

Bálint Péter - Garay Barna - Kiss Márton -  
Lóczy Lajos - Nagy Katalin - Nágel Árpád

# GÉPÉSZKARI MATEMATIKA MSC

2011

Ismertető  
Tartalomjegyzék  
Pályázati támogatás  
Gondozó

Szakmai vezető  
Lektor, konzulensek  
Technikai szerkesztő  
Copyright

A jegyzet a BME gépészmérnöki mesterszak hallgatói számára készült a matematika M1 és M2 tárgyhoz segédletként, mérnök konzulensek közreműködésével. Öt részben – Közöséges differenciálegyenletek, Parciális differenciálegyenletek, Valószínűségi számítás, Komplex függvénytan, Fourier-sorfejtés és Laplace-transzformáció – tárgyalja a gépészmérnöki mesterképzésben szükségesnek ítélt matematika tananyagot.

A terjedelmi és időbeli korlátok ellenére igyekeztünk egy matematikailag pontos, ugyanakkor mérnökök számára is szemléletes tárgyalásmódot kialakítani. Ennek megfelelően a matematikai elmélet ismertetését helyenként mérnöki magyarázatokkal egészítettük ki. Kiemelt fontosságúnak tartottuk az ismeretek alkalmazását a gyakorlatban, így a problémamegoldó képesség fejlesztését is.

Az öt témakör, jóllehet tartalmaz közös pontokat, egymástól függetlenül is olvasható. Az átadni kívánt ismeretek adott esetben eltérő absztrakciós szintje, valamint az alkalmazásuk módjában mutatkozó különbség némiképp eltérő szerkesztést tett szükségessé. Minden részben közös, hogy az elméleti összefoglalást bőséges kidolgozott példaanyag követi. Minden témakörhöz megadunk további gyakorló feladatokat is. Az elméleti összefoglalókban a BSc-s szigorlatokon elvárt szinthez igazodtunk, ugyanakkor arra is törekedtünk, hogy a leírtak mélyebb megértése képessé tegye az olvasót a szakirodalom későbbi, esetleges önálló tanulmányozására.

A jelenleg a tavaszi félévben oktatott matematika M1 tárgy anyagába tartozik a valószínűségi számításról, a komplex függvénytanról, illetve a Fourier-sorfejtés és Laplace-transzformációról írott első három rész, míg az őszi félévben tartott matematika M2 tárgy anyaga a közöséges és parciális differenciálegyenletek. Ennek megfelelően az öt részt két – közel azonos terjedelmű – nagyobb egységbe csoportosítottuk. Azok a hallgatók, akik a tavaszi félévben kezdik meg tanulmányaikat, a fejezetek sorrendjében haladnak végig az anyagon, míg az ősszel kezdők a jegyzet második nagy egységében található témaköröket tanulják először.

**Kulcsszavak:** Közöséges differenciálegyenletek, Parciális differenciálegyenletek, Valószínűségi számítás, Komplex függvénytan, Fourier-sorfejtés és Laplace-transzformáció.

*Támogatás:*

Készült a TÁMOP-4.1.2-08/2/A/KMR-2009-0028 számú, a „Természettudományos (matematika és fizika) képzés a műszaki és informatikai felsőoktatásban” című projekt keretében.



*Készült:*

a BME TTK Matematika Intézet gondozásában

*Szakmai felelős vezető:*

Ferenczi Miklós

*Lektorálta:*

Simon Péter

*konzulensek:*

Kovács Ádám, Paál György, Kullmann László, Huba Antal, Halász Gábor

*Az elektronikus kiadást előkészítette:*

Torma Lídia Boglárka, Csépany Gergely László

*Címlap grafikai terve:*

Csépany Gergely László, Tóth Norbert

ISBN: 978-963-279-463-1

Copyright: © 2011–2016, Bálint Péter, Garay Barna, Kiss Márton,  
Lóczi Lajos, Nagy Katalin, Nágel Árpád, BME

„A © terminusai: A szerző nevének feltüntetése mellett nem kereskedelmi céllal szabadon másolható, terjeszthető, megjelentethető és előadható, de nem módosítható.”

# Tartalomjegyzék

|                                                                              |           |
|------------------------------------------------------------------------------|-----------|
| <b>Valószínűségszámítás</b>                                                  | <b>7</b>  |
| <b>1. Valószínűségi mező, feltételes valószínűség, függetlenség</b>          | <b>8</b>  |
| 1.1. Elméleti összefoglaló                                                   | 8         |
| 1.1.1. Véletlen és valószínűség                                              | 8         |
| 1.1.2. Feltételes valószínűség, függetlenség.                                | 11        |
| 1.2. Kidolgozott példák                                                      | 13        |
| 1.3. Gyakorló feladatok                                                      | 19        |
| <b>2. Valószínűségi változók</b>                                             | <b>21</b> |
| 2.1. Elméleti összefoglaló                                                   | 21        |
| 2.1.1. Valószínűségi változók.                                               | 21        |
| 2.1.2. Várható érték, szórás.                                                | 25        |
| 2.1.3. Együttes eloszlások.                                                  | 26        |
| 2.2. Kidolgozott példák                                                      | 29        |
| 2.3. Gyakorló feladatok                                                      | 37        |
| <b>3. Nevezetes eloszlások</b>                                               | <b>38</b> |
| 3.1. Elméleti összefoglaló                                                   | 38        |
| 3.2. Kidolgozott példák                                                      | 44        |
| 3.3. Gyakorló feladatok                                                      | 49        |
| <b>4. Nagy számok törvénye és centrális határeloszlás-tétel</b>              | <b>50</b> |
| 4.1. Elméleti összefoglaló                                                   | 50        |
| 4.2. Kidolgozott példák                                                      | 57        |
| 4.3. Gyakorló feladatok                                                      | 60        |
| <b>5. Gyakorló feladatok numerikus eredményei</b>                            | <b>61</b> |
| <b>Hivatkozások</b>                                                          | <b>62</b> |
| <b>Komplex analízis</b>                                                      | <b>63</b> |
| <b>6. Komplex függvények differenciálhatósága, Cauchy–Riemann-egyenletek</b> | <b>64</b> |

|                                                                                      |            |
|--------------------------------------------------------------------------------------|------------|
| 6.1. Mérnöki bevezetés . . . . .                                                     | 64         |
| 6.2. Matematikai bevezetés . . . . .                                                 | 66         |
| 6.3. A Cauchy–Riemann-egyenletek mérnöki bevezetése . . . . .                        | 67         |
| 6.4. Mérnöki megjegyzések . . . . .                                                  | 69         |
| <b>7. Komplex törtlineáris leképezések</b>                                           | <b>73</b>  |
| <b>8. Komplex függvények görbe menti integrálja</b>                                  | <b>76</b>  |
| 8.1. Mérnöki bevezetés . . . . .                                                     | 76         |
| 8.2. Matematikai bevezetés . . . . .                                                 | 77         |
| 8.3. A Cauchy-féle integráltétel és következményei . . . . .                         | 80         |
| <b>9. Komplex Taylor-sor és Laurent-sor</b>                                          | <b>83</b>  |
| 9.1. Konform leképezésekről . . . . .                                                | 89         |
| <b>10. Gyakorló feladatok</b>                                                        | <b>90</b>  |
| <b>11. Megoldások és eredmények</b>                                                  | <b>95</b>  |
| <b>A Fourier-sorfejtés és a Laplace-transzformáció</b>                               | <b>109</b> |
| <b>12. A Fourier-sorfejtés</b>                                                       | <b>111</b> |
| 12.1. A klasszikus Fourier-sorfejtés és a pontonkénti konvergencia kérdése . . . . . | 111        |
| 12.2. Fourier-sorfejtés Hilbert-terekben . . . . .                                   | 114        |
| 12.3. Néhány konkrét függvény Fourier-sorfejtése . . . . .                           | 116        |
| 12.4. További gyakorlófeladatok végeredménnyel . . . . .                             | 128        |
| <b>13. Integráltranszformációk: a Laplace-transzformáció</b>                         | <b>131</b> |
| 13.1. A Laplace-transzformáció tulajdonságai . . . . .                               | 133        |
| 13.2. Az inverz Laplace-transzformáció . . . . .                                     | 136        |
| 13.3. A Laplace-transzformáció néhány alkalmazása . . . . .                          | 137        |
| 13.4. További gyakorlófeladatok végeredménnyel . . . . .                             | 154        |
| <b>Közönséges differenciálegyenletek</b>                                             | <b>159</b> |
| <b>14. Bevezetés</b>                                                                 | <b>160</b> |
| <b>15. Elsőrendű közönséges differenciálegyenletek</b>                               | <b>161</b> |
| 15.1. Elméleti összefoglaló . . . . .                                                | 161        |
| 15.2. Kidolgozott példák . . . . .                                                   | 162        |
| 15.3. Gyakorló feladatok . . . . .                                                   | 164        |
| 15.4. Matematikai háttér . . . . .                                                   | 165        |

|                                                                      |            |
|----------------------------------------------------------------------|------------|
| <b>16. Analitikus megoldási módszerek</b>                            | <b>168</b> |
| 16.1. Elméleti összefoglaló . . . . .                                | 168        |
| 16.2. Kidolgozott példák . . . . .                                   | 169        |
| 16.3. Gyakorló feladatok . . . . .                                   | 175        |
| <b>17. Numerikus megoldási módszerek</b>                             | <b>178</b> |
| 17.1. Elméleti összefoglaló . . . . .                                | 178        |
| 17.2. Kidolgozott példák . . . . .                                   | 180        |
| 17.3. Gyakorló feladatok . . . . .                                   | 183        |
| 17.4. Matematikai háttér . . . . .                                   | 183        |
| <b>18. A megoldások ábrázolása</b>                                   | <b>186</b> |
| 18.1. Elméleti összefoglaló . . . . .                                | 186        |
| 18.2. Kidolgozott példák . . . . .                                   | 187        |
| 18.3. Gyakorló feladatok . . . . .                                   | 193        |
| <b>19. Stabilitás</b>                                                | <b>195</b> |
| 19.1. Elméleti összefoglaló . . . . .                                | 195        |
| 19.2. Kidolgozott példák . . . . .                                   | 200        |
| 19.3. Gyakorló feladatok . . . . .                                   | 203        |
| <b>20. Kétdimenziós autonóm rendszerek fázisképe</b>                 | <b>205</b> |
| 20.1. Elméleti összefoglaló . . . . .                                | 205        |
| 20.2. Kidolgozott példák . . . . .                                   | 208        |
| 20.3. Gyakorló feladatok . . . . .                                   | 218        |
| 20.4. Matematikai háttér . . . . .                                   | 219        |
| <b>21. Variációszámítás</b>                                          | <b>222</b> |
| 21.1. Elméleti összefoglaló . . . . .                                | 222        |
| 21.2. Kidolgozott példák . . . . .                                   | 223        |
| 21.3. Gyakorló feladatok . . . . .                                   | 227        |
| 21.4. Matematikai háttér . . . . .                                   | 228        |
| Hivatkozások . . . . .                                               | 229        |
| <b>Parciális differenciálegyenletek</b>                              | <b>230</b> |
| <b>I. rész: Parciális differenciálegyenletek direkt tárgyalásban</b> | <b>231</b> |
| <b>22. Bevezetés</b>                                                 | <b>232</b> |
| 22.1. A parciális differenciálegyenlet fogalma; példák . . . . .     | 232        |
| 22.2. Kezdeti és peremfeltételek; korrekt kitűzés . . . . .          | 234        |

|                                                                                                               |            |
|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------|------------|
| <b>23. Elsőrendű parciális differenciálegyenletek</b>                                                         | <b>235</b> |
| 23.1. Elméleti összefoglaló                                                                                   | 235        |
| 23.2. Kidolgozott példák                                                                                      | 237        |
| 23.3. Gyakorló feladatok                                                                                      | 240        |
| 23.4. Matematikai háttér                                                                                      | 241        |
| <b>24. Az elliptikus egyenletekre vonatkozó peremértékfeladat és a variációszámítás kapcsolata</b>            | <b>242</b> |
| <b>25. Ritz-Galjorkin módszer</b>                                                                             | <b>246</b> |
| 25.1. Elméleti összefoglaló                                                                                   | 246        |
| 25.2. Kidolgozott példák                                                                                      | 248        |
| 25.3. Gyakorló feladatok                                                                                      | 251        |
| 25.4. Matematikai háttér                                                                                      | 252        |
| <b>26. Ortogonális rendszerek</b>                                                                             | <b>255</b> |
| 26.1. Elméleti összefoglaló                                                                                   | 255        |
| 26.2. Kidolgozott példák                                                                                      | 255        |
| 26.3. Gyakorló feladatok                                                                                      | 258        |
| 26.4. Matematikai háttér                                                                                      | 258        |
| <b>27. Legendre-polinomok</b>                                                                                 | <b>259</b> |
| 27.1. Elméleti összefoglaló                                                                                   | 259        |
| 27.2. Kidolgozott példák                                                                                      | 260        |
| 27.3. Gyakorló feladatok                                                                                      | 263        |
| 27.4. Matematikai háttér                                                                                      | 263        |
| <b>II. rész: Parciális differenciálegyenletek összehasonlító tárgyalásban</b>                                 | <b>266</b> |
| <b>28. Korrekt kitűzésű feladatok</b>                                                                         | <b>267</b> |
| 28.1. Lineáris algebrai egyenletek                                                                            | 269        |
| 28.2. Nemlineáris algebrai egyenletek                                                                         | 272        |
| 28.3. Közönséges differenciálegyenletek                                                                       | 274        |
| 28.4. Excursus. Függvényterek. Kontrakciós fixponttétel                                                       | 278        |
| 28.5. Az eddigiek összefoglalása                                                                              | 281        |
| <b>29. Parciális differenciálegyenletek</b>                                                                   | <b>283</b> |
| 29.1. Hővezetés rúdban. Homogén Dirichlet és Neumann peremfeltétel                                            | 283        |
| 29.2. Excursus. Általános megfontolások                                                                       | 287        |
| 29.3. A hullámegyenlet egy dimenzióban                                                                        | 290        |
| 29.4. Excursus. Fizika a hővezetési egyenlet mögött                                                           | 293        |
| 29.5. Végtelen dimenziós térben értelmezett közönséges differenciálegyenletek? –<br>Vissza az alap-példákhoz. | 296        |
| 29.6. Fourier-módszer szorzattartományokon                                                                    | 303        |
| 29.7. Speciális függvények                                                                                    | 313        |

---

|                                                         |            |
|---------------------------------------------------------|------------|
| 29.8. Dióhéjban: a véges differenciák módszer . . . . . | 317        |
| <b>30. Befejezés: az eddigiek összefoglalása</b>        | <b>323</b> |
| <b>31. Kitekintés, ajánlott olvasmányok</b>             | <b>325</b> |
| <b>Hivatkozások</b>                                     | <b>327</b> |





# Valószínűségszámítás

**Bálint Péter**

BME Differenciálegyenletek Tanszék

**Konzulens: Halász Gábor**

BME Hidrodinamikai Rendszerek Tanszék

# 1. fejezet

## Valószínűségi mező, feltételes valószínűség, függetlenség

### 1.1. Elméleti összefoglaló

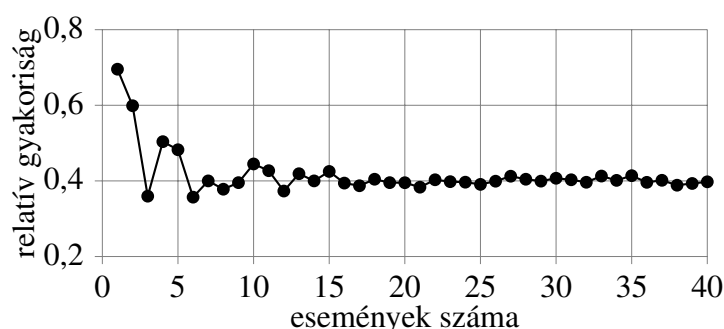
#### 1.1.1. Véletlen és valószínűség

##### Mérnöki bevezető a véletlen fogalmához

A mérnöki tudás nagy része a különböző változók közötti kapcsolatok ismeretét jelenti, és a változók többnyire a klasszikus newtoni fizika változói. A közöttük lévő kapcsolat egy része mérnöki közelítésben determinisztikus kapcsolat, abban az értelemben, hogy egy összefüggés „bemenő” változói egyértelműen meghatározzák a „kimenő” változók értékeit. Például, ha ismerjük egy belső égésű motor fordulatszámát és a „gázpedál” helyzetét, akkor a motor jelleggörbéje egyértelműen meghatározza a motor nyomatékát és teljesítményét. A változók közötti kapcsolatok másik részében a bemenő változók nem határozzák meg ilyen egyértelműen a kimenő változó értékét, ugyan ahhoz a bemenő változóhoz esetről esetre különböző kimenő változó értéket tapasztalhatunk. Ez azért lehetséges, mert a figyelembe vett bemenő változók mellett még sok más, nehezen vagy alig figyelembe vehető hatás is befolyásolja a kimenő változó értékét. Ezek a hatások esetről esetre változhatnak. Tudjuk például, hogy a villamost szigorú menetrend szerint indítják a végállomásról, de a 3-4. megálló után már jelentős eltérést is tapasztalhatunk a beérkezés tényleges és a menetrend szerinti időpontja között. Nyilvánvaló, hogy a többi jármű forgalma, a le- és felszálló utasok száma, a jármű vezetőjének pillanatnyi vezetési „stílusa”, az időjárás, stb. befolyásolja az érkezési időt, de e tényezők hatása nehezen számszerűsíthető. A figyelembe nem vett, de befolyással bíró paraméterek hatását nevezzük véletlen-nek, és mondjuk azt, hogy a villamos beérkezési idejét a menetrend és a véletlen együttesen határozzák meg. Ugyanilyen értelemben mutat ingadozást egy automata gépsorról lekerülő darab mérete, egy termék élettartama, egy azonos körülmények között megismételt mérés eredménye is.

## Mérnöki bevezető a valószínűség fogalmához

Tekintsük az utas számára kedvező  $V$  eseménynek azt, ha a villamos a megállóba a menetrend szerinti időponthoz képest a  $[0, +3]$  perc intervallumban érkezik. Tegyük fel, hogy rendszeresen, minden nap ugyanakkor közlekedünk, és megfigyeljük, hogy e kedvező  $V$  esemény bekövetkezik, vagy sem. Mondjuk, hogy  $n$  napon keresztül végezzük a megfigyelést, és ebből  $k$  alkalommal következett be a számunkra kedvező esemény. Ez a  $k$  szám az esemény bekövetkezésének gyakorisága, a  $k/n$  hányados pedig a relatív gyakorisága. Ábrázoljuk grafikonban a  $k/n$  relatív gyakoriságot az  $n$  függvényében (lásd 1.1 ábra). Természetesen az ábra diszkrét pontsört mutat, csak azért kötöttük össze a pontokat, hogy a tendencia jól látható legyen. Tegyük fel, hogy a  $V$  esemény bekövetkezését befolyásoló tényezők napról napra hasonlóak, akkor feltételezhetjük, hogy a relatív gyakoriság is bizonyos fokú stabilitást mutat:  $n$  növekedésével  $k/n$  értéke egyre kevésbé ingadozik. Ha  $n$  elegendően nagy, és így az ingadozás kicsi, akkor jó mérnöki becsléssel berajzolhatunk az ábrába egy átlagot: e körül ingadozik a relatív gyakoriság. Ezt az átlagot tekintheti a mérnök a  $V$  esemény  $p$  valószínűségének, és úgy jelöli, hogy:  $P(V) = p$ . Tekintve, hogy  $0 \leq k/n \leq 1$ , ezt a tulajdonságot örökli a valószínűség is:  $0 \leq p \leq 1$ . E magyarázat lényeges eleme, hogy hogyan definiáljuk a  $V$  eseményt. Ha az automata gépsoron gyártott darab valamely méretét figyeljük meg, akkor a számunkra az a  $V$  esemény kedvező, ha a gyártott darab mérete beleesik a névleges méret  $\pm$  tűréshatár intervallumba. Hasonlóképpen fogalmazzuk meg a kedvező eseményt a termék élettartam vagy a mérési eredmény értékelése esetén is. A valószínűség fogalmának szemléletes bevezetése azt is sugallhatja, hogy ha  $n \rightarrow \infty$ , akkor  $k/n \rightarrow p$ . Ez a közönséges konvergencia, amelyet a soroknál ismertünk meg, a jelen esetben ilyen szigorúan nem igaz. Hogy mégis milyen értelemben beszélhetünk konvergenciáról, az a 4 fejezetben fog kiderülni.



1.1. ábra. Valószínűség, mint a relatív gyakoriság „határértéke”

## Alapfogalmak.

A valószínűesszámításban egy kísérlet lehetséges kimeneteleit *elemi eseményeknek* hívjuk. Az elemi események összessége az *eseménytér*, általában  $\Omega$ -val jelöljük. A kísérlet kimenetelével kapcsolatos kijelentéseinket  $\Omega$  bizonyos részhalmazaiival azonosíthatjuk – ezeket *eseményeknek* hívjuk, és nagybetűvel jelöljük – az  $A$  esemény, mint részhalmaz, azokat

(és csak azokat) az elemi eseményeket tartalmazza, amelyek az esemény bekövetkezését maguk után vonják.

Néhány jelölés:  $\emptyset$  a lehetetlen esemény – az üres halmaz – ami sohasem következik be,  $\Omega$  a biztos esemény – a teljes eseménytér – ami biztosan bekövetkezik; és néhány művelet:  $A + B$  jelöli azt az eseményt, hogy az  $A$  és a  $B$  események közül legalább az egyik bekövetkezik – halmazelméleti szempontból ez a két halmaz  $A \cup B$  únioja,  $AB$  pedig azt, hogy az  $A$  és a  $B$  esemény egyszerre bekövetkezik – halmazelméleti szempontból ez a két halmaz  $A \cap B$  metszete, végül  $\bar{A}$  az  $A$  esemény komplementere, amely pontosan akkor következik be, amikor  $A$  nem – halmazelméleti szempontból ez  $A$   $\Omega$ -ra vonatkozó komplementere,  $\Omega \setminus A$ . Hasonlóképpen definiálható pl. események egy  $A_1, A_2, \dots$  sorozatához az  $A_1 + A_2 + \dots$  esemény, ennek jelentése, hogy a sorozatban szereplő események közül legalább az egyik bekövetkezik. Itt is érvényesek a halmazműveleteknél már megszokott átalakítások, pl. az ún. de Morgan azonosságok:  $A + B = \overline{\bar{A} \cdot \bar{B}}$ , és  $\overline{AB} = \bar{A} + \bar{B}$ .

**1.1.1. MEGJEGYZÉS** A szóba jövő események összességét általában  $\mathcal{F}$ -fel jelöljük. Mélyebb matematikai oka van annak, hogy  $\mathcal{F}$ -be – a diszkrét  $\Omega$  esetétől eltekintve – nem vesszük be  $\Omega$  összes részhalmazát.  $\mathcal{F}$  azonban mindig tartalmazza  $\emptyset$ -t,  $\Omega$ -t, és zárt a fenti műveletekre, pl. ha  $A_1, A_2, \dots \in \mathcal{F}$ , akkor  $(A_1 + A_2 + \dots) \in \mathcal{F}$ .

Még a *valószínűség fogalmára* van szükségünk, ez egy  $P : \mathcal{F} \rightarrow \mathbb{R}$  hozzárendelés, amely tehát minden szóba jövő  $A$  eseményhez hozzárendel egy  $P(A)$  számot, az esemény bekövetkezésének valószínűségét. A valószínűséget minden kísérletben máshogy kell meghatározni, intuíciónk alapján is posztulálhatjuk azonban a következő axiómákat, amelyek mindig teljesülnek:

- (I) minden  $A$  eseményre  $0 \leq P(A) \leq 1$ ,
- (II)  $P(\Omega) = 1$ ,
- (III) ha az  $A_1, A_2, \dots$  események egymást páronként kizárják – azaz  $A_i A_j = \emptyset$  minden  $i \neq j$  esetben – akkor  $P(A_1 + A_2 + \dots) = P(A_1) + P(A_2) + \dots$ .

**1.1.2. PÉLDA** (KLASSZIKUS VALÓSZÍNŰSÉGI MEZŐ) Ha

- (i)  $\Omega$  egy véges halmaz,
- (ii) intuíciónk alapján az elemi eseményeket egyenlő valószínűségűeknek tekintjük. Ilyenkor tetszőleges  $A$  esemény valószínűségét a  $P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|}$  képlettel határozhatjuk meg, itt a nevező a teljes eseménytér elemszáma – „összes lehetőség”, a számláló pedig az  $A$ -t megvalósító elemi események száma – „kedvező lehetőségek”.

**1.1.3. PÉLDA** (GEOMETRIAI VALÓSZÍNŰSÉGI MEZŐ) Ha (i)  $\Omega \subset \mathbb{R}^2$  valamely síkbeli tartomány, és (ii) intuíciónk alapján ezen a „valószínűség egyenletesen oszlik el”. Ekkor minden szóba jövő  $A \subset \Omega$  eseményre  $P(A) = \frac{t(A)}{t(\Omega)}$ , azaz  $A$  területe (kedvező terület) osztva  $\Omega$  területével (teljes terület).

### 1.1.2. Feltételes valószínűség, függetlenség.

#### Mérnöki bevezető a feltételes valószínűség fogalmához

Folytassuk a megfigyeléseinket a villamosmegállóban, ahol esetenként találkozunk egy cimboránkkal, akivel együtt szoktunk utazni. Legyen továbbra is úgy, hogy az  $n$  napon keresztül folytatott megfigyelésből  $k$  alkalommal érkezik villamos a számunkra kedvező intervallumban. Ebből a  $k$  alkalomból  $m$  alkalommal cimboránk is megérkezik, és együtt utazunk. A cimboránk beérkezésének relatív gyakorisága, ha már beérkezett egy villamos:  $m/k$ . Ez a mennyiség egy feltételes relatív gyakoriság, hiszen feltételünk volt, hogy villamos már beérkezett a számunkra kedvező intervallumban. Az  $m/k$  tört bővíthető:  $(m/n)/(k/n)$  alakúra. Itt a számláló a villamos és cimboránk együttes beérkezésének relatív gyakorisága, a nevező a villamos beérkezésének relatív gyakorisága. Ez a hányados magyarázza a feltételes valószínűség fogalmát: Legyen  $C$  esemény a cimboránk beérkezése,  $P(C|V)$  jelölje cimboránk beérkezésének valószínűségét, feltéve, hogy a villamos is megjött. Ez a feltételes valószínűség (a relatív gyakoriságok példája alapján) egyenlő az együttes bekövetkezés valószínűsége osztva a villamos beérkezésének valószínűségével:  $P(C|V) = P(C \cap V)/P(V)$ .

#### Mérnöki bevezető a függetlenség fogalmához

Általában azt gondoljuk, hogy az előző példában a villamos beérkezése és cimboránk beérkezése nincs kapcsolatban egymással, függetlenek egymástól. Vagyis cimboránk beérkezésének valószínűsége, feltéve, hogy a villamos is beérkezett, ugyan akkora, mint cimboránk beérkezésének valószínűsége a feltétel nélkül:  $P(C|V) = P(C)$ . Ezt beírva a feltételes valószínűség definíciójába, azt kapjuk, hogy  $P(C) \cdot P(V) = P(C \cap V)$ . Szavakban: az együttes bekövetkezés valószínűsége egyenlő a valószínűségek szorzatával, ha a két esemény független.

Álljon itt még egy példa a feltételes valószínűség és a függetlenség fogalmának szemléltetésére. 365 reggelente keresztül figyeljük meg az időjárást Budapesten és Diósdon. Legyen  $B$  illetve  $D$  az az esemény, hogy Budapesten, illetve Diósdon esik az eső (az adott reggelente). A 365-ből rendre  $k_B$ , illetve  $k_D$  alkalommal figyelünk meg esőt Budapesten, illetve Diósdon; ennek megfelelően az egyes valószínűségeket  $P(B) \approx k_B/365$ , illetve  $P(D) \approx k_D/365$  közelíti. Ha  $k_{BD}$ -vel jelöljük azon reggelek számát, amikor Budapesten és Diósdon egyaránt esik az eső, akkor nyilván  $k_{BD} \leq k_B$ , de nem lehet  $k_{BD}$  sokkal kisebb  $k_B$ -nél, hiszen ha Budapesten esik az eső, akkor általában Diósdon is esni szokott. Ennek megfelelően azt tapasztaljuk, hogy  $k_B \cdot k_D < k_{BD}$ , tükrözve, hogy  $P(B \cap D) > P(B) \cdot P(D)$ , illetve  $P(D|B) > P(D)$  – ez a két esemény *nem* független egymástól. Ha  $D$  helyett azt az  $M$  eseményt tekintenénk, hogy Melbourne-ben esik az eső (ugyanazon a reggelente, ami ott estét jelent...) – akkor az  $M$  és a  $B$  eseményeket függetlennek találnánk,  $k_B \cdot k_M \approx k_{BM}$  teljesülne, hiszen Budapest és Melbourne időjárását nagyjából függetlennek tekinthető körülmények alakítják, és így  $P(B \cap M) = P(B) \cdot P(M)$ -re, a két esemény függetlenségére számíthatunk.

**1.1.4. DEFINÍCIÓ** (FELTÉTELES VALÓSZÍNŰSÉG, FÜGGETLENSÉG – MATEMATIKAI TÁRGYALÁS) *Tegyük fel, hogy  $P(B) \neq 0$ , egyébként legyenek  $A$  és  $B$  tetszőleges események.*

Ekkor  $A$  feltételes valószínűsége  $B$  bekövetkezése mellett:

$$P(A|B) = \frac{P(AB)}{P(B)}.$$

*A fogalom jelentése: ha tudjuk, hogy  $B$  bekövetkezett, mi a valószínűsége, hogy ( $B$  mellett még)  $A$  is bekövetkezett.*

1.1.5. **DEFINÍCIÓ** Az  $A$  és  $B$  események függetlenek, ha

$$P(AB) = P(A)P(B).$$

1.1.6. **ÁLLÍTÁS** Tegyük fel most, hogy  $P(A) \neq 0$  és  $P(B) \neq 0$ . Ekkor

$$A \text{ és } B \text{ függetlenek} \iff P(A) = P(A|B) \text{ és } P(B) = P(B|A).$$

Ezek alapján:  $A$  és  $B$  függetlenek, ha  $A$  bekövetkezése nem befolyásolja  $B$  valószínűségét. Másképp fogalmazva, ha tudjuk, hogy  $A$  bekövetkezett, semmi plusz információt nem nyerünk  $B$  esélyére vonatkozóan (hiszen  $B$  valószínűségét  $A$  bekövetkezése mellett pontosan ugyanannyinak számolnánk, mint ezen információ nélkül).

1.1.7. **MEGJEGYZÉS** A kizáró események és a független események fogalmát ne keverjük össze! Ha  $A$  és  $B$  kizáró események, azaz  $AB = \emptyset$ , akkor  $P(AB) = 0$  – vagyis a függetlenség semmiképp sem teljesülhet, ha pozitív valószínűségű eseményekről van szó. Másképp megfogalmazva: ha  $A$  és  $B$  kizáróak,  $A$  bekövetkezésével nagyon sok információt nyerünk  $B$  esélyeire vonatkozólag...

## Bayes tétel

Sokszor bizonyos feltételes valószínűségeket könnyebb kiszámolni, mint magukat a valószínűségeket. Egy a gyakorlatban előforduló szituáció: a  $B$  eseményt különböző okok előzhetnek meg. A kiváltó okokat tekinthetjük egy teljes eseményrendszer elemeinek:

1.1.8. **DEFINÍCIÓ** Az  $A_1, A_2, \dots, A_n$  események teljes eseményrendszert alkotnak, ha

- (i)  $A_1 + A_2 + \dots + A_n = \Omega$ ,
- (ii)  $A_i A_j = \emptyset$  minden  $i \neq j$  párra.

Szavakban kifejezve, az  $A_i$  események közül legalább egy biztosan bekövetkezik, de egyszerre kettő sem következhet be. Ha könnyen ki tudjuk számolni a  $P(A_i)$ -ket (az egyes okok valószínűségeit), illetve a  $P(B|A_i)$ -ket ( $B$  esélyét az egyes megelőző okok bekövetkezése mellett) akkor kézenfekvő a teljes valószínűség tétele néven ismert képlet:

1.1.9. **TÉTEL** (TELJES VALÓSZÍNŰSÉG TÉTELE)

$$P(B) = \left( \sum_{i=1}^n P(BA_i) \right) = \sum_{i=1}^n P(B|A_i)P(A_i).$$

Az alkalmazások szempontjából legalább ennyire fontos a következő kérdés. Az  $A_1, \dots, A_n$  teljes eseményrendszer egyes elemeinek a valószínűségére vagyunk kíváncsiak, de azon információ birtokában, hogy a  $B$  esemény bekövetkezett. Másképp fogalmazva: az  $A_1, \dots, A_n$  lehetőségek esélyeit miképp változtatja meg az a tény, hogy  $B$  bekövetkezett? Vagyis  $P(A_k|B)$ -re vagyunk kíváncsiak. Némi számolással adódik:

1.1.10. **TÉTEL** (BAYES TÉTELE)

$$P(A_k|B) = \left( \frac{P(BA_k)}{P(B)} \right) = \frac{P(B|A_k)P(A_k)}{\sum_{i=1}^n P(B|A_i)P(A_i)}.$$

1.1.11. **MEGJEGYZÉS** Mielőtt elszörnyülködnénk ezeken a képleteken, egy tanács a teljes vszg. tétele/Bayes tétel feladatok megoldásához. Készítsünk ágrajzot, ezen ábrázolva a  $B$ -t megvalósító  $n$  lehetőséget. Az egyes ágakra írjuk rá felülre az előzmények valószínűségeit ( $P(A_i)$ ), alulra pedig  $B$  esélyét az adott előzmény mellett ( $P(B|A_i)$ ). Az egyes ágak súlyát ezen számok szorzata adja. A teljes vszg tétel jelentése: mi az ágak súlya összesen? A Bayes tétel jelentése: mi a  $k$ -adik ág relatív súlya az összes ág súlyához képest?

## 1.2. Kidolgozott példák

1.2.1. **KIDOLGOZOTT FELADAT** A valószínűesszámitás egy fontos műszaki alkalmazása, amikor egy több részből álló rendszer megbízhatóságát vizsgáljuk, ismervé az egyes alkotóelemek működési valószínűségeit, valamint kapcsolódási hálójukat – gondolhatunk például egy elektromos áramkörre.

- (a) A sorba kapcsolt  $A$  és  $B$  kapcsolókat az idő 65, illetve 75 %-ban zárjuk. Feltételezve, hogy a kapcsolók működtetése független, az idő hány százalékában folyik áram a teljes rendszeren?
- (b) Helyezzük most el az  $A_1$ ,  $A_2$  és  $A_3$  kapcsolókat az 1.2 ábra szerint, és tartsuk zárva ezeket egymástól függetlenül rendre  $P(A_1) = 0,9$ ,  $P(A_2) = 0,8$  és  $P(A_3) = 0,7$  valószínűségekkel. Mi a teljes áramkör zárásának valószínűsége?

### MEGOLDÁS

(a) A következőképp gondolkodhatunk:

$$\begin{aligned} P(\text{áramkör zárva}) &= P(A \text{ zárva és } B \text{ zárva}) = P(A \text{ zárva}) \cdot P(B \text{ zárva}) = \\ &= 0,65 \cdot 0,75 = 0,4875, \end{aligned}$$



ahol az első egyenlőségénél a kapcsolók soros kapcsolását, a másodikonál függetlenségüket használtuk. Tehát az áramkör az idő 48,75 százalékában van zárva.

- (b) Használni fogjuk az alábbi, tetszőleges  $A$  és  $B$  események úniójának valószínűségére vonatkozó formulát (az ún. *szita formula* legegyszerűbb esete):

$$P(A + B) = P(A) + P(B) - P(A \cdot B). \quad (1.1)$$

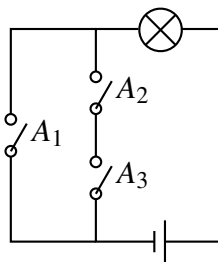
Visszatérve a feladathoz, az áramkör akkor van zárva, ha vagy az  $A_1$  kapcsolót zárjuk, vagy az  $A_2$  és  $A_3$  kapcsolókat egyszerre zárjuk. Ezt a tényt, majd az (1.1) formulát, végül pedig a kapcsolók függetlenségét használva:

$$\begin{aligned} P(\text{áramkör zárva}) &= P(A_1 \text{ vagy } (A_2 \text{ és } A_3)) = \\ &= P(A_1) + P(A_2 \text{ és } A_3) - P(A_1 \text{ és } (A_2 \text{ és } A_3)) = \\ &= P(A_1) + P(A_2)P(A_3) - P(A_1)P(A_2)P(A_3) = \\ &= 0,9 + 0,8 \cdot 0,7 - 0,8 \cdot 0,8 \cdot 0,7 = 0,956. \end{aligned}$$

Ellenőrzésképp: a kapott valószínűség nagyobb 0,9-nél,  $A_1$  zárásának valószínűségénél, megfelelően annak, hogy ha  $A_1$ -t zárjuk, akkor az áramkör is biztosan zárul.

1.2.2. **MEGJEGYZÉS** Az (1.1) formula levezetéséhez csak annyit kell használnunk, hogy kizáró események úniójára a valószínűség összeadódik:

$$\begin{aligned} P(A + B) &= P(\overline{A} \cdot B) + P(A \cdot B) + P(A \cdot \overline{B}) = \\ &= (P(\overline{A} \cdot B) + P(A \cdot B)) + (P(A \cdot \overline{B}) + P(A \cdot B)) - P(A \cdot B) = \\ &= P(B) + P(A) - P(A \cdot B). \end{aligned}$$



1.2. ábra. Az 1.2.1.. kidolgozott feladathoz

1.2.3. **KIDOLGOZOTT FELADAT** Feldobunk két szabályos dobókockát, egy pirosat és egy kéket. Tekintsük a következő eseményeket:

$A = \{ A \text{ piros dobókockán páros szám áll.} \}$

$B = \{ A \text{ két dobás összege tíz.} \}$

$C = \{ A \text{ két dobás eredménye azonos.} \}$

$D = \{ A \text{ piros dobókockán páratlan szám áll.} \}$

$E = \{ A \text{ kék dobókockán páratlan szám áll.} \}$

(a)  $P(B) = ?$ ,  $P(C) = ?$

(b)  $P(A|B) = ?$

(c)  $A, B, C, D$  és  $E$  események közül melyiktől független  $A$ , és melyiktől nem?

**MEGOLDÁS** A kísérlet eredményét megadhatjuk, ha megmondjuk, milyen szám áll az egyes kockákon. Ennek megfelelően az eseménytér:

$$\Omega = \{(i, j) | i = 1, \dots, 6; j = 1, \dots, 6\}$$

ahol  $i$ , illetve  $j$  a piros, illetve a kék kocka eredménye. Tehát klasszikus valószínűségi mezővel van dolgunk, és a valószínűségek számolásánál a nevező minden esetben  $|\Omega| = 6 \cdot 6 = 36$ .

(a)  $B = \{(4, 6), (5, 5), (6, 4)\}$  tehát  $|B| = 3$  és így  $P(B) = 3/36 = 1/12$ .  $C = \{(1, 1), \dots, (6, 6)\}$  így  $|C| = 6$  és  $P(C) = 1/6$ .

(b) Mivel  $P(A|B) = \frac{P(AB)}{P(B)}$  és itt a nevezőt már az imént kiszámoltuk, ezért a számlálót kell meghatározni. Ehhez  $AB = \{ A \text{ piros kockán páros szám áll, és a dobások összege } 10. \} = \{(4, 6), (6, 4)\}$ . Tehát  $P(AB) = 2/36 = 1/18$  és  $P(A|B) = \frac{1/18}{1/12} = 2/3$ .

Másképp gondolkodva: a  $B$ -t megvalósító 3 elemi esemény közül pontosan 2 valósítja meg  $A$ -t is, így  $A$  esélye, ha tudjuk, hogy  $B$  bekövetkezett,  $2/3$ .

(c) Ehhez először  $A = \{(1, 2), \dots, (6, 2), (1, 4), \dots, (6, 4), (1, 6), \dots, (6, 6)\}$  tehát  $|A| = 18$  és  $P(A) = 1/2$ .

Az előző részfeladatok alapján  $P(A)P(B) \neq P(AB)$  tehát  $A$  és  $B$  *nem* függetlenek. Ugyanez látszik abból is, hogy  $P(A|B) \neq P(A)$  – pozitív valószínűségű eseményekről van szó. (Ha  $B$ -ről tudjuk, hogy bekövetkezett, inkább fogadnánk  $A$ -ra, mint ha nem tudnánk semmit).

$AC = \{(2, 2), (4, 4), (6, 6)\}$  és így  $P(AC) = 1/12$ , amiből  $P(AC) = P(A)P(C)$ , tehát  $A$  és  $C$  függetlenek.

$P(D) = 1/2$  és  $P(E) = 1/2$  ugyanúgy adódik, mint  $P(A)$ . Ugyanakkor nyilván  $AD = \emptyset$ , tehát  $P(AD) = 0$ , vagyis  $A$  és  $D$  *nem* függetlenek (emlékeztető: pozitív vszg-ű kizáró események nem lehetnek függetlenek). Másrészt

$$AE = \{(1, 2), (3, 2), (5, 2), (1, 4), (3, 4), (5, 4), (1, 6), (3, 6), (5, 6)\}$$

□

és így  $P(AE) = 1/4$ , vagyis  $P(A)P(E) = P(AE)$ , tehát  $A$  és  $E$  függetlenek.

**1.2.4. KIDOLGOZOTT FELADAT** Egy urnában tapintásra megkülönböztethetetlen, 1-től 90-ig számozott cédulák vannak, ezek közül a 8, 19, 23, 64 és 74 számúak feketék, a többi fehér. Belenyúlunk az urnába, és kihúzunk (visszatevés nélkül) 5 cédulát. Mi a valószínűsége, hogy a kihúzottak között pontosan  $k$  fekete ( $k = 0, 1, \dots, 5$ )? (Hogy hívják ezt a játékot más néven?)

**MEGOLDÁS** Először el kell döntenünk, mik legyenek az elemi események. Kézenfekvő választás, ha azt tekintjük egy elemi eseménynek, hogy megmondjuk, melyik a kihúzott öt cédula. Ezzel a konvencióval eltekintünk a cédulák húzásának sorrendjétől. Lényeges, hogy ezt végig tartsuk észben. Az elemi események tehát az  $\{1, 2, 3, \dots, 90\}$  halmaz ötelemű részhalmazai, azaz

$$\Omega = \{\{1, 2, 3, 4, 5\}, \{1, 2, 3, 4, 6\}, \dots, \{86, 87, 88, 89, 90\}\}.$$

□

Fontos látni, hogy pl.  $\{1, 3, 6, 8, 10\}$  és  $\{6, 10, 3, 8, 1\}$  ugyanaz az elemi esemény.

Jelöljük  $A_k$ -val azt az eseményt, hogy pontosan  $k$  találatunk van ( $k = 0, 1, \dots, 5$ ).

Az összes lehetőségek száma, ahányféleképpen ki lehet választani 90 elemből 5-t, tehát  $|\Omega| = \binom{90}{5}$ . Minden esetben ez lesz a nevező.

A számlálók számolásához  $|A_k|$ -t kell meghatározni. Nyilván  $A_5 = \{\{8, 19, 23, 64, 74\}\}$  és így  $|A_5| = 1$ ,  $P(A_5) = \binom{90}{5}^{-1}$ . A többi  $|A_k|$ -hoz azt kell kiszámolni, hány olyan részhalmaza van az  $\{1, 2, \dots, 90\}$  halmaznak, amely a  $\{8, 19, 23, 64, 74\}$  halmazból pontosan  $k$  elemet tartalmaz, ennek komplementeréből pedig pontosan  $(5 - k)$  elemet. Mivel egy ötelemű halmaz  $k$  elemű részhalmazainak száma  $\binom{5}{k}$ , egy 85 elemű halmaz  $(5 - k)$  elemű részhalmazainak száma pedig  $\binom{85}{5-k}$ , adódik

$$|A_k| = \binom{5}{k} \binom{85}{5-k}; \quad P(A_k) = \frac{\binom{5}{k} \binom{85}{5-k}}{\binom{90}{5}}.$$

**1.2.5. KIDOLGOZOTT FELADAT** Válasszuk az

$$A = \begin{bmatrix} a & 1 \\ 1 & d \end{bmatrix}$$

*szimmetrikus mátrix*  $a$  és  $d$  elemeit egyenletes eloszlással, egymástól függetlenül az  $[1/2, 2]$  intervallumból. Mi a valószínűsége, hogy  $\det A > 0$ ?

**MEGOLDÁS** Mivel az  $a$  és a  $d$  elemeket függetlenül és egyenletes eloszlással választjuk, geometriai valószínűségi mezővel van dolgunk, az eseménytér:

$$\Omega = [1/2, 2] \times [1/2, 2]; \quad \text{ahol az } (a, d) \in \Omega$$

pár első és második tagja az  $A$  véletlen mátrix  $(1/2 \leq a \leq 2)$  illetve  $(1/2 \leq d \leq 2)$  diagonális elemeit jelöli. Jelöljük  $C$ -vel a  $\det A > 0$  eseményt.  $P(C)$  számolásához a teljes terület nyilván:  $t(\Omega) = (2 - 1/2)^2 = 2,25$ . A hasznos területhez a

$$C = \{(a, d) \in \Omega \mid \det A > 0\} = \{(a, d) \in [1/2, 2] \times [1/2, 2] \mid ad > 1\}$$

tartomány területét kell kiszámolni, egyszerűbb azonban  $\bar{C}$  területének számolása, ugyanis ezt a halmazt az  $1/2 \leq a \leq 2; 1/2 \leq d \leq 1/a$  egyenlőtlenségek jellemzik, és így integrálással:

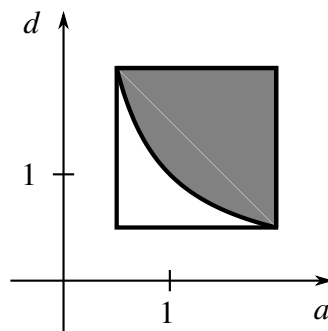
$$t(\bar{C}) = \int_{0,5}^2 \frac{1}{a} da - 1,5 \cdot 1/2 = 2 \ln 2 - 0,75.$$

Végül

$$P(C) = 1 - P(\bar{C}) = 1 - \frac{2 \ln 2 - 0,75}{2,25} \approx 0,7172.$$

□

A feladat megoldását az 1.3 ábra is szemlélteti.



1.3. ábra. Az 1.2.5. kidolgozott feladathoz

**1.2.6. KIDOLGOZOTT FELADAT** Egy kikötőhöz 24 órás időtartamon belül véletlen időpontban két hajó érkezik. Az előbb érkezőn rögtön megkezdik a rakodást, amely két óráig tart. Ha a második hajó akkor érkezik, amikor az első még rakodnak, akkor várakoznia kell a rakodás befejezéséig. Mi a valószínűsége, hogy szükség lesz várakozásra?

**MEGOLDÁS** Geometriai valószínűségi feladatról van most is szó: jelöljük  $x$ -szel és  $y$ -nal (óra egységekben) az egyes hajók érkezésének időpontját. Ekkor az elemi események leírhatók, mint  $(x, y)$ ,  $0 \leq x \leq 24$ ,  $0 \leq y \leq 24$  pontpárok: az  $\Omega$  eseménytér egy 24 egységnyi oldalhosszúságú négyzet. Jelöljük  $A$ -val azt az eseményt, hogy szükség van várakozásra. Ez akkor és csak akkor fordul elő, ha a két hajó érkezési időpontja között kevesebb, mint 2 óra a különbség, vagyis ha  $|x - y| \leq 2$ . Könnyen látható, hogy a komplementer tartomány előáll, mint két diszjunkt, derékszögű egyenlő szárú, 22 egységnyi befogójú háromszög. Így:

$$P(A) = 1 - \frac{22^2}{24^2} \approx 0,1597.$$

□

**1.2.7. KIDOLGOZOTT FELADAT** 6 doboz mindegyikében 6 cédula van, ezek közül rendre  $1, 2, \dots, 6$  fekete, a többi fehér. Feldobunk egy szabályos dobókockát, ha a dobás eredménye  $k$ , a  $k$ -adik dobozból húzunk egy cédulát.

(a) Mi a valószínűsége, hogy a kihúzott cédula fekete?

(b) tegyük most fel, hogy fekete cédulát húztunk, és a szomszéd szobában levő barátunknak csak ennyit árultunk el a kísérletről. Barátunk szerint mi a valószínűsége annak, hogy hatost dobtunk?

**MEGOLDÁS** Vezessük be a következő eseményeket:

$A_k := \{ \text{a kockával } k\text{-t dobunk} \} = \{ \text{a } k\text{-adik dobozból húzunk} \}; k = 1, \dots, 6;$  továbbá  $B := \{ \text{a kísérlet végén fekete cédulát húzunk.} \}$

Az  $A_k; k = 1, \dots, 6$  események teljes eseményrendszert alkotnak, és nyilván  $P(A_k) = 1/6$  mindegyikükre.  $P(B|A_k)$  annak valószínűsége, hogy a  $k$ -adik dobozból fekete cédulát húzunk: mivel az ebben a dobozban található 6 cédula közül pontosan  $k$  fekete, könnyen adódik  $P(B|A_k) = \frac{k}{6}$ .

(a) A teljes valószínűség tétele szerint:

$$P(B) = \sum_{i=1}^6 P(B|A_i)P(A_i) = \frac{1+2+\dots+6}{36} = \frac{6 \cdot (6+1)}{2 \cdot 36} = \frac{7}{12}.$$

(b) A feladat kérdése:  $P(A_6|B) = ?$  Ezt Bayes tételével számolhatjuk:

$$P(A_6|B) = \frac{P(B|A_6)P(A_6)}{P(B)} = \frac{1 \cdot 1/6}{7/12} = \frac{2}{7}.$$

□

**1.2.8. KIDOLGOZOTT FELADAT** Magyarországon minden tízezredik lakos HIV fertőzött. A fertőzöttség szűrésére AIDS tesztet használnak, ami az esetek kis %-ában sajnos téved. Konkrétan, az egészséges emberek tesztjeinek 1%-a pozitív, illetve a fertőzött emberek tesztjeinek 1,5%-a negatív. Jancsi Bácsi tesztje sajnos pozitív. Mi a valószínűsége, hogy Jancsi Bácsi valóban fertőzött?

**MEGOLDÁS** Vezessük be a következő eseményeket:

$A_1 = \{ \text{Jancsi bácsi HIV fertőzött.} \}, A_2 = \overline{A_1} = \{ \text{Jancsi bácsi nem HIV fertőzött.} \}$

$B = \{ \text{Jancsi bácsi tesztjének eredménye pozitív.} \}$  Végül  $\overline{B} = \{ \text{Jancsi bácsi tesztjének eredménye negatív.} \}$

A feladat kérdése:  $P(A_1|B) = ?$  Bayes tételét fogjuk használni.

Nyilván  $A_1$  és  $A_2$  teljes eseményrendszert alkotnak. Mivel Jancsi bácsiról (a teszt elvégzése előtt) semmi információnk nincsen, így ő a magyar társadalom egy véletlenszerűen választott tagjának tekinthető, és így:

$$P(A_1) = 0,0001; \quad P(A_2) = 1 - P(A_1) = 0,9999.$$

Meg kell még határozni  $P(B|A_1)$ -t és  $P(B|A_2)$ -t.  $P(B|A_2)$  annak valószínűsége, hogy egy egészséges embert fertőzöttnek mutasson a teszt, a feladat szövege alapján  $P(B|A_2) = 0,01$ . A másik, feladat szövegéből közvetlenül kiolvasható valószínűség  $P(\overline{B}|A_1) = 0,015$ , annak esélye, hogy egy fertőzött embert egészségesnek mutat a teszt. Ebből:

$$P(B|A_1) = 1 - P(\overline{B}|A_1) = 0,985.$$

Most alkalmazhatjuk Bayes tételét:

$$P(A_1|B) = \frac{P(B|A_1)P(A_1)}{P(B|A_1)P(A_1) + P(B|A_2)P(A_2)} = \frac{0,985 \cdot 0,0001}{0,985 \cdot 0,0001 + 0,01 \cdot 0,9999} \approx 0,00975;$$

tehát kevesebb, mint 1 %!

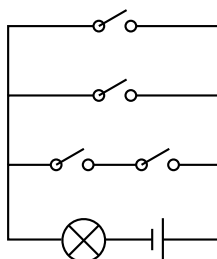
□

## 1.3. Gyakorló feladatok

1.3.1. **FELADAT** Egy medencét egy hideg- és egy melegvizes csapon keresztül lehet feltölteni. A  $H$  esemény jelentse azt, hogy a hidegvizes csapon keresztül folyik a víz, az  $M$  pedig azt, hogy a melegvizes csapon keresztül. Írjuk le műveletekkel, melyik az az esemény, amikor

- (a) csak a hidegvizes csapon keresztül folyik a víz;
- (b) egyik csapon keresztül sem folyik víz;
- (c) pontosan egy csapon keresztül folyik a víz;
- (d) legalább az egyik csap el van zárva. (Esetenként több ekvivalens alak is lehetséges.)

1.3.2. **FELADAT** Tekintsük az 1.4 ábra áramkörét. A kapcsolókat egymástól függetlenül 0,8 valószínűséggel zárjuk. Milyen valószínűséggel van zárva az áramkör?



1.4. ábra. Az 1.3.2. feladathoz

1.3.3. **FELADAT** Feldobunk 3 szabályos érmét: egy 20, egy 50 és egy 100 Ft-ost. Tekintsük a következő eseményeket:

$A = \{ \text{A 20 Ft-os Fej oldalra esik.} \}$

$B = \{ \text{Az eredmények között pontosan kettő Írás.} \}$

$C = \{ \text{A 100 Ft-os és az 50 Ft-os érme azonos oldalára esik.} \}$

- (a)  $P(A) = ?$       (b)  $P(A|B) = ?$       (c) Független-e egymástól az  $A$  és a  $C$  esemény?

1.3.4. **FELADAT** 32 lapos magyar kártyából húzunk két lapot.

- (a) Feltéve, hogy a két lap egyike sem piros, mi a valószínűsége, hogy szerepel köztük a tőkász?

(b) Függetlenek-e az alábbi események? Indokoljuk a választ!

$$A = \{A \text{ két lap között szerepel piros.}\} \quad B = \{A \text{ két lap között szerepel a tök ász.}\}$$

1.3.5. **FELADAT** 5 napos szabadságunk alatt a hűtőszekrény akkor és csak akkor működik, ha az A és B akkumulátorok közül legalább az egyik be van kapcsolva. Az A akkumulátor a szabadság kezdetétől folyamatosan működik, majd a 3. napon 0 és 12 óra között véletlen időpontban kikapcsol. A B akkumulátor ugyanebben az időintervallumban véletlen időpontban bekapcsol, és hazatértünkig folyamatosan működik. A hűtőben tárolt hús akkor és csak akkor romlik meg, ha legalább 6 óráig nincs hűtés. Mi a valószínűsége, hogy hazatérve romlott húst találunk a hűtőben?

1.3.6. **FELADAT** Zabhegyezéstánból – mint minden tárgyból – a puskázás csak rontja a vizsgázók esélyeit: akik csálnak, 30 % eséllyel mennek át a vizsgán, a becsületesek 60 % eséllyel sikeresek. Ennek ellenére a vizsgázóknak pontosan a fele puskázik. Kukutyin Kázmérről csak annyit tudunk, hogy átment a vizsgán. Mi a valószínűsége, hogy puskázott?

## 2. fejezet

# Valószínűségi változók

### 2.1. Elméleti összefoglaló

#### 2.1.1. Valószínűségi változók.

##### Mérnöki bevezető a valószínűségi változó fogalmához

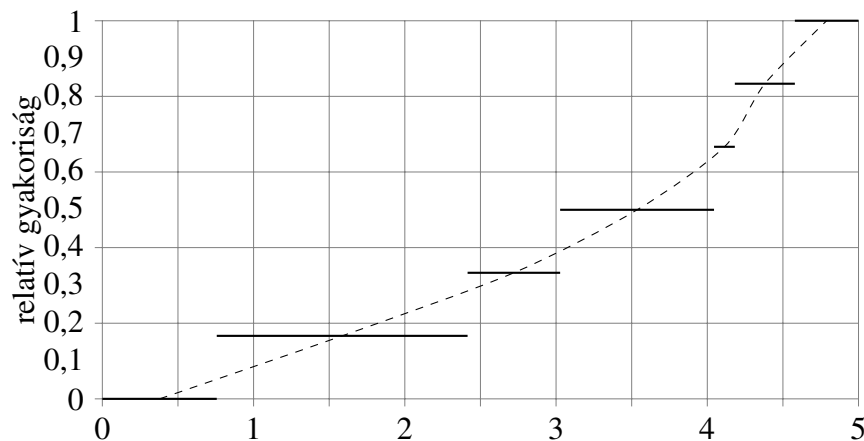
A véletlen fogalmának mérnöki megfogalmazásakor példaként használtuk azt az időpontot, amikor egy villamos beérkezik egy megállóba. A közvetlen megfigyelés alapján azt a következtetést vontuk le, hogy ezt az időpontot a véletlen és a menetrend együttesen határozzák meg. A mérnöki gyakorlat sok ilyen típusú változót ismer: például egy szerkezeti anyag szakítószilárdsága azonos gyártástechnológia mellett is ingadozik, szigorú minőségbiztosítási feltételek mellett előállított termék élettartama is változik, azonos körülmények között végrehajtott mérés eredménye is esetről esetre különböző lehet. Az olyan változókat, ahol a változó értékét a figyelembe vett körülmények nem határozzák meg egyértelműen, valószínűségi változóknak nevezzük. A korábban felsorolt változók egy intervallumon belül bármilyen értéket felvehetnek, ezeket folytonos valószínűségi változóknak hívjuk. De a műszaki gyakorlatban gyakoriak az olyan valószínűségi változók is, amelyek csak diszkrét értékeket vesznek fel. Egy műhelyben egy adott időszak alatt meghibásodó gépek száma, egy szállítási tételben a selejtes darabok száma, egy telefonközpontba percenként befutó hívások száma, egy weblapot időegység alatt felkeresők száma, stb. ilyen diszkrét változó. Ahhoz, hogy a véletlenszerűen ingadozó valószínűségi változókból a mérnöki gyakorlatban használható következtetéseket tudjunk levonni, más módszereket kell használnunk, mint a determinisztikus változók esetén. Ehhez szükséges megismernünk az eloszlás- és sűrűségfüggvényt, továbbá a várható érték és a szórás fogalmát.

##### Mérnöki bevezető az eloszlásfüggvény fogalmához

Vegyünk egy  $L$  hosszúságú, homogén, prizmatikus rudat, és a két végére ható húzóerővel szakítsuk el. Most ne foglalkozzunk a befogás környezetében törvényszerűen fellépő feszültségtorzulásokkal, és tekintsük úgy, hogy a rúd minden keresztmetszete ugyanolyan feszültségi állapotban van. A tett feltételek miatt minden keresztmetszet egyformán veszélyes, így a szakadás helye véletlenszerű. A rúd egyik végpontjától mérjük meg a szakadás



helyét, legyen ez a  $\xi$  jelű, távolság mértékegységű valószínűségi változó. Hajtsunk végre  $n$  szakítási kísérletet, a szakadási helyek sorozata:  $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$ . Rajzoljuk meg a következő grafikont: az  $x$  független változót mérjük a rúd hossz tengelyének irányában:  $0 \leq x \leq L$ . Rögzítsünk egy tetszőleges  $x$  értéket, és számoljuk össze, hogy hány rúd szakadt el a  $[0, x)$  intervallumban (vagyis az  $x$ -től „balra”), jelölje ezt a számot  $k_x$ . Minden  $x$  független változóhoz mérjük fel a  $k_x/n$  relatív gyakoriságot. Nyilván, hogy ha  $x < 0$ , akkor  $k_x/n = 0$ , ha  $x > L$ , akkor  $k_x/n = 1$ . Egy adott mérőssorozat ismeretében megrajzolhatjuk ezt az ábrát (lásd a 2.1 ábrát), amely nyilvánvalóan lépcsős függvény lesz, minden szakadási helyen áthaladva  $k_x$  értéke ugrik. Feltételezhetjük, hogy ha a mérések száma növekszik, akkor a lépcsős függvény egy folytonos függvény felé tart. Ha  $n \rightarrow \infty$  akkor  $k_x/n$  közelíti a  $p_x$  valószínűséget: annak az eseménynek a valószínűségét, hogy a szakadás helye kisebb, mint  $x$ , ezt úgy jelöljük, hogy  $P(\xi < x)$ . Az előbbieket alapján nyilvánvaló, hogy ez az érték  $x$ -től függ, tehát  $P(\xi < x) = F(x)$ . Ezt az  $F(x)$  függvényt hívjuk eloszlásfüggvénynek. Az eloszlásfüggvény fontos tulajdonsága, hogy ismeretében meg tudjuk mondani egy adott  $[a, b]$  intervallumba esés valószínűségét:  $P(a \leq \xi \leq b) = F(b) - F(a)$ .

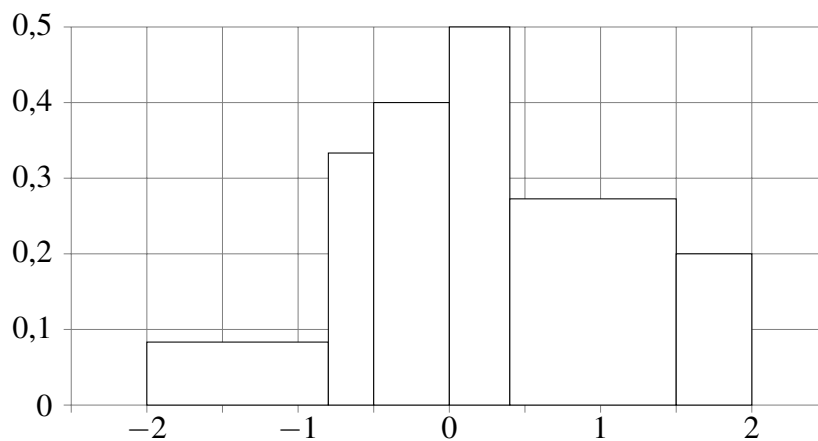


2.1. ábra. Az eloszlásfüggvény szemléletes származtatása.

### Mérnöki bevezető a sűrűségfüggvény fogalmához

Az eloszlásfüggvény grafikonja nem nyújt szemléletes képet a valószínűségi változó „eloszlásáról”: például ránézésre nem könnyű megállapítani, hogy azonos hosszúságú intervallumok közül, melyik intervallumba esik nagyobb valószínűséggel a változó. Szemléletesebb képet kapunk, ha sűrűségfüggvényt szerkesztünk az alábbi módon. Egy megfigyelés-sorozat végén rendelkezésünkre áll a  $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$  számsorozat, mint a  $\xi$  valószínűségi változó megvalósult értékei (például a rúdszakadás helyei). Nevezzük ezt a számsorozatot mintának. A legkisebb és a legnagyobb mintaelemmel határolt intervallumot osszuk fel  $\Delta x_1, \Delta x_2, \dots, \Delta x_K$  részintervallumokra. Számoljuk meg, hogy a  $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$  elemekből hány darab esik az első, a második, stb. a  $K$ -adik részintervallumba. Ezeket a számokat, az egyes részintervallumokba esés gyakoriságait, a továbbiakban  $v_1, v_2, \dots, v_K$ -val jelöljük. Rajzoljunk a részintervallumok fölé olyan lépcsős függvényt, hogy minden részintervallum feletti terület legyen egyenlő a

részintervallumba esés relatív gyakoriságával (lásd a 2.2 ábrát). Egy-egy terület nagysága  $v_j/n$ , a  $\Delta x_j$  alaphossz fölé így  $v_j/(n\Delta x_j)$  magasságú lépcsőt kell rajzolnunk. Az így kapott lépcsős függvényt nevezzük tapasztalati sűrűségfüggvénynek, jele  $f_n(x)$ . Ha mintaelemek számát növeljük és a  $\Delta x$  részintervallumok hosszát csökkentjük, akkor a lépcsős függvény egy folytonos függvényt közelít. Nevezzük ezt a függvényt sűrűségfüggvénynek. Ez a függvény olyan tulajdonságú, hogy  $[a, b]$  intervallum feletti integrálja egyenlő az intervallumba esés valószínűségével. Ezt összevetve az eloszlásfüggvény definíciójával, láthatjuk, hogy a sűrűségfüggvény az eloszlásfüggvény deriváltfüggvénye. Előnye, hogy szemléletes képet ad a valószínűségi változó eloszlásáról: ha egyenlő hosszúságú részintervallumokra osztjuk fel a valószínűségi változó értékkészletét, akkor a változó abba az intervallumba esik nagyobb valószínűséggel, amely feletti terület nagyobb.



2.2. ábra. A sűrűségfüggvény szemléletes származtatása

**Matematikai értelemben valószínűségi változóknak** hívjuk az  $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  (mérhető) függvényeket. A gyakorlatban ez *véletlen számot* jelent. Természettudományos vagy műszaki háttérrel pedig úgy is gondolhatunk rá, mint egy mérési eredményre – egy mennyiségre, aminek az értéke függ a kísérlet kimenetelétől, és így a véletlentől. A valószínűségi változókat általában latin nagybetűkkel ( $X, Y, Z, \dots$ ) vagy görög kisbetűkkel ( $\xi, \eta, \zeta, \dots$ ) szoktuk jelölni.

**2.1.1. DEFINÍCIÓ** Az **eloszlásfüggvény** egy minden valószínűségi változóra értelmezhető, azt jól jellemző  $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  függvény, melyet a következőképp definiálunk:

$$F(x) (= F_{\xi}(x)) := P(\xi < x), \quad \forall x \in \mathbb{R},$$

ahol  $\xi$  a szóban forgó valószínűségi változó.

Fontos látni a  $\xi$  és az  $x$  közti különbséget:  $\xi$  egy véletlen szám,  $x$  pedig egy (tetszőleges módon) rögzített, véletlentől nem függő érték. Az eloszlásfüggvény alábbi tulajdonságai intuíció alapján könnyen végiggondolhatóak:

$$(F1) \quad 0 \leq F(x) \leq 1, \quad \forall x \in \mathbb{R};$$

(F2)  $F(x)$  monoton növekvő függvény:  $\forall x_1 < x_2 : F(x_1) \leq F(x_2)$ ;

(F3)  $\lim_{x \rightarrow -\infty} F(x) = 0$ ,  $\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) = 1$ ;

(F4)  $F(x)$  balról folytonos:  $\lim_{x \rightarrow a-0} F(x) = F(a)$ ,  $\forall a \in \mathbb{R}$ .

**2.1.2. MEGJEGYZÉS** Bizonyítható az is, hogy minden (F1)-(F4) tulajdonságokkal rendelkező  $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  függvényhez található valószínűségi változó, amelynek  $F(x)$  eloszlásfüggvénye. Tehát ezek a tulajdonságok pontosan karakterizálják az eloszlásfüggvényeket.

Az eloszlásfüggvény jelentősége, hogy segítségével megfogalmazhatók a valószínűségi változóra vonatkozó kijelentések, például annak valószínűsége, hogy  $\xi$  egy adott intervallumba essen:

$$P(a \leq \xi < b) = F_\xi(b) - F_\xi(a), \quad \forall a < b.$$

**2.1.3. DEFINÍCIÓ (DISZKRÉT VALÓSZÍNŰSÉGI VÁLTOZÓ)** Olyan véletlen mennyiség, amely csak véges vagy megszámlálhatóan végtelen sok különböző értéket vehet fel.

Legyenek ezek az értékek rendre az  $x_1, x_2, \dots$  valós számok. Diszkrét valószínűségi változó fontos jellemzője a *valószínűség-eloszlás*:

$$p_k := P(\xi = x_k), \quad k = 1, 2, \dots$$

melynek alaptulajdonságai:

(p1)  $0 \leq p_k \leq 1$ ,  $k = 1, 2, \dots$ ;

(p2)  $\sum_{i=1}^{\infty} p_k = 1$  (véges sok  $-n$  különböző érték esetén persze  $\sum_{i=1}^n p_k = 1$ ).

Diszkrét valószínűségi változó  $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  eloszlásfüggvénye lépcsős függvény: azaz  $F(x)$  a véges (vagy megszámlálható végtelen sok)  $x_k$  értéktől eltekintve konstans, az  $x_k$  pontokban  $p_k$  nagyságú pozitív ugrásai vannak, és persze a fenti (F4) értelmében itt is balról folytonos. **Abszolút folytonos valószínűségi változó** esetén ezzel szemben nemcsak hogy  $F(x)$  folytonos  $\forall x \in \mathbb{R}$ -re, hanem (esetleg néhány kivételes ponttól eltekintve) differenciálható is. Pontosabban, létezik egy  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  függvény, a valószínűségi változó *sűrűségfüggvénye*, hogy:

$$F(x) = \int_{-\infty}^x f(t) dt; \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

A sűrűségfüggvény ugyanazt a szerepet tölti be abszolút folytonos esetben, mint a valószínűség-eloszlás diszkrét esetben. Alaptulajdonságai:

(f1)  $0 \leq f(x)$ ,  $\forall x \in \mathbb{R}$ ;

(f2)  $\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = 1$ .

2.1.4. **MEGJEGYZÉS** Érdemes megjegyezni, hogy vannak olyan valószínűségi változók, amelyek se nem diszkrét, se nem abszolút folytonosak. Ez nem csupán matematikai absztrakció, ilyen véletlen mennyiségek előfordulnak a természettudományos és a műszaki alkalmazásokban is – szoros kapcsolatuk van például a fraktálokkal – tárgyalásuk azonban meghaladja ennek az összefoglalónak a kereteit.

## 2.1.2. Várható érték, szórás.

### Mérnöki bevezető a várható érték fogalmához

Amint a pontos matematikai megfogalmazásból kiderült, egy valószínűségi változó minden jellemzője kiszámítható az eloszlásfüggvényből (vagy a sűrűségfüggvényből). Sajnos e két függvény megismerése, vagy statisztikai adatokból való becslése sok kísérletet és (az eloszlásra vonatkozó) ellenőrizendő feltevést kíván. Számos esetben meg kell elégednünk ennél kevesebb információval. Bizonyos esetekben elegendő, ha meg tudjuk mondani, hogy mely érték körül ingadozik véletlenszerűen a szóban forgó változó, és tudunk értéket mondani az ingadozás mértékére. Az ingadozás közepeként természetes módon a megfigyelt értékek átlagát szokás tekinteni. Az itt következő mérnöki gondolatmenet megmutatja, hogy hogyan juthatunk el az átlagtól a várható érték fogalmához.

A sűrűségfüggvény bevezetőjében mondottakhoz hasonlóan, mondjuk, hogy rendelkezésünkre áll a  $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$  számsorozat (minta). Ennek számtani átlaga:

$$\xi_a = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \xi_i.$$

Egy  $\Delta x_j$  intervallumba eső mintaelemek összegét közelítőleg úgy is kiszámíthatjuk, hogy az intervallum  $x_j$  középvértékét szorozzuk az intervallumba eső mintaelemek  $v_j$  számával. Ezeket a szorzatokat összegezzük az összes intervallumra, így a mintaelemek összegének közelítését kapjuk.

$$\xi_a = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \xi_i \approx \frac{1}{n} \sum_{j=1}^K v_j x_j = \sum_{j=1}^K x_j \frac{v_j}{n \Delta x_j} \Delta x_j = \sum_{j=1}^K x_j f_n(x_j) \Delta x_j.$$

A törtet bővítjük  $\Delta x_j$ -vel, az összefüggésben felismerhető az  $f_n(x)$  tapasztalati sűrűségfüggvény. A kapott összefüggés egy improprius integrál közelítő összege, ezt az integrált hívjuk a valószínűségi változó várható értékének. A várható érték ebben a megfogalmazásban az átlag általánosítása, fizikai szempontból ugyanolyan jellegű mennyiség, mint maga a valószínűségi változó, ugyanazzal a mértékegységgel. Értéke egy adott valószínűségi változóra állandó, nem függ a véletlentől.

### Mérnöki bevezető a szórás fogalmához

A valószínűségi változó ingadozását a pillanatnyi érték és a várható érték különbsége mutatja. Ez is véletlen mennyiség, kérdés, hogy hogyan tudjuk ezt egyetlen számmal jellemezni. Kézenfekvő, hogy vegyük e különbség várható értékét. Belátható, hogy ez minden változóra

zérus (a pozitív és negatív különbségek „kiegyenlítik” egymást), ezért ez nem jó jellemző. Ha a különbség négyzetét, vagy abszolút értékét vesszük, akkor a várható érték pozitív lesz. A gyakorlatban a négyzet mutatkozott hasznosabbnak, ezért a valószínűségi változó ingadozását az átlagos négyzetes eltéréssel jellemezzük: vesszük a változó és a várható érték különbségét, ezt négyzetre emeljük, és ennek vesszük a várható értékét. Ezt a mennyiséget nevezzük a valószínűségi változó szórásnégyzetének, és pozitív négyzetgyökét szórásnak. A várható értéknél tett megállapításaink a szórásra is vonatkoznak: adott valószínűségi változó szórása állandó, nem függ a véletlentől, mértékegysége megegyezik a valószínűségi változó mértékegységével. Megfigyelési értékekből (mintából) becsülhető a szórás értéke, a becslést tapasztalati szórásnak hívjuk. Ismerjük a  $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$  számsorozatot, ennek átlaga  $\xi_a$ , ezekből az adatokból az  $s_{\xi}^2$  tapasztalati szórásnégyzet így számítható:

$$s_{\xi}^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (\xi_i - \xi_a)^2.$$

A **várható érték** és a **szórás** valószínűségi változók további fontos jellemzői, szokásos jelölésük  $E\xi$  (expectation) illetve  $D\xi$  (deviation). Gépészmérnökként hasznos analógia lehet: ha egy diszkrét, illetve folytonos eloszlásra, mint egydimenziós pontrendszerre, illetve folytonos inhomogén sűrűségű anyagra gondolunk, akkor a várható érték a súlypontnak, a szórásnégyzet pedig a (súlypontra vonatkoztatott) tehetetlenségi nyomatéknak felel meg. Másképp szólva, a várható érték az eloszlás „közepét”, a szórás annak „szétkentségét” jellemzi. Számolásuk:

|                         | diszkrét                                 | folytonos                                      |
|-------------------------|------------------------------------------|------------------------------------------------|
| várható érték, $E\xi$   | $\sum_{k=1}^{\infty} x_k p_k$            | $\int_{-\infty}^{\infty} x f(x) dx$            |
| szórásnégyzet, $D^2\xi$ | $\sum_{k=1}^{\infty} (x_k - E\xi)^2 p_k$ | $\int_{-\infty}^{\infty} (x - E\xi)^2 f(x) dx$ |

Definiálhatjuk a  $\xi$  valószínűségi változótól (determinisztikusan) függő  $t(\xi)$  mennyiség várható értékét is,  $E(t(\xi)) = \sum_{k=1}^{\infty} t(x_k) p_k$  illetve  $\int_{-\infty}^{\infty} t(x) f(x) dx$  alapján. A szórásnégyzetre könnyen adódik a  $D^2\xi = E\xi^2 - (E\xi)^2$  hasznos alternatív képlet (vessük össze a Steiner tétellel!). Végül pedig a szórás:  $D\xi = \sqrt{D^2\xi}$ .

**2.1.5. MEGJEGYZÉS** Amennyiben az  $E\xi$ -t, illetve  $D^2\xi$ -t definiáló végtelen sor/improprius integrál nem abszolút konvergens, azt mondjuk, a várható érték, illetve a szórás nem létezik.

### 2.1.3. Együttes eloszlások.

#### Mérnöki bevezető a korrelációs együttható fogalmához

A mérnöki gyakorlatban ritkán fordul elő, hogy egyetlen változót figyelünk meg, gyakran a változók közötti kapcsolatot vizsgáljuk: egyszerre figyelünk meg több változót. Egyes esetekben a vizsgált jelenség fizikai háttere nyilvánvalóvá teszi, hogy a megfigyelt változók között kapcsolat van: például a gépkocsira ható légellenállás függ a gépkocsi haladási

sebességétől. Más esetekben a kérdés éppen a kapcsolat létezése: egy ötvöző anyag mennyiségének változása maga után vonja-e az acél szilárdsági tulajdonságainak változását, vagy egyetemi hallgatóknál összefügg-e a felvételi pontszám és a későbbi félévek görgetett átlaga. Ilyen típusú kérdés eldöntéséhez készítsünk megfigyeléssorozatot, amelynek végén rendelkezésünkre áll az összetartozó változó-párokból alkotott minta:  $(\xi_1, \eta_1), (\xi_2, \eta_2), \dots, (\xi_n, \eta_n)$ . Számítsuk ki mindkét változó  $(\xi_a, \eta_a)$  átlagát, és megfigyeléseinket ábrázoljuk olyan grafikonban, ahol a tengelyekre a változók átlagtól való eltérését rakjuk fel (lásd 2.3 ábra). Minden ábrázolt pontra számítsuk ki ezeknek az eltéréseknek a  $c_i$  szorzatát:

$$c_i = (\xi_a - \xi_i)(\eta_a - \eta_i).$$

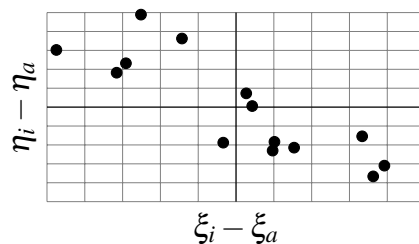
Ez a szorzat az első és a harmadik síknegyedben pozitív, a másik két síknegyedben negatív. Összegezzük ezeket a szorzatokat minden pontra.

$$C_n^* = \sum_{i=1}^n (\xi_a - \xi_i)(\eta_a - \eta_i).$$

Ha a pontok az első és a harmadik negyedben helyezkednek el, akkor  $C_n^* > 0$ , ha a másik két negyedben, akkor  $C_n^* < 0$ . Ha pedig a pontok rendezetlenül helyezkednek el az egész síkon, akkor  $C_n^* \approx 0$  (lásd 2.4 ábra). Vagyis  $C_n^*$  értéke információt tartalmaz a pontok elhelyezkedésére vonatkozóan.  $C_n^*$  nagysága függ attól, hogy hány pontra végeztük az összegzést, és mennyi a változók szórása. Az összehasonlíthatóság érdekében szokás  $C_n^*$  értékét a pontok számával és a két változó szórásával normálni.

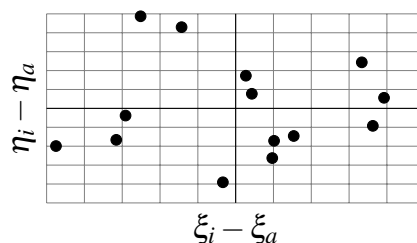
$$C_n = \frac{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (\xi_a - \xi_i)(\eta_a - \eta_i)}{s_\xi s_\eta}$$

Az eredményül kapott mennyiség a tapasztalati korrelációs együttható, általánosítása pedig a korrelációs együttható.



2.3. ábra. Negatív korreláció

Ha a  $(\xi, \eta)$  véletlen mennyiségeket egyszerre szeretnénk vizsgálni, a két valószínűségi változó **közös eloszlását** kell tekintenünk. Itt is megkülönböztethetünk diszkrét és abszolút folytonos eseteket. Diszkrét esetben  $\xi$  illetve  $\eta$  lehetséges értékei az  $x_1, x_2, \dots$  illetve  $y_1, y_2, \dots$  számok, az *együttes valószínűségeloszlás*,  $p_{i,j} = P(\xi = x_i, \eta = y_j)$  értékeit sokszor táblázatba összefoglalva adjuk meg. Abszolút folytonos esetben az  $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  *közös sűrűségfüggvény* jellemzi a közös eloszlást, segítségével (mérhető)  $T \subset \mathbb{R}^2$  tartományokra megadható



2.4. ábra. Nincs korreláció

annak valószínűsége, hogy a  $(\xi, \eta)$  véletlen számpár a  $T$  halmazba essen:  $P((\xi, \eta) \in T) = \iint_T f(x, y) dx dy$ . Ha csak önmagában  $\xi$  (vagy  $\eta$ ) viselkedésére vagyunk kíváncsiak, a peremeloszlásokat kell tekintenünk, ha pedig valamilyen, a  $(\xi, \eta)$  pártól (determinisztikusan) függő  $t(\xi, \eta)$  mennyiség várható értéke érdekes, értelemszerű szummázásokat/integrálásokat kell elvégeznünk. A közös eloszlás/sűrűségfüggvény alaptulajdonságai mellett ezeket a képleteket foglalja össze az alábbi táblázat:

|                     | diszkrét                                                                                                        | folytonos                                                                                                                       |
|---------------------|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
|                     | $p_{i,j} \geq 0, \sum_{i,j} p_{i,j} = 1$                                                                        | $f(x, y) \geq 0, \iint_{\mathbb{R}^2} f(x, y) dx dy = 1$                                                                        |
|                     | peremeloszlások:<br>$p_i^{(1)} = p(\xi = x_i) = \sum_j p_{i,j}$<br>$p_j^{(2)} = p(\eta = y_j) = \sum_i p_{i,j}$ | peremsűrűség-függvények:<br>$f_\xi(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) dy$<br>$f_\eta(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) dx$ |
| $E(t(\xi, \eta)) =$ | $\sum_{i,j} t(x_i, y_j) p_{i,j}$                                                                                | $\iint_{\mathbb{R}^2} t(x, y) f(x, y) dx dy$                                                                                    |

Amennyiben csak  $\xi$ -től (vagy  $\eta$ -tól) függő mennyiségeket, kijelentéseket akarunk vizsgálni, számolhatunk a peremeloszlások alapján, így pl. pusztán a peremeloszlásokból meghatározhatóak az  $E\xi$  ( $E\eta$ ) várható értékek és a  $D\xi$  ( $D\eta$ ) szórások. Általában a közös eloszlás lényegesen több információt hordoz, mint a peremeloszlások; fontos speciális eset azonban a következő: ha  $p_{i,j} = p_i^{(1)} p_j^{(2)}$  minden  $i, j$  párra, illetve  $f(x, y) = f_\xi(x) f_\eta(y)$  minden  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$  pontra, akkor azt mondjuk,  $\xi$  és  $\eta$  **függetlenek**. Könnyen ellenőrizhető, hogy függetlenség esetén tetszőleges  $a < c$  és  $b < d$  számpárookra az  $A = \{a \leq \xi < c\}$  és a  $B = \{b \leq \eta < d\}$  események függetlenek.

Különböző mennyiségek várható értékének, szórásának számításakor hasznos, könnyen ellenőrizhető összefüggések:

- $E(\xi + \eta) = E\xi + E\eta$  tetszőleges  $(\xi, \eta)$  valószínűségi változókra;
- Ha  $\xi$  és  $\eta$  függetlenek, akkor  $D^2(\xi + \eta) = D^2\xi + D^2\eta$ ;
- Ha  $\xi$  és  $\eta$  függetlenek, akkor  $E(\xi\eta) = E\xi \cdot E\eta$ .

Az utóbbi összefüggés motiválja a **kovariancia** fogalmát tetszőleges valószínűségi változók esetén:

$$C(\xi, \eta) = E(\xi\eta) - E\xi \cdot E\eta.$$

Amennyiben  $C(\xi, \eta) = 0$ , azt mondjuk,  $\xi$  és  $\eta$  *korrelálatlanok*. A fentiek alapján: ha  $\xi$  és  $\eta$  függetlenek, akkor korrelálatlanok. Ennek megfordítása azonban nem igaz: általában a korrelálatlanságból nem következik a függetlenség.  $C(\xi, \eta) \neq 0$  azt jelenti, hogy  $\xi$  és  $\eta$  kapcsolatában van valamilyen tendencia: ha  $C(\xi, \eta) > 0$ , „ $\xi$  növelésével  $\eta$  is nőni szeret”, ha  $C(\xi, \eta) < 0$ , „ $\xi$  növelésével  $\eta$  csökkenni szeret”.

A  $|C(\xi, \eta)| \leq D(\xi) \cdot D(\eta)$  egyenlőtlenség mindig teljesül (megjegyezhetjük, ha felírjuk az  $E\xi = E\eta = 0$  speciális esetben, ilyenkor látszik könnyen, hogy a lineáris algebrából és a függvényterek elméletéből jól ismert Cauchy-Schwartz egyenlőtlenségről van szó). Ez motiválja a *korrelációs együttható* bevezetését:

$$R(\xi, \eta) = \frac{C(\xi, \eta)}{D\xi \cdot D\eta}; \quad \text{melyre} \quad |R(\xi, \eta)| \leq 1.$$

Egyszerű számolással ellenőrizhető, hogy amennyiben  $\xi$  és  $\eta$  pontosan lineáris kapcsolatban állnak,  $|R(\xi, \eta)| = 1$ , vagyis a korreláció abszolút értéke a lehető legnagyobb.

## 2.2. Kidolgozott példák

**2.2.1. KIDOLGOZOTT FELADAT** Bemegyek a kaszinóba, és elkezdem a rulettpörgetéseket figyelni.<sup>1</sup> Addig maradok, amíg első alkalommal fekete nem lesz a pörgetés eredménye.

- (a) Mi a valószínűsége, hogy pontosan 5 pörgetést fogok megfigyelni?
- (b) Mi a valószínűsége, hogy páros sok pörgetést fogok megfigyelni?
- (c) Mi a megfigyelt pörgetések várható száma?

**MEGOLDÁS** Vezessük be a  $\xi$  valószínűségi változót, amelynek értéke a szükséges pörgetések száma. Ez a diszkrét valószínűségi változó tetszőleges pozitív egész értéket felvehet.  $\xi$  valószínűség-eloszlásához a  $\{\xi = k\}$  esemény valószínűségét kell meghatározni ( $k \in \mathbb{Z}^+$ ); ez pontosan akkor következik be, ha  $k - 1$  nem fekete pörgetést egy fekete pörgetés követ. A ruletkeréken 37 mező van, ezek közül 18 piros, 18 fekete és egy zöld (a nulla). Tehát minden egyes pörgetésre a fekete eredmény valószínűsége ( $p = \frac{18}{37}$ ), annak valószínűsége, hogy az eredmény nem fekete, ( $q = 1 - p = \frac{19}{37}$ ). Itt a  $p$  és a  $q$  paramétereket az egyszerűbb leírásmód, illetve az általánosíthatóság kedvéért vezettük be. Mivel az egyes pörgetések függetlennek tekinthetők, adódik:

$$p_k = P(\xi = k) = q^{k-1} p = \left(\frac{19}{37}\right)^{k-1} \frac{18}{37}. \quad (2.1)$$

- (a) A feladat kérdése éppen  $p_5$ , amit (2.1) alapján könnyen számolhatunk:

$$p_5 = (19/37)^4 18/37 \approx 0,034.$$



(b) Ismét (2.1) alapján számolhatunk:

$$\begin{aligned} P(\xi \text{ páros}) &= p_2 + p_4 + p_6 + \dots = \\ &= qp + q^3 p + q^5 p + \dots = qp \frac{1}{1 - q^2} = \\ &= \frac{18}{37} \frac{19/37}{1 - (18/37)^2} \approx 0,327. \end{aligned}$$

Felhasználtuk a mértani sor összegképletét is.

(c) A kérdés a (2.1) eloszlás várható értéke, tehát

$$E\xi = \sum_{k=1}^{\infty} kp_k = \sum_{k=1}^{\infty} kpq^{k-1} = p \sum_{k=1}^{\infty} kq^{k-1}.$$

Ennek az összegnek a kiszámolásához tekintsük a

$$g(q) = \sum_{k=1}^{\infty} q^k = \frac{1}{1 - q}$$

függvényt. Mivel  $q < 1$ , ez a mértani sor konvergens, a tagonkénti deriválással kapott sor is konvergens, és éppen a  $g'(q)$  deriváltfüggvényt állítja elő. Ebből:

$$\sum_{k=1}^{\infty} kq^{k-1} = g'(q) = \frac{1}{(1 - q)^2}.$$

Összefoglalva tehát az eddigieket:

$$E\xi = pg'(q) = \frac{p}{(1 - q)^2} = \frac{1}{p} = \frac{37}{18} \approx 2,056.$$

Ennek a kérdésnek a megválaszolásához különösen érdemes volt a feladatot a  $p$  paraméterrel általánosítani. □

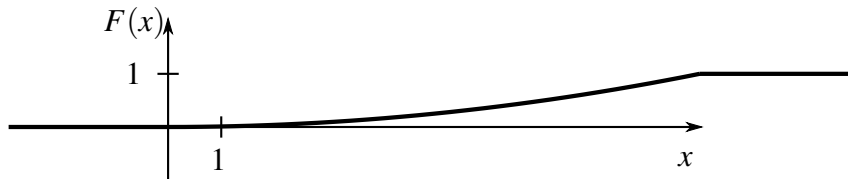
**2.2.2. KIDOLGOZOTT FELADAT** Kör alakú, 10 cm átmérőjű táblába pontszerű lövedék csapódik, a becsapódás helye egyenletes eloszlású a táblán. Jelöljük  $\xi$ -vel a becsapódás helyének távolságát a tábla középpontjától.

(a) Adjuk meg  $\xi$  eloszlásfüggvényét!

(b) Számoljuk ki a  $P(2 < \xi < 7)$  valószínűséget!

(c)  $E\xi = ?$

### MEGOLDÁS



2.5. ábra. A 2.2.2. kidolgozott feladathoz.

- (a)  $F_{\xi}(x)$  meghatározásához (a továbbiakban az alsó  $\xi$  indexet elhagyjuk) első lépésként megállapíthatjuk, hogy  $F(0) = P(\xi < 0) = 0$ , hiszen távolság csak pozitív értékű lehet, valamint  $F(10) = P(\xi < 10) = 1$ , hiszen a táblát a lövedék biztosan eltalálja.  $F(x)$  alaptulajdonságai miatt adódik:

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{ha } x \leq 0, \\ ? & \text{ha } 0 < x < 10, \\ 1 & \text{ha } x \geq 10; \end{cases}$$

ahol már csak a középső ágot kell meghatározni. A  $P(\xi < x)$  esemény valószínűségére van szükség ( $0 < x < 10$ ), és mivel a becsapódás helye egyenletes eloszlású, geometriai valószínűségi feladatról van szó. A teljes terület egy 10 cm sugarú körlap, a kedvező terület egy  $x$  cm sugarú körlap. Tehát:

$$F(x) = \frac{x^2 \pi}{10^2 \pi} = \frac{x^2}{100} \quad \text{ha} \quad 0 < x < 10.$$

Az így adódó eloszlásfüggvényt a 2.5 ábra szemlélteti.

- (b) Az eloszlásfüggvény alapján könnyen számolható:

$$P(2 < \xi < 7) = P(2 \leq \xi < 7) = F(7) - F(2) = \frac{49 - 4}{100} = 0,45.$$

Kihasználtuk azt is, hogy folytonos eloszlásról van szó,  $P(\xi = 2)$  valószínűsége 0.

- (c) A várható érték számolásához szükség lesz a sűrűségfüggvényre:

$$f(x) = F'(x) = \begin{cases} 0 & \text{ha } x \leq 0, \\ \frac{x}{50} & \text{ha } 0 < x < 10, \\ 0 & \text{ha } x \geq 10; \end{cases}$$

ebből:

$$E\xi = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x) dx = \int_0^{10} x \frac{x}{50} dx = \left[ \frac{x^3}{150} \right]_0^{10} = 20/3 \approx 6,667.$$

□

2.2.3. **KIDOLGOZOTT FELADAT** Legyen a  $\xi$  valószínűségi változó sűrűségfüggvénye

$$f(x) = \begin{cases} \frac{A}{x^4} & \text{ha } x > 1, \\ 0 & \text{egyébként.} \end{cases}$$

(a)  $A = ?$

(b)  $P(10 < \xi) = ?$

(c) Számoljuk ki  $\xi$  várható értékét és szórását.

#### MEGOLDÁS

(a) Az  $A$  paraméter meghatározásához ki kell használnunk, hogy  $f(x)$  sűrűségfüggvény, és így:

$$1 = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = \int_1^{\infty} \frac{A}{x^4} dx = \lim_{T \rightarrow \infty} \int_1^T \frac{A}{x^4} dx = \lim_{T \rightarrow \infty} \left[ \frac{-A}{3x^3} \right]_1^T = A/3,$$

tehát  $A = 3$ .

(b) Abszolút folytonos eloszlás esetén, kihasználva az eloszlásfüggvény és a sűrűségfüggvény közti kapcsolatot:

$$P(10 < \xi) = 1 - F(10) = \int_{10}^{\infty} f(x) dx = \lim_{T \rightarrow \infty} \int_{10}^T \frac{3}{x^4} dx = \lim_{T \rightarrow \infty} \left[ \frac{-1}{x^3} \right]_{10}^T = 0,001.$$

(c) A definíciók alapján:

$$E\xi = \int_{-\infty}^{\infty} xf(x) dx = \lim_{T \rightarrow \infty} \int_1^T \frac{3}{x^3} dx = \lim_{T \rightarrow \infty} \left[ \frac{-3}{2x^2} \right]_1^T = \frac{3}{2};$$

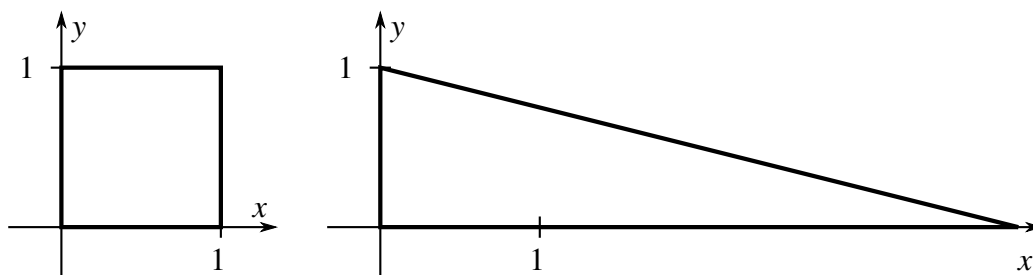
$$E\xi^2 = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f(x) dx = \lim_{T \rightarrow \infty} \int_1^T \frac{3}{x^2} dx = \lim_{T \rightarrow \infty} \left[ \frac{-3}{x} \right]_1^T = 3;$$

$$D^2(\xi) = E\xi^2 - (E\xi)^2 = 3 - (3/2)^2 = 0,75; \quad \implies \quad D(\xi) = \sqrt{D^2(\xi)} \approx 0,866.$$

□

2.2.4. **KIDOLGOZOTT FELADAT** A  $(\xi, \eta)$  valószínűségi változó-pár egyenletes eloszlású a  $D \subset \mathbb{R}^2$  síkbeli tartományon, ha az együttes sűrűségfüggvény:

$$f(x, y) = \begin{cases} \text{const.} = \frac{1}{t_D} & \text{ha } (x, y) \in D, \\ 0 & \text{ha } (x, y) \notin D. \end{cases}$$



2.6. ábra. A 2.2.4. kidolgozott feladathoz.

Itt  $t_D$  a  $D$  tartomány területe, ezzel a választással érjük el, hogy  $\iint_{\mathbb{R}^2} f(x,y) dx dy = 1$ . Számoljuk ki a peremsűrűség-függvényeket, a kovarianciát, a korrelációs együtthatót, és ezek alapján döntsük el,  $\xi$  és  $\eta$  függetlenek, illetve korrelálatlanok-e, ha

(a)  $D$  a  $(0,0)$ ,  $(1,0)$ ,  $(1,1)$ ,  $(0,1)$  csúcspontú négyzet;

(b)  $D$  a  $(0,0)$ ,  $(4,0)$ ,  $(0,1)$  csúcspontú háromszög.

A két esetet a 2.6 ábra szemlélteti.

### MEGOLDÁS

(a) A fenti képlet alapján

$$f(x,y) = \begin{cases} 1 & \text{ha } 0 \leq x \leq 1 \text{ és } 0 \leq y \leq 1, \\ 0 & \text{egyébként.} \end{cases}$$

Így a peremsűrűség-függvények:

$$f_{\xi}(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x,y) dy = \begin{cases} 0 & \text{ha } x < 0, \\ \int_0^1 1 dy = 1 & \text{ha } 0 \leq x \leq 1, \\ 0 & \text{ha } x > 1. \end{cases}$$

$$f_{\eta}(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x,y) dx = \begin{cases} 0 & \text{ha } y < 0, \\ \int_0^1 1 dx = 1 & \text{ha } 0 \leq y \leq 1, \\ 0 & \text{ha } y > 1. \end{cases}$$

Könnyen ellenőrizhető, hogy  $f(x,y) = f_{\xi}(x) \cdot f_{\eta}(y)$  minden  $(x,y) \in \mathbb{R}^2$  esetén, és így  $\xi$  és  $\eta$  függetlenek. Így  $\xi$  és  $\eta$  korrelálatlanok is, tehát  $C(\xi, \eta) = 0$  és  $R(\xi, \eta) = 0$ .

(b) Ezúttal

$$f(x, y) = \begin{cases} 1/2 & \text{ha } 0 \leq x \leq 4 \text{ és } 0 \leq y \leq 1 - x/4, \\ 0 & \text{egyébként.} \end{cases}$$

Így a peremsűrűség-függvények:

$$f_{\xi}(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) dy = \begin{cases} 0 & \text{ha } x < 0, \\ \int_0^{1-x/4} 1/2 dy = 1/2 - x/8 & \text{ha } 0 \leq x \leq 4, \\ 0 & \text{ha } x > 4. \end{cases}$$

$$f_{\eta}(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) dx = \begin{cases} 0 & \text{ha } y < 0, \\ \int_0^{4-4y} 1/2 dx = 2 - 2y & \text{ha } 0 \leq y \leq 1, \\ 0 & \text{ha } y > 1. \end{cases}$$

Mivel például  $f(3, 1/2) = 0$  de  $f_{\xi}(3) = 1/8$  és  $f_{\eta}(1/2) = 1$ ,  $\xi$  és  $\eta$  *nem* függetlenek.

A kovariancia számolásához:

$$\begin{aligned} E(\xi\eta) &= \iint_{\mathbb{R}^2} xyf(x, y) dxdy = \int_0^4 \int_0^{1-x/4} \frac{xy}{2} dydx = \int_0^4 \frac{x(1-x/4)^2}{4} dx = \\ &= \int_0^1 4t^2 - 4t^3 dt = \left[ \frac{4t^3}{3} - t^4 \right]_0^1 = 1/3; \end{aligned}$$

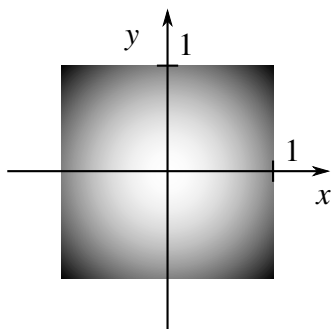
$$E\xi = \int_{-\infty}^{\infty} xf_{\xi}(x) dx = \int_0^4 x(1/2 - x/8) dx = [x^2/4 - x^3/24]_0^4 = 4/3;$$

$$E\eta = \int_{-\infty}^{\infty} yf_{\eta}(y) dy = \int_0^1 y(2 - 2y) dy = \left[ y^2 - \frac{2y^3}{3} \right]_0^1 = 1/3;$$

és ezekből adódik:

$$C(\xi, \eta) = E(\xi\eta) - E\xi E\eta = 1/3 - 4/9 = -1/9.$$

A korrelációs együtthatóhoz szükségünk van a szórásokra is:



2.7. ábra. A 2.2.5. kidolgozott feladathoz.

$$E\xi^2 = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f_{\xi}(x) dx = \int_0^4 x^2 (1/2 - x/8) dx = [x^3/6 - x^4/32]_0^4 = 8/3;$$

$$D^2(\xi) = E\xi^2 - (E\xi)^2 = 8/3 - (4/3)^2 = 8/9; \quad \Rightarrow \quad D(\xi) = \sqrt{D^2(\xi)} \approx 0,943.$$

$$E\eta^2 = \int_{-\infty}^{\infty} y f_{\eta}(y) dy = \int_0^1 y^2 (2 - 2y) dy = \left[ \frac{2y^3}{3} - y^4/2 \right]_0^1 = 1/6;$$

$$D^2(\eta) = E\eta^2 - (E\eta)^2 = 1/6 - (1/3)^2 = 1/18; \quad \Rightarrow \quad D(\eta) = \sqrt{D^2(\eta)} \approx 0,553.$$

Mindezek alapján:

$$R(\xi, \eta) = \frac{C(\xi, \eta)}{D(\xi)D(\eta)} = \frac{C(\xi, \eta)}{\sqrt{D^2(\xi)D^2(\eta)}} = -1/2.$$

□

**2.2.5. KIDOLGOZOTT FELADAT** Legyen a  $(\xi, \eta)$  valószínűségi változó-pár együttes sűrűségfüggvénye:

$$f(x, y) = \begin{cases} A(x^2 + y^2) & \text{ha } |x| \leq 1 \text{ és } |y| \leq 1, \\ 0 & \text{egyébként.} \end{cases}$$

Ahogy az a 2.7 ábra is szemlélteti, az eloszlás ezúttal nem egyenletes, a négyzet sarkai felé növekszik a sűrűségfüggvény értéke.

(a)  $A = ?$

(b) Független-e  $\xi$  és  $\eta$ ?

(c) Korrelálatlan-e  $\xi$  és  $\eta$ ?

## MEGOLDÁS

(a) Ismét a sűrűségfüggvény alaptulajdonságát használjuk fel:

$$\begin{aligned} 1 &= \iint_{\mathbb{R}^2} f(x, y) dx dy = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 A(x^2 + y^2) dy dx = \int_{-1}^1 \left[ Ax^2 y + \frac{Ay^3}{3} \right]_{y=-1}^{y=1} dx = \\ &= \int_{-1}^1 \left( 2Ax^2 + \frac{2A}{3} \right) dx = \left[ \frac{2Ax^3}{3} + \frac{2Ax}{3} \right]_{x=-1}^{x=1} = \frac{8A}{3} \end{aligned}$$

és így  $A = 3/8$ .

(b) A kérdés megválaszolásához határozzuk meg a peremsűrűség-függvényeket:

$$f_{\xi}(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) dy = \begin{cases} 0 & \text{ha } x < -1, \\ \int_{-1}^1 \frac{3}{8}(x^2 + y^2) dy = \frac{1}{4} - \frac{3x^2}{4} & \text{ha } -1 \leq x \leq 1, \\ 0 & \text{ha } x > 1. \end{cases}$$

$$f_{\eta}(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) dx = \begin{cases} 0 & \text{ha } y < -1, \\ \int_{-1}^1 \frac{3}{8}(x^2 + y^2) dx = \frac{1}{4} - \frac{3y^2}{4} & \text{ha } -1 \leq y \leq 1, \\ 0 & \text{ha } y > 1. \end{cases}$$

$\xi$  és  $\eta$  nem függetlenek, mert például  $f(0, 0) = 0$ , de  $f_{\xi}(0) = f_{\eta}(0) = 1/4$ .

(c) Az alábbi integrálok mindegyike 0, mert páratlan függvényt integrálunk origóra szimmetrikus intervallumon:

$$E(\xi \eta) = \iint_{\mathbb{R}^2} xy f(x, y) dx dy = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \frac{3}{8} xy(x^2 + y^2) dy dx = 0;$$

$$E\xi = \int_{-\infty}^{\infty} x f_{\xi}(x) dx = \int_{-1}^1 \frac{1}{4} x(1 - 3x^2) dx = 0;$$

$$E\eta = \int_{-\infty}^{\infty} y f_{\eta}(y) dy = \int_{-1}^1 \frac{1}{4} y(1 - 3y^2) dy = 0.$$

Így tehát  $C(\xi, \eta) = E(\xi \eta) - (E\xi)(E\eta) = 0$ , vagyis  $\xi$  és  $\eta$  korrelálatlanok. □

## 2.3. Gyakorló feladatok

2.3.1. **FELADAT** Feldobunk két szabályos dobókockát. Jelöljük  $\xi$ -vel a dobott számok összegét. Határozzuk meg a  $\xi$  valószínűségi változó várható értékét és szórását!

2.3.2. **FELADAT** A  $\xi$  folytonos valószínűségi változó sűrűségfüggvénye:

$$f(x) = \begin{cases} B \sin x & \text{ha } 0 < x < \frac{\pi}{2}, \\ 0 & \text{egyébként.} \end{cases}$$

(a) Mennyi  $B$  értéke?

(b) Számoljuk ki a  $P(0 < \xi < \frac{\pi}{3})$  valószínűséget!

(c) Mennyi  $\xi$  várható értéke?

(d) Mennyi  $\xi$  szórása?

2.3.3. **FELADAT** A  $(\xi, \eta)$  diszkrét valószínűségi változó-pár közös eloszlását az alábbi táblázat írja le.

|            | $\xi = -1$ | $\xi = 0$ | $\xi = 1$ |
|------------|------------|-----------|-----------|
| $\eta = 0$ | 0,1        | p         | 0,2       |
| $\eta = 1$ | p          | 0,3       | 2p        |

(a)  $p = ?$

(b) Független-e  $\xi$  és  $\eta$ ?

(c) Számoljuk ki az  $R(\xi, \eta)$  korrelációs együtthatót!

2.3.4. **FELADAT** A  $(\xi, \eta)$  valószínűségi változók együttes eloszlását az

$$f(x, y) = \begin{cases} B(x^4 + y^6) & \text{ha } -1 \leq x \leq 1 \text{ és } -1 \leq y \leq 1, \\ 0 & \text{egyébként.} \end{cases}$$

közös sűrűségfüggvény írja le.

(a)  $B = ?$

(b) Számoljuk ki a peremsűrűség-függvényeket!

(c) Független-e  $\xi$  és  $\eta$ ?

2.3.5. **FELADAT** A  $(\xi, \eta)$  valószínűségi változó-pár egyenletes eloszlású az origó középpontú, egységnyi sugarú körlapon.

(a) Határozzuk meg a peremsűrűség-függvényeket!

(b) Számoljuk ki a korrelációs együtthatót!



## 3. fejezet

# Nevezetes eloszlások

### 3.1. Elméleti összefoglaló

A természetben és a műszaki életben leginkább előforduló valószínűségi változók sokszor valamilyen ismert, egy-két paraméterrel jellemezhető eloszlást követnek. Az alábbiakban néhány ilyen nevezetes eloszlás tulajdonságait foglaljuk össze.

A diszkrét eloszlások közül csak a két legfontosabbat vizsgáljuk meg. Legyen  $n \in \mathbb{Z}^+$  és  $p \in (0, 1)$  rögzítve.

**3.1.1. DEFINÍCIÓ** A  $\xi$  diszkrét valószínűségi változó  $(n, p)$  paraméterű **binomiális eloszlású**, ha lehetséges értékei a  $k = 0, 1 \dots n$  számok, valószínűségeloszlása pedig:

$$p_k^{(n,p)} = P(\xi = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{(n-k)} \quad (k = 0, 1 \dots, n).$$

A binomiális eloszlás jelentése: elvégezzük  $n$ -szer ugyanazt a kísérletet, az egyes próbálkozásaink függetlenek. Minden egyes kísérletet sikeresnek tekintünk, ha az egy bizonyos eredménnyel végződik. Tegyük fel, hogy az egyes kísérletek külön-külön  $p$  eséllyel adhatják ezt az eredményt.  $\xi$  jelöli a sikerek számát: azt a (véletlentől függő) számot, ahány alkalommal (az  $n$  független kísérletből) a kívánt eredmény adódott. Például: feldobunk 10-szer egy szabályos dobókockát,  $\xi$  jelölje a hatos dobások számát ( $n = 10, p = 1/6$ ).

A binomiális tétel alapján ellenőrizhető, hogy valóban valószínűség-eloszlást adtunk meg:

$$\sum_{k=0}^n p_k^{(n,p)} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} p^k (1-p)^{(n-k)} = (p + 1 - p)^n = 1.$$

A binomiális eloszlás várható értéke:

$$\begin{aligned} E\xi &= \sum_{k=0}^n k p_k^{(n,p)} = \sum_{k=1}^n \frac{n(n-1) \dots (n-k)}{(k-1)!} p^k (1-p)^{(n-1)-(k-1)} = \\ &= np \sum_{j=0}^{n-1} \binom{n-1}{j} p^j (1-p)^{(n-1-j)} = np. \end{aligned}$$

(Ez szemléletesen is érthető: a sikerek várható száma a próbálkozások számának és az egyedi kísérletben a siker valószínűségének a szorzata.) Hasonló számolással kaphatjuk meg a szórást:  $D\xi = \sqrt{np(1-p)}$ .

**3.1.2. DEFINÍCIÓ** Legyen most  $\lambda > 0$  rögzített: az  $\eta$  valószínűségi változó  $\lambda$  paraméterű **Poisson eloszlású**, ha értéke tetszőleges  $k = 0, 1, 2, \dots$  természetes szám lehet, és valószínűségeloszlása:

$$p_k^{(\lambda)} = P(\eta = k) = e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!}.$$

A Poisson eloszlást a binomiális eloszlás határeseteként is megkaphatjuk, amennyiben  $n \rightarrow \infty$ ,  $p \rightarrow 0$ , úgy, hogy  $np \rightarrow \lambda$ . (Belátható, hogy ekkor tetszőleges rögzített  $k$ -ra  $p_k^{(n,p)} \rightarrow p_k^{(\lambda)}$ .) Szavakban kifejezve a Poisson eloszlású valószínűségi változó jelentése: nagyon sok, egymástól független, külön-külön nagyon kis valószínűségű eseményből ahány bekövetkezik. Ilyen véletlen mennyiségek a természetben és a műszaki életben is gyakran előfordulnak: pl. anyaghibák száma térfogategységnyi mintában, téves kapcsolások száma egy nagy telefonközpont napi forgalmában, egy év alatt ahány baleset előfordul egy forgalmas útkereszteződésnél, stb.

Ezúttal az exponenciális függvény 0 körüli Taylor sorára hivatkozva ellenőrizhető, hogy tényleg valószínűség-eloszlást adtunk meg:

$$\sum_{k=0}^{\infty} p_k^{(\lambda)} = e^{-\lambda} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^k}{k!} = e^{-\lambda} e^{\lambda} = 1.$$

A várható értékre:

$$E\eta = \sum_{k=0}^{\infty} k p_k^{(\lambda)} = e^{-\lambda} \sum_{k=1}^{\infty} \lambda \frac{\lambda^{(k-1)}}{(k-1)!} = \lambda e^{-\lambda} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{\lambda^j}{j!} = \lambda.$$

Hasonló számolással adódik  $D\eta = \sqrt{\lambda}$ .

Térjünk át a nevezetes folytonos eloszlásokra.

**3.1.3. DEFINÍCIÓ** Legyenek  $a < b$  valós paraméterek, ekkor  $\xi$  az  $[a, b]$  **intervallumon egyenletes eloszlású**, ha sűrűségfüggvénye:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a} & \text{ha } a \leq x \leq b, \\ 0 & \text{egyébként.} \end{cases}$$

Egyenletes eloszlások leginkább geometriai jellegű problémák során szoktak előkerülni.

**3.1.4. MEGJEGYZÉS** Az intervallumon egyenletes eloszlások mellett érdemes megemlíteni az adott tartományon egyenletes (többdimenziós) eloszlásokat, ld. a 2.2.4. kidolgozott feladatot.

Könnyű integrálással adódik az egyenletes eloszlás eloszlásfüggvénye:

$$F(x) = \int_{-\infty}^x f(t) dt = \begin{cases} 0 & \text{ha } x < a, \\ \frac{x-a}{b-a} & \text{ha } a \leq x \leq b, \\ 1 & \text{ha } x > b. \end{cases}$$

A várható érték pedig:

$$E\xi = \int_{-\infty}^{\infty} xf(x) dx = \int_a^b \frac{x}{b-a} dx = \frac{b^2 - a^2}{2(b-a)} = \frac{a+b}{2}$$

ami intuíciónknak megfelelően az intervallum felezőpontja. Hasonló számolással:  $D\xi = \frac{b-a}{2\sqrt{3}}$ .

**3.1.5. DEFINÍCIÓ** Legyen paraméterünk ismét  $\lambda > 0$ ; ekkor a  $\tau$  valószínűségi változó  $\lambda$  paraméterű **exponenciális eloszlású**, ha sűrűségfüggvénye:

$$f_{\tau}(x) = \begin{cases} 0 & \text{ha } x < 0, \\ \lambda e^{-\lambda x} & \text{ha } x \geq 0; \end{cases}$$

és ebből integrálással eloszlásfüggvénye:

$$F_{\tau}(x) = \int_{-\infty}^x f_{\tau}(t) dt = \begin{cases} 0 & \text{ha } x < 0, \\ 1 - e^{-\lambda x} & \text{ha } x \geq 0. \end{cases}$$

Az exponenciális eloszlás élettartamok, várakozási idők, általában egy esemény bekövetkezéséig eltelő véletlen időtartamok hosszának jellemzésekor szokott előkerülni. Ezzel összefügg, hogy értéke csak pozitív lehet ( $F(0) = 0$ ). Az exponenciális eloszlás legfontosabb tulajdonsága az úgynevezett *örökifjúság*. Legyenek  $T_1$  és  $T_2$  tetszőleges pozitív számok, és tekintsük az  $A = \{\tau \geq T_1\}$ ;  $B = \{\tau \geq T_2\}$ ;  $C = \{\tau \geq T_1 + T_2\}$  eseményeket. Egyrészt  $P(A) = P(\tau \geq T_1) = 1 - F_{\tau}(T_1) = e^{-\lambda T_1}$ , és  $P(B)$ -t és  $P(C)$ -t számolhatjuk hasonlóan. Másrészt  $BC = C$ , és így

$$P(\tau \geq T_1 + T_2 | \tau \geq T_2) = \frac{P(BC)}{P(B)} = \frac{e^{-\lambda(T_1+T_2)}}{e^{-\lambda T_2}} = e^{-\lambda T_1} = P(\tau \geq T_1).$$

Szavakban kifejezve: annak valószínűsége, hogy  $T_2$  idő várakozás után még további  $T_1$  ideig várunk kell, ugyanannyi, mint a várakozás kezdetében volt annak valószínűsége, hogy  $T_1$  időt kell várunk. Úgy is mondhatnánk, hogy az exponenciális eloszlásnak nincs memóriája, a további várakozási esélyeket nem befolyásolja az, hogy már valamennyi időt vártunk.

Az exponenciális eloszlás várható értékét parciális integrálással kaphatjuk meg:

$$\begin{aligned} E\tau &= \int_{-\infty}^{\infty} xf(x) dx = \int_0^{\infty} \lambda x e^{-\lambda x} dx = \lim_{T \rightarrow \infty} \left( \left[ -xe^{-\lambda x} \right]_0^T + \int_0^T e^{-\lambda x} dx \right) = \\ &= \lim_{T \rightarrow \infty} \left[ -\frac{e^{-\lambda x}}{\lambda} \right]_0^T = 1/\lambda. \end{aligned}$$

A szóráshoz kétszer kell parciálisan integrálni,  $D\tau = 1/\lambda$  adódik.

**3.1.6. DEFINÍCIÓ** A nevezetes eloszlások közül kétségkívül a **normális eloszlással** lehet leginkább találkozni a természetben és a műszaki életben. A standard normális eloszlás sűrűségfüggvénye:

$$\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2},$$

a jól ismert haranggörbe, eloszlásfüggvénye pedig  $\Phi(x) = \int_{-\infty}^x \varphi(t) dt$ .

Ez az integrál elemi függvényekkel nem fejezhető ki, ezért  $\Phi(x)$  értékeit táblázatban szokták megadni pozitív  $x$  értékekre (fontos tudni, hogy  $\Phi(-x) = 1 - \Phi(x)$ ). A következő számítás mutatja, hogy a haranggörbe valóban sűrűségfüggvény:

$$\left( \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x) dx \right)^2 = \frac{1}{2\pi} \iint_{\mathbb{R}^2} e^{-\frac{x^2+y^2}{2}} dx dy = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^{\infty} e^{-r^2/2} r dr d\varphi = 1.$$

A standard normális eloszlás várható értéke 0, szórása pedig 1 (a megfelelő integrálok konvergenciája könnyen látszik, a várható érték esetén egy páratlan függvényt integrálunk a teljes számegyenesre, a szórásnégyzet pedig parciális integrálással számolható.)

**3.1.7. MEGJEGYZÉS** Általában azt mondjuk, egy  $\xi$  valószínűségi változó standard, ha várható értéke 0, szórása pedig 1.

Legyenek  $m \in \mathbb{R}$  és  $\sigma > 0$  paraméterek; azt mondjuk,  $X$   $m$  várható értékű és  $\sigma$  szórású normális eloszlást követ, ha a megfelelő lineáris átskálázottja,  $Y = \frac{X-m}{\sigma}$ , standard normális eloszlású. Ennek megfelelően  $X$  eloszlás- és sűrűségfüggvénye ilyenkor:

$$\Phi_{m,\sigma}(x) = \Phi\left(\frac{x-m}{\sigma}\right); \quad \varphi_{m,\sigma}(x) = \Phi'_{m,\sigma}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}}.$$

Azt, hogy  $X$   $m$  várható értékű és  $\sigma$  szórású normális eloszlást követ, röviden így is szoktuk jelölni:  $X \in \mathcal{N}(m, \sigma)$ . A normális eloszlás fontos tulajdonsága az ún. *stabilitás*: ha  $X_1$  és  $X_2$  független, normális eloszlású valószínűségi változók, akkor összegük,  $X_1 + X_2$  is normális eloszlású (és a 2 fejezetnek megfelelően a várható értékek és a szórásnégyzetek összeadódnak). Pontosabban, legyen  $X_1 \in \mathcal{N}(m_1, \sigma_1)$  és  $X_2 \in \mathcal{N}(m_2, \sigma_2)$ , valamint  $a \in \mathbb{R}$  és  $b \in \mathbb{R}$  tetszőleges, ekkor  $aX_1 + bX_2 \in \mathcal{N}(am_1 + bm_2, \sqrt{a^2\sigma_1^2 + b^2\sigma_2^2})$ . Fontos, hogy negatív  $a$  és/vagy  $b$  esetén is ezt a képletet kell alkalmazni.

Mint említettük, a normális eloszlás rendkívül gyakran előfordul a természetben és a műszaki életben: a mérési eredményekben, műszaki adatokban jelentkező ingadozások is jellemzően normális eloszlást követnek. Ennek elsődleges oka a 4 fejezetben tárgyalt centrális határeloszlás-tétel.

**3.1.8. DEFINÍCIÓ** További, a műszaki alkalmazásokban előkerülő eloszlások:

- A  $\xi$  valószínűségi változó  $(m, \sigma)$  paraméterű lognormális eloszlású, ha  $\ln \xi$  normális eloszlású ugyanezekkel a paraméterekkel. Sűrűségfüggvénye:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x\sigma\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{(\ln x - m)^2}{2\sigma^2}} & \text{ha } x > 0; \\ 0 & \text{egyébként.} \end{cases}$$

A természetben és műszaki alkalmazásokban a logonormális eloszlás gyakran előkerül, ha egy véletlen mennyiség csak pozitív értékeket vehet fel, és várható értéke viszonylag kicsi a szórásához képest.

- Az  $(\eta, \beta)$  paraméterű Weibull-eloszlás ( $\eta$  és  $\beta$  pozitív paraméterek) sűrűségfüggvénye:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\beta}{\eta} \left(\frac{x}{\eta}\right)^{\beta-1} e^{-\left(\frac{x}{\eta}\right)^\beta} & \text{ha } x \geq 0; \\ 0 & \text{egyébként.} \end{cases}$$

A  $\beta = 1$  speciális esetben az  $1/\eta$  paraméterű exponenciális eloszlást kapjuk vissza. Ezt az eloszlást is élettartamok leírására használják, abban az esetben, ha az örökifjúsági feltevés nem állja meg a helyét (a  $\beta$  paraméter jellemzi, hogy mennyire térünk el az örökifjúságtól).

- Az  $(n, \lambda)$  paraméterű Gamma eloszlás annak a véletlen mennyiségnek az eloszlása, amelyet  $n$  független, egyaránt  $\lambda > 0$  paraméterű exponenciális eloszlású valószínűségi változó összegeként kapunk meg. Sűrűségfüggvénye:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\lambda^n x^{n-1}}{(n-1)!} e^{-\lambda x} & \text{ha } x \geq 0; \\ 0 & \text{egyébként.} \end{cases}$$

### Nevezetes eloszlások szemléltetése, alkalmazások.

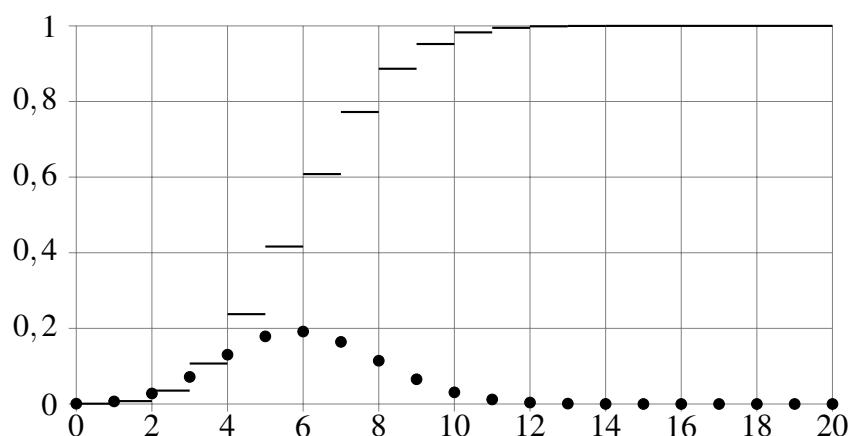
A közismert Excel program a legtöbb nevezetes eloszlást beépített függvényként ismeri, melyek egyszerű függvényutasításokkal kezelhetők. Például a binomiális eloszlás valószínűség-eloszlásának és eloszlásfüggvényének számítására szolgál a

$$= \text{BINOM.ELOSZLÁS}(k; n; p; \text{IGAZ/HAMIS})$$

utasítás. Itt  $k$  a kedvező esetek száma,  $n$  az összes esetek száma, és  $p$  az esemény valószínűsége. A logikai változó IGAZ értékénél az eloszlásfüggvény, a HAMIS értékénél a valószínűségeloszlás értékét kapjuk vissza. A program használatával könnyen ábrázolhatjuk ezeket a függvényeket (lásd 3.1 ábra).

Lássunk két példát a binomiális eloszlás alkalmazására.

Egy üzemben 50 gép dolgozik egymástól függetlenül. Annak a valószínűsége, hogy egy gép dolgozik:  $p = 0.6$ . Ha az üzemvitelt 100%-os biztonsággal akarjuk biztosítani, akkor az 50 gép együttes teljesítmény-felvételére kell kiépíteni az elektromos hálózatot. Kérdés, hogy



3.1. ábra. A binomiális eloszlás szemléltetése. A monoton, ugró függvény az eloszlásfüggvény. A pontok a konkrét értékek valószínűségei. A paraméterek  $n = 20$  és  $p=0,3$ .

ha elegendő 99%-os biztonság, akkor legfeljebb hány gép dolgozhat egyszerre? A binomiális eloszlás eloszlásfüggvényét az Excel programmal számolva azt kapjuk, hogy 38 gép együttes működésének valószínűsége már 99% feletti:

$$= \text{BINOM.ELOSZLÁS}(38; 50; 0.6; \text{IGAZ}) = 0.9943.$$

Vagyis, ha 99%-os biztonság elegendő, akkor az 50 helyett csak 38 gép együttes teljesítmény-felvételére kell méreteznünk az elektromos hálózatot.

Minőségellenőrzés területén is gyakran használják a binomiális eloszlást. Egy sorozatgyártásban legyen a selejtes termék gyártásának valószínűsége  $p$ . A selejtarányt időről időre úgy ellenőrzik, hogy  $n$  elemű mintát vesznek a gyártmányból, és minden mintaelemet megvizsgálják. Annak a  $P$  valószínűsége, hogy az  $n$  elemű mintából legfeljebb  $k$  selejtet találunk, feltéve, hogy a gyártásban valóban  $p$  a selejtszázalék, a binomiális eloszlás segítségével kiszámítható. Ha  $P$  értékét elég nagyra választjuk (például  $P = 99,9\%$ ), és a mintában több mint  $k$  darab selejtet találunk, akkor joggal feltételezhető, hogy a gyártásban a selejtarány  $p$ -nél nagyobb. Számokkal bemutatva a fentieket: tegyük fel, hogy a gyártásban  $p = 3\%$  a selejtarány. Megvizsgálunk egy  $n = 100$  elemű mintát. Annak a valószínűsége, hogy a mintában legfeljebb 9 selejtes darabot találunk 99,91%:

$$= \text{BINOM.ELOSZLÁS}(9; 100; 0.03; \text{IGAZ}) = 0.99912$$

Vagyis, ha a 100 elemű mintában több mint 9 selejtet találunk, akkor feltehetjük, hogy 3%-nál nagyobb a gyártás selejtaránya (a várható selejtszám a mintában  $np = 3$  darab).

A normális eloszlás sűrűség- és eloszlásfüggvényének számítására szolgál a

$$= \text{NORM.ELOSZL}(x; m; \sigma; \text{IGAZ/HAMIS})$$

utasítás az Excel programban. Itt  $m$  a várható érték,  $\sigma$  a szórás, és a logikai változó IGAZ értékénél az eloszlásfüggvény, a HAMIS értékénél a sűrűségfüggvény értékét számolja ki az utasítás. Mondjuk, hogy egy 80 mm névleges átmérőjű darabot sorozatban gyártanak,

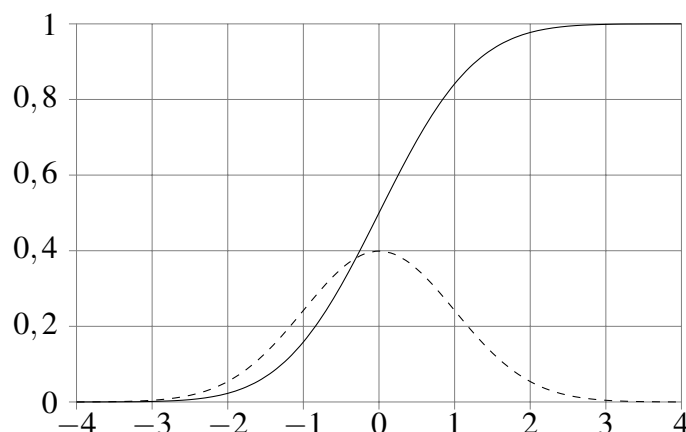
a gyártott átmérő normális eloszlású valószínűségi változó, szórása 0,5 mm. A mellékelt ábrán bemutatjuk az átmérő eloszlás- és sűrűségfüggvényét. Könnyen kiszámíthatjuk, hogy mekkora a valószínűsége annak, hogy a gyártott darab átmérője az  $m \pm 2\sigma$  intervallumba essen:

$$= \text{NORM.ELOSZL}(79; 80; 0.5; \text{IGAZ}) = 0.02275$$

$$= \text{NORM.ELOSZL}(81; 80; 0.5; \text{IGAZ}) = 0.97725$$

A két érték különbsége 0,9545, vagyis annak valószínűsége, hogy a gyártott  $D$  átmérő a 79 – 81 mm intervallumba essen:

$$P(79 \leq D \leq 81) = 0.9545.$$



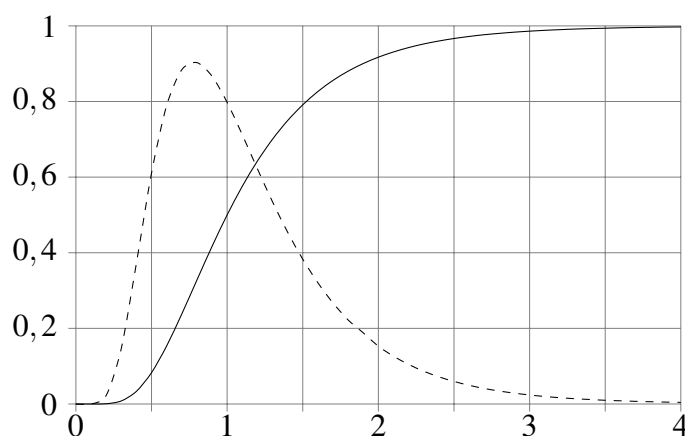
3.2. ábra. A standard normális eloszlás sűrűség- (szaggatott) és eloszlásfüggvénye

Hasonló beépített függvény van az exponenciális, a lognormális, a normális, a standard normális és a Poisson eloszlásra is.

## 3.2. Kidolgozott példák

**3.2.1. KIDOLGOZOTT FELADAT** Reggelente az Óperenciai Közlekedési Vállalat 13-as buszával járok dolgozni. Ezen a vonalon a buszok harmada légkondicionált. Mi a valószínűsége, hogy a hét öt munkanapjából legfeljebb egyszer kell légkondicionálás nélküli busz miatt bosszankodnom?

**MEGOLDÁS** Jelölje  $\xi$ -vel azon reggelek számát, amikor légkondicionált buszhoz van szerencsém. Az egyes napokat tekintjük függetlennek, ezért  $\xi$  megmutatja, hogy 5 független próbálkozásból hányszor következik be egy  $1/3$  valószínűségű esemény. Így  $\xi$  binomiális eloszlású,  $p = 1/3$ ,  $n = 5$  paraméterekkel.



3.3. ábra. A lognormális eloszlás sűrűség- (szaggatott) és eloszlásfüggvénye  $m = 0$ ,  $\sigma = 0,5$  paraméterekkel

A feladat kérdése:  $P(\xi \geq 4) = ?$  A választ a binomiális eloszlás képlete alapján határozzuk meg:

$$P(\xi \geq 4) = P(\xi = 5) + P(\xi = 4) = \left(\frac{1}{3}\right)^5 + 5 \frac{2}{3} \left(\frac{1}{3}\right)^4 \approx 0,0453. \quad \square$$

**3.2.2. KIDOLGOZOTT FELADAT** A kertünkben álló meggyfát sok kukac támadja meg, de szerencsére bő a termés: tapasztalataim szerint egy kosár meggyben  $\frac{1}{e} \approx 0,37$  eséllyel egyáltalán nincs kukacos szem.

- (a) Mi a valószínűsége, hogy egy adott kosár meggyben pontosan két kukacos szemet fogok találni?
- (b) Mi a valószínűsége, hogy egy adott kosár meggyben legalább két kukacos szemet fogok találni?

**MEGOLDÁS** Jelölje  $\xi$  az egy kosár meggyben található kukacos szemek számát. Észrevételek:

- a fát sok kukac támadja meg,
- az egyes kukacok viselkedése függetlennek tekinthető,
- egy konkrét kukacra (a sok támadó közül) annak valószínűsége, hogy ez a kukac épp az én kosaramban kössön ki, nagyon kicsi, hiszen az én kosaram a teljes meggytermésnek csak töredéke.

A  $\xi$  valószínűségi változó megmutatja, hogy sok, független, kis valószínűségű esemény közül – az egyes kukacok épp az én kosaramba jutnak – hány következtek be. Tehát  $\xi$  Poisson



eloszlásúnak tekinthető. Meg kell határoznunk a  $\lambda$  paramétert. A tapasztalatok szerint  $P(\xi = 0) = \frac{1}{e}$ , másrészt a Poisson eloszlás képlete szerint  $P(\xi = k) = e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!}$ , így

$$\frac{1}{e} = P(\xi = 0) = e^{-\lambda} \implies \lambda = 1.$$

(a) A feladat kérdése:  $P(\xi = 2) = ?$  A Poisson eloszlás képlete alapján:

$$P(\xi = 2) = e^{-\lambda} \frac{\lambda^2}{2!} \approx \frac{0,37}{2} = 0,185$$

(b) A feladat kérdése:  $P(\xi \geq 2) = ?$  A komplementer esemény valószínűségét érdemes számolni:

$$P(\xi \geq 2) = 1 - P(\xi = 1) - P(\xi = 0) = 1 - e^{-\lambda} - \lambda e^{-\lambda} \approx 1 - 0,37 - 0,37 = 0,26.$$

□

**3.2.3. KIDOLGOZOTT FELADAT** A HOMÁLY villanykörték élettartama 1000 óra – valójában az élettartam véletlen mennyiség, exponenciális eloszlással, 1000 óra várható értékkel.

- (a) Veszek egy HOMÁLY körtét a boltban. Mi a valószínűsége, hogy 1500 óra használat alatt nem ég ki?
- (b) HOMÁLY körtémet már 1000 órán át használtam. Mi a valószínűsége, hogy még további 1500 óráig fogom tudni használni?
- (c) Az alagsori mosdó lámpájába, melyet folyamatosan bekapcsolt állapotban tartanak, hétfőn 0.00-kor szerelnék be egy HOMÁLY villanykörtét. Mi a valószínűsége, hogy valamikor hétvégén fog kiégni?

**MEGOLDÁS** Jelölje  $\tau$  a HOMÁLY villanykörte (órákban mért) élettartamát.  $\tau$  exponenciális eloszlású, tehát sűrűség- és eloszlásfüggvényét ismerjük, csak a  $\lambda$  paramétert kell még meghatároznunk. Tudjuk, hogy exponenciális eloszlásra  $E\tau = 1/\lambda$ . Így:

$$1000 = E\tau = 1/\lambda \implies \lambda = 0,001.$$

(a) A feladat kérdése:  $P(\tau \geq 1500) = ?$  Az eloszlásfüggvény képlete alapján:

$$P(\tau > 1500) = 1 - F(1500) = e^{-\lambda 1500} = e^{-1,5} \approx 0,223$$

(b) A feladat kérdése:  $P(\tau > 2500 | \tau > 1000) = ?$  Az exponenciális eloszlás örökifjúsága, valamint az előző részfeladat eredménye alapján:

$$P(\tau > 2500 | \tau > 1000) = P(\tau > 1500) \approx 0,223.$$

□

- (c) Próbáljuk meg  $\tau$ -ra vonatkozó egyenlőtlenségekre átfogalmazni a feladat kérdését. A villanykörte a (beszerelését követő) első hétvégén ég ki, ha egyrészt  $\tau > 5 \cdot 24$  (kibírja az első 5 munkanapot), viszont  $\tau < 7 \cdot 24$  (a 7. nap végét már nem éli meg). Hasonló okoskodással, a villanykörte a (beszerelését követő)  $k$ . hétvégén ég ki, ha  $(k-1) \cdot 168 + 120 < \tau < k \cdot 168$ .

Jelölje  $A_k$  azt az eseményt, hogy a villanykörte éppen a (beszerelését követő)  $k$ . hétvégén ég ki ( $k = 1, 2, \dots$ ). A fenti érvelés, valamint  $\tau$  eloszlásfüggvénye alapján:

$$\begin{aligned} P(A_k) &= P((k-1)168 + 120 < \tau < k168) = F(k168) - F((k-1)168 + 120) = \\ &= e^{-\lambda(168(k-1)+120)} - e^{-\lambda 168k} = e^{-0,168(k-1)}(e^{-0,12} - e^{-0,168}). \end{aligned}$$

Ugyanakkor az  $A_k$  események páronként diszjunktak, így:

$$\begin{aligned} P(\text{A körte hétvégén ég ki}) &= \sum_{k=1}^{\infty} P(A_k) = \sum_{k=1}^{\infty} e^{-0,168(k-1)}(e^{-0,12} - e^{-0,168}) = \\ &= \frac{e^{-0,12} - e^{-0,168}}{1 - e^{-0,168}} \approx 0,269. \end{aligned}$$

**3.2.4. KIDOLGOZOTT FELADAT** Nagymamám egy fazék levest főzött, ennek mennyisége várhatóan 4,5 l, 4 cl szórással. Unokatestvéreim, András, Béla és Cili már vettek belőle egy-egy tányérral, várhatóan fejenként 0,5 litert; a szórás a fiúk esetében 2 cl, Cilinél 1 cl. A szereplő véletlen folyadékmennyiségek függetlennek és normális eloszlásúnak tekinthetők. Mi a valószínűsége, hogy 2,9 liternél kevesebb leves maradt a fazékban?

**MEGOLDÁS** Vezessük be a következő valószínűségi változókat:  $X$  a nagymamám által főzött leves,  $Y_1$ ,  $Y_2$  és  $Y_3$  rendre az András, Béla és Cili által kivett,  $Z$  pedig a fazékban maradt mennyiség, centiliterben kifejezve. Nyilván:

$$Z = X - Y_1 - Y_2 - Y_3$$

és mivel  $X$ ,  $Y_1$ ,  $Y_2$  és  $Y_3$  függetlenek és normális eloszlásúak, így  $Z$  is normális eloszlású. Továbbá:

$$EZ = EX - EY_1 - EY_2 - EY_3 = 450 - 50 - 50 - 50 = 300$$

és

$$D^2Z = D^2X + D^2Y_1 + D^2Y_2 + D^2Y_3 = 16 + 4 + 4 + 1 = 25 \quad \implies \quad DZ = 5,$$

tehát  $Z \in \mathcal{N}(300, 5)$ . A feladat kérdése:  $P(Z < 290) = ?$   $Z$  eloszlásfüggvényét visszavezethetjük a standard normálisra, majd használjuk az arra vonatkozó táblázatot:

$$P(Z < 290) = \Phi_{300,5}(290) = \Phi\left(\frac{290 - 300}{5}\right) = \Phi(-2) = 1 - \Phi(2) = 1 - 0,9772 = 0,0228.$$

□

**3.2.5. KIDOLGOZOTT FELADAT** Egy  $X$  véletlen mennyiség normális eloszlású  $m$  várható értékkel és  $\sigma$  szórással. A mennyiség értéke nagy valószínűséggel kevésbé tér el  $m$ -től: a  $\sigma$ -nál lényegesen nagyobb eltéréseknek különösen kicsi az esélye. Határozzuk meg, legalább mennyinek kell  $\alpha$ -t választani, hogy teljesüljön: a várható értéktől való  $\alpha \cdot \sigma$ -nál nagyobb eltérés valószínűsége kisebb, mint egy százalék!

**MEGOLDÁS** A feladat kérdése: legalább mennyi  $\alpha$ , ha  $P(|X - m| > \alpha \cdot \sigma) < 0,01$ ? Ehhez először határozzuk meg, mennyinek adódna ez a valószínűség, ha ismernénk  $\alpha$ -t. A komplementer esemény valószínűségét tudjuk közvetlenül számolni. Mivel  $X \in \mathcal{N}(m, \sigma)$ :

$$\begin{aligned} P(|X - m| \leq \alpha \cdot \sigma) &= P(m - \alpha \cdot \sigma \leq X \leq m + \alpha \cdot \sigma) = \Phi_{m,\sigma}(m + \alpha \cdot \sigma) - \Phi_{m,\sigma}(m - \alpha \cdot \sigma) = \\ &= \Phi\left(\frac{m + \alpha \cdot \sigma - m}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{m - \alpha \cdot \sigma - m}{\sigma}\right) \\ &= \Phi(\alpha) - \Phi(-\alpha) = 2\Phi(\alpha) - 1. \end{aligned}$$

Keressük, legalább mennyi  $\alpha$ , ha  $P(|X - m| > \alpha \cdot \sigma) < 0,01$ , vagy ami ezzel ekvivalens:

$$0,99 < P(|X - m| \leq \alpha \cdot \sigma) = 2\Phi(\alpha) - 1 \quad \implies \quad \Phi(\alpha) \geq 0,995.$$

Mivel  $\Phi$  szigorúan monoton növekvő függvény, és a standard normális eloszlás táblázata szerint  $\Phi(2,58) = 0,995$ ,  $\alpha \geq 2,58$  adódik.  $\square$

**3.2.6. MEGJEGYZÉS** Gyakorlati szempontból: normális eloszlásra a szórás háromszorosánál nagyobb kilengéseknek már elenyészően kicsi a valószínűsége.

**3.2.7. KIDOLGOZOTT FELADAT** A TRAGACS személyautó csomagtartója szabvány szerint 70 cm széles, a RÉMÁLOM gyerekágyakat lapra szerelve, szabványosan 65 cm széles csomagban árulják. Valójában mindkét szélesség normális eloszlású valószínűségi változó, a csomagoló esetében 3, a lapra szerelt csomag esetében 4 cm szórással (a két szélesség függetlennek tekinthető). Veszek egy RÉMÁLOM gyerekágyat, és szeretném a TRAGACSom-mal hazavinni. Mi a valószínűsége, hogy bele fog férni a csomagtartóba?

**MEGOLDÁS** Vezessük be a következő valószínűségi változókat:  $X$  a TRAGACSom csomagtartójának,  $Y$  a RÉMÁLOM ágy lapra szerelt csomagjának a szélessége. A feladat szövege szerint  $X \in \mathcal{N}(70, 3)$ ,  $Y \in \mathcal{N}(65, 4)$  és függetlenek. A feladat kérdése:  $P(Y > X) = ?$  ehhez vezessük be még a  $Z = X - Y$  valószínűségi változót, ez is normális eloszlású, továbbá:

$$EZ = EX - EY = 70 - 65 = 5$$

és

$$D^2Z = D^2X + D^2Y = 3^2 + 4^2 = 25 \quad \implies \quad DZ = 5,$$

tehát  $Z \in \mathcal{N}(5, 5)$ . A kérdést  $Z$  eloszlására, azt pedig a standard normális eloszlásfüggvényre visszavezetve:

$$P(Y > X) = P(Z < 0) = \Phi_{5,5}(0) = \Phi\left(\frac{-5}{5}\right) = \Phi(-1) = 1 - \Phi(1) = 1 - 0,8413 = 0,1587.$$

$\square$

### 3.3. Gyakorló feladatok

3.3.1. **FELADAT** Magyarországon nyári éjszakákön rengeteg a hullócsillag, de a teraszunkról ezeket elég rosszul lehet észrevenni: tapasztalataim szerint a nyári éjszakák  $\frac{1}{e^2} \approx 0.135$  részében egyáltalán nem látok hullócsillagot a terasról.

- (a) Mi a valószínűsége, hogy egy adott éjszaka pontosan egy hullócsillagot fogok látni?
- (b) Mi a valószínűsége, hogy egy adott éjszaka legalább három hullócsillagot fogok látni?

3.3.2. **FELADAT** Az 100 km hosszú telefonkábel valahol a 30 km-nél és 65 km-nél levő ellenőrző pontok között meghibásodott. Tegyük fel, hogy a meghibásodás helye egyenletes eloszlású ezen a 35 km hosszú szakaszon.

- (a) Mi a valószínűsége, hogy a meghibásodás a 100 km hosszú kábel első 50 km-re esik?
- (b) Számoljuk ki a meghibásodás  $\xi$  helyének várható értékét és szórását!

3.3.3. **FELADAT** Ellenőrizük az  $(n, p)$  paraméterű binomiális, a  $\lambda$  paraméterű Poisson, a  $\lambda$  paraméterű exponenciális, valamint a standard normális eloszlás szórására vonatkozó képletet.

3.3.4. **FELADAT** A hivatalosan 50 grammos RANDOM csokoládé szeletek súlya valójában normális eloszlású, 49 gramm várható értékkel és 3 gramm szórással. A 60 perces valószínűesszámitás vizsgára 6 RANDOM szeletet viszek magammal, és szellemi teljesítőképességem növelésének érdekében 10 percenként ezek közül egyet-egyet elfogyasztok. Átmenni a vizsgán csak akkor van reményem, ha a 6 alkalomból legalább négyszer sikerül legalább 45 gramm csokit juttatnom a szervezetembe. Mi ennek az esélye?

## 4. fejezet

# Nagy számok törvénye és centrális határeloszlás-tétel

### 4.1. Elméleti összefoglaló

A mérnöki munkában is igen fontos feladat lehet olyan mennyiségek ingadozásainak pontos megértése, amelyek sok, egymásra rakódó, és egymástól függetlennek tekinthető véletlen jelenség hatására alakulnak ki. Ennek a fejezetnek a célja az ilyen ingadozások megértése. Bevezetésül nézzünk két fontos egyenlőtlenséget, amelyek valószínűségi változók ingadozásait általában jellemzik.

**4.1.1. TÉTEL (MARKOV EGYENLŐTLENSÉG)** Legyen  $\xi$  egy nemnegatív valószínűségi változó (azaz  $P(\xi < 0) = 0$ ). Ekkor tetszőleges  $a > 0$  számra:

$$P(\xi \geq a) \leq \frac{E\xi}{a}.$$

Az egyenlőtlenség persze semmitmondó, ha  $a \leq E\xi$ . Másrészt  $a \gg E\xi$  esetén érthetjük meg igazán a szemléletes jelentését: igen kicsi annak az esélye, hogy egy pozitív véletlen mennyiség a várható értékénél lényegesen nagyobb legyen.

A bizonyítás igen egyszerű, tekintsük pl. az abszolút folytonos  $\xi$  esetét. Ekkor  $\xi$  nemnegativitása miatt  $f(x) = 0$  tetszőleges  $x < 0$  esetén, így

$$E\xi = \int_0^{\infty} xf(x) dx \geq \int_a^{\infty} xf(x) dx \geq a \int_a^{\infty} f(x) dx = aP(\xi \geq a);$$

ahonnan átrendezéssel adódik a Markov egyenlőtlenség.

**4.1.2. TÉTEL (CSEBISEV EGYENLŐTLENSÉG)** Legyen  $\xi$  egy tetszőleges (véges szórású) valószínűségi változó, és a jelölés egyszerűsítésének céljából vezessük be az  $m := E\xi$ ,  $\sigma := D\xi$  jelöléseket. Ekkor tetszőleges  $\varepsilon > 0$  esetén:

$$P(|\xi - m| \geq \varepsilon) \leq \frac{\sigma^2}{\varepsilon^2}.$$

A Csebisev egyenlőtlenség szemléletes jelentése ( $\varepsilon \gg \sigma$  választás esetén): a véletlen mennyiségek a várható értékük körül ingadoznak, a szórásnál lényegesen nagyobb kilengések azonban csak kis valószínűséggel fordulnak elő. Például a szórás tízszeresét meghaladó ingadozásoknak legfeljebb 0,01 lehet a valószínűsége.

A Csebisev egyenlőtlenség könnyen adódik, ha bevezetjük az  $\eta := (\xi - m)^2$  valószínűségi változót, hiszen ekkor  $E\eta = D^2\xi = \sigma^2$ . Ha  $\eta$ -ra felírjuk a Markov egyenlőtlenséget  $a = \varepsilon^2$  választással, éppen a  $\xi$ -re vonatkozó Csebisevet kapjuk vissza.

### Nagy számok törvénye

Az alábbiakban valószínűségi változóknak egy fontos típusát fogjuk vizsgálni: végezzük el  $n$ -szer ugyanazt a kísérletet, próbálkozásaink függetlenek, és jelöljük  $X$ -szel, hogy az  $n$  próbálkozásból összesen hányszor adódott egy bizonyos eredmény, amelynek esélye minden egyes kísérletben  $p$ . Erre az eredményre úgy is gondolhatunk, mint „sikerre” az egyes kísérletekben, így  $X$  azt méri, hány próbálkozásunk volt sikeres.  $n$  jellemzően nagyon nagy szám (sokszor próbálkozunk),  $(0 <) p (< 1)$  pedig valamilyen rögzített paraméter. Néhány konkrét feladat: feldobunk sokszor egy szabályos pénzérmét, és megszámloljuk, hányszor esett a Fej oldalára ( $p = 1/2$ ) vagy egy szabályos dobókockát, és  $X$  a hatos dobások száma ( $p = 1/6$ ). Egy a műszaki alkalmazásokhoz közelebb álló példa: egy gépsor gyárt valamilyen alkatrészeket, a legyártott termékekből minőségellenőrzés céljából nagy elemszámú mintát veszünk, és összeszámloljuk, hány alkatrész selejtes. Itt  $p$ -t nem ismerjük, sőt, éppen  $p$ -t – a gépsor hibaszázalékát – szeretnénk minél jobban megbecsülni mintavételünkkel.

Matematikai szempontból  $X$  valószínűségi változó, hiszen értéke függ a véletlentől.  $X$  eloszlását ismerjük – emlékezzünk vissza a 3 fejezetre, ezen belül a binomiális eloszlásra,  $X$  ezt az eloszlást követi – így várható értékét és szórását is meg tudjuk állapítani:  $EX = np$ ,  $DX = \sqrt{np(1-p)}$ . Mindig tartsuk szem előtt, hogy  $X$ -re most abban a határesetben gondolunk, amikor  $n$  nagyon nagy. Fontos észrevétel, hogy  $n$  növelésével a várható érték és a szórás is nő, de  $EX$  növekedésének üteme nagyságrendben nagyobb, mint  $DX$  növekedésének üteme.

Tekintsük  $X/n$ -t, vagyis a *sikerek arányát*, ez a mennyiség szintén valószínűségi változó, intuíciónk alapján azt várjuk, hogy ez  $p$ -t, az egyedi kísérletben a siker esélyét fogja megközelíteni  $n$  növelésével. Alapvetően ezt az intuíciót formalizálja a *Nagy számok törvénye*:

**4.1.3. TÉTEL** (NAGY SZÁMOK TÖRVÉNYE) Legyen  $\delta > 0$  tetszőleges(en kicsi) rögzített szám, ekkor:

$$P\left(\left|\frac{X}{n} - p\right| \geq \delta\right) \rightarrow 0, \text{ ha } n \rightarrow \infty.$$

A bizonyítás egyben a konvergencia gyorsaságáról is információt ad. Egyszerű átalakítások mellett a Csebisev egyenlőtlenséget használjuk az  $X$  valószínűségi változóra,  $\varepsilon := n\delta$  választással (emlékeztetésképp  $EX = np$ ,  $DX = \sqrt{np(1-p)}$ ):

$$P\left(\left|\frac{X}{n} - p\right| \geq \delta\right) = P(|X - np| \geq n\delta) \leq \frac{D^2(X)}{n^2\delta^2} = \frac{np(1-p)}{n^2\delta^2} = \frac{p(1-p)}{n\delta^2} \quad (4.1)$$

és az utolsó kifejezés  $n$  növelésével mindenképp 0-hoz tart.

A nagy számok törvénye szavakban kifejezve: a kísérletek számának növelésével a sikerek aránya egyre pontosabban, egyre nagyobb valószínűséggel megközelíti  $p$ -t. Persze akármilyen sokszor dobok fel egy dobókockát, elképzelhető, hogy a hatosok aránya lényegesen el fog térni 1/6-tól (mondjuk 1/2-nél is nagyobb lesz), de ennek rendkívül kicsi a valószínűsége. A (4.1) becslés három mennyiség között teremt kapcsolatot: a kísérletek száma ( $n$ ), a pontosság ( $\delta$ , tehát a sikerarány és  $p$  eltérése), valamint a biztonság (legalább  $\frac{p(1-p)}{n\delta^2}$  valószínűséggel lesz  $\delta$ -nál kisebb az eltérés) között. A feladatokban (és a mérnöki gyakorlatban is!) jellemzően a három mennyiség közül kettő adott, és a harmadikat kell kiszámolni.

**4.1.4. MEGJEGYZÉS** A konvergenciának ezt a valószínűségi változókra felírt alakját a matematikában sztochasztikus konvergenciának hívják, a nagy számok törvényének ezt az alakját pedig a nagy számok gyenge törvényének, vagy a nagy számok Bernoulli-féle törvényének is szokták mondani. A nagy számok törvényének további változatai is léteznek, a mérnöki alkalmazások szempontjából azonban az itt tárgyalt változat a legfontosabb.

### Egy fontos általánosítás

A fenti  $X$  valószínűségi változóra vonatkozó becsléseinket annak binomiális eloszlása alapján kaptuk.  $X$ -re azonban egy kicsit másképp is gondolhatunk. Legyen  $i = 1, 2, \dots, n$  esetén

$$\xi_i = \begin{cases} 1 & \text{ha az } i. \text{ kísérlet sikeres,} \\ 0 & \text{ha az } i. \text{ kísérlet nem sikeres.} \end{cases}$$

Tehát például kockadobásra  $\xi_2 = 1$ , ha a második kockadobás hatos, és  $\xi_2 = 0$ , ha a második kockadobás eredménye hatostól különböző. Ezeket a véletlen mennyiségeket indikátor valószínűségi változóknak is szokták hívni. Könnyen kiszámolható, hogy  $E\xi_i = p$  és  $D^2\xi_i = p(1-p)$ , minden  $i$ -re. másrészt a kísérletek függetlensége miatt a  $\xi_i$  valószínűségi változók függetlenek, továbbá  $X = \xi_1 + \xi_2 + \dots + \xi_n$ , a sikerek száma a teljes kísérletsorozatban. Felidézve a 2 fejezetben mondottakat:

$$EX = E\xi_1 + E\xi_2 + \dots + E\xi_n = np,$$

$$D^2X = D^2\xi_1 + D^2\xi_2 + \cdots + D^2\xi_n = np(1-p) \implies DX = \sqrt{np(1-p)},$$

ahol a szórás számolásánál kihasználtuk a  $\xi_i$ -k függetlenségét. Az észrevétel rávilágít arra, hogy a nagy számok törvénye nem  $X$  binomiális eloszlásán múlik (a törvény levezetésénél a várható érték és a szórás növekedésének üteme volt meghatározó). Egyben megkapjuk a következő általánosítást:

Legyenek  $\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_n$  független és azonos eloszlású valószínűségi változók,  $m = E\eta_i$  várható értékkel és  $\sigma = D\eta_i$  szórással. Ez a mérnök számára a következőt jelenti: mérjük meg ugyanazt a (véletlentől is függő) mennyiséget  $n$ -szer egymástól független mérésekkel, azonos körülmények között. Képezzük a mérési eredmények  $Y = \eta_1 + \eta_2 + \cdots + \eta_n$  összegét, illetve  $Y/n$  átlagát. Ekkor tetszőleges(en kicsi)  $\delta > 0$  számra:

$$P\left(\left|\frac{Y}{n} - m\right| \geq \delta\right) \rightarrow 0, \text{ ha } n \rightarrow \infty,$$

amit a nagy számok törvényével azonos módon vezethetünk le, kihasználva, hogy

$$EY = E\eta_1 + E\eta_2 + \cdots + E\eta_n = nm,$$

$$D^2Y = D^2\eta_1 + D^2\eta_2 + \cdots + D^2\eta_n = n\sigma \implies DY = \sqrt{n\sigma}.$$

A kapott általánosítás jelentőségét átláthatjuk a következő, műszaki jellegű alkalmazásnál: kíváncsiak vagyunk valamilyen mennyiség tényleges értékére (pl. egy anyagfajta szakító-szilárdságára), amelyre azonban a gyakorlatban számos, véletlennek tekinthető fluktuáció rakódik rá (pl. a hőmérsékletből, a páratartalomtól vagy más hasonló tényezőkből adódóan). Ha a mennyiséget sokszor megmérjük, egymástól független mérésekkel, akkor a mért értékek átlaga egyre pontosabban, egyre nagyobb biztonsággal meg fogja közelíteni a mennyiség tényleges értékét.

### A centrális határeloszlás-tétel.

A nagy számok törvényének fenti alakjai úgy is értelmezhetőek: ha az  $n$  független mennyiség összegeként kapott  $Y$  (illetve  $X$ ) valószínűségi változóból kivonjuk a várható értékét (így egy 0 várható értékű valószínűségi változó adódik), majd leosztjuk az  $Y$  szórásánál lényegesen nagyobb  $n$ -nel, akkor a kapott mennyiségből (nagy  $n$ -re) kiskálázódnak a véletlen fluktuációk.

Természetes módon vetődik fel a kérdés, hogy mi történik, ha  $n$  helyett éppen  $Y$  szórásával,  $\sqrt{n}\sigma$ -val osztunk. Ezzel a lineáris átskálázással

$$Z = \frac{Y - nm}{\sqrt{n}\sigma},$$

egy 0 várható értékű, 1 szórású valószínűségi változó,  $Y$  úgynevezett *standardizálta* (ld. a 3.1.7. megjegyzést) adódik.

**4.1.5. TÉTEL** A centrális határeloszlás-tétel szerint asszimptotikusan (nagy  $n$ -re) a független, azonos eloszlású valószínűségi változók összegének standardizálásával kapott  $Z$  valószínűségi változó standard normális eloszlásúnak tekinthető.



A centrális határeloszlás-tétel bizonyítása meghaladja ennek az összefoglalónak a kereteit (az érdeklődő olvasó megtalálhatja a valószínűesszámitást részletesen tárgyaló tankönyvekben), azonban valóban centrális jelentőségű eredményről van szó, az alkalmazások szempontjából is. A centrális határeloszlás-tétel értelmében ugyanis a  $Z$ -re (és ezáltal az igazán fontos átlagra,  $Y/n$ -re) vonatkozó becsléseinket számolhatjuk a standard normális eloszlásfüggvény segítségével. Így a nagy számok törvényéből adódónál lényegesen pontosabb válaszokat kapunk ugyanazokra a kérdésekre. Tekintsük például a mintavétel esetét, azaz  $\eta_i := \xi_i$ ,  $Y := X -$  persze így  $X$  is független, azonos eloszlású valószínűségi változók összegeként áll elő, és standardizáltja  $Z = \frac{X-np}{\sqrt{np(1-p)}}$ . Legyen  $\delta > 0$  rögzített, és vizsgáljuk meg, ezúttal a centrális határeloszlás-tétel segítségével, a sikerek arányának  $p$ -hez képesti eltéréseire vonatkozó kérdésünket (most a komplementer esemény valószínűségét könnyebb számolni):

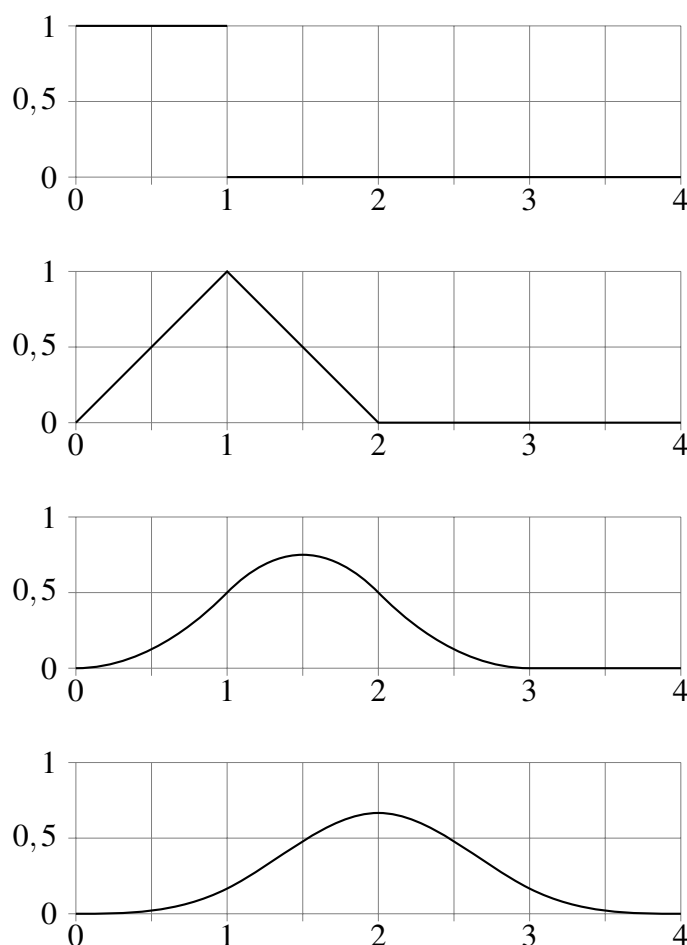
$$\begin{aligned}
 P\left(\left|\frac{X}{n} - p\right| \leq \delta\right) &= P(|X - np| \leq n\delta) = P\left(\left|\frac{X - np}{\sqrt{np(1-p)}}\right| \leq \frac{n\delta}{\sqrt{np(1-p)}}\right) = \\
 &= P\left(|Z| \leq \frac{\sqrt{n}\delta}{\sqrt{p(1-p)}}\right) = \\
 &= P\left(-\frac{\sqrt{n}\delta}{\sqrt{p(1-p)}} \leq Z \leq \frac{\sqrt{n}\delta}{\sqrt{p(1-p)}}\right) \approx \\
 &\approx \Phi\left(\frac{\sqrt{n}\delta}{\sqrt{p(1-p)}}\right) - \Phi\left(-\frac{\sqrt{n}\delta}{\sqrt{p(1-p)}}\right) = 2\Phi\left(\frac{\sqrt{n}\delta}{\sqrt{p(1-p)}}\right) - 1.
 \end{aligned} \tag{4.2}$$

A kidolgozott példák és a gyakorló feladatok megoldása során látni fogjuk, hogy (4.2) lényegesen jobb becsléseket ad, mint (4.1). Például a centrális határeloszlás-tétel rávilágít, hogy a nagy számok törvényéből adódónál lényegesen kisebb mintavétellel is elérhetjük ugyanazt a pontosságot, ugyanolyan biztonsággal. Hasonlóképp a centrális határeloszlás-tétel alapján érdemes számolni általános  $Y$  esetén (ha tetszőleges mennyiség független mérésekből adódó átlagát tekintjük). Éppen ezért alapulnak a matematikai statisztika módszerei is a centrális határeloszlás-tételen.

### A centrális határeloszlás-tétel szemléltetése.

A centrális határeloszlás tétel állítását a 4.1 ábrásor szemlélteti: legyen  $\xi$  egyenletes eloszlású valószínűségi változó  $[0, 1]$ -ben. Ennek  $f_1(x)$  sűrűségfüggvénye  $[0, 1]$ -ben egységnyi magasságú, egyébként nulla (legfelső ábra). Ha összeadunk két független, ilyen eloszlású változót, akkor az  $f_2(x)$  sűrűségfüggvény kiszámítható (lásd [4]; p.195), grafikonját a felülről második ábrán mutatjuk be, „háromszög” alakú. Ha három illetve négy független ilyen eloszlású változót adunk össze, akkor az  $f_3(x)$  és  $f_4(x)$  sűrűségfüggvények grafikonját az alsó két ábra mutatja. Az ábrásorozat alapján vizuálisan érzékelhetjük, hogy az összeg sűrűségfüggvénye az összeadott változók számának növekedésével egyre jobban hasonlít a normális eloszlás sűrűségfüggvényéhez.

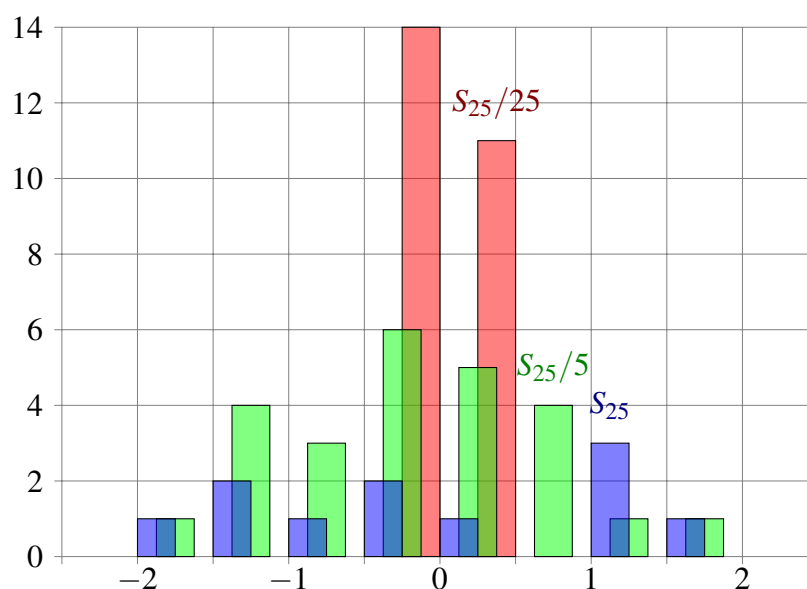
Az ábrásorozaton tehát azt látjuk, hogy az összeadott független változók  $n$  számának növekedtével a sűrűségfüggvény alakja egyre jobban hasonlít a haranggörbére. Ugyanakkor



4.1. ábra.  $[0, 1]$ -n egyenletes, független változók összegeinek sűrűségfüggvényei.

az is megfigyelhető, hogy  $n$  növekedtével a sűrűségfüggvény egyre szélesebb tartományra húzódik szét. Ahhoz, hogy a szokásos haranggörbe alakot kapjuk meg, a kiszámolt véletlen mennyiséget  $\sqrt{n}$ -nel kell osztanunk.

Ezt a jelenséget szemlélteti a 4.2 ábra. A kék, piros illetve zöld hisztogramok rendre azokhoz a változókhoz tartoznak, amelyeket a szövegben  $(Y - nm)$ -mel,  $(Y/n - m)$ -mel, illetve  $Z$ -vel jelöltünk. Normálás nélkül (kék hisztogram) az eloszlás egyre inkább szétterül,  $n$ -nel osztva (piros hisztogram) a nagy számok törvényének megfelelően ráhúzódik egyetlen pontra,  $\sqrt{n}$ -nel osztva (zöld hisztogram) pedig a centrális határeloszlás-tételnek megfelelően egyre pontosabban kirajzolódik a standard normális eloszlás sűrűségfüggvénye.



4.2. ábra.  $S_{25}$  hisztogramja különböző normálásokkal 25 kísérletből. A hisztogram téglalapjait a jobb láthatóság kedvéért húztuk szét, valójában egymás mellett kellene álljanak, mint a 2.2 ábrán. A függőleges tengelyen az adott  $1/2$  hosszú intervallumba eső kísérletek számát tüntettük fel. A kék téglalapok folytatódnak az ábrázolt tartományon túl is.

## 4.2. Kidolgozott példák

**4.2.1. KIDOLGOZOTT FELADAT** A kristálycukrot 1kg-os zacskókban árulják: egy zacskó cukor tömege  $m = 1000$  g,  $\sigma = 2$  g szórással. Legalább mekkora valószínűséggel (a forgalomba kerülő zacskók legalább mekkora hányadára) esik a tömeg 995 g és 1005 g közé? Válaszoljunk a feladat kérdésére ha a tömeg eloszlása (a) ismeretlen; (b) normális.

**MEGOLDÁS** Jelöljük  $\xi$ -vel egy zacskó cukor tömegét, mint valószínűségi változót, gramm egységekben. Ekkor  $E\xi = m = 1000$ ,  $D\xi = \sigma = 2$ . A feladat kérdése: legalább mennyi  $P(995 < \xi < 1005)$  ?

(a) Mivel  $\xi$  eloszlása ismeretlen, a komplementer valószínűséget számoljuk a Csebisev egyenlőtlenséggel ( $\varepsilon = 5$ ):

$$P(|\xi - 1000| \geq 5) \leq \frac{2^2}{5^2} = 0,16$$

így

$$P(995 \leq \xi \leq 1005) = 1 - P(995 < \xi < 1005) \geq 0,84. \quad \square$$

(b) Felidézve az  $m$  várható értékű,  $\sigma$  szórású normális eloszlásról tanultakat a 3 fejezetből:

$$\begin{aligned} P(995 < \xi < 1005) &= \Phi_{1000,2}(1005) - \Phi_{1000,2}(995) = \Phi(2,5) - \Phi(-2,5) \\ &= 2 \cdot \Phi(2,5) - 1 = 2 \cdot 0,9938 - 1 = 0,9876. \end{aligned}$$

**4.2.2. KIDOLGOZOTT FELADAT** Feldobunk 10000-szer egy szabályos pénzérmét, (legalább) mekkora a valószínűsége, hogy a Fejek aránya 0,49 és 0,51 közé esik? Válaszoljunk a feladat kérdésére (a) a Nagy számok törvénye, illetve (b) a Centrális határeloszlás-tétel segítségével.

**MEGOLDÁS** Az elméleti összefoglaló jelöléseit használva:  $p = 1/2$  a fej valószínűsége egy érmedobásra,  $n = 10000$  az érmedobások száma,  $X$  jelöli ebből a fej eredmények számát,  $\delta = 0,01$  pedig a relatív gyakoriság és  $p$  eltérése.

(a) A (4.1) formulával a komplementer esemény valószínűsége becsülhető:

$$P\left(\left|\frac{X}{n} - p\right| \geq \delta\right) \leq \frac{p(1-p)}{n\delta^2} = \frac{1}{4 \cdot 10000 \cdot 0,01^2} = 0,25$$

tehát legalább 0,75 a keresett valószínűség.

(b) Most a (4.2) formulát használjuk:

$$P\left(\left|\frac{X}{n} - p\right| \geq \delta\right) \approx 2\Phi\left(\frac{\sqrt{n}\delta}{\sqrt{p(1-p)}}\right) - 1 = 2\Phi(2) - 1 = 2 \cdot 0,9772 - 1 = 0,9544. \quad \square$$

**4.2.3. KIDOLGOZOTT FELADAT** *Hányszor kell feldobni egy szabályos dobókockát, hogy 99% valószínűséggel a hatosok aránya 0,1 és 0,2 közé essen? Válaszoljunk a feladat kérdésére (a) a Nagy számok törvénye, illetve (b) a Centrális határeloszlás-tétel segítségével.*

**MEGOLDÁS** Most tudjuk, hogy  $p = 1/6 \approx 0,1667$ , és az a kérdés, hogy mennyinek kell választanunk  $n$ -t, hogy  $P(0,1 < X/n < 0,2)$  legalább 0,99 legyen.

- (a) Egy kicsit el kell gondolkodnunk, mert a Csebisev egyenlőtlenséggel (és ennek megfelelően a nagy számok törvényével) a várható értékre szimmetrikus intervallumok valószínűségei becsülhetők, és a  $[0,1;0,2]$  intervallum nem ilyen. Ezért a következőképp járunk el:

$$P(0,1 < X/n < 0,2) \geq P(0,1333 < X/n < 0,2) = P(|X/n - 1/6| < 1/30),$$

így ha  $P(|X/n - 1/6| > 1/30) \geq 0,99$ , akkor nyertünk. Másrészt az utóbbi esemény komplementerének valószínűségére a (4.1) formulából:

$$P(|X/n - 1/6| \geq 1/30) \leq \frac{1/6 \cdot 5/6}{n \cdot (1/30)^2} = \frac{125}{n},$$

tehát  $\frac{125}{n} \leq 0,01$ -t kell biztosítani, vagyis  $n \geq 12500$ .

- (b) Most is ugyanaz a gondolatmenet, mint az előző részfeladatnál, csak a (4.2) formulát használjuk. Így:

$$\begin{aligned} P(0,1 < X/n < 0,2) \geq P(|X/n - 1/6| > 1/30) &\approx 2\Phi\left(\frac{\sqrt{n}/30}{\sqrt{1/6 \cdot 5/6}}\right) - 1 = \\ &= 2\Phi\left(\frac{\sqrt{n}}{5\sqrt{5}}\right) - 1, \end{aligned}$$

tehát elegendő  $2\Phi\left(\frac{\sqrt{n}}{5\sqrt{5}}\right) - 1 \geq 0,99$ -t biztosítani. Mivel  $\Phi(2,58) \approx 0,995$ , és  $\Phi(x)$  monoton növekvő függvény, ez  $\sqrt{n} \geq 2,58 \cdot 5\sqrt{5}$ -tel ekvivalens, tehát  $n \geq 833$ .  $\square$

**4.2.4. KIDOLGOZOTT FELADAT** *Magyarország lakosságának számunkra ismeretlen  $p$  hányada dohányzik. Felmérést készítünk  $p$  meghatározására: megkérdezzük  $n$  magyar állampolgárt, közülük  $X$  mondja magát dohányosnak: ez alapján  $p$ -t  $X/n$ -nel becsüljük. Persze  $X$  valószínűségi változó, hiszen függ a véletlentől, hogy milyen állampolgárokat sikerült megszólítanunk. Feltételezve, hogy a felmérés résztvevőit egymástól független körülmények között választjuk, határozzuk meg, legalább mennyi legyen  $n$ , ha azt szeretnénk, hogy  $X/n$  legfeljebb 0,01-gyel térjen el  $p$ -től, 98% valószínűséggel. Válaszoljunk a feladat kérdésére (a) a Nagy számok törvénye, illetve (b) a Centrális határeloszlás-tétel segítségével.*

**MEGOLDÁS** Ezt a feladatot pontosan ugyanúgy kell megoldani, mint az előzőt – adott biztonság és pontosság eléréséhez keressük a megfelelő  $n$ -t – egy különbség van csupán, nem ismerjük  $p$ -t (hiszen épp  $p$  felmérése a célunk!). Így olyan becslésre van szükség, amely 0,98 valószínűséggel biztosítja a  $\delta = 0,01$  pontosságot, akármennyi is legyen  $p$ . Ehhez mindkét részfeladatnál a számtani és mértani közép közti egyenlőtlenségből következő

$$\sqrt{p(1-p)} \leq \frac{p + (1-p)}{2} = 1/2 \quad \Longleftrightarrow \quad p(1-p) \leq 1/4 \quad (4.3)$$

elemi becslést fogjuk használni.

(a) Célunk  $n$  meghatározása, ha

$$0,02 \geq P(|X/n - p| \geq 0,01).$$

A (4.1) és (4.3) formulák alapján:

$$P(|X/n - p| \geq 0,01) \leq \frac{p(1-p)}{n\delta^2} \leq \frac{1}{4 \cdot n \cdot 10^{-4}},$$

$$\text{tehát } n \geq (0,02 \cdot 4 \cdot 10^{-4})^{-1} = 125000.$$

(b) Célunk  $0,98 \leq P(|X/n - p| \leq 0,01)$ . Kihasználva a (4.2) és (4.3) formulákat, valamint  $\Phi(x)$  monoton növekedését:

$$P(|X/n - p| \leq 0,01) \approx 2\Phi\left(\frac{0,01\sqrt{n}}{\sqrt{p(1-p)}}\right) - 1 = 2 \cdot \Phi(0,02\sqrt{n}) - 1.$$

Ugyanakkor  $\Phi(2,34) \approx 0,99$ , tehát  $0,02\sqrt{n} \geq 2,34$  szükséges a cél eléréséhez, vagyis  $n \geq 13689$ .  $\square$

**4.2.5. KIDOLGOZOTT FELADAT** Egy fémötvözet fajhőjét 100 független, azonos körülmények között elvégzett mérés segítségével szeretnénk megállapítani, a mérések átlaga  $293 \frac{\text{J}}{\text{kg}^\circ\text{C}}$ . Határozzuk meg azt az intervallumot, amelybe az ötvözet fajhője 95% biztonsággal beleesik, ha a fajhő szórása  $15 \frac{\text{J}}{\text{kg}^\circ\text{C}}$ .

**4.2.6. MEGJEGYZÉS** A statisztikában ezt úgy is mondják, hogy határozzuk meg a fajhő 95%-os megbízhatósági (konfidencia) intervallumát.

**MEGOLDÁS** Jelöljük az  $n = 100$  mérési eredmény összegét  $Y$ -nal, átlagát  $Y/n$ -nel (ez utóbbról tudjuk, hogy 293). A minden egyes mérésre azonos  $m$  várható értéket nem ismerjük, tudjuk viszont, hogy a szórás  $\sigma = 15$ . A centrális határeloszlás-tétel alapján  $Z = \frac{Y - nm}{\sqrt{n}\sigma}$  eloszlását tekinthetjük standard normálisnak. Lemásolva a (4.2) formulánál látott levezetést, tetszőleges  $\delta > 0$ -ra:

$$\begin{aligned} P\left(\left|\frac{Y}{n} - m\right| \leq \delta\right) &= P(|Y - nm| \leq n\delta) = P\left(\left|\frac{Y - nm}{\sqrt{n}\sigma}\right| \leq \frac{n\delta}{\sqrt{n}\sigma}\right) = \\ &= P\left(|Z| \leq \frac{\sqrt{n}\delta}{\sigma}\right) = P\left(-\frac{\sqrt{n}\delta}{\sigma} \leq Z \leq \frac{\sqrt{n}\delta}{\sigma}\right) \approx \\ &\approx \Phi\left(\frac{\sqrt{n}\delta}{\sigma}\right) - \Phi\left(-\frac{\sqrt{n}\delta}{\sigma}\right) = 2\Phi\left(\frac{\sqrt{n}\delta}{\sigma}\right) - 1 = 2\Phi\left(\frac{10\delta}{15}\right) - 1. \end{aligned}$$

Célunk annak a (minimális)  $\delta$ -nak a meghatározása, amelyre ez a valószínűség legalább 0,95. Ekkor ugyanis 95% valószínűséggel:  $Y/n$  beleesik az  $m$  körüli  $\delta$  sugarú intervallumba, tehát a kimért érték és  $m$  eltérése legfeljebb  $\delta$  lehet. Ehhez:

$$0,95 \geq 2\Phi\left(\frac{10\delta}{15}\right) - 1 \quad \Longleftrightarrow \quad 0,975 \geq \Phi(2\delta/3),$$

továbbá  $\Phi(1,96) = 0,975$ , és  $\Phi(x)$  monoton nő, tehát  $\delta = 1,4625$ . Összefoglalva, 95% biztonsággal állíthatjuk, hogy  $\frac{J}{kg^\circ C}$  egységekben az ötvözet fajhője a  $[293 - 1,4625; 293 + 1,4625] = [291,5375; 294,4625]$  intervallumba esik.  $\square$

**4.2.7. MEGJEGYZÉS** A feladat fenti megfogalmazásában az a valószerűtlen, hogy a szórászt eleve ismerjük: jellemzően az átlaghoz hasonlóan a szórászt is a mérésekből becsüljük meg a tapasztalati szórásnégyzet segítségével (lásd a 2.1.2 fejezetben a mérnöki bevezetést.) Ilyenkor egy kicsit másképp kell számolni (a standard normális eloszlás helyett az ún. Student eloszlást kell használni, erről bővebben olvashatunk bármilyen bevezető statisztika könyvben). Kellően nagy minta esetén azonban (és  $n = 100$  már feltétlen elég nagy) számolhatunk a fent leírt módon akkor is, ha a szórászt a mért adatokból becsüljük meg.

### 4.3. Gyakorló feladatok

**4.3.1. FELADAT** A TV-t véletlenszerűen bekapcsolva az esetek  $\frac{1}{4}$ -ében látunk éppen reklámot. Százszor bekapcsolva a TV-t, mi a valószínűsége, hogy legalább 22 és legfeljebb 28 alkalommal megy éppen reklám? Becsüljük meg ezt a valószínűséget a centrális határeloszlás-tétel alapján.

**4.3.2. FELADAT** Egy oltóanyag hatékonyságát állatkísérletekkel teszteljük: egy emlős szervezete ismeretlen  $p$  valószínűséggel válik a betegséggel szemben rezisztenssé az oltóanyag hatására.  $n$  patkányon elvégezve a kísérletet,  $p$ -t a rezisztenssé váló patkányok  $n$ -hez képesti arányával becsüljük. Legalább hány patkányon kell a kísérletet végrehajtani, hogy 97% valószínűséggel becslésünk  $p$  tényleges értékétől legfeljebb 0,02-vel térjen el? Válaszoljunk a kérdésre (a) a Nagy számok törvénye, illetve (b) a Centrális határeloszlás-tétel alapján.

**4.3.3. FELADAT** Egy automata gépsor fogaskerekeket gyárt, melyek átmérőjének várható értéke  $m = 20$  mm, szórása  $\sigma = 0,5$  mm. A várhatóhoz képest legalább  $\delta$  mm eltérést mutató fogaskerekeket selejtesnek minősítik. Mennyi lehet  $\delta$ , ha tudjuk, hogy a selejtarány 4%? Válaszoljunk a feladat kérdésére, ha az átmérő eloszlása (a) ismeretlen; (b) normális.

**4.3.4. FELADAT** Tekintsük a 4.3.3. feladat gépsorát: felmerült, hogy a gépsort újra kell kalibrálni. Erre akkor van szükség, ha a legyártott fogaskerekek átmérője már nem 20 mm, hanem valamilyen attól lényegesen, legalább 0,1 mm-rel eltérő érték. Ennek eldöntésére megmérjük  $n$  legyártott fogaskerék átmérőjét, és megnézzük, a mérések mm-ben vett átlaga beleesik-e a  $[19,9; 20,1]$  intervallumba. Persze egy ilyen eljárás csak akkor megbízható, ha a mérések átlagának és a fogaskerék-átmérő várható értékének az eltérése nagy valószínűséggel nem haladja meg a 0,1 mm-t. Hány mérést kell elvégezni, ha azt szeretnénk, hogy ez a valószínűség legalább 94% legyen? Számoljunk a 4.3.3. feladat  $\sigma = 0,5$  mm szórásával, és becsüljük a centrális határeloszlás-tétel alapján.

## 5. fejezet

### Gyakorló feladatok numerikus eredményei

| Feladat száma | Megoldás                                                                                                                                                                                               |
|---------------|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| <b>1.3.1.</b> | (a) $H\overline{M}$ , (b) $\overline{H} \cdot \overline{M}$ , (c) $H\overline{M} + \overline{H}M$ , (d) $\overline{H}\overline{M}$ .                                                                   |
| <b>1.3.2.</b> | 0,9856.                                                                                                                                                                                                |
| <b>1.3.3.</b> | (a) $P(A) = 1/2$ , (b) $P(A B) = 1/3$ , (c) igen.                                                                                                                                                      |
| <b>1.3.4.</b> | (a) $1/12$ , (b) nem.                                                                                                                                                                                  |
| <b>1.3.5.</b> | $1/8$ .                                                                                                                                                                                                |
| <b>1.3.6.</b> | $1/3$ .                                                                                                                                                                                                |
| <b>2.3.1.</b> | $E\xi = 7, D\xi = \sqrt{\frac{35}{6}} \approx 2,415$ .                                                                                                                                                 |
| <b>2.3.2.</b> | (a) $B = 1$ , (b) $1/2$ , (c) $E\xi = 1$ , (d) $D\xi = \sqrt{\pi - 3} \approx 0,3763$ .                                                                                                                |
| <b>2.3.3.</b> | (a) $p = 0, 1$ , (b) nem, (c) $R(\xi, \eta) \approx -0,4138$ .                                                                                                                                         |
| <b>2.3.4.</b> | (a) $B = \frac{35}{48}$ , (b) $f_\xi(x) = \frac{35}{48}(2x^4 + \frac{2}{7})$ ha $ x  \leq 1$ , egyébként 0,<br>$f_\eta(y) = \frac{35}{48}(2y^6 + \frac{2}{5})$ ha $ y  \leq 1$ , egyébként 0, (c) nem. |
| <b>2.3.5.</b> | (a) $f_\xi(x) = \frac{2\sqrt{1-x^2}}{\pi}$ ha $ x  \leq 1$ , egyébként 0,<br>$f_\eta(y) = \frac{2\sqrt{1-y^2}}{\pi}$ ha $ y  \leq 1$ , egyébként 0, (b) $R(\xi, \eta) = 0$ .                           |



|               |                                                                |
|---------------|----------------------------------------------------------------|
| <b>3.3.1.</b> | (a) $2e^{-2} \approx 0,27$ , (b) $1 - 5e^{-2} \approx 0,325$ . |
| <b>3.3.2.</b> | (a) $4/7$ , (b) $E\xi = 47,5$ , $D\xi \approx 10,104$ .        |
| <b>3.3.3.</b> | Ld. az elméleti összefoglalót.                                 |
| <b>3.3.4.</b> | $\approx 0,9875$ .                                             |
| <b>4.3.1.</b> | $\approx 0,51$ .                                               |
| <b>4.3.2.</b> | (a) $n \geq 20834$ , (b) $n \geq 2944$ .                       |
| <b>4.3.3.</b> | (a) $\delta \leq 2,5$ , (b) $\delta \approx 1,03$ .            |
| <b>4.3.4.</b> | $n \geq 85$ .                                                  |

## Hivatkozások

- [1] Balázs Márton, Tóth Bálint: *Valószínűesszámitás 1. jegyzet matematikusoknak és fizikusoknak*, elérhető: <http://www.math.bme.hu/~balazs/vsz1jzetb-t.pdf>
- [2] Jay Devore, Nicholas Farnum: *Applied Statistics for Engineers and Scientists*; Thomson Brooks/Cole, Belmont CA, 2005
- [3] Monostory Iván: *Valószínűségelmélet és Matematikai statisztika Pédatár*; Műegyetemi Kiadó, Budapest, 2001
- [4] Prékopa András: *Valószínűségelmélet*; Műszaki Könyvkiadó, Budapest, 1980
- [5] Rényi Alfréd: *Valószínűesszámitás*; Tankönyvkiadó, Budapest, 1972
- [6] Szelezsán János: *Valószínűesszámitás és Matematikai Statisztika*; LSI Oktatóközpont, Budapest, 1999

# Komplex analízis

**Nágel Árpád**

BME Differenciálegyenletek Tanszék

**Konzulens: Kullmann László**

BME Hidrodinamikai Rendszerek Tanszék

## 6. fejezet

# Komplex függvények differenciálhatósága, Cauchy–Riemann-egyenletek

### 6.1. Mérnöki bevezetés

Tekintsünk egy mozgó pontot a síkon. A pontot meghatározó (független) kettő, időtől függő  $x(t), y(t)$  koordináta egy időtől függő  $(x(t), y(t))$  síkvektort határoz meg. Így ezen pont mozgása matematikailag egy  $t$  valós változós  $z(t) = x(t) + iy(t)$  komplex függvénnyel is leírható, ahol  $y(t) = r(t)e^{i\varphi(t)}$ . Tekintsük a pont mozgását kinematikai szempontból teljesen meghatározó

$$z = z(t)$$

valós változós komplex függvényt a  $t$  idő függvényében. Célszerű feltenni, hogy a fenti függvény kellően sima, azaz legalább kétszer differenciálható.

Értelmezhető a helyzetvektor idő szerinti derivált vektora, azaz a mozgó pont  $t$  időpontbeli sebességvektora:

$$v(t) = \lim_{dt \rightarrow 0} \frac{z(t+dt) - z(t)}{dt} = \lim_{dt \rightarrow 0} \frac{dz}{dt} = \dot{z}(t)$$

A gondolatsort folytatva definiálhatjuk mozgó pont időpontbeli gyorsulásvektorát, mint a helyzetvektor idő szerinti második deriváltját.

Értelmezhető a  $z(t)$  segítségével az ún. úthosszmérő  $s(t)$  függvény a következő ívhossz képlettel:

$$s(t) = \int_{t_0}^t |\dot{z}| dt = \int_{t_0}^t |v(t)| dt = \int_{t_0}^t \sqrt{(\dot{x})^2 + (\dot{y})^2} dt = \int_{t_0}^t \sqrt{(\dot{r})^2 + r^2(\dot{\varphi})^2} dt$$

Az integrált a felső határa szerint deriválva adódik az ún. pályasebesség. Definiálható a pályagörbe görbülete is a szokásos módon. stb.

A legegyszerűbb esetben ismeretes a mozgó pont  $z(t)$  helyzetfüggvénye.

Ekkor felírható minden időpontban mind  $z(t)$ , mind a  $v(t) = \frac{dz}{dt}$  pont sebessége, ami szintén

valós változójú komplex függvény, így ismert a  $v(z)$  komplex függvény is, amelynek független változója és értéke egyaránt komplex szám. Ez a komplex függvény tehát leírja a mozgást a hely és az idő függvényében, egyenértékű egy kétváltozós vektor-vektor függvénnyel.

Tekintsük példaként a körmozgást:

Ebben az esetben a pont helyzete poláris alakban

$$z(t) = r_0 e^{i\varphi} \text{ (Itt a } \varphi \text{ a } t \text{ függvénye.)}$$

Így a sebesség:  $v = \dot{z} = r_0 \dot{\varphi} i e^{i\varphi(t)} = i\omega z$  és  $\dot{\varphi} = \omega$ , a gyorsulás pedig  $a = \dot{v} = r_0 \ddot{\varphi} i e^{i\varphi} - (\dot{\varphi})^2 r_0 e^{i\varphi}$

Az előzőekben felírt  $v(z) = i\omega z$  komplex függvény például leírja egy függőleges körhenger alakú, az edény függőleges szimmetriatengelye körüli  $\omega$  szögsebességű forgása esetén a folyadék sebességét az edényben. Az is világos, hogy a  $v$  sebesség(vektor) merőleges a mozgó ponthoz húzható  $z$  helyvektorra, mert az  $i$ -vel való szorzás az óramutató járásával ellentétes - pozitív -  $90^\circ$ -os forgatást jelent.

## 6.2. Matematikai bevezetés

Jelölje  $\mathbb{C}$  a komplex számok halmazát és  $T \subset \mathbb{C}$  valódi részhalmazt. Tekintsük az  $f: T \rightarrow \mathbb{C}$  függvényt. Ekkor tehát az  $f$  változója és értéke is komplex szám, ezért  $f$ -et *komplex függvénynek* nevezzük.

A valós függvényeknél látott definíciókat értelemszerűen kiterjesztve definiálhatjuk a komplex függvények határértékét, folytonosságát ill. differenciálhatóságát. Megmutatható, hogy az így kiterjesztett fogalmakra ugyanazok az algebrai tulajdonságok, számolási szabályok teljesülnek, mint azt valós esetben láttuk.

A komplex  $z$  szám valós és képzetes részét jelöljük  $x$  ill.  $y$ -nal, azaz a szokásos jelölés szerint legyen  $z = x + iy$  a komplex  $z$  szám normál alakja. Jelölje  $u$  ill.  $v$  az  $f$  függvény valós ill. képzetes részét. Ekkor  $u$  és  $v$  is komplex változós, de valós értékű függvények, viszont a komplex függvénytanban szokásos jelölés szerint tekinthetjük a függvényeket is, hogy azok az  $x$  és  $y$  valós változóktól függenek, azaz a következő jelölést használjuk:

$$f(z) = u(x; y) + iv(x; y), \text{ ahol } u \text{ és } v \text{ kétváltozós valós függvények.} \quad (6.1)$$

Legyen  $z_0$  a  $T$  halmaz torlódási pontja. Azt mondjuk, hogy az  $f$  függvénynek a  $z_0$ -ban létezik a határértéke, ha bármely olyan  $z_n \in T$  sorozatra, amelyre  $z_n \neq z_0$  ( $n = 1, 2, \dots$ -re) és  $z_n \rightarrow z_0$ , következik, hogy a  $\lim_{n \rightarrow \infty} f(z_n)$  határérték létezik, és értéke független a  $(z_n)$  sorozat választásától.

A határérték jelölése:  $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z)$ .

Az  $f$  függvényt *folytonosnak* nevezzük a  $z_0 \in T$  pontban, ha

$$f(z_0) = \lim_{z \rightarrow z_0} f(z)$$

Ha az  $f$  függvény folytonos minden  $z \in T$  pontban, akkor az  $f$  függvényt folytonos a  $T$  halmazon. Az  $f$  függvényt a  $z_0 \in T$  pontban *differenciálhatónak* nevezzük, ha a

$$\lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}$$

(komplex) határérték létezik. Ezt a határértéket az  $f$  függvény  $z_0$  helyen vett deriváltjának (differenciálhányadosának) nevezzük. Jele:  $f'(z_0)$ . Ha  $f$  differenciálható a  $T$  halmaz minden pontjában, akkor azt mondjuk, hogy  $f$  differenciálható a  $T$  halmazon. Használatos a differenciálhatóságra a reguláris, illetve a holomorf elnevezés is. Ha az  $f$  függvény egy tartományon a belsejében lévő  $z_0$  pont kivételével mindenütt differenciálható, akkor az  $f$  függvénynek a  $z_0$  pontban *izolált szingularitása* van.

Szemléletesen ez a következőt jelenti ez: Megmutatható, hogy a komplex számok között a szorzás geometriailag forgatva nyújtás, valamint általában a differenciálás lineáris alakzattal való lineáris közelítést jelent. Így a komplex differenciálhatóság sokkal erősebb feltétel, mint a valósban megismert differenciálhatóság. A komplex analízisben azok a függvények lesznek differenciálhatók, amelyek 'kicsiben' forgatva nyújtanak. Nevezetesen igaz az alábbi tétel:

**6.2.1. TÉTEL** Ha  $f$  differenciálható  $z_0 = x_0 + iy_0$ -ban, akkor  $u$  és  $v$  valós függvények parciálisan is differenciálhatók a  $(x_0; y_0)$ -ban, továbbá

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x_0; y_0) = \frac{\partial v}{\partial y}(x_0; y_0) \quad (6.2)$$

$$\frac{\partial u}{\partial y}(x_0; y_0) = -\frac{\partial v}{\partial x}(x_0; y_0) \quad (6.3)$$

A (6.2) és (6.3) egyenleteket Cauchy–Riemann-egyenleteknek nevezzük.

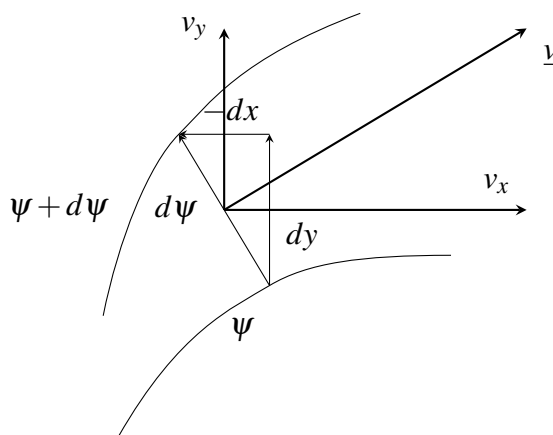
Az állítás egyszerűen következik a fenti komplex változós függvény  $z_0$ -beli (létező) különbségi hányados limeszének a valós és a képzetes tengely menti összehasonlításából.

### 6.3. A Cauchy–Riemann-egyenletek mérnöki bevezetése

Az áramlástanban nagyon fontos szerepet játszanak a komplex változós függvények. A síkáramlások természetes módon leírhatók ilyen függvények segítségével.

Bevezethető az ún. áramfüggvény fogalma:

Tekintsünk az  $(x, y)$  síkban két áramvonalat.



Az így kapott  $\psi$  ( $x$  és  $y$  változós) függvényt nevezzük áramfüggvénynek. Tekintsünk a két áramvonalon egy-egy pontot. E két pont közötti távolságot felbontva  $dx$ ,  $dy$  összetevőkre, a  $d\psi$  átáramló folyadék térfogatáramát ki lehet fejezni a sebesség  $x$  és  $y$  irányú komponenseivel:

$$d\psi = v_x dy - v_y dx$$

Mivel a  $\psi(x, y)$  függvény teljes differenciálja

$$d\psi = \frac{\partial \psi}{\partial x} dx + \frac{\partial \psi}{\partial y} dy,$$

így a sebesség összetevőire adódik:

$$\frac{\partial \psi}{\partial x} = -v_y \text{ és } \frac{\partial \psi}{\partial y} = v_x$$

Ezeket összevetve a  $\varphi$  sebességi potenciállal nyerhetjük a fent már megismert Cauchy–Riemann-egyenleteket:

$$v_x = \frac{\partial \varphi}{\partial x} = \frac{\partial \psi}{\partial y} \text{ és } v_y = \frac{\partial \varphi}{\partial y} = -\frac{\partial \psi}{\partial x}$$

Egy kétdimenziós forrás- és örvénymentes  $v(z)$  vektor-vektor függvény leírható komplex függvénytani módszerekkel.

A forrásmentesség:

$$\operatorname{div} v = \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} = 0$$

Az örvénymentesség:

$$\operatorname{rot} v = \left( \frac{\partial v_y}{\partial x}, -\frac{\partial v_x}{\partial y} \right) = 0$$

(Itt helytakarékosági okokból értünk sorvektort.) Az első egyenletet minden kétszer folytonosan deriválható úgynevezett  $\psi(x,y)$  áramfüggvény, a második egyenletet minden kétszer folytonosan deriválható  $\varphi(x,y)$  potenciálfüggvény kielégíti.

Bizonyos egyszerűsítésekkel stacionárius síkáramlások sebességtére, a mágneses térerősség vektora állandó mágneses peremabilitású tér azon részén, melyen nem folyik áram, elektromos erőter a tér azon részein, amelyekben nincsenek töltött részecskék, közelíthető forrás- és örvénymentes vektortérrel.

**A következő példa azt mutatja, hogy a Cauchy–Riemann-egyenletek teljesüléséből általában nem következik, hogy az  $f$  függvény differenciálható.**

**6.3.1. PÉLDA** Legyen  $f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ ,  $f(z) = \sqrt{|xy|}$ , ahol  $z = x + iy$ . Ekkor  $f$  valós értékű függvény, így  $u(x,y) = \sqrt{|xy|}$  és  $v(x,y) = 0$ ;  $x,y \in \mathbb{R}$ . Könnyen ellenőrizhető, hogy az origóban

$$\frac{\partial u}{\partial x}(0;0) = \frac{\partial u}{\partial y}(0;0) = \frac{\partial v}{\partial x}(0;0) = \frac{\partial v}{\partial y}(0;0)$$

így a Cauchy–Riemann-egyenletek teljesülnek ebben a pontban. Viszont az  $f$  függvény nem differenciálható a  $z = 0$  pontban, ugyanis  $z = x + iy \neq 0$  esetén

$$\frac{f(z) - f(0)}{z - 0} = \frac{\sqrt{|xy|}}{x + iy}$$

Tekintsük a határértéknek azt a speciális esetét, amikor  $z$  a valós tengely mentén tart az origóba, azaz  $z = x$ . Ekkor

$$\frac{f(z) - f(0)}{z - 0} = \frac{0}{x}$$

Másképpen, ha  $z = x + ix$ ,  $x > 0$  (azaz, ha az  $y = x$  félegyenes mentén tartunk az origóba), akkor

$$\frac{f(z) - f(0)}{z - 0} = \frac{x}{x + ix} = \frac{1}{1 + i}$$

ezért a különbségi hányadosnak nem létezik a határértéke az origóban, tehát az  $f$  függvény nem differenciálható a  $0$  pontban.

Megmutatható, hogy ha  $u$  és  $v$  parciális differenciálhatósága helyett erősebb feltevessel élünk és az  $u$  és  $v$  (valós) differenciálhatóságát teszünk fel, akkor a Cauchy–Riemann-egyenletek teljesüléséből következik az  $f$  függvény differenciálhatósága is, azaz

**6.3.2. TÉTEL** Legyen  $f$  (6.1) alakú. Ekkor az  $f$  függvény pontosan akkor differenciálható a  $z_0 = x_0 + iy_0$  pontban, ha az  $u$  valós rész és a  $v$  képzetes rész függvények differenciálhatók az  $(x_0; y_0) \in \mathbb{R}^2$  pontban, továbbá az  $u$  és  $v$  deriváltjaira teljesülnek a (6.2 és 6.3) Cauchy–Riemann-egyenletek. Ebben az esetben  $f'(z) = \frac{\partial u}{\partial x} + i \frac{\partial v}{\partial x}$

## 6.4. Mérnöki megjegyzések

Az  $f(z) = \varphi(x, y) + i\psi(x, y)$  függvény  $f'(z)$  deriváltja

$$f'(z) = \frac{\partial \varphi}{\partial x} + i \frac{\partial \psi}{\partial x} = -\frac{\partial \varphi}{\partial y} + i \frac{\partial \psi}{\partial y} = v_x - iv_y$$

a  $\underline{v} = (v_x, v_y)$  sebességvektor komponenseiből felépített  $v_x + iv_y$  komplex szám konjugáltja:  $v_x - iv_y$ .

Összefoglalva tehát a holomorf függvény - amit az áramlástanban *komplex potenciálnak* hívnak - deriváltja egy forrás és örvénymentes kétdimenziós sebességtér konjugált sebességvektorát írja le (másként megfogalmazva a komplex potenciál konjugáltja a sebességvektor).

- (a) Párhuzamos áramlás komplex potenciálja:  $w = \mathbb{C}bz$ , ahol  $\mathbb{C}$  egy valós konstans.
- (b) Örvény komplex potenciálja:  $w = i\Gamma \ln z$ , ahol  $\Gamma$  a valós örvényintenzitás.
- (c) Forrás komplex potenciálja:  $w = \mathbb{Q} \ln z$ , ahol  $\mathbb{Q}$  a forrásbőség,  $\mathbb{Q} < 0$  nyelőt jelent.
- (d) Élben csatlakozó két sík fal menti áramlás komplex potenciálfüggvénye  $w = \mathbb{C} \frac{z^n}{n}$ , ahol a síkok által bezárt szög  $\frac{\pi}{n}$ .
- (e) Dipólus komplex potenciálja:  $w = \frac{M}{z}$ , ahol  $M$  a dipólus forrás-nyelő bősége.
- (f) Tompa test torlópontja környezetének áramképét a  $w = cz + \frac{M}{z}$  komplex potenciál írja le, a tompa test kontúrját a  $\mathbb{C}$  és  $\mathbb{Q}$  konstansok értékűnek beállításával lehet megközelíteni.
- (g) Henger körüli áramkép komplex potenciálja, a henger sugarút és a hengertől távoli párhuzamos áramlás sebességét a két konstans szabja meg.

**6.4.1. KIDOLGOZOTT FELADAT** A komplex számsík mely részhalmazán differenciálható az alábbi komplex változós  $f$  függvény?

$$f(z) = x^2 + y^2 + i(xy + x^2 + y^2)$$



**MEGOLDÁS** Látható, hogy az  $f$  komplex függvény valós és képzetes része (mint valós kétváltozós függvény) differenciálható. Megvizsgáljuk, hogy a (6.2 és 6.3) Cauchy–Riemann-egyenletek a komplex számsík, mely részhalmazán teljesülnek. Ezek szerint vizsgálandó az alábbi egyenletrendszer

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 2x = \frac{\partial v}{\partial y} = x + 2y$$

illetve

$$\frac{\partial u}{\partial y} = 2y = -\frac{\partial v}{\partial x} = -y - 2x$$

Könnyen látható, hogy a fenti két egyenlet közös megoldása az  $x = 0$  és  $y = 0$ . Így a feladatban megfogalmazott komplex függvény csak a  $(0, 0)$  pontban lesz differenciálható.  $\square$

**6.4.2. KIDOLGOZOTT FELADAT** A komplex sík, mely tartományán differenciálható az alábbi leképezés?

$$f(z) = z^2 \Re(z) \quad (z \in \mathbb{C})$$

**MEGOLDÁS** Írjuk fel az  $f$  függvényt (6.1) alakban. Ekkor

$$f(z) = x^3 - xy^2 + 2x^2yi$$

Látható, hogy az  $f$  komplex függvény valós és képzetes része differenciálható. A 6.3.2. tétel szerint elegendő megvizsgálni, hogy a (6.2 és 6.3) Cauchy–Riemann-egyenletek a komplex számsík, mely részhalmazán teljesülnek.

Megmutatható, hogy

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 3x^2 - y^2 = \frac{\partial v}{\partial y} = 2x^2$$

illetve

$$\frac{\partial u}{\partial y} = -2xy = -\frac{\partial v}{\partial x} = -4xy$$

Könnyen látható, hogy a fenti két egyenlet közös megoldása az  $x = 0$  és  $y = 0$ . Így a feladatban megfogalmazott komplex függvény csak a  $(0, 0)$  pontban differenciálható.  $\square$

**6.4.3. PÉLDA** Tekintsük az  $f(z) = e^z$  függvényt. Erre

$$f(z) = e^z = e^{x+iy} = e^x e^{iy} = e^x \cos y + ie^x \sin y,$$

ezért

$$u(x; y) = e^x \cos y \text{ és } v(x; y) = e^x \sin y.$$

Könnyen ellenőrizhető, hogy az  $u$  és  $v$  teljesítik a Cauchy–Riemann-egyenleteket. Másrészt látható, hogy az  $u$  és  $v$  valós függvények a teljes számsíkon differenciálhatók, ezért a 6.3.2. tétel miatt az  $f$  holomorf az egész komplex számsíkon és a 6.3.2. tétel miatt:

$$f'(z) = e^x \cos y + ie^x \sin y = e^z$$

6.4.4. **PÉLDA** Legyen  $T$  tetszőleges  $z = 0$ -t nem tartalmazó nyílt halmaz, és tekintsük az  $f: T \rightarrow \mathbb{C}$   $f(z) = \frac{1}{z}$  függvényt. Ennek nyilván a  $z_0 = 0$  pont izolált szinguláris pontja, hiszen ebben nincs is definiálva a függvény, így itt nem is lehet differenciálható. Az  $f$  valós és képzetes részét kiszámítva kapjuk

$$f(z) = \frac{x}{x^2 + y^2} - i \frac{y}{x^2 + y^2}$$

Az  $u$  és  $v$  függvények az origótól megosztott valós síkon differenciálhatók mindkét változójuk szerint és

$$u(x, y) = \frac{x}{x^2 + y^2} \text{ valamint } v(x, y) = -\frac{y}{x^2 + y^2},$$

ezért a Cauchy–Riemann-egyenletek teljesülnek minden  $(x_0, y_0) \neq (0, 0)$ -ra. Ezért az  $f$  függvénynek a  $z = 0$  izolált szinguláris helye, és bármely  $z \neq 0$ -ra

$$f'(z) = \frac{y^2 - x^2}{(x^2 + y^2)^2} - i \frac{2xy}{(x^2 + y^2)^2} = -\frac{1}{z^2}$$

(Formálisan ugyanaz, mint valósban.)

6.4.5. **KIDOLGOZOTT FELADAT** Differenciálható-e a teljes komplex számsíkon az alábbi

$$f(z) = \bar{z}\Re(z) \quad (z \in \mathbb{C})$$

függvény?

**MEGOLDÁS** Kiszámolható, hogy az  $f$  függvény valós és képzetes része:

$$u(x, y) = x^2, \text{ valamint } v(x, y) = -xy.$$

Ellenőrizzük, hogy a Cauchy–Riemann-egyenletek teljesülnek-e a teljes komplex számsíkon.

Látható, hogy

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 2x, \quad \frac{\partial v}{\partial y} = -x$$

és

$$\frac{\partial u}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial v}{\partial x} = -y$$

így a (6.2) és a (6.3) egyenletek csak a  $z = 0 + i0$  pontban teljesülnek, azaz a feladatban kitűzött függvény csak itt lesz differenciálható.  $\square$

6.4.6. **KIDOLGOZOTT FELADAT** Mutassuk meg, ha egy  $T \subset \mathbb{C}$  tartományon értelmezett valós értékű függvény holomorf, akkor szükségképpen állandó a  $T$ -n.

**MEGOLDÁS** Mivel a függvény valós értékű, ezért a képzetes része nulla. A Cauchy–Riemann-egyenletek teljesülésének következtében a valós része állandó, ugyanis a parciális deriváltjai eltűnnek a  $T$ -n.  $\square$

**6.4.7. KIDOLGOZOTT FELADAT** *Mutassuk meg, ha  $f$  és  $\bar{f}$  komplex változós függvények holomorfak egy  $T$  komplex tartományon, akkor az  $f$  függvény állandó.*

**MEGOLDÁS** Könnyen megmutatható, hogy a Cauchy–Riemann-egyenletek teljesülésének következtében az  $f$  függvény valós és képzetes része állandó, azaz az  $f$  függvény konstans.  $\square$

Megmutatható, hogy a valós függvényekre levezetett összeg, szorzat, hányados, összetett függvényekre vonatkozó differenciálási szabályok és az elemi függvények deriváltjaira vonatkozó azonosságok mind teljesülnek a megfelelő komplex függvényekre is.

Például

$$(z^n)' = nz^{n-1}, (\cos z)' = -\sin z, (\sin z)' = \cos z, (e^z)' = e^z.$$

Viszont a komplex analízisben (a komplex derivált sajátosságai miatt) a valós analízisben jártas olvasó számára meglepő tételek és tulajdonságok teljesülnek. A teljességre törekvés nélkül például, ha itt egy függvény egyszer differenciálható, akkor már végtelen sokszor is differenciálható. Vagy, ha a függvény mindenütt differenciálható és korlátos, akkor szükségképpen állandó. Nevezetes eredmény az is, hogy ha egy függvény egy tartományon differenciálható, akkor a függvény analitikus is, azaz a tartomány minden pontja körüli konvergens hatványsor összegfüggvényeként állítható elő. (A valós analízisben ehhez a deriváltak egyenletes korlátossága kellett.) Megmutatható, hogy egy komplex analitikus függvény zérushelyei nem torlódhatnak az értelmezési tartomány belsejében. A komplex változós függvények a lényeges szingularitási pont környezetében „érdekesen” viselkednek: az itt felvett függvényértékek halmaza sűrű, sőt egy kivételtől eltekintve minden értéket felvesznek. Lényeges különbségek vannak a valós és a komplex vonalintegrál tulajdonságaiban is. A komplex analízisben bonyolultak és sokszor furcsának tűnnek a valós analízisben megismert egyszerű függvények is. Megmutatható, hogy például a szinusz és koszinuszfüggvények itt nem korlátosak, az exponenciális függvény periodikus, ezért például nem invertálható stb.

## 7. fejezet

# Komplex törtlineáris leképezések

Legyenek  $a, b, c$  és  $d$  olyan komplex számok, amelyekre  $ad - bc \neq 0$ . Az

$$f(z) = \frac{az+b}{cz+d} \quad (z \neq -\frac{d}{c}) \quad (7.1)$$

komplex változós függvényt komplex törtlineáris függvénynek nevezzük.

Megmutatható a következő alapvető

**7.1.8. TÉTEL** *Komplex törtlineáris leképezés kört vagy egyenest körbe vagy egyenesbe visz.*

Meggondolható, hogy a (7.1) komplex lineáris leképezés invertálható a  $z \neq -\frac{d}{c}$  halmazon és az inverz leképezés itt differenciálható. (Állítsuk elő az inverz függvényt!)

**7.1.9. KIDOLGOZOTT FELADAT** *Hová képezi le az  $f(z) = 2z + 3$  függvény ( $z \in \mathbb{C}$ ) a*

$$T = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 < 1\} \text{ tartományt?}$$

**MEGOLDÁS** Felhasználva, hogy a komplex számokkal való szorzás forgatva nyújtás, ezért egyszerűen látható, hogy a feladatban szereplő  $f$  komplex lineáris függvény a  $T$  egységsugarú origó középpontú (nyílt) körlemezre képezi a

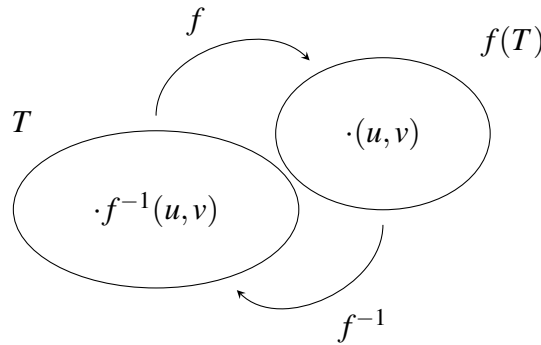
$$\{(u, v) : (u-3)^2 + v^2 < 4\} \text{ körlemezre képezi.}$$

□

**7.1.10. KIDOLGOZOTT FELADAT** *Hová képezi le az  $f(z) = \frac{1}{z}$  függvény ( $z \neq 0$ ) a*

$$T = \{z \in \mathbb{C} : \Re(z) > 0\} \text{ tartományt?}$$

**MEGOLDÁS**



Látható, hogy

$$f^{-1}(z) = \frac{1}{z} \quad (z \neq 0).$$

Legyen  $(u, v)$  olyan elem, hogy  $(u + iv) \in f(T)$ .

Mivel  $\Re(f^{-1}(u + iv)) > 0$ , ezért  $\Re(\frac{1}{u+iv}) > 0$ . Mivel

$$f^{-1}(u + iv) = \frac{u}{u^2 + v^2} - i \frac{v}{u^2 + v^2} \quad \text{így} \quad \Re(f^{-1}(u + iv)) = \frac{u}{u^2 + v^2}.$$

Így az  $f^{-1}$  függvény az  $(u, v)$  sík azon tartományára képez, amelyre  $\frac{u}{u^2 + v^2} > 0$ . Látható, hogy ez pontosan akkor teljesül, ha  $u > 0$ . Következésképpen az  $f$  függvény a megadott  $T$  tartományt az  $(u, v)$  komplex számsík  $u > 0$  félsíkjára képezi.  $\square$

**7.1.11. KIDOLGOZOTT FELADAT** Hová képezi le az  $f(z) = \frac{z+1}{z+2}$  függvény  $(z \neq -2)$  a

$$T = \{z \in \mathbb{C} : \Re(z) > 0\} \text{ tartományt?}$$

**MEGOLDÁS** Megmutatható, hogy

$$f^{-1}(z) = \frac{1-2z}{z-1} \quad (z \neq 1).$$

A 7.1.10. feladat megoldásához hasonlóan legyen  $(u, v)$  olyan elem, hogy  $(u + iv) \in f(T)$ .

Mivel  $\Re(f^{-1}(u + iv)) > 0$ , ezért  $\Re(\frac{1-2z}{z-1}) > 0$ . Mivel

$$f^{-1}(u + iv) = \frac{-2u^2 - 2v^2 + 3u - 1}{(u-1)^2 + v^2} + i \frac{v}{(u-1)^2 + v^2}$$

ezért az  $f^{-1}$  függvény az  $(u, v)$  sík azon tartományára képez, amelyre

$$\frac{-2u^2 - 2v^2 + 3u - 1}{(u-1)^2 + v^2} > 0.$$

Megmutatható, hogy ez pontosan akkor teljesül, ha  $(u - \frac{3}{4})^2 + v^2 < \frac{1}{16}$ . Ezek szerint a feladatban szereplő  $f$  függvény a megadott  $T$  tartományt az  $(u, v)$  komplex számsík azon tartományára képezi le, amelyre teljesül, hogy  $(u - \frac{3}{4})^2 + v^2 < \frac{1}{16}$ .  $\square$

7.1.12. **KIDOLGOZOTT FELADAT** Hová képezi le az  $f(z) = \frac{z-1}{2z+1}$  függvény ( $z \neq -\frac{1}{2}$ ) a

$$T = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x > 1, 0 < y < 1\} \text{ tartományt?}$$

**MEGOLDÁS** Az előző feladatok megoldásához hasonlóan kiszámítjuk, hogy az  $f$  függvény inverze a komplex sík mely tartományát képezi le a  $T$  tartományra. A törtlineáris leképezés bijektív voltából következően erre a tartományra fog képezni az  $f$  függvény. A komplex törtlineáris leképezések tulajdonságából következően az  $f$  függvény inverze létezik a  $T$  tartományon és

$$f^{-1}(z) = \frac{z-1}{2z-1} \quad (z \neq \frac{1}{2}).$$

A 7.1.10. feladat megoldásához hasonlóan legyen  $(u, v)$  olyan elem, hogy  $(u + iv) \in f(T)$ .

Mivel  $\Re(f^{-1}(u + iv)) > 1$  és  $0 < \Im(f^{-1}(u + iv)) < 1$ , ezért  $f^{-1}$  függvény az  $(u, v)$  sík azon tartományára képez, amelyre

$$\frac{2u^2 + 2v^2 - 3u + 1}{(2u + 1)^2 + 4v^2} > 1$$

és

$$0 < \frac{v}{(2u + 1)^2 + 4v^2} < 1.$$

Ebből számolással adódik, hogy egyidejűleg teljesülnek az alábbi egyenlőtlenségek:

$$\begin{aligned} (u + \frac{7}{4})^2 + v^2 &< \frac{49}{16} \\ v &> 0 \end{aligned}$$

és

$$(2u + 1)^2 + (2v - \frac{1}{4})^2 > \frac{1}{16}$$

□

## 8. fejezet

# Komplex függvények görbe menti integrálja

### 8.1. Mérnöki bevezetés

Tekintsünk a következő mechanikai feladatot: A valós vagy komplex síkon egy pontszerű test erőterében egy

$$\left\{ \underline{\varphi}(t) : t \in [\alpha, \beta] \right\}$$

folytonos görbe mentén mozog úgy, hogy az  $\alpha \leq t \leq \beta$  pillanatban a

$$\underline{\varphi}(t) = (x(t), y(t))$$

pontban van. A  $\underline{\varphi}(t)$  tehát a mozgó pont pillanatnyi helyzetének - a pont pályájának - helyvektora. A test mozgása közben változó erő hat rá, az  $(x, y)$  pontban ható vektor legyen  $\underline{u}(x, y) = (u(x, y), v(x, y))$ . Határozzuk meg az erő által végzett munkát, miközben a test befutja a  $\underline{\varphi}(t)$  görbét! A fizika tanítása szerint, ha a test *állandó*  $(u, v)$  vektorú erő hatására a  $P_1(x_1, y_1)$  pontból a  $P_2(x_2, y_2)$  pontba mutató *egyenes* szakaszon mozog, akkor a munka értékűt az erő vektorának és az elmozdulás vektorának a

$$u(x_2 - x_1) + v(y_2 - y_1)$$

skaláris szorzata adja.

Tekintsük az  $[\alpha, \beta]$ -nak

$$\alpha = t_0 < t_1 < \dots < t_n < \beta$$

osztópontú felosztását és tegyük fel, hogy a mozgás a  $\underline{\varphi}$  görbe helyett a beleírt poligon mentén történik, valamint tegyük fel, hogy a poligon  $\underline{\varphi}(t_{i-1})$  és  $\underline{\varphi}(t_i)$  szakasza mentén állandó erő hat, amely a  $\underline{\varphi}$  görbe valamely  $t_{i-1} \leq \tau_i \leq t_i$  paraméterű  $\underline{p}_i = \underline{\varphi}(\tau_i)$  pontjának felel meg.

Ekkor a végzett munka:

$$\sum_{i=1}^n \{ u(\underline{p}_i)[x(t_i) - x(t_{i-1})] + v(\underline{p}_i)[y(t_i) - y(t_{i-1})] \}.$$

Látható, hogy megfelelő feltételek esetén a fenti összegek a felosztás finomításával a

$$\int_{\alpha}^{\beta} u(\varphi(t))dx(t) + \int_{\alpha}^{\beta} v(\varphi(t))dy(t)$$

integrálhoz tartanak, így jogos ezt tekinteni a végzett munka értékűnek.

Tömör jelöléssel a végzett munka az  $\int_{\alpha}^{\beta} w(\underline{\varphi})d\underline{\varphi}$  vonalintegrállal számítható ki. Ugyanilyen vonalintegrálra vezet a  $\underline{v}$  sebességvektor  $\underline{\varphi}$  vonal menti integrálja, ami - ha a zárt görbe - az áramlástan cirkulációt eredményezi (v.ö. Zsukovszkij tételével a felhajtóerőről).

## 8.2. Matematikai bevezetés

Legyen  $T \subset \mathbb{C}$  tartomány,  $G$  egy rektifikálható (véges ívhosszú) irányított görbe a  $T$  tartományban, amelynek kezdőpontja  $a$ , végpontja  $b$ , és legyen

$$g: [\alpha, \beta] \mapsto \mathbb{C}$$

a  $G$  görbe egy paraméterezése. Legyen  $f: T \mapsto \mathbb{C}$  folytonos függvény.

Tekintsük a  $G$  görbe egy

$$P = \{a = z_0 \prec z_1 \prec z_2 \dots \prec z_n = b\}$$

felosztását, azaz olyan véges sok pontot a görbén, amelyek az irányítás szerinti rendezés értelmében monoton növekvő. A görbe  $z_k$  és  $z_{k+1}$  pontja közötti ívet a  $\widehat{z_k z_{k+1}}$  jelöli, beosztás finomsága alatt a

$$|P| = \sup(d(\widehat{z_k z_{k+1}}) : k = 0, 1, \dots, n)$$

számot értjük. Válasszunk ki minden egyes ívdarabból egy közbülső  $\gamma_k \in \widehat{z_k z_{k+1}}$  pontot, ezeket röviden jelölje  $\gamma = (\gamma_0, \gamma_1, \dots, \gamma_{n-1})$ . Tekintsük az

$$S(f; \gamma; P) = \sum_{i=1}^n f(\gamma_k)(z_k - z_{k+1})$$

közelítő összeget. Ha létezik olyan  $I$  szám, hogy bármely  $\varepsilon > 0$ -hoz létezik olyan  $\delta > 0$ , hogy ha  $|P| < \delta$ , akkor bármely közbülső  $\gamma$  pontrendszerre  $|S(f; \gamma; P) - I| < \varepsilon$ , akkor az  $f$  függvény a  $G$  görbe mentén integrálható, és az  $I$  számot az  $f$  függvény  $G$  görbe mentén vett integráljának nevezzük. A fenti esetben az  $f$  függvény  $G$  görbén vett vonalintegrálját

$$\int_G f(z)dz \text{ - vel}$$

jelöljük. Ha a  $G$  görbe zárt, akkor az integrálra a

$$\oint_G f(z)dz$$

jelölést is használjuk. A  $G$  görbe mentén integrálható komplex függvényeket  $L(G)$ -vel jelöljük.



8.2.1. **PÉLDA** Tekintsük az  $f(z) = c$  konstans függvényt. Legyen  $a$  és  $b$  a  $G$  görbe kezdő ill. végpontja. Ekkor tetszőleges  $P$  beosztásra és közbülső pontrendszerre

$$S(f; \gamma; P) = c \sum_{i=1}^n f(\gamma_k)(z_k - z_{k+1}) = c(b - a), \text{ azaz}$$

$$\int_G f(z) dz = c(b - a)$$

A Riemann-integrálnál (vonalintegrálnál) látottakhoz hasonlóan igaz az alábbi

8.2.2. **TÉTEL** Legyen  $T \subset \mathbb{C}$  tartomány,  $G$  egy véges ívhosszú (rektifikálható) irányított görbe a  $T$  tartományban és  $f: T \rightarrow \mathbb{C}$  folytonos függvény. Ekkor az  $f$  függvény a  $G$  görbe mentén integrálható.

A komplex görbementi integrál néhány tulajdonsága:

8.2.3. **TÉTEL** Legyen  $T \subset \mathbb{C}$  tartomány,  $G, G_1$  és a  $G_2$  rektifikálható görbék  $T$ -ben,  $f, f_1, f_2: T \rightarrow \mathbb{C}$ , valamint  $c_1, c_2 \in \mathbb{C}$ .

1. Ha  $f_1, f_2 \in L(G)$ , akkor  $c_1 f_1 + c_2 f_2 \in L(G)$ , és

$$\int_G (c_1 f_1(z) + c_2 f_2(z)) dz = \int_G c_1 f_1(z) dz + \int_G c_2 f_2(z) dz.$$

2. Legyen  $G_1$  és  $G_2$  olyan görbék, hogy a  $G_1$  végpontja megegyezik  $G_2$  kezdőpontjával. Tegyük fel, hogy  $f \in L(G_1)$  és  $f \in L(G_2)$ . Ekkor  $f \in L(G_1 + G_2)$ , és

$$\int_{G_1 + G_2} f(z) dz = \int_{G_1} f(z) dz + \int_{G_2} f(z) dz.$$

3. Ha  $f \in L(G)$ , akkor  $f \in L(-G)$ , ahol  $-G$  jelöli a  $G$  görbét az ellentétes irányítással és

$$\int_{-G} f(z) dz = - \int_G f(z) dz.$$

4. Ha  $f \in L(G)$  és  $|f(z)| \leq M$  minden  $z \in G$ -re, akkor  $|\int_G f(z) dz| \leq M l(G)$ , ahol  $l(G)$  a  $G$  görbe ívhossza.

5. Legyen

$$f(z) = u(x, y) + iv(x, y); \text{ ahol } z = x + iy;$$

legyen  $\tilde{G}$  a  $G$  komplex síkbeli görbe valós síkbeli megfeleltetése, azaz ha  $G$  paraméterezése

$$g(t) = x(t) + iy(t), t \in [\alpha, \beta],$$

akkor legyen  $\tilde{G}$  az  $(x(t), y(t))$ ,  $t \in [\alpha, \beta]$  paraméterezéssel meghatározott síkbeli görbe. Ekkor

$$\int_G f(z) dz = \int_{\tilde{G}} (u dx - v dy) + i \int_{\tilde{G}} (v dx + u dy),$$

ahol a jobb oldalon álló integrálok valós vonalintegrálok.

A következő eredmény módszert ad arra, hogyan számíthatjuk ki a komplex integrál értékűt.

**8.2.4. TÉTEL** Legyen  $T \subset \mathbb{C}$  tartomány,  $G$  görbe  $T$ -ben, amelynek paraméteres előállítása a  $g: [\alpha, \beta] \mapsto \mathbb{C}$  folytonosan differenciálható függvény,  $f: T \mapsto \mathbb{C}$  integrálható a  $G$  görbe mentén. Ekkor

$$\int_G f(z) dz = \int_{\alpha}^{\beta} f(g(t)) g'(t) dt.$$

A következő tétel a valós esetben ismert Newton-Leibniz-formula komplex integrálokra vonatkozó megfelelője.

**8.2.5. TÉTEL** Legyen  $f: T \mapsto \mathbb{C}$  holomorf a  $T$  tartományon, amelynek létezik az  $F$  primitív függvénye  $T$ -n, azaz  $F: T \mapsto \mathbb{C}$ , amelyre  $F'(t) = f(t)$ ,  $t \in T$ . Legyen  $G$  görbe, amelynek az  $a$  és  $b$  pont a kezdő ill. végpontja. Ekkor

$$\int_G f(z) dz = F(b) - F(a).$$

A tétel közvetlenül következik a 8.2.4. tételből és a komplex függvény differenciálási szabályából.

**8.2.6. KIDOLGOZOTT FELADAT** Számítsuk ki az

$$\oint_G \frac{1}{z - z_0} dz$$

integrált, ahol  $G$  a  $z_0$  körüli  $r$  sugarú kör pozitív (azaz az óramutató járásával ellentétes) irányítással.

**MEGOLDÁS** Mivel az egységsugarú origó középpontú kör paraméterezése  $\cos t + i \sin t$ ,  $t \in [0, 2\pi]$ , ezért  $G$  egy lehetséges paraméterezése  $g(t) = z_0 + r(\cos t + i \sin t)$ ,  $t \in [0, 2\pi]$ .

A 8.2.4. tétel szerint tehát

$$\begin{aligned} \int_G \frac{1}{z - z_0} dz &= \int_0^{2\pi} \frac{1}{r(\cos t + i \sin t)} r(-\sin t + i \cos t) dt = \\ &= \int_0^{2\pi} \frac{(-\sin t + i \cos t)(\cos t - i \sin t)}{(\cos t + i \sin t)(\cos t - i \sin t)} dt = \int_0^{2\pi} i dt = 2i\pi \end{aligned}$$

□

**8.2.7. KIDOLGOZOTT FELADAT** Számítsuk ki az

$$\int_G (z^2 + z + 1) dz$$

integrált, ahol  $G$  paraméteres előállítása  $g(t) = \cos t + i \sin 3t$ ,  $t \in [0, \pi]$

**MEGOLDÁS** A görbe kezdőpontja  $g(0) = 1$ , végpontja pedig  $g(\pi) = -1$ . Ezért primitív függvényt számítva kapjuk, hogy

$$\int_G (z^2 + z + 1) dz = -\frac{8}{3}.$$

Mivel az  $f(z) = z^2 + z + 1$  integrandus holomorf függvény, ezért az  $1 + i0$ ,  $-1 + i0$  végpontokon átmenő tetszőleges másik görbe esetén az integrál értéke azonos. Például a

$$z = g(t) = \cos t + i \sin t, \quad t \in [0, \pi]$$

félkör menti integrál értéke is  $-\frac{8}{3}$ . □

### 8.3. A Cauchy-féle integráltétel és következményei

Feltesszük, hogy  $T \subset \mathbb{C}$  egy tartomány,  $f: T \rightarrow \mathbb{C}$  holomorf függvény a  $T$ -n. Nagyon fontos a komplex analízisben az egyszeresen összefüggő tartomány fogalma.

Azt mondjuk, hogy egy  $T \subset \mathbb{C}$  tartomány *egyszeresen összefüggő tartomány*, ha a  $T$  határa összefüggő. Megmutatható, hogy ez a tulajdonság például azzal a szemléletes tulajdonsággal ekvivalens, hogy a  $T$ -ben nincsen lyuk illetve, hogy minden  $T$ -ben fekvő zárt görbe belseje is a  $T$ -ben van.

Elsőnek tekintsük a komplex függvénytan egyik alaptételét, a Cauchy-féle integráltételt:

**8.3.1. TÉTEL (CAUCHY-FÉLE INTEGRÁLTÉTEL)** Legyen  $T \subset \mathbb{C}$  egyszeresen összefüggő tartomány,  $f: T \rightarrow \mathbb{C}$  holomorf függvény,  $G$  a  $T$  belsejében haladó zárt rektifikálható görbe. Ekkor

$$\oint_G f(z) dz = 0$$

Megjegyezzük, hogy ha  $T$  nem egyszeresen összefüggő tartomány, akkor a zárt görbe menti integrál általában nem 0. (Lsd. a 8.2.6. Kidolgozott Feladat.)

**8.3.2. KÖVETKEZMÉNY** Az egyszeresen összefüggő  $T$  tartományban holomorf függvény  $T$ -ben haladó görbék menti integráljának értéke csupán a kezdő és végpontoktól függ, az integrációs utat közöttük szabadon választhatjuk a  $T$ -n belül, minden esetben ugyanazt az integrál értéket kapjuk.

**8.3.3. TÉTEL** Legyenek  $G, G_1, \dots, G_n$  rektifikálható egyszerű (azaz nem önmagát metsző) és zárt görbék. Tegyük fel, hogy a  $G_1, \dots, G_n$  görbék mindegyike a  $G$  belsejében halad, de egymásnak a külsejében vannak. Tegyük fel, hogy az a halmaz, amely pontjai a  $G$  zárt görbe belsejének és a  $G_1, \dots, G_n$  zárt görbék külsejének metszetéből áll, része az  $f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  függvény holomorfitási tartományának. Ekkor

$$\oint_G f(z) dz = \oint_{G_1} f(z) dz + \oint_{G_2} f(z) dz + \dots + \oint_{G_n} f(z) dz.$$

Az előbbi állítás speciális eseteként megfogalmazhatjuk a komplex integrál következő tulajdonságát:

**8.3.4. KÖVETKEZMÉNY** Legyen  $G_1$  és  $G_2$  két egyszerű, azonos irányítású zárt görbe  $T$ -ben, amelyre  $G_2$  közrefogja  $G_1$ -et, és a két görbe közötti tartomány egyszeresen összefüggő. Legyen  $f: T \rightarrow \mathbb{C}$  holomorf függvény. Ekkor

$$\oint_{G_1} f(z) dz = \oint_{G_2} f(z) dz.$$

A komplex analízis egyik alaptétele a következő

**8.3.5. TÉTEL** Ha  $f: T \rightarrow \mathbb{C}$  holomorf függvény a  $T$  tartományon, akkor

$$f(z_0) = \frac{1}{2i\pi} \oint_G \frac{f(z)}{z - z_0} dz$$

minden olyan egyszerű, pozitív irányítású zárt  $G$  görbére, amely belsejével együtt benne van  $T$ -ben, és amely a  $z_0$  pontot a belsejében tartalmazza.

**BIZONYÍTÁS** A feltétel szerint  $f$  függvény differenciálható  $z_0$ -ban, ezért annak egy környezetében az

$$\frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}$$

differenciahányados függvény korlátos lesz. Legyen  $\mathbb{C}_r$  a  $z_0$  középpontú  $r$  sugarú kör pozitív irányítással, amely szintén benne van a  $T$  tartományban. A differenciahányados korlátossága miatt

$$0 = \int_G \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} dz = \int_G \frac{f(z)}{z - z_0} dz - \int_G \frac{f(z_0)}{z - z_0} dz = \int_G \frac{f(z)}{z - z_0} dz - f(z_0) \int_{\mathbb{C}_r} \frac{1}{z - z_0} dz$$

amiből következik az állítás, hiszen a 8.2.6. kidolgozott feladat szerint

$$\oint_G \frac{1}{z - z_0} dz = 2i\pi.$$

□

Igaz a Cauchy-féle integráltétel kissé általánosabb formában is:

**8.3.6. KÖVETKEZMÉNY** Ha az  $f$  komplex függvény holomorf a  $z_0$  ponttól megfosztott  $T$  tartományon, és van a  $z_0$  pontnak van olyan  $s$  sugarú  $K \in T$  környezete, hogy

$$|f(z)| < M, \quad z \in K$$

Ekkor

$$\oint_G f(z) dz = 0$$

teljesül minden olyan egyszerű zárt rektifikálható  $G$  görbére, amely belsejével együtt  $T$ -ben fekszik (függetlenül attól, hogy  $G$  megkerüli-e  $z_0$ -t vagy sem).

**BIZONYÍTÁS** Legyen  $0 < p < s$ , és legyen  $\mathbb{C}$  a  $z_0$  középpontú  $p$  sugarú kör. Ekkor a 8.3.4. következmény miatt:

$$\left| \oint_G f(z) dz \right| = \left| \oint_{\mathbb{C}} f(z) dz \right| < M 2p\pi.$$

□

Az állítás következik, ha  $p$ -vel tartunk 0-hoz.

8.3.7. **KIDOLGOZOTT FELADAT** Számítsuk ki az

$$\oint_G \frac{\sin z}{z - i\pi} dz$$

integrált, ahol  $G$  az  $i\pi$  pontot a belsejében tartalmazó pozitív irányítású egyszerű zárt görbe!

**MEGOLDÁS** Az integrandusnak a  $z_0 = i\pi$  pont az egyetlen szinguláris pontja, ezért a Cauchy-féle integrálformula szerint

$$\oint_G \frac{\sin z}{z - i\pi} dz = 2i\pi \sin i\pi.$$

□

8.3.8. **KIDOLGOZOTT FELADAT** Határozzuk meg a  $f: T \rightarrow \mathbb{C} \quad f(z) = \frac{z}{z^2+1}$  függvénynek az  $i\pi$  pont körüli  $\frac{1}{2}$  sugarú pozitív irányítású görbén vett vonalintegrálját!

**MEGOLDÁS** Az integrandusnak a  $z_0 = i\pi$  pont az egyetlen szinguláris pontja, ezért a Cauchy-féle integrálformula szerint

$$\oint_G \frac{z}{z^2+1} dz = -2\pi^2.$$

□

## 9. fejezet

# Komplex Taylor-sor és Laurent-sor

Alapvetően fontos a következő

**9.0.9. TÉTEL** Legyen  $T \subset \mathbb{C}$  tartomány,  $f: T \rightarrow \mathbb{C}$  holomorf függvény. Ekkor  $f$  akárhányszor differenciálható a  $T$  tartományon és bármely  $z_0 \in T$ -re az  $f$  függvény  $z_0$  körüli hatványsorba fejthető, azaz

$$f(z) = f(z_0) + f'(z_0)(z - z_0) + \frac{f''(z_0)}{2!}(z - z_0)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}(z - z_0)^n + \dots \quad (9.1)$$

$z \in K_r(z_0)$ , ahol  $r > 0$  olyan, hogy  $K_r(z_0) = \{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| < r\}$ .

Az előző tételből (is) következik:

**9.0.10. TÉTEL (ÁLTALÁNOS CAUCHY-FÉLE INTEGRÁLFORMULA)** Ha  $f: T \rightarrow \mathbb{C}$  holomorf a  $T$  tartományon, akkor  $f$  akárhányszor differenciálható  $T$ -n, és

$$f^{(n)}(z_0) = \frac{n!}{2i\pi} \oint_G \frac{f(z)}{(z - z_0)^{n+1}} dz$$

minden olyan egyszerű, pozitív irányítású zárt  $G$  görbére, amely belsejével együtt benne van  $T$ -ben, és amely a  $z_0$  pontot a belsejében tartalmazza.

**9.0.11. MEGJEGYZÉS** A 9.0.10. tétel „igazi” komplex analízisbeli állítást takar. A valós analízisbeli tanulmányaink alapján a differenciálhatóság meglepő tulajdonságát tárja fel, ugyanis a fenti állítás a valós analízisben nyilvánvalóan nem teljesül.

**9.0.12. KÖVETKEZMÉNY (LIOUVILLE-TÉTEL)** Ha  $f$  korlátos és az egész komplex számsíkon differenciálható függvény, akkor az  $f$  szükségképpen konstans.

**BIZONYÍTÁS** A 9.0.10. tétel miatt:

$$f'(z_0) = \frac{1}{2i\pi} \oint_G \frac{f(z)}{(z - z_0)^2} dz.$$

Triviális becsléssel adódik, hogy

$$|f'(z_0)| \leq \left| \frac{1}{2i\pi} \right| 2\pi r M \frac{1}{r^2} = \frac{M}{r},$$

ahol  $M$  az  $f$  függvény felső korlátja és  $G := \{z: |z - z_0| = r\}$

Mivel ez minden  $r > 0$  esetén igaz, ezért  $r$ -rel 0-hoz tartva adódik, hogy

$$f'(z_0) = 0 \text{ minden } z_0 \in G \text{ esetén}$$

azaz az  $f$  függvény konstans. □

**9.0.13. KIDOLGOZOTT FELADAT** Számítsuk ki az

$$\oint_G \frac{z}{(z - i\pi)^2}$$

integrált, ahol  $G$  pozitív irányítású egyszerű zárt görbe, amely a  $i\pi$  pontot a belsejében tartalmazza!

**MEGOLDÁS** Legyen  $f(z) = z$ . Ekkor  $f'(z) = 1$ , ezért az általános Cauchy-féle integrálformula szerint

$$\oint_G \frac{z}{(z - i\pi)^2} = 2i\pi. \quad \square$$

A valós hatványsorokra ismert állítások (kivéve a monotonitási feltételeket használó eredményeket) triviális módon kiterjeszthetők komplex hatványsorokra is, mégpedig a bizonyítást triviálisan megismételve úgy, hogy komplex abszolút értéket használunk valós abszolút érték helyett. Így például a valós esethez teljesen hasonlóan definiálható a komplex hatványsor konvergencia tartománya és teljesül a Cauchy-Hadamard-tétel. A valós analízishez teljesen hasonlóan a hatványsor egyenletesen konvergens a konvergenciatartományának minden korlátos, zárt részalmazán. Így például itt az összegfüggvénye folytonos függvény.

Megmutatható, hogy izolált szinguláris pontok környezetében is végtelen sorba fejthető egy komplex függvény, de ekkor negatív kitevő hatványok is szerepelhetnek a végtelen sorban.

**9.0.14. TÉTEL** Legyen  $T \subset \mathbb{C}$  tartomány,  $z_0 \in T$ ,  $f$  holomorf a  $z_0$  ponttól megfosztott  $T$  tartományon. Ekkor

$$f(z) = \dots + c_{-n}(z - z_0)^{-n} + c_{-n+1}(z - z_0)^{-n+1} + \dots + c_{-1}(z - z_0)^{-1} + c_0 + c_1(z - z_0) + \dots + c_n(z - z_0)^n + \dots,$$

ahol  $0 < |z - z_0| < r$  és  $r > 0$  olyan szám, amelyre

$$\{z: |z - z_0| < r\} \subset T,$$

valamint

$$c_n = \frac{1}{2i\pi} \oint_G \frac{f(z)}{(z - z_0)^{n+1}} dz, \quad (9.2)$$

ahol  $G$  olyan  $T$ -ben haladó egyszerű zárt görbe, amely a  $z_0$  pontot pozitív irányban megkerüli.

Az  $f$  függvény (9.2) alakú sorfejtését az  $f$  függvény Laurent-sorának hívjuk. A Laurent-sor fogalmának segítségével osztályozhatjuk a szinguláris pontokat. Legyen  $z_0$  izolált

szinguláris pontja  $f$ -nek. Ekkor  $z_0$  egy környezetében Laurent-sorba fejthető az  $f$  függvény. Három esetet különböztetünk meg:

1. A Laurent sorban minden  $c_n = 0$ , ha  $n$  negatív, azaz

$$f(z) = c_0 + c_1(z - z_0) + c_2(z - z_0)^2 + \dots + c_n(z - z_0)^n + \dots; \text{ alakú } 0 < |z - z_0| < r \text{ esetén}$$

Ekkor  $f$  kiterjeszthető  $z_0$ -ra az  $f(z_0) = c_0$  értékkel, és a kiterjesztett függvény holomorf lesz  $z_0$  egy (kis) környezetében. Ebben az esetben a  $z_0$  pontot megszüntethető szinguláris pontnak nevezzük. (Az elnevezést indokolja, hogy ebben az esetben a szingularitás valóban megszüntethető.)

2. A Laurent-sorban csak véges sok negatív indexű együttható nem nulla, azaz

$$f(z) = c_{-k}(z - z_0)^{-k} + \dots + c_0 + c_1(z - z_0) + c_2(z - z_0)^2 + c_n(z - z_0)^n + \dots; 0 < |z - z_0| < r$$

alakú. Ekkor a  $z_0$  pontot  $k$ -adrendű pólusnak nevezzük.

3. A Laurent-sorban végtelen sok negatív indexű tag együtthatója nem nulla. Ekkor  $z_0$ -t lényeges szinguláris pontnak hívjuk.

A definícióból könnyen igazolható:

**9.0.15. TÉTEL** Az  $f$  függvénynek a  $z_0$  izolált szinguláris pontja  $k$ -adrendű pólus akkor és csak akkor, ha

$$f(z) = \frac{g(z)}{(z - z_0)^k} + \frac{g(z)}{(z - z_0)^{k-1}} + \dots +$$

alakú, ahol  $g$  holomorf függvény a  $z_0$  egy (kis) környezetében.

**9.0.16. KIDOLGOZOTT FELADAT** Számítsuk ki az

$$f(z) = \frac{z + 3i}{z^2 + 1}$$

függvény  $z_0 = -i$  körüli Laurent-sorát!

**MEGOLDÁS** Parciális törtekre bontással kapjuk, hogy

$$f(z) = \frac{z + 3i}{z^2 + 1} = \frac{z + 3i}{(z + i)(z - i)} = \frac{A}{z + i} + \frac{B}{z - i}.$$

Számolással adódik, hogy

$$A = -1 \text{ és } B = 2$$

A geometriai sor összegképletét alkalmazva kapjuk, hogy

$$\frac{2}{z - i} = \frac{2}{z + i - 2i} = -\frac{1}{i} \frac{1}{1 - \frac{z+i}{2i}} = i \sum_{i=0}^{\infty} \left(\frac{z+i}{2i}\right)^n,$$

ahol a sor konvergens, ha

$$|z + i| < 2$$



így a függvény  $z_0 = -i$  körüli Laurent-sora:

$$f(z) = \frac{z+3i}{z^2+1} = -\frac{1}{z+i} + i \sum_{i=0}^{\infty} \left(\frac{z+i}{2i}\right)^n, \text{ ha } |z+i| < 2.$$

A Laurent-sorban a  $c_{-1}$  együttható kitüntetett jelentőségű, ugyanis

$$\int_G f(z) dz = 2i\pi c_{-1}$$

így a függvény görbe menti integrálja a fenti képlettel kiszámítható, ha ismerjük a Laurent-sorban a  $c_{-1}$  együtthatót.  $\square$

A  $c_{-1}$  számot az  $f$  függvény  $z_0$  pontjához tartozó *reziduumának* nevezzük és  $Res(f; z_0)$ -al jelöljük.

A 8.3.3. tétel szemléletesen azt jelenti, hogy ha egy egyszerű zárt  $G$  görbe az  $f$  függvény  $z_1, \dots, z_n$  izolált szinguláris pontjait tartalmazza, akkor a  $z_i$  pontot egy „kis”  $r_i$  sugarú pozitív irányítású  $\mathbb{C}_i$  körrel körbe vesszük, úgy, hogy  $\mathbb{C}_i$  benne van a  $G$  belsejében és a  $\mathbb{C}_i$  kör belsejében már csak  $z_i$  az egyetlen szinguláris pont, akkor a  $G$  görbe menti integrál egyenlő a  $\mathbb{C}_i$  görbe menti integrálok összegével. Ezek viszont a fenti képlet szerint a függvény reziduumai segítségével is kiszámíthatók. Kapjuk tehát a következő tételt:

**9.0.17. TÉTEL** Legyen  $f: T \mapsto \mathbb{C}$  holomorf függvény a  $T$ -n a  $z_1, \dots, z_n$  pontok kivételével,  $G$  egy egyszerű pozitív irányítású zárt görbe  $T$ -ben, amely belsejében tartalmazza a  $z_1, \dots, z_n$  szinguláris pontokat. Ekkor

$$\int_G f(z) dz = 2i\pi \sum_{i=1}^n Res(f; z_i).$$

**9.0.18. KIDOLGOZOTT FELADAT** Számítsuk ki az

$$\oint_G \frac{z+3i}{z^2+1} dz \text{ integrált,}$$

ahol  $G$  a  $-1$ ,  $-2i$  és az  $1$  pontokat összekötő pozitív irányítású zárt görbe!

**MEGOLDÁS** Jelölje

$$f(z) = \frac{z+3i}{z^2+1}$$

Látható, hogy a  $G$  görbe belsejében tartalmazza a  $z_0 = -i$  pontot, az  $f$  függvény (egyik) szinguláris pontját. Így a reziduum tétel miatt:

$$\oint_G \frac{z+3i}{z^2+1} dz = 2i\pi Res(f; -i)$$

Láttuk a 9.0.16. kidolgozott feladatban, hogy

$$Res(f; -i) = -1$$

így

$$\oint_G \frac{z+3i}{z^2+1} = -2i\pi.$$

□

**9.0.19. KIDOLGOZOTT FELADAT** Számítsuk ki

$$f(z) = z \sin \frac{1}{z}$$

*f* függvény  $z_0 = 0$  pontbeli reziduumát!

**MEGOLDÁS** Most célszerűnek látszik kiszámolni az  $f$  függvény  $z_0 = 0$  pontbeli Laurent-sorát.

(Tulajdonképpen elegendő lenne a Laurent-sor  $c_{-1}$  együtthatóját kiszámítani.) Felhasználva a szinuszfüggvény komplex 0-körüli hatványsorát:

$$z \sin \frac{1}{z} = 1 - \frac{1}{3!z^2} + \frac{1}{5!z^4} - \dots$$

Így látható, hogy az  $f$  függvény  $z_0 = 0$  pontbeli Laurent-sorának  $c_{-1}$  együtthatója 0.

□

**9.0.20. KIDOLGOZOTT FELADAT** Számítsuk ki az

$$f(z) = z \cos \frac{1}{z}$$

*f* függvény  $z_0 = 0$  pontbeli reziduumát!

**MEGOLDÁS** A (9.0.18.) Példa megoldásához hasonlóan most is célszerűnek látszik kiszámolni az  $f$  függvény  $z_0 = 0$  pontbeli Laurent-sorát. Felhasználva a koszinuszfüggvény komplex 0-körüli hatványsorát:

$$f(z) = z \cos \frac{1}{z} = z - \frac{1}{2!z} + \frac{1}{4!z^3} - \frac{1}{6!z^5} + \dots +$$

így látható, hogy az  $f$  függvény  $z_0 = 0$  pontbeli Laurent-sorának  $c_{-1}$  együtthatója  $-\frac{1}{2}$ .

□

A következő speciális alakú függvényekre a reziduum egyszerűen kiszámolható:

**9.0.21. TÉTEL** Legyen  $g, h: T \mapsto \mathbb{C}$  holomorf függvény a  $T$ -n és  $z_0 \in T$  olyan, hogy

$$h(z_0) = 0 \text{ és } h'(z_0) \neq 0$$

Ekkor

$$\text{Res}\left(\frac{g}{h}, z_0\right) = \frac{g(z_0)}{h'(z_0)}.$$

**BIZONYÍTÁS** Legyen  $f(z) = (z - z_0) \frac{g(z)}{h(z)}$ . Megmutatható, hogy ekkor

$$\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = \lim_{z \rightarrow z_0} (z - z_0) \frac{g(z)}{h(z)} = \frac{g(z_0)}{h'(z_0)},$$

azaz az  $f$  függvénynek megszüntethető szingularitása van  $z_0$ -ban. De ekkor a  $\frac{g(z)}{h(z)}$  függvénynek  $z_0$  elsőrendű pólusa, így az állítás teljesül.  $\square$

**9.0.22. KIDOLGOZOTT FELADAT** Számítsuk ki az

$$f(z) = \frac{z + 3i}{z^2 + 1}$$

függvény reziduumát a  $z_0 = -i$  pontban!

**MEGOLDÁS** A 9.0.21. tételt alkalmazva a

$$g(z) = z + 3i \text{ és } h(z) = z^2 + 1$$

függvényekre kapjuk:

$$\text{Res}\left(\frac{g}{h}, z_0\right) = \frac{g(z_0)}{h'(z_0)} = -1.$$

(Természetesen összhangban a 9.0.16. kidolgozott feladat megoldásával.)  $\square$

A fenti állításhoz hasonló képlet segítségével kiszámítható a reziduum értéke, ha a függvénynek  $k$ -adrendű pólusa van :

**9.0.23. TÉTEL** Tegyük fel, hogy  $z_0$   $k$ -adrendű pólusa az  $f$  függvénynek. Ekkor

$$\text{Res}(f; z_0) = \frac{g^k(z_0)}{(k-1)!},$$

ahol

$$g(z) = (z - z_0)^k f(z).$$

**BIZONYÍTÁS** Ha  $z_0$   $k$ -adrendű pólusa az  $f$  függvénynek, akkor

$$f(z) = c_{-k}(z - z_0)^{-k} + \dots + c_0 + c_1(z - z_0) + c_2(z - z_0)^2 + c_n(z - z_0)^n + \dots$$

alakú, ezért

$$g(z) = c_{-k} + c_{-k+1}(z - z_0) + \dots + c_{-1}(z - z_0)^{k-1} + \dots$$

Ebből viszont következik az állítás a fentiek alapján.  $\square$

**9.0.24. KIDOLGOZOTT FELADAT** Számítsuk ki az

$$f(z) = \frac{\sin 5z}{(z - i)^4}$$

reziduumát a  $z = i$ -ben!

**MEGOLDÁS** Az  $i$  pontban  $f$ -nek negyedrendű pólusa van, ezért legyen

$$g(z) = (z - i)^4 f(z) = \sin 5z.$$

Ekkor

$$\text{Res}(f; i) = \frac{g^{(4)}(i)}{3!} = \frac{625 \sin 5i}{4!}.$$

$\square$

## 9.1. Konform leképezésekről

Egy holomorf  $\zeta = f(z)$  függvény a  $z = x + iy$  síkot a  $\zeta = \xi + i\eta$  síkra képezi le szög- és aránytartó módon, azaz a  $z$  sík tetszőleges kis elemi sokszögének és e sokszög  $\zeta$  síkbeli leképzettjének szögei azonosak, oldalainak aránya egyenlő. A leképezés szinguláris pontjaiban a szög és aránytartás nem teljesül.

Gyakori alkalmazás, hogy megkeressük a  $z$  komplex számsík valamelyik - pl.  $\Im(z) > 0$  - félsíkját egy adott tartományra leképező függvényt, ekkor a  $z$  sík  $x = \text{állandó}$ , illetve  $y = \text{állandó}$  vonalainak  $z = f^{-1}(\zeta)$  képe a tartomány belsejében (vagy külsejében) haladó - egymásra merőleges - vonalhálózatot eredményez, feltéve hogy létezik az inverz függvény. Ez a vonalhálózat alkalmas például görbe vonalú koordinátarendszer előállítására.

A legáltalánosabb ilyen konform leképezést a  $\zeta$  sík valós tengelyét, illetve annak egy szakaszát az

$$x = F(t), y = G(t)$$

paraméteres alakban adott  $z$  síkbeli zárt  $G$  görbére leképező

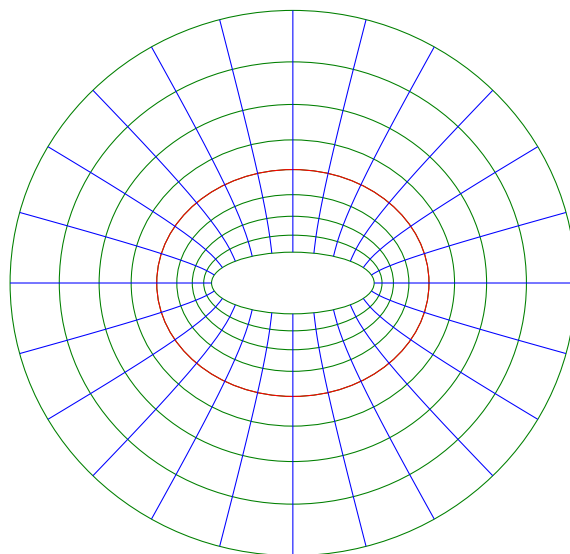
$$z = F(\zeta) + iG(\zeta)$$

függvény adja.

9.1.1. **PÉLDA** Egy origó középpontú ellipszis paraméteres egyenlete

$$x = a \cos t; y = b \sin t; t \in [0, 2\pi]$$

így a  $z = a \cos \zeta + ib \sin \zeta$  függvény az  $i\eta = 0$  helyettesítéssel leképezi a valós  $\xi$  tengelyt az ellipszisére. Valóban,  $z = x + iy = a \cos \xi + ib \sin \xi$  éppen az ellipszis paraméteres egyenlete a  $z$  komplex síkon. A valós tengellyel párhuzamos, de alatta haladó  $\zeta = \xi - i$  egyenes képe a  $z$  síkon egy az eredetnél kisebb tengelyviszonyú zárt görbe. Minél nagyobb a  $\zeta$  egyenes távolsága a valós tengelytől, annál „kerekebb” a képgörbe, fokozatosan körbe megy át.



A képen  $a=2$ ,  $b=1$ . A piros ellipszis a  $\zeta = \xi - i$  egyenes képe. A valós tengely képe a legbelső ellipszis.

## 10. fejezet

### Gyakorló feladatok

10.1.2. **FELADAT** Vizsgálja meg a derivált definíciója alapján, hogy differenciálhatók-e az alábbi függvények!

(a)  $f(z) = z^3$

(b)  $w = z^2$

10.1.3. **FELADAT** A Cauchy–Riemann-féle parciális differenciálegyenletekkel vizsgálja meg a következő függvények differenciálhatóságát!

(a)  $w = z^3 + 2z$

(b)  $w = z^2 - z$

(c)  $w = \frac{1}{z}$

(d)  $w = z\Im z$

10.1.4. **FELADAT** Hol differenciálható a  $w = z^2\Im z$  függvény?

10.1.5. **FELADAT** Hol differenciálható a  $w = z^2\Re z$  függvény?

10.1.6. **FELADAT** Hol differenciálható a

$$w = x^2y^2 + i(y^2 + x^2) \text{ függvény}$$

10.1.7. **FELADAT** Válassza meg a  $c$  számot úgy, hogy a

$$v(x, y) = cx^2 + 2xy - 2y^2$$

függvény egy, az egész komplex számsíkon reguláris  $w = f(z)$  függvény képzetes része legyen! Számoljuk ki a  $f'(-i)$ -t !

10.1.8. **FELADAT**

Határozza meg  $M$  értékűt úgy, hogy a

$$v(x, y) = Mx^2 - y^2 + 2y$$

kétváltozós függvény egy reguláris komplex változós függvény képzetes része legyen!

(b) Határozza meg a komplex változós függvény deriváltját a  $z_0 = 1 + 2i$  helyen!

10.1.9. **FELADAT** Van-e olyan reguláris  $w = f(z)$  függvény, amelynek valós része:

$$u(x, y) = e^{x^2 - y^2} \cos 2xy$$

Ha igen, akkor számítsa ki  $f'(i)$  értékűt!

10.1.10. **FELADAT** Igazolja, hogy az alábbi függvények harmonikusak, azaz létezik olyan reguláris komplex változós függvény, amelynek valós ill. képzetes része! Határozza meg ezen függvények harmonikus társát és írja fel a  $f(z) = u + iv$  módon képzett reguláris függvényt!

(a)  $u(x; y) = \cos 2x \sin 2y$

(b)  $u(x; y) = x^2 - y^2$

(c)  $u(x; y) = x^3 - 3xy^2$

(d)  $v(x; y) = x^2 - y^2 + 2y$

10.1.11. **FELADAT** Legyen adott egy komplex függvény valós része:

$$u(x, y) = \mu(y) \cos x$$

(a) Milyen  $\mu(y)$  függvényre lesz ez egy differenciálható függvény valós része?

(b) Ebben az esetben állítsa elő az  $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$  differenciálható függvényt!

10.1.12. **FELADAT** Mutassa meg, hogy a  $f(z) = az + b$  leképezés egy nyújtás vagy zsugorítás, egy forgatás és egy eltolás szuperpozíciója! Számítsa ki a leképezés fixpontjait! Mikor lesz a leképezés invertálható?

10.1.13. **FELADAT** Mutassa meg, hogy a  $f(z) = iz + i$  függvény által létesített leképezés az  $\Im z > 0$  félsíknak a  $\Re z < 0$  félsíkot felelteti meg!

10.1.14. **FELADAT** Határozza meg a  $w$  síknak azt a tartományát, amelyet a következő függvények által létesített leképezés feleltet meg a  $z$  sík adott tartományának!

(a)  $w = (1 + i)z \quad \Im z > 0$

(b)  $w = 1 + iz \quad \Re z > 0 \text{ és } 0 < \Im z < 2$

(c)  $w = -iz - 1 \quad |z| < 1$

10.1.15. **FELADAT** Mibe viszi át a  $w = \frac{1}{z}$  leképezés a következő görbéket?

1.  $x^2 + y^2 - 4y = 0$

2.  $x^2 + y^2 + 6x = 7$

3.  $y = 6x$

4.  $y = -x + 2$

10.1.16. **FELADAT** Mibe viszi át a

$$w = \frac{1}{z+i}$$

leképezés az  $((x, y) : x > 0, 0 < y < 1)$  tartományt?

10.1.17. **FELADAT** Mibe viszi át a

$$w = i \frac{1-z}{z+i}$$

leképezés az  $x = 0$ ;  $y = 0$  egyeneseket és az  $x^2 + y^2 = 1$  kört?

10.1.18. **FELADAT** Mibe viszi át a

$$w = \frac{2z-4}{z}$$

függvény a  $\Re z > 0$ ,  $\Im z > 0$  tartományt?

10.1.19. **FELADAT** Határozza meg a

$$w = \frac{z-1}{z+a}$$

függvényben az  $a$  konstans értékűt úgy, hogy a függvény a  $|z-i| = 1$  kört egyenesre képezze le!

10.1.20. **FELADAT** Mibe viszi át az adott  $w = f(z)$  függvény az adott tartományt?

(a)  $w = iz + 1 \quad |z-1| < 2$

(b)  $w = 2z + i + 1 \quad \Re z > \Im z$

(c)  $w = (1+i)z \quad |z+2| > 3$

(d)  $w = \frac{2}{z-1} \quad \Im z > 0$

(e)  $w = \frac{z}{z+1} \quad |z| < 2$

(f)  $w = \frac{1+i}{2z} \quad \Re z + 1 < \Im z$

(g)  $w = \frac{z+1}{z-1} \quad \Im z > 0$  ill.  $|z| < 1$

10.1.21. **FELADAT** Bizonyítsa be a következő azonosságokat!

(a)  $e^{z_1+z_2} = e^{z_1} e^{z_2}$

(b)  $e^{z+2\pi} = e^z$

(c)  $\sin^2 z + \cos^2 z = 1$

(d)  $\sin(z_1 + z_2) = \sin z_1 \cos z_2 + \cos z_1 \sin z_2$

(e)  $\cos(z_1 + z_2) = \cos z_1 \cos z_2 - \sin z_1 \sin z_2$

(f)  $sh(z_1 + z_2) = shz_1 chz_2 + chz_1 shz_2$

(g)  $ch(z_1 + z_2) = chz_1 chz_2 + shz_1 shz_2$

10.1.22. **FELADAT** Mutassa meg, hogy

(a)  $\sin iz = ish z$

(b)  $\cos iz = ch z$

(c)  $shiz = i \sin z$

(d)  $chiz = \cos z$

10.1.23. **FELADAT** Írja fel  $w = u(x; y) + iv(x; y)$  alakban az alábbi függvényeket!

(a)  $w = \sin z$

(b)  $w = \cos z$

(c)  $w = sh z$

(d)  $w = ch z$

10.1.24. **FELADAT** Számítsa ki a következő komplex vonalintegrál értékűt!

$$\int_{\gamma} \left( \frac{\sin z}{z(z-1)(z-2)} + z \sin z \right) dz,$$

ahol  $\gamma: = \{z \in \mathbb{C} : |z-1| = \frac{1}{2}\}$  pozitív irányítással.

10.1.25. **FELADAT** Számítsa ki a következő komplex vonalintegrál értékűt!

$$\int_{\gamma} \left( \frac{\cos z}{z(z-1)(z-2)} + z \cos z \right) dz,$$

ahol  $\gamma: = \{z \in \mathbb{C} : |z-1| = \frac{1}{2}\}$  pozitív irányítással.

10.1.26. **FELADAT** Számítsa ki a következő komplex vonalintegrál értékűt!

$$\int_{\gamma} \frac{\bar{z}}{z} + \frac{e^z}{z} dz,$$

ahol  $\gamma: = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$  pozitív irányítással.

10.1.27. **FELADAT** Számítsa ki a következő integrál értékűt!

(a)

$$\int_{\gamma} \frac{\sin 2z}{z^3 + z^2} dz,$$



(b)

$$\int_{\gamma} \frac{\cos 2z}{z^3 + z^2} dz,$$

ahol

$$\gamma: = \{z \in \mathbb{C}: |z| = \frac{1}{2}\}.$$

10.1.28. **FELADAT** Számítsa ki a következő integrál értékűt!

(a)

$$\int_{\gamma} \frac{1}{z^2} \sin z dz,$$

(b)

$$\int_{\gamma} \frac{1}{z^2} \cos z dz,$$

ahol

$$\gamma: = \{z \in \mathbb{C}: |z| = \frac{1}{2}\} \text{ pozitív irányítással.}$$

# 11. fejezet

## Megoldások és eredmények

### MEGOLDÁS (10.1.2. FELADAT)

(a) A valós analízishez hasonlóan, elemi azonosságot felhasználva kapjuk:

$$\lim_{z \rightarrow z_0} \frac{z^3 - z_0^3}{z - z_0} = \lim_{z \rightarrow z_0} (z^2 + zz_0 + z_0^2) = 3z_0^2,$$

azaz a függvény tetszőleges  $z_0$  pontban differenciálható és  $f'(z_0) = 3z_0^2$ .

(b) A valós analízishez hasonlóan, elemi azonosságot felhasználva kapjuk:

$$\lim_{z \rightarrow z_0} \frac{z^2 - z_0^2}{z - z_0} = \lim_{z \rightarrow z_0} (z + z_0) = 2z_0,$$

azaz a függvény tetszőleges  $z_0$  pontban differenciálható és  $f'(z_0) = 2z_0$ . □

### MEGOLDÁS (10.1.3. FELADAT)

(a) A függvény valós és képzetes részét kiszámítva kapjuk

$$u(x, y) = x^3 - 3xy^2 + 2x \text{ illetve } v(x, y) = 3x^2y - y^3 + 2y.$$

Látható, hogy a fenti  $u$  és  $v$  függvény differenciálható valós függvény. Felírva a megfelelő Cauchy–Riemann-féle-parciális differenciálegyenleteket, kapjuk:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 3x^2 - 3y^2 + 2 = \frac{\partial v}{\partial y} = 3x^2 - 3y^2 + 2$$

illetve

$$\frac{\partial u}{\partial y} = -6xy = -\frac{\partial v}{\partial x} = -6xy,$$

azaz a Cauchy–Riemann-féle parciális differenciálegyenletek teljesülnek, így a függvény differenciálható a komplex síkon.

- (b) A függvény valós és képzetes részét kiszámítva kapjuk

$$u(x, y) = x^2 - y^2 - x \text{ illetve } v(x, y) = 2xy - y.$$

Látható, hogy a fenti  $u$  és  $v$  függvény differenciálható valós függvény. Felírva a megfelelő Cauchy–Riemann-féle parciális differenciálegyenleteket, kapjuk:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 2x - 1 = \frac{\partial v}{\partial y} = 2x - 1$$

illetve

$$\frac{\partial u}{\partial y} = -2y = -\frac{\partial v}{\partial x} = -2y,$$

azaz a Cauchy–Riemann-féle parciális differenciálegyenletek teljesülnek, így a függvény differenciálható a komplex síkon.

- (c) Mivel a függvény nincs értelmezve a  $z = 0$ -ban, így itt természetesen nem is lehet differenciálható. A függvény valós és képzetes részét kiszámítva kapjuk:

$$u(x, y) = \frac{x}{x^2 + y^2} \text{ illetve } v(x, y) = -\frac{y}{x^2 + y^2}.$$

Látható, hogy a fenti  $u$  és  $v$  függvény differenciálható a valós számsíkon, ha  $(x, y) \neq (0, 0)$ . Könnyen ellenőrizhetjük, hogy a Cauchy–Riemann-féle parciális differenciálegyenletek teljesülnek az origótól megfosztott komplex síkon, azaz a fenti függvény az értelmezési tartományában mindenütt differenciálható.

- (d) A fentiekhez hasonlóan képezve a függvény valós és képzetes részét:

$$u(x, y) = xy \text{ illetve } v(x, y) = y^2.$$

Látható, hogy a fenti  $u$  és  $v$  függvények differenciálhatók a valós számsíkon, de a Cauchy–Riemann féle parciális differenciálegyenletek nem teljesülnek mindenhol:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = y = \frac{\partial v}{\partial y} = 2y$$

illetve

$$\frac{\partial u}{\partial y} = x = -\frac{\partial v}{\partial x} = 0,$$

azaz a fenti egyenletrendszer csak  $x = y = 0$ -ban teljesül, így a függvény csak a  $z = 0$ -ban differenciálható.  $\square$

**MEGOLDÁS (10.1.4. FELADAT)** A függvény valós és képzetes részét kiszámítva kapjuk

$$u(x, y) = x^2y - y^3 \text{ illetve } v(x, y) = 2xy^2.$$

Látható, hogy a fenti  $u$  és  $v$  függvény differenciálható valós függvény. Felírva a megfelelő Cauchy–Riemann-féle parciális differenciálegyenleteket, kapjuk:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 2xy = \frac{\partial v}{\partial y} = 4xy$$

illetve

$$\frac{\partial u}{\partial y} = x^2 - 3y^2 = -\frac{\partial v}{\partial x} = -2y^2.$$

Megmutatható, hogy a fenti egyenletrendszert csak  $x = y = 0$  teljesíti, így a függvény csak a  $z = 0$ -ban differenciálható.  $\square$

**MEGOLDÁS (10.1.5. FELADAT)** A függvény valós és képzetes részét kiszámítva kapjuk

$$u(x, y) = x^3 - xy^2 \text{ illetve } v(x, y) = 2x^2y.$$

Látható, hogy a fenti  $u$  és  $v$  függvény differenciálható valós függvény. Felírva a megfelelő Cauchy–Riemann-féle parciális differenciálegyenleteket, kapjuk:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 3x^2 - y^2 = \frac{\partial v}{\partial y} = 2x^2$$

illetve

$$\frac{\partial u}{\partial y} = -2xy = -\frac{\partial v}{\partial x} = -4xy.$$

Megmutatható, hogy a fenti egyenletrendszert csak  $x = y = 0$  teljesíti, így a függvény csak a  $z = 0$ -ban differenciálható.  $\square$

**MEGOLDÁS (10.1.6. FELADAT)** A függvény valós és képzetes része:

$$u(x, y) = x^2y^2 \text{ illetve } v(x, y) = x^2 + y^2.$$

Látható, hogy a fenti  $u$  és  $v$  függvény differenciálható valós függvény. Írjuk fel a megfelelő Cauchy–Riemann-féle parciális differenciálegyenleteket. Ekkor

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 2xy^2 = \frac{\partial v}{\partial y} = 2y$$

illetve

$$\frac{\partial u}{\partial y} = 2x^2y = -\frac{\partial v}{\partial x} = -2x.$$

A fenti egyenletrendszert megoldva látható, hogy a a függvény csak  $(0, 0)$  pontban differenciálható.  $\square$

**MEGOLDÁS (10.1.7. FELADAT)** Felírva a megfelelő Cauchy–Riemann-féle parciális differenciálegyenleteket, kapjuk:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} = 2x - 4y$$

illetve

$$\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x} = -2cx - 2y.$$

Az egyenleteket még egyszer  $x$  illetve  $y$ -szerint deriválva, majd összeadva kapjuk:  $2c - 4 = 0$  (Itt felhasználtuk, azt a valós analízisben megismert állítást, hogy ekkor a vegyes parciális deriváltak felcserélhetők.) Így  $c = 2$  esetén a  $v$  az egész komplex számsíkon reguláris  $w = f(z) = u + iv$  függvény képzetes része lesz. Visszafejtve megoldva a Cauchy–Riemann-féle parciális differenciálegyenleteket

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} = 2x - 4y$$

illetve

$$\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x} = -4x - 2y.$$

Az első integrálva  $x$ -szerint (rögzített  $y$  esetén) és behelyettesítve a második egyenletbe:

$$u(x, y) = x^2 - 4xy + g(y) \text{ illetve } -4x + g'(y) = -4x - 2y,$$

azaz

$$g(y) = -y^2 \text{ válasszuk a konstans 0-nak az egyszerűség miatt.}$$

Így kapjuk, hogy a keresett  $f$  függvény:

$$f(z) = u(x, y) + v(x, y) = x^2 - 4xy - y^2 + i(2x^2 + 2xy - y^2).$$

Látható, hogy a fenti  $f$  függvény mindenütt differenciálható és

$$f'(z) = \frac{\partial u}{\partial x} + i \frac{\partial u}{\partial y},$$

azaz speciálisan:

$$f'(-i) = 4 + 2i.$$

Ezzel a feladatot teljesen megoldottuk. □

**MEGOLDÁS (10.1.8. FELADAT)** A 10.1.7. feladat megoldásához hasonlóan: Írjuk fel a megfelelő Cauchy–Riemann-féle parciális differenciálegyenleteket:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} = -2y + 2$$

illetve

$$\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x} = -2Mx.$$

Az egyenleteket még egyszer  $x$  illetve  $y$ -szerint deriválva, majd összeadva kapjuk:  $2M - 2 = 0$  (Itt ismételt felhasználtuk, azt a valós analízisben megismert állítást, hogy ekkor a vegyes parciális deriváltak felcserélhetők.) Így  $M = 1$  esetén a  $v$  az egész komplex számsíkon

reguláris  $w = f(z) = u + iv$  függvény képzetes része lesz. Visszafejtve megoldva a Cauchy–Riemann-féle parciális differenciálegyenleteket

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} = -2y + 2$$

illetve

$$\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x} = -2x.$$

Az első integrálva  $x$ -szerint (rögzített  $y$  esetén) és behelyettesítve a második egyenletbe:

$$u(x, y) = -2xy + 2x + g(y) \text{ illetve } -2x + g'(y) = -2x,$$

azaz  $g(y) = \mathbb{C}$  (válasszuk 0-nak az egyszerűség miatt).

Így kapjuk, hogy a keresett  $f$  függvény:

$$f(z) = u(x, y) + v(x, y) = -2xy + 2x + i(x^2 + 2y - y^2).$$

Látható, hogy a fenti  $f$  függvény mindenütt differenciálható és

$$f'(z) = \frac{\partial u}{\partial x} + i \frac{\partial u}{\partial y},$$

azaz speciálisan:

$$f'(1 + 2i) = -2 - 2i.$$

Ezzel a feladatot teljesen megoldottuk. □

**MEGOLDÁS (10.1.9. FELADAT)** Felírva a megfelelő Cauchy–Riemann-féle parciális differenciálegyenleteket ellentmondásra jutunk, azaz nincs olyan komplex változós differenciálható függvény, amelynek a valós része az  $u$ . □

**MEGOLDÁS (10.1.10. FELADAT)**

(a) Írjuk fel a megfelelő Cauchy–Riemann-féle parciális differenciálegyenleteket:

$$\frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial x} = 2 \operatorname{sh} 2x \sin 2y$$

illetve

$$\frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\partial u}{\partial y} = -2 \operatorname{ch} 2x \cos 2y.$$

Az egyenleteket  $y$  illetve  $x$ -szerint deriválva, majd összeadva kapjuk:

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = 0,$$

azaz létezik olyan komplex változós differenciálható függvény, amelynek a valós része az  $u$ .

Az első integrálva  $y$ -szerint (rögzített  $x$  esetén) és behelyettesítve a második egyenletbe:

$$v(x, y) = -\operatorname{sh} 2x \cos 2y + g(x) \text{ illetve } -2 \operatorname{ch} 2x \cos 2y + g'(y) = -2 \operatorname{ch} 2x \cos 2y,$$

azaz  $g(y) = \mathbb{C}$  (válasszuk 0-nak az egyszerűség miatt).

Így kapjuk, hogy a keresett  $f$  függvény:

$$f(z) = u(x, y) + v(x, y) = -\operatorname{ch} 2x \sin 2y - i \operatorname{sh} 2x \cos 2y.$$

Látható, hogy a fenti  $f$  függvény mindenütt differenciálható.

(b) Írjuk fel a megfelelő Cauchy–Riemann-féle parciális differenciálegyenleteket:

$$\frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial x} = 2x$$

illetve

$$\frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\partial u}{\partial y} = 2y.$$

Az egyenleteket  $y$  illetve  $x$ -szerint deriválva, majd összeadva kapjuk:

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = 0,$$

azaz létezik olyan komplex változós differenciálható függvény, amelynek a valós része az  $u$ .

Az első integrálva  $y$ -szerint (rögzített  $x$  esetén) és behelyettesítve a második egyenletbe:

$$v(x, y) = 2xy + g(x) \text{ illetve } 2x + g'(x) = 2x,$$

azaz  $g(y) = \mathbb{C}$  (válasszuk 0-nak az egyszerűség miatt).

Így kapjuk, hogy a keresett  $f$  függvény:

$$f(z) = u(x, y) + v(x, y) = x^2 - y^2 + 2xyi.$$

Látható, hogy a fenti  $f$  függvény mindenütt differenciálható.

(c) Írjuk fel a megfelelő Cauchy–Riemann-féle parciális differenciálegyenleteket:

$$\frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial x} = 3x^2 - 3y^2$$

illetve

$$\frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\partial u}{\partial y} = 6xy.$$

Az egyenleteket  $y$  illetve  $x$ -szerint deriválva, majd összeadva kapjuk:

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = 0,$$

azaz létezik olyan komplex változós differenciálható függvény, amelynek a valós része az  $u$ .

Az első integrálva  $y$ -szerint (rögzített  $x$  esetén) és behelyettesítve a második egyenletbe:

$$v(x, y) = 3x^2y - y^3 + g(x) \text{ illetve } 6xy + g'(x) = 6xy,$$

azaz  $g(y) = \mathbb{C}$  (válasszuk 0-nak az egyszerűség miatt).

Így kapjuk, hogy a keresett  $f$  függvény:

$$f(z) = u(x, y) + v(x, y) = x^3 - 3xy^2 + i(3x^2y - y^3).$$

Látható, hogy a fenti  $f$  függvény mindenütt differenciálható.

(d) Írjuk fel a megfelelő Cauchy–Riemann-féle parciális differenciálegyenleteket:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} = -2y + 2$$

illetve

$$-\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial v}{\partial x} = -2x.$$

Az egyenleteket  $x$  illetve  $y$ -szerint deriválva, majd összeadva kapjuk:

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = 0,$$

azaz létezik olyan komplex változós differenciálható függvény, amelynek a valós része az  $u$ .

Az első integrálva  $x$ -szerint (rögzített  $y$  esetén) és behelyettesítve a második egyenletbe:

$$u(x, y) = -2xy + 2x + g(y) \text{ illetve } -2x + g'(y) = -2x,$$

azaz  $g(y) = \mathbb{C}$  (válasszuk 0-nak az egyszerűség miatt).

Így kapjuk, hogy a keresett  $f$  függvény:

$$f(z) = u(x, y) + v(x, y) = -2xy + 2x + i(x^2 - y^2 + 2y).$$

Látható, hogy a fenti  $f$  függvény mindenütt differenciálható. □

**MEGOLDÁS (10.1.11. FELADAT)** A megfelelő Cauchy–Riemann-féle parciális differenciálegyenletek teljesülése miatt szükséges, hogy

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = 0,$$

Ebből a  $\mu(y)$ -ra a következő differenciálegyenletet kapjuk

$$\mu(y)'' - \mu(y) = 0$$



A fenti differenciálegyenletnek kettő lényegesen különböző megoldása van:

$$\mu_1(y) = e^y \text{ és } \mu_2(y) = e^{-y}.$$

Írjuk fel a megfelelő Cauchy–Riemann-féle parciális differenciálegyenleteket:

$$\frac{\partial v}{\partial x} = -\mu'_1(y) \cos x$$

illetve

$$\frac{\partial v}{\partial y} = -\mu_1(y) \sin x,$$

Az első (szokásos módon) integrálva  $x$ -szerint (rögzített  $y$  esetén) és behelyettesítve a második egyenletbe:

$$v(x, y) = -e^y \sin x + g(y) \text{ illetve } -e^y \sin x + g'(y) \cos x = -e^y \sin x,$$

azaz  $g(y) = \mathbb{C}$  (válasszuk 0-nak az egyszerűség miatt).

Így kapjuk, hogy a keresett  $f$  függvény:

$$f(x, y) = e^y \cos x - ie^y \sin x.$$

A megfelelő  $\mu_2(y) = e^{-y}$  eset is teljesen hasonlóan tárgyalható. □

**MEGOLDÁS (10.1.12. FELADAT)** Jelölje

$$f_1(z) = |a|f_2(z) \text{ és } f_2(z) = \frac{a}{|a|}z,$$

azaz az  $f$  függvény az origó körüli  $\arg a$  szöggel való elforgatás, az  $|a| : 1$  arányú nagyítás és egy eltolás szuperpozíciója.

A leképezés fixpontja  $az + b = z$ , így  $z = \frac{b}{1-a}$ , ( $a \neq 1$ ). Látható, hogy a leképezés különböző elemekhez különböző elemeket rendel, ezért invertálható, és pedig

$$f^{-1}(z) = \frac{z-b}{a}.$$
□

**MEGOLDÁS (10.1.13. FELADAT)** Látható, hogy

$$f^{-1}(z) = \frac{z-i}{i}.$$

Legyen  $(u, v)$  olyan elem, hogy  $(u + iv) \in f(T)$ .

A feltétel miatt:

$$\Im(f^{-1}(u + iv)) > 0 \text{ ezért } \Im\left(\frac{u + iv}{i}\right) > 0.$$

Mivel

$$f^{-1}(u + iv) = v - 1 - iu$$

így

$$\Im(f^{-1}(u + iv)) = -u.$$

Így  $\Im(f^{-1}(u + iv)) = -u$ . Következésképpen, az  $f^{-1}$  függvény az  $(u, v)$  sík azon tartományára képez, amelyre  $u < 0$ , amit bizonyítani kellett. □

## MEGOLDÁS (10.1.14. FELADAT)

(a)

$$f^{-1}(z) = \frac{z}{1+i}$$

Legyen  $(u, v)$  olyan elem, hogy  $(u + iv) \in f(T)$ . A feltétel miatt:

$$\Im(f^{-1}(u + iv)) > 0 \text{ ezért } \Im\left(\frac{u + iv}{1+i}\right) > 0.$$

Mivel

$$f^{-1}(u + iv) = \frac{u + v}{2} - i(v - u) \text{ így } \Im(f^{-1}(u + iv)) = u - v.$$

Következésképpen, az  $f^{-1}$  függvény az  $(u, v)$  sík azon tartományára képez, amelyre  $u < v$ . Megjegyzés: Ugyanerre az eredményre jutunk, ha felhasználjuk, hogy a komplex számok körében a szorzás forgatva nyújtás.

(b)

$$f^{-1}(z) = \frac{z-1}{i}$$

Az (a) feladat megoldásához hasonlóan legyen  $(u, v)$  olyan elem, hogy  $(u + iv) \in f(T)$ .

A feltétel miatt:

$$\Re(f^{-1}(u + iv)) > 0 \text{ és } 0 < \Im(f^{-1}(u + iv)) < 2.$$

Mivel

$$f^{-1}(u + iv) = v + i(1 - u)$$

így a feltételek miatt:

$$v > 0, 0 < 1 - u < 2,$$

azaz

$$v > 0, -1 < u < 1$$

Megjegyzés: Ugyanerre az eredményre jutunk, ha felhasználjuk, hogy a komplex számok körében a szorzás forgatva nyújtás.

(c)

$$f^{-1}(z) = \frac{z+1}{-i}$$

Az (a) feladat megoldásához hasonlóan legyen  $(u, v)$  olyan elem, hogy  $(u + iv) \in f(T)$ .

A feltétel miatt:

$$|(f^{-1}(u + iv))| < 1$$

Mivel

$$f^{-1}(u + iv) = v - i(1 + u)$$

így a feltételek miatt:

$$(u + 1)^2 + v^2 < 1,$$

azaz a leképezés a  $(z: |z| < 1)$  kört a  $((u, v): (u + 1)^2 + v^2 < 1)$  körre képezi.

Megjegyzés: Ugyanerre az eredményre jutunk, ha felhasználjuk, hogy a komplex számok körében a szorzás forgatva nyújtás.  $\square$

#### MEGOLDÁS (10.1.15. FELADAT)

(a)

$$f^{-1}(z) = \frac{1}{z}$$

A fenti feladatok megoldásához hasonlóan legyen  $(u, v)$  olyan elem, hogy  $(u + iv) \in f(T)$ .

Mivel

$$f^{-1}(u + iv) = \frac{u}{u^2 + v^2} - i \frac{v}{u^2 + v^2},$$

ezért a feltételek miatt:

$$\left(\frac{u}{u^2 + v^2}\right)^2 + \left(\frac{v}{u^2 + v^2}\right)^2 + 4 \frac{v}{u^2 + v^2} = 0$$

azaz így kapjuk, hogy

$$v = -\frac{1}{4}.$$

Következésképpen az  $f(z) = \frac{1}{z}$  függvény a feladatban szereplő kört az  $((u, v): v = -\frac{1}{4})$  egyenesre képezi le.

(b)

$$f^{-1}(z) = \frac{1}{z}.$$

A fenti feladatok megoldásához hasonlóan legyen  $(u, v)$  olyan elem, hogy  $(u + iv) \in f(T)$ .

Mivel

$$f^{-1}(u + iv) = \frac{u}{u^2 + v^2} - i \frac{v}{u^2 + v^2},$$

ezért a feltételek miatt:

$$\left(\frac{u}{u^2 + v^2}\right)^2 + \left(\frac{v}{u^2 + v^2}\right)^2 + 6 \frac{v}{u^2 + v^2} = 7$$

azaz így kapjuk, hogy

$$7u^2 + 7v^2 - 6u - 1 = 0.$$

Következésképpen az  $f(z) = \frac{1}{z}$  függvény a feladatban szereplő kört az

$$((u, v): 7u^2 + 7v^2 - 6u - 1 = 0)$$

körre képezi le.

(c)

$$f^{-1}(z) = \frac{1}{z}.$$

A fenti feladatok megoldásához hasonlóan legyen  $(u, v)$  olyan elem, hogy  $(u + iv) \in f(T)$ .

Mivel

$$f^{-1}(u + iv) = \frac{u}{u^2 + v^2} - i \frac{v}{u^2 + v^2},$$

ezért a feltétel miatt:

$$-\frac{v}{u^2 + v^2} = 6 \frac{u}{u^2 + v^2}$$

azaz így kapjuk, hogy

$$v = -6u.$$

Következésképpen az  $f(z) = \frac{1}{z}$  függvény a feladatban szereplő kört az  $((u, v): v = -6u)$  egyenesre képezi le.

(d)

$$f^{-1}(z) = \frac{1}{z}$$

A fenti feladatok megoldásához hasonlóan legyen  $(u, v)$  olyan elem, hogy  $(u + iv) \in f(T)$ .

Mivel

$$f^{-1}(u + iv) = \frac{u}{u^2 + v^2} - i \frac{v}{u^2 + v^2},$$

ezért a feltétel miatt:

$$-\frac{v}{u^2 + v^2} = -\frac{u}{u^2 + v^2} + 2$$

azaz így kapjuk, hogy

$$-v = -u + 2(u^2 + v^2).$$

Következésképpen az  $f(z) = \frac{1}{z}$  függvény a feladatban szereplő kört az

$$((u, v): 2u^2 + 2v^2 - u + v = 0) \text{ körre képezi le.}$$

□

### MEGOLDÁS (10.1.16. FELADAT)

$$f^{-1}(z) = \frac{1 - iz}{z}$$

A fenti feladatok megoldásához hasonlóan legyen  $(u, v)$  olyan elem, hogy  $(u + iv) \in f(T)$ .

Mivel

$$f^{-1}(u + iv) = \frac{u}{u^2 + v^2} - i \frac{u^2 + v^2 + v}{u^2 + v^2},$$

ezért a feltételek miatt:

$$\frac{u}{u^2 + v^2} > 0, \quad 0 < -\frac{u^2 + v^2 + v}{u^2 + v^2} < 1$$

azaz így kapjuk, hogy

$$u > 0, \quad u^2 + v^2 + v < 0, \quad \text{illetve} \quad u^2 + v^2 + v + 1 > 0.$$

Következésképpen az  $f(z) = \frac{1}{z}$  függvény a feladatban szereplő kört az a fenti egyenlőtlenségnek eleget tevő tartományra képezi.  $\square$

**MEGOLDÁS (10.1.17. FELADAT)** Az előző feladatok megoldása alapján.  $\square$

**MEGOLDÁS (10.1.18. FELADAT)** Az előző feladatok megoldása alapján.  $\square$

**MEGOLDÁS (10.1.19. FELADAT)** Útmutatás: Meghatározzunk 3 pont képét. Mivel törtlineáris leképezés kört vagy körre vagy egyenesre képez, ezért elegendő megvizsgálnunk, hogy ezek a képpontok mikor lesznek egy egyenesen.  $\square$

**MEGOLDÁS (10.1.20. FELADAT)** Egyszerűen megoldhatók az előző feladatok mintájára.  $\square$

**MEGOLDÁS (10.1.21. FELADAT)** A bizonyítandó tulajdonságok egyszerűen következnek a

$$\sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i} \quad \text{illetve} \quad \cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}$$

azonosságokból.  $\square$

**MEGOLDÁS (10.1.22. FELADAT)** A bizonyítandó tulajdonságok egyszerűen következnek a

$$\sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i} \quad \text{illetve} \quad \cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}$$

azonosságokból.  $\square$

**MEGOLDÁS (10.1.23. FELADAT)** Egyszerűen következnek a megfelelő függvények ún. addíciós tételei alapján.  $\square$

**MEGOLDÁS (10.1.24. FELADAT)** Mivel az  $f(z) = z \sin z$  függvény differenciálható az egész komplex síkon, ezért az integrálja 0. Látható, hogy a görbe a  $z = 1$  pontot tartalmazza, amely a függvény izolált szingularitási pontja. A Cauchy-féle integrálkritériumot felhasználva, átalakítva az integrandust:

$$\int_{\gamma} \frac{\frac{\sin z}{z(z-2)}}{z-1} dz = -2\pi i \sin 1$$

így a keresett integrál értéke:  $-2\pi i \sin 1$   $\square$

**MEGOLDÁS (10.1.25. FELADAT)** Mivel a  $f(z) = z \cos z$  függvény differenciálható az egész komplex síkon, ezért az integrálja 0. Látható, hogy a görbe a  $z = 1$  pontot tartalmazza, amely a függvény izolált szingularitási pontja. A Cauchy-féle integrálkritériumot felhasználva, átalakítva az integrandust:

$$\int_{\gamma} \frac{\frac{\cos z}{z(z-2)}}{z-1} dz = -2\pi i \cos 1$$

így a keresett integrál értéke:  $-2\pi i \cos 1$   $\square$

**MEGOLDÁS (10.1.26. FELADAT)** Célszerűnek látszik az integrandust két részre bontani:

$$\int_{\gamma} \frac{\bar{z}}{z} + \frac{e^z}{z} dz = \int_{\gamma} \frac{\bar{z}}{z} dz + \int_{\gamma} \frac{e^z}{z} dz.$$

Az origó középpontú egységsugarú körvonal egy lehetséges paraméterezése:

$$z(t) = \cos t + i \sin t \in [0, 2\pi]$$

így  $z(t) = -\sin t + i \cos t$ ,  $t \in [0, 2\pi]$ , azaz

$$\frac{\bar{z}}{z} = \frac{(\cos t - i \sin t)(-i \sin t + i \cos t)}{\cos t + i \sin t} = \frac{i}{\cos t + i \sin t} = i \cos t + \sin t,$$

azaz

$$\int_{\gamma} \frac{\bar{z}}{z} dz = (i \sin t - \cos t)(2\pi) - (i \sin t - \cos t)(0) = 0.$$

A másik integrálra alkalmazható a Cauchy-féle integráltétel. Az integrandusnak egyetlen szinguláris pontja a  $z = 0$ . Így

$$\int_{\gamma} \frac{e^z}{z} dz = 2\pi i e^0 = 2\pi i$$

így végeredményképpen kapjuk:

$$\int_{\gamma} \frac{\bar{z}}{z} + \frac{e^z}{z} dz = 2\pi i.$$

□

**MEGOLDÁS (10.1.27. FELADAT)**

(a) Látható, hogy a görbe a  $z = 0$  pontot tartalmazza, amely a függvény izolált szingularitási pontja. Így az általánosított Cauchy-féle integrálformula szerint ( $n = 1$ ):

$$\int_{\gamma} \frac{\frac{\sin 2z}{z+1}}{z^2} dz = 2\pi i \left( \frac{\sin 2z}{z+1} \right)'(0) = 4\pi i$$

(b) Látható, hogy a görbe a  $z = 0$  pontot tartalmazza, amely a függvény izolált szingularitási pontja. Így az általánosított Cauchy-féle integrálformula szerint ( $n = 1$ ):

$$\int_{\gamma} \frac{\frac{\cos 2z}{z+1}}{z^2} dz = 2\pi i \left( \frac{\cos 2z}{z+1} \right)'(0) = -\pi i.$$

□

**MEGOLDÁS (10.1.28. FELADAT)**

(a) A reziduúmtételt alkalmazzuk. Ehhez célszerűnek látszik kiszámolni az  $f$  függvény  $z_0 = 0$  pontbeli Laurent-sorát. (Tulajdonképpen elegendő lenne a Laurent-sor  $c_{-1}$  együtthatóját kiszámítani.) Felhasználva a szinuszfüggvény komplex 0-körüli hatványsorát:

$$\frac{\sin z}{z^2} = \frac{1}{z} - \frac{z}{3!} + \dots$$

Így látható, hogy az  $f$  függvény  $z_0 = 0$  pontbeli Laurent-sorának  $c_{-1}$  együtthatója 1, azaz

$$\int_{\gamma} \frac{1}{z^2} \sin z dz = 2\pi i.$$

- (b) A reziduúmtételt alkalmazzuk. Ehhez kiszámoljuk az  $f$  függvény  $z_0 = 0$  pontbeli Laurent-sorát. (Tulajdonképpen most is elegendő lenne a Laurent-sor  $c_{-1}$  együtthatóját kiszámítani.) Felhasználva a koszinuszfüggvény komplex 0-körüli hatványsorát:

$$\frac{\cos z}{z^2} = \frac{1}{z^2} - \frac{1}{2!} + \dots$$

Így látható, hogy az  $f$  függvény  $z_0 = 0$  pontbeli Laurent-sorának  $c_{-1}$  együtthatója 0, azaz

$$\int_{\gamma} \frac{1}{z^2} \sin z dz = 0.$$

□

# A Fourier-sorfejtés és a Laplace-transzformáció

**Lóczy Lajos**

BME Differenciálegyenletek Tanszék

**Konzulens: Huba Antal**

BME Mechatronika, Optika és Gépészeti Informatika Tanszék



## Jelölések, definíciók

Ebben a leírásban szokás szerint  $\mathbb{N} := \{0, 1, 2, \dots\}$  a természetes számokat,  $\mathbb{N}^+$  a pozitív egészeket, míg  $\mathbb{R}$  a valós számokat jelöli. A zárt intervallumokat  $[a, b]$ -vel ( $a < b$ ,  $a, b \in \mathbb{R}$ ), a nyíltakat  $(a, b)$ -vel jelöljük. A komplex számok halmazát  $\mathbb{C}$ , a komplex képzetes egységet pedig  $i$  ( $i^2 = -1$ ) jelöli. Egy  $z = a + bi$  ( $a, b \in \mathbb{R}$ ) komplex szám valós részére a  $\operatorname{Re}(z) = a$ , míg képzetes részére az  $\operatorname{Im}(z) = b$  jelölést fogjuk használni.

Az exponenciális- és az identitásfüggvény változómentes jelölésekor a megszokott  $\exp(x) := e^x$  és  $\operatorname{id}(x) := x$  jelöléseket alkalmazzuk.

Az irodalomban szokásos módon jelölje

$$\mathbf{1}(t) := \begin{cases} 1, & \text{ha } t \in [0, +\infty), \\ 0, & \text{ha } t \in (-\infty, 0) \end{cases}$$

az egységugrás- (angolul *unitstep*), más néven Heaviside-függvényt.

Egy  $g_n : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  függvénysorozat  $n \rightarrow \infty$  esetén *egyenletesen konvergál* egy  $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  függvényhez a  $H \subset \mathbb{R}$  halmazon, ha

$$\sup_{x \in H} |g_n(x) - g(x)| \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty).$$

Az egyenletes konvergencia tehát azt jelenti, hogy a  $g$  függvényt a  $g_n$  függvénysorozat elemei a  $H$  halmazon *egyenletesen jól* közelítik. (Figyeljük meg, hogy ez több annál, mintha csak azt követelnénk meg, hogy minden  $x \in H$  esetén pontonként  $\lim_{n \rightarrow \infty} g_n(x) = g(x)$  legyen: a  $H := (0, 1)$  választás mellett a  $g_n(x) := x^n$  függvénysorozat például minden  $x \in H$  esetén pontonként konvergál a  $g(x) := 0$  függvényhez, ám a konvergencia  $\sup_{x \in (0, 1)} |g_n(x) - g(x)| = 1$  miatt nem egyenletes.)

Emlékeztetünk végül arra, hogy egy  $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  függvénynek valamely  $x \in \mathbb{R}$  pontban *ugrása* van, ha a  $g$  függvény  $x$ -beli bal oldali határértéke,  $g(x-)$  létezik és véges, hasonlóan, az  $x$ -beli jobb oldali határértéke,  $g(x+)$  létezik és véges, de  $g(x-) \neq g(x+)$ .

## 12. fejezet

### A Fourier-sorfejtés

A sorfejtések elmélete arra keresi a választ, hogy egy adott függvényt hogyan lehet bizonyos szempontból egyszerűbb függvényekkel közelíteni: a Taylor-sorok elméletében a kérdés például az, hogy egy (elegendően sokszor differenciálható) függvény hogyan közelíthető polinomokkal, vagyis hogyan írható fel a függvény megfelelő  $x$ -hatványok összegeként.

Fourier-sorfejtés esetén egy adott (nem feltétlenül folytonos, de) *periodikus* függvényt *trigonometrikus függvények* segítségével szeretnénk közelíteni: egy periodikus függvényt a „legegyszerűbb” periodikus függvények összegeként felírni. Bebizonyítható, hogy ezt a célt teljes általánosságban nem lehet megoldani, ám ha a kiindulási periodikus függvények osztályát alkalmasan választjuk meg, akkor ezek körében a Fourier-sorfejtés már elvégezhető. Az idők folyamán a Fourier-sorfejtés (illetve a sorfejtés különféle általánosításait tartalmazó *Fourier-analízis*) az alkalmazott matematika rendkívül hatékony módszercsaládjává vált.

Az alábbiakban először definiáljuk egy függvény Fourier-sorának fogalmát, majd megvizsgáljuk, hogy milyen feltételek mellett konvergál a Fourier-sor az eredeti függvényhez, ezután pedig a Fourier-sorfejtés legfontosabb geometriai tulajdonságaira mutatunk rá. A fejezetet kidolgozott feladatok zárják.

#### 12.1. A klasszikus Fourier-sorfejtés és a pontonkénti konvergencia kérdése

Legyen  $p > 0$  rögzített szám és jelölje  $\mathcal{M}$  az olyan  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  mindenütt értelmezett, véges értékű,  $2p$ -periódusú függvények halmazát, amelyekre az  $\int_{-p}^p (f(x))^2 dx$  Lebesgue-integrál is véges értékű. (A Lebesgue-integrálról itt csak annyit jegyzünk meg, hogy a Riemann-integrál egyik lehetséges általánosítása.)  $\mathcal{M}$  elemeit a továbbiakban *megengedett függvényeknek* fogjuk hívni.

Ismert, hogy

- a  $2p$ -periódusú folytonos vagy szakaszonként folytonos függvények,
- a  $2p$ -periódusú szakaszonként monoton függvények, vagy például
- a  $2p$ -periódusú és a  $[-p, p]$  intervallumon Riemann-integrálható függvények

mindegyike  $\mathcal{M}$ -beli: a megengedett függvények  $\mathcal{M}$  halmaza tehát elegendően bő ahhoz, hogy az alkalmazásokban előforduló valamennyi  $2p$ -periodikus függvényt tartalmazza.

**12.1.1. DEFINÍCIÓ** (A FOURIER-SORFEJTÉS  $n$ -EDIK SZELETE) *Valamely  $f \in \mathcal{M}$  függvény,  $n \in \mathbb{N}^+$  és  $x \in \mathbb{R}$  esetén jelölje*

$$\mathcal{FS}_{f,n}(x) := \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^n \left( a_k \cos\left(\frac{k\pi x}{p}\right) + b_k \sin\left(\frac{k\pi x}{p}\right) \right)$$

*az  $f$  függvény Fourier-sorfejtésének  $n$ -edik szeletét (más néven  $n$ -edik részletösszegét), ahol  $k \in \mathbb{N}$  esetén*

$$a_k := \frac{1}{p} \int_{-p}^p f(x) \cos\left(\frac{k\pi x}{p}\right) dx$$

*és*

$$b_k := \frac{1}{p} \int_{-p}^p f(x) \sin\left(\frac{k\pi x}{p}\right) dx.$$

Az imént definiált  $a_k$  és  $b_k$  számokat az  $f$  függvény *Fourier-együtthatóinak* nevezzük. Figyeljük meg, hogy az  $f$  függvény és a trigonometrikus függvények periodikus volta miatt a Fourier-együtthatók kiszámításakor az  $\int_{-p}^p$  integrálok helyett tetszőleges,  $2p$ -hosszúságú intervallumon vett  $\int_{\alpha}^{\alpha+2p}$  integrálokat ( $\alpha \in \mathbb{R}$ ) is használhatunk, gyakran például a  $[0, 2p]$  intervallumon integrálunk.

**12.1.2. DEFINÍCIÓ** (FOURIER-SORFEJTÉS) *Az  $f$  függvény Fourier-sorfejtésén az*

$$\mathcal{FS}_f(x) := \lim_{n \rightarrow \infty} \mathcal{FS}_{f,n}(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \left( a_k \cos\left(\frac{k\pi x}{p}\right) + b_k \sin\left(\frac{k\pi x}{p}\right) \right)$$

*összeget értjük, minden olyan  $x \in \mathbb{R}$  esetén, amelyre a limesz létezik és véges.*

**12.1.3. MEGJEGYZÉS** Egyszerűen belátható, hogy a fenti  $a_k$  és  $b_k$  együtthatók definíciója miért éppen a fenti formulákkal történt: ha az  $f$  függvény trigonometrikus sor alakjában egyáltalán előállítható, akkor a sor együtthatói csak  $a_k := \frac{1}{p} \int_{-p}^p f(x) \cos\left(\frac{k\pi x}{p}\right) dx$  és  $b_k := \frac{1}{p} \int_{-p}^p f(x) \sin\left(\frac{k\pi x}{p}\right) dx$  lehetnek. *Tegyük fel* ugyanis, hogy az  $f$  függvény valamely  $A_k$  és  $B_k$  valós számokkal ( $k = 0, 1, \dots$ ) előáll

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \left( A_k \cos\left(\frac{k\pi x}{p}\right) + B_k \sin\left(\frac{k\pi x}{p}\right) \right)$$

alakban. Ezt a *feltételezett* egyenlőséget valamely rögzített  $\ell \in \mathbb{N}$  mellett szorozzuk be  $\frac{1}{p} \cos\left(\frac{\ell\pi x}{p}\right)$ -vel és integráljuk  $x$ -szerint  $-p$ -től  $p$ -ig. A bal oldalon nyilván

$$\frac{1}{p} \int_{-p}^p f(x) \cos\left(\frac{\ell\pi x}{p}\right) dx$$

adódik. A jobb oldal kiszámításához *tegyük fel*, hogy a végtelen szummát szabad tagonként integrálni, valamint használjuk fel a közvetlen számolással igazolható

$$\int_{-p}^p \cos\left(\frac{k\pi x}{p}\right) \cdot \frac{1}{p} \cos\left(\frac{\ell\pi x}{p}\right) dx = \begin{cases} 2, & \text{ha } k = \ell = 0 \\ 1, & \text{ha } k = \ell \neq 0 \\ 0, & \text{ha } k \neq \ell \end{cases}$$

és

$$\int_{-p}^p \sin\left(\frac{k\pi x}{p}\right) \cdot \frac{1}{p} \cos\left(\frac{\ell\pi x}{p}\right) dx = 0$$

formulákat. Ekkor a jobb oldalból a beszorzás és integrálás után az  $\ell = 0$  esetben csak  $2A_0$ , míg az  $\ell > 0$  esetben csak  $A_\ell$  marad. Ezzel beláttuk, hogy a fenti két feltevés mellett  $A_0 = \frac{a_0}{2}$  és  $\ell > 0$  esetén  $A_\ell = a_\ell$ .

Teljesen hasonlóan érvelve  $\left(\frac{1}{p} \sin\left(\frac{\ell\pi x}{p}\right)\right)$ -vel beszorzás és  $-p$ -től  $p$ -ig való integrálás után) kapjuk, hogy  $\ell > 0$  esetén  $B_\ell = b_\ell$ . (Mivel  $\sin(0) = 0$ , ezért a  $B_0$  és  $b_0$  együtthatók eleve érdektelenek.) Itt csak azt kell még felhasználni, hogy

$$\int_{-p}^p \sin\left(\frac{k\pi x}{p}\right) \cdot \frac{1}{p} \sin\left(\frac{\ell\pi x}{p}\right) dx = \begin{cases} 0, & \text{ha } k = \ell = 0 \\ 1, & \text{ha } k = \ell \neq 0 \\ 0, & \text{ha } k \neq \ell. \end{cases}$$

Ezzel megmutattuk, hogy az  $a_k$  és  $b_k$  Fourier-együtthatók lényegében csak a 12.1.1. definícióban megadott módon nézhetnek ki.

**12.1.4. MEGJEGYZÉS** Tudjuk, hogy egy páros függvény Taylor-sorfejtése csak páros kitevőjű  $x$ -hatványokat tartalmaz, míg páratlan függvény Taylor-sorában csak páratlan fokszámú  $x$ -hatványok találhatók. Analóg állítás igaz a Fourier-sorfejtésekre is: egyszerűen bizonyítható ugyanis, hogy ha az  $f$  függvény  $2p$ -szerint periodikus *páros* függvény (vagyis  $f(x) = f(-x)$  minden  $x$ -re), akkor az  $\mathcal{FS}_f$  Fourier-sorfejtésben minden  $b_k$  ( $k = 1, 2, \dots$ ) nullával egyenlő, vagyis a sorfejtés csak az  $a_k$  együtthatókat és a koszinuszfüggvényeket tartalmazza. Hasonlóan, ha  $f$  *páratlan* periodikus függvény (vagyis  $f(x) = -f(-x)$  minden  $x$ -re), akkor minden  $a_k$  ( $k = 0, 1, 2, \dots$ ) nulla, és a sorfejtés csak a  $b_k$  együtthatókkal súlyozott szinuszfüggvényekből áll.

A Taylor-sorfejtések elméletéből ismert, hogy egy függvény Taylor-sora bizonyos pontokban divergálhat, illetve a Taylor-sor valamely  $x$  pontbeli konvergenciája nem feltétlenül vonja maga után, hogy a Taylor-sor összege  $f(x)$  lenne.

Hasonló jelenséggel a Fourier-sorok elméletében is találkozhatunk: előfordulhat, hogy akár végtelen sok olyan  $x \in [-p, p]$  pont van, amelyre az  $f$  függvény  $\mathcal{FS}_f(x)$  Fourier-sora divergens, sőt, ez még akkor is bekövetkezhet, ha a függvény *mindenütt* folytonos.

Másrészt, ha valamely  $x$  pontban a Fourier-sor konvergens, akkor sem biztos, hogy  $\mathcal{FS}_f(x) = f(x)$  lenne, azaz a Fourier-sor *nem mindig állítja elő a függvényt*. A gyakorlati alkalmazások szempontjából nagyon fontos annak eldöntése, hogy az  $\mathcal{FS}_f(x) = f(x)$  egyenlőség mely  $x$  pontokban igaz. Az alábbiakban elégséges feltételeket fogalmazunk meg arra vonatkozóan, hogy a Fourier-sor összege az eredeti  $f$  függvény legyen.

12.1.5. **TÉTEL** Ha  $f \in \mathcal{M}$ , továbbá

- i.)  $f$  folytonos  $x$ -ben és  $\mathcal{F}\mathcal{S}_{f,n}(x)$  konvergens (ha  $n \rightarrow \infty$ ), akkor  $\mathcal{F}\mathcal{S}_f(x) = f(x)$ .
- ii.)  $f$  folytonos  $x$ -ben és  $\sum_{k=0}^{\infty}(|a_k| + |b_k|)$  konvergens, akkor  $\mathcal{F}\mathcal{S}_f(x) = f(x)$ .
- iii.)  $f$  differenciálható  $x$ -ben, akkor  $\mathcal{F}\mathcal{S}_f(x) = f(x)$ .
- iv.) a  $[-p, p]$  intervallum felosztható véges sok szakaszra, amelyekre leszűkítve  $f$  monoton és a  $[-p, p]$  intervallumon  $f$  véges sok ugrási hely kivételével folytonos, akkor tetszőleges  $x \in \mathbb{R}$  esetén  $\mathcal{F}\mathcal{S}_f(x) = \frac{f(x-) + f(x+)}{2}$ .
- v.)  $f$  folytonos a  $[-p, p]$  intervallumon és  $\sum_{k=0}^{\infty}(|a_k| + |b_k|)$  konvergens, akkor az egész számegegyenesen  $n \rightarrow \infty$  esetén  $\mathcal{F}\mathcal{S}_{f,n}$  egyenletesen konvergál  $f$ -hez.
- vi.)  $f$  kétszer folytonosan deriválható a  $[-p, p]$  intervallumon, akkor az egész számegegyenesen  $n \rightarrow \infty$  esetén  $\mathcal{F}\mathcal{S}_{f,n}$  egyenletesen konvergál  $f$ -hez.

Megjegyezzük, hogy a tétel valamennyi állítása érvényben marad akkor is, ha a  $[-p, p]$  intervallumot tetszőleges másik,  $2p$ -hosszúságú intervallummal helyettesítjük.

## 12.2. Fourier-sorfejtés Hilbert-terekben

A Fourier-sorfejtés alapvető tulajdonságai közül az alábbi két állítást emeljük ki.

12.2.1. **TÉTEL** (PARSEVAL-FORMULA) Ha  $f \in \mathcal{M}$ , akkor

$$\frac{a_0^2}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k^2 + b_k^2) = \frac{1}{p} \int_{-p}^p (f(x))^2 dx.$$

12.2.2. **TÉTEL** (A FOURIER-SORFEJTÉS MINIMUMTULAJDONSÁGA) Ha  $f \in \mathcal{M}$  és  $n \in \mathbb{N}^+$  rögzített, akkor tetszőleges  $\lambda_k \in \mathbb{R}$  és  $\mu_k \in \mathbb{R}$  ( $k = 0, 1, \dots, n$ ) számok esetén az

$$\int_{-p}^p \left( f(x) - \frac{\lambda_0}{2} - \sum_{k=1}^n \left( \lambda_k \cos\left(\frac{k\pi x}{p}\right) + \mu_k \sin\left(\frac{k\pi x}{p}\right) \right) \right)^2 dx$$

integrál értéke akkor a legkisebb, ha  $\lambda_k = a_k$  és  $\mu_k = b_k$  a 12.1.1. definícióban megadott Fourier-együtthatók, vagyis a minimum értéke  $\int_{-p}^p (f(x) - \mathcal{F}\mathcal{S}_{f,n}(x))^2 dx$ .

A fenti két tétel mondanivalója rögtön szemléletessé válik, ha az  $\mathcal{M}$  függvényhalmazt geometriai struktúrával ruházzuk fel: az  $\mathcal{M}$  halmaz Hilbert-térre tehető. Előkészítésképpen idézzük fel a közönséges háromdimenziós euklideszi tér idevágó tulajdonságait.

Ha szokás szerint  $\langle a, b \rangle$  jelöli két térvektor ( $a, b \in \mathbb{R}^3$ ) skaláris szorzatát,  $|a|$  az  $a$  vektor hosszát, valamint  $e_k$  ( $k = 1, 2, 3$ ) a három kanonikus bázisvektort (azaz  $e_1 = (1, 0, 0)$ ,  $e_2 =$

$(0, 1, 0)$  és  $e_3 = (0, 0, 1)$ ), akkor tudjuk, hogy minden  $v = (v_1, v_2, v_3) \in \mathbb{R}^3$  esetén

- $|v|^2 = \langle v, v \rangle$ ,
- $v_k = \langle v, e_k \rangle$  ( $k = 1, 2, 3$ ), vagyis  $v = \sum_{k=1}^3 \langle v, e_k \rangle e_k$ ,
- a bázisvektorok egységnyi hosszúságúak és merőlegesek egymásra, így nyilván  $\langle e_k, e_\ell \rangle$  értéke 1, ha  $k = \ell$ , egyébként a skaláris szorzat nulla,
- a Pitagorasz-tétel most  $|v|^2 = \sum_{k=1}^3 \langle v, e_k \rangle^2$  alakban is felírható.

Tekintsük továbbá az  $e_1$  és  $e_2$  vektorok által generált  $E_2$  kétdimenziós alteret  $\mathbb{R}^3$ -ban, azaz  $E_2 = \{\lambda e_1 + \mu e_2 : \lambda, \mu \in \mathbb{R}\}$ . Felmerül a kérdés, hogy valamely adott  $v \in \mathbb{R}^3$  vektor esetén melyik lesz az az  $E_2$  altérbeli vektor, amelyik a legjobban közelíti a  $v$  vektort, vagyis milyen  $\lambda \in \mathbb{R}$  és  $\mu \in \mathbb{R}$  választás esetén lesz a  $|v - (\lambda e_1 + \mu e_2)|^2$  távolságnégyzet a legkisebb? A legjobban közelítő  $E_2$ -beli vektor nyilván nem más, mint a  $v$  vektor  $E_2$  síkra vett merőleges vetülete, ami tehát a  $\lambda = \langle v, e_1 \rangle$  és  $\mu = \langle v, e_2 \rangle$  választás esetén adódik.

Térjünk most vissza az  $\mathcal{M}$  függvényhalmazhoz. Egyszerűen bizonyítható, hogy az  $\mathcal{M}$  halmaz a szokásos függvényösszeadással és szám-függvény szorzással *vektortér*, így  $\mathcal{M}$  elemeire gondolhatunk vektorokként is. (Az  $\mathcal{M}$  vektortér dimenziója azonban végtelen.) Belátható, hogy adott  $f \in \mathcal{M}$  és  $g \in \mathcal{M}$  függvény esetén az

$$\langle f, g \rangle := \frac{1}{p} \int_{-p}^p f(x)g(x)dx$$

képlet skaláris szorzást értelmez  $\mathcal{M}$ -en, így az  $\mathcal{M}$  vektorteret *euklideszi térré* tettük: a merőlegesség, a hossz, a távolság és a szög fogalma értelmezhetővé válik  $\mathcal{M}$ -ben. Igazolható, hogy ez a tér *teljes* is, ezért  $\mathcal{M}$ -re azt mondjuk, hogy *Hilbert-tér*.

Ha egy  $f \in \mathcal{M}$  vektor hosszát  $\|f\|$  (olvasd: „ $f$  norma”) jelöli, akkor fennáll, hogy  $\langle f, f \rangle = \|f\|^2 = \frac{1}{p} \int_{-p}^p (f(x))^2 dx$ . (A vektor hosszát, mint nemnegatív *számot* most nem jelölhetjük az  $|f|$  szimbólummal, mivel  $|f|$  szokás szerint azt a *függvényt* jelöli, melynek értéke minden  $x$  pontban  $|f(x)|$ .) Az  $\mathcal{M}$  vektortérben az

$$e_1 := 1/\sqrt{2}, \quad e_{2k} := \cos\left(\frac{k\pi x}{p}\right), \quad e_{2k+1} := \sin\left(\frac{k\pi x}{p}\right)$$

definícióval ( $k = 1, 2, \dots$ ) egy bázist vezethetünk be, amely *ortonormált*, azaz  $\langle e_k, e_\ell \rangle = 0$ , ha  $k \neq \ell$ , míg  $\langle e_k, e_k \rangle = 1$  (lásd a fenti 12.1.3. megjegyzést is). Figyeljük meg, hogy  $k = 1, 2, \dots$  esetén  $\langle f, e_{2k} \rangle = a_k$  és  $\langle f, e_{2k+1} \rangle = b_k$ , valamint  $\langle f, e_1 \rangle = a_0/\sqrt{2}$ . Ebből az következik, hogy egy  $f \in \mathcal{M}$  függvény  $(a_0, a_1, b_1, a_2, b_2, \dots)$  *Fourier-együtthatói éppen az  $f$  vektor koordinátái az  $\{e_k\}_{k=1}^\infty$  bázisban* ( $a_0$  esetében egy számszorozótól eltekintve). Az is látható, hogy a Fourier-sorfejtés  $n$ -edik szelete ( $n \in \mathbb{N}^+$ )

$$\mathcal{FS}_{f,n} = \langle f, e_1 \rangle e_1 + \sum_{k=1}^n \left( \langle f, e_{2k} \rangle e_{2k} + \langle f, e_{2k+1} \rangle e_{2k+1} \right)$$

alakban írható fel. A bázisvektorok ortogonalitását használva egyszerű megfontolásokkal azt kapjuk, hogy

$$\|f\|^2 = \sum_{k=1}^{\infty} \langle f, e_k \rangle^2.$$

Ez a képlet világosan mutatja, hogy a 12.2.1. tételbeli Parseval-formula nem más, mint Pitagorasz tétele az  $\mathcal{M}$  Hilbert-térben.

Végül a 12.2.2. tételbeli minimumtulajdonság geometriai szemléltetéséhez rögzített  $f \in \mathcal{M}$  és  $n \in \mathbb{N}^+$  esetén tekintsük az  $\{e_1, e_2, \dots, e_{2n}, e_{2n+1}\}$  bázisvektorok által kifeszített  $(2n+1)$ -dimenziós  $E_{2n+1} \subset \mathcal{M}$  alteret. Ha  $E_{2n+1}$ -et az

$$E_{2n+1} = \{(\lambda_0/\sqrt{2})e_1 + \sum_{k=1}^n (\lambda_k e_{2k} + \mu_k e_{2k+1}) : \lambda_k, \mu_k \in \mathbb{R}, k = 0, 1, \dots, n\}$$

alakban írjuk fel, akkor azt látjuk, hogy a 12.2.2. tételbeli integrál az  $f$  vektor és az  $E_{2n+1}$  altér távolságát (pontosabban távolságnégyzetének  $p$ -szeresét) méri. A tétel megállapítja, hogy az összes lehetséges  $E_{2n+1}$ -beli  $g$  vektor közül éppen a  $g = \mathcal{FS}_{f,n} \in E_{2n+1}$  választás esetén lesz az  $\|f - g\|^2$  távolságnégyzet minimális. Ez más szavakkal azt jelenti, hogy az  $f$  vektor  $E_{2n+1}$  altérre eső merőleges vetülete az  $\mathcal{FS}_{f,n}$  vektor.

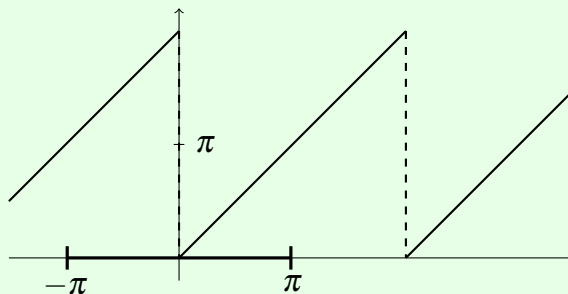
### 12.3. Néhány konkrét függvény Fourier-sorfejtése

Az alábbi kidolgozott feladatok mindegyikében a sorbafejtendő  $f$  függvényt csak egy  $I$  intervallumon adjuk meg képlettel,  $f$  periodikus kiterjesztését  $I$ -ről a teljes számegyenesre külön nem írjuk fel az egyes esetekben. (Az előző jelölésekkel tehát az  $I$  alapintervallum hossza  $2p$ , és a továbbiakban mindig úgy értjük, hogy az  $f$  függvény  $2p$ -periodikus, azaz  $f(x+2p) = f(x)$ , tetszőleges  $x \in \mathbb{R}$  esetén.) A megoldások utáni megjegyzésekben példákat mutatunk arra, hogy néhány egyszerű, nevezetes sor összegét hogyan határozhatjuk meg alkalmas függvények Fourier-sorfejtéséből.

12.3.1. **KIDOLGOZOTT FELADAT** Legyen  $I = [-\pi, \pi)$ . Írjuk fel az

$$f(x) := \begin{cases} x, & \text{ha } x \in [0, \pi), \\ x + 2\pi, & \text{ha } x \in [-\pi, 0) \end{cases}$$

függvény Fourier-sorát és állapítsuk meg, előállítja-e a sor az  $f$  függvényt.



**MEGOLDÁS** Nyilván most  $p = \pi$  és az  $a_k$  Fourier-együtthatókat az  $\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos(kx) dx$  integrálok adják meg. Az  $f$  függvény esetszétválasztással van megadva, ezért az integrálokat is két részre bontva kellene kiszámolni. Az esetszétválasztás azonban most elkerülhető és a számítások némileg lerövidíthetők, ha megfigyeljük, hogy a feladatbeli függvényt a  $[0, 2\pi)$

alapintervallumon egyszerűen az  $f(x) = x$  képlettel értelmezhetjük (lásd a 12.1.1. definíció utáni megjegyzést is). Ha  $k = 0$ , akkor az előbbi észrevétel alapján tehát  $a_0 = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} x dx = \frac{1}{\pi} [x^2/2]_0^{2\pi} = 2\pi$ . Ha  $k > 0$ , akkor parciálisan integrálva

$$a_k = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} x \cos(kx) dx = \frac{1}{\pi} \left[ x \frac{\sin(kx)}{k} \right]_0^{2\pi} - \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} 1 \cdot \frac{\sin(kx)}{k} dx =$$

$$\frac{1}{\pi} \left( 2\pi \cdot \frac{\sin(2\pi k)}{k} - 0 \right) - \frac{1}{\pi} \left[ \frac{-\cos(kx)}{k^2} \right]_0^{2\pi} = 0,$$

hiszen tetszőleges  $k$  egész szám esetén  $\sin(2\pi k) = 0$  és  $\cos(2\pi k) = \cos(0) = 1$ .

Nyilván  $b_0 = 0$ . (Ez egyébként mindig igaz.) A többi  $b_k$  ( $k = 1, 2, \dots$ ) együttható kiszámításához integráljunk ismét parciálisan:

$$b_k = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} x \sin(kx) dx = \frac{1}{\pi} \left[ x \frac{-\cos(kx)}{k} \right]_0^{2\pi} - \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} 1 \cdot \frac{-\cos(kx)}{k} dx =$$

$$\frac{1}{\pi} \left( 2\pi \cdot \frac{-\cos(2\pi k)}{k} - 0 \right) - \frac{1}{\pi} \left[ \frac{-\sin(kx)}{k^2} \right]_0^{2\pi} = -\frac{2}{k},$$

felhasználva ismét, hogy  $k \in \mathbb{N}$  esetén  $\cos(2\pi k) = 1$  és  $\sin(2\pi k) = 0$ .

Sikerült  $f$  Fourier-sorát meghatározni, azt kaptuk tehát, hogy

$$\mathcal{FS}_f(x) = \pi - 2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin(kx)}{k}.$$

(Figyeljünk arra, hogy az  $a_0$  együtthatót 2-vel el kellett osztani.) Térjünk most rá a konvergencia kérdésére. Az eddigiekből közvetlenül nem látható, hogy az imént felírt végtelen sor mely  $x \in I$  pontokban konvergens, és ahol konvergens, mi a sor összege. Hívjuk segítségül a 12.1.5. tételt. Mivel  $f$  szakaszonként folytonos függvény, ezért  $f$  megengedett függvény, azaz  $f \in \mathcal{M}$ . De  $f$  monoton is a  $[0, 2\pi)$  intervallumon, ezért a 12.1.5. tétel iv.) pontja szerint  $\mathcal{FS}_f(x) = \frac{f(x-) + f(x+)}{2}$ . Mivel  $f$  folytonos  $[0, 2\pi)$  belsőjében, vagyis a  $(0, 2\pi)$  nyílt intervallumon, ezért ezekben a pontokban nyilván  $f(x-) = f(x+) = f(x)$ , azaz  $\frac{f(x-) + f(x+)}{2} = f(x)$ . Ha viszont  $x = 0$ , akkor  $f(0-) = 2\pi$ ,  $f(0+) = 0$ , vagyis  $\frac{f(0-) + f(0+)}{2} = \pi$ . Az eddigieket összefoglalva,  $f$  Fourier-sora az alábbi függvényt állítja elő:

$$\pi - 2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin(kx)}{k} = \begin{cases} x, & \text{ha } x \in (0, 2\pi), \\ \pi, & \text{ha } x = 0. \end{cases}$$

□

**12.3.2. MEGJEGYZÉS** A  $\pi - 2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin(kx)}{k}$  sor konvergenciáját és összegfüggvényét a 12.1.5. tétel i.) pontja alapján nyilván nem tudjuk eldönteni, illetve meghatározni. Nem segít a ii.) és v.) pont sem, hiszen  $\sum_{k=0}^{\infty} (|a_k| + |b_k|) = 2\pi + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2}{k} = \infty$ . A vi.) pont azért nem alkalmazható, mert  $f$  nem deriválható a 0-ban (hiszen ott még csak nem is folytonos). Viszont  $f$  deriválható a  $(0, 2\pi)$  intervallumon (hiszen lineáris), ezért itt iii.) alapján  $\mathcal{FS}_f(x) = f(x)$ , ha  $x \in (0, 2\pi)$ . (A iii.) pont nem alkalmazható  $x = 0$ -ban, ám itt a sor konvergenciája és a sor összege közvetlenül megállapítható.)



12.3.3. **MEGJEGYZÉS** A 12.3.1. kidolgozott feladat eredményének felhasználásával könnyen kiszámíthatjuk például a

$$\frac{\sin(1)}{1} + \frac{\sin(2)}{2} + \frac{\sin(3)}{3} + \frac{\sin(4)}{4} + \dots$$

sor összegét, hiszen ez a végtelen összeg nem más, mint a  $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin(kx)}{k}$  sor értéke az  $x = 1$  helyen. A 12.3.1. feladatban láttuk, hogy ha  $x \in (0, 2\pi)$ , akkor  $\pi - 2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin(kx)}{k} = x$ . Ebből egyszerű átrendezéssel kapjuk, hogy  $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin(k)}{k} = \frac{\pi-1}{2}$ . (A  $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin(k)}{k}$  sor konvergenciáját egyébként nem tudjuk megállapítani sem a hányados-, sem a gyök-, sem a Leibniz-kritérium segítségével. Az ún. Dirichlet-kritérium viszont alkalmazható, és azt mutatja, hogy a sor konvergens. A sor összegét persze egyik konvergenciakritérium sem adja meg.)

12.3.4. **MEGJEGYZÉS** A 12.3.1. kidolgozott feladat segítségével az

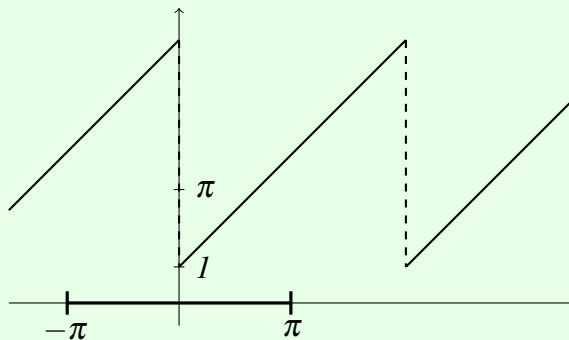
$$\frac{1}{1} - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \frac{1}{11} \pm \dots$$

sor összege szintén egyszerűen meghatározható. A Leibniz-kritérium alapján világos, hogy a szóban forgó  $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2k+1}$  sor konvergens (de nem abszolút konvergens). Láthatjuk, hogy a 12.3.1. feladatban most az  $x = \pi/2$  helyettesítés a célravezető, hiszen  $\frac{\sin(k\pi/2)}{k} = 1$ , ha  $k$  olyan páratlan szám, amely 4-gyel maradékosan osztva 1-et ad maradékul, továbbá  $\frac{\sin(k\pi/2)}{k} = -1$ , ha  $k$  olyan páratlan szám, amely 4-gyel maradékosan osztva 3-at ad maradékul, míg  $\frac{\sin(k\pi/2)}{k} = 0$ , ha  $k$  páros szám. Emiatt  $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2k+1} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin(k\pi/2)}{k}$ . Mivel  $\frac{\pi}{2} \in (0, 2\pi)$ , ezért a 12.3.1. feladat szerint  $\pi - 2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin(k\pi/2)}{k} = \frac{\pi}{2}$ , vagyis  $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2k+1} = \frac{\pi}{4}$ .

12.3.5. **KIDOLGOZOTT FELADAT** Legyen  $I = [-\pi, \pi)$ . Írjuk fel az

$$f(x) := \begin{cases} x+1, & \text{ha } x \in [0, \pi), \\ x+2\pi+1, & \text{ha } x \in [-\pi, 0) \end{cases}$$

függvény Fourier-sorát és állapítsuk meg, hol állítja elő a sor az  $f$  függvényt.



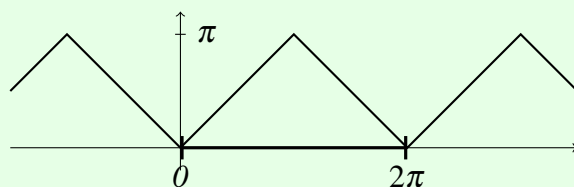
**MEGOLDÁS** Vegyük észre, hogy ez a függvény nem más, mint a 12.3.1. feladatbeli függvény 1-gyel felfelé eltolva. Jelöljük a 12.3.1. feladatbeli függvényt  $\tilde{f}$ -mal, Fourier-együtthatóit

pedig  $\tilde{a}_k, \tilde{b}_k$ -mal ( $k = 0, 1, \dots$ ). Ekkor  $f = \tilde{f} + 1$ . Ebből a Fourier-együtthatók definíciója alapján egyszerűen láthatjuk, hogy  $a_0/2 = \tilde{a}_0/2 + 1$ ,  $a_k = \tilde{a}_k$  ( $k = 1, 2, \dots$ ) és  $b_k = \tilde{b}_k$  ( $k = 1, 2, \dots$ ), vagyis  $\mathcal{FS}_f(x) = \mathcal{FS}_{\tilde{f}}(x) + 1$ . Ez a tulajdonság általánosabban is igaz: ha  $c$  tetszőleges valós konstans, akkor  $\mathcal{FS}_{f+c}(x) = \mathcal{FS}_f(x) + c$ .  $\square$

**12.3.6. KIDOLGOZOTT FELADAT** Legyen  $I = [0, 2\pi)$ . Fejtsük Fourier-sorba az

$$f(x) := \begin{cases} x, & \text{ha } x \in [0, \pi], \\ 2\pi - x, & \text{ha } x \in [\pi, 2\pi) \end{cases}$$

függvényt és állapítsuk meg, hol állítja elő a sor  $f$ -et.



**MEGOLDÁS** Az  $f$  függvény páros, ezért minden  $b_k$  együttható zérus. A kidolgozott feladatban  $p = \pi$ . Mivel  $f$  esetszétválasztással van megadva, így az integrálokat is két részre bontjuk:

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) dx = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} x dx + \frac{1}{\pi} \int_{\pi}^{2\pi} (2\pi - x) dx = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} = \pi,$$

továbbá  $k \in \mathbb{N}^+$  esetén

$$a_k = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \cos(kx) dx = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} x \cos(kx) dx + \frac{1}{\pi} \int_{\pi}^{2\pi} (2\pi - x) \cos(kx) dx =$$

$$= (\text{parciálisan integrálva}) = \frac{1}{\pi} \left[ \frac{\cos(kx)}{k^2} + \frac{x \sin(kx)}{k} \right]_0^{\pi} +$$

$$\frac{1}{\pi} \left[ \frac{-\cos(kx)}{k^2} + \frac{2\pi \sin(kx)}{k} - \frac{x \sin(kx)}{k} \right]_{\pi}^{2\pi} = (\text{felhasználva, hogy } \sin(\ell\pi) = 0$$

$$\text{és } \cos(2\ell\pi) = 1, \text{ tetszőleges } \ell \text{ egész szám esetén}) = \frac{1}{\pi} \cdot \frac{\cos(k\pi) - 1 - 1 + \cos(k\pi)}{k^2}.$$

Ez utóbbi kifejezés páros  $k$  esetén 0, páratlan  $k$  esetén pedig  $-\frac{4}{\pi k^2}$ , tehát a  $k = 2m$  és  $k = 2m + 1$  ( $m \in \mathbb{N}$ ) eseteket kettébontva azt nyerjük, hogy

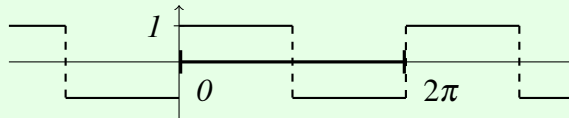
$$\mathcal{FS}_f(x) = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\cos((2m+1)x)}{(2m+1)^2}.$$

A 12.1.5. tétel iv.) pontja szerint  $f$  imént felírt Fourier-sora minden  $x \in [0, 2\pi)$  pontban konvergens és előállítja a függvényt, vagyis  $\mathcal{FS}_f(x) = f(x)$ .  $\square$

12.3.7. **KIDOLGOZOTT FELADAT** Legyen  $I = [0, 2\pi)$ . Írjuk fel az

$$f(x) := \begin{cases} 1, & \text{ha } x \in [0, \pi), \\ -1, & \text{ha } x \in [\pi, 2\pi) \end{cases}$$

függvény Fourier-sorát és állapítsuk meg, hol állítja elő a sor az  $f$  függvényt.



**MEGOLDÁS** Az  $f$  függvény a  $(-\pi, \pi) \setminus \{0\}$  intervallumon páratlan, ezért Fourier-sorában minden  $a_k = 0$ . (A paritásvizsgálatkor  $f$  periodikussága miatt az  $I$  intervallumot nyilván eltolhatjuk, illetve véges sok pontjától eltekinthetünk, hiszen egy függvény integrálja nem változik meg, ha az integrálási intervallumból véges sok pontot kihagyunk.) Tetszőleges  $k \in \mathbb{N}^+$  esetén

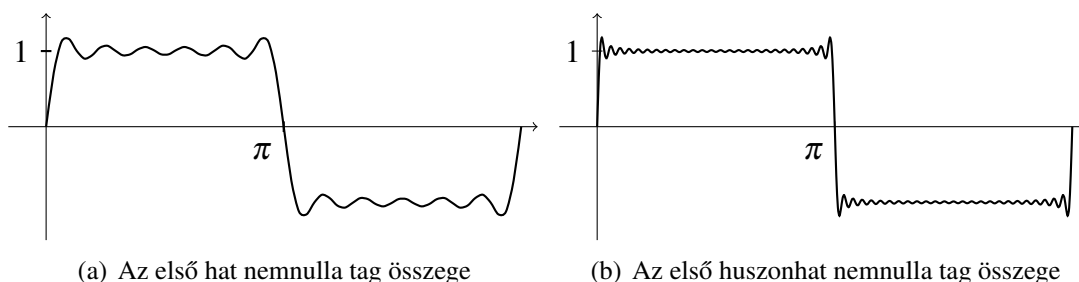
$$\begin{aligned} b_k &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \sin(kx) dx = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \sin(kx) dx + \frac{1}{\pi} \int_{\pi}^{2\pi} -\sin(kx) dx = \\ &= \frac{1}{\pi} \left[ \frac{-\cos(kx)}{k} \right]_0^{\pi} + \frac{1}{\pi} \left[ \frac{\cos(kx)}{k} \right]_{\pi}^{2\pi}. \end{aligned}$$

Ebből az alakból láthatjuk, hogy páros  $k$  esetén  $b_k = 0$ , míg páratlan  $k$  esetén  $b_k = \frac{4}{\pi k}$ , így

$$\mathcal{FS}_f(x) = \frac{4}{\pi} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\sin((2m+1)x)}{(2m+1)}.$$

A 12.1.5. tétel iv.) pontja szerint  $f$  Fourier-sora minden  $x \in [0, 2\pi)$  pontban konvergens és  $f$  folytonossági pontjaiban előállítja a függvényt, vagyis ha  $x \in (0, \pi) \cup (\pi, 2\pi)$ , akkor  $\mathcal{FS}_f(x) = f(x)$ , míg a szakadási pontokban, vagyis ha  $x = 0$  vagy  $x = \pi$ , akkor  $\mathcal{FS}_f(x) = 0$ .  $\square$

12.3.8. **MEGJEGYZÉS** Ezen az egyszerű példán jól szemléltethető az ún. **Gibbs–Wilbraham-jelenség**. Eleinte – az 1800-as évek második felében, amikor a Fourier-sorok konvergencia-kérdései még számos ponton tisztázatlanok voltak – tévesen azt gondolták, hogy az  $\mathcal{FS}_{f,n}$  Fourier-részletösszegek **egyenletesen konvergálnak** az  $f$  függvényhez annak folytonossági pontjaiban, vagyis az  $n$ -edik részletösszeg és a függvény legnagyobb eltérése pl. a  $(0, \pi)$  intervallumon 0-hoz tart, ha  $n \rightarrow \infty$ . Noha numerikus számításai nagyon pontosak voltak, meglepetésükre mégis azt tapasztalták, hogy a  $(0, \pi)$  intervallumon elkövetett maximális hiba,  $\sup_{x \in (0, \pi)} |\mathcal{FS}_{f,n}(x) - f(x)|$  nem tart 0-hoz  $n \rightarrow \infty$  esetén, pedig minden rögzített  $x \in (0, \pi)$  esetén  $\mathcal{FS}_{f,n}(x) \rightarrow f(x)$ , ha  $n \rightarrow \infty$ . Grafikusan ez a jelenség úgy nyilvánul meg, hogy az  $\mathcal{FS}_{f,n}$  függvény pl. az  $x = 0$  ponttól jobbra legközelebb eső lokális maximumhelyén felvett értéke nem tart 1-hez, amint  $n \rightarrow \infty$ . Másképp fogalmazva, a szakadási hely közelében a Fourier-részletösszegek „túlhullámoznak” az  $f$  függvényen és ezek az oszcillációk nem halnak el  $n \rightarrow \infty$  esetén sem.

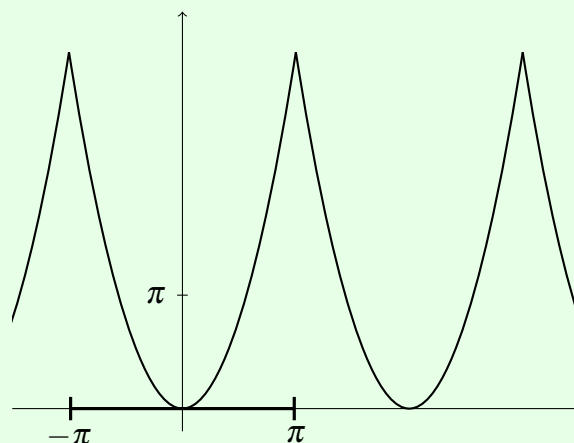


A numerikus számítások azt mutatják, hogy ebben a példában az  $\mathcal{FS}_{f,n}$  részletösszeg maximális eltérése az  $f$  függvénytől a  $(0, \pi)$  intervallumon egy konstanshoz, kb. 0,17898-hoz tart, amint  $n \rightarrow \infty$ . Gibbs bebizonyította, hogy a példánkban a legnagyobb túllengés értéke

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{x \in (0, \pi)} |\mathcal{FS}_{f,n}(x) - f(x)| = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi \frac{\sin(t)}{t} dt - 1 = 0,17897974 \dots$$

Megjegyezzük, hogy a Gibbs-jelenség általános: minden, szakaszonként folytonosan deriválható függvény ugrási helyének közelében hasonló oszcillációt tapasztalunk, vagyis a Fourier-sor konvergenciája ezekben az esetekben sosem egyenletes.

**12.3.9. KIDOLGOZOTT FELADAT** Legyen  $I = [-\pi, \pi]$ . Írjuk fel az  $f(x) := x^2$  függvény Fourier-sorát és állapítsuk meg, hol állítja elő a sor az  $f$  függvényt.



**MEGOLDÁS** Az  $f$  függvény páros, ezért  $b_k = 0$  ( $k \in \mathbb{N}$ ), továbbá nyilván  $a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x^2 dx = \frac{2\pi^2}{3}$ . A többi  $a_k$  együtthatót kétszeres parciális integrálással számíthatjuk ki:

$$\begin{aligned} a_k &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x^2 \cos(kx) dx = \frac{1}{\pi} \left[ x^2 \cdot \frac{\sin(kx)}{k} \right]_{-\pi}^{\pi} - \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} 2x \frac{\sin(kx)}{k} dx = \\ &= \frac{1}{\pi} (0 - 0) - \frac{2}{\pi k} \left( \left[ x \cdot \frac{-\cos(kx)}{k} \right]_{-\pi}^{\pi} - \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{-\cos(kx)}{k} dx \right) = \end{aligned}$$

$$\frac{2}{\pi k^2} [x \cos(kx)]_{-\pi}^{\pi} - \frac{2}{\pi^2 k^2} \left[ \frac{\sin(kx)}{k} \right]_{-\pi}^{\pi} = \frac{2}{\pi k^2} [x \cos(kx)]_{-\pi}^{\pi} - 0 =$$

$$\frac{2}{\pi k^2} (\pi \cos(k\pi) + \pi \cos(-k\pi)) = \frac{4 \cos(k\pi)}{k^2} = \frac{4 \cdot (-1)^k}{k^2}.$$

Azt kaptuk tehát, hogy

$$\mathcal{FS}_f(x) = \frac{\pi^2}{3} + 4 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k^2} \cos(kx),$$

továbbá a 12.1.5. tétel iv.) pontja szerint  $f$  Fourier-sora minden  $x \in [-\pi, \pi)$  pontban konvergens és  $\mathcal{FS}_f(x) = f(x)$ .  $\square$

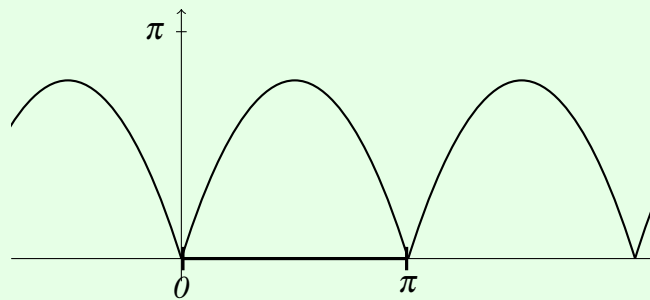
12.3.10. **MEGJEGYZÉS** Mivel  $\sum_{k=0}^{\infty} (|a_k| + |b_k|) = \frac{2\pi^2}{3} + 4 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$ , és ismert, hogy ez utóbbi sor konvergens, ezért (figyelembe véve  $f$  folytonosságát is) a 12.1.5. tétel v.) pontja szerint  $f$  Fourier-sora az egész számegyenesen egyenletesen konvergál az  $f$  függvényhez: ebben a feladatban tehát nem lép fel a **Gibbs-jelenség**.

12.3.11. **MEGJEGYZÉS** Az

$$\frac{1}{1^2} - \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} - \frac{1}{4^2} + \frac{1}{5^2} - \frac{1}{6^2} \pm \dots$$

sor összegét a feladatbeli függvény Fourier-sorfejtésével ki tudjuk számítani, csupán az  $x = 0$  pontban kell azt kiértékelni. Mivel igazoltuk, hogy minden  $x \in [-\pi, \pi)$  esetén  $\mathcal{FS}_f(x) = f(x)$ , ezért speciálisan  $\mathcal{FS}_f(0) = f(0)$ , vagyis  $\frac{\pi^2}{3} + 4 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k^2} = 0^2$  is igaz. Ebből átrendezéssel azt nyerjük, hogy a kérdéses  $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k^2}$  összeg  $\frac{\pi^2}{12}$ -vel egyenlő.

12.3.12. **KIDOLGOZOTT FELADAT** Legyen  $I = [0, \pi)$ . Írjuk fel az  $f(x) := x(\pi - x)$  függvény Fourier-sorát és állapítsuk meg, hol állítja elő a sor az  $f$  függvényt.



**MEGOLDÁS** Az  $f$  függvény páros, tehát  $b_k = 0$  ( $k \in \mathbb{N}$ ). Most  $p = \frac{\pi}{2}$ , ezért

$$a_0 = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} x(\pi - x) dx = \frac{2}{\pi} \left[ \frac{\pi x^2}{2} - \frac{x^3}{3} \right]_0^{\pi} = \frac{\pi^2}{3},$$

továbbá  $k \geq 1$  esetén

$$a_k = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} x(\pi - x) \cos(2kx) dx = (\text{két parciális integrálás elvégzése után}) =$$

$$\left[ \frac{\cos(2kx)}{2k^2} - \frac{x \cos(2kx)}{k^2 \pi} + \frac{\sin(2kx)}{2k^3 \pi} + \frac{x \sin(2kx)}{k} - \frac{x^2 \sin(2kx)}{k \pi} \right]_0^\pi =$$

$$\frac{\cos(2k\pi)}{2k^2} - \frac{\pi \cos(2k\pi)}{k^2 \pi} - \frac{\cos(0)}{2k^2} = -\frac{1}{k^2},$$

amiből azt kapjuk, hogy

$$\mathcal{FS}_f(x) = \frac{\pi^2}{6} - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos(2kx)}{k^2}.$$

A 12.1.5. tétel iv.) pontja szerint  $f$  Fourier-sora minden  $x \in I$  esetén konvergens és  $\mathcal{FS}_f(x) = f(x)$ .  $\square$

12.3.13. **MEGJEGYZÉS** Az

$$\frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{5^2} + \frac{1}{6^2} + \dots$$

sor összegének meghatározásához értékeljük ki a feladatban nyert  $\mathcal{FS}_f(x) = f(x)$  egyenlőséget  $x = 0$ -ban, ekkor

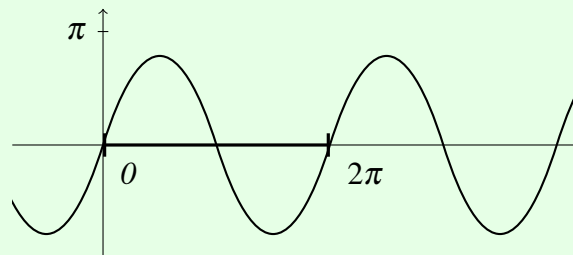
$$\mathcal{FS}_f(0) = \frac{\pi^2}{6} - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} = f(0) = 0,$$

s így megkaptuk a nevezetes  $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}$  összefüggést.

12.3.14. **KIDOLGOZOTT FELADAT** Legyen  $I = [0, 2\pi)$ . Írjuk fel az

$$f(x) := \begin{cases} x(\pi - x), & \text{ha } x \in [0, \pi), \\ (\pi - x)(2\pi - x), & \text{ha } x \in [\pi, 2\pi) \end{cases}$$

függvény Fourier-sorát és állapítsuk meg, hol állítja elő a sor az  $f$  függvényt.



**MEGOLDÁS** Az  $f$  függvény páratlan, így  $a_k = 0$  ( $k \in \mathbb{N}$ ), továbbá  $k \geq 1$  esetén az integrálokat az esetszétválasztásnak megfelelően két részre bontva és a részeket kétszer parciálisan integrálva az alábbi összefüggéseket írhatjuk fel:

$$b_k = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \sin(kx) dx =$$

$$\frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} x(\pi - x) \sin(kx) dx + \frac{1}{\pi} \int_{\pi}^{2\pi} (\pi - x)(2\pi - x) \sin(kx) dx =$$

$$\begin{aligned}
& \left[ -\frac{2\cos(kx)}{k^3\pi} - \frac{x\cos(kx)}{k} + \frac{x^2\cos(kx)}{k\pi} + \frac{\sin(kx)}{k^2} - \frac{2x\sin(kx)}{k^2\pi} \right]_0^\pi + \\
& \left[ \frac{2\cos(kx)}{k^3\pi} - \frac{2\pi\cos(kx)}{k} + \frac{3x\cos(kx)}{k} - \frac{x^2\cos(kx)}{k\pi} - \frac{3\sin(kx)}{k^2} + \frac{2x\sin(kx)}{k^2\pi} \right]_\pi^{2\pi} = \\
& \left( -\frac{2\cos(k\pi)}{k^3\pi} - \frac{\pi\cos(k\pi)}{k} + \frac{\pi^2\cos(k\pi)}{k\pi} + \frac{2\cos(0)}{k^3\pi} \right) + \\
& \left( \frac{2\cos(2k\pi)}{k^3\pi} - \frac{2\pi\cos(2k\pi)}{k} + \frac{6\pi\cos(2k\pi)}{k} - \frac{(2\pi)^2\cos(2k\pi)}{k\pi} - \frac{2\cos(k\pi)}{k^3\pi} + \right. \\
& \quad \left. \frac{2\pi\cos(k\pi)}{k} - \frac{3\pi\cos(k\pi)}{k} + \frac{\pi^2\cos(k\pi)}{k\pi} \right) = \frac{4(1 - \cos(k\pi))}{\pi k^3},
\end{aligned}$$

vagyis ha  $k \in \mathbb{N}$  páros, akkor  $b_k = 0$ , ha viszont  $k$  páratlan, akkor  $b_k = \frac{8}{\pi k^3}$ . Meghatároztuk tehát  $f$  Fourier-sorfejtését:

$$\mathcal{FS}_f(x) = \frac{8}{\pi} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\sin((2m+1)x)}{(2m+1)^3},$$

ami – a 12.1.5. tétel pl. iv.) pontja szerint – előállítja  $f$ -et az  $I$  intervallumon, azaz  $\mathcal{FS}_f(x) = f(x)$ .  $\square$

12.3.15. **MEGJEGYZÉS** Az

$$\frac{1}{1^3} - \frac{1}{3^3} + \frac{1}{5^3} - \frac{1}{7^3} + \frac{1}{9^3} - \frac{1}{11^3} \pm \dots$$

sor összegének kiszámításához felhasználhatjuk a most bebizonyított  $\mathcal{FS}_f(x) = f(x)$  egyenlőséget. Ezt az  $x = \frac{\pi}{2}$  helyen felírva

$$\frac{8}{\pi} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\sin((2m+1)\pi/2)}{(2m+1)^3} = \frac{\pi}{2} \left( \pi - \frac{\pi}{2} \right)$$

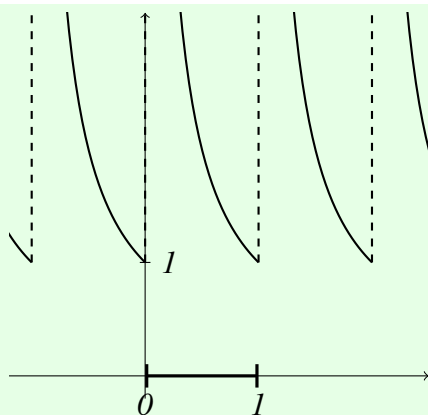
összefüggést kapjuk. Átrendezéssel láthatjuk, hogy

$$\sum_{m=0}^{\infty} \frac{\sin((2m+1)\pi/2)}{(2m+1)^3} = \frac{\pi^3}{32}.$$

Am  $m \in \mathbb{N}$  esetén  $\sin((2m+1)\pi/2) = (-1)^m$ , tehát a bal oldali sor épp a kiszámítandó kifejezéssel azonos.

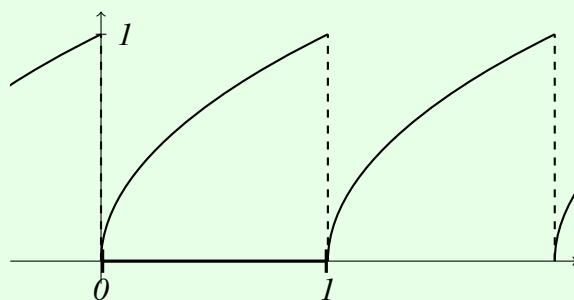
12.3.16. **MEGJEGYZÉS** Bebizonyítható, hogy az  $\left(\frac{1}{1}\right)^3 + \left(\frac{1}{3}\right)^3 + \left(\frac{1}{5}\right)^3 + \left(\frac{1}{7}\right)^3 + \left(\frac{1}{9}\right)^3 + \left(\frac{1}{11}\right)^3 + \dots = 1,05179\dots$  vagy az  $\left(\frac{1}{1}\right)^3 + \left(\frac{1}{2}\right)^3 + \left(\frac{1}{3}\right)^3 + \left(\frac{1}{4}\right)^3 + \left(\frac{1}{5}\right)^3 + \dots = 1,20205\dots$  sorok összege nem adható meg a fentiekhez hasonló, egyszerű képlettel.

12.3.17. **KIDOLGOZOTT FELADAT** Legyen  $I = (0, 1]$ . Írjuk fel az  $f(x) := \frac{1}{x}$  függvény Fourier-sorát és állapítsuk meg, hol állítja elő a sor az  $f$  függvényt.



**MEGOLDÁS** Mivel az  $\int_0^1 (f(x))^2 dx = \int_0^1 \frac{1}{x^2} dx$  integrál divergens, ezért  $f$  nem **megengedett függvény**, tehát  $f$  Fourier-sorát nem értelmezzük.  $\square$

12.3.18. **KIDOLGOZOTT FELADAT** Legyen  $I = [0, 1)$ . Írjuk fel az  $f(x) := \sqrt{x}$  függvény Fourier-sorát és állapítsuk meg, hol állítja elő a sor az  $f$  függvényt.



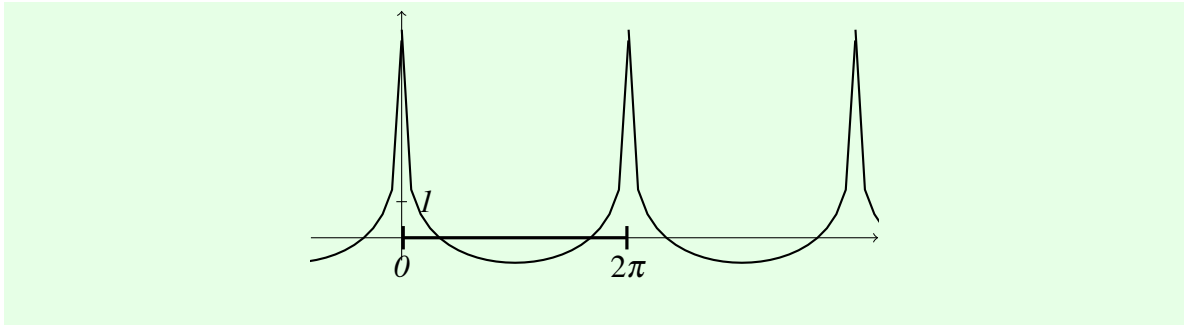
**MEGOLDÁS** Most  $p = \frac{1}{2}$  és nyilván  $a_0 = \frac{1}{p} \int_0^1 \sqrt{x} dx = 2 \left[ \frac{2}{3} x^{3/2} \right]_0^1 = \frac{4}{3}$ . A többi  $a_k$  és  $b_k$  ( $k = 1, 2, \dots$ ) Fourier-együttható kiszámításakor azonban olyan integrálok lépnek fel, amelyeket *elemi* képlettel (tehát pl. az alpműveletekkel, a hatvány-, a trigonometrikus- és exponenciális függvények, valamint ezek inverzeinek véges sokszori alkalmazásával) nem tudunk kifejezni: az  $\int \sqrt{x} \cos(2\pi kx) dx$ , illetve  $\int \sqrt{x} \sin(2\pi kx) dx$  alakú primitív függvényeket az ún. **Fresnel-integrálokkal** lehet felírni. A Fourier-együtthatókat most tehát csak numerikusan tudjuk kiszámítani, a megfelelő integrálközelítő-összegek segítségével. Az első néhány együtthatóra azt kapjuk, hogy  $a_1 \approx -0,0546563$ ,  $a_2 \approx -0,0218309$ ,  $a_3 \approx -0,012506$ ,  $b_1 \approx -0,240602$ ,  $b_2 \approx -0,131267$ ,  $b_3 \approx -0,0908625$ . Mindenesetre a 12.1.5. tétel iv.) pontja alapján a Fourier-sor összegfüggvénye  $x \in (0, 1)$  esetén megegyezik  $f(x)$ -szel, míg  $\mathcal{FS}_f(0) = \frac{1}{2}$ .  $\square$

12.3.19. **KIDOLGOZOTT FELADAT** Legyen  $I = [0, 2\pi)$ . Mutassuk meg, hogy az

$$f(x) := \begin{cases} -\ln\left(2 \sin\left(\frac{x}{2}\right)\right), & \text{ha } x \in (0, 2\pi), \\ 0, & \text{ha } x = 0 \end{cases}$$

függvény Fourier-sora  $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos(kx)}{k}$ . Állapítsuk meg, hol állítja elő a sor az  $f$  függvényt.





**MEGOLDÁS (1. MEGOLDÁS)** Mivel  $f$  nem korlátos, az sem nyilvánvaló, hogy  $f$  egyáltalán megengedett függvény-e. Látható viszont, hogy  $f$  az intervallum végpontjaitól eltekintve folytonos, így az  $f \in \mathcal{M}$  reláció igazolásához elegendő megmutatni, hogy az  $\int_0^{2\pi} (f(x))^2 dx$  integrál véges. Az integrandus szimmetriája miatt  $\int_0^{2\pi} (f(x))^2 dx = 2 \int_0^{\pi} (f(x))^2 dx$ . Mivel  $x \in [1, \pi]$  esetén  $2 \sin(\frac{x}{2})$  két rögzített pozitív szám ( $\sin(1/2)$  és  $1$ ) között fekszik, az integrál végességéhez elegendő belátni, hogy  $\int_0^1 \ln^2(2 \sin(x/2)) dx$  véges. Használjuk most fel, hogy a  $(0, 1]$  intervallumon az  $\ln^2$  függvény monoton fogyó, és  $x \in [0, 1]$  esetén  $\sin(x/2) > \frac{x}{\pi}$ , így  $0 \leq \int_0^1 \ln^2(2 \sin(x/2)) dx \leq \int_0^1 \ln^2(\frac{2x}{\pi}) dx$ . Parciális integrálás után azt nyerjük, hogy  $\int \ln^2(\frac{2x}{\pi}) dx = 2x - 2x \ln(\frac{2x}{\pi}) + x \ln^2(\frac{2x}{\pi})$ . Az  $\int_0^1 \ln^2(\frac{2x}{\pi}) dx$  improprius integrál végességének igazolásához csak azt kell figyelembe vennünk, hogy a L'Hospital-szabály értelmében a primitív függvény jobboldali határértéke a 0-ban 0, azaz véges. Ezzel megmutattuk, hogy a feladatbeli  $f$  függvény megengedett függvény.

Ezek után próbáljuk meg kiszámítani  $f$  Fourier-együtthatóit. Már az

$$a_0 = -\frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \ln\left(2 \sin\left(\frac{x}{2}\right)\right) dx$$

együttható kiszámításakor problémába ütközünk: az integrandus ugyanis (az 12.3.18. kidolgozott feladathoz hasonlóan) ismét nem elemi függvény, a primitív függvény nem adható meg egyszerű zárt alakban. A primitív függvény kiszámítása nélkül azonban trigonometrikus és logaritmikus azonosságok, valamint helyettesítéssel integrálás segítségével bebizonyítható, hogy  $a_0 = 0$ . A többi  $a_k$  ( $k = 1, 2, \dots$ ) együttható kiszámításakor fellépő primitív függvény elemi függvény ugyan, azonban általános  $k$  esetén nehéz őket konkrét alakban felírni. A komplex exponenciális függvény és parciális integrálás felhasználásával némi számolás után megmutatható, hogy  $k = 1, 2, \dots$  esetén  $a_k = \frac{1}{k}$ . (Az érdeklődő Olvasónak javasoljuk, hogy próbálja meg kiszámítani az  $a_k$  együtthatókat.) Mivel  $f$  páros függvény, minden  $b_k$  együttható nyilván 0. Ezzel igazoltuk, hogy  $f$  Fourier-sora  $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos(kx)}{k}$ .

A 12.1.5. tétel iii.) pontja szerint  $x \in (0, 2\pi)$  esetén  $\mathcal{FS}_f(x) = f(x)$ , az pedig közvetlenül látszik, hogy a Fourier-sor  $x = 0$ -ban divergens, hiszen  $\mathcal{FS}_{f,n}(0) = \sum_{k=1}^n \frac{\cos(0)}{k} \rightarrow \infty$ , ha  $n \rightarrow \infty$ .  $\square$

**MEGOLDÁS (2. MEGOLDÁS)** Közelítsük most meg fordítva a feladatot és próbáljuk meg először a  $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos(kx)}{k}$  sor összegét meghatározni. A komplex exponenciális függvényre vonatkozó jól ismert Euler-formula szerint  $x \in \mathbb{R}$  esetén  $e^{ix} = \cos(x) + i \sin(x)$ . Ebből azt kapjuk, hogy  $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos(kx)}{k}$  nem más, mint a  $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{e^{ikx}}{k}$  összeg valós része, mindazon  $x \in \mathbb{R}$  pontokban, ahol ez utóbbi sor konvergens.

A konvergenciahalmaz meghatározásához tekintsük a komplex logaritmus Taylor-sorfejtését: az analízisből ismert, hogy tetszőleges  $|z| < 1$  ( $z \in \mathbb{C}$ ) esetén  $\ln(1+z) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k} z^k$ . (Itt  $\ln$  természetesen a komplex logaritmusnak azt az ágát jelöli, amelyre  $\ln(1) = 0$ .) Az **Abel-tétel** segítségével megmutatható, hogy az imént felírt sor minden  $|z| \leq 1$ , de  $z \neq -1$  esetén is konvergens és összege szintén  $\ln(1+z)$ . Ebből azt nyerjük, hogy  $|z| \leq 1$  és  $z \neq 1$  esetén  $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{z^k}{k} = -\ln(1-z)$ , vagyis (a  $z = e^{ix}$  helyettesítéssel) tetszőleges  $x \neq 0$  ( $x \in \mathbb{R}$ ) esetén  $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{e^{ikx}}{k} = -\ln(1 - e^{ix})$ .

Használjuk most fel, hogy a komplex logaritmus valós része az argumentum abszolút értékének valós logaritmusa. Itt  $|1 - e^{ix}| = 2\sqrt{\sin^2(x/2)}$ . Ha  $x \in (0, 2\pi)$ , akkor tehát  $|1 - e^{ix}| = 2\sin(x/2)$ , vagyis  $-\ln(1 - e^{ix})$  valós része  $-\ln(2\sin(x/2))$ .

Ezzel beláttuk, hogy  $x \in (0, 2\pi)$  esetén  $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos(kx)}{k} = -\ln(2\sin(x/2))$ . (Ha  $x = 0$ , akkor nyilván mindkét oldal  $+\infty$ .) Más szavakkal,  $x \in (0, 2\pi)$  esetén az  $f$  függvény a  $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos(kx)}{k}$  sor összegeként áll elő.

Utolsó lépésként már csak azt kell tisztáznunk, hogy a  $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos(kx)}{k}$  összeg az  $f$  függvény Fourier-sorfejtése-e. Az **1. megoldásban** láttuk, hogy  $f$  megengedett függvény, tudjuk továbbá, hogy a párosság miatt minden  $b_k$  együttható 0. Elegendő tehát azt megmutatni, hogy  $a_0 = 0$  és  $k = 1, 2, \dots$  esetén  $a_k = \frac{1}{k}$ .

Ismét a **12.1.5. tétel iii.)** pontjára hivatkozva láthatjuk, hogy  $f$ -et a  $(0, 2\pi)$  intervallumon előállítja Fourier-sora, vagyis a **12.1.1. definíciója** által meghatározott  $a_k$  ( $k \in \mathbb{N}$ ) együtthatókkal  $x \in (0, 2\pi)$  esetén

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos(kx).$$

Ám az előbb láttuk, hogy ha  $x \in (0, 2\pi)$ , akkor

$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos(kx)}{k}.$$

Átrendezve ezeket megállapíthatjuk, hogy  $x \in (0, 2\pi)$  esetén

$$\frac{c_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} c_k \cos(kx) = 0,$$

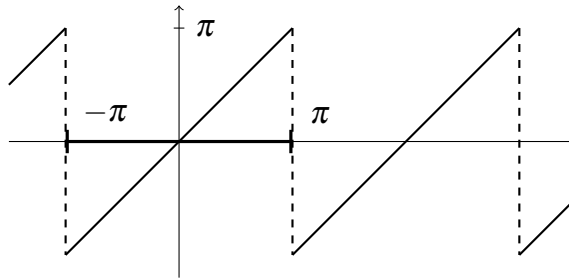
ahol  $c_0 = a_0$  és  $k = 1, 2, \dots$  esetén  $c_k = a_k - \frac{1}{k}$ . A trigonometrikus sorok összefüggvényének egyértelműségére vonatkozó **Cantor-tétel** szerint azonban ha egy tetszőleges  $c_k, d_k \in \mathbb{R}$  együtthatókkal felírt  $\frac{c_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (c_k \cos(kx) + d_k \sin(kx))$  alakú trigonometrikus sor összege véges sok  $x \in [0, 2\pi]$  kivételével 0, akkor minden  $c_k$  és  $d_k$  együttható külön-külön is 0. Mivel esetünkben csak két kivételes  $x$  pont (t.i. az intervallum két végpontja) van, ezért a Cantor-tétel értelmében valóban  $a_0 = 0$  és  $a_k = \frac{1}{k}$  ( $k = 1, 2, \dots$ ).  $\square$

**12.3.20. MEGJEGYZÉS** Az **12.3.1. kidolgozott feladat utáni 2. megjegyzésben** láttuk, hogy  $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin(k)}{k} = \frac{\pi-1}{2}$ . Most (többek között) meghatároztuk, hogy  $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos(k)}{k} = -\ln\left(2\sin\left(\frac{1}{2}\right)\right)$ .

## 12.4. További gyakorlófeladatok végeredménnyel

Az alábbi néhány gyakorlófeladat részletes megoldását nem közöljük, csak a végeredményeket adjuk meg.

12.4.1. **FELADAT** Legyen  $I = [-\pi, \pi)$ . Írjuk fel az  $f(x) := x$  függvény Fourier-sorát és állapítsuk meg, hol állítja elő a sor az  $f$  függvényt.



**VÉGEREDMÉNY** Ha  $x \in I$ , akkor

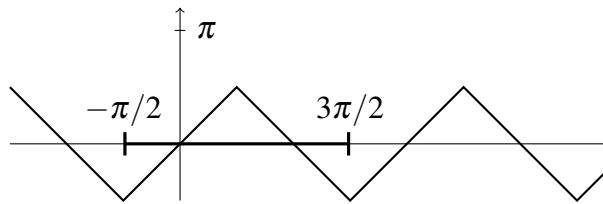
$$\mathcal{FS}_f(x) = 2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k} \sin(kx).$$

A Fourier-sor a teljes  $I$  intervallumon konvergens. Ha  $x \in (-\pi, \pi)$ , akkor  $\mathcal{FS}_f(x) = f(x)$ , míg ha  $x = -\pi$ , akkor  $\mathcal{FS}_f(-\pi) = 0 = \frac{f(-\pi-) + f(-\pi+)}{2} \neq f(-\pi)$ .  $\square$

12.4.2. **FELADAT** Legyen  $I = [-\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2})$ . Írjuk fel az

$$f(x) := \begin{cases} x, & \text{ha } x \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \\ \pi - x, & \text{ha } x \in [\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}) \end{cases}$$

függvény Fourier-sorát és állapítsuk meg, hol állítja elő a sor az  $f$  függvényt.



**VÉGEREDMÉNY** Ha  $x \in I$ , akkor

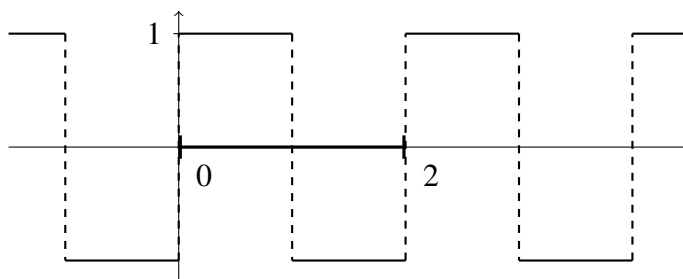
$$\mathcal{FS}_f(x) = \frac{4}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{(2k-1)^2} \sin((2k-1)x) = f(x),$$

vagyis a Fourier-sor a teljes  $I$  intervallumon konvergens és előállítja az  $f$  függvényt.  $\square$

12.4.3. **FELADAT** Legyen  $I = [0, 2)$ . Írjuk fel az

$$f(x) := \begin{cases} 1, & \text{ha } x \in [0, 1), \\ -1, & \text{ha } x \in [1, 2) \end{cases}$$

függvény Fourier-sorát és állapítsuk meg, hol állítja elő a sor az  $f$  függvényt.

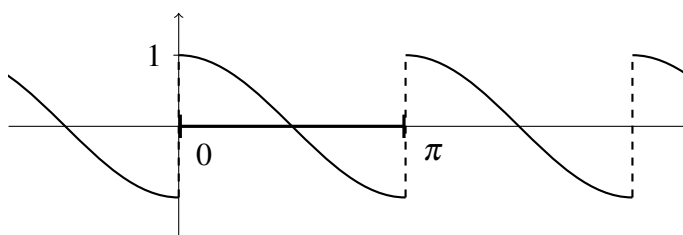


**VÉGEREDMÉNY** Most  $p = 1$ . Ha  $x \in I$ , akkor

$$\mathcal{FS}_f(x) = \frac{4}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin((2k-1)\pi x)}{(2k-1)}.$$

A Fourier-sor az  $I$  intervallumon konvergens és ha  $x \in I$ , de  $x \neq 0$  vagy  $x \neq 1$ , akkor  $\mathcal{FS}_f(x) = f(x)$ . Ha  $x = 0$  vagy  $x = 1$ , akkor  $\mathcal{FS}_f(0) = \mathcal{FS}_f(1) = 0 = \frac{f(0-) + f(0+)}{2} = \frac{f(1-) + f(1+)}{2} \neq f(0) = f(1)$ .  $\square$

**12.4.4. FELADAT** Legyen  $I = [0, \pi)$ . Írjuk fel az  $f(x) := \cos(x)$  függvény Fourier-sorát és állapítsuk meg, hol állítja elő a sor az  $f$  függvényt.



**VÉGEREDMÉNY** Most  $p = \frac{\pi}{2}$ . Ha  $x \in I$ , akkor

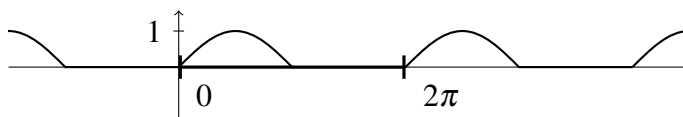
$$\mathcal{FS}_f(x) = \frac{4}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2k \sin(2kx)}{(2k-1)(2k+1)}.$$

A Fourier-sor az  $I$  intervallumon konvergens és ha  $x \in (0, \pi)$ , akkor  $\mathcal{FS}_f(x) = f(x)$ . Ha  $x = 0$ , akkor  $\mathcal{FS}_f(0) = \frac{f(0-) + f(0+)}{2} = 0 \neq f(0)$ .  $\square$

**12.4.5. FELADAT** Legyen  $I = [0, 2\pi)$ . Írjuk fel az

$$f(x) := \begin{cases} \sin(x), & \text{ha } x \in [0, \pi), \\ 0, & \text{ha } x \in [\pi, 2\pi) \end{cases}$$

függvény Fourier-sorát és állapítsuk meg, hol állítja elő a sor az  $f$  függvényt.

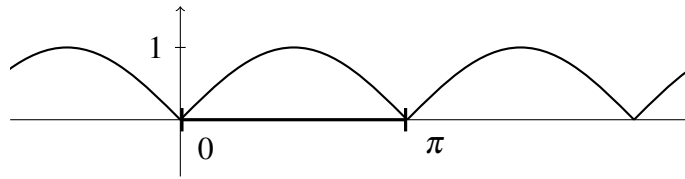


**VÉGEREDMÉNY** Ha  $x \in I$ , akkor

$$\mathcal{FS}_f(x) = \frac{1}{\pi} + \frac{1}{2} \sin(x) - \frac{2}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos(2kx)}{(2k-1)(2k+1)} = f(x).$$

A Fourier-sor az  $I$  intervallumon tehát konvergens és előállítja az  $f$  függvényt.  $\square$

**12.4.6. FELADAT** Legyen  $I = [0, \pi)$ . Írjuk fel az  $f(x) := \sin|x|$  függvény Fourier-sorát és állapítsuk meg, hol állítja elő a sor az  $f$  függvényt.

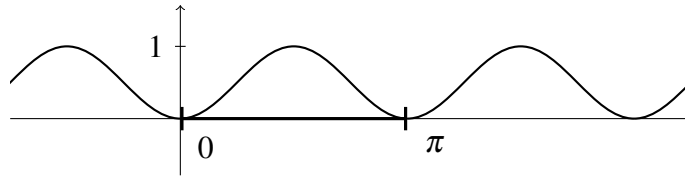


**VÉGEREDMÉNY** Ha  $x \in I$ , akkor

$$\mathcal{FS}_f(x) = \frac{2}{\pi} - \frac{4}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos(2kx)}{4k^2 - 1}.$$

A Fourier-sor az  $I$  intervallumon konvergens és előállítja az  $f$  függvényt.  $\square$

**12.4.7. FELADAT** Legyen  $I = [0, \pi)$ . Írjuk fel az  $f(x) := \sin^2(x)$  függvény Fourier-sorát és állapítsuk meg, hol állítja elő a sor az  $f$  függvényt.



**VÉGEREDMÉNY** Ha  $x \in I$ , akkor

$$\mathcal{FS}_f(x) = \frac{1}{2} - \frac{\cos(2x)}{2}.$$

A Fourier-sor az  $I$  intervallumon konvergens és előállítja az  $f$  függvényt. (Vegyük észre, hogy a **12.3.19.** kidolgozott feladat 2. megoldásának végén idézett Cantor-féle egyértelműségi tétel miatt az itteni feladatban szereplő  $f$  függvény Fourier-sorának kiszámítása a triviális  $\sin^2(x) = \frac{1 - \cos(2x)}{2}$  azonossággal egyenértékű.)  $\square$

## 13. fejezet

# Integráltranszformációk: a Laplace-transzformáció

Matematikai feladatok (például differenciál- vagy integrálegyenletek) megoldása során gyakran fordul elő, hogy a problémát az eredeti környezetében nehéz megoldani, viszont egy másik „tartományba” (például az „időtartományból” a „frekvenciatartományba”) áttanszformálva már könnyebben lehet a kérdést kezelni. Az áttérést gyakran integráltranszformáció segítségével valósítjuk meg (amelyik például egy differenciálegyenletet algebrai egyenletté alakít). A transzformált feladat (példánkban tehát az algebrai egyenlet) megoldása után az integráltranszformáció inverzét alkalmazva kapjuk az eredeti feladat megoldását.

Az egyik leggyakrabban használt integráltranszformáció a *Fourier-transzformáció*: egy  $f$  függvény  $\mathcal{F}_f$  Fourier-transzformáltját az

$$\mathcal{F}_f(\omega) := \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-i\omega t} dt$$

improprius Riemann-integrállal értelmezzük, ha az integrál konvergens. (A  $t$  és  $\omega$  változók esetén megtartottuk a hagyományos betűválasztást.)

Megjegyezzük, hogy a („folytonos időtartományból” „folytonos frekvenciatartományba” képező) Fourier-transzformáció kapcsolatba hozható a 12 fejezetben tárgyalt Fourier-sorfejtéssel: a Fourier-sorfejtés a megengedett  $2p$ -periodikus függvényeket a „folytonos időtartományból” a „diszkrét frekvenciatartományba” képezi. A  $p \rightarrow +\infty$  határesetben kapjuk a *nemperiodikus* függvényeket és az ilyen függvényekre a Fourier-transzformáció alkalmazható. (A 12 fejezet képleteit komplex exponenciális alakban felírva még könnyebben szemléltethető a „Fourier-transzformáció a Fourier-sorfejtés határesetére” kijelentés.)

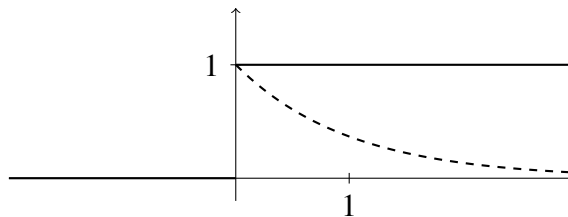
Megemlíthetjük a Fourier-transzformáció két további variánsát: a diszkrét idejű Fourier-transzformációt, amely „diszkrét időtartományból” „folytonos frekvenciatartományba” képez, valamint a *diszkrét Fourier-transzformációt*, amely „diszkrét időtartományból” „diszkrét frekvenciatartományba” visz. (Ez utóbbi transzformációt a gyakorlatban sokszor az ún. *gyors Fourier-transzformációval (FFT)* valósítják meg.)

A klasszikus Fourier-transzformáció alkalmazási körét korlátozza, hogy a még viszonylag egyszerű függvényeknek (például az azonosan 1 függvénynek) sincs mindig értelmezve a Fourier-transzformáltja (a konstans 1 függvény Fourier-transzformáltját definiáló integrál

ugyanis nem konvergens). A kiutat ebből a helyzetből vagy az ún. általánosított függvények – más néven **disztribúciók** – bevezetése jelenti (ez komolyabb matematikai apparátust igényelne), de megkísérelhetjük módosítani magának a Fourier-transzformációnak a képletét is, úgy, hogy a transzformáció előnyös tulajdonságai (például a linearitás, a deriváltakra és a konvolúcióra vonatkozó azonosságok) megmaradjanak.

Ha a Fourier-transzformációt exponenciális súlyozással változtatjuk meg, akkor a **Laplace-transzformációhoz** jutunk el. A jelen fejezetben e transzformáció legfontosabb tulajdonságait és tipikus alkalmazásait mutatjuk be.

Az exponenciális súlyozás hatását az alábbi ábrán szemléltethetjük (v.ö. a következő rész 13.1.4. definíciójával). Nyilvánvaló, hogy az  $\int_0^{+\infty} 1 dt$  integrál értéke  $+\infty$ , viszont egyszerűen belátható, hogy tetszőleges, rögzített pozitív  $\sigma > 0$  szám esetén az exponenciálisan súlyozott  $\int_0^{+\infty} 1 \cdot e^{-\sigma t} dt$  integrál már véges (és értéke egyébként  $\frac{1}{\sigma}$ ).



A Laplace-transzformáció haszna többek között abban rejlik, hogy ez a transzformáció is lineáris, a konvolúciót szorzatba képezi (gondoljunk csak a szabályozás-, műszer-, híradás- és mérés technikában használt átviteli függvényre), és állandó együtthatós közönséges differenciálegyenleteket (vagy bizonyos típusú integrodifferenciál-egyenleteket) komplex változós algebrai egyenletekké alakít: az „időtartományból” itt is a „komplex (kör)frekvenciatartományba” jutunk.

Megjegyezzük, hogy a valóságban közvetlenül nem létezik komplex frekvenciatartomány, ez csak matematikai absztrakció, amely azonban a tárgyalást nagymértékben megkönnyíti. A műszaki gyakorlatban az időtartományból a komplex frekvenciatartományba való áttérés fő oka az, hogy (pl. Bode-diagramon) képszerűen bemutassák a rendszerek vagy átviteli tagok amplitúdó- és fázisátvitelének frekvenciafüggését. Ez a szemlélet (melyet gyakran I/O-szemléletnek is neveznek) a szabályozások stabilitásának tervezésénél komoly műszaki segítséget jelent. Fontos tudni, hogy a hálózatok számításánál a villamosmérnökök és a mechatronikai mérnökök előszeretettel alkalmazzák az impedancia-módszert olyan rendszerekre, melyeknek matematikai modellje állandó együtthatós lineáris vagy linearizálható rendszer.

A Laplace-transzformáció képleteit és a megfelelő inverz transzformációkat (ha azok léteznek) táblázatok tartalmazzák, amelyekre mi is hivatkozni fogunk. Az interneten fellelhető számos táblázat közül lásd például a

<http://mathworld.wolfram.com/LaplaceTransform.html>

vagy a

[http://en.wikipedia.org/wiki/Laplace\\_transform](http://en.wikipedia.org/wiki/Laplace_transform)

oldalakat. Az egyszerűség kedvéért a következő rész végén **mi is közlünk** egy minimális Laplace-transzformációs táblázatot.

E bevezető rész lezárásaként megjegyezzük, hogy a Laplace- és Fourier-transzformáción kívül az alkalmazások – például a jel- és képfeldolgozás – számos más integráltranszformációt is életre hívtak. Ezek nagy része a Fourier- vagy Laplace-transzformáció variánsának tekinthető (ahogyan szoros kapcsolat van maga a Laplace- és a Fourier-transzformáció között is). Ide sorolható például a kétoldali Laplace-, véges Laplace-, Laplace–Carson-, az egyoldali Fourier-, törtrendű Fourier-, véges Fourier-, Fourier-koszinusz- vagy a Fourier-színusz-transzformáció, a wavelet-, a Walsh–Hadamard-, a Gábor-, a Mellin-, a Hankel-transzformáció, a Radon-, Abel-, illetve a Hilbert-, a Hartley- vagy a Stieltjes-transzformáció. A felsorolt transzformációk közül többnek definiálható az inverze, illetve a diszkrét, a gyors vagy többváltozós megfelelője is. A Laplace-transzformáció diszkrét megfelelője például az (egyoldali vagy kétoldali) Z-transzformáció.

Megemlítjük, hogy a <http://math.uni-pannon.hu/~hartung/okt/ma6116a/> oldalon további elméleti ismertetéseket és számos kidolgozott feladatot találunk többek között a Fourier-sorok, a Fourier-transzformáció, a Laplace-transzformáció és a Z-transzformáció témaköréből.

## 13.1. A Laplace-transzformáció tulajdonságai

A 12 fejezethez hasonlóan először itt is értelmezzük a megengedett függvények halmazát: ezen függvények körében fogjuk a Laplace-transzformációt definiálni.

**13.1.1. DEFINÍCIÓ** Egy  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  függvény ( $a < b$  valós számok) szakaszonként folytonos az  $[a, b]$  intervallumon, ha az  $[a, b]$  intervallum felosztható véges sok részintervallumra úgy, hogy a részintervallumok belsejében  $f$  folytonos és a részintervallumok végpontjaiban  $f$ -nek véges egyoldali határértéke van.

**13.1.2. DEFINÍCIÓ** Az  $f : [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$  függvény legfeljebb  $a$ -adrendben exponenciálisan növekvő, ha létezik olyan  $a$  valós szám és  $K > 0$  pozitív szám, hogy minden  $t \geq 0$  esetén  $|f(t)| \leq Ke^{at}$ .

**13.1.3. DEFINÍCIÓ** Valamely adott  $a \in \mathbb{R}$  valós szám esetén jelölje  $\mathcal{M}_a$  az olyan  $f : [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$  mindenütt értelmezett, véges értékű függvények halmazát, amelyek minden  $[0, b]$  ( $b > 0$ ) intervallumon szakaszonként folytonosak, továbbá  $f$  legfeljebb  $a$ -adrendben exponenciálisan növekvő.  $\mathcal{M}_a$  elemeit  $a$ -adrendű megengedett függvényeknek, vagy egyszerűen megengedett függvényeknek hívjuk.

**13.1.4. DEFINÍCIÓ** Egy  $f : [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$  függvény Laplace-transzformáltján az

$$\mathcal{L}_f(s) := \int_0^{+\infty} f(t)e^{-st} dt$$

függvényt értjük, minden olyan  $s \in \mathbb{C}$  komplex szám esetén, melyre a fenti improprius Riemann-integrál konvergens.



Megjegyezzük, hogy az  $f$  értelmezési tartományában szereplő félegyenes természetesen bármelyik másik félegyenes is lehetne; a szokásos választás azonban a  $[0, +\infty)$  intervallum.

**13.1.5. ÁLLÍTÁS** (ELÉGSÉGES FELTÉTEL A LAPLACE-TRANSZFORMÁLT LÉTEZÉSÉRE) *Legyen  $f \in \mathcal{M}_a$  valamely  $a \in \mathbb{R}$  számmal. Ekkor az  $\mathcal{L}_f$  függvény értelmezve van minden olyan  $s \in \mathbb{C}$  pontban, amelyre  $\operatorname{Re}(s) > a$ . Az  $\{s \in \mathbb{C} : \operatorname{Re}(s) > a\}$  félsíkot konvergencia-félsíknak nevezzük.*

Megjegyezzük, hogy az  $f$ -re kirótt  $f \in \mathcal{M}_a$  feltétel enyhíthető lenne: az  $f(t) := 1/\sqrt{t}$  ( $t > 0$ ) és  $f(0) := 0$  definícióval értelmezett függvény például nem megengedett függvény, de az  $\mathcal{L}_f$  Laplace-transzformált a  $\operatorname{Re}(s) > 0$  félsíkban értelmezhető és  $\mathcal{L}_f(s) = \sqrt{\pi}/s$ . A megengedett függvények halmaza azonban elegendően bő: az alkalmazások szempontjából fontos függvények mind beletartoznak.

**13.1.6. ÁLLÍTÁS** (A LAPLACE-TRANSZFORMÁLT HATÁRÉRTÉKE A VÉGTELENBEN) *Ha  $f \in \mathcal{M}_a$  valamely  $a \in \mathbb{R}$  számmal, akkor  $\lim_{\operatorname{Re}(s) \rightarrow +\infty} \mathcal{L}_f(s) = 0$ .*

**13.1.7. ÁLLÍTÁS** (A LAPLACE-TRANSZFORMÁLT LINEARITÁSA) *Ha  $f \in \mathcal{M}_a$ ,  $g \in \mathcal{M}_b$  (alkalmas  $a, b \in \mathbb{R}$  számokkal) és  $\lambda \in \mathbb{R}$  tetszőleges szám, akkor  $\mathcal{L}_{f+\lambda g}(s) = \mathcal{L}_f(s) + \lambda \mathcal{L}_g(s)$ , tetszőleges  $\operatorname{Re}(s) > \max\{a, b\}$  esetén.*

**13.1.8. DEFINÍCIÓ** *Az  $f : [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$  és  $g : [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$  függvények  $f * g$  konvolúcióján az*

$$(f * g)(t) := \int_0^t f(\tau)g(t - \tau)d\tau$$

*függvényt értjük, minden olyan  $t \geq 0$  pontban, ahol ez a Riemann-integrál létezik.*

Bebizonyítható, hogy a konvolúció kommutatív és asszociatív művelet, azaz  $f * g = g * f$  és  $(f * g) * h = f * (g * h) = f * g * h$ .

**13.1.9. ÁLLÍTÁS** (A KONVOLÚCIÓ LAPLACE-TRANSZFORMÁLTJA) *Ha  $f \in \mathcal{M}_a$  és  $g \in \mathcal{M}_b$  (alkalmas  $a, b \in \mathbb{R}$  számokkal), akkor  $\operatorname{Re}(s) > \max\{a, b\}$  esetén*

$$\mathcal{L}_{f*g}(s) = \mathcal{L}_f(s) \cdot \mathcal{L}_g(s).$$

*Az állítás tehát azt mondja ki, hogy a konvergencia-félsíkok metszetén a konvolúció Laplace-transzformáltja a Laplace-transzformáltak szorzatával azonos.*

**13.1.10. ÁLLÍTÁS** (DERIVÁLT-FÜGGVÉNY LAPLACE-TRANSZFORMÁLTJA) *Ha valamely  $a \in \mathbb{R}$  esetén  $f \in \mathcal{M}_a$  olyan deriválható függvény, melyre  $f'$  folytonos a  $[0, +\infty)$  intervallumon, akkor tetszőleges  $\operatorname{Re}(s) > a$  számra*

$$\mathcal{L}_{f'}(s) = s \cdot \mathcal{L}_f(s) - f(0).$$

**13.1.11. ÁLLÍTÁS** (MAGASABB RENDŰ DERIVÁLT LAPLACE-TRANSZFORMÁLTJA)

Tegyük fel, hogy valamely  $n > 1$  egész szám és  $a \in \mathbb{R}$  esetén  $f \in \mathcal{M}_a$   $n$ -szer deriválható, és  $f^{(n)}$  folytonos a  $[0, +\infty)$  intervallumon. Ekkor tetszőleges  $\operatorname{Re}(s) > a$  számra

$$\mathcal{L}_{f^{(n)}}(s) = s^n \cdot \mathcal{L}_f(s) - s^{n-1}f(0) - s^{n-2}f'(0) - s^{n-3}f''(0) - \dots - f^{(n-1)}(0).$$

**13.1.12. ÁLLÍTÁS** (AZ INTEGRÁLFÜGGVÉNY LAPLACE-TRANSZFORMÁLTJA)

Ha alkalmas  $a \in \mathbb{R}$  számmal  $f \in \mathcal{M}_a$  folytonos függvény, és  $t \geq 0$  mellett  $g(t) := \int_0^t f(\tau) d\tau$ , akkor  $\operatorname{Re}(s) > \max\{0, a\}$  esetén

$$\mathcal{L}_g(s) = \frac{\mathcal{L}_f(s)}{s}.$$

**13.1.13. ÁLLÍTÁS** (A LAPLACE-TRANSZFORMÁLT DERIVÁLTJAI) Ha valamely  $n \in \mathbb{N}^+$  és  $a \in \mathbb{R}$  számmal  $f \in \mathcal{M}_a$ , és  $t \geq 0$  mellett  $g(t) := t^n f(t)$ , akkor  $\operatorname{Re}(s) > a$  esetén

$$\mathcal{L}_g(s) = (-1)^n \cdot (\mathcal{L}_f)^{(n)}(s).$$

**13.1.14. ÁLLÍTÁS** (HASONLÓSÁGI TÉTEL) Valamely  $\lambda > 0$  és  $a \in \mathbb{R}$  esetén legyen  $f \in \mathcal{M}_a$ , és  $t \geq 0$  mellett tekintsük a  $g(t) := f(\lambda t)$  függvényt. Ekkor tetszőleges  $\operatorname{Re}(s) > \lambda a$  számra fennáll, hogy

$$\mathcal{L}_g(s) = \frac{1}{\lambda} \cdot \mathcal{L}_f\left(\frac{s}{\lambda}\right).$$

**13.1.15. ÁLLÍTÁS** (A LAPLACE-TRANSZFORMÁLT ELTOLTJA) Valamely  $\lambda \in \mathbb{R}$  és  $a \in \mathbb{R}$  esetén legyen  $f \in \mathcal{M}_a$ , és  $t \geq 0$  mellett tekintsük a  $g(t) := e^{\lambda t} f(t)$  függvényt. Ekkor tetszőleges  $\operatorname{Re}(s) > \lambda + a$  számra

$$\mathcal{L}_g(s) = \mathcal{L}_f(s - \lambda).$$

**13.1.16. ÁLLÍTÁS** (AZ EREDETI FÜGGVÉNY ELTOLTJA) Valamely  $\lambda > 0$  és  $a \in \mathbb{R}$  esetén legyen  $f \in \mathcal{M}_a$ , és  $t \geq 0$  mellett tekintsük a

$$g(t) := \begin{cases} f(t - \lambda), & \text{ha } t > \lambda, \\ 0, & \text{ha } t \leq \lambda \end{cases}$$

függvényt. Ekkor tetszőleges  $\operatorname{Re}(s) > a$  számra fennáll, hogy

$$\mathcal{L}_g(s) = e^{-\lambda s} \cdot \mathcal{L}_f(s).$$

A legutolsó állítás természetesen változatlan formában igaz marad, ha a  $g$  függvényben

szereplő esetszétválasztásban  $t > \lambda$  és  $t \leq \lambda$  helyett  $t \geq \lambda$  és  $t < \lambda$  áll.

Álljon itt végül egy táblázat a leggyakoribb függvények Laplace-transzformáltjáról. (Az  $f$  függvény értelmezési tartománya mindig a  $t \geq 0$  félegyenes. Az  $\alpha$  és  $\omega$  paraméter tetszőlegesen valós, míg  $n$  tetszőlegesen természetes számot jelöl.)

| $f(t)$           | $\mathcal{L}_f(s)$            | $\mathcal{L}_f(s)$ értelmezési tartománya |
|------------------|-------------------------------|-------------------------------------------|
| 1                | $\frac{1}{s}$                 | $\operatorname{Re}(s) > 0$                |
| $t^n$            | $\frac{n!}{s^{n+1}}$          | $\operatorname{Re}(s) > 0$                |
| $e^{\alpha t}$   | $\frac{1}{s-\alpha}$          | $\operatorname{Re}(s) > \alpha$           |
| $\cos(\omega t)$ | $\frac{s}{s^2+\omega^2}$      | $\operatorname{Re}(s) > 0$                |
| $\sin(\omega t)$ | $\frac{\omega}{s^2+\omega^2}$ | $\operatorname{Re}(s) > 0$                |

## 13.2. Az inverz Laplace-transzformáció

Az előzőekben felsoroltuk a Laplace-transzformáció legfontosabb műveleti tulajdonságait, amelyekkel a feladatunkat az „időtartományból” a „komplex frekvenciatartományba” vihetjük át. Természetesen szükség van a Laplace-transzformáció megfordítottjára is, hogy végül ismét az „időtartományba” jussunk vissza. Erre szolgál az *inverz Laplace-transzformáció*.

Ebben a részben arra a kérdésre keressük a választ, hogy milyen feltételek mellett létezik a Laplace-transzformációnak inverze, hogyan lehet azt kiszámolni és milyen tulajdonságokkal rendelkezik.

Tekintsük a következő két függvényt. Legyen  $f_1(t) := e^{-t}$  ( $t \geq 0$ ), illetve legyen

$$f_2(t) := \begin{cases} e^{-t}, & \text{ha } t \in [0, 1) \cup (1, +\infty), \\ \lambda, & \text{ha } t = 1, \end{cases}$$

ahol  $\lambda \in \mathbb{R}$  tetszőlegesen rögzített szám. Könnyen ellenőrizhető, hogy  $f_1 \in \mathcal{M}_{-1}$  és  $f_2 \in \mathcal{M}_{-1}$  mindketten megengedett függvények. A Laplace-transzformációt definiáló integrál közvetlen kiszámítása azt mutatja, hogy  $\operatorname{Re}(s) > -1$  esetén  $\mathcal{L}_{f_1}(s) = \mathcal{L}_{f_2}(s) = \frac{1}{s+1}$ . (Az egybeesés oka nyilván az, hogy egy Riemann-integrál értéke változatlan marad, ha az integrandust egy pontban megváltoztatjuk.) Ez az egyszerű példa tehát azt mutatja, hogy a megengedett függvények körében nem beszélhetünk a Laplace-transzformáció inverzéről, hiszen például az  $\frac{1}{s+1}$  függvénynek végtelen sok őse van. Ha azonban a Laplace-transzformáció értelmezési tartományát alkalmas módon megszorítjuk, például a folytonos függvények halmazára, akkor a leszűkített transzformáció már invertálható. Erre vonatkozik az alábbi tétel.

**13.2.1. TÉTEL (LERCH)** *Tegyük fel, hogy valamely  $a \in \mathbb{R}$  és  $b \in \mathbb{R}$  számmal  $f \in \mathcal{M}_a$  és  $g \in \mathcal{M}_b$ , továbbá, hogy mind  $f : [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ , mind  $g : [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$  folytonos. Ha  $\operatorname{Re}(s) > \max\{a, b\}$  esetén  $\mathcal{L}_f(s) = \mathcal{L}_g(s)$ , akkor  $f(t) = g(t)$  minden  $t \geq 0$  mellett.*

Lerch tétele szerint tehát ha valamely  $a \in \mathbb{R}$  számmal  $f \in \mathcal{M}_a$  folytonos függvény, akkor az  $f$  függvény és a Laplace-transzformáltja kölcsönösen meghatározzák egymást. Természetes módon felmerül a kérdés, hogy hogyan lehet a Laplace-transzformáltból az eredeti függvényt visszaszámolni.

A rövidség kedvéért jelöljük az  $f$  függvény Laplace-transzformáltját  $F$ -fel, azaz legyen  $F := \mathcal{L}_f$ . Másképp fogalmazva, az  $F$  függvény inverz Laplace-transzformáltja  $f$ , amit az  $\mathcal{L}_F^{-1} = f$  jelöléssel fogunk kifejezni. (A későbbiekben is gyakran alkalmazzuk ezt az egyszerűsítést: a nagybetűs függvény a megfelelő kisbetűs függvény Laplace-transzformáltját jelöli.) A következő tétel képletet ad az inverz Laplace-transzformáltra.

**13.2.2. TÉTEL (INVERZIÓS INTEGRÁL)** Ha valamely  $a \in \mathbb{R}$  számmal  $f \in \mathcal{M}_a$  folytonos függvény és  $\operatorname{Re}(s) > a$  esetén  $F(s) := \mathcal{L}_f(s)$ , akkor minden  $t \geq 0$  számra

$$\mathcal{L}_F^{-1}(t) = f(t) = \frac{1}{2\pi i} \cdot \lim_{B \rightarrow +\infty} \int_{A-Bi}^{A+Bi} F(s) e^{st} ds,$$

ahol  $A > a$  ( $A \in \mathbb{R}$ ) tetszőlegesen választható.

**13.2.3. MEGJEGYZÉS** Az inverziós integrálban az integrációs út tehát egy tetszőleges függőleges egyenes lehet a konvergencia-félsíkban.

A Laplace-transzformáltból az eredeti függvényt a fenti szimmetrikus improprius komplex vonalintegrállal visszaszámolni általában meglehetősen körülményes feladat. A gyakorlatban ehelyett legtöbbször úgy járunk el, hogy az invertálandó kifejezést alkalmas algebrai átalakításokkal olyan alakra hozzuk, amelyeket a táblázatok már tartalmaznak. Ezekhez az átalakításokhoz az inverz Laplace-transzformáció műveleti tulajdonságaira is szükségünk van. Az inverz Laplace-transzformáció műveleti tulajdonságai a Laplace-transzformáció megfelelő műveleti tulajdonságaiból olvashatók ki, a 13.1-es fejezet állításait kell csak „visszafelé” kiolvasni, így azokat itt külön nem soroljuk fel; mindössze a konvolúcióra vonatkozó – és a gyakorlatban is hatékonyan használható – állítást emeljük ki: szorzatalakban adott függvény inverz Laplace-transzformáltja konvolúcióként kapható meg.

**13.2.4. ÁLLÍTÁS (SZORZAT INVERZ LAPLACE-TRANSZFORMÁLTJA)** Ha valamely  $a \in \mathbb{R}$  és  $b \in \mathbb{R}$  számmal  $f \in \mathcal{M}_a$  és  $g \in \mathcal{M}_b$  folytonos függvények, és  $\operatorname{Re}(s) > \max\{a, b\}$  esetén  $F(s) := \mathcal{L}_f(s)$ , valamint  $G(s) := \mathcal{L}_g(s)$ , akkor tetszőleges  $t \geq 0$  mellett

$$\mathcal{L}_{F \cdot G}^{-1}(t) = (f * g)(t).$$

### 13.3. A Laplace-transzformáció néhány alkalmazása

A most következő pár kidolgozott feladatban néhány elemi függvény Laplace-transzformáltját számoljuk ki kétféleképpen: *a.)* először közvetlenül a definiáló integrálképletből, *b.)* majd pedig a transzformációs táblázatok segítségével. Az *a.)*-megoldások során pontosan megadjuk a megengedett függvények növekedési nagyságrendjét és a Laplace-integrálok konvergenciahalmazát. A *b.)*-megoldásokban a 13.1 fejezet műveleti szabályaira és tételeire, valamint az előre kiszámolt táblázatokra támaszkodunk (és nem törekszünk mindig a pontos értelmezési tartományok meghatározására).

Az *a.)*-megoldások során látni fogjuk, hogy az integrálok és a becslések végigszámolása már a legegyszerűbb függvények esetén is fáradságos – és a gyakorlati alkalmazásokban

nem is mindig szükséges. A kétféle megoldás összehasonlításából kitűnik, hogy a Laplace-transzformációs táblázatok összeállítása – a pontos értelmezési tartományok feltüntetésével – sok munkát igénylő feladat.

**13.3.1. KIDOLGOZOTT FELADAT** Legyen  $f(t) := t^2 + 12t + 5$  ( $t \geq 0$ ). Megengedett függvény-e  $f$ ? Ha igen, számoljuk ki a Laplace-transzformáltját.

**MEGOLDÁS (A.)** Vegyünk egy tetszőleges  $\varepsilon > 0$  számot. Mivel a L'Hospital-szabály értelmében

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{t^2 + 12t + 5}{e^{\varepsilon t}} = 0,$$

ezért alkalmas  $t_0 > 0$  számmal minden  $t \in (t_0, +\infty)$  mellett  $\left| \frac{t^2 + 12t + 5}{e^{\varepsilon t}} \right| \leq 1$ , vagyis  $|t^2 + 12t + 5| \leq e^{\varepsilon t}$ . A  $[0, t_0]$  intervallumon viszont  $t^2 + 12t + 5$  korlátos, tehát alkalmas  $K > 1$  számmal itt  $|t^2 + 12t + 5| \leq K$ . Azt kaptuk tehát, hogy minden  $t \in [0, +\infty)$  esetén  $|t^2 + 12t + 5| \leq K e^{\varepsilon t}$ , ami – figyelembe véve  $f$  folytonosságát is – azt jelenti, hogy bármely  $\varepsilon > 0$  mellett  $f \in \mathcal{M}_\varepsilon$ .

A Laplace-transzformáltat a definiáló képletből kétszeres parciális integrálással határozzuk meg:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_f(s) &= \int_0^{+\infty} (t^2 + 12t + 5)e^{-st} dt = \\ &= \left[ (t^2 + 12t + 5) \cdot \frac{-e^{-st}}{s} \right]_{t=0}^{t=+\infty} - \int_0^{+\infty} (2t + 12) \cdot \frac{-e^{-st}}{s} dt = \\ &= \frac{-1}{s} \left[ (t^2 + 12t + 5)e^{-st} \right]_{t=0}^{t=+\infty} + \frac{1}{s} \int_0^{+\infty} (2t + 12)e^{-st} dt = \\ &= \frac{-1}{s} \left[ (t^2 + 12t + 5)e^{-st} \right]_{t=0}^{t=+\infty} + \frac{1}{s} \left( \left[ (2t + 12) \cdot \frac{-e^{-st}}{s} \right]_{t=0}^{t=+\infty} - \int_0^{+\infty} 2 \cdot \frac{-e^{-st}}{s} dt \right) = \\ &= \frac{-1}{s} \left[ (t^2 + 12t + 5)e^{-st} \right]_{t=0}^{t=+\infty} - \frac{1}{s^2} \left[ (2t + 12)e^{-st} \right]_{t=0}^{t=+\infty} + \frac{2}{s^2} \int_0^{+\infty} e^{-st} dt = \\ &= -\frac{1}{s} \left[ (t^2 + 12t + 5)e^{-st} \right]_{t=0}^{t=+\infty} - \frac{1}{s^2} \left[ (2t + 12)e^{-st} \right]_{t=0}^{t=+\infty} - \frac{2}{s^3} \left[ e^{-st} \right]_{t=0}^{t=+\infty} = \\ &= -\lim_{T \rightarrow +\infty} \left( \frac{1}{s} (T^2 + 12T + 5)e^{-sT} + \frac{1}{s^2} (2T + 12)e^{-sT} + \frac{2}{s^3} e^{-sT} \right) + \frac{5}{s} + \frac{12}{s^2} + \frac{2}{s^3}. \end{aligned}$$

Némi számolással – felhasználva többek között az  $|e^w| = e^{\operatorname{Re}(w)}$  ( $w \in \mathbb{C}$ ) azonosságot – belátható, hogy ez a limesz csak  $\operatorname{Re}(s) > 0$  esetén létezik és véges, és ilyenkor az értéke – a L'Hospital-szabály alapján – 0-val egyenlő. Azt nyertük tehát, hogy

$$\mathcal{L}_f(s) = \frac{5}{s} + \frac{12}{s^2} + \frac{2}{s^3}. \quad \square$$

**MEGOLDÁS (B.)** A 13.1.7. állítás és a transzformációs táblázatok megfelelő képletei alapján

$$\mathcal{L}_f(s) = \mathcal{L}_{t^2}(s) + 12\mathcal{L}_t(s) + 5\mathcal{L}_1(s) = \frac{2}{s^3} + 12 \cdot \frac{1}{s^2} + 5 \cdot \frac{1}{s}. \quad \square$$

**13.3.2. MEGJEGYZÉS** Az  $a$ .)-megoldásban elmondott érvelés változtatás nélkül alkalmazható bármely, a  $[0, +\infty)$  intervallumon értelmezett  $p$  polinomra: minden ilyen  $p$  polinom tehát megengedett függvény, és tetszőleges  $\varepsilon > 0$  mellett  $p \in \mathcal{M}_\varepsilon$ , vagyis az  $\mathcal{L}_p(s)$  transzformált konvergencia-félsíkja a  $\operatorname{Re}(s) > 0$  félsík.

**13.3.3. KIDOLGOZOTT FELADAT** Legyen  $f(t) := e^{t^2}$  ( $t \geq 0$ ). Megengedett függvény-e  $f$ ? Ha igen, adjuk meg a Laplace-transzformáltját. (Figyelem:  $e^{t^2} = e^{(t^2)} \neq (e^t)^2 = e^{2t}$ .)

**MEGOLDÁS** Ha valamely  $a$  valós és  $K > 0$  pozitív valós számmal minden  $t \geq 0$  mellett  $|e^{t^2}| \leq Ke^{at}$  volna, akkor átosztással  $e^{t^2-at} \leq K$  adódna. Ám a bal oldali kifejezés határértéke  $t \rightarrow +\infty$  esetén  $+\infty$ . Ez az ellentmondás azt mutatja, hogy  $f$  nem megengedett függvény, mert  $t \rightarrow +\infty$  mellett túl gyorsan növekszik, így Laplace-transzformáltját sem értelmezzük.  $\square$

**13.3.4. KIDOLGOZOTT FELADAT** Legyen  $f(t) := e^t$  ( $t \geq 0$ ). Számítsuk ki az  $f * f$  konvolúciót,  $f$  Laplace-transzformáltját, valamint  $f * f$  Laplace-transzformáltját.

**MEGOLDÁS (A.)** Az  $f$  függvény folytonos és pl.  $a = 1$ -gyel  $|f(t)| \leq e^{at}$  ( $t \geq 0$ ), tehát  $f$  megengedett függvény. Az  $f * f$  konvolúciót a definícióból számítjuk ki: ha  $t \geq 0$  tetszőleges, akkor

$$(f * f)(t) = \int_0^t f(\tau)f(t - \tau)d\tau = \int_0^t e^\tau e^{t-\tau}d\tau = e^t \int_0^t 1 d\tau = e^t t,$$

amiből az is látszik, hogy  $f * f$  is megengedett függvény ( $a = 1 + \varepsilon$ -nal, ahol  $\varepsilon > 0$  tetszőleges pozitív szám, lásd az 13.3.1. kidolgozott feladat megoldása utáni megjegyzést). Az  $f$  függvény Laplace-transzformáltja

$$F(s) := \mathcal{L}_f(s) = \int_0^{+\infty} e^t e^{-st} dt = \lim_{T \rightarrow +\infty} \left[ \frac{1}{1-s} e^{-st+t} \right]_{t=0}^{t=T} = \frac{1}{1-s} \lim_{T \rightarrow +\infty} (e^{T(1-s)} - 1).$$

Mivel  $|e^{T(1-s)}| = e^{T \operatorname{Re}(1-s)}$ , ami  $T \rightarrow +\infty$  esetén csak akkor véges, ha  $\operatorname{Re}(1-s) \leq 0$ , vagyis, ha  $\operatorname{Re}(s) \geq 1$ . Egyszerűen látható azonban, hogy az  $F$  függvényt meghatározó improprius integrál  $\operatorname{Re}(s) = 1$  esetén sem konvergens, tehát az  $F$  függvény pontos értelmezési tartománya a  $\operatorname{Re}(s) > 1$  félsík, továbbá  $\operatorname{Re}(s) > 1$  esetén  $\lim_{T \rightarrow +\infty} (e^{T(1-s)} - 1) = 0 - 1$ , vagyis a keresett Laplace-transzformált  $F(s) = \frac{1}{s-1}$ .

A konvolúció Laplace-transzformáltja

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{f*f}(s) &= \int_0^{+\infty} t e^t e^{-st} dt = t\text{-szerint parciálisan integrálva} = \\ &= \lim_{T \rightarrow +\infty} \left[ \frac{1}{(s-1)^2} e^{-st+t} (-1 - st + t) \right]_{t=0}^{t=T} = \\ &= \frac{1}{(s-1)^2} \lim_{T \rightarrow +\infty} (e^{T(1-s)} (-1 + T(1-s)) + 1). \end{aligned}$$

A limeszről – többek között a L'Hospital-szabály felhasználásával – belátható, hogy csak  $\operatorname{Re}(s) > 1$  esetén létezik és véges, és ilyenkor az értéke  $0 + 1$ . Így  $\operatorname{Re}(s) > 1$  mellett  $\mathcal{L}_{f*f}(s) = \frac{1}{(s-1)^2}$ .  $\square$

**MEGOLDÁS (B.)** Az  $a$ .)-megoldásban kiszámoltuk az  $f * f$  konvolúciót, és azt is láttuk, hogy  $f$  és  $f * f$  mindketten megengedett függvények. A táblázatok alapján  $\mathcal{L}_f(s) = \frac{1}{s-1}$ , ami a  $\operatorname{Re}(s) > 1$  félsíkban biztosan értelmezve van. A konvolúció Laplace-transzformáltját a 13.1.9. állítás alapján számoljuk ki:  $\operatorname{Re}(s) > 1$  mellett

$$\mathcal{L}_{f*f}(s) = \mathcal{L}_f(s) \cdot \mathcal{L}_f(s) = \frac{1}{s-1} \cdot \frac{1}{s-1} = \frac{1}{(s-1)^2}.$$

□

**MEGOLDÁS (C.)** A  $g(t) := (f * f)(t) = te^t$  függvény Laplace-transzformáltjához egyébként egy harmadik úton is eljuthatunk, ha megfigyeljük, hogy most  $g(t) = tf(t)$  alakú: a 13.1.13. állítás szerint ekkor

$$\mathcal{L}_g(s) = -(\mathcal{L}_f)'(s) = -\left(\frac{1}{s-1}\right)' = \frac{1}{(s-1)^2}.$$

□

**MEGOLDÁS (D.)** A  $g$  függvény Laplace-transzformáltja egy negyedik módon a 13.1.15. állítása alapján adható meg: legyen  $\tilde{f}(t) := t$  és  $\lambda = 1$ , ekkor  $g(t) = e^{\lambda t} \tilde{f}(t)$ . A táblázatok szerint  $\mathcal{L}_{\tilde{f}}(s) = \frac{1}{s^2}$ , a 13.1.15. állítás felhasználásával tehát

$$\mathcal{L}_g(s) = \mathcal{L}_{\tilde{f}}(s-1) = \frac{1}{(s-1)^2}.$$

□

**13.3.5. KIDOLGOZOTT FELADAT** Legyen  $f(t) := \cos^2(t)$  ( $t \geq 0$ ). Megengedett függvény-e  $f$ ? Ha igen, számoljuk ki Laplace-transzformáltját.

**MEGOLDÁS (A.)** Az  $f$  függvény korlátos és folytonos, és minden korlátos folytonos függvény nyilván megengedett függvény ( $a = 0$ -val). Az  $f$  függvény Laplace-transzformáltja

$$F(s) := \mathcal{L}_f(s) = \int_0^{+\infty} \cos^2(t) e^{-st} dt.$$

A primitív függvény meghatározásához használjuk fel a  $\cos^2(t) = \frac{1+\cos(2t)}{2}$  linearizáló formulát és integráljunk  $t$ -szerint parciálisan kétszer, ahogyan szokásos, amikor az integrandus egy trigonometrikus és egy exponenciális függvény szorzata.

$$\begin{aligned} \int \cos^2(t) e^{-st} dt &= \int \frac{1+\cos(2t)}{2} e^{-st} dt = \\ &= \frac{1}{2} \cdot \frac{-e^{-st}}{s} + \frac{1}{2} \cdot \cos(2t) \cdot \frac{-e^{-st}}{s} - \frac{1}{2} \int -2 \sin(2t) \cdot \frac{-e^{-st}}{s} dt = \\ &= \frac{-e^{-st}}{2s} (1 + \cos(2t)) - \frac{1}{s} \int \sin(2t) \cdot e^{-st} dt = \\ &= \frac{-e^{-st}}{2s} (1 + \cos(2t)) - \frac{1}{s} \left( \sin(2t) \cdot \frac{-e^{-st}}{s} - \int 2 \cos(2t) \cdot \frac{-e^{-st}}{s} dt \right) = \\ &= \frac{-e^{-st}}{2s} (1 + \cos(2t)) + \frac{e^{-st}}{s^2} \sin(2t) - \frac{2}{s^2} \int \cos(2t) \cdot e^{-st} dt. \end{aligned}$$



Bevezetve az  $I := \int \cos(2t)e^{-st} dt$  rövidítést, azt kaptuk tehát, hogy

$$\begin{aligned} \int \cos^2(t)e^{-st} dt &= \int \frac{1 + \cos(2t)}{2} e^{-st} dt = \\ &= \frac{-e^{-st}}{2s} + \frac{I}{2} = \frac{-e^{-st}}{2s} (1 + \cos(2t)) + \frac{e^{-st}}{s^2} \sin(2t) - \frac{2I}{s^2}. \end{aligned}$$

Az alsó sorból, mint lineáris egyenletből  $I$  kifejezhető:

$$I = \frac{2s^2 e^{-st}}{s^2 + 4} \left( \frac{-\cos(2t)}{2s} + \frac{\sin(2t)}{s^2} \right),$$

amit visszahelyettesítve az  $\int \cos^2(t)e^{-st} dt = \frac{-e^{-st}}{2s} + \frac{I}{2}$  összefüggésbe, megkapjuk, hogy

$$\int \cos^2(t)e^{-st} dt = \frac{-e^{-st}}{2} \left( \frac{1}{s} + \frac{s \cos(2t)}{s^2 + 4} - \frac{2 \sin(2t)}{s^2 + 4} \right).$$

Most már visszatérhetünk az  $F$  függvényhez:

$$\begin{aligned} F(s) &= \lim_{T \rightarrow +\infty} \left[ \frac{-e^{-st}}{2} \left( \frac{1}{s} + \frac{s \cos(2t)}{s^2 + 4} - \frac{2 \sin(2t)}{s^2 + 4} \right) \right]_{t=0}^{t=T} = \\ &= \lim_{T \rightarrow +\infty} \left( \frac{-e^{-sT}}{2} \left( \frac{1}{s} + \frac{s \cos(2T)}{s^2 + 4} - \frac{2 \sin(2T)}{s^2 + 4} \right) \right) + \frac{1}{2s} + \frac{s}{2(s^2 + 4)}. \end{aligned}$$

Megmutatható (a részleteket itt szintén mellőzzük), hogy a limesz csak  $\operatorname{Re}(s) > 0$  esetén létezik és véges, és ekkor a L'Hospital-szabály alapján az értéke 0. Azt kaptuk tehát, hogy a keresett Laplace-transzformált

$$F(s) = \frac{1}{2s} + \frac{s}{2(s^2 + 4)}.$$

□

**MEGOLDÁS (B.)** Mivel a táblázatok nem tartalmazzák a  $\cos^2$  függvény Laplace-transzformáltját, alakítsuk át a függvényt a szokásos linearizáló képlettel (ahogyan azt az *a.*-megoldásban is tettük), majd alkalmazzuk a Laplace-transzformáció linearitását és a táblázatokat:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{\cos^2(t)}(s) &= \mathcal{L}_{\frac{1+\cos(2t)}{2}}(s) = \mathcal{L}_{\frac{1}{2}}(s) + \mathcal{L}_{\frac{\cos(2t)}{2}}(s) = \frac{1}{2} \cdot \mathcal{L}_1(s) + \frac{1}{2} \cdot \mathcal{L}_{\cos(2t)}(s) = \\ &= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{s} + \frac{1}{2} \cdot \frac{s}{s^2 + 2^2}. \end{aligned}$$

□

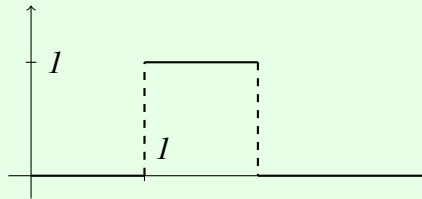
**13.3.6. MEGJEGYZÉS** Az eddigi feladatokban pontosan megmondtuk a megengedett függvények növekedési nagyságrendjét, a Laplace-integrálok konvergenciahalmazát, valamint a transzformációkat a definíció szerint (is) kiszámítottunk. Az ezutáni példákban a Laplace-transzformáltakat már csak a táblázatok és műveleti szabályok alapján fogjuk meghatározni, hogy az érdekesebb alkalmazásokban a technikai részletek ne vonják el a figyelmet.



13.3.7. **KIDOLGOZOTT FELADAT** Adjuk meg az

$$f(t) := \begin{cases} 1, & \text{ha } t \in [1, 2), \\ 0, & \text{ha } t \in [0, 1) \cup [2, +\infty) \end{cases}$$

függvény Laplace-transzformáltját.



**MEGOLDÁS** A Jelölések, definíciók részben bevezetett **egységugrás függvényre** nyilván  $\mathcal{L}_1(s) = \frac{1}{s}$ . Az egységugrás függvénnyel kényelmes alakban felírhatók az esetszétválasztások: a jelen feladatban egyszerűen látható, hogy  $t \geq 0$  esetén

$$f(t) = \mathbf{1}(t-1) - \mathbf{1}(t-2).$$

Mivel  $f$  megengedett függvény, ezért  $\operatorname{Re}(s) > 0$  mellett alkalmazhatjuk a Laplace-transzformáció linearitását és a 13.1.16. állítást:

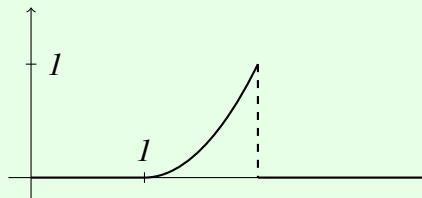
$$\mathcal{L}_f(s) = \mathcal{L}_{\mathbf{1}(t-1)}(s) - \mathcal{L}_{\mathbf{1}(t-2)}(s) = e^{-s} \cdot \frac{1}{s} - e^{-2s} \cdot \frac{1}{s} = \frac{e^{-s} - e^{-2s}}{s}.$$

□

13.3.8. **KIDOLGOZOTT FELADAT** Adjuk meg az

$$f(t) := \begin{cases} (t-1)^2, & \text{ha } t \in [1, 2), \\ 0, & \text{ha } t \in [0, 1) \cup [2, +\infty) \end{cases}$$

függvény Laplace-transzformáltját.



**MEGOLDÁS** Írjuk át most is  $f$ -et az egységugrás függvény felhasználásával:

$$f(t) = (t-1)^2(\mathbf{1}(t-1) - \mathbf{1}(t-2)) = (t-1)^2\mathbf{1}(t-1) - (t-1)^2\mathbf{1}(t-2).$$

A második tagot célszerű tovább alakítanunk és  $(t-2)$  polinomjaként felírunk

$$f(t) = (t-1)^2\mathbf{1}(t-1) - ((t-2)^2 + 2(t-2) + 1)\mathbf{1}(t-2),$$

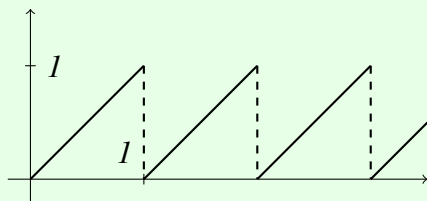
hogyan használhassuk a 13.1.16. állítást  $\lambda = 1$ , illetve  $\lambda = 2$ -vel, valamint a táblázatokat a polinomok Laplace-transzformáltjáról:

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_f(s) &= \mathcal{L}_{(t-1)^2 \mathbf{1}_{(t-1)}}(s) - \mathcal{L}_{(t-2)^2 \mathbf{1}_{(t-2)}}(s) - 2\mathcal{L}_{(t-2) \mathbf{1}_{(t-2)}}(s) - \mathcal{L}_{\mathbf{1}_{(t-2)}}(s) = \\ &= e^{-s} \cdot \frac{2}{s^3} - e^{-2s} \cdot \frac{2}{s^3} - 2e^{-2s} \cdot \frac{1}{s^2} - e^{-2s} \cdot \frac{1}{s} = \frac{2e^{-s} - e^{-2s}(2 + 2s + s^2)}{s^3}.\end{aligned}$$

Mivel  $f$  korlátos megengedett függvény, ezért  $f \in \mathcal{M}_0$ , így a Laplace-transzformált értelmezési tartománya a  $\operatorname{Re}(s) > 0$  félsík.  $\square$

### 13.3.9. KIDOLGOZOTT FELADAT (PERIODIKUS FÜGGVÉNY LAPLACE-TRANSZFORMÁLTJA)

Legyen  $f(t) := t$ , ha  $t \in [0, 1)$ , majd terjesszük ki  $f$ -et 1-periódusú periodikus függvénné a  $[0, +\infty)$  intervallumon az  $f(t+1) = f(t)$  ( $t \geq 0$ ) definícióval. Számítsuk ki  $f$  Laplace-transzformáltját.



**MEGOLDÁS** Ha  $k \in \mathbb{N}$ , akkor  $t \in [k, k+1)$  esetén nyilván  $f(t) = t - k$ , így

$$\mathcal{L}_f(s) = \int_0^{+\infty} f(t) e^{-st} dt = \sum_{k=0}^{+\infty} \int_k^{k+1} (t-k) e^{-st} dt =$$

=  $t$ -szerint parciálisan integrálva =

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \left[ \frac{-e^{-st}(1+s(t-k))}{s^2} \right]_{t=k}^{t=k+1} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{-e^{-ks}((1+s)e^{-s} - 1)}{s^2} =$$

$$\frac{1 - (1+s)e^{-s}}{s^2} \sum_{k=0}^{+\infty} e^{-ks} =$$

= a mértani sor összegképletét a  $q = e^{-s}$  választással alkalmazva =

$$\frac{1 - (1+s)e^{-s}}{s^2} \cdot \frac{1}{1 - e^{-s}}.$$

A mértani sor összegképlete csak akkor alkalmazható, ha  $|e^{-s}| = e^{-\operatorname{Re}(s)} < 1$ , vagyis, ha  $\operatorname{Re}(s) > 0$ , ami összhangban van azzal, hogy most nyilván  $f \in \mathcal{M}_0$ .  $\square$

**13.3.10. MEGJEGYZÉS** A fenti ötlettel tetszőleges szakaszonként folytonos, korlátos periodikus függvény Laplace-transzformáltja kiszámítható, ha a Laplace-transzformált a főperióduson ismert.

A következő néhány feladatban inverz Laplace-transzformáltakat számítunk ki parciális törtekre bontással, konvolúciótétellel, vagy inverziós integrállal.

Racionális törtfüggvények (azaz polinomok hányadosainak) inverz Laplace-transzformáltjára gyakran szükség van olyankor, amikor differenciálegyenleteket Laplace-transzformációval oldunk meg, illetve, amikor lineáris rendszerek átviteli függvényeit vizsgáljuk.

**13.3.11. KIDOLGOZOTT FELADAT** Adjuk meg azt az  $f: [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$  folytonos függvényt, amelynek Laplace-transzformáltja  $F(s) = \frac{1}{s(s-4)}$ . Az alkalmazásokban az  $f(t)$  függvény egy elsőrendű instabil rendszer kimenőjele, ahol a gerjesztés az egységugrás függvény, az  $F(s)$  függvény pedig a kimenő jel Laplace-transzformáltja.

**MEGOLDÁS (A.)** Mivel az  $F$  függvényt közvetlenül nem találjuk meg a Laplace-transzformáltak táblázatában, a jól ismert parciális törtekre bontás módszerével kíséreljük meg egyszerűbb törtek összegeként felírni a függvényt. A feladatbeli  $F$  racionális törtfüggvény számlálója alacsonyabb fokú, mint a nevezője, ezért nincs szükség polinomosztásra. A nevező szorzatfelbontása (legfeljebb másodfokú, tovább már nem bontható tényezőkre) szintén adott, kereshetjük tehát  $F$  felbontását az alábbi alakban:

$$\frac{1}{s(s-4)} = \frac{A}{s} + \frac{B}{s-4}.$$

Az  $A$  és  $B$  valós számok meghatározásához hozzuk közös nevezőre a jobb oldalt:

$$\frac{A}{s} + \frac{B}{s-4} = \frac{-4A + (A+B)s}{s(s-4)}.$$

Ez utóbbi kifejezés éppen  $F$  kell legyen, tehát a számlálók is megegyeznek:  $1 = -4A + (A+B)s$ . Két polinom akkor azonos, ha a megfelelő együtthatók megegyeznek: a konstans tagokból  $1 = -4A$ , illetve  $s$  együtthatóját egyeztetve  $0 = A+B$  adódik. A kapott egyenletrendszer megoldása  $A = -\frac{1}{4}$  és  $B = \frac{1}{4}$ . Azt kaptuk tehát, hogy

$$F(s) = -\frac{1/4}{s} + \frac{1/4}{s-4}.$$

Ezek a törtek már szerepelnek az inverz Laplace-transzformáltak táblázatában, a linearitást használva a két törtet külön-külön kereshetjük vissza:

$$f(t) = -\frac{1}{4} + \frac{1}{4}e^{4t}.$$

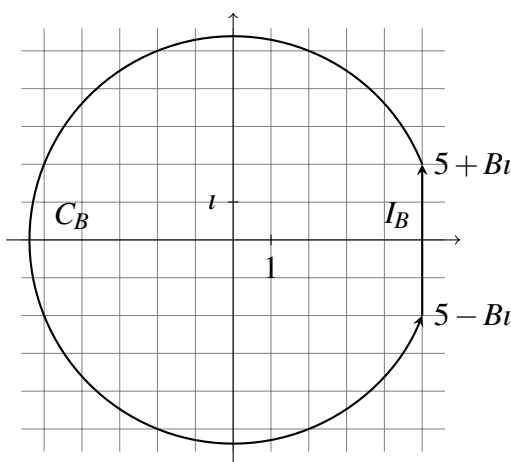
A 13.2.1. tétel értelmében ez az egyetlen folytonos függvény, melynek Laplace-transzformáltja a megadott  $F$ . □

**MEGOLDÁS (B.)** Mivel  $F$  felírható, mint az  $F_1(s) := \frac{1}{s}$  és  $F_2(s) := \frac{1}{s-4}$  függvények szorzata, a 13.2.4. állítást felhasználva azt kapjuk, hogy  $f(t) = (f_1 * f_2)(t)$ , ahol  $f_i$  ( $i = 1, 2$ ) Laplace-transzformáltja  $F_i$ . A táblázatok alapján  $f_1(t) = 1$  és  $f_2(t) = e^{4t}$ , így  $f(t) = \int_0^t f_1(\tau)f_2(t-\tau)d\tau = \int_0^t e^{4(t-\tau)}d\tau = e^{4t} \left( \frac{1}{4} - \frac{1}{4}e^{-4t} \right)$ . □

**MEGOLDÁS (C.)** Illusztráljuk végül a 13.2.2. tételt is, és számítsuk vissza  $f$ -et az inverziós integrál segítségével. Mivel  $F$  értelmezve van a  $\operatorname{Re}(s) > 4$  félsíkban, ezért az inverziós integrálban pl.  $A = 5$  választható, és így  $t > 0$  esetén

$$f(t) = \frac{1}{2\pi i} \cdot \lim_{B \rightarrow +\infty} \int_{5-Bi}^{5+Bi} F(s) e^{st} ds.$$

Alkalmazzuk a reziduomtételt. Ehhez – tetszőleges  $B > 0$  mellett – zárjuk be az  $I_B := [5 - Bi, 5 + Bi]$  függőleges, felfelé irányított utat egy pozitív irányítású, origó közepű  $C_B$  körívvel, amelynek kezdőpontja az  $5 + Bi$  pont, míg végpontja az  $5 - Bi$  pont.



13.1. ábra. Az ábrán  $B = 2$ -vel szerepel az integrálási út.

A reziduomtétel szerint rögzített  $t > 0$  mellett az  $F(s)e^{st}$  függvény  $I_B \cup C_B$  zárt görbe belsejébe eső reziduumainak összege megegyezik az  $\frac{1}{2\pi i} \int_{I_B \cup C_B} F(s)e^{st} ds$  integrállal.

Mivel az  $\frac{e^{st}}{s(s-4)}$  függvénynek  $s = 0$  és  $s = 4$  elsőrendű pólusa, ezért az  $s = 0$ -beli reziduum értéke  $\frac{e^{0t}}{0-4} = -\frac{1}{4}$ , míg az  $s = 4$ -hez tartozó reziduum  $\frac{e^{4t}}{4}$ , így

$$-\frac{1}{4} + \frac{e^{4t}}{4} = \frac{1}{2\pi i} \int_{I_B \cup C_B} F(s)e^{st} ds.$$

Másrészt nyilván

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{I_B \cup C_B} F(s)e^{st} ds = \frac{1}{2\pi i} \int_{I_B} F(s)e^{st} ds + \frac{1}{2\pi i} \int_{C_B} F(s)e^{st} ds.$$

Belátható (a részszámításokat itt nem közöljük), hogy a  $C_B$  köríven vett integrál határértéke  $B \rightarrow +\infty$  esetén 0. Az inverziós integrál szerint viszont az  $I_B$  szakaszon vett integrál limesze  $B \rightarrow +\infty$  esetén éppen  $f(t)$ .

Mindezeket figyelembe véve azt kaptuk, hogy

$$f(t) = -\frac{1}{4} + \frac{e^{4t}}{4}.$$

□

**13.3.12. KIDOLGOZOTT FELADAT** A folytonos függvények körében adjuk meg az  $F(s) := \frac{2s}{(s^2+1)^2}$  függvény inverz Laplace-transzformáltját. (Az egyszerűbb táblázatok nem tartalmazzák ugyanis a fenti függvényt.) Az  $F(s)$  függvény műszaki értelmezése a súlyfüggvény Laplace-transzformáltja. A karakterisztikus polinomon már látszik, hogy ez a rendszer instabil.

**MEGOLDÁS (A.)** Az  $F$  függvény parciális tört-felbontása önmaga (a nevezőnek kétszeres konjugált komplex gyökei vannak),  $F$  tehát egyszerűbb alakban nem írható fel. Figyeljük meg azonban, hogy  $(s^2+1)' = 2s$ , s így a láncszabály miatt  $-\left(\frac{1}{s^2+1}\right)' = F(s)$ . Az  $\frac{1}{s^2+1}$  függvény inverz Laplace-transzformáltját  $\sin(t)$  már az egyszerűbb táblázatok is tartalmazzák, a **13.1.13.** állítás szerint ezért az  $f(t) = t \sin(t)$  függvény Laplace-transzformáltja  $F$ .  $\square$

**MEGOLDÁS (B.)** A táblázatokból látjuk, hogy  $\cos(t)$  Laplace-transzformáltja  $\frac{s}{s^2+1}$ ,  $\sin(t)$  transzformáltja pedig  $\frac{1}{s^2+1}$ , és nyilván  $F(s) = 2 \cdot \frac{s}{s^2+1} \cdot \frac{1}{s^2+1}$ . A **konvolúció-tétel** szerint tehát  $F$  inverz Laplace-transzformáltja megkapható, mint  $f(t) = 2(\cos * \sin)(t) = 2 \int_0^t \cos(\tau) \sin(t-\tau) d\tau = t \sin(t)$ . (Az integrál kiszámításának részleteit elhagytuk.)  $\square$

**13.3.13. KIDOLGOZOTT FELADAT** A folytonos függvények körében adjuk meg az  $F(s) := \frac{s+2}{s^2+2s+2}$  függvény inverz Laplace-transzformáltját.

**MEGOLDÁS** Az  $F$  függvény nevezője a valós számok körében tovább már nem bontható (a diszkrimináns negatív), így  $F$  egyszerűbb törtek összegeként nem írható fel. A nevezőnek egyszeres konjugált komplex gyökei vannak, egészítsük ki tehát teljes négyzetté:  $F(s) = \frac{s+2}{(s+1)^2+1}$ . A **13.1.15.** állítást, az eltolási tételt szeretnénk alkalmazni. Alakítsuk tovább függvényünket:

$$F(s) = \frac{s+1}{(s+1)^2+1} + \frac{1}{(s+1)^2+1}.$$

Itt már felismerjük, hogy a **13.1.15.** állítás a  $\lambda = -1$  speciális esetben alkalmazható a  $\cos(t)$  és  $\sin(t)$  függvények transzformáltjaira: a keresett inverz Laplace-transzformált tehát  $f(t) = e^{-t} \cos(t) + e^{-t} \sin(t)$ .  $\square$

**13.3.14. KIDOLGOZOTT FELADAT** A folytonos függvények körében adjuk meg az  $F(s) := \frac{s+7}{s^2+4s+13}$  függvény inverz Laplace-transzformáltját.

**MEGOLDÁS** Az  $F$  függvény nevezője a valós számok körében tovább már nem bontható. A nevezőt teljes négyzetté kiegészítve, és a számlálót az eltolási tétel (**13.1.15.** állítás) alkalmazásához célszerűen átalakítva azt kapjuk, hogy

$$F(s) = \frac{s+2+5}{(s+2)^2+9} = \frac{s+2}{(s+2)^2+3^2} + \frac{5}{3} \cdot \frac{3}{(s+2)^2+3^2},$$

így ugyanis az eltolási tételt  $\lambda = -2$ -vel alkalmazhatjuk a  $\cos(3t)$  és a  $\frac{5}{3} \sin(3t)$  függvények transzformáltjaira: az inverz Laplace-transzformált tehát  $f(t) = e^{-2t} \cos(3t) + \frac{5}{3} e^{-2t} \sin(3t)$ .  $\square$

13.3.15. **KIDOLGOZOTT FELADAT** Van-e olyan  $f$  megengedett függvény, amelynek Laplace-transzformáltja  $F(s) := \frac{s^2+7}{s^2+4s+13}$ ?

**MEGOLDÁS** Ha ilyen  $f$  létezne, akkor a 13.1.6. állítás értelmében  $F$  határértéke a  $+\infty$ -ben 0 volna, ami most nyilván nem teljesül, tehát az eredeti kérdésre a válasz tagadó.  $\square$

13.3.16. **KIDOLGOZOTT FELADAT** A folytonos függvények körében adjuk meg az

$$F(s) := \frac{s+4}{(s^2+5s+6)^2}$$

függvény inverz Laplace-transzformáltját.

**MEGOLDÁS** Az  $F$  függvény nevezője tovább bontható:  $F(s) = \frac{s+4}{(s+2)^2(s+3)^2}$ . Ismert, hogy a többszörös gyököket a többszörösségnek (multiplicitásnak) megfelelő számban kell felsorolni, ezért  $F$  parciális-tört-felbontását az

$$F(s) = \frac{A}{s+2} + \frac{B}{(s+2)^2} + \frac{C}{s+3} + \frac{D}{(s+3)^2}$$

alakban keressük. A jobb oldalt közös nevezőre hozva a kapott tört számlálóját  $s$ -hatványonként hasonlítjuk össze  $F$  számlálójával, amiből az  $18A + 9B + 12C + 4D = 4$ ,  $21As + 6Bs + 16Cs + 4Ds = s$ ,  $8As^2 + Bs^2 + 7Cs^2 + Ds^2 = 0$  és  $As^3 + Cs^3 = 0$  egyenletrendszer nyerjük. Az  $s$ -hatványokat elhagyva a négy ismeretlen meghatározható:  $A = -3$ ,  $B = 2$ ,  $C = 3$  és  $D = 1$  adódik. Az első és harmadik elemi tört inverz Laplace-transzformáltja a táblázatok alapján  $-3e^{-2t}$  és  $3e^{-3t}$ . A  $\frac{2}{(s+2)^2}$  tört inverz transzformáltja például a 13.1.13. állításból kapható meg egyszeres deriválással. Hasonlóan járunk el az  $\frac{1}{(s+3)^2}$  tört esetén is. Végeredményül az

$$f(t) = -3e^{-2t} + 2te^{-2t} + 3e^{-3t} + te^{-3t}$$

függvényt kapjuk.  $\square$

13.3.17. **KIDOLGOZOTT FELADAT** Számítsuk ki az  $f(t) := \int_0^t \sin(\tau)e^{t-\tau}d\tau$  függvény Laplace-transzformáltját.

**MEGOLDÁS (A.)** A leggyorsabban úgy járhatunk el, ha észrevezzük, hogy  $f$  nem más, mint a szinuszfüggvény és az exponenciális függvény konvolúciója. A **konvolúciótétel** szerint tehát  $\mathcal{L}_f(s) = \frac{1}{s^2+1} \cdot \frac{1}{s-1}$ .  $\square$

**MEGOLDÁS (B.)** Az  $f$  függvényt definiáló integrált kiszámítva  $f(t) = \frac{1}{2}(e^t - \cos(t) - \sin(t))$  adódik. A táblázatok alapján  $f$  Laplace-transzformáltja  $\frac{1}{2}\left(\frac{1}{s-1} - \frac{s}{s^2+1} - \frac{1}{s^2+1}\right)$ , ami természetesen ugyanaz, mint az 1. megoldás eredménye.  $\square$

A Laplace-transzformáció gyakran felhasználható konvolúció-típusú integrálegyenletek megoldására. A következő két kidolgozott feladat ezt szemlélteti.

13.3.18. **KIDOLGOZOTT FELADAT** Keressük meg azt az  $x : [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$  folytonos megengedett függvényt, melyre tetszőleges  $t \geq 0$  esetén teljesül a

$$t = \int_0^t x(\tau) e^{t-\tau} d\tau$$

integrálegyenlet.

**MEGOLDÁS (A.)** Figyeljük meg, hogy a jobb oldal nem más, mint az  $(x * \exp)(t)$  konvolúció (ahol  $\exp(t) := e^t$  az exponenciális függvény). Ekkor az egyenlet mindkét oldalának Laplace-transzformáltját véve a **konvolúciótétel** alapján azt nyerjük, hogy

$$\frac{1}{s^2} = X(s) \cdot \frac{1}{s-1},$$

ahol természetesen  $X = \mathcal{L}_x$ . Ezt az algebrai egyenletet  $X$ -re megoldhatjuk:

$$X(s) = \frac{s-1}{s^2} = \frac{1}{s} - \frac{1}{s^2}.$$

Az  $x$  függvényt ebből úgy kapjuk meg, ha vesszük mindkét oldal inverz Laplace-transzformáltját:

$$x(t) = \mathcal{L}_{\frac{1}{s} - \frac{1}{s^2}}^{-1}(t) = \mathcal{L}_{\frac{1}{s}}^{-1}(t) - \mathcal{L}_{\frac{1}{s^2}}^{-1}(t) = 1 - t. \quad \square$$

**MEGOLDÁS (B.)** A megoldáshoz Laplace-transzformáció nélkül is eljuthatunk. Deriválva ugyanis az egyenlet mindkét oldalát  $t$ -szerint, a láncszabály és az integrálfüggvény deriválási szabálya alapján azt kapjuk, hogy

$$1 = \left( e^t \int_0^t x(\tau) e^{-\tau} d\tau \right)' = e^t \int_0^t x(\tau) e^{-\tau} d\tau + e^t x(t) e^{-t} = t + x(t),$$

ahol az utolsó egyenlőségénél felhasználtuk magát az eredeti egyenletet is. Ebből  $x(t) = 1 - t$ .  $\square$

13.3.19. **KIDOLGOZOTT FELADAT** Adjuk meg azt az  $x : [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$  folytonos megengedett függvényt, melyre tetszőleges  $t \geq 0$  esetén fennáll az

$$x(t) = \mathbf{I}(t) - \int_0^t (t - \tau) x(\tau) d\tau$$

integrálegyenlet.

**MEGOLDÁS** Az integrál ismét egy konvolúció:  $(\text{id} * x)(t)$ , ahol  $\text{id}(t) := t$  az identitásfüggvény. Az egyenletet Laplace-transzformálva az alábbi algebrai egyenletet kapjuk:

$$X(s) = \frac{1}{s} - \frac{1}{s^2} X(s).$$

Ebből

$$X(s) = \frac{s}{1+s^2},$$

vagyis, inverz Laplace-transzformáció után,

$$x(t) = \cos(t). \quad \square$$

A fejezetet lezáró feladatokkal végül azt illusztráljuk, hogy a Laplace-transzformáció hogyan használható differenciálegyenletek megoldására. Figyeljük meg, hogy a módszer akkor hatékony, ha a differenciálegyenletek kezdeti feltételei meg vannak adva.

13.3.20. **KIDOLGOZOTT FELADAT** Oldjuk meg az

$$\begin{cases} x'(t) - 4x(t) = 1, \\ x(0) = 1 \end{cases}$$

lineáris differenciálegyenletet.

**MEGOLDÁS** Vegyük az első egyenlőség Laplace-transzformáltját. A 13.1.10. állítás alapján az

$$sX(s) - x(0) - 4X(s) = \frac{1}{s}$$

algebrai összefüggést kapjuk. (Figyeljünk a  $x$  és  $X$  közti különbségtételre!) Az  $x(0) = 1$  kezdeti feltételt a nyert összefüggésbe behelyettesítve  $X(s)$  kifejezhető:

$$X(s) = \frac{s+1}{s(s-4)} = \frac{s}{s(s-4)} + \frac{1}{s(s-4)} = \frac{1}{s-4} + \frac{1}{s(s-4)}.$$

Az legutolsó tag inverz Laplace-transzformáltját a 13.3.11. feladatban már kiszámítottuk (a másik tag a táblázatokban szerepel), így

$$x(t) = e^{4t} - \frac{1}{4} + \frac{e^{4t}}{4} = \frac{5e^{4t} - 1}{4}.$$

(Utólag látjuk, hogy  $x$  megengedett függvény, és a kezdetiérték-probléma egyértelmű megoldhatóságára hivatkozva azt kaptuk, hogy a differenciálható függvények körében csak az iménti  $x$  a megoldás.)  $\square$

13.3.21. **KIDOLGOZOTT FELADAT** Oldjuk meg az

$$\begin{cases} x''(t) + 2x'(t) + 10x(t) = 37\cos(3t) + 9e^{-t}, \\ x(0) = 1, x'(0) = 0 \end{cases}$$

másodrendű differenciálegyenletet.

**MEGOLDÁS** A 13.1.11. állítás alapján az egyenlet Laplace-transzformáltja

$$s^2X(s) - sx(0) - x'(0) + 2(sX(s) - x(0)) + 10X(s) = \frac{37s}{s^2+3^2} + \frac{9}{s+1},$$

amiből a kezdeti feltételeket figyelembe véve  $X(s)$  kifejezhető, mint

$$X(s) = \frac{s^4 + 3s^3 + 57s^2 + 64s + 99}{(s+1)(s^2+9)(s^2+2s+10)}.$$



A jobb oldal parciális tört-felbontása most

$$\frac{A}{s+1} + \frac{Bs+C}{s^2+9} + \frac{Ds+E}{s^2+2s+10}$$

alakban kereshető. A közös nevezőre hozás és együttható-egyeztetés után adódó ötismeretlenes egyenletrendszert megoldva azt kapjuk, hogy

$$X(s) = \frac{1}{s+1} + \frac{s+18}{s^2+9} + \frac{-s-19}{s^2+2s+10}.$$

Ez alapján – és az előző kidolgozott feladatok megoldásában bemutatott célszerű átalakítások után – az inverz Laplace-transzformáció meghatározható. Végeredményül azt nyerjük, hogy

$$x(t) = e^{-t} + (1 - e^{-t}) \cos(3t) + (6 - 6e^{-t}) \sin(3t). \quad \square$$

### 13.3.22. KIDOLGOZOTT FELADAT Oldjuk meg az

$$\begin{cases} x'(t) &= -y(t), \\ y'(t) &= x(t), \\ x(0) = 1, & y(0) = 0 \end{cases}$$

*differentiálegyenlet-rendszert.*

**MEGOLDÁS** A két egyenlet Laplace-transzformáltja a kezdeti feltételt is figyelembe véve

$$\begin{cases} sX(s) - 1 &= -Y(s), \\ sY(s) - 0 &= X(s), \end{cases}$$

amiből azt kapjuk, hogy  $s(1 - sX(s)) = X(s)$ , vagyis  $X(s) = \frac{s}{1+s^2}$ , illetve  $Y(s) = \frac{1}{1+s^2}$ . A táblázatokból látjuk, hogy a folytonos függvények körében ez csak úgy teljesülhet, ha  $x(t) = \cos(t)$  és  $y(t) = \sin(t)$ .  $\square$

### 13.3.23. KIDOLGOZOTT FELADAT Adjuk meg a

$$\begin{cases} tx''(t) + (4t-2)x'(t) - 4x(t) &= 0, \\ x(0) &= 1 \end{cases}$$

*polinom-együtthatós másodrendű lineáris differenciálegyenlet általános megoldását.*

**MEGOLDÁS** Vegyük az egyenlet Laplace-transzformáltját. Az első tag,  $tx''(t)$  transzformálásához használjuk fel a 13.1.13. és a 13.1.11. állítást:

$$\mathcal{L}_{tx''(t)}(s) = -(\mathcal{L}_{x''(t)})'(s) = -(s^2X(s) - sx(0) - x'(0))' =$$

$$-(2sX(s) + s^2X'(s) - x(0)) = -s^2X'(s) - 2sX(s) + x(0) = -s^2X'(s) - 2sX(s) + 1,$$

a kezdeti feltételt is figyelembe véve. A második tag Laplace-transzformáltja

$$\mathcal{L}_{(4t-2)x'(t)}(s) = 4\mathcal{L}_{tx'(t)}(s) - 2\mathcal{L}_{x'(t)}(s) =$$

$$\begin{aligned}
 -4(\mathcal{L}_{x'(t)})'(s) - 2(sX(s) - x(0)) &= -4(sX(s) - 1)'(s) - 2(sX(s) - 1) = \\
 &= -4(X(s) + sX'(s)) - 2sX(s) + 2.
 \end{aligned}$$

Összefoglalva, az egyenlet Laplace-transzformáltja

$$-s^2X'(s) - 2sX(s) + 1 - 4X(s) - 4sX'(s) - 2sX(s) + 2 - 4X(s) = 0,$$

vagyis

$$(-s^2 - 4s)X'(s) + (-4s - 8)X(s) + 3 = 0.$$

Figyeljük meg, hogy  $X$ -ben ez már csak egy elsőrendű egyenlet, amit integrálással meg lehet oldani. A homogén egyenlet  $(-s^2 - 4s)X'_{\text{hom}}(s) + (-4s - 8)X_{\text{hom}}(s) = 0$  szétválasztható változójú, hiszen  $\frac{X'_{\text{hom}}(s)}{X_{\text{hom}}(s)} = -\frac{4s+8}{s^2+4s}$  alakú. Integrálással ebből

$$\ln(X_{\text{hom}}(s)) = -\int \frac{4s+8}{s^2+4s} ds + c$$

adódik, ahol  $c$  tetszőleges valós konstans. Mivel  $\frac{4s+8}{s^2+4s} = \frac{4s+8}{s(s+4)} = \frac{A}{s} + \frac{B}{s+4} = \frac{2}{s} + \frac{2}{s+4}$ , ezért  $\int \frac{4s+8}{s^2+4s} ds = 2(\ln(s) + \ln(s+4)) = \ln(s^2(s+4)^2)$ , amiből

$$X_{\text{hom}}(s) = \frac{e^c}{s^2(s+4)^2}.$$

Mivel  $c$  tetszőleges állandó, az egyszerűség kedvéért  $e^c$  helyett a továbbiakban ismét  $c$ -t írunk, vagyis a homogén egyenlet általános megoldása  $\frac{c}{s^2(s+4)^2}$  alakú.

Az inhomogén  $(-s^2 - 4s)X'(s) + (-4s - 8)X(s) + 3 = 0$  egyenlet partikuláris megoldása – az *állandó variálása módszerének* értelmében – megtalálható  $\frac{c(s)}{s^2(s+4)^2}$  alakban. Ezt a próbafüggvényt az inhomogén egyenletbe visszahelyettesítve és egyszerűsítve a

$$\frac{c'(s)}{s(s+4)} = 3$$

egyenletet kapjuk, amiből  $c(s) = s^3 + 6s^2$ , vagyis egy partikuláris megoldás az  $\frac{s^3+6s^2}{s^2(s+4)^2}$  függvény.

Az  $X$ -re felírt elsőrendű egyenlet általános megoldása tehát a homogén és inhomogén megoldás összege:

$$X(s) = \frac{c + s^3 + 6s^2}{s^2(s+4)^2}.$$

Már csak annyi van hátra, hogy az  $X(s)$  függvény inverz Laplace-transzformáltját meghatározzuk. Ehhez a szokásos módon keressük a parciális tört-felbontását

$$X(s) = \frac{A}{s} + \frac{B}{s^2} + \frac{D}{s+4} + \frac{E}{(s+4)^2}$$

alakban, melyre az

$$X(s) = -\frac{c/32}{s} + \frac{c/16}{s^2} + \frac{1+c/32}{s+4} + \frac{2+c/16}{(s+4)^2}$$

képletet kapjuk. Ebből az inverz Laplace-transzformált, azaz a feladat megoldása

$$x(t) = -\frac{c}{32} + \frac{c}{16}t + (1 + c/32)e^{-4t} + (2 + c/16)te^{-4t}.$$

□

13.3.24. **KIDOLGOZOTT FELADAT** Oldjuk meg az

$$\begin{cases} x''(t) + 2tx'(t) - 4x(t) = 1, \\ x(0) = x'(0) = 0 \end{cases}$$

*polinom-együtthatós másodrendű inhomogén lineáris differenciálegyenletet.*

**MEGOLDÁS** Az előző feladat megoldásához hasonlóan járunk el. Az egyenlet Laplace-transzformáltját véve azt kapjuk, hogy

$$s^2X(s) - s \cdot 0 - 0 + 2(-X(s) - sX'(s)) - 4X(s) = \frac{1}{s},$$

azaz

$$-2sX'(s) + (s^2 - 6)X(s) = \frac{1}{s}.$$

Ennek az elsőrendű egyenletnek a megoldása is két részből adódik össze. A homogén, szétválasztható változójú  $-2sX'_{\text{hom}}(s) + (s^2 - 6)X_{\text{hom}}(s) = 0$  egyenlet általános megoldása

$$X_{\text{hom}}(s) = \frac{c}{s^3} e^{s^2/4}.$$

Az állandó variálásával ebből a  $-2sX'(s) + (s^2 - 6)X(s) = \frac{1}{s}$  inhomogén egyenlet partikuláris megoldására  $\frac{1}{s^3}$  adódik. Az  $X$ -re felírt egyenlet általános megoldása tehát

$$X(s) = \frac{c}{s^3} e^{s^2/4} + \frac{1}{s^3}.$$

A 13.1.6. állítás értelmében ha  $X$  egy megengedett függvény Laplace-transzformáltja, akkor  $\lim_{s \rightarrow +\infty} X(s) = 0$ . Ez most csak úgy lehet, ha  $c = 0$ , vagyis  $X(s) = \frac{1}{s^3}$ . Az inverz transzformáció szerint viszont ekkor

$$x(t) = \frac{t^2}{2}$$

lehet csak az eredeti feladat megoldása, amint ez visszahelyettesítés után megerősítést is nyer. □

13.3.25. **KIDOLGOZOTT FELADAT** Oldjuk meg a

$$\begin{cases} \partial_{xx}u(x,t) = \partial_t u(x,t), \\ u(x,0) = 1 \quad (x \geq 0), \\ u(0,t) = e^{-t} \quad (t \geq 0) \end{cases}$$

*lineáris parabolikus parciális differenciálegyenletet. (Az egyenlet egy egydimenziós végtelen rúd hőmérséklet-eloszlását modellezi: a rudat az  $x \geq 0$  félegyenes reprezentálja. Az  $u(x,0) = 1$  kezdeti feltétel szerint a rúd hőmérséklete a  $t = 0$  időpillanatban mindenhol 1, az  $u(0,t) = e^{-t}$  peremfeltétel szerint pedig a rúd  $x = 0$ -nál lévő végének hőmérsékletét 1-ről exponenciálisan 0-ra csökkentjük. Az egyenlet megoldása,  $u(x,t)$  írja le a rúd  $x \geq 0$  pontjának hőmérsékletét a  $t \geq 0$  időpontban.)*

**MEGOLDÁS** Vegyük az egyenlet  $t$ -szerinti Laplace-transzformáltját, vagyis a  $t$ -változó  $s$ -sé transzformálódik,  $x$ -et pedig paraméternek tekintjük: legyen tehát

$$U(x, s) := \int_0^{+\infty} u(x, t) e^{-st} dt.$$

A fizikai kép alapján feltehetjük, hogy  $u$  korlátos és folytonos ( $s$  így megengedett függvény), és – a további átalakítások érdekében – azt is, hogy az  $x$ -szerinti parciális deriváltak felcserélhetők az integrálással, vagyis, hogy

$$\int_0^{+\infty} \partial_{xx} u(x, t) e^{-st} dt = \partial_{xx} \int_0^{+\infty} u(x, t) e^{-st} dt = \partial_{xx} U(x, s).$$

(E feltevések jogosságát – az egyértelmű megoldhatóságra hivatkozva – utólag láthatjuk be.)

Az egyenlet Laplace-transzformáltja – a kezdeti feltételt is figyelembe véve, és a peremfeltételt is transzformálva –

$$\begin{cases} \partial_{xx} U(x, s) = sU(x, s) - 1 \\ U(0, s) = \frac{1}{s+1}. \end{cases}$$

Figyeljük meg, hogy ha  $s$ -et paraméternek tekintjük, akkor ez  $U$ -ra  $x$ -ben egy másodrendű közönséges differenciálegyenlet, egy kezdeti feltétellel. A hiányzó másik feltétel pótlásaként tegyük fel azt, hogy rögzített  $s$  mellett az  $U$  függvény  $x$ -ben korlátos. A homogén egyenlet általános megoldása

$$U_{\text{hom}}(x, s) = c_1(s) e^{-x\sqrt{s}} + c_2(s) e^{x\sqrt{s}},$$

tetszőleges  $c_1$  és  $c_2$ , csak  $s$ -től függő függvényekkel. A korlátossági feltevés miatt viszont  $c_2(s) \equiv 0$  kell legyen, így

$$U_{\text{hom}}(x, s) = c_1(s) e^{-x\sqrt{s}}.$$

Az is egyszerűen látható, hogy az inhomogén egyenlet partikuláris megoldása  $1/s$ , így a közönséges differenciálegyenletet az

$$U(x, s) = c_1(s) e^{-x\sqrt{s}} + \frac{1}{s}$$

függvény megoldja. Az  $U(0, s) = \frac{1}{s+1}$  kezdeti feltétel nyilván akkor teljesül, ha  $\frac{1}{s+1} = c_1(s) e^{-0\sqrt{s}} + \frac{1}{s} = c_1(s) + \frac{1}{s}$ , amiből azt kapjuk, hogy  $c_1(s) = \frac{1}{s+1} - \frac{1}{s}$ , vagyis

$$U(x, s) = \frac{1}{s} - \left( \frac{1}{s} - \frac{1}{s+1} \right) e^{-x\sqrt{s}}.$$

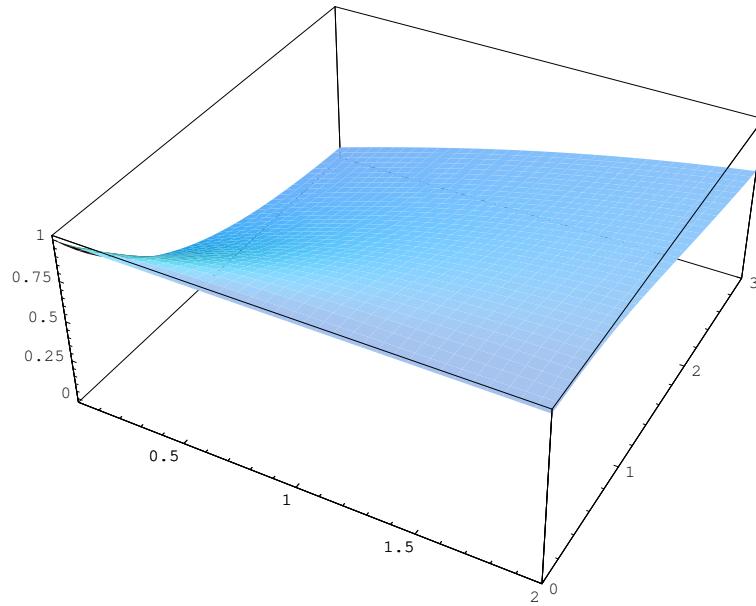
Az  $u(x, t)$  függvényt most már az  $U(x, s)$  függvény ( $s$ -szerinti) inverz Laplace-transzformáltjaként kapjuk meg. A törtek visszatranszformálása egyszerű, a szorzat inverz transzformáltjához a konvolúciótételt használjuk. Az egyedüli kérdés az, hogy mi az  $e^{-x\sqrt{s}}$  függvény ( $x > 0$ ) inverz Laplace-transzformáltja. Az átfogóbb transzformációs táblázatok megadják a választ:  $x > 0$  esetén az

$$\frac{x}{2\sqrt{\pi}} \cdot \frac{1}{t^{3/2}} \cdot \exp\left(-\frac{x^2}{4t}\right)$$

függvény Laplace-transzformáltja  $e^{-x\sqrt{s}}$ .

Ezek alapján azt nyertük, hogy  $x > 0$  és  $t > 0$  mellett a parciális differenciálegyenlet megoldása

$$u(x, t) = 1 - \frac{x}{2\sqrt{\pi}} \int_0^t \frac{1 - \exp(\tau - t)}{\tau^{3/2}} \exp\left(-\frac{x^2}{4\tau}\right) d\tau.$$



Az egydimenziós hővezetési probléma  $u(x, t)$  megoldása. A vízszintes tengelyeken  $x \in [0, 2]$  és  $t \in [0, 3]$  között van feltüntetve, miközben a függőleges tengelyen a rúd  $u$  hőmérséklete az idő múlásával a kezdeti 1-ről fokozatosan 0-ra csökken

Elsőre nem látszik, hogy a fent megadott  $u(x, t)$  függvényre teljesül a  $\partial_{xx}u(x, t) = \partial_t u(x, t)$  összefüggés. (Parciális integrálással és a szükséges határértékek kiszámításával ellenőrizzük ezt! Megjegyezzük, hogy az  $u$  függvényben szereplő integrált elemi függvényekkel nem lehet kifejezni.) Az sem nyilvánvaló, hogy az  $u$  függvény miért teljesíti az  $u(x, 0) = 1$  ( $x \geq 0$ ), illetve  $u(0, t) = e^{-t}$  ( $t \geq 0$ ) kezdeti-, illetve peremfeltételt. (Figyeljünk arra, hogy az integrálképlet csak  $x > 0$  és  $t > 0$  esetén érvényes.) Megmutatható azonban, hogy  $x > 0$  esetén

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} u(x, t) = 1$$

és  $t > 0$  mellett

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} u(x, t) = e^{-t}.$$

□

## 13.4. További gyakorlófeladatok végeredménnyel

13.4.1. **FELADAT** Számítsuk ki az  $f(t) := \int_0^t \tau^2 e^{-\tau} d\tau$  függvény Laplace-transzformáltját.

**ÚTMUTATÁS** Az  $f$  függvényben szereplő integrál kiszámítása nélkül is elindulhatunk, ha a 13.1.12. állítást alkalmazzuk:

$$\mathcal{L}_f(s) = \frac{1}{s} \cdot \mathcal{L}_{t^2 e^{-t}}(s).$$

A táblázatokból kikeresve  $t^2$  transzformáltját és felhasználva például a 13.1.15. állítást  $\lambda = -1$ -gyel, azt kapjuk, hogy  $\mathcal{L}_{t^2 e^{-t}}(s) = \frac{2}{(s+1)^3}$ . A végeredmény tehát  $\mathcal{L}_f(s) = \frac{2}{s(s+1)^3}$ .  $\square$

**13.4.2. FELADAT** A folytonos függvények körében adjuk meg az  $F(s) := \frac{2s+1}{s(s-1)(s+1)}$  függvény inverz Laplace-transzformáltját. (Ha az  $F(s)$  függvényt átviteli függvényként interpretáljuk, akkor azonnal látható, hogy a feladat instabil rendszerre utal. Ez az  $f(t)$  súlyfüggvény végeredményként kiszámított alakjából valóban leolvasható.)

**ÚTMUTATÁS** Az  $F$  függvény nevezője magasabb fokú polinom, mint a számláló, így polinomosztásra nincs szükség. A nevező szorzat-alakban adott,  $F$  tehát kereshető az  $\frac{A}{s} + \frac{B}{s-1} + \frac{C}{s+1}$  parciális törtek összegeként. Az ismeretlen együtthatókra  $A = -1$ ,  $B = 3/2$  és  $C = -1/2$  adódik. A táblázatok alapján az inverz transzformált  $f(t) = -1 + \frac{3}{2}e^t - \frac{1}{2}e^{-t}$ .  $\square$

**13.4.3. FELADAT** Adjunk meg egy olyan szakaszonként folytonos  $f: [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$  megengedett függvényt, amelynek Laplace-transzformáltja

$$F(s) := \frac{e^{-5s} + se^{-3s}}{s^2 - 1}.$$

(Itt is megfigyelhető a 13.4.2. feladat instabil rendszerre vonatkozó megjegyzése.)

**ÚTMUTATÁS** Az  $F$  függvény nevezőjének szorzatfelbontása  $(s-1)(s+1)$ , ezért  $F$ -et parciális törtek összegeként az  $F(s) = e^{-5s} \left( \frac{A}{s-1} + \frac{B}{s+1} \right) + e^{-3s} \left( \frac{C}{s-1} + \frac{D}{s+1} \right)$  alakban keressük. Az ismeretlen együtthatókra  $A = C = D = 1/2$  és  $B = -1/2$ -et kapunk. A táblázatok és a 13.1.16. állítás szerint (a  $\lambda = 5$ , illetve  $\lambda = 3$  választással) az

$$f(t) = \left( \frac{1}{2}e^{t-5} - \frac{1}{2}e^{-(t-5)} \right) \mathbf{1}(t-5) + \left( \frac{1}{2}e^{t-3} + \frac{1}{2}e^{-(t-3)} \right) \mathbf{1}(t-3) = \\ \text{sh}(t-5)\mathbf{1}(t-5) + \text{ch}(t-3)\mathbf{1}(t-3)$$

függvény például olyan, melyre  $\mathcal{L}_f(s) = F(s)$ . (Az esetszétválasztással történő leírás helyett itt is az egységugrás függvényt használtuk.)  $\square$

**13.4.4. FELADAT** Oldjuk meg az

$$\begin{cases} x''(t) + 4x(t) &= \cos(t), \\ x(0) = x'(0) &= 0 \end{cases}$$

másodrendű differenciálegyenletet.

**ÚTMUTATÁS** Az egyenlet Laplace-transzformáltja  $s^2 X(s) - s \cdot x(0) - x'(0) + 4X(s) = \frac{s}{s^2+1}$ , vagyis (a kezdeti értékeket is figyelembe véve)  $X(s) = \frac{s}{s^4+5s^2+4} = \frac{s}{(s^2+1)(s^2+4)}$ . A jobb oldal parciális-tört-felbontása  $\frac{s}{3(s^2+1)} - \frac{s}{3(s^2+4)}$ , amiből inverz Laplace-transzformáció után  $x(t) = \frac{\cos(t)}{3} - \frac{\cos(2t)}{3}$  adódik.  $\square$

13.4.5. **FELADAT** Oldjuk meg az

$$\begin{cases} x''(t) + y(t) = -\cos(2t), \\ y''(t) + x(t) = \cos(2t), \\ x(0) = 1, \quad x'(0) = 1, \\ y(0) = -1, \quad y'(0) = 1 \end{cases}$$

differentiálegyenlet-rendszert.

**ÚTMUTATÁS** Az egyenletrendszer Laplace-transzformáltja a kezdeti feltétel alapján

$$\begin{cases} s^2 X(s) - s \cdot 1 - 1 + Y(s) = -\frac{s}{s^2+4}, \\ s^2 Y(s) - s \cdot (-1) - 1 + X(s) = \frac{s}{s^2+4}. \end{cases}$$

Az első egyenlethől  $Y(s)$ -et kifejezve és a másodikba helyettesítve az

$$s^2 \left( -\frac{s}{s^2+4} - s^2 X(s) + s + 1 \right) + s - 1 + X(s) = \frac{s}{s^2+4}$$

egyenletet kapjuk, amiből

$$X(s) = \frac{-4 + 3s + 3s^2 + 4s^3 + s^4 + s^5}{(s^4 - 1)(s^2 + 4)}.$$

Mivel  $s^4 - 1 = (s - 1)(s + 1)(s^2 + 1)$ , ezért a jobb oldal parciálistört-felbontását

$$\frac{A}{s-1} + \frac{B}{s+1} + \frac{Cs+D}{s^2+1} + \frac{Es+F}{s^2+4}$$

alakban keresve

$$X(s) = \frac{2/5}{s-1} + \frac{2/5}{s+1} + \frac{1}{s^2+1} + \frac{s/5}{s^2+4}$$

adódik. Visszahelyettesítés után azt kapjuk, hogy

$$Y(s) = \frac{-4 - 3s + 3s^2 - 4s^3 + s^4 - s^5}{(s^4 - 1)(s^2 + 4)} = -\frac{2/5}{s-1} - \frac{2/5}{s+1} + \frac{1}{s^2+1} - \frac{s/5}{s^2+4},$$

a résztörtekre bontást is elvégezve. Az inverz Laplace-transzformáltak a táblázatokból már egyszerűen kiolvashatók. A megoldás

$$x(t) = \frac{2e^t}{5} + \frac{2e^{-t}}{5} + \sin(t) + \frac{\cos(2t)}{5}$$

és

$$y(t) = -\frac{2e^t}{5} - \frac{2e^{-t}}{5} + \sin(t) - \frac{\cos(2t)}{5}.$$

(A 13.4.2. (vagy 13.4.3.) feladathoz hasonlóan itt is instabil viselkedést mutat a rendszer.)  $\square$

13.4.6. **FELADAT** Oldjuk meg az

$$\begin{cases} x'(t) &= \int_0^t x(\tau) \cos(t - \tau) d\tau, \\ x(0) &= 1 \end{cases}$$

integrodifferenciál-egyenletet.

**ÚTMUTATÁS** Az egyenlet Laplace-transzformáltját véve – a **konvolúciótételt** is felhasználva – az

$$sX(s) - 1 = X(s) \cdot \frac{s}{s^2 + 1}$$

algebrai egyenletet nyerjük. Átrendezés után azt kapjuk, hogy  $X(s) = \frac{1+s^2}{s^3} = \frac{1}{s^3} + \frac{1}{s}$ . Az inverz Laplace-transzformáció az

$$x(t) = \frac{t^2}{2} + 1$$

megoldást szolgáltatja. □





# Közönséges differenciálegyenletek

**Kiss Márton**

BME Differenciálegyenletek Tanszék

**Nagy Katalin**

BME Differenciálegyenletek Tanszék

**Konzulens: Kovács Ádám**

BME Műszaki Mechanikai Tanszék

# 14. fejezet

## Bevezetés

Ez a jegyzet a BME gépészmérnöki MSc szak hallgatói számára készült a matematika M2 tárgy közönséges differenciálegyenletek részéhez segédletként. Célunk az ismeretek alkalmazása a gyakorlatban, a problémamegoldó képesség fejlesztése. Igyekszünk – a terjedelmi és időbeli korlátok ellenére – egy matematikailag pontos, ugyanakkor mérnökök számára is szemléletes tárgyalásmódot kialakítani. Így minden fejezet négy alfejezetből áll. A feladatok megoldásához szükséges elméleti összefoglalást kidolgozott mintapéldák követik. Minden témakörhöz megadunk gyakorlófeladatokat is. Végül a matematikai háttér részben olyan definíciók, tételek, konstrukciók találhatók, amelyekről úgy gondoljuk, hogy szemléletformáló erejűek, de a feladatok megoldásához nem nélkülözhetetlenek.

# 15. fejezet

## Elsőrendű közönséges differenciálegyenletek

### 15.1. Elméleti összefoglaló

Mechanikában, hőtanban, szilárdságtanban számtalan differenciálegyenlettel találkoztunk, amelyek egy-egy jól meghatározott determinisztikus folyamatot modelleznek. Közönséges differenciálegyenletről (KDE) beszélünk, ha az ismeretlen függvény egy skalárváltozótól függ. Ez a változó lehet az idő, ha egy pont pályájára vagy bármilyen fizikai mennyiség változására vagyunk kíváncsiak (lásd a 16.2.1. kidolgozott feladatot). KDE-t kapunk időfüggetlen egydimenziós problémák vizsgálatakor, valamint gyakran kör- vagy gömbszimmetrikus problémák esetén is (lásd a 16.2.9., a 16.2.10. és a 16.2.5. kidolgozott feladatot). Az egyenletben szereplő legmagasabb rendű derivált adja meg az egyenlet rendjét. A magasabbrendű differenciálegyenletek mindig visszavezethetők elsőrendű rendszerre (lásd pl. a 15.2.2. kidolgozott feladatot), ezért a tételleket elsőrendű egyenletekre mondjuk ki. Az egyenlet explicit, ha a legmagasabb rendű deriváltat kifejeztük az alacsonyabbrendű deriváltak segítségével. Egy explicit elsőrendű közönséges differenciálegyenlet tehát úgy néz ki, hogy az egyik oldalon szerepel az ismeretlen függvény deriváltja, ami a változónak és az ismeretlen függvénynek egy függvényével egyenlő. Ha például  $y$ -nal jelöljük a függvényt, és  $t$ -vel a változót, akkor az explicit elsőrendű közönséges differenciálegyenlet:

$$y'(t) = f(t, y(t)). \quad (15.1)$$

Egyszerűnek tűnik, de ha

$$\begin{aligned} y &: U \rightarrow \mathbb{R}^n, & U &\subset \mathbb{R}, \\ f &: D \rightarrow \mathbb{R}^n, & D &\subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n, \end{aligned}$$

akkor a (15.1.) egyenlet tartalmazza az alábbi:

$$\begin{aligned} y_1'(t) &= f_1(t, y_1(t), y_2(t), \dots, y_n(t)) \\ y_2'(t) &= f_2(t, y_1(t), y_2(t), \dots, y_n(t)) \\ &\vdots \\ y_n'(t) &= f_n(t, y_1(t), y_2(t), \dots, y_n(t)). \end{aligned}$$

Említettük, hogy a magasabbrendű egyenletek is visszavezethetők elsőrendű rendszerre, így azok is a (15.1.) alakra hozhatók.

Ha egy kezdeti feltétel,  $y(t_0) = y_0$  is adott, akkor az

$$y'(t) = f(t, y(t)) \quad (15.2)$$

$$y(t_0) = y_0 \quad (15.3)$$

egyenletrendszert kezdetiérték-problémának nevezzük.

Felmerülhet a kérdés, hogy a (15.1.) egyenletnek mi a megoldása. Sajnos ilyen általánosságban nincs megoldóképlet, hiszen az azt jelentené, hogy minden magasabbrendű egyenletrendszert is meg tudunk oldani. Ahhoz, hogy a kezdetiérték-probléma (vagy általánosabban, a differenciálegyenlet az esetlegesen megadott további feltételekkel együtt) jól használható modell legyen, szükséges, hogy

1. legyen megoldása;
2. a megoldás legyen egyértelmű;
3. a megoldás függjön folytonosan  $f$ -től és a kezdeti feltételtől,

hiszen ezek részben pontatlan mérésekből is származhatnak. Ha mindhárom követelmény teljesül, akkor a kezdetiérték-probléma korrekt kitűzésű. Ezzel kapcsolatos a következő tétel, és az előtte lévő definíció:

**15.1.1. DEFINÍCIÓ** Az  $f : [a, b] \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  függvény a második változójában Lipschitz-tulajdonságú (MVL), ha létezik olyan  $L$  konstans, amellyel  $t \in [a, b]$  és  $y, z \in \mathbb{R}^n$  esetén  $|f(t, y) - f(t, z)| \leq L|y - z|$ .

Fontos észrevétel, hogy ha  $f(t, y)$   $y$  szerint deriválható, és az  $y$  szerinti derivált folytonos vagy korlátos, akkor  $f$  MVL.

**15.1.2. TÉTEL** Legyen  $f : [a, b] \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  folytonos és MVL akkor a (15.2.)-(15.3.) kezdetiérték-problémának létezik egyértelmű megoldása az  $[a, b]$  intervallumon.

## 15.2. Kidolgozott példák

**15.2.1. KIDOLGOZOTT FELADAT** Egy tartályban 10 liter víz van, melybe literenként 0,2 kg sót tartalmazó oldat folyik be 2 l/perc sebességgel. A befolyó oldat azonnal összekeveredik a tartályban lévő folyadékkal, és a keverék szintén 2 l/perc sebességgel kifolyik a tartályból. Írjunk fel differenciálegyenletet arra, hogy a  $t$  időpontban mennyi só lesz a tartályban.

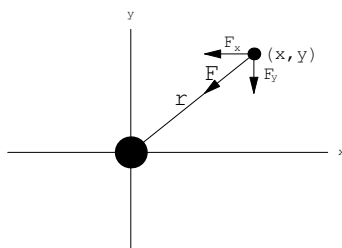
**MEGOLDÁS** Jelölje  $y(t)$  a tartályban lévő só mennyiségét a kísérlet kezdetétől számított  $t$  idő elteltével. 1 perc alatt 2 liter folyik be  $\Rightarrow \Delta t$  idő alatt  $2\Delta t$  liter, ebben  $0,4\Delta t$  kg só van. A tartályban 10 liter folyadék van, ez  $y(t)$  kg sót tartalmaz, ezért 1 liter  $\frac{y(t)}{10}$  kg sót tartalmaz,

azaz  $\Delta t$  idő alatt  $2\Delta t \frac{y(t)}{10}$  kg só folyik ki.  $y(t)$  megváltozása egyenlő az előbbi két mennyiség különbségével:

$$\begin{aligned}y(t + \Delta t) - y(t) &= 0,4\Delta t - 0,2\Delta t y(t) \\ y'(t) &= 0,4 - 0,2y(t).\end{aligned}$$

Ezt a differenciálegyenletet meg tudjuk oldani,  $y(t) = 2 + ce^{-0,2t}$ , de végtelen sok megoldás van, ezért egy további feltételt is kell adnunk. Tudjuk, hogy a  $t = 0$  időpontban - a kísérlet kezdetén - a tartályban tiszta víz van, azaz  $y(0) = 0$ . A kezdeti feltétellel együtt a kezdetiérték-probléma megoldása:  $y(t) = 2 - 2e^{-0,2t}$ .  $\square$

**15.2.2. KIDOLGOZOTT FELADAT** Modellezzük elsőrendű differenciálegyenlettel egy csillag körül keringő bolygó mozgását! Tegyük fel, hogy a csillag helyben marad, a mozgás síkbeli, és a testek tömegközéppont körüli forgását is hanyagoljuk el (Kepler-feladat).



15.1. ábra.

**MEGOLDÁS** A Newton-féle gravitációs törvény szerint  $|F| = \gamma \frac{mM}{r^2}$ , azaz a tengelyek irányában  $F_x = -\gamma \frac{mM}{r^2} \frac{x}{r}$ ,  $F_y = -\gamma \frac{mM}{r^2} \frac{y}{r}$  (15.1. ábra).  $r = (x^2 + y^2)^{\frac{1}{2}}$ -et felhasználva a mozgásegyenlet tehát:

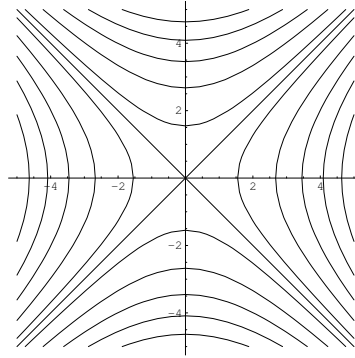
$$\begin{aligned}x'' &= -\gamma \frac{M}{(x^2 + y^2)^{\frac{3}{2}}} x \\ y'' &= -\gamma \frac{M}{(x^2 + y^2)^{\frac{3}{2}}} y.\end{aligned}$$

Ez másodrendű egyenlet, de az  $u = x'$  és  $v = y'$  új változókkal elsőrendűvé alakíthatjuk:

$$\begin{aligned}x' &= u \\ y' &= v \\ u' &= -\gamma \frac{M}{(x^2 + y^2)^{\frac{3}{2}}} x \\ v' &= -\gamma \frac{M}{(x^2 + y^2)^{\frac{3}{2}}} y.\end{aligned}$$

Ez már explicit elsőrendű közösleges differenciálegyenlet.  $\square$

**15.2.3. KIDOLGOZOTT FELADAT** Adjunk meg olyan kezdeti feltételt az  $yy' = x$  egyenlethez, hogy a megoldás egyértelmű legyen!



15.2. ábra. Az  $yy' = x$  egyenlet megoldásai

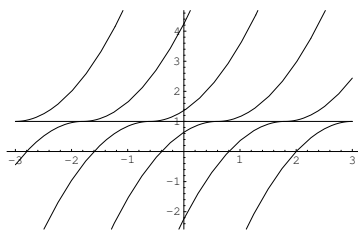
**MEGOLDÁS** Ha az  $y' = f(x, y)$  egyenlet jobb oldala folytonosan differenciálható  $y$  szerint, akkor teljesül a Lipschitz-feltétel, tehát létezik és egyértelmű a megoldás. Ha  $y \neq 0$ , akkor  $\frac{x}{y}$  akárhányszor differenciálható, tehát bármilyen  $y(x_0) = p \neq 0$ -ra egyértelmű a megoldás. Egyébként az egyenlet szétválasztható, megoldása  $x^2 - y^2 = c$  (15.2. ábra). Látható, hogy az  $y(0) = 0$  kezdeti feltétel mellett  $y = x$  és  $y = -x$  is megoldás. Bár az  $x$  tengely többi pontján pontosan egy megoldásgörbe halad át, az  $y(x_0) = 0$  kezdeti feltételhez mégsem tartozik megoldás, mert ezek a görbék egyrészt nem  $y(x)$  függvények (egy  $x$ -hez két  $y$  is tartozik), másrészt merőlegesen metszik az  $x$  tengelyt, azaz sem  $y = \sqrt{x^2 - x_0^2}$  (az  $(x_0, 0)$  ponton áthaladó megoldásgörbe „felső” fele), sem  $y = -\sqrt{x^2 - x_0^2}$  (a megoldásgörbe „alsó” fele) nem differenciálható  $x_0$ -ban.  $\square$

**15.2.4. KIDOLGOZOTT FELADAT** Adjuk meg a  $p$  paraméter értékét úgy, hogy a megoldás egyértelmű legyen:  $\begin{cases} y' = 2\sqrt{|y - p|} \\ y(p) = 0 \end{cases}$ .

**MEGOLDÁS** Ha a jobb oldal folytonosan differenciálható  $y$  szerint, akkor teljesül a Lipschitz-feltétel, tehát létezik és egyértelmű a megoldás. Ha  $|y - p| \neq 0$ , akkor  $\sqrt{|y - p|}$  akárhányszor differenciálható, tehát  $p \neq 0$ -ra egyértelmű a nulla kezdeti értékből induló megoldás. Egyébként az egyenlet megoldása az  $y = p$  egyenes, és az azt érintő  $y = p \pm (x + c)^2$  parabolaívek növekvő darabjai (15.3. ábra).  $\square$

## 15.3. Gyakorló feladatok

**15.3.1. FELADAT** Vezessük le a kötél súrlódás differenciálegyenletét (lásd a 16.3.2. feladat kiinduló egyenletét)!



15.3. ábra. Az  $y' = 2\sqrt{|y-p|}$  egyenlet megoldásai  $p = 1$  esetén

15.3.2. **FELADAT** Ellenőrizzük, hogy a megadott függvények valóban a következő differenciálegyenletek megoldásai. Ábrázoljuk a megoldásokat! Milyen kezdeti érték mellett létezik, illetve egyértelmű a megoldás? Vessük össze a választ a 15.1.2. tétel állításával.

$$\begin{aligned}
 y' &= y + 2x - 2, & \text{megoldása } y &= -2x + ce^x. \\
 y' &= 2\sqrt{|y|}, & \text{megoldása } y &= 0 \text{ és az} \\
 & & y &= \pm(x+c)^2 \text{ parabolaívek növekvő darabjai.} \\
 xy' + y &= 0, & \text{megoldása } y &= \frac{c}{x} \text{ és } y = 0.
 \end{aligned}$$

## 15.4. Matematikai háttér

### A Banach-féle fixponttétel

15.4.1. **DEFINÍCIÓ**  $(X, d)$  metrikus tér, ha a  $d : X \times X \rightarrow \mathbb{R}$  távolságfüggvény vagy metrika rendelkezik a következő tulajdonságokkal:

- 1,  $d(x, y) \geq 0$  és  $d(x, y) = 0 \iff x = y$ ,
- 2,  $d(x, y) = d(y, x)$ ,
- 3,  $d(x, y) + d(y, z) \geq d(x, z)$ .

15.4.2. **DEFINÍCIÓ** Az  $a_n$  sorozat konvergál  $a$ -hoz az  $(X, d)$  metrikus térben, ha  $\lim_{n \rightarrow +\infty} d(a_n, a) = 0$ , vagyis  $\forall \varepsilon > 0$ -ra  $\exists N$ , hogy ha  $n > N$ , akkor  $d(a_n, a) < \varepsilon$ .

15.4.3. **DEFINÍCIÓ** Az  $a_n$  sorozat Cauchy-sorozat, ha  $\forall \varepsilon > 0$ -ra  $\exists N$ , hogy  $m, n > N$  esetén  $d(a_m, a_n) < \varepsilon$ .

15.4.4. **ÁLLÍTÁS** Ha  $a_n$  konvergens, akkor Cauchy-sorozat.

15.4.5. **DEFINÍCIÓ** Az  $(X, d)$  metrikus tér teljes, ha minden Cauchy-sorozat konvergens.



Ellenpélda:  $\mathbb{Q}$  a szokásos távolsággal ( $d(x, y) = |x - y|$ ). Legyen  $a_{n+1} = \frac{1}{2}(a_n + \frac{3}{a_n})$ .  $\forall n$ -re  $a_n \in \mathbb{Q}$ ,  $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = \sqrt{3}$ , tehát  $a_n$  Cauchy. Viszont  $\sqrt{3} \notin \mathbb{Q}$ .

**15.4.6. DEFINÍCIÓ** Egy  $k : X \rightarrow X$  leképezés kontrakció, ha van olyan  $0 < q < 1$  szám, hogy minden  $x, y$  esetén

$$d(k(x), k(y)) \leq qd(x, y).$$

**15.4.7. TÉTEL (BANACH-FÉLE FIXPONT TÉTEL)** Ha  $(X, d)$  teljes metrikus tér,  $k : X \rightarrow X$  kontrakció, akkor  $k$ -nak létezik egyértelmű fixpontja ( $\exists! x \in X : k(x) = x$ ).

**BIZONYÍTÁS** Legyen  $x_0 \in X$  tetszőleges, és legyen  $x_1 = k(x_0)$ ,  $x_2 = k(x_1)$ ,  $\dots$ ,  $x_{n+1} = k(x_n)$ . Nyilván  $d(x_{n+1}, x_n) \leq qd(x_n, x_{n-1}) \leq \dots \leq q^n d(x_1, x_0)$ . Az  $x_n$  sorozat Cauchy, mert ha  $n > m > N$ , akkor

$$\begin{aligned} d(x_m, x_n) &\leq \sum_{k=n}^{m-1} d(x_{k+1}, x_k) \leq \sum_{k=n}^{m-1} q^k d(x_1, x_0) \leq \\ &\leq \sum_{k=N}^{+\infty} q^k d(x_1, x_0) = \frac{q^N}{1-q} d(x_1, x_0) \xrightarrow{N \rightarrow \infty} 0. \end{aligned}$$

Mivel  $(X, d)$  teljes metrikus tér, azért  $x_n$  konvergencia is, jelölje a határértéket  $x^*$ .  $k(x^*) = \lim_{n \rightarrow +\infty} k(x_n) = \lim_{n \rightarrow +\infty} x_{n+1} = x^*$ , tehát ez fixpont. Másik fixpont nem lehet, mert ha pl.  $x^{**}$  is fixpont, akkor  $d(x^*, x^{**}) = d(k(x^*), k(x^{**})) \leq qd(x^*, x^{**})$ .  $\square$

### A megoldás létezése és egyértelműsége

**15.4.8. ÁLLÍTÁS** Az  $y : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$  folytonos függvény pontosan akkor megoldása az

$$y'(t) = f(t, y(t)) \quad (15.4)$$

$$y(a) = y_0 \quad (15.5)$$

kezdetiérték-problémának, ha megoldása az

$$y(t) = y_0 + \int_{t_0}^t f(s, y(s)) \, ds \quad (15.6)$$

integrálegyenletnek.

**15.4.9. TÉTEL** Ha  $f : [a, b] \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  folytonos és MVL,<sup>1</sup> akkor a (15.4.)-(15.5.) kezdeti-érték-problémának létezik egyértelmű megoldása az  $[a, b]$  intervallumon.

**BIZONYÍTÁS** Legyen  $C[a, b]$  az  $[a, b]$  zárt intervallumon folytonos függvények tere a  $\|h\| = \max_{t \in [a, b]} |h(t)|$  normával.<sup>2</sup> Ez a tér teljes.<sup>3</sup> Definíáljuk a  $k : C[a, b] \rightarrow C[a, b]$  operátort a

<sup>1</sup> második változójában Lipschitz, lásd a 15.1.1. definíciót.

<sup>2</sup> Ha  $\|\cdot\|$  norma egy vektortérben, akkor  $d(x, y) = \|x - y\|$  metrika.

<sup>3</sup> Folytonos függvények egyenletesen konvergencia sorozatának határfüggvénye folytonos.

következőképpen:

$$k : y(t) \rightarrow y_0 + \int_{t_0}^t f(s, y(s)) \, ds. \quad (15.7)$$

Tegyük fel először, hogy  $L(b-a) < 1$ . Ekkor  $k$  kontrakció, mert

$$\begin{aligned} d(k(y), k(z)) &= \|k(y) - k(z)\| = \sup_{t \in [a, b]} \left| \int_{t_0}^t f(s, y(s)) \, ds - \int_{t_0}^t f(s, z(s)) \, ds \right| \\ &\leq \int_a^b |f(s, y(s)) - f(s, z(s))| \, ds \\ &\leq \int_a^b L|y(s) - z(s)| \, ds \\ &\leq L(b-a) \sup_{s \in [a, b]} |y(s) - z(s)| = L(b-a)\|y - z\|. \end{aligned}$$

Tehát a Banach-féle fixponttétel szerint  $k$ -nak van egyetlen fixpontja, ami megoldása a (15.6.) integrálegyenletnek, tehát a kezdetiérték-problémának is. Ha tehát  $b-a < \frac{1}{L}$ , akkor a kezdetiérték-probléma megoldása létezik és egyértelmű. Ha  $L(b-a) \geq 1$ , akkor már tudjuk, hogy a megoldás létezik és egyértelmű az  $[a, b]$  intervallum minden  $\frac{1}{L}$ -nél rövidebb részintervallumán, emiatt pedig az egész  $[a, b]$ -n is.  $\square$

## 16. fejezet

# Analitikus megoldási módszerek

### 16.1. Elméleti összefoglaló

Analitikus megoldáson azt értjük, hogy a keresett függvényt képlettel fel tudjuk írni. Néhány fontos speciális esetben (egzakt, lineáris, stb., lásd a kidolgozott feladatokat) ez viszonylag egyszerűen megtehető. Ha az egyenlet nem tartozik egyik általunk ismert típushoz sem, iterációval vagy sorfejtéses módszerekkel kereshetjük a megoldást. Három ilyen ismertetünk; az első módszer akkor működik, ha az egyenlet jobb oldala MVL,<sup>1</sup> míg a másik kettő ennél szigorúbb feltételek mellett.

1. Szukcesszív approximáció:

$$y_0(t) = y_0, \quad y_{n+1}(t) = y_0 + \int_{t_0}^t f(s, y_n(s)) \, ds \text{ és } y(t) = \lim_{n \rightarrow +\infty} y_n(t).$$

2. Taylor-sorfejtés:  $y'(t_0) = f(t_0, y(t_0))$ , majd

$$y^{(n+1)}(t_0) = \frac{d^n}{dt^n} f(t, y(t))|_{t=t_0} \text{ és } y(t) = \sum_{k=0}^n \frac{y^{(k)}(t_0)}{k!} (t - t_0)^k + o((t - t_0)^n),$$

vagy ha  $y$  végtelen sokszor differenciálható, és megegyezik a Taylor-sorával (más néven *analitikus*), akkor

$$y(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{y^{(k)}(t_0)}{k!} (t - t_0)^k.$$

3. Határozatlan együtthatók módszere:

Keressük a megoldást  $y(t) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k (t - t_0)^k$  alakban. Az  $y'(t) = f(t, y(t))$  egyenletet  $(t - t_0)$  hatványai szerint rendezzük, és az azonos hatványok együtthatóját a két oldalon összehasonlítjuk.

---

<sup>1</sup>második változójában Lipschitz, lásd a 15.1.1. definíciót.

## 16.2. Kidolgozott példák

**16.2.1. KIDOLGOZOTT FELADAT** Egy folyadékkal telt tartály aljához  $L$  hosszúságú állandó keresztmetszetű, vízszintes csövet csatlakoztatunk. Határozzuk meg a tartályból kiömlő folyadék sebességét az idő függvényében az egyenes cső végén lévő csap hirtelen kinyitása után! Használjuk fel, hogy

$$v' + \frac{1}{2L}v^2 = c$$

(ahol  $c = gh + \frac{1}{\rho}(p_1 - p_2)$ ,  $g$  a nehézségi gyorsulás,  $h$  a folyadék kezdeti magassága a tartályban,  $p_1$  és  $p_2$  a folyadék nyomása a szabad felszínen és a cső végén,  $\rho$  a folyadék sűrűsége). Elegendően hosszú idő elteltével mekkora lesz a folyadék sebessége?

**MEGOLDÁS** A bal oldal második tagját átvisszük, majd osztunk a jobb oldallal:

$$\frac{v'}{c - \frac{1}{2L}v^2} = 1,$$

ezért az egyenlet szétválasztható. Mindkét oldalt ( $t$  szerint) integrálva, és felhasználva, hogy  $\operatorname{arth} x' = \frac{1}{1-x^2}$ ,<sup>2</sup>

$$\sqrt{\frac{2L}{c}} \operatorname{arth}\left(\sqrt{\frac{1}{2Lc}}v\right) = t + c_1,$$

azaz

$$v = \sqrt{2Lc} \operatorname{th}\left(\sqrt{\frac{c}{2L}}t + c_2\right).$$

$x \rightarrow +\infty$  esetén  $\operatorname{th} x \rightarrow 1$ , ezért nagy  $t$ -re  $v(t) \approx \sqrt{2Lc}$ . □

**16.2.2. KIDOLGOZOTT FELADAT (EGZAKT DIFFERENCIÁLEGYENLET)** Oldjuk meg a következő differenciálegyenletet:

$$(2x + 2) dx + 4y dy = 0.$$

**MEGOLDÁS** Mivel

$$\frac{\partial}{\partial y}(2x + 2) = 0 = \frac{\partial}{\partial x}(4y),$$

az egyenlet egzakt (egyébként szétválasztható is). Tehát az  $F(x, y) = (x - 1)^2 + 2y^2$  függvénnyel (amelynek  $x$  és  $y$  szerinti parciális deriváltjai  $2x - 2$  és  $4y$ ) a megoldás  $F(x, y) = c$ . □

**16.2.3. KIDOLGOZOTT FELADAT (MULTIPLIKÁTOROS DIFFERENCIÁLEGYENLET)** Oldjuk meg a következő differenciálegyenletet:

$$(x^2 + y^2 + x) dx + xy dy = 0.$$

<sup>2</sup>Matematika tanulmányaink során az ilyen függvényeket parciális törtekre bontással integráltuk. De így rövidebb, és jobban látszik a megoldás viselkedése is.

**MEGOLDÁS** Az  $M(x,y) = (x^2 + y^2 + x)$  és az  $N(x,y) = xy$  jelöléssel ez az egyenlet  $M(x,y) dx + N(x,y) dy = 0$  alakú; akkor lenne egzakt, ha  $\frac{\partial M}{\partial y}$  és  $\frac{\partial N}{\partial x}$  egyenlő lenne. Sajnos ez nincs így. Ilyenkor ügyesen meg kell szorozni az egyenletet valamivel úgy, hogy egzakt legyen. Két speciális esetet tanultunk: ha  $\frac{\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}}{N} = \varphi(x)$  csak  $x$ -től függ, vagy ha  $\frac{\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}}{M} = \psi(y)$  csak  $y$ -től függ, akkor az egyenlet  $e^{\int \varphi(x) dx}$ -szel illetve  $e^{-\int \psi(y) dy}$ -nal szorozva egzakttá válik. Most  $\frac{\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}}{N} = \frac{1}{x}$  csak  $x$ -től függ, ezért ha mindkét oldalt  $e^{\int \frac{1}{x}} = x$ -szel szorozzuk, egzakt egyenletet kapunk. A Bolyai példatár [3] 110. oldalán megtalálható egy másik levezetés is.  $\square$

**16.2.4. KIDOLGOZOTT FELADAT** (LINEÁRIS DIFFERENCIÁLEGYENLET) *Oldjuk meg a következő differenciálegyenletet  $x > 0$  esetén:*

$$xy' = y + x + 1.$$

**MEGOLDÁS** Az  $a(x)y' + b(x)y + c(x) = 0$  alakú lineáris egyenlethez tartozó  $a(x)y' + b(x)y = 0$  homogén lineáris egyenlet megoldását könnyű fölírni,  $y_h(x) = e^{\int -\frac{b(x)}{a(x)} dx}$ . Ha a lineáris egyenletet osztjuk  $a(x)$ -szel, majd  $y_h(x)$ -szel (a második osztás helyett szorozhatunk  $e^{\int \frac{b(x)}{a(x)} dx}$ -szel), akkor az  $y$ -t és  $y'$ -t tartalmazó kifejezésekből teljes deriváltat kapunk, és egy integrálással megoldhatjuk az egyenletet.<sup>3</sup> Most tehát  $x$ -szel osztunk, majd  $e^{-\int \frac{1}{x}} = e^{-\ln x} = \frac{1}{x}$ -szel szorzunk:

$$\frac{1}{x}y' = \frac{1}{x^2}y + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2},$$

az  $y$ -től függő tagokat a bal oldalra rendezve teljes deriváltat kell kapnunk.

$$\frac{1}{x}y' - \frac{1}{x^2}y = \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}.$$

Valóban, a bal oldal  $\frac{1}{x}y$  deriváltja. Mindkét oldalt integrálva

$$\frac{1}{x}y = \ln x - \frac{1}{x} + c,$$

ahonnan

$$y = x \ln x - 1 + cx. \quad \square$$

**16.2.5. KIDOLGOZOTT FELADAT** *Határozzuk meg az  $R_1$  belső és  $R_2$  külső sugarú gömbhéj alakú testben kialakuló (radiális irányú) stacionárius hőmérsékleteloszlást  $Q$  állandó hőforrás sűrűség és  $\lambda$  hővezetési tényező mellett, ha az  $R_i$  sugarú gömb felszínét ( $i = 1, 2$ ) állandó  $T_i$  hőmérsékleten tartjuk.*

**MEGOLDÁS** Az állandósult hőmérséklet egyenlete:

$$\lambda \Delta u + f(\mathbf{x}) = 0,$$

<sup>3</sup>Vagy az ún. „állandók variálása” módszerét alkalmazzuk, azaz  $y(x) = c(x)y_h(x)$  alakban keressük a megoldást.

ahol  $\lambda$  a hővezetési tényező,  $f(\mathbf{x})$  pedig a hőforrások sűrűsége. Gömbszimmetrikus esetben (ha  $f$  és így  $u$  csak  $|\mathbf{x}| = r$ -től függ):

$$\Delta u = u''(r) + \frac{2}{r}u'(r),$$

így  $f(\mathbf{x}) = Q$  állandó esetén az

$$u''(r) + \frac{2}{r}u'(r) + \frac{Q}{\lambda} = 0$$

egyenletet kapjuk. Ez egy lineáris egyenlet  $u'(r)$ -re.  $r^2$ -tel való szorzás után

$$(r^2 u'(r))' = -\frac{Q}{\lambda} r^2,$$

mindkét oldalt integrálva, majd  $r^2$ -tel osztva

$$u'(r) = -\frac{Q}{3\lambda} r + \frac{c_1}{r^2}.$$

Ismét integrálva

$$u(r) = -\frac{Q}{6\lambda} r^2 - \frac{c_1}{r} + c_2.$$

A peremfeltételekből  $u(R_1) = T_1$ ,  $u(R_2) = T_2$ , azaz

$$\begin{aligned} u(R_2) - u(R_1) &= -\frac{Q}{6\lambda} (R_2^2 - R_1^2) - c_1 \left( \frac{1}{R_2} - \frac{1}{R_1} \right) = T_2 - T_1 \Rightarrow \\ c_1 &= -\frac{(T_2 - T_1) + \frac{Q}{6\lambda} (R_2^2 - R_1^2)}{\frac{1}{R_2} - \frac{1}{R_1}} = \frac{(T_2 - T_1) + \frac{Q}{6\lambda} (R_2^2 - R_1^2)}{R_2 - R_1} R_1 R_2 \end{aligned}$$

és

$$\begin{aligned} R_2 u(R_2) - R_1 u(R_1) &= -\frac{Q}{6\lambda} (R_2^3 - R_1^3) + c_2 (R_2 - R_1) = R_2 T_2 - R_1 T_1 \Rightarrow \\ c_2 &= \frac{(T_2 - T_1) - \frac{Q}{6\lambda} (R_2^3 - R_1^3)}{R_2 - R_1}. \end{aligned}$$

□

**16.2.6. KIDOLGOZOTT FELADAT** (BERNOULLI-FÉLE DIFFERENCIÁLEGYENLET) *Oldjuk meg a következő differenciálegyenletet:*

$$y' - y = t y^5.$$

**MEGOLDÁS** Az egyenletben  $y$ ,  $y'$  és egy másik  $y$ -hatvány szerepel, ezt Bernoulli típusúnak nevezik. Ha osztunk  $y^5$ -nel, akkor látható, hogy az  $u = y^{1-5} = y^{-4}$  helyettesítés vezet célhoz:

$$y' y^{-5} - y^{-4} = t, \text{ azaz } -\frac{1}{4} u' - u = t \iff u' + 4u = -4t.$$

Ez lineáris,  $e^{4t}$ -vel kell szorozni mindkét oldalt a megoldáshoz.

□

**16.2.7. KIDOLGOZOTT FELADAT** (ÁLLANDÓ EGYÜTTHATÓS MÁSODRENDŰ HOMOGEN LINEÁRIS DIFFERENCIÁLEGYENLET) *Oldjuk meg a következő differenciálegyenletet:*

$$y'' + 4y' + 3y = 0.$$

**MEGOLDÁS** Ez egy állandó együtthatós másodrendű homogén lineáris egyenlet. A megoldást  $y = e^{\lambda x}$  alakban keressük. Behelyettesítés és  $0 \neq e^{\lambda x}$ -szel való osztás után a

$$\lambda^2 + 4\lambda + 3 = 0$$

*karakterisztikus egyenletet* kapjuk, ahonnan  $\lambda_1 = -1$ ,  $\lambda_2 = -3$ . Homogén lineáris egyenlet megoldásainak összege és számszorosa is megoldás, ezért a megoldások:<sup>4</sup>  $y = c_1 e^{-x} + c_2 e^{-3x}$ .  $\square$

**16.2.8. KIDOLGOZOTT FELADAT** (ÁLLANDÓ EGYÜTTHATÓS MÁSODRENDŰ INHOMOGÉN LINEÁRIS DIFFERENCIÁLEGYENLET) *Oldjuk meg a következő differenciálegyenletet:*

$$y'' + 4y' + 3y = 8e^x.$$

**MEGOLDÁS** Ez egy állandó együtthatós másodrendű lineáris egyenlet. Két megoldás különbsége kielégíti a homogén lineáris egyenletet. Ezért az összes megoldást úgy kaphatjuk meg, hogy választunk egy (idegen szóval *partikuláris*) megoldást, most pl. az  $e^x$  ránézésre jó, és ahhoz hozzáadjuk a homogén egyenlet megoldásait. Ezeket az előbb kiszámoltuk, így a megoldások:  $y = e^x + c_1 e^{-x} + c_2 e^{-3x}$ .  $\square$

**16.2.9. KIDOLGOZOTT FELADAT** *Az állandó  $\omega$  szögsebességgel forgó rugalmas tárcsa pontjainak sugárirányú elmozdulása az*

$$u''(r) + \frac{1}{r}u'(r) - \frac{1}{r^2}u(r) + Kr = 0$$

*egyenlettel határozható meg, ahol  $K = \frac{1-\nu^2}{E}\rho\omega^2$  ( $\rho$  a tárcsa sűrűsége,  $\nu$  a Poisson-tényező,  $E$  a Young-modulus). Oldjuk meg ezt a differenciálegyenletet!*

**MEGOLDÁS** Ez egy ún. Euler egyenlet, amiből az  $r = e^x$  helyettesítéssel (vagy ha  $r < 0$  lenne, akkor az  $r = -e^x$  helyettesítéssel) állandó együtthatós másodrendű lineáris egyenletet kapunk. Valóban, ha  $y(x) = u(r)$  és  $r = e^x$ , akkor  $x = \ln r$  és  $u'(r) = \frac{d}{dr}y(\ln r) = y'(\ln r)\frac{1}{r}$ ,  $u''(r) = \frac{d}{dr}(y'(\ln r)\frac{1}{r}) = y''(\ln r)\frac{1}{r^2} - y'(\ln r)\frac{1}{r^2}$ . Ezeket behelyettesítve:

$$y''(\ln r)\frac{1}{r^2} - y'(\ln r)\frac{1}{r^2} + \frac{1}{r}y'(\ln r)\frac{1}{r} - \frac{1}{r^2}y(\ln r) + Kr = 0,$$

$r$  helyett  $e^x$ -et írva és rendezve

$$y''(x) - y(x) + Ke^{3x} = 0.$$

<sup>4</sup>Az  $n$ -edrendű lineáris egyenletet  $n$ -változós elsőrendű rendszerre írhatjuk át. A kezdeti feltételek  $n$  darab lineáris egyenletet jelentenek a konstansokra, amelyekkel együtt a megoldás egyértelmű. Ezért egy  $n$ -edrendű lineáris egyenletnek  $n$  darab független megoldása van, nem lehet több megoldás.

A homogén lineáris egyenletet megoldása  $y_h = c_1 e^x + c_2 e^{-x}$ , egy partikuláris megoldás  $-\frac{K}{8}e^{3x}$ . Ezért a megoldás:  $y(x) = c_1 e^x + c_2 e^{-x} - \frac{K}{8}e^{3x}$ , azaz  $u(r) = c_1 r + c_2 \frac{1}{r} - \frac{K}{8}r^3$ . A középpont nyilván nem mozdulhat el, ezért  $u(r) = c_1 r - \frac{K}{8}r^3$ .  $\square$

**16.2.10. KIDOLGOZOTT FELADAT** A lineárisan rugalmas körlemez deformált alakja a lemez síkjára merőleges  $p(r)$  nyomás hatására az

$$w'''(r) + \frac{1}{r}w''(r) - \frac{1}{r^2}w'(r) = \frac{p(r)}{D}r$$

egyenlettel határozható meg, ahol  $D$  a lemez anyagára jellemző állandó. Oldjuk meg ezt a differenciálegyenletet  $p(r) = ar$  ( $a > 0$  állandó) esetén!

**MEGOLDÁS** Az  $u(r) = w'(r)$ , majd  $y(x) = y(\ln r) = u(r)$  helyettesítéssel az

$$y''(x) - y(x) = \frac{a}{D}e^{6x}$$

egyenletet kapjuk. Innen  $y(x) = c_1 e^x + c_2 e^{-x} + \frac{a}{35D}e^{6x}$ , azaz  $u(r) = c_1 r + c_2 \frac{1}{r} + \frac{a}{35D}r^6$  és  $w(r) = c_3 r^2 + c_2 \ln r + \frac{a}{245D}r^7 + c_4$ . Mivel az elmozdulás korlátos kell, hogy legyen, ezért  $w(r) = c_3 r^2 + \frac{a}{245D}r^7 + c_4$ .  $\square$

**16.2.11. KIDOLGOZOTT FELADAT** (ÁLLANDÓ EGYÜTTHATÓS LINEÁRIS DIFFERENCIÁLEGYENLET-RENDSZER) Oldjuk meg a következő differenciálegyenlet-rendszert:

$$\begin{aligned}\dot{x} &= 2x + 2y \\ \dot{y} &= x - y.\end{aligned}$$

**MEGOLDÁS** Deriválhatnánk pl. a második egyenletet, és  $x$ -et és  $\dot{x}$ -ot kiejtve egy állandó együtthatós másodrendű lineáris egyenletet kapnánk  $y$ -ra. A meglévő számolási rutinra jobban építő megoldás, ha beírjuk a jobb oldal együtthatóit egy mátrixba:  $A = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ . Ha  $A$  sajátértékei különbözők, akkor a főtengety-tétel szerint  $A = SDS^{-1}$ , ahol  $D$  főátlójában  $A$  sajátértékei,  $S$  oszlopaiban  $A$  sajátvektorai találhatók.  $S^{-1}$ -re nem is lesz szükségünk, csak a sajátértékeket és a sajátvektorokat kell kiszámolni. Most

$$D = \begin{pmatrix} \frac{1+\sqrt{17}}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1-\sqrt{17}}{2} \end{pmatrix}, \quad S = \begin{pmatrix} 3+\sqrt{17} & 3-\sqrt{17} \\ 2 & 2 \end{pmatrix}.$$

A megoldás pedig

$$\begin{aligned}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} &= e^{At} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = S e^{Dt} \begin{pmatrix} c_3 \\ c_4 \end{pmatrix} \\ &= c_3 e^{\frac{1+\sqrt{17}}{2}t} \begin{pmatrix} 3+\sqrt{17} \\ 2 \end{pmatrix} + c_4 e^{\frac{1-\sqrt{17}}{2}t} \begin{pmatrix} 3-\sqrt{17} \\ 2 \end{pmatrix}.\end{aligned} \quad \square$$



16.2.12. **KIDOLGOZOTT FELADAT** Oldjuk meg az  $\begin{cases} y' = y - t^2 + 2t \\ y(0) = 0 \end{cases}$  kezdetiértékfeladatot szukcesszív approximációval vagy valamelyik sorfejtéses módszerrel!

**MEGOLDÁS** Háromféle módszert tanultunk:

1. Szukcesszív approximációval: Most  $t_0 = 0$ ,  $y_0 = 0$  és  $f(t, y) = y - t^2 + 2t$ , ezért

$$y_0(t) = 0, \quad y_{n+1}(t) = \int_0^t y_n(s) - s^2 + 2s \, ds,$$

$$\text{azaz } y_1(t) = -\frac{1}{3}t^3 + t^2, \quad y_n(t) = -\frac{2}{(n+2)!}t^{n+2} + t^2 \rightarrow t^2.$$

2. Taylor-sorfejtéssel:

$$y'' = y' - 2t + 2 = y - t^2 + 2, \quad y''' = y' - 2t = y - t^2,$$

innentől  $y^{(n)} = y' - 2t = y - t^2$ . Behelyettesítünk  $t_0 = 0$ -ban:

$$y(0) = 0, \quad y'(0) = 0, \quad y''(0) = 2, \quad y'''(0) = y^{(4)}(0) = \dots = 0,$$

ahonnan

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{y^{(n)}(0)}{n!} t^n = 2 \frac{t^2}{2!} = t^2.$$

3. Határozatlan együtthatók módszerével:

$$y = c_0 + c_1 t + c_2 t^2 + c_3 t^3 + \dots,$$

azaz

$$c_1 + 2c_2 t + 3c_3 t^2 + 4c_4 t^3 + \dots = c_0 + (c_1 + 2)t + (c_2 - 1)t^2 + c_3 t^3 + \dots,$$

a kezdeti feltétel miatt pedig  $c_0 = 0$ . Azaz

$$\begin{aligned} c_1 &= c_0 &\Rightarrow c_1 &= 0, \\ 2c_2 &= c_1 + 2 &\Rightarrow c_2 &= 1, \\ 3c_3 &= c_2 - 1 &\Rightarrow c_3 &= 0, \\ 4c_4 &= c_3 &\Rightarrow c_4 &= 0, \end{aligned}$$

□

és innentől a többi együttható nulla. Tehát  $y = t^2$ .

16.2.13. **KIDOLGOZOTT FELADAT** Oldjuk meg a következő differenciálegyenletet szukcesszív approximációval vagy valamelyik sorfejtéses módszerrel:

$$y'(t) = ty(t), \quad y(0) = 2.$$

**MEGOLDÁS** 1. Szukcesszív approximációval:

Most  $t_0 = 0$ ,  $y_0 = 2$  és  $f(t, y) = ty$ , ezért

$$y_0(t) = 2, \quad y_{n+1}(t) = 2 + \int_0^t s y_n(s) \, ds.$$

Innen

$$y_1(t) = 2 + \int_0^t 2s \, ds = 2 + t^2, \quad y_2(t) = 2 + \int_0^t s(2 + s^2) \, ds = 2 + t^2 + \frac{1}{4}t^4,$$

$$y_3(t) = 2 + \int_0^t s(2 + s^2 + \frac{1}{4}s^4) \, ds = 2 + t^2 + \frac{1}{4}t^4 + \frac{1}{24}t^6, \dots$$

$$y_n(t) = 2 + t^2 + \frac{1}{4}t^4 + \dots + \frac{2}{2 \cdot 4 \cdot \dots \cdot 2n} t^{2n} = \sum_{k=0}^n \frac{2}{2^k k!} t^{2k} = 2 \sum_{k=0}^n \frac{\left(\frac{t^2}{2}\right)^k}{k!} \rightarrow 2e^{\frac{t^2}{2}},$$

mivel

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{x^k}{k!} = e^x.$$

## 2. Taylor-sorfejtéssel:

$y'(t) = ty(t)$ ,  $y''(t) = y(t) + ty'(t) = (t^2 + 1)y(t)$ ,  $y'''(t) = 2ty(t) + (t^2 + 1)y'(t) = (t^3 + 3t)y(t)$ . Elég nehéz lenne általánosan felírni  $y^{(n)}(t)$  alakját, úgyhogy ne dolgozzunk tovább; ha mindenképpen a pontos megoldást akarjuk megkapni, váltsunk a másik két módszer valamelyikére. A deriváltak értékére a  $t_0 = 0$ -ban van szükségünk:  $y'(0) = y'''(0) = 0$ ,  $y''(0) = 2$ , és így

$$y(t) = 2 + t^2 + o(t^3).$$

## 3. Határozatlan együtthatók módszerével:

A megoldást  $y(t) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k t^k$  alakban keressük, mert  $y$  a  $t_0 = 0$ -ban adott; innen tudjuk, hogy  $c_0 = 2$ . Az  $y$ -t előállító sort tagonként deriválva  $y'(t) = \sum_{k=1}^{\infty} k c_k t^{k-1}$ , míg az egyenlet jobb oldalán  $ty(t) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k t^{k+1} = \sum_{k=2}^{\infty} c_{k-2} t^{k-1}$ . Innen  $k c_k = c_{k-2}$  ( $k \geq 2$ ),  $c_1 = 0$ .  $c_0 = 2$ -t felhasználva  $c_{2k} = \frac{1}{2^{k-1} k!}$ ,  $c_{2k+1} = 0$ , tehát  $y(t) = 2 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^{2k}}{2^k k!} = 2e^{\frac{t^2}{2}}$ .  $\square$

**16.3. Gyakorló feladatok**

16.3.1. **FELADAT** Stacionárius sűrűdásos áramlás esetén a csőben áramló folyadék csőfal közeli sebességprofilja a következő egyenletből határozható meg:

$$y u'(y) = k,$$

ahol  $u(y)$  a csőben áramló folyadék sebességprofilja a csőfal közelében ( $y$  a csőfaltól mért távolság),  $k$  pedig állandó (a sűrűdési sebesség és egy empirikus arányossági tényező hányadosa). Oldjuk meg az egyenletet!

16.3.2. **FELADAT** Egy korongra felcsavart kötélt egyik végét  $F_0$  erővel húzzuk. A korong és a kötélt közti súrlódási együttható  $\mu$ . Ha korongra felfekvő kötélt ívének középponti szöge (az ún. átfogási szög)  $\alpha$ , akkor legalább mekkora  $F$  erővel kell tartanunk a kötélt másik végét, hogy ne csússzon meg? Az  $F$ -re  $\alpha$  függvényében felírható differenciálegyenlet (kis  $\alpha$  szögek esetén):

$$F'(\alpha) = -\mu F(\alpha).$$

16.3.3. **FELADAT** A korongra felcsavart kötélt egyik végét most is  $F_0$  erővel húzzuk, ám a korong kerületi sebessége  $v$ . Legalább mekkora  $F$  erővel kell tartanunk a kötélt másik végét, hogy ne csússzon meg? Forgó henger esetén az  $F$ -re  $\alpha$  függvényében felírható differenciálegyenlet (kis  $\alpha$  szögek esetén):

$$F'(\alpha) = -\mu(F(\alpha) - \rho A v^2),$$

ahol  $A$  a kötélt keresztmetszete,  $\rho$  a sűrűsége.

16.3.4. **FELADAT** Egy  $L$  hosszú rudat keresztirányban terhelő megoszló erő  $p(x) = (0 \leq x \leq L)$ . Számítsuk ki a nyíróerőket és a hajlítónyomatéki függvényt. A  $V(x)$  nyíróerőkre és az  $M(x)$  hajlítónyomatéki függvényre felírható differenciálegyenlet:

$$V'(x) = p(x), \quad M'(x) = -V(x).$$

16.3.5. **FELADAT** Határozzuk meg az egyik végén rögzített  $L$  hosszú rúd kihajlott alakját, ha a rúd szabad végét  $F$  erővel nyomjuk a rögzített vég felé. Kis lehajlás esetén a rúd alakjára az  $y''(x) = -\frac{M(x)}{EI}$  egyenlet írható fel, ahol  $I$  a keresztmetszet másodrendű nyomatéka,  $E$  a Young-modulus,  $M(x) = Fy(x)$  pedig a hajlítónyomatéki függvény.

16.3.6. **FELADAT** Határozzuk meg a mindkét végén befogott, de az egyik végén szabadon elmozduló  $L$  hosszú rúd alakját, ha a rúd két végét az Euler-féle kritikus erővel nyomjuk egymás felé!

16.3.7. **FELADAT** Határozzuk meg az  $R$  sugarú cső falában kialakuló radiális irányú stacionárius hőmérsékleteloszlást  $Q$  állandó hőforrás sűrűség és  $\lambda$  hővezetési tényező mellett, ha a külső hőmérséklet  $T$ .

16.3.8. **FELADAT** Vezessük le a hővezetés egyenletéből (lásd a 16.2.5. kidolgozott feladat megoldásában) a 16.3.7. feladat egyenletét!

16.3.9. **FELADAT** Egy lineárisan rugalmas, külső/belső egyenletes nyomással terhelt cső falában ébredő  $\sigma(r)$  radiális feszültség az

$$\sigma'(r) - \frac{2}{r}\sigma(r) + \frac{2A}{r} = 0$$

egyenlet segítségével határozható meg, ahol  $A$  a terheléstől (peremfeltételtől) függő konstans. Oldjuk meg az egyenletet!

16.3.10. **FELADAT** Ha a Kepler-egyenletben (15.2.2.. kidolgozott feladat) az  $r, \varphi$  polárkoordinátákra térünk át, akkor belátható, hogy  $h = r^2 \dot{\varphi}$  állandó (fajlagos szögsebesség), valamint az  $u = \frac{1}{r}$  változóra a szögváltozó függvényében felírható az

$$u''(\varphi) + u(\varphi) = K$$

másodrendű lineáris differenciálegyenlet, ahol  $K = \frac{\gamma M}{h^2}$ . Oldjuk meg ezt az egyenletet!

16.3.11. **FELADAT** Egy lineárisan rugalmas, külső/belső egyenletes nyomással terhelt cső falában az  $u(r)$  sugárirányú elmozdulás az

$$u''(r) + \frac{1}{r}u'(r) - \frac{1}{r^2}u(r) = 0$$

egyenlet segítségével határozható meg. Oldjuk meg az egyenletet!

16.3.12. **FELADAT** [3] Oldjuk meg a következő differenciálegyenletet:

$$(1 + 2y) dx + (4 - x^2) dy = 0.$$

16.3.13. **FELADAT** Oldjuk meg a következő differenciálegyenletet:

$$y' = 2y + x + 1!$$

**ÚTMUTATÁS** Vagy megoldjuk lineáris egyenletként (mindkét oldalt megszorozva  $e^{2x}$ -szel), vagy helyettesítünk  $u(x) = 2y + x + 1$ -et, és akkor egy szétválasztható egyenletet kapunk.  $\square$

16.3.14. **FELADAT** (F143) <sup>5</sup> Oldjuk meg a következő differenciálegyenletet:

$$(xy' - 1) \ln x = 2y.$$

16.3.15. **FELADAT** (F144) Oldjuk meg a következő differenciálegyenletet:

$$xy' + (x + 1)y = 3x^2 e^{-x}.$$

16.3.16. **FELADAT** (F146) Oldjuk meg a következő differenciálegyenletet:

$$(2e^y - x) dy = dx.$$

16.3.17. **FELADAT** (F66) Oldjuk meg a következő differenciálegyenletet:

$$x^2 y' - \cos 2y = 1, \quad y(+\infty) = \frac{9}{4}\pi.$$

16.3.18. **FELADAT** (F195) Oldjuk meg a következő differenciálegyenletet:

$$(x^2 + y^2 + x) dx + y dy = 0.$$

16.3.19. **FELADAT** (F192) Oldjuk meg a következő differenciálegyenletet:

$$(1 + y^2 \sin 2x) dx - 2y \cos^2 x dy = 0.$$

16.3.20. **FELADAT** Oldjuk meg a következő differenciálegyenlet-rendszert:

$$\begin{aligned} x' &= -35x + 25y - 5z \\ y' &= -43x + 33y - 5z \\ z' &= -110x + 90y - 10z. \end{aligned}$$

<sup>5</sup>A jelölés arra utal, hogy ez a Filippov példatár [2] 143. feladata.

## 17. fejezet

# Numerikus megoldási módszerek

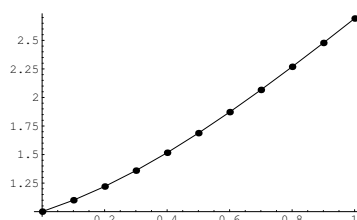
### 17.1. Elméleti összefoglaló

Az  $y'(x) = f(x, y)$  differenciálegyenlet (ahol  $y$  vektormennyiség is lehet)  $y(x)$  megoldását szeretnénk meghatározni egy egész  $[a, b]$  intervallumon, vagy csak egy adott  $b$  pontban. A legtöbb esetben valamilyen kezdeti érték, például  $y(a) = y_0$  adott. Vágjuk fel az  $[a, b]$  intervallumot  $h = \frac{b-a}{n}$  hosszúságú darabokra ( $h$ -t lépéshossznak vagy lépésköznek nevezzük). Legyenek az egyes szakaszok végpontjai az  $a = x_0, x_1, \dots, x_n = b$  pontok (azaz  $x_k = a + kh$ ). Egymás után minden  $x_k$  pontban meghatározzuk a pontos  $y(x_k)$  megoldás közelítő értékét, amit  $y_k$ -val jelölünk, és végül a megoldás  $b$ -beli értékének,  $y(b)$ -nek a közelítése  $y_n$  lesz. Az  $y_k$  értékek természetesen függenek attól, hogy milyen módszert választunk.

A legegyszerűbb és időrendben is a legkorábbi módszer azon a felismerésen alapul, hogy minden differenciálható függvény jól közelíthető az érintőjével, márpedig a derivált (amit a differenciálegyenletből ismerünk) pont az érintő meredekségét adja meg. Ezért úgy konstruáljuk meg a közelítő megoldást, hogy az  $(a, y_0)$  pontból az érintő irányába mozdulunk el az  $(a + h, y_0 + f(a, y_0))$  pontba, majd minden  $(x_k, y_k)$  pontból az ottani érintő irányába megyünk tovább az  $(x_k + h, y_k + hf(x_k, y_k))$  pontba. Ez azt jelenti, hogy a megoldás  $x_{k+1}$ -beli közelítő értéke,

$$y_{k+1} = y_k + hf(x_k, y_k). \quad (\text{EE})$$

Ez az explicit Euler-módszer (EE).



17.1. ábra. Az  $y' = \frac{y+x}{y-x}$ ,  $y(0) = 1$  kezdetiérték-probléma EE módszerrel kapott közelítő megoldása. A lépésköz 0,1

17.1.1. **PÉLDA** Az  $y' = \frac{y+x}{y-x}$ ,  $y(0) = 1$  kezdetiérték-probléma pontos megoldása  $y(x) = x + \sqrt{1+2x^2}$ . Az  $y' = \frac{y+x}{y-x}$ ,  $y(0) = 1$  kezdetiérték-probléma tíz lépéses, 0,1 lépésközű EE módszerrel kapott közelítő megoldása látható a 17.1 ábrán.  $y_1 = y_0 + hf(x_0, y_0) = 1 + 0,1 \frac{1+0}{1-0} = 1,1$ ,  $y_2 = y_1 + hf(x_1, y_1) = 1,1 + 0,1 \frac{1,1+0,1}{1,1-0,1} = 1,22$ , stb. Az  $y(1)$ -et közelítő  $y_{10}$  értéke közelítőleg 2,69165. A feladat pontos megoldása egyébként  $y(x) = x + \sqrt{1+2x^2}$ , azaz  $y(1) \approx 2,73205$ .

Mekkora a hiba?  $y(x+h) = y(x) + hy'(x) + \frac{h^2}{2}y''(\xi)$ , azaz minden lépésben  $\text{const} \cdot h^2$  hibát követünk el. Összesen  $n = \frac{b-a}{h}$  lépés van, tehát a hiba összesen  $\text{const} \cdot h$  lesz.

Egy másik lehetőség, ha mindig oda lépünk tovább, ahonnan az (ottani) érintő irányába visszalépve az jelenlegi pontunkat kapjuk, azaz  $y_{k+1} - hf(x_{k+1}, y_{k+1}) = y_k$ , szokásosabb formájában

$$y_{k+1} = y_k + hf(x_{k+1}, y_{k+1}). \quad (\text{IE})$$

Ez az implicit Euler-módszer (IE).

Az EE módszernél csak ki kellett számolni  $f$  értékét egy adott pontban, most viszont  $y_{k+1}$ -re egy egyenletet kell megoldanunk, ami  $f$ -től függően bonyolult is lehet. Ez a különbség az explicit és az implicit módszerek között. Akkor hívunk egy módszert explicitnek, ha minden újabb függvényérték kiszámításához csak a korábbi, meglévő értékek valamilyen függvényét kell kiszámolnunk, egyenletmegoldás nélkül, különben a módszer implicit.

Az (IE) egyenlet megoldását kereshetjük fixpont-iterációval. Legyen  $Y_{k+1}^{[0]} = y_k$ ,  $Y_{k+1}^{[n+1]} = y_k + hf(x_{k+1}, Y_{k+1}^{[n]})$ .<sup>1</sup> Ha  $|Y_{k+1}^{[n+1]} - Y_{k+1}^{[n]}| < t$ , ahol  $t$  előre adott pontosság, ún. tolerancia, akkor megállunk, és  $y_{k+1} = Y_{k+1}^{[n+1]}$ .

Látszólag az implicit módszerek bonyolultabbak, több számítást igényelnek. Az explicit módszerek nagy hátránya azonban, hogy „nem látnak a jövőbe”, azaz elegendően kis lépéshossz esetén konvergálnak ugyan, de nagyobb lépéshosszakra teljesen rossz eredményeket adnak – azt pedig nem mindig lehet előre tudni, hogy mi az elegendően kicsi. Egy példa a 17.2 ábrán látható.

Az Euler-módszer hibája a  $h$  lépéshosszal arányos, azaz a módszer *elsőrendű*. Egy módszer rendje az a legnagyobb  $k$  egész szám, amelyre teljesül, hogy ( $k$ -szor folytonosan differenciálható jobb oldal esetén) a hiba  $h \rightarrow 0$  esetén  $h^k$ -nal osztva korlátos. A magasabbrendű módszerek sokkal gyorsabban konvergálnak: ha a lépéshosszt a tizedére csökkentjük, az elsőrendű módszerek hibája a tizedére, a másodrendűeké a századára, a harmadrendűeké az ezredére csökken.

Hogyan juthatunk magasabbrendű módszerekhez? Az első ötlet, hogy ne csak a kiindulási vagy a végpontbeli érintő meredekségét használjuk fel, hanem mindkettőt, és ezeket átlagoljuk, vagy súlyozzuk. Így kapjuk a *Crank–Nicholson-módszert*:

$$y_{k+1} = y_k + \frac{1}{2}h[f(x_k, y_k) + f(x_{k+1}, y_{k+1})]. \quad (\text{CN})$$

<sup>1</sup>Ha  $h < \frac{1}{L}$ , ahol  $L$   $f$  Lipschitz-konstansa, akkor ez kontrakció lesz, mert  $|Y_{k+1}^{[n+1]} - Y_{k+1}^{[n]}| = h|f(x_{k+1}, Y_{k+1}^{[n]}) - f(x_{k+1}, Y_{k+1}^{[n-1]})| \leq hL|Y_{k+1}^{[n]} - Y_{k+1}^{[n-1]}|$ , tehát egyértelmű fixpontja van.

A Crank–Nicholson-módszer másodrendű. A rend további növelésére két lehetőségünk van. Az egyik, hogy az  $(x_k, y_k)$  pontból nem egy adott irányú szakaszt húzunk, hanem több *lépcsőben* közbülső értékeket számolunk ki, és az ottani deriváltakat is figyelembe vesszük  $y_{k+1}$  értékének a kiszámításához. A még ma is használt többlépcsős módszerek az ún. Runge–Kutta módszerek. 1895-ben Runge egy negyedrendű módszert talált, hat évvel később Kutta egy ötödrendűt. Ez a két módszer egy rendkívül bonyolult általános sémába illeszkedik, amellyel további magasabbrendű módszerek nyerhetők; ma ezeket hívják összefoglaló néven Runge–Kutta módszereknek, és ezen belül Runge-módszerére rendszerint az RK41, Kuttáéra RK5 néven hivatkoznak. Mindkettő explicit módszer; ezek képletét is lásd a matematikai háttérnél.

A másik lehetőség magasabb rend elérésére, hogy nem több közbülső értéket használunk föl, hanem a korábban kiszámolt  $y$  értékek közül használunk fel többet; így kevesebb számítással is elérhetjük a kívánt pontosságot. Többlépéses módszereknek nevezzük azokat, amelyek több előző  $(x_k, y_k)$  pontbeli függvényértéket használnak fel. Ilyenek az Adams–Moulton és az Adams–Bashforth-módszerek (lásd a matematikai háttérnél).

Ahhoz, hogy egy többlépéses módszer konvergens lehessen, két egyszerű feltételnek meg kell felelnie. Az egyik ilyen a *konzisztenciája*: akkor hívjuk konzisztensnek a módszert, ha két nagyon egyszerű egyenlet esetében pontos kiindulási értékekből továbbra is pontos értékeket szolgáltat. Egy másik feltétel a *stabilitás* (vagy zéró-stabilitás): a lehető legegyszerűbb,  $y'(x) = 0$  egyenletnél a hibák nem nőnek végtelen nagyra. Ami érdekes, hogy ez a két tulajdonság már garantálja a konvergenciát.

## 17.2. Kidolgozott példák

**17.2.1. KIDOLGOZOTT FELADAT** Közelítsük az  $y'(x) = x - y(x)$ ,  $y(0)=1$  kezdetiérték-probléma megoldásának 1-beli értékét az explicit Euler-módszerrel. Legyen  $h = \frac{1}{4}$ .

**MEGOLDÁS** Az explicit Euler-módszer úgy működik, hogy felosztjuk az  $(a, b)$  (jelen esetben a  $(0, 1)$ ) intervallumot az  $a = x_0, x_1, \dots, x_n = b$  osztópontokkal  $h$  hosszúságú szakaszokra. A megadott kezdeti értékből indulunk, és ha az  $y(x)$  megoldás  $x_k$ -beli értékét  $y_k$ -val közelítettük, akkor az  $(x_k, y_k)$ -beli érintő irányába lépünk tovább, azaz  $y_{k+1} = y_k + hf(x_k, y_k) = y_k + h(x_k - y_k)$ . Ezért

$$\begin{aligned} y_1 &= y_0 + hf(x_0, y_0) = y_0 + h(x_0 - y_0) = 1 + \frac{1}{4}(0 - 1) = \frac{3}{4} \\ y_2 &= y_1 + h(x_1 - y_1) = \frac{3}{4} + \frac{1}{4}\left(\frac{1}{4} - \frac{3}{4}\right) = \frac{5}{8} \\ y_3 &= y_2 + h(x_2 - y_2) = \frac{5}{8} + \frac{1}{4}\left(\frac{1}{2} - \frac{5}{8}\right) = \frac{19}{32} \\ y_4 &= y_3 + h(x_3 - y_3) = \frac{19}{32} + \frac{1}{4}\left(\frac{3}{4} - \frac{19}{32}\right) = \frac{81}{128}. \end{aligned}$$

□

Ez  $y(1)$  közelítése.

**17.2.2. KIDOLGOZOTT FELADAT** Közelítsük az  $y'(x) = x - y(x)$ ,  $y(0)=1$  kezdetiérték-probléma megoldásának 1-beli értékét az implicit Euler-módszerrel. Legyen  $h = \frac{1}{4}$ .

**MEGOLDÁS** Az implicit Euler-módszer úgy működik, hogy felosztjuk az  $(a, b)$  (jelen esetben a  $(0, 1)$ ) intervallumot az  $a = x_0, x_1, \dots, x_n = b$  osztópontokkal  $h$  hosszúságú szakaszokra. A megadott kezdeti értékből indulunk, és ha az  $y(x)$  megoldás  $x_k$ -beli értékét  $y_k$ -val közelítettük, akkor az  $y_{k+1}$  pontot úgy választjuk, hogy onnan az  $(x_{k+1}, y_{k+1})$ -beli érintő irányába visszalépve pont  $(x_k, y_k)$ -t kapjuk, azaz  $y_{k+1} = y_k + hf(x_{k+1}, y_{k+1}) = y_k + h(x_{k+1} - y_{k+1})$ . Ebből  $y_{k+1} = \frac{1}{1+h}(y_k + hx_{k+1})$ . Ezért

$$\begin{aligned} y_1 &= \frac{1}{1+h}(y_0 + hx_1) = \frac{4}{5}\left(1 + \frac{1}{4}\right) = \frac{17}{20} \\ y_2 &= \frac{1}{1+h}(y_1 + hx_2) = \frac{4}{5}\left(\frac{17}{20} + \frac{1}{2}\right) = \frac{39}{50} \\ y_3 &= \frac{1}{1+h}(y_2 + hx_3) = \frac{4}{5}\left(\frac{39}{50} + \frac{3}{4}\right) = \frac{19}{32} \\ y_4 &= \frac{1}{1+h}(y_3 + hx_4) = \frac{4}{5}\left(\frac{387}{500} + 1\right) = \frac{512}{625}. \end{aligned}$$

□

Ez  $y(1)$  közelítése.

**17.2.3. KIDOLGOZOTT FELADAT** Keressük meg az

$$\begin{aligned} y' &= -100y, \\ y(0) &= 1 \end{aligned}$$

kép. közelítő megoldásának 1-beli értékét az explicit és az implicit Euler-módszerrel is, ha  $h = \frac{1}{5}$ ! Mit tapasztalunk? Aztán mutassuk meg, hogy  $h = \frac{1}{n}$  és  $n \rightarrow \infty$  esetén a közelítés a pontos értékhez tart.

**MEGOLDÁS** Ha  $y(t)$  egy rezgő test adott pontjának a kitérése az idő függvényében, akkor minél merevebb a test, annál gyorsabban hal el a rezgés, azaz annál gyorsabban tart  $y$  a nullához. Az olyan egyenletet, amelynek van gyorsan nullához tartó megoldása, merev (stiff) egyenletnek nevezzük. Ez az egyenlet is merev, hiszen a pontos megoldás  $y(t) = e^{-100t}$ , rettentő gyorsan tart a nullához.

Az EE módszerrel  $y_{k+1} = y_k - 100hy_k = (1 - 100h)y_k$ , azaz  $h = \frac{1}{5}$ -nél  $y_{k+1} = -19y_k$ . Ezek szerint  $y_1 = -19$ ,  $y_2 = 361$ , és nullához tartás helyett egyre nagyobb számokat kapunk. Ez azért lehetséges, mert az érintő annyira meredek, hogy bár a  $t$  tengelyen csak  $h = \frac{1}{5}$ -öt lépünk, az  $y$  tengelyen jóval többet. Megjavul-e a módszer, ha kisebb lépésközt választunk? Általában  $y_n = (1 - 100h)y_{n-1} = \dots = (1 - 100h)^n y_0$ , azaz  $h = \frac{1}{n}$  és  $y_0 = 1$  esetén  $y(1)$  közelítése,  $y_n = (1 - \frac{100}{n})^n$ . Ha  $n$  tart a végtelenhez, akkor  $(1 - \frac{100}{n})^n \rightarrow e^{-100}$ , ami a pontos megoldás.

Az IE módszerrel  $y_{k+1} = y_k - 100hy_{k+1}$ , ahonnan  $y_{k+1} = \frac{1}{1+100h}y_k$ . Eszerint  $h = \frac{1}{5}$  esetén  $y_{k+1} = \frac{1}{21}y_k$ , azaz  $y_1 = \frac{1}{21}$ ,  $y_2 = \frac{1}{21^2}$ , ..., ezek az értékek nullához tartanak. Általában  $y_n = \frac{1}{1+100h}y_{n-1} = \dots = \left(\frac{1}{1+100h}\right)^n y_0$ , azaz  $h = \frac{1}{n}$  és  $y_0 = 1$  esetén  $y_n = \left(\frac{1}{1+\frac{100}{n}}\right)^n$ , ez is  $e^{-100}$ -hoz,



a pontos megoldáshoz tart.

Tehát elég kis lépésközt választva mindkét módszer a pontos megoldáshoz közelít. Mégis, főleg az ún. merev egyenleteknél, nem mindig látható, hogy elég kis lépésközt választottunk-e, ezért az implicit módszernek is megvannak az előnyei (nem száll el), még ha nehezebb is számolni vele.  $\square$

#### 17.2.4. KIDOLGOZOTT FELADAT

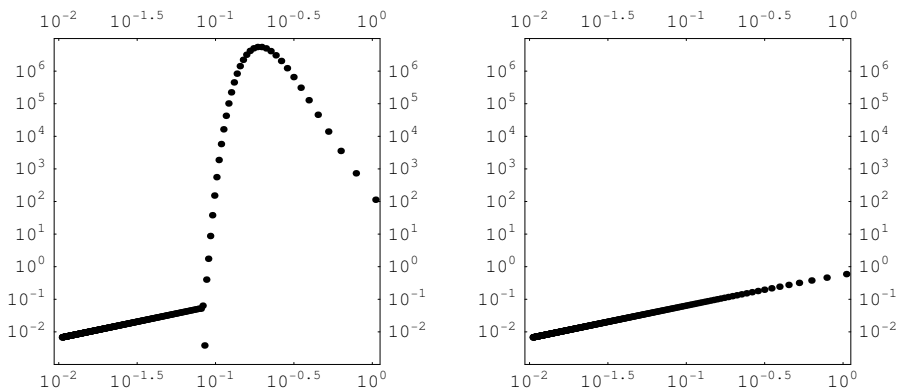
$$\begin{aligned} y_1' &= -16y_1 + 12y_2 + 16\cos x - 13\sin x \\ y_2' &= 12y_1 - 9y_2 - 11\cos x + 9\sin x \\ y_1(0) &= 1, \quad y_2(0) = 0. \end{aligned} \quad (17.1)$$

Próbáljuk meg megoldani az explicit Euler-módszerrel  $n$  lépésben,  $h = \frac{\pi}{n}$  lépéshosszal. Mi történik? A pontos megoldás  $y_1(x) = \cos x$ ,  $y_2(x) = \sin x$ .

**MEGOLDÁS** Az előző feladat mintájára tekintsük az

$$y'(x) = -Ny(x)$$

egyenletet! A pontos megoldás  $y(x) = c \cdot e^{-Nx}$ , azaz  $\frac{y(x_{k+1})}{y(x_k)} = e^{-Nh}$ , de  $y_{k+1} = y_k + h(-Ny_k) = (1 - hN)y_k$ . Ha  $1 - hN < -1$ , azaz  $h > \frac{2}{N}$ , akkor  $|y_{k+1}|$  növekedni fog! Ilyenkor vagy a lépéshosszt változtatjuk, vagy implicit módszereket alkalmazunk.



17.2. ábra. Az explicit és az implicit Euler-módszer hibája a lépéshossz függvényében a (17.1.) egyenlet esetén

A feladat egyenlete lineáris. Ilyenkor többnyire a megoldás és a deriváltja közötti nagyságrendet a homogén rész mátrixának a legnagyobb abszolútértékű sajátértéke határozza meg, ez most  $-25$ . Tehát  $h > \frac{2}{25}$  esetén számíthatunk rá, hogy a hiba növekedni fog, míg elég kis  $h$ -ra a hiba  $h$ -val arányosan csökken. Valóban ez a helyzet, lásd a 17.2 ábrát [1].  $\square$

**17.2.5. KIDOLGOZOTT FELADAT** Egy  $y(x)$  függvény értékeit numerikusan határoztuk meg az  $x \pm h$ ,  $x \pm 2h$ , stb. pontokban. Jelölje  $y(x + kh)$  értékét  $y_k$ . Milyen nagyságrendű hibát követünk el, ha  $y'(x)$  értékét a

$$\frac{9y_{-3} - 16y_{-4} + 7y_{-5}}{2h}$$

képlettel számítjuk ki?

**MEGOLDÁS** Az  $y(x + h) = y(x) + hy'(x) + \frac{h^2}{2}y''(x) + \frac{h^3}{6}y'''(x) + O(h^4)$  sorfejtés alapján

$$\begin{aligned} y_{-3} &= y(x) - 3hy'(x) + \frac{9h^2}{2}y''(x) - 27\frac{h^3}{6}y'''(x) + O(h^4), \\ y_{-4} &= y(x) - 4hy'(x) + \frac{16h^2}{2}y''(x) - 64\frac{h^3}{6}y'''(x) + O(h^4), \\ y_{-5} &= y(x) - 5hy'(x) + \frac{25h^2}{2}y''(x) - 125\frac{h^3}{6}y'''(x) + O(h^4). \end{aligned}$$

A megadott képlet számlálóját 9-szer az első sor - 16-szor a második sor + 7-szer a harmadik sor, azaz  $2hy'(x) - 94h^3y'''(x) + O(h^4)$ . Ezt  $2h$ -val osztva  $y'(x) - 47h^2y'''(x) + O(h^3)$ -öt kapunk, vagyis a hiba  $h^2$ -tel arányos, a képlet másodrendben közelíti a deriváltat.  $\square$

## 17.3. Gyakorló feladatok

**17.3.1. FELADAT** Közelítsük  $y(1)$  értékét az implicit Euler-módszer segítségével, ha  $y$  az

$$y' = -4y, \quad y(0) = 3$$

kezdetiérték-probléma megoldása. Legyen  $h = 0,05$ .

**17.3.2. FELADAT** Bizonyítsuk be, hogy  $\frac{y_1 - y_{-1}}{2h}$  az  $y'(x)$  másodrendű közelítése!

**17.3.3. FELADAT** Bizonyítsuk be, hogy (az  $y_k = y(x + kh)$  rövidítéssel élve)

$$\frac{-y_{-1} + 3y_0 - 3y_1 + y_2}{h^3}$$

az  $y'''(x)$  harmadik derivált elsőrendű közelítése!

## 17.4. Matematikai háttér

### Többlépcsős módszerek

Több *lépcsőben* (nem ugyanaz, mint „több lépésben”!!) számítjuk ki a következő értéket. Például

- Heun-módszer, vagy egyszerűsített Runge–Kutta-módszer:

$$\begin{aligned} y_{k+1}^* &= y_k + hf(x_k, y_k), \quad \text{majd} \\ y_{k+1} &= y_k + \frac{1}{2}h[f(x_k, y_k) + f(x_{k+1}, y_{k+1}^*)]. \end{aligned} \quad (\text{RK21})$$

- Módosított Euler-módszer:

$$\begin{aligned} y_{k+\frac{1}{2}} &= y_k + \frac{h}{2}f(x_k, y_k), \quad \text{majd} \\ y_{k+1} &= y_k + hf(x_k + \frac{h}{2}, y_{k+\frac{1}{2}}). \end{aligned} \quad (\text{RK22})$$

- Runge-módszere:

$$y_{k+1} = y_k + \frac{h}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4), \quad (\text{RK41})$$

ahol

$$\begin{aligned} k_1 &= f(x_k, y_k) \\ k_2 &= f(x_k + \frac{h}{2}, y_k + \frac{h}{2}k_1) \\ k_3 &= f(x_k + \frac{h}{2}, y_k + \frac{h}{2}k_2) \\ k_4 &= f(x_k + h, y_k + hk_3). \end{aligned}$$

- Kutta (egyik) módszere ([1], 174. old):

$$y_{k+1} = y_k + \frac{h}{192}(48k_1 + 125k_3 - 81k_5 + 100k_6), \quad (\text{RK5})$$

ahol

$$\begin{aligned} k_1 &= f(x_k, y_k) \\ k_2 &= f(x_k + \frac{1}{3}h, y_k + \frac{1}{3}hk_1) \\ k_3 &= f(x_k + \frac{2}{5}h, y_k + \frac{4}{25}k_1 + \frac{6}{25}k_2) \\ k_4 &= f(x_k + h, y_k + \frac{1}{4}hk_1 - 3hk_2 + \frac{15}{4}hk_3) \\ k_5 &= f(x_k + \frac{2}{3}h, y_k + \frac{2}{27}hk_1 + \frac{10}{9}hk_2 - \frac{50}{81}hk_3 + \frac{8}{81}hk_4) \\ k_6 &= f(x_k + \frac{4}{5}h, y_k + \frac{7}{30}hk_1 + \frac{3}{5}hk_2 - \frac{1}{6}hk_3 + \frac{2}{15}hk_4). \end{aligned}$$

### Többlépéses módszerek

$y_n$  kiszámításához több előző értéket használunk fel:

$$y_n = \alpha_1 y_{n-1} + \alpha_2 y_{n-2} + \dots + \alpha_k y_{n-k} + h(\beta_0 f(x_n, y_n) + \beta_1 f(x_{n-1}, y_{n-1}) + \dots + \beta_k f(x_{n-k}, y_{n-k})). \quad (17.2)$$

Speciális esetek:

- Adams–Moulton-módszer:  $\alpha_1 = 1, \alpha_2 = \dots = \alpha_k = 0$ .
- Adams–Bashforth-módszer: az előzőeken felül  $\beta_0 = 0$ .

Néhány „természetes” elvárás:

- prekonzisztencia:  $y'(x) = 0$ -t jól oldja meg, ha az első  $k$  érték pontosan adott, azaz  $1 = \alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_k$ .
- konzisztencia: ha prekonzisztens, és  $y'(x) = 1, y(0) = 0$ -t jól oldja meg, azaz

$$nh = \alpha_1 h(n-1) + \alpha_2 h(n-2) + \dots + \alpha_k h(n-k) + h(\beta_1 + \dots + \beta_k), \\ \alpha_1 + 2\alpha_2 + \dots + k\alpha_k = \beta_1 + \dots + \beta_k.$$

- (zéró-)stabilitás:  $y'(x) = 0$  közelítő megoldásai korlátosak maradnak pontatlan  $y_0, y_1, \dots, y_{k-1}$  esetén is.
- konvergencia: Tegyük fel, hogy az  $y_0, y_1, \dots, y_{k-1}$  kezdeti értékek  $y(x_0)$  és  $h$  függvényében adottak úgy, hogy  $h \rightarrow 0$  esetén mindegyik  $y(x_0)$ -hoz tart. Ebben az esetben bármilyen  $m \geq k$ -ra  $y_m \rightarrow y(x_m)$ , ha  $h \rightarrow 0$ .

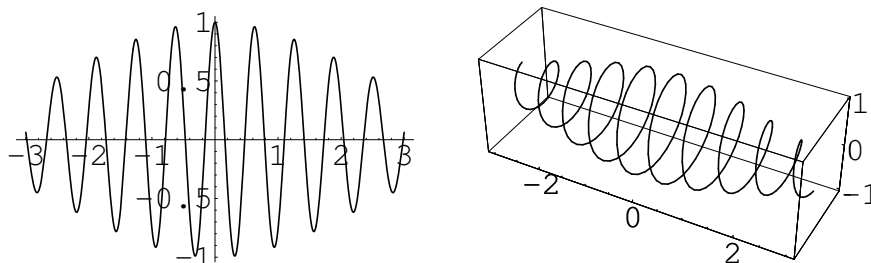
**17.4.1. TÉTEL** ([1], Theorem 406D) A (17.2.) többlépéses módszer pontosan akkor konvergens, ha konzisztens és (zéró-)stabil.

## 18. fejezet

# A megoldások ábrázolása

### 18.1. Elméleti összefoglaló

Tegyük fel, hogy tetszőleges  $t_0, y_0$  kezdeti érték esetén a (15.2.)-(15.3.) kezdetiérték-probléma megoldása létezik és egyértelmű az  $[a, b]$  intervallumon. Jelölje ezt a megoldást  $y(t, t_0, y_0)$ ; azaz, ha adottak a második és a harmadik változóban szereplő kezdeti értékek, akkor  $y(t, t_0, y_0)$  a hozzájuk tartozó ( $t$ -től függő) megoldásfüggvény.

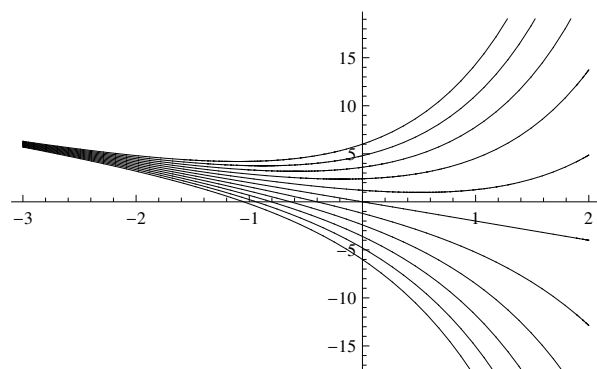


18.1. ábra. Az  $y(t) = e^{-\frac{1}{10}t^2} \cos 10t$  függvény grafikonja és az  $y(t) = (e^{-\frac{1}{10}t^2} \cos 10t, e^{-\frac{1}{10}t^2} \sin 10t)$  függvény gráfja

Ha  $y : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ , akkor a  $\{(t, y(t)) \in \mathbb{R}^2 | t \in [a, b]\}$  halmaz az  $y(t)$  függvény grafikonja (18.1. ábra). Ehhez hasonlóan ábrázolhatjuk az  $y : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$  függvény gráfját (ilyenkor a gráf szót szokás használni grafikon helyett) az  $\mathbb{R}^{n+1}$  térben (18.1. ábra). Egy differenciálegyenlet megoldásait úgy ábrázolhatjuk, hogy elegendően sok kezdeti értékhez tartozó megoldásfüggvényt ábrázolunk. Például az  $y' = y + 2t - 2$  egyenlet megoldása  $y = -2t + ce^t$  (lásd a 15.3.2. feladatot). Néhány különböző  $c$ -re ezek láthatók a 18.2 ábrán.

A megoldásgörbék deriváltja  $y'(t) = f(t, y(t))$ . A derivált, mint tudjuk, az érintő meredekségét adja meg. Ha tehát a 18.2 ábrán a sík minden  $(t, y)$  pontjába berajzoljuk az  $(1, f(t, y))$  vektort, a megoldásgörbék a nyilak irányába haladnak. A nyilakat természetesen a megoldás ismerete nélkül is berajzolhatjuk, így kapjuk az egyenlet *iránymezőjét*. Az iránymező alapján képet alkothatunk a megoldásokról.

Ha  $f$   $t$ -től független, azaz  $y'(t) = f(y(t))$ , akkor az egyenletet *autonómnak* hívjuk. Ilyen

18.2. ábra. Az  $y' = y + 2t - 2$  egyenlet megoldásai

például a rugó egyenlete, hiszen a rugó az időben változtatja ugyan az alakját, de maga a folyamat mindig ugyanúgy játszódik le. Autonóm egyenleteknél a  $t$  változó többnyire az időt jelöli, ezért a deriválást sokszor ponttal jelöljük.

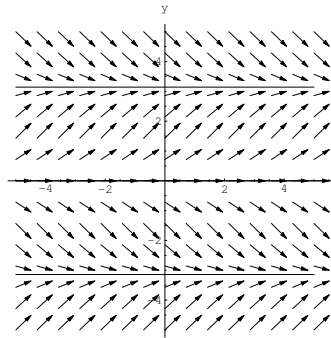
Ha az időtengelyt kivesszük, az eggyel alacsonyabb dimenziójú *fázistér*et kapjuk. Pontjai a rendszer egy-egy lehetséges állapotának felelnek meg. A rugó helyzetét például a kitérés és a sebesség határozza meg, ezért a rugó fázistere kétdimenziós. Az autonóm egyenletek megoldásgörbéit a  $t$  tengely mentén mozgatva szintén megoldásokat kapunk; ezeknek a  $t$  irányú vetülete a fázistérre ugyanaz. Az autonóm egyenletek megoldásait (pontosabban: a megoldások vetületeit) a fázistérben szokás ábrázolni. Ha  $y(t)$  egy megoldás, akkor a neki megfelelő  $\{y(t) \in \mathbb{R}^n | t \in [a, b]\}$  halmaz egy görbe az  $\mathbb{R}^n$  fázistérben. A görbén  $t$  növekedésének irányát nyílal szokás jelezni. Az irányított görbét *pályának* vagy *trajektóriának* nevezzük; ezek együtt alkotják a *fázisképet* vagy *fázisportrét*. A fáziskép arról ad információt, hogy a rendszer melyik állapotból melyikbe került, hogy milyen gyorsan, arról nem. Minden  $y \in \mathbb{R}^n$  pontból mérjük fel az  $y'(t) = f(y(t))$  vektort, így kapjuk az iránymezőt a fázistérben. Az  $y'(t)$  vektor az  $y$  ponton átmenő pálya deriváltja, tehát a pályák mindenütt a nyilak irányába haladnak. Az iránymezőt a megoldások ismerete nélkül fel tudjuk rajzolni, és következtethetünk a pályák alakjára.

## 18.2. Kidolgozott példák

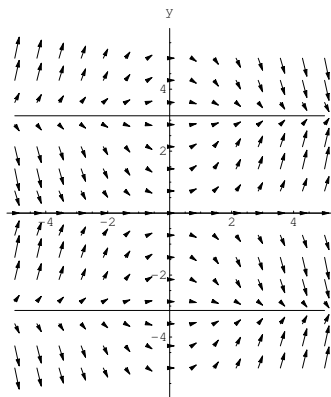
**18.2.1. KIDOLGOZOTT FELADAT** Rajzoljuk fel az alábbi differenciálegyenletek iránymezőjét:

$$\begin{aligned} y' &= \sin y, \\ y' &= t \sin y. \end{aligned}$$

**MEGOLDÁS** Az  $(1, f(t, y))$  vektor minden  $(t, y)$  pontban a megoldás érintője irányába mutat. Az első esetben  $f(t, y) = \sin y$ , ez  $t$ -től független. Az  $y = k\pi$  egyeneseken  $\sin y = 0$ , tehát ott csupa jobbra mutató nyilat rajzolunk. 0 és  $\pi$  között  $\sin y$  pozitív, méghozzá  $\frac{\pi}{2}$ -ig növekszik,

18.3. ábra. Az  $y' = \sin y$  DE iránymezője

ott 1, utána csökken, tehát ha  $y$ -t  $0$  és  $\pi$  között mozgatjuk, akkor  $\frac{\pi}{2}$ -ig egyre jobban fölfelé mutató vektorokat kell rajzolnunk. A  $\frac{\pi}{2}$ -ben a nyíl éppen  $45^\circ$ -ban jobbra fölfelé mutat, onnantól csökken a meredeksége. Hasonlóan rajzolhatjuk fel a nyilakat  $\pi$  bármely két szomszédos többszöröse között, lásd a 18.3 ábrát.

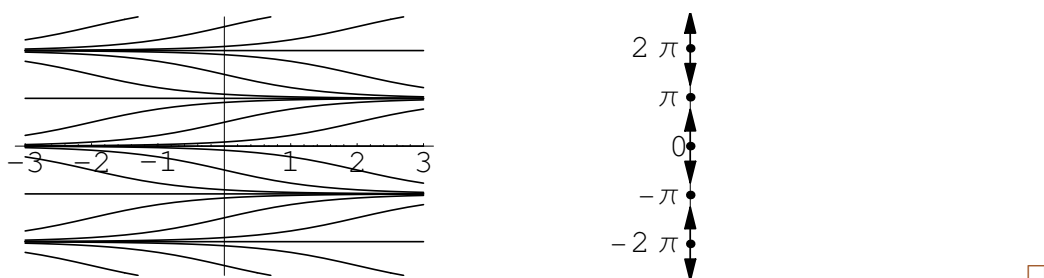
18.4. ábra. Az  $y' = t \sin y$  DE iránymezője

A második esetben  $f(t, y) = t \sin y$   $t$ -től is függ. A  $t = 1$  függőleges egyenesen ugyanazt látjuk, nagyobb  $t$ -re a nyilak arányosan egyre meredekebbek, míg kisebb  $t$ -re egyre kevésbé. A  $t = 0$  egyenesen minden nyíl jobbra mutat. Negatív  $t$ -re pont fordított a helyzet: ami fölfelé mutatott, az lefelé mutat, és fordítva. A  $t = a$  és a  $t = -a$  egyenesen a nyilak összegének a függőleges komponense zérus (18.4. ábra).

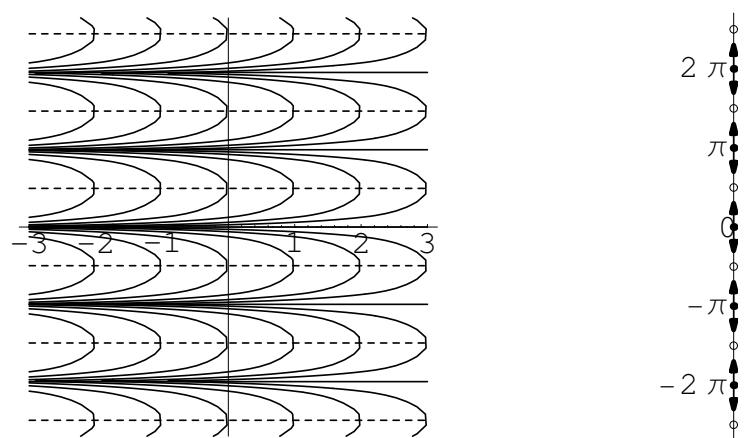
18.2.2. **KIDOLGOZOTT FELADAT** Rajzoljuk fel az 1D fázisképet:

$$\begin{aligned} y' &= \sin y, \\ y' &= \operatorname{tg} y. \end{aligned}$$

**MEGOLDÁS** Az egydimenziós fázistérben az  $y$  koordináta változását kell ábrázolni. Ha  $y' > 0$ , akkor az ezen az  $y$  értéken áthaladó megoldások  $t$ -től függetlenül növekednek, tehát az

18.5. ábra. Az  $y' = \sin y$  DE megoldásai és az 1D fáziskép

$y$  koordináta fölfelé mozdul, és fölfelé mutató nyilat rajzolunk. Ha valahol  $y' < 0$ , akkor  $y$  lefelé mozdul, lefelé mutató nyilat rajzolunk. Végül ha  $y' = 0$ , akkor ez az  $y$  érték egy állandó megoldásnak felel meg; az ábrán ezt egy ponttal jelezzük. Az  $y' = \sin y$  DE fázisképén tehát  $\pi$  többszöröseinél látunk pontokat, közben pedig a nyilak iránya  $\sin y$  előjelének megfelelő (18.5. ábra).

18.6. ábra. Az  $y' = \operatorname{tg} y$  DE megoldásai és az 1D fáziskép

Az  $y' = \operatorname{tg} y$  egyenletnél a helyzet egy kicsit bonyolultabb, mert a tangens nem mindenütt értelmes. A 18.6 ábra bal oldalán láthatók az egyenlet megoldásai. A megoldás érintőjének a meredeksége  $\operatorname{tg} y$ . Ha  $y$  értéke például 0 és  $\frac{\pi}{2}$  között van, akkor, mivel itt a tangens pozitív, a megoldás egyre meredekebb lesz, míg  $y = \frac{\pi}{2}$  esetén már függőleges az érintője. Ha egy  $\frac{\pi}{2}$  és  $\pi$  közötti  $y$  értéket nézünk, azt találjuk, hogy a tangens negatív, a megoldás egyre meredekebben csökken, míg  $y = \pi$  esetén már függőleges az érintője. A megoldásgörbéknek az  $y = \frac{\pi}{2}$  koordinátájú pontokat tartalmazó darabjai nem írhatók fel  $t$  függvényeként.<sup>1</sup> A fázisképen

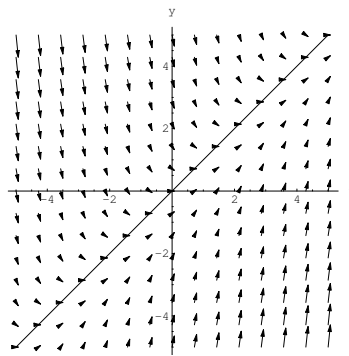
<sup>1</sup>Ha a differenciálegyenlet jobb oldalának olyan szakadása van, hogy a két oldali határérték ellentétes végtelen, akkor a megoldások „visszafordulnak”, míg ha azonos előjelű végtelen, akkor a megoldás úgy monoton, hogy az érintő egy pontban függőleges. Ilyenkor a görbe az adott pontban nem deriválható, mert a differenciálhányados definíció szerint véges. Valamilyen általánosabb értelemben azonban a görbét joggal tekinthetjük megoldásnak.



ennek az felel meg, hogy a 0 és  $\pi$  közötti  $y$  pontok egyre gyorsabban mozognak a  $\frac{\pi}{2}$  felé, és ott „felrobbannak”. Ezért az  $y = \frac{\pi}{2}$  pontba egy kört rajzolunk. A tangens  $\pi$  szerint periodikus, ezért  $\pi$  bármely két többszöröse között a megoldások és a fáziskép is úgy néz ki, mint 0 és  $\pi$  között.  $\square$

**18.2.3. KIDOLGOZOTT FELADAT** Rajzoljuk fel az alábbi egyenlet iránymezőjét:

$$y'(t) = t - y(t).$$



18.7. ábra. Az  $y'(t) = t - y(t)$  egyenlet iránymezője. Az  $y = t$  egyenesen a nyilak vízszintesek.

**MEGOLDÁS** Az  $(1, t - y)$  vektort kell berajzolnunk minden  $(t, y)$  pontban.  $t - y$  minden 1 meredekségű egyenes mentén állandó, és értéke „jobbra lefelé” növekszik. Tehát az  $y = t$  egyenes mentén vízszintesek a nyilak, attól jobbra lefelé egyre meredekebben fölfelé mutatnak, attól balra föl pedig egyre meredekebben lefelé, lásd a 18.7 ábrát.  $\square$

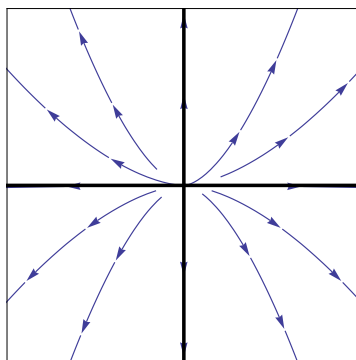
**18.2.4. KIDOLGOZOTT FELADAT** Rajzoljuk fel a fázisképet:

$$\dot{x} = 3x$$

$$\dot{y} = 5y.$$

**MEGOLDÁS** A két egyenletet külön-külön könnyen megoldhatjuk,  $x(t) = c_1 e^{3t}$ ,  $y(t) = c_2 e^{5t}$ . A fázisképen  $x$ -et és  $y$ -t kell ábrázolnunk, ezért a két egyenletből  $t$ -t kiejtjük. Ha a rendszer egy olyan vektorból induló megoldását nézzük, ahol mindkét konstans pozitív, akkor az  $x$  és  $y$  közötti összefüggés  $\frac{x^5}{y^3} = \frac{c_1^5}{c_2^3} = c > 0$ . Ha a konstansok előjelére nem teszünk megkötést, akkor az  $\frac{|x|^5}{|y|^3} = c$  összefüggést kapjuk, ahol  $c$  tetszőleges nemnegatív konstans.<sup>2</sup> Ezt kicsit átrendezve nemnegatív  $c$ -re az  $|y| = c|x|^{\frac{5}{3}}$  görbéket kell egyszerre ábrázolnunk. Mivel  $\frac{5}{3} > 1$ , ezek az  $|y| = c|x|^2$  parabolákhoz hasonlítanak (18.8. ábra), és a két koordinátatengely is két-két pálya. Ez még nem a fáziskép, ezek csak a pályák, amelyek mentén az  $(x, y)$  állapotban

<sup>2</sup>Vagy végtelen, ha  $c_2$  nulla volt.

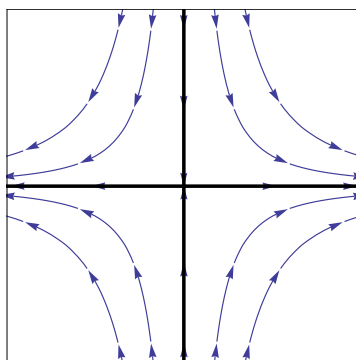


18.8. ábra. Csomó

lévő rendszer változni tud. Kérdés, hogy merre. A fázisképen a pályák irányítását nyilakkal jelöljük. Ha  $t$ -t növeljük, akkor  $e^{3t}$  és  $e^{5t}$  is növekszik, azaz  $|x|$  és  $|y|$  is növekszik. Vagyis a rendszer állapotát megadó  $(x, y)$  pont a pályák mentén az origótól távolodik; a pályák kifelé irányítottak.  $\square$

#### 18.2.5. KIDOLGOZOTT FELADAT *Rajzoljuk fel a fázisképet:*

$$\begin{aligned}\dot{x} &= 3x \\ \dot{y} &= -5y.\end{aligned}$$

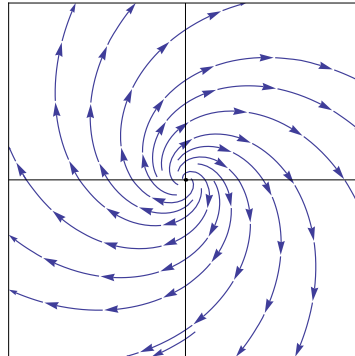


18.9. ábra. Nyereg

**MEGOLDÁS** Az előző feladathoz hasonlóan a megoldás ezúttal  $x(t) = c_1 e^{3t}$ ,  $y(t) = c_2 e^{-5t}$ , amiből az  $|y| = c|x|^{-\frac{5}{3}}$  összefüggést kapjuk ( $c > 0$ ). Ezek az  $|y| = |x|^{-1}$  hiperbolákhoz hasonlítanak (18.9. ábra), és a két koordinátatengely is két-két pálya. Az irányítást úgy kaphatjuk meg, hogy megvizsgáljuk, hogyan változnak a koordináták  $t$  függvényében. Ha  $t$ -t növeljük, akkor  $e^{3t}$  növekszik,  $e^{-5t}$  csökken, azaz  $|x|$  növekszik,  $|y|$  csökken. Vagyis a rendszer állapotát megadó  $(x, y)$  pont a hiperbolaszerű pályák mentén az  $x$  tengelyhez közeledik, az  $y$  tengelytől távolodik.  $\square$

18.2.6. **KIDOLGOZOTT FELADAT** Rajzoljuk fel a fázisképet:

$$\begin{aligned}\dot{x} &= 2x + 3y \\ \dot{y} &= -3x + 2y.\end{aligned}$$



18.10. ábra. Fókusz

**MEGOLDÁS** A második szakaszban felírtuk az állandó együtthatós lineáris rendszer általános megoldását. Mégis, a fázisképet könnyebb úgy elkészíteni, ha polárkoordinátákra térünk át. Legyen  $x = r \cos \varphi$ ,  $y = r \sin \varphi$ . Ekkor az egyenleteink:

$$\begin{aligned}\dot{r} \cos \varphi - r \sin \varphi \dot{\varphi} &= 2r \cos \varphi + 3r \sin \varphi \\ \dot{r} \sin \varphi + r \cos \varphi \dot{\varphi} &= -3r \cos \varphi + 2r \sin \varphi.\end{aligned}$$

Adjuk hozzá az első egyenlet  $\cos \varphi$ -szereséhez a második egyenlet  $\sin \varphi$ -szeresét, hogy  $\dot{\varphi}$  kiessen:

$$\dot{r} = 2r.$$

$\dot{r}$  kiejtéséhez pedig az első egyenlet  $\sin \varphi$ -szereséből vonjuk ki a második egyenlet  $\cos \varphi$ -szeresét:

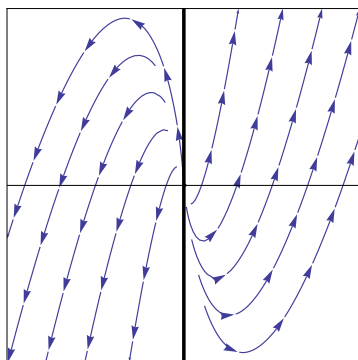
$$-r\dot{\varphi} = 3r \Rightarrow \dot{\varphi} = -3.$$

□

Ebből a két egyenletből láthatjuk, hogy  $r$  növekszik (mert  $\dot{r} = 2r > 0$ ),  $\varphi$  pedig csökken (mert  $\dot{\varphi} = -3 < 0$ ).  $r$  növekedése azt jelenti, hogy az  $(r, \varphi)$  pont helyvektora egyre hosszabb, a pont távolodik az origótól.  $\varphi$  csökkenése pedig azt jelenti, hogy az  $(r, \varphi)$  pont helyvektora az origó körül negatív irányba (jobbra) forog (18.10. ábra).

18.2.7. **KIDOLGOZOTT FELADAT** Rajzoljuk fel a fázisképet:

$$\begin{aligned}\dot{x} &= 5x \\ \dot{y} &= x + 5y.\end{aligned}$$



18.11. ábra. Elfajult v. egytengelyű csomó

**MEGOLDÁS** Az első egyenlet megoldása  $x(t) = c_1 e^{5t}$ , ezt a második egyenletbe helyettesítve egy inhomogén lineáris egyenletet kapunk, amelynek a megoldása  $y(t) = (c_1 t + c_2) e^{5t}$ . Ha  $c_1 = 0$ , akkor  $x = 0$  és  $|y|$  növekszik, ezért az  $y$  tengely pozitív és negatív félegyenese egy-egy kifelé irányított pálya. Ha  $c_1 \neq 0$ , akkor  $|x|$  növekszik,  $x$  és  $c_1$  előjele azonos, továbbá  $t = \frac{1}{5}(\ln|x| - \ln|c_1|)$ , ahonnan

$$y = (c_1 \frac{1}{5}(\ln|x| - \ln|c_1|) + c_2) \frac{|x|}{|c_1|} = \frac{x}{|x|} (\frac{1}{5}|x| \ln|x| + c|x|).$$

Ez a függvény páratlan, elég  $x > 0$ -ra vizsgálni, amikor az abszolútértékek elhagyhatók. Az  $y = \frac{1}{5}x \ln x + cx$  függvény határértéke a nullában nulla. Deriváltja monoton növekvő,  $x \rightarrow 0$  esetén  $-\infty$ -hez,  $x \rightarrow +\infty$  esetén  $+\infty$ -hez tart, ezért a függvény konvex, kis  $x$ -re negatív úgy, hogy a 0-ban érinti az  $y$  tengelyt, majd növekedni kezd. Tehát a pályák tényleg úgy néznek ki, mint ahogy az a 18.11 ábrán látható, és (mivel a megoldások mentén  $|x|$  növekszik) kifelé irányítottak.  $\square$

### 18.3. Gyakorló feladatok

18.3.1. **FELADAT** Rajzoljuk fel az alábbi egyenletek iránymezőjét:

$$y'(t) = 2t + y(t); \quad y'(t) = t^2 \cos y(t).$$

18.3.2. **FELADAT** Rajzoljuk fel az egydimenziós fázisképet:

$$y'(t) = \cos y(t); \quad y' = (y+1)(y+3)(y+5); \quad y' = \frac{1}{(y+1)(y+3)(y+5)}.$$

18.3.3. **FELADAT** Rajzoljuk fel az  $y' = \operatorname{ctg} y$  differenciálegyenlet iránymezőjét és az 1D fázisképet!

18.3.4. **FELADAT** Rajzoljuk fel a fázisképet:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= -3x \\ \dot{y} &= -5y. \end{aligned}$$

18.3.5. **FELADAT** Rajzoljuk fel a fázisképet:

$$\dot{x} = -3x$$

$$\dot{y} = 5y.$$

18.3.6. **FELADAT** Rajzoljuk fel a fázisképet:

$$\dot{x} = 2x$$

$$\dot{y} = x + 2y.$$

# 19. fejezet

## Stabilitás

### 19.1. Elméleti összefoglaló

#### A stabilitás fogalma

Tegyük fel, hogy az  $y'(t) = f(t, y(t))$  DE-nek minden  $y(t_0) = p$  kezdeti feltétel esetén létezik egyértelmű megoldása. Jelölje ezt a megoldást  $y(t, t_0, p)$ . A stabilitás leggyakrabban használt definíciója:

**19.1.1. DEFINÍCIÓ** A  $t \rightarrow y(t, t_0, p)$  megoldás stabil, ha minden  $t \geq t_0$ -ra értelmezett, és minden  $\varepsilon > 0$ -ra és  $t_1 \geq t_0$ -ra létezik  $\delta > 0$ , hogy  $|q - y(t_1, t_0, p)| < \delta$  esetén  $y(t, t_1, q)$  minden  $t \geq t_1$ -re értelmes és minden  $t > t_1$ -re

$$|y(t, t_0, p) - y(t, t_1, q)| < \varepsilon.$$

A megoldás aszimptotikusan stabil, ha stabil és

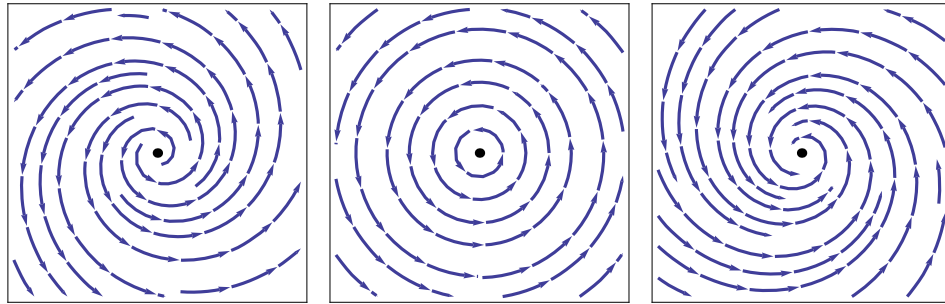
$$\lim_{t \rightarrow +\infty} |y(t, t_0, p) - y(t, t_1, q)| = 0$$

is teljesül; instabil, ha nem stabil.

Az  $\dot{x}(t) = f(x(t))$  autonóm DE esetén  $x(t + t_0, t_0, x_0) = x(t, 0, x_0)$ , mert mindkettő azt jelenti, hogy  $x_0$ -ból indítottuk a megoldást, és azóta  $t$  idő telt el. Ezt jelölhetjük  $x(t, x_0)$ -lal is. <sup>1</sup> Ha  $f(p) = 0$ , akkor  $p$  egyensúlyi helyzet. Az  $x(t, p) = p$  megoldás stabilitása (a  $p$  e.h. stabilitása) azt jelenti, hogy  $\forall \varepsilon > 0$ -ra létezik  $\delta > 0$ , hogy  $|x_0 - p| < \delta$  esetén  $|x(t, x_0) - p| < \varepsilon$  minden  $t > 0$ -ra, azaz a  $p$ -hez  $\delta$ -nál közelebbi pontokon  $t = 0$ -ban áthaladó pálya  $t > 0$  fele a  $p$  körüli  $\varepsilon$  sugarú gömb (két dimenzióban kör) belsejében marad. Az aszimptotikus stabilitás azt jelenti, hogy az előzőeken felül  $\lim_{t \rightarrow +\infty} x(t, x_0) = p$ , azaz a pálya a gömb közepéhez tart (19.1. ábra).

Az egyensúlyi helyzet stabilitását tehát a szemléletünknek megfelelően definiáltuk, de

<sup>1</sup>Ekkor  $x(t + s, x_0) = x(t, x(s, x_0))$ . Valóban, a bal oldal azt a pontot jelenti, ahol az  $x_0$ -ból indított megoldás lesz  $s + t$  idő múlva. Ugyanebbe a pontba másképp úgy is eljuthatunk, ha ismét  $x_0$ -ból indítjuk a megoldást, ami  $s$  idő múlva  $x(s, x_0)$ -ban lesz; innen továbbindulva  $t$  idő múlva  $x(t, x(s, x_0))$ -ba jutunk.



19.1. ábra. Instabil, stabil és aszimptotikusan stabil egyensúlyi pont

nézzük az alábbi kétdimenziós rendszert:

$$\begin{aligned}\dot{x} &= -y(1 + x^2 + y^2) \\ \dot{y} &= x(1 + x^2 + y^2).\end{aligned}$$

Polárkoordinátákra áttérve az  $\dot{r} = 0$ ,  $\dot{\phi} = 1 + r^2$  egyenletrendszert kapjuk, tehát a pályák origó középpontú körök (mert  $\dot{r} = 0$ ), amelyeken a megoldás balra halad (mert  $\dot{\phi} > 0$ ), de különböző szögsebességgel! Két közeli pont közül a „külső elhagyja a belsőt”, ezért a 19.1.1. definíció szerint egyik pálya sem stabil, pedig a 19.1 ábra középső képe alapján azt mondhatjuk, hogy ezek a körpályák, mint halmazok, igenis rendelkeznek egyfajta stabilitással. Ezért autonóm rendszerek periodikus (önmagába záródó) pályái esetén bevezetjük a *pályamenti* vagy *orbitális stabilitás* fogalmát. A fázistér egy tetszőleges  $x$  pontjának távolságát a  $\Gamma$  görbétől, mint halmaztól a  $d(x, \Gamma) = \inf_{y \in \Gamma} |x - y|$  képlettel adjuk meg.

**19.1.2. DEFINÍCIÓ** Tegyük fel, hogy az  $\dot{x}(t) = f(x(t))$  autonóm DE  $x(t, p)$  megoldása egy zárt  $\Gamma$  görbe a fázistérben (fázissíkon). Az  $x(t, p)$  megoldás orbitálisan stabil, ha minden  $\varepsilon > 0$ -ra létezik  $\delta > 0$ , hogy  $d(q, \Gamma) < \delta$  esetén  $x(t, q)$  minden  $t \geq 0$ -ra értelmes és minden  $t > 0$ -ra

$$d(x(t, q), \Gamma) < \varepsilon.$$

Ha még

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} d(x(t, q), \Gamma) = 0$$

is teljesül, akkor a megoldás orbitálisan aszimptotikusan stabil. Végül a megoldás orbitálisan instabil, ha nem (orbitálisan) stabil.

### Lineáris általános együtthatós DER stabilitása

**19.1.3. MEGJEGYZÉS** Az  $\dot{y}(t) = f(t, y(t))$  egyenletben sokszor külön jelölés nélkül  $y$ -t (és így  $f$ -et) vektornak tekintjük. Ha az egyenleteket koordinátáinként kiírjuk, akkor egyenletrendszerrel beszélünk, ha a tömörebb  $\dot{y}(t) = f(t, y(t))$  írásmódot használjuk, akkor

csak egyenletről. A lineáris differenciálegyenletrendszert például egyetlen  $\dot{\mathbf{x}}(t) = A(t)\mathbf{x}(t)$  lineáris differenciálegyenletként is felírhatjuk. Nincs különbség tehát differenciálegyenlet-rendszer (DER) és differenciálegyenlet (DE) között; a megnevezést azerint választjuk meg, hogy ugyanazt az egyenletrendszert különálló egyenletek alakjában, vagy egy vektoregyenlet alakjában képzeljük-e el, illetve, hogy hangsúlyozni szeretnénk-e, hogy több egyenletről van (vagy lehet) szó.

**19.1.4. LEMMA** Az  $\dot{x}(t) = A(t)x(t)$  lineáris DE bármely megoldása pontosan akkor (aszimptotikusan) stabil, ha az azonosan 0 megoldás (aszimptotikusan) stabil. Ezért beszélhetünk a lineáris DE stabilitásáról.

**BIZONYÍTÁS** Legyen  $y(t, t_0, p)$  és  $y(t, t_1, q)$  két tetszőleges megoldás. Ekkor  $\frac{d}{dt}(y(t, t_0, p) - y(t, t_1, q)) = A(t)(y(t, t_0, p) - y(t, t_1, q))$ , vagyis két megoldás különbsége is megoldás. Továbbá két megoldás pontosan akkor van közel, ha a különbségük közel van a nullához.  $\square$

**19.1.5. TÉTEL** Legyen  $A$  adott mátrix. Az

$$\dot{x}(t) = Ax(t)$$

állandó együtthatós lineáris DE

1. pontosan akkor aszimptotikusan stabil, ha  $A$  minden  $\lambda$  sajátértékére  $\Re \lambda < 0$  (a sajátértékek valós része negatív).
2. pontosan akkor stabil, ha  $A$  minden  $\lambda$  sajátértékére  $\Re \lambda \leq 0$ , és a 0 valós részű sajátértékekhez külön - külön sajátvektor tartozik.

**BIZONYÍTÁS** Lineáris algebrai bonyodalmak miatt csak abban az esetben bizonyítunk, amikor az  $A$  mátrixnak van  $n$  darab lineárisan független sajátvektora. Ilyenkor diagonalizálható, azaz  $A = SDS^{-1}$ , ahol a  $D$  diagonális mátrix főátlójában  $A$  sajátértékei vannak,  $S$  oszlopaiban pedig  $A$  megfelelő sajátvektorai. Ilyenkor a megoldás:

$$x(t) = Se^D \mathbf{c} = \sum_{i=1}^n c_i e^{\lambda_i t} \mathbf{s}_i,$$

amiből  $|e^{\lambda_i t}| = e^{\Re \lambda_i t}$  alapján következik az állítás.  $\square$

### Egyensúlyi pont stabilitásának meghatározása linearizálással

Legyen  $y'(t) = f(t, y(t))$ , és  $f(t, p) = 0$ , azaz  $p$  egyensúlyi pont. A differenciálegyenlet jobb oldalát helyettesítsük a lineáris közelítésével. Ha a lineáris rész nem nulla, akkor a  $p$  pont közelében az elhanyagolt tagok a megmaradókhoz képest kicsik, ezért azt várhatjuk, hogy ez a közelítés nem változtatja meg a  $p$  pont stabilitását.

Részletesebben, ha  $f$  differenciálható, akkor

$$f(t, p + q) = f(t, p) + \partial_2 f(t, p) \cdot q + \varepsilon(t, q),$$



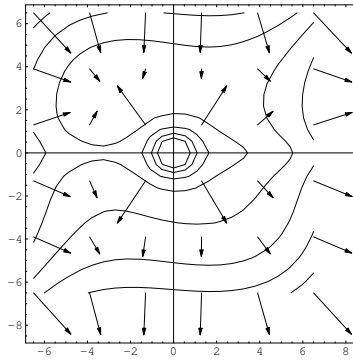
ahol  $\lim_{q \rightarrow 0} \frac{\varepsilon(t,q)}{\|q\|} = 0$ . Azaz kis  $q$ -ra  $f(t, p+q) \approx \partial_2 f(t, p) \cdot q$  a lineáris közelítés. Az  $x(t) = y(t) - p$  jelölést bevezetve  $x'(t) = f(t, p+x(t)) \approx \partial_2 f(t, p)x(t)$ . Azaz az eredeti egyenlet  $p$  egyensúlyi pontja helyett az  $x'(t) = \partial_2 f(t, p)x(t)$  lineáris egyenlet origóját vizsgáljuk:

**19.1.6. TÉTEL** Tekintsük az  $y'(t) = f(y(t))$  autonóm DE-t és tegyük fel, hogy  $f(p) = 0$ , azaz  $p$  egyensúlyi pont, és  $f \in C^1$  ( $f$  folytonosan differenciálható).

1. Ha az  $f'(p)$  mátrix minden  $\lambda$  sajátértékére  $\Re \lambda < 0$ , akkor a DE  $y(t) = p$  megoldása aszimptotikusan stabil.
2. Ha az  $f'(p)$  mátrixnak van olyan  $\lambda$  sajátértéke, amelyre  $\Re \lambda > 0$ , akkor a DE  $y(t) = p$  megoldása instabil.

### Egyensúlyi pont stabilitásvizsgálata Ljapunov-függvénnyel

Tudjuk, hogy a  $V(\mathbf{x}) = c$  szintvonalakra  $\text{grad}V$  merőleges, és arra mutat, amerre a  $V$  függvény a leggyorsabban növekszik. Ha az iránymező  $\text{grad}V$ -vel 90 foknál nagyobb szöget zár be, akkor a megoldások (autonóm esetben a pályák)  $V$  szintvonalait a nagyobb értékek felől a kisebbek felé haladva keresztezik. Azaz a megoldások mentén  $V$  csökken. Ez megfordítva is igaz: ha  $V$  értéke csökken a megoldások mentén, akkor a megoldásoknak a nagyobb értékek felől a kisebbek felé haladva kell áthaladniuk  $V$  szintvonalain, ezért az iránymező  $\text{grad}V$ -vel 90 foknál nagyobb szöget zár be.



19.2. ábra. A  $V(x) = c$  szintvonalak és  $\text{grad}V$

Ezt ki is tudjuk számolni.  $V' = \text{grad}V$  a  $V$  deriváltjaiból álló sorvektor,  $\frac{d}{dt}\mathbf{x}(t, \mathbf{x}_0) = f(\mathbf{x}(t, \mathbf{x}_0))$  pedig oszlopvektor. Szorzatukat írhatjuk mátrixosan sor-oszlop szorzatnak, vagy skaláris szorzatnak. Az összetett függvény deriválási szabálya alapján

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}V(\mathbf{x}(t, \mathbf{x}_0)) &= V'(\mathbf{x}(t, \mathbf{x}_0)) \cdot \frac{d}{dt}\mathbf{x}(t, \mathbf{x}_0) \\ &= V'(\mathbf{x}(t, \mathbf{x}_0))f(\mathbf{x}(t, \mathbf{x}_0)) = V'(\mathbf{x})f(\mathbf{x}) = \langle V'(\mathbf{x}), f(\mathbf{x}) \rangle. \end{aligned}$$

Ha a legelső képlet negatív (vagy nulla), akkor  $V$  csökken (nem növekszik) a megoldások mentén. Ha a legutolsó negatív (vagy nulla), akkor  $V'(\mathbf{x})$  és  $f(\mathbf{x})$  (az iránymező) tompaszöget (vagy derékszöget) zár be.

Azért fontos ennek a két dolognak az ekvivalenciája, mert ezek szerint a megoldások ismerete nélkül el tudjuk dönteni, hogy egy adott függvény értéke a megoldások mentén hogyan változik, hiszen ehhez csak az iránymezőt kell ismernünk. A következő tételek olyankor segítenek a stabilitás eldöntésében, amikor van egy olyan  $V$  függvény (az ún. *Ljapunov-függvény*), például az összenergia, amiről azt gondoljuk, hogy csökken a megoldások mentén. Ezt a megoldások ismerete nélkül ellenőrizhetjük (a tételekben ez a 2. számú feltétel). Ha  $V$  tényleg csökken a megoldások mentén (tehát a tételek 2. számú feltétele teljesül), akkor a megoldások  $V$  szintvonalain keresztül az egyre kisebb értékek felé haladnak, azaz  $V$  lokális minimumai felé törekednek. Ha az egyensúlyi helyzet egybeesik a minimummal, akkor stabil, hiszen (valamilyen értelemben) közelednek a megoldások. Ha nem esik vele egybe, akkor viszont az egyensúlyi helyzethez bármilyen közeli megoldás is eltávolodik a minimum közelébe, tehát az egyensúlyi helyzet nem lehet stabil. Tehát az 1. feltétel dönti el a stabilitást:

**19.1.7. TÉTEL (LJAPUNOV STABILITÁSI TÉTEL)** *Ha a  $p$  egyensúlyi pont valamely nyílt  $U$  környezetében megadható olyan  $V : U \rightarrow \mathbb{R}$  folytonosan differenciálható függvény, melyre*

1.  $V(p) < V(q)$ , ha  $q \neq p$  (azaz  $p$   $V$  szigorú minimumhelye  $U$ -ban),
2.  $V'(q) \cdot f(q) < 0$ , ha  $q \neq p$ ,

*akkor a  $p$  egyensúlyi pont aszimptotikusan stabil. Ha 2. helyett csak  $V'(q) \cdot f(q) \leq 0$  teljesül, akkor  $p$  stabil.*

**19.1.8. TÉTEL (LJAPUNOV INSTABILITÁSI TÉTEL)** *Ha a  $p$  egyensúlyi pont valamely nyílt  $U$  környezetében megadható olyan  $V : U \rightarrow \mathbb{R}$  folytonosan differenciálható függvény, melyre*

1.  $p$  nem lokális minimumhelye a  $V$  függvénynek, és
2.  $V'(q) \cdot f(q) < 0$ , ha  $q \neq p$ ,

*akkor a  $p$  egyensúlyi pont instabil.*

Figyeljünk föl arra, hogy ha a 2. feltétel helyett a gyengébb  $V'(q) \cdot f(q) \leq 0$ -t tesszük fel, akkor a megoldások nem feltétlenül közelednek  $V$  minimumához, hanem csak annyit mondhatunk, hogy nem távolodnak. Ez garantálja a stabilitást, de az instabilitást és az aszimptotikus stabilitást nem! Ugyanakkor a  $V'(q) \cdot f(q) < 0$  feltétel nem mindig teljesül, ezért hasznos a következő tétel:

**19.1.9. TÉTEL (BARBASIN-KRASZOVSZKIJ)** *Ha a  $p$  egyensúlyi pont valamely nyílt  $U$  környezetében megadható olyan  $V : U \rightarrow \mathbb{R}$  folytonosan differenciálható függvény, melyre*

1.  $V(p) < V(q)$ , ha  $q \neq p$ ,
2.  $V'(q) \cdot f(q) \leq 0$ , ha  $q \neq p$ ,

3. az  $\mathbb{R} \ni t \rightarrow p$  megoldáson kívül az  $U$  halmaz nem tartalmaz olyan teljes  $x(t, x_0)$  pályát, amely mentén  $t \rightarrow V(x(t, x_0))$  állandó,

akkor a  $p$  egyensúlyi pont aszimptotikusan stabil.

## 19.2. Kidolgozott példák

**19.2.1. KIDOLGOZOTT FELADAT (F791)** Vizsgálja meg az  $y'(t) = t - y(t)$  egyenlet  $y(0)=1$  feltételt kielégítő megoldásának stabilitását!

**MEGOLDÁS** Az általános megoldás  $y = t - 1 + ce^{-t}$ , minden megoldás minden  $t$ -re értelmezett. Jelöljük a  $(t_1, y_1)$ -ből induló megoldást  $y(t, t_1, y_1)$ -gyel. Az ehhez a megoldáshoz tartozó konstans  $c = (y - t + 1)e^t = (y_1 - t_1 + 1)e^{t_1}$ , ezért

$$\begin{aligned} |y(t, t_1, y_1) - y(t, 0, 1)| &= |t - 1 + (y_1 - t_1 + 1)e^{t_1-t} - (t - 1 + 2e^{-t})| = \\ &= e^{-t} |(y_1 - t_1 + 1)e^{t_1} - 2| \rightarrow 0, \end{aligned}$$

tehát két tetszőleges megoldás távolsága 0-hoz tart. Ez egy kicsit több annál, mint hogy „más kezdeti feltételből indítva a megoldást, a különbség nullához tart”. Ha mindenképp meg akarjuk fogalmazni, akkor azt jelenti, hogy „ha más kezdeti feltételből egy kicsit máskor indítom a megoldást, akkor is a különbség 0-hoz fog tartani”.

Azt is lehet mondani, hogy a lineáris rendszer bármely megoldása pontosan akkor stabil, ha a homogén egyenlet 0 megoldása stabil. Az meg stabil, mert a homogén megoldás  $e^{-t}$ , tehát az egy szem sajátérték a  $-1$  (ami kisebb mint 0).  $\square$

**19.2.2. KIDOLGOZOTT FELADAT (F799)** Vizsgáljuk meg az egyensúlyi pontok stabilitását:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= 5 - x^2 - y^2 \\ \dot{y} &= 1 + y^2 - x. \end{aligned}$$

**MEGOLDÁS** Az egyensúlyi pontok:  $(2, -1)$ ,  $(2, 1)$ . A jobb oldal deriváltja:  $\begin{pmatrix} -2x & -2y \\ -1 & 2y \end{pmatrix}$ .

A  $(2, -1)$  pont stabil (fókusz), mert a  $\begin{pmatrix} -4 & 2 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$  Jacobi-mátrixnak két negatív valós részű komplex konjugált sajátértéke van  $(-3 \pm i)$ . A  $(2, 1)$  pont instabil (nyereg), mert a  $\begin{pmatrix} -4 & -2 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$  Jacobi-mátrixnak egy pozitív és egy negatív sajátértéke van  $(-1 \pm \sqrt{11})$ .  $\square$

**19.2.3. KIDOLGOZOTT FELADAT** Keressük meg a következő differenciálegyenlet-rendszer egyensúlyi pontjait, és vizsgáljuk meg a stabilitásukat:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \sin(x + y) \\ \dot{y} &= y \end{aligned}$$

**MEGOLDÁS** Az egyensúlyi pontok:  $(k\pi, 0)$ . A jobb oldal deriváltja:

$$\begin{pmatrix} \cos(x+y) & \cos(x+y) \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

A  $(2k\pi, 0)$  pont instabil (csomó), mert a  $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$  Jacobi-mátrix mindkét sajátértéke pozitív

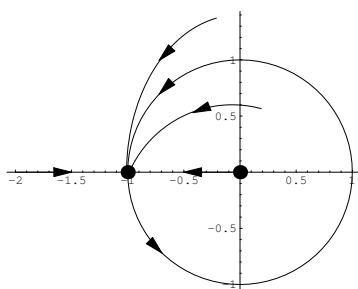
(1). A  $((2k+1)\pi, 0)$  pont instabil (nyereg), mert a  $\begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$  Jacobi-mátrix egyik sajátértéke pozitív (1), a másik negatív  $(-1)$ .  $\square$

#### 19.2.4. KIDOLGOZOTT FELADAT Tekintsük a polárkoordinátákban felírt

$$\begin{aligned} \dot{r} &= r(1-r) \\ \dot{\varphi} &= 1 + \cos \varphi \end{aligned}$$

*DER-t, és rajzoljuk fel a megoldást a Descartes-féle koordinátarendszerben. Mit mondhatunk az egyensúlyi pontok stabilitásáról?*

**MEGOLDÁS** <sup>2</sup> Az egyenlet jobb oldala folytonosan deriválható, ezért létezik és egyértelmű a megoldás. A két egyensúlyi helyzet a  $(0, 0)$  és a  $(-1, 0)$  pont. Az 1 sugarú, origó középpontú körvonalon halad megoldás, még hozzá az óramutató járásával ellenkező irányban, mert  $\dot{\varphi} \leq 0$ , és egyenlőség csak  $\varphi = \pi$ -re van. A kör belsejében  $\dot{r} > 0$ , külsejében  $\dot{r} < 0$ , tehát a megoldások a körhöz közelednek. A  $\varphi = \pi$  félegyenesről nem mennek le a megoldások,  $x > -1$  esetén balra,  $x < -1$  esetén jobbra haladnak. Ez alapján: A  $(-1, 0)$  pont határértéke



19.3. ábra. A  $(-1, 0)$  minden hozzá közeli pontból induló pályát vonz, mégsem stabil

a valamely környezetéből induló megoldások mindegyikének (kivéve a  $(0, 0)$  megoldást), ez alapján *vonzónak* hívjuk. Ugyanakkor a  $(-1, 0)$  pont mégsem stabil, ugyanis hozzá akármilyen közel indul olyan megoldás, ami 2 távolságra eltávolodik;  $\varepsilon < 2$ -höz nem tudunk  $\delta$ -t választani.  $\square$

#### 19.2.5. KIDOLGOZOTT FELADAT Vizsgáljuk meg az origó stabilitását alkalmasan választott Ljapunov-függvény segítségével!<sup>3</sup>

<sup>2</sup>a [4] könyv 7.6. példája nyomán

$$\begin{aligned}\dot{x} &= 2xy^5 - 4x^5, \\ \dot{y} &= -3x^2 - 2y.\end{aligned}$$

**MEGOLDÁS** Keressünk a Ljapunov-függvényt  $V(x, y) = ax^\alpha + by^\beta$  alakban.

$$\begin{aligned}\dot{V} &= \frac{d}{dt}V(x(t), y(t)) = \frac{\partial V}{\partial x}\dot{x}(t) + \frac{\partial V}{\partial y}\dot{y}(t) \\ &= 2a\alpha x^{\alpha-1}y^5 - 4a\alpha x^{\alpha-4} - 3b\beta x^2y^{\beta-1} - 2b\beta y^\beta.\end{aligned}$$

Négy tagot kaptunk. A másodikban csak  $x$  hatványai, a negyedikben csak  $y$  hatványai szerepelnek, de az  $\alpha = 2, 5 = \beta - 1$  választással az első és a harmadik tag ugyanolyan típusú lesz; ezután ha  $a$ -t és  $b$ -t ügyesen választjuk, az első és a harmadik tag összege nullává tehető, amit érdemes megpróbálni, mert  $\dot{V}$  jóval egyszerűbbé válik. Tehát  $\alpha = 2, \beta = 6$  választással

$$\dot{V} = (4a - 18b)x^2y^5 - 8ax^6 - 12by^6.$$

Az  $a = 18, b = 4$  választással  $\dot{V} = -144x^6 - 48y^6 < 0$ , tehát a 19.1.7. és 19.1.8. tételek második feltevése teljesül. Választott együtthatóinkkal  $V(x, y) = 18x^2 + 4y^6$ . Ennek (globális) minimuma az origó, ezért a 19.1.7. tétel első feltevése is teljesül, az origó aszimptotikusan stabil.  $\square$

**19.2.6. KIDOLGOZOTT FELADAT** Vizsgáljuk meg az origó stabilitását alkalmasan választott Ljapunov-függvény segítségével!

$$\begin{aligned}\dot{x} &= 3y^4 - 2x^4, \\ \dot{y} &= 5yx^2 + 3y.\end{aligned}$$

**MEGOLDÁS** Ismét  $V(x, y) = ax^\alpha + by^\beta$  alakban keressük a Ljapunov-függvényt. Ezúttal

$$\begin{aligned}\dot{V} &= \frac{d}{dt}V(x(t), y(t)) = \frac{\partial V}{\partial x}\dot{x}(t) + \frac{\partial V}{\partial y}\dot{y}(t) \\ &= 3a\alpha x^{\alpha-1}y^4 - 2a\alpha x^{\alpha-4} + 5b\beta x^2y^{\beta-1} + 3b\beta y^\beta.\end{aligned}$$

Megint négy tagot kaptunk, amelyek közül az első és a harmadik vagy az első és a negyedik tag lehet ugyanolyan típusú. Ha  $\alpha = 3$  és  $\beta = 4$ <sup>4</sup>, akkor az első és a harmadik tag lesz ugyanolyan, ezzel

$$\dot{V} = (9a + 20b)x^2y^4 - 6ax^6 + 12by^4.$$

<sup>3</sup>Linearizálással nem tudjuk eldönteni, mert a jobb oldal deriváltja  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$ , ennek pedig 0 az egyik sajátértéke. Lásd még a 20.2.7. és a 20.2.12. kidolgozott feladatot.

<sup>4</sup>a  $V(x, y) = 4x - y^4$  függvény nem bizonyítaná az instabilitást, mert  $\dot{V}$  nem kisebb, csak kisebb vagy egyenlő 0.

Az  $a = 20$ ,  $b = -9$  választással  $\dot{V} = -120x^6 - 108y^4 < 0$ , tehát a 19.1.7. és 19.1.8. tételek második feltevése teljesül. Választott együtthatóinkkal  $V(x, y) = 20x^3 - 9y^4$ . Ennek nem lokális minimuma az origó, hiszen  $x^3$ , mint páratlan hatvány értéke a nulla közelében pozitív és negatív is lehet<sup>5</sup>, ezért a 19.1.8. tétel első feltevése is teljesül, az origó instabil.  $\square$

**19.2.7. KIDOLGOZOTT FELADAT** Vizsgáljuk meg az origó stabilitását alkalmasan választott Ljapunov-függvény segítségével!

$$\begin{aligned}\dot{x} &= -2y - 2xy^6 + 4xy^4, \\ \dot{y} &= x^3 - x^4y - y.\end{aligned}$$

**MEGOLDÁS** Keressük  $V(x, y) = ax^\alpha + by^\beta$  alakban a Ljapunov-függvényt.

$$\begin{aligned}\dot{V} &= \frac{d}{dt}V(x(t), y(t)) = \frac{\partial V}{\partial x}\dot{x}(t) + \frac{\partial V}{\partial y}\dot{y}(t) \\ &= -2a\alpha x^{\alpha-1}y - 2a\alpha x^\alpha y^6 + 4a\alpha x^\alpha y^4 + b\beta x^3 y^{\beta-1} - b\beta x^4 y^\beta - b\beta y^\beta.\end{aligned}$$

Hat tagot kaptunk, amelyek közül az első három bármelyike olyan típusú tud lenni, mint a negyedik vagy az ötödik. Próbáljuk ki, ha az első és a negyedik tag ugyanolyan, azaz  $\alpha = 4$  és  $\beta = 2$  (hatost dobtunk, mert ez jó lesz). Ahhoz, hogy kiessenek, legyen  $a = 1$  és  $b = 4$ . Ekkor

$$\begin{aligned}\dot{V} &= -8x^4y^6 + 16x^4y^4 - 8x^4y^2 - 8y^2 = -8y^2(x^4y^4 - 2x^4y^2 + x^4 + 1) = \\ &= -8y^2(x^4(y^2 - 1)^2 + 1) \leq 0.\end{aligned}$$

A tételek második feltételei csak a gyengébb változatban teljesülnek.  $V(x, y) = x^4 + 4y^2$ -nak (globális) minimuma az origó, ezért a 19.1.7. tétel első feltevése is teljesül, az origó stabil. Aszimptotikusan stabil-e az origó? A 19.1.9. tétel szerint igen, ha a  $V$  szintvonalai nem tartalmaznak teljes trajektóriát. Ha egy pálya mentén  $V$  állandó lenne, akkor  $\dot{V}$  nulla lenne, azaz  $y$  is nulla lenne. Az  $y = 0$  egyenesen azonban  $\dot{y} = x^3 \neq 0$  (az origót kivéve), azaz a pályák lemennek az  $y = 0$  egyenesről, az origó aszimptotikusan stabil.  $\square$

## 19.3. Gyakorló feladatok

19.3.1. **FELADAT** (F795) Vizsgáljuk az origó stabilitását:

$$\begin{aligned}\dot{x} &= e^{x+2y} - \cos 3x, \\ \dot{y} &= \sqrt{4 + 8x} - 2e^y.\end{aligned}$$

19.3.2. **FELADAT** (F798) Vizsgáljuk meg az egyensúlyi helyzetek stabilitását:

$$\begin{aligned}\dot{x} &= (x - 1)(y - 1), \\ \dot{y} &= xy - 2.\end{aligned}$$

<sup>5</sup>a Hesse-mátrixból ez nem jön ki!

19.3.3. **FELADAT** [4] Tekintsük a polárkoordinátákban felírt

$$\begin{aligned}\dot{r} &= r(1-r) \\ \dot{\varphi} &= \left| \cos \frac{\varphi}{2} \right|\end{aligned}$$

DER-t, és rajzoljuk fel a megoldást a Descartes-féle koordináta-rendszerben. Mit mondhatunk az egyensúlyi pontok stabilitásáról?

19.3.4. **FELADAT** [4] Vizsgáljuk az origó stabilitását:

$$\begin{aligned}\dot{x} &= -y - xy^2 - x^3, \\ \dot{y} &= x - y^3 - x^2y.\end{aligned}$$

**ÚTMUTATÁS** Polárkoordinátákkal  $\dot{r} = -r^3$ ,  $\dot{\varphi} = 1$ . □

19.3.5. **FELADAT** Vizsgáljuk meg az origó stabilitását alkalmasan választott Ljapunov-függvény segítségével!

$$\begin{aligned}\dot{x} &= 2x^3y^3 - 4x, \\ \dot{y} &= -3x^4 - y.\end{aligned}$$

19.3.6. **FELADAT** Vizsgáljuk meg az origó stabilitását alkalmasan választott Ljapunov-függvény segítségével!

$$\begin{aligned}\dot{x} &= 4xy^2 - 2x^5, \\ \dot{y} &= y^3 + 3x^2y.\end{aligned}$$

19.3.7. **FELADAT** [4] Vizsgáljuk az origó stabilitását alkalmasan választott Ljapunov-függvény segítségével:

$$\begin{aligned}\dot{x} &= xy + x^3 \\ \dot{y} &= -y + y^2 - x^3 + x^4.\end{aligned}$$

## 20. fejezet

# Kétdimenziós autonóm rendszerek fázisképe

### 20.1. Elméleti összefoglaló

A kétdimenziós autonóm rendszerek viselkedése jól leírható.<sup>1</sup> A rendszer lehet a fázistér egy pontjában, egy egyensúlyi helyzetben, ilyenkor a működése állandó. Az is lehet, hogy a rendszer állapotát leíró vektor egy zárt görbén, egy *periodikus pályán* mozog, azaz a rendszer működése periodikus. Egy fokkal bonyolultabb, amikor a rendszer  $t = -\infty$ -ben az előző két típusú működés valamelyikétől távolodott el, és  $t \rightarrow +\infty$  esetén ismét egy állandó, vagy periodikus működéshez közelít. A pályák természetesen nem kell, hogy korlátosak legyenek, így  $t = -\infty$  vagy  $t = +\infty$ -ben a határérték a végtelen is lehet. Korlátos pályánál is előfordulhat azonban, hogy  $t = -\infty$  vagy  $t = +\infty$ -ben a határérték nem egy állandó, vagy periodikus működés, hanem egy egyensúlyi pontokból és az őket összekötő pályákból álló lánc.<sup>2</sup> Ilyen láncra példa a 20.1 ábrán a négyzet négy csúcsa, mint egyensúlyi helyzet, és a négyzet oldalai, mint őket összekötő pályák.  $t = +\infty$  esetén a négyzet belsejéből kicsavarodó pályák ehhez a láncához tartanak. Ha megtaláljuk az állandó illetve a periodikus működést leíró egyensúlyi helyzeteket és periodikus pályákat, akkor a többi pályát is felrajzolhatjuk, és a fázisképről leolvashatjuk, hogy ha rendszer egy adott állapotban van, akkor milyen állapotból indult, és hová érkezik.

A legegyszerűbb kétdimenziós rendszerek a kétdimenziós homogén lineáris rendszerek. Esetükben a megoldást könnyen számítható képlettel tudjuk felírni. Mégis, a lineáris rendszerek fázisképeinek ismerete alapvető, mert a nemlineáris (és nem feltétlenül könnyen megoldható) rendszerek fázisképe lokálisan hasonló a lineáris rendszerek fázisképéhez.

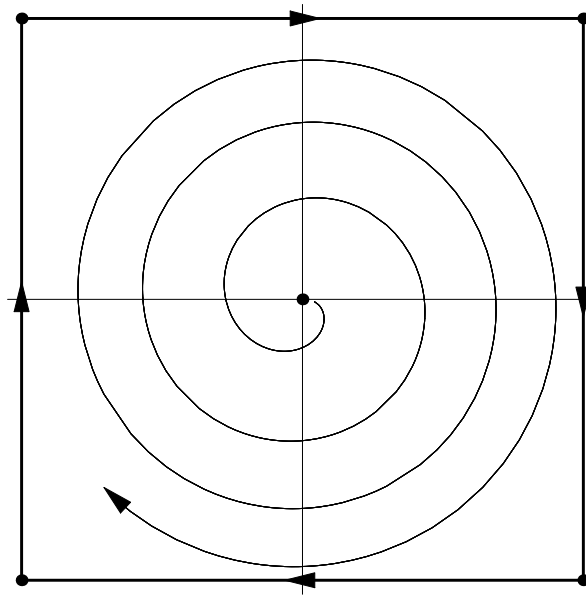
A megoldások ábrázolásakor már felrajzoltuk néhány egyszerű lineáris DER fázisképét (lásd a 18.2.4.-a 18.2.7. kidolgozott feladatot). Lineáris transzformációval minden lineáris rendszer áttanszformálható ezek valamelyikébe<sup>3</sup>. A fáziskép annyiban változik, hogy a tengelyek a rendszer mátrixának sajátirányzaiban fognak állni. Ráadásul az új rendszer

<sup>1</sup>Három dimenzióban ez már nincs így: megjelenhet a „káosz”.

<sup>2</sup>Az itt leírtakat a Poincaré-Bendixson tétel fogalmazza meg precízen az  $\omega$ -határhalmaz fogalmának bevezetésével.

<sup>3</sup>ha az egyenletrendszer mátrixának determinánsa nullától különböző





20.1. ábra. A kicsavarodó megoldás nem egyensúlyi helyzethez és nem is periodikus pályához tart

mátrixának ugyanazok lesznek a sajátértékei, ezért a sajátértékek alapján osztályozhatjuk a keletkező fázisképeket. Íme:

20.1.1. **DEFINÍCIÓ** Tekintsük az

$$\dot{x}(t) = Ax(t)$$

állandó együtthatós lineáris DE-t, ahol  $A$   $2 \times 2$ -es mátrix. Az origó egyensúlyi pont típusa

- instabil csomó, ha  $A$  mindkét sajátértéke pozitív;
- stabil csomó, ha  $A$  mindkét sajátértéke negatív;
- nyereg, ha  $A$ -nak két különböző előjelű valós sajátértéke van
- instabil fókusz, ha  $A$ -nak két pozitív valós részű komplex konjugált sajátértéke van;
- stabil fókusz, ha  $A$ -nak két negatív valós részű komplex konjugált sajátértéke van;
- centrum vagy örvénypont, ha  $A$ -nak két nulla valós részű komplex konjugált sajátértéke van.

Végül, ha  $A$  valamelyik sajátértéke zérus, akkor egy origón átmenő egyenes minden pontja egyensúlyi pont.

Az egyes típusok fázisképe tehát „úgy néz ki”, mint az említett kidolgozott feladatokban. Pontosabban megfogalmazva,

- ha  $A$  sajátértékei azonosak, akkor valósak, így az origó egyensúlyi helyzet csomó. Ekkor két eset lehetséges: ha van két lineárisan független sajátvektor, akkor  $A$  az egységmátrix számszorosa, és a pályák az origó kezdőpontú félegyeneseek. Ha  $A$ -nak a két azonos valós sajátértékhez csak egy sajátvektora van, akkor az egyensúlyi helyzet *elfajult vagy egytengelyű csomó*, és a pályák érintik a sajátvektor irányában álló tengelyt, mint a 18.11 ábrán.
- ha  $A$  sajátértékei különbözők, akkor a csomó tengelyei az  $A$  mátrix sajátirányában állnak, és a pályák parabolyszerű görbék, mint a 20.3 ábrán, amelyek a kisebb abszolútértékű sajátértékhez tartozó tengelyt érintik.
- a nyereg tengelyei az  $A$  mátrix sajátirányában állnak, és a pályák hiperbolyszerű görbék, mint a 20.4 ábrán.
- a fókusz esetében a pályák körbejárnak az origó körül, mint a 18.10 ábrán.

Nemlineáris rendszerek esetében is definiálható a nyereg, a csomó és a fókusz fogalma (20.4.1.. definíció). Természetesen egy nemlineáris rendszer esetén csak az egyensúlyi helyzet közelében fognak úgy kinézni a pályák, mint ahogy leírtuk, hiszen távolabb a magasabbrendű tagok hatását nem lehet elhanyagolni. Amit a lineáris és a nemlineáris rendszerek kapcsolatáról tudni kell:

**20.1.2. TÉTEL** Tekintsük az  $\dot{x}(t) = f(x(t))$  kétdimenziós autonóm DE-t. Ha  $f \in C^2$  ( $f$  kétszer folytonosan differenciálható) és az  $A = f'(p)$  mátrix egyik sajátértéke sem nulla valósrészű, akkor a  $p$  egyensúlyi pont ugyanolyan típusú, mint az  $\dot{x} = Ax$  rendszerben az origó.

Térjünk át a periodikus (önmagába záródó) pályák vizsgálatára. Említettük, hogy minden pálya  $t \rightarrow +\infty$  esetén vagy egy egyensúlyi ponthoz, vagy egy periodikus pályához közelít. Ha tehát találunk egy olyan halmazt, amelybe mindenütt befelé mennek a pályák (azaz egy pozitívan invariáns halmazt), és nincs benne egyensúlyi pont, akkor kell, hogy legyen benne periodikus pálya, amihez ezek a pályák közelednek (Poincaré-Bendixson tétel, lásd a 20.4.2. definíciót és a 20.4.3. tételt).

Ha van egy olyan fizikai mennyiség, ami szigorúan csökken, akkor a rendszer nyilván nem működhet periodikusan, nem létezhet periodikus pályája (20.4.5.. tétel). Két további módon igazolható, hogy egy rendszernek a fázistér egy adott tartományában nincs periodikus pályája. Egyrészt annak a segítségével, hogy periodikus pálya belsejében van egyensúlyi pont (20.4.4.. tétel), másrészt a Bendixson kritériummal:

**20.1.3. TÉTEL (BENDIXSON KRITÉRIUM)** Ha a  $D \subset \mathbb{R}^2$  tartományon  $\text{div} f$  állandó előjelű, akkor az  $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x})$  kétdimenziós autonóm rendszernek nincs olyan periodikus pályája, ami a belsejével együtt  $D$ -ben fekszik.

A bizonyítást lásd a matematikai háttérnél.

Végül pedig nézzünk egy példát paraméteres kétdimenziós rendszerre. A gyakorlat szempontjából (és az elmélet szempontjából is) az az érdekes kérdés, mikor a paraméter

értéke úgy változik, hogy egy egyensúlyi helyzet, vagy egy periodikus pálya stabilitása megváltozik. Ezzel a témával foglalkozik a *bifurkációk* elmélete.

Tekintsük az

$$\begin{aligned}\dot{x} &= y + xf(r) \\ \dot{y} &= -x + yf(r)\end{aligned}$$

egyenletrendszert! Polárkoordinátákra ugyanez egyszerűbben is felírható:

$$\begin{aligned}\dot{r} &= rf(r) \\ \dot{\phi} &= -1.\end{aligned}$$

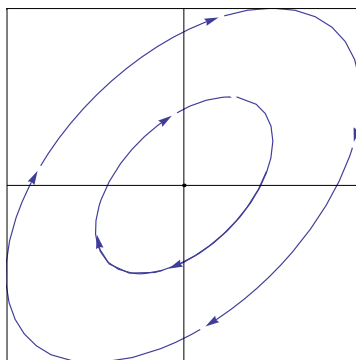
A legegyszerűbb példa stabilitásvesztésre az  $f(r) = \mu \pm r^2$  függvény, amikor  $\mu < 0$ -ra az origó stabil,  $\mu > 0$ -ra instabil, és az  $r^2$  előjelétől függően kétféle dolog játszódhat le: ha  $f(r) = \mu - r^2$ , akkor az origó még  $\mu = 0$ -ra is stabil,  $\mu > 0$ -ra pedig megjelenik egy  $\sqrt{\mu}$  sugarú periodikus pálya, amire kívülről és belülről is rácsavarodnak a megoldások.  $f(r) = \mu + r^2$  esetén azonban  $\mu < 0$ -ra van egy  $\sqrt{-\mu}$  sugarú periodikus pálya, amitől távolodnak a megoldások;  $\mu \geq 0$ -ra a periodikus pálya eltűnik, és a pályák az egész síkon távolodnak. Képzeljük azt, hogy az egyenletrendszer egy mosógép működését írja le centrifugálás közben, és  $\mu$  a ruhák mennyiségétől függ. Az origó, mint pálya felel meg a normális működésnek, hogy ti. a mosógép egyhelyben áll. Az első esetben egy közeli periodikus pályára kerül a rendszer, azaz a mosógép kicsiket fog ugrálni, és remélhetőleg egyben marad. A második esetben már  $\mu < 0$ -ra egy kis perturbáció is kibillentheti a rendszert a cikluson kívülre, és akkor, csakúgy, mint  $\mu \geq 0$ -ra, az origótól végtelen távolságra kerül, azaz a mosógépünk egyre nagyobbakat ugrik, míg darabjaira nem hullik szét. Az első esetben ezért lágy, a másodikban kemény stabilitásvesztésről beszélünk. Aszerint különböztetjük meg a két esetet, hogy amikor a paraméter áthalad a kritikus értéken (ahol az egyensúlyi pont instabillá válik), akkor a megoldás az egyensúlyi helyzet közelében marad-e.

## 20.2. Kidolgozott példák

**20.2.1. KIDOLGOZOTT FELADAT** Rajzoljuk fel az  $\dot{\mathbf{x}} = A\mathbf{x}$  egyenlethez tartozó fázisképet, ha

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}.$$

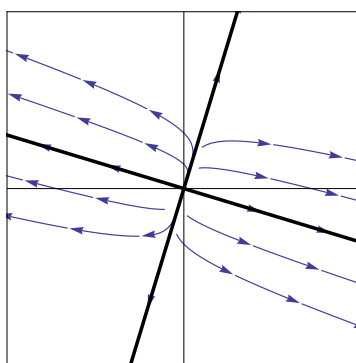
**MEGOLDÁS** A  $\det(A - \lambda E) = \lambda^2 + 9 = 0$  karakterisztikus egyenletből kiszámítjuk a sajátértékeket,  $\lambda_{1,2} = \pm\sqrt{3}i$ . A 20.1.1. definíció szerint a origó centrum (20.2. ábra). Az első egyenletből látható, hogy ha például  $x = 0$  és  $y > 0$ , akkor  $\dot{x} > 0$ , ezért a pályák az óramutató járásával megegyező irányba forognak. A (komplex) sajátvektorokat ilyenkor nem kell kiszámolni.  $\square$



20.2. ábra. Centrum

20.2.2. **KIDOLGOZOTT FELADAT** Rajzoljuk fel az alábbi 2D autonóm egyenlet fázisképét:

$$\begin{aligned}\dot{x} &= 4x - y \\ \dot{y} &= -x + y.\end{aligned}$$



20.3. ábra. Instabil csomó. A sajátértékek  $\frac{1}{2}(5 \pm \sqrt{13})$ , a sajátvektorok  $(-\frac{1}{2}(3 + \sqrt{13}), 1)$  és  $(\frac{1}{2}(-3 + \sqrt{13}), 1)$

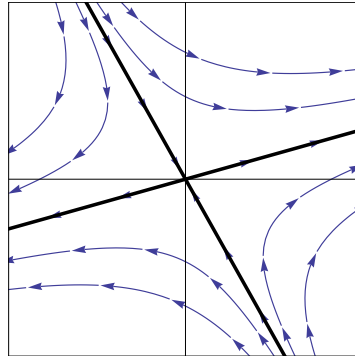
**MEGOLDÁS** A  $\det(A - \lambda E) = \lambda^2 - 5\lambda + 3 = 0$  karakterisztikus egyenletből kiszámítjuk a sajátértékeket,  $\lambda_{1,2} = \frac{1}{2}(5 \pm \sqrt{13})$ . A 20.1.1. definíció szerint az origó instabil csomó (20.3. ábra). A csomó tengelyei a sajátvektorok irányában állnak. A  $\det(A - \lambda_1 E)\mathbf{s}_1 = \mathbf{0}$  egyenletből kiszámítjuk a  $\lambda_1$ -hez tartozó sajátvektort:

$$\begin{bmatrix} 4 - \frac{1}{2}(5 + \sqrt{13}) & -1 \\ -1 & 1 - \frac{1}{2}(5 + \sqrt{13}) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

A két egyenlet összefüggő, például  $\mathbf{s}_1 = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2}(3 + \sqrt{13}) \\ 1 \end{bmatrix}$  jó lesz. Hasonlóan kiszámítjuk a másik sajátvektort is. A pályák a kisebb sajátértékhez tartozó sajátvektor egyenesét érintik, kifelé irányítottak (lásd a 20.3 ábrát).  $\square$

20.2.3. **KIDOLGOZOTT FELADAT** Rajzoljuk fel az alábbi 2D autonóm egyenlet fázisképét:

$$\begin{aligned}\dot{x} &= 2x + 2y \\ \dot{y} &= x - y.\end{aligned}$$



20.4. ábra. Nyereg. A sajátértékek  $\frac{1}{2}(1 \pm \sqrt{17})$ , a sajátvektorok  $(1 + \frac{1}{2}(1 + \sqrt{17}), 1)$  és  $(1 + \frac{1}{2}(1 - \sqrt{17}), 1)$

**MEGOLDÁS** Az egyenlet mátrixának két különböző előjelű valós sajátértéke van, ezért a 20.1.1. definíció szerint az origó nyereg (20.4. ábra). A nyereg tengelyei a sajátvektorok irányában állnak. A pozitív sajátértékhez tartozó (most a „vízszintesebb”) tengely irányában kifelé haladnak a megoldások.  $\square$

20.2.4. **KIDOLGOZOTT FELADAT** Keressük meg a következő differenciálegyenlet-rendszer egyensúlyi pontjait, és határozzuk meg a típusukat:

$$\begin{aligned}\dot{x} &= y^3 + x \\ \dot{y} &= (x+1)(x-1)y\end{aligned}$$

**MEGOLDÁS** Az egyensúlyi pontok:  $(-1, 1)$ ,  $(0, 0)$ ,  $(1, -1)$ . A jobb oldal deriváltja:  $\begin{pmatrix} 1 & 3y^2 \\ 2xy & x^2 - 1 \end{pmatrix}$ . A  $(-1, 1)$  pont instabil fókusz, mert a  $\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}$  Jacobi-mátrixnak két pozitív valós részű komplex konjugált sajátértéke van ( $\frac{1}{2}(1 \pm i\sqrt{23})$ ). A  $(0, 0)$  pont nyereg, mert a  $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$  Jacobi-mátrixnak egy pozitív és egy negatív sajátértéke van ( $\pm 1$ ). Az  $(1, -1)$  pont is instabil fókusz, mert a Jacobi-mátrix ugyanaz, mint a  $(-1, 1)$ -ben.  $\square$

20.2.5. **KIDOLGOZOTT FELADAT** Adjuk meg az egyensúlyi pontok típusát és stabilitását:

$$\begin{aligned}\dot{x} &= x^2 - y \\ \dot{y} &= \cos x.\end{aligned}$$

**MEGOLDÁS** A második egyenletből  $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$ , ezért az egyensúlyi pontok az  $y = x^2$  parabola  $\frac{\pi}{2} + k\pi$  abszcisszájú pontjaiban vannak.

$$f' = \begin{pmatrix} 2x & -1 \\ -\sin x & 0 \end{pmatrix},$$

azaz az  $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$  rövidítéssel

$$f'(x, x^2) = \begin{pmatrix} 2x & -1 \\ (-1)^{k+1} & 0 \end{pmatrix}.$$

A karakterisztikus polinom:  $\lambda^2 - 2x\lambda + (-1)^{k+1}$  ennek a gyökei  $x \pm \sqrt{x^2 + (-1)^k}$ . Páros  $k$ -ra ez két ellentétes előjelű szám, azaz a megfelelő egyensúlyi pont nyereg, instabil. Páratlan  $k$ -ra ez két azonos előjelű szám, ilyenkor a megfelelő egyensúlyi pont típusa csomó, pozitív  $x$ -re instabil, negatív  $x$ -re stabil.  $\square$

**20.2.6. KIDOLGOZOTT FELADAT** Keressük meg a következő differenciálegyenlet-rendszer egyensúlyi pontjait, és határozzuk meg a típusukat:

$$\begin{aligned}\dot{x} &= \sin(x+y)e^{2x} \\ \dot{y} &= y\end{aligned}$$

**MEGOLDÁS** Az egyensúlyi pontok:  $(k\pi, 0)$ . A jobb oldal deriváltja:

$$\begin{pmatrix} e^{2x}(\cos(x+y) + 2\sin(x+y)) & e^{2x}\cos(x+y) \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

A  $(2k\pi, 0)$  pont instabil csomó, mert az  $\begin{pmatrix} e^{2x} & e^{2x} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$  Jacobi-mátrix mindkét sajátértéke pozitív ( $e^{2x}$  és 1). A  $((2k+1)\pi, 0)$  pont nyereg, mert a

$$\begin{pmatrix} -e^{2x} & -e^{2x} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Jacobi-mátrix egyik sajátértéke pozitív (1), a másik negatív ( $-e^{2x}$ ).  $\square$

**20.2.7. KIDOLGOZOTT FELADAT** (TÖMEGPONT KONZERVATÍV ERŐTÉRBE) Legyen az erőter potenciálja  $U$ . A tömegpont mozgásegyenlete:

$$m\ddot{x} = F(x),$$

ahol  $F = -\text{grad}U$ . A legegyszerűbb esetben, amikor  $U$  egyváltozós függvény, ez a következő rendszerrel egyenértékű:

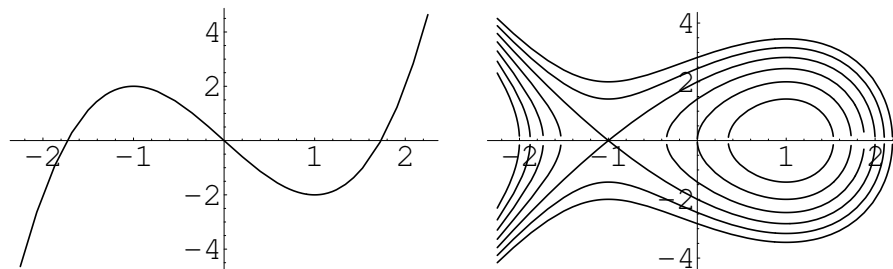
$$\begin{aligned}\dot{x} &= v, \\ \dot{v} &= \frac{1}{m}F(x).\end{aligned}$$

Rajzoljuk fel és értelmezzük a fázisképet, ha  $U(x) = x^3 - 3x$  és  $m = 1$ !

**MEGOLDÁS** <sup>4</sup> Az egyensúlyi pontok azok a  $\begin{pmatrix} p \\ 0 \end{pmatrix}$  pontok, amelyekre  $F(p) = 0$ . A  $\begin{pmatrix} p \\ 0 \end{pmatrix}$  egyensúlyi pontban a jobb oldal deriváltja  $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \frac{F'(p)}{m} & 0 \end{pmatrix}$ . A sajátértékeket a  $\lambda^2 - \frac{F'(p)}{m}F'(p) = 0$  egyenletből kapjuk. Ha  $F'(p) > 0$  (ilyenkor  $p$  maximumhelye az  $U$  függvénynek), akkor  $\lambda_{1,2} = \pm\sqrt{\frac{F'(p)}{m}}$ , azaz a  $\begin{pmatrix} p \\ 0 \end{pmatrix}$  egyensúlyi pont nyeregpont. Ha  $F'(p) < 0$  (ilyenkor  $p$  minimumhelye az  $U$  függvénynek), akkor  $\lambda_{1,2} = \pm i\sqrt{\frac{-F'(p)}{m}}$ . Ezek a sajátértékek azonban nulla valósrésűek, így ez alapján a pontok típusa nem határozható meg. Próbáljuk meg Ljapunov-függvénnyel! Írjuk fel a rendszer összenergiáját:  $E = E_{kin} + E_{pot} = \frac{1}{2}mv^2 + U(x)$ .  $E$  deriváltja a megoldások mentén,

$$\dot{E} = mv\dot{v} - F(x)\dot{x} = 0.$$

Tehát az energia állandó, a megoldások az  $E$  függvény szintvonalain haladnak. Hogyan néz ki egy adott  $E$  energiájú pálya?  $E = \frac{1}{2}mv^2 + U(x)$ -ből  $v$ -t kifejezve  $v = \pm\sqrt{\frac{2}{m}(U(x) - E)}$ , ezt kell ábrázolnunk (20.5. ábra).



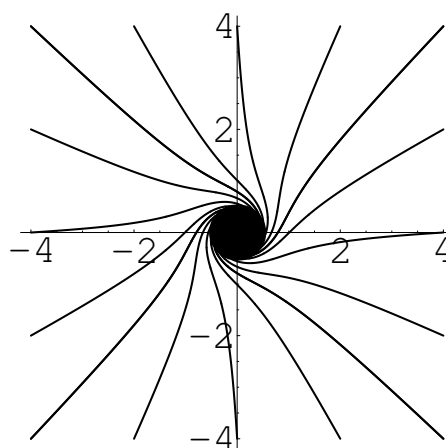
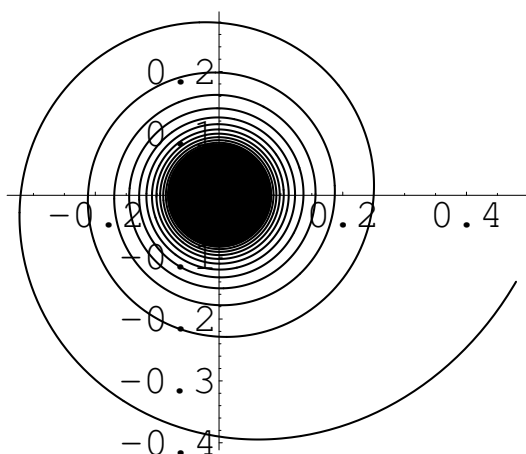
20.5. ábra. Az  $U(x) = x^3 - 3x$  potenciál és az általa meghatározott térben mozgó  $m = 1$  tömegű pont fázisképe

Ha  $U$ -nak  $x_0$ -ban lokális minimuma van, akkor ennek a fázisképen egy  $E = U(x_0)$  energiájú stabil egyensúlyi helyzet felel meg. Jelen esetben az  $x = 1$ -ben van az egyetlen lokális minimum. Amíg az energia  $U(-1) = 4$  alatt van, addig a tömegpont csak az 1 körüli potenciálgödörben mozog. A pályák irányítása az óramutató járásának megfelelő, hiszen pozitív sebességnél a helykoordináta növekszik. 4 fölötti energiák esetén a pályák túlmehetnek az  $x = -1$  egyenesen. Végül, ha az energia éppen négy, akkor a  $(-1, 0)$  pont négy részre vágja az  $\frac{1}{2}mv^2 + U(x) = 4$  görbét: a  $(-1, 0)$  instabil egyensúlyi helyzetre, egy oda befutó és egy onnan kiinduló nemkorlátos pályára, és egy belőle induló és  $t \rightarrow +\infty$  esetén ugyanoda visszaérkező korlátos pályára.  $\square$

<sup>4</sup>a [4] könyv 8.32 példája nyomán

20.2.8. **KIDOLGOZOTT FELADAT** Rajzoljuk fel a fázisképet polárkoordináta-transzformáció segítségével:

$$\begin{aligned}\dot{x} &= -y + x^3 + xy^2 \\ \dot{y} &= x + y^3 + x^2y.\end{aligned}$$



20.6. ábra. Az  $\dot{r} = r^3, \dot{\varphi} = 1$  rendszer pályái. Bal oldalt egy pálya az origó közelében, jobb oldalt a fáziskép egy kicsit nagyobb környezetben.

**MEGOLDÁS** Az  $x = r \cos \varphi, y = r \sin \varphi$  helyettesítéssel

$$\begin{aligned}\dot{r} \cos \varphi - r \sin \varphi \dot{\varphi} &= -r \sin \varphi + r^3 \cos^3 \varphi + r^3 \cos \varphi \sin^2 \varphi \\ \dot{r} \sin \varphi + r \cos \varphi \dot{\varphi} &= r \cos \varphi + r^3 \sin^3 \varphi + r^3 \cos^2 \varphi \sin \varphi.\end{aligned}$$

Ebből

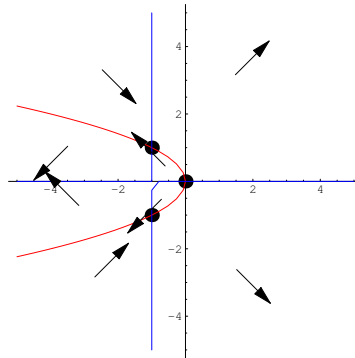
$$\dot{r} = r^3, \quad \dot{\varphi} = 1.$$

Tehát a pályák távolodnak az origótól, és balra forognak. Ezzel együtt nem egy szokványos fókusz-szerű fázisképet látunk (20.6. ábra). Ennek az oka, hogy ha az  $r$ -re vonatkozó egyenletet megoldjuk (szétválasztható,  $r(t) = \frac{1}{\sqrt{r(0)^{-2} - 2t}}$ ), kiderül, hogy minden megoldás véges,  $\frac{1}{2r(0)^2}$  idő alatt végtelenné válik, így a fázisképen gyakorlatilag egyeneseket látunk.  $\square$

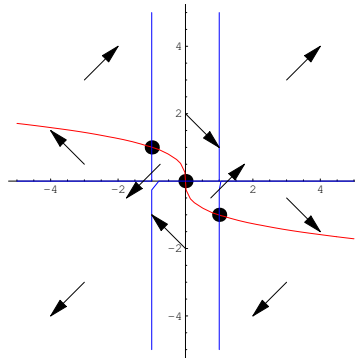
20.2.9. **KIDOLGOZOTT FELADAT** A 20.7 ábrán látható iránymező alapján mit mondhatunk az egyensúlyi pontok típusáról?

**MEGOLDÁS** Lásd a 20.7 ábrát. A parabola mentén  $\dot{x} = 0$ , a két egyenes mentén  $\dot{y} = 0$ . A  $(-1, -1)$  pont nyereg, mert két irányban közelednek hozzá, két irányban távolodnak tőle a pályák. A  $(-1, 1)$  pont nyereg, mert két irányban közelednek hozzá, két irányban távolodnak tőle a pályák. A  $(0, 0)$  pont instabil csomó, mert mind a négy irányban távolodnak tőle a pályák.  $\square$





20.7. ábra.



20.8. ábra.

20.2.10. **KIDOLGOZOTT FELADAT** A 20.8 ábrán egy „kézi” rajzolású iránymező látható. Mit mondhatunk az egyensúlyi pontok típusáról?

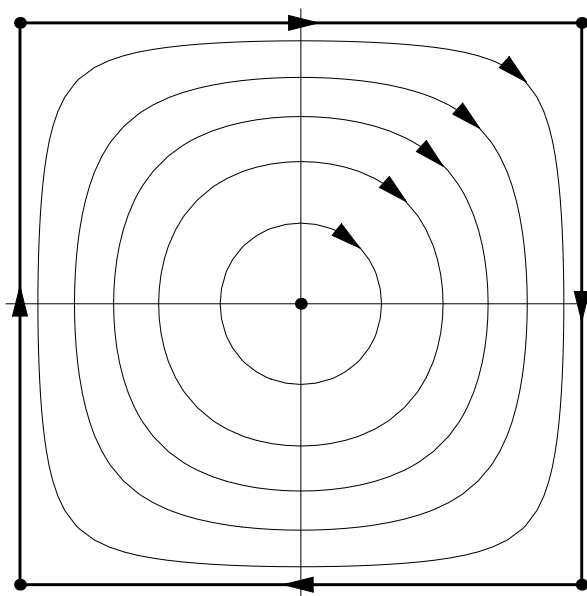
**MEGOLDÁS** Lásd a 20.8 ábrát. A harmadfokú görbe mentén  $\dot{x} = 0$ , az kék egyenesek mentén  $\dot{y} = 0$ . A  $(-1, 1)$  pont fókusz, mert a pályák forognak körülötte. A  $(0, 0)$  pont nyereg, mert két irányban közelednek hozzá, két irányban távolodnak tőle a pályák. Az  $(1, -1)$  pont fókusz, mert a pályák forognak körülötte. A fókuszok (esetlegesen centrumok) stabilitása az iránymező alapján nem dönthető el.  $\square$

20.2.11. **KIDOLGOZOTT FELADAT** A  $p$  egyensúlyi pont típusa (két dimenzióban) fókusz. Mit mondhatunk  $f'(p)$  determinánsáról?

**MEGOLDÁS** Akkor lehet  $p$  fókusz, ha  $f'(p)$ -nek két komplex konjugált sajátértéke van, vagy ha van nulla valós részű sajátérték. Ez utóbbi esetben vagy az egyik sajátérték nulla, és akkor nulla a determináns is, vagy ismét csak két – ezúttal tiszta képzetes – konjugált sajátérték van. A determináns a sajátértékek szorzata, azaz, ha  $z$  és  $\bar{z}$  voltak a sajátértékek, akkor a determináns értéke  $z\bar{z} = |z|^2$ . Tehát annyi állítható róla, hogy nemnegatív.  $\square$

20.2.12. **KIDOLGOZOTT FELADAT** Rajzoljuk fel a fázisképet az  $|x| \leq \frac{\pi}{2}$ ,  $|y| \leq \frac{\pi}{2}$  tartományban!

$$\begin{aligned}\dot{x} &= \cos x \sin y \\ \dot{y} &= -\cos y \sin x.\end{aligned}$$



20.9. ábra. A pályák a  $V(x, y) = \cos x \cos y$  függvény szintvonalai

**MEGOLDÁS** Az egyensúlyi pontok az origóban és a megadott négyzet csúcaiban vannak (20.9. ábra). A négyzet minden oldala egy-egy pálya. Az irányítást megnézve belül fókusz kell legyen. Linearizálással nem dönthető el, hogy stabil, vagy instabil, de a  $\cos x \cos y$  Ljapunov-függvény<sup>5</sup> mutatja, hogy centrum.  $\square$

20.2.13. **KIDOLGOZOTT FELADAT** Rajzoljuk fel a Lotka-Volterra (predator-prey) modellhez tartozó fázisképet.<sup>6</sup>

$$\dot{x} = x - xy, \quad \dot{y} = xy - y.$$

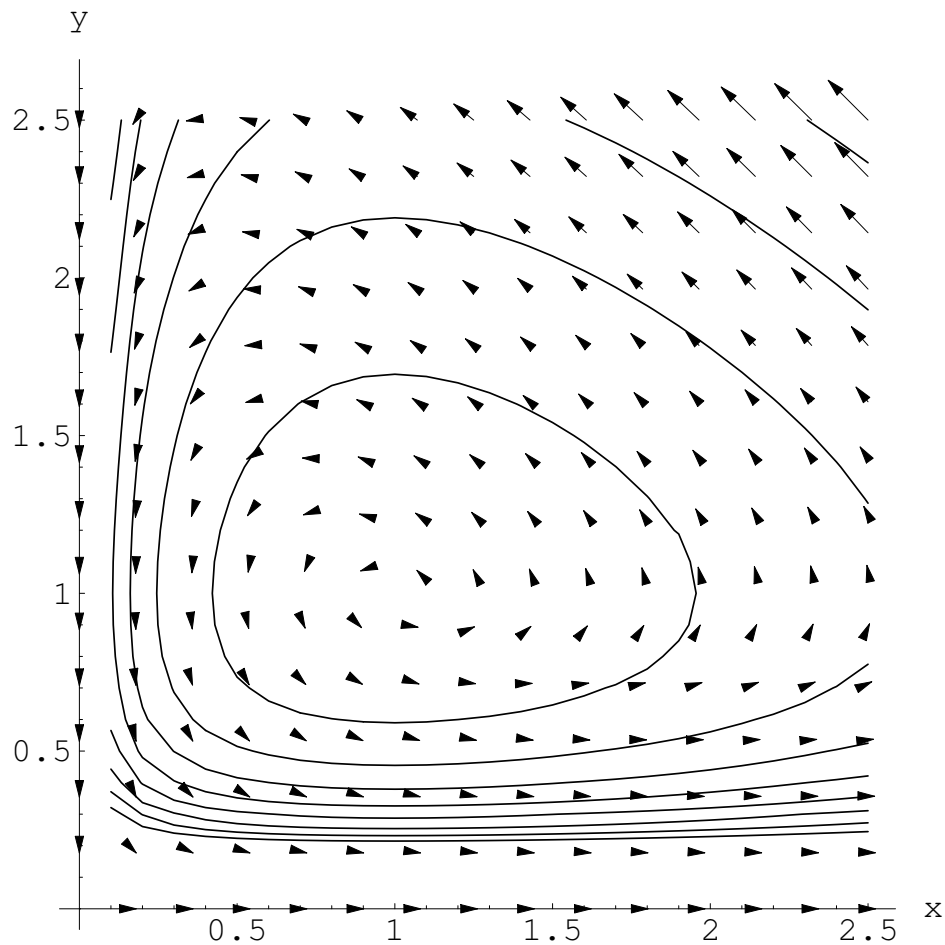
**MEGOLDÁS** A két egyenletet elosztva egymással szétválasztható egyenletet kapunk:

$$\frac{\dot{y}}{\dot{x}} = \frac{xy - y}{x - xy} \iff y' = \frac{xy - y}{x - xy}.$$

<sup>5</sup>Ez egy Hamilton-rendszer,  $\cos x \cos y$  pedig a Hamilton függvény.

<sup>6</sup>Az egyenlet értelmezésével kapcsolatban lásd a [4] könyv 7.17. példáját.

Ebből  $x - \ln x + y - \ln y = c$  adódik. Legyen  $V(x, y) = x - \ln x + y - \ln y$ . Ez a függvény konvex, mert  $V''$  pozitív definit, ezért a szintvonalak konvex zárt görbék. A pozitív síknegyedben csak az  $(1, 1)$  az egyensúlyi pont, ezért ezt a görbék meg kell kerüljék. Ha például  $x > 1$  és  $y > 1$ , akkor  $x$  csökken,  $y$  növekszik, tehát az irányítás az óramutató járásával ellenkező.  $\square$



20.10. ábra. A  $V(x, y) = x - \ln x + y - \ln y$  függvény szintvonalai és az iránymező

#### 20.2.14. KIDOLGOZOTT FELADAT (BRÜSSZELÁTOR-MODELL)

$$\begin{aligned}\dot{x} &= x(1 - y^2) \\ \dot{y} &= y(xy - 1),\end{aligned}$$

*feltesszük, hogy  $x, y \geq 0$ . Rajzoljuk fel a fázisképet a nemnegatív síknegyedben a  $V(x, y) = x - \ln x + y - \ln y$  Ljapunov-függvény segítségével!*<sup>7</sup>

<sup>7</sup>Az egyenlet értelmezésével kapcsolatban lásd a [4] könyv 7.18. példáját.

**MEGOLDÁS** A  $V(x, y)$  kétváltozós függvény konvex, mert a második parciális deriváltakat tartalmazó Hesse-féle mátrix pozitív definit. Ezért a színtvonalak az  $(1, 1)$  minimumhelyet megkerülő konvex zárt görbék.  $\dot{V} = (1 - y)^2(1 + \frac{1}{y}) \geq 0$ , tehát a megoldások a nagyobb értékek felé, azaz kifelé haladnak a színtvonalakon. Az iránymezőt nagyjából fel tudjuk rajzolni, hiszen az  $y = 1$  egyenes alatt jobbra, fölötté balra mutatnak a nyilak, míg az  $y = \frac{1}{x}$  hiperbola fölött fölfelé, alatta lefelé mutatnak (20.10. ábra). A pozitív síknegyedben a megoldások az óramutató járásával ellenkezően kicsavarodnak az  $(1, 1)$  pont közeléből, de a tengelyeket nem érintik. Két további pálya az  $x$  és az  $y$  tengely pozitív félegyenese.  $\square$

**20.2.15. KIDOLGOZOTT FELADAT** Bizonyítsuk be, hogy a  $\{6 \leq 2x^2 + 3y^2 \leq 12\}$  halmazban van periodikus pálya:

$$\begin{aligned}\dot{x} &= -x^3 + 6x - 6y \\ \dot{y} &= 4x - 2x^2y\end{aligned}$$

**MEGOLDÁS** Az egyetlen egyensúlyi pont az origó. A  $V(x, y) = 2x^2 + 3y^2$  Ljapunov-függvénnyel<sup>8</sup>

$$\dot{V} = 4x(-x^3 + 6x - 6y) + 6y(4x - 2x^2y) = x^2(24 - 4x^2 - 12y^2).$$

Ha  $2x^2 + 3y^2 = 6$ , akkor  $\dot{V} = x^2(24 - 4x^2 - 12y^2) \geq x^2(24 - 8x^2 - 12y^2) = 0$ , ha pedig  $2x^2 + 3y^2 = 12$ , akkor  $\dot{V} = x^2(24 - 4x^2 - 12y^2) \leq x^2(24 - 4x^2 - 6y^2) = 0$ , és egyenlőség csak  $x = 0$ -ra vagy  $y = 0$ -ra lehet. Ezért a megadott halmazba befelé mennek a megoldások. Korlátos, zárt, nem tartalmaz egyensúlyi pontot, így a Poincaré-Bendixson tétel értelmében van benne periodikus pálya.  $\square$

**20.2.16. KIDOLGOZOTT FELADAT** Van-e periodikus pálya?

$$\begin{aligned}\dot{x} &= x - 8, \\ \dot{y} &= 4y^2 - x^2.\end{aligned}$$

**MEGOLDÁS** Ha van periodikus pálya, akkor a belsejében kell, hogy legyen egyensúlyi pont. Két egyensúlyi pont van, az  $x = 8$  egyenes és az  $4y^2 - x^2 = 0$  egyenespár két metszéspontjában  $(8, \pm 4)$ . Az  $x = 8$  egyenes darabjai is egy-egy pályát alkotnak (az egyenesről nem mennek le a megoldások, mert  $\dot{x} = 0$ ), és a pályák nem metszhetik egymást, tehát nem létezik olyan pálya, ami megkerüli valamelyik egyensúlyi pontot, vagy mindkettőt.  $\square$

**20.2.17. KIDOLGOZOTT FELADAT** Van-e periodikus pálya?

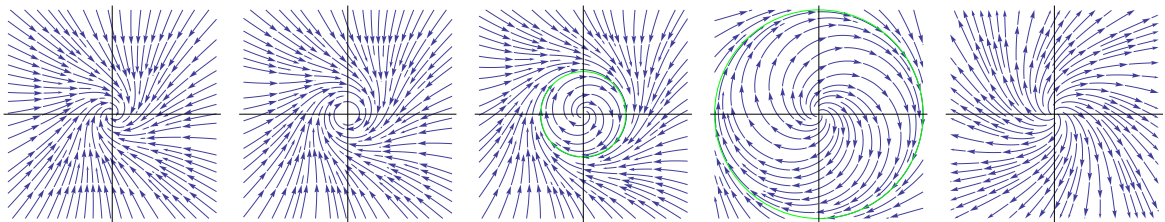
$$\begin{aligned}\dot{x} &= v, \\ m\dot{v} &= -Dx - \rho A v |v|.\end{aligned}$$

<sup>8</sup>Először kipróbáljuk, hogy a feladatban megadott halmaz pozitívan invariáns-e, márpedig azt ennek a függvénynek a színtvonalai határolják. Persze előfordulhatna, hogy a megadott halmaz maga nem pozitívan invariáns, de egy korlátos és zárt részhalmaza igen. Akkor olyat kellene keresni – úgy a feladat jóval nehezebb volna.

**MEGOLDÁS** Itt  $x$  az  $m$  tömegű test kitérése, amit a kitéréssel arányos erő húz vissza, illetve a közegellenállás a sebesség négyzetével arányos. Az összenergia nyilván csökken, ha közegellenállás van, tehát nem lehetnek periodikus pályák. Valóban,  $E = \frac{1}{2}Dx^2 + \frac{1}{2}mv^2$  („rugóban tárolt”+mozgási), és  $\dot{E} < 0$ .  $\square$

**20.2.18. KIDOLGOZOTT FELADAT** Milyen típusú és a  $\mu$  paraméter mely értékénél következik be a  $(0,0)$  pont stabilitásvesztése?

$$\begin{aligned}\dot{x} &= y + x[\mu(1+x^2+y^2) - x^2 - y^2] \\ \dot{y} &= -x + y[\mu(1+x^2+y^2) - x^2 - y^2]\end{aligned}$$



20.11. ábra. A fáziskép  $\mu = -0,4$ ,  $\mu = 0$ ,  $\mu = 0,4$ ,  $\mu = 0,8$  és  $\mu = 1,2$  esetén

**MEGOLDÁS** Az általánosabb

$$\begin{aligned}\dot{x} &= y + xf(r) \\ \dot{y} &= -x + yf(r)\end{aligned}$$

egyenletrendszer polárkoordinátákban

$$\begin{aligned}\dot{r} &= rf(r) \\ \dot{\phi} &= -1\end{aligned}$$

alakú. Most  $f(r) = \mu - (1 - \mu)r^2$  (20.11. ábra), tehát  $\mu \leq 0$ -ra mindenütt  $\dot{r} < 0$ ,  $\mu \geq 1$ -re mindenütt  $\dot{r} > 0$ .  $0 < \mu < 1$ -re van egy  $\sqrt{\frac{\mu}{1-\mu}}$  sugarú határciklus (periodikus pálya), amire rácsavarodnak a pályák. Tehát, ha a  $\mu$  paraméter áthalad a 0-n, akkor a megoldás egy közeli periodikus pályára kerül, ez lágy stabilitásvesztés.  $\square$

## 20.3. Gyakorló feladatok

**20.3.1. FELADAT** Rajzoljuk fel az  $\dot{\mathbf{x}} = A\mathbf{x}$  egyenlethez tartozó fázisképet, ha

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 8 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

20.3.2. **FELADAT** Rajzoljuk fel az  $\dot{\mathbf{x}} = A\mathbf{x}$  egyenlethez tartozó fázisképet, ha

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 4 & -1 \end{bmatrix}.$$

20.3.3. **FELADAT** A  $p$  egyensúlyi pont típusa (két dimenzióban) csomó. Mit mondhatunk  $f'(p)$  determinánsáról?

20.3.4. **FELADAT** Rajzoljuk fel a fázisképet:

$$\begin{aligned}\dot{x} &= v, \\ \dot{v} &= -3x^2 + 1.\end{aligned}$$

20.3.5. **FELADAT** [4] Rajzoljuk fel az alábbi differenciálegyenlet-rendszer fázisképét:

$$\begin{aligned}\dot{x} &= x - xy, \\ \dot{y} &= x^2 - y.\end{aligned}$$

**ÚTMUTATÁS** Csak iránymezőt rajzoljunk a nullavonalak segítségével, utána tippeljünk az egyensúlyi pontok típusára és a pályákra.  $\square$

20.3.6. **FELADAT** Rajzoljuk fel a fázisképet az  $5 \leq x \leq 7, 3 \leq y \leq 5$  tartományban!

$$\begin{aligned}\dot{x} &= (x^2 - 12x + 35)(y - 4) \\ \dot{y} &= (y^2 - 8y + 15)(x - 6).\end{aligned}$$

20.3.7. **FELADAT** Mutassuk meg, hogy az

$$\begin{aligned}\dot{x} &= y^3 + x(1 - 4x^4 - y^4) \\ \dot{y} &= -x^3\end{aligned}$$

differenciálegyenlet-rendszernek van periodikus megoldása az  $\frac{1}{4} \leq x^4 + y^4 \leq 1$  halmazban!

20.3.8. **FELADAT** [4] Bizonyítsuk be, hogy az origó körüli 2 sugarú körön belül nincs periodikus pálya:

$$\begin{aligned}\dot{x} &= x - xy^2 + y^3 \\ \dot{y} &= 3y - x^2y + x^3.\end{aligned}$$

## 20.4. Matematikai háttér

### Az egyensúlyi pontok osztályozása két dimenzióban

20.4.1. **DEFINÍCIÓ** Írjuk fel az

$$\dot{x}(t) = f(x(t))$$

kétdimenziós rendszer megoldásait a  $p$  egyensúlyi pont körül polárkoordinátákban! A  $p$  pont

- instabil csomó, ha  $\lim_{t \rightarrow -\infty} r = 0$ ,  $\lim_{t \rightarrow -\infty} |\varphi| < +\infty$ ;
- stabil csomó, ha  $\lim_{t \rightarrow +\infty} r = 0$ ,  $\lim_{t \rightarrow +\infty} |\varphi| < +\infty$ ;
- nyereg, ha létezik  $p$ -nek olyan  $U$  környezete, amelyen belül található két olyan pálya, amelyeken a megoldás  $t \rightarrow +\infty$  esetén  $p$ -hez tart, két olyan pálya, amelyeken a megoldás  $t \rightarrow -\infty$  esetén  $p$ -hez tart, és a többi pálya  $t \rightarrow +\infty$  és  $t \rightarrow -\infty$  esetén is elhagyja az  $U$  halmazt.
- instabil fókusz, ha  $\lim_{t \rightarrow -\infty} r = 0$ ,  $\lim_{t \rightarrow -\infty} |\varphi| = +\infty$ ;
- stabil fókusz, ha  $\lim_{t \rightarrow +\infty} r = 0$ ,  $\lim_{t \rightarrow +\infty} |\varphi| = +\infty$ ;
- centrum vagy örvénypont, ha  $p$  valamely környezetében minden pálya periodikus.<sup>9</sup>

### Periodikus pályák létezése

**20.4.2. DEFINÍCIÓ** A  $K$  halmaz pozitívan invariáns, ha  $x(t_0) \in K$  esetén minden  $t \geq t_0$ -ra  $x(t) \in K$ .

**20.4.3. TÉTEL (POINCARÉ-BENDIXSON TÉTEL GYENGE ALAKJA)** Ha  $K$  korlátos, zárt, pozitívan invariáns halmaz, és nem tartalmaz egyensúlyi pontot, akkor a  $K$  halmazban van periodikus pálya.

### Periodikus pálya nemlétezésének igazolása

**20.4.4. TÉTEL** Periodikus pálya belsejében van egyensúlyi pont.

**BIZONYÍTÁS** A körülfordulási szám periodikus pálya mentén 1, folytonosan változik, ha a görbe nem halad át egyensúlyi ponton, elegendően kicsiny, egyensúlyi pontot nem tartalmazó görbékre pedig nulla. Ha egy pálya belsejében nem volna egyensúlyi pont, elkezdhetnénk „összehúzni” a pályát egyre kisebbre. Eközben a körülfordulási szám, ami kezdetben 1 volt, nem változna, majd egyszer csak nullává válna. Ez lehetetlen.  $\square$

**20.4.5. TÉTEL** Ha megadható olyan  $\varphi : U \rightarrow \mathbb{R}$  folytonosan differenciálható függvény, melyre  $\varphi'(q) \cdot f(q) < 0$ ,  $q \in U$ , akkor  $U$ -ban nincs periodikus pálya.

**BIZONYÍTÁS** Ha volna egy  $\gamma(t)$  periodikus pálya  $U$ -ban, akkor a  $\varphi(\gamma(t))$  függvény periodikus lenne, azonban a tétel feltétele szerint a  $\varphi$  függvény szigorúan monoton csökken a megoldások mentén.  $\square$

**20.4.6. TÉTEL (GREEN)** Legyen a  $\mathbf{v} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  leképezés folytonosan differenciálható egy, a  $T$  halmazt és határát tartalmazó összefüggő nyílt halmazon. Tegyük fel továbbá, hogy a határ folytonosan differenciálható függvénnyel paraméterezhető. Ekkor

$$\iint_T \left( \frac{\partial v_2}{\partial x} - \frac{\partial v_1}{\partial y} \right) dx dy = \int_{\partial T} \mathbf{v} \, ds.$$

<sup>9</sup>Ez nem feltétlenül teljes osztályozás, ha  $f \notin C^2$ .

**BIZONYÍTÁS** Terjesszük ki a  $\mathbf{v}$  leképezést a  $\mathbf{v}(x, y, z) = \mathbf{v}(x, y)$  formulával. A Stokes-tétel szerint

$$\iint_T \operatorname{rot} \mathbf{v} \, d\mathbf{A} = \int_{\partial T} \mathbf{v} \, d\mathbf{s}.$$

$\operatorname{rot} \mathbf{v} = \left( \frac{\partial v_2}{\partial x} - \frac{\partial v_1}{\partial y} \right) \mathbf{k}$  és  $d\mathbf{A} = dA \mathbf{k}$  miatt ez éppen a tétel állítása. □

**A Bendixson-kritérium (a 20.1.3. tétel) bizonyítása.**

Ha volna egy  $\gamma$  periodikus pálya  $D$ -ben, akkor a  $T = \operatorname{int}(\gamma)$  tartományra és a  $\mathbf{v}(x, y) = \begin{pmatrix} -f_2(x, y) \\ f_1(x, y) \end{pmatrix}$  leképezésre felírva a Green-tételt:

$$\iint_{\operatorname{int}(\gamma)} \operatorname{div} \mathbf{f} \, dx \, dy = \int_{\gamma} \begin{pmatrix} -f_2 \\ f_1 \end{pmatrix} d\mathbf{s}.$$

A jobb oldali vonalintegrál nulla, mert az integrálandó leképezés mindig merőleges a  $\gamma$  görbe érintőjére, tehát a bal oldal is nulla, de akkor  $\operatorname{div} \mathbf{f}$  nem lehet állandó előjelű.



# 21. fejezet

## Variációszámítás

### 21.1. Elméleti összefoglaló

Legyen  $X$  vektortér<sup>1</sup>,  $F : X \rightarrow \mathbb{R}$  függvény, aminek a szélsőértékét keressük. Ha  $\mathbf{x} \in X$ -ben szélsőérték van, akkor tetszőleges  $\mathbf{0} \neq \mathbf{v} \in X$ -re a  $J_{\mathbf{v}}(t) = F(\mathbf{x} + t\mathbf{v})$  valós-valós függvénynek szélsőértéke van a  $t = 0$ -ban. Ez az ún. *variációs elv*, amelynek segítségével tetszőleges vektortéren értelmezett függvény (más néven *funkcionál*) szélsőértékeinek a megkeresését visszavezethetjük valós-valós függvények szélsőértékeinek a megkeresésére. Ha tehát  $F$ -nek szélsőértéke van  $\mathbf{x} \in X$ -ben, akkor  $J'_{\mathbf{v}}(0) = 0$  minden  $\mathbf{v}$ -re. Ha ebből az egyenletsokaságból ki tudom küszöbölni  $\mathbf{v}$ -t, akkor a kapott egyenletet az  $F$  függvény (vagy funkcionál) Euler–Lagrange-egyenletének nevezzük.

A variációs elvet alkalmazva, az eredeti funkcionáltól függően az Euler–Lagrange-egyenlet lehet algebrai egyenlet (21.2.1.. kidolgozott feladat), lehet közönséges differenciálegyenlet (21.2.3.. kidolgozott feladat), és lehet parciális differenciálegyenlet (21.2.4.. kidolgozott feladat). Fordítva, ha egy egyenlet variációs típusú, azaz valamilyen funkcionálnak az Euler–Lagrange-egyenlete, akkor az egyenlet megoldásához úgy is eljuthatunk, hogy a funkcionál szélsőértékeit megkeressük.

A variációs elv leggyakoribb alkalmazása a következő:

Keressük az  $F(y) = \int_a^b f(x, y, y') \, dx$  funkcionál szélsőértékeit, ahol  $f$  adott folytonos függvény, és az  $y(x) : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  keresett függvény folytonosan differenciálható. (Fizikus jelöléssel ugyanez: ha  $L$  a Lagrange függvény,  $q$  általános koordináta, akkor keressük azt a  $q(t)$  függvényt, amelyre az  $S(L) = \int_{t_1}^{t_2} L(t, q, \dot{q}) \, dt$  hatásintegrálnak stacionárius pontja van.) Ha  $F$ -nek szélsőértéke (vagy csak stacionárius pontja) van  $y$ -ban, akkor legyen

$$J_{\mathbf{v}}(t) = F(y + t\mathbf{v}) = \int_a^b f(x, y + t\mathbf{v}, y' + t\mathbf{v}') \, dx \quad \mathbf{v} \in C_0^1[a, b].$$

$t$  szerint differenciálva (láncszabály)

$$J'_{\mathbf{v}}(t) = \int_a^b f'_y(x, y + t\mathbf{v}, y' + t\mathbf{v}')\mathbf{v} + f'_{y'}(x, y + t\mathbf{v}, y' + t\mathbf{v}')\mathbf{v}' \, dx.$$

---

<sup>1</sup>helyesebben: affin tér

Mivel  $t = 0$ -ban a  $J_v(t)$  függvénynek szélsőértéke (vagy stacionárius pontja) van, a deriváltja nulla, azaz

$$J'_v(0) = \int_a^b f'_y(x, y, y')v + f'_{y'}(x, y, y')v' dx = 0.$$

A második tagban egy parciális integrálással

$$\int_a^b \left[ f'_y(x, y, y') - \frac{d}{dx} f'_{y'}(x, y, y') \right] v dx = 0 \quad \forall v \in C_0^1[a, b].$$

Ez csak úgy lehet, ha<sup>2</sup>

$$f'_y(x, y, y') - \frac{d}{dx} f'_{y'}(x, y, y') = 0. \quad (21.1)$$

$v$ -t kiejtettük, megkaptuk a funkcionál Euler–Lagrange-egyenletét.

**21.1.1. ÁLLÍTÁS** Ha  $f = f(y, y')$  nem függ explicite  $x$ -től, akkor az Euler–Lagrange-egyenlet egyszerűbb alakra hozható:

$$f(y, y') - y' f'_{y'}(y, y') = \text{konstans}. \quad (21.2)$$

**BIZONYÍTÁS** Deriváljuk a (21.2.) egyenletet ( $x$  szerint):

$$\begin{aligned} f'_y(y, y')y' + f'_{y'}(y, y')y'' - y'' f'_{y'}(y, y') - y' \frac{d}{dx} f'_{y'}(y, y') = \\ y' (f'_y(y, y') - \frac{d}{dx} f'_{y'}(y, y')) = 0. \end{aligned} \quad \square$$

## 21.2. Kidolgozott példák

**21.2.1. KIDOLGOZOTT FELADAT** Legyen  $A$  szimmetrikus  $n \times n$ -es mátrix,  $F(\mathbf{x}) = \frac{\langle A\mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle}{\langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle}$ , keressük  $F$  maximumát!

**21.2.2. MEGJEGYZÉS**  $\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = \mathbf{x}^T \mathbf{y}$  két vektor skalárszorzatát jelöli. Azért használjuk ezt a jelölést, mert hosszú távon egyszerűbb vele számolni, és a következő példával való hasonlóságot is láthatóbbá teszi.

**MEGOLDÁS** Ha  $F(\mathbf{x})$  maximális,<sup>3</sup> akkor

$$F(\mathbf{x} + t\mathbf{v}) \leq F(\mathbf{x}) \quad \forall t \in \mathbb{R}, \quad \forall \mathbf{v} \in X.$$

Beszorozva

$$\langle A(\mathbf{x} + t\mathbf{v}), \mathbf{x} + t\mathbf{v} \rangle \langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle \leq \langle A\mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle \langle \mathbf{x} + t\mathbf{v}, \mathbf{x} + t\mathbf{v} \rangle \quad \forall t \in \mathbb{R}, \forall \mathbf{v} \in X.$$

<sup>2</sup> $C_0^1$  definícióját és a bizonyítást lásd a matematikai háttérnél (21.4.3.. definíció és 21.4.5. Lemma).

<sup>3</sup>A maximum biztosan létezik, mert  $|\langle A\mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle| \leq \|A\|_2 \langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle$ .

$t$  hatványai szerint rendezve

$$0 \leq t^2(\langle A\mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle \langle \mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle - \langle A\mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle \langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle) + 2t(\langle A\mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle \langle \mathbf{x}, \mathbf{v} \rangle - \langle A\mathbf{x}, \mathbf{v} \rangle \langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle)$$

Ez csak akkor lehet igaz minden  $t$ -re, ha  $t$  együtthatója 0, azaz

$$\langle A\mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle \langle \mathbf{x}, \mathbf{v} \rangle = \langle A\mathbf{x}, \mathbf{v} \rangle \langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle \quad \forall \mathbf{v} \in X.$$

Az  $\langle A\mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle$  és  $\langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle$  szám szorzót bevihetjük a skalárszorzat belsejébe:

$$\langle \langle A\mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle \mathbf{x}, \mathbf{v} \rangle = \langle A\mathbf{x} \langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle, \mathbf{v} \rangle \quad \forall \mathbf{v} \in X,$$

azaz

$$\langle \langle A\mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle \mathbf{x} - A\mathbf{x} \langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle, \mathbf{v} \rangle \quad \forall \mathbf{v} \in X,$$

azaz az  $\langle A\mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle \mathbf{x} - A\mathbf{x} \langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle$  vektorra az összes  $\mathbf{v} \in X$  vektor merőleges! Ez csak úgy lehet, ha

$$\langle A\mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle \mathbf{x} - A\mathbf{x} \langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle = 0,$$

vagy másképp

$$A\mathbf{x} = \frac{\langle A\mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle}{\langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle} \mathbf{x}.$$

Azt kaptuk tehát, hogy  $\mathbf{x}$  sajátvektora  $A$ -nak az  $\frac{\langle A\mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle}{\langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle} = F(\mathbf{x})$  sajátértékkel. Ez az Euler-Lagrange-egyenlet. Ebből az is kijön, hogy  $F(\mathbf{x})$  maximuma  $A$  legnagyobb sajátértéke, minimuma  $A$  legkisebb sajátértéke, és  $F$  mindkét szélsőértékét a megfelelő sajátvektorokon veszi fel. Jegyezzük meg, hogy a levezetés során csak a skaláris szorzat műveleti tulajdonságait használtuk (lásd a 21.4.1. definícióban).  $\square$

**21.2.3. KIDOLGOZOTT FELADAT** Legyen  $X = \{u \in C^2[0, \pi], u(0) = u(\pi) = 0\}$ ,  $q: [0, \pi] \rightarrow \mathbb{R}$  folytonos függvény. Keressük az  $F(u) = \frac{\int_0^\pi u'^2 + qu^2}{\int_0^\pi u^2}$  funkcionál minimumát.

**MEGOLDÁS** Vezessük be a következő skaláris szorzatot  $X$ -en:

$$\langle f, g \rangle = \int_0^\pi f(x)g(x) \, dx.$$

A 21.4.1. definícióban megkövetelt tulajdonságok teljesülnek, tehát ez skalárszorzat (lehet vele úgy számolni). Egy parciális integrálással:

$$\int_0^\pi u'^2 + qu^2 = \int_0^\pi -u''u + qu^2 = \langle -u'' + qu, u \rangle,$$

azaz az  $Au = -u'' + qu$  lineáris operátor bevezetésével

$$F(u) = \frac{\langle Au, u \rangle}{\langle u, u \rangle}.$$

Ez formálisan ugyanaz a feladat, mint az előző.  $Au = \lambda u$ -nál lesz a minimum, azaz az Euler–Lagrange-egyenlet:<sup>4</sup>

$$-u''(x) + q(x)u = \lambda u(x), \quad (21.3)$$

$$u(0) = u(\pi) = 0. \quad (21.4)$$

□

**21.2.4. KIDOLGOZOTT FELADAT** Legyen  $X = \{u : \bar{\Omega} \rightarrow \mathbb{R} \text{ 2-szer folytonosan differenciálható, } u|_{\partial\Omega} = 0\}$ ,  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  és  $f \in C^2(\Omega)$  adott, a cél pedig az

$$F(u) = \int_{\Omega} \left( \frac{1}{2} |\nabla u|^2 + fu \right)$$

funkcionál minimalizálása.

**MEGOLDÁS** Ha  $F(u)$  minimális, akkor  $F(u + tv) \geq F(u)$ , azaz

$$\int_{\Omega} \left( \frac{1}{2} |\nabla(u + tv)|^2 + f(u + tv) \right) \geq \int_{\Omega} \left( \frac{1}{2} |\nabla u|^2 + fu \right) \quad \forall t \in \mathbb{R}, \quad \forall v \in X.$$

$t$  hatványai szerint rendezve:

$$t^2 \int_{\Omega} \frac{1}{2} |\nabla v|^2 + t \int_{\Omega} (\nabla u \cdot \nabla v + fv) \geq 0 \quad \forall t \in \mathbb{R}, \quad \forall v \in X.$$

Ez csak akkor lehet igaz minden  $t$ -re, ha  $t$  együtthatója 0, azaz

$$\int_{\Omega} (\nabla u \cdot \nabla v + fv) = 0 \quad \forall v \in X.$$

„Parciálisan integrálunk” ( valójában Green-formulákat alkalmazunk)

$$\int_{\Omega} (-\Delta u + f)v = 0 \quad \forall v \in X,$$

ahonnan  $-\Delta u + f = 0$ .

□

**21.2.5. KIDOLGOZOTT FELADAT (Brachistochron-probléma):** Írjunk fel differenciálegyenletet arra az  $y(x)$  függvényre, amelynek grafikonja mentén a gravitáció hatására a lehető legrövidebb idő alatt jut el a tömegpont  $A(0,0)$ -ból  $B(b_1, b_2)$ -be ( $b_1 > 0, b_2 < 0$ ,  $\mathbf{g}$  lefelé mutat).

**MEGOLDÁS** Az energiamegmaradás törvénye szerint:

$$\frac{1}{2}mv^2 + mgy = 0, \quad (21.5)$$

<sup>4</sup>A számolási szabályok ugyan nem változtak, de megváltoztattuk a mérőlegesség értelmét. Ezért be kell bizonyítani, hogy az új értelmezés mellett is csak a nullvektor (az azonosan nulla függvény) lehet minden más függvényre merőleges. Lásd a 21.4.5. Lemmát.

ahonnan  $v = \sqrt{-2gy}$ . ds út megtételéhez  $\frac{ds}{v}$  idő kell, ezért a teljes úthoz

$$\int_0^{b_1} \frac{ds}{v} = \int_0^{b_1} \frac{\sqrt{1+y'^2}}{\sqrt{-2gy}} dx \quad (21.6)$$

idő szükséges. Minimalizáljuk tehát az  $F(y) = \int_0^{b_1} \frac{\sqrt{1+y'^2}}{\sqrt{-y}} dx$  funkcionált az  $y(b_1) = b_2$  feltétel mellett. A (21.2.) egyszerűbb Euler–Lagrange-egyenlet alapján

$$\frac{\sqrt{1+y'^2}}{\sqrt{-y}} - y' \frac{1}{\sqrt{-y}} \frac{1}{2\sqrt{1+y'^2}} 2y' = c,$$

ahonnan

$$-D = \frac{1}{c^2} = -y(1+y'^2)$$

a megoldandó közönséges differenciálegyenlet. □

**21.2.6. KIDOLGOZOTT FELADAT** Legyen  $v = (2, 4, 6)$ . Alkalmazzuk a variációs elvet az

$$F(x) = \|x\|^2 - \langle v, x \rangle \quad (\mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R})$$

funkcionál minimumának megkeresésére.

**MEGOLDÁS** Legyen  $x$ -ben a minimum. Akkor minden  $t \in \mathbb{R}$ -re és minden  $u \in X$ -re  $F(x + tv) \geq F(x)$ , azaz

$$\|x + tu\|^2 - \langle v, x + tu \rangle \geq \|x\|^2 - \langle v, x \rangle,$$

rendezve

$$t^2\|u\|^2 + 2t\langle x, u \rangle - t\langle v, u \rangle \geq 0.$$

Ez csak akkor lehet igaz minden  $t$ -re, ha az elsőfokú tag együtthatója 0, azaz

$$\langle 2x - v, u \rangle = 0.$$

Ez pedig csak akkor lehet igaz minden  $u$ -ra, ha  $2x - v = 0$ , azaz  $x = (1, 2, 3)$ .<sup>5</sup> □

**21.2.7. KIDOLGOZOTT FELADAT** Legyen  $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  folytonos függvény. Alkalmazzuk a variációs elvet a

$$F(f) = \int_0^1 f^2(x) - 2xf(x) dx$$

funkcionál minimumának megkeresésére.

<sup>5</sup>Ez a kezdeti képletből is nyilvánvaló, de az a cél, hogy a variációs elvet és használatát megértsük.

**MEGOLDÁS** <sup>6</sup> Legyen  $f$ -ben a minimum. Akkor minden  $t \in \mathbb{R}$ -re és minden  $g \in X$ -re  $F(f + tg) \geq F(f)$ , azaz

$$\int_0^1 (f(x) + tg(x))^2 - 2x(f(x) + tg(x)) \, dx \geq \int_0^1 f^2(x) - 2xf(x) \, dx,$$

rendezve

$$\int_0^1 t^2 g^2(x) + 2t(f(x) - x)g(x) \, dx \geq 0.$$

Ez csak akkor lehet igaz minden  $t$ -re, ha az elsőfokú tag együtthatója 0, azaz

$$\int_0^1 (f(x) - x)g(x) \, dx = 0.$$

Ez pedig csak akkor lehet igaz minden  $g$ -re, ha  $f(x) - x = 0$ , azaz  $f(x) = x$ . □

**21.2.8. KIDOLGOZOTT FELADAT** Legyen  $y : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  differenciálható függvény,  $y(0) = 0$ ,  $y(1) = 1$ . Forgassuk meg az  $y(x)$  görbét az  $x$  tengely körül. Írjunk fel differenciálegyenletet arra az  $y$  függvényre, amelyre a kapott forgástest palástjának felszíne minimális. Oldjuk is meg ezt a differenciálegyenletet! (A forgástest palástjának felszíne:

$$A = 2\pi \int_0^1 y \sqrt{1 + y'^2} \, dx.)$$

A minimalizálandó funkcionál,  $f(y, y') = y \sqrt{1 + y'^2}$  nem függ explicite  $x$ -től, ezért használhatjuk a (21.2.) Euler–Lagrange-egyenletet:

$$y \sqrt{1 + y'^2} - y' y \frac{1}{2} (1 + y'^2)^{-\frac{1}{2}} 2y' = c,$$

Beszorzás után

$$y = c \sqrt{1 + y'^2} \Rightarrow y' = \pm \sqrt{\frac{y^2}{c^2} - 1}.$$

Ezt az  $\frac{y^2}{c^2} = \cosh u$  helyettesítéssel lehetne megoldani, de a bal oldali alakon ránézésre látszik, hogy a megoldás  $y = c \cosh\left(\frac{x}{c} + d\right)$ .

## 21.3. Gyakorló feladatok

**21.3.1. FELADAT** Keressük meg az

$$F(y) = \int_{-1}^1 \frac{1}{2} y'^2(x) - 5y(x) \, dx$$

funkcionál minimumát az  $y(-1) = -68$ ,  $y(1) = 12$  feltétel mellett.

<sup>6</sup>Ez a szokásos  $L^2$ -beli skalárszorzattal ugyanaz a feladat, mint az előző. A trükkös megoldások is ugyanúgy működnek; sőt, a (21.1.) Euler–Lagrange-egyenlet, amit egyből felírhatnánk, az itteni megoldás utolsó előtti képlete!

21.3.2. **FELADAT** Keressük meg az

$$F(y) = \int_{-1}^1 \frac{1}{2} y'^2(x) - 2y^2(x) \, dx$$

funkcionál minimumát az  $y(-4) = 6$ ,  $y(4) = 6$  feltétel mellett.

21.3.3. **FELADAT** Legyen az  $A$  mátrix pozitív definit,  $\mathbf{b}$  adott vektor. Alkalmazzuk a variációs elvet az

$$F(\mathbf{x}) = \frac{1}{2} \mathbf{x}^T A \mathbf{x} - \mathbf{b}^T \mathbf{x}$$

funkcionál minimumának megkeresésére.

21.3.4. **FELADAT** Egy vízparti telek kerítése  $L$  hosszúságú. Mekkora lehet a telek, ha a part egyenes?

## 21.4. Matematikai háttér

21.4.1. **DEFINÍCIÓ** [Skaláris szorzat tulajdonságai]

- (i)  $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = \langle \mathbf{v}, \mathbf{u} \rangle$ .
- (ii)  $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2 \rangle = \langle \mathbf{u}, \mathbf{v}_1 \rangle + \langle \mathbf{u}, \mathbf{v}_2 \rangle$ .
- (iii)  $\langle \lambda \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = \lambda \langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle$ .

21.4.2. **DEFINÍCIÓ**  $C^k(\Omega)$ -val jelöljük az  $\Omega$ -n értelmezett,  $k$ -szor folytonosan differenciálható függvények terét. Pontosabban:  $f \in C^k(\Omega)$ , ha  $f$   $k$ -szor folytonosan differenciálható az  $\Omega$  halmaz belsejében, és ezek a deriváltak folytonosan kiterjeszthetők  $\Omega$ -ra.  $C^\infty(\Omega)$ -val jelöljük az akárhányszor differenciálható függvények terét.

21.4.3. **DEFINÍCIÓ**  $C_0^k(\Omega)$ -val jelöljük az olyan  $C^k(\Omega)$ -beli függvényeket, amelyek egy  $\Omega$  belsejében fekvő korlátos és zárt halmazon kívül nullával egyenlők:  $C_0^k(\Omega) = \{f \in C^k(\Omega) \mid \exists \Omega_1 \subset \text{int}(\Omega) \text{ korlátos és zárt, } f|_{\Omega \setminus \Omega_1} = 0\}$ .

21.4.4. **MEGJEGYZÉS** Ha  $\Omega$  korlátos és zárt, akkor az  $\|f\| = \sum_{j=0}^k \max_{x \in \Omega} |f^{(j)}(x)|$  normával  $C^k(\Omega)$  és  $C_0^k(\Omega)$  is teljes normált tér.

21.4.5. **ÁLLÍTÁS** Ha  $[a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  folytonos és minden  $v \in C_0^\infty[a, b]$ -re  $\int_0^\pi uv = 0$ , akkor  $u = 0$ .

**BIZONYÍTÁS** Tegyük fel, hogy  $u \neq 0$ , akkor létezik  $x_0 \in (a, b)$  úgy, hogy  $u(x_0) \neq 0$ , legyen például  $u(x_0) > 0$ . Ha  $u(x_0) = h$ , akkor  $\frac{h}{2}$ -höz létezik  $\delta > 0$ , hogy  $|x - x_0| < \delta$  esetén  $|u(x) - u(x_0)| < \frac{h}{2}$ , azaz  $u(x) > \frac{h}{2}$  (és  $[x_0 - \delta, x_0 + \delta] \subset (a, b)$ ). Ha van olyan  $v(x)$ , amire  $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$  esetén  $v(x) > 0$ , máshol  $v(x) = 0$ , akkor azzal  $\int_0^\pi uv = \int_{x_0 - \delta}^{x_0 + \delta} uv > \frac{h}{2} \int_{x_0 - \delta}^{x_0 + \delta} v > 0$ , kész vagyunk.

Legyen  $r \geq 0$ -ra

$$\Psi(r) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{1-r}} & \text{ha } r < 1 \\ 0 & \text{ha } r \geq 1 \end{cases}$$

$\Psi$  összes deriváltja  $e^{-\frac{1}{1-r}} p(\frac{1}{1-r})$  alakú, ahol  $p$  polinom. Ezek határértéke  $r \rightarrow 1 -$  azaz  $\frac{1}{1-r} \rightarrow +\infty$  esetén 0, tehát  $\Psi$  akárhányszor deriválható az 1-ben is. Legyen például

$$v(x) = \Psi\left(\left|\frac{x-x_0}{\delta}\right|\right),$$

ez  $|x - x_0| \geq \delta$ -ra 0, egyébként pozitív és akárhányszor deriválható. □

## Hivatkozások

- [1] J. C. Butcher, *Numerical methods for ordinary differential equations*, Wiley, 2003.
- [2] A. F. Filippov, *Differenciálegyenletek példatár*, Nemzeti Tankönyvkiadó, Budapest, 2001.
- [3] Scharnitzky Viktor, *Differenciálegyenletek példatár*, Bolyai sorozat, Műszaki Könyvkiadó, Budapest, 2008.
- [4] Tóth János és Simon L. Péter, *Differenciálegyenletek*, Typotex, Budapest, 2005.



# Parciális differenciálegyenletek

**Kiss Márton**

BME Differenciálegyenletek Tanszék  
(I. rész)

**Garay Barna**

BME Differenciálegyenletek Tanszék  
(II. rész)

**Konzulens: Paál György**

BME Hidrodinamikai Rendszerek Tanszék

**I. rész**  
**Parciális differenciálegyenletek direkt tárgyalásban**

## 22. fejezet

### Bevezetés

Ez a jegyzet a BME gépészmérnöki MSc szak hallgatói számára készült a matematika M2 tárgy parciális differenciálegyenletek részéhez segédletként. Célunk a modern matematikai részletek említése nélkül átadható ismeretek rendszerezett összefoglalása. A bevezetőben leírjuk és példákkal támasztjuk alá, hogy a tárgyalt témaköröket miért tartjuk fontosnak. Igyekszünk gyakorlati szempontból fontos állításokat kimondani, és ezeket érthetően, ugyanakkor a mélyebb matematikai szempontokkal összhangban megindokolni.

Így minden fejezet négy alfejezetből áll. A feladatok megoldásához szükséges elméleti összefoglalást kidolgozott mintapéldák követik. Minden témakörhöz megadunk gyakorló-feladatokat is. Végül a matematikai háttér részben olyan definíciók, tételek, konstrukciók találhatók, amelyekről úgy gondoljuk, hogy elősegítik a témakör esetleges mélyebb tanulmányozását, de a feladatok megoldásához nem nélkülözhetetlenek.<sup>1</sup>

Az I. rész Kiss Márton, a II. rész Garay Barna munkája.

#### 22.1. A parciális differenciálegyenlet fogalma; példák

A parciális differenciálegyenlet (PDE) ismeretlen függvénye rendszerint a  $t$  időtől és  $n$  számú térkoordinátától, vagyis az  $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$  vektor koordinátáitól függ. Az ismeretlen függvényről feltesszük, hogy skalárértékű. Nem foglalkozunk vektorértékű függvényekre felírt parciális differenciálegyenletekkel, sem pedig több parciális differenciálegyenletből álló rendszerrel.

Az egyenlet  $m$ -edrendű, ha a benne szereplő legmagasabb rendű derivált(ak) rendje  $m$ . Ha az ismeretlen függvényt  $u$ -val, a változóit  $t$ -vel és  $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ -szel jelöljük, akkor egy általános  $m$ -edrendű parciális differenciálegyenlet a következőképpen írható fel:

$$F(t, \mathbf{x}, u, \partial_0 u, \partial_1 u, \dots, \partial_n u, \dots, \partial_0^m u, \partial_0^{m-1} \partial_1 u, \dots, \partial_n^m u) = 0, \quad (22.1)$$

ahol  $\partial_0$  a  $t$  változó szerinti parciális deriválást,  $\partial_i$  pedig ( $i = 1, \dots, n$ ) az  $x_i$  változó szerinti parciális deriválást jelöli. Az egyenlet *kvázilineáris*, ha a  $F$  a legmagasabb rendű deriváltak

---

<sup>1</sup>Tehát ebben a részben sem törekszünk arra, hogy minden, matematikai szempontból szükséges részletet megemlítsünk.

lineáris függvénye, *lineáris*, ha  $F$   $u$ -tól és az összes deriváltjától lineárisan függ, azaz

$$\sum_{i_0+i_1+\dots+i_n \leq m} f_{i_0, i_1, \dots, i_n}(t, \mathbf{x}) \partial_0^{i_0} \partial_1^{i_1} \dots \partial_n^{i_n} u = f(t, \mathbf{x}). \quad (22.2)$$

A továbbiakban példákat sorolunk fel parciális differenciálegyenletekre. Ezek többsége másodrendű lineáris, illetve elsőrendű kvázilineáris.

A kis rezgések leírása (húr, membrán, transzverzális és longitudinális egyaránt) a

$$\rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \operatorname{div}(p \operatorname{gradu}) - qu + F(t, x) \quad (22.3)$$

másodrendű lineáris *hiperbolikus* egyenletre vezet. Ahogy már említettük, az ismeretlen  $u$  függvény a  $t$  időtől és az  $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$  vektor ( $n = 1, 2, 3$ ) koordinátáitól függ.

A diffúzió egyenlete, a hővezetés egyenlete általánosan a következő alakú:

$$\rho \frac{\partial u}{\partial t} = \operatorname{div}(p \operatorname{gradu}) - qu + F(t, x). \quad (22.4)$$

Ez egy másodrendű lineáris *parabolikus* egyenlet.

Időfüggetlen esetben mindkét előző típus az a

$$\operatorname{div}(p \operatorname{gradu}) - qu + F(t, x) = 0 \quad (22.5)$$

*elliptikus* egyenletre egyszerűsödik. Ez is másodrendű lineáris.

Ideális folyadék áramlását a kontinuitási egyenlet és az Euler egyenlet írja le:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \mathbf{v}) = f, \quad (22.6)$$

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + v' \mathbf{v} + \frac{1}{\rho} \operatorname{grad} p = \mathbf{F}. \quad (22.7)$$

Ha a kontinuitási egyenletben  $\mathbf{v}$ -t adottnak tekintjük, akkor ez egy elsőrendű lineáris egyenlet  $\rho$ -ra. Ha  $\rho$  függhet  $\mathbf{v}$ -től is, akkor az egyenlet kvázilineáris. Ha a sebességtérnek van potenciálja, azaz  $\mathbf{v} = -\operatorname{gradu}$ , akkor  $u$  a (22.6) egyenlet alapján kielégíti a (22.4)-hez hasonló

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} - \operatorname{div}(\rho \operatorname{gradu}) = f \quad (22.8)$$

egyenletet. A (22.7)-ben felírt Euler egyenlet kvázilineáris, de a  $v' \mathbf{v}$  tag miatt nem lineáris.

Skalármennyiség, például szennyezés transzportja az áramlási térben:

$$\frac{\partial c}{\partial t} + \mathbf{v} \operatorname{grad} c = \operatorname{div}(D_c \operatorname{grad} c) + F_c, \quad (22.9)$$

ahol  $c$  a szennyező anyag koncentrációja,  $D_c$  a diffúziós tényező,  $F_c$  pedig egy forrástag. Ez az egyenlet (22.4)-hez hasonló. Bár nem fogalmazzuk meg külön, a (22.4) egyenlettel kapcsolatban megemlíthető elméleti eredmények megfelelő módosításokkal erre is érvényesek lesznek.

Transzportegyenlet diffúzió nélkül:

$$\frac{\partial c}{\partial t} + \mathbf{v} \operatorname{grad} c = F_c. \quad (22.10)$$

Ez is egy elsőrendű lineáris egyenlet.

Amennyiben az elektromos térerősség örvénymentes, az  $u$  potenciál kielégíti a (22.5)-höz hasonló

$$\operatorname{div}(\varepsilon \operatorname{grad} u) = 4\pi\rho \quad (22.11)$$

egyenletet, ahol  $\varepsilon$  a közeg dielektromos állandója,  $\rho$  a töltéssűrűség.

Végül szintén másodrendű lineáris, de egyik eddigi csoportba sem tartozik a *Schrödinger egyenlet*:

$$i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m_0} \Delta \psi + V\psi. \quad (22.12)$$

A példák alapján először az elsőrendű egyenleteket tárgyaljuk, majd a másodrendű lineáris egyenletek közül hosszabban foglalkozunk az elliptikus egyenletekkel. Kitérünk ezek kapcsolatára a variációszámítással is. A két utolsó fejezetben nevezetes függvényrendszerek tulajdonságaival ismerkedhetünk meg.

## 22.2. Kezdeti és peremfeltételek; korrekt kitűzés

A közönséges differenciálegyenleteknél az egyenlethez meg kellett adnunk egy kezdeti feltételt. A parciális differenciálegyenleteknél sokkal összetettebb *mellékfeltételeket*, időbeli *kezdeti feltételeket* és térbeli *peremfeltételeket* kell megadnunk, ezt részletesebben az adott egyenleteknél fejtjük ki.

Akárcsak a közönséges differenciálegyenleteknél, a PDE-ből és a mellékfeltételekből álló feladatot korrekt kitűzésűnek nevezzük, ha

1. van megoldás;
2. egyértelmű a megoldás;
3. a megoldás folytonosan függ az összes bemenő adattól.

Ezek a magától értetődőnek tűnő matematikai feltételek megkövetelik, hogy meghatározzuk, hogy milyen függvények körében keressük a megoldást, és hogy mikor tekintünk egy függvényt megoldásnak. Ezek a kérdések a modell érvényessége kapcsán amúgy is felvetődnek. A folytonos függés értelmezéséhez pedig szükség van arra is, hogy mérni tudjuk függvények távolságát. Gyakorlati oldalról azért szükséges ez, hogy el tudjuk dönteni, hogy mikor találtuk meg „elég jó közelítéssel” a megoldást. Erről is majd az adott egyenlettípusnál olvashatunk.

## 23. fejezet

# Elsőrendű parciális differenciálegyenletek

### 23.1. Elméleti összefoglaló

Induljunk ki a kontinuitási egyenletből:

$$\rho'_t + \operatorname{div}(\rho \mathbf{v}) = 0.$$

$\operatorname{div}(\rho \mathbf{v}) = \operatorname{grad} \rho \cdot \mathbf{v} + \rho \operatorname{div} \mathbf{v}$  alapján átrendezve:

$$\rho'_t + \operatorname{grad} \rho \cdot \mathbf{v} = -\rho \operatorname{div} \mathbf{v}. \quad (\text{kontinuitási egyenlet})$$

Ha itt  $\mathbf{v}$ -t ismerjük és  $\rho$ -ra vagyunk kíváncsiak, akkor

- Ha  $\operatorname{div} \mathbf{v} = 0$ , akkor ez egy elsőrendű, homogén, lineáris PDE (EHL PDE);
- Ha  $\mathbf{v}$  még konstans is, akkor állandó együtthatós;
- Ha  $\mathbf{v}$  függhet  $\rho$ -tól is, akkor az egyenlet kvázilineáris (EKL PDE).

#### EHL PDE

Az EHL PDE általános alakja:

$$u'_{x_1}(\mathbf{x})f_1(\mathbf{x}) + u'_{x_2}(\mathbf{x})f_2(\mathbf{x}) + \dots + u'_{x_n}(\mathbf{x})f_n(\mathbf{x}) = 0, \quad (\text{EHL PDE})$$

ahol  $f_i$ -k adott  $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  függvények, és  $u$  a keresett  $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  függvény. Ha  $f_1(\mathbf{x}) = 1$ ,  $f_2(\mathbf{x}) = \dots = f_n(\mathbf{x}) = 0$ , akkor az egyenlet  $u'_{x_1} = 0$ . Ennek a megoldása  $u(\mathbf{x}) = \Phi(x_2, \dots, x_n)$ , ahol  $\Phi$  tetszőleges, azaz annyit tudunk, hogy  $u$  állandó az  $x_1 = c$  hipersíkra merőleges egyenesek (az  $x_2 = c_2, x_3 = c_3, \dots, x_n = c_n$  egyenesek) mentén.

**23.1.1. DEFINÍCIÓ** Az EHL PDE karakterisztikus egyenlet(rendszer)e az

$$\dot{\mathbf{x}} = f(\mathbf{x})$$

közönséges DER, a karakterisztikus egyenlet(rendszer) megoldásai pedig a karakterisztikák.

**23.1.2. TÉTEL**  $u$  megoldása az EHL PDE-nek  $\Leftrightarrow u$  a karakterisztikák mentén állandó.

**BIZONYÍTÁS** Tekintsünk egy  $\mathbf{x}(t)$  karakterisztikát!

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}u(\mathbf{x}(t)) &= u'_{x_1}(\mathbf{x}(t))\dot{x}_1(t) + u'_{x_2}(\mathbf{x}(t))\dot{x}_2(t) + \dots + u'_{x_n}(\mathbf{x}(t))\dot{x}_n(t) = \\ &= u'_{x_1}(\mathbf{x}(t))f_1(\mathbf{x}) + u'_{x_2}(\mathbf{x}(t))f_2(\mathbf{x}) + \dots + u'_{x_n}(\mathbf{x}(t))f_n(\mathbf{x}).\end{aligned}$$

Ha  $u$  megoldása az EHL PDE-nek, akkor a jobb oldal 0, azaz  $u$  állandó a karakterisztikák mentén. Ha pedig  $u$  állandó a karakterisztikák mentén, akkor  $\frac{d}{dt}u(\mathbf{x}(t)) = 0$ , azaz a jobb oldal értéke is 0, ami épp azt jelenti, hogy  $u$  megoldása az EHL PDE-nek.  $\square$

### EKL PDE

Az EKL PDE általános alakja:

$$u'_{x_1}f_1(\mathbf{x}, u) + u'_{x_2}f_2(\mathbf{x}, u) + \dots + u'_{x_n}f_n(\mathbf{x}, u) = f_0(\mathbf{x}, u), \quad (\text{EKL PDE})$$

ahol  $f_i$ -k adott  $\mathbb{R}^{n+1} \rightarrow \mathbb{R}$  függvények, és  $u$  a keresett  $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  függvény. Ha a bal oldali tagok nem függenek  $u$ -tól, akkor inhomogén lineáris egyenletet kapunk.

**23.1.3. DEFINÍCIÓ** Az EKL PDE karakterisztikus egyenlet(rendszer)e:

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= f_1(\mathbf{x}, u) \\ &\vdots \\ \dot{x}_n &= f_n(\mathbf{x}, u) \\ \dot{u} &= f_0(\mathbf{x}, u).\end{aligned}$$

**23.1.4. TÉTEL**  $u$  megoldása az EKL PDE-nek  $\Leftrightarrow (\mathbf{x}, u)$  megoldása a karakterisztikus egyenletrendszernek.

**BIZONYÍTÁS** Ugyanúgy összetett függvényt kell deriválni itt is.  $\square$

Az EKL PDE megoldásfüggvényét az  $(n+1)$  dimenziós  $(\mathbf{x}, u)$  koordináta-rendszerben képzeljük el. Ebben a koordináta-rendszerben az  $u(\mathbf{x})$  függvény gráfjának a normálvektora

$$(u'_{x_1}, u'_{x_2}, \dots, u'_{x_n}, -1).$$

Ha  $u$  megoldása az EKL PDE-nek, akkor ez éppen merőleges az  $(\mathbf{x}, u)$  ponton áthaladó karakterisztika érintővektorára, ami

$$(\dot{\mathbf{x}}, \dot{u}) = (f_1(\mathbf{x}, u), f_2(\mathbf{x}, u), \dots, f_n(\mathbf{x}, u), f_0(\mathbf{x}, u)),$$

hiszen az EKL PDE szerint skaláris szorzatuk 0. Ez egyrészt azt jelenti, hogy az  $(\mathbf{x}, u(\mathbf{x}))$  felületen belül haladnak a karakterisztikák. Másrészt pedig azt, hogy az EKL PDE megoldásakor olyan  $u(\mathbf{x})$  függvényt keresünk, amelynek a gráfját minden pontban érinti egy előre adott vektormező (az  $(f_1(\mathbf{x}, u), f_2(\mathbf{x}, u), \dots, f_n(\mathbf{x}, u), f_0(\mathbf{x}, u))$  vektormező). Ez a közönséges differenciálegyenlet általánosítása. Annak akkor megoldása egy függvény, ha a grafikonját minden pontban érinti az iránymező.

## 23.2. Kidolgozott példák

**23.2.1. KIDOLGOZOTT FELADAT** Oldjuk meg az alábbi elsőrendű homogén lineáris parciális differenciálegyenletet:

$$-yu_x + xu_y = 0.$$

**MEGOLDÁS** A karakterisztikus egyenletrendszer:

$$\begin{aligned}\dot{x} &= -y, \\ \dot{y} &= x.\end{aligned}$$

A kettőt elosztva egymással

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y} \Rightarrow y \, dy + x \, dx = 0 \Rightarrow x^2 + y^2 = c.$$

$u$  pontosan akkor megoldása az EHL PDE-nek, ha állandó a karakterisztikák mentén, azaz az  $x^2 + y^2 = c$  körök mentén. Ez pontosan akkor van, ha  $u$   $x^2 + y^2$  függvénye, azaz  $u = \Phi(x^2 + y^2)$  valamilyen  $\Phi$  differenciálható függvénnyel.  $\square$

**23.2.2. KIDOLGOZOTT FELADAT** Oldjuk meg az alábbi elsőrendű homogén lineáris parciális differenciálegyenletet:

$$u_x \cos x + u_y \operatorname{tg} y = 0.$$

**MEGOLDÁS** A karakterisztikus egyenletrendszer:

$$\begin{aligned}\dot{x} &= \cos x, \\ \dot{y} &= \operatorname{tg} y.\end{aligned}$$

A kettőt elosztva egymással

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\operatorname{tg} y}{\cos x},$$

szétválasztható egyenletet kapunk. Egy oldalra rendezve az azonos változókat és integrálva:

$$\begin{aligned}\ln \sin y &= \int \frac{dx}{\cos x} \stackrel{t=\sin x}{=} \int \frac{\cos x \, dx}{1 - \sin^2 x} = \int \frac{dt}{1 - t^2} = \frac{1}{2} \ln \frac{1+t}{1-t} + c \\ &= \frac{1}{2} \ln \frac{1 + \sin x}{1 - \sin x} + c,\end{aligned}$$

ahonnan  $e^c = C = \frac{\sin y}{\frac{1 + \sin x}{1 - \sin x}} = 2 \sin y \frac{1 - \sin x}{1 + \sin x}$ , ezért  $u(x, y) = \Phi(\sin y \frac{1 - \sin x}{1 + \sin x})$ .  $\square$



**23.2.3. KIDOLGOZOTT FELADAT** Oldjuk meg az alábbi elsőrendű homogén lineáris parciális differenciálegyenletet:

$$xu_x + yu_y = 0, \quad u(1, y) = y^2.$$

**MEGOLDÁS** A karakterisztikus egyenletrendszer:

$$\begin{aligned}\dot{x} &= x, \\ \dot{y} &= y.\end{aligned}$$

A kettőt elosztva egymással<sup>1</sup>

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x} \Rightarrow \frac{y}{x} = c.$$

A karakterisztikák tehát:  $\frac{y}{x} = c$ , ezért  $u = \Phi(\frac{y}{x})$  az általános megoldás, ahol  $\Phi$  tetszőleges differenciálható függvény. A kezdeti feltételbe behelyettesítve

$$u(1, y) = \Phi(y) = y^2 \Rightarrow u(x, y) = \Phi\left(\frac{y}{x}\right) = \frac{y^2}{x^2}.$$

□

**23.2.4. KIDOLGOZOTT FELADAT** Oldjuk meg a következő differenciálegyenletet:

$$(x+6)(x-5)u_x - \frac{11}{2}yu_y = 0, \quad u(3, y) = -\frac{2}{9}y^6.$$

**MEGOLDÁS** A karakterisztikus egyenletrendszer:

$$\begin{aligned}\dot{x} &= (x+6)(x-5) \\ \dot{y} &= -\frac{11}{2}y.\end{aligned}$$

Ebből

$$y' = -\frac{11}{2} \frac{y}{(x+6)(x-5)}.$$

Ez egy szétválasztható differenciálegyenlet. Megoldása

$$y^2 \frac{x-5}{x+6} = c \Rightarrow u(x, y) = \Phi\left(y^2 \frac{x-5}{x+6}\right).$$

A kezdeti feltételből

$$u(3, y) = \Phi\left(-\frac{2}{9}y^2\right) = -\frac{2}{9}y^6 \Rightarrow \Phi(z) = \frac{81}{4}z^3,$$

és így

$$u(x, y) = \frac{81}{4} \left(y^2 \frac{x-5}{x+6}\right)^3.$$

□

<sup>1</sup>A két egyenlet külön-külön is meg tudjuk oldani,  $x(t) = c_1 e^t$ ,  $y(t) = c_2 e^t$ , ahonnan ugyanezt kapjuk.

**23.2.5. KIDOLGOZOTT FELADAT** Oldjuk meg az alábbi elsőrendű homogén lineáris parciális differenciálegyenletet:

$$\frac{1}{y}u_x + (1 + xy^4)u_y = 0.$$

**MEGOLDÁS** A karakterisztikus egyenletrendszer:

$$\begin{aligned}\dot{x} &= \frac{1}{y}, \\ \dot{y} &= 1 + xy^4.\end{aligned}$$

A kettőt elosztva egymással a

$$\frac{dy}{dx} = y + xy^5 \Leftrightarrow y'y^{-5} = y^{-4} + x$$

Bernoulli-típusú egyenletet kapjuk. Legyen  $v = y^{-4}$ , ekkor  $\frac{dv}{dx} = -4y^{-5} \frac{dy}{dx}$ , azaz

$$-\frac{1}{4}v' = v + x.$$

Ebből  $v = ce^{-4x} - x + \frac{1}{4}$ . Ha a közönséges differenciálegyenletet akarnánk megoldani, akkor az  $y$ -t kellene kifejeznünk ebből az egyenletből. Most azonban azt keressük, hogy mikor állandó  $u$  a közönséges differenciálegyenletrendszer megoldásai mentén, ezért  $c$ -t fejezzük ki:

$$c = e^{4x}(v + x - \frac{1}{4}) = e^{4x}(y^{-4} + x - \frac{1}{4}),$$

és így  $u(x, y) = \Phi(e^{4x}(y^{-4} + x - \frac{1}{4}))$ . □

**23.2.6. KIDOLGOZOTT FELADAT** Oldjuk meg az alábbi elsőrendű kvázilineáris parciális differenciálegyenletet:

$$u_x + 2u_y = 1 + u, \quad u(x, 3x + 1) = \sin x.$$

**MEGOLDÁS** A karakterisztikus egyenletrendszer:

$$\begin{aligned}\dot{x} &= 1, \\ \dot{y} &= 2, \\ \dot{u} &= 1 + u.\end{aligned}$$

Szerencsére mindhárom egyenletet külön-külön is könnyen megoldhatjuk:<sup>2</sup>

$$\begin{aligned}x &= t + c_1, \\ y &= 2t + c_2, \\ u &= c_3 e^t - 1.\end{aligned}$$

<sup>2</sup>ha nem így volna, akkor is sok esetben fel tudnánk írni a megoldást három konstans segítségével. Például, ha az egyenletrendszer lineáris.

Három egyenletet kaptunk. Az első egyenlet segítségével  $t = x - c_1$ -et egyszerűen kifejezhetjük:<sup>3</sup>

$$\begin{aligned}y &= 2x - 2c_1 + c_2, \\u &= c_3 e^x e^{-c_1} - 1.\end{aligned}$$

Ezek szerint  $y - 2x = c_4$  és  $(u - 1)e^{-x} = c_5$  állandó a megoldások mentén, és nyilván az is igaz, hogy ha ez a két mennyiség állandó, akkor  $(x, y, u)$  megoldása a közönséges differenciálegyenletrendszernek. Tehát az EKL PDE általános megoldása implicit alakban

$$\Phi(y - 2x, (u - 1)e^{-x}) = 0, \quad (23.1)$$

ahol  $\Phi$  tetszőleges differenciálható függvény. A megoldást úgy kapjuk, hogy ebből az egyenletből  $u$ -t kifejezzük. A kezdeti feltétel szerint

$$\begin{aligned}u(x, 3x + 1) = \sin x \quad \forall x &\iff \Phi(x + 1, (\sin x - 1)e^{-x}) = 0 \quad \forall x \\&\iff \Phi(x, (\sin(x - 1) - 1)e^{-(x-1)}) = 0 \quad \forall x.\end{aligned}$$

Azaz a  $\Phi(x, y) = 0$  egyenletrendszer megoldása  $y = (\sin(x - 1) - 1)e^{-(x-1)}$ . Emiatt  $(x$  és  $y$  helyébe a (23.1)-ben szereplő értékeket helyettesítve)

$$(u - 1)e^{-x} = (\sin(y - 2x - 1) - 1)e^{-(y-2x-1)},$$

azaz  $u(x, y) = 1 + (\sin(y - 2x - 1) - 1)e^{3x-y+1}$ . □

## 23.3. Gyakorló feladatok

23.3.1. **FELADAT** Oldjuk meg az alábbi elsőrendű homogén lineáris parciális differenciálegyenletet:

$$xu_x + yu_y = 0, \quad u(2, (y - 1)^5) = \cos y.$$

**VÉGEREDMÉNY**  $u(x, y) = \cos(1 + \sqrt[5]{2\frac{y}{x}})$ . □

23.3.2. **FELADAT** Oldjuk meg a következő differenciálegyenletet:<sup>4</sup>

$$(x + 2)(x - 3)u_x - (y + 2)(y - 3)u_y = 0, \quad u(x, x) = -2\frac{(x - 3)^2}{(x + 2)^2} + \frac{(x + 2)^2}{(x - 3)^2}.$$

**VÉGEREDMÉNY**  $u(x, y) = -2\frac{(y-3)(x-3)}{(y+2)(x+2)} + \frac{(y+2)(x+2)}{(y-3)(x-3)}$ . □

23.3.3. **FELADAT** Oldjuk meg az alábbi elsőrendű kvázilineáris parciális differenciálegyenletet:

$$u_x + u_y = 1 - u, \quad u(x, x + x^2) = \sin x.$$

**VÉGEREDMÉNY**  $u(x, y) = 1 + (\cos \frac{y-x+1}{3} - 1)e^{y-4x+1}$ . □

<sup>3</sup>Általában is annyi egyenletünk maradna  $t$  kifejtése után, ahány változós a keresett függvény.

<sup>4</sup>Elég csak egy megoldást megadni. Van-e több megoldás?

## 23.4. Matematikai háttér

A kontinuitási egyenlet levezethető a transzportegyenlet integrál alakjából. Legyen  $f$  egy  $F$  extenzív mennyiség sűrűsége. Ha egy  $V$  térfogatú rendszer  $F$  jellemzőjére vagyunk kíváncsiak, akkor:

$$F(t) = \int_{V(t)} f(t, \mathbf{x}) \, d\mathbf{x}.$$

Ezt  $t$  szerint differenciálva<sup>5</sup> a transzportegyenlet integrál alakját kapjuk:

$$\frac{d}{dt} F(t) = \int_{V(t)} \frac{\partial f}{\partial t}(t, \mathbf{x}) \, d\mathbf{x} + \int_{\partial V(t)} f(t, \mathbf{x}) \mathbf{v}(t, \mathbf{x}) \, d\mathbf{A}, \quad (\text{TI})$$

ahol  $\mathbf{v}(t, \mathbf{x})$  a mozgó halmaz sebessége. Ha most  $F = m$  tömeg,  $f = \rho$  sűrűség, akkor, ha a tömeg megmarad,

$$0 = \int_{V(t)} \rho'_t(t, \mathbf{x}) \, d\mathbf{x} + \int_{\partial V(t)} \rho(t, \mathbf{x}) \mathbf{v}(t, \mathbf{x}) \, d\mathbf{A}.$$

A Gauss-Osztogratszkij-tétellel:

$$0 = \int_{V(t)} \rho'_t(t, \mathbf{x}) \, d\mathbf{x} + \int_{V(t)} \operatorname{div}(\rho(t, \mathbf{x}) \mathbf{v}(t, \mathbf{x})) \, d\mathbf{x}.$$

Ha  $V(t)$  az  $\mathbf{x}(t)$  pontra zsugorodik, akkor a

$$0 = \rho'_t(t, \mathbf{x}) + \operatorname{div}(\rho(t, \mathbf{x}) \mathbf{v}(t, \mathbf{x}))$$

kontinuitási egyenletet kapjuk.

<sup>5</sup>Ilyen összetett függvényt nem tanultunk differenciálni. A bizonyítás például úgy történhetne, hogy átranzformálnánk az integrált egy álló  $V(t_0)$  halmazra. Közben a Liouville-formulát és a KDE megoldásának a kezdeti feltételtől való differenciálható függését kellene felhasználni.

## 24. fejezet

# Az elliptikus egyenletekre vonatkozó peremértékfeladat és a variációszámítás kapcsolata

A továbbiakban végig  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  legyen egy „szép” határu korlátos tartomány. (Lehet a határban törés, de az nem fordulhat elő, hogy két olyan darabot ragasztunk össze, amelyeknek közös érintősíkjá van. Precízebben:  $\Omega$  darabonként úgy paraméterezhető, hogy a paraméterező függvény folytonosan differenciálható, egy téglatesten van értelmezve és  $\partial\Omega$  a téglatest egy lapja vagy néhány lapjának uniója.)

Vezessük be az alábbi rövidítést:

$$Lu = \operatorname{div}(p \operatorname{gradu}) - qu, \quad (24.1)$$

ahol  $p \in C^1(\overline{\Omega})$ ,  $q \in C(\overline{\Omega})$ ,  $p > 0$ ,  $q \geq 0$ .

**24.1.1. DEFINÍCIÓ** (ELSŐ PEREMÉRTÉKFELADAT (PÉF)) *Olyan  $u \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$  függvényt keresünk, ami kielégíti az  $Lu = f$  egyenletet az  $\Omega$  tartományban és eleget tesz az  $u|_{\partial\Omega} = g$  ún. első peremfeltételnek, ahol  $g \in C(\partial\Omega)$ .*

**24.1.2. DEFINÍCIÓ** (HARMADIK (MÁSODIK) PÉF) *Olyan  $u \in C^2(\Omega) \cap C^1(\overline{\Omega})$  függvényt keresünk, ami kielégíti az  $Lu = f$  egyenletet az  $\Omega$  tartományban és eleget tesz az  $\partial_\nu u + h(u|_{\partial\Omega}) = g$  ún. harmadik peremfeltételnek ( $h = 0$  esetén második peremfeltételnek), ahol  $\nu$  a  $\partial\Omega$  kifelé mutató normálvektora.*

Az elliptikus egyenletek variációs típusúak abban az értelemben, hogy megadhatók egy variációs feladat Euler-Lagrange egyenleteként is. Ha ez sikerült, akkor a peremértékprobléma megoldása a variációs feladatnak is megoldása és viszont, feltéve, hogy az Euler-Lagrange egyenlet levezetésekor elvégzett számítások jogosak, azaz a megoldás  $C^2(\Omega) \cap C^1(\overline{\Omega})$ -beli. A variációs feladatnak természetesen sokkal enyhébb feltételekkel is lehet megoldása, ami a szokásos értelemben nem megoldása a peremértékfeladatnak. Ezt a peremértékfeladat *gyenge* vagy általánosított megoldásának szokás nevezni. *Klasszikus* megoldást mondunk, ha hangsúlyozni szeretnénk, hogy nem gyenge megoldásról van szó.

Mélyebb matematikai szempontból nyilvánvaló, hogy a variációs feladatnak (két speciális esetet kivéve) van megoldása, és az egyértelmű. Ezért a peremértékproblémáknak is (ezeket az eseteket kivéve) létezik (esetleg gyenge) megoldása, és az egyértelmű.<sup>1</sup> Az első peremfeltétel esetében részletesebben kimondjuk a megoldás létezéséről és egyértelműségéről szóló tételt, sőt, homogén peremfeltétel ( $g = 0$ ) esetén be is bizonyítjuk. Ehhez először egy absztrakt eredményre van szükség.

**24.1.3. DEFINÍCIÓ** A  $H$  vektortér Hilbert tér, ha

- elemei között értelmezett egy  $\langle \_, \_ \rangle$  skaláris szorzás (a skaláris szorzat tulajdonságait lásd a 21.4.1. definícióban), és
- a skalárszorzatból származtatott távolsággal teljes metrikus tér<sup>2</sup>.

**24.1.4. DEFINÍCIÓ** Legyen  $X$  vektortér. Az  $F : X \rightarrow \mathbb{R}$  (vagy  $F : X \rightarrow \mathbb{C}$ ) funkcionál lineáris, ha  $F(u + cv) = F(u) + cF(v)$ .

**24.1.5. DEFINÍCIÓ** Legyen  $X$  normált tér. Az  $F : X \rightarrow \mathbb{R}$  (vagy  $F : X \rightarrow \mathbb{C}$ ) lineáris funkcionál korlátos, ha  $\|F\| = \sup_{x \in X} \frac{|F(x)|}{\|x\|} < \infty$ .

**24.1.6. TÉTEL (RIESZ REPRESENTÁCIÓS ~)** Legyen  $H$  Hilbert tér,  $F : H \rightarrow \mathbb{R}$  (vagy  $F : H \rightarrow \mathbb{C}$ ) korlátos lineáris funkcionál. Ekkor egyértelműen létezik egy olyan  $f \in H$ , hogy minden  $x \in H$ -ra  $F(x) = \langle f, x \rangle$ .

A tétel bizonyítása sok helyen megtalálható ([4], 6.15. tétel, [1], 4.12. tétel), ezért itt nem közöljük.

Tekintsük a  $H$  Hilbert térben az  $F$  korlátos lineáris funkcionál segítségével felírt

$$E(x) = \|x\|^2 - 2F(x)$$

funkcionált.

**24.1.7. TÉTEL** Egyértelműen létezik egy olyan  $x \in H$ , melyre  $E(x)$  minimális, és ekkor  $\langle x, v \rangle = F(v)$  minden  $v \in X$ -re. Ha  $x_j$  olyan sorozat, hogy  $E(x_j) \rightarrow E(x)$ , akkor  $\lim_{j \rightarrow +\infty} \|x_j - x\| = 0$ .

**BIZONYÍTÁS** A Riesz reprezentációs tétel szerint az  $F$  korlátos lineáris funkcionál felírható, mint a  $H$  Hilbert tér egy elemével vett skaláris szorzat. Legyen ez az elem  $x$ , azaz  $\langle x, v \rangle = F(v)$  minden  $v \in X$ -re. Így

$$\begin{aligned} E(u) &= \|u\|^2 - 2F(u) = \|u\|^2 - 2\langle x, u \rangle = \|u\|^2 - 2\langle x, u \rangle + \|x\|^2 - \|x\|^2 \\ &= \|u - x\|^2 - \|x\|^2 \geq -\|x\|^2, \end{aligned}$$

<sup>1</sup>Legalábbis a harmadik (második) peremértékproblémáé. Az eddig mondottak alapján előfordulhatna, hogy egy gyenge megoldás mellett egy olyan  $C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ -beli megoldás is van az első peremértékproblémának, ami nincs  $C^2(\Omega) \cap C^1(\overline{\Omega})$ -ban, és a variációs problémának sem megoldása. Ez azonban a megfelelő differenciáloperátorra érvényes *maximum-elv* miatt nem fordulhat elő.

<sup>2</sup>azaz minden Cauchy-sorozat konvergens

és egyenlőség csak  $u = x$  esetén van.

Ha az  $x_j$  sorozat olyan, hogy  $E(x_j) \rightarrow E(x)$ , akkor az előbb kiszámoltak alapján

$$\|x_j - x\|^2 - \|x\|^2 \rightarrow -\|x\|^2, \quad (24.2)$$

azaz  $\|x_j - x\|^2 \rightarrow 0$ . □

**24.1.8. TÉTEL** (i) Az

$$E(u) = \int_{\Omega} (p |\operatorname{grad} u|^2 + qu^2 + 2fu) \longrightarrow \min \quad u|_{\partial\Omega} = g$$

variációs feladat Euler-Lagrange egyenlete  $Lu = f$ .

- (ii) Ha van olyan  $\Omega$ -n értelmezett, differenciálható<sup>3</sup> függvény, amely az  $\Omega$  halmaz határán  $g$ -vel egyenlő,<sup>4</sup> akkor a variációs feladatnak van megoldása,<sup>5</sup> és az egyértelmű.
- (iii) Ha  $u \in C^2(\Omega) \cap C^1(\overline{\Omega})$ , akkor  $u$  pontosan akkor minimalizálja az  $E$  funkcionált, ha megoldása az első peremértékproblémának.
- (iv) Ha van olyan  $\Omega$ -n értelmezett, differenciálható<sup>3</sup> függvény, amely az  $\Omega$  halmaz határán  $g$ -vel egyenlő,<sup>4</sup> akkor az első peremértékproblémának pontosan egy  $u$  (esetleg gyenge) megoldása van.<sup>5</sup> Ha  $u \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ , akkor  $u$  klasszikus megoldás.

**BIZONYÍTÁS** Csak homogén első peremfeltétel, azaz  $u|_{\partial\Omega} = g = 0$  mellett bizonyítunk. Szorozzuk be  $Lu = f$  egyenletet egy  $v \in C_0^1(\Omega)$  függvénnyel, azaz egy olyan folytonosan differenciálható függvénnyel, ami nulla  $\Omega$  határán, és integráljuk mindkét oldalt:

$$\int_{\Omega} \operatorname{div}(p \operatorname{grad} u) v - quv = \int_{\Omega} f v.$$

A szorzat deriváltja alapján

$$\int_{\Omega} \operatorname{div}(p \operatorname{grad} u \cdot v) - p \operatorname{grad} u \operatorname{grad} v - quv = \int_{\Omega} f v.$$

Az első tagot a Gauss-Ostrogradszkij-tétellel át tudjuk alakítani a  $\partial\Omega$  halmazon vett integrállá,<sup>6</sup> ahol  $v$  nulla, ezért

$$-\int_{\Omega} p \operatorname{grad} u \operatorname{grad} v + quv = \int_{\Omega} f v, \quad \forall v \in C_0^1(\Omega). \quad (24.3)$$

Tekintsük a  $C_0^1(\Omega)$  függvényteret az

$$\langle f, g \rangle = \int_{\Omega} (p \operatorname{grad} f \operatorname{grad} g + qfg)$$

<sup>3</sup>pontosabban:  $H^1(\Omega)$ -beli

<sup>4</sup>Ha nincs ilyen, akkor „rosszul adtuk meg a peremfeltételeket”

<sup>5</sup>a  $H^1(\Omega)$  Szoboljev-térben; ha pedig  $g = 0$ , akkor a bizonyításban  $X$ -ként szereplő  $H_0^1(\Omega)$  Szoboljev-térben

<sup>6</sup> feltéve, hogy  $u \in C^2(\Omega)$ , azaz  $\operatorname{grad} u$  és így  $p \operatorname{grad} u \cdot v$  folytonosan differenciálható, valamint  $\operatorname{grad} u$  folytonosan kiterjeszthető  $\partial\Omega$ -ra, azaz  $u \in C^1(\overline{\Omega})$  is.

skalárszorzattal. Sajnos ez nem teljes, tegyük teljessé (vegyük hozzá a hiányzó függvényeket<sup>7</sup>), és amit így kapunk, az legyen  $X$ . Legyen az  $F : X \rightarrow \mathbb{R}$  funkcionál a következő:

$$F(v) = - \int_{\Omega} f v,$$

korlátos és lineáris. Azt a feladatot kell megoldanunk, hogy

$$\langle u, v \rangle = F(v)$$

minden  $v$ -re. Ennek a megoldása az előző tétel szerint az  $E(u) = \|u\|^2 - 2F(u)$  funkcionál, azaz a tétel (i) részében megadott funkcionál egyértelmű minimuma, jelölje  $x$ . Tehát a bővebb  $X$  térben létezik, és egyértelmű a megoldás. Ha  $x \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ , akkor az eredetileg adott feltételekkel is van megoldás. Ha nem, akkor csak gyenge megoldás létezik.  $\square$

---

<sup>7</sup>többféle matematikai konstrukció is létezik, ami megmondja, hogy ezt pontosan hogyan kell megtenni. Itt csak annyi a fontos, hogy ezt meg lehet tenni.



## 25. fejezet

# Ritz-Galjorkin módszer

### 25.1. Elméleti összefoglaló

Eredetileg a Ritz módszer a variációs probléma megoldására szolgált, a Galjorkin módszer pedig a PDE megoldására. Nem csak az igaz azonban, hogy minden elliptikus egyenlet egy variációs feladat Euler-Lagrange egyenlete, tehát a megoldásuk ugyanaz<sup>1</sup>, hanem a két módszer végrehajtása során ugyanazokat a számításokat kell elvégezni, és ezeknek az eredménye a megoldásnak ugyanaz a közelítése lesz mindkét esetben!

A matematikai háttér részben levezetjük, hogy az

$$u_n = c_1 \varphi_1 + c_2 \varphi_2 + \dots + c_n \varphi_n$$

alakú közelítő megoldás kiszámításához egy

$$A \begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d_1 \\ \vdots \\ d_n \end{pmatrix}$$

alakú lineáris egyenletrendszer kell megoldani, ahol  $a_{ij} = \langle \varphi_i, \varphi_j \rangle$  valamilyen – a differenciáloperátortól és a peremfeltételektől függő – skalárszorzattal, és  $d_i = -\int_{\Omega} f \varphi_i$ . Ha  $n$  végtelenhez tart, akkor  $u_n$   $u$ -hoz tart egy olyan konvergencia szerint, ami erősebb, mint az egyenletes konvergencia, de gyengébb, mint a deriváltak egyenletes konvergenciája.

A mérnöki gyakorlatban a  $\varphi_j$  bázisfüggvények megfelelő felvétele az első lépés. Mi most csak a megoldás kiszámítására összpontosítunk, ezért a feladatokban a bázisfüggvényeket is mindig megadjuk. A

$$-y'' + q(x)y = f(x), \quad x \in (a, b)$$

speciális egydimenziós egyenlet esetén az első és a második peremfeltételt vizsgáljuk részletesebben.

---

<sup>1</sup>lásd a 24.1.8. tételt

Első peremfeltétel ( $y(a) = y(b) = 0$ ) esetén<sup>2</sup>

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}, a_{ij} = \langle \varphi_i, \varphi_j \rangle = \int_a^b \varphi_i'(x) \varphi_j'(x) + q(x) \varphi_i(x) \varphi_j(x) \, dx,$$

$$\mathbf{d} = \begin{pmatrix} d_1 \\ \vdots \\ d_n \end{pmatrix}, \quad d_i = \int_a^b f(x) \varphi_i(x) \, dx.$$

Második peremfeltétel ( $y'(a) = y'(b) = 0$ ) esetén célszerű az  $A$  mátrix és a  $\mathbf{d}$  vektor elemeit nullától indexelni:

$$A = \begin{pmatrix} a_{00} & \dots & a_{0n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n0} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}, a_{ij} = \langle \varphi_i, \varphi_j \rangle = \int_a^b \varphi_i'(x) \varphi_j'(x) + q(x) \varphi_i(x) \varphi_j(x) \, dx,$$

$$\mathbf{d} = \begin{pmatrix} d_0 \\ \vdots \\ d_n \end{pmatrix}, \quad d_i = \int_a^b f(x) \varphi_i(x) \, dx,$$

és<sup>2</sup> itt persze

$$u_n = c_0 \varphi_0 + c_1 \varphi_1 + \dots + c_n \varphi_n.$$

Az integrálok gyors kiszámításához felhasználjuk az alábbi összefüggéseket:

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta, \quad (25.1)$$

$$\cos(\alpha - \beta) = \cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta. \quad (25.2)$$

Ha ezeket összeadjuk, illetve az alsóból a felsőt kivonjuk, akkor

$$\frac{1}{2}(\cos(\alpha + \beta) + \cos(\alpha - \beta)) = \cos \alpha \cos \beta, \quad (25.3)$$

$$\frac{1}{2}(\cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta)) = \sin \alpha \sin \beta. \quad (25.4)$$

Ez utóbbiak segítségével egy trigonometrikus függvények szorzatából álló kifejezést ki tudunk cserélni két, egyenként eggyel kevesebb függvény szorzatából álló tag összegére vagy különbségére. Ha pedig már csak két függvény szorzatát integráljuk, akkor a  $\{\sin nx | n \geq 1\}$  illetve az  $\{\cos nx | n \geq 0\}$  ortogonalitása miatt

$$\int_0^\pi \sin nx \sin mx = \begin{cases} 0, & \text{ha } n \neq m \\ \frac{\pi}{2} & \text{ha } n = m, \end{cases} \quad (n, m \geq 1), \quad (25.5)$$

$$\int_0^\pi \cos nx \cos mx = \begin{cases} 0, & \text{ha } n \neq m \\ \frac{\pi}{2} & \text{ha } n = m, \end{cases} \quad (n, m \geq 0), \quad (25.6)$$

<sup>2</sup> $d_i$  képletében a mínusz előjel nem kell, mert a második derivált előjele fordított a többdimenziós Laplace-operátor előjeléhez képest.

speciálisan

$$\int_0^\pi \cos nx = 0 \quad (n \geq 1). \quad (25.7)$$

Két különböző típusú trigonometrikus függvény szorzatintegrálját a

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta, \quad (25.8)$$

$$\sin(\alpha - \beta) = \sin \alpha \cos \beta - \cos \alpha \sin \beta. \quad (25.9)$$

összegfüggések átlagaként adódó

$$\frac{1}{2}(\sin(\alpha + \beta) + \sin(\alpha - \beta)) = \sin \alpha \cos \beta. \quad (25.10)$$

képlet segítségével átírhatjuk két szinusz összegévé vagy különbségévé, végül pedig

$$\int_0^\pi \sin nx \, dx = \left[ -\frac{\cos nx}{n} \right]_0^\pi = \begin{cases} 0, & \text{ha } n \text{ páros,} \\ 2, & \text{ha } n \text{ páratlan.} \end{cases} \quad (25.11)$$

## 25.2. Kidolgozott példák

**25.2.1. KIDOLGOZOTT FELADAT** Legyen  $q(x) = 2 + \cos 2x$ ,  $f(x) = \cos^3 x$ . Keressük a

$$-y'' + q(x)y = f(x) \quad x \in (0, \pi), \quad y'(0) = y'(\pi) = 0$$

peremértékprobléma közelítő megoldását  $y_2(x) = c_0 + c_1 \cos x + c_2 \cos 2x$  alakban.

**MEGOLDÁS** A próbafüggvények most  $\varphi_0(x) = 1$ ,  $\varphi_n(x) = \cos nx$ .  $\mathbf{c}$  az  $A\mathbf{c} = \mathbf{d}$  egyenletrendszer megoldása, ahol

$$A = \begin{pmatrix} a_{00} & a_{01} & a_{02} \\ a_{10} & a_{11} & a_{12} \\ a_{20} & a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}, \quad a_{ij} = \langle \varphi_i, \varphi_j \rangle = \int_0^\pi \varphi_i'(x) \varphi_j'(x) + q(x) \varphi_i(x) \varphi_j(x) \, dx$$

$$\mathbf{d} = \begin{pmatrix} d_0 \\ d_1 \\ d_2 \end{pmatrix}, \quad d_i = \int_0^\pi f(x) \varphi_i(x) \, dx.$$

A megadott adatokkal

$$\begin{aligned}
 a_{00} &= \langle \varphi_0, \varphi_0 \rangle = \int_0^\pi 2 + \cos 2x \, dx = 2\pi, \\
 a_{01} &= \langle \varphi_0, \varphi_1 \rangle = \int_0^\pi (2 + \cos 2x) \cos x \, dx = 0, \\
 a_{02} &= \langle \varphi_0, \varphi_2 \rangle = \int_0^\pi (2 + \cos 2x) \cos 2x \, dx = \frac{\pi}{2}, \\
 a_{10} &= a_{01}, \\
 a_{11} &= \langle \varphi_1, \varphi_1 \rangle = \int_0^\pi \sin^2 x + (2 + \cos 2x) \cos^2 x \, dx \\
 &= \int_0^\pi \frac{1 - \cos 2x}{2} + (2 + \cos 2x) \frac{1 + \cos 2x}{2} \, dx = \frac{7}{4}\pi, \\
 a_{12} &= \langle \varphi_1, \varphi_2 \rangle = \int_0^\pi 2 \sin x \sin 2x + (2 + \cos 2x) \cos x \cos 2x \, dx \\
 &= \int_0^\pi (\cos 3x + \cos x) + (2 + \cos 2x) \frac{\cos x - \cos 3x}{2} \, dx = 0, \\
 a_{20} &= a_{02}, \\
 a_{21} &= a_{12}, \\
 a_{22} &= \langle \varphi_2, \varphi_2 \rangle = \int_0^\pi 4 \sin^2 2x + (2 + \cos 2x) \cos^2 2x \, dx \\
 &= \int_0^\pi 4 \frac{1 - \cos 4x}{2} + (2 + \cos 2x) \frac{1 + \cos 4x}{2} \, dx = 3\pi,
 \end{aligned}$$

kiszámoltuk az  $A$  mátrix elemeit.

$$\begin{aligned}
 \cos^3 x &= \frac{1 + \cos 2x}{2} \cos x = \frac{1}{2} \cos x + \frac{1}{2} \cos 2x \cos x = \frac{1}{2} \cos x + \frac{1}{2} \cos 2x \cos x \\
 &= \frac{1}{2} \cos x + \frac{1}{4} (\cos x - \cos 3x) = \frac{3}{4} \cos x - \frac{1}{4} \cos 3x,
 \end{aligned}$$

ezért

$$\begin{aligned}
 d_0 &= \int_0^\pi \cos^3 x \, dx = \int_0^\pi \frac{3}{4} \cos x - \frac{1}{4} \cos 3x \, dx = 0, \\
 d_1 &= \int_0^\pi \cos^3 x \cos x \, dx = \int_0^\pi \frac{3}{4} \cos^2 x - \frac{1}{4} \cos 3x \cos x \, dx = \frac{3}{4} \frac{\pi}{2} = \frac{3}{8}\pi, \\
 d_2 &= \int_0^\pi \cos^3 x \cos 2x \, dx = \int_0^\pi \frac{3}{4} \cos x \cos 2x - \frac{1}{4} \cos 3x \cos 2x \, dx = 0.
 \end{aligned}$$

Azaz a

$$\begin{pmatrix} 2\pi & 0 & \frac{\pi}{2} \\ 0 & \frac{7}{4}\pi & 0 \\ \frac{\pi}{2} & 0 & 3\pi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_0 \\ c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{3}{8}\pi \\ 0 \end{pmatrix}.$$

egyenletrendszer kell megoldanunk. A középső egyenletből  $c_1 = \frac{3}{14}$ , a két másiktól pedig  $c_0 = c_2 = 0$ , tehát a közelítő megoldás  $y_2(x) = \frac{3}{14} \cos x$ .  $\square$

**25.2.2. KIDOLGOZOTT FELADAT** Legyen  $q(x) = 2 + \cos 3x$ ,  $f(x) = \cos 2x \sin 4x$ . Keressük  $a$

$$-y'' + q(x)y = f(x) \quad x \in (0, \pi), \quad y(0) = y(\pi) = 0$$

peremértékprobléma közelítő megoldását  $y_3(x) = c_1 \sin x + c_2 \sin 2x + c_3 \sin 3x$  alakban.

**MEGOLDÁS** A próbafüggvények ezúttal  $\varphi_n(x) = \sin nx$ . Ismét  $\mathbf{c}$  az  $A\mathbf{c} = \mathbf{d}$  egyenletrendszer megoldása, ahol most

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}, a_{ij} = \langle \varphi_i, \varphi_j \rangle = \int_0^\pi \varphi_i'(x) \varphi_j'(x) + q(x) \varphi_i(x) \varphi_j(x) \, dx$$

$$\mathbf{d} = \begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \end{pmatrix}, \quad d_i = \int_0^\pi f(x) \varphi_i(x) \, dx.$$

A megadott adatokkal

$$\begin{aligned} a_{11} &= \langle \varphi_1, \varphi_1 \rangle = \int_0^\pi \cos^2 x + (2 + \cos 3x) \sin^2 x \, dx \\ &= \int_0^\pi \frac{1 + \cos 2x}{2} + (2 + \cos 3x) \frac{1 - \cos 2x}{2} \, dx = \frac{3}{2} \pi, \\ a_{12} &= \langle \varphi_1, \varphi_2 \rangle = \int_0^\pi 2 \cos x \cos 2x + (2 + \cos 3x) \sin x \sin 2x \, dx \\ &= \int_0^\pi (2 + \cos 3x) \frac{\cos x - \cos 3x}{2} \, dx = -\frac{\pi}{4}, \\ a_{13} &= \langle \varphi_1, \varphi_3 \rangle = \int_0^\pi 3 \cos x \cos 3x + (2 + \cos 3x) \sin x \sin 3x \, dx \\ &= \int_0^\pi (2 + \cos 3x) \frac{\cos 2x - \cos 4x}{2} \, dx = 0, \\ a_{21} &= a_{12}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 a_{22} &= \langle \varphi_2, \varphi_2 \rangle = \int_0^\pi 4 \cos^2 2x + (2 + \cos 3x) \sin^2 2x \, dx \\
 &= \int_0^\pi 4 \frac{1 + \cos 4x}{2} + (2 + \cos 3x) \frac{1 - \cos 4x}{2} \, dx = 3\pi, \\
 a_{23} &= \langle \varphi_2, \varphi_3 \rangle = \int_0^\pi 6 \cos 2x \cos 3x + (2 + \cos 3x) \sin 2x \sin 3x \, dx \\
 &= \int_0^\pi (2 + \cos 3x) \frac{\cos x - \cos 5x}{2} \, dx = 0, \\
 a_{31} &= a_{13}, \\
 a_{32} &= a_{23}, \\
 a_{33} &= \langle \varphi_3, \varphi_3 \rangle = \int_0^\pi 9 \cos^2 3x + (2 + \cos 3x) \sin^2 3x \, dx \\
 &= \int_0^\pi 9 \frac{1 + \cos 6x}{2} + (2 + \cos 3x) \frac{1 - \cos 6x}{2} \, dx = \frac{11}{2} \pi,
 \end{aligned}$$

kiszámoltuk az  $A$  mátrix elemeit. A jobb oldalon szereplő  $f(x)$  függvény egyszerűbben

$$\cos 2x \sin 4x = \frac{1}{2}(\sin 6x + \sin 2x),$$

ezért

$$\begin{aligned}
 d_1 &= \int_0^\pi \cos 2x \sin 4x \sin x \, dx = \int_0^\pi \frac{1}{2}(\sin 6x + \sin 2x) \sin x \, dx = 0, \\
 d_2 &= \int_0^\pi \cos 2x \sin 4x \sin 2x \, dx = \int_0^\pi \frac{1}{2}(\sin 6x + \sin 2x) \sin 2x \, dx = \frac{\pi}{4}, \\
 d_3 &= \int_0^\pi \cos 2x \sin 4x \sin 3x \, dx = \int_0^\pi \frac{1}{2}(\sin 6x + \sin 2x) \sin 3x \, dx = 0.
 \end{aligned}$$

Azaz a

$$\begin{pmatrix} \frac{3}{2}\pi & -\frac{\pi}{4} & 0 \\ -\frac{\pi}{4} & 3\pi & 0 \\ 0 & 0 & \frac{11}{2}\pi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{\pi}{4} \\ 0 \end{pmatrix}$$

egyenletrendszert kell megoldanunk. A harmadik egyenletből  $c_3 = 0$ , míg az első kettőből  $c_1 = \frac{1}{71}$  és  $c_2 = \frac{6}{71}$ , ezért a peremértékfeladat közelítő megoldása  $y_3(x) = \frac{1}{71} \sin x + \frac{6}{71} \sin 2x$ .  $\square$

## 25.3. Gyakorló feladatok

25.3.1. **FELADAT** Legyen  $q(x) = 6 - 5 \cos 2x$ ,  $f(x) = \cos^2 x + 1$ . Keressük a

$$-y'' + q(x)y = f(x) \quad x \in (0, \pi), \quad y'(0) = y'(\pi) = 0$$

peremértékprobléma közelítő megoldását  $y_2(x) = c_0 + c_1 \cos x + c_2 \cos 2x$  alakban.

25.3.2. **FELADAT** Legyen  $q(x) = 5$ ,  $f(x) = \sin 2x$ . Keressük a

$$-y'' + q(x)y = f(x) \quad x \in (0, \pi), \quad y(0) = y(\pi) = 0$$

peremértékprobléma közelítő megoldását  $y_3(x) = c_1 \sin x + c_2 \sin 2x + c_3 \sin 3x$  alakban.

25.3.3. **FELADAT** Legyen  $q(x) = 6 - 5 \cos 2x$ ,  $f(x) = 2 \sin 2x$ . Keressük a

$$-y'' + q(x)y = f(x) \quad x \in (0, \pi), \quad y(0) = y(\pi) = 0$$

peremértékprobléma közelítő megoldását  $y_3(x) = c_1 \sin x + c_2 \sin 2x + c_3 \sin 3x$  alakban.

## 25.4. Matematikai háttér

Legyen  $\Omega \in \mathbb{R}^n$ ,  $p(x) > 0$ ,  $q(x) > 0$ ,  $f$  adott (az  $\Omega$  halmazra, valamint a függvények folytonosságra és a differenciálhatóságra vonatkozó feltételeket lásd az előző részben). Az egyszerűség kedvéért a módszert homogén első peremfeltétel esetén ( $u|_{\Omega} = g = 0$ ) ismertetjük. Ekkor az alábbi feladatokat szeretnénk megoldani:

$$E(u) = \int_{\Omega} p |\operatorname{grad} u|^2 - qu^2 + 2fu \rightarrow \min, \quad (\text{Ritz})$$

$$\operatorname{div}(p \operatorname{grad} u) - qu = f. \quad (\text{Galjorkin})$$

Mindkettő ugyanannak a feladatnak a megoldására vezet (lásd (24.3)-at a 24.1.8. tétel bizonyításában):

$$\int_{\Omega} p \nabla u \nabla v + quv = - \int_{\Omega} f v$$

minden  $v \in C_0^1(\Omega)$ -ra.

25.4.1. **DEFINÍCIÓ** A  $\{\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n, \dots\}$  függvényrendszer teljes (vagy zárt) az  $X$  függvénytérben, ha minden  $x \in X$  tetszőlegesen közelíthető a  $\varphi$  függvények lineáris kombinációjával, azaz minden  $\varepsilon > 0$ -ra létezik  $N$  és  $c_1, c_2, \dots, c_N$  konstansok úgy, hogy

$$\|x - (c_1 \varphi_1 + c_2 \varphi_2 + \dots + c_N \varphi_N)\| < \varepsilon.$$

Vegyük  $C_0^1(\Omega)$ -t, az  $\langle f, g \rangle = \int_{\Omega} p \nabla f \nabla g + qfg$  skalárszorzattal, tegyük teljessé, legyen ez  $X$ . Legyenek a  $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n, \dots \in X$  függvények adottak úgy, hogy a  $\{\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n, \dots\}$  függvényrendszer teljes  $X$ -ben. Legyen

$$X_n = \{c_1 \varphi_1 + c_2 \varphi_2 + \dots + c_n \varphi_n | c_n \in \mathbb{R}\}$$

az  $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n, \dots$  függvények által generált altér  $X$ -ben. Ezekkel a jelölésekkel az előző feladatot a következőképpen fogalmazhatjuk meg:

Keressük  $u \in X$ -et, amelyre  $\langle u, v \rangle = - \int_{\Omega} f v$  minden  $v \in X$ -re.

Ennek a közelítő megoldását az alábbi módon választjuk meg: Legyen  $u_n \in X_n$  olyan, hogy  $\langle u_n, v \rangle = - \int_{\Omega} f v$  minden  $v \in X_n$ -re.

25.4.2. **MEGJEGYZÉS** A Galjorkin módszer ötlete az, hogy keressünk

$$u_n = c_1 \varphi_1 + c_2 \varphi_2 + \dots + c_n \varphi_n$$

alakú közelítő megoldást, azaz keressük meg az első peremértékprobléma közelítő megoldását az  $X_n$  térben. A Ritz módszer ötlete az, hogy próbáljuk  $E(u)$ -t minimalizálni az

$$c_1 \varphi_1 + c_2 \varphi_2 + \dots + c_n \varphi_n$$

alakú függvények között, azaz megint csak az  $X_n$  térben. Ahhoz hasonlóan, ahogy a 24.1.8. tétel bizonyításában a (24.3) egyenletet levezettük, belátható, hogy mindkét esetben azt az  $u_n \in X_n$  elemet kell kiszámolnunk, amelyre  $\langle u_n, v \rangle = -\int_{\Omega} f v$  minden  $v \in X_n$ -re.

Nézzük akkor, hogyan számítható ki az  $u_n \in X_n$  közelítő megoldás, és mekkora a hibája. Ha

$$u_n = c_1 \varphi_1 + c_2 \varphi_2 + \dots + c_n \varphi_n$$

alakú, akkor

$$\langle c_1 \varphi_1 + c_2 \varphi_2 + \dots + c_n \varphi_n, v \rangle = -\int_{\Omega} f \varphi_k \quad \forall k.$$

Azaz

$$A \begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d_1 \\ \vdots \\ d_n \end{pmatrix},$$

ahol  $a_{ij} = \langle \varphi_i, \varphi_j \rangle$ ,  $d_i = -\int_{\Omega} f \varphi_i$ .

### 25.4.3. TÉTEL

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \|u_n - u\|_X = 0,$$

ha  $u$  a variációs probléma megoldása vagy a PDE gyenge megoldása.

**BIZONYÍTÁS** A 24.1.7. tétel szerint, ha  $E(u_n) \rightarrow E(u)$ , akkor  $\|u_n - u\|_X = 0$ , ezért elég az előbbi belátni. A  $\{\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n, \dots\}$  függvényrendszer teljessége miatt  $\varepsilon = \frac{1}{k}$ -ra létezik  $v_k$ ,  $N_k$  és  $c_1, c_2, \dots, c_{N_k}$  úgy, hogy  $v_k = c_1 \varphi_1 + c_2 \varphi_2 + \dots + c_{N_k} \varphi_{N_k}$  és

$$\|u - v_k\| < \varepsilon.$$

Mivel  $v_k \rightarrow u$ , ezért  $E(v_k) \rightarrow E(u)$ , miközben  $E(v_k) \geq E(u)$ , hiszen  $E(u)$  minimális. Ugyanakkor  $u_n$  minimalizálja  $E$ -t az  $X_n$  altérben, az alterek tartalmazzák egymást, ezért  $E(u_n)$  monoton csökken, és minden  $n > N_k$ -ra  $E(v_k) \geq E(u_n)$ , azaz minden rögzített  $k$ -ra  $\limsup E(u_n) - E(u) \leq E(v_k) - E(u) \rightarrow 0$ , azaz  $E(u_n) \rightarrow E(u)$ .  $\square$

Az, hogy  $\|u_n - u\|_X \rightarrow 0$ , korlátos  $\Omega$  halmaz esetén jóval erősebb, mint az egyenletes konvergencia. A konvergencia sebessége és az egyes lépések során szükséges számítások mennyisége a  $\varphi$  függvényektől függ. Ezeket úgy célszerű megválasztani, hogy  $A$  ritka mátrix legyen.



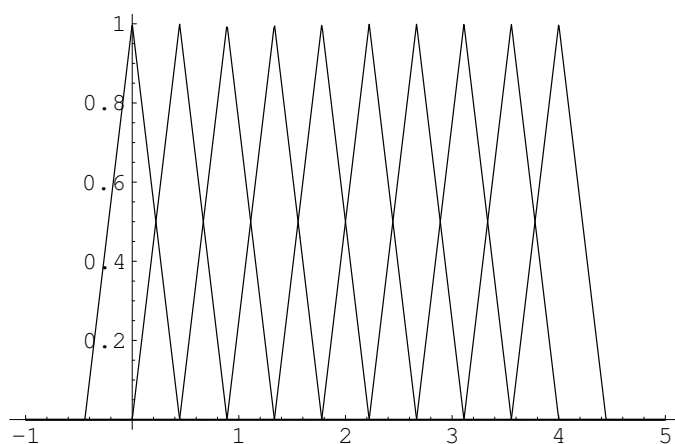
25.4.4. **PÉLDA** egy dimenzióban ha a

$$-y'' + qy = f$$

egyenletet oldjuk meg ( $q \geq 0$ ), akkor  $X$  a  $C_0^1(a, b)$  teljessé tétele,  $\langle u, v \rangle = \int_a^b u'v' + quv$ .

Legyen  $\varphi(x) = \begin{cases} 1 - |x| & \text{ha } |x| < 1, \\ 0 & \text{különben.} \end{cases}$  Az ábrán látható  $\varphi_j(x) = \varphi(\frac{b-a}{n}(x - \frac{ja+(n-j)b}{n}))$

függvényekkel  $\langle \varphi_i, \varphi_j \rangle = 0$ , ha  $i$  és  $j$  nem szomszédos. Ebből következik, hogy az  $A$  mátrix tridiagonális lesz.



25.1. ábra.  $a = 0, b = 4, n = 9$ .

## 26. fejezet

# Ortogonalis rendszerek

### 26.1. Elméleti összefoglaló

Két vektor merőleges, más szóval *ortogonalis*, ha a skalárszorzatuk nulla. Ha egy halmazon tudunk skaláris szorzást értelmezni, akkor a merőlegességnek is lesz értelme. Ez azért hasznos, mert így sok esetben a geometriai szemléletünket is segítségül hívhatjuk.

Szimmetrikus mátrix sajátirányai merőlegesek. Ehhez hasonlóan igaz, hogy vannak szimmetrikus<sup>1</sup> operátorok, adott esetben differenciáloperátorok, és ezek sajátfüggvényei is ortogonálisak.<sup>2</sup>

Ortogonalis rendszerre példa a  $\{\sin nx | n \geq 1\}$  halmaz a  $[0, \pi]$ -n értelmezett, négyzetesen integrálható függvények körében,<sup>3</sup> vagy az  $\{1, \cos nx, \sin nx | n \geq 1\}$  halmaz a  $[-\pi, \pi]$ -n értelmezett, négyzetesen integrálható függvények körében. Ezek a rendszerek *teljesek* is: nem lehet olyan nemnulla függvényt találni, ami a rendszer összes elemére merőleges. Hiszen, ha volna ilyen függvény, annak a Fourier-sorában minden együttható nulla lenne.

### 26.2. Kidolgozott példák

#### 26.2.1. KIDOLGOZOTT FELADAT (HERMITE-FÜGGVÉNYEK)

Legyen  $y_n(x)$  az

$$-y'' + x^2 y = (2n + 1)y$$

egyenlet végtelenben nullához tartó megoldása,<sup>4</sup>  $y_m(x)$  pedig az

$$-y'' + x^2 y = (2m + 1)y$$

egyenlet végtelenben nullához tartó megoldása. Bizonyítsuk be, hogy

$$\int_{-\infty}^{+\infty} y_n(x) y_m(x) dx = 0,$$

<sup>1</sup>komplex esetben hermitikus, vagy önadjungált

<sup>2</sup>A bizonyítást és a szimmetrikus operátor definícióját lásd a matematikai háttérnél.

<sup>3</sup>ha a skalárszorzat a szokásos  $\langle f, g \rangle = \int_0^\pi f \bar{g}$

ha  $n \neq m$ .

**MEGOLDÁS** Az  $y_n$ -re vonatkozó egyenletet felhasználva

$$(2n+1) \int_{-\infty}^{+\infty} y_n(x) y_m(x) dx = \int_{-\infty}^{+\infty} [-y_n(x)'' + x^2 y_n(x)] y_m(x) dx.$$

Az első tagban kétszer parciálisan integrálunk. A peremfeltétel ( $y(\pm\infty) = 0$ ) miatt a megváltozások nullák.

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} [-y_n(x)'' + x^2 y_n(x)] y_m(x) dx &= \int_{-\infty}^{+\infty} -y_n(x) y_m''(x) + x^2 y_n(x) y_m(x) dx \\ &= (2m+1) \int_{-\infty}^{+\infty} y_n(x) y_m(x) dx, \end{aligned}$$

ahol a második egyenlőségben az  $y_m$ -re vonatkozó egyenletet használtuk fel. Azt kaptuk, hogy

$$(2n+1) \int_{-\infty}^{+\infty} y_n(x) y_m(x) dx = (2m+1) \int_{-\infty}^{+\infty} y_n(x) y_m(x) dx,$$

ami  $n \neq m$ -re csak akkor teljesülhet, ha  $\int_{-\infty}^{+\infty} y_n(x) y_m(x) dx = 0$ . □

### 26.2.2. KIDOLGOZOTT FELADAT (LEGENDRE-POLINOMOK)

A  $P_n(x)$  Legendre-polinomok az alábbi differenciálegyenlet  $\pm 1$ -ben korlátos megoldásai:

$$\frac{d}{dx} [(1-x^2)y'] + n(n+1)y = 0.$$

Bizonyítsuk be, hogy ha  $n \neq m$ , akkor

$$\int_{-1}^1 P_n(x) P_m(x) dx = 0.$$

**MEGOLDÁS** A  $P_n$ -re vonatkozó differenciálegyenletet felhasználva

$$n(n+1) \int_{-1}^1 P_n(x) P_m(x) dx = - \int_{-1}^1 [(1-x^2)P_n'(x)]' P_m(x) dx.$$

Parciális integrálással ez a

$$- [(1-x^2)P_n'(x)P_m(x)]_{-1}^1 + \int_{-1}^1 (1-x^2)P_n'(x)P_m'(x) dx.$$

<sup>4</sup>A megadott egyenlet a harmonikus oszcillátor egyenlete. Ismert, hogy  $y_n(x) = e^{-x^2/2} H_n(x)$ , ahol  $H_n(x)$  az  $n$ -edik Hermite-polinom.

alakra hozható. A szögletes zárójelben lévő függvény 1-ben és  $-1$ -ben 0 az  $1 - x^2$  szorzótényező miatt, így a megváltozás is 0. Ugyanígy ( $m$  és  $n$  felcserélésével) levezethetjük, hogy

$$m(m+1) \int_{-1}^1 P_n(x) P_m(x) dx = \int_{-1}^1 (1-x^2) P_n'(x) P_m'(x) dx,$$

azaz

$$n(n+1) \int_{-1}^1 P_n(x) P_m(x) dx = m(m+1) \int_{-1}^1 P_n(x) P_m(x) dx,$$

ami miatt  $\int_{-1}^1 P_n(x) P_m(x) dx = 0$ . □

### 26.2.3. KIDOLGOZOTT FELADAT (LAGUERRE POLINOMOK)

Bizonyítsuk be, hogy ha minden  $n \geq 0$  egész számra az  $L_n(x)$   $n$ -edfokú polinom a

$$-xL_n'' + (x-1)L_n' = nL_n \quad x \in (0, +\infty)$$

egyenlet megoldása,<sup>5</sup> akkor  $m \neq n$  esetén

$$\int_0^{+\infty} e^{-x} L_n(x) L_m(x) dx = 0.$$

### MEGOLDÁS

$$n \int_0^{+\infty} e^{-x} L_n(x) L_m(x) dx = \int_0^{+\infty} e^{-x} (-xL_n''(x) + (x-1)L_n'(x)) L_m(x) dx,$$

ha felhasználjuk az  $L_n$ -re vonatkozó differenciálegyenletet. A jobb oldal

$$\int_0^{+\infty} - (e^{-x} x L_n'(x))' L_m(x) dx$$

alakba is írható (ezt ajánlatos észrevenni, különben a megoldás sokkal hosszabb lesz). Parciális integrálással ez a

$$[- (e^{-x} x L_n'(x)) L_m(x)]_0^{+\infty} + \int_0^{+\infty} e^{-x} x L_n'(x) L_m'(x) dx$$

alakra hozható. A szögletes zárójelben lévő függvény a nullában 0 az  $x$ -es szorzótényező miatt, a végtelenben pedig polinom  $\cdot e^{-x}$  határértéke 0, így a megváltozás is 0. Ugyanígy ( $m$  és  $n$  felcserélésével) levezethetjük, hogy

$$m \int_0^{+\infty} e^{-x} L_n(x) L_m(x) dx = \int_0^{+\infty} e^{-x} x L_n'(x) L_m'(x) dx,$$

azaz

$$n \int_0^{+\infty} e^{-x} L_n(x) L_m(x) dx = m \int_0^{+\infty} e^{-x} L_n(x) L_m(x) dx,$$

ami miatt  $\int_0^{+\infty} e^{-x} L_n(x) L_m(x) dx = 0$ . □

<sup>5</sup>ezek az ún. Laguerre polinomok, amelyek például a hidrogénatom Schrödinger-egyenletének a megoldása során bukkannak fel

## 26.3. Gyakorló feladatok

26.3.1. **FELADAT** Bizonyítsuk be, hogy ha  $y_n$  a

$$-y'' + 8 \sin 5x \cdot y = n^6 y \quad x \in (0, \pi)$$

egyenlet megoldása,  $y_m$  a

$$-y'' + 8 \sin 5x \cdot y = m^6 y \quad x \in (0, \pi)$$

egyenlet megoldása,  $m \neq n$  pozitív egészek,  $y'_m(0) = y'_m(\pi) = y'_n(0) = y'_n(\pi) = 0$ , akkor<sup>6</sup>

$$\int_0^\pi y_n(x) y_m(x) dx = 0.$$

## 26.4. Matematikai háttér

A kidolgozott feladatok mindegyike speciális esete a „szimmetrikus (differenciál)operátor különböző sajátértékekhez tartozó sajátfüggvényei merőlegesek” állításnak, amit ugyanúgy kell bizonyítani, mint azt, hogy „szimmetrikus mátrix különböző sajátértékekhez tartozó sajátvektorai merőlegesek”.

Jelöljön  $L$  egyszerre egy szimmetrikus mátrixot, illetve az első kidolgozott feladat  $y \mapsto -y'' + x^2 y$  operátorát. Legyen  $\lambda$  és  $\mu$  két különböző sajátértéke  $L$ -nek,  $v$  és  $w$  pedig legyen hozzájuk tartozó sajátvektor, ha  $L$  mátrix, és sajátfüggvény, ha  $L$  differenciáloperátor. Ekkor

$$\lambda \langle v, w \rangle = \langle Lv, w \rangle = \langle v, Lw \rangle = \mu \langle v, w \rangle, \quad (26.1)$$

ahonnan  $\langle v, w \rangle = 0$ . A két szélső egyenlőségnél azt használtuk ki, hogy  $v$  és  $w$  sajátvektor/sajátfüggvény, a középsőnél azt, hogy  $L$  szimmetrikus. Ez a mátrix esetben nem szorul bizonyításra, az operátor esetben ennél a lépésnél kell a két parciális integrálás.

Ennek megfelelően

**26.4.1. DEFINÍCIÓ** Az  $L$  differenciáloperátort szimmetrikusnak nevezzük, ha minden eleendően sokszor folytonosan differenciálható  $v$  és  $w$  függvényre  $\langle Lv, w \rangle = \langle v, Lw \rangle$ .

(26.1) bizonyítja, hogy szimmetrikus differenciáloperátor különböző sajátértékeihez tartozó sajátfüggvények merőlegesek. Magát a szimmetrikusságot pedig parciális integrálásokkal tudtuk bizonyítani az egyes feladatokban.

<sup>6</sup>A megadott feltételek alapján „szinte biztos”, hogy  $y_n$  és  $y_m$  külön-külön is azonosan 0.

## 27. fejezet

# Legendre-polinomok

### 27.1. Elméleti összefoglaló

A Laplace ill. a Poisson-egyenlet megoldásakor olyan függvényrendszerekhez jutunk, amelyeknek minden tagja pontosan meghatározott, ugyanakkor nem írható fel egyszerűen kiszámítható zárt formulával. Például a gömbön a Laplace-egyenlet tengelyesen szimmetrikus megoldásait a  $P_n(x)$  Legendre-polinomok rendszerének segítségével tudjuk felírni. Minden  $n \geq 0$  egész számhoz tartozik egy jól meghatározott  $n$ -edfokú polinom, az együtthatókra azonban nincs egyszerűen számítható képlet. Ezért sok különböző módon tároljuk ugyanazt az információt (vagy egy részét), és igyekszünk az adott esetben legegyszerűbbet használni. A következő típusú formulák írhatók fel:

- (1) *generátorfüggvény*, azaz egy olyan kétváltozós függvény, ami az egyik változóban hatványsorba fejthető, és a hatványsor együtthatói pont a függvényrendszer (jelen esetben a Legendre-polinomok) tagjai;
- (2) *rekurziós formulák*, amelyek segítségével a függvényrendszer már meglévő kisebb indexű elemekből ki tudjuk számítani a következőt;
- (3) *differentiálegyenlet*, a megoldás egyértelműségét biztosító esetleges további feltételekkel;
- (4) *ortogonalitás*, vagyis két különböző Legendre-polinom szorzatának integrálja  $-1$ -től  $1$ -ig nulla;
- (5) *Rodrigues-formula*, egy zárt formula, ami azonban a gyakorlatban csak kis  $n$ -ekre használható;
- (6) különböző képletek az *együtthatókra*, elsősorban a konstanstagra és a főegyütthatóra;
- (7) a *norma*, azaz  $\left( \int_{-1}^1 P_n^2(x) dx \right)^{\frac{1}{2}}$  értéke;
- (8) valós integrálformula - géppel számítható;

(9) komplex vonalintegrál - ez a legrugalmasabb, mert az integrációs utat sokféleképpen választhatjuk meg.

Az egyes típusok ismertetése után felírjuk ezeket a formulákat a  $[-1, 1]$  intervallumon értelmezett Legendre-polinomok esetére:

(1) A Legendre-polinomok generátorfüggvénye:

$$\Psi(\rho, x) = \frac{1}{\sqrt{(1 + \rho^2 - 2\rho x)}} = \sum_{n=0}^{\infty} \rho^n P_n(x). \quad (\text{PG})$$

(2) három rekurziós formula:

$$(n+1)P_{n+1}(x) - x(2n+1)P_n(x) + nP_{n-1}(x) = 0, \quad (\text{PR1})$$

$$nP_n(x) - xP'_n(x) + P'_{n-1}(x) = 0, \quad (\text{PR2})$$

$$nP_{n-1}(x) - P'_n(x) + xP'_{n-1}(x) = 0. \quad (\text{PR3})$$

(3) a Legendre-féle differenciálegyenlet:

$$(1 - x^2)P''_n(x) - 2xP'_n(x) + n(n+1)P_n(x) = 0. \quad (\text{PD})$$

(4) A Legendre-polinomok ortogonálisak, azaz  $\int_{-1}^1 P_n(x)P_m(x) dx = 0$ , ha  $m \neq n$ .

(5) Rodrigues-formula:  $P_n(x) = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{dx^n} [(x^2 - 1)^n]$ .

(6) Ha  $P_n(x)$  főegyütthatóját  $a_n$ -nel jelöljük, akkor  $a_n = \frac{1}{2^n} \frac{(2n)!}{n!n!}$ .

(7) A Legendre-polinomok normanégyzete  $\int_{-1}^1 P_n^2(x) dx = \frac{2}{2n+1}$ .

Az integrálformulákat itt nem tárgyaljuk.

## 27.2. Kidolgozott példák

27.2.1. **KIDOLGOZOTT FELADAT** A Legendre-polinomok generátorfüggvényét  $\rho$  szerint differenciálva

$$\frac{\partial \Psi}{\partial \rho} = (1 + \rho^2 - 2\rho x)^{-\frac{3}{2}}(x - \rho),$$

ahonnan a

$$(1 + \rho^2 - 2\rho x) \frac{\partial \Psi}{\partial \rho} - (x - \rho)\Psi = 0$$

képletet kapjuk. Írjuk  $\Psi$  és deriváltja helyett a  $(\rho$  szerinti) hatványsort, és számítsuk ki  $\rho^n$  együtthatóját. Milyen – a Legendre-polinomokra vonatkozó – azonosságot kapunk? (Az ún. első rekurziós formulát.)

**MEGOLDÁS** A generátorfüggvény értelmezése szerint  $\Psi(\rho, x) = \sum_{n=0}^{\infty} \rho^n P_n(x)$ . Rögzített  $x$  esetén ez a  $\rho$  változó hatványsora, ami a konvergenciakörén belül tagonként differenciálható, azaz  $\frac{\partial \Psi}{\partial \rho} = \sum_{n=0}^{\infty} n \rho^{n-1} P_n(x)$ . Ezért

$$(1 + \rho^2 - 2\rho x) \sum_{n=0}^{\infty} n \rho^{n-1} P_n(x) - (x - \rho) \sum_{n=0}^{\infty} \rho^n P_n(x) = 0.$$

Ez a hatványsor csak akkor lehet azonosan 0, ha minden  $\rho$  minden hatványának az együtthatója nulla, azaz  $\rho^n$  együtthatója,  $(n+1)P_{n+1}(x) - (2n+1)xP_n(x) + nP_{n-1}(x) = 0$ .  $\square$

**27.2.2. KIDOLGOZOTT FELADAT** Az előző feladatban a Legendre-polinomok generátorfüggvényét  $\rho$  szerint differenciálva a

$$(1 + \rho^2 - 2\rho x) \frac{\partial \Psi}{\partial \rho} - (x - \rho) \Psi = 0 \quad (27.1)$$

képletet kaptuk.  $x$  szerint differenciálva a

$$(1 + \rho^2 - 2\rho x) \frac{\partial \Psi}{\partial x} - \rho \Psi = 0 \quad (27.2)$$

képlet jön ki. A kettőt kivonva egymásból, és  $(1 + \rho^2 - 2\rho x)$ -szel osztva azt kapjuk, hogy

$$\rho \frac{\partial \Psi}{\partial \rho} - (x - \rho) \frac{\partial \Psi}{\partial x} = 0.$$

Írjuk  $\Psi$  és deriváltja helyett a  $(\rho$  szerinti) hatványsort, és számítsuk ki  $\rho^n$  együtthatóját. Milyen – a Legendre-polinomokra vonatkozó – azonosságot kapunk? (Az ún. második rekurziós formulát.)

**MEGOLDÁS** Tagonként differenciálva<sup>1</sup>

$$\frac{\partial \Psi}{\partial x}(\rho, x) = \sum_{n=0}^{\infty} \rho^n P'_n(x),$$

valamint

$$\frac{\partial \Psi}{\partial \rho} = \sum_{n=0}^{\infty} n \rho^{n-1} P_n(x).$$

Ezért

$$\rho \sum_{n=0}^{\infty} n \rho^{n-1} P_n(x) - (x - \rho) \sum_{n=0}^{\infty} \rho^n P'_n(x) = 0.$$

Ez a hatványsor csak akkor lehet azonosan 0, ha minden  $\rho$  minden hatványának az együtthatója nulla, azaz  $\rho^n$  együtthatója,  $nP_n(x) - xP'_n(x) + P'_{n-1}(x) = 0$ .  $\square$

<sup>1</sup>Belátható, hogy a tagonkénti differenciálással nyert sor egyenletesen konvergens, ha  $|\rho| \leq r < 1$  és  $x \in [-1, 1]$ , ezért szabad tagonként differenciálni.



27.2.3. **KIDOLGOZOTT FELADAT** Vezessük le a (27.1) és a (27.2) képletből, hogy

$$\rho \frac{\partial}{\partial \rho}(\rho \Psi) - (1 - \rho x) \frac{\partial \Psi}{\partial x} = 0.$$

Írjuk be ebbe a képletbe, hogy  $\Psi(\rho, x) = \sum_{n=0}^{\infty} \rho^n P_n(x)$ , és számítsuk ki  $\rho^n$  együtthatóját. Milyen – a Legendre-polinomokra vonatkozó – azonosságot kapunk? (Az ún. harmadik rekurziós formulát.)

**MEGOLDÁS** A levezetés nem túl nehéz:

$$(-1) \left( (1 + \rho^2 - 2\rho x) \frac{\partial \Psi}{\partial x} - \rho \Psi \right) + \rho \left( \rho \frac{\partial \Psi}{\partial \rho} - (x - \rho) \frac{\partial \Psi}{\partial x} \right) = 0$$

(az említett két képlet  $-1$  és  $\rho$  együtthatókkal vett lineáris kombinációja) pont a feladatban megadott képletet szolgáltatja. Most  $\rho \Psi = \sum_{n=0}^{\infty} \rho^{n+1} P_n(x)$ -et tagonként deriválva

$$\rho \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) \rho^n P_n(x) - (1 - \rho x) \sum_{n=0}^{\infty} \rho^n P'_n(x) = 0,$$

ahonnan  $nP_{n-1}(x) - P'_n(x) + xP'_{n-1}(x) = 0$ . □

27.2.4. **KIDOLGOZOTT FELADAT** A második és a harmadik rekurziós formula segítségével vezessünk le differenciálegyenletet a  $P_n(x)$  Legendre-polinomra!

**MEGOLDÁS** Ha mindkét rekurziós formulát deriváljuk, összesen négy egyenletünk lesz, amelyekben a  $P_n$  és a  $P_{n-1}$  polinomok, és első- ill. második deriváltjaik szerepelnek ismeretlenként. Ha  $P_{n-1}$ -et és deriváltjait, összesen három ismeretlent kiejtünk, még marad egy egyenletünk, ami már csak  $P_n$ -et és deriváltjait tartalmazza. Lényegében ezt a stratégiát követjük, csak kicsit ügyesebben. Fejezzük ki  $P'_{n-1}(x)$ -et a (PR2) egyenletből:

$$P'_{n-1}(x) = -nP_n(x) + xP'_n(x).$$

Ezt is felhasználva  $P_{n-1}(x)$ -et is ki tudjuk fejezni a (PR3) egyenletből. Kellene még egy, a rekurziós formuláktól független egyenlet, ami a  $P_n(x)$ ,  $P'_n(x)$ ,  $P_{n-1}(x)$ ,  $P'_{n-1}(x)$  ismeretleneket tartalmazza, és akkor abba beírva a  $P_{n-1}(x)$  és a  $P'_{n-1}(x)$  kifejezését, egy csak  $P_n(x)$ -et és deriváltjait tartalmazó egyenletet kapunk. Ebből a célból a második rekurziós formula  $x$ -szereséből vonjuk ki a harmadik rekurziós formulát:

$$nxP_n(x) + (1 - x^2)P'_n(x) - nP_{n-1}(x) = 0.$$

Ez az egyenlet természetesen nem független, de a deriváltja már igen:

$$nP_n(x) + nxP'_n(x) - 2xP'_n(x) + (1 - x^2)P''_n(x) - nP'_{n-1}(x) = 0.$$

Beírva a  $P'_{n-1}(x)$ -re adódott kifejezést és rendezve:

$$(1 - x^2)P''_n(x) - 2xP'_n(x) + (n^2 + n)P_n(x) = 0,$$

vagy másképp

$$\frac{d}{dx} [(1-x^2)P'_n(x)] + n(n+1)P_n(x) = 0.$$

Természetesen a Legendre-féle differenciálegyenlet jött ki. □

**27.2.5. KIDOLGOZOTT FELADAT** Jelölje  $P_n(x)$  főegyütthatóját (azaz a legmagasabb fokú tag,  $x^n$  együtthatóját)  $a_n$ .  $P_0(x) = 1$ ,  $P_1(x) = x$ , tehát  $a_0 = a_1 = 1$ . Számítsuk ki az  $a_2, a_3, \dots, a_n, \dots$ , értékeket az  $(n+1)P_{n+1}(x) - (2n+1)xP_n(x) + nP_{n-1}(x) = 0$  első rekurziós formula segítségével!

**MEGOLDÁS** Számítsuk ki  $x^{n+1}$  együtthatóját a megadott rekurziós formula bal oldalán!  $(n+1)P_{n+1}(x)$ -ben ez az együttható  $(n+1)a_{n+1}$ ,  $(2n+1)xP_n(x)$ -ben pedig  $(2n+1)a_n$ , mivel  $P_n(x)$   $n$ -edfokú.  $nP_{n-1}(x)$ -ben csak alacsonyabb fokú tagok szerepelnek. Ezért  $(n+1)a_{n+1} - (2n+1)a_n = 0$ , amiből  $a_{n+1} = \frac{2n+1}{n+1}a_n$ .  $a_1 = 1$ -et felhasználva  $a_n = \frac{(2n-1)(2n-3)\dots 3 \cdot 1}{n(n-1)\dots 2 \cdot 1}$ . A páros számok szorzatával bővítve pedig  $a_n = \frac{1}{2^n} \frac{(2n)!}{n!n!} = \frac{1}{2^n} \binom{2n}{n}$ . □

## 27.3. Gyakorló feladatok

27.3.1. **FELADAT** Számítsuk ki  $(x-1)^n(x+1)^n$   $n$ -edik deriváltját az  $x=1$ -ben!

## 27.4. Matematikai háttér

Ebben a részben a (PG) generátorfüggvényből kiindulva levezetjük az elméleti összefoglalóban említett képleteket, és egy-két további megjegyzést teszünk. A binomiális sor képletéből

$$\begin{aligned} \Psi(\rho, x) &= (1 + \rho^2 - 2\rho x)^{-\frac{1}{2}} = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{-\frac{1}{2}}{n} (\rho^2 - 2\rho x)^n = \\ &= 1 - \frac{1}{2}(\rho^2 - 2\rho x) + \frac{3}{8}(\rho^2 - 2\rho x)^2 - \dots = \\ &= 1 + \rho x + \rho^2 \left( \frac{3}{2}x^2 - \frac{1}{2} \right) + \dots + \rho^n (ax^n + \dots) = \sum_{n=0}^{\infty} P_n(x) \rho^n. \end{aligned}$$

Ebből látható, hogy  $P_n(x)$  tényleg polinom. Az  $x=1$  helyen  $\Psi(\rho, 1) = \frac{1}{1-\rho} = 1 + \rho + \dots + \rho^n + \dots$ , tehát

$$P_n(1) = 1. \quad (\text{P1})$$

A 27.2.1., a 27.2.2. és a 27.2.3. kidolgozott feladatban levezettük a három rekurziós formulát (lásd a (PR1), a (PR2) és a (PR3) képleteket). A 27.2.4. kidolgozott feladatban pedig a második és a harmadik rekurziós formulából levezettük a Legendre-polinomokra vonatkozó differenciálegyenlet.

### 27.4.1. DEFINÍCIÓ (SAJÁTÉRTÉKFELADAT<sup>2</sup>A LEGENDRE-POLINOMOKRA)

$$\frac{d}{dx} \left[ (1-x^2) \frac{dy}{dx} \right] + \lambda y = 0, \quad y(\pm 1) \text{ korlátos.} \quad (\text{PP})$$

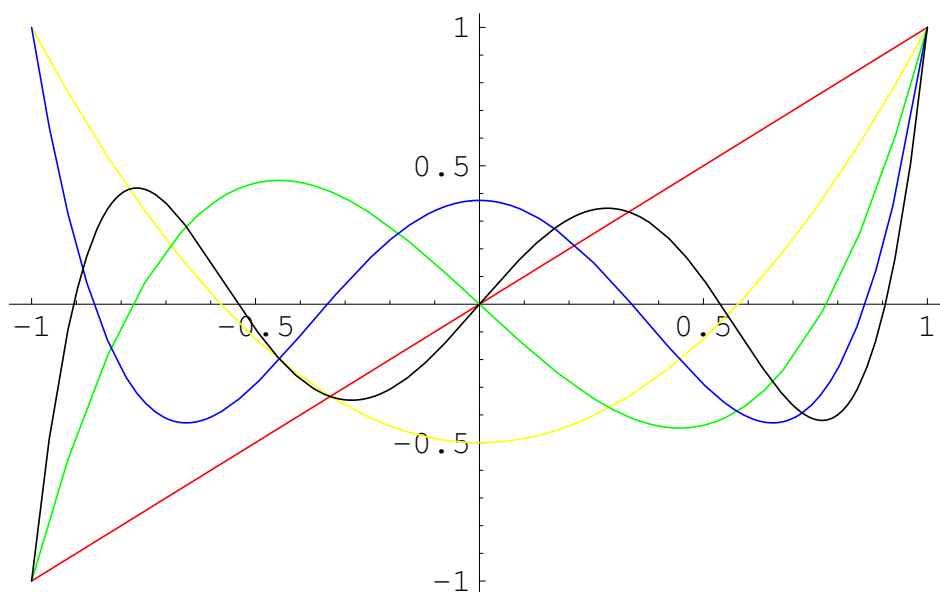
Tudjuk, hogy ha  $\lambda = n(n+1)$ , akkor  $y(x) = P_n(x)$  megoldás. Az ilyen típusú<sup>3</sup> sajátértékfeladatok általános elméletéből következik, hogy

27.4.2. TÉTEL (i) csak  $\lambda = n(n+1)$ -re van a  $\pm 1$ -ben korlátos megoldás,<sup>4</sup> és az konstans szorzó erejéig egyértelmű.

(ii) a különböző  $\lambda$ -hoz tartozó megoldások ortogonálisak, azaz  $n \neq m$  esetén

$$\int_{-1}^1 P_n(x) P_m(x) dx = 0. \quad (\text{PO})$$

(iii)  $P_n$ -nek  $n$  darab gyöke van a  $(-1, 1)$  nyílt intervallumban;  $P_n$  és  $P_{n-1}$  gyökei elválasztják egymást.



27.1. ábra. Az első öt Legendre-polinom.  $P_1(x) = x$  (piros),  $P_2(x) = \frac{3}{2}x^2 - \frac{1}{2}$  (sárga),  $P_3(x) = \frac{5}{2}x^3 - \frac{3}{2}x$  (zöld),  $P_4(x) = \frac{35}{8}x^4 - \frac{30}{8}x^2 + \frac{3}{8}$  (kék),  $P_5(x) = \frac{63}{8}x^5 - \frac{70}{8}x^3 + \frac{15}{8}x$  (fekete).  $P_0(x) = 1$  nem szerepel az ábrán.

<sup>2</sup>a peremértékfeladat elnevezés is használatos

<sup>3</sup>ún. Sturm-Liouville típusú

<sup>4</sup>az általános elméletből csak azt tudjuk, hogy a  $\lambda$ -k egy növekvő sorozatára van megoldás. Most azonban  $\lambda = n(n+1)$ -re ismerünk megoldást, és azok együtt teljes ortogonális rendszert alkotnak, ezért nem lehet több

Az (i) pont szerint tehát a Legendre-féle differenciálegyenletnek  $P_n(x)$  konstans szorzó erejéig az egyetlen  $\pm 1$ -ben korlátos megoldása. A differenciálegyenletet felhasználva bizonyítottuk a (ii) állítást, a Legendre-polinomok merőlegességét a  $(-1, 1)$  intervallumon (lásd a 26.2.2. kidolgozott feladatot). Ez azzal ekvivalens, hogy  $P_n(x)$  minden legfeljebb  $(n-1)$ -edfokú polinomra merőleges. Ugyanakkor tudunk mutatni is egy  $n$ -edfokú polinomot, ami minden alacsonyabb fokúra merőleges, ez  $\frac{d^n}{dx^n} [(x^2 - 1)^n]$ . Valóban, ha  $p(x)$  legfeljebb  $(n-1)$ -edfokú, akkor  $n$ -szeres parciális integrálással

$$\int_{-1}^1 \frac{d^n}{dx^n} [(x^2 - 1)^n] \cdot p(x) dx = (-1)^n \int_{-1}^1 (x^2 - 1)^n \cdot \frac{d^n}{dx^n} p(x) dx = 0,$$

mert  $\frac{d^n}{dx^n} p(x) = 0$ . Ezért  $P_n(x) = \text{const} \frac{d^n}{dx^n} [(x^2 - 1)^n]$ . A  $\frac{d^n}{dx^n} [(x^2 - 1)^n]$   $(n)$ -edfokú polinom főegyütthatója  $2n(2n-1) \dots (n+1)$ ,  $P_n(x)$ -ét a 27.2.5. kidolgozott feladattól ismerjük, így a konstans  $\frac{1}{2^n n!}$  kell legyen, levezettük a Rodrigues-formulát is.

Végül a normanégyzetet, az  $N_n = \int_{-1}^1 P_n^2(x) dx$  integrál értékét a merőlegesség és a főegyütthatók ismeretében könnyen kiszámíthatjuk. Jelölje ismét  $a_n x^n$  együtthatóját  $P_n(x)$ -ben. A  $Q(x) = P_n(x) - \frac{a_n}{a_{n-1}} x P_{n-1}(x)$  polinom legfeljebb  $(n-1)$ -edfokú (mert  $x^n$  együtthatója 0; igazából  $(n-2)$ -edfokú), ezért  $P_n$  merőleges  $Q$ -ra, és így  $N_n = \int_{-1}^1 P_n(x) \frac{a_n}{a_{n-1}} x P_{n-1}(x) dx$ . Ha itt beírjuk, hogy  $\frac{a_n}{a_{n-1}} = \frac{2n-1}{n}$ , majd kifejezzük  $P_n(x)x$ -et az első rekurziós formulából, akkor  $N_n$ -et kifejeztük  $N_{n-1}$  segítségével:

$$\begin{aligned} N_n &= \int_{-1}^1 x P_n(x) \frac{2n-1}{n} P_{n-1}(x) dx = \\ &= \int_{-1}^1 \frac{(n+1)P_{n+1}(x) + nP_{n-1}(x)}{2n+1} \frac{2n-1}{n} P_{n-1}(x) dx = \\ &= \int_{-1}^1 \frac{nP_{n-1}(x)}{2n+1} \frac{2n-1}{n} P_{n-1}(x) dx = \frac{2n-1}{2n+1} N_{n-1}. \end{aligned}$$

Ezek után, mivel  $N_0 = 2$ ,  $N_n = \frac{2n-1}{2n+1} N_{n-1} = \frac{2n-1}{2n+1} \frac{2n-3}{2n-1} N_{n-2} \dots = \frac{2}{2n+1}$ .

Az ortogonalitás<sup>5</sup> miatt egy  $(-1, 1)$ -en értelmezett (négyzetesen integrálható) függvényt sorba tudunk fejteni a Legendre-polinomok szerint, és a norma ismeretében képletet kapunk az együtthatókra:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n P_n(x) \iff a_n = \sqrt{\frac{2}{2n+1}} \int_{-1}^1 f(x) P_n(x) dx.$$

<sup>5</sup>és a teljesség

**II. rész**  
**Parciális differenciálegyenletek összehasonlító tárgyalásban**

## 28. fejezet

# Korrekt kitűzésű feladatok

Egy matematikai feladattal akkor lehetünk elégedettek, ha az korrekt kitűzésű.

28.0.1. **DEFINÍCIÓ** Egy feladat korrekt kitűzésű<sup>1</sup>, ha igazak rá

- (i) *Egzisztencia : létezik megoldás*
- (ii) *Unicitás : a megoldás egyértelmű*
- (iii) *Folytonos függés : a megoldás folytonosan függ a feladat összes paraméterétől*

Egy elefántcsonttoronyban üldögélő matematikus (nem minden matematikus olyan) a tiszta logika szempontjából megelégedhet az első két tulajdonsággal is – van megoldás, és pontosan egy – de ezt egy mérnök nem teheti. A mérnöknek ugyanis konkrétan ki kell számolnia a megoldást. Így a mérnök számára a harmadik tulajdonság éppen olyan fontos, mint az előző kettő: egy műszaki matematikai feladat ugyanis majdnem mindig tartalmaz olyan paramétereket, amelyek konkrét kiindulási számértékei mérésből származnak. Mennyinek vegyük például a nehézségi gyorsulás értékét? Mennyi legyen a  $g$ ? Legyen  $10 \frac{m}{sec^2}$ ? Vagy éppen  $9,81 \frac{m}{sec^2}$ ? Talán vegyük hat tizedesjegyre? És ha ez a pontosság sem elegendő?

Az utolsó kérdés már önmagában utal arra, hogy a kiindulási adatok kicsiny hibája nem okozhat szakadás jellegű hibát<sup>2</sup> a végeredményben. Pontosán ezt az elvárást fejezi ki a definícióban megkövetelt harmadik tulajdonság.

<sup>1</sup>mivel a korrekt kitűzöttség definíciója magában foglalja a folytonosság fogalmát, megismételjük a fejezet kezdő mondatát: a matematikai analízis egy feladatával akkor lehetünk elégedettek, ha az korrekt kitűzésű — a tisztán diszkrét matematika feladatait tehát per definitionem ki kell zárunk. Jóllehet a sztochasztikus analízis egyre fontosabb szerepet játszik a műszaki matematikában, a tárgyalásmód leegyszerűsítése végett mindvégig a determinisztikus modellek körében maradunk, és a véletlent még csak perturbációs zajok formájában sem vesszük figyelembe

<sup>2</sup>nagy hibát sajnos okozhat, sőt túlságosan nagy hibát is — ez a helyzet a determinisztikus káosz feladataival, ahol a megoldás függése a kiindulási adatoktól folytonos ugyan, de a valóban kritikus esetekben ez a folytonos függés elképesztően érzékeny lehet a kiindulási adatok leheletnyi megváltoztatására is: (az összes többi tényező "billenő egyúttállása" esetén) egyetlen lepke eggyel több szárnycsapása Új-Zélandon két héttel később zivatart okozhat Budapesten

A pontos  $\mathcal{F}$  feladatot magát nem ismerjük, csak egy ahhoz közeli  $\tilde{\mathcal{F}}$  feladatot. A feladat tehát nem adott, vagy legalábbis nem úgy adott, ahogyan szeretnénk. Így az  $\mathcal{M}(\mathcal{F})$  pontos megoldás is mindvégig rejtve marad előttünk. Amit ki tudunk számolni, az az  $\tilde{\mathcal{F}}$  feladat  $\mathcal{M}(\tilde{\mathcal{F}})$  megoldása (ráadásul az esetek többségében a közelítő feladat pontos megoldása helyett is be kell érünk annak egy  $m(\tilde{\mathcal{F}})$  közelítésével).

Mindezt úgy szokták megfogalmazni, hogy egy mérnöknek háromféle matematikára van szüksége: megfigyelési, analitikus, és numerikus matematikára. A korrekt kitűzöttség definíciója teljes egészében az analitikus/absztrakt matematika része, motiválni azonban a megfigyelési matematika motiválja. A folytonos függést a gyakorlatban egyenlőtlenség formájában fejezhetjük ki: minden pozitív  $\varepsilon$ -hoz van olyan pozitív  $\delta$ , hogy valamennyi, az  $\mathcal{F}$  feladathoz  $\delta$ -nál közelebbi  $\tilde{\mathcal{F}}$  feladat  $\mathcal{M}(\tilde{\mathcal{F}})$  megoldása  $\varepsilon$ -nál közelebb van az  $\mathcal{F}$  feladat  $\mathcal{M}(\mathcal{F})$  megoldásához. Az is természetes elvárás, hogy az  $\tilde{\mathcal{F}}$  feladat ténylegesen kiszámolható  $m(\tilde{\mathcal{F}})$  közelítő/numerikus/számítógépi megoldása közel legyen a csak elvileg meghatározható  $\mathcal{M}(\tilde{\mathcal{F}})$ -hez. Ez utóbbi követelmény a numerikus módszer egészének stabilitásával<sup>3</sup> függ össze.

Milyen következményei vannak, hogy abszolút pontossággal nem vagyunk képesek sem mérni, sem számolni? Lehet baj ebből? Mit mérünk, amikor mérünk és mekkora hibával? Mi történik ezzel a kezdeti hibával a későbbi, szükségképpen közelítő számítások során?

A kigyó a saját farkába harap. A megfigyelési, mérési és számítási pontatlanságok kezelhetőségének alapkövetelménye, ha úgy tetszik, a mérnöki gyakorlat legtermészetesebb elvárása matematikai absztrakciót igényel. A korrekt kitűzöttség definíciójában megkövetelt harmadik tulajdonság az, amely szükségessé teszi az absztrakt térfogalom bevezetését: meg kell mondanunk, hogy két rokon jellegű feladat mennyire van közel egymáshoz. Két feladat rokon jellege azt jelenti, hogy paramétereik azonos típusúak lévén azonos terekben vannak, a két feladat közelsége pedig az ezekben a terekben értelmezett távolságok<sup>4</sup> szerinti közelség.

Nézzük inkább a példákat, amelyek kézzelfoghatóvá/kézzelfoghatóbbá teszik a fenti megfontolásokat. A legfontosabb egyenlet típusokat vesszük sorra.

Előjáróban megjegyezzük, hogy az alkalmazott matematikai analízisnek számos olyan feladata van, amelyik nem igényli egyetlen egyenlet megoldását sem. Ilyenek lehetnek már az

$$\int_H f(x) dx \quad \text{és a} \quad \min_{x \in H} f(x)$$

feladatok is, ahol  $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  folytonos vagy akár sima függvény, a korlátos és zárt  $H \subset \mathbb{R}^n$  halmazt pedig véges sok egyenlőtlenség határozza meg. Ha az  $f$  függvény nagyon nem konvex, ha a  $H$  halmazt meghatározó egyenlőtlenségek nem mind lineárisak, vagy ha az  $n$  már néhány tucat nagyságrendű, nagy előszeretettel alkalmaznak random algoritmusokat: Monte Carlo módszereket az integrál kiszámítására, lokális gradiens módszerrel kombinált/-finomított globális random keresést a szélsőértékfeladat megoldására. Lehetne vizsgálni az

<sup>3</sup>a numerikus módszer egésze stabilitásának fogalmára a 29.8 alfejezet legvégén néhány példa erejéig visszatérünk

<sup>4</sup>az absztrakt tér és az absztrakt távolság. Akárcsak a korrekt kitűzöttség fogalma (J. Hadamard, "Sur les problèmes aux dérivées partielles et leur signification physique", Princeton University Bulletin, 13(1902), 49-52.), ezek is csak a XIX/XX. század fordulója utáni matematikában születtek meg. Banach, Fréchet, és Hilbert óta egy függvényről nem mint izolált objektumról beszélünk, hanem mint az ilyen és ilyen tulajdonságokkal rendelkező függvények terének egy eleméről

$f'(x) = 0$  egyenletet is, de ez gyakorta nem hatékony (arról nem is beszélve, hogy a  $H$  halmaz határán lévő minimumhelyek megkeresésére teljesen alkalmatlan). A fordított irány annál inkább: ha egy egyenletet át lehet fogalmazni szélsőértékfeladattá, akkor az jó eséllyel válik könnyebbé ezáltal. Ez a helyzet a mechanika számos variációs szerkezetű feladatával, köztük a szimmetrikus mátrixok sajátértékegyenletével, vagy éppen a Laplace-operátorra vonatkozó hőtani vagy elektromosságtani  $u_{xx} + u_{yy} = f$ ,  $u|_{\partial\Omega} = 0$  peremértékproblémával.

Vegyük észre, hogy a fenti feltételek mellett mind az  $\int_H f(x) dx$ , mind a  $\min_{x \in H} f(x)$  feladatoknak létezik megoldása, s mind az integrál értéke, mind a globális minimum értéke egyértelmű. Az is világos, hogy az  $f$  függvény és/vagy a  $H$  halmaz kicsiny megváltoztatása is csak kicsit változtatja meg az integrál és a globális minimum értékét. Mindkét feladat korrekt kitűzésű. A globális minimum helyének meghatározása azonban — hacsak valami extra konvexitási feltétel nem garantálja a globális minimum helyének egyértelműségét — nem korrekt kitűzésű: egyszerű példák mutatják, ha nincs unicitás, akkor a globális minimum helye ugrásszerűen is változhat.

Most tehát soravesszük a legfontosabb egyenlet-típusokat.

## 28.1. Lineáris algebrai egyenletek

Általános alakjuk  $Ax = b$ , ahol az  $A$  mátrixnak  $n$  sora és  $m$  oszlopa van. Az ismeretlenek  $x$  oszlopvektora  $m$ , a jobb oldalon álló  $b$  vektor pedig  $n$  hosszúságú. A megoldásra az  $n = m$  esetben formulánk is van,  $x = A^{-1}b$ . Ehhez persze az kell, hogy az  $A^{-1}$  inverz mátrix értelmes legyen, aminek szükséges és elégséges feltétele  $\det(A) \neq 0$ . Az egzisztencia és az unicitás tehát rendben, s a Cramer-formulából az is látszik, hogy az  $x$  megoldásvektor minden egyes koordinátája (amely két többváltozós polinom hányadosaként fejezhető ki<sup>5</sup> — a nevezőben éppen  $\det(A)$  kifejtése van) folytonosan függ mind az  $A$  mátrix, mind a  $b$  vektor elemeitől. Tehát az  $Ax = b$  egyenlet korrekt kitűzöttségének szükséges és elégséges feltétele  $n = m$  és  $\det(A) \neq 0$  együttes teljesülése.

De mennyire függ az  $Ax = b$  lineáris egyenletrendszer megoldása az  $A$  mátrixtól? Hogyan lehet ezt a függést kvantitatív módon kifejezni?

A választ az alábbi tételben szereplő perturbációs egyenlőtlenség fogalmazza meg.

**28.1.1. TÉTEL** Legyenek  $A, \tilde{A}$   $n \times n$ -es mátrixok, és legyenek  $b, \tilde{b} \in \mathbb{R}^n$  valamint  $\varepsilon, \Delta > 0$ . Tekintsük az  $Ax = b$  és az  $\tilde{A}\tilde{x} = \tilde{b}$  lineáris egyenletrendszereket és tegyük fel, hogy  $\det(A) \neq 0$ . Ekkor az

$$\varepsilon \|A^{-1}\| < 1, \quad \|A - \tilde{A}\| \leq \varepsilon$$

egyenlőtlenségek együttes teljesülése esetén  $\det(\tilde{A}) \neq 0$ . Ha még  $|b - \tilde{b}| \leq \Delta$  is igaz, akkor

$$|x - \tilde{x}| = |A^{-1}b - \tilde{A}^{-1}\tilde{b}| \leq \|A^{-1}\| \cdot \Delta + \frac{\|A^{-1}\|^2}{1 - \varepsilon \|A^{-1}\|} (|b| + \Delta) \cdot \varepsilon. \quad (28.1)$$

<sup>5</sup>de hiába van rá képlet: nagyméretű mátrixok esetén csak a numerikus-közelítő módszerek működnek. Nem kell ettől megijedni: egyrészt a számítógép nagyszerű eszköz, másrészt már a  $\sqrt{2}$  önmaga is (ami a régi görögöknek csak az egységnyi átlójának hosszúsága volt [törték is a fejüket emiatt!]) egy numerikus módszer. Kiszámítani úgy lehet, mint a Newton féle érintőmódszerből származó  $x_0 = 2$ ,  $x_{n+1} = \frac{1}{2}(x_n + \frac{2}{x_n})$ ,  $n \in \mathbb{N}$  rekurzív sorozat határértékét.



Itt a  $|\cdot|$  vektorok,  $\|\cdot\|$  pedig mátrixok normáját<sup>6</sup> jelöli az  $\mathbb{R}^n$ , illetve az  $L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$  térben.

A fenti tétel példát ad arra, mit lehet/kell értenünk az  $\mathcal{F}$  és az  $\tilde{\mathcal{F}}$  feladatok, illetve azok  $\mathcal{M}(\mathcal{F})$  és  $\mathcal{M}(\tilde{\mathcal{F}})$  megoldásainak távolságán. Más kérdés az  $\tilde{\mathcal{F}}$  feladat  $\mathcal{M}(\tilde{\mathcal{F}})$  pontos és  $m(\tilde{\mathcal{F}})$  konkrétan kiszámolt számítógépi/numerikus megoldásának távolsága. Ez is fontos, nagyméretű feladatok esetén ugyancsak keservesen nehéz probléma<sup>7</sup>.

Természetesen a nemkorrekt kitűzésű feladatoknak is van létjogosultsága. Számos esetben gyakorlati problémák vezetnek nemkorrekt kitűzésű feladatokra. Ezeket azonban valamilyen értelemben korrekt kitűzésű feladatokként kell kezelünk vagy korrekt kitűzésű feladattá módosítanunk. Tipikusan ez a helyzet az  $m$  ismeretlen,  $n$  mérés utáni számolások esetében.

- Tegyük fel, hogy az  $Ax = b$  lineáris egyenletrendszer túlhatározott. Ekkor helyette az

$$|Ax - b|_2^2 \rightarrow \min_{x \in \mathbb{R}^n} \quad \text{alakú legkisebb négyzetek'}$$

feladatot szokás megoldani. (Az elnevezés arra utal, hogy itt  $|\cdot| = |\cdot|_2$  az  $\mathbb{R}^n$  tér  $\ell_2$  négyzetes/euklideszi normáját jelöli.)

- Tegyük fel, hogy az  $Ax = b$  lineáris egyenletrendszer alulhatározott. Ekkor helyette az

$$|x|_2^2 \rightarrow \min_{Ax=b, x \in \mathbb{R}^n} \quad \text{alakú 'regularizált'}$$

feladatot szokás megoldani.

A geometriai jelentés<sup>8</sup> világos. Az első, a legkisebb négyzetek' feladatban az  $Ax = b$  egyenlet helyett az  $Ax = \text{proj}_A(b)$  egyenletet oldjuk meg, ahol  $\text{proj}_A(b)$  a  $b$  vektor merőleges vetülete az  $A$  mátrix oszlopvektorai által kifeszített altérre. A második, a 'regularizált' feladatban pedig az origónak az  $Ax = b$  egyenlet megoldásai által meghatározott affin altérre vett merőleges vetületét keressük.

A mérnökök egyébként hajlamosak azt mondani, hogy „ $n$  egyenlet,  $n$  ismeretlen, egy megoldás”. Ez így, ebben az általánosságban nem igaz, de a lineáris egyenletrendszerek

<sup>6</sup>az úgynevezett asszociált mátrixnormát, tehát amelyet adott  $|\cdot|$  vektornorma esetén az  $\|A\| = \max\{\frac{|Ax|}{|x|} \mid |x| = 1\}$  képlet definiál. Ezen a ponton erősen ajánlott az  $\ell_1, \ell_2, \ell_\infty$  vektornormák és a segítségével származtatott  $\ell_1, \ell_2, \ell_\infty$  mátrixnormák átvételése. Idézzük fel azt is — amint arra az  $L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$  jelölés is világosan utal —, hogy a mátrixok nem mások mint lineáris operátorok adott bázisban történő reprezentációi, valamint hogy  $\mathbb{R}^n$  helyett mindenhol  $\mathbb{C}^n$ -t is írhattunk volna. Amennyiben további információk is rendelkezésre állnak — például ha az  $A$  és az  $\tilde{A}$  mátrixok mindegyike szimmetrikus etc. — akkor (28.1) helyett erősebb egyenlőtlenségek is bizonyíthatók

<sup>7</sup>hogy ez mennyire lényeges kérdés, semmi sem mutatja jobban, mint Neumann János monumentális munkája (J. von Neumann and H. Goldstein, "Numerical inverting matrices of high order", Bull. Amer. Math. Soc. 53(1947) 1021-1099.) az első számítógép kifejlesztésének éveiből, amely nem foglalkozik mással, mint a lineáris egyenletrendszerek megoldása során fellépő kerekítési hibák determinisztikus és sztochasztikus elemzésével. (Neumann János tanítványával, Lax Péterrel együtt alapvető eredményeket ért el a numerikus módszerek stabilitásának általános elméletében is.)

<sup>8</sup>a két és három dimenzióban megszokott geometriai szemléltethetőség 'kiterjesztése' és az absztrakt térfogalom bevezetése egymást kísérő és feltételező eljárások

körében mégis jellegzetes tényt fejez ki. Egy  $A$  négyzetes mátrix determinánsa általában, a tipikus, a generikus esetben (ez utóbbi kettő a szakkifejezés), egy- $\text{valószínűség}$  (ez is szakkifejezés, de illik pontosítani, mihez képest) nem nulla, s így az  $Ax = b$  egyenlet általában korrekt kitűzésű. Hasonló jellegű a mérnökök körében kedvelt „ $m$  ismeretlen,  $n$  mérés,  $m < n \Rightarrow$  túlhatározott egyenletrendszer” és az „ $m$  ismeretlen,  $n$  mérés,  $m > n \Rightarrow$  alulhatározott egyenletrendszer” kijelentések igazságtartalma.

A lineáris egyenletek általános elmélete (ezen belül alul- illetve túlhatározottságuk) szempontjából az  $n > m$ ,  $n = m$ ,  $n < m$  esetek irrelevánsak. Ami számít, az a lineáris függetlenség. Az  $Ax = b$  egyenlet pontosan akkor oldható meg, ha a  $b$  vektor benne van az  $A$  mátrix oszlopvektorai által kifeszített altérben, amit algebrailag a  $\text{rank}(A, b) = \text{rank}(A)$  feltétel fejez ki. Mindez világos az alábbi felírásból, ahol a jelölések is önmagukért beszélnek:

$$\begin{aligned}
 & \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix} \\
 Ax = b & \Leftrightarrow \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2m} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nm} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} \\
 & \Leftrightarrow x_1 \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{n1} \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{n2} \end{pmatrix} + \dots + x_m \begin{pmatrix} a_{1m} \\ a_{2m} \\ \vdots \\ a_{nm} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} \\
 & \Leftrightarrow x_1 \mathbf{a}_1 + x_2 \mathbf{a}_2 + \dots + x_m \mathbf{a}_m = \mathbf{b}.
 \end{aligned}$$

Természetes módon merül fel a kérdés, miért foglalkozunk annyit lineáris algebrai egyenletekkel. Alapvetően azért, mert a legfontosabb parciális differenciálegyenletek numerikus megoldási módszerei szinte mindig lineáris algebrai egyenletrendszerre vezetnek. A nehézséget az okozza, hogy ez az egyenletrendszer roppant nagy méretű is lehet — olyan nagy méretű, hogy mátrixát a számítógép nem dupla-indexű tömbben, hanem egy gráf csúcsaival indexelve tárolja. Mind a véges differencia, mind a végelem módszer ritka mátrixokhoz vezet: közülük elegendő csak a nemnulla elemeket tárolni. Ami pedig az ilyen lineáris egyenletrendszerek számítógépi megoldását illeti, nemhogy a Cramer-szabállyal, de még a Gauss-eliminációval sem jutunk sokra — leginkább speciális iteratív módszereket szokás használni.

Az analízis és a lineáris algebra számtalan módon összefügg egymással. A linearizálás alapvető módszer az egész matematikai analízisben. Egy mátrix nemcsak algebrai, hanem analitikus, geometriai, kombinatorikus, sőt valószínűségszámítási struktúrát is hordoz. Nem csodálatos, hogy mennyi aspektusa van a szimmetrikus mátrixok sajátértékeire vonatkozó

Rayleigh elvnek, a nemnegatív elemű mátrixok Perron–Frobenius-tételének, avagy éppen a Laplace-transzformáció  $A^{-1} = -\int_0^\infty e^{At} dt$  formulájának? (Ez utóbbi akkor érvényes, ha az improprius integrál konvergenciáját biztosítandó az  $A$  mátrix valamennyi sajátértékének valós része negatív.)

## 28.2. Nemlineáris algebrai egyenletek

Elöljáróban meg kell állapítanunk, hogy az  $y = f(x)$  egyenlet megoldására nincs általános módszer. Itt  $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  folytonosan differenciálható függvény,  $y \in \mathbb{R}^n$  adott,  $x \in \mathbb{R}^n$  pedig az ismeretlen. A  $g(x) = y - f(x)$  helyettesítés a  $g(x) = 0$  alakú gyök-keresés, a  $h(x) = x + f(x) - y$  helyettesítés az  $x = h(x)$  alakú fixpont-keresés feladatához vezet. A gyök-keresés szokásos módszere a Newton iteráció. Tetszőlegesen választott  $x_0 \in \mathbb{R}^n$  értékből kiindulva, az érintőmódszerből származó

$$x_{k+1} = x_k - [g'(x_k)]^{-1} g(x_k), \quad k \in \mathbb{N}$$

Newton iteráció gyakorta konvergál, és pedig a  $g(x) = 0$  egyenlet egyik gyökéhez. Hogy melyik gyökéhez, illetve hogy egyáltalán konvergál-e, az kritikus módon függ<sup>9</sup> az iteráció  $x_0 \in \mathbb{R}^n$  kezdő-értékének megválasztásától. Hasonló a helyzet a globális optimalizációval: az 'educated initial guess' ott is, itt is kincset ér.

Nemlineáris algebrai egyenletek megoldhatósága, illetve megoldása tehát igencsak nehéz és az úgynevezett globális analízis témakörébe tartozik. Lokálisan, az értelmezési tartomány tetszőleges  $x_0$  pontjának kis környezetében mindez összehasonlíthatatlanul egyszerűbb. Ez utóbbi a klasszikus inverz/implicit függvény tételek világa.

Tekintsük az  $y = f(x)$  egyenletet az  $x_0 \in \mathbb{R}^n$  pont egy környezetében. Célunk az  $y = f(x)$  egyenlet megoldása az  $y_0 = f(x_0)$  értékhez közeli  $y$  értékek esetén. A korrekt kitűzöttség elegendő feltétele az, hogy az  $f$  függvény  $x_0$  pontbeli deriváltmátrixának determinánsa, a híres–nevezetes Jacobi determináns nullától különböző legyen. Képlettel:  $\det(B) \neq 0$ , ahol  $B = \det(f'(x_0))$ . Vegyük észre, hogy a  $\det(B) \neq 0$  feltétel az  $x_0$  körül linearizált egyenlet korrekt kitűzöttségét biztosítja:

$$y - y_0 = f(x) - f(x_0) \Leftrightarrow y - y_0 = B(x - x_0) + \dots \Rightarrow \text{lokálisan}$$

$$\text{jó közelítéssel} \Rightarrow y - y_0 = B(x - x_0) \Leftrightarrow x = x_0 - B^{-1}(y - y_0).$$

Ha  $\det(B) \neq 0$ , akkor az  $y = f(x)$  egyenletből az  $x$  mint az  $y$  függvénye az  $(x_0, y_0)$  egy kis környezetében kifejezhető (egzisztencia), egyértelműen fejezhető ki (unicitás), és ez az  $x = x(y)$  inverz függvény maga is folytonos (folytonos függés), sőt folytonosan deriválható. Az inverz függvény  $y_0$  egy kicsiny környezetében értelmezett,  $x(y_0) = x_0$ ,  $x'(y_0) = -B^{-1}$  és így

<sup>9</sup>Az első olyan példát, amelyben a Newton iteráció  $\{x_n\}_{n=0}^\infty$  sorozata szokatlanul bonyolult is lehet, a debreceni Barna Béla publikálta (B. Barna, „Über das Newtonsche Verfahren zur Annäherung von Wurzeln algebraischer Gleichungen”, Publ. Math. Debrecen 2(1951), 50–63.) Dolgozatának legfontosabb eredménye a ma használatos terminológiával így fogalmazható meg. Legyen  $p: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  olyan negyedfokú, valós együtthatós polinom, amelynek négy darab egyszeres, valós gyöke van. Ekkor az  $x_{k+1} = x_k - \frac{p(x_k)}{p'(x_k)}$ ,  $k \in \mathbb{N}$  Newton iteráció kaotikus lesz az  $x_0$  kezdőértékek egy invariáns Cantor halmazán

$x(y) = x_0 - B^{-1}(y - y_0) + \dots$ , ahol a  $\dots$  az  $(y - y_0)$ -ban magasabb fokú tagokat jelenti. Tehát az  $y - y_0 = B(x - x_0)$  linearizált egyenlet pontos megoldása az eredeti nemlineáris  $y = f(x)$  egyenlet pontos megoldásának  $x_0$  körüli linearizáltja.

Hasonló a helyzet az  $f(x, y) = 0$  alakú egyenletek lokális megoldhatóságára vonatkozó implicit függvény tétellel. Itt  $f : \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  folytonosan differenciálható függvény, és  $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n$  is adott, ahol  $f(x_0, y_0) = 0$ . Ekkor a  $B = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)$  és  $C = \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)$  jelölésekkel, a  $\det(C) \neq 0$  feltétel teljesülése esetén az  $f(x, y) = 0$  egyenletből az  $y$  mint az  $x$  függvénye az  $(x_0, y_0)$  egy kis környezetében kifejezhető (egzisztencia), egyértelműen fejezhető ki (unicitás), és ez az  $y = y(x)$  implicit függvény maga is folytonos (folytonos függés), sőt folytonosan deriválható. Linearizálással

$$f(x, y) = 0 \Leftrightarrow B(x - x_0) + C(y - y_0) + \dots = 0 \Leftrightarrow y = y_0 - C^{-1}B(x - x_0) + \dots,$$

implicit deriválással és az  $(x, y) = (x_0, y_0)$ ,  $y(x_0) = y_0$  helyettesítésekkel pedig az ezzel ekvivalens

$$f(x, y(x)) = 0 \Rightarrow \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) + \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) \cdot y'(x) = 0 \Rightarrow B + Cy'(x_0) = 0$$

formula adódik: mind az  $y = y_0 - C^{-1}B(x - x_0) + \dots$ , mind a  $B + Cy'(x_0) = 0$  képletek lényegi tartalma  $y'(x_0) = -C^{-1}B$ .

A többszöri  $\dots$  kipontozás világosan utal rá, hogy a linearizálás módszere egy sorfejtés első tagjánál történő megállás. Ez így is van, de összességében ritkán szokás továbbmenni<sup>10</sup>. A linearizálás hatékony módszer. Algebrai, közönséges, és parciális egyenletekre egyaránt. A sorfejtés második pláne harmadik tagjának figyelembe vétele csakúgy mint a velük ekvivalens kétszeri és háromszori implicit deriválás az elfajult szélsőértékek és a bifurkációelmélet többváltozós függvénytanának dzsungelébe vezetnek.

Vannak globális inverz függvény tételek is, de azok sokkal nehezebbek. Közülük a legrégebbit a már említett Jacques Hadamard — akitől a korrekt kitűzöttség definíciója is származik — bizonyította<sup>11</sup>: Az  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  folytonosan differenciálható függvény a teljes

<sup>10</sup>Végiggondoltuk-e (legalább a  $\varphi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $k = 0, 1, 2$  esetekben) hogy a többváltozós Taylor polinom egyszerűnek tűnő

$$\begin{aligned} \varphi(x_0 + x) &= \varphi(x_0) + [\varphi'(x_0)](x) + \frac{1}{2!}[\varphi''(x_0)](x, x) + \dots + \frac{1}{k!}[\varphi^{(k)}(x_0)](x, x, \dots, x) \\ &+ \frac{1}{k!} \int_0^1 (1 - \vartheta)^k [\varphi^{(k+1)}(x_0 + \vartheta x)](x, x, \dots, x) d\vartheta, \quad k \in \mathbb{N} \end{aligned}$$

felírásában milyen multilineáris operátorok szerepelnek? Vagy azt, hogy mi az integrál-maradéktag viszonya a megszokott Lagrange féle maradéktaghoz? Milyen formában marad igaz a Lagrange féle középértéktétel a többváltozós esetben?

<sup>11</sup>Wikipedia: In his book „The Mathematician’s Mind: The Psychology of Invention in the Mathematical Field” (Princeton University Press, Princeton, 1996), Hadamard uses introspection to describe mathematical thought processes. In sharp contrast to authors who identify language and cognition, he describes his own mathematical thinking as largely wordless, often accompanied by mental images that represent the entire solution to a problem. He surveyed 100 of the leading physicists of the day (approximately 1900), asking them how they did their work. Many of the responses mirrored his; some reported seeing mathematical concepts as colors. Einstein reported that the elements of his work consisted of visual and muscular entities, and that words or language did not seem to play any role in his mechanism of thought

$\mathbb{R}^n$  halmazt kölcsönösen egyértelműen képezi önmagára (azaz  $f$  invertálható és értékkészlete a teljes  $\mathbb{R}^n$ ), ha  $\det(f'(x)) \neq 0$  minden  $x \in \mathbb{R}^n$  esetén és  $\sup_{x \in \mathbb{R}^n} \|[f'(x)]^{-1}\| < \infty$ . A Jacobi mátrixok inverzei normáinak egyenletes korlátosságára vonatkozó supremum-feltétel elégséges volta az  $n = 1$  speciális esetben közvetlenül szemléltethető: ahhoz, hogy egy folytonos és szigorúan monoton (intervallumon értelmezett folytonos függvények esetén ez utóbbi feltétel mindenképpen kell az invertálhatósághoz) valós függvény értékkészlete a teljes számegegyenes legyen, elegendő ha  $\inf_{x \in \mathbb{R}} f'(x) > 0$  vagy  $\sup_{x \in \mathbb{R}} f'(x) < 0$ .

Most konkrét példa részletes tárgyalásával is szeretnénk hangsúlyozni a klasszikus inverz függvény tétel lokális jellegét. Legyenek  $n = 2$ ,  $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ ,  $y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$ ,

$$f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} e^{x_1} \cos(x_2) \\ e^{x_1} \sin(x_2) \end{pmatrix}.$$

A megoldandó nemlineáris algebrai egyenletrendszer tehát

$$y = f(x) \Leftrightarrow \left. \begin{matrix} y_1 = f_1(x_1, x_2) \\ y_2 = f_2(x_1, x_2) \end{matrix} \right\} \Leftrightarrow \left. \begin{matrix} y_1 = e^{x_1} \cos(x_2) \\ y_2 = e^{x_1} \sin(x_2) \end{matrix} \right\}$$

a(z  $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$  pontban kiértékelt) Jacobi-mátrix pedig

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{x_1} \cos(x_2) & -e^{x_1} \sin(x_2) \\ e^{x_1} \sin(x_2) & e^{x_1} \cos(x_2) \end{pmatrix},$$

amelynek determinánsa  $e^{2x_1} \neq 0$ . Lokálisan tehát mindenütt teljesülnek az inverz függvény tétel feltételei, de globális inverz függvény nem létezhet, hiszen  $f$  nem kölcsönösen egyértelmű. Jóllehet  $x_1 = \frac{1}{2} \log(y_1^2 + y_2^2)$  (ha  $(y_1, y_2) \neq (0, 0)$ ) még problémamentes,  $x_2$  kiszámításához figyelembe kell venni az arcus-függvények (ha úgy tetszik, a komplex logaritmus-függvény) többértékű voltát. Valóban, az  $f$  függvény második változójában  $2\pi$  szerint periodikus — vegyük észre a közvetlen komplex függvénytani magyarázatot:  $y_1 + iy_2 = e^{x_1 + ix_2}$ .

### 28.3. Közöséges differenciálegyenletek

Legyen  $f: \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  folytonos függvény,  $t_0 \in \mathbb{R}$  és  $x_0 \in \mathbb{R}^n$ . Az

$$\left. \begin{matrix} \dot{x} = f(t, x) \\ x(t_0) = x_0 \end{matrix} \right\} \quad (28.2)$$

kezdetiértékprobléma korrekt kitűzöttségének elegendő feltétele, hogy az  $f$  függvény második változójában eleget tegyen a Lipschitz feltételnek. A Lipschitz feltétel olyan  $L \geq 0$

konstans<sup>12</sup> létezését követeli meg, amelyre

$$|f(t, x) - f(t, \tilde{x})| \leq L|x - \tilde{x}| \quad \text{minden } (t, x), (t, \tilde{x}) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \text{ esetén.}$$

Ekkor a (28.2) kezdetiértékproblémának pontosan egy megoldása van (egzisztencia és unicitás), ez a megoldás a teljes számegyenesen értelmezett, a megoldás  $t$  időpillanatban felvett értékét kifejező  $\Phi : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  függvény pedig folytonos (folytonos függés).

Alapvető fontosságú, hogy a megoldás nemcsak a kezdeti feltételektől függ folytonosan, hanem a differenciálegyenlet jobb oldalán álló  $f$  függvénytől is. Ezt a kvalitatív tényt az alábbi tétel egy kvantitatív egyenlőtlenség formájában fejezi ki.

**28.3.1. TÉTEL** Legyenek  $t_0 \in \mathbb{R}$ ,  $x_0, \tilde{x}_0 \in \mathbb{R}^n$ ,  $\varepsilon, \Delta, T > 0$  tetszőlegesen, és tekintsük az

$$\left. \begin{array}{l} \dot{x} = f(t, x) \\ x(t_0) = x_0 \end{array} \right\} \quad \text{és az} \quad \left. \begin{array}{l} \dot{x} = \tilde{f}(t, x) \\ x(t_0) = \tilde{x}_0 \end{array} \right\}$$

kezdetiértékproblémákat. Tegyük fel, hogy az  $f, \tilde{f} : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  folytonos függvények második változójukban eleget tesznek a globális Lipschitz feltételnek az  $L$  konstanssal, valamint azt is, hogy

$$|f(t, x) - \tilde{f}(t, x)| \leq \varepsilon \quad \text{minden } (t, x) \in [t_0, t_0 + T] \times \mathbb{R}^n \text{ mellett.} \quad (28.3)$$

Ha még  $|x_0 - y_0| \leq \Delta$  is teljesül, akkor

$$|\Phi(t, t_0, x_0) - \tilde{\Phi}(t, t_0, \tilde{x}_0)| \leq (\Delta + \varepsilon T)e^{LT} \quad \text{minden } t \in [t_0, t_0 + T] \text{ esetén.}$$

A lineáris algebrai egyenletek után újabb példát láttunk arra, mit lehet/kell értenünk az  $\mathcal{F}$  és az  $\tilde{\mathcal{F}}$  feladatok, illetve azok  $\mathcal{M}(\mathcal{F})$  és  $\mathcal{M}(\tilde{\mathcal{F}})$  megoldásainak távolságán.

A (28.2) kezdetiértékprobléma megoldásának kiszámítására<sup>13</sup> legegyszerűbb a  $\varphi(t_0 + h, t_0, x_0) = x_0 + hf(t_0, x_0)$  képlettel meghatározott,  $0 < h \leq h_0$  lépésközü explicit Euler féle töröttvonal módszert használni. Az előző tétel folytatásaként legyen most  $N$  pozitív egész szám, és válasszuk a lépésközt  $h = \frac{T}{N}$ -nek. Ekkor a ténylegesen vizsgált  $\dot{x} = \tilde{f}(t, x)$ ,  $x(0) = \tilde{x}_0$  kezdetiértékprobléma  $\mathcal{M}(\tilde{\mathcal{F}})$  pontos és az Euler féle töröttvonal módszerrel számolt  $m(\tilde{\mathcal{F}})$  közelítő megoldásának távolságára a következő becslés adható.

<sup>12</sup>egyelőre csak a globális Lipschitz feltétellel foglalkozunk. Természetesen meg lehet követelni az  $|f(t, x) - f(t, \tilde{x})| \leq L|x - \tilde{x}|$  egyenlőtlenséget  $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$  egy részhalmazán is, de akkor minden későbbi számolásnál gondot okozna az a tény, hogy a  $\Phi(\cdot, t_0, x_0)$  megoldásfüggvény értelmezési tartománya függhet a  $(t_0, x_0)$  kezdeti értéktől. (Példa: az  $\dot{x} = x^2$ ,  $x(0) = x_0 > 0$  kezdetiértékprobléma  $\Phi(t, 0, x_0) = \frac{x_0}{1 - x_0 t}$  megoldása csupán a  $(-\infty, \frac{1}{x_0})$  intervallumon értelmezett.) Miután alaposan kitárgyaltuk az inverz függvény tétel lokális voltát, most egy technikailag egyszerűbb tárgyalásmódot részesítünk előnyben. Amint azt az  $\dot{x} = 3x^{2/3}$ ,  $x(0) = 0$  kezdetiértékprobléma  $\Phi_1(t, 0, 0) = 0$  és  $\Phi_2(t, 0, 0) = t^3$  megoldásai mutatják, a lokális Lipschitz feltétel hiánya megsértheti a megoldások unicitását is

<sup>13</sup>még az  $\dot{x} = f(x)g(t)$  alakú szétválasztható valamint az  $\dot{x} = Ax + h(t)$  alakú magasabb-rendű állandó együtthatós lineáris közönséges differenciálegyenletek esetében is (hiszen nem lehetünk biztosak abban, hogy a szükséges integrálok eredményeit fel lehet írni zárt alakban — sőt a karakterisztikus polinom gyökei, azaz a  $A$  mátrix sajátértékeit sem tudjuk teljes pontossággal meghatározni)

28.3.2. **TÉTEL** Létezik olyan, az  $N$  értékétől független  $\mathcal{C}_{EE} = \mathcal{C}_{EE}(\tilde{f})$  konstans<sup>14</sup>, hogy a  $[t_0, t_0 + T]$  intervallum  $k$ -adik osztópontjában

$$|\tilde{\Phi}(t_0 + kh, t_0, x_0) - \tilde{\Phi}_k(h, t_0, \tilde{x}_0)| \leq \mathcal{C}_{EE} \cdot e^{Lkh} h, \quad k = 1, 2, \dots, N,$$

speciálisan  $t_0 + Nh = t_0 + T$  végpontjában

$$|\tilde{\Phi}(t_0 + T, t_0, x_0) - \tilde{\Phi}_N(h, t_0, \tilde{x}_0)| \leq \mathcal{C}_{EE} \cdot e^{LT} h, \quad n = 1, 2, \dots \quad (28.4)$$

(A (28.4) becslésben  $\tilde{\Phi}(t_0 + T, t_0, x_0)$  és  $\tilde{\Phi}_N(h, t_0, \tilde{x}_0)$  rendre a pontos és a közelítő megoldás értékét jelentik a  $t_0 + T$  pontban. Utóbbit természetes módon a  $\tilde{\Phi}_1(h, t_0, \tilde{x}_0) = \tilde{\Phi}(t_0 + h, t_0, \tilde{x}_0)$ ,

$$\tilde{\Phi}_{k+1}(h, t_0, \tilde{x}_0) = \tilde{\Phi}(t_0 + (k+1)h, t_0 + kh, \tilde{\Phi}_k(h, t_0, \tilde{x}_0)), \quad k = 1, 2, \dots, N-1$$

rekurzió definiálja.)

Mivel a természet törvényei az időben változatlanul érvényesek, a mérnökök számára fontos differenciálegyenletek jelentős része  $\dot{x} = f(x)$  alakú. Ezeket az időtől független<sup>15</sup> egyenleteket autonóm egyenleteknek nevezzük. A kezdeti időpont  $t_0 = 0$  választásával

$$\left. \begin{aligned} \dot{x} &= f(x) \\ x(0) &= x_0 \end{aligned} \right\} \quad (28.5)$$

alakú kezdetiértékproblémákat kapunk, amelyek megoldását a  $\Phi : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  függvény szolgáltatja.

28.3.3. **DEFINÍCIÓ** A  $\Phi : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  leképezés dinamikai rendszer, ha igazak rá

- (i)  $\Phi(0, x) = x$  minden  $x \in \mathbb{R}^n$  esetén
- (ii)  $\Phi(t, \Phi(s, x)) = \Phi(t + s, x)$  minden  $t, s \in \mathbb{R}$  és minden  $x \in \mathbb{R}^n$  esetén
- (iii)  $\Phi$  folytonos

Autonóm közönséges differenciálegyenlet megoldásai — ha az  $f$  függvény eleget tesz az  $|f(x) - f(\tilde{x})| \leq L|x - \tilde{x}|$  globális Lipschitz feltételnek — dinamikai rendszert határoznak meg. Globális egzisztencia, unicitás, folytonos függés. A  $\Phi(0, x_0) = x_0$ ,  $\Phi(t, \Phi(s, x_0)) = \Phi(t +$

<sup>14</sup>a  $\mathcal{C}_{EE}$  konstans általában nem nagy és explicit módon meghatározható az  $\tilde{f}$  függvény ismeretében. Ha például az  $\tilde{f}$  függvény korlátos, és  $K = \sup_{(t,x) \in [t_0, t_0+T] \times \mathbb{R}^n} |\tilde{f}(t, x)|$ , akkor a  $\mathcal{C}_{EE} = \frac{K}{2L}$  választás megfelelő. Itt említjük meg azt is, hogy a szokásos negyedrendű implicit Runge–Kutta módszer (Euler töröttvonal módszer) speciálisan választott elsőrendű Runge–Kutta módszer) esetén a (28.4) egyenlőtlenség jobb oldalára  $\mathcal{C}_{ARK} \cdot e^{LT} h^4$  írható.

<sup>15</sup>a nem-autonóm differenciálegyenletek jobb oldalán szereplő  $f(t, x)$  kifejezés időtől való explicit függése gyakran utal emberi beavatkozásra. Legkézenfekvőbb példa az  $\ddot{x} + b\dot{x} + kx = \cos(t)$ ,  $b, k > 0$  egyenlet, amely a mechanikában egy rugó, az elektronikában egy LRC kör oszcillációját írja le, periodikus külső gerjesztés esetén. Az irányítástechnikában és a szabályozásméletben (és másutt is, ahol a külső inputok függhetnek/függenek az időtől) a  $t$  explicit módon van jelen a differenciálegyenletek jobb oldalán

$s, x_0$ ) képletek egyedül az idő múlásának természetét fejezik ki, és pedig olyan rendszerekben, amelyek evolúcióját az időtől független törvényszerűségek határozzák meg. (A dinamikai rendszerek definíciójában a kezdeti értéket  $x_0$  helyett  $x$  jelöli.) Nem-autonóm egyenletek evolúcióját a  $\Phi(t_0, t_0, x_0) = x_0$ ,  $\Phi(t + s + t_0, s + t_0, \Phi(s + t_0, t_0, x_0)) = \Phi(t + s + t_0, t_0, x_0)$ ,  $t_0 \in \mathbb{R}$ ,  $t, s \geq 0$  formulák írják le. (Vannak, akik ez utóbbi helyett a  $\Phi(t, s, \Phi(s, t_0, x_0)) = \Phi(t, t_0, x_0)$  formulát részesítik előnyben, de náluk  $t \geq s \geq t_0$ .) Mind az autonóm, mind a nem-autonóm esetben arról van szó, hogy a kezdeti pillanatban még semmi sem történik, a rendszer  $t + s$  idő eltelte utáni állapota pedig ugyanaz, mint ahová a rendszer az  $s$  idő eltelte utáni állapotából újabb  $t$  idő elteltével kerülne.

Az olyan általános software-ek, mint a *MATLAB*, vagy a *Mathematica* alapbeállításuk szerint negyedrendű explicit Runge–Kutta módszert használnak, de közben a lépésközt (Dormand–Prince extrapoláció és egy szintén explicit, ötödrendű beágyazott Runge–Kutta módszer segítségével) a konkrét számolás menetének megfelelő módon, adaptíven változtatják. Az általános gyakorlatban ez az ‘ököl szabály’ — amely mellett logikus, rámutató érveket fel lehet ugyan sorolni, de attól még heurisztikus marad (a bizonyításnak még a lehetősége sem merül fel) — vált be a legjobban. A közönséges és parciális differenciálegyenletek megoldására kidolgozott és a numerikus analízis tankönyveiben szereplő eljárásokat az igazán éles esetekben csak hibrid és heurisztikus módon lehet használni. Számítógépes szimulációk végzése nehéz mesterség, amelyhez sok-sok tapasztalat, a mögöttes műszaki tartalom kiváló ismerete, intuíció és némi szerencse is kell. Mostanában szokás azt mondani, hogy minden egyes elméleti feladatnak megvan a saját numerikus módszere. Ha például a háromtest problémával állunk szembe, akkor szimplektikus módszert kell alkalmazni — olyan módszert, amelyik respektálja a mögöttes fizika megmaradási tételeit. Célfeladathoz célprogram tartozik.

Molekuláris dinamika programcsomagokat előszeretettel használnak gyógyszertervezésre. A számítógépes szimulációk képesek a szóhajóvíz hipotetikus vegyületek óriási többségét *in silico* kizárni, így azoknak csak egy töredékét kell ténylegesen megépíteni, és a biokémia hagyományos *in vitro* és *in vivo* módszereivel kipróbálni. Igen, a matematika a természettudományoknak az az ágazata, amelyben a kísérletezés olcsó.

A kerekítési hibák a mérnököket csak akkor érdeklik — hiszen annyi más, mérési és egyéb hibaforrás is van — amikor azok bajt okoznak. Talán azért meg lehet említeni, hogy a *MATLAB* intervallum–aritmetikai *INTLAB* kiegészítője (többek között a számítógépek működésére vonatkozó IEEE kerekítési szabványok figyelembe vételével) automatikusan elvégzi a kerekítésekből és a sorfejtések csonkolásából adódó kumulált hiba ‘worst–case’ analízisét. A (példa kedvéért a)  $\sin : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  függvény  $x \in \mathbb{R}$  helyen történő kiértékelése egy digitális számítógépen nem a pontos  $\sin(x)$  értéket eredményezi, hanem annak egy közelítését. Amit az *INTLAB* ténylegesen megvalósít, az egy olyan  $\text{SIN} : \mathcal{I} \rightarrow \mathcal{I}$  eljárás, amelynél minden  $I \in \mathcal{I}$  és minden  $x \in I$  esetén  $\sin(x) \in \text{SIN}(I)$ . Itt  $\mathcal{I}$  a számegyenes nem-elfajult, korlátos és zárt, a számítógép belső aritmetikájában reprezentálható intervallumainak halmazát jelöli. Az *INTLAB* tehát a négy alapl művelettől kezdve számok helyett intervallumokkal, általában egyre növekvő hosszúságú intervallumokkal dolgozik és — a gépidő mintegy ötvenszeres megnövekedése árán — azt tudja garantálni, hogy egy művelet sor pontos  $r$  végeredménye benne legyen a tényleges számítógépi végeredményként kapott  $R \in \mathcal{I}$  intervallumban. Az *INTLAB* lebegőpontos számpárokat ( $n$  dimenziós vektorok esetében szám– $2n$ -eseket)



használ, de megbízható más szóval auto-validált módon<sup>16</sup>.

Tegyük fel, hogy egy numerikus szimuláció váratlan eredményhez vezet, meglepő jelenséget produkál. Tudjuk-e magát a számítógépet használni arra, hogy eldöntsük: vajon új effektust fedeztünk fel, avagy már megint csak a számítógép ördöge járhatja velünk a bolondját? Az angol „shadow or ghost” kérdés tükörfordításaként sokkal tömörebben is kérdezhetünk: árnyék vagy szellem? Ez a valódi, mérnököknek, programozóknak, számítástechnikusoknak szóló kihívás az experimentális matematika területén.

## 28.4. Excursus. Függvényterek. Kontrakciós fixponttétel

Az inverz/implicit egyenletek valamint a közönséges differenciálegyenletek problémakör korrekt kitűzöttsége egy s ugyanazon törőből fakad. Mind az  $y = f(x)$ , mind az  $\dot{x} = f(t, x)$ ,  $x(0) = x_0$  feladat végső soron átfogalmazható egy-egy nemlineáris operátor fixpontjának meghatározásával:

$$y = f(x) \Leftrightarrow x = F_y(x), \text{ ahol}$$

$$F_y : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n, \quad x \rightarrow F_y(x) = B^{-1}(y + Bx - f(x)),$$

illetve

$$\left. \begin{array}{l} \dot{x} = f(t, x) \\ x(0) = x_0 \end{array} \right\} \Leftrightarrow x = \mathcal{F}_{t_0, x_0}(x), \text{ ahol } a > 0 \text{ elegendően kicsiny és}$$

$$\mathcal{F}_{t_0, x_0} : C([t_0, t_0 + a], \mathbb{R}^n) \rightarrow C([t_0, t_0 + a], \mathbb{R}^n), \quad x \rightarrow \mathcal{F}_{t_0, x_0}(x),$$

$$(\mathcal{F}_{t_0, x_0}(x))(t) = x_0 + \int_{t_0}^t f(s, x(s)) ds, \quad t \in [t_0, t_0 + a]. \quad (28.6)$$

Érdeemes pár másodpercig eltűnődnünk a (28.6) definiáló képlet szokatlan voltán. Adott  $x$  függvény esetén  $\mathcal{F}_{t_0, x_0}(x)$  az a függvény, amelyik a  $t$  helyen ezt és ezt az értéket veszi fel. A lényeg az, hogy mind az  $F_y$ , mind az  $\mathcal{F}_{t_0, x_0}$  operátorok kontrakciót határoznak meg az  $\mathbb{R}^n$  illetve a  $C([t_0, t_0 + a], \mathbb{R}^n)$  Banach terek egy-egy alkalmasan választott zárt részhalmazán<sup>17</sup>.

FOLYTONOS FÜGGVÉNYEK, NÉGYZETESEN INTEGRÁLHATÓ FÜGGVÉNYEK: Ezen a ponton nem kerülhetjük/kerülhettük meg a korlátos és zárt  $I$  intervallumon értelmezett  $\mathbb{R}^n$  értékű folytonos függvények maximum-normával ellátott  $C(I, \mathbb{R}^n)$  Banach terének (normával

<sup>16</sup>ebben a kontextusban értendők a számítógépes káosz-bizonyítások (W. Tucker, „The Lorenz attractor exists”, C. R. Acad. Sci. Paris Ser. Math. 328(1999), 1197–1202.) illetve az elméleti számítástudomány egyes képviselőinek s némely újságírók meglehetősen „The death of proof” jóslatai. Az első számítógépes bizonyítások közöttük a négy szín-tétel kombinatorikus jellegűek voltak és csak egész típusú számokat használtak — mára ez megváltozott

<sup>17</sup>ha az  $x_0$  kezdőérték elegendően közel van a  $g(x) = 0$  egyenlet egy nem-elfajult (azaz a  $\det(g'(x^*)) \neq 0$  tulajdonságú)  $x^*$  gyökéhez, akkor az  $x_{k+1} = x_k - [g'(x_k)]^{-1}g(x_k)$ ,  $k \in \mathbb{N}$  Newton iteráció konvergenciáját is végső soron a kontrakciós elv biztosítja. Valóban, a  $G(x) = x - [g'(x)]^{-1}g(x)$  leképezés az  $x^* \in \mathbb{R}^n$  egy kis környezetében kontrakció, és pedig olyan kontrakció, amelynek  $q$  kontrakciós konstansa az  $x_k \rightarrow x^*$  határátmenet során a nullához tart. Ennek megfelelően érvényes rá „az értékes jegyek száma lépésenként megduplázódik”  $|x_{k+1} - x^*| \leq \text{const} \cdot |x_k - x^*|^2$  kvadratis hibabecslés, míg tetszőleges kontrakcióra csak „az értékes jegyek száma lépésenként eggyel nő”  $d(x_{k+1}, x^*) \leq q \cdot d(x_k, x^*)$  lineáris egyenlőtlenség teljesül (a mérnöki szóhasználat mindkét esetben kissé pontatlan, de a lényegre remekül kifejezi)

ellátott vektorterek, amelyekben minden Cauchy sorozat konvergens) explicit bevezetését. Az explicit jelző arra utal, hogy a  $C(I, \mathbb{R}^n)$  tér az első éves matematika tanulmányainkból ismert egyenletes konvergencia tere (abban az értelemben, hogy  $\|x_n - x\|_C \rightarrow 0$  pontosan akkor, amikor az  $\{x_n\}_{n=1}^\infty$  függvénysorozat egyenletesen tart az  $x$  függvényhez az  $I$  intervallumon).

#### 28.4.1. DEFINÍCIÓ

$$C(I, \mathbb{R}^n) = \{x : I \rightarrow \mathbb{R}^n \mid x \text{ folytonos és } \|x\|_C = \max_{t \in I} |x(t)|\}.$$

Könnyen látható, hogy a

$$\|\cdot\| : C(I, \mathbb{R}^n) \rightarrow \mathbb{R}^+, \quad x \rightarrow \|x\|_C = \max_{t \in I} |x(t)|$$

hozzárendelés valóban norma és hogy  $C(I, \mathbb{R}^n)$  Cauchy sorozatai mind konvergensek (másképpen fogalmazva:  $C(I, \mathbb{R}^n)$  a  $\|x\|_C$  norma által indukált  $d_C(x, \tilde{x}) = \|x - \tilde{x}\|_C$  távolságra nézve teljes metrikus tér). Mindez akkor is igaz marad, ha a számegyenes korlátos és zárt  $I$  intervallumát kicseréljük az  $\mathbb{R}^d$  tetszőleges korlátos és zárt  $H$  részhalmazára. Ebben az esetben a  $C(H, \mathbb{R}^n)$  Banach térről beszélünk. A  $H$  halmaz szokásos választása  $H = \overline{\Omega}$ ,  $\mathbb{R}^d$  korlátos és nyílt  $\Omega$  tartományának  $\overline{\Omega}$  lezártja. A  $d > 1$ ,  $n = 1$  esetben (az érintett függvények többváltozós voltát hangsúlyozandó) használjuk a

$$C(\overline{\Omega}) = \{u : \overline{\Omega} \rightarrow \mathbb{R} \mid u \text{ folytonos és } \|u\|_C = \max_{x \in \overline{\Omega}} |u(x)|\}.$$

jelölést is<sup>18</sup>.

A későbbiekben szükségünk lesz az  $I$  intervallumon értelmezett négyzetesen Lebesgue integrálható függvények  $L_2$  terére is.

#### 28.4.2. DEFINÍCIÓ

$$L_2(I) = \{x : I \rightarrow \mathbb{R} \mid x \text{ négyzetesen integrálható és } \|x\|_{L_2} = \sqrt{\int_I |x(t)|^2 dt}\}.$$

Itt olyan integrálfogalomról — pontosabban a jólismert Riemann integrál fogalmának kiterjesztéséről — van szó, amelyre nézve az  $L_2$  normált tér teljes. Ha a definícióban megmaradtunk volna a Riemann integrál fogalmánál, akkor nem teljes normált teret kaptunk volna. Szokás azt is mondani, hogy a Lebesgue integrál a Riemann integrál teljessé tétele.

<sup>18</sup>hasonlóképpen,  $\|u\|_{BC} = \sup_{x \in \Omega} |u(x)|$  normát határoz meg az  $\Omega$  halmazon értelmezett korlátos és folytonos, valós értékű függvények  $BC(\Omega)$  terében. Ez a tér is Banach tér. Weierstrass klasszikus, folytonos függvényekről szóló tételét úgy is megfogalmazhatjuk, hogy  $BC(\overline{\Omega}) = C(\overline{\Omega})$ . Itt  $B$  a *bounded*,  $C$  pedig a *continuous* szavak kezdőbetűje. Természetesen a  $C(\Omega)$ , sőt például a  $C^2(\Omega)$  jelölések is értelmesek, és az  $\Omega$  tartományon értelmezett folytonos illetve kétszer kétszer folytonosan differenciálható függvények vektorterét jelentik — ezeken a vektortereken norma-struktúrát nem, csak konvergencia-struktúrát szokás definiálni. Érdekes arra is felfigyelnünk, hogy a néhány oldallal korábbi (28.3) egyenlőtlenség az  $\|f - \tilde{f}\|_{BC} \leq \varepsilon$  alakban is kifejezhető, ahol  $BC([t_0, t_0 + T] \times \mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n) = \{x : [t_0, t_0 + T] \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n \mid x \text{ folytonos, korlátos és } \|x\|_{BC} = \sup_{(t,x) \in [t_0, t_0 + T] \times \mathbb{R}^n} |f(t, x)|\}$ .

(Ha egy függvény Riemann integrálható, akkor Lebesgue integrálható is, és a kétféle integrál megegyezik. Természetesen a Riemann integrál mögött álló, úgynevezett Jordan mértéket is teljessé kell tenni: ez a Lebesgue mérték.) Ennek a kiterjesztésnek, teljessé tételnek a nehézségeit nem részletezzük.

Fontos megjegyeznünk, hogy az  $\|x\|_{L_2}$  norma a  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  skaláris szorzásból származik, ahol

$$\langle x, y \rangle_{L_2} = \int_I x(t)y(t) dt \quad \text{és} \quad \|x\|_{L_2} = \sqrt{\langle x, x \rangle_{L_2}}.$$

Az  $L_2$  tér Hilbert tér: az  $\mathbb{R}^n$  euklideszi tér végtelen dimenziós általánosításaként teljes, és normája skaláris szorzásból származik. Érvényes benne a  $|\langle x, y \rangle| \leq \|x\| \cdot \|y\|$  Cauchy–Schwarz egyenlőtlenség, amelynek  $\mathbb{R}^n$ -beli speciális esetét régóta jól ismerjük:  $|\sum_i x_i y_i| \leq \sqrt{\sum_i x_i^2} \cdot \sqrt{\sum_i y_i^2}$ .

Mindebből azonban egyetlen a fontos a mi számunkra: az  $L_2$  tér a Fourier sorfejtés természetes közege.

#### KONTRAKCIÓS FIXPONTTÉTEL:

**28.4.3. TÉTEL** (Egzisztencia, unicitás, iterációs közelítő módszer konvergenciabecsléssel) Legyenek  $(M, d)$  teljes metrikus tér (például egy  $(X, \|\cdot\|_X)$  Banach tér zárt részhalmaza a  $d(x, \tilde{x}) = \|x - \tilde{x}\|_X$  metrikával),  $f : M \rightarrow M$  pedig kontrakció azaz olyan (és ekkor automatikusan folytonos:  $\delta = \frac{\varepsilon}{q}$ ) leképezés, amelyre

$$d(f(x), f(\tilde{x})) \leq q \cdot d(x, \tilde{x}) \quad \text{minden } x, \tilde{x} \in M \text{ esetén.}$$

Ekkor az  $x = f(x)$  egyenletnek pontosan egy,  $x^*$ -al jelölt megoldása van, továbbá tetszőleges  $x_0 \in M$  pontból indulva, az  $x_{k+1} = f(x_k)$ ,  $k \in \mathbb{N}$  iterációs sorozat<sup>19</sup>  $x^*$ -hoz tart, a

$$d(x_k, x^*) \leq \frac{q^k}{1-q} d(x_0, x_1) \quad , \quad k \in \mathbb{N}$$

konvergenciabecsléssel.

**28.4.4. KÖVETKEZMÉNY** (A kontrakciós fixponttétel folytatása: folytonos függés) Legyenek  $(M, d)$  teljes metrikus tér,  $f, \tilde{f} : M \rightarrow M$  kontrakciók a  $q < 1$  konstanssal, rendre  $x^*$  és  $\tilde{x}^*$  fixpontokkal. Tegyük fel, hogy

$$d(f(x), \tilde{f}(x)) \leq \varepsilon \quad \text{minden } x \in M \text{ esetén.}$$

Ekkor

$$d(x^*, \tilde{x}^*) \leq \frac{\varepsilon}{1-q}.$$

<sup>19</sup>az iterációt a (28.6) integráloperátor esetében szukszcesszív approximációnak hívjuk

**BIZONYÍTÁS** A háromszögegyenlőtlenséget alkalmazva

$$\begin{aligned} d(x^*, \tilde{x}^*) &= d(f(x^*), \tilde{f}(\tilde{x}^*)) \leq d(f(x^*), f(\tilde{x}^*)) + d(f(\tilde{x}^*), \tilde{f}(\tilde{x}^*)) \\ &\leq q \cdot d(x^*, \tilde{x}^*) + \varepsilon, \end{aligned}$$

amelyből az egyszerű átrendezés,  $d(x^*, \tilde{x}^*)$  kifejezése pontosan azt adja, amit bizonyítani akartunk. Q.E.D.<sup>20</sup> □

A paraméterektől illetve az egyenlet jobb oldalától való függés tekintetében nem a folytonosság az utolsó szó, amit kimondhatunk. Ha például az  $\dot{x} = f(t, x)$  egyenlet jobb oldalán álló  $f$  függvény a  $C^k$  simasági osztályba tartozik (azaz mindkét változójában egyszerre  $k$ -szor folytonosan differenciálható), akkor az  $\Phi(t, t_0, x_0)$  megoldásfüggvény a  $(t_0, x_0)$  paraméterekben és a  $t$  változóban egyszerre a  $C^k$ , sőt a  $t$  változóban a  $C^{k+1}$  osztályba tartozik. Itt  $k$  nemcsak tetszőleges pozitív egész szám lehet, hanem  $k = \infty$ , sőt  $k = \omega$  is megengedett:  $C^\infty$  a végtelen sokszor differenciálható,  $C^\omega$  pedig az analitikus függvények osztályát jelenti. Analitikusság alatt azt értjük, hogy a függvény (lokálisan, az értelmezési tartomány minden pontjának egy kicsiny környezetében) egyenlő saját Taylor sorával<sup>21</sup>.

## 28.5. Az eddigiek összefoglalása

Példák korrekt kitűzésű feladatra:

### 28.5.1. PÉLDA LINEÁRIS ALGEBRAI EGYENLET

$Ax = b$ , ahol  $A$   $n \times n$ -es mátrix és  $b \in \mathbb{R}^n$  vektor.

A korrekt kitűzöttség szükséges és elégséges feltétele :  $\det A \neq 0$ .

A megoldás az  $x = A^{-1}b \in \mathbb{R}^n$  vektor.

### 28.5.2. PÉLDA NEMLINEÁRIS ALGEBRAI, INVERZ FÜGGVÉNY EGYENLET

$y = f(x)$ , ahol az  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  függvény  $C^1$ ,  $x_0, y_0 \in \mathbb{R}^n$  és  $y_0 = f(x_0)$ .

A korrekt kitűzöttség szokásos feltétele :  $\det(f'_x(x_0)) \neq 0$ .

A megoldás az  $y_0$  kis környezetében értelmezett  $x = x(y)$  inverz függvény, amely maga is  $C^1$  s amelyre  $x_0 = f^{-1}(y_0)$ .

### 28.5.3. PÉLDA NEMLINEÁRIS ALGEBRAI, IMPLICIT FÜGGVÉNY EGYENLET

$f(x, y) = 0$ , ahol az  $f : \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  függvény  $C^1$ ,  $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n$  és  $f(x_0, y_0) = 0$ .

A korrekt kitűzöttség szokásos feltétele :  $\det(\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)) \neq 0$ .

<sup>20</sup>A matematikusok nagyon büszkék erre a három betűre: „quod erat demonstrandum”, szó szerint „ami bizonyítandó volt”. Nagy kár, hogy a régi Műegyetemen használatos Q.E.F. és Q.E.I. — „quod erat faciendum” és „quod erat inveniendum” (facere = tenni, csinálni — venire = jönni → invenció) — rövidítések kimentek a divatból. Mintha a klasszikus okosság egyedül a „valamit bebizonyítani” képessége lenne. Figyelemreméltó, hogy a német markánsan megkülönbözteti az elméleti *wissen* tudást és a gyakorlati *können* képességet: a magyar fordítás mindkét esetben a „tudni”. Aristoteles szerint ami az elmélet *theoria* és a gyakorlat *praxis* között van, az költészet *poesis* (Vittorio Hösle, Praktische Philosophie in der modernen Welt, C.H.Beck Verlag, München 1992). Gyönyörűen mondja az angol, *clever with his/her fingers*. A matematikus mestersége is — ugyanúgy mint az asztalosé, az esztergályosé, a virágkötőé vagy a gyógytornászé — jelentős részben kézügyesség dolga.

<sup>21</sup>Fontos megjegyeznünk azt is, hogy az inverz- és az implicit-függvény tételek mindegyike is igaz a  $C^k$  osztályban, ahol  $k = 1, 2, 3, \dots; \infty, \omega$

A megoldás az  $x_0$  kis környezetében értelmezett  $y = y(x)$  implicit függvény, amely maga is  $C^1$  s amelyre  $y_0 = y(x_0)$ .

**28.5.4. PÉLDA** NEM-AUTONÓM KÖZÖNSÉGES DIFFERENCIÁLEGYENLET KEZDETIÉRTÉKFELADATA, A LOKÁLIS MEGOLDÁS VONATKOZÁSÁBAN

$$\left. \begin{array}{l} \dot{x} = f(t, x) \\ x(t_0) = x_0 \end{array} \right\} \quad \text{ahol } f : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n \text{ folytonos függvény.}$$

A korrekt kitűzöttséghez elegendő, ha az  $f$  függvény  $C^1$ .

A(z általános) megoldás a  $(t_0, t_0, x_0)$  kis környezetében értelmezett  $\Phi(t, t_0, x_0)$  függvény, amely maga is  $C^1$  s amelyre  $\Phi(t_0, t_0, x_0) = x_0$ .

**28.5.5. PÉLDA** AUTONÓM KÖZÖNSÉGES DIFFERENCIÁLEGYENLET KEZDETIÉRTÉKFELADATA, A GLOBÁLIS MEGOLDÁS VONATKOZÁSÁBAN

$$\left. \begin{array}{l} \dot{x} = f(x) \\ x(0) = x_0 \end{array} \right\} \quad \text{ahol } f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n \text{ folytonos függvény.}$$

A korrekt kitűzöttséghez elegendő, hogy<sup>22</sup>  $|f(x) - f(\tilde{x})| \leq L|x - \tilde{x}|$ .

A(z általános) megoldás a teljes  $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$  halmazon értelmezett  $\Phi(t, x_0)$  folytonos függvény, amely első változójában  $C^1$ , második változójában lokálisan Lipschitz s amelyre  $\Phi(0, x_0) = x_0$ .

**28.5.6. PÉLDA** KONTRAKCIÓS EGYENLET

$x = \varphi(x)$ , ahol  $M$  teljes metrikus ter,  $\varphi : M \rightarrow M$  kontrakció.

A korrekt kitűzöttség feltétele : már semmi extra feltétel nem kell.

A megoldás az  $x^* = \varphi(x^*) \in M$  fixpont.

A fenti feladatok mindegyike geometriailag szépen szemléltethető és a megfelelő numerikus-közelítő algoritmusokkal a siker reményében kezelhető: a nehézségek csak akkor torlódhatnak össze, ha a feladat nagy méretű, és/vagy ha a benne szereplő paraméterek konkrét értékei között jelentős nagyságrendi különbségek vannak.

Nem véletlen, hogy a parciális egyenletek kimaradtak ebből a felsorolásból.

<sup>22</sup>természetesen minden  $x, \tilde{x} \in \mathbb{R}^n$  esetén, egyszer s mindenkorra rögzített  $L$  konstans mellett. (Itt a sokadik lehetőség arra, hogy átismételjük a deriválhatóság és a lokális/globális Lipschitz féle egyenlőtlenség, valamint a deriválmátrix normája és a Lipschitz konstans közötti összefüggéseket. Mindezek szépen szemléltethetők az  $n = 1$ ,  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  speciális esetben. Ha az ábrákat fel tudjuk idézni és értjük is őket, minden további eszünkbe fog jutni)

## 29. fejezet

# Parciális differenciálegyenletek

Az Anna Karenina kezdőmondata szerint két boldog család mindig hasonlít egymásra, de minden boldogtalan család a maga módján boldogtalan. Ennek az analógiának az értelmében minden (nem mesterségesen konstruált) közönséges differenciálegyenlet egyként boldog – azaz korrekt kitűzésű: egzisztencia, unicitás, folytonos függés –, a parciális differenciálegyenletek azonban mindnyájan boldogtalanok: a sok közös megfontolás ellenére is a legfontosabb egyenlettípusoknak más és más, külön elméletük van, és ezek egyenként is nehezek.

A korrekt kitűzöttség is problematikus, és már a legegyszerűbb esetekben is az absztrakció bizonyos szintjét igényli.

### 29.1. Hővezetés rúdban. Homogén Dirichlet és Neumann peremfeltétel

Adott egy homogén,  $L > 0$  hosszúságú rúd, amelynek mindkét végpontját folyamatosan nulla fokos hőmérsékleten tartjuk. A kezdeti  $t = 0$  időpillanatban ismerjük a rúd  $g : [0, L] \rightarrow \mathbf{R}$  hőmérséklet-eloszlását. Ismert továbbá a rúd anyagának  $\rho$  sűrűsége,  $c$  fajhője és  $k$  hődiffúziós együtthatója. Keressük az  $u : [0, \infty) \times [0, L] \rightarrow \mathbf{R}$  hőmérséklet-függvényt.

A hővezetés folyamatát az  $u_t = a^2 u_{xx}$  parciális differenciálegyenlet határozza meg, ahol  $a = \sqrt{\frac{k}{c\rho}}$  a hővezetési tényező,  $u_t$  és  $u_{xx}$  pedig az  $u$  függvény  $\frac{\partial u}{\partial t}$  és  $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$  parciális deriváltjai. A peremfeltétel  $u(t, 0) = u(t, L) = 0$ ,  $t \geq 0$ , a kezdeti feltétel  $u(0, x) = g(x)$ ,  $x \in [0, L]$ .

Feladatunk másodrendű (az ismeretlen  $u$  függvény feladatban szereplő parciális deriváltjai között az  $u_{xx}$  a legmagasabb rendű) és lineáris. A linearitás itt és most azt jelenti, hogy

$$\left. \begin{array}{l} u_t = u_{xx} \\ u(t, 0) = u(t, \pi) = 0 \\ u(0, \cdot) = g \end{array} \right\} \& \left. \begin{array}{l} \tilde{u}_t = \tilde{u}_{xx} \\ \tilde{u}(t, 0) = \tilde{u}(t, \pi) = 0 \\ \tilde{u}(0, \cdot) = \tilde{g} \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} v_t = v_{xx} \\ v(t, 0) = v(t, \pi) = 0 \\ v(0, \cdot) = g + \tilde{g} \end{array} \right\}$$

ahol  $v = u + \tilde{u}$ .

A megoldást az internet<sup>1</sup> szerint végtelen sor alakjában lehet felírni:

$$u(t, x) = \sum_{n=1}^{\infty} g_n \exp\left(-\left(a\frac{\pi}{L}\right)^2 n^2 t\right) \sin \frac{\pi}{L} nx,$$

ahol a

$$g_n = \frac{2}{L} \int_0^L g(x) \sin \frac{\pi}{L} nx dx, \quad n = 1, 2, \dots$$

állandók éppen a  $g$  függvény  $\{\sin \frac{\pi}{L} nx\}_{n=1}^{\infty}$ ,  $x \in [0, L]$  trigonometrikus rendszer szerinti Fourier sorfejtésének együtthatói. Ennek lehet nagyon örülni, de tudnunk kell, hogy a megoldás legfontosabb tulajdonságainak egy része csak ügyel-bajjal hámozható ki ebből a képletből. A képletet érteni kell, mint ahogyan a kottát énekelni. Ez a helyzet magával a korrekt kitűzöttséggel, valamint — részletek a 29.4 alfejezet legvégén — a végtelen sebességű hatásterjedéssel, a maximum elvvel, és a Pólya–Sturm tulajdonsággal.

Figyeljük meg, hogy  $u(t, x) \rightarrow 0$  ha  $t \rightarrow \infty$ . A konvergencia egyenletes a  $[0, L]$  intervallumon. Az exponenciális tényező  $a$  növelésével csökken,  $L$  növelésével növekszik. A kihülés folyamata gyorsabb, ha a hővezetési tényező nagy, és akkor is, ha rúd rövid. Jóllehet ez utóbbi információk nem olvashatók ki a feladat  $L = \pi$ ,  $a = 1$  normálalakjából, a továbbiakban csak ezzel az egyszerűsített alakkal<sup>2</sup> foglalkozunk.

Tekintsük tehát — a matematikusok szóhasználatával — az egydimenziós hővezetés homogén Dirichlet peremértékfeladatát a  $[0, \pi]$  intervallumon:

$$\left. \begin{aligned} u_t &= u_{xx} \\ u(t, 0) &= u(t, \pi) = 0 \\ u(0, \cdot) &= g \end{aligned} \right\} \quad t \geq 0, \quad x \in [0, \pi], \quad (29.1)$$

amelynek megoldása az  $L = \pi$  és  $a = 1$  egyszerűsítésekkel

$$u(t, x) = \sum_{n=1}^{\infty} g_n e^{-n^2 t} \sin(nx), \quad (29.2)$$

ahol

$$g_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} g(x) \sin(nx) dx, \quad n = 1, 2, \dots$$

<sup>1</sup>az internet valóságos aranybánya annak, aki azt jól tudja használni. Az aranybánya hasonlat a nemes érc és a meddő kőzet aránya szempontjából is kifejez valamit. A másik alapelv: ugyanarról a dolgról egyszerre több forrásból is helyes tájékozódni és a forrásokat egymással összehasonlítani. Mégér plusz öt percet, hogy a valóban a számomra legjobban használható anyagokat találjam meg. Időről időre még egy könyvtárba is érdemes elmenni. A régi latin mondás veszélyesnek tartja — internet akkor nem lévén — az egykönyvű embert

<sup>2</sup>az egyszerűsítést a

$$t = \mu \tau, \quad x = \nu \chi, \quad \mathcal{U}(\tau, \chi) = u(\mu \tau, \nu \chi) = u(t, x), \quad \mu, \nu > 0$$

változó–transzformáció jelenti. Mivel  $\mathcal{U}_{\tau} = \mu u_t$  és  $\mathcal{U}_{\chi\chi} = \nu^2 u_{xx}$ , legegyszerűbb a  $\frac{\mu}{\nu^2} a^2 = 1$ ,  $\nu = \frac{\pi}{L}$  választás, amely a  $[0, \infty) \times [0, L]$  halmazt a  $[0, \infty) \times [0, \pi]$  halmazba, az  $u_t = u_{xx}$  egyenletet pedig az  $\mathcal{U}_{\tau} = \mathcal{U}_{\chi\chi}$  egyenletbe viszi. Természetesen a kezdeti és a peremfeltétel is transzformálódik, előbbi az  $\mathcal{U}(0, \chi) = g(\frac{L}{\pi} \chi)$ ,  $\chi \in [0, \pi]$ , utóbbi az  $\mathcal{U}(\tau, 0) = \mathcal{U}(\tau, \pi) = 0$ ,  $\tau \geq 0$  alakot ölti. Így az  $L = \pi$ ,  $a = 1$  választás nem jelenti az általánosság megszorítását



Hiába van képletünk a megoldásra, a neheze még hátra van.

Természetes arra gondolnunk, hogy a  $g$  függvény folytonos a  $[0, L]$  intervallumon. Ahhoz, hogy a kezdeti és peremfeltételek egymással összhangban legyenek, teljesülnie kell a  $g(0) = g(L) = 0$  kompatibilitási feltételnek. A továbbiakban jelölje  $C_{\text{compat}}([0, L])$  azon  $g \in C([0, \pi], \mathbb{R})$  függvények halmazát, amelyekre  $g(0) = g(L) = 0$ . Azt reméljük, hogy  $g \in C_{\text{compat}}([0, L])$  esetén az  $u$  megoldásfüggvény folytonos lesz a  $[0, \infty) \times [0, L]$  halmazon. Sajnos a (29.2) Fourier sor konvergenciájával bajok lehetnek, éspedig nemcsak az eleve kizárt  $t < 0$  értékekre, hanem a  $t = 0$  értéknél is<sup>3</sup>. Szerencsére a  $t > 0$  eset problémamentes, a Fourier sor időtől függő együtthatóinak ottani kicsinysége miatt a (29.2) sorfejtés a  $(0, \infty) \times [0, \pi]$  halmazon végtelenszer deriválható, sőt analitikus függvényt határoz meg, amely eleget tesz az  $u_t = u_{xx}$  egyenletnek, kielégíti a peremfeltételt, és amelyre  $\|u_t^{(k)}(t, \cdot)\|_C \rightarrow 0$  ha  $t \rightarrow \infty$ ,  $k \in \mathbb{N}$  is igaz.

Egyelőre ott tartunk, hogy a 29.1 feladat megoldását, a megoldásnak a  $g$  függvényről mint kezdetiértéktől való függését explicit módon feltüntetve — mély lélegzet — a

$$(\Phi(t, g))(x) = \begin{cases} g(x) & \text{ha } t = 0, x \in [0, \pi] \\ \sum_{n=1}^{\infty} g_n e^{-n^2 t} \sin(nx) & \text{ha } t > 0, x \in [0, \pi] \end{cases} \quad (29.3)$$

formula szolgáltatja. Adott  $t \geq 0$  és  $g \in C_{\text{compat}}([0, \pi])$  esetén  $\Phi(t, g) \in C_{\text{compat}}([0, \pi])$  az a függvény, amelyik az  $x$  helyen ezt és ezt az értéket veszi fel, maga a  $\Phi$  pedig  $[0, \infty) \times C_{\text{compat}}([0, \pi]) \rightarrow C_{\text{compat}}([0, \pi])$  leképezés.

A jelölés 29.1 és a 28.5 feladatok közötti hasonlóságra utal: a  $g$  kezdetiérték pontosan azt a szerepet tölti be a 29.1 feladatban, mint az  $x_0$  kezdetiérték a 28.5 feladatban. Akárcsak a 28.5 feladat esetében, a  $\Phi$  leképezés folytonossága itt is egyenértékű a korrekt kitűzöttség definíciójában felsorolt harmadik követelmény teljesülésével.

**29.1.1. TÉTEL** A hővezetés (29.1) kezdeti és peremértékfeladata korrekt kitűzésű a  $C_{\text{compat}}([0, \pi])$  térben.

Ez egyúttal azt is jelenti, hogy  $\Phi(\cdot, g) \in C([0, \infty) \times [0, L])$  minden  $g \in C_{\text{compat}}([0, \pi])$  esetén. A megoldás azonban döccenve indul<sup>3</sup>. A deriváltak  $u_t(t, x) = -\sum_{n=1}^{\infty} n^2 g_n e^{-n^2 t} \sin(nx) = u_{xx}(t, x)$ ,  $t > 0$  azonossága a  $t = 0$  kezdeti időpillanatra csak a  $g$  függvényre tett további feltevések esetén — ha például  $g \in C^3([0, \pi])$  és a  $g(0) = 0$ ,  $g(\pi) = 0$  természetes kompatibilitási feltételen kívül még  $g''(0) = g''(\pi) = 0$  is teljesül — terjeszthető ki. Egy mérnök általában nem törődik az ennyire finom részletekkel. A saját szempontjából teljesen igaza van: a 29.1 feladat mögötti hőtani folyamat már korábban elkezdődött, és maga a természet az, amelyik szép kezdeti feltételeket állít be a  $t = 0$  időpontra (és így a formális deriválással adódó Fourier sorok mindegyike egyenletesen konvergens, továbbá  $u, u_t, u_{xx} \in C([0, \infty) \times [0, L])$  és  $u_t = u_{xx}$  is igaz a  $[0, \infty) \times [0, L]$  halmazon — egy matematika iránt érdeklődő mérnöknek azonban éreznie kell, hogy ezzel még nem jutott el a dolgok legmélyére).

<sup>3</sup>Nem árt felfrissítenünk mindazt, amit a Fourier-sorfejtésről, Fourier sorok konvergenciájáról tanultunk. Ismeretes, van olyan  $g^* \in C_{\text{compat}}([0, \pi])$  függvény, amelyre a Fourier sor szeleteinek  $\{\sum_{n=1}^N g_n^* \sin(nx)\}_N$  sorozata még csak nem is korlátos. A maximum normában való konvergencia tehát eleve kizárt és így az általános elmélet nem garantálja, hogy a (29.2) sorfejtés a  $[0, \varepsilon) \times [0, L]$ ,  $\varepsilon > 0$  halmazon folytonos függvényt definiál



Tudjuk jól, hogy a Fourier sorfejtés természetes közege a négyzetesen integrálható (nem szükségképpen korlátos és folytonos) függvények  $L_2([0, \pi])$  tere, amelyben a skaláris szorzást, a normát és a távolságot rendre az

$$\langle f, g \rangle_{L_2} = \langle f, g \rangle = \int_0^\pi f(x)g(x) dx, \quad \|f\|_{L_2} = \sqrt{\langle f, f \rangle} = \sqrt{\int_0^\pi |f(x)|^2 dx}$$

$$\text{és a } d_{L_2}(f, g) = \|f - g\|_{L_2} = \sqrt{\int_0^\pi |f(x) - g(x)|^2 dx}$$

képletek definiálják. A kompatibilitási feltételekkel mit sem törődve, tegyük fel most csak annyit, hogy  $g \in L_2([0, \pi])$ .

Mit érthetünk, mit értsünk ezek után 29.1 feladat megoldásán? Szerencsére a 29.3 definíció  $g \in L_2([0, \pi])$  esetén is érvényes. A megoldás mindenképpen döccenve indul, simasága a  $t = 0$  kezdeti időpillanat után ugrásszerűen megnő, az  $u$  kétváltozós függvény végtelen sokszor deriválható, sőt analitikus is a  $(0, \infty) \times [0, L]$  halmazon. Maga az  $u_t = u_{xx}$  egyenlet és a peremfeltétel is csak a  $t > 0$  esetén érvényes. A  $t = 0$  kezdeti pillanatban nem beszélhetünk a megoldás folytonosságáról sem. Ami folytonos, az a megoldásnak az  $u(0, \cdot) = g \in L_2([0, \pi])$  kezdeti állapottól való függése, éspedig a

$$d_{L_2}(\Phi(\tau, f), \Phi(t, g)) \rightarrow 0 \quad \text{ha } \tau \rightarrow t \text{ és } d_{L_2}(f, g) \rightarrow 0 \quad (29.4)$$

$\tau, t \geq 0$  értelemben, ami a korrekt kitűzöttség harmadik feltétele.

**29.1.2. TÉTEL** A hővezetés (29.1) kezdeti és peremértékfeladata korrekt kitűzésű az  $L_2([0, \pi])$  térben.

Hogy a 29.1 feladat linearitása a megoldások felírásában is kifejeződjék, a  $T(t)g = \Phi(t, g)$  képlet segítségével bevezetjük az  $T(t) : L_2([0, \pi]) \rightarrow L_2([0, \pi])$ ,  $g \rightarrow T(t)g$  lineáris operátorok  $t \geq 0$  családját. Könnyű látni, hogy  $T(0) = \text{id}_{L_2}$ ,  $T(t)T(s) = T(t+s)$ ,  $t, s \geq 0$ .<sup>4</sup> Vegyük észre azt is, hogy a  $T(t)$ ,  $t \geq 0$  lineáris operátor korlátos, normája a

$$\|T(t)g\|_{L_2}^2 = \frac{\pi}{2} \sum_{n=1}^{\infty} g_n^2 e^{-2n^2 t} \leq e^{-2t} \frac{\pi}{2} \sum_{n=1}^{\infty} g_n^2 = e^{-2t} \|g\|_{L_2}^2$$

egyenlőtlenség és a  $\|T(t) \sin(\cdot)\|_{L_2}^2 = e^{-2t} \|\sin(\cdot)\|_{L_2}^2$  egyenlőség miatt  $\|T(t)\| = e^{-t}$ , a folytonos függést kifejező (29.4) tulajdonság pedig a

$$\|T(\tau)f - T(t)g\|_{L_2} \rightarrow 0 \quad \text{ha } \tau \rightarrow t \text{ és } \|f - g\|_{L_2} \rightarrow 0$$

$\tau, t \geq 0$  alakot ölti. Feltehetjük, hogy  $\tau \geq t \Leftrightarrow \tau = t + s$ ,  $s, t \geq 0$ . Így a

$$\|T(\tau)f - T(t)g\|_{L_2} \leq \|T(s)T(t)f - T(t)f\|_{L_2} + \|T(t)f - T(t)g\|_{L_2}$$

<sup>4</sup>úgy tűnik, ez utóbbi két tulajdonság igazolása az  $e^0 = 1$ ,  $e^{-t}e^{-s} = e^{-(t+s)}$  azonosságokon múlik. Ha azonban visszalépünk a konkrét képletektől és az egészet egy nagyobb távlatban nézzük, akkor azt látjuk, hogy az  $T(0) = \text{id}$ ,  $T(t)T(s) = T(t+s) \Leftrightarrow \Phi(0, g) = g$ ,  $\Phi(t, \Phi(s, g)) = \Phi(t+s, g)$  képletek egyedül az idő múlásának természetét fejezik ki, éspedig olyan rendszerekben, amelyek evolúcióját az időtől független törvényszerűségek határozzák meg. A dinamikai rendszerek definíciójában megfogalmazott két algebrai tulajdonságról van szó, azzal a különbséggel, hogy a hővezetési egyenletben az idő csak előre mehet

$$\leq \|(T(s) - I)T(t)f\|_{L_2} + e^{-t}\|f - g\|_{L_2}$$

egyenlőtlenség miatt (29.4) ekvivalens a

$$\lim_{s \rightarrow 0^+} \|(T(s) - I)g\|_{L_2} = \lim_{s \rightarrow 0^+} \sqrt{\frac{\pi}{2} \sum_{n=1}^{\infty} (e^{-n^2 s} - 1)^2 c_n^2} = 0, \quad g \in L_2([0, \pi])$$

tulajdonsággal. Most matematika tanulmányaink egyik legszebb számolása következik. Mivel  $\sum_n c_n^2$  konvergens, adott  $\varepsilon > 0$  mellett az indexeket két,  $\varepsilon$ -tól függő csoportra bontjuk:  $\sum_n = \sum_{n=1}^N + \sum_{n=N+1}^{\infty}$ , ahol  $\sum_{n=N+1}^{\infty} c_n^2 < \frac{\varepsilon}{2}$ . Válasszunk most olyan  $s^* = s(\varepsilon) > 0$  értéket, hogy  $|e^{-n^2 s} - 1|c_n \leq \sqrt{\frac{\varepsilon}{2N}}$  minden  $0 < s < s^*$  és  $n = 1, 2, \dots, N$  esetén. Így  $\sum_n (e^{-n^2 s} - 1)^2 c_n^2 \leq N \frac{\varepsilon}{2N} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$  ha  $0 < s < s^*$ , ami pontosan a nullához tartás definíciója.

**29.1.3. MEGJEGYZÉS** Tekintsük most az egydimenziós hővezetés homogén Neumann peremértékfeladatát a  $[0, \pi]$  intervallumon:

$$\left. \begin{aligned} u_t &= u_{xx} \\ u_x(t, 0) &= u_x(t, \pi) = 0 \\ u(0, \cdot) &= g \end{aligned} \right\} \quad t \geq 0, \quad x \in [0, \pi], \quad (29.5)$$

amelynek megoldása, ismét csak az internet és/vagy a kézikönyvek szerint

$$u(t, x) = \frac{g_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} g_n e^{-n^2 t} \cos(nx), \quad (29.6)$$

ahol

$$g_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} g(x) \cos(nx) dx, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

A Neumann Jánosnál ötven esztendővel korábbi német matematikusról<sup>5</sup> elnevezett  $u_x(t, 0) = u_x(t, \pi) = 0$  peremfeltétel hőszigetelést jelent. Valóban, a rúdban tárolt  $E(t) = \int_0^{\pi} u(t, x) dx$ ,  $t \geq 0$  hőenergia az időben állandó, hiszen deriváltja

$$\dot{E}(t) = \int_0^{\pi} u_t(t, x) dx = \int_0^{\pi} u_{xx}(t, x) dx = [u_x(t, x)]_{x=0}^{x=\pi} = 0$$

A  $t \rightarrow \infty$ ,  $u(t, x) \rightarrow \frac{d_0}{2}$  határátmenet során a hőmérsékletkülönbségek kiegyenlítődnek. Az állandósult hőmérséklet az  $\frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} g(x) dx$  integrálátlag.

## 29.2. Excursus. Általános megfontolások

A 29.1 feladat korrekt kitűzöttségének végiggondolása után most térjünk át az  $\Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 < 1\}$  nyílt egységkör-lemezen vett  $u_{xx} + u_{yy} = f$  Poisson egyenlet

$$\left. \begin{aligned} u_{xx} + u_{yy} &= f, \quad (x, y) \in \Omega \\ u|_{\partial\Omega} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (29.7)$$

<sup>5</sup>Carl Neumann nevét viseli a lineáris analízis  $(I - A)^{-1} = \sum_{k=0}^{\infty} A^k$  sorfejtése is (melynek érvényességéhez az kell, hogy az  $A$  mátrix valamennyi sajátértéke egyenlő kisebb abszolút értékű legyen)

homogén Dirichlet peremértékproblémájának tárgyalására, ahol  $f : \overline{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}$  adott folytonos függvény,  $\partial\Omega$  és  $\overline{\Omega}$  pedig az egységkör-vonal és a zárt egységkör-lemez, az  $\Omega$  határa/pereme illetve lezárása. A villamosságban  $u$  elektrosztatikus potenciált,  $f$  töltéssűrűséget jelent. A hőtanban jelentés is világos: a(z időben már állandósult) hőmérsékleteloszlást keressük az egység-körlemezen, állandó belső hőforrások esetén, a perem minden pontját nulla fokosán tartva. Kézenfekvő arra gondolnunk, hogy léteznek  $u \in C(\overline{\Omega}) \cap C^2(\Omega)$  megoldások: ezeket nevezzük klasszikus megoldásoknak. Az ilyen megoldások unicitását Gauss igazolta, még a XIX-ik század első felében, az általa felfedezett maximum elv segítségével. A maximum elv könnyen kiadja azt is, hogy a klasszikus megoldások folytonosan függnek az egyenlet jobb oldalán szereplő  $f$  folytonos függvényről. A korrekt kitűzöttség három követelménye közül a második és a harmadik tehát teljesül a klasszikus megoldásokra. Az elsővel azonban baj van: mintegy száz éve példát adtak olyan folytonos  $f^* : \overline{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}$  függvényre, hogy az  $f = f^*$  választás mellett a 29.7 feladatnak nincs  $C(\overline{\Omega}) \cap C^2(\Omega)$  megoldása.

**29.2.1. TÉTEL** A 29.7 peremértékfeladat a klasszikus megoldások  $C(\overline{\Omega}) \cap C^2(\Omega)$  terében nem korrekt kitűzésű.

A simaság megnövelése itt is egyfajta kiutat jelent. Amennyiben<sup>6</sup>  $f \in C^1(\overline{\Omega})$ , akkor már létezik klasszikus megoldás. A tényleges kiút azonban itt is a nagyobb absztrakció, egy olyan absztrakció, amely egészen a múlt század közepéig váratott magára.

**29.2.2. TÉTEL** A 29.7 peremértékfeladat az általánosított megoldások  $H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega)$  terében korrekt kitűzésű. Tetszőleges  $f \in L_2(\Omega)$  esetén létezik, és pedig egyetlen  $u = u(f) \in H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega) \subset L_2(\Omega)$  megoldás. Létezik továbbá egy, csak az  $\Omega$  tartománytól függő  $c = c(\Omega)$  állandó, amelyre  $\|u(f) - u(\tilde{f})\|_{L_2} \leq c\|f - \tilde{f}\|_{L_2}$  minden  $f, \tilde{f} \in L_2(\Omega)$  esetén.

(Ráadásul az  $u$  megoldás folytonosan függ magától az  $\Omega$ -tól is.) Mindehhez meg kellett változtatnunk, általánosítanunk kellett a megoldás, és ezzel összhangban a deriválás, sőt a peremre való leszorítás fogalmát is. Itt a  $H_0^1(\Omega)$  és a  $H^2(\Omega)$  egyaránt úgynevezett Szoboljev/Sobolev tér, olyan függvényter, amelyben bizonyos általánosított deriváltak is négyzetesen integrálhatók.

Mondhatja valaki, hogy köszöni, de ebből nem kér, szívesebben marad a klasszikus megoldásoknál és az  $f \in C^1(\overline{\Omega})$  függvényeknél. Mondhatja, de akkor lemond arról, hogy megértse, mitől működik a végelelem módszer — amit használni szeretne, sőt használ is.

Igaza van, ha ezt teszi. A könyvtári programokat fekete dobozként lehet használni. Ezek az inputok, és ezek az outputok és közben a számítógép csinál valamit. Nagyon sok olyan, általánosan elfogadott és használt numerikus eljárás van, amelynek konvergenciáját nem bizonyította senki. Még gyakoribb, hogy olyan feladatokra is futtatják őket, amelyek nem tesznek eleget azoknak a feltételeknek, amelyekre az adott eljárás konvergenciáját bizonyították. Így igaz, hibrid és heurisztikus kódokat használunk. A számítógépes szimulációk tudománya tapasztalati tudomány. Ha a kiszámolt eredmény összhangban van a labor-kísérletekkel, akkor a matematikai modell is, és a választott numerikus módszer is megfelelő volt.

<sup>6</sup>adott függvény zárt halmazon való folytonos differenciálhatóságán, analitikusságán etc. azt értjük, hogy a függvény folytonosan differenciálható, analitikus etc. egy, az adott zárt halmazt tartalmazó nyílt halmazon

Az áramlástan (Navier–Stokes egyenletek), a villamosságtan (Maxwell egyenletek), a hőtan (reakció–diffúzió egyenletek), vagy éppen az idegélettan (Hodgkin–Huxley egyenletek) bonyolult, nemlineáris folyamatait a felhasználhatóság magas szintjén modellezni megköveteli az absztrakció magas szintjét is.

Pontosan úgy van, ahogyan Galilei megállapította: a természet könyve a matematika nyelvén íródott. Minden mérnök annyi matematikát tanuljon, amennyire szüksége van. Ha jó mérnök, fogja tudni, mikor segíti őt az absztrakció. Érdekes elolvasni Kármán Tódor eredeti cikkét a Műegyetem könyvtárában azokról az örvényekről<sup>7</sup>, amelyeket később róla neveztek el. Háromnegyedrészt tiszta komplex függvénytan. A matematika a nyelv. Van helye a gesztusoknak és a mutogatásnak. Olyasmit is ki lehet fejezni velük, amikre a beszélt nyelv kevésbé alkalmas. Mégis, az ember ‘a beszélő állat’. (Akit csak örvényekről hallottam beszélni, befelé csavarodó spirálisokat rajzolt, ceruza s kréta híján a levegőben. Az is matematika: geometriai szemléltetés.)

El tudnak képzelni egy leendő énekest a Zeneakadémián, aki nem tud kottát olvasni? És egy leendő mérnököt, aki nem ismeri a képletek nyelvét? A zene és a matematika egyaránt úgynevezett metanyelvek. Nincs olyan ember, akinek a zene vagy a matematika az anyanyelve lenne, de a rájuk való fogékonyság is bele van kódolva az újszülött homo sapiens agyába. Azt mondják, az anyanyelvet három–négy éves korig lehet megtanulni, utána már — ha az alapreflexek nem gyakorlódnak be időben — egyáltalán nem megy. Idegen nyelvet tanulni is minél korábban, annál jobb. A velünk született absztrakciós készséget, absztrakciós képességet is be kell gyakorolni.

NAVIER – STOKES EGYENLETEK: Összenyomhatatlan ( $\rho = 1$  konstans sűrűségű) folyadékok áramlását 2 és 3 dimenzióban a

$$\mathbf{u}_t - \nu \Delta \mathbf{u} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} + \nabla p = \mathbf{f}(t, \mathbf{x}),$$

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0 \quad \text{plusz kezdeti- és peremfeltételek}$$

Navier–Stokes egyenletek írják le. Az ismeretlenek az  $\mathbf{u}(t, \mathbf{x})$  sebesség és a  $p(t, \mathbf{x})$  nyomás — a kinematikus viszkozitás  $\nu > 0$  paramétere valamint az  $\mathbf{f}(t, \mathbf{x})$  függvény adottak.

A kétdimenziós esetben, áttérve az  $\mathbf{x} = (x, y)$ ,  $\mathbf{u} = (u, v)$ ,  $\mathbf{f} = (f_1, f_2)$  jelölésekre,

$$u_t - \nu(u_{xx} + u_{yy}) + uu_x + vv_y + p_x = f_1(t, x, y)$$

$$v_t - \nu(v_{xx} + v_{yy}) + uv_x + vv_y + p_y = f_2(t, x, y)$$

$$u_x + v_y = 0 \quad \text{plusz kezdeti- és peremfeltételek,}$$

ahol az utolsó egyenlet a tömegmegmaradás törvényét fejezi ki. A háromdimenziós esetben a koordináták szerinti átírás hasonló.

<sup>7</sup>Th. von Kármán: „Über den Mechanismus des Widerstandes, den ein bewegter Körper in einer Flüssigkeit erfährt 1-2”, Nachr. Ges. Wiss. Göttingen, Math.-Phys. Klasse 1911, 509–517; ibid. 1912, 547–556 — angol nyelvű összefoglalás: „Von Kármán vortex shedding” in *Springer Online Reference Works*, <http://eom.springer.de/v/v130110.htm>

**29.2.3. TÉTEL** *A 2D Navier–Stokes rendszer a megfelelő Szoboljev terekben (a Szoboljev terek megválasztása figyelembe veszi a peremfeltételeket is) korrekt kitűzésű.*

Amíg a kétdimenziós eset elmélete számos részletében is jól kidolgozott, a háromdimenziós esetben a legfontosabb kérdések (unicitás, globális egzisztencia) mindmáig nyitottak. A 3D Navier–Stokes egyenletek korrekt kitűzőségének kérdése egyike az egész matematika legnehezebb és leghíresebb<sup>8</sup> problémáinak.

A Navier–Stokes egyenletek illetve azok számtalan speciális esetének vizsgálatával mérnökök, fizikusok, matematikusok, oceanográfusok, meteorológusok, számítástechnikusok ezrei töltötték el egész életüket. A 3D feladat alkalmazásainál, jelesen gőzturbinák tervezésénél fellépő nehézségekre jól rávilágít, hogy a mikroturbulencia kaotikus celláinak méretei száz mikron nagyságrendűek. Egy köbdeciméternyi térfogatban tehát nagyjában-egészében egymilliárd mikrocella van, amelyek mindegyike önmagában is külön kis világ. Nincs az a számítógépi program, amely ezeket egyenként tudná figyelembe venni. Szükséges tehát egyfajta numerikus átlagolás. De túlságosan leegyszerűsíteni sem szabad a dolgokat. Olyan modellek a hasznosak, amelyek révén az energiatermelés határfoka szempontjából optimalizálni lehet az erőművi turbinák lapátjainak alakját, és azt is, hogy azok minél kevésbé és minél lassabban maródjának ki a kaotikus mikrocellák turbulens áramlásai által. A matematikai alapfeladat megoldatlansága ide vagy oda, nem kevés az, amit az áramlásokról és azon belül a turbulenciáról ismerünk — és ami az igazán fontos: a gőzturbinák forognak, az időjárást négy napra<sup>9</sup> nagy biztonsággal meg lehet jósolni, a repülőgépek szállnak.

Éppen itt az ideje, hogy visszatérjünk a földre és egymás után röviden áttekintsük, mit tehetünk a parciális differenciálegyenletek legfontosabb típusaival, s hogyan oldhatjuk meg a rájuk vonatkozó kezdeti- és peremértékfeladatokat.

## 29.3. A hullámegyenlet egy dimenzióban

Közönséges differenciálegyenletek tárgyalásánál megszoktuk, hogy az általános megoldás néhány szabad konstansot tartalmaz. A szabad konstansok száma megegyezik a differenciálegyenlet rendjével, amint azt a rugómozgás során fellépő rezonancia jelenségét bemutató szokásos

$$\ddot{x} + 4x = \cos(2t) \Rightarrow x(t) = c_1 \cos(2t) + c_2 \sin(2t) + \frac{1}{4}t \sin(2t), \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}$$

példa mutatja. A  $c_1$  és a  $c_2$  konstansok értékét a kezdeti feltételek, jelen esetben az  $x(0) = x_0$  kezdeti kitérés és az  $\dot{x}(0) = v_0$  kezdeti sebesség határozzák meg. De ugyanígy említhetünk egy másik alapvető példát, a szabadon függő kötél alakját leíró

$$yy'' = 1 + (y')^2 \Rightarrow y(x) = \frac{1}{c_1} \operatorname{ch}(c_1 x + c_2), \quad 0 \neq c_1 \in \mathbb{R}, c_2 \in \mathbb{R}$$

<sup>8</sup>a <http://www.claymath.org> hét ilyen, a kétezredik évről milleneumiaknak nevezett feladatot jelölt meg — és mindegyikük megoldását egymillió dollárral jutalmazza

<sup>9</sup>de sokkal továbbra már nem, és ez utóbbinak mai tudásunk szerint elvi, a kaosz matematikai elméletében megfogalmazott okai vannak

egyenletet és annak megoldását, ahol a  $c_1$  és a  $c_2$  konstansokat a felfüggesztési pontok helyzetét megadó  $y(-1) = m$ ,  $y(1) = M$  peremfeltételek teszik egyértelművé.

Van néhány olyan parciális differenciálegyenlet, amelynek általános megoldása képlettel felírható és abban szabad függvény szerepel paraméterként.<sup>10</sup> Kevés ilyen egyenlet van, nagyon meg kell becsülnünk őket. Közéjük tartoznak az elsőrendű lineáris parciális egyenletek. Példaként álljon itt az

$$xu_x + yu_y + zu_z = 0 \Rightarrow u(x, y, z) = H\left(\frac{y}{x}, \frac{z}{x}\right), \quad H \in (\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$$

egyenlet és annak megoldása. Az egyelőre még ismeretlen  $H$  függvényt az  $u|_S = h$  feltétel határozza meg, ahol  $S$  adott  $C^1$  felület az  $\mathbb{R}^3$  térben,  $h : S \rightarrow \mathbb{R}$  pedig adott  $C^1$  függvény. Sajnos itt alaposan beleszaladhatunk az inverz függvény tételnél ismerttetett összes technikai nehézségbe. (Az  $u$  megoldás  $u(t, bt, ct) = H(b, c)$  miatt állandó értéket vesz fel az origón átmenő félegyenese mentén. Így ha az  $S$  felület kétszer metszi vagy pláne ha érinti ezen félegyenese bármelyikét, akkor a  $h$  függvény már nem adható meg tetszőlegesen.)

Szerencsére a másodrendű lineáris parciális egyenletek között is van olyan, amelynek általános megoldását — immár kettő darab — szabad függvény segítségével tudjuk felírni. Ez a híres–nevezetes  $u_{tt} = c^2 u_{xx}$  hullámegyenlet, amely ebben a formában egy mindkét irányban végtelen húr kis transzverzális rezgéseit<sup>11</sup> írja le, és amelyet a megoldások általános alakja — a húr mentén  $c$  sebességgel balra és  $c$  sebességgel jobbra haladó egy–egy hullám összege — miatt nevezünk hullámegyenletnek.

Az általános megoldás  $u(t, x) = F(x + ct) + G(x - ct)$ ,  $F, G \in C^2(\mathbb{R}, \mathbb{R})$  képlete majd kettőszázötven év óta ismert és a nagy francia enciklopédista, D’Alembert nevét viseli<sup>12</sup>. A kezdeti kitérés  $u(0, x) = \varphi(x)$  és a kezdeti sebesség  $u_t(0, x) = \psi(x)$  függvényeit is figyelembe véve,

$$\varphi(x) = F(x) + G(x) \quad \text{és} \quad \psi(x) = F'(x)c - G'(x)c \Leftrightarrow \int \psi(x) dx = F(x)c - G(x)c,$$

amely egyszerű lineáris egyenletrendszer,  $F(x) = \frac{1}{2}\varphi(x) + \frac{1}{2c} \int_{x_0}^x \psi(s) ds$ ,  $G(x) = \frac{1}{2}\varphi(x) - \frac{1}{2c} \int_{x_0}^x \psi(s) ds$  megoldással. A konklúzió

$$u(t, x) = \frac{\varphi(x + ct) + \varphi(x - ct)}{2} + \frac{1}{2c} \int_{x-ct}^{x+ct} \psi(s) ds. \quad (29.8)$$

<sup>10</sup>Végső soron ez olvasható ki a (29.2) formulából is, csak ott a szabad függvény a kezdeti feltétel Fourier együtthatóinak sorozataként jelenik meg

<sup>11</sup>a húr minden egyes pontja csak keveset mozdulhat el, és kizárólag a nyugalomban lévő húr pontjai által meghatározott egyenesre merőlegesen — ez egyúttal az összes lehetséges nemlineáris effektus elhanyagolását is jelenti

<sup>12</sup>szokásos levezetése a  $\xi = x + ct$ ,  $\eta = x - ct$ ,  $u(t, x) = \mathcal{U}(x + ct, x - ct) = \mathcal{U}(\xi, \eta)$  helyettesítéssel történik. Valóban, a helyettesítés képletét kétszer a  $t$ , kétszer az  $x$  változók szerint deriválva az

$$\left. \begin{aligned} u_t &= \mathcal{U}_\xi c - \mathcal{U}_\eta c \Rightarrow u_{tt} = \mathcal{U}_{\xi\xi} c^2 - 2\mathcal{U}_{\xi\eta} c^2 + \mathcal{U}_{\eta\eta} c^2 \\ u_x &= \mathcal{U}_\xi + \mathcal{U}_\eta \Rightarrow u_{xx} = \mathcal{U}_{\xi\xi} + 2\mathcal{U}_{\xi\eta} + \mathcal{U}_{\eta\eta} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \mathcal{U}_{\xi\eta} = 0$$

egyenletet kapjuk, amely már kényelmesen megoldható. Először  $\eta$  majd  $\xi$  szerint integrálva  $\mathcal{U}(\xi, \eta) = \int f(\xi) d\xi + g(\eta) = F(\xi) + G(\eta)$  adódik. Ebből  $u(t, x) = F(x + ct) + G(x - ct)$



Igy a végtelen hosszú húr rendben is volna.

Most tekintsünk egy  $L$  hosszúságú, mindkét végén befogott húrt. Matematikailag ez azt jelenti, hogy a kezdeti feltétel mellé még peremfeltétel is társul, és pedig  $u(0) = u(L) = 0$ . Szerencsére a (29.8) D'Alembert formula továbbra is érvényes marad, amennyiben a most csupán a  $[0, L]$  intervallumon értelmezett  $\varphi$  és  $\psi$  függvényeket alkalmas módon terjesztjük ki az egész számegyenesre. A peremfeltételből adódó  $F(t) + G(-t) = 0 \Rightarrow F(L+t) + G(-L-t) = 0$  és  $F(L+t) + G(L-t) = 0$  képletek összehasonlítása okán mind  $F$  mind  $G$   $2L$ -periódusú függvény kell legyen. Az  $F(t) + G(-t) = 0$  formula kétszeri felhasználásával

$$\varphi(x) = F(x) + G(x) \Rightarrow \varphi(-x) = F(-x) + G(-x) = -G(x) - F(x) = -\varphi(x),$$

tehát  $\varphi$  páratlan függvény kell hogy legyen. Ha pedig az  $F(t) + G(-t) = 0$  formula deriváltját is használjuk, akkor

$$\psi(x) = F'(x)c - G'(x)c \Rightarrow \psi(-x) = F'(-x)c - G'(-x)c = -F'(x)c + G'(x)c = -\psi(x),$$

tehát a  $\psi$  is páratlan függvény kell hogy legyen.

A hővezetés egyenletéhez hasonlóan itt sem jelenti az általánosság megszorítását, ha mostantól kezdve csak az  $L = \pi$ ,  $c = 1$  speciális esettel dolgozunk tovább. Tekintsük tehát — a matematikusok szóhasználatával — az egydimenziós hullámeqyenlet homogén Dirichlet peremértékfeladatát a  $[0, \pi]$  intervallumon:

$$\left. \begin{aligned} u_{tt} &= u_{xx} \\ u(t, 0) &= u(t, \pi) = 0 \\ u(0, \cdot) &= \varphi \\ u_t(0, \cdot) &= \psi \end{aligned} \right\} \quad t \in \mathbb{R}, x \in [0, \pi], \quad (29.9)$$

amelynek — levezettük —

$$u(t, x) = \frac{\varphi(x+t) + \varphi(x-t)}{2} + \frac{1}{2} \int_{x-t}^{x+t} \psi(s) ds \quad (29.10)$$

a megoldása, ahol  $\varphi$  és  $\psi$  az egész számegyenesen értelmezett, páratlan,  $2\pi$ -periodikus függvény-kiterjesztések.

**29.3.1. TÉTEL** Az egydimenziós hullámeqyenlet (29.9) kezdeti- és peremértékfeladatának megoldására a  $C([0, \pi])$  térben teljesül az  $\|u(t, \cdot)\|_C \leq \|\varphi\|_C + \frac{\pi}{2} \cdot \|\psi\|_C$  egyenlőtlenség, tetszőleges  $t \in \mathbb{R}$  esetén.

**BIZONYÍTÁS** Mivel a kiterjesztett  $\psi$  függvény páratlan és  $2\pi$ -periodikus, integrálja tetszőleges  $2k\pi$ ,  $k \in \mathbb{N}$  hosszúságú intervallumon zérus. Ugyancsak zérus az integrál tetszőleges, a  $k\pi$ ,  $k \in \mathbb{Z}$  pontok egyikére szimmetrikus intervallumon. Így a  $\psi$  függvény integrálját  $[x-t, x+t]$  helyett ténylegesen csak egy rövid, legfeljebb  $\pi$  hosszúságú intervallumon kell kiszámítani.  $\square$

**29.3.2. KÖVETKEZMÉNY** A  $C([0, \pi]) \times C([0, \pi]) \rightarrow C([0, \pi])$ ,  $(\varphi, \psi) \rightarrow u(t, \cdot)$  és a  $C([0, \pi]) \times C([0, \pi]) \rightarrow BC(\mathbb{R} \times [0, \pi])$ ,  $(\varphi, \psi) \rightarrow u$  operátor folytonos.

**BIZONYÍTÁS** Kihasználva a linearitást,

$$\|u(t, \cdot) - \tilde{u}(t, \cdot)\|_C \leq \|\varphi - \tilde{\varphi}\|_C + \frac{\pi}{2} \cdot \|\psi - \tilde{\psi}\|_C \quad \text{minden } t \in \mathbb{R} \text{ esetén,}$$

ahol  $\tilde{u}$  az  $\tilde{u}_{tt} = \tilde{u}_{xx}$ ,  $\tilde{u}(t, 0) = \tilde{u}(t, \pi) = 0$ ,  $\tilde{u}(0, \cdot) = \tilde{\varphi}$ ,  $\tilde{u}_t(0, \cdot) = \tilde{\psi}$  kezdeti és peremértékfeladat megoldása.  $\square$

Nagyszerű, ha  $\varphi$  és  $\psi$  kicsit változnak, akkor a megoldás is — mindegyikük a maximum, illetve az  $\|u\|_{BC} = \sup_{t \in \mathbb{R}} \|u(t, \cdot)\|_C$  supremum normában — kicsit változik. Egy mérnöknek pontosan erre van szüksége!

Mindez azonban nem jelent korrekt kitűzöttséget a szó szigorú értelmében. A 29.9 feladat nem határoz meg dinamikai rendszert a folytonos függvények terében. A reménybeli  $\Psi: \mathbb{R} \times C([0, \pi]) \times C([0, \pi]) \rightarrow C([0, \pi]) \times C([0, \pi])$ ,  $(t, \varphi, \psi) \rightarrow (u(t, \cdot), u_t(t, \cdot))$  leképezéssel már az is baj, hogy maga a parciális deriválás művelete sem értelmezett valamennyi, a  $C([0, \pi])$  térhez tartozó függvényre. D'Alembert (29.10) formulája olyan folytonos  $\varphi$  és  $\psi$  függvényekre is jól viselkedik, amelyek nem deriválhatók. Ellentétben a hővezetési egyenlettel, itt nem segít az sem, hogy várunk egy kicsit az időben. A megoldás simasága ugyanis nem nő, hiszen a  $\varphi(x + ct)$  függvény pontosan annyiszor deriválható, mint a  $\varphi(x)$  függvény.

Ami újfent megmenti a korrekt kitűzöttséget, az a feladat általánosítása, ha úgy tetszik, áthelyezése egy absztrakt térbe.

**29.3.3. TÉTEL** Az egydimenziós hullámegyenlet (29.9) kezdeti és peremértékfeladata a megfelelő Szoboljev terekben dinamikai rendszert határoz meg, speciálisan korrekt kitűzésű is.

Megjegyezzük, ez olyan általánosítás, amely éles fényt vet az összenergia, azaz a feszültségi és a mozgási energia  $E(t) = \frac{1}{2} \int_0^\pi (u_x^2 + u_t^2) dx$  összegének

$$\begin{aligned} \dot{E}(t) &= \int_0^\pi (u_x u_{xt} + u_t u_{tt}) dx = \int_0^\pi u_x u_{tx} dx + \int_0^\pi u_t u_{xx} dx \\ &= [u_x u_t]_0^\pi - \int_0^\pi u_{xx} u_t dx + \int_0^\pi u_t u_{xx} dx = u_x(t, \pi) u_t(t, \pi) - u_x(t, 0) u_t(t, 0) = 0 \end{aligned}$$

megmaradási tételére is. (Itt  $u_t(t, 0) = u_t(t, \pi) = 0$  az  $u(t, 0) = u(t, \pi) = 0$  peremfeltétel deriváltjaként adódik.)

## 29.4. Excursus. Fizika a hővezetési egyenlet mögött

Folytassuk egyelőre az egydimenziós hővezetés vizsgálatát és nézzük meg, hogyan s miből jön ki ez az egyenlet. Milyen matematikai és fizikai megfontolások, a matematika mely tételei és a fizika mely törvényei állnak mögötte?

Az egyes fizikai jelenségeket makro- és mikroszinten szokás leírni, pontosabban makroszkopikus és mikroszkopikus modellek alapján. A hővezetés makroszkopikus modelljét három, mikroszkopikus modelljét egy dimenzióban ismertetjük.

A makroszkopikus leírás az áramló hő energia-egyensúly elvén alapul, a mikroszkopikus leírás atomi szintű és lényegében csak egyetlen részecske véletlenszerű, Brown-mozgását



veszi figyelembe. A statisztikus fizika szerint a hőterjedést Brown–mozgással lehet modellezni, s mivel a részecskék egymástól teljesen függetlenül mozognak — Brown klasszikus „virágpör egy tál vízben” kísérletében a polleneket az óriási többségben levő vízmolekulák egymástól teljesen függetlenül lökdösi<sup>13</sup> minden (koordináta)irányba —, így egyetlen részecske véletlenszerű eloszlása ugyanolyan szabály szerint alakul, mint sok részecskéé együttesen. Természetesen nem arról van szó, hogy egy kihűlő fémrúdban bármilyen anyag bolyongana, hanem arról, hogy az egymás melletti molekulák saját rezgéseik intenzitásának egy részét úgy adják tovább szomszédaiknak, hogy a hő, mint hatás, a Brown–mozgással analóg módon, diffúzióval terjed.

**HŐENERGIA–EGYENSÚLY:** Jelölje  $u(t, x)$  az  $x$  pont hőmérsékletét a  $t$  időpontban. A másik alapvető fogalom a hőáramlás időtől és helytől is függő vektormezeje, az  $\underline{F}(t, x)$ . A harmadik a belső hőforrások  $f(t, x)$  sűrűségfüggvénye.

Egy  $G$  térrészen belüli  $Q(t) = \int_G c\rho u(t, x) dx$  hőenergia  $\dot{Q}(t)$  megváltozása

$$= \text{a } \partial G \text{ peremen átáramló } - \int_{\partial G} \underline{F} \underline{ds} \text{ hőenergia}$$

$$+ \text{a belső hőforrások } \int_G f(t, x) dx \text{ munkája,}$$

azaz

$$\int_G c\rho u_t(t, x) dx = - \int_{\partial G} \underline{F} \underline{ds} + \int_G f(t, x) dx$$

tetszőleges korlátos  $G$  tartományon, ahol  $\rho$  az anyagsűrűség és  $c$  a fajhő. A divergenciatétel<sup>13</sup> valamint a diffúzió<sup>14</sup>  $\underline{F} = -k \underline{\text{grad}} u$  törvényének segítségével

$$\int_G c\rho u_t(t, x) dx = \int_G \text{div}(k \underline{\text{grad}} u) dx + \int_G f(t, x) dx,$$

amiből a

$$c\rho u_t(t, x) = \text{div}(k \underline{\text{grad}} u) + f(t, x) \quad (29.11)$$

végeredmény már közvetlenül adódik.<sup>15</sup> Amennyiben a  $k$  diffúziós együttható állandó, a  $k$  kihozható a divergencia operátora elé, és a végeredmény a  $c\rho u_t(t, x) = k\Delta u + f(t, x)$  alakra

<sup>13</sup>Magyarországon 1948 előtt Gauss, jelenleg Gauss–Ostrogradszkij tétele néven emlegetik — a többdimenziós integrálátalakító tételek korai történetében számos fizikus és matematikus játszott jelentős szerepet, közöttük Mikhail Vasilievich Ostrogradsky is

<sup>14</sup>a diffúziós törvényt az elektromosságtanban Ohm, a hőtanban Fourier, a kémiában Fick nevéhez kötik — hát nem csodálatos, hogy ugyanaz a matematikai modell képes leírni a különböző természettudományok saját jelenségeit?

<sup>15</sup>egy matematikus még az  $\int_G (c\rho u_t(t, x) - \text{div}(k \underline{\text{grad}} u) - f(t, x)) dx = 0$  képletet is közbeiktatja, majd a „ha egy függvény integrálja minden tartományon nulla, akkor a függvény azonosan nulla” tételre hivatkozik. (Micsoda pongyolaság! Ez a tétel csak folytonos függvényekre igaz! És különben is, már a divergenciatétel is csak olyan  $G$  tartományokra teljesül, amelyek határa ... ráadásul a  $t$  szerinti deriválást sem lehetett volna csak úgy bevinni az  $x$  szerinti integrálás jele mögé ... de nem akarom tovább karikázni a dolgot. Elég az hozzá, nem baj, ha egy mérnöknek időnként eszébe jut, hogy minden számolás érvényességének megvannak a maga feltételei — még akkor is, ha ezek a feltételek a számára releváns esetekben automatikusan teljesülnek)

egyszerűsödik.

**BROWN–MOZGÁS:** Egyetlen pontszerű részecske bolyong a számegyenesen. Mozgásáról csak annyit tudunk, hogy adott helyzetből  $\delta t$  idő alatt  $\frac{1}{2}$  valószínűséggel jobbra,  $\frac{1}{2}$  valószínűséggel balra megy, éspedig  $\delta x$  távolságot.

Jelölje  $P(t, x)$  annak a valószínűségét, hogy a részecske a  $t$  időpillanatban a számegyenes  $x$  pontjától balra helyezkedik el. A  $t$  és a  $t + \delta t$  időpillanat közötti lehetséges elmozdulásokat figyelembe véve, a  $P(t + \delta t, x)$  valószínűségét kifejezzük a  $t$  időpillanathoz tartozó különböző valószínűségekkel. Az az állapot, hogy a  $t + \delta t$  időpillanatban a részecske az  $x$  ponttól balra helyezkedik el, kétféleképpen alakulhat ki: ha a  $t$  időpillanatban balra volt az  $x - \delta x$  ponttól, vagy ha benne volt az  $(x - \delta x, x + \delta x)$  intervallumban. Az előző esetben továbbra is balra marad az  $x$  ponttól, az utóbbi esetben pedig a jobbra vagy balra lépések egyikével az  $x$  ponttól jobbra, másikával az  $x$  ponttól balra kerül. A valószínűségét figyelembe véve azt kapjuk, hogy a kétváltozós  $P$  függvény eleget tesz a

$$P(t + \delta t, x) = P(t, x - \delta x) + \frac{1}{2}(P(t, x + \delta x) - P(t, x - \delta x))$$

algebrai összefüggésnek. Ezután mindkét oldalból kivonjuk a  $P(t, x)$  valószínűséget és osztunk a  $\delta t$ , a jobb oldalon pedig bővítünk a  $(\delta x)^2$  kifejezéssel. Így

$$\frac{P(t + \delta t, x) - P(t, x)}{\delta t} = \frac{1}{2} \cdot \frac{P(t, x - \delta x) - 2P(t, x) + P(t, x + \delta x)}{(\delta x)^2} \cdot \frac{(\delta x)^2}{\delta t},$$

majd a  $\frac{(\delta x)^2}{2\delta t} = 1$  skálázással és a  $\delta t, \delta x \rightarrow 0$  határátmenettel a remélt  $P_t(t, x) = P_{xx}(t, x)$  parciális differenciálegyenlet adódik.

Ha a  $t = 0$  kezdeti időpillanatban a részecske biztosan az  $x = 0$  pontban volt (azaz  $P(0, x) = H(x)$  ahol  $H$  a Heaviside függvény), akkor a hőmaggal vett konvolúciós integrál a

$$P(t, x) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4t}}}{2\sqrt{\pi t}} H(\xi) d\xi = \int_{-\infty}^x \frac{1}{2\sqrt{\pi t}} \cdot e^{-\frac{z^2}{4t}} dz = \Phi\left(\frac{x}{\sqrt{2t}}\right)$$

végeredménnyé egyszerűsödik. Itt  $\Phi(x) = \int_{-\infty}^x \frac{e^{-\frac{z^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}} dz$ , a standard normális eloszlás eloszlásfüggvénye. A fizikusok ezt úgy mondják, hogy a diffúzió a Dirac deltát (vagy más nézőpontból a Heaviside függvény általánosított deriváltját és ha úgy tetszik, Brown vízbe dobott pollen-csomagocskáját)  $t > 0$  idő alatt az  $\mathcal{N}(0, \sigma) = \mathcal{N}(0, \sqrt{2t})$  normális eloszlás  $\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}$  sűrűségfüggvényévé keni szét.

Azért nincs minden rendben a fizikával. Pontosabban a hővezetés  $u_t = u_{xx}$  egyenletével. Ez az egyenlet ugyanis megengedi, hogy a hő végtelen nagy sebességgel terjedjen. Az

$$u(0, x) = \begin{cases} x & \text{ha } 0 \leq x \leq 1 \\ 2 - x & \text{ha } 1 \leq x \leq 2 \\ 0 & \text{ha } 2 \leq x \leq \pi \end{cases}$$

kezdeti és a  $u(t, 0) = u(t, \pi) = 0$  peremfeltétellel indított  $u(t, x)$  megoldás bármely  $t > 0$  esetén nem-nulla, pozitív értéket is felvesz a  $[0, \pi]$  intervallum jobb oldali végpontjának

bármely kis környezetében. (Természetesen nagyon kicsiny idő alatt csak elenyészően parányi hőenergia jut el a  $\pi$  közelébe.) Ez pedig a hőhatás végtelen terjedési sebességét jelenti. Ezzel a furcsasággal alighanem együtt kell élnünk. Tisztesség ne essék, Einstein foroghat a sírjában.

A hullámegyenletnél ilyen probléma nem merül fel. A végtelen hosszú húron értelmezett  $u_{tt} = c^2 u_{xx}$ ,  $c > 0$  hullámegyenlet megoldásának (29.8) képlete alapján megállapíthatjuk, hogy a megoldás  $(t^*, x^*)$ ,  $t^* > 0$  pontbeli értékét a  $\varphi$  kezdeti kitérésnek és a  $\psi$  kezdeti sebességnek csak az  $[x^* - ct^*, x^* + ct^*]$  intervallumon felvett értékei tudják befolyásolni. A  $c$  a hullám sebessége. Minden hatás csak  $c$  sebességgel tud terjedni.

Szerencsére a hővezetési egyenlet összes többi tulajdonsága egybevág a fizikai intuícióval. A (29.1) kezdeti és peremértékfeladat  $u(t, x)$  megoldása kisimít és kiegyenlít. Sem hideg, sem melegzugok nem alakulhatnak ki menet közben, azaz

$$\begin{aligned} \min\{u(t, x) \mid t = t_1, x_1 \leq x \leq x_2 \text{ vagy } t_1 \leq t \leq t_2, x = x_1, x_2\} \\ \leq \min\{u(t, x) \mid t_1 \leq t \leq t_2, x_1 \leq x \leq x_2\} \\ \leq \max\{u(t, x) \mid t_1 \leq t \leq t_2, x_1 \leq x \leq x_2\} \\ \leq \max\{u(t, x) \mid t = t_1, x_1 \leq x \leq x_2 \text{ vagy } t_1 \leq t \leq t_2, x = x_1, x_2\}, \end{aligned}$$

ahol  $0 < t_1 < t_2 < \infty$  és  $0 \leq x_1 < x_2 \leq \pi$  tetszőlegesek. Továbbá az is igaz, hogy az egyidejűleg zérus hőmérsékletű pontok

$$N(t) = \#\{x \in [0, \pi] \mid u(t, x) = 0\}, \quad t > 0$$

száma véges és az időben monoton csökken.

## 29.5. Végtelen dimenziós térben értelmezett közönséges differenciálegyenletek? – Vissza az alap-példákhoz.

Maradunk továbbra is az egydimenziós hővezetésnél. Bevezetve az  $f = f(t, x)$ ,  $\tilde{f} = \tilde{f}(t, x)$  valamint a  $v = u + \tilde{u}$  jelöléseket,

$$\left. \begin{aligned} u_t &= u_{xx} + f \\ u(t, 0) &= h_0(t) \\ u(t, \pi) &= h_\pi(t) \\ u(0, \cdot) &= g \end{aligned} \right\} \& \left. \begin{aligned} \tilde{u}_t &= \tilde{u}_{xx} + \tilde{f} \\ \tilde{u}(t, 0) &= \tilde{h}_0(t) \\ \tilde{u}(t, \pi) &= \tilde{h}_\pi(t) \\ \tilde{u}(0, \cdot) &= \tilde{g} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \left. \begin{aligned} v_t &= v_{xx} + f + \tilde{f} \\ v(t, 0) &= h_0(t) + \tilde{h}_0(t) \\ v(t, \pi) &= h_\pi(t) + \tilde{h}_\pi(t) \\ v(0, \cdot) &= g + \tilde{g} \end{aligned} \right\}.$$

Az 1D hővezetés inhomogén Dirichlet peremértékfeladata tehát mind a megoldások, mint a kezdeti- és peremfeltételek, mind a belső hőforrások tekintetében lineáris. Ennek a linearitásnak igazán kevés köze van ahhoz, hogy a megoldandó egyenlet parciális differenciálegyenlet. Lehetett volna közönséges differenciálegyenlet vagy éppen algebrai is. Ha lineáris, akkor „a homogén feladat megoldásai szuperponálódnak”, sőt „a homogén feladat általános megoldása az alapmegoldások véges vagy végtelen lineáris kombinációja” — mennyire szépen látszik ez a (29.2) sorfejtés szerkezetében! —, „az inhomogén egyenlet általános megoldása egyenlő a homogén feladat általános megoldása plusz az inhomogén feladat egy partikuláris megoldása”.

A (29.3) formula bevezetése kapcsán már felfigyeltünk rá, hogy a  $g$  kezdetiérték pontosan azt a szerepet tölti be a 29.1 feladatban, mint az  $x_0$  kezdetiérték a 28.5 feladatban. Mivel a 29.1 feladat lineáris, (28.5) helyett jobb volna őt annak  $f(x) = Ax$  speciális esetével, tehát az  $\dot{x} = Ax$ ,  $x \in \mathbb{R}^n$  lineáris közönséges differenciálegyenlettel összehasonlítani. Az analógia messzire vezet. Ha lúd, legyen kövér. Felfoghatjuk-e a hővezetés (29.1) kezdeti és peremértékfeladatát az  $L_2([0, \pi])$  téren értelmezett közönséges differenciálegyenletnek? A válasz igenlő, és ezt az igenlő választ korábbi megfontolásaink már egészen jól előkészítették.

Nézzük a nagy táblázatot. Mintha a Pilisszentlélek vagy a Nagyörzsöny feletti dombokat néznénk, fokozatosan tisztuló hajnali ködben: egyre több és több részlet válik világossá.

Az egész táblázat egyetlen talpak nélküli betűtípusban írott szót tartalmaz: ez mutat rá a módszerre, amelynek segítségével a konkrét gyakorló feladatok megoldását ki lehet számolni. A táblázat középső oszlopában három helyen is találunk *kurzív* betűtípusban írott szavakat: ezek utalnak a mögöttes matematikai tételekre, amelyek a lényeg<sup>16</sup> mögött állnak.

Akkor hát, minden sallang nélkül jöjjön maga a lényeg: egy egész sorozat példa. Ami közös bennük, az maga módszer. Amely ugyanúgy működik az egydimenziós hullámegyenletre is. Sőt ....

**29.5.1. PÉLDA** *Hővezetési egyenlet rúdon, belső hőforrások, homogén Dirichlet peremfeltétel*

$$\left. \begin{aligned} u_t &= u_{xx} + f(t, x) \\ u(t, 0) &= u(t, \pi) = 0 \\ u(0, x) &= g(x) \end{aligned} \right\} \quad t \geq 0, \quad x \in [0, \pi].$$

Itt  $f(t, x) = \sum_n f_n(t) \sin(nx)$ ,  $g(x) = \sum_n g_n \sin(nx)$ .

Próbafüggvény:  $u(t, x) = \sum_n c_n(t) \sin(nx)$  — peremfeltétel rendben.

Az egyenletből és a kezdetifeltételből:

$$\left. \begin{aligned} \dot{c}_n &= -n^2 c_n + f_n(t) \\ c_n(0) &= g_n \end{aligned} \right\}, \quad n = 1, 2, \dots$$

Az  $\dot{x} = ax + b(t)$ ,  $x(0) = x_0 \Rightarrow x(t) = e^{at} x_0 + \int_0^t e^{a(t-s)} b(s) ds$  „állandók variálása” formula segítségével:

$$c_n(t) = e^{-n^2 t} g_n + \int_0^t e^{-n^2(t-s)} f_n(s) ds. \quad (29.12)$$

**29.5.2. PÉLDA** *Hővezetési egyenlet négyzet alakú lemezen, belső hőforrások, homogén Dirichlet peremfeltétel*

<sup>16</sup>a lényeg szót — saját pedagógiai elveim ellenére — most a „tanárúrmelyikképletbekellbehelyettesíteni” értelmében használom. A tényleges ok, amiért ez a zseniálisan egyszerű módszer működik, az az, hogy a hővezetési egyenlet jobb oldalán lévő  $\frac{\partial^2}{\partial x^2}$  operátor, ha abba az  $u(t, 0) = u(t, \pi) = 0$  homogén Dirichlet peremfeltételt is beleolvasztjuk, mintegy „megcsinálja magának” azt a teljes ortonormált rendszert, amely szerinti sorfejtéssel a megoldás ténylegesen felírható. Fourier ugyanis nem a később róla elnevezett sorfejtést akarta felfedezni, hanem képletet akart találni a hővezetési egyenlet megoldására, és ebben maga a hővezetési egyenlet volt a segítségére

| AZ                                                                        | ÖSSZEHASONLÍTÁS                              | SZEMPONTJAI                                                  |
|---------------------------------------------------------------------------|----------------------------------------------|--------------------------------------------------------------|
| $\mathbb{R}^n$                                                            | TÉR<br>tér                                   | $L_2([0, \pi])$                                              |
| $\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = \sum_{k=1}^n x_k y_k$           | skaláris szorzat                             | $\langle f, g \rangle = \int_0^\pi f(x) g(x) dx$             |
| $\ \mathbf{x}\ ^2 = \sum_{k=1}^n x_k^2$                                   | norma                                        | $\ g\ ^2 = \int_0^\pi  g(x) ^2 dx$                           |
| $\mathbf{e}_k, k = 1, \dots, n$                                           | standard ortonormált bázis                   | $\sqrt{\frac{2}{\pi}} \sin(nx), n = 1, 2, \dots$             |
| $\mathbf{x} = \sum_{k=1}^n x_k \mathbf{e}_k$                              | Fourier sor                                  | $g = \sum_{n=1}^\infty g_n \sin(nx)$                         |
| $x_k = \langle \mathbf{e}_k, \mathbf{x} \rangle$                          | Fourier együtthatók                          | $g_n = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi g(x) \sin(nx) dx$            |
| $\ \mathbf{x}\ ^2 = \sum_{k=1}^n x_k^2$                                   | Pythagoras/Parseval                          | $\ g\ ^2 = \frac{\pi}{2} \sum_{n=1}^\infty g_n^2$            |
| $\dot{x} = Ax$                                                            | DIFFERENCIÁLEGYENLET<br>differenciálegyenlet | $u_t = u_{xx}$                                               |
| —                                                                         | peremfeltétel                                | $u(t, 0) = u(t, \pi) = 0$                                    |
| $x(0) = x_0 \in \mathbb{R}^n$                                             | kezdetifeltétel                              | $u(0, \cdot) = g \in L_2([0, \pi])$                          |
| $x(t) = e^{\lambda t} \mathbf{v}$                                         | PRÓBAFÜGGVÉNYEK                              | $u(t, x) = c_n(t) \sin(nx)$                                  |
| $\lambda \mathbf{v} = A \mathbf{v} \Rightarrow \mathbf{v} = \mathbf{s}_k$ | <i>a kapott segédegyenlet</i>                | $\dot{c}_n = -n^2 c_n \Rightarrow c_n(t) = e^{-n^2 t}$       |
| $e^{\lambda_k t} \mathbf{s}_k, k = 1, \dots, n$                           | alapmegoldások                               | $e^{-n^2 t} \sin(nx), n = 1, 2, \dots$                       |
| $x(t) = \sum_{k=1}^n c_k e^{\lambda_k t} \mathbf{s}_k$                    | <i>általános megoldás I</i>                  | $u(t, x) = \sum_{n=1}^\infty c_n e^{-n^2 t} \sin(nx)$        |
| $c_k = \langle \mathbf{s}_k, \mathbf{x} \rangle$                          | az együtthatók                               | $c_n = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi g(x) \sin(nx) dx$            |
| $A$                                                                       | OPERÁTOR<br>operátor                         | $\Delta_D = \frac{\partial^2}{\partial x^2}$ & peremfeltétel |
| $A = A^T$                                                                 | önadjungáltság                               | $\Delta_D = \Delta_D^T$                                      |
| $\lambda_k \in \mathbb{R}, \mathbf{s}_k$                                  | <i>sajátérték, sajátvektor</i>               | $-n^2, \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sin(nx)$                        |
| $\mathbf{s}_k, k = 1, \dots, n$                                           | <i>teljes ortonormált rendszer</i>           | $\sqrt{\frac{2}{\pi}} \sin(nx), n = 1, 2, \dots$             |
| $\mathbf{x} = \sum_{k=1}^n c_k \mathbf{s}_k$                              | Fourier sor                                  | $g = \sum_{n=1}^\infty g_n \sin(nx)$                         |
| $A = \text{diag}(\lambda_k)$                                              | főtengelytétel I                             | $\Delta_D = \text{diag}(\lambda_n)$                          |
| $A \mathbf{x} = \sum_k \lambda_k c_k \mathbf{s}_k$                        | főtengelytétel II                            | $\Delta_D g = \sum_{n=1}^\infty -n^2 g_n \sin(nx)$           |
| $\Phi(t, \mathbf{x}) = e^{At} \mathbf{x}$                                 | általános megoldás II                        | $\Phi(t, g) = T(t)g = e^{\Delta_D t} g$                      |

$$\left. \begin{aligned} u_t &= u_{xx} + u_{yy} + 1 \\ u(t, 0, y) &= u(t, \pi, y) = u(t, x, 0) = u(t, x, \pi) = 0 \\ u(0, x, y) &= g(x, y) \end{aligned} \right\} \quad t \geq 0, \quad x, y \in [0, \pi].$$

Itt  $f(t, x, y) = \sum_{n,m} f_{nm}(t) \sin(nx) \sin(my)$ ,  $g(x, y) = \sum_{n,m} g_{nm} \sin(nx) \sin(my)$ .

Mivel  $f(t, x, y) = 1$ ,

$$f_{nm}(t) = f_{nm} = \frac{4}{\pi^2} \int_0^\pi \int_0^\pi \sin(nx) \sin(my) dy dx = \begin{cases} \frac{16}{\pi^2 nm} & \text{ha } n, m \text{ páratlan} \\ 0 & \text{egyébként} \end{cases}$$

Próbafüggvény:  $u(t, x, y) = \sum_{n,m} c_{nm}(t) \sin(nx) \sin(my)$  — peremfeltétel rendben. Az egyenletből és a kezdetifeltételből:

$$\left. \begin{aligned} \dot{c}_{nm} &= -(n^2 + m^2)c_{nm} + f_{nm} \\ c_{nm}(0) &= g_{nm} \end{aligned} \right\}, \quad n, m = 1, 2, \dots,$$

majd ebből közvetlen számolással:

$$c_{nm}(t) = e^{-(n^2+m^2)t} \left( g_{nm} - \frac{f_{nm}}{n^2 + m^2} \right) + \frac{f_{nm}}{n^2 + m^2}.$$

### 29.5.3. PÉLDA Hullámegyenlet húron, külső gerjesztés, homogén Dirichlet peremfeltétel

$$\left. \begin{aligned} u_{tt} &= u_{xx} + f(t, x) \\ u(t, 0) &= u(t, \pi) = 0 \\ u(0, x) &= \varphi(x) \\ u_t(0, x) &= \psi(x) \end{aligned} \right\} \quad t \in \mathbb{R}, \quad x \in [0, \pi]. \quad (29.13)$$

Itt  $f(t, x) = \sum_n f_n(t) \sin(nx)$ ,  $\varphi(x) = \sum_n \varphi_n \sin(nx)$ ,  $\psi(x) = \sum_n \psi_n \sin(nx)$ .

Próbafüggvény:  $u(t, x) = \sum_n c_n(t) \sin(nx)$  — peremfeltétel rendben.

Az egyenletből és a kezdetifeltételből:

$$\left. \begin{aligned} \ddot{c}_n &= -n^2 c_n + f_n(t) \\ c_n(0) &= \varphi_n \\ \dot{c}_n(0) &= \psi_n \end{aligned} \right\}, \quad n = 1, 2, \dots$$

Igy az „állandók variálása” formula  $\dot{x} = Ax + b(t)$ ,  $x(0) = x_0 \Rightarrow x(t) = e^{At}x_0 + \int_0^t e^{A(t-s)}b(s)ds$  mátrixos változatának segítségével:

$$c_n(t) = \varphi_n \cos(nt) + \frac{\psi_n}{n} \sin(nt) + \int_0^t \frac{f_n(s)}{n} \sin(n(t-s)) ds. \quad (29.14)$$

A befejező számításokat az alábbiakban részletezzük: Mivel  $A$  hatványai rendre

$$A^0 = I, A^1 = A, A^2 = \begin{pmatrix} -n^2 & 0 \\ 0 & -n^2 \end{pmatrix}, A^3 = \begin{pmatrix} 0 & -n^3 \\ n^3 & 0 \end{pmatrix}, A^4 = \begin{pmatrix} n^4 & 0 \\ 0 & n^4 \end{pmatrix}, \dots$$

esetünkben az  $e^{At}$  mátrix közvetlenül számolható a

$$e^{At} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} A^k t^k = \begin{pmatrix} \cos(nt) & \sin(nt) \\ -\sin(nt) & \cos(nt) \end{pmatrix}$$

sorfejtéssel. A  $c_n$  függvényre vonatkozó másodrendű egyenletet elsőrendű rendszerré alakítva,  $\dot{c}_n = nd_n$ ,  $\dot{d}_n = -nc_n + \frac{f_n(t)}{n}$ , azaz mátrixosan

$$\begin{pmatrix} \dot{c}_n \\ \dot{d}_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & n \\ -n & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_n \\ d_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{f_n(t)}{n} \end{pmatrix}$$

ahol  $c_n(0) = \varphi_n$  és  $\dot{c}_n(0) = nd_n(0) = \psi_n$  alapján  $d_n(0) = \frac{\psi_n}{n}$ . Az „állandók variálása” formula mátrixos változata szerint

$$\begin{pmatrix} c_n(t) \\ d_n(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(nt) & \sin(nt) \\ -\sin(nt) & \cos(nt) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varphi_n \\ \frac{\psi_n}{n} \end{pmatrix} + \int_0^t \begin{pmatrix} \cos(n(t-s)) & \sin(n(t-s)) \\ -\sin(n(t-s)) & \cos(n(t-s)) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{f_n(s)}{n} \end{pmatrix} ds,$$

és ezzel a kívánt (29.14) eredmény levezetését — hiszen pontosan az jelent meg az első koordinátában — befejeztük.

Egy differenciálegyenletet megoldani, vagy akár csak egy primitív függvényt is kiszámítani lehet keservesen nehéz. Az esetek többségében nincs is zárt alakban felírható végeredmény. Az ellenőrzés azonban roppant könnyű, hiszen csak deriválni kell. Valóban, a (29.14) formulát egyszer, majd a kapott eredményt még egyszer deriválva,

$$\dot{c}_n(t) = -n\varphi_n \sin(nt) + \psi_n \cos(nt) + \int_0^t \frac{f_n(s)}{n} n \cos(n(t-s)) ds + \frac{f_n(t)}{n} \sin(n(t-t)),$$

$$\ddot{c}_n(t) = -n^2 \varphi_n \cos(nt) - n\psi_n \sin(nt) + \int_0^t f_n(s) (-n \sin(n(t-s))) ds + f_n(t)$$

és már készen is vagyunk.<sup>17</sup>

#### 29.5.4. PÉLDA Gitárhúr, közepén meependítve

$$\left. \begin{aligned} u_{tt} &= u_{xx} \\ u(t, 0) &= u(t, \pi) = 0 \\ u(0, x) &= \begin{cases} \alpha x & \text{ha } x \in [0, \frac{\pi}{2}] \\ \alpha(\pi - x) & \text{ha } x \in [\frac{\pi}{2}, \pi] \end{cases} \\ u_t(0, x) &= 0 \end{aligned} \right\} \quad t \in \mathbb{R}, \quad x \in [0, \pi].$$

Itt  $\alpha > 0$  állandó,  $f(t, x) = 0$ ,  $\varphi = \sum_n \varphi_n \sin(nx)$ ,  $\psi = 0$

Próbafüggvény:  $\sum_n c_n(t) \sin(nx)$  — peremfeltétel rendben.

Maga a megoldás (29.14) szerint:

$$u(t, x) = \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n \cos(nt) \sin(nx)$$

ahol  $\varphi_n = \frac{2\alpha}{\pi} \int_0^\pi \varphi(x) \sin(nx) dx = \frac{2\alpha}{n^2\pi} \sin(\frac{n\pi}{2})$ .

<sup>17</sup>Menet közben kétszer is használtuk a jólismert  $\frac{d}{dt} \int_{a_0}^t b(s) ds = b(t)$  Newton–Leibniz formulát általánosító  $\frac{d}{dt} \left( \int_{a_0}^t b(s, t) ds \right) = b(t, t) + \int_{a_0}^t b_t(s, t) ds$  azonosságot, amely az  $\frac{1}{h} \left( \int_{a_0}^{t+h} b(s, t+h) ds - \int_{a_0}^t b(s, t) ds \right) = \frac{1}{h} \int_t^{t+h} b(s, t+h) ds + \int_{a_0}^t \frac{b(s, t+h) - b(s, t)}{h} ds$  átalakítás és az integrálközéptétel-tétel  $h \rightarrow 0$  határátmenet melletti következménye

29.5.5. **PÉLDA** *Gitárhúr, végén meependítve*<sup>18</sup>

$$\left. \begin{aligned} u_{tt} &= u_{xx} \\ u(t, 0) &= u(t, \pi) = 0 \\ u(0, x) &= \alpha x \\ u_t(0, x) &= 0 \end{aligned} \right\} \quad t \in \mathbb{R}, x \in [0, \pi].$$

Itt  $\alpha > 0$  állandó,  $f(t, x) = 0$ ,  $\varphi = \sum_n \varphi_n \sin(nx)$ ,  $\psi = 0$

Próbafüggvény:  $\sum_n c_n(t) \sin(nx)$  — peremfeltétel rendben.

Maga a megoldás (29.14) szerint:

$$u(t, x) = \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n \cos(nt) \sin(nx)$$

ahol  $\varphi_n = \frac{2\alpha}{\pi} \int_0^\pi \varphi(x) \sin(nx) dx = 2\alpha \frac{(-1)^{n-1}}{n}$ .

 29.5.6. **PÉLDA** *Zongorahúr, fakalapáccsal ütve*

$$\left. \begin{aligned} u_{tt} &= u_{xx} \\ u(t, 0) &= u(t, \pi) = 0 \\ u(0, x) &= 0 \\ u_t(0, x) &= \begin{cases} \alpha & \text{ha } x \in [x_1, x_2] \\ 0 & \text{egyébként} \end{cases} \end{aligned} \right\} \quad t \in \mathbb{R}, x \in [0, \pi].$$

Itt  $\alpha > 0$  állandó,  $0 < x_1 < x_2 < \pi$ ,  $f(t, x) = 0$ ,  $\varphi = 0$ ,  $\psi = \sum_n \psi_n \sin(nx)$

Próbafüggvény:  $\sum_n c_n(t) \sin(nx)$  — peremfeltétel rendben.

Maga a megoldás (29.14) szerint:

$$u(t, x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\psi_n}{n} \sin(nt) \sin(nx)$$

ahol  $\psi_n = \frac{2\alpha}{\pi} \int_0^\pi \psi(x) \sin(nx) dx = \frac{2\alpha}{n\pi} (\cos(nx_1) - \cos(nx_2))$ .

Még ezek az elnagyolt modellek is világosan mutatják, hogy a közepén pengetett gitárhúr sokkal tisztább hangot ad — Fourier spektrumában az első felharmonikus, azaz az oktáv teljesen hiányzik —, mint a végén pengetett. Mindez a felhangok és az alaphang arányain múlik, amelyek jelen esetben rendre az  $(1, 0, \frac{1}{9}, 0, \frac{1}{25}, \dots)$  és az  $(1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \dots)$  sorozatokat követik. A zongorahúr hangja is viszonylag tiszta — felharmonikusainak amplitúdó-sorozata négyzetesen csökken — de nem annyira, mint egy közepén meependített gitárhúré. (Ami a hegedű húrjának hangzását illeti, a vonó hatása külső gerjesztésként illeszthető be a matematikai modellbe.)

A fizikai valóság természetesen sokkal bonyolultabb. Nem vettük figyelembe a hangki-bocsájtásban döntő szerepet játszó rezonátort, a hangszer testét etc., nem tettünk különbséget elektronikus és hagyományos gitár között etc. Arra is gondolnunk kell, hogy az  $u_{tt} = u_{xx}$  egyenlet maga is közelítés eredménye, levezetésekor az összes lehetséges nemlineáris effektust elhanyagoltuk. Ez akkor jogos, ha a számbavett rezgések kicsinyek és a nyugalomban

<sup>18</sup>a kezdeti kitérés  $\varphi(x) = \alpha x$ ,  $x \in [0, \pi]$  függvényét úgy kell felfognunk, mint a  $\varphi_\varepsilon(x) = \alpha x$  ha  $x \in [0, (1 - \varepsilon)\pi]$  és  $\frac{\varepsilon-1}{\varepsilon} \alpha(x - \pi)$  ha  $x \in [(1 - \varepsilon)\pi, \pi]$  folytonos függvények egyikét, kicsiny  $\varepsilon > 0$  mellett



lévő húr két végpontja által meghatározott egyenesre merőlegesek. Ennek megfelelően az  $\alpha$  paramétert az előző három példa mindegyikében nagyon kicsinek kell vennünk. Mindhárom példa az  $\alpha$  tekintetében is lineáris, így az egyes hangszínek összehasonlításában az  $\alpha$  nagysága semmilyen szerepet nem játszik.

Úgy illik, hogy kimutassuk a (29.10) D'Alembert és a (29.14) képletből adódó

$$u(t, x) = \sum_{n=1}^{\infty} \left( \varphi_n \cos(nt) + \frac{\psi_n}{n} \sin(nt) \right) \sin(nx)$$

Fourier megoldások azonosságát. Tekintsük tehát a (29.13) kezdeti és peremértékfeladatot az  $f = 0$  speciális esetben, majd terjesszük ki a  $\varphi$  és a  $\psi$  függvényeket a  $[0, \pi]$  intervallumról az egész  $\mathbb{R}$  számegetesre  $2\pi$  szerint periodikus és páratlan módon. A Fourier sorokat a (29.10) D'Alembert formulába helyettesítve rövid számolás mutatja, hogy

$$\begin{aligned} & \frac{\sum_n \varphi_n \sin(n(x+t)) + \sum_n \varphi_n \sin(n(x-t))}{2} + \frac{1}{2} \int_{x-t}^{x+t} \sum_n \psi_n \sin(ns) ds \\ &= \sum_n \varphi_n \sin(nx) \cdot \cos(nt) + \frac{1}{2} \sum_n \left( -\frac{1}{n} \psi_n (\cos(n(x+t)) - \cos(n(x-t))) \right) \\ &= \sum_n \left( \varphi_n \sin(nx) \cdot \cos(nt) + \frac{\psi_n}{n} \sin(nx) \cdot \sin(nt) \right), \end{aligned}$$

amit bizonyítani akartunk.

**29.5.7. MEGJEGYZÉS** Tekintsük a rezgő húr egyenletének homogén Neumann peremérték-feladatát a  $[0, \pi]$  intervallumon:

$$\left. \begin{aligned} u_{tt} &= u_{xx} \\ u_x(t, 0) &= u_x(t, \pi) = 0 \\ u(0, x) &= \varphi(x) \\ u_t(0, x) &= \psi(x) \end{aligned} \right\} \quad t \geq 0, x \in [0, \pi].$$

Itt  $\varphi = \frac{\varphi_0}{2} + \sum_n \varphi_n \cos(nx)$ ,  $\psi = \frac{\psi_0}{2} + \sum_n \psi_n \cos(nx)$ ,

$$\varphi_n = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi \varphi(x) \cos(nx) dx, \quad \psi_n = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi \psi(x) \cos(nx) dx, \quad n = 0, 1, \dots$$

Próbafüggvény:  $\frac{c_0(t)}{2} + \sum_n c_n(t) \cos(nx)$  — peremfeltétel rendben.

Az egyenletből és a kezdetifeltételből:

$$\left. \begin{aligned} \ddot{c}_n &= -n^2 c_n \\ c_n(0) &= \varphi_n \\ \dot{c}_n(0) &= \psi_n \end{aligned} \right\}, \quad n = 1, 2, \dots,$$

majd ebből közvetlen számolással:

$$c_0(t) = \frac{\varphi_0}{2} + \frac{\psi_0 t}{2} \quad \text{és} \quad c_n(t) = \varphi_n \cos(nt) + \frac{\psi_n}{n} \sin(nt), \quad n = 1, 2, \dots$$

Igy a megoldás Fourier soros alakja

$$u(t, x) = \frac{\varphi_0}{2} + \frac{\psi_0 t}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left( \varphi_n \cos(nt) + \frac{\psi_n}{n} \sin(nt) \right) \cos(nx). \quad (29.15)$$

A végtelen összeg  $\frac{\psi_0 t}{2}$  tagja világosan utal a fizikai jelentésre: a vízszintes síkon fekvő rugalmas drótdarab tömegközéppontja egyenes vonalú egyenletes mozgást végez, és sebessége éppen a vele közölt átlagos kezdősebesség. Ez a csúszás súrlódás nélküli, az  $E(t) = \frac{1}{2} \int_0^\pi (u_x^2 + u_t^2) dx$  energia a mozgás során mindvégig megőrződik. Maga az  $u_x(t, 0) = u_x(t, \pi) = 0$  homogén Neumann-feltétel is az energiáról szól: a feszültségi energia sűrűsége a húr mindkét végpontjában mindvégig zérus, a húr mindkét végpontjában mindvégig „ernyed”. — A megoldás D’Alembert alakban is megadható, nevezetesen

$$u(t, x) = \frac{\varphi(x+t) + \varphi(x-t)}{2} + \frac{1}{2} \int_{x-t}^{x+t} \psi(s) ds,$$

ahol  $\varphi$  és  $\psi$  az egész számegyenesen értelmezett, páros,  $2\pi$ -periodikus függvény-kiterjesztések.

## 29.6. Fourier-módszer szorzattartományokon

Természetes kérdés<sup>19</sup>: Milyen általánosságban igazak az előző alfejezet eredményei?

A mögöttes matematikai módszer a „változók szétválasztása” nevet viseli. Az elnevezés emlékeztetünkbe idézi mindazt, amit a szétválasztható változójú közönséges differenciálegyenletekről tanultunk: „Gyűjtsük egy oldalra a csak  $x$ -et és a csak  $y$ -t tartalmazó tagokat!” Nézzük csak, valóban ez a lényeg? Úgy tűnik, igen:

$$y' = f(x)g(y) \Rightarrow \frac{dy}{g(y)} = f(x) dx \Rightarrow \int \frac{dy}{g(y)} = \int f(x) dx + C.$$

Jaj, dehogy. Ami tényleg történik, az egyszerű integrálás, mindkét oldalon az  $x$  változó szerint, majd az egyenlet bal oldalán a Newton–Leibniz formula és az összetett függvény deriválási szabályának alkalmazása (amit röviden helyettesítéses integrálásnak hívnak). Legyen az egyszerűség kedvéért  $q(x) = \frac{1}{g(x)}$  és legyen  $Q$  és  $F$  a  $q$  illetve az  $f$  primitív függvénye. Így kapjuk az előző, úgymond mérnöki levezetés matematikusi átiratát:

$$\begin{aligned} y' = f(x)g(y) &\Rightarrow q(y(x))y'(x) = f(x) \Rightarrow Q'(y(x))y'(x) = F'(x) \\ &\Rightarrow \int_{x_0}^x Q'(y(s))y'(s) ds = \int_{x_0}^x F'(s) ds \Rightarrow [Q(y(s))]_{x_0}^x = [F(s)]_{x_0}^x, \end{aligned}$$

ami implicit algebrai egyenlet az  $y(x)$ -re (mint az előbb, az  $x_0$ -t tartalmazó részeket együttvéve érdemes egy  $C$  konstanssal jelölni).

<sup>19</sup>a matematikusok szokásos gondolatmenete az általánosítás. Specializálni, példát találni legalább annyira nehéz. De mi is egy elmélet? Az, ami két példában közös. Egyetlen példa, az első példa inkább ellenpélda. Nagyon meg kell becsülni, ami konkrét — a matematikusi általánosítás akkor jó, ha a lényegre mutat és segítségével többet tudunk meg a konkrétumról

A „változók szétválasztása” módszernek a fentiekhez az ég egy világon nincsen semmi köze<sup>20</sup>. Amikor a

$$\left. \begin{array}{l} u_t = u_{xx} \\ u(t, 0) = u(t, \pi) = 0 \end{array} \right\}, \quad \left. \begin{array}{l} u_{tt} = u_{xx} \\ u_x(t, 0) = u_x(t, \pi) = 0 \end{array} \right\}, \quad \left. \begin{array}{l} \mathcal{U}_{rr} + \frac{1}{r} \mathcal{U}_r + \frac{1}{r^2} \mathcal{U}_{\varphi\varphi} = 0 \\ \mathcal{U}(1, \varphi) = \mathcal{G} \end{array} \right\}$$

feladatoknak a megoldását

$$(\text{az első két esetben}) \quad u(t, x) = T(t) \cdot X(x) \quad \text{illetve} \quad \mathcal{U}(r, \varphi) = R(r) \cdot \Phi(\varphi)$$

alakban keressük, akkor a különböző változókat

$$(\text{az első két esetben}) \quad \frac{T'(t)}{T(t)} = \frac{X''(x)}{X(x)} \quad \text{illetve} \quad -\frac{r^2 R''(r) + rR'(r)}{R(r)} = \frac{\Phi''(\varphi)}{\Phi(\varphi)}$$

szerint egy oldalra gyűjtve azonosan konstans függvények kerültek az egyenletek bal és jobb oldalára. Így a peremfeltételeket is, az

$$X(0) = X(\pi) = 0, \quad X'(0) = X'(\pi) = 0, \quad \Phi(2\pi) = \Phi(0), \quad \Phi'(2\pi) = \Phi'(0)$$

alakban továbbíve, az egyelőre ismeretlen *const* konstanssal az adódik, hogy

$$\left. \begin{array}{l} X''(x) = \text{const} \cdot X(x) \\ X(0) = X(\pi) = 0 \end{array} \right\} (D), \quad \left. \begin{array}{l} X''(x) = \text{const} \cdot X(x) \\ X'(0) = X'(\pi) = 0 \end{array} \right\} (N),$$

$$\left. \begin{array}{l} \Phi''(\varphi) = \text{const} \cdot \Phi(\varphi) \\ \Phi(2\pi) = \Phi(0), \quad \Phi'(2\pi) = \Phi'(0) \end{array} \right\} (P).$$

Mindhárom esetben sajátérték–sajátfüggvény feladatra jutottunk. Olyan függvényt keresünk, amelyet az egydimenziós Laplace-operátor konstansszor önmagába visz, és amely kielégíti a homogén Dirichlet, a homogén Neumann, illetve a periodikus peremfeltételeket. A peremfeltételeket — a későbbi általánosításokat megelőlegezve — beleolvasztjuk a differenciáloperátorba. A három sajátérték–sajátfüggvény feladat tehát ebben a rövid formában is felírható:

$$\Delta_D X = \text{const} \cdot X, \quad \Delta_N X = \text{const} \cdot X, \quad \Delta_P \Phi = \text{const} \cdot \Phi.$$

Teljes az analógia a négyzetes mátrixokra vonatkozó  $As = \lambda s$  sajátérték–sajátvektor feladattal. Csak éppen a sajátvektort egy függvény térben sajátfüggvénynek nevezzük.

A  $[0, \pi]$ ,  $[0, \pi]$ ,  $[0, 2\pi]$  intervallumon értelmezett  $\Delta_D, \Delta_N, \Delta_P$  lineáris operátorok sajátfüggvényeit nem nehéz konkrétan kiszámolnunk. A  $X''(x) = \text{const} \cdot X(x)$  (másodrendű homogén lineáris) egyenlet általános megoldásai a *const* állandó előjelétől függően

$$\left. \begin{array}{ll} c_1 \operatorname{ch}(\mu x) + c_2 \operatorname{sh}(\mu x) & \text{ha } \text{const} = \mu^2 > 0 \\ c_1 x + c_2 & \text{ha } \text{const} = 0 \\ c_1 \cos(\mu x) + c_2 \sin(\mu x) & \text{ha } \text{const} = -\mu^2 < 0 \end{array} \right\}, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}$$

<sup>20</sup>ez az elnevezés nyelvi zárvány, ugyanúgy, mint a téglányösszeg, abból a korból, amikor a sinus függvényt még kebel-függvénynek hívták. Matematikai szempontból a „Fourier-módszer elliptikus operátorokra szor-zattartományon” kifejezés volna a megfelelő, dehát a külsőnek gyakori tulajdonsága — legalábbis 150 évvel ezelőtt így mondták volna — hogy elfedi a belbecset

s közülük a peremfeltételeket pontosan a(z egyre normált)

$$\left\{ \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sin(nx) \mid n = 1, 2, \dots \right\} \quad (D) \quad , \quad \left\{ \sqrt{\frac{1}{\pi}}, \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cos(nx) \mid n = 1, 2, \dots \right\} \quad (N) ,$$

$$\left\{ \sqrt{\frac{1}{2\pi}}, \sqrt{\frac{1}{\pi}} \cos(nx), \sqrt{\frac{1}{\pi}} \sin(nx) \mid n = 1, 2, \dots \right\} \quad (P)$$

függvények elégítik ki<sup>21</sup>. Így a  $\text{const}$  sajátértékek rendre

$$\{-n^2\}_{n=1}^{\infty} \quad (D) \quad , \quad \{0, -n^2\}_{n=1}^{\infty} \quad (N) \quad , \quad \{0, -n^2, -n^2\}_{n=1}^{\infty} \quad (P) .$$

A lényeg az, hogy megszámlálhatóan sok  $\lambda_n$  sajátérték van, és hogy az  $\{X_n(x)\}_n$ ,  $\{X_n(x)\}_n$ ,  $\{\Phi_n(\varphi)\}_n$  sajátfüggvények, rendre az  $L_2([0, \pi])$ ,  $L_2([0, \pi])$ ,  $L_2([0, 2\pi])$  terekben, teljes ortonormált rendszert alkotnak, és hogy az eredeti probléma általános megoldása

$$(\text{első két eset:}) \quad u(t, x) = \sum_n T_n(t) X_n(x) \quad \text{illetve} \quad \mathcal{U}(r, \varphi) = \sum_n R_n(r) \Phi_n(\varphi)$$

alakú, ahol

$$T'_n(t) = \lambda_n T_n \quad , \quad T''_n(t) = \lambda_n T_n \quad , \quad -r^2 R''_n(r) - r R'_n(r) = \lambda_n R_n(r)$$

már egyértelműen meghatározott, könnyen kezelhető közönséges differenciálegyenletek.

Azt kapjuk tehát, hogy a megoldások rendre (29.2), (29.15), illetve

$$\mathcal{U}(r, \varphi) = \begin{cases} \mathcal{G}(\varphi) & \text{ha } r = 1, \varphi \in [0, 2\pi] \\ \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{1-r^2}{1-2r\cos(\varphi-\psi)+r^2} \mathcal{G}(\psi) d\psi & \text{ha } r < 1, \varphi \in [0, 2\pi] . \end{cases} \quad (29.16)$$

Itt elkel némi magyarázat. A harmadik feladat nem más, mint a

$$\left. \begin{aligned} u_{xx} + u_{yy} &= 0 \quad , \quad (x, y) \in \Omega \\ u|_{\partial\Omega} &= g \end{aligned} \right\} \quad (29.17)$$

Laplace-egyenlet inhomogén Dirichlet peremfeltétellel az  $\Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 < 1\}$  nyílt egységkör-lemezen, ahol  $g : \partial\Omega \rightarrow \mathbb{R}$  adott folytonos függvény. Ezt a feladatot transzformáltuk át az

$$\mathcal{U}(r, \varphi) = u(r \cos(\varphi), r \sin(\varphi)) = u(x, y) \quad , \quad \mathcal{G}(\varphi) = g(\cos(\varphi), \sin(\varphi))$$

<sup>21</sup>ezeket a függvénycsaládokat jól ismerjük a trigonometrikus Fourier sorok elméletéből. Azt látjuk, hogy mind a  $\Delta_D$  mind a  $\Delta_N$  operátorok sajátfüggvényei teljes ortonormált rendszert alkotnak az  $L_2([0, \pi])$  Hilbert térben, a  $\Delta_P$  operátor sajátfüggvényei pedig az  $L_2([0, 2\pi])$  Hilbert térben alkotnak teljes ortonormált rendszert. Ez utóbbi esetben  $2\pi$ -periodikus függvényekről lévén szó, nyugodtan vehetjük a  $[-\pi, \pi]$  intervallumot is — tulajdonképpen mindhárom rendszer a  $[-\pi, \pi]$  intervallumon „él”, csak az első a páratlan, a második a páros függvények alterére (maguk is Hilbert-terek) vonatkozik

képletek segítségével polárkoordinátákra<sup>22</sup>. Az  $\mathcal{U}(r, \varphi) = \sum_n R_n(r) \Phi_n(\varphi)$  végeredményből már csak az  $R_n$ -re vonatkozó  $-r^2 R_n''(r) - r R_n'(r) = -n^2 R_n(r)$  egyenlet megoldása és a peremfeltétel figyelembe vétele van hátra. Így

$$\mathcal{U}(r, \varphi) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} r^n (a_n \cos(n\varphi) + b_n \sin(n\varphi)) \quad (29.18)$$

adódik, ahol  $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$  és  $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$  a  $\mathcal{G}$  függvény szokásos Fourier sorfejtésének együtthatói. Ezután hosszadalmas de nagyon szép számolás vezet el a (29.16) integrál-reprezentációhoz. Feltűnő a hasonlóság a (29.3) képlettel. A kapcsos zárójel szerinti esetszétválasztás oka természetesen most is az, hogy a (29.18) Taylor–Fourier sor  $r = 1$  esetén tiszta Fourier sorra egyszerűsödik és annak konvergenciája ugyancsak problematikus a folytonos függvények  $C([0, 2\pi])$  terében. (Természetesen (29.18)  $r \leq r_0 < 1$  esetén valamennyi deriváltjával együtt egyenletesen konvergens. Így a megoldás az  $r < 1$  nyílt egységkör-lemezen végtelenszer deriválható, sőt analitikus függvény.) A (29.16) integrál-reprezentáció következményeképpen kapjuk a Tétel 29.1.1. analogonját.

**29.6.1. TÉTEL** A (29.17) peremértékfeladat korrekt kitűzésű. A megoldás  $C(\overline{\Omega}) \cap C^2(\Omega)$  függvény, és a  $C(\partial\Omega) \rightarrow C(\overline{\Omega})$ ,  $g \rightarrow u = u(g)$  leképezés folytonos.

Ez pozitív eredmény. Érdekes összehasonlítást tenni a Tétel 29.2.1. negatív eredményével.

**29.6.2. TÉTEL** Tétel 29.2.2. és Tétel 29.6.1. érvényesek maradnak akkor is, ha bennük az  $\Omega$  tetszőleges, sima peremű, korlátos, nyílt és összefüggő<sup>23</sup> síkbeli halmazt jelöl (és nemcsak az eddigi nyílt egységkör-lemezt).

A síkbeliség itt teljesen lényegtelen. Az előző tételben (a többi feltétel megőrzésével)  $\Omega$  térbeli, sőt  $d$ -dimenziós halmaz is lehet:  $\Delta u$  alatt persze ekkor  $u_{xx} + u_{yy} + u_{zz}$ , illetve  $\sum_{i=1}^d u_{x_i x_i}$  értendő.

**29.6.3. TÉTEL** Legyen  $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ ,  $d = 2, 3, \dots$  tetszőleges, sima peremű, korlátos, nyílt és összefüggő halmaz. Ekkor a  $\Delta_D$  operátornak megszámlálhatóan végtelen sok  $\{\lambda_n\}_{n=1}^{\infty}$  sajátértéke van,

$$0 > \lambda_1 > \lambda_2 \geq \lambda_3 \geq \dots \geq \lambda_n \geq \dots \rightarrow -\infty$$

<sup>22</sup>igaz volna, hogy bármely — algebrai, közönséges, parciális — egyenletet fel lehet írni bármely koordináta-rendszerben? ha a különböző koordináta-rendszerek ekvivalensek egymással, milyen alapon használjuk egyszer az egyiket, másszor a másikat? Itt a ragyogó alkalom, hogy ki–ki tudatosan is megfogalmazza magában a válaszokat. (Ne általános koordináta-rendszerre gondoljunk, a Descartes féle, a ferdeszögű, a polár, a henger, és a gömbi bőven elegendő. Kedvcsinálásképpen hadd mutassak fel egy igazi gyöngyszemet:

$$(x-1)^2 + y^2 = 1 \Leftrightarrow (r \cos(\varphi) - 1)^2 + (r \sin(\varphi))^2 = 1 \Leftrightarrow r = 2 \cos(\varphi),$$

és így a Pythagoras tétel polárkoordinátákban nem más, mint Thales tétele.) És egy nehéz kérdés: vajon a linearizálás lokális koordinátatranszformáció? — mondjuk egy síkbeli, autonóm közönséges differenciálegyenlet nyeregpontra körül

<sup>23</sup>egy  $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ ,  $d = 2, 3, \dots$  nyílt halmaz összefüggő, ha bármely két pontja összeköthető egy végig az  $\Omega$  halmazban elhelyezkedő folytonos görbével

(amelyek tehát egy negatív számokból álló monoton csökkenő és mínusz végtelenhez tartó sorozatot alkotnak<sup>24</sup>), és a hozzájuk tartozó  $\{X_n\}_{n=1}^\infty$  sajátfüggvények teljes ortonormált rendszert határoznak meg az  $L_2(\Omega)$  térben.

**29.6.4. KÖVETKEZMÉNY** Poisson egyenlet homogén Dirichlet peremértékfeltétellel, a fenti értelemben általános  $\Omega$  halmazon:

$$\left. \begin{array}{l} \Delta u = f \in L_2(\Omega) \\ u|_{\partial\Omega} = 0. \end{array} \right\}$$

Itt  $f = \sum_n f_n X_n$ ,  $f_n = \int_\Omega f(\xi) X_n(\xi) d\xi$ .

Próbafüggvény:  $u = \sum_n c_n X_n$  — peremfeltétel rendben.

A  $\Delta u = f$  egyenletből

$$\Delta(\sum_n c_n X_n) = \sum_n f_n X_n \Leftrightarrow \sum_n c_n \lambda_n X_n = \sum_n f_n X_n.$$

Igy a megoldás Fourier soros alakja az együtthatók összehasonlításával:

$$u = \sum_{n=1}^\infty \frac{f_n}{\lambda_n} X_n. \quad (29.19)$$

Mivel a  $\lambda_n$  sajátértékek el vannak szeparálva a nullától, a jobb oldalon álló függvényt sor konvergenciája az  $L_2(\Omega)$  térben magától értetődik, sőt a Parseval formula miatt  $\|u\|_{L_2}^2 = \sum_n c_n^2 = \sum_n (\frac{f_n}{\lambda_n})^2 \leq \frac{1}{\lambda_1^2} \sum_n f_n^2 = \frac{1}{\lambda_1^2} \cdot \|f\|_{L_2}^2$ .

Jogos tehát az  $u = u(f) = Mf$  jelölés, ahol az

$$M : L_2(\Omega) \rightarrow L_2(\Omega), \quad f \rightarrow \sum_{n=1}^\infty \frac{f_n}{\lambda_n} X_n$$

megoldó-operátor lineáris és folytonos, normája pedig  $\frac{1}{|\lambda_1|}$ .

Az  $M$  operátor Fourier soros felírása diagonális alakot jelent az  $\{X_n\}_{n=1}^\infty$  sajátfüggvények teljes ortonormált rendszerében: az  $M$  operátor a  $\text{diag}(\frac{1}{\lambda_n})$  végtelenszer végtelen méretű diagonális mátrixszal reprezentálható. Így  $M$  önadjungált és a sajátértékek tulajdonságainak megfelelően negatív operátor is<sup>25</sup>. Igaz továbbá, hogy  $N \rightarrow \infty$  esetén  $\|M - M_N\| = \frac{1}{|\lambda_N|} \rightarrow 0$ , ahol

$$M_N : L_2(\Omega) \rightarrow L_2(\Omega), \quad f \rightarrow \sum_{n=1}^N \frac{f_n}{\lambda_n} X_n. \quad (29.20)$$

<sup>24</sup>a második egyenlőtlenség-jel is éles: a tételnek része, hogy az első sajátérték egyszeres

<sup>25</sup>a formális bizonyítások

$$\langle Mf, g \rangle = \langle \sum_n \frac{f_n}{\lambda_n} X_n, \sum_n g_n X_n \rangle = \sum_n \frac{f_n g_n}{\lambda_n} = \langle \sum_n f_n X_n, \sum_n \frac{g_n}{\lambda_n} X_n \rangle = \langle f, Mg \rangle$$

$$\text{és } \langle Mf, f \rangle = \sum_n \frac{f_n^2}{\lambda_n} < 0$$

Tehát az  $M$  megoldó-operátort úgynevezett Hilbert–Schmidt féle sorfejtésének (29.20) szeletei normában jól közelítik.

Maga a  $\Delta_D$  operátor is lineáris, s jöllehet nem folytonos<sup>26</sup>, önadjungált és negatív definit. Az  $M$  operátorhoz hasonlóan a  $\Delta_D$  operátor is reprezentálható végtelenszer végtelen méretű diagonális mátrixszal (amelynek elemei ezúttal nem korlátosak).

**29.6.5. MEGJEGYZÉS** Amennyiben az integrálás és a végtelen összegzés sorrendje felcserélhető, érvényes az

$$\begin{aligned} u(x) &= (Mf)(x) = \sum_n \frac{f_n}{\lambda_n} X_n(x) = \sum_n \frac{\int_{\Omega} f(\xi) X_n(\xi) d\xi}{\lambda_n} X_n(x) \\ &= \int_{\Omega} \left( \sum_n \frac{X_n(x) X_n(\xi)}{\lambda_n} \right) f(\xi) d\xi = \int_{\Omega} G(x, \xi) f(\xi) d\xi \end{aligned}$$

azonosság is. Ekkor az  $M$  megoldóoperátor integrál-operátor, amelynek  $G \in L_2(\Omega \times \Omega)$  magfüggvénye az úgynevezett Green függvény. Rögzített  $y \in \Omega$  esetén a Green függvényből képzett  $w(x) = G(x, y)$  függvény disztribúció értelemben vett megoldása a  $\Delta w = \delta_y$ ,  $w|_{\partial\Omega} = 0$  peremérték-feladatnak, ahol  $\delta_y$  az  $y$  ponthoz tartozó Dirac delta. Mérnöki kézikönyvekben gyakran az szerepel, hogy  $\delta_y : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  olyan függvény, amelyre  $\delta_y(\xi) = 0$  ha  $\xi \neq y$  és  $\delta_y(y) = \infty$ , ugyanakkor  $\int_{\Omega} \delta_y(\xi) d\xi = 1$ . Természetesen ilyen tulajdonságokkal egyetlen „igazi” függvény sem rendelkezhet: a matematikusok azt mondják, hogy  $\delta_y$  általánosított függvény, idegen szóval disztribúció. Összhangban az  $\int_{\Omega} G(x, \xi) \delta_y(\xi) d\xi = G(x, y)$  azonossággal, a  $\delta_y$  felfogható az  $y \in \Omega$  pontra koncentrált valószínűségi mértéknek is<sup>27</sup>.

A korábban már részletesen tárgyalt egydimenziós esettel analóg eredmények érvényesek az  $\Delta u = f$  egyenlet mellett az  $u_t = \Delta u + f(t, x)$  és az  $u_{tt} = \Delta u + f(t, x)$  egyenletekre is.

<sup>26</sup>a nem folytonosság világos abból a tényből, hogy sajátértékei nem korlátosak. A negatív definitást az

$$\langle \Delta_D u, u \rangle = \langle \Delta_D (\sum_n c_n X_n), \sum_n c_n X_n \rangle = \sum_n \lambda_n c_n^2 \leq -|\lambda_1| \sum_n c_n^2 = -|\lambda_1| \cdot \|u\|_{L_2(\Omega)}^2$$

egyenlőtlenség fejezi ki, az önadjungáltságot pedig a  $\langle \Delta_D u, u \rangle = \sum_n \lambda_n c_n^2 = \langle u, \Delta_D u \rangle$  azonosság, amelynek pontos értelme nem adható meg a  $\Delta_D$  operátor értelmezési tartományának meghatározása nélkül. Ez pedig ugyancsak nehéz és egészen a múlt század közepéig váratott magára. Nem véletlen, hogy a  $\Delta_D$  operátor értelmezési tartományáról idáig nagy szemérmesen hallgattunk, és most is csak lábjegyzetben említjük meg, hogy a  $\Delta_D$  értelmezési tartománya a Tétel 29.2.2.  $H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega)$  halmaza, amely az  $L_2(\Omega)$  tér sűrű altére. Az akkori és a mostani jelölések egymással párba állíthatók:  $u = u(f) = Mf$ ; az  $u = u(f)$  függvény  $c$  Lipschitz konstansa pedig az  $M : L_2(\Omega) \rightarrow L_2(\Omega)$  operátor normája, azaz  $c = \frac{1}{|\lambda_1|}$ . Amint arra már utaltunk, mindehhez meg kell változtatnunk, általánosítanunk kell a deriválás, sőt a peremre való lezorítás fogalmát is. Itt a  $H_0^1(\Omega)$  és a  $H^2(\Omega)$  egyaránt úgynevezett Szoboljev tér, olyan függvénytér, amelyben bizonyos általánosított deriváltak is négyzetesen integrálhatók. Természetesen mindez magával vonja a megoldás fogalmának általánosítását is. Összhangban azzal, hogy klasszikus megoldás egyúttal általánosított megoldás is,  $H^2(\Omega) \supset C^2(\Omega)$ , sőt  $C^2(\Omega)$  sűrű a  $H^2(\Omega)$  térben

<sup>27</sup>mindezek mögött — a klasszikus megoldás létezésének esetleges hiányában — a megoldás fogalmának (egy újabb, a Szoboljev értelemben vett általános megoldás fogalmától különböző) általánosítása áll. Ha minden szép és jó, akkor ez az általános, disztribúció értelemben vett megoldás is a klasszikus megoldássá egyszerűsödik



**29.6.6. KÖVETKEZMÉNY** Hővezetési egyenlet, belső hőforrások, homogén Dirichlet peremfeltétel

$$\left. \begin{aligned} u_t &= \Delta u + f(t, x) \\ u|_{\partial\Omega} &= 0 \\ u(0, x) &= g(x) \end{aligned} \right\} \quad t \geq 0, x \in \Omega. \quad (29.21)$$

Itt  $f(t, x) = \sum_n f_n(t)X_n(x)$ ,  $g(x) = \sum_n g_n X_n(x)$ .

Próbafüggvény:  $u(t, x) = \sum_n c_n(t)X_n(x)$  — peremfeltétel rendben.

Az egyenletből és a kezdetifeltételből, a  $\lambda_n < 0$  sajátértékkel:

$$\left. \begin{aligned} \dot{c}_n &= \lambda_n c_n + f_n(t) \\ c_n(0) &= g_n \end{aligned} \right\}, \quad n = 1, 2, \dots$$

Igy a (29.12) formulával teljes összhangban:

$$c_n(t) = e^{\lambda_n t} g_n + \int_0^t e^{\lambda_n(t-s)} f_n(s) ds.$$

**29.6.7. KÖVETKEZMÉNY** Kis transzverzális rezgések, külső gerjesztés, homogén Dirichlet peremfeltétel

$$\left. \begin{aligned} u_{tt} &= \Delta u + f(t, x) \\ u|_{\partial\Omega} &= 0 \\ u(0, x) &= \varphi(x) \\ u_t(0, x) &= \psi(x) \end{aligned} \right\} \quad t \in \mathbb{R}, x \in \Omega. \quad (29.22)$$

Itt  $f(t, x) = \sum_n f_n(t)X_n(x)$ ,  $\varphi(x) = \sum_n \varphi_n X_n(x)$ ,  $\psi(x) = \sum_n \psi_n X_n(x)$ .

Próbafüggvény:  $u(t, x) = \sum_n c_n(t)X_n(x)$  — peremfeltétel rendben.

Az egyenletből és a kezdetifeltételből, bevezetve a  $\lambda_n = -\mu_n^2 < 0$  jelölést:

$$\left. \begin{aligned} \ddot{c}_n &= -\mu_n^2 c_n + f_n(t) \\ c_n(0) &= \varphi_n \\ \dot{c}_n(0) &= \psi_n \end{aligned} \right\}, \quad n = 1, 2, \dots$$

Igy a (29.14) formulával teljes összhangban:

$$c_n(t) = \varphi_n \cos(\mu_n t) + \frac{\psi_n}{\mu_n} \sin(\mu_n t) + \int_0^t \frac{f_n(s)}{\mu_n} \sin(\mu_n(t-s)) ds.$$

Visszatérve az általános elméletre: A próbafüggvények  $u(t, x) = \sum_n c_n(t)X_n(x)$  alakja indokolja, hogy az eljárás a „változók szétválasztása módszer” nevet viseli. Az időváltozót tehát le lehet választani a helyváltozóról, többdimenziós  $\Omega$  tartomány esetében is.

Alapvető fontosságú, hogy mindazokban az esetekben, amikor az  $\Omega$  tartomány — Descartes, polár/henger, illetve gömbi koordinátarendszerben — egydimenziós intervallumok



szorzata, a  $\Delta_D$  operátor  $X_n(x)$  sajátfüggvénye

$$X_n(x) = X_n(x_1, x_2, \dots, x_d) = X_{n1}(x_1) \cdot X_{n2}(x_2) \cdots X_{nd}(x_d) \quad (29.23)$$

alakú lesz, magyarul egyváltozós függvények szorzatára bomlik.

Éppen itt az ideje, hogy a sok-sok homogén peremfeltétel után az  $u|_{\partial\Omega} = i$  inhomogén peremfeltételt is felemlítsük. Itt  $i : \partial\Omega \rightarrow \mathbb{R}$  adott függvény. Az egyszerűség kedvéért tegyük fel, hogy az  $i$  függvénynek létezik  $C^2$  kiterjesztése az  $\Omega$  tartomány  $\overline{\Omega}$  lezárására<sup>28</sup>. Jelölje  $\iota : \overline{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}$  ezen kiterjesztések egyikét. Bevezetve a  $v(t, x) = u(t, x) - \iota(x)$  új ismeretlent, az  $u|_{\partial\Omega} = i$  inhomogén peremfeltétellel módosított (29.21) és (29.22) feladatok rendre a jólismert

$$\left. \begin{aligned} v_t &= \Delta v + (f(t, x) + \Delta \iota(x)) \\ v|_{\partial\Omega} &= 0 \\ v(0, x) &= g(x) + \iota(x) \end{aligned} \right\} \text{ és a } \left. \begin{aligned} v_{tt} &= \Delta v + (f(t, x) + \Delta \iota(x)) \\ v|_{\partial\Omega} &= 0 \\ v(0, x) &= \varphi(x) + \iota(x) \\ v_t(0, x) &= \psi(x) \end{aligned} \right\}$$

homogén alakot öltik.

Kicsiny, de érzékeny különbségekkel Tétel 29.6.3. és Következmény 29.6.4. mindketten érvényesek maradnak, ha bennük az  $u|_{\partial\Omega} = 0$  homogén Dirichlet peremfeltételt a  $\partial_v u|_{\partial\Omega} = 0$  homogén Neumann peremfeltétellel helyettesítjük, ahol  $\partial_v u(x)$  az  $u : \overline{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}^d$  függvénynek az  $\Omega$  tartomány  $\partial\Omega$  pereme tetszőleges  $x \in \partial\Omega$  pontjában vett és a  $v = v(x)$  kifelé mutató más szóval külső normális egységvektor szerint vett iránymenti deriváltját jelenti.

**29.6.8. TÉTEL** Legyen  $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ ,  $d = 2, 3, \dots$  tetszőleges, sima peremű, korlátos, nyílt és összefüggő halmaz. Ekkor a  $\Delta_N$  operátornak megszámlálhatóan végtelen sok  $\{\lambda_n\}_{n=1}^\infty$  sajátértéke van,

$$0 = \lambda_1 > \lambda_2 \geq \lambda_3 \geq \dots \geq \lambda_n \geq \dots \rightarrow -\infty$$

(amelyek tehát egy nempozitív számokból álló monoton csökkenő és mínusz végtelenhez tartó sorozatot alkotnak<sup>29</sup>), és a hozzájuk tartozó  $\{X_n\}_{n=1}^\infty$  sajátfüggvények teljes ortonormált rendszert határoznak meg az  $L_2(\Omega)$  térben, speciálisan az első sajátfüggvény az  $X_1 = \frac{1}{\sqrt{\text{volume}(\Omega)}}$  azonosan konstans függvény.

**29.6.9. KÖVETKEZMÉNY** Poisson egyenlet homogén Neumann peremértékfeltétellel, a fenti értelemben általános  $\Omega$  halmazon:

$$\left. \begin{aligned} \Delta u &= f \in L_2(\Omega) \\ \partial_v u|_{\partial\Omega} &= 0. \end{aligned} \right\}$$

<sup>28</sup>visszaautalunk a 28-as sorszámú lábjegyzetre, ahol a zárt halmazon értelmezett függvények különféle simasági osztályait definiáltuk. Ha  $i \in C^2(\partial\Omega)$ , akkor az  $i$  függvény  $C^2(\overline{\Omega})$  kiterjesztése (pontosabban az ilyen kiterjesztéseknek egy egész osztálya) nemcsak hogy létezik, hanem egyszerű interpolációs módszerekkel meg is konstruálható. Az egydimenziós  $\Omega = (0, \pi)$  esetben az  $i(0) = \alpha$ ,  $i(\pi) = \beta$  képletek által meghatározott  $i$  függvény legegyszerűbb (analitikus) kiterjesztése nyilván  $\iota(x) = \alpha + \frac{\beta - \alpha}{\pi}x$ ,  $x \in [0, \pi]$

<sup>29</sup>az első egyenlőtlenség-jel éles: a tételnek része, hogy a  $\lambda_1 = 0$  mint első sajátérték egyszeres

Itt  $f = \sum_n f_n X_n$ ,  $f_n = \int_{\Omega} f(\xi) X_n(\xi) d\xi$ .

Próbafüggvény:  $u = \sum_n c_n X_n$  — peremfeltétel rendben.

A  $\Delta u = f$  egyenletből

$$\Delta(\sum_n c_n X_n) = \sum f_n X_n \Leftrightarrow \sum_n c_n \lambda_n X_n = \sum f_n X_n.$$

Igy a megoldás Fourier soros alakja az együtthatók összehasonlításával — amennyiben  $f_1 = 0$  —

$$u = \text{const} + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{f_n}{\lambda_n} X_n, \quad (29.24)$$

ami egyúttal azt is jelenti, hogy

$$\int_{\Omega} f dx = 0 \quad (29.25)$$

a (Szoboljev térbeli általánosított) megoldás létezésének szükséges és elegendős feltétele, s ebben az esetben a megoldás egy szabad additív konstans is tartalmaz.

Példaként tekintsük az egydimenziós esetet:  $u''(x) = f(x)$ ,  $x \in \Omega = (0, \pi)$ . Ez ugyan nem parciális egyenlet, hanem csak közönséges, de a különböző peremfeltételek összehasonlító vizsgálatára kiválóan alkalmas.

29.6.10. **PÉLDA** ( $u''(x) = f(x)$ , rendre homogén Dirichlet, Neumann, periodikus peremfeltétel)

$$u''(x) = f(x) \Leftrightarrow u(x) = \int_0^x \int_0^s f(\xi) d\xi ds + Ax + B$$

és így az egyes esetekben az  $x \in \Omega = (0, \pi)$  választás mellett az  $A$  és  $B$  paraméterek értékeit rendre a

$$\Delta_D u = 0 \Leftrightarrow \int_0^{\pi} \int_0^s f(\xi) d\xi ds + A\pi = 0, B = 0;$$

$$\Delta_N u = 0 \text{ ha } \int_0^{\pi} f(\xi) d\xi = 0 \text{ és akkor } A = 0, B \in \mathbb{R};$$

$$\Delta_P u = 0 \text{ ha } \int_0^{\pi} f(\xi) d\xi = 0 \text{ és akkor } \int_0^{\pi} \int_0^s f(\xi) d\xi ds + A\pi = 0, B \in \mathbb{R}$$

formulák határozzák meg.

A 29.25) feltétel szükséges volta nyilvánvaló, mint az

$$\int_{\Omega} \Delta u dx = \int_{\partial\Omega} \partial_{\nu} u ds$$

integrál-átalakító tétel következménye. Mindez elvezet a Megjegyzés 29.1.3. egy fontos és roppant szemléletes általánosításához is.

29.6.11. **TÉTEL** A  $\partial_{\nu} u|_{\partial\Omega} = 0$  peremfeltétel a környezettől való izoláltságot fejezi ki, speciálisan az  $u_t = \Delta u$  hővezetési feladatban hőszigetelést, és így implikálja a hőenergia megmaradását is.

**BIZONYÍTÁS** Legyen a kezdeti feltétel  $u(0, \cdot) = g$ . Bevezetve az  $E(t) = \int_{\Omega} u(t, x) dx$  energiafüggvényt,

$$\dot{E}(t) = \int_{\Omega} u_t dx = \int_{\Omega} \Delta u dx = \int_{\partial\Omega} \partial_{\nu} u ds = 0,$$

amiből  $E(t) = E(0) = \int_{\Omega} g, t \geq 0$  (sőt Következmény 29.6.9. alapján  $u(t, x) \rightarrow \frac{1}{\text{volume}(\Omega)} \int_{\Omega} g$  ha  $t \rightarrow \infty$ ), és készen is vagyunk.  $\square$

**29.6.12. MEGJEGYZÉS** Tanultuk, hogy a komplex analitikus  $f(z) = f(x + iy) = u(x, y) + iv(x, y)$  függvény  $u(x, y) = \text{Re} f$  és  $v(x, y) = \text{Im} f$  valós és képzetes része egyaránt eleget tesz az  $u_{xx} + u_{yy} = 0$  Laplace-egyenletnek. Kiindulva az  $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \gamma_n z^n$  komplex hatványsorból, a (29.18) Taylor–Fourier sorfejtés egyszerű következménye a  $z^n = r^n(\cos(n\varphi) + i \sin(n\varphi))$  összefüggésnek. — A  $-r^2 R_n''(r) - r R_n'(r) = -n^2 R_n(r)$  differenciálegyenlet általános megoldása egyébként  $R_n(r) = \alpha + \beta \log(r)$  ha  $n = 0$  és  $R_n(r) = \alpha r^n + \beta r^{-n}$  ha  $n > 0$ . Mivel  $r = 0$  is lehetséges, a  $\log(r)$  és az  $r^{-n}$  függvények együtthatóit nullának választottuk. Az  $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \gamma_n z^n$  Laurent sorból indulva világos az is, hogyan kezeljük a 29.17 problémát, ha  $\Omega$  a zárt egységkör-lemezt komplementerét, az  $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 > 1\}$  halmazt jelenti. (A végtelen hosszú húr transzverzális rezgéseinek feladatában már láttunk példát olyan parciális egyenletre, amely az egész téren értelmezett. Az  $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 > 1\}$  halmaz példa olyan nem-korlátos tartományra, amely nem az egész tér. Az ilyen esetekben a megoldásfüggvény végtelen távoli pontban vett viselkedésére kirótt elvárások is részei a peremfeltételnek, leggyakrabban a megoldás ottani korlátosságát vagy nullához való tartását szokták előírni. Ez az oka a Laurent sor speciális, pozitív kitevőjű tagok nélküli választásának.)

Befejezésül arra mutatunk példát, hogy a változók szétválasztása módszer (egyszerű szerkezetű) lineáris parciális differenciálegyenlet-rendszerek esetén is működik. Valóban, az

$$\left. \begin{aligned} u_t &= a_{11}u + a_{12}v + d_1 \Delta u \\ v_t &= a_{21}u + a_{22}v + d_2 \Delta v \end{aligned} \right\} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} u_t \\ v_t \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} + D \begin{pmatrix} u_{xx} \\ v_{xx} \end{pmatrix}, \quad t \geq 0, x \in [0, \pi]$$

$$u_x(t, 0) = u_x(t, \pi) = v_x(t, 0) = v_x(t, \pi) = 0, \quad d_1, d_2 \geq 0$$

feladat egy alapmegoldását kereshetjük

$$\begin{pmatrix} u(t, x) \\ v(t, x) \end{pmatrix} = T(t) X(x) \mathbf{r} \Leftrightarrow \frac{T'(t)}{T(t)} \mathbf{r} = A \mathbf{r} + \frac{X''(x)}{X(x)} D \mathbf{r}$$

alakban. Itt  $\frac{X''(x)}{X(x)} = \lambda$  és  $\frac{T'(t)}{T(t)} = \sigma$  állandók. Mivel  $X'(0) = X'(\pi) = 0$ , a lehetséges sajátérték–sajátvektor párok  $\lambda_k = -k^2$ ,  $X_k(x) = \cos(kx)$ ,  $k = 0, 1, \dots$ . Adott  $k \in \mathbb{N}$  mellett  $\sigma = \sigma_{k,1}, \sigma_{k,2}$  megoldása a

$$\det \begin{pmatrix} 4 - k^2 - \sigma & 2 \\ -26 & -8 - 17k^2 - \sigma \end{pmatrix} = \det(A - k^2 D - \sigma I) = 0$$

sajátérték–egyenletnek,  $\mathbf{r} = \mathbf{s}_{k,1}, \mathbf{s}_{k,2}$  pedig (a  $\sigma_{k,1} \neq \sigma_{k,2}$  feltétel teljesülése esetén) a hozzájuk tartozó sajátvektorok. Az általános megoldás tehát (legalábbis ha  $\sigma_{k,1} \neq \sigma_{k,2}$ ,  $k \in \mathbb{N}$ ):

$$\begin{pmatrix} u(t, x) \\ v(t, x) \end{pmatrix} = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{i=1}^2 c_{k,i} e^{\sigma_{k,i} t} \cos(kx) \mathbf{s}_{k,i}$$

ahol a  $c_{k,i}$  együtthatókat az  $u(0, x) = g(x)$ ,  $v(0, x) = h(x)$  kezdeti feltételek (a  $\{\cos(kx)\}_{k=0}^{\infty}$  rendszer szerinti Fourier sorok együtthatóinak összehasonlítása révén) már egyértelműen meghatározzák.

**29.6.13. PÉLDA** *lineáris (egyensúlyi helyzete körül linearizált) reakció–diffúzió egyenlet-rendszer; homogén Neumann peremfeltétel*

Speciális eset:  $A = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ -26 & -8 \end{pmatrix}$ ,  $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 17 \end{pmatrix} \Rightarrow$  egy kis számolás  $\Rightarrow$

$$\operatorname{Re}(\sigma_{k,i}) \geq 0 \Leftrightarrow k = i = 1 \text{ amikor is } \sigma_{1,1} = 1 \text{ és } \mathbf{s}_{1,1} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Igy (a mérsékelt hosszúságú időintervallumban a mögöttes kémiai folyamatra is jó közelítéssel érvényes) megoldás:

$$\begin{pmatrix} u(t, x) \\ v(t, x) \end{pmatrix} = \text{const} \cdot e^t \cos(x) \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} + \dots \text{gyorsan lecsengő tagok} \dots \quad (29.26)$$

Látjuk tehát, hogy a térbeli diffúzió képes közönséges differenciálegyenlet-rendszereket destabilizálni és térbeli állandó inhomogenitásokat, úgynevezett mintázatokat létrehozni. Ez a jelenség<sup>30</sup> fontos szerepet játszik az élő szervezet kémiai folyamataiban és egyfajta választ ad a *Miért csíkos a tigris?* kérdésre is<sup>31</sup>. A Műszaki Mechanika Tanszék hallgatói jól tudják, hogy az időkéseletetés megjelenése egy szerszámgép rezgéseit leíró differenciálegyenletben ugyancsak lehet destabilizáló hatású. Csatolt oszcillátorok körében pedig a diffúzív keresztthatások erősödése is okozhat deszinkronizációt, ami szintén egyfajta instabilitás.

## 29.7. Speciális függvények

Jóllehet a cím nem utal rá közvetlenül, ez az alfejezet szorosan kapcsolódik az előzőhöz, és nem más mint annak folytatása, kibővítése. Olyan függvényekről lesz szó, amelyek bevezetését a Laplace-operátort tartalmazó parciális egyenletek megoldásának konkrét kiszámítása tette szükségessé. Ez a konkrét kiszámítás, vagy ha úgy tetszik kiszámíthatóság azt jelenti, hogy a legfontosabb hőtani, mechanikai, elektromosságtani etc. alkalmazásokban bizonyos függvénycsaládok bevezetésével sikerült a megoldást végtelen sor alakjában felírni. A sinus és a cosinus függvényeket érintő példákat már idáig is bőségesen láttunk, sőt az ilyen sorfejtések általános lehetőségéről szóló matematikai eredmények egyikével is

<sup>30</sup> amelyet felfedezője nevéen Turing–jelenségként (A.M. Turing, „The chemical basis of morphogenesis”, Phil. Trans. Royal Soc. London B237(1952), 37–72.) is emlegetnek

<sup>31</sup> Jóllehet a kémiai reakció és a diffúzió is teljesen ugyanolyan a  $[0, \pi]$  intervallum minden pontjában, a (29.26) megoldás nem–tranzien részé állandó térbeli inhomogenitást mutat:  $\cos(x) > 0$  ha  $0 \leq x < \frac{\pi}{2}$  ‘sárga’,  $\cos(x) < 0$  ha  $\frac{\pi}{2} < x \leq \pi$  ‘fekete’. Amint azt a (29.6) formula mutatja, a Turing–jelenség nem léphet fel egy–egyenletes feladatban, és akkor sem, ha az  $A$  mátrix negatív, a  $D$  mátrix pedig pozitív definit. A térbeli inhomogenitás tehát az  $A$  mátrix nem–szimmetrikus voltával áll kapcsolatban, és az is kell hozzá, hogy a (29.26) képletben szereplő ‘const’ állandó zérustól különböző legyen (amit természetesen a kezdeti feltétel kell hogy biztosítsa)

megismerkedhettünk. Az ott szereplő (29.24) sorfejtés konkrét felírása azokban az esetekben lehetséges, amikor az  $\Omega$  tartomány — a Descartes, polár/henger, illetve gömbi koordinátarendszerek egyikében — szorzat alakú, azaz a korlátos tartományok körében maradva téglatest, körlemez, illetve gömb (nemkorlátos tartományokra is gondolva pedig teljes tér, féltér, végtelen körhenger, illetve egy körlemez, végtelen körhenger, gömb [sőt egyetlen pont] komplementer-tartománya). Összességében azt mondhatjuk, speciális függvények azok az egyváltozós függvények, pontosabban az  $n = 1, 2, \dots$  egészekkel paraméterezett egyváltozós függvénycsaládok, amelyek segítségével a (29.24), (29.20) típusú sorfejtésekhez szükséges, a konkrét alkalmazások többségében két illetve három térváltozót tartalmazó  $X_n$  sajátfüggvények (a (29.23) formula vagy akár a Példa 29.5.2. szerinti) szorzat alakjában írhatók fel. Magától értetődő, hogy az  $X_n$  sajátfüggvények meghatározása csak a hozzájuk tartozó  $\lambda_n$  sajátértékek meghatározásával párhuzamosan történhet. A speciális függvények gazdagsága világosan mutatja a változók szétválasztása módszer erejét s egyúttal — Fourier-módszer *szorzattartományokon* — korlátait is.

**29.7.1. MEGJEGYZÉS** Az előző bekezdésben, pontosan a lényeg minél markánsabb kiemelése céljából, bevállaltunk egy kis pontatlanságot. A speciális függvények egy része egyáltalán nem, vagy csak lazán kapcsolódik a Laplace-operátorhoz. Utóbbi a helyzet a gamma függvénnyel, amely a(z egyel balra tolt) faktoriális függvény nem egész számokra történő kiterjesztése. A gamma függvényt legegyszerűbb a tulajdonságai révén definiálni. Legyen  $\Gamma : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$  az a valós analitikus függvény, amelyre  $f(1) = 1$  és  $f(x+1) = xf(x)$  minden  $x \in \mathbb{R}_+$  esetén. Az  $f(x+1) = xf(x)$  függvényegyenletből azonnal adódik, hogy  $f(n+1) = n!$  ha  $n \in \mathbb{N}$  — az a tény, hogy a mondott tulajdonságok pontosan egyetlen  $\mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$  függvényt határoznak meg, természetesen bizonyításra szorul. A gamma függvényt egyébként Euler

$$\Gamma(z) = \int_0^\infty e^{-t} t^{z-1} dt \quad , \operatorname{Re} z > 0$$

formulája a pozitív félsíkra, Gauss

$$\Gamma(z) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n! n^z}{z(z+1)\dots(z+n)} \quad , n \neq 0, -1, -2, \dots$$

formulája pedig a teljes komplex számsíkra terjeszti ki: a  $\Gamma$  függvénynek a nempozitív egész számokban elsőrendű pólusa van, különben mindenütt komplex analitikus.

Az elektronikus számítógépek megjelenése előtt a speciális függvényeknek kulcsfontosságú szerepe volt a mérnöki gyakorlatban. Mára ez teljesen megváltozott. Parciális egyenleteket nemcsak szorzattartományokon kell és — a véges elem módszernek köszönhetően — lehet is megoldani, hanem bonyolult geometriájú tartományokon is, és akkor még a nemlineáris egyenleteket nem is említettük.

Kezdetben<sup>32</sup> voltak az első és másodfokú polinomok, amelyekhez idővel hozzájött a többi polinom, majd a sinus, cosinus, tangens, cotangens és az exponenciális függvény valamint ezek inverzei — összefoglaló nevükön az *elemi függvények*. A gyakran használt függvényeknek ez a családja a XIX. század végére tovább bővült, ezek a *speciális függvények*. A szóhasználat nem egyértelmű, vannak akik például az

$$\operatorname{li}(x) = \int_0^x \frac{1}{\log(t)} dt \quad \text{és a} \quad \operatorname{sinc}(x) = \begin{cases} \frac{\sin(x)}{x} & \text{ha } x \neq 0 \\ 1 & \text{ha } x = 0 \end{cases}$$

logaritmus integrális és sinus cardinalis függvényeket is a speciális függvények közé sorolják, mások ezt nem teszik. Egyedül abban teljes az egyetértés, hogy az elliptikus függvények és a Laplace-operátorral kapcsolatos nem-polinom függvények beletartoznak a speciális függvények osztályába. A Laplace-operátorral kapcsolatos polinom-függvényeket a matematika „klasszikus ortogonális polinomok” címszó alatt tárgyalja.

Az elliptikus függvények az ingamozgással állnak szoros kapcsolatban. A  $\ddot{\varphi} + \sin(\varphi) = 0$ ,  $\varphi(0) = \alpha \in (0, \frac{\pi}{2})$ ,  $\dot{\varphi}(0) = 0$  feladatot — súrlódásmentes, gerjesztés nélküli fizikai inga, maximális  $\alpha \in (0, \frac{\pi}{2})$  szög-kitéréssel — nem lehet explicit alakban megoldani, viszont lengésének  $T$  periódus-idejére egyszerű integrál-formula adódik. Valóban, kiindulva a helyzeti és mozgási energiák összege állandóságát kifejező

$$1 - \cos(\alpha) = 1 - \cos(\varphi) + \frac{1}{2} \left( \frac{d\varphi}{dt} \right)^2 \Leftrightarrow dt = \frac{1}{\sqrt{2(\cos(\varphi) - \cos(\alpha))}} d\varphi$$

összefüggésből, a  $2(\cos(\varphi) - \cos(\alpha)) = 4(\sin^2(\frac{\alpha}{2}) - \sin^2(\frac{\varphi}{2}))$  azonosság majd a  $\sin(\frac{\varphi}{2}) = \sin(\frac{\alpha}{2}) \sin(\psi)$  helyettesítés alapján

$$\int dt = \int \frac{1}{2\sqrt{\sin^2(\frac{\alpha}{2}) - \sin^2(\frac{\varphi}{2})}} d\varphi = \int \frac{1}{\sqrt{1 - \sin^2(\frac{\alpha}{2}) \sin^2(\psi)}} d\psi$$

adódik. Mivel  $\varphi = \alpha \Leftrightarrow \psi = \frac{\pi}{2}$ , ebből

$$\frac{T}{4} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2(\psi)}} d\psi, \quad \text{ahol } k = \sin\left(\frac{\alpha}{2}\right) :$$

a legegyszerűbb elliptikus függvény az  $[0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $k \rightarrow 4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2(\psi)}} d\psi$  hozzárendelés.

<sup>32</sup>az absztrakt matematika kezdete alighanem a számlálás ősi, egy-kettő-sok formulája, amelyet Amazónia és Pápua-Új-Guinea egyes törzsei mind a mai napig használnak. A *három* sokkal bonyolultabb. Egy zsonglőr matematikustól hallottam, könnyebb négy labdát egy kézzel hajigálni, mint hármat: négy labda esetében a teljes ritmus megfelelezhető. Könnyebb a zsákmányt felezni mint harmadolni, már csak azért is, mert a „te felezel és én választok” stratégia igazságos felezést tesz lehetővé. Halászó és vadászó őseink mai utódai: hogyan tud három ember igazságosan megosztani egy grill-csirkén úgy, hogy mindegyikük, saját és egymásétól különböző ízlése szerint legalább annak harmadát megkapja?



Ennyi előkészítés után éppen itt az ideje, hogy rátérjünk a parciális differenciálegyenletekkel kapcsolatos legfontosabb speciális függvények felsorolására. Először a sajátfüggvények felírásához szükséges speciális/elemi függvényeket adjuk meg, majd zárójelben a hozzájuk kapcsolódó legfontosabb további speciális függvényeket is<sup>33</sup>.

- Descartes koordináták, téglalap/téglatest–tartomány:  
sinus/cosinus függvények.
- polár/henger koordináták, kör/henger–tartomány:  
Bessel, sinus/cosinus (és a Henkel, Neumann, henger–) függvények.
- gömbi koordináták, gömb–tartomány:  
Legendre polinomok, sinus/cosinus, Legendre (és a gömb–) függvények.
- gömbi koordináták, az origó komplementer–halmaza:  
Laguerre, Hermite (Jacobi) polinomok, Legendre, sinus/cosinus függvények.

Legendre függvények alatt a nem–feltétlenül polinom alakú asszociált Legendre függvények értendők. Itt jegyezzük meg azt is, hogy a fenti speciális függvényeknek számos első– és másodfajú valamint különféle módokon parametrizált változata van. A legfontosabb ortogonális polinomok közé tartoznak a Csebisev/Chebyshev polinomok is, amelyek — amint azt részleteiben is tárgyalni fogjuk — a Laplace-operátor diszkretizációival állnak közeli kapcsolatban.

A fenti felsorolásban szereplő speciális függvények elmélete nagyjából–egészében párhuzamos egymással. Legfontosabb tulajdonságaikat a Legendre polinomok és a Bessel függvények példáin szokás bemutatni és ugyanezekre a szempontokra kell figyelni valamennyi ortogonális polinomrendszer, sőt a Henkel, asszociált Legendre etc. függvények esetében is:

- kapcsolat a Laplace-operátorral
- a definiáló közönséges differenciálegyenletek egyparaméteres családja
- ortogonalitás, normálás, sorfejtések (a szokásos konvergenciaproblémákkal)
- további tulajdonságokra rámutató alternatív definíciók
  - rekurziós formulák
  - generátorfüggvény
  - végtelen sor és egyéb határérték–formulák
  - integrál–reprezentációk
  - deriváltformulák

<sup>33</sup>a részletek megtalálhatók a szakirodalomban, jelesen a Műegyetem nemrég elhunyt professzorának, Farkas Miklósnak könyvében (Farkas Miklós, „Speciális függvények műszaki–fizikai alkalmazásokkal”, Műszaki Könyvkiadó, Budapest, 1964). Akik szeretik a szellemes számolásokat, azoknak öröme lesz bennük. A leendő mérnökök többsége azonban azt teszi helyesen, ha erejét–idejét a numerikus módszerek (leginkább a vége-selem módszer, pontosabban a vége-selem/peremelem/végestérfogat módszer-család) és még ennél is inkább az ezeken alapuló programcsomagok tanulmányozására, a velük és általuk lehetséges tapasztalatszerzésre fordítja. A parciális differenciálegyenletek tanulmányozásának másik súlypontja a legfontosabb modell–egyenletek mögött álló áramlástani, elektromosságtani, hőtani etc. megfontolások megértése kell legyen.

Ezek tehát a legfontosabb szempontok.

Példaként szerepeljen itt a  $C_n(\varphi) = \cos(n\varphi)$ ,  $n = 0, 1, \dots$  függvénycsalád (29.27) rekurziós formulája és (29.28) generátorfüggvénye. Látni fogjuk, hogy — burkoltan ugyan, de már — mindkettejükkel találkoztunk eddigi tanulmányainkban.

$$C_0(\varphi) = 1, C_1(\varphi) = \cos(\varphi), C_{n+1}(\varphi) = 2\cos(\varphi)C_n(\varphi) - C_{n-1}(\varphi), n \geq 1 \quad (29.27)$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} r^n C_n(\varphi) = \frac{1 - r\cos(\varphi)}{1 - 2r\cos(\varphi) + r^2}, \quad |r| < 1 \quad (29.28)$$

A rekurziós formulára azonnal ráismerünk: nem más mint a cosinus függvényre vonatkozó addíciós képletek egyszerű alkalmazása. A generátorfüggvénnyel, így, ebben a formában még aligha találkoztunk. De a

$$\operatorname{Re} \sum_{n=0}^{\infty} z^n = \operatorname{Re} \frac{1}{1-z} = \operatorname{Re} \frac{1}{1-r(\cos(\varphi) + i\sin(\varphi))} = \frac{1 - r\cos(\varphi)}{1 - 2r\cos(\varphi) + r^2}$$

és a — nem nehéz: vonjunk le mindkét oldalból egy-kettedet!

$$\frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} r^n \cos(n\varphi) = \frac{1 - r^2}{2(1 - 2r\cos(\varphi) + r^2)}, \quad |r| < 1$$

képletekről egy s más eszünkbe juthat. És itt nem annyira a (29.16) konvolúciós integrál magfüggvényére, hanem (az  $r = 1$  helyettesítés mellett 0-tól illetve) 1-től  $N$ -ig vett összegzésre gondolok:

$$D_N(\varphi) = \frac{1}{2} + \sum_{n=1}^N \cos(n\varphi) = \frac{\sin((n+1/2)\varphi)}{2\sin(\varphi/2)},$$

ahol  $D_N$  az  $f \in L_2([-\pi, \pi])$  függvény trigonometrikus Fourier sora

$$(S_N(f))(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^N (a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} D_N(x-y)f(y) dy$$

$N$ -edik szelete integrál-reprezentációjának Dirichlet féle magfüggvénye. Mindezt természetesen a konvolúciók és a komplex Fourier sorfejtés szeleteinek nyelvén is kifejezhetjük:

$$D_N(x) = \frac{1}{2} \sum_{n=-N}^N e^{inx} \quad \text{és} \quad (S_N(f))(x) = \frac{1}{\pi} (D_N * f)(x) = \frac{1}{\pi} \sum_{n=-N}^N c_n e^{inx},$$

ahol  $c_n = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-inx} dx$  az  $f$  függvény komplex Fourier sorának  $n$ -edik együtthatója.

## 29.8. Dióhéjban: a véges differenciák módszer

Mostantól kezdve fordítsuk figyelmünket a  $\Delta_D$ ,  $\Delta_N$ ,  $\Delta_P$  operátorok diszkrétizáltjaira<sup>34</sup>. Mintegy melléktermékként eljutunk a Csebisev polinomokhoz is. Az alfejezet tehát részben

<sup>34</sup>ez a parciális differenciálegyenlet segédlet azzal a céllal íródik, hogy az olvasót elvezesse a végeelem módszer küszöbéig. Ezt a küszöböt azonban nem fogja átlépni. Több oka van ennek, amelyeket itt és most felesleges is, hiábavaló is volna részletezni. Az eredeti tervbe (a dolgok természetes rendje szerint) a küszöb átlépése is beletartozott.



folytatja a speciális függvények tárgyalását, részben a véges differenciák módszerét ismerteti, utóbbit csak a valóban legfontosabb szempontokra szorítkozva<sup>35</sup>.

A Példa 29.6.10. folytatásaként, tekintsük a

$$\Delta_D u = f(D), \quad \Delta_N u = f(N), \quad \Delta_P u = f(P)$$

peremérték-feladatokat, ahol  $f \in C([0, \pi])$  adott függvény. Bevezetve a(z  $N \in \mathbb{N}$  nagy,  $h$  kicsiny,

$$h = \frac{\pi}{N} \text{ és az } f_j = f(jh), \quad x_j \approx x(jh), \quad j = 0, 1, \dots, N$$

jelöléseket, az  $\ddot{x} = f$  differenciálegyenletet

$$\frac{x_{j+1} - 2x_j + x_{j-1}}{h^2} = f_j, \quad j = 1, 2, \dots, N-1 \quad (29.29)$$

a Dirichlet, Neumann, periodikus peremfeltételeket pedig rendre

$$x_0 = x_N = 0 \quad (D_N), \quad x_0 = x_1, x_{N-1} = x_N \quad (N_N), \quad x_0 = x_{N-1}, x_1 = x_N \quad (P_N) \quad (29.30)$$

közelíti. A végeredmény rendre az

$$A_D \mathbf{x} = h^2 \mathbf{f} \quad (D_N), \quad A_N \mathbf{x} = h^2 \mathbf{f} \quad (N_N), \quad A_P \mathbf{x} = h^2 \mathbf{f} \quad (P_N)$$

lineáris egyenletrendszer,  $\mathbf{x} = \mathbf{x}_{D_N}, \mathbf{x} = \mathbf{x}_{N_N}, \mathbf{x} = \mathbf{x}_{P_N} \in \mathbb{R}^{N-1}$  ismeretlenekkel és az

$$A_D = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \\ 0 & \dots & 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & & \dots & 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}, \quad A_N = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \\ 0 & \dots & 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & & \dots & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix},$$

$$A_P = C(-2, 1, 0, \dots, 0, 1) = \begin{pmatrix} c_0 & c_1 & \dots & & c_{N-2} \\ c_{N-2} & c_0 & c_1 & \dots & c_{N-3} \\ c_{N-3} & c_{N-2} & c_0 & c_1 & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots \\ \dots & c_{N-3} & c_{N-2} & c_0 & c_1 \\ c_1 & \dots & c_{N-3} & c_{N-2} & c_0 \end{pmatrix}$$

$(N-1) \times (N-1)$ -es mátrixokkal, ahol az  $A_P$  mátrixnál általánosabb  $C = C(c_0, c_1, \dots, c_{N-2})$  — tehát  $c_0 = 2, c_1 = c_{N-2} = 1$  (s egyébként  $c_k = 0$ ) — ciklikus mátrix csak az  $A_P$  mátrix szerkezetét kívánja hangsúlyozni.

<sup>35</sup>a mindezekhez szükséges és menet közben ismertetett lineáris algebrai összefüggések mind-mind megtalálhatók a Műegyetem emeritus professzorának, Rózsa Pálnak könyvében (Rózsa Pál, „Lineáris algebra és alkalmazásai”, Tankönyvkiadó, Budapest, 1991). Itt említem meg Stoyan Gisbert és Takó Galina enciklopédikus numerikus tankönyvét (Stoyan Gisbert és Takó Galina, „Numerikus módszerek I–II–III”, Typotex, Budapest, 1997) is

Nézzük a  $p(\lambda) = \det(A - \lambda I)$  karakterisztikus polinomokat. Bevezetve a  $2x = -2 - \lambda$  jelölést, a determináns kétszeri kifejtésével kapjuk, hogy

$$\det(A_D - \lambda I) = \det \begin{pmatrix} 2x & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 2x & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 2x & 1 & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \\ 0 & \dots & 0 & 1 & 2x & 1 \\ 0 & & \dots & 0 & 1 & 2x \end{pmatrix} = U_{N-1}(x),$$

$$\det(A_N - \lambda I) = \begin{pmatrix} 2x+1 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 2x & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 2x & 1 & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \\ 0 & \dots & 0 & 1 & 2x & 1 \\ 0 & & \dots & 0 & 1 & 2x+1 \end{pmatrix} = 2(x+1)U_{N-2}(x),$$

ahol az  $\{U_n\}_{n=0}^\infty$  polinomok sorozata eleget tesz a

$$U_0(x) = 1, \quad U_1(x) = 2x, \quad U_{n+1}(x) = 2xU_n(x) - U_{n-1}(x), \quad n \geq 1 \quad (29.31)$$

rekurzióknak. A (29.31) és a (29.27) rekurziók kísértetiesen hasonlítanak egymásra: az

$$x = \cos(\varphi) \in [-1, 1], \quad T_n(x) = \cos(n \arccos(x)), \quad n = 0, 1, \dots$$

helyettesítéssel (29.27) a

$$T_0(x) = 1, \quad T_1(x) = x, \quad T_{n+1}(x) = 2xT_n(x) - T_{n-1}(x), \quad n \geq 1 \quad (29.32)$$

rekurzióba megy át. A  $\{T_n\}_{n=0}^\infty$  függvénycsalád a cosinus rendszer elsőfajú Csebisev polinomokká transzformált változata, amelyek a  $[-1, 1]$  intervallumon ortonormált rendszert alkotnak a  $\rho(x) = \frac{2}{\pi\sqrt{1-x^2}}$  súlyfüggvényre nézve:

$$\int_{-1}^1 T_k(x)T_\ell(x) \frac{2}{\pi\sqrt{1-x^2}} dx = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi \cos(k\varphi) \cdot \cos(\ell\varphi) d\varphi = \delta_{k\ell}$$

és ez az ortonormált rendszer teljes, generátorfüggvénye pedig

$$\sum_{n=0}^{\infty} t^n T_n(x) = \frac{1-tx}{1-2xt+t^2}, \quad |t|, |x| < 1.$$

A  $\{T_n\}_{n=0}^\infty$  függvénycsaláddal együtt az  $\{U_n\}_{n=0}^\infty$  függvénycsalád is jól ismert a speciális függvények köréből: ők az

$$U_n(x) = \frac{T'_{n+1}(x)}{n+1} = \frac{\sin((n+1)\arccos(x))}{\sin(\arccos(x))}, \quad n = 0, 1, \dots$$

másodfajú Csebisev polinomok, amelyek a  $[-1, 1]$  intervallumon a  $\rho(x) = \frac{2}{\pi}\sqrt{1-x^2}$  súlyfüggvényre nézve alkotnak teljes ortonormált rendszert, és fontos szerepet játszanak a polinom-approximációk elméletében.

29.8.1. **MEGJEGYZÉS** Amint azt a determináns utolsó sor szerinti kifejtése mutatja,

$$T_{n-1}(x) = \det \begin{pmatrix} x & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 2x & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 2x & 1 & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \\ 0 & \dots & 0 & 1 & 2x & 1 \\ 0 & & \dots & 0 & 1 & 2x \end{pmatrix},$$

a (29.32) definiáló rekurzióra történő visszavezetéssel.

Mindezek alapján az  $A_D$  és az  $A_N$  mátrixok sajátértékei már kényelmesen kiszámíthatók. Teljes összhangban a Példa 29.6.10. megállapításaival,  $A_D$  invertálható mátrix, az  $A_N$  és az  $A_P$  mátrixoknak  $\lambda_1 = 0$  azonban egyaránt sajátértéke, mindkét esetben  $\mathbf{s}_1 = \text{col}(1, 1, \dots, 1) \in \mathbb{R}^{N-1}$  sajátvektorral. Ettől a kettős kivételtől eltekintve, mindhárom mátrix összes sajátértéke negatív. A részletes számolások eredménye (ismételten utalunk rá, hogy  $A_D$  és  $A_N$   $(N-1) \times (N-1)$ -es mátrixok):

$$\lambda_k^D = -4 \sin^2 \left( \frac{k}{2(N-1)} \pi \right), \quad \mathbf{s}_k^D = \begin{pmatrix} \sin\left(\frac{k}{N}\pi\right) \\ \sin\left(\frac{2k}{N}\pi\right) \\ \vdots \\ \sin\left(\frac{(N-1)k}{N}\pi\right) \end{pmatrix}, \quad k = 1, \dots, N-1,$$

$$\lambda_k^N = -4 \sin^2 \left( \frac{k}{2N} \pi \right), \quad \mathbf{s}_k^N = \begin{pmatrix} \cos\left(\frac{k}{2(N-1)}\pi\right) \\ \cos\left(\frac{3k}{2(N-1)}\pi\right) \\ \vdots \\ \cos\left(\frac{(2N-3)k}{2(N-1)}\pi\right) \end{pmatrix}, \quad k = 0, \dots, N-2.$$

Vegyük észre, hogy

$$N \rightarrow \infty \text{ esetén } h^2 \lambda_k^D = -\frac{N^2}{\pi^2} 4 \sin^2 \left( \frac{k}{2(N-1)} \pi \right) \rightarrow -k^2$$

s ehhez hasonlóan  $h^2 \lambda_k^N \rightarrow -k^2$  minden fix  $k$ -ra. Mindez világosan mutatja az  $A_D$  és az  $A_N$  diszkretizációs mátrixok, valamint az egydimenziós  $\Delta_D$  és  $\Delta_N$  operátorok közötti szoros sajátértékek–sajátvektor/sajátfüggvény egyszóval spektrális kapcsolatokat. A megfelelő sajátértékek egymáshoz tartanak, és a  $\sin(kx)$ ,  $\cos(kx)$  sajátfüggvények is mintegy „diszkretizálódnak”. Figyelmet érdemel az is, hogy az  $A_D$  mátrix inverze csupa pozitív elemet tartalmaz<sup>36</sup>.

<sup>36</sup>ellenőrzés kedvéért próbálja meg ki-ki számítógéppel kiszámítani ezt az inverzet az első néhány  $N$  esetére! (A legszebb az egészben az, hogy az inverz mátrix általános alakja az első néhány esetből megsejthető.) A tény, hogy az  $A_D$  mátrix inverze csupa pozitív elemet tartalmaz, szorosan összefügg az úgynevezett numerikus maximum elvvel: mint azt a 29.4 alfejezet végén kifejtettük, a hővezetés (29.1) kezdeti és peremértékfeladatában sem hideg-, sem melegzugok nem alakulhatnak ki; ez a tulajdonságot a csak a rácspontokban definiált numerikus közelítések is megőrzik

Az  $A_P$  mátrix illetve a  $C$  általános ciklikus mátrix sajátértékeinek és sajátvektorainak szerkezete kicsit más jellegű, de szintén nem nehéz. A részletes számolások eredménye első pillantásra meglepő: a  $C$  mátrix sajátértékei igen, de sajátvektorai nem függenek a  $c_0, c_1, \dots, c_{N-2}$  valós paraméterek konkrét értékeitől. A sajátvektorok rendre  $\mathbf{s}_k = \text{col}(1, \omega_k, \dots, \omega_k^{N-2}) \in \mathbb{R}^{N-1}$ , ahol az  $\omega_k = e^{2i\pi \frac{k}{N-1}}$  számok a komplex  $(N-1)$ -edik egységgyökök, a  $k$ -adik sajátérték pedig  $\lambda_k = c_0 + c_{N-2}\omega_k + \dots + c_1\omega_k^{N-2}$ ,  $k = 0, 1, \dots, N-2$ . Ezeket az absztrakt eredményeket az  $A_P$  mátrixra alkalmazva kapjuk, hogy

$$\lambda_k^P = -4 \sin^2 \left( \frac{k}{(N-1)} \pi \right), \quad \mathbf{s}_k^P = \begin{pmatrix} 1 \\ \cos(\frac{2k}{N-1} \pi) \\ \vdots \\ \cos(\frac{2k(N-2)}{N-1} \pi) \end{pmatrix} \text{ illetve } \begin{pmatrix} 0 \\ \sin(\frac{2k}{N-1} \pi) \\ \vdots \\ \sin(\frac{2k(N-2)}{N-1} \pi) \end{pmatrix},$$

$k = 0, \dots, N-2$ . (Itt a bizonyos sajátvektorok közötti páronkénti egyezéseket figyelmen kívül hagytuk. Legfeljebb két sajátérték kivételével a sajátértékek kétszeres multiplicitásúak.)

És most a véges differenciák módszeréről, tényleg csak dióhéjban. Egy példát már láttunk, ez volt a (29.29) lineáris egyenletrendszer, amellyel a  $\ddot{x} = f$  differenciálegyenletet közelítettük. A recept elvben mindig ugyanaz. Az ismeretlen  $u$  függvény parciális deriváltjait<sup>37</sup> véges differencia-formulákkal pótoljuk: az így kapott egyenletrendszer megoldása jó eséllyel jól közelíti az eredeti parciális differenciálegyenlet megoldását. A „jó eséllyel” kifejezés arra utal, hogy a számítógéppel ténylegesen megoldandó lett legyen akár lineáris egyenletrendszer nagyon nagy méretű szokott lenni: s a nagy méret, az ismeretlenek roppant nagy száma már önmagában is rengeteg nehézséget okoz. A közelítés hibájáról tételek garmadája szól — még legegyszerűbb eseteiket sem tárgyaljuk, hiszen feltételeik összességét csak ritkán, jobbra csak a demonstrációs példákban lehet ellenőrizni. Intuíciónkat mégis ezek a demonstrációs példák vezérlik — és hogy a numerikus módszer más esetekben is használható? A döntőbíró a tapasztalat: ha jól működik, akkor igen<sup>38</sup>.

A térváltozó(k) szerinti diszkretizáció és az időváltozó szerinti diszkretizáció olyan téglalap/téglatest típusú rácsszerkezetet jelöl ki, amelyben a szomszédos rácspontok távolsága minden egyes térkoordináta irányában  $h$ , az időtengely irányában pedig  $\tau$ . Ha az időkoordináta mellett csak egyetlen térkoordináta van, akkor a véges differenciák módszere olyan egyenletrendszerhez vezet, amelynek ismeretlenei  $u_{i,j}$  (itt az  $i$  és a  $j$  indexek az indexelési tartomány által meghatározott egész számok), amelyek az  $u$  megoldásfüggvény  $(i\tau, jh)$  rácspontokban felvett  $u(i\tau, jh)$  értékeit hivatottak közelíteni. A módszer lényege a rácspontokban vett parciális deriváltaknak az  $u_{i,j}$  ismeretlenekből képzett véges differenciák-

<sup>37</sup>vagy legalábbis a helykoordináták szerint deriváltakat: ebben az esetben a parciális egyenlet helyett egy öt jól közelítő sokismeretlenes közönséges differenciálegyenletrendszert kell megoldani. Amennyiben az idő szerinti parciális deriváltakat is véges differencia-formulákkal pótoljuk, akkor a parciális egyenlet helyett egy öt jól közelítő sokismeretlenes algebrai egyenletrendszert kell megoldani. Magától értetődően szükség van a kezdeti- és a peremfeltételek józan figyelembe vételére is, utóbbi a (29.30) tárgyalása okán már nem ismeretlen előttünk. Ha a parciális egyenlet lineáris volt, akkor az öt közelítő közönséges vagy algebrai véges-differencia-egyenletrendszerek is lineárisak

<sup>38</sup>de azért ne hagyjuk magunkat vakon vezettetni még a számítógépi szimulációk által sem: a tényleges laborkísérleteknek is stimmelniük kell, pontosabban összhangban kell állniuk a számítógépes eredményekkel

kal — más szóval magasabb rendű különbségi hányadosokkal — való helyettesítése<sup>39</sup>. Ennek megfelelően

$$u_t(i\tau, jh) = a^2 u_{xx}(i\tau, jh) \quad \text{helyett} \quad \frac{u_{i+1,j} - u_{i,j}}{\tau} = a^2 \frac{u_{i,j+1} - 2u_{i,j} + u_{i,j-1}}{h^2},$$

$$u_{tt}(i\tau, jh) = c^2 u_{xx}(i\tau, jh) \quad \text{helyett} \quad \frac{u_{i+1,j} - 2u_{i,j} + u_{i-1,j}}{\tau^2} = c^2 \frac{u_{i,j+1} - 2u_{i,j} + u_{i,j-1}}{h^2}$$

szerepel. A kezdeti és a peremfeltételek diszkrétizált változatait is figyelembe véve, csakúgy mint a (29.29)–(29.30) esetben az  $x_j (\approx x(jh))$  ismeretlenek, az  $u_{i,j} (\approx u(i\tau, jh))$  ismeretlenek értéke most is kiszámítható. A számítások során maguk az  $A_N, A_D, A_P$  és/vagy a velük rokon mátrixok fontos szerepet játszanak.

Alapvető fontosságú, hogy az idő- és a térkoordináták mentén vett  $\tau$  és  $h$  távolságok (ha úgy tetszik, „lépésközök”) nem választhatók meg tetszőlegesen. A  $\tau, h \rightarrow 0$  határátmenet csak akkor biztosíthatja (alkalmas normában) a

$$\text{közelítő megoldás} \rightarrow \text{pontos megoldás}, \quad \{u_{i,j}\}_{i,j} \rightarrow \{u(i\tau, jh)\}_{i,j}$$

konvergenciát, ha

$$u_t = a^2 u_{xx} \quad \text{esetén az} \quad a^2 \frac{\tau}{h^2} \leq \frac{1}{2} \quad \text{stabilitási feltétel}, \quad (29.33)$$

$$u_{tt} = c^2 u_{xx} \quad \text{esetén a} \quad c \frac{\tau}{h} \leq 1 \quad \text{stabilitási feltétel} \quad (29.34)$$

teljesül. A (29.33) egyenlőtlenség Neumann János, a (29.34) egyenlőtlenség pedig Courant, Friedrichs, és Levy nevét viseli. Ez utóbbi jól szemléltethető<sup>40</sup>, az előbbi sajnos nem. A *stabilitási feltétel* kifejezés nem kell, hogy félrevezessen bennünket. Itt nem a (közönséges differenciálegyenletek egyensúlyi helyzeteire vonatkozó) Ljapunov/Lyapunov féle stabilitás-fogalomról van szó, hanem a választott numerikus eljárás egészének belső, ha úgy tetszik szerkezeti stabilitásáról<sup>41</sup>. Ez nem-lokális jellegű feltétel, amely a numerikus feladat korrekt kitűzöttségének része: azt garantálja, hogy a kezdeti közelítések hibái a választott numerikus eljárás folyamán csak mérsékelten növekedjenek.

<sup>39</sup>az  $u_t(i\tau, jh)$  parciális deriváltat az explicit Euler módszer  $\frac{u_{i+1,j} - u_{i,j}}{\tau}$  formulája helyett az implicit Euler módszerből származó  $\frac{u_{i,j} - u_{i-1,j}}{\tau}$  különbségi hányadossal is szokás pótolni

<sup>40</sup>a Courant–Friedrichs–Levy egyenlőtlenség azt a természetes követelményt fejezi ki, hogy a közelítő megoldás vegye figyelembe azokat az adatokat, amelyek a pontos megoldást is meghatározzák. Másképpen fogalmazva — egy szép hatáskúp-ábrával persze többre mennénk: sikerül megrajzolni? —, hogy a hatásterjedés sebessége a közelítő megoldásban (azaz a  $\frac{h}{\tau}$ ) legalább akkora legyen, mint pontos megoldásban (azaz a  $c$ ). (A matematikai részletek: A 29.4 alfejezet utolsóelőtti bekezdéséből tudjuk, hogy a végtelen hosszú húron értelmezett  $u_{tt} = c^2 u_{xx}$ ,  $c > 0$  hullámegyenlet megoldásának  $(t^*, x^*)$ ,  $t^* > 0$  pontbeli értékét a  $\varphi$  kezdeti kitérésnek és a  $\psi$  kezdeti sebességnek csak az  $[x^* - ct^*, x^* + ct^*]$  intervallumon felvett értékei határozzák meg. Amennyiben  $h \geq c\tau$ , akkor a közelítő megoldás  $(i^* \tau, j^* h)$ ,  $i^* > 0$  rácspontban felvett értékét

$$\{jh \in [j^* h - ci^* \tau, j^* h + ci^* \tau] \mid j \in \mathbb{Z}\} \subset \{jh \in \mathbb{R} \mid j = -i^*, -i^* + 1, \dots, i^* - 1, i^*\}$$

miatt a  $\varphi$  és a  $\psi$  kezdeti függvényeknek a  $[j^* h - ci^* \tau, j^* h + ci^* \tau]$  intervallum rácspontjaiban felvett értékei mindnyájan befolyásolják)

<sup>41</sup>egy numerikus eljárás egésze stabilitásának fogalmát Neumann János és Lax Péter dolgozták ki. Az alaptétel az úgynevezett Lax ekvivalencia: a „konzisztencia + stabilitás = konvergencia” elv a matematikai analízis diszkrétizációs/közelítő eljárásainak lényegében minden osztályára érvényes

## 30. fejezet

### Befejezés: az eddigiek összefoglalása

Már csak egyetlen idézet —

WIGNER JENŐ (Nobel díjas fizikus), a Műegyetem egykori hallgatója: „The miracle of the appropriateness of the language of mathematics for the formulation of the laws of physics is a wonderful gift which we neither understand nor deserve.” (In: E. Wigner, *The Unreasonable Effectiveness of Mathematics in the Natural Sciences*, Communications in Pure and Applied Mathematics, February 1960, befejező mondat)

— és egyetlen táblázat<sup>1</sup> van hátra.

KI TUDJUK—E SZÁMÍTANI AZ EGYENLETEK MEGOLDÁSÁT?

---

<sup>1</sup>amelyet jópár évvel ezelőtt láttam V.Lakshmikantham indiai származású amerikai matematikus egy könyvének — sok könyvet írt, és most tényleg nem tudok utánamenni, melyik könyvének — belső borítólapján. Mint minden plakatív lényegkiemelés, sok szempontból vitatható és kritizálható. Leginkább azt lehet felhozni ellene, hogy az egyenletek számának *kevés, sok* vagy éppen *rengeteg* volta erősen függ az egyenletek típusától — magától értetődő az is, hogy a *kevés, sok, rengeteg* csakúgy mint a *könnyű, nehéz, épphogy* szavak konkrét jelentése a számítógépek minden egyes újabb generációjának megjelenésével is változik. A táblázat legfontosabb erénye az, hogy elrendezése világosan utal a numerikus matematika mindennapi gyakorlatára: jó volna a konkrét feladatokat a táblázat bal oldalára „cipelni”: csak balra menni azonban nem lehet, de egyszerre balra és lefelé igen. A két legfontosabb eljárás a linearizálás és a diszkretizáció. A linearizálás lokálisan, egy adott egyensúlyi helyzet kis környezetében a nemlineáris feladatot lineárisal helyettesíti, s eközben az egyenletek számát és alapvető típusát is megőrzi. A diszkretizáció ezzel szemben az egyenletek típusát is megváltoztatja, egész pontosan könnyebbé teszi, de azon az áron, hogy az egyenletek száma roppant mértékben megnövekszik. Végző soron minden igazi nehézség a táblázat bal alsó mezőjébe kerül, az *épphogy lehet* és a *lehetetlen* határvidékére.

| # egyenlet | ALGE<br>lineáris | ALGE<br>nemlin | KDE<br>lineáris | KDE<br>nemlin | PDE<br>lineáris | PDE<br>nemlin |
|------------|------------------|----------------|-----------------|---------------|-----------------|---------------|
| egy        | triv             | triv           | triv            | triv          | nehéz           | épphogy       |
| kevés      | könnyű           | nehéz          | könnyű          | nehéz         | épphogy         | ltetlen       |
| sok        | nehéz            | ltetlen        | nehéz           | épphogy       | ltetlen         | ltetlen       |
| rengeteg   | épphogy          | ltetlen        | épphogy         | ltetlen       | ltetlen         | ltetlen       |

## 31. fejezet

### Kitekintés, ajánlott olvasmányok

Ez a szemelvényes, fésületlen–kicsit–kócos, az egyetemi előadások elevenségét utánózni próbáló segédlet több elvarratlan szálát is tartalmaz. Természetes, hogy töredékes<sup>1</sup>, de legalább annyira nyitott és további tanulásra ösztönző szeretne lenni, mint amennyire töredékes. Stílusát illetően Arie Iserles numerikus előadásjegyzeteit (A. Iserles, „A first course in the numerical analysis of differential equations”, Cambridge University Press, Cambridge, 2008) tartottam szem előtt<sup>2</sup>.

A legfontosabb elvarratlan szálak mindegyike a tág értelemben vett szerkezeti stabilitás fogalmával kapcsolatos. Min múlik az, hogy az egyik egyenlet megoldásai jobban, a másiké kevésbé érzékenyek a paraméterek kicsiny megváltoztatására? Különbözhet-e a numerikus megoldás jellege a pontos megoldás jellegétől? Egy numerikus eljárás konvergenciájának mik a belső, strukturális feltételei?

És most a *Mit érdemes olvasni?* kérdésről. Azt, amire az adott feladathoz szükség van, de abból, egymással párhuzamosan, inkább kettőt, mint egyet: egy egyszerűbbet, amelyet nagyjából–egészében ismerünk, és egy nehezebbet, egy újat, egy igényesebbet<sup>3</sup>.

Kifejezetten a műszaki felsőoktatás részére íródott (még a nyolcvanas években és azóta folyamatosan aktualizált) Kurt Meyberg és Peter Vachenauer „Höhere Mathematik I–II” (Springer, Berlin, 2001) könyve, amelyet a műegyetemi német nyelvű BSc és MSc képzés használ. Létezik angol fordításban is, s talán egy szép napon magyarul is olvasható lesz. Precíz és szemléletes, telis–teli egyszerű mechanikai, áramlástani, hőtani, villamosságtani feladatokkal. Tényleges súlyán kezeli a numerikus–számítástechnikai vonatkozásokat is.

A természettudományi–műszaki karok hallgatói közül szerte a világon sokan használják

---

<sup>1</sup>a szerző — garay@digitus.itk.ppke.hu — örömmel fogad és előre is köszönettel vesz minden, a mostani írásával kapcsolatos észrevételt, kritikát, javaslatot

<sup>2</sup>azért csak megnyugtató arra gondolnom, hogy magyarul íródott, és így A.I. nem tud összehasonlítást tenni a sajátjával

<sup>3</sup>tulajdonképpen bármely jegyzet hasznos, ha azt jól és okosan forgatják: van belőlük elég. Amúgy meg oda lehet ülni a számítógép elé: az MIT *opencourseware* anyagait nagyon–nagyon ajánlom, vagy fel lehet venni egy nem–kötelező tantárgyat is (éppen és nem ok nélkül Horváth Róbert [Analízis Tanszék] numerikus analízis előadásai jutnak az eszembe, hasznosak és szépek, internetes változatuk is igazi műgonddal készült, és nemcsak a hagyományos numerikus matematika, hanem a *scientific computation* modern szempontjai is megjelennek bennük). Most kibújik belőlem a tanár: be lehet járni az órákra. Ezenkívül meg lehet kérdezni egy oktatót vagy egy idősebb diáktársat, fel lehet ütni a Courant–Hilbert-et és — végül, de egyáltalán nem utolsósorban — el lehet gondolkozni a dolgokon, és le lehet menni a műhelybe



a Hirsch–Smale könyvet, amely az 1974-es első kiadása óta (a kaotikus dinamikai rendszerekről szóló rész jóval későbbi) a közönséges differenciálegyenletek modern klasszikusa:

*M.W. Hirsch, S. Smale, and R.L. Devaney, „Differential Equations, Dynamical Systems, and an Introduction to Chaos”, Academic Press, San Diego, 2004.*

A parciális egyenletek témakörében nem ismerek olyan könyvet, amely ehhez fogható lenne. Ami leginkább hasonlít hozzá, és amit mindenkinek ajánlani tudok, az egy megjelenés előtt álló, matematikailag igényes mérnökhallgatóknak szánt részletes, bevezető tankönyv:

*P.J. Olver, „Introduction to Partial Differential Equations”, kézirat —*

— amely P.J.O. honlapjáról szabadon letölthető. Felsorolom a fejezetcímeket: 1. What are Partial Differential Equations? 2. Linear and Nonlinear Waves 3. Fourier Series 4. Separation of Variables 5. Generalized Functions and Green’s Functions 6. Complex Analysis and Conformal Mappings 7. Fourier Transforms 8. Linear and Nonlinear Evolution Equations 9. A General Framework for Linear Partial Differential Equations 10. Numerical Methods 11. Dynamics of Planar Media 12. Partial Differential Equations in Space.

Befejezésül köszönetet szeretnék mondani műegyetemi matematikus és mérnök kollégáimnak, barátságukért, megtisztelő figyelmükért, a sokéves közös munkáért, amely nélkül ez a segédlet egészen másfajta lett volna. Majd az olvasó(k) eldönti(k), helyes volt-e ilyennek megírnom, érdemes volt-e.

Tisztelettel ajánlom ezt az írásomat az első matematikus–mérnöknek, akit megismerhettem, *Borbély Samu professzor úr emlékének*, a BME Gépészmérnöki Karán működött matematikus–mérnök szakirány *tanárainak és diákjainak*, továbbá azoknak az *egyetemi és kari vezetőknak*, akik belátták a mérnök–matematikus/matematikus–mérnök képzés fontosságát és hivatali idejükben tettek is érte.

Garay Barna

## Hivatkozások

- [1] R. Curtain, A. J. Pritchard, *Functional Analysis in Modern Applied Mathematics*, Academic Press, 1977.
- [2] Czách László, Simon László, *Parciális differenciálegyenletek*, Tankönyvkiadó, Budapest, 1983.
- [3] Farkas Miklós, *Speciális függvények műszaki-fizikai alkalmazásokkal*, Műszaki Kiadó, 1964.
- [4] Járai Antal, *Modern alkalmazott analízis*, Typotex, Budapest, 2007.
- [5] Simon László, E. A. Baderko, *Másodrendű lineáris parciális differenciálegyenletek*, Tankönyvkiadó, Budapest, 1983.
- [6] A. N. Tyihonov, A. A. Szamarszkij, *A matematikai fizika differenciálegyenletei*, Akadémiai Kiadó, 1956.