MŰEGYETEM 1782

TYPOTEX

SZÁSZ DOMOKOS – BÁLINT PÉTER

ERGODELMÉLET ÉS DINAMIKAI RENDSZEREK

2011

Ismertető
Tartalomjegyzék
Pályázati támogatás
Gondozó

Szakmai vezető
Lektor
Technikai szerkesztő
Copyright

A jegyzet célja, hogy az ergodelmélet alapfogalmainak ismertetésétől kiindulva bemutassa a dinamikai rendszerek modern elméletének néhány, az alkalmazások szempontjából különösen fontos területét. Elsődleges célunk az alapgondolatok, a jelenségek bemutatása, és ezeket minél egyszerűbb technikai szinten tárgyaljuk. Főként a hiperbolikus (vagy kaotikus) rendszerekben fellépő sztochasztikus viselkedés vizsgálatára koncentrálunk. Bár a jegyzet elsősorban a matematikus és alkalmazott matematikus MSc és PhD képzések hallgatói számára készült, épp az egyszerűbb témakra való törekvésünk miatt jól használhatja egy ennél szélesebb olvasóközönség is, például matematikára nyitott fizikus- és mérnökhallgatók.

Kulcsszavak: ergodtételek, keverés és sebessége, tágító leképezések, hiperbolikus leképezések.

Támogatás:
Készült a TÁMOP-4.1.2.-08/2/A/KMR-2009-0027 számú, a „Természettudományos (matematika és fizika) képzés a műszaki és informatikai felsőoktatásban” című projekt keretében.

Készült:
a BME TTK Matematika Intézet gondozásában

Szakmai felelős vezető:
Ferenczi Miklós

Lektorálta:
Krámli András

Az elektronikus kiadást előkészítette:
Csépány Gergely László

Címlap grafikai terve:
Csépány Gergely László, Tóth Norbert

ISBN: 978-963-279-453-2

Tartalomjegyzék

I. rész

1. Bevezetés. Alapfogalmak és példák

Ebben az jegyzetben dinamikai rendszeren időben *determinisztikusan* fejlődő — diszkrét vagy folytonos idejű — rendszert értünk.

1.1. DEFINÍCIÓ *Legyen $(M, \mathscr{F})$ mérhető tér, azaz M az alaphalmaz, dinamikai rendszerünk fázistere, és $\mathscr{F}$ M részhalmazainak σ-algebrája. Az $(M, \mathscr{F}, T)$ hármast, ahol $T : M \to M$, endomorfizmusnak nevezzük, ha T mérhető, azaz $\forall A \in \mathscr{F}$-re $T^{-1}A \in \mathscr{F}$.*

1.2. DEFINÍCIÓ *Az $(M, \mathscr{F}, T)$ hármast, ahol $T : M \to M$, automorfizmusnak nevezzük, ha T és T^{-1} is endomorfizmusok.*

Klasszikus példa dinamikai rendszerre a Naprendszer, amelynek mozgását a tudósok *stabilnak* tekintették. (Tekintsük valamely dinamikai rendszer két adott, infinitezimálisan közeli fázispontjához tartozó pályákat. Attól függően, hogy az időbeli fejlődés során a pályák távolsága — tipikus pályapár esetén — legfeljebb polinomiálisan illetve legalább (pozitív) exponenciálisan változik, a rendszert *stabilisnak* illetve *instabilnak* nevezzük.)

A Naprendszer klasszikus mechanikai szempontból az úgynevezett n-test problémával modellezhető, ez alatt n tömegpont (az égitestek) rendszerét értjük, amint azok az egymásra gyakorolt gravitációs erőterek hatására mozognak. Megoldani, integrálni azonban csak a két-test problémát sikerült, a három-test problémát már nem. Sőt, a könnyített változat, az ún. korlátozott három-test probléma is hosszú ideig ellenállt. A *korlátozott három-test problémánál* feltesszük, hogy a három tömegpont közül az egyik tömege elenyészően kicsi; ekkor reális volt a remény, hogy a megoldást megkaphatjuk mint a két-test probléma ismert megoldásának perturbációját.

A közelítés ésszerűségét szemléltethetjük a Vénusz pályájának számolásával. A Vénusz mozgását elsősorban a Nap gravitációs vonzása határozza meg, de csekély hatást a többi bolygó is gyakorol rá. A Nap körüli ellipszispályát elsősorban a Jupiter deformálja, azonban ennek átlagos ereje is kisebb mint a Napénak 2.10^{-5}-szerese. Elsőrendű közelítésben még ezt kell figyelembe vennünk, ez éppen a korlátozott három-test-probléma. Finomabb közelítésben azután már a Föld vonzerejével is számolnunk kellene, ez átlagosan a Napénak 4.10^{-6}-szorosa.

Szóval mi is a helyzet a korlátozott három-test-problémánál az általános esetben? A válasz jóval bonyolultabbnak bizonyult a vártnál, amit a három-test problémánál egyszerűbb, de vele rokon példán szemléltetünk.

1.3. PÉLDA (A KÖRGYŰRŰ FORGATÁSA) Tekintsük az $M = [a,b] \times S$ fázistéren a $T(r,\phi) := (r, \phi + f(r))$ automorfizmust, ahol $0 < a < b$ és $f(r)$ szigorúan monoton növekedő C^1 függvény. (Mivel $S = \mathbb{R}/\mathbb{Z}$, azért az (r,ϕ) polárkoordináta szög-változójában az összeadás mod 1 értelemben szerepel.) Ennek minden $r \in [a,b]$ értékre az $r =$ const. görbe invariáns görbéje (következésképpen a fázistér „fóliázva" van ezekkel), a rendszer stabil. Az $r =$ const. invariáns görbéket *invariáns tóruszoknak* is nevezik; topológiailag ezek egydimenziós tóruszok.

1.4. PÉLDA (A KÖRVONAL FORGATÁSA) Az előző példa rögtön egy egyszerűbbet is tartalmaz. Tekintsük az $M = S$ körvonalon az $R_\alpha x = x + \alpha$ automorfizmust (ismét mod 1).

Ezt nevezik a *körvonal forgatásának*, és α a forgatási szög. Könnyű látni, hogy racionális α esetén minden pont periodikus, irracionális α esetén minden pálya sűrű (ezt a 2. fejezetben bizonyítjuk is).

1.5. PÉLDA (A KÖRGYŰRŰ DIFFEOMORFIZMUSA) Visszatérve az 1.3. Példához, a kérdés az, mi történik, ha T helyett a $T_\varepsilon := T_\varepsilon(r,\phi) := (r+\varepsilon\alpha(r,\phi), \phi + f(r) + \varepsilon\beta(r,\phi))$ perturbált leképezést vesszük, ahol α és β sima függvények, amelyekkel T_ε az M körgyűrű diffeomorfizmusa (azaz az inverz is létezik és differenciálható).

A T_ε leképezések tehát a *körgyűrű (az annulus) diffeomorfizmusai* közé tartoznak. Vajon ezeknek is lesznek-e — legalábbis kis ε-ra — T-hez hasonlóan M minden pontján keresztül invariáns tóruszai? A válasz, amelyet 1954-ben A. N. Kolmogorov talált, a korábbi várakozáshoz képest rendkívül meglepő volt. A perturbált leképezéseknek valóban megmaradnak bizonyos invariáns tóruszai abban az értelemben, hogy

1. lesznek invariáns Γ görbék, amelyek topológiailag tóruszok,

2. továbbá az ezekre korlátozott leképezésnek az ún. *forgatási száma* (ez a forgatási szög általánosítása, a pontos definíciót l. később) azonos a T automorfizmus valamely $r = r(\Gamma)$ sugárhoz tartozó $f(r)$ forgatási szögével:

3. végül T és T_ε azonos forgatási számhoz tartozó invariáns tóruszai egymás alkalmas perturbáltjai.

Mármost, hogy milyen $f(r)$ forgatási szögekhez tartozó invariáns tóruszok maradnak meg, az a szög *számelméleti* tulajdonságaitól függ: minél rosszabbul közelíthető $f(r)$ racionálisokkal, annál nagyobb perturbációnak is ellenáll. Először számítógépes eredmények mutatták, hogy Kolmogorov eredménye az igazságot mutatja abban az értelemben, hogy általában a perturbációnál megmaradó invariáns tóruszok közötti tartományokban tipikusan olyan *kaotikus*, instabil pályák is előfordulnak, amelyek lezártjai pozitív mértékű halmazok. Kolmogorov óriási érdeme a szokatlan, egészen új jelenség észrevétele, és a bizonyítás alapgondolatának megtalálása. Az analitikus, igen nehéz részletek teljes és matematikailag szigorú kidolgozása, és a feltételek lényeges javítása Arnold (1963) és Moser (1962) eredménye, ezért nevezik az elméletet Kolmogorov–Arnold–Moser, röviden KAM-elméletnek. A későbbiekben egy már egyszerűsített bizonyítást ismertetünk.

A számunkra legérdekesebb dinamikai rendszerek közül soknak a matematikai megközelítés számára igen előnyös további tulajdonsága is van: M-en megadható olyan, gyakran az M topologikus tulajdonságaival összhangban levő *mérték*, amelyet a dinamika *invariáns*an hagy. Ez a helyzet pl. a klasszikus mechanika Hamilton-rendszereinél, ahol az ún. Liouville-mérték mindig invariáns az időbeli fejlődésre vonatkozólag.

1.6. DEFINÍCIÓ *Legyen $(M,\mathscr{F})$ mérhető tér, és rajta adott a μ mérték, amelyet az 1.1. Definíció értelmében vett T endomorfizmus invariánsan hagy (azaz: $\forall A \in \mathscr{F}$-re $\mu(T^{-1}A) = \mu(A)$). Az $(M,\mathscr{F},\mu,T)$ négyest ugyancsak endomorfizmusnak nevezzük. A szövegösszefüggésből ki fog mindig derülni, vajon van-e invariáns mérték, avagy nincs, pontosabban gondolunk-e rá avagy nem. Ugyancsak, ha ezt külön nem említjük, a μ mértékről feltesszük, hogy valószínűségi mérték, azaz $\mu(M) = 1$.*

1.7. DEFINÍCIÓ *Az* $(M, \mathscr{F}, \mu, T)$ *négyest automorfizmusnak nevezzük, ha* T *és* T^{-1} *is endomorfizmusok.*

Az 1.3. és 1.4. Példákban a Lebesgue-mérték invariáns, míg az 1.5. Példában tipikusan nincs sima invariáns mérték.

1.8. PÉLDA (GAUSS-LEKÉPEZÉS) Tekintsük az $I := [0,1)$ egységintervallum következő transzformációját:

$$Tx = \left\{ \frac{1}{x} \right\}$$

ahol $\{x\} = x - [x]$ az x szám törtrésze. Ez a leképezés nemcsak az 1.1. Definíció értelmében endomorfizmus, hanem következő Lemmánk szerint az 1.6. Definíció értelmében is.

1.9. LEMMA *A Gauss-leképezésnek van sima invariáns mértéke, amelynek sűrűségfüggvénye*

$$\rho(x) = \frac{1}{(1+x)\log 2}.$$

BIZONYÍTÁS Ha van invariáns mérték, akkor az $(y, y + \mathrm{d}y)$ intervallum mértéke egyrészt $\rho(y)\,\mathrm{d}y$, másrészt

$$\sum_{k=1}^{\infty} \rho(x_k)\ |\mathrm{d}x_k| = \sum_{k=1}^{\infty} \rho(x_k) x_k^2 \,\mathrm{d}y$$

ahol $x_k := (k+y)^{-1} \colon 1 \le k$ az $y = Tx$ egyenlet megoldásai. Innen

$$\rho(y) = \sum_{k=1}^{\infty} \rho(x_k) x_k^2 = \sum_{k=1}^{\infty} \rho\left(\frac{1}{k+y}\right)\frac{1}{(k+y)^2}.$$

Elemi számolás már adja, hogy a Lemmában szereplő sűrűség megoldja a kapott függvényegyenletet. □

A Gauss leképezés alapvető szerepet játszik a lánctörtek metrikus elméletében.

1.10. PÉLDA (INTERVALLUMLEKÉPEZÉSEK) Az 1.8. Példa sugallja a következő leképezéscsalád bevezetését. Legyen $f \colon [0,1] \to \mathbb{R}$ C^1-függvény, amelyre a $Tx := \{f(x)\}$ módon értelmezett $T \colon [0,1] \to [0,1]$ endomorfizmus végesen invertálható (azaz $\forall y \in [0,1]$-re a $Tx = y$ egyenletnek véges sok megoldása van). Az így bevezetett leképezéseket nevezzük *intervallumleképezéseknek*. Mivel a lehető legalacsonyabb-dimenziósak, ezért — matematikai vagy akár számítógépes — tanulmányozásuk viszonylag egyszerűbb, ugyanakkor már ezek is rendkívül gazdag viselkedést mutatnak. Sőt ugyanez elmondható a még egyszerűbb $f(x) := \mu x(1-x)$ $(\mu > 0)$ kvadratikus függvény által definiált családra. Később látni fogjuk, hogy ezen leképezések akkor viselkednek ergodikus, kaotikus, sztochasztikus módon, ha létezik sima invariáns mértékük. A Gauss leképezésnél leírt módon itt is könnyű felírni az esetleg létező invariáns mérték $\rho(y)$ sűrűségfüggvényére az egyenletet. Nevezetesen:

$$\rho(y) = \sum_{x \colon Tx = y} \frac{\rho(x)}{|T'(x)|}$$

A jobb oldali operátort (itt nem mondtuk meg, milyen térben értelmeztük) nevezik *Perron–Frobenius–Ruelle-operátornak*, és ennek fixpontja a keresett sűrűség.

A valószínűségszámításból jól ismert az $f\colon [0,1) \to [0,1)$, $f(x) = 2x \pmod 1$ függvény által definiált ún. **bináris**- (vagy **diadikus**-) leképezés. Igen fontosak a szakaszonként C^1 f-függvények által értelmezett intervallumleképezések is.

Csak említjük a kétdimenziós analitikus leképezéseket, amelyek, ha lehet, még az intervallumleképezéseknél is gazdagabb viselkedést mutatnak. Egyszerű példa itt is a kvadratikus család: $Tz := z^2 + c$ ahol $c \in \mathbb{C}$ (nyilván $T\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$).

További fontos példákkal a következő fejezetekben is megismerkedünk.

Mese a Naprendszerre vonatkozó legújabb szimulációkról.

Az 1994-es párizsi Matematikai Fizikai Világkongresszuson J. Laskar francia kutató meglepő eredményekről számolt be. Lényeges állítása, hogy a Naprendszer jövőbeli fejlődését 100 millió évre előre tudják számolni, és ez egyben elvi korlát is. Igen érdekes elvi újdonság, hogy a stabilnak hitt rendszerben kaotikus oszcillációk is megjelennek. Nevezetesen pl. a Mars forgástengelyének iránya végez ilyet. Ez természetesen az időjárásra is hat, ami erősen csökkenti az élet kialakulásának esélyeit. Ugyanezt a kaotikus oszcillációt mutatta a Föld forgástengelye is, amikor a rendszerből kihagyták a Föld holdját. Ez arra utal, hogy a Föld mozgásának stabilitása, beleértve a Föld forgástengelyének szabályos változását, annak következménye, hogy Földünk viszonylag nehéz Holddal rendelkezik.

Folytonos paraméterű dinamikai rendszerek

Differenciálegyenletekből származtatott dinamikai rendszereknél az idő folytonos. Ezért természetes az egyparaméteres leképezés(fél)csoportok bevezetése.

1.11. DEFINÍCIÓ *Legyen $(M, \mathscr{F}, \mu, S^{\mathbb{R}})$ egyparaméteres automorfizmuscsoport, azaz legyen $\forall t \in \mathbb{R}$-re S^t automorfizmus, és teljesüljön $\forall t,s \in \mathbb{R}$ és $x \in M$-re: $S^{t+s}x = S^t(S^s x)$. $S^{\mathbb{R}}$ folyam, ha $\forall f\colon M \to \mathbb{R}$ mérhető függvényre $f(S^t x)$ mérhető $M \times \mathbb{R}$-en.*

Az előző definícióban az $\mathbb{R}$ paramétertartományt $\mathbb{R}_+$-szal helyettesítve az értelemszerű változtatásokkal kapjuk a $S^{\mathbb{R}_+}$ endomorfizmus-félcsoport, más néven fél-folyam fogalmát.

1.12. PÉLDA (A TÓRUSZ FELTEKERÉSE) Ez a körvonal forgatásának általánosítása. Itt $M := \mathbb{T}^d \simeq \mathbb{R}^d/\mathbb{Z}^d$, μ a Lebesgue-mérték, és

$$S^t_\alpha x := x + t\alpha \qquad (\mathrm{mod}\, \mathbb{T}^d)$$

ahol $\alpha \in S^d$ tetszőleges.

Ugyanezt a transzformációt tekinthetjük csak diszkrét időpontokban

$$T^n_\alpha := x + n\alpha \qquad (\mathrm{mod}\, \mathbb{T}^d). \tag{1.1}$$

Ez a *tórusz eltolása*, ami általában a csoport-eltolás speciális esete (l. 3.8. Példa).

A fenti példa egyben utal azokra az általános konstrukciókra, amelyekkel diszkrét és folytonos idejű dinamikai rendszerek között természetes kapcsolatot lehet teremteni.

1.13. DEFINÍCIÓ (A FELFÜGGESZTETT FOLYAM) *Legyen $(M, \mathscr{F}, \mu, T)$ automorfizmus a 1.2. Definíció értelmében, és $f : M \to \mathbb{R}^+$, $f \in L_1(\mu)$ (azaz nemnegatív és integrálható) függvény. Folyamunk fázistere*

$$M_f = \{(x,s)|x \in M, 0 \le s \le f(x)\}/\sim; \qquad (x, f(x)) \sim (Tx, 0),$$

és $S^t(x,s) = (x, s+t)$, $\forall (x,s) \in M_f, t \in \mathbb{R}$. Közvetlenül ellenőrizhető, hogy $\mu_f = (\int_M f d\mu)^{-1} \cdot \mu \times \mathrm{Leb}$ invariáns valószínűségi mérték, azaz $(M_f, \mathscr{F}_f, \mu_f, S^{\mathbb{R}^+})$ folyam a 1.11. definíció értelmében ($\mathscr{F}_f = \mathscr{F} \otimes \mathscr{L}$, ahol $\mathscr{L}$ a Lebesgue-mérhető halmazok σ-algebrája). Az így kapott automorfizmus-csoportot az $f(x)$ tetőfüggvényhez tartozó felfüggesztett folyamnak (angolul suspension flow) hívjuk.

A felfüggesztett folyamnak sokszor létezik természetes "inverz konstrukciója" is. Legyen $(M, \mathscr{F}, \mu, S^{\mathbb{R}})$ folyam, és $N \in \mathscr{F}$ "kellően szép" halmaz, melyre (i) $\mu(N) = 0$, de N-n természetes módon értelmezhető egy $\mathscr{F}_N$ σ-algebra, melyen μ mérték természetes módon indukál egy μ_N mértéket; (ii) μ_N-majdnem minden $x \in N$ esetén a $\{t \in \mathbb{R}^+ | S^t x \in N\}$ halmaz nem üres, diszkrét részhalmaza $\mathbb{R}^+$-nak. (Ezt garantálja például, ha M Riemann-sokaság, μ a Lebesgue-mértékre abszolút folytonos, N pedig egy a folyam irányára transzverzális hiperfelület M-ben.) Ekkor μ_N-majdnem $x \in N$ esetén értelmezhető $\tau(x) = \min\{t > 0 | S^t x \in N\}$, és $T_N x = S^{\tau(x)} x$. Az így kapott $(N, \mathscr{F}_N, \mu_N, T_N)$ automorfizmust *Poincaré leképezés*nek, N-t pedig *Poincaré szelés*nek hívjuk.

Visszatérve a 1.12. példához, a (d-dimenziós) tórusz feltekerését megkaphatjuk, mint a ($d-1$ dimenziós) tórusz eltolásához tartozó felfüggesztett folyamot, az $f(x) \equiv 1$ tetőfüggvénnyel. Fordítva, a tórusz eltolását megkaphatjuk a tórusz feltekeréséből, mint az $N = \{x_1 = 0\}$ Poincaré szeléshez tartozó Poincaré leképezést.

Tekintsünk még egy példát egyparaméteres automorfizmuscsoportra.

1.14. PÉLDA (AZ INGA FÁZISKÉPE) Tekintsünk egy ℓ hosszúságú fonálra felfüggesztett $m = 1$ tömegű pontszerű tömeget. Jelöljük q-val az inga kitérésének szögét, p-vel momentumát, ami az adott esetben egyben sebessége is. Egyszerű elvekből következően

$$\left[\begin{array}{l} \dot{q} = p \\ \dot{p} = -\omega^2 \sin q, \end{array}\right. \tag{1.2}$$

ahol $\omega = \sqrt{\dfrac{g}{\ell}}$.

Rendszerünk, amely így is írható:

$$\ddot{q} + \omega^2 \sin q = 0$$

Hamilton-rendszer, és Hamilton-függvénye

$$H(p,q) = \frac{p^2}{2} + (1 - \cos q)\omega^2.$$

Valóban

$$\left[\begin{array}{l} \dot{q} = \dfrac{\partial H}{\partial p} \\[2ex] \dot{p} = -\dfrac{\partial H}{\partial q}, \end{array}\right.$$

és így

$$\frac{\mathrm{d}H(p,q)}{\mathrm{d}t} = \frac{\partial H}{\partial p}\dot{p} + \frac{\partial H}{\partial q}\dot{q} = 0$$

miatt $H = H(p(t), q(t))$ mozgásállandó. Tehát az (1.2) egyenlet megoldásai a $H =$ constans görbék mentén változnak. Emellett a q szögváltozó 2π-periodikus, így a fázistér a $(-\infty < p < \infty, 0 \leq q < 2\pi)$ hengerpalásttal azonosítható.

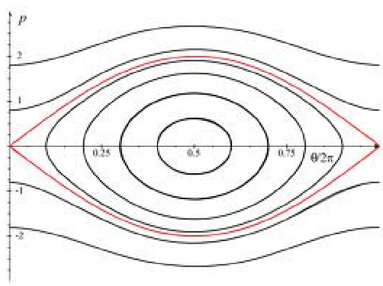
Az (1.2) rendszernek két fixpontja, azaz szinguláris pontja van, vagyis ahol $(\dot{q}, \dot{p}) = 0$; ezek $(p_1 = 0, q_1 = 0)$, $(p_2 = 0, q_2 = \pi)$ (az első az inga legalsó, a másik a legfelső helyzete). Mindkét fixpont környezetében tekinthetjük e rendszer lineáris közelítését. Ezek

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 0 & -\omega^2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix} = D_1\begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix} \\ \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 0 & \omega^2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix} = D_2\begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix}. \end{aligned} \tag{1.3}$$

D_1 sajátértékei: $\lambda_1 = \pm i\omega$, D_2-éi: $\lambda_2 = \pm\omega$.

Az első esetben a linearizált egyenlet valós megoldásai $p(t) = C\omega\cos(\omega t + \varphi)$, $q(t) = C\sin(\omega t + \varphi)$, ezek ellipsziseken változnak $(\frac{1}{\omega^2}p^2 + q^2 = C^2)$, a második esetben $p(t) = C\omega ch(\omega t + \varphi)$, $q(t) = Csh(\omega t + \varphi)$; ezek viszont hiperbolákon változnak $(\frac{1}{\omega^2}p^2 - q^2 = C^2)$.

A lineáris közelítések azonban csak a fixpontok közelében írják le jól a pályákat, globálisan így néz ki a fáziskép:



I.1. ábra. Az inga fázisképe

Valóban, a $H = H(p,q) = \dfrac{p^2}{2} + (1 - \cos q)\omega^2$ energia konstans lévén, $H > 2\omega^2$ esetén a mozgás forgás jellegű, p sehol sem lehet nulla, q monoton módon változik; $0 < H < 2\omega^2$ esetén $(p = 0,\ q = \arccos(1 - \frac{H}{\omega^2}))$ pontja az orbitnak, a mozgás lengő jellegű.

$H = 2\omega^2$ esetén a megoldás a $\frac{p^2}{2} = \omega^2(1+\cos\varphi)$ görbepáron, az ún. szeparatrixon változik. A $(0,0)$ fixpont elliptikus, a $(0,\pi)$ fixpont hiperbolikus, a szeparatrix $(\pi,0)$-beli érintői épp az (1.3)-ban szereplő D_2 lineáris operátor sajátirányai.

Függelék

- **Mérhető tér, valószínűségi mező.** Ha M tetszőleges nem-üres halmaz, akkor M részhalmazainak egy $\mathscr{F}$ családját $\sigma-$*algebrának* nevezzük, ha (i) $\emptyset \in \mathscr{F}$, (ii) minden $A_1, \ldots, A_n, \cdots \in \mathscr{F}$ esetén $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathscr{F}$, és végül (iii) ha $A \in \mathscr{F}$, akkor $A^c \in \mathscr{F}$ (más szóval $\mathscr{F}$ zárt a megszámlálható egyesítés és a komplementerképzés műveleteire nézve). A $\mu : \mathscr{F} \to \mathbb{R}_+$ függvényt *mértéknek* nevezzük, ha tetszőleges $A_1, \ldots, A_n, \cdots \in \mathscr{F}$, $A_n \cap A_m = \emptyset$ $(n \neq m)$ esetén $\mu(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n)$. A μ mérték *valószínűségi*, ha $\mu(M) = 1$. Az $(M,\mathscr{F})$ pár neve *mérhető tér*, az $(M,\mathscr{F},\mu)$ hármasé *mértékes tér* (illetve *valószínűségi mező*, ha μ valószínűségi mérték.) Nem jelentős megszorítás, ezért a továbbiakban mindenütt feltesszük, hogy a szereplő *mértékek teljesek*, azaz ha $B \subset A$, és $\mu(A) = 0$, akkor egyúttal $B \in \mathscr{F}$ (és következőleg $\mu(B) = 0$). Ha M topologikus tér (pl. metrikus tér, vagy speciálisan az euklideszi tér), akkor a nyílt halmazok által generált σ-algebra az ún. *Borel σ-algebra*. Ha – Riemann-sokaságok, így pl. ismét az euklideszi tér esetén – az alapul vett mérték a Riemann-mérték, illetve a Lebesgue-mérték — akkor a szóban forgó mértéknek egyetlen legszűkebb teljes kiterjesztése van (az euklideszi esetben a megfelelő σ-algebrát a *Lebesgue σ-algebrának* és az ott értelmezett mértéket pedig *Lebesgue-mértéknek* nevezzük).

- **Integrálhelyettesítés.** A Perron–Frobenius–Ruelle-operátor levezetésénél már használtuk és a jövőben is sokszor alkalmazzuk az alapvető integrálhelyettesítési azonosságot. Legyen $(M,\mathscr{F},\mu)$ valószínűségi mező, $(M',\mathscr{F}')$ mérhető tér, $f : M \to M'$ mérhető leképezés és $\phi : M' \to \mathbb{R}$ mérhető függvény. Akkor

$$\int_M \phi(f(x))\mu(\mathrm{d}x) = \int_{M'} \phi(y)\mu(f^{-1}(\mathrm{d}y)) \tag{1.4}$$

áll, valahányszor bármelyik oldalon szereplő integrál létezik. A $\mathrm{df}_*\mu(\mathrm{y}) = \mu(\mathrm{f}^{-1}\mathrm{dy})$ M'-n értelmezett mértéket a μ mérték előretoltjának is hívjuk (definíció szerint $\forall A \in \mathscr{F}'$ esetén $f_*\mu(A) = \mu(f^{-1}A)$). Speciálisan, ha M és M' is egy intervallum $\mathbb{R}$-ben, μ abszolút folytonos a Lebesgue-mértékre $\rho(x)$ sűrűségfüggvénnyel, és az f leképezés (szakaszonként) folytonosan differenciálható, akkor $f_*\mu$ is abszolút folytonos a Lebesgue-mértékre, és $\rho'(y)$ sűrűségfüggvénye a

$$\rho'(y) = \sum_{x:\ fx=y} \frac{\rho(x)}{|f'(x)|}$$

képlettel számolható.

2. Poincaré rekurrencia tétele. Ergodtételek

A legegyszerűbb kérdés, amely már a 19. században is foglalkoztatta a dinamikai rendszerekkel foglalkozó kutatókat: visszatérnek-e előbb-utóbb a fázispontok saját maguk kis környezetébe. A periodikus pontok persze ilyenek, de ezekből általában viszonylag kevés van. Poincaré egyszerű tétele igen általános, mert topológiát sem feltételez.

2.1. TÉTEL (POINCARÉ REKURRENCIA TÉTELE, 1899) *Legyen $(M,\mathscr{F},\mu,T)$ tetszőleges endomorfizmus, és $A \in \mathscr{F}$. Ekkor A μ-majdnem minden pontja visszatérő, azaz $\mu-$m. m. $x \in A$-ra $\exists n \in \mathbb{Z}_+$, hogy $T^n x \in A$.*

2.2. KÖVETKEZMÉNY A $\mu-$m. m. pontja erősen is visszatérő, azaz végtelen sokszor visszatér A-ba.

BIZONYÍTÁS Poincaré tétele miatt minden n-re T^n is visszatérő, azaz $\exists B_n$, hogy $\mu(B_n) = 0$ és $A \setminus B_n$-en T^n visszatérő. $A \setminus \bigcup_1^\infty B_n$ pontjai végtelen sokszor térnek vissza A-ba. □

BIZONYÍTÁS (A 2.1. TÉTEL BIZONYÍTÁSA) Legyen $N \subset A$ a nem-visszatérő pontok halmaza: $N := A \setminus (\bigcup_{k=1}^\infty T^{-k}A) = A \cap (\bigcap_{k=1}^\infty T^{-k}(M \setminus A))$.

Állítjuk, hogy $\forall n \in \mathbb{Z}_+$-ra $N \cap T^{-n}N = \emptyset$. Valóban, ha $x \in N \cap T^{-n}N$ lenne, akkor $x \in A$ és egyúttal $T^n x \in A$ lenne, így x is visszatérő volna, ellentétben N definíciójával.

Az előbbi állítás következménye: $\forall 0 \le k < l$-re

$$T^{-k}N \cap T^{-l}N = T^{-k}(N \cap T^{-(l-k)}N) = \emptyset$$

tehát $N, T^{-1}N, \ldots, T^{-n}N, \ldots$ páronként diszjunktak, ezért μ végessége miatt $\mu(N) = 0$. □

Poincaré rekurrencia tételéhez is kapcsolódik az alábbi indukált leképezések fogalma (érdemes összevetni a felfüggesztett folyam, illetve a Poincaré leképezés fogalmával az előző fejezetből).
Legyen $(M,\mathscr{F},\mu,T)$ endomorfizmus és $A \subset M$, $\mu(A) > 0$.

2.3. DEFINÍCIÓ (DERIVÁLT LEKÉPEZÉS)
$T_A : A \circlearrowright$

$$T_A x = T^{n(x)} x$$

ahol $n(x) = \min\{k \ge 1 \mid T^k x \in A\}$ (Poincaré rekurrencia miatt: $\mu(x \in A \mid n(x) = \infty) = 0$).

2.4. TÉTEL *$(A,\mathscr{F}_A,\mu_A,T_A)$ endomorfizmus, ahol $\mu_A(B) = \mu(A \cap B)/\mu(A)$.*

Legyen most $(M,\mathscr{F},\mu,T)$ endomorfizmus, és $f : M \to \mathbb{N}$ mérhető.

Legyen $M_f := \{(x,k) \mid x \in M,\ 1 \le k \le fx\} \subset M \times \mathbb{N}$. $\mathscr{F}_f$ - a szorzat által generált σ-algebra. $\mu_f(A \times \{k\}) = \mu(A)$, ha $x \in A$-ra $f(x) \ge k$.

2.5. DEFINÍCIÓ (PRIMITÍV (VAGY TORONY) LEKÉPEZÉS) *Torony vagy primitív leképezés:*

$$T_f : M_f \circlearrowleft \qquad T_f(z,k) = \begin{cases} (x,k+1) & \text{ha} \quad k < fx \\ (Tx,1) & \text{ha} \quad k = fx. \end{cases}$$

2.6. TÉTEL *Ha $\mu(M) < \infty$, és $f \in L_1$, akkor $\mu_f(M_f) = \int_M f(x)\,\mathrm{d}\mu(x)$.*

2.7. TÉTEL *$(M_f, \mathscr{F}_f, T_f, \mu_f)$ mértéktartó.*

2.8. FELADAT *T_f derivált leképezése az $M \times \{1\}$ halmazon éppen T.*

Poincaré tételének egyszerű alkalmazása: tekintsük a körvonal forgatását (1.4. Példa). Ha $\alpha = r/s$ racionális, akkor $R_\alpha^s = \mathrm{Id}$, és minden pont periodikus. Tekintsük irracionális α esetét. 2.1. Tételt alkalmazva az $A := (-\delta, \delta)$ halmazra, látjuk, hogy $\exists x \in A$ és $\exists n$, hogy $-\delta < (0 \neq)\ x + n\alpha \pmod 1 < \delta$. Tehát $-2\delta < n\alpha \pmod 1 < 2\delta$. Innen már azonnal adódik, hogy $\forall x \in S$-re a $\{x + n\alpha \pmod 1\}$ halmaz sűrű S-en. (Megjegyezzük, hogy az $\{x + n\alpha \pmod 1\}$ halmaz sűrű volta közvetlenül is könnyen belátható pusztán azt használva, hogy irracionális α esetén e halmaz nem lehet véges.)

Igen gyakran olyan dinamikai rendszereket vizsgálunk, ahol a fázistér topologikus struktúrával is rendelkezik; egyszerűség kedvéért ilyenkor itt mindig feltesszük, hogy M lokálisan kompakt, szeparábilis metrikus tér. $\mathscr{F}$ jellemzően a Borel σ-algebra, T endomorfizmusról pedig feltesszük, hogy folytonos.

2.9. DEFINÍCIÓ *Legyen T folytonos endomorfizmus. Az $X \subset M$ részhalmazt minimálisnak nevezzük, ha nem tartalmaz valódi, nem-üres, zárt, T-invariáns részhalmazt. Ha maga M minimális halmaz, akkor a T-t minimális endomorfizmusnak nevezzük. A minimalitás ekvivalens jellemzése: minden pont pályája sűrű M-ben. A T endomorfizmust topologikusan tranzitívnak nevezzük, ha van olyan $x \in M$ fázispont, amelynek a pályája sűrű M-ben.*

Minimális endomorfizmus nyilván topologikusan tranzitív. Előbbi észrevételünk értelmében a körvonal irracionális forgatása minimális, így topologikusan tranzitív is.

Boltzmann ergodikus hipotézise és Neumann ergodtétele

Ludwig Boltzmann a 19. század 70-es éveiben a statisztikus fizika megalapozásán dolgozva megfogalmazta az ún. *ergodikus hipotézist*. Legyen M_N valamely N szabadsági fokú mechanikai rendszer fázistere, és ezen $f_N \colon M_N \to \mathbb{R}$ egy mérés. Rendszerünkről tegyük fel, hogy egyensúlyban van, tehát M_N-en adva van egy μ_N egyensúlyi, vagyis invariáns mérték (a Liouville mérték). Boltzmann hipotézise szerint, ha rendszerünk nagy ($N \gg 1$), a megfigyelések időbeli átlaga konvergál a térbeli, egyensúlyi átlagértékhez, azaz formálisan

$$1/T \int_0^T f(T^s x)\,\mathrm{d}s \to \int_M f(x)\,\mathrm{d}\mu(x)$$

hacsak $T, N \to \infty$. Mind a rendszer „nagy” voltára vonatkozó feltevés, mind a használt konvergenciafogalom matematikailag tisztázatlanok voltak. Bármennyire is fontos volt és matematikailag is izgalmasnak tűnt az ergodikus hipotézis, mégis csak több mint 50 év elteltével sikerült megtenni az első igazi lépéseket.

Legyen $(M,\mathscr{F},\mu,T)$ tetszőleges endomorfizmus, és $f\colon M\to\mathbb{R}$ valamilyen „mérés", azaz a fázistéren értelmezett, alkalmas feltételeknek eleget tevő függvény. Az ergodicitás matematikai modellezéséhez fontos lökést adott Koopman ötlete. A dinamikai rendszereket természetes módon pontleképezésekként értették, mi is így vezettük be a fogalmat. Koopman 1929-ben a következő egyszerű átfogalmazást javasolta: A pontleképezés helyett tekintsük a

$$(\hat{T}f)(x) := f(Tx)$$

– lineáris – függvénytranszformációt, mondjuk az $L_p=\{f\colon \|f\|_p := (\int_M (|f|^p)\,\mathrm{d}\mu)^{1/p}<\infty\}$ függvénytéren. ($\hat{T}$-t a T leképezés által *indukált operátornak* nevezzük.) A μ mérték invarianciájának közvetlen folyománya, hogy $\hat{T}$ izometria, azaz $\|\hat{T}f\|_p=\|f\|_p$ és így $\|\hat{T}\|_p=1$. Az indukált leképezés objektuma könnyen kezelhető volt a funkcionálanalitikus megközelítés számára, hiszen a funkcionálanalízis a 20-as évek végére, részben éppen Neumann János munkásságának is köszönhetően, jól értett, természetes eszközzé vált a matematikában.

2.10. MEGJEGYZÉS Ha egy $\hat{T}\colon L_p\to L_p$ izometria adott, természetes kérdés, vajon van-e olyan $T\colon M\to M$, amely indukálná $\hat{T}$-t. A válasz általában nem, viszont ha $(M,\mathscr{F},\mu)$ ún. Lebesgue-tér, akkor igen. A Lebesgue-terek tanulmányozása azonban most nem célunk.

2.11. TÉTEL (NEUMANN L_2-ERGODTÉTELE, 1932) *Tetszőleges $f\in L_2$ függvényhez létezik $\bar{f}\in L_2$ invariáns függvény, hogy*

$$\|A_nf-\bar{f}\|_2\to 0$$

ahol $A_nf=\frac{1}{n}(f+\hat{T}f+\dots+\hat{T}^{n-1}f)$ (Az $f\in L_p$ függvény invariáns, ha $f=\hat{T}f$.) Igaz továbbá, hogy $\bar{f}$ az f elem L_2-beli ortogonális vetülete az invariáns függvények alterére. Végül $\int f\,\mathrm{d}\mu=\int\bar{f}\,\mathrm{d}\mu$.

2.12. DEFINÍCIÓ *A T endomorfizmust ergodikusnak nevezzük, ha bármely $f\in L_2$ függvényre $\bar{f}=\mathrm{const}$. (Miután általában az L_p-függvények csak μ-m.m. értelmezettek, azért ezek egyenlőségéről is csak ilyen értelemben beszélünk). Innen azonnal következik, hogy T csak akkor ergodikus, ha minden invariáns függvény konstans.*

Ergodikus leképezésre a 2.11. Tétel harmadik állítása miatt $\int f\,\mathrm{d}\mu=\bar{f}$, vagyis az első állítás így szól

$$\frac{1}{n}(f+\hat{T}f+\dots+\hat{T}^{n-1}f)\xrightarrow[n\to\infty]{L_2}\int f\,\mathrm{d}\mu.$$

Tehát rögzített dinamikai rendszerre épp Boltzmann hipotézisének állítását nyerjük – itt L_2 konvergenciában. E megjegyzés már mutatja az ergodtételek és az ergodicitás fogalmának rendkívül fontos voltát, most térjünk rá Neumann-tételének bizonyítására.

BIZONYÍTÁS (A 2.11. TÉTEL BIZONYÍTÁSA) Egyszerű lépésekben. Legyen $f\in L_2$.

1. A_n kontrakció, azaz $\|A_nf\|_2\le\|f\|_2$.

2. Ha $A_n f$ konvergál, akkor $\bar{f} = \lim_{n\to\infty} A_n f$ invariáns, mert $\hat{T}$ folytonossága miatt

$$\hat{T}\bar{f} = \hat{T}\lim A_n f = \lim\left(\frac{n+1}{n}A_{n+1}f - \frac{f}{n}\right) = \bar{f}.$$

3. Jelöljük $E := \{f \in L_2 \colon A_n f \text{ konvergál } L_2\text{-ben}\}$.

   Tételünk fő állítása következni fog az alábbi két tulajdonságból:

   a) E zárt altér;

   b) E tartalmaz L_2-ben sűrű részhalmazt.

4. a) bizonyítására tegyük fel, hogy $f_k \in E$ és $\|f_k - f\|_2 \to 0$. Ekkor

$$\begin{aligned}\|A_n f - A_m f\|_2 \le \|A_n(f-f_k)\|_2 + \|(A_n - A_m)f_k\|_2 + \\ + \|A_m(f_k - f)\|_2 \le 2\|f - f_k\| + \\ + \|(A_n - A_m)f_k\|_2.\end{aligned}$$

   A jobb oldali első tag tetszőlegesen kicsivé tehető k alkalmas választásával, míg fix k-ra a második tag is tetszőleges kicsi, ha n,m elég nagyok. Megjegyezzük még, hogy $\lim_n A_n f$ folytonos $f \in E$-re, ugyanis $\|A_n f_k - A_n f\| \le \|f_k - f\|$.

5. b) bizonyításához először lássuk be, hogy $f = \hat{T}f$ akkor és csak akkor, ha $f = \hat{T}^* f$. Tegyük fel először, hogy $f = \hat{T}f$. Mivel $\hat{T}$ izometria, $\forall g,h \in L^2$ esetén $(\hat{T}^*Tg,h) = (\hat{T}g,\hat{T}h) = (g,h)$, így $\hat{T}^*\hat{T} = Id$. így $f = \hat{T}f$ mindkét oldalára hattatva $\hat{T}^*$-t, következik, hogy $f = \hat{T}^*f$. Tegyük fel most, hogy $f = \hat{T}^*f$. Ekkor $\|f\|^2 = (f,f) = (f,\hat{T}^*f) = (\hat{T}f,f) = (f,\hat{T}f)$, ugyanis $(\hat{T}f,f) = ||f||^2$ valós. Ekkor viszont $\|f - \hat{T}f\|^2 = \|f\|^2 + \|\hat{T}f\|^2 - 2(f,\hat{T}f) = 0$, tehát $f = \hat{T}f$. Összefoglalva, a $\hat{T}$ és a $\hat{T}^*$ operátoroknak az 1 sajátértékhez tartozó sajátalterei megegyeznek. Ugyanakkor $f = \hat{T}f$ esetén nyilván $f \in E$. Tehát $f = \hat{T}^*f$ esetén $f \in E$.

6. Korlátos A operátorok jól ismert, egyszerű tulajdonsága: $\forall\lambda \in \mathbb{C}$-re

$$\mathrm{Cl}\,[\mathrm{Range}\,(A - \lambda)] \oplus \mathrm{Ker}\,(A^* - \bar{\lambda}) = L_2.$$

   Innen esetünkben $(A = \hat{T},\ \lambda = 1)$ $\mathrm{Cl}\,[\mathrm{Range}\,(I - \hat{T})] \oplus \mathrm{Inv} = L_2$, ahol $\mathrm{Inv} := \{f \colon f = \hat{T}f\} = \{f \colon f = \hat{T}^*f\}$. (A felhasznált tulajdonság igazolása: valóban, ha $h \perp \mathrm{Range}\,(A - \lambda)$, azaz ha $\forall f = Ag - \lambda g$-re $(h,f) = 0$, akkor $\forall g \in L_2$-re $0 = (h, Ag - g) = (A^*h - \bar{\lambda}h, g)$, vagyis $h \in \mathrm{Ker}\,(A^* - \bar{\lambda})$; és a gondolatsor megfordítható.)

7. b) már következni fog abból, hogy $\mathrm{Range}\,(I - \hat{T}) \subset E$. Ez utóbbi állítás azonban triviális, ugyanis ha $f = g - \hat{T}g$, ekkor

$$A_n f = \frac{1}{n}(g - \hat{T}^n g) \xrightarrow[n\to\infty]{L_2} 0.$$

8. Az eddigiekből az is látszik, hogy $f \in \text{Inv}$-re $A_n f = f = \bar{f}$, míg $f \in \text{Range}\,(I - \hat{T})$-re $\bar{f} = 0$. Innen adódik, hogy bármely $f \in L_2$-re $\bar{f}$ az $f \in L_2$ elem vetülete az Inv zárt altérre. E megjegyzésből a tétel második állítása nyilvánvaló.

9. A harmadik állítás belátásához tegyük fel, hogy $f = \bar{f} + (I - \hat{T})g$, ahol $\bar{f} \in \text{Inv}$, $g \in L_2$. Ekkor nyilván áll $\int f \, d\mu = \int \bar{f} \, d\mu$. Mivel az előbbi alakú f-ek sűrű halmazt alkotnak L_2-ben, azért a kívánt egyenlőség egész L_2-n igaz. □

2.13. FELADAT (L_1-ERGODTÉTEL) *Ha T endomorfizmus, akkor $\forall f \in L_1$-re $\exists \bar{f} \in L_1$ invariáns függvény, hogy $\|A_n f - \bar{f}\|_1 \to 0$ $(n \to \infty)$ és $\int f \, d\mu = \int \bar{f} \, d\mu$.*

UTALÁS L_2 sűrű altér L_1-ben. □

Az átlag normában vett ergodtételek mellett igaz a m. mindenütt való konvergenciát állító ún. *individuális ergodtétel* is. Ennek bizonyítását a jegyzet második felében közöljük.

2.14. TÉTEL (BIRKHOFF (1931) – HINCSIN (1933) ERGODTÉTELE) *Legyen T endomorfizmus, és $f \in L_1$. Ekkor $\exists \bar{f} \in L_1$ invariáns függvény, hogy $A_n f \to \bar{f}$ teljesül $\mu-$ m. m. és $\int f \, d\mu = \int \bar{f} \, d\mu$.*

2.15. MEGJEGYZÉS Mindhárom ergodtétel analóg megfogalmazása igaz (i) automorfizmusra és (ii) folytonos paraméterű rendszerekre is. Automorfizmus esetén pl. 2.11. Tétel állítása mellett igaz a következő állítás is: a

$$A_n^- f := 1/n(f + \hat{T}^{-1} f + \dots \hat{T}^{-n+1} f)$$

jelöléssel élve $\exists \bar{f}^- \in L_2$ invariáns függvény, hogy $\|A_n^- f - \bar{f}^-\|_2 \to 0$, $(n \to \infty)$, és $\bar{f}^- = \bar{f}$ áll $\mu-$ m. m.

Folytonos paraméterű rendszerekre az ergodtétel egyszerű következménye a 2.11. illetve a 2.14. Tételeknek. Valóban elegendő utóbbiakat az $F(x) := \int_0^1 f(S^s x) \, ds$ függvényekre alkalmaznunk (a Fubini tétel – ld. függelék – miatt $f \in L_1(\mu)$-ből $F \in L_1(\mu)$ azonnal adódik).

Neumann ergodtételének kimondása után már bevezettük az ergodicitás fogalmát, és megmutattuk annak alapvető fontosságát. Most megadjuk az ergodicitás fogalmának egy egyszerű átfogalmazását.

2.16. DEFINÍCIÓ *$(M, \mathscr{F}, \mu, T)$ endomorfizmus esetén az $A \in \mathscr{F}$ halmazt invariánsnak nevezzük, ha χ_A invariáns függvény.*

Az A halmaz csak akkor invariáns, ha $\mu(A \Delta T^{-1} A) = 0$. Könnyű látni, hogy az invariáns halmazok σ-algebrát alkotnak, ezt $\mathscr{I}$-vel jelöljük.

2.17. LEMMA *Az $(M, \mathscr{F}, \mu, T)$ endomorfizmus csak akkor ergodikus, ha minden invariáns halmaz triviális, azaz mértéke* 0 *vagy* 1.

BIZONYÍTÁS (A LEMMA BIZONYÍTÁSA) Ergodikus T-re $\forall A \in \mathscr{I}$-re $\chi_A = \text{const}$, ami csakis akkor lehet, ha $\mu(A) = 0$ vagy 1. Tegyük fel, hogy minden invariáns halmaz triviális. Akkor az f invariáns függvényre igaz: minden $c \in \mathbb{R}$-re az $\{x\colon f(x) < c\}$ halmazok invariánsok lévén, mértékük 0 vagy 1. Tehát van egy c_0, hogy $\forall c < c_0$-ra az említett mérték 0, $\forall c > c_0$-ra 1. Ekkor $f = c_0$, persze μ majdnem mindenütt. □

Végül még egy megjegyzést teszünk arra vonatkozóan, mit is jelent az individuális ergodtétel (a 2.14. tétel) ergodikus automorfizmus esetén. Egy $f \in L^1$ függvényre úgy is gondolhatunk, mint egy véges várható értékű valószínűségi változóra. Ekkor $\hat{T}^n f$ is valószínűségi változó minden $n \geq 0$-ra, ezek a változók a mérték invarianciája miatt azonos eloszlásúak, $A_n f$ pedig az azonos eloszlású változóknak az átlaga. Az individuális ergodtétel szerint $A_n f \to \int f d\mu = Ef$ μ-m.m x-re. Ez épp azt jelenti, hogy az átlag egy valószínűséggel konvergál a várható értékhez. Ha a $\hat{T}^n f$ valószínűségi változók függetlenek volnának, épp a nagy számok erős törvénye jelentené ezt a tulajdonságot. Persze a $\hat{T}^n f$ változók általában távolról sem függetlenek, az ergodtétel állítása szerint a nagy számok törvényében a függetlenséget helyettesíthetjük a dinamikai rendszer ergodicitásával.

2.18. FELADAT *Mutassuk meg, hogy ha valamely n-re T^n ergodikus endomorfizmus, akkor T is az. Adjunk példát arra, hogy az állítás megfordítása nem igaz.*

UTALÁS $\mu(T^{-n}A\Delta A) \leq \sum_{j=0}^{n-1} \mu(T^{-j+1}A\Delta T^{-j}A)$, ugyanis $\mathrm{d}(A,B) := \mu(A\Delta B)$ metrikát definiál a mérhető részhalmazokon. □

Függelék

- **Konvergenciafajták.** Véges mértéktér esetén a Hölder egyenlőtlenség miatt $1 \leq p < p'$-re $\|f\|_p \leq \|f\|_{p'}$ áll, így $L_{p'} \subset L_p$, tehát az L_p-konvergencia következik az $L_{p'}$-konvergenciából. Továbbá a majdnem mindenütt való konvergencia független az L_p-konvergenciától, hiszen egyrészt pl. $\lim_n b_n = 0$ esetén a $[0,1]$-en értelmezett $f_n := a_n\chi_{(0,b_n)}$ függvénysorozat mindenütt tart 0-hoz, ugyanakkor $\|f_n\|_p = b_n^{1/p}|a_n|$, ami tetszőlegesen beállítható, másrészt ha
$$g_n := a_n\chi_{[\frac{k'}{2^m},\frac{k'+1}{2^m}]}$$
ha $2^m \leq k < 2^{m+1}$ és $k' := k - 2^m$, akkor $\|g_n\|_p = |a_m|(\frac{1}{2^m})^{1/p}$, ami már $a_m = 1$ választással is tart 0-hoz, viszont a függvénysorozat sehol sem konvergens.

- **Szorzattér.** Legyenek $(X_1,\mathscr{F}_1,\mu_1)$, $(X_2,\mathscr{F}_2,\mu_2)$ valószínűségi mezők. Ezek szorzata $(X,\mathscr{F}) := (X_1,\mathscr{F}_1,\mu_1) \times (X_2,\mathscr{F}_2,\mu_2)$ természetes módon így vezethető be. Egyrészt $X = X_1 \times X_2 := \{(x_1,x_2)\colon x_1 \in X_1, x_2 \in X_2\}$, másrészt $\mathscr{F}$ az $A_1 \times A_2\colon A_1 \in \mathscr{F}_1, A_2 \in \mathscr{F}_2$ típusú szorzathalmazok által generált $\sigma-$algebra. Végül μ (=$\mu_1 \times \mu_2$) az egyetlen valószínűségi mérték, amelyre $A_1 \in \mathscr{F}_1, A_2 \in \mathscr{F}_2$ esetén $\mu(A_1 \times A_2) = \mu_1(A_1)\mu_2(A_2)$.

- **Fubini tétele.** Tegyük fel, hogy $\phi\colon X \to \mathbb{R}$ mérhető függvény. Ha $\phi \in L_1(\mu)$, akkor alkalmas $A_1 \subset X_1,\ \mu(X_1 \setminus A_1) = 0$ és $A_2 \subset X_2,\ \mu_2(X_2 \setminus A_2) = 0$ részhalmazokra

$\int_{X_2} \phi(x_1,x_2)\mu_2(\mathrm{d}x_2)$ illetve $\int_{X_1} \phi(x_1,x_2)\mu_1(\mathrm{d}x_1)$ mérhetőek és végesek A_1-en illetve A_2-n, továbbá

$$\begin{aligned}\int_X \phi(x_1,x_2)\mu(\mathrm{d}x) &= \int_{X_1}\left(\int_{X_2}\phi(x_1,x_2)\mu_2(\mathrm{d}x_2)\right)\mu_1(\mathrm{d}x_1)\\ &= \int_{X_2}\left(\int_{X_1}\phi(x_1,x_2)\mu_1(\mathrm{d}x_1)\right)\mu_2(\mathrm{d}x_2).\end{aligned}$$

3. További példák. Ergodikus leképezések

3.1. TÉTEL *A körvonal α szöggel való forgatása akkor és csak akkor ergodikus, ha α irracionális.*

BIZONYÍTÁS Legyen az $f: S \to \mathbb{R}$ korlátos, mérhető függvény Fourier sora $f(x) = \sum_n a_n e^{2\pi inx}$ (a sor L_2-értelemben konvergál). Ekkor

$$\hat{R}_\alpha f(x) = f(R_\alpha x) = \sum_n (e^{2\pi in\alpha} a_n) e^{2\pi inx}. \tag{3.1}$$

Tudjuk, hogy $f = \hat{R_\alpha} f$ csak akkor, ha $\forall n$-re $a_n = e^{2\pi in\alpha} a_n$. Mármost ha $\forall n \neq 0$-ra $a_n = 0$ teljesül, akkor $f =$ const. Ha ellenben $\exists n_0 \neq 0$ hogy $a_{n_0} \neq 0$, akkor $e^{2\pi in_0\alpha} = 1$, ami pontosan akkor áll, ha $\exists k \in \mathbb{Z}$, hogy $n_0\alpha = k$. Tehát $\alpha \in \mathbb{Q}$. □

A fenti tételből következik a körvonal forgatásának néhány további érdekes tulajdonsága. Poincaré tételének alkalmazásaként megkaptuk az $n\alpha \pmod 1$ sorozat sűrű voltát irracionális α esetén. Az ergodtétel következménye lesz viszont

3.2. TÉTEL (WEYL TÉTELE, 1916) *Legyen α irracionális. Ekkor $\forall I \subset S$ intervallumra $n \to \infty$ esetén*

$$1/n \sum_{k=1}^{n} \chi_I(\{n\alpha\}) \to \mu(I)$$

ahol μ a Lebesgue-mérték.

3.3. FELADAT (V. ARNOLD) *Tekintsük az $1, 2, \ldots, 2^n, \ldots$ számsorozat tízes számrendszerben felírt alakjának első jegyeit. Előfordul ezek között a 7? A 8? Ha igen, melyik gyakoribb? (Útmutatás: $\log_{10} 2$ irracionális.)*

R_α ergodicitásának és Birkhoff–Hincsin tételének folyománya, hogy μ-m.m. x-re

$$\frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \chi_I(\{x + k\alpha\}) \to \mu(I) \tag{3.2}$$

ha $n \to \infty$. Itt azonban igaz az erősebb

3.4. TÉTEL (3.2) *teljesül $\forall x \in S$-re.*

Innen $x = 0$ választással már adódik Weyl tétele is (3.2. Tétel).

BIZONYÍTÁS 3.5. DEFINÍCIÓ *Az $\{x_n : x_n \in S,\ n \in \mathbb{Z}_+\}$ sorozat egyenletes eloszlású, ha tetszőleges $I \subset S$ intervallumra*

$$\frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \chi_I(\{x_k\}) \to \mu(I).$$

Először szükséges és elégséges feltételt adunk arra, hogy az $\{x_n\}$ sorozat egyenletes eloszlású legyen.

3.6. LEMMA *Az $\{x_n\}$ sorozat csak akkor egyenletes eloszlású, ha $\forall f \in C(S)$ függvényre*

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f(x_i) \to \int_S f\,\mathrm{d}\mu. \tag{3.3}$$

A lemma igazolását későbbre halasztva bizonyítsuk tételünket. Legyen $f \in C(S)$. 3.1. Tételből következik, hogy μ-m.m. $x \in S$-re

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f(\{x+k\alpha\}) \to \int f\,\mathrm{d}\mu \qquad (n\to\infty). \tag{3.4}$$

Megmutatjuk, hogy e konvergencia $\forall x \in S$-re is áll. Valóban legyen $\bar{x} \in S$ olyan pont, amelyre (3.4) igaz, és legyen $x \in S$ tetszőlegesen rögzített. Mivel $\{\{\bar{x}+n\alpha\}\}$ sűrű, ezért alkalmas $\bar{k} = \bar{k}(\delta)$-ra dist $(\{\bar{x}+\bar{k}\alpha\}, x) < \delta$. Igaz viszont

$$\begin{aligned}
&\left|\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f(\{x+k\alpha\}) - \frac{1}{n+\bar{k}}\sum_{k=1}^{n+\bar{k}} f(\{\bar{x}+k\alpha\})\right| \leq \\
&\leq \left|\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\left[f(\{x+k\alpha\}) - f(\{\bar{x}+(k+\bar{k})\alpha\})\right]\right| + \\
&\quad + \frac{\bar{k}}{n+\bar{k}}\max|f| + \frac{\bar{k}}{n(n+\bar{k})}\sum_{k=1}^{n+\bar{k}} |f(\{\bar{x}+k\alpha\})|.
\end{aligned} \tag{3.5}$$

f egyenletes folytonossága miatt a jobb oldali első összeg $< \frac{\varepsilon}{3}$, ha δ elég kicsi. A második és harmadik tag viszont ránézésre $< \frac{\varepsilon}{3}$, ha n elég nagy. Következésképpen (3.4) $\forall x \in S$-re igaz. □

BIZONYÍTÁS Bizonyítsuk végül a 3.6. Lemmát. Tegyük fel, hogy (3.3) áll $\forall f \in C(S)$-re és igazoljuk, hogy $\{x_n\}$ egyenletes eloszlású. Jelöljük: $\nu_n(I) := \sum_{k=1}^{n} \chi_I(x_i)$. Fix $\varepsilon > 0$-ra válasszuk meg az f_* és $f^* \in C(S)$ függvényeket, hogy

(i) $f_*(x) \leq \chi_I(x) \leq f^*(x) \qquad \forall x \in S$-re,

(ii) $\int_S (f^* - f_*)\,\mathrm{d}\mu < \varepsilon$.

Ekkor $\sum_{k=1}^{n} f_*(x_i) \leq \nu_n(I) \leq \sum_{k=1}^{n} f^*(x_i)$, azaz

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f_*(x_i) \leq \frac{\nu_n(I)}{n} \leq \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f^*(x_i).$$

Itt (3.3) miatt a bal és jobb oldal konvergál $n \to \infty$ esetén $\int f_* \,\mathrm{d}\mu$-höz illetve $\int f^* \,\mathrm{d}\mu$-höz. Sőt
$$\mu(I) - \varepsilon \le \liminf_{n\to\infty} \frac{\nu_n(I)}{n} \le \limsup_{n\to\infty} \frac{\nu_n(I)}{n} \le \mu(I) + \varepsilon,$$
mivel $\int f_* \,\mathrm{d}\mu \le \mu(I) \le \int f^* \,\mathrm{d}\mu$. Az állítás megfordításának igazolását már elég vázolnunk. $\{x_n\}$ egyenletessége azt jelenti, hogy (3.3) áll intervallumok indikátorfüggvényeire. Következőleg (3.3) igaz lesz ilyenek véges lineáris kombinációira is. Viszont ezekkel már minden $f \in C(S)$ jól közelíthető L_1-ben – alulról és felülről is, így az előbbi gondolatmenet – mutatur mutandis – elismételhető. □

A körvonal forgatásának többdimenziós általánosítása volt a tórusz eltolása (1.12. Példa). A 3.1. Tétel bizonyításának gondolata átvihető, így érvényes a

3.7. TÉTEL *A tórusz (1.12.)-gyel értelmezett eltolása akkor és csak akkor ergodikus, ha $1, \alpha_1, \dots, \alpha_d$ racionálisan függetlenek, ahol $\alpha = (\alpha_1 \dots, \alpha_d)$.*

Ugyanígy általánosítható 3.4. Tétel, 3.5. Definíció, és 3.6. Lemma is.

További általánosítási lehetőségként megemlítjük a csoport-eltolás automorfizmust.

3.8. PÉLDA *A csoport-eltolás.*

Legyen M kompakt topologikus csoport és μ a Haar-mérték M-en (a Haar-mérték fogalmáról ld. a 6. fejezet elejét). Tetszőleges rögzített $g \in G$-re legyen
$$T_g x = g \cdot x.$$
Ekkor $(\mathbb{M}, \mathscr{F}, T_g, \mu)$ automorfizmus. Ez a példa egyben általánosítása a tórusz feltekerésének (1.12. Példa).

3.9. FELADAT *Mi T_g ergodicitásának feltétele, ha G Abel-csoport?*

3.10. FELADAT (SIMÁNYI–SZÁSZ) *Legyen $(M, \mathscr{F})$ mérhető tér, G csoport. Legyen adott minden $g \in G$-re egy $(M, \mathscr{F}, T_g)$ automorfizmus. Az $(M, \mathscr{F}, T_G) = \{(M, \mathscr{F}, T_g) \colon g \in G\}$ családot csoport-hatásnak nevezzük, ha $\forall g_1, g_2 \in G$ -re $T_{g_1 g_2} = T_{g_2} T_{g_1}$ (a G csoport hat az M téren). Tetszőleges $x \in M$ esetén az x G-pályájának nevezzük a $Gx := \{T_g x \colon g \in G\}$ halmazt.*

Legyen adott $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_d) \in \mathbb{R}^d$, és tekintsük $\mathbb{R}^d$-ben az α-ra ortogonális g vektorok $\mathbb{R}^{d-1}$-el izomorf additív G csoportját. Hasson $\mathbb{R}^d$-n a G csoport a következőképpen: $\forall g \in G, x \in \mathbb{R}^d$-re
$$T_g x = g + x.$$
$\mathbb{R}^d$-t faktorizálva $\mathbb{Z}^d$ szerint végül is $\mathbb{T}^d$-n kapunk egy G-hatást. Bizonyítsuk be, hogy

(1) G-nek csak akkor van $\mathbb{T}^d$-ben sűrű pályája, ha az α koordinátái között van kettő lineárisan független (és akkor minden pálya sűrű);

(2) Az előbbi feltétel mellett a pályák aszimptotikusan egyenletes eloszlásúak (mit is jelent ez?);

(3) ** *Legyen adott $U \subset \mathbb{R}^d$ nyílt halmaz. Bizonyítsuk be, hogy van olyan véges F halmaza az α-knak, hogy ha $\alpha \notin F$, akkor $G = G_\alpha$ minden pályája metszi az U halmazt.*

A 3.4. Tétel bizonyításában döntő szerepe volt a forgatás következő, (3.5)-ben kihasznált tulajdonságának: ha két fázispont távolsága $< \delta$, akkor ez érvényes marad összes képeikre is! A *kezdeti feltételekre való érzéketlenség*, amely itt igen erős és egyenletes, dinamikai rendszerek stabil viselkedésének alapvető jellemzője. Az 5. fejezetben látni fogjuk, hogy a körvonal forgatása, bár ergodikus, de az ennél valamivel erősebb keverő tulajdonsággal már nem rendelkezik.

4. Stacionárius sorozatok mint dinamikai rendszerek, Bernoulli-sorozatok

Legyen $M = E^{\mathbb{Z}}$ (vagy $M = E^{\mathbb{Z}_+}$) ahol E véges vagy megszámlálható halmaz. $x \in M$ tehát így írható: $x = (\dots, x_{-1}, x_0, x_1, \dots)$. *Hengerhalmaznak* nevezzük a $H \subset M$ részhalmazt, ha alkalmas $\ell \geq 1$-re, $i_1 < i_2 < \dots < i_\ell$ indexekre és $E_1, \dots, E_\ell \subset E$ részhalmazra

$$H = \{x \in M \colon x_{i_1} \in E_1, \dots, x_{i_\ell} \in E_\ell\}.$$

Jelölje $\mathscr{F}$ a hengerhalmazok által generált σ-algebrát, és legyen μ valószínűségi mérték $\mathscr{F}$-en. (Szokás általánosabban hengerhalmaznak nevezni a

$$H = \{x \in M \colon (x_{i_1}, \dots, x_{i_\ell}) \in E\}$$

halmazokat, ahol $E \subset E^\ell$ tetszőleges mérhető részhalmaz. Az ezek által generált σ-algebra természetesen ugyancsak $\mathscr{F}$.)

4.1. DEFINÍCIÓ *A μ mérték stacionárius, ha tetszőleges H hengerhalmazra és $\forall k \in \mathbb{Z}$-re*

$$\mu\{x_{i_1} \in E_1, \dots, x_{i_\ell} \in E_\ell\} = \mu\{x_{i_1+k} \in E_1, \dots, x_{i_\ell+k} \in E_\ell\}.$$

4.2. DEFINÍCIÓ *A $(Tx)_i = x_{i+1}$ összefüggéssel értelmezett $T \colon M \to M$ automorfizmust bal-eltolásnak (bal-shiftnek) nevezzük. Analóg módon értelmezhető a T bal-eltolás, ha $M = E^{\mathbb{Z}_+}$, amely ekkor csak endomorfizmus, mert nyilvánvaló módon nem invertálható.*

Könnyű látni, hogy az $(M, \mathscr{F})$-en adott μ mérték csak akkor stacionárius, ha invariáns a T bal-eltolásra nézve.

Hasonlóan értelmezhetjük az $M = E^{\mathbb{Z}_+}$ téren is a bal-eltolást, amely most endomorfizmus.

4.3. DEFINÍCIÓ *Ha a μ stacionárius mérték egyúttal szorzatmérték, azaz $\forall \ell, i_1 < \dots < i_\ell, E_1, \dots, E_\ell$ választásra*

$$\mu\{x_{i_1} \in E_1, \dots, x_{i_\ell} \in E_\ell\} = \prod_{j=1}^{\ell} \mu\{x_{i_j} \in E_j\},$$

akkor a 4.2. Definícióban definiált automorfizmust Bernoulli-automorfizmusnak nevezzük. (Analóg a Bernoulli-endomorfizmus fogalma.)

Az 1.10. Példában már szó esett a $T \colon [0,1) \to [0,1)$ $Tx = \{2x\}$ bináris leképezésről. Legyen $x \in [0,1)$ bináris előállítása $x = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{x_i}{2^{i+1}}$, amit szimbolikusan így írhatunk: $x = (x_0, x_1, \dots)$. Könnyű látni, hogy akkor $Tx = (x_1, x_2 \dots)$, azaz T ugyanúgy hat mint a bal-eltolás. Pontosabban:

4.4. DEFINÍCIÓ *Az $(M_i, \mathscr{F}_i, \mu_i, T_i)$: $i = 1,2$ endomorfizmusokat izomorfaknak (konjugáltaknak) nevezzük, ha $\exists M_i' \subset M_i$, hogy $\mu_i(M_i \setminus M_i') = 0$ és $\exists \varphi \colon M_1' \to M_2'$ 1-1 értelmű leképezés, hogy $\forall A_i \subset M_i'$, $A_i \in \mathscr{F}_i$ $(i = 1,2)$-re*

$$\mu_1(\varphi^{-1}A_2) = \mu_2(A_2) \quad (*) \text{ és } \mu_2(\varphi A_1) = \mu_1(A_1)$$

továbbá M_1'-n áll: $\varphi T_1 = T_2 \varphi \quad (*)$ és M_2'-n áll: $T_1 \varphi^{-1} = \varphi^{-1} T_2$.

A fenti tulajdonságot szokás kommutatív diagramban is ábrázolni:

$$\begin{array}{ccc} M_1 & \xrightarrow{T_1} & M_1 \\ \downarrow \varphi & & \downarrow \varphi \\ M_2 & \xrightarrow{T_2} & M_2 \end{array}$$

4.5. MEGJEGYZÉS Amennyiben φ nem invertálható, és az utóbbi relációpárok közül csak a (*)-gal jelzetteket követeljük meg, akkor az endomorfizmusokat szemi-konjugáltaknak nevezzük.

Legyen speciálisan $M_1 = [0,1)$, $M_2 = \{0,1\}^{\mathbb{Z}_+}$, $T_1 x = \{2x\}$, $T_2(x_0, x_1, \ldots) = (x_1, x_2, \ldots)$, μ_1 a Lebesgue-mérték és μ_2 az $\left(\frac{1}{2}\delta_0 + \frac{1}{2}\delta_1\right)$ mértékek szorzata. Ekkor könnyű látni, hogy a két endomorfizmus izomorf. Az izomorfia fogalmára vonatkozólag könnyű gyakorlat:

4.6. LEMMA *Ergodikusnak lenni izomorfia-invariáns tulajdonság.*

Így a bináris leképezés ergodicitása következni fog egy általános tételből.

4.7. TÉTEL *Minden Bernoulli-endomorfizmus (-automorfizmus) ergodikus.*

Térjünk rá a 4.7. Tétel bizonyítására. Előrebocsátunk egy egyszerű feladatot.

4.8. FELADAT *A mérhető halmazok $\sigma-$algebráján*

$$\rho(X,Y) = \mu(X \Delta Y) \tag{4.1}$$

szemi-metrika (azaz $\rho(X,Y) = 0$-ból nem feltétlen következik $X = Y$). Ugyanakkor az egymástól nullmértékű halmazban különböző mérhető részhalmazok ekvivalencia-osztályain már a fenti ρ metrika.

BIZONYÍTÁS Legyen $A \in \mathscr{I}$. A mértékelméletből (vagy a valószínűségszámításból) jól ismert a következő approximációs tulajdonság: $\forall A \in \mathscr{F}$-hez és $\forall \varepsilon > 0$-hoz található olyan $\ell \in \mathbb{Z}_+$ és $A_\ell \in \mathscr{F}$ hengerhalmaz, amely ilyen alakú: alkalmas $\tilde{A}_\ell \subset E^{\ell+1}$-lel

$$A_\ell = \{x \in M \colon (x_0, x_1, \ldots, x_\ell) \in \tilde{A}_\ell\} \tag{4.2}$$

és emellett $\mu(A \Delta A_\ell) < \varepsilon$ (azaz a szorzattér bármely mérhető halmaza tetszőlegesen jól közelíthető (véges tartójú) hengerhalmazzal). A stacionaritás következtében $\mu(T^{-n}A \Delta T^{-n}A_\ell) < \varepsilon$ $(n \in \mathbb{Z}_+)$. Ha $A \in \mathscr{I}$, akkor

$$\mu(A) = \mu(A \cap T^{-n}A) = \mu(A_\ell \cap T^{-n}A_\ell) + [\mu(A \cap T^{-n}A) - \mu(A_\ell \cap T^{-n}A_\ell)]. \tag{4.3}$$

Mármost $|\mu(X\cap Y)-\mu(U\cap V)|\le \mu(X\Delta U)+\mu(Y\Delta V)$ (amiből valójában az következik, hogy $\mu(X\cap Y)$ mindkét változójában folytonos) miatt

$$|\mu(A\cap T^{-n}A)-\mu(A_\ell\cap T^{-n}A_\ell)|\le \mu(A\Delta A_\ell)+\mu(T^{-n}(A\Delta A_\ell))<2\varepsilon \tag{4.4}$$

így

$$|\mu(A)-\mu(A_\ell\cap T^{-n}A_\ell)|<2\varepsilon.$$

Azonban elég nagy n-re, egészen pontosan $n>l$-re – használva, hogy T Bernoulli-eltolás – $\mu(A_\ell\cap T^{-n}A_\ell)=(\mu(A_\ell))^2$, ezért $\forall\varepsilon>0$-ra

$$|\mu(A)-(\mu(A))^2|<|\mu(A)-(\mu(A_\ell))^2|-|(\mu(A))^2-(\mu(A_\ell))^2|<2\varepsilon+2\varepsilon=4\varepsilon.$$

Tehát $\mu(A)=0$ vagy 1. □

A 4.6. Lemmából és a 4.7. Tételből adódik a

4.9. KÖVETKEZMÉNY A bináris leképezés ergodikus.

Analóg módon tárgyalható a

4.10. PÉLDA (A PÉK AUTOMORFIZMUSA) Itt $M=[0,1)^2$, μ a Lebesgue-mérték, és $(u,v)\in M$-re

$$T_1(u,v):=\begin{cases}(\{2u\},v/2) & \text{ha } \ 0\le u<1/2\\ (\{2u\},\dfrac{v+1}{2}) & \text{ha } \ 1/2\le u<1.\end{cases}$$

A leképezés így hat: először az egységnégyzetet az u-tengely irányában 2-szeresére nyújtjuk, és egyúttal a v-tengely irányában 1/2-szeresére zsugorítjuk (a terület invariáns marad!), majd a kapott téglalapnak az egységnégyzetből kilógó felét annak felső felébe toljuk párhuzamosan. (A pék megközelítőleg valami ilyet csinál.) A T_1 automorfizmus a *pék automorfizmusa*.

Tekintsük a következő Bernoulli-eltolást: $M=\{0,1\}^{\mathbb{Z}}$, μ ismét az $(\frac{1}{2}\delta_0+\frac{1}{2}\delta_1)$ mértékek szorzata, és T_2 a bal-eltolás. Könnyű látni, hogy a

$$\phi((\dots,x_{-1},x_0,x_1,\dots))=\left(\sum_{i=0}^{\infty}\frac{x_i}{2^{i+1}},\sum_{i=1}^{\infty}\frac{x_{-i}}{2^i}\right)$$

egyenlettel értelmezett $\phi: M_2\to M_1$ leképezés izomorfia, ezért 4.6. Lemmából és a 4.7. Tételből ismét adódik a

4.11. KÖVETKEZMÉNY A pék automorfizmusa ergodikus.

Az ergodicitás itt 4.7. Tételből jön. Lehetséges más bizonyítás is, amely a geometriai képen alapszik, nevezetesen azon, hogy a pék automorfizmusa az egyik irányban nyújt, a másikban zsugorít. Ezt a mechanizmust *hiperbolikus viselkedésnek* nevezzük. Eberhard Hopf ezt kihasználó geometriai módszerét a 7. fejezetben tárgyaljuk.

Befejezésül még egy megjegyzés. Fenti módszerünk így is értelmezhető: a számunkra érdekes dinamikák (bináris leképezés, a pék automorfizmusa, ...) helyett a sorozatok terén keresünk velük izomorf eltolást. Ez utóbbi gyakran áttekinthetőbb objektum, általános struktúra, és tanulmányozásához felhasználhatóak pl. az algebra, a kombinatorika, valamint

— a mérték stacionaritása miatt — a valószínűségszámítás, sőt az információelmélet illetve a statisztikus fizika (egydimenziós rendszerek) eredményei is. Fontossága miatt az objektumnak, illetve a módszernek külön neve van: *szimbolikus dinamika*. A módszert a 70-es években Bowen, Ruelle és Sinai alapozták meg, és azóta is rendkívül széles körben alkalmazzák a dinamikai rendszerek tanulmányozása során.

Végül megemlítünk a $\mathscr{I}$ σ-algebra mellett egy másik fontos σ-algebrát, az ún. *farok σ-algebrát*. A fogalom motivációja a független valószínűségi változókra vonatkozó Kolmogorov-féle $0-1$ törvény. Legyen $\{X_i, i \in \mathbb{Z}\}$ független, azonos eloszlású valószínűségi változók sorozata, és jelölje minden $k \in \mathbb{Z}$ esetén $\mathscr{F}_k = \sigma(\dots, X_{k-1}, X_k)$, a legszűkebb σ algebrát, melyre az X_i, $-\infty < i \le k$ valószínűségi változók mindegyike mérhető. Ekkor (i) $\mathscr{F}_{k-1} \subset \mathscr{F}_k$, (ii) az $\mathscr{F} = \bigvee_{k=0}^{\infty} \mathscr{F}_k$ σ-algebrára nézve minden, a valószínűségi változó sorozatra vonatkozó esemény mérhető, (iii) a $\mathscr{T} = \bigcap_{k=0}^{\infty} \mathscr{F}_{-k}$ farok-σ-algebra triviális (épp ezt mondja a Kolmogorov-féle $0-1$ törvény).

4.12. DEFINÍCIÓ *Az $(M, \mathscr{F}, \mu, T)$ Bernoulli-endomorfizmus $\mathscr{T}$ farok σ-algebrája*

$$\mathscr{T} := \bigcap_{n \ge 0} \mathscr{F}_n,$$

ahol $\mathscr{F}_n$ a következő típusú H hengerhalmazok által generált σ-algebra: alkalmas $\widetilde{H} \in E^{\ell+1}$-re

$$H := \{x \in M\colon (x_n, x_{n+1}, \dots, x_{n+\ell}) \in \widetilde{H}\}.$$

Automorfizmusok esetén $\mathscr{T}$ mellett létezik még T^{-1} $\mathscr{T}^{-}$-farok σ-algebrája is, amely nem feltétlenül azonos $\mathscr{T}$-vel.

Igen hasznos az egyszerű

4.13. LEMMA $\mathscr{I} \subset \mathscr{T}$.

BIZONYÍTÁS Valóban, ha $A \in \mathscr{I}$, akkor alkalmas $\widetilde{A} \in E^{\mathbb{Z}_+}$-ra

$$A = \{x \in M\colon (x_0, x_1, \dots,) \in \widetilde{A}\}.$$

Azonban $\forall n \ge 0$-ra $A = T^{-n}A$ (mod 0), vagyis

$$A = \{x \in M\colon (x_n, x_{n+1}, \dots) \in \widetilde{A}\} \qquad (\text{mod } 0).$$

Tehát $\forall n \ge 0$-ra $A \in \mathscr{F}_n$, következésképp $A \in \mathscr{T}$. □

A lemma jelentősége abban áll, hogy bizonyos esetekben $\mathscr{T}$ trivialitása is igaz, sőt ezt könnyebb közvetlenül bizonyítani mint $\mathscr{I}$-ét (lásd 4.7. Tétel bizonyítását).

Egy megjegyzés a bináris leképezésről

Korábban a bináris leképezést kétféle felfogásban is tekintettük: egyrészt mint a $[0,1]$ intervallum, másrészt mint a körvonal endomorfizmusát és mindkét objektumot azonosítottuk $[0,1)$-gyel. Az előbbi esetben a leképezés szakadásos, a másodikban sima (más az intervallum és más a körvonal topológiája!). Ha a körvonalat (1-re normált, így 1 periódusú) szögváltozó értelmezési tartományának fogjuk fel, akkor tehát a 1.10. Példabeli jelöléssel élve $f(\theta) = 2\theta$. Ezt a leképezést kiterjeszthetjük a sík leképezésévé a következőképpen: legyenek r, θ polár-koordináták, és legyen

$$f^*(r,\theta) := (r^{\frac{1}{2}}, 2\theta).$$

$r = 1$-t helyettesítve azt látjuk, hogy $f^*(1,\theta) = (1,2\theta) = (1, f(\theta))$.

4.14. PÉLDA Hogyan viselkednek $n \to \infty$ esetén az $(f^*)^n(r,\theta)$ pályák?

5. Keverés és kinetika

Célunk a *keverés* fogalmának bevezetése, amely az ergodicitásnál valamivel erősebb sztohasztikus tulajdonság. Fontos alkalmazása: biztosítja a szóbanforgó dinamikai rendszer egyensúlyhoz való tartását alkalmas kezdeti mértékek esetén (ezt nevezik a *kinetika* problémájának).

Az ergodtételekből folyik, hogy az $(M, \mathscr{F}, \mu, T)$ ergodikus endomorfizmusra $f \in L_2$ esetén

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f(T^k x) = \int f \, \mathrm{d}\mu = c \tag{5.1}$$

teljesül μ-m.m. $x \in M$-re és L_2-értelemben is. Lévén $g \in L_2$-re $\|(A_n f)g - cg\|_1 \leq \|A_n f - c\|_2 \, \|g\|_2$, (5.1)-ből egyúttal

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \int f(T^k x) g(x) \, \mathrm{d}\mu = \int f \, \mathrm{d}\mu \int g \, \mathrm{d}\mu \tag{5.2}$$

is következik.

5.1. LEMMA *(5.2) ekvivalens T ergodicitásával.*

BIZONYÍTÁS Valóban, legyen $A \in \mathscr{I}$, $f = g = \chi_A$. Akkor (5.2)-ből kapjuk: $\mu(A \cap A) = \mu(A) \cdot \mu(A)$, ahonnan $\mu(A) = 0$ vagy 1. □

5.2. DEFINÍCIÓ *A T endomorfizmus keverő, ha $\forall f, g \in L_2$ párra*

$$\lim_{n\to\infty} \int f(T^n x) g(x) \, \mathrm{d}\mu = \int f \mathrm{d}\mu \int g \, \mathrm{d}\mu.$$

Standard gondolattal igaz az

5.3. LEMMA *A T endomorfizmus csak akkor keverő, ha $\forall A, B \in \mathscr{F}$-re*

$$\lim_{n\to\infty} \mu(A \cap T^{-n} B) = \mu(A)\mu(B).$$

Innen egyszerűen adódik az

5.4. LEMMA

(1) *Keverőnek lenni izomorfia-invariáns tulajdonság.*

(2) *A keverésből következik az ergodicitás.*

BIZONYÍTÁS (1) a definíció közvetlen következménye. (2) így látható be: a keverésből azonnal következik (5.2), így az 5.1. Lemma miatt az ergodicitás is. □

Keverő leképezések alappéldái a Bernoulli-endomorfizmusok.

5.5. Tétel *Minden Bernoulli-endomorfizmus (automorfizmus) keverő.*

Bizonyítás 4.7. Tétel bizonyításának módszere a keverést is kiadja. Valóban, az ott is használt approximációs tulajdonság miatt $\forall A, B \in \mathscr{F}$-re és $\forall \varepsilon > 0$-ra van (4.2) alakú A_ℓ illetve B_ℓ, hogy $\mu(A \Delta A_\ell), \mu(B \Delta B_\ell) < \varepsilon$. Ekkor

$$\mu(A \cap T^{-n}B) = \mu(A_\ell \cap T^{-n}B_\ell) + [\mu(A \Delta T^{-n}B) - \mu(A_\ell \Delta T^{-n}B_\ell)] \, .$$

Mármost, ha $n > \ell$, akkor $\mu(A_\ell \cap T^{-n}B_\ell) = \mu(A_\ell)\mu(B_\ell)$, viszont (4.4)-hez hasonlóan

$$|\mu(A \cap T^{-n}B) - \mu(A_\ell \cap T^{-n}B_\ell)| < 2\varepsilon$$

vagyis elég nagy n-re

$$|\mu(A \cap T^{-n}B) - \mu(A)\mu(B)| < 4\varepsilon.$$

Ugyanakkor a körvonal forgatása nem keverő.

5.6. Lemma *Ha α irracionális, akkor T_α nem keverő.*

Bizonyítás Legyen $A = B = I = [a,b] \subset S$ tetszőleges intervallum. $\{n\alpha\}$ sűrű S-en (l. 2.1. Tétel bizonyítása után), így minden ε-hoz található alkalmas n_k részsorozat, mely mentén $|\mu(I \cap T^{-n_k}I) - \mu(I)| < \varepsilon$, ami $0 < \mu(I) < 1$ esetén ellentmondana $\lim_{n\to\infty} \mu(I \cap T^{-n}I) = \mu^2(I)$-nek. □

Nézzük a keverés tulajdonságának egy egyszerű, de fontos alkalmazását. Legyen $(M, \mathscr{F}, \mu, T^{\mathbb{R}_+})$ leképezés-félcsoport, de a $t = 0$ időpontban indítsuk rendszerünket a μ_0 nem-invariáns mértékből. Ekkor $t(> 0)$ időben rendszerünk eloszlása így adható meg: $A \in \mathscr{F}$-re

$$\mu_t(A) = \mu_0\{x\colon T^t x \in A\} = \mu_0(T^{-t}A).$$

Tegyük fel, hogy μ_0 abszolút folytonos az invariáns μ-re nézve, és tegyük fel, hogy $\frac{\mathrm{d}\mu_0}{\mathrm{d}\mu} \in L_2(\mu)$. Ekkor

$$\mu_s(A) = \int_M \chi_A(T^s x)\,\mathrm{d}\mu_0 = \int \chi_A(T^s x)\frac{\mathrm{d}\mu_0}{\mathrm{d}\mu}(x)\,\mathrm{d}\mu.$$

Ha T ergodikus, akkor (5.2) miatt

$$\lim_{t\to\infty} \frac{1}{t}\int_0^t \mu_s(A)\,\mathrm{d}s = \mu(A)\int \frac{\mathrm{d}\mu_0}{\mathrm{d}\mu}(x)\,\mathrm{d}\mu = \mu(A).$$

Sőt, ha T keverő is, akkor

$$\lim_{t\to\infty} \mu_t(A) = \mu(A) \tag{5.3}$$

is áll. Tehát igaz az

5.7. Tétel *Ha a $(M, \mathscr{F}, \mu, T^{\mathbb{R}_+})$ egyensúlyi dinamika keverő, és a μ_0 nem-egyensúlyi kezdeti mértékre $\frac{\mathrm{d}\mu_0}{\mathrm{d}\mu} \in L_2(\mu)$, akkor (5.3) igaz $\forall A \in \mathscr{F}$-re.*

6. A tórusz algebrai automorfizmusa

A d-dimenziós tórusz, $\mathbb{T}^d = \mathbb{R}^d/\mathbb{Z}^d$ kompakt Abel csoport, amelyen továbbra is μ jelöli a Lebesgue-mértéket. (Több itt bevezetendő fogalom kiterjeszthető általában kompakt Abel-csoportokra, amelyeken Haar Alfréd tételének speciális eseteként létezik a csoport-eltolásra (l. 3.8. Példa) invariáns ún. Haar-mérték, mi azonban maradunk a tórusz példájánál.)

6.1. DEFINÍCIÓ *Az* $(\mathbb{T}^d, \mathscr{F}, \mu, T)$ *automorfizmust csoport-automofizmusnak nevezzük, ha*

(i) T *és* T^{-1} *folytonosak,*

(ii) $\forall x, y \in \mathbb{T}^d$*-re* $T(x+y) = Tx + Ty$.

Legyen $A = (a_{jk})_{1\le j,k\le d}$ egész elemű mátrix, amelyre $|\det A| = 1$.

6.2. LEMMA $\mathbb{T}^d$*-nek a*

$$Tx \equiv Ax \qquad (mod\ \mathbb{Z}^d)$$

reláció által értelmezett automorfizmusa csoport-automorfizmus.

BIZONYÍTÁS Jelölje általában $\tilde{x} \in \mathbb{R}^d$ az $x \in \mathbb{T}^d$ elem valamely felemeltjét. Először belátjuk, hogy T jól értelmezett. Ez azonnal adódik abból a feltételből, hogy A elemei egészek. Könnyű látni, hogy T^{-1} is egyértékű. Valóban, $|\det A| = 1$ miatt A^{-1} létezik, sőt elemei egészek. T és T^{-1} folytonossága nyilvánvaló. A $|\det A| = 1$ feltevésből az is folyik, hogy a Lebesgue-mérték invariáns. Befejezésül

$$T(x+y) \equiv A(x+y) = Ax + Ay \equiv Tx + Ty,$$

ahol a $\equiv$ kongruencia mindig (mod $\mathbb{Z}^d$). $\square$

Mielőtt rátérnénk az ergodikus tulajdonságok szisztematikus vizsgálatára, tekintsünk három egyszerű példát, amelyek rávilágítanak arra, hogy a dinamikai viselkedést az A mátrix spektrális tulajdonságai határozzák meg.

6.3. PÉLDA Legyen

$$A_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}; \qquad A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}; \qquad A_1 = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix};$$

és jelöljük a kétdimenziós $\mathbb{T}^2$ tórusz A_i által definiált algebrai automorfizmusát T_i-vel ($i = 1,2,3$).

Az A_1 mátrix elliptikus: két sajátértéke, $\lambda_{1,2} = \pm i$, a komplex egységkörön helyezkedik el. A T_1 transzformációra nézve minden $x \in \mathbb{T}^2$ pont periodikus, mégpedig 1 vagy 4 periódussal. Következésképp T_1 nem ergodikus a Lebesgue-mértékre nézve.

Az A_2 mátrix parabolikus: csak egy sajátértéke van, a mátrix a $\lambda_1 = 1$ -hez tartozó $2\cdot 2$-es Jordan blokk. A T_2 transzformációval már találkoztunk: a körgyűrű 1.3. Példában említett fogatásának egy speciális esetéről van szó (csak az a különbség, hogy a körgyűrű helyett most a tórusz topológiájában tekintjük ugyanazt a leképezést). Speciálisan, a tórusz $(x_1, x_2) = x \in$

$\mathbb{T}^2$ pontjaira az $x_2 = \text{const}$ körvonalak invariánsak: ezeken T_2 egy x_2 szögű forgatásként hat. így T_2 sem ergodikus a Lebesgue-mértékre nézve.

Végül az A_3 mátrix hiperbolikus: sajátértékei diszjunktak a komplex egységkörtől. T_3 Arnold híres macska leképezése, az alábbiakban belátjuk, hogy ez az automorfizmus ergodikus, sőt, keverő.

Az alábbiakban a Fourier-analízis eszközével szükséges és elégséges feltételt adunk a tórusz algebrai automorfizmusának ergodicitására.

6.4. DEFINÍCIÓ *A $\chi: \mathbb{T}^d \to \mathbb{C}$ nem azonosan eltűnő, folytonos függvényt karakternek nevezzük, ha $\forall x, y \in \mathbb{T}^d -$ re*

$$\chi(x+y) = \chi(x)\chi(y).$$

6.5. KÖVETKEZMÉNY (A 6.4. DEFINÍCIÓ EGYSZERŰ KÖVETKEZMÉNYEI)

1. $\forall \chi$ karakterre $\chi(0) = 1$, ugyanis $\chi(0) = 0$-ból $\chi(x) \equiv 0$ adódna.

2. $\forall \chi_1, \chi_2$ karakter-párra $\chi_1 \chi_2$ is karakter.

3. Az összes karakter ilyen alakú:

$$\chi_n(x) = \exp(2\pi i(n, x))$$

ahol $n \in \mathbb{Z}^d$ (ezek ugyanis a Cauchy-függvényegyenlet folytonos megoldásai).

4. Az $\widehat{\mathbb{T}^d} := \{\chi_n : n \in \mathbb{Z}^d\}$ csoportot *duális csoportnak* nevezzük.

5. $\int\limits_{S^d} \chi_n(x)\mu(dx) = \delta_{0,n}$.

6. A karakterek teljes ortonormált rendszert alkotnak $L_2(\mathbb{T}^d, \mu)$-ben, ahol a skalárszorzat $\langle \phi, \psi \rangle := \int \phi(x)\bar{\psi}(x)\mu(\mathrm{d}x)$. Speciálisan $\langle \chi_n, \chi_m \rangle = \delta_{n-m}$.

7. $\widehat{\mathbb{T}^d}$-n is tekinthetjük az indukált leképezést: $\chi \in \widehat{\mathbb{T}^d}$-re

$$(\hat{T}\chi)(x) := \chi(Tx).$$

$\hat{T}\chi$ valóban karakter, mert

$$(\hat{T}\chi)(x+y) = \chi(T(x+y)) = \chi(Tx)\chi(Ty) = (\hat{T}\chi)(x)(\hat{T}\chi)(y).$$

8. $\hat{T}\chi_n = \chi_{A^* n}$, ahol A^* az A mátrix adjungáltja.

9. $\widehat{\mathbb{T}^d} \subset L_2(\mathbb{T}^d, \mu)$, így valójában $\hat{T}$ a 2. fejezetben használt $\hat{T}: L_2 \to L_2$ leképezés $\widehat{\mathbb{T}^d}$-re való megszorítása, így $\hat{T}$ itt is unitér. (N. B. T így $\hat{T}$ is invertálható.)

10. $\hat{T}(\chi_1.\chi_2) = \hat{T}\chi_1.\hat{T}\chi_2$ és $(\hat{T})^{-1} = \widehat{T^{-1}}$.
Tehát $\hat{T}$ is csoport-automorfizmus.

6.6. TÉTEL *A tórusz T algebrai automorfizmusaira az alábbi tulajdonságok ekvivalensek:*

(i) T ergodikus.

(ii) T keverő.

(iii) $\forall\chi(\not\equiv 1)\in\widehat{S^d}$ karakterre a $\{(\hat{T})^k\chi : k\in\mathbb{Z}\}$ trajektória végtelen, azaz aperiódikus.

(iv) Az A mátrixnak nincs komplex egységgyök sajátértéke.

BIZONYÍTÁS Először megmutatjuk, hogy (i)⇒(iii). Tegyük fel, hogy T ergodikus, de $\exists\chi(\not\equiv 1)\in\widehat{\mathbb{T}^d}$ és $\exists m(\neq 0)\in\mathbb{Z}$, hogy $(\hat{T})^m\chi=\chi$. Legyen $m>0$ a minimális ilyen m. Könnyű látni, hogy

$$f := \frac{1}{m}(\chi+\hat{T}\chi+\cdots+(\hat{T})^{m-1}\chi)$$

invariáns függvény $\mathbb{T}^d$-n. T ergodikus lévén $f=$ const $=c$, viszont akkor a 6.4. Definíció 5. következménye miatt

$$0=\langle c,\chi\rangle=\frac{1}{m}\langle\chi,\chi\rangle,$$

ami azonban pozitív. Ezzel indirekte beláttuk, hogy az indukált trajektória végtelen.

Most megmutatjuk, hogy (iii)⇒(ii). Ehhez elég belátni, hogy $\forall f,g\in L_2^o$-ra (ahol $L_2^o := \{f\in L_2 : \int f d\mu=0\}$)

$$\lim_{n\to\infty}\langle\hat{T}^n f,g\rangle=0. \tag{6.1}$$

Tekintsük f és g Fourier sorait:

$$f=\sum_{k\neq 0}a_k\chi_k, \qquad g=\sum_{k\neq 0}b_k\chi_k.$$

A 6.4. Definíció 6. következménye miatt (6.1)-et elég belátni arra az esetre, amikor f és g Fourier sorai végesek. Viszont

$$\langle\hat{T}^n f,g\rangle=\sum_{k\neq 0}\sum_{\ell\neq 0}a_k b_\ell\langle\hat{T}^n\chi_k,\chi_\ell\rangle.$$

A 6.4. Definíció 5. és 8. következményei miatt $\langle\hat{T}^n\chi_k,\chi_\ell\rangle\neq 0$ kizárólag akkor, ha $\hat{T}^n\chi_k=\chi_\ell$. Feltevésünk miatt azonban ez elég nagy n-re nem fordulhat elő, így elég nagy n-re $\langle\hat{T}^n f,g\rangle=0$.

Mivel a keverés az ergodicitásnál erősebb tulajdonság, a fentiek szerint az (i), (ii) és (iii) tulajdonságok valóban ekvivalensek. Belátjuk még, hogy (iii)⇔(iv), és így egy könnyen ellenőrizhető szükséges és elégséges feltételt kapunk T keverésére. Tegyük fel, hogy $\hat{T}^k\chi_n=\chi_n$ valamilyen nem azonosan nulla $n\in\mathbb{Z}^d$ vektorra és k pozitív egészre. A 6.4. Definíció 8. következménye miatt ez akkor és csak akkor fordul elő, ha $(A^*)^k n=n$. Ez a tulajdonság viszont pontosan azt jelenti, hogy A^*-nak – és ezzel egyidejűleg A-nak – van sajátértéke az egységkörön. □

A 6.3. példa is motiválja a következő definíciót:

6.7. DEFINÍCIÓ *A tórusznak az A mátrix által származtatott* $(\mathbb{T}^d, \mathscr{F}, \mu, T)$ *automorfizmusát hiperbolikusnak nevezzük, ha* $\operatorname{Spec} A \cap \{|z| = 1\} = \emptyset$.

6.6. Tétel közvetlen következménye a

6.8. TÉTEL *Ha a tórusz T algebrai automorfizmusa hiperbolikus, akkor T ergodikus és keverő.*

$d = 2$ esetén vagy mindkét sajátérték az egységkörön van, vagy mindkettő valós és egyikükre $|\lambda_s| < 1$, a másikra $|\lambda_u| > 1$ (itt s a stable, u az unstable szó kezdőbetűje; ennek magyarázatát l. a 7. fejezetben). Az is könnyen meggondolható, hogy $d = 2$ esetén amennyiben az A mátrix sajátértékei az egységkörön helyezkednek el, akkor mindkettő komplex egységgyök, vagyis a kétdimenziós tórusz algebrai automorfizmusaira az ergodicitás a hiperbolicitással ekvivalens. Az alábbi példa mutatja, hogy magasabb dimenzióban ez nincs feltétlenül így.

6.9. PÉLDA Legyen

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Az A mátrixnak pontosan két sajátértéke van az egységkörön, de ezek egyike sem komplex egységgyök. így az A által definiált automorfizmus ergodikus és keverő, de nem hiperbolikus: ez a dinamikai rendszer az úgynevezett parciálisan hiperbolikus rendszerek egyik legegyszerűbb példája.

6.6. Tétel bizonyítása erősen használta a 6.4 tulajdonságokat, amelyek egyik lényeges feltétele volt, hogy T csoport-automorfizmus. A következő fejezetben a tórusz algebrai automorfizmusa ergodicitásának alátámasztására olyan „geometriai” módszert ismertetünk, amely nem használja ki a leképezés, „egzakt” tulajdonságait, ezért messzemenően általalánosítható.

7. Hopf geometriai módszere

A módszert legegyszerűbb a tórusz algebrai automorfizmusának esetére elmondanunk. Közvetlenül csak az ergodicitást adja, a keverést nem, viszont a módszer szoros összefüggésben áll a hiperbolikus dinamikai rendszerek elméletének gyökereivel, és az általános, nem-egzakt esetekben lényegében az egyetlen eszköz ergodicitás igazolására. Tehát igazoljuk a 6.6. Tételnél valamivel gyengébb állítást:

7.1. TÉTEL *A tórusz hiperbolikus algebrai automorfizmusa ergodikus.*

BIZONYÍTÁS Egyszerűség kedvéért legyen $d=2$, vagyis mindkét sajátérték valós és legyen $|\lambda_s|<1$, $|\lambda_u|>1$. Ebben az esetben A-nak vannak $\mathbb{R}^2$-beli sajátvektorai: e_s és e_u. A bizonyítás fontos eszközei a *szűkülő illetve táguló fonalak*.

7.2. DEFINÍCIÓ *A T leképezés $x\in\mathbb{T}^d$ ponton keresztül átmenő szűkülő (stabil) fonala*

$$\gamma^s(x)=\left\{y\in\mathbb{T}^d:\ \lim_{n\to\infty} dist\,(T^n x, T^n y)=0\right\}$$

és táguló (instabil) fonala

$$\gamma^u(x)=\left\{y\in\mathbb{T}^d:\ \lim_{n\to-\infty} dist\,(T^n x, T^n y)=0\right\}.$$

Valójában T stabil (instabil fonala) éppen a T^{-1} leképezés instabil (stabil) fonala. Esetünkben e fonalak könnyen leírhatók:

$$\gamma^s(x)=\{\tilde{x}+t\,e_s(\operatorname{mod}\mathbb{Z}^2):\ t\in\mathbb{R}\}$$
$$\gamma^u(x)=\{\tilde{x}+t\,e_u(\operatorname{mod}\mathbb{Z}^2):\ t\in\mathbb{R}\},$$

tehát ténylegesen mindkettő a tórusz e_s illetve e_u irányú feltekerésének (v.ö. 1.12. Példa) pályája.

Térjünk rá Hopf módszerére. Belátjuk, hogy $\forall f\in C(\mathbb{T}^2)$-re az ergodtételben szereplő $\overline{f}=$ const (itt $C(\mathbb{T}^2)$ az $f:\mathbb{T}^2\to\mathbb{R}$ folytonos függvények halmazát jelöli). Ez valóban elegendő, hiszen $\forall f\in L_2$-höz és $\forall\varepsilon$-ra található $f_\varepsilon\in C(\mathbb{T}^2)$, hogy $\|f-f_\varepsilon\|_2<\varepsilon$. Mármost $\lim_{n\to\infty}A_n f=\prod_{\mathscr{I}} f$ és $\lim_{n\to\infty}A_n f_\varepsilon=\prod_{\mathscr{I}} f_\varepsilon$, ahol $\prod_{\mathscr{I}}$ jelöli az $\mathscr{I}$-re való vetítést L_2-ben. Ha tehát $f_\varepsilon\xrightarrow{L_2} f$, akkor egyúttal $\prod_{\mathscr{I}} f_\varepsilon\xrightarrow{L_2}\prod_{\mathscr{I}} f$, de konstans függvények limesze konstans.

Automorfizmusról lévén szó, hivatkozunk a 2.14. ergodtételre és az 2.15. megjegyzésre: egyrészt μ-m.m. $x\in\mathbb{T}^2$-re $n\to\infty$ esetén

$$\frac{1}{n}(f(x)+f(Tx)+\cdots+f(T^{n-1}x))\to\overline{f}(x)$$
$$\frac{1}{n}(f(x)+f(T^{-1}x)+\cdots+f(T^{-n-1}x))\to\overline{f}^-(x),$$

és $\overline{f}^-=\overline{f}$ áll μ-m.m. x-re. Jelöljük

$$J:=\{x\in\mathbb{T}^2:\ \overline{f}^-(x)=\overline{f}(x)\}.\tag{7.1}$$

Mivel f egyenletesen is folytonos, igazak a következő egyszerű megállapítások:

1. Ha $x,y \in \gamma_s$ és $\overline{f}(x)$ létezik, akkor $\overline{f}(y)$ is létezik, és $\overline{f}(x) = \overline{f}(y)$.

2. Ha $x,y \in \gamma_u$ és $\overline{f}^-(x)$ létezik, akkor $\overline{f}^-(y)$ is létezik, és $\overline{f}^-(x) = \overline{f}^-(y)$.

Igazoljuk 1.-et. f egyenletes folytonossága következtében $\forall \varepsilon > 0$-hoz $\exists \delta > 0$, hogy $|f(x) - f(x')| < \varepsilon$ hacsak $\rho(x,x') < \delta$. Mivel $\rho(T^k x, T^k y) \to 0$, ha $k \to \infty$ (valójában a konvergencia sebessége $|\lambda_s|^k$, vagyis exponenciális), ezért $\rho(T^k x, T^k y) < \delta$, ha $k \geq k_0$. Ekkor

$$\left| \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} (f(T^k x) - f(T^k y)) \right| = \frac{1}{n} \left| \sum_{k=0}^{k_0-1} (\qquad) + \sum_{k=k_0}^{n-1} (\qquad) \right| \leq \frac{2 \max |f| k_0}{n} + \varepsilon < 2\varepsilon,$$

ha n elég nagy.

Könnyű látni, hogy ha $\overline{f}(x)$ és $\overline{f}^-(x)$ $\forall x \in \mathbb{T}^2$-re létezne és egyenlő lenne, akkor 1. és 2. már automatikusan adnák, hogy $\overline{f} = \text{const}$ mindenütt. A bizonyítás hátralevő részében azzal a nehézséggel küzdünk meg, hogy vannak kivételes pontok.

Tekintsünk $\mathbb{T}^2$-n egy elég kis P parallelogrammát, amelynek oldalai párhuzamosak az e_s illetve e_u sajátvektorokkal. Jelölje általában $x \in P$ esetén $\gamma_P^s(x)$ és $\gamma_P^u(x)$ a $\gamma^s(x)$ illetve $\gamma^u(x)$ fonál x-et tartalmazó összefüggő komponensét. Rögzítsünk egy $x_0 \in P$ pontot. Akkor nyilván

$$P = \bigcup_{x \in \gamma_P^u(x_0)} \gamma_P^s(x) = \bigcup_{x \in \gamma_P^s(x_0)} \gamma_P^u(x),$$

ami egyben P direkt szorzat alakban való előállítását is adja: $P = \gamma_P^s(x_0) \otimes \gamma_P^u(x_0)$, sőt a P-n vett Lebesgue-mérték is a tényezőkön vett Lebesgue-mértékek szorzatának konstansszorosa (a konstans $= |\sin \sphericalangle(e_s, e_u)|$). Nevezzük $\gamma_P^s(x)$-t (illetve $\gamma_P^u(x)$-t) *jó fonálnak*, ha majdnem minden pontja $\in J$ (v.ö. (7.1)). Fubini tétele miatt $\gamma_P^u(x_0)$ majdnem minden x pontjára a rajta keresztül átmenő $\gamma_P^s(x)$ fonál jó. Feltehetjük, hogy $\gamma_P^s(x_0)$ jó fonál. Tekintsük a

$$B := \bigcup_{x \in \gamma_P^s(x_0) \cap J} (\gamma_P^u(x) \cap J)$$

halmazt. Egyrészt ismét Fubini tétele miatt $\mu(B) = \mu(P)$, mivel μ-m.m. $x \in \gamma_P^s(x_0)$-ra is a $\gamma_P^u(x)$ fonál jó.

Belátjuk, hogy $\forall y,z \in B$-re $\overline{f}(y) = \overline{f}^-(y) = \overline{f}(z) = \overline{f}^-(z)$, ami rögtön adja, hogy B-n az $\overline{f}(y) = \overline{f}^-(y)$ függvény konstans. Legyen $y \in \gamma_P^u(y') \cap J$, $z \in \gamma_P^u(z') \cap J$, ekkor $y', z' \in \gamma_P^s(x_0) \cap J$, és igaz a következő egyenlőséglánc:

$$\overline{f}(y) = \overline{f}^-(y) = \overline{f}^-(y') = \overline{f}(y') = \overline{f}(z') = \overline{f}^-(z') = \overline{f}^-(z) = \overline{f}(z)$$

(a hét egyenlőség rendre igaz, mert 1. $y \in J$; 2. $y \in \gamma_P^u(y')$; 3. $y' \in J$; 4. $z' \in \gamma_P^s(y')$; 5. $z' \in J$; 6. $z \in \gamma_P^u(z')$; 7. $z \in J$).

A tétel igazsága végül abból adódik, hogy egyrészt $\mathbb{T}^2$ lefedhető véges sok fenti típusú parallelogrammával: $\mathbb{T}^2 \subset \cup P_i$, másrészt azután mindegyik parallelogrammát centrálisan picit nagyítva, és felhasználva, hogy azokon a limesz μ-m.m. konstans, könnyen adódik, hogy ez a konstans minden parallelogrammára ugyanaz. □

7.3. MEGJEGYZÉS Hopf módszere az alapvető módszer kaotikus tulajdonságok: hiperbolicitás, ergodicitás, keverés, ... igazolására. Eberhard Hopf 1938-ban (és 1939-ben G. A. Hedlund is) ezzel a gondolattal mutatta meg kompakt, konstans negatív görbületű felületen adott geodetikus áramlás ergodikus voltát. A módszer páratlan előnye, hogy messzemenően általánosítható. Alkalmazható nemcsak sima leképezésekre, hanem szakadásos leképezésekre is, pl. a pék leképezésére is működik. Ennek ergodicitását ugyan tudjuk abból, hogy izomorf egy Bernoulli-automorfizmussal. Ugyanakkor erre is könnyen megtalálhatók a stabilis és instabil sokaságok, és a módszer működik.

7.4. FELADAT *Keressük meg a pék leképezésére a stabilis és instabil invariáns sokaságokat.*

8. Invariáns mérték létezése

A korábbi fejezetekben jellemzően olyan példákkal találkoztunk, ahol eleve adott volt egy invariáns mérték. Gyakran vetődnek fel olyan példák is, amikor csak az $(M, \mathscr{F}, T)$ hármast ismerjük, és épp az a kérdés, létezik-e egyáltalán T-re invariáns mérték. Viszonylag természetes feltételek esetén garantálja invariáns mérték létezését Krilov–Bogoljubov tétele (8.2. Tétel). Külön érdekes kérdés az invariáns mérték egyértelműsége: jellemzően nagyon sok invariáns mértéket lehet T-hez találni, ilyenkor kérdés, van-e ezek között egy, amelyet valamilyen értelemben „természetesnek” tekinthetünk. Ezt a kérdést a következő fejezetben vizsgáljuk kicsit részletesebben.

Mindenekelőtt azonban nézzük az alábbi híres példát: kicsit szokatlan, hogy T itt nem szürjektív leképezés, de ettől függetlenül tekinthető automorfizmusnak az 1. fejezet definíciója értelmében.

8.1. PÉLDA (A CSALÓ PÉK LEKÉPEZÉSE: A SMALE-PATKÓ.)

Tekintsük az $I^2 = [0,1]^2$ egységnégyzetet. Alkalmazzuk erre először az

$$A = \begin{pmatrix} \frac{5}{2} & 0 \\ 0 & \frac{2}{5} \end{pmatrix},$$

lineáris leképezést, majd a $\left[\frac{3}{2}, \frac{5}{2}\right] \otimes \left[0, \frac{2}{5}\right]$ téglalapot az

$$Fx = \begin{pmatrix} \frac{5}{2} \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} x$$

transzformációval vigyük át az egységnégyzet felső élét érintő $\frac{2}{5}$ szélességű sávba. A két leképezés $T = F \circ A$ szorzata $1-1$ értelmű leképezése az $M_1 = \left(\left[0, \frac{2}{5}\right] \cup \left[\frac{3}{5}, 1\right]\right) \otimes [0,1]$ halmaznak az $M_2 = [0,1] \otimes \left(\left[0, \frac{2}{5}\right] \cup \left[\frac{3}{5}, 1\right]\right)$ halmazba. Az $I^2 \setminus M_1$ téglalapon nem szükséges értelmeznünk T-t, de ha mégis akarjuk, akkor nyilván simán is folytathatjuk T-t (pl. TI^2 lehet éppen patkó alakú is).

Kérdés: milyen invariáns mértékei vannak a T leképezésnek, és ezek közül melyek azok, amelyek valamilyen értelemben természetesek? Mi ezeknek a mértékeknek a tartója?

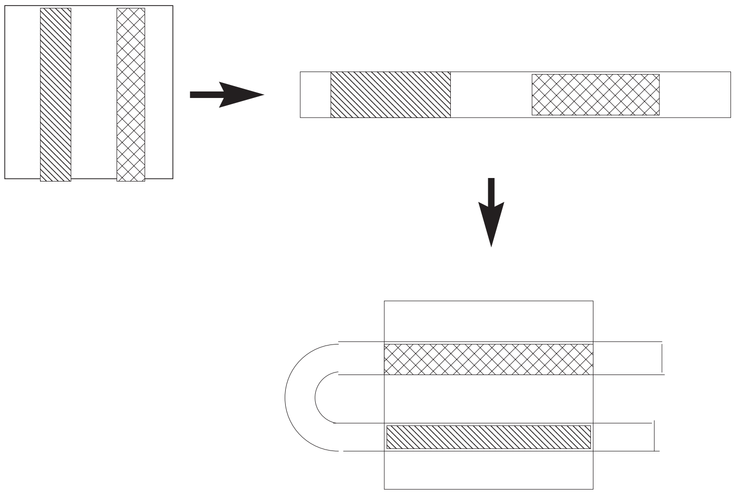
Az adott példa lezárásául még megjegyezzük, hogy a példa legegyszerűbb esete a Smale által az 1960-as években talált ún. *patkó-leképezések*-nek. Példánk esetén valóban létezik egy természetes invariáns mérték, amelynek a tartóját, más néven *különös attraktorát* nevezzük a *P Smale-patkónak*:

$$P = \{x \in I^2 | T^n x \in I^2 \, \forall n \in \mathbb{Z}\}.$$

Meggondolható, hogy P két Cantor halmaz direkt szorzataként áll elő.

Krilov–Bogoljubov-tétel

A legtöbb alkalmazásnál csak a dinamika adott, azaz egy endomorfizmus-félcsoport vagy egy automorfizmus-csoport, viszont a dinamika fázistere valamilyen sima struktúrával is



I.2. ábra. A patkó leképezés

rendelkezik. Így pl. egy differenciálegyenlet-rendszer $\mathbb{R}^n$-en vagy valamilyen M^n sima sokaságon értelmezett; s ha egyáltalán van invariáns mérték, akkor még az is lehet akár sima akár nem. Másrészt rengeteg invariáns mérték is létezhet (ilyenek pl. a periódikus pályaívekre koncentrált mértékek). Invariáns mérték konstrukciójának természetes és klasszikus módszerét adja Krilov és Bogoljubov tétele.

8.2. TÉTEL (KRILOV–BOGOLJUBOV-TÉTEL) *Legyen M kompakt, metrikus tér és $T : M \to M$ folytonos endomorfizmus. Ekkor T-nek van μ invariáns Borel mértéke ($\mu(M) = 1$).*

BIZONYÍTÁS Rögzítsük M tetszőleges x pontját – a konstruálandó invariáns mérték függ ennek a pontnak a megválasztásától – és legyen $\varphi \in C(M)$. Jelöljük $A^n_\varphi = A^n_\varphi(x) = \frac{1}{n}\sum_{j=0}^{n-1}\varphi(T^j x)$. Legyen továbbá $\Phi = \{\varphi_l : l \geq 1\}$ megszámlálható sűrű részhalmaza $C(M)$-nek. (N.B.: ha M kompakt metrikus tér, akkor $C(M)$ szeparábilis; l. pl. Kelley: General Topology, 7. fejezet feladatai.)

Mivel minden φ_l-re az $A^n_{\varphi_l}$ számsorozat korlátos, azért tartalmaz konvergens részsorozatot. Lévén Φ megszámlálható, a Cantor-féle átlós eljárással kiválasztható egy olyan $n_j \to \infty$ részsorozat, hogy minden l-re

$$\lim_{j\to\infty} A^{n_j}_{\varphi_l} = L(\varphi_l).$$

Állítjuk, hogy

- $\lim_{j\to\infty} A^{n_j}_\varphi = L(\varphi)$ létezik minden $\varphi \in C(M)$-re
- és $L(\varphi)$ folytonos és pozitív, lineáris funkcionál $C(M)$-en.

Az első állítás igazolásához rögzített $\varphi \in C(M)$-hez és tetszőleges $\varepsilon > 0$-hoz válasszuk először l-et, hogy $\|\varphi - \varphi_l\| < \varepsilon$. Akkor

$$\left|A_\varphi^{n_j} - L(\varphi_l)\right| \le A_{|\varphi-\varphi_l|}^{n_j} + \left|A_{\varphi_l}^{n_j} - L(\varphi_l)\right|$$

ami $< 2\varepsilon$, ha j elég nagy. Következésképpen $\left\{A_\varphi^{n_j} : j \ge 1\right\}$ Cauchy-sorozat minden $\varphi \in C(M)$-re, így konvergens is. A második állítás innen már egyszerűen következik.

Riesz reprezentációs tétele miatt létezik egy valószínűségi Borel mérték, hogy $L(\varphi) = \int \varphi \, \mathrm{d}\mu$.

Mármost

$$\lim_{j\to\infty} A_{\varphi\circ T}^{n_j} = L(\varphi \circ T) = \int (\varphi \circ T) \, \mathrm{d}\mu.$$

(N.B. Itt, az első egyenlőségnél használjuk, hogy T folytonos!) Viszont

$$\lim_{j\to\infty} \left|A_{\varphi\circ T}^{n_j} - A_\varphi^{n_j}\right| \le \lim_{j\to\infty} \frac{2}{n_j} |\varphi(T^{n_j}x) - \varphi(x)| = 0$$

így

$$\int (\varphi \circ T) \, \mathrm{d}\mu = \int \varphi \, \mathrm{d}\mu$$

tetszőleges $\varphi \in C(M)$-re. A tétel állítása következik az alábbi lemmából.

8.3. LEMMA *μ akkor és csak akkor invariáns a T endomorfizmusra, ha minden $\varphi \in C(M)$-re*

$$\int \varphi \, \mathrm{d}\mu = \int (\varphi \circ T) \, \mathrm{d}\mu. \tag{8.1}$$

BIZONYÍTÁS Jelöljük általában $T_*\mu$-vel a következő mértéket: $\forall A \in \mathscr{F}$-re $T_*\mu(A) = \mu(T^{-1}A)$. Így μ akkor és csak akkor T-invariáns, ha $T_*\mu = \mu$. Egyszerű integrálhelyettesítéssel

$$\int \varphi \, \mathrm{d}(T_*\mu) = \int (\varphi \circ T) \, \mathrm{d}\mu. \tag{8.2}$$

□

Ha tehát μ T-invariáns, akkor (8.1) nyilvánvaló. Valóban: (8.1) nyilván fennáll mérhető halmazok indikátorfüggvényeire, és innen egyszerű approximációs gondolattal már adódik folytonos függvényekre is.

Tegyük fel most (8.1)-t, és legyen U nyílt halmaz, amelyre $\mu(\partial U) = 0$. Válasszuk a χ_U indikátorfüggvényhez folytonos függvények olyan csökkenő φ_n sorozatát, hogy $\varphi_n(x) \searrow \chi_U(x)$ minden $x \notin \partial U$-ra. Valóban, legyen $h_\varepsilon(x) = 1 - \varepsilon^{-1} \min\{\rho(x,U), \varepsilon\}$, és $\varphi_n = h_{\varepsilon_n}$, ahol $\varepsilon_n \to 0$, ha $n \to \infty$. (8.2) áll minden φ_n függvényre, így Beppo Levi tétele miatt χ_U-ra is. Következésképpen minden U nyílt halmazra, amelyre $\mu(\partial U) = 0$, $\mu(U) = \mu(T^{-1}U)$.

Tekintsünk befejezésül egy tetszőleges U nyílt halmazt, valamint annak $F = M \setminus U$ komplementerét. A lemma bizonyításához elegendő belátnunk, hogy $\mu(F) = \mu(T^{-1}F)$. Tekintsük $\delta > 0$-ra az $G^\delta = \{x \in M \mid \rho(x,F) < \delta\}$ ún. paralleltartományokat. Ezek nyíltak, és természetesen megszámlálható sok δ kivételével $\mu(\partial G^\delta) = 0$. Legyenek δ_n-ek ilyenek, és amellett tegyük fel, hogy $\delta_n \searrow 0$. Választásunk miatt $\mu(G^{\delta_n}) = \mu(T^{-1}G^{\delta_n})$. Innen $n \to \infty$ esetén $\bigcap T^{-1}G^{\delta_n} = T^{-1} \cap G^{\delta_n}$ és a mértékek folytonossági tulajdonsága miatt már adódik a lemma. □□

Legyen $(M,\mathscr{F})$ metrikus tér a Borel σ-algebrával, $\mathscr{M}$ a Borel valószínűségi mértékek összessége M-en. Ekkor $\mathscr{M}$ konvex halmaz, azaz $\forall \mu_1,\mu_2 \in \mathscr{M}$ és $0 \le t \le 1$ esetén $t\mu_1 + (1-t)\mu_2 \in \mathscr{M}$. Ismeretes az is, hogy $\mathscr{M}$ extremális pontjai (melyekre csak triviális konvex előállítás lehetséges) éppen a Dirac mértékek.

Legyen most $(M,\mathscr{F},T)$ endomorfizmus, és jelölje $\mathscr{M}_{\text{inv}} \subset \mathscr{M}$ a T-re invariáns Borel valószínűségi mértékek halmazát, és $\mathscr{M}_{\text{erg}} \subset \mathscr{M}_{\text{inv}}$ ezen belül a T-re ergodikus mértékek halmazát. Meggondolható, hogy $\mathscr{M}_{\text{inv}}$ is konvex halmaz (a konvex kombináció nem visz ki $\mathscr{M}_{\text{inv}}$-ből).

8.4. TÉTEL *A $\mathscr{M}_{\text{inv}}$ konvex halmaz extremális pontjainak halmaza éppen $\mathscr{M}_{\text{erg}}$.*

A bizonyítás egyik fele legyen

8.5. FELADAT *Ha μ nem ergodikus, létezik $0 < t < 1$ és $\mu_1 \neq \mu_2$ invariáns, hogy $\mu = t\mu_1 + (1-t)\mu_2$.*

A másik feléhez tegyük fel, hogy μ ergodikus, mégis létezik $\mu = t\mu_1 + (1-t)\mu_2$ nemtriviális felbontás. Ekkor nyilván $\mu_1 \ll \mu$, a sűrűségfüggvényt jelölje $\rho(x) = \frac{d\mu_1}{d\mu}(x)$. $\rho(x) \le 1/t$ μ majdnem mindenütt, ugyanis $\rho(x) > 1/t$ nem lehetséges egy $\mu(A) > 0$ halmazon, hiszen ebből

$$\mu(A) \ge t\mu_1(A) \int_A \rho(x)d\mu(x) > t\frac{1}{t}\mu(A) = \mu(A)$$

következne. Tehát speciálisan $\rho \in L^2(\mu)$. Kihasználva, hogy $\mu_1 \in \mathscr{M}_{\text{inv}}$, tetszőleges $f \in L^2(\mu)$ függvényre adódik

$$\begin{aligned}\langle f,\rho\rangle_\mu &= \int f(x)\rho(x)d\mu(x) = \int f(x)d\mu_1(x) = \int f(Tx)d\mu_1(x) = \\ &= \int (\hat{T}f)(x)\rho(x)d\mu(x) = \langle \hat{T}f,\rho\rangle_\mu\end{aligned}$$

azaz $\hat{T}^*\rho = \rho$. Azonban a Neumann ergodtétel bizonyításánál láttuk, hogy ez $\hat{T}\rho = \rho$-val ekvivalens, azaz $\rho \in L^2(\mu)$ invariáns függvény. Ez azonban μ ergodicitása miatt azt jelenti, hogy ρ (majdnem mindenütt) konstans, és mivel ρ egy valószínűségi mérték sűrűségfüggvénye, $\rho(x) = 1$ μ-m.m. $x \in M$-re. Vagyis $\mu = \mu_1$, és a felbontás triviális.

Megjegyzés: a fenti levezetés során bebizonyítottuk az alábbi hasznos lemmát:

8.6. LEMMA *Legyen $(M,\mathscr{F},T)$ endomorfizmus, $\mu \in \mathscr{M}_{\text{erg}}$, $m \in \mathscr{M}_{\text{inv}}$, és $m \ll \mu$. Ekkor szükségképpen $m = \mu$.*

8.7. FELADAT *Legyen $(M,\mathscr{F},T)$ endomorfizmus, $\mu, m \in \mathscr{M}_{\text{erg}}$ és $\mu \neq m$. Ekkor $\mu \perp m$ (különböző ergodikus mértékek szingulárisak egymásra nézve, azaz a fázistér "diszjunkt részein élnek".)*

8.8. FELADAT *Tekintsük a $T : \mathbb{S}^1 \to \mathbb{S}^1$, $T(x) = x + \varepsilon\sin(2\pi x) \pmod 1$ dinamikai rendszert, ahol $0 < \varepsilon < \frac{1}{2\pi}$ (az $\mathbb{S}^1$ körvonalra szokás szerint gondolhatunk úgy, mit a $[0,1]$ intevallumra, a két végpontot azonosítva). Mi ebben az esetben $\mathscr{M}_{\text{inv}}$ és $\mathscr{M}_{\text{erg}}$?*

Krilov–Bogoljubov tétele szerint, ha $(M, \mathscr{F}, T)$ egy kompakt metrikus tér folytonos endomorfizmusa, akkor $\mathscr{M}_{\text{inv}} \neq \emptyset$ (és következésképp $\mathscr{M}_{\text{erg}} \neq \emptyset$).

8.9. FELADAT *Mutassuk meg, hogy a Krilov–Bogoljubov-tétel feltételei „élesek”: adjunk példát olyan dinamikákra, melyekre $\mathscr{M}_{\text{inv}} = \emptyset$, ha (a) T folytonos és $X = \mathbb{R}$, (b) T folytonos és $X = (0,1)$, (c) T-nek van egy szakadási pontja és $X = [0,1]$.*

Függelék

- **Beppo Levi tétele.** *Legyen (X, μ) mértéktér. Ha az f_n-ek integrálható függvények és $\sup_n \int f_n \, d\mu < \infty$, továbbá $f_n \nearrow f$, akkor f is integrálható és $\int f_n \, \mathrm{d}\mu \to \int f \, \mathrm{d}\mu$.*

- **Riesz reprezentációs tétele.** *Legyen M kompakt metrikus tér. Ha $L\colon C(M) \to \mathbb{R}$ folytonos és pozitív (azaz $\forall \varphi \geq 0$-ra $L(\varphi) \geq 0$) lineáris funkcionál, akkor létezik egyetlen Borel mérték M-en, hogy $\forall \varphi \in C(M)$-re $\int \varphi \, \mathrm{d}\mu = L(\varphi)$.*

9. Markov-leképezések

Ebben a fejezetben egydimenziós leképezésekkel foglalkozunk.

9.1. DEFINÍCIÓ *Az $f\colon [0,1] \to [0,1]$ leképezést Markov-leképezésnek nevezzük, ha létezik diszjunkt nyílt intervallumok véges vagy megszámlálhatóan végtelen rendszere $\{I_j\colon I_j \subset [0,1]\}$, hogy*

a) $m([0,1] \setminus \bigcup_j I_j) = 0$, ahol m a Lebesgue-mérték;

b) $\forall j$-re $f|_{I_j} \in C^1(I_j)$ és
$$f(I_j) = (0,1);$$

c) megadható $\beta > 1$, hogy $|f'(x)| \geq \beta$;

d) megadható $C > 0$ és $0 < \gamma < 1$, hogy minden j-re és minden $x, y \in I_j$-re
$$\left| \frac{f'(x)}{f'(y)} - 1 \right| \leq C|x-y|^{\gamma}.$$

Megjegyzések

1. Mindenütt az alábbiakban f^n jelöli egy leképezés n-edik iteráltját; azaz $f^1 = f$, és $f^n = f \circ f^{n-1}$.

2. A b) tulajdonság az ún. Markov-tulajdonság erős formája, c) jelenti az f leképezés egyenletes hiperbolicitását, míg d) a módszereink számára alapvető disztorziós becslések egyik változata.

3. Példák intervallum-leképezésekre:

   (i) Markov-leképezés az $f(x) = qx - [qx]$, ahol $q \geq 2$ egész szám; (ha $q > 1$ nem egész, akkor a leképezésre ugyan teljesül a), c) és d), azonban nem teljesül a b) Markov-tulajdonság).

   (ii) az $f(x) = \frac{1}{x} - \left[\frac{1}{x}\right]$ Gauss-leképezés (l. 1.8. Példa). (N.B. Itt c) nem áll, viszont a), b) és d) teljesülnek. Valóban d) áll $\gamma \leq \frac{1}{2}$-el. Ugyanis $x, y \in \left(\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n}\right)$ esetén

$$\begin{aligned}
\left|\frac{y^2}{x^2} - 1\right| &\leq (y+x)\frac{1}{x^2}|y-x| \leq \\
&\leq \frac{2}{n}(n+1)^2|y-x|^{1-\gamma}|y-x|^\gamma \leq \\
&\leq \frac{2}{n}(n+1)^2\frac{1}{n^{1-\gamma}(n+1)^{1-\gamma}}|y-x|^\gamma = \\
&= \frac{2}{n^{2-\gamma}}(n+1)^{1+\gamma}|y-x|^\gamma \leq \\
&\leq 2^{2+\gamma}n^{2\gamma-1}|y-x|^\gamma.
\end{aligned}$$

Az elmélet fő eredménye Rényi Alfréd tételének (1957) következő általánosítása:

9.2. TÉTEL *Ha f a $[0,1]$ intervallum Markov-leképezése, és jelöljük m-mel a Lebesgue-mértéket $[0,1]$-n. Ekkor $[0,1]$-en létezik egyetlen olyan m-re abszolút folytonos, f-invariáns valószínűségi mérték μ, amely rendelkezik a következő tulajdonságokkal:*

(i) $\frac{\mathrm{d}\mu}{\mathrm{d}m}$ *Hölder-folytonos;*

(ii) $0 < \inf \frac{\mathrm{d}\mu}{\mathrm{d}m}(x) \leq \sup \frac{\mathrm{d}\mu}{\mathrm{d}m}(x) < \infty$;

(iii) *a μ mértékre nézve f ergodikus;*

BIZONYÍTÁS (A 9.2. TÉTEL BIZONYÍTÁSA.) A Krilov–Bogoljubov-tétel alapgondolatát használva vezessük be az $m_n := f_*^n m$ jelölést, azaz $m_n(A) = m(f^{-n}A)$ minden A Borel–halmazra. A különbség annyi, hogy mivel most az invariáns mérték sűrűségfüggvényét kell megkonstruálnunk, ezért a mértékek gyenge kompaktsága helyett a sűrűségfüggvények kompaktságát biztosító Arzela–Ascoli tételt fogjuk használni.

b) és d) miatt f' Hölder-folytonos, azaz $\forall j$-re $\exists \alpha_j (= \sup_{x \in I_j} f'(x)) < \infty$, hogy $\forall x, y \in I_j$-re $|f'(x) - f'(y)| \leq C\alpha_j |x-y|^\gamma$. Következésképp f mindegyik I_j intervallumot monoton és invertálható módon képezi le $(0,1)$-re.

Vezessük be felbontásoknak a következő finomodó sorozatát:

$$\begin{aligned}
\eta_0 &:= \{(0,1)\}, \\
\eta_1 &:= \{I_j\},
\end{aligned}$$

azaz $\forall I_j$ olyan maximális részintervallum, amelyet f 1-1 értelmű módon és simán képez $(0,1)$-re. Ennek általánosításaképp:

$$\begin{aligned}
&\eta_n := \{I_{j_1,\ldots,j_n}\}, \text{ ahol } \forall I_{j_1,\ldots,j_n} \text{ intervallumra az} \\
&f^n : I_{j_1,\ldots,j_n} \to (0,1) \text{ leképezés homeomorf.}
\end{aligned}$$

Ezt a definíciót ekvivalens módon így is bevezethetjük:

b)-ből következik, hogy $\forall j$-re létezik oly $f_j\colon I_j \to (0,1)$ homeomorf leképezés, hogy $\forall x \in \bigcup_j I_j$-re $f(x) = f_j(x)$ ha $x \in I_j$. Ekkor $x \in I_{j_1,\dots,j_n}$ pontosan azt jelenti, hogy

$$f^n(x) = f_{j_n} \circ f_{j_{n-1}} \circ \ldots \circ f_{j_1}(x).$$

Érdemes megjegyezni, hogy ha $x \in I_{j_1,\dots,j_n}$, akkor $1 \le l \le n$-re $f^l(x) \in I_{j_{l+1},\dots,j_n}$ (persze $I_\emptyset := (0,1)$). Vezessük be a következő jelölést: $x \in I_{j_1,\dots,j_n}$ -re

$$\eta_n(x) := I_{j_1,\dots,j_n}.$$

Könnyű látni, hogy $x \in I_{j_1,\dots,j_n}$-re

$$J_n(x) := |(f^n)'(x)| = |f'_{j_n}(f^{n-1}(x)) \cdot f'_{j_{n-1}}(f^{n-2}(x)) \ldots f'_{j_1}(x)|. \tag{9.1}$$

Most már elkezdhetjük a tulajdonképpeni bizonyítást. Szűkítsük először a fázisteret a reguláris pontok teljes mértékű M_0 halmazára:

$$M_0 := \bigcap_{n\ge 0} \bigcup_{j_1,\dots,j_n} I_{j_1,\dots,j_n}.$$

Nyilvánvalóan M_0 invariáns halmaz (itt erős értelemben, azaz $M_0 = f^{-1}M_0 = fM_0$), és $m(M_0) = 1$. Bizonyításunk a következő fő lépésekből áll:

1. Belátjuk, hogy $\forall x \in (0,1)$-re

$$\frac{\mathrm{d}m_n}{\mathrm{d}m}(x) := S_n(x) := \sum_{y\in f^{-n}(x)} \frac{1}{J_n(y)}. \tag{9.2}$$

Valójában ez (9.1) és az előtte mondottak egyszerű folyománya. (Érdemes felidézni a Ruelle–Perron–Frobenius-operátor fogalmát az 1. fejezetből: az invariáns sűrűségfüggvény éppen ennek az operátornak a fixpontja.)

2. Igazoljuk a következő technikai alap-lemmát:

9.3. LEMMA *Léteznek $C_1, C_2 > 0$, hogy $\forall n > 1$, $\forall x \in M_0$ és $\forall y \in \eta_n(x)$ esetén*

$$\frac{J_n(y)}{J_n(x)} \le \exp\left[C_1 |f^n(x) - f^n(y)|^\gamma\right]$$

továbbá

$$\left|\frac{J_n(y)}{J_n(x)} - 1\right| \le C_2 |f^n(x) - f^n(y)|^\gamma. \tag{9.3}$$

3. Lemmánk egyszerű következménye lesz az

9.4. LEMMA

(i) $\exists K > 0$, *hogy* $\forall n \geq 1$*-re és* $\forall x \in (0,1)$*-re* $S_n(x) \leq K$*;*

(ii) $\forall n \geq 1$*-re és* $\forall x, y \in (0,1)$*-re*

$$|S_n(x) - S_n(y)| \leq S_n(x) C_2 |x-y|^\gamma.$$

4. Az eddigiek alapján mármost így okoskodhatunk:

Jelölje $H_n(x) := \frac{1}{n}\sum_{\ell=0}^{n-1} S_\ell(x)$ $(x \in (0,1))$ az $A_n m$ mérték sűrűségfüggvényét. A 9.4. Lemmából következik: $\forall n \geq 1$-re és $\forall x, y \in (0,1)$-re

$$\sup_{n,x} H_n(x) \leq K, \tag{9.4}$$

$$|H_n(x) - H_n(y)| \leq H_n(x)\, C_2\, |x-y|^\gamma. \tag{9.5}$$

E két tulajdonságból először is adódik, hogy $H_n\colon (0,1) \to \mathbb{R}$ egyértelműen kiterjeszthető egy folytonos $\overline{H}_n\colon M = [0,1] \to \mathbb{R}$ függvénnyé, amelyre továbbra is teljesülnek az (9.4)–(9.5) becslések. Mivel a $\{\overline{H}_n\}$ sorozat egyenletesen korlátos és egyenlő mértékben egyenletesen folytonos az M kompaktumon, az Arzela–Ascoli tétel miatt alkalmas $\{\overline{H}_{n_j}\}$ részsorozata egyenletesen konvergál valamely $H\colon M \to \mathbb{R}$ folytonos függvényhez, amelyre ugyancsak áll:

$$\sup_{x \in M} H(x) \leq K, \tag{9.6}$$

$$|H(x) - H(y)| \leq H(x) C_2 |x-y|^\gamma, \tag{9.7}$$

(9.6)–(9.7)-ből természetesen

$$|H(x) - H(y)| \leq K C_2 |x-y|^\gamma, \tag{9.8}$$

is látszik.

Tételünk állítása adódni fog a következő lemmából:

9.5. LEMMA *A* $\mu(A) = \int_A H(x) m(\mathrm{d}x)$ *mértékre igazak a 9.2. Tétel állításai.*

Térjünk rá lemmáink bizonyítására.

BIZONYÍTÁS (A 9.3. LEMMA BIZONYÍTÁSA) (9.1) és 9.1. Definíció d) pontja alapján

$$\frac{J_n(y)}{J_n(x)} = \left|\prod_{\ell=0}^{n-1} \frac{f'(f^\ell(y))}{f'(f^\ell(x))}\right| \leq \prod_{\ell=0}^{n-1}\left[1 + C|f^\ell(x) - f^\ell(y)|^\gamma\right],$$

$y \in \eta_n(x)$-ból egyúttal $f^\ell(y) \in \eta_{n-\ell}(f^\ell(x))$, így 9.1. Definíció c) pontja miatt

$$|f^\ell(x) - f^\ell(y)| \leq \lambda^{n-\ell} |f^n(x) - f^n(y)|$$

ahol $\lambda = \beta^{-1}$. A $\lambda_1 = \lambda^\gamma$ jelöléssel élve, és ismételten használva a $1+x \le e^x$ egyenlőtlenséget,

$$\frac{J_n(y)}{J_n(x)} \le \prod_{\ell=0}^{n-1}\left[1 + C\lambda_1^{n-\ell}|f^n(x) - f^n(y)|^\gamma\right] \le$$
$$\le \prod_{\ell=1}^{n}\left[1 + C\lambda_1^{\ell}|f^n(x) - f^n(y)|^\gamma\right] \le$$
$$\le \prod_{\ell=0}^{\infty}\left[1 + C\lambda_1^{\ell}|f^n(x) - f^n(y)|^\gamma\right] \le$$
$$\le \exp \sum_{\ell=0}^{\infty} C\lambda_1^{\ell}|f^n(x) - f^n(y)|^\gamma =$$
$$= \exp\left[|f^n(x) - f^n(y)|^\gamma \frac{C}{1-\lambda_1}\right].$$

□

$C_1 = C(1-\lambda_1)^{-1}$ választással adódik az első egyenlőtlenség.

A második igazolásához válasszuk a $B, B' > 0$ konstansokat úgy, hogy $\forall\, 0 \le z \le C_1$-re $\exp z \le 1 + Bz$ és $(1+Bz)^{-1} \ge 1 - B'z$ teljesüljenek. Akkor

$$\frac{J_n(y)}{J_n(x)} \le 1 + BC_1|f^n(x) - f^n(y)|^\gamma,$$

valamint x és y felcserélésével

$$\frac{J_n(y)}{J_n(x)} \ge [1 + BC_1|f^n(x) - f^n(y)|^\gamma]^{-1} \ge 1 - B'C_1|f^n(x) - f^n(y)|^\gamma.$$

Összesítve a két becslést

$$\left|\frac{J_n(y)}{J_n(x)} - 1\right| \le \max\{B, B'\}C_1|f^n(x) - f^n(y)|^\gamma.$$

BIZONYÍTÁS (9.4. LEMMA BIZONYÍTÁSA) Egyszerű integrálhelyettesítéssel $\forall I_{j_1,\dots,j_n}$-re és $\forall y \in I_{j_1,\dots,j_n}$-re

$$1 = m((0,1)) = \int_{I_{j_1,\dots,j_n}} J_n(x)\,\mathrm{d}x = J_n(y) \int_{I_{j_1,\dots,j_n}} \frac{J_n(x)}{J_n(y)}\,\mathrm{d}x \le$$
$$\le J_n(y) \int_{I_{j,\dots,j_n}} \exp\left[C_1|f^n(x) - f^n(y)|^\gamma\right]\mathrm{d}x \le J_n(y)\exp(C_1)m(I_{j_1,\dots,j_n}). \tag{9.9}$$

□

(9.2) alapján annak figyelembevételével, hogy minden egyes $I_{j_1,\dots,j_n}$ intervallum $f^{-n}(x)$ pontosan egy elemét tartalmazza

$$S_n(x) \le \exp C_1.$$

Ezzel (i)-t beláttuk.

(ii) bizonyításához vegyük észre, hogy

$$S_n(x) - S_n(y) = \sum_{z \in f^{-n}(x)} \frac{1}{J_n(z)} - \sum_{z' \in f^{-n}(y)} \frac{1}{J_n(z')}$$

kifejezésben minden egyes $I_{j_1,\dots,j_n}$ intervallumba pontosan 1-1 z illetve z' érték esik, így (9.3) figyelembevételével

$$|S_n(x) - S_n(y)| \leq \sum_{z \in f^{-n}(x)} \frac{1}{J_n(z)} \left| 1 - \frac{J_n(z)}{J_n(z')} \right| \leq C_2 S_n(x)|x-y|^\gamma.$$

BIZONYÍTÁS (9.5. LEMMA BIZONYÍTÁSA.)

(i) következik (9.8)-ból.

(ii) -ben a sup-ra vonatkozó állítás éppen (9.6), míg ha $\inf H(x) = 0$, akkor (9.7)-ből $H(x) \equiv 0$ adódna, ami ellentmondás.

(iii), vagyis az ergodicitás igazolásához gondoljuk meg először, hogy ha $A \in \mathscr{I}$, akkor létezik olyan B, hogy egyrészt $\mu(A\Delta B) = 0$, másrészt $T^{-1}B = B = TB$, azaz B erősen invariáns halmaz, más szóval teljes orbitokból áll. Tegyük fel tehát, hogy A nemtriviális erősen invariáns halmaz. μ és m ekvivalenciája miatt $0 < m(A) < 1$.

Válasszunk egy tetszőleges $\varepsilon > 0$ számot. Lebesgue sűrűségi tétele miatt $\exists I_{j_1,\dots,j_n}$, hogy

$$m(A \cap I_{j_1,\dots,j_n}) > (1-\varepsilon) m(I_{j_1,\dots,j_n})$$

azaz

$$m(I_{j_1,\dots,j_n} \setminus A) < \varepsilon m(I_{j_1,\dots,j_n}).$$

Lévén $f^n I_{j_1,\dots,j_n} = [0,1]$, ezért, $1 = \int J_n(x)\,\mathrm{d}x$. A középértéktételből adódik, hogy $\exists \xi \in I_{j_1,\dots,j_n}$, amelyre $J_n(\xi) = m\left(I_{j_1,\dots,j_n}\right)^{-1}$.

Így

$$\max_{x \in I_{j_1,\dots,j_n}} J_n(x) = J_n(\xi) \max_{x \in I_{j_1,\dots,j_n}} \frac{J_n(x)}{J_n(\xi)} \leq \frac{e^{C_1}}{m(I_{j_1,\dots,j_n})}.$$

Tehát

$$m\left([0,1] \setminus A\right) = \int_{I_{j_1,\dots,j_n} \setminus A} J_n(x)\,\mathrm{d}x \leq \frac{e^{C_1}}{m(I_{j_1,\dots,j_n})} m(I_{j_1,\dots,j_n)} \setminus A) \leq$$
$$\leq \frac{e^{C_1}}{m(I_{j_1,\dots,jx_n})} \varepsilon m(I_{j_1,\dots,j_n}) = \varepsilon e^{C_1} \qquad \square$$

Ez igaz minden $\varepsilon > 0$-ra, ezért $m(A) = 1$, ellentmondás.

Befejezésül térjünk rá a tételben szereplő abszolút folytonos invariáns mérték unicitására. Tegyük fel indirekte, hogy az általunk konstruált μ mellett van még egy $\nu \neq \mu$, a Lebesgue-mértékre nézve abszolút folytonos invariáns mérték. Mivel μ sűrűsége pozitív, azért ν is abszolút folytonos μ-re. Jelölje $\rho = \frac{\mathrm{d}\nu}{\mathrm{d}\mu}$. Tetszőleges $h \in L_\infty(\mu)$-re igaz:

$$\int \rho h \,\mathrm{d}\mu = \int h \,\mathrm{d}\nu = \int h \circ T \,\mathrm{d}\nu = \int \rho (h \circ T) \,\mathrm{d}\mu = \int (\rho \circ T^{-1}) h \,\mathrm{d}\mu$$

ahol használtuk mind ν, mind μ invarianciáját. Innen $\rho \circ T^{-1} = \rho$ μ-m. m., azaz ρ invariáns függvény. μ ergodicitása miatt ezért $\rho \equiv$ const. Azonban lévén μ és ν valószínűségi mértékek, azért $\rho \equiv 1$, vagyis $\mu = \nu$. □

Függelék

- **Hölder-folytonos függvények**. Legyenek (M,d), (M',d') metrikus terek. Az $f : M \to M'$ leképezés Hölder-folytonos az $x \in M$ pontban, ha megadhatók $C > 0$ és $0 < \gamma < 1$ konstansok és $x \in U \subset M$ környezet, hogy $\forall y,z \in U$-ra

$$d'(f(y), f(z)) \leq C d(y,z)^\gamma \,.$$

(A jól ismert Lipschitz-tulajdonság épp az analóg követelmény $\gamma = 1$-gyel.)

- 9.6. Tétel (Arzela–Ascoli tétel) *Jelölje $C(M)$ az (M,d) kompakt metrikus téren értelmezett $M \to \mathbb{R}$ folytonos függvények halmazát. Az $F \subset C(M)$ részhalmaz akkor és csak akkor kompakt, ha*

  (i) F zárt;

  (ii) $\forall x \in M$-re az $F[x] := \{f(x) : f \in F\}$ $(\subset \mathbb{R})$ halmaz korlátos;

  (iii) az F-beli függvények egyenlő mértékben egyenletesen folytonosak (azaz $\forall \varepsilon > 0$-hoz $\exists \delta > 0$, hogy $\forall f \in F$-re és $\forall x,y \in M$-re $d(x,y) < \delta$-ból $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$ következik).

- **Felbontás**. Legyen $(M, \mathscr{F}, \nu)$ valószínűségi mező. Pozitív mértékű halmazoknak egy megszámlálható $\mathscr{P} = \{A\}$ családját felbontásnak nevezzük, ha (i) $A \neq B \in \mathscr{P}$-ből következik $\nu(A \cap B) = 0$; (ii) $\nu(M \setminus \bigcup_{A \in \mathscr{P}} A) = 0$.

- **Lebesgue sűrűségi tétele**. Az $A \subset \mathbb{R}$ Borel-halmaznak az $x \in \mathbb{R}$ pont sűrűségi pontja, ha tetszőleges $\{I_n\}$ $(x \in I_n)$ intervallumsorozatra $\lim_{n \to \infty} m(A \cap I_n)/m(I_n) = 1$. Állítás: Az A halmaz m-majdnem minden pontja A-nak sűrűségi pontja.

10. Kolmogorov–Arnold–Moser-tétel

A tételt a legegyszerűbb esetre mondjuk ki és bizonyítjuk: a körgyűrű sima forgatásának kis perturbációjára.

Jelölje $A := (\mathbb{R}/(2\pi\mathbb{Z})) \times [a,b] = \{(x,y)\colon 0 \le x < 2\pi, \alpha \le y \le b\}$ a körgyűrűt (annulust), ahol $0 < a < b$. Tekintsük ennek sima, monoton forgatását, azaz a $T_0\colon A \to A$

$$T_0(x,y) := (x+\gamma(y), y)$$

leképezést, ahol $\gamma \in C^1$ és $\gamma'(y) > 0$, továbbá legyen a $T\colon A \to A$ diffeomorfizmus

$$T(x,y) := (x+\gamma(y)+f(x,y), y+g(x,y))$$

ennek kis perturbációja. Az ilyen leképezéseket „twist”-leképezéseknek nevezzük. Az egyszerűség kedvéért azonnal feltesszük, hogy $\gamma(y) = \gamma \cdot y$.

A T_0 leképezésre nézve nyilván valamennyi $S_y := \{(x,y)\colon 0 \le x < 2\pi\}$, $y \in [a,b]$ körvonal invariáns, T_0 mindegyiken forgatás; S_y-n a forgatási szám (amely mindig 1-re normált) $\frac{1}{2\pi}\gamma y$. Másszóval, a T_0 leképezés teljesen integrálható, és mindegyik S_y ún. invariáns tórusz. Az alapkérdés az, mi történik az invariáns tóruszoknak ezzel a „jólfésült” strukturájával a T leképezésnél, ahol f és g megfelelően kicsik?

Már Poincaré észrevette, hogy azok az invariáns tóruszok, ahol $\omega = \frac{1}{2\pi}\gamma y$ racionális (az ún. rezonáns tóruszok), eltűnnek tipikus kis perturbáció esetén. Az 50-es évekig azt hitték, hogy ugyanez történik a nem-rezonáns tóruszokkal is, sőt azt is gondolták, hogy kis perturbáció már ergodikus leképezéshez is vezethet (a 20-as években Fermi adott erre – hibás – bizonyítást).

1954-ben azonban Kolmogorov észrevette, hogy ennek az ellenkezője igaz: a tóruszok többsége túléli a kis perturbációt. Nevezetesen megmutatta, hogy ez áll az *erősen nem-rezonáns* tóruszokra, vagyis amelyek ω forgatási száma eleget tesz a következő *diofantoszi feltételnek* : létezik olyan $\nu;\mu > 0$, hogy minden $p,q \in \mathbb{Z}$-re

$$|\omega q - p| \ge \frac{\nu}{|q|^\mu}. \tag{10.1}$$

10.1. LEMMA *A diofantoszi feltételnek eleget tevő ω-k halmaza teljes mértékű.*

BIZONYÍTÁS Jelölje $\nu,\mu > 0$-ra

$$\Delta_{\nu,\mu} := \{\omega\colon 0 \le \omega \le 1 \text{ és } (10.1) \text{ teljesül } \forall p,q(\neq 0) \in \mathbb{Z} \text{ -re}\}.$$

Nyilván $\mu < \mu'$ esetén $\Delta_{\nu,\mu} \subset \Delta_{\nu,\mu'}$, továbbá $\nu < \nu'$ esetén $\Delta_{\nu',\mu} \subset \Delta_{\nu,\mu}$. így elég belátni, hogy tetszőleges $\mu > 1$ esetén $Leb(\Delta_{\nu,\mu}) \to 1$, amint $\nu \to 0+0$. Viszont

$$(\Delta_{\nu,\mu})^c = \bigcup_{p,q\neq 0} \left\{\omega\colon 0 \le \omega \le 1 \text{ és } \left|\omega - \frac{p}{q}\right| < \frac{\nu}{|q|^{\mu+1}}\right\}$$

így

$$m((\Delta_{\nu,r})^c) \le 2\sum_{q=1}^{\infty}(q+1)\frac{\nu}{q^{\mu+1}} \le 4\nu\sum_{q=1}^{\infty}\frac{1}{q^{\mu}}$$

ami tetszőlegesen kicsi, ha $\mu > 1$ és ν elég kicsi. □

Térjünk rá a KAM-tétel pontos kimondására. Itt azzal az esettel foglalkozunk, amikor f és g analitikus függvények. Feltesszük tehát, hogy az $f(x,y)$ és $g(x,y)$ komplex változós függvények 2π-periódikusak az x szög-változóban, és analitikusak a

$$\mathscr{D} := \{(x,y) \in \mathbb{C}^2 : |\operatorname{Im} x| < r_0, y \in \mathscr{D}_1\},$$

tartományban, ahol $\mathscr{D}_1 \subset \mathbb{C}$ nyílt tartomány, amelyre $[a,b] \subset \mathscr{D}_1$.

Megjegyezzük, hogy az általunk tekintett leképezésekre vezethető vissza az ún. redukált 3-test probléma a körös esetben. Az n-test probléma n darab pontszerű részecske gravitációs kölcsönhatással mozgó rendszerének leírását jelenti. A 2-test probléma épp a Kepler-feladat, az egyenletek megoldhatók, a 2 test kúpszelet alakú pályákon mozog, amelyek egyik fókusza a rendszer súlypontjában van. A redukált 3-test problémában azt az esetet nézzük, amikor a 3 részecske közül az egyiknek a tömege igen kicsi és úgy tekintjük a rendszert, mint a 2-test probléma perturbáltját. Abban a speciális esetben, amikor a 2-test problémában a részecskék pályái körök, a redukált 3-test probléma a körgyűrű általunk tekintett leképezésére vezet. (Megjegyezzük, hogy a legtöbb bolygó Nap körüli pályái nem nagyon térnek el a körpályáktól.)

Hamilton-rendszerek alapvető tulajdonsága, hogy rendelkezik sima invariáns mértékkel, ez a jól ismert Liouville-mérték. Ennek szellemében a körgyűrű diffeomorfizmusai esetén feltehetnénk, hogy ez a Lebesgue-mérték, a terület. Ennél azonban gyengébb hipotézist fogadunk el, az ún. metszet-feltételt:

10.2. FELTÉTEL (METSZET-FELTÉTEL) Tekintsük $\forall y \in [a,b]$-re az S_y körvonal $T\,S_y := \{T(x,y) : x \in [0,2\pi)\}$ képét. Feltesszük, hogy $\forall y \in [a,b]$-re

$$T\,S_y \cap S_y \neq \emptyset.$$

Vázoljuk röviden, miért teljesül automatikusan a metszetfeltétel, ha T-re invariáns Lebesgue-mérték (azaz, ha T területőrző). Tegyük fel, hogy T területőrző, mégis $\exists y_0$, hogy $TS_{y_0} \cap S_{y_0} = \emptyset$. Jelölje π_x és π_y az első, illetve a második koordinátára való vetítést az annuluson. Feltehetjük, hogy $\pi_y(TS_{y_0}) > y_0$ (a zárt körvonalat a T leképezés "felfelé mozgatja"), $\pi_y(TS_{y_0}) < y_0$ analóg módon tárgyalható. Az analiticitásból következik, hogy egyrészt $\pi_x(TS_y) = \mathbb{S}^1 = [0,2\pi)$, $\forall y \in [a,b]$, másrészt $\forall y' > y_0$ esetén is $\pi_y(TS_{y'}) > y_0$. így viszont a $T(\cup_{y \ge y_0} S_y)$ halmaz területe határozottan kisebb, mint a $\cup_{y \ge y_0} S_y$ halmaz területe.

10.3. TÉTEL (KAM-TÉTEL) *Tegyük fel, hogy $T : A \to A$ (ahol $b - a = 1$)*

$$T(x,y) := (x + \gamma y + f(x,y), y + g(x,y)) \tag{10.2}$$

a körgyűrű twist-diffeomorfizmusa, amely eleget tesz a metszet-feltételnek. Tegyük fel további, hogy az x-ben 2π-periódikus $f(x,y), g(x,y)$ komplex változós függvények analitikusak a

$\mathscr{D}$ tartományban. Akkor $\forall\gamma \leq 1$-re, $\forall\mathscr{D}$-re és $\forall\varepsilon > 0$-ra, továbbá $\forall\gamma > 0$, $\forall\mu > 1$-re létezik olyan $\delta = \delta(\varepsilon, \mathscr{D}, \nu, \mu)$, hogy ha $\forall x, y \in \mathscr{D}$-re

$$|f|, |g| < \gamma \cdot \delta \tag{10.3}$$

akkor minden $\omega/2\pi \in \Delta_{\nu,\mu} \cap (1/2\pi[a+\varepsilon, b-\varepsilon])$-re T-nek van

$$\zeta := \zeta(\xi) := (\xi + u(\xi), v(\xi)) \tag{10.4}$$

invariáns görbéje, ahol u és v 2π-periódikus, $|Im\ \xi| < \frac{r_0}{2}$-ben analitikus függvények. A ξ paraméter megálasztható úgy, hogy $(T\zeta)(\xi) = \zeta(\xi + \omega)$, továbbá

$$|u| + |v - \gamma^{-1}\omega| < \varepsilon. \tag{10.5}$$

Megjegyzések.

1. Tételünkben a megengedhető perturbációnak pusztán a γ-tól való függése látszik. A módszer javításával azt is bebizonyították, hogy $\forall\gamma \leq 1$-re, $\forall\mathscr{D}$-re, $\forall\varepsilon > 0$-ra, továbbá $\forall\nu > 0$, $\forall\mu > 1$-re létezik olyan $\delta = \delta(\varepsilon, \mathscr{D}, \mu)$, hogy ha $\forall x, y \in \mathscr{D}$-re
$$|f|, |g| < \gamma\delta\nu^2$$
akkor igaz a tétel állítása. Sőt, az invariáns tóruszok ω-tól Lipschitz-folytonosan függenek, és a fázistérnek legalább $1 - O(\nu)$ mértékű részhalmazát alkotják.

2. Tételünk állítása közvetlenül kiterjeszthető többdimenziós Hamilton rendszerek esetére. A diofantoszi feltétel ez esetben: $\exists\nu > 0$ és $\exists\mu > 0$ konstansok, hogy $\forall k \in \mathbb{Z}^n$, $k \neq 0$-ra
$$|(k, \omega)| \geq \frac{\nu}{|k|^\mu}$$
ahol $|k| := |k_1| + \cdots + |k_n|$, $\omega := (\omega_1, \ldots, \omega_n)$, és n a rendszer szabadsági fokainak száma.

3. Fontos megjegyzés, hogy $\mu < 1$ esetén $\Delta_{\nu,\mu} = \emptyset$. Ugyanis $\omega \in \Delta_{\nu,1}$ esetén
$$\nu \leq \inf_{p,q \in \mathbb{Z}} |q||\omega q - p| \leq \inf_{p,Q \in \mathbb{Z}_+} \min_{0 \leq q \leq Q} q|\omega q - p| \leq \inf_{p,Q \in \mathbb{Z}_+} Q \min_{0 \leq q \leq Q} |\omega q - p|.$$
Ugyanakkor a $q\omega (\mod 1) \in \mathbb{S}^1$, $0 \leq q \leq Q$ pontokra alkalmazva a skatulya-elvet, $\exists 0 \leq k < l \leq Q$, hogy $d_{\mathbb{S}^1}(k\omega, l\omega) < 1/Q$, azaz
$$\min_{0 \leq q \leq Q} |\omega q - p| \leq \frac{1}{Q}.$$
Tehát $\Delta_{\nu,1} = \emptyset$ ha $\nu \geq 1$. Hasonló gondolatmenettel $\mu < 1$-re $\Delta_{\nu,\mu} = \emptyset$ is adódik.

Függelék

- **Analitikus függvények.** Legyen $\mathscr{D} \subset \mathbb{C}$ a komplex sík egyszeresen összefüggő, nyílt tartománya. Az $f\colon \mathscr{D} \to \mathbb{C}$ függvényről azt mondjuk, hogy analitikus a $\mathscr{D}$ tartományban, ha $\mathscr{D}$ minden pontjában differenciálható. Akkor az is igaz, hogy minden $z \in \mathscr{D}$ elég kis környezetében a függvény konvergens hatványsorba fejthető.

  Ha $I \subset \mathbb{R}$ véges intervallum, akkor az $f\colon I \to \mathbb{R}$ függvényt valós analitikusnak mondjuk, ha $\forall x \in I$-re x alkalmas környezetében a függvény konvergens hatványsorba fejthető. Ez esetben létezik olyan $\mathscr{D} \subset \mathbb{C}$ egyszeresen összefüggő, nyílt tartomány és $f_1 : \mathscr{D} \to \mathbb{C}$, hogy f_1 analitikus és $f_1 \mid I = f$.

- **Cauchy-féle integráltétel.** Ha f analitikus a $\mathscr{D} \subset \mathbb{C}$ egyenesen összefüggő nyílt tartományban, akkor bármely a $\mathscr{D}$-ben fekvő zárt Γ út mentén integrálva
$$\oint f(z)\,\mathrm{d}z = 0.$$

- **Fourier-sor.** Ha az $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ 2π-periódikus függvény integrálható a $[0, 2\pi]$ intervallumon, akkor Fourier együtthatói
$$f_k := \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{-ikx} f(x)\,\mathrm{d}x \qquad (k \in \mathbb{Z}).$$

  Az f formális Fourier sora
$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} f_k e^{ikx}.$$

11. A homológikus egyenlet megoldása. A kis nevezők problémája

Itt egy látszatra távoli kérdéssel foglalkozunk, amely mégis a KAM-tételre adott bizonyításunk kiindulópontja lesz, és emellett frappánsan mutatja a diofantoszi feltétel szerepét a kis nevezők problémájának feloldásában.

A homológikus egyenlet a következő:

$$w(x+\omega)-w(x)=h(x), \tag{11.1}$$

ahol $x\in S=\mathbb{R}/(2\pi\mathbb{Z})$ és $\dfrac{\omega}{2\pi}$ irracionális szám. Ennek megoldását keressük adott h esetén. Itt is az analitikus függvények körében dolgozunk, tehát feltesszük, hogy w és h 2π-periódikus komplex változós függvények, amelyek analitikusak az $|\mathrm{Im}\, x|\le r$ sávban ($r>0$).

Természetes lesz a Fourier-transzformáltakat használnunk, tehát legyen

$$\begin{aligned} h_k &:= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} h(x)e^{-ikx}\,\mathrm{d}x \qquad (k\in\mathbb{Z}) \\ w_k &:= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} w(x)e^{-ikx}\mathrm{d}x. \end{aligned} \tag{11.2}$$

Akkor – egyelőre formális megoldást keresve –

$$\begin{aligned} h(x) &= \sum e^{ikx}h_k \\ w(x) &= \sum e^{ikx}w_k \end{aligned} \tag{11.3}$$

és

$$w_k=\frac{h_k}{e^{ikw}-1}, \qquad \text{ha } k\neq 0, \tag{11.4}$$

végül feltehető, hogy

$$w_0=0.$$

A megoldhatóság triviális szükséges feltétele

$$h^* := h_0=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} h(x)\,\mathrm{d}x=0.$$

Kérdés, hogy a (11.4) együtthatókkal értelmezett (11.3) Fourier-sor mikor konvergál (és oldja meg a (11.1) egyenletet). Mivel

$$|\sin x|\ge\frac{1}{2}\min_p|x-p\pi|=\frac{\pi}{2}\min_p\left|\frac{x}{\pi}-p\right|,$$

azért – a diofantoszi feltételt is használva –

$$|e^{ik\omega}-1|=2\left|\sin\frac{k\omega}{2}\right|\ge\pi\min_p\left|\frac{k\omega}{2\pi}-p\right|\ge\pi\frac{\nu}{|k|^{\mu}}.$$

Mivel h analitikus $|\mathrm{Im}\, x| \le r$-ben, ezért

$$\sup_{|\mathrm{Im}\ x| \le r} |h(x)| = K < \infty$$

és

$$|h_k| \le \frac{1}{2\pi} \left| \int_{\pm ir}^{\pm ir + 2\pi} h(x) e^{-ikx}\, \mathrm{d}x \right| = K e^{-|k|r}.$$

Ezért

$$|w_k| \le K e^{-|k|r} \left(\pi \frac{\nu}{|k|^\mu} \right)^{-1}.$$

Tehát $\sum |w_k| < \infty$, sőt az $|\mathrm{Im}\, x| \le \rho$ $(0 < \rho < r)$ sávban

$$|w(x)| \le \sum_{k \ne 0} \left| \frac{h_k}{e^{ik\omega} - 1} e^{ikx} \right| \le \sum_{k \ne 0} K e^{-|k|r} \frac{|k|^\mu}{\nu \pi} e^{|k|\rho}$$

ahonnan $|\mathrm{Im}\, x| \le \rho$-ra

$$|w(x)| \le C_1 \frac{K}{(r-\rho)^{\mu+1}},$$

ugyanis

$$\int_0^\infty x^\mu e^{-x(r-\rho)}\, \mathrm{d}x = \frac{1}{(r-\rho)^{\mu+1}} \int_0^\infty y^\mu e^{-y}\, \mathrm{d}y.$$

Tehát igaz a

11.1. TÉTEL

1. *A homológikus egyenletnek – additiv konstanstól eltekintve – egyetlen folytonos megoldása lehet, ha* $\frac{\omega}{2\pi}$ *irracionális.*

2. *Ha h analitikus az $|\mathrm{Im}\, x| \le r$ sávban,* $\int_0^{2\pi} h(x)\, \mathrm{d}x = 0$, *és ω diofantoszi, akkor létezik az egyenlet $w = Lh$ megoldása, amelyre az $|\mathrm{Im}\, x| \le \rho$ sávban $(0 < \rho < r$ esetén$)$*

$$|w(x)| \le C_1 \frac{K}{(r-\rho)^{\mu+1}},$$

feltéve, hogy $\int_0^{2\pi} w(x)\, \mathrm{d}x = 0$ $(K = \max_{|\mathrm{Im}\ x| \le r} h(x))$.

A tétel első állítása azért következik a fentebb mondottakból, mert folytonos h függvény esetén a w_k együtthatók (11.4) által egyértelműen meghatározottak, és a kérdés csupán az, van-e egyáltalán $w(x)$ függvény ezekkel a Fourier-együtthatókkal.

12. Az invariáns tórusz formális felírása

A T leképezés invariáns görbéjét azonnal a

$$\zeta := (\xi + u(\xi), v(\xi)) \tag{12.1}$$

alakban keressük, ahol ξ a 2π-periódikus szög-paraméter, vagyis feltesszük, hogy u és v 2π-periódikus függvények, mindketten analitikusak az $|\mathrm{Im}\,\xi| \le \frac{r_0}{2}$ sávban. Feltesszük továbbá, hogy

$$(T\zeta)(\xi) = \zeta(\xi + \omega)$$

ahol $\frac{\omega}{2\pi}$ irracionális és $|u| + |v - \gamma^{-1}\omega|$ kicsi.

Az (12.1) invariancia-feltétel pontosan azt jelenti, hogy

$$\xi + u(\xi) + \gamma v(\xi) + f(\xi + u(\xi), v(\xi)) = \xi + \omega + u(\xi + \omega), \tag{12.2}$$
$$v(\xi) + g(\xi + u(\xi), v(\xi)) = v(\xi + \omega). \tag{12.3}$$

Ezt az alapegyenlet-rendszert kell megoldanunk. T_0 perturbációjának egyszerűbb esete lenne, ha $f(x,y) = \lambda f_0(x,y)$, $g(x,y) = \lambda g_0(x,y)$-t választanánk, ahol λ kis paraméter. Ez azonban nem jelent lényeges könnyebbséget, ezért inkább feltesszük, hogy $f(x,y) = f(x,y,\lambda)$, $g(x,y) = g(x,y,\lambda)$ ahol f és a g-nek a kis, λ paramétertől függése is analitikus, amiből itt azt fogjuk használni, hogy a hatványsor véges részletösszegei a megfelelő maradéktaggal közelítenek. Ekkor $u(\xi)$ és $v(\xi)$ is függni fog λ-tól, ismét feltesszük, hogy analitikusan (valójában csak az kell nekünk, hogy a függvények formális hatványsorba fejthetők). (12.2)–(12.3) most így néz ki:

$$u(\xi + \omega, \lambda) = u + \gamma v - \omega + f(\xi + u, v, \lambda) \tag{12.4}$$
$$v(\xi + \omega, \lambda) = v + g(\xi + u, v, \lambda). \tag{12.5}$$

Tegyük fel tehát, hogy

$$f(x,y,\lambda) = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda^n f_n(x,y) \tag{12.6}$$

$$g(x,y,\lambda) = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda^n \rho_n(x,y) \tag{12.7}$$

$$u(\xi) = u(\xi, \lambda) = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda^n u_n(\xi)$$

$$v(\xi) = v(\xi, \lambda) = \gamma^{-1}\omega + \sum_{n=1}^{\infty} \lambda^n v_n(\xi)$$

(12.4)–(12.5)-ből együttható összehasonlítással

$$u_n(\xi + \omega) - u_n(\xi) - \gamma v_n(\xi) = F_n(\xi) \tag{12.8}$$
$$v_n(\xi + \omega) - v_n(\xi) = G_n(\xi) \tag{12.9}$$

ahol $F_n(\xi)$ (és hasonlóan $G_n(\xi)$) λ^n együtthatója $f(\xi+\sum_{n=1}^{\infty}\lambda^n u_n(\xi),\gamma^{-1}\omega+\sum_{n=1}^{\infty}\lambda^n v_n(\xi),\lambda)$ (illetve $g(\xi+\sum_{n=1}^{\infty}\lambda^n u_n(\xi),\gamma^{-1}\omega+\sum_{n=1}^{\infty}\lambda^n v_n(\xi),\lambda)$) λ-hatványsorában. Mivel az (12.6)–(12.7) hatványsorokban a konstans tag 0, ezért

$$
\begin{aligned}
F_n(\xi) &= f_n(\xi,\gamma^{-1}\omega)+\Phi_n\{f_\ell,u_\ell,v_\ell\colon \ell<n\}\\
G_n(\xi) &= g_n(\xi,\gamma^{-1}\omega)+\Psi_n\{f_\ell,u_\ell,v_\ell\colon \ell<n\}.
\end{aligned}
$$

Mint 11.1. Tételből tudjuk, (12.9) megoldhatóságának szükséges feltétele: $G_n^*=0$. Ennek belátását későbbre halasztjuk. Mindenesetre, ha ez teljesül, akkor 11.1. Tétel alkalmazható, hacsak $F_n(\xi)$ és $G_n(\xi)$ analitikusak valamely sávban. A Fourier-együtthatókat (l. (11.2)) $\widehat{\ }$-al jelölve, és az n indexek kiírását mellőzve (az (12.8)–(12.9) egyenletek alakja n-től független!), a megoldás Fourier-együtthatói a következők (v. ö. (11.4))

$$
\begin{aligned}
\widehat{v}_k &= \frac{\widehat{G}_k}{e^{ik\omega}-1} \qquad (k\neq 0)\\
\widehat{u}_k &= \frac{\widehat{F}_k}{e^{ik\omega}-1}+\frac{\gamma\widehat{G}_k}{(e^{ik\omega}-1)^2} \qquad (k\neq 0)\\
\widehat{v}_0 &= -\frac{\widehat{F}_0}{\gamma}, \qquad \widehat{u}_0 \text{ tetszőleges.}
\end{aligned}
$$

Tényleges bizonyításaink ezeken a formális eredményeken alapszanak. Bizonyítsuk azonban ezek feltételét; ez az egyetlen lépés, ahol használni fogjuk a metszet-feltételt.

12.1. LEMMA $\forall n\geq 0$*-ra* $\int_0^{2\pi} G_n(\xi)\,\mathrm{d}\xi=0.$

BIZONYÍTÁS Indirekt. Tekintsük azt a legkisebb n értéket, amelyre

$$
m=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}G_n(\xi)\,\mathrm{d}\xi\neq 0
$$

és g helyett a $g-m\lambda^n$ függvényt. Ekkor a (12.8)–(12.9) együttható-egyenletek megoldhatók nemcsak $(n-1)$-ig hanem n-ig, és véve az

$$
\begin{aligned}
\tilde{u} &= \sum_{\ell=1}^{n}\lambda^\ell u_\ell\\
\tilde{v} &= \gamma^{-1}\omega+\sum_{\ell=1}^{n}\lambda^\ell v_\ell
\end{aligned}
$$

függvényeket, a (12.4)–(12.5) alapegyenletek teljesülnek mod $0(\lambda^{n+1})$, azaz

$$
\begin{aligned}
\xi+\tilde{u}+\gamma\tilde{v}+f(\xi+\tilde{u},\tilde{v}) &= \xi+\omega+\tilde{u}(\xi+\omega)+0(\lambda^{n+1})\\
\tilde{v}+g(\xi+\tilde{u},\tilde{v}) &= \tilde{v}(\xi+\omega)+m\lambda^n+0(\lambda^{n+1})
\end{aligned}
$$

(itt használjuk f és g véges sorfejtéseinek maradéktag-becsléseit). Mindez felfogható a következőképpen is: a $(\xi + \tilde{u}(\xi,\lambda), \tilde{v}(\xi,\lambda))$ görbe képe megegyezik az előbbi egyenletpár jobb oldalával. Ha a kép metszi a görbét, akkor valamely ξ-re és ξ''-re, $\lambda \to 0$ esetben (bevezetve a $\xi' = \xi'' + \omega$ jelölést)

$$\begin{aligned} \xi + \tilde{u}(\xi,\lambda) &= \xi' + \tilde{u}(\xi',\lambda) + 0(\lambda^{n+1}) \\ \tilde{v}(\xi,\lambda) &= \tilde{v}(\xi',\lambda) + m\lambda^n + 0(\lambda^{n+1}). \end{aligned}$$

Innen $\xi' = \xi + 0(\lambda^{n+1})$ adódik az első egyenletből, míg ugyanekkor a másodikból $m = 0$-t kapunk, ami ellentmondás. □

13. Feladatok

Megoldandók a $\times$-tel jelölt feladatok.

1. $^{\times}$ Legyen $(M, \mathscr{B}, T)$ endomorfizmus, ahol M topologikus tér, $\mathscr{B}$ a Borel σ-algebra, és T folytonos. A T endomorfizmust *topologikusan tranzitív*nak nevezzük, ha létezik sűrű orbit. T-t *minimális*nak nevezzük, ha nem létezik valódi, zárt, nem-üres, invariáns részhalmaza M-nek. *1. Igazoljuk, hogy a körvonal* $R_\alpha : S \to S$, $R_\alpha := x + \alpha$ (mod 1) *forgatása topologikusan tranzitív, sőt minimális, ha* $\alpha \notin \mathbb{Q}$. *2. Mutasson példát topologikusan tranzitív, de nem minimális leképezésre.*

2. $^{\times}$ (V. Arnold) Tekintsük az $1, 2, \ldots, 2^n, \ldots$ számsorozat tizes számrendszerben felírt alakjának első jegyeit. Előfordul ezek között a 7? A 8? Ha igen, melyik gyakoribb?

3. $^{\times}$ Mutassuk meg, hogy ha valamely n-re T^n ergodikus endomorfizmus, akkor T is az. Adjunk példát arra, hogy az állítás megfordítása nem igaz.

   Utalás: $\mu(T^{-n}A\Delta A) \leq \sum_{j=0}^{n-1} \mu(T^{-j+1}A\Delta T^{-j}A)$, ugyanis $\mathrm{d}(A,B) := \mu(A\Delta B)$ metrikát definiál a mérhető részhalmazokon.

4. $^{\times}$ (Neumann ergodtétele operátorokra) Legyen U a H szeparábilis Hilbert tér izometriája, és P az ortogonális vetítés az invariáns vektorok $\mathscr{I} := \{f \in H \mid Uf = f\}$ alterére. Ekkor minden $f \in H$-ra teljesül

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} U^i f = Pf.$$

5. $^{\times}$ Mutassuk meg, hogy 2^n, $n \in \mathbb{Z}^+$ az 0,1,2,...,9 jegyek tetszőleges véges hosszú sorozatával kezdődhet (az első jegy persze nem 0).

6. * (Simányi–Szász) Legyen $(M, \mathscr{F})$ mérhető tér, G csoport. Legyen adott minden $g \in G$-re egy $(M, \mathscr{F}, T_g)$ automorfizmus. Az $(M, \mathscr{F}, T_G) = \{(M, \mathscr{F}, T_g) \colon g \in G\}$ családot *csoport-hatásnak* nevezzük, ha $\forall g_1, g_2 \in G$-re $T_{g_1 g_2} = T_{g_2} T_{g_1}$ (a G csoport hat az M téren). Tetszőleges $x \in M$ esetén az x *G-pályájának* nevezük a $Gx := \{T_g x \colon g \in G\}$ halmazt.

   Legyen adott $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_d) \in \mathbb{R}^d$, és tekintsük $\mathbb{R}^d$-ben az α-ra ortogonális g vektorok $\mathbb{R}^{d-1}$-el izomorf additív G csoportját. Hasson $\mathbb{R}^d$-n a G csoport a következőképpen: $\forall g \in G, x \in \mathbb{R}^d$-re

$$T_g x = g + x.$$

   $\mathbb{R}^d$-t faktorizálva $\mathbb{Z}^d$ szerint végül is $\mathbb{T}^d$-n kapunk egy G-hatást.

   Bizonyítsuk be, hogy

   - *G-nek csak akkor van* $\mathbb{T}^d$*-ben sűrű pályája, ha az* α *koordinátái között van kettő lineárisan független (és akkor minden pálya sűrű);*

- *Az előbbi feltétel mellett a pályák aszimptotikusan egyenletes eloszlásúak (mit is jelent ez?);*
- ** *Legyen adott $U \subset \mathbb{R}^d$ nyílt halmaz. Bizonyítsuk be, hogy van olyan véges F halmaza az α-knak, hogy ha $\alpha \notin F$, akkor $G = G_\alpha$ minden pályája metszi az U halmazt.*

7. $^{*\times}$ A csoport-hatás speciális esete a *csoport-eltolás*.

   Legyen M kompakt topológikus csoport és μ a Haar-mérték M-en. Tetszőleges rögzített $g \in G$-re legyen
   $$T_g\, x = g \cdot x.$$
   Ekkor $(M, \mathscr{F}, T_g, \mu)$ automorfizmus. Ez a példa egyben általánosítása a tórusz feltekerésének (1.12. Példa).

   Mi T_g ergodicitásának feltétele, ha G Abel-csoport?

8. $^{*\times}$ A $\mathbb{T}^d$ tórusz $T_\alpha : \mathbb{T}^d \to \mathbb{T}^d$, $T_\alpha = x + \alpha \pmod 1$ eltolása akkor és csakis akkor minimális, ha $1, \alpha_1, \ldots, \alpha_d$ racionálisan függetlenek.

9. $^{\times}$ A $D : S \to S$, $Dx = 2x \pmod 1$ diadikus leképezés

   a) topologikusan tranzitív?

   b) minimális?

10. $^{\times}$ Tekintsük az $\mathbb{R}^2$ sík $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ mátrixszal adott lineáris leképezését. Mutassuk meg, hogy A természetes módon származtatja a $\mathbb{T}^2 = \mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$ tórusz T_A automorfizmusát (kissé pongyolán $T_A x = Ax (\mathrm{mod}\, \mathbb{Z}^2)$). Keressük meg ennek az invariáns mértékét!

11. $^{\times}$ Általánosítsuk az előző feladatban megjelenő szituációt magasabb dimenzióra is!

12. Tekintsük az $M = \{0,1\}^{\mathbb{Z}_+}$ halmazon a
    $$(Tx)_i = \begin{cases} 1 - x_i & \text{ha } \forall\, j < i\text{-re } x_j = 1 \\ x_i & \text{különben} \end{cases}$$
    összeadó gépet. (itt $x = (x_1, x_2, \ldots) \in M$).

    a) Keressünk invariáns mértéket!

    b) Mi T^{-1}?

13. $^{\times}$ $f : M \to M$ folytonos leképezése $M = \mathbb{T}^d$-nek. f akkor és csakis akkor topologikusan tranzitív, ha $\forall U\ V \subset M$ nyílt halmazra $\exists N = N(U,V)$ egész szám ($N \geq 1$), hogy $U \cap f^N V \neq \emptyset$. (Az állítás igaz lokálisan kompakt, szeparábibilis metrikus terekre is.)

14. $^{\times}$ Tekintsük az $I = [0,1]$ intervallum $Tx = 4x(1-x)$ endomorfizmusát. Mutassuk meg, hogy I-nek vannak pontjai, amelyek sem periodikus pontok, sem gyengén periodikus pontok. (Útmutatás: 15. feladat.)

15. $^{\times}$ Mutassuk meg, hogy az előző feladatban szereplő leképezésnek a $\rho(x) = C \cdot (x(1-x))^{-\frac{1}{2}}$ függvény az invariáns sűrűsége. Mi C értéke?

16. $^{\times}$ Mutassuk meg, hogy a **14.** feladatban szereplő leképezés izomorf az

$$Tx = \begin{cases} 2x, & x < \frac{1}{2} \\ 2-2x, & x > \frac{1}{2} \end{cases}$$

sátor-tető leképezéssel. (Útmutatás: 15. feladat.)

17. $^{\times}$ Legyenek $x_1 < x_2 < \cdots < x_8$ a T^3 leképezés fixpontjai, ahol T a **14.** feladatban szereplő automorfizmus. Nyilván $x_1 = 0$.

    a) Mely i-re lesz $x_i = \dfrac{3}{4}$?

    b) Csoportosítsuk a maradék 6 pontot a T leképezés két 3 periodusú pályájába!

18. $^{\times}$ Legyen $(M, \mathscr{F}, \mu)$ mértéktér.

    a) Mutassuk meg, hogy $\mathrm{d}(A,B) := \mu(A \Delta B)$ pszeudo-metrika. $(A\Delta B := (A \setminus B) \cup (B \setminus A))$

    b) Hogyan lehet $\mathrm{d}(A,B)$-t metrikává tenni?

    c) Mutassuk meg, hogy

$$|\mu(X \cap Y) - \mu(U \cap V)| \leq \mu(X \circ U) + \mu(Y \circ V).$$

19. $^{\times}$ Mutassuk meg, hogy a pék leképezése: $T : [0,1)^2 \to [0,1)^2$

$$T(x,y) = \begin{cases} \left(2x, \frac{y}{2}\right), & 0 < x < \frac{1}{2} \\ \left(2x-1, \frac{y+1}{2}\right), & \frac{1}{2} < x < 1 \end{cases}$$

ergodikus és keverő.

20. $^{*\times}$ (Rényi Alfréd) T akkor és csakis akkor keverő, ha $\forall A \in \mathscr{F}$-re

$$\lim_{n\to\infty} \mu\left(T^{-n}A \cap A\right) \to [\mu(A)]^2.$$

21. $^{\times}$ Mutassuk meg, hogy $[0,1)$ következő leképezései ergodikusak és keverőek is:

    a) $Tx = \left\{2x + \frac{1}{2}\right\}$

b) $Tx = \begin{cases} 2x, & x < \dfrac{1}{2} \\ 2(1-x), & x > \dfrac{1}{2} \end{cases}$

22. Bizonyítsa be, hogy egy irredubicibilis Markov-eltolás ergodikus.

23. Bizonyítsuk be, hogy minden aperiodikus irredubicibilis Markov-eltolás keverő.

24. Tekintsük $[0,1]^2$-en az

$$\begin{pmatrix} 1+\varepsilon & 1 \\ \varepsilon & 1 \end{pmatrix}$$

mátrix által definiált T leképezést. Legyen $x \in [0,1]^2$ és $\mathbf{v}_\delta \in \mathbb{R}^2$, $|\mathbf{v}_\delta| = \delta \ll 1$, és $Lx,\mathbf{v} = \{y = x + t\mathbf{v}_\delta : t \in [-1,1]\}$. Hogyan viselkedik $T^n Lx,\mathbf{v}$?

25. Bizonyítsuk be, hogy a

    a) szorzat
    b) ferde-szorzat
    c) felemelés

    leképezések endomorfizmusok.

26. Mutassuk meg, hogy az indukált leképezés automorfizmus.

27. Bizonyítsuk be, hogy a T_1 és T_2 keverő, akkor $T_1 \times T_2$ is az.

28. Ha T_1 és T_2 ergodikus, akkor $T_1 \times T_2$ akkor és csak akkor ergodikus, ha

$$\Lambda_d(T_1) \cap \Lambda_d(T_2) = \{1\}.$$

($\Lambda_d(T)$ jelöli a T által indukált operátor sajátértékeinek halmazát.)

29. $^\times$ Melyek a Gauss-leképezés fixpontjai?

30. *Jelölések, definíciók*

    Legyen $(M, \mathscr{F}, \mu, T)$ endomorfizmus.

    a. Tegyük fel, hogy $\mu(A) > 0$. Legyen $T_A : A \to A$ a következő: legyen $T_A x := T^k x$, ha $k \in \mathbb{N}$ a legkisebb érték, amelyre $T^k x \in A$. T_A-t *Poincaré-leképezés*nek (vagy első visszatérés leképezésnek, vagy derivált leképezésnek) nevezzük.

    b. $f : M \to \mathbb{N}$ mérhető függvény. Jelölje

$$M_f = \{(x,k) \mid x \in M, \quad 1 \le k \le f(x)\} \subset M \times \mathbb{N}.$$

Legyen $\mathscr{F}_f$ az $A \times \{k\}$, $A \subset \mathscr{F}$, $k \in \mathbb{N}$ halmazok által generált σ-algebra és legyen $\mu_f(A \times \{k\}) = \mu(A)$. Legyen $T_f : M_f \to M_f$ a következő:

$$T_f(x,k) = \begin{cases} (x,k+1) & \text{ha} \quad k \leq f(x) \\ (Tx,1) & \text{ha} \quad k = f(x)\,. \end{cases}$$

Ekkor $(M_f, \mathscr{B}_f, \mu_f T_f)$ a *torony-endomorfizmus*. (Megjegyezzük, hogy μ_f csak akkor valószínűségi mérték, ha $\int_M f\,\mathrm{d}\mu = 1$, de a definíció általában is értelmes, ha $f \in L_1(\mu)$.)

A. *Mutassuk meg, hogy a Poincaré-leképzés és a torony-leképezés is mértéktartóak.*

B. *Ha T ergodikus, $\mu(A) > 0$ és $f \in L_1(\mu)$, akkor T_A és T_f is ergodikusak.*

31. *Jelölések, definíciók:*

Legyen M topologikus tér, μ valószínűségi Borel-mérték

$$\operatorname{supp}\mu = \bigcap_{F \text{ zárt},\ \mu(F)=1} F \qquad \text{(a } \mu \text{ mérték tartója)}$$

$$\omega(x) = \bigcap_{n\in\mathbb{Z}_+} \overline{\bigcup_{j\geq n} T^j x} \qquad \text{(az } x \text{ fázispont } \omega\text{-limeszpontjai)}$$

$$R(T) = \{x \in M \mid x \in \omega(x)\} \qquad (T \text{ visszatérő pontjai})$$

Legyen $(M, \mathscr{B}, \mu, T)$ endomorfizmus, ahol M szeparábilis metrikus tér, $\mathscr{B}$ a Borel σ-algebra, T folytonos. Igazoljuk:

A. *M μ-majdnem mindenütt visszatérő, azaz $\operatorname{supp}\mu \subset \overline{R(T)}$*

B. *Ha M kompakt és T ergodikus, akkor μ-majdnem mindenütt pont pályája sűrű $\operatorname{supp}\mu$-ben*

32. $^\times$ Tekintsük a $[0,1)$ intervallum $Tx = \{2(1-x)\}$ leképezését.

a) Melyek T periodikus pontjai?

b) Határozzuk meg a

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}[f(x) + f(Tx) + \ldots + f(T^{n-1}x)]$$

értékét, ha $f(x) = \sin(2\pi x)$. Milyen értelemben vehetjük a limeszt?

33. $^\times$ Ergodikus-e a $[0,1]$

$$Tx = \begin{cases} \dfrac{1}{2} - 2x, & 0 < x < \dfrac{1}{4} \\[2mm] 2x - \dfrac{1}{2}, & \dfrac{1}{4} < x < \dfrac{3}{4} \\[2mm] \dfrac{5}{2} - 2x, & \dfrac{3}{4} < x < 1 \end{cases}$$

leképezése?

34. $^\times$ Keressük a $[0,1]$ intervallum

$$Tx\begin{cases} 3x, & 0<x<\dfrac{1}{3} \\ \dfrac{3}{2}\left(x-\dfrac{1}{3}\right), & \dfrac{1}{3}<x<1 \end{cases}$$

leképezésének invariáns mértékét.

35. $^\times$ Mikor ergodikus a $\mathbb{T}^2=\mathbb{R}^2\backslash\mathbb{Z}^2$ 2-tórusz $T_\alpha(x,y)=(x+\alpha,\ y+x)$ leképezése?

II. rész

14. Birkhoff–Hincsin-tétel

A Birkhoff–Hincsin-ergodtétel (I. rész 2.14 tétele) az ergodelmélet egyik legalapvetőbb tétele. Mi itt nem az eredeti bizonyítást követjük, hanem Katznelson és Weiss érvelését ([7]), amely talán jobban rámutat a jelenségekre.

Az egyszerűség kedvéért feltesszük, hogy $(M,\mathscr{F},\mu,T)$ endomorfizmus **ergodikus**. Ebben az esetben a Birkhoff–Hincsin-ergodtétel így szól:

14.1. ÁLLÍTÁS *$\forall f \in L_1$-re μ-majdnem minden x-re*

$$\frac{1}{n}\sum_{j=0}^{n-1} f(T^j x) \stackrel{n\to\infty}{\to} \int f\,\mathrm{d}\mu.$$

BIZONYÍTÁS Feltehetjük, hogy $f \geq 0$, ellenkező esetben felbontjuk a függvényt pozitív és negatív részek összegére, és ezekre külön bizonyítunk. □

Legyen

$$f^{+(-)}(x) = \limsup\,(\liminf)\,\frac{1}{n}\sum_{j=0}^{n-1} f(T^j x)$$

1. $$\frac{1}{n}\sum_{j=0}^{n-1} f(T^j T x) = \frac{n+1}{n}\left(\frac{1}{n+1}\sum_{i=0}^{n} f(T^i x) - \frac{f(x)}{n+1}\right)$$

   miatt $f^+(Tx) = f^+(x)$, $f^-(Tx) = f^-(x)$ μ-majdnem mindenütt. Így az ergodicitás miatt μ-majdnem mindenütt $f^+, f^- = \mathrm{const}$.

2. Elegendő belátni: $f^+ \leq \displaystyle\int f\,\mathrm{d}\mu \leq f^-$, mivel akkor a triviális $f^- \leq f^+$ miatt $f^- = f^+$ μ-majdnem mindenütt.

3. Legyen $\varepsilon > 0$ fix. Az alábbi 1.-4. lépésekben belátjuk, hogy $f^+ \leq \int f\,\mathrm{d}\mu + 3\varepsilon$. Az 5. lépésben vázoljuk, hogy hasonló érveléssel $f^- \geq \int f\,\mathrm{d}\mu - 3\varepsilon$.

1. LÉPÉS: Legyen $n\colon M \to \mathbb{Z}_+$

$$n(x) := \inf\left\{ n \geq 1 \;\middle|\; f^+ \leq \frac{1}{n}\sum_{j=0}^{n-1} f(T^j x) + \varepsilon \right\}.$$

Nyilván

$$n(x) f^+ \leq \sum_{j=0}^{n(x)-1} f(T^j x) + \varepsilon n(x). \tag{14.1}$$

2. LÉPÉS: $n(x)$ helyett korlátos függvényt veszünk. Először is, ε-hoz válasszunk egy $N(=N_\varepsilon) > 0$ számot, melyre az $A(=A_\varepsilon) = \{x \in M \mid n(x) > N\}$ halmaznak már nagyon kicsi a mértéke. Konkrétan, legyen N olyan nagy, hogy

$$\mu(A) < \frac{\varepsilon}{f^+}. \tag{14.2}$$

Ekkor bevezethetjük a következő új függvényeket:

$$\hat{n}(x) = \begin{cases} n(x) \\ 1 \end{cases} \qquad \text{és} \quad \hat{f}(x) = \begin{cases} f(x) & x \notin A \\ \max\{f(x), f^+\} & x \in A. \end{cases}$$

A definícióból közvetlenül következik, hogy $\hat{n}(x) \le N$, tehát korlátos függvény.

Továbbá a (14.1)-ből

$$\hat{n}(x) f^+ \le \sum_{j=0}^{\hat{n}(x)-1} \hat{f}(T^j x) + \varepsilon \hat{n}(x). \tag{14.3}$$

Másrészt $x \in A$ esetén $f(x) \le f(x) + f^+$, így (14.2)-ből

$$\int \hat{f}\, d\mu \le \int_{\bar{A}} f\, d\mu + \int_A f\, d\mu + \int_A f^+ \le \int f\, d\mu + \varepsilon. \tag{14.4}$$

3. LÉPÉS: $\hat{f}$ és $\hat{n}$ bevezetésével az ergodikus átlag és f^+ eltérését szabályos időközönként kontrollálni tudjuk: most választunk egy kellően nagy $L(=L_\varepsilon)$ számot, hogy L hosszú időre átlagolva ez az eltérés már elenyésző legyen. Konkrétan

$$\frac{N f^+}{L} < \varepsilon \tag{14.5}$$

Definiáljuk rekurzíve a következő $n_k(x) \colon M \to \mathbb{Z}_+$ megállási időket: $(k \ge 0)$

$$\begin{aligned} n_0(x) &= 0 \\ n_1(x) &= n_0(x) + \hat{n}(T^{n_0(x)} x) \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots \\ n_k(x) &= n_{k-1}(x) + \hat{n}(T^{n_{k-1}(x)} x). \end{aligned}$$

Továbbá

$$k(x) = \sup\{k \in \mathbb{Z}_+ \mid n_k(x) \le L-1\}.$$

Az A halmaz definíciója alapján

$$\hat{n}(x) \le N \left[\begin{array}{lcll} \rightsquigarrow n_k - n_{k-1} & \le & N & \quad (\forall k \ge 1), \\ \rightsquigarrow L - n_{k(x)} & \le & N. & \end{array} \right.$$

Tehát

$$L f^+ = \sum_{k=1}^{k(x)} f^+(n_k(x) - n_{k-1}(x)) + f^+(L - n_{k(x)}(x)),$$

ami (14.3) miatt

$$\le \sum_{k=1}^{k(x)} \left[\sum_{j=n_{k-1}(x)}^{n_k(x)-1} \left(\hat{f}(T^j x) + \varepsilon \hat{n}(T^{n_{k-1}(x)} x) \right) \right] + f^+ N \le$$

$$\le \sum_{j=0}^{L-1} \hat{f}(T^j x) + \varepsilon L + f^+ N. \tag{14.6}$$

4. LÉPÉS: (14.6)-t integrálva μ szerint

$$Lf^+ \le L \int \hat{f} \, d\mu + L\varepsilon + f^+ N$$

azaz (14.4) és (14.5) alapján

$$f^+ \le \int \hat{f} \, d\mu + \varepsilon + f^+ \frac{N}{L} \le \int f d\mu + \varepsilon + \varepsilon + \varepsilon. \tag{14.7}$$

5. LÉPÉS: Annak igazolása, hogy $f_- \ge \int f \, d\mu$, a fenti 1.–4. lépések mintájára történik (persze fordított irányú egyenlőtlenségekkel). Csak néhány apróbb részlet változik, például az A halmazon az $\tilde{f}$ függvényt 0-nak definiáljuk (f-ről eleve feltettük, hogy nemnegatív). Vázlatosan:

$$n(x) := \inf \left\{ n \ge 1 \,\middle|\, \frac{1}{n} \sum_{0}^{n-1} f(T^i x) \le f^- + \varepsilon \right\} \tag{H}$$

$$\sum_{0}^{n(x)-1} f(T^i x) \le n(x) f^- + n(x) \cdot \varepsilon. \tag{I}$$

Legyen

$$A = (n(x) > N), \quad \int_A f(x) \, d\mu < \varepsilon, \text{ és } x \in A\text{-ra } \tilde{f}(x) = 0, \; \tilde{n}(x) = 1$$

$$\text{míg } x \notin A\text{-ra } \tilde{f}(x) = f(x), \, \tilde{n}(x) = n(x) \tag{J}$$

$$\sum_{0}^{\tilde{n}(x)-1} \tilde{f}(T^i x) \le \tilde{n}(x) \cdot f^- + \tilde{n}(x) \cdot \varepsilon \tag{K}$$

$$\int \tilde{f} d\mu \ge \int f \, d\mu - \int_A f \, d\mu \ge \int f \, d\mu - \varepsilon \tag{L}$$

$$Lf^- = f^- \sum_{k=1}^{k(x)} (n_k(x) - n_{k-1}(x)) + f^-(L - n_k(x))$$

$$Lf^- \ge \sum_{0}^{L-1} \tilde{f}(T^i x) - L \cdot \varepsilon - N f^-$$

integrálva majd átosztva

$$f^- \ge \int f \, d\mu - 3\varepsilon$$

$$f^- \ge \int f \, d\mu. \tag{M}$$

15. Szubadditív ergodtétel

A szubadditív sorozatok fontos szerepet töltenek be az analízisben, az erogelméletben pedig különösen nagy a jelentőségük (többek között az entrópia vagy a Ljapunov-exponensek definíciójánál, vizsgálatánál kerülnek elő). Kezelésük kiindulópontja az alábbi alapvető lemma.

15.1. LEMMA (SZUBADDITIVITÁSI LEMMA (FEKETE MIHÁLY, 1923)) *Legyen $a\colon \mathbb{Z}_+ \to \mathbb{R}$ és tegyük fel, hogy $\forall n,m \in \mathbb{Z}_+$-ra*

$$a_{n+m} \leq a_n + a_m.$$

Akkor

$$\lim \frac{a_n}{n} \exists \text{ és } = \inf\left\{\frac{a_n}{n}\right\}.$$

BIZONYÍTÁS Tegyük fel,, hogy $\alpha = \inf\left\{\frac{a_n}{n}\right\} > -\infty$. ($\alpha = \inf\left\{\frac{a_n}{n}\right\} = -\infty$ esetén analóg a bizonyítás.)
Ekkor $\forall \varepsilon > 0 \; \exists \; m$, hogy $\frac{a_m}{m} < \alpha + \varepsilon$.
Rögzítsük az m-t, továbbá egy $r = 0, 1, \ldots, (m-1)$ számot. Tekintsük $n = l \cdot m + r$, $(l \to \infty)$ indexű elemek részsorozatát.

$$\begin{aligned} a_n &\leq l a_m + a_r \\ \frac{a_n}{n} &\leq \frac{lm}{lm+r} \cdot \frac{a_m}{m} + \frac{a_r}{n} \end{aligned} \tag{15.1}$$

$l \to \infty$-esetén látszik, hogy a részsorozat mentén $\limsup \frac{a_n}{n} \leq \alpha + \varepsilon$, és mivel r választása tetszőleges volt m-hez, továbbá tetszőleges ε-hoz van alkalmas a_m, adódik

$$\begin{aligned} &\limsup_n \frac{a_n}{n} \leq \alpha + \varepsilon \\ \rightsquigarrow &\limsup \frac{a_n}{n} \leq \alpha = \inf \frac{a_n}{n}. \end{aligned} \tag{15.2}$$

□

15.2. TÉTEL (SZUBADDITÍV ERGODTÉTEL (KINGMAN, 1963)) *Legyen $(M, \mathscr{F}, T, \mu)$ ergodikus endomorfizmus. Tegyük fel, hogy $F_1, F_2, \ldots, F_n, \ldots \in L_1$ szubadditív, azaz $\forall n, k \geq 1$*

$$F_{n+k}(x) \leq F_k(x) + F_n(T^k x) \qquad \mu\text{-majdnem mindenütt.} \tag{15.3}$$

Akkor

- $\exists \lambda \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$, *hogy*
$$\lim_n \frac{1}{n} F_n(x) = \lambda \qquad \mu\text{-majdnem mindenütt}$$
- $\lambda = \inf\left\{\frac{1}{n}\int F_n \, \mathrm{d}\mu \;\middle|\; n \geq 1\right\}.$

15.3. MEGJEGYZÉS Ha (15.3)-ben egyenlőtlenség helyett egyenlőség áll, szükségképpen $F_n(x) = F_1(x) + F_1(Tx) + \ldots + F_1(T^{n-1}x)$, továbbá μ invarianciája miatt $\frac{1}{n}\int F_n \,\mathrm{d}\mu = \int F_1 \,\mathrm{d}\mu$ $\forall n$, és így $\lambda = \int F_1 \,\mathrm{d}\mu$. Tehát ebben a speciális esetben éppen a Birkhoff–Hincsin-ergodtételt kapjuk vissza (az $F_1 \in L_1$ függvényre).

A szubadditív ergodtételre is Katznelson és Weiss bizonyítását követjük.

BIZONYÍTÁS (15.3)-ből

$$\int F_{n+k} \,\mathrm{d}\mu \leq \int F_k \,\mathrm{d}\mu + \int F_n \,\mathrm{d}\mu.$$

Így a 15.1. Lemma miatt

$$\lambda = \inf\left\{ \frac{1}{n}\int F_n \,\mathrm{d}\mu \;\middle|\; n \geq 1 \right\} = \lim \frac{1}{n}\int F_n \,\mathrm{d}\mu.$$

Belátjuk, hogy ezzel igaz az állítás.

Jelölés:

$$F^+(x) = \limsup \frac{1}{n} F_n(x)$$
$$F^-(x) = \liminf \frac{1}{n} F_n(x).$$

1. LÉPÉS: F^+ és F^- invariáns függvények.

Ugyanis: $\dfrac{F_{n+1}(x)}{n+1} \leq \dfrac{F_1(x)}{n+1} + \dfrac{n}{n+1}\dfrac{F_n(Tx)}{n}$

Így

$$\limsup\,(\liminf)\,\frac{F_n(x)}{n} \leq \limsup\,(\liminf)\,\frac{F_n(Tx)}{n}$$

azaz

$$F^-(x) \leq F^-(Tx) \qquad\qquad F^+(x) \leq F^+(Tx)$$

de

$$\int F^-(x)\,\mathrm{d}\mu = \int F^-(Tx)\,\mathrm{d}\mu \quad \rightsquigarrow \quad F^-(x) = F^-(Tx),$$

(F^- integrálhatóságát a Fatou-lemma biztosítja) és ugyanígy

$$F^+(x) = F^+(Tx).$$

Így az ergodicitás miatt $F^+(x) = F^+$ és $F^-(x) = F^-$ valamilyen konstansokra, μ-majdnem mindenütt. Van tehát három számunk: λ, F^+ és F^-, ezek egyenlőségét kell belátni.

2. LÉPÉS: Először belátjuk, hogy $F^+ \leq \lambda$.

Könnyen adódik, hogy $F^+ \leq \int F_1 \,\mathrm{d}\mu$, ugyanis (15.3)-ből

$$\frac{1}{n}F_n(x) \leq \frac{1}{n}\sum_{j=0}^{n-1} F_1(T^j x) \tag{15.4}$$

így Birkhoff–Hincsin ergodtétele miatt

$$F^+ \leq \int F_1 \,\mathrm{d}\mu$$

Legyen $N > 1$ tetszőleges rögzített: belátjuk, hogy $F_+ \leq \frac{1}{N}\int F_N \,\mathrm{d}\mu$.

Legyen egyelőre n is rögzített, de később $n \to \infty$-t fogunk venni.

$\forall 1 \leq i \leq N$-re nézzük az $i,\ i+N,\ i+2N, \dots, i+m_iN \leq n-N$ (viszont $n-N < i+(m_i+1)N$) számtani sorozatokat. (15.3)-ből

$$F_n(x) \leq F_i(x) + \sum_{l=0}^{m_i} F_N(T^{i+lN}x) + F_{n-(i+m_iN)}(T^{i+m_iN}x).$$

Ezeket összegezve $1 \leq i \leq N$-re

$$NF_n(x) \leq \sum_{i=1}^{N-1} F_i(x) + \sum_{j=0}^{n-N} F_N(T^jx) + \sum_{i=1}^{N-1} F_i(T^{n-i}x)$$

azaz

$$\frac{1}{n}F_n(x) \leq \underbrace{\frac{1}{N}\left[\frac{1}{n}\sum_{j=0}^{n-N} F_N(T^jx)\right]}_{\mathbf{I}} + \frac{1}{n}\left[\underbrace{\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N-1} F_i(x)}_{\mathbf{II}} + \underbrace{\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N-1} F_i(T^{n-i}x)}_{\mathbf{III}}\right]. \tag{15.5}$$

Most tekintsük az $n \to \infty$ viselkedést: Birkhoff–Hincsin ergodtétele miatt $\mathbf{I} \to \frac{1}{N}\int F_N \,\mathrm{d}\mu$ μ-majdnem minden x-re. Másrészt nyilvánvalóan μ-majdnem minden x-re $\mathbf{II} \to 0$ és $\mathbf{III} \to 0$.

Tehát $F^+ \leq \frac{1}{N}\int F_N \,\mathrm{d}\mu \quad \forall N \geq 1$-re.

Innen

$$F^+ \leq \lambda = \inf_N \frac{1}{N}\int F_N \,\mathrm{d}\mu. \tag{15.6}$$

3. LÉPÉS: (15.6) fényében elég belátni, hogy $\lambda \leq F^-$. $-\infty = \lambda$ esetén ez automatikusan teljesül, így feltehető, hogy $-\infty < \lambda$.

Legyen $\varepsilon > 0$ rögzített: be fogjuk látni, hogy $\lambda \leq F^- + 3\varepsilon$. A Birkhoff–Hincsin-tétel bizonyításánál látott gondolatmenetet fogjuk követni. Legyen tehát

- $$n(x) = \min\left\{n \geq 1 \;\middle|\; \frac{1}{n}F_n(x) \leq F^- + \varepsilon\right\} \tag{15.7}$$
- $A = \{x \in M \mid n(x) > N\}$

ahol az $N > 1$ számot (ε-hoz) úgy választjuk, hogy

$$\int_A (|F_1(x)| + |F^-|) \,\mathrm{d}\mu < \varepsilon. \tag{15.8}$$

Legyen

$$\tilde{F}^-(x) = \begin{cases} F^- & \\ F_1(x) & \end{cases} \qquad \text{és} \qquad \tilde{n}(x) = \begin{cases} n(x) & x \notin A \\ 1 & x \in A. \end{cases}$$

Mármost a definíció szerint $F^- \leq \tilde{F}^-(x)$ (ugyanis $x \in A$-ra $n(x) > 1$, így $F_1(x) > F^- + \varepsilon$). Ugyanakkor (15.8) miatt

$$\int \tilde{F}^- \, d\mu \leq F^- + \varepsilon. \tag{15.9}$$

4. LÉPÉS: (15.7)-ből és a definíciókból $x \notin A$-ra $\tilde{n}(x) = n(x)$, és így

$$\begin{aligned} F_{n(x)}(x) &\leq n(x)F^- + \varepsilon n(x) \leq \\ &\leq \sum_{j=0}^{n(x)-1} \tilde{F}^-(T^j x) + n(x)\varepsilon = \sum_{j=0}^{\tilde{n}(x)-1} \tilde{F}^-(T^j x) + \tilde{n}(x)\varepsilon. \end{aligned}$$

Ugyanakkor $x \in A$-ra $F_{\tilde{n}(x)}(x) = F_1(x) = \tilde{F}^-(x)$. Tehát

$$F_{\tilde{n}(x)}(x) \leq \sum_{j=0}^{\tilde{n}(x)-1} \tilde{F}^-(T^j x) + \varepsilon \tilde{n}(x) \tag{15.10}$$

μ majdnem minden x-re.
Most $L > N$-hez vezessük be, ugyanúgy, mint Birkhoff–Hincsin-ergodtétel bizonyításában a 3. lépésben, az $n_0(x), n_1(x), \ldots n_k(x)$ megállási időket és $k(x)$-t. A szubadditivitást használva

$$F_L(x) \leq F_{\tilde{n}(x)}(x) + F_{\tilde{n}(T^{n_1(x)}x)}(T^{n_1(x)}x) + \ldots + F_{\tilde{n}(T^{n_{k-1}(x)}x)}(T^{n_{k-1}(x)}x) + F_{L-n_k(x)}(T^{n_k(x)}x).$$

Ebből (15.10) alapján és kihasználva, hogy $L - n_k \leq N$

$$F_L(x) \leq \sum_{j=0}^{L-N} \tilde{F}^-(T^j x) + \varepsilon L + \sum_{j=L-N}^{L} |F_1(T^j x)|.$$

Integrálva és L-lel osztva

$$\lambda \leq \int \frac{1}{L} F_L \, d\mu \leq \int \tilde{F}^- \, d\mu + \varepsilon + \frac{N}{L} \int |F_1| \, d\mu.$$

Most $L \to \infty$ esetén (15.9) miatt

$$\lambda \leq F^- + \varepsilon + \varepsilon + \varepsilon \quad \rightsquigarrow \quad \lambda \leq F^-.$$ □

15.4. MEGJEGYZÉS Ha $\lambda > -\infty$, akkor L_1-konvergencia is igaz. Ugyanis a (15.4) Formula alapján $\frac{1}{n}(F_n)_+$ (itt g_+ a g függvény a pozitív része) egyenletesen integrálható. □

Fő lépések (Összefoglaló)

1. F^+ és F^- invariáns függvények.
2. $\forall N$-re $F^+ \leq \frac{1}{N}\int F_N$, így $F^+ \leq \lambda$.

3. $\lambda \leq F^-$ bizonyításához bevezetjük az $n(x), A = A(\varepsilon), \tilde{F}^-, \tilde{n}$ mennyiségeket, melyekre:

- $F^- \leq \tilde{F}^-(x)$
- $\int \tilde{F}^- \, d\mu \leq F^- + \varepsilon$
- $F_{\tilde{n}(x)}(x) \leq \sum_{j=0}^{\tilde{n}(x)-1} \tilde{F}^-(T^j x) + \tilde{n}(x) \cdot \varepsilon.$

4. Mint Birkhoff–Hincsin ergodtételében

$$F_L(x) \leq \sum_{j=0}^{L-1} \tilde{F}^-(T^j x) + \varepsilon L + NF^- + \sum_{j=L-N}^{L} F_1(T^j x).$$

Tehát integrálva és L-lel osztva

$$\begin{aligned} &\lambda \leq \frac{1}{L} \int F_L \, d\mu \leq \int \tilde{F}^- \, d\mu + \varepsilon + \varepsilon \leq F^- + 3\varepsilon \\ &\lambda \leq F^-. \end{aligned}$$

16. Oseledec multiplikatív ergodtétele

Ebben a fejezetben a dinamikai rendszerek egy nagyon fontos osztályával, a sima dinamikai rendszerekkel foglalkozunk. Ez azt jelenti, hogy a fázistér, M kompakt Riemann-sokaság, a dinamika pedig egy $f\colon M \circlearrowleft M$ C^1-diffeomorfizmus. $\mathscr{B}$ jelöli a Borel σ algebrát, így $(M, \mathscr{B}, f)$ nyilván automorfizmus. További jelölések:

$$T_xM \text{ az } M \text{ sokaság } x \text{ ponthoz tartozó érintőtere;}$$

$$D_xf\colon \text{ differenciál, vagy érintőleképezés:} T_xM \to T_{fx}M \text{ lineáris operátor;}$$

$$D_x(f^n) = (D_{f^{n-1}x}f) \cdot (D_{f^{n-2}x}f) \cdots (D_{fx}f) \cdot (D_xf).$$

ami a láncszabály egyszerű következménye.

16.1. Fürstenberg–Kesten-tétel (1960)

Ha μ ergodikus mérték, akkor $\exists \lambda \in \mathbb{R}$, hogy

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \log \|D_xf^n\| = \lambda \qquad \mu\text{-majdnem minden } x\text{-re.} \tag{16.1}$$

16.1. ÉRTELMEZÉS A Riemann-struktúra meghatároz egy belső szorzatot az érintő nyaláb $\forall T_xM\colon x \in M$ fibrumán. (Felületek esetén ez az ún. első alapforma.)

$\|D_xf^n\|$ a $D_xf^n\colon T_xM \circlearrowleft$ lineáris leképezés normája az indukált norma szerint.

Nyilván ha más, ekvivalens Riemann-metrikát választunk, akkor $\log \|D_xf^n\|$ változása csak korlátos, így $\frac{1}{n} \log \|D_xf^n\|$ limesze ugyanaz.

BIZONYÍTÁS Alkalmazzuk a szubadditív ergodtételt az $(M, \mathscr{B}, \mu)$-re $F_n(x) = \log \|D_{f^nx}\|$-szel ($n \geq 1$). A tétel feltételei valóban teljesülnek:

- Mivel f^n diffeomorfizmus, a $\|D_xf^n\|$ pozitív függvény M-en, ami M kompaktsága miatt 0-tól és ∞-től is el van választva, így $F_n \in L_1$.
- Továbbá
  $$\|D_xf^{n+k}\| = \|D_{f^nx}f^kD_xf^n\| \leq \|D_{f^nx}f^k\| \|D_xf^n\|,$$
  logaritmust véve éppen F_n szubadditivitását kapjuk.

Tehát μ-majdnem minden x-re $\exists \lambda = \lim \frac{1}{n} \| \log D_xf^n\|$. □

Legyen $\|Df^{-1}\| = \sup\{\|D_xf^{-1}\| \mid x \in M\}$, ez a mennyiség, mivel F diffeomorfizmus és M kompakt, nyilván véges. $\|Df^{-1}\|$ segítségével alsó becslést adhatunk λ-ra:

$$\frac{1}{\|Df^{-1}\|^n} \underset{\substack{\uparrow\\ \text{láncszabály}}}{\leq} \frac{1}{\|D_{f^nx}(f^{-1})^n\|} \underset{\substack{\uparrow\\ \text{per. def.}}}{\leq} \|D_xf^n\|$$

ezért $\forall n \geq 1$-re

$$-\log \|Df^{-1}\| \leq \frac{1}{n} F_n(x) = \frac{1}{n} \log \|D_x f^n\|$$

azaz $\lambda \geq -\log \|Df^{-1}\|$.

16.2. Oseledec tétele felületekre (1960)

A továbbiakban feltesszük, hogy $f\colon M \circlearrowleft C^1$-diffeomorfizmus, M kompakt *felület*, μ-ergodikus mérték f-re.

16.2. ÁLLÍTÁS *Az alábbi két eset valamelyike biztosan megvalósul.*

(Különböző Ljapunov-exponensek.) $\exists \lambda_1 > \lambda_2$, *és* $\exists T_x M = E_x^1 \oplus E_x^2$ *mérhető felbontás, hogy* μ*-majdnem minden* x*-re*

$$\forall v_1 \notin E_x^2\text{-re} \quad \lim \frac{1}{n} \log \|Df^n(v_1)\| = \lambda_1,$$
$$\forall v_2 \in E_x^2\text{-re} \quad \lim \frac{1}{n} \log \|Df^n(v_2)\| = \lambda_2.$$

(Azonos Ljapunov-exponensek.) A fenti állításban $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$, *ahol* λ *a Fürstenberg–Kesten-tételben szereplő* λ. *Pontosabban,* μ *m.m.* $x \in M$ *esetén* $\forall v \in T_x M$ *vektorra*

$$\lim \frac{1}{n} \log \|Df^n(v)\| = \lambda.$$

16.3. Oseledec általánosan (1968)

$f\colon M \circlearrowleft M$ C_1-diffemorfizmus, M kompakt Riemann-sokaság, μ-ergodikus mérték.

$$\exists\, \lambda_1 > \lambda_2 > \cdots > \lambda_k \qquad (k \leq d)$$

$$\exists\, n_1, \ldots, n_k \in \mathbb{Z}_+ : n_1 + \cdots + n_k = d$$
$$\exists\, T_x M = E_x^1 \oplus \cdots \oplus E_x^k \quad \text{mérhető, invariáns felbontás,}$$

hogy

$$\dim E_x^j = n_j \quad \text{és} \quad D_x f E_x^j = E_{fx}^j$$

legyen és μ-majdnem minden x-re

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \log \|D_x f^n(v)\| = \lambda_l$$

amennyiben $v \in E_x^1 \oplus \cdots \oplus E_x^l$ de $v \notin E_x^1 \oplus \cdots \oplus E_x^{l-1}$.

16.3. MEGJEGYZÉSEK

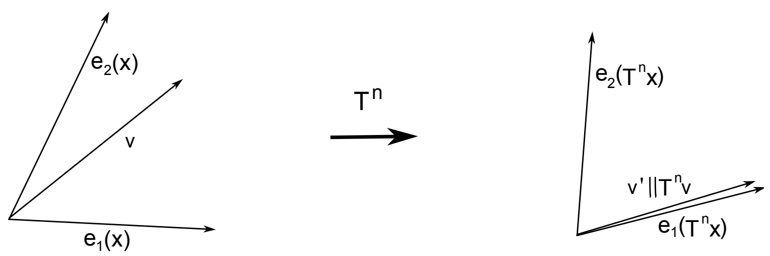
1. A $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ számokat az f diffeomorfizmus μ-mértékre vonatkozó Ljapunov-exponenseinek hívjuk, n_i a λ_i multiplicitása. A Ljapunov-exponensek jelentése: az E_x^i irányban f aszimptotikusan λ_i exponenciális rátával tágít.

2. μ nyilván ergodikus mérték az f^{-1} inverz dinamikára is, ennek Ljapunov-exponensei $-\lambda_k, \ldots, -\lambda_1$.

3. Ha f-re a Riemann-mérték invariáns és ergodikus, akkor $\sum n_j \lambda_j = 0$.

16.4. MEGJEGYZÉS Az éles szemű olvasó bizonyára észrevette, hogy a kétdimenziós esetre vonatkozó 16.2. tételben (szemben az általános esettel) nem szerepelt a felbontás invarianciája. Ez már csak azért is feltűnő lehet, mert így az E_x^1 alterek megválasztása nem egyértelmű – igazából tetszőleges, E_x^2-re egyenletesen transzverzális (mérhető) altérmezőre igaz marad a tétel állítása. A 16.2. tétel feltételei mellett valójában az (egyértelmű) E_x^2 altérmező invariáns (azaz $D_x f E_x^2 = E_{fx}^2$), az E_x^1 altérmezőt pedig lehet (egyértelműen) úgy megválasztani, hogy invariáns legyen. Ezzel a választással kapnánk vissza a 2 dimenziós állítást, mint a d dimenziós tétel speciális esetét. Bizonyításunk azonban nem (feltétlenül) ezt az E_x^1 altérmezőt konstruálja meg: az alább konstruált E_x^1 mindenütt merőleges E_x^2-re, ami az invariáns altérmezőkre nem feltétlenül teljesül.

A II.1. ábrán az invariáns altérmezőket ábrázoljuk az x és a $T^n x$ pontokban. Tetszőleges $E_2(x)$-re transzverzális v vektort felbonthatunk E_1-gyel, illetve E_2-vel párhuzamos komponensekre; az előbbi aszimptotikusan λ_1^n-szeresére, az utóbbi λ_2^n-szeresére tágul. Mivel $\lambda_1 > \lambda_2$, a $v' || DT^n v$ vektor egyre inkább $E_1(T^n x)$ irányába áll be.



II.1. ábra. Az invariáns altérmezők

BIZONYÍTÁS ($d = 2$) A bizonyítás során használni fogjuk a következő konvenciókat. C-vel jelöljük az univerzális konstansokat, melyek konkrét értékének nincs jelentősége: alkalmas megválasztásukkal teljesülnek az egyes becslések. C értéke a különböző formulákban különböző lehet. Hasonlóképpen, „$n \gg 1$ (vagy $C \gg 1$) esetén teljesül X” alatt azt értjük, ha az adott mennyiséget elég nagyra választjuk (a korábbi konstans választásainkhoz képest), akkor teljesül X.

Először felidézzük lineáris algebrából az alábbi lemmát:

16.5. LEMMA *Ha B négyzetes mátrix, akkor $\exists A \geq 0$ (szimmetrikus pozitív definit mátrix), hogy*

- $A^2 = B^* B$,

- $\|Av\| = \|Bv\|$.

(Itt A a B polár felbontásában – $B = U \cdot A$, ahol A szimmetrikus pozitív definit, U pedig izometria – az abszolút érték, és A sajátértékei a B mátrix szinguláris értékei.)

16.6. JELÖLÉS

$$\begin{aligned} B_n = &\quad D_x f^n, \qquad n \geq 1 \\ A_n = &\quad (B_n^* B_n)^{1/2} \\ A_n e_i^{(n)} = &\quad \mu_i^{(n)} e_i^{(n)} i = 1,2, \quad (\|e_i^{(n)}\| = 1), \quad e_1^{(n)} \perp e_2^{(n)}. \end{aligned} \tag{16.2}$$

Feltesszük: $\mu_1^{(n)} \geq \mu_2^{(n)}$.

1. LÉPÉS: Meghatározzuk, mik a λ_1, λ_2 számok.

- 16.5. Lemma és Fürstenberg–Kesten-tétel miatt μ-majdnem minden x-re

$$\lambda_1 = \lim_n \frac{1}{n} \log \|B_n\| \exists \text{ és } = \lim_n \frac{1}{n} \log \|A_n\| = \lim_n \frac{1}{n} \log \mu_1^{(n)}$$

- f helyett f^{-1}-t véve μ-majdnem minden x-re

$$\exists \lim \frac{1}{n} \log \|D_x f^{-n}\| = -\lambda_2.$$

Első eset: $\lambda_1 > \lambda_2$

2. LÉPÉS: $T_x M = E_x^1 \oplus E_x^2$ konstrukciója:

$$E_i^{(n)} = \operatorname{span} e_i^{(n)}, \qquad i = 1,2.$$

16.7. SZUBLEMMA $E_i^{(n)}$: $n \geq 1$ *Cauchy* $(i = 1,2)$.

16.8. MEGJEGYZÉS Ehhez elég belátni, hogy $\exists \delta > 0$, $C > 0$, hogy $\forall n \geq 1$-re

$$\left\| e_1^{(n)} - e_1^{(n+1)} \right\| \leq C e^{-n\delta} \qquad (\delta > 0). \tag{16.3}$$

Valóban, akkor

$$\left\| e_1^{(n)} - e_1^{(n+k)} \right\| \leq \frac{C e^{-n\delta}}{1 - e^{-\delta}}. \tag{16.4}$$

BIZONYÍTÁS

$$1 = \left\| e_1^{(n+1)} \right\|^2 = \left\| \left(e_1^{(n)}, e_1^{(n+1)} \right) \right\|^2 + \left\| \left(e_2^{(n)}, e_1^{(n+1)} \right) \right\|^2,$$

hiszen (e_1^n, e_2^n) ortonormált bázist alkotnak. Bevezetve a $\sin\varphi = \left(e_2^{(n)}, e_1^{(n+1)}\right)$ jelölést:

$$\left\|e_1^{(n)} - e_1^{(n+1)}\right\|^2 = 2\left[1 - \left(e_1^{(n)}, e_1^{(n+1)}\right)\right] = 2(1-\cos\varphi) \leq$$
$$\leq C|\sin\varphi|,$$

ha $\sin\varphi$ kicsi.

Legyen $\varepsilon > 0$.

A Fürstenberg–Kesten-tétel – a (16.1) képlet – alapján már tudjuk , hogy ha n elég nagy, akkor

$$\left|\lambda_1 - \frac{1}{n}\log\mu_1^{(n)}\right| < \varepsilon.$$

A definíciókból, valamint a (16.2) képletből következik, hogy:

$$\left|\left(e_1^{(n+1)}, e_2^{(n)}\right)\right| = \left|\left(\frac{A_{n+1}e_1^{(n+1)}}{\mu_1^{(n+1)}}, e_2^{(n)}\right)\right| \leq \frac{\left|\left(e_1^{(n+1)}, A_{n+1}e_2^{(n)}\right)\right|}{e^{(n+1)(\lambda_1-\varepsilon)}}.$$

Ugyanakkor

$$\left|\left(e_1^{(n+1)}, A_{n+1}e_2^{(n)}\right)\right| \leq \left\|A_{n+1}e_2^{(n)}\right\| = \left\|B_{n+1}e_2^{(n)}\right\| \leq$$
$$\leq \|D_{f^n x}f\| \left\|B_n e_2^{(n)}\right\| = \|D_{f^n x}f\| \left\|A_n e_2^{(n)}\right\|.$$

Jelölés: $D = \sup\{\|D_y f\| \mid y \in M\}$.

Ha $n \gg 1$, akkor

$$\left\|A_n e_2^{(n)}\right\| = \mu_2^{(n)} \leq e^{(\lambda_2+\varepsilon)n} \tag{16.5}$$

tehát

$$\left\|\left(e_1^{(n+1)}, e_2^{(n)}\right)\right\| \leq \frac{D}{e^{\lambda_1-\varepsilon}} e^{-n(\lambda_1-\lambda_2-2\varepsilon)}.$$

Innen (16.3) és az 1. szublemma következik. Tehát: $E_x^1 = \lim E_n^1$. □

3. LÉPÉS:

16.9. SZUBLEMMA *μ-majdnem minden x-re $\forall u \in E_1$-re*

$$\lim_n \frac{1}{n}\log\|B_n u\| = \lambda_1.$$

BIZONYÍTÁS Tegyük fel: $\|u\| = 1$.

Becsüljük:

- $\left|\|B_n u\| - \left\|B_n e_1^{(n)}\right\|\right| \leq \left\|B_n\left(u - e_1^{(n)}\right)\right\|$
- (16.4) $\rightsquigarrow \left\|e_1^{(n)} - u\right\| \leq \dfrac{Ce^{-n\delta}}{1-e^{-\delta}}$ ha $n \gg 1$.

- $\|B_n\| \le e^{(\lambda_1+\frac{\delta}{2})n}$
- $\left\|B_n e_1^{(n)}\right\| = \left\|A_n e_1^{(n)}\right\| = \mu_1^{(n)}$
- Legyen $\varepsilon' < \dfrac{\delta}{2}$. Akkor $n \gg 1$-re

$$e^{(\lambda_1-\varepsilon')n} \le \mu_1^{(n)} \le e^{(\lambda_1+\varepsilon')n}$$

A fentieket összefoglalva

$$e^{(\lambda_1-\varepsilon')n} - C\cdot\frac{e^{(\lambda_1-\frac{\delta}{2})n}}{1-e^{-\delta}} \le \|B_n u\| \le e^{(\lambda_1+\varepsilon')n} + C\cdot\frac{e^{(\lambda_1-\frac{\delta}{n})n}}{1-e^{-\delta}}$$

azaz

$$\begin{aligned} \limsup \log\frac{1}{n}\|B_n u| &\le \lambda_1+\varepsilon' \\ \liminf \qquad\qquad &\ge \lambda_1-\varepsilon'. \end{aligned} \tag{16.6}$$

□

16.10. Lemma

$$\lim_n \frac{1}{n}\lim \mu_2^{(n)} \exists (= \lambda_2). \tag{16.7}$$

Bizonyítás (Simon Károlytól származik)
Legyen $\tilde{B}_n(x) = D_x f^{-n}$ és $\tilde{\mu}_1^{(n)}(x) \ge \tilde{\mu}_2^{(n)}(x)$ a $\tilde{B}_n(x)$ szinguláris értékei. Fürstenberg–Kesten tételéből $\rightsquigarrow$

$$\exists \lim_n \frac{1}{n}\log\tilde{\mu}_1^{(n)} = \tilde{\lambda}_1. \tag{16.8}$$

16.11. Állítás *μ-majdnem minden $x \in M$-re*

$$\lim\frac{1}{n}\log\mu_2^{(n)}(x)\exists = (-\tilde{\lambda}_1 = \lambda_2).$$

Birkhoff–Hincsin-tételéből $\rightsquigarrow \exists$

$$\lambda^* = \lim_n \frac{1}{n}\log|\det B_n(x)| = \lim_n \frac{1}{n}\log|\mu_1^{(n)}(x)\mu_2^{(n)}(x)|$$

Tehát:

$$\lim_n \frac{1}{n}\mu_2^{(n)}(x) = \lambda^* - \lambda_1. \tag{16.9}$$

Mivel $\forall x \in M_1$, $\forall n \ge 0$-ra $B_n(x) = \tilde{B}_n^{-1}(f^n x)$ azért

$$\mu_2^{(n)}(x) = \frac{1}{\tilde{\mu}_1^{(n)}(f^n x)} \tag{16.10}$$

Felidézzük Jegorov tételét: ha μ valószínűségi mérték, és a g_n mérhető függvények sorozatára $g_n \to g$ μ-majdnem mindenütt, akkor $\forall \varepsilon > 0$ esetén létezik $\mu(A) > 1-\varepsilon$ halmaz, hogy az A halmazon a konvergencia egyenletes.

Jegorov tételéből, valamint a (16.8) és a (16.9) formulákból: $\exists H \subset M$, $\exists N \in \mathbb{N}$, hogy $\mu(H) > 1-\varepsilon$, továbbá $\forall n > N$-re $\forall x \in H$-ra

$$e^{n(\tilde{\lambda}_1-\varepsilon)} \leq \tilde{\mu}_1^{(n)}(x) \leq e^{n(\tilde{\lambda}_1+\varepsilon)} \tag{16.11}$$

$$e^{n(\lambda^*-\lambda_1-\varepsilon)} \leq \mu_2^{(n)}(x) \leq e^{n(\lambda^*-\lambda_1+\varepsilon)} \tag{16.12}$$

Másrészt a Poincaré rekurrencia tételből következik, hogy majdnem minden $x \in H$-ra $f^m x \in H$ végtelen sok $m > N$ esetén. Ekkor alkalmazva (16.11)-t $f^m x$-re, (16.10)-ből

$$e^{-n\tilde{\lambda}_1-n\varepsilon} \leq \mu_2^{(n)}(x) \leq e^{-n\tilde{\lambda}_1+n\varepsilon}$$

egy részsorozat mentén, és mivel a határérték létezik, és ε tetszőleges volt, adódik

$$\lambda^* - \lambda_1 = -\tilde{\lambda}_1 = \lambda_2. \tag{16.13}$$

□

4. LÉPÉS: Ha $v \notin E_x^2$, akkor $v = \alpha e_1 + \beta e_2$, $\alpha \neq 0$, és $\|B_n v\|$ növekedését nyilván $\|B_n e_1\|$ határozza meg. Hasonlóan, a $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$ esetben

$$u = \alpha_n e_1^{(n)} + \beta_n e_2^{(n)}$$

és $\|B_n u\|$ becslése adódik $\left\|B_n e_1^{(n)}\right\|$ és $\left\|B_n e_2^{(n)}\right\|$ becsléséből. □

Oseledec még általánosabban

$(M, \mathscr{F}, \mu, f)$ endomorfizmus.

$$A\colon M \to GL(n,\mathbb{R}) \text{ mérhető}$$

és

$$A_x^n = A(f^{n-1}x)\dots A(x) \quad \text{(mérhető kociklus)}$$

16.12. FELTEVÉS

$$\log^+ \|A(\cdot)\| \in L_1(M,\mu).$$

16.13. ÁLLÍTÁS $\exists \Gamma \subset M$, *hogy* $\mu(\Gamma) = 1$ *és* $\forall x \in \Gamma$*-ra*

a.) $\lim_n \left[(A_x^n)^* A_x^n\right]^{1/2n} = \Lambda_x \ \exists$

b.) *Legyenek* $\exp\lambda_x^{(1)} < \cdots \exp\lambda_x^{(s)}$ Λ_x *sajátértékei* $(\lambda_x^{(1)} \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\})$

$$U_x^{(1)}, \ldots, U_x^{(s)} \text{ a sajátalterek}$$

és

$$\dim U_x^{(r)} = n_x^{(r)}.$$

Akkor

$$n_x^{(r)}, \lambda_x^{(r)} \text{ invariánsak.}$$

c.) *Ha* $V_x^{(0)} = \{0\}$, $V_x^{(r)} = U_x^{(1)} + \cdots + U_x^{(r)}$, *akkor*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \log \|A_x^n v\| = \lambda_x^{(r)}$$

ha

$$v \in V_x^{(r)} \backslash V_x^{(r-1)}.$$

17. Topologikus dinamikai alapfogalmak

Ebben a fejezetben topologikus dinamikai rendszerekkel foglalkozunk. Ez alatt azt értjük, hogy a fázistér, M egy kompakt metrikus tér, $\mathscr{F}$ a Borel-féle σ-algebra, $T : M \to M$ pedig folytonos leképezés. Jellemzően nem rögzítünk az endomorfizmusra invariáns mértéket, azonban a Krilov–Bogoljubov-tétel alapján tudjuk, hogy (legalább egy) invariáns mérték létezik. Invertálható esetben (automorfizmusra) feltesszük, hogy T^{-1} is folytonos, tehát ilyenkor T homeomorfizmus.

Néhány fontos példa:

1. A körvonal forgatása, $M = \mathbb{S}^1 = \mathbb{R}^1/\mathbb{Z}^1$, $T_\alpha x = x + \alpha (\mod 1)$.

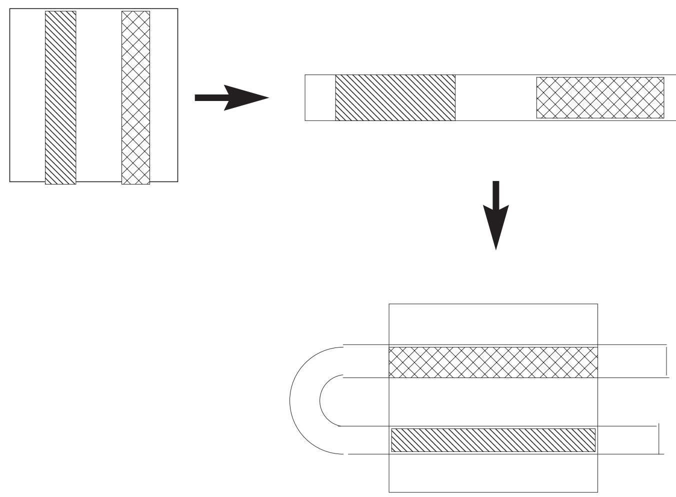
2. A bináris leképezés, $M = \mathbb{S}^1 = \mathbb{R}^1/\mathbb{Z}^1$, $T_2 x = 2x (\mod 1)$.

3. A féloldali shift leképezés, $\Sigma_+ = \{0,1\}^{\mathbb{Z}^+}$, azaz a $0-1$ sorozatok tere: $\Sigma_+ \ni \underline{x} = (x_1, x_2, \dots)$. $\underline{x}, \underline{y} \in \Sigma_+$ esetén legyen $i_0 = \min\{i \geq 1 : x_i \neq y_i\}$, ekkor Σ_+ a $d(\underline{x}, \underline{y}) = 2^{-i_0}$ metrikával kompakt metrikus tér. (Megjegyzés: ez a metrika éppen a szorzattopológiát generálja Σ_+-n: így a Tyihonov tételből is tudjuk, hogy Σ_+ kompakt. Másképp is szoktak definiálni metrikát Σ_+-n, ezek mindegyike ugyanezt a topológiát generálja.) A dinamika Σ_+-n a shift leképezés: $\sigma : \Sigma_+ \to \Sigma_+$, $(\sigma \underline{x})_i = x_{i+1}$, azaz a sorozatot eggyel elcsúsztatjuk. Mivel az első elemét elfelejtjük, ez a leképezés nem invertálható.

4. A kétoldali shift leképezés, $\Sigma = \{0,1\}^{\mathbb{Z}}$, azaz a kétirányban végtelen $0-1$ sorozatok tere: $\Sigma \ni \underline{x} = (\dots, x_{-1}, x_0, x_1, x_2, \dots)$. $\underline{x}, \underline{y} \in \Sigma$ esetén legyen $i_0 = \min\{i \geq 1 : x_i \neq y_i$, vagy $x_{-i} \neq y_{-i}\}$, ekkor Σ a $d(\underline{x}, \underline{y}) = 2^{-i_0}$ metrikával szintén kompakt metrikus tér. A dinamika Σ-n is a shift leképezés: $\sigma : \Sigma \to \Sigma$, $(\sigma \underline{x})_i = x_{i+1}$, ami azonban ezúttal invertálható.

   17.1. MEGJEGYZÉS Értelemszerűen tekinthetjük a a shift leképezéseket 2 helyett K szimbólummal (ahol K tetszőleges pozitív egész szám), ekkor a fázistér $\{0, 1, \dots$ $\dots, (K-1)\}^{\mathbb{Z}^+}$ (illetve $\{0, 1, \dots, (K-1)\}^{\mathbb{Z}}$), a metrikát és a dinamikákat ugyanúgy értelmezzük, mint két szimbólum esetén.

5. Smale patkó leképzése, ezzel a dinamikai rendszerrel találkoztunk már az I. rész 8. fejezetében. Emlékeztetésképpen: 1. képezzük le az R egységnégyzetet egy téglalapra lineárisan, mondjuk vízszintes irányban nyújtjuk, függőleges irányban összehúzunk; 2. ezt a téglalapot hajlítsuk meg U alakúra és toljuk el úgy, hogy az U két szára két vízszintes téglalapban metssze át az egységnégyzetet. Ezeknek a vízszintes téglalapoknak az őspképe két vékony függőleges téglalap az egységnégyzetben. A többi pontot a leképezés, amelyet T-fel fogunk jelölni, kiviszi az egységnégyzetből (lásd még a II.2. ábrát). Végiggondolható, hogy T^2, a második iterált, négy függőleges téglalapot visz át négy vízszintes téglalapba, T^n $(n > 0)$ pedig 2^n vízszintes téglalapot 2^n függőlegesbe. Ezek a téglalapok egyre vékonyabbak, Λ-val jelölve azokat az x pontokat, amelyekre $T^l x \in R$ minden $l \in \mathbb{Z}$-re, Λ két Cantor halmaz direkt szorzata. Patkó leképezés alatt a $T : \Lambda \to \Lambda$ topologikus dinamikai rendszert fogjuk érteni, ami a Cantor halmazoktól megörökölt topológiában homeomorfizmus.



II.2. ábra. A patkó leképezés

6. A tórusz lineáris (vagy algebrai) automorfizmusai (továbbiakban: TLA), és ezen belül is a macska leképezés. Ezekkel a dinamikai rendszerekkel az I. rész 6. és 7. fejezetében foglalkoztunk részletesen. Emlékeztetésképp: $M = \mathbb{T}^2$, $T_A : \mathbb{T}^2 \to \mathbb{T}^2$, $T_A x = Ax(\mod \mathbb{Z}^2)$, ahol A egy egész elemű, egységnyi determinánsú 2×2-es mátrix ($\mathbb{T}^2$-re, mint $\mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$-re gondolunk). Ilyenkor T_A homeomorfizmus és területőrző (tehát a Lebesgue-mérték invariáns). Különösen fontos az az eset, amikor A *sajátértékei nincsenek rajta az egységkörön* – a két sajátérték λ és $1/\lambda$, ahol $|\lambda| > 1$ – ilyenkor azt mondjuk, hogy a TLA *hiperbolikus*, ezt a továbbiakban feltesszük. A legismertebb példa az $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ esete, ezt macska leképezésnek is hívjuk (CAT= continuous automorphism of the torus), további szép tulajdonsága, hogy szimmetrikus, és így a sajátirányok merőlegesek egymásra. Emlékeztető: az $1/\lambda$-hoz és λ-hoz tartozó $v_s \in \mathbb{R}^2$, illetve $v_u \in \mathbb{R}^2$ sajátirányokat stabil, illetve instabil irányoknak hívjuk, adott $x \in \mathbb{T}^2$-re pedig a $W^{s/u}(x) = \{(\mathbb{T}^2 \ni) y = x + tv_{s/u} \,|\, t \in \mathbb{R}\}$ halmazokat pedig az x pont *stabil* és *instabil sokaságainak*. Stabil sokaság képe és őse is stabil sokaság, és ez igaz az instabil sokaságokra is. Ezek a sokaságok így is jellemezhetők:

$$W^s(x) = \{y \in \mathbb{T}^2 \,|\, d(T_A^n x, T_A^n y) = 0 \text{ ha } n \to +\infty\};$$

$$W^u(x) = \{y \in \mathbb{T}^2 \,|\, d(T_A^{-n} x, T_A^{-n} y) = 0 \text{ ha } n \to +\infty\},$$

ráadásul exponenciálisan. Az I. rész 7. fejezetében az invariáns sokaságoknak nagy szerepük volt annak bizonyításában, hogy a Lebesgue-mérték T_A-ra ergodikus (Hopf módszere).

17.2. FELADAT *Kétdimenziós hiperbolikus TLA-ra $W^u(x)$ és $W^s(x)$ sűrű $\mathbb{T}^2$-n, minden x-re.*

17.3. FELADAT *Mutassuk meg, hogy hiperbolikus TLA-ra egy $x \in \mathbb{T}^2$ pont akkor és csak akkor periodikus, ha mindkét koordinátája racionális. (Megj: igazából a hiperbolikusság nem is kell, csak az, hogy ne legyen komplex egységgyök sajátérték).*

17.4. DEFINÍCIÓ *A $T_1 : M_1 \to M_1$ és $T_2 : M_2 \to M_2$ topologikus dinamikai rendszerek topologikusan konjugáltak, ha $\exists\, \Phi : M_1 \to M_2$ homeomorfizmus, hogy $\Phi \circ T_1 = T_2 \circ \Phi$.*

Konjugált dinamikai rendszerek a topologikus dinamika szempontjából ekvivalens módon viselkednek. Példa: a Smale patkó és a kétoldali shift leképezés topologikusan konjugáltak, hiszen a Cantor halmaz természetes kódolását használva, Λ pontjai kódolhatóak a $\Sigma_2 = \{0,1\}^{\mathbb{Z}}$ kétirányban végtelen $0-1$ sorozatok elemeivel. Ezt a kódolást $\pi : \Lambda \to \Sigma_2$-vel jelölve könnyen ellenőrizhető, hogy (i) π kölcsönösen egyértelmű, sőt, (ii) homeomorfizmus, ha Σ_2-t a természetes szorzattopólógiával látjuk el, és ami a legfontosabb (iii) egymásba viszi a dinamikákat, tehát $\sigma \circ \pi = \pi \circ T$.

Fontos megjegyezni, hogy a topologikus konjugáció nem pontosan ugyanaz, mint az I. rész 4. fejezetében ismertetett izomorfizmus, amely azt fejezi ki, hogy a két dinamikai rendszer ergodelméleti szempontból ekvivalens. Már az I. rész 4. fejezetében szerepelt, hogy a bináris leképezés izomorf a féloldali shift leképezéssel (ha az intervallumon a Lebesgue-mértéket, a shift téren az $1/2-1/2$ Bernoulli-mértéket tekintjük, a természetes izomorfizmus az invariáns mértékeket is egymásba viszi). Azonban ez az izomorfizmus nem folytonos. Tehát a bináris leképezés és a féloldali shift ergodelméleti szempontból azonosíthatóak, de topologikus dinamikai szempontból már nem.

17.5. DEFINÍCIÓ *Legyen $T : M \to M$ topologikus dinamikai rendszer.*

- *Az $x \in M$ pont ω-limeszpontjainak halmaza*
$$\omega(x) = \bigcap_{n \in \mathbb{Z}^+} \overline{\bigcup_{j \geq n} T^j x};$$
azaz $y \in \omega(x)$ pontosan akkor, ha van időpontoknak olyan n_k részsorozata, hogy $T^{n_k} x \to y$. Amennyiben T invertálható, $x \in M$ α-limesz pontjainak halmazát
$$\alpha(x) = \bigcap_{n \in \mathbb{Z}^+} \overline{\bigcup_{j \geq n} T^{-j} x},$$
definiálja.

- *A T leképezés rekurrens pontjai (vagy visszatérő pontjai):*
$$\mathscr{R}(T) = \{x \in M \,|\, x \in \omega(x)\}.$$
Invertálható T-re megkülönböztetjük a pozitív és a negatív rekurrens pontokat (utóbbiról abban az esetben beszélünk, ha $x \in \alpha(x)$), és x-t akkor mondjuk rekurrensnek, ha pozitív és negatív rekurrens egyaránt.

- *$x \in M$ a T leképezés nemvándorló pontja, ha x tetszőleges U nyílt környezetére van olyan $n \geq 1$, hogy $T^n U \cap U \neq \emptyset$. A nemvándorló pontok halmazát $NW(T)$-vel jelöljük (non-wandering points).*

17.6. FELADAT *Mutassuk meg, hogy (i) $NW(T)$ zárt; (ii) ha $y \in NW(T)$, akkor $Ty \in NW(T)$; (iii) minden $x \in M$-re $\omega(x) \subset NW(T)$; így (iv) $\overline{\mathscr{R}(T)} \subset NW(T)$; és (v) x periodikus $\Rightarrow$ x rekurrens $\Rightarrow$ x nemvándorló; viszont (vi) adjunk példákat arra, hogy ezek a nyilak nem megfordíthatóak.*

Idézzük fel az I. rész 2. fejezetéből a topologikus tranzitivitás és a minimalitás fogalmát. Ezek az ω-limesz halmazok segítségével is jellemezhetőek: M topologikusan tranzitív, ha $\exists x \in M$, hogy $\omega(x) = M$; és M minimális, ha $\forall x \in M$: $\omega(x) = M$. A körvonal irracionális forgatása minimális: speciálisan, nincsenek periodikus pontok, viszont minden pont rekurrens. Egészen más viselkedést mutat például a hiperbolikus TLA: a 17.3. feladatból tudjuk, hogy a periodikus pontok sűrű halmazt alkotnak $M = \mathbb{T}^2$-n, és így $NW(T_{A_2}) = \mathbb{T}^2$ (speciálisan a periodikus pontok lezártja). Tudunk viszont példát mutatni nem rekurrens pontra.

17.7. DEFINÍCIÓ *Legyen $T : M \to M$ topologikus dinamikai rendszerben $x \in M$ fixpont, azaz $Tx = x$. Egy $y \in M$ pontot x-hez homoklinikusnak hívunk, ha $T^n y \to x$ és $T^{-n} y \to x$ egyaránt, amint $n \to \infty$.*

A macska leképezésnek az $x_0 = (0,0) \in \mathbb{T}^2$ (az origó) fixpontja. A 17.2. feladat alapján léteznek $y \neq x_0$, $y \in W^s(x_0) \cap W^u(x_0)$ pontok. Ilyenkor y x_0-hoz homoklinikus, és így $\alpha(y) = \omega(y) = \{x_0\}$, tehát y nem rekurrens. $y \in NW(T_{A_2})$ viszont közvetlenül is látszik, ha lerajzoljuk, mi történik y egy kis U környezetével. Ekkor $T^n U$ n növekedtével egyre inkább egy $W^u(x_0)$ mentén elnyúló ellipszis, $T^{-n} U$ pedig egy erre merőleges nagytengelyű, $W^s(x_0)$ mentén elnyúló ellipszis. Érdemes még megjegyezni, hogy ha alkalmas n-re tekintjük $R = T^{-n}U$-t, ezen a $T' = T^{2n}$ dinamika úgy viselkedik, mint a patkó leképezés.

17.8. FELADAT *Jellemezzük a periodikus pontokat a bináris leképezésre. Mutassunk itt is példát $x \in NW(T)$, $x \notin \mathscr{R}(T)$ pontra.*

17.9. FELADAT *Tekintsünk $T : M \to M$ topologikus dinamikai rendszert, mely rendelkezik a következő tulajdonsággal: $\forall U, V \subset M$ nyílt halmazokra $\exists n \geq 0$, hogy $T^n U \cap V \neq \emptyset$. Mutassuk meg, hogy ekkor T topologikusan tranzitív.*

17.10. DEFINÍCIÓ (TOPLOGIKUS KEVERÉS) *A $T : M \to M$ topologikus dinamikai rendszer topologikusan keverő, ha $\forall U, V \subset M$ nyílt halmazokra $\exists N \geq 0$, hogy minden $n \geq N$ esetén $T^n U \cap V \neq \emptyset$.*

A topologikus keverés erősebb tulajdonság, mint a topologikus tranzitivitás. Ez a két fogalom nagyjából a keverés, illetve az ergodicitás topologikus dinamikai megfelelője, amint ezt a következő példák is mutatják.

17.11. FELADAT *Mutassuk meg, hogy a macska leképezés, a bináris leképezés és a shift leképezések topologikusan keverőek, a körvonal irracionális forgatása viszont nem topologikusan keverő.*

18. Árnyékolás

18.1. DEFINÍCIÓ *Legyen $T : X \to X$ topologikus dinamikai rendszer. Azt mondjuk, az $x_i \in M$ $i \in \mathbb{N}$ (invertálható esetben akár $i \in \mathbb{Z}$) pontsorozat δ-pszeudo pálya, ha $\forall i$: $d(T(x_i), x_{i+1}) < \delta$. Hasonlóképpen lehet beszélni véges pszeudo-pályákról is.*

A δ-pszeudo pályát ε árnyékolja az $y \in M$ pont pályája, ha $d(T^i(y), x_i) < \varepsilon$, $\forall i$.

A $T : M \to M$ dinamikai rendszer rendelkezik az árnyékolási tulajdonsággal, ha minden $\varepsilon > 0$-hoz van $\delta > 0$, hogy minden δ-pszeudo pályát ε-árnyékol valamilyen igazi pálya.

Az árnyékolási tulajdonság különösképp fontos a dinamikai rendszerek számítógépes szimulációkkal történő vizsgálata szempontjából. Amikor egy dinamikai rendszer pályáit szimuláljuk, a kerekítési hibák miatt nem egy valóságos pályát, hanem egy pszeudo pályát számol ki a számítógép. Az árnyékolási tulajdonság azt fejezi ki, hogy ehhez a pszeudo pályához mindvégig közel halad egy igazi pálya. Természetesen ez nem feltétlen annak a pontnak a pályája, amiből a szimulációt indítottuk. A szimulációk többsége azonban nem egyetlen pont pályájának vizsgálatára irányul: sokszor egy kellően sűrű – például egy invariáns mérték szerint kisorsolt – véges halmaz minden pontjából indítjuk a szimulációt. Ha a rendszer rendelkezik az árnyékolási tulajdonsággal, a kapott pszeudo-pályák mindegyike közel lesz valamilyen igazi pályához. Másképp szólva, a szimulált fázisportré nem tér el lényegesen a tényleges fázisportrétól, azaz a fázisportré stabil a szimulációból adódó perturbációkra nézve.

Ebben a fejezetben azt fogjuk megmutatni, hogy a fázisportré ilyen jellegű stabilitása egészen mást jelent, mint az egyedi pályák stabilitása. Könnyű látni, hogy a körvonal forgatása, amely talán az egyedi pályák merevsége (stabilitása) szempontjából a legregulárisabb dinamikai rendszer, nem rendelkezik az árnyékolási tulajdonsággal. Tekintsünk ugyanis egy olyan pszeudo pályát az α forgatásra, amely mindig szisztematikusan azonos irányba (mondjuk jobbra) téved: $x_{i+1} = x_i + \alpha + \delta/2 (\mod 1)$. Ha volna olyan y pont, melynek pályája x_i-t árnyékolja, akkor $d(x_0, y) < \varepsilon$, és a forgatás merevsége miatt $d(T^n x_0, T^n y) < \varepsilon$ teljesülne minden n-re. Ugyanakkor $d(T^n x_0, x_n) = n\delta/2$, ami kellően nagy n-re ε-nál lényegesen nagyobb, tehát $d(x_n, T^n y) < \varepsilon$ nem teljesülhet.

18.2. LEMMA *A bináris leképezés rendelkezik az árnyékolási tulajdonsággal.*

BIZONYÍTÁS Legyen x_n, $n \geq 0$ a bináris leképezés ε-pszeudo pályája. Az y pontot, melynek pályája a teljes x_n pszeudo-pályát ε-árnyékolja, úgy fogjuk megkapni, mint egy y_k pontsorozat limeszpontját. Az y_k pont pályája $0 \leq n \leq k$ esetén fogja a (véges) y_n pszeudo-pályát árnyékolni. Először nem y_k-t, hanem annak k-dik képét adjuk meg: legyen $T^k(y_k) = x_k$; amiből persze y_k még nem egyértelmű. Minden pontnak, így $T^k(y_k) = x_k$-nak is két ősképe van, mivel $d(x_k, Tx_{k-1}) < \varepsilon$, választhatjuk azt az ősképet, melyre $d(T^{k-1}y_k, x_{k-1}) < \varepsilon/2$. Ebből, mivel x_k ε-pszeudo-pálya, $d(T^{k-1}y_k, Tx_{k-2}) < 3\varepsilon/2$ következik, és az ősképet megfelelően választva $d(T^{k-2}y_k, x_{k-2}) < 3\varepsilon/4$ érhető el. Így folytatva a konstrukciót kapjuk meg y_k-t, amire induktív érveléssel könnyen adódik, hogy $d(T^i y_k, x_i) < 2\varepsilon$, minden $0 \leq i \leq k$ esetén. Továbbá $d(y_k, y_{k+1}) \leq \varepsilon/2^k$, vagyis y_k Cauchy sorozat, és a limeszpont már a teljes x_k pszeudo-pályát árnyékolja. □

18.3. LEMMA *A macska leképezés rendelkezik az árnyékolási tulajdonsággal.*

A bizonyítás előtt bevezetünk néhány további jelölést. Emlékeztetésképp: $W^u(x)$ és $W^s(x)$ jelöli az $x \in \mathbb{T}^2$ pont instabil és stabil fonalát. Jelölje $W^u_\delta(x)$, illetve $W^s_\delta(x)$ a $W^u(x)$, illetve $W^s(x)$ fonalak x körüli, δ sugarú szakaszát (ezeket lokális fonalaknak is szoktuk hívni). Elég kis δ-ra, ha $d(x,y) < \delta$, akkor $W^u_\delta(x) \cap W^s_\delta(y)$ átmetszés pontosan egyelemű. Ezt a metszéspontot $[x,y]$-nal fogjuk jelölni.

BIZONYÍTÁS (A 18.3. LEMMA BIZONYÍTÁSÁNAK VÁZLATA) Nagyrészt követjük a 18.2. Lemma bizonyítását, bár nyilván szükségesek eltérések, hiszen T most invertálható, így nem válogathatunk az ősképek között. y most is y_k limesze lesz, ahol y_k pályája az első k iteráción keresztül árnyékolja az x_n pszeudo-pályát, továbbá y_k helyett most is $T^k y_k$-t definiáljuk. Konkrétan legyen $y_0 = x_0$, és induktív konstrukcióval, $T^k y_k = [T^k y_{k-1}, x_k]$. Mivel $T^k y_k$ és $T^k y_{k-1}$ azonos instabil fonálon vannak, az ősképeik közel kerülnek egymáshoz: ez biztosítja, hogy y_k árnyékolja az x_n pszeudo-pályát $n \le k$-ra. Ugyanakkor x_k és $T^k y_k$ azonos stabil fonálon vannak, így $T^{k+1} y_k$ és $T x_k$ közel kerül, következésképp, mivel x_n pszeudo-pálya, $T^{k+1} y_k$ és x_{k+1} távolsága is kontrollálható. □

18.4. FELADAT *Mutassuk meg, hogy (i) y_k pályája k iterációig valóban árnyékolja az x_i, $i = 0, \ldots, k$ pszeudo-pályát; (ii) az y_k pontsorozat konvergens, és a limeszpont, y pályája már a végtelen pszeudo-pályát árnyékolja; (iii) Hogyan kell ε-hoz δ-t választani?*

Ugyan most ezekre a nagyon egyszerű esetekre (bináris és macska leképezés) mutattuk meg az árnyékolást, mégis könnyen látható, hogy ami számít, az a dinamika (exponenciális ütemű) tágítása, illetve hiperbolicitása (hasonlóan lehet érvelni, ha a Ljapunov-exponensek sohasem válnak nullává egy teljes Lebesgue-mértékű halmazon). Ilyen értelemben az egyedi pályák instabilitása éppen a fázisportré stabilitásához kapcsolódik.

19. Topologikus entrópia

Ebben a fejezetben is topologikus dinamikával foglalkozunk, tehát M kompakt metrikus tér, $T : M \to M$ folytonos.

Az $x, y \in M$ pontok távolságát $d(x,y)$-nal jelölve, könnyen meggondolható, hogy minden n pozitív egész számra

$$d_n(x,y) = \max_{j=0,\dots,n} d(T^j x, T^j y)$$

is metrika, és ugyanazt a topológiát generálja, mint d. Legyen $\varepsilon > 0$ rögzített. Az N térben a ρ metrikára nézve egy véges (vagy megszámlálható) $A \subset N$ halmazt ε-hálónak hívunk, ha $\forall x \in N$ pontra létezik $y \in A$, hogy $\rho(x,y) < \varepsilon$. Egy $B \subset N$ halmaz ε-szeparált, ha $\forall x, y \in B$: $\rho(x,y) > \varepsilon$. N fedése nyílt halmazokkal ε fedés, ha minden a fedésben szereplő halmaz átmérője kisebb, mint ε. Speciálisan, az M térben tekinthetjük a d_n metrikára nézve az (n,ε) fedéseket, az (n,ε) hálókat, és az (n,ε) szeparált halmazokat.

19.1. DEFINÍCIÓ *Mivel M kompakt, minden n pozitív egész esetén (i) van véges (n,ε) fedése; (ii) van benne véges (n,ε)-háló, (iii) minden (n,ε)-szeparált halmaza szükségképpen véges. Jelölje rendre $F(n,\varepsilon,T)$, $H(n,\varepsilon,T)$ és $S(n,\varepsilon,T)$, hogy egy (n,ε) fedéshez legalább hány halmaz szükséges, egy (n,ε) hálónak legalább hány eleme van, illetve, hogy egy (n,ε) szeparált halmaznak legfeljebb hány eleme lehet.*

19.2. LEMMA *Minden $\varepsilon > 0$ esetén létezik és véges a*

$$h_\varepsilon(T) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \log(F(n,\varepsilon,T))$$

határérték. Továbbá $h_\varepsilon(T)$ ε-nak monoton csökkenő függvénye.

BIZONYÍTÁS Ha az U_i, $i = 1,\dots,I$ nyílt halmazok egy véges (n,ε)-fedést, a V_j, $j = 1,\dots,J$ nyílt halmazok pedig egy véges (m,ε)-fedést alkotnak, akkor az $U_i \cap T^{-m}V_j$ halmazok egy véges $(n+m,\varepsilon)$-fedést alkotnak. Következésképp

$$F(n+m,\varepsilon,T) \le F(n,\varepsilon,T) \cdot F(m,\varepsilon,T)$$

majd logaritmust véve adódik, hogy a $\log(F(n,\varepsilon,T))$ sorozat n-ben szubadditív, és így a 15.1. Lemma garantálja a limesz létezését. Másrészt minden rögzített n-re ε csökkentésével $F(n,\varepsilon,T)$ nyilván nem csökkenhet. □

19.3. DEFINÍCIÓ *A $T : M \to M$ leképezés topologikus entrópiáját*

$$h(T) = \lim_{\varepsilon\to 0+0} h_\varepsilon(T)$$

definiálja. A 19.2. Lemma alapján a határérék nyilván létezik: $h(T)$ lehet 0, pozitív valós szám, vagy $+\infty$.

Könnyen végiggondolható, hogy

$$F(n,2\varepsilon,T) \le H(n,\varepsilon,T) \le S(n,\varepsilon,T) \le F(n,\varepsilon,T).$$

Valóban, itt az n-től (és T-től) való függésről el is feledkezhetünk: ezek az állítások minden rögzített metrikára igazak maradnak. Az első egyenlőtlenséghez tegyük fel, hogy van egy ε hálónk, ekkor a hálót alkotó pontok köré helyezett ε sugarú gömbök egy 2ε-fedést alkotnak. A második egyenlőtlenséghez: a maximális ε-szeparált halmaz nyilván ε háló is egyben (he nem volna az, lehetne nagyobb elemszámú ε-szeparált halmazt is találni). A harmadik egyenlőtlenséghez: ha van egy k elemű ε-fedésünk, akkor a skatulya elv alapján bármely $k+1$ elemű ponthalmazra van két pont, melyek távolsága ε-nál kisebb.

Következésképp a topologikus entrópiát ekvivalens módon definiálhatjuk úgy is, mint

$$h(T) = \lim_{\varepsilon\to 0+0} \overline{\lim_{n\to\infty}} \left(\frac{1}{n}\log(H(n,\varepsilon,T))\right) = \lim_{\varepsilon\to 0+0} \overline{\lim_{n\to\infty}} \left(\frac{1}{n}\log(S(n,\varepsilon,T))\right)$$

és ugyanazt az értéket kapnánk akkor is, ha $\underline{\lim}$ szerepelne $\overline{\lim}$ helyett.

Az $F(n,\varepsilon,T)$ mennyiség (és annak különböző alternatívái) azt mutatják meg, hány n hosszú pályát tudunk megkülönböztetni ε skálán a dinamikai rendszerünkben. Ennek megfelelően a topologikus entrópia jelentése: milyen exponenciális rátával nő az n ideig topológiai szempontból „alapvetően különböző” pályák száma. Lényeges különbség van a pozitív és a nulla topologikus entrópiájú rendszerek között. Ezt illusztrálja az alábbi két példa.

Tekintsük a körvonal (racionális vagy irracionális) forgatását. A körvonalra minden $\varepsilon > 0$-ra létezik $\lceil \frac{1}{1{,}99\varepsilon} \rceil$ elemszámú ε-háló. Mivel a körvonal forgatására $d(T^n x, T^n y) = d(x,y)$ minden n-re, ezért az ε-háló egyúttal (n,ε)-háló, tehát $H(n,\varepsilon,T)$ n-től független, és így a topologikus entrópia 0.

Vegyük végül a féloldali shift leképezést. Legyen $2^{-(m+1)} < \varepsilon \leq 2^{-m}$ valamilyen $m \in \mathbb{Z}^+$ számra. Jelöljük y_i-vel $\{0,1\}^m$ elemeit, vagyis az m-hosszú $0-1$ sorozatokat, $i = 1,\ldots,2^m$. y_i-t tetszőleges módon kiegészítve végtelen $0-1$ sorozattá, jelöljük a fázistér, Σ^+ így kapott elemeit $\underline{y}_i$-vel. Nyilván $d(\underline{y}_i, \underline{y}_j) > \varepsilon$ $i \neq j$-re, viszont minden $\underline{x} \in \Sigma$ esetén létezik i, hogy $d(\underline{x}, \underline{y}_i) < \varepsilon$. így Σ^+ ε-hálóinak minimális elemszáma 2^m. Ha azt szeretnénk, hogy két pont n iteráción keresztül ε-közel legyen egymáshoz, az első m szimbólum mellett további n szimbólum közelségét is garantálnunk kell. így $H(n,\varepsilon,T) = 2^{m+n}$, és $h(T) = \log 2$.

19.4. MEGJEGYZÉSEK Hasonlóan lehet bizonyítani, hogy K szimbólum esetén a shift topologikus entrópiája $\log K$.

A logaritmus alapjának megválasztása befolyásolja $h(T)$ értékét, de nem befolyásolja annak pozitivitását. Az entrópia elméletében általában kettes vagy természetes alapú logaritmust szokás tekinteni.

20. Kolmogorov–Sinai-entrópia

Ebben a fejezetben a topológiai helyett ismét inkább ergodelméleti szempontból vizsgáljuk a dinamikai rendszereket, azaz a továbbiakban $(M, \mathscr{F}, \mu, T)$ endomorfizmus (esetleg automorfizmus).

Néhány mértékelméleti fogalom. Az $(M_1, \mathscr{F}_1, \mu_1)$ és $(M_2, \mathscr{F}_2, \mu_2)$ valószínűségi mezők *izomorfak*, ha létesíthető köztük bijekció, mely az $\mathscr{F}_i$-ben szereplő mérhető halmazokat egymásnak felelteti meg, azonos μ_i mértékkel. Egy valószínűségi mező *Lebesgue tér*, ha izomorf a $([0,1], \mathscr{L}, \mu)$ térrel, ahol $\mathscr{L}$ a Lebesgue σ-algebra, μ pedig előáll, mint a Lebesgue-mérték a $[0,s]$ intervallumon valamely $s \in [0,1]$-re, kiegészítve legfeljebb megszámlálható sok Dirac mértékkel. A továbbiakban feltesszük, hogy $(M, \mathscr{F}, \mu)$ Lebesgue tér. Neumann János egy tétele szerint, ha X teljes szeparábilis metrikus tér, ν egy Borel mérték X-n, és $\mathscr{B}$-t úgy kapjuk, hogy a Borel-féle σ-algebrát teljessé tesszük a ν mértékre nézve, akkor $(X, \mathscr{B}, \nu)$ Lebesgue tér.

$\beta = \{B_1, B_2, ..., B_J\}$ véges (mérhető) *partíció*, ha a $B_j \in \mathscr{F}$ $(j = 1, ..., J)$ halmazok páronként diszjunktak és uniójuk M (az ergodelméletben csak majdnem mindenütt típusú állítások érdekesek, így ezeket a tulajdonságokat is nullmértékű halmazok erejéig követeljük meg). Véges partíciók egyértelműen megfeleltethetők $\mathscr{B} \subset \mathscr{F}$ véges σ-algebráknak. Ha $\alpha = \{A_1, ..., A_I\}$ és $\beta = \{B_1, B_2, ..., B_J\}$ két partíció, akkor *közös finomításuk*, $\alpha \vee \beta$, az a partíció, melynek elemei az $A_i \cap B_j$ halmazok $(i = 1, ..., I;\ j = 1, ..., J)$. Azt mondjuk, hogy β *α finomítása* $(\alpha \leq \beta)$, ha $\forall j$-re $\exists i$, hogy $B_j \subset A_i$ (ilyenkor $\alpha \vee \beta = \beta$). α és β távolságának értelmezéséhez tegyük fel, hogy $J = I$ (ez mindig elérhető, ha a kisebb elemszámú partíciót kiegészítjük nullmértékű halmazokkal). Ekkor:

$$d(\alpha, \beta) = \min_{\sigma \in S_I} \sum_{i=1}^{I} \mu(A_i \Delta B_{\sigma(i)})$$

ahol S_I az I elem permutációinak halmazát, Δ pedig a szimmetrikus differenciát jelöli. Két partíciót ekvivalensnek fogunk tekinteni $(\alpha = \beta)$, ha $d(\alpha, \beta) = 0$. $\alpha \perp \beta$, azaz α és β függetlenek, ha $\mu(A_i \cap B_j) = \mu(A_i) \cdot \mu(B_j)$ minden $i = 1, ..., I$, $j = 1, ...J$ párra.

Ha T egy endomorfizmus, akkor $T^{-1}\alpha = \{T^{-1}A_1, ..., T^{-1}A_J\}$ is partíció, hasonlóképp tekinthetjük $T^{-k}\alpha$-t minden $k \geq 0$ számra, illetve automorfizmus esetén $T^k\alpha$-t is.

Egy véges partíció entrópiája. *Egy kis motiváció az entrópia bevezetésére.* Egy valószínűségi mező egy partíciójára úgy is tekinthetünk, mint egy véges értékkészletű valószínűségi változóra. A valószínűségi változó értékének ismeretével információt nyerünk a valószínűségi mező egy eredetileg számunkra teljesen ismeretlen véletlen pontjáról. Minél kisebb valószínűségű értékét látjuk a valószínűségi változónak, annál több információt nyerünk. Keresünk egy olyan $I(\mu(A_j))$ mennyiséget, ami alkalmas a nyert információ karakterizálására, igy elvárjuk, hogy $I(p)$: (i) p-nek (a bekövetkezett esemény valószínűségének) szigorúan monoton csökkenő függvénye legyen; (ii) $I(1) = 0$ teljesüljön (ilyenkor semmi információt nem nyerünk); (iii) $I(pq) = I(p) + I(q)$ teljesüljön (független eseményekre az információ összeadódik). Ezekből a tulajdonságokból folytonos I-re konstans szorzó erejéig egyértelműen adódik $I(p) = -\log p$.

Adott tehát egy α partíció, ekkor minden $x \in M$ pontra van olyan j, hogy $x \in A_j$, és definiálhatjuk a következő mennyiségeket:

$$I_\alpha(x) = -\log(\mu(A_j)); \qquad H(\alpha) = \sum_{j=1}^{J} -\mu(A_j)\log(\mu(A_j)) = \int_M I_\alpha(x)d\mu(x)$$

ahol $H(\alpha)$-t hívjuk az α partíció entrópiájának; ez a mennyiség azt mutatja meg, átlagosan mennyi információt nyerünk a valószínűségi változó megmérésével. log jellemzően a kettes alapú logaritmust jelöli, ennél fontosabb konvenció, hogy $0\log 0 = 0$. Evvel a választással a $\Phi(x) = -x\log x$ folytonos, szigorúan konkáv függvény a $[0,1]$ intervallumon, és így teljesül a Jensen egyenlőtlenség, azaz minden $x_k \in [0,1]$ $(k = 1,\ldots,n)$ és $\lambda_k \geq 0$, $\sum_{k=1}^{n} \lambda_k = 1$ esetén

$$\Phi\left(\sum_{k=1}^{n} \lambda_k x_k\right) \geq \sum_{k=1}^{n} \lambda_k \Phi(x_k),$$

és egyenlőség csak triviális konvex kombináció esetén valósul meg. Az alábbi Lemma a Jensen egyenlőtlenségből következik:

20.1. LEMMA *Legyenek α,β tetszőleges partíciók, jelölje $\nu = \{M\}$ a triviális partíciót.*

1. *$H(\alpha) \geq 0$, és $H(\alpha) = 0$ akkor és csak akkor, ha $\alpha = \nu$.*
2. *Ha $\alpha \leq \beta$, akkor $H(\alpha) \leq H(\beta)$, és egyenlőség csak $\alpha = \beta$ esetén fordul elő.*
3. *Ha α J elemű partíció, akkor $H(\alpha) \leq \log J$, és egyenlőség akkor és csak akkor fordul elő, ha minden $j = 1,\ldots,J$ esetén $\mu(A_j) = 1/J$ (azaz az α partíció egyenletes eloszlású valószínűségi változót generál).*
4. *$H(\alpha \vee \beta) \leq H(\alpha) + H(\beta)$, és egyenlőség akkor és csak akkor fordul elő, ha $\alpha \perp \beta$.*

Feltételes entrópia. Emlékeztető: ha $A,B \subset M$ és $\mu(B) > 0$, akkor $\mu(A|B) = \frac{\mu(A\cap B)}{\mu(B)}$ a feltételes valószínűség. Feltehetjük, hogy az α és β partíciók minden elemének pozitív a mértéke, ekkor legyen

$$H(\alpha|\beta) = -\sum_{j=1}^{J} \mu(B_j) \sum_{i=1}^{I} \mu(A_i|B_j)\log(\mu(A_i|B_j))$$

az α partíció feltételes entrópiája a β partícióra nézve. A feltételes entrópia jelentése: az α partíciót minden egyes B_j halmazra megszorítva kapunk egy partíciót, a megfelelő diszkrét eloszlást a feltételes valószínűségek adják, melynek kiszámolhatjuk az entrópiáját. Különböző B_j halmazokra különböző entrópiát kapunk, $H(\alpha|\beta)$ épp ennek az átlaga. A feltételes entrópia alábbi tulajdonságai könnyen adódnak:

20.2. LEMMA *Legyenek α,β,γ tetszőleges partíciók, jelölje $\nu = \{M\}$ a triviális partíciót.*

1. *$H(\alpha|\beta) \geq 0$, és $H(\alpha|\beta) = 0$ akkor és csak akkor, ha $\alpha \leq \beta$.*

2. *$H(\alpha|\nu) = H(\alpha)$.*
3. *ha $\alpha \le \beta$, akkor $H(\gamma|\alpha) \ge H(\gamma|\beta)$.*
4. *ha $\alpha \le \beta$, akkor $H(\alpha|\gamma) \le H(\beta|\gamma)$, és egyenlőség akkor és csak akkor fordul elő, ha $\alpha \vee \gamma = \beta \vee \gamma$.*
5. *$H(\alpha \vee \beta|\gamma) = H(\alpha|\gamma) + H(\beta|\alpha \vee \gamma)$, speciálisan $H(\alpha \vee \beta) = H(\alpha) + H(\beta|\alpha)$.*
6. *$H(\alpha|\beta) \le H(\alpha)$, és egyenlőség akkor és csak akkor fordul elő, ha $\alpha \perp \beta$. így $H(\alpha \vee \beta) \le H(\alpha) + H(\beta)$, és egyenlőség csak $\alpha \perp \beta$ esetén fordul elő.*

A $\rho(\alpha, \beta) = H(\alpha|\beta) + H(\beta|\alpha)$ távolság metrikát definiál a véges partíciókon (jobban mondva, azok ekvivalencia-osztályain). Ezt a távolságot *Rokhlin metrikának* is hívják. Kapcsolata a korább definiált távolsággal:

20.3. LEMMA *Minden $\varepsilon > 0$ és $m \in \mathbb{N}$ esetén létesik $\delta > 0$, hogy ha α és β m elemű partíciók és $d(\alpha, \beta) < \delta$, akkor $\rho(\alpha, \beta) < \varepsilon$.*

BIZONYÍTÁS Legyenek $\alpha = \{A_1, ..., A_m\}$ és $\beta = \{B_1, ..., B_m\}$ véges partíciók, melyekre $d(\alpha, \beta) = \sum_{i=1}^{m} \mu(A_i \Delta B_i) = \delta$. Az alábbiakban $H(\beta|\alpha)$-t m és δ segítségével becsüljük.

Ha $\mu(A_i) > 0$, definiáljuk a $\lambda_i = \mu(A_i \setminus B_i)/\mu(A_i)$ együtthatókat. Ekkor

$$-\mu(A_i \cap B_i) \log \frac{\mu(A_i \cap B_i)}{\mu(A_i)} \le -\mu(A_i)(1 - \lambda_i) \log(1 - \lambda_i).$$

Az $A_i \setminus B_i$ halmazt a B_j, $j \ne i$ halmazokkal elmetszve kapunk egy $m - 1$ elemű partíciót, melynek entrópiája a 20.1. Lemma alapján legfeljebb $\log(m - 1)$ lehet. Ez az entrópia a

$$-\sum_{j \ne i} ((\lambda_i)^{-1} \mu(B_j|A_i)) \log((\lambda_i)^{-1} \mu(B_j|A_i)) = \lambda_i^{-1} \left(-\sum_{j \ne i} (\mu(B_j|A_i)) \log(\mu(B_j|A_i)) \right) + \log \lambda_i$$

képlettel számolható. Következésképp

$$-\sum_{j \ne i} (\mu(B_j \cap A_i)) \log \frac{\mu(B_j \cap A_i)}{\mu(A_i)} \le -\mu(A_i)\lambda_i(\log \lambda_i - \log(m - 1)).$$

Mindezeket összevetve, és kihasználva, hogy $\log x$ konkáv függvény, kapjuk, hogy minden i-re:

$$\begin{aligned} -\sum_j \mu(B_j \cap A_i) \log \mu(B_j|A_i) \le \\ \le \mu(A_i) \left((1 - \lambda_i) \log \frac{1}{1 - \lambda_i} + \lambda_i \log \frac{m - 1}{\lambda_i} \right) \\ \le \mu(A_i) \log m. \end{aligned}$$

i-ben összegezve éppen $H(\beta|\alpha)$-ra kapunk becslést. Jobbanmondva, nagyobb mértékű A_i halmazoknál az első, kisebb mértékűeknél a második sor becslését használjuk. így:

$$H(\beta|\alpha) \le \sum_{\mu(A_i)<\sqrt{\delta}} \mu(A_i)\log m + \\ + \sum_{\mu(A_i)\ge\sqrt{\delta}} \mu(A_i)\left(-(1-\lambda_i)\log(1-\lambda_i) - \lambda_i\log\lambda_i + \lambda_i\log(m-1)\right).$$

A felbontás előnye, hogy $d(\alpha,\beta)=\delta$ miatt $\lambda_i\mu(A_i)\le\delta$, így, ha $\mu(A_i)\ge\sqrt{\delta}$, szükségképpen $\lambda_i \le \sqrt{\delta}$. Az $f(x) = -x\log x - (1-x)\log(1-x)$ függvény monoton nő a $(0,1/2)$ intervallumon, így a fenti becslésben a második tag legfeljebb $f(\sqrt{\delta})+\sqrt{\delta}\log(m-1)$. Az első tag pedig nyilván legfeljebb $\sqrt{\delta}m\log m$ lehet. □

20.4. LEMMA *Legyen α egy partíció, β_n pedig partíciók egy sorozata, melyre $d(\alpha,\beta_n)\to 0$. Ekkor vannak $\gamma_n\le\beta_n$ partíciók, melyekre $H(\alpha|\gamma_n)\to 0$.*

BIZONYÍTÁS Jelöljük α elemeit $\{A_j : j=1,..,J\}$-vel. $d(\alpha,\beta_n)\to 0$ alapján minden j-hez választhatunk $B_j^n\in\beta_n$ halmazokat, hogy $\mu(A_j\Delta B_j^n)\to 0$. Legyen minden n-re γ_n $J+1$ elemű, konkrétan legyenek az elemei a B_j^n halmazok, $j=1,\dots,J$, továbbá $B_{J+1}^n = M\setminus\cup_{j=1}^J B_j^n$. Ekkor $\mu(B_j^n)\to\mu(A_j)$ $(j=1,\dots,J)$, és $\mu(B_{J+1}^n)\to 0$, amint $n\to\infty$. Következésképp

$$\begin{aligned} H(\alpha|\gamma_n) = & -\sum_{i=1}^J \mu(A_i\cap B_i^n)\log(\mu(A_i|B_i^n)) \\ & -\sum_{j=1}^J \mu(A_j\cap B_{J+1}^n)\log(\mu(A_j|B_{J+1}^n)) \\ & -\sum_{i=1}^J\sum_{j\ne i} \mu(A_j\cap B_i^n)\log(\mu(A_j|B_i^n)) \end{aligned}$$

ahol az első tag $\mu(A_i|B_i^n)\to 1$ $(i=1,\dots,J)$ miatt tart 0-hoz, a második és a harmadik tag pedig azért, mert $\mu(A_j\cap B_i^n)\to 0$, ha $i\ne j$. □

Transzformáció entrópiája egy partícióra nézve. Legyen α tetszőleges partíció, ekkor definiáljuk az

$$\alpha^n = \alpha\vee T^{-1}\alpha\vee\dots\vee T^{-n+1}\alpha$$

további, egyre finomabb partíciókat. Mivel minden β partícióra és $k\ge 0$ számra $H(T^{-k}\beta) = H(\beta)$, a 20.2. Lemma utolsó tulajdonsága alapján $H(\alpha^{m+n})\le H(\alpha^n)+H(\alpha^m)$, azaz $H(\alpha^n)$ n-ben szubadditív, tehát létezik

$$h(T,\alpha) = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}H(\alpha^n)$$

amit a T endomorfizmus α partícióra vonatkozó entrópiájának hívunk.

20.5. LEMMA $h(T,\alpha) = \lim\limits_{n\to\infty} H(\alpha|T^{-1}\alpha^n)$

$x \in A_{i_0} \cap T^{-1}A_{i_1} \cap \ldots \cap T^{-n+1}A_{i_{n-1}} \in \alpha^n$ azt jelenti, hogy az $T^k x \in A_{i_k}$, $k = 0, 1, \ldots, (n-1)$, azaz az x pont első n iterációjának mindegyikére megmondjuk, az α partíció melyik elemébe esik. A 20.5. Lemma alapján $h(T,\alpha)$ jelentése: átlagosan mennyi plusz információt nyerünk, ha a dinamika n-dik lépésében az α^{n-1}-t tovább finomítjuk α^n-be.

BIZONYÍTÁS (A 20.5. LEMMA BIZONYÍTÁSA) A 20.2. Lemma 3. tulajdonsága alapján $H(\alpha|T^{-1}\alpha^n)$ n-ben monoton csökken, így a határérték létezik. Továbbá

$$\begin{aligned} H(\alpha^n) =& H(T^{-1}(\alpha^{n-1}) \vee \alpha) = H(\alpha^{n-1}) + H(\alpha|T^{-1}\alpha^{n-1}) = \\ =& H(\alpha^{n-2}) + H(\alpha|T^{-1}(\alpha^{n-2})) + H(\alpha|T^{-1}(\alpha^{n-1})) = \\ =& H(\alpha) + \sum_{k=1}^{n-1} H(\alpha|T^{-1}(\alpha^k)) \end{aligned}$$

n-nel osztva és határértéket véve adódik a Lemma állítása. □

További egyszerű, de hasznos tulajdonságok:

20.6. LEMMA *α, β tetszőleges partíciók, ekkor:*

1. *$h(T,\alpha) = h(T,T^{-1}\alpha)$, és ha T automorfizmus, $h(T,\alpha) = h(T,T\alpha)$;*
2. *$h(T,\alpha) = h(T, \vee_{i=0}^k T^{-i}\alpha)$ minden $k \in \mathbb{N}$ számára, és ha T automorfizmus, $h(T,\alpha) = h(T, \vee_{i=-k}^k T^{-i}\alpha)$ minden $k \in \mathbb{N}$ számára;*
3. *$h(T,\alpha) \le h(T,\beta) + H(\alpha|\beta)$, speciálisan ha $\alpha \le \beta$, $h(T,\alpha) \le h(T,\beta)$;*
4. *$|h(T,\alpha) - h(T,\beta)| \le H(\alpha|\beta) + H(\beta|\alpha) = \rho(\alpha,\beta)$;*
5. *$h(T,\alpha \vee \beta) \le h(T,\alpha) + h(T,\beta)$.*

Nézzük meg a 3. tulajdonság bizonyítását. A 20.2. Lemmában szereplő tulajdonságokat használva:

$$\begin{aligned} H(\alpha^n|\beta^n) =& H(\alpha \vee T^{-1}(\alpha^{n-1})|\beta^n) = H(\alpha|\beta^n) + H(T^{-1}(\alpha^{n-1})|\alpha \vee \beta^n) \\ \le& H(\alpha|\beta) + H(T^{-1}(\alpha^{n-1})|\beta^n) \\ \le& H(\alpha|\beta) + H(T^{-1}\alpha|T^{-1}\beta) + H(T^{-2}(\alpha^{n-2})|\beta^n) \le \cdots \\ \le& n(H(\alpha|\beta)). \end{aligned}$$

Másrészt szintén a 20.2. Lemma alapján

$$H(\alpha^n) \le H(\alpha^n \vee \beta^n) = H(\beta^n) + H(\alpha^n|\beta^n) \le H(\beta^n) + nH(\alpha|\beta)$$

amit n-nel osztva és határértéket véve kapjuk az állítást.

20.7. DEFINÍCIÓ (**KOLMOGOROV–SINAI-ENTRÓPIA**) *Egy $(M, \mathscr{F}, \mu, T)$ endomorfizmus $h(T)$ entrópiáját úgy definiáljuk, mint a $h(T, \alpha)$ mennyiségek szuprémumát, ha α befutja az M tér összes lehetséges (véges, mérhető) partícióját.*

Közvetlenül a definíció alapján persze nehéz volna kiszámolni az entrópiát; éppen ezért döntő jelentőségű Kolmogorov és Sinai alábbi tétele, melynek bevezetéséhez szükségünk van néhány további egyszerű definícióra és lemmára.

20.8. DEFINÍCIÓ *A β_n partíció-sorozat*

- ***finomodó**, ha $\beta_{n+1} \geq \beta_n$, minden $n \in \mathbb{N}$-re.*
- ***generáló**, ha minden α partícióra létezik olyan $\gamma_n \leq \vee_{k=1}^n \beta_k$ partíció-sorozat, melyre $d(\alpha, \gamma_n) \to 0$. Ez pontosan azt jelenti, hogy tetszőleges $A \in \mathscr{F}$ halmaz közelíthető a $\vee_{k=1}^n \beta_k$ partíció elemeinek alkalmas uniójával. Másképp szólva, ha tekintjük $\vee_{k=1}^n \beta_k$ partíciókhoz tartozó véges $\mathscr{F}_n$ σ-algebrák egyre finomodó sorozatát, akkor az ezek összessége által generált σ-algebra kiadja a teljes $\mathscr{F}$-t.*

20.9. LEMMA *Ha β_n véges partíciók egy finomodó és generáló sorozata, akkor $h(T) = \lim_{n\to\infty} h(T, \beta_n)$.*

BIZONYÍTÁS Legyen α tetszőleges m elemű partíció. Rögzítsünk tetszőleges $\varepsilon > 0$ számot. Ekkor a 20.3. Lemma alapján létezik $\delta > 0$, hogy minden m elemű γ partícióra, amennyiben $d(\alpha, \gamma) < \delta$, $\rho(\alpha, \gamma) < \varepsilon$ is teljesül. Ugyanakkor, mivel β_n finomodó és generáló, létezik n_0 és $\gamma_{n_0} (\leq \vee_{k=0}^{n_0} \beta_k = \beta_{n_0})$ m-elemű partíció, melyre $d(\gamma_{n_0}, \alpha) < \delta$, így $\rho(\gamma_{n_0}, \alpha) < \varepsilon$. Tehát a 20.6. Lemma 3. és 4. tulajdonságai alapján

$$h(T, \alpha) \leq h(T, \gamma_{n_0}) + \varepsilon \leq h(T, \beta_{n_0}) + \varepsilon. \qquad \square$$

20.10. DEFINÍCIÓ *Az α véges partíciót **generátor**nak nevezzük*

- ***nem invertálható** $(M, \mathscr{F}, \mu, T)$ endomorfizmusra, ha az $(\alpha^n =) \vee_{k=0}^n T^{-k}\alpha$ partíció-sorozat generáló (α féloldali generátor).*
- ***invertálható** $(M, \mathscr{F}, \mu, T)$ endomorfizmusra (automorfizmusra), ha az $\vee_{k=-n}^n T^{-k}\alpha$ partíció-sorozat generáló (α kétoldali generátor).*

20.11. TÉTEL (KOLMOGOROV–SINAI-TÉTEL) *Amennyiben α generátor, $h(T) = h(T, \alpha)$.*

BIZONYÍTÁS A nem invertálható esetre: Legyen β tetszőleges partíció. Mivel α generátor, létezik $\gamma_n \leq \alpha^n$ partíció-sorozat, melyre $d(\gamma_n, \beta) \to 0$ (itt persze $\alpha^n = \vee_{k=0}^n T^{-k}\alpha$). A 20.4. Lemma alapján ezek a partíciók tovább durvíthatóak $\beta_n \leq \gamma_n$ partíciókká, melyekre $H(\beta|\beta_n) \to 0$. Tehát minden $\delta > 0$-hoz létezik n_0, hogy $\beta_{n_0} \leq \alpha_{n_0} = \vee_{k=0}^{n_0} T^{-k}\alpha$, és $H(\beta|\beta_{n_0}) < \delta$. A 20.6. Lemma 2. és 3. tulajdonságait használva:

$$h(T, \beta) \leq h(T, \beta_{n_0}) + H(\beta|\beta_{n_0}) \leq h(T, \vee_{k=0}^{n_0} T^{-k}\alpha) + \delta = h(T, \alpha) + \delta. \qquad \square$$

20.12. MEGJEGYZÉSEK Invertálható esetben ugyanígy bizonyítunk, csak a $\vee_{k=0}^{n} T^{-k}\alpha$ partíciósorozat helyett a $\vee_{k=-n}^{n} T^{-k}\alpha$ partíciósorozatot használjuk. Ugyanakkor, ha az $(M, \mathscr{F}, \mu, T)$ *automorfizmus*ra létezik α *féloldali* generátor, akkor $h(T) = 0$. Ekkor ugyanis elég nagy n-re $H(T\alpha | \vee_{k=0}^{n} T^{-k}\alpha) < \varepsilon$, másrészt a 20.5. Lemma alapján

$$h(T, \alpha) = h(T, T\alpha) = \lim_{n\to\infty} H(T\alpha | T^{-1}(\vee_{k=0}^{n} T^{-k}(T\alpha)) = H(T\alpha | \vee_{k=0}^{n} T^{-k}\alpha).$$

Entrópia néhány konkrét példára

Körvonal forgatása. $M = \mathbb{S}^1$ a Lebesgue féle σ algebrával és a Lebesgue-mértékkel, $Tx = x + \gamma (\mod 1)$, ahol $\gamma \in [0, 1)$ rögzített szám. Ha γ *racionális*, $\exists p \in \mathbb{N}$, hogy $T^p = Id$, ezért $h(T) = 0$ az alábbi két észrevétel következménye:

- az identitásra $h(Id) = 0$, bármi is legyen a fázistér és a mérték,
- $h(S^k) = k \cdot h(S)$, minden S endomorfizmusra és $k \in \mathbb{N}$ számra.

Ha γ *irracionális*, ismét $h(T) = 0$ adódik. Legyen $\alpha = \{A_0, A_1\}$ $\mathbb{S}^1$ partíciója két félkörre (pl. $A_0 = [0, 1/2)$, $A_1 = [1/2, 1)$). Ekkor α^n körívekből áll, melynek végpontjai pontosan az eredeti A_0 és A_1 félkörök végpontjainak elforgatottjai. Tehát α^n pontosan $2(n+1)$ körívből áll, így $H(\alpha^n) \le \log(2(n+1))$, és $h(T, \alpha) = 0$. Másrészt γ irracionalitása miatt minden pont pályája sűrű $\mathbb{S}^1$-n, így α^n minden ívének hossza nullához tart, és n növekedtével egyre pontosabban megközelíthető $\mathbb{S}^1$ tetszőleges köríve α^n alkalmas elemeinek uniójával. Tehát α generátor T-re, és így $h(T) = 0$. A fenti megjegyzés fényében ez abból is következik, hogy α féloldali generátor, T pedig automorfizmus.

(Féloldali) Bernoulli-shift. K legyen tetszőleges pozitív egész, $M = \Sigma^+ = \{0, 1, \dots, K-1\}^{\mathbb{Z}^+}$ a hengerhalmazok által generált Borel σ-algebrával, $\sigma : \Sigma^+ \to \Sigma^+$ a shift leképezés. Σ^+-t egy σ-ra invariáns *Bernoulli-mérték*kel látjuk el, ahogy azt az I. rész 4. fejezetében leírtuk: adott egy $p = (p_0, \dots, p_{K-1})$ véges valószínűségeloszlás ($p_i \ge 0$, $\sum_{i=0}^{K-1} p_i = 1$), és minden $C \subset \Sigma^+$ hengerhalmazra, ha $C = C_{a_1,\dots a_L} = \{\underline{x} = (x_1, x_2, \dots) \in \Sigma^+ : x_1 = a_1, \dots, x_L = a_L\}$, $\mu(C) = p_{a_1} \cdot p_{a_2} \cdot \ldots \cdot p_{a_L}$. Legyen $\alpha = \{A_0, \dots A_{K-1}\}$, ahol $A_j = \{\underline{x} \in \Sigma^+ : x_1 = j\}$, $j = 0, \dots, K-1$, azaz az első betű értéke szerint particionálunk. Jelöljük a $(p_1, \dots, p_{K-1})$ eloszlás entrópiáját $H(p)$-vel, azaz $H(p) = H(\alpha) = -\sum_{i=0}^{K-1} p_i \log p_i$. Ekkor $\sigma^{-k}\alpha$ a k-dik szimbólum értéke szerinti partíció, és így a Bernoulli-mértékre $\sigma^{-n}\alpha \perp \alpha^n$ minden n-re. Következésképp $H(\alpha^n) = nH(p)$, és $h(\sigma, \alpha) = H(p)$. Ugyanakkor minden hengerhalmaz előáll alkalmas n-re, mint α^n elemeinek uniója, és így α generátor. Tehát $h(\sigma) = H(p)$. Hasonlóan bizonyítható, hogy kétoldali Bernoulli-shiftre szintén $h(\sigma) = H(p)$.

Néhány további fontos eredmény, bizonyítás nélkül

Shannon–McMillan–Breiman-tétel. Egy $\alpha = \{A_0, A_1, \dots A_{K-1}\}$ partíció esetén legyen $\alpha(x) = A_i$, ha $x \in A_i$ (itt $i = 0, \dots, (K-1)$). Speciálisan $\alpha^n(x) = A_{i_0} \cap \dots \cap T^{-n+1} A_{i_{n-1}}$, ha $T^k x \in A_{i_k}$, $k = 0, \dots, (n-1)$. $\mu(\alpha^n(x))$ nyilván monoton csökken, és így $I_n(x) = -\log(\mu(\alpha^n(x)))$, melyet az n-dik lépésben a partíció alapján rendelkezésre álló információnak tekinthetünk, monoton nő, ahogy $n \to \infty$. Shannon–McMillan–Breiman alapvető tétele ennek a növekedésnek az üteméről ad információt ergodikus esetben. Nézzük konkrétan a Bernoulli-shift esetét, és legyen α a fent bemutatott (első betű értéke szerinti) partíció. Ekkor $I_n(x)$ független, azonos eloszlású valószínűségi változók összege, és a nagy számok erős törvénye szerint $\frac{1}{n}I_n(x) \to H(p)(= h(\sigma))$ μ-majdnem minden x-re. Ezt a tényt általánosítja messzemenően az alábbi tétel.

20.13. TÉTEL (SHANNON–MCMILLAN–BREIMAN-TÉTEL) *Legyen $(M, \mathscr{F}, \mu, T)$ ergodikus endomorfizmus, és α véges partíció. Ekkor*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} I_n(x) = h(T, \alpha) \qquad \mu \textit{ m.m. } x\textit{-re és } L^1\textit{-ben.}$$

Ornstein izomorfia tétele. Idézzük fel az I. rész 4. fejezetéből az endomorfizmusok izomorfiájának a fogalmát. Izomorf dinamikai rendszerek ergodelméleti szempontból azonosak, így entrópiájuk is megegyezik. Konkrétan tekintsünk két *kétoldali* (azaz *invertálható*) Bernoulli-shiftet: a σ_1 shiftet K szimbólummal és $p = (p_0, \ldots, p_{K-1})$ betűeloszlással, illetve a σ_2 shiftet M szimbólummal és $q = (q_0, \ldots, q_{M-1})$ betűeloszlással. Amennyiben σ_1 és σ_2 izomorfak, $H(p) = H(q)$. Ornstein alapvető tétele szerint ennek megfordítása is igaz.

20.14. TÉTEL (ORNSTEIN IZOMORFIA TÉTELE) *A σ_1 és σ_2 Bernoulli-shiftek akkor és csak akkor izomorfak, ha $(h(\sigma_1) =)H(p) = H(q)(= h(\sigma_2))$.*

Fontos megjegyzés, hogy Ornstein tétele az invertálható esetre vonatkozik. A $p = (p_0, \ldots, p_{K-1})$ és $q = (q_0, \ldots, q_{M-1})$ betűeloszlású *féloldali* Bernoulli-shiftek csak abban a triviális esetben izomorfak – feltéve, hogy $p_i > 0$, $i = 0, \ldots, (K-1)$ és $q_j > 0$, $j = 0, \ldots, (M-1)$ – ha $K = M$ és a q vektor a p vektor permutációja. Invertálható esetben azonban az entrópia teljes invariáns, abban az értelemben, hogy azonos entrópiájú Bernoulli-automorfizmusok izomorfak. Ornstein tételének jelentőségét az is adja, hogy invertálható dinamikai rendszerek igen széles osztályára (kicsit pongyolán: hiperbolikus dinamikai rendszerekre) sikerült belátni, hogy izomorfak valamilyen (kétoldali) Bernoulli-shifttel.

Variációs elv. A 19. fejezetben láttuk, hogy K szimbólum esetén a shift leképezés *topologikus* entrópiája $\log(K)$, és mivel tetszőleges $p = (p_0, \ldots, p_{K-1})$ betűeloszlás esetén $H(p) \le \log(K)$; a Bernoulli-shift Kolmogorov–Sinai-entrópiája tehát nem haladhatja meg a topologikus entrópiát. Az alábbi, úgynevezett variációs elvet ezen tény messzemenő általánosításának tekinthetjük. Emlékeztető az I. rész 8. fejezetéből: ha rögzítünk egy $(M, \mathscr{F}, T)$ endomorfizmust – például egy topologikus dinamikai rendszert – akkor $\mathscr{M}_{\text{inv}}$ jelöli a T-re invariáns Borel valószínűségi mértékek összességét.

20.15. TÉTEL (VARIÁCIÓS ELV) *Legyen $T : M \to M$ egy kompakt metrikus tér folytonos endomorfizmusa, jelölje $h_{top}(T)$ T topologikus entrópiáját, és $\mu \in \mathscr{M}_{\text{inv}}$ esetén $h_\mu(T)$ a T leképezés μ invariáns mértékre vonatkozó Kolmogorov–Sinai-entrópiáját. Ekkor $h_{top}(T) =$* $\sup\{h_\mu(T) : \mu \in \mathscr{M}_{\text{inv}}\}$.

Speciális szerepet töltenek be az úgynevezett *maximális entrópiájú mértékek*; azok a $\mu \in \mathscr{M}_{\text{inv}}$ mértékek, melyekre $h_\mu(T) = h_{top}(T)$. Ilyen például a shift leképezés esetén (K szimbólumra) a $(p_0, \ldots, p_{K-1}) = (1/K, \ldots, 1/K)$ valószínűségeloszláshoz tartozó Bernoulli-mérték. Bebizonyítható, hogy ebben az esetben ez az egyetlen ilyen mérték.

21. Markov-shift

Véges állapotterű Markov-láncok – valószínűségszámítás és lineáris algebra emlékeztető. Egy $\pi = \pi_{ij}$ $i, j = 0, ..., (K-1)$ mátrix sztochasztikus mátrix, ha $\pi_{ij} \geq 0$ $\forall i, j$ és $\sum_{j=0}^{K-1} \pi_{ij} = 1$ $\forall i$. π^n jelöli a mátrix n-dik hatványát. π *irreducibilis*, ha minden i, j párra létezik n, hogy $\pi^n_{ij} > 0$. Ilyenkor az $\mathbf{1} = (1, ..., 1)$ vektor egyszeres jobboldali sajátvektora π-nek az 1 sajátértékhez; és a megfelelő baloldali sajátvektor is egyszeres: létezik és egyértelmű egy $p = (p_0, ..., p_{K-1})$ vektor, a stacionárius eloszlás, melyre $p_i > 0$ minden i-re, $\sum_{i=0}^{K-1} p_i = 1$, és $\sum_{i=0}^{k-1} p_i \pi_{ij} = p_j$ minden j-re. Ilyenkor π -hez tartozik egy $X_1, X_2, ..., X_n, ...$ stacionárius eloszlású, véges $(0, ..., K-1)$ értékkészletű értékű valószínűségi változó sorozat:

$$P(X_n = i) = P(X_1 = i) = p_i;$$
$$P(X_{n+1} = j | X_1 = i_1, ..., X_n = i) = P(X_{n+1} = j | X_n = i) = \pi_{ij};$$

ezt Markov-láncnak hívjuk. Különösen fontos az *irreducibilis, aperiodikus* eset; amikor $\exists N \in \mathbb{N}$, hogy $\pi^N_{ij} > 0$ $\forall i, j$-re. Ez garantálja, hogy az egyszeres 1 sajátértéktől eltekintve π spektruma egy $\alpha < 1$ sugarú körön belül fekszik a komplex síkon, következésképp $\pi^n_{ij} \to p_j$ minden i, j-re, amint $n \to \infty$, sőt, $\pi^n_{ij} = p_j + \mathcal{O}(\alpha^n)$. Mindez általánosítható tetszőleges *primitív mátrix*ra, azaz olyan nemnegatív B_{ij} elemű mátrixra, melynek van n hatványa, hogy minden i, j párra $B^n_{ij} > 0$. Perron tétele értelmében ilyenkor B-nek van egy maximális $\lambda > 0$ sajátértéke, ez a sajátérték egyszeres, és a hozzá tartozó sajátvektor minden komponense pozitív.

Topologikus Markov-láncok, Markov-shiftek. Egy $A = A_{ij}$ mátrix szomszédsági (adjacencia) mátrix, ha minden eleme 0 vagy 1. Tekintsük a $\Sigma^+ = \{0, ..., (K-1)\}^{\mathbb{Z}^+}$ szimbolikus teret, és ezen a σ eltolást, mint topologikus dinamikai rendszert – Σ^+-n a metrikát a 17. fejezetben leírt módon definiáljuk – és legyen

$$\Sigma^+_A = \{(x_1, x_2 ...) = \underline{x} \in \Sigma^+ | A_{x_k x_{k+1}} = 1; \forall k = 1, 2, ...\},$$

azaz A_{ij} a „megengedett átmeneteket” definiálja. Ekkor $\Sigma^+_A \subset \Sigma^+$ σ-ra invariáns és zárt – tehát kompakt – következésképp tekinthetjük a $\sigma : \Sigma^+_A \to \Sigma^+_A$ topologikus dinamikai rendszert. Ezt hívjuk *topologikus Markov-lánc*nak.

21.1. MEGJEGYZÉS A definíciók, és a teljes itt következő tárgyalás, automatikusan általánosítható a kétoldalú topologikus Markov-láncok és Markov-shiftek esetére, ezt a továbbiakban nem részletezzük.

Legyen most adott egy K állapotú irreducibilis aperiodikus Markov-lánc. A π_{ij} sztochasztikus mátrix természetes módon definiál egy A_{ij} szomszédsági mátrixot: legyen $A_{ij} = 1$ ha $\pi_{ij} > 0$, és $A_{ij} = 0$ ha $\pi_{ij} = 0$. A Σ^+_A téren konstruálhatunk egy σ-ra invariáns $\mu(= \mu_\pi)$ mértéket a következőképpen. Mivel a hengerhalmazok generálják a σ-algebrát, elég μ-t ezeken megadnunk (itt $(y_1, ... y_l) \in \{0, 1, ..., (K-1)\}^l$, rögzített):

$$\begin{aligned} &B = (B_{(y_1,...,y_l)} =)\{(x_1, x_2, ..., x_l, ...) = \underline{x} \in \Sigma^+_A : x_k = y_k, k = 1, .., l\} : \\ &\mu(B)(= \mu_\pi(B_{(y_1,...,y_l)})) = p_{y_1} \pi_{y_1 y_2} \pi_{y_2 y_3} \cdots \pi_{y_{l-1} y_l} . \end{aligned} \tag{21.1}$$

A $(\Sigma_A^+, \mathscr{F}, \mu_\pi, \sigma)$ endomorfizmust (itt $\mathscr{F}$ a hengerhalmazok által generált – Borel-féle – σ-algebrát jelöli) *Markov-shift*nek hívjuk.

21.2. ÁLLÍTÁS *Legyen π egy irreducibilis aperiodikus Markov-lánc átmenetmátrixa. Ekkor a megfelelő $(\Sigma_A^+, \mathscr{F}, \mu_\pi, \sigma)$ Markov-shift keverő.*

BIZONYÍTÁS Ahogyan azt az I. rész 4. és 5. fejezetében, a Bernoulli-shift esetében láttuk, minden mérhető halmaz approximálható hengerhalmazokkal, ezért elegendő belátni, hogy $B(= B_{(y_1,\ldots,y_l)})$ és $C(= C_{(z_1,\ldots,z_l)})$ hengerhalmazokra $\mu(B \cap \sigma^{-n}C) \to \mu(B)\mu(C)$, amint $n \to \infty$. Egyrészt

$$\mu(B) \cdot \mu(C) = p_{y_1}\pi_{y_1y_2}\pi_{y_2y_3}\cdots\pi_{y_{l-1}y_l} \cdot p_{z_1}\pi_{z_1z_2}\pi_{z_2z_3}\cdots\pi_{z_{l-1}z_l},$$

másrészt, ha $n \geq l$, $\underline{x} \in B \cap \sigma^{-n}C$ akkor és csak akkor, ha $(x_1,\ldots,x_l) = (y_1,\ldots,y_l)$ és $(x_{n+1},\ldots,x_{n+l}) = (z_1,\ldots,z_l)$ (az $x_{l+1},\ldots,x_n$ betűk tetszőlegesek lehetnek). Így

$$\mu(B \cap \sigma^{-n}C) = \sum_{x_{l+1},\ldots,x_n=0}^{K-1} p_{y_1}\pi_{y_1y_2}\cdots\pi_{y_{l-1}y_l}\pi_{y_lx_{l+1}}\pi_{x_{l+1}x_{l+2}}\cdots\pi_{x_{n-1}x_n}\pi_{x_nz_1}\cdot$$
$$\cdot\, \pi_{z_1z_2}\pi_{z_2z_3}\cdots\pi_{z_{l-1}z_l};$$

azaz

$$\mu(B \cap \sigma^{-n}C) = p_{y_1}\pi_{y_1y_2}\cdots\pi_{y_{l-1}y_l} \cdot \pi_{y_lz_1}^{(n-l)} \cdot \pi_{z_1z_2}\pi_{z_2z_3}\cdots\pi_{z_{l-1}z_l}.$$

Mivel $\pi_{y_lz_1}^n = p_{z_1} + \mathscr{O}(\lambda^n)$,

$$|\mu(B \cap \sigma^{-n}C) - \mu(B)\mu(C)| \leq C(l)\lambda^n$$

adódik, ahol a $C(l)$ konstans csak a vizsgált hengerhalmazok l hosszától függ. Ezzel nem csupán az eredeti állítást bizonyíttuk, hanem becslést adtunk a konvergencia sebességére is.□

21.3. MEGJEGYZÉS Hasonlóan bizonyítható, hogy amennyiben a π mátrix irreducibilis, de nem aperiodikus, a megfelelő Markov-shift ergodikus, de nem keverő.

Markov-shift entrópiája. Mindvégig az irreducibilis, aperiodikus esetet vizsgáljuk, így speciálisan az A_{ij} mátrix is primitív, így Perron tétele szerint van maximális pozitív λ sajátértéke, melyhez egyetlen baloldali és egyetlen jobboldali sajátvektor tartozik. Először a topologikus entrópiát számoljuk ki.

21.4. LEMMA *Egy $\sigma : \Sigma_A^+ \to \Sigma_A^+$ topologikus Markov-lánc topologikus entrópiája $h_{top}(\sigma) = \log\lambda$, ahol λ az A_{ij} szomszédsági mátrix legnagyobb sajátértéke.*

BIZONYÍTÁS A teljes shift esetét (amikor $A_{ij} = 1$ minden i, j párra) már tárgyaltuk a 19. fejezetben. Ez alapján könnyen végiggondolható, hogy a kulcsmennyiség $W(n, \Sigma_A^+)$, *a megengedett n hosszú jelsorozatok száma*. Ha $2^{-(m+1)} < \varepsilon \leq 2^{-m}$, $W(n+m, \Sigma_A^+)$ adja meg $H(n, \varepsilon, \sigma)$-t, a Σ_A^+ térben egy (n, ε)-háló minimális elemszámát. így

$$h_{top}(\sigma) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \log(W(n, \Sigma_A^+)).$$

Másrészt ha tekintjük A^n-t, az A mátrix n-dik hatványát, akkor teljes indukcióval igazolható, hogy $(A^n)_{ij}$ pozitív egész szám, és épp azt mondja meg, hány olyan n hosszú megengedett jelsorozat van, ami az i szimbólummal kezdődik, és a j szimbólummal végződik. így

$$W(n,\Sigma_A^+) = \sum_{i=0}^{K-1}\sum_{j=0}^{K-1}(A^n)_{ij}.$$

Ez a mennyiség az A^n (nemnegatív elemű) mátrix egy normájának is felfogható, és véges dimenziós téren bármely két norma ekvivalens. így

$$h_{top}(\sigma) = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\log||A^n|| = \log\lambda,$$

hiszen a legnagyobb sajátérték épp a spektrálsugár (erről lásd még a 27. fejezet funkanal összefoglalóját), azaz $\lambda = \lim_{n\to\infty}(||A^n||^{\frac{1}{n}})$. □

21.5. LEMMA *Legyen $(\Sigma_A^+,\mathscr{F},\mu_\pi,\sigma)$ A_{ij} szomszédsági mátrix-szal, π_{ij} átmenetmátrix-szal és ehhez p_i stacionárius eloszlással. A Kolmogorov–Sinai-entrópia*

$$h_\mu(\sigma) = -\sum_{j_1,j_2=0}^{K-1} p_{j_1}\pi_{j_1j_2}\log(\pi_{j_1j_2}).$$

BIZONYÍTÁS Ahogy a Bernoulli-shift esetén a 20. fejezetben, az első betű értéke szerinti α partíció most is generáló. A 20.5. Lemmát fogjuk használni. Definíció szerint:

$$H(\alpha|\sigma^{-1}\alpha^n) = -\sum_{A\in\alpha,B\in\sigma^{-1}\alpha^n}\mu(A\cap B)\log\frac{\mu(A\cap B)}{\mu(B)},$$

ahol $\alpha\ni A = C^1_{j_1}$ most 1 hosszú hengerhalmaz, $\sigma^{-1}\alpha^n\ni B = C^{2,\dots,(n+1)}_{j_2\cdots j_{n+1}}$ pedig n hosszú (és egy hellyel elcsúsztatott) hengerhalmaz. Tehát

$$\mu(A\cap B) = p_{j_1}\prod_{i=1}^{n}\pi_{j_ij_{i+1}};\qquad \mu(B) = p_{j_2}\prod_{i=2}^{n}\pi_{j_ij_{i+1}}.$$

Ebből

$$H(\alpha|\sigma^{-1}\alpha^n) = -\sum_{j_1,\dots,j_{n+1}=0}^{K-1} p_{j_1}\prod_{i=1}^{n}\pi_{j_ij_{i+1}}\left(\log(\pi_{j_1j_2})+\log(p_{j_1})-\log(p_{j_2})\right).$$

Ugyanakkor $\sum_{k=0}^{K-1}p_k\pi_{kl} = p_l$ minden l-re, és $\sum_{l=0}^{K-1}\pi_{kl} = 1$ minden k-ra. így

$$\sum_{j_1,\dots,j_{n+1}=0}^{K-1} p_{j_1}\prod_{i=1}^{n}\pi_{j_ij_{i+1}}\log(\pi_{j_1j_2}) = \sum_{j_1,j_2=0}^{K-1}p_{j_1}\pi_{j_1j_2}\log(\pi_{j_1j_2});$$
$$\sum_{j_1,\dots,j_{n+1}=0}^{K-1} p_{j_1}\prod_{i=1}^{n}\pi_{j_ij_{i+1}}\log(p_{j_1}) = \sum_{j_1=0}^{K-1}p_{j_1}\log(p_{j_1});$$
$$\sum_{j_1,\dots,j_{n+1}=0}^{K-1} p_{j_1}\prod_{i=1}^{n}\pi_{j_ij_{i+1}}\log(p_{j_2}) = \sum_{j_2=0}^{K-1}p_{j_2}\log(p_{j_2});$$

és a lemma állítása következik. □

Parry mérték. A 20.15. tételből tudjuk, hogy egy Markov-shift Kolmogorov–Sinai-entrópiája nem lehet nagyobb, mint a topologikus entrópia, azaz $\log\lambda$, ahol λ az A szomszédsági mátrix legnagyobb sajátértéke. A Parry mértékekre ez a maximum eléretik, azaz ezek a maximális entrópiájú invariáns mértékek egy topologikus Markov-láncra. A Parry mérték π_{kl} átmenetmátrixát a következőképp konstruáljuk. Legyen az A_{kl} szomszédsági mátrix maximális sajátértéke λ, az ehhez tartozó jobboldali sajátvektor u_k, a baloldali sajátvektor s_k, amelyeket úgy választunk, hogy $\langle s,u\rangle = \sum_{k=0}^{K-1} s_k u_k = 1$ teljesüljön (Perron tétele szerint $s_k > 0$ és $u_k > 0$ minden k-ra). A Parry mérték átmenetmátrixát $\pi_{kl} = \lambda^{-1}u_k^{-1}A_{kl}u_l$ definiálja. Könnyen ellenőrizhető, hogy ez a mátrix valóban sztochasztikus, mint ahogy az is, hogy $p_k = s_k u_k$ stacionárius eloszlás. Az alábbi számolásban a $\sum_{k=0}^{K-1} s_k A_{kl} = \lambda s_l$, $\sum_{k=0}^{K-1} A_{kl}u_l = \lambda u_k$, $\sum_{k=0}^{K-1} s_k u_k = 1$ összefüggéseket használjuk, valamint azt, hogy az A_{kl} szomszédsági mátrixra $A_{kl}\log(A_{kl}) = 0$, minden k-ra és l-re. A Parry mérték Kolmogorov–Sinai-entrópiája:

$$\begin{aligned}
h_\mu(\sigma) &= -\sum_{k,l=0}^{K-1} s_k u_k \lambda^{-1}u_k^{-1}A_{kl}u_l \log(\lambda^{-1}u_k^{-1}A_{kl}u_l) \\
&= -\sum_{k,l=0}^{K-1} s_k \lambda^{-1}A_{kl}u_l \log(\lambda^{-1}u_k^{-1}A_{kl}u_l) \\
&= \sum_{k,l=0}^{K-1} s_k \lambda^{-1}A_{kl}u_l \log(\lambda) + \sum_{k,l=0}^{K-1} s_k \lambda^{-1}A_{kl}u_l \left(\log(u_k) - \log(A_{kl}u_l)\right) \\
&= \log\lambda + \sum_{k=0}^{K-1} s_k u_k \log(u_k) - \sum_{l=0}^{K-1} s_l u_l \log(u_l) = \log\lambda .
\end{aligned}$$

Korreláció-lecsengés és sebessége. Ahogy azt az I. rész 5. fejezetében már láttuk, egy $(M,\mathscr{F},\mu,T)$ endomorfizmus akkor és csak akkor keverő, ha lecsengenek a korrelációk, azaz minden $f,g \in L_2(\mu)$ függvénypárra

$$Corr(n,f,g) = \left(\int_M f(T^n x)g(x)\,d\mu(x) - E_\mu f \cdot E_\mu g\right) \to 0, \tag{21.2}$$

ahol $E_\mu f = \int_M f(x)\,d\mu(x)$. A különféle alkalmazások szempontjából döntő jelentőségű a konvergencia sebessége (21.2)-ben, a sebesség azonban – amint ezt az alábbiakban érzékeltetni fogjuk – erősen függ az f,g függvények regularitási tulajdonságaitól. Tekintsük a Markov-shift esetét: a 21.2. állítás bizonyításánál láttuk, hogy amennyiben $f = \chi_B$ és $g = \chi_C$, tehát B és C hengerhalmazok indikátorfüggvényeit vizsgáljuk, akkor a lecsengés exponenciális. Ez a tulajdonság nyilván igaz marad lépcsőfüggvényekre, azaz hengerhalmazok indikátorfüggvényeinek véges lineárkombinációira is. Az exponenciális lecsengési tulajdonság egy igen fontos, további függvényosztályra is kiterjed.

21.6. DEFINÍCIÓ (HÖLDER FOLYTONOS FÜGGVÉNYEK) *Az (M,ρ) kompakt metrikus téren értelmezett $f : M \to \mathbb{R}$ függvény Hölder folytonos, ha $\exists\ \alpha \in (0,1]$ és $C > 0$, hogy $\forall\, x,y \in M$ esetén*

$$|f(x) - f(y)| \le C\,(\rho(x,y))^{\alpha}\,.$$

A legnagyobb α-t, amire ez a tulajdonság igaz, f Hölder exponensének, a legkisebb alkalmas $C(= C(f,\alpha))$-t pedig az α-hoz tartozó Hölder konstansnak nevezzük. Bevezetjük továbbá $||f||_{\alpha} = C(f,\alpha) + ||f||_0$ Hölder normát (itt $||f||_0$ a szuprémum norma) a Hölder folytonos függvények terén, melyet $C_{\alpha}(M)$-mel jelölünk.

21.7. DEFINÍCIÓ (EXPONENCIÁLIS KORRELÁCIÓ-LECSENGÉS) *Legyen μ keverő invariáns (Borel valószínűségi) mérték a $T : M \to M$ topologikus dinamikai rendszerre (tehát M kompakt metrikus tér és T folytonos). Az $(M,\mathscr{F},T,\mu)$ endomorfizmusra a korreláció-lecsengés sebessége exponenciális, ha $\forall\alpha \in (0,1]$ esetén $\exists\beta \in (0,1)$, hogy $\forall f,g \in C_{\alpha}(M)$ függvényekre $\exists C(f,g) > 0$, hogy:*

$$|Corr(n,f,g)| \le C(f,g)\beta^n. \tag{21.3}$$

Az exponenciális lecsengés rátája tehát csak a Hölder exponenstől függ, és általában a $C(f,g)$ konstansról is van információnk: az jellemzően $C(T)\cdot ||f||_{\alpha}\cdot ||g||_{\alpha}$ alakú, ahol a $C(T)$ konstans már csak a dinamikai rendszertől függ, és nem a konkrét f,g függvényektől.

21.8. ÁLLÍTÁS *Keverő Markov-shiftre (azaz irreducibilis, aperiodikus π esetén) a korreláció-lecsengés exponenciális.*

BIZONYÍTÁS Jelölje $\mathscr{C}_l$ a pontosan l hosszú – (21.1) alakú – hengerhalmazok összességét, $\mathscr{F}_l$ pedig az ezek által generált (véges) σ algebrát. Ekkor $\mathscr{F}_l$ l-ben növekvő σ-algebra sorozat, mely $\mathscr{F}$-t generálja. Legyen $f,g \in C_{\alpha}(\Sigma_A^+)$ (Σ_A^+-n a metrikát a 17. fejezetben ismertetett standard módon definiáljuk). Az egyszerűség kedvéért tegyük fel, hogy $E_{\mu}f = E_{\mu}(g) = 0$ és vezessük be az

$$\hat{f}_l = E(f|\mathscr{F}_l); \qquad \tilde{f}_l = f - \hat{f}_l$$

jelöléseket, ahol $E(f|\mathscr{F}_l)$ a (μ-re vonatkozó) feltételes várható értéket jelöli ($\hat{g}$-t és $\tilde{g}$-t hasonlóan definiáljuk). Célunk a (21.3) becslés bizonyítása, ehhez l értékét n-hez fogjuk választani, a továbbiakban az l alsó indexeket nem írjuk ki (mindig). Érdemes még bevezetni az $\hat{f}^{(n)} = \hat{f}\circ T^n$ és $\tilde{f}^{(n)} = \tilde{f}\circ T^n$ jelöléseket, így, mivel $g = \hat{g} + \tilde{g}$ és $f\circ T^n = \hat{f}^{(n)} + \tilde{f}^{(n)}$:

$$Corr(n,f,g) = E(\hat{f}^{(n)}\cdot\hat{g}) + E(\tilde{f}^{(n)}\cdot\hat{g}) + E(\hat{f}^{(n)}\cdot\tilde{g}) + E(\tilde{f}^{(n)}\cdot\tilde{g}), \tag{21.4}$$

ahol E a μ szerinti várható érték. A (21.4) formulában az első tagot könnyen becsülhetjük: $\hat{f}$ és $\hat{g}$ lépcsőfüggvények, lineáris felbontásukban legfeljebb l hosszú hengerhalmazok szerepelnek. így a 21.2. állítás bizonyításánál látott érvelésből:

$$|E(\hat{f}^{(n)}\cdot\hat{g})| \le ||f||_0\cdot||g||_0\cdot(\beta_{\pi})^{n-l}$$

ahol $\beta_{\pi} < 1$ a π sztochasztikus mátrix második legnagyobb sajátértéke. Másrészt minden $B \in \mathscr{C}_l$ hengerhalmaz átmérője $diam(B) = 2^{-l}$, és $\tilde{g}(x)$ $x \in B$ esetén éppen azt mutatja, a

g Hölder folytonos függvény mennyire tér el B-n vett átlagától az $x \in B$ pontban. Tehát g Hölder folytonossága miatt

$$|\tilde{g}(x)| \leq C(g,\alpha) \cdot 2^{-l\alpha}$$

és hasonlóképp

$$|\tilde{f}(x)| \leq C(f,\alpha) \cdot 2^{-l\alpha}, \qquad \Longrightarrow \qquad |\tilde{f}^{(n)}(x)| \leq C(f,\alpha) \cdot 2^{-l\alpha}.$$

Az egyszerűbb írásmód kedvéért érdemes bevezetni a $\beta_\alpha = 2^{-\alpha}$ jelölést, persze $\beta_\alpha < 1$ értékét az α Hölder exponens határozza meg. A fenti becslések alapján a (21.4) felbontásban a második, harmadik és negyedik tagra rendre:

$$E(\tilde{f}^{(n)} \cdot \hat{g}) + E(\hat{f}^{(n)} \cdot \tilde{g}) + E(\tilde{f}^{(n)} \cdot \tilde{g}) \leq$$
$$\leq (||f||_0 \cdot C(g,\alpha) + C(f,\alpha) \cdot ||g||_0 + C(f,\alpha) \cdot C(g,\alpha))\, \beta_\alpha^l,$$

így $l = n/2$ választással adódik az állítás. □

22. Markov-felbontás

A Markov-felbontás mindmáig az egyik legsikeresebb eszköz hiperbolikus dinamikai rendszerek statisztikus tulajdonságainak vizsgálatára. Sikerét elsősorban Sinai, Ruelle és Bowen munkáinak köszönheti az 1970-es évek elejéről: többek között azért, mert ők dolgozták ki a Markov-felbontás konstrukcióját dinamikai rendszerek egy lényeges osztályára (Anosov, illetve Axiom A rendszerekre). Mi most a macska leképezés esetére szorítkozunk, konkrétan Adler és Weiss ötletét ismertetjük ([1]). Szükségünk lesz mindazokra a fogalmakra, amik a macska leképezéssel kapcsolatban eddig felmerültek (pl. a 17. és a 18. fejezetekből, illetve az I. részből.) Konkrétan, használni fogjuk a stabil és instabil fonalakat, a homoklinikus átmetszések fogalmát, valamint a lokális stabil és instabil fonalak átmetszésének egyértelműségét, és ehhez kapcsolódóan az $[x,y] = W^u_\delta(x) \cap W^s_\delta(y)$ jelölést.

22.1. Definíció *Az $R \subset \mathbb{T}^2$ halmaz téglalap, ha $R = \overline{\operatorname{int} R}$ és $\forall x, y \in R$ esetén $[x,y] \in R$.*

A macska leképezés esetében látszik, hogy a téglalapok a szokásos értelmében is (diszunkt) téglalapok (véges uniói), az e^u és e^s irányokkal párhuzamos oldalakkal. Általánosabb esetben a geometria ennél bonyolultabb is lehet (pl. Cantor halmazok direkt szorzata). Könnyen ellenőrizhető, hogy

- ha R és R' téglalap, akkor $R \cap R'$ is az;
- ha R téglalap, akkor TR is az.

További elnevezések:

22.2. Definíció *Ha R téglalap, akkor határa előáll, mint $\partial R = \partial^u R \cup \partial^s R$, ahol ∂^u és ∂^s az e^u-val, illetve e^s-sel párhuzamos szakaszokat jelenti. Vezessük be továbbá a*

$$W^u(x,R) = \cup_{y \in R}[x,y]; \qquad W^s(x,R) = \cup_{y \in R}[y,x]$$

jelöléseket. Ha $R_1 \subset R_2$ téglalap, azt mondjuk, R_1 az R_2 u-résztéglalapja, ha u irányban „végigér", azaz $\partial^s R_1 \subset \partial^s R_2$. Ez pontosan azt jelenti, hogy $\forall x \in R_1$ esetén $W^u(x,R_1) = W^u(x,R_2)$. Az s-résztéglalap fogalmát analóg módon definiáljuk.

Könnyen ellenőrizhető, hogy R_1 akkor és csak akkor u-résztéglalapja R_2-nek, ha TR_1 u-résztéglalapja TR_2-nek, és ugyanez igaz s-résztéglalapokra is.

22.3. Definíció *Legyenek R, R' téglalapok. Azt mondjuk, R helyesen metszi R'-t, ha $TR \cap R'$ u-résztéglalap R'-ben. Ilyenkor automatikusan $TR \cap R'$ s-résztéglalap TR-ben, következésképp $R \cap T^{-1}R'$ is s-résztéglalap R-ben. A helyes átmetszésből következik, hogy amennyiben $x \in R$ és $Tx \in R'$, automatikusan*

$$W^u(Tx,R') \subset T(W^u(x,R)); \qquad \text{és} \qquad W^s(x,R) \subset T^{-1}(W^s(Tx,R')).$$

22.4. DEFINÍCIÓ *Az $R_0, R_1, \ldots, R_{K-1}$ véges sok téglalapból álló rendszert* ***Markov-felbontás****nak hívjuk, ha*

- $\bigcup_{i=0}^{K-1} R_i = \mathbb{T}^2$;
- *ha $i \neq j$, $\operatorname{int} R_i \cap \operatorname{int} R_j = \emptyset$, azaz a téglalapok csak a határuknál metszhetnek át. Következésképp nullmértékű halmaztól eltekintve egyértelmű, $x \in \mathbb{T}^2$ melyik R_i-be tartozik.*
- *ha bármilyen i, j párra (akár $i = j$-re) $m(TR_i \cap R_j) \neq 0$, az átmetszés helyes és összefüggő.*

Tehát $TR_i \cap R_j$ egy u-résztéglalap R_j-ben, és szintén a definícióból következik, hogy amennyiben $m(T^2R_i \cap TR_j \cap R_k) \neq 0$, a $T^2R_i \cap TR_j \cap R_k$ téglalap egy u-résztéglalap R_k-ban, $R_i \cap T^{-1}R_j \cap T^{-2}R_k$ pedig egy s-résztéglalap R_i-ben. A Markov-tulajdonság azzal függ össze, hogy ezeknek a téglalapoknak a méreteit u-irányban R_k, s-irányban R_i határozza meg, a közbülső R_j-től függetlenül.

Jelölje u_i és s_i az R_i téglalap e^u, illetve e^s irányú kiterjedését, $i = 0, \ldots, (K-1)$, $\lambda < 1$ pedig a macska leképezés mátrixának e^u irányú (1-nél nagyobb) sajátértékét. Az egyszerűség kedvvért csak magát a macska leképezést vizsgáljuk, így az e^u és e^s irányok merőlegesek, és $\lambda = (3+\sqrt{5})/2$. Vezessük be az

$$A_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{ha } m(TR_i \cap R_j) \neq 0, \\ 0 & \text{ha } m(TR_i \cap R_j) = 0 \end{cases}$$

szomszédsági mátrixot. így amennyiben $A_{ij} \neq 0$, $m(TR_i \cap R_j) = \frac{s_i u_j}{\lambda}$. Legyen továbbá

$$\pi_{ij} = \frac{m(TR_i \cap R_j)}{m(R_i)} = \begin{cases} \frac{u_j}{\lambda u_i} & \text{ha } A_{ij} = 1, \\ 0 & \text{ha } A_{ij} = 0. \end{cases}$$

Könnyen ellenőrizhető, hogy π_{ij} sztochasztikus mátrix, melyhez

$$p_i = m(R_i) = u_i s_i$$

stacionárius vektor. Célunk kapcsolatot teremteni a macska leképezés és a $(\Sigma_A, \mathscr{F}, \mu_\pi, \sigma)$ (kétoldali) Markov-shift között. Legyen $(\ldots, i_{-1}, i_0, i_1, \ldots) = \underline{i} \in \Sigma_A$. Ahogy azt az előbb láttuk,

$$m(TR_{i_0} \cap R_{i_1}) = m(R_{i_0} \cap T^{-1}R_{i_1}) = \frac{s_{i_0} u_{i_1}}{\lambda} = p_{i_0} \pi_{i_0 i_1},$$

és

$$m(T^2(R_{i_{-1}}) \cap TR_{i_0} \cap R_{i_1}) = \lambda^2 s_{i_{-1}} u_{i_1} = p_{i_{-1}} \pi_{i_{-1} i_0} \pi_{i_0 i_1}.$$

Tetszőleges $m, n \in \mathbb{Z}$, $m < n$ esetén legyen

$$R_{m,n}(i_m, \ldots, i_n) = T^{-m}R_{i_m} \cap T^{-m-1}R_{i_{m+1}} \cap \cdots \cap T^{-n}R_{i_n}.$$

A helyes átmetszések miatt ennek a téglalapnak a mértéke is könnyen számolható:

$$m(R_{m,n}(i_m, \ldots, i_n)) = \frac{s_{i_m} u_{i_n}}{\lambda^{n-m}} = p_{i_m} \pi_{i_m i_{m+1}} \ldots \pi_{i_{n-1} i_n}.$$

Definiáljuk a $\Phi : \Sigma_A \to \mathbb{T}^2$ leképezést a következőképpen:

$$\Phi(\underline{i}) = \bigcap_{n=0}^{\infty} R_{-n,n}(i_{-n}, i_{-n+1}, \ldots, i_{n-1}, i_n).$$

Φ jól definiáltságához van szükség ($A_{ij} = 1$ esetén) az átmetszések összefüggőségére. Ez garantálja ugyanis, hogy $R_{-n,n}(i_{-n}, i_{-n+1}, \ldots, i_{n-1}, i_n)$ téglalapok mind összefüggőek, és n növekedtével méretük (s és u irányban egyaránt) (λ^{-1} rátával) exponenciálisan lecseng, így a $\Phi(\underline{i})$ metszet egyetlen pontból áll. Φ rendelkezik az alábbi fontos tulajdonságokkal:

- Φ izomorfizmust teremt a macska leképezés és a Markov-shift között. Hiszen egyértelmű $\Phi(\underline{i})$ képként áll elő $\mathbb{T}^2$ m-majdnem minden pontja (kivételesek azok az $x \in \mathbb{T}^2$ pontok, amelyekre van $k \in \mathbb{Z}$ és $i \in \{0, \ldots, K-1\}$, hogy $T^k x \in \partial R_i$). Másrészt hengerhalmazokra éppen a fenti számolásokkal ellenőriztük, hogy $\Phi_* \mu_\pi = m$ és $\Phi \circ \sigma = T \circ \Phi$.

- Φ folytonos, sőt, Hölder folytonos leképezés. Következésképp, ha $f : \mathbb{T}^2 \to \mathbb{R}$ Hölder folytonos, akkor $\Phi^* f : \Sigma_A \to \mathbb{R}$ is az (itt $\Phi^* f(\underline{i}) = f(\Phi(\underline{i}))$).

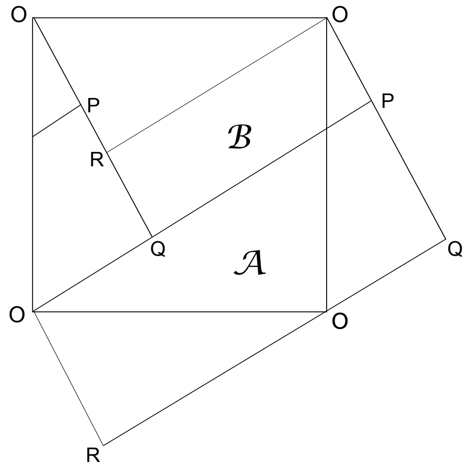
Ez utóbbi tulajdonság különösen fontos, hiszen a dinamikai rendszerek izomorfiája miatt

$$Corr(n, f, g) = Corr(n, \Phi^* f, \Phi^* g),$$

ahol $Corr$ mindkét esetben a megfelelő dinamikai rendszerre vett korrelációt jelenti. Tehát a Markov-felbontás segítségével bizonyítható, hogy a **macska leképezésre is exponenciális a korreláció-lecsengés sebessége**.

Ez a tény mutatja a Markov-felbontás igazi jelentőségét. A 20. fejezet végén említettük, hogy dinamikai rendszerek igen széles osztályára sikerült bizonyítani a Bernoulli-shifttel való izomorfiát. Általában azonban semmit sem tudhatunk az izomorfiát megvalósító leképezés simasági tulajdonságairól, így az alapján semmit sem mondhatnánk a korreláció-lecsengés sebességéről (vagy bármi más tulajdonságról, ami érzékeny a vizsgált függvények regularitására).

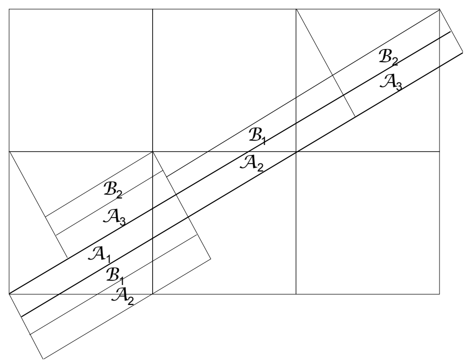
Végül vázoljuk a Markov-felbontás konstrukcióját a macska leképezésre (II.3 ábra). Fontos szerepet játszik az ábrán O-val jelölt pont – az origó, mely a macska leképezés (egyetlen) fixpontja – és ennek a pontnak az $S(O)$ és $U(O)$ stabil, illetve instabil fonala. Mivel O fixpont, $S(O)$ és $U(O)$ ősképe önmaga. A konstrukcióhoz nem a teljes $S(O)$ és $U(O)$ fonalakat, hanem csak azok O-hoz közel eső összefüggő szakaszait érdemes tekintenünk. Az 17. fejezetben már láttuk $S(O)$ és $U(O)$ metszéspontjainak, az úgynevezett *homoklinikus pontoknak* a speciális szerepét. Ezek közül tekintsünk hármat, amelyek az O ponthoz – a fonalak természetes irányítása szerint – közel helyezkednek el: a II.3. ábrán P, Q, R-rel jelölt pontokat. Az O, P, Q, R pontok, mint csúcspontok, két téglalapot jelölnek ki – az ábrán $\mathscr{A}$-val és $\mathscr{B}$-vel jelölt téglalapokat – melyek $\mathbb{T}^2$ felbontását adják.



II.3. ábra. Markov-felbontás a macska leképezésre, I

A felbontás Markov jellegéről meggyőződhetünk, ha megvizsgáljuk az $\mathscr{A}$ és $\mathscr{B}$ téglalapok képeit. $\partial^s\mathscr{A}$-t és $\partial^s\mathscr{B}$-t együttesen $S(O)$-nak az O és Q között elhelyezkedő szakasza adja. Ennek a szakasznak a képe (az invariancia és a kontrakció miatt) $S(O)$-nak egy rövidebb szakasza. Tehát az téglalapok képeinek stabil oldalfalai úgy jelennek meg, mint az eredeti stabil oldalfalak részei. $\partial^u\mathscr{A}$-t és $\partial^u\mathscr{B}$-t együttesen $U(O)$-nak az R és O, valamint az O és P közti szakaszai adják, ezek $U(O)$-nak hosszabb szakaszaiba képeződnek. Tehát a téglalapok képei instabil oldalfalainak részei az eredeti instabil oldalfalak. Mindez önmagában már garantálja az átmetszések helyességét.

$\mathscr{A}$ és $\mathscr{B}$ képét a II.4. ábrán ábrázoltuk. $T\mathscr{A} = \mathscr{A}_1 \cup \mathscr{A}_2 \cup \mathscr{A}_3$ u irányban először keresztezi $\mathscr{A}$-t ($\mathscr{A}_1$), majd mégegyszer $\mathscr{A}$-t ($\mathscr{A}_2$), végül $\mathscr{B}$-t ($\mathscr{A}_3$). $T\mathscr{B} = \mathscr{B}_1 \cup \mathscr{B}_2$ először $\mathscr{A}$-t, majd $\mathscr{B}$-t keresztezi u-irányban ($\mathscr{B}_1$, illetve $\mathscr{B}_2$).



II.4. ábra. Markov-felbontás a macska leképezésre, II

A kapott felbontás csak annyiban nem felel meg a követelményeknek, hogy az átmetszések nem összefüggőek (konkrétan $\mathscr{A}$ önmagát kétszer is átmetszi). Ezen azonban könnyű segíteni: $\mathscr{A}$ és $\mathscr{B}$ helyett az ezek képeinek átmetszéseként kialakuló $\mathscr{A}_1, \mathscr{A}_2, \mathscr{A}_3, \mathscr{B}_1, \mathscr{B}_2$ téglalapok fogják adni a Markov-felbontást. Könnyen meggondolható, hogy a szomszédsági mátrix:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Végül néhány észrevétel a macska leképezés entrópiájáról. A Markov-felbontás segítségével megmutatható, hogy a macska leképezés topologikusan konjugált az A_{ij} szomszédsági mátrixú topologikus Markov-lánccal, ergodelméleti szempontból izomorf a π_{ij} átmenetmátrixú Markov-shifttel. Az is látható, hogy π_{ij} éppen az A_{ij}-hez tartozó Parry mértéket definiálja, és a maximális sajátérték éppen λ. Tehát a macska leképezés topologikus entrópiája és Kolmogorov–Sinai-entrópiája egyaránt $\log \lambda$.

23. Egyértelmű ergodicitás

Legyen $T : M \to M$ topologikus dinamikai rendszer, ekkor a Krilov–Bogoljubov-tétel alapján tudjuk, hogy $\mathscr{M}_{\text{inv}} \neq \emptyset$.

23.1. DEFINÍCIÓ (EGYÉRTELMŰ ERGODICITÁS) *A $T : M \to M$ topologikus dinamikai rendszer Egyértelműen ergodikus (uniquely ergodic), amennyiben $\mathscr{M}_{\text{inv}}$ egyelemű, azaz létezik egyetlen μ Borel valószínűségi mérték, hogy $\mathscr{M}_{\text{inv}} = \{\mu\}$.*

23.2. PÉLDA A körvonal T_α forgatása egy irracionális α szöggel egyértelműen ergodikus. Ekkor ugyanis az $\{n\alpha\}$ pálya sűrű $\mathbb{S}^1$-n, így $\forall \gamma \in \mathbb{S}^1$ esetén létezik $n_j\alpha \to \gamma$ részsorozat, és amennyiben $\mu \in \mathscr{M}_{\text{inv}}$, minden $f \in C(\mathbb{S}^1)$ folytonos függvényre

$$\int f(x)\, d\mu(x) = \int f(T_{n_j\alpha}x)\, d\mu(x) \ \to \ \int f(T_\gamma x).$$

Azaz μ eltolásinvariáns mérték az $\mathbb{S}^1$ Abel-csoporton, ami csak a Haar-mérték lehet, tehát $\mu = Leb$, a Lebesgue-mérték.

A Weyl tétel (az I. rész 3. fejezete) alapján is érdekes a következő lemma.

23.3. LEMMA *Egy $T : M \to M$ topologikus dinamikai rendszerre a következők ekvivalensek.*

(i) Minden $f \in C(M)$ esetén létezik egy $c(f)$ konstans, hogy $\lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f(T^k x) \right) = c(f)$ minden $x \in M$-re.

(ii) A fenti konvergencia minden $f \in C(M)$ esetén egyenletes.

(iii) $\exists \mu \in \mathscr{M}_{\text{inv}}$, hogy az (i) konvergenciában fenti konvergenciákban $c(f) = \int f d\mu$.

(iv) T egyértelműen ergodikus.

BIZONYÍTÁS $(ii) \Rightarrow (i)$ nyilvánvaló.

$(i) \Rightarrow (iii)$ bizonyításához tekintsük a $c(f) = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f(T^k x) \right)$ (x-től független) értéket, ez $C(M)$-n nyilván lineáris funkcionál, amely $|\frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f(T^k x)| \leq \|f\|$ miatt (ahol $\|f\|$ az $f \in C(M)$ függvény szuprémum normája) korlátos is. Továbbá az azonosan 1 függvényre $c(1) = 1$, és $f(x) \geq 0$ esetén $c(f) \geq 0$, következésképp a Riesz reprezentációs tétel miatt $c(f) = \int f d\mu$ valamely μ Borel mértékre. $c(\hat{T} f) = c(f)$ is nyilván teljesül (emlékeztető: $(\hat{T} f)(x) = f(Tx)$), így $\mu \in \mathscr{M}_{\text{inv}}$. (NB. $c(1) = 1$ szükséges ahhoz, hogy a mérték valószínűségi legyen).

$(iii) \Rightarrow (iv)$ igazolásához legyen $\nu \in \mathscr{M}_{\text{inv}}$, és az $f \in C(M)$ esetén minden $x \in M$-re fennálló $\left(\frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f(T^k x) \right) \to \int f d\mu$ limeszt a dominiált konvergencia tétel alapján ν szerint integrálhatjuk, amiből ν invarianciája miatt $\int f d\nu = \int f d\mu$, $\forall f \in C(M)$, azaz $\mu = \nu$ adódik.

Végül lássuk be, hogy $(iv) \Rightarrow (ii)$. Tegyük fel, hogy (ii) nem teljesül, azaz $\exists g \in C(M)$ és $\varepsilon > 0$, hogy egy alkalmas x_n részsorozat mentén

$$\left| \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} g(T^k x_n) - \int g d\mu \right| > \varepsilon$$

Tekintsük a $\mu_n = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \delta_{T^k x_n}$ Borel valószínűségi mértékek sorozatát: ennek a Krilov–Bogoljubov-tételnél látott érvelés (I. rész 8. fejezet) alapján van μ_{n_j} (gyenge-$*$ értelemben) konvergens részsorozata, ami egy $\mu_\infty \in \mathscr{M}_{\text{inv}}$ invariáns mértékhez tart. Ekkor viszont $|\int g d\mu_\infty - \int g d\mu| > \varepsilon$, vagyis $\mu \neq \mu_\infty$, tehát $\mathscr{M}_{\text{inv}}$-nek van két különböző eleme: T nem lehet egyértelműen ergodikus. □

23.4. MEGJEGYZÉS Az alábbi feladatok mutatják, hogy önmagában abból, hogy minden $f \in C(M)$ esetén $\frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f(T^k x)$ egyenletesen konvergál, még nem következik az egyértelmű ergodicitás.

23.5. FELADAT *Legyen* $T : \mathbb{T}^2 \to \mathbb{T}^2$, $T(x,y) = (x + \alpha, y)$, *ahol* $\alpha \in \mathbb{S}^1$ *irracionális. Mutassuk meg, hogy minden* $f \in C(\mathbb{T}^2)$ *esetén az időátlagok egyenletesen konvergálnak, de általában nem konstans függvényhez.*

23.6. FELADAT *Tegyük fel, hogy a* $T : M \to M$ *topologikus dinamikai rendszer topologikusan tranzitív (a definíciót lásd az I. rész 2. fejezetében), és minden* $f \in C(M)$ *esetén az időátlagok egyenletesen konvergálnak. Mutassuk meg, hogy ekkor* T *egyértelműen ergodikus.*

23.7. FELADAT *Legyen* $A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, *és tekintsük a tórusz* $T_{A_2} : \mathbb{T}^2 \to \mathbb{T}^2$ *lineáris automorfizmusát (Figyelem, ez nem hiperbolikus eset, lásd I. rész 6. fejezet). Mi lesz* $\mathscr{M}_{\text{erg}}$ *és* $\mathscr{M}_{\text{inv}}$ T_{A_2}*-re?*

24. Keverési tulajdonságok és hierarchiájuk

Ebben a fejezetben feltesszük, hogy $(M, \mathscr{F}, T, \mu)$ automorfizmus (bár bizonyos fogalmakat, állításokat könnyen lehetne általánosítani a nem invertálható dinamikák esetére is). Már az I. rész 5. fejezetében láttuk, hogy

$$T \text{ ergodikus} \iff \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \mu(T^{-k}A \cap B) = \mu(A)\mu(B),\ \forall A, B \in \mathscr{F};$$

$$T \text{ keverő} \iff \lim_{n\to\infty} \mu(T^{-n}A \cap B) = \mu(A)\mu(B),\ \forall A, B \in \mathscr{F}.$$

Ekvivalens módon meg lehetne követelni ugyanezeket a tulajdonságokat (i) $A, B \in \mathscr{A}$ esetére, ahol $\mathscr{A}$ a teljes $\mathscr{F}$-t generáló halmazrendszer; (ii) A, B halmazok mértéke helyett $f, g \in L^2(\mu)$ függvények integráljára/L^2 skalárszorzatára; (iii) $f, g \in F$-re, ahol F tetszőleges $L^2(\mu)$-ben sűrű függvényosztály.

24.1. DEFINÍCIÓ *Az $(M, \mathscr{F}, T, \mu)$ automorfizmus gyengén keverő, ha*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \left| \mu(T^{-k}A \cap B) - \mu(A)\mu(B) \right| = 0,\ \forall A, B \in \mathscr{F}.$$

24.2. MEGJEGYZÉSEK 1. A definíció most is ekvivalens módon átfogalmazható a fenti (i)-(ii)-(iii)-nek megfelelően. 2. Nyilván: T (erősen) kever $\Rightarrow$ T gyengén kever $\Rightarrow$ T ergodikus.

24.3. DEFINÍCIÓ *Egy $J \subset \mathbb{Z}^+$ halmazra legyen $\alpha_J(n) = \sharp(J \cap \{1,,\dots,n\})$, ahol $\sharp$ a számosságot jelöli. J nullsűrűségű, ha $\frac{1}{n}\alpha_J(n) \to 0$, amint $n \to \infty$.*

24.4. SZUBLEMMA *Legyen a_n korlátos számsorozat. A következők ekvivalensek:*

(i) $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} |a_k| = 0$;

(ii) $\exists J \subset \mathbb{Z}^+$ *nullsűrűségű, hogy* $\lim_{J \not\ni n \to \infty} a_n = 0$.

24.5. FELADAT *Bizonyítsuk be a 24.4. szublemma (ii) $\Rightarrow$ (i) állítását (itt fontos feltétel a korlátosság).*

$(i) \Rightarrow (ii)$ bizonyításához tekintsük minden $m \in \mathbb{Z}^+$ számra a $J_m = \{n \in \mathbb{Z}^+ \mid |a_n| \geq 1/m\}$ indexhalmazokat. Egyrészt $J_1 \subset J_2 \subset \dots$, másrészt (i) miatt minden J_m nullsűrűségű, hiszen

$$\frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} |a_k| \geq \frac{1}{n}\frac{1}{m} \alpha_{J_m}(n).$$

Következésképp léteznek $0 = l_0 < l_1 < l_2 < \ldots$ indexek, hogy $n \geq l_m$ esetén $\frac{1}{n}\alpha_{J_{m+1}}(n) < \frac{1}{m+1}$. Legyen

$$J = \bigcup_{m=0}^{\infty} [J_{m+1} \cap [l_m, l_{m+1})].$$

$l_m \leq n < l_{m+1}$ esetén:

$$J \cap [0,n) = (J \cap [0,l_m)) \cup (J \cap [l_m,n)) \subset (J_m \cap [0,l_m)) \cap (J_{m+1} \cap [l_m,n)),$$

így

$$\frac{1}{n}\alpha_J(n) \leq \frac{1}{n}(\alpha_{J_m}(l_m) + \alpha_{J_{m+1}}(n)) \leq \frac{1}{n}(\alpha_{J_m}(n) + \alpha_{J_{m+1}}(n)) < \frac{1}{m} + \frac{1}{m+1},$$

tehát $\frac{1}{n}\alpha_J(n) \to 0$, azaz J nullsűrűségű. Másrészt $n > l_m$, $n \notin J$ esetén $n \notin J_{m+1}$, és így $|a_n| \leq \frac{1}{m}$, tehát $\lim\limits_{J \not\ni n \to \infty} a_n = 0$. $\square$.

24.6. KÖVETKEZMÉNY Egy a_n korlátos sorozatra

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} |a_k| = 0 \iff \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} a_k^2 = 0.$$

24.7. MEGJEGYZÉS A fentieknek megfelelően egy $(M, \mathscr{F}, T, \mu)$ automorfizmus gyengén kever, ha $\forall A, B \in \mathscr{F}$ esetén $\exists J(A,B) \subset \mathbb{Z}^+$ nullsűrűségű, hogy

$$\lim_{J(A,B) \not\ni n \to \infty} \mu(T^{-n}A \cap B) = \mu(A)\mu(B).$$

24.8. DEFINÍCIÓ *Az $(M, \mathscr{F}, \mu)$ valószínűségi mező megszámlálható bázisú, ha létezik mérhető halmazok $B_1, B_2, \ldots$ sorozata, hogy $\forall A \in \mathscr{F}$ és $\varepsilon > 0$ esetén $\exists j \in \mathbb{Z}^+$, melyre $\mu(B_j \Delta A) < \varepsilon$.*

24.9. MEGJEGYZÉSEK 1. $(M, \mathscr{F}, \mu)$ megszámlálható bázisú $\iff$ Az $L^2(\mu)$ Hilbert tér szeparábilis. 2. Amennyiben M teljes szeparábilis metrikus tér, μ Borel mérték, $\mathscr{F}$ pedig a Borel-féle σ-algebra (vagy az a σ-algebra, amit a Borel-féléből μ-re nézve teljessé tétellel kapunk), akkor $(M, \mathscr{F}, \mu)$ megszámlálható bázisú.

24.10. SZUBLEMMA *Legyen $(M, \mathscr{F}, \mu)$ megszámlálható bázisú. Az $(M, \mathscr{F}, T, \mu)$ automorfizmus akkor és csak akkor gyengén keverő, ha $\exists\ J \subset \mathbb{Z}^+$ nullsűrűségű, hogy $\lim\limits_{J \not\ni n \to \infty} \mu(T^{-n}A \cap B) = \mu(A)\mu(B)$, minden $A, B \in \mathscr{F}$-re.*

BIZONYÍTÁS Tegyük fel, hogy T gyengén kever, és legyen $B_1, B_2, \ldots$ a valószínűségi mező megszámlálható bázisa, és

$$a_n = \sum_{i,j=1}^{\infty} \frac{|\mu(T^{-n}B_i \cap B_j) - \mu(B_i)\mu(B_j)|}{2^{i+j}}.$$

A gyenge keverés miatt $\frac{1}{n}\sum\limits_{k=0}^{n-1} a_k \to 0$, következésképp $\exists J \subset \mathbb{Z}^+$ nullsűrűségű, hogy $\lim\limits_{J \not\ni n \to \infty} a_n = 0$, és így $\forall i, j$-re $\lim\limits_{J \not\ni n \to \infty} \mu(T^{-n}B_i \cap B_j) = \mu(B_i)\mu(B_j)$, ahonnan approximációval a konvergencia tetszőleges $A, B \in \mathscr{F}$-re kiterjed. $\square$

24.11. FELADAT *Bizonyítsuk be, hogy tetszőleges $(M,\mathscr{F},T,\mu)$ automorfizmusra ekvivalensek a következő tulajdonságok: (i) T gyengén kever, (ii) $T\times T$ ergodikus, (iii) $T\times T$ gyengén kever. (Útmutatás: (ii)→(i) bizonyításához használjuk a 24.6. következményt, és tekintsük az $A\times M$ illetve $A\times A$ alakú halmazokat $M\times M$-ben.)*

24.12. DEFINÍCIÓ *Az $(M,\mathscr{F},T,\mu)$ automorfizmus Kolmogorov keverő (vagy K-keverő) ha $\exists \mathscr{K}\subset\mathscr{F}$ σ-algebra, melyre (i) $T^{-1}\mathscr{K}\subset\mathscr{K}$; (ii) $\bigvee_{n=0}^{\infty}T^n\mathscr{K}=\mathscr{F}$, (iii) $\bigcap_{n=0}^{\infty}T^{-n}\mathscr{K}=\mathscr{N}=\{M,\emptyset\}$.*

A fogalom motivációja a független valószínűségi változókra vonatkozó Kolmogorov-féle $0-1$ törvény. Legyen $\{X_i, i\in\mathbb{Z}\}$ független, azonos eloszlású valószínűségi változók sorozata, és jelölje minden $k\in\mathbb{Z}$ esetén $\mathscr{F}_k=\sigma(\dots,X_{k-1},X_k)$, a legszűkebb σ algebrát, melyre az X_i, $-\infty<i\le k$ valószínűségi változók mindegyike mérhető. Ekkor (i) $\mathscr{F}_{k-1}\subset\mathscr{F}_k$, (ii) az $\mathscr{F}=\bigvee_{k=0}^{\infty}\mathscr{F}_k$ σ-algebrára nézve minden, a valószínűségi változó sorozatra vonatkozó esemény mérhető, (iii) a $\mathscr{T}=\bigcap_{k=0}^{\infty}\mathscr{F}_{-k}$ farok-σ-algebra triviális (épp ezt mondja a Kolmogorov-féle $0-1$ törvény).

24.13. LEMMA *Minden Bernoulli-automorfizmus Kolmogorov keverő.*

BIZONYÍTÁS Legyen a Bernoulli-shift állapottere $\Sigma=M_0^{\mathbb{Z}}$, ahol $(M_0,\mathscr{G}_0)$, és $\mathscr{G}_0$ az M_0 véges halmaz minden részhalmazát tartalmazó σ-algebra. Minden $G_0\in\mathscr{G}_0$ halmazhoz legyen $G=\{(\dots,x_{-1},x_0,x_1\dots)=\underline{x}\in\Sigma | x_0\in G_0\}$, és $\mathscr{G}\subset\mathscr{F}$ az ilyen G halmazokból álló σ-algebra (a 0 idejű σ algebra). Legyen továbbá $\mathscr{K}=\bigvee_{i=-\infty}^{0}\sigma^i\mathscr{G}$ (a múlt σ-algebrája). Az (i) és (ii) tulajdonságok nyilvánvalóak. (iii)-hoz legyen $A\in\mathscr{T}=\bigcap_{n=0}^{\infty}T^{-n}\mathscr{K}$: ekkor minden $j\in\mathbb{Z}$ és $B\in\bigvee_{k=j}^{\infty}T^k\mathscr{G}$ halmazra $\mu(A\cap B)=\mu(A)\mu(B)$. Mivel j tetszőleges, így $\mu(A\cap B)=\mu(A)\mu(B)$ minden $B\in\mathscr{F}$, és így $B=A$ esetén fennáll, tehát $\mu(A)(1-\mu(A))=0$, azaz $\mathscr{T}$ triviális. □

24.14. MEGJEGYZÉS Spektrális módszerekkel (lásd a 25. fejezetet) bizonyítható, hogy minden Kolmogorov keverő automorfizmus erősen kever. A keverési tulajdonságok hierarchiája tehát a következő:
Bernoulli tulajdonság $\Rightarrow$ Kolmogorov keverés $\Rightarrow$ erős keverés $\Rightarrow$ gyenge keverés $\Rightarrow$ ergodicitás.

Nem részletezzük most, de valamennyi tartalmazás valódi, azaz vannak példák Kolmogorov keverő de nem Bernoulli, erősen keverő de nem Kolmogorov keverő, gyengén keverő de nem erősen keverő automorfizmusokra is.

25. Az U_T operátor L^2 spektruma

Ebben a fejezetben invertálható dinamikákkal foglalkozunk, azaz $(M, \mathscr{F}, T, \mu)$ automorfizmus. Már az I. részben (pl. a 2. fejezetben) tanulmányoztuk a $\hat{T} : L^2(\mu) \to L^2(\mu)$, $(\hat{T}f)(x) = f(Tx)$ operátort: ez az L^2 tér lineáris izometriája, tehát mindenképp korlátos és injektív. T invertálhatósága az operátor szürjektivitását biztosítja (ekkor minden mérhető halmaz indikátorfüggvénye megjelenik a képtérben). Tehát ilyenkor $\hat{T}$ unitér operátor (a komplex L^2 teret tekintjük). Ennek hangsúlyozására $\hat{T}$ helyett inkább az U_T jelölést fogjuk használni.

Az U_T operátornak van még egy fontos tulajdonsága: a *multiplikativitás*, azaz minden f és g korlátos függvényre $U_T(f \cdot g) = U_T(f) \cdot U_T(g)$. Mindennek fontos következményei vannak U_T spektrumára vonatkozóan.

25.1. FELADAT *Bizonyítsuk be a következő állításokat.*

- *U_T spektruma az $\mathbb{S}^1$ komplex egységkörön helyezkedik el, továbbá U_T különböző sajátértékekhez tartozó sajátfüggvényei ortogonálisak.*
- *Az 1 mindenképp sajátértéke U_T-nek, és T akkor és csak akkor ergodikus, ha az 1 egyszeres sajátérték. A továbbiakban az ergodikus esetet vizsgáljuk.*
- *Ergodikus esetben U_T minden sajátértéke egyszeres, továbbá minden sajátfüggvény abszolút értéke μ-m.m. konstans.*
- *Ergodikus esetben U_T sajátértékeinek halmaza az egységkörnek, mint Abel-csoportnak részcsoportja. Azaz ha λ, μ sajátértékek, akkor $\overline{\lambda}$ (komplex konjugált) és $\lambda \cdot \mu$ is sajátértékek.*

A következő lemma lehetőséget teremt arra, hogy a különféle ergodikus tulajdonságokat U_T spektrumának vizsgálatával ellenőrizzük.

25.2. LEMMA *Legyen $(M, \mathscr{F}, T, \mu)$ automorfizmus. Vezessük be az $L_0^2(\mu) = \{f \in L^2(\mu) | (1, f)_\mu (= \int f \, d\mu) = 0\}$ jelölést.*

(i) T akkor és csak akkor (erősen) keverő, ha $\forall f \in L_0^2$ függvényre

$$\lim_{n\to\infty} (U_T^n f, f)_\mu = 0.$$

(ii) T akkor és csak akkor gyengén keverő, ha $\forall f \in L_0^2$ függvényre

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} |(U_T^k f, f)_\mu|^2 = 0.$$

(iii) T akkor és csak akkor ergodikus, ha $\forall f \in L_0^2$ függvényre

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} (U_T^k f, f)_\mu = 0.$$

BIZONYÍTÁS Csak (i) bizonyítását részletezzük, a másik két állítás hasonlóan látható be. Definíció szerint a keverés azt jelenti, hogy $\forall f,g \in L^2(\mu)$ párra $\lim_{n\to\infty}(U_T^n f,g)_\mu = (f,1)_\mu \cdot (1,g)_\mu$. Másrészt $\forall f \in L_0^2$ függvényre $\lim_{n\to\infty}(U_T^n f,f)_\mu = 0$ akkor és csak akkor teljesül, ha $\forall f \in L^2$ függvényre $\lim_{n\to\infty}(U_T^n f,f)_\mu = (f,1)_\mu \cdot (1,f)_\mu$, ($f \in L^2(\mu)$ függvényhez legyen $f_0 = f - E_\mu(f)$, ahol $E_\mu f = \int f\,d\mu = (1,f)_\mu$). Elegendő tehát belátni: abból, hogy $\forall f \in L^2$ függvényre $\lim_{n\to\infty}(U_T^n f,f)_\mu = (f,1)_\mu \cdot (1,f)_\mu$, következik, hogy $\forall f,g \in L^2(\mu)$ párra $\lim_{n\to\infty}(U_T^n f,g)_\mu = (f,1)_\mu \cdot (1,g)_\mu$. Ehhez rögzítsük $f \in L^2(\mu)$-t és vezessünk be két zárt, U_T-re invariáns alteret $L^2(\mu)$-ben:

$$E_f = \{g \in L^2(\mu) | \lim_{n\to\infty}(U_T^n f,g)_\mu = (f,1)_\mu \cdot (1,g)_\mu\},$$

F_f pedig legyen a legkisebb olyan zárt, U_T-re invariáns altér $L^2(\mu)$-ben, amely f-t és a konstans függvényeket tartalmazza. Nyilván $F_f \subset E_f$, másrészt ha $g \in F_f^\perp$, $(1,g)_\mu = 0$ és $(U_T^n f,g)_\mu = 0$ minden n-re. Tehát $F_f \subset E_f$ is teljesül, így $E_f = L^2(\mu)$. □

25.3. DEFINÍCIÓ *Az $(M,\mathscr{F},T,\mu)$ automorfizmus folytonos spektrumú, ha az egyszeres* 1-*en kívül nincs más sajátértéke. Ilyenkor T nyilván ergodikus.*

25.4. ÁLLÍTÁS *T akkor és csak akkor folytonos spektrumú, ha gyengén keverő.*

A bizonyítás előtt emlékeztetünk a funkcionálanalízis egyik alapvető eredményére, a spektráltételre, unitér operátorok esetén. $\mathbb{S}^1$-re most úgy gondolunk, mint a komplex egységkörre, elemeit egységnyi abszolút értékű komplex számoknak tekintjük.

25.5. TÉTEL (SPEKTRÁLTÉTEL UNITÉR OPERÁTOROKRA) *Legyen $U : H \to H$ unitér operátor egy szeparábilis Hilbert téren. Ekkor minden $v \in H$ vektorhoz tartozik egy μ_v Borel mérték $\mathbb{S}^1$-en, hogy $\forall n \in \mathbb{Z}$-re: $(U^n v,v)_\mu = \int_{\mathbb{S}^1} \lambda^n d\mu_v(\lambda)$. Ha v U sajátvektora valamely $\lambda_0 \in \mathbb{S}^1$ sajátértékhez, akkor $\mu_v = \delta_{\lambda_0}$. Ugyanakkor, ha v U valamennyi sajátvektorára merőleges, akkor μ_v-nek nincs atomja (azaz folytonos mérték, egyetlen pontnak sem ad pozitív súlyt).*

BIZONYÍTÁS (A 25.4. PROPOZÍCIÓ BIZONYÍTÁSA) Először induljunk ki abból, hogy T gyengén keverő, azaz minden $f \in L_0^2$ esetén $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}|(U_T^k f,f)_\mu| = 0$. Ha nem lenne folytonos a spektrum, létezne $\lambda \in \mathbb{S}^1$ sajátérték és hozzá $f \in L_0^2$ sajátvektor, melyre $(U_T^k f,f)_\mu = (\lambda^k f,f)_\mu$, melynek abszolút értéke k-tól függetlenül $||f||_\mu$, tehát ellentmondásra jutottunk.

A megfordítás bizonyításához lesz szükségünk a spektráltételre: be kell látnunk, hogy folytonos spektrum esetén bármely $f \in L_0^2(\mu)$ függvényre $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}|(U_T^k f,f)_\mu|^2 = 0$. Mivel a spektrum folytonos, $f \in L_0^2$ esetén a μ_f mérték folytonos, és

$$\begin{aligned}\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}|(U_T^k f,f)_\mu|^2 &= \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\left|\int_{\mathbb{S}^1}\lambda^k d\mu_f(\lambda)\right|^2 = \\ &= \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\left(\int_{\mathbb{S}^1}\lambda^k d\mu_f(\lambda)\cdot\int_{\mathbb{S}^1}\tau^{-k}d\mu_f(\tau)\right) = \\ &= \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\left(\int_{\mathbb{S}^1\times\mathbb{S}^1}(\lambda\overline{\tau})^k d(\mu_f\times\mu_f)(\lambda,\tau)\right) = \\ &= \int_{\mathbb{S}^1\times\mathbb{S}^1}\left(\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}(\lambda\overline{\tau})^k\right)d(\mu_f\times\mu_f)(\lambda,\tau),\end{aligned}$$

ahol az utolsó integrálban az integrandus korlátos függvény, és hacsak $\lambda=\tau$, átalakítható $\frac{1}{n}\left(\frac{1-(\lambda\overline{\tau})^n}{1-\lambda\overline{\tau}}\right)$ alakban, ami $n\to\infty$ esetén 0-hoz tart. Ugyanakkor, mivel μ_f atommentes, a $\lambda=\tau$ halmaz $\mu_f\times\mu_f$ szerint nullmértékű, és az integrál a dominált konvergencia tétel alapján nullához tart. □

Vázlatosan ismeretünk néhány további érdekes eredményt, részletesebb tárgyalás található pl. a [12], [14] és [10] monográfiákban.

25.6. LEMMA *Amennyiben U_T spektruma $L_0^2(\mu)$-n abszolút folytonos, T erősen kever.*

BIZONYÍTÁS (VÁZLATOSAN) Ekkor ugyanis tetszőleges $f\in L_0^2$ esetén a spektráltétel alapján

$$(U_T^n f,f)_\mu = \int_0^{2\pi} e^{in\theta}g(\theta)d\theta,$$

ahol $\int_0^{2\pi}|g(\theta)|d\theta<\infty$, vagyis $(U_T^n f,f)_\mu$ egy $g\in L^1(0,2\pi)$ függvény n-dik Fourier együtthatójaként áll elő, és így $n\to\infty$ esetén nullához tart. □

25.7. DEFINÍCIÓ *Az $(M,\mathscr{F},T,\mu)$ automorfizmus megszámlálható Lebesgue spektrumú, ha létezik olyan $f_1,f_2,\ldots\in L_0^2(\mu)$ függvénysorozat, melyre $\{U_T^k f_j | k\in\mathbb{Z}, j=1,2,\ldots\}$ ortonormált bázis $L_0^2(\mu)$-ben.*

25.8. MEGJEGYZÉSEK

1. Megszámlálható Lebesgue spektrum esetén U_T spektruma $L_0^2(\mu)$-n abszolút folytonos. Ugyanis ekkor L_0^2 előáll, mint megszámlálható sok U_T-re invariáns altér, és ezek mindegyikén U_T úgy hat, mint a baleltolás az $l^2(-\infty,\infty)$ téren, ami abszolút folytonos spektrumú (lásd [12], VII. fejezet). így minden megszámlálható Lebesgue spektrumú rendszer erősen kever (ez közvetlenül is belátható).

2. Minden Bernoulli automorfizmus megszámlálható Lebesgue spektrumú. Ezt könnyen láthatjuk az $(\frac{1}{2},\frac{1}{2})$ Bernoulli-shift példáján. Definiálja a t_k függvényeket $(k\in\mathbb{Z})$ $(\ldots,x_{-1},x_0,x_1\ldots)=\underline{x}\in\Sigma=\{0,1\}^{\mathbb{Z}}$ -ra $t_k(\underline{x})=(-1)^{x_k}$, ekkor a t_k függvényekből képzett véges szorzatok L_0^2 egy ortonormált bázisát adják. A bázis g,h elemeit ekvivalensnek tekintjük, ha $\exists n\in\mathbb{Z}$, hogy $U_T^n g=h$: így megszámlálható sok ekvivalencia osztályt kapunk.

3. Bizonyítható az is, hogy minden Kolmogorov keverő automorfizmus megszámlálható Lebesgue spektrumú ([14], [10]).

25.9. DEFINÍCIÓ *Az $(M_1, \mathscr{F}_1, T_1, \mu_1)$ és $(M_2, \mathscr{F}_2, T_2, \mu_2)$ automorfizmusok spektrálisan izomorfak, ha van olyan invertálható $W : L^2(\mu_1) \to L^2(\mu_2)$ izometria , melyre $WU_{T_1} = U_{T_2}W$.*

25.10. MEGJEGYZÉSEK 1. Ergodelméleti értelemben izomorf rendszerek spektrálisan is izomorfak, ennek megfordítása azonban távolról sem igaz. A fenti tárgyalás alapján például bármely két Bernoulli automorfizmus (sőt, Kolmogorov keverő automorfizmus)megszámlálható Lebesgue spektrumú, és így spektrálisan izomorf. Különböző entrópiájú Benoulli automorfizmusok viszont nem izomorfak.

2. Megmutatható ([14], 2.1 fejezet), hogy a spektrális izomorfia akkor származik tényleges izomorfiából, ha (i) W korlátos függvényeket korlátos függvényekbe visz, és (ii) minden $f, g \in L^2(\mu_1)$ korlátos függvényre $(Wf)(Wg) = fg$ (multiplikativitás!)

3. Bizonyos értelemben a megszámlálható Lebesgue spektrum ellenpólusát adják a *diszkrét spektrumú automorfizmusok*, amikor U_T sajátfüggvényei kifeszítik a teljes $L^2(\mu)$ teret ([14], 3. fejezet). Ilyenek a körvonal (irracionális) forgatásai. Ergodikus, diszkrét spektrumú automorfizmusok esetén a spektrális izomorfia egyben ergodelméleti izomorfiát is jelent.

26. A Ruelle–Perron–Frobenius-operátor

Az előző fejezetben láthattuk, hogy az U_T operátor spektruma minden Bernoulli automorfizmusra ugyanolyan. A 22. fejezetben pedig arra utaltunk, hogy bizonyos, az alkalmazások szempontjából fontos kérdések (pl. korreláció-lecsengés sebessége) vizsgálatánál nem csupán az (izomorfia erejéig meghatározott) ergodikus tulajdonságok, hanem a vizsgált függvények simasági tulajdonságai is szerepet játszanak. Ráadásul sok esetben nem eleve adott az invariáns mérték, és külön feladat megkeresni a természetes (pl. egy referencia mértékre nézve abszolút folytonos) invariáns mértéket, valamint ennek unicitását és jó keverési tulajdonságait igazolni. Célunk, hogy ezeket a kérdéseket is egy alkalmas operátor spektrumának vizsgálatára vezessük vissza.

A vizsgált dinamikai rendszerektől mostantól nem követeljük meg az invertálhatóságot (sőt, jellemzően a példáink *nem* invertálhatóak). Feltételezzük viszont, hogy az M fázistér kompakt, sima Riemann-sokaság. Ekkor a természetes referenciamérték a Lebesgue-mérték, ezt m-mel fogjuk jelölni. Következésképp az L^p tereket ($1 \leq p \leq \infty$) is tekinthetjük a Lebesgue-mértékre nézve.

Az I. rész 8. és 9. fejezetében már vizsgáltunk $\hat{T}$ mellett más operátorokat is: ha $\hat{T}$-t $C(M)$-n, a folytonos függvények terén tekintjük, adjungáltja, $\hat{T}_*$, a Borel valószínűségi mértékeken hat: $(\hat{T}_*\mu)(f) = \mu(\hat{T}f)$.

26.1. DEFINÍCIÓ *Legyen M kompakt Riemann-sokaság. A $T : M \to M$ leképezés a Lebesgue-mértékre nézve nem szinguláris, ha minden mérhető halmazra $m(A) = 0$-ből következik, hogy $m(T^{-1}A) = 0$. Legyen $\mu \ll m$ (a Lebesgue-mértékre nézve abszolút folytonos) mérték, jelölje sűrűségfüggvényét $L^1 \ni f(x) = \frac{d\mu}{dm}$. Ekkor T nem szinguláris voltából következik, hogy $\hat{T}_*\mu \ll m$ is teljesül. Következésképp létezik $\frac{d\hat{T}_*\mu}{dm} = \tilde{f}(x) \in L^1$ sűrűségfüggvény. A T leképezés $P_T : L^1 \to L^1$ Perron–Frobenius-operátorát $P_T f = \tilde{f}$ definiálja.*

Az egyszerűség kedvéért (a jegyzet hátralevő fejezeteiben szinte végig) egy további speciális esetre szorítkozunk:

26.2. DEFINÍCIÓ *A $T : [0,1] \to [0,1]$ szakaszonként monoton, amennyiben létezik egy véges $0 = a_0 < a_1 < \ldots < a_q = 1$ partíció, hogy minden $i = 1,\ldots,q$ esetén*

- *$T|_{(a_{i-1},a_i)}$ C^2, és C^2 módon kiterjeszthető a zárt $[a_{i-1},a_i]$ intervallumra is,*
- *$|T'(x)| > 0$ minden $x \in (a_{i-1},a_i)$ pontra.*

Ha még azt is feltesszük, hogy van egy olyan $\lambda > 1$ szám, hogy $|T'(x)| \geq \lambda$ minden x-re, ahol a derivált értelmezhető, akkor azt mondjuk, a T leképezés szakaszonként tágító.

Ahogy arra már az I. rész 1. és 9. fejezeteiben utaltunk: közvetlen számolással ellenőrizhető, hogy szakaszonként monoton leképezés nem szinguláris, és a Perron–Frobenius-operátor hatását

$$(P\rho)(y) = \sum_{x:Tx=y} \frac{\rho(x)}{|T'(x)|}$$

adja meg. Az összegzés a rögzített y pont (legfeljebb) q darab ősképére vonatkozik.

26.3. MEGJEGYZÉS A vizsgált leképezések köre (kellő körültekintéssel) messzemenően általánosítható, például vehetnénk véges helyett megszámlálhatóan végtelen partíciót, illetve C^2 helyett csak $C^{1+\varepsilon}$ simaságot. Ennél fontosabb, hogy M lehet $[0,1]$ helyett más kompakt Riemann-sokaság egy alkalmas partícióval, melynek minden elemére megszorítva T-t, diffeomrofizmusokat kapunk. Ekkor $|T'(x)|$ szerepét a $JT(x)$ Jacobi determináns veszi át.

A fentiek alapján egy m-re abszolút folytonos mérték pontosan akkor invariáns, ha sűrűségfüggvénye a P operátor fixpontja. Az I. rész 9. fejezetében épp azt láttuk, hogy amennyiben T tágító Markov-leképezés, P-nek van fixpontja, amely ráadásul (a pozitív, Hölder folytonos függvények körében) egyértelmű, és a megfelelő invariáns mérték ergodikus. Ezt az eredményt a következő fejezetben kiterjesztjük intervallum-leképezések egy nagyobb osztályára (lényegében: a Markov-tulajdonság nem feltétlen szükséges). Most azonban „állatorvosi lovakon” fogjuk vizsgálni a Ruelle–Perron–Frobenius-operátort, konkrétan *bináris leképezés*re és további $T:[0,1]\to[0,1]$ *szakaszonként lineáris és (erős értelemben) Markov-leképezés*ekre. Ez alatt azt értjük, hogy az $I_j=(a_{j-1},a_j)$ intervallumok mindegyikére megszorítva $T_j := T|_{I_j}$; $T_jx=\frac{x-a_{j-1}}{a_j-a_{j-1}}$, azaz T_j *lineáris* bijekció I_j és $(0,1)$ között ($j=1,2,\dots q$).

26.4. FELADAT *Legyen $T:[0,1]\to[0,1]$ szakaszonként lineáris, (erős értelemben) Markov-leképezés.*

(a) Mutassuk meg, hogy a Lebesgue-mérték invariáns és ergodikus T-re.

(b) Lebesgue majdnem minden $x\in(0,1)$ esetén értelmezhető minden $n\geq 1$-re $|(T^n)'(x)|$, a leképezés n-dik iteráltjának deriváltja. Mutassuk meg, hogy majdnem minden $x\in(0,1)$-re $|(T^n)'(x)|$ exponenciális ütemben nő, és a növekedés rátája, λ is ugyanaz az (explicit kiszámolható) érték majdnem mindenütt. (Megj.: ez a 16. fejezetben tárgyalt Ljapunov-exponens intervallum-leképezésre. Definíció szerint egy a_n sorozat exponenciális ütemben nő λ rátával, ha $\lim_{n\to\infty}\frac{\ln a_n}{n}=\lambda$).

A P operátor vizsgálatával nem csupán az abszolút folytonos invariáns mérték létezését és egyértelműségét, hanem további információt is nyerhetünk, például a keverés gyorsaságára vonatkozóan. A fent vizsgált leképezésre például az m Lebesgue-mérték invariáns. Legyenek $f,g\in L_0^2(m)$ (azaz $\int_0^1 f(x)dx=\int_0^1 g(x)dx=0$), ekkor, mivel

$$Corr(n,f,g)=\int_0^1 f(T^nx)g(x)dx=\int_0^1 f(x)(P^ng)(x)dx=(f,P^ng)_m$$

és így

$$|Corr(n,f,g)|\leq ||f||\cdot||P^ng||$$

ahol itt $||.||$ az L^2 normát jelenti. De ha az f,g függvényeket valamilyen szűkebb függvényosztályból választjuk, más normát is használhatunk a becslésre.

Vizsgáljuk konkrétan a bináris leképezés esetét. Ekkor

$$Pf(x) = \frac{1}{2}\left(f\left(\frac{x}{2}\right) + f\left(\frac{x+1}{2}\right)\right).$$

26.5. FELADAT *Tekintsük a bináris leképezést. Hogyan hat a P operátor a* $\sin(2k\pi x)$ *trigonometrikus függvényeken, konkrétan a* $\{\sin(2^i\pi x) | i = 1,\ldots,m\}$ *függvények által generált lineáris téren? Ezek alapján konstruáljunk olyan 0 várható értékű* $f \in L^2([0,1],m)$ *függvényt (m a Lebesgue-mérték), amelyre* $Corr(n,f,f)$*, az (auto)korreláció-lecsengés sebessége tetszőlegesen lassú.*

26.6. FELADAT (TÓTH IMRE PÉTERTŐL) *Vegyük ismét a bináris leképezést, legyen* $K \in \mathbb{Z}^+$ *rögzített, és tekintsük az* $f(x) = \sum_{i=0}^{K} q_i x^i$ *legfeljebb K ad fokú polinomok* E_K *alterét. Mutassuk meg,* E_K *P-re invariáns, és P-nek ezen a* $K+1$ *dimenziós invariáns altéren* $K+1$ *különböző sajátértéke van. Konkrétan a sajátértékek:* $1, 1/2, 1/4, \ldots 1/2^K$*, ahol az* $1/2^i$ *sajátértékhez egy i-ad fokú polinom sajátfüggvény tartozik.*

A polinomok körében tehát a bináris leképezésre exponenciálisan csengenek le a korrelációk. Ez a két feladat is mutatja, alapvető kérdés, hogy P-t milyen függvénytéren tekintjük.

26.7. FELADAT (TÓTH IMRE PÉTERTŐL) *Térjünk most vissza általában a szakaszonként lineáris, (erős értelemben) Markov-leképezésekre.*

1. *Mutassuk meg, hogy a legfeljebb K-ad fokú polinomok* E_K *altere ilyenkor is invariáns, és a spektrum itt is explicit számolható. írjuk fel a sajátértékeket csökkenő sorrendben:* $1, \beta_1, \ldots, \beta_K$. $1-\beta_1$ *éppen az exponenciális korreláció-lecsengés rátáját adja meg polinomok esetére.*

2. *Mutassuk meg, hogy* $\beta_1 \geq e^{-\lambda}$*, ahol* λ *a 26.4. feladatban kiszámolt Ljapunov-exponens.*

3. *Mutassunk tetszőleges* $M > 0$*-hoz olyan szakaszonként lineáris leképezést, aminek a Ljapunov-exponense M-nél nagyobb, de* $(1-M^{-1})^n$*-nél lassabb ütemű a korreláció-lecsengése az* E_K *altéren (minden* $K \geq 1$*-re).*

27. Szakaszonként tágító intervallum-leképezések

A szakaszonként tágító intervallum-leképezések fogalmát az előző fejezetben definiáltuk. Talán ez az a dinamikai rendszer-család, amelynek ergodikus és statisztikus tulajdonságait a legjobban feldolgozta a szakirodalom. Alapvető Lasota és Yorke eredménye ([8]) az abszolút folytonos invariáns mérték létezéséről. Ráadásul a topologikus keverés természetes feltétele mellett ez a mérték egyértelmű, és erős statisztikus tulajdonságokkal rendelkezik. Ennek a fejezetnek az a célja, hogy ezeket a fontos eredményeket ismertesse, különös tekintettel a módszerekre, amelyeket azóta folyamatosan továbbfejlesztenek és alkalmaznak bonyolultabb kaotikus dinamikákra is. Tárgyalásunk elsősorban a [3] könyvre és a [9] dolgozatra épít.

Először néhány fogalmat és tényt kell felelevenítenünk a valós analízis, illetve a funkcionálanalízis tárgyköréből.

Korlátos változású függvények. Jelölje $\mathscr{T}$ a $[0,1]$ intervallum $\tau = \{(x_0, x_1 \ldots, x_p) | 0 = x_0 < x_1 < \ldots < x_p = 1\}$ véges felosztásainak összességét. Azt mondjuk, az $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ függvény *korlátos változású*, ha a

$$V(f) = V_{[0,1]}(f) = \sup_{\tau \in \mathscr{T}} \sum_{i=1}^{p} |f(x_i) - f(x_{i-1})|$$

úgynevezett *teljes megváltozása* véges. Hasonlóan értelmezhető a fogalom más $[a,b]$ intervallumokra is (az intervallumra vonatkozó indexet csak akkor írjuk ki, ha nem egyértelmű). A következő tények könnyen ellenőrizhetőek, illetve megtalálhatóak a szakirodalomban (pl. [3], [13]):

- Korlátos változású függvény korlátos, és így integrálható,
- Legyen f és g korlátos változású, $A = \sup\{|f(x)| : x \in [0,1]\}$, $B = \sup\{|g(x)| : x \in [0,1]\}$, és $\lambda \in \mathbb{R}$, ekkor $V(\lambda f) = |\lambda| V(f)$, $V(f+g) \le V(f) + V(g)$, $V(fg) \le AV(g) + BV(f)$.
- Bármely $a < b < c$-re $V_{[a,c]}(f) = V_{[a,b]}(f) + V_{[b,c]}(f)$.
- Ha $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ folytonosan differenciálható, akkor korlátos változású, és $V(f) = \int_0^1 |f'(x)| dx$. A Hölder folytonosság azonban nem elegendő a korlátos változáshoz (gondoljunk a Brown mozgás trajektóriáira.)
- Tetszőleges korlátos változású függvény előállítható, mint két monoton növekvő függvény különbsége. Következésképp korlátos változású függvény ugrásai elsőfajúak. Továbbá minden korlátos változású függvény előállítható egy folytonos és egy tisztán ugró függvény összegeként.

Különösen fontos lesz számunkra a következő eset: ha $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ szakaszonként folytonosan differenciálható, azaz létezik $0 = a_0 < a_1 < \ldots < a_q = 1$, hogy f folytonosan differenciálható módon kiterjeszthető minden $[a_{i-1}, a_i]$ intervallumra ($i = 1, \ldots, q$), akkor

$$V(f) = \sum_{i=1}^{q} \int_{a_{i-1}}^{a_i} |f'(x)| dx + \sum_{i=0}^{q} \Delta_i; \qquad \Delta_i = |f(a_i+) - f(a_i-)|,$$

vagyis a teljes megváltozás előáll, mint a derivált L^1 normájának és a függvény ugrásainak összege.

A korlátos változású függvények Banach teret alkotnak a

$$||f||_{BV} = |f|_1 + V(f); \qquad |f|_1 = \int_0^1 |f(x)|dx$$

normával. Pontosabban, a tér elemei szokásos módon nem függvények, hanem függvények ekvivalencia-osztályai (Lebesgue teljes mértékű halmazon megegyező függvényeket ekvivalensnek tekintünk): $f \in BV$, ha van korlátos változású realizációja (és $V(f)$ alatt a teljes megváltozások infimumát kell érteni f realizációira).

Persze ha $f \in BV$, akkor $f \in L^1$, és BV sűrű halmaz L^1-ben (hiszen már $C^1(\subset BV)$ is sűrű L^1-ben). A következő fontos lemma az Arzela-Ascoli tétel rokona.

27.1. LEMMA *BV egységgömbje, azaz $BV_1 = \{f \in BV : ||f||_{BV} \leq 1\}$, mint L^1 részhalmaza, kompakt.*

BIZONYÍTÁS Bebizonyítjuk, hogy BV_1 teljesen korlátos L^1-ben, azaz minden $\varepsilon > 0$ esetén létezik véges ε-háló. Rögzített ε-hoz legyen $K > 1/\varepsilon$, és $i = 1,\dots,K$-ra legyen $\chi_i(x)$ az $I_i = [\frac{i-1}{K}, \frac{i}{K}]$ intervallum indikátorfüggvénye. Jelölje $\mathscr{F}_K$ az ezen intervallumok által generált véges σ algebrát, és $\Pi_K : BV \to BV$ az $\mathscr{F}_K$-ra vett feltételes várható érték képzés operátorát. Azaz $f \in BV$-re $\Pi_K f = E(f|\mathscr{F}_K)$ minden I_i intervallumon konstans, éppen az $f(x)$ függvény $\overline{f}_{I_i}$ átlaga ezen az intervallumon. Ekkor $f \in BV_1$-re

$$|f - \Pi_K f|_1 = \int_0^1 |f(x) - (\Pi_K f)(x)|dx = \sum_{i=1}^{K} \int_{I_i} |f(x) - \overline{f}_{I_i}|dx \leq$$
$$\leq \sum_{i=1}^{K} V_{I_i}(f) \cdot \int_0^1 \chi_i(x)dx \leq \varepsilon \sum_{i=1}^{K} V_{I_i}(f) \leq \varepsilon V(f) \leq \varepsilon.$$

Ugyanakkor $f \in BV_1$ esetén $|f(x)| \leq 1$ majdnem mindenütt, így a $\{\frac{j}{K}\chi_i(x) : i = 1,\dots,K; i = -K,\dots,K\}$ alakú függvényekből álló halmaz az L^1 normára nézve véges 2ε-háló a teljes BV_1 halmazra.

Másrészt, BV_1 zárt L^1-ben, ugyanis teljesül a következő

27.2. SZUBLEMMA *Ha az $f_n \in BV$ sorozatra $V(f_n) \leq K < \infty$ és $f_n \to f$ L^1-ben, akkor $f \in BV$ és $V(f) \leq K$.*

Ugyanis választható f_{n_k} részsorozat, hogy $f_{n_k}(x) \to f(x)$ majdnem mindenütt, és mivel BV elemei csak nullmértékű halmaz erejéig definiáltak, feltehetjük, hogy a konvergencia mindenütt teljesül. A pontonkénti konvergenciából pedig, mivel $V(f_{n_k}) \leq K$, $V(f) \leq K$ következik. □

Kompakt és kvázikompakt operátorok. Legyen X Banach tér és $L : X \to X$ korlátos operátor. Az L operátor $\sigma(L) \subset \mathbb{C}$ *spektrum*a azokból a λ komplex számokból áll, amelyekre $\lambda\, Id - L$ vagy nem bijekció, vagy nem korlátos az inverze. Amennyiben $\lambda\, Id - L$ nem injektív, létezik $v \in X$, hogy $Lv = \lambda v$, azaz λ sajátérték. A spektrum mindig zárt halmaz. A $\rho(L)$

spektrálsugár a legkisebb olyan nemnegatív r szám, melyre $\sigma(L) \subset \{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| \leq r\}$. Hasznos formula a spektrálsugárra:

$$\rho(L) = \lim_{n\to\infty}(||L^n||)^{\frac{1}{n}}$$

Az L operátor $\sigma_{ess}(L)(\subset \sigma(L))$ *lényeges spektruma* a komplementere azon λ sajátértékeknek, amelyekhez véges dimenziós sajátaltér tartozik. $\sigma_{ess}(L)$ is zárt halmaz, és analóg módon definiálhatjuk a $\rho_{ess}(L)$ lényeges spektrálsugarat, mint a legkisebb olyan nemnegatív R számot, melyre $\sigma_{ess}(L) \subset \{|\lambda| \leq R\}$.

$L : X \to X$ *kompakt operátor*, ha az X_1 egységgömb LX_1 képe kompakt halmaz (másképp szólva, ha minden korlátos $x_n \in X$ sorozatra $y_n = Lx_n$ -nek van konvergens részsorozata). Minden véges rangú operátor kompakt. Kompakt operátorra $\rho_{ess}(L) = 0$, tehát $\sigma(L) \setminus \{0\}$ véges multiplicitású sajátértékekből áll, ráadásul ez a halmaz megszámlálható, és csak az origó lehet torlódási pontja.

$L : X \to X$ *kvázikompakt operátor*, ha $\rho(L) = 1$, de $\rho_{ess}(L) = r < 1$, továbbá az egységkörön csak véges sok sajátérték van.

Jelölje $C(X)$ a $K : X \to X$ kompakt operátorok összességét. Ekkor bármely $L : X \to X$ korlátos operátorra:

$$\sigma_{ess}(L) = \bigcap_{K\in C(X)} \sigma(L-K), \qquad \rho_{ess}(L) = \lim_{n\to\infty}(\inf_{K\in C(X)} ||(L^n - K)||)^{\frac{1}{n}}. \tag{27.1}$$

Lasota–Yorke-egyenlőtlenség. Az alább következő egyenlőtlenséget (és az arra épülő tételt) a matematika számos területén használják, ennek megfelelően több elnevezése is ismert. A dinamikai rendszerek irodalmában leginkább Lasota–Yorke-egyenlőtlenségként, a valószínűségszámításban Döblin–Fortet-egyenlőtlenségként szokták emlegetni. A tétel Ionescu-Marinescu és Tulcea szerzőpárostól, illetve általánosabb formában Henniontól származik. *Belevalók:*

1. Legyenek $(X, ||.||_X)$ és $(Y, ||.||_Y)$ Banach terek olyanok, hogy Y természetes módon beágyazható X-be, és ez a beágyazás kompakt. Ezt úgy is felfoghatjuk, hogy $v \in Y$-nak két normája is van, egy erős $||v||_Y$ és egy gyenge $||v||_X$ norma. Teljesül minden $v \in Y$-ra, hogy $||v||_X \leq ||v||_Y$, és $Y_1 = \{v \in Y : ||v||_Y \leq 1\}$, azaz *$Y$ egységgömbje, mint X részhalmaza, kompakt*. Következésképp, minden $||.||_Y$ szerint korlátos sorozatnak van $||.||_X$-ben konvergens részsorozata.

2. Amennyiben adott egy $v_n \in Y$ sorozat, amely Y-ban korlátos: $||v_n||_Y \leq K < \infty$, és X-ben konvergens: $||v_n - v||_X \to 0$, akkor $v \in Y$ is teljesül, és $||v||_Y \leq K$.

3. Legyen $P : X \to X$ korlátos operátor, mely egyben megszorítható $P : Y \to Y$ korlátos operátorrá. Mint $P : X \to X$ operátorra, teljesüljön $||P||_X = 1$.

4. (*Ez maga az egyenlőtlenség!*) Létezik $k \in \mathbb{Z}^+$, $r < 1$ és $C > 0$, hogy minden $v \in Y$ esetén:
$$||P^k v||_Y \leq r \cdot ||v||_Y + C \cdot ||v||_X.$$

27.3. TÉTEL *A fent leírt feltételek teljesülése esetén (i) A $P : Y \to Y$ operátornak van fixpontja. (ii) A $P : Y \to Y$ operátor kvázikompakt.*

Az áttekinthetőség kedvéért a tétel bizonyítását nem ismertetjük ebben az általánosságban, hanem a konkrét alkalmazásra: szakaszonként tágító leképezésekre koncentrálunk.

Szakaszonként tágító leképezések. Elevenítsük fel a szakaszonként tágító leképezések fogalmát a 26. fejezetből. Fontos hangsúlyozni, hogy az I. rész 9. fejezetével szemben most nem követeljük meg a Markov-tulajdonságot.

27.4. TÉTEL *Legyen $T : [0,1] \to [0,1]$ szakaszonként tágító leképezés. Ekkor T-nek van m-re abszolút folytonos invariáns mértéke, melynek sűrűségfüggvénye korlátos változású. Továbbá, ha P a Ruelle–Perron–Frobenius-operátor, $X = L^1$ és $Y = BV$, akkor teljesülnek a 27.3. tétel feltételei, vagyis P kvázikompakt.*

BIZONYÍTÁS A korábbi jelöléseknek megfelelően $|f|_1$ az L^1 normát, $V(f)$ a teljes megváltozást, $||f||_{BV} = |f|_1 + V(f)$ a BV-normát jelöli. Az 1. és a 2. tulajdonságokat már fent bizonyítottuk. A 3. tulajdonsághoz minden $f \in L^1$-re

$$|Pf(y)| = \left| \sum_{x:Tx=y} \frac{f(x)}{|T'(x)|} \right| \leq \sum_{x:Tx=y} \frac{|f(x)|}{|T'(x)|} = (P|f|)(y),$$

így

$$|Pf|_1 = \int_0^1 |Pf(x)|dx \leq \int_0^1 (P|f|)(x)dx = \int_0^1 |f|(x)dx = |f|_1,$$

tehát $||P||_1 \leq 1$. Hogy $||P||_1 = 1$, azt éppen az abszolút folytonos invariáns mérték létezéséből fogjuk látni, hiszen ennek sűrűségfüggvénye P-nek fixpontja.

Lássuk be, hogy a 4. tulajdonság is teljesül. Ehhez először is tekintsük $k \in \mathbb{Z}^+$-ra T^k-t (ennek Perron–Frobenius-operátora éppen P^k): könnyen meggondolható, hogy ez leképezés is szakaszonként tágító, csak jellemzően több intervallumra van szükség, amelyekre megszorítva a dinamika sima és monoton. Ugyanakkor, ha $|T'(x)| \geq \lambda > 1$ minden x-re, akkor a magasabb hatvány választásával viszont $|(T^k)'(x)| > \lambda^k$ minden x-re, és így alkalmas k-val $|(T^k)'(x)| > 2$ minden x-re. Ez lesz a 4. tulajdonságban is szereplő k: az egyszerűség kedvéért a továbbiakban feltesszük, hogy $k = 1$, azaz eleve T-re $|T'(x)| \geq \lambda > 2$ teljesül, és közvetlenül P-re látjuk be a 4. tulajdonságot.

Vezessük be a következő jelöléseket: T monotonitási/simasági intervallumai $I_i = [a_i, a_{i+1}]$ $(i = 0, \ldots, q-1)$, az ezekre megszorított dinamika: $T_i = T|_{I_i}$ (a végpontokban folytonos kiterjesztéssel értelmezve), a képintevallumok: $J_i = T_i(I_i)$ (ezek jellemzően összemetszenek), $\chi_i(x) = \chi_{J_i}(x)$ a képintevallumok indikátorfüggvényei, végül a dinamika monoton szakaszainak inverzei: $\Phi_i : J_i \to I_i$, $\Phi_i = (T_i)^{-1}$. Mindegyik Φ_i C^2, és $0 < |\Phi_i'(x)| \leq \lambda^{-1} \leq 1/2$ minden x-re és i-re.

Legyen most $f \in BV$, és becsüljük meg $V(Pf)$-t! Ehhez $f_i(x) = f(\Phi_i(x))|\Phi_i'(x)|\chi_i(x)$, ekkor $Pf(x) = \sum_{i=0}^{q-1} f_i(x)$, tehát $V(Pf) \leq \sum_{i=0}^{q-1} V(f_i)$. Ha $J_i = [c,d]$, akkor $V_{[0,1]}(f_i) = V_{[0,c]}(f_i) + V_{[c,d]}(f_i) + V_{[d,1]}(f_i)$, ahol az első és az utolsó tag becsülhető $\lambda^{-1}|f(a_i)|$-vel, illetve $\lambda^{-1}|f(a_{i+1})|$-gyel. Másrészt $V_{J_i}(f_i) = V_{J_i}(f(\Phi_i(x)) \cdot \Phi_i'(x))$, tehát $V(gh)$-t kell becsülnünk, ahol g korlátos változású, és h folytonosan differenciálható. A megváltozásban egy tag $|g(x_j)h(x_j) - g(x_{j-1})h(x_{j-1})| \leq |g(x_j)| \cdot |h(x_j) - h(x_{j-1})| + |g(x_j) - g(x_{j-1}| \cdot |h(x_{j-1})|$, ahol az első tag, h-ra Lagrange középértéktételt alkalmazva, Riemann-integrál közelítésként fogható fel, míg a másodikban h-t a szuprémumával becsülhetjük. Összefoglalva:

$$V_{[0,1]}(f_i) \leq \int_{J_i} |f(\Phi_i(x))||\Phi_i''(x)|dx + \lambda^{-1}V_{J_i}(f \circ \Phi_i) + \lambda^{-1}(|f(a_i)| + |f(a_{i+1})|).$$

A második tagra nyilván $V_{J_i}(f \circ \Phi_i) = V_{I_i}(f)$, így i-re összegezve éppen $\lambda^{-1}V_{[0,1]}(f)$ adódik. Az első tagra vezessük be a

$$K_1 := \max_{i=0,\dots,q-1} \sup_{J_i} \frac{|\Phi_i''(x)|}{|\Phi_i'(x)|}$$

mennyiséget, ami véges, mivel minden i-re Φ_i C^2 és $\Phi_i'(x) \neq 0$. Ekkor egy integrálhelyettesítéssel:

$$\int\limits_{J_i} |f(\Phi_i(x))||\Phi''(x)|dx \leq K_1 \int_{J_i} |f(\Phi_i(x))| \cdot |\Phi_i'(x)|dx = K_1 \int_{I_i} |f(x)|dx,$$

és i-re összegezve $K_1 \int_0^1 |f(x)|dx = K_1|f|_1$ adódik. Végül a harmadik tagra vezessük be a

$$K_2' = \min_{i=0,\dots,q-1} \frac{1}{a_{i+1} - a_i}$$

mennyiséget, ekkor

$$|f(a_i)| + |f(a_{i-1})| \leq 2 \inf_{a_i \leq t \leq a_{i+1}} |f(t)| + V_{I_i}(f) \leq K_2' \int\limits_{I_i} |f(x)|dx + V_{I_i}(f)$$

tehát a harmadik tagok járuléka, i-re való összegzés után, felülről becsülhető $(K_2|f|_1 + \lambda^{-1}V(f))$-fel (itt $K_2 = K_2'/\lambda$ Mindent összevetve azt kapjuk, hogy

$$V(Pf) \leq (K_1 + K_2)|f|_1 + \frac{2}{\lambda}V(f),$$

amiből, mivel $\lambda > 2$ és $|Pf|_1 \leq |f|_1$, adódik a Lasota–Yorke-egyenlőtlenség. Érdemes megjegyezni, hogy a $K = K_1 + K_2$ konstansban a K_1 a disztorziókból (dinamika nemlineáris jellege) K_2 pedig a szingularitásokból (szakadási pontok) adódik.

A 3. és 4. tulajdonságok közvetlen következménye, hogy $\forall l \in \mathbb{Z}^+$-ra és $f \in BV$-re

$$\begin{aligned} ||P^{lk}f||_{BV} &\leq r \cdot ||P^{(l-1)k}f||_{BV} + C|P^{(l-1)k}f|_1 \leq \\ &\leq r^2 \cdot ||P^{(l-2)k}f||_{BV} + Cr \cdot |P^{(l-2)k}f|_1 + C|f|_1 \leq \dots \leq \\ &\leq r^l \cdot ||f||_{BV} + \frac{C}{1-r} \cdot |f|_1, \end{aligned}$$

így alkalmas $C_1 > 0, C_2 > 0$ és $\alpha < 1$ konstansokkal minden $n \in \mathbb{Z}^+$ és $f \in BV$ esetén

$$||P^n f||_{BV} \leq C_1\alpha^n \cdot ||f||_{BV} + C_2|f|_1. \tag{27.2}$$

Az abszolút folytonos invariáns mérték létezéséhez még a P operátor pozitivitását kell kihasználnunk: amennyiben $f \geq 0$ (azaz $f(x) \geq 0$ minden $x \in [0,1]$ esetén), $Pf \geq 0$ is teljesül. Jelölje $\mathbf{1}$ az azonosan 1 függvényt ($\mathbf{1}(x) = 1$ minden $x \in [0,1]$ esetén). Ekkor (27.2) alapján $f_n = \frac{1}{n}\sum_{j=0}^{n-1} P^j\mathbf{1}$ függvénysorozat korlátos BV-ben. így az 1. és 2. tulajdonságok garantálják egy f_{n_k} részsorozat létezését, melyre $|f_{n_k} - h|_1 \to 0$, és $h \in BV$. Ekkor tetszőlegesen kicsi ε-nal becsülhető $|f_{n_k} - h|_1$, $|Pf_{n_k} - Ph|_1$ és $|f_{n_k} - Pf_{n_k}|_1 = \frac{1}{n_k}|P^{n_k}\mathbf{1} - \mathbf{1}|_1$, így $Ph = h$. Továbbá P pozitivitása miatt $h \geq 0$ és $|h|_1 = 1$ is teljesül, meggondolható ugyanis, hogy $f \geq 0$ esetén $|Pf|_1 = |f|_1$. Tehát h egy abszolút folytonos invariáns mérték sűrűségfüggvénye.

Bizonyítsuk be végül, hogy P kvázikompakt operátor, azaz, hogy $\rho_{ess}(P) < 1$. A lényeges spektrálsugárra a (27.1) formulát fogjuk alkalmazni. Elevenítsük fel a 27.1. Lemma bizonyításából a (rögzített kicsi ε-hoz választott) Π_K operátort. Ismert (de könnyen ellenőrizhető közvetlenül is), hogy ha az X Banach téren $B : X \to X$ korlátos operátor és $A : X \to X$ kompakt operátor, akkor AB és BA is kompakt operátor. Mivel Π_K véges rangú, minden n-re $P^n\Pi_K : BV \to BV$ kompakt operátor. Ugyanakkor (27.2) alapján minden $f \in BV_1$-re:

$$||(P^n - P^n\Pi_K)f||_{BV} = C_1\alpha^n||f - \Pi_K f||_{BV} + C_2|f - \Pi_K f|_1$$

K-t n-től függően is választhatjuk, és ezt a 27.1. Lemma érvelését követve megtehetjük úgy, hogy $|f - \Pi_{K(n)}f|_1 \leq \varepsilon^n$ legyen, akármilyen kicsi ε-ra. így alkalmas $C > 0$ konstansra

$$\inf_{K \in C(BV)} ||(P^n - K)||_{BV} \leq C(\alpha^n + \varepsilon^n)$$

amiből (27.2) alapján $\rho_{ess}(P) \leq \alpha < 1$. □

Az abszolút folytonos invariáns mérték egyértelműsége és ergodicitása. Keverés és sebessége. Önmagában abból, hogy a T leképezés szakaszonként tágító, még nem következik az abszolút folytonos invariáns mérték egyértelműsége. Tekintsük a $T : [0,1] \to [0,1]$ leképezést:

$$Tx = \begin{cases} 2x & \text{ha } 0 \leq x < \frac{1}{4}, \\ 2x - 1/2 & \text{ha } \frac{1}{4} \leq x < \frac{3}{4}, \\ 2x - 1 & \text{ha } \frac{3}{4} \leq x \leq 1. \end{cases}$$

$\chi_{[0,\frac{1}{2}]}$ és $\chi_{[\frac{1}{2},1]}$, illetve ezek minden konvex kombinációja egyaránt invariáns mértékek sűrűségfüggvényei. Speciálisan a Lebesgue-mérték is invariáns, de nem ergodikus, hiszen $[0,1/2]$ invariáns halmaz.

Emlékeztető: egy topologikus dinamikai rendszer *topologikusan keverő*, ha bármely U,V nyílt halmazokra létezik N, hogy $n \geq N$ esetén $T^nU \cap V \neq \emptyset$. Speciálisan, egy $T : [0,1] \to [0,1]$ szakaszonként tágító leképezés topologikusan keverő, ha tetszőleges $I,J \subset [0,1]$ intervallumokra létezik N, hogy minden $n \geq N$-re $T^nI \cap J \neq \emptyset$. Amennyiben T topologikusan keverő, minden $k \in \mathbb{Z}^+$ esetén T^k is topologikusan keverő. Az alábbi 27.8. Lemma szerint a topologikus keverés biztosítja, hogy egy szakaszonként tágító leképezés minden szempontból a lehető legerősebb ergodikus tulajdonságokkal rendelkezzen. Megelőzően teszünk néhány észrevételt.

Legyen f egy (m-re) abszolút folytonos mérték sűrűségfüggvénye, tehát $f \in L^1$, $f \geq 0$. Ekkor jelölje $\operatorname{supp} f = \{x : f(x) > 0\}$ a sűrűségfüggvény tartóját. Nyilván $m(\operatorname{supp} f) > 0$, és ha $f \in BV$, akkor $\operatorname{supp} f$ mindenképp tartalmazza f folytonossági pontját, és így biztosan tartalmaz nyílt intervallumot is. Ennél többet is állíthatunk. Emlékeztető: egy $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ függvény *alulról félig folytonos*, ha $\forall y \in [0,1]$-re $f(y) \le \liminf_{x \to y} f(x)$. Ilyenkor f alulról korlátos, felveszi minimumát és minden $a > 0$ esetén $\{x : f(x) > a\}$ nyílt halmaz. Könnyen meggondolható, hogy ha $f \in BV$, akkor tekinthető alulról félig folytonosnak (elég az értékét a megszámlálható sok szakadási pontban megfelelően hangolni: a változtatás $V(f)$-t sem érinti). Következésképp korlátos változású függvényre $\operatorname{supp} f$ nyílt halmaz.

27.5. SZUBLEMMA *Legyen A pozitív Lebesgue-mértékű invariáns halmaz (azaz $T^{-1}A = A$) egy szakaszonként tágító leképezésre. Ekkor A indikátorfüggvénye, χ_A, korlátos változású, azaz (Lebesgue nullmértékű halmaz erejéig) A nyílt halmaz.*

BIZONYÍTÁS A-hoz tartozik egy m_A abszolút folytonos invariáns mérték is, melynek sűrűségfüggvénye éppen A (normált) indikátorfüggvénye, $\chi_A \in L^1$. Ekkor legyen minden $n \in \mathbb{Z}^+$ esetén $\rho_{A,n} = \frac{1}{n}\sum_{j=0}^{n-1} P^j \chi_A$: mivel A invariáns, $\operatorname{supp} \rho_{A,n} = A$. Mivel BV sűrű L^1-ben, minden ε-ra létezik $f_\varepsilon \in BV$, hogy $|\chi_A - f_\varepsilon|_1 < \varepsilon$. Legyen $f_{\varepsilon,n} = \frac{1}{n}\sum_{j=0}^{n-1} P^j f_\varepsilon \in BV$:

- a Lasota–Yorke-egyenlőtlenség miatt minden ε-ra $f_{\varepsilon,n}$ BV-ben korlátos sorozat, ezért van $g_\varepsilon \in BV$ L^1-torlódási pontja, és a (27.2) egyenlőtlenségből $||g_\varepsilon||_{BV} \le C_2$ minden ε-ra (a korlát ε-tól független!);
- mivel $|P|_1 \le 1$, $|f_{\varepsilon,n} - \rho_{A,n}|_1 < \varepsilon$;
- $\varepsilon \to 0$-t véve a g_ε függvények BV-ben korlátosak, van L^1-ben g_A torlódási pont, és $g_A \in BV$.

Összefoglalva: a $\rho_{A,n}$ sorozatnak is L^1 torlódási pontja a $g_A \in BV$ sűrűségfüggvény, következésképp $\operatorname{supp} g_A = A$, nyílt halmaz. □

27.6. MEGJEGYZÉS Azt a tulajdonságot, hogy az invariáns halmazok (Lebesgue nullmértékű halmaz erejéig) nyíltak, *lokális ergodicitás*nak is nevezik. Magasabb dimenzióban nem köthető egy olyan szép függvényosztályhoz, mint egydimenzióban a BV tér, ezért bizonyítása jellemzően igen nehéz, hiperbolikus rendszerekre a Hopf módszer (lásd I. rész 7. fejezet) segítségével történik.

27.7. SZUBLEMMA *Legyen $f \in BV$ invariáns sűrűségfüggvény egy szakaszonként tágító leképezésre. Ekkor $B = \operatorname{supp} f$ (Lebesgue-m.m.) véges sok nyílt intervallum uniója.*

BIZONYÍTÁS Azt már tudjuk, hogy $B = \operatorname{supp} f$ nyílt, így $B = \bigcup_{j=1}^{\infty} I_j$, ahol az I_j-k diszjunkt nyílt intervallumok. Jelölje $D = \{a_1, \ldots, a_{q-1}\}$ a T leképezés szakadási pontjait, és $\mathscr{D} = \{j | I_j \cap D \ne \emptyset\}$. $\mathscr{D} \ne \emptyset$, ugyanis ha az I_1 leghosszabb intervallumra $I_1 \cap D = \emptyset$ volna, akkor a tágítás miatt $T(I_1)$ I_1-nél hosszabb összefüggő intervallum lenne, márpedig $TB \subset B$, így ellentmondásra jutunk. $j \subset \mathscr{D}$-re $T(I_j)$ véges sok intervallum uniója, így az

$$\bigcup_{j \in \mathscr{D}} (I_j \cup TI_j)$$

halmaz véges sok nyílt intervallumból áll: jelölje J ezen intervallumok közül a legrövidebbet. Végül tekintsük az

$$\mathscr{S} = \{j \geq 1 | m(I_j) \geq m(J)\}, \qquad S = \bigcup_{j \in \mathscr{S}} I_j$$

nyílt halmazt, amely nyilván véges sok intervallum uniója. Be fogjuk látni, hogy $B = S$. Ehhez először azt mutatjuk meg, hogy $T(S) \subseteq S$. Legyen ugyanis $I_k \subset S$, ekkor két eset lehetséges: ha $k \in \mathscr{D}$, $TI_k \subset S$ definíció szerint teljesül. Ha $k \notin \mathscr{D}$, TI_k egyetlen intervallum, és mivel $TI_k \subset B$, így létezik k_0, hogy $TI_k \subset I_{k_0}$. Viszont a tágítás és a definíciók miatt $m(I_{k_0}) \geq m(TI_k) \geq m(I_k) \geq m(J)$, tehát $I_{k_0} \subset S$, így $T(I_k) \subset S$. Tehát $T(S) \subseteq S$. Ebből következik, hogy $S \subseteq T^{-1}S$, és ha μ jelöli az f sűrűségfüggvényű invariáns mértéket, akkor

$$\mu(T^{-1}S \setminus S) = \mu(T^{-1}S) - \mu(S \cap T^{-1}S) = \mu(S) - \mu(S) = 0.$$

Végül tegyük fel, hogy $B \setminus S \neq \emptyset$, és jelölje a $B \setminus S$-ben szereplő megszámlálható sok diszjunkt intervallum közül I_s a leghosszabbat. Mivel $s \notin \mathscr{D}$, TI_s intervallum, melyre $m(TI_s) \geq m(I_s)$, tehát $TI_s \subset S$. így $I_s \subset T^{-1}S \setminus S$, tehát a fentiek szerint I_s μ-mértéke 0, ami ellentmondás, hiszen $I_s \subset B$, tehát I_s-n $f > 0$, és $d\mu = f\,dm$. □

27.8. LEMMA *Legyen* $T : [0,1] \to [0,1]$ *szakaszonként tágító leképezés topologikusan keverő. Ekkor*

- *Létezik pontosan egy abszolút folytonos invariáns mérték, melynek sűrűségfüggvénye* $h \in BV$, *és* $\operatorname{supp} h = [0,1]$.
- *Ez az invariáns mérték ergodikus és keverő.*
- *Bármely* $f, g \in BV$ *függvényekre a korreláció-lecsengés sebessége exponenciális.*

BIZONYÍTÁS Legyen μ abszolút folytonos invariáns mérték $h \in BV$ sűrűségfüggvénnyel (azt már tudjuk, hogy ilyen létezik). Ekkor a 27.7. szublemma szerint $B = \operatorname{supp} h$ véges sok nyílt intervallum uniója. Mivel $TB \subseteq B$, a topologikus keverés biztosítja, hogy minden $J \subset [0,1]$ intervallumra $B \cap J \neq \emptyset$. Ebből már következik, hogy $B = [0,1]$, tehát μ a Lebesgue-mértékkel ekvivalens.

Legyen most A invariáns halmaz, melyre $\mu(A) > 0$, ekkor $m(A) > 0$ is teljesül, és a 27.5. szublemma alapján A (Lebesgue-m.m) nyílt, így megszámlálható sok diszjunkt intervallum uniója. Pontosan végigkövetve a 27.7. szublemma bizonyítását belátható, hogy A is véges sok intervallum uniója. Ekkor viszont a topologikus keverés biztosítja, hogy (Lebesgue-m.m.) $A = [0,1]$. Ebből $\mu(A) = 1$, vagyis μ ergodikus mérték T-re.

Ebből már könnyen következik az abszolút folytonos invariáns mérték egyértelműsége is. Ugyanis ha μ' T-re invariáns és $\mu' \ll m$, akkor $\operatorname{supp} h = [0,1]$ miatt $\mu' \ll \mu$, márpedig ebből μ ergodicitása miatt $\mu = \mu'$ (ld. I. rész 8. fejezet).

A további tulajdonságok bizonyításához vissza kell térnünk P spektrális vizsgálatára. Már tudjuk, hogy $P : BV \to BV$ kvázikompakt operátor, azaz véges sok, egységnyi abszolút értékű, véges multiplicitású sajátértéktől eltekintve spektruma az origó körüli $\alpha < 1$ sugarú körlapon belül helyezkedik el. Jelölje az egységnyi hosszú sajátértékeket $1 = \lambda_1, \lambda_2, \ldots \lambda_M$. Minden λ_i-hez tartozó E_i sajátaltéren P úgy hat, mint egy Q_i véges mátrix, melynek minden sajátértéke

λ_i. Ráadásul ez a mátrix nem tartalmazhat Jordan blokkot. Ekkor ugyanis volna $f \in E_i$, melyre a $P^n f = Q_i^n f$ függvény BV (és így L^1) normája legalább n-ben lineáris ütemben nő. Márpedig $|P^n|_1 = 1$ minden n-re, tehát ellentmondáshoz jutunk. Összefoglalva

$$P = R + \sum_{i=1}^{M} \lambda_i P_i; \qquad \text{és } \forall n \in \mathbb{Z}^+ : P^n = R^n + \sum_{i=1}^{M} \lambda_i^n P_i;$$

ahol

$\rho(R) = \alpha < 1$, így $||R^n|| = \alpha^n$,

$P_i BV = E_i$, ahol E_i véges dimenziós altér,

$P_i P_j = 0$, ha $i \neq j$, és $P_i^2 = P_i$,

$P_i R = R P_i = 0$.

Koncentráljunk először P_1-re: ez egy véges rangú projekció, tehát léteznek (az E_1 alteret kifeszítő) $f_1, \dots, f_L \in BV$ függvények, és $\Psi_l : BV \to \mathbb{R}$ $(l = 1, \dots, L)$ korlátos lineáris funkcionálok, hogy $\forall f \in BV$-re $P_1 f = \sum_{l=1}^{L} \Psi_l(f) f_l$. Mivel $P_1 P = P_1$, $\Psi_l(Pf) = \Psi_l(f)$ minden $f \in BV$-re, továbbá $\Psi_l(f_l) = 1$, és $\Psi_l(f_{l'}) = 0$, ha $l \neq l'$. Az f_l-ek egyike éppen $f_1 = h$, az invariáns sűrűségfüggvény (látni fogjuk azt is, hogy az ehhez tartozó funkcionál $\Psi_1(f) = \int_0^1 f(x)dx$), de a priori lehetnek más, nem pozitív sajátfüggvények. Minden $n \in \mathbb{Z}^+$-re $P_1 = P_1 P^n$, így használva (27.2)-t, minden $f \in BV$-re:

$$||P_1 f||_{BV} = ||P_1 P^n f||_{BV} \leq C_1 \alpha^n \cdot ||P_1||_{BV} \cdot ||f||_{BV} + C_2 \cdot ||P_1||_{BV} \cdot |f|_1,$$

amiből $||P_1 f||_{BV} \leq ||P_1||_{BV} \cdot C_2 \cdot |f|_1$, tehát P_1 korlátos úgy is, mint $L^1 \to BV$ operátor (BV sűrű L^1-ben). Következésképp a Ψ_l-ek is kiterjeszthetők L^1-en értelmezett korlátos lineáris funkcionállá. Viszont L^1 duális tere L^∞, léteznek tehát $\Phi_l \in L^\infty$ függvények, hogy minden $f \in L^1$-re:

$$\int_0^1 \Phi_l(x) f(x) dx = \Psi_l(f) = \Psi_l(Pf) = \int_0^1 \Phi_l(x)(Pf)(x) dx = \int_0^1 \Phi_l(Tx) f(x) dx,$$

tehát mindegyik $\Phi_l \in L^\infty$ invariáns függvény, és így az ergodicitás miatt m.m. konstans. Ez viszont csak úgy lehetséges, ha $L = 1$, $\Phi_1(x) = 1$ minden $x \in [0,1]$-re, és $\Psi_1(f) = \int_0^1 f(x)dx$.

Mielőtt rátérnék a(z exponenciális) keverés bizonyítására, fontos megjegyezni, hogy minden, ami eddig szerepelt, szó szerint elismételhető T^k-ra, tetszőleges $k \in \mathbb{Z}^+$ esetén. így pl. a leképezés minden T^k hatványa is ergodikus.

Most vizsgáljuk meg P_1-hez hasonlóan a P_i projektorokat $i \geq 2$ esetén is. Végigkövetve a fenti érvelést $\Phi_l(Tx) = \lambda \Phi_l(x)$ adódik (az egyszerűség kedvéért λ alsó i indexét nem írjuk ki). Tehát λ a $\hat{T} : L^\infty \to L^\infty$, $(\hat{T}\Phi)(x) = \Phi(Tx)$ operátor sajátértéke. Ez az operátor azonban multiplikatív, így minden n-re λ^n is sajátérték. Ugyanakkor ha β $\hat{T}$ sajátértéke, akkor β a $P : BV \to BV$ operátor spektrumába is beleesik, hiszen van olyan nemtriviális $g \in L^\infty$, hogy minden $h \in L^1$-re (és így persze $h \in BV$-re is)

$$0 = \int_0^1 (g(Tx) - \beta g(x)) h(x) dx = \int_0^1 g(x)(Ph(x) - \beta h(x)) dx.$$

tehát $(P-\beta\cdot Id)BV \neq BV$. Tudjuk, hogy $\sigma(P)\cap\{z\in\mathbb{C}:|z|=1\}$ véges sok pontból áll, amik ezek szerint csak komplex egységgyökök lehetnek. Tehát alkalmas $k\in\mathbb{Z}^{+}$-ra $\lambda^k=1$, és így $\Phi_l(T^kx)=\lambda^k\Phi_l(x)=\Phi_l(x)$, Φ_l T^k-ra invariáns függvény, ami ennek erogdicitása miatt csak konstans 1 lehet.

Összefoglalva: $\sigma(P)\cap\{z\in\mathbb{C}:|z|=1\}=1$, ami egyszeres sajátérték, és $P=R+P_1$, ahol bármely $f\in BV$ esetén $||R^nf||_{BV}\leq\alpha^n||f||_{BV}$, $P_1f=(\int\limits_0^1 f(x)dx)h$, ahol h az invariáns sűrűségfüggvény. így $||P^nf-(\int\limits_0^1 f(x)dx)h||_{BV}\leq\alpha^n||f||_{BV}$.

Térjünk végül rá az exponenciális korreláció-lecsengés bizonyítására. Legyen $f\in BV$ és $g\in L^\infty$. Ekkor $fh\in BV$ és bevezetve az $E_\mu f=\int\limits_0^1 f(x)h(x)dx$ jelölést, $||P^n(fh)-(E_\mu f)h||_{BV}\leq\alpha^n||fh||_{BV}$. így

$$E_\mu(f\cdot g\circ T^n)=\int\limits_0^1 g(T^nx)f(x)h(x)dx=\int\limits_0^1 g(x)(P^n(fh))(x)dx=$$
$$=\int\limits_0^1 g(x)(R^n(fh))(x)dx+E_\mu(f)E_\mu(g),$$

azaz

$$|Corr(n,g,f)|\leq\left|\int\limits_0^1 g(x)(R^n(fh))(x)dx\right|\leq\alpha^n|g|_\infty\cdot||fh||_{BV}.$$

Mivel BV sűrű L^2-ben, a keverés is következik (de persze általános L^2 függvényekre nem exponenciális sebességgel). □

28. Young-tornyok

Az 1990-es évek végén Lai-Sang Young általános módszert dolgozott ki tágító és hiperbolikus rendszerek ergodikus és statisztikus tulajdonságainak vizsgálatára ([15], [16]). A módszer, melyet azóta felfedezőjéről Young-toronynak neveznek, alkalmas különféle dinamikai jelenségek, például nemegyenletes hiperbolicitás és szingularitások hatékony kezelésére. Young még rögtön a [15], [16] cikkekben a korábbiaknál jóval erősebb eredményeket ért el fontos dinamikai modellek – pl. logisztikus leképezéscsalád, Hénon leképezés, Sinai biliárdok – abszolút folytonos invariáns mértékének létezésével, a korreláció-lecsengés sebességével és a centrális határeloszlástétellel kapcsolatban. Azóta a Young-tornyokat dinamikai rendszerek számos lényeges osztályára és statisztikus tulajdonságok további széles spektrumának vizsgálatára alkalmazták. Alapvetően két változata létezik, a nem invertálható dinamikákra kifejlesztett tágító Young-torony, és az invertálható dinamikákra kifejlesztett hiperbolikus Young-torony. Mi most az egyszerűbb tágító Young-torony esetével foglalkozunk, és itt is csak az abszolút folytonos invariáns mérték (továbbiakban: AFIM) létezésére vonatkozó eredményt bizonyítjuk vázlatosan. A 29. fejezetben ismertetjük a módszer egyik legegyszerűbb alkalmazását, tágító leképezések esetét neutrális fixponttal.

Érdemes felidézni az indukált leképezés és a torony leképezés fogalmát az I. rész 2. fejezetéből.

28.1. JELÖLÉS (Δ, F) a torony. $F : \Delta \circlearrowleft$.

- Δ_0 a torony alapja, mérhető tér.
- $\Delta_0 = \bigcup_{i=1}^{\infty} \Delta_{0,i}$ és $R\colon \Delta_0 \to \mathbb{Z}_+$ a visszatérési idő, úgy hogy $R|_{\Delta_{0,i}} = \text{const}$.
- $\Delta = \{(z,n) \in \Delta_0 \times \mathbb{Z}_+ \mid n < R(z)\}$

$$\Delta_l = \Delta \cap \{n = l\} \text{ a torony } l\text{-edik emelete.}$$

$$\Delta_{l,i} = \Delta_l \cap \{z \in \Delta_{0,i}\}$$

$$R_i = R \mid \Delta_{0,i} \text{így} \Delta_{R_i - 1,i} \text{ a tető } \Delta_{0,i} \text{ felett.}$$

- $F : \Delta \circlearrowleft \; F(z,l) = (z, l+1) \quad \text{ha } l+1 < R(z)$

$$F\Delta_{R_{i-1,i}} \overset{1-1}{\leftrightarrow} \Delta_0.$$

- Konvenció: Δ_0-t azonosítjuk Δ megfelelő részhalmazával

$$F^R : \Delta_0 \circlearrowleft, \qquad F^R x = F^{R(x)} x.$$

- $\mathscr{F}$ a generált σ-algebra Δ-n.

- $x, y \in \Delta_0$-ra

$$s(x,y) = \min\{n \mid (F^R)^n x, (F^R)^n y \text{ különböző } \Delta_{0,i}\text{-kbe esnek}\}$$
$$\uparrow \quad \text{szeparációs idő}$$

azaz

$$s(x,y) \geq 0 \quad \forall x, y \in \Delta_0$$
$$s(x,y) \geq 1 \quad \forall x, y \in \Delta_{0,i}$$

$s(x,y)$ kiterjesztése Δ-ra:

$$s(x,y) = \begin{cases} 0 & \text{ha } x \in \Delta_{l,i},\ y \in \Delta_{l',i'} \text{ és } (l,i) \neq (l',i') \\ s(\pi x, \pi y) & \text{egyébként } (\pi(z,n) := z). \end{cases}$$

28.2. MEGJEGYZÉS Alábbi feltevéseink biztosítani fogják, hogy $\beta \in (0,1)$ esetén $d_\beta(x,y) = \beta^{s(x,y)}$ távolság Δ-n. így Δ metrikus térnek tekinthető, és van értelme függvények folytonosságáról, Hölder folytonosságáról beszélni.

28.3. FELTEVÉSEK

- LNKO $\{R_i\} = 1$
- $\eta = \{\Delta_{l,i}\}$ generáló, azaz $\bigvee_{i=0}^{\infty} F^{-i}\eta$ pontokból áll.
- $\exists\, m$ referencia mérték $(\Delta, \mathscr{F})$-n, hogy $m(\Delta_0) < \infty$

$$F_*(m \mid \Delta_{l,i}) = m(\Delta_{l+1,i}) \text{ ha } l < R_i - 1$$

- $F^R \mid \Delta_{0,i} \colon \Delta_{0,i} \to \Delta_0$ és inverze sem szinguláris. Azaz F^R Jacobi determinánsa m-re vonatkozólag $\exists$ és > 0 μ-majdnem mindenütt.
- Regularitási feltevés

$$\exists C > 0\ \exists \beta \in (0,1) \colon \forall i\ \forall x, y \in \Delta_{0,i}$$
$$\left| \frac{JF^R(x)}{JF^R(y)} - 1 \right| \leq C \beta^{s(F^R x, F^R y)} \tag{28.1}$$

$$C_\beta(\Delta) = \{\varphi \colon \Delta \to \mathbb{R} \mid \exists C_\varphi \colon |\varphi(x) - \varphi(y)| \leq C_\varphi \beta^{s(x,y)} \quad \forall x, y \in \Delta\}$$
$$C_\beta^+(\Delta) = \Big\{\varphi \in C_\beta(\Delta) \mid \exists C_\varphi^+ \colon \forall l, i \text{ vagy } \varphi \equiv 0,$$

vagy

$$\varphi > 0 \text{ és } \left| \frac{\varphi(x)}{\varphi(y)} - 1 \right| \leq C_\varphi^+ \beta^{s(x,y)}\ \forall x, y \in \Delta_{l,i} \Big\}.$$

28.4. TÉTEL (AFIM LÉTEZÉSE ÉS TULAJDONSÁGAI) *Tegyük fel a fentieken kívül, hogy* $\int R\,\mathrm{d}m < \infty$. *Akkor*

(i) $F : \Delta \circlearrowleft$*-re* $\exists$ *AFIM* $(\nu \ll m)$

(ii) $\dfrac{\mathrm{d}\nu}{\mathrm{d}m} \in C^+_\beta$ *és* $\inf \dfrac{\mathrm{d}\nu}{\mathrm{d}m} > 0$

(iii) (F, ν) *ergodikus és keverő.*

BIZONYÍTÁS Legyen $m_0 = m \mid \Delta_0$.

28.5. LEMMA $\exists \nu_0$, *az* F^R *leképezésre invariáns mérték* Δ_0*-n, hogy az* (i)–(iii) *állítások teljesülnek.*

$\mathscr{P}_0 = \eta \mid \Delta_0$.

Legyen $A \in \bigvee_{j=0}^{i-1} (F^R)^{-j} \mathscr{P}_0$.

Legyen $\rho_{i,A} = \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}m}(F^R)^i_* \,(m \mid A)$.

Legyen $x, y \in \Delta_0$ és $x', y' \in A$, hogy $(F^R)^i x' = x$, $(F^R)^i y' = y$.

Akkor $j \le i$-re

$$s((F^R)^j x', (F^R)^j y') = s(x,y) + (i-j).$$

Ezért

$$\left| \log \frac{\rho_{i,A}(y)}{\rho_{i,A}(x)} \right| = \left| \log \frac{J(F^R)^i x'}{J(F^R)^i y'} \right| = \left| \sum_{j=0}^{i-1} \log \frac{JF^R((F^R)^j x')}{JF^R((F^R)^j y')} \right|$$
$$\le \sum_{j=0}^{i-1} C\beta^{s(x,y)+(i-j)-1} \le C'\beta^{s(x,y)}.$$

Legyen

$$\rho_n = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}m} \left(\frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} (F^R)^i_* m_0 \right).$$

Mivel ρ_n konvex lineáris kombinációja $\rho_{i,A}$-knak, azért $\forall x, y \in \Delta_0$-ra

$$\frac{\rho_n(y)}{\rho_n(x)} \le e^{C'}$$

és

$$\forall x \cong y \left(\mod \bigvee_0^{k-1} (F^R)^{-i} \mathscr{P}_0 \right) \text{-ra}$$

$$\frac{\rho_n(y)}{\rho_n(x)} \le e^{C'\beta^k}$$

I. rész 9. fejezete miatt (Arzela–Ascoli tétel!) $\{\rho_n\}_n$ relatív kompakt $C^0(\Delta_0, m)$-ben és $\exists \nu_0$, hogy $\frac{\mathrm{d}\nu_0}{\mathrm{d}m} = \lim_{n'} \rho_{n'}$.

28.6. LEMMA *ν_0-ból egyszerűen megkonstruálható a kívánt ν.*

Legyen $\nu' = \sum_{l=0}^{\infty} F_*^l(\nu_0 \mid \{R > l\})$.

Mivel $\frac{\mathrm{d}\nu_0}{\mathrm{d}m} \le e^{C'}$ és $\int R \,\mathrm{d}m < \infty \rightsquigarrow \nu'(\Delta) < \infty$.

Legyen $\nu = \frac{1}{\nu'(\Delta)}\nu'$. ν eleget tesz (i)-nek.

(ii) I. rész 9. fejezet szerint, mivel

$$\frac{\mathrm{d}\nu}{\mathrm{d}m}(x) = \frac{\mathrm{d}\nu}{\mathrm{d}m}(\pi x)$$

(iii) I. rész 9. fejezet szerint. □

29. Tágító körleképezés neutrális fixponttal

Ebben a fejezetben ismertetjük a Young-tornyok alkalmazását a körvonal neutrális fixponttal rendelkező tágító leképezéseinek esetére. Bár a 28. fejezetben csak az AFIM létezésére tértünk ki, most kimondjuk a [16]-ben szereplő tételt teljes pompájában, így utalva a Young-toronyban rejlő további lehetőségekre.

29.1. JELÖLÉS $a(x) \asymp b(x)$ alatt azt értjük, hogy van olyan $C > 0$ konstans, hogy $C^{-1}a(x) \leq b(x) \leq Ca(x)$ minden x-re. Hasonlóan, $a(x) \lesssim b(x)$ azt jelenti hogy $a(x) \leq Cb(x)$ alkalmas C-re.

29.2. MODELL f d-edrangú lokális diffeomorfizmus $\mathbb{S}^1$-en ($d \in \mathbb{Z}^+, d \geq 2$). Ez alatt azt értjük, hogy minden $x \in \mathbb{S}^1$ pontnak pontosan d ősképe van, továbbá

(i) $f \in C_1$, és $f' > 1$ $\mathbb{S}^1 \setminus \{0\}$-ban.

(ii) $f \in C_2$ $\mathbb{S}^1 \setminus \{0\}$-n.

(iii) $f(0) = 0, f'(0) = 1$ és $\exists \gamma > 0 \forall x \neq 0$-ra $xf''(x) \asymp |x|^\gamma$.

29.3. PÉLDA $x = 0$ környezetében $f(x) = x(1 + x^\gamma)$. További (a feltételeknek nem pontosan, de lényegében megfelelő) példa a 29.4. feladatban szereplő leképezéscsalád.

29.4. FELADAT *Legyen $0 \leq \gamma < 1$ paraméter, és tekintsük a $T_\gamma : [0,1] \to [0,1]$;*

$$T_\gamma(x) = \begin{cases} x(1 + x^\gamma 2^\gamma) & \text{ha } 0 \leq x < 1/2; \\ 2x - 1 & \text{ha } 1/2 \leq x \leq 1 \end{cases}$$

dinamikát (speciálisan T_0 a bináris leképezés). Legyen $\Delta_0 = [1/2, 1]$, és nézzük meg, mit kapunk, ha T_γ-t a Δ_0-n indukált leképezésre épülő tornyot tekintjük. Legyen $x_n \in (0, 1/2]$ az a sorozat, melyre $T(x_i) = x_{i-1}$, és $x_1 = 1/2$. Ekkor ha $y_i = \frac{x_i+1}{2}$, akkor $\Delta_{(0,i)} = [y_{i+1}, y_i]$ éppen az R konstans értékeihez tartozó felbontás. T^{R_i} minden $\Delta_{(0,i)}$-t kölcs. egyértelműen visz Δ_0-ba. A Lebesgue-mértéket tekintve m referenciamértéknek, könnyen ellenőrizhető, hogy $\gamma = 0$-ra $m(R = n)$ exponenciálisan cseng le. $\gamma \neq 0$-ra van olyan $C > 0$, hogy minden n-re:

$$C^{-1}n^{-1/\gamma} \leq x_n \leq Cn^{-1/\gamma}; \qquad C^{-1}n^{-(1+1/\gamma)} \leq x_n - x_{n+1} \leq Cn^{-(1+1/\gamma)}.$$

Ezek szerint $m(R = n)$ polinomiális, és $\gamma < 1$ miatt a várható érték véges.

KIEGÉSZÍTÉS Ha $\gamma \to 0$, akkor $x \neq 0$-ra $|f' - 1| \gg \varepsilon$, így $\gamma = 0$ eset az lesz, amikor $f' \geq \lambda > 1$ és f'' korlátos.

$$\mathscr{H}_\beta = \{\varphi \colon S \to \mathbb{R} \mid \exists C \mid \varphi(x) - \varphi(y)| \leq C \cdot |x - y|^\beta\}. \qquad \square$$

29.5. TÉTEL

(a) *Ha* $\gamma \geq 1$, *akkor* $\frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1}\delta f_x^i \Rightarrow \delta_0$ μ*-majdnem minden* $x \in \mathbb{S}^1$*-re. (Nincs véges invariáns mérték).*

(b) *Ha* $\gamma < 1$, *akkor* $\exists$*AFIM* ν, *és* (f,ν) *keverő.*

(c) *Ha* $0 \leq \gamma < 1$, *akkor ha* $\mathscr{P}_f$ *a Perron–Frobenius-operátor és* $\rho = \frac{\mathrm{d}\nu}{\mathrm{d}m}$, *akkor* $\forall\ \varphi \in \mathscr{H}$*-ra* $\left(\int \varphi\,\mathrm{d}m = 1\right)$

$$\int |\mathscr{P}^n\varphi - \rho|\,\mathrm{d}m \asymp n^{1-\frac{1}{\gamma}}$$

$\forall \varphi \in L^\infty(\mathbb{S}^1, m)$*-re és* $\psi \in \mathscr{H}$*-ra*

$$\begin{aligned} \left|\int (\varphi\circ f^n)\psi\,\mathrm{d}m - \int \varphi\,\mathrm{d}m \int \psi\,\mathrm{d}m\right| &\leq O(n^{1-\frac{1}{\gamma}}) \quad (0<\gamma<1) \\ &\leq C\theta^n \qquad\quad (\gamma = 0) \end{aligned}$$

(d) $0 \leq \gamma < \frac{1}{2}$ *esetén CHT* $\forall \varphi \in \mathscr{H}$*-ra.*

Lokális analízis a fixpont környezetében

Legyen $\varepsilon_0 > 0$ alkalmasan rögzített, tekintsük $f \mid [0,\varepsilon_0]$-t és legyen $x_0 \in (0,\varepsilon_0)$, továbbá

$$f x_n = x_{n-1}, n = 1, 2, \dots$$

Speciálisan a torony konstrukciójánál x_0-t az I_1 intervallum jobboldali végpontjának fogjuk választani, az x_n-ek pedig mindig I_1-beli ősképeket jelentik.

29.6. LEMMA $x_n \asymp \frac{1}{n^\alpha}$ $\left(\alpha = \frac{1}{\gamma}\right)$ *és*

$$\exists K > 0 \text{ hogy } \#\left\{k \;\middle|\; \left[\frac{1}{(k+1)^\alpha}, \frac{1}{k^\alpha}\right] \cap [x_{n+1}, x_n] \neq \emptyset\right\} \leq K.$$

BIZONYÍTÁS Legyen

$$\Delta x_n = x_n - x_{n+1}, \ \Delta\frac{1}{k^\alpha} = \frac{1}{k^\alpha} - \frac{1}{(k+1)^\alpha}.$$

Akkor

$$x_n \in \left[\frac{1}{(k+1)^\alpha}, \frac{1}{k^\alpha}\right] \rightsquigarrow \Delta x_n \asymp \Delta\frac{1}{k^\alpha}$$

ugyanis

$$\Delta\frac{1}{k^\alpha} \asymp \frac{1}{k^{\alpha+1}} = \left(\frac{1}{k^\alpha}\right)^{\gamma+1}. \tag{29.1}$$

□

29.7. KÖVETKEZMÉNY

$$f''(x) \asymp \frac{1}{n^{1-\alpha}} \text{ ha } x \in [x_{n+1}, x_n]$$

29.8. LEMMA (DISZTORZIÓS BECSLÉS) $\exists C_1 : \forall i,n \in \mathbb{Z}_+$, *$i \leq n$ és* $\forall x,y \in [x_{n+1}, x_n]$*-re*

$$\left|\log\frac{(f^i)'x}{(f^i)'y}\right| \leq C\frac{|f^ix - f^iy|}{\Delta x_{n-i}} \leq C_1.$$

BIZONYÍTÁS Először gyengébb korlát: $\exists \zeta_j \in [f^jx, f^jy]$

$$\begin{aligned}
\left|\log\frac{(f^i)'x}{(f^i)'y}\right| &\leq \sum_{j=0}^{i-1} |\log f'(f^jx) - \log f'(f^jy)| \\
&\leq \sum_{j=0}^{i-1} \frac{|f''(\zeta_j)|}{f'(\zeta_j)} |f^jx - f^jy| \\
&\lesssim \sum_0^{i-1} (x_{n-j+1})^{\gamma-1}(x_{n-j+1})^{\gamma+1} \lesssim \sum_0^{i-1} \frac{1}{(n-j+1)^{1-\alpha}} \frac{1}{(n-j+1)^{1+\alpha}} \\
&\lesssim \sum_0^{i-1} \frac{1}{(n-j+1)^2} \leq \sum_1^\infty \frac{1}{k^2} < \infty.
\end{aligned}$$

Itt használtuk, hogy $f_x^j, f_y^j \in [x_{n+1-j}, x_{n-j}]$.

Másrészt, ha $x,y \in [x_{n+1}, x_n]$, akkor $f^jx, f^jy \in [x_{n+1-j}, x_{n-j}]$ azért $\forall x,y \in \Delta_{n-j}$-re és $\forall j < i$-re

$$\frac{|f^jx - f^jy|}{\Delta x_{n-j}} \asymp \frac{|f^ix - f^iy|}{\Delta x_{n-i}}.$$

Ezt visszahelyettesítve

$$\begin{aligned}
\left|\log\frac{(f^i)'x}{(f^i)'y}\right| &\lesssim \sum_{j=0}^{i-1} \underbrace{(x_{n-j+1})^{\gamma-1}}_{\mathbf{I}} \cdot \underbrace{\Delta x_{n-j}}_{\mathbf{II}} \frac{|f^ix - f^iy|}{\Delta x_{n-i}} \\
&\leq \text{const.}\frac{|f^ix - f^iy|}{\Delta x_{n-i}}
\end{aligned}$$

Indoklás:

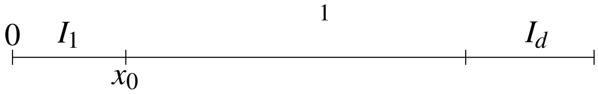
$\mathbf{I} \to \asymp \left[\frac{1}{(n-j)^\alpha}\right]^{\gamma-1} = \frac{1}{(n-j)^{1-\alpha}}$

$\mathbf{II} \to \asymp \frac{1}{(n-j)^{1+\alpha}}.$ □

Tétel bizonyítása: Csak az AFIM.

Legyen $\gamma > 0$.

Torony konstrukció: $\mathbb{S}^1 = \bigcup_1^d I_j$, hogy $fI_j = \mathbb{S}^1$. Legyen $I_0 = [0, x_0]$ és $I_d = [x_0', 1]$



I_1 felbontása: $fx_{n+1} = x_n$, $J_n = [x_{n+1}, x_n)$, $n \geq 0$ I_d felbontása analóg: J_n'

Speciálisan az így konstruált x_n és x_n' sorozatokra is vonatkozik a 29.8. Lemma lokális analízise.

Torony a korábbiak szerint, de nem teljesen (!)

Fő lépések (Összefoglaló)

1. Legyen $\Delta_0 = \mathbb{S}^1$, $\mathscr{A} = \{\Delta_{0,i}\}$

2. Legyen

$$\begin{aligned} R = 1 \qquad & I_2 \cup \cdots \cup I_{d-1} \cup J_0 \cup J_0'\text{-n} \\ R \mid J_n = R \mid J_n' = n + 1 & \text{ha } n \geq 1. \end{aligned}$$

3. Legyen

$$F \mid \Delta_{R_i - 1, i} = f^R \mid \Delta_{0,i}.$$

4. Tehát

$$f^R I_j = \mathbb{S}^1 \qquad \text{ha } 2 \leq j \leq d-1$$

és

$$\begin{aligned} f^R J_n &= I_2 \cup \cdots \cup I_d \\ f^R J_n' &= I_1 \cup \cdots \cup I_{d-1}. \end{aligned}$$

5. $m_0 = \text{Leb} \mid \Delta_0$ továbbá $JF = 1$ $\Delta \setminus \cup_i \Delta_{R_i - 1}$-en már definiálja m-et Δ-n.

6. **Állítás:** $\exists \beta < 1$, hogy $(f^R)'x \geq \frac{1}{\beta}$ $\forall x \in \mathbb{S}^1$-re. **Bizonyítás:** $x \in J_n$-re $f^n x \in [x_1, x_0]$

$$(f^R)'x = \prod_{i=0}^{n} f'(f^i x) \geq f'(f^n x) \geq \frac{1}{\beta}, \text{ ahol } \beta = \max\{\frac{1}{f'(x)} \mid x \in [x_1, x_0]\}$$

7. Ha $s(x,y) \geq n \rightsquigarrow |x - y| \leq \beta^n$.
Lemma: A konstruált toronyra teljesülnek az AFIM létezésének feltételei (kivéve, hogy $f^n J_n \neq \mathbb{S}^1$; de ez nem lesz gond.)

Bizonyítás: A Jacobi determináns regularitása vonatkozó (28.1) formula a 29.8. Lemma következménye.
Továbbá:

$$m(R>n)=m\left(\bigcup_{i\geq n} J_n\right)+m\left(\bigcup_{i\geq n} J'_n\right)\asymp \frac{1}{n^{1/\gamma}}.$$

Mármost, ha $0\leq\gamma<1$ akkor $\int R\,\mathrm{d}m<\infty$.

8. $\gamma=0$-ra $\exists\theta_0<1, C$
$m\{R>n\}\leq C\theta_0^n$.
Ilyenkor egyszerűbben is lehetne tornyot konstruálni: $\{\Delta_{0,i}\}_i=\{I_1,\dots,I_d\}$, és $R\equiv 1$.
($\gamma>0$-ra disztorziós problémák miatt ez a konstrukció nem működne.)

9. *Invariáns mérték végessége:*
Legyen $\pi\colon\Delta\to\mathbb{S}^1$ a természetes vetítés, így $\pi\circ F^R=f^R\circ\pi$.
Az absztrakt tétel bizonyításából és az I. rész 9. fejezetének szellemében folyik, hogy F^R-nek $\exists\ \overline{\nu}_0\ll m$ inv. mértéke Δ_0-n, amelyre $0<C_0\leq\dfrac{\mathrm{d}\overline{\nu}_0}{\mathrm{d}m_0}\leq C_1$ alkalmas C_0, C_1-gyel.
$\overline{\nu}_0$-ból megkonstruálható az F-invariáns $\overline{\nu}$ Δ-n. Ez csak akkor véges, ha $\int R\,\mathrm{d}m<\infty$, azaz $\gamma<1$. Legyen végül $\nu=\pi_*\overline{\nu}$.

10. Legyen $\rho=\dfrac{\mathrm{d}\nu}{\mathrm{d}m}$.
$\gamma>0$ esetén $\rho\mid J_k\approx k$.
Ugyanis: $\nu(J_k)=\overline{\nu}(\pi^{-1}J_k)\asymp k\left.\dfrac{\mathrm{d}\overline{\nu}}{\mathrm{d}m}\right|_{J_k}\asymp km_0(J_k)\asymp k^{-\alpha}$.

Így disztorzió miatt

$$\rho\mid J_k\approx\frac{k^{-\alpha}}{m_0(J_k)}\approx k.$$

11. *m-tipikus pontok aszimptotikus eloszlása $\gamma\geq 1$-re:*
Megmutatjuk, hogy tetszőlegesen nagy N-re, ha rögzítjük az (x'_N,x_N) intervallumot – azaz az origó akármilyen kicsi környezetét – és $\varepsilon>0$-t, akkor m-majdnem minden x-re

$$\frac{1}{n}\#\left\{0\leq k\leq n\mid f^kx\in(x'_N,x_N)\right\}\geq 1-\varepsilon\qquad\text{ha } n\to\infty.$$

Legyen ugyanis $N_1>N$, hogy

$$\frac{\nu(\mathbb{S}^1\backslash(x'_N,x_N))}{\nu(\mathbb{S}^1\backslash(x'_{N_1},x_{N_1}))}<\varepsilon.$$

NB. itt fontos, hogy a ν mérték *nem* véges!
Jelölje $f^{(N_1)}$ az első visszatérés leképezést $\mathbb{S}^1\backslash(x'_{N_1},x_{N_1})$-en, akkor
$\nu\mid(\mathbb{S}^1\backslash(x'_{N_1},x_{N_1})$ véges, $f^{(N_1)}$-invariáns mérték, amelyről könnyű látni, hogy ergodikus (pl. $d\geq 3$-ra az I_2-n való indukáltja ergodikus). Így m-majdnem minden pontjára

$\mathbb{S}^1 \setminus (x'_{N_1}, x_{N_1})$-nek az $f^{(N_1)}$-re az (x'_N, x_N)-ben töltött relatív idő $\geq 1-\varepsilon$. Ugyanakkor az f-orbitok (x'_N, x_N)-ben töltött relatív ideje nagyobb, mint az $f^{(N_1)}$-orbitoké. $\square$

Irodalomjegyzék

[1] ADLER, R. L.; WEISS, B. *Entropy, a complete metric invariant for automorphisms of the torus*; Proc. Natl. Acad. Sci. USA; **57(6)** 1573–1576 (1967)

[2] BOWEN, R.: *Equilibrium States and the Ergodic Theory of Anosov Diffeomorphisms*; Springer, 1975

[3] BOYARSKI, A.; GÓRA, P.: *Laws of Chaos, Invariant Measures and Dynamical Systems in One Dimension*, Birkhäuser, 1997

[4] BRIN, M.; STUCK, G.: *Introduction to Dynamical Systems*; Camebridge University Press, 2002

[5] COLLET, P.,; ECKMANN, J.-P.: *Iterated Maps on the Interval as Dynamical Systems*, Birkhäuser, 1980

[6] KATOK, A.; HASSELBLATT, B.: *Introduction to the Modern Theory of Dynamical Systems*; Camebridge University Press, 1995

[7] KATZNELSON, Y.; WEISS, B.: *A Simple Proof of some Ergodic Theorems*; Israel Journal of Mathematics, **42** 291–296 (1982)

[8] LASOTA, A. ; YORKE, J.: *On the Existence of Invariant Measures for Piecewise Monotonic Transformations*; Transactions of the American Mathematical Society, **186** 481–488 (1973)

[9] LIVERANI, C. *Invariant measures and their properties. A functional analytic point of view.* Dynamical systems. Part II, 185–237, Pubbl. Cent. Ric. Mat. Ennio Giorgi, Scuola Norm. Sup., Pisa, (2003)

[10] PETTERSEN, K.: *Ergodic Theory*; Camebridge University Press, 1983

[11] POLLICOTT, M.: *Lectures on Ergodic Theory and Pesin Theory on Compact Manifolds*; Camebridge University Press, 1993

[12] REED, M.; SIMON, B.: *Methods of Modern Mathematical Physics, I. Functional Analysis*; Elsevier, 1980

[13] SZŐKEFALVI-NAGY, B. *Valós függvények és függvénysorok*, Tankönyvkiadó, 1977

[14] WALTERS, P.: *An Introduction to Ergodic Theory*; Springer, 2007

[15] YOUNG, L.-S.: *Statistical properties of dynamical systems with some hyperbolicity*; Annals of Mathematics, **147** (1998) 585–650.

[16] YOUNG, L.-S.: *Recurrence times and rates of mixing*; Israel Journal of Mathematics, **110** (1999) 153–188.