MŰEGYETEM 1782

TYPOTEX

SZILÁGYI BRIGITTA

DIFFERENCIÁLGEOMETRIA PÉLDATÁR

2011

A differenciálgeometria klasszikus felépítését követõ példatár elsõ részében a görbékhez, második részében a felületekhez kapcsolódó példák szerepelnek. Minden feladatot általában részletes megoldás is követ, összetettebb feladatok megoldásai a szükséges elméleti ismereteket és formulákat is tartalmazzák.
A görbékrõl szóló öt, egymásra épülõ, az alkalmazásokban is fontos ismeretek gyakorlását segítõ fejezetre tagolódik. Minden fejezet elején elméleti összefoglalót találunk.
A felületelméleti rész elsõ két fejezete a felületek paraméterezését, a felületi normálissal, érintõsíkkal kapcsolatos példákat foglalja magában,tárgyalásra kerülnek az alkalmazás szempontjából fontos felülettípusok. Majd a követõ két fejezet a mélyebb differenciálgeometriai fogalmak (intrinsic geometria) megértését hivatott segíteni.

Kulcsszavak: paraméterezés, reguláris görbe, görbület, torzió, reguláris felület, alapforma, Gauss-görbület, Minkowski-görbület

Támogatás:
Készült a TÁMOP-4.1.2-08/2/A/KMR-2009-0028 számú, a „Természettudományos (matematika és fizika) képzés a műszaki és informatikai felsőoktatásban” című projekt keretében.

Készült:
a BME TTK Matematika Intézet gondozásában

Szakmai felelős vezető:
Ferenczi Miklós

Lektorálta:
Prok István

Az elektronikus kiadást előkészítette:
Torma Lídia Boglárka

Címlap grafikai terve:
Csépány Gergely László, Tóth Norbert

ISBN: 978-963-279-449-5

Tartalomjegyzék

Előszó

Ez a feladatgyűjtemény a görbe- és felületelmélet tanulásában kíván segítséget nyújtani, de hasznos lehet azok számára is, akik mérnöki tanulmányaik folyamán találkoznak ezen témakörökkel.

A példatár részletes elméleti anyagot nem tartalmaz, viszont rövid összegzéseket igen. A könnyebb memorizálás érdekében, a megoldáshoz szükséges képleteket szinte minden előfordulásukkor kiírtuk. Minden feladatot részletes megoldás követ. Az Olvasó munkája akkor lesz a legeredményesebb, ha ezt a segítséget önellenőrzésre használja.

A példatárban szereplő feladatok mindegyike megoldható az egyetemi matematikus alapképzésben helyet kapó differenciálgeometria kurzus elemi differenciálgeometriát tárgyaló fejezeteinek ismeretében, valamint a Budapesti Műszaki és Gazdaságtudományi Egyetemen a mérnök hallgatók számára szabadon választható differenciálgeometria tárgy elvégzése után.

Önálló tanulás esetén a szükséges elmélet elsajátításához Szőkefalvi Nagy Gyula, Gehér László, Nagy Péter: *Differenciálgeometria* című tankönyvét (Műszaki Könyvkiadó), vagy Manfredo Do Carmo: *Differential Geometry of Curves and Surfaces* könyvét ajánljuk. Ez utóbbi sok érdekes feladatot is tartalmaz, amelyeknek megoldásával az érdeklődő Olvasó is sikerrel próbálkozhat a jelen jegyzetben kidolgozott példák megoldása után.

Mind a görbeelmélethez, mind a felületelmélethez tartozik egy-egy interaktív *Mathematica notebook*(♣: http://elmemater.bme.hu), amelyekben az elsajátított ismeretek „vizualizálódnak”. Javasoljuk azonban, hogy ezeket ne csak szemlélődésre, hanem a paraméterek változtatásával önálló „kisérletezésre” is használja az Olvasó.

A jegyzet többnyire a legelterjedtebb jelöléseket használja. A formulákat igyekeztünk többször is feltüntetni. A vektorokat fölül húzott nyíllal jelöljük: $\vec{v}$. Elterjedt jelölés még a vastagon szedés, és (inkább kézzel írva) az alá-, illetve föléhúzás: $\mathbf{v}$, $\underline{v}$, $\bar{v}$. Az $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$, $\vec{e}_3$, néhol $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$ az $\mathbb{E}^3$-beli ortonormált bázist jelöli. Az első- és második alapmennyiségek jelölésére a Gauss által javasolt E, F, G és L, M, N betűket alkalmaztuk, azzal a különbséggel, hogy a második alapmennyiségeket helyenként l, m, n betűk jelölik. (Ezt a felületi normálistól való könnyebb megkülönböztetés indolkolja.)

Ha az Olvasó e példatár feladataihoz hasonlókkal szeretné tudását tovább gyarapítani, akkor V. T. Vodnyev: *Differenciálgeometria feladatgyűjteményét* forgathatja haszonnal, mely 1974-ben jelent meg a Műszaki Könyvkiadónál.

I. rész

Görbék

1. fejezet

A görbe és előállításai

1.1. Elméleti összefoglaló

1.1 DEFINÍCIÓ Reguláris görbén egy olyan Γ ponthalmazt értünk, amely előállítható egy I intervallumon értelmezett $\vec{r}(t)$ vektor-függvény helyzetvektorainak végpontjaiként, ahol $\vec{r}(t)$ egy topologikus (kölcsönösen egyértelmű és mindkét irányban folytonos) leképezés, folytonosan differenciálható és a differenciálhányados vektora sehol sem tűnik el.

1.2 TÉTEL Egy $t = \varphi(\tau)$ paramétertranszformáció akkor és csak akkor viszi át egy tetszőleges görbe bármely $\vec{r}(t)$ reguláris előállítását reguláris $\vec{r}(\tau)$ előállításba, ha $\varphi(\tau) \in \mathscr{C}^1$ és $\frac{d\varphi}{d\tau} \neq 0$.

1.3 DEFINÍCIÓ Térbeli, derékszögű koordinátarendszerben egy görbe paraméteres egyenlete általánosan

$$\vec{r} = \vec{r}(t) = f_1(t)\vec{i} + f_2(t)\vec{j} + f_3(t)\vec{k}$$

alakban írható.

1.2. Feladatok

1.1 FELADAT *Írjuk fel annak a $P_0(x_0, y_0, z_0)$ középpontú, ρ sugarú körnek egy paraméteres egyenletét, mely az $\vec{a}$ és $\vec{b}$ egymásra merőleges, egységvektorok által kifeszített síkban van!*

1.1 MEGOLDÁS $\vec{r}(t) = \vec{r}_0 + \rho \cos t\, \vec{a} + \rho \sin t\, \vec{b}$, ahol $\vec{r}_0 = (x_0, y_0, z_0)^T$.

1.2 FELADAT *Írjuk fel az 1.1. feladatban szereplő kör implicit egyenletét abban a koordinátarendszerben, melynek origója a P_0 pont, bázisvektorai az $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{a} \times \vec{b}$ vektorok!*

1.2 MEGOLDÁS Az adott koordinátarendszerben egy origó középpontú, $[x, y]$ síkban fekvő, ρ sugarú kör egyenletét kell felírnunk:

$$x^2 + y^2 = \rho^2$$
$$z = 0.$$

1.3 FELADAT *Mutassuk meg, hogy az*

$$\vec{r}(t) = \vec{r}_0 + \vec{r}_1 \cosh t + \vec{r}_2 \sinh t$$

vektorfüggvény hiperbolát állít elő, ha az $\vec{r}_1$ és $\vec{r}_2$ vektorok linerárisan függetlenek!

1.3 MEGOLDÁS Legyen a koordinátarendszerünk origója az $\vec{r}_0$ vektor végpontja, a bázisvektorok pedig az $\vec{r}_1$ és $\vec{r}_2$ vektorok (ezek lineárisan függetlenek). Ebben a rendszerben a görbe paraméteres egyenletrendszere:

$$\begin{aligned} x(t) &= \cosh t \\ y(t) &= \sinh t. \end{aligned}$$

Az egyszerűség kedvéért a változókat a továbbiakban elhagyjuk. Emeljük négyzetre a két egyenletet és vonjuk ki őket egymásból. Felhasználva a hiperbolikus függvényekre érvényes $\cosh^2 t - \sinh^2 t = 1$ azonosságot, kapjuk:

$$x^2 - y^2 = 1.$$

Ez nem más, mint a hiperbola egyenlete, tehát a görbe pontjai egy hiperbolán vannak.

1.4 FELADAT *Keressük meg az implicit egyenletét az alább megadott görbének, a Descartes-féle levélnek:*

$$\vec{r}(t) = \frac{3t}{1+t^3}\vec{e}_1 + \frac{3t^2}{1+t^3}\vec{e}_2$$

1.4 MEGOLDÁS Az $\vec{e}_1$ és $\vec{e}_2$ bázisvektorok által kifeszített rendszerben a görbe paraméteres egyenlete:

$$\begin{aligned} x &= \frac{3t}{1+t^3} \\ y &= \frac{3t^2}{1+t^3}. \end{aligned}$$

Látható, hogy $y = tx$, amiből $x \neq 0$ esetén $t = \frac{y}{x}$. Ezt visszahelyettesítve a második egyenletbe, kapjuk a görbe implicit egyenletét:

$$\begin{aligned} y &= 3\frac{xy^2}{x^3+y^3} \\ 0 &= x^3 + y^3 - 3yx. \end{aligned}$$

Ha pedig $x = 0$, akkor $y = 0$ is fennáll. Láthatjuk, hogy a $(0,0)$ pont koordinátái is kielégítik a kapott egyenletet.

1.5 FELADAT *Adott az*

$$\begin{aligned} x &= t^3 - 2t \\ y &= t^2 - 2 \end{aligned}$$

görbe. Vizsgáljuk meg, hogy az $M(-1,-1)$, $N(4,2)$, $P(1,2)$ pontok rajta vannak-e a görbén! Keressük meg, hogy hol metszi a görbe a koordinátatengelyeket! Határozzuk meg a legkisebb ordinátájú pontot a görbén. Írjuk fel a görbe implicit egyenletét!

1.5 MEGOLDÁS

1. Első lépésben írjuk fel a görbe implicit egyenletét. Vegyük észre, hogy $x = yt$, amiből $y \neq 0$ esetén $t = \frac{x}{y}$. Ezt visszahelyettesítve a második egyenletbe, rendezés után adódik a görbe implicit egyenlete:

$$y^3 + 2y^2 = x^2.$$

Ha pedig $y = 0$, akkor $x = 0$ is fennáll. Láthatjuk, hogy a (0,0) pont koordinátái is kielégítik a kapott egyenletet.

2. Helyettesítsük be az M, N és P pontok koordinátáit az implicit egyenletbe. Az első két esetben az egyenlet két oldala megegyezik, tehát az M és N pontok rajta vannak a görbén. A harmadik esetben ez nem teljesül, ezért a P pont nem eleme a görbének.

3. A görbe az x tengelyt abban a pontban (azokban a pontokban) metszi, ahol $y = 0$. Ebből adódik, hogy $x^2 = 0$, vagyis $x = 0$. A metszéspont koordinátái $(0,0)$.
Az y tengellyel való metszéspont esetén $x = 0 = t^3 - 2t = t(t^2 - 2)$, amiből $t = 0$ vagy $t^2 - 2 = 0$. Az első esetben $y = -2$, a másodikban $y = 0$. Tehát két metszéspontot kaptunk, melyek koordinátái $(0,-2)$ és $(0,0)$.

4. A legkisebb ordinátájú pontban y minimális. Látható, hogy $y = t^2 - 2 \geq -2$, tehát $t = 0$ esetén veszi fel y a minimumát. Ebben az esetben $x = 0$. A keresett pont koordinátái: $(0,-2)$.

1.6 FELADAT *Adjuk meg az*

$$x^2 + y^2 - 2ax = 0$$

kör paraméteres előállítását, ha paraméterként
a.) *a kör tetszőleges P pontját az origóval összekötő egyenes iránytangensét,*
b.) *a kör tetszőleges P pontját a kör középpontjával összekötő egyenes és az x tengely szögét választjuk!*

1.6 MEGOLDÁS a.) Jelöljük k-val a paramétert. A feladat szövege alapján $k = \frac{y}{x}$, amiből $y = kx$. Helyettesítsük ezt vissza a kör egyenletébe és a kapott kifejezést alakítsuk szorzattá:

$$x^2 + k^2x^2 - 2ax = 0$$
$$x[x(1+k^2) - 2a] = 0.$$

Az utóbbi egyenletnek minden x-re teljesülnie kell. Ezért $x(1+k^2) - 2a = 0$, amiből

$$x = \frac{2a}{1+k^2}$$
$$y = kx = \frac{2ak}{1+k^2}.$$

Érdemes megvizsgálnunk, hogy hogyan futja be a fönti paraméterezés a görbét. Könnyen észrevehető az is, hogy az origó csak $k \to \pm\infty$ határátmenet esetén adódik.

b.) Jelöljük a paraméterünket ϕ-vel. Ekkor érvényes, hogy $\sin\phi = \frac{y}{a}$ és $\cos\phi = \frac{x-a}{a}$. Ebből a kör paraméteres előállítása:

$$x = a(1+\cos\phi)$$
$$y = a\sin\phi.$$

Ha $\phi \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$, akkor a fönti paraméterezés egyszer futja be a teljes görbét.

1.7 FELADAT *Adjuk meg az analitikus leírását azon síkbeli pontok halmazának, amelyeknek két adott F_1 és F_2 pontoktól mért távolságainak szorzata adott a^2 állandó! (*Cassini-féle ovális*)*

1.7 MEGOLDÁS Oldjuk meg a feladatot Descartes-koordinátarendszerben, F_1 és F_2 pontok koordinátái legyenek rendre $(-b, 0)$, $(b, 0)$. Tekintsük a Cassini-féle ovális egy tetszőleges $P(x, y)$ pontját. A távolságok szorzatának állandóságát a következőképpen írhatjuk fel:

$$\sqrt{(x+b)^2+y^2}\sqrt{(x-b)^2+y^2} = a^2.$$

A fenti egyenlet a Cassini-féle ovális egyenlete. Az egyenletet a következő alakokban szokás megadni:

$$((x+b)^2+y^2)((x-b)^2+y^2) = a^4,$$

amiből

$$(x^2+y^2+b^2)^2 - 4b^2x^2 = a^4.$$

(Lássuk be, hogy a két utóbbi egyenlet ekvivalens egymással!)

1.8 FELADAT *Adjuk meg a Cassini-féle ovális egyenletét polárkoordinátákban!*

1.8 MEGOLDÁS Érdemes az $(x^2+y^2+b^2)^2 - 4b^2x^2 = a^4$ egyenletből kiindulni. Helyettesítsünk be $x = r\cos\varphi$-t és $y = r\sin\varphi$-t. A $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ azonosság alapján a következő alakot kapjuk:

$$(r^2+b^2)^2 - 4b^2r^2\cos^2\varphi = a^4.$$

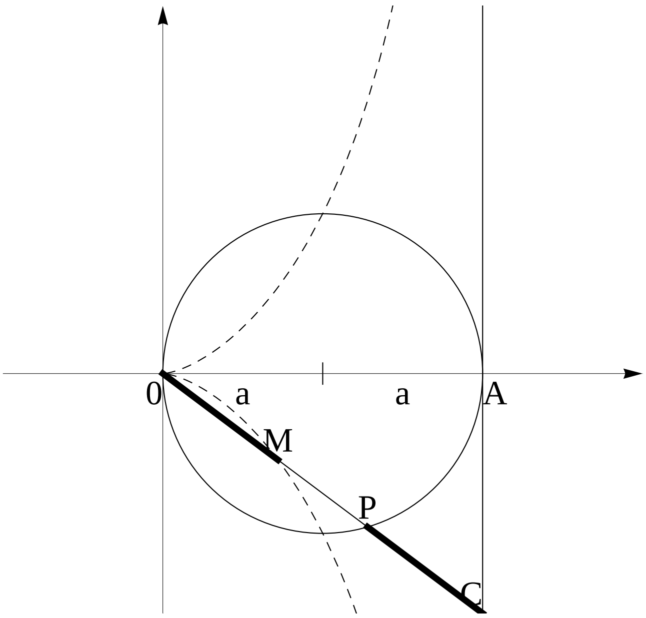
Rendezés után a $2\cos^2\varphi - 1 = \cos 2\varphi$ azonosság felhasználásával kapjuk a végső alakot:

$$r^4 - 2r^2b^2\cos 2\varphi = a^4 - b^4.$$

Megjegyzések:

- $\frac{a}{b} > 1$ esetén a görbének egyetlen zárt ága van, $\frac{a}{b} = 1$ esetén a Bernoulli-féle lemniszkátát kapjuk, $\frac{a}{b} < 1$ esetén két nem összefüggő zárt ágból áll, $\frac{a}{b} = 0$ esetén a két fókuszponttá fajul.
- $\frac{a}{b} > \sqrt{2}$ esetén a görbe ovális, $\sqrt{2} > \frac{a}{b} > 1$ esetén négy inflexiós pontja van.

1.9 FELADAT *Adott az $OA = 2a$ átmérőjü kör, O az origó, A az x tengelyen fekszik. C legyen a kör A-beli érintőjének egy tetszőleges pontja. Legyen P a kör és az A-beli érintő C pontját az origóval összekötő egyenes metszéspontja. Mérjünk fel az OC félegyenesre egy $OM = PC$ szakaszt! A C pont mozgatásával M kirajzolja a* Dioklész-féle cisszoidot. *Írjuk fel a cisszoid egyenletét!*



1.1. ábra. A Dioklész-féle cisszoid

1.9 MEGOLDÁS A kör egyenlete $(x-a)^2 + y^2 = a^2$, a „futó” OC félegyenes egyenlete legyen $y = tx$, ahol a $t \in \mathbb{R}$ változót paraméternek választjuk. A félegyenes és a kör metszéspontjaira:

$$(x-a)^2 + (tx)^2 = a^2.$$

Az egyenletet rendezve:

$$x\left(\left(1+t^2\right)x - 2a\right) = 0.$$

Tehát P koordinátái

$$\left(\frac{2a}{1+t^2}, \frac{2at}{1+t^2}\right),$$

C koordinátái pedig

$$(2a, 2at)\,.$$

Mivel OM és PC egy egyenesen fekszenek, ezért az OM szakasz x és y vetületének hossza rendre megegyezik a PC szakasz x és y vetületének hosszával. Ezért M pont koordinátái:

$$M(t)=\left(2a\left(1-\frac{1}{1+t^2}\right),\,2at\left(1-\frac{1}{1+t^2}\right)\right).$$

Az egyenletet egyszerűsítve:

$$M(t)=\left(2a\frac{t^2}{1+t^2},\,2a\frac{t^3}{1+t^2}\right).$$

Ezzel megadtuk a $t\in\mathbb{R}$ paraméter függvényében a Dioklész-féle cisszoidot. A t paraméter eliminálásával a görbe implicit egyenletét kapjuk. Fejezzük ki t-t az x koordinátából:

$$t^2(x-2a)+x=0$$

$$t=\pm\sqrt{\frac{x}{2a-x}}.$$

Ezt y-ba behelyettesítve:

$$y=\pm 2a\sqrt{\frac{x}{2a-x}}\frac{t^2}{1+t^2}=\pm 2a\sqrt{\frac{x}{2a-x}}\cdot\frac{\frac{x}{2a-x}}{1+\frac{x}{2a-x}}.$$

Ebből az implicit egyenlet alábbi alakját kapjuk:

$$y=\pm\sqrt{\frac{x}{2a-x}}x.$$

További átalakításokkal az implicit egyenletet végül a következő alakra lehet hozni:

$$x^3+y^2(x-2a)=0.$$

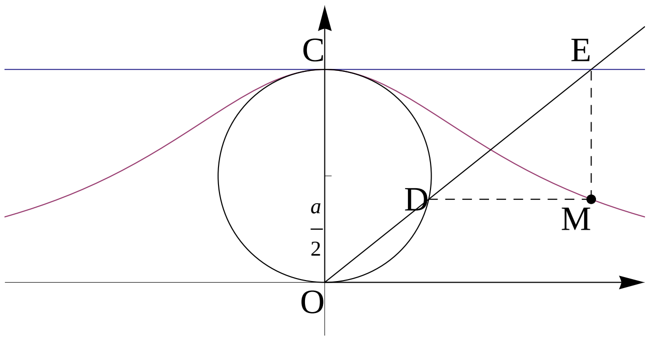
1.10 FELADAT *Adott a koordinátarendszer x tengelyét az origóban, O-ban érintő, $\frac{a}{2}$ sugarú kör. A kör O-val átellenes pontja C. Legyen E a C-beli érintő egyenes egy tetszőleges pontja, az OE félegyenes messe a kört a D pontban. A D pontból húzzunk az x tengellyel, az E pontból pedig az y tengellyel párhuzamos egyenest, a két egyenes metszéspontját jelölje M. Adjuk meg paraméteresen, majd implicit módon az M pont által kirajzolt görbét, miközben E végigfut a C-beli érintőn!* (Agnesi-féle fürt (görbe))

1.10 MEGOLDÁS A kör egyenlete:

$$x^2+\left(y-\frac{a}{2}\right)^2=\left(\frac{a}{2}\right)^2.$$

A C-beli érintő egyelete:

$$y=a.$$



1.2. ábra. Az Agnesi-féle fürt

Válasszuk paraméternek az OE egyenes t meredekségét:

$$y = tx.$$

Az M pont első koordinátája megegyezik az E pont első koordinátájával, a második koordinátája pedig a D pont második koordinátájával. E első koorinátájára könnyen adódik $x = \frac{a}{t}$ a fenti egyenletekből. A D pont kielégíti az

$$x^2 + \left(y - \frac{a}{2}\right)^2 = \left(\frac{a}{2}\right)^2$$

és az

$$y = tx$$

egyenleteket. A kör egyenletébe $x = \frac{y}{t}$-t ($t \neq 0$) helyettesítve:

$$\frac{y^2}{t^2} + y^2 - ay + \frac{a^2}{4} = \frac{a^2}{4}$$

$$y\left(\left(1 + \frac{1}{t^2}\right)y - a\right) = 0.$$

Innen D második koordinátája:

$$y = \frac{a}{1 + \frac{1}{t^2}} = a\frac{t^2}{1+t^2}.$$

Tehát az Agnesi-féle fürt a t paraméter függvényében:

$$\left(\frac{a}{t}, a\frac{t^2}{1+t^2}\right).$$

A t paraméter könnyen kifejezhető az x koordinátából: $t = \frac{a}{x}$. Innen a görbe implicit egyenlete:

$$y = \frac{a^3}{x^2 + a^2}.$$

2. fejezet

Érintőegyenes és normálsík

2.1. Elméleti összefoglaló

Jelölje X, Y és Z az érintő (illetve normális) futó pontjainak koordinátái ($\vec{\rho}$ ennek a pontnak a helyvektora). Az x, y és z pedig az érintési pont (illetve normális talppontjának) koordinátái legyenek. Ekkor a különbözőképpen megadott görbék érintőjének és normálisíkjának egyenleteit az alábbi formulák írják le:

1. A görbe paraméteres alakban van megadva: $\vec{r} = \vec{r}(t)$.
   Az érintő egyenlete:
   $$\vec{\rho}(\lambda) = \vec{r} + \lambda\dot{\vec{r}}.$$
   A normálsík egyenlete:
   $$(\vec{\rho} - \vec{r})\dot{\vec{r}} = 0.$$
2. A görbe megadása: $x = f_1(t)$, $y = f_2(t)$, $z = f_3(t)$.
   Az érintő egyenlete:
   $$\frac{X-x}{\dot{x}} = \frac{Y-y}{\dot{y}} = \frac{Z-z}{\dot{z}}.$$
   A normálsík egyenlete:
   $$(X-x)\dot{x} + (Y-y)\dot{y} + (Z-z)\dot{z} = 0.$$
3. A síkgörbe megadása: $y = \varphi(x)$.
   Az érintő egyenlete:
   $$Y - y = \varphi'(x)(X-x).$$
   A normális egyenlete:
   $$X - x + (Y-y)\varphi'(x) = 0.$$
4. A görbe implicit egyenlettel van megadva: $F(x,y) = 0$.
   Az érintő egyenlete:
   $$(X-x)F_x + (Y-y)F_y = 0,$$

ahol $F_x = \frac{\partial F(x,y)}{\partial x}$, $F_y = \frac{\partial F(x,y)}{\partial y}$ a megfelelő paraméter szerinti deriváltakat jelöli. Az érintő egyenlete más alakban:

$$\frac{X-x}{F_y} = -\frac{Y-y}{F_x}.$$

2.1 TÉTEL Ha az érintési pontban $\dot{\vec{r}}(t) = \ddot{\vec{r}}(t) = \ldots = \vec{r}^{(k-1)}(t) = 0$, de $\vec{r}^{(k)}(t) \neq 0$, akkor az érintő egyenlete $\vec{\rho}(\lambda) = \vec{r}(t) + \lambda \vec{r}^{(k-1)}(t)$.

2.2. Feladatok

2.1 FELADAT *Adott az*

$$\vec{r}(t) = a\cos t\,\vec{e}_1 + a\sin t\,\vec{e}_2 + bt\,\vec{e}_3$$

közönséges csavarvonal ($a > 0$, $b \neq 0$).
a.) Határozzuk meg a csavarvonal tetszőleges pontjában az érintő és a $z = 0$ sík szögét!
b.) Keressük meg a $(0,\, a,\, \frac{\pi b}{2})$ pontban a simulósíkot és írjuk fel a simulókör egyenletét!
c.) Legyen $b > 0$. A csavarvonal minden pontjában, a binormális irányában mérjük fel a

$$c := \frac{a}{b}\sqrt{a^2+b^2}$$

távolságot! Mi lesz a szakaszok végpontjainak mértani helye?

2.1 MEGOLDÁS a.) Az érintő egyenes irányvektora:

$$\vec{v}(t) = \dot{\vec{r}}(t) = -a\sin t\,\vec{e}_1 + a\cos t\,\vec{e}_2 + b\,\vec{e}_3.$$

A $z = 0$ sík normálvektora:

$$\vec{n}(t) = \vec{e}_3.$$

A sík és az érintő által bezárt szög:

$$\cos\varphi = \frac{\vec{n}(t)\vec{v}(t)}{|\vec{n}(t)|\cdot|\vec{v}(t)|} = \frac{b}{\sqrt{a^2\sin^2 t + a^2\cos^2 t + b^2}} = \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}.$$

b.) A simulósík egyenlete $(\vec{R} - \vec{r}(t))\dot{\vec{r}}(t)\ddot{\vec{r}}(t) = 0$, ahol $\vec{R}$ a simulósík pontjainak helyvektora. A sebesség- és gyorsulásvektor:

$$\dot{\vec{r}}(t) = -a\sin t\,\vec{e}_1 + a\cos t\,\vec{e}_2 + b\,\vec{e}_3$$
$$\ddot{\vec{r}}(t) = -a\cos t\,\vec{e}_1 - a\sin t\,\vec{e}_2.$$

Tudjuk, hogy a $(0,\, a,\, \frac{\pi}{2}b)$ pontok rajta vannak a simulósíkon. Ezt felhasználva meghatározható a t paraméter értéke: $z = bt = \frac{\pi}{2}b$, ahonnan $t = \frac{\pi}{2}$. Ezt és a megfelelő vektorokat behelyettesítve a simulósík általános egyenletébe kapjuk: $\frac{b}{a}X + Z - \frac{\pi}{2}b = 0$ (Y tetszőleges).

c.) Felírva a binormális egyenletét, és véve a c távolságot, látható, hogy a kapott pontok ugyancsak egy csavarvonalon helyezkednek el.

2.2 FELADAT *Adjuk meg a következő görbék t_0 paraméterű pontjában az érintővektort:*

a.) $\vec{r}(t) = (t-3)\vec{e}_1 + (t^2-1)\vec{e}_2 + t^3\vec{e}_3, \quad t_0 = 2,$

b.) $\vec{r}(t) = \sin t\,\vec{e}_1 + \cos t\,\vec{e}_2 + \frac{1}{\cos t}\vec{e}_3, \quad t_0 = 0,$

c.) $\vec{r}(t) = \frac{t}{1+t}\vec{e}_1 + \frac{1+t}{t}\vec{e}_2 + t^2\vec{e}_3, \quad t_0 = 1.$

2.2 MEGOLDÁS

a.) A megoldási módszer mindhárom esetben ugyanaz. A megadott görbét a t paraméter szerint kell deriválni, így kapjuk $\dot{\vec{r}}(t)$-t, majd ebben a $t = t_0$ helyettesítést kell elvégezni. Az

$$\vec{r}(t) = (t-3)\vec{e}_1 + (t^2-1)\vec{e}_2 + t^3\vec{e}_3$$

görbe érintővektora:

$$\dot{\vec{r}}(t) = \vec{e}_1 + 2t\vec{e}_2 + 3t^2\vec{e}_3.$$

Ez a $t_0 = 2$ paraméterű pontban

$$\dot{\vec{r}}(2) = \vec{e}_1 + 4\vec{e}_2 + 12\vec{e}_3.$$

b.)

$$\begin{aligned}
&\vec{r}(t) = \sin t\,\vec{e}_1 + \cos t\,\vec{e}_2 + \frac{1}{\cos t}\vec{e}_3 \\
&\dot{\vec{r}}(t) = \cos t\,\vec{e}_1 - \sin t\,\vec{e}_2 + \frac{\sin t}{\cos^2 t}\vec{e}_3 \\
&t_0 = 0 \\
&\dot{\vec{r}}(0) = \vec{e}_1.
\end{aligned}$$

c.)

$$\begin{aligned}
&\vec{r}(t) = \frac{t}{1+t}\vec{e}_1 + \frac{1+t}{t}\vec{e}_2 + t^2\vec{e}_3 \\
&\dot{\vec{r}}(t) = \left(\frac{1}{1+t} - \frac{t}{(1+t)^2}\right)\vec{e}_1 + \left(\frac{1}{t} - \frac{1+t}{t^2}\right)\vec{e}_2 + 2t\vec{e}_3 \\
&\dot{\vec{r}}(1) = \frac{1}{4}\vec{e}_1 - \vec{e}_2 + 2\vec{e}_3.
\end{aligned}$$

2.3 FELADAT *Írjuk fel az*

$$\vec{r}(t) = (t - e^t)\vec{e}_1 - \cos t\,\vec{e}_2 + \frac{t^2}{2}\vec{e}_3$$

csavarvonal érintőjét, és határozzuk meg azokat a pontokat, amelyekben az érintővektor zérus!

2.3 MEGOLDÁS A görbe paraméter szerinti deriváltja az érintővektor:

$$\dot{\vec{r}}(t) = (1-e^t)\vec{e}_1 + \sin t\,\vec{e}_2 + t\vec{e}_3,$$

az érintő egyenes egyenlete pedig ebből:

$$\vec{R}(\lambda) = r(t) + \lambda\dot{r}(t) = (t+\lambda-(1+\lambda)e^t)\vec{e}_1 + (\sin t - \cos t)\vec{e}_2 + \left(\frac{t^2}{2}+t\right)\vec{e}_3.$$

Jól látható, hogy $\dot{\vec{r}} = \vec{0}$ csak a $t = 0$ választás esetén teljesül.

2.4 FELADAT *Írjuk fel az $\vec{r}(t) = t^3\vec{e}_1 + t^2\vec{e}_2$ görbe $(-7, -1)$ ponton átmenő érintőjének az egyenletét!*

2.4 MEGOLDÁS

$$\vec{r}(t) = t^3\vec{e}_1 + t^2\vec{e}_2$$
$$\dot{\vec{r}}(t) = 3t^2\vec{e}_1 + 2t\vec{e}_2.$$

A görbe érintő egyenesének egyenlete

$$\vec{R}(\lambda) = (3\lambda+t)t^2\vec{e}_1 + (2\lambda+t)t\vec{e}_2.$$

A $(-7,-1)$ ponton átmenő érintőhöz tartozó t paraméter meghatározható:

$$(3\lambda+t)t^2 = -7$$
$$(2\lambda+t)t = -1.$$

A $\lambda = -\frac{5}{4}$ és $t = 2$ a valós megoldás. Tehát a ponton átmenő érintő:

$$\vec{R}(\lambda) = (12\lambda+8)\vec{e}_1 + (4\lambda+4)\vec{e}_2.$$

2.5 FELADAT *Az $\vec{r}(t) = (\sin t - t\cos t)\vec{e}_1 + (\cos t + t\sin t)\vec{e}_2 + (t+1)\vec{e}_3$ görbe mely pontjaiban párhuzamos az érintő az $[y, z]$ síkkal?*

2.5 MEGOLDÁS

$$x = \sin t - t\cos t$$
$$y = \cos t + t\sin t$$
$$z = t+1$$

Az $\vec{r}(t)$ görbe érintővektorai pontosan akkor párhuzamosak az $[y, z]$ síkkal, ha $\dot{x}(t) = 0$.
$\dot{x} = \cos t - \cos t + t\sin t = t\sin t \Rightarrow t = k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$ pontokban párhuzamos.

2.6 FELADAT *Az $\vec{r}(t) = \frac{t^4}{4}\vec{e}_1 + \frac{t^3}{3}\vec{e}_2 + \frac{t^2}{2}\vec{e}_3$ görbe mely pontjaihoz tartozó érintője párhuzamos az $x+3y+2z=0$ síkkal?*

2.6 MEGOLDÁS Az érintő párhuzamos az adott síkkal, ha az érintőegyenes irányvektora merőleges a sík normálvektorára.

$$\begin{aligned}\vec{r}(t) &= \frac{t^4}{4}\vec{e}_1 + \frac{t^3}{3}\vec{e}_2 + \frac{t^2}{2}\vec{e}_3\\ \dot{\vec{r}}(t) &= t^3\vec{e}_1 + t^2\vec{e}_2 + t\vec{e}_3\\ x+3y+2z &= 0.\end{aligned}$$

A második és harmadik egyenlőségekből látszik, hogy a $t^3+3t^2+2t=0$ megoldásai kellenek. Ezek pedig: $t_1=-2,\quad t_2=-1,\quad t_3=0$. Ezen paraméterekhez tartozó pontokban párhuzamos a megadott görbe a síkkal. A keresett pontok tehát $P_1(4, -\frac{8}{3}, 2)$, $P_2(\frac{1}{4}, -\frac{1}{3}, \frac{1}{2})$, $P_3(0, 0, 0)$.

2.7 FELADAT *Mekkora szöget zár be az $x = R\cos t, y = R\sin t, z = \lambda t$ csavarvonal t paraméterű pontjához tartozó érintője a csavaronalat tartalmazó henger ugyanezen ponton áthaladó alkotójával?*

2.7 MEGOLDÁS A közönséges csavarvonal

$$x = R\cos t, \quad y = R\sin t, \quad z = \lambda t$$

előállításából

$$\dot{\vec{r}}(t) = -R\sin t\,\vec{e}_1 + R\cos t\,\vec{e}_2 + \lambda\vec{e}_3,$$

továbbá tudjuk, hogy az alkotók irányvektora az $\vec{e}_3$ vektor. Így a keresett szög:

$$\Theta = \arccos\left(\frac{\dot{\vec{r}}(t)\vec{e}_3}{|\dot{\vec{r}}(t)||\vec{e}_3|}\right) = \arccos\left(\frac{\lambda}{\sqrt{R^2+\lambda^2}}\right).$$

2.8 FELADAT *Az $\vec{r}(t) = a\cos t\,\vec{e}_1 + a\sin t\,\vec{e}_2 + bt\,\vec{e}_3$ közönséges csavarvonal mely pontjaiban párhuzamos az érintő a $6x+3y=-5$ síkkal, és mi ezen pontokban az érintők egyenlete?*

2.8 MEGOLDÁS A $6x+3y+5=0$ síknak eleme a $\vec{p} = (-1/3, -1, 0)$ helyvektorú pont. Ha az érintővektort ebbe a pontba tolva az érintővektor rajta van a síkon, akkor maga az érintő párhuzamos vele.

$$\begin{aligned}&\dot{\vec{r}}(t) = -a\sin t\vec{e}_1 + a\cos t\vec{e}_2 + b\vec{e}_3\\ &\vec{p} + \dot{\vec{r}}(t) = (-1/3 - a\sin t)\vec{e}_1 + (a\cos t - 1)\vec{e}_2 + b\vec{e}_3\\ &6(-1/3 - a\sin t) + 3(a\cos t - 1) = -5\\ &\cos t = 2\sin t\\ &1/2 = \tan t\\ &t \approx 0{,}46364 + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}.\end{aligned}$$

Ezekben a pontokban az érintő egyenlete (közelítően):

$$\vec{R}(\lambda) = (0{,}89442 - 0{,}44721\lambda)a\vec{e}_1 + (0{,}44721 + 0{,}89442\lambda)a\vec{e}_2 + (0{,}46364 + \lambda)\vec{e}_3.$$

2.9 FELADAT *Mekkora szögben metszi az $\vec{r}(t) = e^t \cos t\, \vec{e}_1 + e^t \sin t\, \vec{e}_2 + e^t \vec{e}_3$ görbe az őt tartalmazó kúp alkotóit? Hogyan változik ez a szög a t paraméter függvényében?*

2.9 MEGOLDÁS Tudjuk, hogy a görbék hajlásszögét a metszéspontbeli érintők szöge definiálja. Az $\vec{r}(t) = e^t \cos t\vec{e}_1 + e^t \sin t\vec{e}_2 + e^t\vec{e}_3$ görbe az $x^2+y^2=z^2$ egyenletű kúpra illeszkedik, melynek csúcsa az origó, így:

$$(e^t \cos t)^2 + (e^t \sin t)^2 = e^{2t}(\cos^2 t + \sin^2 t) = e^{2t}.$$

A görbe érintővektora:

$$e^t(\cos t - \sin t)\vec{e}_1 + e^t(\sin t + \cos t)\vec{e}_2 + e^t\vec{e}_3.$$

Mivel $x^2+y^2=z^2$ összes alkotója átmegy az origón, csak $\vec{r}(t)$ és $\dot{\vec{r}}(t)$ szögét kell kiszámítanunk:

$$\begin{aligned}\Theta = \arccos\left(\frac{\vec{r}(t)\dot{\vec{r}}(t)}{|\vec{r}(t)||\dot{\vec{r}}(t)|}\right) &= \\ = \arccos\left(\frac{e^{2t}(\cos^2 t - \sin t\cos t + \sin^2 t + \sin t\cos t + 1)}{e^t\sqrt{\cos^2 t + \sin^2 t + 1}\,e^t\sqrt{(\cos t - \sin t)^2 + (\cos t + \sin t)^2 + 1}}\right) &= \\ = \ldots = \arccos\left(\sqrt{\frac{2}{3}}\right) &\approx 0,61547.\end{aligned}$$

Tehát t-től független, azaz állandó.

2.10 FELADAT *Az a állandó mely értéke esetén metszi az*

$$\begin{aligned} x &= e^{at}\cos t \\ y &= e^{at}\sin t \\ z &= e^{at} \end{aligned}$$

egyenletrendszerű görbe az őt tartalmazó forgáskúp alkotóit $\frac{\pi}{4} = 45^\circ$ szögben?

2.10 MEGOLDÁS Az $x = e^{at}\cos t$, $y = e^{at}\sin t$, $z = e^{at}$ görbe érintővektora:

$$\dot{\vec{r}}(t) = e^{at}((a\cos t - \sin t)\vec{e}_1 + (a\sin t + \cos t)\vec{e}_2 + a\vec{e}_3).$$

Hasonlóan az előző feladathoz az origó itt is eleme az összes alkotónak.

$$\begin{aligned}\cos\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2} &= \frac{\vec{r}(t)\dot{\vec{r}}(t)}{|\vec{r}(t)||\dot{\vec{r}}(t)|} \\ \vec{r}(t)\dot{\vec{r}}(t) &= e^{2at}(a\cos^2 t - \sin t\cos t + a\sin^2 t + \sin t\cos t + a) = 2ae^{2at} \\ |\vec{r}(t)| &= e^{at}\sqrt{\sin^2 t + \cos^2 t + 1} = e^{at}\sqrt{2} \\ \left|\dot{\vec{r}}(t)\right| &= e^{at}\sqrt{(a\cos t - \sin t)^2 + (a\sin t + \cos t)^2 + 1} = e^{at}\sqrt{a^2 + a + 2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} &= \frac{2ae^{2at}}{e^{at}\sqrt{2}e^{at}\sqrt{a^2+a+2}}.\end{aligned}$$

Megoldva az egyenletet kapjuk, hogy $a = 1$ és $a = -\frac{2}{3}$ esetén metszi egymást 45°-os szögben az alkotó és az érintő.

2.11 FELADAT *Határozzuk meg a t paraméter függvényében hogy az*

$$\vec{r}(t) = t\cos(3\ln t)\vec{e}_1 + t\sin(3\ln t)\vec{e}_2 + 2t\vec{e}_3$$

kúpos csavarvonal mekkora szögben metszi az $x^2 + y^2 - \frac{z^2}{4} = 0$ *körkúp alkotóit!*

2.11 MEGOLDÁS $\vec{r}(t) = t\cos(3\ln t)\vec{e}_1 + t\sin(3\ln t)\vec{e}_2 + 2t\vec{e}_3$ görbe érintője

$$\dot{\vec{r}}(t) = [\cos(3\ln t) - t\sin(3\ln t)3/t]\,\vec{e}_1 + [\sin(3\ln t) + t\cos(3\ln t)3/t]\,\vec{e}_2 + 2\vec{e}_3,$$

az adott t paraméterű ponthoz tartozó alkotó irányvektora ugyancsak

$$\vec{r}(t) = t\cos(3\ln t)\vec{e}_1 + t\sin(3\ln t)\vec{e}_2 + 2t\vec{e}_3.$$

Így a keresett szög az alábbi módon számolható:

$$\vec{r}(t)\dot{\vec{r}}(t) = t\cos^2(3\ln t) - 3t\cos(3\ln t)\sin(3\ln t) + t\sin^2(3\ln t) + \\ + 3t\sin(3\ln t)\cos(3\ln t) + 4t = 5t,$$

$$|\dot{\vec{r}}(t)| = \big(\cos^2(3\ln t) - 6\cos(3\ln t)\sin(3\ln t) + 9\sin^2(3\ln t) + \sin^2(3\ln t) + \\ + 6\cos(3\ln t)\sin(3\ln t) + 9\cos^2(3\ln t) + 4\big)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{14},$$

$$|\vec{r}(t)| = \sqrt{t^2\cos^2(3\ln t) + t^2\sin^2(3\ln t) + 4t^2} = \sqrt{5t^2},$$

$$\arccos\left(\frac{\vec{r}(t)\dot{\vec{r}}(t)}{|\vec{r}(t)||\dot{\vec{r}}(t)|}\right) = \arccos\left(\frac{5t}{\sqrt{70t^2}}\right) = \arccos\left(\frac{5}{\sqrt{70}}\operatorname{sgn} t\right) = \\ = \arccos\left(\frac{5}{\sqrt{70}}\right) \approx 0{,}930274 \approx 53{,}3^\circ,$$

ugyanis $t > 0$. Tehát a szög t-től független, állandó.

2.12 FELADAT *Milyen görbén helyezkednek el az alábbi térgörbék érintőinek az* $[x,y]$ *síkkal vett döféspontjai:*

a.) $\vec{r}(t) = \cos t\,\vec{e}_1 + \sin t\,\vec{e}_2 + c\vec{e}_3$

b.) $\vec{r}(t) = e^t\cos t\,\vec{e}_1 + e^t\sin t\,\vec{e}_2 + ce^t\vec{e}_3$

c.) $\vec{r}(t) = t\vec{e}_1 + Bt^2\vec{e}_2 + Ct^n\vec{e}_3,$

ahol c, n, B és C rögzített állandók és $n \neq 0$.

2.12 MEGOLDÁS a.) $c \neq 0$ különben nincs döféspont.

$$\vec{r}(t) = \cos t\,\vec{e}_1 + \sin t\,\vec{e}_2 + ct\vec{e}_3$$
$$\dot{\vec{r}}(t) = -\sin t\,\vec{e}_1 + \cos t\,\vec{e}_2 + c\vec{e}_3$$

Így az érintőegyenes:

$$\vec{R}(\lambda) = \vec{r}(t) + \lambda\dot{\vec{r}}(t) = (\cos t - \lambda\sin t)\vec{e}_1 + (\sin t + \lambda\cos t)\vec{e}_2 + c(t+\lambda)\vec{e}_3.$$

A $z = 0$ síkot ezért $c(t+\lambda) = 0$, $\lambda = -t$ paraméterértéknél döfi át.

Tehát az alábbi görbe pontjai a döféspontok:

$$\vec{q}(t) = (\cos t + t\sin t)\vec{e}_1 + (\sin t - t\cos t)\vec{e}_2.$$

b.) Hasonlóan:

$$\vec{r}(t) = e^t\cos t\,\vec{e}_1 + e^t\sin t\,\vec{e}_2 + ce^t\vec{e}_3$$
$$\dot{\vec{r}}(t) = e^t(\cos t - \sin t)\vec{e}_1 + e^t(\sin t + \cos t)\vec{e}_2 + ce^t\vec{e}_3$$
$$\vec{R}(\lambda) = \left[e^t\cos t + \lambda e^t(\cos t - \sin t)\right]\vec{e}_1 + \left[e^t\sin t + \lambda e^t(\sin t + \cos t)\right]\vec{e}_2 + (\lambda+1)ce^t\vec{e}_3$$

Tehát:

$$(\lambda+1)ce^t = 0, \quad \lambda = -1,$$

vagyis

$$\vec{q}(t) = e^t\sin t\,\vec{e}_1 - e^t\cos t\,\vec{e}_2.$$

c.) Itt is ugyanúgy eljárva:

$$\vec{r}(t) = t\vec{e}_1 + Bt^2\vec{e}_2 + Ct^n\vec{e}_3, \quad \text{ahol } n \neq 0,$$
$$\dot{\vec{r}}(t) = \vec{e}_1 + 2Bt\vec{e}_2 + Cnt^{n-1}\vec{e}_3,$$
$$\vec{R}(\lambda) = (t+\lambda)\vec{e}_1 + (Bt + 2B\lambda)t\vec{e}_2 + (Ct^n + \lambda Cnt^{n-1})\vec{e}_3.$$

Ebből a döféspontokhoz tartozó λ értékek:

$$Ct^n + \lambda Cnt^{n-1} = 0,$$
$$t + \lambda n = 0 \Rightarrow \lambda = -t/n.$$

Így a keresett görbe:

$$\vec{q}(t) = \left(t - \frac{t}{n}\right)\vec{e}_1 + \left(Bt^2 - \frac{2Bt^2}{n}\right)\vec{e}_2 = t\left(1 - \frac{1}{n}\right)\vec{e}_1 + Bt^2\left(1 - \frac{2}{n}\right)\vec{e}_2$$

egy parabola.

3. fejezet

Ívhossz és ívhossz szerinti paraméterezés

3.1. Elméleti összefoglaló

3.1 TÉTEL Az $\vec{r}(t)$ térgörbe t_1 paraméterű P_1 pontjától a t_2 paraméterű P_2 pontjáig tartó ívének előjeles hossza

$$s = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{\dot{x}^2(t) + \dot{y}^2(t) + \dot{z}^2(t)}\mathrm{d}t.$$

3.2 ÁLLÍTÁS Az $y = \varphi(x)$ egyenletű síkgörbe esetén a görbe ívhossza

$$s = \int_{x_1}^{x_2} \sqrt{1 + (\varphi'(x))^2}\mathrm{d}x.$$

3.3 DEFINÍCIÓ A görbe pontjait paraméterezhetjük egy rögzített pontjától mért s ívhosszal. Ezt a paramétert a görbe természetes paraméterénk nevezzük.

Ha az ívhosszat egy rögzített P_0 ponttól a t paraméterű $P(t)$ pontig mérjük, akkor $s = s(t)$ t függvénye.
Belátható, hogy ekkor létezik a $t = t(s)$ inverz függvény is, ezért minden $\vec{r}(t)$ görbénél végrehajtható az ívhossz szerinti paramétertranszformáció.

3.4 TÉTEL Ívhossz szerint paraméterezett görbe érintővektorának hossza 1.

3.2. Feladatok

3.1 FELADAT *Mutassuk meg, hogy az*

$$x = t$$
$$y = \begin{cases} t\sin\frac{1}{t}, & ha\ t > 0 \\ 0, & ha\ t = 0 \end{cases}$$
$$z = 0$$

folytonos görbének nincs ívhossza a $t \in [0, \infty]$ *végtelenbe nyúló íven!*

3.1 MEGOLDÁS Írjuk fel az egyenletek első deriváltjait:

$$\dot{x} = 1,$$
$$\dot{y} = \sin\frac{1}{t} - \frac{1}{t}\cos\frac{1}{t},$$
$$\dot{z} = 0.$$

A görbe ívhossza

$$s = \int_0^\infty \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2}\mathrm{d}t = \int_0^\infty \sqrt{1 + \left(\sin\frac{1}{t} - \frac{1}{t}\cos\frac{1}{t}\right)^2}\mathrm{d}t.$$

Mivel a fönti improprius integrál divergens, következik, hogy a görbének valóban nincs ívhossza.

3.2 FELADAT *Számítsuk ki a következő térgörbe ívhosszát, és írjuk fel az ívhosszparaméteres egyenletét:*

$$\vec{r}(t) = (t+3)\vec{e}_1 + \frac{t^2}{2}\vec{e}_2 + \frac{2\sqrt{2}}{3}t^{\frac{3}{2}}\vec{e}_3 \qquad 0 \le t \le 1$$

3.2 MEGOLDÁS A görbe, és a görbe paraméter szerinti deriváltja:

$$\vec{r}(t) = \begin{bmatrix} t+3 \\ \frac{t^2}{2} \\ \frac{2\sqrt{2}}{3}t^{\frac{3}{2}} \end{bmatrix} \quad \dot{\vec{r}}(t) = \begin{bmatrix} 1 \\ t \\ \sqrt{2t} \end{bmatrix}.$$

A görbe sebessége a sebességvektorának normája:

$$v(t) = \left\|\dot{\vec{r}}(t)\right\| = \sqrt{1 + t^2 + 2t} = |1+t| = 1+t.$$

Az utolsó egyenlőség azért áll fenn, mert $0 \le t \le 1$ esetben $|1+t| = 1+t$. Az ívhossz a sebesség paraméter szerinti integrálja:

$$\zeta(t) = \int_0^t v(\tau)d\tau = \int_0^t (1+\tau)d\tau = t + \frac{t^2}{2}.$$

Megjegyzés: Az integrálási változó azért τ, mert az integrálás határa és az integrálási változó lehet azonos, és most az integrálás határát jelöljük t-vel. Így $\zeta(t)$ az integrálás felső határának függvénye.
Most rátérhetünk az ívhossz szerinti paraméterezés megoldására. Ehhez ζ^{-1}-el kell paramétertranszformációt végrehajtani:

$$\zeta = t + \frac{t^2}{2}$$

$$t = -1 \pm \sqrt{1+2\zeta}.$$

Mivel $t \in [0,1]$, ezért a „+" előjelet kell választani. Az átparaméterezéshez az ívhosszfüggvény inverzével kell transzformálni:

$$\zeta : t \mapsto t + \frac{t^2}{2} = s$$

$$\zeta^{-1} : s \mapsto -1 + \sqrt{1+2\zeta} = t.$$

Így az átparaméterezett görbe:

$$\tilde{\vec{r}}(s) = \begin{bmatrix} -1+\sqrt{1+2s}+3 \\ \frac{1}{2}\left(-1+\sqrt{1+2s}\right)^2 \\ \frac{2\sqrt{2}}{3}\left(-1+\sqrt{1+2s}\right)^{3/2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2+\sqrt{1+2s} \\ 1+s-\sqrt{1+2s} \\ \frac{4}{3}\sqrt{(2+s)\sqrt{1+2s}-2-3s} \end{bmatrix}.$$

4. fejezet

Görbület és torzió

4.1 TÉTEL Tekintsünk az $\vec{r}(s)$ kétszer folytonosan deriválható természetes paraméterezésű görbén egy P_0 pontot, továbbá három, nem kollineáris $P_1(s_1)$, $P_2(s_2)$ és $P_3(s_3)$ pontot, melyek mindegyike $P_0(s_0)$-hoz tart. Ezek minden helyzetben egy síkot határoznak meg.
A P_1, P_2, P_3 pontokon átmenő síkok sorozata egy, a sorozattól független, a görbe és a P_0 pont által meghatározott határsíkhoz tart, melyet a P_0-beli $\vec{r}\,'(s_0)$ és $\vec{r}\,''(s_0)$ feszít ki. Ezt nevezzük a P_0 ponthoz tartozó simulósíknak.
4.2 ÁLLÍTÁS A simulósík egyenlete vegyes szorzattal kifejezve:

$$(\vec{R}-\vec{r}(s_0))\vec{r}\,'(s_0)\vec{r}\,''(s_0)=0,$$

ahol $\vec{R}$ a simulósík pontjainak helyvektora.
A görbület a

$$\kappa(t)=\frac{\|\dot{\vec{r}}(t)\times\ddot{\vec{r}}(t)\|}{\|\dot{\vec{r}}(t)\|^3},$$

a görbületi sugár az

$$R(t)=\frac{1}{\kappa(t)},$$

a torzió pedig a

$$\tau(t)=\frac{(\dot{\vec{r}}(t)\ddot{\vec{r}}(t)\dddot{\vec{r}}(t))}{\left\|\dot{\vec{r}}(t)\times\ddot{\vec{r}}(t)\right\|^2}$$

képlettel számolható tetszőleges paraméterezés esetén.

4.1. Feladatok

4.1 FELADAT *Határozzuk meg az*

$$\vec{r}(t)=t\vec{e}_1+t^2\vec{e}_2+t^3\vec{e}_3$$

görbe görbületét és torzióját a $t=0$ paraméterű pontban!

4.1 MEGOLDÁS Számoljuk ki a $\dot{\vec{r}}(t)$, $\ddot{\vec{r}}(t)$ és $\dddot{\vec{r}}$ vektorokat:

$$\begin{aligned}\vec{r}(t) &= t\vec{e}_1 + t^2\vec{e}_2 + t^3\vec{e}_3\\ \dot{\vec{r}}(t) &= \vec{e}_1 + 2t\vec{e}_2 + 3t^2\vec{e}_3\\ \ddot{\vec{r}}(t) &= 2\vec{e}_2 + 6t\vec{e}_3\\ \dddot{\vec{r}}(t) &= 6\vec{e}_3.\end{aligned}$$

A $t = 0$ helyen a deriváltak:

$$\begin{aligned}\dot{\vec{r}}(0) &= \vec{e}_1\\ \ddot{\vec{r}}(t) &= 2\vec{e}_2\\ \dddot{\vec{r}}(t) &= 6\vec{e}_3.\end{aligned}$$

A görbület és a torzió $t = 0$-ban:

$$\begin{aligned}\kappa(0) &= \frac{\|\dot{\vec{r}}(0)\times\ddot{\vec{r}}(0)\|}{\|\dot{\vec{r}}(0)\|^3} = 2\\ \tau(0) &= \frac{\left(\dot{\vec{r}}(0),\ddot{\vec{r}}(0),\dddot{\vec{r}}(0)\right)}{\|\dot{\vec{r}}(0)\times\ddot{\vec{r}}(0)\|^2} = 3.\end{aligned}$$

4.2 FELADAT *Határozzuk meg az*

$$\vec{r}(t) = e^t\cos t\,\vec{e}_1 + e^t\sin t\,\vec{e}_2 + e^t\vec{e}_3$$

kúpos csavarvonal kísérő triéderét, görbületét és torzióját!

4.2 MEGOLDÁS

$$\begin{aligned}\vec{r}(t) &= e^t\cos t\,\vec{e}_1 + e^t\sin t\,\vec{e}_2 + e^t\vec{e}_3\\ \dot{\vec{r}}(t) &= e^t(\cos t - \sin t)\vec{e}_1 + e^t(\cos t + \sin t)\vec{e}_2 + e^t\vec{e}_3\\ \ddot{\vec{r}}(t) &= -2e^t\sin t\,\vec{e}_1 + 2e^t\cos t\,\vec{e}_2 + e^t\vec{e}_3\\ \dddot{\vec{r}}(t) &= -2e^t(\sin t + \cos t)\vec{e}_1 + 2e^t(\cos t - \sin t)\vec{e}_2 + e^t\vec{e}_3.\end{aligned}$$

A kísérő triéder:

$$\begin{aligned}\vec{t}(t) &= \frac{\dot{\vec{r}}(t)}{\|\dot{\vec{r}}(t)\|} = \frac{\dot{\vec{r}}(t)}{\sqrt{3}e^t} = \frac{1}{\sqrt{3}}(\cos t - \sin t)\vec{e}_1 + \frac{1}{\sqrt{3}}(\cos t + \sin t)\vec{e}_2 + \frac{1}{\sqrt{3}}\vec{e}_3\\ \vec{b}(t) &= \frac{\dot{\vec{r}}(t)\times\ddot{\vec{r}}(t)}{\|\dot{\vec{r}}(t)\times\ddot{\vec{r}}(t)\|} = \frac{1}{\sqrt{6}}(\sin t - \cos t)\vec{e}_1 + \frac{1}{\sqrt{6}}(-\sin t - \cos t)\vec{e}_2 + \sqrt{\frac{2}{3}}\vec{e}_3\\ \vec{n}(t) &= \vec{b}(t)\times\vec{t}(t) = \frac{1}{\sqrt{2}}(-\sin t - \cos t)\vec{e}_1 + \frac{1}{\sqrt{2}}(-\sin t + \cos t)\vec{e}_2.\end{aligned}$$

A görbület- és a torziófüggvény:

$$\begin{aligned}\kappa(t) &= \frac{\|\dot{\vec{r}}(t)\times\ddot{\vec{r}}(t)\|}{\|\dot{\vec{r}}(t)\|^3} = \frac{\sqrt{2}}{3e^t}\\ \tau(t) &= \frac{(\dot{\vec{r}}(t)\ddot{\vec{r}}(t)\dddot{\vec{r}}(t))}{\|\dot{\vec{r}}(t)\times\ddot{\vec{r}}(t)\|^2} = \frac{1}{3e^t}.\end{aligned}$$

4.3 FELADAT *Határozzuk meg a $\vec{r}(t) = \frac{2}{t}\vec{e}_1 + 6t\vec{e}_2 + 3t^3\vec{e}_3$ görbe*

a.) görbületét és a görbület szélsőértékeit,

b.) torzióját és a torzió maximumát,

c.) írjuk fel a simulósík, a normálsík és a retifikáló sík egyenletét, a $t = 1$ paraméterű pontban!

4.3 MEGOLDÁS

$$
\begin{aligned}
\vec{r}(t) &= \frac{2}{t}\vec{e}_1 + 6t\vec{e}_2 + 3t^3\vec{e}_3 \\
\dot{\vec{r}}(t) &= \frac{-2}{t^2}\vec{e}_1 + 6\vec{e}_2 + 9t^2\vec{e}_3 \\
\ddot{\vec{r}}(t) &= \frac{4}{t^3}\vec{e}_1 + 18t\vec{e}_3 \\
\dddot{\vec{r}}(t) &= \frac{-12}{t^4}\vec{e}_1 + 18\vec{e}_3.
\end{aligned}
$$

A görbének két ága van, amelyek az origóra vonatkozóan középpontosan szimmetrikusan helyezkednek el, hiszen $\vec{r}(-t) = -\vec{r}(t)$. Az alábbiakban a $\pm$ jel utal a $t > 0$ illetve a $t < 0$ paraméterértékekhez tartozó ágakra. Hasonlóan számolva, mint az előző feladatban:

$$
\begin{aligned}
\vec{t}(t) &= \frac{-2}{2+9t^4}\vec{e}_1 + \frac{6t^2}{2+9t^4}\vec{e}_2 + \frac{9t^4}{2+9t^4}\vec{e}_3 \\
\vec{b}(t) &= \pm\left(\frac{9t^4}{2+9t^4}\vec{e}_1 + \frac{6t^2}{2+9t^4}\vec{e}_2 + \frac{-2}{2+9t^4}\vec{e}_3\right) \\
\vec{n}(t) &= \pm\left(\frac{6t^2}{2+9t^4}\vec{e}_1 + \frac{2-9t^4}{2+9t^4}\vec{e}_2 + \frac{6t^2}{2+9t^4}\vec{e}_3\right).
\end{aligned}
$$

Így a görbület és a torzió:

$$
\begin{aligned}
\kappa(t) &= \frac{12|t|^3}{(2+9t^4)^2} \\
\tau(t) &= -\frac{12t^3}{(2+9t^4)^2}.
\end{aligned}
$$

A görbület lehetséges szélsőértékhelyeit a $\frac{\mathrm{d}\kappa(t)}{\mathrm{d}t} = \frac{36t^2(2-15t^4)}{(2+9t^4)^3} = 0$ egyenletből kapjuk. A második deriváltak helyettesítési értékét is figyelembe véve $t = 0$ minimumhely, $t = \pm\left(\frac{2}{15}\right)^{\frac{1}{4}}$ maximumhely, ahol a görbület: $\kappa(0) = 0$ illetve $\kappa\left(\pm\left(\frac{2}{15}\right)^{\frac{1}{4}}\right) = \frac{5}{32}\left(\frac{15}{4}\right)^{\frac{1}{4}}$.

A $\tau(t) = \mp\kappa(t)$ egyenlőség miatt a torzió minimuma: $\tau\left(\left(\frac{2}{15}\right)^{\frac{1}{4}}\right) = -\frac{5}{32}\left(\frac{15}{4}\right)^{\frac{1}{4}}$, illetve maximuma: $\tau\left(-\left(\frac{2}{15}\right)^{\frac{1}{4}}\right) = \frac{5}{32}\left(\frac{15}{4}\right)^{\frac{1}{4}}$. A simulósík egyenlete $t = 1$-ben ($\vec{R}$ a sík változó pontjának helyvektora):

$$0 = (\vec{R} - \vec{r}(1)) \cdot (\dot{\vec{r}}(1) \times \ddot{\vec{r}}(1)) = 108x + 72y - 24z - 576.$$

Egyszerűsítve:

$$9x + 6y - 2z = 48.$$

A normálsík egyenlete:

$$0 = (\vec{R} - \vec{r}(1)) \cdot \dot{\vec{r}}(1) = -2x + 6y + 9z - 59.$$

A rektifikáló sík egyenlete:

$$\begin{aligned} &0 = (\vec{R} - \vec{r}(1)) \cdot \dot{\vec{r}}(1) \cdot (\dot{\vec{r}}(1) \times \ddot{\vec{r}}(1)) \\ &6x - 7y + 6z + 12 = 0. \end{aligned}$$

4.4 FELADAT *Határozzuk meg a kör tetszőleges pontjához tartozó görbületi középpontot!*

4.4 MEGOLDÁS Elég az origó középpontú, R sugarú kört nézni: $x^2 + y^2 = R^2$.

$$\begin{aligned} \vec{r}(t) &= \begin{bmatrix} R\cos t \\ R\sin t \\ 0 \end{bmatrix}, \qquad t \in [0, 2\pi) \\ \dot{\vec{r}}(t) &= \begin{bmatrix} -R\sin t \\ R\cos t \\ 0 \end{bmatrix} \\ \ddot{\vec{r}}(t) &= \begin{bmatrix} -R\cos t \\ -R\sin t \\ 0 \end{bmatrix} \\ \kappa(t) &= \frac{\|\dot{\vec{r}}(t) \times \ddot{\vec{r}}(t)\|}{\|\dot{\vec{r}}(t)\|^3} \end{aligned}$$

$$\dot{\vec{r}}(t) \times \ddot{\vec{r}}(t) = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -R\sin t & R\cos t & 0 \\ -R\cos t & -R\sin t & 0 \end{vmatrix} = \vec{i} \cdot 0 - \vec{j} \cdot 0 + \vec{k} \cdot (R^2 \sin^2 t + R^2 \cos^2 t) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ R^2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} \|\dot{\vec{r}}(t) \times \ddot{\vec{r}}(t)\| &= \sqrt{(R^2)^2} = R^2 \\ \|\dot{\vec{r}}(t)\| &= \sqrt{R^2 \sin^2 t + R^2 \cos^2 t} = R \end{aligned}$$

$$\kappa = \frac{R^2}{R^3} = \frac{1}{R} \Rightarrow \text{görbületi sugár: } r = R$$

$$\vec{t}(t) = \frac{1}{R} \cdot \begin{bmatrix} -R\sin t \\ R\cos t \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\sin t \\ \cos t \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \vec{n}(t) = \begin{bmatrix} -\cos t \\ -\sin t \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Görbületi középpont:

$$\vec{g}(t) = \begin{bmatrix} R\cos t \\ R\sin t \\ 0 \end{bmatrix} + R\begin{bmatrix} -\cos t \\ -\sin t \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

4.5 FELADAT *Keressük meg az $xy = 1$ hiperbola legkisebb sugarú simulókörét.*

4.5 MEGOLDÁS A simulókör sugarának meghatározásához szükségünk van a görbületre. A görbület meghatározásához tekintsük a hiperbola paraméteres egyenletrendszerét! Egy lehetséges választás:

$$\vec{r}(t) = \begin{bmatrix} t \\ \frac{1}{t} \\ 0 \end{bmatrix}, \qquad t \in \mathbb{R} \setminus \{0\}.$$

A szükséges deriváltak:

$$\dot{\vec{r}}(t) = \begin{bmatrix} 1 \\ \frac{-1}{t^2} \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\ddot{\vec{r}}(t) = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{2}{t^3} \\ 0 \end{bmatrix}.$$

A görbület:

$$\kappa(t) = \frac{\|\dot{\vec{r}}(t) \times \ddot{\vec{r}}(t)\|}{\|\dot{\vec{r}}(t)\|^3}$$

alapján számolható. Ehhez kiszámítjuk az alábbi mennyiségeket:

$$\dot{\vec{r}}(t) \times \ddot{\vec{r}}(t) = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & \frac{-1}{t^2} & 0 \\ 0 & \frac{2}{t^3} & 0 \end{vmatrix} = \vec{i} \cdot 0 + \vec{j} \cdot 0 + \vec{k} \cdot \frac{2}{t^3} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{2}{t^3} \end{bmatrix}$$

$$\|\dot{\vec{r}}(t) \times \ddot{\vec{r}}(t)\| = \sqrt{\left(\frac{2}{t^3}\right)^2} = \left|\frac{2}{t^3}\right|$$

$$\left\|\dot{\vec{r}}(t)\right\| = \sqrt{1+\frac{1}{t^4}} = \frac{\sqrt{1+t^4}}{t^2}.$$

Így:

$$\kappa(t) = \frac{\left|\frac{2}{t^3}\right|}{\frac{\sqrt{1+t^4}(1+t^4)}{t^6}} = \left|\frac{2}{t^3}\right| \frac{t^6}{\sqrt{(1+t^4)^3}} = \frac{2\left|t^3\right|}{\sqrt{(1+t^4)^3}}$$

$$\Rightarrow R(t) = \frac{\sqrt{(1+t^4)^3}}{2\left|t^3\right|}.$$

A görbületi sugár szélsőértéke:

$$R(t) = f(t) = \frac{(1+t^4)^{\frac{3}{2}}}{2\left|t^3\right|}$$

$$f'(t) = \frac{\frac{3}{2}\cdot(1+t^4)^{\frac{1}{2}}\cdot 4t^3\cdot 2t^3 - (1+t^4)^{\frac{3}{2}}\cdot 6t^2}{4t^6} = 0$$

$$\Leftrightarrow g(t) = 12(1+t^4)^{\frac{1}{2}}\cdot t^6 - (1+t^4)^{\frac{3}{2}}\cdot 6t^2 = 0$$

$$6t^2(1+t^4)^{\frac{1}{2}}(2t^4-(1+t^4)) = 0$$

Mivel szorzatuk akkor nulla, ha valamely tényezője nulla, így a következő eseteket kapjuk:

$$t = 0, \qquad \text{ami ellentmondás}$$

$$\sqrt{1+t^4} = 0 \Rightarrow t^4 = -1, \qquad \text{ami ugyancsak ellentmondás}$$

$$2t^4 - 1 - t^4 = 0 \Rightarrow t^4 = 1 \Rightarrow t^4 = 1 \Rightarrow t = \pm 1.$$

Elegendő $t > 0$ esetet vizsgálni, a $t < 0$ esetben a göbületi sugár ugyanakkora:

$$t = 1 \Rightarrow R = \frac{\sqrt{(1+1)^3}}{2} = \sqrt{2}$$

t	$t<-1$	$t=-1$	$-1<t<1$	$t=1$	$1<t$
$f'(t)$	+	0	-	0	+
$f(t)$	$\nearrow$	helyi maximum	$\searrow$	helyi minimum	$\nearrow$

Írjuk fel a simulókör egyenletét! Főnormális vektor: $\vec{n}(t) = \vec{b}(t)\times\vec{t}(t)$

$$\vec{t}(t) = \frac{\dot{\vec{r}}(t)}{\left\|\dot{\vec{r}}(t)\right\|} = \frac{t^2}{\sqrt{1+t^4}}\cdot[1,-\frac{1}{t^2},0]^T = \left[\frac{t^2}{\sqrt{1+t^4}},-\frac{1}{\sqrt{1+t^4}},0\right]^T$$

$$\vec{b}(t) = \frac{\dot{\vec{r}}(t)\times\ddot{\vec{r}}(t)}{\left\|\dot{\vec{r}}(t)\times\ddot{\vec{r}}(t)\right\|} = \frac{t^3}{2}\cdot\begin{bmatrix}0\\0\\\frac{2}{t^3}\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}$$

$$\vec{n}(t) = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & 0 & 1 \\ \frac{t^2}{\sqrt{1+t^4}} & -\frac{1}{\sqrt{1+t^4}} & 0 \end{vmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{1+t^4}} \\ \frac{t^2}{\sqrt{1+t^4}} \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Simulókör középpontja:

$$\vec{g}(t) = \vec{r}(t) + R \cdot \vec{n}(t) = \begin{bmatrix} t \\ \frac{1}{t} \\ 0 \end{bmatrix} + \frac{\left(\sqrt{1+t^4}\right)^3}{2t^2} \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{1+t^4}} \\ \frac{t^2}{\sqrt{1+t^4}} \\ 0 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} t \\ \frac{1}{t} \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1+t^4}{2t^2} \\ \frac{1+t^4}{2} \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} t + \frac{1+t^4}{2t^2} \\ \frac{1}{t} + \frac{1+t^4}{2} \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Ha $t = 1$, akkor

$$\vec{g}(1) = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Ha $t = -1$, akkor a középpont koorinátái

$$\vec{g}(-1) = \begin{bmatrix} -2 \\ -2 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

A körök egyenletei tehát:

$$(x-2)^2 + (y-2)^2 = 2$$
$$(x+2)^2 + (y+2)^2 = 2$$

4.6 FELADAT *Határozzuk meg az $y = \sin x$ simulókörét a $\left(\frac{\pi}{2}, 1\right)$ pontban!*

4.6 MEGOLDÁS Az előző feladat menete szerint:

$$\vec{r}(t) = \begin{bmatrix} t \\ \sin t \\ 0 \end{bmatrix}$$
$$\dot{\vec{r}}(t) = \begin{bmatrix} 1 \\ \cos t \\ 0 \end{bmatrix}$$
$$\ddot{\vec{r}}(t) = \begin{bmatrix} 0 \\ -\sin t \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\kappa(t) = \frac{\|\dot{\vec{r}}(t) \times \ddot{\vec{r}}(t)\|}{\|\dot{\vec{r}}(t)\|^3}$$

$$\dot{\vec{r}}(t) \times \ddot{\vec{r}}(t) = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & \cos t & 0 \\ 0 & -\sin t & 0 \end{vmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -\sin t \end{bmatrix}$$

$$\|\dot{\vec{r}}(t) \times \ddot{\vec{r}}(t)\| = \sqrt{(-\sin t)^2} = |\sin t|$$

$$\|\dot{\vec{r}}(t)\| = \sqrt{1+\cos^2 t}$$

$$\kappa(t) = \frac{|\sin t|}{\sqrt{(1+\cos^2 t)^3}}$$

$$\Rightarrow R(t) = \frac{\sqrt{(1+\cos^2 t)^3}}{|\sin t|}$$

$$\vec{t}(t) = \frac{\dot{\vec{r}}(t)}{\|\dot{\vec{r}}(t)\|} = \frac{1}{\sqrt{1+\cos^2 t}} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ \cos t \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\vec{n}(t) = \frac{1}{\sqrt{1+\cos^2 t}} \cdot \begin{bmatrix} \cos t \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Görbületi középpont a $\left(\frac{\pi}{2}, 1\right)$ pontban, ami a $t = \frac{\pi}{2}$ paraméterű pont

$$\vec{g}\left(\frac{\pi}{2}\right) = \begin{bmatrix} \frac{\pi}{2} \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + 1 \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\pi}{2} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

A simulókör ekkor:

$$\left(x - \frac{\pi}{2}\right)^2 + y^2 = 1.$$

4.7 FELADAT *Határozzuk meg a következő görbe görbületét és torzióját egy tetszőleges, t paraméterű pontjában!*

$$\vec{r}(t) = e^t \vec{e}_1 + e^{-t} \vec{e}_2 + \sqrt{2} t \vec{e}_3$$

4.7 MEGOLDÁS

$$\vec{r}(t) = e^t \vec{e}_1 + e^{-t} \vec{e}_2 + \sqrt{2} t \vec{e}_3$$

$$\dot{\vec{r}}(t) = e^t \vec{e}_1 - e^{-t} \vec{e}_2 + \sqrt{2} \vec{e}_3$$

$$\ddot{\vec{r}}(t) = e^t \vec{e}_1 + e^{-t} \vec{e}_2$$

$$\dddot{\vec{r}}(t) = e^t \vec{e}_1 - e^{-t} \vec{e}_2$$

$$\kappa(t) = \frac{\|\dot{\vec{r}}(t) \times \ddot{\vec{r}}(t)\|}{\|\dot{\vec{r}}(t)\|^3} = \frac{\sqrt{4+2e^{2t}+2e^{-2t}}}{(e^t+e^{-t})^3} = \frac{\sqrt{2}}{4\cosh^2 t} = \frac{1}{\sqrt{8}\cosh^2 t}$$

$$\tau(t) = \frac{(\dot{\vec{r}}(t)\ddot{\vec{r}}(t)\dddot{\vec{r}}(t))}{\|\dot{\vec{r}}(t) \times \ddot{\vec{r}}(t)\|^2} = -\frac{\sqrt{2}e^{2t}}{(1+e^{2t})^2} = \frac{1}{\sqrt{8}\cosh^2 t}.$$

4.8 FELADAT *Határozzuk meg a következő görbe görbületét és torzióját egy tetszőleges, t paraméterű pontjában!*

$$\vec{r}(t) = a(3t-t^3)\vec{e}_1 + 3at^2\vec{e}_2 + a(3t+t^3)\vec{e}_3$$

4.8 MEGOLDÁS

$$\begin{aligned}
\vec{r}(t) &= a(3t-t^3)\vec{e}_1 + 3at^2\vec{e}_2 + a(3t+t^3)\vec{e}_3 \\
\dot{\vec{r}}(t) &= 3a(1-t^2)\vec{e}_1 + 6at\vec{e}_2 + 3a(1+t^2)\vec{e}_3 \\
\ddot{\vec{r}}(t) &= -6at\vec{e}_1 + 6a\vec{e}_2 + 6at\vec{e}_3 \\
\dddot{\vec{r}}(t) &= -6a\vec{e}_1 + 6a\vec{e}_3
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\kappa(t) &= \frac{1}{3a(1+t^2)^2} \\
\tau(t) &= \frac{1}{3a(1+t^2)^2}.
\end{aligned}$$

4.9 FELADAT *Határozzuk meg a következő görbe görbületét és torzióját egy tetszőleges, t paraméterű pontjában!*

$$\vec{r}(t) = \cosh t\vec{e}_1 + \sinh t\vec{e}_2 + t\vec{e}_3$$

4.9 MEGOLDÁS

$$\begin{aligned}
\vec{r}(t) &= \cosh t\vec{e}_1 + \sinh t\vec{e}_2 + t\vec{e}_3 \\
\dot{\vec{r}}(t) &= \sinh t\vec{e}_1 + \cosh t\vec{e}_2 + \vec{e}_3 \\
\ddot{\vec{r}}(t) &= \cosh t\vec{e}_1 + \sinh t\vec{e}_2 \\
\dddot{\vec{r}}(t) &= \sinh t\vec{e}_1 + \cosh t\vec{e}_2
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\kappa(t) &= \frac{1}{2\cosh^2 t} \\
\tau(t) &= \frac{1}{2\cosh^2 t}.
\end{aligned}$$

Megjegyzés: Természetesen az előbbi három feladat végeredményéből nem következik, hogy tetszőleges görbe görbület- és torziófüggvénye megegyezik. Ennek igazolására álljon itt a következő feladat:

4.10 FELADAT *Határozzuk meg az*

$$\vec{r}(t) = \cos^2 t\,\vec{e}_1 + \cos t \sin t\,\vec{e}_2 + \sin t\vec{e}_3, \quad t \in [0, 2\pi)$$

Viviani-féle görbe görbületét a $t = \frac{\pi}{2}$ pontban! Van-e a görbének olyan pontja, amelyben 0 a görbület? Határozzuk meg a görbe torzióját egy tetszőleges t paraméterű pontjában! Keressük meg azokat a pontokat, ahol a torzió zérus!

4.10 MEGOLDÁS

$$\begin{aligned}
\vec{r}(t) &= \cos^2 t\,\vec{e}_1 + \cos t \sin t\,\vec{e}_2 + \sin t\,\vec{e}_3 \\
\dot{\vec{r}}(t) &= -\cos t \sin t\,\vec{e}_1 + (\cos^2 t - \sin^2 t)\vec{e}_2 + \cos t\,\vec{e}_3 \\
\ddot{\vec{r}}(t) &= (-2\cos^2 t + 2\sin^2 t)\vec{e}_1 - 4\cos t \sin t\,\vec{e}_2 - \sin t\,\vec{e}_3 \\
\dddot{\vec{r}}(t) &= 8\cos t \sin t\,\vec{e}_1 + (-4\cos^2 t + 4\sin^2 t)\vec{e}_2 - \cos t\,\vec{e}_3
\end{aligned}$$

$$\kappa(t) = \frac{\|\dot{\vec{r}}(t) \times \ddot{\vec{r}}(t)\|}{\|\dot{\vec{r}}(t)\|^3} = \frac{2\sqrt{13 + 3\cos(2t)}}{(3 + \cos(2t))^{3/2}}.$$

A görbület a $t = \frac{\pi}{2}$ pontban: $\kappa\left(\frac{\pi}{2}\right) = \sqrt{5}$. A görbület akkor lehetne 0, ha a $13 + 3\cos 2t = 0$. Ez semmilyen t-re nem teljesül, tehát a göbület minden t-re pozitív.
A torzió:

$$\tau(t) = \frac{(\dot{\vec{r}}(t)\ddot{\vec{r}}(t)\dddot{\vec{r}}(t))}{\|\dot{\vec{r}}(t) \times \ddot{\vec{r}}(t)\|^2} = \frac{12\cos t}{13 + 3\cos 2t}.$$

A torzió 0, ha $\cos t = 0$, vagyis a $t = \frac{\pi}{2}$ és a $t = \frac{3\pi}{2}$ paraméterű pontokban.

4.11 FELADAT *Határozzuk meg a közönséges csavarvonal tetszőleges pontjában a görbületi középpont koordinátáit. Mi lesz a görbületi középpontok mértani helye? Milyen feltétel(ek) mellett illeszkedik ez a tartó hengerre?*

4.11 MEGOLDÁS A z tengelyű csavarvonal egy lehetséges paraméterezése:

$$\vec{r}(t) = \begin{bmatrix} a\cos t \\ a\sin t \\ bt \end{bmatrix}, \qquad t \in \mathbb{R},$$

ahol a a tartóhenger sugara, b pedig a menetemelkedést jellemző állandó ($m = 2\pi b$). A szükséges mennyiségek:

$$\dot{\vec{r}}(t) = \begin{bmatrix} -a\sin t \\ a\cos t \\ b \end{bmatrix}$$

$$\ddot{\vec{r}}(t) = \begin{bmatrix} -a\cos t \\ -a\sin t \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\kappa(t) = \frac{\|\dot{\vec{r}}(t) \times \ddot{\vec{r}}(t)\|}{\|\dot{\vec{r}}(t)\|^3}$$

$$\dot{\vec{r}}(t) \times \ddot{\vec{r}}(t) = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -a\sin t & a\cos t & b \\ -a\cos t & -a\sin t & 0 \end{vmatrix} = \begin{bmatrix} ab\sin t \\ -ab\cos t \\ a^2 \end{bmatrix}$$

$$\|\dot{\vec{r}}(t) \times \ddot{\vec{r}}(t)\| = \sqrt{a^2b^2\sin^2 t + a^2b^2\cos^2 t + a^4} = \sqrt{a^2b^2 + a^4} = a\sqrt{a^2+b^2}$$

$$\|\dot{\vec{r}}(t)\| = \sqrt{a^2\sin^2 t + a^2\cos^2 t + b^2} = \sqrt{a^2+b^2}.$$

Ezek ismeretében a görbület:

$$\kappa = \frac{a\sqrt{a^2+b^2}}{(a^2+b^2)\sqrt{a^2+b^2}} = \frac{a}{a^2+b^2}.$$

Vegyük észre, hogy a görbület a paramétertől független, állandó. A görbületi középpont számításához szükséges mennyiségek:

$$\vec{t}(t) = \frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}} \cdot \begin{bmatrix} -a\sin t \\ a\cos t \\ b \end{bmatrix}$$

$$\vec{b}(t) = \frac{\dot{\vec{r}}(t) \times \ddot{\vec{r}}(t)}{\|\dot{\vec{r}}(t) \times \ddot{\vec{r}}(t)\|} = \frac{1}{a\sqrt{a^2+b^2}} \cdot \begin{bmatrix} ab\sin t \\ -ab\cos t \\ a^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{b\sin t}{\sqrt{a^2+b^2}} \\ -\frac{b\cos t}{\sqrt{a^2+b^2}} \\ \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} \end{bmatrix}$$

$$\vec{n}(t) = \vec{b}(t) \times \vec{t}(t) = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{b\sin t}{\sqrt{a^2+b^2}} & -\frac{b\cos t}{\sqrt{a^2+b^2}} & \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} \\ -\frac{a\sin t}{\sqrt{a^2+b^2}} & \frac{a\cos t}{\sqrt{a^2+b^2}} & \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}} \end{vmatrix} = \begin{bmatrix} -\cos t \\ -\sin t \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Így a görbületi középpont:

$$\vec{g}(t) = \vec{r}(t) + \frac{1}{\kappa} \cdot \vec{n}(t) = \begin{bmatrix} a\cos t \\ a\sin t \\ bt \end{bmatrix} + \frac{a^2+b^2}{a} \begin{bmatrix} -\cos t \\ -\sin t \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{b^2}{a}\cos t \\ -\frac{b^2}{a}\sin t \\ bt \end{bmatrix}.$$

Ez is csavarvonal, amelynek tartóhengere $\left|-\frac{b^2}{a}\right|$ sugarú és menetemelkedése $2\pi b$, ami azonos az eredeti csavarvonaléval. A két tartóhenger pontsan akkor esik egybe, ha $|a| = |b|$ teljesül.

5. fejezet

Frenet-apparátus, kísérő triéder

Már az előző fejezetben megismerkedhettünk a Frenet-féle hároméllel, de míg a 4. fejezetben a görbület és a torzió, vagy éppen a simulókör számítása volt az elsődleges cél, addig az 5. fejezet a kísérő triéderrel kapcsolatos feladatokat tartalmazza. Természetesen a témakör jellegéből fakad, hogy a két fejezet között átfedést tapasztalunk.

Egy tetszőleges mozgást sok esetben előnyös a pályához olyan, a pályához rögzített koordinátrednszerben leírni, amelyet három, egymásra kölcsönösen merőleges egységvektor alkot. Ezek lehetnek a $\vec{t}$ érintő-, $\vec{n}$ normális-, és $\vec{b}$ binormális vektor. Amelyek ívhossz szerinti paraméterezés esetén az $s = s_0$ paraméterű pontban

$$\vec{t}(s_0) = \frac{d\vec{r}(s_0)}{ds}$$
$$\vec{n}(s_0) = \frac{d^2\vec{r}(s_0)}{ds^2}$$
$$\vec{b}(s_0) = \vec{t}(s_0) \times \vec{n}(s_0)$$

alakot öltenek. Tetszőleges paraméter esetén kiszámításuk egy $t = t_0$ paraméterű pontban a

$$\vec{t}(t_0) = \frac{\dot{\vec{r}}(t_0)}{\left\|\dot{\vec{r}}(t_0)\right\|}$$
$$\vec{b}(t_0) = \frac{\dot{\vec{r}}(t_0) \times \ddot{\vec{r}}(t_0)}{\left\|\dot{\vec{r}}(t_0) \times \ddot{\vec{r}}(t_0)\right\|}$$
$$\vec{n}(t_0) = \vec{b}(t_0) \times \vec{t}(t_0)$$

formulák alapján történhet.

5.1 FELADAT *Határozzuk meg az $\vec{r}(t) = \left(t^2 - 1\right)\vec{e}_1 + (t+2)\vec{e}_3 + \left(t^3 - t\right)\vec{e}_3$ görbe $t_0 = 1$ paraméterű pontjához tartozó kísérő triédere élegyeneseinek és síkjainak az egyenletét.*

5.1 MEGOLDÁS A görbe, első, és második deriváltja:

$$\vec{r}(t) = \begin{bmatrix} t^2 - 1 \\ t+2 \\ t^3 - t \end{bmatrix} \quad \dot{\vec{r}}(t) = \begin{bmatrix} 2t \\ 1 \\ 3t^2 - 1 \end{bmatrix} \quad \ddot{\vec{r}}(t) = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 6t \end{bmatrix}.$$

A $t_0 = 1$-ben a fenti függvények értékei:

$$\vec{r}(t_0) = \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \dot{\vec{r}}(t_0) = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} \quad \ddot{\vec{r}}(t_0) = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 6 \end{bmatrix}.$$

Az érintő egységvektort ezek után könnyen ki tudjuk számolni:

$$\vec{t}(t_0) = \frac{\dot{\vec{r}}(t_0)}{\|\dot{\vec{r}}(t_0)\|} = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

Megemlítjük, hogy a kísérő triéder érintő egységvektorát igen gyakran csak érintő vektorként emlegetik. Bár az érintő vektor korábbi, normálatlan alakját tekintve ez pontatlan, különösebb zavart azonban nem okoz. A binormális vektorhoz ki kell számolni $\dot{\vec{r}} \times \ddot{\vec{r}}|_{t_0}$-t, és a normáját:

$$\dot{\vec{r}} \times \ddot{\vec{r}}|_{t_0} = \begin{bmatrix} 6-0 \\ 4-12 \\ 0-2 \end{bmatrix} = 2 \begin{bmatrix} 3 \\ -4 \\ -1 \end{bmatrix}$$

$$\left\|\dot{\vec{r}} \times \ddot{\vec{r}}\right\|_{t_0}^2 = 4(9+16+1) = 4 \cdot 26,$$

így már számolható $\vec{b}(t_0)$:

$$\vec{b}(t_0) = \frac{\dot{\vec{r}} \times \ddot{\vec{r}}|_{t_0}}{\left\|\dot{\vec{r}} \times \ddot{\vec{r}}\right\|_{t_0}} = \frac{1}{\sqrt{26}} \begin{bmatrix} 3 \\ -4 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

A normális vektor a fenti kettő keresztszorzatából számolható:

$$\vec{n}(t_0) = \vec{b}(t_0) \times \vec{t}(t_0) = \frac{1}{3\sqrt{26}} \begin{bmatrix} -8-(-1) \\ -2-6 \\ 3-(-8) \end{bmatrix} = \frac{1}{3\sqrt{26}} \begin{bmatrix} -7 \\ -8 \\ 11 \end{bmatrix}.$$

A triéder síkjait azon meggondolások alapján számolhatjuk ki, hogy minden pontjuk a kísérő triéder megfelelő élére merőleges, és illeszkedik a görbe adott $\vec{r}(t_0)$ helyvektorú pontjára.

A *simulósíkot* $\vec{t}$ és $\vec{n}$ feszíti ki, ezért $\vec{b}$-re merőleges, azaz minden $\vec{x}$ pontja kielégíti a következő egyenletet:

$$\vec{b} \cdot \vec{x} = \vec{b} \cdot \vec{r}(t_0), \text{ ahol } \vec{x} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}.$$

Ekkor a fenti egyenlet koorinátás alakban:

$$3x-4y-z=-12.$$

A *normálsíkot* $\vec{n}$ és $\vec{b}$ feszíti ki, így $\vec{t}$-re merőleges:

$$\vec{t}\cdot\vec{x}=\vec{t}\cdot\vec{r}(t_0).$$

Koordinátás alakban:

$$2x+y+2z=3.$$

A *retifikáló síkot* $\vec{t}$ és $\vec{b}$ feszíti ki, $\vec{n}$-re merőleges. Egyenlete vektoros, majd koordinátás alakban:

$$\vec{n}\cdot\vec{x}=\vec{n}\cdot\vec{r}(t_0),$$

$$-7x-8y+11z=-24.$$

5.2 FELADAT *Határozzuk meg a következő görbe görbületét, torzióját, kísérő triéderét a $t=0$ illetve a $t=\frac{\pi}{2}$ pontban*

$$\vec{r}(t)=(t-\sin t)\vec{e}_1+(1-\cos t)\vec{e}_2+\sin t\,\vec{e}_3!$$

5.2 MEGOLDÁS

$$\begin{aligned}
\vec{r}(t)&=(t-\sin t)\vec{e}_1+(1-\cos t)\vec{e}_2+\sin t\,\vec{e}_3\\
\dot{\vec{r}}(t)&=(1-\cos t)\vec{e}_1+\sin t\,\vec{e}_2+\cos t\,\vec{e}_3\\
\ddot{\vec{r}}(t)&=\sin t\,\vec{e}_1+\cos t\,\vec{e}_2-\sin t\,\vec{e}_3\\
\dddot{\vec{r}}(t)&=\cos t\,\vec{e}_1-\sin t\,\vec{e}_2-\cos t\,\vec{e}_3
\end{aligned}$$

$\boxed{t=0}$

$$\begin{aligned}
\dot{\vec{r}}(0)&=\vec{e}_3\\
\ddot{\vec{r}}(0)&=\vec{e}_2\\
\dddot{\vec{r}}(0)&=\vec{e}_1-\vec{e}_3
\end{aligned}$$

érintő egységvektor:

$$\vec{t}(0)=\frac{\dot{\vec{r}}(0)}{|\dot{\vec{r}}(0)|}=\vec{e}_3$$

binormális egységvektor:

$$\vec{b}(0)=\frac{\dot{\vec{r}}(0)\times\ddot{\vec{r}}(0)}{|\dot{\vec{r}}(0)\times\ddot{\vec{r}}(0)|}=-\vec{e}_1$$

főnormális egységvektor:

$$\vec{n}(0) = \vec{b}(0) \times \vec{t}(0) = \vec{e}_2$$

görbület:

$$\kappa(0) = \frac{|\dot{\vec{r}}(0) \times \ddot{\vec{r}}(0)|}{|\dot{\vec{r}}(0)|^3} = 1$$

torzió:

$$\tau(0) = \frac{\dot{\vec{r}}(0)\ddot{\vec{r}}(0)\dddot{\vec{r}}(0)}{|\dot{\vec{r}}(0) \times \ddot{\vec{r}}(0)|^2} = -1.$$

$\boxed{t = \frac{\pi}{2}}$

$$\dot{\vec{r}}\left(\frac{\pi}{2}\right) = \vec{e}_1 + \vec{e}_2$$
$$\ddot{\vec{r}}\left(\frac{\pi}{2}\right) = \vec{e}_1 - \vec{e}_3$$
$$\dddot{\vec{r}}\left(\frac{\pi}{2}\right) = -\vec{e}_2$$

érintő egységvektor:

$$\vec{t}\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\dot{\vec{r}}(\frac{\pi}{2})}{|\dot{\vec{r}}(\frac{\pi}{2})|} = \frac{\sqrt{2}}{2}\vec{e}_1 + \frac{\sqrt{2}}{2}\vec{e}_2$$

binormális egységvektor:

$$\vec{b}\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\dot{\vec{r}}(\frac{\pi}{2}) \times \ddot{\vec{r}}(\frac{\pi}{2})}{|\dot{\vec{r}}(\frac{\pi}{2}) \times \ddot{\vec{r}}(\frac{\pi}{2})|} = -\frac{\sqrt{3}}{3}\vec{e}_1 + \frac{\sqrt{3}}{3}\vec{e}_2 - \frac{\sqrt{3}}{3}\vec{e}_3$$

főnormális egységvektor:

$$\vec{n}\left(\frac{\pi}{2}\right) = \vec{b}\left(\frac{\pi}{2}\right) \times \vec{t}\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\sqrt{6}}{6}\vec{e}_1 - \frac{\sqrt{6}}{6}\vec{e}_2 - \frac{\sqrt{6}}{3}\vec{e}_3$$

görbület:

$$\kappa\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{|\dot{\vec{r}}(\frac{\pi}{2}) \times \ddot{\vec{r}}(\frac{\pi}{2})|}{|\dot{\vec{r}}(\frac{\pi}{2})|^3} = \frac{\sqrt{6}}{4}$$

torzió:

$$\tau\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\dot{\vec{r}}(\frac{\pi}{2})\ddot{\vec{r}}(\frac{\pi}{2})\dddot{\vec{r}}(\frac{\pi}{2})}{|\dot{\vec{r}}(\frac{\pi}{2}) \times \ddot{\vec{r}}(\frac{\pi}{2})|^2} = -\frac{1}{3}.$$

5.3 FELADAT *Határozzuk meg a következő görbe görbületét, torzióját, kísérő triéderét a $t = 1$ paraméterű pontban!*

$$\vec{r}(t) = 2t\vec{e}_1 + \ln t\vec{e}_2 + t^2\vec{e}_3, \quad (t > 0)$$

5.3 MEGOLDÁS

$$\begin{aligned}
\vec{r}(t) &= 2t\vec{e}_1 + \ln t\vec{e}_2 + t^2\vec{e}_3 \\
\dot{\vec{r}}(t) &= 2\vec{e}_1 + \frac{1}{t}\vec{e}_2 + 2t\vec{e}_3 \\
\ddot{\vec{r}}(t) &= -\frac{1}{t^2}\vec{e}_2 + 2\vec{e}_3 \\
\dddot{\vec{r}}(t) &= \frac{2}{t^3}\vec{e}_2
\end{aligned}$$

Esetünkben $\boxed{t = 1}$

$$\begin{aligned}
\dot{\vec{r}}(1) &= 2\vec{e}_1 + \vec{e}_2 + 2\vec{e}_3 \\
\ddot{\vec{r}}(1) &= -\vec{e}_2 + 2\vec{e}_3 \\
\dddot{\vec{r}}(1) &= 2\vec{e}_2
\end{aligned}$$

érintő egységvektor:

$$\vec{t}(1) = \frac{\dot{\vec{r}}(1)}{|\dot{\vec{r}}(1)|} = \frac{2}{3}\vec{e}_1 + \frac{1}{3}\vec{e}_2 + \frac{2}{3}\vec{e}_3$$

binormális egységvektor:

$$\vec{b}(1) = \frac{\dot{\vec{r}}(1) \times \ddot{\vec{r}}(1)}{|\dot{\vec{r}}(1) \times \ddot{\vec{r}}(1)|} = \frac{2}{3}\vec{e}_1 - \frac{2}{3}\vec{e}_2 - \frac{1}{3}\vec{e}_3$$

főnormális egységvektor:

$$\vec{n}(1) = \vec{b}(1) \times \vec{t}(1) = -\frac{1}{3}\vec{e}_1 - \frac{2}{3}\vec{e}_2 + \frac{2}{3}\vec{e}_3$$

görbület:

$$\kappa(1) = \frac{|\dot{\vec{r}}(1) \times \ddot{\vec{r}}(1)|}{|\dot{\vec{r}}(1)|^3} = \frac{2}{9}$$

torzió:

$$\tau(1) = \frac{\dot{\vec{r}}(1)\ddot{\vec{r}}(1)\dddot{\vec{r}}(1)}{|\dot{\vec{r}}(1) \times \ddot{\vec{r}}(1)|^2} = -\frac{2}{9}.$$

5.4 FELADAT *Határozzuk meg a $\vec{r}(t) = \frac{2}{t}\vec{e}_1 + \ln t\vec{e}_2 - t^2\vec{e}_3$, $t \in I = (0,\infty)$ görbének azokat a pontjait, melyekben a binormális párhuzamos az $x - y + 8z + 2 = 0$ síkkal.*

5.4 MEGOLDÁS A görbe, első és második deriváltja:

$$\vec{r}(t) = \begin{bmatrix} 2/t \\ \ln t \\ -t^2 \end{bmatrix}, \quad \dot{\vec{r}}(t) = \begin{bmatrix} -2/t^2 \\ 1/t \\ -2t \end{bmatrix}, \quad \ddot{\vec{r}}(t) = \begin{bmatrix} 4/t^3 \\ -1/t^2 \\ -2 \end{bmatrix}.$$

Amennyiben a binormális párhuzamos az $x - y + 8z + 2 = 0$ síkkal, akkor merőleges a sík

$$\vec{N} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 8 \end{bmatrix}$$

normálvektorára. A t paraméterű pontban a binormális párhuzamos $\dot{\vec{r}}(t) \times \ddot{\vec{r}}(t)$ vektorral:

$$\vec{b}(t) \parallel \dot{\vec{r}}(t) \times \ddot{\vec{r}}(t) = \begin{bmatrix} -2/t - 2/t \\ -8/t^2 - 4/t^2 \\ 2/t^4 - 4/t^4 \end{bmatrix} \parallel \begin{bmatrix} -2/t \\ -6/t^2 \\ -1/t^4 \end{bmatrix} = \lambda\vec{b}(t),$$

ahol λ zérustól különböző valós szám. Kell tehát, hogy $\vec{b}(t) \cdot \vec{N} = 0$ teljesüljön:

$$\lambda\vec{b}(t) \cdot \vec{N} = -\frac{2}{t} + \frac{6}{t^2} - \frac{8}{t^4} = 0$$

$$t^3 - 3t^2 + 4 = (t+1)(t^2 - 4t + 4) = (t+1)(t-2)^2 = 0.$$

A fenti egyenletnek két különböző gyöke van, $t = -1$ és $t = 2$, de $-1 \notin I$ miatt csak a $t = 2$ gyök ad megoldást. Tehát egyetlen, a feladat feltételét teljesítő pont van, és ez az $\vec{r}(2)$ helyvektorú $P(1, \ln 2, -4)$ pont.

5.5 FELADAT *Bizonyítsuk be, hogy az*

$$\vec{r}(t) = t\vec{e}_1 + \sin t\,\vec{e}_2 - \cos t\,\vec{e}_3$$

görbe főnormálisa minden t esetén párhuzamos az $[y,z]$ síkkal!

5.5 MEGOLDÁS

$$\vec{r}(t) = t\vec{e}_1 + \sin t\,\vec{e}_2 - \cos t\,\vec{e}_3$$
$$\dot{\vec{r}}(t) = \vec{e}_1 + \cos t\,\vec{e}_2 + \sin t\,\vec{e}_3$$
$$\ddot{\vec{r}}(t) = -\sin t\,\vec{e}_2 + \cos t\,\vec{e}_3$$

A főnormális vektort a kifejtési tétel alapján számolva:

$$\vec{n}(t) = \vec{b}(t) \times \vec{t}(t) = \frac{\dot{\vec{r}}(t) \times \ddot{\vec{r}}(t)}{\|\dot{\vec{r}}(t) \times \ddot{\vec{r}}(t)\|} \times \frac{\dot{\vec{r}}(t)}{\|\dot{\vec{r}}(t)\|} = \frac{-\dot{\vec{r}}(\dot{\vec{r}}\ddot{\vec{r}}) + \ddot{\vec{r}}(\dot{\vec{r}}\dot{\vec{r}})}{\|\dot{\vec{r}} \times \ddot{\vec{r}}\| \cdot \|\dot{\vec{r}}\|} = -\sin t\, \vec{e}_2 + \cos t\, \vec{e}_3,$$

amiből következik az állítás, hiszen $\vec{e}_1$ vektor együtthatója 0.

5.6 FELADAT *Határozzuk meg a $\varphi(t)$ függvény alakját úgy, hogy az*

$$x = t, \; y = \sin t, \; z = \varphi(t)$$

görbe főnormálisa a t paraméter minden értéke mellett párhuzamos az $[y,z]$ síkkal!

5.6 MEGOLDÁS

$$\begin{aligned}
\vec{r}(t) &= t\vec{e}_1 + \sin t\, \vec{e}_2 - \varphi(t)\vec{e}_3 \\
\dot{\vec{r}}(t) &= \vec{e}_1 + \cos t\, \vec{e}_2 + \dot{\varphi}(t)\vec{e}_3 \\
\ddot{\vec{r}}(t) &= -\sin t\, \vec{e}_2 + \ddot{\varphi}(t)\vec{e}_3
\end{aligned}$$

Az 5.5 példának megfelelően kifejtve a főnormális vektort (C konstans):

$$\vec{n}(t) = \frac{-\dot{\vec{r}}(\dot{\vec{r}}\ddot{\vec{r}}) + \ddot{\vec{r}}(\dot{\vec{r}}\dot{\vec{r}})}{\|\dot{\vec{r}} \times \ddot{\vec{r}}\| \cdot \|\dot{\vec{r}}\|} = C\left\{\dot{\vec{r}}(t) \cdot [\cos t \sin t - \dot{\varphi}(t)\ddot{\varphi}(t)] + \ddot{\vec{r}}(t) \cdot \left[1 + \cos^2 t + (\dot{\varphi}(t))^2\right]\right\}.$$

Mivel $\ddot{\vec{r}}$ párhuzamos az $[y,z]$ síkkal, de $\dot{\vec{r}}$ nem, ezért $\dot{\vec{r}}$ együtthatójának 0-nak kell lennie,

$$\cos t \sin t = \dot{\varphi}(t)\ddot{\varphi}(t),$$

ami csak úgy lehetséges, ha $\varphi(t) = \pm\cos t$.

5.7 FELADAT *Határozzuk meg a $z = x^2 + y^2$, $y = x$ görbe normálsíkját!*

5.7 MEGOLDÁS Paraméterezzük a görbét az $x = t$ változóval:

$$\vec{r}(t) = t\vec{e}_1 + t\vec{e}_2 + 2t^2\vec{e}_3.$$

Így a görbe t paraméterű pontjához tartozó normálsík egyenlete:

$$\left(\vec{R} - \vec{r}(t),\, \dot{\vec{r}}(t)\right) = (x - t) + (y - t) + (z - 2t^2) \cdot 4t = 0.$$

5.8 FELADAT *Bizonyítsuk be, hogy az*

$$\vec{r}(t) = a\cos t\, \vec{e}_1 + a\sin\alpha \sin t\, \vec{e}_2 + a\cos\alpha \sin t\, \vec{e}_3$$

görbe normálsíkjára illeszkedik az $x = 0$, $y\tan\alpha + z = 0$ egyenes!

5.8 MEGOLDÁS

$$\begin{aligned}\vec{r}(t) &= a\cos t\,\vec{e}_1 + a\sin\alpha\sin t\,\vec{e}_2 + a\cos\alpha\sin t\,\vec{e}_3\\ \dot{\vec{r}}(t) &= -a\sin t\,\vec{e}_1 + a\sin\alpha\cos t\,\vec{e}_2 + a\cos\alpha\cos t\,\vec{e}_3.\end{aligned}$$

A normálsík egyenlete:

$$\left(\vec{R} - \vec{r}(t),\ \dot{\vec{r}}(t)\right) = -xa\sin t + ya\sin\alpha\cos t + za\cos\alpha\cos t = 0.$$

Ha $\cos\alpha \neq 0$, akkor átalakítva a normálsík egyenletét a következőt kapjuk:

$$-x\sin t + (y\tan\alpha + z)\cos t = 0.$$

Behelyettesítve az $x = 0$, $y\tan\alpha + z = 0$ egyenes pontjait azonosságot kapunk, tehát az egyenes valóban a normálsíkban van.

5.9 FELADAT *Igazoljuk, hogy az*

$$\vec{r}(t) = t\vec{e}_1 + t^2\vec{e}_2 + t^3\vec{e}_3$$

görbének a $(0,\ 0,\ 0)$ *pontbeli kísérő triédere egybeesik a koordináta-egységvektorokkal!*

5.9 MEGOLDÁS A 4.1 példában már kiszámoltuk a megoldáshoz szükséges deriváltakat:

$$\begin{aligned}\vec{r}(t) &= t\vec{e}_1 + t^2\vec{e}_2 + t^3\vec{e}_3\\ \dot{\vec{r}}(t) &= \vec{e}_1 + 2t\vec{e}_2 + 3t^2\vec{e}_3\\ \ddot{\vec{r}}(t) &= 2\vec{e}_2 + 6t\vec{e}_3.\end{aligned}$$

Vegyük észre, hogy az origó éppen $t = 0$ paraméterértékhez tartozik, így a kísérő triédert alkotó érintő-, binormális- és normális egységvektor:

$$\begin{aligned}\vec{t}(0) &= \frac{\dot{\vec{r}}(0)}{\|\dot{\vec{r}}(0)\|} = \frac{\vec{e}_1}{\|\vec{e}_1\|} = \vec{e}_1\\ \vec{b}(0) &= \frac{\dot{\vec{r}}(0)\times\ddot{\vec{r}}(0)}{\|\dot{\vec{r}}(0)\times\ddot{\vec{r}}(0)\|} = \frac{\vec{e}_1\times 2\vec{e}_2}{\|\vec{e}_1\times 2\vec{e}_2\|} = \vec{e}_3\\ \vec{n}(0) &= \vec{b}(0)\times\vec{t}(0) = \vec{e}_2.\end{aligned}$$

Ami igazolja állításunkat.

5.10 FELADAT *Határozzuk meg az*

$$\vec{r}(t) = e^t\cos t\,\vec{e}_1 + e^t\sin t\,\vec{e}_2 + e^t\vec{e}_3$$

kúpos csavarvonal kísérő triéderét, görbületét és torzióját!

5.10 MEGOLDÁS

$$\vec{r}(t) = e^t \cos t\, \vec{e}_1 + e^t \sin t\, \vec{e}_2 + e^t \vec{e}_3$$
$$\dot{\vec{r}}(t) = e^t(\cos t - \sin t)\vec{e}_1 + e^t(\cos t + \sin t)\vec{e}_2 + e^t\vec{e}_3$$
$$\ddot{\vec{r}}(t) = -2e^t \sin t\, \vec{e}_1 + 2e^t \cos t\, \vec{e}_2 + e^t\vec{e}_3$$
$$\dddot{\vec{r}}(t) = -2e^t(\sin t + \cos t)\vec{e}_1 + 2e^t(\cos t - \sin t)\vec{e}_2 + e^t\vec{e}_3.$$

A kísérő triéder:

$$\vec{t}(t) = \frac{\dot{\vec{r}}(t)}{\|\dot{\vec{r}}(t)\|} = \frac{\dot{\vec{r}}(t)}{\sqrt{3}e^t} = \frac{1}{\sqrt{3}}(\cos t - \sin t)\vec{e}_1 + \frac{1}{\sqrt{3}}(\cos t + \sin t)\vec{e}_2 + \frac{1}{\sqrt{3}}\vec{e}_3$$
$$\vec{b}(t) = \frac{\dot{\vec{r}}(t) \times \ddot{\vec{r}}(t)}{\|\dot{\vec{r}}(t) \times \ddot{\vec{r}}(t)\|} = \frac{1}{\sqrt{6}}(\sin t - \cos t)\vec{e}_1 + \frac{1}{\sqrt{6}}(-\sin t - \cos t)\vec{e}_2 + \sqrt{\frac{2}{3}}\vec{e}_3$$
$$\vec{n}(t) = \vec{b}(t) \times \vec{t}(t) = \frac{1}{\sqrt{2}}(-\sin t - \cos t)\vec{e}_1 + \frac{1}{\sqrt{2}}(-\sin t + \cos t)\vec{e}_2.$$

A görbület- és a torziófüggvény:

$$\kappa(t) = \frac{\|\dot{\vec{r}}(t) \times \ddot{\vec{r}}(t)\|}{\|\dot{\vec{r}}(t)\|^3} = \frac{\sqrt{2}}{3e^t}$$
$$\tau(t) = \frac{(\dot{\vec{r}}(t)\ddot{\vec{r}}(t)\dddot{\vec{r}}(t))}{\|\dot{\vec{r}}(t) \times \ddot{\vec{r}}(t)\|^2} = \frac{1}{3e^t}.$$

5.11 FELADAT *Határozzuk meg a $\vec{r}(t) = \frac{2}{t}\vec{e}_1 + 6t\vec{e}_2 + 3t^3\vec{e}_3$ görbe*

a.) görbületét és a görbület szélsőértékeit,

b.) torzióját és a torzió maximumát,

c.) írjuk fel a simulósík, a normálsík és a retifikáló sík egyenletét, a $t = 1$ paraméterű pontban!

5.11 MEGOLDÁS

$$\vec{r}(t) = \frac{2}{t}\vec{e}_1 + 6t\vec{e}_2 + 3t^3\vec{e}_3$$
$$\dot{\vec{r}}(t) = \frac{-2}{t^2}\vec{e}_1 + 6\vec{e}_2 + 9t^2\vec{e}_3$$
$$\ddot{\vec{r}}(t) = \frac{4}{t^3}\vec{e}_1 + 18t\vec{e}_3$$
$$\dddot{\vec{r}}(t) = \frac{-12}{t^4}\vec{e}_1 + 18\vec{e}_3.$$

A görbének két ága van, amelyek az origóra vonatkozóan középpontosan szimmetrikusan helyezkednek el, hiszen $\vec{r}(-t) = -\vec{r}(t)$. Az alábbiakban a $\pm$ jel utal a $t > 0$ illetve a $t < 0$

paraméterértékekhez tartozó ágakra. Hasonlóan számolva, mint az előző feladatban:

$$\begin{aligned}
\vec{t}(t) &= \frac{-2}{2+9t^4}\vec{e}_1 + \frac{6t^2}{2+9t^4}\vec{e}_2 + \frac{9t^4}{2+9t^4}\vec{e}_3 \\
\vec{b}(t) &= \pm\left(\frac{9t^4}{2+9t^4}\vec{e}_1 + \frac{6t^2}{2+9t^4}\vec{e}_2 + \frac{-2}{2+9t^4}\vec{e}_3\right) \\
\vec{n}(t) &= \pm\left(\frac{6t^2}{2+9t^4}\vec{e}_1 + \frac{2-9t^4}{2+9t^4}\vec{e}_2 + \frac{6t^2}{2+9t^4}\vec{e}_3\right).
\end{aligned}$$

Így a görbület és a torzió:

$$\begin{aligned}
\kappa(t) &= \frac{12|t|^3}{(2+9t^4)^2} \\
\tau(t) &= -\frac{12t^3}{(2+9t^4)^2}.
\end{aligned}$$

A görbület lehetséges szélsőértékhelyeit a $\frac{\mathrm{d}\kappa(t)}{\mathrm{d}t} = \frac{36t^2(2-15t^4)}{(2+9t^4)^3} = 0$ egyenletből kapjuk. A második deriváltak helyettesítési értékét is figyelembe véve $t = 0$ minimumhely, $t = \pm\left(\frac{2}{15}\right)^{\frac{1}{4}}$ maximumhely, ahol a görbület: $\kappa(0) = 0$ illetve $\kappa\left(\pm\left(\frac{2}{15}\right)^{\frac{1}{4}}\right) = \frac{5}{32}\left(\frac{15}{4}\right)^{\frac{1}{4}}$.

A $\tau(t) = \mp\kappa(t)$ egyenlőség miatt a torzió minimuma: $\tau\left(\left(\frac{2}{15}\right)^{\frac{1}{4}}\right) = -\frac{5}{32}\left(\frac{15}{4}\right)^{\frac{1}{4}}$, illetve maximuma: $\tau\left(-\left(\frac{2}{15}\right)^{\frac{1}{4}}\right) = \frac{5}{32}\left(\frac{15}{4}\right)^{\frac{1}{4}}$.

A simulósík egyenlete $t = 1$-ben ($\vec{R}$ a sík változó pontjának helyvektora):

$$0 = (\vec{R} - \vec{r}(1)) \cdot (\dot{\vec{r}}(1) \times \ddot{\vec{r}}(1)) = 108x + 72y - 24z - 576.$$

Egyszerűsítve:

$$9x + 6y - 2z = 48.$$

A normálsík egyenlete:

$$0 = (\vec{R} - \vec{r}(1)) \cdot \dot{\vec{r}}(1) = -2x + 6y + 9z - 59.$$

A rektifikáló sík egyenlete:

$$\begin{aligned}
&(\vec{R} - \vec{r}(1)) \cdot \dot{\vec{r}}(1) \cdot (\dot{\vec{r}}(1) \times \ddot{\vec{r}}(1)) = 0 \\
&6x - 7y + 6z + 12 = 0.
\end{aligned}$$

5.1. Görbe megadása a Frenet-apparátusból

5.12 FELADAT *Mutassuk meg, hogy a kör természetes egyenletrendszere:*

$$\kappa = \frac{1}{r} = konstans, \quad \tau = 0 = konstans!$$

5.12 MEGOLDÁS Számítsuk ki egy r sugarú kör görbületét és torzióját!

$$\begin{aligned}
\vec{r}(t) &= r\cos t\,\vec{e}_1 + r\sin t\,\vec{e}_2 \\
\dot{\vec{r}}(t) &= -r\sin t\,\vec{e}_1 + r\cos t\,\vec{e}_2 \\
\ddot{\vec{r}}(t) &= -r\cos t\,\vec{e}_1 - r\sin t\,\vec{e}_2 \\
\dddot{\vec{r}}(t) &= r\sin t\,\vec{e}_1 - r\cos t\,\vec{e}_2
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\kappa(t) &= \frac{\|\dot{\vec{r}}(t) \times \ddot{\vec{r}}(t)\|}{\|\dot{\vec{r}}(t)\|^3} = \frac{1}{r} \\
\tau(t) &= \frac{(\dot{\vec{r}}(t)\ddot{\vec{r}}(t)\dddot{\vec{r}}(t))}{\|\dot{\vec{r}}(t) \times \ddot{\vec{r}}(t)\|^2} = 0.
\end{aligned}$$

A görbeelmélet alaptétele szerint $\kappa(t)$ és $\tau(t)$ függvények irányítástartó izometriától (egybevágóságtól) eltekintve egyértelműen meghatározzák a görbéket, ezért a $\kappa(t) = \frac{1}{r}$ és $\tau(t) = 0$ függvények a kört határozzák meg.

5.13 FELADAT *Határozzuk meg azt a síkgörbét, amelynek természetes egyenlete:*

$$\kappa(s) = \frac{a}{a^2 + s^2}!$$

A kezdeti feltételek $s = 0$-ban legyenek: $\alpha(0) = 0$, $x(0) = 0$, $y(0) = a$.

5.13 MEGOLDÁS Legyen $\vec{r}(s) = (x(s),\ y(s))$ a görbe ívhossz szerint paraméterezett alakja. Legyen $\vec{t}(s) = (t_x(s),\ t_y(s))$ az érintő egységvektor. Síkgörbe esetén ekkor $\vec{n}(s) = (-t_y(s),\ t_y(s))$ (vagy ennek ellentettje) lesz a főnormális egységvektor.

A Frenet-formulákból tudjuk, hogy $\frac{d\vec{t}(s)}{ds} = \kappa(s)\vec{n}(s)$. Így az alábbi differenciálegyenlet-rendszerhez jutunk:

$$\begin{aligned}
t_x' &= -\kappa(s)t_y, \\
t_y' &= \kappa(s)t_x.
\end{aligned}$$

$\kappa(s)$-et behelyettesítve és megoldva az egyenleteket az alábbi függvényeket kapjuk:

$$\begin{aligned}
t_x(s) &= \frac{c_1 a + c_2 s}{\sqrt{s^2 + a^2}}, \\
t_y(s) &= \frac{c_1 s - c_2 a}{\sqrt{s^2 + a^2}}.
\end{aligned}$$

Határozzuk meg a c_1 és c_2 konstansokat!
Tudva, hogy a görbület $\kappa(s) = \frac{\mathrm{d}\alpha(s)}{\mathrm{d}s}$, kifejezhető belőle az $\alpha(s)$ irányszög:

$$\alpha(s) = \int \frac{a}{s^2+a^2}\mathrm{d}s = \arctan\left(\frac{s}{a}\right) + \alpha_0.$$

Behelyettesítve az $s = 0$ és $\alpha(0) = 0$ kezdeti feltételt, $\alpha_0 = 0$, vagyis az érintővektor $s = 0$-ban: $\vec{t}(0) = (1,\ 0)$, ami azt jelenti, hogy $c_1 = 1$ és $c_2 = 0$.
A görbe paraméteres egyenletét az érintővektor komponenseinek s szerinti integrálásával és az $x(0) = 0$, $y(0) = a$ feltételek figyelembevételével kapjuk:

$$x(s) = \int_0^s \frac{a}{\sqrt{s^2+a^2}}\mathrm{d}s = a\log\left(s+\sqrt{s^2+a^2}\right) - a\log a,$$

$$y(s) = \int_0^s \frac{s}{\sqrt{s^2+a^2}}\mathrm{d}s = \sqrt{s^2+a^2} - \sqrt{a}.$$

A kapott paraméterezésű görbe egy láncgörbét határoz meg. $s = a\sinh\frac{x}{a}$ paramétertranszformációval áttérhetünk x szerinti paraméterezésre, és ekkor a megszokott $y = a\cosh\frac{x}{a}$ alakot nyerjük.

5.14 FELADAT *Határozzuk meg azt a síkgörbét, amelynek természetes egyenletét a:*

$$\kappa(s) = \frac{s}{a^2}$$

függvény definiálja! A kezdeti feltételek $s = 0$-ban: $\alpha(0) = 0$, $x(0) = 0$, $y(0) = 0$.

5.14 MEGOLDÁS Legyen $\vec{r}(s) = (x(s),\ y(s))$ a görbe ívhossz szerint paraméterezett alakja. Legyen $\vec{t}(s) = (t_x(s),\ t_y(s))$ az érintő egységvektor. Síkgörbe esetén ekkor $\vec{n}(s) = (-t_y(s),\ t_y(s))$ (vagy ennek ellentettje) lesz a főnormális egységvektor. A Frenet-formulák felhasználásával az előző feladathoz hasonlóan járunk el. Így az alábbi differenciálegyenlet-rendszerhez juttunk:

$$t_x' = -\kappa(s)t_y,$$
$$t_y' = \kappa(s)t_x.$$

$\kappa(s) = \frac{s}{a^2}$ behelyettesítésével ennek megoldása:

$$t_x(s) = c_1\cos\frac{s^2}{2a^2} + c_2\sin\frac{s^2}{2a^2},$$

$$t_y(s) = c_1\sin\frac{s^2}{2a^2} - c_2\cos\frac{s^2}{2a^2}.$$

Határozzuk meg a c_1 és c_2 konstansokat!
Az $\alpha(s)$ irányszögre felírhatjuk, hogy:

$$\alpha(s) = \int \frac{s}{a^2}\mathrm{d}s = \frac{s^2}{2a^2} + \alpha_0.$$

Behelyettesítve $s = 0$ és $\alpha(0) = 0$ kezdeti feltételt $\alpha_0 = 0$-t kapunk, vagyis az érintővektor $s = 0$-ban: $\vec{t}(0) = (1,\ 0)$. Ebből azonnal adódik, hogy $c_1 = 1$ és $c_2 = 0$.
A görbe paraméteres egyenletét az érintővektor komponenseinek s szerinti integrálásával és az $x(0) = 0$, $y(0) = 0$ kezdeti feltétellel kapjuk:

$$x(s) = \int \cos \frac{s^2}{2a^2} \mathrm{d}s,$$

$$y(s) = \int \sin \frac{s^2}{2a^2} \mathrm{d}s.$$

A kapott integrálok elemi függvényekkel nem írhatók le, csak függvénysor összegeként adhatók meg. Az így nyert görbe a klotoid.

II. rész

Felületek

6. fejezet

A felület

6.1. Feladatok

6.1 FELADAT *Tekintsük a gömb alábbi, Gauss-féle (kétparaméteres) megadását:*

$$\vec{r}(u,v) = a\cos u\cos v\,\vec{e}_1 + a\cos u\sin v\,\vec{e}_2 + a\sin u\,\vec{e}_3.$$

Írjuk fel a paramétervonalak egyenletrendszerét!

6.1 MEGOLDÁS Az u-paramétervonalak meghatározásakor u-t konstansnak tekintjük. Ekkor

$$\begin{aligned} x &= a\cos u\cos v = A\cos v \\ y &= a\cos u\sin v = A\sin v \\ z &= a\sin u = B, \end{aligned}$$

ahol bevezettük az A és B konstansokat. Vegyük észre, hogy $x^2 + y^2 = A^2$, vagyis a paramétervonalak a $z = 0$ síkkal párhuzamos síkú körök (szélességi körök).
A v-paramétervonalak esetén v konstans. Ekkor

$$\begin{aligned} x &= a\cos u\cos v = A\cos u \\ y &= a\cos u\sin v = B\cos u \\ z &= a\sin u = C\sin u. \end{aligned}$$

A paramétervonalak ebben az esetben is körök (hosszúsági körök).

6.2 FELADAT *Tekintsük a „ferde körhenger” alábbi, Gauss-féle (kétparaméteres) megadását:*

$$\vec{r}(u,v) = (\cos u + v)\vec{e}_1 + (\sin u - 3v)\vec{e}_2 + 4v\vec{e}_3.$$

Írjuk fel a paramétervonalak egyenletrendszerét!

6.2 MEGOLDÁS

$$\begin{aligned} x &= \cos u + v \\ y &= \sin u - 3v \\ z &= 4v. \end{aligned}$$

Az u-paramétervonalak:

$$\begin{aligned} x &= A + v \\ y &= B - 3v \\ z &= 4v. \end{aligned}$$

Tehát az u-paramétervonalak egyenesek.
A v-paramétervonalak:

$$\begin{aligned} x &= \cos u + C \\ y &= \sin u + D \\ z &= E. \end{aligned}$$

Vegyük észre, hogy $\cos^2 u + \sin^2 u = (x-C)^2 + (y-D)^2 = 1$, vagyis a v-paramétervonalak körök. (A, B, C, D és E konstansok.)

6.3 FELADAT *Tekintsük az elliptikus kúp alábbi, Gauss-féle (kétparaméteres) megadását:*

$$\vec{r}(u,v) = (a\cos u\,\vec{e}_1 + b\sin u\,\vec{e}_2)v + 3(1-v)\vec{e}_3.$$

Írjuk fel a paramétervonalak egyenletrendszerét!

6.3 MEGOLDÁS

$$\begin{aligned} x &= av\cos u \\ y &= bv\sin u \\ z &= 3(1-v). \end{aligned}$$

Az u-paramétervonalak:

$$\begin{aligned} x &= Av \\ y &= Bv \\ z &= C - 3v. \end{aligned}$$

Tehát az u-paramétervonalak egyenesek.
A v-paramétervonalak:

$$\begin{aligned} x &= D\cos u \\ y &= E\sin u \\ z &= F. \end{aligned}$$

Ebből belátható, hogy $\frac{x^2}{D^2}+\frac{y^2}{E^2}=1$, vagyis a v-paramétervonalak ellipszisek (A, B, C, D, E és F konstansok).

6.4 FELADAT *Tekintsük a hiperbolikus paraboloid alábbi, Gauss-féle (kétparaméteres) megadását:*

$$\vec{r}(u,v)=u\vec{e}_1+v\vec{e}_2+uv\vec{e}_3.$$

Írjuk fel a paramétervonalak egyenletrendszerét!

6.4 MEGOLDÁS

$$x=u$$
$$y=v$$
$$z=uv.$$

Az u-paramétervonalak:

$$x=A$$
$$y=v$$
$$z=Av.$$

Tehát az u-paramétervonalak egyenesek.
A v-paramétervonalak:

$$x=u$$
$$y=B$$
$$z=Bu.$$

A v-paramétervonalak egyenesek. (A és B konstansok.)

6.5 FELADAT *Írjuk fel a tórusznak egy paraméteres előállítását, ha azt az*

$$x=a+b\cos u,\ y=0,\ z=b\sin u \qquad (b<a, \quad u\in[0,2\pi))$$

körnek a z tengely körüli megforgatásával nyerjük!

6.5 MEGOLDÁS A z tengelytől r távolságra levő $(r, 0, z_0)$ pont z körüli megforgatásából származó kört például az $x=r\cos v$, $y=r\sin v$, $z=z_0$ paraméteres egyenletrendszerrel jellemezhetjük, ahol $v\in[0,2\pi)$. Ezért az $r=a+b\cos u$ és $z_0=b\sin u$ helyettesítéssel a tórusz

$$x=(a+b\cos u)\cos v,\ y=(a+b\cos u)\sin v,\ z=b\sin u.$$

Gauss-féle megadásához jutunk.

6.6 FELADAT *Írjuk fel az*

$$x=a\cosh\frac{u}{a},\ y=0,\ z=u \quad u\in\mathbb{R}$$

láncgörbének a z tengely körüli megforgatásával keletkező katenoid kétparaméteres egyenletrendszerét!

6.6 MEGOLDÁS Hasonló módon, mint a 6.5. feladatban láttuk, a katenoid egyenletrendszere:

$$x = a\cosh\frac{u}{a}\cos v,\; y = a\cosh\frac{u}{a}\sin v,\; z = u, \quad (v \in [0,\, 2\pi)).$$

6.7 FELADAT *Írjuk fel az*

$$x = a\sin u,\; y = 0,\; z = a(\log\tan\frac{u}{2} + \cos u), \quad (u \in [0,\, \pi))$$

traktrixnak a z tengely körüli megforgatásakor keletkező pszeudoszféra kétparaméteres előállítását!

6.7 MEGOLDÁS A pszeudoszféra egyenleterendszere:

$$x = a\sin u\cos v,\; y = a\sin u\sin v,\; z = a\left[\log\left(\tan\frac{u}{2}\right) + \cos u\right], \quad (v \in [0,\, 2\pi]).$$

6.8 FELADAT *Adjuk meg az origó középpontú gömbnek egy olyan paraméteres előállítását, hogy paramétervonalai az $[y,z]$, illetve az $[x,z]$ síkkal párhuzamos síkú körök legyenek!*

6.8 MEGOLDÁS Írjuk át kétféleképpen a gömb szokásos paraméterezését úgy, hogy az eredeti szélességi körök síkja előbb az $[y,z]$, majd az $[x,z]$ síkkal legyen párhuzamos:

$$x = r\cos u,\; y = r\sin u\cos t,\; z = r\sin u\sin t, \text{ ahol: } u \in [0,\, \pi],\; t \in [0,\, 2\pi];$$

$$x = r\sin v\cos w,\; y = r\cos v,\; z = r\sin v\sin w, \text{ ahol: } v \in [0,\, \pi],\; w \in [0,\, 2\pi].$$

Ekkor a két paraméterezésből az u és v vonalak a keresett paraméterezést adják, tehát t és w kiküszöbölésével kell kifejeznünk az x, y és z koordinátákat. Így az alábbi paraméterezést kapjuk:

$$x = r\cos u,\; y = r\cos v,\; z = \pm\sin v\sqrt{\frac{\cos(2u)+\cos(2v)}{\cos(2v)-1}}, \text{ ahol: } u \in [0,\, \pi],\; v \in [0,\, \pi].$$

6.9 FELADAT *Adjuk meg az origó középpontú, koordinátatengelyekkel egybeeső tengelyű ellipszoidot*
a) *implicit,*
b) *explicit,*
c) *paraméteres alakban!*

6.9 MEGOLDÁS Legyen az ellipszioid féltengelyeinek hossza rendre a, b és c.
Implicit előállítás:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1.$$

Explicit alak:

$$z = \pm c\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}}.$$

Paraméteres alak:

$$x = a\sin u\cos v,\; y = b\sin u\sin v,\; z = c\cos u,$$

ahol
$$u \in [0,\ \pi],\ v \in [0,\ 2\pi].$$

6.10 FELADAT *Írjuk fel az*
$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 2z$$
hiperbolikus paraboloid paraméteres előállítását úgy, hogy paramétervonalai éppen az alkotói (tehát egyenesek) legyenek! Hogyan változnak ezek az egyenletek a $z = xy$ egyenletű hiperbolikus paraboloid esetén?

6.10 MEGOLDÁS A hiperbolikus paraboloid vonalfelület, ezért a paraméterezését $\vec{r}(u,\ v) = \vec{a}(u) + v \cdot \vec{b}(u)$ alakban keressük. Ha azonnal nem tudjuk felírni a helyes paraméterezést, akkor két különböző paraméterezésből fejezhetjük ki.
A $0 = 2z = \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}$ éppen egyenesek egyenlete, amit x-szel paramétrezhetünk:
$$x = t,\ y = t \cdot \frac{b}{a},\ z = 0.$$
Az előbbitől eltérő paraméterezést kaphatunk az $[x,\ z]$ síkbeli, szintén x szerint paraméterezett parabolával: $x = u,\ y = 0,\ z = \frac{u^2}{2a^2}$. A két görbéből és a hiperbolikus paraboloid egyenletéből megkaphatjuk a felület paraméterzését:
$$x = u + t,\ y = t \cdot \frac{b}{a},\ z = \frac{u^2}{2a^2} + t \cdot \frac{u}{a^2}.$$
Hasonló módon felírhatunk $z = 0$-ból és $[y,\ z]$ síkból kiindulva egy paraméterezést:
$$x = w\frac{a}{b},\ y = -v - w,\ z = -\frac{v^2}{2b^2} - w \cdot \frac{v}{b^2}.$$
A két paraméterezésből t és w kiküszöbölésével kapjuk a keresett paraméterezést:
$$x = \frac{bu + av}{2b},\ y = \frac{bu - av}{2a},\ z = \frac{uv}{2ab}.$$
Láthatjuk, hogy akár u-t, akár v-t tekintjük állandónak, a másik változóban lineáris kifejezéseket kapunk, amelyek egyeneseket írnak le. A $z = xy$ egyenletű hiperbolikus paraboloid esetében pedig $x = u,\ y = v$ paraméterválasztással máris a keresett paraméterezést kapjuk, vagyis az x és y változóban az egyenletek „szétcsatolódtak".

6.11 FELADAT *Adott az $x = u + v,\ y = u - v,\ z = uv$ felület. Rajta vannak-e a felületen az $A(4,\ 2,\ 3)$ és $B(1,\ 4,\ -2)$ pontok?*

6.11 MEGOLDÁS Az $\{x,\ y,\ z\}$ koordináták helyére behelyettesítve az A és B pontokat, ellenőrizni kell, hogy van-e megoldása a kapott túlhatározott egyenletrendszernek.
Például az első két egyenletből kifejezve u-t és v-t ellenőrizzük, hogy a kapott értékek kielégítik-e a harmadik egyenletet. Az $u + v = 4,\ u - v = 2,\ uv = 3$ egyenletrendszernek $u = 3,\ v = 1$ megoldása, tehát az A pont rajta van a felületen.
Az $u + v = 1,\ u - v = 4,\ uv = -2$ egyenletrendszernek nincs megoldása, tehát a B pont nincs rajta a felületen.

6.12 FELADAT *Írjuk át a következő vektoregyenleteket implicit alakba és állapítsuk meg, milyen felületet határoznak meg!*

a.)

$$\vec{r}(u,v) = u\cosh v\,\vec{e}_1 + u\sinh v\,\vec{e}_2 + 2u\,\vec{e}_3$$

b.)

$$\vec{r}(u,v) = v\cos u\,\vec{e}_1 + \sqrt{v}\sin\frac{u}{2}\vec{e}_2 + \frac{v}{2}(1+\cos u)\vec{e}_3$$

c.)

$$\vec{r}(u,v) = u\cos v\,\vec{e}_1 + u\sin v\,\vec{e}_2 + v\vec{e}_3$$

d.)

$$\vec{r}(u,v) = (x_0 + a\cos u\cos v)\vec{e}_1 + (y_0 + b\cos u\sin v)\vec{e}_2 + (z_0 + c\sin u)\vec{e}_3$$

6.12 MEGOLDÁS

a.) Az $x = u\cosh v$, $y = u\sinh v$, $z = 2u$ egyenletekből kifejezzük u-t és v-t: $u = \frac{z}{2}$, $v = \operatorname{arsinh}\frac{2y}{z}$. Ezt beírjuk az x kifejezésébe, és máris egy implicit egyenletet kapunk:

$$\frac{2x}{z} = \cosh\operatorname{arsinh}\frac{2y}{z} = \sqrt{1+\frac{4y^2}{z^2}}.$$

Átalakítva:

$$\frac{z^2}{2^2} + y^2 - x^2 = 0.$$

Látható, hogy egy x-tengelyű elliptikus kúp egyenletét kaptuk, amelynek része a feladatban megadott felület.

b.) Az egyenletekből kifejezve v-t és $\cos u$-t: $v = 2z - x$ ill. $\cos u = \frac{x}{2z-x}$. Írjuk át az y koordináta egyenletét:

$$y = \sqrt{v}\sin\frac{u}{2} = \pm\sqrt{v}\sqrt{\frac{1-\cos u}{2}}.$$

Behelyettesítve $\cos u$-t és v-t, a következő implicit egyenletet kapjuk: $y^2 = x^2 - 3xz + 2z^2$. Ez egy y tengelyű, hiperbolikus kúp egyenlete.

c.) Kifejezve u-t és v-t: $u = \sqrt{x^2+y^2}$, $v = z$. Visszahelyettesítve és rendezve egy csavarfelület egyenletét kapjuk: $x\sin z = y\cos z$.

d.) Az egynelteket átrendezzük:

$$\frac{x-x_0}{a} = \cos u\cos v,\quad \frac{y-y_0}{b} = \cos u\sin v,\quad \frac{z-z_0}{c} = \sin u.$$

Négyzetre emelés és az egyenletek összeadása után egy $C(x_0,\ y_0,\ z_0)$ középpontú, a, b, c féltengelyű ellipszoidhoz jutunk, amelynek tengelyei párhuzamosak a koorinátatengelyekkel, egyenlete pedig:

$$\frac{(x-x_0)^2}{a^2}+\frac{(y-y_0)^2}{b^2}+\frac{(z-z_0)^2}{c^2}=1.$$

6.13 FELADAT *Milyen felületet határoz meg a következő egyenletrendszer?*

$$x=u+\sin v,\ y=u+\cos v,\ z=u+a$$

6.13 MEGOLDÁS Az u és v paraméterek eliminálásával egyenletrendszerünket implicit alakra hozzuk:

$$(x-z+a)^2+(y-z+a)^2=1.$$

Belátható, hogy ez egy henger egyenlete, amelynek vezérgörbéje az $[x,y]$ síkra illeszkedő, $C(-a,\ -a,\ 0)$ középpontú egységsugarú kör, alkotóinak irányát pedig az $(1,\ 1,\ 1)^T$ vektor határozza meg.

6.14 FELADAT *Bizonyítsuk be, hogy az alábbi két egyenletrendszer ugyanazt a felületet írja le!*

$$x=\frac{u}{u^2+v^2},\ y=\frac{v}{u^2+v^2},\ z=\frac{1}{u^2+v^2}$$

$$x=u\cos v,\ y=u\sin v,\ z=u^2$$

6.14 MEGOLDÁS A két paraméterezés által adott felületek egybeeséséről meggyőződhetünk az implicit alakok előállításával.
1. paraméterezésből: $x=uz$, $y=vz$, ebből: $u=x/z$ és $v=y/z$, amit beírva z egyenletébe és rendezve: $x^2+y^2=z$.
2. paraméterezésből: $x^2=u^2\cos^2 v$, $y^2=u^2\sin^2 v$ összeadásából épp z-t kapjuk: $x^2+y^2=z$.
A két implicit alak megyegyezik, ezért a két felület is ugyanaz, egy elliptikus paraboloid.

6.15 FELADAT *Írjuk fel annak a hengerfelületnek az egyenletét, melynek vezérgörbéje $\vec{r}(u)$ és alkotói az $\vec{a}$ vektorral párhuzamosak!*

6.15 MEGOLDÁS A hengerfelület egyenletét úgy kapjuk, hogy a megadott térgörbe pontjaiból, mint kezdőpontból $\vec{a}$ vektor irányában egyeneseket állítunk, tehát:

$$\vec{s}(u,v)=\vec{r}(u)+\vec{a}\cdot v.$$

6.16 FELADAT *Írjuk fel implicit alakban annak a hengerfelületnek az egyenletét, amelynek alkotói párhuzamosak az $\vec{a}=(-1,\ 3,\ -2)^T$ vektorral és a vezérgörbéje a $x=\cos u$, $y=\sin u$, $z=0$ egyenletrendszerű kör!*

6.16 MEGOLDÁS A 6.15-ös példában kapott kifejezés alapján eljárva, a hengefelület vektori egyenlete:

$$x=\cos u-1v,\ y=\sin u+3v,\ z=0-2v.$$

Ezt átírva implicit alakká:

$$\left(x-\frac{z}{2}\right)^2+\left(y+\frac{3z}{2}\right)^2=1.$$

6.17 FELADAT *Határozzuk meg az*

$$x=a\cos u,\ y=a\sin u,\ z=bu$$

csavarvonal érintői által alkotott vonalfelület paraméteres egyenletrendszerét! Milyen görbében metszi ez a felület a $z=0$ síkot?

6.17 MEGOLDÁS A keresett egyenletredszer:

$$x=a\cos u-v\cdot a\sin u,\ y=a\sin u+v\cdot a\cos u,\ z=bu+bv.$$

Jegyezzük meg, hogy a hengerfelület és a kúpfelület mellett a görbék érintőegyenesei által létrehozott felületosztályok alkotják az úgynevezett síkba teríthető felületeket. Az $[x,y]$-síkkal vett metszetet a $z=0$ behelyettesítésével és v eliminálásával kapjuk: $v=-u$. A görbe pedig épp a kör evolvense:

$$x=a\cos u+u\cdot a\sin u,\ y=a\sin u-u\cdot a\cos u.$$

6.18 FELADAT *Írjuk fel az*

$$x=u,\ y=u^2,\ z=u^3$$

görbe érintői által meghatározott felület implicit alakját!

6.18 MEGOLDÁS Ismét használva a térgörbe érintői által meghatározott úgynevezett kifejtő vonalfelületekre kapott vektoregyenletet:

$$x=u+v,\ y=u^2+2vu,\ z=u^3+3vu^2.$$

Az egyenletrendszerből u-t és v-t eliminálva, a felület alábbi implicit egyenletét nyerjük:

$$(2x^2-3xy+z)^2-4(x^2-y)^3=0.$$

6.19 FELADAT *Írjuk fel az*

$$x^2z^2=a^2(x^2+y^2),\quad (a>0)$$

felületnek egy paraméteres egyenletrendszerét!

6.19 MEGOLDÁS Végtelen sok helyes paraméterezés lehetséges. Lehet például x-szel és y-nal is paraméterezni, akkor a felület explicit egyenletét kapjuk:

$$z=\pm a\sqrt{1+\frac{y^2}{x^2}}.$$

Egy érdekesebb paraméterezés a következő:

$$x=v\sin u,\ y=v\cos u,\ z=\frac{a}{\sin u},$$

ahol ki kell kötnünk, hogy $u\neq k\pi$, $k\in\mathbb{Z}$ (ebben a pontban $x=y=z=0$).

6.20 FELADAT *Mutassuk meg, hogy az origó középpontú, z tengelyű egyköpenyű elliptikus hiperboloidot elő lehet állítani*

$$x = a\frac{uv+1}{u+v} \quad y = b\frac{u-v}{u+v} \quad z = c\frac{uv-1}{u+v}$$

alakban. Mik lesznek ekkor a paramétervonalak?

6.20 MEGOLDÁS Az $x = a\frac{uv+1}{u+v}$, $y = b\frac{u-v}{u+v}$, $z = c\frac{uv-1}{u+v}$ kifejezéseket behelyettesítve a hiperboloid $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$ egyenletébe:

$$\frac{u^2v^2 + 2uv + 1 + u^2 - 2uv + v^2 - u^2v^2 + 2uv - 1}{u^2 + 2uv + v^2} = \frac{u^2 + v^2 + 2uv}{u^2 + v^2 + 2uv} = 1.$$

A paramétervonalak egyenesek.

6.21 FELADAT *Határozzuk meg a sík paramétervonalait, ha a sík paraméteres előállítása a következő:*

a.) $x = u \quad y = v \quad z = 0$

b.) $x = u\cos v \quad y = u\sin v \quad z = 0, \qquad 0 \le u, \quad 0 \le v < 2\pi$

c.) $x = \cos u \cosh v \quad y = \sin u \sinh v \quad z = 0$

6.21 MEGOLDÁS a.) Az u és v szerinti paramétervonalak egymásra merőleges egyenes-seregek lesznek.

b.) A paramétervonalak az origó középpontú u sugarú körök és az origóból induló v szögű félegyenesek.

c.) A paramétervonalak origó középpontú ellipszisek és hiperbolák lesznek.

7. fejezet

Felületi görbék, érintősík

7.1. Feladatok

7.1 FELADAT *Mutassuk meg, hogy az*

$$F(x,y,z) = \sin\frac{x}{1-z} - 3\cos^2\frac{y}{1-z} = 0$$

felületnek minden érintősíkja illeszkedik a $Q(0,\ 0,\ 1)$ *pontra!*

7.1 MEGOLDÁS Az érintősík egyenlete a felület egy tetszőleges $P(x,y,z)$ pontjában

$$(X-x)F_x + (Y-y)F_y + (Z-z)F_z = 0,$$

ahol

$$F_x = F_x(x,y,z) = \frac{\partial F(x,y,z)}{\partial x}$$
$$F_y = F_y(x,y,z) = \frac{\partial F(x,y,z)}{\partial y}$$
$$F_z = F_z(x,y,z) = \frac{\partial F(x,y,z)}{\partial z}$$

F parciális deriváltjait jelöli, X, Y, Z pedig az érintősíkra illeszkedő pontok koordinátáit. Az összefüggésben szereplő parciális deriváltak a mi esetünkben:

$$F_x = \frac{1}{1-z}\cos\frac{x}{1-z}$$
$$F_y = 6\frac{1}{1-z}\cos\frac{y}{1-z}\sin\frac{y}{1-z}$$
$$F_z = \frac{x}{(1-z)^2}\cos\frac{x}{1-z} + 6\frac{y}{(1-z)^2}\cos\frac{y}{1-z}\sin\frac{y}{1-z}.$$

Ha behelyettesítjük az érintősík egyenletébe a parciális deriváltakat, valamint a Q pont $(X,Y,Z) = (0,0,1)$ koordinátáit, rendezés után $0 = 0$ adódik. Ezzel igazoltuk, hogy minden érintősík illeszkedik a $(0,0,1)$ pontra.

7.2 FELADAT *Tekintsük a*

$$\vec{\phi}(u,v) = \begin{bmatrix} u\cos v \\ u\sin v \\ \sqrt{1-u^2} + \log\frac{u}{\sqrt{1-u^2}+1} \end{bmatrix}$$

felületet! Bizonyítsuk be, hogy az $[u,v]$ *paramétertartomány* $\alpha : u+v+1=0$ *és* $\beta : \frac{1}{3u^3}+v=c$ *görbéinek megfelelő felületi görbék merőlegesen metszik egymást!*

7.2 MEGOLDÁS Paraméterezzük a görbéket a következőképpen:

$$\vec{\alpha} : u_1(t) = t, \qquad v_1(t) = -(t+1)$$
$$\vec{\beta} : u_2(t) = t, \qquad v_2(t) = c - \frac{1}{3t^3}.$$

Ekkor a bezárt szög:

$$\psi = \frac{\arccos\left\langle \frac{\partial\vec{\phi}}{\partial u}\cdot\frac{du_1}{dt} + \frac{\partial\vec{\phi}}{\partial v}\cdot\frac{dv_1}{dt}, \frac{\partial\vec{\phi}}{\partial u}\cdot\frac{du_2}{dt} + \frac{\partial\vec{\phi}}{\partial v}\cdot\frac{dv_2}{dt}\right\rangle}{\left\|\frac{d\vec{\phi}(\vec{\alpha})}{dt}\right\|\cdot\left\|\frac{d\vec{\phi}(\vec{\beta})}{dt}\right\|},$$

ha $\vec{\phi}(u,v)$ a felület paraméterezése).

$$\frac{\partial(\sqrt{1-u^2}+\log\frac{u}{\sqrt{1-u^2}+1})}{\partial u} =$$
$$\frac{-2u}{\sqrt{1-u^2}\cdot 2} + \frac{\sqrt{1-u^2}+1}{u}\cdot\left(\frac{1\cdot(\sqrt{1-u^2}+1) - u\frac{-u}{\sqrt{1-u^2}}}{(\sqrt{1-u^2}+1)^2}\right) =$$
$$-u\cdot\frac{1}{\sqrt{1-u^2}} + \frac{\sqrt{1-u^2}+u^2+1-u^2}{\sqrt{1-u^2}\cdot u\cdot(\sqrt{1-u^2}+1)} = -u\cdot\frac{1}{\sqrt{1-u^2}} + \frac{1}{u}\cdot\frac{1}{\sqrt{1-u^2}} =$$
$$\frac{1-u^2}{u}\cdot\frac{1}{\sqrt{1-u^2}} = \frac{\sqrt{1-u^2}}{u}.$$

Innen:

$$\frac{\partial\phi}{\partial u} = \begin{pmatrix} \cos v \\ \sin v \\ \frac{\sqrt{1-u^2}}{u} \end{pmatrix}, \quad \frac{\partial\phi}{\partial v} = \begin{pmatrix} -u\sin v \\ u\cos v \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$\frac{du_1}{dt} = \frac{du_2}{dt} = 1, \quad \frac{dv_1}{dt} = -1, \quad \frac{dv_2}{dt} = t^{-4}.$$

Az így kiszámolt értékeket a skalárszorzatba behelyettesítve, a $\gamma = c - \frac{1}{3t^3} = -(t+1)$ jelöléssel (ezt bevezethető, hiszen a görbék metszéspontjára vagyunk kíváncsiak, és ott a két mennyiség megegyezik) azt kapjuk, hogy a szorzat:

$$\frac{1-t^2}{t^2}+\cos(-(t+1))\cdot\cos(c-\frac{1}{3t^3})+t\sin(-(t+1))\cdot\cos(c-\frac{1}{3t^3})-$$
$$-t\cos(-(t+1))\cdot\sin(c-\frac{1}{3t^3})\cdot t^{-4}+(-t^2)\cdot\sin(-(t+1))\cdot\sin(c-\frac{1}{3t^3})+$$
$$+\sin(-(t+1))\cdot\sin(c-\frac{1}{3t^3})-t\cos(-(t+1))\cdot\sin(c-\frac{1}{3t^3})+$$
$$+t^{-4}\cdot t\cdot\sin(-(t+1))\cdot\cos(c-\frac{1}{3t^3})-t^{-2}\cdot\cos(-(t+1))\cdot\cos(c-\frac{1}{3t^3})=$$
$$\frac{1}{t^2}-1+(\cos\gamma)^2+t\cos\gamma\sin\gamma-t^{-3}\cos\gamma\sin\gamma-t^{-2}(\sin\gamma)^2+(\sin\gamma)^2-t\cos\gamma\sin\gamma+$$
$$+t^{-3}\cos\gamma\sin\gamma-t^{-2}(\cos\gamma)^2=\frac{1}{t^2}-\frac{1}{t^2}=0.$$

Tehát az metszéspontban az érintővektorok skalárszorzata 0, azaz a két görbe valóban merőleges egymásra.(Ha észrevesszük, hogy $\left\langle\frac{\partial\phi}{\partial u},\frac{\partial\phi}{\partial v}\right\rangle=0$, akkor sokkal kevesebb fáradsággal is megoldható a feladat.) Figyeljük meg, hogy a görbék metszéspontját ténylegesen nem is kellett meghatározni.

7.3 FELADAT *Mutassuk meg, hogy a $2u+v=c$ felületi görbe merőleges az $x=u\cos v$, $y=u\sin v$, $z=u+v$ felület első paramétervonalára (v-vonalára)!*

7.3 MEGOLDÁS Paraméterezzük a felületi görbét: $\vec{\alpha}(t)=\begin{pmatrix}v(t)\\u(t)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}t\\c-2t\end{pmatrix}$. Így:

$$\frac{d\vec{\alpha}}{dt}=\frac{\partial\vec{\phi}}{\partial u}\cdot\frac{du}{dt}+\frac{\partial\vec{\phi}}{\partial v}\cdot\frac{dv}{dt}=\begin{pmatrix}\cos v\\\sin v\\1\end{pmatrix}\cdot 1+\begin{pmatrix}-u\sin v\\u\cos v\\1\end{pmatrix}\cdot(-2).$$

Vagyis:

$$\left\langle\frac{d\vec{\alpha}}{dt},\frac{\partial\vec{\phi}}{\partial u}\right\rangle=\left\langle\begin{pmatrix}\cos v+2u\sin v\\\sin v-2u\cos v\\-1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}\cos v\\\sin v\\1\end{pmatrix}\right\rangle=$$
$$=\cos^2 v+2u\sin v\cos v-2u\sin v\cos v+\sin^2 v-1=0.$$

Tehát a c-vel jellemzett görbesereg és az első paramétervonalak (ugyancsak görbesereget alkotnak) az egész felületen merőlegesen metszik egymást.

8. fejezet

Alapmennyiségek, görbületek

8.1. Első, második alapforma

8.1 FELADAT *Határozzuk meg a gömbfelület tetszőleges pontjában a normálist, állítsuk elő a gömb első alapmennyiségeit és alapformáját! Adjunk meg a gömbön olyan görbét, mely a meridiánköröket állandó α szög alatt metszi!*

8.1 MEGOLDÁS A gömb egy paraméterezése:

$$\vec{\varphi} = \begin{pmatrix} R\cos u \cos v \\ R\cos u \sin v \\ R\sin u \end{pmatrix}$$

$$\frac{\partial\vec{\varphi}}{\partial u} = \begin{pmatrix} -R\sin u \cos v \\ -R\sin u \sin v \\ R\cos u \end{pmatrix}$$

$$\frac{\partial\vec{\varphi}}{\partial v} = \begin{pmatrix} -R\cos u \sin v \\ R\cos u \cos v \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Így:

$$E = \left\langle \frac{\partial\vec{\varphi}}{\partial u}, \frac{\partial\vec{\varphi}}{\partial u} \right\rangle = R^2$$

$$F = \left\langle \frac{\partial\vec{\varphi}}{\partial u}, \frac{\partial\vec{\varphi}}{\partial v} \right\rangle = 0$$

$$G = \left\langle \frac{\partial\vec{\varphi}}{\partial v}, \frac{\partial\vec{\varphi}}{\partial v} \right\rangle = R^2\cos^2 u.$$

Tehát

$$\cos\alpha = \frac{\mathrm{Rd}u}{\sqrt{R^2\mathrm{d}u^2 + R^2\cos^2 u\mathrm{d}v^2}},$$

amiből a keresett felületi görbe:

$$v\,\mathrm{ctg}\,\alpha = \int \frac{R\mathrm{d}u}{\sqrt{R^2\cos^2 u}} = R\ln\mathrm{tg}\left(\frac{\pi}{4}+\frac{u}{2R}\right).$$

Másik ötlet:

Alkalmazzunk a gömbre sztereografikus projekciót! Ez a leképezés folytonos, bijektív és szögtartó. A képsíkot érintő főkörök a megfelelő koordinátarednszerrel (origója az a gömb és a képsík érintési pontja, $[x,y]$ síkja pedig a képsík) ellátott érintősíkon origón áthaladó egyenesekbe mennek át. Ezek differenciálegyenlete: $y' = m_2 = y/x$.
Most a síkon olyan ún. izogonális görbesereget keresünk, mely állandó szög alatt metszi az adott egyeneseket. Ekkor igaz, hogy $\mathrm{tg}\,\alpha = \frac{m_2-m_1}{1+m_1m_2}$, amiből m_1-et kifejezve, és $y' = m_1$-et megoldva, a síkon a keresett görbékhez jutunk. Ezt vissza kell vetítenünk a projekciót fordított irányban alkalmazva a gömbre.

8.2 FELADAT *Határozzuk meg a következő felületek első alapmennyiségeit és első alapformáját!*

a.) $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{a^2}+\frac{z^2}{c^2}$ *forgásellipszoid*

b.) $x = u, y = v, z = uv$ *speciális hiperbolikus paraboloid*

c.) $x = u\cos v, y = u\sin v, z = ku$ *forgáskúp*

d.) $x = R\cos v, y = R\sin v, z = u$ *forgáshenger*

e.) $x = u\cos v, y = u\sin v, z = u^2$ *forgásparaboloid*

f.) $x = a\cosh u\cos v, y = a\cosh u\sin v, z = c\sinh u$ *egyköpenyű forgáshiperboloid*

g.) $x = a\sinh u\cos v, y = a\sinh u\sin v, z = c\cosh u$ *kétköpenyű forgáshiperboloid*

h.) $x = u\cos v, y = u\sin v, z = av$ *csavarfelület*

8.2 MEGOLDÁS Az a.)-beli felület paraméterezése:

$$\vec{\varphi}(u,v) = \begin{bmatrix} a\sin u\cos v \\ a\sin u\sin v \\ c\cos u \end{bmatrix}.$$

$\frac{\partial\vec{\varphi}}{\partial u}$	$\frac{\partial\vec{\varphi}}{\partial v}$	E	F	G
$\begin{pmatrix} a\cos u\cos v \\ a\cos u\sin v \\ -c\sin u \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -a\sin u\sin v \\ a\sin u\cos v \\ 0 \end{pmatrix}$	$a^2\cos^2 u + c^2\sin^2 u$	0	$a^2\sin^2 u$
$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ v \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ u \end{pmatrix}$	v^2+1	uv	u^2+1
$\begin{pmatrix} \cos v \\ \sin v \\ k \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -u\sin v \\ u\cos v \\ 0 \end{pmatrix}$	k^2+1	0	u^2
$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -R\sin v \\ R\cos v \\ 0 \end{pmatrix}$	1	0	R^2
$\begin{pmatrix} \cos v \\ \sin v \\ 2u \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -u\sin v \\ u\cos v \\ 0 \end{pmatrix}$	$1+4u^2$	0	u^2
$\begin{pmatrix} a\mathrm{sh}u\cos v \\ a\mathrm{sh}u\sin v \\ c\mathrm{ch}u \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -a\mathrm{ch}u\sin v \\ a\mathrm{ch}u\cos v \\ 0 \end{pmatrix}$	$a^2\mathrm{sh}^2u + c^2\mathrm{ch}^2u$	0	$a^2\mathrm{ch}^2u$
$\begin{pmatrix} a\mathrm{ch}u\cos v \\ a\mathrm{ch}u\sin v \\ c\mathrm{sh}u \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -a\mathrm{sh}u\sin v \\ a\mathrm{sh}u\cos v \\ 0 \end{pmatrix}$	$a^2\mathrm{ch}^2u + c^2\mathrm{sh}^2u$	0	$a^2\mathrm{sh}^2u$
$\begin{pmatrix} \cos v \\ \sin v \\ 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -u\sin v \\ u\cos v \\ a \end{pmatrix}$	1	0	u^2+a^2

Az első alapforma ezek ismeretében már könnyen felírható. Például a forgásellipszoid esetében

$$(a^2\cos^2 u + c^2\sin^2 u)du^2 + a^2\sin^2 u dv^2$$

alakú.

8.3 FELADAT *Ortogonálisak-e az $[x,y]$ sík alábbi paraméterezései?*

a.) $x = u \quad y = v \quad z = 0$

b.) $x = u\cos v \quad y = u\sin v \quad z = 0 \qquad (u \geq 0)$

c.) $x = \cos u\cosh v \quad y = \sin u\sinh v \quad z = 0$

8.3 MEGOLDÁS Jól ismert, hogy egy paraméterezést ortogonálisnak mondunk, ha az u és v szerinti paramétervonalak merőlegesek egymásra.

a.) A paramétervonalak egymásra merőleges egyenesseregek lesznek.

b.) A paramétervonalak az origó középpontú u sugarú körök és az origóból induló v szögű félegyenesek.

c.) A paramétervonalak origó középpontú ellipszisek és hiperbolák lesznek.

$$\vec{r}_u = -\sin u \cosh v \vec{e}_1 + \cos u \sinh v \vec{e}_2$$
$$\vec{r}_v = \cos u \sinh v \vec{e}_1 + \sin u \cosh v \vec{e}_2$$
$$F = \langle \vec{r}_u, \vec{r}_v \rangle = 0$$

A paramétervonalak szöge:

$$\varphi = \arccos \frac{F}{\sqrt{EG}} = \pi/2$$

Ehhez hasonlóan az a.) és b.) esetben is $F = 0$ adódik, így mindhárom paraméterezés ortogonális.

8.4 FELADAT *Határozzuk meg a gömb második alapmennyiségeit, második alapformáját! Hasonlítsuk össze az első és második alapmennyiségeket, alapformákat és az alapformák determinánsait!*

8.4 MEGOLDÁS Paraméterezzük a gömböt az alábbi, szokásos módon:

$$\vec{r} = \begin{pmatrix} R\cos u \cos v \\ R\cos u \sin v \\ R\sin u \end{pmatrix}$$

A paraméter szerinti parciális deriváltak:

$$\vec{r}_u = -R\sin u \cos v \vec{e}_1 - R\sin u \sin v \vec{e}_2 + R\cos u \vec{e}_3$$
$$\vec{r}_v = -R\cos u \sin v \vec{e}_1 + R\cos u \cos v \vec{e}_2.$$

Az első alapmennyiségek:

$$E = \langle \vec{r}_u, \vec{r}_u \rangle = R^2 \sin^2 u \cos^2 v + R^2 \sin^2 u \sin^2 v + R^2 \cos^2 u = R^2 \sin^2 u \cdot$$
$$\cdot (\cos^2 v + \sin^2 v) + R^2 \cos^2 u = R^2$$
$$F = \langle \vec{r}_u, \vec{r}_v \rangle = \vec{r}_u \cdot \vec{r}_v = R^2 \sin u \cos u \sin v \cos v - R^2 \sin u \cos u \sin v \cos v = 0$$
$$G = \langle \vec{r}_v, \vec{r}_v \rangle = R^2 \cos^2 u \sin^2 v + R^2 \cos^2 u \cos^2 v = R^2 \cos^2 u.$$

Az első alapforma:

$$R^2 du^2 + R^2 \cos^2 u dv^2 = R^2 (du^2 + \cos^2 u dv^2).$$

A második alapmennyiségek kiszámolásához a következők szükségesek:

$$D := |\vec{r}_u \times \vec{r}_v| = \sqrt{EG - F^2} = R^2 \cos u,$$

és a második deriváltak:

$$\vec{r}_{uu} = -R\cos u\cos v\,\vec{e}_1 - R\cos u\sin v\,\vec{e}_2 - R\sin u\,\vec{e}_3$$
$$\vec{r}_{uv} = R\sin u\sin v\,\vec{e}_1 - R\sin u\cos v\,\vec{e}_2$$
$$\vec{r}_{vv} = -R\cos u\cos v\,\vec{e}_1 - R\cos u\sin v\,\vec{e}_2,$$

továbbá az $\vec{r}_{uu}\vec{r}_u\vec{r}_v$, $\vec{r}_{uv}\vec{r}_u\vec{r}_v$, $\vec{r}_{vv}\vec{r}_u\vec{r}_v$ vegyesszorzatok egyszerű számításához az $\vec{r}_u \times \vec{r}_v$ vektoriális szorzat:

$$\begin{aligned}\vec{r}_u \times \vec{r}_v = {} & (-R^2\cos^2 u\cos v)\vec{e}_1 + (-R^2\cos^2 u\sin v)\vec{e}_2 + (-R^2\sin u\cos u\cos^2 v - \\ & - R^2\sin u\cos u\sin^2 v)\vec{e}_3 = (-R^2\cos^2 u\cos v)\vec{e}_1 + (-R^2\cos^2 u\sin v)\vec{e}_2 + \\ & + (-R^2\sin u\cos u)\vec{e}_3.\end{aligned}$$

A második alapmennyiségek:

$$\begin{aligned} L &= \frac{\vec{r}_{uu}\vec{r}_u\vec{r}_v}{\sqrt{EG-F^2}} = \frac{R^3\cos^3 u\cos^2 v + R^3\cos^3 u\sin^2 v + R^3\sin^2 u\cos u}{R^2\cos u} = \\ &= R\cos^2 u + R\sin^2 u = R \\ M &= \frac{\vec{r}_{uv}\vec{r}_u\vec{r}_v}{D} = \frac{-R^3\sin u\cos^2 u\sin v\cos v + R^3\sin u\cos^2 u\sin v\cos v}{\sqrt{EG-F^2}} = 0 \\ N &= \frac{\vec{r}_{vv}\vec{r}_u\vec{r}_v}{D} = \frac{R^3\cos^3 u\cos^2 v + R^3\cos^3 u\sin^2 v}{R^2\cos u} = R\cos^2 u.\end{aligned}$$

A második alapforma:

$$L\,du^2 + 2M\,dudv + N\,dv^2 = R(du^2 + \cos^2 u dv^2).$$

Az alapformák determinánsai:

$$\begin{vmatrix} E & F \\ F & G \end{vmatrix} EG - F^2 = R^4\cos^2 u$$
$$\begin{vmatrix} L & M \\ M & N \end{vmatrix} LN - M^2 = R^2\cos^2 u.$$

8.5 FELADAT *Határozzuk meg a következő felületek második alapformáját és számítsuk ki a második alapforma determinánsát!*

a.) Forgásellipszoid:

$$x = a\cos u\cos v, \quad y = a\cos u\sin v, \quad z = c\sin u$$

b.) Forgásparaboloid:

$$z = x^2 + y^2$$

c.) Elliptikus henger:

$$x = a\cos u, \quad y = b\sin u, \quad z = v$$

d.) forgáskúp:

$$x = u\cos v, \quad y = u\sin v, \quad z = ku$$

8.5 MEGOLDÁS a.) A paraméter szerinti első- és második deriváltak:

$$\begin{aligned}
\vec{r}_u &= -a\sin u\cos v\,\vec{e}_1 - a\sin u\sin v\,\vec{e}_2 + c\cos u\,\vec{e}_3\\
\vec{r}_v &= -a\cos u\sin v\,\vec{e}_1 + a\cos u\cos v\,\vec{e}_2\\
\vec{r}_{uu} &= -a\cos u\cos v\,\vec{e}_1 - a\cos u\sin v\,\vec{e}_2 - c\sin u\,\vec{e}_3\\
\vec{r}_{uv} &= a\sin u\sin v\,\vec{e}_1 - a\sin u\cos v\,\vec{e}_2\\
\vec{r}_{vv} &= -a\cos u\cos v\,\vec{e}_1 - a\cos u\sin v\,\vec{e}_2
\end{aligned}$$

Az első alapmennyiségek:

$$\begin{aligned}
E &= a^2\sin^2 u\cos^2 v + a^2\sin^2 u\sin^2 v + c^2\cos^2 u = a^2\sin^2 u + c^2\cos^2 u\\
F &= a^2\sin u\cos u\sin v\cos v - a^2\sin u\cos u\sin v\cos v = 0\\
G &= a^2\cos^2 u\sin^2 v + a^2\cos^2 u\cos^2 v = a^2\cos^2 u
\end{aligned}$$

$$\sqrt{EG-F^2} = a\,|\cos u|\,\sqrt{a^2\sin^2 u + c^2\cos^2 u}.$$

A második alapmennyiségekek számolásához:

$$\begin{aligned}
\vec{r}_u\times\vec{r}_v = {}&(-ac\cos^2 u\cos v)\vec{e}_1 + (-ac\cos^2 u\sin v)\vec{e}_2 +\\
&+(-a^2\sin u\cos u\cos^2 v - a^2\sin u\cos u\sin^2 v)\vec{e}_3 =\\
&= (-ac\cos^2 u\cos v)\vec{e}_1 + (-ac\cos^2 u\sin v)\vec{e}_2 + (-a^2\sin u\cos u)\vec{e}_3.
\end{aligned}$$

A második alapmennyiségek:

$$\begin{aligned}
L &= \frac{\vec{r}_{uu}\vec{r}_u\vec{r}_v}{\sqrt{EG-F^2}} = \frac{a^2c\cos^3 u\cos^2 v + a^2c\cos^3 u\sin^2 v + a^2c\sin^2 u\cos u}{a\cos u\sqrt{a^2\sin^2 u + c^2\cos^2 u}}\\
&= \frac{ac}{\sqrt{a^2\sin^2 u + c^2\cos^2 u}}\\
M &= \frac{\vec{r}_{uv}\vec{r}_u\vec{r}_v}{\sqrt{EG-F^2}} = 0\\
N &= \frac{\vec{r}_{vv}\vec{r}_u\vec{r}_v}{\sqrt{EG-F^2}} = \frac{a^2c\cos^3 u\cos^2 v + a^2c\cos^3 u\sin^2 v}{a\cos u\sqrt{a^2\sin^2 u + c^2\cos^2 u}} =\\
&= \frac{ac\cos^2 u}{\sqrt{a^2\sin^2 u + c^2\cos^2 u}}.
\end{aligned}$$

A második alapforma:

$$L\,du^2 + 2M\,dudv + N\,dv^2 = \frac{ac}{\sqrt{a^2\sin^2 u + c^2\cos^2 u}}(du^2 + \cos^2 u dv^2).$$

A második alapforma determinánsa:

$$LN - M^2 = \frac{a^2c^2\cos^2 u}{a^2\sin^2 u + c^2\cos^2 u}.$$

b.) Az a.) ponthoz hasonlóan számolva:

$$\begin{aligned}
\vec{r} &= x\vec{e}_1 + y\vec{e}_2 + (x^2+y^2)\vec{e}_3 \\
\vec{r}_x &= \vec{e}_1 + 2x\vec{e}_3 \\
\vec{r}_y &= \vec{e}_2 + 2y\vec{e}_3 \\
\vec{r}_{xx} &= 2\vec{e}_3 \\
\vec{r}_{xy} &= 0 \\
\vec{r}_{xy} &= 2\vec{e}_3 \\
\vec{r}_x \times \vec{r}_y &= (-2x)\vec{e}_1 + (-2y)\vec{e}_2 + \vec{e}_3.
\end{aligned}$$

Így:

$$\begin{aligned}
E &= 1+4x^2 \\
F &= 4xy \\
G &= 1+4y^2
\end{aligned}$$

$$\sqrt{EG-F^2} = \sqrt{1+16x^2y^2+4y^2+4x^2-16x^2y^2} = \sqrt{1+4(x^2+y^2)}.$$

A második alapmennyiségek:

$$\begin{aligned}
L &= \frac{2}{\sqrt{1+4(x^2+y^2)}} \\
M &= 0 \\
N &= \frac{2}{\sqrt{1+4(x^2+y^2)}}.
\end{aligned}$$

A második alapforma:

$$\frac{2}{\sqrt{1+4(x^2+y^2)}}(dx^2+dy^2).$$

A determinánsa:

$$LN-M^2 = \frac{4}{1+4(x^2+y^2)}.$$

c.) A parciális deriváltak:

$$\begin{aligned}
\vec{r}_u &= -a\sin u\vec{e}_1 + b\cos u\vec{e}_2 \\
\vec{r}_v &= \vec{e}_3 \\
\vec{r}_{uu} &= -a\cos u\vec{e}_1 - b\sin u\vec{e}_2 \\
\vec{r}_{uv} &= 0 \\
\vec{r}_{vv} &= 0 \\
\vec{r}_u \times \vec{r}_v &= b\cos u\vec{e}_1 + a\sin u\vec{e}_2.
\end{aligned}$$

Az első alapmennyiségek:

$$\begin{aligned} E &= a^2\sin^2 u + b^2\cos^2 u \\ F &= 0 \\ G &= a^2\cos^2 u + b^2\sin^2 u \end{aligned}$$

$$\sqrt{EG-F^2} = \sqrt{a^2b^2(\sin^4 u+\cos^4 u)+(a^2+b^2)(\sin^2 u\cos^2 u)}.$$

A második alapmennyiségek:

$$\begin{aligned} L &= \frac{-ab\cos^2 u - ab\sin^2 u}{\sqrt{EG-F^2}} = \frac{-ab}{\sqrt{a^2b^2(\sin^4 u+\cos^4 u)+(a^2+b^2)(\sin^2 u\cos^2 u)}} \\ M &= 0 \\ N &= 0. \end{aligned}$$

A második alapforma:

$$\frac{-ab}{\sqrt{a^2b^2(\sin^4 u+\cos^4 u)+(a^2+b^2)(\sin^2 u\cos^2 u)}}du^2.$$

A második alapforma determinánsa:

$$LN-M^2=0.$$

d.) A parciális deriváltak:

$$\begin{aligned} \vec{r}_u &= \cos v\,\vec{e}_1 + \sin v\,\vec{e}_2 + k\vec{e}_3 \\ \vec{r}_v &= -u\sin v\,\vec{e}_1 + u\cos v\,\vec{e}_2 \\ \vec{r}_{uu} &= 0 \\ \vec{r}_{uv} &= -\sin v\,\vec{e}_1 + \cos v\,\vec{e}_2 \\ \vec{r}_{vv} &= -u\cos v\,\vec{e}_1 - u\sin v\,\vec{e}_2 \\ \vec{r}_u\times\vec{r}_v &= (-ku\cos v)\vec{e}_1 + (-ku\sin v)\vec{e}_2 + (u\cos^2 v + u\sin^2 v)\vec{e}_3 = \\ &= (-ku\cos v)\vec{e}_1 + (-ku\sin v)\vec{e}_2 + u\vec{e}_3. \end{aligned}$$

Az első alapmennyiségek:

$$\begin{aligned} E &= \cos^2 v + \sin^2 v + k^2 = k^2+1 \\ F &= -u\sin v\cos v + u\sin v\cos v = 0 \\ G &= u^2\sin^2 v + u^2\cos^2 v = u^2 \end{aligned}$$

$$\sqrt{EG-F^2} = |u|\sqrt{1+k^2}.$$

A második alapmennyiségek:

$$L = 0$$
$$M = \frac{ku\sin v\cos v - ku\sin v\cos v}{u\sqrt{1+k^2}} = 0$$
$$N = \frac{ku^2\cos^2 v + ku^2\sin^2 v}{u\sqrt{1+k^2}} = \frac{k|u|}{\sqrt{k^2+1}}.$$

A második alapforma:

$$\frac{k|u|}{\sqrt{k^2+1}}dv^2.$$

A második alapforma determinánsa:

$$LN - M^2 = 0.$$

8.2. Főgörbületek, szorzat- és összeggörbület

8.6 FELADAT *Igazoljuk, hogy az*

$$a = u\cos v, \quad y = u\sin v, \quad z = \lambda u$$

felület egyik főnormálmetszete egyenes!

8.6 MEGOLDÁS

$$\vec{\varphi}(u,v) = \begin{bmatrix} u\cos v \\ u\sin v \\ \lambda u \end{bmatrix}$$

$$\frac{\partial\vec{\varphi}}{\partial u} = \begin{bmatrix} \cos v \\ \sin v \\ \lambda \end{bmatrix}, \qquad \frac{\partial^2\vec{\varphi}}{\partial u^2} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\frac{\partial\vec{\varphi}}{\partial v} = \begin{bmatrix} -u\sin v \\ u\cos v \\ 0 \end{bmatrix}, \qquad \frac{\partial^2\vec{\varphi}}{\partial v^2} = \begin{bmatrix} -u\cos v \\ -u\sin v \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\frac{\partial^2\vec{\varphi}}{\partial u\partial v} = \begin{bmatrix} -\sin v \\ \cos v \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\frac{\partial\vec{\varphi}}{\partial u} \times \frac{\partial\vec{\varphi}}{\partial v} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \cos v & \sin v & \lambda \\ -u\sin v & u\cos v & 0 \end{vmatrix} =$$

$$= \vec{i}(-\lambda u\cos v) - \vec{j}u\lambda\sin v + \vec{k}(u\cos^2 v + u\sin^2 v) = \begin{bmatrix} -\lambda u\cos v \\ -\lambda u\sin v \\ u \end{bmatrix}$$

$$\left\| \frac{\partial \vec{\varphi}}{\partial u} \times \frac{\partial \vec{\varphi}}{\partial v} \right\| = \sqrt{\lambda^2 u^2 + u^2}$$

$$\vec{N}(u,v) = \frac{\frac{\partial \vec{\varphi}}{\partial u} \times \frac{\partial \vec{\varphi}}{\partial v}}{\left\| \frac{\partial \vec{\varphi}}{\partial u} \times \frac{\partial \vec{\varphi}}{\partial v} \right\|} = (\sqrt{u^2 + \lambda^2 u^2})^{-1} \begin{bmatrix} -\lambda u \cos v \\ -\lambda u \sin v \\ u \end{bmatrix}.$$

Második alapmennyiségek:

$$\begin{aligned} l &= \left\langle \frac{\partial^2 \vec{\varphi}}{\partial u^2}, \vec{N} \right\rangle = 0 \\ m &= \left\langle \frac{\partial^2 \vec{\varphi}}{\partial u \partial v}, \vec{N} \right\rangle = \frac{1}{\sqrt{u^2 + \lambda^2 u^2}} \cdot (\lambda u \sin v \cos v - \lambda u \cos v \sin v + 0) = 0 \\ n &= \left\langle \frac{\partial^2 \vec{\varphi}}{\partial v^2}, \vec{N} \right\rangle = \frac{1}{\sqrt{u^2 + \lambda^2 u^2}} \cdot (\lambda u^2 \cos^2 v + \lambda u^2 \sin^2 v + 0) = \frac{\lambda u^2}{\sqrt{u^2 + \lambda^2 u^2}}. \end{aligned}$$

Így $\kappa_1 \kappa_2 = \frac{ln - m^2}{EG - F^2} = 0$, ami csakis akkor lehetséges, ha $\kappa_1 = 0$ vagy $\kappa_2 = 0$ vagyis ha ezek valamelyikéhez tartozó főnormálmetszet egyenes.

8.7 FELADAT *Forgassunk meg egy parabolát direktrixe körül. Bizonyítsuk be, hogy az így kapott felület R_1 és R_2 főgörbületi sugarai között a következő összefüggés áll fenn: $|R_1| = 2|R_2|$.*

8.7 MEGOLDÁS Legyen p a megforgatott parabola paramétere ($p > 0$ a fókusz és a direktrix távolsága), és a direktrix essen egybe a z tengellyel, a fókusz pedig illeszkedjen az x tengelyre. Ekkor:

$$\vec{\varphi}(u,v) = \begin{bmatrix} \left(\frac{1}{2p}u^2 + \frac{p}{2}\right)\cos v \\ \left(\frac{1}{2p}u^2 + \frac{p}{2}\right)\sin v \\ u \end{bmatrix}$$

a forgásfelület egyenlete. Számítsuk ki a főgörbületek előállításához szükséges mennyiségeket:

$$\frac{\partial \vec{\varphi}}{\partial u} = \begin{bmatrix} \frac{\cos v}{p} u \\ \frac{\sin v}{p} u \\ 1 \end{bmatrix}, \qquad \frac{\partial^2 \vec{\varphi}}{\partial u^2} = \begin{bmatrix} \frac{\cos v}{p} \\ \frac{sinv}{p} \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\frac{\partial \vec{\varphi}}{\partial v} = \begin{bmatrix} -\left(\frac{1}{2p}u^2 + \frac{p}{2}\right)\sin v \\ \left(\frac{1}{2p}u^2 + \frac{p}{2}\right)\cos v \\ 0 \end{bmatrix}, \qquad \frac{\partial^2 \vec{\varphi}}{\partial v^2} = \begin{bmatrix} -\left(\frac{1}{2p}u^2 + \frac{p}{2}\right)\cos v \\ -\left(\frac{1}{2p}u^2 + \frac{p}{2}\right)\sin v \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\frac{\partial^2 \vec{\varphi}}{\partial u \partial v} = \begin{bmatrix} -\frac{u}{p}\sin v \\ \frac{u}{p}\cos v \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\frac{\partial\vec{\varphi}}{\partial u}\times\frac{\partial\vec{\varphi}}{\partial v}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ \frac{\cos v}{p}u & \frac{\sin v}{p}u & 1\\ -\left(\frac{1}{2p}u^2+\frac{p}{2}\right)\sin v & \left(\frac{1}{2p}u^2+\frac{p}{2}\right)\cos v & 0\end{vmatrix}=\begin{bmatrix}-\left(\frac{1}{2p}u^2+\frac{p}{2}\right)\cos v\\ -\left(\frac{1}{2p}u^2+\frac{p}{2}\right)\sin v\\ \left(\frac{1}{2p}u^2+\frac{p}{2}\right)\frac{u}{p}\end{bmatrix}$$

$$\left\|\frac{\partial\vec{\varphi}}{\partial u}\times\frac{\partial\vec{\varphi}}{\partial v}\right\|=\sqrt{\left(\frac{1}{2p}u^2+\frac{p}{2}\right)^2\left(1+\frac{u^2}{p^2}\right)}=\left(\frac{1}{2p}u^2+\frac{p}{2}\right)\sqrt{1+\frac{u^2}{p^2}}$$

$$\vec{N}(u,v)=\frac{\frac{\partial\vec{\varphi}}{\partial u}\times\frac{\partial\vec{\varphi}}{\partial v}}{\left\|\frac{\partial\vec{\varphi}}{\partial u}\times\frac{\partial\vec{\varphi}}{\partial v}\right\|}=\left(\left(\frac{1}{2p}u^2+\frac{p}{2}\right)\sqrt{1+\frac{u^2}{p^2}}\right)^{-1}\begin{bmatrix}-\left(\frac{1}{2p}u^2+\frac{p}{2}\right)\cos v\\ -\left(\frac{1}{2p}u^2+\frac{p}{2}\right)\sin v\\ \left(\frac{1}{2p}u^2+\frac{p}{2}\right)\frac{u}{p}\end{bmatrix}$$

$$A:=\left(\frac{1}{2p}u^2+\frac{p}{2}\right).$$

A második alapmennyiségek:

$$l=\left\langle\frac{\partial^2\vec{\varphi}}{\partial u^2},\vec{N}\right\rangle=\frac{1}{A\sqrt{1+\frac{u^2}{p^2}}}\left(-\frac{\cos^2 v}{p}A-\frac{\sin^2 v}{p}A+0\right)=-\frac{1}{p\sqrt{1+\frac{u^2}{p^2}}}$$

$$m=\left\langle\frac{\partial^2\vec{\varphi}}{\partial u\partial v},\vec{N}\right\rangle=\frac{1}{A\sqrt{1+\frac{u^2}{p^2}}}\left(\frac{u}{p}\sin vA\cos v-\frac{u}{p}\cos vA\sin v+0\right)=0$$

$$n=\left\langle\frac{\partial^2\vec{\varphi}}{\partial v^2},\vec{N}\right\rangle=\frac{1}{A\sqrt{1+\frac{u^2}{p^2}}}\left(A^2\cos^2 v+A^2\sin^2 v+0\right)=\frac{A}{\sqrt{1+\frac{u^2}{p^2}}}.$$

Az első alapmennyiségek:

$$E=\left\langle\frac{\partial\vec{\varphi}}{\partial u},\frac{\partial\vec{\varphi}}{\partial u}\right\rangle=\frac{\cos^2 v}{p^2}u^2+\frac{\sin^2 v}{p^2}u^2+1=\frac{u^2}{p^2}+1$$

$$F=\left\langle\frac{\partial\vec{\varphi}}{\partial u},\frac{\partial\vec{\varphi}}{\partial v}\right\rangle=-\frac{u}{p}\cos vA\sin v+\frac{u}{p}\sin vA\cos v+0=0$$

$$G=\left\langle\frac{\partial\vec{\varphi}}{\partial v},\frac{\partial\vec{\varphi}}{\partial v}\right\rangle=A^2\sin^2 v+A^2\cos^2 v+0=A^2.$$

Ekkor a szorzatgörbület (vagy Gauss-görbület, a főgörbületek szorzata):

$$\kappa_1\kappa_2=\frac{ln-m^2}{EG-F^2}=\frac{-\frac{A}{p\left(1+\frac{u^2}{p^2}\right)}}{\left(1+\frac{u^2}{p^2}\right)A^2}=-\frac{1}{Ap\left(1+\frac{u^2}{p^2}\right)^2}=-\frac{1}{ApB^2},$$

ahol $B := 1+\frac{u^2}{p^2}$. Az összeggörbület (vagy Minkowski-görbület, a főgörbületek összege) pedig

$$\kappa_1+\kappa_2 = \frac{En-2Fm+Gl}{EG-F^2} = \frac{\sqrt{B}A-\frac{A^2}{p\sqrt{B}}}{A^2B} = \frac{pB-A}{p\sqrt{B}}\cdot\frac{1}{AB} = \frac{1}{A\sqrt{B}}-\frac{1}{pB\sqrt{B}}.$$

Ezekből a κ_1 és κ_2 főgörbületek kiszámolhatóak:

$$\kappa_2 = \frac{pB-A}{p\sqrt{B}AB}-\kappa_1$$

$$\kappa_1\left(\frac{pB-A}{p\sqrt{B}AB}-\kappa_1\right)+\frac{1}{ApB^2}=0$$

$$\kappa_1^2-\frac{pB-A}{p\sqrt{B}AB}\kappa_1-\frac{1}{ApB^2}=0$$

$$\kappa_{1,2} = \frac{\frac{pB-A}{p\sqrt{B}AB}\pm\sqrt{\frac{(pB-A)^2}{p^2A^2B^3}+\frac{4}{ApB^2}}}{2} = \frac{\frac{pB-A}{p\sqrt{B}AB}\pm\frac{pB+A}{p\sqrt{B}AB}}{2}$$

$$\to \kappa_1 = -\frac{A}{p\sqrt{B}AB}$$

$$\to \kappa_2 = \frac{pB}{p\sqrt{B}AB}.$$

$$\left|\frac{\kappa_2}{\kappa_1}\right| = \left|\frac{pB}{A}\right| = \frac{p\left(1+\frac{u^2}{p^2}\right)}{\frac{1}{2p}u^2+\frac{p}{2}} = \frac{p+\frac{u^2}{p}}{\frac{1}{2}\left(\frac{u^2}{p}+p\right)} = 2.$$

Mivel $R_1 = \frac{1}{\kappa_1}$, és $R_2 = \frac{1}{\kappa_2}$, ez éppen az állításunkat bizonyítja.

8.8 FELADAT *Határozzuk meg a $ds^2 = du^2+dv^2$ első alapformával rendelkező felület $v = 2u$ és $v = -2u$ felületi görbéinek a szögét.*

8.8 MEGOLDÁS Paraméterezzük a felületi görbéket:

$$\vec{\alpha}(t) = \begin{pmatrix} u_1(t) \\ v_1(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t \\ 2t \end{pmatrix}, \quad \vec{\beta}(t) = \begin{pmatrix} u_2(t) \\ v_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t \\ -2t \end{pmatrix}.$$

Ekkor a metszéspont a $t = 0$ paraméterű pont lesz.

$$\frac{d\vec{\varphi}(\vec{\alpha})}{dt} = \frac{\partial\vec{\varphi}}{du}\cdot\frac{du_1}{dt}+\frac{\partial\vec{\varphi}}{dv}\cdot\frac{dv_1}{dt} = \frac{\partial\vec{\phi}}{\partial u}\cdot 1+\frac{\partial\vec{\phi}}{\partial v}\cdot 2,$$
$$\frac{d\vec{\varphi}(\vec{\beta})}{dt} = \frac{\partial\vec{\varphi}}{du}\cdot\frac{du_2}{dt}+\frac{\partial\vec{\varphi}}{dv}\cdot\frac{dv_2}{dt} = \frac{\partial\vec{\phi}}{\partial u}\cdot 1+\frac{\partial\vec{\phi}}{\partial v}\cdot(-2).$$

Az adott első alapforma szerint, annak együtthatói $E = G = 1$ és $F = 0$, így:

$$\left\langle \frac{\partial \vec{\phi}}{\partial u}, \frac{\partial \vec{\phi}}{\partial u} \right\rangle = 1, \left\langle \frac{\partial \vec{\phi}}{\partial u}, \frac{\partial \vec{\phi}}{\partial v} \right\rangle = 0, \left\langle \frac{\partial \vec{\phi}}{\partial v}, \frac{\partial \vec{\phi}}{\partial v} \right\rangle = 1.$$

Mésrészt:

$$\left\langle \frac{d\vec{\alpha}}{dt}, \frac{d\vec{\beta}}{dt} \right\rangle = 1 - 4 = -3$$

$$\sqrt{\left\langle \frac{d\vec{\alpha}}{dt}, \frac{d\vec{\alpha}}{dt} \right\rangle} = \sqrt{\left\langle \frac{d\vec{\beta}}{dt}, \frac{d\vec{\beta}}{dt} \right\rangle} = \sqrt{5}.$$

(A kiszámolt mennyiségek minden valós t-re érvenyesek, tehát a metszéspontot meghatározó t=0-ra is.)
Tehát a felületi görbék bezárta szög:

$$\psi = \arccos\left(\frac{E\dot{u}_1\dot{u}_2 + F\dot{u}_1\dot{v}_2 + F\dot{u}_2\dot{v}_1 + G\dot{v}_1\dot{v}_2}{\sqrt{E\dot{u}_1^2 + 2F\dot{u}_1\dot{v}_1 + G\dot{v}_1^2}\sqrt{E\dot{u}_2^2 + 2F\dot{u}_2\dot{v}_2 + G\dot{v}_2^2}} \right) = \arccos\left(-\frac{3}{5}\right).$$

8.9 FELADAT *Határozzuk meg az $x = u\cos v$, $y = u\sin v$, $z = h(u)$ forgásfelület Gauss-, és Minkowski-görbületét!*

8.9 MEGOLDÁS

$$\frac{\partial \vec{\varphi}}{\partial u} = \begin{pmatrix} \cos v \\ \sin v \\ h'(u) \end{pmatrix}, \quad \frac{\partial \vec{\varphi}}{\partial v} = \begin{pmatrix} -u\sin v \\ u\cos v \\ 0 \end{pmatrix}$$

Ezekből az első alapmennyiségek:

$$E = 1 + h'(u)^2, \quad F = 0, \quad G = u^2.$$

A második deriváltak:

$$\frac{\partial^2 \vec{\varphi}}{\partial u \partial v} = \begin{pmatrix} -\sin v \\ \cos v \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \frac{\partial^2 \vec{\varphi}}{\partial u^2} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ h''(u) \end{pmatrix}, \quad \frac{\partial^2 \vec{\varphi}}{\partial v^2} = \begin{pmatrix} -u\cos v \\ -u\sin v \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Továbbá:

$$\frac{\partial \vec{\varphi}}{\partial u} \times \frac{\partial \vec{\varphi}}{\partial v} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \cos v & \sin v & h'(u) \\ -u\sin v & u\cos v & 0 \end{vmatrix} = \left(-h'(u)u\cos v, \quad -h'(u)u\sin v, \quad u \right)$$

$$\vec{N} = \left(\frac{-h'(u)u\cos v}{\sqrt{(h'(u)u)^2 + u^2}}, \frac{-h'(u)u\sin v}{\sqrt{(h'(u)u)^2 + u^2}}, \frac{u}{\sqrt{(h'(u)u)^2 + u^2}} \right).$$

A második alapmennyiségek:

$$l = \frac{h''(u)u}{\sqrt{h'(u)u^2+u^2}}, \quad m = 0, \quad n = \frac{h'(u)u^2}{\sqrt{h'(u)u^2+u^2}}.$$

Így a Gauss-görbület (K) és Minkowski-görbület (H) a következő:

$$K = \frac{h'(u)h''(u)}{\left((h'(u))^2+1\right)^2 u}$$

$$H = \frac{1}{2}\cdot\frac{h''(u)}{(1+h'(u))^{\frac{3}{2}}}.$$

8.10 FELADAT *Határozzuk meg a*

$$\begin{aligned} x &= a(\cos u - v\sin u) \\ y &= a(\sin u + v\cos u) \\ z &= b(u+v) \end{aligned}$$

csavarfelület első és második alapmennyiségeit, Gauss- és Minkowski-görbületét!

8.10 MEGOLDÁS Az első deriváltak:

$$\frac{\partial\vec{\varphi}}{\partial u} = \begin{pmatrix} a(-\sin u - v\cos u) \\ a(\cos u - v\sin u) \\ b \end{pmatrix}, \quad \frac{\partial\vec{\varphi}}{\partial v} = \begin{pmatrix} a(-\sin u) \\ a\cos u \\ b \end{pmatrix}.$$

Az első alapmennyiségek:

$$E = a^2\left(1+v^2\right)+b^2, \quad F = a^2+b^2, \quad G = a^2+b^2.$$

$$\frac{\partial\vec{\varphi}}{\partial u}\times\frac{\partial\vec{\varphi}}{\partial v} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a(-\sin u - v\cos u) & a(\cos u - v\sin u) & b \\ a(-\sin u) & a\cos u & b \end{vmatrix} =$$
$$= \left(\, -abv\sin u, \quad abv\cos u, \quad -a^2v \,\right).$$

Így:

$$\vec{N} = \left(\frac{-abv\sin u}{\sqrt{a^2b^2v^2+a^4v^2}}, \quad \frac{abv\cos u}{\sqrt{a^2b^2v^2+a^4v^2}}, \quad \frac{-a^2v}{\sqrt{a^2b^2v^2+a^4v^2}} \right).$$

A második deriváltak:

$$\frac{\partial^2\vec{\varphi}}{\partial u\partial v} = \begin{pmatrix} -a\cos u \\ -a\sin u \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \frac{\partial^2\vec{\varphi}}{\partial u^2} = \begin{pmatrix} a(-\cos u + v\sin u) \\ a(-\sin u - v\cos u) \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \frac{\partial^2\vec{\varphi}}{\partial v^2} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

A második alapmennyiségek:

$$l=\frac{-a^2bv^2}{\sqrt{a^2b^2v^2+a^4v^2}},\qquad n=0,\qquad m=0.$$

Így a görbületek:

$$\begin{aligned}
K&=0,\\
H&=\frac{a^2+b^2}{2}\cdot\frac{-a^2bv^2}{\sqrt{a^2b^2v^2+a^4v^2}}\cdot\frac{1}{(a^2+b^2)\left(a^2\left(1+v^2\right)+b^2\right)-\left(a^2+b^2\right)^2}=\\
&=-\frac{1}{2}\cdot\frac{b}{\sqrt{a^2b^2v^2+a^4v^2}}.
\end{aligned}$$

8.11 FELADAT *Határozzuk meg az összes állandó negatív szorzatgörbülettel rendelkező forgásfelületet!*

8.11 MEGOLDÁS Tegyük fel, hogy az x tengely körül forgattuk meg az $(x(u),\, y(u),\, 0)^T$ ívhossz szerint paraméterezett meridiángörbét. Ekkor a felület:

$$\vec{\varphi}=\begin{pmatrix} x(u)\\ y(u)\cos v\\ y(u)\sin v\end{pmatrix}.$$

Az első parciális deriváltak, az első alapforma mátrixa (M) és a normális:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial\vec{\varphi}}{\partial u}&=\begin{pmatrix} x'(u)\\ y'(u)\cos v\\ y'(u)\sin v\end{pmatrix}\\
\frac{\partial\vec{\varphi}}{\partial v}&=\begin{pmatrix} 0\\ -y(u)\sin v\\ y(u)\cos v\end{pmatrix}\\
\Rightarrow M&=\begin{bmatrix} E & F\\ F & G\end{bmatrix}=\begin{pmatrix} x'(u)^2+y'(u)^2 & 0\\ 0 & y(u)^2\end{pmatrix}\\
\vec{N}&=\frac{1}{\sqrt{x'(u)^2+y'(u)^2}}\begin{pmatrix} y'(u)\\ -x'(u)\cos v\\ -x'(u)\sin v\end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

A második parciális deriváltak és a második alapforma mátrixa (P):

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2\vec{\varphi}}{\partial u^2}&=\begin{pmatrix} x''(u)\\ y''(u)\cos v\\ y''(u)\sin v\end{pmatrix}\\
\frac{\partial^2\vec{\varphi}}{\partial u\partial v}&=\begin{pmatrix} 0\\ -y'(u)\sin v\\ y'(u)\cos v\end{pmatrix},\\
\frac{\partial^2\vec{\varphi}}{\partial v^2}&=\begin{pmatrix} 0\\ -y(u)\cos v\\ -y(u)\sin v\end{pmatrix}
\end{aligned}$$

$$\Rightarrow P = \begin{bmatrix} l & m \\ m & n \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{x'(u)^2 + y'(u)^2}} \begin{pmatrix} x''(u)y'(u) - x'(u)y''(u) & 0 \\ 0 & x'(u)y(u) \end{pmatrix}.$$

Mivel az eredeti meridiángörbe ívhossz szerinti paraméterezésű, vagyis

$$x'(u)^2 + y'(u)^2 = 1 \Rightarrow x'(u)x''(u) + y'(u)y''(u) = 0.$$

Ennek alapján a szorzatgörbület (felhasználva az első feltevést, majd a következményét):

$$K = \frac{\det P}{\det M} = \frac{x'(u)x''(u)y'(u) - x'(u)y''(u)x'(u)}{y(u)} = \frac{y''(u)\left(-y'(u)^2 - x'(u)^2\right)}{y(u)} = \frac{-y''}{y} = k$$

adódik, ahol k negatív konstans. A differenciálegyenlet megoldásából:

$$\begin{aligned} y(u) &= A\cosh\left(\sqrt{-k}u\right) + B\sinh\left(\sqrt{-k}u\right) \\ x(u) &= \int \sqrt{1 - y'^2}\mathrm{d}u. \end{aligned}$$

8.12 FELADAT *Milyen forgásforgásfelületeknél lesz a Minkowski-görbület zérus?*

8.12 MEGOLDÁS Az előzőeket követve az alábbi differenciálegyenletrendszerhez jutunk:

$$\begin{aligned} x'x'' + y'y'' &= 0 \\ x''y'y - x'y''y + x' &= 0, \end{aligned}$$

amelynek megoldásai szolgáltatják a keresett felületeket.

8.13 FELADAT *Határozzuk meg az* $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1, a > b > c$ *ellipszoid elliptikus pontjait!*

8.13 MEGOLDÁS Minden pont elliptikus pont, mert a szorzatgörbület minden pontban pozitív. A számítás elvégzése nélkül is mondhatjuk, hogy az ellipszis minden pontja elliptikus, hiszen a felület bármely pontjában az „érintősík egy oldalára esik”.

9. fejezet

Felszínszámítás

9.1 FELADAT *Számítsuk ki a gömbfelület két meridiánnal és két szélességi körrel határolt darabjának a felszínét!*

9.1 MEGOLDÁS Legyenek a szélességi körök α és β, a meridiánok γ és δ, és tegyük fel, hogy:

$$-\pi/2 \leq \alpha \leq \beta \leq \pi/2 \text{ és } 0 \leq \gamma \leq \delta \leq 2\pi.$$

Ekkor a terület:

$$T = \int_\alpha^\beta \int_\gamma^\delta \left\| \frac{\partial \vec{\phi}}{\partial u} \times \frac{\partial \vec{\phi}}{\partial v} \right\| dv du,$$

ahol

$$\vec{\phi}\,(u,v) = \begin{pmatrix} R\cos u \cos v \\ R\cos u \sin v \\ R\sin u \end{pmatrix} \Longrightarrow \frac{\partial \vec{\phi}}{\partial u} = \begin{pmatrix} -R\sin u \cos v \\ -R\sin u \sin v \\ R\cos u \end{pmatrix}$$

és

$$\frac{\partial \vec{\phi}}{\partial v} = \begin{pmatrix} -R\cos u \sin v \\ R\cos u \cos v \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Innen:

$$\frac{\partial \vec{\phi}}{\partial u} \times \frac{\partial \vec{\phi}}{\partial v} = \det \begin{pmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -R\sin u \cos v & -R\sin u \sin v & R\cos u \\ -R\cos u \sin v & R\cos u \cos v & 0 \end{pmatrix},$$

mely kifejezés normája:

$$R^2\sqrt{(\cos u)^4(\cos v)^2 + (\cos u)^4(\sin v)^2 + [-\sin u \cos u\,((\cos v)^2 + (\sin v)^2)]^2} =$$
$$= R^2\sqrt{(\cos u)^4 + (\sin u)^2(\cos u)^2} = R^2\,|\cos u|\,.$$

Vagyis:

$$T = \int_\alpha^\beta \int_\gamma^\delta R^2\,|\cos u|\,dv du = R^2\,(\delta - \gamma)\,(\sin\beta - \sin\alpha)\,.$$

(Kihasználtuk, hogy $-\pi/2$ és $\pi/2$ között $|\cos u| = \cos u$.)

9.2 FELADAT *Határozzuk meg az $x = u\cos v$, $y = u\sin v$. $z = av$ csavarfelületen az $u = 0$, $u = a$, $v = 0$, $v = 1$ felületi görbék által határolt négyszög területét.*

9.2 MEGOLDÁS A területet a

$$T = \int_0^a \int_0^1 \left\| \frac{\partial \vec{\phi}}{\partial u} \times \frac{\partial \vec{\phi}}{\partial v} \right\| dvdu.$$

integrál kiszámításával kapjuk.

$$\frac{\partial \vec{\phi}}{\partial u} \times \frac{\partial \vec{\phi}}{\partial v} = \det \begin{pmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \cos v & \sin v & 0 \\ -u\sin v & u\cos v & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a\sin v \\ -a\cos v \\ u \end{pmatrix},$$

melynek normája:

$$\sqrt{a^2(\sin v)^2 + a^2(\cos v)^2 + u^2} = \sqrt{a^2+u^2}.$$

Innen:

$$T = \int_0^a \int_0^1 \sqrt{a^2+u^2} dvdu = \int_0^a 1 \cdot \sqrt{a^2+u^2} du = a \cdot \int_0^a \sqrt{1+\left(\frac{u}{a}\right)^2} du.$$

Alkalmazva az $\sinh(t) := \frac{u}{a}$ helyettesítést:

$$T = a \cdot \int_0^{\sinh^{-1}(1)} a \cdot (\cosh(t))^2 dt = a^2 \int_0^{\sinh^{-1}(1)} \frac{\cosh(2t)+1}{2} dt =$$
$$= \frac{a^2}{2} \cdot \sinh^{-1}(1) + a^2 \cdot \left[\frac{\sinh(2t)}{4}\right]_0^{\sinh^{-1}(1)} = \frac{a^2}{2} \cdot \left(\sinh^{-1}(1) + \frac{\sinh(2\sinh^{-1}(1))}{2}\right).$$

9.3 FELADAT *Határozzuk meg az $u = \pm\frac{1}{2}av^2$, $v = 1$ görbék által a $ds^2 = du^2 + (u^2+a^2)dv^2$ első alapformával ellátott felületen meghatározott görbevonalú háromszög kerületét, belső szögeit és területét.*

9.3 MEGOLDÁS Az első alapforma együtthatói alapján:

$$\left\langle \frac{\partial \vec{\phi}}{\partial u}, \frac{\partial \vec{\phi}}{\partial u} \right\rangle = 1, \left\langle \frac{\partial \vec{\phi}}{\partial u}, \frac{\partial \vec{\phi}}{\partial v} \right\rangle = 0, \left\langle \frac{\partial \vec{\phi}}{\partial v}, \frac{\partial \vec{\phi}}{\partial v} \right\rangle = u^2 + a^2.$$

Paraméterezzük a görbevonalú háromszög oldalait:

$$\vec{c}_1(t) = \begin{pmatrix} u_1(t) \\ v_1(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{a}{2}t^2 \\ t \end{pmatrix}$$
$$\vec{c}_2(\tau) = \begin{pmatrix} u_2(\tau) \\ v_2(\tau) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{a}{2}\tau^2 \\ \tau \end{pmatrix}$$
$$\vec{c}_3(\theta) = \begin{pmatrix} u_3(\theta) \\ v_3(\theta) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \theta \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Belső szög a $\vec{c}_1$ és $\vec{c}_3$ görbe metszéspontjánál:

$$\left.\frac{d\vec{\phi}(\vec{c}_1)}{dt}\right|_{t=1} = \left[\frac{\partial\vec{\phi}}{\partial u}\cdot at + \frac{\partial\vec{\phi}}{\partial v}\cdot 1\right]_{t=1} = \left[\frac{\partial\vec{\phi}}{\partial u}\cdot a + \frac{\partial\vec{\phi}}{\partial v}\right]_{(u=\frac{a}{2},\, v=1)}$$

$$\left.\frac{d\vec{\phi}(\vec{c}_3)}{d\theta}\right|_{\theta=0} = \left[\frac{\partial\vec{\phi}}{\partial u}\cdot 1 + \frac{\partial\vec{\phi}}{\partial v}\cdot 0\right]_{t=1} = \left[\frac{\partial\vec{\phi}}{\partial u}\right]_{(u=\frac{a}{2},\, v=1)}.$$

Innen:

$$\left\langle \frac{d\vec{\phi}(\vec{c}_1)}{dt}, \frac{d\vec{\phi}(\vec{c}_3)}{d\theta}\right\rangle_{\left(t=1,\ \theta=\frac{a}{2}\right)} = \left\langle \frac{\partial\vec{\phi}}{\partial u}, \frac{\partial\vec{\phi}}{\partial u}\right\rangle \cdot a + 0 = a.$$

A metszéspontban a görbék sebessége c_3 esetében nyilván 1, c_1 esetében pedig:

$$\sqrt{\left\langle \left[\frac{\partial\vec{\phi}}{\partial u}\cdot at + \frac{\partial\vec{\phi}}{\partial v}\cdot 1\right]_{t=1}, \left[\frac{\partial\vec{\phi}}{\partial u}\cdot at + \frac{\partial\vec{\phi}}{\partial v}\cdot 1\right]_{t=1}\right\rangle} = \sqrt{a^2 + \left\langle \frac{\partial\vec{\phi}}{\partial v}, \frac{\partial\vec{\phi}}{\partial v}\right\rangle_{(v=1,\ u=\frac{a}{2})}} =$$

$$= \sqrt{a^2 + (u^2 + a^2)} = \sqrt{2a^2 + \frac{a^2}{4}} = \frac{3a}{2}.$$

Így a bezárt szög:

$$\psi = \arccos\left(\frac{a}{\frac{3a}{2}}\right) = \arccos\left(\frac{2}{3}\right).$$

Szimmetriai okokból a $\vec{c}_2$ és $\vec{c}_3$ görbe metszéspontjánál lévő szög is $\arccos\left(\frac{2}{3}\right)$, hiszen a felület belső metrikája u-ban páros (v-től pedig független).
A harmadik belső szög(a $\vec{c}_1$ és $\vec{c}_2$ metszéspontjánál):

$$\left.\frac{d\vec{\phi}(\vec{c}_1)}{dt}\right|_{t=0} = \left[\frac{\partial\vec{\phi}}{\partial u}\cdot at + \frac{\partial\vec{\phi}}{\partial v}\cdot 1\right]_{t=0} = 0 + \left.\frac{\partial\vec{\phi}}{\partial v}\right|_{(u=0,\, v=0)}$$

$$\left.\frac{d\vec{\phi}(\vec{c}_2)}{d\tau}\right|_{\tau=0} = \left[\frac{\partial\vec{\phi}}{\partial u}\cdot(-a)\tau + \frac{\partial\vec{\phi}}{\partial v}\cdot 1\right]_{\tau=0} = 0 + \left.\frac{\partial\vec{\phi}}{\partial v}\right|_{(u=0,\, v=0)}.$$

Tehát a metszéspontban a görbék érintővektorai megegyeznek, vagyis a bezárt szög 0.
A kerület:

$$|c_3| = \int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} \sqrt{\left(\frac{\partial\vec{\phi}}{\partial u}\cdot 1 + \frac{\partial\vec{\phi}}{\partial v}\cdot 0\right)^2} d\theta = \int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} 1 d\theta = a,$$

másrészt:

$$|c_1| = |c_2| = \int_0^1 \sqrt{\left(\frac{\partial\vec{\phi}}{\partial u}\cdot(at) + \frac{\partial\vec{\phi}}{\partial v}\cdot 1\right)^2} dt = \int_0^1 \sqrt{a^2t^2 + [(u(t))^2 + a^2]}dt =$$

$$\int_0^1 \sqrt{a^2\cdot\left(\frac{t^4}{4}+t^2+1\right)}dt = a\cdot\int_0^1\left(\frac{t^2}{2}+1\right)dt = a\cdot\frac{7}{6}.$$

Így a háromszög kerülete:

$$a\cdot\left(1+\frac{14}{6}\right) = \frac{10}{3}\cdot a.$$

Terület:

$$T = \int_0^1\int_{-\frac{a}{2}v^2}^{\frac{a}{2}v^2}\left\|\frac{\partial\vec{\phi}}{\partial u}\times\frac{\partial\vec{\phi}}{\partial v}\right\| dudv = \int_0^1\int_{-\frac{a}{2}v^2}^{\frac{a}{2}v^2}\left\|\frac{\partial\vec{\phi}}{\partial u}\right\|\cdot\left\|\frac{\partial\vec{\phi}}{\partial v}\right\| dudv =$$

$$= \int_0^1\int_{-\frac{a}{2}v^2}^{\frac{a}{2}v^2}\sqrt{u^2+a^2}dudv,$$

hiszen a paraméterezés $F = 0$ miatt ortogonális, így a paramétervonalak által bezárt szög szinusza az egész felületen 1. Alkalmazzuk megint a $\sinh(s) := \frac{u}{a}$ helyettesítést. Így:

$$T = \int_0^1 a^2\int_{\sinh^{-1}(-\frac{v^2}{2})}^{\sinh^{-1}(\frac{v^2}{2})}\frac{1+\cosh(2s)}{2}dsdv =$$

$$= a^2\int_0^1\left(\sinh^{-1}\left(\frac{v^2}{2}\right) + \left[\frac{\sinh(2s)}{4}\right]_{-\sinh^{-1}\left(\frac{v^2}{2}\right)}^{\sinh^{-1}\left(\frac{v^2}{2}\right)}\right)dv =$$

$$= a^2\int_0^1\left(\sinh^{-1}\left(\frac{v^2}{2}\right) + \frac{\sinh\left(2\sinh^{-1}\left(\frac{v^2}{2}\right)\right)}{2}\right)dv =$$

$$= a^2\int_0^1\left(\sinh^{-1}\left(\frac{v^2}{2}\right) + v^2\cdot\sqrt{1+\left(\frac{v^2}{2}\right)^2}\right)dv \approx 0,514a^2.$$

9.4 FELADAT *Számítsuk ki az $x^2+y^2 = \frac{z^2}{3}$ és az $x+y+z = 2a$ $(a>0)$ felületekkel határolt test (síkkal ellipszisben elmetszett forgáskúp) felszínét!*

9.4 MEGOLDÁS Először számoljuk ki a kúppalást felszínét. Paraméterezzük úgy ezt a felületet, hogy az egyik paraméter a z tengelytől vett távolság (vagyis $u := \sqrt{x^2+y^2}$), a másik paraméter pedig a z körüli elfordulás szöge (v) legyen. Tehát a felület:

$$\vec{\phi}(u,v) = \begin{pmatrix} u\cos v \\ u\sin v \\ \sqrt{3}u \end{pmatrix}.$$

Ilyen paraméterezés esetén $v \in [0, 2\pi)$, u pedig 0 és egy v-től függő felső határ közé esik. Tudjuk, hogy $x+y+z \leq 2a$, azaz $u\cos v + u\sin v + \sqrt{3}u \leq 2a$, tehát $0 \leq u \leq \frac{2a}{\cos v+\sin v+\sqrt{3}}$. Ekkor a felszín:

$$A = \int_0^{2\pi} \int_0^{\frac{2a}{\cos v+\sin v+\sqrt{3}}} \left\| \frac{\partial \vec{\phi}}{\partial u} \times \frac{\partial \vec{\phi}}{\partial v} \right\| dudv,$$

ahol

$$\frac{\partial \vec{\phi}}{\partial u} \times \frac{\partial \vec{\phi}}{\partial v} = \begin{pmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \cos v & \sin v & \sqrt{3} \\ -u\sin v & u\cos v & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\sqrt{3}u\cos v \\ -\sqrt{3}u\sin v \\ u \end{pmatrix},$$

tehát

$$\left\| \frac{\partial \vec{\phi}}{\partial u} \times \frac{\partial \vec{\phi}}{\partial v} \right\| = \sqrt{3u^2(\cos v)^2 + 3u^2(\sin v)^2 + u^2} = 2u.$$

Innen:

$$A = \int_0^{2\pi} \int_0^{\frac{2a}{\cos v+\sin v+\sqrt{3}}} 2u \, dudv = \int_0^{2\pi} \frac{4a^2}{(\cos v + \sin v + \sqrt{3})^2} dv = 4a^2(2\sqrt{3}\pi).$$

Most kiszámoljuk a síkból a kúp által kimetszett ellipszis területét. A korábbi számolások alapján meg tudjuk adni a metszetgörbét (u-t maximálisnak választva). Legyen a metszetgörbe c. Válasszunk egy biztosan az ellipszis belsejében lévő pontot, legyen ez a $(0,0,2a)$. Így már tudjuk paraméterezni az ellipszist is a következőképpen:

$$\vec{c}(v) = \begin{pmatrix} \frac{2a}{\cos v+\sin v+\sqrt{3}} \cdot \cos v \\ \frac{2a}{\cos v+\sin v+\sqrt{3}} \cdot \sin v \\ \frac{2a\sqrt{3}}{\cos v+\sin v+\sqrt{3}} \end{pmatrix}$$

$$\vec{\varphi}(u,v) = \begin{pmatrix} u \cdot \frac{2a}{\cos v+\sin v+\sqrt{3}} \cdot \cos v \\ u \cdot \frac{2a}{\cos v+\sin v+\sqrt{3}} \cdot \sin v \\ u \cdot \left(\frac{2a\sqrt{3}}{\cos v+\sin v+\sqrt{3}} - 2a \right) \end{pmatrix}$$

$$u \in [0,1], \; v \in [0,2\pi].$$

Innen az integrálást elvégezve azt kapjuk, hogy:

$$B = \int_0^{2\pi} \int_0^1 \left\| \frac{\partial \vec{\varphi}}{\partial u} \times \frac{\partial \vec{\varphi}}{\partial v} \right\| dudv = 12a^2\pi.$$

Tehát a test felszíne: $A + B = 4a^2\pi(2\sqrt{3}) + 12a^2\pi = 4a^2\pi(2\sqrt{3}+3)$.

9.5 FELADAT *a.) Számítsuk ki az*

$$x^2 + \left(y - \frac{a}{2}\right)^2 = \left(\frac{a}{2}\right)^2$$

forgáshenger azon palástrészének a felszínét, amelyet a $z \geq 0$ féltérben a

$$x^2 + y^2 = \frac{a^2 z^2}{h^2}$$

forgáskúp és az $[x, y]$ sík határol!

b.) Számítsuk ki az

$$x^2 + y^2 = \frac{a^2}{h^2} z^2$$

forgáskúp azon palástrészének felszínét, amelyet a $z \geq 0$ féltérben az

$$x^2 + \left(y - \frac{a}{2}\right)^2 = \left(\frac{a}{2}\right)^2$$

forgáshenger és az $[x, y]$ sík határol!

9.5 MEGOLDÁS b.) Meghatározzuk a kúp palástjához tartozó első főmennyiségeket:

$$\vec{r} = x\vec{e}_1 + y\vec{e}_2 + \sqrt{\frac{x^2 + y^2}{a^2} h^2}\vec{e}_3$$
$$\vec{r}_x = \vec{e}_1 + (x^2 + y^2)^{-1/2} \frac{h}{a} x\vec{e}_3$$
$$\vec{r}_y = \vec{e}_2 + (x^2 + y^2)^{-1/2} \frac{h}{a} y\vec{e}_3$$
$$E = 1 + (x^2 + y^2)^{-1} \frac{h^2}{a^2} x^2$$
$$F = (x^2 + y^2)^{-1} \frac{h^2}{a^2} xy$$
$$G = 1 + (x^2 + y^2)^{-1} \frac{h^2}{a^2} y^2.$$

Ebből

$$\sqrt{EG - F^2} = \sqrt{1 + \frac{h^2(x^2 + y^2)}{(x^2 + y^2)a^2}} = \sqrt{1 + \frac{h^2}{a^2}}.$$

Így a metszet területe:

$$\int_0^a \int_{-\sqrt{ya-y^2}}^{\sqrt{ya-y^2}} \sqrt{1 + \frac{h^2}{a^2}} dxdy = \int_0^a 2\sqrt{1 + \frac{h^2}{a^2}} \sqrt{ya - y^2} dy = \frac{1}{4} a^2 \pi \sqrt{1 + \frac{h^2}{a^2}}.$$

a.) A fentiekhez hasonló gondolatmenet alapján oldható meg.

9.6 FELADAT *Határozzuk meg a*

$$z = \frac{x^2}{2y} \quad 0 \leq x \leq 1 \quad 1 \leq y \leq 2$$

felületdarab felszínét!

9.6 MEGOLDÁS Az előző feladathoz hasonlóan járunk el:

$$\vec{r} = x\vec{e}_1 + y\vec{e}_2 + \frac{x^2}{2y}\vec{e}_3$$
$$\vec{r}_x = \vec{e}_1 + \frac{x}{y}\vec{e}_3$$
$$\vec{r}_y = \vec{e}_2 - \frac{x^2}{2y^2}\vec{e}_3$$
$$E = 1 + \frac{x^2}{y^2}$$
$$F = -\frac{x^3}{2y^3}$$
$$G = 1 + \frac{x^4}{4y^4}$$
$$\|\vec{r}_x \times \vec{r}_y\| = \sqrt{EG - F^2} = \sqrt{1 + \frac{x^2}{y^2} + \frac{x^4}{4y^4} + \frac{x^6}{4y^6} - \frac{x^6}{4y^6}} = \sqrt{\left(\frac{x^2}{2y^2} + 1\right)^2} = \frac{x^2}{2y^2} + 1.$$

A keresett terület:

$$A = \int_1^2 \int_0^1 \left(\frac{x^2}{2y^2} + 1\right) dxdy = \int_1^2 \left(\frac{1}{6y^2} + 1\right) dy = \frac{13}{12}.$$

9.7 FELADAT *Határozzuk meg a $z = \frac{x^2}{2a^2} + \frac{y^2}{2b^2}$ elliptikus paraboloid felszínét az $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ elliptikus hengeren belül!*

9.7 MEGOLDÁS Elliptikus hengerkoordinátázással számolva a következő helyettesítéseket végezzük: $x = Ra\cos\vec{\varphi}$, $y = Rb\sin\vec{\varphi}$, $z = z$ a Jacobi-determináns: Rab. Ekkor a paraboloid:

$$z = \frac{x^2}{2a^2} + \frac{y^2}{2b^2} = R^2/2$$
$$\vec{r}_R = \vec{e}_1 + R\vec{e}_3$$
$$\vec{r}_{\vec{\varphi}} = \vec{e}_2$$
$$E = 1 + R^2$$
$$F = 0$$
$$G = 1.$$

Így a kimetszett rész területe:

$$A = \int_0^1 \int_0^{2\pi} \sqrt{1 + R^2} Rab\, d\vec{\varphi} dR = \frac{2\pi ab}{3}(2^{\frac{3}{2}} - 1) = 3.82944ab.$$

9.8 FELADAT *Tekintsük az* $x^2+y^2+z^2=R^2, \quad x\geq 0 \quad z\geq 0$ *negyedgömbfelületnek azt a részét, amelyet belőle az* $x^2-12x+y^2=0$ *henger kimetsz. Határozzuk meg az így keletkező Viviani-levéldarabszerű (*$R=12$ *esetén pontosan az) képződmény felszínét!*

9.8 MEGOLDÁS A gömb első főmennyiségei:

$$\vec{r}=x\vec{e}_1+y\vec{e}_2+\sqrt{R^2-y^2-x^2}\vec{e}_3$$
$$\vec{r}_x=\vec{e}_1-(R^2-y^2-x^2)^{-\frac{1}{2}}x\vec{e}_3$$
$$\vec{r}_y=\vec{e}_2-(R^2-y^2-x^2)^{-\frac{1}{2}}y\vec{e}_3$$
$$E=1+(R^2-y^2-x^2)^{-1}x^2$$
$$F=(R^2-y^2-x^2)^{-1}xy$$
$$G=1+(R^2-y^2-x^2)^{-1}y^2$$
$$\sqrt{EG-F^2}=\sqrt{1+\frac{x^2+y^2}{R^2-(x^2+y^2)}}$$
$$A=\int_0^{12}\int_{-\sqrt{12x-x^2}}^{\sqrt{12x-x^2}}\sqrt{1+\frac{x^2+y^2}{R^2-(x^2+y^2)}}dydx$$

A felszín nagyságát a $\int_0^{12}\int_0^{\sqrt{12x-x^2}}\sqrt{1+\frac{x^2+y^2}{R^2-(x^2+y^2)}}dydx$ integrál kiszámításával nyerjük. ($R=12$ esetén a Viviani-levéldarab felszíne $A\approx 164,389$.)