Hol a hiba?

Az alábbi 11 kis párbeszédben egy-egy látszólagos matematikai ellentmondást mutatunk be. Keressük meg, hogy az érvelésben hol követtük el a hibás lépést!

Az anyag az
Instructor's Guide for Stewart's Calculus
Concepts and Contexts (ISBN 0-534-390447)
című könyvhöz ajánlott honlap fordítása

1. A deriválás egyik következménye, hogy $2 = 1$

Egy szép tavaszi napon a két óra közötti szünetben a Kalkulus könyvedet lapozgatod. Egyszer csak a vállad fölött meghallasz egy hangot:

– Hazugság! Hazugság! Ez a könyv nem más, mint hazugság!

– Szerintem tévedsz. A Kalkulus könyvem tele van hasznos képletekkel.

– Igen? És erre mit mondana a Kalkulus könyved?

Az illető erre előhúz egy papírdarabot, rajta a következő sorokkal:

Ha x egy tetszőleges pozitív egész, akkor

$$x = \underbrace{1 + 1 + \cdots + 1}_{x\text{-szer}}$$

$$x^2 = \underbrace{x + x + x + \cdots + x}_{x\text{-szer}}$$

$$(x^2)' = (\underbrace{x + x + x + \cdots + x}_{x\text{-szer}})'$$

$$2x = \underbrace{x' + x' + x' + \cdots + x'}_{x\text{-szer}}$$

$$2x = \underbrace{1 + 1 + 1 + \cdots + 1}_{x\text{-szer}}$$

$$2x = x$$

$$2 = 1$$

2. A Newton–Leibniz-képlet szerint $5 = 0$

Épp most fejeződött be az eddigi legérdekesebb órád analízisből: az imént megtanultátok, hogy a két alapfogalom, a deriválás és az integrálás mindketten belefoglalhatók egy közös képletbe. Mialatt a többiekkel erről tanakodtok a szünetben, feltűnik közöttetek egy illető és ezt kiáltja:

– Ez a képlet, amin az egész analízis nyugszik, teljes értelmetlenségre vezet. Ezt nézzétek!

Ezzel krétát ragad és széles mozdulatokkal elkezd írni a táblára:

Ha f egy adott folytonos függvény és $F(x) = \int_a^x f(t)dt$, akkor jól ismert, hogy az integrálfüggvény egyben primitív függvény is, azaz

$$F'(x) = f(x).$$

Legyen most $F(x) = \sin(x) + 5$. Ekkor nyilván $F'(x) = f(x) = \cos(x)$, vagyis a fentiek alapján

$$F(x) = \int_a^x \cos(t)dt,$$

azaz

$$\sin(x) + 5 = \int_a^x \cos(t)dt.$$

A Newton–Leibniz-képlet szerint viszont

$$\sin(x) + 5 = \sin(x) - \sin(a),$$

s így

$$5 = -\sin(a).$$

Ha itt $a = 0$, akkor azt kapjuk, hogy $5 = 0$.

3. A helyettesítéses integrálás alapján egy pozitív görbe alatti terület 0-val egyenlő

Egy szép tavaszi napon a többiekkel épp a helyettesítéses integrálást gyakoroljátok, amikor hirtelen megjelenik a hátad mögött egy idegen.

– Mit csináltok ti itt ilyenkor? – kérdi.

– A helyettesítéses integrálást gyakoroljuk. Egyikünk megold egy integrálási példát, a többiek pedig ellenőrzik, hogy jó-e a számolás.

– Én is beszállhatok? – kérdezi hamiskásan az idegen.

Társaiddal együtt kissé gyanakodtok, de győz a kíváncsiság. Az idegen elővesz egy kis füzetet és ezt írja fel:

$$\int_{-1}^{1} \frac{1}{1+x^4} dx = \int_{-1}^{1} \frac{\frac{1}{x^4}}{\frac{1}{x^4}+1} dx.$$

Vezessük most be az $u = \frac{1}{x^4}$ új változót. Ekkor $x = u^{-1/4}$, vagyis

$$dx = -\frac{1}{4}u^{-5/4}du.$$

Mivel $x = -1$ esetén $u = 1$, és $x = 1$ esetén is $u = 1$, ezért

$$\int_{-1}^{1} \frac{1}{1+x^4} dx = \int_{1}^{1} \frac{u}{u+1} \left(-\frac{1}{4}u^{-5/4}\right) du.$$

Az eredeti integrál értéke nyilván pozitív, hiszen az $\frac{1}{1+x^4}$ függvény mindenhol pozitív és egy mindenhol pozitív függvény görbe alatti területe -1-től 1-ig csak pozitív lehet. A helyettesítés után kapott integrál viszont nyilván 0, hiszen 1-től 1-ig integrálunk egy függvényt.

4. Egy trigonometrikus integrál alapján $1 = 2$

Egy tavaszi délelőtt épp az órádra igyekszel.

– Az analízis gyönyörű! – mormogod fennhangon.

– Hazugság! Hazugság! – mondja a vállad fölött egy ismerős hang.

– Na ne mondd! Épp most tanultam a trigonometrikus integrálokról. Nem volt nehéz rész és egyetlen hazug dolog sincs benne.

– Nocsak tényleg? És mit szólnál ehhez a kis igaz/hamis teszthez?
Erre elővesz egy papírfecnit, rajta mindössze két sorral:

$$\int -2\sin(2x)dx = \cos(2x),$$

illetve

$$\int -4\cos(x)\sin(x)dx = 2\cos^2(x).$$

A jobb oldalakat visszaderiválva látszik, hogy mindkét formula igaz. Viszont tudjuk, hogy $-2\sin(2x) = -2(2\sin(x)\cos(x)) = -4\cos(x)\sin(x)$, így az integrálokból $\cos(2x) = 2\cos^2(x)$. Ha itt x helyére 0-t írunk, akkor $1 = 2$.

5. Parciális integrálással megmutatjuk, hogy $0 = -1$

A mai analízis előadáson a parciális integrálás szabályát tanultátok meg. Éppen a következő órádra igyekszel, amikor a már-már jól ismert illető hozzád lép és ezt mondja:

– Hallottam, hogy már tudsz parciálisan integrálni.

– Valóban! Az előbb értettem meg a képletét.

– Akkor ehhez a pár sorhoz mit szólsz? – kérdi, s ezzel átnyújt egy papírdarabot neked.

Tekintsük az $\int \mathrm{tg}(x)dx$ integrál kiszámítását. Mivel

$$\mathrm{tg}(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)},$$

ezért integrálhatunk parciálisan: legyen

$$u = \frac{1}{\cos(x)} \quad \text{és} \quad v' = \sin(x).$$

Ekkor

$$u' = \frac{\sin(x)}{\cos^2(x)} \quad \text{és} \quad v = -\cos(x),$$

tehát

$$\int \mathrm{tg}(x)dx = \int uv'dx = uv - \int u'vdx = -1 - \int -\mathrm{tg}(x)dx,$$

azaz

$$\int \mathrm{tg}(x)dx = -1 + \int \mathrm{tg}(x)dx.$$

Az integrállal való egyszerűsítés után azt kapjuk, hogy $0 = -1$.

6. Parciális integrálással ismét megmutatjuk, hogy $0 = -1$

Micsoda csodás nap! Sikeresen megfejtetted az idegen előző álbizonyítását.

– Az integrációs konstansok számítanak! – jelented ki neki.

– Valóban! A határozatlan integrálokban mindig ott bujkálnak azok a konstansok. A tanulság: nem szabad megfeledkezni róluk. De az előző példám csak a bemelegítés volt. Te is jól tudod, hogy a határozott *integrálokban ilyesféle dolgok nem fordulhatnak elő.*

– Nem bizony, hiszen ott nincsenek integrációs állandók.

– Akkor ez tetszeni fog neked.

És ezzel ismét átnyújt egy papírdarabot számodra.

Tekintsük az $\int_{\pi/6}^{\pi/4} \mathrm{tg}(x)dx$ határozott integrált, vagyis számítsuk ki parciálisan a

$$\int_{\pi/6}^{\pi/4} \frac{\sin(x)}{\cos(x)}dx$$

kifejezés értékét. Legyen ismét

$$u = \frac{1}{\cos(x)} \quad \text{és} \quad v' = \sin(x).$$

Ekkor

$$u' = \frac{\sin(x)}{\cos^2(x)} \quad \text{és} \quad v = -\cos(x),$$

tehát

$$\int_{\pi/6}^{\pi/4} \mathrm{tg}(x)dx = \int_{\pi/6}^{\pi/4} uv'dx = uv - \int_{\pi/6}^{\pi/4} u'vdx = -1 - \int_{\pi/6}^{\pi/4} -\mathrm{tg}(x)dx,$$

azaz

$$\int_{\pi/6}^{\pi/4} \mathrm{tg}(x)dx = -1 + \int_{\pi/6}^{\pi/4} \mathrm{tg}(x)dx.$$

A tangensfüggvény görbe alatti területe $\pi/6$ és $\pi/4$ között véges, így egyszerűsíthetünk az integrállal: ismét azt látjuk, hogy $0 = -1$.

7. A L'Hospital-szabály

Ma egy érdekes tételt tanultatok: a L'Hospital-szabályt, amellyel például $0/0$ vagy ∞/∞ alakú limeszeket lehet hatékonyan kiszámolni. Már várod, hogy mikor bukkan fel az idegen.

– Ma milyen hibás bizonyítással rukkolsz elő? – kérdezed.

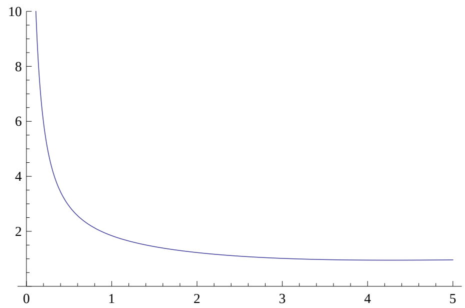
– Ó! Van például egy ellenpéldám a L'Hospital-szabályra.

– Nocsak! Lássuk!

Az átnyújtott papírlapon az alábbi levezetés olvasható.

Számítsuk ki a
$$\lim_{x\to\infty} \frac{x^2+\sin(x)}{x^2}$$
határértéket. Mivel ez ∞/∞ alakú, ezért a L'Hospital-szabály szerint értéke megegyezik az alábbival:
$$\lim_{x\to\infty} \frac{2x+\cos(x)}{2x}.$$
Ez még mindig ∞/∞ alakú, ezért a L'Hospital-szabály ismételt alkalmazásával azt kapjuk, hogy az eredeti limesz ugyanaz, mint a
$$\lim_{x\to\infty} \frac{2-\sin(x)}{2}$$
határérték. A sin függvény azonban folyamatosan hullámzik, így a ∞-ben nincs határértéke, a legutolsó limesz tehát nem létezik, így a L'Hospital-szabály értelmében nem létezik az eredeti határérték sem.

Ennek viszont ellentmond a következő megfigyelés: számítógéppel kirajzolva az $\frac{x^2+\sin(x)}{x^2}$ függvény grafikonját, azt látjuk, hogy a függvény határértéke a végtelenben létezik és 1.



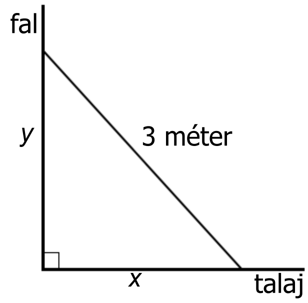
Az $\frac{x^2+\sin(x)}{x^2}$ függvény grafikonja.

8. A lecsúszó létra felső végpontja mindvégig 0 sebességgel mozog

A Kalkulus könyvedben szerepel az alábbi feladat:

– Egy 3 méter magas létra az ábrának megfelelően a falnak támaszkodik. A létra lecsúszik, de úgy, hogy mindkét vége folyamatosan érinti a falat, illetve a talajt. Tudjuk, hogy az alsó végpont 1 méter/másodperc sebességgel mozog jobbra. Mennyi a létra felső végének pillanatnyi sebessége akkor, amikor az alja 2 méterre van a faltól?

Egyik társad az alábbi megoldással áll elő:



Keresendő tehát a dy/dt mennyiség, ami a létra süllyedésének sebességét jelenti. A Pitagorasz-tétel miatt
$$x^2 + y^2 = 3^2.$$
A feltételekből tudjuk, hogy a létra alsó vége 1 méter/másodperc sebességgel mozog jobbra, azaz $dx/dt = 1$. Nekünk dy/dt értéke kell akkor, amikor $x = 2$. A fenti négyzetes összefüggésbe ezt behelyettesítve azt nyerjük, hogy
$$2^2 + y^2 = 3^2.$$
Mindkét oldalt deriválva t szerint ebből az látszik, hogy
$$2y\ dy/dt = 0,$$
melyből egyszerűsítés után
$$dy/dt = 0$$
adódik, a létra felső vége tehát nyugalomban van.

9. A változók szétválasztása

A mai órán megértetted, hogy mit jelent a szétválasztható differenciálegyenlet fogalma, és megtanultad, hogyan kell ezeket megoldani. Az idegen már az ajtóban vár téged.

– Mondd csak, meg tudnád oldani a
$$\frac{dy}{dt} = \sqrt{1-y^2}, \quad y(0) = 0$$
kezdetiérték-feladatot?

Némi gondolkodás után rábólintasz, hiszen ez az egyenlet is szétválasztható. Az idegen a kezedbe nyom egy papirost.

– Akkor el kell ismerned, hogy a matematikában ellentmondás van, amint azt az alábbi megoldásom mutatja.

$$\frac{dy}{dt} = \sqrt{1-y^2}$$

$$\int \frac{dy}{\sqrt{1-y^2}} = \int 1dt$$

$$\arcsin(y) = t + c.$$

Mivel most $y(0) = 0$, ezért $c = 0$. A kezdetiérték-feladat megoldása tehát

$$y(t) = \sin(t).$$

A differenciálegyenlet szerint $\frac{dy}{dt} = \sqrt{1-y^2} \geq 0$, hiszen a gyök értéke sosem lehet negatív, azonban most $\frac{dy}{dt} = \cos(t)$ is nyilván fennáll, és tudjuk, hogy a cos függvény negatív értékeket is felvehet.

10. A változók szétválasztása: exponenciális növekedés

A mai napon ismét egy érdekes differenciálegyenletet oldottatok meg.

Legyen k egy rögzített konstans. Ekkor az alábbi tétel igaz:

$$\text{Ha} \quad dy/dx = k\,y, \quad \text{akkor} \quad y(x) = Ae^{kx}$$

áll fenn, alkalmas A valós konstanssal. Itt A értéke pozitív, nulla és negatív egyaránt lehet, az $y_0 = y(x_0)$ kezdeti érték előjelétől függően.

A fenti differenciálegyenlet megoldása a következőképpen történt:

$$\frac{dy}{dx} = k\,y$$

$$\frac{dy}{y} = k\,dx,$$

melyből integrálással

$$\ln(y) = kx + c$$

adódik, melyből

$$y(x) = e^{kx+c},$$

vagyis

$$y(x) = e^c e^{kx},$$

azaz

$$y(x) = Ae^{kx},$$

ahol az $A = e^c$ rövidítéssel éltünk. Mivel azonban e^c minden valós c esetén pozitív, ezért $A > 0$ is fennáll, ami ellentmond a fenti tételben annak, hogy A tetszőleges (előjelű) valós szám lehet.

11. Improprius integrálok és Taylor-sorok

Tegnap a Taylor-sorokról tanultatok. Az idegen hozzád lép, köszön és máris felteszi aktuális kérdését:

– Mondd csak, mit tanultál, mennyi $\int_0^\infty 1dx$ *értéke?*

Reflexből rávágod:

– A görbe alatti terület végtelen, tehát az integrál divergens.

De az idegen folytatja:

– És mennyi $\int_0^\infty \left(1 - x + \frac{x^2}{2}\right) dx$*? Vagy mennyi* $\int_0^\infty \left(1 - x + \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{24}\right) dx$*?*

Némi gondolkodás után helyesen azt feleled:

– Bármely rögzített, nemnulla polinom 0-tól ∞*-ig vett improprius integrálja divergens.*

– Tehát azt állítod, hogy bármely k *pozitív egész esetén az*

$$\int_0^\infty \left(1 - x + \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{24} - \ldots + (-1)^k \frac{x^k}{k!}\right) dx$$

integrál divergens?

– Igen, minden rögzített k *pozitív egész esetén divergens.*

– De azt te is tudod, hogy

$$e^{-x} = 1 - x + \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{24} - \ldots + (-1)^k \frac{x^k}{k!} + \ldots,$$

és hogy $\int_0^\infty e^{-x} = 1$*, amely integrál viszont nyilván konvergens.*