \ldots, n)$, akkor $|(A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_n)p_1 p_2 \ldots p_n| = 1$.

12.3. Az nyilvánvaló, hogy $\rho \subseteq \cap_{i \in I} \tau(H_i)$. Ha pedig $\rho = \iota_A$, akkor az egyenlőség is teljesül. Tegyük fel, hogy $\rho \neq \iota_A$. Legyen $(a, b) \in \cap_{\in I} \tau(H_i)$ és $a \in H_j$ $(j \in I)$. Minthogy H_j $\tau(H_j)$-osztályok egyesítése, így $b \in H_j$, azaz $(a, b) \in \rho$.

12.4. Ha $\mathcal{C}$ egyetlen osztálya A akkor $\mathcal{C}$ nyilvánvalóan kompatibilis osztályozás. Ha $\mathcal{C} = \{H_1, H_2\}$, akkor $\tau(H_1) = \tau(H_2)$. Így a feltétel szerint egyik osztály sem diszjunktív. Ebben az esetben is $\mathcal{C}$ kompatibilis osztályozás. Tegyük fel, hogy $\mathcal{C} = \{H_i; i \in I\}$ és $|I| \geq 3$. Továbbá tegyük fel, hogy legfeljebb a H_k $(k \in I)$ osztály diszjunktív. Mivel $\mathbf{A}$ szubdirekt irreducibilis, ezért $\rho = \cap_{i \in I - \{k\}} \tau(H_i)$ nemtriviális kongruencia. De minden $i \in I - \{k\}$ indexre

H_i $\tau(H_i)$-osztályok uniója, ezért ρ-osztályok uniója is. Amiből következik, hogy H_k is ρ-osztályok uniója.

13.1. Ha az

$$\mathbf{A} = (A, a_0, X, X_1, \delta_1, \lambda_1) \quad (X_1 \subseteq X),$$
$$\mathbf{B} = (B, b_0, X, X_2, \delta_2, \lambda_2) \quad (X_2 \subseteq X)$$

olyan automaták, amelyek az α ill. β leképezést indukálják, akkor az $\alpha \circ \beta$ leképezést indukálja az $\mathbf{A}$ és $\mathbf{B}$ automaták $\mathbf{C} = (C, c_0, X, X_2, \delta, \lambda)$ szuperpozíciója. ($C = A \times B, c_0 = (a_0, b_0)$, a δ és λ függvények pedig tetszőleges $(a, b) \in C$ és $x \in X$ elempárra a

$$\delta((a,b),x) = (\delta_1(a,x), \delta_2(b, \lambda_1(a,x))), \quad \lambda((a,b),x) = \lambda_2(b, \lambda_1(a,x))$$

összefüggésekkel vannak definiálva.)

14.1. Megegyezik a $\mathbf{A}_k^* = (A_k, X, \delta_k^*)$ $(k \in I)$ automaták direkt szorzatával, ha a δ^* átmenetfüggvényt minden $a_k \in A_k$ állapotra és $x \in X$ bemenő jelre a

$$\delta_k^*(a_k, x)) = \delta_k(a_k, \varphi_k(a_k, x))$$

feltétellel definiáljuk. (A feladat a 13.5. Tétel általánosítása.)

14.2. A 14.4. Lemma bizonyításának gondolatmenetét alkalmazzuk. Tegyük fel, hogy $\mathbf{A}$ kvázidirekt szorzat. Ha az $\mathbf{A}_k$ automaták kvázidirekt szorzatok, akkor

$$\varphi^{(k)}(\mathbf{a}_k, \varphi_k(\mathbf{a}, x)) = \varphi^{(k)}(\varphi_k(x)).$$

A (14.14) feltételt alkalmazva, kapjuk, hogy

$$\varphi'_{k,l}(\mathbf{a}', \mathbf{x}') = \varphi_l{}^{(k)}(\varphi_k(\mathbf{x}')) \ ((k,l) \in J(\mathcal{C})),$$

azaz $\mathbf{A}'$ kvázidirekt szorzat.

Megfordítva, ha $\mathbf{A}'$ kvázidirekt szorzat, akkor (14.14) szerint

$$\varphi'_{k,l}(\mathbf{x}') = \varphi'_{k,l}(\mathbf{a}'), \mathbf{x}') = \varphi_l^{(k)}(\mathbf{a}_k, \varphi_k(\mathbf{a}, \mathbf{x})) = \varphi_l^{(k)}(\mathbf{a}_k, \varphi_k(\mathbf{x})).$$

Mivel φ_k szürjektív, ez azt jelenti, hogy $\varphi_l^{(k)}$ független $\mathbf{A}_k$ állapotaitól, azaz $\mathbf{A}_k$ kvázidirekt szorzat.

15.1. A 14.4. Lemma bizonyításának gondolatmenetét alkalmazva, ha $\mathbf{A}$ α_0-szorzat, akkor

$$\varphi'_{k,l}(\mathbf{a}', \mathbf{x}') = \varphi_l^{(k)}(\mathbf{a}_k, \varphi(\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_{k-1}, x)) \ ((k,l) \in J(\mathcal{C})),$$

amiből kapjuk, hogy $\varphi'_{k,l}$ nem függ az $\mathbf{A}_{s,t}$ automaták állapotaitól, ha $(k, l + i) \leq (s,t)$, azaz $\mathbf{A}'$ α_i-szorzat. Ha pedig $\mathbf{A}'$ α_i-szorzat, akkor

$$\varphi_l^{(k)}(\mathbf{a}_k, \varphi_k(\mathbf{a}, x)) = \varphi'_{k,l}(\mathbf{a}', \mathbf{x}') \ ((k,l) \in J(\mathcal{C}))$$

nem függ az $\mathbf{A}_{s,t}$ automaták állapotaitól, ha $(k, l+i) \leq (s, t)$. Így $\varphi_k(\mathbf{a}, x) = \varphi_k(\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_k, x)$, azaz $\mathbf{A}$ α_1-szorzat.

15.2. A 14.4. Lemma bizonyításának gondolatmenetét alkalmazzuk. Mivel $\mathbf{A}$ α_0-szorzat, ezért (14.14) szerint

$$\varphi_k(\mathbf{a}, x) = \varphi_k(\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_{k-1}, x) \ (k \in I).$$

Így

$$\varphi^{(k)}(\mathbf{a}_k, \varphi_k(\mathbf{a}, x)) = \varphi^{(k)}(\mathbf{a}_k, \varphi_k(\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_{k-1}, x)).$$

A (14.15) feltétel miatt

$$\varphi'_{k,l}(\mathbf{a}', x) = \varphi_l^{(k)}(\mathbf{a}_k, \varphi(\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_{k-1}, x)) \ ((k, l) \in J(\mathcal{C})).$$

De az $\mathbf{A}_k$ automaták α_i-szorzatok, ezért ebből leolvasható, hogy $\varphi'_{k,l}$ nem függ az $\mathbf{A}_{s,t}(k, l \leq (s, t+i))$ automaták állapotaitól, azaz $\mathbf{A}'$ α_i-szorzat.

Megfordítva, ha $\mathbf{A}'$ α_i-szorzat, akkor (14.15) szerint $\varphi'_{k,l}(\mathbf{a}', \mathbf{x}')$ $((k, l) \in J(\mathcal{C})$ nem függ azoknak az $\mathbf{A}_{s,t}$ automatáknak az állapotaitól, amelyekre $(s, t) \geq (k, l+i)$. De $\mathbf{A}$ α_0, ezért (14.14) és (14.15) szerint

$$\varphi_l^{(k)}(\mathbf{a}_k, \varphi_k(\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_{k-1}, x) = \varphi'_{k,l}(\mathbf{a}', x).$$

Ez azt jelenti, hogy $\varphi_l^{(k)}$ nem függ az $\mathbf{A}_{k,t}$ automata állapotaitól, ha $t \geq l+i$, azaz $\mathbf{A}_k$ α_i-szorzat.

15.3. Legyen ψ az $\mathbf{A}_1$ automata homomorf leképezése az $\mathbf{A}_2[X, \varphi] = (A_2, X, \delta')$ automatába. Akkor minden $a \in A_1$ és $x \in X_1$ esetén

$$\psi(\delta_1(a, x)) = \delta'(\psi(a), x) = \delta_2(\psi(a), \varphi(x)),$$

azaz (ψ, φ) az $\mathbf{A}_1$ automata általános homomorf leképezése $\mathbf{A}_2$-be.

Megfordítva, tegyük fel, hogy (ψ, φ) az $\mathbf{A}_1$ automata általános homomorf leképezése $\mathbf{A}_2$-be és $\mathbf{A}_2[X, \varphi] = (A_2, X, \delta')$ egytényezős α_0-szorzatba, azaz egytényezős kvázidirekt szorzatba. Akkor bármely $a \in A_1$ és $x \in X_1$ párra

$$\psi(\delta_1(a, x)) = \delta_2(\alpha(a), \varphi(x)) = \delta'(\psi(a), x),$$

vagyis ψ az $\mathbf{A}_1$ automata homomorf leképezése $\mathbf{A}_2[X, \varphi]$-be.

16.1. A (16.7) és a (16.2) feltételek alapján könnyen belátható az állítás.

16.2. Legyen $v = xv'$ $(x \in X, v' \in X^*)$. A (16.8) feltétel szerint $x_1 \neq x_2$, ezért $x \neq x_1$ vagy $x \neq x_2$.

Ha $w = e$, akkor (16.8) miatt $ax_1 \neq ax_2$. Így $ax \neq ax_1$ vagy $ax \neq ax_2$. Tegyük fel, hogy $ax \neq ax_1$. Ha van olyan $q \in X^*$, amelyre $ax_1q = a$, akkor $a = av = axv' = ax_1q$, azaz teljesül a (16.2) Leticsevszkij kritérium. Ha nincs ilyen q és $ax \neq ax_2$, akkor az előbbieket megismételve x_1 helyett x_2-vel, a q létezéséből következik, hogy teljesül a Leticsevszkij kritérium. Ha $\mathbf{A}$ nem teljesíti a Leticsevszkij kritériumot, akkor a, x, x_1 (vagy x_2) és v' választásával teljesül a fél Leticsevszkij kritérium.

Legyen $w \neq e$ és $w_1 \in X^*$ a leghosszabb olyan szó, amelyre $aw_1 = av_1$, ahol $w = w_1w_2$ és $v = v_1v_2$ $(w_2, v_1, v_2 \in X^*)$. Ebből következik, hogy vannak olyan $x_1', x_2' \in X$ és $p, q \in X^*$, amelyekre $w_2w_1 = x_1'p$, $v_2v_1 = x_2'q$, $aw_1x_1' \neq aw_1x_2'$ és $aw_1x_2'q = aw_1$. Ha a-t $aw_1 = av_1$-gyel, v-t v_2v_1-gyel, x_1-et x_1'-vel, x_2-t x_2'-vel és x-et x_2'-vel helyettesítjük, akkor az előbb diszkutált esetet kapjuk.

18.1. Mivel ekvivalens bemenő halmazok feletti automaták halmazait azonosítjuk, ezért elegendő egy $X = \{x_1, x_2, \dots, x_n, \dots\}$ megszámlálhatóan végtelen halmazt tekinteni, valamint annak $X_n = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ $(n = 1, 2, \dots)$ részhalmazait. Bármely X_n feletti kétállapotú (nem izomorf) beállító automaták $B(X_n)$ halmaza véges. A $B(X_n)$ halmazból kiválasztható X_n feletti véges beállító automatáknak egy $B'(X_n)$ minimális izomorfan teljes rendszere a direkt szorzatra. A $\cup_{n=1}^{\infty} B'(X_n)$ a véges beállító automatáknak egy minimális izomorfan teljes rendszere a direkt szorzatra.

19.1. Az α_0-szorzat aszociativitását felhasználva a 16.6. Lemma és a 19.5. Tétel szerint elegendő megmutatni, hogy a $\mathbf{D}_0$ automata homomorfan reprezentálható az n állapotú standard automata egy α_0-hatványával. Tekintsük a $\mathbf{D}_0 = ([2], \{x_1, x_2, x_3\}, \delta)$ beállító automatát és az $\mathbf{A} = ([n], \{x_1, x_2, x_3\}, \delta')$ standard automatát. Definiáljuk az $\mathbf{A}^2[\{x_1, x_2, x_3\}, \varphi]$ α_0-hatványt a következőképpen:

$$\varphi(1, 1, x_1) = \varphi(2, 2, x_2) = (x_3, x_3),$$

$$\varphi(1, 1, x_2) = (x_2, x_2), \quad \varphi(2, 2, x_1) = (x_1, x_1),$$

s minden más esetben $\varphi(i, j, x_k) = (x_3, x_3)$. A $\psi(i, i) = i$ $(i = 1, 2)$ a $\mathbf{A}^2$ egy részautomatájának izomorf leképezése $\mathbf{D}_0$-ra.

19.2. Legyen $\mathcal{K} = \{\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2, \dots\}$ egymással nem izomorf véges automaták olyan halmaza, amely tartalmaz bármely véges automatával izomorf automatát. Legyen $\mathcal{K}' = \{\mathbf{B}_1, \mathbf{B}_2, \dots\}$ a véges automaták olyan rendszere, hogy minden k-ra az $\mathbf{A}_1, \dots, \mathbf{A}_k$ automaták a $\mathbf{B}_k$ automata részautomatái. $\mathcal{K}'$ a véges automaták homomorfan teljes rendszere a véges tényezős α_0-szorzatra. A Krohn–Rhodes tételből következik, hogy nincs véges homomorfan teljes rendszer. Legyen $\mathcal{K}''$ a $\mathcal{K}'$ egy végtelen részrendszere. Mivel minden k pozitív egész számhoz van olyan $k \leq j$ pozitív egész szám, amelyre $\mathbf{B}_j \in \mathcal{K}''$, s így $\mathbf{A}_1, \dots, \mathbf{A}_k$ a $\mathbf{B}_j$-nek részautomatái. Ez azt jelenti, hogy $\mathcal{K}''$ a véges automaták homomorfan teljes rendszere a véges tényezős α_0-szorzatra. Nyilvánvaló, hogy $\mathcal{K}''$ nem minimális.

19.3. Tegyük fel, hogy $\mathbf{A} = (A, \{x, y\}, \delta)$ homomorfan reprezentálható a $\mathbf{B}$ és $\mathbf{C}$ legfeljebb háromállapotú automaták $\mathbf{D} = \mathbf{B} \times \mathbf{C}[X, \varphi]$ α_0-szorzatával. Nyilvánvaló, hogy $\mathbf{B}$ és $\mathbf{C}$ legalább kétállapotú. Legyen ψ a $\mathbf{D}$ automata $\mathbf{D}' = (D', X, \delta')$ részautomatájának homomorf leképezése $\mathbf{A}$-ra. Tekintsük D' π_1 első projekcióját. Mivel $\mathbf{D}$ α_0-szorzat, ezért $\ker \pi_1$ a $\mathbf{D}'$ kongruenciája. A $\ker \pi_1$-osztályok száma kettő vagy három és minden osztály legfeljebb háromelemű. Akkor $\mathcal{C} = \{\psi(\ker \pi_1[d]); d \in D'\}$ az $\mathbf{A}$ a $\mathbf{B}$ egy lefedő halmazrendszere és $\mathcal{C}$ legfeljebb három halmazból áll és minden halmaz legfeljebb háromelemű. Ha $\mathcal{C}$-ben van háromelemű halmaz, akkor, mivel az x bemenő jel ciklikusan permutálja az a A elemeit, $\mathcal{C}$ az A minden háromelemű részhalmazát tartalmazza. Ez lehetetlen, mert $\mathcal{C}$ legfeljebb háromelemű. Tehát $\mathcal{C}$-ben legfeljebb kételemű halmazok lehetnek. Ha $\mathcal{C}$ tartalmazza az $\{1, 2\}, \{2, 3\}, \{3, 4\}$ vagy a $\{4, 1\}$ halmazt, akkor az előbbi ok miatt ezek mindegyikét tartalmazza. Ha viszont $\{1, 3\}$ vagy $\{2, 4\}$ valamelyikét tartalmazza, akkor a másikat is. Ez azonban az y bemenő jel hatása miatt lehetetlen. Csak egyelemű halmazokat sem tartalmazhat, mert legfeljebb három halmazból áll. Kaptuk, hogy $\mathbf{A}$ nem reprezentálható homomorfan két négynél kevesebb állapotú automata α_0-szorzatával.

Tekintsük az $\mathbf{A}$ automata A halmazának összes kételemű részhalmazából álló B lefedő halmazrendszerét. A 19.15. Lemmát használva, megadhatunk olyan $\mathbf{B} = (B, \{x, y\}, \delta_B)$ és $\mathbf{C} = (C, B \times \{x, y\}, \delta_C)$ automatákat, hogy $|B| = 6$, $|C| = 2$. Továbbá $\mathbf{B}$ és $\mathbf{C}$ egy α_0-szorzata homomorf módon leképezhető $\mathbf{A}$-ra. Tekintsük most a

$$D = \{\{\{a_1, a_2\}, \{a_3, a_4\}\}, \{\{a_1, a_4\}, \{a_2, a_3\}\}, \{\{a_1, a_3\}, \{a_2, a_4\}\}\}$$

rendszert. A D rendszer a $\mathbf{B}$ automata egy lefedő halmazrendszere. Ezért, a 19.15. Lemma szerint, van olyan háromállapotú $\mathbf{B}_1$ és olyan kétállapotú $\mathbf{B}_2$ automata, hogy $\mathbf{B}$ homomorf módon reprezentálható egy α_0-szorzatukkal. Így $\mathbf{A}$ homomorfan reprezentálható $\mathbf{B}_1$, $\mathbf{B}_2$ és $\mathbf{C}$ egy α_0-szorzatával.

21.1. Egy megfelelő AY-homomorfizmus (φ, ι_X, ψ), ahol

$$\varphi(\rho_1[p]) = \rho_2[p] \ (p \in X^*), \quad \psi(\xi_1[q]) = \xi_2[q] \ (q \in X^+).$$

Ha (φ, ι_X, ψ) az $\mathbf{X}^*/(\rho_1, \xi_1)$ automata AY-homomorfizmusa az $\mathbf{A}$ Mealy automatára, akkor $\mathbf{X}^*/(\rho_2, \xi_2)$ automata AY-izomorf az $\mathbf{X}^*/(\rho_1, \xi_1)$ automatával, ahol $\rho_2 = \ker \varphi$ és $\xi_2 = \ker \psi$.

21.2. Használjuk fel az előző feladat eredményeit.

21.3. Végesen generálható automata előáll véges sok ciklikus automata egyesítéseként. A 6.11. Tételből és a 21.3. Lemmából kapjuk, hogy az automata véges. Megfordítva, minden véges automata karakterisztikus félcsoportja véges.

22.1. A 22.3. Következmény szerint $|G(\mathbf{A}|$ osztója $|A|$-nak. Legyen $\frac{|A|}{|G(\mathbf{A})|} = k$. Ha ρ a (22.1) feltétellel definiált kongruencia, akkor minden $a \in A$ állapotra $|\rho[a]| = |G(\mathbf{A})|$. Ha

$$\rho[a_1], \rho[a_2], \ldots, \rho[a_k]$$

különböző ρ-osztályok, akkor

$$(p, q) \in \rho_{\mathbf{A}} \quad \Longleftrightarrow \quad (a_i p = a_i q, \quad i = 1, 2, \ldots, k),$$

amiből már adódik az állítás.
22.2. Ha $\pi \in G(\mathbf{A})$, akkor nyilvánvalóan $U(a, b) = U(\pi(a), \pi(b))$ $(a, b \in A)$. Megfordítva, tegyük fel, hogy van olyan $a \in A$, amelyre minden $b \in A$ esetén $U(a, b) = U(\pi(a), \pi(b))$, ahol π az A egy permutációja. Akkor minden $b \in A$ és $p \in U(a, b) = U(\pi(a), \pi(b))$ párra $\pi(ap) = \pi(b) = \pi(a)p$. Ezért, ha $x \in X$, akkor

$$\pi(bx) = \pi(apx) = \pi(a)px = \pi(b)x,$$

vagyis $\pi \in G(\mathbf{A})$.
22.3. Lássuk be, hogy

$$U(a, \alpha(a))U(a, \beta(a)) \subseteq U(a, \alpha\beta(a)) \quad (\alpha, \beta \in G(A)).$$

Továbbá, ha $\alpha' \neq \beta'$ $(\alpha', \beta' \in G(A))$, akkor $U(a, \alpha'(a)) \cap U(a, \beta'(a)) = \emptyset$. Ebből következik, hogy a $*_a$ művelet jól definiált. A $\varphi(\alpha) = U(a, \alpha(a))$ $(\alpha \in G(A))$ egy megfelelő izomorfizmus.
23.1. Ha $a \in A$ és minden $p, q \in X^*$ esetén $apq = aqp$, akkor minden $x \in X$ bemenő jelre $axpq = apxq = aqpx = axqp$.
23.2. Ha $x \in X$ és $p, q \in X^+$, amelyekre $m \leq |p|$ és $n \leq |q|$, akkor minden $a \in A$ állapotra

$$ax(pq) = a(xp)q = aq(xp) = a(qx)p = ap(qx) = a(pq)x.$$

23.3. A 23.7. Tétel alapján.
23.4. A 23.3. Tétel alapján.
23.5. Ciklikus kommutatív automata karakterisztikus automata és minden generátoreleme karakterisztikus generátorelem. Legyen az $\mathbf{A} = (A, X, \delta)$ ciklikus kommutatív automata egy generátoreleme a_0. A 21.1. Tétel szerint $\mathbf{A} \cong \mathbf{X}^*/\rho_{\mathbf{A}}$. Ebből következik, hogy az $\mathbf{A}$ automata $C(\mathbf{A})$ kongruenciahálója izomorf az $\mathbf{X}^*/\rho_{\mathbf{A}}$ automata $C(\mathbf{X}^*/\rho_{\mathbf{A}})$ kongruenciahálójával. Az is nyilvánvaló, hogy $C(\mathbf{X}^*/\rho_{\mathbf{A}})$ kongruenciahálója megegyezik az $X^*\rho_{\mathbf{A}}$ karakterisztikus monoid kongruenciahálójával. Így $C(\mathbf{A}) \cong C(X^*/\rho_{\mathbf{A}})$.

24.1. Legyen $0x = 0y = 0$ és $1y = 1$ helyett $1y = 0$.
24.2. Tegyük fel, hogy az $\mathbf{A} = (A, X, \delta$ erősen n-összefüggő automata. Legyen B az $\mathbf{A}$ egy valódi részautomatájának állapothalmaza. Ha $n \leq |B|$, akkor legyen H a B egy n elemű részhalmaza. Ha pedig $|B| < n$, akkor legyen H az A olyan n elemű részhalmaza, amelyre $B \subseteq H$. Cseréljük ki H egy B-beli állapotát $(A - B)$-beli állapotra. (Ez megtehető, mivel $n < |A|$.) Jelöljük ezt a halmazt K-val. A B definíciója miatt nincs olyan $p \in X^*$, amelyre $Hp = K$ teljesülne. Ellentmondás. Ez azt jelenti, hogy $\mathbf{A}$ erősen összefüggő.
24.3. A definíció szerint $|A| \geq 3$). Legyen H az A halmaz legalább kételemű valódi részhalmaza, $a, b \in H$ $(a \neq b)$ és $c \in A - H$. Mivel $\mathbf{A} = (A, X, \delta)$ erősen 2-összefüggő automata, ezért van olyan $p \in X^+$, hogy $\{a, b\}p = \{a, c\}$. Ebből következik, hogy H nem szeparátor, vagyis $\mathbf{A}$-nak csak triviális szeparátorai vannak. A 24.2. Lemma szerint $\mathbf{A}$ egyszerű.
24.4. Legyen $A = \{1, 2, 3, 4\}$, $X = \{x, y\}$,

$$\delta(1, x) = 2,\ \delta(2, x) = 1,\ \delta(3, x) = 4,\ \delta(4, x) = 3,$$

$$\delta(1, y) = 3,\ \delta(3, y) = 1,\ \delta(2, y) = 4,\ \delta(4, y) = 2.$$

Az $\mathbf{A} = (A, X, \delta)$ automata erősen összefüggő. Mivel például $\{1, 2\}, \{3, 4\}$ kompatibilis osztályozás, ezért $\mathbf{A}$ nem egyszerű. De

$$\{1, 2, 3\}xyxy = \{1, 2, 4\}yxy = \{2, 3, 4\}xy = \{1, 3, 4\}y = \{1, 2, 3\},$$

amiből következik, hogy $\mathbf{A}$ erősen 3-összefüggő.
24.5. Legyen $\mathbf{B} = (B, X, \delta)$ az $\mathbf{A}$ automata legalább kétállapotú valódi részautomatája. Akkor $C(\mathbf{A}) = \{\iota_A, R(\omega_B), \omega_A\}$, ahol $R(\omega_B)$ a $\mathbf{B}$ szerinti (5.2) Rees kongruencia. (5.1) felhasználásával nem nehéz belátni, hogy $\mathbf{B}$ egyszerű. Tegyük fel, hogy $\mathbf{A}/\mathbf{B}$ nem egyszerű. Legyen $\rho \neq \iota_{A/B}, \omega_{A/B}$ az $\mathbf{A}/\mathbf{B}$ egy kongruenciája. Ha $\{B\}$ egy ρ-osztály, akkor tekintsük azt ρ' relációt A-n, amelyre minden $a \in A - B$ esetén $\rho'[a] = \rho[a]$ és minden $b \in B$ esetén pedig $\rho'[b] = B$. Nyilvánvalóan $\rho'(\neq R(\omega_B))$ az $\mathbf{A}$ automata egy nemtriviális kongruenciája. Ellentmondás. Ha $\{B\} \in \rho[a]$ és $|\rho[a]| \geq 2$, akkor $(B \subset)(\rho[a] - \{B\}) \cup B (\subset A)$ $\mathbf{A}$ egy valódi részautomatájának állapothalmaza. Szintén ellentmondás. Vagyis $\mathbf{A}/\mathbf{B}$ is egyszerű. Nem nehéz belátni, hogy ez sűrű bővítés.

Megfordítva, legyen $\mathbf{A} = (A, X, \delta)$ automata a $\mathbf{B}$ egyszerű automata sűrű bővítése a $\mathbf{C}$ egyszerű (csapdás) automatával. Így feltehető, hogy $B \subset A$, $\mathbf{B} = (B, X, \delta)$ és $\mathbf{C} = \mathbf{A}/\mathbf{B}$. Akkor $R(\omega_B) \in C(\mathbf{A})$ és $R(\omega_B) \neq \iota_A, \omega_A$. Tegyük fel, hogy $\rho \in C(\mathbf{A})$ és $\rho \neq \omega_A$. Nyilvánvaló, hogy $\rho_B = \rho \cap B^2$ a $\mathbf{B}$ automata egy kongruenciája. Ha $\rho_B = \iota_B$, akkor a sűrű bővítésből következik, hogy $\rho = \iota_A$. Legyen $\rho_B = \omega_B$. Ez azt jelenti, hogy B része egy ρ-osztálynak. Ha B valódi része lenne ennek a ρ-osztálynak, akkor a $\mathbf{A}/\mathbf{B}$ automatának lenne legalább kételemű valódi részautomatája. Ez azonban lehetetlen, mivel $\mathbf{A}/\mathbf{B}$ egyszerű. Kaptuk, hogy B egy ρ-osztály. A 24.5. Tétel szerint $\{B\}$ az $\mathbf{A}/\mathbf{B}$ automata diszjunktív csapdája. Amiből adódik, hogy $\rho = R(\omega_B)$, azaz $|C(\mathbf{A}| = 3$.

25.1. Az üres szó nélkül állapotfüggetlen $\mathbf{A} = (A, X, \delta)$ automata akkor és csak akkor állapotfüggetlen, ha minden $a, b \in A$ állapotpárra és $p \in X^+$ bemenő szóra

$$ap = a \quad \Longleftrightarrow \quad bp = b.$$

25.2. Ha az $\mathbf{A} = (A, X, \delta)$ félperfekt, akkor definíció szerint karakterisztikus monoidja csoport. Megfordítva, ha $\mathbf{A}$ karakterisztikus monoidja csoport, akkor bármely $p \in X^+$ bemenő szóhoz van olyan $q \in X^+$ bemenő szó, hogy minden $a \in A$ állapotra $apq = a$. A 25.1. feladat szerint $\mathbf{A}$ állapotfüggetlen. Ez azt jelenti, hogy $\mathbf{A}$ félperfekt.

26.1. A $\mathbf{P}(\mathbf{A})^+$ hatványautomata reverzibilis, ezért $\mathbf{F}(\mathbf{B}) = (F(B), X, \delta')$ a hatványautomata reverzibilis részautomatája. $S_1(\mathbf{A}) = S_1(\mathbf{P}(\mathbf{A})^+)$ és ha $B \neq A$, akkor $S_1(\mathbf{F}(\mathbf{B})) = S_1(\mathbf{A})$. Ha $Bp = Bq$, akkor bármely $b \in B$ állapothoz van olyan $c \in B$ állapot, hogy $bp = cq$. Az $\mathbf{A}$ erősen összefüggősége miatt van olyan $r \in X^*$, hogy $br = c$, azaz $bp = brq$. Mivel $\mathbf{A}$ állapotfüggetlen, ezért

$$\rho_{\mathbf{A}}[p] = \rho_{\mathbf{A}}[rq] = \rho_{\mathbf{A}}[r]\rho_{\mathbf{A}}[q].$$

Amiből $\rho_{\mathbf{A}}[r] = \rho_{\mathbf{A}}[p](\rho_{\mathbf{A}}[q])^{-1}$. De $c = br \in B$, így $Br = B$, azaz $\rho_{\mathbf{A}}[r] \in K(B)$, vagyis $\rho_{\mathbf{A}}[p] \in K(B)\rho_{\mathbf{A}}[q]$. Innen $K(B)\rho_{\mathbf{A}}[p] \subseteq K(B)\rho_{\mathbf{A}}[q]$. A másik irányú tartalmazás hasonlóan látható be.

26.2. A $B = \{ar;\ \rho_{\mathbf{A}}[r] \in G\}$ halmaz megfelel a követelménynek, ahol $a \in A$ tetszőleges rögzített állapot.

26.3. $N(B) \subseteq K(B)$ és $S_1(\mathbf{A})$ részcsoportja. Ha $\rho_{\mathbf{A}}[p] \in S_1(\mathbf{A})$, $p' \in (\rho_{\mathbf{A}}[p])^{-1}$ és $\rho_{\mathbf{A}}[r] \in N(B)$, akkor minden $C \in \underline{B}$ esetén

$$Cprp' = ((Cp)r)p' = (Cp)p' = Cpp' = Ce = C,$$

vagyis $N(B)$ $S_1(\mathbf{A})$ normális részcsoportja. Lássuk be, hogy a

$$\rho_{\underline{\mathbf{B}}}[p] \to N(B)\rho_{\mathbf{A}}[p] \quad (p \in X^*)$$

$S_1(\underline{\mathbf{B}})$ izomorf leképezése $S_1(\mathbf{A})/N(B)$-re.

26.4. Mutassuk meg, hogy ha $C = Bp$ $(p \in X^*)$, akkor

$$K(C) = (\rho_{\mathbf{A}}[p])^{-1}K(B)\rho_{\mathbf{A}}[p].$$

Mivel $N(B) = \cap_{C \in \underline{B}} K(C)$, ebből a 26.2. feladat szerint $G = N$ esetben kapjuk az állítást.
26.5. A $\underline{\mathbf{B}}$ $(B \in P(A)^+)$ automaták erősen összefüggőek és $\mathbf{P}(\mathbf{A})^+$ ezen automaták direkt összege. A 26.3. feladat szerint karakterisztikus monoidjuk csoport.
27.1. A kommutativitás miatt $K(B) = N(B)$.
27.2. Kommutatív automata hatványautomatája is kommutatív, ezért a **26.5** feladatból következik az állítás.
27.3. Mutassuk meg, hogy ha az $\mathbf{A} = (A, X, \delta)$ automata erősen összefüggő, akkor minden $a \in A$ hoz van olyan $p \in X^+$ bemenő szó, hogy $ap^{m+n} = a$. Ezt felhasználva a **26.2** feladat megoldása alapján mutassuk meg, hogy minden erősen összefüggő (m, n)-kommutatív automata kommutatív.
28.1. Legyen $\alpha \in E(\mathbf{A})$. Definiáljuk a $\varphi_\alpha : A \to A/D(\mathbf{A})$ megfeleltetést a következőképpen: Legyen $\varphi_\alpha(a) = \alpha(a)$, ha $a, \alpha(a) \in A - D(\mathbf{A})$. Minden más esetben legyen $\varphi_\alpha(a) = D(\mathbf{A})$. Mutassuk meg, hogy $\varphi_\alpha \in E(\mathbf{A}/\mathbf{D}(\mathbf{A}))$. Ehhhez minden $a \in A/D(\mathbf{A})$ és $x \in X$ elemre különböztessünk meg négy esetet:

$$\delta(a,x) \in D(\mathbf{A});$$
$$\delta(a,x) \notin D(\mathbf{A}), \quad \alpha(a) \in D(\mathbf{A});$$
$$\delta(a,x) \notin D(\mathbf{A}), \quad \alpha(a) \notin D(\mathbf{A}), \quad \alpha(\delta(a,x)) \in D(\mathbf{A});$$
$$\delta(a,x) \notin D(\mathbf{A}), \quad \alpha(a) \notin D(\mathbf{A}), \quad \alpha(\delta(a,x)) \notin D(\mathbf{A}).$$

Ha szükséges, használjuk a 28.13. Tételt is. Végül mutassuk meg, hogy $\psi(\alpha) = \varphi_\alpha$ $(\alpha \in E(\mathbf{A})$ $E(\mathbf{A})$ homomorf leképezése $E(\mathbf{A}/\mathbf{D}(\mathbf{A}))$-ba.
28.2. Mutassuk meg, hogy ha $\mathbf{A} = (A, X, \delta)$ irányítható automata, akkor a $\mathbf{P}(\mathbf{A})'$ általánosított hatványautomatája (l. (1.21)) is irányítható.

Ha még $\mathbf{A}$ erősen összefüggő is, akkor bármely $B \in P(A)^+$ és $a \in A$ esetén van olyan $P \subseteq X^k$, hogy $aP = B$. A 28.3. Tétel szerint $\mathbf{A}$ karakterisztikus monoidjának van jobb oldali zéruseleme. Ha $\rho_\mathbf{A}[r]$ egy jobb oldali zéruselem, akkor $Br = aPr = ar$. Így minden $C \in P(A)^+$ esetén van olyan $Q \subseteq X^l$, amelyre $BrQ = arQ = C$, azaz $\mathbf{P}(\mathbf{A})'$ erősen összefüggő.

Ha $\mathbf{P}(\mathbf{A})'$ erősen összefüggő, akkor $\mathbf{A}$ is nyilvánvalóan az. Mivel $\mathbf{P}(\mathbf{A})'$ erősen összefüggő, ezért bármely $a \in A$ hoz van olyan $P \subseteq X^m$, hogy $AP = a$, azaz minden $p \in P$ bemenő szóra $Ap = a$, vagyis $\mathbf{A}$ irányítható. (Ezek szerint, ha az általánosított hatványautomata erősen összefüggő, akkor irányítható is.)
28.3. Legyen $|A| = n$ és $|B| = k$. Mivel $\mathbf{A}$ irányítható, ezért $\mathbf{B}$ is az és a 28.1. Lemma szerint $D(\mathbf{A}) \subseteq B$. A $\mathbf{A}/\mathbf{B}$ Rees faktor irányítható csapdás automata. A (28.1)-beli jelölést használva, a 28.10. Tétel szerint

$$d(\mathbf{A}/\mathbf{B}) \leq \frac{(n-k+1)(n-k)}{2},$$

$$d(\mathbf{A}) \leq d(\mathbf{A}/\mathbf{B}) + d(\mathbf{B}) \leq \frac{(n-k+1)(n-k)}{2} + (k-1)^2 \leq (n-1)^2.$$

28.4. Elegendő $n = 2$-re bizonyítani az állítást. Használjuk fel a 27 feladat megoldását és mutassuk meg, hogy tetszőleges $1 \leq k \leq l$ egész számokra $(k-1)^2 + (l-1)^2 \leq (kl-1)^2$.

28.5. $\mathbf{B}$ is erősen összefüggő irányítható automata. Legyen $|A| = n$ és $|B| = k$. Feltehetjük, hogy $1 < k < n$. Legyen $p \in X^+$ a $\mathbf{B}$ automata egy legrövidebb irányító szava és $Bp = b_0$. A feltevés szerint $|p| \leq (k-1)^2$. Van olyan $q \in X^*$ legfeljebb $k-1$ hosszúságú szó, amelyre $b_0 q = b$. Minden $a \in A$ állapotra $apq \in \varphi^{-1}(b)$. Ha $|\varphi^{-1}(b)| = 1$, akkor pq az $\mathbf{A}$ automata egy irányító szava és

$$|pq| = |p| + |q| \leq (k-1)^2 + k - 1 = k(k-1) < (n-1)^2.$$

Ha nincs olyan $b \in B$, hogy $|\varphi^{-1}(b)| = 1$, de van van olyan, hogy $|\varphi^{-1}(b)| = 2$, akkor $4 \leq n$ és $k \leq \frac{n}{2}$. Legyen $\varphi^{-1}(b) = \{a_1, a_2\}$. A 28.8. Tétel bizonyítása szerint van olyan $r \in X^+$ legfeljebb $\binom{n}{2}$ hosszúságú szó, amelyre $a_1 r = a_2 r$, azaz pqr az $\mathbf{A}$ automata egy irányító szava és

$$|pqr| \leq \frac{n}{2}(\frac{n}{2} - 1) + \frac{n(n-1)}{2} < \frac{3}{4}n(n-1) \leq (n-1)^2.$$

29.1. Legyen $\mathbf{A}_v$ k-adfokban nilpotens, $c \in A$ csapda és $|\{\lambda(c,x);\ x \in X\}| = 1$. Ha $|p| \geq k+1$, akkor vannak olyan $q, r \in X^*$ és $x \in X$, hogy $|q| = k$ és $p = qxr$. Bármely $a \in A$ állapotra $ap = c$ és

$$\overline{\lambda(a,p)} = \overline{\lambda(aq, xr)} = \overline{\lambda(c, xr)} = y_0,$$

azaz (c, y_0) az $\mathbf{A}$ automata $\mathbf{A}_Y$ vázának irányított állapota és $\mathbf{A}_Y$ legfeljebb $(k+1)$-fokban nilpotens automata.

Megfordítva, legyen $\mathbf{A}_Y$ k-adfokban nilpotens automata és csapdája (c, y_0). Világos, hogy $\mathbf{A}$ is nilpotens és c a csapdája. Legyen $p \in X^*$ és $|p| \geq k$. Akkor minden $x \in X$ bemenő jelre

$$\lambda(c,x) = \lambda(cp, x) = \overline{\lambda(c, px)} = y_0.$$

29.2. A szükségesség nyilvánvaló. Az elegendőség bizonyítása céljából tegyük fel, hogy az $\mathbf{A} = (A, X, Y, \delta, \lambda)$ Mealy automata k-adfokban definit. Ha $|p| \geq k+1$ és $p = qx$, ahol $|q| \geq k$ ($q \in X^*$ és $x \in X$, akkor tetszőleges $a, b \in A$ állapotokra $aq = bq$, $ap = bp$ és

$$\overline{\lambda(a,p)} = \lambda(aq, x) = \lambda(bq, x) = \overline{\lambda(b,p)},$$

azaz $|(A \times Y)p| = 1$, vagyis $\mathbf{A}_Y$ legfeljebb $(k+1)$-fokban definit.
30.1. A 30.13. Tétel bizonyításához hasonlóan.
30.2. Legyen az $\mathbf{A} = (A, X, \delta)$ A-véges automata összefüggő részhalmazainak halmaza $\mathcal{B}$. Legyen $B_1 \in \mathcal{B}$ az $\mathbf{A}$ egy maximális összefüggő részhalmaza. Megmutatjuk, hogy $(A - B_1, X, \delta)$ az $\mathbf{A}$ automata egy részautomatája. Ha $A - B_1 = \emptyset$, akkor az állítás nyilvánvaló. Tegyük fel, hogy $A - B_1 \neq \emptyset$, s legyen $a \in A - B_1$. Mivel B_1 maximális összefüggő részhalmaz, ezért van olyan $b \in B_1$, hogy az $ap = bq$ egyenlet egyetlen $p, q \in X^*$ párra sem teljesül. Tegyük fel, hogy van olyan $x \in X$, amelyre $\delta(a, x) \in B_1$. Akkor vannak olyan $p, q \in X^*$, hogy $axp = bq$. Ellentmondás. Így minden $x \in X$ esetén $\delta(a, x) \in A - B_1$, azaz $(A - B_1, X, \delta)$ valóban részautomata. Ha $A - B_1$ az $\mathbf{A}$ összefüggő részhalmaza, akkor készen vagyunk a bizonyítással. Ha nem, akkor az előbbi eljárást $\mathbf{A}$ helyett az $(A - B_1, X, \delta)$ automatával megismételjük. Véges számú lépésben megkapjuk az eredményt.
31.1. Legyen $\mathbf{B} = (B, X, \delta)$ az $\mathbf{A} = (A, X, \delta)$ automata részautomatája és $R(\omega_B)$ a $\mathbf{A}$ automata $\mathbf{B}$ szerinti Rees kongruenciája. Mivel a $C(\mathbf{A})$ kongruenciaháló konplementumos, ezért van olyan $\rho \in C(\mathbf{A})$, amelyre $\rho \vee R(\omega_B) = \omega_A$ és $\rho \wedge R(\omega_B) = \iota_A$ és így $\mathbf{A}/\rho \cong \mathbf{B}$. Ha $\mathbf{B}$-t azonosítjuk $\mathbf{A}/\rho$-val, akkor a φ_ρ természetes homomorfizmus $\mathbf{A}$ retrakt homomorfizmusa $\mathbf{B}$-re.
31.2. Legyen $\mathbf{B}$ az $\mathbf{A}$ Mealy automata retrakt részautomatája és φ $\mathbf{A}$ egy retrakt homomorfizmusa $\mathbf{B}$-re. Ha $a \in A$, akkor minden $p \in X^+$ bemenő szóra (3.4) és (3.5) alapján

$$\lambda(a, p) = \lambda(\varphi(a), p)$$

azaz $(a, \varphi(a)) \in \rho_{max}$, vagyis $B \cap \rho_{max}[a] \neq \emptyset$. Nyilvánvalóan $\ker \varphi \wedge R'(B) = \iota_A$ és $\ker \varphi \vee R'(B) \subseteq \rho_{max}$. Ha $(a, b) \in \rho_{max}$, akkor minden $p \in X^+$ esetén

$$\lambda(\varphi(a), p) = \lambda(a, p) = \lambda(b, p) = \lambda(\varphi(b), p),$$

vagyis $(\varphi(a), \varphi(b)) \in R'(B)$. De $(a, \varphi(a)) \in \ker \varphi$ és $(\varphi(b), b) \in \ker \varphi$, amiből $(a, b) \in \ker \varphi \vee R'(B)$, vagyis $\rho_{max} \subseteq \ker \varphi \vee R'(B)$.

Megfordítva, a feltételek miatt minden $a \in A$ állapotra $|\tau[a] \cap B| = 1$. A $\varphi(a) = \tau[a] \cap B$ $(a \in A)$ leképezés az $\mathbf{A}$ automata retrakt homomorfizmusa $\mathbf{B}$-re.
33.1. Tegyük fel, hogy van olyan $p = x_1 \ldots x_i \ldots x_j \ldots x_n \in L$, amelyre az (1.5)-ben definiált $\delta(a_0, p) = a_1 \ldots a_i \ldots a_j \ldots a_n$ sorozatban $a_i = a_j$. Akkor

$$x_1 \ldots x_i (x_{i+1} \ldots x_j)^k x_{j+1} \ldots x_n \in L,$$

azaz L végtelen. Megfordítva, tegyük fel, hogy L végtelen. Akkor van olyan $p \in L$, hogy $|p| > |A|$. Ez azt jelenti, hogy a $\delta(a_0, p)$ sorozatban vannak egyenlő állapotok.

33.2. A 23.1. Lemma alapján nyilvánvaló, hogy minden kommutatív automatában előállítható nyelv kommutatív.

Megfordítva, legyen L kommutatív nyelv X felett. Tekintsük X^*-on azt a ρ_c relációt, amelyre $(p,q) \in \rho_c$ akkor és csak akkor, ha q előállítható a p szó betűinek valamilyen permutációjaként. Világos, hogy ρ_c kongruencia X^*-on és L bizonyos ρ-osztályok egyesítése. A (21.1) átmenetfüggvénnyel definiált $\mathbf{X}^*/\rho_c = (X^*/\rho_c, X, \delta_{\rho_c})$ (ciklikus) kommutatív automata $\rho_c[e]$ kezdő állapotból a $\{\rho_c[p];\ p \in L\}$ halmazzal előállítja L-et.

33.3. Tetszőleges $p = x_1x_2\ldots x_k$ szóra és $a_0, a_1, \ldots a_k \in A$ állapotokra, (1.19)-et és (1.20)-at is felhasználva :

$$a_1 \in \tilde{\delta}(a_0, x_1), \ldots, a_k \in \tilde{\delta}(a_{k-1}, x_k)$$

akkor és csak akkor, ha

$$a_{k-1} \in \tilde{\delta}_d(a_k, x_k), \ldots, a_0 \in \tilde{\delta}_d(a_1, x_1).$$

Ebből látható, hogy $\delta'(A_0, p) \cap F \neq \emptyset$ akkor és csak akkor, ha $\delta'_d(F, p^{-1} \cap A_0 \neq \emptyset$. (Ha $p = e$, akkor $e \in L \iff A_0 \cap F \neq \emptyset \iff e \in L^{-1}$.)

34.1. Az

A	0	1	2	3	4	5	6	7
x	1	5	6	1	4	4	7	4
y	4	2	3	1	4	3	7	5.

átmenettáblázattal megadott automata 0 kezdő állapottal és 3 végállapottal teljesíti a feltételeket. Ha felrajzoljuk az automata átmenetgráfját, könnyen meggyőződhetünk arról, hogy $0p = 3$ $(p \in \{x,y\})$, akkor és csak akkor, ha $p = xqy$, $q \in \{x,y\}(\{x,y\}^3)^*$ és $p \notin \{x,y\}^*x^3\{x,y\}^*$.

34.2. Ha van olyan $p \in L$, amelyre $|p| \geq n$, akkor a pumpáló lemmában szereplő jelölésekkel, a lemma bizonyítása szerint, $p = uvw$ $v \neq e$ és minden k nemnegatív egész számra $uv^kw \in L$, azaz L végtelen.

34.3. Használjuk a **??** Tétel bizonyításának jelöléseit. Annak eldöntésére, hogy L üres vagy nem legfeljebb

$$|F||X(n-1)| = |F||X^0 \cup X^1 \cup X^2 \cup X^{n-1}| = |F|\sum_{i=0}^{n-1}|X|^i = l\sum_{i=0}^{n-1}k^i$$

lépés szükséges. Ha $k = 1$, akkor $l(n-1)$, ha $k > 1$, akkor $l\frac{k^n-1}{k-1}$. Annak eldöntésére, hogy L végtelen vagy nem legfeljebb $|F||X(2n-1) - X(n-1)|$ lépés kell. Ha $k = 1$, akkor ln, ha $k > 1$, akkor $lk^n\frac{k^n-1}{k-1}$.

34.4. Használjuk fel a reguláris nyelvekre vonatkozó pumpáló lemmát.

FÜGGELÉK

1. Halmazok, megfeleltetések, relációk, gráfok

A *rendszer* és a *rendszer eleme* fogalmakat alapfogalmaknak tekintjük. Elem helyett *szimbólum*ot is mondunk. Ha a eleme az A rendszernek, akkor ezt $a \in A$ jelöli. Természetesen, $a \notin A$ azt jelöli, hogy a nem eleme az A rendszernek. A rendszereket elemeik felsorolásával vagy az elemeiket egyértelműen meghatározó T tulajdonsággal adhatjuk meg. Például $A = \{a_1, a_1, a_2, a_3\}$ vagy $B = \{a; T(a)\}$, ahol $T(a)$ azt jelenti, hogy a rendelkezik a T tulajdonsággal. Egy rendszer *halmaz*, ha elemei különbözőek.

Megjegyezzük, hogy nem célunk a halmazelmélet axiomatikus megalapozása. Mi csak az un. naív halmazelméletet használjuk. Egy esetben azonban eltérünk ettől. Használni fogjuk az osztály fogalmát is. *Osztály*nak olyan „nagyösszességet" tekintünk, amelynek nem lehetnek más „összességek" elemei. Ennek megfelelően, ha az A osztály eleme a B osztálynak, akkor A halmaz. Két halmaz pontosan akkor egyenlő, ha elemei megegyeznek.

Jól ismert példák halmazokra a következők: N a nemnegatív egész számok halmaza, N_+ a pozitív egész számok halmaza, Z az egész számok halmaza, Q a racionális számok halmaza, R a valós számok halmaza, C a komplex számok halmaza. Az $\{1, \ldots, n\}$ halmazt röviden $[n]$-nel is jelölünk. Azt a halmazt, amelynek nincs eleme, *üres halmaz*nak nevezzük, jele: $\emptyset$. Egy B halmaz az A halmaznak *részhalmaza*, ha $c \in B$-ből $c \in A$ következik, azaz, ha egy elem benne van B-ben, akkor benne van A-ban is. Ennek jelölése $B \subseteq A$. A B halmaz az A halmaz *valódi részhalmaza*, s ezt $B \subset A$ módon jelöljük, ha $B \subseteq A$, de $B \neq \emptyset$ és $B \neq A$. Két halmaz *egyenlő*, ha egymás részhalmazai. A halmazok egyenlőségének definíciója szerint egyetlen üres halmaz van. Jele: $\emptyset$. Az üres halmaz minden halmaznak részhalmaza. Egy A halmaz összes részhalmazainak $P(A)$ halmaza az A *hatványhalmaza*. Tehát $P(A)$ elemei az üres halmaz, az A halmaz (mint önmaga részhalmaza) és az A valódi részhalmazai. Az A halmazt ekkor *alaphalmaz*nak vagy *univerzum*nak nevezzük. A továbbiakban mindig feltételezzük, hogy a tekintetbe vett halmazok ugyanannak az univerzumnak a részhalmazai. A $P(A)$ egyelemű részhalmazait az egyszerűség kedvéért sokszor azonosítjuk elemükkel.

Az A és B halmazok $A \cup B$ *egyesítés*ét vagy *unió*ját, $A \cap B$ *metszet*ét vagy *közös rész*étés $A - B$ *különbség*ét a következőképpen értelmezzük: $A \cup B = \{x;\ x \in A$ vagy $x \in B\}$, $A \cap B = \{x;\ x \in A \text{ és } x \in B\}$ és $A - B = \{x;\ x \in A \text{és } x \notin B\}$. Ha $A \cap B = \emptyset$, akkor azt mondjuk, hogy A és B *diszjunkt* halmazok. Ha $B \subseteq A$, akkor $A - B$ a B halmaz A-ra vonatkozó *komplementer*e.

Az a_k $(k = 1, 2, \dots n)$ elemekből ebben a sorrendben megalkotott *rendezett* n-esre az $(a_1, a_2, \dots, a_n)$ vagy az $a_1 \dots a_n$ jelölést használjuk, s *véges vektor*nak, *véges jelsorozat*nak vagy *szó*nak, az $a_1, \dots, a_n$ elemeket pedig a rendezett n-es *komponensei*nek nevezzük, mégpedig a_k-t a rendezett n-es k-*adik komponens*ének. Úgy is mondjuk, hogy a rendezett n-es k-*adik hely*én a_k áll. Egy p *szó hossza* a benne előforduló (nem szükségképpen különböző) elemek száma és ezt $|p|$-vel jelöljük. Az A halmaz elemeiből képezett véges jelsorozatokat A *feletti szavak*nak is mondjuk. Az e *üres szó* az a szó, amely egyetlen jelet sem tartalmaz. Így az üres szó hossza: $|e| = 0$.

Az $(a_1, a_2, \dots, a_n)$ és a $(b_1, b_2, \dots, b_n)$ rendezett n-esek akkor és csak akkor egyenlők, ha $a_k = b_k$ minden $k = 1, 2, \dots, n$ esetén.

Az $\{A_k;\ k = 1, 2, \dots, n\}$ halmazrendszer ebben a sorrendben vett *Descartes-szorzat*a az $A_1 \times A_2 \times \dots \times A_n = \{(a_1, a_2, \dots, a_n);\ a_k \in A_k,\ k = 1, 2, \dots, n\}$ halmaz, amelyet röviden $\prod_{k=1}^{n} A_k$ módon jelölünk. Ha $n > 1$, és $A_1 = A_2 = \dots A_n = A$, akkor a Descartes szorzatot az A halmaz n-tényezős *hatvány*ának nevezzük és az A^n jelölést használjuk. Definíció szerint legyen $A^1 = A$ és $A^0 = \{e\}$. Az $A_1 \times A_2 \times \dots \times A_n$ feletti

$$(a_{11}, a_{12}, \dots a_{1n})(a_{21}, a_{22}, \dots a_{2n}) \dots (a_{k1}, a_{k2}, \dots, a_{kn})$$

szavakat azonosítjuk az $(a_{11}a_{21} \dots a_{k1}, \dots, a_{1n}a_{2n} \dots a_{kn})$ szavakkal.

Az $A \times B$ halmaz (nemüres) részhalmazai az A-ból B-be való *megfeleltetés*ek. Az $f \subseteq A \times B$ megfeleltetésre az $f : A \to B$ jelölést is használjuk. Bármely $a \in A$ esetén legyen $\varphi(a) = \{b \in B; (a, b) \in f\}$. (Természetesen $\varphi(a) = \emptyset$ is lehetséges.) A $D_f = \{a \in A;\ (\exists b \in B)\ (a, b) \in f\}$, illetve $R_f = \{b \in B;\ (\exists a \in A)\ (a, b) \in f\}$ részhalmazok az f megfeleltetés *értelmezési tartomány*a, illetve *értékkészlet*e. ρ *megfeleltetés inverzé*n értjük a B-ből A-ba való $\rho^{-1} = \{(b, a);\ (a, b) \in \rho\}$ megfeleltetést. Ha $\rho : A \to B$ és $\sigma : B \to C$, akkor ρ és σ *kompozíciója* az A-ból C-be való

$$\rho \circ \sigma = \{(a, c);\quad (\exists b \in B)\ ((a, b) \in \rho,\ (b, c) \in \sigma)\}$$

megfeleltetés. A $\rho_k : A_k \to A_{k+1}$ $(k = 1, 2, \dots, n)$ megfeleltetések esetén legyen

$$\rho_1 \circ \rho_2 \circ \dots \rho_n = (\rho_1 \circ \rho_2 \dots \circ \rho_{n-1}) \circ \rho_n.$$

Tetszőleges $\rho : A \to B$, $\sigma : B \to C$ és $\tau : C \to D$ megfeleltetésekre

$$(\rho \circ \sigma) \circ \tau = \rho \circ (\sigma \circ \tau).$$

Egy $f \subseteq A \times B$ megfeleltetés *függvény* vagy *leképezés*, ha (a, b), $(a, c) \in f$, akkor $b = c$. Ha $(a, b) \in f$, akkor ezt egyszerűen $b = f(a)$-vel jelöljük.

Bármely $\rho \subseteq A \times B$ megfeleltetés helyett tekinthetjük azt az $f_\rho : A \to P(B)$ függvényt is, amelyre minden $a \in A$ esetén $f_\rho(a) = \{b \in B; (a, b) \in \rho\}$ teljesül.

Az $f : A \to B$ és a $g : B \to C$ függvények $f \circ g$ kompozíciója szintén függvény. Az $f \circ g$ kompozíció azokból az (a, c) párokból áll, amelyekre van olyan $b \in B$, hogy $(a, b) \in f$ és $(b, c) \in g$. Mivel f és g függvények, ezért $b = f(a)$ és $c = g(b)$, azaz $c = g(f(a))$. Ennek megfelelően minden $a \in A$ elemre, ha $a \in D_f$ és $f(a) \in D_g$, akkor $f \circ g(a) = g(f(a))$. A függvények esetében beszélünk ezek *leképezésszorzat*áról is, amely éppen fordított sorrendben végezhető el, mint a kompozíció. Az $f : A \to B$ és $g : B \to C$ függvények gf *leképezésszorzat*át $gf = f \circ g$ definiálja, azaz minden $a \in A$ elemre $gf(a) = g(f(a))$.

Egy f függvénynek, mint megfeleltetésnek az f^{-1} inverze nem mindig függvény, azonban ez a megfeleltetés bizonyos esetekben fontos lehet számunkra. Gyakran használjuk a következő jelöléseket. Ha $H \subseteq D_f$, akkor $f(H) = \{f(h); h \in H\}$. Ha $K \subseteq R_f$ akkor az $f^{-1}(K) = \{a \in A;\ f(a) \in K\}$ részhalmaz a K f-szerinti *teljes inverz kép*e. Ha K egyetlen elemből áll, s ez az elem K, akkor az $f^{-1}(k)$ jelölést használjuk. Az A halmaz B halmazba való leképezéseinek halmazát B^A-val jelöljük.

Ha $A \subseteq D_f$ akkor az f_A vagy $f|A$-val jelölt leképezés az f leképezés A-ra való *leszűkítés*e vagy *restrikció*ja, ha $D_{f_A} = A$ és $f_A(a) = f(a)$ $(a \in A)$. A g leképezés az f leképezés A-ra való *kiterjesztés*e, ha $D_g = A$ és $g(a) = f(a)$ $(a \in D_f)$.

Az $f : A \to B$ függvény *szürjektív leképezés* vagy *ráképezés* vagy *szürjekció*, ha $R_f = B$, *injektív leképezés* vagy *egy-egyértelmű leképezés* vagy *kölcsönösen egyértelmű leképezés* vagy *injekció*, ha minden $a, b \in D_f$-re $f(a) = f(b)$ akkor és csak akkor teljesül, ha $a = b$. Az f függvény *bijektív leképezés* vagy *egy-egyértelmű ráképezés* vagy *kölcsönösen egyértelmű ráképezés* vagy *bijekció*, ha szürjektív és injektív. Ebben az esetben szemléletesen úgy is beszélünk, hogy az A halmaz elemeit *átjelöltük* vagy *átneveztük* az f bijekcióval. (T.i. $a \in A$ új jele $f(a)$.) Két halmaz egymással *ekvivalens* vagy *egyenlő számosságú*, ha megadható közöttük egy bijektív leképezés. Ha az A és B halmazok nem ekvivalensek, de A egy-egyértelműen leképezhető a B halmazba, akkor azt mondjuk, hogy A *számossága kisebb* B *számosságánál.* Megmutatható, hogy egy halmaz számossága mindig kisebb hatványhalmazának számosságánál. Egy A halmaz *véges*, ha az vagy az üres halmaz vagy ekvivalens az $\{1, 2, \dots, n\}$ halmazzal valamely pozitív egész n-re. Ez utóbbi esetben azt is mondjuk, hogy az A halmaz *n-elemű* vagy, hogy a *számosságа n*. Erre $n = |A|$ jelölést használjuk. A nem véges halmazokat *végtelen halmaz*oknak nevezzük vagy azt is mondjuk, hogy *számosságuk végtelen.* A pozitív egész számok halmazával ekvivalens halmazok a *megszámlálhatóan végtelen* halmazok. Erre az $|A| = \infty$ jelöléssel is utalunk. Nem nehéz belátni, hogy minden végtelen halmaznak van megszámlálhatóan végtelen részhalmaza. Az A halmazt *megszámlálható*nak nevezzük, ha véges vagy megszámlálhatóan végtelen halmaz. A valós számok halmazával ekvivalens halmazok a *kontínuum* számosságú halmazok.

A $\varphi : A \to A$ függvényeket az A halmaz *transzformációi*nak nevezzük. Ha φ bijektív, akkor az A halmaz *permutációjá*nak mondjuk.

A $\pi_j(a_1, a_2, \dots, a_n) = a_j$ $(a_j \in A_j, j = 1, 2, \dots, n)$ összefüggéssel definiált $\pi_j : \prod_{k=1}^n A_k \to A_j$ leképezés a $\prod_{k=1}^n A_k$ Descartes-szorzat *j-edik projekciója.*

Egy olyan függvényt amely egy $I \neq \emptyset$ halmaz minden k elemének megfeleltet egy A_k halmazt *indexezés*nek nevezzük. Az I halmazt *indexhalmaz*nak is hívjuk. Az I halmaz elemeivel indexezett halmazrendszerre az $\{A_k; k \in I\}$ jelölést használjuk. Legyen a J halmaz ekvivalens az I halmazzal és π a J egy kölcsönösen egyértelmű leképezése I-re. Az $\{A_k; k \in I\}$ rendszer π *szerinti átindexezésé*nek nevezzük a $\{B_l; l \in J\}$ rendszert, ha minden $l \in J$ indexre $B_l = A_{\pi(l)}$.

Tetszőleges $\{A_k;\ k \in I\}$ halmazrendszer egyesítését és metszetét a következőképpen értelmezzük:

$$\cup\{A_k; k \in I\} = \{x;\ (\exists k \in I)\ x \in A_k\},$$

$$\cap\{A_k; k \in I\} = \{x;\ (\forall k \in I)\ x \in A_k\}.$$

Használjuk a $\cup_{k\in I} A_k$ ill. a $\cap_{k\in I} A_k$ jelölést is. Az $\{A_k;\ k \in I\}$ halmazrendszert páronként diszjunktnak nevezzük, ha $A_k \cap A_j = \emptyset$ minden $k \neq j$ indexekre. Megszámlálhatóan sok megszámlálható halmaz egyesítése is is megszámlálható.

Kiválasztási függvényeknek nevezzük az $\mathbf{a} : I \to \cup\{A_k; k \in I\}$ függvényeket, ha $\mathbf{a}(k) \in A_k$ teljesül minden $k \in I$-re. A kiválasztási függvényeket *vektorok*nak is mondjuk. Az $\mathbf{a}(k)$ elemeket röviden a_k-val is jelöljük. Használjuk az $\mathbf{a} = (a_k; k \in I)$ jelölést is. A vizsgálatainkban feltesszük, hogy ilyen függvények léteznek, azaz elfogadjuk az un. *kiválasztási axiómát*: Bármely I indexhalmaz és nemüres $\{A_k;\ k \in I\}$ halmazok esetén létezik legalább egy kiválasztási függvény. Ha $I = N_+$, akkor a kiválasztási függvények az $\mathbf{a} = (a_1, \dots, a_k, \dots)$ végtelen sorozatok, ha pedig $I = [n]$, akkor az $\mathbf{a} = (a_1, \dots, a_n)$ rendezett n-esek.

A Descartes-szorzat definíciója kiterjeszthető tetszőleges I indexhalmazra is. Tetszőleges nemüres A_k $(k \in I)$ halmazok *Descartes-szorzat*án értjük és $\prod_{k\in I} A_k$-vel jelöljük az $\mathbf{a} : I \to \cup\{A_k; k \in I\}$ kiválasztási függvények halmazát. Az A_k halmaz $\mathbf{a}(k) = a_k$ eleme $\mathbf{a}$ *k-adik komponense*, a $\pi_k(\mathbf{a}) = a_k$ összefüggéssel definiált $\pi_k : \prod_{i\in I} A_i \to A_k$ leképezés pedig a Descartes-szorzat *k-adik projekciója*. Ha minden $k \in I$-re $A_k = A$, akkor a Descartes-szorzatot A^I-vel jelöljük és *hatványá*nak mondjuk.

Ez a kiterjesztés az $I = [n]$ vagy $I = N_+$ esetben esetben az eredeti definíciót adja. Az $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ vagy az $(a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots)$ elem jelölheti ugyanis azt az $\mathbf{a}$ kiválasztási függvényt is, amelyre $\mathbf{a}(k) = a_k \in A_k$ $(k \in I)$. Másrészt, ha $\mathbf{a}$ egy kiválasztási függvény, akkor tekinthető a Descartes-szorzat $(\mathbf{a}(1), \mathbf{a}(2), \ldots, \mathbf{a}(n))$ vagy $(\mathbf{a}(1), \mathbf{a}(2), \ldots, \mathbf{a}(n), \ldots)$ elemének.

Ha I megszámlálhatóan végtelen, akkor I-t azonosíthatjuk a pozitív egész számok halmazával. Így az $\{A_k;\ k \in N_+\}$ halmazrendszernek *Descartes-szorzat*án az $(a_1, a_2, \ldots, a_k, \ldots)$ $(a_k \in A_k)$ sorozatok, mint kiválasztási függvények halmazát értjük és $\prod_{k=1}^{\infty} A_k$-vel jelöljük.

Egy $A \neq \emptyset$ halmaz részhalmazainak $\mathcal{C} = \{A_k;\ k \in I\}$ halmaza az A egy *osztályozás*a, az A_k halmazok pedig a $\mathcal{C}$ osztályozás *osztály*ai, ha azok páronként diszjunktak, egyik sem egyenlő az üres halmazzal és egyesítésük egyenlő A-val. Bármely $a \in A$ elemre az a-t tartalmazó osztályt $\mathcal{C}[a]$-val jelöljük. Az osztályozás *uniform*, ha minden osztálya egyenlő számosságú és *véges*, ha az osztályok száma véges. Az A halmaz $\mathcal{C}'$ osztályozása a $\mathcal{C}$ osztályozásának *finomítása*, jelölésben $\mathcal{C}' \subseteq \mathcal{C}$, ha minden $A'_k \in \mathcal{C}'$ osztályhoz van olyan $A_l \in \mathcal{C}$ osztály, amelyre $A'_k \subseteq A_l$. A $\mathcal{C}'$ osztályozás a $\mathcal{C}$ osztályozás *valódi finomítása*, jelölésben $\mathcal{C}' \subset \mathcal{C}$, ha vannak olyan $A'_m \in \mathcal{C}'$ és $A_n \in \mathcal{C}$, hogy $A'_m \subset A_n$. A $\mathcal{C}'$ osztályozás $\mathcal{C}$ *triviális finomítása*, ha minden osztálya egyelemű.

Egy A halmaznak önmagába való ρ megfeleltetései, azaz A^2 ρ részhalmazai az A halmazon értelmezett *(binér) relációk* vagy röviden az A *(binér) relációi.* Az $\emptyset$ részhalmazt *üres reláció*nak mondjuk. Az $(a, b) \in \rho$ jelölés helyett az $a\rho b$ jelölést is használjuk, s azt mondjuk, hogy *a ρ relációban van b-vel.* Az a-val ρ relációban lévő elemek halmazát $\rho[a]$-val jelöljük. Az $\overline{\rho} = A^2 - \rho$ reláció a ρ reláció *komplementer*e. Az A^2 halmaz az A *univerzális reláció*ja, s ennek jelölésére ω_A-t használunk. Az $\{(a, a);\ a \in A\}$ részhalmaz az A *identikus reláció*ja és ι_A-val jelöljük. Ezeket a relációkat A *triviális relációi*nak is mondjuk. Mivel ι_A leképezés, ezért *identikus leképezés*nek is mondjuk. Ha nem okoz félreértést, akkor az A indexet mindkét jelölésnél elhagyjuk. Ha $\rho \subseteq \tau \subseteq A^2$, akkor azt mondjuk, hogy ρ a τ *szűkítés*e vagy τ a ρ *kiterjesztés*e. Ha M részhalmaza az A halmaznak és ρ reláció az A-n, akkor a $\rho_M = M^2 \cap \rho$ reláció a ρ *M-re való szűkítés*e vagy ρ *a ρ_M A-ra való kiterjesztés*e.

Akkor mondjuk, hogy egy ρ reláció *reflexív*, ha $\iota \subseteq \rho$, *irreflexív*, ha $\iota \subseteq \overline{\rho}$, *szimmetrikus*, ha $\rho \subseteq \rho^{-1}$, *antisszimmetrikus*, ha $\rho \cap \rho^{-1} = \iota$ és *tranzitív*, ha $\rho \circ \rho \subseteq \rho$. A $\rho, \tau \in A^2$ relációk *felcserélhetők*, ha $\rho \circ \tau = \tau \circ \rho$.

Legyenek P és E diszjunkt halmazok. Jelölje P_2 a P elemeiből képzett kételemű rendszerek halmazát. Ha φ az E halmaznak a P_2 halmazba való megfeleltetése, akkor A $\{P, E, \varphi\}$ rendszert (*irányítás nélküli*) *gráf*nak nevezzük. Ha P vagy E végtelen, akkor *végtelen gráf*ról beszélünk. Ha $x \in E$ és $a, b \in P$ elemekre $(x, \{a, b\}) \in \varphi$ teljesül, akkor azt mondjuk, hogy az a és b pontok az *x él végpontjai* és az x él illeszkedik az a és b pontra vagy x *összeköti* az a és b pontot. Úgy is mondjuk, hogy a és b *szomszédosak*. Két élt *szomszédos*nak mondjuk, ha van közös végpontjuk. Ha vannak olyan $x_i \in E$ és $\{a_i, a_{i+1}\} \in P_2$, amelyekre $(x_i, \{a_i, a_{i+1})\} \in \varphi$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$, akkor az

$$\{a_1, a_2\}, \{a_2, a_3\}, \ldots, \{a_n, a_{n+1}\} \quad (a_1, a_2, \ldots a_{n+1} \in P)$$

sorozatot (*n hosszúságú*) *út*nak nevezünk, amelynek *végpont*jai a_1 és a_{n+1}. Azt is mondjuk, hogy a_1 és a_{n+1} *összeköthető úttal.* Ha egy út kezdő- és végpontja megegyezik, akkor az utat *kör*nek hívjuk.

Ha φ az E halmaznak a P^2 Descartes-szorzatba való megfeleltetése, akkor A $\{P, E, \varphi\}$ rendszert *irányított gráf*nak nevezzük. A P halmaz elemei a *gráf pontjai* vagy *csúcsai*, az E elemei pedig a *gráf élei.*

Minden gráfnak, ha P és E legfeljebb kontinuum számosságú, megfeleltethető az R^3 háromdimenziós euklídeszi tér egy alakzata. A gráf pontjait térbeli pontokkal vagy kis körökkel ábrázolhatjuk, amelyekhez odaírjuk vagy a körökbe beírjuk, hogy P mely elemeiről van szó. Ha $(x, (a, b)) \in \varphi$, akkor az a-val megjelölt pontot egy éllel összekötjük a b-vel megjelölt ponttal, amelyre ráírjuk az x jelet. Azt is mondjuk, hogy az x él és az a ill. a b pont *illeszkednek egymáshoz.* Egy ponthoz illeszkedő élek számát a pont *foká*nak mondjuk. Ha $a = b$, akkor x-et *hurokél*nek hívjuk. Ha $(x, (a, b)) \in \varphi$, akkor a-t x *kezdőpontjá*nak, b-t pedig *végpontjá*nak hívjuk. Egy $(a, b) \in P^2$ rendezett párt (a, b) irányított élnek is mondjuk, ha van olyan $x \in E$, amelyre $(x, (a, b)) \in \varphi$. Ebben az esetben, ha $(x, (a, b)) \in \varphi$, akkor az a-val megjelölt pontot egy irányított éllel kötjük össze a b-vel megjelölt ponttal. Egy

$$(a_1, a_2), (a_2, a_3), \ldots (a_n, a_{n+1}) \quad (a_1, a_2, \ldots a_{n+1} \in P)$$

sorozatot (*n hosszúságú*) *irányított út*nak nevezünk, amelynek *kezdőpont*ja a_1 és *végpont*ja a_{n+1}. Ezt *a_1-ből a_{n+1}-be vezető irányított útnak* is nevezzük. Ha egy út kezdő- és végpontja megegyezik, akkor az utat *irányított kör*nek hívjuk.

Minden (P, E, φ) irányított gráfnak egyértelműen megfelel P-nek egy binér relációja, mégpedig a $\varphi(E)(\subseteq P^2)$ reláció. Fordítva, a P halmaz minden $\rho(\subseteq P^2)$ binér relációjához megadhatunk egy (P, ρ, φ) irányított gráfot, amelyre minden $(a, b) \in \rho$ esetén $\varphi(a, b) = (a, b)$ teljesül. Ezt a ρ *binér reláció gráfjá*nak nevezzük

Egy gráfot akkor mondunk *összefüggőnek*, ha bármely két különböző pontja összeköthető úttal. Egy irányított gráf *erősen összefüggő*, ha bármely a és b pontja összeköthető egy a kezdőpontú és b végpontú irányított úttal. Egy irányítás nélküli gráf *fa*, ha összefüggő és nem tartalmaz kört. Egy irányított gráfot *irányított fának* nevezünk, amelynek *gyökere* $a_0 \in P$, ha fa és az a_0 pontot bármely $a \in P$ $(a \neq a_0)$ ponttal összekötő egyetlen út egyben a_0-ból a-ba vezető irányított út. Nyilvánvaló, hogy minden irányított fának egyetlen gyökere van. Egy irányított fa *végpontjai* azok a pontok, amelyekből nem indul ki irányított él. Egy irányított fa *részfá*ja olyan irányított fa, amely az eredeti irányított fa része, és gyökere az eredeti irányított fa egy csúcsa.

Egy (P', E', φ') irányított gráf a (P, E, φ) irányított gráf *részgráf*ja, ha $P' \subseteq P$, $E' \subseteq E$ és $\varphi' = \varphi_{E'}$.

Páronként diszjunkt fák egyesítését *erdő*nek mondjuk.

Tetszőleges $A \neq \emptyset$ halmazra a $d : A^2 \to R$ függvény *az A halmaz egy metrikája* vagy *távolságfüggvénye*, ha bármely $a, b, c \in A$ elemre $d(a, b) \geq 0$, $d(a, b) = d(b, a)$, $d(a, b) + d(b, c) \geq d(a, c)$ (*háromszög-egyenlőtlenség*), továbbá $d(a, b) = 0$ akkor és csak akkor, ha $a = b$. Azt mondjuk, hogy A *a d távolságfüggvénnyel metrikus teret* alkot.

2. Műveletek, algebrai struktúrák

Tetszőleges A nemüres halmaz és $n \in N$ esetén az $f : A^n \to A$ függvények az A halmazon értelmezett *n-változós műveletek*. Úgy is mondjuk, hogy az A halmaz *zárt* az f műveletekre. Az f *parciális művelet*, ha A^n halmaz nem minden elemére van értelmezve. Természetesen minden $f : A^n \to A$ n-változós művelet felfogható $(n+1)$-változós műveletnek is, mégpedig olyan módon, hogy ha $a_1, \ldots, a_n, a_{n+1} \in A$, akkor $f(a_1, \ldots, a_n, a_{n+1}) = f(a_1, \ldots, a_n)$. Speciálisan, $n = 1$ esetén az unér, $n = 2$ esetén pedig a binér művelet kifejezést is használjuk. Ha $n = 0$, akkor nullér műveletről beszélünk, ami $A^0 = \{e\}$ miatt A egy elemének kijelölését jelenti. Az A-n értelmezett unér műveletek pontosan az A transzformációi. Binér műveletekre pedig példaként említhetjük az összeadást és a szorzást a következő halmazokon: N, N_+, Z, Q, R, C, abban az értelemben, hogy bármely (a, b) rendezett elempárhoz az $a + b$ összeget, illetve az ab szorzatot rendeljük hozzá.

Ha egy halmazon értelmezve van legalább egy művelet, akkor a halmazt a tekintetbe vett műveletekkel együtt *algebrai struktúrá*nak nevezzük. Azaz egy algebrai struktúra egy olyan (A, F) rendezett halmazpár, amelyben A egy nemüres halmaz, F pedig az A-n értelmezett műveletek valamely nemüres halmaza. Az A halmazt az algebrai struktúra *tartóhalmazá*nak nevezzük. Ha nem vezet félreértésre, akkor az (A, F) jelölés helyett A-t használunk és azt is mondjuk, hogy A algebrai struktúra vagy röviden *algebra*.

Az (A, F) és (A', F') algebrai struktúrák *azonos típusúak*, ha megadható F és F' között olyan bijektív leképezés, hogy az egymásnak megfeleltetett műveletek ugyanannyi változósak. Az $\emptyset$ halmazt *üres algebrá*nak is nevezzük, ahol a műveletek F halmaza tetszőleges.

Ha (A, F) algebra, $A' \subseteq A$ és $F' \subseteq F$, akkor legyen $F'_{A'} = \{f'_{A'};\ f' \in F'\}$. Ha $(A', F'_{A'})$ algebra, akkor ez az algebra az eredeti algebra egy *parciális részalgebrá*ja. Az egyszerűség kedvéért $f'_{A'}$-t azonosítjuk f'-vel. Az eredeti algebrával azonos típusú parciális részalgebrák (azaz, amikor $F' = F$) az algebra *részalgebrái*. Például $(N, \{+\})$ parciális részalgebrája a $(Z, \{+, \cdot\})$ algebrának, de részalgebrája a $(Z, \{+\})$ algebrának. Az üres algebra minden algebrának részalgebrája. Az (A', F) algebra az (A, F) algebra *valódi részalgebrája*, ha $A' \subset A$. Az (A', F) algebra az (A, F) algebra *maximális részalgebrája*, ha (A, F)-nek nincs olyan (A'', F) részalgebrj́a, amelyre $A' \subset A'' \subset A$. Legyen A algebrai struktúra, M pedig nemüres részrendszere A-nak. M-et A *generátorrendszer*e, ha M elemeiből A műveleteinek véges számú alkalmazásával A minden eleme előáll. Ha M generátorrendszere az A algebrai struktúrának, akkor az $A =< M >$ jelölést is használjuk. Az M rendszer az A algebra *minimális generátorrendszer*e, ha nincs A-nak olyan generátorrendszere, amely valódi részrendszere M-nek. Nyilvánvaló, hogy minden minimális generátorrendszer halmaz. Egy algebrai struktúra *végesen generált*, ha van véges generátorrendszere. Végesen generált algebrai struktúrának mindig van minimális generátorrendszere. Az A algebrai struktura B részstruktúrájára és C nemüres részhalmazára $B =< C >$ akkor és csak akkor, ha B az A C-t tartalmazó részstruktúráinak közös része, azaz A-nak minimális C-t tartalmazó részstruktúrája.

Legyen α az F halmaz bijektív leképezése az F' halmazra. A $(P(A), F')$ algebrai struktúra az (A, F) algebrai struktúra *hatványstruktúrá*ja, ha tetszőleges $f \in F$ n-változós műveletre és $A_1, A_2, \dots A_n \in P(A)$ halmazokra

$$\alpha(f)(A_1, A_2, \dots, A_n) = \{f(a_1, a_2, \dots, a_n); a_1 \in A_1, a_2 \in A_2, \dots, a_n \in A_n\}$$

teljesül. Ha $A_i = \emptyset$ valamely $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ esetén, akkor

$$\alpha(f)(A_1, A_2, \dots, A_n) = \emptyset.$$

Ez azt jelenti, hogy egy algebrai struktúra és hatványstruktúrája ugyanolyan tipusú. Az $\alpha(f)$ műveleteket az (A, F) algebrai struktúra *komplexusműveletei*nek is mondjuk. (Egy algebrai struktúra részhalmazait a struktúra *komplexusai*nak is hívjuk.) Az egyszerűség kedvéért általában az α leképezést identikusnak tekintjük, azaz a műveleteket a hatványstruktúrában ugyanúgy jelöljük, mint az eredeti struktúrában.

Az azonos típusú (A, F) és (A', F') algebrai struktúrák esetén a $\varphi : A \to A'$ leképezés az (A, F)-nek (A', F')-be való *homomorf leképezés*e vagy *homomorfizmus*a vagy *homomorf beágyazás*a, ha tetszőleges egymásnak megfelelő n-változós $(f, f') \in F \times F'$ műveletpár és tetszőleges $(a_1, a_2, \ldots, a_n) \in A^n$ esetén $\varphi(f(a_1, a_2, \ldots, a_n)) = f'(\varphi(a_1), \varphi(a_2), \ldots, \varphi(a_n))$ teljesül. Úgy is mondjuk, hogy (A, F) *homomorfan beágyazható* (A', F')*-be.* Ha φ szürjektív, akkor azt mondjuk, hogy (A', F') az (A, F)-nek *homomorf képe.* Ha φ injektív, akkor φ az (A, F)-nek (A', F')-be való *izomorf leképezése* vagy *izomorfizmus*a vagy *izomorf beágyazás*a. Ha pedig φ bijektív, akkor (A', F') az (A, F)-nek *izomorf kép*e (vagy φ az (A, F)-nek (A', F')-re való *izomorfizmus*a. Mivel ekkor φ inverze is bijektív homomorfizmus, azaz (A, F) is izomorf képe (A', F')-nek, ezért azt is mondjuk, hogy (A, F) és (A', F') *egymással izomorfak.* Ezt $(A, F) \cong (A', F')$ módon jelöljük. Az egymással izomorf algebrai struktúrákat a vizsgálatok jellegétől függően sok esetben azonosaknak tekintjük. Ez az un. „izomorfiaelv”. Például az izomorfiaelv nem alkalmazható, ha az egymással izomorf algebrai struktúrák valamely más algebrai struktúrának rész struktúrái. Egy algebrai struktúra *valódi homomorfizmus*ai azok a homomorfizmusai, amelyek nem izomorfizmusok.

Minden (A, F) algebrai struktúra izomorfan beágyazható $(P(A), F)$ hatványstruktúrájába. Egy megfelelő izomorfizmus az a leképezés, amely A minden elemének megfelelteti az elemet tartalmazó egyelemű halmazt.

Legyen $\mathcal{K}$ azonos típusú algebrai struktúrák egy osztálya. Az (A', F') $\mathcal{K}$-beli algebrai struktúra az (A, F) algebrai struktúra $\mathcal{K}$*-homomorf képe*, ha (A', F') az (A, F) homomorf képe. Az (A', F') algebra struktúra (A, F) *maximális* $\mathcal{K}$*-homomorf képe*, ha (A', F') az (A, F) egyetlen $\mathcal{K}$-homomorf képének sem valódi $\mathcal{K}$-beli homomorf képe. Az (A', F') az (A, F)-nek *legnagyobb* $\mathcal{K}$*-homomorf képe*, ha (A, F) minden $\mathcal{K}$-homomorf képe (A', F')-nek is homomorf képe.

Az (A, F)-nek önmagába való homomorfizmusai az (A, F) *endomorfizmus*ai, önmagára való izomorfizmusai pedig (A, F) *automorfizmus*ai.

Legyenek (A, F) és (A', F') tetszőleges (azonos típusú) algebrai struktúrák, B az A valódi (nemüres) részhalmaza és φ a B halmaznak A'-be való leképezése. A φ' leképezés a φ leképezés B*-nek az* (A, F)*-re való homomorf kiterjesztés*e, ha φ' az (A, F) algebrai struktúrának (A', F')-be való homomorf leképezése és minden $b \in B$ esetén $\varphi'(b) = \varphi(b)$.

Ha egy A halmazon csak unér műveletek vannak értelmezve, akkor A-t *unér algebrá*nak nevezzük. Ha F egy n-elemű halmaz, akkor n-műveletes algebrai struktúráról beszélünk. Ha valamely A halmazon csak egyetlen binér műveletet vizsgálunk, s ez a művelet f, akkor az egyszerűbb írásmód kedvéért az $f(a,b)$ helyett általában ab-t írunk és a műveletet szorzásnak is nevezzük. Ez a művelet *kommutatív*, ha minden A-beli a és b elemre $ab = ba$. Ha $(ab)c = a(bc)$ teljesül minden $a, b, c \in A$-ra, akkor a művelet *asszociatív*. Ha bármely A-beli a és b elemekhez léteznek olyan A-beli x és y elemek, hogy $ax = b$ és $ya = b$, akkor a művelet *invertálható*. Egy halmazt egyetlen binér művelettel együtt *gruppoid*nak nevezünk. Ha az f mellett egy másik g binér műveletet is vizsgálunk az A halmazon, akkor $g(a,b)$ helyett az legtöbbször az $a+b$ kifejezést használjuk, s ez utóbbi műveletet összeadásnak nevezzük. A szorzás *balról* [*jobbról*] *disztributív* az összeadásra, ha $a(b+c) = ab+ac$ $[(b+c)a = ba + ca]$ teljesűl tetszőleges $a, b, c \in A$ elemekre. A szorzás *disztributív* az összeadásra, ha balról és jobbról is disztributív az összeadásra. Véges $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ halmazon értelmezett binér műveletek megadásának szemléletes módja a *Cayley-féle művelettáblázat*. Ezek alakja a következő:

$$\begin{array}{c|ccccc}
\cdot & a_1 & \cdots & a_j & \cdots & a_n \\
\hline
a_1 & a_1a_1 & \cdots & a_1a_j & \cdots & a_1a_n \\
\vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\
a_i & a_ia_1 & \cdots & a_ia_j & \cdots & a_ia_n \\
\vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\
a_n & a_na_1 & \cdots & a_na_j & \cdots & a_na_n.
\end{array}$$

Binér művelet táblázatából könnyen eldönthető, hogy a művelet kommutatív-e. Véges halmazon értelmezett unér művelet is megadható táblázattal, ami a halmaz egy transzformációjának táblázattal való megadása.

Az (A_k, F_k) $(k = 1, 2, \ldots, n)$ azonos típusú algebrai strukturák (ebben a sorrendben vett) *direkt szorzata* a velük azonos típusú (A, F) algebrai struktúra, ahol $A = \prod_{k=1}^{n} A_k$ és, ha $f \in F$, $f_k \in F_k$ $(k = 1, 2, \ldots, n)$ egymásnak megfelelő j-változós műveletek, akkor

$$f((a_{11}, a_{12}, \ldots, a_{1n}), \ldots, (a_{j1}, a_{j2}, \ldots, a_{jn})) =$$

$$= (f_1(a_{11}, a_{21}, \ldots, a_{j1}), \ldots, f_n(a_{1n}, a_{2n}, \ldots, a_{jn})).$$

A direkt szorzat fogalma tetszőleges I indexhalmazra is kiterjeszthető. Legyen (A_k, F_k) $(k \in I)$ azonos típusú algebrai strukturák egy rendszere. Ezen algebrai struktúrák *direkt szorzata* a velük azonos típusú (A, F) algebrai struktúra, amelyre $A = \prod_{k \in I} A_k$ és, ha $f \in F$, $f_k \in F_k$ $(k \in I)$ egymásnak megfelelő j-változós műveletek, akkor bármely $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_j \in A$ esetén

$$f(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_j)(k) = f_k(\mathbf{a}_1(k), \mathbf{a}_2(k), \ldots, \mathbf{a}_j(k))$$

teljesül. Minden $k \in I$-re a π_k k-adik projekció az (A, F) direkt szorzat (A_k, F_k)-re való homomorf leképezése.

Ha $I = N_+$, akkor (A_k, F_k), $(k = 1, 2, \dots, n, \dots)$ azonos típusú algebrai struktúrák ebben a sorrendben vett (A, F) direkt szorzatának A tartóhalmaza az $\{(a_1, a_2, \dots, a_k, \dots)$ $(a_k \in A_k)$ sorozatok halmaza. Ha $f \in F$, $f_k \in F_k$ $(k \in N_+)$ egymásnak megfelelő j-változós műveletek, akkor bármely $a_{lk} \in A_k$ $(l = 1, 2, \dots, j,\ k = 1, 2, \dots)$ elemre

$$f((a_{11}, a_{12}, \dots, a_{1k}, \dots), \dots, (a_{j1}, a_{j2}, \dots, a_{jk}, \dots)) =$$

$$= (f_1(a_{11}, a_{21}, \dots, a_{j1}), \dots, f_k(a_{1k}, a_{2k}, \dots, a_{jk}), \dots)).$$

Ha $(A_1, F_1), (A_2, F_2)$ és (A_3, F_3) azonos típusú algebrák, akkor az $A_1 \times A_2$ és az $A_2 \times A_1$ direkt szorzatok, valamint az $(A_1 \times A_2) \times A_3$ és az $A_1 \times A_2 \times A_3$ direkt szorzatok izomorfak. (Ha $a_i \in A_i$ $(i = 1, 2, 3)$, akkor az előbbi esetben az $(a_1, a_2) \to (a_2, a_1)$, az utóbbi esetben pedig az $((a_1, a_2), a_3) \to (a_1, a_2, a_3)$ leképezés egy megfelelő izomorfizmus.) Ez azt jelenti, hogy a direkt szorzat izomorfiától eltekintve független a sorrendtől és a zárójelezéstől, azaz izomorfia erejéig kommutatív és asszociatív.

A (B, F) algebrai struktúra *felbontható az* (A_k, F) $(k \in I)$ *algebrai struktúrák* (A, F) *direkt szorzatára*, ha (B, F) izomorf az (A, F) direkt szorzattal. Az (A, F) a (B, F) algebrai struktúra egy *direkt felbontása*, az (A_k, F) $(k \in I)$ algebrai struktúrák pedig a *felbontás komponensei*. A direkt felbontás *valódi*, ha egyik komponens sem izomorf (B, F)-vel. Az (A, F) algebrai struktúrát *direkt irreducibilis* [*reducibilis*], ha nincs [van] valódi direkt felbontása.

A (B, F_B) algebrai struktúrát a vele azonos típusú (A_k, F_k) $(k \in I)$ algebrai struktúrák *szubdirekt szorzat*ának nevezzük, ha izomorf az $(A, F) = \prod_{k \in I}(A_k, F_k)$ direkt szorzat egy olyan (A', F) részalgebrájával, amelyre minden $k \in I$ esetén $\pi_k(A') = A_k$, ahol π_k a k-adik projekció. Úgy is mondjuk, hogy (B, F_B) *felbontható* az (A_k, F_k) $(k \in I)$ algebrai struktúrák szubdirekt szorzatára. Ha a felbontásban valamely π_k projekció bijektív, akkor azt mondjuk, hogy a felbontás *triviális* és (B, F_B) *szubdirekt irreducibilis.*

Legyen azonos típusú algebrai struktúrák egy K osztályára $\mathbf{S}(K)$ a K-beli algebrák részalgebráinak osztálya. $\mathbf{S}$-et *részalgebra-operátor*nak nevezzük. Definiálhatjuk például a $\mathbf{H}$ *homomorfizmus*-, az $\mathbf{I}$ izomorfizmus-, a $\mathbf{P}$ direkt szorzat -operátorokat, amelyek rendre a K-beli algebrák homomorf képeinek $\mathbf{H}(K)$, izomorf képeinek $\mathbf{I}(K)$, K-beli algebrak direkt szorzatainak $\mathbf{P}(K)$ osztályait állítják elő. Ha $\mathbf{X}$ és $\mathbf{Y}$ két algebrai operátor, akkor az $\mathbf{X}Y$ operator értelmezése: $\mathbf{XY}(K) = \mathbf{X}(\mathbf{Y}(K))$.

Az azonos típusú algebrai struktúrák egy K osztálya *varietás*, ha

$$\mathbf{H}(K), \mathbf{S}(K), \mathbf{P}(K) \subseteq K.$$

Megmutatható, hogy K akkor és csak akkor varietás, ha $\mathbf{HSP}(K) \subseteq K$. Természetesen az azonos típusú algebrai struktúrák varietást alkotnak. Az unér algebrák és a gruppoidok is varietások. Egy K algebra osztályt tartalmazó legszűkebb varietás $\mathbf{HSP}(K)$. Ha $\mathbf{P}(K)$ csak a véges sok tényezős direkt szorzatokat tartalmazza, akkor *pszeudovarietás*ról beszélünk.

Birkhoff tétele: Egy varietásban minden algebra előállítható varietásbeli szubdirekt irreducibilis algebrák szubdirekt szorzataként.

3. Ekvivalenciák, kongruenciák

Egy reflexív, szimmetrikus és tranzitív relációt *ekvivalenciá*nak nevezünk. Ha ρ ekvivalencia egy A halmazon, akkor a $\rho[a] = \{x \in A;\ (a,x) \in \rho\}$ jelölést használva, könnyen bizonyítható, hogy $\rho[a] \cap \rho[b] \neq \emptyset$ akkor csak akkor teljesül, ha $\rho[a] = \rho[b]$, ezért a különböző $\rho[a]$ részhalmazok az A egy $\mathcal{C}_\rho$ osztályozását alkotják, amelyet a *ρ-hoz tartozó osztályozás*nak mondjuk. A $\rho[a]$ részhalmaz az a elemet tartalmazó *ρ-osztály*. A ρ-osztályok halmaza az A halmaz ρ szerinti *faktorhalmaz*a és A/ρ-val jelöljük. Az A halmaz tetszőleges $\mathcal{C} = \{A_k;\ k \in I\}$ osztályozása esetén a $\rho_{\mathcal{C}} = \{(a,b) \in A^2 : (\exists k \in I)\ a, b \in A_k\}$ reláció ekvivalencia, amelyet a *$\mathcal{C}$ osztályozáshoz tartozó ekvivalenciá*nak nevezünk. A $\rho_{\mathcal{C}}$-osztályok éppen az $A_k, k \in I$ részhalmazok. A ρ ekvivalenciát ill. a hozzá tartozó $\rho_{\mathcal{C}}$ osztályozást *uniform* mondjuk, ha minden ρ-osztály egyenlő számosságú. A ρ ekvivalencia *véges indexű*, ha a hozzá tartozó osztályozás véges.

Ha ρ_k $(k \in I)$ ekvivalenciák az A halmazon, akkor $\cap_{k\in I}\rho_k$ is ekvivalencia A-n. Bármely $\rho, \tau \subseteq A^2$ ekvivalenciákra $\rho, \tau \subseteq \rho\circ\tau$, továbbá, ha κ ekvivalencia A-n és $\rho, \tau \subseteq \kappa$, akkor $\rho \circ \tau \subseteq \kappa$, és $\rho \circ \tau$ akkor és csak akkor ekvivalencia A-n, ha $\rho \circ \tau = \tau \circ \rho$. Ebben az esetben $\rho \circ \tau$ a legkisebb ekvivalencia, amely a ρ és τ ekvivalenciákat tartalmazza.

Az $\rho \cup \tau$ reláció akkor és csak akkor ekvivalencia, ha bármely $a, b \in A$ elemekre $\rho[a] \cap \tau[b] = \emptyset$ vagy egyenlő a $\rho[a]$-val vagy $\tau[b]$-vel. Ha $\rho \cup \tau$ ekvivalencia, akkor $\rho \cup \tau = \rho \circ \tau$.

Tetszőleges $k \in N$ esetén egy $\rho(\subseteq A^2)$ *reláció k-adik hatványá*t a következőképpen értelmezzük: $\rho^0 = \iota_A$ és $\rho^{k+1} = \rho^k \circ \rho$. A *$\rho$ tranzitív lezártja* a $\rho^+ = \cup_{k\in N_+}\rho^k$, *reflexív és tranzitív lezártja* pedig a $\rho^* = \cup_{k\in N}\rho^k$ reláció. A ρ^+ $[\rho^*]$ a legszűkebb tranzitív [reflexív és tranzitív] reláció, amely tartalmazza ρ-t. Ha ρ reflexív, akkor $\rho^+ = \rho^*$, ha pedig ρ szimmetrikus, akkor ρ^* a legszűkebb ekvivalencia, amely tartalmazza ρ-t.

Legyenek ρ és τ az A halmazon értelmezett olyan ekvivalenciák, amelyekre $\tau \subseteq \rho$ teljesül. Akkor

$$\rho/\tau = \{(\tau[a], \tau[b]) \in A/\tau \times A/\tau :\ (a,b) \in \rho\}$$

ekvivalencia az A/τ faktorhalmazon.

Egy $f : A \to B$ függvény esetén a $\ker f = \{(x, y) \in A^2;\ f(x) = f(y)\}$ ekvivalencia az A halmazon. Ennek osztályai az $f^{-1}(b)$, $b \in B$ alakú részhalmazai az A-nak. Ez az ekvivalencia az f függvény *mag*ja. A $\prod_{k\in I} A_k$ Descartes-szorzat π_k $(k \in I)$ projekcióinak $\ker \pi_k$ magjai uniform ekvivalenciák.

Egy A halmazon értelmezett ρ reláció *műveletartó* az A-n értelmezett f n-változós műveletre (vagy ρ *kompatibilis* f fel), ha minden

$$(a_1, a_2, \ldots, a_n), (b_1, b_2, \ldots b_n) \in A^n$$

elem n-es esetén, az $(a_k, b_k) \in \rho$ $(k = 1, 2, \ldots, n)$ feltételből

$$(f(a_1, a_2, \ldots, a_n), f(b_1, b_2, \ldots, b_n)) \in \rho$$

következik. Egy algebrán értelmezett ekvivalencia *kongruencia*, ha műveletartó az algebra minden műveletére. Ekkor azt is mondjuk, hogy az ekvivalencia általa létesített osztályozás kompatibilis (a műveletekre). Az ι_A és az ω_A mindig kongruenciái az algebrai struktúrának. Ezek az un. *triviális kongruenciák*. Ha ezeken kívül nincs más kongruenciája, akkor az algebrai struktúrát *egyszerű*nek nevezzük. Legfeljebb kételemű algebrai struktúra mindig egyszerű. Ha ρ kongruencia az (A, F) algebrán, akkor tetszőleges F-beli n-változós f művelet esetén $f_\rho :\ (\rho[a_1], \rho[a_2], \ldots, \rho[a_n]) \to \rho[f(a_1, a_2, \ldots, a_n)]$ n-változós művelet az A/ρ faktorhalmazon. Az $(A/\rho, F_\rho)$ algebra az (A, F) algebra ρ szerinti *faktoralgebrá*ja, ahol $F_\rho = \{f_\rho;\ f \in F\}$. A $\varphi_\rho : a \to \rho[a]$ leképezésről jól látható, hogy az (A, F) algebrának az $(A/\rho, F_\rho)$ faktoralgebrára való homomorfizmusa. Ez az A algebrának az A/ρ faktoralgebrára való *természetes* (vagy *kanonikus*) *homomorfizmus*a. Érvényes az alábbi un. *homomorfiatétel*. Ha A és B azonos típusú algebrák és φ az A-nak B-re való homomorfizmusa, akkor $\ker \varphi$ kongruencia az A-n és $B \cong A/\ker \varphi$. Ezekből következik, hogy egy algebrai struktúra akkor és csak akkor egyszerű, ha minden homomorfizmusa vagy izomorfizmus vagy egy egyelemű algebrai struktúrára való leképezés. Igazak az alábbi ún. *izomorfiatételek* is.

Első izomorfiatétel: Ha A egy algebrai struktúra, ρ egy kongruencia A-n és B olyan részalgebrája A-nak, hogy $B \cap \rho[a] \neq \emptyset$ minden $a \in A$-ra, akkor $A/\rho \cong B/\rho_B$.

Második izomorfiatétel: Ha ρ és τ az A algebrai struktúra olyan kongruenciái, hogy $\tau \subseteq \rho$, akkor ρ/τ kongruencia az A/τ faktoralgebrán és $A/\rho \cong (A/\tau)/(\rho/\tau)$.

Ha ρ_k $(k \in I)$ kongruenciák az A algebrán, akkor $\cap_{k\in I}\rho_k$ is kongruencia A-n. Bármely $\rho, \tau \subseteq A^2$ kongruenciákra $\rho\circ\tau$ akkor és csak akkor kongruencia A-n, ha $\rho \circ \tau = \tau \circ \rho$, ebben az esetben a $\rho \circ \tau$ legkisebb olyan kongruencia, amely ρ-t és τ-t tartalmazza.

4. Rendezési relációk, hálók

Egy reflexív, antiszimmetrikus és tranzitív relációt *részbenrendezés*nek (*parciális rendezés*nek) nevezünk. Egy nemüres halmaz *részbenrendezett halmaz*, ha azon értelmezve van egy részbenrendezés. A „$\subseteq$” halmazelméleti tartalmazás egy halmaz hatványhalmazán részbenrendezés. Ez azt jelenti, hogy egy A halmazon értelmezett binér relációk $\mathcal{B}(A)$ halmazán a „$\subseteq$” reláció részbenrendezés. Ha más megszokott jelölés nincs, mint például a halmazok esetén „$\subseteq$”, akkor a részbenrendezéseket $\leq$-vel jelöljük. Ha A részbenrendezett halmaz a $\leq$ relációra, akkor az $(A, \leq)$ jelölést használjuk. Az $a \leq b$ esetben azt is mondjuk, hogy a kisebb vagy egyenlő mint b, illetve b nagyobb vagy egyenlő mint a. Minden részbenrendezés inverze is részbenrendezés, amit általában $\geq$-vel jelölünk. Ha $a \leq b$, de $a \neq b$, akkor az $a < b$ jelölést használjuk. és azt mondjuk, hogy a kisebb mint b, illetve b nagyobb mint a. Egy részbenrendezett A halmaz *rendezett* vagy *lánc*, ha bármely $a, b \in A$ elemek esetén $a \leq b$ vagy $b \leq a$. Ebben az esetben azt mondjuk, hogy $\leq$ az A egy rendezése.

Legyenek az$\{A_k,\ k \in I\}$ halmazok részbenrendezett halmazok. Ha $\leq_k$ az A_k $(k \in I)$ halmaz részbenrendezése, akkor $\leq$ reláció, amelyre

$$\mathbf{a} \leq \mathbf{b} \quad (\mathbf{a}, \mathbf{b} \in A) \quad \Longleftrightarrow \quad (\forall k \in I : a_k \leq_k b_k),$$

az $A = \prod_{k \in I} A_k$ Descartes-szorzat részbenrendezése. Abból, hogy a $\leq_k$ $(k \in I)$ relációk rendezések általában nem következik, hogy $\leq$ is rendezés. Ha $\leq_k$ $(k \in I$ rendezések és az I indexhalmaz is rendezett a $\leq_I$ rendezésre, akkor az A Descartes-szorzaton bevezethetjük a $\leq_l$ *lexikografikus rendezés*t a következő módon: $\mathbf{a} \leq_l \mathbf{b}$ $(\mathbf{a}, \mathbf{b} \in A)$ akkor és csak akkor, ha $\mathbf{a} = \mathbf{b}$ vagy van olyan $i \in I$, hogy minden $k <_I i$ esetén $a_k = b_k$ és $a_i <_i b_i$.

Egy A részbenrendezett halmaz bármely nemüres B részhalmaza szintén részbenrendezett halmaz az A részbenrendezésének B-re való szűkítésére. Egy részbenrendezett halmaz rendezett részhalmazai a halmaz *részláncai.* A részbenrendezett halmaz egy M részlánca a halmaz *maximális részlánca*, ha nincs a halmaznak egyetlen olyan részlánca sem, amely valódi részként tartalmazná M-et. A kiválasztási axiómával ekvivalens az ún. *Lánc-axióma*:

Egy részbenrendezett halmaz bármely részlánca részhalmaza a halmaz egy maximális részláncának.

Egy részbenrendezett halmaz valamely eleme a halmaz *minimális eleme* [*maximális eleme*], ha nincs a halmaznak nála kisebb [nagyobb] eleme. A halmaz valamely eleme a halmaz *legkisebb eleme* [*legnagyobb eleme*], ha a halmaz minden tőle különböző eleménél kisebb [nagyobb]. Minden halmaznak legfeljebb egy legkisebb [legnagyobb] eleme van. Az nyilvánvaló, hogy ha egy halmaznak van legkisebb [legnagyobb] eleme, akkor az a halmaznak egyetlen minimális [maximális] eleme. Egy részbenrendezett A halmaz a eleme a $B \subseteq A$ részhalmaz *alsó korlátja* [*felső korlátja*], ha minden $b \in B$ esetén $a \leq b$ [$a \geq b$] teljesül. A B halmazt az A *alulról [felülről] korlátos részhalmaz*ának mondjuk, ha van alsó [felső] korlátja, és *korlátos részhalmaz*ának, ha alulról és felülről is korlátos. Ha $B = A$, akkor A-t *alulról [felülről] korlátos*nak ill. *korlátos*nak mondjuk. Ha a részbenrendezett A halmaz alulról [felülről] korlátos, akkor van legkisebb [legnagyobb] eleme. A legkisebb és legnagyobb elemet A *korlátelemei*nek nevezzük. Az $a \in A$ elem a B *legnagyobb alsó korlát*ja [*legkisebb felső korlát*ja], ha az a B alsó [felső] korlátjai halmazának legnagyobb [legkisebb] eleme. A B halmaz legnagyobb alsó [legkisebb felső] korlátját a B *infimumá*nak vagy *metszeté*nek [*szuprémumá*nak vagy *egyesítésé*nek] is nevezzük és a $\bigwedge B$ [$\bigvee B$] jelölést használjuk. Tekintsük az A részbenrendezett halmaz valamely a, b elempárját. Az $[a, b]$ *intervallum* az A azon x elemeinek a halmaza, amelyekre az $a \leq x \leq b$ feltétel teljesül. Az $a < x \leq b$ elemek halmaza az $(a, b]$ *intervallum*. Az $[a, b)$ és (a, b) intervallumok definíciója értelemszerűen adódik.

A kiválasztási axiómával ekvivalens a következő ún. *Zorn lemma*:

Ha egy részbenrendezett halmaz minden részláncának van felső korlátja a halmazban, akkor a halmaznak van maximális eleme.

Egy L részbenrendezett halmaz *háló*, ha bármely kételemű részhalmazának van a halmazban infimuma és szuprémuma. Minden hálónak legfeljebb egy minimális és legfeljebb egy maximális eleme lehet, s ez egyben a háló legkisebb, ill. legnagyobb eleme. Ha az L részbenrendezett halmaz háló, akkor definiáljuk a binér $\wedge$ *metszet* és $\vee$ *egyesítés* műveleteket úgy, hogy minden $a, b \in L$ esetén $a \wedge b = \bigwedge\{a, b\}$ és $a \vee b = \bigvee\{a, b\}$ teljesüljön. Ezek a műveletek bármely $a, b, c \in L$ elemekre teljesítik az alábbi ún. *hálóaxiómák*at:

$$a \wedge b = b \wedge a, \quad a \vee b = b \vee a,$$

$$a \wedge (b \wedge c) = (a \wedge b) \wedge c, \quad a \vee (b \vee c) = (a \vee b) \vee c,$$

$$a \wedge a = a, \quad a \vee a = a,$$

$$a \wedge (a \vee b) = a, \quad a \vee (a \wedge b) = a.$$

Fordítva, ha L halmazon értelmezve van az általában *metszés*nek ($\wedge$) ill. *egyesítés*nek ($\vee$) nevezett két binér művelet, amelyek bármely $a, b, c \in L$ elemekre teljesítik a hálóaxiómákat, akkor az a $\rho(\subseteq L^2)$ binér reláció, amelyre $(a, b) \in \rho$ $(a, b \in L)$ akkor és csak akkor, ha $a = a \wedge b$, az L olyan részbenrendezése, amelyre $\bigwedge\{a, b\} = a \wedge b$ és $\bigvee\{a, b\} = a \vee b$, azaz L háló erre a részbenrendezésre. (Szokás szerint a ρ relációra használjuk $\subseteq$ jelölést.) Ez azt jelenti, hogy minden háló megadható részbenrendezett halmazként és kétműveletes algebrai strukturaként is, ahol a részbenrendezés és a müveletek közötti fentebb megadott hozzárendelés kölcsönösen egyértelmű. (Például egy halmaz hatványhalmazán a halmazelméleti $\subseteq$ reláció és a halmazelméleti $\cup$ és $\cap$ műveletek közötti $A \subseteq B \implies A \cap B = A$ kapcsolat.) Ezért az $(L, \wedge, \vee)$ algebrai struktúrát is, amelyben teljesülnek a hálóaxiómák, *háló*nak nevezzük.

Az L hálót *disztributív*nak nevezzük, ha bármely $a, b, c \in L$ elemekre teljesülnek az

$$a \wedge (b \vee c) = (a \wedge b) \vee (a \wedge c), \quad a \vee (b \wedge c) = (a \vee b) \wedge (a \vee c)$$

metszés ill. *egyesítés disztributív azonosságai.* Ha egy hálóban teljesül metszés vagy az egyesítés disztributív azonossága, akkor disztributív.

Egy hálóelméleti *állítás dualizálás*ának nevezzük azt az eljárást, amikor a $\wedge$ és $\vee$ műveleti jeleket felcseréljük az állításban. Az így kapott állítást az eredeti *állítás duálisá*nak mondjuk. *Hálóelméleti dualitás elve*: A hálóelmélet minden igaz állításának duálisa is igaz állítás.

Az L háló *metszésre [egyesítésre] teljes*, ha minden részhalmazának van infinuma [szuprémuma]. Az L háló *teljes*, ha mindkét műveletre teljes. (Ez úgy is mondható, hogy a metszés [egyesítés] művelete L minden részhalmazára kiterjeszthető.) Minden véges háló teljes. Ha egy korlátos háló az egyik műveletre teljes, akkor a másikra nézve is teljes. Ha az L háló teljes, akkor sajátmagának is létezik infinuma $(\bigwedge L)$ [szuprémuma $(\bigvee L)$], amely szükségképpen a háló legkisebb [legnagyobb] eleme, azaz egy teljes háló mindig korlátos. (A legnagyobb [legkisebb] elem természetesen $\emptyset$ infímumaként [szuprémumaként] is előáll, vagyis $\bigwedge L = \bigvee \emptyset$ és $\bigvee L = \bigwedge \emptyset$.)

Legyen a korlátos L háló legkisebb eleme o és legnagyobb eleme i. Az L valamely a elemének *komplementum*án értjük az L olyan x elemét, amelyre $a \wedge x = o$ és $a \vee x = i$ teljesül. (Természetesen ebben az esetben x egy komplementuma a.) Ha a-nak x egyetlen komplementuma, akkor *a egyértelmű komplementum*ának mondjuk. Az *L [egyértelműen] komplementumus*, ha minden eleme [egyértelműen] komplementumos. Alulról korlátos L háló p elemét L *atomjá*nak nevezzük, ha nincs olyan $x \in L$, amelyre $o < x < p$ teljesül. Ha minden $a \in L$ elemhez van olyan $p \in L$ atom, hogy $p \leq a$, akkor L-et *atomos hálónak* nevezzük.

A komplementumos disztributív hálókat *Boole algebrák*nak nevezzük. Ha a Boole algebra teljes háló, akkor *teljes Boole algebrá*nak mondjuk. Minden Boole algebra egyértelműen komplementumos. Jelöljük az L Boole algebra tetszőleges a elemének komplementumát $\overline{a}$-sal.

De Morgan azonosságok: Boole algebra bármely a és b elemére $\overline{a \wedge b} = \overline{a} \vee \overline{b}$ és $\overline{a \vee b} = \overline{a} \wedge \overline{b}$.

Egy H halmaz $P(H)$ hatványhalmaza a $\cup$ és $\cap$ műveletekre teljes Boole algebra, amelynek $\emptyset$ a legkisebb eleme, H pedig a legnagyobb eleme és

$\overline{A} = H - A$ az A elemének komplementuma, azaz A-nak H-ra vonatkozó komplementere.

Jelöljük egy $H \neq \emptyset$ halmaz ekvivalenciáinak halmazát $Eq(H)$-val. Vezessük be az $Eq(H)$ halmazon a $\vee$ műveletet úgy, hogy minden $a, b \in H$ elemre $(a, b) \in \rho \vee \tau$ akkor és csak akkor, ha vannak olyan $a_1, a_2, \ldots, a_n \in H$ elemek, hogy $a = a_1,\ (a_k, a_{k+1}) \in \rho$ vagy $(a_k, a_{k+1}) \in \tau$ $(k = 1, 2, \ldots, n-1),\ b = a_n$. Az $Eq(H)$ halmaz az $\wedge = \cap$ és a $\vee$ műveletekre teljes háló, amelynek az ι_A identikus reláció a legkisebb és az ω_A univerzális reláció a legnagyobb eleme. Ez a háló a H halmaz *ekvivalenciahálója*.

Nyilvánvaló, hogy bármely $\rho, \tau \in Eq(H)$ esetén $\rho \circ \tau \subseteq \rho \vee \tau$. Nem nehéz igazolni, hogy a $\rho \circ \tau = \tau \circ \rho$, a $\rho \vee \tau = \rho \circ \tau$ és a $\rho \circ \tau \subseteq \tau \circ \rho$ feltételek egymással ekvivalensek. Ezenkívül, $\rho \vee \tau = \omega_H$ és $\rho \circ \tau = \tau \circ \rho$ akkor és csak akkor, ha $\rho \circ \tau = \omega_H$.

Tetszőleges (A, F) algebrai struktúra kongruenciáinak $C(A)$ halmaza az $\vee$ és a $\wedge$ műveletekre az $Eq(A)$ ekvivalenciaháló teljes részhálója, amelyet A *kongruenciahálójá*nak nevezünk. A $C(A)$ legkisebb eleme ι_A, a legnagyobb eleme ω_A. Ezeket az algebrai struktúra *triviális kongruenciák*nak hívjuk.

Egy (A, F) algebrai struktúra akkor és csak akkor szubdirekt irreducibilis, ha $(C(A) - \iota_A)$-nak van legkisebb eleme.

Az (A, F) algebrai struktúrát *egyszerű*nek nevezzük, ha ι_A-n és ω_A-an kívül nincs más kongruenciája. Minden legfeljebb kételemű algebrai struktura egyszerű. Továbbá minden egyszerű algebrai struktúra szubdirekt irreducibilis.

Az (A, F) algebrai struktúra részalgebráinak $Sub(A)$ halmaza a halmazelméleti tartalmazásra teljes háló, amelyet A *részalgebrahálójá*nak hívunk.

Megfeleltetési tétel: Legyen $\rho \in C(A)$ és $\alpha : [\rho, \omega_A] \to C(A/\rho)$ leképezés az $\alpha(\tau) = \tau/\rho$ $(\rho \subseteq \tau)$ összefüggéssel definiálva, akkor $[\rho, \omega_A]$ részhálója $C(A)$-nak és α a $[\rho, \omega_A]$ intervallum izomorf leképezése $C(A/\rho)$-ra.

A tetszőleges A' részhalmazára jelölje $\Theta(A')$ a legkisebb olyan kongruenciát, amelyre A' elemei ugyanabban az kongruencia-osztályban vannak. A $\Theta(A')$ kongruenciát az $A' \times A'$ *halmaz által generált kongruenciá*nak nevezzük. Ha $A' = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$, akkor $\Theta(A')$-re a $\Theta(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ jelölést is használjuk.

A $\Theta(a, b)$ $(a, b \in A)$ kongruenciákat *főkongruenciák*nak hívjuk.

5. Gruppoidok, félcsoportok, csoportok

A Függelék 2. fejezetében is említettük, hogy egy halmazt egyetlen binér művelettel együtt *gruppoid*nak nevezünk. Egy A gruppoid valamely e eleme a gruppoid *bal* [*jobb*] *oldali egységelem*e, ha minden $a \in A$-ra $ea = a$ [$ae =$

a]. Az e elem az A *egységeleme*, ha e az A-nak egyidejűleg bal oldali és jobb oldali egységeleme. Ha e és f az A gruppoid bal, illetve jobb oldali egységeleme, akkor $e = f$, és ez az A egyetlen egységeleme. Ha az A gruppoid nem egységelemes, akkor legyen $e \notin A$ és $A^e = A \cup \{e\}$. Terjesszük ki a műveletet az A^1 halmazra úgy, hogy e az A^e gruppoid egységeleme legyen. Ezt úgy mondjuk, hogy az A gruppoidhoz *egységelemet adjungálunk*. Ha A egységelemes, akkor legyen $A^e = A$. Az egységelemes A gruppoid a' eleme az $a \in A$ elem *bal* [*jobb*] *oldali inverze*, ha $a'a = e$ [$aa' = e$], ahol e az A egységeleme. Ha a' az a bal és jobb oldali inverze, akkor a'-t az a *inverzének* nevezzük. Ha a művelet asszociatív, akkor minden elemnek legfeljebb egy inverze van. Ebben az esetben az a elem inverzét a^{-1} jelöli.

Az A gruppoid egy z eleme a gruppoid *bal* [*jobb*] *oldali zéruseleme*, ha minden $a \in A$-ra $za = z$ [$az = z$]. Az z elem az A *zéruseleme*, ha u az A-nak bal oldali és egyben jobb oldali zéruseleme is. Ha u és v az A gruppoid bal, illetve jobb oldali zéruseleme, akkor $u = v$, és ez az A egyetlen zéruseleme. Ha az A gruppoid nem zéruselemes, akkor adjungáljunk hozzá egy z zéruselemet, s jelölje a kapott gruppoidot A^z. Ez azt jelenti, hogy $A^z = A \cup \{z\}$ ($\notin A$) halmazra kiterjesztjük a műveletet úgy, hogy z az A^z gruppoid zéruseleme legyen. Ha A zéruselemes, akkor legyen $A^z = A$. Az A gruppoid *balzéró [jobbzéró] félcsoport*, ha bármely $a, b \in A$ elemeire $ab = a[ab = b]$ teljesül. (Nyilvánvalóan ilyenkor a gruppoid olyan félcsoport, amelynek minden eleme bal [jobb] oldali zéruselem.)

Az A gruppoid egy t eleme a gruppoid *idempotens eleme*, ha minden $t^2 = t$. Minden bal [jobb] oldali egységelem [zéruselem] idempotens. Véges félcsoportban minden elemnek van olyan hatványa, amely idempotens.

A $\rho \subseteq A \times A$ ekvivalencia az A gruppoid *bal* [*jobb*] *kongruenciája*, ha $(a, b) \in \rho$ feltételből következik, hogy minden $c \in A$ elemre $(ca, cb) \in \rho$ [$(ac, bc) \in \rho$] teljesül. A ρ bal [jobb] kongruenciához tartozó osztályozás az A egy *bal* [*jobb*] *kompatibilis osztályozása*. A $\rho \subseteq A \times A$ reláció akkor és csak akkor kongruenciája az A gruppoidnak, ha A-nak bal és jobb kongruenciája.

Az A gruppoid *bal* [*jobb*] *kancellatív* (*balról* [*jobbról*] *egyszerűsíthető*), ha bármely $a, x, y \in A$ elemekre $ax = ay$ [$xa = ya$] akkor és csak akkor teljesül, ha $x = y$. Ha a gruppoid bal és jobb kancellatív, akkor azt mondjuk, hogy *kancellatív (egyszerűsíthető)*. Ha

$$(\forall a \in A : ax = ay[xa = ya]) \quad \Longrightarrow \quad x = y,$$

akkor az A gruppoid *bal* [*jobb*] *reduktív*. Ha A bal és jobb reduktív, akkor reduktív. Nyilvánvalóan minden [bal, jobb] kancellatív gruppoid, [bal, jobb] reduktív.

Az A gruppoid egy B részgruppoidja *bal* [*jobb*] *unitér*, ha minden $a \in A$ elemre $Ba \cap B \neq \emptyset$ [$aB \cap B \neq \emptyset$] feltételből következik, hogy $a \in B$, vagyis, ha $b, ba[ab] \in B$, akkor $a \in B$. Ha B bal és jobb unitér, akkor azt mondjuk, hogy *unitér*. Az A gruppoid $P(A)$ hatványgruppoidján a művelet az

$$A_1A_2 = \{a_1a_2; a_1 \in A_1, a_2 \in A_2\} \quad (A_1, A_2 \in P(A))$$

komplexus-szorzás. Ha $A_1 = \{a\}$ $[A_2 = \{a\}]$, akkor A_1A_2 helyett az aA_2 $[A_1a]$ jelölést használjuk. Az A gruppoid A' részhalmaza az egy *bal* [*jobb*] *ideál*ja, ha $AA' \subseteq A'$ $[A'A \subseteq A']$. Gruppoid minden bal [jobb] ideálja a gruppoid egy részgruppoidja. Ha A' az A gruppoid bal és jobb ideálja, akkor A' az A gruppoid *ideál*ja. Az A' ideál A *prímideál*ja, ha A bármely B és C ideálja esetén $BC \subseteq A'$ akkor és csak akkor, ha $B \subseteq A'$ vagy $C \subseteq A'$. Az A' az A *teljes prímideál*ja, ha minden $a, b \in A$ elempárra $ab \in A'$ akkor és csak akkor, ha $a \in A'$ vagy $b \in A'$. Gruppoid minden teljes prímideálja a gruppoid egy prímideálja. Az A gruppoid nemüres valódi részhalmaza akkor és csak akkor filter, ha komplementere A teljes prímideálja. Legyen A' az A gruppoid egy ideálja és jelölje $\mathcal{R}_{A'}$ az A gruppoidnak azt a kongruenciáját, amelyre $(a, b) \in \mathcal{R}_{A'}$ akkor és csak akkor, ha $a = b$ vagy $a, b \in A'$ teljesül. Az $\mathcal{R}_{A'}$ az A gruppoid *A' szerinti Rees kongruenciá*ja, $A/\mathcal{R}_{A'}$ pedig A *A' szerinti Rees-faktor*a. Az $A/\mathcal{R}_{A'}$ Rees-faktort röviden A/A'-vel is jelöljük. Azt mondjuk, hogy *A a B-nek C-vel való bővítése* [*kiterjesztése*], ha $C \simeq A/B$. Ha $\mathcal{K}$, $\mathcal{L}$ gruppoidok bizonyos részosztályai és $B \in \mathcal{K}$, $C \in \mathcal{L}$, akkor speciálisan azt mondjuk, hogy *A a B $\mathcal{K}$-gruppoidnak a C-vel való $\mathcal{L}$-bővítése* [*$\mathcal{L}$-kiterjesztése*].

Az S gruppoid *részbenrendezett*, ha S részbenrendezett halmaz és az $a \leq b$ és $c \leq d$ $(a, b, c, d \in S)$ feltételekből következik, hogy $ac \leq bd$, ami ekvivalens azzal, hogy bármely $a, b, c \in S$ elemekre, ha $a \leq b$, akkor $ac \leq bc$ és $ca \leq cb$. Ha S rendezett halmaz, akkor *rendezett gruppoid*ról beszélünk.

Az S gruppoid *félcsoport*, ha a művelet asszociatív. Egy félcsoportban a szorzatok erdeménye független a zárójelezéstől, s ezért a zárójelek el is hagyhatók. Félcsoport minden részgruppoidja a félcsoport részfélcsoportja. Az egységelemes félcsoportot *monoid*nak is nevezzük. Az S félcsoport [monoid] S' részfélcsoportja [részmonoidja] az S *normális részfélcsoportja* [*részmonoidja*], ha bármely $a, b \in S$ és $c \in S'$ elemekre $acb \in S'$ akkor és csak akkor ha $ab \in S'$. A félcsoportok varietást alkotnak.

Ha a félcsoportban a művelet invertálható, akkor a félcsoport *csoport*. Egy félcsoport akkor és csak akkor csoport, ha monoid és minden elemének van inverze. Minden csoport kancellatív. Véges esetben igaz a tétel megfordítása is, azaz véges félcsoport akkor és csak akkor csoport, ha kancellatív. Az egyelemű csoportot *egységcsoport*nak is mondjuk. Ha a művelet kommutatív, akkor a gruppoidot is *kommutatív*nak mondjuk. Kommutatív félcsoportban a szorzatok értéke független a tényezők sorrendjétől. A kommutatív csoportot

*Abel-csoport*nak is nevezzük. Az egy elem által generált csoportot *ciklikus csoport*nak nevezzük. (Minden ciklikus csoport Abel-csoport.) Egy csoport részfélcsoportja, akkor és csak akkor részcsoportja a csoportnak, ha bármely elemével együtt az inverzét is tartalmazza.

Legyen G egy csoport, H pedig G egy részcsoportja. A G H-szerinti bal [jobb] oldali mellékosztályai a $gH = \{gh; h \in H\}$ $[Hg = \{hg; h \in H\}]$ halmazok. A G H-szerinti bal [jobb] oldali mellékosztályai G egy osztályozását alkotják. Csoport bal [jobb] kompatibilis osztályozásai éppen a részcsoportjai szerinti osztályozások. Csoport *rendjé*n a $|G|$ számosságot értjük, $G : H$ *indexé*n pedig jobb oldali mellékosztályai halmazának számosságát. Ha $|G|$ véges, akkor a *véges csoport*ról beszélünk. Csoport jobb és bal oldali mellékosztályai halmazának számossága egyenlő. Ha $G : H$ véges, akkor H-t a G *véges indexű részcsoportjá*nak nevezzük.

Lagrange tétele: Ha G véges csoport és H tetszőleges részcsoportja, akkor $|G| = |H|(G : H)$.

A G csoport N részcsoportja a G *normális részcsoport*ja vagy *normálosztó*ja, ha bármely $g \in G$ elemre $Ng = gN$, azaz $N = g^{-1}Ng$. Az e *egységcsoport* (e a G egységeleme) és G a G csoport normálosztói, ezek az ún. *triviális normálosztók.* Csoport kompatibilis osztályozásai éppen a normális részcsoportjai szerinti osztályozások. Ezek szerint G faktorcsoportjait következő módon kaphatjuk: Legyen N a G tetszőleges normálosztója és $G/N = \{Ng; g \in G\}$. $(G/N, \cdot)$ az $Ng \cdot Nh = Ngh (g, h \in G)$ szorzásra csoport, amely G *N-szerinti faktorcsoportja.* G/N a G homomorf képe. Fordítva, ha φ a G csoport G'-re való homomorfizmusa és e' a G' csoport egységeleme, akkor, akkor $\varphi^{-1}(e')$ a G egy normálosztója és $G' \cong G/\varphi^{-1}(e')$. A $\varphi^{-1}(e')$-t a φ *homomorfizmus magjá*nak hívjuk.

A G minden normális részcsoportja normális részmonoidja G-nek. Ezek szerint egy csoport pontosan akkor egyszerű, ha csak triviális normálosztói vannak.

A véges Abel-csoportok alaptétele: Minden véges Abel-csoport prímhatványrendű ciklikus csoportok direkt szorzatára bontható, amelyek rendje sorrendtől eltekintve egyértelműen meghatározott.

Egy (nemüres) H halmaz transzformációinak $\mathcal{T}(H)$ halmaza a kompozícióra félcsoport, amelyet H *teljes transzformációfélcsoport*ának nevezünk. A $\mathcal{T}(H)$ részfélcsoportjait (H feletti) *transzformációfélcsoportok*nak hívjuk. A H halmaz permutációinak $\mathcal{S}(H)$ halmaza a kompozícióra csoport, amelyet H *teljes* vagy *szimmetrikus permutációcsoport*jának, részcsoportjait pedig (H feletti) *permutációcsoportok*nak nevezünk. Természetesen $\mathcal{S}(H)$ az $\mathcal{T}(H)$ teljes transzformációfélcsoport részcsoportja. Az $[n]$ halmaz teljes transzformációfélcsoportját T_n, teljes permutációcsoportját S_n jelöli. Az $[n]$ halmaznak azt a permutációját, amely 1-et 2-re, 2-t a 3-ra, ... , n-et az 1-re képezi n

*hosszúságú ciklus*nak nevezzük, s a szokásos jelölése $(12\ldots n)$. Az $[n]$ halmaznak azt a permutációját, amely 1-et 2-re 2-t pedig az 1-re, többi elemet pedig önmagára képezi (12) jelöli. Ha $1 < n$, akkor az $\{(12),(12\ldots n)\}$ a $[n]$ S_n teljes permutációcsoportjának egy generátorendszere. Az S_n teljes permutációcsoport $(12\ldots n)$ eleme által generált részcsoportja az n *elemű ciklikus permutációcsoport*.

Cayley tétele: Minden csoport izomorf egy permutációcsoporttal.

Minden félcsoport izomorf egy transzformációfélcsoporttal.

Egy (A,F) algebrai struktúra endomorfizmusainak $E(A)$ halmaza a leképezésszorzásra monoid, amelyet (A,F) *endomorfizmusfélcsoport*jának nevezünk. Az (A,F) automorfizmusainak $G(A)$ halmaza a leképezésszorzásra $E(A)$ részcsoportja, amelyet (A,F) *automorfizmuscsoport*jának nevezünk.

Az S félcsoport egy T részfélcsoportja az S *szabad részfélcsoportja*, ha van olyan C generátorrendszere, hogy bármely $s_1,s_2,\ldots,s_k,t_1,t_2,\ldots t_l$ esetén

$$s_1s_2\ldots s_k = t_1t_2\ldots t_k \quad\Longleftrightarrow\quad k=l,\ s_1=t_1, s_2=t_2,\ldots,s_k=t_k.$$

Ebben az esetben C a T egyetlen minimális generátorrendszere. A T félcsoportot C *feletti szabad félcsoport*nak, C-t pedig T *bázisá*nak is nevezzük.

Egy X halmaz feletti szavak halmazát, beleértve az üres szót is, X^*-gal jelöljük. A p-ben előforduló (nem feltétlenül különböző) betűk számát $|p|$-vel jelöljük, s a p szó hosszának nevezzük. Így az e üres szó hossza 0. Egy $p \neq e$ szó utolsó betűjét jelölje $\overline{p}$. Megállapodás szerint legyen $\overline{e} = e$. Ha $p = x_1x_2\ldots x_k$, akkor a $p^{-1} = x_n\ldots x_2x_1$ szót p *tükörképé*nek nevezzük. Természetesen, ha $p \in X \cup \{e\}$, akkor $p^{-1} = p$. A X^* halmazban kétváltozós műveletet definiálunk az alábbi módon. A X^*-beli $p = x_1x_2\ldots x_k$ és $q = y_1y_2\ldots y_l$ *szavak szorzatán* a szintén X^*-beli $pq = x_1x_2\ldots x_ky_1y_2\ldots y_l$ szót értjük. Ezt a műveletet *egymásutánírás*nak (*konkatenáció*nak) nevezzük. A konkatenáció asszociatív művelet, és az üres szó erre a műveletre egységelem. Továbbá a $|pq| = |p| + |q|$ szabály is érvényes. Speciálisan, a csupa x betűből álló k hosszúságú szót röviden az x^k hatvány alakban is írjuk. Végül az x^0 hatvány legyen egyenlő az e üres szóval.

Ha $(X,\leq_X)$ rendezett halmaz, akkor X^*-n is definiálhatunk egy $\leq$ rendezést, az ún. *lexikografikus rendezés*t: Bármely $p,q \in X^*$ szavakra $p < q$ akkor és csak akkor, ha $|p| < |q|$ vagy a $|p| = |q|$ esetben $p = rxt$ és $q = rys$, ahol $r,t,s \in X^*, x,y \in X$ és $x <_X y$.

A X^* halmaz a konkatenáció műveletével együtt az X *által generált* vagy X *feletti egységelemes szabad félcsoport* vagy *szabad monoid.* A $X^+ = X^* - \{e\}$ halmaz szintén zárt a konkatenáció műveletére. A X^+ halmaz a konkatenáció műveletével együtt az X *által generált* vagy X *feletti egységelem nélküli szabad félcsoport* vagy *szabad félcsoport.* Kiemeljük az X^*

számunkra fontos következő részhalmazait: $X^k = \{p \in X^*; |p| = k\}$ és $X(k) = \{p \in X^*; |p| \leq k\}$ $k \in N)$. Nyilvánvaló, hogy $X^* = \cup_{k=0}^{\infty} X^k$.

Legyen X tetszőleges (nemüres) halmaz és S tetszőleges félcsoport. Ha φ az X halmaz S-be való leképezése, akkor a $\varphi_h(x_1 \ldots x_k) = \varphi(x_1) \ldots \varphi(x_k)$ $(x_1, \ldots x_k \in X)$ feltétellel definiált φ_h leképezés a φ-nek egyetlen homomorf kiterjesztése X^+-ra. A φ_h leképezés akkor és csak akkor szürjektív, ha $\varphi(X)$ az S félcsoport egy generátorrendszere. Ez azt jelenti, hogy ha $\varphi(X)$ az S félcsoport egy generátorrendszere, akkor S az X^+ szabad félcsoport homomorf képe. Ezek az állítások félcsoportok helyett monoidokra is érvényesek, ha X^+ helyett X^* áll és φ_h monoid-homomorfizmus, azaz az e üres szó $\varphi_h(e)$ képe S egységeleme. Ha nem vezet ellentmondásra, akkor az egyszerűség kedvéért φ_h helyett is φ-t írunk.

6. Félgyűrűk, gyűrűk, testek

Az $(R, +, \cdot)$ két (binér) műveletes algebrai struktúra [*kommutatív*] *félgyűrű*, ha $(R, +)$ kommutatív monoid, $(R, \cdot)$ [kommutatív] monoid, a szorzás disztributív az összeadásra és az $(R, +)$ monoid 0 egységeleme az $(R, \cdot)$ monoid zéruseleme, amelyet a *félgyűrű zéruselem*ének mondunk. Az $(R, \cdot)$ egységelemét általában 1 jelöli, amit a *félgyűrű egységelem*ének hívunk. A nemnegatív egész számok N halmaza a szokásos összeadásra és szorzásra kommutatív félgyűrű.

Az $(R, +, \cdot)$ algebrai struktúra [*kommutatív*] *gyűrű*, ha $(R, +)$ Abel-csoport, $(R, \cdot)$ [kommutatív] félcsoport, és a szorzásnak nevezett $\cdot$ művelet disztributiv az összeadásnak nevezett $+$ műveletre. Az $(R, +)$ Abel-csoport 0 egységeleme az $(R, \cdot)$ félcsoport zéruseleme, amelyet a *gyűrű zéruselem*ének nevezünk. Ha $(R, \cdot)$ monoid, akkor egységelemét általában 1 jelöli, amelyet a *gyűrű egységelem*ének, a gyűrűt pedig *egységelemes*nek mondjuk. Az egész számok Z halmaza a szokásos összeadásra és szorzásra kommutatív egységelemes gyűrű.

Az $(R, +, \cdot)$ gyűrű *test*, ha $(R - \{0\}, \cdot)$ Abel-csoport. Minden test legalább kételemű egységelemes kommutatív gyűrű.A racionális számok Q halmaza és a valós számok R halmaza a szokásos összeadásra és szorzásra test.

AJÁNLOTT IRODALOM

Általános algebra:

[1] S. Burris-H.P. Sankappanavar, *Bevezetés az univerzális algebrába*, Tankönyvkiadó, Budapest, 1988

[2] Czédli G., *Hálóelmélet*, JATEPress, Szeged, 1999

[3] Fried E., *Általános algebra*, Tankönyvkiadó, Budapest, 1981

[4] G. Lallement, *Semigroups and Combinatorial Applications*, John Wiley and Sons, New York, 1979

[5] Nagy A., *Special Classes of Semigroups*, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht-Boston-London, 2001

[6] Schmidt T., *Algebra*, Tankönyvkiadó, Budapest, 1977

Automaták és nyelvek:

[7] Ádám A., *The Behaviour and Simplicity of Finite Moore Automata*, Akadémiai Kiadó, 1996

[8] Babcsányi I., *Automaták, Nyelvek, Kódok*, BME, Matematika Intézet, Algebra Tanszék, elektronikus jegyzet (www.math.bme.hu/~babcs/), 2007

[9] Dömösi P.- C.L. Nehaniv, *Algebraic Theory of Automata Networks. An Introduction*, SIAM Monograps on Discrete Mathematics and Applications, 11. Society for Industrial and Applied Mathematics (SIAM), Philadelphia, PA, 2005

[10] M. Ito, *Algebraic Theory of Automata and Languages*, World Scientific Publishing, New Jersey-London-Singapore- Beijing- Shanghai-Hongkong-Taipei-Chennai, 2004

[11] Fülöp Z., *Formális nyelvek és szintaktikus elemzésük*, Polygon, Szeged, 1999

[12] Gécseg F., *Products of Automata*, Akademie-Verlag, Berlin, 1986

[13] Gécseg F., *Automaták és formális nyelvek*, Polygon, Szeged, 2005

[14] Gécseg F.-Peák I., *Algebraic Theory of Automata*, Akadémiai Kiadó, Budapest, 1972

[15] Peák I., *Bevezetés az automaták elméletébe I.*, Tankönyvkiadó, Budapest, 1977

[16] Peák I., *Bevezetés az automaták elméletébe II.*, Tankönyvkiadó, Budapest, 1978

[17] Peák I., *Bevezetés az automaták elméletébe III.*, Tankönyvkiadó, Budapest, 1980

[18] A. Salomaa, *Formal Languages*, Academic Press, New York-London, 1973

Tárgymutató