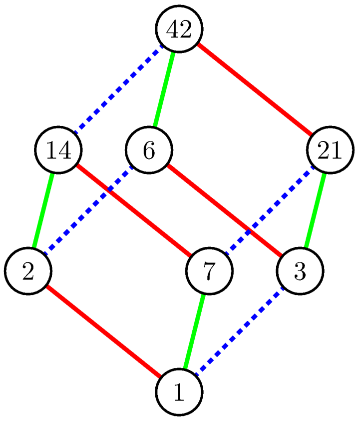
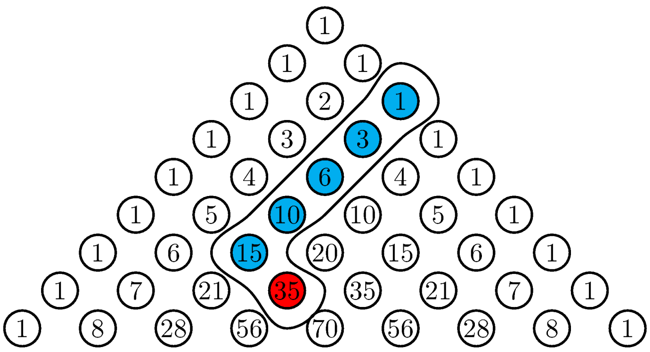
Elemi matematika feladatgyűjtemény



Hegyvári Norbert, Hraskó András, Korándi József, Török Judit



Szerkesztette: Hraskó András
ELTE TTK MATEMATIKAI INTÉZET
Matematikatanítási és Módszertani Központ
http://mathdid.elte.hu/

2013. május 31.

Támop 4.1.2.A/111/1

Tartalomjegyzék

1. fejezet

Előszó

1.1. A gyűjtemény célja

Az egyetemi elemi matematika tantárgy alapvető célja a problémamegoldó készség és a matematikai gondolkodásmód fejlesztése. A kötet ehhez kíván segítséget adni struktúrált feladatanyagával többszintű megoldásaival.

Az elemi matematika tárgy lehetőséget ad a leendő tanároknak rutin szerzésre a középiskolai ismeretekre épülő problémamegoldásban. Az egyéni feladatmegoldó készség fejlesztése mellett azonban különösen nagy hangsúlyt kap, hogy a hallgatók a feladatmegoldás során egy-egy feladathoz több korosztály szintjének megfelelően is tudjanak közeledni.

Az elemi matematika tárgy a „híd” szerepét tölti be a középiskolai matematika és az egyetemi tanulmányok között. Inspirációt ad a modern, elvont fogalmakhoz, megközelíthetővé tesz nehéz gondolatokat, összefüggéseket. Megfordítva, az elemi matematika művelése hozzásegíthet ahhoz is, hogy az egyetemen tanult matematikai eszközök működését ismerős környezetben vizsgáljuk, gyakoroljuk, értelmezzük.

Elemi matematika témájú egyetemi példatárat legutoljára 1970-ben adtak ki. Az egységes tanárképzés (10-18 éves) szükségessé tette az matematikatanításhoz elengedhetetlen elemi feladatok átstrukturálását új szempontok szerint, valamint a mai technikai feltételeknek is megfelelő formában való feldolgozását.

1.2. A kötet használata

Az Elemi matematika feladatgyűjtemény egyszerre könyv és digitális segédanyag. Két fő részből áll: az első fele tartalmazza a példasorokat tematikus összeállításban, a második felében találhatók a megoldások, megjegyzések, javaslatok. A digitális verzióban pirosan megjelenő hiperlinkek segítik a közlekedést feladatok és megoldásaik között. A rózsaszín linkek külső – az esetleg kinyomtatott változatban nem megjelenő – anyagra, a digitális változathoz készült animációkra vagy egyéb weboldalra mutatnak. A világoszölden megjelenő kódok az irodalomjegyzékhez tartoznak.

A gondolkodást és a megértést helyenként „Segítségek”, „Előzetes megjegyzések”, több mint 200 ábra és 20 animáció segíti. Majdnem minden feladathoz tartozik legalább egy kidolgozott megoldás, de helyenként több is.

A digitális világba belépve az ember hajlamos becsapni önmagát: az képzeli, hogy a klikkelgetéstől megokosodik. Javasoljuk ezt a szabályt: „gondolkodj, mielőtt linkelsz”. Azért készítettük a gyűjteményt, hogy a hallgatók lássanak ötleteket, sokféle megközelítési módot, bizonyításokat, de az igazi látás belül történik. Ennek fejlesztéséhez elmélyülés, a példákon való önálló töprengés szükséges. A második, harmadik megoldások is érdekesebbek, ha az ember önállóan is megoldotta egyféleképpen a példát vagy legalábbis eljutott benne valameddig.

A kötethez tartozó animációk is olyanok, hogy kis gyakorlással a diákok is el tudják készíteni azokat vagy azokhoz hasonlókat. Bátorítjuk a nebulókat, hogy használjanak matematikai szoftvereket, például interaktív geometriai programokat és azzal gyűjtsenek maguknak inspirációt, ötleteket, ha elakadnak egy problémával vagy éppen többet szeretnének megérteni egy feladattal kapcsolatban.

A kötetet úgy terveztük, hogy első fele – a megoldások nélküli feladatgyűjtemény – kényelmesen leválasztható, kinyomtatható legyen. A diákoknak azt javasoljuk, hogy használjanak egy ilyen „papír alapú” változatot és alkalmanként üljenek a géphez ellenőrizni saját ötleteiket, megnézni más megközelítési módokat. Aki igazán igényes megpróbálkozhat maga is többféle módon eljutni a megoldáshoz.

1.3. Köszönetnyilvánítás

A kötet számos példáját a szerzők kollégái, az ELTE TTK Matematikai Intézet Matematikatanítási és Módszertani Központjának oktatói illetve a Budapesti Fazekas Mihály Általános Iskola és Gimnázium tanárai javasolták, inspirálták. A szerzők köszönik nekik a gyümölcsöző együttműködést. Olyan sok feladat és megközelítési mód származik Pósa Lajostól és tanítványaitól, hogy a szerzők ezeket nem tudják számba venni, de hálásak mindazokért a gondolatokért, amelyek tőle közvetlenül vagy másokon keresztül hozzájuk jutottak. Számos ötlet, megoldás, sőt feladat a diákoktól származik, egyetemistáktól, gimnazistáktól, vagy általános iskolásoktól. A szerzők csak felfigyeltek arra az értékre, amely a fiataloktól jött és most köszönettel visszaforgatják mindezeket az újabb generációknak, hátha inspirálja őket.

A pályázat elkészítésében, a szöveg- és ábrakonverziókban nagyon sokat segített Fried Katalin, nélküle ez a kötet nem jöhetett volna létre. Rózsahegyi Márta alapos munkát végzett a feladatsor és a megoldások széttagolásával és a hiperlinkek ellenőrzésével, a gyűjteményt sokkal használhatóbbá tette. A szerzők hálásak Pálfalvi Józsefné lektori munkájáért, ő rendkívül sok hibát észrevett és javaslatot is tett korrigálásukra. Köszön-

jük tanszékvezetőnknek Vásárhelyi Évának a tanácsokat, konzultációkat és a megnyugtató szavakat a nehéz pillanatokban.

Végül köszönetet mondunk mindazoknak a programozóknak, akik a LaTeX, a GeoGebra és a PSTricks szabad szoftverek fejlesztésével lehetővé tették számunkra a feladatgyűjtemény önálló létrehozását.

Örülünk a feladatokkal, megoldásokkal kapcsolatos észrevételeknek, kérjük ezeket küldjék a hraskoa@fazekas.hu vagy a vasarely@cs.elte.hu címre.

Hegyvári Norbert, Hraskó András, Korándi József, Török Judit

1.4. Irodalom

Nem mindig utalunk külön rá, de magunk is sokszor használtuk és az általános iskolától mindenkinek ajánljuk a Fejtörő feladatok felsősöknek[FFF] kötetet, a Varga Tamás matematikaverseny és a Kalmár verseny példáit és megoldásait ([VARGA1], [VARGA2], [VARGA3]), [KAL94] valamint a Bergengóc példatárakat ([BERG1], [BERG2]).

Több ismeretet igénylő kiválóan kidolgozott gyűjtemények a „Válogatott feladatok és tételek az elemi matematika köréből” sorozat ([SKLA1],[SKLA21]), valamint a Matematikai Versenytételek ([MATVR1], [MATVR2], [MATVR3]) kötetei. Végül minden gimnazistának és egyetemistának ajánljuk több mint 100 éve a matematikatanítás szolgálatában álló Középiskolai Matematikai és Fizikai Lapokat ([KÖMAL], [KÖMARH]) és szovjet-orosz testvérét a Kvantot ([KVT68], [KVNWEB]).

A további javasolt olvasmányokra, feladatgyűjteményekre és weboldalakra a fejezetek végére írt „Ajánlók”-ban hivatkozunk.

1.5. Animációk jegyzéke

Animációk:

- Segítség a 9.2. a) fel. megoldásához;

  `http://matek.fazekas.hu/portal/elte/elemifgyujt/html/01.html`

- Segítség a 9.2. g) feladathoz

  `http://matek.fazekas.hu/portal/elte/elemifgyujt/html/02.html`

- A 9.2. l) mego.;

  `http://matek.fazekas.hu/portal/elte/elemifgyujt/html/03.html`

- Az előbbiben Q mértani helyének megjelenítése:

  `http://matek.fazekas.hu/portal/elte/elemifgyujt/html/04.html`

- A 9.2. m) feladat 9.22. ábrája;
  http://matek.fazekas.hu/portal/elte/elemifgyujt/html/05.html
- Segítség a 9.3. a) feladathoz
  http://matek.fazekas.hu/portal/elte/elemifgyujt/html/06.html
- Segítség a 9.18. feladathoz
  http://matek.fazekas.hu/portal/elte/elemifgyujt/html/07.html
- A 2.12. fel. szemléltetése;
  http://matek.fazekas.hu/portal/elte/elemifgyujt/html/08.html
- A 3.2. a), b), c), j), k) feladatok szemléltetése;
  http://matek.fazekas.hu/portal/elte/elemifgyujt/html/09.html
- A 3.2. d), e), f), g), h) feladatok szemléltetése;
  http://matek.fazekas.hu/portal/elte/elemifgyujt/html/10.html
- A 3.2. n), o), t) feladatok szemléltetése;
  http://matek.fazekas.hu/portal/elte/elemifgyujt/html/11.html
- A 3.2. q) feladat szemléltetése;
  http://matek.fazekas.hu/portal/elte/elemifgyujt/html/12.html
- A 3.2. s) feladat szemléltetése;
  http://matek.fazekas.hu/portal/elte/elemifgyujt/html/13.html
- A 3.3. fel. szemléltetése;
  http://matek.fazekas.hu/portal/elte/elemifgyujt/html/14.html
- A 3.4. fel. szemléletes megoldása;
  http://matek.fazekas.hu/portal/elte/elemifgyujt/html/15.html
- A 3.5. fel. szemléletes megoldása;
  http://matek.fazekas.hu/portal/elte/elemifgyujt/html/16.html

Interaktív animációk:

- A 2.12. fel. szemléltetése;
  http://matek.fazekas.hu/portal/elte/elemifgyujt/html/08i.html

- A 3.2. a), b), c), j), k) feladatok szemléltetése;
  http://matek.fazekas.hu/portal/elte/elemifgyujt/html/09i.html
- A 3.2. d), e), f), g), h) feladatok szemléltetése;
  http://matek.fazekas.hu/portal/elte/elemifgyujt/html/10i.html
- A 3.2. n), o), t) feladatok szemléltetése;
  http://matek.fazekas.hu/portal/elte/elemifgyujt/html/11i.html
- A 3.2. q) feladat szemléltetése;
  http://matek.fazekas.hu/portal/elte/elemifgyujt/html/12i.html
- A 3.2. s) feladat szemléltetése;
  http://matek.fazekas.hu/portal/elte/elemifgyujt/html/13i.html
- A 3.3. fel. szemléltetése;
  http://matek.fazekas.hu/portal/elte/elemifgyujt/html/14i.html
- A 3.4. fel. szemléletes megoldása;
  http://matek.fazekas.hu/portal/elte/elemifgyujt/html/15i.html
- A 3.5. fel. szemléletes megoldása;
  http://matek.fazekas.hu/portal/elte/elemifgyujt/html/16i.html
- A 3.6. a) fel. szemléletes megoldása;
  http://matek.fazekas.hu/portal/elte/elemifgyujt/html/17i.html
- A 3.6. b) fel. szemléletes megoldása;
  http://matek.fazekas.hu/portal/elte/elemifgyujt/html/18i.html
- A 9.2. o) fel. szemléltetése;
  http://matek.fazekas.hu/portal/elte/elemifgyujt/html/19i.html
- A 9.2. o) fel. IV. megoldásának 17.48. ábrája;
  http://matek.fazekas.hu/portal/elte/elemifgyujt/html/20i.html

2. fejezet

Bevezető feladatok

Ajánló

Olvasnivalót, példatárakat ajánlottuk már a bevezetőben és a témához kapcsolódva megtesszük ugyanezt a fejezetek végén. Általános bevezető, kedvcsináló példatárnak Andrásfai Béla „Versenymatek gyerekeknek”[ANDVS] valamint JA. I. Perelman „Matematikai történetek és rejtvények”[PEREJT] könyvét javasoljuk.

2.1. Logika

2.1. Feladat *(I. mego., II. mego., III. mego.)*

Három barát nyulakra vadászott. Mindhárman különböző számú nyulat lőttek. A vadászklubban ezt mesélték:

A: Én lőttem a legtöbb nyulat. C lőtte a legkevesebbet.

B: Én lőttem a legtöbb nyulat. Több nyulat lőttem, mint A és C együttvéve!

C: Én lőttem a legtöbb nyulat. B fele annyit lőtt, mint én.

Ki lőtte a legtöbb nyulat, ha tudjuk, hogy az elhangzott 6 állításból három igaz, három hamis.

Mit mondhatunk arról, hogy ki lőtte a legkevesebb nyulat?

2.2. Feladat *(Mego.)*

Két család, az Igaz és a Hamis 5 gyermeke Cili, Lili, Vili, Juci és Saci.

Az Igaz családban minden gyerek mindig igazat mond, a Hamis családban minden gyermek minden állítása hamis.

Melyik gyereknek mi lehet a vezetékneve, ha ezeket állítják?

Cili: Juci neve nem Igaz.

Juci: Vili és Cili testvérek.

Lili: Saci nem testvére Jucinak.
Saci: Vili vezetékneve Hamis.
Vili: Lili a Hamis család tagja.

2.3. Feladat *(Mego.)*

János, Péter, Tamás, Gyuri, István testvérek. Egyszer valamelyikük betört egy ablakot. Apjuk kérdésére, hogy ki volt a tettes, a következőket mondták:

János: Péter vagy Tamás volt.
Péter: Sem Gyuri, sem én nem voltam.
Tamás: Mindketten hazudtok.
István: Nem, az egyik közülük igazat mond, de a másik nem.
Gyuri: Nem, István, nincs igazad.

Anyjuk ehhez hozzátette: fiaim közül 3 valóban igazat mond, de abban, amit a másik kettő mondott, nem bízom.

Ki törte be az ablakot?

2.4. Feladat *(Mego.)*

Egy szigeten járunk, ahol lovagok és lókötők élnek. A lovagok mindig igazat mondanak, a lókötők mindig hazudnak. Két embert egyforma típusúnak nevezünk, ha vagy mindketten lovagok, vagy mindketten lókötők. A, B és C három szigeti lakos. A ezt mondja: „B és C egyforma típusú.”. Valaki megkérdezi C-től: „Egyforma típusú A és B?”. Mit válaszol?

2.5. Feladat *(a) mego., b) mego.)*

Egy szigeten lovagok és bolondok élnek. A lovagok mindig igazat mondanak, a bolondok kiszámíthatatlanok: mondanak igazat is, hazudnak is kedvük szerint. Vendégként érkeztünk a szigetre. Szeretnénk eldönteni ki milyen ember. Bárkitől megkérdezhetjük bárki másra rámutatva, hogy az milyen ember. Hány kérdés kell ahhoz, hogy mindenkiről megtudjuk miféle,

a) *ha $5-5$ bolond és lovag van a szigeten?*

b) *ha 1 bolond és n lovag van a szigeten?*

2.6. Feladat *(a) mego.,b) mego.)*

a) *Anyu és Apu külön-külön Béla fülébe súgta kedvenc számát. Béla Cili fülébe súgta a hallott számok szorzatát és Dezsőébe az összegüket. Ezután az alábbi beszélgetés hangzott el:*

Cili: Nem tudom melyik ez a két szám.
Dezső: Én sem tudom melyik ez a két szám.
Cili: Akkor én már tudom melyik ez a két szám.
Dezső:

Melyik ez e két szám? Mit mondott Dezső? Cili, Dezső (és Béla) okosak, tudják is ezt egymásról, de egyikük sem hallotta milyen számot mondott másikuknak Béla, és a fentieken kívül nem beszéltek egymással.

b) *És ha a beszélgetés kissé hosszabb volt? Pl. mi lehetett a két szám, az alábbi beszélgetés esetén?*

Cili: Nem tudom; Dezső: Én sem tudom; Cili: még most sem tudom;
Dezső: Akkor én már tudom!

2.7. Feladat *A csivambák közt esetleg vannak böröszňyegek és lehetnek pöndörgő csivambák is. Keressük meg a rájuk vonatkozó alábbi logikai állítások halmazábrás megfelelőit!*

I. *Minden börösznyeg pöndörgő.*

II. *Ha egy csivamba börösznyeg, akkor pöndörgő.*

III. *Ha egy csivamba pöndörgő, akkor börösznyeg.*

IV. *Nincs olyan börösznyeg, aki nem lenne pöndörgő.*

V. *Ha A pöndörgő, akkor biztosan nem börösznyeg.*

VI. *Ha A börösznyeg, akkor biztosan nem pöndörgő.*

VII. *Van olyan börösznyeg, aki nem pöndörgő.*

VIII. *B ugyan pöndörgő, mégsem börösznyeg.*

IX. *Ha egy csivamba nem pöndörgő, akkor biztosan börösznyeg.*

X. *Ha egy csivamba nem börösznyeg, akkor biztosan pöndörgő.*

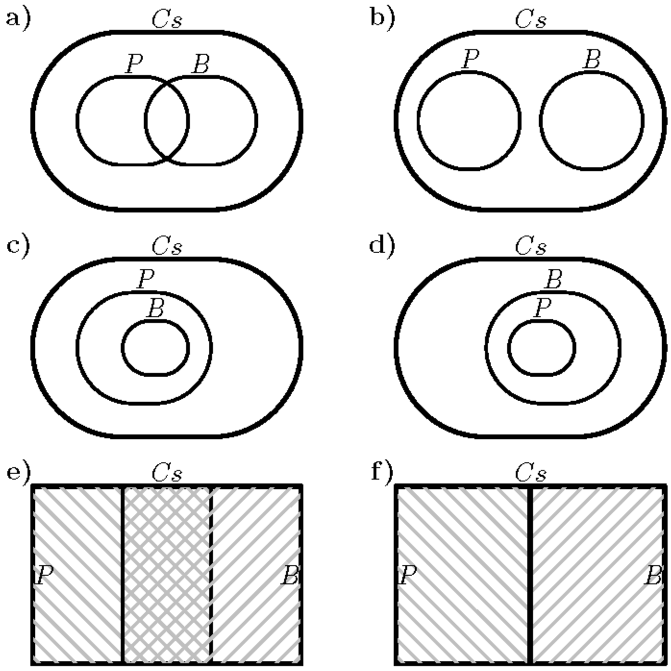
XI. *Egy csivamba vagy pöndörgő vagy legalábbis börösznyeg.*

XII.* *Egy csivamba vagy pöndörgő vagy börösznyeg.*

2.8. Feladat *A csivambák közt vannak börösznyegek, vannak, akik pöndörgők és a csivambák között egyesek szeretnek kongutálni. Ábrázoljuk ezek halmazait, ha tudjuk, hogy (minden alpont külön-külön feladat)*

I. *Ha egy pöndörgő börösznyeg, akkor biztosan szeret kongutálni.*

II. *Minden olyan börösznyeg, aki pöndörgő, az szeret kongutálni.*



2.1. ábra.

III. *Ha egy csivamba szeret kongutálni, akkor pöndörgő börösznyeg.*

IV. *Nincsen olyan pöndörgő börösznyeg, aki ne szeretne kongutálni.*

V. *A nem pöndörgő börösznyegek kongutálni se szeretnek, míg azok a pöndörgők, akik nem börösznyegek mind imádnak kongutálni.*

VI. *Akkor és csakis akkor szeret kongutálni egy csivamba, ha olyan pöndörgő, aki nem börösznyeg.*

VII. *Pontosan akkor pöndörgő egy nem börösznyeg, ha szeret kongutálni.*

2.9. Feladat *Rajzoljuk le az*

a) 2-*vel, a* 3-*mal, a* 4-*gyel;*
b) 4-*vel, a* 6-*mal, a* 12-*vel;*
c) 3-*mal,* 4-*vel, a* 6-*tal;*
d) 30-*cal, a* 42-*vel, a* 70-*nel, és a* 105-*tel;*
e) 12-*vel, a* 10-*zel, a* 15-*tel,* 20-*szal;*

osztható számok halmazait „optimális” Venn diagramon, tehát a diagramon ne legyen olyan tartomány, ahová nem írható egész szám, de minden egész számot be lehessen írni egy és csakis egy tartományba.

2.10. Feladat *(Mego.)*

Az a, b valós számokkal kapcsolatban megadunk két állítást. Melyikből melyik következik?

a) *I.* $a = b$, *II.* $a^2 = b^2$.

b) *I.* $a = b$, *II.* $a^3 = b^3$.

c) *I.* $ab = 0$, *II.* $a = b = 0$.

2.11. Feladat *(Mego.)*

Az alábbi állítások a $p(x) = ax^2 + bx + c$ másodfokú polinomra vonatkoznak. Milyen logikai kapcsolat van közöttük?

A: $a + b + c = 1$.

B: *a polinomnak gyöke az* 1.

C: *van egy olyan* d *valós szám, amelyre* $p(x) = a(x-1)(x+d)$.

2.12. Feladat *(*Szimmetrikus négyszögek*)(Mego.)*

Az alábbiak közül melyek az igaz állítások?

I. *Ha egy négyszögnek van szimmetriatengelye akkor deltoid vagy trapéz.*

II. *Ha egy négyszög deltoid vagy trapéz, akkor van szimmetriatengelye.*

III. *Ha egy négyszögnek van szimmetriatengelye akkor konvex.*

IV. *Egy négyszög pontosan akkor téglalap vagy rombusz, ha van két szimmetriatengelye.*

V. *A téglalapnak és a rombusznak is pontosan két szimmetriatengelye van.*

2.13. Feladat *(*Szimmetrikus sokszögek*)(Mego.)*

Az alábbiak közül melyek az igaz állítások?

I. *Ha egy négyszögnek van két szimmetriatengelye, akkor középpontosan is szimmetrikus.*

II. *Ha egy négyszög középpontosan szimmetrikus, akkor van két szimmetriatengelye.*

III. *Ha van egy olyan nemtriviális (*$0°$*-tól különböző) forgatás, amely egy hatszöget önmagára képez, akkor az a hatszög szabályos.*

IV. *Ha egy hatszögnek van két szimmetriatengelye, akkor középpontosan is szimmetrikus.*

V. *Ha egy hatszög középpontosan szimmetrikus, akkor van két szimmetriatengelye.*

VI. *A szabályos ötszögnek pontosan két szimmetriatengelye van.*

VII. *Egy ötszög pontosan akkor szabályos, ha van két szimmetriatengelye.*

2.14. Feladat *(Mego.)*

Az alábbi négy állítás pozitív egészekre vonatkozik.

a) x *osztható* 9*-cel;* b) x *jegyeinek összege osztható* 9*-cel;*

c) x *osztható* 27*-tel;* d) x *jegyeinek összege osztható* 27*-tel.*

A négy állítás melyikéből melyik másik következik?

2.15. Feladat *[RBMF1](Mego.)*

Az alábbi állítások egy háromszögre vonatkoznak. Milyen logikai kapcsolat van közöttük?

I. *A háromszög derékszögű.*

II. *A háromszög két belső szögének összege egyenlő a harmadik szöggel.*

III. *A háromszög egyik oldala kétszer akkora, mint a hozzá tartozó súlyvonal.*

IV. *Ha a háromszög leghosszabb oldala c, a másik kettő a és b, a félkerület s, akkor $s(s-c)=(s-a)(s-b)$.*

V. *Az előbbi jelölések mellett még β a b-vel szemközti belső szög, akkor $\operatorname{tg}\frac{\beta}{2}=\frac{b}{a+c}$.*

2.16. Feladat *(Mego)*

A négyszögek alaphalmazán belül jelölje $2D$, H és T az alábbi halmazokat:

$2D$: olyan négyszögek, amelyeknek van két derékszöge;

H: húrnégyszögek[1]

T: trapézok.

Ábrázoljuk a három halmazt Venn diagramon, minden olyan részbe ahová lehet, rajzoljuk be egy-egy négyszöget! Fogalmazzunk meg állítást!

2.17. Feladat *(Mego.)*

Az alábbi két állítás egy olyan háromszögre vonatkozik, amelynek oldalai a, b és c. Tudjuk, hogy b a leghosszabb oldal. Az alábbi A) állításból következik-e a B) állítás? És a B) állításból következik-e az A) állítás?

a) *A háromszög derékszögű;* b) $a^4+b^2c^2=c^4+a^2b^2$.

2.18. Feladat Orosz Gyula javaslata*(Mego.)*

Az alábbi állítások egy háromszöggel kapcsolatosak, melynek oldalai a, b, c, szögeik a szokásos rendben α, β és γ, területe T. Milyen logikai kapcsolat van az állítások között?

I. $\gamma=60°$;

II. $T=\frac{\sqrt{3}ab}{4}$;

III. $c^2=\frac{a^3+b^3+c^3}{a+b+c}$.

[1] van olyan kör, amelyre mind a négy csúcs illeszkedik, azaz mind a négy oldal húr

2.19. Feladat *(Mego.)*

Az alábbi állítások egy háromszögre vonatkoznak. Milyen logikai kapcsolat van közöttük?

I. *A háromszög egyenlő szárú.*

II. *A háromszögnek van két egyenlő magassága.*

III. *A háromszögnek van két egyenlő súlyvonala.*

IV. *A szögek megfelelő választásával* $\cos^2\frac{\gamma}{2} = \sin\alpha\sin\beta$*;*

V. *A szögek megfelelő választásával* $\frac{\sin\alpha}{\sin\beta} = \frac{\cos\beta}{\cos\alpha}$

2.20. Feladat *(Ekvivalens összefüggések?)(Mego.)*

Alább a *és* b *valós számokat jelölnek. Igaz-e, hogy*

a) $a+b=0 \iff a^2+b^2=-2ab$?

b) $a+b+c=0 \iff a^3+b^3+c^3=-3abc$?

Ajánló

A geometriában előforduló logikai problémákkal kapcsolatban lásd még a 2.9., 2.10., 2.11. feladatokat.

Rábai Imre „Megfordítható? (Pontosan akkor – akkor és csakis akkor – szükséges feltétel)"[RBMF?], 11-16.. oldal az alábbi linken:

http://matek.fazekas.hu/portal/tanitasianyagok/Rabai_Imre/Rabai_1_1.pdf;

Rábai Imre „Néhány megfordítható tétel"[RBMF1],

http://matek.fazekas.hu/portal/tanitasianyagok/Rabai_Imre/Rabai_1_5.pdf.

Itt javasoljuk még Bizám György és Herczeg János két örökbecsű művét[BIHES], [BIHEJ] és Bailiff[BAILO] valamint Perelman[PEREJT] klasszikusát.

További logikai feladatok a feladatgyűjteményünkben a Logikai fejtörők fejezetben találhatók és annak végén további könyveket is ajánlunk.

2.2. Geometria és algebra

2.1. Feladat *(Mego.)*

Egy tollkészlet és egy radír együtt 240 *Ft, egy radír és egy ceruza együtt* 100 *Ft, a tollkészlet és a ceruza együtt* 280 *Ft. Mennyibe kerül a tollkészlet, a radír és a ceruza külön–külön?*

2.2. Feladat *(Mego.)*

Adottak egy háromszög oldalai (cm-ben): $a=240$, $b=100$, $c=280$. *Milyen hosszú részekre bontják az oldalakat a háromszögbe beírt kör érintési pontjai?*

2.3. Feladat *(Mego.)*

Adott az x_1, x_2, x_3, x_4 változók közül mindegyik háromnak az összege. Határozzuk meg a változók értékeit!

2.4. Feladat *(I. mego., II. mego.)*

Az x_1, x_2, x_3, x_4 számok közül ciklikusan kettő-kettő összege adott:

$$\left.\begin{array}{rrr} x_1+x_2= & 240= & a \\ x_2+x_3= & 100= & b \\ x_3+x_4= & 280= & c \\ x_4+x_1= & 70= & d \end{array}\right\}, \qquad (2.1)$$

Határozzuk meg a négy számot!

2.5. Feladat *(Mego.)*

Egy négyszög három oldala rendre 5, 6 és 8 egység hosszú. Határozzuk meg a 6 egységnyi oldallal szemközti ismeretlen oldal hosszát, ha tudjuk, hogy a négyszögbe kör írható. (Tehát olyan kör, amely érinti mind a négy oldalt.)

2.6. Feladat *(Mego.)*

Oldjuk meg az

$$\left.\begin{array}{rrr} x_1+x_2= & 240= & a \\ x_2+x_3= & 100= & b \\ x_3+x_4= & 280= & c \\ x_4+x_1= & 320= & d \end{array}\right\}, \qquad (2.2)$$

egyenletrendszert!

2.7. Feladat *(Mego.)*

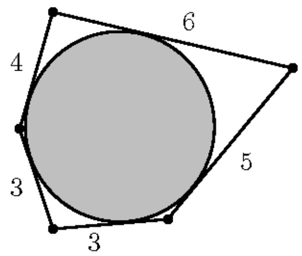
Öt szám páronként vett összege a következő eredményeket adja:

a) $-7, -4, -1, -1, 1, 5, 5, 8, 11$;

b) $-7, -4, -1, -1, 1, 3, 5, 5, 8, 11$;

c) $-7, -4, -1, -1, 2, 2, 5, 5, 8, 11$.

Lehet-e tudni, mi volt az 5 szám?

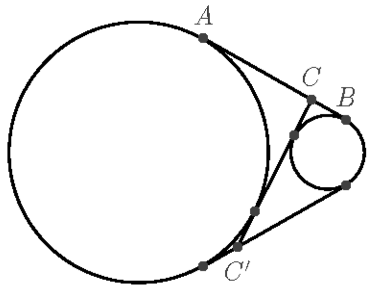


2.2. ábra.

2.8. Feladat *(Mego.)*

Egy ötszög oldalainak hossza (ebben a sorrendben): 6, 5, 3, 3, 4 *egység. Az ötszögbe kör írható (lásd a 2.2. ábrát). Mekkora részekre osztja a beírt kör érintési pontja a* 6 *egység hosszúságú oldalt?*

2.9. Feladat *Bizonyítsuk be, hogy két kör közös külső érintőszakaszának hossza megegyezik a közös belső érintő egyenesüknek a közös külső érintők közé eső darabjának hosszával (a 2.3. ábrán $AB = CC'$)!*



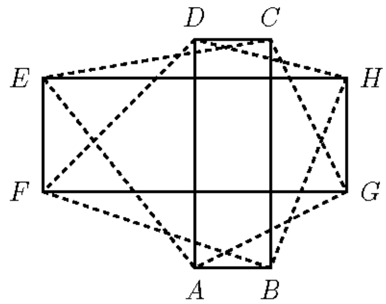
2.3. ábra.

2.10. Feladat *(I. mego., II. mego., III. mego.)*

A 2.4. ábrán látható $ABCD$ és $EFGH$ téglalapok oldalai páronként merőlegesek egymásra. Melyik nagyobb: az $AGCE$ vagy az $BHDF$ négyszög területe?

2.11. Feladat *(I. mego., II. mego., III. mego., IV. mego.)*

Az $ABCD$ négyzet oldala 4 *cm. E az AD oldalnak az a pontja, melyre $AE = 1$ cm. Milyen messze van a B pont az EC egyenestől?*



2.4. ábra.

2.12. Feladat *(Mego.)*
Adott az $ABCD$ négyzet. Ismert a P távolsága a négyzet három csúcsától:

$$PA = 1, \qquad PB = 5, \qquad PC = 7.$$

Határozzuk meg a P pont távolságát a négyzet negyedik csúcsától!

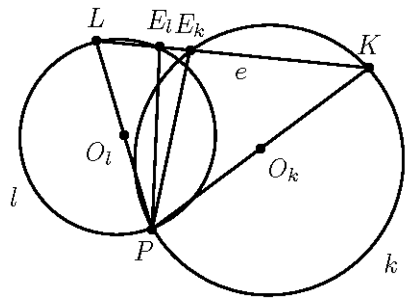
2.13. Feladat *(Mego.)*
Egy kör két merőleges húrja egymást a és b, illetve c és d hosszúságú részekre osztja. Fejezzük ki a kör sugarát a-, b-, c-, d-vel.

Ajánló

Kubatov Antal „Azok a csodálatos érinténégyszögek”[KUÉRN],
http://matek.fazekas.hu/portal/tanitasianyagok/Kubatov_Antal/erinto/erintof.html.

2.3. Geometria

2.1. Feladat Háromszög két derékszöggel*(Mego.)*
Dr Agy megrajzolta a k, l körök P metszéspontján át (lásd a 2.5. ábrát) a körök PK, PL átmérőit. Vázlatán az $e = KL$ egyenes k-t még E_k pontban, l-t még E_l-ben metszette.
a) *Igazoljuk, hogy az ábrán $PE_kK\angle = PE_lL\angle = 90°$!*
b) *A PE_kE_l háromszögnek két derékszöge is van. Lehetséges ez?*



2.5. ábra.

2.2. Feladat *(I. mego., II. mego., III. mego.,IV. mego.,V. mego.)*

A koordináta rendszerben felvettük az $A(0;0)$, $B(4;0)$, $C(3;1)$ és $D(4;3)$ pontokat. Bizonyítsuk be, hogy az AC egyenes felezi a $BAD\sphericalangle$ szöget!

2.3. Feladat Szögfelező-tétel

Mutassuk meg, hogy ha az ABC háromszög A csúcsából induló szögfelezője a szemköztes oldalt a D pontban metszi, akkor $\frac{BD}{DC} = \frac{BA}{AC}$.

2.4. Feladat Stewart-tétel*(Mego.)*

Az ABC háromszög BC oldalán vettük fel a D pontot. Fejezzük ki az AD szakasz hosszát az AB, AC oldalak és az BD, DC szakaszok hosszának segítségével!

2.5. Feladat *(Mego.)*

Alább négyszögekre vonatkozó állításokat soroltunk föl:

a) A négyszög oldalfelezőpontjai egy körön vannak*;*

b) A négyszög átlói merőlegesek egymásra*;*

c) A négyszög két szemközti oldala négyzetének összege egyenlő a másik két oldal négyzetösszegével*;*

d) A négyszög deltoid.

A négy állítás közül melyikből melyik másik következik?

2.6. Feladat *(Mego.)*

Az $ABCD$ konvex négyszöggel foglalkozunk, melyben az átlók metszéspontja P. Milyen logikai kapcsolat van az alábbi három állítás között?

I.*: A négyszög átlói merőlegesek egymásra;*

II.*: A négyszög egyik átlója felezi a másik átlót;*

III.*: $AB^2 + BC^2 + CD^2 + DA^2 = 2(PA^2 + PB^2 + PC^2 + PD^2)$.*

2.7. Feladat *(Segít., Mego.)*

Az ABC háromszög BC oldalán vettük fel a D pontot. Milyen logikai kapcsolat van az alábbi állítások között?

I.*: $AB = AC$.*

II.*: $BAD\angle = DAC\angle$.*

III.*: $AD^2 = AB \cdot AC - DB \cdot DC$.*

2.8. Feladat *(Mego.)*

Adott egy háromszög, egy egyenes és három rájuk vonatkozó állítás:

I. *Az egyenes átmegy a háromszög belső szögfelezőinek metszéspontján.*

II. *Az egyenes felezi a háromszög területét.*

III. *Az egyenes felezi a háromszög kerületét.*

a) *Következik-e a három állítás valamelyikéből valamelyik másik?*

b) *Igazoljuk, hogy az állítások közül bármelyik kettőből következik a harmadik!*

2.9. Feladat *(Mego.)*

Egyenlő szárú-e minden olyan háromszög, melyben a beírt kör középpontja egyenlő távolságra van

a) *két csúcstól?*

b) *két oldal felezőpontjától?*

2.10. Feladat *(Mego.)*

Az ABC háromszögben az BN_B, CN_C szögfelezőkön (N_B az AC oldal, N_C a BA oldal megfelelő pontja) a beírt kör I középpontja és az oldalak közti IN_B, IN_C szakaszok hossza egyenlő egymással. Következik-e ebből, hogy az ABC háromszög egyenlő szárú?

2.11. Feladat Minden háromszög szabályos*(El. megj.,Mego.)*

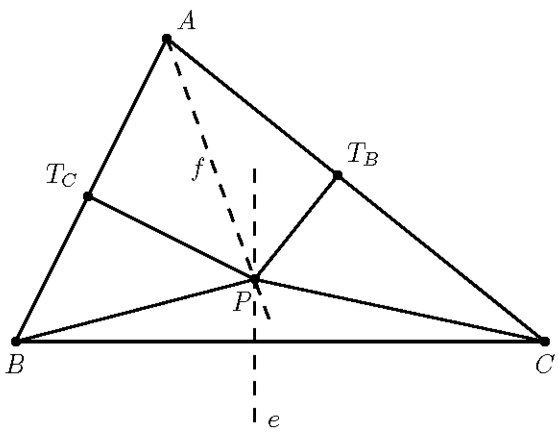
Dr Agy megszerkesztette az ABC háromszög BC oldalának e felezőmerőlegesét valamint a háromszög A-nál fekvő szögének f szögfelezőjét. Ezek metszéspontját ábráján P jelöli, míg P-ből az AC, AB oldalakra állított merőlegesek talppontját T_B illetve T_C (lásd a 2.6. ábrát).

Dr Agy így gondolkodik:

1. A P pont a BC szakasz felezőmerőlegesén van, így $BP = CP$.

2. A P pont a BAC szög szögfelezőjén van, és a szögfelező pontjai a száraktól egyforma távolságra vannak, így $PT_C = PT_B$.

3. Ha két derékszögű háromszögben egyenlők az átfogók és az egyik befogó is, akkor a két háromszög másik befogója is egyenlő egymással.



2.6. ábra.

4. A PT_CB, PT_BC háromszögek T_C-ben illetve T_B-ben derékszögűek, így az előbbi 1., 2. és 3. állítások miatt $BT_C = CT_B$.

5. A PT_CA, PT_BA háromszögek T_C-ben illetve T_B-ben derékszögűek, PA oldaluk közös, így az előbbi 2. és 3. állítások miatt $AT_C = AT_B$.

6. A 4., 5. állításokból következik, hogy $AB = AC$. Valóban $AB = AT_C + T_CB$, $AC = AT_B + T_BC$ és ha egyenlőkhöz egyenlőket adunk, akkor egyenlőket kapunk.

7. Ehhez hasonlóan bármely háromszög bármelyik két oldaláról igazolható, hogy egyenlő hosszúságúak, tehát minden háromszög szabályos.

Tehát minden háromszög szabályos? Van-e hiba Dr Agy gondolatmenetében? Ha igen, hol?

Ajánló

Varga Tamás „1 milliméter=1000 kilométer” (Hibás bizonyítások) a [HÓDMOZ] kötetben.

Alexander Bogomolny „Cut the knot”[CUTKNT] matematikai portálján számos érdekes anyag között 98 bizonyítás található Pitagorasz tételére: http://www.cut-the-knot.org/pythagoras/.

Horvay Katalin és Reiman István kiváló könyve[GEOI] alapvető és megkerülhetetlen a geometria oktatásában.

A 7-8-os tagozatosok számára az előző kötet kiegészítéseként született a Matkönyv[MATKV] megfelelő fejezete: http://matek.fazekas.hu/mathdisplay/cache/pdf/volume_g_i.pdf

Coxeter és Greitzer „Az újra felfedezett geometria”[CXGRÚ] kis könyve remek olvasmány sok feladattal.

Folytatás a gyűjteményben a Geometria fejezetben.

2.4. Algebra

2.1. Feladat *[APÁC5](Mego.)*

Helyezzük el az 1, 2, 3, 4, 5 feliratú kártyákat a kijelölt $\square\square\square : \square\square$ *helyekre úgy, hogy a hányados*

a) *a lehető legkisebb legyen,*
b) *a lehető legnagyobb legyen,*
c) *a lehető legközelebb legyen a 30-hoz,*
d) *a lehető legkisebb kétjegyű szám legyen,*
e) *az osztásnak ne legyen maradéka.*

2.2. Feladat *[APÁC5](Mego.)*

A $26 \cdot 93$ *szorzat különleges. Ha a szorzótényezőkön belül a számjegyeket felcseréljük, akkor a* $62 \cdot 39$ *szorzatot kapjuk, amelynek értéke meglepő módon megegyezik az eredetiével,* $26 \cdot 93 = 62 \cdot 39$*. Mi a „titka” ezeknek a számoknak? Keress más ilyen szorzatokat!*

2.3. Feladat *[APÁC5](Mego.)*

Ezekben a műveletsorokban valaki kiradírozta a zárójeleket, ezért majdnem mindegyiknek rossz az eredménye. Írjuk vissza a zárójeleket – ahol szükséges – úgy, hogy igazak legyenek az egyenlőségek!

$5 + 6 \cdot 3 : 11 + 7 = 10 \qquad 5 + 6 \cdot 3 : 11 + 7 = 6$
$27 + 18 : 9 + 36 \cdot 2 = 77 \qquad 27 + 18 : 9 + 36 \cdot 2 = 101$
$27 + 18 : 9 + 36 \cdot 2 = 2 \qquad 27 + 18 : 9 + 36 \cdot 2 = 130$
$39 - 27 : 3 : 3 + 1 = 1$

A feladathoz kapcsolódó egyéb kérdések:

Hány különböző végeredményt kaphatunk zárójelek felhasználásával az első műveletsorból?

Ezek közül mennyi a legkisebb, és mennyi a legnagyobb végeredmény?

2.4. Feladat *(Mego.)*

Egy asszony a piacon az első vevőnek eladta a tojásai felét meg egy fél tojást, a másodiknak a megmaradt tojások harmadát meg egy harmad tojást, a harmadiknak az ezután megmaradt tojások negyedét meg egy negyed tojást. Miközben egyetlen tojást sem kellett feltörnie a megmaradt tojásokkal hazaballagott.

Hány tojást vihetett haza?

Hány tojással indulhatott el?

Általánosítsuk a feladatot!

2.5. Feladat *(El. megj., Mego.)*

A 137-es cézium felezési ideje kb. 30 év.

a) *Aduk meg a bomlási képletet $N(t) = N(0) \cdot e^{-\lambda t}$ alakban!*

b) *Mikorra fog a csernobili baleset okozta cézium szennyeződés a maximális érték 10%-ára csökkenni?*

2.6. Feladat *[PÓLYPR](Mego.)*

Egy felderítő repülőgép szélcsendes időben óránként 220 mérföldet repül. Üzemanyaga 4 órányi repüléshez elegendő. Milyen messze repülhet, hogy kockázat nélkül vissza is térhessen,

a) *ha óránként 20 mérföld sebességű ellenszélben indul?*

b) *ha óránként 20 mérföld sebességű hátszélben indul?*

c) *ha óránként 20 mérföld sebességű, a haladási irányra merőleges szélben indul?*

d*) *ha óránként 20 mérföld sebességű, tetszőleges irányú, szélben indul? Melyik esetben jut legmesszebb?*

2.7. Feladat *[PÓLYPR] (I. mego., II. mego.)*

Amikor Mr. és Mrs. Smith repülőre szálltak, csomagjaik összsúlya 94 font volt. A férj 1,50 $-t, a feleség 2 $-t fizetett a túlsúlyért. Ha Mr. Smith egyedül repült volna kettőjük csomagjával, akkor 13,50 $-t kellett volna fizetnie. Hány font súlyú csomagot vihetett ezen a járaton egy személy magával ráfizetés nélkül?

2.8. Feladat *[PÓLYPR] (Mego.)*

Egy apa számos gyermeket hagyott hátra, és így végrendelkezett a vagyonáról: Az elsőé legyen 100 korona és a maradék tizede, a másodiké legyen 200 korona és a maradék tizede, a harmadiké legyen 300 korona és a maradék tizede, a negyediké legyen 400 korona és a maradék tizede, és így tovább. A végén kiderült, hogy mindegyik gyermekének ugyanannyi jutott. Mekkora volt a vagyon, hány gyermeke volt, és mindegyiknek mennyi jutott?

Általánosítsuk a feladatot!

2.9. Feladat *[KGYFEJ](Mego.)*

Két motorkerékpáros egy időben indult el kirándulni. Egyenlő távolságot tettek meg, és egy időben is érkeztek haza. Az úton mindketten megpihentek. Annyit tudunk, hogy az egyik kétszer annyi ideig volt úton, mint amennyit a másik pihent, a másik pedig háromszor annyit volt úton, mint amennyit az első pihent. Melyik haladt gyorsabban?

2.10. Feladat *Egy tartályba egy kék, egy piros és egy zöld csapon át engedhetünk vizet. A piros csap egyedül 3 ára alatt tölti meg a tartályt. A piros és a kék csap együtt 2 óra alatt, a három csap együttesen 1 óra alatt tölti meg a tartályt. Hány óra alatt töltik meg ezek a csapok külön-külön a tartályt?*

2.11. Feladat *[GELKO](Mego.)*

Színezzük be a koordinátasík azon pontjait, amelyek koordinátáira:

a)	$x = \|y\|$	b)	$x : \|x\| = y : \|y\|$	c)	$x + \|x\| = y$
d)	$y = [x]$	e)	$x = [y]$	f)	$[x] = [y]$
g)	$x - [x] = y - [y]$	h)	$x - [x] > y - [y]$	i)	$(x - y)(x - 2y) = 0$

2.12. Feladat *[COMEX] (Szeml., Eredm.)*

Oldjuk meg és diszkutáljuk az

$$|x - |x - 1|| = mx + 1$$

egyenletet!

2.13. Feladat *(Mego.)*

Határozzuk meg Pithagorasz táblázatának – azaz a a szorzótáblának – fordított L-alakú részeiben (lásd a 2.7 ábrát) a számok összegét!

1	2	3	4	5
2	4	6	8	10
3	6	9	12	15
4	8	12	16	20
5	10	15	20	25

2.7. ábra.

Ajánló

Perelman: Szórakoztató algebra [PERALG] és Matematikai történetek és rejtvények [PEREJT] (5. fejezet: Fejtörő – számokkal).

Varga Tamás „Találja ki melyik számra gondoltam" és Surányi János „Tud-e ön fejben ötödik gyököt vonni" írásai a [HÓDMOZ] kötetben;

Lukács-Scharnitzky „Érdekes matematikai gyakorló feladatok[LUSCÉ] (benne: Elsőfokú egyenletek, egyenletrendszerek);

Ambrus Gabriella „Valóságközeli matematika, munkafüzet 5–12. o.”[AMBVMF];

Rábai Imre „Készítsünk egymásra épülő feladatokat!”[RBEGYM], 85-87. oldalak az alábbi linken:

`http://matek.fazekas.hu/portal/tanitasianyagok/Rabai_Imre/Rabai_1_5.pdf`

Lásd még a 7-8-os és a 9-10 matematika tagozatos gyűjtemény[MATKV]

`http://matek.fazekas.hu/mathdisplay/cache/pdf/volume_a_i.pdf`

`http://matek.fazekas.hu/mathdisplay/cache/pdf/volume_a_ii.pdf`

megfelelő fejezetének feladatait.

Folytatás a gyűjteményben a Algebra fejezetben.

2.5. Statisztika

2.1. Feladat *(a) mego.,b) mego.)*

Adott a számegyenesen három szám: az 1*, az* 5*, és a* 12*. Melyik az a valós szám, melynek ettől a három számtól való távolságai*

a) *négyzeteinek,* b) *abszolútértékeinek,*

összege minimális?

2.2. Feladat *(Mego.)*

Egy H számsokaság átlaga $\overline{x} = 3$, szórása $D = 5$. Meghatározható-e ezekből az adatokból az $y = 11$ számnak a H sokaságtól való átlagos négyzetes eltérése?

2.3. Feladat *(a) mego., b) mego., c) mego.)*

a) *Adottak a síkon az $A(1;5)$, $B(7;10)$, $C(4;12)$ pontok. Határozzuk meg a sík azon P pontjának koordinátáit, amelyre a $PA^2 + PB^2 + PC^2$ kifejezés értéke minimális!*

b) *Oldjuk meg a feladatot az $A(a_1;a_2)$, $B(b_1;b_2)$, $C(c_1;c_2)$ általános ponthármassal is!*

c) *Hol helyezkednek el azok a P pontok, amelyekre a $PA^2 + PB^2 + PC^2$ kifejezés értéke egy előre adott konstanssal egyezik meg?*

2.4. Feladat *A Buchera cégnél két vezető dolgozik és hét alkalmazott. A vezetők havi fizetése* 20 *és* 18 *peták, a hét alkalmazott keresete rendre* 7, 7, 8, 8, 11, 13 *és* 16 *peták.*

A legnagyobb keresetű alkalmazottat fizetésének változtatása nélkül vezető beosztásba helyezik át.

a) *Hogyan változott az alkalmazottak fizetésének átlaga? Mennyi volt eredetileg, mennyi lett az áthelyezés után?*

b) *Hogyan változott a vezetők fizetésének átlaga? Mennyi volt eredetileg, mennyi lett az áthelyezés után?*

c) *Hogyan változott a vállalat összes dolgozójának fizetése? Mi történt az átlaggal?*

d) *Készítsünk hasonló példát, ahol az áthelyezett személy fizetése nő, de az alkalmazottak átlagfizetése és a vezetőké is csökken és minden fizetés, mindegyik átlag (mind a hat) egész szám!*

2.5. Feladat *(I. mego., II. mego.)*

Három háromfős sakkcsapat egymással mérkőzött. Mindegyik csapat játszott mindegyikkel, és két csapat küzdelme során az egyik csapat minden játékosa egyszer-egyszer mérkőzött az ellenfél minden játékosával.

A bajnokságban nem történt meglepetés. Előre lehetett sejteni, hogy mi a 9 játékos erősorrendje, és az egyes játszmák ennek megfelelően alakultak: a jobbik mindig megverte a kevésbé jobbat, döntetlen nem is volt.

Lehetséges-e mégis, hogy a csapatok körbeverték egymást?

Ajánló

Számadó László „A statisztika alapjai”[SZÁSTA]; Magyar Zsolt „Valószínűségszámítás és statisztika”[MAZSVS] (benne I. Leíró statisztika); Nemetz Tibor és Wintsche Gergely „Valószínűségszámítás és statisztika mindenkinek”[NMZWG].

2.6. Valószínűségszámítás

2.1. Feladat *(I. mego., II. mego.)*

Két kockával dobunk. Két dologra lehet fogadni.

A: Mindkét dobás páros lesz. *B: Az egyik dobás 1-es.*

Melyiknek nagyobb a valószínűsége?

2.2. Feladat *(Mego.)*

Két kockával dobunk. Két dologra lehet fogadni a két dobott számmal kapcsolatban. Melyikre fogadnál inkább?

a) *A: Összegük legalább* 10. *B: Mindketten kisebbek 4-nél.*

b) *A: Mindketten párosak.* *B: Mindketten kisebbek 4-nél.*

2.3. Feladat *(Mego.)*

Véletlenszerűen kiválasztunk egy hatjegyű számot. Minek nagyobb a valószínűsége, annak, hogy a szám előállítható két háromjegyű szám szorzataként, vagy annak, hogy nem állítható elő?

2.4. Feladat *(Mego.)*

Hány dobókocka esetén a legnagyobb a valószínűsége annak, hogy azokkal egyszerre dobva pontosan egy hatost dobunk?

2.5. Feladat *(Mego.)*

Egy fiút akkor engednek el játszani, ha három egymás utáni sakkparti közül legalább két egymás utánit megnyer. Partnerei: Apa és Papa, mégpedig vagy Apa-Papa-Apa, vagy Papa-Apa-Papa sorrendben. Apa jobban játszik, mint Papa. Melyik sorrend kedvezőbb a fiú számára?

a) *Legyen pld. Apa nyerési esélye a fiú ellen* $\frac{2}{3}$*, míg Papáé csak* $\frac{1}{2}$.

Először tippeljünk, utána álljunk neki a számolásnak!

b) *Oldjuk meg a feladatot az általános esetben is!*

2.6. Feladat *(I. mego., II. mego.,III. mego.)*

A Skandináv lottón 7 számot húznak ki 35-ből és egy héten (tehát egy szelvényre vonatkozólag) két húzás is van (egy kézi és egy gépi). Mi az esélye, hogy a 8-as nyerő szám lesz egy adott héten (tehát az egyik vagy a másik vagy mindkét húzásnál)?

2.7. Feladat *(Segít.)*

Legalább hány pénzdarab kell ahhoz, hogy 90%*-nál nagyobb esélye legyen annak, hogy feldobva van köztük fej?*

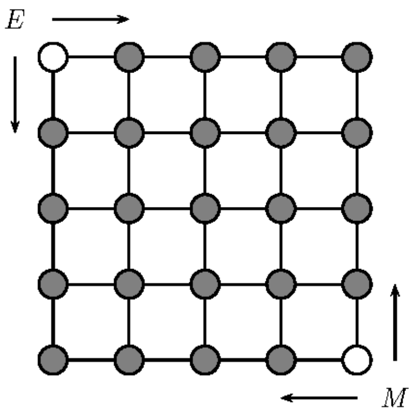
2.8. Feladat *(Eredm.)*

A könyvespolc alsó polcáról a kétéves Pisti leszedte a könyveket, majd „saját ízlése szerint” visszarakta mind a 25-öt. Mennyi a valószínűsége annak, hogy a köztük levő három idegen nyelvű könyv egymás mellé került?

2.9. Feladat *Egy halálraítéltnek némi esélyt kívánnak adni az életben maradásra. Adnak neki 50 fehér és 50 fekete golyót és két urnát. A golyókat eloszthatja a két urnába. A hóhér másnap reggel találomra kiválaszt egyet a két urna közül, majd a kiválasztottból kihúz egy golyót. Ha az fekete, akkor kivégzik az elítéltet, ha fehér, akkor szabadon engedik. Hogyan célszerű elosztani golyókat, hogy a legnagyobb valószínűséggel életben maradjon?*

2.10. Feladat *(I. mego., II. mego.)*

Egy 5×5-ös (25 szögpontból álló) négyzetrács alakú labirintus két átellenes csúcsában – a kijáratoknál – egy egér és egy macska van. Mindketten adott jelre, ugyanakkora sebességgel elindulnak a szemköztes kijárat felé úgy, hogy minden lépésben közelednek céljukhoz (lásd a 2.8. ábrát). Egymást nem látják, útválasztásuk az elágazásokban véletlenszerű. (Ez azt jelenti, hogy amikor elágazáshoz érnek, a lehetséges két irány közül egyforma valószínűséggel választanak.)



2.8. ábra.

a) *Mekkora annak a valószínűsége, hogy találkoznak?*
b) *Általánosítsuk a feladatot!*

2.11. Feladat *(I. mego., II. mego., III. mego.)*

Egy futballklub edzésének megkezdése előtt az edzésen résztvevő 22 játékost két csoportba osztják. Mi a valószínűsége annak, hogy ha találomra történik a szétosztás két 11-es csoportba, a két legjobb játékos egymás ellen játszik?

2.12. Feladat Bejut-e a második a döntőbe?*[MO50V] (Mego.)*

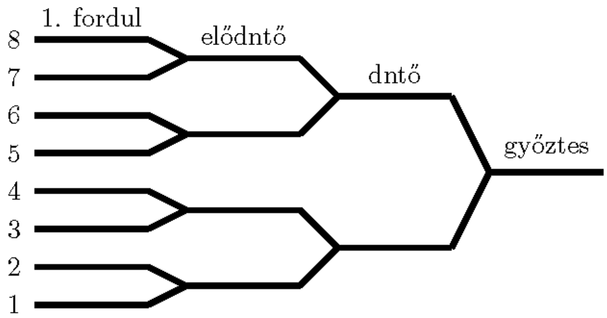
A nyolc résztvevős kieséses teniszbajnokságot a 2.9. ábrán látható rendszerben bonyolítják le. Ehhez a játékosok között véletlenszerűen osztják ki az 1, 2, ..., 8 sorszámokat.

Tegyük fel, hogy a játékosok képességük szerint egyértelműen rakhatók sorrendbe és a jobb mindig legyőzi a kevésbé jót!

a) *Mennyi az esélye a második legjobb játékosnak, hogy bejusson a döntőbe?*

b) *Mennyi annak az esélye, hogy a második és a harmadik legjobb játékos összeméri tudását ezen a versenyen?*

c) *Válaszoljunk az előző kérdésekre a 2^n résztvevős fenti rendszerű kieséses bajnokság esetén is!*



2.9. ábra.

Ajánló

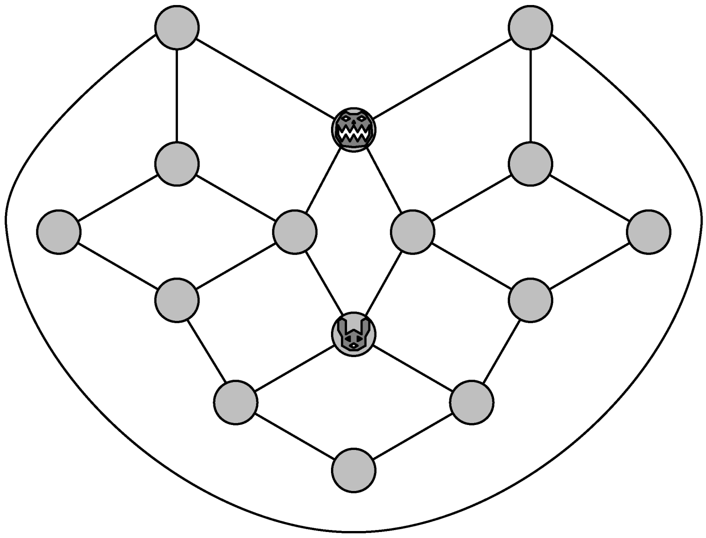
„Valószínűségszámítás feladatok kezdőknek” [KÖVAL];
Urbán János „Matek+ 15 éveseknek[URB+15];
Warren Waewer „Szerencse kisasszony”[WWSZE];
Orosz Gyula „Valószínűségszámítási érdekességek” [OGYVAL].
Folytatás a feladatgyűjtemény 7 fejezetében.

2.7. Játékok

2.1. Feladat *(Mego.)*
A 2.10. ábrán látható tábla megjelölt mezőjén áll egy farkas, a másik jelölt mezőn egy nyuszi. A két bábuval felváltva léphetünk egy mezőről egy másik vele szomszédos mezőre egy él mentén. A Farkas kezd. El tudja-e kapni a nyuszit?

2.2. Feladat *(Segít.)*
Egy asztalra kilenc tízforintost tettünk egymás mellé. Balról jobbra haladva fölső oldaluk rendre fej, fej, fej, írás, fej, írás, írás, fej, írás. Ketten játszanak, felváltva lépnek. Egy játékos egy lépésben kiválasztja az egyik olyan érmét, amelyen fej van fölül, és azt, valamint az összes tőle jobbra levő érmét az ellenkező oldalára fordítja. Az nyer, aki eléri, hogy minden érmén írás legyen felül.
Kezdeni érdemes, vagy inkább másodikként játszani? Van-e nyerő stratégiája bármelyik játékosnak?

2.3. Feladat *(Mego.)*
Ketten játszanak. Felváltva írnak be egy-egy előjelet minden szám elé (az 1-es elé is tehetnek) az alábbi sorban:



2.10. ábra.

1 2 3 4 5 6 7 8 9

„Kezdő" azt szeretné, hogy a legvégül kapott előjeles összeg páros legyen, míg „Második" azt szeretné, hogy páratlan. Hogyan érdemes játszani? Kinek kedvező a játék?

2.4. Feladat *(Segít.)*

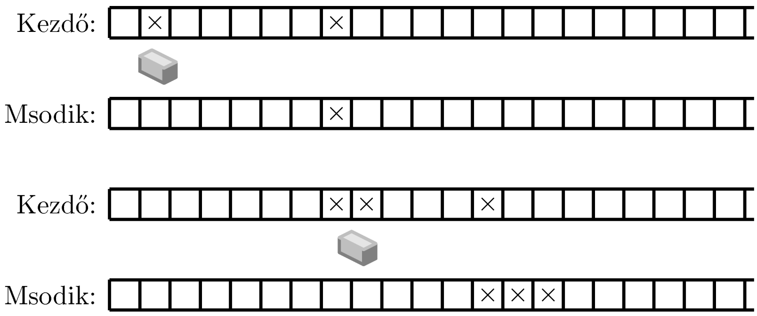
Két ember a következőképpen játszik. Előttük van az asztalon egy kupac – összesen 103 db – gyufa. Felváltva vesznek el a kupacból, minden lépésben legalább 1 és legfeljebb 10 darab gyufát. Amikor minden gyufa elfogyott összehasonlítják, hogy melyikük hány gyufát vett el összesen. Ha ennek a két számnak van (1-nél nagyobb) közös osztója, akkor a Kezdő játékos nyer, egyébként a Második.

Van-e a Kezdőnek nyerő stratégiája?

2.5. Feladat *(Eredm.)*

Egy játék táblája 100 000 *egymás mellé rajzolt négyzetből áll. A négyzetek kezdetben üresek. Ketten játszanak, felváltva lépnek. Kezdő kiválaszt két tetszőleges üres négyzetet és egy-egy „×"-et rajzol rájuk. Második akárhány, egymás melletti „×"-et kiradírozhat (de üres négyzeten nem ugorhat át). A 2.11. ábrán egy játék első néhány lépése látható.*

Kezdő nyer, ha valamelyik lépése után 13 szomszédos négyzetben is „×" van. Tud-e nyerni Kezdő, ha Második ügyesen játszik?



2.11. ábra.

Ajánló

Dr. Mosonyi Kálmán „Matematikai játékok”[MOSJT];
V. N. Kazatkin, L. I. Vladükina „Algoritmusok és játékok”[KAVLA].
Játékokkal kapcsolatos további javaslatok a 8.4 fejezet végén találhatók.

3. fejezet

Algebra

Ajánló

A témával kapcsolatos átfogó feladatgyűjtemények:

„Matematika feladatgyűjtemény I."[SÁRGA];

Rábai Imre „Mérőlapok felvételire"[RBMÉFW]
http://matek.fazekas.hu/portal/tanitasianyagok/Rabai_Imre/Rabai_1_4.pdf;

D. O. Sklarszkij, N. N. Csencov, I. M. Jaglom „Válogatott feladatok és tételek az elemi matematika köréből, I. kötet, Aritmetika és algebra"[SKLA1].

A Matkönyv[MATKV] Algebra fejezetei, 7-8, 9-10, 11-12 korosztályokra bontva:
http://matek.fazekas.hu/mathdisplay/cache/pdf/volume_a_i.pdf,
http://matek.fazekas.hu/mathdisplay/cache/pdf/volume_a_ii.pdf,
http://matek.fazekas.hu/mathdisplay/cache/pdf/volume_a_iii.pdf.

Schultz János „111 algebra feladat" [S111AL];
http://matek.fazekas.hu/portal/tanitasianyagok/Schultz_Janos/111algfel/.

Alapvető tankönyvek:

Surányi László „Algebra – Testek, gyűrűk, polinomok' (sok feladattal)[SURALG];

Szele Tibor „Bevezetés az algebrába"[SZEBAL];

Fried Katalin, Korándi József, Török Judit „Bevezetés a modern algebrába"[DBEVAL];

A. G. Kuros „Felsőbb algebra"[KUFAL].

Kiss Emil „Bevezetés az algebrába"[KIBAL].

3.1. Másodfokú kifejezések

3.1. Feladat *(Mego.)*

Minden n pozitív egész számra kiszámítjuk a $\sqrt{n^2+n}$ szám tizedesvessző utáni első tizedesjegyét. (Vagyis a tized helyiértéken álló számjegyet.) Hányféle számjegyet kaphatunk így?

3.2. Feladat *(a), b), c), j), k) szeml., a) mego., b) mego., c) mego., d), e), f), g), h) szeml., d) meg., e) mego., f) mego., g) mego., h) mego., i) mego., j) mego., k) mego., l) mego., m) mego., n), o), t) szeml., n) mego., o) mego., p) mego., q) szeml., q) I. mego., q) II. mego., r) mego., s) szeml., s) mego., t) mego.)*

Vizsgáljuk a

$$\frac{1}{2}x^2 + px + 1 = 0 \tag{3.1}$$

másodfokú egyenletet! A p valós paraméter mely értékeire lesz az egyenlet

a) *mindkét gyöke valós?*
b) *egyik gyöke a 3?*
c) *egyik gyöke a 0?*
d) *valós gyökeinek összege 3?*
e) *valós gyökeinek szorzata 3?*
f) *valós gyökeinek négyzetösszege 3?*
g) *valós gyökeinek négyzetösszege minimális?*
h) *két valós gyökének különbsége 3?*
i) *mindkét valós gyöke egész szám?*
j) *mindkét valós gyöke pozitív szám?*
k) *mindkét valós gyöke legalább $\frac{1}{2}$?*

Írjunk fel olyan másodfokú egyenletet, amelynek gyökei
l) *háromszor akkorák,*
m) *hárommal nagyobbak,*
mint (3.1) gyökei!

Vizsgáljuk a

$$f(x) = \frac{1}{2}x^2 + px + 1 \tag{3.2}$$

másodfokú függvényt! A p valós paraméter mely értékeire lesz a függvény

n) *minimumhelye a 3?*
o) *minimuma 3?*
p) *maximumhelye a 3?*
q) *grafikonjának érintője az $y = 3x$ egyenes?*
r) *helyettesítési értéke minden egész helyen egész?*

Fussa be p a valós számokat! Az $f(x)$ függvény grafikonja mindig egy parabola lesz.
s) *Van-e közös pontja ezen paraboláknak?*
t) *Határozzuk meg e parabolák csúcspontjának (tengelypontjának) mértani helyét!*

3.3. Feladat *(Szeml., Mego.)*

Vizsgáljuk az $f(x) = x^2 + 2(a-2)x + a$ másodfokú függvényt, ahol a valós paraméter!

a) *Az a paraméter mely értékeire teljesül minden valós x-re az $f(x) \geq 0$ egyenlőtlenség?*

b) *Az a paraméter mely értékére lesz f minimuma maximális?*

c) *Van-e olyan x, amelyben f értéke a-tól független állandó (azaz van-e olyan pont, ahol a grafikon minden a esetén átmegy)?*

3.4. Feladat *(Szeml., Eredm.)*

A p valós paraméter értékétől függően hány megoldása van az

$$|-x^2+4x+1| = p$$

egyenletnek?

3.5. Feladat *(Szeml., Eredm.)*

A p valós paraméter értékétől függően hány megoldása van az

$$\left|\frac{1}{4}x^2 - x\right| = p + \frac{1}{2}x$$

egyenletnek?

3.6. Feladat *(a) szeml.., a) mego., b) szeml.., b) mego.,)*

A p valós paraméter értékétől függően hány megoldása van az alábbi egyenletnek?

a) $-x^2+4|x|+1 = p$;

b) $-x^2+4|x|+1 = p+2x$.

3.7. Feladat *(a), b) mego., c), d) mego.)*

Az alábbi függvények értelmezési tartománya a valós számok halmaza. Határozzuk meg értékkészletüket!

a) $36 \cdot 9^{x-1} - 2 \cdot 3^x + 1$; b) $36 \cdot 9^{x-1} + 2 \cdot 3^x + 1$;

c) $2 - \cos x - \sin^2 x$; d) $6 + 4\cos x - \sin^2 x$.

3.8. Feladat *(Mego.)*

Határozzuk meg azokat az n egészeket, melyekre

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{n}{a+b},$$

ahol a, b nem nulla egészek.

3.9. Feladat OKTV, 1974 *(Mego.)*

Oldjuk meg az

$$x^2 + 5x + 4 = 5\sqrt{x^2 + 5x + 28}$$

egyenletet!

3.10. Feladat *(Mego.)*

Határozzuk meg az ax^2+bx+c polinom együtthatóit úgy, hogy a polinom értéke $x = 1$ esetén 1, $x = 2$ esetén $\frac{1}{2}$ és $x = 3$ esetén $\frac{1}{3}$ legyen. Mutassuk meg, hogy nincs további olyan x érték, ahol a polinom értéke $\frac{1}{x}$.

3.11. Feladat *(Mego.)*

Mutassuk meg, hogy a parabola párhuzamos húrjainak felezőpontjai egy olyan egyenesre illeszkednek, amely párhuzamos a parabola tengelyével!

3.12. Feladat *(a), b) mego., c), d) mego.)*

Mutassuk meg, hogy

a) *az*

$$x^2 - y^2 = p \tag{3.3}$$

egyenlet a p paraméter minden nemnulla értéke esetén hiperbola egyenlete;

b) *a (3.3) hiperbolák aszimptotái azonosak és az aszimptotapár egyenlete a $p = 0$ esethez tartozó egyenlet;*

c) *ha egy – az aszimptoták egyikével sem párhuzamos – egyenest elmetszünk a (3.3) egyenletű hiperbolák bármelyikével, akkor a kimetszett húr felezőpontja a hiperbolától függetlenül mindig ugyanaz a pont lesz;*

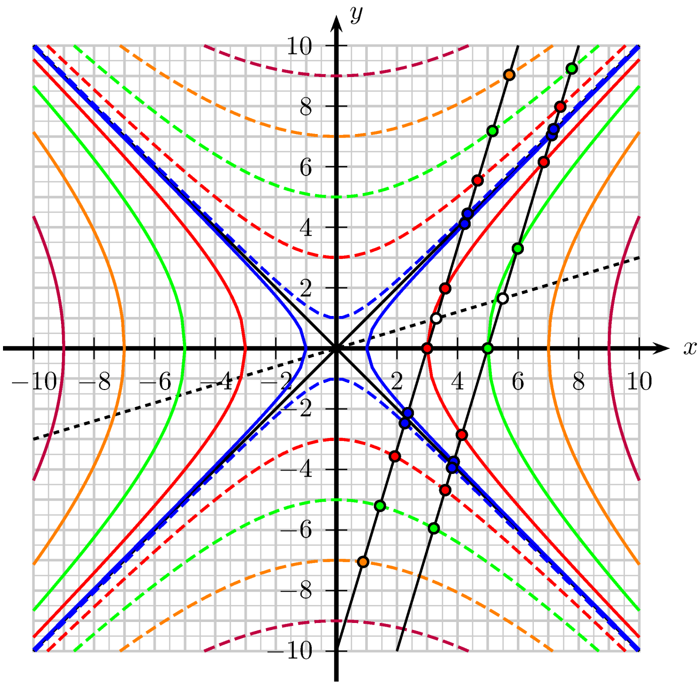
d) *ha egymással párhuzamos egyenesek mindegyikére képezzük a c) szerint p-től független felezőpontot, akkor az így kapott pontok egy egyenest alkotnak, amely átmegy a hiperbolák centrumán (az origón, lásd a 3.1 ábrát).*

3.13. Feladat *(Mego.)*

Határozzuk meg az $x_1^4 + x_2^4$ kifejezés minimumát, ha x_1 és x_2 az

$$x^2 + px - \frac{1}{p^2}, \qquad p \in \mathbb{R}, p \neq 0,$$

polinom két gyöke!



3.1. ábra.

3.14. Feladat *(I. mego., II. mego.)*

Milyen összefüggés áll fenn az

$$ax^2 + bx + c \qquad a \neq 0$$

polinom együtthatai között, ha a polinom egyik gyöke a másik gyök háromszorosa?

3.15. Feladat *(*Arany Dániel verseny, Haladók, 2005/06, II. kat., 2. ford.*)* *(I. mego., II. mego.)*

Határozza meg az a, b, c egészek értékét úgy, hogy a következő egyenlőség minden valós x-re teljesüljön:

$$(x - a) \cdot (x - 10) + 1 = (x + b) \cdot (x + c).$$

3.16. Feladat *(Mego.)*

Keressük meg az összes olyan p,q valós számpárt, amelyre az $x^4 + px^2 + q$ polinomnak négy olyan valós gyöke van, amelyek számtani sorozatot alkotnak!

3.17. Feladat *(Mego.)*

Alakítsuk szorzattá a következő kifejezést:

$$\begin{aligned} K &= (a-b)(b+c+d)(c+a+d) \\ &+ (b-c)(c+a+d)(a+b+d) \\ &+ (c-a)(a+b+d)(b+c+d). \end{aligned} .$$

Ajánló

Rábai Imre „Egy (talán soha el nem készülő) tanpéldatár feladataiból”, 2-4. oldalak az alábbi linken:

http://matek.fazekas.hu/portal/tanitasianyagok/Rabai_Imre/Rabai_1_1.pdf;

Rábai Imre „Legyenek tanpéldáink! (Feladatcsaládok – Milyenek legyenek a példatárak)”, 7. oldal az alábbi linken:

http://matek.fazekas.hu/portal/tanitasianyagok/Rabai_Imre/Rabai_1_1.pdf;

Rábai Imre „Válogatás 40 év matematika felvételi feladataiból”, 19-28. oldalak az alábbi linken:

http://matek.fazekas.hu/portal/tanitasianyagok/Rabai_Imre/Rabai_1_2.pdf.

Kubatov Antal „Párosan szép az élet”, a [FEK12] kötet 173-194. oldalain.

Ide, de a 6.7 Szélsőérték, értékkészlet fejezethez is tartozhat:

Rábai Imre „Kétismeretlenes egyenletek”[RB2EGY], 29-34.. oldal az alábbi linken:

http://matek.fazekas.hu/portal/tanitasianyagok/Rabai_Imre/Rabai_1_2.pdf.

3.2. Lineáris rekurziók

3.1. Feladat *(Mego.)*

Adjuk meg a $g_1 = 1$, $g_2 = 2013$ *kezdőelemekkel,* $g_{n+2} = g_{n+1} - g_n$ *rekurzióval definiált sorozat* 2013*-adik elemét!*

3.2. Feladat *(Mego.)*

Folytassuk az alábbi sorozatot! Keressünk rekurzív képletet! Használjunk Microsoft Excel vagy OpenOffice.Calc programot, hogy a rekurzív képlet segítségével felírjuk a sorozat sok további elemét! Számítsuk ki a sorozat egymást követő elemeinek hányadosából álló sorozatot is! Adjunk meg explicit formulát!

1, 3, 5, 11, 21, 43, 85, 171, . . .

3.3. Feladat *(Mego.)*

Adjuk meg az $u_{n+1} = u_n + 6u_{n-1}$ *másodrendű homogén lineáris rekurziónak az* $u_0 = 1$, $u_1 = 2$ *kezdőelemekhez tartozó megoldását!*

3.4. Feladat *(Mego.)*

Határozzuk meg a Fibonacci sorozat explicit képletét!

3.5. Feladat *(Mego.)*

Adjuk meg másodrendű homogén lineáris rekurzióval az alábbi sorozatot, majd adjuk meg az így kapott végtelen sorozat explicit képletét!

$$0, \quad 1, \quad 2, \quad 5, \quad 12, \quad 29, \quad 70, \quad \ldots$$

3.6. Feladat *(Mego.)* *Térjünk vissza a 3.1. feladathoz! Abban is egy másodrendű lineáris rekurzióval definiált sorozat szerepelt. Hogy lehet az periodikus? Keressük meg explicit képletét az előbbi példákban látott módon és adjunk magyarázatot a periodikusságra a képlet alapján is!*

3.7. Feladat Kömal F.2561, 1986/1. szám

Van-e olyan csupa pozitív tagból álló végtelen a_1, a_2, $\ldots$, a_n sorozat, amelyben minden $n \geq 2$ egészre $a_{n+2} = a_n - a_{n-1}$?

Ajánló

Máté László „Rekurzív sorozatok"[MÁTREK];

Hajnal Péter „Elemi kombinatorikai feladatok"[HAJKO],6. fejezet;

Elekes György „Kombinatorika feladatok"[EGYKO], 4. fejezet,

http://matek.fazekas.hu/portal/tanitasianyagok/Elekes_Gyorgy/elekes_kombfel.pdf.

Orosz Gyula „Rekurzív sorozatok"[OGYREK],

http://matek.fazekas.hu/portal/tanitasianyagok/Orosz_Gyula/Rek/index.htm.

3.3. Harmadfokon

3.1. Feladat Rábai Imre: Mérőlapok a Kömalban (1994., 8-9. szám, 425. old.) *(a) mego., b) mego., c) mego.)*

a) *Alakítsuk szorzattá a*

$$a^3 - 3a^2b - ab^2 + 3b^3$$

kifejezést!

Oldjuk meg a következő egyenleteket:

b) $27^x - 3 \cdot 18^x - 12^x + 3 \cdot 8^x = 0$;

c) $\sin^3 x - 3\sin^2 x \cdot \cos x - \sin x \cdot \cos^2 x + 3\cos 3x = 0$.

3.2. Feladat *(Eredm.)*

Alakítsuk szorzattá a következő polinomot:

$$2a^3 - 3a^2b - 3ab^2 + 2b^3.$$

3.3. Feladat *(Mego.)*

Oldjuk meg a következő egyenletet, ha t adott valós szám:

$$x^3 - 2tx^2 + t^3 = 0.$$

3.4. Feladat *(I. mego.,II. mego.)*

Bizonyítandó, hogy az

$$x^3 - 4x^2 + 9x + c = 0$$

egyenletnek c bármely valós értéke esetén csak egy valós gyöke lehet.

3.5. Feladat *(A 3.5. mego.)*

Mutassuk meg, hogy az α, β paraméterek bármely nullától különböző értékeinél az

$$\alpha x^3 - \alpha x^2 + \beta x + \beta$$

polinom x_1, x_2, x_3 gyökeire teljesül az

$$(x_1 + x_2 + x_3)\left(\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \frac{1}{x_3}\right) = -1$$

összefüggés!

3.6. Feladat *(Segít., I. mego., II. mego., III. mego.)*

Határozzuk meg az a valós paraméter összes olyan értékét, amelyre az

$$x^3 - 6x^2 + ax + a$$

polinom x_1, x_2, x_3 gyökeire teljesül az

$$(x_1 - 3)^3 + (x_2 - 3)^3 + (x_3 - 3)^3 = 0$$

összefüggés!

3.7. Feladat *(Mego.)*

Az $x^3 - x^2 - x - 1$ polinom gyökei x_1, x_2 és x_3. Legyen $g_n = x_1^n + x_2^n + x_3^n$. Határozza meg g_0, g_1, g_2, g_3, g_4, g_5, g_6, g_7 és g_8 értékét!

3.8. Feladat *(Mego.)*

Milyen összefüggés áll fenn az

$$ax^3 + bx^2 + cx + d \qquad a \neq 0$$

polinom együtthatói között, ha a polinom egyik gyöke a másik kettő összege?

3.9. Feladat *(Mego.)*

Milyen összefüggés áll fenn az

$$ax^3 + bx^2 + cx + d \qquad ad \neq 0$$

polinom együtthatói között, ha a polinom egyik gyöke a másik kettő harmonikus közepe?

3.10. Feladat *(Eredm)*

Egy harmadfokú egyenletnek három valós gyöke van. A gyökök szorzata 2-vel nagyobb az összegüknél, négyzetösszegük 10, köbösszegük 6.

Melyik ez az egyenlet?

3.11. Feladat *(Elő megj., I. mego., II. mego.)*

Határozzuk meg $\sqrt[3]{2+\sqrt{5}} + \sqrt[3]{2-\sqrt{5}}$ pontos értékét!

3.12. Feladat *(Mego)*

Határozzuk meg

$$\frac{2-\sqrt{3}}{\sqrt{2}-\sqrt{2-\sqrt{3}}} + \frac{2+\sqrt{3}}{\sqrt{2}+\sqrt{2+\sqrt{3}}} - \sqrt{2}$$

pontos értékét!

3.13. Feladat *(Mego.)*

Oldjuk meg a következő egyenletrendszert:

$$\left.\begin{aligned} \sqrt[3]{x-3} + \sqrt[3]{y+4} &= 11 \\ x + y &= 340 \end{aligned}\right\} \tag{3.4}$$

3.14. Feladat *(I. mego., II. mego., III. mego.)*

Adjuk meg az összes olyan h harmadfokú függvényt, amelyre $h(-1) = h(0) = h(1) = 1$;

3.15. Feladat *(Mego.)*

Oldjuk meg az

$$\sqrt[3]{4x-1} + \sqrt[3]{4-x} = -\sqrt[3]{3}$$

egyenletet a valós számok halmazán!

3.16. Feladat *(I. mego., II. mego., III. mego.)*

Adjuk meg az $(x-5)^4 + (x-4)^4 = 97$ egyenlet össze valós megoldását!

3.17. Feladat *(I. mego., II. mego., III. mego., IV. mego.)*

Mutassuk meg, hogy ha az x, y, z valós számokra

$$x + y + z = a, \qquad \text{és} \qquad \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = \frac{1}{a},$$

akkor x, y és z egyike a-val egyenlő!

3.18. Feladat *(Mego.)*

Bizonyítsuk be, hogy ha igaz az

$$\frac{1}{a+b+c} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}$$

egyenlőség, akkor bármely k természetes számra

$$\frac{1}{a^{2k+1} + b^{2k+1} + c^{2k+1}} = \frac{1}{a^{2k+1}} + \frac{1}{b^{2k+1}} + \frac{1}{c^{2k+1}}$$

is teljesül!

Ajánló

„Matematikai problémakalauz I."[KALAUZ] (2. fejezet: Azonosságok és egyenletek);

Ábrahám Gábor „Elemi algebrai eszközökkel megoldható versenyfeladatok" – a [FEK10] kötet 87-114. oldalain;

D. O. Sklarszkij, N. N. Csencov, I. M. Jaglom „Válogatott feladatok és tételek az elemi matematika köréből, I. kötet, Aritmetika és algebra"[SKLA1];

Pataki János egy harmadfokú relációról, egy Kömal példa eredetéről, a [SZEMFA] 2011. máj. 6-ai foglalkozása;

http://matek.fazekas.hu/portal/tovabbkepzesek/szeminarium/2010/2010pub06.pdf.

Pataki János egy újabb harmadfokú relációról, a [SZEMFA] 2011. okt. 12-ei foglalkozása;

http://matek.fazekas.hu/portal/tovabbkepzesek/szeminarium/2011/2011pub02.pd.

Pataki János lefordította Tartaglia versét a harmadfokú egyenlet megoldásáról. Ennek megértése és feldolgozása mindenkinek ajánlott, aki a képletet meg szeretné érteni. Lásd pl. Pataki János „Az algebra és a geometria házassága" című írását[PATAG] vagy a Matkönyv[MATKV] 11-12-es Algebra anyagának „Komplex számok" fejezetét:

http://matek.fazekas.hu/mathdisplay/cache/pdf/volume_a_iii.pdf.

Árokszállási Tibor, *Középiskolás fokon*[ÁRHAR],

http://matek.fazekas.hu/portal/tanitasianyagok/Arokszallasi_Tibor/harmad/.

3.4. Polinomok

3.1. Feladat *(Mego.)*

Lehet-e az

$$x^5 - x - 1, \qquad x^2 + ax + b \qquad (a, b \in \mathbb{Q})$$

polinomoknak közös komplex gyöke?

3.2. Feladat *(Mego.)*

Bizonyítsuk be, hogy az $x^3 - x + 1 = 0$ *egyenlet valós gyökének reciproka kielégíti az* $x^5 + x + 1 = 0$ *egyenletet!*

3.3. Feladat *(Mego.)*

Bizonyítsuk be, hogy ha az n *változós*

a) *valós együtthatós,* b) *racionális együtthatós,* c) *egész együtthatós,* d) *tetszőleges gyűrű feletti*

$p(x_1; x_2; \ldots; x_n)$ *polinom szimmetrikus, azaz ha az* 1, 2, ..., n *számok bármely* π *permutóciójára a* $p(x_1; x_2; \ldots; x_n)$, $p(x_{\pi(1)}; x_{\pi(2)}; \ldots; x_{\pi(n)})$ *polinomok azonosak, akkor a* p *polinom előállítható a*

$$\begin{aligned}
\sigma_1 &= x_1 + x_2 + \ldots + x_n \\
\sigma_2 &= x_1x_2 + x_1x_3 + \ldots + x_{n-1}x_n \\
\sigma_2 &= x_1x_2x_3 + x_1x_2x_4 + \ldots + x_{n-2}x_{n-1}x_n \\
&\vdots \\
\sigma_n &= x_1x_2 \ldots x_n
\end{aligned}$$

elemi szimmetrikus polinomok

a) *valós együtthatós,* b) *racionális együtthatós,* c) *egész együtthatós,* d) *az adott gyűrű feletti*

polinomjaként!

3.4. Feladat Rezultáns *(Mego.)*

Legyenek az $a(x) = a_0x^2 + a_1x + a_2$ *polinom gyökei* α_1 *és* α_2, *az* $b(x) = b_0x^2 + b_1x + b_2$ *polinom gyökei* β_1 *és* β_2. *Fejezzük ki az*

$$a_0^2b_0^2(\alpha_1 - \beta_1)(\alpha_1 - \beta_2)(\alpha_2 - \beta_1)(\alpha_2 - \beta_2)$$

mennyiséget az a_0, a_1, a_2, b_0, b_1, b_2 *együtthatók polinomjaként!*

3.5. Feladat *(a) mego., b) mego.)*

a) *Állítsuk elő az*

$$\Delta(x_1; x_2; x_3) = (x_1 - x_2)^2(x_2 - x_3)^2(x_3 - x_1)^2$$

polinomot a

$$\sigma_1 = x_1 + x_2 + x_3, \quad \sigma_2 = x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_1, \quad \sigma_3 = x_1x_2x_3$$

elemi szimmetrikus polinomok polinomjaként!

b) A diszkrimináns

Adjuk meg az $p(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ *polinom együtthatóinak egy olyan polinomját, amelynek értéke pontosan akkor zérus, ha a* p *polinomnak van többszörös gyöke!*

3.6. Feladat *(Mego.)*

Adjuk meg a modulo 7 redukált maradékosztályok elemi szimmetrikus polinomjainak értékeit modulo 7, tehát a

$$\begin{array}{rcllll} \sigma_1 & = & 1+2+3+4+5+6 & \equiv & m_1 & \pmod 7, \\ \sigma_2 & = & 1\cdot 2+1\cdot 3+\ldots+5\cdot 6 & \equiv & m_2 & \pmod 7, \\ & \vdots & & \vdots & & \\ \sigma_6 & = & 1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6 & \equiv & m_6 & \pmod 7 \end{array}$$

$0 \le m_i < 7$ *értékeket!*

3.7. Feladat *(Mego.)*

Adjuk meg a $p(x) = ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e$ polinom együtthatóinak olyan $q(a, b, c, d)$ polinomját, amelynek értéke pontosan akkor zérus, ha p négy gyöke közül valamelyik kettő összege megegyezik a másik kettő összegével vagy annak ellentettjével.

Ajánló

A rezultáns determináns alakjáról és a diszkriminánsról lásd Szele Tibor könyvét[SZEBAL];

3.5. Egyenlőtlenségek

Bevezető feladatok a 9-10-es matematika tagozatos Algebra feladatgyűjtemény

`http://matek.fazekas.hu/mathdisplay/cache/pdf/volume_a_ii.pdf`

`http://matek.fazekas.hu/mathdisplay/volume.php?mode=sne---j-&volume=a_ii`

„Egyenlőtlenségek” fejezetében találhatók.

3.1. Feladat *(I. mego., II. mego., III. mego., IV. mego., V. mego., VI. mego.)*

Igazoljuk, hogy tetszőleges a, $b > 0$ valós számokra $a^3 + b^3 \ge a^2b + ab^2$! Mikor lesz egyenlőség?

3.2. Feladat *(I. mego., II. mego., III. mego., IV. mego., V. mego., VI. mego., VII. mego.)*

Igazoljuk, hogy tetszőleges a, b valós számokra $a^4 + b^4 \ge ab(a^2 + b^2)$! Mikor lesz egyenlőség?

3.3. Feladat *(I. mego., II. mego., III. mego.)*
Oldjuk meg a valós számok halmazán az

$$x^2 + 2y^2 + 3z^2 = 66 \tag{3.5}$$
$$x + y + z = 11 \tag{3.6}$$

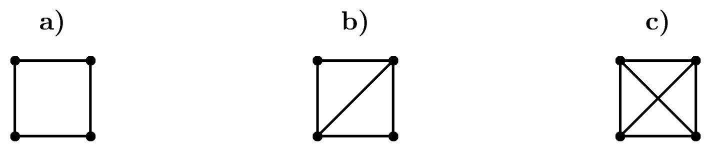
egyenletrendszert!

3.4. Feladat *(I. mego., II. mego., III. mego., IV. mego.)*
Igazoljuk, hogy ha $a + 2b + 3c \geq 14$*, akkor* $a^2 + b^2 + c^2 \geq 14$*!*

3.5. Feladat *(I. mego., II. mego., III. mego.)*
Az a*,* b*,* c*,* d *pozitív racionális számokra teljesül az alábbi három feltétel:*
(1) $a + b + c + d = 8$,
(2) $a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = 25$,
(3) $c = d$.
Határozzuk meg c *maximális értékét!*

3.6. Feladat *Mely* r *valós számok esetén van megoldása a valós számnégyesek körében az*
(1) $a + b + c + d = r$,
(2) $a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = 25$,
(3) $c = d$.
egyenletrendszernek?

3.7. Feladat *(*Nagy Zoltán feladata*) (a) mego., b) I. mego., b) II. mego., c) mego.)*
Egy egyszerű gráf csúcsaira nemnegatív racionális számokat írunk, amelyek összege 1. Ezután minden élre ráírjuk a két végén található csúcsra írt szám szorzatát. Végül képezzük az éleken kapott szorzatok A *összegét. Határozzuk meg* A *maximumát az alábbi esetekben! Hogyan osszuk el a számokat a csúcsokra, hogy a maximumot kapjuk?*



3.2. ábra.

3.8. Feladat *(I. mego., II. mego.)*

A

$$P(x) = x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_{n-1}x + 1$$

polinom $a_1, \ldots, a_{n-1}$ *együtthatói nemnegatív valós számok és a polinomnak* n *különböző valós gyöke van. Mutassuk meg, hogy*

$$P(2) \geq 3^n.$$

Ajánló

Kiss Géza „Algebrai egyenlőtlenségek versenyeken" – a [FEK10] kötet 143-158. oldalain;

Schultz János „111 feladat algebrai egyenlőtlenségekre"[S111AE];

http://matek.fazekas.hu/portal/tanitasianyagok/Schultz_Janos/111algegylotlenseg/.

Nicholas D. Kazarinoff „Geometriai egyenlőtlenségek"[KAGEE];

Ábrahám Gábor „Szélsőérték feladatok megoldása elemi geometriai eszközökkel"[ÁBSZG], http://matek.fazekas.hu/portal/tanitasianyagok/Abraham_Gabor/szelgeo/.

Kubatov Antal „Az Erdős-Mordell egyenlőtlenség"[KUERD]; http://matek.fazekas.hu/portal/tanitasianyagok/Kubatov_Antal/ErdMord/.

Pataki János „Változatok a szimmetriára: így működik a Muirhead-egyenlőtlenség"[PATMU], http://db.komal.hu/KomalHU/showpdf.phtml?tabla=Cikk&id=200867.

3.6. Egyenletrendszerek

3.1. Feladat *(KöMaL Gy. 2574.) (Mego.)*

Kiszámítottuk négy adott valós *szám összes lehetséges kéttagú összegét. Közülük a négy legkisebb* 1, 5, 8 *és* 9*. Mi volt a négy szám?*

3.2. Feladat *(I. mego., II. mego.)*

Határozzuk meg $xy + yz + zx$ *értékét, ha az* x, y, z *számokra teljesül az alábbi három összefüggés:*

$$\begin{aligned} x^2 + xy + y^2 &= 64 \\ y^2 + yz + z^2 &= 81 \\ z^2 + zx + x^2 &= 100 \end{aligned}$$

3.3. Feladat *(*Hajós György Matematika Verseny*) (Mego.)*

Oldjuk meg az alábbi egyenletrendszert a valós számok halmazán!

$$\frac{2x^2}{1+x^2} = y, \qquad \frac{2y^2}{1+y^2} = z, \qquad \frac{2z^2}{1+z^2} = x.$$

3.7. Számhalmazok

(a) mego., b) mego.)

3.1. Feladat *Bizonyítsuk be, hogy*

a) $\cos 72°$, $\cos 36°$ *irracionálisak*

b) $\mathrm{tg}^2\, 54° \cdot \mathrm{tg}^2\, 18°$ *racionális!*

3.2. Feladat *(Mego.)*

Bizonyítsuk be, hogy $\log_3(1+\sqrt{2})$ *irracionális.*

3.3. Feladat *(a) mego., b) mego., c) mego.)*

a) *Bizonyítsuk be, hogy* $\alpha = \sqrt{2}+\sqrt{3}$ *irracionális!*

b) *Van-e olyan egész együtthatós polinom, melynek gyöke* α*?*

c) *Bizonyítsuk be, hogy* $\beta = \sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{5}$ *irracionális!*

3.4. Feladat *(Mego.)*

Bizonyítsuk be, hogy a $\sqrt[3]{7+5\sqrt{2}}+\sqrt[3]{7-5\sqrt{2}}$ *egész szám!*

3.5. Feladat *(Mego.)*

Milyen a valós számra lesz $\sqrt[3]{4+\sqrt{a}}+\sqrt[3]{4-\sqrt{a}}$ *egész szám?*

3.6. Feladat *(Mego.)*

Jelentsen r_j *racionális számokat,* i_j *pedig irracionális számokat. Ha értelmezettek az*

$$r_1^{r_2} \quad r_3^{i_1} \quad i_2^{r_4} \quad i_3^{i_4}$$

számok, vajon racionális vagy irracionális számokat kapunk?

3.7. Feladat *(Mego.)*

Racionális vagy irracionális számok az $x_n = \cos\frac{\pi}{2^n}$, $n = 0, 1, 2, \ldots$ *sorozat elemei?*

3.8. Feladat *(Mego.)*

a) *Bizonyítsuk be, hogy* $\log_2 3$ *irracionális!*

Egy szám algebrai, ha gyöke egy egész együtthatós polinomnak. Transzcendens, ha nem algebrai.

b) *A Gelfond-Schneider tétel szerint, ha a és b algebrai számok,* $a \neq 0, 1$ *továbbá b irracionális, akkor* a^b *transzcendens. Igazoljuk, hogy* $\log_2 3$ *transzcendens!*

3.8. A konjugált

3.1. Feladat *(a) mego., b) mego.)*

a) *Bizonyítsuk be, hogy bármely n természetes számhoz léteznek olyan α_n, β_n természetes számok, amelyekre*

$$(1+\sqrt{2})^n = \alpha_n + \sqrt{2}\beta_n,$$

és ez az $(\alpha_n;\beta_n)$ számpár egyértelmű.

b) *Igazoljuk, hogy a fenti $(\alpha_n;\beta_n)$ számpárra $2\beta_n^2 + (-1)^n = \alpha_n^2$.*

3.2. Feladat *(I. mego., II. mego.)*

Bizonyítsuk be, hogy bármely n természetes számhoz találhatunk olyan m természetes számot, hogy

$$(\sqrt{2}-1)^n = \sqrt{m+1} - \sqrt{m}.$$

3.3. Feladat *(Mego.)*

Bizonyítsuk be, hogy a $\left(\sqrt{26}+5\right)^{2013}$ szám a tizedesvessző után 2013 nullát tartalmaz.

3.4. Feladat *(Mego.)*

Milyen számjegy áll

$$(15+\sqrt{220})^{19} + (15+\sqrt{220})^{82}$$

tizedestört alakjában a tizedesvessző előtt?

3.5. Feladat *(Mego.)*

Vannak-e olyan n és k pozitív egészek, amelyekre

$$\left(5+3\sqrt{2}\right)^n = \left(3+5\sqrt{2}\right)^k?$$

4. fejezet

Számelmélet

Ajánló

Alapvető és átfogó könyvek a témában:

Dr. Szalay Mihály „Számelmélet”[SZASZM] A speciális matematika osztályok számára;
Sárközy András „Számelmélet példatár”[SÁRSZ] Bolyai sorozat;
Sárközy András és Surányi János „Számelmélet feladatgyűjtemény”[SÁSUSZ];
Freud Róbert, Gyarmati Edit „Számelmélet”[FRGYSZ];
Erdős Pál és Surányi János „Válogatott fejezetek a számelméletből”[ERSUR];
Waclaw Sierpinski „200 feladat az elemi számelméletből”[SI200];
Ivan Niven, Herbert S. Zuckerman „Bevezetés a számelméletbe”[NIZUB].

4.1. Osztók és többszörösök

4.1. Feladat *(Mego.)*

Béla egy papírlapot tetszőleges módon felosztott 7 részre. Az így kapott részek közül az egyik részt felosztotta 13 részre, majd a kapott részek egyikét ismét 7 részre, és így folytatta, arra sem ügyelve, hogy a 7, illetve a 13 részre osztást váltogatva végezze. Bizonyos számú osztás után megszámolta a kapott részeket, és azt állította, hogy 2000 részt kapott.

a) *Lehet-e, hogy jól számolt?*

b) *Mi a helyzet, ha nem 2000 darabot szeretett volna kapni?*

Milyen darabszámokat kaphat Béla, ha egy lépésben

c) 7 *és* 16 d) 7 *és* 14

részre oszthat?

4.2. Feladat *(Mego.)*

Egy táblára felírtuk az 1, 2, 3, ..., 1999, 2000 számokat (az első 2000 darab pozitív egészet). Ezek közül két tetszőleges számot letöröltünk, és helyettük a különbségüket írtuk fel. Ezt az eljárást addig ismételtük, amíg egyetlen szám maradt. Páros ez, vagy páratlan?

Mi a helyzet 1, 2, ..., n esetén?

4.3. Feladat *(Mego.)*

Állapítsuk meg, hogy az alábbi következtetések közül melyik helyes!

a)	$6 \mid x$	és	$5 \mid x$	és	$11 \mid x$	$\Rightarrow$	$330 \mid x$
b)	$6 \mid x$	és	$20 \mid x$	$\Rightarrow$	$120 \mid x$		
c)	$13 \mid 120x$	$\Rightarrow$	$13 \mid x$				
d)	$7 \mid x^2$	$\Rightarrow$	$7 \mid x$	$\Rightarrow$	$49 \mid x^2$		
e)	$15 \mid x^2$	$\Rightarrow$	$15 \mid x$	$\Rightarrow$	$225 \mid x^2$		
f)	$12 \mid x^2$	$\Rightarrow$	$12 \mid x$	$\Rightarrow$	$144 \mid x^2$		
g)	$11 \mid xyz$	$\Rightarrow$	$11 \mid x$	vagy	$11 \mid y$	vagy	$11 \mid z$
h)	$15 \mid xy$	$\Rightarrow$	$15 \mid x$	vagy	$15 \mid y$		

4.4. Feladat *(Mego.)*

Adjuk meg prímtényezős alakban azt a legkisebb pozitív egész számot, melyre igaz az állítás:

a) 5-tel osztható négyzetszám
b) 10-zel osztható négyzetszám
c) 21-gyel osztható négyzetszám
d) 3-mal osztható páros négyzetszám
e) 5-tel osztható 0-ra végződő négyzetszám
f) 12-vel osztható köbszám
g) 27-tel és 24-gyel osztható négyzetszám
h) páros, 3-mal osztható, de 18-cal nem osztható négyzetszám
i) 20-szal osztható és a duplája négyzetszám

4.5. Feladat *(Mego.)*

Keress megfelelő m, n, k számokat, amelyekre az alábbi valamelyik feltétel teljesül! ((a; b) az a és b egész számok legnagyobb közös osztóját jelenti, [a; b] pedig a legkisebb közös többszörösüket.)

a) $(m; n) = 12$, $(m; k) = 80$ *és* $(n; k) = 77$
b) $(m; n) = 21$ *és* $[m; n] = 3689$
c) $(m; n) = 120$ *és* $5mn$ *négyzetszám.*

4.6. Feladat *(Mego.)*

Melyik az a legnagyobb kettőhatvány, amely osztja $2010!$*-t?*

4.7. Feladat *(A 4.7. a) mego., b) I. mego., b) II. mego.)*

Ha összeszorozzuk 1-től 100-ig a pozitív egészeket, a szorzat nyilván 0-ra végződik, de hányra?

a) *Hány 0-ra végződik a* $100!$*?*

b) *Mi az utolsó nem 0 számjegye a szorzatnak?*

4.8. Feladat *(Mego.)*

Hány olyan különböző számpár van, amelyeknek legnagyobb közös osztója 7 és legkisebb közös többese $186\,340$*?*

4.9. Feladat *(Mego.)*

Melyik az a legnagyobb négyzetszám, amely az $50!$*-nak osztója?*

4.10. Feladat *(Mego.)*

a) Hány olyan 600-nál kisebb természetes szám van, amelyik sem 2-vel, sem 3-mal, sem 5-tel nem osztható?

b) Hány olyan természetes szem van, amelyik 6000-nél kisebb és relatív prím a 6000-hez?

4.11. Feladat *(Mego.)*

Mi a szükséges és elégséges feltétele annak, hogy egy szám páros osztóinak összege kisebb legyen a páratlan osztók összegénél?

4.12. Feladat *(a) mego., b) mego.)*

a) *Egy sorban elhelyeztünk 100 korongot, melyek egyik fele piros, a másik kék. Kezdetben minden korongnak a piros fele van felül. Ezután első lépésben az összes korongot megfordítjuk. Második lépésben minden másodikat megfordítunk, a harmadik lépésben minden harmadikat, és így tovább, a k-adik lépésben minden k-adik korongot megfordítunk, végül csak a századikat. Hány korongnak lesz végül a kék fele felül?*

b) *Mi a helyzet akkor, ha minden k-adik lépésben minden k-adik korongot k-szor fordítunk meg?*

4.13. Feladat (Sztrókay-Török: 1991 alapján)*(Mego.)*

a) *Előáll-e a* 2000 *valahány (legalább kettő) egymást követő egész szám összegeként?*

b) *És egymást követő pozitív egészek összegeként?*

c) *A fenti a), b) esetekben hányféle előállítás van?*

d) *Előáll-e a* 2000 *szomszédos páros természetes számok összegeként?*

e) *Mi a helyzet más számokkal?*

4.14. Feladat *(Mego.)*

1-től 10-ig a számokat számkártyákra írtuk. Szét lehet-e ezeket a kártyákat osztani 2 (3, 4, 5) dobozba úgy, hogy a számok

a) *összege,* b) *szorzata*

mindegyik dobozban ugyanannyi legyen?

4.15. Feladat *(Mego.)*

Legyen N $4-$*gyel osztható egész, és jelentse* S *az* $[1, N]$ *intervallumba eső,* $N-$*hez relatív prímszámok összegét,* T *az* $[1, N/2]$ *intervallumba eső,* $N-$*hez relatív prímszámok összegét. Tehát pl. amikor* $N = 4$, $S = 1 + 3; T = 1$. *Bizonyítsuk be, hogy az* S/T *hányados* $N-$*től függetlenül mindig* 4.

Ajánló

Jakucs Erika „Számelmélet, 6. osztály – egy lehetséges felépítés"[JASZ6].

Kosztolányi József „Számelméleti érdekességek" – a [FEK10] kötet 159-173. oldalain.

4.2. Oszthatósági szabályok

4.1. Feladat *(Mego.)*

Ismeretes, hogy $35! = 10333147966386144929ab6651337523200\ldots$, *ahol a kipontozott helyen már csak 0-k állnak. Határozzuk meg az* a *és a* b *számjegyet!*

4.2. Feladat *(Mego.)*

Keressünk olyan négyzetszámot, amelyben a számjegyek összege 150.

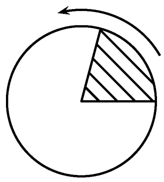
4.3. Feladat *(Mego.)*

Adjunk meg három különböző számot úgy, hogy bármelyik kettő ne legyen relatív prím, de a három számnak mégse legyen közös valódi osztója!

Adjunk meg végtelen sok ilyen számhármast!

4.4. Feladat *(Mego.)*

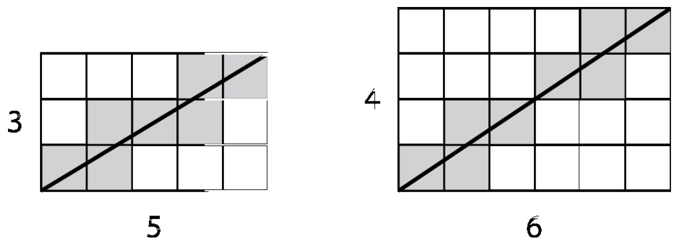
A 4.1 ábrán látható 75°-os körcikket elforgatjuk 75°-kal az óra járásával ellenkező forgásirányban. A kapott körcikket újból elforgatjuk 75°-kal, stb. Hányszor kell a forgatást elvégezni, hogy visszajussunk az eredeti körcikkhez?



4.1. ábra.

4.5. Feladat *(Mego.)*

Egy $a \times b$-es rácstéglalapnak behúzzuk az egyik átlóját, és kiszínezzük azokat a rácsnégyzeteket, melyekbe az átló belemetsz (melyeknek van közös szakasza az átlóval). Hány mező lesz beszínezve?



4.2. ábra.

Ajánló

Pálfalvi Józsefné „Barátkozzunk a számokkal!”[BARSZM];

Gábos Adél és Halmos Mária „Számelmélet munkafüzet I. osztály”[GÁHASZ].

4.3. Számrendszerek

4.1. Feladat *(Mego.)*

Írjuk fel tízes számrendszerben azokat a számokat, amelyek tizenegyes számrendszerben a0b, a kilences számrendszerben pedig b0a alakúak!

4.2. Feladat *(I. mego., II. mego., III. mego.)*

Állítsuk elő 2010*-et kettes számrendszerben, azaz*

$$\sum_{k=0}^{m} n_k \cdot k! = n_m \cdot 2^m + n_{m-1} \cdot 2^{m-1} + \ldots + n_3 \cdot 2^3 + n_2 \cdot 2^2 + n_1 \cdot \cdot 2^1 + n_1 \cdot \cdot 2^0 \qquad (4.1)$$

alakban, ahol m, n_0, n_1, $\ldots$, n_m *egészek,* m *pozitív és* $k \in \{0, 1, \ldots, m\}$ *esetén* $0 \leq n_k \leq 1$.

4.3. Feladat *(a) mego., b) mego., c) mego.)*

A tízes számrendszerbeli 2010*, tehát* 2010_{10} *nem osztható héttel.*

a) *Mutassuk meg, hogy ha a számrendszer alapszáma osztható héttel, akkor abban a számrendszerben a* 2010 *alakban leírt szám is osztható héttel.*

b) *Van -e olyan héttel nem osztható „a" alap, hogy a* 2010_a *szám osztható héttel?*

c) *Van -e olyan tizeneggyel nem osztható „a" alap, hogy a* 2010_a *szám osztható tizeneggyel?*

4.4. Feladat *(Mego.)*

Bizonyítandó, hogy egy szám akkor és csak akkor osztható 7-tel, ha utolsó számjegyének kilencszeresét levonva az utolsó számjegy levágásával keletkező (eggyel kevesebb jegyű számból 7-tel osztható számot kapunk.

4.5. Feladat *(Mego.)*

Az 125 574 392 777 540 024 307 *szám milyen maradékot ad 2-vel, 3-mal, ... 9-cel, 10-zel osztva? Mi a helyzet 8-as, illetve 9-es számrendszerben?*

4.6. Feladat *(a) mego., b) mego., c) mego.)*

Melyek azok a számrendszerek, amelyekben az

a) 169*;* b) 196*;* c) 225

számjegysorozattal leírt szám négyzetszám?

4.7. Feladat *(a) I. mego., a) II. mego., b) mego.)*

a) *Melyik az a számrendszer, amelyben a* 2222 *és a* 0, 2010201020102010... *számok szorzata egész szám?*

b) *Melyik számrendszerben teljesül a*

$$2010 \cdot 0,2222222... = 2222 \cdot 0,201020102010...$$

összefüggés?

4.8. Feladat *(*2010 faktoriális számrendszerben*) (I. mego., II. mego.)*

Állítsuk elő 2010*-et faktoriális számrendszerben, azaz*

$$\sum_{k=1}^{m} n_k \cdot k! = n_m \cdot m! + n_{m-1} \cdot (m-1)! + \ldots + n_3 \cdot 3! + n_2 \cdot 2! + n_1 \cdot 1! \tag{4.2}$$

alakban, ahol m*,* n_1*,* n_2*,* $\ldots$*,* n_m *egészek,* m *pozitív és* $k \in \{0, 1, \ldots, m\}$ *esetén* $0 \leq n_k \leq k$*.*

4.9. Feladat *(Mego.)*

a) *Bizonyítsuk be, hogy minden* 6*−nál nagyobb egész előáll különböző prímszámok összegeként!*

b) *Legyen* $f_1 = 1$; $f_2 = 2$ *ás* $f_{n+1} = f_n + f_{n-1}$ *az ú.n. Fibonacci sorozat. Bizonyítsuk be, hogy minden pozitív egész szám előáll különböző Fibonacci szám összegeként! (mind az a), mind a b) feladatban az egy tagból álló számokat is tekintsük összegnek!)*

Ajánló

Gyűjteményünkben még ide tartoznak a 6.34., 6.35. feladatok is. Könyvek a témában:

Lánczos Kornél „Számok mindenütt”[LCSZM];

Fried Ervin „Oszthatóság és számrendszerek”[FRISZ];

Maurer I. Gyula „Tizedes törtek és lánctörtek”[MAUTLÁ].

4.4. Maradékok

4.1. Feladat *(Mego.)*

Hat kosárban tojások voltak. Némelyikben tyúktojások, másokban kacsatojások, mindegyik kosárban csak egyféle. Az egyes kosarakban sorra 8, 13, 15, 18, 19 és 21 tojás volt. „Ha eladom ezt a kosár tojást, akkor kétszer annyi tyúktojásom marad, mint kacsatojásom.” Melyik kosárra gondolt?

4.2. Feladat *(A 4.2. a) mego., b) I. mego., b) II. mego.)*

a) *Van-e 59-nek olyan többszöröse, amely 3 darab 1-es számjegyre végződik?*

b) *Ha igen, keressük meg a legkisebb ilyen pozitív többszöröst!*

4.3. Feladat *(OKTV, 2005-2006., III. kat., 1. forduló, 1. feladat)(Mego.)*

Igaz-e, hogy a $7k+3$, $k = 0, 1, 2, \ldots$ *számtani sorozatban végtelen sok palindrom szám van? (Azokat a számokat nevezzük palindrom számoknak, amelyek tízes számrendszerbeli alakjában a jegyeket fordított sorrendben felírva ugyanahhoz a számhoz jutunk, pl. 12321.)*

4.4. Feladat *(Mego.)*

Tegyük fel, hogy néhány egész szám összege osztható $6-$*tal. Bizonyítsuk be, hogy akkor köbeinek az összege is osztható* $6-$*tal!*

4.5. Feladat *(Mego.)*

Állítsuk elő 2010*-et minél kevesebb négyzetszám összegeként!*

4.6. Feladat *(Arany Dániel Verseny, 2010-2011, Kezdők, 2. ford., III. kat., 3. fel.)(I. mego., II. mego.)*

Jelölje $\mathbb{P}$ *a prímszámok halmazát! Legyen* $f : \mathbb{P} \to \mathbb{R} x \to \left\{\frac{x^2-1}{24}\right\}$, *ahol* $\{z\}$ *a* z *szám törtrészét jelöli (azaz* $\{z\} = z - [z]$ *és* $[z]$ *a* z *egész része, vagyis az a legnagyobb egész szám, amely* z*-nél nem nagyobb)! Mi az* f *függvény értékkészlete?*

4.7. Feladat *(Arany Dániel Mat. Vers. 2003/2004, 3. kat., 9. évf., I. ford., 2. fel.)(Segít.)*

Mely x, y *és* z *egész számokra igaz az*

$$x^2 + y^2 + z^2 = 2^{2004}$$

egyenlőség?

4.8. Feladat *(Mego.)*

Legyenek p, q, r *pozitív prímek. Lehet-e* $p^4 + q^4 + r^4 - 3$ *prímszám? Hány megoldása van a feladatnak?*

4.9. Feladat *(Mego.)*

Bizonyítsuk be, hogy ha négy négyzetszám összege osztható kilenccel, akkor szorzatuk is osztható kilenccel!

4.10. Feladat *(OKTV 1995/96, II. kat., III. ford., 2. fel.)(Mego.)*

Legyen n pozitív egész. Milyen n-ekre teljesül, hogy

$$n = d_1^2 + d_2^2 + d_3^2 + d_4^2,$$

ahol d_1, d_2, d_3, d_4 az n szám négy legkisebb pozitív egész osztója?

4.11. Feladat *(Segít.)*

Mutassuk meg, hogy az $5x^2+3y^2 = 1$ egyenletnek nincs megoldása a racionális számok körében!

4.12. Feladat *(Mego.)*

Oldjuk meg az egész számok körében az $5x^2 - 14y^2 = 11z^2$ egyenletet!

4.13. Feladat *(I. mego., II. mego., III. mego.)*

Mutassuk meg, hogy ha az x, y egész számokra az $x^2 + xy + y^2$ kifejezés értéke 0-ra végződik, akkor legalább két 0-ra végződik!

4.14. Feladat *(Mego.)*

a) *Bizonyítsuk be, hogy öt egész közül ki lehet választani hármat, melyeknek összege osztható hárommal!*

b) *Igaz-e, hogy $2n-2$ egész közül ki lehet választani $n-$et, melyeknek összege osztható $n-$nel?*

4.15. Feladat *(Mego.)*

Legyen p prímszám, n tetszőleges egész szám. Mutassuk meg, hogy vannak olyan a, b egész számok, amelyekre $p|a^2 + b^2 - n$.

Ajánló

Pintér Klára „Számoljunk maradékokkal!”[PKSZM],

http://www.sulinet.hu/tanar/kompetenciateruletek/2_matematika/3_modulleirasok-tanar/2_a_tipus/6-evfolyam/2_tanari_modulok/064-temakor/amat_0641__tanar.pdf

Alexander Bogomolny „Cut the knot”[CUTKNT] portálja a maradékokról:

http://www.cut-the-knot.org/blue/Modulo.shtml.

Wettl Ferenc „Varázslók titkai – a nem feltáró bizonyítás”, az [ÚJMOZ] kötetben (a teljes feldolgozás a 4.10. Hatványozás moduláris aritmetikában fejezet után történhet),

http://www.tankonyvtar.hu/en/tartalom/tkt/uj-matematikai-mozaik-uj/ar05.html.

4.5. Egy kis algebrával

4.1. Feladat *(Mego.)*

Gondoljunk egy 3 jegyű számra! Ha leírjuk kétszer egymás mellé, akkor egy hatjegyű számot kapunk. Osszuk el ezt a hatjegyű számot 13-mal, azután az eredményt 11-gyel, majd az így kapott eredményt 7-tel. Mit tapasztalunk? Mi a magyarázat?

4.2. Feladat *(Mego.)*

Gondoljunk egy 3 jegyű számra! Készítsük el a fordítottját, és vonjuk ki a nagyobbikból a kisebbet (ha egyenlők voltak, mindegy melyiket melyikből). Az eredményhez adjunk hozzá annak fordítottját. Mit tapasztalunk különböző számokkal próbálkozva? Mi a magyarázat?

4.3. Feladat *(Mego.)*

Bizonyítsuk be, hogy ha egy ötjegyű szám osztható 271-gyel, akkor, ha néhány számjegyet levágunk a végéről és a szám elejére tesszük, az így kapott szám is osztható lesz 271-gyel.

4.4. Feladat *(I. mego., II. mego.)*

Egy 6-ra végződő, hatjegyű szám végén álló hatos számjegyet a szám elejére rakva a kapott hatjegyű szám éppen 4-szerese az eredetinek. Mi lehet ez a szám?

Megjegyzés a 4.4. feladathoz

A téma a 4.2. feladatban folytatódik.

4.5. Feladat *(I. mego., II. mego.)*

Melyik az a legnagyobb pozitív egész, amellyel $n^5 - 5n^3 + 4n$ *minden* n *esetén osztható?*

4.6. Feladat *(a) I. mego., a) II. mego., b) mego.)*

Milyen n *pozitív egész számokra igaz az, hogy bármely* n *egymást követő egész szám*

a) *összege;* b) *négyzetösszege*

osztható n*-nel?*

4.7. Feladat *Kömal Gy. 2798, 1993/4.(Mego.)*

Melyek azok az a, b *számjegyek, amelyekre az* $\overline{ab}$, $\overline{ba}$ *kétjegyű számok legnagyobb közös osztója* $a^2 - b^2$*?*

Ajánló

Pintér Ferenc „Számelméleti feladatok az általános iskolai versenyek tükrében" – a [FEK12] kötet 195-211. oldalain.

4.6. Diofantikus egyenletek

4.1. Feladat *(I. mego., II. mego., III. mego.)*
Az n pozitív egész szám mely értékeire igaz, hogy n^2+4n-5 egy egész szám négyzete?

4.2. Feladat *(I. mego., II. mego.)*
Határozzuk meg az összes olyan x egész számot, amelyre $x^2+19x+95$ négyzetszám!

4.3. Feladat *(Mego.)*
Hány olyan egész számokból álló $(x;y)$ számpár van amelyre

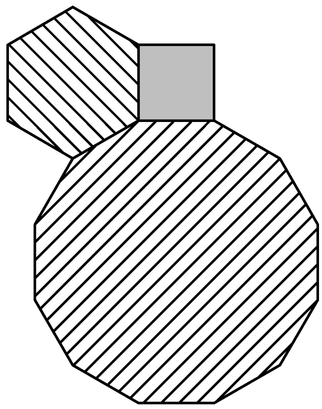
$$2x+y+2xy=2012?$$

4.4. Feladat *(Arany Dániel Mat. Vers., 2008/2009, 3. kat., 9. évf., I. ford. 3. fel.)(Mego.)*
Melyek azok a pozitív egész számok, amelyeknek pontosan négy (pozitív) osztója van és az osztóik összege 108?

4.5. Feladat *(I. mego., II. mego.)*
Milyen rácstéglalapokra teljesül, hogy a kerület és terület mérőszáma megegyezik?

4.6. Feladat *(Mego.)*
Egy téglalap alakú sütemény széle megégett. A sütit az oldalaival párhuzamos – teljesen végig érő – vágásokkal kisebb darabokra vágtuk. Azt tapasztaltuk, hogy az égett – tehát a süti széléről származó – darabok száma megegyezik az égett részt nem tartalmazó – belső – szeletek számával. Hány részre vágtuk fel a süteményt?

4.7. Feladat *(I. mego., II. mego., III. mego.)*
Írjuk fel a $\frac{2}{9}$-et az összes lehetséges módon két törzstört összegeként!



4.3. ábra.

4.8. Feladat *(I. mego., II. mego.)*

Egy-egy egységnyi oldalú négyzet, szabályos hatszög és szabályos tizenkétszög elhelyezhető egymás mellé úgy, hogy egy csúcsuknál összeérjenek és körülötte átfedés és hézag nélkül lefedjék a teljes szöget (lásd a 4.3 ábrát).

Mely két szabályos sokszöget helyezhetjük egy szabályos háromszög mellé az egyik csúcsánál úgy, hogy átfedés nélkül lefedjék a csúcs körüli teljes szöget?

4.9. Feladat *(Mego.)*

Két párhuzamos egyenes mindegyikén prímszám számú pontot jelöltünk meg. A megjelölt pontok – mint csúcsok – által meghatározott összes négyszög száma kétszerese a megjelölt pontok által meghatározott háromszögek számának. Hány ponttal van több az egyik egyenesen, mint a másikon?

4.10. Feladat *(Mego.)*

Az első Föld-Mars találkozón kiderült, hogy a marslakók lába épp olyan, mint az embereké, de a kezek és rajtuk az ujjak száma már más. Noha a marslakók hattal többen voltak, mint a földiek, ujjaikból (a kezeket és s lábakat is figyelembe véve) összesen 1-gyel kevesebb volt. Hány résztvevője volt az első találkozónak?

4.11. Feladat *(Mego.)*

Adjuk meg az összes olyan x, y egész számpárt, amelyre

$$x(x+1)(x+2)(x+3) = y(y+1).$$

4.12. Feladat *(Mego.)*

Határozza meg azokat az egész számokból álló $(x; y)$ számpárokat, amelyek kielégítik a következő egyenletet:

$$(x + 2)^4 - x^4 = y^3.$$

Ajánló

dr Katz Sándor „Algebrai kifejezések alkalmazása oszthatósági feladatokban és egyenletmegoldásban" – a [FEK12] kötet 120-136. oldalain.

„Számelmélet 7-8. évf" a Matkönyv[MATKV] matematika tagozatos feladatgyűjteményben, http://matek.fazekas.hu/mathdisplay/cache/pdf/volume_sz_i.pdf.

4.7. Számhalmazok

4.1. Feladat *(Mego.)*

a) *Bizonyítsuk be, hogy minden $11-$nél nagyobb egész szám előáll $3x + 7y$ alakban, ahol $x, y \geq 0$ egész számok!*

b) *Bizonyítsuk be, hogy minden $2(b - 1) - 1-$nél nagyobb egész szám előáll $3x + by$ alakban, ahol $(3, b) = 1$, $b \in \mathbb{N}$, $x, y \geq 0$ egész számok!*

4.2. Feladat *(Mego.)*

Legyen $A = \{a_1 < a_2 < \cdots < a_k\}$ és $B = \{b_1 < b_2 < \cdots < b_n\}$ két, egészekből álló sorozat. A és B összegén a – Minkowskitól származó – $A + B = \{a_i + b_j : 1 \leq i \leq k; 1 \leq j \leq n\}$ halmazt értjük.

a) *Bizonyítsuk be, hogy*

$$k + n - 1 \leq |A + B| \leq kn.$$

b) *Mikor és csak mikor van egyenlőség, azaz mikor igaz, hogy $|A + B| = k + n - 1$ illetve mikor igaz, hogy $|A + B| = kn$?*

4.3. Feladat *(a) mego., b) mego., c) I. mego., c) II. mego., d) mego.)*

Az 1-nél nem kisebb, 100-nál nem nagyobb természetes számok közül maximum hányat lehet kiválasztani úgy, hogy a kiválasztottak közül bármelyik kettőt kiválasztva

a) *az egyik osztója legyen a másiknak?*

b) *azok ne legyenek relatív prímek?*

c) *egyik se legyen többszöröse a másiknak?*

d) *azok relatív prímek legyenek?*

4.4. Feladat *(Mego.)*

Adott 12 *darab* 1200*−nál nem nagyobb összetett szám. Bizonyítsuk be, hogy van kettő közöttük, melyeknek van* 1*−nél nagyobb közös osztójuk!*

4.8. Számsorozatok

4.1. Feladat *(Mego.)*

a) *Adjuk meg az összes olyan három pozitív egész számból álló számtani sorozatot, amelynek differenciája 2 és minden eleme prím!*

b) *Mi lehet a lehető legkisebb differenciája egy öt különböző pozitív prímszámból álló számtani sorozatnak?*

c) *Igazoljuk, hogy ha a számtani sorozat olyan, hogy minden tagja prímszám és* 15 *tagú, akkor differenciája* 30.000*-nél nagyobb!*

4.2. Feladat *(Mego.)*

Tekintsük az $F_k = 2^{2^k} + 1,\ k = 0, 1, 2, \dots$ *ú.n. Fermat számok sorozatát.*

a) Bizonyítsuk be, hogy ha $0 \le k < n$, *akkor* $F_k | F_n - 2$.

b) Igazoljuk, hogy ha $k \ne n$, *akkor* $(F_k, F_n) = 1$.

c) Hogyan következik a b) feladatból, hogy végtelen sok prímszám van?

4.3. Feladat *(OKTV, 1999-2000, III. kat., I. ford., 2. fel.)(Mego.)*

Jelöljük a_n*-nel a* $\sqrt{n}$*-hez legközelebbi egész számot. Számítsuk ki az*

$$\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \frac{1}{a_3} + \dots + \frac{1}{a_k}$$

összeget, ahol $k = 1999 \cdot 2000$.

4.4. Feladat *(Mego.)*

Igaz-e, hogy n *egymást követő egész szám szorzata mindig osztható* $n!$*-sal?*

4.5. Feladat *(a-b-c) mego., d-e) mego., f) mego.)*

Ebben a feladatban a Fibonacci sorozatot ($f_0 = 0$, $f_1 = 1$, $f_n = f_{n-1} + f_{n-2}$, *ha* $n > 1$) *vizsgáljuk.*

Hanyadik helyeken vannak a

a) *kettővel;* b) *hármmal;* c) *tízzel* *osztható számok a sorozatban?*

d) *Mutassuk meg, hogy minden egész számnak van pozitív többszöröse a sorozatban!*

e) *Vizsgáljuk a Fibonacci sorozat k-val osztható elemeit! Igazoljuk, hogy ha az $F_0 = 0$-tól különböző legkisebb ilyen elem az F_m, akkor $k|F_n \iff m|n$.*

f) *Mutassuk meg, hogy $(F_a, F_b) = F_{(a,b)}$. Például $F_8 = 21$, $F_{12} = 144$, ahol $(8, 12) = 4$, $(21, 144) = 3$ és valóban: $F_4 = 3$.*

4.6. Feladat *(Mego.)*

Tekintsük az $x_n = 2^n - 1$ elemekből álló sorozatot. Bizonyítsuk be, hogy e sorozatban tetszőlegesen hosszú, egymás után következő, összetett számokból álló elemek vannak; azaz bármely $k-$hoz található olyan n, hogy $x_{n+1}, x_{n+2}, \ldots, x_{n+k}$ mindegyike összetett szám!

4.7. Feladat *(Mego.)*

Bizonyítsuk be, hogy az $y_k = 2^{2^k} + 3, \; k = 0, 1, 2, \ldots$ sorozatban végtelen sok összetett szám van!

4.8. Feladat *(Mego.)*

Tekintsünk egy természetes számokból álló növekvő számtani sorozatot.

Bizonyítsuk be, hogy bármely $k-$ra van e sorozatnak k egymást követő tagja, amelyik összetett szám!

4.9. Feladat *(Mego.)*

Bizonyítsuk be, hogy nincs olyan különböző természetes számokból álló számtani sorozat, melynek minden eleme hatványszám (azaz n^k, $k \geq 2$ alakú)!

Ajánló

Freud Róbert „Prímszámok – ősi problémák, új eredmények”[FRPRŐ], `http://matek.fazekas.hu/portal/eloadas/2005/eloadas_2005_11_22_freud.html`;

Jens Kruse Andersen „Primes in Arithmetic Progression Records”, `http://users.cybercity.dk/~dsl522332/math/aprecords.htm`;

Szalay Mihály „Számelmélet”[SZASZM], benne a Dirichlet tétel bizonyítása.

Nem gondoljuk, hogy egy diák kapásból végigolvassa, de érdekességnek ajánljuk a téma forradalmi cikkét:

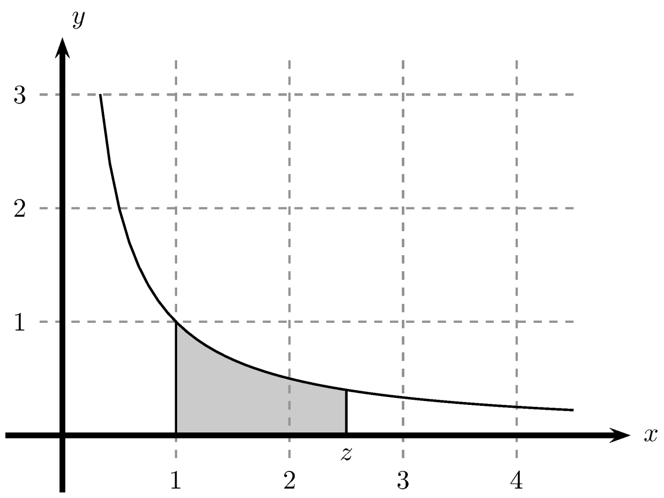
Ben Green, Terence Tao „The primes contain arbitrarily long arithmetic progressions” [TAGRP], `http://arxiv.org/pdf/math/0404188v6.pdf`.

4.9. A harmonikus sor

4.1. Feladat *(a) mego., b) mego., c) mego., d) mego.)*

Ebben a feladatban kerüljük az integrálszámítás alkalmazását!

Jelölje (lásd a 4.4 ábrát) $I(z)$ az $y = \frac{1}{x}$ függvény görbéje alatti előjeles területet $x = 1$ és $x = z$ között ($z > 0$). „Előjelen" mindössze annyit értünk, hogy $0 < z < 1$ esetén a terület negatív, $1 < z$ esetén pozitív.



4.4. ábra.

a) *Bizonyítsuk be, hogy $I(n) < \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{n} < 1 + I(n)$.*

b) *Mutassuk meg, hogy van olyan területtartó leképezés (az adott esetben tengelyes affinitások kompozíciója), amely az $xy = 1$ hiperbolát önmagára képezi és annak $(1, 1)$ pontját valamely előírt $(q, \frac{1}{q})$ pontba viszi ($q > 0$).*

c) *Igazoljuk, hogy tetszőleges pozitív valós a, b számokra $I(ab) = I(a) + I(b)$.*

d) *Mutassuk, meg, hogy $I(z) = \ln z$.*

4.2. Feladat *(Mego.)*

Definiáljuk az a_1, a_2, $\ldots$ sorozatot a következőképpen:

$$a_n = \frac{1}{n}\left(\left[\frac{n}{1}\right] + \left[\frac{n}{2}\right] + \ldots + \left[\frac{n}{n}\right]\right). \tag{4.3}$$

a) *Bizonyítsuk be, hogy végtelen sok n-re $a_{n+1} > a_n$.*

b) *Bizonyítsuk be, hogy végtelen sok n-re $a_{n+1} < a_n$.*

4.3. Feladat *(OKTV, 2003-2004., III. kat., 1. forduló, 2. feladat)(Mego.)*

Álljon a H halmaz véges sok olyan természetes számból, amelyeknek nincs 3-nál nagyobb prímosztója. Mutassuk meg, hogy a H-beli számok reciprokainak az összege 3-nál kisebb.

4.4. Feladat *(Mego.)*

Legyen

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{10}=\frac{a}{b},$$

ahol $(a,b)=1$. Számoló(számító)gép nélkül határozzuk meg, hogy a milyen maradékot ad $5-tel$ osztva!

4.5. Feladat *(a) I. mego., a) II. mego., b) mego.)*

a) *Bizonyítsuk be, hogy*

$$H_p=\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{p-1}$$

számlálója osztható $p-$vel, ahol $p>2$ prímszám!

b) *$p=5$ és $p=7$ esetén ennél több is igaz, a fenti H_p szám számlálója p^2-tel is osztható. Igaz-e ez minden $p>3$ prímszám esetén?*

4.6. Feladat *(Segít., Mego.)*

Bizonyítsuk be, hogy nics olyan n természetes szám, amelyre a

$$H_n=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}$$

egész szám!

Ajánló

Ronald L. Graham, Donald E. Knuth, Oren Patashnik „Konkrét matematika”[KONKR], 6.3 fejezet;

Pelikán József „Matematikai konstansok”[PELCO],

http://matek.fazekas.hu/portal/eloadas/2006/eloadas_2006_11_21_pelikan.php.

4.10. Hatványozás moduláris aritmetikában

4.1. Feladat *(a) mego., b) mego., c) mego., d) mego., e) mego.)*

a) *Írjuk fel az* $\frac{1}{n}$ *törtek* pontos *tizedestört alakját* $n = 6, 7, \ldots, 17$ *esetén! Ne csak az eredményt adjuk meg, hanem látszódjon a teljes kiszámolási algoritmus is (ez a későbbiekben hasznos lesz)!*

Kíséreljünk meg az előző számolások figyelembevételével „fejből" válaszolni az alábbi kérdésekre!

b)*Adjuk meg a* $\frac{3}{7}$, $\frac{3}{13}$, $\frac{13}{17}$ *törtek tizedestört alakját!*

c) *Periodikusak-e az* $\frac{1}{18}$, $\frac{1}{19}$ *törtek tizedestört alakjai?*

d) *Ha periodikusak, akkor a tizedesvessző után azonnal kezdődik a periódus? (Az tiszta szakaszos tizedes törtek-e?)*

e) *Milyen hosszú lehet az* $\frac{1}{18}$, $\frac{1}{19}$ *törtek tizedestört alakjának periódusa?*

4.2. Feladat *(a) I. mego., a) II. mego., b) I. mego., b) II. mego.)*

Adjuk meg

a) *az összes olyan hatjegyű*

b) *az összes olyan*

pozitív egész számot, amely a háromszorosára nő, ha (balról) első jegyét áttesszük a szám végére (a jobb szélső helyre)!

4.3. Feladat *(a) mego., b) mego., c) mego., d) mego.)*

A (legfeljebb) n-jegyű x számot n-teljes főnix számnak, vagy röviden főnix számnak nevezzük, ha a $2 \cdot x$, $3 \cdot x$, $\ldots$, $n \cdot x$ *számok az x szám (itt x-et, ha szükséges, az elejére írt nullákkal n-jegyűvé alakítjuk) ciklikus permutációival állíthatók elő.*

Az 142857 szám például 6-teljes főnix szám, hiszen

$$2 \cdot 142857 = 285714, \qquad 3 \cdot 142857 = 428571, \qquad 4 \cdot 142857 = 571428$$

$$5 \cdot 142857 = 714285, \qquad 6 \cdot 142857 = 857142.$$

a) *Adjuk meg az összes n-teljes főnix számot* $n = 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8$ *esetén!*

b) *Keresendő még egy további főnix szám!*

c) *Számítsuk ki az eddig megtalált n-teljes főnix számok* $(n+1)$*-szereseit! Mit tapasztalunk? (Indokolni még nem kell.)*

d) *Írjunk programot, amely kiírja az összes n-teljes főnix számot* $n = 2, 3, \ldots, 500$ *esetén! (Figyelem! Ötszáz vagy annál kevesebb jegyből álló számból* 10^{500} *darab van. Tehát működő, valóban lefutó program tervezéséhez matematikai gondolatok is szükségesek.)*

4.4. Feladat *(Mego.)*

Mutassuk meg, hogy ha az x egész szám n-teljes főnix szám, akkor benne a számjegyek meglehetősen egyenletesen fordulnak elő, azaz bármely két számjegy ugyanannyiszor szerepel x-ben vagy egy a különbség az előfordulásuk között. (Az 142857 főnix számban pld minden számjegy 0-szor vagy 1-szer szerepel.)

4.5. Feladat *(Mego.)*

Bizonyítandó, hogy ha az x egész szám n-teljes főnix szám, akkor $(n+1)\cdot x = 10^n - 1$.

4.6. Feladat *(a) mego., b) mego., c) mego., d) mego., e) mego., f) mego.)*

a) *Mutassuk meg, hogy bármely racionális tört tizedestört alakja véges, vagy periodikus!*

b) *Legfeljebb milyen hosszú lehet a $\frac{p}{q}$ tört tizedestört alakjában a periódus?*

c) *Mutassuk meg, hogy ha a $\frac{p}{q}$ tört tizedestört alakjának periódusa $(q-1)$ hosszúságú, akkor q prím. (Segítség a lábjegyzetben![1])*

d) *Mutassuk meg, hogy ha $(q, 10) = 1$ és $0 < p < q$, akkor a $\frac{p}{q}$ tört tizedestört alakja* tiszta szakaszos*:*

$$\frac{p}{q} = 0,\dot{z}_n z_{n-1} \dots z_2 \dot{z}_1,$$

azaz periódusa közvetlenül a tizedesvessző után kezdődik!

e) *Mutassuk meg, hogy ha az $\frac{1}{n+1}$ tört tizedestört alakjának periódusa n hosszúságú:*

$$\frac{1}{n+1} = 0,\dot{x}_n x_{n-1} \dots x_2 \dot{x}_1, \tag{4.4}$$

akkor az $x = \overline{x_n x_{n-1} \dots x_2 x_1}$ szám n-teljes főnix szám!

f) *Igaz-e az e) feladatrészben megfogalmazott állítás megfordítása? Tehát ha az $x = \overline{x_n x_{n-1} \dots x_2 x_1}$ szám n-teljes főnix szám, akkor szükségképpen $\frac{1}{n+1} = 0,\dot{x}_n x_{n-1} \dots x_2 \dot{x}_1$, ahol a jelölt rész a legkisebb periódus?*

4.7. Feladat *(a) mego., b), c) mego.)*

a) *Igazoljuk, hogy az*

$$\frac{1}{13}, \quad \frac{2}{13}, \dots \frac{12}{13}$$

törtek tizedestört alakjában a periódus hossza egyenlő egymással!

[1] Van-e olyan maradék, amely 1/49-ed tizedestört alakját megadó algoritmus során előre láthatólag nem fog előfordulni?

Mutassuk meg, hogy ha $(n,10)=1$, akkor az $\frac{1}{n}$ tört tizedestört alakjában a periódus π hosszára

b) $\pi | n-1$, *ha n prím.*

Általában pedig

c) $\pi | \phi(n)$.

4.8. Feladat *(Mego.)*

Mutassuk meg, hogy pontosan akkor van n-teljes főnix szám, ha $(n+1)$ prím és a 10 primitív gyök, modulo $(n+1)$.

4.9. Feladat *(a), b), c), d) mego., e) I. mego., e) II. mego., f) mego.)*

Tartalmaz-e a mindig eggyel több kettes számjegyet tartalmazó számok 2, 22, 222, 2222, ... sorozata végtelen sok

a) *hárommal;* b) 111-*gyel;* c) *héttel;* d) *kilenccel;*

e) 59-*cel osztható számot?*

f) *Figyeljük meg ugyanezt, más számmal való oszthatóságokra is!*

4.10. Feladat *(Mego.)*

a) Bizonyítsuk be, hogy minden egész számnak van olyan többszöröse, amelyet a tízes számrendszerben felírva a számjegyek csak $0-$k és $1-$(esek).

b) Bizonyítsuk be, hogy minden ötnél nagyobb prímszámnak van olyan többszöröse, amelyet a tízes számrendszerben felírva csak az 1 számjegyet tartalmazza (azaz minden $p>5$ prímhez létezik k. hogy $p\cdot k =_{10} \overline{11\ldots 1}$).

4.11. Feladat *(Mego.)*

Igazoljuk, hogy minden k pozitív egészhez találunk oly $3-$hatványt, melyet a tizes számrendszeben felírva az egyesek helyén egy $1-$es áll, előtte pedig k darab 0 van, azaz $A00\ldots01$ alakú.

4.12. Feladat *(Mego.)*

Legyen $\mathcal{F} := \{1, 11, 111, \ldots\}$ olyan számok halmaza, amelyek a $10-$es számrendszerben felírva csupa $1-$es számjegyet tartalmaznak. Mely négyzetszámok állnak elő két $\mathcal{F}-$beli szám különbségeként?

4.13. Feladat *(Mego.)*

Az Euler-Fermat tételből tudjuk, hogy ha p prímszám és $p \nmid a$, akkor $a^{p-1} \equiv 1 \pmod p$. Egy fordított kérdés lehet: ha $2^n \equiv 2 \pmod n$, akkor igaz-e, hogy n prím? Számoló(számító)gép nélkül igazoljuk, hogy az $n=341$ egy ellenpélda.

Ajánló

Surányi János „Érdekes számok" – a [HÓDMOZ] kötet 156-172. oldalain;
http://www.tankonyvtar.hu/en/tartalom/tkt/matematikai-mozaik/ar10.html;
Freud Róbert „Prímszámok – ősi problémák, új eredmények"[FRPRŐ];
http://matek.fazekas.hu/portal/eloadas/2005/eloadas_2005_11_22_freud.html;
Ed Sandifer „How Euler Did It"[SANDEU], Fermat's Little Theorem,
http://www.maa.org/editorial/euler/How%20Euler%20Did%20It%2001%20Fermats%20little%20theorem.pdf;
Catherine A. Gorini „Using Clock Arithmetic to Send Secret Messages"[GORCL],
http://matek.fazekas.hu/portal/kutatomunkak/codes/codesm.html
A Wikipedia az Artin sejtésről (lásd a II. megjegyzést a 4.8. feladat megoldásában).
http://en.wikipedia.org/wiki/Artin's_conjecture_on_primitive_roots
M. Ram Murty „Artin's conjecture on primitive roots"[MURAR]
http://www.math.ucsb.edu/~agboola/teaching/2005/winter/old-115A/murty.pdf.

5. fejezet

Kombinatorika

Ajánló

A témához kapcsolódó alapvető művek

Róka Sándor „2000 feladat az elemi matematika köréből”[R2000];

Matkönyv[MATKV], Dobos Sándor: Kombinatorika 7-8;

http://matek.fazekas.hu/mathdisplay/cache/pdf/volume_k_i.pdf;

N. J. Vilenkin „Kombinatorika”[VILKO];

Lovász László, Pelikán József, Vesztergombi Katalin „Kombinatorika”[LOPEV];

Lovász László, Pelikán József, Vesztergombi Katalin „Diszkrét matematika”[LOPEVD],

http://www.interkonyv.hu/konyvek/Diszkr%C3%A9t%20matematika;

Matkönyv[MATKV], Surányi László: Kombinatorika 9-10;

http://matek.fazekas.hu/mathdisplay/cache/pdf/volume_k_ii.pdf;

Elekes György „Kombinatorika feladatok”[EGYKO],

http://matek.fazekas.hu/portal/tanitasianyagok/Elekes_Gyorgy/elekes_kombfel.pdf;

Hajnal Péter „Elemi kombinatorikai feladatok”[HAJKO];

Andrásfai Béla „Gráfelmélet”[ANDGF];

Lovász László „Kombinatorikai problémák és feladatok”[LOVKO],

http://www.tankonyvtar.hu/hu/tartalom/tkt/kombinatorikai-problemak/.

Friedl Katalin, Recski András, Simonyi Gábor „Gráfelméleti feladatok”[FRESG],

http://www.interkonyv.hu/konyvek/Gr%C3%A1felm%C3%A9leti_feladatok;

Open Problems in Combinatorics,

http://www.combinatorics.net/problems/.

5.1. A szita módszer

5.1. Feladat *A 45 tagú Majmok Tudományos Akadémiája ülést tartott. Ezen az ülésen három kérdést tűztek napirendre, mely fölött szavazással óhajtottak dönteni. A kérdések* *a következők voltak:*

1. Okosabb-e a majom, mint az ember?
2. Szebb-e a majom, mint az ember?
3. Igaz-e, hogy az ember a majom őse?

a) A szavazás után kiderült, hogy az 1. és 3. kérdésre egyaránt 23-23 igen szavazat érkezett, míg a második kérdésre csak 17.

b) Az 1. kérdésre igennel válaszolók közül 13-an a 2.,12-en pedig a 3. kérdésre feleltek nemmel.

c) Igent mondott a 2. és 3. kérdésre 6 „akadémikus”, de közülük ketten az első kérdésre nemmel szavaztak.

Hányan szavaztak mind a három kérdésre nemmel?

5.2. Feladat *(Mego.)*

Egy matematikaversenyen három feladatot tűztek ki. 56 versenyző oldott meg legalább egy feladatot. 2 versenyző volt, aki mindhárom feladatot megoldotta. A harmadik feladatot megoldók közül 10-zel többen oldották meg a másodikat, mint az elsőt. Az elsőt és a másodikat is megoldók 10-zel többen voltak, mint akik csak a harmadikat oldották meg. Aki megoldotta az elsőt és a harmadikat is, az a másodikat is megoldotta. Akik csak az első vagy csak a második feladatot oldották meg, összesen 14-en voltak. Hány versenyző oldotta meg a harmadik feladatot?

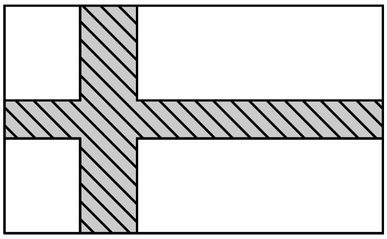
5.3. Feladat Lovagok és lókötők szigete.*(Mego.)*

Egy szigeten jártunk, ahol lovagok és lókötők élnek. A lovagok mindig igazat mondanak, a lókötők mindig hazudnak. A szigetnek 100 lakosa és három felekezete van: a Napimádók*, a* Holdimádók *és a* Földimádók*. Minden lakos pontosan egy felekezethez tartozik. Egy felmérés alkalmával minden lakosnak meg kellett válaszolnia a következő három kérdés mindegyikét: „Te Napimádó vagy?”, „Te Holdimádó vagy?”, „Te Földimádó vagy?”. Az első kérdésre 60, a másodikra 40, a harmadikra 30 „igen” válasz érkezett. Hány lovag és hány lókötő él a szigeten?*

5.4. Feladat *(I. mego., II. mego., III. mego., IV. mego., V. mego., VI. mego., VII. mego., VIII. mego., IX. mego.)*

Egy matematikaversenyen a versenyzők 85%-a megoldotta az első feladatot. A második feladatot 80%-uk oldotta meg. A harmadik feladatot 75%-uk oldotta meg.

Legalább hányan oldhatták meg mindhárom feladatot?



5.1. ábra.

5.5. Feladat *A finnek nemzeti zászlója: fehér téglalap alapon fekvő kék kereszt (lásd a 5.1 ábrát). A kék kereszt hosszabbik sávjának a területe* $8800\ cm^2$*, a rövidebbik sáv területe pedig* $5400\ cm^2$*. Mekkora a zászló területe, ha a kék kereszt* $12600\ cm^2$ *területű?*

5.6. Feladat *A 32-fős 12.c osztály osztályfőnökének az osztály nyelvtanulásával kapcsolatos statisztikát kell készítenie. A statisztikai kérdőív a következő kérdésekből állt:*

1. Hányan járnak az osztályba?

2. Hány tanulónak van középfokú nyelvvizsgája angol nyelvből?

3. Hány tanulónak van középfokú nyelvvizsgája francia nyelvből?

4. Hány tanulónak van középfokú nyelvvizsgája német nyelvből?

5. Hány tanulónak van középfokú nyelvvizsgája a fenti három nyelv mindegyikéből?

6. Hány tanulónak van középfokú nyelvvizsgája a fenti három nyelv közül pontosan kettőből?

7. Hány tanulónak van középfokú nyelvvizsgája a fenti három nyelv közül pontosan egyből?

8. Hány tanulónak nincs középfokú nyelvvizsgája a fenti három nyelv egyikéből sem?

Az utolsó két kérdés az osztályfőnök szerint felesleges.

a) *Határozzuk meg a rájuk adandó választ, ha az első hat kérdésre adott válasz rendre 32, 20, 15, 6, 2, 9!*

b) *Jelölje az i-edik kérdésre adott választ* x_i*. Fejezzük ki* x_7 *és* x_8 *értékét* x_1*,* x_2*,* x_3*,* x_4*,* x_5*, és* x_6 *segítségével!*

5.7. Feladat Dobos Sándor feladata

a) *Helyezzünk* 15 *piros pontot egy hatszög oldalaira úgy, hogy minden oldalon ugyanannyi piros pont legyen! (A hatszög csúcsára is kerülhet piros pont, de egy pontra csak egy piros pontot tehetünk.)*

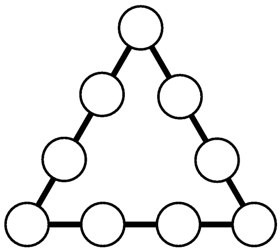
b) *Oldjuk meg a feladatot* 16 *ponttal!*

c) *2003 ponttal!*

d) *El lehet-e helyezni* 15 *pontot egy hétszög oldalaira a fenti szabálynak megfelelően?*

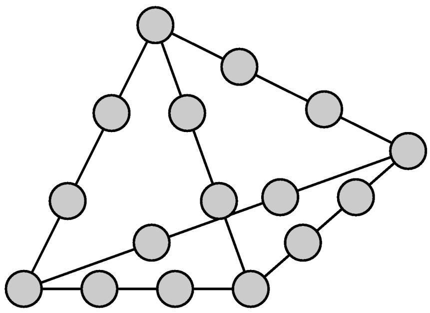
e) *Helyezzünk* 10 *piros és* 14 *kék pontot egy hatszög oldalaira úgy, hogy minden oldalon ugyanannyi piros pont legyen, mint kék!*

5.8. Feladat *Írjuk be az* 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 *számokat a 5.2 ábrán látható kilenc karikába úgy, hogy a háromszög oldalain található négy-négy szám összege egyenlő legyen*
a) *20-szal;* b) *egymással és a lehető legnagyobb legyen.*



5.2. ábra.

5.9. Feladat *Írjuk be az 1, 2, 3, ..., 16 számokat a 5.3 ábrán látható (egy tetraéder csúcsaiba és éleire helyezett) tizenhat gömbbe úgy, hogy a tetraéder (háromszög alapú gúla) élein található négy-négy szám összege mindenütt 30 legyen!*



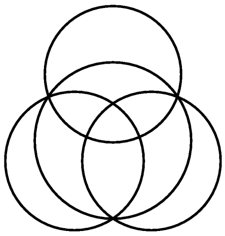
5.3. ábra.

5.10. Feladat *Egy* 3×3*-as táblázatban elhelyeztünk 9 számot. Egy ilyen táblázatot bűvös négyzetnek nevezünk, ha a számok összege minden sorban, minden oszlopban és mindkét főátlóban ugyanaz az érték. Igaz-e, hogy bármely bűvös négyzetben a középen található szám a bűvös négyzet 9 számának átlaga?*

5.11. Feladat *Helyezzünk el egy* 3×3*-as táblázatban 9 különböző pozitív egész számot úgy, hogy a számok szorzata minden sorban, minden oszlopban és mindkét főátlóban ugyanaz az érték legyen!*

5.12. Feladat *(I. mego., II. mego., III. mego.)*

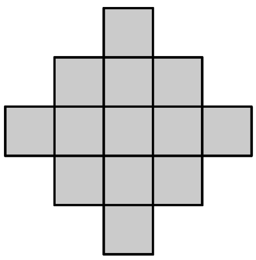
Négy kör úgy helyezkedik el, ahogyan az a 5.4 ábrán látható. A körökön belül létrejött 10 tartományba úgy kell beírni a $0, 1, \ldots 9$ *számokat, hogy az egyes körökön belüli számok összege egyenlő legyen egymással. Legfeljebb mekkora lehet ez az összeg?*



5.4. ábra.

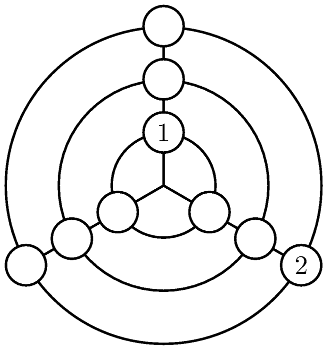
5.13. Feladat *(Kvant)*

A 5.5 ábra négyzeteibe írjunk egy-egy számot úgy, hogy minden három négyzetből álló téglalapban 1 legyen a számok összege és az összes szám összege is 1 legyen!



5.5. ábra.

5.14. Feladat *Egy füzetlap* 33×41 *kis négyzetből áll. Be lehet-e írni a számokat 1-től* $33 \cdot 41 = 1353$*-ig a négyzetekbe úgy, hogy minden* 2×2*-es négyzetben a számok összege ugyanannyi legyen?*



5.6. ábra.

5.15. Feladat *Hogyan kell a 5.6 hiányzó helyeire beírni 3-tól 9-ig a természetes számokat úgy, hogy a számok összege minden sugár és kör mentén ugyanaz legyen?*

5.16. Feladat *Egy* 4×4*-es táblázatban* 16 *szám volt. Az alábbi táblázatot úgy kaptuk az eredetiből, hogy egy lépésben egyszerre minden számot helyettesítettünk a sorában és oszlopában álló másik hat szám számtani közepével.*

1	*0*	*0*	*0*
0	*9*	*0*	*0*
0	*0*	*9*	*0*
0	*0*	*0*	*7*

Hogyan volt kitöltve az eredeti táblázat?

5.17. Feladat *Egy* 3×3*-as táblázatban elhelyeztünk 9 számot. Egy ilyen táblázatot bűvös négyzetnek nevezünk, ha a számok összege minden sorban, minden oszlopban ás mindkét főátlóban ugyanaz az érték. Igaz-e, hogy a bűvös négyzet fölső sorában álló számok négyzetének összege mindig megegyezik az alsó sorban álló számok négyzetösszegével?*

5.18. Feladat *Adjunk meg* 25 *– nem feltétlenül különböző – számot úgy, hogy alkalmas sorrendben írva azokat, bármely három szomszédos szám összege pozitív, ugyanakkor a* 25 *szám összege negatív legyen!*

5.19. Feladat *Egy 4×4-es táblázat 16 mezőjébe egy-egy egész számot írtak. Tudjuk, hogy a táblázat mindegyik 3×3-as részében (tehát mind a négyben) a 9 szám összege negatív. Következik-e ebből, hogy a 4×4-es táblázatban található 16 szám összege is negatív?*

5.20. Feladat *(I. mego., II. mego.)*

Egy sorozat bármely 7 szomszédos tagját összeadva negatív, bármely 11 szomszédosat összeadva pedig pozitív számot kapunk. Legfeljebb hány tagja lehet a sorozatnak?

Ajánló

I. M. Jaglom „A zsák meg a foltjai"[JAGZS];

Elekes György „Kombinatorika feladatok"[EGYKO], 1.7. fejezet, http://matek.fazekas.hu/portal/tanitasianyagok/Elekes_Gyorgy/elekes_kombfel.pdf.

Lovász László „Kombinatorikai problémák és feladatok"[LOVKO], 2. fejezet, http://www.tankonyvtar.hu/hu/tartalom/tkt/kombinatorikai-problemak/ch02.html;

5.2. Feladatok a sakktáblán

5.1. Feladat *(a) mego., b) I. mego., b) II. mego.)*

Bejárható-e egy 5×5-ös sakktábla lóval,

a) *ha nem kell ugyanott befejeznünk, ahonnan indultunk?*

b) *ha ugyanott kell befejeznünk, ahonnan indultunk?*

Mindkét esetben minden mezőre pontosan egyszer kell lépnünk (kivéve a b) feladatrészben az egymással megegyező kezdő és befejező mezőt).

5.2. Feladat *(Mego.)*

Egy sakktábla két sarokmezőjét levágjuk. Lefedhető-e a sakktábla 1×2-es (éppen két sakktáblamező méretű) dominókkal?

5.3. Feladat *(Elő. megj.,Mego.)*

Kockás lapon 40 kis négyzetet kiszíneztünk. Igaz-e, hogy ekkor biztosan kiválasztható közülük 10, amelyeknek nincs közös pontja? (Még közös csúcs se lehet!)

5.4. Feladat *(a) mego., b) mego., c) mego., d) mego., e) mego.)*

Egy 8×8-as sakktáblán maximum hány

a) *bástyát;* b) *futót;* c) *lovat;* d) *királyt;* e)* *királynőt;*

lehet elhelyezni, úgy, hogy ne üssék egymást?

5.5. Feladat *(*A legkisebb hegycsúcs*) (a) mego., b) eredm)*

Helyezzünk el minél kevesebb

a) *bástyát* b) *királynőt*

a sakktáblán úgy, hogy ne üssék egymást, de további bástya ill. királynő már ne legyen elhelyezhető úgy, hogy semelyik kettő se üsse egymást!

5.6. Feladat *(Mego.)*

Hányféleképpen lehet egy 8×8-as sakktáblára 3 bástyát feltenni úgy, hogy semelyik kettő ne legyen egy sorban vagy egy oszlopban, feltéve hogy

a) *mind egyformák;*

b) *mind különbözőek;*

c) *kettő egyforma és egy másmilyen*

Ajánló

Jevgenyij Jakovlevics Gik „Sakk és matematika”[GIKSKK];

Róka Sándor „2000 feladat az elemi matematika köréből”[R2000];

A Matkönyv[MATKV] megfelelő fejezetei: `http://matek.fazekas.hu/mathdisplay/cache/pdf/volume_k_i.pdf`

5.3. Egyszerűbb leszámolási feladatok

5.1. Feladat *Hányféleképpen olvasható ki a „PASCAL” szó a 5.7 ábrán látható elrendezésekben?*

5.2. Feladat a) *Hány ötbetűs „szó” (karaktersorozat) állítható össze három B és két A betű felhsználásával? (Tehát azoknak a szavaknak a számát keressük, amelyekben pontosan három B és pontosan két A betű van és más betű nincs. Pld: ABBAB.)*

b) *Hány ötbetűs „szó” (karaktersorozat) állítható össze B és A betűk felhsználásával? (Tehát azoknak az ötbetűs szavaknak a számát keressük, amelyekben csak A és B betű van, de az is lehet, hogy csak az egyikük szerepel. Pld: BBBAB.)*

a)	P	A	S	C		**b)**	P	A	S	C	A	L
	A	S	C	A			A	S	C	A	L	
	S	C	A	L			S	C	A	L		
							C	A	L			
							A	L				
							L					

5.7. ábra.

5.3. Feladat a) *Hány két elemből álló részhalmaza van egy ötelemű halmaznak?*
b) *És hány három elemből álló részhalmaza van?*
c) *Összesen hány részhalmaza van egy ötelemű halmaznak?*

5.4. Feladat *Bontsuk fel a zárójelet és hajtsunk végre összevonást az alábbi kifejezésekben!*

$$(a+b)^2, \qquad (a+b)^3, \qquad (a+b)^4, \qquad (a+b)^5.$$

5.5. Feladat *(Mego.)*
20 golyóból véletlenszerűen kiválasztok valamennyit (lehet, hogy mind a húszat, és lehet, hogy egyet sem). Hányféle különböző választás lehetséges, ha
a) *minden golyó más színű;*
b) *minden golyó egyforma?*

5.6. Feladat *(Mego.)*
A 8×8*-as sakktáblán hány*
a) rácsnégyzetet
b) rácstéglalapot találhatunk?

5.7. Feladat *(a) mego., b) mego., c) mego., d) mego.)*
Az 1, 2, 3, 4, 5 és 6 számjegyekből hatjegyű számokat készítünk.
Hány 2-vel, 3-mal, 4-gyel, 5-tel, 6-tal osztható szám van közöttük, ha
a) *minden számjegyet csak egyszer használhatunk fel;*
b) *egy számjegyet többször is felhasználhatunk?*
Mennyi az így készíthető 3-mal osztható hatjegyű számok összege a fenti
c) *a) esetben?* d) *a fenti b) esetben?*

5.8. Feladat *(a) mego., b) mego., c) mego.)*

A négyjegyű számok között melyikből van több,

a) *amelyekben szerepel a 7-es számjegy, vagy amelyekben nem?*

b) *amelyekben a számjegyek szigorúan növekvő sorrendben állnak, vagy amelyekben nem?*

c) *amelyekben nincsenek egyforma számjegyek, vagy amelyekben vannak?*

5.9. Feladat *(Mego.)*

1-10 hosszúságú színes rudakkal szőnyegezünk (ugyanazt a hosszúságot rakjuk ki többféleképpen rövidebb rudakból, úgy, hogy a sorrend is számít).

a) *Hányféleképpen tudjuk a 10-et kirakni?*

b) *Hányféleképpen tudjuk a 10-et pontosan 2 darab rúdból (pontosan 3, 4, ... darab rúdból kirakni?*

c) *Hányféleképpen tudjuk a 10-et kirakni, ha csak fehér (1) és rózsaszín (2) rudakat használunk?*

5.10. Feladat *(a) mego., b) mego., c) mego., d) mego.)*

A 100-at hányféleképpen lehet

a) *10 pozitív egész szám;*

b) *10 pozitív páros szám;*

c) *10 egész szám;*

d) *10 természetes szám (a 0 is megengedett)*

összegeként előállítani, ha számít az összeadandók sorrendje?

5.11. Feladat *(Mego.)*

Hány lottószelvényt kell kitöltenünk a biztos telitalálathoz?

5.12. Feladat *(a) mego., b) mego.)*

Május 35-én a lottót úgy játsszák, hogy az 1, 2, 3, ... 20 számokból 18-at húznak ki.

a) *Hány szelvényt kell kitöltenünk a biztos telitalálathoz?*

b) *Hány kell ahhoz, hogy biztosan legyen legalább 15 találatunk?*

5.13. Feladat *(Mego.)*

Két iskola legjobb sakkozói versenyeztek egymással. Mindenki mindenkivel egy játszmát játszott. Először az egy-egy iskolán belüli játszmákra: összesen 66 játszmára került sor. Az egész körmérkőzés 136 játszmából állt. Hány versenyző indult az egyik és hány a másik iskolából?

5.14. Feladat *(Mego.)*

Hány olyan egymáshoz nem hasonló háromszög van, amely tompaszögű, továbbá nem egyenlő szárú és mindegyik szöge fokokban mérve egész számot ad?

5.15. Feladat *(Mego.)*

Egy egyfordulós futballbajnokságon a csapatok sorrendjét a gólarányok figyelembevétele nélkül egyértelműen meg lehetett határozni. A bajnokságon volt olyan csapat, amelyet a nála jobb helyezést elért csapatok valamelyike nem győzött le. Bizonyítsuk be, hogy a bajnokság folyamán volt döntetlen mérkőzés is. (Egyfordulós futballbajnokságon minden csapat minden csapattal egyszer játszik. Minden egyes mérkőzés után a győztes csapat két pontot, döntetlen esetén mindkét csapat egy-egy pontot kap.)

5.16. Feladat *(Mego.)*

A sakktábla bal alsó sarkából a jobb felső sarokba hányféle útvonalon juthat el a „sánta" bástya, amelyet csak jobbra és fölfelé léphet, mindig csak a szomszédos mezőre?

5.4. A Pascal háromszög

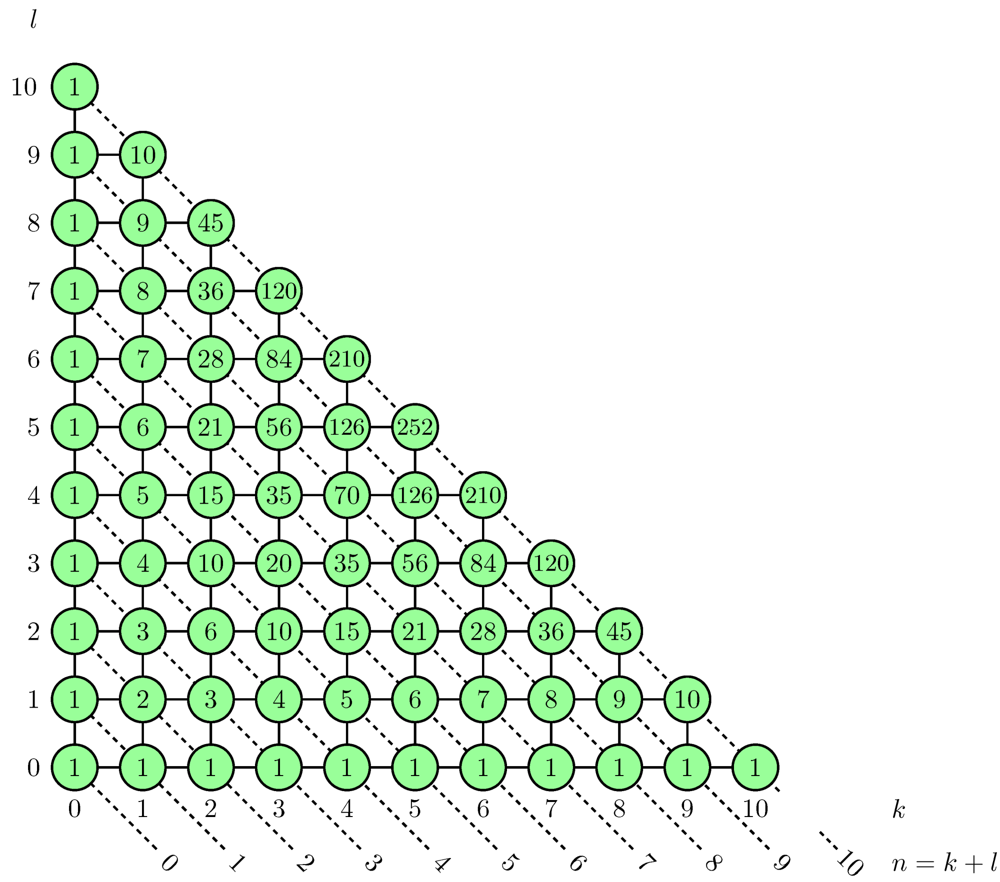
Pascal eredetileg a 13.11 ábrán látható elrendezésben adta meg háromszögét.

A koordinátarendszer zárt pozitív síknegyedének rácspontjaiba írtunk számokat úgy, hogy az origóba 1-est írtunk, majd onnan kiindulva jobbra és felfelé haladva minden rácspontra az alatta és tőle balra levő számok összegét írtuk le. A $(k; l)$ koordinátájú pontra írt számot $\binom{k+l}{k} = \binom{n}{k}$-val is jelöljük és „$n$ alatt a k"-nak mondjuk, ahol $n = k+l$. A Pascal háromszög n-edik sorát azok az elemek alkotják, amelyek koordinátáinak összege: $k+l=n$. A sorokat tehát 0-tól kezdjük számozni. A soron belül az elemeket is 0-tól kezdve sorszámozzuk, az n-edik sorban tehát 0-tól n-ig. Az n-edik sor k-adik eleme $\binom{n}{k}$, tehát a $(k; n-k)$ koordinátájú pontba írt szám. Ezekkel a jelölésekkel tehát:

$$\binom{0}{0} = 1, \tag{5.1}$$

és

$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k} \qquad (n > 1, \quad n \in \mathbb{N}). \tag{5.2}$$



5.8. ábra.

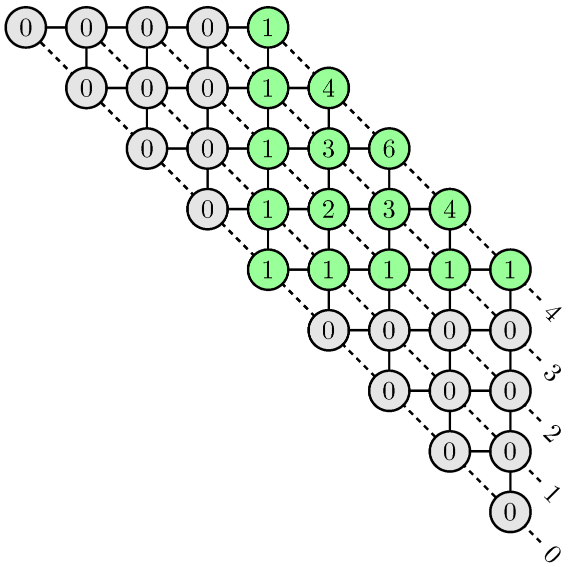
A (5.1)-(5.2) képletek önmagukban még nem definiálják a Pascal háromszöget, hiszen általuk még $\binom{1}{0}$ értéke sincs meghatározva. A (5.2) képlet szerint ugyanis

$$\binom{1}{0} = \binom{0}{-1} + \binom{0}{0},$$

de $\binom{0}{-1}$ értékéről nincs információnk. A problémát áthidalná, ha 1-nek rögzítenénk a Pascal háromszög szélein elhelyezkedő elemek, azaz $\binom{n}{0}$ és $\binom{n}{n}$ értékét ($n \in \mathbb{N}$). Ehelyett más utat választunk. Legyen

$$\binom{0}{k} = 0 \qquad (k \neq 0, \quad k \in \mathbb{Z}). \tag{5.3}$$

Az (5.1), (5.2), (5.3) képletek már meghatározzák a Pascal háromszöget, sőt segítségükkel soronként kitölthető a „Pascal félsík” (lásd a 13.12 ábrát).



5.9. ábra.

5.1. Feladat *(I. mego., II. mego.)*

A koordinátarendszer origójából indulva a rácspontokon mozgunk. Jobbra és felfelé léphetünk a szomszédos rácspontra. Hányféleképpen juthatunk el a $(k; l)$ pontba ($k, l \in \mathbb{N}$)?

5.2. Feladat *(I. mego., II. mego.)*

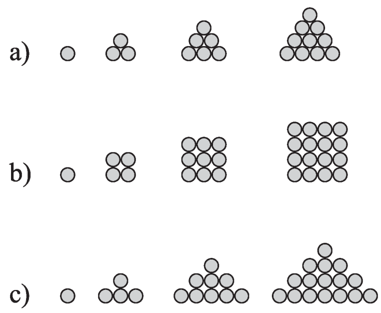
A 5.4. feladatban már láttuk, hogy

$$\begin{aligned}
(a+b)^0 &= 1;\\
(a+b)^1 &= a+b;\\
(a+b)^2 &= a^2+2ab+b^2;\\
(a+b)^3 &= a^3+3a^2b+3ab^2+b^3;\\
(a+b)^4 &= a^4+4a^3b+6a^2b^2+4ab^3+b^4.
\end{aligned}$$

Igazoljuk, hogy általában, tetszőleges n természetes szám esetén fennáll az

$$(a+b)^n = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} a^{n-i} b^i \tag{5.4}$$

összefüggés, amelyet Newton binomiális tétele néven szokás említeni. Valójában Newton tétele egy ennél általánosabb összefüggés, amelyben n tetszőleges valós *szám lehet.*



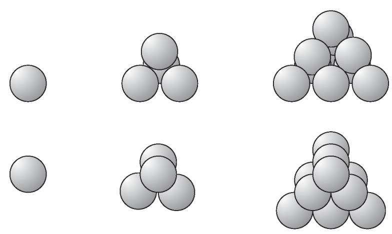
5.10. ábra.

5.3. Feladat *(Segít.)*

Kavicsokat rendezünk a 5.10 ábrán látható rendben kupacokba. Hány kavics lesz a 100-adik kupacban?

5.4. Feladat *(Segít.)*

Határozzuk meg a 100. tetraéderszámot! (Hány golyó van a 5.11 ábrán a 100. kupacban? A kupacsorozat oldal- és fölülnézetben is látható az ábrán.)



5.11. ábra.

5.5. Feladat *(Elő. megj., I. mego., II. mego., III. mego., IV. mego.)*

Határozzuk meg a Pascal háromszög n-edik sorában található elemek összegét!

5.6. Feladat *(I. mego., II. mego., III. mego.)*

Határozzuk meg a Pascal háromszög n-edik sorában álló elemek váltakozó előjelű összegét! Pld a negyedik sorban: $1 - 4 + 6 - 4 + 1 = 0$.

5.7. Feladat *(Elő. megj., Mego.)*

Határozzuk meg a Pascal háromszög n-edik sorában található elemek négyzetösszegét!

5.8. Feladat *(Elő. megj., I. mego., II. mego., III. mego.)*

Igazoljuk a

$$\binom{k+l}{n} = \sum_{i+j=n} \binom{k}{i} \cdot \binom{l}{j}, \tag{5.5}$$

azaz

$$\binom{k+l}{n} = \binom{k}{0} \cdot \binom{l}{n} + \binom{k}{1} \cdot \binom{l}{n-1} + \binom{k}{2} \cdot \binom{l}{n-2} + \ldots + \binom{k}{n} \cdot \binom{l}{0} \tag{5.6}$$

összefüggést, ahol $x < y$ esetén $\binom{x}{y}$-t 0-nak tekintjük a „Pascal félsík” értelmezésének megfelelően.

5.9. Feladat *(a) I. mego., a) II. mego., a) III. mego., b) I. mego., b) II. mego., b) III. mego., b) IV. mego., b) V. mego., c) eredm., d) mego.)*

Adjuk össze a Pascal háromszög n-edik sorában az elemeket úgy, hogy a sorban k-adikat (0-tól számolva) megszorozzuk

a) 2^k*-nal! Pld a negyedik sorban:* $1 \cdot 1 + 4 \cdot 2 + 6 \cdot 2^2 + 4 \cdot 2^3 + 1 \cdot 2^4 = 81$.

b) k*-val! Pld a negyedik sorban:* $1 \cdot 0 + 4 \cdot 1 + 6 \cdot 2 + 4 \cdot 3 + 1 \cdot 4 = 32$.

c) $k \cdot (k-1)$*-gyel! Pld a negyedik sorban:* $1 \cdot 0 \cdot (-1) + 4 \cdot 1 \cdot 0 + 6 \cdot 2 \cdot 1 + 4 \cdot 3 \cdot 2 + 1 \cdot 4 \cdot 3 = 48$.

d) k^2*-tel! Pld a negyedik sorban:* $1 \cdot 0^2 + 4 \cdot 1^2 + 6 \cdot 2^2 + 4 \cdot 3^2 + 1 \cdot 4^2 = 80$.

5.10. Feladat *(a) mego., b) mego., c) mego.)*

Bergengóciában a Pascal–háromszög helyett a Mascal–háromszöggel számolnak. Ennek 0. sorában három elem áll:

$$2 \qquad -5 \qquad 4$$

A Mascal-háromszög képzési szabálya a Pascal–háromszögével azonos. Határozzuk meg a Mascal–háromszög n-edik sorában az elemek

a) *összegét,* b) *előjeles összegét!*

c) *Írjuk fel képlettel a Mascal háromszög n-edik sorában a k-adik helyen álló számot (a 0. sorban rendre a 0., 1., 2. helyeken állnak a 2, -5, 4 számok).*

5.11. Feladat *(a) mego., b) mego., c) mego.)*

Dr. Kekec a Piscal–háromszögre esküszik. Ennek 0*-adik sorában egyetlen 1-es áll, az alatta levő sorokban minden szám a fölötte lévő három szám összegével egyenlő (az üres helyek 0-nak tekintendők).*

$$\begin{array}{ccccccccccc} & & & & 1 & & & & & & \textit{0. sor} \\ & & & 1 & 1 & 1 & & & & & \textit{1. sor} \\ & & 1 & 2 & 3 & 2 & 1 & & & & \textit{2. sor} \\ & 1 & 3 & 6 & 7 & 6 & 3 & 1 & & & \textit{3. sor} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & & \end{array}$$

Keressük a Piscal háromszög tulajdonságait! Pld határozzuk meg a Piscal-háromszög n-edik sorában található számok

a) *összegét;* b) *váltakozó előjelű összegét!*

c) *Van-e szerepe az algebrában?*

5.12. Feladat *(Mego.)*

Hányféle lépéssorozattal juthat el a bástya a 4×4*-es sakktábla bal alsó sarkából a jobb felsőbe, ha csak jobbra (akármennyit) vagy felfelé (akármennyit) léphet? (Ha lép egyet jobbra majd kettőt megint jobbra, az más lépéssorozat, mintha egyből hármat lépne jobbra.)*

5.13. Feladat *(Segít.)*

Adjunk váltakozóan előjeleket a Pascal háromszög n-edik sorában álló elemeknek és tekintsünk egy tetszőleges $(n+1)$ *elemből álló számtani sorozatot, ahol* $n > 1$*! Vizsgáljuk a két sorozat „skaláris szorzatát”, azaz az azonos sorszámú elemek szorzatának összegét. Pld* $n = 4$ *és a* 3, 7, 11, 15, 19 *sorozat esetén*

$$3 \cdot 1 - 7 \cdot 4 + 11 \cdot 6 - 15 \cdot 4 + 19 \cdot 1 = 0.$$

Mit tapasztalunk? Keressünk magyarázatot!

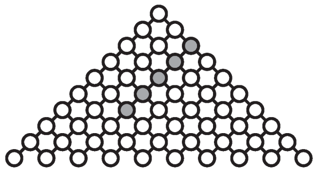
5.14. Feladat („Zokni”)*(Mego.)*

Töltsük ki a 5.12 ábrán a Pascal háromszöget és adjuk össze a vastagon szedett helyeken levő számokat! Végezzük el az összegzést hasonló állású egyenesek mentén! Miért érdekes az eredmény? Tegyünk megfigyelést, fogalmazzunk meg sejtést és igazoljuk!

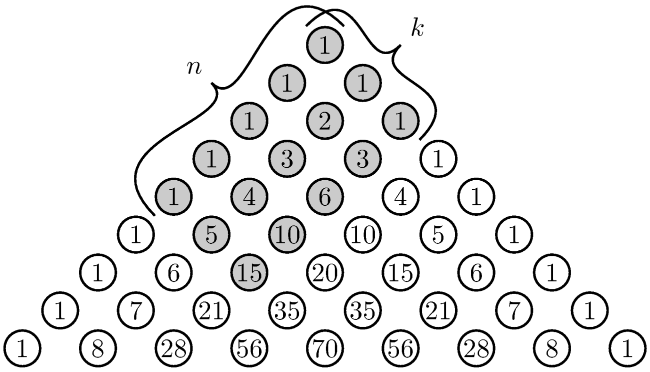
5.15. Feladat *(Mego.)*

a) *Határozzuk meg a Pascal háromszög jelzett téglalap alakú részében található számok összegét!*

b) *Adjunk meg n és k segítségével a megfelelő $n \times k$ méretű téglalap alakú részben található számok összegét!*



5.12. ábra.



5.13. ábra.

5.5. Összetett leszámolási feladatok

Lásd még az Analízis/Különböző sorozatok fejezetet!

5.1. Feladat *(a) I. mego., a) II. mego., b) I. mego., b) II. mego., b) III. mego.)*
Hány olyan háromjegyű szám van, amelyben minden számjegy
a) *nagyobb,* b) *legalább akkora,*
mint az előző (mint a tőle balra levő)?

5.2. Feladat *(Mego.)*
Mennyi az esélye, hogy a Lottószámok (az 1, 2, …, 90 *számokból húznak ki ötöt) között nincs két szomszédos szám?*

5.3. Feladat *(a) mego., b) mego.)*
a) *Külföldre utazom, három ajándékot szeretnék vinni magammal, majd később döntök kinek melyiket adom. Kilencféle ajándék jön szóba: Rubik-kocka, Tokaji aszú, Unicum, népművészeti terítő, Liszt cd, angol nyelvű album, angol nyelvű verseskötet, téli szalámi, matek könyv. Hányféleképpen választhatom ki a hármat, ha mindegyikből többet is vihetek, de összesen pontosan hármat?*

b) *Egy-egy ajándékot szeretnék kiválasztani a fenti 9-ből kinti cserepartneremnek, egy másik diáknak és az egyik tanárnak. Hányféleképpen választhatok, ha ugyanazt az ajándékot több embernek is adhatom?*

5.4. Feladat *(a) mego., b) eredm.)*

a) *Ha n-féle dologból k darabot kell választani, de a kiválasztott darabok sorrendje nem számít és mindegyik dologból többet – akármennyit is – választhatunk, akkor n* elem k-adosztályú ismétléses kombinációi*ról beszélünk. Határozzuk meg ezek számát!*

b) *Ha n-féle dologból k darabot kell választani, és a kiválasztott darabok sorrendje is számít és mindegyik dologból többet – akármennyit is – választhatunk, akkor n* elem k-adosztályú ismétléses variációi*ról beszélünk. Határozzuk meg ezek számát!*

5.5. Feladat *(I. mego., II. mego., III. mego.)*

Pitagorasz táblázata (a szorzótábla) úgy van kitöltve, hogy a bal fölső sarkától számított n-edik sor és m-edik oszlop találkozásában található mezőben az nm szorzat értéke áll. Tekintsük az azonos átlóban álló számok összegeit! ($a_1 = 1$, $a_2 = 2+2$, $a_3 = 3+4+3$ …) Határozzuk meg az N. átlóban álló számok összegét!

1	2	3	4	5
2	4	6	8	10
3	6	9	12	15
4	8	12	16	20
5	10	15	20	25

1, 4, 10, 20, 35

5.14. ábra.

5.6. Feladat *(Eredm.)*

Egy körön felvettünk n pontot, majd összekötöttük mindegyiket mindegyikkel egy-egy egyenes szakasszal. Így legfeljebb hány metszéspont jöhetett létre a kör belsejében?

5.6. Dimenzió

Lásd még a 6.23., 6.6. feladatokat.

5.1. Feladat Osztójáték*[OSZTJ](Segít.)*

Ketten felváltva mondják a varázsszám pozitív osztóit. Már kimondott osztó osztóját egyik játékos sem említheti újra. Az veszt, aki kimondja a varázsszámot. Kinek kedvező a játék, Kezdőnek vagy Másodiknak, ha a varázsszám

a) 10, b) 16, c) 24, d) 36, e) 30, f) 2010*?*

5.2. Feladat *(Mego.)*

Rajzoljuk fel 10, 16, 24, 36, 30 *és* 2010 *osztóhálóját!*

Próbáljuk az adott szám osztóit a sík egy-egy „pontjára" írni úgy, hogy ha az 1*-nek megfeleltetett pontot tekintjük origónak, akkor bármelyik osztóval való szorzásnak az osztó helyvektorával való eltolás feleljen meg.*

5.3. Feladat *(Segít., Mego.)*

Írjuk be az alábbi táblázatba, hogy az n-dimenziós kockának (lásd a 5.15 ábrát) hány k-dimenziós ($n \geq k$) lapja van!

		n				
		0	1	2	3	4
k	0	1				
	1	0	1			
	2	0	0	1		
	3	0	0	0	1	
	4	0	0	0	0	1

5.4. Feladat *(Mego.)*

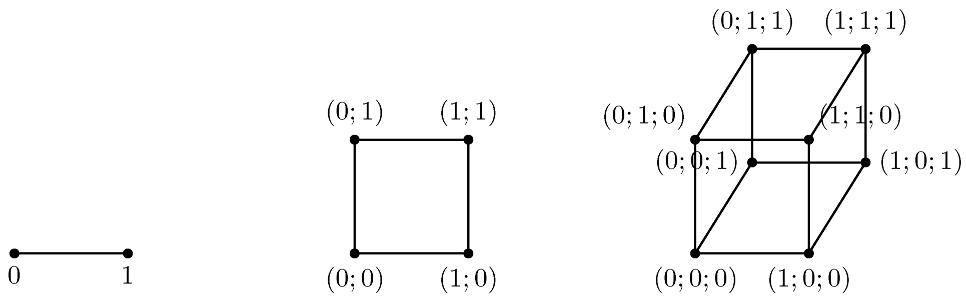
Adjuk meg a

a) 30, b) 2010

minél több pozitív osztóját úgy, hogy közülük semelyik se legyen egy másikuk osztója!

5.5. Feladat *(Mego.)*

Hány olyan sorozat van, amely különböző pozitív egész számokból áll, első eleme az 1*, utolsó eleme a* 60 *és minden eleme az előző elem egész számú többszöröse?*



5.15. ábra.

Ajánló

Julie Rehmeyer „Seeing in four dimensions – Mathematicians create videos that help in visualizing four-dimensional objects”[REH4D],

http://www.sciencenews.org/view/generic/id/35740/description/Seeing_in_four_dimensions.

Alexander Bogomolny[CUTKNT], The Tesseract,

http://www.maa.org/editorial/knot/tesseract.html.

5.7. Gráfok

5.1. Feladat *(Mego.)*

Egy nagy cég vacsoráján egy asztalhoz öt házaspár ült le. A hosszú hallgatást C. Frank úr törte meg, megkérdezvén mindenkit, még a saját feleségét is, hogy hány embert nem ismer. Csupa különböző választ kapott. Újabb rövid hallgatás után R. Korszakov úr szeme felcsillant és C. Frank úrhoz fordult.

– Á, szóval ön ... embert nem ismer az asztalnál!

Noha C. Frank úr nem nyilatkozott, mennyit mondott R. Korszakov, és hogyan jött rá?

5.2. Feladat *(I. mego., II. mego.)*

Bergengócia bármely két városa között van busz- vagy repülőgépjárat. Igaz-e Bergengóciában, hogy vagy busszal vagy repülővel bármelyik városból bármelyik másikba el lehet jutni (átszállással, ha szükséges)?

5.3. Feladat *(Mego.)*

Bergengócia bármely két városa között van busz-, vonat- vagy repülőgépjárat. Igaz-e Bergengóciában, hogy vagy busszal vagy vonattal vagy repülővel bármelyik városból bármelyik másikba el lehet jutni (átszállással, ha szükséges)?

5.4. Feladat *(a) mego., b) mego.)*

Bergengócia bizonyos városai között van repülőgépjárat és bármelyik városból bármelyik másikba el lehet jutni menetrendszerinti repülőgépjáratokkal, átszállásokkal. A pénzügyminiszter mérges, mert látja, hogy a járatok alkalmazásával körutakat is lehet tenni, tehát vannak felesleges járatok. Követeli, hogy ezt szüntessék meg. Igaz-e, hogy járatok megszüntetésével elérhető, hogy ne lehessen körutazást tenni, de továbbra is el lehessen jutni bármelyik városból bármelyik másikba?

Oldjuk meg a feladatot az alábbi mindkét értelmezésben:

a) *Egy repülőgépjárat két város közti oda-vissza közvetlen közlekedést jelent;*

b) *Egy repülőgépjárat két város egyikéből a másikba való közvetlen utazás lehetőségét jelenti, a visszautat nem.*

5.5. Feladat *(Mego.)*

Bizonyítsuk be, hogy egy 30 fős vívóversenyen, ahol mindenki mindenkivel pontosan egyszer játszott, a verseny végén van olyan vívó, aki az összes többi versenyzőt vagy legyőzte, vagy ha kikapott egy A versenyzőtől, akkor van oly B versenyző, akit legyözött, és aki legyőzte A−t!

5.6. Feladat *(Mego.)*

Egy nagyszabású projektben 6 tudósból álló csoportok dolgoznak egy-egy résztémán. Az egyes csoportokban néhányan leveleznek egymással.

Mutassuk meg, hogy bármelyik hatos csoportban vagy van 3 ember, akik közül mindenki mindenkivel levelez, vagy van 3 olyan, hogy semelyik sem ír a másiknak.

Ajánló

Andrásfai Béla „Versenymatek gyerekeknek”[ANDVS], IV. (Gumiországban) fejezet;

Gallai Tibor „A königsbergi hidak, a kilenc ösvény és más gráfelméleti problémák”, a [HÓDMOZ] kötetben,

`http://www.tankonyvtar.hu/en/tartalom/tkt/matematikai-mozaik/ar07.html`;

Andrásfai Béla „Hány szín kell a térkép színezéséhez”, a [HÓDMOZ] kötetben,

`http://www.tankonyvtar.hu/en/tartalom/tkt/matematikai-mozaik/ar11.html`;

Alexander Bogomolny „Cut the Knot”[CUTKNT] portáljának gráfos nyitócikke (linkek a további cikkekre a lap alján):

`http://www.cut-the-knot.org/do_you_know/graphs.shtml`;

Matkönyv[MATKV], Dobos Sándor: Kombinatorika 7-8., „Gráfok” fejezet,

`http://matek.fazekas.hu/mathdisplay/cache/pdf/volume_k_i.pdf`;

Matkönyv[MATKV], Surányi László: Kombinatorika 9-10. megfelelő fejezetei, http://matek.fazekas.hu/mathdisplay/cache/pdf/volume_k_ii.pdf;

Pataki János „A zsebrádiótól Turán tételéig”[PAJTU],

http://matek.fazekas.hu/portal/tanitasianyagok/Pataki_Janos/elemek/elemek.html;

Recski András „Gráfok színezése”,

http://matek.fazekas.hu/portal/eloadas/2007/eloadas_2008_01_22_recski.html;

Bérczi Gergely, Gács András, Hraskó András, Szőnyi Tamás „Reguláris gráfok”, az [ÚJMOZ] kötetben,

http://www.tankonyvtar.hu/en/tartalom/tkt/uj-matematikai-mozaik-uj/ar03.html;

Gyárfás András, Hraskó, András „Teljes gráfok felbontásairól”, az [ÚJMOZ] kötetben,

http://www.tankonyvtar.hu/en/tartalom/tkt/uj-matematikai-mozaik-uj/ar08.html;

Virág Bálint „Véletlen gráfok”[VIVLG],

http://matek.fazekas.hu/portal/eloadas/2010/Perkolacioelmelet_vegl.pdf;

Egy olaszországi versenyfeladattól a Kneser sejtésig, a [SZEMFA] 2011. okt. 26-ai foglalkozása;

http://matek.fazekas.hu/portal/tovabbkepzesek/szeminarium/2011/2011pub03.pdf;

5.8. Kombinatorikus geometria

5.1. Feladat *(Mego.)*

a) *Bizonyítsuk be, hogy ha az* $1, 2, 3, 4, 5$ *számokat pirossal és kékkel kiszíneztük, akkor az* $x + y = z$ *egyenletnek van olyan megoldása, melyben* x, y, z *ugyanazt a színt kapta! (Itt nem kell az* x, y, z *ismeretleneknek különbözőnek lennie.)*

b) *Ha csak az* $1, 2, 3, 4$ *számokat színezzük ki?*

5.2. Feladat *(Mego.)*

A sík pontjait pirossal és kékkel színeztük ki. Bizonyítsuk be, hogy bármely $a > 0$ *valós számhoz találunk két pontot,* $P-$*t és* $Q-$*t, amelyek egyszínűek, és távolságuk éppen* a*!*

5.3. Feladat *(Mego.)*

A sík pontjait pirossal és kékkel és zölddel színeztük ki. Bizonyítsuk be, hogy bármely $a > 0$ *valós számhoz találunk két pontot,* $P-$*t és* $Q-$*t, amelyek egyszínűek, és távolságuk éppen* a*!*

5.4. Feladat *(Mego.)*

Színezzük ki a síkot hét színnel úgy, hogy ne legyen két azonos színű pont, melyek közötti távolság 1*!*

5.5. Feladat *(Mego.)*

Színezzük ki a teret két színnel és bizonyítsuk be, hogy bármely $a > 0$ *számhoz találunk egy* a *oldalú szabályos háromszöget, melynek csúcsai egyszínűek!*

5.6. Feladat *(Mego.)*

Ha a síkot két színnel színezzük, akkor vagy van két piros pont, melynek egységnyi a távolsága, vagy van három kék pont, melyek egy egység oldalú szabályos háromszöget alkotnak.

5.7. Feladat *(Mego.)*

Legyen a *tetszőleges pozitív szám. Ha a síkot két színnel színezzük, akkor vagy van két piros pont, melynek egységnyi a távolsága, vagy van három kék pont, melyek egy* a *oldalú szabályos háromszöget alkotnak.*

5.8. Feladat *(Mego.)*

Adott öt pont a síkon úgy, hogy nincs három közülük egy egyenesen. Bizonyítsuk be, hogy ekkor kiválasztható közülük négy, amelyik egy konvex négyszöget alkot!

5.9. Feladat *(Mego.)*

Adott a síkon $1,000,000$ *pont. Bizonyítsuk be, hogy akkor e pontok legalább* 700 *különböző távolságot határoznak meg!*

5.10. Feladat *(a) mego., b) mego.)*

a) *Színezzük meg pirosra vagy kékre az* $1, 2, \ldots, 9$ *pontokat. Bizonyítsuk be, hogy akkor e pontok között van három különböző, melyek azonos színűek és egy számtani sorozat alkotnak.*

b) *Színezzük meg pirosra vagy kékre az* $1, 2, \ldots, 8$ *pontokat úgy, hogy ne legyen három különböző, melyek azonos színűek és egy számtani sorozat alkotnának.*

Ajánló

Hoksza Zsolt (Tóth Géza előadásától inspirálva) „Kombinatorikus geometria és a Ramsey-tétel”[HOXKOR]

http://matek.fazekas.hu/portal/kutatomunkak/Hoksza_Zsolt/ramsey.html;

Tóth Géza „Ramsey-típusú tételek és feladatok”, az [ÚJMOZ] kötetben,

http://www.tankonyvtar.hu/hu/tartalom/tkt/uj-matematikai-mozaik-uj/ar09.html;

Pach János „A Happy End probléma – A kombinatorikus geometria kezdetei”, az [ÚJMOZ] kötetben,

http://www.tankonyvtar.hu/hu/tartalom/tkt/uj-matematikai-mozaik-uj/ar10.html;

Jaglom, Boltyanszkij „Konvex alakzatok” [JBKVX];

V. G. Boltyanszkij, I. C. Grohberg „Tételek és feladatok a kombinatorikus geometriából”[BGKOG].

6. fejezet

Analízis

Ajánló

Alapvető művek a témával kapcsolatban

Urbán János „Határérték-számítás”[URBHA];

Pintér Lajos „Analízis I.”[PIAN1]

`http://www.interkonyv.hu/konyvek/?isbn=978-963-9548-95-4`.

Pintér Lajos „Analízis II.”[PIAN2]

`http://www.interkonyv.hu/konyvek/?isbn=978-963-9132-30-6`.

Laczkovich Miklós, T. Sós Vera „Analízis I.” [LATAN1];

Laczkovich Miklós, T. Sós Vera „Analízis II.” [LATAN2];

6.1. Szabályjátékok, gépek

„Szabályjátékot” már óvodában játszanak a gyerekek. Ott ez azt jelenti, hogy megértik az óvónéni által elmondott szabályt és követik. Annak is nagyon lényeges szerepe van a nevelésben.

Az alábbi példákban az a feladat, hogy észrevegyenek valamilyen szabályosságot, képletet, rekurziót stb. a gyerekek a megadott táblázatokban. Az egyszerű szabály keresése, minél rövidebb összefüggés keresésének vágya rendkívüli módon vitte előre a tudományt. Inkább inspiráljuk erre a gyereket, minthogy modern nézőpontból lelőjük az ilyen jellegűpéldákat azzal, hogy „a szabály nagyon sokféle lehet, egy kis adatból még bármi következhet”.

A most következő példasor felépítésében nincs különösebb rendszer, inkább csak arra szeretnénk utalni, hogy a szabály nagyon különféle is lehet.

6.1. Feladat *(a) mego., b) mego., c) mego., d) mego., e) mego., f) mego.)*

Mi lehet az alábbi hozzárendelések szabálya?

a)

n	1	2	3	4	5	6	7
$a(n)$	2	3	5	9	17	33	65

b)

n	1	2	3	4	5	6	7
$b(n)$	5	8	11	14	17	20	23

c)

n	1	2	3	4	5	6	7
$b(n)$	5	8	14	23	35	50	68

d)

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$d(n)$	1	2	4	6	10	12	16	18	22	28

e)

n	1	2	3	4	5	6
$e(n)$	1	5	19	65	211	665

f)

n	1	2	3	4	5	6
$f(n)$	3	4	8	26	122	722

6.2. Feladat *(a) mego., b) mego., c) mego.)*

Mi lehet az alábbi hozzárendelések szabálya?

a)

x	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	12
$f(x)$	3	5	5	4	2	3	3	5	6	3	10

b)

x	1	2	3	4	5
$g(x)$	*g*	*e*	*á*	*é*	*t*

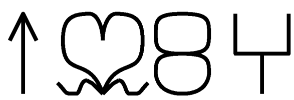
c)

x	*A*	*N*	*D*	*R*	*Á*	*S*
$h(x)$	1	14	4	18	1	19

6.3. Feladat *(a) mego., b) mego.)*

Folytassuk a sorozatot!

a) *Lásd a 6.1 ábrát!*



6.1. ábra.

b) 1, 11, 21, 1211, 111221, 312211, 13112221, 1113213211, 31131211131221,

6.4. Feladat (Science)*[GARDIV]*

A játék pontos leírását Martin Gardner adja egyik könyvében. Itt egy egyszerűsített szabályrendszert adunk meg.

A játékot egy játékvezető és tetszőleges számú játékos játszhatja.

I. *A játékosok és a játékvezető is rajzol magának egy-egy* 8×8*-as táblát, amelynek rögzíti az állását (pld megjelöli a bal alsó sarkot, vagy sakktábla módjára megbetűzi, illetve számozza a sorokat és oszlopokat).*

II. *A játékvezető kitölti saját táblájának 64 mezőjét. Háromféle jelet – pld pluszt, mínuszt, kört használhat, – és valamely egyszerű szabályt alkalmaz. Nem szükséges használnia mind a három jelet. Két lehetséges példa látható a 6.2 ábrán.*

	A	B	C	D	E	F	G	H
8	×	○	×	○	○	×	○	×
7	×	○	×	○	○	×	○	×
6	×	○	×	○	○	×	○	×
5	×	○	×	○	○	×	○	×
4	×	○	×	○	○	×	○	×
3	×	○	×	○	○	×	○	×
2	×	○	×	○	○	×	○	×
1	×	○	×	○	○	×	○	×

	A	B	C	D	E	F	G	H
8	×	×	×	×	×	×	×	×
7	○	○	○	○	○	○	○	×
6	−	−	−	−	−	−	○	×
5	×	×	×	×	×	−	○	×
4	○	○	○	○	×	−	○	×
3	−	−	−	○	×	−	○	×
2	×	×	−	○	×	−	○	×
1	○	×	−	○	×	−	○	×

6.2. ábra.

III. *Bármelyik játékos megjelölheti saját táblájának tetszőlegesen sok mezőjét. A jelölés lehet pld a mező bal alsó sarkába rajzolt pici pont. Ezek után a táblát a játékvezetőhöz viszi, aki a megjelölt mezőkbe bemásolja az ő táblájának azonos helyén látható jelet, majd visszaadja a táblát a játékosnak.*

IV. *A 3.-ban leírt műveletet a játékosok egymást nem zavarva, és egymás tábláját nem látva, tetszőleges sokszor (valószínűleg érdemes egy 5-ös felső határt kikötni) megismételhetik. Ezek során a játékvezető által készített minta sok, akár az összes mezőjébe írt jelet megismerik.*

V. *Amikor egy játékos úgy gondolja, hogy már elegendő információt kapott, akkor kitölti a tábla maradék részét a háromféle jellel. Kitöltetlenül is hagyhat mezőt, de ha egyszer azt mondja „KÉSZ”, akkor utána már nem javíthat, és nem írhat be a kitöltetlen mezőkbe.*

VI. *A játékvezető megnézi a KÉSZ táblát, 0, pontot ad a kitöltetlen mezőkért, valamint azokért, amiket ő töltött ki, 1 pontot azokért, amelyekbe a játékos önállóan jó jelet írt, és -1 pont ad a hibásan kitöltött mezőkért. A játékos kapott pontja így csak -64 és 64 között lehet egy játékban.*

VII. *Ha valamelyik játékos szívesen lenne játékvezető a következő menetben, akkor érdemes megengedni.*

6.2. Gépek egymás után

Egyszerű függvények kompozíciója már hetedikes, nyolcadikos kortól vizsgálható.

A kompozíció megértése a matematikán belül fontos lesz pl. a deriválásnál (összetett függvény deriváltja) és a geometriai transzformációk vizsgálatakor. A kvantummechanika egyik alaptörvénye – a Heisenberg-féle határozatlansági reláció – matematikai alapjában két transzformáció sorrendjének felcserélhetetlensége áll. A strukturált programozáshoz is elengedhetetlen a kompozíció világos használata.

A valós-valós függvények szokásos ábrázolása grafikonnal számos esetben vizuálisan segíti a problémák megértését, máskor azonban éppen gátol. A kompozíció dinamikáját érdemes többféleképpen is vizsgálni.

6.1. Feladat *Megadunk két $\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ függvényt, f-et és g-t. Döntsük el, hogy hány olyan ξ valós szám van, amelyre $f(g(\xi)) = g(f(\xi))$ és hány olyan, amelyre $f(g(\xi)) \neq g(f(\xi))$*

a) $f(x) = 2x - 3, \qquad g(x) = x + 1$;

b) $f(x) = x^2, \qquad g(x) = x - 1$;

c) $f(x) = 2x, \qquad g(x) = [x]$.

(Egészrész x, azaz $[x]$ a legnagyobb olyan egész számot jelöli, amely nem nagyobb x-nél.)

6.2. Feladat *Megadunk két $\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ függvényt, f-et és g-t. Döntsük el, hogy hány olyan η valós szám van, amelyre $f(g(\eta)) = g(f(\eta))$ és hány olyan, amelyre $f(g(\eta)) \neq g(f(\eta))$*

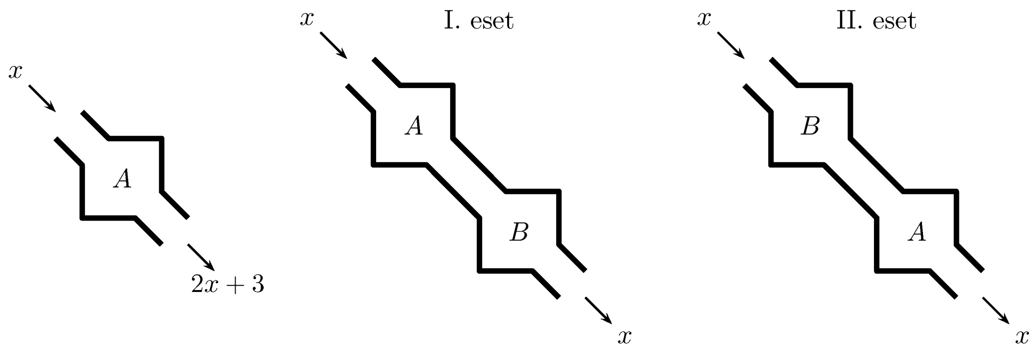
a) $f(x) = 2x, \qquad g(x) = x^2$;

b) $f(x) = |x|, \qquad g(x) = x + 1$;

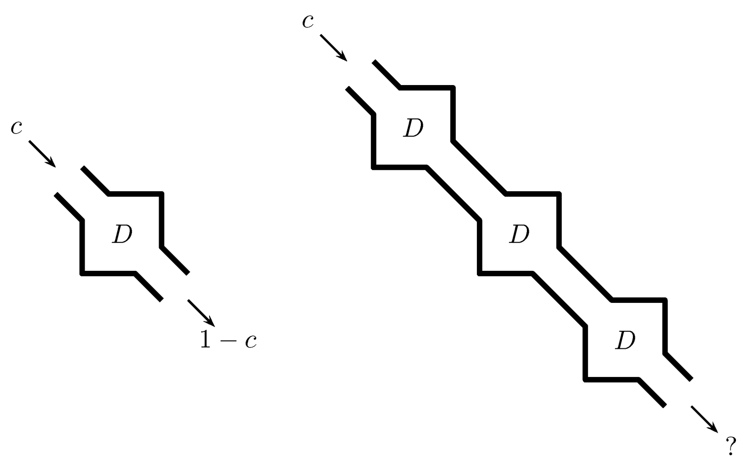
c) $f(x) = 3x - 2, \qquad g(x) = x + 1$.

6.3. Feladat *Az A gép működését az $x \longrightarrow 2x+3$ képlet írja le. Határozzuk meg a B gép működését leíró képletet, ha tudjuk, hogy a 6.3 ábrán megadott módon sorba kapcsolt két gép bármely beadott szám esetén a beadott számot megváltozatlanul adja ki. A feltüntetett két eset két különböző feladat.*

6.4. Feladat *A D gép bármely c szám beadása esetén az $1 - c$ számot adja ki. Valaki sorba kapcsolt három D gépet. Mit csinál az így konstruált (lásd a 6.4. ábrát) összetett gép?*



6.3. ábra.

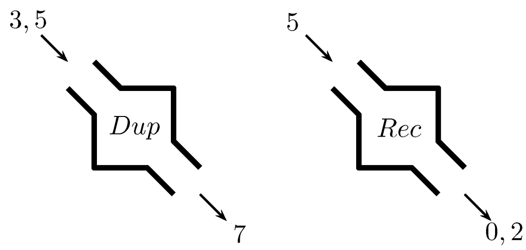


6.4. ábra.

6.5. Feladat *A Duplo és Plusz2 gépekbe számot lehet beadni, Duplo a beadott szám kétszeresét, Plusz2 pedig a beadott számnál 2-vel nagyobb számot adja ki. Olyan gépet szeretnénk összeállítani, ami az x beadott számra a $4x + 10$ számot adja ki magából. Legalább hány gépet kell venni az egyes fajtákból?*

6.6. Feladat *Ha a Duplo gépbe (lásd a 6.5. feladatot) bedobsz egy számot, akkor az kiadja a bedobott szám kétszeresét. A Reciprok gép mindig a beadott szám reciprokát adja ki (lásd a 6.5 ábra példáit).*

A Reciprok gép, a 0 beadására azt írja ki, hogy ERROR. Van a raktárban néhány Duplo és Reciprok gépünk. Állíts össze belőlük egy „Negyed" gépet, azaz egy olyan berendezést, amely bármely bedobott szám esetén annak negyedét adja ki! (Nem baj, ha – kivételként – a 0 negyedét nem tudja kiszámítani.)

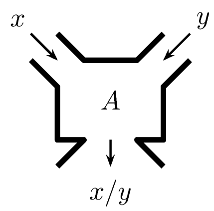


6.5. ábra.

6.7. Feladat *(I. mego., II. mego.)*

Mondjunk olyan gépet, amely számok beadása esetén számot ad ki és önmaga után kapcsolva olyan gépet kapsz, amely az x beadott számra a) $4x+3$*-at ad ki!* b) $2x$ *-et ad ki!*

6.8. Feladat *Az A gép az univerzális osztógép. Számpárt lehet beadni neki és számot ad ki, a beadott két szám hányadosát (lásd a 6.6 ábrát). Mindig a beadott számpár első tagját osztja el a másodikkal.*



6.6. ábra.

Pld: $A((3;2)) = 1,5$; $A((6,42;-3,21) = -2$; $A((1/2;3/4)) = 2/3$; $A((2;0)) =$ *ERROR.*

Tudnál-e a gép segítségével szorozni? Hogyan számoltatnád ki a géppel pld. $3,1415926 \cdot 1,4142543$ *értékét?*

6.9. Feladat Σ *az univerzális kivonógép. Számpárt lehet neki beadni és egy számot ad ki, a két beadott szám különbségét: az első számból kivonja a másodikat. N a négyzetreemelőgép. Tetszőleges számot be lehet neki adni és kiadja annak négyzetét. Van még egy $O2$ osztógépünk, de az csak kettővel tud osztani, beadhatsz neki egy számot és kiadja a felét. Tudnál szorozni a három gép segítségével? Hogyan lehetne kiszámolni velük a* $3,1415926 \cdot 1,4142543$ *szorzat értékét?*

6.10. Feladat *(*Arany Dániel versenyfeladat volt*)*

Hogyan lehet összeszorozni két számot a Σ univerzális kivonógép és a Rec univerzális reciprokoló géppel (ez bármely szám beadása esetén annak reciprokát adja ki, a 0 beadására hibaüzenettel leáll).

6.11. Feladat *Adjunk meg olyan gépet, amelynek segítségével szorozni, osztani, összeadni és kivonni is lehet, ha megfelelő számú példányát megfelelően kapcsoljuk össze!*

6.12. Feladat Bergengóc festőgépek*(Mego.)*

Bergengóciában a hölgyek – és újabban a férfiak is – szívesen hordanak színes golyókból álló nyakláncokat, karkötőket. Mivel a divat igen gyorsan változik, népszerűek lettek a festőgépek, melyek első prototípusát Bigéc (a MikiFoszt cég mostani igazgatója) fejlesztette ki. A Bigéc típusú festőgépbe ötféle színű golyót (pirosat, kéket, zöldet sárgát és fehéret) lehet beledobni. A gépnek van egy szabálya, amely egyértelműen megmondja, hogy melyik színt melyikké alakítsa át. A gép érzékeli a bedobott golyó színét, és a szabálya szerint átfestett golyót adja ki. A Piri-gép például minden golyót pirosra fest. Csak a sznobok veszik az Ident gépet, amelyik minden golyót olyannak hagy, amilyen volt.

I. a) *Összesen hányféle Bigéc típusú festőgép lehetséges?*

b) *Ezek között hány olyan van, amelyik semelyik golyót sem hagyja meg olyan színűnek, amilyen volt?*

II.

a) *Hány olyan Bigéc típusú festőgép van (lásd az előző feladatot), amely különböző színű golyókból mindig különbözőeket készít?*

b) *És ezek között hány olyan van, amelyik semelyik golyót sem hagyja meg olyan színűnek, amilyen volt?*

III. a) *Hány olyan Bigéc festőgép van, amelyik pontosan egy színt nem fest át más színre?*

b) *És hány olyan, amelyik legalább egy színt nem fest át más színre?*

IV. *Bigéc gépeit úgy alakították ki, hogy egymás mögé lehessen kapcsolni azokat. Jelölje például D azt a gépet, ami a piros golyókat kékre, a kékeket zöldre festi, a többi színét pedig nem változtatja; Piri pedig legyen az a gép, ami mindent pirosra fest.*

Ha D mögé kapcsoljuk Pirit, akkor olyan összetett gépet kapunk, ami ugyanúgy viselkedik, mint Piri, mindent pirosra fest. Ha viszont Pirit vesszük előre és mögé a D gépet, akkor új gépet kapunk: olyat, amely mindent kékre fest. Egy gépet saját maga mögé is kapcsolhatunk. Három D gépet egymás mögé kapcsolva olyan gépet kapunk, amelyik a kék és piros korongokat zöldre festi, a többi színét nem változtatja.

a) *Hány olyan gép van, amelynek két példányát összekapcsolva olyan gépet kapunk, mint Ident, ami minden korongot olyannak hagy, amilyen volt?*

b) *Hány olyan gép van, amelynek megfelelő számú példányát összekapcsolva Identet kapjuk?*

V. *Bergengócia nemzeti ünnepe alkalmából kedvezményesen árusítják mindazokat a gépeket, amelyeknek*

a) *két példányát*

b) *néhány (megfelelő számú)*

példányát egymás mögé kapcsolva az összekapcsolt gép úgy működik, mint „Piri", azaz minden golyót pirosra fest. Hányféle gépet árusítanak akciósan az a) illetve a b) esetben?

VI. *A MikiFoszt gyárban új stratégiát dolgoztak ki a festőgépek minél olcsóbb előállítása érdekében. Az elképzelés szerint csak néhány fajta gépet gyártanának, azokból viszont sokat, és e néhány fajta gép példányainak megfelelő összekapcsolásával állítanák elő a többi gépet is.*

Mennyi a „néhány", azaz legkevesebb hányfajta gép segítségével lehet a stratégiát megvalósítani, ha egyelőre csak annak a 120 *gépnek az előállítására törekednek, amelyek különböző színű golyókból különbözőeket készítenek?*

Ajánló

Kosztolányi József, Mike János, Kozmáné Jakab Ágnes, Dr Szederkényi Antalné, Vincze István, *Összefoglaló feladatgyűjtemény 10-14 éveseknek*[OSSZ14];

Hajnal Péter „Elemi kombinatorikai feladatok"[HAJKO], 5. fejezet (Leképezések összeszámlálása).

6.3. Különböző sorozatok

Alább sorozatokkal kapcsolatos példák találhatók kissé összekeverve. Az egyik feladat éppen az, hogy megtaláljuk az egymással analóg példákat, akkor is, ha nem tudjuk megtalálni az azokat leíró képletet.

A gyűjteményben még a 3.2. Lineáris rekurziók fejezet szól kifejezetten sorozatokról.

6.1. Feladat *(I. mego., II. mego.)*

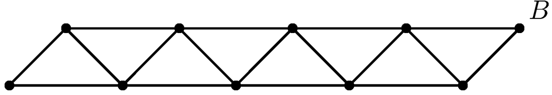
Legfelejebb hány új egyenes keletkezik, ha összekötjük hat egyenes metszéspontjait?

6.2. Feladat *(Mego.)*

Adott a síkon hat pont úgy, hogy semelyik három sem esik egy egyenesre. Meghúzzuk az összes pontpár által alkotott szakasz felezőmerőlegesét. Legfeljebb hány egyenest kapunk? Ha ezek a felezőmerőlegesek mind különbözőek, akkor legfeljebb hány metszéspontjuk lehet?

6.3. Feladat *(Segít.)*

Hányféleképpen jutatunk el a 6.7 ábrán A-ból B-be, ha csak jobbra, jobbra felfelé és jobbra lefelé léphetünk? Általánosítsunk!



6.7. ábra.

6.4. Feladat *(I. mego., II. mego.)*

Öt diák – Anna, Bea, Cili, Detti és Edit – jó barátnők, de minden nap összevesznek, minden nap három klikket alakítanak. Hányféleképpen lehetséges ez a klikkesedés? (A három csoport egyike sem üres, és mindenki pontosan az egyik klikkbe tartozik aznap)

6.5. Feladat *(a), b), c) mego., d) I. mego., d) II. mego.)*

Hányféle sorrendben érkezhet be

a) 3; b) 4;

c) 5; d) n

versenyző a célba, ha holtverseny is megengedett?

6.6. Feladat *(Segít., Eredm., Mego.)*

Hányféleképpen rakhatók sorba a

$$2, \quad 3, \quad 4, \quad 5, \quad \ldots, \quad 2009, \quad 2010$$

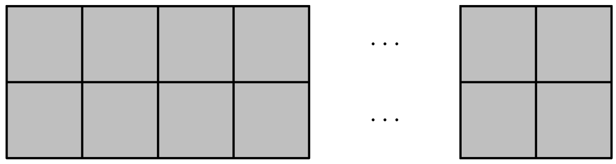
számok úgy, hogy a sorban k-adik szám minden $k \in \{1, 2, 3, \quad \ldots \quad, 2008, 2009\}$ értékre osztható legyen k-val?

6.7. Feladat *(I. segít., II. segít., I. mego., II. mego.)*

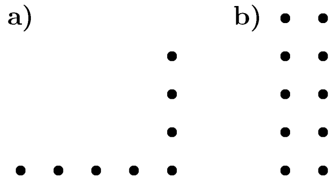
Hányféleképpen fedhető le egy $2 \times n$-es téglalap (lásd a 6.8 ábrát) hézag és átfedés nélkül 1×2-es dominókkal?

6.8. Feladat *(Segít., Eredm)*

Hányféle sorrendben vehető le az összes kavics, ha egy lépésben csak olyan kavics vehető le, amelytől se balra és se fölfelé nincs több kavics és a kiinduló helyzet a 6.9 ábrán látható?



6.8. ábra.



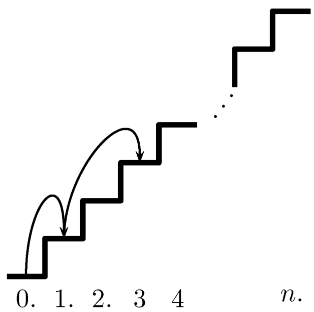
6.9. ábra.

6.9. Feladat *(I. mego., II. mego.)*

Hányféleképpen juthatunk fel egy

a) *7-fokú,* b) *n-fokú*

lépcsőn, ha egy lépésben egy vagy két fokot juthatunk feljebb (lásd a 6.10 ábrát)?



6.10. ábra.

6.10. Feladat *(I. mego., II. mego.)*

Hányféleképpen juthatunk fel a 10-fokú lépcsőn, ha egyszerre csak 2 vagy 3 fokot léphetünk felfelé?

6.11. Feladat *(Segít.)*

Az ebben a feladatban szereplő számsorozat mindegyik tagját az előző tagból számítjuk ki. Ha az előző tag páros, akkor az új tag annak fele lesz, amennyiben viszont az előző tag páratlan, akkor az új tag annak háromszorosánál eggyel kisebb *szám lesz.*

$$d_{n+1} = \begin{cases} d_n/2, & \textit{ha } d_n \textit{ páros} \\ 3d_n - 1, & \textit{ha } d_n \textit{ páratlan} \end{cases}$$

Azt tudjuk még, hogy a sorozat ötödik eleme, $d_5 = 17$.

a) *Adjuk meg a sorozat első tíz elemét!*

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
d_n					17					

b) *Adjuk meg a sorozat 100. elemét,* d_{100} *értékét!*

6.12. Feladat *(Segít., c) mego.)*

Az ebben a feladatban szereplő számsorozat mindegyik tagját az előző tagból számítjuk ki. Ha az előző tag páros, akkor az új tag annak fele lesz, amennyiben viszont az előző tag páratlan, akkor az új tag annak háromszorosánál eggyel nagyobb *szám lesz.*

$$e_{n+1} = \begin{cases} e_n/2, & \textit{ha } e_n \textit{ páros} \\ 3e_n + 1, & \textit{ha } e_n \textit{ páratlan} \end{cases}$$

Azt tudjuk még, hogy a sorozat ötödik eleme, $e_5 = 17$.

a) *Adjuk meg a sorozat első tíz elemét!*

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
e_n					17					

b) *Adjuk meg a sorozat 100. elemét,* e_{100} *értékét!*

c) *Módosítunk sorozatunkon! Legyen az első elem* $e'_1 = 27$. *Igaz-e, hogy ezen sorozat egyik eleme az* 1*?*

6.13. Feladat *(I. segít., II. segít.)*

Hány olyan nyolcjegyű pozitív egész szám van, amelyben 1*-es és* 2*-es számjegyek vannak, és nincs a számban két* 1*-es egymás mellett?*

6.14. Feladat *(Mego.)*

Egy bolha a koordinátarendszer origójából indul, minden ugrásával az adott ponttól fölfelé vagy jobbra szomszédos rácspontra ér. Hányféleképpen juthat el a bolha az $(5; 5)$ *pontba úgy, hogy közben nem ugorhat rá a pozitív síknegyen szögfelezőjére?*

6.15. Feladat *(Ötlet)*

Hányféleképpen osztható fel egy konvex hétszög egymást nem metsző átlóival háromszögekre?

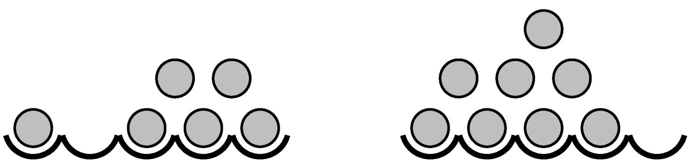
6.16. Feladat *(Segít., Mego.)*

Hányféleképpen olvasható ki a 6.11 ábráról a Liber Abaci könyvcím, ha csak jobbra és lefelé haladhatunk, és kettőnél többször nem léphetünk egymás után ugyanabba az irányba?

$$
\begin{array}{cccccccccc}
L & I & B & E & R & A & B & A & C & I \\
I & B & E & R & A & B & A & C & I & \\
B & E & R & A & B & A & C & I & & \\
E & R & A & B & A & C & I & & & \\
R & A & B & A & C & I & & & & \\
A & B & A & C & I & & & & & \\
B & A & C & I & & & & & & \\
A & C & I & & & & & & & \\
C & I & & & & & & & & \\
I & & & & & & & & &
\end{array}
$$

6.11. ábra.

6.17. Feladat *Korongokat rakunk egy táblára. Alul* 5 *hely van, ezekbe lehet tenni a legalsó korongokat. Ha két szomszédos helyen van korong, akkor rájuk („közéjük–föléjük") tehető egy újabb korong. Így legfeljebb* $5+4+3+2+1=15$ *korongot tehetünk a táblára. Hányféle stabil állásban helyezhetők el a korongok? A 6.12 ábrapáron egy-egy megfelelő állás látható.*



6.12. ábra.

6.18. Feladat *(Mego.)*

Tekintsük a $p(x) = x^2 - x - 1$ *polinomot!*

a) *Határozzuk meg* p *zérushelyei tizedik hatványának összegét!*

b) *Igaz-e, hogy a* p *zérushelyei* 2011. *hatványának összege is egész?*

6.19. Feladat *(Mego.)*

Legyen L_n *az* n*-elemű halmaz részhalmazaiból álló*

$$\{\} = H_0 \subset H_1 \subset \ldots \subset H_{k-1} \subset H_k = \{1, 2, 3, \ldots, n\}$$

szigorúan monoton sorozatok száma. (Tehát L_i *részhalmaza* L_{i+1}*-nek, de nem egyezik meg vele és* $k \in \{1, 2, \ldots, n\}$ *tetszőleges, nem rögzített szám.)*

Adjuk meg L_1*,* L_2*,* L_3*,* L_4 *és* L_5 *értékét!*

6.20. Feladat *(Segít.)*

Egy sorozat első tagja 1999*, az újabb tagot pedig mindig úgy kapjuk, hogy az előző tag számjegyeinek összegét megszorozzuk* 13*-mal. Határozzuk meg a sorozat* 1999. *tagját!*

6.21. Feladat *(Segít.)*

A $2,\ 2^2,\ 2^3,\ 2^4,\ 2^5,\ \ldots$ *sorozatban található-e két olyan különböző szám,amelyek különbsége osztható* 100*-zal?*

6.22. Feladat *(Mego.)*

Vizsgáljuk a $b_0 = 1$*,* $b_{n+1} = 1 + \frac{1}{1+b_n}$ *sorozatot! Fogalmazzuk meg minél több tulajdonságát, próbáljuk meg igazolni észrevételeinket!*

6.23. Feladat *(Mego.)*

Jelölje rendre E_n*,* S_n*,* T_n*, azt hogy legfeljebb hány részre osztja* n *pont az egyenest,* n *egyenes a síkot illetve* n *sík a teret! Töltsük ki az alábbi táblázatot!*

n	E_n	S_n	T_n
0			
1			
2			
3			

Adjuk meg E_n*,* S_n*,* T_n *explicit képletét!*

6.24. Feladat *(Segít.)*

A diákönkormányzati választáson 13-an szavaztak, közülük 8-an az A jelöltre, míg 5-en a B jelöltre. A szavazatszámlálást úgy végzik, hogy az urnából egyesével húzzák ki a szavazócédulákat és felolvassák a rá írt nevet. Mennyi az esélye, hogy ennek során az A jelölt végig vezet a B előtt (döntetlen állapot sincs)?

6.25. Feladat *(Mego.)*

A $\otimes$ művelet nem asszociatív. Ezért a $a \otimes b \otimes c \otimes d$ kifejezés értelmezéséhez ki kell tennünk a zárójeleket, a sorrend egyértelműsítése miatt két pár zárójelet. Ez ötféleképpen végezhető el:

$$((a \otimes b) \otimes c) \otimes d, \qquad (a \otimes b) \otimes (c \otimes d), \qquad (a \otimes (b \otimes c)) \otimes d,$$

$$a \otimes ((b \otimes c) \otimes d), \qquad a \otimes (b \otimes (c \otimes d))$$

Hányféleképpen zárójelezhetők az öttagú és a hattagú összegek?

6.26. Feladat a) *Legfeljebb hány részre oszthatja a síkot k kör?*

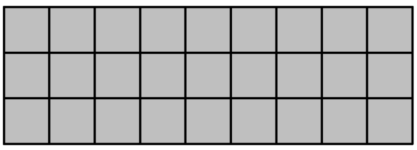
b) *Legfeljebb hány részre oszthatja a teret g gömb?*

6.27. Feladat *(Mego.)*

Egy tízemeletes épület emeleteit úgy akarják kiszínezni, hogy szomszédos szintek mindig különböző színűek legyenek. Hányféle színezés lehetséges, ha csak háromféle szín – pirosat, fehér és zöld – használható?

6.28. Feladat *(a) I. mego., II. mego., b) mego.)*

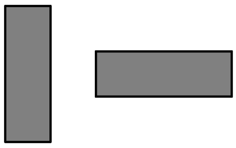
Hányféleképpen fedhető le egy 3×10-es téglalap (lásd a 6.13 ábrát) hézag és átfedés nélkül



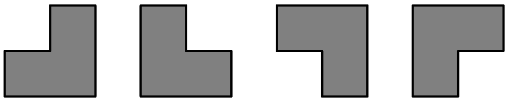
6.13. ábra.

a) *1×3-es dominókkal (lásd a 6.14 ábrát)?*

b) *három kis négyzetből álló L alakú lapokkal (lásd a 6.15 ábrát)?*



6.14. ábra.



6.15. ábra.

6.29. Feladat *(Mego.)*

Hány olyan szigorúan monoton növő sorozat van, amelyben a páratlan indexű tagok páratlan, a páros indexűek páros pozitív egész számok és nem nagyobbak 13*-nál?*

6.30. Feladat *(I. segít., II. segít.)*

2 *és* 3 *közé iktassunk be* 9 *számot úgy, hogy a kapott* 11 *szám közül bármelyik három nagyság szerint egymás után következő közül a középső a másik kettő*

a) *számtani;* b) *mértani;* c) *harmonikus*

közepe legyen! Írjuk fel a számokat!

6.31. Feladat *(Mego.)*

Egy tízemeletes épület emeleteit

a) *kék és piros;* b) *kék, piros és sárga*

színekkel festik ki úgy, hogy szomszédos szintek nem lehetnek mindketten kékek. Hányféle színezés lehetséges?

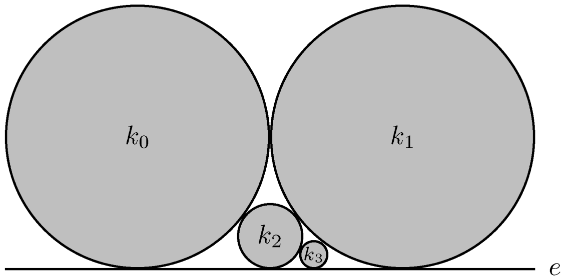
6.32. Feladat *(I. mego., II. mego.)*

Hányféleképpen színezhető ki egy hétszintes ház, ha minden emelet piros vagy kék és legfeljebb három egymás feletti emelet lehet azonos színű?

6.33. Feladat *(Mego.)*

Az e egyenes egyik oldalán adottak az e-t és egymást érintő k_0, k_1 *körök. Ezekből képezzük körök* $\{k_n\}$ *sorozatát úgy, hogy mindegyik kör érintse az e egyenest és a sorozatban előtte és után helyezkedő két kört és az ezek által meghatározott véges tartományban helyezkedjék el (lásd a 6.16 ábrát).*

Határozzuk meg a k_{10} *kör sugarát, ha* k_0 *és* k_1 *sugara egységnyi!*



6.16. ábra.

6.34. Feladat *(Mego.)*

Különleges kőtábla került elő Arbeglában, egy rejtélyes eljárás kissé hiányos leírása:

Végy egy pozitív számot!

1. Képezd a szám egészrészét és a törtrészét!

2. Az egészrészt írd föl a táblára!

3. Ha a törtrész 0, akkor fejezd be az eljárást!

4. Ha a törtrész nem 0, akkor képezd a törtrész ...., és kezdd el vele az eljárást az 1. lépéstől! Az új egészrészt írd mindig a korábbiak mellé!

Sajnos a kipontozott részen álló szó lekopott, nem lehetett elolvasni. A matematika történetének kutatói valószínűnek tartják, hogy a „kétszeresét ” szó állhatott ott.

a) *Mely kezdeti számok esetén fejeződik be véges sok lépésben az eljárás?*

b) *Mely kezdeti szám esetén kerülne fel a táblára a végtelen hosszú 1,1,1,1, ... sorozat?*

6.35. Feladat *(Mego.)*

A 6.34. feladatban fölbukkant kőtábláról Dr. Kekecnek különvéleménye van. Szerinte a kipontozott helyen a „reciprokát” szó állhatott. Mi a válasz az a), b) kérdésekre ebben az esetben?

6.36. Feladat *Azt mondjuk, hogy egy sorozat Fibonacci-típusú, ha tagjai pozitív egészek és a harmadik tagtól kezdve minden eleme az előző kettő összege. Például*

$$1, \quad 1, \quad 2, \quad 3, \quad 5, \quad 8, \quad ...,$$

vagy

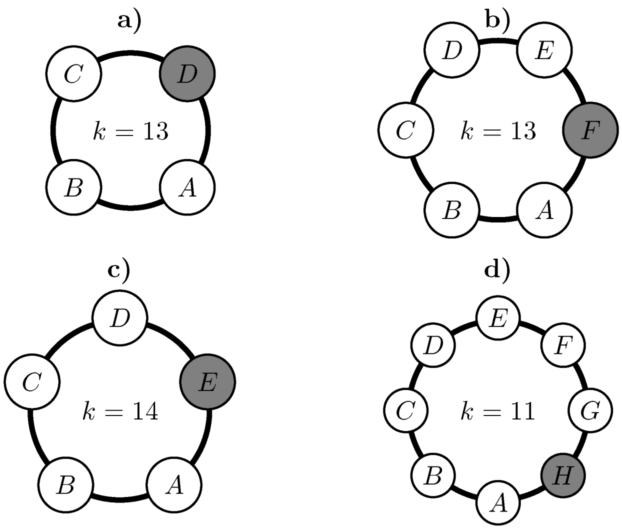
$$3, \quad 1, \quad 4, \quad 5, \quad 9, \quad 14, \quad ...$$

Hány olyan Fibonacci-típusú sorozat van, amelynek 8. eleme 2008*?*

6.37. Feladat „Ugorj, kenguru” *I. [ERDAL]*

Az „Ugorj, kenguru” nevű játék táblája körben elhelyezkedő mezőkből áll, amelyeken egy kenguru ugrál. Kezdetben az A mezőn áll (lásd a 6.17. ábrát) és minden lépésben, a játék menetétől függően, valamelyik szomszédos mezőre ugrik át. Ha a szürke mezőre ér a kenguru, akkor a játék véget ér.

Hányféle olyan játékmenet képzelhető el, amely épp k lépésből áll, ha k értékét és a tábla és a befejező szürke mező helyét a 6.17 ábra mutatja?



6.17. ábra.

6.38. Feladat „Ugorj, kenguru” *II. [ERDAL]*

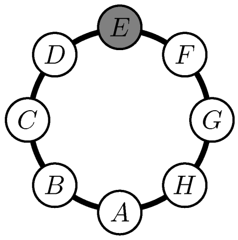
Az „Ugorj, kenguru” nevű játék táblája körben elhelyezkedő nyolc mezőből áll, amelyeken egy kenguru ugrál. Kezdetben az A mezőn áll és minden lépésben, a játék menetétől függően, valamelyik szomszédos mezőre ugrik át (lásd a 6.18 ábrát). Hányféleképpen érhet 2012 *lépésben az E-vel jelölt mezőre, ha a játék*

a) *nem ér véget,* b) *azonnal véget ér,*

ha az E mezőre lép?

6.39. Feladat *(Mego.)*

Ha egy sorozat különbségi sorozata konstans, akkor az egy számtani sorozat. Ha a sorozat különbség sorozatának különbségi sorozata konstans, akkor az a sorozat egy másodfokú polinommal írható le. Dolgozzunk ki módszert, amellyel hatékonyan fel tudjuk írni az ilyen sorozatok képletét. Próbálkozzunk pld az alábbi sorozattal, amelynek harmadik különbségi sorozata konstans!



6.18. ábra.

$$\begin{array}{ccccccccccccc}
5 & & 2 & & 0 & & 1 & & 7 & & 20 & & 42 \\
 & -3 & & -2 & & 1 & & 6 & & 13 & & 22 & \\
 & & 1 & & 3 & & 5 & & 7 & & 9 & & \\
 & & & 2 & & 2 & & 2 & & 2 & & &
\end{array}$$

6.40. Feladat A négyzetszámok összegképlete*(I. mego., II. mego., III. mego.)*
Igazoljuk az első n négyzetszám összegére vonatkozó formulát!

$$1^2 + 2^2 + \ldots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

6.41. Feladat A köbszámok összegképlete*(I. mego., II. mego., III. mego.)*
Igazoljuk, hogy bármely n pozitív egész számra fennáll az

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + \ldots + n^3 = (1 + 2 + 3 + \ldots + n)^2$$

összefüggés!

Ajánló

Általában a sorozatokról:

Neil J. A. Sloane „The On-Line Encyclopedia of Integer Sequences”, http://oeis.org/.

Ronald L. Graham, Donald E. Knuth, Oren Patashnik „Konkrét matematika”[KONKR], 6., 7. fejezetek;

a Fibonacci sorozatról:

Török Judit „A Fibonacci-sorozat”[TÖRFIB];
Gerőcs László „A Fibonacci-sorozat általánosítása”[GERFI];
A Wolfram Mathworld[WOLFM],

http://mathworld.wolfram.com/FibonacciNumber.html;

A plus[+PLUSM] oktatási oldal cikke:
http://plus.maths.org/content/life-and-numbers-fibonacci;

a Catalan számokról:

Elekes György „Kombinatorika feladatok”[EGYKO] 4.2. fejezet (Tükröm, tükröm...);
Cofman Judit „Catalan numbers for the classroom?”[COCAT];
Tom Davis „Catalan numbers”
http://mathcircle.berkeley.edu/BMC6/pdf0607/catalan.pdf;
Bege Antal, Kása Zoltán „Coding objects related to Catalan numbers”[BEKÁC]
http://www.ms.sapientia.ro/~kasa/begekasa.pdf.

a Stirling számokról:

Elekes György „Kombinatorika feladatok”[EGYKO], 4.1. fejezet;
Ronald L. Graham, Donald E. Knuth, Oren Patashnik „Konkrét matematika”[KONKR], 6.1. fejezet;
Norman John Wildberger „Insights into mathematics” előadássorozatában[WILIN],
http://www.youtube.com/watch?v=LB68I4mkb8Y.

a rendezett Bell számok a Wikipédián:

http://en.wikipedia.org/wiki/Ordered_Bell_number

végül:

Henry W. Gould, Timothy J. Glatzer „Bell and Catalan Numbers: A Research Bibliography of Two Special Number Sequences”[BECAB],
http://www.math.wvu.edu/~gould/BibGood%20final.pdf.

6.4. Sorozatok tulajdonságai

6.1. Feladat *(Mego.)*

Igaz-e, hogy ha az $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ és a $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ sorozatok monoton sorozatok, akkor az $\{a_n + b_n\}_{n=1}^{\infty}$ sorozat is monoton?

6.2. Feladat *(a) mego., b) mego., c) mego.)*

A Weierstraß tétel értelmében bármely végtelen sorozatnak van monoton részsorozata. Tekintsük ennek véges változatát: legyen $a_1, a_2, \ldots, a_k$ egy véges valós sorozat. Rendeljük bármely a_i eleméhez a (c_i, n_i) számpárost; c_i jelentse azt, hogy az a_i−vel kezdődő leghosszabb monoton csökkenő részsorozatnak c_i a hossza, n_i medig a maximális, a_i−val kezdődő monoton növő részsorozat hossza.

Az $a_1 = 1, a_2 = -1, a_3 = 2, a_4 = -2$ sorozatnál pl. $(c_1 = 3;\ (1 > -1 > -2)$ és $n_2 = 2;\ (-1 < 2)$. Bizonyítsuk be, hogy

a) *Az $a_i \mapsto (c_i, n_i)$ leképezés injektív,*

b) *Ha* $k = N^2 + 1$, *akkor a sorozatnak van* $N-$*nél hosszabb monoton részsorozata,*

c) *A* $k = N^2$ *esetén van olyan sorozat amelyikben nincs* $N-$*nél hosszabb monoton részsorozat.*

6.5. Egyenlőtlenségek

6.1. Feladat *(b) mego., Segít. c)-hez, c) mego.)*

Bizonyítsuk be, hogy

a) *Bármely* $x_1, x_2 \geq 0$ *számra* $\frac{x_1+x_2}{2} \geq \sqrt{x_1 x_2}$

b) *Az a) segítségével bármely* $x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0$ *számra*
$\frac{x_1+x_2+x_3+x_4}{4} \geq \sqrt[4]{x_1 x_2 x_3 x_4}$

c) *a b) segítségével* $x_1, x_2, x_3 \geq 0$ *számra* $\frac{x_1+x_2+x_3}{3} \geq \sqrt[3]{x_1 x_2 x_3}$. .

a), b), c) esetekben pontosan mikor van egyenlőség?

6.2. Feladat *(Mego.)*

Az $A = 2013^{2012}$, $B = 2012^{2013}$ *számok közül melyik a nagyobb? Osszuk el a nagyobbikat a kisebbikkel és adjuk meg a hányados egészrészét!*

6.6. Sorok, sorozatok határértéke

6.1. Feladat *(I. mego., II. mego.)*

Bizonyítsuk be, hogy azon egész számok reciprokainak az összege, amelyek a $10-$*es számrendszerben nem tartalmazzák a* 7 *számjegyet, konvergens!*

6.2. Feladat *(I. mego., II. mego.)*

Két, 30 *km távolságban levő barát egymással szemben biciklire pattan, és elindulnak egymásfelé. Sebességük* $10-10$ *km/h. Az indulás pillanatában egyikük orráról, kétszer olyan gyorsan mint ők, egy légy indul el a másik orra felé. Mikor odaér, abban a pillanatban visszaindul az első barát felé (az orrát keresve). Majd amikor elérte megfordul, és így tovább, a két biciklista találkozásáig. A kérdés az, összesen hány km-t repül a légy.*

6.3. Feladat *[PRJTV](I. mego., II. mego.)*

Az 1930-as években ösztönözve a gazdaságot 1 *koronáért olyan csokit lehetett kapni, amelyikben egy papír volt ezzel a felirattal: "Ha tíz ilyen papírt összegyűjtesz, azt beválthatod egy ilyen csokira'" Valójában* 1 *koronáért akkor hány csokit kapott az ember?*

6.4. Feladat *(Mego.)*

Akhilleusz – az ókor leggyorsabb futója 1 *sztadion* ($\sim 185m$) *előnyt ad egy teknősnek, aminél ő* $10-$*szer gyorsabb. Zenon szerint: míg Akhileusz befutja az* 1 *sztadion távolságot, addig a teknős ennek a tizedét futja be, tehát* $1/10$ *előnye van. Míg Akhileusz befutja az* $1/10$ *sztadion távolságot, addig a teknős ennek a tizedét futja be, tehát* $1/100$ *előnye van és így tovább. Akhileusz sohasem fogja utolérni a teknőst.*

Hol a hiba Zenon érvelésében?

6.5. Feladat *(a) mego., b) mego.)*

A sík egy részhalmazát nevezzük $d-$sávnak, amelyik két egymástól d távolságra levő párhuzamos egyenesből, és a közöttük levő pontok halmazából áll. Lefedhető-e a sík végtelen sok $a_1-, a_2-, \ldots, a_k-, \ldots$ sávokkal, ha

a) $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ *konvergens,*

b) $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ *divergens és nincs két olyan sáv, amelyik párhuzamos lenne?*

6.6. Feladat *(Mego.)*

Legyen

$$a_1 = \sqrt{q},\ a_2 = \sqrt{q+\sqrt{q}},\ a_3 = \sqrt{q+\sqrt{q+\sqrt{q}}},\ a_4 = \sqrt{q+\sqrt{q+\sqrt{q+\sqrt{q}}}}, \ldots.$$

Hány olyan $q \geq 2$, valós szám van, amelyre létezik a $\lim_{n\to\infty} a_n$, és amelyre ez a határérték éppen q ?

6.7. Feladat *(Mego.)*

Mi lenne a jelentése a

$$\sqrt{2}^{\sqrt{2}^{\sqrt{2}^{\cdots}}}$$

végtelen toronynak? Ha értelmes a jelölés, mennyi az értéke?

6.7. Szélsőérték, értékkészlet

6.1. Feladat *(Mego.)*

Adott $1.2m$ *drótból készítsünk egy négyzetes alapú hasábot, melynek térfogata maximális!*

6.2. Feladat *(Mego.) Adott egyenes körkúpba írjunk maximális felszínű hengert.*

6.8. Függvények tulajdonságai

6.1. Feladat *(Mego.)*

Bizonyítsuk be, hogy egy sokszög tetszőleges pontján keresztül húzható olyan egyenes, amelyik felezi a sokszög területét!

6.2. Feladat *(Mego.)*

Tegyük fel, hogy egy, az összes valós számokon értelmezett $f(x)$ függvényhez találunk két olyan értéket, $d_1 \neq d_2$ valósakat, hogy az $f(x-d_1)$ és az $f(x-d_2)$ függvény is páros.

Bizonyítsuk be, hogy $f(x)$ periodikus!

6.3. Feladat *(Mego.)*

Bizonyítsuk be, hogy ha egy mindenütt értelmezett $f(x)$ valós függvénynek minden irracionális szám periódusa, akkor az $f(x)$ egy konstans függvény.

6.4. Feladat *(Mego.)*

a) *Igaz-e, hogy ha egy mindenütt értelmezett $f(x)$ valós függvénynek minden racionális szám periódusa, akkor az $f(x)$ egy konstans függvény?*

b) *Van-e olyan mindenütt értelmezett $f(x)$ valós függvény, melynek az $a+b\sqrt{2}, a, b \in \mathbb{Z}$ alakú számok és csak azok a periódusai?*

6.5. Feladat *(Mego.)*

Bizonyítsuk be, hogy a $f(x) = x^2$ függvény nem áll elő két periodikus függvény összegeként!

6.6. Feladat (Kömal Gy. 2182)*(Mego.)*

Bontsuk fel az $f(x) = 2x^2+5x-3$ függvényt két szigorúan monoton függvény különbségére!

6.7. Feladat *(Mego.)*

Tegyük fel, hogy egy $-1-$et és $0-t$ nem felvevő függvényre teljesül, hogy bármely $x \in \mathbb{R}$,

$$f(x+1) = \frac{f(x)-1}{f(x)+1}.$$

Bizonyítsuk be, hogy $f(x)$ periodikus függvény.

6.8. Feladat *(Mego.)*

Legyen $f(x)$ $\alpha \neq 0$ szerint periodikus függvény, $g(x)$ $\beta \neq 0$ szerint periodikus függvény,és tegyük fel, hogy α/β racionális szám.

Bizonyítsuk be, hogy ekkor $f(x) + g(x)$ is periodikus!

6.9. Feladat *(I. mego., II. mego., III. mego.)*

Bizonyítsuk be, hogy ha $a < b < c$, akkor az

$$(x - a)(x - b) + (x - a)(x - c) + (x - c)(x - b) = 0$$

egyenletnek léteznek valós gyökei x_1, x_2, amelyekre $a < x_1 < b < x_2 < c$.

6.10. Feladat *(Mego.)*

Döntsük el, igaz vagy hamis!

a) *Van olyan függvény, amelynek értelmezési tartománya végtelen, értékkészlete véges halmaz.*

b) *Van olyan függvény, amelynek értelmezési tartománya véges, értékkészlete végtelen halmaz.*

c) *Van olyan függvény, amelynek értelmezési tartománya korlátos, értékkészlete végtelen halmaz.*

d) *Van olyan függvény, amelynek értelmezési tartománya végtelen, értékkészlete véges halmaz és kölcsönösen egyértelmű.*

e) *Van olyan függvény, amelynek értelmezési tartománya is és értékkészlete is a valós számok halmaza és mégsem kölcsönösen egyértelmű.*

f) *Van olyan függvény, amely páros is meg páratlan is.*

6.11. Feladat *(Mego.)*

a) *Lehet-e egy minden valós számon értelmezett pozitív értékű függvény páros, illetve páratlan?*

b) *Igaz-e, hogy ha $f(x)$ páros függvény, akkor $x = 0-$ban szélsőértékhelye van?*

c) *Lehet-e egy minden valós számon értelmezett páros, illetve páratlan függvénynek pontosan $1, 2, 3 \ldots$ szélsőértékhelye?*

6.12. Feladat *(Mego.)*

Legyen $f(x)$ egy tetszőleges, mindenhol értelmezett valós függvény. Igaz-e, hogy ekkor létezik olyan $g(x)$ függvény, amelyikre

a) *$f(g(x))$ periodikus,*

b) *$f(g(x))$ páros függvény,*

c) *$f(g(x))$ páratlan függvény?*

6.9. Szám és ponthalmazok

6.1. Feladat *(Mego.)*

A síkon a $[0, \infty)$ *zárt félegyenes olyan halmaz, amelynek van önmagával egybevágó valódi részhalmaza; pl. az* $[1, \infty)$ *zárt félegyenes.*

Van-e a síknak olyan korlátos halmaza, amelynek van önmagával egybevágó valódi részhalmaza?

6.2. Feladat *(Mego.)*

Tekintsük az első síknegyed következő ponthalmazát:

$$X_a := \{(x, y) : \frac{x}{a} + \frac{ay}{4} \geq 1;\ a \in \mathbb{R}^+\},$$

azaz egy negatív meredekségű egyenes és az efeletti pontok halmazát az első síknegyedben.

Bizonyítsuk be, hogy e halmazok közös része, azaz $\cap_{a \in \mathbb{R}^+} X_a$*, az első síknegyed* $xy \geq 1$*, konvex hiperbolatartománya!*

6.3. Feladat *(Mego.)*

Írjuk a tizedesvessző után – a tizes számrendszerben felírva – a négyzetszámokat, azaz legyen $\alpha = 0,149162536\ldots$*! Bizonyítsuk be, hogy* α *irracionális!*

6.4. Feladat *(Mego.)*

Egy bolha ugrál a számegyenesen, a 0-ból indul, egyszerre egységnyi hosszút tud ugrani. Eljuthat-e végtelen hosszú élete során minden egész pontba? Mi a helyzet, ha a síkbeli négyzetrács rácspontjain ugrál? Mi történik, ha a kockarács rácspontjain ugrál?

7. fejezet

Valószínűségszámítás

Ajánló

A témához kapcsolódó alapvető átfogó jellegű könyvek:

Rényi Alfréd „Levelek a valószínűségről”[RÉNYLE];
Nemetz Tibor „Valószínűségszámítás”[NMZVA];
Nemetz Tibor és Wintsche Gergely „Valószínűségszámítás és statisztika mindenkinek”[NMZWG];
Frederick Mosteller „50 különleges valószínűségszámítási feladat megoldásokkal”[MO50V];
Solt György „Valószínűségszámítás példatár”[SOVAL];
Bognár Jánosné, Nemetz Tibor, Tusnády Gábor „Ismerkedés a véletlennel”[BONTV];
Székely J. Gábor „Paradoxonok a véletlen matematikájában”[SZGPX];
William Feller „Bevezetés a valószínűségszámításba és alkalmazásaiba”[FELVA];

és weboldalak:
Alexander Bogomolny portáljának[CUTKNT] valószínűségszámítási oldalai:
`http://www.cut-the-knot.org/probability.shtml`.

7.1. Bevezető statisztikai példák

7.1. Feladat *(Mego.)*

Készítsük el Arany János „Toldi” című művének betűstatisztikáját
a) *a magyar karakterek szerint (a „ty”-ben t és y külön karakter);*
b) *a magyar hangok szerint (az „sz”, „ty” stb. önálló hangok);*
c) *az angol karakterek szerint („é”-t „e”-vel, „ó”-t, „ö”-t, „ő”-t „o”-val helyettesítjük)!*
A Toldi szövegét tartalmazó fájlok:

`file/toldi.doc`, *`file/toldi.txt`*

7.2. Feladat Betűhelyettesítéses titkosírás dekódolása*(Segít., Mego.)*

Dekódoljuk a

`file/halandzsa110723ha.doc`, `file/halandzsa110723ha.txt`

fájlokban megadott titkosított szöveget, amelyet egy magyar nyelvű könyvből vettünk, de karaktereit (a betűket, az ékezetes betűket és a szóközt) összekevertük. A titkosított szöveg így kezdődik:

FVQXWDÜQYDGXVQYFBZQCBFVőMBQDVQFQWDBYFBZHAAQ
CBFVőMBHEQDBZCEDQÉXBKDÖCBQFVXűÜQÉDűÜQGFQUFWN
AFYQADWMÜÜSEQFEEHűQÉMű

7.3. Feladat *Adjunk meg 13 darab pozitív egész számot úgy, hogy a mediánja 2, az átlaga 1999 legyen! Létezik-e ilyen sokaság, ha azt is megköveteljük, hogy egyetlen módusza legyen, és annak értéke*

a) *1;* b) *2;* c) *2000;* d) *6000*

legyen? Mennyi lehet maximum a módusz?

7.4. Feladat *(Segít., Mego.)*

Egy H számsokaság átlaga $\overline{x}$, szórása D. A számsokaság elemeinek legfeljebb hány százaléka lehet az $[\overline{x}-2D;\overline{x}+2D]$ intervallumon kívül?

7.5. Feladat *(Eredm.)*

Egy H számsokaság átlaga $\overline{x}$, szórása D. A számsokaság elemeinek legfeljebb hány százaléka lehet az $[\overline{x}-3D;\overline{x}+3D]$ intervallumon kívül?

7.6. Feladat *(Mego.)*

Általánosítsuk az előző, a 7.4., 7.5. feladatok eredményét!

7.7. Feladat *Adott a $\{3;7\}$ számsokaság. Bővítsük ki egy elemmel, hogy ne változzon a szórása!*

7.8. Feladat *(*Műveletek adatokkal és átlagaikkal*)(Mego.)*

Képezzük az n–n elemből álló

$$X = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}, \qquad Y = \{y_1, y_2, \ldots, y_n\}$$

számsokaságokból a szintén n–n elemből álló

$$X + Y = \{(x_1 + y_1), (x_2 + y_2), \ldots, (x_n + y_n)\},$$

$$X \cdot Y = \{(x_1 \cdot y_1), (x_2 \cdot y_2), \ldots, (x_n \cdot y_n)\},$$

valamint az n^2–n^2 elemből álló

$$X \oplus Y = \{(x_1 + y_1), (x_1 + y_2), \ldots, (x_1 + y_n), (x_2 + y_1), (x_2 + y_2), \ldots, (x_n + y_n)\},$$

$$X \otimes Y = \{(x_1 \cdot y_1), (x_1 \cdot y_2), \ldots, (x_1 \cdot y_n), (x_2 \cdot y_1), (x_2 \cdot y_2), \ldots, (x_n \cdot y_n)\},$$

számsokaságokat! Kifejezhetőek-e ezek átlagai az X, Y sokaságok átlagai – M_X és M_Y – segítségével?

7.2. Esélyek

7.1. Feladat *(*Török érettségi, 1997*)(I. mego., II. mego.)*

Az A dobozban 3 fehér és 4 piros, a B dobozban 5 fehér és 2 piros golyó van. Véletlenszerűen (egyenlő valószínűséggel) kiválasztjuk az egyik dobozt, és abból visszatevés nélkül kihúzunk két golyót. Mi a valószínűsége, hogy az egyik fehér, a másik piros lesz?

7.2. Feladat *(*a*) mego.)(*b*) mego.)*

Egy társaság tagjai saját szórakozásukra helyi lottót szerveznek. 21 *szám közül húznak ki kettőt, és ezekre lehet fogadni. Tippelni* 100 *forintért lehet. Ha valaki mindkét számot eltalálja,* 2000 *forintot kap, ha csak az egyik számot találja el, akkor* 200 *forintot kap.*

a) *Vajon ha sokáig játszom ezen a lottón, akkor mi a valószínűbb, az, hogy összességében nyereségem lesz, vagy az, hogy vesztek?*

b) *Legfeljebb hány szám (*21 *helyett) esetén érdemes játszani ezt a játékot ugyanezekkel a szabályokkal?*

7.3. Feladat *(Mego.)*

Anna és Balázs felváltva dob egy szabályos dobókockával. Megegyeznek, hogy az nyer, aki nagyobbat dob. Ha egyenlőt dobnak, akkor Anna nyer, Balázs viszont újra dobhat, ha egyest dob, ha ekkor is egyest, akkor ismét, egészen addig, amíg egyestől különbözőt nem dob. Ez az érték számít az ő dobásának. Kinek nagyobb a nyerési esélye?

7.4. Feladat *(Eredm.)*

Egy szerencsejáték-automata három hengerén 20-20 kép van:

	I.henger	II.henger	III.henger
szív	3	1	1
csillag	0	3	4
háromszög	2	2	4
kör	2	4	4
négyzet	7	7	0
lóhere	6	3	7

Egy zseton bedobása után az automata megpörgeti, majd megállítja a hengereket úgy, hogy mindegyiken egy–egy kép válik láthatóvá. 500 nyereményzsetont ad ki a gép, ha három szív látható. 8 zseton a nyeremény bármely másik három egyforma kép esetén.

a) *Mennyi a főnyeremény elérésének valószínűsége egy-egy játékban?*

b) *Mekkora annak a valószínűsége, hogy a nyeremény 8 zseton?*

7.5. Feladat *András és Béla a következő kockajátékot játsszák. András dobókockáján a 4, 6, 10, 18, 20, 22; Béla kockáján a 3, 9, 13, 15, 17, 25 számok vannak. Mindkét játékos feldobja saját kockáját, s az nyer, aki nagyobbat dobott. Kinek előnyös a játék?*

7.6. Feladat *András és Béla kockajátékot játszanak. Mindkettejük dobókockájának oldalain egy-egy pozitív egész szám olvasható. Mindkét játékos feldobja saját kockáját, s az nyer, aki nagyobbat dobott. Igaz-e, hogy ha András kockáján nagyobb a hat szám átlaga, mint Béla kockáján, akkor nagyobb András nyerési esélye, mint Béláé?*

7.7. Feladat *(Segít., Mego.)*

András és Béla kockajátékot játszanak. Az asztalon van három „csupasz” dobókocka. András felírja a számokat 1*-től* 18*-ig a kockákra úgy, hogy mindegyik számot pontosan egyszer írja fel. Ezután Béla megvizsgálja a kockákat és választ közülük egyet. A maradék két kocka közül András választhat magának egyet. Mindkét játékos feldobja saját kockáját, s az nyer, aki nagyobbat dob (a harmadik kocka már nem kap szerepet).*

Kinek kedvezőbb a játék, Andrásnak, vagy Bélának?

7.8. Feladat *Ketten a 7.1 ábrán látható táblán játszanak „autóversenyt”. Kockával dobnak. Az egyik „autó” vezetője mindig annyit lép előre, ahányast dob; a másik pedig 6-ot lép, ha páros számot dob, és nem lép, ha páratlan számot dob. Az nyer, aki előbb ér célba. Te melyik versenyző szeretnél lenni? Miért?*

7.1. ábra.

7.9. Feladat *(a) mego.)(b) mego.)*

Ketten (A és B) a következő játékot játsszák. Egy kalapból, melyben tapintásra egyforma piros és fehér golyók vannak, kihúznak két golyót. Ha a két golyó egyforma színű, akkor A nyer, ha különbözőek, akkor pedig B.

a) *Tudjuk, hogy a kalapban 10 piros golyó van. Hány fehér golyónak kell ott lennie ahhoz, hogy igazságos legyen a játék?*

b) *Adjuk meg az összes olyan nemnegatív egészekből álló p, f párt, amelyre igazságos a fenti játék p piros és f fehér golyóval!*

7.10. Feladat *(I. mego., II. mego.)*

Ketten (A és B) a következő játékot játsszák. Egy kalapból, melyben tapintásra egyforma piros és fehér golyók vannak, kihúznak két golyót. Ha mindkét golyó piros, akkor A nyer, minden más esetben pedig B.

a) *Legkevesebb hány golyó esetén lehet igazságos a játék?*

b) *Legkevesebb hány golyó esetén lehet igazságos a játék, ha a fehér golyók száma páros?*

7.11. Feladat Póker esélyek*(Mego.)*

52 lapos francia kártyával játszunk. Öt lapot kapunk kézbe. Határozzuk meg mennyi az esélye, hogy ez az öt lap a póker értékelése szerint

a) *pár – két egyforma alakzat, pl. két 3-as vagy két király és három különböző lap*

b) *két pár*

c) *drill – három egyforma alakzat, pl. három 3-as vagy három király és még két különböző lap*

d) *sor – pl.* $\heartsuit 4, \spadesuit 5, \heartsuit 6, \clubsuit 7, \diamondsuit 8$

e) *flush – öt egyforma színű lap, pl.* $\clubsuit K, \clubsuit A, \clubsuit 6, \clubsuit 8, \clubsuit 10$
f) *full – három + kettő egyforma alakzat, pl.* $\spadesuit K, \heartsuit K, \clubsuit K, \clubsuit 5, \diamondsuit 5$
g) *póker – négy egyforma alakzat – pl.* $\spadesuit K, \heartsuit K, \clubsuit K, \diamondsuit K, \diamondsuit 5$
h) *straight flush – négy egyforma színű lap sorban, pl.* $\heartsuit 4, \heartsuit 5, \heartsuit 6, \heartsuit 7, \heartsuit 8$*!*

7.12. Feladat *A kockapókerben* 5 *dobókockával dob a játékos. Határozzuk meg az alábbi dobások esélyét!*
a) *drill (pl. három* 2*-es, egy-egy* 5*-ös és* 6*-os)*
b) *sor (öt egymást követő szám, A 7.12.Eredm.)*

7.13. Feladat *(Mego.)*
Egy kockával dobunk. Hány dobás után lesz nagyobb a valószínűsége annak, hogy már dobtunk hatost, mint annak, hogy még nem dobtunk?

7.14. Feladat IMO, 1982 Ausztrália, javaslat*(Mego.)*
Anna n-szer, Balázs csak $(n-1)$-szer dob fel egy (szabályos) pénzérmét. Mennyi az esélye, hogy Anna többször dobott fejet, mint Balázs?

7.15. Feladat *(Mego.)*
Egy kockával dobunk, amíg sikerül hatost dobnunk. Mennyi az esélye, hogy dobtunk ötöst?

Ajánló

Bognár Jánosné „A Galton-deszka”[BOGAL];
Rényi Alfréd „A szerencsejátékok és a valószínűségszámítás”[RÉNYSZ];
„Matematikai problémakalauz I.” [KALAUZ], 5. fejezet: Valószínűségszámítás;

7.3. Várható érték

7.1. Feladat *(a) mego., b) I. mego., b) II. mego.)*
Ketten – A és B – a következő játékot játsszák.
Egy dobozban 2 *piros,* 1 *fehér és* 4 *zöld golyó van. Az A játékos addig húzhat a dobozból* visszatevéssel*, amíg zöldet nem húz. Piros húzásért* 50*, fehérért* 20 *Ft-ot kap B-től, de a játék elkezdésekor egy x összeget kell adnia B-nek.*
a) *Átlagosan hány húzásból áll a játék?*
b) *Mely x esetén igazságos a játék?*

7.2. Feladat *(Eredm.)*

Egy szabályos érmét addig dobálunk, amíg legalább egyszer kapunk fejet is és írást is. Mennyi a dobások számának

a) *legvalószínűbb értéke?*

b) *várható értéke?*

7.3. Feladat *(a) mego.)(b) mego., c) I. mego., c) II. mego.)*

Egy pénzdarabot addig dobálunk, ameddig másodszorra kapunk fejet.

a) *Mennyi a valószínűsége annak, hogy csak négy vagy több dobásból álló sorozattal érjük ezt el?*

b) *Adjuk meg a dobások számának valószínűség-eloszlását és*

c) *várható értékét!*

7.4. Feladat *(Eredm.)*

Egy kockát addig dobunk fel, amíg másodszorra is hatost dobunk. Adjuk meg a szükséges dobások valószínűségeloszlását és a dobások számának várható értékét!

7.5. Feladat *(I. mego., II. mego.)*

A Monte-Belloi kaszinóba belépőknek először egy fura játékban kell kipróbálni szerencséjüket. Ez a játék a következő: egy dobozba két nyerő és három vesztő golyót tesznek, amelyek külső formájukban teljesen megegyeznek. Ebből a dobozból visszatevés nélkül húznak ki golyókat. Nyerő golyó húzása után a kaszinó fizet a játékosnak 10 pénzt, vesztő golyó húzása esetén pedig a játékos fizet a kaszinónak 10 pénzt. A játékosnak joga van bármelyik húzás előtt a játékot abbahagyni, akár már az első húzás előtt is.

Kinek kedvez ez a játék? Érdemes-e kérni egyáltalán húzást? Hogyan érdemes játszani?

7.6. Feladat (Számok sorrendje) *(c) mego., d) mego., e) mego., f) mego., g) mego., h) mego., i) mego., j) mego.)*

Az interneten elérhető

`http://www.szerencsejatek.hu/xls/otos.xls`

fájl tartalmazza az eddigi ötöslottó (az 1-90 számok közül húznak ki ötöt) nyerőszámokat. A táblázatban a kihúzott számok mindegyik húzásnál növekvő sorrendben vannak felsorolva, tehát pl. a legkisebb számok egy oszlopban egymás alatt olvashatók.

a) *Tippeljük meg az eddigi – több mint 2800 – húzásban a legkisebb szám átlagos értékét!*

b) *Ellenőrizzük tippünket az említett fájl letöltésével és az átlag kiszámolásával! Ki tippelt a legjobban?*

A Bergengóc Lottóban az $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$ *számok közül húznak ki kettőt (visszatevés nélkül).*

c) *Melyik a kisebbik szám legvalószínűbb értéke?*

d) *Határozzuk meg a kisebbik szám várható értékét!*

e) *Határozzuk meg a kisebbik szám várható értékét, ha az* $\{1, 2, 3, \ldots, n\}$ *számok közül húznak ki kettőt!*

f) *Mennyi a kisebbik szám legvalószínűbb értéke, ha az* $\{1, 2, 3, \ldots, n\}$ *számok közül húznak ki kettőt?*

A Bergengóc Lottót megreformálják! Az $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$ *számok közül mostantól négyet húznak ki (visszatevés nélkül).*

g) *Melyik a második legkisebb szám legvalószínűbb értéke?*

h) *Határozzuk meg a második legkisebb szám várható értékét!*

i) *Határozzuk meg a második legkisebb szám várható értékét, ha az*

$$\{1, 2, 3, \ldots, n\}$$

számok közül húznak ki négyet!

j) *Határozzuk meg a második legkisebb szám legvalószínűbb értékét!*

7.7. Feladat *(Elő. megj.)*

Szabályos dobókockával dobhatunk. Előre el kell döntenünk, hogy hányszor dobunk. Ha 6*-osnál kisebbet dobunk, akkor annyiszor* 1000 *Ft-ot kapunk, amennyit dobtunk és nyereményünk a dobásoknál összeadódik. Ha viszont* 6*-ost dobunk, akkor minden addigi nyereményünket elveszítjük, és nem is dobhatunk többször.*

Hány dobást érdemes vállalni?

7.8. Feladat *(Mego.)*

Egy 35 fős osztályban a karácsonyi ajándékozáshoz mindenki felírja a nevét egy cédulára, egy sapkába teszi, összerázzuk, majd mindenki húz egy nevet. Határozzuk meg azok számának a várható értékét, akik a saját nevüket húzták!

7.9. Feladat IMO 1982 Belgium, javaslat*(Mego.)*

A „Híres Matematikusok Csokoládé" csomagolásában található egy kis kép, 20 híres matematikus portréja közül az egyik. Mindegyik híresség képe egyenlő, tehát $\frac{1}{20}$ *eséllyel található mindegyik csokiban. Átlagosan hány csokoládé vásárlásával gyűjthető össze mind a* 20 *kép?*

Ajánló

Rényi Alfréd „Levelek a valószínűségről” [RÉNYLE].

7.4. Feltételes valószínűség

7.1. Feladat *(a) I. mego., a) II. mego., b) mego.)*

Tíz azonos alakú doboz közül az első 9-ben 4-4 golyó van, mégpedig 2 fehér és 2 kék. A tizedik dobozban 5 fehér és 1 kék golyó van. Az egyik találomra választott dobozból véletlenszerűen kiveszünk egy golyót.

a) *Mennyi a valószínűsége, hogy fehér lesz?*

b) *A kivett golyó fehér lett. Mennyi a valószínűsége, hogy a tizedik dobozból való?*

7.2. Feladat *(I. mego., II. mego., III. mego.)*

Van egy-egy szabályos „dobótetraéderünk”, dobókockánk és „dobóoktaéderünk”. Mindegyik test lapjaira egytől kezdve felírtuk az első néhány pozitív egészt, tehát a tetraéderre 1*-től* 4*-ig, a kockára* 1*-től* 6*-ig, az oktaéderre* 1*-től* 8*-ig.*

Feldobunk két szabályos érmét. Ha mindkettő fej, akkor a kockával, ha pontosan egyikük fej, akkor a tetraéderrel, ha mindkettő írás, akkor az oktaéderrel dobunk.

a) *Mennyi az esélye, hogy* 1*-est dobunk?*

b) 1*-est dobtunk. Mennyi az esélye, hogy pontosan egy fejet dobtunk?*

7.3. Feladat *Tegyük fel, hogy a férfiak* 5%*-a és a nők* 0,25%*-a színvak. Egy 20 nőből és 5 férfiból álló csoportból 1 személyt találomra kiválasztunk. Megállapítjuk, hogy színvak. Mennyi a valószínűsége, hogy nőt választottunk ki?*

7.4. Feladat a) *Azokban a kétgyermekes családokban, ahol az egyik gyermek fiú, minek nagyobb a valószínűsége, annak, hogy a másik is fiú, vagy hogy a másik lány? Esetleg egyformán valószínű? (Feltételezzük, hogy fiú és lány születésének azonos a valószínűsége.)*

b) *Azokban a kétgyermekes családokban, ahol a kisebb gyermek fiú, minek nagyobb a valószínűsége hogy a másik is fiú, vagy hogy a másik lány? Esetleg egyformán gyakori?*

7.5. Feladat *Vetélkedő végén a győztes három ajtó közül választhat, az egyik mögött ott a Porsche, a másik kettő mögött apró ajándék van. A győztes választ egy ajtót. Ezek után a nem választott ajtók közül kinyitják neki az egyiket (vagy az egyetlent), ami mögött nem a Porsche van, és választást ajánlanak neki. Marad az ajtónál, másikat választ, vagy elviszi a látható kis ajándékot. Mit csináljon a győztes, ha a Porschéra hajt?*

7.6. Feladat *(Mego.)*

A tébécé korai felismerésére alkalmazott röntgenszűrésnél a tapasztalatok szerint hibák is előfordulnak. A kezdeti állapotban a betegek körülbelül 10%*-át nem veszi észre a teszt, míg körülbelül* 20%*-ban egyébként egészséges embernél is pozitív eredmény (azaz valami gyanús folt a tüdőn) adódik. Tudjuk, hogy hazánkban a tébécé előfordulása* $0,3\%$*.*

a) *Egy pozitív teszteredmény után mi az esélye, hogy tényleg tébécés az illető?*

b) *Ha negatív az eredmény, akkor mi az esélye, hogy tébécés?*

c) *Mindezek fényében vajon mire való ez a teszt?*

7.7. Feladat *I. mego., II. mego.)*

Valaki feldob egy kockát. Ha a dobott szám k, akkor beletesz egy urnába k darab piros és $(8-k)$ darab fehér golyót. Ki kell találnunk a kockadobás eredményét. Ehhez tízszer húzhatunk egy-egy golyót visszatevéssel az urnából. Hogyan döntsünk, ha a kihúzott golyók között pontosan r darab pirosat találunk?

(Az elemzéshez használjunk számítógépet – pl. Excel vagy Open Office Calc programot.)

7.5. Markov láncok

(Mego.)

7.1. Feladat Hosszú sorozat is várható

Egy kockával addig dobunk, míg egymás után 2011*-szer hatost dobunk. Mennyi az esélye, hogy ez sohasem következik be?*

7.2. Feladat *(Mego.)*

Egy főútvonalon végighaladva nyolc helyen van közlekedési lámpa. Annak valószínűsége, hogy egy lámpa éppen pirosat jelez, amikor odaérünk, 0,4. Mekkora annak a valószínűsége, hogy nem találkozunk közvetlenül egymás után két tilos jelzéssel?

7.3. Feladat *(I. mego., II. mego.)*

A juhászfiúból lett mesebeli vitéznek három próbát kell kiállnia. Az egyes próbákon a többitől függetlenül 2/3 valószínűséggel jut túl. A falujából indul és ha egy próbát teljesít, mehet a következőre. Ha az nem sikerül, akkor vissza kell fordulnia, és újra neki kell vágnia az előző, korábban már teljesített próbának. Ha bármikor befuccsol a legelső próbán, akkor vége a mesének, kulloghat haza.

Mennyi az esélye, hogy a vitéz teljesíti mind a három próbát?

7.4. Feladat Ferde foci*(a) mego.)(b) mego.)(c) mego.)*

Két játékos – A és B – a $[0; 6]$ *intervallumon focizik, a* 0 *az A játékos kapuja, míg a* 6 *a B játékosé. A labda kezdetben a* 2*-n áll. Egy lépés abból áll, hogy feldobnak egy szabályos érmét, és ha „Fej" lesz, akkor eggyel jobbra (nagyobb számra), ha „Írás". akkor eggyel balra (kisebb számra) teszik a „labdát". A nyer, ha B kapujába – azaz* 6*-ra – ér a labda, míg B nyer, ha A kapujába, a* 0*-ba kerül a labda.*

a) *Melyik játékosnak mennyi a nyerési esélye?*

b) *Mennyi a döntetlen esélye, tehát mennyi a valószínűsége, hogy sose kerül egyik kapuba se a labda?*

c) *Hogyan változik a válasz az a), b) kérdésekre, ha nem pénzérmével, hanem szabályos dobókockával dobnak, és* 1 *valamint* 2 *esetén balra,* 3*,* 4*,* 5 *és* 6 *esetén jobbra tolják a labdát? Először tippeljünk, utána álljunk neki a számolásnak!*

Ajánló

Jakab Tamás „Néhány valószínűségszámítási probléma – egy ötlet"[JAÖTL];

Orosz Gyula „Markov láncok"[OGYMAR].

7.6. Normális eloszlás

7.1. Feladat *(Eredm.)*

Az intelligencia hányados (IQ) megközelítően normális eloszlású, várható értéke $\mu = 100$*, szórása pedig* $\sigma = 15$*. A lakosság hány százalékának IQ-ja*

a) *legfeljebb 70?*

b) *legalább 120?*

c) *90 és 120 közötti érték?*

7.2. Feladat *(Eredm.)*

A 13 éves gyerekek testmagassága közelítőleg normális eloszlású, $\mu = 158$ *cm és* $\sigma = 6,5$ *cm.*

a) *A gyerekek hány százaléka magasabb, mint* 180 *cm?*

b) *Hány cm az az érték, melynél a tanulóknak csak* 5%*-a magasabb?*

c) *Egy gyereket véletlenszerűen kiválasztunk. Határozzunk meg olyan intervallumot, melyben a gyermek magassága* 95% *valószínűséggel benne van!*

Ajánló

A Pascal háromszögtől a normális eloszláshoz vezető utat szépen mutatja be John Walker „Introduction to Probability and Statistics”[WALPNO] webcikke.

7.7. Megismerés Bayes módján

7.1. Feladat *(Milyen kvarkok? – fiktív elmélet Bayesiánus vizsgálata)[HRPVA] (Mego.)*

Egy elméleti fizikus arra a következtetésre jut, hogy a neutron tartalmaz még három eleddig ismeretlen típusú kvarkot, amelynek két lehetséges változata van. A két változatot fizikusunk „fehér” és „fekete” kvarknak nevezte el, de nem tudta megmondani, hogy a három újfajta kvark között hány fehér és hány fekete van: az elmélet mind a négy lehetőséget (0, 1, 2 vagy 3 fehér kvark) egyformán megengedte.

Sikerült azonban megmutatnia, hogy a fehér-fekete színmegoszlás kísérletileg vizsgálható. Amikor ugyanis elektronokkal bombázzuk a neutronokat, az új kvarkok egyike nagyon ritkán, véletlenszerűen, virtuális részecske formájában rövid időre kilép a neutronból, és az elektron szóródni tud rajta. Az „elmélet” szerint a fehér és a fekete kvark különböző módon szórja az elektronokat (az egyik mondjuk „jobbra”, a másik „balra”), ezért ebből a kísérletből meg lehet tudni, hány fehér és hány fekete kvark van a neutronokban.

Ez a kísérlet azonban nagyon költséges. A költségvetést úgy állapították meg, hogy a kísérletet addig folytathatjuk, ameddig — mondjuk — 5 bennünket érdeklő folyamatot nem találunk, tehát 5 szóródást figyelhetünk meg.

Tegyük fel, hogy a kísérlet megtörtént és az 5 folyamatból 2 tartozott fehér, 3 pedig fekete kvarkhoz. Milyen a 3 kvark színmegoszlása?

7.2. Feladat *(Milyen érme? – Bayesiánus vizsgálat)(Mego.)*

Egy pénzérméről szeretnénk eldönteni, hogy milyen, feldobás esetén milyen eséllyel lesz fej illetve írás. Jelöljük p-vel annak az esélyét, hogy fej lesz – és így $(1-p)$ eséllyel írás – de ne döntsük el előre p értékét csak annyit tegyünk fel (prior valószínűség), hogy p értéke valamely H_0 valószínűségi változó szerint oszlik el a $[0;1]$ intervallumban. Legyen most a H_0 eloszlás az egyenletes eloszlás.

a) *Mennyi az esélye a H_0 eloszlásnál, hogy ha feldobunk egy pénzérmét, az fej lesz?*

b) *Földobtuk, fej lett. Az eredmény alapján a Bayes-tétel milyen H_1 valószínűségeloszlást ad p értékére (posterior valószínűség)?*

c) *Legyen most H_1 a prior valószínűség(eloszlás). Mennyi az írás dobás esélye?*

d) *Feldobtuk, írás lett. Mindezek alapján a Bayes-tétel milyen H_2 valószínűségeloszlást ad p értékére (posterior valószínűség)?*

e) *A H_2 eloszlás esetén mennyi a valószínűsége, hogy ha feldobjuk az érmét, fej lesz?*

f) *A H_0 prior valószínűségeloszlást feltételezve (egyenletes eloszlás), mennyi az esélye annak, hogy m kísérletből r-szer lesz fej? Ha m elvégzett kísérletből tényleg r-szer lett fej, akkor milyen H_m^r posterior valószínűségeloszlást ad a Bayes tétel? Ennél az eloszlásnál mennyi a fej dobásának esélye?*

Ajánló

Dieter Wickmann „Bayes-statisztika"[WIBAY];

Pólya György „A Plauzibilis következtetés"[PÓLYPL];

David Salsburg „The Lady Testing Tea" (How statistics revolutionized science in the twentieth century)[SALADT];

Stephen Senn „Dicing with Death"[SEDID];

Reiczigel Jenő, Harnos Andrea, Solymos Norbert „Biostatisztika nem statisztikusoknak"[RHSBS].

8. fejezet

Gondolkodási módszerek

Ajánló

Pólya György alapművei:

- A gondolkodás iskolája[PÓLYGO];
- Indukció és analógia[PÓLYIN];
- A plauzibilis következtetés[PÓLYPL];
- A problémamegoldás iskolája I-II.[PÓLYPR];
- Matematikai módszerek a természettudományban[PÓLYTE].

8.1. Józan ész

8.1. Feladat *[PÓLYPR](Mego.)*
Egy gazda házinyulakat meg tyúkokat tartott. Ezeknek az állatoknak volt összesen 50 feje és 140 lába. Hány tyúkja és hány nyula volt a gazdának?

8.2. Feladat *(Mego.)*
Egy 8 és egy 5 literes edényünk van, amivel vizet merhetünk egy közeli forrásból.

a) *El tudjuk-e érni, hogy a nagyobbik edényben pontosan 7 liter víz legyen?*

b) *El tudjuk-e érni, hogy pontosan 1 l, 2 l, 3 l, 4 l, illetve 6 l legyen valamelyik edényben?*

8.3. Feladat *(Mego.)*

Az asztalon áll két egyforma pohár. Az egyikben (2 dl) tiszta víz, a másikban pontosan ugyanolyan mennyiségű bor van. Egy kiskanál (2 cl) bort átteszünk a másikba, jól összekeverjük, majd ugyanazzal a kiskanállal egy kiskanálnyi keveréket visszateszünk a borospohárba.

Az a kérdés, hogy a vizespohárban lesz több bor, vagy a borospohárban lesz több víz?

8.4. Feladat *(Mego.)*

Egy vegyes erdőnek 99%-a fenyőfa. A tulajdonos ki akarja vágatni a fenyőfák egy bizonyos hányadát. A környezetvédők tiltakozó akcióba kezdnek, de a tulajdonos megnyugtatja a nagyközönséget, hogy az állományban a fenyőfák aránya még mindig 98% lesz a tervezett kivágások után.

A teljes erdőállománynak hány százalékát fogja kivágatni a tulajdonos?

8.5. Feladat *(Mego.)*

Három dobozunk van, melyek mindegyikében két golyó van: az egyikben két arany, a másikban két ezüst, a harmadikban egy arany és egy ezüst golyó. A dobozokon ennek megfelelően a következő feliratok vannak: AA (arany-arany), EE (ezüst-ezüst) AE (arany-ezüst). A probléma csak az, hogy egyik doboz tartalma sem felel meg a doboz feliratának.

Ki szeretnénk találni, hogy melyik doboz mit tartalmaz, de mindössze egyetlen dobozból egyetlen golyót szabad kivennünk.

Melyik dobozból válasszunk golyót, hogy ez sikerüljön?

8.6. Feladat *Lásd az 3 Algebra fejezet 2.7. feladatát!*

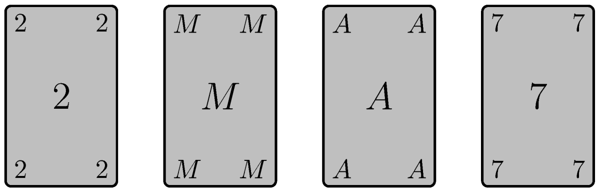
8.7. Feladat *Lásd az 3 Algebra fejezet 2.9. feladatát!*

8.2. Logikai fejtörők

8.1. Feladat *(Mego.)*

Négy kártya van az asztalra téve, mindegyik kártya egyik oldalán egy szám, a másik oldalán egy betű van, ahogy az a 8.1 ábrán látható.

Valaki ezt állítja: „Minden magánhangzó túloldalán 2010 *egy osztója van”. Mely kártyákat kell megfordítani ahhoz, hogy ellenőrizzük az állítás helyességét?*



8.1. ábra.

8.2. Feladat *(Mego.)*

Egy papírlapon a következő állítássorozatot találjuk:
„$2 \times 2 = 4$.
Ezen a lapon legfeljebb 1 igaz állítás van.
Ezen a lapon legfeljebb 2 igaz állítás van.
...
Ezen a lapon legfeljebb 10 igaz állítás van.”
Hány igaz állítás van a lapon?

8.3. Feladat *(Mego.)*

Egy utazó egy olyan szigetre látogatott el, ahol csupán lovagok és lókötők élnek. Tudta már, hogy a lovagok itt mindig igazat mondanak, a lókötők pedig mindig hazudnak. A szigetre érkezve utazónk három szigetlakóval találkozott, és ahhoz hogy megbízható információhoz jusson, tudnia kellett legalább az egyikükről, hogy miféle. Ezért megkérdezte a három közül az egyiket: „Lovag vagy, vagy lókötő?” A választ azonban nem értette meg, ezért megkérdezte a mellette állót is: „Mit mondott a barátod?” A második szigetlakó így felelt: „Azt mondta, hogy ő lovag.” Ekkor azonban megszólalt a harmadik szigetlakó is: „Ne higgy neki, hazudik.”

Lehet-e tudni, hogy melyikük lovag, és melyikük lókötő?

8.4. Feladat *[SMUMI](a) mego., b) mego., c) mego.)*

A következő feladatoknak két szereplője van, A és B, mindkettőjük vagy lovag, vagy lókötő (a lovagok mindig igazat mondanak, a lókötők mindig hazudnak). Meg tudjuk-e állapítani, hogy miféle A és miféle B, ha A a következők valamelyikét mondja nekünk:

a) *„Legfeljebb az egyikünk lovag.”*

b) *„Én lovag vagyok, vagy B lókötő.”*

c) *„Ha én lókötő vagyok, akkor megeszem a kalapom.” Meg kell-e A-nak ennie a kalapját?*

8.5. Feladat *[SMUMI](Mego.)*

Alice a felejtés erdejében elfelejtette, hogy a hétnek melyik napja van éppen, és nagyon szerette volna tudni. Találkozott az Oroszlánnal és az Egyszarvúval. Arra szerencsére emlékezett, hogy ezeknek a lényeknek milyen szokásai vannak: az Oroszlán mindig hazudik Hétfőn, Kedden és Szerdán, de a hét többi napjain biztosan igazat mond. Az Egyszarvú mindig hazudik Csütörtökön, Pénteken és Szombaton, a többi napokon pedig igazat mond.

Egy napon Alice találkozott az Oroszlánnal és az Egyszarvúval, akik egy fa alatt pihentek. Alice kérdésére a következőket mondták:

Oroszlán*: Tegnap hazudós napom volt.*

Egyszarvú: *Tegnap nekem is hazudós napom volt.*

Ezekből a válaszokból Alice (aki egy nagyon okos kislány), ki tudta találni, hogy milyen nap volt.

Ajánló

Előzmény a feladatgyűjteményben a Logika a Bevezető fejezetben.

További olvasnivalók:

Raymond Smullyan könyvei ([SMUMI], [SMUHÖ], [SMUAL], [SMUGÖ]) már az általános iskolásoknak is szórakoztatóak és elvezetnek egészen Gödel nemteljességi tételéig. Varga Tamás kétkötetes tankönyvében([VARLO1], [VARLO1]) a következtetések magyar nyelvi kifejezésétől a formális logika következtetéseiig jutunk el. Urbán János tankönyve[URBLO] egyszerre példatár is.

Egy esszé megírásához is szükség van logikára[BOFOLO].

8.3. A szimmetria felismerése

8.1. Feladat *(Mego.)*

Egy asztalra kilenc tízforintost tettünk egymás mellé „fej" oldalukkal felfelé.

Ketten játszanak, felváltva lépnek. Egy játékos egy lépésben kiválaszt egy vagy két olyan szomszédos érmét, amelynek „fej" oldala van felül, és azt illetve azokat „írás" oldalukra fordítja. Az nyer, aki lépésével eléri, hogy minden érmén írás legyen felül.

Kezdeni érdemes, vagy inkább másodikként játszani? Van-e nyerő stratégiája bármelyik játékosnak?

8.2. Feladat *(Mego.)*

Ketten játszanak. Egy téglalap alakú asztalra felváltva raknak le tízforintosokat, minden lépésben egyet-egyet. Az érméknek egyik oldaluk teljes felületével az asztalon kell feküdniük, és nem fedhetik át egymást. Aki már nem tud lerakni érmét – mert nincs hely – az vesztett.

Kezdeni érdemes, vagy inkább másodikként játszani? Van-e nyerő stratégiája bármelyik játékosnak? (Feltételezzük, hogy a két játékosnak van elegendő tízforintosa.)

8.3. Feladat *(a) mego., b) mego.)*

Ketten játszanak. Felváltva írnak be egy-egy („+” vagy „−”) előjelet minden szám elé (az 1-es elé is tehetnek) az alábbi sorban:

$$1 \quad 2 \quad 3 \quad 4 \quad 5 \quad 6 \quad 7 \quad 8 \quad 9$$

a) *„Kezdő” azt szeretné, hogy a legvégül kapott előjeles összeg osztható legyen hárommal, míg „Második”azt szeretné, hogy ne legyen osztható vele. Hogyan érdemes játszani? Kinek kedvező a játék?*

b) *Mi a helyzet akkor, ha megfordítjuk a szerepeket, vagyis ha „'második” célja az összeg hárommal való oszthatósága.*

8.4. Gondolkodjunk visszafelé!

8.1. Feladat *(Mego.)*

Három vándor az ítéletidő elől betért egy fogadóba. Hogy elüssék a várakozás idejét, kártyázni kezdtek. Megegyeztek abban, hogy a vesztes minden körben megduplázza a másik két játékos pénzét. Az első körben A, a másodikban B, a harmadikban C veszített. Ezután mindhármuknak 8 aranya volt. Hány aranya volt kezdetben az egyes játékosoknak?

8.2. Feladat *(*Számlétra*)(a) mego., b) mego., c) mego.)*

Egy kupacban 20 szál gyufa van. Ketten felváltva vesznek el gyufákat a kupacból, egyszerre 1-et, 2-t vagy 3-at saját döntésük szerint. Az nyer, aki az utolsónak maradt gyufát vagy gyufákat veszi el.

a) *Kinek van nyerő stratégiája, a kezdőnek, vagy ellenfelének? Hogyan kell játszania, hogy nyerjen?*

b) *Hogyan módosul a válasz 20 helyett más gyufaszám esetén?*

c) *Elemezzük a játékot az általános esetben is, tehát, amikor n számú gyufával játszanak és 1-től m-ig tetszőleges számú gyufaszálat vehetnek el!*

8.3. Feladat *(Segít., Mego.)*

Ketten a következő játékot játsszák. Két kupacabn gyufaszálak vannak, az egyikben 5, a másikban 7 szál. A két játékos felváltva vesz el gyufát. Egy lépésben akárhány – de legalább egy – gyufaszál elvehető, de egyszerre csak az egyik kupacból lehet elvenni. Az nyer, aki utolára vesz el gyufát, lépése után már egyik kupacban sem marad szál. Tud-e valamelyikük úgy játszani, hogy mindenképpen nyerjen? Hogyan játsszon?

8.4. Feladat *(a) mego., b) mego.)*

Ketten a következő játékot játsszák. Egy 6×8*-as tábla jobb felső sarkába helyeznek egy bástyát. A két játékos felváltva lép a bástyával, mindig lefelé (akárhány mezőt), vagy balra (tetszőleges számú mezőt). Passzolni nem lehet. Az*

a) *nyer;* b) *veszít,*

aki a bal alsó sarokba lép a bástyával. Tud-e valamelyikük úgy játszani, hogy mindenképpen nyerjen? Hogyan játsszon?

8.5. Feladat *(Mego.)*

Egy 6×8*-as tábla jobb felső sarkában áll a királynő. Ketten a következő játékot játsszák. A két játékos felváltva lép a királynővel, mindig lefelé (akárhány mezőt), vagy balra (tetszőleges számú mezőt), vagy átlósan balra lefelé akármennyit. Az nyer, aki a bal alsó sarokba helyezi a királynőt. Döntsük el, hogy kinek van nyerő stratégiája, Kezdőnek vagy Másodiknak?*

8.6. Feladat *(Mego.)*

Módosítsunk a 8.4. játék a) pontján, legyen lehetősége a két játékosnak összesen egyszer passzolni, tehát nem lépni semmit! Ha az egyik játékos passzolt, akkor már a másik nem passzolhat.

8.7. Feladat *(a) mego., b) mego.)*

Két kupac kavicsunk van, az egyikben 8, a másikban 10. Két játékos felváltva vesz el vagy mindkét kupacból egyet-egyet, vagy az egyik – bármelyik – kupacból egy kavicsot. Mi a nyerő stratégia, ki nyer, az Első vagy a Második, ha

a) az nyer, aki az utolsó(ka)t húzza?

b) az veszít, aki az utolsó(ka)t húzza?

8.8. Feladat *(Mego.)*

Bálint és Piroska egy hosszú táblán játszik, melynek mezői 0-tól 100-ig vannak számozva.

Kezdetben Bálint bábúja a 0-n, Piroskáé a 100-on áll. A két játékos felváltva lép, Bálint mindig a nagyobb sorszámú mezők irányában 1-gyel, 2-vel vagy 3-mal teszi arrébb bábuját, míg Piroska az ellenkező irányba lép szintén 1-et, 2-t vagy 3-at. Az nyer, aki kiüti a másik figuráját, azaz lépésével épp oda jut, ahol a másik áll. Kinek kedvező a játék, annak, aki elsőnek lép, vagy annak, aki másodiknak?

8.9. Feladat *(Segít.)*

Ketten a következő játékot játsszák. Egy kupacból, melyben kezdetben 25 szál gyufa van felváltva vesznek el gyufát, minden lépésben egy, két vagy három szálat. Az nyer, akinél a játék végén – tehát, amikor minden gyufa elfogyott a kupacból – páros számú gyufa van.

a) *Kinek van nyerő stratégiája, a kezdőnek, vagy ellenfelének? Hogyan kell játszania, hogy nyerjen?*

b) *Hogyan módosul a válasz, 25 helyett más – páratlan számú – gyufa esetén?*

c) *Elemezzük a játékot az általános esetben is, tehát, amikor* $2n+1$ *számú gyufával játszanak és* 1*-től* m*-ig tetszőleges számú gyufaszálat vehetnek el!*

Ajánló

Orosz Gyula „Algoritmusok”[OGYALG];

Jakab Tamás „Nim & Co.”[JANIM];

„Matematikai Problémakalauz I.”[KALAUZ] (1. fejezet: Játékelmélet);

Varga Tamás „Osztójáték”[OSZTJ], a cikk egy része a neten:
`http://db.komal.hu/KomalHU/cikk.phtml?id=198801`.

Csirmaz László „Játékok és Grundy számaik”[CSIGRU],
`http://www.komal.hu/cikkek/csirmaz/grundy/grundy.h.shtml`

8.5. Skatulyaelv

8.1. Feladat *Legalább hány totószelvény kitöltésével biztosítható, hogy legyen legalább 5-ös találatunk? (Úgy tekintjük, hogy a TOTO-n* 13 *mérkőzésre lehet tippelni., A 8.1. Mego.)*

8.2. Feladat *(Mego.)*

Mutassuk meg, hogy 3 (nem feltétlenül különböző) egész szám közül mindig ki lehet választani valahányat úgy, hogy az összeg osztható legyen 3-mal! (Az egytagú összeget is összegnek tekintjük.)

Igaz-e minden k *pozitív egészre, hogy* k *darab szám közül mindig kiválasztható néhány, melyek összege osztható* k*-val?*

8.3. Feladat *(Mego.)*

Van 80 golyónk, közülük 35 piros, 25 zöld, 15 sárga, 5 fekete. Legkevesebb hány darabot kell kivenni, hogy biztosan legyen köztük

a) *piros;*
b) *piros vagy fekete;*
c) *piros és fekete;*
d) *két különböző színű;*
e) *valamelyik színből legalább három?*

8.4. Feladat *(Mego.)*

Van G darab golyónk, közülük P piros, Z zöld, S sárga és F fekete.

a) *Tudjuk, hogy legkevesebb 5 darabot kell kivenni, hogy biztosan legyen köztük piros. Határozzuk meg F és G értékét, ha ismert, hogy $Z = 1$, $S = 2$, $P = 3$.*

b) *Tudjuk, hogy legkevesebb 10 darabot kell kivenni, hogy biztosan legyen közük piros és fekete. Határozzuk meg S és G értékét, ha ismert, hogy $P = 2$, $F = 3$, $Z = 4$!*

8.5. Feladat *(Mego.)*

El lehet-e szállítani 7 kéttonnás teherautóval 50 kőtömböt, melyek súlya 250, 251, 252, ..., 299 kg? (A kövek nem darabolhatók, a teherautók csak egyszer vehetők igénybe, és mindegyikre legfeljebb 2 tonna teher rakható.)

8.6. Feladat *(Mego.)*

Valaki (legalább kétjegyű) pozitív egész számokat ír fel egy papírlapra. Hány felírt szám esetén lehetünk biztosak abban, hogy kiválasztható közülük három, amelyek mind azonos számjeggyel kezdődnek, továbbá az is igaz, hogy utolsó számjegyeik is azonosak? (mint például 3518, 328 és a 38.)

8.7. Feladat *(Mego.)*

Van-e a π tizedes jegyei között három olyan egymást követő számjegy, melyek így együtt végtelen sokszor előfordulnak?

8.8. Feladat *(Mego.)*

Feladat 2010 papírlapra ráírtunk egy-egy számot. Mutassuk meg, hogy kiválasztható 45 lap úgy, hogy vagy mindegyikre azonos, vagy mindegyikre különböző szám van írva!

8.9. Feladat *(I. mego., II. mego.)*

Pistikének 100 korongja volt, rajtuk a számok 1-100-ig, mindegyiken 1-1. Ki szeretne tenni 4-et úgy, hogy az első kettő összege megegyezzen a másik kettőével. Például így:

$$(1) + (5) = (4) + (2).$$

Sajnos 75 korongot elvesztett. Megoldható-e a feladat a maradék 25 koronggal?

8.10. Feladat *(Arany Dániel-verseny, 1984, Haladók)(Mego.)*

Adott 21 különböző pozitív egész szám, mindegyik kisebb 70-nél. Mutassuk meg, hogy páronkénti különbségeik közt van négy egyenlő!

Ajánló

Róka Sándor „2000 feladat az elemi matematika köréből"[R2000].

Külföldi középiskolai matematikai versenyek,
http://matek.fazekas.hu/portal/feladatbank/gyujtemenyek/Nem/KF3.htm;
http://matek.fazekas.hu/portal/feladatbank/gyujtemenyek/Nem/KF4.htm;
http://matek.fazekas.hu/portal/feladatbank/gyujtemenyek/Nem/KF5.htm.
Schultz János „A skatulya-elv alkalmazásai"[S50SK],
http://matek.fazekas.hu/portal/tanitasianyagok/Schultz_Janos/50skatulya/.
A Matkönyv[MATKV] megfelelő fejezetei: Dobos Sándor 7-8-os Kombinatorika anyagában:
http://matek.fazekas.hu/mathdisplay/cache/pdf/volume_k_i.pdf,
és Surányi László 9-10-es Kombinatorikájában (16-17-18. fejezetek):
http://matek.fazekas.hu/mathdisplay/cache/pdf/volume_k_ii.pdf.
A Cut the knot portál[CUTKNT] feladatai:
http://www.cut-the-knot.org/do_you_know/pigeon.shtml.

8.6. Invariancia-elv

8.1. Feladat *(Mego.)*

10 db számkártyára felírtunk egyet – egyet a 0, 1, 2, 3, ... 9 számjegyek közül. Minden számkártyát pontosan egyszer felhasználva, egymás mellé rakva valahány számkártyát, számokat készítünk, minden kártyát pontosan egyszer felhasználva. Lehet-e az így elkészített számok összege 100?

8.2. Feladat *(Mego.)*

Egy négyzet csúcsaiba számokat írtunk. Egy-egy alkalommal két szomszédos csúcs mindegyikében 1-gyel növeljük az ott levő számokat. Elérhető-e hogy mindegyik csúcsban ugyanaz a szám álljon, ha kezdetben

a) *az egyik csúcsban 1, a többiben 0 van?*

b) *két szemközti csúcsban 1, a többiben 0 van?*

8.3. Feladat *(Mego.)*

Egy háromszög csúcsaihoz gyufákat helyeztünk. Egy lépésben bármelyik csúcstól elvhetünk néhány gyufaszálat, de ekkor a másik két csúcs mindegyikéhez kétszer annyi gyufát kell helyeznünk. Elérhető-e, hogy a három csúcsnál egyenlő számú gyufa legyen, ha kezdetben az egyes csúcsoknál

a) *5, 11, 14*

b) *5, 9, 11*

szál gyufa volt?

8.4. Feladat *(Mego.)*

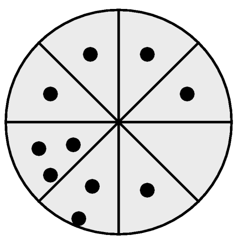
A táblára valaki felírta az 1, 2, 3, ..., 20 számokat. Egy lépésben le lehet törölni két számot, ha ugyanakkor felírjuk a két letörölt szám összegének és szorzatának összegét. Így 19 lépés után már csak egy szám lesz a táblán. Melyik?

8.5. Feladat *(Mego.)*

Egy szigeten 13 szürke, 15 barna, 17 zöld kaméleon él. Ha két különböző színű kaméleon találkozik, akkor annyira megijednek egymástól, hogy mindketten a harmadik színre változtatják bőrüket. Két azonos színű kaméleon nem ijed meg egymástól, így találkozáskor nem változtatják meg színüket. Lehetséges-e, hogy egy idő múlva minden kaméleon ugyanolyan színű legyen?

8.6. Feladat Zrínyi verseny *(Mego.)*

Egy kör alakú, nyolc részre osztott tábla hét részében kezdetben 10 *kavics van (lásd a 8.2 ábrát). A tábla melletti halomból ráteszünk egyszerre egy-egy kavicsot két egymás melletti részre, majd ezt többször megismételjük azért, hogy mind a nyolc részben ugyanannyi kavics legyen. Hány kavics lesz akkor a táblán, amikor mind a nyolc részben ugyanannyi lesz, és a táblán lévő kavicsok száma a lehető legkevesebb?*



8.2. ábra.

Ajánló

Róka Sándor „2000 feladat az elemi matematika köréből”[R2000].

B. V. Rajarama Bhat „Invariants”[BHINV]
http://www.ias.ac.in/resonance/July2010/p595-603.pdf.

Alexander Bogomolny „Tribute to Invariance” (Cut the Knot)[CUTKNT],
http://www.cut-the-knot.org/ctk/invariant.shtml.

8.7. Indirekten

8.1. Feladat *(Mego.)*

Racionális, vagy irracionális $\operatorname{tg} 1°$*?*

8.8. Újra és újra

8.1. Feladat *(Mego.)*

Rögzíteni szeretnénk a függönyt a karnisra. Az egyenlő távolságokat úgy biztosítjuk, hogy két felcsíptetett csipesz közé a maradék részben pontosan középre is beteszünk egyet. (A felrakást a függöny két szélén kezdjük.) Hány csipeszre lehet szükségünk?

8.2. Feladat *(Mego.)*

Fölírtuk sorban a táblára a természetes számokat 1-től 2010-ig. Először letöröljük a páratlan számokat. Ezután a megmaradtak közül letöröljük a páros helyen álló számokat, majd a megmaradtak közül újból a páratlan helyeken állókat töröljük le. Így haladunk tovább, amíg csak egyetlen szám nem marad. Melyik lesz ez a szám?

8.3. Feladat *(Mego.)*

Felosztható-e 2010 darab (n darab)

a) *négyzetre egy négyzet?*

b) *derékszögű háromszögre egy tetszőleges háromszög?*

c) *szabályos háromszögre egy szabályos háromszög?*

d) *tetszőleges háromszög hozzá hasonló háromszögekre?*

e) *egyenlő szárú háromszögre egy tetszőleges háromszög?*

8.9. Az információ mennyisége

8.1. Feladat *[PÓLYPR](Mego.)*

Valaki 5 órán keresztül gyalogolt. Először sík úton, majd hegynek fel, aztán megfordult és ugyanazon az úton tért vissza kiindulási pontjához. Sík talajon 4, hegynek fel 3, völgynek le 6 km-t tett meg óránként. Mekkora utat járt be? Elegendők az adatok a megoldáshoz? Miért? Elemezd a kérdést.

8.2. Feladat *(Mego.)*

a) *Egy vándor betér egy fogadóba. Nincs nála pénz, csak egy 7 cm hosszú aranyrúd. A fogadós elfogadja, hogy a vándor egy éjszakára egy darab 1 cm hosszú aranyrúddal fizet. A vándor azonban nem tudja, meddig szándékozik maradni (nyilván legfeljebb 7 napot), ezért a fogadós kiköti, hogy naponta fizessen az éjszakákért. A fogadós az addig megkapott darabokkal visszaadni is tud.*

Legkevesebb hány vágással oldhatják meg ezt?

b) *Variáljuk, folytassuk a fenti alapfeladatot!*

8.3. Feladat *(A 8.2. feladat variációja)(a) mego., b) mego., c) mego., d) mego.)*

a) *Egy másik vándor betér ugyanebbe a fogadóba, nála csak egy 7 láncszemből álló aranylánc van (a lánc nyitott, nem záródik körbe). A fogadós vele is megköti az üzletet: mindennap, amit ott tölt egy láncszembe fog kerülni neki. (Attól, hogy egy láncszemet kettévág a vándor, az nem veszít az értékéből.) Azonban ez a vándor sem tudja, meddig szándékozik maradni (nyilván ő is legfeljebb 7 napot.) A fogadós az addig megkapott darabokkal ezúttal is visszaad.*

Legkevesebb hány láncszemet kell kettévágni ahhoz, hogy a vándor mindennap ki tudja fizetni a szállását, de a lehető legkevesebb láncszemet vágják ketté?

b) *Ha* 20 *napig akar a vándor maradni és* 20 *szemből álló nyitott lánca van, akkor hányat kell vágnia?*

c) *Hány napig maradhat, ha csak kettő szemet vághat el? (Mely n-re maradhat n hosszú lánccal* 1*-től n napig bárhány napra, ha maximum két szemet vághat ketté?)*

d) *Mely n-re maradhat n hosszú lánccal* 1*-től n napig bárhány napra, ha maximum k szemet vághat ketté?*

8.4. Feladat *(Mego.)*

10 szemre egyforma láda mindegyikében 100 darab egyforma, 100 gramm súlyú érme van. Azonban sajnos az egyik ládába csupa hibás érmék kerültek, melyek mindegyike 1 grammal nehezebb a normális érméknél. Ha van egy egykarú mérlegünk – amivel bárminek gramm pontossággal meg tudjuk mérni a súlyát, akkor legkevesebb hány mérésre van szükség a hibás ládák kiválasztásához?

8.5. Feladat *(Mego.)*

10 súly közül az egyik kicsit nehezebb, mint a többi.

Legkevesebb hány mérésre van szükség ahhoz, hogy egy kétkarú mérleg segítségével kiválasszuk a hibás súlyt?

Ajánló

Rényi Alfréd „A barkohba játék és az információelmélet”[RÉNYBI],

`http://www.tankonyvtar.hu/en/tartalom/tkt/matematikai-mozaik/ar16.html`.

Rényi Alfréd „Ars Mathematica”[RÉNYAM], benne „Az információ matematikai fogalmáról”,

`http://www.interkonyv.hu/konyvek/?isbn=978-963-7546-58-7`.

Simonyi Gábor „Információközlés és gráfelmélet”[SINFG],

`http://matek.fazekas.hu/portal/eloadas/2009/eloadas_2009_09_29_simonyi.html`.

Babai László „Számításelmélet”[BABSZ],

`http://matek.fazekas.hu/portal/tanitasianyagok/Babai_Laszlo/Szamitas_0405/eloadas_0405.html`.

Hraskó András és Szőnyi Tamás „Kódok”[HRSZKD],

`http://matek.fazekas.hu/portal/tanitasianyagok/Hrasko_Andras/kodok/`.

Claude Elwood Shannon „A Mathematical Theory of Communication”[SHMCM]

`http://cm.bell-labs.com/cm/ms/what/shannonday/shannon1948.pdf`.

8.10. Mi a példa ebben a példatárban?

8.1. Feladat *(Mego.)*

Keressünk a feladatgyűjtemény (minél több fejezetében) olyan feladatokat, melyek megoldásában

a) *szerepet játszik a teljes indukció!*
b) *indirekt okoskodást is használhatunk!*
c) *segíthet egy Venn diagram!*
d) *alkalmazzuk a szita-formulát!*
e) *alkalmazzuk a skatulyaelvet!*
f) *alkalmazzuk az invariancia elvet!*
g) *alkalmazzuk a számtani-mértani közép egyenlőtlenséget!*
h) *hasznos a próbálgatás!*
i) *érdemes esetszétválasztást alkalmazni!*
j) *a „visszafelé okoskodás” vezet célra!*
k) *az a konklúzió, hogy „nincs megoldás”!*

Ajánló

Dr. Katz Sándor „Lehet vagy nem? – Konstrukciók és lehetetlenségi bizonyítások", a [FEK10] kötet 53-68. oldalain.

Hajnal Péter „Elemi kombinatorikai feladatok"[HAJKO], 7. fejezet (Szitamódszerek)

9. fejezet

Geometria

Ajánló

A témával kapcsolatos legalapvetőbb könyvek:

Reiman István „Geometria és határterületei”[REIHA];
Hajós György „Bevezetés a geometriába”[HAJÓS];
Coxeter „Geometriák alapjai”[HAJÓS];
Lánczos Kornél „A geometriai térfogalom fejlődése”[LCGET];

példatárak:

Horvay Katalin és Reiman István „Geometria feladatgyűjtemény I.”[GEOI];
H. S. M. Coxeter, S. L. Greitzer „Az újra felfedezett geometria”[CXGRÚ];

és weboldalak:

David Eppstein „Geometry in action”[EPSAC] linkgyűjteménye:
`http://www.ics.uci.edu/~eppstein/geom.html`;

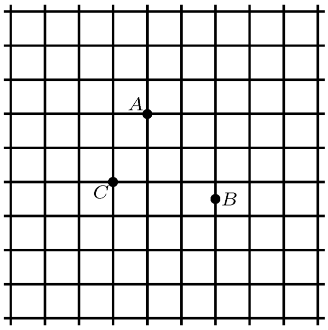
A Cabri, a Cinderella, az Euklides, a GeoGebra és a Geometer’s Sketchpad dinamikus geometriai szerkesztőprogramok weblapjai
[CABRI], [CIND], [EUCLID], [GEOGB], [SKETCH].

9.1. Kutyageometria

9.1. Feladat Kutyageometria*(Mego.)*

Egy hatalmas modern város utcahálózata olyan mint egy négyzetrács, melyben a négyzetek oldalának hossza 1 *egység. A kóbor kutyák csak az utcákon, azaz a négyzetrács vonalain közlekedhetnek, a házakba, azaz a négyzetekbe nem mehetnek be. A kutyák világa tehát a négyzetrács vonalainak világa. Két pont távolságán a két pont közötti rácsvonalakon haladó – a rácspontokban esetleg megtörő – töröttvonalak hosszának minimumát értjük. Ez a kutyageometria. Az 9.1. ábrán a város egy részének térképét látjuk.*

a) *Határozzuk meg az AB, BC, CA távolságokat!*



9.1. ábra.

Színezzük teli karikákkal, különböző színekkel az A ponttól

b) 1; c) $1,5$; d) 2; e) $2,5$; f) 3

méterre található pontok halmazát!
Színezzük üres karikákkal, különböző színekkel a B ponttól

g) 1; h) $1,5$; i) 2; j) $2,5$; k) 3

méterre található pontok halmazát!

9.2. Feladat *(Mego.)*
Körön – a kutyageometriában is – egy adott ponttól adott távolságra levő pontok halmazát értjük. Jelölje k_1, k_2 és k_3 azt a kört, amelyeknek középpontja a 9.2. ábrán látható O_1, O_2 illetve O_3 pont és amelynek sugara $r_1 = 1$, $r_2 = 3$, $r_3 = 5$ egység.
Hány közös pontja van a

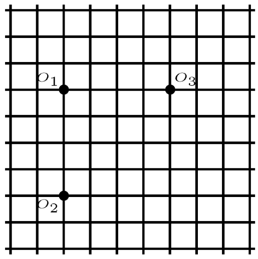
a) k_2 *és* k_1; b) k_1 *és* k_3; c) k_3 *és* k_2

köröknek?

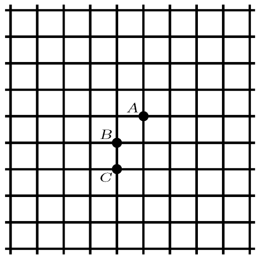
9.3. Feladat *(Mego.)*
Határozzuk meg a 9.3. ábrán látható

a) A *és* B; b) B *és* C; c) C *és* A;

pontoktól egyenlő távolságra lévő pontok halmazát a „kutyageometriában”!
d) *Hány olyan pont van, amely egyforma messze van mind a három ponttól?*
Van-e három olyan pont, amelyre a mindegyiktől egyforma messze található pontok száma



9.2. ábra.



9.3. ábra.

e) 1*;* f) *végtelen;* g) 2*?*

9.4. Feladat *(Mego.)*
Igaz-e a „kutyageometriában” a háromszög egyenlőtlenség?

9.5. Feladat *(Mego.)*
Lehet-e a „kutyageometriában” két körnek éppen 13 metszéspontja?

Ajánló

Szeredi Éva „Kutatás az elemi matenatika szemináriumokon” – a [MAKMAT] kötet 13-32. oldalain.

9.2. A térgeometria elemei

9.1. Feladat A Berangesz dinasztia piramisai*(a) mego., b) mego., c) mego., d) mego., e) mego., f) mego., g) mego.)*

a) *I. Berangesz fáraó olyan háromszög alapú piramist szeretne építtetni családja örök nyughelyéül, amelynek alapja, és egyik oldallapja egymással egybevágó szabályos háromszög alakú, magassága pedig a lehető legnagyobb. Készítsük el papírból a piramis makettjét! Szerkesszük meg hálóját a síkon! (A szabályos háromszögek oldalai legyenek* 6 *cm hosszúak, a piramist pedig tekintsük háromszög alapú gúlának.)*

b) *II. Berangesz fáraó négyszög alapú piramist tervez magának. Eredetileg úgy képzelte, hogy a piramis alapja* 100 *cvimedli oldalhosszúságú négyzet lesz, oldallapjai pedig egybevágó szabályos háromszög alakúak, de a földmérők szerint az építmény így épp nem férne el a fáraó kedvenc szigetén. Berangesz módosította a tervet: a négyzet alapot olyan* 100 *cvimedli oldalhosszúságú rombuszra cserélte, amelynek két szemközti csúcsánál* $105°$*-os szöge van, és az egyik ilyen csúcsnál találkozó két oldallap szabályos háromszög alakú.*

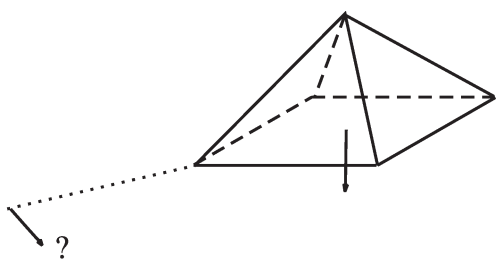
Készítsük el papírból a piramis makettjét! Jelöljük a méretarányt! Írjuk le a szerkesztés lépéseit is!

c) *III. Berangesz fáraó négyzet alapú piramist tervez magának. A csúcsa az alap egyik csúcsa felett lesz, és legrövidebb oldaléle (ami egyben a testmagassága) egyenlő hosszú lesz az alapél hosszával.*

Készítsük el papírból a piramis makettjét! Írjuk le a szerkesztés lépéseit is!

d) *III. Berangesz két fia az apjukéval és egymáséval egyforma alakú, de a térben esetleg másképpen elrendezett emlékművet építene magának, és ezeket úgy illesztenék egymás mellé, hogy a közös nagy emlékműnek kívülről mindegyik oldallapja ugyanolyan legyen. Lehetséges-e ez?*

e) *V. Berangesz fáraó piramisa négyzet alapú, oldallapjai szabályos háromszögek, magassága pedig* 70 *cvimedli. A piramis belsejébe csak a középpontja alatt fúrt függőleges kútból fölmászva lehet eljutni. A kútba egyenes alagút vezet le, melynek iránya a vízszintessel* $60°$*-ot zár be, felső bejárata pedig a piramis egyik sarkától* 77 *cvimedli távolságra található a szemközti sarokkal épp ellenkező irányban (lásd az 9.4. ábrát).*



9.4. ábra.

Milyen hosszú az alagút?

f) *VI. Berangesz fáraó piramisa olyan szabályos hatoldalú gúla, amelynek szomszédos oldallapjai* $150°$*-os szöget zárnak be egymással. Készítsük el papírból a piramis makettjét!*

Írjuk le a szerkesztés lépéseit, és indokoljuk a szerkesztés helyességét!

g) *VIII. Berangesz fáraó piramisa olyan szabályos nyolcoldalú gúla, amelynek oldalélei 51,2 cvimedli hosszúak, míg az alap két szemköztes csúcsa között a piramis felületére fektetett legrövidebb kötél hossza 145,5 cvimedli.*

Milyen hosszú a piramis oldaléle?

9.2. Feladat *(Eredm.)*

Egy négyzet alapú gúla mind a nyolc éle egyenlő. Össze lehet-e állítani hat ilyen gúlából egy kockát, úgy hogy összeérjenek az alappal szemköztes csúcsuknál?

9.3. Feladat *(Mego.)*

Egy kocka alakú, tetején és oldalán csokival egyenletesen bevont tortát úgy szeretnénk elosztani n gyerek között, hogy mindenkinek ugyanannyi sütemény, és ugyanannyi csokibevonat jusson.

Hogyan tehetjük ezt meg, ha $n = 2$, 3, 4, 5?

Megoldható-e a feladat tetszőleges természetes szám esetén?

Ajánló

Fent csak felvillantottunk néhány térgeometriai problémát. Néhány átfogóbb példatár:

Horvay Katalin, Reiman István „Geometriai feladatok gyűjteménye I."[GEOI];

D. O. Sklarszkij, N. N. Csencov, I. M. Jaglom „Válogatott feladatok és tételek az elemi matematika köréből", 3. kötet, Geometria II. (Sztereometria)[SKLA3];

A Matkönyv[MATKV] megfelelő fejezete: `http://matek.fazekas.hu/mathdisplay/cache/pdf/volume_g_i.pdf`.

Egy eszköz, amellyel játékosabb a tanóra is: Polydron[POLYDR].

9.3. Egyszerűbb számítási feladatok

9.1. Feladat *(Eredm.)*

Az ABC háromszög szögei rendre α, β, γ. Mekkora szöget zárnak be egymással

a) *az A és B csúcsokból induló szögfelezők?*

b) *az A és B csúcsokból induló magasságvonalak?*

c) *a körülírt kör A-ba és B-be futó sugarai?*

d) *az A csúcsból induló szögfelező és magasságvonal?*

9.2. Feladat *(Ötlet)*

Egy hatszög minden szöge $120°$*-os. Mutassuk meg, hogy két szomszédos oldal összege megegyezik a szemben fekvő szomszédos oldalak összegével.*

9.3. Feladat *(Mego.)*

Egy trapéz hosszabbik alapja a*, rövidebbik alapja* b *hosszúságú. Szárai derékszöget zárnak be egymással. Mutassuk meg, hogy az alapok felezőpontját összekötő szakasz hossza* $(a-b)/2$.

9.4. Feladat *(Mego.)*

Mutassuk meg, hogy az a*,* b *oldalú parallelogramma szögfelezői téglalapot határoznak meg, melyben az átlók hossza éppen* $a-b$*.*

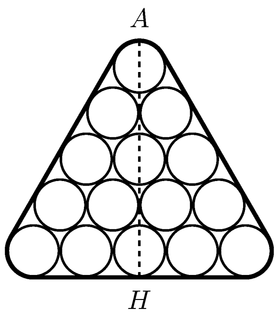
9.5. Feladat *(Mego.)*

Az ABC *hegyesszögű háromszög* C*-nél levő szöge* $45°$*.* M *a háromszög magasságpontja. Bizonyítsuk be, hogy* $CM = AB$*!*

9.6. Feladat Matematika határok nélkül[GSHAT][HATWEB] 1989/90, A biliárd és a golyók*(Mego.)*

Az „amerikai biliárd" játszma kezdetén a biliárdgolyók a 9.5. ábrán látható módon, egy kerettel összeszorítva állnak az asztal közepén. A golyók átmérője egyenlő.

Mekkora egy golyó átmérője, ha az AH *távolság* $169,6$ *mm-rel egyenlő?*



9.5. ábra.

9.4. Összetett számítási feladatok

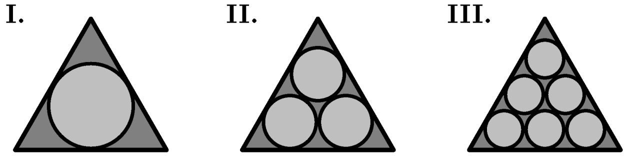
9.1. Feladat Kömal, F.1631, 1968/8-9. szám*(Mego.)*

Egy szabályos háromszögbe a 9.6. ábra I.-III. része szerint egyenlő sugarú köröket rajzolunk.

a) *A háromszög területéből hány %-ot fednek le a körök együttesen az egymás utáni három ábrán?*

b) *Hány kört kellene vennünk egy oldalon, hogy a hasonlóan szerkesztett ábra körei a háromszög területének legalább 90%-át fedjék le?*

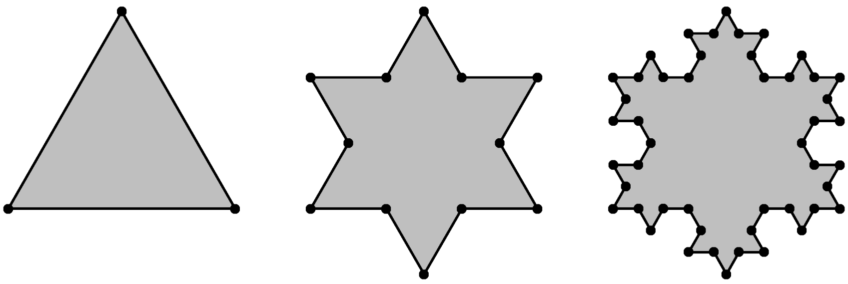
c) *Mihez tart a lefedett résznek a háromszög területéhez képesti aránya, ha a körök száma tart a végtelenhez?*



9.6. ábra.

9.2. Feladat *(Koch-féle hópehely)(Mego.)*

Koch-féle hópehelygörbék első tagja egy egységoldalú szabályos háromszög. Ennek minden oldalának kivesszük a középső harmadát és helyére egy kifelé álló kisebb szabályos háromszöget helyezünk a 9.7. ábra szerint. Így kapjuk a második Koch-féle hópelyhet. Az n-edik hópehely is egymáshoz kapcsolódó egyenlő hosszú szakaszokból álló zárt töröttvonal, amiből úgy kapjuk az $(n+1)$-edik hópelyhet, hogy minden szakaszának középső harmadára kifelé szabályos háromszöget állítunk.



9.7. ábra.

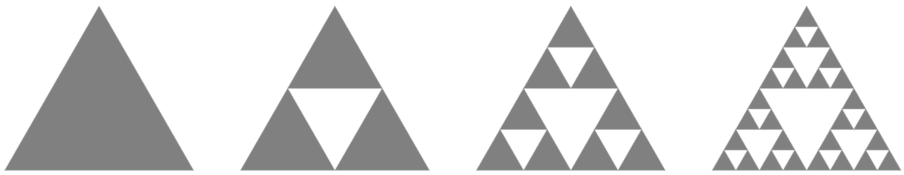
a) *Először hanyadik hópehely kerülete lesz nagyobb 2013 egységnél?*

b) *Milyen értékhez tart az n-edik és az első hópehely területének hányadosa, ha n tart a végtelenhez?*

9.3. Feladat Sierpinski háromszög

Legyen S_0 az egységoldalú szabályos háromszög. Az S_1 ponthalmazt ebből az oldalfelezőpontok alkotta háromszög, tehát a középháromszög belső pontjainak kidobásával kapjuk. S_1 tehát három kisebb szabályos háromszög uniója, ezek mindegyikéből kidobjuk a középháromszögük belső pontjait, így kapjuk az S_2 alakzatot ... (Lásd a 9.8. ábrát!) A Sierpinski háromszög az így képzett $\{S_n\}$ alakzatsorozat tagjainak metszete.

Határozzuk meg a Sierpinski háromszög területét!



9.8. ábra.

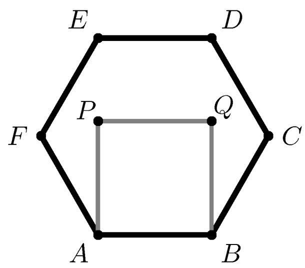
9.4. Feladat *(Mego.)*

Adott egy 4 cm oldalú négyzetlap és egy 1 cm sugarú félkörlap. A félkörlap úgy mozog, hogy átmérőjének végpontjai mindig a négyzet határolóvonalán vannak és a félkör a négyzethez képest befelé áll. Határozzuk meg annak az alakzatnak a területét, amelyet a félkörlap végig tud söpörni!

9.5. Feladat *(Mego.)*

A 9.9. látható módon helyezzük el a 600 egység oldalhosszúságú $ABCDEF$ szabályos hatszögben a $PQBA$ egységoldalú négyzetet. Gördítsük körbe a hatszög belső felületén a négyzetet a következő módon: először az óramutató járásával megegyezően forgassuk a négyzetet a B körül mindaddig, amíg a négyzet Q csúcsa a hatszög C csúcsához ér. Ezután C körül forgassuk az óramutató járásával megegyezően a négyzetet, míg P egybeesik D-vel. Majd D körül forgassuk az óramutató járásával megegyezően a négyzetet, amíg a négyzet csúcsa a hatszög E csúcsához ér.

Folytassuk tovább ezt az eljárást mindaddig, amíg a négyzet a hatodik forgatás után vissza nem ér az AB oldalhoz. Milyen hosszú utat jár be ezalatt P?



9.9. ábra.

Ajánló

Érdekességek a fraktálokról:

Máté László „Fraktáldimenziókról egyszerűen”[MÁTFR], http://matek.fazekas.hu/portal/tanitasianyagok/Mate_Laszlo/boxdim/boxdim.pdf;

Michael Frame, Benoit Mandelbrot és Nial Neger, *Fraktálok*[MNFRC], http://classes.yale.edu/fractals/;

Fractal Foundation[FRCFU], http://fractalfoundation.org/;

Jules J. C. M. Ruis, *Centre for Fractal Design and Consultancy*[RUIFR], http://www.fractal.org/.

Marc Culler és Howard Masur *Fractals, Chaos and Complex Dynamics*, A Research Experience for Undergraduates[CUMCD], http://homepages.math.uic.edu/~culler/chaos/.

Garay Barnabás „Az ingamozgás kaotikussága”[GARING] http://matek.fazekas.hu/portal/eloadas/2009/gb/talpharkaosz.pdf.

9.5. A sík egybevágóságai– feladatok

9.1. Feladat *(I. mego., II. mego., III. mego., IV. mego.)*

Egy adott AB szakasz hosszát jelölje d. B-n át húzunk e egyenest, és B-ből felmérjük rá a d távolságot. Így megkapjuk a C pontot. C-n át párhuzamost húzunk AB-vel, és C-ből felmérjük rá d-t. Így kapjuk a D pontot. A szerkesztést megismételjük minden (AB-től különböző) e egyenesre. Mi a BD szakaszok F felezőpontjának a halmaza?

9.2. Feladat *(Mego.)*

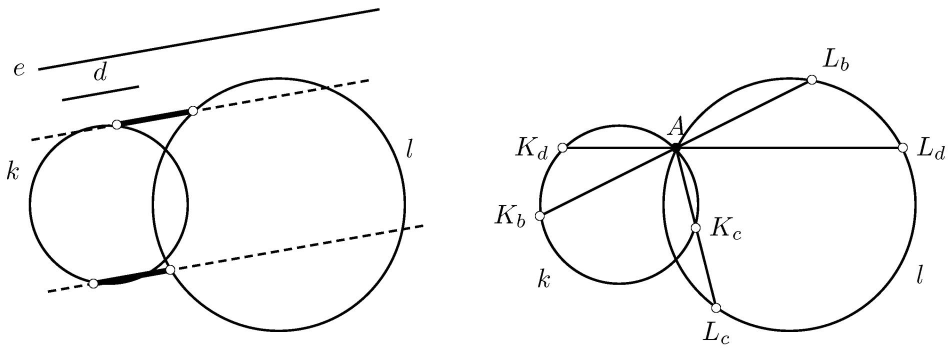
Adott az a kör, az F pont és a b egyenes. Szerkesztendő az AB szakasz úgy, hogy A illeszkedjék a-ra, B a b-re és F az AB felezőpontja legyen.

Diszkutáljuk a megoldások számát!

9.3. Feladat *(Segít.)*

Adott két egymást metsző kör, k és l.

a) *Adott még az e egyenes és a d szakasz is. Szerkesztendő olyan e-vel párhuzamos egyenes, amelynek a k körrel való egyik metszéspontja az l körtől való egyik metszéspontjától éppen d távolságra van.*



9.10. ábra.

Jelölje a k, l körök egyik metszéspontját A. Vegyük fel a k, l körökön a

b) *K_b, L_b pontokat úgy, hogy A felezze a K_bL_b szakaszt!*

c) *K_c, L_c pontokat úgy, hogy K_c felezze az AL_c szakaszt!*

d) *K_d, L_d pontokat úgy, hogy A harmadolja a K_dL_d szakaszt!*

(Lásd a 9.10. ábrát.)

9.4. Feladat *(Mego.)*

Adott a b és a c egyenes valamint az A pont. Szerkesszünk olyan ABC szabályos háromszöget, amelynek B csúcsa a b egyenesre, C csúcsa c-re illeszkedik!

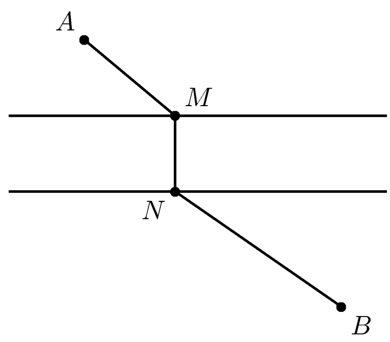
Diszkutáljuk a megoldások számát!

9.5. Feladat *Szerkesztendő olyan négyzetet, amelynek három előre adott koncentrikus kör mindegyikén van egy-egy csúcsa.*

9.6. Feladat *(Mego.)*

a) *Az A, B falvak egy folyó két különböző partján helyezkednek el. Hová kell a folyóra egy MN hidat építeni, hogy az A, B falvakat a legrövidebb út kösse össze? (A folyót két párhuzamos egyenes által meghatározott sávnak tekintjük, a híd a folyó irányára merőlegesen épülhet. Lásd a 9.11. ábrát!)*

b) *Oldjuk meg a feladatot úgy is, hogy a két falut több folyó is elválasztja, amelyek mindegyikére hidat építünk. (A folyók nem feltétlenül „párhuzamosak”.)*



9.11. ábra.

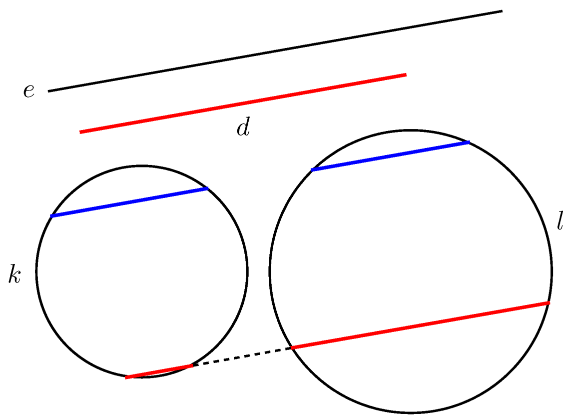
9.7. Feladat *(Mego.)*
Szerkesztendő trapéz, ha adott mind a négy oldalai, külön a szárai és külön az alapjai Diszkutáljuk a megoldások számát!

9.8. Feladat *(Ötlet)*
Szerkesztendő háromszög, ha adott két oldala és a harmadik oldalhoz tartozó súlyvonal.

9.9. Feladat *(I. mego., II. mego., III. mego.)*
Mutassuk meg, hogy ha az $ABCD$ négyszög MN középvonalának hossza egyenlő az AB és CD oldalak hosszának számtani közepével, akkor a négyszög trapéz. (M az AD, N pedig a BC oldal felezési pontja).

9.10. Feladat *Mutassuk meg, hogy ha az $ABCD$ négyszögben $AB = CD$, de AB és CD nem párhuzamosak, akkor az MN középvonal párhuzamos az AB, CD egyenesek egyik szögfelezőjével. (M az AD, N a BC oldal felezőpontját jelöli., A 9.10. Mego.)*

9.11. Feladat *(Mego.)*
Adottak a k, l körök, valamint az e egyenes. Szerkesztendő olyan, az e egyenessel párhuzamos e' egyenes, hogy a két körből kimetszett húrok
a) *egymással egyenlő hosszúak legyenek;*
b) *összege megegyezzen egy előre adott d szakasz hosszával (lásd a 9.12. ábrát).*



9.12. ábra.

9.12. Feladat *(Segít. a)-hoz, a) mego., b) mego., c) mego., d) mego.)*

a) *Adott a d egyenes valamint d egyik oldalán a P és a Q pont. Határozzuk meg a d egyenesen azt a D pontot, amelyre a PD, DQ szakaszok hosszának összege a lehető legkisebb!*

Adott egy szög, csúcsa O, szárai az a, b félegyenesek, adott továbbá a szög szárai között a P pont. Határozzuk meg az a, b félegyenesek azon A, B pontjait, amelyre a

b) PA, AB

c) PA, AB, BP

szakaszok hosszának összege a lehető legkisebb!

d) *Adott az ABC háromszög. Határozzuk meg a háromszög BC, CA, AB oldalaira illeszkedő P_A, P_B, P_C pontokat úgy, hogy a $P_AP_BP_C$ háromszög kerülete a lehető legkisebb legyen!*

9.13. Feladat Arany Dániel Mat. Vers. 2010, Kezdők, II. kat., 2. ford., 4. fel.*(I. mego., II. mego.)*

Egy trapéz alapjai 25 illetve 15 cm hosszúak, magassága 12 cm. Határozzuk meg az ilyen trapézok kerületének minimumát!

9.14. Feladat *(Mego.)*

Az ABC háromszög egyenlő szárú és derékszögű ($ACB\angle = 90°$). Jelölje az AB alap felezőpontját F_{AB} és keressük az AC egyenesen azt a P pontot, amelyre

a) $F_{AB}P + PB$, b) $F_{AB}P^2 + PB^2$

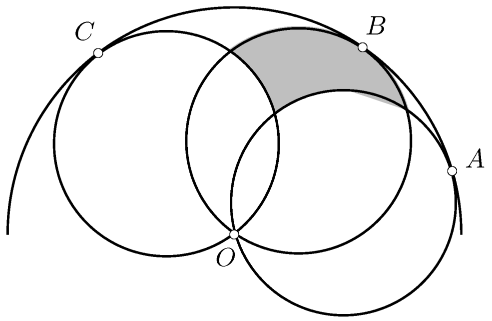
minimális!

9.15. Feladat *(Segít., I. mego., II. mego.)*

Az ABC egyenlő szárú derékszögű háromszög AB átfogóján úgy vettük fel az M és K pontokat, hogy K az M és B közé essék és, hogy az $MCK\angle$ $45°$-os legyen. Bizonyítsuk be, hogy $MK^2 = AM^2 + KB^2$!

9.16. Feladat *(Segít., Mego.)*

Az egyenlő sugarú k_A, k_B, k_C körök mind átmennek az O ponton. Az O középpontú k kör az rendre az A, B, C pontokban érinti a k_A, k_B, k_C köröket. Határozzuk meg a k_A, k_B, k_C körök által határolt külső tartomány (lásd a 9.13. ábrát) területét, ha az ABC háromszög területe T!



9.13. ábra.

9.17. Feladat *(I. mego., II. mego.)*

Az ABC szabályos háromszög körülírt körén felveszünk egy D pontot a C-t nem tartalmazó AB köríven. Mutassuk meg, hogy $DC = DA + DB$!

9.18. Feladat *(Ötlet)*

a) *Egy egyenlő szárú háromszög alapján felvett tetszőleges P pontból párhuzamosokat húzunk a szárakkal, melyek a szárakat X és Y pontokban metszik. Mutassuk meg, hogy $PX + PY$ nem függ a P pont választásától!*

b) *Mutassuk meg, hogy ha P-t az alap* meghosszabbításán *mozgatjuk, akkor a rajta keresztül a szárakkal párhuzamosan felvett egyenesek a szárak egyeneseit olyan X, Y pontokban metszik, amelyekre $|PX - PY|$ állandó!*

9.19. Feladat *(Ötlet)*

Adottak egy

a) *háromszög*,   b) *négyszög*,   c) *ötszög*

oldalfelezőpontjai. Szerkesszük meg a sokszöget!

9.20. Feladat *(Segít., Mego.)*

Adott a síkon két pont, A és B. Szerkesztendő az ABC szabályos háromszög C csúcsa, ha csak egy rozsdás körzőnk van (vonalzónk sincs), amely beragadt és a korábban beállított – az AB távolságnál nagyobb – nyílásszöge nem változtatható.

Ajánló

Jakucs Erika „Tengelyes tükrözés – 6. osztály – egy lehetséges felépítés”[JATÜ6], http://matek.fazekas.hu/portal/tanitasianyagok/Jakucs_Erika/geo/;

Pogáts Ferenc „A sík egybevágóságai és a tengelyes tükrözések”[POGTÜ] http://matek.fazekas.hu/portal/tanitasianyagok/Pogats_Ferenc/sik/index.htm;

Pogáts Ferenc „Rózsaablakok és társaik”[POGRÓ], http://matek.fazekas.hu/portal/tanitasianyagok/Pogats_Ferenc/rozsa/rozsaabl.html;

Pogáts Ferenc „Sorminták, frízek”[POGSF], http://matek.fazekas.hu/portal/tanitasianyagok/Pogats_Ferenc/sor/sorfriz.html;

Jakucs Erika, Pogáts Ferenc „A szépség matematikája”[POJASZ], http://matek.fazekas.hu/portal/tanitasianyagok/Pogats_Ferenc/szep/szepmat.html;

„Escher symmetry” a teachmathematics.net portálon[TEACH], http://www.teachmathematics.net/activities/escher-symmetry.htm.

Horvay Katalin, Reiman István „Geometriai feladatok gyűjteménye I.” megfelelő fejezetei[GEOI];

A Matkönyv[MATKV], http://matek.fazekas.hu/mathdisplay/cache/pdf/volume_g_ii.pdf;

Vigassy Lajos „Geometriai transzformációk”[VITRF];

Reiman István „Fejezetek az elemi geometriából”[REIEG];

Reiman István „A geometria és határterületei”[REIHA] 7. fejezete;

E. G. Gotman „Geometriai transzformációk II.: hasonlóságok”, Kvant folyóirat[GOHAS2], http://kvant.mirror1.mccme.ru/1989/03/geometricheskie_preobrazovaniy.htm;

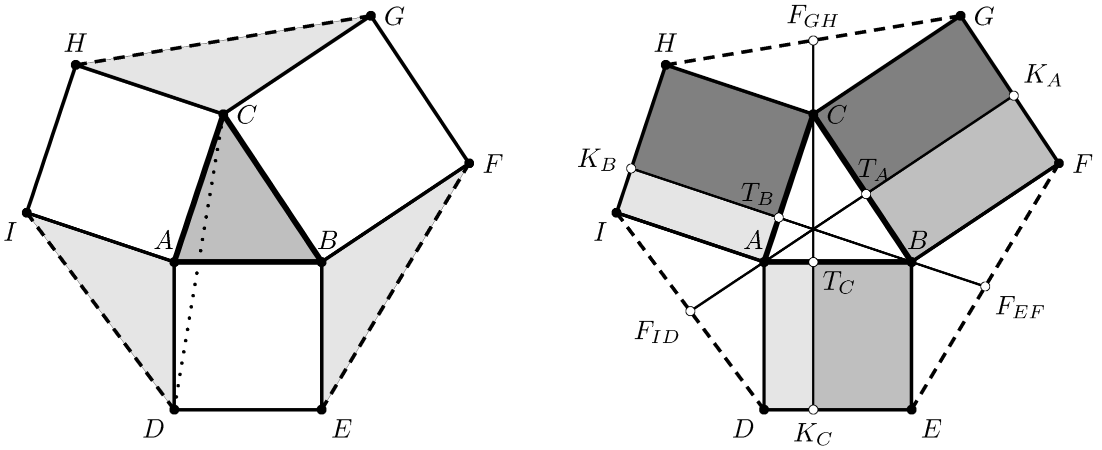
9.5.1. Egy ábra az Elemekből

9.21. Feladat Egy ábra az „Elemek”-ből*[EUKEL](a) mego., b) mego., c) I. mego., c) II. mego., c) III. mego., c) IV. mego.)*

Az ABC háromszög oldalaira kifelé rajzoltuk a $BADE$, $CBFG$, $ACHI$ négyzeteket (lásd a 9.14. ábrát).

a) *Fejezzük ki az ABC háromszög t területével az EFB, GHC, IDA háromszögek területeit!*

b) *Oldjuk meg a $CD = XY$ „egyenletet”, tehát a 9.14. ábrán már adott pontok közül keressünk kettőt, melyek távolsága megegyezik a D, C pontok közti távolsággal!*



9.14. ábra.

Megrajzoljuk az ABC háromszög magasságvonalainak egyeneseit. Ezek a háromszög oldalegyeneseit a T_C, T_A, T_B pontokban, a négyzetek DE, FG, HI oldalegyeneseit a K_C, K_A, K_B pontokban, az EF, GH, ID egyeneseket az F_{EF}, F_{GH}, F_{ID} pontokban metszik (lásd a 9.14. ábra jobb oldalát).

c) *Mutassuk meg, hogy F_{EF}, F_{GH} és F_{ID} rendre az EF, GH, ID szakaszok felezőpontjai.*

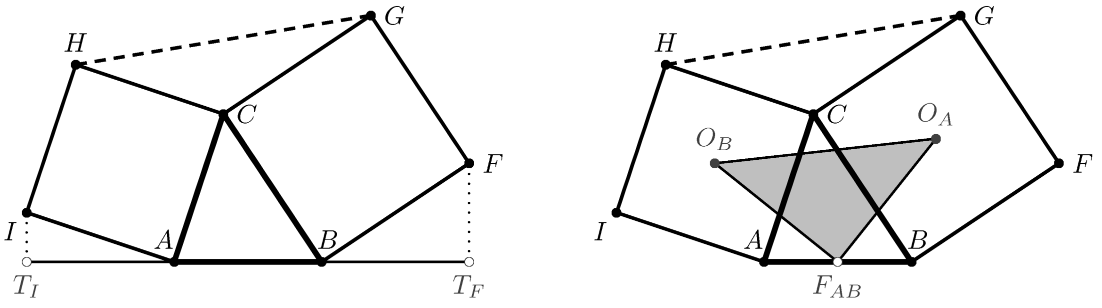
d)*(d) I. mego., d) II. mego., A 9.21. e) mego.)*

A magasságvonalak a négyzeteket két-két téglalapra osztják. Mutassuk meg, hogy az eredeti háromszög valamely csúcsában találkozó két téglalap területe egyenlő:

$$t_{AT_BK_BI} = t_{ADK_CT_C}, \qquad t_{BT_CK_CE} = t_{BFK_AT_A}, \qquad t_{CT_AK_AG} = t_{CHK_BT_B}.$$

e) *Szerkesszük meg az ABC háromszöget, ha adott az A és a B pont valamint az F pont és az I pont merőleges vetülete az AB egyenesen (lásd a 9.15. ábrát)!*

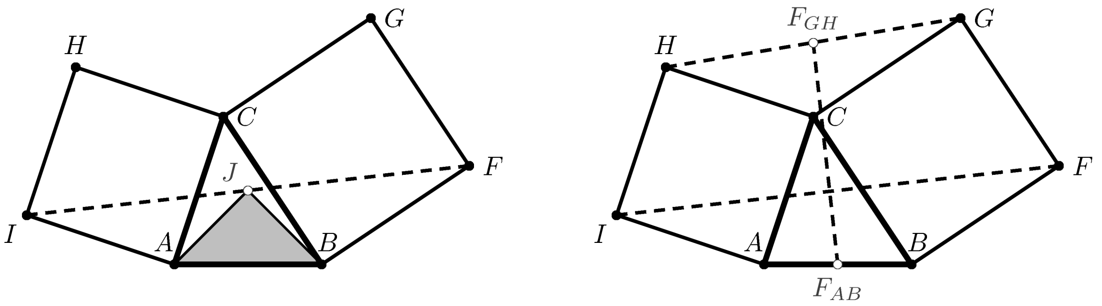
f)*(f) I. mego., f) II. mego., f) III. mego., f) IV. mego., g) I. mego., g) II. mego., g) III. mego., h) mego.)*



9.15. ábra.

Mutassuk meg, hogy az $ACHI$, $CBFG$ négyzetek O_B, O_A középpontjai az AB szakasz F_{AB} felezőpontjával egyenlő szárú derékszögű háromszöget alkotnak!

g) *Mutassuk meg, hogy az A, B pontok az IF szakasz J felezőpontjával egyenlő szárú derékszögű háromszöget alkotnak (lásd a 9.16. ábrát)!*



9.16. ábra.

h) *Mutassuk meg, hogy az IF szakasz merőleges az $F_{AB}F_{GH}$ szakaszra és kétszer olyan hosszú!*

ellenőrző kérdések:

i) *Szerkesszük meg az ABC háromszöget, ha adott az $EF = u$, $GH = v$, $ID = w$ szakaszok hossza!*

j) *Szerkesszük meg az ABC háromszöget, ha adott három pont, az oldalakra kifelé rajzolt négyzetek középpontjai.*

Ajánló

Előző feladatunk alapábrája Euklidesz „Elemek”[EUKEL] című könyvének I. 47. Tételéhez kapcsolódik, lásd

http://mek.oszk.hu/00800/00857/html/ikonyv.htm#I_47.

Vektorok alkalmazása a geometriában:

Pogáts Ferenc „Vektorok, koordinátageometria, trigonometria”[POGVEK];
Reiman István „Vektorok a geometriában”[REIVK].

Két kiadvány „Geometriai feladatok megoldása a komplex számsíkon” címmel:

Reiman István könyve[REIKX],
Kiss Géza írása a [FEK12] kötet 149-165. oldalain.

9.6. Körök, kerületi szögek

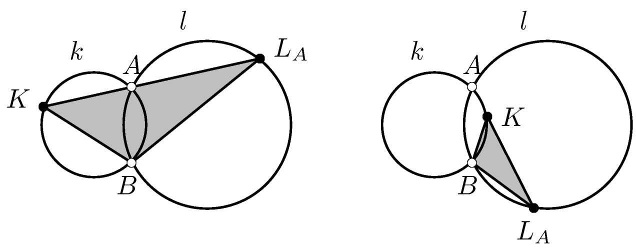
9.1. Feladat *Mutassa meg, hogy a háromszög ugyanazon oldalhoz tartozó szakaszfelező merőlegese és szögfelezője a körülírt körön metszi egymást.*

9.6.1. Két metsző kör szelői

9.2. Feladat *(*Két metsző kör szelői*)(Segít. a)-hoz, a) mego., b) I. mego., b) II. mego., c) mego., d) I. mego., d) II. mego., e) mego.)*

A k, l körök az A, B pontokban metszik egymást. Tekintsük a k körön a K pontot és képezzük a KA, KB egyenesek és az l kör második metszéspontjait, az L_A, L_B pontokat.

a) *Mutassuk meg, hogy a KBL_A háromszög hasonlóság erejéig egyértelmű, független a K pont választásától (lásd a 9.17. ábrát)!*



9.17. ábra.

b) *Hogyan függ a $KBL_A\angle$ szög a k, l körök szögétől? (Két metsző kör szögén a körök – bármelyik – metszéspontjában a körökhöz húzott érintőegyenesek szögét értjük.)*

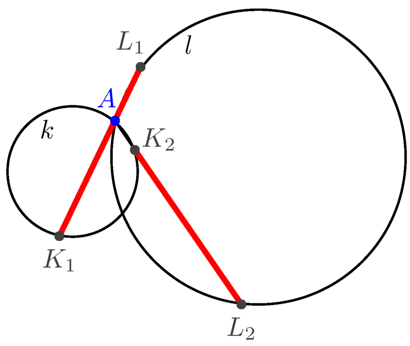
c) *A k kör mely K pontjára lesz az L_AL_B szakasz hossza maximális?*

Adott még egy szakasz is. Szerkesztendő a K, L körök A metszéspontján át

d) *az előre adott szakasszal egyenlő hosszúságú*

e) *a lehető leghosszabb*

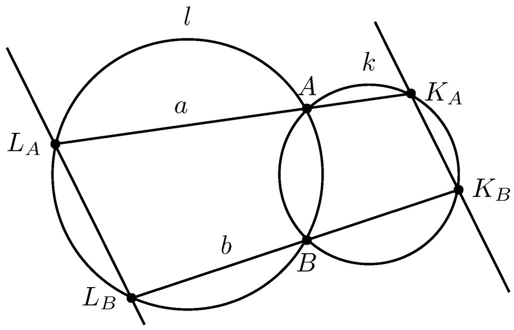
szelő (tehát az egyenes két körrel való második metszéspontjai közti részét vizsgáljuk, ahogy a 9.18. ábrán is látható).



9.18. ábra.

f) *(Ötlet f)-hez , Segít. g)-hez, g) I. mego., g) II. mego., h) mego.)*

A két kör A ponton áthaladó $a = K_AL_A$ szelőjén kívül vegyünk fel egy B ponton áthaladó $b = K_BL_B$ szelőt is (lásd a 9.19. ábrát). Mutassuk meg, hogy a K_AK_B, L_AL_B egyenesek párhuzamosak!



9.19. ábra.

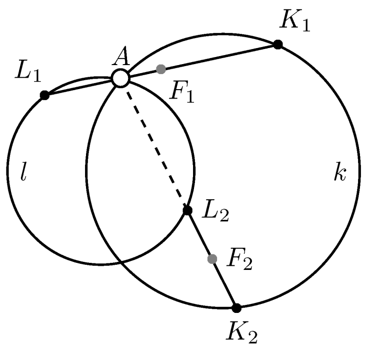
g) *Határozzuk meg a KL_A szakasz F felezőpontjának (lásd a 9.20. ábrát) mértani helyét, amint K befutja a k kört!*

h) *Határozzuk meg a KO_k, L_AO_l egyenesek P metszéspontjának mértani helyét, amint K befutja a k kört (O_k a k kör, O_l az l kör középpontja).*

i)*(i) I. mego., i) II. mego., j) mego., Segít. k)-hoz, k) mego.)*

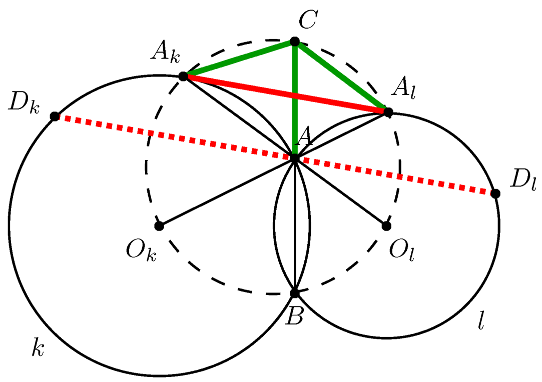
Az O_lA egyenes k-t még A_k-ban, az O_kA egyenes pedig l-et még A_l-ben metszi. Mutassuk meg, hogy (lásd az alábbi ábrát) az O_k, O_l, B pontokon át fektetett h körre illeszkedik A_k és A_l is!

j) *Igazoljuk, hogy az AB egyenes és a h kör B-től különböző C metszéspontjára $CA = CA_l = CA_k$!*



9.20. ábra.

k) *Mutassuk meg, hogy ha az A-n át A_kA_l-lel párhuzamosan húzott egyenes a k, l köröket még a D_k, D_l pontokban metszi(lásd a 9.21. ábrát), akkor $D_kD_l = BA_k + BA_l$!*



9.21. ábra.

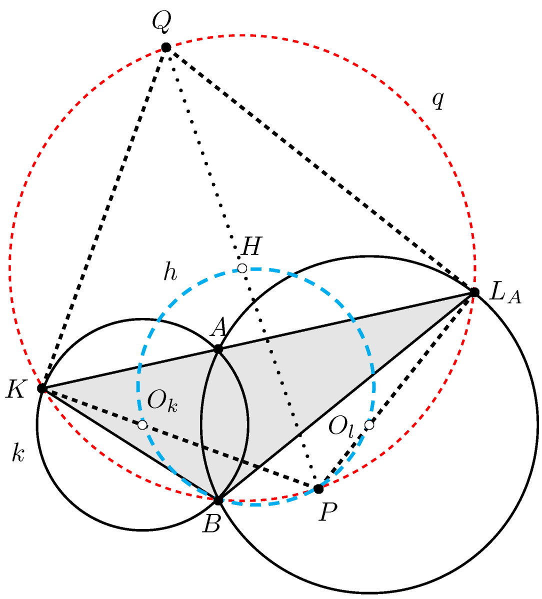
l)*(l) mego., m) mego., n) mego.)*

Tekintsük a k kör K-beli és az l kör L_A-beli érintőjének Q metszéspontját. Rajzoljuk meg dinamikus geometriai szoftverrel Q mértani helyét, amint K befutja k-t!

m) *Igazoljuk, hogy az K, B, L_A pontok q körülírt körére illeszkedik a h) feladatrész P pontja valamint az l) feladatrész Q pontja is, és a q kör H középpontja a h kör és a PQ egyenes (P-től különböző) metszéspontja (lásd a 9.22. ábrát).*

n) *Mutassuk meg, hogy a Q pont mértani helye az l) feladatrészben a 9.1. „Egy szív titkai” feladatban vizsgált kardioid. Pl. igazoljuk, hogy Q a B pont tükörképe a h kör H-beli érintőjére.*

o) *(o) Szeml., o) I. mego., o) II. mego., o) III. mego., o) IV. mego., p) I. mego., p) II. mego.)*



9.22. ábra. Lásd a http://matek.fazekas.hu/portal/elte/elemifgyujt/html/01.html animációt

A K pont a k körön az L pont az l körön forog egyenletes szögsebességgel úgy, hogy a két kör A közös pontjában találkoznak minden körülfordulás után. Mutassuk meg, hogy van a síkon egy olyan U pont, amelytől a K pont mindig ugyanolyan messze van, mint az L pont! Gondoljunk arra is, hogy a két forgó mozgás lehet azonos illetve ellentétes forgásirányú is!

p) *Mutassuk meg, hogy a síkon van egy olyan V pont, amelyre igaz, hogy a V, A pontokon átmenő bármelyik körnek a k, l körökkel vett második (A-tól különböző) V_k, V_l metszéspontjai egyforma messze vannak V-től!*

9.6.2. Két kör közös érintői

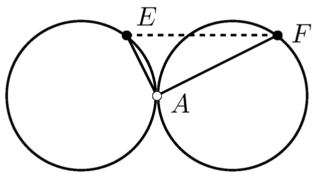
9.3. Feladat *(*Két kör és közös érintőik*)*

a) *(a) Segít., a) I. mego., a) II. mego., a) III. mego.)*

Két R sugarú kör az A pontban érinti egymást. Az egyikre illetve a másikra illeszkedő E, F pontokra $EAF\angle = 90°$. Milyen hosszú az EF szakasz (lásd a 9.23. ábrát)?

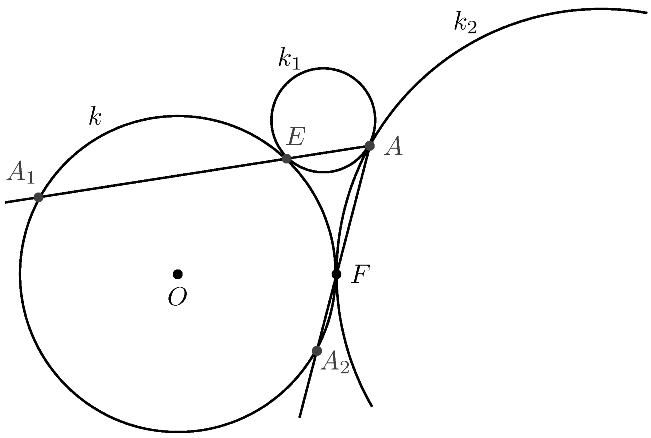
b) *(b) I. mego., b) II. mego.)*

Két kör az A pontban kívülről érinti egymást. Egyik közös külső érintőjük a két kört az E és F pontban érinti. Mekkora az EAF szög?



9.23. ábra.

c) *Két kör az A pontban érinti egymást. Egy harmadik kör, k, az E, F pontokban érinti az első két kört. Az AE, AF egyenesek a k kört E-n illetve F-en kívül még A_1-ben és A_2-ben metszik (lásd a 9.24. ábrát). Mekkora az $A_1OA_2\angle$, ha O a k kör középpontja?*



9.24. ábra.

d) *(d) mego., e) mego., f) mego., g) I. mego., g) II. mego.)*

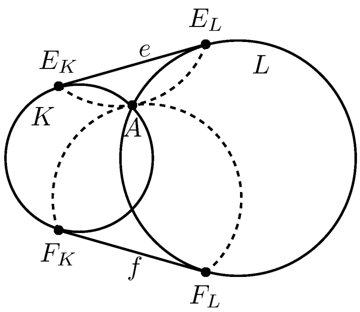
Két kör kívülről érinti egymást. Az egyik közös külső érintő a két kört E-ben, illetve F-ben érinti. Igazoljuk, hogy az EF mint átmérő fölé rajzolt Thálész-kör érinti a két kör centrálisát!

e) *Az O és O' közepű körök kívülről érintik egymást. Bizonyítsuk be, hogy az OO' mint átmérő fölé rajzolt Thálész-kör érinti a két közös külső érintőt!*

f) *Két kör kölcsönösen egymás külsejében helyezkedik el. Mutassuk meg, hogy a közös külső érintőiknek a közös belső érintőikkel való metszéspontjai illeszkednek arra a körre, amelynek átmérője a két kör középpontját összekötő szakasz.*

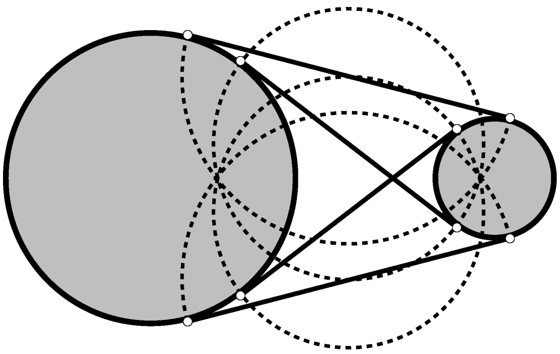
g) *A K és az L kör egyik metszéspontja A. A két kör e és f közös érintőin az érintési pontok E_K és E_L, illetve F_K és F_L (lásd a 9.25. ábrát). Bizonyítsuk be, hogy az E_KE_LA és az F_KF_LA háromszög körülírt köre érinti egymást!*

h)*(h) I. mego., h) II. mego.)*



9.25. ábra.

Igazoljuk, hogy ha két kör kölcsönösen egymás külsejében helyezkedik el, akkor közös külső és belső érintőszakaszaik Thalesz körei két közös ponton mennek át (lásd a 9.26. ábrát).



9.26. ábra.

Ajánló

Dobos Sándor és Hraskó András „Inverzió” a Matkönyvben[MATKV],
http://matek.fazekas.hu/mathdisplay/cache/pdf/volume_g_iii.pdf

9.7. Hasonlóságok és affinitások

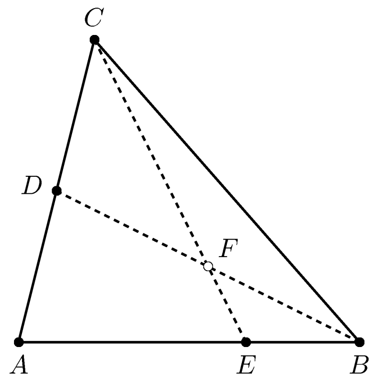
9.1. Feladat *(I. mego., II. mego.)*

Adott egy körcikk. Szerkesszünk bele kört, amely mind a két szárat és a körívet is érinti.

9.2. Feladat *Adott egy szögtartomány és a belsejében egy pont. Szerkesztendő kör, amely átmegy az adott ponton és érinti a szögszárakat.*

9.3. Feladat *(I. mego., II. mego., III. mego., IV. mego.)*

Legyen az ABC háromszög AC oldalának felezőpontja D, továbbá messe a C-n és BD szakasz F felezőpontján átmenő egyenes az AB oldalt az E pontban (lásd a 9.27. ábrát)! Milyen arányban osztja ketté E az AB oldalt?



9.27. ábra.

9.4. Feladat *(I. mego., II. mego., III. mego., IV. mego., V. mego.)*

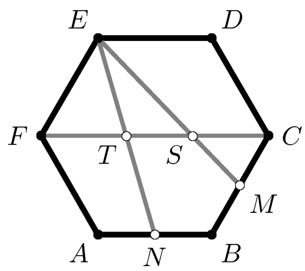
Jelölje az ABC háromszög AB oldalának A felőli harmadolópontját C_1, a BC oldal B felőli harmadolópontját A_1, az AA_1, CC_1 szakaszok metszéspontját P, a BP egyenes és az AC oldal metszéspontját B_1. Határozzuk meg a CB_1/B_1A arány értékét.

9.5. Feladat *(Eredm., I. mego., II. mego.)*

Az ABC háromszögben A_1 és B_1 a BC illetve AC oldalak belső pontjai. AA_1 és BB_1 metszéspontja M. Az AMB_1, AMB és BMA_1 háromszögek területe rendre 3, 7 és 7 egység. Mennyi a CB_1MA_1 négyszög területe?

9.6. Feladat *(Eredm., I. mego., II. mego., III. mego.)*

Az egységoldalú szabályos hatszögben M és N oldalfelezőpontok (lásd a 9.28. ábrát). Határozzuk meg az ST szakasz hosszát!



9.28. ábra.

9.7. Feladat *(Eredm.)*

Az $ABCD$ trapéz AC, BD átlóinak metszéspontja E. Az AB alapon fekvő ABE háromszög területe 9 cm^2, míg a BC szár melletti BCE háromszög területe 6 cm^2. Határozzuk meg az CDE, DAE háromszögek területét!

9.8. Feladat *(I. mego., II. mego., III. mego.)*

A Nagy Szerkesztő feljegyzései között találtam a következőt:

„Ügyes módszert találtam ki, hogyan lehet megszerkeszteni egy tetszőleges háromszög kerületének bármely pontján át a háromszög területét felező egyenest. A szerkesztés menete a következő:”

Sajnos a következő oldalra ráborult a tintásüveg, így olvashatatlanná vált. Találjuk ki mi lehetett a módszer!

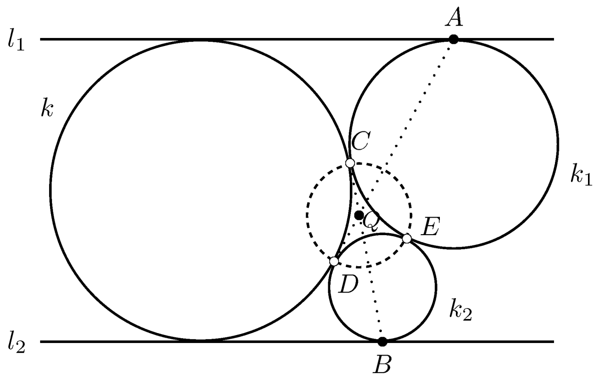
9.9. Feladat *(Segít.)*

Adott az AB szakasz és a vele párhuzamos e egyenes. Szerkesszük meg az AB szakasz felezőpontját körző használata nélkül, egyetlen (végtelen) egyélű vonalzó használatával!

9.10. Feladat *Adott az AB szakasz az F_{AB} felezőpontjával és adott még egy C pont is, amely nem illeszkedik az AB egyenesre. Szerkesszünk a C ponton át AB-vel párhuzamos egyenes körző használata nélkül, egyetlen (végtelen) egyélű vonalzó használatával!*

9.11. Feladat *(Mego.)*

Adott az AB szakasz. Mutassuk meg, hogy kizárólag egyélű vonalzó használatával az AB szakasz felezőpontja nem szerkeszthető meg.



9.29. ábra.

9.12. Feladat *(I. mego., II. mego., III. mego., IV. mego.)*

A k kör érinti az egymással párhuzamos l_1, l_2 egyeneseket. A k_1 és a k_2 kör is az l_1 és l_2 közti sávszerű tartományba helyezkedik el, ahol k_1 az A pontban érinti l_1-et és a C pontban kívülről érinti k-t, míg k_2 a B pontban érinti l_2-t és E-ben kívülről érinti k_1-et és D-ben kívülről érinti k-t. Az AD, BC egyenesek metszéspontja Q. Bizonyítsuk be, hogy Q a CDE háromszög köré írt körének középpontja.

9.13. Feladat Pont körre vonatkozó hatványa*(a) mego., b) mego., c) mego., d) mego., e) mego.)*

a) Szelőtétel

Adott a P pont és a k kör. Messe a P ponton áthaladó p egyenes a k kört az A, B pontokban. Mutassuk meg, hogy a $PA \cdot PB$ szorzat értéke független a szelő választásától.

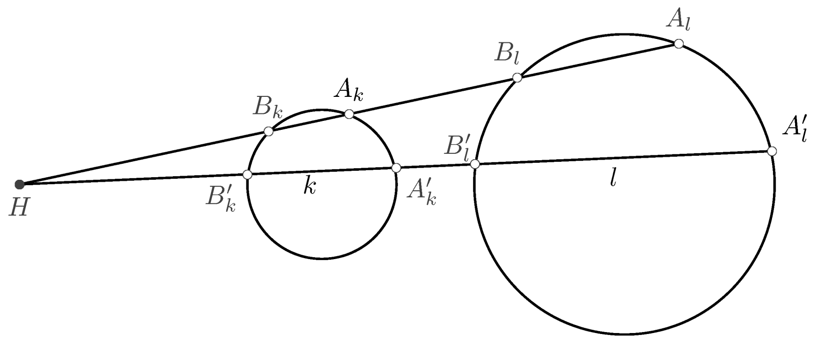
b) *Mutassuk meg, hogy ha a fenti szituációban P a k kör külső pontja, akkor $PA \cdot PB = PT^2$, ahol T a P-ből a k-hoz húzott egyik érintő érintési pontja.*

c) *Fejezzük ki a fenti $PA \cdot PB$ mennyiséget a PO, r mennyiségekkel, ahol O a k kör középpontja, r pedig a sugara.*

d) Két kör Steiner hatványa

Adottak a k, l körök és kiválasztjuk azok egyik hasonlósági pontját, H-t. Legyen h a H ponton átmenő a k, l köröket az A_k, B_k, A_l, B_l pontokban metsző egyenes, ahol a k-t l-re képező H centrumú nagyításnál A_k képe A_l és B_k képe B_l (lásd a 9.30. ábrát). Mutassuk meg, hogy az $A_kA_l \cdot B_kB_l$ mennyiség független a h szelő választásától.

e) *Határozzuk meg a „pont körre vonatkozó hatványával” kapcsolatos b), c) feladatokban leírt képletek Steiner hatványra vonatkozó analogonjait!*

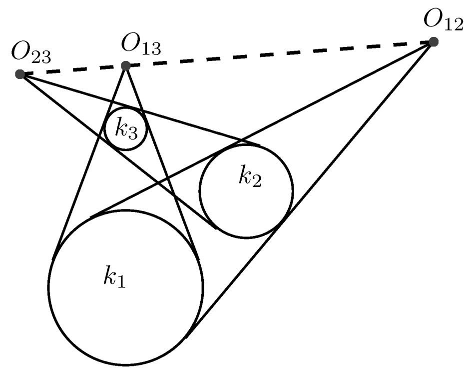


9.30. ábra.

9.14. Feladat *(*Hasonlósági pontok kollinearitása*)(I. mego., II. mego.)*

Adott a síkon három kör, k_1, k_2 és k_3.

a) *Mutassuk meg, hogy páronkénti külső hasonlósági pontjaik egy egyenesen vannak (lásd a 9.31. ábrát).*



9.31. ábra.

b) *Ha a három kör közül két körpárnál a közös belső hasonlósági pontot vesszük, egynél pedig a külsőt, akkor is egy egyenesre illeszkedik a három hasonlósági pont?*

9.15. Feladat *(Mego.)*

A síkon adott négy egyenes, melyek páronkénti metszéspontjai mind léteznek és egymástól különbözőek. Mindegyik egyenes egyenletes sebességgel mozog egy-egy pont. Mutassuk meg, hogy ha a hat metszéspont közül ötben a két egyenesen mozgó pont találkozik, akkor a hatodik metszéspontban is találkoznak.

9.16. Feladat *(Mego.)*

Az ABC háromszög körülírt köre ω. Tekintsük azt c_A kört, amely az ω kör belsejében helyezkedik el és érinti azt és még az ABC háromszög AB, AC oldalait is érinti. Jelölje a c_A, ω körök érintési pontját U_A. Hasonlóan értelmezzük a c_B, c_C köröket és azoknak a ω körrel vett U_B, U_C érintési pontjait. Mutassuk meg, hogy az AU_A, BU_B, CU_C egyenesek egy ponton mennek át!

9.17. Feladat *(Mego.)*

Adottak a k_1, k_2 körök a síkon. Tekintsük az összes olyan m kört, amely k_1-et és k_2-t is érinti.

a) *Határozzuk meg az ilyen m körök középpontjának mértani helyét!*

b) *Kössük össze egyenessel k_1 és m érintési pontját k_2 és m érintési pontjával! Mutassuk meg, hogy van két pont a síkon, hogy az így adódó egyenesek mindegyike legalább az egyiken átmegy.*

9.18. Feladat *(Segít., I. mego., II. mego., III. mego.)*

Adott a k kör és annak e átmérő egyenese. Képzeljük el mindazokat a köröket, amelyek érintik e-t és k-t is és az általuk meghatározott egyik félkörlemezen helyezkednek el.

a) *Mi a mértani helye ezen körök középpontjainak?*

b) *Mutassuk meg, hogy a síkon van egy olyan pont, amely illeszkedik bármelyik ilyen körnek az e-vel és k-val való érintési pontját egymással összekötő egyenesre!*

c) *Ezen körök közül ketten egymást is érinthetik. Hol lehet az érintési pontjuk?*

9.19. Feladat OKTV 1995/96., II. kat., III. ford., 1. fel.*(Mego.)*

Egy konvex ötszög valamennyi átlója párhuzamos az ötszög egy-egy oldalával.

a) *Bizonyítsuk be, hogy bármelyik átló és a vele párhuzamos oldal hosszának az aránya ugyanaz, és határozzuk is meg ennek az aránynak a számértékét.*

b) *Mutassuk meg, hogy ha a síkon adottak a nem egy egyenesre eső A, B, C pontok, akkor létezik olyan $ABCDE$ ötszög, amely a fenti tulajdonságú.*

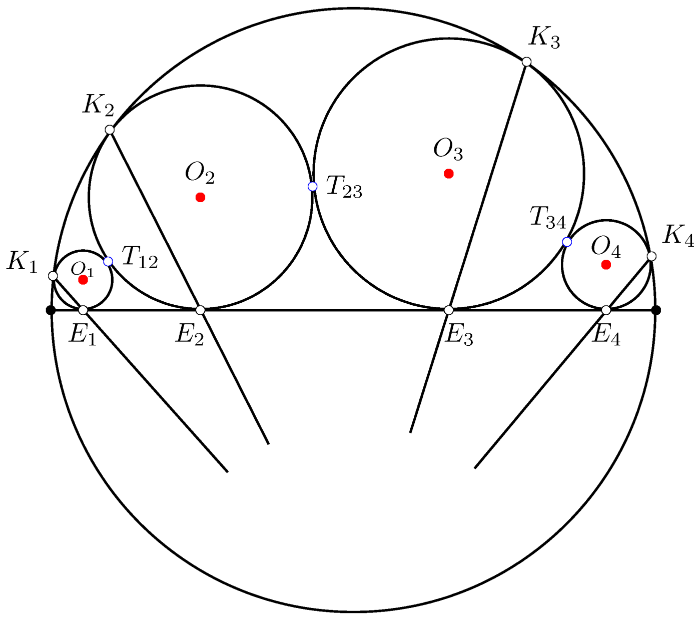
Ajánló

Ábrahám Gábor „A háromszög és a terület”[ÁBHRT], `http://matek.fazekas.hu/portal/tanitasianyagok/Abraham_Gabor/harter/`.

Hraskó András „Tömegközéppont és nyomatékok a geometriában” `http://matek.fazekas.hu/portal/tanitasianyagok/Hrasko_Andras/termtud2011/tomeg/tomegkp.pdf`.

Reiman István „A geometria és határterületei”[REIHA];

Harold Scott MacDonald Coxeter „A geometriák alapjai”[COXGE], 13. fejezet;



9.32. ábra.

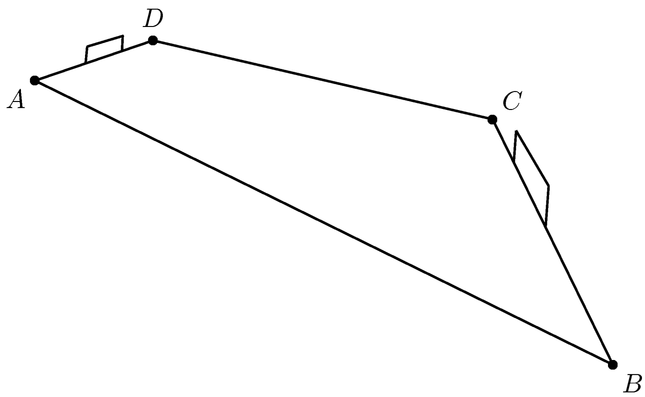
9.8. A projektív geometria elemei

9.1. Feladat *(Mego.)*

A 9.33. ábrán egy focipálya fényképe látható. Szerkesszük meg a

a) *pálya középvonalát;*

b) *az alapvonalakkal párhuzamos, azok távolságát harmadoló egyeneseket!*



9.33. ábra.

9.2. Feladat *(*Ábramagyarázat Leon Battista Alberti (1404–1472) „De pictura” című könyvéhez*)(Mego.)*

A festő a terem padlóját jeleníti meg vásznán. A padló negyzetrácsos elrendezésű parketta („pavimenti”). A vászon a padlóig ér, alja, – az ábrán az AB szakasz –, épp egybeesik az egyik parkettasor kezdetével, a parkettalapok szélei tehát AB-vel párhuzamosak illetve merőlegesek rá. A festő a terem szimmetriatengelyében áll, egyben egy parkettalap két párhuzamos oldalára merőleges szimmetriasíkjában. A festőhöz legközelebbi parketta (a festő egyik szeméből vetített) képe a vásznon az $UVWZ$ szimmetrikus trapéz, melynek alapjai $UV = c > a = ZW$, magassága pedig m. A trapéz szárainak meghosszabbításai az O pontban metszik egymást.

Fejezzük ki a, c és m segítségével a

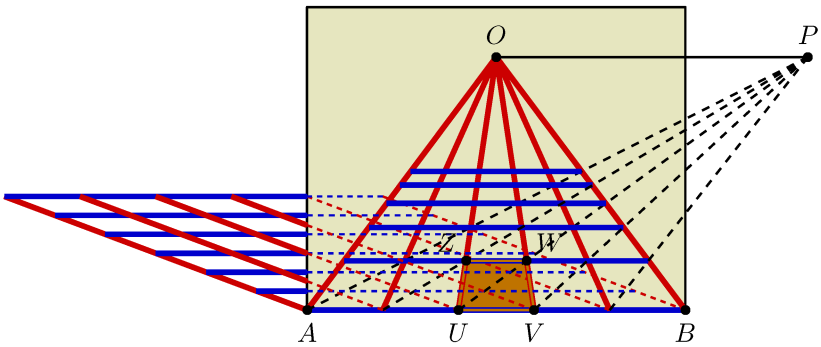
a) *festő szemmagasságát;*

b) *festő és a vászon távolságát!*

A 9.34. ábrán megrajzoltuk a parkettalapok egymással párhuzamos átlóinak képét is. Ezek egy P pontban metszik egymást.

c) *Mutassuk meg, hogy OP és AB párhuzamosak.*

d) *Bizonyítsuk be, hogy az OP távolság megegyezik a festő és a vászon távolságával.*



9.34. ábra.

9.3. Feladat *Adott egy konvex négyszög, egy négyzetalakú parkettákból álló padló egyetlen négyzetének képe egy festményen vagy fényképen (lásd pl Vermeer „Koncert” című festményének 9.35. ábrán látható részletét). Szerkesszük tovább a képet, rajzoljuk meg a szomszédos parkettalapokat!*

9.4. Feladat *(Mego.)*

Az ABC nem egyenlő szárú háromszög körülírt köre legyen k. Az ABC háromszög C-nél lévő belső szögfelezője messe a k kör B-beli érintőjét K-ban, míg a C-nél lévő

9.35. ábra.

külső szögfelező C-től különböző metszéspontja k-val L. Legyen az AC és LB egyenesek metszéspontja M.

Mutassuk meg, hogy az MK egyenes átmegy az AB oldal felezőpontján!

Ajánló

Könyvek a projektív geometriáról:

Hajós György „Bevezetés a geometriába"[HAJÓS];
Horvay Katalin, Reiman István „Projektív geometria"[REIHOP];
Csikós Balázs, Kiss György „Projektív geometria"[CSIKPR];
Harold Scott MacDonald Coxeter „Projektív geometria"[COXPR];
Papp Ildikó „Projektív geometria példatár"[PAPPRP],
http://www.inf.unideb.hu/oktatas/mobidiak/Papp_Ildiko/Projektiv_geometria_peldatar/Peldatar_vegleges.pdf;
A Matkönyv[MATKV] 11-12-es Geometria példatára:
http://matek.fazekas.hu/mathdisplay/cache/pdf/volume_g_iii.pdf;

9.9. Speciális görbék

9.1. Feladat (Egy szív titkai)*(Mego.)*

Ebben a feladatban első menetben ne bizonyításokon töprengjünk, hanem dinamikus geometriai szoftverrel rajzoljuk ki a mértani helyet. Utána gondolkodjunk el az összefüggéseken, fogalmazzunk meg sejtéseket, próbáljunk bizonyítani.

a) *Adott egy kör (e) és rajta egy pont (A). Tükrözzük az adott (A) pontot a kör (e) minden érintőjére.*

b) *Adott egy kör (e) és rajta egy pont (A). Rajzoljuk meg az összes olyan kört, amelynek középpontja az adott körön (e-n) van és átmegy az adott ponton (A-n).*

c) *Rajzoljuk meg adott kör (f) adott pontjából (B) induló fénysugarak útját a körvonalon való első visszaverődés után. Mi fénylik fel a sugarak révén?*

d) *Egy kör (k) alakú kerék csúszás nélkül gördül egy ugyanakkora sugarú rögzített kör (e) körül. Rajzoljuk meg a mozgó kör kerülete valamely pontjának pályáját!*

e) *r sugarú félkör alakú gödörben lecsúszik egy $2r$ hosszúságú pálca (a pálca alsó végpontja a körön fut, közben nekitámaszkodik a félkör A végpontjának). Hol mozog a pálca felső végpontja?*

f) *Rajzoljuk meg a komplex egységkör képét a $z \longrightarrow 2z - z^2$ transzformációnál!*

Ajánló

Hraskó András „Egy szív titkai”[HRASZV]
http://matek.fazekas.hu/portal/tanitasianyagok/Hrasko_Andras/kardioid/.
Árki Tamás és Hraskó András „Kísérletező geometria”[ÁRHRK],
http://matek.fazekas.hu/portal/tanitasianyagok/Arki_Tamas/kisgeo/
Pelikán József „Klasszikus algebrai görbék” az Új matematikai mozaikban[ÚJMOZ],
http://www.tankonyvtar.hu/en/tartalom/tkt/uj-matematikai-mozaik-uj/ar15.html.
Xah Lee síkgörbe lexikona[XAHCUR],
http://xahlee.info/SpecialPlaneCurves_dir/specialPlaneCurves.html
„National curve bank”[CURVEB]
http://curvebank.calstatela.edu/home/home.htm.

10. fejezet

Bevezető feladatok megoldása

10.1. Logika

A 2.1. feladat megoldásai

A 2.1. fel. I. megoldása

Jelöljük így az állításokat: $A1$, $A2$, $B1$, $B2$, $C1$, $C2$.

Tegyük fel az egyes állításokról, hogy ők igazak, majd nézzük végig, hogy mikor botlunk ellentmondásba.[1]

Íme: Ha $A1$ igaz, akkor $B1, B2, C1, C2$ hamis – ellentmondás. *A1 tehát hamis.*

Ha $A2$ igaz, akkor $C1, C2$ hamis, így az összes többi állításnak igaznak kell lennie. Lehet ez? *Igen, ha B lőtte a legtöbbet (többet, mint A és C együttvéve), és C lőtte a legkevesebbet.*

Ha viszont $A2$ is hamis lenne, akkor vagy $B1$, vagy $C1$ a harmadik hamis állítás. Ekkor azonban $B2$, illetve $C2$ is hamis lenne.

Vagyis csak az lehet, hogy A állításai: h, i; B állításai i, i; C állításai: h, h.

ÉS: Igen, tudjuk, ki lőtte a legkevesebb nyulat, C.

A 2.1. fel. II. megoldása

A 2.1. fel. I. megoldásának jelöléseit használjuk,

Keressük meg, hogy mely állítások mondanak ellent egymásnak[2], illetve melyek következnek valamely más állításból, és így keressük ki azokat, amelyek igazak lehetnek, illetve amelyek hamisak.

[1] A megoldás hátránya, hogy hosszadalmas, megbizhatatlan, sok hibalehetőséget rejt magában, ráadásul hajlamosak rá a diákok, hogy az első lehetséges megoldásnál lecövekelnek.

[2] általában azt hiszik a diákok, hogy ilyenkor csak az lehet, hogy ha az egyik igaz, a másik hamis és megfordítva

Íme: $B2$-ből következik $B1$. De $B1$-ből nem következik $B2$;
$A1$-nek ellentmond: $B1, B2, C1$;
$A2$-nek ellentmond: $C1$;
$B1$-nek ellentmond: $A1, C1, C2$;
$B2$-nek ellentmond: $A1, C1, C2$;
$C1$-nek ellentmond: $A1, A2, B1, B2$;
$C2$-nek ellentmond: $A2, B1, B2$.

Ebből látszik, hogy ha $C1$ igaz lenne, akkor 4 hamis állítás lenne. Tehát $C1$ hamis. Akkor viszont $C2$ is hamis, mert ha igaz lenne, akkor 4 hamis állítás lenne: $C1$ és a $C2$-nek ellentmondó három. Ha most $A1$ igaz lenne, akkor $B1, B2$ hamis lenne, vagyis 4 hamis állítás lenne. Ezért $A1$ hamis. $B1, B2$ éppen ennek a három állításnak mond ellent.

Eszerint $A1$ hamis, $B1, B2$ igaz, $C1, C2$ hamis, vagyis $A2$ csak igaz lehet. *ÉS:* Igen, tudjuk, ki lőtte a legkevesebb nyulat, C.

A 2.1. fel. III. megoldása

Megnézzük, hogy a lehetséges megoldások közül melyikre passzolnak a feladat feltételei.

Jelölje a lőtt nyulak számát – értelemszerűen – a, b, c. Ezeknek hatféle különböző nagyság szerinti sorrendje lehet (tudjuk, mi). Végignézve, hogy mely esetekre lesz pontosan 3 igaz, 3 hamis állítás, kiderül, hogy csak a $b > a > c$ (sőt, $b > a + c$) esetben teljesül a feltétel.

A 2.2. feladat megoldása

Ha Cili Igaz $\Rightarrow$ Juci Hazug.
Ha Juci Hazug $\Rightarrow$ Vili Hazug.
Ha Vili Hazug $\Rightarrow$ Lili Igaz.
Ha Lili Igaz $\Rightarrow$ Saci Igaz.
Ha Saci Igaz $\Rightarrow$ Vili Hazug

Igaz: Cili, Saci, Lili; Hamis Vili, Juci. Ez jó is.

Ha Cili Hazug $\Rightarrow$ Juci Igaz.
Ha Juci Igaz $\Rightarrow$ Vili Hazug.
Ha Vili Hazug $\Rightarrow$ Lili Igaz.
Ha Lili Igaz $\Rightarrow$ Saci Hazug.
Ha Saci Hazug $\Rightarrow$ Vili Igaz

Ellentmondás, tehát Cili, Saci és Lili az Igaz család tagjai, míg Vili és Juci a Hamis családból valók.

A 2.3. feladat megoldása

A feladat szövegét úgy értjük, hogy az anyuka állítását igaznak kell feltételezni, azaz a gyerekek állításai közül legfeljebb kettő lehet hamis.

Vizsgáljuk Tamás állítását! Ha ez igaz lenne, akkor János, Péter és István is hazudna. Így Tamás csak hazudhat.

Ezek után, ha Gyuri állítása igaz lenne, akkor István állítása hamis, amiből – tudva, hogy Tamás állítása is hamis – az következik, hogy János és Péter is hazudik. Ez már túl sok hazugság, tehát Gyuri állítása hamis.

Ez két hamis állítás, tehát az összes többinek igaznak kell lennie. János és Péter állításaiból következik, hogy Tamás volt a tettes. Ebben az esetben valóban csak két állítás hamis, így ez az anyuka állításának megfelelő megoldás.

Tehát Tamás törte be az ablakot.

A 2.4. feladat megoldása

A, B és C bármelyike lehet lovag vagy lókötő, ez összesen nyolcféle eset. Mindegyiknél megnézzük, hogy A mondhatta-e, hogy „B és C egyforma típusú.”, és azokban az esetekben, ahol mondhatta, megnézzük, hogy C mit válaszolna az „Egyforma típusú A és B?” kérdésre.

A	B	C	A: $B = C$	C: $A = B$?
lovag	lovag	lovag	mondhatta	igen
lovag	lovag	lókötő	nem mondhatta	
lovag	lókötő	lovag	nem mondhatta	
lovag	lókötő	lókötő	mondhatta	igen
lókötő	lovag	lovag	nem mondhatta	
lókötő	lovag	lókötő	mondhatta	igen
lókötő	lókötő	lovag	mondhatta	igen
lókötő	lókötő	lókötő	nem mondhatta	

A táblázatból leolvasható, hogy C igennel válaszol minden olyan esetben, amely egyáltalán megvalósulhat.

A 2.5. feladat megoldásai

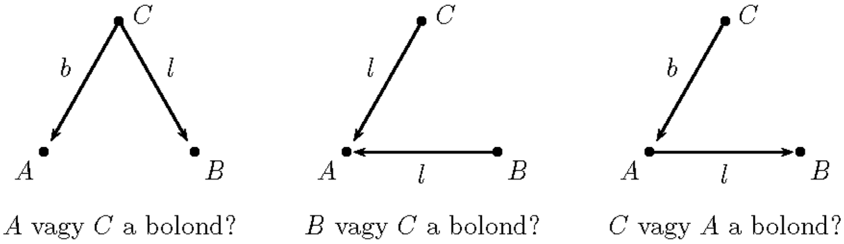
A 2.5. a) mego.

Állítjuk, hogy ha a lakosok legalább fele bolond, akkor nincs olyan módszer, amellyel kitalálható a lakosok típusa.

Bizonyítás A lovagok egymásra azt mondják, hogy lovag, míg a bolondokra azt mondják, hogy bolond. Tegyük fel, hogy a bolondok összebeszélnek és közülük éppen annyian, ahányan a lovagok vannak egy csoportot alakítanak. A csoporthoz tartozó bolondok úgy viselkednek, mintha ők lennének a lovagok és az igazi lovagok – valamint a csoporton kívüli bolondok – a bolondok. Tehát a csoport tagjai egymást lovagnak mondják, a többieket pedig bolondnak. A csoporton kívüli bolondok igazából bárhogy viselkedhetnek, de az egyszerűség kedvéért tegyük fel, hogy mindenkire azt mondják, hogy bolond. Ebben az esetben a rendszer a külső szemlélőnek teljesen szimmetrikus, a csoportbeli bolondok és a lovagok egymástól megkülönböztethetetlenek. Nem határozható meg, hogy ki miféle.

A 2.5. b) mego.

Ha csak két lakos van, akkor eldönthetetlen ki miféle, ezt épp az előbb láttuk. Ha három lakos van, akkor két kérdezés nem elég, ez a lehetőségek számbavételével könnyen eldönthető (lásd a 10.1. ábrát, ahol nyilat indítottuk attól akit kérdeztek ahhoz, akiről kérdezték és l jelöli a „lovag” választ b pedig a „bolond”-ot.)



10.1. ábra.

Három kérdezés elég három embernél, mint ahogy *n kérdés általában is elég n embernél, ha* $n \geq 3$. Valóban, rendezzük körbe a lakosokat és az egyik irányban végighaladva a körön kérdezzük meg mindegyiket az előtte levőről. Ha 1 bolond van közöttük, akkor a mögötte levő bemondja róla, hogy ő bolond. Maga a bolond „lovag”-ot vagy „bolond”-ot mond, de rájöhetünk melyik ő: az akire a ciklusban előbb mondták, hogy bolond. Másképp: ha egy lovagnak mondott ember bolondot mond, akkor akire mondja a bolondot, az tényleg bolond.

Ha azonban $n > 3$ és 1 bolond van a szigeten, akkor $(n-1)$ kérdés is elég. Hagyjuk ki az egyik lakost a körből! A többieket rendezzük körbe és kérdezzük végig őket az előbb leírt módon. Pontosan akkor nem halljuk válaszként a „bolond” szót, ha a körből kihagyott ember a bolond. Ha viszont halljuk ezt a szót, akkor az előbb leírt módon kitalálható ki a bolond.

Megmutatható, hogy 1 bolond esetén $(n-2)$ kérdés már nem lehet elég. Ennyi kérdés esetén ugyanis legalább két olyan lakos is lesz, akire nem kérdezünk rá. Ha közülük valamelyik a bolond, akkor nem tudhatjuk meg melyikük.

A 2.6. feladat megoldásai

A 2.6. a) mego.

A lehetséges számpárok halmaza a beszélgetés kezdete előtt:

$$H_0 = \{(1;1),(1;2),(1;3),(1;4),(1;5),\ldots,(2;2),(2;3),(2;4),(2;5),\ldots,(3;3),\ldots\}.$$

Az első 12 lehetséges szorzatérték és az azokhoz tartozó lehetséges párok:

Cili szorzatai (0.)

szorzat	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**
	$(1;1)$	$(1;2)$	$(1;3)$	$(1;4)$ $(2;2)$	$(1;5)$	$(1;6)$ $(2;3)$

szorzat	**7**	**8**	**9**	**10**	**11**	**12**
	$(1;7)$	$(1;8)$ $(2;4)$	$(1;9)$ $(3;3)$	$(1;10)$ $(2;5)$	$(1;11)$	$(1;12)$ $(2;6)$ $(3;4)$

Az első 12 összegérték és az azokhoz tartozó lehetséges párok:

Dezső összegei (0.)

összeg	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**
		$(1;1)$	$(1;2)$	$(1;3)$ $(2;2)$	$(1;4)$ $(2;3)$	$(1;5)$ $(2;4)$ $(3;3)$

összeg	**7**	**8**	**9**	**10**	**11**	**12**
	$(1;6)$ $(2;5)$ $(3;4)$	$(1;7)$ $(2;6)$ $(3;5)$ $\vdots$	$(1;8)$ $(2;7)$ $(3;6)$ $\vdots$	$(1;9)$ $(2;8)$ $(3;7)$ $\vdots$	$(1;10)$ $(2;9)$ $(3;8)$ $\vdots$	$(1;11)$ $(2;10)$ $(3;9)$ $\vdots$

Egyéb információ nélkül Cili akkor és csakis akkor tudja megmondani a szorzat értékéből a két számot, ha ahhoz a szorzathoz csak egyféle felbontás tartozik, tehát Cili táblázatában a szorzat oszlopában egyetlen pár van. Ez pontosan akkor fordul elő, ha a szorzat értéke 1 vagy prímszám. Mivel az okos Cili nem tudja a két számot, így az ezen szorzatokhoz tartozó párokat kihúzhatjuk a lehetséges párok halmazából:

$$H_1 = \{(1;4),(1;6),(1;8),\ldots,(2;2),(2;3),(2;4),(2;5),\ldots,(3;3),\ldots\}.$$

Mindezt az okos Dezső is végiggondolhatja, így nála Cili első megszólalása után az összegekhez már csak az alábbi párok tartoznak:

Dezső összegei (1.)

összeg	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**
				$(2;2)$	$(1;4)$ $(2;3)$	$(2;4)$ $(3;3)$

összeg	**7**	**8**	**9**	**10**	**11**	**12**
	$(1;6)$ $(2;5)$ $(3;4)$	$(2;6)$ $(3;5)$ $\vdots$	$(1;8)$ $(2;7)$ $(3;6)$ $\vdots$	$(1;9)$ $(2;8)$ $(3;7)$ $\vdots$	$(1;10)$ $(2;9)$ $(3;8)$ $\vdots$	$(2;10)$ $(3;9)$ $\vdots$

Dezső akkor és csakis akkor tudná kitalálni a gondolt számot, ha az összegükhöz tartozó oszlopban Dezső új táblázatában csak egyetlen pár tartozna. Bár fent csak a táblázat kezdőrészlete látható, mégis világos, hogy ez csak egyetlen esetben következik be: ha az összeg a 4 és a számpár a $(2;2)$.

Mivel az okos Dezső nem tudja kitalálni a gondolt számokat, így a $(2;2)$ nem egy lehetséges számpár és ez az egyetlen új kizárható pár Dezső első megszólalása után. A megmaradt párok:

$$H_2 = \{(1;4),(1;6),(1;8),\ldots,(2;3),(2;4),(2;5),\ldots,(3;3),\ldots\}.$$

Mindezt az okos Cili is végiggondolhatja, így nála Dezső első megszólalása után a szorzatokhoz már csak az alábbi párok tartoznak:

Cili szorzatai (2.)

szorzat	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**
				$(1;4)$		$(1;6)$ $(2;3)$

szorzat	**7**	**8**	**9**	**10**	**11**	**12**
		$(1;8)$ $(2;4)$	$(1;9)$ $(3;3)$	$(1;10)$ $(2;5)$		$(1;12)$ $(2;6)$ $(3;4)$

Egyetlen olyan oszlop van, amelyben egyetlen számpár van: a 4-es szorzat már csak $1 \cdot 4$ alakban állhat elő. Tehát Cili egyetlen esetben tudja kitalálni Dezső első megszólalása után a két gondolt számot, akkor, ha ez a két szám az 1 és a 4. Mindezt ugyanígy Dezső is végig tudja gondolni, tehát mondhatja pl.: „Én is tudom melyik az a két szám”.

A 2.6. b) mego.

Cili egyetlen esetben tudná, hogy melyik az a két szám, ha az $(1;4)$ pár lenne. Ha mégsem tudja, akkor ez az egyetlen pár húzható ki a lehetőségek közül:

$$H_3 = \{(1;6),(1;8),\ldots,(2;3),(2;4),(2;5),\ldots,(3;3),\ldots\}.$$

A Dezsőnek megmaradt lehetőségek:

Dezső összegei (1.)

összeg	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**
					$(2;3)$	$(2;4)$ $(3;3)$

összeg	**7**	**8**	**9**	**10**	**11**	**12**
	$(1;6)$ $(2;5)$ $(3;4)$	$(2;6)$ $(3;5)$ $\vdots$	$(1;8)$ $(2;7)$ $(3;6)$ $\vdots$	$(1;9)$ $(2;8)$ $(3;7)$ $\vdots$	$(1;10)$ $(2;9)$ $(3;8)$ $\vdots$	$(2;10)$ $(3;9)$ $\vdots$

Látható, hogy Dezső egyetlen esetben – a $(2;3)$ pár esetén – tudja megmondani a két számot.

Megjegyzés a 2.6. feladathoz

Tovább is folytatható a példa, Dezső is mondhatja másodszorra is, hogy „Nem tudom” és Cili rájöhet ezután a két gondolt számra. Meddig mehetünk még így tovább?

A 2.10. feladat megoldása

a) I. $\Longrightarrow$ II., de I. $\not\Longleftarrow$ II., pld $(-2)^2 = 2^2$, de $-2 \neq 2$.

b) I. $\Longleftrightarrow$ II.

c) I. $\Longleftarrow$ II., de I. $\not\Longrightarrow$ II., pld $a = 2$, $b = 0$.

A 2.11. feladat megoldása

A három állítás ekvivalens egymással. A polinomnak ugyanis pontosan akkor gyöke az egy, ha $p(1) = 0$, azaz ha

$$a \cdot 1^2 + b \cdot 1 + c = a + b + c = 0.$$

Másrészt ha a p polinomot elosztjuk az $(x-1)$ polinommal, akkor a hányados egy $a(x+d)$ alakú elsőfokú polinom lesz, a maradék pedig egy m valós szám:

$$p(x) = a(x-1)(x+d) + m.$$

Ennek pontosan akkor gyöke az 1, ha

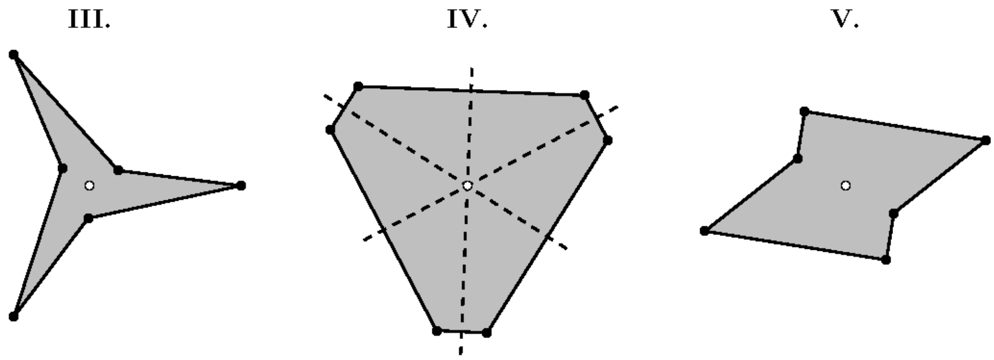
$$0 = a(1-1)(1+d) + m = m.$$

A 2.12. feladat megoldása

I. Igaz; *II.* Hamis; *III.* Hamis;
IV. Igaz; *V.* Hamis (lehet több, lásd négyzet).

A 2.13. feladat megoldása

I. Igaz; *II.* Hamis (ellenpélda: paralelogramma); *III.* Hamis (lásd a 10.2. ábrát).
IV. Hamis. Forgási szimmetria biztosan van, de 180°-os nem feltétlenül van (lásd a 10.2. ábrát).
V. Hamis (lásd a 10.2. ábrát).



10.2. ábra.

VI. Hamis, öt szimmetriatengelye van.
VII. Igaz, ha van két szimmetriatengely, akkor forgási szimmetria is van és ötszögnél ebből következik a szabályosság.

A 2.14. feladat megoldása

I. Az *a)*, *b)* állítások ekvivalensek.

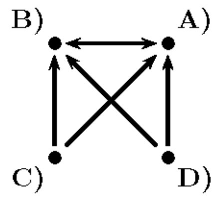
A tízes számrendszerbeli $\overline{4235}$ szám így írható:

$$\overline{4235} = 4 \cdot 1000 + 2 \cdot 100 + 3 \cdot 10 + 5 \cdot 1 = 4 \cdot (999 + 1) + 2 \cdot (99 + 1) + 3 \cdot (9 + 1) + 5 \cdot 1 =$$

$$= (4 + 2 + 3 + 5) + (4 \cdot 999 + 2 \cdot 99 + 3 \cdot 9)\,.$$

Mivel a jobb oldali nagy zárójelben álló szám nyilvánvalóan osztható 9-cel, így a $\overline{4235}$ négyjegyű szám és a $(4 + 2 + 3 + 5)$ négytagú összeg kilences maradéka megegyezik. Hasonlóan igazolható, hogy bármelyik pozitív egész kilences maradéka megegyezik a szám tízes számrendszerbeli alakjában a számjegyek összegének kilences maradékával. Ezért pl egy pozitív egész pontosan akkor osztható kilenccel, ha számjegyeinek összege osztható kilenccel.

A *c)* állításból nyilvánvalóan következik az *a)* állítás, míg a *d)*-ből a *b)*, de ezekben fordított irányú következtetések nincsenek (lásd pl magát a „9” számot). A logikai háló így rajzolható fel:



10.3. ábra.

A *c)*, *d)* Állításoknak logikailag nincs köze egymáshoz.

A 27 számra teljesül *c)*, de nem teljesül *d)*, míg a 9981-re teljesül *d)*, de nem teljesül *c)*. Ráadásul van olyan szám – pl a 999–, amelyre mindkét feltétel teljesül és természetesen olyan is, amelyikre egyik sem.

A 2.15. feladat megoldása

Az összes állítás ekvivalens.

I. és II. ekvivalenciája abból következik, hogy a háromszög szögeinek összege 180°.

I. és III. ekvivalenciája a Thálesz tétel és megfordítása.

A IV-beli összefüggés beszorzás és rendezés után az $a^2 + b^2 = c^2$ összefüggésre vezet, tehát Pitagorasz tétele és annak megfordítása igazolja I. és IV. ekvivalenciáját.

Legyenek az a, b, c oldalakkal szemközti csúcsok rendre A, B és C és messe a B-ből induló szögfelező a b oldalt D-ben. A szögfelező tétel értelmében D a b oldalt a másik két oldal arányában metszi, azaz

$$DC = \frac{ab}{a+c}, \qquad DA = \frac{cb}{a+c}.$$

Így a DCB háromszögben $CBD\angle = \frac{\beta}{2}$ és a szinusz tétel szerint

$$\frac{\sin CBD\angle}{\sin BDC\angle} = \frac{DC}{CB} = \frac{b}{a+c},$$

így az V. feltétel pontosan akkor teljesül, ha $\sin BDC\angle = \cos\frac{\beta}{2}$, azaz ha $BDC\angle = 90° - \frac{\beta}{2}$ vagy $180° - BDC\angle = 90° - \frac{\beta}{2}$. Az előbbi esetben a BDC háromszög harmadik szöge: $DCB\angle = \gamma = 180° - \frac{\beta}{2} - BDC\angle = 90°$, míg az utóbbi esetben a BDA háromszögben $DAB\angle = BDC\angle - \frac{\beta}{2} = 90°$. Ez az utóbbi eset ellentmond annak, hogy az ABC háromszögben c a legnagyobb oldal, így kapjuk, hogy V. is ekvivalens I-gyel.

A 2.16. feladat megoldása

Ha egy négyszögnek van két derékszöge, akkor vagy trapéz (szomszédos szögek derékszögek) vagy húrnégyszög (szemköztes szögek derékszögek, az ezeket nem összekötő átló Thalesz-körén rajta vannak a csúcsok), tehát $2D \subset H \cup T$.

Más nem mondható, tehát $2D$ a $H \setminus T$, $H \cap T$, $T \setminus H$ halmazok mindegyikét két-két részre osztja (lásd a 10.4. ábrát).

A 2.17. feladat megoldása

I. lépés A) $\Longrightarrow$ B)

Írjuk a Pitagorasz tételt a B) egyenletbe:

$$a^4 + (a^2+c^2)c^2 = c^4 + a^2(a^2+c^2),$$

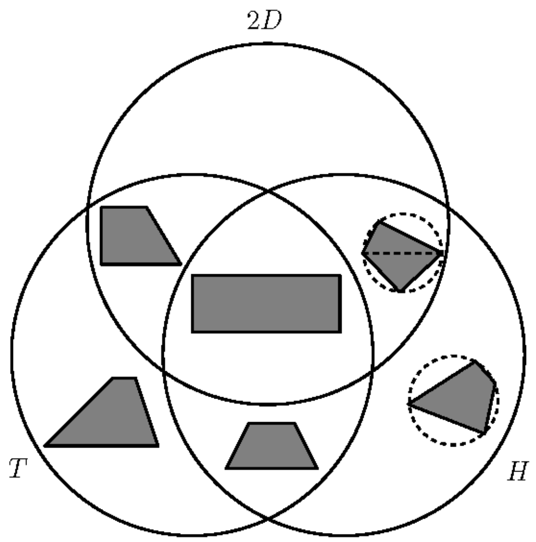
ami azonossághoz vezet, ha felbontjuk a zárójelet.

II. lépés B) $\not\Longrightarrow$ A):

$$a^4 - c^4 + b^2c^2 - a^2b^2 = (a^2-c^2)(a^2+c^2) + b^2(c^2-a^2) = (a^2+c^2-b^2)(a^2-c^2),$$

azaz az algebrai feltétel pontosan akkor teljesül, ha a háromszög b-vel szembeni szöge derékszög vagy olyan egyenlő szárú háromszög, amelynek b az alapja.

Tehát az A) állításból következik a B) állítás, de fordítva nem.



10.4. ábra.

A 2.18. feladat megoldása

III.-ban a pozitív $(a+b+c)$-vel átszorozva, összevonás, majd (a^3+b^3) szorzattá alakítása után a pozitív $(a+b)$ mennyiséggel egyszerűsíthetünk és a $c^2 = a^2 + b^2 - ab$ koszinusz tételhez jutunk. Tehát I. és III. ekvivalens állítások. Ezekből következik II., de az $\gamma = 120°$ esetén is teljesül.

A 2.19. feladat megoldása

Látni fogjuk, hogy az I., II., III., IV. állítások mind ekvivalensek egymással és következik belőlük az V. állítás, de abból nem következnek az I-IV. állítások.

I-ből nyilvánvalóan következik II. és III. A II. állításból a háromszög területének kétféle felírásából következtethetünk az I. állításra. Megmutatjuk, hogy III-ból is következik I. Mivel a súlyvonalak harmadolják egymást, így ha – a szokásos jelölésekkel – $AF_A = BF_B$, és S a súlypont, akkor $SF_A = SF_B$ és $SA = SB$, így az SF_AB, SF_BA háromszögek egybevágóak, tehát $F_AB = F_BA$, azaz $CB = CA$.

A IV-ben adott feltétel a $2\sin\alpha\sin\beta = \cos(\alpha-\beta) - \cos(\alpha+\beta)$, $\cos(\alpha+\beta) = -\cos(180° - \alpha - \beta)$, $\cos\gamma = 2\cos^2\frac{\gamma}{2} - 1$ azonosságok segítségével a $\cos(\alpha-\beta) = 1$ alakba írható át, amely háromszögek esetén pontosan akkor teljesül, ha $\alpha = \beta$.

Átszorzás után az V-ben adott feltétel a $\sin 2x = 2\sin x\cos x$ azonosság alapján a $\sin 2\alpha = \sin 2\beta$ formába írható át. Ez pontosan akkor teljesül egy háromszög két szögére, ha $2\alpha = 2\beta$, azaz $\alpha = \beta$, tehát a háromszög egyenlő szárú vagy akkor, ha $2\alpha+2\beta = 180°$, azaz ha a háromszög derékszögű.

A 2.20. feladat megoldása

Megoldás

a) $a^2 + b^2 = -2ab \iff a^2 + 2ab + b^2 = 0 \iff (a+b)^2 = 0 \iff (a+b) = 0$.

b) Ismeretes, hogy $(a+b+c)^3 = a^3+b^3+c^3+3(a+b)(b+c)(c+a)$, tehát $(a+b+c) = 0$ esetén $0 = a^3 + b^3 + c^3 + 3(a+b)(b+c)(c+a)$, de ilyenkor $a + b = -c$, $b + c = -a$, $c + a = -b$, így $0 = a^3 + b^3 + c^3 - 3abc$, tehát a $\Longrightarrow$ következtetés jogos.

A $\Longleftarrow$ következtetés viszont téves, mint azt az $a = b = c = 1$ ellenpélda mutatja.

Részletesebben arról van szó, hogy

$$a^3+b^3+c^3-3abc = (a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca) = (a+b+c)\frac{(a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2}{2},$$

és a legutóbbi tényező pontosan akkor zérus, ha $a = b = c$, tehát az $a^3 + b^3 + c^3 = 3abc$ összefüggés pontosan akkor teljesül, ha $a + b + c = 0$ vagy $a = b = c$.

10.2. Geometria és algebra – feladatok megoldása

A 2.1. feladat megoldása

Jelölje a tollkészlet, a radír és a ceruza árát rendre τ, ρ, γ. A szöveg alapján ezekre az alábbi egyenletrendszer írható fel:

$$\left.\begin{aligned} \tau + \rho &= 240 \\ \rho + \gamma &= 100 \\ \gamma + \tau &= 280 \end{aligned}\right\} \tag{10.1}$$

Az egyenletrendszert többféleképpen is kezelhetjük.

I. eljárás az egyenletrendszer megoldására
Küszöböljük ki az ismeretleneket!

$$\left.\begin{aligned} \rho &= 240 - \tau \\ (240-\tau) + \gamma &= 100 \\ \gamma + \tau &= 280 \end{aligned}\right\} \iff \left.\begin{aligned} \rho &= 240 - \tau \\ \gamma &= \tau - 140 \\ (\tau - 140) + \tau &= 280 \end{aligned}\right\} \iff$$

$$\iff \left.\begin{aligned} \rho &= 240 - 210 = 30 \\ \gamma &= 210 - 140 = 70 \\ \tau &= 210 \end{aligned}\right\}$$

tehát a radír 30 Ft-ba, a ceruza 70 Ft-ba, a tollkészlet 210 Ft-ba került.

II. eljárás az egyenletrendszer megoldására
Ne bontsuk meg a szimmetriát! Adjuk össze (10.1) mindhárom egyenletét!

$$\begin{aligned}(\tau+\rho)+(\rho+\gamma)+(\gamma+\tau) &= 240+100+280\\ 2(\tau+\rho+\gamma) &= 240+100+280\\ \tau+\rho+\gamma &= \tfrac{240+100+280}{2}\end{aligned}\tag{10.2}$$

és ebből

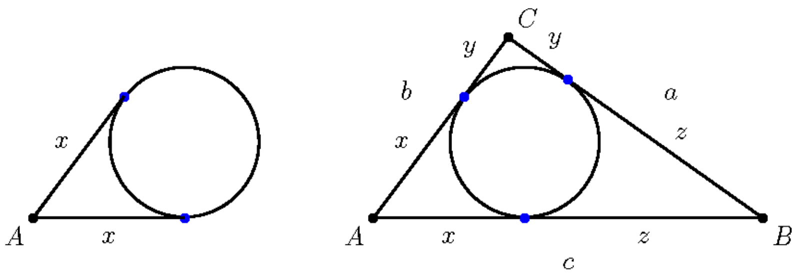
$$\begin{aligned}\gamma &= (\tau+\rho+\gamma)-(\tau+\rho) = \tfrac{240+100+280}{2}-240 = \tfrac{-240+100+280}{2} = 70\\ \tau &= (\tau+\rho+\gamma)-(\rho+\gamma) = \tfrac{240+100+280}{2}-100 = \tfrac{240-100+280}{2} = 210\\ \rho &= (\tau+\rho+\gamma)-(\gamma+\tau) = \tfrac{240+100+280}{2}-280 = \tfrac{240+100-280}{2} = 30.\end{aligned}\tag{10.3}$$

A 2.2. feladat megoldása

Ismeretes az alábbi összefüggés:

Lemma („*Az érintőszakaszok egyenlősége*”)

Külső pontból a körhöz két érintő húzható, és a két érintőnek a közös pontjuktól a körön való érintési pontig terjedő szakasza egyenlő hosszú.



10.5. ábra.

Ilymódon a csúcsok és a beírt kör érintési pontjai közti x, y, z szakaszokra (lásd az ábrát):

$$\left.\begin{aligned}x+y &= b\\ y+z &= a\\ z+x &= c\end{aligned}\right\},\tag{10.4}$$

amiből

$$\begin{aligned}x &= s-a\\ y &= s-c\ ,\\ z &= s-b\end{aligned}\tag{10.5}$$

ahol $s=\frac{a+b+c}{2}$ a háromszög kerületének fele (*semi*perimeter).

A 2.3. feladat megoldása

A 2.4. feladat megoldásai

A 2.4. fel. I. megoldása

Ha most is árakról vagy szakaszhosszakról van szó, tehát a változók értékei csak nemnegatív számok lehetnek, akkor nincs megoldás a konkrét esetben. A második egyenletben ugyanis $x_2 \leq 100$, így az elsőben $x_1 \geq 140$, de ez ellentmond az utolsó egyenletnek.

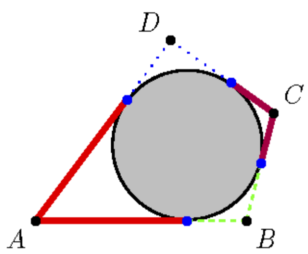
A 2.4. fel. II. megoldása

Az első két egyenlet összehasonlításából $x_1 = x_3 + 140$, míg az utolsó kettőéből $x_1 = x_3 - 210$. Ez egyszerre nem lehetséges tehát az egyenletrendszernek nincs megoldása.

A 2.5. feladat megoldása

10.1. Tétel *Ha egy négyszögbe kör írható, akkor két szemközti oldalának összege egyenlő a másik két szemközti oldalának összegével.*

Bizonyítás. Valóban, ezen összegek egyenlők a négy érintőszakasz összegével (lásd a 10.6. ábrát), így egymással is egyenlők.



10.6. ábra.

A Tételből következik, hogy feladatunkban $x + 6 = 5 + 8$, azaz $x = 7$.

A 2.6. feladat megoldása

Négy ismeretlenünk van, de csak három független egyenlet, így vagy nem lesz megoldás vagy végtelen sok lesz. Most, hogy $a + c = b + d$ végtelen sok megoldás lesz. Az egyenletrendszer ekvivalens átalakításaival:

$$\left.\begin{aligned} x_2 =& \; a - x_1 \\ (a - x_1) + x_3 =& \; b \\ x_3 + x_4 =& \; c \\ x_4 + x_1 =& \; d \end{aligned}\right\} \iff \left.\begin{aligned} x_2 =& \; a - x_1 \\ x_3 =& \; (b - a) + x_1 \\ (b - a) + x_1 + x_4 =& \; c \\ x_4 + x_1 =& \; d \end{aligned}\right\} \iff$$

$$\left.\begin{aligned} x_2 =& \; a - x_1 \\ x_3 =& \; (b - a) + x_1 \\ x_4 =& \; (c - b + a) - x_1 \\ (c - b + a) - x_1 + x_1 =& \; d \end{aligned}\right\} \iff \left.\begin{aligned} x_2 =& \; a - x_1 \\ x_3 =& \; (b - a) + x_1 \\ x_4 =& \; (c - b + a) - x_1 \\ 0 =& \; d - c + b - a \end{aligned}\right\}$$

tehát x_1-nek tetszőleges értéket adhatunk, mindegyikhez tartozik az egyenletrendszer egy – és csakis egy – megoldása.

A 2.7. feladat megoldása

Ez kevés adat, öt számból $\binom{5}{2} = 10$-féleképpen választható ki kettő, tehát tíz összeget kellett volna megadni.

az első ötlet: A szimmetria megtartása

Adjuk össze a tíz számot! A b) és c) esetben így konkrétan 20-at kapunk. Ebben az összegben az öt ismeretlen mindegyike négyszer szerepel, mert mindegyik másik változóval egyszer-egyszer. Tehát az öt változó összege:

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 5. \tag{10.6}$$

a második ötlet A szimmetria elrontása

Jelöljük a változókat úgy, hogy indexük kifejezze egymást közti nagyságrendjüket, azaz legyen

$$x_1 \leq x_2 \leq x_3 \leq x_4 \leq x_5. \tag{10.7}$$

Így a legkisebb összeget $x_1 + x_2$, a következőt $x_1 + x_3$ fogja adni, míg $x_4 + x_5$ lesz a legnagyobb összeg, a következő legnagyobb pedig $x_3 + x_5$.

$$x_1 + x_2 = -7 \qquad x_4 + x_5 = 11. \tag{10.8}$$

E két egyenlet összegét összehasonlítva a (10.8) egyenlettel kapjuk, hogy $x_3 = 1$. Mivel $x_1 + x_3 = -4$, így $x_1 = -5$ és $x_3 + x_5 = 8$, azaz $x_5 = 7$, végül újra a (10.8) egyenletekből $x_2 = -2$ és $x_4 = 4$. Az öt szám:

$$x_1 = -5, \qquad x_2 = -2, \qquad x_3 = 1, \qquad x_4 = 4, \qquad x_5 = 7. \tag{10.9}$$

Ezeknek az értékeknek a kiszámításához csak a tíz megadott szám összegét valamint a nagyságrendi sorrendben két–két szélső értéket használtuk. Ezekben az adatokban a b), c) feladatrészek nem térnek el egymástól. A (10.9) számok kéttagú összegei a c) feladatrész eredményeit adják, tehát annak van megoldása és az egyértelmű, míg b)-nek nincs.

A 2.8. feladat megoldása

A 4, 6 egység hosszú oldalak közös csúcsától a 6 hosszú oldal felé indulva körbe az egyes érintőszakaszok hosszát jelölje x_1, x_2, x_2, x_3, x_3, x_4, x_4, x_5, x_5 és x_1. Ezekre tehát

$$x_1 + x_2 = 6, \quad x_2 + x_3 = 5, \quad x_3 + x_4 = 3, \quad x_4 + x_5 = 3, \quad x_5 + x_1 = 4.$$

Az öt egyenlet összegének fele:

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 10,5$$

míg a második és a negyedik egyenlet összege:

$$x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 8,$$

azaz $x_1 = 2,5$ és ebből $x_2 = 3,5$.

Megjegyzés a 2.8. fel. megoldásához

Ez a megoldás bizonyos értelemben hiányos. Meg kellene mutatni, hogy létezik is a feladat feltételeinek megfelelő négyszög. Ettől most eltekintünk, annál is inkább, mert a feladat szövege erőteljesen sugallja, hogy egy létező négyszögről van szó.

A 2.10. feladat megoldásai

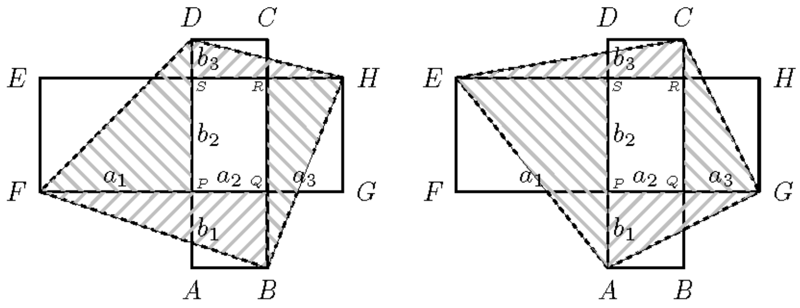
A 2.10. fel. I. megoldása

(*Algebra*)

A téglalapok egymást $3-3$ részre osztják. Nevezzük el ezeket a részeket (lásd a 10.7. ábrát)!

A téglalapok egymást egy $PQRS$ kis téglalapban metszik. A vizsgált négyszögek kisebb részekre bonthatók, amelyek területe külön-külön egyszerűen felírható:

$$\begin{aligned} T_{BHDF} &= T_{PQRS} + T_{BHR} + T_{HDS} + T_{DPF} + T_{FQB} \\ &= a_2b_2 + \tfrac{(b_1+b_2)a_3+(a_2+a_3)b_3+(b_2+b_3)a_1+(a_1+a_2)b_1}{2} \\ &= \tfrac{2a_2b_2+b_1a_3+b_2a_3+a_2b_3+a_3b_3+b_2a_1+b_3a_1+a_1b_1+a_2b_1}{2}, \end{aligned}$$



10.7. ábra.

illetve

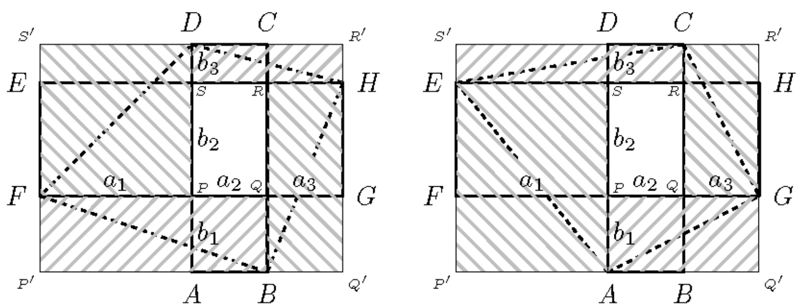
$$\begin{aligned} T_{AGCE} &= T_{PQRS} + T_{AGP} + T_{GCQ} + T_{CER} + T_{EAS} \\ &= a_2b_2 + \frac{(a_2+a_3)b_1+(b_2+b_3)a_3+(a_1+a_2)b_3+(b_1+b_2)a_1}{2} \\ &= \frac{2a_2b_2+a_2b_1+a_3b_1+b_2a_3+b_3a_3+a_1b_3+a_2b_3+b_1a_1+b_2a_1}{2}. \end{aligned}$$

Ha tagról tagra összehasonlítjuk a két átalakítás végén kapott két tört számlálóját láthatjuk, hogy a két terület megegyezik.

A 2.10. fel. II. megoldása

(*Geometria és algebra*)

Foglaljuk be a két téglalapot egy nagy téglalapba és tekintsük a két téglalap metszeteként adódó kis téglalpot is (a 10.8. ábrán $P'Q'R'S'$ illetve $PQRS$)! Mind a két négyszög tartalmazza a kis téglalapot, és látni fogjuk, hogy a nagy és kis téglalap közti rész területét mind a ketten megfelezik.



10.8. ábra.

Valóban,

$$\begin{aligned}
T_{BHDF} &= T_{PQRS} + T_{BHR} + T_{HDS} + T_{DFP} + T_{FQB} = \\
&= T_{PQRS} + \tfrac{T_{BQ'HR}}{2} + \tfrac{T_{HR'DS}}{2} + \tfrac{T_{DS'FP}}{2} + \tfrac{T_{FP'BQ}}{2} \\
&= T_{PQRS} + \tfrac{T_{P'Q'R'S'} - T_{PQRS}}{2} = \tfrac{T_{P'Q'R'S'} + T_{PQRS}}{2}.
\end{aligned}$$

illetve

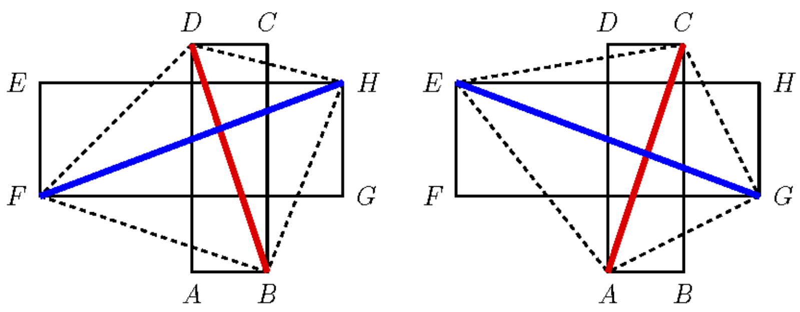
$$\begin{aligned}
T_{AGCE} &= T_{PQRS} + T_{AGP} + T_{GCQ} + T_{CER} + T_{EAS} \\
&= T_{PQRS} + \tfrac{T_{AQ'GP}}{2} + \tfrac{T_{GR'CQ}}{2} + \tfrac{T_{CS'ER}}{2} + \tfrac{T_{EP'AS}}{2} \\
&= T_{PQRS} + \tfrac{T_{P'Q'R'S'} - T_{PQRS}}{2} = \tfrac{T_{P'Q'R'S'} + T_{PQRS}}{2}.
\end{aligned}$$

Ezzel beláttuk, hogy a két négyszög területe egyenlő.

A 2.10. fel. III. megoldása

(*Egybevágóság*)

Húzzuk be a vizsgált négyszögek átlóit, a BD, FH illetve az AC, GE szakaszokat (lásd a 10.9. ábrát)!



10.9. ábra.

A BD, AC szakaszok ugyanannak a téglalapnak az átlói, tehát egyenlő hosszúak. Az FH, EG szakaszok is egyenlőek, hiszen ők is egy téglalap átlói.

Ráadásul BD és FH szöge megegyezik AC és EG szögével. Valóban, a BD szakaszból az AC szakasz az AB szakasz felezőmerőlegesére vonatkozó tükrözéssel, az FH szakaszból EG az FG szakasz felezőmerőlegesére vonatkozó tükrözéssel kapható. A két tükörtengely párhuzamos, így a szakaszok szöge nem változik.

A négyszög területét meghatározza a két átlója és az átlóinak szöge. Ezek az adatok a $BHDF$, $AGCE$ négyszögeknél megegyeznek egymással, így területük is egyenlő.

A 2.11. feladat megoldásai

A 2.11. fel. I. megoldása

Illesszünk egy derékszögű koordinátarendszert a négyzethez, melyben a csúcsok koordinátái:

$$A(0;0), \qquad B(4;0), \qquad C(4;4), \qquad D(0;4), \qquad \text{és} \qquad E(0,1).$$

A következő három egyszerű összefüggést használjuk fel, amelyeket itt nem bizonyítunk:

I. Lemma
A $P(p_x, p_y)$ ponton átmenő m meredekségű egyenes egyenlete

$$y = m(x - p_x) + p_y.$$

II. Lemma
Az $m \neq 0$ meredekségű egyenesre merőleges egyenes meredeksége $\frac{-1}{m}$.

III. Lemma
Az $U(u_x; u_y)$, $V(v_x; v_y)$ pontok távolsága

$$UV = \sqrt{(u_x - v_x)^2 + (u_y - v_y)^2}.$$

Az EC egyenes meredeksége $\frac{3}{4}$ és átmegy E-n így I. Lemma szerint egyenlete:

$$EA: \qquad y = \frac{3}{4}x + 1.$$

Az erre merőleges B-n átmenő egyenes messe EC-t T-ben. Az I., II. Lemmák szerint:

$$BT: \qquad y = \frac{-4}{3}(x - 4).$$

A két egyenes $T(t_x; t_y)$ metszéspontjának koordinátái mindkét egyenes egyenletét igazzá teszik, így

$$\frac{3}{4}t_x + 1 = \frac{-4}{3}(t_x - 4),$$

amiből $t_x = \frac{52}{25}$ és ezt bármelyik egyenes egyenletébe visszaírva kapjuk, hogy $t_y = \frac{64}{25}$. A T pont és a B csúcs távolsága a III. Lemma alapján számítható:

$$BT = \sqrt{\left(4 - \frac{52}{25}\right)^2 + \left(\frac{64}{25}\right)^2} = \sqrt{\left(\frac{48}{25}\right)^2 + \left(\frac{64}{25}\right)^2} = \sqrt{\frac{48^2 + 64^2}{25^2}} =$$

$$= \sqrt{\frac{(16 \cdot 3)^2 + (16 \cdot 4)^2}{25^2}} = \sqrt{\frac{16^2 \cdot (3^2 + 4^2)}{25^2}} = \frac{16}{25}\sqrt{3^2 + 4^2} = \frac{16}{25} \cdot 5 = \frac{16}{5} = 3,2.$$

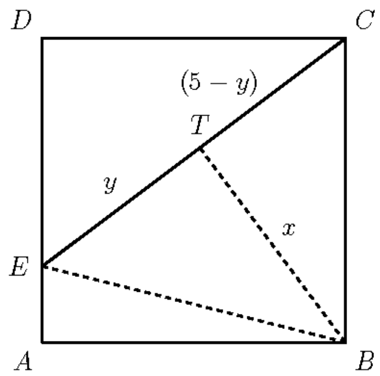
A B pont távolsága a CE egyenestől $3,2$ cm.

A 2.11. fel. II. megoldása

Jelölje a B-ből CE-re állított merőleges talppontját T, a keresett BT hosszt x, az ET szakasz hosszát y (lásd a 10.10. ábrát). Írjuk fel a Pitagorasz tételt a CDE, EAB derékszögű háromszögekre! (Mindenütt cm-ben számolunk.)

$$CD^2 + DE^2 = CE^2 \quad \Longrightarrow \quad 4^2 + 3^2 = CE^2 \quad \Longrightarrow \quad 5 = CE,$$

$$AB^2 + AE^2 = BE^2 \quad \Longrightarrow \quad 4^2 + 1^2 = BE^2 \quad \Longrightarrow \quad 17 = BE^2.$$



10.10. ábra.

Most használjuk a Pitagorasz tételt az ETB, CTB háromszögekben!

$$\begin{aligned} y^2 + x^2 &= 17, \\ (5-y)^2 + x^2 &= 16. \end{aligned}$$

E két egyenlet összevetéséből

$$y^2 + x^2 = (5-y)^2 + x^2 + 1$$

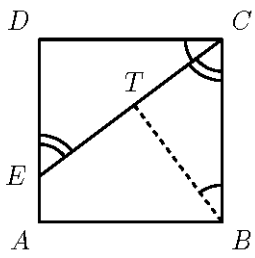
azaz

$$y^2 + x^2 = 25 - 10y + y^2 + x^2 + 1,$$

tehát $10y = 26$, $y = 2,6$ és innen $x = 3,2$. A B pont távolsága a CE egyenestől $3,2$ cm.

A 2.11. fel. III. megoldása

Vizsgáljuk a CDE háromszög szögeit (lásd a 10.11. ábrát)! $DCE\angle = \gamma$, $DEC\angle = \epsilon$, ahol $\gamma + \epsilon = 90°$. Az $ABCD$ négyzet C csúcsánál $DCE\angle + ECB\angle = 90°$, így $ECB\angle = \epsilon$. Ha B merőleges vetülete EC-n a T pont, akkor a BTC derékszögű háromszög egyik szöge ϵ, így $TBC\angle = \gamma$.



10.11. ábra.

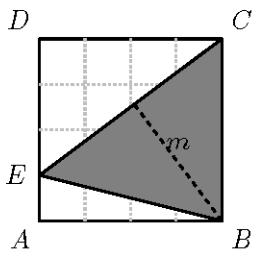
A CDE, BTC háromszögek szögei egyenlők, így ez a két háromszög hasonló. Írjuk fel az oldalak arányának egyenlőségét (felhasználjuk az előző megoldásból, hogy $CE = 5$ cm)!

$$\frac{DC}{CE} = \frac{BT}{CB} \qquad \Longrightarrow \qquad \frac{4}{5} = \frac{BT}{4} \qquad \Longrightarrow \qquad BT = 3,2 \text{ cm}.$$

A B pont távolsága a CE egyenestől $3,2$ cm.

A 2.11. fel. IV. megoldása

Az $ABCD$ négyzetet a CDE, EAB, BCE háromszögekre daraboljuk (lásd a 10.12. ábrát). Az első két háromszög derékszögű, területük 6 illetve 2 cm^2, a négyzet területe 16^2, így a „maradék” BCE háromszög területe 8 cm^2. Ebben a háromszögben a CE oldal hossza (a CDE derékszögű háromszögből Pitagorasz tétellel számolva) 5 cm, így a hozzá tartozó magasság $\frac{16}{5} = 3,2$ cm.

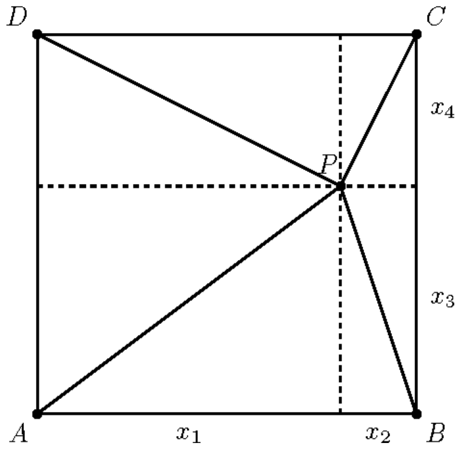


10.12. ábra.

Ez a magasság épp a kérdezett távolság.

A 2.12. feladat megoldása

Az algebrai levezetést a 10.13. ábra segíti.



10.13. ábra.

$$PA^2 = x_1^2 + x_3^2, \qquad PA^2 = x_2^2 + x_3^2,$$

$$PC^2 = x_2^2 + x_4^2, \qquad PD^2 = x_1^2 + x_4^2,$$

amiből

$$PA^2 + PC^2 = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 = PB^2 + PD^2.$$

Azaz $PD^2 = 7^2 + 1^2 - 5^2 = 25$, tehát $PD = 5$.

A 2.13. feladat megoldása

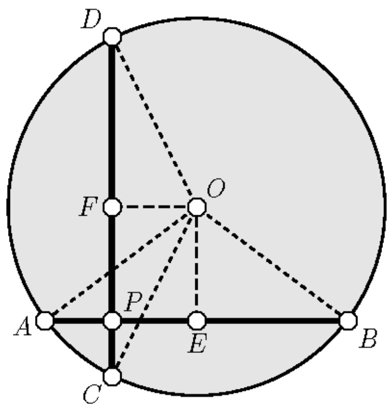
Jelölje a két húr metszéspontját P az a, b, c, d hosszú húrrészek P től különböző végpontját rendre A, B, C és D, az AB, CD húrok felezőpontját E illetve F, a kör középpontját O (lásd a 10.14. ábrát).

Az EO, FO szakaszok egy-egy húr felezőpontját a kör középpontjával kötik össze, így ezek a megadott húrok felezőmerőlegesei. Számoljuk ki a kör sugarát az OEA derékszögű háromszögben! Ebben

$$EA = \frac{1}{2}BA = \frac{a+b}{2},$$

míg az $OEPF$ négyszögben az E, P, F csúcsoknál derékszög van, így ez a négyszög téglalap, tehát

$$OE = FP = |FC - PC| = \left|\frac{1}{2}CD - c\right| = \left|\frac{c+d}{2} - c\right| = \left|\frac{d-c}{2}\right|.$$



10.14. ábra.

A kör sugarának négyzete:

$$OA^2 = EA^2 + OE^2 = \left(\frac{a+b}{2}\right)^2 + \left(\frac{d-c}{2}\right)^2,$$

azaz

$$r^2 = \frac{a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + 2ab - 2cd}{4}. \tag{10.10}$$

I. megjegyzés a 2.13. fel. megoldásához

Próbáljuk betűzés nélküli szöveggel elmondani a feladat eredményét!

Rögtön észrevesszük a (10.10) furcsaságát: melyik húr darabjainak szorzatát kell pozitív és melyikét negatív előjellel venni?

Hol jött be az aszimetria? Ott, ahol kiválasztottuk az OAE háromszöget, azaz az AB húrt! Ha a CD húrból indulunk ki, és pl az OCF háromszögben számolunk, akkor a fentiekhez hasonlóan az

$$FC = \frac{1}{2}CD = \frac{c+d}{2},$$

$$OF = EP = |EA - PA| = \left|\frac{1}{2}AB - a\right| = \left|\frac{b-a}{2}\right|,$$

képletekből az

$$OC^2 = r^2 = \frac{a^2 + b^2 + c^2 + d^2 - 2ab + 2cd}{4} \tag{10.11}$$

összefüggéshez jutunk.

A (10.10), (10.11) egyenletek összegéből azt kapjuk, hogy

$$r^2 = \frac{a^2 + b^2 + c^2 + d^2}{4}, \tag{10.12}$$

ami az eddigieknél rövidebben és szimmetrikusan válaszol a feladat kérdésére. A (10.10), (10.11) egyenletek különbségéből pedig kiderül, hogy a feladatban leírt szituációban

$$ab = cd. \tag{10.13}$$

Valóban, ez az összefüggés a „Szelőtétel” – a P pontból húztunk két szelőt a körhöz – speciális esete (lásd a 9.13. a) feladatot).

II. megjegyzés a 2.13. fel. megoldásához

A tanórán megkérhetjük a diákokat, hogy megadott adatokból – pl $a = 2$, $b = 8$, $c = 4$, $d = 6$ – szerkesszék meg az ábrát. Ekkor is fény derülhet a turpisságra.

10.3. Geometria feladatok megoldása

A 2.1. feladat megoldása

a) A Thalesz tétel igazolja az említett összefüggéseket.

b) Valójában ez a háromszög nem jön létre, az E_k, E_l pontok egybeesnek egymással és a k, l körök P-től különböző Q metszéspontjával. Ha ugyanis a k körre és annak PK átmérőjére alkalmazzuk Thalesz tételét, akkor azt kapjuk, hogy $KQP\angle = 90°$, míg az l körben ehhez hasonlóan $LQP\angle = 90°$, azaz $KQL\angle = 180°$, a KL egyenes Q-ban metszi a k és az l kört is.

A 2.2. feladat megoldásai

A 2.2. fel. I. megoldása

(*A szögfelező mint mértani hely*)

A C pont az AB egyenestől 1 egységnyire van. Mutassuk meg, hogy C az AD egyenestől is 1 egységnyi távolságra van!

A 2.2. fel. II. megoldása

(*Terület*)

Az ABD, ABC, BCD, DAC háromszög területét kiszámolva igazoljuk, hogy C az ABD háromszög beírt körének középpontja!

A 2.2. fel. III. megoldása

(*Egyenlő szárú háromszög*)

Pitagorasz tételéből tudjuk, hogy $AD = 5$ egység. Az $E(5;0)$ pont segítségével kiegészítjük a háromszöget az AED egyenlő szárú háromszöggé. Mutassuk meg, hogy AC ebben magasságvonal!

A 2.2. fel. IV. megoldása

(*Vektorok*)

Vegyük fel a $\underline{b} = \overrightarrow{AB}$, $\underline{c} = \overrightarrow{AC}$, $\underline{d} = \overrightarrow{AD}$ vektorokat! Mivel $\underline{b}$ hossza 4, $\underline{d}$ hossza 5 egység, ezért az

$$5\underline{b} = (20;0), \qquad 4\underline{d} = (16;12)$$

vektorok egyenlő hosszúak.

$5\underline{b}$ és $4\underline{d}$ közrezárt szöge a $BAD\sphericalangle$. Így az A illetve a két vektor végpontja által meghatározott háromszög egyenlőszárú, ezért a szögfelező és a súlyvonal egybeesik. A súlyvonal a felezőpontba mutató vektor:

$$\underline{s} = \frac{5\underline{b} + 4\underline{d}}{2} = \frac{(20;0) + (16;12)}{2} = (\frac{36}{2}; \frac{12}{2}) = (18;6).$$

Ez a vektor megegyezik a $6\underline{c} = 6(3;1) = (18;6)$ vektorral, tehát a szögfelező és $\underline{c}$ ugyanabba az egyenesbe esnek, ezért AC valóban felezi a $BAD\sphericalangle$ szöget.

A 2.2. fel. V. megoldása

Alkalmazzuk a Szögfelező-tételt (2.3. feladat)!

A 2.4. feladat megoldása

Írjuk fel a koszinusztételt az ADB háromszögben az AB oldalra valamint az ADC háromszögben az AC oldalra! Mivel $BDA\angle + ADC\angle = 180°$, így ezen szögek koszinuszai egymás ellentettjei, a két egyenletből kiejthetők és kapjuk, hogy

$$AD^2 = AB^2\frac{DC}{BC} + AC^2\frac{DB}{BC} - DB \cdot DC. \tag{10.14}$$

A 2.5. feladat megoldása

Ismeretes, hogy bármely négyszög oldalfelező pontjai paralelogrammát alkotnak, melynek oldalai párhuzamosak az eredeti négyszög átlóival. Mivel egy paralelogramma pontosan akkor húrnégyszög, ha téglalap, így a) és b) ekvivalens.

A b), c) állítások is ekvivalensek. Ismeretes ugyanis, hogy egy háromszög a és b oldala között aszerint van hegyes-, derék- illetve tompaszög, hogy $a^2+b^2>c^2$, $a^2+b^2=c^2$, vagy $a^2+b^2<c^2$. Ezt felhasználva az ekvivalencia az átlóegyenesek metszéspontja és a négyszög szomszédos csúcsai alkotta négy háromszög segítségével igazolható.

A d) állításból következik a többi állítás, de azokból nem következik d).

A 2.6. feladat megoldása

Az I. állításból következik a III. állítás, és a II. állításból is következik a III. állítás. A III. állításból következik, hogy az I., II. állítások közül legalább az egyik igaz. Az I., II. állítások közt nincs logikai kapcsolat.

A 2.7. feladat megoldása

Segítség a 2.7. feladathoz

Alkalmazzuk a Stewart-tételt illetve a szögfelező-tételt!

Az I., II. állítások közt nincs logikai kapcsolat. Látni fogjuk, hogy az I., II., állításokból következik a III. állítás, míg a III. állításból levezethető, hogy I. vagy II. biztosan teljesül.

A Stewart tétel szerint

$$AD^2=\frac{AB^2\cdot DC+AC^2\cdot DB}{BC}-BD\cdot DC,$$

azaz III. ekvivalens a

$$\frac{AB^2\cdot DC+AC^2\cdot DB}{BC}=AB\cdot AC$$

relációval. Ez az $x=\frac{AB}{AC}$ változóra nézve másodfokú egyenletnek is felfogható:

$$DCx^2-(DB+DC)x+DB=0.$$

Ez szorzat alakban:

$$(x-1)(DCx-DB)=0, \tag{10.15}$$

azaz $x=1$, tehát a háromszög egyenlő szárú ($AB=AC$), vagy $\frac{AB}{AC}=\frac{DB}{DC}$, tehát AD szögfelező.

A 2.8. feladat megoldása

a) Nem.

b) Az I., II. $\Longrightarrow$ III. és az I., III. $\Longrightarrow$ II. állítások könnyen igazolhatóak ha az ábrát olyan háromszögekre osztjuk, amelyek egyik oldala az eredeti háromszög kerületén van, az azzal szemköztes csúcsuk pedig a beírt kör középpontja. Az ilyen háromszögek magassága a beírt kör sugara, így területük összehasonlítása a kerületük összehasonlítását jelenti.

II., III. $\Longrightarrow$ I.: ha egy egyenes felezi a kerületet, akkor a kerülettel való metszéspontjait a beírt kör középpontjával összekötő szakaszok felezik a területet (lásd az előző gondolatmenetet). Másrészt maga az egyenes is felezi a területet, így illeszkedik rá a beírt kör középpontja.

A 2.9. feladat megoldása

a) Igen.

Ha a beírt kör I középpontja egyenlő távolságra van az A, B csúcsoktól, akkor IAB egyenlő szárú háromszög, amely szimmetrikus az AB szakasz t felezőmerőlegesére. A CA, CB oldalak a beírt kört érintik és különböznek az AB oldaltól. Az A és a B csúcson át AB-n kívül csak egy-egy további érintő húzható a beírt körhöz, és ez az AB egyenes AI-re illetve BI-re vonatkozó tükörképe. Ezek egymás t-re vonatkozó tükörképei, hiszen AB önmaga tükörképe, míg AI és BI egymás tükörképei. Így ABC is szimmetrikus t-re, azaz egyenlő szárú.

b) Nem.

Jelölje az AC, BC oldalak felezőpointját F_{AC} illetve F_{BC}, míg a beírt kör érintési pontját ezeken az oldalakon T_{AC} és T_{BC} (lásd a 10.15. ábrát).

Az $IT_{AC}F_{AC}$, $IT_{BC}F_{BC}$ háromszögek derékszögűek és IT_{AC}, IT_{BC} oldalaik egyenlőek (a beírt kör sugara), így az IF_{AC}, IF_{BC} szakaszok pontosan akkor egyenlőek, ha a $T_{AC}F_{AC}$, $T_{BC}F_{BC}$ szakaszok egyforma hosszúak.

Ismeretes, hogy (a szokásos jelölésekkel)

$$CT_{AC} = CT_{BC} = \frac{a+b-c}{2}, \qquad CF_{AC} = \frac{b}{2}, \qquad CF_{BC} = \frac{a}{2},$$

azaz

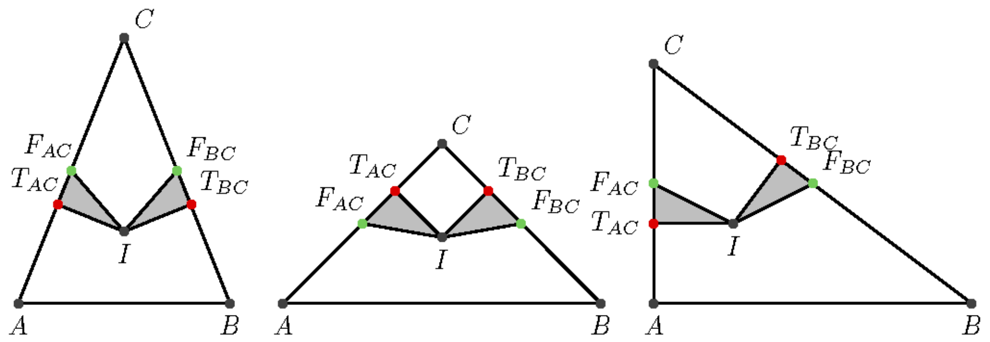
$$T_{AC}F_{AC} = \left|\frac{a-c}{2}\right|, \qquad T_{BC}F_{BC} = \left|\frac{b-c}{2}\right|.$$

A két vizsgált szakasz tehát pontosan akkor egyenlő, ha (lásd a 10.15 ábrát)

$\frac{a-c}{2} = \frac{b-c}{2}$, azaz ha $a = b$, vagy ha

$-\frac{a-c}{2} = \frac{b-c}{2}$, azaz ha $c = \frac{a+b}{2}$.

Az utóbbi esetre példa az a nevezetes háromszög, amelynek oldalai 3, 4 és 5 egység hosszúak.



10.15. ábra.

A 2.10. feladat megoldása

Kétféle háromszögben fordul elő a megadott tulajdonság: az egyenlő szárúban ($AB = AC$) és abban, amelyikben $BAC\angle = 60°$. Ezt alább indokoljuk.

Az IN_BA, IN_CA háromszögek két oldala ($AI = AI$, és $IN_B = IN_C$) és az egyikkel szemközti szög $IAN_B\angle = N_CIA\angle$ egyenlő. Ha végiggondoljuk a háromszög szerkesztését ezekből az adatokból, akkor láthatjuk, hogy most az $IN_CA\angle$, $IN_BA\angle$ szögek vagy egyenlőek, vagy 180°-ra egészítik ki egymást. Ezek a szögek a BN_CC, CN_BB háromszögek külső szögei, tehát kifejezhetők az eredeti háromszög szögeivel: $IN_CA\angle = \beta + \frac{\gamma}{2}$, míg $IN_BA\angle = \gamma + \frac{\beta}{2}$.

Ha $IN_CA\angle = IN_BA\angle$, akkor $\beta = \gamma$, az ABC háromszög egyenlő szárú. Ha $IN_CA\angle + IN_BA\angle = 180°$, akkor $\beta + \gamma = 120°$, azaz $\alpha = 60°$.

Megfordítva, ha $\alpha = 60°$, akkor $\frac{3}{2}(\beta + \gamma) = 180°$, azaz $IN_CA\angle + IN_BA\angle = 180°$, így az IN_BAN_C négyszög húrnégyszög, amelyben az egymással egyenlő $IAN_B\angle$, $N_CAI\angle$ szögekhez egyenlő hosszúságú húrok tartoznak, azaz $IN_B = IN_C$.

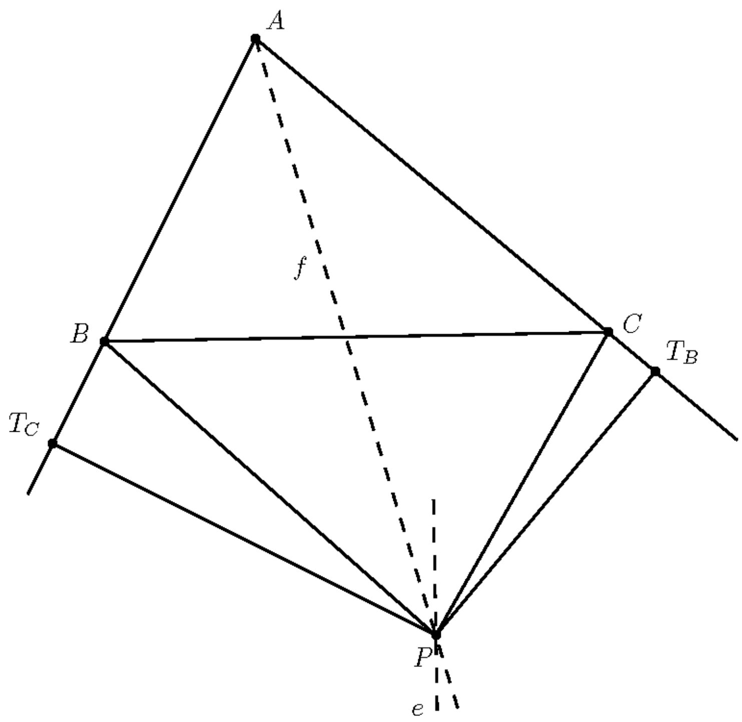
előzetes megjegyzés a 2.11. feladathoz

A középiskolás diákok tipikus válasza: az a hiba, hogy az ábra rossz, mert a P pont a háromszögön kívül van, a háromszögek nem „úgy" állnak. Dr Agynak erre is van gondolatmenete.

Lehetséges, hogy a T_B, T_C pontok nem az oldalakon, hanem azok meghosszabbításai helyezkednek el (lásd a 10.16. ábrát). A feladat szövegében leírt gondolatmenet 1-5. lépései most is helyesek, a 6. részt kissé módosítani kell.

6'. A 4., 5. állításokból következik, hogy $AB = AC$. Valóban $AB = AT_C - T_CB$, $AC = AT_B - T_BC$ és ha egyenlőkből egyenlőket vonunk ki, akkor egyenlőket kapunk.

Így a 7. konklúzió is helyes marad, minden háromszög szabályos.



10.16. ábra.

A 2.11. feladat megoldása

Az 1., 2., 3., 4., 5. logikai lépések hibátlanok. A hiba valóban az ábrában van.

A BC szakasz felezőmerőlegese és a $BAC\angle$ szögfelezője is felezi az ABC háromszög körülírt körének A-t nem tartalmazó BC ívét. A két egyenes közös pontja lesz ezen ív P felezőpontja.

Ebből következik, hogy a AT_BPT_C négyszög húrnégyszög, azaz az $AT_BP\angle$, $PT_CA\angle$ szögek 180°-ra egészítik ki egymást. Ez azt jelenti, hogy az PT_BC, PT_CB háromszögek úgy egybevágóak egymással, hogy ha T_B az AC szakaszon van, akkor T_C az AB szakaszon kívülre esik, míg ha T_B az AC szakaszon kívül van, akkor T_C az AB szakaszra esik.

Így a 6. lépés helyesen ez: vagy $AB = AT_C + T_CB$ és $AC = AT_B - T_BC$ vagy $AB = AT_C - T_CB$ és $AC = AT_B + T_BC$.

Így az egymással egyenlő AT_C, AT_B szakaszok egyikéhez hozzáadjuk, a másikból pedig kivonjuk az egymással egyenlő T_CB, T_BC szakaszokat. Az AB, AC szakaszok így akkor és csakis akkor lesznek egyenlőek, ha a T_CB, T_BC szakaszok hossza zérus, azaz ha $ABP\angle = ACP\angle = 90°$, tehát ha AP a körülírt kör átmérője. Erre az átmérőre, ami szögfelező is, természetesen szimmetrikus a háromszög, azaz egyelő szárú. Más esetben nem az.

10.4. Algebra feladatok megoldása

A 2.1. feladat megoldása

Ésszerű próbálgatással juthatunk eredményre:

a) A lehető legkisebb számot érdemes a lehető legnagyobbal osztani: $123 : 54 = 2{,}2\ldots$

b) A lehető legnagyobb számot érdemes a lehető legkisebbel osztani: $543 : 12 = 45{,}25$.

c) $354 : 12 = 29{,}5$.

d) $412 : 35 = 11{,}7\ldots$

e) Jó megoldás például az $532 : 14 = 38$ (vagy $215 : 43 = 5$).

A 2.2. feladat megoldása

$(10a + b)(10c + d) = (10b + a)(10d + c)$, amiből $ac = bd$.

A 2.3. feladat megoldása

$(5 + 6) \cdot 3 : 11 + 7 = 10 \qquad 5 + 6 \cdot 3 : (11 + 7) = 6$

$(27 + 18) : 9 + 36 \cdot 2 = 77 \qquad 27 + 18 : 9 + 36 \cdot 2 = 101$

$(27 + 18) : (9 + 36) \cdot 2 = 2 \qquad (27 + 18 : 9 + 36) \cdot 2 = 130$

$(39 - 27) : 3 : (3 + 1) = 1$

Megjegyzés a 2.3. feladathoz

A feladathoz kapcsolódó egyéb kérdések:

Hány különböző végeredményt kaphatunk zárójelek felhasználásával az első műveletsorból?

Ezek közül mennyi a legkisebb, és mennyi a legnagyobb végeredmény?

A 2.4. feladat megoldása

Tegyük fel, hogy x tojással indult el.

Az első vevőnek eladott $\frac{x+1}{2} = k$ tojást, maradt $\frac{x-1}{2} = k - 1$ tojása.

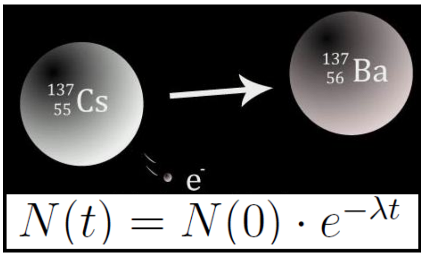
A második vevőnek eladott $\frac{k-1}{3} + \frac{1}{3} = l$ tojást, maradt $k - 1 - \frac{k}{3} = 2l - 1$ tojása.

A harmadik vevőnek eladott $\frac{2l-1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{l}{2} = n$-et, maradt $4n - 1 - n = 3n - 1$.

Ebből $x = 2k - 1 = 6l - 1 = 12n - 1$.

Vagyis a lehető legkevesebb számú tojás, amivel elindulhatott, 11 tojás. Az első vevőnek eladott 6-ot; a másodiknak a maradék harmadát és még egy harmadot, vagyis 2-t; a harmadiknak a maradék negyedét és még egy negyedet, vagyis 1-et; maradt 2 tojása.

Előzetes megjegyzés a 2.5. feladathoz



10.17. ábra. A cézium bomlása

A béta-sugárzás a neutronfelesleggel rendelkező atommagok bomlása. Egy neutron átalakul protonná, miközben egy elektron keletkezik. Az atomból nagy sebességgel kilépő elektron a béta-részecske. A béta-bomlás során az atom rendszáma egyel nő, tömegszáma változatlan marad. Pld a 10.4 ábrán látható módon az 55-ős rendszámú 137-es céziumizotópból 56-os rendszámú 137-es bárium lesz.

Amennyiben egy baleset során radioaktív anyagok kerülnek ki a környezetbe, eleinte elsősorban a rövid felezési idejű izotópok adhatnak okot az aggodalomra, mivel ezek képviselik eleinte a legnagyobb aktivitást. A csernobili atomerőmű baleset után közvetlenül a 131-es jód izotóp okozta a legnagyobb sugárterhelést a lakosság körében. 8 napos felezési ideje miatt azonban hamar lebomlott, így egy hónappal a baleset után már elenyésző hatása volt. Ma már a baleset során a környezetbe kikerült radioaktív 137-es cézium izotóp az érdekes, mivel felezési ideje 30 év.

A 2.5. feladat megoldása

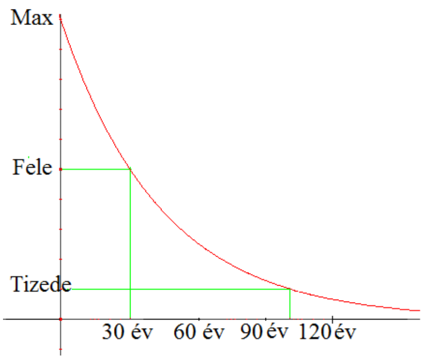
Azt az időtartamot nevezzük felezési időnek, ami alatt adott számú radioaktív atom fele elbomlik. A felezési idő jelentése a példánkban: ha induláskor van 10 000 cézium atom, akkor 30 év elteltével már csak 5000 db lesz, ami még nem bomlott el. Újabb 30 év, tehát 60 év elteltével már csak 2500 db, míg 90 év után csak 1250 db, 120 év után 625 darab el nem bomlott cézium atomot számolhatunk össze.

A pillanatnyi részecskeszámot $N(t) = N(0) \cdot e^{-\lambda t}$ alakban kell felírni (lásd a 10.4 ábrát).

A feladat a) részéhez λ értékét kell meghatározni. Tudjuk, hogy $N(30) = N(0)/2$ és $N(30) = N(0) \cdot e^{-30\lambda}$. Feltéve, hogy $N(0)$ nem nulla, egyszerűsítünk vele és megoldjuk a kapott egyenletet: $\lambda = \frac{\ln 2}{30}$.

A cézium bomlását a következő szabály írja le:

$$N(t) = N(0) \cdot e^{-\frac{\ln 2}{30} \cdot t}.$$



10.18. ábra. Bomlás: a cézium mennyisége az idő függvényében

A feladat b) részéhez ezt a szabályt alkalmazzuk: t mely értékére lesz

$$N(0) \cdot e^{-\frac{\ln 2}{30} \cdot t} = N(0)/2?$$

A grafikon és a fejben kiszámolt adatok alapján ez 90 és 120 év között van, a 90-hez közelebb. Az egyenletet megoldva

$$t = \frac{30 \cdot \ln 10}{\ln 2} \approx 99,6578$$

adódik (években).

A 2.6. feladat megoldása

a) Szélcsendben nyilván legfeljebb 440 mérföldnyi távolságra mehet el úgy, hogy visszafelé is elég üzemanyaga legyen.

20 mf/h ellenszél esetén odafelé csak 200, visszafelé 240 mf/h sebességgel tud haladni, így az üzemanyag $\frac{s}{200} + \frac{s}{240} = 4$ órára elég, amiből $s = \frac{4800}{11} < 440$ (kb. 436 mf).

b) Hátszél esetén ugyanez a helyzet, csak éppen az odafelé út vesz igénybe rövidebb időt, a visszafelé hosszabbat.

c) Merőleges szélirány esetén 1 óra alatt $\sqrt{220^2 - 20^2}$ mérföldet tud megtenni (oda is, vissza is), ami kb. 438 mf-et jelent.

d) Bontsuk fel a sebességvektort a haladási iránnyal párhuzamos és arra merőleges összetevőkre.

A 2.7. feladat megoldásai

A 2.7. fel. I. megoldása

Ha a díjmentesen megengedett csomag súlya x és Mr. Smith túlsúlya y, akkor Mr. Smith összesen $x + y$, Mrs. Smith pedig $x + \frac{4}{3}y$ súlyt vitt. Ha egyikük vitte volna az egész csomagot, akkor ő $2x + y + \frac{4}{3}y$ súlyt vitt volna, amiből a túlsúly $x + \frac{7}{3}y = 9y$ lett volna. Ebből $x = \frac{20}{3}y$, és mivel az összsúly 94 font, $2x + \frac{7}{3}y = \frac{47}{3}y = 94$ font, amiből $y = 6$, így $x = 40$ font. (és Mrs. Smith 48 fontot vitt, amiből a túlsúly 8 font, valóban 4/3-szorosa a Mr. Smith túlsúlyának)

A 2.7. fel. II. megoldása

Tételezzük fel, hogy a túlsúlyért annak mértékével egyenesen arányosan kell fizetni. Ha Mr. Smith egyedül repült volna kettőjük csomagjával, akkor a 13, 50 fonttal, amit fizetnie kellett volna, kifizette volna mindkettőjük túlsúlyát és még a felesége csomagjának különben külön díj fizetése nélkül vihető részét is. Vagyis ha a külön díjmentes csomagot túlsúlyként viszi valaki, azért 10 fontot kell fizetnie. Vagyis az összes 94 font súlyú poggyászért túlsúlyként 23, 50 fontot kéne fizetni.

Ezek szerint a túlsúlyként 10 fontnyi csomag 40 font súlyú.

Vagyis ezen a járaton egy személy 40 font vagy annál kisebb súlyú csomagot vihet magával ráfizetés nélkül.

A 2.8. feladat megoldása

Tegyük fel, hogy az apa x koronával rendelkezett és n gyereke volt.

Az első gyerek $100 + \frac{x-100}{10}$ koronát kapott, maradt $x - 100 - \frac{x-100}{10} = \frac{9x-900}{10} = y$

A második $200 + \frac{y-200}{10}$-et kapott, (maradt $y - 200 - \frac{y-200}{10}$).

Mivel minden gyerek ugyanannyit kapott, $100 + \frac{x-100}{10} = 200 + \frac{y-200}{10}$.

Felhasználva, hogy $y = \frac{9x-900}{10}$ azt kapjuk, hogy $x = 8100$, és 9 gyereke volt az apának, és mindegyikük 900 koronát kapott.

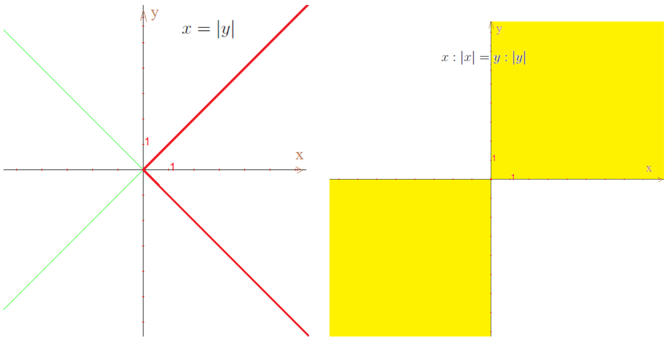
A 2.9. feladat megoldása

Az első motoros x órát volt úton, a második $\frac{x}{2}$ órát volt úton. Az első motoros $\frac{y}{3}$ órát pihent, a második y órát pihent. Mivel ugyanazt a távolságot ugyanannyi idő alatt tették meg, $x + \frac{y}{3} = \frac{x}{2} + y$ ebből $\frac{x}{2} = \frac{2y}{3}$, amiből $x = \frac{4}{3}y$, vagyis $y < x$, azaz a második motoros haladt gyorsabban.

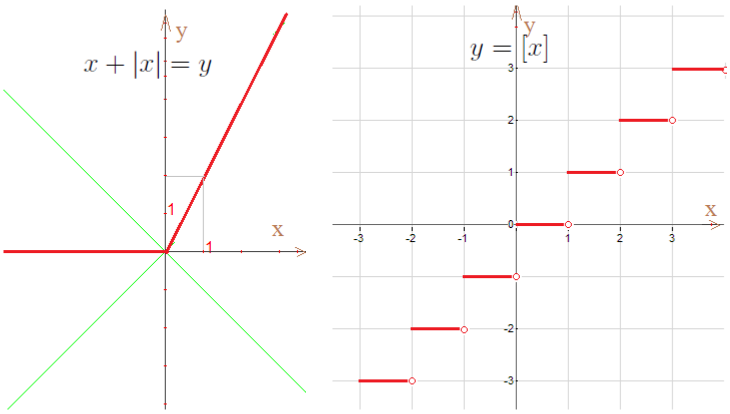
Lásd még a 7-8-os és a 9-10 matematika tagozatos gyűjtemény
http://matek.fazekas.hu/mathdisplay/cache/pdf/volume_a_i.pdf
http://matek.fazekas.hu/mathdisplay/cache/pdf/volume_a_ii.pdf
megfelelő fejezetének feladatait.

A 2.11. feladat megoldása

Az a), b) feladatok megoldása a 10.19 ábrapáron, c) és d) megoldása a 10.20 ábrapáron, e) és f) megoldása a 10.21 ábrapáron, g) és h) megoldása a 10.22 ábrapáron, míg i) megoldása a 10.23 ábrán látható.



10.19. ábra. A 2.11. a), b) mego.



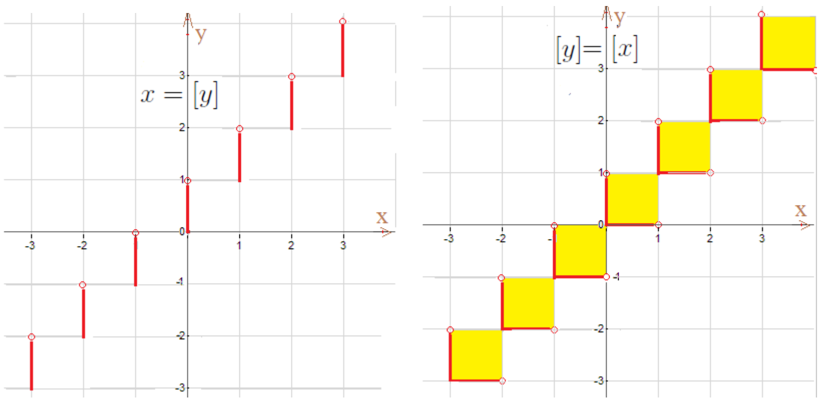
10.20. ábra. A 2.11. c), d) mego.

A 2.12. feladat megoldásai

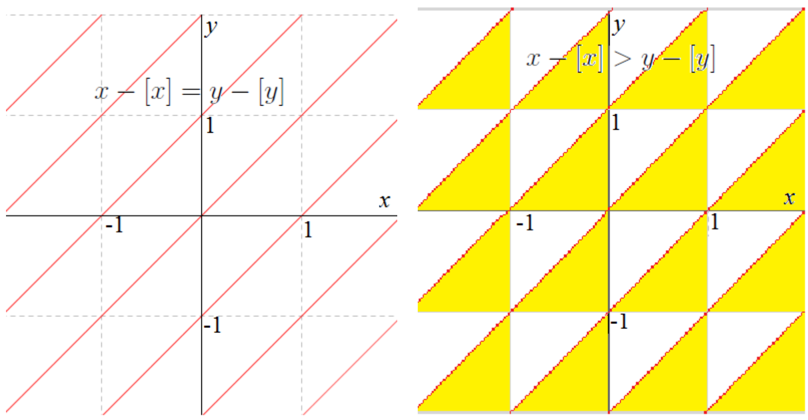
A 2.12. fel. szemléltetése

Hogyan változik az egyenes, miként metszi az adott függvény grafikonját, ha változtatjuk az m paraméter értékét?

Az alábbi linken animáció látható:



10.21. ábra. A 2.11. e), f) mego.



10.22. ábra. A 2.11. g), h) mego.

http://matek.fazekas.hu/portal/elte/elemifgyujt/html/08.html
A
http://matek.fazekas.hu/portal/elte/elemifgyujt/html/08i.html
weboldal interaktív GeoGebra animációt tartalmaz. Az m paraméter értékét a felhasználó kezeli, kísérletezhet vele.

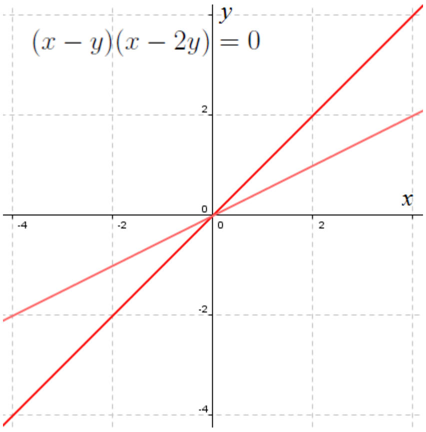
A 2.12. fel. eredménye

Ha $m < -2$, akkor egy megoldás van, $x = 0$.

Ha $m = -2$, akkor végtelen sok megoldás van, $x \leq -\frac{1}{2}$.

Ha $-2 < m < 0$, akkor két megoldás van, $x_1 = 0$ és $x_2 = \frac{-2}{m-2}$.

Ha $m = 0$, akkor végtelen sok megoldás van, $x \geq 1$ és $x = 0$.

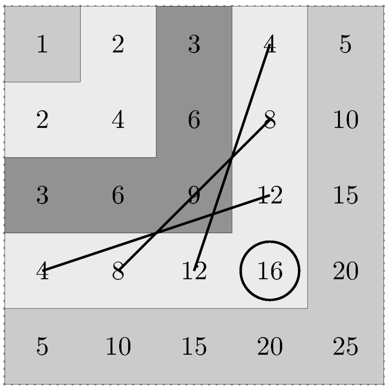


10.23. ábra. A 2.11. i) mego.

Ha $0 < m$, akkor egy megoldás van, $x = 0$.

A 2.13. feladat megoldása

Az n-edik ilyen L-alakú rész jobb alsó sarka a szorzótábla főátlójának n-edik eleme, azaz n^2. Az L-alakú rész többi elemét párosítsuk a 10.24 ábrán látható módon! A pár két tagja $k \cdot n$ és $n \cdot (n-k)$, ahol $n \in \{1, 2, \ldots (n-1)\}$. A két tag összege n^2, így az összes ilyen pár összege $(n-1)n^2$, a teljes összeg $n^2 + (n-1)n^2 = n^3$.



10.24. ábra.

I. megjegyzés a 2.13. feladathoz

Az első n ilyen L-alakú részben található számok összege tehát az első n pozitív egész szám köbének összege. Másrészt az első n L-alakú rész épp a bal felső $n \times n$-es részt adja ki a szorzótáblából. Ebben az $\{1, 2, \ldots, n\}$ számoknak az $\{1, 2, \ldots, n\}$ számokkal való szorzatai állnak. Ezek összege $(1 + 2 + \ldots + n) \cdot (1 + 2 + \ldots + n)$. Tehát az első n pozitív egész szám köbének összege megegyezik az első n pozitív egész szám összegének négyzetével.

II. megjegyzés a 2.13. feladathoz

A megoldást térben is szemléltethetjük, a szorzótáblában az $l \cdot k$ elemnek egy $1 \times l \times k$ méretű „lapos" téglatestet megfeleltetve az L-alakú részekhez tartozó testek egy-egy kockává állnak össze.

10.5. Statisztika feladatok megoldása

A 2.1. feladat megoldásai

A 2.1. a) mego.

Jelölje a keresett számot x!

Az $f(x) = (x-1)^2 + (x-5)^2 + (x-12)^2$ függvény minimumát keressük. A zárójeleket felbontva, teljes négyzetté alakítás után az $f(x) = 3(x-6)^2 + 62$ alakhoz jutunk. Mivel $(x-6)^2$ nemnegatív mennyiség, így a minimum ott lesz ahol ez nulla, azaz $x = 6$-nál. A minimum értéke 62.

Megjegyzés a 2.1. a) feladathoz

Az $\mathcal{A} = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ számsokaság (nem halmaz, mert ugyanaz a szám többször is előfordulhat közöttük) és $x \in \mathbb{R}$ valós szám *átlagos négyzetes eltérés*én az

$$\frac{(x-a_1)^2 + (x-a_2)^2 + \ldots + (x-a_n)^2}{n} = \frac{\sum_{i=1}^{n}(x-a_i)^2}{n} \tag{10.16}$$

kifejezés értékét értjük. Adott adatsokaság esetén akkor kapjuk a legkisebb átlagos négyzetes eltérést, ha x-nek az adatsokaság átlagát választjuk. Valóban:

$$\frac{\sum_{i=1}^{n}(x-a_i)^2}{n} = \left(x - \frac{\sum_{i=1}^{n} a_i}{n}\right)^2 + \frac{\sum_{i=1}^{n} a_i^2}{n} - \left(\frac{\sum_{i=1}^{n} a_i}{n}\right)^2. \tag{10.17}$$

A minimum értéke, a

$$D^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n} a_i^2}{n} - \left(\frac{\sum_{i=1}^{n} a_i}{n}\right)^2 \tag{10.18}$$

mennyiség az $\mathcal{A}$ adathalmaz *szórásnégyzete*, gyöke az adathalmaz *szórása*.

A 2.1. b) mego.

Most a $g(x) = |x-1| + |x-5| + |x-12|$ függvény minimumhelyét keressük. Mivel

$$|a| = \begin{cases} a, & \text{ha } a \geq 0; \\ -a, & \text{ha } a < 0; \end{cases}$$

így a $x < 1$, $1 \leq x < 5$, $5 \leq x < 12$, $12 \leq x$ halmazokon másképp szabadulhatunk meg az abszolútértéktől:

	$g(x) =$	$g(x) =$
$x < 1$	$(1-x)+(5-x)+(12-x)$	$18-3x$
$1 \leq x < 5$	$(x-1)+(5-x)+(12-x)$	$16-x$
$5 \leq x < 12$	$(x-1)+(x-5)+(12-x)$	$6+x$
$12 \leq x$	$(x-1)+(x-5)+(x-12)$	$3x-18$

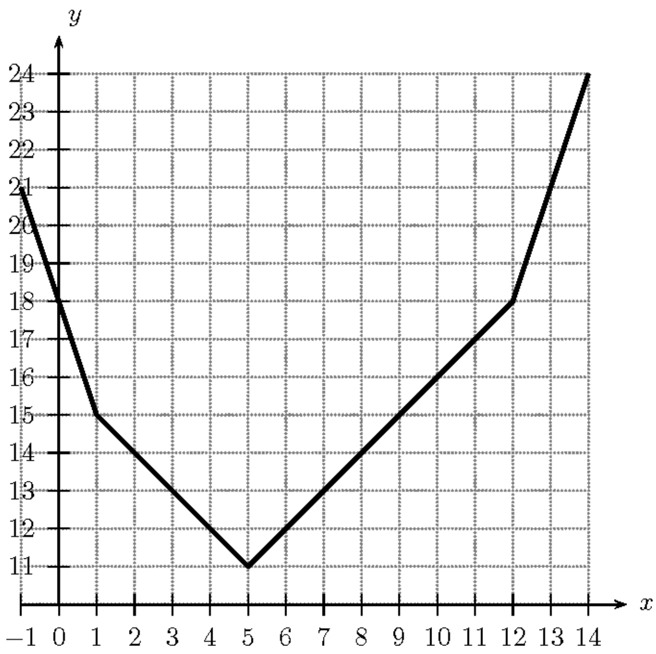
A függvény grafikonja a 10.25. ábrán látható.
A grafikonról leolvasható, hogy a függvény minimuma $x = 5$-nél van.

Az $\mathcal{A} = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ számsokaság és az $x \in \mathbb{R}$ valós szám *átlagos abszolú eltérés*én az

$$\frac{|x-a_1| + |x-a_1| + \ldots + |x-a_n|}{n} = \frac{\sum_{i=1}^{n} |x-a_i|}{n} \tag{10.19}$$

kifejezés értékét értjük. Alább igazoljuk, hogy az x számnak az $\mathcal{A}$ adatsokaságtól való átlagos abszolút eltérése akkor minimális, ha x az $\mathcal{A}$ nagyságrendben középső eleme (ha $\mathcal{A}$ elemszáma páratlan), illetve ha $\mathcal{A}$ középső két eleme között lévő tetszőleges szám (H elemszáma páros).

Tegyük fel, hogy az x szám úgy helyezkedik el a számegyenesen az $\mathcal{A}$ számsokasághoz képest, hogy annak k eleme kisebb vagy egyenlő x-nél és m eleme legalább akkora, mint x. Most változtassuk meg x-et egy kis Δx értékkel, oyan kicsivel, hogy még mindig m érték legyen nála nagyobb és k érték nála kisebb. Ekkor a távolságok abszolút értékeinek összege $\Delta x \cdot (m-k)$-val változik, tehát a megfelelő irányban – a „többség felé" – mozgatva csökken az összeg. Így az összeg monoton nő míg elérjük a középső számot, majd a két középső között (páros sok szám esetén) állandó, utána pedig csökken. Ez igazolja fenti állításunkat.



10.25. ábra.

Megjegyzés a 2.1. b) feladathoz

Az adatsokaság nagyság szerinti középső elemét (páratlan sok adat) illetve a két középső átlagát (páros sok adat) az adatsokaság *medián*jának nevezzük. A medián tehát minimalizálja az átlagos abszolút eltérést.

A 2.2. feladat megoldása

Felelevenítjük annak levezetését, hogy az átlagos négyzetes eltérés az átlagnál minimális. Az x szám átlagos négyzetes eltérése az $\{x_1; x_2; \dots; x_n\}$ számsokaságtól:

$$\frac{\sum_{i=1}^{n}(x-x_i)^2}{n} = x^2 - 2x\frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n} + \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}{n} =$$

$$= \left(x - \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n}\right)^2 + \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}{n} - \left(\frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n}\right)^2.$$

Látható, hogy a kifejezés a minimumát az $x = \overline{x} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n}$ számnál, a sokaság átlagánál veszi fel. Az átlag négyzetes eltérése a számsokaságtól a

$$D^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}{n} - \left(\frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n}\right)^2$$

szórásnégyzet. A levezetés és az elnevezések alapján az x szám átlagos négyzetes eltérése a számsokaságtól így is írható:

$$(x-\overline{x})^2+D^2.$$

Válasz a feladatra: igen megadható, $(11-3)^2+D^2=64+25=89$.

A 2.3. feladat megoldásai

A 2.3. a) mego.

A $P(x;y)$ pontra

$$\begin{array}{rcccc} PA^2 & = & (x-1)^2+(y-5)^2 & = & x^2-2x+y^2-10y+26 \\ PB^2 & = & (x-7)^2+(y-10)^2 & = & x^2-14x+y^2-20y+149 \\ PC^2 & = & (x-4)^2+(y-12)^2 & = & x^2-8x+y^2-24y+160, \end{array}$$

azaz

$$PA^2+PB^2+PC^2=3x^2-24x+3y^2-54y+335=3\cdot(x^2-8x+y^2-18y+111\frac{2}{3})=$$

$$=3\cdot\left((x-4)^2+(y-9)^2+14\frac{2}{3}\right).$$

Tehát a négyzetösszeg akkor minimális, ha $x=4$ és $y=9$, azaz P a $(4;9)$ pont.

A 2.3. b) mego.

Most

$$PA^2+PB^2+PC^2=3x^2-2(a_1+b_1+c_1)x+3y^2-2(a_2+b_2+c_2)y+(a_1^2+b_1^2+c_1^2+a_2^2+b_2^2+c_2^2)=$$

$$\begin{aligned} &=3\cdot\left[\left(x-\tfrac{a_1+b_1+c_1}{3}\right)^2+\left(y-\tfrac{a_2+b_2+c_2}{3}\right)^2\right]+ \\ &+3\cdot\left[\tfrac{a_1^2+b_1^2+c_1^2+a_2^2+b_2^2+c_2^2}{3}-\left(\tfrac{a_1+b_1+c_1}{3}\right)^2-\left(\tfrac{a_2+b_2+c_2}{3}\right)^2\right], \end{aligned}$$

azaz $P\left(\frac{a_1+b_1+c_1}{3};\frac{a_2+b_2+c_2}{3}\right)$.

A 2.3. c) mego.

A b) feladat számításait követve kapjuk, hogy a keresett mértani hely az ABC háromszög súlypontja körüli kör.

Megjegyzés a 2.3. feladathoz

Ez a síkgeometriai feladat a 2.1. a) feladat kiterjesztése. Az átlagos négyzetes eltérés és a szórásnégyzet egyik előnye éppen abban áll, hogy kényelmesen általánosíthatók több dimenzióra. Az átlagos abszolút eltérés kiterjesztése jóval bonyolultabb. Három síkbeli pont esetén még szép, megoldható feladat annak a pontnak a keresése, amelyiknek az adott pontoktól való távolságainak összege minimális (izogonális pont), de több pont esetén nagyon nehéz a kérdés.

A 2.5. feladat megoldásai

A 2.5. fel. I. megoldása

Ez természetesen nem fordulhatott elő. Adjunk gondolatban 9 pontot a legerősebb, 8-at a második legerősebb, ... , 1 pontot a leggyengébb játékosnak. Adjuk össze minden csapatnál a játékosok pontszámát. Ahol a legnagyobb pontszámot fogjuk kapni, az lesz a legerősebb csapat, mindenkit megver, és amelyik csapatnál a legkisebb lesz az összeg, azt mindenki megveri. Ha pedig egyenlő összpontszámok vannak, ott döntetlen lesz a csapateredmény, akkor sem lesz körbeverés.

Megjegyzés a 2.5. fel. I. megoldásához

Ez a megoldás, sajnos, hibás.

A 2.5. fel. II. megoldása

A számok — az előző megoldásban leírtakhoz hasonlóan — az egyéni játékosok erősségét jelzik:

A csapat: 9, 5, 1;
B csapat: 8, 4, 3;
C csapat: 7, 6, 2;

Két csapat tagjai 9 meccset játszanak egymással, és az egyik csapat akkor győzi le a másikat, ha tagjai összesen legalább 5 mérkőzést megnyernek.

A fenti csoportosításban az A csapat legyőzi a B-t , a B a C-t és C az A-t $5-5$ meccsen.

Tehát a feladat kérdésére a válasz igen.

Megjegyzés a 2.5. feladathoz

Folytatás a 7.7. feladatban.

10.6. Valószínűségszámítási feladatok megoldása

A 2.1. feladat megoldásai

A 2.1. fel. I. megoldása

Foglaljuk táblázatba a lehetőségeket! Az oszlopok az 1. kockával dobott számot (1. □), a sorok a 2. kockával dobottat (2. □) mutatják. A 36 mező felel meg a 36 lehetséges esetnek, fekete pöttyöt tettünk a vizsgált eseménynek megfelelő esethez tartozó mezőkbe.

A		1. □					
		1	2	3	4	5	6
	1						
	2		●		●		●
	3						
2. □	4		●		●		●
	5						
	6		●		●		●

B		1. □					
		1	2	3	4	5	6
	1	●	●	●	●	●	●
	2	●					
	3	●					
2. □	4	●					
	5	●					
	6	●					

Látható, hogy az A esemény a 36 elemi esemény közül 9-ben, a B esemény pedig 11 eseben valósul meg, tehát a B esemény valószínűsége nagyobb.

A 2.1. fel. II. megoldása

Az A esemény valószínűsége $P(A) = \frac{3}{6} \cdot \frac{3}{6} = \frac{9}{36} = \frac{1}{4}$.

A B esemény valószínűsége komplementer módszerrel számolható. Bármelyik dobásunk $\frac{5}{6}$ eséllyel nem 1-es, így $P(B) = 1 - \left(\frac{5}{6}\right)^2 = 1 - \frac{25}{36} = \frac{11}{36}$.

Tehát a B esemény valószínűsége nagyobb.

A 2.2. feladat megoldása

a) Az eseteket táblázatban gyűjtjük össze. Az „1. □" felirat alatt az első kockadobás lehetséges eredményeit, a „2. □" felirat mellett a második kockadobás lehetséges eredményét soroltuk fel.

A		1. □					
		1	2	3	4	5	6
	1						
	2						
	3						
2. □	4						●
	5					●	●
	6				●	●	●

B		1. □					
		1	2	3	4	5	6
	1	●	●	●			
	2	●	●	●			
	3	●	●	●			
2. □	4						
	5						
	6						

Látható, hogy az A esemény kevésbé valószínű, mint a B esemény, előbbinek $\frac{6}{36} = \frac{1}{6}$ az esélye, utóbbinak pedig $\frac{9}{36} = \frac{1}{4}$.

b) Mindkét esemény $\frac{1}{4}$ valószínűségű.

A 2.3. feladat megoldása

Annak valószínűsége nagyobb, hogy a hatjegyű szám nem állítható elő két háromjegyű szám szorzataként. Látni fogjuk, hogy a szorzatok száma kevés, még akkor is, ha a szorzatok értékét nem is vesszük tekintetbe, csak a tényezők értékét vizsgáljuk.

Hatjegyű számból $9 \cdot 10^5$ van, háromjegyűből $9 \cdot 10^2$. Ha a szorzatnak két különböző tényezője van, akkor ezeket

$$\binom{9 \cdot 10^2}{2}-$$

féleképpen választhatjuk ki. Mivel

$$\binom{9 \cdot 10^2}{2} < \frac{(9 \cdot 10^2)^2}{2} = \frac{8,1}{2} \cdot 10^5 < 4,1 \cdot 10^5,$$

így ezen lehetőségek száma $4,1 \cdot 10^5$-nál kevesebb.

$9 \cdot 10^2$ olyan szorzat van, amelynek két tényezője azonos és háromjegyű. Mivel

$$9 \cdot 10^2 < 0,4 \cdot 10^5,$$

összesen $4,5 \cdot 10^5$-nél kevesebb olyan hatjegyű szám van, amely két háromjegyű szám szorzata, így valóban annak esélye nagyobb, hogy egy hatjegyű szám nem ilyen alakú.

A 2.4. feladat megoldása

n kocka esetén

$$f(n) = n \cdot \frac{1}{6} \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^{n-1}$$

a vizsgált valószínűség. Vizsgáljuk ezen értékek arányát! Két egymást követő érték hányadosa:

$$\frac{f(n+1)}{f(n)} = \frac{n+1}{n} \cdot \frac{5}{6}.$$

Ezeknek a hányadosoknak a konkrét értéke:

$$\frac{f(2)}{f(1)} = \frac{2}{1} \cdot \frac{5}{6} = \frac{5}{3}, \qquad \frac{f(3)}{f(2)} = \frac{3}{2} \cdot \frac{5}{6} = \frac{5}{4},$$

$$\frac{f(4)}{f(3)} = \frac{4}{3} \cdot \frac{5}{6} = \frac{10}{9}, \qquad \frac{f(5)}{f(4)} = \frac{5}{4} \cdot \frac{5}{6} = \frac{25}{24},$$

$$\frac{f(6)}{f(5)} = \frac{6}{5} \cdot \frac{5}{6} = 1, \qquad \frac{f(7)}{f(6)} = \frac{7}{6} \cdot \frac{5}{6} = \frac{35}{36},$$

és innentől kezdve mindegyik arány kisebb 1-nél hiszen az $\frac{5}{6}$-ot egy $\frac{6}{5}$-nél kisebb számmal szorozzuk.

Amíg az arány 1-nél nagyobb, addig a kifejezés értéke nő, ha 1 az arány, akkor nem változik az érték, míg 1-nél kisebb arány esetén csökken. A maximális értéket tehát $f(5)$ és $f(6)$ adja, tehát 5 és 6 kocka esetén lesz a legnagyobb annak a valószínűsége, hogy pontosan egy hatos van a dobott számok között.

A 2.5. feladat megoldása

Legyen a fiú nyerési esélye Apa ellen p, míg Papa ellen $q > p$, tehát Apa illetve Papa nyerési esélye $(1-p)$ illetve $(1-q)$ (döntetlennel nem számolunk). Az a) feladatban $(1-p) = \frac{2}{3}$, $(1-q) = \frac{1}{2}$, azaz $p = \frac{1}{3}$, $q = \frac{1}{2}$.

A fiú háromféleképpen lehet sikeres:

NyerNyerNyer, NyerNyerVeszt, VesztNyerNyer.

Az Apa-Papa-Apa felosztásnál ezek esélye rendre

$$pqp, \qquad pq(1-p), \qquad (1-p)qp,$$

ami összesen

$$pqp + pq(1-p) + (1-p)qp = pq\,(p + (1-p) + (1-p)) = qp(2-p),$$

míg Papa-Apa-Papa esetben

$$qpq, \qquad qp(1-q), \qquad (1-q)pq,$$

azaz összesen

$$qpq + qp(1-q) + (1-q)pq = qp\,(q + (1-q) + (1-q)) = qp(2-q).$$

Mivel $q > p$, így az elsőnek kapott valószínűség a nagyobb, az Apa-Papa-Apa felosztás jobb a fiúnak.

A 2.6. feladat megoldásai

A 2.6. fel. I. megoldása

Szita

Annak az esélye, hogy a 8-as nyerőszám egy húzásnál:

$$q = \frac{\binom{34}{6}}{\binom{35}{7}} = \frac{\frac{34\cdot 33\cdot\ldots\cdot 29}{6!}}{\frac{35\cdot 34\cdot\ldots\cdot 29}{7!}} = \frac{7}{35} = \frac{1}{5}.$$

Így $q^2 = \frac{1}{25}$ Annak esélye, hogy a 8-as két különböző húzásnál is nyerő szám. Legyen A az az esemény, hogy a 8 nyerő szám a kézi húzásnál, B az az esemény, hogy a gépinél nyerő, tehát AB az az esemény, hogy mindkettőnél nyerő, míg $A+B$ az az esemény, hogy legalább az egyiknél nyerő. A halmazokra vonatkozó szita formulának megfelelően:

$$p(A+B) = p(A) + p(B) - p(AB) = q + q - q^2 = q(2-q) = \frac{9}{25} = 0,36.$$

A 2.6. fel. II. megoldása

Esetek

Az előző megoldásban kapott $q = \frac{1}{5}$ annak esélye, hogy egy adott húzásnál a 8-as nyerő szám, így $1 - q = \frac{4}{5}$ annak az esélye, hogy a 8-as nem nyerő szám egy adott húzás esetén.

Három eset van: 8-as csak a kézi, vagy csak a gépi, vagy mindkét húzásnál nyerő. Ezek esélye rendre $q\cdot(1-q)$, $(1-q)\cdot q$, $q\cdot q$, tehát a kérdezett valószínűség

$$q\cdot(1-q) + (1-q)\cdot q + q\cdot q = 2q - q^2 = \frac{9}{25} = 0,36.$$

A 2.6. fel. III. megoldása

Komplementer módszer

Az előző megoldásban kapott q-val számolva $(1-q)^2$ annak esélye, hogy a 8-as az egyik húzásnál sem nyerő, tehát

$$1 - (1-q)^2 = 2q - q^2 = \frac{9}{25} = 0,36$$

annak az esélye, hogy a 8-as legalább az egyik húzásnál nyerő.

Segítség a 2.7. feladathoz

Mekkora az esélye n érme feldobásakor, hogy mind írás lesz?

A 2.8. feladat megoldásai

A 2.8. feladat eredménye

$\frac{1}{100}$.

A 2.10. fel. I. megoldása

a) A két állat csak az átlón találkozhat, miután mindkettő négyet lépett. Négy lépését mindketten $2^4 = 16$-féleképpen tehetik meg. Az átló egyes mezőire mindkét állat rendre

$$1, \qquad 4, \qquad 6, \qquad 4, \qquad 1$$

-féleképpen, tehát

$$\frac{1}{2^4}, \qquad \frac{4}{2^4}, \qquad \frac{6}{2^4}, \qquad \frac{4}{2^4}, \qquad \frac{1}{2^4}$$

valószínűséggel juthat el. Így annak valószínűsége, hogy az átló egyik konkrét mezőjén találkozzanak rendre

$$\left(\frac{1}{2^4}\right)^2, \qquad \left(\frac{4}{2^4}\right)^2, \qquad \left(\frac{6}{2^4}\right)^2, \qquad \left(\frac{4}{2^4}\right)^2, \qquad \left(\frac{1}{2^4}\right)^2,$$

azaz összesen

$$\frac{1+16+36+16+1}{2^8} = \frac{70}{256} = \frac{35}{128} = 0,2734375.$$

b) az a) esethez hasonlóan az $n \times n$-es táblán a keresett valószínűség

$$\frac{\left(\binom{n}{0}\right)^2 + \left(\binom{n}{1}\right)^2 + \left(\binom{n}{2}\right)^2 + \ldots + \left(\binom{n}{n}\right)^2}{2^{2n}}.$$

A 2.10. fel. II. megoldása

a) Képzeljük el, hogy a macska és az egér találkoznak, majd a macska az egér nyomán visszafelé végighaladva elmegy az egérlukig. Ilymódon a macska a tábla egyik sarkából az azzal átellenes sarkáig jut el. Az ilyen utaknak a számát adják meg a Pascal háromszög számai: ez most $\binom{8}{4} = 70$.

A (macskának) kedvező esetek száma tehát $\binom{8}{4}$, míg összesen $\left(2^4\right)^2$ eset van, így a kérdezett valószínűség:

$$\frac{\binom{8}{4}}{2^8} = \frac{70}{256} = \frac{35}{128} = 0,2734375.$$

b) az a) esethez hasonlóan az $n \times n$-es táblán a keresett valószínűség

$$\frac{\binom{2n}{n}}{2^{2n}}.$$

Megjegyzés a 2.10. fel. megoldásaihoz

A két megoldás összevetésekor felismerhetjük a nevezetes összefüggést: a Pascal háromszög n-edik sorában álló elemek négyzetösszege $\binom{2n}{n}$.

Lásd még a 5.7.., 5.8.. feladatokat.

A 2.11. feladat megoldásai

A 2.11. fel. I. megoldása

Két csapatot választunk, egy Elsőt és egy Másodikat. Ehhez azonban elég az Első csapatot kiválasztani, a maradék lesz a Második. A kérdés így is fogalmazható: „*Mennyi az esélye, hogy az Első csapatba a két legjobb játékos közül pontosan egy kerül?*".

A 22 játékosból az Első csapatban játszó 11-et összesen $\binom{22}{11}$-féleképpen választhatjuk ki. Az a kedvező, ha ebbe a 11-be a 2 legjobb közül 1-et, a maradék 20-ból pedig 10-et választunk. Erre $\binom{2}{1} \cdot \binom{20}{10}$ lehetőség van. Az eredmény:

$$p = \frac{\binom{2}{1}\binom{20}{10}}{\binom{22}{11}} = \frac{2 \cdot 11}{\frac{22 \cdot 21}{11}} = \frac{11}{21} \approx 0,5238095238.$$

A 2.11. fel. II. megoldása

Képzeljük el úgy, hogy egy sorban van egymás mellett 22 hely, az első 11 helyre kerülőkből fog állni az 1. csapat, a $12-22$. helyre kerülőkből pedig a 2. csapat. A két legjobb játékos helyét összesen $\binom{22}{2}$-féleképpen választhatjuk ki a 22 helyből. Az a kedvező, ha egy-egy hely kerül az első 11 illetve a második 11 helyre, erre $\binom{11}{1} \cdot \binom{11}{1}$ lehetőség van. A kérdezett valószínűség értéke:

$$\frac{\binom{11}{1}\binom{11}{1}}{\binom{22}{2}} = \frac{11 \cdot 11}{\frac{22 \cdot 21}{2}} = \frac{11}{21}.$$

A 2.11. fel. III. megoldása

Az első legjobb játékost bármelyik csapatba rakjuk, a második legjobb játékosnak mellé – az első csapatába – még 10 helyre kerülhet, míg a másik csapatba 11 helyre. Így $\frac{11}{21} \approx 0,5238095238$ az esélye, hogy különböző csapatba kerülnek.

A 2.12. feladat megoldása

Bármelyik sorszámot kapja is a győztes 7 olyan játékos lesz, aki vele egy ágon lesz a döntőig és 8 olyan, aki a másik ágon lesz. Az általános esetben $2^n - 1$, ill. 2^n a győztes ágához illetve a másik ághoz tartozó játékosok száma. Így a válaszok:

a) $\frac{8}{15}$ ill. általában $\frac{2^{n-1}}{2^n-1}$.

b) $\frac{\binom{8}{2}}{\binom{15}{2}} = \frac{4}{15}$ ill. általában $\frac{\binom{2^{n-1}}{2}}{\binom{2^n-1}{2}} = \frac{2^{n-2}}{2^n-1}$.

Kérdések a 2.12. feladattal kapcsolatban

Mennyi az esélye, hogy a k-adik csapat bejut a döntőbe? Válaszoljunk a kérdésre minden $k \in \{1, 2, 3, \ldots, 16\}$ szám esetén!

10.7. Játékok – feladatok megoldása

A 2.1. feladat megoldása

Első pillanatra úgy tűnik, hogy a mezők kiszínezhetők két színnel úgy, hogy a szomszédos mezők különböző színűek legyenek és a kezdeti állapotban a két állat azonos színű mezőn álljon. Ha ez így lenne, akkor a Farkas minden lépése után különböző színű mezőre kerülne a két állat, a nyuszinak pedig mindig lenne lehetősége máshová lépni, mint ahol a farkas áll, így a farkas sohasem kapná el a nyuszit.

A két felső csúcs közti hosszú íves él azonban elrontja ezt és lehetőséget ad a farkasnak. A játék elején második lépésével átmegy ezen az élen és utána könnyen beszorítja, elkapja a nyuszit.

Segítség a 2.2. feladathoz

Figyeljük az utolsó érmét! Biztos, hogy befejeződik a játék véges sok lépésben?

A 2.3. feladat megoldása

A játékban a résztvevők tevékenységétől függetlenül mindig Második nyer, mert a kifejezés értéke minden előjelezésnél páratlan.

Megjegyzés a 2.3. feladathoz

A probléma a 8.3. feladatban folytatódik.

Segítség a 2.4. feladathoz

Soroljuk fel azokat a végállásokat, amelyekben Kezdő nyert!

A 2.5. fel. eredménye

Kezdő tud nyerni.

11. fejezet

Algebra feladatok megoldása

11.1. Másodfokú kifejezések – feladatok megoldása

A 3.1. feladat megoldása

Kísérletezzünk a számológéppel!

n	$\sqrt{n^2+n}$
1	$1,4142...$
2	$2,4494...$
3	$3,4641...$
4	$4,4721...$

Sejthető, hogy $\sqrt{n^2+n} = n,4...$, azaz algebrai formában:

$$n + 0,4 \leq \sqrt{n^2+n} < n + 0,5. \tag{11.1}$$

A (11.1) egyenlőtlenségből következik, hogy egyfajta számjegy lehet a tizedesvessző után, a négyes.

Pozitív számok nagysági sorrendjén nem változtat, ha mind négyzetreemeljük őket. Ezért bizonyítandó egyenlőtlenségpárunk egyenértékű a

$$n^2 + 0,8n + 0,16 \leq n^2 + n < n^2 + n + 0,25$$

összefüggéssel, azaz a

$$-0,2n + 0,16 \leq 0 < 0,25$$

relációpárral. Ebben a jobb oldali egyenlőtlenség nyilvánvalóan teljesül, és a bal oldali is fennáll, ha n legalább 1, ami a pozitív egészekre igaz. Így eredeti (11.1) egyenlőtlenségeink is teljesülnek, a kérdezett számjegy minden pozitív egész n-re a négyes.

A 3.2. feladat megoldásai

A 3.2. a), b), c), j), k) fel. szemléltetése

Az alábbi animáció mutatja a másodfokú függvény grafikonjának változását, ahogy a p paraméter értéke változik.

http://matek.fazekas.hu/portal/elte/elemifgyujt/html/09.html

A p paraméter értékét magunk is változtatgathatjuk és kísérletethetünk ezen az interaktív animáción:

http://matek.fazekas.hu/portal/elte/elemifgyujt/html/09i.html

A 3.2. a) mego.

A másodfokú egyenlet diszkriminánsa: $D = p^2 - 2$. Pontosan akkor van két különböző valós gyök, ha $D > 0$, azaz ha $|p| > \sqrt{2}$.

A 3.2. b) mego.

Helyettesítsünk $x = 3$-at az egyenletbe! A $\frac{1}{2}3^2 + 3p + 1 = 0$ egyenlet pontosan akkor teljesül, ha $p = -\frac{11}{6}$, ennél a p-nél lesz a megadott egyenlet gyöke a 3.

A 3.2. c) mego.

A 0 behellyettesítése: $\frac{1}{2}0^2 + p \cdot 0 + 1 = 1$. Tehát p-től függetlenül mindig 1-et kapunk. A 0 sohasem gyöke a megadott egyenletnek.

A 3.2. d), e), f), g), h) feladatok szemléltetése

Az alábbi animáció mutatja a másodfokú egyenlet gyökeinek változását és a vizsgált kifejezések értékét, ahogy a p paraméter értéke változik.

http://matek.fazekas.hu/portal/elte/elemifgyujt/html/10.html

A p paraméter értékét magunk is változtatgathatjuk és kísérletethetünk ezen az interaktív animáción:

http://matek.fazekas.hu/portal/elte/elemifgyujt/html/10i.html

A 3.2. d) mego.

Az $ax^2+bx+c = 0$ egyenlet Viète formulái szerint a gyökök összege: $x_1+x_2 = -\frac{b}{a} = -2p$, tehát $p = -1,5$ esetén teljesül az előírt feltétel és ekkor a) szerint tényleg két valós gyök van.

A 3.2. e) mego.

A Viète formulák szerint a gyökök szorzata: $x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a} = 2$, tehát a gyökök szorzata soha sem 3.

A 3.2. f) mego.

A Viète formulák szerint $x_1 \cdot x_2 = 2$, $x_1 + x_2 = -2p$, így

$$x_1^2 + x_2^2 = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1 x_2 = 4p^2 - 4.$$

Az a) feladatrész megoldása szerint azonban $0 < p^2 - 2$, amiből $4 < 4p^2 - 4$, tehát a gyökök négyzetösszege sohasem lesz 3, ha valósak a gyökök.

A 3.2. g) mego.

Az f) feladatrész megoldása szerint

$$x_1^2 + x_2^2 = 4p^2 - 4 = 4(p^2 - 2) + 4 = 4D + 4,$$

tehát a valós gyökök négyzetösszege legalább 4 és ez az érték csak $D = 0$, tehát két egybeeső valós gyök esetén vétetik fel ($p = \sqrt{2}$ és $x_1 = x_2 = -\sqrt{2}$ illetve $p = -\sqrt{2}$ és $x_1 = x_2 = \sqrt{2}$).

A 3.2. h) mego.

Mivel

$$(x_1 - x_2)^2 = (x_1 + x_2)^2 - 4x_1 x_2 = 4p^2 - 8 = 4D,$$

így $p = \pm\frac{17}{2}$ lesz a gyökök különbsége 3. Ekkor tényleg valósak a gyökök ($D > 0$).

A 3.2. i) mego.

A gyökök szorzata 2 (lásd az e) feladatrész megoldását, tehát a gyökök csak 1 és 2 vagy (-1) és (-2) lehetnek, tehát a polinom

$$\frac{1}{2}(x-1)(x-2) = \frac{1}{2}x^2 - \frac{3}{2}x + 1$$

vagy

$$\frac{1}{2}(x+1)(x+2) = \frac{1}{2}x^2 + \frac{3}{2}x + 1,$$

azaz $p = \pm\frac{3}{2}$.

A 3.2. j) mego.

Ez pontosan akkor teljesül, ha két valós gyök van, azok szorzata és összege is pozitív, tehát ha $|p| \geq \sqrt{2}$, $2 > 0$ és $-2p > 0$, tehát ha $p < -\sqrt{2}$.

A 3.2. k) mego.

Alkalmazzuk az $x - \frac{1}{2} = t$ helyettesítést. x pontosan akkor legalább $\frac{1}{2}$, ha t nemnegatív. Írjunk az egyenletbe x helyére $t + \frac{1}{2}$-et:

$$\frac{1}{2}\left(t + \frac{1}{2}\right)^2 + p\left(t + \frac{1}{2}\right) + 1 = \frac{1}{2}t^2 + \left(p + \frac{1}{2}\right)t + \left(\frac{9}{8} + \frac{1}{2}p\right),$$

Ennek pontosan akkor lesz két valós gyöke, ha az eredetinek is, tehát ha $|p| > \sqrt{2}$ és az eredetinek pontosan akkor lesz mindkét gyöke legalább $\frac{1}{2}$, ha ennek mindkét gyöke nemnegatív, tehát ha a gyökök összege és szorzata is nemnegatív:

$$p + \frac{1}{2} \leq 0, \qquad \text{és} \quad \frac{9}{8} + \frac{1}{2}p \geq 0.$$

Mindezeket összesítve kapjuk a pontos feltételt:

$$-\frac{9}{4} \leq p < -\sqrt{2}.$$

Természetesen a $p = -\sqrt{2}$-höz tartozó megoldás is felfogható *két* egybeeső valós (pozitív) megoldásnak.

A 3.2. l) mego.

$\frac{1}{2}\left(\frac{t}{3}\right)^2 + p\frac{t}{3} + 1 = 0$, azaz $\frac{1}{2}t^2 + 3pt + 9 = 0$.

A 3.2. m) mego.

$\frac{1}{2}(t-3)^2 + p(t-3) + 1 = 0$, azaz $\frac{1}{2}t^2 + (p-3)t + \frac{11}{2} - 3p = 0$.

A 3.2. n), o), t) feladatok szemléltetése

Az alábbi animáció mutatja a másodfokú függvény minimumhelyének és minimumának változását, a parabola csúcspontjának nyomvonalát a p paraméter változásával.

http://matek.fazekas.hu/portal/elte/elemifgyujt/html/11.html

A p paraméter értékét magunk is változtatgathatjuk és kísérletethetünk ezen az interaktív animáción:

http://matek.fazekas.hu/portal/elte/elemifgyujt/html/11i.html

A 3.2. n) mego.

$$f(x) = \frac{1}{2}(x+p)^2 + \left(1 - \frac{p^2}{2}\right), \tag{11.2}$$

tehát p minimumhelye $x = -p$. Tehát $p = -3$ esetén lesz a minimumhely a 3.

A 3.2. o) mego.

A (11.2) alakból leolvasható, hogy a minimum értéke $1 - \frac{p^2}{2}$, ami semmilyen valós p-re sem 3.

A 3.2. p) mego.

Az f függvénynek a valós számok halmazán nincs maximuma.

A 3.2. q) fel. szemléltetése

Az alábbi animáció mutatja hogyan helyezkedik el a másodfokú függvény grafikonja az $y = 3x$ egyenletű egyeneshez képest.

`http://matek.fazekas.hu/portal/elte/elemifgyujt/html/12.html`

A p paraméter értékét magunk is változtatgathatjuk és kísérletethetünk ezen az interaktív animáción:

`http://matek.fazekas.hu/portal/elte/elemifgyujt/html/12i.html`

A 3.2. q) fel. I. megoldása

A függvény adott pontbeli érintőjének meredeksége a derivált: $f'(x) = x + p$. $f'(x) = 3$, ha $x = 3 - p$. Ennél az x-nél az egyenes megfelelő pontja: $(3 - p, 9 - 3p)$. Ez pontosan akkor illeszkedik a parabolára, ha $\frac{1}{2}(3-p)^2 + p(3-p) + 1 = 0$, azaz ha $p = 3 \pm \sqrt{2}$.

A 3.2. q) fel. II. megoldása

Az kell, hogy az

$$\frac{1}{2}x^2 + px + 1 - 3x = 0$$

egyenletnek egy (kétszeres) gyöke legyen, tehát a másodfokú egyenlet diszkriminánsa zérus legyen:

$$D' = (p-3)^2 - 2 = 0 \quad \longleftrightarrow \quad p = 3pm\sqrt{2}.$$

A 3.2. r) mego.

Két szomszédos egész szám szorzata mindig páros, azaz az $r(x) = \frac{1}{2}x(x+1)$ polinom minden egész helyen egész értéket vesz fel. Az f függvény pontosan akkor ilyen tulajdonságú, ha az $(f - r)$ függvény is ilyen, azaz ha $\frac{(2p-1)x}{2}$ minden x egész esetén egész, azaz ha $(2p - 1)$ páros egész szám, tehát $p + \frac{1}{2}$ egész.

A 3.2. s) fel. szemléltetése

Az alábbi animáció mutatja a szóbajövő függvények grafikonját a p paraméter változtatásával.

http://matek.fazekas.hu/portal/elte/elemifgyujt/html/13.html

A p paraméter értékét magunk is változtatgathatjuk és kísérletethetünk ezen az interaktív animáción:

http://matek.fazekas.hu/portal/elte/elemifgyujt/html/13i.html

A 3.2. s) mego.

Igen, a $(0; 1)$ pont mindegyik parabolára illeszkedik.

A 3.2. t) mego.

A parabola csúcspontjának koordinátái $\left(-p; 1 - \frac{p^2}{2}\right)$, tehát a csúcspont befutja az $y = 1 - \frac{x^2}{2}$ lefelé nyíló parabolát.

A 3.3. fel. megoldásai

A 3.3. fel. szemléltetése

Az alábbi animáción látható a másodfokú függvény minimunhelye és minimumának értéke az a paraméter változásával.

http://matek.fazekas.hu/portal/elte/elemifgyujt/html/14.html

Az a paraméter értékét magunk is változtatgathatjuk és kísérletethetünk ezen az interaktív animáción:

http://matek.fazekas.hu/portal/elte/elemifgyujt/html/14i.html

A 3.3. feladat megoldása

a) A grafikon mindig felfelé nyíló parabola. Pontosan az kell, hogy a diszkrimináns ne legyen pozitív. Mivel

$$\frac{D}{4} = (a-2)^2 - a = (a-4)(a-1),$$

így $1 \leq a \leq 4$ esetén lesz minden x-re nemnegatív a függvény értéke.

b)

$$f(x) = (x - (a-2))^2 - (a^2 - 5a + 4),$$

tehát a minimum értéke

$$-(a^2 - 5a + 4) = -(a - 2,5)^2 + 2,25,$$

azaz a minimum maximuma $2,25$.

c) Igen, van. Ha kifejezésben az a-tól függő tagok: $2ax + a = a(2x+1)$. tehát $x = -\frac{1}{2}$ esetén f értéke a-tól független, nevezetesen $2,25$.

A 3.4. feladat megoldásai

A 3.4. fel. szemléltetése

Az alábbi animáció mutatja az adott abszolútértékes másodfokú függvény grafikonjának és az $y = p$ egyenletű egyenesnek a metszéspontjait, ahogy a p paraméter értéke változik.

http://matek.fazekas.hu/portal/elte/elemifgyujt/html/15.html

A p paraméter értékét magunk is változtatgathatjuk és kísérletethetünk ezen az interaktív animáción:

http://matek.fazekas.hu/portal/elte/elemifgyujt/html/15i.html

A 3.4. fel. eredménye

$p < 0$; nincs megoldás;

$p = 0$; 2 megoldás;

$0 < p < 5$; 4 megoldás;

$p = 5$; 3 megoldás;

$5 < p$; 2 megoldás.

A 3.5. feladat megoldásai

A 3.5. fel. szemléltetése

Az alábbi animáció mutatja az egyenlet bal oldalán található abszolút értékes másodfokú függvény grafikonját illetve a jobb oldali lineáris függvény grafikonját a p paraméter változásával. Leolvashatók a grafikonok metszéspontjai is, amelyek első koordinátái az egyenlet megoldásai.

http://matek.fazekas.hu/portal/elte/elemifgyujt/html/16.html

A p paraméter értékét magunk is változtatgathatjuk és kísérletethetünk ezen az interaktív animáción:

http://matek.fazekas.hu/portal/elte/elemifgyujt/html/16i.html

A 3.5. fel. eredménye

$p < -2$; nincs megoldás;
$p = -2$; 1 megoldás;
$-2 < p < 0$; 2 megoldás;
$p = 0$; 3 megoldás;
$0 < p < \frac{1}{4}$; 4 megoldás;
$p = \frac{1}{4}$; 3 megoldás;
$\frac{1}{4} < p$; 2 megoldás.

A 3.6. feladat megoldásai

A 3.6. a) fel. szemléltetése

Az alábbi interaktív GeoGebra animáción kirajzoltathatjuk a függvény grafikonját és vizsgálhatjuk a megoldások számát a p paraméter függvényében:
http://matek.fazekas.hu/portal/elte/elemifgyujt/html/17i.html

A 3.6. a) fel. eredménye

$p < 1$; 2 megoldás;
$p = 1$; 3 megoldás;
$1 < p < 5$; 4 megoldás;
$p = 5$; 2 megoldás;
$p > 5$; nincs megoldás.

A 3.6. b) fel. szemléltetése

Az alábbi interaktív GeoGebra animáción kirajzoltathatjuk a függvény grafikonját és vizsgálhatjuk a megoldások számát a p paraméter függvényében:
http://matek.fazekas.hu/portal/elte/elemifgyujt/html/18i.html

A 3.6. b) fel. eredménye

$p < 1$; 2 megoldás;
$p = 1$; 3 megoldás;
$1 < p < 2$; 4 megoldás;
$p = 2$; 3 megoldás;
$2 < p < 10$; 2 megoldás;
$p = 10$; 1 megoldás;
$p > 10$; nincs megoldás.

A 3.7. feladat megoldásai

A 3.7. a), b) mego.

Alkalmazzuk a $3^x = t$ helyettesítést és vegyük figyelembe, hogy míg x befutja a valós számok halmazát, addig t a pozitív valós számok halmazát járja be.

$$a(t) = 4\left(t - \frac{1}{4}\right)^2 + \frac{3}{4},$$

tehát $t = \frac{1}{4}$-nél, azaz $x = -log_3 4$-nél van az a kifejezés minimuma. Az értékkészlet a $\left[\frac{3}{4}; \infty\right)$ halmaz.

$$b(t) = 4\left(t + \frac{1}{4}\right)^2 + \frac{3}{4},$$

tehát $t = -\frac{1}{4}$-nél van a $b(t)$ függvény minimuma, ezt viszont nem kapjuk meg x valós értékeiből. A $0 < t$ halmazon a $b(t)$ függvény szigorúan monoton. Az értékkészlet az $[1; \infty)$ halmaz.

A 3.7. c), d) mego.

Az $1 - \sin^2 x = \cos^2 x$, $\cos x = t$ helyettesítésekkel dolgozunk. Ha x befutja a valós számok halmazát, addig t végtelen sokszor bejárja a $[-1; 1]$ intervallumot.

$$c(t) = t^2 - t + 1 = \left(t - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4},$$

$c(t)$ minimuma $\frac{3}{4}$, amit $t = \frac{1}{2}$ esetén vesz fel, maximuma pedig a $t = -1$ helyettesítésnél kapott $\left(-1 - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} = 3$. Az értékkészlet a $\left[\frac{3}{4}; 3\right]$ intervallum.

$$d(t) = t^2 + 4t + 5 = (t + 2)^2 + 1,$$

így $d(t)$ értékkészlete a $[2; 10]$ intervallum, hiszen minimumát $t = -1$-nél, maximumát $t = 1$-nál veszi fel.

A 3.8. feladat megoldása

Beszorozva, és nullára redukálva azt kapjuk, hogy

$$a^2 + (2 - n)ab + b^2 = 0,$$

amiből

$$a = b(n-2) \pm b\sqrt{(n-2)^2 - 4}2.$$

Ahhoz, hogy a egész legyen, $(n-2)^2 - 4$ négyzetszám kell. Két négyzetszám között a különbség csak 0 és 4 esetén 4, tehát $(n-2)^2 = 4$, azaz $n = 0$, vagy $n = 4$. Az $n = 0$ esetén $a^2 + b^2 = 0$, ami azt jelentené, hogy mind a, mind b nulla ami ellentmondás. Ha $n = 4$, akkor egyenletünk

$$a^2 - 2ab + b^2 = 0$$

alakot ölt. Tehát a megoldás az $n = 4$ és $a = b$ párokra teljesül.

A 3.9. feladat megoldása

A kifejezés mindig értelmes, hiszen $x^2 + 5x + 28 = (x + \frac{5}{2})^2 + \frac{87}{4} > 0$. Az $\frac{\sqrt{87}}{2} < y = \sqrt{x^2 + 5x + 28}$ segédváltozóval egyenletünk a

$$y^2 - 5y - 24 = 0$$

alakba írható át, amelyből $y_1 = 8$, $y_2 = -3$. Csak y_1 jön számításba és ezzel $64 = x^2 + 5x + 28$, $x_1 = 4$ és $x_2 = -9$.

A 3.10. feladat megoldása

$\frac{1}{6}x^2 - x + \frac{11}{6}$. Az $\frac{1}{6}x^2 - x + \frac{11}{6} = \frac{1}{x}$ egyenlet harmadfokú, legfeljebb három gyöke van.

A 3.11. feladat megoldása

Vegyünk fel egy olyan koordinátarendszert, amelynek y tengelye a parabola tengelye, x tengelye a parabola csúcsérintője. Ebben a koordinátarendszerben a parabola egyenlete $y = ax^2$.

A parabola tengelyével párhuzamos egyenesek nem metszenek ki húrt a parabolából. A nem ilyen helyzetű egyenesek általános egyenlete $y = mx + b$. Most egymással párhuzamos egyeneseket vizsgálunk, tehát m-et rögzítjük és b-t változtathatjuk. Az egyenes és a parabola metszéspontjait az

$$\begin{cases} y &= ax^2 \\ y &= mx + b \end{cases}$$

egyenletrendszer megoldásai adják. A két egyenletből x-re az $ax^2 - mx - b = 0$ egyenletet kapjuk, amelyből a Viète formulák szerint $x_1 + x_2 = \frac{m}{a}$, azaz a húr felezőpontjának abszcisszája $\frac{x_1+x_2}{2} = \frac{m}{2a}$, amely valóban független b-től.

A 3.12. feladat megoldásai

A 3.12. a), b) mego.

Vegyük észre, hogy $(x+y)\cdot(x-y) = x^2 - y^2$. Térjünk át a $\xi = x+y$, $\eta = x-y$ változók használatára, ami a koordinátarendszer elforgatásának (és nyújtásának) felel meg. Egyenletünk most $\xi\eta = p$, amely $p \neq 0$ esetén olyan hiperbola egyenlete, melynek aszimptotája a két tengely.

A 3.12. c), d) mego.

A koordinátatengelyekkel párhuzamos egyenesekkel kapcsolatban a c), d) állítások nyilvánvalóak. Most tekintsük a nem ilyen helyzetű egyeneseket, ezek egyenlete

$$y = mx + b, \qquad m \neq 0 \tag{11.3}$$

alakú, amiből $x = \frac{y-b}{m}$. Az egyenes és a hiperbola metszéspontjait nem számoljuk ki, csak felírjuk a metszéspontok x ill., y koordinátáira vonatkozó egyenleteket és a megfelelő Viète formula segítségével a gyökök összegének felét, tehát a felezőpont koordinátáit határozzuk meg.

$$\begin{array}{ll} x^2 - (mx+b)^2 = p, & \left(\frac{y-b}{m}\right)^2 - y^2 = p, \\ (1-m^2)x^2 - 2mbx - (b^2+p) = 0, & (1-m^2)y^2 - 2by + (b^2 - m^2p) = 0, \\ \frac{x_1+x_2}{2} = \frac{mb}{1-m^2}. & \frac{y_1+y_2}{2} = \frac{b}{1-m^2}. \end{array}$$

Látható, hogy a felezőpont b és p értékétől függetlenül mindig illeszkedik az

$$x = my, \qquad m \neq 0 \tag{11.4}$$

egyenletű egyenesre. Az aszimptotákkal párhuzamos egyeneseket azért kellett kizárnunk, mert az $m = \pm 1$ meredekséghez tartoznak, amikor a metszéspontokra lineáris egyenlet adódik, tehát csak egy-egy metszéspont lesz.

A 3.13. feladat megoldása

A másodfokú polinom diszkriminánsa $D = p^2 + \frac{4}{p^2} > 0$, tehát két különböző valós gyöke van a polinomnak minden valós p esetén. A Viète formulák szerint $x_1 + x_2 = -p$, $x_1x_2 = -\frac{1}{p^2}$, így

$$x_1^2 + x_2^2 = (x_1+x_2)^2 - 2x_1x_2 = p^2 + \frac{2}{p^2},$$

és

$$x_1^4 + x_2^4 = (x_1^2 + x_2^2)^2 - 2x_1^2x_2^2 = p^4 + 4 + \frac{2}{p^4}.$$

Mivel

$$\frac{p^4 + \frac{2}{p^4}}{2} \geq \sqrt{p^4 \cdot \frac{2}{p^4}} = \sqrt{2},$$

így

$$x_1^4 + x_2^4 \geq 4 + 2\sqrt{2}$$

és egyenlőség

$$p^4 = \frac{2}{p^4}$$

azaz $p = \pm\sqrt[8]{2}$ esetén áll fenn.

A 3.14. feladat megoldásai

A 3.14. fel. I. megoldása

Legyenek a gyökök x_1 és $x_2 = 3x_1$. A gyökök és együtthatók közti Viète formulák szerint:

$$4x_1 = x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}, \qquad 3x_1^2 = x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a}.$$

Így a $48x_1^2 = 3 \cdot (4x_1)^2$, $48x_1^2 = 16 \cdot (3x_1^2)$ összefüggések alapján $3 \cdot \left(-\frac{b}{a}\right)^2 = 16\frac{c}{a}$, amiből a következő reláció adódik:

$$3b^2 - 16ac = 0. \tag{11.5}$$

Alább igazoljuk, hogy ha teljesül a (11.5) reláció, akkor a polinom egyik gyöke a másik háromszorosa, ráadásul, ha a, b, c valósak, akkor (11.5)-ból következik, hogy a gyökök is valósak. A (11.5) összefüggés $4(b^2 - 4ac) = b^2$ alakjában felismerhetjük a diszkriminánst, tehát láthatjuk, hogy mindig két különböző valós gyök van, kivéve, ha $b = 0$ és $c = 0$. Ebben az elfajult esetben a polinomnak kettős gyöke a 0, az egyik a másik háromszorosa. A (11.5) relációból $a \neq 0$ négyzetével leosztva az $3(x_1 + x_2)^2 = 16x_1x_2$ összefüggéshez juthatunk, amely a $0 = (3x_1 - x_2)(3x_2 - x_1)$ alakba írható át igazolva állításunkat.

A 3.14. fel. II. megoldása

A

$$a(3x)^2 + b(3x) + c = 9ax^2 + 3bx + c \tag{11.6}$$

polinom gyökeit írhatjuk

$$\frac{x_1}{3}, \qquad \frac{x_2}{3} \tag{11.7}$$

alakban, hiszen ezek az eredeti

$$ax^2 + bx + c \tag{11.8}$$

polinom

$$x_1, \qquad x_2 \tag{11.9}$$

gyökeinek harmadai. Azt kell tudnunk eldönteni, hogy a (11.6), (11.8) polinomoknak van-e közös gyöke. Ha van, azaz teljesül az $\frac{x_1}{3} = x_1$, $\frac{x_1}{3} = x_2$, $\frac{x_2}{3} = x_1$, $\frac{x_2}{3} = x_2$ összefüggések egyike, akkor az azért lehet, mert a vizsgált (11.8) polinom egyik gyöke valóban háromszorosa egy másik gyöknek vagy azért mert az egyik gyök zérus. Ez utóbbit majd ki kell zárni.

Akkor van a (11.6), (11.8) polinomoknak közös gyöke, ha van közös gyöktényezőjük, azaz a két polinomnak van 1-nél (egységnél, azaz számnál) nagyobb közös osztója. Alkalmazzunk Euklideszi algoritmust!

$$\begin{aligned} 9ax^2+3bx+c &= (ax^2+bx+c)\cdot 9 &&- (6bx+8c), \\ ax^2+bx+c &= (6bx+8c)\left(\tfrac{a}{6b}x+\left(\tfrac{1}{6}-\tfrac{2ac}{9b^2}\right)\right) &&+ \left(\tfrac{16ac^2}{9b^2}-\tfrac{c}{3}\right). \end{aligned}$$

A két polinom tehát pontosan akkor nem relatív prím a polinomok világában, ha a legutolsó maradék – ami egy szám – zérus, azaz

$$c(16ac-3b^2)=0. \tag{11.10}$$

Ez $c=0$ esetén is teljesül, valóban ilyenkor a a (11.6), (11.8) polinomoknak közös tényezője az x, azaz közös gyöke a 0, de ettől még a (11.8) polinom másik gyökéről semmit sem tudunk. Ha $16ac-3b^2=0$, akkor a (11.8) polinomoknak csak $c=b=0$ esetén gyöke a zérus, amikor ez kétszeres gyök is, egyik a másik háromszorosa. Tehát a $16ac-3b^2=0$ reláció ekvivalens azzal, hogy az egyik gyök a másik háromszorosa.

A 3.15. feladat megoldásai

A 3.15. fel. I. megoldása

Az együtthatóknak is egyeznie kell:

$$10a+1=bc; \qquad -(10+a)=b+c.$$

Az utóbbi (-10)-szerese:

$$-10(b+c)=100+10a=99+(10a+1)=99+bc.$$

Innen

$$bc+10(b+c)+100=1,$$

azaz

$$(b+10)\cdot(c+10)=1. \tag{11.11}$$

A megoldások:

$$b_1=c_1=-9, \quad a_1=8; \qquad\qquad b_1=c_1=-11, \quad a_1=12.$$

A 3.15. fel. II. megoldása

Ha minden valós x-re teljesül az összefüggés, akkor $x = 10$-re is teljesül, azaz

$$1 = (10 + b)(10 + c).$$

EzzeL az előző megoldás (11.11) egyenletéhez jutottunk és a szorzatalakból leolvashatók a megoldások.

A 3.16. feladat megoldása

1. A gyökök összege zérus, hiszen x^3 együtthatója nulla. Tehát a gyökök átlaga is zérus.

2. A polinom páros (csak páros kitevőn szerepel az x), tehát a gyökök ellentettjükkel párban szerepelnek.

Mindezek alapján a gyökök, a számtani sorozat elemei $x_1 = -3\xi$, $x_2 = -\xi$, $x_3 = \xi$, $x_4 = 3\xi$. Képezzük polinomunk gyöktényezős alakját és szorozzuk be!

$$(x + 3\xi)(x + \xi)(x - \xi)(x - 3\xi) = (x^2 - \xi^2)(x^2 - 9\xi^2) = x^4 - 10\xi^2x^2 + 9\xi^4,$$

azaz $p = -10\xi^2$, $q = 9\xi^4$. Pontosan akkor van ilyen ξ, ha $p \leq 0$ és $9p^2 = 100q$.

A 3.17. feladat megoldása

Tekintsük az adott kifejezést a polinomjának. Mit állapíthatunk meg róla?

- A kifejezés a másodfokú polinomja;
- A főegyüttható (a^2 együtthatója): $(b + c + d) + (b - c) - (b + c + d) = b - c$.
- Az $a = b$ és az $a = c$ esetben a kifejezés értéke zérus.

Az egyetlen ilyen polinom a

$$(b - a)(a - c)(c - b).$$

A gondolatmenet során szinte „hozzá sem nyúltunk” a d változóhoz, mégis kiderült róla, hogy kiesik a kifejezésből. Erről persze hosszabb számolással is meggyőződhetünk, mint ahogy a feladat is megoldható egyszerű, de fáradságos számolással.

11.2. Lineáris rekurziók – feladatok megoldása

A 3.1. feladat megoldása

Válasz: 2012. A sorozat hatos periódusú, a 2013-adik elem a harmadik elemmel egyezik meg.

A 3.2. feladat megoldása

Legyen $u_0 = 1$, $u_1 = 3$, $u_2 = 5$ stb. Vegyük észre, hogy a rekurzív formula $u_{n+1} = u_n + 2u_{n-1}$. Ez egy *másodrendű homogén lineáris rekurzió.* Rekurzió, mert az előző elemekkel van kifejezve az új elem. Másodrendű, mert két előző elem szükséges az új elem kiszámításához. Lineáris, mert az új elemet az előző elemek egy lineáris függvénye határozza meg. Homogén, mert nincs benne konstans tag, csak az előző elemek számszorosainak összege szerepel.

(A $g_{n+1} = 2g_n + 1$ formula például elsőrendű inhomogén lineáris rekurzió, a $h_{n+1} = 2h_n - h_{n-1} + 3h_{n-2}$ formula harmadrendű homogén lineáris rekurzió, az $a_{n+1} = 1 + \frac{2}{a_n}$ formula elsőrendű nemlineáris rekurzió. Homogén lineáris rekurziót mindig kielégíti a konstans nulla sorozat, de ez ritkán adja meg egy feladat lényegi megoldását.)

Másodrendű homogén lineáris rekurzióval definiált sorozat explicit képletét elő tudjuk állítani egy általános eljárás segítségével. A módszer elvi alapját a következő két gondolat adja. Egyrészt a linearitásból és a homogenitásból következik, hogy ha egy sorozat kielégíti a rekurziót, akkor annak a sorozatnak a számszorosa is kielégíti a rekurziót, sőt két különböző sorozat összege is teljesíti a rekurziót, ha az eredeti kettő is teljesítette. Ez azt jelenti, hogy bármely két megfelelő sorozat bármely lineáris kombinációja is megfelelő. Másrészt a rekurzió másodrendű, így a sorozatot meghatározza első két eleme. Ha találok két sorozatot, amelyek egymásnak nem számszorosai, akkor azok első két elemével előállítható az összes lehetséges számpár, azaz a lehetséges sorozatok első két eleme. Ilymódon az összes megfelelő sorozat előállítható két konkrét sorozatból.

A két konkrét sorozatot speciális alakban keressük, két mértani sorozatot keresünk, amelyek teljesítik a rekurziót. A mértani sorozat általános képlete $u_n = \alpha \cdot q^n$. Ez pontosan akkor teljesíti a rekurziót, ha

$$\alpha q^{n+1} = \alpha q^n + 2\alpha q^{n-1},$$

azaz az $\alpha = 0$, $q = 0$ esetektől eltekintve

$$q^2 = q + 2.$$

Ebből $q_1 = -1$ és $q_2 = 2$, tehát két speciális (mértani) sorozat, amely kielégíti a rekurziót: $u_n = (-1)^n$ és $u_n = 2^n$. Az adott homogén lineáris másodrendű rekurzíót kielégítő sorozatok általános képlete:

$$u_n = \alpha_1(-1)^n + \alpha_2 2^n.$$

Esetünkben

$$u_0 = 1 = \alpha_1 + \alpha_2, \qquad u_1 = 3 = -\alpha_1 + 2\alpha_2,$$

amiből

$$\alpha_1 = -\frac{1}{3}, \qquad \alpha_2 = \frac{4}{3},$$

azaz

$$u_n = \frac{4 \cdot 2^n - (-1)^n}{3}.$$

Néhány példán ellenőrizzük képletünk helyességét:

$$u_2 = \frac{4 \cdot 2^2 - (-1)^2}{3} = \frac{16-1}{3} = 5, \qquad u_3 = \frac{4 \cdot 2^3 - (-1)^3}{3} = \frac{32+1}{3} = 11,$$

$$u_4 = \frac{4 \cdot 2^4 - (-1)^4}{3} = \frac{64-1}{3} = 21, \qquad u_3 = \frac{4 \cdot 2^5 - (-1)^5}{3} = \frac{128+1}{3} = 43.$$

A 3.3. feladat megoldása

Most is egy másodrendű homogén lineáris rekurzióról van szó, tehát a 3.2.. feladat megoldásának mintájára járhatunk el.

Először a rekurziót kielégítő speciális megoldásokat – mértani sorozatokat – keresünk. Ezek általános alakja αq^n. A q kvóciensre most a $q^2 = q+6$ összefüggésnek kell teljesülnie, azaz $q_1 = -2$, $q_2 = 3$.

A rekurzió általános megoldása: $u_n = \alpha_1(-2)^n + \alpha_2 3^n$. Adottak a kezdőelemek:

$$u_0 = 1 = \alpha_1 + \alpha_2, \qquad u_1 = 2 = -2\alpha_1 + 3\alpha_2,$$

amiből $\alpha_1 = \frac{1}{5}$, $\alpha_2 = \frac{4}{5}$, azaz $u_n = \frac{4 \cdot 3^n + (-2)^n}{5}$.

A 3.4. feladat megoldása

A sorozat első néhány tagja:

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
F_n	0	1	1	2	3	5	8	13	21	34	55	89	144

A Fibonacci sorozat rekurziója: $F_{n+1} = F_n + F_{n-1}$. Az ennek megfelelő mértani sorozatokra $q^2 = q + 1$, azaz $q^2 - q - 1 = 0$, amiből $q = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$. A Fibonacci sorozat rekurzióját teljesítő sorozatok általános képlete:

$$F_n = \alpha \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^n + \beta \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^n.$$

Az $F_0 = 0$, $F_1 = 1$ kezdeti feltétele miatt

$$0 = \alpha + \beta, \qquad 1 = \alpha \frac{1+\sqrt{5}}{2} + \beta \frac{1-\sqrt{5}}{2},$$

azaz $\alpha = \frac{1}{\sqrt{5}}$, $\beta = -\frac{1}{\sqrt{5}}$, tehát az explicit képlet:

$$F_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^n - \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^n .$$

A 3.5. feladat megoldása

A rekurzív képlet: $g_{n+1} = 2g_n + g_{n-1}$.

A rekurziót kielégítő mértani sorozatok q kvóciense kielégíti a $q^2 = 2q + 1$ egyenletet, tehát $q^2 - 2q - 1 = 0$, amiből $q = \frac{2 \pm \sqrt{8}}{2} = 1 \pm \sqrt{2}$.

A rekurziót kielégítő sorozatok általános képlete:

$$g_n = \alpha \left(1 + \sqrt{2}\right)^n + \beta \left(1 - \sqrt{2}\right)^n .$$

A kezdőelemek:

$$\begin{array}{rcccc} 0 & = & \alpha & + & \beta \\ 1 & = & \alpha \left(1 + \sqrt{2}\right) & + & \beta \left(1 - \sqrt{2}\right) \end{array}$$

amiből $\alpha = \frac{1}{2\sqrt{2}}$, $\beta = -\frac{1}{2\sqrt{2}}$, tehát

$$g_n = \frac{\left(1 + \sqrt{2}\right)^n - \left(1 - \sqrt{2}\right)^n}{2\sqrt{2}}.$$

A 3.6. feladat megoldása

A $g_{n+2} = g_{n+1} - g_n$ rekurziót kielégítő mértani sorozatok q kvóciensére $q^2 - q + 1 = 0$, azaz a lehetséges q-k a primitív hatodik egységgyökök:

$$q_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{-3}}{2} = \frac{1}{2} \pm i\frac{\sqrt{3}}{2} = \cos\frac{\pi}{3} \pm i \sin\frac{\pi}{3}.$$

Mivel $q_{1,1}^6 = 1$, így bármely, az adott rekurziót kielégítő sorozat periodikus és a periódusa 6 (vagy 1).

11.3. Harmadfokon – feladatok megoldása

A 3.2. feladat megoldásai

A 3.2. a) mego.

$$a^3 - 3a^2b - ab^2 + 3b^3 = a^2(a - 3b) - b^2(a - 3b) = (a^2 - b^2)(a - 3b) = (a - b)(a + b)(a - 3b).$$

A 3.2. b) mego.

Az $a = 3^x$, $b = 2^x$ helyettesítéssel az a) feladat polinomjához jutunk, tehát egyenletünk:

$$(3^x - 2^x)(3^x + 2^x)(3^x - 3 \cdot 2^x) = 0,$$

ami pontosan akkor teljesül, ha valamelyik tényező zérus.

$$3^x - 2^x = 0 \quad \longleftrightarrow \quad \left(\frac{3}{2}\right)^x = 1 \quad \longleftrightarrow \quad x = 0;$$

$$3^x + 2^x > 0;$$

$$3^x - 3 \cdot 2^x = 0 \quad \longleftrightarrow \quad \left(\frac{3}{2}\right)^x = 3 \quad \longleftrightarrow \quad x = \frac{\ln 3}{\ln 3 - \ln 2}.$$

Tehát az egyenletnek két valós megoldása van.

A 3.2. c) mego.

Az $a = \sin x$, $b = \cos x$ helyettesítéssel az a) feladat polinomjához jutunk, tehát egyenletünk:

$$(\sin x - \cos x)(\sin x + \cos x)(\sin x - 3\cos x) = 0,$$

ami pontosan akkor teljesül, ha valamelyik tényező zérus.

$$\sin x - \cos x = 0 \quad \longleftrightarrow \quad x = \frac{\pi}{4} + k\pi \quad k \in \mathbb{Z};$$

$$\sin x + \cos x = 0 \quad \longleftrightarrow \quad x = -\frac{\pi}{4} + k\pi \quad k \in \mathbb{Z};$$

$$\sin x - 3\cos x = 0 \quad \longleftrightarrow \quad \mathrm{tg}\, x = 3 \quad \longleftrightarrow \quad x \approx 1,249 + k\pi \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Tehát az egyenletnek $\pmod{\pi}$ három megoldása van.

A 3.2. fel. eredménye

$(a + b)(a - 2b)(2a - b)$.

A 3.3. feladat megoldása

Vegyük észre, hogy $x = t$ gyöke a polinomnak! Ebből következik, hogy $(x - t)$ kiemelhető a polinomból:

$$x^3 - 2tx^2 + t^3 = (x - t)(x^2 - tx - t^2).$$

Az adott egyenlet gyökei $x_1 = t$ és az $x^2 - tx - t^2 = 0$ másodfokú egyenlet gyökei, azaz

$$x_{2,3} = \frac{t \pm \sqrt{t^2 + 4t^2}}{2} = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2} t.$$

A 3.4. feladat megoldásai

A 3.4. fel. I. megoldása

Tegyük fel, hogy az állítással ellentétben egynél több megoldás van. Ha ezek x_1 és x_2, akkor az $(x-x_1)(x-x_2)$ polinom kiemelhető az adott harmadfokú kifejezésből, tehát

$$x^3-4x^2+9x+c=(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3), \tag{11.12}$$

azaz algebrailag három megoldás is van. A Viète formulákból – vagy a (11.12) egyenlet két oldalán x^2 és x együtthatójának összevetéséből

$$x_1+x_2+x_3=4; \tag{11.13}$$

$$x_1x_2+x_2x_3+x_3x_1=9. \tag{11.14}$$

Vegyük észre, hogy

$$0\le(x_1-x_2)^2+(x_2-x_3)^2+(x_3-x_1)^2=2(x_1+x_2+x_3)^2-6(x_1x_2+x_2x_3+x_3x_1)=2\cdot4^2-6\cdot9=-22. \tag{11.15}$$

Az ellentmondás mutatja, hogy nem lehet egynél több valós gyök.

Megjegyzés a 3.4. fel. I. megoldásához

A fenti gondolatmenetet alkalmazhatjuk az $x^3+ax^2+bx+c=0$ általános harmadfokú egyenletre is. A (11.15) egyenlet jobb oldala most $2a^2-6b$, tehát ha ez negatív, tehát ha $a^2<3b$, akkor az egyenletnek csak egy valós gyöke lehet.

A 3.4. fel. II. megoldása

Vizsgáljuk az $f(x)=x^3-4x^2+9x+c$ függvényt monotonitás szempontjából, azaz vizsgáljuk az $f'(x)=3x^2-8x+9$ deriváltfüggvény előjelét. Az f' deriváltfüggvény grafikonja felfelé nyíló parabola. Mivel diszkriminánsa $D'=8^2-4\cdot3\cdot9=64-72<0$, így f'-nek nincs zérushelye, tehát értékkészletében csak pozitív számok vannak. Ez azt jelenti, hogy az f függvény szigorúan monoton növő, tehát legfeljebb egy zérushelye van.

Megjegyzés a 3.4. fel. II. megoldásához

Az $f(x)=x^3+ax^2+bx+c$ általános harmadfokú függvény deriváltja: $f'(x)=3x^2+2ax+b$, amelynek diszkriminánsa $D'=4a^2-4\cdot3\cdot b$, ami pontosan akkor negatív, ha $a^2<3b$. Ebben az esetben az általános harmadfokú egyenletnek semmilyen c-re sincs egynél több valós gyöke.

Ha $a^2>3b$, akkor c bizonyos értékeinél a harmadfokú egyenletnek egynél több valós gyöke lesz, de lesznek olyan c értékek, amikor csak egy.

A 3.5. feladat megoldása

$$x_1x_2x_3 = -\frac{\beta}{\alpha}; \qquad x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_1 = \frac{\beta}{\alpha}; \qquad x_1 + x_2 + x_3 = \frac{\alpha}{\alpha} = 1,$$

így

$$\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \frac{1}{x_3} = \frac{x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_1}{x_1x_2x_3} = -1,$$

amiből adódik a feladat állítása.

A 3.6. feladat megoldásai

Segítség a 3.6. feladathoz

A szokásos megoldást (Viète-formulák alkalmazása) megelőzheti egy lépés. Adott polinomhoz keressük meg azt a polinomot, amelynek gyökei hárommal kisebbek az eredeti polinom gyökeinél!

A 3.6. fel. I. megoldása

A Viète formulák szerint

$$\begin{array}{rcccl} \sigma_1 & = & x_1 + x_2 + x_3 & = & 6 \\ \sigma_2 & = & x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_1 & = & a \\ \sigma_3 & = & x_1x_2x_3 & = & -a. \end{array}$$

A gyökök megadott kifejezése így írható át:

$$(x_1^3 + x_2^3 + x_3^3) - 9(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2) + 27(x_1 + x_2 + x_3) - 81.$$

Mivel

$$\begin{array}{rcl} (x_1 + x_2 + x_3)^3 & = & x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 + 6x_1x_2x_3 + \\ & + & 3(x_1^2x_2 + x_1^2x_3 + x_2^2x_1 + x_2^2x_3 + x_3^2x_1 + x_3^2x_2), \end{array}$$

és

$$\begin{array}{l} x_1^2x_2 + x_1^2x_3 + x_2^2x_1 + x_2^2x_3 + x_3^2x_1 + x_3^2x_2 = \\ = (x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_1)(x_1 + x_2 + x_3) - 3x_1x_2x_3 \end{array}$$

továbbá

$$(x_1 + x_2 + x_3)^2 = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + 2(x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_1),$$

így

$$x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 = (x_1 + x_2 + x_3)^3 - 3(x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_1)(x_1 + x_2 + x_3) + 3x_1x_2x_3$$

és
$$x_1^2+x_2^2+x_3^2=(x_1+x_2+x_3)^2-2(x_1x_2+x_2x_3+x_3x_1),$$
tehát a gyökök megadott kifejezése ebbe a formába rendezhető:
$$\sigma_1^3-9\sigma_1^2-3\sigma_1\sigma_2+18\sigma_2+3\sigma_3+27\sigma_1-81=216-324-18a+18a-3a+162-81=$$
$$=-27-3a,$$
ami pontosan akkor 0, ha $a=-9$. Erre az értékre az adott polinom x^3-6x^2-9x-9.

Megjegyzés a 3.6. fel. I. megoldásához

A végeredményül kapott x^3-6x^2-9x-9 polinomnak egy valós és két komplex gyöke van. A levezetés alapján a három gyök teljesíti az előírt követelményeket, de nem valósak. Nem követeltük meg, hogy valósak legyenek a gyökök, de középiskolai szintén gyakran kimondatlanul is ezt várjuk el.

A 3.6. fel. II. megoldása

Vezessük be az $x_i-3=y_i$ jelölést ($i\in\{1,2,3\}$)! Most az a kérdés, hogy mely a esetén lesz $y_1^3+y_2^3+y_3^3=0$, ha y_1, y_2 és y_3 az $(y+3)^3-6(y+3)^2+a(y+3)+a$ polinom gyökei.

A polinom standard alakban
$y^3+3y^2+(a-9)y+(4a-27)$, így
$$y_1+y_2+y_3=-3,\qquad y_1y_2+y_2y_3+y_3y_1=a-9,\qquad y_1y_2y_3=27-4a.$$
Ebből
$$y_1^3+y_2^3+y_3^3=(y_1+y_2+y_3)^3-3(y_1y_2+y_2y_3+y_3y_1)(y_1+y_2+y_3)+3y_1y_2y_3=$$
$$=(-3)^3-3(a-9)(-3)+3(27-4a)=-27-3a$$
mint az előbb. Tehát $a=-9$ esetén teljesül a három gyökre az adott összefüggés.

A 3.6. fel. III. megoldása

Az előző megoldáshoz hasonlóan indulunk, de észrevesszük, hogy polinomegyenletünkből
$$y^3=-3y^2-(a-9)y-(4a-27),$$
így
$$y_1^3+y_2^3+y_3^3=-3(y_1^2+y_2^2+y_3^2)-(a-9)(y_1+y_2+y_3)-3(4a-27).$$

Itt

$$y_1^2 + y_2^2 + y_3^2 = (y_1 + y_2 + y_3)^2 - 2(y_1y_2 + y_2y_3 + y_3y_1) = (-3)^2 - 2(a-9) = 27 - 2a,$$

amiből

$$y_1^3 + y_2^3 + y_3^3 = (-3) \cdot (27 - 2a) - (a-9)(-3) - 3(4a - 27) = -27 - 3a,$$

ami $a = -9$ esetén zérus.

A 3.7. feladat megoldása

$$g_0 = x_1^0 + x_2^0 + x_3^0 = 3, \qquad g_1 = x_1^1 + x_2^1 + x_3^1 = 1,$$

$$g_2 = x_1^2 + x_1^2 + x_1^2 = (x_1 + x_2 + x_3)^2 - 2(x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_1) = 1^2 - 2(-1) = 3.$$

Vegyük észre, hogy a polinom gyökeire $x_i^3 = x_i^2 + x_i + 1$, így $g_{n+3} = g_{n+2} + g_{n+1} + g_n$. Ebből $g_3 = 7$, $g_4 = 11$, $g_5 = 21$, $g_6 = 39$, $g_7 = 71$, $g_8 = 131$.

A 3.8. feladat megoldása

Tekintsük a

$$p(x_1, x_2, x_3) = (x_1 + x_2 - x_3)(x_1 - x_2 + x_3)(-x_1 + x_2 + x_3) \tag{11.16}$$

háromváltozós polinomot. A p értéke pontosan akkor zérus, ha x_1, x_2 és x_3 közül valamelyik a másik kettő összege. A p polinom változóinak szimmetrikus polinomja – bár az egyes tényezői nem szimmetrikusak. Írjuk fel p-t a

$$\sigma_1 = x_1 + x_2 + x_3, \quad \sigma_2 = x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_1, \quad \sigma_3 = x_1x_2x_3$$

elemi szimmetrikus polinomok polinomjaként!

$$p = -(x_1^3 + x_2^3 + x_3^3) + (x_1^2x_2 + x_1^2x_3 + x_2^2x_1 + x_2^2x_3 + x_3^2x_1 + x_3^2x_2) - 2x_1x_2x_3 =$$
$$= -(x_1 + x_2 + x_3)^3 + 4(x_1^2x_2 + x_1^2x_3 + x_2^2x_1 + x_2^2x_3 + x_3^2x_1 + x_3^2x_2) + 4x_1x_2x_3 =$$
$$= -(x_1 + x_2 + x_3)^3 + 4(x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_1)(x_1 + x_2 + x_3) - 8x_1x_2x_3,$$

azaz

$$p = -\sigma_1^3 + 4\sigma_2\sigma_1 - 8\sigma_3.$$

A Viète formulák szerint az

$$ax^3 + bx^2 + cx + d \tag{11.17}$$

polinom gyökeinek elemi szimmetrikus polinomjaira

$$\sigma_1 = -\frac{b}{a}, \qquad \sigma_2 = \frac{c}{a}, \qquad \sigma_3 = \frac{d}{a}, \tag{11.18}$$

azaz

$$a^3 p = -b^3 + 4abc - 8a^2 d. \tag{11.19}$$

Tehát a (11.19) jobb oldalán található polinom értéke pontosan akkor zérus, ha a 11.17 polinom egyik gyöke a másik kettő összege.

A 3.9. feladat megoldása

A

$$dx^3 + cx^2 + bx + a \tag{11.20}$$

polinom gyökei az eredeti polinom reciprokai. Pontosan akkor igaz, hogy az eredeti polinom két gyökének harmonikus közepe a harmadik gyök, ha ebben a polinomban két gyök számtani közepe egy harmadik gyök. Most a

$$q(x_1, x_2, x_3) = (x_1 + x_2 - 2x_3)(x_1 - 2x_2 + x_3)(-2x_1 + x_2 + x_3) \tag{11.21}$$

háromváltozós polinomot írjuk fel az elemi szimmetrikus polinomok polinomjaként.

$$q = -2(x_1^3 + x_2^3 + x_3^3) + 3(x_1^2 x_2 + x_1^2 x_3 + x_2^2 x_1 + x_2^2 x_3 + x_3^2 x_1 + x_3^2 x_2) - 12 x_1 x_2 x_3 =$$

$$= -2(x_1 + x_2 + x_3)^3 + 9(x_1^2 x_2 + x_1^2 x_3 + x_2^2 x_1 + x_2^2 x_3 + x_3^2 x_1 + x_3^2 x_2) =$$

$$= -2(x_1 + x_2 + x_3)^3 + 9(x_1 x_2 + x_2 x_3 + x_3 x_1)(x_1 + x_2 + x_3) - 27 x_1 x_2 x_3,$$

azaz

$$p = -2\sigma_1^3 + 9\sigma_2\sigma_1 - 27\sigma_3,$$

ahol

$$\sigma_1 = -\frac{c}{d}, \qquad \sigma_2 = \frac{b}{d}, \qquad \sigma_3 = -\frac{a}{d},$$

tehát

$$d^3 q = 2c^3 - 9cbd + 27ad^2. \tag{11.22}$$

A (11.22) kifejezés értéke az adott $ad \neq 0$ feltétel mellett pontosan akkor zérus, ha az adott polinom valamelyik gyöke a másik két gyök harmonikus közepe.

A 3.10. fel. eredménye

$x^3 - 5x - 2 = 0.$

A 3.11. feladat megoldásai

Előzetes megjegyzés a 3.11. feladathoz

Számológépünk segíthet az eredmény megsejtésében, de az általa kiadott számot nem tekinthetjük pontosnak, csak közelítő értéknek.

A 3.11. fel. I. megoldása

Használjuk az $(x+y)^3 = x^3 + y^3 + 3xy(x+y)$ azonosságot! Legyen $x = \sqrt[3]{2+\sqrt{5}}$, $y = \sqrt[3]{2-\sqrt{5}}$, akkor $xy = -1$, így a keresett $x+y = a$ mennyiségre $a^3 = 4 - 3a$, azaz $(a-1)(a^2+a+4) = 0$. A második tényezőnek nincs zérushelye, így $a = 1$.

A 3.11. fel. II. megoldása

A

$$2+\sqrt{5} = \frac{(1+\sqrt{5})^3}{8}, \qquad 2-\sqrt{5} = \frac{(1-\sqrt{5})^3}{8}$$

összefüggésekből azonnal adódik, hogy a kifejezés értéke 1.

A 3.12. feladat megoldása

A rövidség kedvéért legyen $\alpha = 2-\sqrt{3}$, $\beta = 2+\sqrt{3}$. Ekkor $\alpha+\beta = 4$, $\alpha^3+\beta^3 = 52$ és $\alpha\beta = 1$. Gyöktelenítve a kifejezést:

$$\begin{aligned}
&\frac{\alpha}{\sqrt{2}-\sqrt{\alpha}} + \frac{\beta}{\sqrt{2}+\sqrt{\beta}} - \sqrt{2} = \frac{\alpha(\sqrt{2}+\sqrt{\alpha})}{2-\alpha} + \frac{\beta(\sqrt{2}-\sqrt{\beta})}{2-\beta} - \sqrt{2} = \\
= \ & \frac{1}{\sqrt{3}}\left(\sqrt{2}(\alpha-\beta) + \sqrt{\alpha^3} + \sqrt{\beta^3}\right) - \sqrt{2} = -3\sqrt{2} + \frac{\sqrt{(\sqrt{\alpha^3}+\sqrt{\beta^3})^2}}{\sqrt{3}} = \\
= \ & -3\sqrt{2} + \frac{\sqrt{\alpha^3+\beta^3+2\sqrt{\alpha^3\beta^3}}}{\sqrt{3}} = -3\sqrt{2} + \frac{\sqrt{54}}{\sqrt{3}} = -3\sqrt{2} + \sqrt{18} = 0
\end{aligned}$$

A 3.13. feladat megoldása

Ha $\sqrt[3]{x-3} = X$ és $\sqrt[3]{y+4} = Y$, akkor egyenletrendszerünk:

$$\left.\begin{aligned} X+Y &= 11 \\ X^3+Y^3 &= 341 \end{aligned}\right\} \tag{11.23}$$

Mivel $X^3 + Y^3 = (X+Y)(X^2 - XY + Y^2)$ így ez így is írható:

$$\left.\begin{aligned} X+Y &= 11 \\ X^2 - XY + Y^2 &= 31 \end{aligned}\right\} \tag{11.24}$$

Az $X + Y = B$, $XY = C$ jelöléssel (tehát X és Y a $t^2 - Bt + C = 0$ egyenlet gyökei):

$$\left.\begin{aligned} B &= 11 \\ B^2 - 3C &= 31 \end{aligned}\right\} \tag{11.25}$$

azaz $B = 11$ és $C = 30$, tehát X és Y a $t^2 - 11t + 30$ gyökei, azaz $X_1 = 5$, $Y_1 = 6$ és $X_2 = 6$, $Y_2 = 5$, $x_1 = 128$, $y_1 = 212$, $x_2 = 219$, $y_2 = 121$.

A 3.14. feladat megoldásai

A 3.14. fel. I. megoldása

Egyenletrendszer

Ha $h(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$, akkor

$$\left.\begin{aligned} -a + b - c + d &= 1 \\ d &= 1 \\ a + b + c + d &= 1 \end{aligned}\right\} \tag{11.26}$$

azaz az első és utolsó egyenlet összegéből $b = 0$, így $c = -a$, azaz $h(x) = ax^3 - ax + 1$.

A 3.14. fel. II. megoldása

Lagrange-féle interpolációs polinomok

$h_1(x)$ olyan függvény, amelyre $h(-1) = 1$, $h(0) = 0$, $h(1) = 0$, nevezetesen

$$h_1(x) = \frac{x(x-1)}{(-1)(-1-1)} = \frac{1}{2}x(x-1).$$

A $h_2(x)$ függvényre $h(-1) = 0$, $h(0) = 1$, $h(1) = 0$, azaz

$$h_2(x) = \frac{(x+1)(x-1)}{(0+1)(0-1)} = -(x+1)(x-1),$$

és a $h_3(x)$ függvényre $h(-1) = 0$, $h(0) = 0$, $h(1) = 1$, azaz

$$h_3(x) = \frac{(x+1)x}{(1+1)(1)} = \frac{1}{2}x(x+1).$$

Végül legyen

$$h_4(x) = a(x+1)x(x-1),$$

ami (az összes) olyan harmadfokú polinom, amely az előírt helyeken zérus, így $h(x) = h_1(x) + h_2(x) + h_3(x) + h_4(x)$ megfelelő és az összes.

A 3.14. fel. III. megoldása

Ad hoc megoldás

A $g(x) = h(x) - 1$ függvény az előírt helyeken zérus, így $g(x) = a(x+1)x(x-1)$, azaz $h(x) = a(x+1)x(x-1) + 1$.

A 3.15. feladat megoldása

1. Emeljük mindkét oldalt köbre! Alkalmazzuk ehhez az $(a+b)^3 = a^3 + b^3 + 3ab(a+b)$ azonosságot!

$$(4x-1) + (4-x) + 3\sqrt[3]{(4x-1)(4-x)}(\sqrt[3]{4x-1} + \sqrt[3]{4-x}) = -3. \tag{11.27}$$

2. Használjuk fel az eredeti összefüggést!

$$(4x-1) + (4-x) + 3\sqrt[3]{(4x-1)(4-x)}(-\sqrt[3]{3}) = -3. \tag{11.28}$$

3. Rendezés és 3-mal való osztás után kapjuk, hogy

$$x + 2 = \sqrt[3]{3}\sqrt[3]{-4x^2 + 17x - 4} \tag{11.29}$$

4. Emeljünk újra köbre!

$$x^3 + 6x^2 + 12x + 8 = -12x^2 + 51x - 12. \tag{11.30}$$

5. Rendezzünk 0-ra!

$$x^3 + 18x^2 - 39x + 20 = 0. \tag{11.31}$$

6. Vegyük észre, hogy a (11.31) bal oldalán található polinomnak gyöke az 1, így $(x-1)$ kiemelhető:

$$(x-1)(x^2 + 19x - 20) = 0. \tag{11.32}$$

7. A (11.32) bal oldalán található másodfokú tényezőnek is gyöke az 1, így $(x-1)$ újra kiemelhető:

$$(x-1)(x-1)(x+20) = 0. \tag{11.33}$$

8. Az egyenlet gyökei: $x_1 = x_2 = 1$ és $x_3 = -20$.

9. Meglepődve tapasztaljuk, hogy az 1 nem gyöke az egyenletnek, hiszen az eredeti egyenlet bal oldalán $x = 1$ esetén

$$\sqrt[3]{4 \cdot 1 - 1} + \sqrt[3]{4 - 1} = 2 \cdot \sqrt[3]{3},$$

áll, míg a jobb oldal negatív.

Az $x = -20$ szám valóban gyök:

$$\sqrt[3]{4 \cdot (-20) - 1} + \sqrt[3]{4 - (-20)} = \sqrt[3]{-81} + \sqrt[3]{24} =$$
$$= \sqrt[3]{3} \cdot (\sqrt[3]{-27} + \sqrt[3]{8}) = \sqrt[3]{3} \cdot (-3 + 2) = -\sqrt[3]{3}.$$

Megjegyzés a 3.15. feladat megoldásához

Egy alkalommal az alábbi beszélgetés hangzott el két diák – alább A és B – között:

A: mindegyik gyök jó kell legyen, hiszen mindegyik lépést megcsinálhatjuk visszafelé is.

B: mi a (fent 2.-ben található) behelyettesítés visszafelé? Talán kihelyettesítés?

Valóban, a 2. lépésben jött be a hamis gyök, az egyetlen megoldás a (-20).

A fenti példához kapcsolódik a 2.20. feladat.

A 3.16. feladat megoldásai

A 3.16. fel. I. megoldása

Hajtsuk végre a hatványozást, alkalmazzuk hozzá az $(a-b)^4 = a^4-4a^3b+6a^2b^2-4ab^3+b^4$ azonosságot! Kapjuk, hogy

$$2x^4 - 36x^3 + 246x^2 - 756x + 784 = 0,$$

azaz

$$x^4 - 18x^3 + 123x^2 - 378x + 392 = 0. \tag{11.34}$$

Hátha van a (11.34) egyenletnek egész megoldása! A $x(x^3 - 18x^2 + 123x - 378) = -392$ alakból világos, hogy ha x egész, akkor a $392 = 2^3 \cdot 7^2$ szám osztója. A próbálgatás azt mutatja, hogy $x_1 = 7$ valóban megoldás. Emeljük ki az $(x-7)$ gyöktényezőt! Kapjuk, hogy

$$x^4 - 18x^3 + 123x^2 - 378x + 392 = (x-7)(x^3 - 11x^2 + 46x - 56).$$

Az utolsó tényező egész gyöke most az 56 osztója, és szerencsére $x_2 = 2$ megfelelő. Kapjuk, hogy

$$x^4 - 18x^3 + 123x^2 - 378x + 392 = (x-7)(x-2)(x^2 - 9x + 28).$$

Mivel az utolsó – másodfokú – tényezőnek nincs valós megoldása, így nincs más valós megoldása a negyedfokú egyenletnek sem, csak $x_1 = 7$ és $x_2 = 2$.

Megjegyzés a 3.16. fel. I. megoldásához

Kevesebb számolással, de hasonló stílusban jutunk el a megoldáshoz, ha alkalmazzuk az $y = x - 5$ helyettesítést. Ezzel $y + 1 = x - 4$ és az egyenlet:

$$y^4 + (y+1)^4 = 97.$$

A 3.16. fel. II. megoldása

Lőjünk középre! Alkalmazzuk a $z = x - 4,5$ helyettesítést! Ezzel

$$x - 5 = z - \frac{1}{2}, \qquad x - 4 = z + \frac{1}{2}$$

és

$$(x-5)^4 + (x-4)^4 = \left(z - \frac{1}{2}\right)^4 + \left(z + \frac{1}{2}\right)^4,$$

amelynek felbontásakor kiesnek a z-ben páratlan kitevőjű tagok és kapjuk a

$$2z^4 + 3z^2 + \frac{1}{8} = 97$$

egyenletet. Ez z^2-ben másodfokú és gyökei:

$$z_{1,2}^2 = \frac{-3 \pm \sqrt{3^2 + 4 \cdot 2 \cdot \left(97 - \frac{1}{8}\right)}}{4} = \frac{-3 \pm 28}{4} = \begin{cases} \frac{25}{4} \\ -\frac{31}{4} \end{cases}$$

A négyzet nemnegativitása miatt itt csak $z = \pm\frac{5}{2}$ lehetséges, amiből $x_1 = 7$ és $x_2 = 2$.

A 3.16. fel. III. megoldása

A negyedik hatványok: 0, 1, 16, 81, 256, ... Vegyük észre, hogy a feladatban két szomszédos negyedik hatvány összegéről van szó – ha egyáltalán egészek –, és látható, hogy $16+81 = 97$, azaz $2^4+3^4 = 97$ illetve $(-3)^4+(-2)^4 = 97$. Két megoldást, $x-5 = 2$ és $x-5 = -3$ esetét, azaz $x_1 = 7$-et és $x_2 = 2$-t már megtaláltuk. Van-e más? Tekintsük az $f(x) = (x-5)^4 + (x-4)^4$ függvényt és vizsgáljuk monotonitás szempontjából!

A 3.17. feladat megoldásai

A 3.17. fel. I. megoldása

Tekintsük a

$$p(t) = (t-x)(t-y)(t-z) \tag{11.35}$$

harmadfokú polinomot, melynek zérushelyei a feladatban említett x, y, z számok. A p polinom alakja a szorzások elvégzése után

$$p(t) = t^3 - (x+y+z)t^2 + (xy+yz+zx)t - xyz, \tag{11.36}$$

ahol a feltételek szerint $x+y+z = a$, illetve a

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = \frac{1}{a} \tag{11.37}$$

egyenletből $axyz$-vel való átszorzás után

$$a(xy + yz + zx) = xyz, \tag{11.38}$$

tehát ha $xy + yz + zx = \beta$, akkor $xyz = a\beta$, azaz polinomunk a

$$p(t) = t^3 - at^2 + \beta t - a\beta \tag{11.39}$$

alakba írható át. Azt kell igazolnunk, hogy x, y és z egyike a, azaz p-nek gyöke a $t = a$ szám. Erről meggyőződhetünk behelyettesítéssel:

$$p(a) = a^3 - a \cdot a^2 + \beta a - a\beta,$$

ami valóban zérus. Ezzel a feladatot megoldottuk.

Megjegyezzük, hogy

$$p(t) = (t - a)(t^2 + \beta),$$

azaz a másik két gyök $t_2 = \sqrt{\beta}$ és $t_3 = -\sqrt{\beta}$ egymás ellentettje.

A 3.17. fel. II. megoldása

A $z = -b$ jelöléssel egyenletrendszerünk a

$$\begin{cases} x + y & = & a + b \\ \frac{1}{x} + \frac{1}{y} & = & \frac{1}{a} + \frac{1}{b} \end{cases} \tag{11.40}$$

alakba írható át. Ha

$$u = x + y = a + b, \qquad \text{és} \qquad v = xy = ab,$$

akkor $u = 0$ esetén $a = -b = z$, azaz a feladat állítása automatikusan teljesül, míg $u \neq 0$ esetén (11.40) egyenletrendszerünk a

$$\begin{cases} x + y & = & a + b \\ xy & = & ab, \end{cases} \tag{11.41}$$

tehát a keresett x és y – valamint egyúttal a és b is – a

$$t^2 - ut + v = 0 \tag{11.42}$$

másodfokú egyenlet két gyöke, így $x = a$ vagy $y = a$ – és egyúttal $y = b = -z$ vagy $x = b = -z$. Ezzel az állítást igazoltuk.

A 3.17. fel. III. megoldása

Hozzuk közös nevezőre a megadott második egyenlet bal oldalát!

$$\frac{xy+yz+zx}{xyz}=\frac{1}{a},$$

tehát az első egyenletet felhasználva

$$\frac{xy+yz+zx}{xyz}=\frac{1}{x+y+z},$$

tehát

$$(x+y+z)(xy+yz+zx)=xyz,$$

amit beszorozva, rendezve és újra szorzattá alakítva kapjuk, hogy

$$(x+y)(y+z)(z+x)=0. \tag{11.43}$$

A fenti (11.43) összefüggés szerint az x, y, z változók közül valamelyik kettő összeg zérus, így a megadott $x+y+z=a$ reláció miatt a kimaradó ismeretlen értéke a. Ezzel az állítást igazoltuk.

A 3.17. fel. IV. megoldása

Változóinkat az

$$\frac{1}{x+y+z}=\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}$$

reláció köti össze. Osszuk le ennek mindkét oldalát mondjuk $1/x$-szel, és vezessük be az $Y=y/x$; $Z=z/x$ változókat.

Ekkor

$$\frac{1}{1+Y+Z}=1+\frac{1}{Y}+\frac{1}{Z}.$$

Közös nevezőre hozva, majd rendezve az egyenlőséget azt kapjuk, hogy

$$(YZ+Y+Z)(1+Y+Z)=YZ,$$

beszorozva és rendezve

$$2YZ+Y^2Z+YZ^2+Y^2+Z^2+Y+Z=0,$$

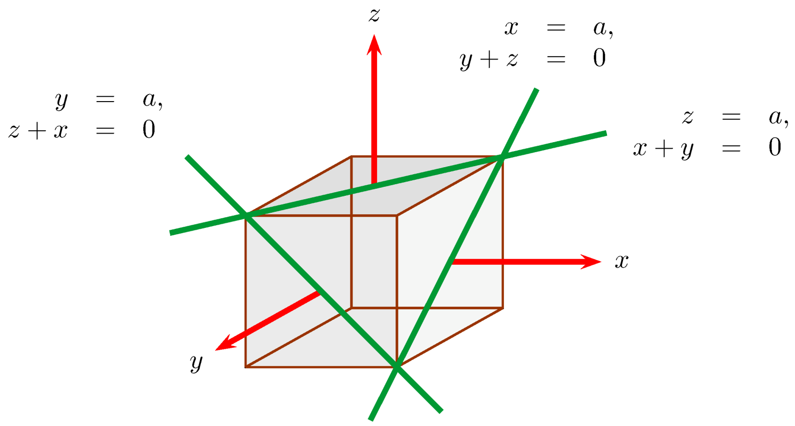
a bal oldalt szorzattá bontva

$$2YZ+Y^2Z+YZ^2+Y^2+Z^2+Y+Z=(Y+Z)^2+YZ(Y+Z)+(Y+Z)=$$
$$=(Y+Z)(YZ+Y+Z+1)=(Y+Z)(1+Y)(1+Z)=0.$$

Azt kapjuk, hogy vagy $Y+Z=0$, ami avval ekvivalens, hogy $y=-z$, vagy $1+Y=0 \Leftrightarrow y=-x$, vagy $1+Z=0 \Leftrightarrow z=-x$. Tehát két változó egymás ellentettje, így a harmadik szükségképpen a-val egyenlő

Megjegyzés a 3.17. feladathoz

Hiába értik meg a példa megoldását a nebulók, az egyenletrendszer megoldáshalmazának ábrázolása továbbra is nehéz feladat marad. Segít, ha segédalakzatként felvesszük azt a kockát (lásd a 11.1 ábrát), amelynek csúcsai a térbeli derékszögű koordinátarendszer $(\pm a; \pm a; \pm a)$ koordinátájú pontjai.



11.1. ábra.

A 3.18. feladat megoldása

Rövid próbálkozás után sejteni lehet, hogy mind a feltétel, mind a bizonyítandó egyenlőség túl szabályos ahhoz, hogy másként teljesüljön, mint a triviális módon, azaz, hogy valamely két elem összege zérus; vagy $a+b$, vagy $a+c$, vagy $b+c$ egyenlő nullával. Nyilván ekkor vagy $a^{2k+1}+b^{2k+1}$, vagy $a^{2k+1}+c^{2k+1}$, vagy $b^{2k+1}+c^{2k+1}$ is egyenlő nullával, amikor is triviálisan tejesül az egyenlőség.

Ezt már nem is kell bizonyítanunk, hiszen megtettük már a 3.17. feladatban. Az itteni a, b, c ismeretlenek az ottani x, y, z változóknak felelnek meg és az ottani a az itteni $\frac{1}{a+b+c}$ és $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}$ közös értékének.

11.4. Polinomok – feladatok megoldása

A 3.1. feladat megoldása

Hajtsunk végre maradékos osztást!

$$\begin{aligned} x^5 - x - 1 &= (x^2 + ax + b)\left(x^3 - ax^2 + (a^2 - b)x + (2ab) - a^3\right) + \\ &+ \left((a^4 + b^2 - 3a^2b - 1)x + (a^3b - 2ab^2 - 1)\right). \end{aligned}$$

Az adott ötödfokú polinomnak nincs racionális gyöke. Így, ha van közös x gyök, akkor a maradék polinom nem lehet valódi elsőfokú, mert annak csak racionális gyöke van.

Így $a^4 + b^2 - 3a^2b - 1 = 0$ és $a^3b - 2ab^2 - 1 = 0$. Négyzetszám hármas maradéka 0 vagy 1. Így az első egyenlet csak úgy teljesülhet, ha a és b egyike osztható hárommal ,de ez ellentmondáshoz vezet a második egyenletben. Nem lehet közös gyök.

A 3.2. feladat megoldása

Az n-edfokú $P(x)$ polinom gyökeinek reciprokai a $Q(x) = x^n p(\frac{1}{x})$ polinom gyökei. Speciálisan, a $p(x) = x^3 - x + 1$ polinom gyökeinek reciprokai a $q(x) = x^3 \left(\left(\frac{1}{x}\right)^3 - \frac{1}{x} + 1\right) = 1 - x^2 + x^3$ polinom gyökei. Állítjuk, hogy a q polinom minden gyöke egyben gyöke az $r(x) = x^5 + x + 1$ polinomnak. Ehhez elég megmutatnunk, hogy a p polinom osztja az r polinomot. Mivel

$$x^5 + x + 1 = (x^3 - x^2 + 1)(x^2 + x + 1)$$

így a feladat állítását igazoltuk.

A 3.3. feladat megoldása

A polinom („soktag”) monomok („egytagok”) összegéből áll. Egy monom egy szám (valós, racionális, egész vagy általában valamely gyűrűbeli elem) és a változók természetes szám kitevőn vett szorzataiból áll. Egész együtthatós háromváltozós monom például a $3x_1^2x_2^5x_3$, de lehet háromnál több változósnak is tekinteni, amelyben a többi változó 0-adik hatványon van. Háromváltozós egészegyütthatós polinom például a $3x_1^2x_2^5x_3 - 2x_1x_2 + 11x_3$, de tekinthető háromvoltozós valós együtthatós polinomnak is.

Ha egy polinom szimmetrikus, akkor bármelyik monomjával együtt tartalmazza a monom permutáltjait is. Ha pld egy kétváltozós szimmetrikus polinom tartalmazza a $3x_1x_2^2$ monomot, akkor tartalmazza a $3(x_1^2x_2 + x_1x_2^2)$ szimmetrikus polinomot is, de ha háromvoltozós szimmetrikus polinomként tartalmazza ugyanezt, akkor a

$$3(x_1^2x_2 + x_1^2x_3 + x_1x_2^2 + x_1x_3^2 + x_2^2x_3 + x_2x_3^2) \tag{11.44}$$

polinomot is tartalmazza. Minden polinom felbontható monomokra, a szimmetrikus polinom felbontható monomok permutáltjaiból álló csoportokra.

A monomot, ha a szám szorzójától eltekintünk, akkor jól jellemzik az egyes változók kitevői. Érdemes a változók sorrendjét előre rögzíteni és ilymódon a kitevők sorozatával írható le a monom. Az $x_1x_2^2$ monomot pld a $(1;2)$ sorozat írja le a kétváltozós (x_1, x_2) polinomok között, illetve az $(1;2;0)$ sorozat a háromváltozós (x_1, x_2, x_3) polinomok között. A kitevőknek a változók rögzített sorrendjének megfelelő sorozatát az alábbiakban a monom kódjának nevezzük. Az $x_1x_2^2$ háromváltozós monom kódja $(1;2;0)$, az $x_1x_2x_3$ monomé $(1;1;1)$ a kódokat a lexikografikus rendszer szerint hasonlítjuk össze: először az első elemüket hasonlítjuk össze, és amelyiknél nagyobb ez a szám, azt a kódot tekintjük nagyobbnak. Ha egyenlők az első elemek, akkor nem döntünk, hanem a második elemüket hasonlítjuk össze stb. Az $(1;2;0)$ kód pld lexikografikusan nagyobb az $(1;1;1)$ kódnál.

A szimmetrikus polinom egy monomjának permutáltjai között van egy lexikografikusan legnagyobb. A (11.44) polinomban ez a $x_1^2x_2$, amelynek kódja $(2;1;0)$- Általában az n-változós szimmetrikus polinom egy monomcsoportjánál a lexikografikusan legnagyobb tagjának,

$$x_1^{i_1}x_2^{i_2}\dots x_n^{i_n} \tag{11.45}$$

-nek a kódja egy olyan

$$(i_1;i_2;\dots;i_n) \tag{11.46}$$

sorozat, amely monoton fogy: $i_1 \geq i_2 \geq \dots \geq i_n$.

Az elemi szimmetrikus polinomok

$$\sigma_1^{j_1}\sigma_2^{j_2}\dots\sigma_n^{j_n} \tag{11.47}$$

monomjának felbontásakor olyan szimmetrikus polinomot kapunk, amelynek lexikografikusan legnagyobb monomja

$$x_1^{j_1+j_2+\dots+j_n}x_2^{j_2+\dots+j_n}\dots x_n^{j_n}. \tag{11.48}$$

Legyen adva most s egy tetszőleges n változós szimmetrikus polinom. Bontsuk fel monomok permutáltjainak csoportjaira, minden csoportot jellemezzünk a kitevők szerint lexikografikusan legnagyobb tagjával és a legnagyobbak közül is válasszuk ki a lexikografikusan legnagyobbat. Legyen ennek a monomnak a kódja $(i_1;i_2;\dots;i_n)$, a monom együtthatója $\alpha_{i_1;i_2;\dots;i_n}$

Tekintsük a szimmetrikus polinomok

$$p_{i_1;i_2;\dots;i_n} = \sigma_1^{i_1-i_2}\sigma_2^{i_2-i_3}\dots\sigma_{n-1}^{i_{n-1}-i_n}\sigma_n^{i_n} \tag{11.49}$$

monomját. Ennek felbontásakor a lexikografikusan legnagyobb tag kódja épp $(i_1;i_2;\dots;i_n)$, tehát az

$$s_1 = s - \alpha_{i_1;i_2;\dots;i_n}p_{i_1;i_2;\dots;i_n} \tag{11.50}$$

polinom is szimmetrikus, de lexikografikusan legnagyobb tagja kisebb a lexikografikus sorrendben, mint az s polinomé.

Tekintsük most az s_1 polinomot és válasszuk ki annak lexikografikusan legnagyobb monomját, készítsük el ahhoz az elemi szimmetrikus polinomok megfelelő polinomját stb. Ez az eljárás véges, hiszen a lexikografikusan legnagyobb elemnél lexikografikusan kisebb monomfajták csak véges sokan vannak. Az eljárás nem áll meg addig, amíg egy konstans szám nem lesz a valahanyadik lépésben képződő s_k polinom, hiszen minden lépésben szimmetrikus polinomot kapunk, amelynek legnagyobb monomjának kódja monoton fogyó, így képezhető az elemi szimmetrikus polinomok (11.49) polinomja és vele lejjebb léphetünk a lexikografikus listán. Mikor a konstanshoz jutunk, akkor a menet közben képzett (11.50) egyenleteket sorban visszafejtve, az s_k konstans és a k-adik lépésben képzett elemi szimmetrikus polinom összegeként előáll az s_{k-1} polinom stb. végül a menet közben gyártott (11.49) alakú polinomok lineáris kifejezéseként állítjuk elő p-t.

A (11.49) polinom lexikografikusan legnagyobb monomjának együtthatója 1, így az eljárás során osztanunk sem kell, csak szorzunk, összeadunk, kivonunk számokat, tehát a valós és racionális test mellett az egészek gyűrűjében és más egységelemes gyűrűben is elvégezhető az algoritmus.

A 3.4. feladat megoldása

Eredmény:

$$Res(a,b) = a_2^2b_0^2 - a_1a_2b_0b_1 + a_0a_2b_1^2 - 2a_0a_2b_0b_2 + a_1^2b_0b_2 - a_0a_1b_1b_2 + a_0^2b_2^2. \tag{11.51}$$

Megoldás:

$$\alpha+\beta = -\frac{a_1}{a_0}, \qquad \alpha\beta = \frac{a_2}{a_0},$$

$$\gamma+\delta = -\frac{b_1}{b_0}, \qquad \gamma\delta = \frac{b_2}{b_0}.$$

A vizsgált szorzat első két tényezőjének szorzata:

$$\alpha\beta - \gamma(\alpha+\beta) + \gamma^2 = \frac{a_2}{a_0} + \gamma\frac{a_1}{a_0} + \gamma^2,$$

míg a második két tényező szorzata:

$$\alpha\beta - \delta(\alpha+\beta) + \delta^2 = \frac{a_2}{a_0} + \delta\frac{a_1}{a_0} + \delta^2,$$

így a teljes szorzat:

$$\left(\frac{a_2}{a_0}\right)^2 + \frac{a_2}{a_0}(\gamma+\delta)\frac{a_1}{a_0} + \frac{a_2}{a_0}\left(\gamma^2+\delta^2\right) +$$

$$+\gamma\delta\left(\frac{a_1}{a_0}\right)^2+\frac{a_1}{a_0}\left(\gamma\delta^2+\delta\gamma^2\right)+\gamma^2\delta^2=$$

$$\left(\frac{a_2}{a_0}\right)^2-\frac{a_2}{a_0}\frac{b_1}{b_0}\frac{a_1}{a_0}+\frac{a_2}{a_0}\left(\frac{b_1^2}{b_0^2}-2\frac{b_2}{b_0}\right)+$$

$$+\frac{b_2}{b_0}\left(\frac{a_1}{a_0}\right)^2-\frac{a_1}{a_0}\frac{b_2}{b_0}\frac{b_1}{b_0}+\left(\frac{b_2}{b_0}\right)^2=$$

$$=\frac{a_2^2b_0^2-a_1a_2b_0b_1+a_0a_2b_1^2-2a_0a_2b_0b_2+a_1^2b_0b_2-a_0a_1b_1b_2+a_0^2b_2^2}{a_0^2b_0^2}.$$

Megjegyzés a 3.4. feladathoz

A (11.51) rezultáns értéke pontosan akkor zérus, ha a két másodfokú polinomnak van közös gyöke. Az eljárás két tetszőleges fokú polinommal is elvégezhető, de a számítás, a rezultáns felírása ezen az úton hosszadalmas.

A 3.5. feladat megoldásai

A 3.5. a) mego.

A Δ polinomban a lexikografikusan legnagyobb tag az $x_1^4x_2^2$, ennek kódja (lásd a 3.3. feladatot) $(4;2;0)$. A hatodfokú monomom ennél lexikografikusan nem nagyobb kódjai és az ezekhez tartozó elemi szimmetrikus monomok:

$(4;2;0)$	$(4;1;1)$	$(3;3;0)$	$(3;2;1)$	$(2;2;2)$
$s_1^2s_2^2$	$s_1^3s_3$	s_2^3	$s_1s_2s_3$	s_3^2

A Δ polinom és az említett elemi szimmetrikus monomok felbontásában a fenti kódú monomcsoportok együtthatója:

	$(4;2;0)$	$(4;1;1)$	$(3;3;0)$	$(3;2;1)$	$(2;2;2)$
Δ	1	-2	-2	2	-6
$s_1^2s_2^2$	1	2	2	8	15
$s_1^3s_3$	0	1	0	3	6
s_2^3	0	0	1	3	6
$s_1s_2s_3$	0	0	0	1	3
s_3^2	0	0	0	0	1

Ennek alapján:

$$\Delta=s_1^2s_2^2-4s_1^3s_3-4s_2^3+18s_1s_2s_3-27s_3^2. \tag{11.52}$$

A 3.5. b) mego.

A Viète formulák szerint

$$s_1 = -\frac{b}{a}, \qquad s_2 = \frac{c}{a}, \qquad s_3 = \frac{-d}{a},$$

azaz

$$\Delta_p = \frac{b^2c^2 - 4b^3c - 4ac^3 + 18abcd - 27ad^2}{a^4}. \tag{11.53}$$

A 3.6. feladat megoldása

A „kis” Fermat tétel szerint a $p(x) = x^6 - 1$ polinomnak modulo 7 mind a hat redukált maradékosztály gyöke, így a polinom gyöktényezős alakja

$$x^6 - 1 \equiv (x-1)(x-2)(x-3)(x-4)(x-5)(x-6). \tag{11.54}$$

Az „≡” jel itt arra is utal, hogy az összefüggés modulo 7 értendő, de arra is, hogy polinomazonosságról van szó. A jobb oldali kifejezés beszorzásával (vagy a Viète formulákra való hivatkozással kapjuk, hogy

$$\begin{array}{lllll}
\sigma_1 & = & 1+2+3+4+5+6 & \equiv & 0 \pmod 7, \\
\sigma_2 & = & 1\cdot 2 + 1\cdot 3 + \ldots + 5\cdot 6 & \equiv & 0 \pmod 7, \\
\vdots & & & \vdots & \\
\sigma_5 & = & 1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5 + \ldots \equiv \quad 0 \pmod 7, & & \\
\sigma_6 & = & 1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6 & \equiv & 6. \pmod 7
\end{array}$$

Az utolsó összefüggés „Wilson tétel” néven ismeretes.

A 3.7. feladat megoldása

Legyenek p gyökei x_1, x_2, x_3 és x_4. Feladatunk a

$$Q(x_1,x_2,x_3,x_4) = (x_1+x_2+x_3+x_4)(x_1+x_2-x_3-x_4)(x_1-x_2-x_3+x_4)(x_1-x_2+x_3-x_4) \tag{11.55}$$

polinom felírása a

$$-\frac{b}{a} = \sigma_1 = x_1+x_2+x_3+x_4, \qquad \frac{c}{a} = \sigma_2 = x_1x_2+x_1x_3+x_1x_4+x_2x_3+x_2x_4+x_3x_4,$$

$$-\frac{d}{a} = \sigma_3 = x_1x_2x_3+x_1x_2x_4+x_1x_3x_4+x_2x_3x_4, \qquad \frac{e}{a} = \sigma_4 = x_1x_2x_3x_4$$

elemi szimmetrikus polinomok polinomjaként. A

$$Q=(x_1^4+x_2^4+x_3^4+x_4^4)-2(x_1^2x_2^2+x_1^2x_3^2+x_1^2x_4^2+x_2^2x_3^2+x_2^2x_4^2+x_3^2x_4^2)+8x_1x_2x_3x_4,$$

azaz

$$Q=\sigma_1^4-4\sigma_1^2\sigma_2+8\sigma_1\sigma_3.$$

Ebből a kívánt polinom:

$$q=a^4Q=b^4-4ab^2c-8a^3d.$$

11.5. Egyenlőtlenségek – feladatok megoldása

A 3.1. feladat megoldásai

A 3.1. fel. I. megoldása

Ismeretes, hogy

$$(a+b)^3=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3,$$

amiből

$$a^3+b^3=(a+b)^3-3a^2b-3ab^2,$$

tehát bizonyítandó egyenlőtlenségünk az

$$(a+b)^3\geq 4(a^2b+ab^2)$$

alakba írható át. A jobb oldal szorzattá alakítható:

$$(a+b)^3\geq 4ab(a+b)$$

és a pozitív $(a+b)$ mennyiséggel leoszthatunk:

$$(a+b)^2\geq 4ab,$$

azaz 4-gyel való osztás és a pozitív mennyiségekből való gyökvonás után kapjuk, hogy bizonyítandó egyenlőtlenségünk az adott alaphalmazon ekvivalens a

$$\frac{a+b}{2}\geq\sqrt{ab},$$

egyenlőtlenséggel. Ez egy nevezetes összefüggés, a számtani és mértani közép közti egyenlőtlenség, így teljesül és vele együtt a feladatban adott egyenlőtlenség is fennáll. Az egyenlőség az $a=b$ esetben és csakis akkor teljesül.

A 3.1. fel. II. megoldása

Az

$$a^3+b^3=(a+b)\cdot(a^2-ab+b^2),\qquad a^2b+ab^2=ab(a+b)$$

azonosságot használjuk a bal illetve a jobb oldalon, majd leosztunk a pozitív értékű $(a+b)$ kifejezéssel. Kapjuk az eredetivel ekvivalens

$$a^2-ab+b^2\geq ab$$

egyenlőtlenséget. Nullára rendezve épp teljes négyzetet kapunk:

$$(a-b)^2\geq 0$$

tehát az egyenlőtlenség minden számpárra teljesül és pontosan akkor áll fenn az egyenlőség, ha $a=b$.

A 3.1. fel. III. megoldása

A jobb oldal átalakításával indítunk, a számtani és mértani közép közti egyenlőtlenséget alkalmazzuk, hogy felső becslést kapjunk:

$$a^2b+ab^2=ab(a+b)\leq\left(\frac{a+b}{2}\right)^2\cdot(a+b)=\frac{(a+b)^3}{4}.$$

Így eredeti egyenlőtlenségünk igazolást nyer, ha megmutatjuk, hogy

$$\frac{a^3+b^3}{2}\geq\left(\frac{a+b}{2}\right)^3. \tag{11.56}$$

Ez az összefüggés az $f(x)=x^3$ függvényre vonatkozó Jensen egyenlőtlenség. Ezt a függvényt most a pozitív számok halmazán vizsgáljuk, ott alulról nézve konvex, tehát a húr a görbe felett van. A (11.56) összefüggés annak felel meg, hogy az a, b abszcisszákhoz tartozó húr felezőpontja a görbe felett van (lásd a 11.2. ábrát).

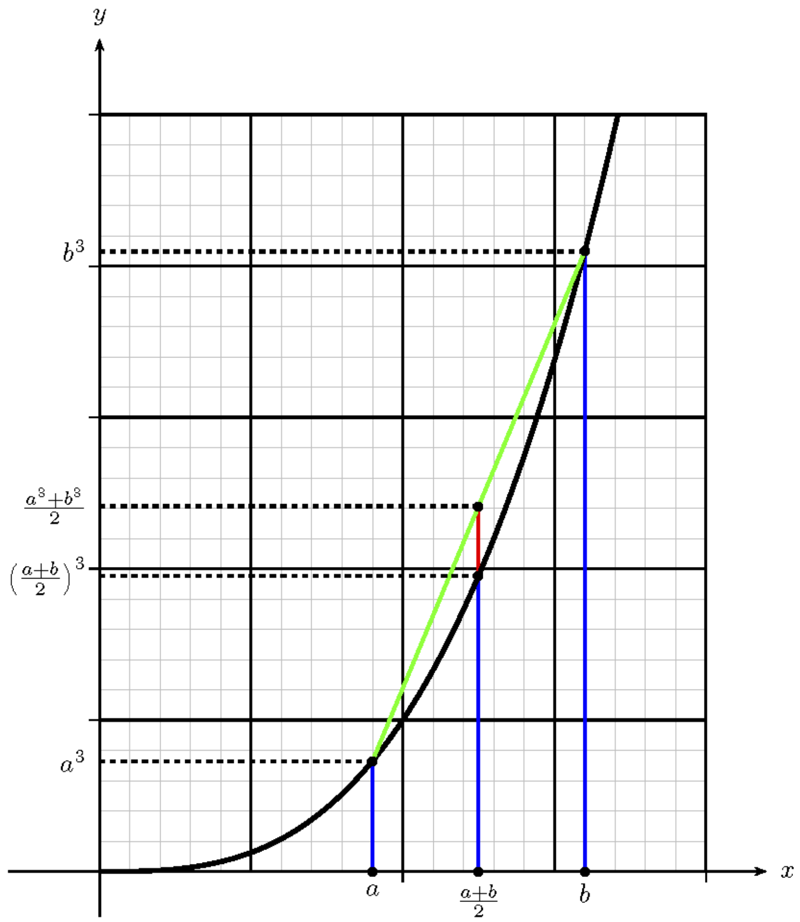
Az $f(x)=x^3$ függvény valóban konvex a vizsgált tartományon, hiszen második deriváltja, $f''(x)=6x$ a pozitív számok halmazán pozitív.

A 3.1. fel. IV. megoldása

(*Az egyenlőségből indulunk*)

Látható, hogy $a=b$ esetén az egyenlőség teljesül. Helyezzünk egy változót középre és mérjük a számok attól való távolságát, azaz legyen

$$c=\frac{a+b}{2},\qquad\text{és}\qquad\Delta=c-a=b-c.$$



11.2. ábra.

Ezzel a jelöléssel

$$a^3 + b^3 = (c - \Delta)^3 + (c + \Delta)^3 = 2c^3 + 6c\Delta^2,$$

$$a^2b + ab^2 = ab(a + b) = (c - \Delta)(c + \Delta)2c = 2c(c^2 - \Delta^2),$$

tehát a bizonyítandó összefüggés a pozitív $2c$ mennyiséggel való osztás után:

$$c^2 + 3\Delta^2 \geq c^2 - \Delta^2,$$

azaz $\Delta^2 \geq 0$, ami minden valós Δ-ra teljesül és az egyenlőség $\Delta = 0$, azaz $a = b$ esetén áll fenn.

A 3.1. fel. V. megoldása

(*Rendezési tétel*)

Vizsgált egyenlőtlenségünk így is írható:

$$a^2 \cdot a + b^2 \cdot b \geq a^2 \cdot b + b^2 \cdot a. \tag{11.57}$$

Ismeretes – később igazoljuk – a következő összefüggés:

(*Rendezési tétel* vagy *Szűcs Adolf egyenlőtlenség*): Ha $a_1 \leq a_2 \leq \ldots \leq a_n$ és $b_1 \leq b_2 \leq \ldots \leq b_n$ $(a_i, b_i \in \mathbb{R})$ és π az $(1, 2, \ldots, n)$ számok tetszőleges permutációja, akkor

$$a_1b_1 + a_2b_2 + \ldots + a_nb_n \geq a_1b_{\pi(1)} + a_2b_{\pi(2)} + \ldots + a_nb_{\pi(n)} \geq a_1b_n + a_2b_{n-1} + \ldots + a_nb_1.$$

Ha $0 < a \leq b$, akkor $0 < a^2 \leq b^2$, míg ha $0 < b \leq a$, akkor $0 < b^2 \leq a^2$, tehát az a, b illetve az a^2, b^2 számok nagyságrendi sorrendje azonos, míg az a, b és a b^2, a^2 számok sorrendje egymással ellentétes, így a Rendezési tétel szerint teljesül a bizonyítandó (11.57) összefüggés.

A 3.1. fel. VI. megoldása

(*Monotonitás*)

Osszuk le egyenlőtlenségünket a pozitív $a^{\frac{3}{2}}b^{\frac{3}{2}}$ mennyiséggel:

$$\left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{3}{2}} + \left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{3}{2}} \geq \left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{1}{2}} + \left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{1}{2}}. \tag{11.58}$$

Legyen $\frac{a}{b} = r > 0$ és vizsgáljuk a

$$g(x) = r^x + r^{-x}$$

függvényt az $x \in [\frac{1}{2}; \frac{3}{2}]$ intervallumon. Ha megmutatjuk, hogy g ezen az intervallumon monoton növő, akkor egyenlőtlenségünk igazolást nyert, hiszen (11.58)-ben épp a

$$g\left(\frac{3}{2}\right) \geq g\left(\frac{1}{2}\right)$$

egyenlőtlenség áll.

Az $r = 1$ esetben – azaz $a = b$ esetén – g konstans, ilyenkor tehát az egyenlőség áll fenn. Ha $r \neq 1$, akkor

$$g'(x) = r^x \cdot \ln r - r^{-x} \cdot \ln r = \ln r \cdot \frac{r^{2x} - 1}{r^x}.$$

A derivált pozitív, mert $r^x > 0$ és $0 < r < 1$ esetén $\ln r < 0$ és $r^{2x} - 1 < 0$, míg $1 < r$ esetén $\ln r > 0$ és $r^{2x} - 1 > 0$. A g függvény tehát valóban monoton növő, így teljesül a vizsgált egyenlőtlenség. Sőt, $r \neq 1$ esetén g szigorúan monoton, tehát az egyenlőség ilyenkor nem teljesülhet.

Megjegyzés a 3.1. feladat VI. megoldásához

Előbb lényegében a koszinusz hiperbolikusz függvényt vizsgáltuk:

$$g(x) = r^x + r^{-x} = 2\frac{e^{x\ln r} + e^{-x\ln r}}{2} = 2ch(x\ln r).$$

A 3.2. feladat megoldásai

A 3.2. fel. I. megoldása

Rendezzünk 0-ra:

$$a^4 - a^3b - ab^3 + b^4 \geq 0,$$

azaz

$$a^3(a-b) - b^3(a-b) \geq 0,$$

tehát

$$(a^3 - b^3)(a-b) \geq 0.$$

de $(a^3 - b^3) = (a-b)(a^2 + ab + b^2)$, azaz egyenlőtlenségünk ekvivalens a

$$(a^2 + ab + b^2)(a-b)^2 \geq 0$$

relációval. Innen látható, hogy $a = b$ esetén az egyelőség áll fenn. Ha pedig $a \neq b$, akkor leoszthatunk a pozitív $(a-b)^2$ mennyiséggel:

$$a^2 + ab + b^2 \geq 0. \tag{11.59}$$

Ha a és b azonos előjelű, akkor ez nyilvánvalóan teljesül és csak $a = b = 0$ esetén van egyenlőség. Ha a és b ellenkező előjelű, akkor az $a^2 + b^2 \geq -ab$ alaknak megfelelő

$$\frac{|a|^2 + |b|^2}{2} + \frac{|a|^2 + |b|^2}{2} \geq \sqrt{|a|^2|b|^2}$$

egyenlőtlenséget vizsgáljuk. Ebben a bal oldal első tagja, $\frac{|a|^2+|b|^2}{2}$ nemnegatív, sőt csak $a = b = 0$ esetén zérus, míg

$$\frac{|a|^2 + |b|^2}{2} \geq \sqrt{|a|^2|b|^2}$$

a számtani és mértani közép közti egyenlőtlenség $|a|^2$-re és $|b|^2$-re, tehát (11.59) teljesül és benne az egyenlőség csak $a = b = 0$ esetén áll fenn.

Összefoglalva: a bizonyítandó egyenlőtlenség teljesül és $a = b$ esetén áll fenn az egyenlőség.

A 3.2. fel. II. megoldása

Az

$$a^4 + b^4 = (a^2 + b^2)^2 - 2a^2b^2$$

azonosság szerint a bizonyítandó összefüggés ekvivalens a

$$(a^2 + b^2)^2 \geq 2a^2b^2 + ab(a^2 + b^2)$$

egyenlőtlenséggel. Ezt kettévágjuk, megmutatjuk egyrészt, hogy

$$\frac{(a^2 + b^2)^2}{2} \geq 2a^2b^2, \tag{11.60}$$

másrészt hogy

$$\frac{(a^2 + b^2)^2}{2} \geq ab(a^2 + b^2). \tag{11.61}$$

A (11.60) egyenlőtlenség 2-vel való osztás és gyökvonás után az a^2, b^2 nemnegatív mennyiségekre felírt számtani és mértani közép közti egyenlőtlenség. Ez tehát teljesül és egyenlőség $|a| = |b|$ esetén áll fenn. A (11.61) egyenlőtlenségben az egyenlőség áll, ha $a^2 + b^2 = 0$, azaz ha $a = b = 0$. Ha ez a feltétel nem teljesül, akkor leoszthatunk $(a^2 + b^2)$-tel és az

$$\frac{a^2 + b^2}{2} \geq ab \tag{11.62}$$

relációt kapjuk. Ez nyilvánvalóan teljesül, ha a és b különböző előjelű és ilyenkor nincs egyenlőség. Ha azonos előjelűek, akkor $ab = |a||b|$ és (11.62) az $|a|^2$, $|b|^2$ számokra vonatkozó számtani és mértani közép közti egyenlőtlenség.

Az eredeti egyenlőtlenség tehát teljesül és az egyenlőség pontosan akkor áll fenn, ha $|a| = |b|$ és a és b nem különböző előjelűek, tehát ha $a = b$.

A 3.2. fel. III. megoldása

Ha a és b különböző előjelűek, akkor a bal oldal pozitív, a jobb oldal negatív tehát az egyenlőtlenség teljesül. Ha a és b azonos előjelűek, akkor feltesszük hogy pozitívak, mert mindegyik helyébe a saját abszolútértékét írva a két oldal értéke változatlan marad.

A jobb oldalon az a^2-re és b^2-re vonatkozó számtani és mértani közép közti összefüggés szerint

$$ab = \sqrt{a^2b^2} \leq \frac{a^2 + b^2}{2}$$

és egyenlőség csak $a = b$ esetén teljesül. Így a teljes jobb oldal is becsülhető:

$$ab(a^2 + b^2) \leq \frac{(a^2 + b^2)^2}{2},$$

tehát elegendő lenne igazolni, hogy

$$\frac{(a^2+b^2)^2}{2} \leq a^4+b^4,$$

azaz hogy

$$\left(\frac{a^2+b^2}{2}\right)^2 \leq \frac{a^4+b^4}{2},$$

vagy másképp:

$$\frac{a^2+b^2}{2} \leq \sqrt{\frac{a^4+b^4}{2}}.$$

Ez az egyenlőség az a^2, b^2 mennyiségekre vonatkozó számtani és négyzetes közép közti egyenlőtlenség, amelyben az egyenlőség $a^2 = b^2$ esetén áll fenn.

Így eredeti egyenlőtlenségünk is fennáll és az egyenlőség pontosan akkor teljesül, ha $a = b$.

A 3.2. fel. IV. megoldása

Látható, hogy $a = b$ esetén az egyenlőség teljesül. Helyezzünk egy változót középre és mérjük a számok attól való távolságát, azaz legyen

$$c = \frac{a+b}{2}, \qquad \text{és} \qquad \Delta = c - a = b - c.$$

Ezzel a jelöléssel

$$a^4 + b^4 = (c-\Delta)^4 + (c+\Delta)^4 = 2c^4 + 12c^2\Delta^2 + 2\Delta^4,$$

$$ab(a^2+b^2) = (c-\Delta)(c+\Delta)\left[(c-\Delta)^2 + (c+\Delta)^2\right] = 2(c^2-\Delta^2)(c^2+\Delta^2) = 2(c^4-\Delta^4),$$

tehát a bizonyítandó összefüggés a 2-vel valóosztás után:

$$c^4 + 6c^2\Delta^2 + \Delta^4 \geq c^4 - \Delta^4,$$

azaz

$$2\Delta^2(3c^2+\Delta^2) \geq 0,$$

ami minden valós Δ és c számra teljesül és az egyenlőség $\Delta = 0$, azaz $a = b$ esetén áll fenn.

A 3.2. fel. V. megoldása

Vizsgált egyenlőtlenségünk így is írható:

$$a^3 \cdot a + b^3 \cdot b \geq a^3 \cdot b + b^3 \cdot a. \tag{11.63}$$

Ha $a \leq b$, akkor $a^3 \leq 3^2$, míg ha $b \leq a$, akkor $b^3 \leq a^3$, tehát az a, b illetve az a^3, b^3 számok nagyságrendi sorrendje azonos, míg az a, b és a b^3, a^3 számok sorrendje egymással ellentétes, így a Rendezési tétel szerint teljesül a bizonyítandó (11.63) összefüggés.

A 3.2. fel. VI. megoldása

Ha a és b egyike zérus, akkor nyilvánvalóan teljesül az egyenlőség. Ha csak az egyikük nulla, akkor nincs egyenlőség, ha mindkettő nulla, akkor teljesül az egyenlőség.

Most tegyük fel, hogy $ab \neq 0$. Osszuk le egyenlőtlenségünket a pozitív a^2b^2 mennyiséggel:

$$\left(\frac{a}{b}\right)^2 + \left(\frac{b}{a}\right)^2 \geq \frac{a}{b} + \frac{b}{a}. \tag{11.64}$$

Vezessük be az $\frac{a}{b} = r$ segédváltozót! Ezzel bizonyítandó egyenlőtlenségünk így írható:

$$r^2 + \frac{1}{r^2} \geq r + \frac{1}{r}, \tag{11.65}$$

azaz a pozitív r^2 mennyiséggel átszorozva és rendezve:

$$r^4 - r^3 - r + 1 \geq 0. \tag{11.66}$$

A bal oldalon szorzattá alakíthatunk:

$$(r^3 - 1)(r - 1) \geq 0, \tag{11.67}$$

és itt

$$r^3 - 1 = (r - 1)(r^2 + r + 1) = (r - 1)\left[(r + \frac{1}{2})^2 + \frac{3}{4}\right]$$

tehát egyenlőtlenségünk:

$$\left[(r + \frac{1}{2})^2 + \frac{3}{4}\right](r - 1)^2 \geq 0. \tag{11.68}$$

A bal oldalon mindkét tényező nemnegatív, tehát szorzatuk is az. Az első tényező kifejezetten pozitív, a másik pedig $r = 1$, tehát $a = b$ esetén zérus. Az egyenlőség – figyelembe véve az előbb tárgyalt $a = b = 0$ esetet is – tehát pontosan akkor teljesül, ha $a = b$.

A 3.2. fel. VII. megoldása

A jelen feladat VI. megoldásának (11.65) egyenlőtlenségét a

$$g(x) = r^x + r^{-x}$$

függvény vizsgálatával is bizonyíthatjuk. Azt kell megmutatnunk, hogy

$$g(2) \geq g(1). \tag{11.69}$$

Ez $r < 0$ esetén nyilvánvaló, hiszen ilyenkor $g(2) \geq 0 \geq g(1)$. $r > 0$ esetén pedig (11.69) azért teljesül, mert g az $x \in [1; 2]$ intervallumon monoton nő, ahogy ezt a az előző feladat VI. bizonyításában is láttuk.

A 3.3. feladat megoldásai

A 3.3. fel. I. megoldása

Vonjuk ki a (3.6) egyenlet 6-szorosát (3.5)-ből:

$$x(x-6) + 2y(y-3) + 3z(z-2) = 0.$$

Ennek ugyan megoldása az $x = y = z = 0$, de ez az eredeti egyenleteknek nem megoldása. (Már önmagában ez is érdekes: hogyan lehet, hogy a különbségnek egy megoldása nem megoldása egyik egyenletnek sem – ez is fontos matematikai háttérinformációhoz vezet.)

Megoldás az $x = 6$, $y = 3$, $z = 2$ is, és ez az eredeti egyenleteket is kielégíti.

Nem lehetünk biztosak benne azonban, hogy nincs több megoldás. Tegyük fel, hogy van még egy megoldás, az $x = 6 + x_1$, $y = 3 + y_1$, $z = 2 + z_1$, ahol a második egyenlet miatt természetesen $x_1 + y_1 + z_1 = 0$.

Behelyettesítve x, y, z értékét az (3.5) egyenletbe $x_1^2 + 2y_1^2 + 3z_1^2 = 0$. Világos, hogy ez viszont csak az $x_1 = y_1 = z_1 = 0$ esetben teljesül.

A 3.3. fel. II. megoldása

A (3.6) egyenletből

$$z = 11 - (x + y), \tag{11.70}$$

amit az (3.5) egyenletbe írva x-re nézve másodfokú egyenlethez jutunk:

$$4x^2 + (6y - 66)x + (5y^2 - 66y + 297) = 0. \tag{11.71}$$

Ennek diszkriminánsa:

$$D = (6y - 66)^2 - 4 \cdot 4 \cdot (5y^2 - 66y + 297) = -44 \cdot (y - 3)^2. \tag{11.72}$$

Tehát az egyenletrendszernek csak $y = 3$ esetén lehet megoldása, ekkor $D = 0$, így (11.71)-ből $x = 6$, végül (11.70)-ből $z = 2$.

A 3.3. fel. III. megoldása

A (3.6) egyenletnek ne a 6-szorosát, hanem a 12-szeresét vonjuk ki (3.5)- ből. Ekkor (egy kis – a matematikában megszokott – trükkel):

$$x^2 - 12x + 36 - 36 + 2y^2 - 12y + 18 - 18 + 3z^2 - 12z + 12 - 12 = 66 - 132,$$
$$(x-6)^2 + 2(y-3)^2 + 3(z-2)^2 = 0,$$

ami nyilván csak $x = 6$, $y = 3$, $z = 2$ esetén teljesül.

Megjegyzés a 3.3. feladathoz

Érdemes elgondolkodni, hogy mi áll a feladat hátterében.

Azt az előző probléma esetén már láttuk, hogy algebrai köntösbe bújtatva esetleg geometriai problémát oldunk meg.

Az első egyenlet egy origó középpontú ellipszoid, a második egy sík egyenlete. Az, hogy egyetlen közös pontjuk van, azt jelenti, hogy a sík érinti az ellipszoidot.

Ellipszoid érintősíkjának meghatározása nem triviális feladat, de egy affin transzformációval origó középpontú gömbbe vihető (míg a sík sík marad), és az érintési pontban felírva a síkra merőleges egyenes egyenletét, azt tapasztalhatjuk, hogy az valóban átmegy az origón.

Ez a gondolat ugyan sokat megmutat a probléma hátteréből, de mégsem valószínű, hogy sokan választanák ezt, mert az algebrai megoldás sokkal rövidebb.

A 3.4. feladat megoldásai

A 3.4. fel. I. megoldása

(*Kiküszöbölés, diszkrimináns*)

A feltétel szerint az a, b, c számok között van pozitív. Ha annak értékét csökkentjük, akkor (míg pozitív marad) a négyzetösszeg is csökken. Ezért elegendő igazolnunk, hogy $a^2 + b^2 + c^2 \geq 14$, ha $a + 2b + 3c = 14$.

Írjuk a helyébe a $14 - 2b - 3c$ kifejezést a $a^2 + b^2 + c^2 - 14$ formulába, és rendezzük a tagokat b polinomjaként. Kapjuk az

$$5b^2 + (12c - 56)b + (10c^2 - 84c + 182)$$

másodfokú kifejezést, amelyben a főegyüttható pozitív, így pontosan akkor nemnegatív a kifejezés minden b (és c) esetén, ha diszkriminánsa nempozitív. Mivel

$$D = (12c - 56)^2 - 4 \cdot 5 \cdot (10c^2 - 84c + 182) = -56(c-3)^2 \leq 0,$$

így az állítás igazolást nyert.

Egyenlőség csak $c = 3$ esetén lehetséges. Ezt az értéket a b-re kapott polinomba helyettesítve az $5(b-2)^2$ alakhoz jutunk, amely $b = 2$ esetén zérus. Innen $a = 14 - 2b - 3c = 1$, tehát $a = 1$, $b = 2$, $c = 3$ esetén teljesül az egyenlőség.

A 3.4. fel. II. megoldása

(*Számtani és négyzetes közép*)

Tekintsük az

$$a, \frac{b}{2}, \frac{b}{2}, \frac{b}{2}, \frac{b}{2}, \frac{c}{3}, \frac{c}{3}, \frac{c}{3}, \frac{c}{3}, \frac{c}{3}, \frac{c}{3}, \frac{c}{3}, \frac{c}{3}, \frac{c}{3}$$

számokat. Ezek számtani közepe

$$\frac{a + 4\frac{b}{2} + 9\frac{c}{3}}{14} = \frac{a + 2b + 3c}{14} \geq 1,$$

míg négyzetes közepük

$$\sqrt{\frac{a^2 + 4\left(\frac{b}{2}\right)^2 + 9\left(\frac{c}{3}\right)^2}{14}} = \sqrt{\frac{a^2 + b^2 + c^2}{14}},$$

tehát a két közép közti

$$1 \leq \sqrt{\frac{a^2 + b^2 + c^2}{14}}$$

egyenlőtlenség épp a bizonyítandó állítás. Egyenlőség pontosan akkor áll, ha a vizsgált a, $\frac{b}{2}$, $\frac{c}{3}$ számok egyenlőek egymással és a lehető legkisebbek, azaz ha $a = 1$, $b = 2$, $c = 3$.

A 3.4. fel. III. megoldása

(*Cauchy-Bunyakovszkij-Schwartz egyenlőtlenség, azaz vektorok*)

Tekintsük az $\underline{u}(a, b, c)$, $\underline{v}(1, 2, 3)$ vektorokat. Ezek skaláris szorzata legfeljebb akkora, mint hosszaik szorzata:

$$1 \cdot a + 2 \cdot b + 3 \cdot c \leq \sqrt{1^2 + 2^2 + 3^2} \cdot \sqrt{a^2 + b^2 + c^2},$$

ami épp a bizonyítandó egyenlőtlenség. Egyenlőség pontosan akkor áll, ha $1 \cdot a + 2 \cdot b + 3 \cdot c = 14$ és az $\underline{v}$, $\underline{u}$ vektorok azonos irányúak, tehát $a = \frac{b}{2} = \frac{c}{3}$. Ezekből adódik, hogy $a = 1$, $b = 2$, $c = 3$.

A 3.4. fel. IV. megoldása

(*Sík és gömb*)

Átfogalmazzuk a probléma kérdését: ha egy pont az $x + 2y + 3z = 14$ sík origóval ellentétes oldalán van, akkor kívül esik az $x^2 + y^2 + z^2 = 14$ gömbön is. Más szóval: a gömb a sík origó felőli oldalára esik.

Felmerül a kérdés, hogy van-e közös pontja a síknak és a gömbnek. A gömb középpontjának (az origónak) a síktól való távolsága

$$\left| \frac{0 + 2 \cdot 0 + 3 \cdot 0 - 14}{\sqrt{1^2 + 2^2 + 3^2}} \right| = \sqrt{14},$$

tehát ez a távolság épp a gömb sugarával egyezik meg, a sík érinti a gömböt. Közös pontjuk az origón átmenő, a sík $(1; 2; 3)$ normálvektorával párhuzamos egyenesnek a síkkal való metszéspontja, az $(1; 2; 3)$ pont.

A 3.5. feladat megoldásai

A 3.5. fel. I. megoldása

Fejezzük ki c-t az egyenletrendszerből!

(1') $a = 8 - b - 2c$,

(2') $(8 - b - 2c)^2 + b^2 + 2c^2 = 25$,

(3) $c = d$,

azaz

$$6c^2 - 4(8 - b)c + (2b^2 - 16b + 39) = 0, \tag{11.73}$$

és így

$$c = \frac{4(8 - b) \pm \sqrt{16(8 - b)^2 - 24(2b^2 - 16b + 39)}}{12},$$

azaz a nagyobbik c érték:

$$c = \frac{(8 - b) + \sqrt{-2b^2 + 8b + \frac{11}{2}}}{3}. \tag{11.74}$$

A c ismeretlent felfoghatjuk a b változó függvényének. A (11.74) kifejezésben a gyök alatti mennyiség a

$$b \in \left[2 - \frac{3\sqrt{3}}{2}, 2 + \frac{3\sqrt{3}}{2} \right] \approx [-0.598, 4, 598]$$

intervallumban nemnegatív, itt értelmezzük a (11.74) függvényt.

E függvény deriváltja:

$$c' = -\frac{1}{3} + \frac{(4-2b)}{3\sqrt{-2b^2+8b+\frac{11}{2}}}, \tag{11.75}$$

Leolvasható, hogy $2 \leq b$ esetén a derivált negatív, tehát a függvény monoton fogyó. Rendezés és négyzetreemelés után a derivált zérushelyének a $b_1 = \frac{1}{2}$ értéket kapjuk, míg az algebrailag adódó $b_2 = \frac{7}{2}$ a négyzetreemelésből kapott hamis gyök. A c függvény értéke az értelmezési tartomány alsó szélén, $b = 2 - \frac{3\sqrt{3}}{2}$-ban $2 + \frac{\sqrt{3}}{2} < 3$, míg $b_1 = \frac{1}{2}$-ben ennél nagyobb, nevezetesen $\frac{7}{2} > 3$, majd $b = 2$-ben újra kisebb, negatív. Így a derivált zérushelyén, b_1-ben maximum van. Az így adódó maximum, a $c = \frac{7}{2}$ érték a válasz a feladat kérdésére, mert pozitív és racionális, csakúgy mint a többi változó ehhez tartozó értéke: $a = b = \frac{1}{2}$, $c = d = \frac{7}{2}$.

A 3.5. fel. II. megoldása

Fejezzük ki b-t az egyenletrendszerből!

Az előző megoldás eljén kapott (11.73) összefüggést így is írhatjuk:

$$2b^2 + 4(c-4)b + (6c^2 - 32c + 39) = 0.$$

Pontosan akkor van ilyen valós b érték, ha az egyenlet diszkriminánsa nemnegatív, azaz

$$0 \leq \frac{D}{8} = 2(16 - 8c + c^2) - (6c^2 - 32c + 39) = -4c^2 + 16c - 7 = (7-2c)(2c-1),$$

tehát, ha $\frac{1}{2} \leq c \leq \frac{7}{2}$.

Azt kaptuk, hogy c nem nőheti túl a $\frac{7}{2}$ értéket, de ezt el is érheti, hiszen a $c = d = \frac{7}{2}$, $a = b = \frac{1}{2}$ esetben teljesülnek az előírt összefüggések.

A 3.5. fel. III. megoldása

Elimináljuk a d változót és vezessük be az $\frac{a+b}{2} = e$, $\frac{a-b}{2} = \Delta$ új változókat a és b helyett:

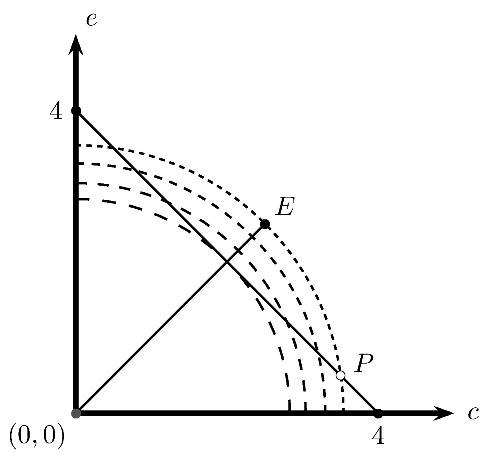
(1') $e + c = 4$,

(2') $e^2 + c^2 = \frac{25}{2} - \Delta^2$.

Ha e-t és c tekintjük változónak és Δ-t paraméternek, akkor fent (1') egy egyenes, (2') pedig egy olyan origó középpontú kör egyenlete, amelynek sugara legfeljebb $\frac{5}{\sqrt{2}}$ (lásd a 11.3 ábrát). A maximális sugárhoz, a $\Delta = 0$ szélső esethez tartozó kör az $E\left(\frac{5}{2}, \frac{5}{2}\right)$ ponton megy át.

A (c, e) pont a két alakzat metszéspontja. Az ábrából világos, hogy a maximális kör, $\Delta = 0$ esetén kapjuk a legnagyobb c értéket. A $P\left(\frac{7}{2}, \frac{1}{2}\right)$ metszéspont tartozik a szélső esethez:

$$c = d = \frac{7}{2}, \qquad e = \frac{1}{2}, \Delta = 0, \qquad a = b = \frac{1}{2}.$$



11.3. ábra.

Ezek valóban mind pozitív racionális értékek.

I. megjegyzés a 3.5. feladathoz

Egyszer véletlenül az alábbi egyenletrendszerből indultunk ki:

(1) $a + b + c + d = 13$,

(2) $a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = 25$,

(3) $c = d$.

Egy diák megmutatta, hogy nincs olyan valós számnégyes, amely kielégíti ezt az egyenletrendszert. Valóban a számtani és négyzetes közép közti összefüggés szerint

$$\frac{a+b+c+d}{4} \leq \frac{|a|+|b|+|c|+|d|}{4} \leq \sqrt{\frac{a^2+b^2+c^2+d^2}{4}},$$

de itt a bal oldali tört értéke $\frac{13}{4}$, a jobb oldalié $\frac{5}{2}$, ami ellentmondást jelent.

A 3.7. feladat megoldásai

A 3.7. a) mego.

Itt az $A = a_1a_2 + a_2a_3 + a_3a_4 + a_4a_1$ szorzatösszeg maximumát keressük, ahol az a_i-k nemnegatívak és összegük 1. Vegyük észre, hogy $A = (a_1 + a_3)(a_2 + a_4)$ így érdemes alkalmaznunk a számtani és mértani közép közti egyenlőtlenséget:

$$\sqrt{(a_1 + a_3)(a_2 + a_4)} \leq \frac{(a_1 + a_3) + (a_2 + a_4)}{2} = \frac{1}{2}. \tag{11.76}$$

Tehát a $A \leq \frac{1}{4}$ és ez a határ el is érhető minden olyan esetben, amikor $a_1 + a_3 = \frac{1}{2}$ és $a_2 + a_4 = \frac{1}{2}$.

A 3.7. c) mego.

Most az $A = a_1a_2 + a_2a_3 + a_3a_4 + a_4a_1 + a_1a_3 + a_2a_4$ összeget vizsgáljuk.

Mivel
$$A = \frac{(a_1 + a_2 + a_3 + a_4)^2 - (a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + a_4^2)}{2}$$
és a számtani és négyzetes közép közti egyenlőtlenség szerint
$$\sqrt{\frac{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + a_4^2}{4}} \geq \frac{a_1 + a_2 + a_3 + a_4}{4} = \frac{1}{4},$$
így
$$A \leq \frac{1 - \frac{1}{4}}{2} = \frac{3}{8},$$
és ez a maximum akkor vétetik fel, ha a változók mind egyenlők egymással, azaz $\frac{1}{4}$-del.

A 3.7. b) fel. I. megoldása

(*Hibás*)

Fusson az átló az 1. és a 3. csúcs között, azaz vizsgáljuk az $A = a_1a_2 + a_2a_3 + a_3a_4 + a_4a_1 + a_1a_3$ összeget!

Mivel $A = (a_1 + a_3)(a_2 + a_4) + a_1a_3$ és $(a_1 + a_3)(a_2 + a_4)$ maximuma akkor van, amikor $(a_1 + a_3) = (a_2 + a_4) = \frac{1}{2}$ míg $(a_1 + a_3)$ rögzítése mellett a_1a_3 akkor veszi fel a maximumát, ha $a_1 = a_3$, így $a_1 = a_3 = \frac{1}{4}$, $(a_2 + a_4) = \frac{1}{2}$ esetén kapjuk a maximumot, amelynek értéke $\frac{1}{4} + \frac{1}{16} = \frac{5}{16}$.

A 3.7. b) fel. II. megoldása

Az I. megoldás jelöléseivel $A = (a_1+a_3)(a_2+a_4)+a_1a_3$ így lényegtelen, hogy az a_2-re és a_4-re összesen jutó „súly” hogyan oszlik el a_2 és a_4 között, feltehetjük, hogy az összes „súlyt” az egyikre tettük, tehát pld $a_4 = 0$. Tehát most az $A' = a_1a_2 + a_2a_3 + a_3a_1$ összeget kell maximalizálnunk. A Cauchy-Schwarz egyenlőtlenségből (vagy három számtani-mértani közép összegéből) adódóan $a_1a_2 + a_2a_3 + a_3a_1 \leq a_1^2 + a_2^2 + a_3^2$. Mivel $a_1 + a_2 + a_3 = 1$, ebből $a_1a_2 + a_2a_3 + a_3a_1 \leq 1/3$ adódik, ami $a_1 = a_2 = a_3 = \frac{1}{3}$ választás mellett éles is. A maximum értéke $3\frac{1}{9} = \frac{1}{3}$.

A maximum két esetben vétetik fel. Vagy $a_1 = a_2 = a_3 = \frac{1}{3}$ és $a_4 = 0$, vagy $a_1 = a_4 = a_3 = \frac{1}{3}$ és $a_2 = 0$.

Megjegyzés a 3.7. fel. megoldásaihoz

A II. megoldásban kaptuk a jó eredményt. Ez valóban nagyobb, mint a korábban kapott érték: $\frac{1}{3} = \frac{16}{48} > \frac{15}{48} = \frac{5}{16}$. Az I. megoldásban ott követtük el a hibát, hogy egy olyan kifejezést is maximalizálni akartunk – nevezetesen az $(a_1+a_3)(a_2+a_4)$ szorzatot – amely nem volt feladatunk.

Megjegyzés a 3.7. feladathoz

További gráfokra is alkalmazható általános elmélet bontakozik ki Nagy Zoltán matektábori NZ.1., NZ.2. példáinak elemzéséből a

http://matek.fazekas.hu/portal/feladatbank/egyeb/Haziversenyek/Faztabor/2012/mattabor_valogatas_2012_meg.pd

oktatási anyagban.

A 3.8. feladat megoldásai

A 3.8. fel. I. megoldása

Mivel az együtthatók nemnegatívak és konstans tagja 1, így a polinom gyökei negatív számok. Ha ellentettjüket x_1, x_2, $\ldots x_n$ jelöli, akkor ezek szorzata (a konstans tag) 1. A polinom gyöktényezős alakja $(x+x_1)(x+x_2)\ldots(x+x_n)$, azt kell igazolni, hogy

$$(2+x_1)(2+x_2)\ldots(2+x_n) \geq 3^n. \tag{11.77}$$

Végezzük el a bal oldalon a beszorzást!

$$(2+x_1)(2+x_2)\ldots(2+x_n) = \sum_{k=0}^{n} 2^{n-k}\sigma_k, \tag{11.78}$$

ahol σ_k a x_1, x_2, $\ldots$, x_n változók k-adik szimmetrikus polinomja, azaz

$$\begin{aligned}
\sigma_0 &= 1,\\
\sigma_1 &= x_1+x_2+\ldots+x_n,\\
\sigma_2 &= x_1x_2+x_1x_3+\ldots+x_{n-1}x_n\\
&\vdots\\
\sigma_n &= x_1x_2x_3\ldots x_n
\end{aligned}$$

Az adott esetben $\sigma_n = 1$ és $\sigma_0 = 1$. A számtani és mértani közép közti egyenlőtlenség alkalmazásával igazolható, hogy $\sigma_k \geq \binom{n}{k}$. Valóban, a σ_k kifejezés egy $\binom{n}{k}$ tagból álló összeg, míg ezen tagok mértani közepe egy olyan szorzat, amelyben mindegyik x_i azonos kitevőn szerepel:

$$\frac{\sigma_k}{\binom{n}{k}} \geq \sqrt[\binom{n}{k}]{x_1^j x_2^j \ldots x_n^j} = 1.$$

Ennek alapján becsülhetjük a (11.78) mennyiséget:

$$\sum_{k=0}^{n} 2^{n-k}\sigma_k \geq \sum_{k=0}^{n} 2^{n-k}\binom{n}{k} = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}1^k 2^{n-k} = 3^n.$$

A 3.8. fel. II. megoldása

Az előző megoldásban láttuk, hogy feladatunk a

$$(2+x_1)(2+x_2)\dots(2+x_n) \geq 3^n$$

egyenlőtlenség igazolása olyan pozitív x_i ismeretlenekre, amelyek szorzata 1. Vegyük észre, hogy

$$2+x_i = 3\frac{1+1+x_i}{3} \geq 3\sqrt[3]{1\cdot 1\cdot x_i} = 3\sqrt[3]{x_i},$$

és így

$$(2+x_1)(2+x_2)\dots(2+x_n) \geq 3^n\sqrt[3]{x_1x_2\dots x_n} = 3^n.$$

Az egyenlőség $x_1 = x_2 = \ldots = x_n = 1$ esetén, tehát az $(x+1)^n$ polinom esetén teljesül.

11.6. Egyenletrendszerek – feladatok megoldása

A 3.1. feladat megoldása

Jelölje a négy számot nagyságrendi sorrenben a_1, a_2, a_3 és a_4:

$$a_1 \leq a_2 \leq a_3 \leq a_4.$$

A négy szám közül hatféleképpen választható ki kettő. Ezek közül a két legkisebb

$$a_1+a_2 \leq a_1+a_3,$$

míg a két legnagyobb

$$a_2+a_4 \leq a_3+a_4.$$

Az ezek közé eső a_1+a_4, a_2+a_3 összegek sorrendje kétféle lehet, így két egyenletrend-szerhez jutunk:

$$\text{a)}\quad \left.\begin{aligned} a_1+a_2 &= 1\\ a_1+a_3 &= 5\\ a_1+a_4 &= 8\\ a_2+a_3 &= 9 \end{aligned}\right\}\qquad \text{vagy}\qquad \text{b)}\quad \left.\begin{aligned} a_1+a_2 &= 1\\ a_1+a_3 &= 5\\ a_2+a_3 &= 8\\ a_1+a_4 &= 9 \end{aligned}\right\}.$$

Az $a_1+a_2+a_3$ mennyiség az a) egyenletrendszer első második és negyedik egyenletének összegének fele, míg a b) egyenletrendszerben az első három egyenlet összegénel fele. Ebből gyorsan meghatározhatók az ismeretlenek értékei:

a) $a_1=-1,5;\quad a_2=2,5;\quad a_3=6,5;\quad a_4=9,5;$

b) $a_1=-1;\quad a_2=2;\quad a_3=6;\quad a_4=10.$

Ezek valóban negyságrendi sorrenben vannak, így a kimaradó két összeg nagyobb lesz ezeknél, jó megoldásokat kaptunk.

A 3.2. feladat megoldásai

A 3.2. fel. I. megoldása

Szimmetrikus polinomok

Az egyenletrendszer jobb oldalán álló számokat – 64-et, 81-et és 100-at – a továbbiakban rendre A-val, B-vel, C-vel helyettesítjük, míg az x, y, z változók elemi szimmetrikus polinomjait a szokásos módon (lásd pld a 3.8. feladat megoldását) σ_1, σ_2 és σ_3 jelöli.

Vegyük észre, hogy

$$A+B+C=2\sigma_1^2-3\sigma_2. \tag{11.79}$$

Tekintsük még adott egyenleteink négyzetösszegét:

$$A^2+B^2+C^2=2(x^4+y^4+z^4)+3(x^2y^2+y^2z^2+z^2x^2)+2(x^3y+x^3z+y^3x+y^3z+z^3x+z^3y). \tag{11.80}$$

Mivel

$$(x^4+y^4+z^4)=(x^2+y^2+z^2)^2-2(x^2y^2+y^2z^2+z^2x^2),$$

ahol $(x^2+y^2+z^2)=\sigma_1^2-2\sigma_2$ és

$$(x^2y^2+y^2z^2+z^2x^2)=\sigma_2^2-2\sigma_1\sigma_3,$$

továbbá

$$(x^3y+x^3z+y^3x+y^3z+z^3x+z^3y)=(x^2+y^2+z^2)(xy+yz+zx)-xyz(x+y+z)=(\sigma_1^2-2\sigma_2)\sigma_2-\sigma_1\sigma_3,$$

így (11.80) a következőképpen írható át az elemi szimmetrikus polinomokkal:

$$A^2+B^2+C^2=2\sigma_1^4-6\sigma_1^2\sigma_2+3\sigma_2^2. \tag{11.81}$$

A (11.79), (11.81) egyenletekből

$$\sigma_2=\frac{1}{\sqrt{3}}\sqrt{2(AB+BC+CA)-(A^2+B^2+C^2)}, \tag{11.82}$$

ami a konkrét esetben közelítőleg $78,97$.

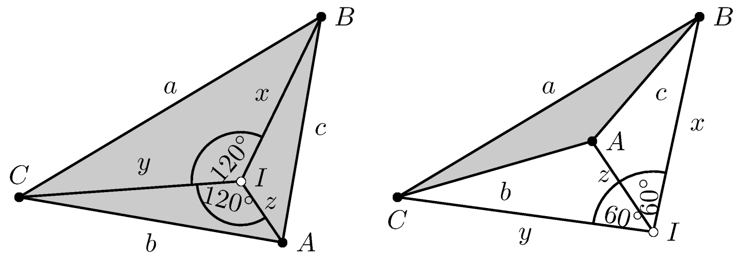
A 3.2. fel. II. megoldása

Geometria

Az egyenletrendszer jobb oldalán álló számokat – 64-et, 81-et és 100-at – a továbbiakban rendre a^2-tel, b^2-tel, c^2-tel helyettesítjük, ahol a, b, c pozitív számok jelesül 8, 9 és 10.

Az x, y, z változók közül kettő egyforma előjelű. Ha mindegyiket megszorozzuk (-1)-gyel, akkor a kifejezések értéke nem változik, így feltehető, hogy közülük kettő nemnegatív.

Vegyünk fel a sík egy tetszőleges I pontjából három irányított egyenest, melyek irányításuk szerint ciklikusan páronként $120° - -120° - -120°$-os szöget zárjanak be egymással. Mérjük fel ezekre az egyenesekre irányítottan az x, y, z előjeles szakaszokat. A 11.4 bal oldali ábrán x, y és z előjele pozitív, a jobb oldali ábrán z előjele más mint x és y előjele.



11.4. ábra.

Ha x, y és z azonos előjelűek, akkor a megadott egyenletek így írhatók:

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 - 2xy\cos 120° &= a^2 \\ y^2 + z^2 - 2yz\cos 120° &= b^2 \\ z^2 + x^2 - 2zx\cos 120° &= c^2, \end{aligned}$$

még ha az egyik ismeretlen – pld z – előjele negatív, akkor így:

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 - 2xy\cos 120° &= a^2 \\ y^2 + |z|^2 - 2y|z|\cos 60° &= b^2 \\ |z|^2 + x^2 - 2|z|x\cos 60° &= c^2, \end{aligned}$$

tehát az I pontból induló $|x|$, $|y|$, $|z|$ hosszúságú szakaszok B, C, A végpontjai által alkotott háromszög oldalainak hossza $AB = c$, $BC = a$ és $CA = b$. Az ABI, BCI, CAI háromszögek területe felírható az I-ben összefutó oldalaik és az általuk bezárt szög (120° illetve 60°) szinuszának segítségével. A három háromszögből kirakható az ABC

háromszög, melynek területe a Heron képlettel is számolható. Az előjeleket is figyelembe véve mindegyik eset a

$$T_{ABC} = (xy + yz + zx)\frac{\sqrt{3}}{4} = \sqrt{\frac{(a+b+c)(a+b-c)(a-b+c)(-a+b+c)}{16}} \tag{11.83}$$

képletre, azaz az

$$xy + yz + zx = \frac{1}{\sqrt{3}}\sqrt{(a+b+c)(a+b-c)(a-b+c)(-a+b+c)} \tag{11.84}$$

összefüggéshez vezet. Megmutatható – önálló algebrai feladatnak is elmegy – hogy az I. megoldás (11.82) kifejezése és a most kapott eredmény a változók közti $a^2 = A$, $b^2 = B$, $c^2 = C$ kapcsolatokat figyelembe véve azonos.

A 3.3. feladat megoldása

Vegyük észre, hogy $x = y = z = 0$ megoldása az egyenletrendszernek. Az összefüggésekből következik, hogy minden más esetben az ismeretlenek értékei pozitívak. Az egyenletrendszer így is írható

$$x\frac{2}{\frac{1}{x}+x} = y, \qquad y\frac{2}{\frac{1}{y}+y} = z, \qquad z\frac{2}{\frac{1}{z}+z} = x.$$

Mivel bármely pozitív t számra $\frac{1}{t} + t \geq 2$ és egyenlőség csak $t = 1$ esetén áll, így

$$x \geq y \geq z \geq x,$$

ami csak úgy teljesülhet, ha mindenhol egyenlőség áll. Tehát az egyenletrendszernek két megoldása van: . $x = y = z = 0$ és $x = y = z = 1$.

11.7. Számhalmazok – feladatok megoldása

A 3.1. feldat megoldásai

A 3.1. a) mego.

Vegyük fel az ABC egyenlőszárú háromszöget, melynek csúcsszöge C-ben $36°$ (így alapon fekvő szögei $72°$-ak), az A-ból induló szögfelező BC-t D-ben metszi, végül legyen E BD felezőpontja, és F AB felezőpontja. Legyen AB szakasz hossza egységnyi.

$ABC\triangle$ hasonló $ABD\triangle$-höz. Ha BD szakasz hossza x, akkor

$$\frac{x}{1} = \frac{1}{1+x}$$

amiből x szakasz hossza $\frac{\sqrt{5}-1}{2}$ és $\overline{CB} = 1 + x = \frac{\sqrt{5}+1}{2}$. Most

$$\cos 72^\circ = \frac{\overline{FB}}{\overline{CB}} = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{5}+1}{2}} = \frac{\sqrt{5}-1}{4}.$$

$$\cos 36^\circ = \frac{\overline{CE}}{\overline{AC}} = \frac{1 + x/2}{1+x} = \frac{\sqrt{5}+1}{4}.$$

A 3.1. b) mego.

Ismert, hogy

$$\sin\alpha \cdot \sin\beta = \frac{\cos(\alpha-\beta) - \cos(\alpha+\beta)}{2},$$

valamint

$$\cos\alpha \cdot \cos\beta = \frac{\cos(\alpha-\beta) + \cos(\alpha+\beta)}{2}.$$

Jelölje $A = \operatorname{tg}^2 54^\circ \cdot \operatorname{tg}^2 18^\circ$. Ekkor

$$A = \frac{(\sin^2 54^\circ)(\sin^2 18^\circ)}{(\cos^2 54^\circ)(\cos^2 18^\circ)} = \left(\frac{\frac{\cos(54^\circ-18^\circ)-\cos(54^\circ+18^\circ)}{2}}{\frac{\cos(54^\circ-18^\circ)+\cos(54^\circ+18^\circ)}{2}}\right)^2 =$$

$$= \left(\frac{\frac{\cos(36^\circ)-\cos(72^\circ)}{2}}{\frac{\cos(36^\circ)+\cos(72^\circ)}{2}}\right)^2.$$

A $\cos(36^\circ)$ és a $\cos(72^\circ)$ értékeket, amelyeket az 3.1. a) fel. megoldásában kiszámoltunk, beírva a tört értéke $\frac{1}{5}$ lesz, azaz racionális.

A 3.2. feladat megoldása

Indirekt tegyük fel, hogy $\log_3(1+\sqrt{2})$ racionális. Ekkor

$$\log_3(1+\sqrt{2}) = \frac{a}{b}; \quad (a,b) = 1,\ b > 0,$$

vagy hatványokként írva

$$3^a = (1+\sqrt{2})^b.$$

Teljes indukcióval könnyen igazolható, hogy bármely $n > 0$ természetes számra

$$(1+\sqrt{2})^n = A_n + B_n\sqrt{2}$$

alakú, ahol A_n és $B_n \neq 0$ egész számok. Ekkor viszont

$$\sqrt{2} = \frac{3^a - A_b}{B_b}$$

kifejezést kapnánk, ahol a jobb oldalon egy racionális szám áll.

A 3.3. a) feladat megoldásai

A 3.3. a) mego.

$\alpha^2 = 5 + 2\sqrt{6}$. Ahogy a $\sqrt{2}$ bizonyításánál, könnyen látható, hogy $\sqrt{6}$ is irracionális, de akkor α^2 is irracionális. α tehát irracionális (racionális szám négyzete ugyanis racionális).

A 3.3. b) mego.

A 3.3. a) feladat miatt $\alpha^2 = 5 + 2\sqrt{6}$, így $(\alpha^2 - 5)^2 = 24$. Azaz α megoldása az $x^4 - 10x^2 + 1 = 0$ egyenletnek.

A 3.3. c) mego.

Tegyük fel, hogy $\beta = R$ egy nem nulla racionális szám. Ekkor

$$\sqrt{5} = R - \sqrt{2} - \sqrt{3},$$

négyzetre emelve és rendezve azt kapjuk, hogy

$$2R\sqrt{2} + 2R\sqrt{3} = R^2 + 2\sqrt{6}.$$

Ezt újra négyzetre emelve a bal és jobb oldalon racionális számok illetve $\sqrt{6}$ racionális többese lesznek:

$$R_1 + 8R^2\sqrt{6} = R_3 + 4R^2\sqrt{6}, \;\; R_1, R_2 \in \mathbb{Q},$$

ami csak az $R = 0$ esetén nem ellentmondás. Azonban $R > 0$.

A 3.4. feladat megoldása

Mind ennek a feladatnak a megoldásánál, mind a következő feladatmegoldásban az összeg köbének a képletét az

$$(a + b)^3 = a^3 + b^3 + 3ab(a + b)$$

alakban fogjuk használni.

Legyen $x = \sqrt[3]{7 + 5\sqrt{2}} + \sqrt[3]{7 - 5\sqrt{2}}$. Így

$$x^3 = 7 + 5\sqrt{2} + 7 - 5\sqrt{2} + 3\sqrt[3]{7 + 5\sqrt{2}} \cdot \sqrt[3]{7 - 5\sqrt{2}}(\sqrt[3]{7 + 5\sqrt{2}} + \sqrt[3]{7 - 5\sqrt{2}}) =$$
$$14 + 3 \cdot (-1)x$$

lesz, vagyis az $x^3 + 3x - 14 = 0$ egyenletet kaptuk meg. Ha egész megoldást keresünk, akkor 14 osztói, azaz ± 1, ± 2, ± 7 jönnek szóba, amelyekből $x = 2$ tényleg gyök. Ezért az $(x - 2)$ gyöktényező kiemelhető:

$$x^3 + 3x - 14 = (x - 2)(x^2 + 2x + 7),$$

ám $x^2 + 2x + 7 > 0$ minden x esetén, tehát $x^3 + 3x - 14 = 0$ egyenletnek az $x = 2$ az egyetlen valós megoldása, azaz a keresett kifejezés értéke 2, tényleg egy egész szám.

A 3.5. feladat megoldása

Feltételezzük, hogy a részkifejezések értéke is valós (a köbgyök csak ilyen megkötéssel egyértelmű), tehát $a \geq 0$. Legyen most $x = \sqrt[3]{4+\sqrt{a}} + \sqrt[3]{4-\sqrt{a}}$. Ekkor $x \geq 0$ és

$$x^3 = 8 + 3x\sqrt[3]{16-a},$$

amiből az $x = 0$ eset is kizárható és

$$a = 16 - (\frac{x^3-8}{3x})^3 \geq 0.$$

Az $f(x) = \frac{x^3-8}{3x}$ függvény $x > 0$ esetén monoton nő, és

$$f(3) = \frac{19}{9} < \sqrt[3]{16} < \frac{56}{12} = f(4).$$

Így x értéke 1, 2 vagy 3. A három megoldáshoz tartozó a érték pedig rendre $a_1 = 775/27$, $a_2 = 16$, $a_3 = 4805/729$.

A 3.6. feladat megoldása

2^2 racionális, míg $2^{1/2}$ irracionális, tehát $r_1^{r_2}$ lehet mindkettő. A $\sqrt[4]{2}$ irracionális (valóban, ha racionális lenne, akkor a négyzete, a $\sqrt{2}$ is az lenne), így $\left(\sqrt[4]{2}\right)^2$ irracionális, ám $\left(\sqrt[4]{2}\right)^4$ racionális, azaz $i_2^{r_4}$ is lehet mindkét fajta szám. Most belátjuk, hogy $\log_2 3$ irracionális. Ekkor nyilván $\frac{1}{2}\log_2 3 = \log_2 \sqrt{3}$ és a $2\log_2 3 = \log_2 9$ is irracionális.

Tegyük fel, hogy

$$\log_2 3 = \frac{p}{q},$$

$p, q \in \mathbb{N}$, és nyilván $p \neq 0; q \neq 0$. A logaritmus definicióját felhasználva és $q-$adik hatványra emelve

$$2^p = 3^q$$

adódna ami nyilván ellentmondás.

Így $2^{\log_2 3} = 3$ racionális, tehát r^i hatvány lehet racionális, lehet irracionális is, ahogy a $2^{\log_2 \sqrt{3}} = \sqrt{3}$ példája mutatja, végül $\left(\sqrt{2}\right)^{\log_2 3} = \sqrt{3}$ irracionális azaz irracionális szám irracionális hatványa lehet irracionális, míg $\left(\sqrt{2}\right)^{\log_2 9} = 3$, azaz ilyen hatvány lehet racionális is.

A 3.7. feladat megoldása

$x_0 = -1; x_1 = 0$ racionálisak. Megmutatjuk, hogy $n > 1$, x_n irracionális. Valóban $x_2 = \cos\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ irracionális. Ismert, hogy

$$\cos\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{\cos\alpha + 1}{2}},$$

ha $0 < \alpha < \pi/2$. Felhasználva e félszögre ismert képletet azt kapjuk, hogy $x_{n+1} = \sqrt{\frac{x_n+1}{2}}$. Teljes indukciót használhatunk. x_2 irracionális. Továbbá, ha i egy irracionális, akkor $\sqrt{i}$ is az (ellenkező esetben a négyzetes is racionális lenne). Tehát, ha x_n irracionális ($n \geq 2$), akkor nyilván $\frac{x_n+1}{2}$ is irracionális és így

$$x_{n+1} = \sqrt{\frac{x_n + 1}{2}}$$

is az.

A 3.8. feladat megoldása

a) Lásd a 3.6. feladat megoldását!

b) Tegyük fel, hogy $\log_2 3$ algebrai. Legyen $a := 2$, $b := \log_2 3$. A Gelfond-Schneider tétel szerint $a^b = 2$ transzcendens, ellentmondásként.

11.8. A konjugált – feladatok megoldása

A 3.1. feladat megoldásai

A 3.1. a) mego.

A binomiális tétel szerint

$$(1+\sqrt{2})^n = \binom{n}{0} + \sqrt{2}\binom{n}{1} + 2\binom{n}{2} + 2\sqrt{2}\binom{n}{3} + 4\binom{n}{4} + \dots, \tag{11.85}$$

azaz

$$(1+\sqrt{2})^n = \left(\binom{n}{0} + 2\binom{n}{2} + 4\binom{n}{4} + \dots\right) + \sqrt{2}\left(\binom{n}{1} + 2\binom{n}{3} + 4\binom{n}{5} + \dots\right) \tag{11.86}$$

azaz

$$\alpha_n = \sum_{k=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]} 2^k \binom{n}{2k}, \qquad \beta_n = \sum_{k=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]} 2^k \binom{n}{2k+1} \tag{11.87}$$

épp megfelelő.

Ha az α, β, α', β' egész számokra $\alpha + \sqrt{2}\beta = \alpha' + \sqrt{2}\beta'$, akkor $\alpha - \alpha' = \sqrt{2}(\beta' - \beta)$ és így $\sqrt{2}$ irracionalitása miatt $\beta = \beta'$ és $\alpha = \alpha'$, tehát az előállítás egyértelmű.

A 3.1. b) mego.

Vizsgáljuk az $(1 - \sqrt{2})^n$ számot is! A (11.85)-(11.87) levezetés lépései most is alkalmazhatók, kiderül, hogy $(1 - \sqrt{2})^n = \alpha_n - \sqrt{2}\beta_n$ pontosan ugyanazokkal az α_n, β_n számokkal, mint a)-ban.

Mivel $(1 - \sqrt{2})(1 + \sqrt{2}) = 1 - 2 = (-1)$, így

$$(-1)^n = \Big((1 - \sqrt{2})(1 + \sqrt{2})\Big)^n = (1-\sqrt{2})^n(1+\sqrt{2})^n = (\alpha_n-\sqrt{2}\beta_n)(\alpha_n+\sqrt{2}\beta_n) = \alpha_n^2-2\beta_n^2. \tag{11.88}$$

A 3.2. fel. I. megoldása

A 3.1. feladat megoldásában láttuk, hogy $(1 - \sqrt{2})^n = \alpha_n - \sqrt{2}\beta_n$, ahol α_n és β_n olyan természetes számok, amelyekre $\alpha_n^2 - 2\beta_n^2 = (-1)^n$. Így

$$(\sqrt{2} - 1)^n = (-1)^n(1 - \sqrt{2})^n = (-1)^n(\alpha_n - \sqrt{2}\beta_n),$$

tehát

$$(\sqrt{2} - 1)^n = \begin{cases} \sqrt{\alpha_n^2} - \sqrt{2\beta_n^2}, & \text{ha} \quad n \quad \text{páros} \\ \sqrt{2\beta_n^2} - \sqrt{\alpha_n^2}, & \text{ha} \quad n \quad \text{páratlan.} \end{cases}$$

A 3.2. fel. II. megoldása

Ha a $(\sqrt{2} - 1)^n$ binomiális tétellel felbontott alakjára gondolunk, akkor látható, hogy a kifejezés megfelelő A, B egész számokkal.

$$(\sqrt{2} - 1)^n = \sqrt{A} - \sqrt{B}$$

alakban is felírható. Sőt, ugyanezek a számok kapnak szerepet a

$$(\sqrt{2} + 1)^n = \sqrt{A} + \sqrt{B}$$

kifejezés (az előző algebrai konjugáltja) felírásakor. Mivel

$$(\sqrt{2} - 1)^n \cdot (\sqrt{2} + 1)^n = \Big((\sqrt{2} - 1)(\sqrt{2} + 1)\Big)^n = (2 - 1)^n = 1,$$

így

$$1 = (\sqrt{A} - \sqrt{B})(\sqrt{A} + \sqrt{B}) = A - B,$$

ami épp a bizonyítandó állítás.

ellenőrző kérdés a 3.2. feladathoz

Mutassuk meg, hogy ha $X > Y$ olyan pozitív egész számok, amelyek különbsége d, akkor minden n pozitív egészhez vannak olyan A_n, B_n pozitív egészek, amelyekre

$$(\sqrt{X}-\sqrt{Y})^n = \sqrt{A_n}-\sqrt{B_n}, \qquad \text{és} \qquad A_n - B_n = d^n.$$

A 3.3. feladat megoldása

Első lépésben vegyük észre, hogy

$$\sqrt{26}-5 = \frac{1}{\sqrt{26}+5} < \frac{1}{5+5} = \frac{1}{10}.$$

Így a

$$\left(\sqrt{26}-5\right)^{2013} < \frac{1}{10^{2013}},$$

azaz a $\left(\sqrt{26}-5\right)^{2013}$ nulla egész és a tizedesvessző után 2013 nulla következik.

Második lépésben pedig tekintsük a

$$\left(\sqrt{26}+5\right)^{2013} - \left(\sqrt{26}-5\right)^{2013}$$

számot. Használva a binomiális tételt, egy általános tag a különbségben

$$\binom{2013}{k}(\sqrt{26})^{2013-k}5^k - \binom{2013}{k}(\sqrt{26})^{2013-k}(-5)^k,$$

ami páros k esetén nulla, tehát csak azok a tagok maradnak, ahol emiatt a $2013-k$ páros. Ekkor viszont $(\sqrt{26})^{2013-k}$ egész szám, azaz a különbség egy egész szám, jelölje M. Azt kaptuk tehát, hogy

$$\left(\sqrt{26}+5\right)^{2013} = M + \left(\sqrt{26}-5\right)^{2013},$$

így a kezdő megjegyzésből azt kaptuk, hogy $\left(\sqrt{26}+5\right)^{2013}$ az egész rész után 2013 nulla tizedesjegyet tartalmaz.

Megjegyzés a 3.3. feladathoz

A bizonyításkor nyilván csak azt használtuk ki, hogy 2013 páratlan. Jegyzetünk 2093–as utánnyomásakor tehát 2013–at ki lehet cserélni 2093–ra.

A 3.4. feladat megoldása

Vegyük észre, hogy $0 < (15 - \sqrt{220}) \approx 0,1676 < 1$, így $0 < (15 - \sqrt{220})^n < 0.5$, ha n pozitív egész. Vizsgáljuk a $K = (15 + \sqrt{220})^{19} + (15 + \sqrt{220})^{82}$ összeg mellett a

$$K + L = (15 + \sqrt{220})^{19} + (15 + \sqrt{220})^{82} + (15 - \sqrt{220})^{19} + (15 - \sqrt{220})^{82}$$

összeget is. K-t így 1-nél kisebb számmal növeltük. Használjuk a binomiális tételt!

$$U = (15 + \sqrt{220})^{19} + (15 - \sqrt{220})^{19} = 2 \cdot 15^{19} + 2 \cdot \binom{19}{2} 15^{17} 220 + 2 \cdot \binom{19}{4} 15^{15} 220^2 + \dots,$$

tehát a $\sqrt{220}$ páratlan kitevős hatványait tartalmazó tagok épp kiesnek. Az összeg minden tagja osztható tízzel, tehát U nullára végződik. A $V = (15 + \sqrt{220})^{82} + (15 - \sqrt{220})^{82}$ összegről ugyanígy igazolható, hogy 0-ra végződő egész szám, tehát $K + L = U + V$ is az. Mivel az $L = (15 - \sqrt{220})^{19} + (15 - \sqrt{220})^{82}$ összeg 1-nél kisebb, így K kérdezett számjegye a 9.

A 3.5. feladat megoldása

Nincsenek. A két megadott kifejezés pontosan akkor egyenlő egymással, ha

$$\left(5 - 3\sqrt{2}\right)^n = \left(3 - 5\sqrt{2}\right)^k,$$

de itt a bal oldali kifejezés értéke 1-nél kisebb abszolútértékű, a jobb oldalé pedig nagyobb 1-nél.

12. fejezet

Számelmélet feladatok megoldása

12.1. Osztók és többszörösök – feladatok megoldása

A 4.1. feladat megoldása

a)-b) Amikor 7 részre osztott egy darabot, 6-tal nőtt a részek száma, amikor 13 részre osztott egy darabot, 12-vel nőtt a részek száma. Emiatt a részek számának 6-os maradéka nem változott. Mivel eredetileg 1 papírlapja volt és a darabszámot csak hattal osztható darabszámmal tudta növelni, akármit tett, csak a $6k+1$ alakú darabszámokat tudta elérni, tehát 2000-et biztosan nem. Másrészt minden $6k+1$ alakú darabszám elérhető k db 7 részre tépéssel.

c) Most egy lépésben 6-tal és 15-tel növelhetjük a darabszámot, tehát a növekmény mindig osztható 3-mal. Ezért kizárólag a 3-mal osztva 1 maradékot adó darabszámok érhetők el. Könnyű ellenőrizni, hogy az 1, 4, 7, 10, 13, 16 közül a 4 és a 10 nem érhető el, de a többi igen. A sorozat további tagjai mind elérhetőek, mert a 13 és a 16 hatos növeléseivel minden náluk nagyobb $3k+1$ alakú szám előállítható.

d) A darabszám itt 6-tal és 13-mal nőhet, így az alábbi számok elérhetőek: $61 = 1+10\cdot 6$, $62 = 1+1\cdot 13+8\cdot 6$, $63 = 1+2\cdot 13+6\cdot 6$, $64 = 1+3\cdot 13+4\cdot 6$, $65 = 1+4\cdot 13+2\cdot 6$, $66 = 1+5\cdot 13$. További hatos növeléssel ezekből minden 66-nál nagyobb darabszám is elérhető. A 60 viszont nem kapható meg, mert 1-hez képest a hatos maradékot 5-tel kellene növelni, amihez legalább öt 13-as növelés kellene, de az túl nagy számot eredményezne. A 60-nál kisebb pozitív egészek egy része megkapható, másik része nem.

Megjegyzés a 4.1. c-d) feladatok megoldásához

A téma a 4.1. feladatban folytatódik.

A 4.2. feladat megoldása

Amikor két szám helyére a különbségüket írjuk, a táblán levő számok összegének paritása nem változik. Ezek szerint, ha a táblán levő számok összege páros, akkor az utolsónak maradt szám is páros lesz, ha az összeg páratlan, akkor páratlan.

A 4.3. feladat megoldása

a), c), d) ,e), g) helyes, a többi nem.

b)-re ellenpélda az $x = 60$;

f)-re példa az $x = 6$;

h)-ra példa az $x = 3$ és $y = 5$.

A 4.4. feladat megoldása

a) 25, b) 100, c) 441, d) 36 e) 100, f) 1728, g) 648,

h) ilyen nincs (ha egy szám páros és 3-mal osztható, akkor 6-tal is, így a négyzete 36-tal is, így 18-cal is.)

i) 200.

A 4.5. feladat megoldása

a) Nincs ilyen számhármas (az első két feltétel miatt n is és k is páros, így legnagyobb közös osztójuk nem lehet páratlan)

b) Nincs ilyen számpár (az első feltétel miatt mindkét szám osztható 3-mal, így a legkisebb közös többszörösüknek is oszthatónak kellene lennie).

c) Mivel $120 = 2^3 \cdot 3 \cdot 5$, a legkisebb pozitív egész, az első feltételnek megfelelő $m \cdot n$ a $2^6 \cdot 3^2 \cdot 5^2$ $(m = 2^3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \ldots, n = 2^3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \ldots)$

Így $5mn = 2^6 \cdot 3^2 \cdot 5^3$, melynek legkisebb (pozitív egész) többszöröse amely négyzetszám, az 5-szöröse, vagyis $2^6 \cdot 3^2 \cdot 5^4$.

Jó m, n számpár pl. az $m = 2^3 \cdot 3 \cdot 5^2$, $n = 2^3 \cdot 3 \cdot 5$

További megfelelő számpárokat kapunk, pl. ha m és n közül valamelyiket megszorozzuk 2-től, 3-tól és 5-től (és egymástól) különböző prímek páros kitevőjű hatványaival.

A 4.6. feladat megoldása

A páros számok száma 2010-ig $\left[\frac{2010}{2}\right] = 1005$, a néggyel oszthatóké $\left[\frac{2010}{4}\right] = 512$ stb.

$$1005 + 502 + 251 + 125 + 62 + 31 + 15 + 7 + 3 + 1 = 2002.$$

Tehát a válasz: 2^{2002}.

Megjegyzés a 4.6. fel. megoldásához

Általában, az $n!$ szorzatban a p prím kitevőjét a

$$\left[\frac{n}{p}\right]+\left[\frac{n}{p^2}\right]+\left[\frac{n}{p^3}\right]+\dots$$

összeg adja meg, amelyben $[x]$ az x szám egész részét jelöli. Ugyan a fenti összeg általános alakja végtelen tagú, de minden konkrét n-re véges sok tagból áll, hiszen p elég nagy hatványa, már nagyobb n-nél, és így az azokhoz tartozó egész részek már zérók. Magyarázzuk meg a képletet!

A 4.7. feladat megoldásai

A 4.7. a) mego.

A teljes szorzat 2-es és 5-ös prímtényezőit kell számba venni. Nyilván 5-ösből van kevesebb, 24, tehát 24 db 0-ra végződik a szorzat.

A 4.7. b) fel. I. megoldása

Felírjuk a szorzat prímtényezős alakját:

$100! = 2^{97}\cdot 3^{48}\cdot 5^{24}\cdot 7^{16}\cdot 11^{9}\cdot 13^{7}\cdot 17^{5}\cdot 19^{5}\cdot 23^{4}\cdot 29^{3}\cdot 31^{3}\cdot 37^{2}\cdot 41^{2}\cdot 43^{2}\cdot 47^{2}\cdot 53\cdot 59\cdot 61\cdot 67\cdot 71\cdot 73\cdot 79\cdot 83\cdot 89\cdot 97$

Ha ezt elosztjuk $10^{24}=2^{24}\cdot 5^{24}$-nel, az így kapott szám, azaz

$2^{73}\cdot 3^{48}\cdot 7^{16}\cdot 11^{9}\cdot 13^{7}\cdot 17^{5}\cdot 19^{5}\cdot 23^{4}\cdot 29^{3}\cdot 31^{3}\cdot 37^{2}\cdot 41^{2}\cdot 43^{2}\cdot 47^{2}\cdot 53\cdot 59\cdot 61\cdot 67\cdot 71\cdot 73\cdot 79\cdot 83\cdot 89\cdot 97$ utolsó számjegye a kérdés.

A szorzatban szereplő egyes prímhatványok utolsó számjegyei rendre: 2, 1, 1, 1, 7, 7, 9, 1, 9, 1, 9, 1, 9, 9, 3, 9, 1, 7, 1, 3, 9, 3, 9, 7, melyek szorzata 4-re végződik.

A 4.7. b) fel. II. megoldása

Csoportosítsuk 100! tényezőit az ötös osztó szerint, majd azon belül négyes csapatokban!

Négy tényező: $25\cdot 50\cdot 75\cdot 100 = 5^8\cdot(1\cdot 2\cdot 3\cdot 4)$.

További 16 tényező: $5\cdot 10\cdot 15\cdot 20\cdot 30\cdot\ldots\cdot 45\cdot\ldots = 5^{16}\cdot(1\cdot 2\cdot 3\cdot 4)\cdot(6\cdot\ldots\cdot 9)\cdot\ldots$

Míg a maradék 80 tényező: $(1\cdot 2\cdot 3\cdot 4)\cdot(6\cdot\ldots\cdot 9)\cdot\ldots$

Ezek szerint a $\frac{100!}{5^{24}}$ szorzat 5-ös maradéka:

$$\frac{100!}{5^{24}}\equiv(1\cdot 2\cdot 3\cdot 4)^{1+4+20}\equiv(-1)^{25}\equiv -1 \pmod 5.$$

Mivel $2^{24}\equiv 1 \pmod 5$, így $\frac{100!}{10^{24}}\equiv -1 \pmod 5$, tehát 100! utolsó nemnulla számjegye 9 vagy 4, de nyilván páros, tehát 4.

A 4.8. feladat megoldása

$186\,340 = 2^2 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 31 \cdot 43$.

A 7-es prímtényezőnek a számpár mindkét tagjában szerepelnie kell, 2-es csak az egyikben szerepelhet, ha legnagyobb közös osztójuk 7.

Legyen mondjuk $a = 2^2 \cdot 7 \cdot \ldots$ és $b = 7 \cdot \ldots$

A kérdés most az, hogy a legkisebb közös többszörös maradék 3 prímtényezőjét hányféleképp tudjuk szétosztani a és b között. Lehet, hogy mindhármat a kapja (1 lehetőség), lehet, hogy kettőt a, egyet b (3 lehetőség, függően attól, melyiket kapja b), lehet, hogy egyet a, kettőt b (ugyanúgy 3 lehetőség), és lehet, hogy mindhármat b (1 lehetőség).

Ez összesen 8 lehetőség (megfelelően annak is, hogy mindhárom tényezőre egymástól függetlenül két lehetősége van a-nak: vagy megkapja, vagy nem).

További 8 lehetőséget jelent, ha rendezett számpárokban gondolkodunk, amikor b a páros.

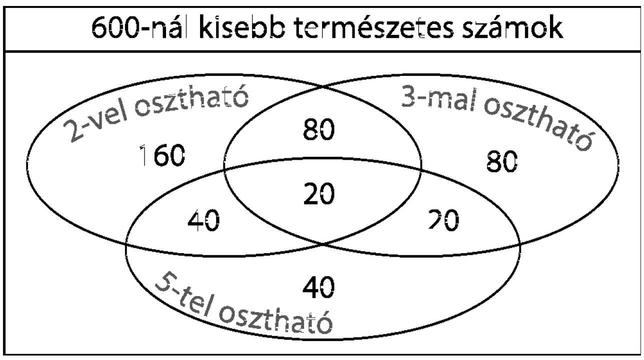
A 4.9. feladat megoldása

Az 50! prímtényezős alakja $2^{47} \cdot 3^{32} \cdot 5^{12} \cdot 7^8 \cdot 11 \cdot \ldots$ (a további 50-nél kisebb prímtényezők első hatványon szerepelnek).

Így a legnagyobb négyzetszám, amely az 50! osztója, a $2^{46} \cdot 3^{32} \cdot 5^{12} \cdot 7^8$

A 4.10. feladat megoldása

a) 600-ig 300 páros (A halmaz), 200 db 3-mal osztható (B halmaz) és 120 db 5-tel osztható szám (C halmaz) van (lásd a 12.1. ábrát).



12.1. ábra.

Az egyes halmazok közös részeit számba véve adódik, hogy a „kimaradók” létszáma 160.

b) A sem 2-vel, sem 3-mal, sem 5-tel nem osztható számok lesznek megfelelőek. Ezek száma 1600.

A 4.11. feladat megoldása

Minden pozitív egész szám felírható $2^n m$ alakban, ahol $n \geq 0$, és m páratlan pozitív egész szám.

Ekkor a szám páratlan osztóinak összege megegyezik m osztóinak összegével.

Ha az eredeti szám páros volt ($n \geq 1$), akkor minden páratlan osztónak a kétszerese (alkalmasint a 4-szerese stb) is osztó, így a páros osztóinak összege minimum kétszerese a pártalanokénál. A válasz tehát: csak a páratlan számokra teljesül, hogy páros osztóiknak összege kisebb a páratlan osztóik összegénél – amikor is nincs páros osztójuk.

A 4.12. feladat megoldásai

A 4.12. a) mego.

Azok a korongok lesznek végül kékek, amelyeket páratlan sokszor fordítottunk meg, vagyis, amelyek sorszámának páratlan sok osztója van. Többféleképp rájöhetünk arra (próbálgatással, okoskodással az osztók számára vonatkozó képlet felhasználásával), hogy ezek épp a négyzetszámok, vagyis 10 korong lesz kék oldalával felfelé.

A 4.12. b) mego.

Azok a korongok lesznek kékek, melyek sorszámának osztóit összeadva páratlan számot kapunk. Meggondolható, hogy ehhez az szükséges, hogy páratlan sok páratlan osztójuk legyen, vagyis $2^k \cdot m^2$ alakúak legyenek. 100-ig 17 ilyen szám van.

A 4.13. feladat megoldása

a)-b) Igen, előáll. Pld:

$$\begin{aligned} 2000 &= 398 + 399 + 400 + 401 + 402 \\ &= 68 + 69 + \ldots + 80 + 81 + \ldots + 92 \\ &= -46 + (-45) + (-44) + \ldots (-1) + 0 + 1 + 2 + \ldots + 16 + \ldots + 77 + 78. \end{aligned}$$

c)-d)-e) Vizsgáljuk először az M pozitív egész szám előállításait úgy, hogy nem törődünk azzal pozitívak vagy negatívak az összeadandók, és megengedjük az egytagú összeget (ez maga M).

Legyen a tagok száma n. Ha n páratlan, akkor van egy középső szám, ami egész. Ha ez x, akkor $n \cdot x = M$. Az M minden pozitív páratlan m osztójához tartozik egy ilyen előállítás, ahol tehát $n = m$ és $x = \frac{M}{n}$, a tagok:

$$\frac{M}{n} - \frac{n-1}{2}, \quad \frac{M}{n} - \frac{n-3}{2}, \quad , \ldots, \quad \frac{M}{n} - 1, \quad \frac{M}{n}, \quad \frac{M}{n} + 1, \quad \ldots, \quad \frac{M}{n} + \frac{n-1}{2}.$$

Az a)-b) részekhez adott fenti példákban $M = 2000$ esetén rendre az $n = 5$, $n = 25$, $n = 125$ osztókhoz tartozó megoldásokat láthatjuk.

Ha n páros, akkor a számok átlaga, x nem egész, hanem egy egész szám fele. Ilyenkor viszont az $\frac{n}{2}$, $2x$ számok mindketten egészek és $2x$ páratlan. Ráadásul x (és így $2x$ is) pozitív, hiszen $x = \frac{M}{n}$. Az M minden m pozitív páratlan osztójához tartozik egy ilyen megoldás is, ahol tehát az átlag $x = \frac{m}{2}$, a tagok száma pedig $n = \frac{2M}{m}$. Az előállítás tagjai:

$$\frac{m+1}{2} - \frac{M}{m}, \quad \frac{m+3}{2} - \frac{M}{m}, \quad \ldots, \quad \frac{m-1}{2}, \quad \frac{m+1}{2}, \quad \ldots, \quad \frac{m-1}{2} + \frac{M}{m}.$$

Pld a 2000 ilyen típusú előállításai:

$$\begin{aligned} 2000 &= = 47 + 48 + \ldots + 62 + 63 + \ldots + 77 + 78 \\ &= (-67) + \ldots + 11 + 12 + 13 + 14 + \ldots + 92 \\ &= (-397) + \ldots + (-1) + 0 + 1 + 2 + 3 + 4 + 5 \ldots + 402 \\ &= (-1999) + (-1998) + \ldots + (-1) + 0 + 1 + 2 + \ldots + 1999 + 2000. \end{aligned}$$

Tehát a b) esethez tartozó megoldások száma – beleértve az egytagú összeget is – az M szám páratlan osztóinak duplája.

Állítjuk, hogy az összes előállítás fele csak pozitív tagokat tartalmaz, a felében pedig előfordul a 0 és esetleg még negatív tagok is. A két csoport tagjai között kölcsönösen egyértelmű megfeleltetést létesítünk.

A tisztán pozitív tagú

$$k + (k+1) + \ldots + l,$$

összeghez rendeljük az ugyanakkora értékű, de enmpozitív tagokat is tartalmazó

$$(1-k) + (2-k) + \ldots + 0 + \ldots + (k-2) + (k-1) + k + (k+1) + \ldots + l$$

összeget. Megfordítva, ha egy összeg nempozitív tagokat is tartalmaz, akkor több pozitív tagja van, mint negatív, hiszen a teljes összeg pozitív. Így a negatív tagokat, azok ellentettjeit és a 0-t kidobhatjuk egyszerre az összegből, miáltal egy legalább egy tagból álló ugyanakkora értékű összeget kapunk.

A megfeleltetés mutatja, hogy a pozitív tagokból áll összegek száma (az egyetlen tagból állóval együtt) megegyezik az M szám páratlan osztóinak számával.

d) Páros számok összegeként csak a páros számok állnak elő, annyiféleképp, ahány (1-nél nagyobb) páratlan osztója a felüknek van.

A 4.14. feladat megoldása

a) A számok összege 1-től 10-ig 55. Így nyilván nem lehet egyenlő összegű két (3, 4) részre osztani őket úgy, hogy minden rész összege ugyanannyi legyen.

Öt részre lehet, pl. úgy, hogy az egyes részek a következők: $(1;10)$, $(2;9)$, $(3;8)$, $(4;7)$ és $(5;6)$.

b) Ahhoz, hogy az egyes dobozokban ugyanannyi legyen a számok szorzata, az szükséges (de nem elégséges), hogy a 10! prímtényezői szétoszthatók legyenek a dobozok között, vagyis a 10! prímtényezős alakjában minden prím páros (3-mal, 4-gyel, 5-tel osztható) hatványon szerepeljen. Ez feladatunkban nyilván nem teljesül.

Megjegyzés a 4.14. feladathoz

Ha 1-től n-ig akarjuk két dobozba osztani a számokat úgy, hogy az összeg egyforma legyen a dobozokban, akkor ez nyilván nem oldható meg, ha 1-től n-ig a számok összege páratlan. További kérdés, hogy egyéb esetekben megoldható-e a kétfelé osztás. A válasz igen, többféle konstrukció elképzelhető, de a sejtés bizonyításra szorul.

A szorzatok két egyenlő részre osztása azon múlik, hogy találunk-e minden előforduló prímtényezőhöz párt. Ezt konkrét határok esetén megvizsgálhatjuk, az általánosítás azon a (Bertrand által sejtett, Csebisev által igazolt) tételen múlik, hogy minden szám és a kétszerese között van prímszám.

A 4.15. feladat megoldása

Először T értékét írjuk fel kétféleképpen: legyen $M := N/2$. Vegyük észre, ha $1 \le i < M$ és $(i,N) = 1$, pontosan akkor, ha $1 \le M - i < M$ és $(M - i, N) = 1$. Ezért

$$T = \sum_{1 \le i < M, (i,N)=1} i; \quad T = \sum_{1 \le i < M, (i,N)=1} M - i,$$

így összeadva a két formát

$$2T = \sum_{1 \le i < M, (i,N)=1} M.$$

Továbbá $1 \le i < M$ és $(i,N) = 1$, pontosan akkor, ha $M < M+i < M$ és $(M+i, N) = 1$.

Ezért

$$S - T = \sum_{1 \le i < M, (i,N)=1} M + i = \sum_{1 \le i < M, (i,N)=1} M + \sum_{1 \le i < M, (i,N)=1} i = 2T + T,$$

amiből $S = 4T$.

12.2. Oszthatósági szabályok

A 4.1. feladat megoldása

A 11-gyel és a 9-cel való oszthatóság segít: $a = b = 6$.

A 4.2. feladat megoldása

Nincs ilyen négyzetszám (A számjegyek összege osztható 3-mal, így maga a szám is, de 9-cel nem)

12.3. Közös osztók, legnagyobb közös osztó – feladatok megoldása

A 4.3. feladat megoldása

Ilyen számhármas pl. a $6 = 2 \cdot 3$, $10 = 2 \cdot 5$, $15 = 3 \cdot 5$.

Ha p, q és r különböző prímek, akkor általában is megfelelő számhármas a pq, pr, qr, de egyéb módon is gyárthatunk további jó számhármasokat, sőt akár számnégyeseket stb.

A 4.4. feladat megoldása

A legkisebb olyan k pozitív egészt keressük, amelyre $360|k \cdot 75$. Mivel $360 = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 5$ és $75 = 3 \cdot 5^2$, így a legkisebb megfelelő k a $2^3 \cdot 3 = 24$.

A 4.5. feladat megoldása

Első eset: a és b relatív prímek. Ekkor az átló nem halad át rácsponton. Ahhoz, hogy például a bal alsó sarokból eljussunk a jobb felső sarokba, $a - 1$ függőleges és $b - 1$ vízszintes rácsegyenest kell keresztezünk. Valahányszor átlépünk egy rácsegyenest, új kiszínezendő mezőbe lépünk, így a kiszínezett mezők száma $a - 1 + b - 1 + 1 = a + b - 1$ lesz („ + 1" a kezdeti mező).

Ha a és b nem relatív prímek ($(a; b) = d$), akkor a téglalap felosztható $a/b \times b/d$-es téglalapokra, melyekből éppen d darab helyezkedik el az átló mentén, így az eredmény $(a/d + b/d - 1) \cdot d = a + b - d$.

12.4. Számrendszerek – feladatok megoldása

A 4.1. feladat megoldása

A $11^2a + b = 9^2b + a$ egyenletből $3a = 2b$. Mivel az a, b számjegyek a kilences számrendszerben is szerepeltek, így $0 \le a, b \le 8$, azaz két nemtriviális megoldás van: $a = 2$ és $b = 3$ illetve $a = 4$ és $b = 6$, amelyek a tízes számrendszerbeli 245, 490 számoknak felelnek meg.

A 4.2. feladat megoldásai

A 4.2. fel. I. megoldása

(Elölről)

A kettő hatványai:

k	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
2^k	1	2	4	8	16	32	64	128	256	512	1024	2048

Választunk egy 1024-et, marad $2010 - 1024 = 986$. Ehhez választunk egy 512-t...

$2010 = 11111011010_2 = 1{\cdot}2^{10}+1{\cdot}2^9+1{\cdot}2^8+1{\cdot}2^7+1{\cdot}2^6+0{\cdot}2^5+1{\cdot}2^4+1{\cdot}2^3+0{\cdot}2^2+1{\cdot}2^1+0{\cdot}2^0$.

A 4.2. fel. II. megoldása

(Hátulról)

A legkisebb helyiértéktől kezdjük meghatározni a felírást. 2010 páros, így $2^0 = 1$-ből nem lehet benne. Ha ezt letöröljük a szám végéről, akkor a fele akkor a szám kettes számrendszerbeli alakját kapjuk meg. Így újra és újra 2-vel osztunk, a maradék lesz a kettes számrendszerbeli alak hátulról következő jegye és a hányadossal dolgozunk tovább (az alábbi táblázatban az új „osztandó” az előző osztás hányadosa:

osztandó	osztó	maradék
2010	2	0
1005	2	1
502	2	0
251	2	1
125	2	1
62	2	0
31	2	1
15	2	1
7	2	1
3	2	1
1	2	1

Tehát $2010 = 11111011010_2$

A 4.2. fel. III. megoldása

(Ad hoc)

$2048 = 2^{11}$ azaz $2047 = 11111111111_2$ (tizenegy darab 1-esből álló szám). Mivel $2047 - 2010 = 37 = 32 + 4 + 1 = 100101_2$, így $2010 = 11111011010_2$.

Kérdések a 4.2. feladatról

1. Miért létezik és egyértelmű a (4.1) alakú felírás minden pozitív egész számra?

2. Nem egész számok kettes számrendszerbeli alakja hogy értelmezhető?

3. Létezik-e és egyértelmű-e a (4.1) alakú felírás, ha a számjegyeket módosítjuk? Helyettesítsük pl a „$k \in \{0, 1, \ldots, m\}$ esetén $0 \le n_k \le 1$" részt ezzel: „$k \in \{0, 1, \ldots, m\}$ esetén $n_k \in \{-1, +1\}$", tehát a jegyek nem 0 és 1, hanem -1 és 1 lehetnek. Fel lehet-e így írni a 2010-et? Egyértelmű-e a felírás?

A 4.3.feladat megoldásai

A 4.3. a) mego.

Az a alapú számrendszerbeli 2010_a szám értéke

$$2 \cdot a^3 + a = a \cdot (2 \cdot a^2 + 1),$$

ami osztható a-val.

A 4.3. b) mego.

Nincs.

Ha 7 nem osztja a-t, akkor relatív prím hozzá, így $a \cdot (2 \cdot a^2 + 1)$ csak akkor osztható héttel, ha a $(2 \cdot a^2 + 1)$ kifejezés értéke osztható héttel. A négyzetszámok (lásd a^2) hetes maradékai: 0, 1, 2 és 4, ezek dupláinak (lásd $2a^2$) hetes maradékai 0, 2, 4 és 1, így az ennél eggyel nagyobb szám $(2 \cdot a^2 + 1)$ nem lehet osztható héttel.

A 4.3. c) mego.

A 4.3. b) mego. szerint az kell, hogy $(2 \cdot a^2 + 1)$ osztható legyen tizeneggyel. Ez teljesül pl $a = 4$ esetén, ami tehát megfelelő alap. Valóban, ekkor $2010_4 = 2 \cdot 64 + 1 \cdot 4 = 132 = 11 \cdot 12$.

A 4.4. feladat megoldása

Legyen a szám $A = 10x + y$. Az utolsó számjegy kétszeresét levonva x-ből a $B = x - 9y$ számot kapjuk. Ekkor $A - 10B = 10x + y - 10x + 90y = 91y$, ami osztható 7-tel, így ha B osztható, akkor A is.

Megfordítva: ha A osztható, akkor $10B$ is, és mivel a 10 és a 7 relatív prímek, B is.

Megjegyzés a 4.4. feladathoz

Könnyen gyárthatunk hasonló szabályt más számokkal való oszthatóságra, pl. a fenti szabály – ugyanilyen alapon 13-ra is jó ($91 = 7 \cdot 13$).

A 4.5. feladat megoldása

A $\overline{d_n d_{n-1} \dots d_3 d_2 d_1 d_0}$ számjegysorozat értelmezése a alapú számrendszerben:

$$\overline{d_n d_{n-1} \dots d_3 d_2 d_1 d_0}_a = d_n \cdot a^n + d_{n-1} a^{n-1} + \dots + d_3 \cdot a^3 + d_2 \cdot a^2 + d_1 \cdot a + d_0. \quad (12.1)$$

Ha a (12.1) szám m számmal vett maradéka érdekel bennünket, akkor tudnunk kell az

$$1, \quad a, \quad a^2, \quad a^3, \quad \dots, \quad a^{n-1}, \quad a^n$$

számok m-es maradékait.

A 12.1 táblázatban gyűjtöttük ki $a = 10$, azaz a 10-es számrendszer esetén néhány lehetséges m osztóra a 10 hatványainak maradékait .

m	1	10	10^2	10^3	10^4	10^5	10^6	10^7	10^8	10^9	10^{10}	10^{11}	10^{12}
2	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
3	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
4	1	2	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
5	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
7	1	3	2	6	4	5	1	3	2	6	4	5	1
8	1	2	4	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
9	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
10	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
11	1	-1	1	-1	1	-1	1	-1	1	-1	1	-1	1
13	1	-3	-4	-1	3	4	1	-3	-4	-1	3	4	1

12.1. táblázat. A 10 hatványainak maradékai modulo m

A táblázat alapján

$$
\begin{array}{rcll}
\overline{d_n d_{n-1} \dots d_3 d_2 d_1 d_0}_{10} & \equiv & d_0 & \pmod{2} \\
\overline{d_n d_{n-1} \dots d_3 d_2 d_1 d_0}_{10} & \equiv & d_n + d_{n-1} + \dots + d_3 + d_2 + d_1 + d_0 & \pmod{3} \\
\overline{d_n d_{n-1} \dots d_3 d_2 d_1 d_0}_{10} & \equiv & \overline{d_1 d_0}_{10} & \pmod{4} \\
\overline{d_n d_{n-1} \dots d_3 d_2 d_1 d_0}_{10} & \equiv & d_0 & \pmod{5} \\
\overline{d_n d_{n-1} \dots d_3 d_2 d_1 d_0}_{10} & \equiv & \dots + 3d_7 + d_6 + 5d_5 + 4d_4 + 6d_3 + 2d_2 + 3d_1 + d_0 & \pmod{7} \\
\overline{d_n d_{n-1} \dots d_3 d_2 d_1 d_0}_{10} & \equiv & \overline{d_2 d_1 d_0}_{10} & \pmod{8} \\
\overline{d_n d_{n-1} \dots d_3 d_2 d_1 d_0}_{10} & \equiv & d_n + d_{n-1} + \dots + d_3 + d_2 + d_1 + d_0 & \pmod{9} \\
\overline{d_n d_{n-1} \dots d_3 d_2 d_1 d_0}_{10} & \equiv & d_0 & \pmod{10} \\
\overline{d_n d_{n-1} \dots d_3 d_2 d_1 d_0}_{10} & \equiv & (-1)^n d_n + (-1)^{n-1} d_{n-1} \pm \dots + d_2 - d_1 + d_0 & \pmod{11} \\
\overline{d_n d_{n-1} \dots d_3 d_2 d_1 d_0}_{10} & \equiv & \dots - 3d_7 + d_6 + 4d_5 + 3d_4 - d_3 - 4d_2 - 3d_1 + d_0 & \pmod{13}
\end{array}
$$

A 10 hatványainak m-es maradékai periodikus sorozatot alkotnak, így elvileg minden m-re készíthetünk oszthatósági szabályt, de az gyakran kényelmetlen, pl. a fenti 7-es és 13-as szabályok is azok. Fontos azonban látni, hogy a fenti képletek nem csak oszthatóság kérdéséről nyilatkoznak, hanem a maradékot is egyszerűbben kiszámítható alakban adják meg.

8-as számrendszerben a 8 osztóival, azok hatványaival és 8 ± 1 osztóival kapcsolatban kapunk egyszerű oszthatósági szabályt.

$$\overline{d_n d_{n-1} \dots d_3 d_2 d_1 d_0}_8 = d_n \cdot 8^n + d_{n-1} 8^{n-1} + \dots + d_3 \cdot 8^3 + d_2 \cdot 8^2 + d_1 \cdot 8 + d_0, \quad (12.2)$$

így $m = 2^k$ esetén $n' = \left[\frac{k}{3}\right]$-mal $m | 8^{n'+1}$, tehát

$$\overline{d_n d_{n-1} \dots d_3 d_2 d_1 d_0}_8 \equiv \overline{d_{n'} d_{n'-1} \dots d_2 d_1 d_0}_8 \pmod{m},$$

azaz csak az utolsó kb $\frac{k}{3}$ db jegy számít.

$m = 7$ esetén $8^i \equiv (7+1)^i \equiv 1 \pmod{m}$, tehát

$$\overline{d_n d_{n-1} \dots d_3 d_2 d_1 d_0}_8 \equiv d_n + d_{n-1} + \dots + d_2 + d_1 + d_0 \pmod{m},$$

azaz a számjegyek összegének 7-es maradéka lesz a maradék.

$m = 3$ és 9 esetén $m | (8+1)$, azaz $m \equiv (-1) \pmod{m}$, ezért

$$\overline{d_n d_{n-1} \dots d_3 d_2 d_1 d_0}_8 \equiv (-1)^n d_n + (-1)^{n-1} d_{n-1} \pm \dots - d_3 + d_2 - d_1 + d_0 \pmod{m},$$

azaz a számjegyek váltakozó előjelű összegének 3-as (9-es) maradéka lesz a maradék.

$m = 5$ esetén nem ilyen egyszerű, de nem is nagyon bonyolult az oszthatósági – pontosabban „maradékképzési” – szabály. A

$$8^0, \qquad 8^1, \qquad 8^2, \qquad 8^3, \qquad 8^4, \qquad 8^5$$

stb számok 5-ös maradékai rendre

$$1, \qquad 3, \qquad -1, \qquad -3, \qquad 1, \qquad 3$$

stb, tehát

$$\overline{d_n d_{n-1} \dots d_3 d_2 d_1 d_0}_8 \equiv \dots - 3d_7 - d_6 + 3d_5 + d_4 - 3d_3 - d_2 + 3d_1 + d_0 \pmod 5.$$

A fentiekhez hasonlóan, a 9-es számrendszerben a 3-hatványokkal való oszthatóság (és a maradék is) csak az utolsó néhány jegyen múlik, a 2, 4, 8-cal való osztás maradéka megegyezik a számjegyek összegének maradékával, míg az 5-tel való osztási maradékhoz a számjegyek előjeles összegének maradékát lehet jól használni.

A 4.6. feladat megoldásai

A 4.6. a) mego.

Ha a számrendszer alapszáma a, akkor a 9-es számjegy szereplése miatt $a > 9$. Mivel $169_a = a^2 + 6a + 9 = (a+3)^2$, így minden 9-nél nagyobb alak megfelelő, $169_a = (13_a)^2$.

A 4.6. b) mego.

Itt is szükséges az $a > 9$ feltétel a megadott szám értelmezéséhez.Ilyen a számokra

$$(a+3)^2 = a^2 + 6a + 9 < a^2 + 9a + 6 = 196_a < a^2 + 10a + 25 = (a+5)^2,$$

tehát 196_a csak 14_a négyzete lehet. Az $a^2 + 9a + 6 = (a+4)^2$ egyenletből $a = 10$ adódik, ez az egyetlen megoldás.

A 4.6. c) mego.

Most az $a > 5$, $a, b \in \mathbb{N}$ feltétel mellett kell megoldanunk a

$$2a^2 + 2a + 5 = b^2 \tag{12.3}$$

diofantikus egyenletet. Kettővel való szorzás és teljes négyzetté alakítás után kapjuk, hogy

$$(2a+1)^2 + 9 = 2b^2. \tag{12.4}$$

Négyzetszám hármas maradéka 0 vagy 1, így (12.4) csak akkor teljesülhet, ha $2a + 1$ és b is osztható hárommal. Legyen tehát $A = \frac{2a+1}{3}$, $B = \frac{b}{3}$, ahol tehát A és B is pozitív számok és $A > 3$. Egyenletünk klasszikus Pell egyenlet (lásd a 3.1., 6.22. feladatokat):

$$A^2 + 1 = 2B^2. \tag{12.5}$$

Ennek végtelen sok megoldása van. Az első néhány:

A	1	7	41	239
B	1	5	29	169

Ha az $A > 3$, $B > 0$ egész számok kielégítik a (12.5) egyenletet, akkor A feltétlenül páratlan, így az $a = \frac{3A-1}{2}$, $b = 3B$ számok pozitív egészek, sőt $a > 5$ és ezek a számok kielégítik a (12.3) egyenletet is, tehát az ilyen a alapú számrendszerben $\overline{225}_a$ négyzetszám, a b egész szám négyzete. A fenti táblázatban $A = 1$-hez nem tartozik megfelelő számrendszer alap, a többinek rendre a 10-es, 61-es, 358-as alapú „számrendszerek” felelnek meg.

A 4.7. feladat megoldásai

A 4.7. a) fel. I. megoldása

Ha a számrendszer alapszáma legalább 7, akkor

$$\begin{array}{rrrrrrrrrrrrrrrrrrrrr}
 & & 0, & 2 & 0 & 1 & 0 & 2 & 0 & 1 & 0 & 2 & 0 & 1 & 0 & \ldots & \cdot & 2 & 2 & 2 & 2 \\
\hline
 & & & 4 & 0 & 2 & 0 & 4 & 0 & 2 & 0 & 4 & 0 & 2 & 0 & \ldots & & & & & \\
 & & 4 & 0 & 2 & 0 & 4 & 0 & 2 & 0 & 4 & 0 & 2 & 0 & 4 & \ldots & & & & & \\
 & 4 & 0 & 2 & 0 & 4 & 0 & 2 & 0 & 4 & 0 & 2 & 0 & 4 & 0 & \ldots & & & & & \\
4 & 0 & 2 & 0 & 4 & 0 & 2 & 0 & 4 & 0 & 2 & 0 & 4 & 0 & 2 & \ldots & & & & & \\
\hline
4 & 4 & 6 & 6, & 6 & 6 & 6 & 6 & 6 & 6 & 6 & 6 & 6 & 6 & 6 & \ldots & & & & &
\end{array}$$

tehát a szám pontosan akkor egész, ha $1 = 0,6666\ldots$, azaz ha az alapszám 7.

Ötös számrenszerben az egyes szorzások jók, de $4 + 2 + 1 = 12_5$, így az összeg $1122,2222\ldots$, ami nem egész.

Négyes számrendszerben:

$$\begin{array}{rrrrrrrrrrrrrrrrrrrrrr}
 & & & 0, & 2 & 0 & 1 & 0 & 2 & 0 & 1 & 0 & 2 & 0 & 1 & 0 & \ldots & \cdot & 2 & 2 & 2 & 2 \\
\hline
 & & & 1 & 0 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 & 2 & 1 & \ldots & & & & & \\
 & & 1 & 0 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 & 2 & 1 & 0 & \ldots & & & & & \\
 & 1 & 0 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 & \ldots & & & & & \\
1 & 0 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 & 2 & \ldots & & & & & \\
\hline
1 & 1 & 1 & 3 & 3, & 3 & 3 & 3 & 3 & 3 & 3 & 3 & 3 & 3 & 3 & 3 & \ldots & & & & &
\end{array}$$

azaz az eredmény $11133,3333\ldots_4 = 11200_4 = 352_{10}$.

Míg hármas számrendszerben:

$$\begin{array}{rrrrrrrrrrrrrrrrrrrrrr}
 & & & 0, & 2 & 0 & 1 & 0 & 2 & 0 & 1 & 0 & 2 & 0 & 1 & 0 & \ldots & \cdot & 2 & 2 & 2 & 2 \\
\hline
 & & & 1 & 1 & 0 & 2 & 1 & 1 & 0 & 2 & 1 & 1 & 0 & 2 & 1 & \ldots & & & & & \\
 & & 1 & 1 & 0 & 2 & 1 & 1 & 0 & 2 & 1 & 1 & 0 & 2 & 1 & 1 & \ldots & & & & & \\
 & 1 & 1 & 0 & 2 & 1 & 1 & 0 & 2 & 1 & 1 & 0 & 2 & 1 & 1 & 0 & \ldots & & & & & \\
1 & 1 & 0 & 2 & 1 & 1 & 0 & 2 & 1 & 1 & 0 & 2 & 1 & 1 & 0 & 2 & \ldots & & & & & \\
\hline
2 & 0 & 0 & 2 & 2, & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & \ldots & & & & &
\end{array}$$

azaz az eredmény $20022,2222\dots_3 = 20100_3 = 171_{10}$. Háromnál kisebb alap a 2-es jegy előfordulása miatt ne mjön szóba. Tehát a 3, 4, 7 alapú számrendszerek a megfelelőek.

A 4.7. a) fel. II. megoldása

Ha a számrendszer alapszáma $a > 2$, akkor $x = 2222_a = 2a^3 + 2a^2 + 2a + 2 = 2\frac{a^4-1}{a-1}$, míg ha

$$\begin{aligned} y &= 0, \quad 201020102010\dots_a \\ a^4 y &= 2010, \quad 201020102010\dots_a \end{aligned},$$

akkor

$$(a^4 - 1)y = 2010_a,$$

azaz $y = \frac{2a^3+a}{a^4-1}$. A vizsgált szorzat:

$$xy = 2\frac{a^4-1}{a-1} \cdot \frac{2a^3+a}{a^4-1} = 2\frac{2a^3+a}{a-1}.$$

Mivel $2a^3 + a = (a-1)(2a^2 + 2a + 3) + 3$, így

$$xy = 2(2a^2 + 2a + 3) + \frac{6}{a-1},$$

ami pontosan akkor egész, ha $(a - 1)$ a 6 osztója, azaz $a \in \{2, 3, 4, 7\}$. Ezekből a 2-nél nagyobb értékek a megfelelőek.

A 4.7. b) mego.

Minden olyan alapnál egyenlő a két kifejezés, ahol értelmesek, hiszen ez nem más, mint az

$$(2a^3 + a) \cdot \frac{2}{a-1} = 2\frac{a^4-1}{a-1} \cdot \frac{2a^3+a}{a^4-1}$$

azonosság.

A 4.8. feladat megoldásai

A 4.8. fel. I. megoldása

(Elölről)

A faktoriálisok:

k	1	2	3	4	5	6	7
$k!$	1	2	6	24	120	720	5040

A 7! már túl sok. Választunk két 6!-t, marad $2010 - 1440 = 570$. Ehhez választunk négy 5!-t...

$$2010 = 243300_! = 2 \cdot 6! + 4 \cdot 5! + 3 \cdot 4! + 3 \cdot 3! + 0 \cdot 2! + 0 \cdot 1!.$$

Érdemes elgondolkodni rajta, hogy miért egyértelmű a megoldás.

A 4.8. fel. II. megoldása

(Hátulról)

Az

$$1, \qquad 2, \qquad 3 \cdot 2, \qquad 4 \cdot 3 \cdot 2, \qquad 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2, \qquad \ldots$$

helyiértékek közül az első kivételével mind osztható 2-vel, így a paritást az 1! „helyiérték” jegye dönti el. Mivel 2010 páros, így az 1!-os helyiérték jegye 0. Osszuk le a számot és a helyiértékeket is 2-vel! Most már az 1005-öt kell felbontanunk a

$$1, \qquad 3, \qquad 4 \cdot 3, \qquad 5 \cdot 4 \cdot 3, \qquad \ldots$$

helyiértékekre. Ezek közül az első kivételével mindegyik osztható 3-mal...

osztandó	osztó	maradék
2010	2	0
1005	3	0
335	4	3
83	5	3
16	6	4
2	7	2

Tehát $2010 = 243300_!$

Megjegyzések a 4.8. feladathoz

I. A faktoriális számrendszerben fel lehet tüntetni egy 0-adik helyiértéket, a $0! = 1$-nek megfelelőt, azonban az ehhez tartozó jegy csak a 0 lehet, tehát kizárólag „díszitésnek” való ez a további helyiérték és kötelezően 0 számjegy.

II. A faktoriális számrendszer minden n pozitív egész esetén kölcsönösen egyértelmű megfeleltetést ad az n elem összes permutációjából álló S_n halmaz és az $\mathbb{N}_{n!-1} = \{0, 1, 2, \ldots, n!-1\}$ halmaz között. Ezt a megfeleltetést Lehmer leképezésnek nevezik, alább 2010 példáján mutatjuk be.

Példánkban $n = 7$. A hat jeggyel lekódolható legnagyobb szám a faktoriális számrendszerben a

$$6 \cdot 6! + 5 \cdot 5! + 4 \cdot 4! + 3 \cdot 3! + 2 \cdot 2! + 1 \cdot 1! = 7! - 1,$$

tehát a

$$0_{10} = 000000_!, \qquad 1_{10} = 000001_!, \qquad \dots \qquad 7! - 1 = 5039_{10} = 654321_!,$$

számok épp annyian vannak, mint a $\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ számok permutációi.

A számokat faktoriális számrendszerben képzeljük el, míg a π permutációt a

$$[\pi(0), \pi(1), \pi(2), \pi(3), \pi(4), \pi(5), \pi(6)]$$

alakban adjuk meg. Például a $[1, 0, 5, 4, 3, 2, 6]$ permutáció az alábbi értéktáblázattal megadott függvény:

k	0	1	2	3	4	5	6
$\pi(k)$	1	0	5	4	3	2	6

A 2010_{10} szám faktoriális számrendszerbeli alakja $243300_!$. A hozzá tartozó permutáció megkereséséhez ennek kiolvasását balról kezdjük és jobbra haladunk. A szám legelső jegye a 2, így a permutáció legelső eleme is a 2 lesz.

$$243300_! \longrightarrow [2, ?, ?, ?, ?, ?, ?].$$

A megmaradt „faktoriális” szám a $43300_!$, a permutációban még ki nem osztott elemek a $\{0, 1, 3, 4, 5, 6\}$. A szám balról első jegye a 4, az a megmaradt elemek listájában (mindent 0-tól számítunk) a növekedési sorban az 5-nek felel meg:

$$243300_! \longrightarrow [2, 5, ?, ?, ?, ?, ?].$$

Most a $3300_!$ szám és a $\{0, 1, 3, 4, 6\}$ elemek maradtak meg. A következő lépésben:

$$243300_! \longrightarrow [2, 5, 4, ?, ?, ?, ?],$$

megmarad $300_!$ és $\{0, 1, 3, 6\}$, így

$$243300_! \longrightarrow [2, 5, 4, 6, ?, ?, ?],$$

marad $00_!$ és $\{0, 1, 3\}$,

$$243300_! \longrightarrow [2, 5, 4, 6, 0, ?, ?],$$

marad $0_!$ és $\{1, 3\}$,

$$243300_! \longrightarrow [2, 5, 4, 6, 0, 1, ?],$$

marad semmi és $\{3\}$,

$$243300_! \longrightarrow [2, 5, 4, 6, 0, 1, 3].$$

Határozzuk meg az $[1, 0, 5, 4, 3, 2, 6]$ permutációnak a Lehmer kód szerint megfelelő szám faktoriális alakját!

Problémák a 4.8. feladattal kapcsolatban

1. Miért létezik és egyértelmű a (4.2) alakú felírás minden pozitív egész számra?

2. Nem egész számok faktoriális számrendszerbeli alakja hogy értelmezhető?

3. Mutassuk meg, hogy bármely permutáció Lehmer kódjában a jegyek összege megegyezik a legkevesebb elemi transzpozíció számával, amellyel a permutáció előállítható. Elemi transzpozíción szomszédos elemek cseréjét értjük.

A 4.9. feladat megoldása

a) Vegyük a $2 < 3 < 5 < 7 < 11$ prímeket. Egyszerű számolás mutatja, hogy az $I_1 = [7, 20]$ intervallum egészei előállnak mint ezen prímekből alkotott összegek és ahol egy prímet legfeljebb egyszer használunk. Adjuk hozzá I_1 egészeihez a $q_1 = 13$–at! Ekkor egyrészt a kapott összegekben minden prím legfeljebb egyszer szerepel (13 eddig nem szerepelt), másrészt az így előálló számok a $[20, 33]$ intervallum egészei. Ebből adódóan az $I_2 = [7, 33]$ egészei előállnak a kívánt módon. Adjuk hozzá I_2 egészeihez a $q_2 = 17$–et! Ezen összegben megint csak különböző összeadandók szerepelnek és lefedik a $[7+17, 33+17]$ egész pontjait, ezért tehát a $[7, 50]$ intervallum egészei előállnak a kívánt módon. Tekintsük a $q_2 = 13 < q_3 = 17 < q_4 = 19$ egymást követő prímek sorozatát. Az előbbi eljárás akkor működik általánosan is, ha az $I_k = [7, n_k]$ intervallum egészeihez (amelynek előállításában csak a q_k–nál kisebb prímek szerepelhettek) hozzadva a q_k prímet a $[7 + q_k, n_k + q_k] := [7 + q_k, n_{k+1}]$ egészeit kapjuk és nyilván akkor fedtük le az összes egészt az $I_{k+1} = [7, n_k + q_k]$ intervallumban, ha bármely k-ra teljesül, hogy

$$7 + q_k \leq n_k.$$

Mint láttuk, ez $k = 1$ esetén igaz. Mindkét oldalhoz q_k–t hozzáadva és használva a Bertrand posztulátumot, miszerint $q_{k+1} \leq 2q_k$, azt kapjuk, hogy

$$7 + q_{k+1} \leq 7 + 2q_k \leq n_k + q_k = n_{k+1}.$$

Teljes indukciót használva igazoltuk tehát, hogy minden hatnál nagyobb egész szám különböző prímek összegeként előállítható.

b) A bizonyítás alapgondolata azonos az a) bizonyítással.

12.5. Maradékok – feladatok megoldása

A 4.1. feladat megoldása

Eladás előtt összesen 94 tojás volt a kosarakban. Egy kosár eladása után a megmaradt tojások összlétszáma 3-mal osztható kell, hogy legyen. Ez csak akkor teljesül, ha a 13 vagy a 19 tojást tartalmazó kosárból adja el a tojásokat. Az első esetben a megmaradt tojások száma 81, így 27 kacsatojásnak (és 54 tyúktojásnak) kell maradnia. Ez lehetséges is a $8 + 19 = 27$, $15 + 18 + 21 = 54$ csoportosítással. A második esetben 75 tojás maradt, amiből 25 kacsatojásnak kellene lennie, de az nem rakható össze teljes kosárnyi tojásadagokból.

A 4.2. feladat megoldásai

A 4.2. a) mego.

A

$$0 \cdot 59, \quad 1 \cdot 59, \quad 2 \cdot 59, \quad 3 \cdot 59, \quad \ldots, \quad 999 \cdot 59$$

mind különböző maradékot adnak 1000-rel osztva. Valóban, ha közülük kettő, mondjuk $n \cdot 59$ és $m \cdot 59$ $(0 \leq n < m < 1000)$ ugyanazt a maradékot adná, akkor különbségük, $(m-n) \cdot 59$ osztható lenne 1000-rel, ami lehetetlen, mert $(59, 1000) = 1$ és $0 < (m-n) < 1000$. A fenti 1000 szám 1000 különböző maradékot ad, tehát kiadja az összes maradékot. a 111-et is.

A 4.2. b) fel. I. megoldása

Ahhoz, hogy x-szel szorozva az 59-et, a szorzat 1-re végződjön, 9-re végződő számmal kell szoroznunk. Az írásbeli szorzás eljárását követve megkaphatjuk x további számjegyeit, melyből $x = 629$.

A 4.2. b) fel. II. megoldása

Alkalmazzuk az Euklideszi algoritmust 1000 és 59 legnagyobb közös osztójának meghatározására! Ismeretes, hogy az algoritmus elő is állítja a legnagyobb közös osztót a két szám egész kombinációjaként, így lehetőséget ad a legnagyobb közös osztó bármely többszörösének ilyetén előállítására is.

$$\begin{array}{lclclcl} 1000 & = & 16 & \cdot & 59 & + & 56, \\ 59 & = & 1 & \cdot & 56 & + & 3, \end{array} \qquad \begin{array}{lcll} 56 & = & 1000 - 16 \cdot 59, & \\ 3 & = & 59 - 1 \cdot 56 & = 17 \cdot 59 - 1000. \end{array}$$

Az Euklideszi algoritmus nincs kész, de megállhatunk, mert $37 \cdot 3 = 111$, így $111 = 37 \cdot (17 \cdot 59 - 1000) = 629 \cdot 59 - 37000$. Mivel az 59 ezer egymást követő többszöröse mind különböző maradékot ad $\pmod{1000}$, így a 629-szeres a legkisebb olyan pozitív többszörös, ami 111re végződik.

A 4.3. feladat megoldása

Ha q a p szám fordítottja, akkor a $\overline{p0q}$, $\overline{p1q}$, $\overline{p2q}$, $\ldots \overline{p6q}$ számok között mind palindrom számok és van köztük héttel osztható, hiszen hetes maradékuk páronként különböző.

A 4.4. feladat megoldása

A köbre emelés megtartja a paritást, azaz páros számok köbe páros, páratlanoké páratlan. Azaz a köbeik összege is osztható 2−vel. Egy szám 0, 1 vagy 2 maradékot ad 3−mal osztva. Köbeik 0, 1 vagy $8 \equiv 2$ maradékokat adnak rendre. Azaz, ha az eredeti összegben a maradékok összege 0 volt, akkor a köbeinek az összegében is 0 lesz a maradék. A köbeik összege tehát osztható lesz $2 \cdot 3 = 6$−tal.

A 4.5. feladat megoldása

A négyzetszámok 3-as maradéka 0 vagy 1, míg 2010-nek a 3-as maradéka 0. Ha egy négyzetszám 3-as maradéka 0, akkor az a négyzetszám 9-cel is osztható. Ezért 2010 nem négyzetszám és két négyzetszám összegeként sem állítható elő. Három négyzetszámból csak úgy állítható elő, ha mind a három 1 maradékot ad 3-mal osztva.

A számok paritását is figyelembe véve (a 8-as maradék miatt két páratlan és egy páros szám kell) gyorsítható a keresés. Egy megoldás:

$$2010 = 16^2 + 23^2 + 35^2.$$

Megjegyzések a 4.5. feladathoz

Két kérdés is felmerül.

I. Lehetséges-e, hogy egy egész szám kétféleképpen (többféleképpen) is felírható legkevesebb darab négyzetszám összegére?

II. Van-e olyan n pozitív egész korlát, hogy legfeljebb n négyzetszám összegére már minden pozitív egész felírható?

Az I. kérdésre a válasz: igen. Az alábbi táblázat tartalmazza a 2010 összes előállítását három négyzet összegére. Bármelyik oszlopban a három szám négyzetösszege 2010.

1	4	5	5	7	11	16	19
28	25	7	31	19	17	23	25
35	37	44	32	40	40	35	32

A II. kérdésre is igen a válasz. Bármely pozitív egész előáll legfeljebb négy négyzetszám összegeként.

A 4.6. feladat megoldásai

A 4.6. fel. I. megoldása

Ha x prím, akkor 24-hez relatív prím, kivéve, ha $x = 2$ vagy $x = 3$. Tehát a prímszámok 24-es maradékai a 24-hez relatív prím maradékok valamint a 2 és a 3. Alább felsoroljuk ezeket a maradékokat és négyzetük 24-es maradékát is.

$n \mod 24$	1	2	3	5	7	11	13	17	19	23
$n^2 \mod 24$	1	4	9	1	1	1	1	1	1	1

Ennek alapján $x^2 - 1$ 24-es maradéka 0, 3 vagy 8, tehát $\left\{\frac{x^2-1}{24}\right\}$ értékei 0, $\frac{1}{8}$ és $\frac{1}{3}$.

A 4.6. fel. II. megoldása

Tekintük az $x^2 - 1$ kifejezés $(x-1)(x+1)$ szorzat alakját.

Ha x nem páros szám, akkor szomszédai – az $(x-1)$, $(x+1)$ számok – párosak, sőt, ezek egymást követő páros számok, így egyikük 4-gyel is osztható. Ebben az esetben tehát $x^2 - 1$ osztható 8-cal.

Mivel $x - 1$, x és $x + 1$ három egymást követő egész szám, így egyikük osztható hárommal. Ha x nem osztható hárommal, akkor $x - 1$ vagy $x + 1$ osztható hárommal, így $x^2 - 1$ osztható 3-mal.

Azt kaptuk, hogy ha x nem páros és hárommal sem osztható, akkor $x^2 - 1$ osztható nyolccal és hárommal is, tehát 24-gyel is. A prímek közül így csak a 2-t és a 3-at kell még figyelembe vennünk, kapjuk, hogy az $x \to \left\{\frac{x^2-1}{24}\right\}$ függvény értékkészlete a $\left\{0, \frac{1}{8}, \frac{1}{3}\right\}$ három elemből álló halmaz.

Segítség a 4.7. feladathoz

Koncentráljunk az ismeretlenek paritására! Milyen maradékot ad néggyel osztva egy pártalan szám négyzete? Alkalmazzuk következtetéseinket rekurzív módon!

A 4.8. feladat megoldása

Nem lehet mind a három prímszám páratlan. Mind a három nem lehet a 2, mert $4 \cdot 16 + 3 = 45$ nem prím. Tehát csak az egyik, mondjuk $p = 2$. Tehát keressük $q-$t és $r-$et, melyre $q^4 + r^4 + 13$ prím.

Tegyük fel, hogy q és r egyike sem a 3. Ekkor a negyedik hatványuk $1-$et ad maradékul $3-$mal osztva, és így $q^4 + r^4 + 13 > 3$ osztható $3-$mal ami ellentmond annak, hogy ez a szám prím. Tehát q és r valamelyike 3. Ha q és r egyike sem az 5, akkor a negyedik hatványuk $1-$et ad maradékul $5-$tel osztva, ám $q^4+r^4+13 > 5$ osztható $5-$tel, ami megint csak ellentmond annak, hogy ez a szám prím. Tehát q és r valamelyike az 5.

Összefoglalva $\{p, q, r\} = \{2, 3, 5\}$ és a pozitív prímek között ez az egyetlen megoldás.

A 4.9. feladat megoldása

Tehát bizonyítanunk kell, hogy ha $9|a^2+b^2+c^2+d^2 \quad a,b,c,d \in \mathbb{Z}$, akkor $9|a^2 \cdot b^2 \cdot c^2 \cdot d^2$, más szóval az a,b,c,d egészek között van 3−mal osztható. Egy szám 9−cel osztva $0,1,4,7$ maradékot ad. Ha az a^2, b^2, c^2, d^2 közül egy sem adna 0 maradékot, akkor $1 \cdot x + 4y + 7z \equiv 0 \pmod 9$; $x+y+z=4; \quad x,y,z \in \mathbb{N}$ kongruenciának kellene megoldhatónak lennie, aminek könnyen láthatóan nincs megoldása.

A 4.10. feladat megoldása

Nyilván $d_1 = 1$. Ha $d_2 \neq 2$, akkor n páratlan, így d_2, d_3 és d_4 is páratlan, tehát négyzetösszegük, ami n, páros. Az ellentmondás mutatja, hogy $d_2 = 2$ és n páros.

Mivel $d_1^2 + d_2^2 = 5$ páratlan, így $d_3^2 + d_4^2$ is páratlan, tehát d_3 és d_4 egyike páros, a másik páratlan. Mivel páros szám négyzete osztható néggyel, páratlan szám négyzetének négyes maradéka 1, így $d_1^2 + d_2^2 + d_3^2 + d_4^2$ nem osztható néggyel.

Ebből következik, hogy $d_3 = p$ páratlan prím és $d_4 = 2p$, azaz $n = 5 + 5p^2$. Látható, hogy $5|n$, láttuk, hogy $4 \not| n$, így a d_3 és d_4 egyike 5, azaz $d_3 = 5$ és $d_4 = 10$. Erre $n = 130$, melynek osztói: 1, 2, 5, 10, 13, 26, 65, 130, tehát valóban teljesül rá az előírt összefüggés.

Segítség a 4.11. feladathoz

Legyen $x = \frac{X}{Z}$, $y = \frac{Y}{Z}$ és térjünk át az $5X^2 + 3Y^2 = Z^2$ diofantikus egyenletre. Vizsgáljuk ezt mod 3.

A 4.12. feladat megoldása

A megadott

$$5x^2 - 14y^2 = 11z^2 \tag{12.6}$$

egyenlet együtthatóiról az 5-ös 11-es, 7-es maradékok használatára gondolhatunk. Végül az utóbbi vezet célhoz. A megadott összefüggés $\pmod 7$:

$$5x^2 \equiv (2z)^3. \tag{12.7}$$

A jobb oldalon a mod 7 kvadratikus maradékok szerepelhetnek, tehát a 0-n kívül az 1, 2 és a 4. A bal oldalon ezek ötszörösei, tehát a 0, valamint az 3, a 3 és a 6. A (12.7) kongruencia egyetlen megoldása: $x \equiv z \equiv 0 \pmod 7$, azaz (12.6)-ben $x = 7x_1$, $z = 7z_1$, ahol x_1 és z_1 is egészek. A (12.6) egyenletet átírhatjuk:

$$5 \cdot 7^2 x_1^2 - 14y^2 = 11 \cdot 7^2 z_1^2,$$

azaz

$$5 \cdot 7x^2 - 2y^2 = 11 \cdot 7z^2. \tag{12.8}$$

Mivel (12.8)-ben $7 \mid 5 \cdot 7x^2$ és $7 \mid 11 \cdot z^2$, így $z \mid 2y^2$, azaz valamely egész y_1 számmal $y = 7y_1$. Ezt (12.8)-be írva majd egyszerűsítve 7-tel a

$$5x_1^2 - 14y_1^2 = 11z_1^2 \tag{12.9}$$

egyenlethez jutunk, azaz visszajutottunk az eredeti (12.6) egyenlethez. Az eljárást akármeddig folytathatjuk, (12.6) megoldásainak olyan (x, y, z), (x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2), ... sorozatához jutunk, amelyben mindegyik számhármast az előző számhármas számainak egyhetedeiből áll. A 0-tól különböző egész számokat azonban nem lehet akárhányszor héttel osztani úgy, hogy a hányados is mindig egész legyen. Tehát csak $x = y = z = 0$ lehet megoldás, ami tényleg az is.

A 4.13. feladat megoldásai

A 4.13. fel. I. megoldása

Ha a $x^2 + xy + y^2$ kifejezés értéke 0-ra végződik, akkor a

$$(x - y)(x^2 + xy + y^2) = x^3 - y^3$$

kifejezés értéke is 0-ra végződik. Vegyük sorra a számok 10 lehetséges végződését és köbük 10 lehetséges végződését.

n mod 10	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
n^3 mod 10	0	1	8	7	4	5	6	3	2	9

Látható, hogy különböző 10-es maradékú (végződésű) köbének is különböző a 10-es maradéka (végződése). Így a kifejezés 10-es maradéka csak akkor lehet 0, ha az x és az y szám 10-es maradékai megegyeznek. Azaz 10-es maradék szempontjából $(x^2 + xy + y^2)$ helyett elég a $3x^2$ kifejezést vizsgálni. Ez azonban csak akkor osztható 10-zel, ha x-is osztható vele, akkor viszont $3x^2$ már 100-zal is osztható, két 0-ra végződik.

A 4.13. fel. II. megoldása

Egy szám pontosan akkor osztható 10-zel, ha 2-vel és 5-tel is osztható. Ezért külön vizsgáljuk a 2-vel és 5-tel való oszthatóság esetét.

x és y kettes maradéka összesen négyféle lehet. A négyféle esetet egy 2×2-es táblázatba gyűjthetjük össze. A első sorban x kettes maradéka 0, a másodikban 1, az első oszlopban y kettes maradéka 0, a másodikban 1. A táblázat mezőibe beírtuk, hogy mennyi lesz az $x^2 + xy + y^2$ kifejezés kettes maradéka.

		y	
mod 2		0	1
x	0	0	1
	1	1	1

Látható, hogy a vizsgált kifejezés akkor és csakis akkor osztható 2-vel, ha x és y is osztható 2-vel, ekkor viszont $x^2 + xy + y^2$ nyilvánvalóan osztható 4-gyel.

x és y ötös maradéka összesen huszonötféle lehet. Az eseteket most egy 5×5-es táblázatba gyűjthetjük össze. Az egyes sorokban x ötös maradéka állandó: az első sorban 0, a másodikban 1 stb. Az egyes oszlopokban y ötös maradéka konstans, az elsőben 0, a másodikban 1, stb. A táblázat mezőiben itt is az $x^2 + xy + y^2$ kifejezés ötös maradéka szerepel.

				x		
mod 5		0	1	2	3	4
y	0	0	1	4	4	1
	1	1	3	2	3	1
	2	4	2	2	4	3
	3	4	3	4	2	2
	4	1	1	3	2	3

A kifejezés csak akkor osztható 5-tel, ha x és y is osztható 5-tel. Ilyenkor természetesen $x^2 + xy + y^2$ 25-tel is osztható.

A vizsgált kifejezés 4-gyel és 25-tel is osztható, ezért 100-zal is.

Megjegyzés

A táblázatról előre tudható, hogy szimmetrikus (x és y felcserélhető a kifejezésben, értéke közben nem változik). Így nem 25, hanem csak 15 mezőt kell kitölteni.

A 4.13. fel. III. megoldása

Ha x nem osztható a p prímmel, akkor van inverze mod p, azaz olyan c egész szám, amelyre

$$c \cdot x \equiv 1 \pmod{p}.$$

Vizsgáljuk a

$$x^2 + xy + y^2 \equiv 0 \pmod{p} \tag{12.10}$$

kongruenciát. Szorozzuk meg c-vel!

$$(c \cdot x)^2 + (c \cdot x)(c \cdot y) + (c \cdot y)^2 \equiv 0 \pmod{p},$$

azaz

$$1^2 + c \cdot y + (c \cdot y)^2 \equiv 0 \pmod{p},$$

ami a $c \cdot y = y'$ jelöléssel így írható:

$$1 + y' + y'^2 \equiv 0 \pmod{p}. \tag{12.11}$$

Jelölje q az $1/2$ számot (tehát az $2t \equiv 1 \pmod{p}$ kongruencia megoldását). Ez $p = 2$ esetén nem létezik, akkor mást kell csinálni, de $p > 2$-re már van ilyen q. Így elvégezhető a teljes négyzetté alakítás:

$$(y' + q)^2 \equiv q^2 - 1 \pmod{p}. \tag{12.12}$$

Pontosan akkor találunk megfelelő y' maradékot, ha $q^2 - 1$ kvadratikus maradék mod p. A $p = 5$ esetben $\frac{1}{2} = 3$, hiszen $3 \cdot 2 \equiv 1 \pmod{5}$. Mivel 3 nem kvadratikus maradék mod 5, így a (12.12, 12.11) kongruenciáknak $p = 5$ esetén nincs megoldása, míg a (12.11) kongruenciának $p = 5$-re csak $x \equiv y \equiv 0 \pmod{5}$ a megoldása.

Könnyű ellenőrizni, hogy (12.10)-nek $p = 2$ esetén is csak a $x \equiv y \equiv 0 \pmod{2}$ a megoldása, ami igazolja a feladat állítását.

Megjegyzés a 4.13. feladat III. megoldásához

A fenti megoldásból kiderül, hogy ha p prím, de $p \neq 2$, akkor a

$$ax^2 + bx + c \equiv 0 \pmod{p}. \tag{12.13}$$

kongruencia ($a = b = 0$ kizárva) megoldhatóságának szükséges és elégséges feltétele az, hogy a $D = b^2 - 4ac$ diszkrimináns kvadratikus maradék legyen mod p.

A 4.14. feladat megoldása

a) A számok hárommal osztva $0, 1, 2$ maradékot adhatnak. Ha valamely maradékból az adott öt szám közül három is azonos, akkor ezek összege nyilván $3-$mal osztható. Ha egy r maradék az öt szám maradékai között legfeljebb csak kétszer szerepel, akkor viszont mind a három maradék előfordul. Ekkor válasszunk ki egyet-egyet ezek közül. Ezek összege a $0 + 1 + 2$ maradékot adja, azaz az összeg hárommal osztható.

b) A válasz nem: legyen $n - 1$ szám osztható $n-$nel, $n - 1$ szám pedig adjon 1 maradékot. Könnyű látni hogy ezen $2n - 2$ szám közül nem választható ki n melyek összege $n-$nel osztható.

Megjegyzés a 4.14. feladathoz

Az a) és b) feladat speciális esete az *Erdős-Ginzburg-Zív* tételnek, mely azt mondja ki, hogy $2n-1$ egész közül ki lehet választani $n-$et, melyeknek összege osztható $n-$nel és az állítás éles. Az olvasó megpróbálkozhat ennek a (nem egészen könnyű) állításnak a bizonyításával is.

A 4.15. feladat megoldása

Legyen p prímszám és jelölje $G = \{x_1 = 0, x_2, \ldots, x_k\}$ a nullával kiegészített négyzetes maradékok halmazát. Itt $k = \frac{p-1}{2} + 1 = \frac{p+1}{2}$.

Jelölje $x - G := \{x - x_i : x_i \in G\}$ halmazt, ahol x egy tetszőleges $p-$vel vett osztási maradék. A szita-formula legegyszerűbb formájából

$$|G \cap (x-G)| = |G| + |x-G| - |G \cup (x-G)| \geq |G| + |x-G| - p = \frac{p+1}{2} + \frac{p+1}{2} - p = 1,$$

azaz bármely $x-$re G-nek és $x - G$ halmaznak van közös eleme. Tehát van olyan i, j, hogy $x_i = x - x_j$, azaz $x = x_i + x_j$.

12.6. Egy kis algebrával – feladatok megoldása

A 4.1. feladat megoldása

Ha a 3 jegyű szám abc, akkor a 6 jegyű $abcabc = 1000abc + abc = 1001abc$, és $1001 = 7 \cdot 11 \cdot 13$.

A 4.2. feladat megoldása

A végeredmény csak 0, 198 vagy 1089 lehet.

Ha egy 3 jegyű számból kivonjuk a fordítottját, vagy 0-t kapunk (ha első és utolsó számjegye megegyezett), vagy 99-et (ha az első és utolsó jegyének különbsége 1 volt), vagy egy olyan háromjegyű számot, melynek középső számjegye 9-es és a két szélső jegyének összege is 9.

A 4.3. feladat megoldása

Az ötjegyű szám: $n = 10^4a + 10^3b + 10^2c + 10d + e$.

Ha n utolsó számjegyét a szám végéről az elejére tesszük, a $k = 10^4e + 10^3a + 10^2b + 10c + d$ számot kapjuk.

Ekkor $10k - n = 10^5e + 10^4a + 10^3b + 10^2c + 10d - (10^4a + 10^3b + 10^2c + 10d + e) = 100\,000e - e = 99\,999e$

Mivel $10k$ és n különbsége $(99\,999 = 271 \cdot 369)$ osztható 271-gyel, $10k$ és n ugyanazt a maradékot adja 271-gyel osztva. Vagyis, ha n osztható 271-gyel, akkor $10k$ is, és mivel 10 és 271 relatív prímek így k is osztható 271-gyel. Ha pedig k osztható 271-gyel akkor $10k$ is, így n is.

Ha nem egyetlen számjegyet teszünk át a szám végéről az elejére, akkor ez több lépésben számjegyenként elvégezhető, ahol minden lépésben öröklődik a 271-gyel való oszthatóság.

A 4.4. feladat megoldásai

A 4.4. fel. I. megoldása

Ha egy 6-ra végződő számot 4-gyel szorzunk, a szorzat 4-re végződik, ezért az eredeti szám ötödik (utolsó előtti) számjegye 4-es. Ha egy 46-ra végződő számot 4-gyel szorzunk, akkor a szorzat utolsó előtti számjegye 8, így az eredeti szám negyedik számjegye 8. Így haladva tovább számjegyről számjegyre megkapjuk az eredeti számot: 153 846.

A 4.4. fel. II. megoldása

Ha a jelöli a hatjegyű szám (balról) első öt jegyéből álló ötjegyű számot, akkor az eredeti szám $10a + 6$, a hatos áttételével kapott szám pedig $6 \cdot 10^5 + a$, tehát az egyenlet

$$6 \cdot 10^5 + a = 40a + 24.$$

Ebből

$$a = \frac{6 \cdot 10^5 - 24}{39} = \frac{2 \cdot (10^5 - 4)}{13} = 2 \cdot \frac{99996}{13} = 15\,384,$$

azaz az eredeti hatjegyű szám 153 846.

Megjegyzés a 4.4. feladathoz

A téma a 4.2. feladatban folytatódik.

A 4.5. feladat megoldásai

A 4.5. fel. I. megoldása

Az első néhány n értéket kipróbálva világossá válik, hogy a 120-szal való oszthatóságot kell igazolni. Ezt a modulo 3, 5, 8 vizsgálatokkal végezzük el:

n^5-5n^3+4n modulo 3					
n	n^2	n^3	n^4	n^5	n^5+n^3+n
0	0	0	0	0	0
1	1	1	1	1	0
-1	1	-1	1	-1	0

n^5-5n^3+4n modulo 5					
n	n^2	n^3	n^4	n^5	n^5-n
0	0	0	0	0	0
1	1	1	1	1	0
2	4	3	1	2	0
-2	-1	2	1	-2	0
-14	1	-1	1	-1	0

n^5-5n^3+4n modulo 8					
n	n^2	n^3	n^4	n^5	n^5-5n^3+4n
0	0	0	0	0	0
1	1	1	1	1	0
2	4	0	0	0	0
3	1	3	1	3	0
4	0	0	0	0	0
-3	1	-3	1	-3	0
-2	4	0	0	0	0
-1	1	-1	1	-1	0

Az n^5-5n^3+4n kifejezés értéke tehát modulo 3, 5 és 8 is zérus minden n-re, tehát – mivel 3, 5 és 8 páronként relatív prímek – a kifejezés értéke minden egész n-re osztható $3\cdot5\cdot8=120$-szal. $n=3$-ra épp ennyit kapunk, tehát erősebb állítás nem fogalmazható meg.

A 4.5. fel. II. megoldása

Vegyük észre, hogy

$$n^5-5n^3+4n=n(n^4-5n^2+4)=n(n^2-4)(n^2-1)=n(n-2)(n+2)(n-1)(n+1)=$$

$$=(n-2)(n-1)n(n+1)(n+2),$$

azaz a vizsgált kifejezés öt egymást követő egész szám szorzata. Ennek értéke $n=3$ esetén $5!=120$, tehát nincs olyan 120-nál nagyobb szám, amivel a kifejezés minden pozitív egész n-re osztható.

Állítjuk viszont, hogy a kifejezés minden n-re osztható $120=2^3\cdot3\cdot5$-tel. Valóban az öt egymást követő szám között biztosan van 3-mal és 5-tel osztható is, sőt két páros is, amelyek közül az egyik néggyel s osztható, így a $3\cdot 5\cdot 2\cdot 2^2$-nel való oszthatóság biztosítva van.

A 4.6. feladat megoldásai

A 4.6. a) fel. I. megoldása

a) n egymást követő egész szám összege megfelelő a egésszel

$$(a+1)+(a+2)+\ldots+(a+n)=na+\frac{n(n+1)}{2}$$

alakban írható. Mivel $n|na$ és mivel az n, $(n+1)$ számok relatív prímek, így az összeg pontosan akkor osztható n-nel, ha n páratlan (és így $n+1$ a páros).

A 4.6. a) fel. II. megoldása

Az összeg n-ed része az egymást követő számok átlaga, ennek kell egésznek lennie. Páratlan számnál az átlag épp a középső szám, tehát egész, páros darab egymást követő számnál pedig a két középső átlaga, tehát nem egész.

A 4.6. b) mego.

Az $(a+1)^2+(a+2)^2+\ldots+(a+n)^2$ összegben ($a\in\mathbb{Z}$) elvégezve a négyzetre emeléseket azt kapjuk, hogy

$$na^2+(2a+4a+6a+\ldots+2na)+1^2+2^2+3^2+\ldots n^2=na^2+na(n+1)+\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

A fenti összeg első két tagja nyilván bármely a esetén osztható n-nel. Az n, $n+1$, $2n+1$ tényezők páronként relatív prímek, így a $\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ egész szám pontosan osztható 6-tal, ha n relatív prím a 6-hoz.

A 4.7. feladat megoldása

Számoljunk az $\overline{ab}=10a+b$, $\overline{ba}=10b+a$ számok összegével és különbségével! Feltehető, hogy itt $b<a$. Ekkor

$(a-b)(a+b)=a^2-b^2|(10a+b)+(10b+a)=11(a+b)$, azaz $(a-b)|11$, tehát $a-b=1$. $(a-b)(a+b)=a^2-b^2|(10a+b)-(10b+a)=9(a-b)$, azaz $(a+b)|9$, tehát $a+b=3$ vagy 9.

Mindezekből az $\overline{ab}=21$ és az $\overline{ab}=54$ számok adódnak, mindkettő jó is.

12.7. Diofantikus egyenletek – feladatok megoldása

A 4.1. feladat megoldásai

A 4.1. fel. I. megoldása

Vegyük észre, hogy $n^2+4n-5=(n-1)(n+5)$. Az $(n-1)$, $(n+5)$ tényezők különbsége 6, a szorzata pedig négyzetszám, k^2. A két szám legnagyobb közös osztója – a továbbiakban d – osztja a két szám különbségét is, azaz d értéke 1, 2, 3 vagy 6.

Az $\frac{n-1}{d}$, $\frac{n+5}{d}$ számok szorzata is négyzetszám, jelesül $\frac{k^2}{d^2}=\left(\frac{k}{d}\right)^2$, de ők már relatív prímek, így maguk is négyzetszámok, olyan négyzetszámok, melyek különbsége $\frac{6}{d}$.

A legkisebb négyzetszámok: 0, 1, 4, 9. Az ennél nagyobb négyzetek közül már a szomszédosak különbsége is nagyobb 6-nál, pl $16-9=7$. Vegyük sorra d lehetséges értékei alapján az eseteket!

$d=1$: nem lehet, nincs két olyan négyzetszám, melyek különbsége 6.

$d=2$: egyféleképpen lehet $4-1=\frac{6}{2}$, $\frac{n-1}{2}=1$ és $\frac{n+5}{2}=4$, azaz $n=3$. Ez valóban jó megoldás $3^2+4\cdot 3-5=16$.

$d=3$: nem lehet, nincs két olyan négyzetszám, melyek különbsége $2=\frac{6}{3}$.

$d=6$: egyféleképpen lehet $1-0=\frac{6}{6}$, $\frac{n-1}{6}=0$ és $\frac{n+5}{6}=1$, azaz $n=1$. Ez valóban jó megoldás $1^2+4\cdot 1-5=0$.

Tehát n-nek két megfelelő pozitív egész értéke van, az 1 és a 3.

A 4.1. fel. II. megoldása

Alakítsunk teljes négyzetté!

$$n^2+4n-5=(n+2)^2-9,$$

tehát két olyan négyzetszámot keresünk, amelyek különbsége 9, és közülük a nagyobbik lesz az $(n+2)^2$. A négyzetszámok:

$$0, \qquad 1, \qquad 4, \qquad 9, \qquad 16, \qquad 25\ldots$$

Tovább nem érdemes mennünk, mert $25-16=9$ és a szomszédos négyzetszámok közti különbség $(k+1)^2-k^2=2k+1$, tehát szigorúan monoton nő. A fenti listában két 9-es különbség van, $25-16$ és $9-0$, azaz $n+2=5$, $n=3$ vagy $n+2=3$, tehát $n=1$. Ezek valóban megoldások.

A 4.1. fel. III. megoldása

Olyan n pozitív és k nemnegatív egész számot keresünk, amelyre

$$n^2+4n-5=k^2,$$

azaz

$$(n+2)^2 - 9 = k^2,$$

tehát

$$(n+2)^2 - k^2 = 9,$$

vagy szorzat alakban

$$(n+2+k)(n+2-k) = 9.$$

Az $(n+2+k)$ tényező pozitív, legalább akkora, mint a másik tényező és mind a két tényező egész, így csak két eset van:

$$n+2+k = 9, \qquad \text{és} \qquad (n+2-k) = 1$$

vagy

$$n+2+k = 3, \qquad \text{és} \qquad (n+2-k) = 3.$$

Az első eset pontosan akkor teljesül, ha $n=3$ és $k=4$, míg a második pontosan akkor, ha $n=1$ és $k=0$. Tehát két megoldás van:

$$3^2 + 4\cdot 3 - 5 = 16 = 4^2, \qquad\qquad 1^2 + 4\cdot 1 - 5 = 0 = 0^2.$$

A 4.2. feladat megoldásai

A 4.2. fel. I. megoldása

Vegyük észre, hogy

$$x^2 + 19x + 95 = (x+9)^2 + (x+14) = (x+10)^2 - (x+5).$$

Így $-4 \le x$ esetén a vizsgált kifejezés értéke két szomszédos négyzetszám között van:

$$(x+9)^2 < (x+9)^2 + (x+14) = x^2 + 19x + 95 = (x+10)^2 - (x+5) < (x+10)^2,$$

és hasonló a helyzet, ha $x \le -15$:

$$(x+10)^2 < (x+10)^2 - (x+5) = x^2 + 19x + 95 = (x+9)^2 + (x+14) < (x+9)^2.$$

Ha $x = -14$ vagy $x = -5$, akkor a kifejezés értéke négyzetszám, jelesül mindkétszer 25. A $-13 \le x \le -6$ eseteket végignézve látjuk, hogy nem kapunk máskor négyzetszámot.

A 4.2. fel. II. megoldása

Tekintsük az $x^2+19x+95=y^2$ egyenletet, ahol y nemnegatív egész, x-re nézve másodfokú egyenletnek. A megoldóképletből:

$$x_{1,2}=\frac{-19\pm\sqrt{19^2-4\cdot(95-y^2)}}{2}=\frac{-19\pm\sqrt{4y^2-19)}}{2}.$$

Ez pontosan akkor lesz egész, ha $4y^2-19$ négyzetszám, hiszen, ha nem az, akkor nem is racionális az $x_{1,2}$-re kapott kifejezés értéke, ha pedig négyzetszám, akkor páratlan is és $x_{1,2}$-re is egész számot kapunk.

Tehát valamely D nemnegatív egésszel $4y^2-19=D^2$, azaz $(2y)^2-D^2=19$, tehát $(2y-D)(2y+D)=19$. Itt $(2y+D)\geq 0$, így $0\leq 2y-D\leq 2y+D$, tehát $2y-D=1$ és $2y+D=19$, azaz $y=5$, $D=9$ és így $x_1=-5$ és $x_2=-14$.

A 4.3. feladat megoldása

16 ilyen számpár van, hiszen egyenletünk így is írható: $(2x+1)(y+1)=2013$ és 2013-nak 16 egész osztója van, mind páratlan.

A 4.4. feladat megoldása

Ismeretes, hogy ha az n egész szám prímtényezős alakja

$$n=p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}\dots p_k^{\alpha_k},$$

akkor pozitív osztóinak száma

$$d(n)=(\alpha_1+1)(\alpha_2+1)\dots(\alpha_k+1).$$

Így két lényegesen különböző módon lehet az osztók száma 4: *I.* $n=p^3$; *II.* $n=p_1p_2$.

Az I. esetben az osztók összege $1+p+p^2+p^3$, ami $p=3$ esetén kisebb, $p=5$ esetén nagyobb 108-nál és p monoton függvénye, tehát nincs ilyen megoldás.

A II. esetben az osztók összege

$$108=1+p_1+p_2+p_1p_2=(1+p_1)(1+p_2).$$

A 108 osztópárjaiból egy megfelelőt találunk: a $108=6\cdot 18$ felbontáshoz az 5, 17 prímek tartoznak, tehát $n=5\cdot 17=85$ az egyetlen megoldás.

A 4.5. feladat megoldásai

A 4.5. fel. I. megoldása

Ha a téglalap oldalai a és b, akkor az $ab = 2(a+b)$ egyenlőségnek kell teljesülnie.

Ezt az egyenletet átalakítva az $(a-2)(b-2) = 4$ egyenlethez jutunk, melynek pozitív (egész) megoldásai a $(4; 4)$, valamint $(6; 3)$ (illetve $(3; 6)$) számpárok.

A 4.5. fel. II. megoldása

A téglalap sarkaiban levő mezők kétszeresen járulnak hozzá a kerülethez és egyszeresen a területhez, így a téglalap „belsejében 4 rácsnégyzetnek kell lennie. Ezek vagy egy 1×4-es, vagy egy 2×2-es téglalapot alkotnak. Ezeket a lehetséges „belső" téglalapokat „körberakva" egységnégyzetekkel, kapjuk a kérdésben szereplő lehetséges téglalapok méreteit.

A 4.6. feladat megoldása

Ha a az egyik irányban x a másik irányban y részre vágtuk a sütit, akkor összesen xy szeletre vágtuk, amiből a belsejében $(x-2)(y-2)$ van. Egyenletünk:

$$xy = 2(x-2)(y-2),$$

azaz

$$xy = 2xy - 4x - 4y + 8,$$

tehát

$$0 = xy - 4x - 4y + 8.$$

Mivel $(x-4)(y-4) = xy - 4x - 4y + 16$, így egyenletünket a

$$8 = xy - 4x - 4y + 16$$

alakra rendezzük, amelyben szorzattá alakíthatunk:

$$8 = (x-4)(y-4).$$

A lehetséges egész tényezők (x és y szerepe szimmetrikus, így az osztópárokat csak egyszer soroljuk fel): $8 = 8 \cdot 1$ vagy $8 = 4 \cdot 2$, (a többi lehetséges egész tényezős szorzatban valamelyik tényező negatív) így az értelmes megoldások: $x_1 = 12$ és $y_1 = 5$, valamint $x_2 = 8$ és $y_2 = 6$. Vagyis a darabok száma vagy 60, vagy 48.

Megjegyzés a 4.6. fel. megoldásához

A feladat a 4.5. feladat II. megoldásához hasonlóan is megoldható.

előzetes megjegyzés a 4.7. feladathoz A törzstörtek az 1 számlálójú pozitív törtek. Az egyiptomi aritmetikában játszottak fontos szerepet. Az egyiptomi papiruszok tanulsága szerint ugyanis az akkori írnokok minden törtet különböző nevezőjű törtek segítségével írtak fel (lásd pl Sain Márton „Nincs királyi út” című könyvét.).

A 4.7. feladat megoldásai

A 4.7. fel. I. megoldása

(*Az egyik változót tekintjük ismeretlennek*)

Az

$$\frac{2}{9} = \frac{1}{n} + \frac{1}{m}$$

egyenlet megoldásait keressük, ahol m és n pozitív egészek. Tekintsük n-et ismeretlennek, míg m-re nézzünk úgy, mint paraméterre, tehát képzeljük azt, hogy mindjárt megmondja nekünk valaki az értékét.

Átszorzás után n-re lineáris egyenletet kapunk:

$$2nm = 9m + 9n,$$

$$n(2m - 9) = 9m,$$

azaz

$$n = \frac{9m}{2m - 9}.$$

Most lényegében polinomosztást csinálunk, de előzőleg szorzunk kettővel, hogy ne jöjjenek be törtek:

$$2n = \frac{18m}{2m - 9} = \frac{9(2m - 9) + 81}{2m - 9} = 9 + \frac{81}{2m - 9}.$$

Mivel $2n$ és 9 egészek, így $\frac{81}{2m-9}$ is az, tehát azt kaptuk, hogy $2m - 9$ a 81 osztója. A lehetőségek:

$2m-9$	81	27	9	3	1	-1	-3	-9	-27	-81
$\frac{81}{2m-9}$	1	3	9	27	81	-81	-27	-9	-3	-1
m	45	18	9	6	5	4	3	0	-9	-36
n	5	6	9	18	45	-36	-9	0	3	4

amiből a pozitív megoldások a tagok felcserélésével kapható változatokat nem felsorolva:

$$\frac{2}{9} = \frac{1}{9} + \frac{1}{9} = \frac{1}{6} + \frac{1}{18} = \frac{1}{5} + \frac{1}{45}.$$

A 4.7. fel. II. megoldása

(*Szimmetrikus algebrai kezelés*)

$$\frac{2}{9} = \frac{1}{n} + \frac{1}{m}$$

$$2mn = 9m + 9n$$

$$4mn - 18m - 18n = 0$$

$$(2m - 9)(2n - 9) = 81$$

Ennek osztópárjaira $2m - 9 = 1, 2n - 9 = 81$, stb...

A 4.7. fel. III. megoldása

(*Becslés*)

Tegyük fel, hogy $m \le n$, azaz $\frac{1}{n} \le \frac{1}{m}$. Mivel az $\frac{1}{n}$, $\frac{1}{m}$ törtek átlaga $\frac{1}{9}$, így közülük a nagyobbik legalább $\frac{1}{9}$, azaz reciproka, m értéke, legfeljebb 9.

Másrészt $\frac{1}{m} < \frac{2}{9}$, így $m > \frac{9}{2} = 4,5$.

Ezek alapján m-re csak az 5, 6, 7, 8, 9 értékek maradtak, amelyeket gyorsan kipróbálhatunk és kapjuk a fentebb már látott megoldásokat.

A 4.8. feladat megoldásai

A 4.8. fel. I. megoldása

A szabályos n szög egy belső szöge $\frac{n-2}{n} \cdot 180° = 180° - \frac{360°}{n}$-os. Pontosan akkor kerülhet egy szabályos k-szög és egy szabályos n-szög a szabályos háromszög mellé az előírt módon, ha

$$60° + \left(180° - \frac{360°}{k}\right) + \left(180° - \frac{360°}{n}\right) = 360°,$$

$$\frac{1}{k} + \frac{1}{n} = \frac{1}{6}. \tag{12.14}$$

Itt k és n közül a kisebbik legfeljebb 12, mert ha mindkettő nagyobb lenne ennél, akkor reciprokösszegük nem érné el a $\frac{1}{12} + \frac{1}{12} = \frac{1}{6}$ összeget. Ez a kisebbik érték nagyobb 6-nál, tehát csak hat esetet kell megnézni. A (12.14) egyenlet összes pozitív egész megoldásai:

$$\frac{1}{6} = \frac{1}{12} + \frac{1}{12} = \frac{1}{10} + \frac{1}{15} = \frac{1}{9} + \frac{1}{18} = \frac{1}{8} + \frac{24}{18} = \frac{1}{7} + \frac{1}{42},$$

így tehát öt különböző megoldás is van, ahol a szabályos sokszögek oldalszámai a fenti törtek nevezői.

A 4.8. fel. II. megoldása

A (12.14) egyenletet szorozzuk át $6nk$-val!

$$6(n+k) = nk,$$

azaz

$$36 = nk - 6(n+k) + 36,$$

tehát

$$36 = (n-6)(k-6). \tag{12.15}$$

A 36 az alábbi módokon írható fel (-6)-nál nagyobb tényezők szorzataként:

$$36 = 6 \cdot 6 = 4 \cdot 9 = 3 \cdot 12 = 2 \cdot 18 = 1 \cdot 36,$$

tehát öt különböző megoldás is. A szabályos sokszögeknek hattal-hattal több oldala van, mint fent a 36 osztópárjainak.

A 4.9. feladat megoldása

$$\binom{p}{2}\binom{q}{2} = 2\left(\binom{p}{2}q + \binom{q}{2}p\right)$$

$(p-5)(q-5) = 16$, $p = 7$, $q = 13$ vagy fordítva. A válasz tehát 6.

A 4.10. feladat megoldása

Legyen a találkozón résztvevő emberek száma x, a marslakók ujjainak száma $10+a$, ahol x és a természetes számok. Ekkor $20x-1 = (10+a)(x+6)$, amiből rendezés és szorzattá alakítás után $(10-a)(x+6) = 121$, ahol $10-a \leq 10$, így $10-a = 1$ és $x+6 = 121$. A találkozón tehát $x + (x+6) = 236$ résztvevő volt.

A 4.11. feladat megoldása

Vegyük észre, hogy

$$(x(x+3))\,((x+1)(x+2)) = (x^2+3x)(x^2+3x+2) = (x^2+3x+1)^2 - 1.$$

Ezzel egyenletünk az

$$(x^2+3x+1)^2 = y^2 + y + 1$$

alakba írható át. Vegyük észre, hogy ha $1 \le y$, akkor

$$y^2 < y^2 + y + 1 < y^2 + 2y + 1 = (y+1)^2,$$

míg $y \le -2$ esetén

$$(y+1)^2 = y^2 + 2y + 1 < y^2 + y + 1 < y^2,$$

tehát a két fenti esetben $y^2 + y + 1$ nem lehet négyzetszám, mert két szomszédos négyzetszám közé esik. A kimaradt $y \in \{0, -1\}$ esetek annak felelnek meg, hogy a megadott egyenlet jobb oldala zérus. Ez pontosan akkor ad megoldást, ha a bal oldal is zérus, azaz, ha $x \in \{-3, -2, -1, 0\}$.

A 4.12. feladat megoldása

Vegyük észre, hogy

$$(x+2)^4 - x^4 = (2x+2)^3 + 8(x+1) = (2x+3)^3 - (24x^2 + 22x + 11) = (2x+1)^3 + (x+1)(12x+14) + 1.$$

Így $0 \le x$ esetén $(x+2)^4 - x^4$ két szomszédos köb közé esik:

$$(2x+2)^3 < (2x+2)^3 + 8(x+1) = (x+2)^4 - x^4 = (2x+3)^3 - (24x^2 + 22x + 11) < (2x+3)^3,$$

és hasonló a helyzet $x \le -2$ esetén is:

$$(2x+1)^3 < (2x+1)^3 + (x+1)(12x+14) + 1 = (x+2)^4 - x^4 = (2x+2)^3 + 8(x+1) < (2x+2)^3.$$

Így csak $x = -1$ esetén kaphatunk köbszámot, és valóban, $x = -1$, $y = 0$ megoldás.

12.8. Számhalmazok – feladatok megoldása

A 4.1. feladat megoldása

a) Mivel b 3−hoz relatív prím, ezért $\{b, 2b\} = \{1, 2\}(\mod 3)$. A $3x + by$ alakú számok nyilván tartalmazzák a $3x$ $x = 0, 1, 2, \ldots,$ számtani sorozatot, a $3x + b$ $x = 0, 1, 2, \ldots,$ és a $3x$ $x = 0, 1, 2, \ldots,$ számtani sorozatokat. Mivel minden maradékot lefedtünk, ezért $2b - 2$−től kezdve minden szám előáll ilyen alakban.

b) Teljesen hasonló gondolattal adódik, hogy minden $(a-1)(b-1) - 1$−nél nagyobb szám előáll $ax + by$, $a, b \in \mathbb{N}$, x, y nem negatív egészek. Ezt Sylvester 1884−ben igazolta. Ha több tagú összeget nézünk, annak a küszöbszámnak az értéke, amelytől kezdve minden egész előáll, nem ismert pontosan. Ezt a kérdést *pénzváltási problémának* vagy Frobenius problémának is nevezik.

A 4.2. feladat megoldása

a) Az $A+B$ halmazban nyilván legfeljebb annyi elem lehet, ahány összeget képeztünk, azaz $|A+B| \leq kn$. Továbbá az

$$a_1+b_1 < a_1+b_2 < \cdots < a_1+b_n < a_2+b_n < \cdots < a_k+b_n$$

sorozatban minden elem különböző, ezek elemei $A+B-$nek és e sorozat $k+n-1$ elemből áll.

b) $|A+B| = kn$ teljesül, ha minden a_i+b_j összeg különbözik egymástól. Ekkor az $a_i+b_j \rightleftarrows (i,j)$ leképezés bijekció, és ilyen (i,j) párból kn darab van. Ez például teljesül, ha $A = \{2 < 2^2 < \cdots < 2^k\}$; és $B = \{2^{k+1} < 2^{k+2} < \cdots < 2^{k+n}\}$. (Valóban a kettes számrendszerben egy $2^i + 2^j$ szám felírása egyértelmű.)

$|A+B| = k+n-1$ teljesül, ha mind A, mind B egy-egy számtani sorozat, melyeknek differenciája azonos. Megmutatjuk, hogy másként nem lehet. Ehhez tekintsük a következő mátrixot (csak a jobb érthetőség kedvéért rendeztük mátrixba az összeg elemeit)

a_1+b_n	a_2+b_n	a_3+b_n	$\ldots$	$a_{k-1}+b_n$	a_k+b_n
a_1+b_{n-1}	a_2+b_{n-1}	a_3+b_{n-1}	$\ldots$	$a_{k-1}+b_{n-0}$	a_k+b_{n-1}
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ldots$	$\vdots$	$\vdots$
a_1+b_3	a_2+b_3	a_3+b_3	$\ldots$	$a_{k-1}+b_3$	a_k+b_3
a_1+b_2	a_2+b_2	a_3+b_2	$\ldots$	$a_{k-1}+b_2$	a_k+b_2
a_1+b_1	a_2+b_1	a_3+b_1	$\ldots$	$a_{k-1}+b_1$	a_k+b_1

E mátrixban bármely elemtől jobbra illetve a felette levő elemek nagyobbak. Közlekedjünk a bal alsó saroktól (a_1+b_1 elemtől) a jobb felső sarokba (a_k+b_n) jobbra-felfelé lépésekkel. Jegyezzük meg, hogy $k+n-1$ különböző elemet érintettünk – tehát nem csak az a) részben feltüntetett sorozat ilyen. Közlekedjünk most úgy, hogy az utunkban az $a_i+b_j < a_{i+1}+b_j < a_{i+1}+b_{j+1}$ elemek legyenek. Cseréljük ki az $a_{i+1}+b_j$ elemet az a_i+b_{j+1} elemre. Ekkor nyilván teljesül az is, hogy $a_i+b_j < a_i+b_{j+1} < a_{i+1}+b_{j+1}$. Azaz az a_i+b_j és az $a_{i+1}+b_{j+1}$ elemek között van az $a_{i+1}+b_j$ és az a_i+b_{j+1} elem, és mivel mindkét esetben $k+n-1$ különböző összeget kaptunk, azt kapjuk, hogy $a_{i+1}+b_j = a_i+b_{j+1}$ teljesül minden i,j párra. Átrendezve és $i-$t egynek választva azt kapjuk, hogy

$$b_{j+1} - b_j = a_2 - a_1 := d$$

teljesül minden $j-$re. Így B egy számtani sorozat. A szerepeket megcserélve kiderül, hogy A is egy ugyanakkora differenciájú számtani sorozat.

A 4.3. feladat megoldásai

A 4.3. a) mego.

A 2 hatványai: 1, 2, 4 ... 64. (7 db)

A 4.3. b) mego.

50-et ki lehet: a páros számokat. 50-nél több szám között azonban mindig lesznek szomszédos pozitív egészek, amelyek relatív prímek.

A 4.3. c) fel. I. megoldása

50 szám megadható, pld. az $50--99$ vagy az $51--100$ számok.

Ennél több nem adható meg. Alább először egy *Turán Pál*tól származó teljes indukciós gondolatmenetet közlünk.

Állítjuk, hogy ha $2n$-ig megadunk $n+1$ természetes számot, akkor lesz közöttük kettő, hogy az egyik osztja a másikat. Ez $n=1$-re triviális. Ha tudjuk, hogy ha $2n$-ig megadunk $n+1$ természetes számot, akkor lesz közöttük kettő, hogy az egyik osztja a másikat, akkor ha $2n+2-$ig adott $n+2$ egész és $2n+1, 2n+2$ közül csak az egyik tartozik a halmazunkba, akkor készen vagyunk (mivel használhatjuk az indukciós feltevést). Tehát most feltehetjük, hogy $2n+2$ benne van halmazunkba. Ha $n+1$ is benne van halmazunkba, akkor $n+1|2n+2$. Ha nem, vegyük most hozzá a halmazunkhoz $n+1-$et! Ekkor $2n-$ig $n+1$ számunk van, az indukciós feltevés alapján van kettő, hogy az egyik osztja a másikat. Ha ez nem a $k|n+1$ pár, készen vagyunk. Ha ez a $k|n+1$, akkor $k|2n+2$ is teljesül.

A 4.3. c) fel. II. megoldása

A A 4.3. I. megoldásban már láttunk példát 50 megfelelő számra. Itt csak megmutatjuk, hogy 50-nél több szám nem lehet egy ilyen halmazban. Legyen adva tehát $1 \leq a_< a_2 < \cdots < a_{n+1} \leq 100$ sorozat. Minden számot írjunk fel $a_i = 2^{s_i} b_i$ alakba, ahol $1 \leq i \leq 100$, és b_i páratlan szám. Mivel $2n-$ig n páratlan szám van, van olyan $i<j$, hogy $b_i = b_j := b$. Ekkor azonban

$$a_i = 2^{s_i} b | 2^{s_j} b = a_j.$$

A 4.3. d) mego.

Páros számot csak egyet választhatunk. Hasonlóan, minden 100 alatti prím többszörösei közül csak egyet választhatunk, így maximum annyi számot választhatunk, ahány 100 alatti prím van. Maguk a prímek például megfelelnek (25 db).

A 4.4. feladat megoldása

Egy ilyen összetett szám felírható $a \cdot b$ alakban, ahol $1 < a \leq b$ és teljesül, hogy $a^2 \leq a \cdot b \leq 1200$. Ezért $a \leq \sqrt{1200} \simeq 34,64$. Azaz a 12 szám felbontásaiban a kisebbik faktor ≤ 34. 34$-$ig a prímek sorban $2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31$, 11 darab, azaz e kisebbik faktorok között van olyan, amelyik ugyanazzal a prímmmel osztható.

12.9. Számsorozatok – feladatok megoldása

A 4.1. feladat megoldása

a) a, $a+2$, $a+4$ közül az egyik biztos osztható 3-mal, ez csak a lehet, így az egyetlen megfelelő sorozat: 3, 5, 7.

b) Könnyen meggondolható, hogy a differenciának párosnak és 3-mal oszthatónak kell lennie. A legkisebb megfelelő sorozat az 5, 11, 17, 23, 29.

c) Valójában azt fogjuk megmutatni, hogy a differencia osztható minden 15 alatti prímszámmal, azaz $2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13 = 30.030-$cal.

Legyen $p_1 < p_2 < \cdots < p_{15}$, egy 15 tagú d differenciájú számtani sorozat, melynek tagjai prímszámok. Legyen $2 \leq p \leq 13$ egy prímszám. A b) feladat miatt tudjuk, hogy $d \geq 6$, ezért $p_2 \geq 13$. $p|d$; ha d $p-$vel vett osztási maradéka $r \neq 0$ lenne, akkor $r, 2r, \ldots, 14r$ halmazban minden $p-$vel vett osztási maradék előfordulna, ami azt jelenti, hogy valamely $j-$re $p_2 + jr = p_{2+j}$ osztható $p-$vel ellentmondásként, mert csak egy $p \leq 13$-mal osztható prímszám van.

A 4.2. feladat megoldása

a) Először az fogjuk igazolni, hogy ha $k < n$, akkor $F_k | F_n - 2$.

A bizonyításához mindössze azt kell észrevennünk, hogy

$$F_k(F_k - 2) = (2^{2^k} + 1)(2^{2^k} - 1) = (2^{2^k})^2 - 1 = 2^{2^{k+1}} - 1 = F_{k+1} - 2.$$

Ezért

$$F_{k+1}F_k(F_k - 2) = F_{k+1}(F_{k+1} - 2) = F_{k+2} - 2,$$

innen indukcióval

$$F_{k+s} \cdots F_{k+1}F_k(F_k - 2) = F_{k+s+1} - 2,$$

azaz minden $s > 1$ esetén $F_k | F_{k+s+1} - 2$, ami $s := n - k - 1$ választással éppen az állítás.

b) Valóban ha $d|F_k$ akkor az a.) állítás miatt $d|F_n - 2$ is teljesül és ha $d|F_n$ akkor $d|F_n - (F_n - 2) = 2$. Tehát a legnagyobb közös osztó $d|2$; a Fermat számok páratlanok, azaz $d = 1$.

c) Mivel $(F_k, F_n) = 1$, ezért ebből következik, hogy végtelen sok prím van, hiszen végtelen sok Fermat-számunk van és mindegyik prímtényezős felbontásában az előzőek felbontásában szereplő prímektől különböző prím szerepel.

Megjegyzés a 4.2. fel. megoldásához

Máig megoldatlan probléma, hogy a Fermat számok között van-e végtelen sok prímszám. Az első öt Fermat szám prím; azonban $F_5 = 2^{2^5} + 1 = 641 \cdot 6700417$.

A 4.3. feladat megoldása

Pontosan akkor lesz $a_n = k$, ha

$$(k - \frac{1}{2})^2 < k^2 - k + 1 \leq n \leq k^2 + k < (k + \frac{1}{2})^2.$$

Tehát épp $2k$ db n értékre teljesül az $a_n = k$ összefüggés, ilyen n-ekre az $\frac{1}{a_n}$ értékek összege 2. A teljes összeg $2 \cdot 1999 = 3998$.

A 4.4. feladat megoldása

Legyen az n egymást követő szám $a+1$, $a+2$, $a+3$, $\ldots$, $a+n$.

Ekkor $\binom{a+n}{n} = \frac{(a+n)!}{a!n!}$.

Ez nyilván egész szám, így $a!$-ral való egyszerűsítés után is egész lesz.

A 4.5. feladat megoldásai

A 4.5. a-b-c) mego.

a) $2|F_3, \quad F_6 \ldots, 2|F_n \iff 3|n.$

b) $3|F_4, \quad F_8 \ldots, 3|F_n \iff 4|n.$

c) $10|F_{15}, \quad F_{30} \ldots, 10|F_n \iff 15|n.$

Mindezt csak a c) esetben igazoljuk, a másik kettőben hasonló a gondolatmenet. Vizsgáljuk a Fibonacci sorozat elemeit modulo 10. Az elemek számolhatók az eredeti képzési szabállyal, az összeadást modulo 10 végezve.

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
f_n	0	1	1	2	3	5	8	3	1	4

n	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19
f_n	5	9	4	3	7	0	7	7	4	1

Látható, hogy $F_{15} \equiv 0 \pmod{10}$ és $F_{16} \equiv 7 \pmod{10}$. A sorozat innentől kezdve ugyanaz, mint az elejétől, azaz $F_0 \equiv 0 \pmod{10}$ és $F_1 \equiv 1 \pmod{10}$-től kezdve, csak minden elem meg van szorozva 7-tel $pmod 10$. Mivel $(7, 10) = 1$, így 0-t csak akkor kaphatunk, ha az eredeti – 15 indexszel visszatolt – sorozatban is az volt. Tehát valóban minden tizenötödik elem lesz 10-tel osztható a Fibonacci sorozatban.

Megjegyzés a 4.5. a-b-c) fel. megoldásához

A fenti bizonyításban „szerencsének” tűnt a $(7, 10) = 1$ reláció. Teljes indukcióval könnyen igazolható, hogy a Fibonacci sorozat szomszédos tagjai relatív prímek, így két szomszédos tag bármelyike mindig relatív prím lesz a másik egy osztójához is. Tehát a fenti szerencse valójában általános törvényszerűség. Szerencsére.

A 4.5. d-e) mego.

k-val osztva egy szám k-féle maradékot adhat. Két egymást követő eleme a sorozatnak k^2-féle (rendezett) maradékpárt adhat. Mivel a sorozat végtelen hosszú, így van olyan maradékpár, amely ismétlődik, kétszer is előfordul benne. Induljunk ki egy ilyen maradékpár kisebb indexű tagjaiból és lépegessünk visszafelé. A sorozat képzési szabálya ebben az irányban is egyértelmű és eljutunk az F_0-hoz, tehát a 0 maradékhoz, egy k-val osztható számhoz. Ha az azonos maradékú nagyobbik párból indulunk ki, akkor ugyanezekkel e lépésekkel a k szám egy pozitív többszöröséhez jutunk.

Az e) állítás a c) feladatrész megoldása és az ahhoz fűzött megjegyzés alapján igazolható.

A 4.5. f) mego.

Először alkalmazzuk a 4.5. e) feladat állítását a $k = F_{(a,b)}$ számra. Mivel a Fibonacci sorozat legkisebb $F_{(a,b)}$-vel osztható pozitív tagja nyilvánvalóan maga $F_{(a,b)}$ és $(a, b)|a$, $(a, b)|b$, így az e) állítás szerint $F_{(a,b)}|F_a$, $F_{(a,b)}|F_b$, tehát $F_{(a,b)}|(F_a, F_b)$.

Most alkalmazzuk a 4.5. d) feladat állítását az (F_a, F_b) számra! Legyen F_c a Fibonacci sorozat legkisebb (F_a, F_b)-vel osztható pozitív tagja. Mivel F_a is osztható (F_a, F_b)-vel, így a 4.5. e) feladat állítása szerint $c|a$ és ehhez hasonlóan $c|b$, tehát $c|(a, b)$, amiből $F_c|F_{(a,b)}$. Kaptuk, hogy $(F_a, F_b)|F_{(a,b)}$ és korábban láttuk, hogy $F_{(a,b)}|(F_a, F_b)$, tehát $F_{(a,b)} = (F_a, F_b)$, ahogy a feladat állította.

A 4.6. feladat megoldása

Ha n összetett, akkor $x_n = 2^n - 1$ is összetett; valóban, ha $n = k \cdot m$, $k, m > 1$ akkor $1 < (2^k - 1)|(2^k)^m - 1$. Így, ha $n = (k + 1)! + 1$, akkor $n + 1, n + 1, \dots n + k$ mindegyike összetett. (vö. Mersenne-prímek)

A 4.7. feladat megoldása

Megmutatjuk, hogy minden második tagja az $y_k = 2^{2^k} + 3$ sorozatnak 7−tel osztható. $y_1 = 4 + 3$, $y_2 = 16 + 3 \equiv 5(mod 7)$, $y_3 = 2^8 + 3 = 259 = 7 \cdot 37$. Teljes indukcióval igazolható, hogy $y_{2k+1} \equiv 0(mod 7)$, és $y_{2k} \equiv 5(mod 7)$. (vö. Fermat-prímek)

A 4.8. feladat megoldása

Legyen d a számtani sorozat differenciája és legyen $n > a_1 + (k + 2)d$.

Az $n! + i : i = 2, 3, \dots n$ sorozat minden eleme összetett és nyilván van olyan j, hogy $n! + 2 \leq a_j \leq n! + d + 2$. Ekkor viszont $a_{j+s} \leq n! + n$ $s = 1, 2, \dots k$, amely számok összetettek.

A 4.9. feladat megoldása

A számtani sorozat nyilván növekvő, és egy N−ig $\geq \frac{N-a_1}{d} - 1$ eleme van. Négyzetszám $\leq \sqrt{N}$, köbszám $\leq \sqrt[3]{N}$, ... k−adik hatvány $\leq \sqrt[k]{N}$ van. Ekkor persze $2^k \leq N$, azaz $k \leq \log_2 N$. Így N−ig legfeljebb

$$\sqrt{N} + \sqrt[3]{N} + \dots + \sqrt[k]{N} < \sqrt{N} \cdot \log_2 N$$

hatványszám van. Ám ha $N > 2a_1 + 2d$, akkor

$$\sqrt{N} \cdot \log_2 N < N2d < \frac{N - a_1}{d} - 1,$$

mivel

$$\sqrt{N}2d > \log_2 N, \quad (*)$$

ha N elég nagy (pl. a L'Hospital szabályból következően).Ez viszont azt jelenti, hogy a számtani sorozatnak több eleme van, mint hatványszám; nem lehet mindegyik eleme hatványszám.

A teljesség kedvéért mutatunk a $(*)$−ra egy, a L'Hospital szabályt elkerülő indoklást: Az igazolandó $(*)$ egyenlőtlenség ekvivalens a

$$2^{\sqrt{N}} > N^{2d}$$

egyenlőtlenséggel.

Legyen k az a természetes szám, melyre

$$k^2 \leq \sqrt{N} < (k + 1)^2.$$

Így $2^{\sqrt{N}} \geq 2^{k^2}$ és $(k + 1)^{4d} > N^{2d}$. Tehát elegendő a

$$2^{k^2} > (k + 1)^{4d}$$

becslést $k > k_0$ esetén igazolni. $\sqrt[4d]{2} = 1 + a > 1$, ezért kell, hogy

$$(1+a)^{k^2} > (k+1).$$

Felbontva a bal oldalon levő zárójelet a k^2 tényezős szorzatban ($(1+a)^{k^2} = (1+a)(1+a)\dots(1+a)$-ban) az 1−eseket szorozzuk össze, valamint egy zárójelből a−t, a többiből az 1−eseket és további pozitív tagokat. Tehát

$$(1+a)^{k^2} > 1 + k^2 a.$$

Ha most az

$$1 + k^2 a > k + 1$$

egyenlőtlenséget igazoljuk, készen vagyunk. Ez pedig $k > \frac{1}{a}$ esetén teljesül. Vagyis

$$k > \frac{1}{1 - \sqrt[4d]{2}}$$

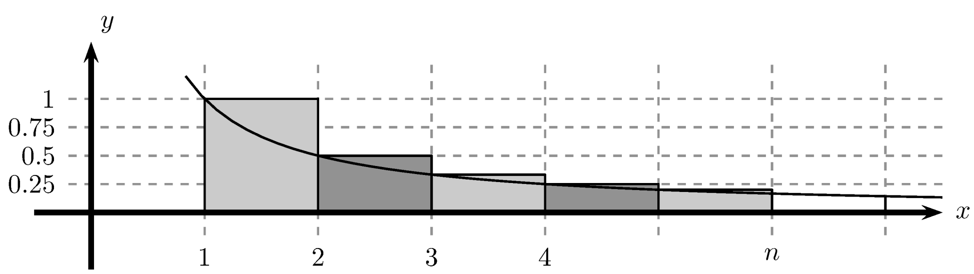
esetén teljesül $(*)$.

12.10. A harmonikus sor – feladatok megoldása

A 4.1. feladat megoldásai

A 4.1. a) mego.

Tekintsük az x-tengelyen az 1, 2, 3, 4, $\dots n$ osztópontokat (lásd a 12.2 ábrát). Ezek a pontok az x-tengely $[1, n]$ zárt intervallumát $(n-1)$ darab egységnyi hosszúságú szakaszra osztják. Emeljünk mindegyik szakaszra egy-egy téglalapot, mégpedig olyanokat, amelyek erre merőleges oldala rendre 1, $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$,$\dots$, $\frac{1}{n-1}$ hosszúságú. Mivel az $x \longrightarrow \frac{1}{x}$ függvény a pozitív számok halmazán szigorúan monoton fogy, így ezek a téglalapok lefedik a görbét.

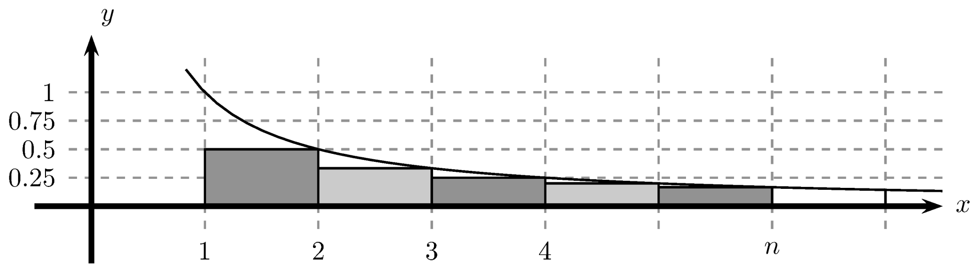


12.2. ábra.

A téglalapok összterülete nagyobb, mint a hiperbola alatti terület:

$$I(n) < \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{n-1}.$$

Az x-tengely 1, 2, 3, 4, $\ldots n$ osztópontjai közti intervallumokra most rendre $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$,..., $\frac{1}{n}$ magasságú téglalapokat emelünk (lásd a 12.3. ábrát). A monotonitás miatt ezek most mind a görbe alatt lesznek, a görbe alatti terület lefedi az összes téglalapot.



12.3. ábra.

A téglalapok összterülete kisebb, mint a hiperbola alatti terület:

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n} < I(n),$$

amiből

$$\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n} < 1 + I(n).$$

A 4.1. b) mego.

Tekintsünk két merőleges tengelyes affinitást. Az első tengelye legyen az x-tengely, aránya $\frac{1}{q}$, a második tengelye legyen az y-tengely, aránya pedig q. Ez a leképezés tehát az (x, y) pontot a $\left(qx, \frac{y}{q}\right)$ pontba képezi. Az $xy = 1$ hiperbola képe önmaga lesz, hiszen $xy = qx\frac{y}{q}$. Az egyik affinitás az alakzatok területét az $\frac{1}{q}$-szorosára, a másik a q-szorosára változtatja, így végeredményben a területet nem változtatja az összetett leképezés. Az $(1, 1)$ pont képe valóban a $(q, \frac{1}{q})$ pont, ahogy a feladat kívánta. Q.E.D.

A 4.1. c) mego.

A b)-ben megadott leképezésnél $q = b$ esetén a hiperbola $x = 1$ és $x = a$ közti ívének, illetve az alatta fekvő tartománynak a képe az $x = b$ és $x = ab$ közti ív, illetve tartomány. Ez utóbbi tartományhoz az $x = 1$, $x = b$ értékek közti tartományt hozzávéve kapjuk az $x = 1$ és $x = ab$ közti részt, azaz $I(ab) = I(a) + I(b)$. Q.E.D.

A 4.1. d) mego.

Tekintsük az $f(t) = I(e^t)$ függvényt. Ez a függvény minden t valós számra értelmezett és monoton nő, $t = 0$ esetén értéke zérus és

$$f(t_1 + t_2) = I(e^{t_1+t_2}) = I\left(e^{t_1} \cdot e^{t_2}\right) = I\left(e^{t_1}\right) + I\left(e^{t_2}\right) = f(t_1) + f(t_2).$$

Ha $f(1) = c$, akkor $f(-1) = -c$, hiszen $0 = f(0) = f(1 + (-1)) = f(1) + f(-1)$.

Másrészt, ha $f(u) = d$, akkor pozitív egész n esetén

$$f(nu) = f(u) + f(u) + \ldots + f(u) = nf(u) = nd. \tag{12.16}$$

Ez $u = 1$ illetve $u = -1$ esetén $n = m$-mel adja, hogy minden egész m-re $f(m) = mc$. Ráadásul (12.16)-ben $u = \frac{m}{n}$-re

$$mc = f(m) = \frac{m}{n} + \frac{m}{n} + \ldots + \frac{m}{n} = nf\left(\frac{m}{n}\right),$$

amiből $f\left(\frac{m}{n}\right) = c\frac{m}{n}$, tehát racionális t-re $f(t) = ct$. A függvény monotonitásából következik, hogy $f(t) = ct$ minden valós számra teljesül.

Mivel $I(e^t) = f(t) = ct$, így pozitív z-re $I(z) = c \ln z$. Alább megmutatjuk, hogy $I(e) = 1$, azaz $c = 1$.

Tekintsük az $a_n = I\left((1 + \frac{1}{n})^n\right)$ sorozatot! Az I területfüggvény tulajdonsága miatt $a_n = nI\left(1 + \frac{1}{n}\right)$, míg az $(1 + \frac{1}{n})^n$ sorozat tulajdonsága – és az I függvény folytonossága – miatt $lim_{n\longrightarrow\infty} a_n = I(e)$.

Becsülni szeretnénk az $I\left(1 + \frac{1}{n}\right)$ értéket, tehát kis pozitív Δ esetén az $\frac{1}{x}$ alatti területet $x = 1$ és $x = 1 + \Delta$ között.

Vegyük észre, hogy az $x \longrightarrow \frac{1}{x}$ függvény grafikonja pozitív x-ekre az $x \longrightarrow 2 - x$ függvény grafikonja fölött helyezkedik el (lásd a 12.4 ábrát)! Valóban, pozitív x-re a $2 - x \leq \frac{1}{x}$ egyenlőtlenség x-szel átszorozható és a kapott $2x - x^2 \leq 1$ reláció az ismert $0 \leq (x - 1)^2$ összefüggéssé rendezhető át.

Másrészt az $\frac{1}{x}$ függvény grafikonja konvex, tehát pld $x = 1$ és $x = 2$ között a görbe a húr alatt helyezkedik el: $\frac{1}{x} \leq \frac{3}{2} - \frac{1}{2}x$. Valóban átszorzás és rendezés után az $(x-1)(x-2) \leq 0$ relációhoz jutunk, ami épp itt teljesül.

A görbe alatti területet egy-egy trapéz területével alulról illetve felülről becsülhetjük:

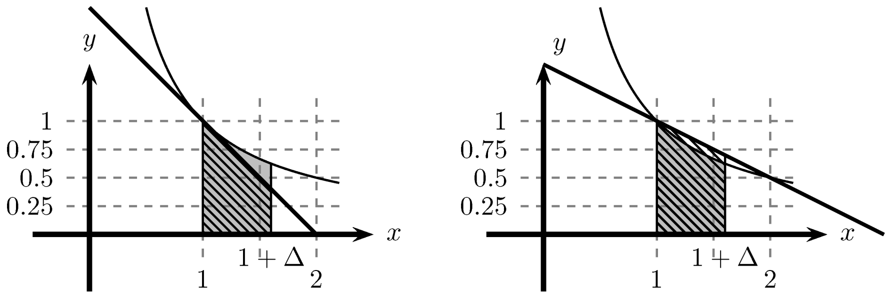
$$\Delta \cdot \frac{1 + (1 - \Delta)}{2} < I(1 + \Delta) < \Delta \cdot \frac{1 + (1 - \frac{1}{2}\Delta)}{2},$$

azaz

$$\Delta - \frac{1}{2}\Delta^2 < I(1 + \Delta) < \Delta - \frac{1}{4}\Delta^2.$$

Ebből $\Delta = \frac{1}{n}$-et írva és n-nel szorozva kapjuk, hogy

$$1 - \frac{1}{2n} < a_n = nI(1 + \frac{1}{n}) < 1 - \frac{1}{4n},$$



12.4. ábra.

így $lim_{n \longrightarrow \infty} a_n = 1$.

Fentebb ugyanerre a határértékre $I(e)$ adódott, tehát $I(e) = 1$ és így $I(z) = \ln z$. Q.E.D.

A 4.2. feladat megoldása

Az $\left[\frac{n}{k}\right]$ mennyiség azt mondja meg, hogy 1-től n-ig hány szám osztható k-val. A $\sum_{k=1}^{n} \left[\frac{n}{k}\right]$ mennyiség, tehát 1-től n-ig a számok osztói számának összege, így a_n azt mondja meg, hogy az 1, 2, $\ldots$, n számoknak *átlagosan* hány osztója van.

a) Az első szám, amelynek két osztója van a 2. Az első, amelynek három, a 4. A számoknak akármilyen sok osztója lehet (s!-nak pld legalább s osztója van), így újra és újra lesz „rekorder”, azaz olyan szám, amelynek több osztója van, mint bármelyik nála kisebb pozitív egésznek. Az ilyen számok biztosan növelik az átlagot, tehát $a_r > a_{r-1}$, ha r rekorder.

b) Alább látható az első néhány pozitív egész, alattuk az osztóik száma:

n	1	2	3	4	5	6
$d(n)$	1	2	2	3	2	4

Az 1-en kívül a számoknak legalább két osztója van, és pontosan azoknak a számoknak van két osztója, amelyek prímek. Az osztók számának átlaga egytől négyig és ötig is épp 2, de egytől hatig már több, mint 2 és így az átlag már mindig több lesz 2-nél. Ebből következik, hogy minden 6-nál nagyobb p prím lefelé viszi az átlagot, azaz $a_p < a_{p-1}$. Mivel végtelen sok prímszám van, így végtelen sokszor csökken a sorozat.

I. megjegyzés a 4.2. feladathoz

Ismeretes (lásd a 4.1. feladatot), hogy a

$$H_n = \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n}$$

harmonikus sort nagyon jól közelíti a logaritmusfüggvény. Nevezetesen

$$\ln n < H_n < 1 + \ln n.$$

Mivel $\frac{n}{k} - 1 < \left[\frac{n}{k}\right] \le \frac{n}{k}$, így

$$-n + \sum_{k=1}^{n} \frac{n}{k} < \sum_{k=1}^{n} \left[\frac{n}{k}\right] \le \sum_{k=1}^{n} \frac{n}{k},$$

azaz

$$H_n - 1 < a_n \le H_n,$$

és így

$$(\ln n) - 1 < a_n \le (\ln n) + 1. \tag{12.17}$$

A (12.17) összefüggésből nyilvánvaló, hogy az a_n sorozat végtelen sokszor nő.

II. megjegyzés a 4.2. feladathoz

Az eddigi eredmények alapján azt mondhatjuk, hogy az 1-től n-ig terjedő egész számoknak átlagosan kb $\ln n$ osztója van.

A 4.3. feladat megoldása

Azok a pozitív egészek, amelyeknek csak a 2 és a 3 a prímosztója és mindkét prímtényező legfeljebb az n-edik hatványon szerepel bennük itt láthatók:

$$\begin{array}{ccccc}
2^0 \cdot 3^0 & 2^1 \cdot 3^0 & 2^2 \cdot 3^0 & \dots & 2^n \cdot 3^0 \\
2^0 \cdot 3^1 & 2^1 \cdot 3^1 & 2^2 \cdot 3^1 & \dots & 2^n \cdot 3^1 \\
2^0 \cdot 3^2 & 2^1 \cdot 3^2 & 2^2 \cdot 3^2 & \dots & 2^n \cdot 3^2 \\
\vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\
2^0 \cdot 3^n & 2^1 \cdot 3^n & 2^2 \cdot 3^n & \dots & 2^n \cdot 3^n
\end{array}$$

Kellően nagy n-re ez a táblázat már tartalmazza a vizsgált véges halmaz összes elemét. Az első sor elemeinek reciprokösszege $\frac{1}{3^0}\left(2 - \frac{1}{2^n}\right)$, a második sor elemeié $\frac{1}{3^0}\left(2 - \frac{1}{2^n}\right)$, …az utolsó soré $\frac{1}{3^n}\left(2 - \frac{1}{2^n}\right)$. Mivel a

$$\frac{1}{3^0} + \frac{1}{3^1} + \ldots + \frac{1}{3^n} = \frac{3}{2} - \frac{1}{2 \cdot 3^n},$$

így a teljes összeg

$$\left(2 - \frac{1}{2^n}\right)\left(\frac{3}{2} - \frac{1}{2 \cdot 3^n}\right) < 2 \cdot \frac{3}{2} = 3.$$

Megjegyzés a 4.3. feladathoz

Lásd még az Analízis fejezet 6.1. feladatát.

A 4.4. feladat megoldása

Közös nevezőre hozva

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{10}=\frac{a}{2^3\cdot 3^2\cdot 5\cdot 7}=\frac{a}{b}.$$

Az a számláló a közös nevezőre hozás után 9 összeadandóból áll, az első $2^2\cdot 3^2\cdot 5\cdot 7$, stb. és vegyük észre, hogy két tag nem osztható $5-tel$ amikor az $1/5$ és amikor az $1/10$ törteket bővitjük. E két tag $2^3\cdot 3^2\cdot 7$ és $2^2\cdot 3^2\cdot 7$. Az első $4-et$, a második 2–t ad $5-tel$ osztva. Így a 1–et ad 5–tel való osztási maradékként.

A 4.5. feladat megoldásai

A 4.5. a) fel. I. megoldása

Hozzuk közös nevezőre a törteket

$$\frac{\frac{(p-1)!}{1}+\frac{(p-1)!}{2}+\cdots+\frac{(p-1)!}{p-1}}{(p-1)!}.$$

Ha ez a tört egyszerűsíthető valamivel, akkor az $p-$nél kisebb, tehát állításunk szempontjából érdektelen. Amit tehát igazolnunk kell, az az (használva a $(modp)$ jelölést), hogy

$$\frac{(p-1)!}{1}+\frac{(p-1)!}{2}+\cdots+\frac{(p-1)!}{p-1}\equiv 0(modp).$$

Jelölésünk korrekt, mivel $1\le i\le p-1$ számra $(i,p)=1$, tehát oszthattunk $i-$vel. Hogy pontosabban értsük a fenti kongruenciát, azt is meg kell jegyeznünk, hogy bármely fenti $i-$re létezik i^*, hogy $i\cdot i^*\equiv 1(modp)$, továbbá, hogy

$$\frac{(p-1)!}{i}\equiv (p-1)!\cdot i^*(modp),$$

(pl. megszorozva mindkét oldalt $i-$vel.) Így

$$(p-1)!\Big(\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{p-1}\Big)\equiv 0(modp)$$

a bizonyítandó állítás. Mivel $((p-1)!,p)=1$, így amit bizonyítani kell, az az, hogy

$$\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{p-1}\equiv 0(modp).$$

Utolsó lépésként nem nehéz látni, hogy amint i végig fut az $1, 2, \ldots, p-1$ számokon, akkor $\frac{1}{i}$ is ugyanezeken a számokon (más sorrenben) fut végig. Pl. $p = 5$, akkor $\{\frac{1}{1}, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}\} = \{1, 3, 2, 4\}$. Tehát azt kaptuk, hogy

$$\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{p-1} \equiv 1 + 2 + \cdots + p - 1 (modp).$$

Ám

$$1 + 2 + \cdots + p - 1 = \frac{p(p-1)}{2},$$

ami pedig nyilván osztható p-vel.

A 4.5. a) fel. II. megoldása

Azt kell igazolnunk, hogy

$$\frac{(p-1)!}{1} + \frac{(p-1)!}{2} + \cdots + \frac{(p-1)!}{p-1} \equiv 0 \pmod{p}.$$

A bal oldalon a $\pmod{p}$ redukált maradékok $(p-2)$ tényezős szorzatainak összege, tehát a maradékok egyik elemi szimmetrikus polinomja áll. Így a probléma a 3.6. feladat egyik kérdésének felel meg. A problémát ott $p = 7$ esetén tűztük ki, de a megoldás minden $p > 2$ prímre használható.

A 4.5. b) mego.

Az állítás igaz. Belátjuk, hogy ha $p \geq 5$, akkor

$$\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{p-1} \equiv 0 \mod p^2.$$

Elõször vegyük észre, hogy

$$\frac{1}{p-i} \equiv -\frac{p+i}{i^2} \mod p^2.$$

Adjuk ezt össze, ha i 1-tõl $(p-1)$-ig fut:

$$\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{p-1} \equiv -\frac{p+1}{1^2} - \frac{p+2}{2^2} - \cdots - \frac{p+(p-1)}{(p-1)^2} \mod p^2.$$

Az egyenlet jobb oldalát alakítva:

$$\begin{aligned} \tfrac{1}{1} + \tfrac{1}{2} + \cdots + \tfrac{1}{p-1} \equiv & - p\left(\tfrac{1}{1} + \tfrac{1}{4} + \cdots + \tfrac{1}{(p-1)^2}\right) - \\ & - \left(\tfrac{1}{1} + \tfrac{1}{2} + \cdots + \tfrac{1}{p-1}\right) \mod p^2. \end{aligned}$$

Ebbõl azonnal következik, hogy

$$2\left(\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{p-1}\right)\equiv -p\left(\frac{1}{1}+\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{(p-1)^2}\right) \mod p^2.$$

Azaz elég belátni, hogy

$$\frac{1}{1}+\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{(p-1)^2}\equiv 0 \mod p.$$

Vegyük észre, hogy a kvadratikus maradékok reciprokai is kvadratikus maradékok (hiszen az 1 is az), és itt minden kvadratikus maradék pontosan kétszer szerepel, tehát az a bizonyítandó, hogy

$$1+4+\cdots+(p-1)^2\equiv 0 \mod p.$$

Ez viszont világos, hiszen a bal oldalon szereplõ összegrõl jól ismert, hogy $\frac{(p-1)p(2p-1)}{6}$, amirõl azonnal látszik, hogy osztható p-vel, ha $p\geq 5$

A 4.6. feladat megoldásai

Segítség a 4.6. feladathoz

Használhatjuk a Bertrand-Csebisev tételt, miszerint bármely k természetes számra k és $2k$ között van prímszám.

A 4.6. feladat megoldása

Az állításunkkal szemben tegyük fel, hogy van olyan n, amelyre a

$$H_n = 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}$$

egész szám.

A Bertrand-Csebisev tétel miatt tehát tudjuk, hogy van olyan p prímszám, amelyre $p\leq n<2p$. Szorozzuk be az egyenlőség mindkét oldalát $n!-$sal! Jegyezzük meg, hogy $p|n!$, de $p^2\nmid n!$. Ekkor mind a bal, mind a jobb oldalon egész szám áll, $p|n!H_n$, a jobb oldal minden tagja is osztható $p-$vel, kivéve az $n!/p$ tagot. Ebből az ellentmondásból következik, hogy H_n nem egész szám.

12.11. Hatványozás moduláris aritmetikában – feladatok megoldása

A 4.1. feladat megoldásai

A 4.1. a) mego.

Lásd a 12.5., 12.6., 12.7., 12.8. ábrákat!

$1:6 = 0,1\dot{6}$
$\underline{1}0$
$\underline{4}0$
$\underline{4}0$

$1:7 = 0,\dot{1}4285\dot{7}$
$\underline{1}0$
$\underline{3}0$
$\underline{2}0$
$\underline{6}0$
$\underline{4}\,0$
$\underline{5}\,0$
$\underline{1}0$

$1:8 = 0,125$
$\underline{1}0$
$\underline{2}0$
$\underline{4}0$
$\underline{0}$

12.5. ábra.

$1:9 = 0,\dot{1}$
$\underline{1}0$
$\underline{1}0$

$1:11 = 0,\dot{0}\dot{9}$
$\underline{1}0$
$\underline{10}\,0$
$\underline{1}\,0$

$1:12 = 0,08\dot{3}$
$\underline{1}0$
$\underline{10}\,0$
$\underline{4}\,0$
$\underline{4}0$

12.6. ábra.

A 4.1. b) mego.

$\frac{3}{7}$ tizedestört alakjának kiszámolására három módszert is adunk:

I. módszer Számoljuk ki fejben a szorzat eredményét az írásbeli szorzás mintájára. Felhasználhatjuk, hogy a periódusok között nincs átmenet.

II. módszer Vegyük észre, hogy

$$\frac{3}{7} = \frac{10}{7} - \frac{7}{7} = 10 \cdot \frac{1}{7} - 1.$$

III. módszer Ugyanazt az osztást kell elvégeznünk, mint $\frac{1}{7}$ kiszámolásakor, csak most a 30-as maradékkal kezdünk.

$1:13 \quad = \quad 0,\dot{0}7692\dot{3}$
$\underline{1}0$
$\underline{10}\,0$
$\underline{9}\,0$
$\underline{1}\,\underline{2}0$
$\underline{3}\,0$
$\underline{4}\,0$
$\underline{1}0$

$1:14 \quad = \quad 0,0\dot{7}1428\dot{5}$
$\underline{1}0$
$\underline{10}\,0$
$\underline{2}\,0$
$\underline{6}0$
$\underline{4}\,0$
$\underline{1}\,\underline{2}\,0$
$\underline{8}0$
$\underline{10}0$

$1:15 \; = 0,06\dot{3}$
$\underline{1}0$
$\underline{10}\,0$
$\underline{1}\,\underline{0}\,0$

12.7. ábra.

$1:17 \; = \qquad 0,\dot{0}58823529411764\dot{7}$
$\underline{1}0$
$\underline{10}0$
$\underline{15}0$
$\underline{14}0$
$\underline{4}\,0$
$\underline{6}\,0$
$\underline{9}0$
$\underline{5}0$
$\underline{16}0$
$\underline{7}0$
$\underline{2}0$
$\underline{3}0$
$\underline{13}0$
$\underline{11}0$
$\underline{8}0$
$\underline{12}0$
$\underline{1}0$

$1:16 \quad = 0,0625$
$\underline{1}0$
$\underline{10}\,0$
$\underline{4}\,0$
$\underline{8}0$
$\underline{0}$

12.8. ábra.

Az eredmény mindhárom módszerrel: $0,\dot{4}2857\dot{1}$.

A $\frac{3}{13}$ tört tizedestört alakja $0,\dot{2}3076\dot{9}$. Ez az előző I. és III. módszerrel is adódik. A II. módszer alkalmazására most nehezebb rálelni. Esetleg alkalmazhatjuk a

$$-\frac{3}{13} = \frac{10}{13} - \frac{13}{13} = 10 \cdot \frac{1}{13} - 1$$

összefüggést.

$\frac{13}{17} = 0,7647058823529411$. Ez fejben talán csak a III. módszerrel jön ki.

A 4.1. c) mego.

A két tört tizedestört alakja periodikus (lásd a 4.6. a) feladatot).

A 4.1. d) mego.

$\frac{1}{18} = 0,0\dot{5}$, ami $\frac{1}{6}$ vagy $\frac{1}{9}$ tizedestört alakjából is megkapható az $\frac{1}{18} = \frac{1}{6} : 3$, illetve az $\frac{1}{18} = \frac{1}{9} \cdot 5 : 10$ összefüggés alapján. Itt nem a tizedesvessző után kezdődik a periódus.

$\frac{1}{19}$ esetén azonban biztosan a tizedesvessző után kezdődik a periódus. Az indoklást lásd az 4.6. d) feladattal kapcsolatban.

A 4.1. e) mego.

e) $\frac{1}{19}$ tizedestört alakjának periódusa legfeljebb 18 jegyből áll, hiszen 19 különböző maradék van, de a 0 maradék nem fordulhat elő. Így legkésőbb a 19. számjegy megegyezik az elsővel.

Megjegyzések a 4.1. e) fel. megoldásához

1. A periódus az adott esetben épp 18 jegyből áll (lásd a 4.1. a) feladat I. megoldását!.

2. Az 4.7. feladat állítása révén alaposabb jóslás is tehető valamely tört tizedestört alakja periódusának hosszáról.

A 4.2. feladat megoldásai

A 4.2. a) fel. I. megoldása

Jelöljük a számot így: $x = \overline{x_6x_5x_4x_3x_2x_1}$. A feltétel szerint

$$3 \cdot \overline{x_6x_5x_4x_3x_2x_1} = \overline{x_5x_4x_3x_2x_1x_6}. \tag{12.18}$$

Egyszerűbb lesz a levezetés, ha bevezetjük az $y = \overline{x_5x_4x_3x_2x_1}$ rövidítő jelölést. Ezzel

$$x = \overline{x_6x_5x_4x_3x_2x_1} = \overline{x_600000} + \overline{x_5x_4x_3x_2x_1} = 10^5x_6 + y,$$

míg

$$\overline{x_5x_4x_3x_2x_1x_6} = \overline{x_5x_4x_3x_2x_10} + x_6 = 10y + x_6.$$

A (12.18) egyenlet rövid alakja:

$$3 \cdot (10^5x_6 + y) = 10y + x_6. \tag{12.19}$$

Ebből rendezés után kapjuk a

$$299999 \cdot x_6 = 7y \tag{12.20}$$

összefüggést, amiből

$$42857 \cdot x_6 = y. \tag{12.21}$$

Mivel x_6 egyjegyű, míg y (és 42857) ötjegyű számok, így az (12.21) egyenletnek az alábbi két megoldása van: $x_6 = 1$ és $y = 42857$, illetve $x_6 = 2$ és $y = 85714$. Ezekből a keresett x szám 142857 illetve 285714. Könnyű ellenőrizni, hogy mind a két szám megfelel a feladat feltételeinek.

A 4.2. b) fel. I. megoldása

Ha a keresett szám n-jegyű, $x = \overline{x_n x_{n-1} \dots x_2 x_1}$ és $y = \overline{x_{n-1} \dots x_2 x_1}$, akkor egyenletünk

$$3 \cdot (10^{n-1} x_n + y) = 10y + x_n. \tag{12.22}$$

Ebből

$$(3 \cdot 10^{n-1} - 1) \cdot x_n = 7y. \tag{12.23}$$

A (12.23) egyenlet jobb oldalán 7-tel osztható szám áll, így a jobb oldali szorzat értéke is osztható 7-tel. Ez $x_n = 7$ vagy $7|(3 \cdot 10^{n-1} - 1)$ esetén teljesülhet. Az $x_n = 7$ esetben azonban az $(n-1)$ jegyű y szám az n-jegyű $(3 \cdot 10^{n-1} - 1)$ számmal lenne egyenlő, ami ellentmondás, tehát csak a

$$7|(3 \cdot 10^{n-1} - 1) \tag{12.24}$$

feltétel mellett lehet a feladatnak n-jegyű megoldása. Ha teljesül a (12.24) oszthatósági feltétel, akkor

$$\frac{3 \cdot 10^{n-1} - 1}{7} \cdot x_n = y, \tag{12.25}$$

így két megoldás lesz, hiszen $x_n = 1$ és $x_n = 2$ esetén kapunk y-ra $(n-1)$-jegyű számot.

A teljes megoldáshoz meg kell vizsgálnunk a 29, 299, 2999, ... számokat 7-tel való oszthatóságuk szempontjából. Ezt mutatja az alábbi táblázat:

n	2	3	4	5	6	7	8	...
$(3 \cdot 10^{n-1} - 1)$	29	299	2999	29999	299999	2999999	29999999	...
hetes maradék	1	5	3	4	0	2	1	...

A táblázat középső sorában látható sorozat egyik tagjából (u) a $10 \cdot u + 9$ képlettel kaphatjuk a következő tagot. A sorozat tagjainak hetes maradékai is e képlet alapján (modulo 7) számolhatók ki. A hetes maradékok csak véges sokan vannak, így a sorozat tagjainak hetes maradékai között lesz ismétlődés, azután pedig a képlet miatt a maradékok sorozata periodikus lesz. A táblázatból látható, hogy e periódus hossza 6, és héttel osztható számot az $n = 6, 12, 18, \dots$ esetekben kapunk. A $\frac{3 \cdot 10^{n-1} - 1}{7}$ tört ezekhez tartozó értékei rendre

$$42857, \qquad 42857142857, \qquad 42857142857142857, \qquad \dots,$$

így a keresett számok (x lehetséges értékei)

$$142857, \qquad 142857142857, \qquad 142857142857142857, \qquad \ldots, \qquad (x_n = 1),$$

illetve

$$285714, \qquad 285714285714, \qquad 285714285714285714, \qquad \ldots, \qquad (x_n = 2).$$

Megjegyzés a 4.2. b) fel. I. megoldásához

A 29, 299, 2999, … sorozatból a héttel oszthatókat természetesen sok más módon is ki lehet választani. felhasználhatjuk pld, hogy 1001 osztható héttel, vagy vizsgálhatjuk a tíz hatványainak (és azok háromszorosainak) hetes maradékát.

A 4.2. a) fel. II. megoldása

Vegyük észre, hogy a keresett $x = \overline{x_6x_5x_4x_3x_2x_1}$ szám első jegye, azaz x_6 csak 1, 2, vagy 3 lehet, ugyanis háromszorosa csak így lehet hatjegyű (ugyanannyi jegyű, mint x). Alább külön vizsgáljuk a három esetet.

I. eset ($x_6 = 1$)

Gondoljunk az írásbeli szorzásra!

$$\begin{array}{ccccccc} 1 & \_ & \_ & \_ & \_ & \_ & \cdot 3 \\ \hline \_ & \_ & \_ & \_ & \_ & 1 & \end{array}$$

Mi lehet x_1, azaz melyik az a számjegy, amelynek háromszorosa 1-re végződik? Csakis a 7! Tehát $x_1 = 7$. Haladjunk tovább! Mivel alul is ugyanaz a szám áll, mint fölül, csak elcsúsztatva, így a 7-est oda is beírhatjuk.

$$\begin{array}{ccccccc} 1 & \_ & \_ & \_ & \_ & 7 & \cdot 3 \\ \hline \_ & \_ & \_ & \_ & 7 & 1 & \end{array}$$

Mi lehet x_2, azaz melyik az a számjegy, amelynek háromszorosa, plusz a $3 \cdot 7$ szorzat eredményéből áthozott 2, összesen 7-et ad ki? Csakis az 5, azaz $x_2 = 5$. Ezt alulra is írhatjuk.

$$\begin{array}{ccccccc} 1 & \_ & \_ & \_ & 5 & 7 & \cdot 3 \\ \hline \_ & \_ & \_ & 5 & 7 & 1 & \end{array}$$

Most x_3 egy olyan számjegy, amelynek háromszorosa, plusz a $3 \cdot 5 = 15$ szorzat eredményéből áthozott 1, összesen 5-öt ad ki. Tehát $x_3 = 8$.

$$\begin{array}{ccccccc} 1 & \_ & \_ & 8 & 5 & 7 & \cdot 3 \\ \hline \_ & \_ & 8 & 5 & 7 & 1 & \end{array}$$

Ez előtt, x_4 olyan számjegy, amelynek háromszorosa, plusz a $3 \cdot 8 = 24$ szorzat eredményéből áthozott 2, összesen 8-at ad ki. Tehát $x_4 = 2$.

$$\begin{array}{ccccccc} 1 & \_ & 2 & 8 & 5 & 7 & \cdot 3 \\ \hline \_ & 2 & 8 & 5 & 7 & 1 & \end{array}$$

Végül x_5 olyan számjegy, amelynek háromszorosa 2, tehát $x_5 = 4$.

$$\begin{array}{ccccccc} 1 & 4 & 2 & 8 & 5 & 7 & \cdot 3 \\ \hline 4 & 2 & 8 & 5 & 7 & 1 & \end{array}$$

Ellenőriznünk kell, hogy a szorzás az „elején is kijön”. Kapjuk, hogy $x = 142857$ valóban megoldás.

II. eset $(x_6 = 2)$

Az előzőhöz hasonló gondolatmenettel az $x = 285714$ megoldást kapjuk.

III. eset $(x_6 = 3)$

Az eljárás most is ugyanaz, de az ellenőrzésnél kiderül, nem jó a kapott érték.

Megjegyzés a 4.2. a) fel. II. megoldásához

Így is meggondolható hogy a III. eset nem ad megoldást, azaz $x_6 = 3$ nem teljesülhet: ha az első jegy 3-as, akkor a háromszoros érték 9-cel kezdődik (az is hatjegyű), de akkor a szám 39-cel kellene kezdődjön, de úgy kezdődő szám háromszorosa már több jegyből áll.

A 4.2. b) fel. II. megoldása

Az a) feladatrészre adott fenti megoldáshoz hasonlóan, most is két esetet különböztethetünk meg: az első számjegy (x_n) értéke 1 vagy 2. Az egyes esetekben alkalmazott algoritmus is majdnem teljesen azonos a speciális esetben fent bemutatott eljárással. Az eljárás vége most nincs előre rögzítve. Akkor állhatunk meg, ha az utolsó lépésben meghatározott számjegy megegyezik a (balról) legelső jeggyel, tehát az első esetben 1-gyel, a másodikban 2-vel. Ebből adódik, a megoldások ismétlődő szerkezete is:

$$\begin{array}{ccccccc} 1 & 4 & 2 & 8 & 5 & 7 & \cdot 3 \\ \hline 4 & 2 & 8 & 5 & 7 & 1 & \end{array}$$

$$\begin{array}{ccccccccccccc} 1 & 4 & 2 & 8 & 5 & 7 & 1 & 4 & 2 & 8 & 5 & 7 & \cdot 3 \\ \hline 4 & 2 & 8 & 5 & 7 & 1 & 4 & 2 & 8 & 5 & 7 & 1 & \end{array}$$

A 4.3. feladat megoldásai

A 4.3. a) mego.

Adjuk össze az $x = \overline{x_n x_{n-1} \ldots x_2 x_1}$ n-teljes főnix szám x, $2 \cdot x$, $3 \cdot x$, $\ldots$, $n \cdot x$ többszöröseit! Az említett tagok tízes számrendszerbeli alakjai az x szám ciklikus permutációi. Az említett n szám különböző, így az n ciklikus permutáció is különböző, azaz az x szám összes ciklikus permutációját kiadják a tagok, mindegyiket egyszer.

Alább $n = 5$ esetén szemléltetjük a vizsgált számokat. Az egy sorban található többszörös és tízes számrendszerbeli alak nem feltélenül felel meg egymásnak.

$$\begin{array}{c|l} x & \overline{x_5x_4x_3x_2x_1} \\ 2\cdot x & \overline{x_1x_5x_4x_3x_2} \\ 3\cdot x & \overline{x_2x_1x_5x_4x_3} \\ 4\cdot x & \overline{x_3x_2x_1x_5x_4} \\ 5\cdot x & \overline{x_4x_3x_2x_1x_5} \end{array}$$

Ha mindkét oldalon elvégezzük az összegzést, akkor az alábbi összefüggéshez jutunk:

$$15 \cdot x = (x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5) \cdot (10000 + 1000 + 100 + 10 + 1).$$

Az $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = \Sigma_x$ rövidítő jelöléssel ez így írható:

$$15 \cdot x = 11111 \cdot \Sigma_x. \tag{12.26}$$

Mivel 15 és 11111 relatív prímek, így (12.26)-ből következik, hogy $11111|x$, azaz x csupa egyforma számjegyből álló ötjegyű szám. Ez nyilván nem 5-teljes főnix szám.

Az általános esetben – x n-teljes főnix szám – a (12.26) egyenletnek megfelelő összefüggés

$$\frac{n \cdot (n+1)}{2} \cdot x = \frac{10^n - 1}{9} \cdot \Sigma_x, \tag{12.27}$$

ahol tehát Σ_x az x szám jegyeinek összegét jelöli. Megoldás csak akkor várható, ha $\frac{n\cdot(n+1)}{2}$ és $\frac{10^n-1}{9}$ nem relatív prímek. Ez csak $n = 3$ és $n = 6$ esetén áll fenn.

$n = 3$ esetén (12.27) egyszerűsített alakja $2x = 37\Sigma_x$, azaz x olyan 37-tel osztható szám, amelyben a jegyek összege páros. Vegyük még figyelembe azt is, hogy $3 \cdot x$ is háromjegyű, azaz $x \leq 333$. Így x lehetséges értékei 037, 185, 222 és 259, de ezek kétszeresét kiszámolva látható, hogy nem főnix számok.

$n = 6$ esetén (12.27)-ből az

$$x = 5291 \cdot \Sigma_x \tag{12.28}$$

összefüggés adódik. x olyan szám, amelynek hatszorosa is hatjegyű, így $x \leq 166666$. Az x-re adódó lehetőségek száma most már csak $166666/5291 < 32$. Ez tovább csökkenthető, ha észrevesszük, hogy 5291 hármas maradéka (-1), míg bármely szám hármas maradéka megegyezik számjegyei összegének hármas maradékával. Ebből ugyanis adódik, hogy x hármas maradéka csak nulla lehet, azaz $15873|x$. Az így adódó 10 lehetőség számológéppel gyorsan ellenőrizhető, egyedül $x = 142857$ adódik 6-teljes főnix számnak.

A 4.3. b) mego.

Észrevehetjük, hogy a megtalált 142857 főnix szám az 1/7 tört tizedestört alakjának periódusával egyezik meg (lásd a 4.1. feladatot). Más törtek tizedestört alakjait vizsgálva

1/17-esetében kapunk hasonló konfigurációt:

$$\frac{1}{17} = 0,\dot{0}58823529411764\dot{7}.$$

Sejthető és ellenőrizhető, hogy a 16-jegyű 0588235294117647 szám 16-teljes főnix szám.

A 4.3. c) mego.

$$7 \cdot 142857 = 999999,$$

$$17 \cdot 588235294117647 = 9999999999999999.$$

A 4.3. d) mego.

Vegyük észre, hogy bármely n-jegyű szám jegyeinek összege legfeljebb $9 \cdot n$. Így n és Σ_x lehetséges értékeit végig tudja futni a számítógép és az ezekből a (12.27) összefüggéssel meghatározott x-re ellenőrizhető a főnix tulajdonság.

Az alábbi $n < 500$ értékekre van n-teljes főnix szám: 6, 16, 18, 22, 28, 46, 58, 60, 96, 108, 112, 130, 148, 166, 178, 180, 192, 222, 228, 232, 256, 262, 268, 312, 336, 366, 378, 382, 388, 418, 432, 460, 486, 490, 498. Mindegyik esetben egy főnix szám van. A 498-teljes főnix szám pld az alábbi:
2004008016032064128256513026052104208416833667334669338677354709418837675350701
1402805611222444889779559118236472945891783567134268537074148296593186372745490
0981963927855711422845691382765531062124248496993987975951903807615230460921843
3687374749498997995991983967935871743486973947895791583166332665330661322645290
0581162324649298597194388777555110220440881763527054108216432865731462925851703
4068136272545090180360721442885771543086172344689378757515030060120240480961923
23847695390781563126252505 01.

A 4.4. feladat megoldása

Az x főnix szám jegyeit megismerjük akkor is, ha csak x_1-gyel jelölt utolsó jegyét többszörözzük. Pontosabban: az alább definiált H, H_1 (multiplicitásos) halmazok megegyeznek.

H_1 az x n-teljes főnix szám számjegyeinek „halmaza”, (ez nem igazi halmaz, minden jegy annyiszor szerepel benne, ahányszor az n-jegyűnek tekintett x számban szerepel). H az $\{x, 2x, 3x, \ldots, nx\}$ halmazban található számok utolsó jegyeinek, azaz a $\{x_1, 2x_1, 3x_1, \ldots, nx_1\}$ halmazban található számok tízes maradékainak multiplicitásos halmaza.

Ez a két „halmaz” valóban megegyezik, hiszen, ha x n-teljes főnix szám, akkor első n többszöröse megegyezik n ciklikus permutációjával, és a permutációkban minden jegy pontosan egyszer kerül az utolsó helyre.

Ha x_1 és 10 nem lennének relatív prímek, hanem pld x_1 páros lenne, akkor x minden jegye is páros lenne, ha pedig x_1 osztható lenne 5-tel, akkor a többi jegy is 5-tel osztható lenne. Látni fogjuk, hogy ezek az esetek nem lehetségesek, ha $n > 1$. Ehhez elég azt észrevenni, hogy a $2x$, $3x$, $4x$, $5x$ számok ($n > 5$, lásd a 4.3. feladatot) írásbeli kiszámolásakor biztosan lesz átvitel, és olyan is lesz, amikor csak 1-et viszünk át (ha többet kell átvinni, akkor nézzzünk egy kisebb többszöröst). Ez az átvitel elrontja a 2-es és az 5-ös oszthatóságot is.

Tehát x_1 és 10 relatív prímek. Ekkor az

$$x_1, \quad 2x_1, \quad 3x_1, \quad \ldots, \quad 10x_1 \tag{12.29}$$

számok tízes maradékai minden számjegyet pontosan egyszer adnak ki. Ha pld $x_1 = 3$, akkor ezek a maradékok rendre

$$3, \quad 6, \quad 9, \quad 2, \quad 5, \quad 8, \quad 1, \quad 4, \quad 7, \quad 0,$$

míg $11x_1$ maradéka újból $3 = x_1$. A bizonyítást az általános esetre itt nem részletezzük, de nem is kell feltétlenül bizonyítani, elég az $x_1 = 1$, $x_1 = 3$, $x_1 = 7$, $x_1 = 9$ eseteket végigszámolni.

A feladat állítását ezzel be is láttuk: a kx_1 számok tízes maradékai a k változó $[1; 10]$, $[11; 20]$, $[21; 30]$, ... intervallumokba eső értékeire egyszer-egyszer kiadják az összes számjegyet, az utolsó csonka blokkban pedig még néhányat egyszer-egyszer.

Megjegyzés a 4.4. feladathoz

A levezetésből az is következik, hogy a 0 számjegy biztos az (egyik) legkevesebbszer fordul elő a főnix számban, hiszen a (12.29) sorozatban utoljára jön elő.

A 4.5. feladat megoldása

1. Lemma Ha az x szám n-teljes főnix szám, akkor $(n+1)|10^n - 1$.

az 1. Lemma bizonyítása

Írjuk fel az x szám ciklikus permutációit sorban, mindig egy-egy jeggyel eltolva a tizedestört alakot, és írjuk mellé, hogy a kapott szám hányszorosa x-nek.

$$\begin{aligned}
x_n x_{n-1} \dots x_3 x_2 x_1 &= l_0 \cdot x, \\
x_1 x_n x_{n-1} \dots x_3 x_2 &= l_1 \cdot x, \\
x_2 x_1 x_n x_{n-1} \dots x_3 &= l_2 \cdot x, \\
&\vdots \\
x_{n-1} \dots x_3 x_2 x_1 x_n &= l_{n-1} \cdot x,
\end{aligned} \tag{12.30}$$

ahol természetesen $k_0 = 1$. Vonjuk ki mindegyik egyenletet a következő egyenlet tízszereséből, a legutolsót az első tízszereséből:

$$\begin{aligned}
(10^n - 1) \cdot x_1 &= (10l_1 - l_0) \cdot x, \\
(10^n - 1) \cdot x_2 &= (10l_2 - l_1) \cdot x, \\
(10^n - 1) \cdot x_3 &= (10l_3 - l_2) \cdot x, \\
&\vdots \\
(10^n - 1) \cdot x_n &= (10l_0 - l_{n-1}) \cdot x.
\end{aligned} \tag{12.31}$$

Az x szám tehát osztja a $(10^n - 1) \cdot x_i$ számok mindegyikét, azaz osztja ezek legnagyobb közös osztóját is. Ez a legnagyobb közös osztó megegyezik az x_1, x_2, …, x_n számjegyek legnagyobb közös osztójának és $(10^n - 1)$-nek a szorzatával. Tehát az 1. Lemma bizonyítást nyer, ha belátjuk az alábbi lemmát:

2. Lemma Ha az x szám n-teljes főnix szám $(n > 1)$, akkor számjegyeinek legnagyobb közös osztója 1.

A 2. Lemma nyilvánvalóan következik a 4.4. feladat állításából ($n > 5$, lásd 4.3.).

A 4.4. feladat állításából az is következik, hogy a $\{x, 2x, 3x, \dots, nx\}$ számok közül (mindegyiket n-jegyűnek tekintjük) nagyjából ugyanannyi *kezdődik* mindegyik számjeggyel. E többszörösök között nincs a csupa 9-esből álló $(10^n - 1)$ pedig ez is többszörös, így $(n + 1)x \leq 10^n - 1$. Hasonlítsuk most az n-jegyűnek tekintett x szám 0-val és 9-cel kezdődő többszöröseinek számát. A 4.4. feladat megoldása után írt megjegyzés szerint az x, $2x$, …, nx többszörösök között legalább annyi kezdődik 9-essel, mint 0-val.

Ha van egyáltalán 9-es számjegy x-ben, akkor nx, mint a legnagyobb többszörös a ciklikus permutáltak között, biztos azzal kezdődik, így $(n + 1)x$-szel és $(10^n - 1)$-gyel együtt már legalább kettővel több többszöröse lenne x-nek a $(9 \cdot 10^{n-1}, 10^n)$ intervallumban, mint az ezzel egyenlő nagyságú $(0, 10^{n-1})$ intervallumban. Ez nem lehetséges, hiszen a $\{kx\}$ sorozatból valamely $10^n - 1$ hosszúságú intervallumba eső elemek száma majdnem egyértelműen meghatározott: ez az elemszám a $\frac{10^n-1}{x}$ tört értékét közrefogó két egész szám egyike vagy másika. Kettes eltérés nem lehetséges. Az ellentmondás csak a $(n + 1)x = 10^n - 1$ összefüggéssel oldható fel.

Ha nincs 9-es számjegy x-ben, akkor 0 sincs, így $n \leq 8$ (lásd a 4.4. feladat állítását), így csak az $n = 6$ esethez tartozó 142857 főnix számról lehet szó — lásd a 4.3. feladat a) részét —, arra pedig teljesül az állítás: $7 \cdot 142857 = 999999$. Ezzel a feladat állítását igazoltuk.

A 4.6. feladat megoldásai

A 4.6. a) mego.

Az osztási algoritmus során az éppen aktuális maradék után írjuk az osztandó következő jegyét, illetve 0-t, ha elfogytak a jegyek. Mivel az osztandónak csak véges sok jegye van így egy idő után a maradék után mindig 0-t írunk. Maradékból is csak véges sok van, így kétszer is elő fog fordulni ugyanaz a maradék. Mivel az osztó az algoritmus során állandó, így ugyanaz az osztási sorozat fog újra következni, amelyet a maradék kétszeri előfordulása között láttunk. Ez magyarázza a periodicitást.

Az is lehetséges, hogy a 0 maradék „ismétlődik”, ilyenkor az algoritmus valójában befejeződik, a tizedestört véges. A véges tizedes törtek értelem szerint a $\frac{k}{10^n}$ alakú törteknek felelnek meg, tehát azoknak, amelyeknek tovább nem egyszerűsíthető alakjában a nevező csak 2-es és 5-ös prímtényezőkkel bír.

A 4.6. b) mego.

Az a) feladatrészre adott gondolatmenetből kiderül, hogy a periódus hossza legfeljebb akkora, mint a lehetséges maradékok száma. De ha a tizedestört alak nem véges, akkor a 0 maradék nem fordul elő, azaz a periódus legfeljebb $(q - 1)$ hosszú a $\frac{p}{q}$ tört esetén. Nem állítjuk, hogy ilyen hosszű periódus minden q nevező esetén előfordul (ez nem is igaz), de itt tovább nem megyünk a vizsgálatokba.

A 4.6. c) mego.

A q-szerinti maradékok $\{0, 1, 2, \ldots, q - 1\}$ két diszjunkt halmazra oszthatók: az egyikbe tartoznak azok a maradékok, amelyek relatív prímek q-hoz, a másikba azok, amelyeknek 1-nél nagyobb közös osztójuk van q-val. A $\frac{p}{q}$ tört tizedestört alakjának kiszámítását adó algoritmus során végig csak az egyik csoportba tartozó maradékok fordulnak elő: ha p és q relatív prímek, akkor az osztási maradék is végig relatív prím lesz q-hoz, ha a d szám osztja p-t és q-t is, akkor az osztási algoritmusban előforduló összes maradékot is osztja. Ha q nem prím, akkor a lehetséges maradékok mindkét csoportjában $(q-1)$-nél kevesebb szám van, így a periódus hossza is kisebb lesz ennél.

A 4.6. d) mego.

Állítjuk, hogy az osztási algoritmusban különböző maradékok után nem következhet ugyanaz a maradék. Ha tehát $0 \leq m_1 < q$ és $0 \leq m_2 < q$ különböző maradékok, akkor $10 \cdot m_1$ és $10 \cdot m_2$ maradékai különbözők. Valóban, a maradékok azonossága azzal egyenértékű, hogy $10 \cdot m_1 - 10 \cdot m_2 = 10 \cdot (m_1 - m_2)$ osztható q-val, de $(10, q) = 1$ és $|m_1 - m_2| < q$, így nem teljesülhet ez az oszthatóság.

Állításunkból következik, hogy az osztási algoritmusban a maradékok sorozata „tiszta szakaszos”, azaz az első maradék – nevezetesen p – fog először megismétlődni. Valóban, állításunk szerint, ha az osztási algoritmusban két maradék egyenlő, akkor az algoritmus eggyel korábbi lépéseiben is egyenlő maradékok voltak, ha volt egyáltalán előző lépés.

A $0 < p < q$ „kezdeti feltétel” mellett az algoritmusban végig valamilyen sorrendben az $1 \cdot 10$, $2 \cdot 10$, …, $(q-1) \cdot 10$ számokat osztjuk, így a maradék egyértelműen meghatározza a hányadost, azaz a tizedesjegyet is. Így a tizedesvessző után kezdődik a jegyek periódusa.

A 4.6. e) mego.

Ha az $\frac{1}{n+1}$ tört tizedestört alakjának periódusa n hosszúságú, akkor az algoritmus során az 1, 2, …, $(n-1)$ maradékok mindegyike pontosan egyszer fordul elő egy periódusban. A $\frac{k}{n+1}$ tört tizedestört alakjának kiszámításakor alkalmazhatjuk az $\frac{1}{n+1}$-re vonatkozó algoritmust, csak épp nem a legelején, hanem a k maradék megjelenésekor kell belépni az eljárásba. Így ugyanolyan hosszú periódust fogunk kapni, ugyanazokkal a maradékokkal és tizedesjegyekkel, csak épp máshonnan kezdve. Tehát

$$\frac{k}{n+1} = 0,\overline{x_l x_{l-1} \ldots x_2 x_1 x_n \ldots x_{l+1}}, \tag{12.32}$$

ahol az l index értéke k értékétől függ. A tizedestört alak periódusából adódó $y_k = \overline{x_l x_{l-1} \ldots x_2 x_1 x_n \ldots x_{l+1}}$ szám $x = \overline{x_n x_{n-1} \ldots x_2 x_1}$ ciklikus permutációja. Mivel

$$\frac{1}{n+1} = 0,\overline{x_n x_{n-1} \ldots x_2 x_1} = x \cdot (10^{-n} + 10^{-2n} + 10^{-2n} + \ldots),$$

és

$$\frac{k}{n+1} = 0,\overline{x_l x_{l-1} \ldots x_2 x_1 x_n \ldots x_{l+1}} = y_k \cdot (10^{-n} + 10^{-2n} + 10^{-2n} + \ldots),$$

és

$$k \cdot \frac{1}{n+1} = \frac{k}{n+1},$$

így

$$k \cdot x = y_k$$

valahányszor k az n-nél nem nagyobb pozitív egész szám. Ez épp azt jelenti, hogy az x szám n-teljes főnix szám.

A 4.6. f) mego.

Az 4.5. feladat állítása szerint az $x = \overline{x_n x_{n-1} \dots x_2 x_1}$ n-teljes főnix számra teljesül az

$$\overline{x_n x_{n-1} \dots x_2 x_1} = \frac{10^n - 1}{n+1} \tag{12.33}$$

összefüggés. Itt $10^n - 1$ a csupa 9 jeggyel leírható n-jegyű szám, így

$$(n+1) \cdot 0,\dot{x}_n x_{n-1} \dots x_2 \dot{x}_1 = 0,\dot{9} = 1. \tag{12.34}$$

A 4.7. feladat megoldásai

A 4.7. a) mego.

A 12.9 ábrán látható az osztási algoritmus.

```
1:13  =  0,076923          2:13  =  0,153846
10                          20
10 0                         7 0
   9 0                         5 0
   1 20                        1 10
      3 0                          6 0
        4 0                          8 0
          10                           20
```

12.9. ábra.

Itt meg is állhatunk, láthatjuk, hogy a vizsgálandó törtek két csoportba oszthatók:

I. $\frac{1}{13}, \frac{3}{13}, \frac{4}{13}, \frac{9}{13}, \frac{10}{13}, \frac{12}{13},$ II. $\frac{2}{13}, \frac{5}{13}, \frac{6}{13}, \frac{7}{13}, \frac{8}{13}, \frac{11}{13},$

és az azonos csoportba tartozó törtek tizedestört alakjainak periódusai egymásból ciklikus permutációval nyerhetők. A feladat állítását ezzel $n = 13$ esetén be is bizonyítottuk. A szóbajövő $n - 1 = 12$ törtet két azonos elemszámú csoportra osztottuk, ráadásul ez az elemszám épp a tekintetbe veendő periódusok hosszával egyezik meg.

Miért egyezik meg egymással az azonos nevezőjű törtek periódusa? Vegyük észre, hogy a fenti csoportokban található törtek számlálója rendre

I.

$$1 \equiv 10^0, \qquad 10 \equiv 10^1, \qquad 9 \equiv 10^2, \qquad 12 \equiv 10^3, \qquad 3 \equiv 10^4, \qquad 4 \equiv 10^5;$$

II.

$$2 \equiv 2 \cdot 10^0, \qquad 7 \equiv 2 \cdot 10^1, \qquad 5 \equiv 2 \cdot 10^2, \qquad 11 \equiv 2 \cdot 10^3, \qquad 6 \equiv 2 \cdot 10^4, \qquad 8 \equiv 2 \cdot 10^5$$

$$\pmod{13}.$$

Logikus, hogy az elemek száma a két csoportban egyenlő, hiszen ez az elemszám a 10 rendje $\pmod{13}$. Valóban, a periódus azért fejeződik be, mert $10^6 \equiv 1 \pmod{13}$.

A 4.7. b), c) mego.

Az általános esetben tekintsük a $\phi(n)$ elemű $H = \{k|(k,n) = 1, 0 < k < n\}$ halmazt. A $\frac{k}{n}$ alakú törtek ($k \in H$) tizedestört alakjának periódusa k-tól független állandó, hiszen[1] ez a periódus épp $o_{10}(n)$. Ezek a törtek diszjunkt részhalmazokra bontják fel a H halmazt: k és l pontosan akkor tartozik egy részhalmazba, ha a $\frac{k}{n}$ tizedestört alakját kiszámító algoritmus során előjön az l maradék. Ilyenkor természetesen az $\frac{l}{n}$ tizedestört alakját kiszámító algoritmus során előjön a k maradék, hiszen ezek periodikus eljárások. Azt kaptuk, hogy a H halmaz π elemű diszjunkt halmazok uniója, tehát $\pi|\phi(n)$.

A b) feladatrész speciális esetet jelenten, hiszen $\phi(n) = n - 1$, ha n prím.

A 4.8. feladat megoldása

Láttuk, hogy pontosan akkor van n-teljes főnixszám, ha $\frac{1}{n+1}$ tizedestört alakjának periódusa n hosszúságú (lásd az 4.6. feladatot). Azt is láttuk, hogy ez csak abban az esetben lehetséges, ha $(n+1)$ prím.

A tizedestört alak kiszámítását azzal kezdjük, hogy az 1-et megszorozzuk tízzel, majd vesszük az így kapott 10-es szám $(n+1)$-es maradékát, majd ezen maradék tízszeresének $(n+1)$-es maradékát, ... Ezt egészen addig csináljuk, míg a maradék 1 lesz. Az eljárás során tehát kiszámoljuk a 10 hatványainak értékét modulo $(n+1)$. Ezek szerint pontosan akkor van n-teljes főnix szám, ha az $10^k \equiv 1 \pmod{n+1}$ összefüggés $0 < k < n$ esetén nem teljesül, de $k = n$-re teljesül. Ez épp a jelen feladat állítása, amit tehát beláttunk.

I. megjegyzés a 4.8. feladathoz

A leírt gondolatmenetből az is látható, hogy az $\frac{1}{n}$ tört tizedestört alakja periódusának hossza a 10 rendje[2] modulo n, azaz $o_{10}(n)$.

[1] lásd a 4.8. feladat megoldását

[2] lásd a lexikont

II. megjegyzés a 4.8. feladathoz

Egyelőre nem lehet biztosan tudni, hogy végtelen sok olyan p prímszám van-e, amelyre 10 primitív gyök $\pmod{p}$. Ezért azt sem tudjuk, hogy véges vagy végtelen sok főnix szám van. Emil Artin sejtése szerint ha az a egész számnak nincs 1-től különböző négyzetszám osztója (pld $a = 10$ ilyen), akkor az első n prímszám közül azoknak az aránya, amelyeknél a 10 primitív gyök egy rögzített – a-tól független – konstanshoz, az Artin-konstanshoz tart, amint n tart a végtelenhez. Mivel a prímek száma végtelen, így a sejtésből következik, hogy a főnix számok száma is végtelen. Az Artin konstans az alábbi végtelen tényezős szorzattal is kifejezhető:

$$\prod_{p \text{ prím}} \left(1 - \frac{1}{p \cdot (p-1)}\right) = 0,3739558136\ldots$$

ajánló a 4.8. feladathoz A témával kapcsolatban lásd még a Wikipeda és Mathworld internetes lexikonokat az „Artin conjecture” és a „cyclic number” címszavaknál.

A 4.9. feladat megoldásai

A 4.9. a), b), c), d) mego.

a) és d) 3-mal és 9-cel oszthatót nyilván végtelen sokat tartalmaz a sorozat, hiszen a számjegyek összege minden 3. esetben osztható 3-mal és minden 9. esetben (amikor 9 többszöröse számú 2-es szerepel a számban) osztható 9-cel.

b) 111-gyel osztható is végtelen sok szerepel a sorozatban (pl. $222 = 2 \cdot 111$, $222\,222 = 2 \cdot 111\,111 = 2 \cdot 111 \cdot 1001$ stb.)

c) A 7-tel (és más számokkal való) oszthatósághoz figyeljük meg a sorozat egymást követő tagjainak 7-es maradékát:

2-esek száma:	1	2	3	4	5	6	7	8	...
7-es maradéka:	2	1	5	3	4	0	2	1	...

Ha találtunk egy héttel osztható elemet, onnan az elejétől ismétlődnek a maradékok. Valóban, a sorozatot az $a_1 = 2$, $a_{n+1} = 10a_n + 2$ képlettel is értelmezhetjük és ha $7|a_n$, akkor modulo 7 számolva – amikor $a_n \equiv 0 \pmod{7}$ – újrakezdődik a sorozat. Tehát, ha van egy héttel osztható, akkor végtelen sok is van.

A 4.9. e) fel. I. megoldása

Vegyük észre, hogy az n darab 2-esből álló szám a $2 \cdot \frac{10^n-1}{9}$. Az 59 prímszám, így a „kis Fermat tétel” miatt

$$10^{58} \equiv 1 \pmod{59}.$$

Ennek hatványozásával kapjuk, hogy

$$10^{58k} \equiv 1 \pmod{59},$$

bármely k pozitív egész szám esetén. Tehát $n = 58k$ esetén $59|10^n - 1$ és így $59|2 \cdot \frac{10^n-1}{9}$.

A 4.9. e) fel. II. megoldása

Az $a_1 = 2$, $a_2 = 22$, $a_3 = 222$, ... végtelen sorozat tagjai között vannak olyanok, amelyek ugyanazt a maradékot adják 59-cel osztva. Ha pld $a_n \equiv a_k \pmod{59}$ és $n > k$, akkor ezek különbsége

$$22\ldots200\ldots0 = 22\ldots2 \cdot 10^m = a_{n-k}10^k$$

alakú 59-cel osztható szám. Mivel $(59, 10) = 1$, így $(59, 10^m) = 1$ és ezért $59|a_{n-k}$. Mivel a sorozat végtelen sok tagja között ugyanaz a maradék végtelen sokszor előfordul, ezért itt $(n-k)$ értéke akár milyen nagy, tehát végtelen sokféle is lehet. A sorozatban tehát végtelen sok 59-cel osztható szám van.

A 4.9. f) mego.

Az 4.9. e), feladatrészre adott 2. bizonyítás minden olyan szám esetén alkalmazható, amely relatív prím a 10-hez. 5-tel osztható számnak nyilvánvalóan nincs többese a sorozatban és 4-gyel oszthatónak sincs. Végül könnyen módosítható a gondolatmenet, hogy lássuk, minden $2s$ alakú számnak is van végtelen sok többese a sorozatban, ha $(s, 10) = 1$.

A 4.10. feladat megoldása

a) Tekintsük a következő $n+1$ számot $1, 11, 111, \ldots \overline{11\ldots1}$ tehát az utolsó számban $n+1$ darab $1-es$ van). E számok között tehát van két olyan szám, amelyek $n-$nel osztva azonos maradékot adnak. Ezek különbsége $n-$nel osztható és ${}_{10}\overline{11\ldots10\ldots0}$ alakú (esetleg nincs is benne 0).

b) Az a) feladat miatt van olyan k, hogy $p \cdot k = \overline{11\ldots1} \cdot 10^k$, $(k = 0, 1, \ldots$. Így

$$p|\overline{11\ldots1} \cdot 10^k$$

és mivel $p > 5$ prímszám, ezért

$$p|\overline{11\ldots1}.$$

A 4.11. feladat megoldása

Tekintsük a 3^s $(s = 0, 1, \dots)$ sorozat osztási maradékait 10^{k+1} hatvánnyal osztva. Ebben a sorozatban előfordul két azonos (nem nulla) maradék. A nagyobbik és a kisebbik hányadosa is 3 hatvány és 1 maradékot ad, ami azt jelenti, hogy $B10^{k+1} + 1$ alakú. Ez a tizes számrendszerben éppen az, amit kerestünk.

A 4.12. feladat megoldása

Tegyük fel, hogy egy különbség négyzetszám. A 0 nyilván ilyen. Ha két különböző $\mathcal{F}-$beli szám különbségét vesszük, akkor az

$$10^s \cdot f$$

alakú, ahol $f \in \mathcal{F}$.

Ha s páros, akkor $f-$nek is négyzetszámnak kell lennie, ám az ilyen számok $\equiv 3(mod 4)$, az $f = 1 - et$ kivéve. Ha s páratlan, akkor $10f$ lenne négyzetszám, ám ez $\equiv 2(mod 4)$, ami egy négyzetszám nem lehet.

Összefoglalva: $\mathcal{F}$ különbséghalmazában csak a 100 hatványai lesznek a négyzetszámok.

A 4.13. feladat megoldása

$$2^{341} = \left(2^{10}\right)^{34} \cdot 2.$$

Ismeretes, hogy $2^{10} = 1024$ és 1024 1 maradékot ad 341−gyel osztva. Így 2^{341} valóban 2−t ad 341−gyel osztva és $341 = 11 \cdot 13$.

$1819 - ig$ nem volt ismert, hogy a $2^n \equiv 2(\mod n)$ feltételből következik-e, hogy n prím. A fenti ellenpéldát Sarrus találta az idézett évben.

13. fejezet

Kombinatorika feladatok megoldása

13.1. A szita módszer – feladatok megoldása

A 5.2. feladat megoldása

Venn diagramon ábrázoljuk az első, a második és a harmadik feladatot megoldók halmazait. Az ábrába nem a versenyzőket, hanem azok számát írjuk. A megadott információkat alább átstruktúráltuk, hogy jobban tudjuk követni a diagram kitöltését.

a) 2 versenyző volt, aki mindhárom feladatot megoldotta (lásd a 13.1 ábrát).

b) A harmadik feladatot megoldók közül 10-zel többen oldották meg a másodikat, mint az elsőt.

c) Az elsőt és a másodikat is megoldók 10-zel többen voltak, mint akik csak a harmadikat oldották meg (lásd a 13.2 ábrát).

d) Aki megoldotta az elsőt és a harmadikat is, az a másodikat is megoldotta.

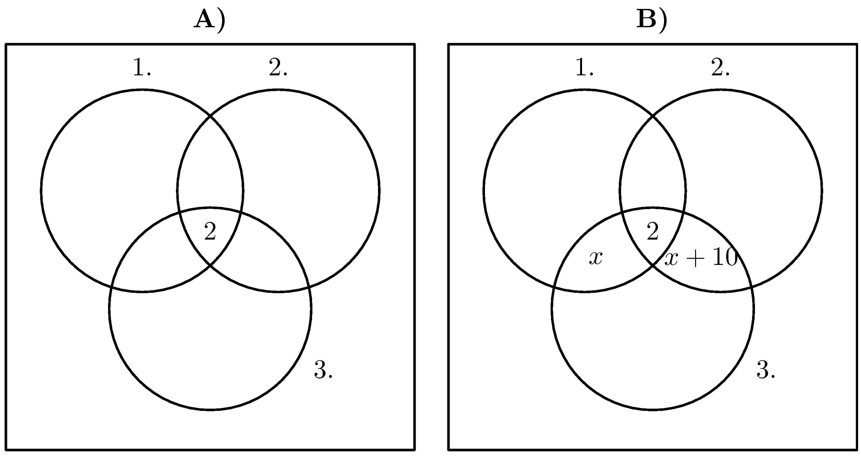
e) Akik csak az első vagy csak a második feladatot oldották meg, összesen 14-en voltak (lásd a 13.3 ábrát).

f) 56 versenyző oldott meg legalább egy feladatot.

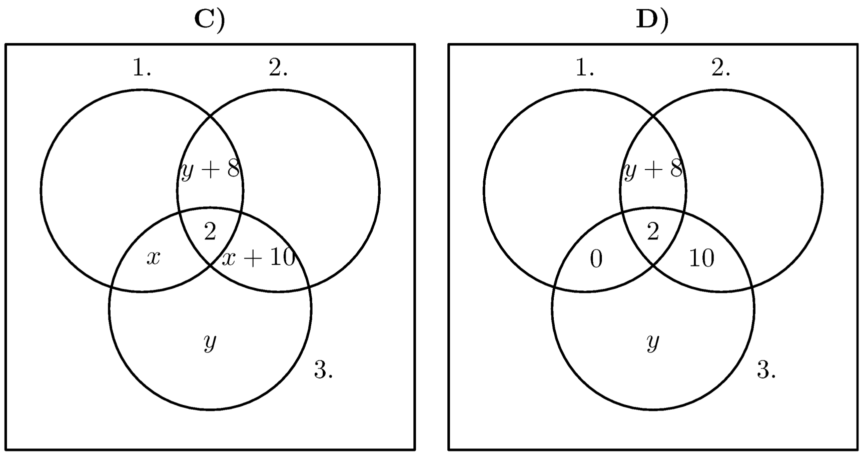
Tehát $11 + 10 + 2 = 23$ diák oldotta meg a 3. feladatot. A feladat feltételei kielégíthetőek, ha a_1 és a_2 helyébe tetszőleges olyan nemnegatív számokat írunk, amelyek összege 14, akkor minden előírás megvalósul. Érdekes, hogy így az 1. és a 2. feladat megoldóinak száma nem határozható meg teljes biztonsággal, míg a 3. feladat megoldóinak száma rögzített.

A 5.3. feladat megoldása

Összesen $60 + 40 + 30 = 130$ „igen” válasz érkezett. A lovagok egy-egy, a lókötők két-két „igen” választ adnak, tehát az igen válaszok száma annyival több a létszámnál, amennyi a lókötők száma. Így 30 lókötő van és 70 lovag.

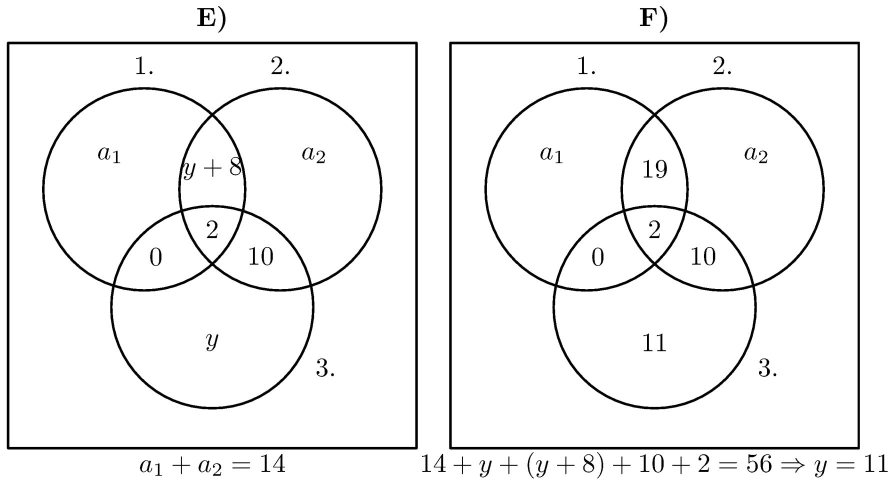


13.1. ábra.



13.2. ábra.

Ez lehetséges is, pl ha lovagok közül 30 Napimádó és 40 Holdimádó van, a 30 lókötő pedig mind Holdimádó, akkor épp a fenti számban kapjuk a válaszokat. Persze sok más megfelelő eloszlás is van.



13.3. ábra.

A 5.4. feladat megoldása

A 5.4. fel. I. megoldása

Nincs értelme 0%-nál kevesebb megoldónak. A legrosszabb esetben is csak senki oldotta meg mind a három feladatot, az nem lehet, hogy senkinél kevesebb. Tehát a versenyzők legalább 0%-a oldotta meg mindhárom feladatot. Mivel a legrosszabb esetet néztük, így ez a feladat eredménye.:-)

A 5.4. fel. II. megoldása

A harmadik feladatot megoldók és a második feladatot megoldók százalékos arányának összege 155%. A többletet az okozza, hogy vannak olyan versenyzők, akik mind a két feladatot megoldották. Ezek százalékos aránya legalább 55%.

A harmadik és az első feladatot ugyanígy vizsgálhatjuk együtt. Az összeg itt $75+85 = 160\%$. A többlet itt 60%, legalább ennyien vannak, akik az első és a harmadik feladatot is megoldották.

Adjuk össze azok arányát (az arány alsó becslését), akik a harmadik és a második illetve akik a harmadik és az első feladatot is megoldották: $55 + 60 = 115\%$. A 100% fölötti rész abból adódik, hogy vannak, akik mind a három feladatot megoldották. Ezek aránya tehát legalább 15%.

A elmondottakból világos, hogy a legrosszabb esetet néztük, tehát a feladat kérdésére a válasz: *a versenyzők legalább* 15%*-a oldotta meg mindhárom feladatot.*

A 5.4. fel. III. megoldása

Ha az előző megoldás mintájára az első és második, majd az első és harmadik feladat megoldóit vizsgáljuk, akkor rendre az alábbi eredményeket kapjuk:

$85 + 80 = 165$, tehát legalább 65% oldotta meg az első és második feladatot is, $85+75 = 160$, tehát legalább 60% oldotta meg az első és harmadik feladatot is, $65+60 = 125$ tehát legalább 25% megoldotta mind a három feladatot.

Ez aztán végképp a legrosszabb eset.:-)

A 5.4. fel. IV. megoldása

(*A diákok zöme*)

A II. megoldás elején láttuk, hogy azok aránya, akik a második és a harmadik feladatot is megoldották, legalább 55%. Vessük ezt össze azzal, hogy az első feladatot megoldók aránya 85%. A két érték összege, $55\% + 85\% = 140\%$ azért lehet több, mint 100%, mert vannak, akik mindhárom feladatot megoldották. Ezek aránya tehát legalább 40%.

Nyilvánvaló, hogy ez a legrosszabb eset, hiszen az előzőeknél is rosszabb.:-)

A 5.4. fel. V. megoldása

A három adott érték összege: $85\%+80\%+75\% = 240\%$. Ebben nincsenek beleszámítva azok, akik egy feladatot se oldottak meg. Mindenki más legalább egyszer van beszámítva, ez a résztvevők maximum 100%-a. Azok és csak azok, akik legalább két feladatot megoldottak még legalább egyszer bele vannak számítva, ez megint a résztvevők maximum 100%. Az eddig összesen maximum 200%. Azok és csak azok, akik mind a három feladatot megoldották ezeken kívül még egyszer számítanak az összegben, ők adják a 200%-on felüli részt, a 40%-ot.

Tehát legalább 40% azok aránya, akik mind a három feladatot megoldották. Ez a legrosszabb eset, az előző megoldás is ezt mutatja.:)

A 5.4. fel. VI. megoldása

Lehetséges, hogy a diákok 75%-a megoldotta mind a három feladatot, és volt még 10%, aki csak az elsőt illetve 5%, aki csak a másodikat oldotta meg. Így ki is jönnek az arányok és ez az eset az összes eddiginél nyilvánvalóan rosszabb. A feladat kérdésére a válasz: 75%.

Megjegyzés a 5.4. feladathoz

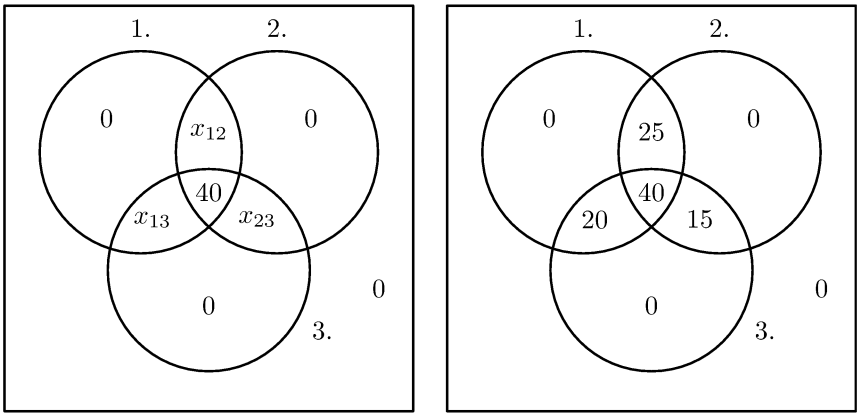
A feladat kérdése a következőképpen értendő: vélhetően sokféleképpen előfordulhat az, hogy az első, második, harmadik feladat megoldóinak aránya 85%, 80% illetve 75%. Mindegyik esetben megnézhetjük a mindhárom feladatot megoldók százalékos arányát. Az összes megvalósítható esetet figyelembe véve mennyi ennek az aránynak a minimuma. Másképp: melyik az a legnagyobb érték, amelyről bizton állítható, hogy akárhogy is történt (de a feladat feltételeinek megfelelően), a mindhárom feladatot megoldók aránya legalább akkora mint ez az érték.

A VI. megoldás nem ezzel foglalkozik, hanem azzal, hogy az összes megvalósítható esetet figyelembe véve mennyi a mindhárom feladatot megoldók arányának maximuma.

Az I-V. megoldásokban hiányzik annak igazolása, hogy valóban a minimumról van szó, mindegyik egy jó alsó korlátot ad a minimumra. A „legrosszab eset”-re való hivatkozás félrevezető, mert a „legrosszabb” fogalma nincs tisztázva.

A 5.4. fel. VII. megoldása

Megmutatjuk, hogy a feladat kérdésére a 40% a helyes válasz, a IV., V. megoldások eredménye éles. Lehetséges, hogy a résztvevőknek csak a 40%-a oldotta meg mind a három példát. Kizárhatjuk, hogy az olimpikon, ha helyesen gondolkodik, akkor nagyobb arányt garantáló bizonyítással térjen vissza.



13.4. ábra.

Az V. megoldásból az is világos, hogy a 40%-os határ csak akkor érhető el, ha nincs olyan vesenyző, aki pontosan egy feladatot oldott meg. Jelölje x_{ij} $(1 \leq i < j <\leq 3)$ azok arányát százalékban, akik pontosan két feladatot oldottak meg, nevezetesen az i-ediket és a j-ediket (lásd a 13.4 ábrát). Ha valóban 40% a mindhárom feladatot megoldók száma, akkor az alábbi egyenletrendszert írhatjuk fel:

$$\left.\begin{array}{rl} x_{12}+x_{13}+40= & 85 \\ x_{12}+x_{23}+40= & 80 \\ x_{13}+x_{23}+40= & 75 \end{array}\right\} , \iff \left.\begin{array}{rl} x_{12}+x_{13}= & 45 \\ x_{12}+x_{23}= & 40 \\ x_{13}+x_{23}= & 35 \end{array}\right\} ,$$

amiből a már látott módon fejezhetők ki az ismeretlenek:

$$x_{12}=25, \qquad x_{13}=20, \qquad x_{23}=15.$$

Ezekkel a százalékos arányokkal megvalósíthatók a feladat feltételei. Tehát legalább a résztvevők 40% megoldotta mind a három feladatot és lehetséges, hogy ennél többen nem oldották meg mind a három példát.

A 5.4. fel. VIII. megoldása

A kérdés így szólt: „Legalább hányan oldhatták meg mindhárom feladatot?”. Ez nem százalékos arányra vonatkozik, hanem darabszámra, azaz főre. A VII. megoldásban kijött százalékos arányok: 15%, 20%, 25%, 40%, ezek mindegyikének egész fő felel meg, tehát legnagyobb közös osztójuknak az 5%-nak is egész szám felel meg. A legkisebb megoldást az 5% = 1 fő esetén kapjunk, ilyenkor a mindhárom feladatot megoldó diákok száma 8. Tehát legalább 8-an oldották meg mind a három példát.

A 5.4. fel. IX. megoldása

A VIII. megoldásból kiderül, hogy nem a mindhárom feladatot megoldó versenyzők százalékos arányának minimumát keressük, hanem a darabszám minimumát.

Ez nagy különbség. Lehet, hogy a százalékos arányban nem optimális megoldás adja darabszámra az optimumot. Első megközelítésben nem elképzelhetetlen, hogy 50% a mindhárom feladatot megoldók aránya, de minden más előforduló arány is a 10% többese, így a 10% = 1 fő helyettesítés a mindhárom feladatot megoldó diákok számára 5-öt ad, ami kisebb az előbb kapott 8-nál.

Mégsem fordulhat elő ez az eset, mert a feladat szövegében említett 85%, 80%, 75% mind egész értéknek felel meg, tehát az 5% is egész, tehát legalább 1. Ezzel a kiegészítéssel a VIII. feladat megoldása helyes.

A 5.12. feladat megoldásai

A 5.12. fel. I. megoldása

(*Hiányos*)

Jelölje k az egy kör által lefedett területet, l a kettő által, m a három által, n a négy által lefedett területet. Ekkor a négy kör összege $k+2l+3m+4n$. Ez akkor lesz a legnagyobb, ha n a legnagyobb szám, m a következők összege,és így tovább. Az így kapott maximális összeg $4\cdot 9+3\cdot(8+7+6)+2\cdot(5+4+3)+(2+1+0)=126$ Ezt osszuk el 4-gyel, hogy megkapjuk az egy körre jutó összeget! Így $31,5$-t kapunk, ennél tehát nem lehet nagyobb a körösszeg, hanem legfeljebb csak 31 lehet.

Megjegyzés a 5.12. fel. I. megoldásához

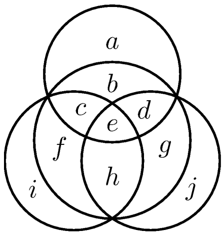
Fent nem láttuk be, hogy a 31 elérhető, ezért a megoldás hiányos. És valóban, alább látni fogjuk, hogy a maximum ennél kisebb.

A 5.12. fel. II. megoldása

Jelölje a körök egyenlő összegét x, az egyes tartományokba írt számokat pedig a 13.5. ábrán a megfelelő helyre írt betű.

Összeadom körönként azokat a területeket, amik rajta kívül esnek, ez $45-x$ ($45=0+1+2+3+4+5+6+7+8+9$) Ha ezeket az (egyenlő) számokat sikerül csökkenteni, akkor nő a körökön belüli összeg.

$45-x=i+a+j=i+f+c+d+a=i+f+h+g+j=a+b+d+g+j$ Innen leolvashatjuk az alábbiakat: $i=b+d+g$ $a=f+h+g$ és $j=f+c+d$. Mivel azt szeretnénk, hogy $45-x$ minimális legyen ezért az $i+a+j=(b+d+g)+(f+h+g)+(f+c+d)$ összeget akarjuk minimalizálni. Mivel ebben az összegben g,f,d szerepel kétszer, így ők lesznek a legkisebbek.



13.5. ábra.

Legyen $g;f;d=0;1;2$ és $b;h;c=3;4;5$ Így $i+a+j\geq 6+7+8$ De ekkor $i+a+j\geq(b+d+g)+(f+h+g)+(f+c+d)$ vagyis számokkal behejttesítve: $6+7+8>\sum_{k=0}^{5}n+\sum_{k=0}^{2}n$ azaz $6+7+8>2\cdot 0+2\cdot 1+2\cdot 2+3+4+5$ ami egyszerűbben írva: $21>18$

Ha $b; h; c$-t eggyel növeljük, akkor $i+a+j$ eggyel csökken. Ekkor $20 > 19$ tehát még ez sem jó. $45 - x$-et min. 2-vel kell csökkenteni. Erre a következő levezetésnél látunk majd megoldásokat.

A 5.12. fel. III. megoldása

Használjuk az előző megoldás ábrájához tartozó jelöléseket!

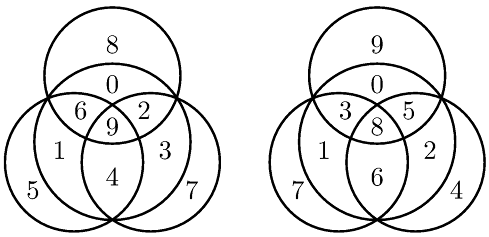
Az egyes körökbe írt számok:

$$\begin{aligned} x =& \quad a+b+c+d+e \\ x =& \quad c+e+f+h+i \\ x =& \quad e+d+h+g+j \\ x =& \quad b+c+d+e+f+g+h. \end{aligned}$$

Vonjuk ki az első három sor összegéből az utolsót!

$$2x = a+c+d+2e+h+i+j.$$

Így $2x$ értéke nem haladhatja meg $2\cdot 9+8+7+6+5+4+3 = 51$ értékét, azaz x – lévén egész szám – legfeljebb 25. Ez az érték el is érhető, a 13.6 ábrán két példát mutatunk rá.



13.6. ábra.

A 5.12. feladat megoldásai

A 5.12. fel. I. megoldása

Először bebizonyítjuk, hogy a sorozatnak nem lehet 17 tagja. Vegyünk az első 14 tagot a sorozatban! Ezek összege negatív, hiszen az első és a második 7 tag összege különkülön negatív. Bármely 11 szomszédos tag összege pedig pozitív, tehát az első 11 tagé is, így az utolsó három tag (12.-14.) összege negatív. A 14-ből azonban az utolsó 11 tag összege is pozitív, így a 4.-11. tartó 8 tag összege pozitív. Mivel minden szomszédos 7 tag összege negatív, ezért a 4.-10. tartó tagok összege negatív, a 11. tag tehát biztosan pozitív. Ugyanezt megcsinálhatjuk nem az első helyről kezdve, hanem a 2.-tól (minden tag helyett az eggyel utána lévőt mondjuk most), így ha van 17 tagja a sorozatnak, akkor 2.,3.,4. tagtól kezdődve is van még 14 tag, tehát sorban a 12., 13. és 14. tag is pozitív. Ez azonban ellentmondás, mert tudjuk, hogy a 12.-14. tartó 3 tag összege negatív.

Most mutassuk meg, hogy 16 tagból állhat a sorozat! Legyen minden pozitív tag 1, minden negatív tag pedig pedig $-(2,5+\frac{1}{1000})$. Minden egymást követő 7 tag közt legalább 2 negatív kell legyen és minden egymást követő 11 tag közt legalább 8 pozitív kell legyen. Ezt meg is csinálhatjuk, ha a tagok: $+, +, -, +, +, +, -, +, +, -, +, +, +, -, +, +$.

A 5.20. fel. II. megoldása

Nem lehet 17 tagja. Ennek igazolásához írjuk fel egy táblázat első sorába sorba az 1., 2., ..., 7. elemeket, a 2.-ba a 2., 3, ..., 8. elemeket, stb., végül az utolsóba a 11., 12., ..., 17. elemeket. Ekkor minden sorösszeg negatív, minden oszlopösszeg pozitív, ez lehetetlen.

16 tag lehetséges, jó sorozat pld az alábbi:

$$1; 1; -2,6; 1; 1; 1; -2,6; 1; 1; -2,6; 1; 1; 1; -2,6; 1; 1.$$

13.2. Feladatok a sakktáblán

A 5.1. feladat megoldásai

A 5.1. a) mego.

Bejárható. A 13.7 ábrán követhető az ugrássorozat: 0, 1, ..., 24 jelöli a mezőket, amelyeken a ló egymás után végigugrál.

6	11	16	21	4
17	24	5	10	15
12	7	22	3	20
23	18	1	14	9
0	13	8	19	2

13.7. ábra.

A 5.1. b) fel. I. megoldása

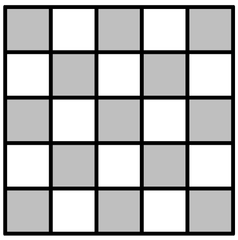
Körbeéréssel nem járható be. A sarkokról csak a A 5.1. a) feladat megoldásának 13.7 ábráján látható sötétszürke mezőkre léphetünk, illetve csak onnan léphetünk a sarkokra. A sötétszürke mezőkre így egy-egy sarokról kell lépni és egy-egy sarokra kell ellépni róluk. Így a sarkokon átmenő körút szükségképpen egy nyolc mezőből álló körré álló össze, amely a 4 sarokból és a fenti négy sötétszürke mezőből áll. Ez a körút nem fedi le az össze mezőt, tehát nincs megoldás.

A 5.1. b) fel. II. megoldása

Nem járható be.

Tekintsük a sakktábla 13.8. ábrán látható szokásos színezését!

Annak a mezőnek a színe, amelyre a ló ráugrik minden lépésben megváltozik. Mivel páratlan sok mező van, az a) feladatrészben bármely eljárásnal a kezdő mező (a fenti ábrán 0) és a befejező mező (fent 24) színe mindig azonos, így nem lehet visszaugrani a kezdőmezőre.



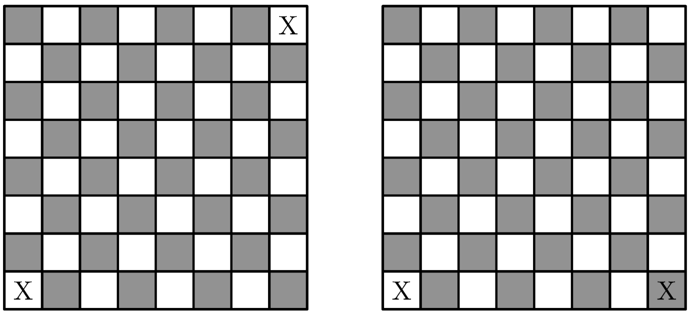
13.8. ábra.

A 5.2. feladat megoldása

Használjuk a sakktábla színezését (lásd a 13.9 ábrát)!

Ha két átellenes sarkot vágunk le, akkor két azonos színű mezőt hagyunk ki, így 30 marad az egyik színből és 32 a másikból. Egy 1×2-es dominó által lefedett két mező mindig különböző színű, tehát az egyik fehér, a másik fekete. Így a dominók ugyanannyi fehér és fekete mezőt tudnak lefedni, 30-at az egyik színből, 32-at a másikból nem tudnak. Így ebben az esetben nincs lefedés.

Ha két szomszédos sarkot vágunk le, akkor a fenti kizárás nem működik, ezek különböző színű mezők. Most lefedés is van. Ha pl a két sarok azonos sorban van, akkor fedjünk soronként! A teljes sorokban nyolc mező van, azeket lefedi nyolc dominó, a csonka sorban csak hat szomszédos mező van, ehhez elég három dominó.



13.9. ábra.

előzetes megjegyzés a 5.3. feladathoz
A feladat úgy értendő, hogy akárki, akármilyen kellemetlen módon is jelöl ki 40 kis négyzetet ki kell(ene) választani belőle 10-et, amelyeknek nincs közös pontja.

A 5.3. feladat megoldása

Színezzük a végtelen négyzetrácsot négy színnel a 13.10 ábrán látható módon!

3	4	3	4	3	4	3	4
1	2	1	2	1	2	1	2
3	4	3	4	3	4	3	4
1	2	1	2	1	2	1	2
3	4	3	4	3	4	3	4
1	2	1	2	1	2	1	2
3	4	3	4	3	4	3	4
1	2	1	2	1	2	1	2

13.10. ábra.

Az azonos színű mezőknek nincs közös pontja. A 40 négyzet közül lesz 10, amelyek azonos színűek, tehát annak a 10 mezőnek sem lesz közös pontja. A feladat kérdésére a válasz: „Igaz”, mindig kiválasztható.

A 5.4. feladat megoldásai

A 5.4. a) mego.

8-nál több bástyát nyilván nem lehet felrakni, hiszen minden sorba legfeljebb 1-et rakhatunk. 8-at fel lehet, pl. az egyik átlóba.

Megjegyzés a 5.4. a) feladathoz

Kérdés lehet az is, hogy a 8 bástyát hányféleképp lehet felrakni. Tanulságos lehet a különböző gondolatmenetek összehasonlítása. Ha mind egyformák, akkor 8!-féleképp, ha mind különbözőek, akkor $8!^2$-féleképp.

A 5.4. b) mego.

14 futót fel tudunk rakni pl. úgy, hogy az 1. sorba 8-at teszünk, a 8. sorba hatot úgy, hogy a két szélső mezőt üresen hagyjuk. Ennél többet nem lehet, hiszen ha az egyik átlóval párhuzamos egyeneseket tekintjük, ezekből 15 van, de magának az átlónak nem tehetünk mindkét végpontjára.

A 5.4. c) mego.

Sokan azt hiszik, hogy 24 lovat lehet így felrakni (pl. úgy, hogy az 1., a 4. és a 7. sort telerakjuk. Valójában 32 ló is elhelyezhető, ha pl. az összes fekete mezőre rakunk (hiszen a ló mindig ellenkező színű mezőre üt).

Tanulságos példa arra, hogy abból, hogy egy rögzített felrakás esetén nem tudunk még egy figurát felrakni, nem következik, hogy – másképp elkezdve – nem is lehet többet.

32-nél azonban már nem lehet többet. Ahhoz hogy ezt belássuk, tegyük fel, hogy valaki azt állítja, hogy felrakott legalább 33-at. Ekkor volna olyan fele a sakktáblának, melyen legalább 17, olyan negyede, melyen legalább 9 és olyan nyolcada, amelyen legalább 5 ló van. Ez azonban lehetetlen, a 2×4-es téglalapon minden ló pontosan egy másik mezőt üt.

Egy másik gondolatmenet a A 5.1. a) feladat megoldására épül. Ha azt a példát megoldottuk 8×8-as táblára is, tehát tudjuk, hogy a lóval bejárható a sakktábla, akkor azt is tudjuk, hogy a körbemenéskor csak minden második mezőn lehet ló, tehát maximum 32 lehet a táblán.

A 5.4. d) mego.

16 királyt könnyű felrakni, többet nem lehet (az előző gondolatmenethez hasonlóan látható be).

A 5.4. e) mego.

8-nál többet nyilván nem lehet, némi ügyességgel 8-at igen.

A 5.5. feladat megoldásai

A 5.5. a) mego.

8 a minimum. Ha kevesebb bástyát helyeztünk el, akkor kimaradt még sor és oszlop is, azok kereszteződésében elhelyezhetünk még egyet.

A 5.5. b) fel. eredménye

Itt 5 a minimum, de a konstrukció nem könnyű és nem átlátható röviden annak igazolása, hogy 4 nem elég.

A 5.6. fel. eredménye

a) $\frac{64\cdot49\cdot36}{6} = 3456$
b) $64 \cdot 49 \cdot 36 = 20736$;
c) $\frac{64\cdot49\cdot36}{2} = 10368$.

13.3. Egyszerűbb leszámolási feladatok megoldása

A 5.5. feladat megoldása

Egyik lehetséges gondolatmenet esetszétválasztáson alapul aszerint, hogy hány golyót választunk ki. (0 golyót 1-féleképpen „választhatunk”, 1 golyót 20-féleképp, 2 golyót 20 alatt a 2-féleképp stb.) Így a Pascal-háromszög 20. sorának összegét kapjuk.

Másik gondolatmenet szerint egy 20 elemű halmaz összes részhalmaza lesz jó, melyek száma 2^{20}.

Ha minden golyó egyforma, akkor 21 lehetőségünk van (vagy0, vagy 1, vagy 2 ... vagy 20 golyót választunk ki).

Megjegyzés a 5.5. fel. megoldásához

Érdekes lehet olyan eseteket is meggondolni, amikor vannak egyformák is és különbözőek is a golyók között.

A 5.6. feladat megoldása

1×1-es négyzet 64, 2-es 49, $\ldots 8 \times 8$-as egy van, így a rácsnégyzetek száma

$$1 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + 5^2 + 6^2 + 7^2 + 8^2 = 204.$$

Egy rácstéglalapot meghatároz két átlós csúcsa. Az egyik csúcs a 81 rácspont bármelyike lehet. A vele átlósan szemben levő csúcsot az ő rácsegyenesén nem választhatjuk, marad 64 lehetőség. Ílymódon minden téglalapot 4-szer számoltunk (Ugyanazt a két csúcsot választjuk fordított sorrendben, illetve a másik átlójának választottuk ki a két végpontját), a válasz tehát $81 \cdot 16 = 1296$.

Úgy is gondolkodhatunk, hogy egy téglalap megadásához két különböző „vízszintes” és két különböző „függőleges” rácsegyenest kell kiválasztanunk a 9 vízszintes és 9 függőleges rácsegyenes közül.

$$\binom{9}{2}\binom{9}{2} = \frac{9 \cdot 8 \cdot 9 \cdot 8}{2 \cdot 2} = 1296.$$

A 5.7. feladat megoldásai

A 5.7. a) mego.

Összesen $6! = 720$-féle hatjegyű számot készíthetünk. Ezek fele lesz páros (2-re végződő is $5!$ darab van, 4-re és 6-ra végződő is). Mindegyik osztható lesz 3-mal, hiszen a számjegyek összege 21.

4-gyel azok lesznek oszthatók, melyek végződése a 12, 16, 24, 32, 36, 52, 56, 64 valamelyike. Minden végződéshez $4!$-féle lehet az első 4 számjegy sorrendje, így a válasz $8 \cdot 4! = 192$.

Az 5-tel oszthatóknak 5-re kell végződniük, ilyenből $5! = 120$ van.

6-tal az összes páros osztható lesz (mert 3-mal mind osztható).

Megjegyzés a 5.7. a) feladat megoldásához

Az, hogy az elkészíthető számok fele páros, nem „automatikus”, pl. ha. 1-től 7-ig lenne a számkészletünk, melyből 7-jegyű számokat készítünk, nem az összes elkészíthető szám fele lenne páros (hanem $3/7$ részük) – mint ahogy példánkban sem a számok harmada osztható 3-mal vagy a negyede 4-gyel.

A 5.7. c) mego.

Láttuk, hogy a hárommal való oszthatóság feltétele nem megszorítás ebben az esetben. Minden helyiértéken minden számjegy ugyanannyiszor szerepel, azaz $6!/6 = 5! = 120$-szor. Helyiértékenként összeadva az ott szereplő számokat, minden helyiértéken $(1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6) \cdot 5! = 2520$ lesz a számok összege. Így az összeg

$$111111 \cdot (1+2+3+4+5+6) \cdot 5! = 279999720.$$

A 5.7. b) mego.

Összesen 6^6 szám készíthető. A párosak esetén az utolsó számjegyet 3-féleképp választhatjuk meg, az összes többit 6-féleképpen, a párosak száma $3 \cdot 6^5$.

Ahhoz, hogy 3-mal oszthatót kapjunk, az első 5 számjegyet tetszőlegesen választhatjuk meg, az utolsó számjegynél kell ügyelnünk arra, hogy a számjegyek összege 3-mal osztható legyen. Erre minden kezdés esetén két lehetőségünk van (a hat számjegy közül minden 3-as maradékhoz 2 tartozik), így a lehetőségek száma $6^5 \cdot 2$.

4-gyel azok a számok lesznek oszthatók, melyek végződése a 12, 16, 24, 32, 36, 44, 52, 56, 64 valamelyike, így a lehetőségek száma $9 \cdot 6^4$.

Az 5-tel oszthatók száma 5^6 (5-re kell végződniük, a többi jegy tetszőleges).

A 6-tal oszthatók száma a 3-mal oszthatókénak a fele, azaz 6^5 (a háromféle hármas maradékot képviselő 2-2 szám közül minden esetben az egyik páros).

A 5.7. d) mego.

Ha egy tetszőleges számjegyet egy tetszőleges helyiértéken rögzítünk, akkor a maradék 5 helyre a számjegyeket $6^4 \cdot 2$-féleképpen adhatjuk meg. Tehát most ninden helyiértéken minden számjegy $6^4 \cdot 2 = 2592$-ször szerepel. A c) feladatrészben leírt gondolatmenet alapján most az összeg

$$111111 \cdot (1+2+3+4+5+6) \cdot 6^4 \cdot 2 = 6047993952.$$

A 5.8. feladat megoldásai

A 5.8. a) mego.

Összesen 9000 négyjegyű szám van. Olyan, amiben nem szerepel a 7-es számjegy $8 \cdot 9^3 = 5832$ van (az első számjegy nem lehet 0 vagy 7, a többi bármi lehet a 7-en kívül). Az összesből levonva azok számát, melyekben nem szerepel a 7-es, megkapjuk azokét, melyekben igen. Mivel az 5832 nagyobb, mint a 9000 fele, olyanból van több, amiben nincs 7-es.

A 5.8. b) mego.

Olyan számot, melyben a számjegyek szigorúan növekvő sorrendben állnak, úgy kapunk, hogy a 9 lehetséges számjegyből (a 0 egy ilyen számban nem szerepelhet) kiválasztunk 4 különbözőt, és azokat növekvő sorrendbe rakjuk. A válasz tehát $\binom{9}{4} = 126$, ami sokkal kevesebb, mint a 9000/2 fele, így ilyen van kevesebb.

A 5.8. c) mego.

Ha a számban nincsenek egyforma számjegyek, akkor az első számjegy 9-féle (0 nem), a második is 9-féle (0 már lehet, de ugyanez, mint az első nem), a harmadik 8, a negyedik 7-féle lehet. Ez összesen $9 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 = 4536$ lehetőség, ami több mint a 9000 fele, így ilyenből van több.

Megjegyzés a 5.8. feladathoz

Érdemes a kérdést nem négyjegyű számokra is megvizsgálni (a vizsgálódás gondolatmenete hasonló).

A 5.9. feladat megoldása

A feladatot megoldhatjuk esetszétválasztással aszerint, hogy hány darabból akarjuk kirakni a 10-et (és evvel egyben megoldjuk a b) feladatot.

Gondolkodhatunk úgy is, hogy elképzelünk egy 10 cm hosszú rudat, cm-es beosztásokkal, melyet minden lehetséges módon szét akarunk fűrészelni a beosztások mentén. Minden beosztásnál 2 lehetőségünk van – vagy fűrészelünk, vagy nem. Így a lehetőségek száma 2^9.

2 db rúdból 9-féleképp rakhatjuk ki $(1+9, 2+8, 3+7, \ldots, 9+1)$. 3 db esetén a lehetséges 9 választóvonalból 2-t kell kiválasztanunk, 4 db. esetén 3-at, stb. Megoldásként a Pascal-háromszög 9. sorának elemeit kapjuk.

Megjegyzés a 5.9. feladathoz

Az a) és b) feladat megoldását összevetve bizonyíthatjuk, hogy a Pascal-háromszög n-edik sorában szereplő elemek összege 2^n.

Érdemes először rövidebb rudak kirakásával kísérleteznünk. Az egységnyi hosszúságút nyilván csak egyféleképp rakhatjuk ki. A 2 hosszúságút 2-féleképp $(1+1$ vagy $2)$. A 3 hosszúságút 3 $(1+1+1,\ 1+2,\ 2+1)$ – és mielőtt hamis sejtésre jutnánk – a 4 hosszúságút 5 $(1+1+1+1,\ 1+2+1,\ 2+1+1,\ 1+1+2,\ 2+2)$.

Hogyan kaphatjuk meg eddigi eredményeink felhasználásával próbálgatás nélkül az 5 hosszúságú rudak kirakási lehetőségeinek számát? Jó kirakást kapunk, ha az összes különböző 4-es kirakást 1-gyel folytatjuk ($1+1+1+1+1$, $1+2+1+1$, $2+1+1+1$, $1+1+2+1$, $2+2+1$). Így megkapjuk az 5-ös rúd összes 1-re végződő kirakását. A 2-re végződő kirakásokat vagy úgy kapjuk meg, hogy az 1-re végződő 4-es kirakásokban az 1-es végződést 2-re cseréljük ($1+1+1+2$, $1+2+2$, $2+1+2$), vagy úgy, hogy a 3-as kirakásokat toldjuk meg 2-vel. Mindenképp ugyanazt kapjuk, hiszen 1-re végződő 4-es kirakás pont annyi volt, mint ahány hármas kirakás összesen.

Ez a gondolatmenet folytatható (vannak tanulók, akiket érdemes hagyni, hogy tovább kísérletezzenek, mielőtt megsejtik, hogy az előző két kirakási lehetőség összegződik, vagyis a Fibonacci-sorozat elemeit kapjuk). Folytatva a Fibonacci sorozatot, eljutunk a válaszhoz: 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, $\underline{89}$.

A 5.10. feladat megoldásai

A 5.10. a) mego.

Ha elképzelünk egy 100 cm hosszú rudat cm-es beosztásokkal (99 beosztás), akkor az a kérdés, hogy hányféleképpen tudjuk ezt szétvágni a beosztások mentén 10 darabra. Nyilván annyiféleképp, ahányféleképp a 99 osztóvonalból kiválaszthatunk 9-et, vagyis $\binom{99}{9}$-féleképp.

A 5.10. b) mego.

Most képzeljük úgy, hogy 2 centinként vannak a beosztások (49 beosztás), ezek közül kell kiválasztanunk 9-et, vagyis $\binom{49}{9}$-féleképp.

A 5.10. c) mego.

10 egész összegeként nyilván végtelen sokféleképpen előállítható a 100.

A 5.10. d) mego.

Ha a 100-at 10 tagú összegként akarjuk felírni, szükségünk van 100 db 1-esre és 9 db. + jelre. Ezek bármilyen sorrendje jó előállítást ad a + jelek közti 1-eseket összegezve (ha két + jel szerepel egymás mellett, akkor 0 van köztük az összegben, ha a sor elején (vagy végén) van + jel, akkor az összeg 0-val kezdődik (vagy végződik)). Így a lehetőségek száma $\binom{109}{9}$.

A 5.11. feladat megoldása

Annyit, ahányféleképp a 90 számból (hagyományos ötös lottó esetén) kiválasztható 5, tehát $\binom{90}{5} = 43949268$.

A 5.12. feladat megoldásai

A 5.12. a) mego.

190 (annyit, ahányféleképp 20-ból kiválaszthatunk 18-at (vagy 2-t, ami nem nyer).

A 5.12. b) mego.

Egy szelvény elég.

A 5.13. feladat megoldása

Ha az egyik iskolából x, a másikból y versenyző indult, akkor iskolákon belül $\frac{x(x-1)}{2} + \frac{y(y-1)}{2} = 66$ mérkőzés volt, az iskolák között pedig $xy = 136 - 66 = 70$. Az egyenletrendszer megoldása $x = 10$, $y = 7$ (vagy fordítva).

A 5.14. feladat megoldása

Csoportosítsuk a háromszögeket a legnagyobb szögük szerint (ez legfeljebb 177, legalább 91 fok), és nézzük meg, hogy a maradék két szög hányféleképp áll elő két különböző pozitív egész összegeként. Az 1, 1, 2, 2, 3, 3, 4, 4. . . 43, 43, 44 számokat kapjuk, melyek összege 1936.

A 5.15. feladat megoldása

Összesen n csapat $\frac{(}{n} - 1)2$ mérkőzést játszott, így $n(n-1)$ pont került szétosztásra. Ha nem lett volna döntetlen, akkor minden csapat páros számú ponttal végzett volna. Ez n csapat esetén a $0, 2, 4, 6, \ldots 2n-2$ (n-féle) pontszámok valamelyikét jelentené minden csapat számára. Az egyértelmű sorrend miatt minden csapat pontszáma különböző kellett volna, hogy legyen, vagyis az előbbi pontszámok mindegyike pontosan egy csapathoz tartozott volna. Ez csak úgy fordulhatott volna elő, ha 1 csapat mindenkit legyőzött volna, egy csapat az előzőn kívül mindenkit legyőzött volna stb. Ezt a feladat feltételei kizárják, így kellett döntetlennek lennie.

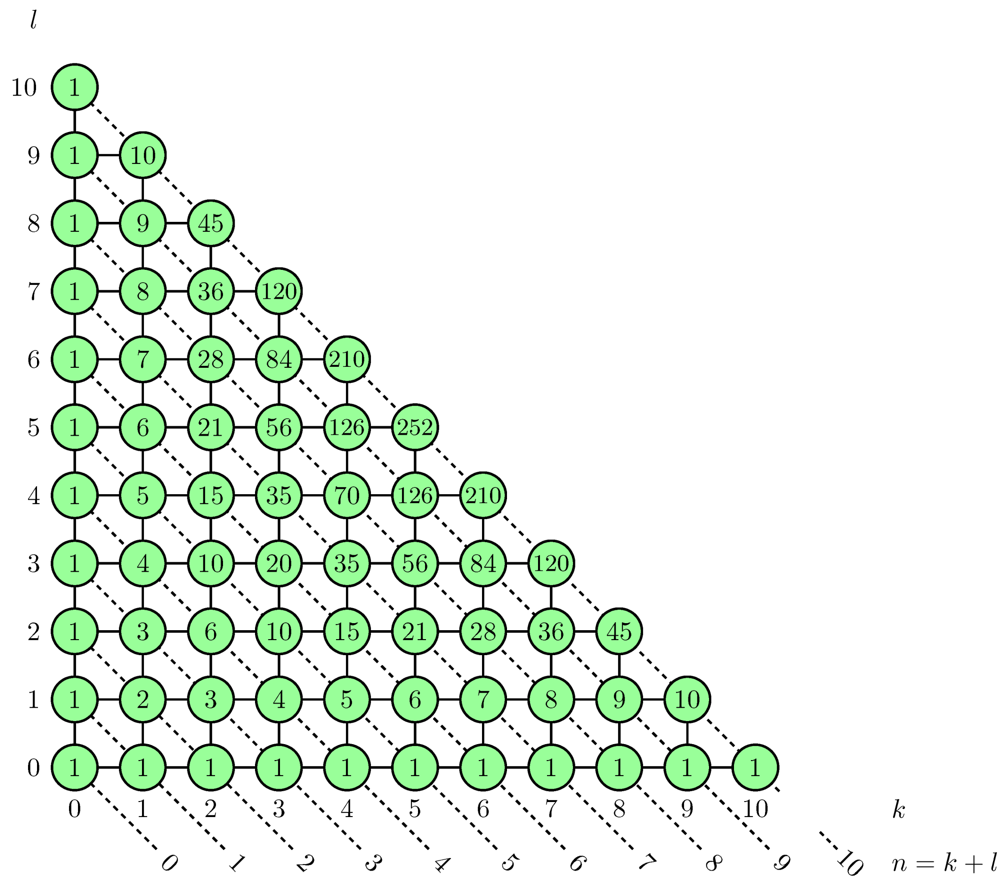
A 5.16. feladat megoldása

Egyik lehetséges megfontolás, hogy megvizsgáljuk, hogy az egyes mezőkre hányféleképp juthatunk. Azt tapasztaljuk, hogy minden mezőre annyiféleképp juthatunk, mint az alatta levőre és a jobbra mellette levőre összesen.

Úgy is gondolkodhatunk, hogy összesen 14 mezőnyi lépést kell megtennünk (7 jobbra és 7felfelé), így a válasz az, hogy ahányféleképp az összesen 14 lépésnyiből kiválaszthatjuk azt a 7-et, amit mondjuk, felfelé teszünk meg. (Azaz a lehetőségek száma $\binom{14}{7} = 3432$, ami a Pascal háromszög 7. sorában a középső elem.)

13.4. A Pascal háromszög – feladatok megoldása

Pascal eredetileg a 13.11 ábrán látható elrendezésben adta meg háromszögét.



13.11. ábra.

A koordinátarendszer zárt pozitív síknegyedének rácspontjaiba írtunk számokat úgy, hogy az origóba 1-est írtunk, majd onnan kiindulva jobbra és felfelé haladva minden rácspontra az alatta és tőle balra levő számok összegét írtuk le. A $(k;l)$ koordinátájú pontra írt számot $\binom{k+l}{k} = \binom{n}{k}$-val is jelöljük és „$n$ alatt a k"-nak mondjuk, ahol $n = k+l$. A Pascal háromszög n-edik sorát azok az elemek alkotják, amelyek koordinátáinak összege: $k+l=n$. A sorokat tehát 0-tól kezdjük számozni. A soron belül az elemeket is 0-tól kezdve sorszámozzuk, az n-edik sorban tehát 0-tól n-ig. Az n-edik sor k-adik eleme $\binom{n}{k}$, tehát a $(k;n-k)$ koordinátájú pontba írt szám. Ezekkel a jelölésekkel tehát:

$$\binom{0}{0} = 1, \tag{13.1}$$

és

$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k} \qquad (n > 1, \quad n \in \mathbb{N}). \tag{13.2}$$

A (13.1)-(13.2) képletek önmagukban még nem definiálják a Pascal háromszöget, hiszen általuk még $\binom{1}{0}$ értéke sincs meghatározva. A (13.2) képlet szerint ugyanis

$$\binom{1}{0} = \binom{0}{-1} + \binom{0}{0},$$

de $\binom{0}{-1}$ értékéről nincs információnk. A problémát áthidalná, ha 1-nek rögzítenénk a Pascal háromszög szélein elhelyezkedő elemek, azaz $\binom{n}{0}$ és $\binom{n}{n}$ értékét ($n \in \mathbb{N}$). Ehelyett más utat választunk. Legyen

$$\binom{0}{k} = 0 \qquad (k \neq 0, \quad k \in \mathbb{Z}). \tag{13.3}$$

Az (13.1), (13.2), (13.3) képletek már meghatározzák a Pascal háromszöget, sőt segítségükkel soronként kitölthető a „Pascal félsík" (lásd a 13.12 ábrát).

A 5.1. feladat megoldásai

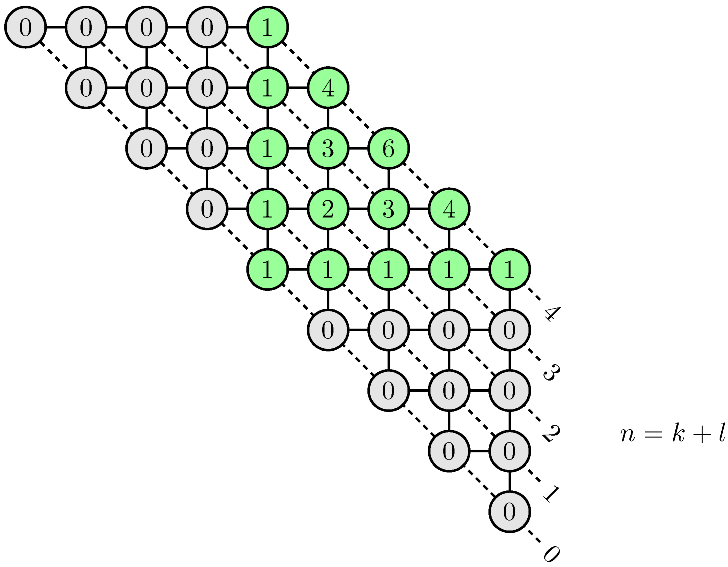
A 5.1. fel. I. megoldása

Jelölje a feladat megoldását $u(k;l)$. Vegyük észre, hogy a $(k;l)$ pontra vagy a $(k-1;l)$ vagy a $(k;l-1)$ pontról lépünk rá. Tehát annyiféleképpen juthatunk el $(k;l)$-be, mint $(k-1;l)$-be és $(k;l-1)$-be összesen:

$$u(k;l) = u(k-1;l) + u(k;l-1). \tag{13.4}$$

Másrészt

$$u(0;0) = 1, \tag{13.5}$$



13.12. ábra.

és

$$u(k; -k) = 0 \qquad \text{ha } k \neq 0, \quad k \in \mathbb{Z}. \tag{13.6}$$

A (13.4), (13.5), (13.6) összefüggéseket teljesíti az $\binom{k+l}{k}$ mennyiség, ha azt $u(k,l)$ helyébe írjuk, hiszen épp ezeket az összefüggéseket fogalmazzák meg a (13.1), (13.2), (13.3) képletek. Mivel $u(k;l)$ értékét meghatározzák a (13.4)– (13.6) relációk, így

$$u(k;l) = \binom{k+l}{k}.$$

A 5.1. fel. II. megoldása

Pontosan akkor jutunk az origóból a $(k;l)$ pontba, ha összesen $n = k + l$ lépést teszünk és abból k-szor jobbra és l-szer felfelé lépünk. A lépések sorszámai:

$$1., \qquad 2., \qquad 3., \qquad (n-1)., \qquad n.$$

Ezek közül ki kell választani azt a k lépést, amelyikben balra léptünk. Álljunk neki a kiválasztásnak! Először egyet választunk, ez n-féle lehet; a következő már – az első bármely választása esetén – csak $(n-1)$-féle, stb, az utolsót már csak $(n-k+1)$-féle. Így

$$n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot (n-k+1)$$

esetet kaptunk, de ebben a kiválasztás sorrendjét is belevettük. Nem számít, hogy az előbbi eljárás során egy adott sorszámú lépést a kiválasztás során hanyadik lépésben találtunk meg, csak az számít, hogy bevettük-e a kiválasztásba vagy nem. A kiválasztott k lépést összesen $k!$-féle sorrendben választhattuk ki a fenti eljárás során, tehát a $(k; l)$ pontbavezető lépéssorozatok száma:

$$u(k; l) = \frac{n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot (n-k+1)}{k!}. \tag{13.7}$$

I. Megjegyzés a 5.1. feladathoz
A két megoldás eredményét összetéve állíthatjuk, hogy

$$\binom{n}{k} = \frac{n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot (n-k+1)}{k!}. \tag{13.8}$$

II. Megjegyzés a 5.1. feladathoz
A II. megoldás mutatja, hogy az n elemből álló halmaz k-elemű részhalmazaina száma épp $\binom{n}{k}$. Valóban a II. megoldásban a lépéssorszámok $\{1.; 2.; \ldots; n.\}$ halmazából választottunk ki az összes lehetséges módon k elemet, erre kaptuk az $u(k; l) = \binom{n}{k}$ eredményt.

A 5.2. feladat megoldásai

A 5.2. fel. I. megoldása

Ha maradunk a természetes kitevőnél ($n \in \mathbb{N}$), akkor a binomiális tételt könnyen igazolhatjuk. Az

$$(a + b)^n = (a + b) \cdot (a + b) \cdot (a + b) \cdot \ldots \cdot (a + b)$$

szorzat n tényezőből áll és a zárójelek felbontásakor minden egyes tényezőből kiválasztjuk az a vagy a b tagot, így $a^{n-i}b^i$ alakú tagokat kapunk és ilyenből épp annyit, ahányféleképpen kiválasztható az n szorzótényezőből az az i darab, amelyből a b tagot választjuk. Ezek száma $\binom{n}{i}$.

A 5.2. fel. II. megoldása

n szerinti teljes indukcióval, az $(a + b)^{n+1} = (a + b)^n \cdot (a + b)$ azonosság felhasználása és a Pascal háromszög képzési szabálya alapján is bizonyíthatunk.

Segítség a 5.3. feladathoz

Keressük meg az eredményt a Pascal háromszögben. Indokoljuk meg a kapcsolatot!

Segítség a 5.4. feladathoz

Keressük meg az eredményt a Pascal háromszögben. Indokoljuk meg a kapcsolatot!

előzetes megjegyzés a 5.5. feladathoz

Alább látható, hogy az egyes sorokban mennyi az összeg:

sor	összeg	eredmény
0.	1	1
1.	$1+1$	2
2.	$1+2+1$	4
3.	$1+3+3+1$	8
3.	$1+4+6+4+1$	16

Sejthető, hogy az n-edik sor elemeinek összege 2^n.

A 5.5. feladat megoldásai

A 5.5. fel. I. megoldása

Jelölje az n-edik sor elemeinek összegét S_n. A 0-sorban csak egy 0-tól különböző szám van, ami 1, így

$$S_0 = 1.$$

Másrészt bármelyik sort az előzőből képezzük úgy, hogy az előző sor két elemének összegeként kapjuk az új sor egy elemét. (Az alábbi ábrán a 3. sor az „előző" sor és a 4. sor az „új" sor.) Az előző sor bármely elemét az új sor két elemében kell tekintetbe venni: a tőle jobbra levőben és a fölötte levőben. Így a sorösszeg mindig megduplázódik:

$$S_{n+1} = 2S_n.$$

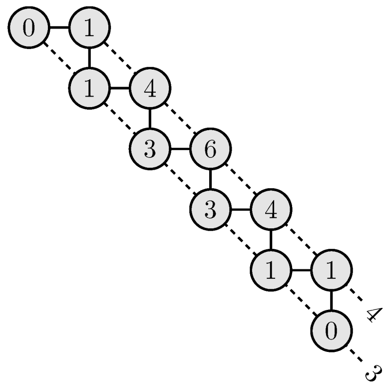
Mindezekből $S_n = 2^n$.

A 5.5. fel. II. megoldása

A feladat így fogalmazható át: hányféleképpen juthatunk el az origóból az n-edik sorba, ha minden lépésben egyet léphetünk jobbra vagy felfelé? Erre a kérdésre 2^n a válasz, hiszen összesen n lépést kell tennünk és mindegyikről dönthetünk, hogy felfelé vagy jobbra vezessen.

A 5.5. fel. III. megoldása

A feladat így fogalmazható át: hány részhalmaza van az n elemből álló halmaznak? Természetesen 2^n hiszen minden elemről külön-külön eldönthetjük, hogy belevesszük-e a részhalmazba vagy nem.



13.13. ábra.

A 5.5. fel. IV. megoldása

Alkalmazzuk Newton binomiális tételét (lásd a 5.2. feladatot)!

Az $(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$ formulába írjunk a és b helyére is 1-et!

$$2^n = (1+1)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 1^k 1^{n-k} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}.$$

A 5.6. feladat megoldásai

A 5.6. fel. I. megoldása

(*Rekurzió*)

A 0-adik sort kivéve mindegyik sort az előző sorból képezzük. Az előjeles összegben az előző sor minden egyes tagját egyszer pozitív és egyszer negatív előjellel vesszük figyelembe, összesen tehát minden egyes tagot 0-szor. így az előjeles összeg minden olyan sorban zérus, amelyet egy előző sorból kaptunk. A 0-adik sorban az összeg 1.

A 5.6. fel. II. megoldása

(*Kombinatorikai értelmezés*)

Állítjuk, hogy az előjeles összeg a nulladik sortól különböző sorokban zérus. Ez az állítás ekvivalens a következővel: egy nem üres véges halmaz páros elemszámú részhalmazainak száma megegyezik a páratlan elemszámú részhalmazainak számával. Az utóbbit könnyű igazolni.

Válasszuk ki a nem üres halmaz egy tetszőleges elemét! Ha készítünk egy részhalmaz, akkor róla is el kell dönteni, hogy belekerüljön-e vagy ne. Választásunktól függően a létrejövő részhalmaz páros elemszámú lesz vagy páratlan. így a páros elemszámú részhalmazok és a páratlan elemszámú részhalmazok között kölcsönösen egyértelmű megfeleltetést kapunk, ha azokat a részhalmazokat párosítjuk egymással, amelyek csak abban különböznek egymástól, hogy tartalmazzák-e az előre kiválasztott elemet vagy nem.

A 5.6. fel. III. megoldása

(*Binomiális tétel*)

Alkalmazzuk Newton binomiális tételét (lásd a 5.2. feladatot)!

Az $(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$ formulába írjunk a helyére (-1)-et, b helyére 1-et!

$$0^n = (1-1)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-1)^k 1^{n-k} = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k},$$

tehát $n > 0$, $n \in \mathbb{N}$ esetén az előjeles összeg értéke zérus.

előzetes megjegyzés a 5.7. feladathoz

Alább látható, hogy az egyes sorokban mennyi a négyzetösszeg:

sor	összeg	eredmény
0.	1	1
1.	$1+1$	2
2.	$1+4+1$	6
3.	$1+9+9+1$	20
3.	$1+16+36+16+1$	70

Az eredmények megtalálhatók a Pascal háromszögben, a főátlóban. Sejthető, hogy az n-edik sor elemeinek négyzetösszege $\binom{2n}{n}$.

A 5.7. feladat megoldása

A Pascal háromszög szimmetrikus a főátlójára, azaz $\binom{n}{i} = \binom{n}{n-i}$, tehát $n = i + j$ esetén

$$\binom{n}{i} = \binom{n}{j}.$$

Azt kell tehát igazolnunk, hogy

$$\sum_{i+j=n} \binom{n}{i} \cdot \binom{n}{j} = \binom{2n}{n}. \tag{13.9}$$

A jobb oldalon látható kifejezés értelme világos: ennyiféleképpen juthatunk el az origóból az $(n;n)$ pontba $2n$ lépésben, ha minden lépésben a jobbra vagy felfelé található szomszédos rácspontra megyünk át. Egy ilyen útvonal pontosan egyszer halad át a $x + y = n$ egyenletű egyenesen, mindig ezen egyenes egy rácspontján megy keresztül. Legyen ez a rácspont a $(i; j)$ pont.

Hány útvonal megy az origóból $(2n; n)$-be a $(i; j)$ ponton $(i + j = n)$ keresztül? Az origóból a $(i; j)$ pontba

$$\binom{i+j}{i} = \binom{n}{i}$$

útvonal megy, míg onnan, hogy $(2n; n)$-be jussunk még $(n - i) = j$-t kell jobbra lépni és $(n - j) = i$-t felfelé, tehát az utak száma

$$\binom{n-i+n-j}{n-i} = \binom{n}{j}.$$

Az origóból $(i; j)$-be menő bármely utat folytathatjuk az $(i; j)$-ből $(2n; n)$-be vezető bármely úton, tehát a keresett utak száma:

$$\binom{n}{i} \cdot \binom{n}{j}. \tag{13.10}$$

Tehát a (13.9) képlet bal oldalán látható kifejezés is az origóból a $(2n; n)$ pontba menő utak számát adja meg, mégpedig aszerint részletezve, hogy az $x + y = n$ egyenes melyik rácspontján megy át egy adott út.

előzetes megjegyzés a 5.8. feladathoz

Ez a példa, az előző (5.7. feladat) általánosítása, hiszen a (5.5) formulából a 5.7. feladat eredménye a $k = l = n$ helyettesítéssel adódik.

A 5.8. feladat megoldásai

A 5.8. fel. I. megoldása

Számoljuk össze az origóból az $(n, k + l - n)$ pontba menő lépéssorozatok számát, ha minden lépésben a jobbra vagy felfelé található szomszédos rácspontra megyünk át!

Az ilyen utak száma egyszerűen $\binom{k+l}{n}$.

Soroljuk fel az utakat aszerint is, hogy hol metszik az $x + y = k$ egyenest! Számítsuk ki azon utak számát, amelyek az $(i, k - i)$ pontban metszik ezt az egyenest. Az origóból ide menő utak száma $\binom{k}{i}$, míg innen tovább $(n, k+l-n)$-be még összesen l-et kell lépnünk és ebből $j = (n - i)$-t felfelé, tehát a továbbmenetelre $\binom{l}{n-i}$ lehetőség van. Az origóból a $(n, k + l - n)$ pontba az $(i, k - i)$ ponton át menő lépéssorozatok száma tehát $\binom{k}{l}\binom{l}{n-i}$. Ezeket a számokat össze kell adnunk, az $x + y = k$ egyenes összes pontjára. Ez a (5.5) képletnek megfelelően épp azt jelenti, hogy i-t futtatnunk kell, hogy az $(i, k - i)$ pont bejárja ezt az egyenest.

A 5.8. fel. II. megoldása

Tegyük fel, hogy egy társaságban k fiú és l lány van. Hányféleképpen választhatunk ki közülük n embert? Természetesen $\binom{k+l}{n}$-féle módon. Ez a kifejezés áll a (5.5) egyenlet bal oldalán. Másrészt, ha végiggondoljuk hány olyan kiválasztás van, amelyben a fiúk és lányok megoszlása $(0;n)$, $(1;n-1)$, $(2;n-2)$, $\ldots$, $(n;0)$, akkor a (5.5) egyenlet bal oldala jelenik meg.

A 5.8. fel. III. megoldása

Az alábbi egyenlet nyilvánvalóan azonosságot fejez ki:

$$(1+x)^k(1+x)^l = (1+x)^{k+l}. \tag{13.11}$$

Határozzuk meg x^n együtthatóját az egyik, illetve a másik oldalon. A jobb oldalon ez az együttható $\binom{k+l}{n}$, míg a bal oldalon az $(1+x)^k$ felbontásában szereplő x^i és az $(1+x)^l$ felbontásában szereplő x^j szorzatából jön ki ilyen tag valahányszor $i+j=n$.

A 5.9. feladat megoldásai

A 5.9. a) fel. I. megoldása

(*Rekurzió*)

Az első néhány sorba kiszámolva az összeget sejthetjük, hogy az n-edik sorban a kifejezés értéke 3^n. Ezt indukcióval igazolhatjuk. Az $(n+1)$-esik sorhoz tartozó kifejezés $2^k\binom{n+1}{k}$ alakú tagokból áll. De

$$2^k\binom{n+1}{k} = 2^k\left(\binom{n}{k}+\binom{n}{k-1}\right) = 2^k\binom{n}{k} + 2\cdot 2^{k-1}\binom{n}{k-1},$$

ahol $2^k\binom{n}{k}$ és $2^{k-1}\binom{n}{k-1}$ az előző sor kifejtésében szereplő tagok. Tehát ha az összeg értéke az n-edik sorban b_n, akkor

$$b_{n+1} = \sum_{k=0}^{n+1} 2^k\binom{n+1}{k} = \sum_{k=0}^{n+1} 2^k\binom{n}{k} + 2\sum_{k=0}^{n+1} 2^{k-1}\binom{n}{k-1} = b_n + 2b_n = 3b_n.$$

A 5.9. a) fel. II. megoldása

(*Kombinatorikai értelmezés*)

Hányféleképpen tölthető ki az n mérkőzésből álló totó szelvény? Természetesen 3^n-féleképpen. Dr Agy nem szereti a döntetlent. ő először kiválasztja azokat a meccseken, amelyekről feltételezi, hogy „eldőlnek”, ezek mindegyikére eldönti, hogy ki fog nyerni, a maradékokra pedig X-et ír (azok a döntetlenek). Ha így számoljuk végig a lehetőségeket, akkor könnyű meggondolni, hogy a $\sum_{k=0}^{n} 2^k\binom{n}{k}$ kifejezést kapjuk.

A 5.9. a) fel. III. megoldása

(*Binomiális tétel*)

Alkalmazzuk Newton binomiális tételét (lásd a 5.2. feladatot)!

Az $(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^k b^{n-k}$ formulába írjunk a helyére 22-t, b helyére 1-et!

$$3^n = (2+1)^n = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}2^k 1^{n-k} = \sum_{k=0}^{n} 2^k\binom{n}{k}.$$

A 5.9. b) fel. I. megoldása

(*Rekurzió*)

Az első néhány sorba kiszámolva az összeget sejthetjük, hogy az n-edik sorban a kifejezés értéke $n\cdot 2^{n-1}$. Ezt indukcióval igazolhatjuk. Az $(n+1)$-esik sorhoz tartozó kifejezés $k\binom{n+1}{k}$ alakú tagokból áll. De

$$k\binom{n+1}{k} = k\left(\binom{n}{k}+\binom{n}{k-1}\right) = k\binom{n}{k} + (k-1)\binom{n}{k-1} + \binom{n}{k-1},$$

ahol $k\binom{n}{k}$ és $k-1\binom{n}{k-1}$ az előző sor kifejtésében szereplő tagok. Tehát ha az összeg értéke az n-edik sorban c_n, akkor

$$c_{n+1} = \sum_{k=0}^{n+1} k\binom{n+1}{k} = \sum_{k=0}^{n+1} k\binom{n}{k} + \sum_{k=0}^{n+1} k-1\binom{n}{k-1} + \sum_{k=0}^{n+1}\binom{n}{k-1} = c_n + c_n + 2^n = 2c_n + 2^n.$$

Így ha $c_n = n\cdot 2^{n-1}$, akkor

$$c_{n+1} = 2\cdot(n\cdot 2^{n-1}) + 2^n = n\cdot 2^n + 2^n = (n+1)\cdot 2^n = (n+1)\cdot 2^{(n+1)-1}.$$

A 5.9. b) fel. II. megoldása

(*Kombinatorikai értelmezés*)

Hányféleképpen választható ki egy n-fős társaságból egy csoport, vezetővel?

Kiválaszthatjuk először a csoportvezetőt – ez n lehetőség – majd mindenki másról eldöntjük, hogy bekerül-e a csoportba, vagy nem – ez 2^{n-1} lehetőség, összesen tehát $n\cdot 2^{n-1}$.

Kiválaszthatjuk először a csoportot is – ha k főt választunk, akkor arra $\binom{n}{k}$ lehetőség van – és közülük választunk egy vezetőt, ez így $k\binom{n}{k}$ lehetőség. Ezt végig kell tekintenünk az összes lehetséges k-ra, így kapjuk a $\sum_{k=1}^{n} k\binom{n}{k} = n \cdot 2^{n-1}$ formulát.

A 5.9. b) fel. III. megoldása

(*Algebra*)

Mivel

$$k \cdot \binom{n}{k} = k \cdot \frac{n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot (n-k+1)}{k \cdot (k-1) \cdot \ldots \cdot 1} = n \cdot \frac{(n-1) \cdot \ldots \cdot (n-k+1)}{(k-1) \cdot \ldots \cdot 1} = n \cdot \binom{n-1}{k-1},$$

így

$$\sum_{k=0}^{n} k\binom{n}{k} = n \cdot \sum_{k=0}^{n} \binom{n-1}{k-1} = n \cdot 2^{n-1}.$$

A 5.9. b) fel. IV. megoldása

(*Generátorfüggvény*)

A Binomiális tétel szerint (lásd a 5.2. feladatot)

$$(1+x)^n = \sum_{k=0} n\binom{n}{k} x^k.$$

Deriváljuk mindkét oldalt!

$$n(1+x)^{n-1} = \sum_{k=0} nk\binom{n}{k} x^{k-1}.$$

Tehát $x = 1$-re

$$n \cdot 2^{n-1} = \sum_{k=0} nk\binom{n}{k}.$$

A 5.9. b) fel. V. megoldása

(*Valószínűségszámítás*)

Ha feldobunk n pénzérmét, akkor átlagosan hány fej lesz közte? Természetesen $\frac{n}{2}$. Másrészt $\frac{\binom{n}{k}}{2^n}$ az esélye, hogy k fejez és $(n-k)$ írást dobunk.

A 5.9. c) fel. eredménye

$\sum_{k=0}^{n} k(k-1)\binom{n}{k} = n(n-1)\cdot 2^{n-2}$. A 5.9. b) feladatra adott számos megoldás alkalmazható most is.

A 5.9. d) mego.

$$\sum_{k=0}^{n} k^2\binom{n}{k} = \sum_{k=0}^{n}(k(k-1)+k)\binom{n}{k} = \sum_{k=0}^{n} k(k-1)\binom{n}{k} + \sum_{k=0}^{n} k\binom{n}{k} =$$
$$= n(n-1)\cdot 2^{n-2} + n\cdot 2^{n-1} = n(n+1)\cdot 2^{n-2}.$$

Megjegyzés a 5.9. d) feladathoz

Ez az eredmény hasznos a binomiális eloszlás szórásának kiszámításához.

A 5.10. feladat megoldásai

A 5.10. a) mego.

A 0-adik sorban az összeg 1 és a Pascal háromszöghöz hasonlóan mindig duplázódik, tehát az n-edik sor elemeinek összege 2^n.

A 5.10. b) mego.

A 0-adik sorban az előjeles összeg 11, de a Pascal háromszöghöz hasonlóan minden olyan sorban, amelynek van megelőző sora (tehát az összes többi sorban) az összeg zérus.

A 5.10. c) mego.

Ha a Pascal háromszög 0-adik sorában a nullákon kívül nem egyetlen 1-es, hanem egyetlen 2-es állna, de a képzési szabály nem változna, akkor abban a háromszögben minden szám az eredeti duplája lenne. Ugyanígy képezzünk még egy-egy Pascal háromszöget egyetlen -5-ösből illetve egyetlen 4-esből kiindulva. Ezt a három Pascal háromszöget kissé toljuk el úgy, hogy a 0-adik sorban ne egymáson, hanem egymás mellett álljon a 2, a (-5) és a 4. Ha ennek a három háromszögnek az egymásra került elemeit összeadjuk és azt írjuk az adott helyre, akkor ugyanahhoz a számkitöltéshez jutunk, mintha a Mascal háromszöget képeznénk.

Így az n-esik sor k-adik eleme $2\binom{n}{k} - 5\binom{n}{k-1} + 4\binom{n}{k-2}$ lesz.

A 5.11. feladat megoldásai

A 5.11. a) mego.

Most minden elem háromszor számít bele a következő sorba, tehát a sorösszeg háromszorozódik. Mivel a nulladik sorban 1 az összeg, így az n-edikben 3^n.

A 5.11. b) mego.

Az előjeles összeg most állandó, értéke 1.

Minden elem – eredeti előjelétől függően – a következő sor előjeles összegében kétszer pozitív és egyszer negatív előjellel (tehát összességében 1-szer) vagy kétszer negatív és egyszer pozitív előjellel (tehát összességében (-1)-szer) számít. Könnyen ellenőrizhető, hogy éppen azok a számok szerepelnek a következő sor előjeles összegében $+1$-szer, amelyek sajt soruk előjeles összegében is $+1$-szer számítanak és azok lesznek a másik sorban (-1)-szer, amelyek saját sorukban is így szerepeltek.

A 5.11. c) mego.

A Piscal háromszög n-edik sorában az $(1+x+x^2)^n$ polinom kifejtésében az x^{2n}, x^{2n-1}, $\ldots x^2$, x, 1 együtthatói szerepelnek.

Ez teljes indukcióval könnyen igazolható.

Az a), b) feladatok a $3^n = (1+1+1)^n$, $1 = 1^n = (1-1+1)^n$ összefüggésekkel kapcsolatosak.

A 5.12. feladat megoldása

A lehetőségek száma a Pascal háromszög kitöltéséhez hasonló eljárással határozható meg. A tábla bal alsó mezőjébe 1-est írunk, majd onnan indulva minden egyes mezőbe beírjuk a saját sorába, tőle jobbra található összes szám illetve a saját oszlopában alatta található összes szám összegét.

4	12	37	106
2	5	14	37
1	2	5	12
1	1	2	4

A lehetőségek száma 106.

Segítség a 5.13. feladathoz

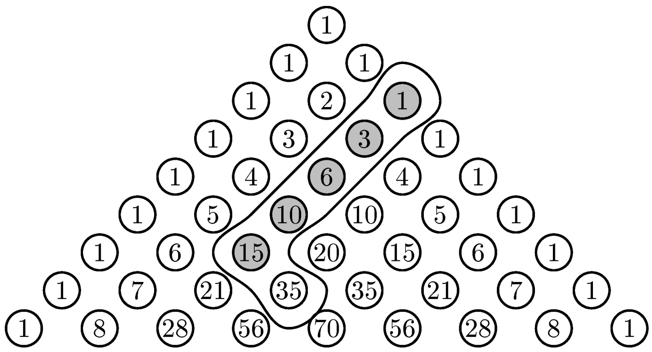
Segédfeladat: határozzuk meg az $\sum_{k=0}^{n}(-1)^k k\binom{n}{k}$ kifejezés értékét!

A 5.14. feladat megoldása

Lemma: Bármely $m \leq n$ természetes számok esetén

$$\sum_{k=m}^{n} \binom{k}{m} = \binom{n+1}{m+1},$$

azaz (lásd a 13.14 ábrát) a Pascal háromszög bármely zokni alakú részében a száron található számok összege az ujjaknál található számmal egyezik meg.



13.14. ábra.

a Lemma bizonyítása: Cseréljük ki az összeg első tagját, $\binom{m}{m}$-et a vele azonos értékű $\binom{m+1}{m+1}$-re és használjuk fel rekurzívan a $\binom{k}{m} + \binom{k}{m+1} = \binom{k+1}{m+1}$ azonosságot!

$$\binom{m}{m} + \binom{m+1}{m} = \binom{m+1}{m+1} + \binom{m+1}{m}$$

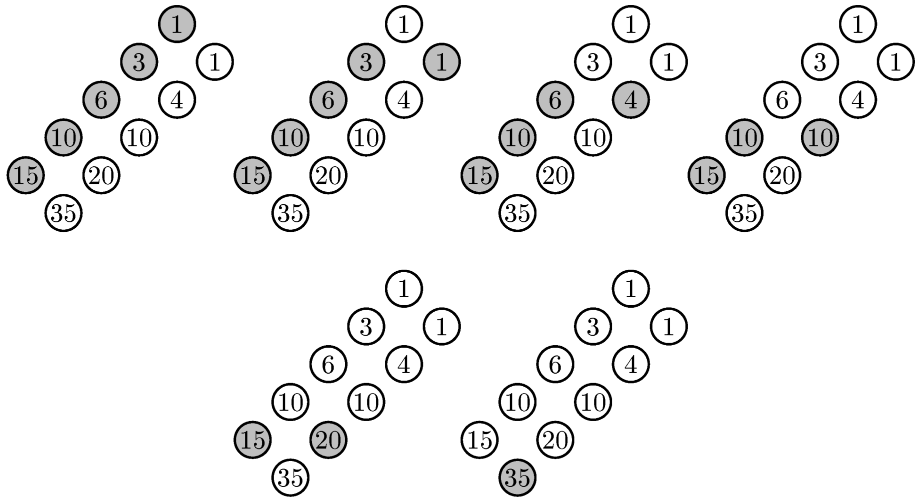
$$\binom{m+1}{m+1} + \binom{m+1}{m} = \binom{m+2}{m+1}, \qquad \binom{m+2}{m+1} + \binom{m+2}{m} = \binom{m+3}{m+1},$$

$$\binom{m+3}{m+1} + \binom{m+3}{m} = \binom{m+4}{m+1}, \quad \dots, \quad \binom{n}{m+1} + \binom{n}{m} = \binom{n+1}{m+1}.$$

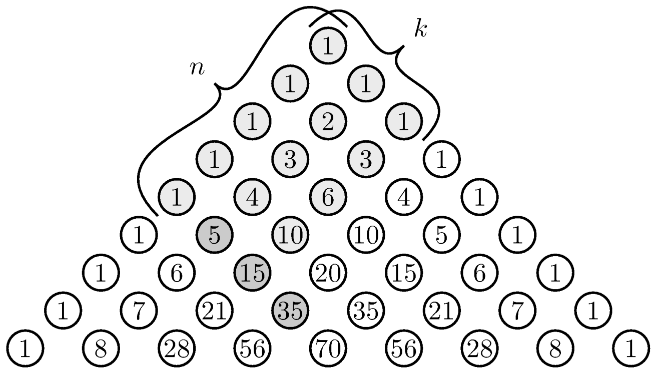
A 13.14 ábrán látható, ahogy a kezdeti részletösszegek értéke halad lefelé a Pascal háromszögben.

A 5.15. feladat megoldása

a) A 5.14. feladatban szereplő „zokni”-tétel szerint a 13.16 ábrán az egyes vonalakban található számok a sötétszürkével színezett számokkal egyenlők.



13.15. ábra.



13.16. ábra.

A 13.17 ábrán most újra használhatjuk a „zokni”-t, csak fordított helyzetben, ha még egy 1-est hozzáadunk a vizsgált összeghez:

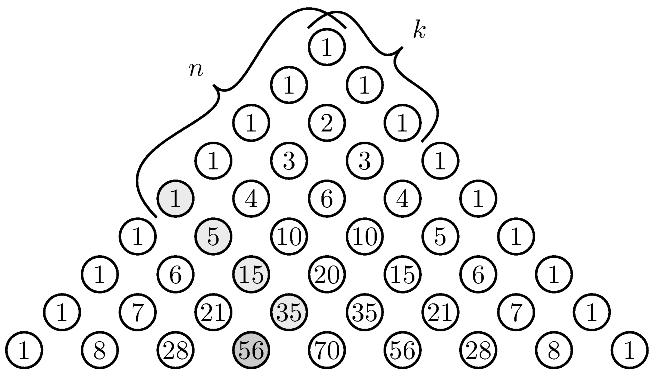
Tehát a keresett összeg $56 - 1 = 55$.

b) Az általános esetben a vizsgált téglalap sarkaiban az

$$\binom{0}{0}, \qquad \binom{n-1}{0}, \qquad \binom{k-1}{0}, \qquad \binom{n+k-2}{n-1}$$

számok állnak, az utóbbi alatt (a kettővel lejjebbi sorban) álló szám a

$$\binom{n+k}{n} = \binom{n+k}{k},$$



13.17. ábra.

tehát a végeredmény $\binom{n+k}{n} - 1$.

13.5. Összetett leszámolási feladatok megoldása

Lásd még az Analízis/Különböző sorozatok fejezetet!

A 5.1. feladat megoldásai

A 5.1. a) fel. I. megoldása

Az első számjegy lehet 1, 2, 3, 4, 5, 6, ill. 7.

Ha az első szám 1-es és a második 2-es, akkor a harmadik 7-féle lehet (3, 4, 5, 6, 7, 8, 9).

Ha az első szám 1-es és a második 3-as, akkor a harmadik 6-féle lehet (4, 5, 6, 7, 8, 9).

⋮

Ha az első szám 1-es és a második 8-as, akkor a harmadik 1-féle lehet (9).

Ez eddig $7+6+5+4+3+2+1 = 28$ lehetőség. Az összegzést a Pascal háromszögben is elvégezhetjül a „Zokni"-val.

Ha az első szám 2-es, akkor a fentihez hasonlóan $6 + 5 + 4 + 3 + 2 + 1 = 21$ lehetőség lesz.

Ha az első szám 3-as, 4-es, 5-ös, 6-os illetve 7-es akkor rendre

$5+4+3+2+1 = 15$, $4+3+2+1 = 10$, $3+2+1 = 6$, $2+1 = 3$, illetve 1 lehetőség lesz. Ezek a számok mind ott vannak a Pascal-háromszögben. A „Zokni" szerint az összegük is ott van: $28 + 21 + 15 + 10 + 6 + 3 + 1 = 84$.

Tehát 84 db olyan háromjegyű szám van, amelynek jegyei növekvők.

A 5.1. a) fel. II. megoldása

Az eredmény $\binom{9}{3} = 84$. Az indoklás a 5.8.. b) feladat megoldásában olvasható.

A 5.1. b) fel. I. megoldása

A keresett számokat három csoportba oszthatjuk:

1. csoport: mind a három számjegy különböző. Az ilyen számok a 16. a) feladatnak felelnek meg, számuk $\binom{9}{3} = 84$.

2. csoport: két számjegy egyforma, a harmadik különböző. A dupla számot 9-féleképpen választhatjuk, ennek kiválasztása után a másik számot már csak 8-féleképpen. Ha kiválasztottuk őket, akkor a kisebbiket vagy kisebbeket rakjuk balra, a nagyobbakat vagy nagyobbat jobbra, ez már egyértelmű. Tehát $9 \cdot 8 = 72$ ilyen szám van.

Egy másik leszámlálási módszer: először kiválasztjuk azt a két számot, amely szerepel, erre $\binom{9}{2} = 36$ lehetőség van. Utána eldöntjük, hogy ezek közül melyikből lesz kettő, ez két eset, tehát $2\binom{9}{2} = 72$ megoldás van ebben az esetben.

3. csoport: a három szám egyforma. Ilyen számból $\binom{9}{1} = 9$ van.

összesen tehát $84 + 72 + 9 = 165$ megfelelő szám van.

Megjegyzés a 5.1. fel. b) I. megoldásához

Az összegzést így is elvégezhetjük:

$$\binom{9}{3} + 2\binom{9}{2} + \binom{9}{1} = \left(\binom{9}{3} + \binom{9}{2}\right) + \left(\binom{9}{2} + \binom{9}{1}\right) =$$

$$= \binom{10}{3} + \binom{10}{2} = \binom{11}{3} = 65.$$

A 5.1. b) fel. II. megoldása

Két halmazt vizsgálunk:

M az $1, 2, \ldots, 9$ elemekből álló monoton növő sorozatok halmaza;

S az $1, 2, \ldots, 9, 10, 11$ elemekből álló *szigorúan* monoton növő sorozatok halmaza.

Feladatunk, a b) példa, az M halmaz elemszámát kérdezi. Az a) feladat már korábban tárgyalt megoldása szerint a fenti S halmaz elemszáma $\binom{11}{3}$. Alább megmutatjuk, hogy az M, S halmazok elemszáma egyenlő, tehát a b) feladat eredménye $\binom{11}{3}$.

Kölcsönösen egyértelmű megfeleltetést adunk meg az M, S halmazok között. Legyen $(m_0, m_1, m_2) \in M$ és $(s_0, s_1, s_2) \in S$ egy-egy monoton növő illetve szigorúan monoton növő sorozat. Értelmezzük a

$$\varphi : \quad M \longrightarrow S$$

leképezést az

$$\varphi\left((m_0, m_1, m_2)\right) = (m_0, m_1 + 1, m_2 + 2)$$

képlettel. Mivel $m_0 \le m_1$ és $m_1 \le m_2$, így $m_0 < m_1 + 1$ és $m_1 + 1 < m_2 + 2$, tehát az $(m_0, m_1{+}1, m_2{+}2)$ sorozat szigorúan monoton növő. Másrészt mivel $1 \le m_0, m_1, m_2 \le 9$, így $1 \le m_0, m_1 + 1, m_2 + 2 \le 11$, tehát az $(m_0, m_1 + 1, m_2 + 2)$ sorozat S-ben van. A φ leképezés az M halmaz minden eleméhez hozzárendeli az S halmaz egy-egy elemét.

Könnyű meggondolni, hogy ha (s_0, s_1, s_2) az S halmaz tetszőleges eleme, akkor $(s_0, s_1 - 1, s_2 - 2)$ az M halmazban van és (s_0, s_1, s_2) ennek és csakis ennek az M-beli elemnek a φ-nél származó képe. A φ leképezés tehát kölcsönösen egyértelmű a két halmaz között.

Az M, S halmazok elemszáma egyenlő, ezzel a feladatot megoldottuk.

A 5.1. b) fel. III. megoldása

A számjegyek most kilencfélék lehetnek: 1, 2, 3, …, 9. Ezek közül kell hármat kiválasztanunk, de lehet ugyanazt többször. A sorrend viszont nem számít, a három kiválasztott számot egyféleképpen rakhatjuk olyan sorrendbe, amelyet a feladat kér. A megoldások száma tehát 9 elem 3-adosztályú *ismétléses kombinációinak száma*, ami $\binom{11}{3} = 65$.

A 5.2. feladat megoldása

A lottószámok között pontosan akkor nincs két szomszédos, hogy ha – növekvő sorrendjükben – rendre 0-t, 1-et, 2-t, 3-at ill. 4-et kivonva belőlük öt különböző – 1 és 86 közti – egész számot kapunk. Így a valószínűség: $\frac{\binom{86}{5}}{\binom{90}{5}}$.

A 5.3. feladat megoldásai

A 5.3. b) mego.

Cserepartneremnek 9-féle ajándékból választhatok. Bármelyiket is választom, a másik diák számára is 9 lehetőségem van, és ugyanúgy a tanárnak is. Ez összesen $9 \cdot 9 \cdot 9 = 9^3$ eset, mind különböző.

A 5.3. a) mego.

Érdemesebb először a 5.3. b) feladatot megoldani. Az ott kapott 9^3 eset, most nem mind különböző. A (Rubik kocka, Unikum, téli szalámi), (Unikum, Rubik kocka, téli szalámi) hármasok a b) feladatrészben különbözőek, az a)-ban azonosak. Azt gondolhatnánk, hogy 3 elem lehetséges sorrendjeinek – permutációinak – számával kell osztani a b)-beli eredményt, de 9^3 nem is osztható ezzel. A gond ott van, hogy az a)-beli (Unikum,

Unikum, Rubik-kocka) hármas a b)-ben nem 6-szor, hanem csak 3-szor fordul elő, míg az (Unikum, Unikum, Unikum) hármas csak egyszer. Másként kell gondolkodni.

Feleltessük meg a 9 ajándéknak az 1, 2, 3, …, 9 számokat! A kiválasztott 3 ajándék, azaz 3 szám, sorrendje nem számít, rakjuk azokat növekvő sorrendbe (egyenlőség megengedett)! Így a feladatot visszavezettük a 5.1. b) feladatra. A megoldások száma $\binom{11}{3}$.

A 5.4. feladat megoldásai

A 5.4. a) mego.

Feleltessük meg az n-féle dolognak az 1, 2, …, n számokat! A kiválasztott k darab számot, amelyek közül bármelyik többször is szerepelhet, állítsuk növekvő sorrendbe. Így egy monoton növő sorozatot kapunk. Adjunk most a növekedési sorban i-edik számhoz $(i+1)$-et! Így egy *szigorúan* monoton számsorozatot kapunk, amelynek elemei az $\{1,2,3,\quad,n+k-1\}$ halmazból kerülnek ki. Ennek a halmaznak a k-elemű részhalmazai kölcsönösen egyértelmű megfeleltetésben állnak ugyanazen halmaz k-tagú szigorúan monoton sorozataival, ezek pedig az $\{1,2,\quad,n\}$ számok k-tagú monoton sorozataival, tehát ezek száma is $\binom{n+k-1}{k}$.

A 5.4. b) fel. eredménye

n^k.

A 5.5. feladat megoldásai

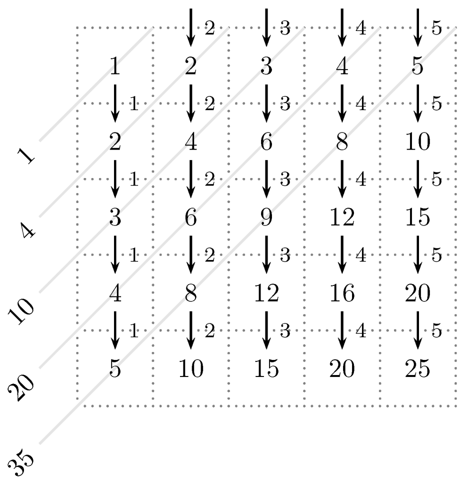
A 5.5. fel. I. megoldása

Az n-edik átló olyan szorzatokat tartalmaz, amelyben a két tényező összege $(n+1)$:

$$\begin{aligned} a_n &= \textstyle\sum_{k=1}^n k(n+1-k) = \sum_{k=1}^n k(n+1) - k^2 = \\ &= \textstyle(n+1)\sum_{k=1}^n k - \sum_{k=1}^n k^2 = (n+1)\frac{n(n+1)}{2} - \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}, \end{aligned} \tag{13.12}$$

ahol felhasználtuk az első n pozitív egész összegére, illetve az első n pozitív négyzetszám összegére vonatkozó jól ismert képleteket (lásd az órán később). Egyszerűbb alakot kapunk ha a két tényezőből kiemeljük az $n(n+1)$ szorzatot és közös nevezőre hozunk:

$$a_n = n(n+1)\left(\frac{3(n+1)}{6} - \frac{(2n+1)}{6}\right) = \frac{n(n+1)(n+2)}{6}. \tag{13.13}$$



13.18. ábra.

A 5.5. fel. II. megoldása

Ezt a megoldást a „Zokni”-ra (lásd a 5.14. feladatot) építjük

Haladjunk a szorzótáblában átlóról átlóra (lásd a 13.18 ábrát)!

A második átlóban a számok rendre 1-gyel illetve 2-vel nagyobbak a fölöttük – az előző átlóban – álló számnál. A harmadik átlóban rendre 1, 2 és 3 a differencia stb. A további gondolatmenet leolvasható az alábbi elrendezésből, amelyben az összegzések a „zoknin” alapulnak.

$$
\begin{array}{lllll}
a_1 & = 1 & = \binom{1}{1} & = \binom{2}{2} & = \binom{3}{3} \\
a_2 & = a_1 + (1+2) & = a_1 + \left(\binom{1}{1} + \binom{2}{1}\right) & = \binom{3}{3} + \binom{3}{2} & = \binom{4}{3} \\
a_3 & = a_2 + (1+2+3) & = a_2 + \left(\binom{1}{1} + \binom{2}{1} + \binom{3}{1}\right) & = \binom{4}{3} + \binom{4}{2} & = \binom{5}{3} \\
\vdots & & & & \\
a_n & = a_{n-1} + (1+2+\ldots+n) & = a_{n-1} + \left(\binom{1}{1} + \binom{2}{1} + \ldots + \binom{n}{1}\right) & = \binom{n+1}{3} + \binom{n+1}{2} & = \binom{n+2}{3}
\end{array}
$$

A 5.5. fel. III. megoldása

Kombinatorikai értelmezés

Az előző megoldásokban kapott végeredménynek, az $\binom{n+2}{3}$-nak önálló jelentése van: azt mondja meg hányféleképpen választható ki $(n+2)$ objektumból három. Szeretnénk megérteni miképpen kapcsolódik ez a jelentés a feladathoz.

Válasszunk ki az 1, 2, …, $(n+2)$ számokból hármat úgy, hogy először közülük a nagyságrendi sorrendben középsőt választjuk ki!

A középső szám értéke 2 és $n+1$ közötti egész szám lehet. Ha ez a középső érték $(k+1)$, ahol $1 \leq k \leq n$, akkor a legkisebb szám k-féle, a legnagyobb szám pedig $(n+2)-(k+1) = n+1-k$-féle lehet, tehát $k \cdot (n+1-k)$-féleképpen lehet a k szám a középső. Ez azt jelenti, hogy a szorzótábla n-edik átlójában (lásd az I. megoldásban is használt (13.12) képletet) álló számok azt fejezik ki, hogy hányféleképpen választhatunk ki az első $(n+2)$ pozitív egészből hármat, ha a középső rögzített. Az átlóban álló számok összege pedig kiadja azt összes lehetőséget, ahányféleképpen három szám kiválasztható $(n+2)$-ből.

A 5.6. feladat megoldása

Minden köri pontnégyesből egyféleképpen választható ki két pár melyek összekötő szakasza metsző, így a megoldások száma $\binom{n}{4}$.

13.6. Dimenzió – a feladatok megoldásai

A 5.2. feladat megoldásai

Segítség a 5.2. feladathoz

Rajzoljunk táblát a játékhoz! Minden osztó legyen egy mező. Az a osztó mezője kerüljön a b osztó mezője fölé, ha a a b többszöröse. Tehát legalulra az 1 kerüljön. Közvetlen föléje mik? Azok fölé?

A 5.2. feladat megoldása

A 10 és a 16 osztóhálója a 13.19 ábrán, a 24 és a 36 osztóhálója a 13.20, a 30 osztóhálója a 13.21 ábrán, végül a 2010 osztóhálója a 13.22 ábrán látható.

A 5.3. feladat megoldása

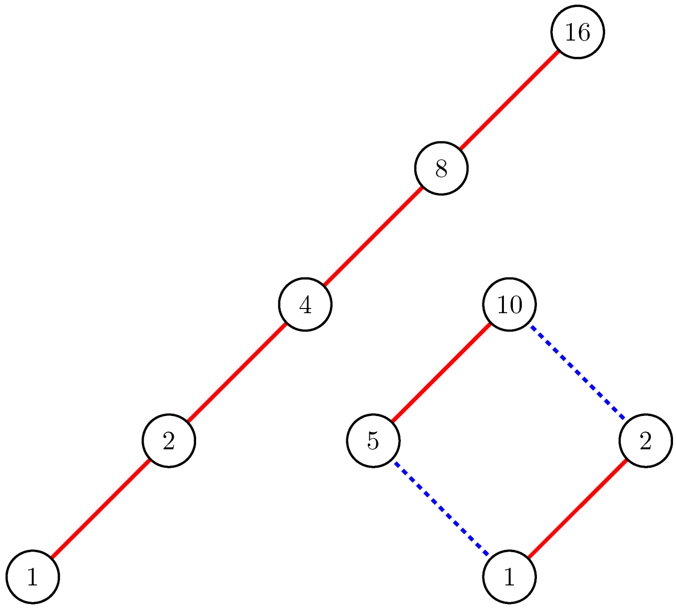
Segítség a 5.3. feladathoz

Az n dimenziós kocka csúcsai megfeleltethetők az n hosszú $0-1$ sorozatoknak.

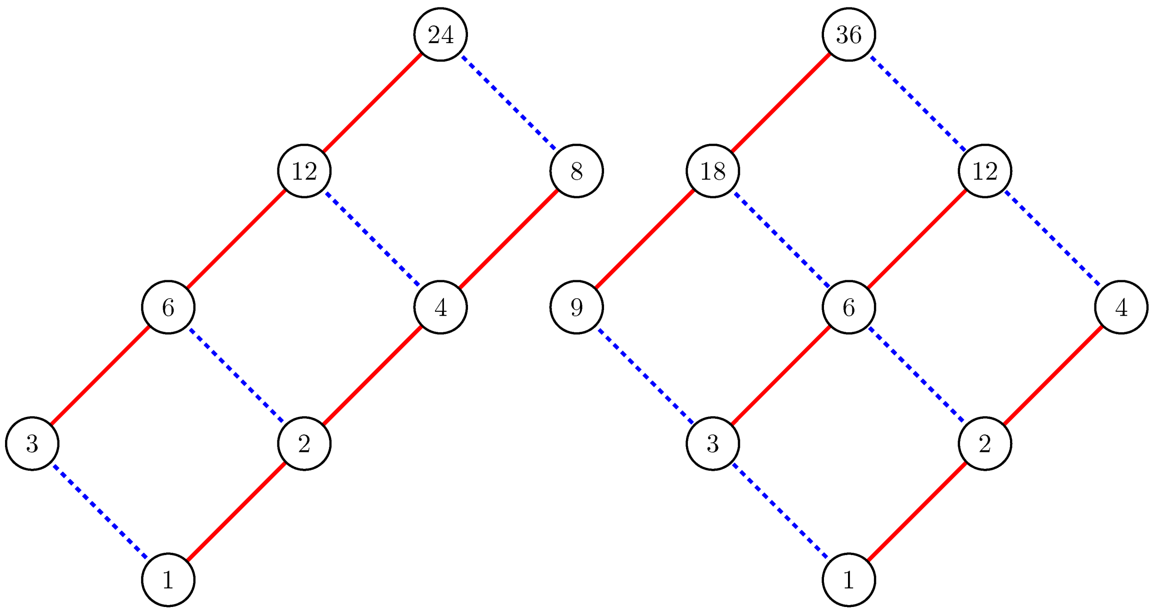
A kocka egy éle a csúcsok egy két elemből álló halmaza. Egy élt meghatározó két csúcs két olyan sorozatnak felel meg, amelyek csak egyetlen helyen térnek el egymástól.

A kocka egy lapja (2-dim lapja) a csúcsok egy négy elemből álló részhalmaza. Egy lapot meghatározó négy csúcs négy olyan sorozatnak felel meg, amelyek 2 helyet kivéve minden más helyen megegyeznek egymással, azon a két helyen pedig felveszik a négy lehetséges értékpárt.

A kocka egy 3-dim lapja. . .



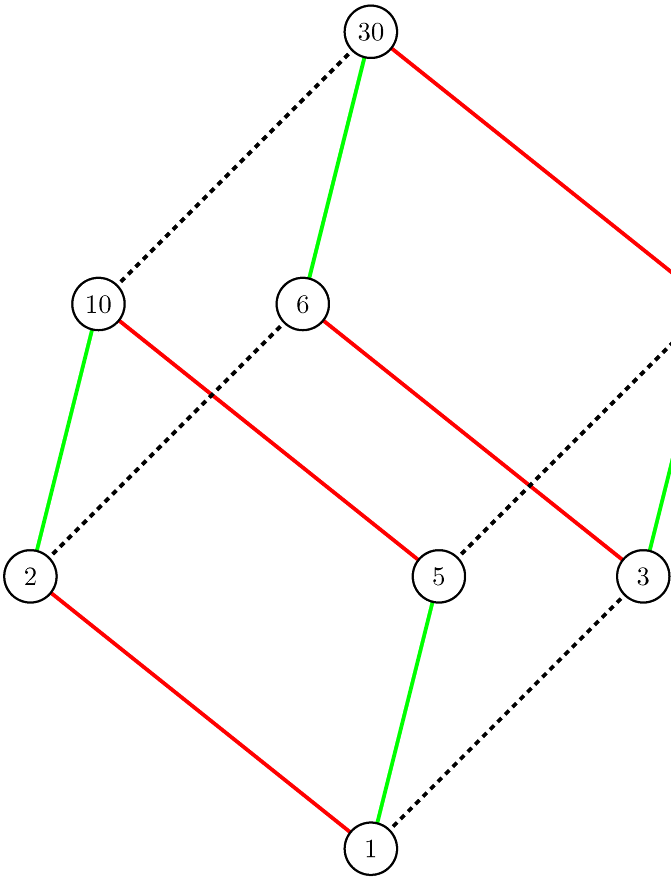
13.19. ábra. A 10 és a 16 osztóhálója



13.20. ábra. A 24 és a 36 osztóhálója

A 5.3. feladat megoldása

Az eredmények a 13.1 táblázatban olvashatók.

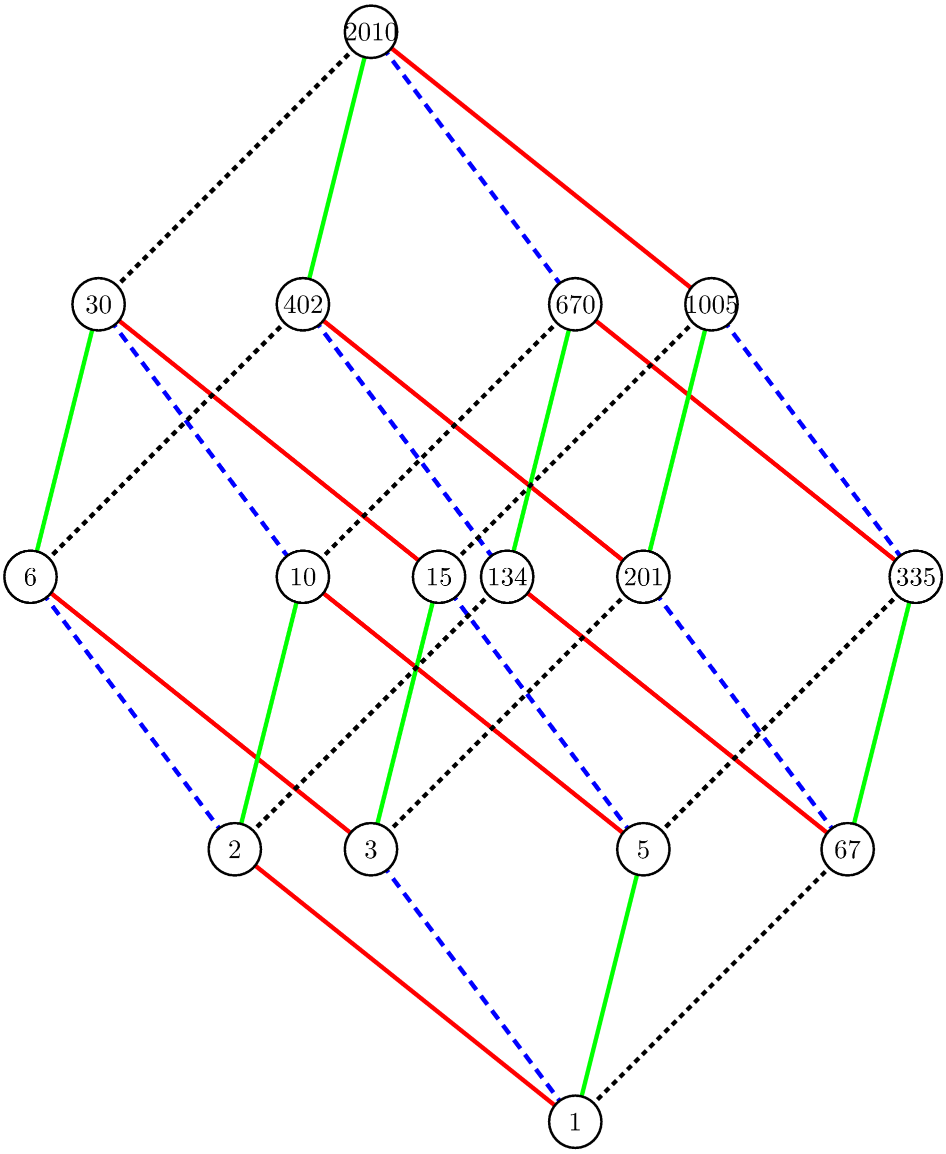


13.21. ábra. A 30 osztóhálója

		n				
		0	1	2	3	4
	0	1	2	4	8	16
	1	0	1	4	12	32
k	2	0	0	1	6	24
	3	0	0	0	1	8
	4	0	0	0	0	1

13.1. táblázat. Az n-dimenziós kocka k-dimenziós lapjainak száma

Az n-dimenziós kocka k-dimenziós lapjainak száma $\binom{n}{k}2^{n-k}$, hiszen ki kell választanunk azt a k helyet (koordinátát), amelyet szabadon hagyunk és rögzítenünk kell a maradék $(n-k)$ koordináta értékét (lásd még a „Segítség a 5.3. feladathoz” részben



13.22. ábra. A 2010 osztóhálója

leírtakat).

A 5.4. feladat megoldása

a) Legfeljebb 3 osztó választható ki így. Jó pld. a 2, 3 és az 5. Az $\{1, 2, 6, 30\}$, $\{3, 15\}$, $\{5, 10\}$ halmazok mindegyikéből legfeljebb egy választható ki, tehát 3-nál több semmiképp.

b)

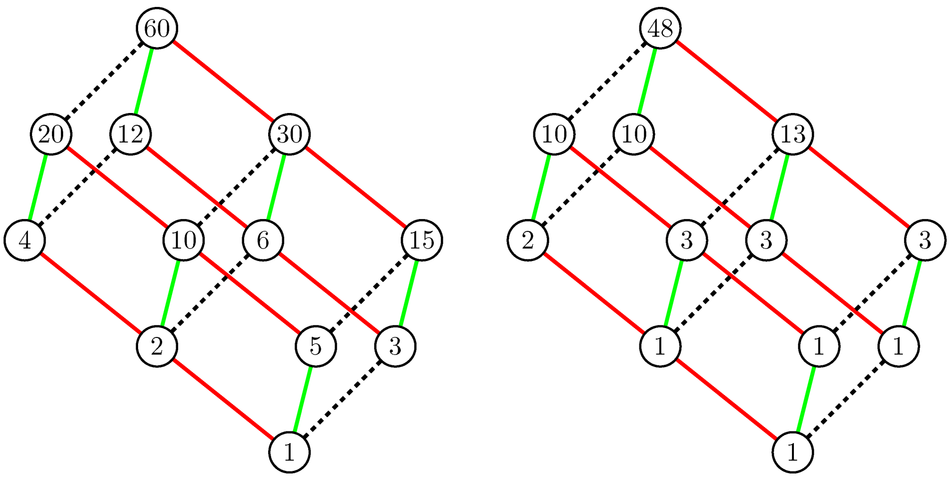
$\binom{4}{2} = 6$ db, a két prím szorzatából álló osztók. Ennél több nem lehet, az alábbi hat osztólánc tartalmazza az összes osztót:

$$(1, 2, 2 \cdot 3, 2 \cdot 3 \cdot 67, 2010), \qquad (1, 2, 2 \cdot 5, 2 \cdot 5 \cdot 3, 2010), \qquad (1, 3, 3 \cdot 5, 3 \cdot 5 \cdot 67, 2010)$$

$$(1, 5, 5 \cdot 67, 2 \cdot 5 \cdot 67, 2010), \qquad (1, 67, 2 \cdot 67, 2 \cdot 5 \cdot 67, 2010), \qquad (1, 67, 3 \cdot 67, 3 \cdot 5 \cdot 67, 2010).$$

A 5.5. feladat megoldása

Készítsük el a 60 osztóhálóját és számítsuk ki, hogy az 1-nek megfelelő csúcsból hányféle lépéssorozattal lehet eljutni a 60-hoz, ha mindig egy többszörösre kell lépni (tehát pld lehet egyből a 60-ra is)! Töltsük ki az osztóháló csúcsait számokkal a Pascal háromszöghöz hasonló módon, de kissé másképp, a 5.12. feladatban már látott módon: írjunk 1-est az 1-es osztónak megfelelő csúcsra és minden más osztónak megfelelő csúcsra írjuk az ő osztóihoz írt számok összegét (lásd a 13.23 ábrát)!



13.23. ábra. A 60 osztóhálója és Pascal-szerű kitöltése

13.7. Gráfok – feladatok megoldása

A 5.1. feladat megoldása

C. Frank kilenc választ kapott. Bárki az asztalnál legfeljebb nyolcat mondhatott (magát és párját mindenki ismeri). Ezért az elhangzott számok; $0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8$.

Könnyű látni, hogy aki 8−at mondott, annak a házastársa 0−t, aki 7−et, annak párja 1−et és így tovább. Mivel a 4 szám nem hangzott el kétszer, és mivel van $4, 4$ pár, ezért ez a C. Frank házaspár lehetett, így noha C. Frank nem nyilatkozott, R. Korszakov kitalálta, hogy ő négy embert nem ismer.

A 5.2. feladat megoldásai

A 5.2. fel. I. megoldása

„Buszgráf”-nak nevezzük azt a gráfot, amelynek csúcsai Bergengócia városai, és két csúcs akkor van összekötve, aha nekik megfelelő két város között van közvetlen buszjárat.

Ha buszgráf összefüggő, akkor készen vagyunk, busszal bármelyik városból bármelyik másikba el lehet jutni.

Ha a buszgráf nem összefüggő, akkor a csúcsok felbonthatók két nemüres részhalmaz A, és B diszjunkt uniójára úgy, hogy A-beli csúcs és B-beli közt nincs él. Ez azt jelenti, hogy a két csoport közti élek mind a „repülőgráf”-ban vannak. A repülőgráf tehát összefüggő, mert ezeken az éleken bármelyik csúcsból bármelyik másikba eljuthatunk legfeljebb kettő hosszú úton.

A 5.2. fel. II. megoldása

A városok számára vonatkozó teljes indukcióval bizonyítunk. Az állítás nyilván igaz 1 illetve 2 város esetén. Tegyük fel, hogy $2 < k$ város esetén is igaz, bizonyítsuk $(k+1)$ városra.

Legyen az egyik város Bergóc. A többi város – ez összesen csak k város – között megoldható a közlekedés az egyik járművel, pld busszal.

Ha Bergócból indul ki buszjárat, akkor az bevonja Bergócot a többi város buszforgalmába, így busszal innen is el lehet jutni mindenhová, a busz megoldja a közlekedést önmagában.

Ha Bergócból nem indul buszjárat, akkor innen mindenhová megy repülőjárat, így repülővel bárhonnan bárhová el lehet jutni (Bergócon keresztül).

A 5.3. feladat megoldása

Ha a városok száma legalább három, akkor ellenpélda adható. Az egyik város legyen Bergóc. Az összes többi város között menjen buszjárat, míg Bergócból csak vonat és repülőjáratok induljanak, néhány (legalább 1) városhoz vonat, néhány (legalább 1) városhoz pedig repülő. Ebben az esetben egyik közlekedési eszköz sem tudja biztosítani bármely két város között az elérhetőséget.

Háromnál több város esetén olyan példa is adható, amelyben minden városból mind a háromféle közlekedési társaság indít járatokat. Pld négy város, A, B, C, D esetén egy ellenpélda: AB és CD a buszvonalak, AC és BD a vonatok és AD és BC a repülők. Több csúcs esetén négy csoportra oszthatjuk a csúcsokat és köztük ugyanezt a beosztást alkalmazzuk, a csoportokon belül pedig tetszőlegeset.

A 5.4. feladat megoldásai

A 5.4. a) mego.

Igaz. Tekintsünk egy tetszőleges járatot és szüntessük meg, ha része egy körutazásnak. Haladjunk tovább, egyesével menjünk így végig az éleken. Minden egyes lépésben igaz marad, hogy bárhonnan bárhová el lehet jutni, mert a kihagyott járat pótolható a körút többi járatával. Az eljárás végén csak olyan járatok maradnak meg, amelyek nem részei körútnak, de továbbra is el lehet jutni mindenhonnan mindenhová.

A 5.4. b) mego.

Nem. Ha például egy repülő körbemegy az összes városon. mindegyiknél leszáll és a végén a visszajut oda, ahol indult, akkor biztosított a közlekedés bármelyik két város között, de ehhez nem hagyható ki a láncból egyetlen járat sem.

A 5.5. feladat megoldása

A feladatot úgy is megfogalmazhatjuk, hogy egy n pontú teljes, irányított gráfban van olyan pont, melyből bármelyik másik pont legfeljebb kettő hosszú írányított út mentén elérhető.

Kézenfekvő azt gondolni, hogy a legeredményesebb versenyző lesz a megfelelő játékos. Tegyük tehát fel, hogy az X játékos nyerte a legtöbb csörtét. Ha nincs olyan A játékos, aki $X-$et legyőzte, készen vagyunk. Tegyük tehát fel, hogy egy A játékos legyőzte $X-$et. Ekkor azok közül, akiket legyőzött X kell lenni olyannak, aki $A-$t legyőzte. Ellenkező esetben ezek mindegyikét legyőzte volna A, + még $X-$et, ami összesen több, mint amennyit X legyőzött. Ez ellentmond annak, hogy X győzte le a legtöbb játékost.

A 5.6. feladat megoldása

A feladat ekvivalens avval, hogy ha egy 6 pontú teljes gráf éleit színezzük két színnel, akkor lesz egyszínű háromszög (6 tudós a 6 pont, akivel levelez, avval pirossal kötjük össze, akivel nem, avval kékkel kötjük össze).

Egy kiszemelt tudósnak megfeleltetett pontból biztosan kiindul 3 egyszínű él (mondjuk piros). Ha ezen élek végpontjai között van 2, amely piros éllel van összekötve, akkor kész vagyunk. Ha nincs, akkor ezek közül bármelyik kettő kékkel van összekötve, ami egy kék háromszöget ad.

13.8. Kombinatorikus geometria – feladatok megoldása

A 5.1. feladat megoldása

a) Tegyük fel, hogy nem igaz az állítás! Ha az 1 piros akkor 2 kék ($1 + 1 = 2$ megoldás lenne), hasonlóan a 4 ezért piros ($2 + 2 = 4$), 5 kék ($1 + 4 = 5$). Nem lehet a 3 piros ($1 + 3 = 4$) de kék se ($2 + 3 = 5$). Ez az ellentmondás igazolja az állítást.

b) Az 1 és 4 piros, 2, 3 kék.

A 5.2. feladat megoldása

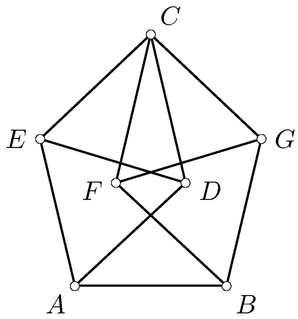
Ha X, Y, Z egy a oldalú szabályos háromszög, akkor X, Y, Z közül kettőnek azonos a színe.

A 5.3. feladat megoldása

Tekintsük a 13.24. ábrán látható Motzkin gráfot, amelyben ADE, BFG, CDE, CFG egységoldalú szabályos háromszögek és az AB szakasz hossza is egységnyi. Ha ebben az ADE és a CDE háromszög csúcsai között nincsenek azonos színűek, akkor A és C színe megegyezik. Ha a BFG és a CFG háromszög csúcsai között sincsenek azonos színűek, akkor B és C színe is megegyezik. Ekkor tehát A és B színe is megegyezik, melyek távolsága egységnyi.

A 5.4. feladat megoldása

Parkettázzuk ki a síkot szabályos hatszögekkel, és színezzük egy hatszöget az 1−es színnel (a hatszög belsejét és három egymásutáni élét, a csatlakozó élek kezdőpontját, a harmadikét már nem) a körötte levő hatszögeket ciklikusan.



13.24. ábra.

A 5.5. feladat megoldása

Vegyünk egy a oldalú szabályos háromszöget. Ezt fogjuk egy olyan felületre ráfektetni amelynek pontjai egyszínűek, ezzel bizonyítva az állításunk.

Mint már láttuk, találtunk két pontot, P−t és Q−t, amelyek egyszínűek (piros), és távolságuk éppen a. Az O szakaszfelező pontjukból, mint középpontból a PQ síkjára meröleges síkon húzzunk egy $\sqrt{3}a/2$ sugarú kört. Ennek pontjai P−vel és Q−val szabályos háromszöget alkotnak, ha van piros pontja, készen vagyunk. Legyen e kör minden pontja kék. Tekintsünk e körön tetszőleges két pontot, T−t és V−t, amelyek egyszínűek (kék), és távolságuk éppen a. TV síkjára meröleges síkon húzzunk megint egy $\sqrt{3}a/2$ sugarú kört a szakaszfelező pontjukból, mint középpontból. Mint láttuk ennek az ellenkező színűnek kell lennie (piros), különben készen vagyunk. A T és V pontok tetszölgesen voltak választva a kék körön, tehát bárhol felvéve piros köröket kapunk, melyek egy tórusz felületét súrolják. E felület piros.

Rövid számolással igazolható, erre fektetve egy a oldalú szabályos háromszöget, annak mindhárom csúcsa e tórusz felületén van.

A 5.6. feladat megoldása

A A 5.3. fel. megoldásában látható Motzkin gráf ezt a feladatot is megoldja.

A 5.7. feladat megoldása

Vegyünk egy egység oldalú szabályos háromszöget, és toljuk el két példányban úgy, hogy a háromszögünk megfelelő csúcsai egy a oldalú szabályos háromszöget alkossanak. Így van egy 9 pontú gráfunk. Az egység oldalú szabályos háromszögekben csak egy pont lehet legfeljebb piros, tehát legalább két kék pont van. Ezért a három a oldalú szabályos háromszögek közül az egyikben minden pont kék.

A 5.8. feladat megoldása

Tekintsük az öt pont konvex burkát. Ha ez öt-, vagy négyszög, akkor készen vagyunk. Ha háromszög, akkor belsejében tartalmaz két pontot. Az ezeket összekötő egyenes egyik oldalán két pont van (nincs három közülük egy egyenesen). A két beslő pont és e két pont egy konvex négyszöget alkot.

A 5.9. feladat megoldása

Vegyünk ki közülük egy tetszőleges pontot, legyen ez O, és tegyük fel, hogy ettől a ponttól a többi pont legfeljebb 699 különböző távolságot határoz meg. Ezzel a 699 távolsággal, mint sugárral O körül húzzunk köröket. Nyilván nincs olyan pont, amelyik valamelyik körön ne nyugodna. (Ez egy újabb távolságot jelent ellenkező esetben). Ekkor a 699 kör között van olyan, amelyik legalább $1,000,000/699 > 1430$ pontot tartalmaz. E körön kijelölve egy pontot és az e körön levő pontokkal összekötve legalább $1430/2 > 700$ különböző távolságot kapunk, ugyanis egy távolság legfeljebb kétszer fordulhat elő.

A 5.10. feladat megoldásai

A 5.10. a) mego.

Tegyük fel, hogy van egy olyan színezés, melyben nincs három különböző, melyek azonos színűek és egy számtani sorozat alkotnának. Lényegében a következő két esetet kell diszkutálni:

1. eset: 1 és 9 azonos színű (piros) az 5−ös kék.
2. eset 1 és 5 azonos színű (piros) az 9−es kék.

Mindkét esetben a további pontok színei egyértelműek, és ellentmondásra vezetnek.

A 5.10. b) mego.

$1, 2, 5, 6$ pontok színe kék, $3, 4, 7, 8$ piros.

14. fejezet

Analízis feladatok megoldása

14.1. Szabályjátékok, gépek – feladatok megoldása

„Szabályjátékot” már óvodában játszanak a gyerekek. Ott ez azt jelenti, hogy megértik az óvónéni által elmondott szabályt és követik. Annak is nagyon lényeges szerepe van a nevelésben.

Az alábbi példákban az a feladat, hogy észrevegyenek valamilyen szabályosságot, képletet, rekurziót stb. a gyerekek a megadott táblázatokban. Az egyszerű szabály keresése, minél rövidebb összefüggés keresésének vágya rendkívüli módon vitte előre a tudományt. Inkább inspiráljuk erre a gyereket, minthogy modern nézőpontból lelőjük az ilyen jellegűpéldákat azzal, hogy „a szabály nagyon sokféle lehet, egy kis adatból még bármi következhet”.

A most következő példasor felépítésében nincs különösebb rendszer, inkább csak arra szeretnénk utalni, hogy a szabály nagyon különféle is lehet.

A 6.1. feladat megoldásai

A 6.1. a) mego.

$a(n) = 2^{n-1} + 1$. A diákok először általában észlelik, hogy a differenciasorozat: $\Delta_n = a(n+1) - a(n) = 2^{n-1}$, sokuk itt abba is hagyja a gondolkodást. Ösztökéljük őket az explicit képlet megtalálására.

$$\begin{array}{rcccl} a(n) & = & a_1 + \Delta_1 + \Delta_2 + \ldots + \Delta_{n-1} & = & 2 + 1 + 2 + 4 + \ldots + 2^{n-2} = \\ & = & 1 + (1 + 1 + 2 + 4 + \ldots + 2^{n-2}) & = & 1 + (2 + 2 + 4 + \ldots + 2^{n-2}) = \\ & = & 1 + (4 + 4 + \ldots + 2^{n-2}) & = \ldots = & 1 + 2^{n-1}. \end{array}$$

A 6.1. b) mego.

$\Delta_1 = b(2) - b(1) = 3$, $\Delta_2 = b(3) - b(2) = 3$, ..., $\Delta_{n-1} = b(n) - b(n-1) = 3$, így

$$a(n) = a_1 + \Delta_1 + \Delta_2 + \ldots + \Delta_{n-1} = 5 + 3(n-1) = 3n + 2.$$

A 6.1. c) mego.

$\Delta_1 = b(2) - b(1) = 3$, $\Delta_2 = b(3) - b(2) = 6$, ..., $\Delta_{n-1} = b(n) - b(n-1) = 3(n-1)$, így

$$a(n) = a_1 + \Delta_1 + \Delta_2 + \ldots + \Delta_{n-1} = 5 + 3\frac{(n-1)n}{2} = \frac{3n^2 - 3n + 10}{2}$$

A 6.1. d) mego.

$d(n)$ az n-edik prímszámnál eggyel kisebb szám.

A 6.1. e) mego.

Ez nagyon nehéz feladat előkészítés nélkül. Egy heurisztika: az egymást követő tagok hányadosa egyre közelebb van a 3-hoz, ezért felírjuk a 3 hatványait is és az eltérést:

n	1	2	3	4	5	6
$e(n)$	1	5	19	65	211	665
3^n	3	9	27	81	243	729
$3^n - e(n)$	2	4	8	16	32	64

Innen már leolvasható a képlet: $e(n) = 3^2 - 2^n$.

A 6.1. f) mego.

$f(n) = n! + 2$.

A 6.2.feladat megoldásai

A 6.2. b) mego.

Kezdjük a b) feladattal!

$g(x)$ az x szám magyar nyelvű leírásában a második karakter.

Most adhatunk még időt a többi feladat megoldására.

A 6.2. a) mego.

a) $f(x)$ az x szám magyar nyelvű leírásában a karakter száma.

A 6.2. c) mego.

$h(x)$ az x magyar karakter egyszerűsítésével (ékezet törölve) kapott karakter sorszáma az angol ABC-ben.

A 6.3. feladat megoldásai

A 6.3. a) mego.

A pozitív egész számokat látjuk egymás után mindegyiket a „jobb szélük”-höz illesztett tengelyre tükrözött példányukkal együtt lerajzolva.

A 6.3. b) mego.

Olvassuk fel, amit látunk!
1 – Egy darab egyes: 11;
11 – Két darab egyes: 21;
21 – Egy darab kettes, egy darab egyes: 1211;
1211 – Egy db egyes, egy db kettes, két darab egyes: 111221; ...

14.2. Gépek egymás után – feladatok megoldása

Egyszerű függvények kompozíciója már hetedikes, nyolcadikos kortól vizsgálható.

A kompozíció megértése a matematikán belül fontos lesz pl. a deriválásnál (összetett függvény deriváltja) és a geometriai transzformációk vizsgálatakor. A kvantummechanika egyik alaptörvénye – a Heisenberg-féle határozatlansági reláció – matematikai alapjában két transzformáció sorrendjének felcserélhetetlensége áll. A strukturált programozáshoz is elengedhetetlen a kompozíció világos használata.

A valós-valós függvények szokásos ábrázolása grafikonnal számos esetben vizuálisan segíti a problémák megértését, máskor azonban éppen gátol. A kompozíció dinamikáját érdemes többféleképpen is vizsgálni.

A 6.7. feladat megoldásai

A 6.7. fel. I. megoldása

Algebrai megközelítés

b) Megfelelő pl az $f(x) = \sqrt{2}x$ és az $f(x) = -\sqrt{2}x$ függvény is.

a) Keressük a leképezést $f(x) = ax + b$ alakban. Ekkor

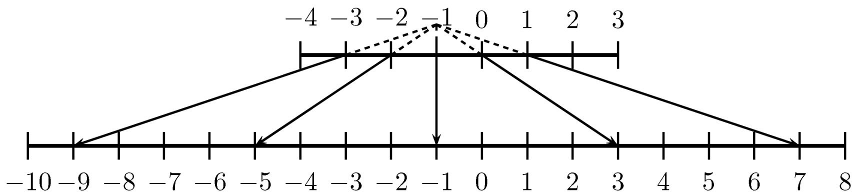
$$f(f(x)) = a(ax + b) + b = a^2x + (ab + b).$$

ha ez minden x-re egyenlő $4x + 3$-mal, akkor $a^2 = 4$ és $ab + b = 3$, tehát vagy $a = 2$ és $b = 1$ vagy $a = -2$ és $b = -3$

A 6.7. fel. II. megoldása

Geometriai megközelítés

b) Tekintsük a $g(x) = 4x + 3$ leképezést, mint a valós számegyenesről a valós számegyenesre való leképezést.



14.1. ábra.

A 14.1 ábráról sejthető, hogy egy -1 centrumú négyszeres nyújtásról van szó. A $4x + 3 = 4(x + 1) - 1$ forma algebrailag is kifejezi ezt a nagyítást. A leképezés „gyöke” a (-1) centrumú 2-szeres illetve a -1 centrumú (-2) arányú középpontos nagyítás. Ezek képlete $f(x) = 2(x + 1) - 1 = 2x + 1$ illetve $f(x) = -2(x + 1) - 1 = -2x - 3$.

Megjegyzés a 6.7. feladat megoldásaihoz

Van más valós-valós függvény is amely megoldja az előírt függvényegyenletet, de az nem adható meg lineáris függvényként.

A 6.12. feladat megoldása

Lásd A Bergengóc Példatár 2. kötetének 132., 149., 160., 163., 170., 185. feladatait!

14.3. Különböző sorozatok – feladatok megoldása

Alább sorozatokkal kapcsolatos példák találhatók kissé összekeverve. Az egyik feladat éppen az, hogy megtaláljuk az egymással analóg példákat, akkor is, ha nem tudjuk megtalálni az azokat leíró képletet.

A 6.1. feladat megoldásai

A 6.1. fel. I. megoldása

A 6 egyenesnek legfeljebb $\binom{6}{2} = 15$ metszéspontja van. Azon a két egyenesen, amelynek ez a pont a metszéspontja még $4-4$ metszéspont van, tehát legfeljebb még $15-2\cdot4-1=6$ olyan metszéspont van, amely nem illeszkedik erre a két egyenesre. Adott metszéspontunk még ezekkel a pontokkal alkothat új egyeneseket, tehát ha minden pontot összekötünk minden olyan ponttal, amivel nincs eleve egy egyenesen, akkor $15\cdot6=90$ egyenest húzunk be. Így minden egyenest kétszer is berajzolunk, a két pontja révén, az egyenesek száma tehát maximum $\frac{15\cdot6}{2}=45$. Ennyi egyenes létre is jöhet, elérhető, hogy a hat egyenes metszéspontjai közül három csak akkor legyen egy egyenesen, ha az az egyenes a hat eredeti egyenes közül való.

A 6.1. fel. II. megoldása

A megoldások száma

$$\frac{\binom{6}{2}\cdot\binom{4}{2}}{2}=\frac{\frac{6\cdot5}{2}\cdot\frac{4\cdot3}{2}}{2}=\frac{6\cdot5\cdot4\cdot3}{2^3}=45,$$

hiszen egy új egyeneshez két egyenes metszéspontját ($\binom{6}{2}$ lehetőség) össze kell kötnünk két ezektől különböző egyenes metszéspontjával ($\binom{4}{2}$ lehetőség), de nem lényeges, hogy e két metszéspont közül melyiket választottuk elsőnek és melyiket másodiknak (: 2).

További kérdések a 6.1. feladattal kapcsolatban

Legfeljebb hány új egyenes keletkezik n egyenes metszéspontjainak összekötésekor?

Ha nem a maximális számú keletkezik, akkor hány új egyenes keletkezhet? Pl. 6 egyenes esetén a maximum 45, de létrejöhet-e 44?

Megjegyzés a 6.1. feladatról

Lásd még a Bergengóc példatár 2. kötetének 177. feladatát és megoldásait a könyv 164-168. oldalain!

A 6.2. feladat megoldása

Nagyon nehezen szokott menni.

Kétféle metszéspont van:

a) Háromszög körülírt köre, ebből $\binom{n}{3}$ van.

b) Két diszjunkt pontpárhoz tartozó felezőmerőleges metszéspontja, ilyenből $3\cdot\binom{n}{4}$ van.

Lásd még a Bergengóc példatár 2. kötetének 177. feladatát.

Segítség a 6.3. feladathoz

A bal alsó csomóponttól kezdve mindegyikre írjuk rá, hogy hányféleképpen juthatunk oda!

A 6.4. feladat megoldásai

A 6.4. fel. I. megoldása

A három klikk méretének eloszlása kétféle lehet: vagy egy hármas és két egyes klikk jön létre $(3+1+1)$ vagy két kettes és egy egyes $(2+2+1)$. A $(3+1+1)$-es klikkeloszlásra $\binom{5}{3}=10$ lehetőség van: ha kiválasztottuk a hármas klikk tagjait, akkor már egyértelmű a két „magányos harcos”. A $(2+2+1)$-es klikkeloszlás $\binom{5}{2}\binom{3}{2}/2=15$ lehetőség van: Az egyik kettes klikket $\binom{5}{2}$-féleképpen választhatjuk, a maradék három emberből a másik kettes klikket $\binom{3}{2}$-féleképpen, de e két klikk sorrendje lényegtelen. Összesen tehát 25-féleképpen klikkesedhetnek.

A 6.4. fel. II. megoldása

Jelölje általában $S(n,k)$ azon esetek számát, ahányféleképpen egy n-elemű halmazt fel lehet bontani k számú nem üres részhalmazra. Az $S(n,k)$ számokat másodfajú Stirling számoknak nevezik, nekünk most $S(5,3)$-ra van szükségünk.

Tekintsük Annát! ő vagy egyedül alkot egy klikket és így a többi négy leány két klikket alkot, vagy Anna a másik négy lány alkotta három klikk egyikéhez tartozik. Képletben: $S(5,3)=S(4,2)+3\cdot S(4,3)$. Ehhez hasonlóan, az általános esetben: $S(n,k)=S(n-1,k-1)+kS(n-1,k)$. A másodfajú Stirling számok tehát a Pascal-háromszöghöz hasonló számháromszöget alkotnak, melyet a fenti képlettel az $S(n,1)=S(k,k)=1$ peremértékekből könnyen létrehozhatunk. Az alábbi táblázatban kissé túl is mentünk annál, ami szükséges a jelen feladat megoldásához. A 14.1 táblázatból adódik a keresett érték: $S(5,3)=25$.

A 6.5. feladat megoldásai

A 6.5. a), b), c) mego.

Jelölje B_n a lehetséges befutók számát n résztvevő esetén.

a) Könnyű kiszámolni e sorozat kis elemeit: $B_1=1$, $B_2=3$, $B_3=13$. Alább még kiszámoljuk B_4 értékét.

b) Először felsoroljuk, hogy milyen méretű csoportokban érkezhettek be a résztvevők (alább a bal oldali oszlop) majd kiszámoljuk, hogy az egyes csoportokat hányféleképpen választhatjuk ki, végül figyelembevesszük a csoportok lehetséges sorrendjeit és meghatározzuk a csoportfelosztáshoz tartozó befutók számát.

$k=$	0	1	2	3	4	5	6	7
$n=0$	1							
$n=1$	0	1						
$n=2$	0	1	1					
$n=3$	0	1	3	1				
$n=4$	0	1	7	6	1			
$n=5$	0	1	15	25	10	1		
$n=6$	0	1	31	90	65	15	1	
$n=7$	0	1	63	301	350	140	21	1

14.1. táblázat. A másodfajú Stirling számok számháromszöge

(1)(1)(1)(1)	$\binom{4}{1}\cdot\binom{3}{1}\cdot\binom{2}{1}\cdot\binom{1}{1}=4!=24$	1	24
(2)(1)(1)	$\binom{4}{2}\cdot\binom{2}{1}\cdot\binom{1}{1}=6\cdot 2\cdot 1=12$	$\binom{3}{1}=3$	36
(3)(1)	$\binom{4}{3}\cdot\binom{1}{1}=4$	$\binom{2}{1}=2$	8
(4)	$\binom{4}{4}=1$	$\binom{1}{1}=1$	1
(2)(2)	$\binom{4}{2}\cdot\binom{2}{2}=6$	1	6

A lehetséges befutók száma tehát $24+36+8+1+6=75$.

c) A b)-beli csoportosítást alkalmazzuk most is:

(1)(1)(1)(1)(1)	$\binom{4}{1}\cdot\binom{4}{1}\cdot\binom{3}{1}\cdot\binom{2}{1}\cdot\binom{1}{1}=5!=120$	1	120
(2)(1)(1)(1)	$\binom{5}{2}\cdot\binom{3}{1}\cdot\binom{2}{1}\cdot\binom{1}{1}=10\cdot 3!=60$	$\binom{4}{1}=4$	240
(3)(1)(1)	$\binom{5}{3}\cdot\binom{2}{1}\cdot\binom{1}{1}=10\cdot 2!=20$	$\binom{3}{1}=3$	60
(4)(1)	$\binom{5}{4}\cdot\binom{1}{1}=5$	$\binom{2}{1}=2$	10
(3)(2)	$\binom{5}{2}\cdot\binom{3}{3}=10$	2	20
(2)(2)(1)	$\binom{5}{2}\cdot\binom{3}{2}=30$	3	90
(5)	$\binom{5}{5}=1$	$\binom{1}{1}=1$	1

A lehetséges befutók száma tehát $120+240+60+10+20+90+1=541$.

A 6.5. d) fel. I. megoldása

Vizsgált sorozatunk n-esik tagját, n versenyző esetén a lehetséges befutók számát jelölje B_n. A $\{B_n\}$ sorozat első néhány eleme:

n	1	2	3	4	5
B_n	1	3	13	75	541

Tekintsünk n versenyzőt és abban az elsőnek beérkező csoportot! Ebben 1, 2, 3, …, n versenyző lehet. Az alábbi táblázatban felsoroltuk ezeket az eseteket és feltüntettük hányféleképpen választhatjuk meg az élbolyt és hányféleképpen a később érkezőket.

Az élboly elemszáma:	1	2	3	$\dots$	k	$\dots$	n
Hányféle ilyen élboly lehet:	n	$\binom{n}{2}$	$\binom{n}{3}$	$\dots$	$\binom{n}{k}$	$\dots$	1
Később érkezők elrendezései:	B_{n-1}	B_{n-2}	B_{n-3}	$\dots$	B_{n-k}	$\dots$	1

A $B_0 = 1$ jelöléssel tehát

$$B_n = \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} B_{n-k}.$$

Pld

$$\begin{array}{lll}
B_2 = \binom{2}{1}B_1 + \binom{2}{2}B_0 & = 2\cdot 1 + 1\cdot 1 & = 3\\
B_3 = \binom{3}{1}B_2 + \binom{3}{2}B_1 + \binom{3}{3}B_0 & = 3\cdot 3 + 3\cdot 1 + 1\cdot 1 & = 13\\
B_4 = \binom{4}{1}B_3 + \binom{4}{2}B_2 + \binom{4}{3}B_1 + \binom{4}{4}B_0 & = 4\cdot 13 + 6\cdot 3 + 4\cdot 1 + 1\cdot 1 & = 75\\
B_5 = \binom{5}{1}B_4 + \binom{5}{2}B_3 + \binom{5}{3}B_2 + \binom{5}{4}B_1 + \binom{5}{5}B_0 & = 5\cdot 75 + 10\cdot 13 + 10\cdot 3 + 5\cdot 1 + 1\cdot 1 & = 541.
\end{array}$$

A 6.5. d) fel. II. megoldása

A befutó csoportok száma 1, 2, 3, 4 vagy 5. Ha 1 csoport van, az azt jelenti, hogy mindenki egyszerre érkezett be, ha 5, akkor mindenki egyedül. A 6.4. feladatban láttuk, hogy öt emberből hányféleképpen hozható létre 3 csoport, de az ottani II. megoldásából az is kiderül, hogy hányféleképpen hozható létre k csoport. Épp ezt mondja meg az $S(5,k)$ másodfajú Stirling szám, amelynek szükséges értékei kiolvashatók a 14.1 táblázatból. Ha már tudjuk, hogy k csoportban futottak be a versenyzők, akkor már csak azt a k csoportot kell tetszőlegesen sorba rakni: erre $k!$ lehetőség van. Tehát a befutók száma 5 versenyző esetén:

$$\begin{aligned}
B_5 &= 1!S(n,1) + 2!S(n,2) + 3!S(n,3) + 4!S(n,4) + 5!S(n,5) =\\
&= 1!\cdot 1 + 2!\cdot 15 + 3!\cdot 25 + 4!\cdot 10 + 5!\cdot 1 = 541.
\end{aligned}$$

Általában pedig a

$$B_n = \sum_{k=1}^{n} k!S(n,k).$$

Megjegyzés a 6.5. feladathoz

A B_n számokat rendezett (ordered) Bell számoknak nevezik. Indoklás nélkül közöljük az alábbi meglepő formulát:

$$B_n = \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{\infty} \frac{k^n}{2^k}.$$

A 6.6. feladat megoldásai

Segítség a 6.6. feladathoz

Érdemes feleleveníteni a 5.5. feladatot.

A 6.6. fel. eredménye

75.

A 6.6. fel. I. megoldása

A 2010 nem kerülhet a 2010. helyre, mert olyan nincs. Így 2010 egy olyan kisebb sorszámú helyre, az x_1-re kerül, amelynek ő a többszörörse, azaz $x_1|2010$. Az x_1 számot 2010 „kilökte" a saját helyéről, ezért ő egy kisebb sorszámú x_2 helyre kerül, amelyre $x_2|x_1$. Ez az eljárás csak akkor áll meg, ha az éppen soron következő számot az 1. helyre raktuk, mert egyedül az 1-et nem kell beraknunk a sorba. Az eljárás eredményeként a 2010 osztóiból álló

$$2010 = x_0 > x_1 > x_2 > \ldots > x_s = 1 \tag{14.1}$$

sorozathoz jutunk, amelynek tagjai osztási szempontból láncot alkotnak, azaz $x_{k+1}|x_k$, ha $0 \leq k < s$. Az s pozitív egész nincs előre meghatározva. Pl az $s = 1$ eset annak felel meg, hogy a 2010 kerül a sor elejére.

A fent kapott (a 2010-től induló) láncba nem tartozó k szám a sorban k-adik helyre kerül (marad). Tegyük fel ugyanis, hogy van olyan a láncba nem tartozó szám, amely nem marad a helyén. Tekintsük ezek közül a legkisebbet. ő csak egy osztója helyére, tehát nála kisebb helyre kerülhet. A nála kisebb helyek mind foglaltak, mert a lánc tagjai egymás helyére illetve az 1. helyre kerülnek a többi szám pedig a foglalja a saját helyét. Ez az ellentmondás igazolja állításunkat.

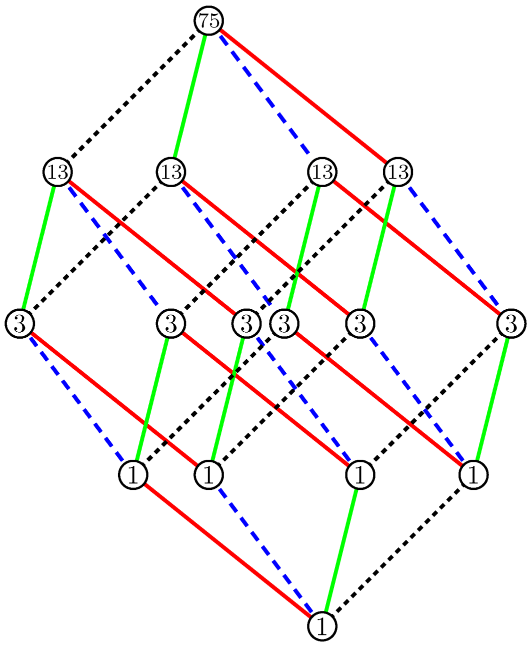
Feladatunk tehát abból áll, hogy összeszámoljuk a (14.1)-nek megfelelő osztóláncokat. Ezt a 5.5. feladatban egy hasonló szituációban, egy másik számmal, már megtettük. A 2010 osztóhálóját a 5.2. feladat megoldásában láttuk, most azt alapul véve az osztóláncok kiszámolásának a Pascal háromszög kitöltéséhez hasonló módját a 14.2 ábrán követhetjük nyomon.

Leolvasható, hogy az osztóláncok száma, és a feladat kérdésére a válasz 75.

A 6.7. feladat megoldásai

I. segítség a 6.7. feladathoz

Próbáljuk összegyűjteni az eseteket a fekvő állású dominólapok száma szerint!



14.2. ábra. A 2010 osztóhálójának Pascal-szerű kitöltése

II. segítség a 6.7. feladathoz

Jelölje F_n a $2 \times n$-es tábla lefedéseinek számát! Határozzuk meg F_1, F_2, F_3 és F_4 értékét és határozzunk meg rekurziót! Ne feledkezzünk el az indoklásról!

A 6.7. fel. I. megoldása

Vegyük észre, hogy fekvő helyzetű dominók csak párban, egymáson fekve helyezkedhetnek el. Egy ilyen pár egy 2 oszlopból álló blokkot takar le, míg egy álló helyzetű dominó csak egy 1 oszlopból álló blokkot fed. A kérdés tehát átogalmazható: hányféleképpen állítható elő az n szám 1-esek és 2-esek összegeként, ha a tagok sorrendje is számít?

A 2-esek száma 0-tól $\left[\frac{n}{2}\right]$-ig változhat. Ha k db 2-es van, akkor $n-2k$ db 1-es van, összesen $n-k$ db szám. Ezek közül kell kiválasztani a k db 2-es helyét. Az elrendezések száma tehát

$$F_n = \sum_{k=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]} \binom{n-k}{k}.$$

Pld

$$
\begin{array}{lllllllll}
F_1 & = & \binom{1}{0} & & & & & = & 1 \\
F_2 & = & \binom{2}{0} & + & \binom{1}{1} & & & = & 2 \\
F_3 & = & \binom{3}{0} & + & \binom{2}{1} & = & 3 & & \\
F_4 & = & \binom{4}{0} & + & \binom{3}{1} & + & \binom{2}{2} & = & 5 \\
F_5 & = & \binom{5}{0} & + & \binom{4}{1} & + & \binom{3}{2} & = & 8
\end{array}
$$

A 6.7. fel. II. megoldása

Jelölje a parkettázások számát F_n! Könnyen kiszámolható néhány kezdeti érték: $F_1 = 1$, $F_2 = 2$, $F_3 = 3\ldots$.

Írjunk fel rekurziót az $\{F_n\}$ sorozatra! Tekintsük az $1 \times n$-es téglalap $(n > 2)$ utolsó oszlopát! Ebben vagy függőlegesen áll egy dominólap, ezt a 1×2-es részt épp kitöltve vagy víszintesen áll kettő a hátsó 2×2-es részt fedve. Az előbbi esetben a többi dominó egy $1 \times (n-1)$-es téglalapot, az utóbbi esetben pedig egy $1 \times (n-2)$-es téglalapot fed le, tehát

$$F_n = F_{n-1} + F_{n-2}.$$

A fenti rekurzió a már meghatározott kezdőelemekkel épp a Fibonacci sorozatot definiálja ($F_0 = 1$ is beleillik a sorozatba).

A 6.8. feladat megoldásai

Segítség a 6.8. feladathoz

Próbáljuk meg minél rövidebben lekódolni az egyes levételi sorrendeket. Gondoljunk arra, hogy valakinek, aki ismeri a problémát el akarunk küldeni egy-egy konkrét levételi sorrendet. Tételezzük fel, hogy előzetes megbeszélhetjük mi lesz a kódrendszer, de utána már csak minél kevesebb féle kódjelet használhatunk és minél tömörebbnek kell lennie az leírt adatsornak. A kód segítségével találjunk példánkkal analóg feladatot!

A 6.8. fel. eredménye

a) A jobb alsó sarokban levő kavics legutoljára marad. Az azt megelőző hét lépésben, mikor veszünk el a függőleges oszlopban levő kavicsokból? Eredmény: $\binom{7}{3} = 35$.

b) Ha a bal oldali oszlopból veszünk, akkor írjunk egy b, ha a jobboldaliból akkor egy j betűt. Így olyan 10 betűből álló sorozatot kapunk, amelynek minden kezdőszeletében legalább annyi b betű van, mint j. Eredmény: 42.

A 6.9. feladat megoldásai

A 6.9. fel. I. megoldása

Csoportosítsuk a lehetőségeket a kettes lépések száma szerint! Ez lehet 0, 1, 2 és 3. Ha k db kettes lépés van, akkor $(7-2k)$ egyes lépés kell. Így összesen $k+(7-2k)=7-k$ lépés lesz. Ez annyiféle különböző módon mehet végbe ahányféleképpen a $(7-k)$-ból (az összes lépésből) kiválasztható k (a kettes lépések). Ez $\binom{7-k}{k}$. A megoldás a feladat kérdésére tehát

$$\binom{7}{0}+\binom{6}{1}+\binom{5}{2}+\binom{4}{3}=1+6+10+4=21.$$

A 6.9. fel. II. megoldása

(*Rekurzió*)

Jelölje f_k a feladat feltételeinek megfelelő feljutások számát a k-fokú lépcsőn. Tehát $f_1=1$, $f_2=2$ és f_7-re vagyunk kíváncsiak.

A legutolsó lépésünk egyes vagy kettes, tehát a legfelső lépcsőfokra vagy az előzőről vagy az az alattiról lépünk fel. Így $f_n=f_{n-1}+f_{n-2}$, ha $n\geq 3$, azaz

n	1	2	3	4	5	6	7
f_n	1	2	3	5	8	13	21

Tehát $f_7=21$, ennyiféleképpen lehet felmenni a hétfokú lépcsőn.

A 6.10. feladat megoldásai

A 6.10. fel. I. megoldása

Gyűjtsük össze a lehetőségeket lexikografikus elrendezésben – vegyük mindig előbbre a hármas ugrást, a ketteshez képest! (A hármasok száma a paritás és a nagyságrend miatt kettő vagy nulla.)

$$10=3+3+2+2,\qquad 10=3+2+3+2,\qquad 10=3+2+2+3,$$
$$10=2+3+3+2,\qquad 10=2+3+2+3,\qquad 10=2+2+3+3,$$
$$10=2+2+2+2+2.$$

A lehetőségek száma 7.

A 6.10. fel. II. megoldása

(*Rekurzió*)

Jelölje az n-fokú lépcsőn a feljutások számát az adott feltételek mellett g_n. Az első néhány érték:

$$g_1 = 0, \qquad g_2 = 1, \qquad g_3 = 1, \qquad g_4 = 1, \qquad g_5 = 2, \qquad g_6 = 2.$$

Csoportosítsuk az n-fokú lépcsőre való feljutásokat aszerint, hogy kettes vagy hármas volt az utolsó lépés! Olyanból, amelynél kettes volt az utolsó lépés g_{n-2} van, hiszen az $(n-2)$. fokról kellett ellépnünk az utolsó lépéskor és oda ennyiféleképpen juthatunk fel. Olyanból pedig, amelynél hármas volt az utolsó lépés hasonló okból g_{n-3} lehetőség van. Ennek alapján – $n > 3$ esetén – $g_n = g_{n-2} + g_{n-3}$, azaz

$$g_7 = 3, \qquad g_8 = 4, \qquad g_9 = 5, \qquad g_{10} = 7.$$

Segítség a 6.11. feladathoz

Vigyázat, a sorozat elemeinek számítása visszafelé nem egyértelmű!

Az előre számításhoz hasznájunk számítógépet, pld a Microsoft Excel vagy az OpenOffice.Calc programot.

A 6.12. feladat megoldásai

Segítség a 6.12. feladathoz

Lásd a 6.11. feladathoz adott segítséget!

A 6.12. c) mego.

A feladatban szereplő „$(3n+1)$-sorozat”-tal kapcsolatban senki sem tudja, hogy vajon bármely pozitív egész számból elindulva a sorozat elér az 1-hez vagy van olyan kiindulási szám, amelyből kiindulva sohasem jutunk az 1-hez. Alább olvasható a 27-ből induló sorozat:

27, 82, 41, 124, 62, 31, 94, 47, 142, 71, 214, 107, 322, 161, 484, 242, 121, 364, 182, 91, 274, 137, 412, 206, 103, 310, 155, 466, 233, 700, 350, 175, 526, 263, 790, 395, 1186, 593, 1780, 890, 445, 1336, 668, 334, 167, 502, 251, 754, 377, 1132, 566, 283, 850, 425, 1276, 638, 319, 958, 479, 1438, 719, 2158, 1079, 3238, 1619, 4858, 2429, 7288, 3644, 1822, 911, 2734, 1367, 4102, 2051, 6154, 3077, 9232, 4616, 2308, 1154, 577, 1732, 866, 433, 1300, 650, 325, 976, 488, 244, 122, 61, 184, 92, 46, 23, 70, 35, 106, 53, 160, 80, 40, 20, 10, 5, 16, 8, 4, 2, 1

Kulcsszavak, amelyek elvezetnek az interneten a témával kapcsolatos anyagokig: Collatz conjecture, Collats sequence, Ulam conjecture, Syracuse problem, $3n+1$ conjecture.

Segítségek a 6.13. feladathoz

I. segítség a 6.13. feladathoz

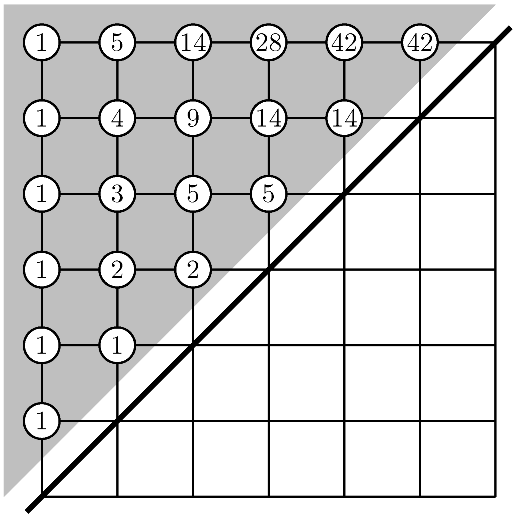
Hány 1-es lehet egy ilyen számban? Keressük meg a megoldások számát aszerint, hogy hány 1-es van a számban!

II. segítség a 6.13. feladathoz

Jelölje h_n az ilyen tulajdonságú n-jegyű számok számát! Határozzuk meg h_1, h_2, h_3 és h_4 értékét. Keressünk rekurziót!

A 6.14. feladat megoldása

Számoljuk először össze a felfelé induló utakat (lásd a 14.3 ábrát)!



14.3. ábra.

Felfelé indulva tehát 14-féleképpen juthat el az $(5;5)$ pontba. Ugyenennyiféleképpen érhet célba jobbra indulva is, tehát a feladat kérdésére 28 a válasz.

Kérdés a 6.14. feladathoz

A fenti ábra számaihoz hasonló számok jöttek elő a 6.8. feladat megoldásakor. Mi a kapcsolat?

Ötlet a 6.15. feladathoz Jelölje S_n az n-szög megfelelő felosztásainak számát. Határozzuk meg S_3, S_4, S_5 értéké!. Próbáljunk rekurziót találni!

A 6.16. feladat megoldásai

Segítség a 6.16. feladathoz

Kezdhetjük egy könnyebb feladattal is:

Hányféleképpen olvasható ki az ábráról a ZRÍNYI szó, a megadott feltételekkel a 14.4 ábrán? Próbálkozzunk ennél rövidebb, 1, 2, 3, 4 és 5 betűs szavakkal is!

$$\begin{array}{llllll} Z & R & Í & N & Y & I \\ R & Í & N & Y & I & \\ Í & N & Y & I & & \\ N & Y & I & & & \\ Y & I & & & & \\ I & & & & & \end{array}$$

14.4. ábra.

Hogyan lehetne röviden elküldeni egy kiolvasási útvonalat?

A 6.16. feladat megoldása

A kezdőbetűtől vízszintesen vagy függőlegesen indulunk. Utána csak azt tartsuk nyilván, hogy tartjuk-e az irányt (T), vagy változtatunk (V). Tehát az útvonalat – a kezdőirány kijelölése után – egy olyan 8 betűből álló $T - V$ sorozat írja le, amelyben nincs két szomszédos T betű. Tehát a Fibonacci sorozat kétszerese írja le ezt a feladatot.

A 6.18. feladat megoldása

Jelölje a gyökök n-edik hatványának összegét $p_n = x_1^n + x_2^n$. A Viète forrmulák szerint $p_1 = x_1 + x_2 = 1$, míg az egyenlet szerint $x_i^2 = x_i + 1$, azaz $p_2 = p_1 + 2 = 3$ és általában

$$x_i^{n+2} = x_i^n x_i^2 = x_i^n(x_i^2 + x_i) = x_i^{n+1} + x_i^{n+1},$$

azaz $p_{n+2} = p_{n+1} + p_n$.

A 6.19. feladat megoldása

A feladat analóg a 6.5. példával, az itteni L_n sorozat azonos az ottani B_n sorozattal, tehát az L_n számokat a 14.3 megjegyzés alapján rendezett Bell számoknak nevezzük.

Az első néhány elem:

n	0	1	2	3	4	5
L_n	1	1	3	13	75	541

Valóban, H_1 jelképezheti a versenyben az első helyen befutók halmazát, H_2 az első két legjobb idővel befutók halmazát, stb. A H_1, $H_2 \setminus H_1$, $H_3 \setminus H_2$, stb halmazok az egyes befutó csoportokat jelképezik. Ez a kapcsolat kölcsönösen egyértelmű megfeleltetést ad az n elemű halmaz részhalmazainak szigorúan monoton láncai és n versenyző lehetséges befutói között.

Segítség a 6.20. feladathoz

Mutassuk meg, hogy a sorozat periodikus!

Segítség a 6.21. feladathoz

Mutassuk meg, hogy a sorozat periodikus!

A 6.22. feladat megoldása

Ha b_n tovább nem egyszerűsíthető tört alakja $\frac{u_n}{v_n}$, akkor

n	u_n	v_n	b_n
0	1	1	1
1	3	2	$1,5$
2	7	5	$1,4$
3	17	12	$1,41667$
4	41	29	$1,41379$
5	99	70	$1,41429$
6	239	169	$1,41420$

Tul. a) Az újabb és újabb törtek kiszámolásakor nem kell egyszerűsíteni.

Tul. b) $v_{n+1} = u_n + v_n$ és $u_{n+1} = v_n + v_{n+1}$.

Tul. c) $b_0 < b_1 > b_2 < b_3 > b_4 < \ldots$, azaz

$$\begin{aligned} b_n &< b_{n+1}, \quad \text{ha } n \text{ páros;} \\ b_n &> b_{n+1}, \quad \text{ha } n \text{ páratlan.} \end{aligned}$$

Tul. d)

$$\begin{aligned} b_n &< b_{n+2}, \quad \text{ha } n \text{ páros;} \\ b_n &> b_{n+2}, \quad \text{ha } n \text{ páratlan.} \end{aligned}$$

Tul. e)

$$\begin{array}{ll} b_n < \sqrt{2}, & \text{ha } n \text{ páros;} \\ b_n > \sqrt{2}, & \text{ha } n \text{ páratlan.} \end{array}$$

Tul. f) $\lim_{n\to\infty} b_n = \sqrt{2}$

Tul. g)

$$\begin{array}{ll} u_n^2 = 2v_n^2 - 1, & \text{ha } n \text{ páros;} \\ u_n^2 = 2v_n^2 + 1, & \text{ha } n \text{ páratlan.} \end{array}$$

a) és b) igazolása

Teljes indukcióval dolgozunk a) igazolásához. $n = 0$ esetén $u_0 = v_0 = 1$, ezek a számok relatív prímek.

$$\frac{u_{k+1}}{v_{k+1}} = b_{k+1} = 1 + \frac{1}{1 + b_k} = 1 + \frac{1}{1 + \frac{u_k}{v_k}} =$$

$$= 1 + \frac{v_k}{v_k + u_k} = \frac{2v_k + u_k}{v_k + u_k}.$$

A kegutóbbi tört számlálója és nevezője relatív prímek, hiszen ha volna közös osztójuk, akkor az osztaná különbségüket, azaz v_k-t és így a nevező és v_k különbségét, azaz u_k-t is, de az indukciós feltevés szerint u_k és v_k relatív prímek.

Egyúttal azt is igazoltuk, hogy

$$\begin{aligned} v_{k+1} = &\; v_k + u_k; \\ u_{k+1} = &\; 2v_k + u_k = v_k + v_{k+1}. \end{aligned}$$

e) és c) igazolása

$b_0 = 1 < \sqrt{2}$.

Ha $b_n < \sqrt{2}$, akkor $1 + b_n < 1 + \sqrt{2}$, így $0 < 1 + b_n$ miatt $\frac{1}{1+b_n} < \frac{1}{1+\sqrt{2}} = \sqrt{2} - 1$, tehát $b_{n+1} = 1 + \frac{1}{1+b_n} < \sqrt{2}$. Hasonlóan igazolható, hogy ha $b_n > \sqrt{2}$, akkor $b_{n+1} < \sqrt{2}$.

Mindezekből következik e), abból pedig c).

d), e) és f) bizonyítása Látjuk, hogy a sorozat kapcsolatos $\sqrt{2}$-vel. Vizsgáljuk az attól való eltérését!

$$b_{n+1} - \sqrt{2} = 1 + \frac{1}{1 + b_n} - \sqrt{2} = \frac{1}{1 + b_n} - \frac{1}{1 + \sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2} - b_n}{(1 + b_n)(1 + \sqrt{2})} \tag{14.2}$$

Mivel $1 < b_n$, így $4,8 < (1 + b_n)(1 + \sqrt{2})$, tehát (14.2) szerint a b_n sorozat elemeinek $\sqrt{2}$-től való eltérése lépésenként kevesebb mint negyedére csökken. A (14.2) összefüggésből az is kiderül, hogy b_n lépésenként a $\sqrt{2}$ ellenkező oldalára kerül, így a d), e), f) tulajdonságok mind bizonyítást nyernek.

g) igazolása Az n indexre vonatkozó teljes indukcióval dolgozunk. Az $n = 0$ esetben $u_0 = v_0 = 1$ összhangban az állítással: $u_0^2 = 2v_0^2 - 1$.

Legyen most $u_n^2 - 2v_n^2 = \pm 1$. A Tul. b) rekurzió szerint

$$2v_{n+1}^2 = 2(v_n + u_n)^2 = 2v_n^2 + 2u_n^2 + 4u_n v_n$$

és

$$u_{n+1}^2 = (2v_n + u_n)^2 = 4v_n^2 + u_n^2 + 4u_n v_n,$$

tehát

$$u_{n+1}^2 - 2v_{n+1}^2 = 2v_n^2 - u_n^2 = -(u_n^2 - 2v_n^2) = \mp 1,$$

ami igazolja a g) állítást.

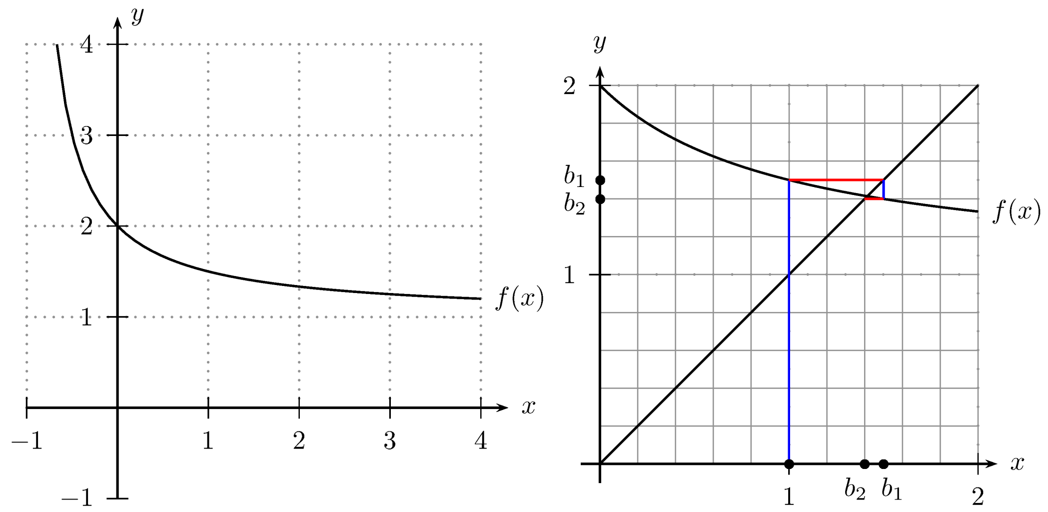
Megjegyzések a 6.22. feladathoz

I. A Tul. g) észrevétellel kapcsolatban lásd a 4.6. feladatot.

II.. Az u_n, v_n sorozatokat érdemes összehasonlítani a 3.1. feladat α_n, β_n sorozataival.

III. Alább szemléltetést adunk a b_n sorozathoz, amely kiemeli a dinamikus rendszerekkel való kapcsolatát.

A rekurziót az $f(x) = 1 + \frac{1}{1+x}$ függvény generálja. Ábrázoljuk ezt a függvényt (lásd a bal oldali grafikont)!



14.5. ábra. A b_n sorozat dinamikája

Az $f(x)$ függvény grafikonja és az $x \longrightarrow x$ függvény grafikonja közti derékszögű töröttvonal felel meg a rekurziónak.

Keressük meg az x-tengelyen a $b_0 = 1$ értéket. A $b_1 = f(b_0)$ értéket a grafikonról olvashatjuk le. A (b_0, b_1) pontból egy vízszintes – az ábrán piros – vonal vezet a (b_1, b_1) ponthoz, az $x \longrightarrow x$ függvény grafikonjához. Innen egy függőleges – kék – vonal megy tovább az $f(x)$ függvény grafikonjához, az (b_1, b_2) ponthoz...

A 6.23. feladat megoldása

Nyilvánvaló, hogy $E_n = (n + 1)$.

S_n értékei kis n-ekre itt olvashatók:

n:	0	1	2	3
e_n:	1	2	4	7

Eleve van 1 tartomány. Az első egyenes ezt két részre osztja, így 2 tartomány lesz. A második egyenes – ha nem párhuzamos az előzővel – mindkettőt szétvágja, 4 tartomány jön létre összesen.

Általában, a k-adiknak behúzott egyenest elmetszi mindegyik korábbi egyenes, így rajta $(k-1)$ metszéspont jön létre, ő maga $E_{k-1} = k$ részre lesz osztva, és mindegyik része a korábban már létrejött egyik tartományt két részre vágja. A k-adik egyenes behúzásával tehát (ha az nem megy át korábbi egyenesek metszéspontján és egyik korábbi egyenessel sem párhuzamos) $E_{k-1} = k$ új tartomány jön létre.

Így n általános helyzetű egyenes a síkot mindig

$$1 + E_1 + E_2 + E_3 + \ldots + E_{n-1} = 1 + 1 + 2 + 3 + \ldots + n =$$

$$= 1 + \frac{n \cdot (n+1)}{2} = \frac{n^2 + n + 2}{2}$$

tartományra osztja.

Ehhez hasonlóan,

$$T_n = 1 + S_1 + S_2 + S_3 + \ldots + S_{n-1},$$

ami lehetőséget ad T_n explicit képletének meghatározására.

Segítség a 6.24. feladathoz

A 6.14. feladat megoldása, illetve annak 14.3 ábrája alapján meghatározható a kedvező esetek száma.

A 6.25. feladat megoldása

Ha az n tagú kifejezés ($n-1$ zárójelpárral való) zárójelezéseinek számát z_n jelöli, akkor $z_1 = z_2 = 1$, $z_3 = 2$, $z_4 = 5$ és z_6, z_7 értékeit keressük.

Vizsgáljuk az a-t tartalmazó legkülső zárójelet! Ha ennek belsejében k változó van, akkor rajta kívülre $n-k$ esik, így az ilyen zárójelezések száma $z_k \cdot z_{n-k}$. A $k=1$ eset annak felel meg, hogy a nincs zárójelben, tehát az utolsónak elvégzendő $\otimes$ művelet egyik tagja éppen a. A rekurzió: $z_n = \sum_{k=1}^{n-1} z_k \cdot z_{n-k}$. A $z_1 = z_2 = 1$, kezdeti feltételekből kiindulva

$$\begin{array}{lllllllllll}
z_3 & = & z_1 \cdot z_2 & + & z_2 z_1 & & & & & & = 2, \\
z_4 & = & z_1 \cdot z_3 & + & z_2 z_2 & + & z_3 z_1 & & & & = 5, \\
z_5 & = & z_1 \cdot z_4 & + & z_2 z_3 & + & z_3 \cdot z_2 & + & z_4 z_1 & & = 14, \\
z_6 & = & z_1 \cdot z_5 & + & z_2 z_4 & + & 0 z_3 \cdot z_3 & + & z_4 z_2 & + \quad z_5 z_1 & = \quad 42.
\end{array}$$

A 6.27. feladat megoldása

Jelölje a megfelelő színezések számát n emelet esetén s_n. Nyilvánvaló, hogy $s_0 = 3$ és $s_{k+1} = 2 \cdot s_k$, hiszen ha kiszíneztük az alsó k emeletet, akkor a legfelső nem lehet azonos színű az alatta levővel, de a másik két szín közül bármelyik alkalmazható. Tehát $s_n = 3 \cdot 2^{n-1}$, ha $n > 0$.

A 6.28. feladat megoldásai

A 6.28. a) fel. I. megoldása

Egy ilyen lefedés függőleges állású dominókból és vízszintes állású dominók 3-as blokkjaiból áll. Az a kérdés, hogy hányféleképpen írható fel a 10 olyan összegként, amelynek tagjai 1-esek és 3-asok és számít a sorrendjük. Darabszám szerint négy lehetőség van:

3 db 3-as és 1 db 1-es. Ez összesen 4 szám, $\binom{4}{3} = 4$ elrendezés;

2 db 3-as és 4 db 1-es. Ez összesen 6 szám, $\binom{6}{2} = 15$ elrendezés;

1 db 3-as és 7 db 1-es. Ez összesen 8 szám, $\binom{8}{1} = 8$ elrendezés;

0 db 3-as és 10 db 1-es. Ez összesen 10 szám, $\binom{10}{0} = 1$ elrendezés.

Összesen

$$\binom{4}{3} + \binom{6}{2} + \binom{8}{1} + \binom{10}{0} = 4 + 15 + 8 + 1 = 28$$

dominó-elrendezés van.

A 6.28. a) fel. II. megoldása

Jelölje a_n a $3\times n$-es téglalap megfelelő lefedéseinek számát. Nyilvánvaló, hogy $a_1 = a_2 = 1$ és $a_3 = 2$. A $3 \times n$-es eset $(n > 3)$ elemzéséhez tekintsük az utolsó oszlopot! Ezt vagy egy függőleges állású dominó takarja vagy három vízszintes, tehát $a_n = a_{n-1} + a_{n-3}$. Mindezek alapján már kitölthető az alábbi táblázat:

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
a_n	1	1	2	3	4	6	9	13	19	28

A 6.28. b) mego.

Ha a szélétől idulva elkezdük kirakni a téglalapot, akkor észrevehetjük, hogy csak úgy jutunk sikerre, ha 2×3-as blokkokra bontjuk az $n\times 3$-as téglalapot. Így páratlan n esetén nincs is megfelelő kitöltés, míg páros n esetén $2^{\frac{n}{2}}$ jó elrendezés van, mert mindegyik 2×3-as blokk kétféleképpen rakható ki.

A 6.29. feladat megoldása

Számítsuk az üres sorozatot is sorozatnak. Jelölje p_n azon szigorúan monoton növő sorozatok számát, amelyekben a páratlan indexű tagok páratlan, a páros indexűek páros pozitív egész számok és nem nagyobbak n-nél.

Pl $n = 0$ esetén $p_0 = 1$ ilyen sorozat van, az üres sorozat.

$n = 1$ esetén $p_1 = 2$ megfelelő sorozat van, az üres és az $\{1\}$.

$n = 2$-nél $p_2 = 3$ megfelelő sorozat van: $\{\_\}$, $\{1\}$ és $\{1, 2\}$.

$n = 3$-ra $p_3 = 5$, hiszen a sorozatok: $\{\_\}$, $\{1\}$, $\{1, 2\}$, $\{1, 2, 3\}$ és $\{3\}$.

Megmutatjuk, hogy $p_{n+1} = p_n + p_{n-1}$, ha $n > 1$. A sorozatokat aszerint osztályozzuk, hogy az első elemük 1-es vagy nem az. Ha az első elem az 1-es, akkor mögé a 2, 3, ..., $(n + 1)$ elemekből kell sorozatot összeállítanunk úgy, mintha az eredeti szabályok szerint a $2-1 = 1$, $3-1 = 2$, ..., $(n+1)-1 = n$ számokból készítenénk sorozatot (p_n lehetőség). Ha az első elem nem az 1-es, akkor a 2-est biztosan nem használhatjuk, tehát a 3, 4, ..., $(n + 1)$ számokból kell készítenünk sorozatot, pont úgy, mintha az eredeti szabályokkal a $3 - 2 = 1$, $4 - 2 = 2$, ..., $(n + 1) - 2 = (n - 1)$ számokból készítenénk sorozatot. Ezek száma p_{n-1}.

Tehát p_n megegyezik az $f_0 = f_1 = 1$, $f_{n+1} = f_n + f_{n-1}$ Fibonacci sorozat f_{n-1} elemével.

A 6.30. feladat megoldásai

I. segítség a 6.30. feladathoz

Oldjuk meg az a) feladatot, majd vezessük rá vissza a b), c) feladatokat!

II. segítség a 6.30. feladathoz

Keressünk olyan (a pozitív egészeken értelmezett) f függvényt, amely teljesíti a megadott függvényegyenleteket. Sejtsünk meg egy-egy megfelelő függvényt, majd számoljuk meg a szabad paramétereket és próbáljuk megadni az összes megfelelő függvényt.

A 6.31. feladat megoldása

a) Jelölje n emelet esetén az ilyen színezések számát a_n. Tehát $a_1 = 2$, $a_2 = 3$.

Általában, $n > 1$ esetén $a_{n+1} = a_n + a_{n-1}$, hiszen a legfölső, $(n + 1)$-edik emelet kétféle lehet. Ha kék, akkor alatta piros emelet van, az alsó $(n - 1)$ emelet pedig az eredeti szabályoknak megfelelően tetszőlegesen lehet színezve. Ez a_{n-1} lehetőség. Ha a legfelső emelet piros, akkor az alatta levő n emelet az eredeti szabályoknak megfelelően tetszőleges, azaz a_n-féle lehet.

b) Jelölje n emelet esetén az ilyen színezések számát b_n. Tehát $b_1 = 3$, $b_2 = 8$.

Általában, $n > 1$ esetén $b_{n+1} = 2b_n + 2b_{n-1}$, hiszen a legfölső, $(n + 1)$-edik emelet háromféle lehet. Ha kék, akkor alatta piros vagy sárga emelet van, az alsó $(n - 1)$ emelet pedig az eredeti szabályoknak megfelelően tetszőlegesen lehet színezve. Ez $2b_{n-1}$ lehetőség. Ha a legfelső emelet piros vagy sárga, akkor az alatta levő n emelet az eredeti szabályoknak megfelelően tetszőleges, azaz b_n-féle lehet.

A 6.32. feladat megoldásai

A 6.32. fel. I. megoldása

Komplementer módszer

Összesen $2^7 = 128$-féleképpen színezhető ki a hét emelet kétféle színnel. Számoljuk össze a „rossz” színezéseket, tehát azokat, amelyekben van négy egyforma színű emelet egymás mellett.

Számoljuk össze a lehetőségeket a leghosszabb egymás melletti azonos színű emeletekből álló blokk hosszúsága – a továbbiakban m – szerint. Ez az m hossz 7, 6, 5 vagy 4. Egyetlen ilyen hosszú azonos színű blokk lehetséges, mert csak hét emelet van. Először tegyük fel, hogy a maximális blokk színe piros. Ugyanannyi lehetőség lesz majd kékkel is.

Ha $m = 7$, akkor csak 1 lehetőség van.

Ha $m = 6$, akkor az lehet az alsó vagy a felső hat színt, ez 2 lehetőség.

Az $m = 5$ hosszúságú piros blokk a középső öt szinten csak egyféleképpen lehet, alul és felül pedig két-két-féleképpen, hiszen az ötös blokk melletti emelet kék kell legyen, de a még megmaradó szint piros és kék is lehet. Ez 5 lehetőség.

Ha $m = 4$ és ez a blokk legalul vagy legfelül van, akkor a blokk mellett kék emelet lesz, a maradék két emelet pedig négyféleképpen színezhető ki. Ha az $m = 4$ hosszúságú blokk nem a szélén van, akkor az alatt és a felette levő emelet is kék, de a kimaradt emelet kétféle is lehet. Ez 12 lehetőség.

$2 \cdot (1+2+5+12) = 40$, tehát $128 - 40 = 88$ megfelelő színezés van.

A 6.32. fel. II. megoldása

Rekurzió

Jelölje G_n az n szintből álló épület olyan színezéseit két színnel, amelyben nincs háromnál több szomszédos azonos színű emelet. Ha $n \le 3$, akkor $G_n = 2^n$, azaz $G_1 = 2$, $G_2 = 4$, $G_3 = 8$.

Legyen most $n > 3$ és tekintsük az n szintű szálloda színezéseit a szerint, hogy felülről kezdve hány emelet színe egyforma (tehát a legfelső hány emelet színe egyezik meg a legeslegfelső emelet színével). Jelölje ezt a számot r. A feltételek szerint $r \in \{1, 2, 3\}$.

Ha $r = 1$, akkor a felülről második emelet színe különbözik a legfelső emelet színétől. Pontosan akkor kapunk ilyen színezést, ha a feltételeknek megfelelően kiszínezünk egy $(n-1)$ szintből álló szállodát, majd ráépítünk még egy emeletet, amelynek ellenkező színt adunk mint az addigi legfelső szint. Az ilyen színezések száma tehát G_{n-1}.

Ha $r = 2$, akkor a felülről harmadik emelet színe különbözik a legfelső két emelet színétől. Pontosan akkor kapunk ilyen színezést, ha a feltételeknek megfelelően kiszínezünk egy $(n-2)$ szintből álló szállodát, majd ráépítünk még két emeletet, amelyeket ellenkező színre festünk mint az addigi legfelső szint. Az ilyen színezések száma tehát G_{n-2}.

Az $r = 3$ esethez tartozó színezések száma ehhez hasonlóan G_{n-3}.

Ezek alapján tehát $G_n = G_{n-1} + G_{n-2} + G_{n-3}$, azaz

n	1	2	3	4	5	6	7
G_n	2	4	8	14	26	48	88

A 6.33. feladat megoldása

Jelölje k_n sugarát r_n, k_n és e érintési pontját T_n. A $T_nT_{n+1} = T_nT_{n+2} + T_{n+2}T_{n+1}$ összefüggés a sugarakkal így írható fel:

$$2\sqrt{r_n r_{n+1}} = 2\sqrt{r_n r_{n+2}} + \sqrt{r_{n+2} r_{n+1}},$$

azaz

$$\frac{1}{\sqrt{r_{n+2}}} = \frac{1}{\sqrt{r_n}} + \frac{1}{\sqrt{r_{n+1}}}$$

.

A 6.34. feladat megoldása

Lásd a Bergengóc Példatár II. kötetének 206. feladatát!

A 6.35. feladat megoldása

Lásd a Bergengóc Példatár II. kötetének 215. feladatát!

A 6.39. feladat megoldása

Amikor a sorozatból képezzük differenciáinak sorozatát, akkor a deriváláshoz hasonló műveletet végzünk. A k-adfokú $q(n) = \binom{n}{k}$ polinom differenciasorozata a

$$q_1(n) = q(n+1) - q(n) = \binom{n+1}{k} - \binom{n}{k} = \binom{n}{k-1} \tag{14.3}$$

$(k-1)$-edfokú polinom. Visszafelé is kérdezhetünk: egy adott sorozat mely sorozat differenciasorozata?

Könnyű levezetni, hogy pld. a $(k-1)$-edfokú $q_1(n) = \binom{n}{k-1}$ sorozat pontosan azoknak a sorozatoknak a differenciasorozata, amelyek előállíthatók $\binom{n}{k} + c$ alakban, ahol c tetszőleges konstans.

Ezt alapul véve a feladatban adott sorozat képlete egyszerűen felírható az $\binom{n}{0}$, $\binom{n}{1}$, $\binom{n}{2}$, $\binom{n}{3}$ polinomokkal, ha azokat a feladat táblázatában található bal oldali számokkal szorozzuk. Állítjuk, hogy a

$$p(n) = 5\binom{n}{0} + (-3)\binom{n}{1} + 1\binom{n}{2} + 2\binom{n}{3}$$

képlet előállítja a sorozatot.

Jelölje a $p(n)$ sorozat első, második és harmadik különbségi sorozatát rendre $p_1(n)$, $p_2(n)$ és $p_3(n)$. Ha igazoljuk, hogy $p(0) = 5$, $p_1(0) = -3$, $p_2(0) = 1$, $p_3(0) = 2$ és p_3 konstans, akkor belátjuk, hogy $p(n)$ előállítja a sorozatot, hiszen a fenti számtáblázatot meghatározza a „bal széle” és az „alja”. A (14.3) deriválási szabály szerint

$$p_1(n) = (-3)\binom{n}{0} + 1\binom{n}{1} + 2\binom{n}{2},$$

$$p_2(n) = 1\binom{n}{0} + 2\binom{n}{1},$$

$$p_3(n) = 2\binom{n}{0}.$$

Ha k pozitív egész, akkor $\binom{0}{k} = 0$, míg $k = 0$ esetén $\binom{0}{k} = 1$, így

$$p(0) = 5, \qquad p_1(0) = -3, \qquad p_2(0) = 1, \qquad p_3(0) = 2,$$

ahogy állítottuk. Ezzel a feladatot megoldottuk.

A 6.40. feladat megoldásai

A 6.40. fel. I. megoldása

Teljes indukciót alkalmazunk. $n=1$-re a vizsgált „összeg” az 1^2, a formula $\frac{1\cdot(1+1)(2\cdot 1+1)}{6}=1$.

Igazolni szeretnénk még, hogy ha

$$1^2+2^2+\ldots+k^2=\frac{k(k+1)(2k+1)}{6}, \tag{14.4}$$

akkor

$$1^2+2^2+\ldots+k^2+(k+1)^2=\frac{(k+1)(k+1+1)\left(2(k+1)+1\right)}{6}. \tag{14.5}$$

Vegyük észre, hogy

$$1^2+2^2+\ldots+k^2+(k+1)^2=\frac{k(k+1)(2k+1)}{6}+(k+1)^2=$$

$$=(k+1)\left(\frac{k(2k+1)}{6}+\frac{6(k+1)}{6}\right)=(k+1)\frac{2k^2+k+6k+6}{6}=(k+1)\frac{(k+2)(2k+3)}{6},$$

ami igazolja az állítást.

A 6.40. fel. II. megoldása

Pataki János javaslata

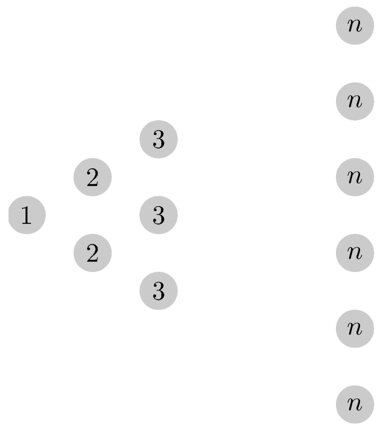
Rendezzük el az 1, 2, $\ldots n$ számokat (a k számot épp k-szor felírva) az alábbi módon szabályos háromszögrácsban:

Forgassuk el a táblázatot a középpontja körül 120°, majd 240°-kal és adjuk össze az azonos helyre kerülő számokat, majd az összes számot!

A 6.40. fel. III. megoldása

(*Általános eljárás*)

0		1		5		14		30		55		91		140
	1		4		9		16		25		36		49	
		3		5		7		9		11		13		
			2		2		2		2		2			



14.6. ábra.

A vizsgált sorozat – az első n négyzetszám összegének – különbségi sorozata a négyzetszámok sorozata, annak különbségi sorozata a páratlan számok sorozata, végül a páratlan számok különbség sorozata a konstans 2 sorozat. A 6.39. feladat megoldása alapján képletünk:

$$\binom{n}{1} + 3\binom{n}{2} + 2\binom{n}{3} = n + 3\frac{n(n-1)}{2} + 2\frac{n(n-1)(n-2)}{6} =$$

$$= \frac{n}{6}\left(6 + 9(n-1) + 2(n-1)(n-2)\right) = \frac{n}{6}(6 + 9n - 9 + 2n^2 - 6n + 4) =$$

$$= \frac{n}{6}(2n^2 + 3n + 1) = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

A 6.41. feladat megoldásai

A 6.41. fel. I. megoldása

Teljes indukció

$n = 1$ esetén teljesül az állítás: $n^3 = 1^3 = 1 = 1^2 = n^2$. Ha $n = k$-ra teljesül, azaz

$$1^3 + 2^2 + 3^3 + \ldots + k^3 = (1 + 2 + 3 + \ldots + k)^2,$$

akkor $n = (k+1)$-re is teljesül:

$$(1 + 2 + 3 + \ldots + k + (k+1))^2 = [(1 + 2 + 3 + \ldots + k) + (k+1)]^2 =$$

$$= (1 + 2 + 3 + \ldots + k)^2 + 2(1 + 2 + 3 + \ldots + k)(k+1) + (k+1)^2 =$$

$$= (1^3 + 2^2 + 3^3 + \ldots + k^3) + 2\frac{k(k+1)}{2}(k+1) + (k+1)^2 =$$
$$= (1^3 + 2^2 + 3^3 + \ldots + k^3) + (k+1)^2(k+1) = 1^3 + 2^2 + 3^3 + \ldots + k^3 + (k+1)^3.$$

A 6.41. fel. II. megoldása

A szorzótábla

Lásd a 2.13. feladat megoldását illetve az ahhoz kapcsolódó I. megjegyzést.

A 6.41. fel. III. megoldása

Általános eljárás „zokni”-val

Ahhoz, hogy a zokni-féle összegzést tudjuk alkalmazni (lásd a 6.39. feladatot) n^3 át kellene írni binomiális együtthatók összegére:

$$a_0\binom{n}{0} + a_1\binom{n}{1} + a_2\binom{n}{2} + a_3\binom{n}{3} = n^3, \tag{14.6}$$

azaz

$$a_0 + a_1 n + a_2\frac{n(n-1)}{2} + a_3\frac{n(n-1)(n-2)}{6} = n^3 \tag{14.7}$$

alakba, ahol a_0, a_1, a_2, a_3 valós számok. Helyettesítsünk (14.7)-be egymás után rendre 0-t, 1-et, 2-t, majd 3-at!

$$\begin{array}{ccccccccc} a_0 & & & & & & & = & 0 \\ a_0 & + & a_1 & & & & & = & 1 \\ a_0 & + & 2a_1 & + & a_2 & & & = & 8 \\ a_0 & + & 3a_1 & + & 3a_2 & + & a_3 & = & 27 \end{array} \tag{14.8}$$

Ebből $a_0 = 0$, $a_1 = 1$, $a_2 = 6$ és $a_3 = 6$, azaz

$$n^3 = \binom{n}{1} + 6\binom{n}{2} + 6\binom{n}{3}, \tag{14.9}$$

így a zokni szerint

$$1^3 + 2^3 + \ldots + n^3 = \binom{n+1}{2} + 6\binom{n+1}{3} + 6\binom{n+1}{4}, \tag{14.10}$$

azaz a keresett összeg értéke

$$\frac{(n+1)n}{2} + (n+1)n(n-1) + \frac{(n+1)n(n-1)(n-2)}{4} = \frac{(n+1)n\,(2 + 4(n-1) + (n-1)(n-2))}{4} =$$
$$= \frac{(n+1)n(n^2+n)}{4} = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2.$$

A feladat állítását bizonyítottuk, hiszen $\frac{n(n+1)}{2}$ az első n pozitív egész szám összegével egyenlő.

14.4. Sorozatok tulajdonságai – feladatok megoldása

A 6.1. feladat megoldása

Nem, legyen az $\{a_n\}$ sorozat első hat eleme: $\{1, 1, 1, 8, 16, 32, \dots\}$, a $\{b_n\}$ sorozaté pedig $\{-1, -2, -3, -4, -5, -6, \dots\}$. Ekkor

$$\{a_n + b_n\} = \{-1, -2, -3, 3, 10, 25, \dots\}.$$

Ha most azt az erősebb kérdést tennénk fel, hogy semmilyen indextől kezdve ne legyen monoton, azt is megszerkeszthetjük e sorozatból úgy, hogy folytatódjék a sorozat így: $1 \le n, 1 \le r \le 6$ esetén legyen $a_{6n+r} = a_r + 100n$ és $b_{6n+r} = b_r - 100n$.

A 6.2. feladat megoldásai

A 6.2. a) mego.

Indirekten tegyük fel, hogy van két különböző eleme a sorozatnak a_i, a_j; $i < j$, amelyre mindkettőhöz a (c, n) párost rendeljük hozzá.

Tegyük fel, hogy $a_i \ge a_j$. Mivel a_j-vel kezdődő leghosszabb monoton csökkenő részsorozatnak c a hossza, ezért a_i-vel kezdődőé legalább $c+1$ ($a_i \ge a_j$ és az a_j-vel kezdődő c hosszú monoton csökkenő részsorozat), ami ellentmondás.

Az $a_i < a_j$ eset vizsgálata teljesen hasonló (ekkor $n_i \ge n + 1$).

A 6.2. b) mego.

Legyen $k = N^2 + 1$, és indirekten tegyük fel, hogy a sorozatnak nincs $N-$nél hosszabb monoton részsorozata. Ez azt jelenti, hogy bármely $1 \le i \le k$ esetén, $c_i \le N$ és $n_i \le N$. A lehetséges (c_i, n_i) számpárok száma tehát $\le N^2$. Ám az a.) feladat miatt tudjuk, hogy most egy $k = N^2 + 1$ elemű sorozat elemeit injektív módon leképeztünk egy N^2 elemű halmazba. Ez az ellentmondás igazolja az állításunkat.

A 6.2. c) mego.

Legyen X egy véges, egész számokból álló halmaz, y egy egész. Jelentse általában $X + y := \{x + y | x \in X\}$.

Most mutatunk egy N^2 elemű sorozatot, amiben nincs $N-$nél hosszabb monoton részsorozat. Legyen $X = \{N, N-1, N-2, \dots, 2, 1\}$ ebben a sorrendeben és legyen az N^2 elemű sorozat:

$$\{X, X + N, X + 2N, \dots, X + N^2\}$$

ebben a sorrendben.

Könnyű látni, hogy e sorozatban nincs $N-$nél hosszabb monoton részsorozat.

14.5. Egyenlőtlenségek – feladatok megoldása

A 6.1. feladat megoldásai

A 6.1. b) mego.

Az a)-t használva kétszer

$$\frac{x_1+x_2+x_3+x_4}{4} = \frac{\frac{x_1+x_2}{2}+\frac{x_3+x_4}{2}}{2} \geq \frac{\sqrt{x_1x_2}+\sqrt{x_3x_4}}{2} \geq$$

$$\geq \sqrt{\sqrt{x_1x_2}\sqrt{x_3x_4}} = \sqrt[4]{x_1x_2x_3x_4}.$$

Segítség a 6.1. c) feladathoz

Alkalmazzuk b)-t az $x_4 = \frac{x_1+x_2+x_3}{3}$ választással!

A 6.1. c) mego.

Ha mind a négy tag nulla, akkor nyilván teljesül a feltétel. Legyen $x_4 = \frac{x_1+x_2+x_3}{3}$. a b)-t használva

$$\frac{x_1+x_2+x_3+\frac{x_1+x_2+x_3}{3}}{4} \geq \sqrt[4]{x_1x_2x_3\frac{x_1+x_2+x_3}{3}},$$

közös nevezőre hozva a bal oldalt és néggyel egyszerűsítve

$$\frac{x_1+x_2+x_3}{3} \geq \sqrt[4]{x_1x_2x_3\frac{x_1+x_2+x_3}{3}},$$

negyedik hatványra emelve és egyszerűsítve az $\frac{x_1+x_2+x_3}{3} \neq 0$ kifejezéssel kapjuk a kívánt becslést

A 6.2. feladat megoldása

Az eredmény: 740.

$$\frac{B}{A} = \frac{2012}{\left(\frac{2013}{2012}\right)^{2012}} = \frac{2012}{\left(1+\frac{1}{2012}\right)^{2012}} \approx \frac{2012}{e} \approx 740,$$

ahol amúgy a $\left(1+\frac{1}{2012}\right)^{2012}$ kifejezés értéke számológéppel is meghatározható.

14.6. Sorok, sorozatok határértéke – feladatok megoldása

A 6.1. feladat megoldásai

A 6.1. fel. I. megoldása

Legyen

$$s = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \cdots = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{a_i},$$

ahol a_i a 10–es számrendszerben nem tartalmazzák a 7 számjegyet.

Számoljuk le, hogy hány k jegyű szám van, amelyik nem tartalmazza a 7 számjegyet. Az első számjegy nem lehet 0 és 7 a többi számjegy 9-féle lehet, azaz $8 \cdot 9^{k-1}$. Nyilván ha n k–jegyű, akkor $10^{k-1} \le n < 10^k$. Bontsuk fel a végtelen összeget, úgy, hogy a nevezők két 10–dik hatvány közé essenek

$$s = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{a_i} = \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{10^{k-1} \le a < 10^k} \frac{1}{a},$$

ahol a a 10–es számrendszerben nem tartalmazzák a 7 számjegyet. Becsüljük a második szummába tartozó tagokat felülről (a legkisebb nevező 10^{k-1}, és mint láttuk $8 \cdot 9^{k-1}$ tag van a második, véges összegben. Így

$$s < \sum_{k=1}^{\infty} \frac{8 \cdot 9^{k-1}}{10^{k-1}} = 16.$$

A 6.1. fel. II. megoldása

Jelölje s_n az $[1, n]$ intervallumba eső számok reciprokainak az összegét, amelyek a 10–es számrendszerben nem tartalmazzák a 7 számjegyet. Tehát pl.

$$s_{10} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{8} + \frac{1}{9} + \frac{1}{10} = \frac{543}{360}.$$

Mivel s_n monoton növő sorozat, ezért elég igazolni, hogy e sorozat egy végtelen részsorozata felülről korlátos. Legyen

$$s_{10n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{k}$$

($k = 10n$ vagy esetleg kisebb attól függően, hogy $10n$ tartalmazza a 7 számjegyet, vagy sem). Legyen most $n \ge 10$. Ekkor emeljünk ki a legalább kétjegyű számokból 10–et és vegyük a nevezők egész részét (evvel növeltük a tört értékét)

$$s_{10n} < 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{k} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} \cdots + \frac{1}{10} +$$

$$+\frac{1}{10}(\frac{1}{[11/10]}+\frac{1}{[12/10]}+\frac{1}{[13/10]}\cdots+\frac{1}{[k/10]}).$$

A zárójelben az $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots, \frac{1}{6}, \frac{1}{8}, \ldots$ számok szerepelnek, mégpedig mindegyik $9-$szer és legfeljebb $k-$ig. Így

$$s_{10n} < s_{10} + \frac{9}{10}s_{10n},$$

amiből

$$s_{10n} < 10s_{10} = \frac{543}{36} \approx 15.$$

Tehát az $\{s_{10n}\}$ részsorozat és ekkor az $\{s_n\}$ sorozat is korlátos, sorunk tehát konvegens.

A 6.2. feladat megoldásai

A 6.2. fel. I. megoldása

A biciklisták a találkozásukig 15 km-t mentek. Mivel a légy kétszer olyan gyors, ezért 30 km a megtett táv.

A 6.2. fel. II. megoldása

Az első etapig a légy 20 km-t tesz meg. Ekkor a két biciklis 10 km távol van egymástől. Ezután minden lépésben egy 1/3-ra kicsinyített léptékben teszik meg ugyanazt, mint az előzőekben. Tehát a légy

$$20+\frac{20}{3}+\frac{20}{9}+\ldots\frac{20}{3^k}+\cdots=20\frac{1}{1-1/3}=30$$

kilométeres távolságot tesz meg.

A 6.3. feladat megoldásai

A 6.3. fel. I. megoldása

1 korona=1 csoki + 1 papír =1 csoki + 1/10 csoki +1/10 papír=1 csoki + 1/10 csoki +1/100 csoki +1/100 papír=....

Ezért 1 korona=

$$1+\frac{1}{10}+\frac{1}{100}+\ldots\frac{1}{10^k}+\cdots=\frac{10}{9}$$

csoki.

A 6.3. fel. II. megoldása

Tibi (akiről később a csokit is elnevezték) így okoskodik: 9 csokit már vettem. Beviszem a papirokat és kérek még egy csokit ”Mindjárt fizetek!” felkiáltással. A 10-dik csokit kibontva, a 10 papírral fizetve kiegyenlíti a csoki árát. Tibinek nincs több papírja, az eladónak sincs hiánya (a 10 papírral fizettek). Azaz 9 korona = 10 csoki. Tehát egy korona 10/9 csoki.

A 6.4. feladat megoldása

Lektori jelentés ”Zenon: Akhileusz és a teknösbéka” c. munkájához

A szerző egy érdekes gondolatmenetet ad annak bizonyítására, hogy ha Akhilleusz – az ókor leggyorsabb futója, hátrányból indul, sosem éri utol a teknősbékát. Sajnálattal kell megállapítanunk, hogy a szerző érvelése hibás, és ezt nem csak a tapasztalati tény (nevezetesen egy gyorsabban haladó pont egy idő után mindig utoléri a lassabbat) cáfolja, hanem az alábbiakban részletezném érvelésének – nem javítható – hibáját:

Tegyük fel, hogy egységnyi az az idő, amely alatt Akhileusz befutja az 1 *sztadion távolságot. Ekkor a teknős ennek a tizedét futja be, tehát* 1/10 *előnye van. Az* 1/10 *távolságot (feltéve, ahogy a szerző hallgatólagosan feltette, egyenletes sebességgel haladnak) Akhileusz* 1/10 *egységnyi idő alatt futja be, és így tovább. Az előnyök leküzdésének ideje tehát*

$$1+\frac{1}{10}+\frac{1}{100}+\dots\frac{1}{10^k}+\dots.$$

A szerző ezek után tévesen teszi fel, hogy végtelen sok szám összege végtelen, (noha az időt végtelen sok részre osztotta).

Ha Zenon vásárolt volna egy Tibi csokit, két dologra is rájöhetett volna; egyrészt ez a feladat lényegét tekintve azonos az ő kérdésével, másrészt, hogy a fenti összeg éppen 10/9.

A 6.5. feladat megoldásai

A 6.5. a) mego.

Nem lehet. Indirekt tegyük fel, hogy elhelyezhető a végtelen sok sáv a síkon úgy, hogy minden pontot lefedtünk. Legyen $\sum_{k=1}^{\infty} a_k = D$. Tekintsünk egy $D+1$ átló hosszúságú négyzetet. Könnyű látni, hogy e négyzetet nem csak a sávok fedik le, hanem vannak olyan téglalapok is, amelyek a sávok részhalmazai és melyeknek egyik oldala $D+1$ hosszú, másik oldala pedig a sáv szélessége. Mivel a négyzetet e téglalapok lefedik, az összterületük lagalább akkora, mint a négyzet területe, azaz

$$(D+1)^2 \le \sum_{k=1}^{\infty}(D+1)\cdot a_k,$$

azaz

$$D + 1 \leq \sum_{k=1}^{\infty} a_k = D,$$

ellenmondásként.

A 6.5. b) mego.

Legyen most $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ divergens. Megmutatjuk, hogy most lefedhető a sík a sávok egyesítésével.

Azt állítjuk, hogy a sík $(0;0),(1;0),(1;1),(0;1)$ pontokkal megadott négyzete véges sok sávval lefedhető.

Az olvasót arra bíztatjuk, hogy mielőtt továbbolvasná a bizonyítást, gondolja meg, hogy ebből miért következik, hogy az egész sík is lefedhető.

Ehhez két dolgot kell meggondolnunk; ha véges sok lefedi, akkor a megmaradt végtelen sok sáv sávszélességének az összege divergens lesz (egy divergens sorból véges sok tagot elhagyva, a sor divergens marad), továbbá, hogy ha egy négyzetet véges sokkal lefedtünk, akkor mivel a négyzetek sorba rendezhetőek (pl. a kiindulási négyzetből indulva "csigavonalszerűen" felsoroljuk a négyzeteket; azaz a kiindulási után fel, balra, le, le, jobbra, jobbra, és így tovább) így tehát az egész síkot lefedhetjük a síkok egyesítésével.

Nézzük tehát az említett négyzet véges sok sávval való lefedését. Legyen O pont az origó, és vegyük az O középpontú, 2 sugarú kört. Legyen P_0 az $(1;0)$ pont és $i = 1,2,\ldots$ értékekre legyen P_i pozitív körüljárás szerint e kör azon pontja, melyre $\overline{P_{i-1}P_i}$ húr hossza a_i. Legyen n az első olyan index, amelyre P_n már a harmadik síknegyedbe esik. Ilyen biztosan van, ellenkező esetben bármely n-re $\sum_{k=1}^{n} a_k$ kisebb lenne, mint a félkör hossza, azaz 2π, amiből a $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ sor konvergenciája következne.

Ezek után az $i-$edik sávot $(i = 1,2,\ldots n)$ helyezzük el úgy, hogy középvonala átmenjen az origón és a $\overline{P_{i-1}P_i}$ húrt tartalmazza. Könnyű látni, e sávok "kártyalapszerű" elhelyezése lefedi a félkört, és ezért a $(0;0),(1;0),(1;1),(0;1)$ pontokkal megadott négyzetet is.

Végül könnyú látni, hogy ezt a "legyezőszerű" elrendezést rendre a megmaradt sávokból elkészítve a O körül végtelen sok szöggel el lehet forgatni úgy, hogy a négyzet is le legyen fedve, és ne legyen két sáv, ami párhuzamos (a félkör vonalán pl. egy mindenüt sűrű ponthalmazból kiválasztva a húrok végpontjait). Mivel a csigavonalban elhelyezett négyzetek lefedése eltolással megoldható, így a síkot is alkalmas módon fedtük le.

A 6.6. feladat megoldása

Először is megmutatjuk, hogy bármely $q \geq 2$ számra létezik a határérték.

Vegyük észre, hogy igaz az $a_{n+1} = \sqrt{q + a_n}$ rekurzió.

Teljes indukcióval igazoljuk, hogy bármely $n-$re $a_n \leq q$. Nyilván $a_1 \leq q$, és ha $a_n \leq q$, akkor $q + a_n \leq 2q$, ezért $a_{n+1} = \sqrt{q + a_n} \leq \sqrt{2q} \leq q$, mivel $q \geq 2$.

Ugyancsak teljes indukcióval igazoljuk, hogy bármely $n-$re $a_n \leq a_{n+1}$.

Nyilván $a_1 = \sqrt{q} \leq a_2 = \sqrt{q + \sqrt{q}}$, és ha $a_n \leq a_{n+1}$, akkor $a_n + q \leq a_{n+1} + q$ is igaz, amiből $a_{n+1} = \sqrt{q + a_n} \leq \sqrt{q + a_{n+1}} = a_{n+2}$.

Sorozatunk korlátos és monoton, tehát létezik a véges $\lim_{n\to\infty} a_n := \alpha$. Az $a_{n+1} = \sqrt{q + a_n}$ rekurzió miatt tehát $\alpha = \sqrt{q + \alpha}$, amiből (csak a pozitív megoldást választva és felhasználva, hogy $\alpha = q$, azt kapjuk, hogy

$$\alpha = 1 + \sqrt{1 + 4q}2 = q,$$

amiből $q^2 - 2q = 0$ következik. Tehát csak egyetlen ilyen, a $q = 2$ teljesíti a feltételt.

A 6.7. feladat megoldása

Legyen

$$a_1 = \sqrt{2},\ a_2 = \sqrt{2}^{\sqrt{2}},\ a_3 = \sqrt{2}^{\sqrt{2}^{\sqrt{2}}},$$

s.í.t.

Könnyű látni, hogy ekkor a rekurzió $a_{n+1} = \sqrt{2}^{a_n}$ lesz és a kérdés az, hogy létezik-e a $\lim_{n\to\infty} a_n$, és ha létezik, mennyi az értéke?

Megint teljes indukcióval igazoljuk, hogy bármely $n-$re $a_n \leq a_{n+1}$. Jegyezzük meg, hogy $\sqrt{2} > 1$. Ezért

$$a_1 = \sqrt{2} < a_2 = \sqrt{2}^{\sqrt{2}}.$$

Feltéve most, hogy $a_n \leq a_{n+1}$, azt kapjuk, hogy

$$a_{n+1} = \sqrt{2}^{a_n} < \sqrt{2}^{a_{n+1}} = a_{n+2}.$$

Második lépésként ugyancsak teljes indukcióval igazoljuk, hogy bármely $n-$re $a_n < 2$. Nyilván $a_1 < 2$. Feltéve most, hogy $a_n < 2$, azt kapjuk, hogy

$$a_{n+1} = \sqrt{2}^{a_n} < \sqrt{2}^{2} = 2.$$

Sorozatunk korlátos és monoton, van tehát határértéke, legyen ez A. A rekurzióból (és az exponenciális függvények folytonosságából következik), hogy

$$A = \sqrt{2}^{A}.$$

Ennek két megoldása van, az $A = 2$ és az $A = 4$, de itt nekünk elég kevesebbet igazolnunk: bizonyítjuk, hogy $0 < A < 2$ intervallumon a fenti egyenletnek nincs megoldása. Emiatt, és az $a_n < 2$ miatt azt kapjuk, hogy

$$A = \sqrt{2}^{\sqrt{2}^{\sqrt{2}^{\cdots}}} = 2.$$

14.7. Szélsőérték, értékkészlet – feladatok megoldása

A 6.1. feladat megoldása

Legyen a négyzetes alapú hasáb alap négyzetének a hossza x, magassága y (mindent dm-ekben számolva). Ekkor a kérdés így adható meg: ha

$$4x + 4y = 12,$$

akkor mi a

$$\max x^2 y?$$

Használjuk a Számtani és mértani közép közötti egyenlőtlenséget:

$$\sqrt[3]{\frac{x}{2}\frac{x}{2}y} \leq \frac{x2 + \frac{x}{2} + y}{3} = \frac{x+y}{3} = 1.$$

Ebből

$$\frac{x^2 y}{4} \leq 1,$$

Azaz a térfogat akkor maximális, ha $\frac{x}{2} = y$, ami $x = 2$, $y = 1$ esetén teljesül. Ekkor a térfogat $V = 4$.

A 6.2. feladat megoldása

Lásd

http://matek.fazekas.hu/portal/tovabbkepzesek/szeminarium/2012/2012pub01.pdf.

14.8. Függvények tulajdonságai – feladatok megoldása

A 6.1. feladat megoldása

Legyen P a sokszög egy tetszőleges pontja és húzzunk egy tetszőleges egyenest ezen keresztül. Forgassuk meg a P−n átmenő egyenest φ szöggel, és legyen $d(\varphi) = T_1(\varphi) - T_2(\varphi)$, ahol $T_1(\varphi)$ a sokszög és az elforgatott egyenes bal félsíkba eső részének a területe, $T_2(\varphi)$ pedig a jobb félsíkba eső terület. (A ”bal” és a ”jobb” önkényesen választható, de a forgatás alatt mindig ugyanazt az elforgatott félsíkot értjük). Könnyű látni, hogy $d(0) = -d(\pi)$, (hiszen a két sokszögdarab helyett cserélt).

A $d(\varphi)$ függvény folytonos. Valóban, mivel a sokszög korlátos, ezért elhelyezhető egy R sugarú körbe, melynek középpontja P. Emiatt tetszőleges $\delta > 0$ forgatással a d függvény változása $< 2\delta R$, tetszőlegesen kicsivé tehető.

A Bolzano-Darboux tétel miatt, mivel $d(0) = -d(\pi)$, felvesz negatív és pozitív értéket a $[0, \pi]$ intervallumba, így felveszi a 0 értéket is, azaz van olyan φ_0, hogy $T_1(\varphi_0) - T_2(\varphi_0) = 0$, azaz a két terület egyenlő.

A 6.2. feladat megoldása

A geometriai jelentés annak, hogy egy függvény páros az, hogy az y tengelyre tükrös a függvény gráfja. A feladat azt állítja, hogy két, egymással párhuzamos (az $x = -d_1$ és az $x = -d_2$) egyenesekre tükrös a függvény gráfja. Két párhuzamos tengelyekre való tükrözés egy eltolás, ezért sejthető, hogy a periódus a $2(d_1 - d_2)$ lesz. Ezt fogjuk igazolni.

Mivel $f(x-d_i)$ $(i = 1, 2)$ páros, ez azt jelenti, hogy bármely z-re $f(z-d_i) = f(-z-d_i)$, így bármely x esetén

$$f(x + 2(d_2 - d_1)) = f(x + 2d_2 - d_1 - d_1) = f(d_1 - 2d_2 - x - d_1) = f(-d_2 - x - d_2) =$$

$$f(x + d_2 - d_2) = f(x).$$

A 6.3. feladat megoldása

Megmutatjuk, hogy $f(x)$−nek minden valós szám periódusa. Ebből következik, hogy $f(x)$ egy konstans függvény.

Legyen r egy tetszőleges racionális szám. Ekkor egy tetszőleges i irracionális számra $r - i$ irracionális (ellenkező esetben, ha $r - i = r'$ lenne, ahol r' egy racionális szám, akkor $i = r - r'$ adódna ellentmondásként). Azaz $r - i$ is periódus.

Jegyezzük meg általánosan is; ha egy $f(x)$ függvénynek p és q is periódusa, akkor $p + q$ is periódus:

$$f(x + p + q) = f((x + p) + q) = f(x + p) = f(x),$$

bármely x−re.

Tehát így $i + r - i = r$ is periódus, azaz az irracionális számokon kívül az összes recionális szám, így pedig az összes valós szám periódusa az $f(x)$ függvénynek.

A 6.4. feladat megoldása

Jelölje P_f egy f függvény összes periódusának a halmazát (értsük ide a 0−t is).

Ekkor egy általánosabb állítást igazolunk:

Legyen $(P, +)$ egy additív csoport, $P \subseteq \mathbb{R}$. Ekkor létezik olyan mindenhol értelmezett f függvény, hogy $P_f = P$.

Legyen

$$f(x) = \begin{cases} 1 & x \in P \\ 0 & x \notin P \end{cases}$$

Bebizonyítjuk, hogy $P_f = P$.

Legyen $p \in P$. Ekkor ha $x \in P$, akkor $f(x) = 1$ és $p + x \in P$, mivel P zárt az összeadásra, de így $f(x + p) = 1$.

Ha $x \notin P$, akkor $x+p \notin P$, (ellenkező esetbe, azaz ha $x+p = p'$, akkor $x = p'-p \in P$ ellentmondásként) így $f(x) = 0$ és $f(x+p) = 0$. Azt kaptuk, hogy mindkét esetben, azaz $\forall x \in \mathbb{R}$,

$$f(x + p) = f(x).$$

Végül azt kell igazolnunk, ha $q \notin P$, akkor q nem periódus. $0 \in P$, így $f(0) = 1$, de $f(0 + q = f(q) = 0$, azaz q nem periódus.

a) Mindössze azt kell meggondolnunk, hogy a racionális számok halmaza az összadásra nézve csoport (nyilvánvaló), emiatt természetesen nem a konstans függvény, amelynek a perióśdushalmaza a racionális számok halmaza (a fenti példa a jól ismert *Dirichlet függvény*.

b) Itt pedig a azt kell látni, hogy az $a + b\sqrt{2}, a, b \in \mathbb{Z}$ alakú számok halmaza az összadásra nézve csoport, ami ugyancsak egyszerű.

A 6.5. feladat megoldása

Indirekt tegyük fel, hogy

$$x^2 = f(x) + g(x) := F(x)$$

teljesül minden x értékre ahol, f egy $p \neq 0$ szerint, g pedig egy $q \neq 0$ szerint periodikus függvény. Ekkor felhasználva a peridodicitást

$$F(x + p + q) - F(x + p) - F(x + q) + F(x) =$$

$$= f(x+p+q)+g(x+p+q)-(f(x+p)+g(x+p))-(f(x+q)+g(x+q))+f(x)+g(x) =$$

$$= f(x + q) + g(x + p) - (f(x) + g(x + p)) - (f(x + q) + g(x)) + f(x) + g(x) = 0.$$

Azonban

$$(x + p + q)^2 - (x + p)^2 - (x + q)^2 + x^2 = 2pq \neq 0.$$

Megjegyzés a 6.5. feladathoz

Meglepő módon az $F(x) = x$ függvény előáll két periodikus függvény összegeként. Ennek tárgyalása túlmutat e jegyzet keretein.

A 6.6. feladat megoldása

$f(x) = (x^3 + 2x^2 + 5x) - (x^3 + 3)$. A második világos, hogy szigorúan monoton nő. Az elsőről azt kell igazolni, hogy nincs olyan érték, amelyet háromszor vesz fel, azaz akármilyen c esetén az $x^3 + 2x^2 + 5x + c$ polinomnak nincs három valós gyöke. A bizonyítás a 3.4. feladat megoldásának mintájára mehet.

A 6.7. feladat megoldása

Használva a megadott összefüggést

$$f(x+2) = \frac{f(x+1)-1}{f(x+1)+1} = \frac{\frac{f(x)-1}{f(x)+1} - 1}{\frac{f(x)-1}{f(x)+1} + 1} =$$

$$= -\frac{1}{f(x)}.$$

Ezért

$$f(x+4) = -\frac{1}{f(x+2)} = f(x).$$

A 6.8. feladat megoldása

Legyen $\frac{\alpha}{\beta} = \frac{p}{q}$ $p, q \in \mathbb{Z}$. Ekkor $q \cdot \alpha = p \cdot \beta$ és így

$$f(x + q \cdot \alpha) + g(x + p \cdot \beta) = f(x) + g(x).$$

A 6.9. feladat megoldásai

A 6.9. fel. I. megoldása

Ha felbontjuk a zárójeleket és összegyűjtjük a közös tagokat, akkor egy másodfokú egyenletet kapunk:

$$3x^2 - 2(a+b+c) + (ab+ac+bc) = 0.$$

Két különböző valós gyökünk van, ha

$$D = 4(a+b+c)^2 - 12(ab+ac+bc) > 0.$$

$$D = a^2 + b^2 + c^2 - ab - ac - bc = \frac{(a-b)^2 + (a-c)^2 + (c-b)^2}{2},$$

ami nyilván pozitív. A $a < x_1 < b < x_2 < c$ feltétel bizonyítását most nem végezzük el.

A 6.9. fel. II. megoldása

Legyen $p(x) = (x-a)(x-b) + (x-a)(x-c) + (x-c)(x-b)$. Az $a < b < c$ feltétel miatt

$$p(a) = (a-c)(a-b) > 0; \quad p(b) = (b-a)(b-c) < 0; \quad p(c) = (c-a)(c-b) > 0,$$

Azaz e folytonos függvény felvesz pozitív-negatív-pozitív értékeket. A Bolzano-Darboux tétel miatt a és b között és b és c között felveszi a 0 értéket is, amiből következik az állítás.

A 6.9. fel. III. megoldása

Legyen $f(x) = (x-a)(x-b)(x-x)$. Ekkor

$$f'(x) = (x-a)(x-b) + (x-a)(x-c) + (x-c)(x-b).$$

A Rolle-tétel értelmében léteznek tehát x_1, x_2, amelyekre $a < x_1 < b < x_2 < c$ és $f'(x_1) = f'(x_2) = 0$.

A 6.10. feladat megoldása

a) Konstans függvény; *b)* Nincs; *c)* tg x ; *d)* Nincs;
e) $f(x) = (x-1)x(x+1)$; *f)* $f(x) = 0$.

A 6.11. feladat megoldása

a) $f(x) = x^2 + 1 > 0$ bármely $x-$re és páros függvény. Ha $g(x)$ páratlan és $g(x_0) > 0$, akkor $g(-x_0) = -g(x_0) < 0$.

b) Legyen

$$\phi(x) = \begin{cases} |x| & x \in \mathbb{Q} \\ -|x| & x \in \mathbb{Q}^* \end{cases}$$

Ha $x \in \mathbb{Q}$, akkor $-x \in \mathbb{Q}$, ha $x \in \mathbb{Q}^*$, akkor $-x \in \mathbb{Q}^*$, így $\phi(-x) = \phi(x)$, azaz a függvény páros. Az $x = 0$ tetszőleges környezetében felvesz negatív és pozitív értékeket is, tehát nem lehet szélsőértékhelye itt.

c) Legyen először $f(x)$ páratlan függvény. $f(0) = 0$ és mivel $f(x) = -f(-x)$, ezért nem lehet szélsőértékhelye $0-$ban. Továbbá, ha $\alpha-$ban lokális maximuma (minimuma) van $f-$nek, akkor $-\alpha-$ban lokális minimuma (maximuma) van. Ezért $f-$nek páros sok szélsőértékhelye lehet. Könnyű látni, hogy bármely $2k-$ra van f melynek $2k$ lokális szélsőértékhelye van.

Legyen most $f(x)$ páros függvény. Könnyű példát adni 1 szélsőértékre (pl. $|x|$), 3 szélsőértékre (pl. $||x|-1|$) és ilyenek segítségével minden páratlan $n-$re.

Az $n = 2k$ esetén vegyünk egy $f(x)$ függvényt melynek k szélsőértékhelye van $x > 1$ esetén és értékei > 2. Legyen

$$g(x) = \begin{cases} f(|x|) & x > 1 \\ D(x) & |x| \leq 1 \end{cases}$$

ahol $D(x)$ a Dirichlet függvény. $g(x)$ függvénynek $2k$ szélsőértékhelye van.

A 6.12. feladat megoldása

a) Ha $g(x)$ periodikus, akkor nyilván $f(g(x))$ is periodikus.

b) Ha $g(x)$ páros, akkor nyilván $f(g(x))$ is páros.

c) Az $f(x) = c > 0$, akkor bármely $g(x)$ függvényre $f(g(x)) = c$, ami nem páratlan.

14.9. Szám és ponthalmazok – feladatok megoldása

A 6.1. feladat megoldása

Van. Álljon halmazunk az egység sugarú kör azon $P_0, P_1, \ldots, P_i \ldots,$ pontjaiból, amelyekre a P_{i-1}, P_i ív hossza $\sqrt{2} \cdot \pi$. E pontok mind különböznek egymástól, ha ugyanis létezne $i \neq j$, hogy $P_i \equiv P_j$, akkor ez azt jelentené, hogy van olyan k, hogy $i \cdot \pi = j \cdot \pi + 2k\pi$, amiből $\sqrt{2} = \frac{2k}{i-j}$ következne ellentmondásként.

Azaz az $X = \{P_0, P_1, \ldots, P_i \ldots,\}$ végtelen halmaz és az

$$X' = \{P_1, P_2, \ldots, P_i \ldots,\}$$

valódi részhalmaza vele egybevágó.

A 6.2. feladat megoldása

Könnyen látható, hogy a feladat ekvivalens azzal, hogy az $y = \frac{1}{x}$ első síknegyedbe eső pontjaihoz húzott érintők egy 2 egység területű háromszöget metszenek le a tengelyekből.

Legyen tehát $P = (x_0; 1/x_0)$, $x_0 > 0$ a hiperbola egy pontja. Az ebben a pontban húzott érintő egyenlete $y = mx + b$. Most kétféleképpen gondolkodhatunk:

1. az $y = \frac{1}{x}; y = mx + b$. egyenletrendszernek egy megoldása van (amelyik nem párhuzamos az y tengellyel).

2. Használjunk egy analízisbeli eszközt; az érintő meredeksége, azaz m éppen az x_0-beli deriválttal egyenlő: az $f(x) = \frac{1}{x}$ x_0-beli deriváltja $f'(x_0) = -\frac{1}{x_0^2}$, így $m = -\frac{1}{x_0^2}$. Mivel az érintőegyenes átmegy P ponton ezért $b = \frac{2}{x_0}$. Az érintő egyenes egyenlete

$$y = -\frac{1}{x_0^2}x + \frac{2}{x_0}.$$

A tengelymetszetei $(2x_0, 0)$ és $(0, 2/x_0)$. Ez a $(0, 0)$ pontokkal együtt ez olyan derékszögű háromszöget határoz meg, melynek területe állandó $(= 2.)$

A 6.3. feladat megoldása

Mivel $k \in \mathbb{N}$ esetén 10^{2k} négyzetszám, ezért α decimális felírásban tetszőleges hosszú, nullákból álló tizedesjegy sorozat szerepel. Egy valós szám decimális tört alakja akkor és csak akkor periodikus, ha ez a valós szám racionális. Ám $\alpha-$nak nem lehet csupa nem nullából álló periódusa.

A 6.4. feladat megoldása

Igen, ha megadunk egymásba skatulyázott olyan halmazokat, amelyekbe eső rácspontok száma véges. Ilyen a kockarács esetén az origóra szimmetrikus n élhosszú $(n \in \mathbb{N})$ kockák sorozata.

15. fejezet

Valószínűségszámítási feladatok megoldása

15.1. Bevezető statisztikai példák

A 7.1. feladat megoldása

A megoldást táblázatkezelő program segítségével a

`file/toldibetustatisztika.xls`, `file/toldibetustatisztika.odss`

Excel illetve OpenOffice.Calc fájlokban végeztük el.

a)	*magyar karakter*	*gyakoriság*	*relatív gyakoriság*
1.	E	5204	0,098242435
2.	A	4764	0,089936003
3.	T	4244	0,080119311
4.	N	3326	0,062789073
5.	L	3223	0,060844613
6.	S	3090	0,058333805
7.	K	2329	0,043967454
8.	R	2168	0,040928055
9.	M	2132	0,040248438
10.	O	2128	0,040172925
11.	I	2071	0,039096864
12.	G	2063	0,038945838
13.	Á	1846	0,034849257
14.	Z	1807	0,034113005
15.	É	1686	0,031828736
16.	Y	1507	0,028449529
17.	D	1366	0,025787695
18.	V	1110	0,020954862
19.	B	1010	0,019067037
20.	H	1001	0,018897132
21.	J	831	0,015687829
22.	Ö	683	0,012893848
23.	F	550	0,01038304
24.	C	482	0,009099318
25.	P	459	0,008665119
26.	Ó	426	0,008042136
27.	U	424	0,00800438
28.	ő	329	0,006210946
29.	Í	226	0,004266485
30.	Ú	212	0,00400219
31.	Ü	195	0,00368126
32.	ű	79	0,001491382
	össz:	52971	1

b)	*magyar hang*	*gyakoriság*	*relatív gyakoriság*
1.	E	5204	$0,103721125$
2.	A	4764	$0,094951468$
3.	T	4198	$0,0836705$
4.	L	3027	$0,060331254$
5.	N	2946	$0,05871684$
6.	K	2329	$0,046419389$
7.	R	2168	$0,043210492$
8.	M	2132	$0,042492974$
9.	O	2128	$0,04241325$
10.	I	2071	$0,041277181$
11.	Á	1846	$0,036792697$
12.	S	1803	$0,035935663$
13.	É	1686	$0,033603731$
14.	D	1363	$0,027166006$
15.	G	1178	$0,023478763$
16.	V	1110	$0,022123453$
17.	B	1010	$0,020130349$
18.	H	1001	$0,01995097$
19.	SZ	920	$0,018336556$
20.	GY	885	$0,017638969$
21.	Z	858	$0,017100831$
22.	J	831	$0,016562693$
23.	Ö	683	$0,013612899$
24.	F	550	$0,010962071$
25.	P	459	$0,009148347$
26.	Ó	426	$0,008490622$
27.	U	424	$0,00845076$
28.	NY	380	$0,007573795$
29.	CS	341	$0,006796484$
30.	ő	329	$0,006557312$
31.	Í	226	$0,004504415$
32.	Ú	212	$0,00422538$
33.	LY	196	$0,003906484$
34.	Ü	195	$0,003886553$
35.	C	141	$0,002810276$
36.	ű	79	$0,001574552$
37.	TY	46	$0,000916828$
38.	ZS	25	$0,000498276$
39.	DZ	2	$0,0000398621$
40.	DZS	1	$0,000019931$
	össz:	50173	1

c)	*angol ABC*	*gyakoriság*	*relatív gyakoriság*
1.	E	6890	$0,130071171$
2.	A	6610	$0,12478526$
3.	T	4244	$0,080119311$
4.	O	3566	$0,067319854$
5.	N	3326	$0,062789073$
6.	L	3223	$0,060844613$
7.	S	3090	$0,058333805$
8.	K	2329	$0,043967454$
9.	I	2297	$0,04336335$
10.	R	2168	$0,040928055$
11.	M	2132	$0,040248438$
12.	G	2063	$0,038945838$
13.	Z	1807	$0,034113005$
14.	Y	1507	$0,028449529$
15.	D	1366	$0,025787695$
16.	V	1110	$0,020954862$
17.	B	1010	$0,019067037$
18.	H	1001	$0,018897132$
19.	U	910	$0,017179211$
20.	J	831	$0,015687829$
21.	F	550	$0,01038304$
22.	C	482	$0,009099318$
23.	P	459	$0,008665119$
	össz:	52971	1

A 7.2. feladat megoldásai

Segítség a 7.2. feladathoz

A Winword Edit/Replace azaz Szerkesztés/Csere utasítása végrehajtáskor kiírja a lecserélt betűk számát.

A 7.2. feladat megoldása

A titkosított szöveg karakterstatisztikáját lásd a

`file/halandzsa110723hameg01.xls`, `file/halandzsa110723hameg01.ods`

fájlok bármelyikében, a dekódolt szöveg elérhető a file/halandzsa110723hameg01.doc, file/halandzsa110723hameg01.txt

fájlok bármelyikében, míg a központozott teljes megoldás a

file/halandzsa110723hamegteljes.doc,
file/halandzsa110723hamegteljes.pdf

fájlokban olvasható.

A 7.4. feladat megoldása

Segítség a 7.4. feladathoz

A szórásnégyzet fogalmát a 2.1. a) feladat megoldásában, az ahhoz tartozó megjegyzésben értelmeztük.

A 7.4. feladat megoldása

Ha n tagból áll a számsokaság, akkor szórásnégyzetének – azaz tagjainak az átlagól való eltérésének átlagos négyzetes eltérésének – n-szerese így írható:

$$nD^2 = (x_1 - \overline{x})^2 + (x_2 - \overline{x})^2 + (x_3 - \overline{x})^2 + \ldots + (x_n - \overline{x})^2.$$

Azok az x_i elemek, amelyek kívül vannak az $[x - 2D; x + 2D]$ intervallumon egy-egy $4D^2$-nél nagyobb tagot hoznak be a fenti egyenlet jobb oldalára, így biztos, hogy $\frac{n}{4}$-nél kevesebben vannak (hiszen a többi tag is nemnegatív). Tehát az adott intervallumon kívül az elemeknek kevesebb, mint 25%-a van, több mint 75% az intervallumban van.

Annak az adatsokaságnak, melyben a tagok $\frac{3}{4}$-ed része megegyezik az átlaggal, míg a maradék $\frac{1}{4}$-ed rész az átlagtól $2D$-vel tér el – a fele felfelé, a fele lefelé, hogy „kijöjjön" az átlag – a szórása éppen D, így az állítás nem javítható.

A 7.5. feladat megoldása

Az $\frac{1}{9}$-ed résznél kevesebb. Tehát az elemek legalább $\frac{8}{9}$-ed része, azaz kb. 88.89%-a az intervallumon belül van.

A 7.6. feladat megoldása

Csebisev tulajdonság

Állítjuk, hogy ha egy H számsokaság átlaga $\overline{x}$, szórása D és $B > 1$ tetszőleges szám, akkor a számsokaság elemeinek $\frac{1}{B^2}$-nél kisebb része van az $[x-BD; x+BD]$ intervallumon kívül. Ha ugyanis legalább ennyi elem kívül lenne, akkor azok átlagtól való távolságának négyzetösszege $\frac{n}{B^2}(BD)^2 = nD^2$-nél több lenne, így a szórásnégyzet is több lenne D^2-nél.

A 7.8. feladat megoldása

$$M_{X+Y} = \frac{(x_1+y_1)+(x_2+y_2)+\ldots+(x_n+y_n)}{n} =$$

$$= \frac{(x_1+x_2+\ldots+x_n)+(y_1+y_2+\ldots+y_n)}{n} =$$

$$= \frac{x_1+x_2+\ldots+x_n}{n} + \frac{y_1+y_2+\ldots+y_n}{n} = M_X + M_Y,$$

tehát $M_{X+Y} = M_X + M_Y$. Az $X \oplus Y$ számsokaság átlaga:

$$M_{X\oplus Y} =$$

$$= \frac{(x_1+y_1)+\ldots+(x_1+y_n)+(x_2+y_1)+\ldots+(x_2+y_n)+\ldots+(x_n+y_n)}{n^2} =$$

$$= \frac{\frac{(x_1+y_1)+\ldots+(x_1+y_n)}{n} + \frac{(x_2+y_1)+\ldots+(x_2+y_n)}{n} + \ldots + \frac{(x_n+y_1)+\ldots+(x_n+y_n)}{n}}{n} =$$

$$= \frac{\frac{nx_1+(y_1+y_2+\ldots+y_n)}{n} + \frac{nx_2+(y_1+y_2+\ldots+y_n)}{n} + \ldots + \frac{nx_n+(y_1+y_2+\ldots+y_n)}{n}}{n} =$$

$$= \frac{x_1+M_Y+x_2+M_Y+\ldots+x_n+M_Y}{n} = \frac{(x_1+x_2+\ldots+x_n)+nM_Y}{n} = M_X + M_Y,$$

azaz $M_{X\oplus Y} = M_X + M_Y$. Ehhez hasonlóan

$$M_{X\otimes Y} =$$

$$= \frac{(x_1\cdot y_1)+\ldots+(x_1\cdot y_n)+(x_2\cdot y_1)+\ldots+(x_2\cdot y_n)+\ldots+(x_n\cdot y_n)}{n^2} =$$

$$= \frac{\frac{(x_1\cdot y_1)+\ldots+(x_1\cdot y_n)}{n} + \frac{(x_2\cdot y_1)+\ldots+(x_2\cdot y_n)}{n} + \ldots + \frac{(x_n\cdot y_1)+\ldots+(x_n\cdot y_n)}{n}}{n} =$$

$$= \frac{\frac{x_1\cdot(y_1+y_2+\ldots+y_n)}{n} + \frac{x_2\cdot(y_1+y_2+\ldots+y_n)}{n} + \ldots + \frac{x_n\cdot(y_1+y_2+\ldots+y_n)}{n}}{n} =$$

$$= \frac{x_1M_Y+x_2M_Y+\ldots+x_nM_Y}{n} = M_Y\frac{x_1+x_2+\ldots+x_n}{n} = M_Y\cdot M_X,$$

azaz $M_{X\oplus Y} = M_X \cdot M_Y$.

Az $X\cdot Y$ számsokaságot még nem vizsgáltuk. Ennek átlagát nem határozzák meg az X, Y számsokaságok átlagai. Ha pl

$$X = \{1, \quad 2, \quad 3\}, \qquad Y = \{1, \quad 2, \quad 3\},$$

akkor X és Y átlaga is 2, míg az

$$X\cdot Y = \{1^2, \quad 2^2, \quad 3^2\}$$

számsokaság átlaga $M_{X \cdot Y} = \frac{1+4+9}{3} = \frac{14}{3}$, de ha változtatunk a sorrenden, pl

$$X = \{1, \quad 2, \quad 3\}, \qquad Y = \{3, \quad 2, \quad 1\},$$

akkor ugyan X és Y átlaga továbbra is 2, az

$$X \cdot Y = \{3, \quad 4, \quad 3\}$$

számsokaság átlaga viszont most $M_{X \cdot Y} = \frac{10}{3}$.

Nem csak a sorrenddel van gond. Ha pl

$$X = \{1, \quad 2, \quad 3\}, \qquad Y = \{0, \quad 2, \quad 4\},$$

akkor X és Y átlaga még mindig 2, de az

$$X \cdot Y = \{0, \quad 4, \quad 12\}$$

számsokaság átlaga $M_{X \cdot Y} = \frac{0+4+12}{3} = \frac{16}{3}$.

Megjegyzés a 7.8. fel. megoldásához

Ezek a példák az alábbi valószínűségszámítási összefüggések statisztikai analogonjait igazolják.

a) Két független valószínűségi változó szorzatának várható értéke az egyes változók várható értékének szorzata. A függetlenség itt lényeges feltétel.

b) Két valószínűségi változó összegének várható értéke az egyes változók várható értékének összege. Ezeknek a valószínűségi változóknak nem kell függetlennek lennie.

15.2. Esélyek – feladatok megoldása

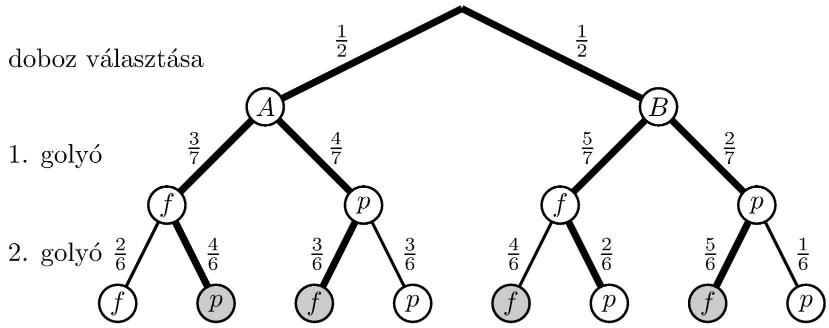
A 7.1. feladat megoldásai

A 7.1. fel. I. megoldása

Dobozt választunk, utána kihúzunk a választott dobozból egy golyót, majd egy másodikat. A 15.1 ábrán felrajzoltuk az eljáráshoz tartozó „döntési fát”, ahol a döntés helyett a véletlen szerepel. Az egyes valószínűségeket is feltüntettük.

Az ábrán szürkével jelöltük azokat a végállapotokat, amelyekben a két kihúzott golyó színe különböző. A keresett valószínűség is leolvasható az ábráról, ha a megfelelő vépgállapotokhoz tartozó utakon képezzük a valószínűségek szorzatát, majd azok összegét:

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{7} \cdot \frac{4}{6} + \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{7} \cdot \frac{3}{6} + \frac{1}{2} \cdot \frac{5}{7} \cdot \frac{2}{6} + \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{7} \cdot \frac{5}{6} = \frac{2 \cdot 3 \cdot 4 + 2 \cdot 5 \cdot 2}{2 \cdot 7 \cdot 6} = \frac{11}{21} \approx 0,5238095238.$$



15.1. ábra.

A 7.1. fel. II. megoldása

Vizsgáljuk a következő eseményeket:
A_h: az A dobozból húzunk;
B_h: a B dobozból húzunk;
V: vegyesen húzunk, tehát egy fehéret és egy pirosat húzunk.
Mivel

$$P(A_h) = \frac{1}{2}, \qquad P(B_h) = \frac{1}{2}, \qquad P(V|A_h) = \frac{3 \cdot 4}{\binom{7}{2}} = \frac{2 \cdot 3 \cdot 4}{7 \cdot 6} = \frac{4}{7}$$

és

$$P(V|B_h) = \frac{5 \cdot 2}{\binom{7}{2}} = \frac{2 \cdot 5 \cdot 2}{7 \cdot 6} = \frac{10}{21},$$

ahol A_h és B_h komplementer események, így alkalmazhatjuk a teljes valószínűség tételét, miszerint

$$P(V) = P(V|A_h)P(A_h) + P(V|B_h)P(B_h) = \frac{4}{7}\frac{1}{2} + \frac{10}{21}\frac{1}{2} = \frac{11}{21} \approx 0,5238095238.$$

A 7.2. feladat megoldásai

A 7.2. a) mego.

Komplementer módszerrel számolva kapjuk, hogy $\binom{21}{2} - 1 - \binom{19}{2} = 38$ esetben van 1-találatos szelvényünk. Átlagos nyereményünk tehát

$$\frac{1 \cdot 2000 + 38 \cdot 200}{210} = \frac{9600}{210} \approx 45,7142857143.$$

Húzásonként átlagosan $100 - 45,7142857143 \approx 54,2857142857$ Ft veszteségünk lesz a játékon, nem érdemes játszani.

A **7.2.** **b) mego.**

n szám esetén

$$\frac{n(n-1)}{2} - 1 - \frac{(n-2)(n-3)}{2} = 2n - 4$$

kitöltés egy találatos, az átlagos nyeremény

$$\frac{1 \cdot 2000 + (2n-4) \cdot 200}{\frac{n(n-1)}{2}} = 100 \cdot \frac{24+8n}{n(n-1)}.$$

Az a kérdés, hogy mely n-re teljesül az

$$1 \leq \frac{24+8n}{n(n-1)}$$

egyenlőtlenség. A pozitív nevezővel átszorozva és rendezve az

$$n^2 - 9n - 24 \leq 0$$

másodfokú egyenlőtlenséghez jutunk. 1-től 11 számig érdemes a játékot játszani. pl. 11 szám esetén átlagos nyereményünk húzásonként

$$100 \cdot \frac{24 + 8 \cdot 11}{11 \cdot 10} - 100 = \frac{200}{110}$$

Ft.

A 7.3. feladat megoldása

Foglaljuk táblázatba a lehetőségeket! Az oszlopok Anna lehetséges dobásainak ($A\,\square$), a sorok Balázs lehetséges dobásainak ($B\,\square$) felelnek meg. A 36 mező felel meg a 36 lehetséges esetnek. A „–” jelet tettünk azoknak az eseteknek a helyére, amelyeknél újat kell dobni, az „A” jelet tettük oda, ahol Anna, a „B” jelet ahol a Balázs a nyerő.

		$A\,\square$					
		1	2	3	4	5	6
	1	–	–	–	–	–	–
	2	B	A	A	A	A	A
	3	B	B	A	A	A	A
$B\,\square$	4	B	B	B	A	A	A
	5	B	B	B	B	A	A
	6	B	B	B	B	B	A

A 36 mezőből 30-nál nincs új dobás és ezek valószínűsége megegyezik. Sőt a 30-ból 15 – 15 nyerő Annának illetve Balázsnak, így igazságos a játék, a két játékos nyerési esélye megegyezik.

A 7.4. fel. eredménye

a) $0,0375\%$, *b)* $2,175\%$.

A 7.7. feladat megoldásai

Segítség a 7.7. feladathoz

Mutassuk meg, hogy a kockák kitölthetők úgy, hogy körbeverjék egymást!

Egy hasonló, ellentmondónak tűnő jelenséget a 2.5. feladatban láttunk.

A 7.7. feladat megoldása

András felírhatja pl. így a számokat a kockákra:

I. *kocka:*	1	2	13	14	15	16
II. *kocka:*	7	8	9	10	11	12
III. *kocka:*	3	4	5	6	17	18

Hasonlítsuk össze ezeket a kockákat! Táblázatokat készítünk a kockapárok összehasonlítására, az egyes mezőkbe annak a kockának a kódját írjuk, amelyik a mező sorának és oszlopának megfelelő értékek közül a nagyobbikhoz tartozik.

$I-II.$		$I.\square$					
		1	2	13	14	15	16
$II.\square$	7	$II.$	$II.$	$I.$	$I.$	$I.$	$I.$
	8	$II.$	$II.$	$I.$	$I.$	$I.$	$I.$
	9	$II.$	$II.$	$I.$	$I.$	$I.$	$I.$
	10	$II.$	$II.$	$I.$	$I.$	$I.$	$I.$
	11	$II.$	$II.$	$I.$	$I.$	$I.$	$I.$
	12	$II.$	$II.$	$I.$	$I.$	$I.$	$I.$

Tehát az $I.$ kocka $24:12$ arányban legyőzi a $II.$ kockát, azaz kettejük csatájában $\frac{2}{3}$ valószínűséggel az I-es nyer.

$II-III.$		$II.\square$					
		7	8	9	10	11	12
$III.\square$	3	$II.$	$II.$	$II.$	$II.$	$II.$	$II.$
	4	$II.$	$II.$	$II.$	$II.$	$II.$	$II.$
	5	$II.$	$II.$	$II.$	$II.$	$II.$	$II.$
	6	$II.$	$II.$	$II.$	$II.$	$II.$	$II.$
	17	$I.$	$I.$	$I.$	$I.$	$I.$	$I.$
	18	$I.$	$I.$	$I.$	$I.$	$I.$	$I.$

Tehát a $II.$ kocka $24:12$ arányban legyőzi a $III.$ kockát, azaz kettejük csatájában $\frac{2}{3}$ valószínűséggel a II-es nyer.

$III-I.$		$III.\square$					
		3	4	5	6	17	18
	1	$III.$	$III.$	$III.$	$III.$	$III.$	$III.$
	2	$III.$	$III.$	$III.$	$III.$	$III.$	$III.$
	13	$I.$	$I.$	$I.$	$I.$	$III.$	$III.$
$I.\square$	14	$I.$	$I.$	$I.$	$I.$	$III.$	$III.$
	15	$I.$	$I.$	$I.$	$I.$	$III.$	$III.$
	16	$I.$	$I.$	$I.$	$I.$	$III.$	$III.$

Tehát a $III.$ kocka $20:16$ arányban legyőzi az $I.$ kockát, azaz kettejük csatájában $\frac{20}{36}=\frac{5}{9}$ valószínűséggel a III-as nyer.

A három kocka körbeveri egymást, bármelyiket választja B, annál tud jobbat választani A.

A 7.9. feladat megoldásai

A 7.9. a) mego.

Jelölje a fehér golyók számát f, a pirosakét p. A jelen feladatban tehát $p=10$.

Két golyó összesen $\binom{p+f}{2}=\frac{(p+f)(p+f-1)}{2}$-féleképpen választható ki és ebből pf esetben különböző színű a két golyó. Akkor igazságos a játék, ha ez fele az összes esetnek:

$$(p+f)(p+f-1)=4pf. \tag{15.1}$$

A $p=10$ esetben ebből az alábbi másodfokú egyenletet kapjuk f-re:

$$f^2-21f+90=0,$$

tehát $f=6$ vagy $f=15$.

A 7.9. b) mego.

A 7.9. a) fel. megoldásában felírt (15.1) egyenletet az általános esetben is kezelhetjük f-re vonatkozó másodfokú egyenletként:

$$f^2-(2p+1)f+p(p-1)=0. \tag{15.2}$$

Ennek diszkriminánsa:

$$D_f=(2p+1)^2-4p(p-1)=8p+1. \tag{15.3}$$

Az f ismeretlen értéke csak akkor lesz egész, ha ez a diszkrimináns négyzetszám. A (15.3) alak szerint ez páratlan is, tehát D_f egy pozitív páratlan szám négyzete:

$$D_f = (2n-1)^2, \tag{15.4}$$

ahol n tetszőleges pozitív egész szám. A (15.3-15.4) összefüggésekből

$$p = \frac{n(n-1)}{2} = \binom{n}{2}, \tag{15.5}$$

míg a 15.2 másodfokú egyenletre vonatkozó megoldóképletből

$$f = \frac{2p+1 \pm \sqrt{D_f}}{2} = \frac{n(n-1)+1 \pm (2n-1)}{2}$$

azaz

$$f = \begin{cases} \frac{n^2+n}{2} & = & \frac{n(n+1)}{2} & = & \binom{n+1}{2} \\ \frac{n^2-3n+2}{2} & = & \frac{(n-1)(n-2)}{2} & = & \binom{n-1}{2} \end{cases} \tag{15.6}$$

azaz pontosan akkor igazságos a játék, ha a piros és a fehér golyók száma két szomszédos háromszögszám.

A 7.10. feladat megoldásai

A 7.10. fel. I. megoldása

Jelölje a fehér golyók számát f, a pirosakét p. A játék pontosan akkor igazságos, ha

$$2\binom{p}{2} = \binom{p+f}{2},$$

azaz ha

$$2 = \frac{p+f}{p} \cdot \frac{p+f-1}{p-1}. \tag{15.7}$$

Vegyük észre, hogy a (15.7) összefüggés jobb oldalán álló törtek egynél nagyobbak. Könnyen megmutatható, hogy ilyen törtek számlálóját és nevezőjét eggyel-eggyel növelve a tört értéke csökken:

$$\frac{p+f}{p} < \frac{p+f-1}{p-1},$$

azaz

$$\frac{p+f}{p} < \sqrt{2} < \frac{p+f-1}{p-1}. \tag{15.8}$$

A két oldalt külön-külön p-re rendezve kapjuk, hogy

$$(\sqrt{2}+1)f < p < 1 + (\sqrt{2}+1)f. \tag{15.9}$$

A (15.9) relációknak minden f egész számhoz csak egyetlen p egész szám felel meg. Az első hét eset összevetve a (15.7) egyenlettel:

f	becslés	p	$\frac{p+f}{p}\cdot\frac{p+f-1}{p-1}$
$f=1$	$2,4142<p<3,4143$	$p=3$	2
$f=2$	$4,8284<p<5,8285$	$p=5$	21/10
$f=3$	$7,2426<p<8,2427$	$p=8$	55/28
$f=4$	$9,6568<p<10,6569$	$p=10$	91/45
$f=5$	$12,0710<p<13,0711$	$p=13$	51/26
$f=6$	$14,4852<p<15,4853$	$p=15$	2
$f=7$	$16,8994<p<17,8995$	$p=17$	69/34

Ebből látható, hogy az $f=1$, $p=3$ pár a legkisebb megoldás, míg a következő az $f=6$, $p=15$ pár és itt f páros.

A 7.10. fel. II. megoldása

Jelölje a fehér golyók számát f, a pirosakét p. A játék pontosan akkor igazságos, ha

$$2\binom{p}{2}=\binom{p+f}{2},$$

azaz ha

$$2p(p-1)=(p+f)(p+f-1). \tag{15.10}$$

Ez az egyenlet p-ben másodfokú:

$$p^2-(2f+1)p-f(f-1)=0, \tag{15.11}$$

amiből

$$p=\frac{2f+1\pm\sqrt{8f^2+1}}{2},$$

tehát a $2f=F$ rövidítő jelöléssel

$$p=\frac{F+1\pm\sqrt{2F^2+1}}{2}.$$

Itt p pontosan akkor egész, ha F olyan egész szám, amelyre $2F^2+1$ négyzetszám. Ha viszont $2F^2+1$ négyzetszám, akkor páratlan, sőt nyolcas maradéka 1, így F páros és így f is egész. Tehát a feladat a

$$2F^2+1=N^2 \tag{15.12}$$

egyenletre, egy *Pell egyenlet*re vezet. A (15.12) Pell egyenlet és feladatunk (pozitív) változóit a

$$p=\frac{F+N+1}{2},\qquad f=\frac{F}{2} \tag{15.13}$$

összefüggések kapcsolják össze.

A legkisebb megoldásokat próbálkozással vagy táblázatkezelő programmal is megtalálhatjuk:

a) $F = 2, \quad N = 3 \qquad \iff \qquad p = 3, \quad f = 1;$

b) $F = 12, \quad N = 17 \qquad \iff \qquad p = 15, \quad f = 6$, ez tényleg jó b)-re, hiszen f páros.

A 7.11. feladat megoldása

A lehetséges leosztások száma $\binom{52}{5} = 2598960$

a) pár: $\frac{13 \cdot \binom{4}{2}\binom{12}{3} \cdot 4^3}{\binom{52}{5}} = \frac{1098240}{2598960} \approx 0,4225690276.$

b) két pár: $\frac{\binom{13}{2} \cdot \left(\binom{4}{2}\right)^2 \cdot 44}{\binom{52}{5}} = \frac{123552}{2598960} \approx 0,0475390156.$

c) drill: $\frac{13 \cdot \binom{4}{3} \cdot \binom{12}{2} \cdot 4^2}{\binom{52}{5}} = \frac{54912}{2598960} \approx 0,0211284514.$

d) sor: $\frac{10 \cdot 4^5 - 40}{\binom{52}{5}} = \frac{10200}{2598960} \approx 0,0039246468.$

e) flush: $\frac{4 \cdot \binom{13}{5} - 40}{\binom{52}{5}} = \frac{5108}{2598960} \approx 0,0019654015.$

f) full: $\frac{13 \cdot \binom{4}{3} \cdot 12 \cdot \binom{4}{2}}{\binom{52}{5}} = \frac{3744}{2598960} \approx 0,0014405762.$

g) póker: $\frac{13 \cdot 48}{\binom{52}{5}} = \frac{624}{2598960} \approx 0,0002400960.$

h) straight flush: $\frac{4 \cdot 10}{\binom{52}{5}} = \frac{40}{2598960} = 0,0000153908,$

A 7.12. fel. eredménye

a) $\frac{1200}{6^5} \approx 0,1543209877.$

b) $\frac{240}{7776} = \frac{5}{162} \approx 0,0308641975.$

A 7.13. feladat megoldása

Komplementer módszerrel számolunk. A legnagyobb olyan n pozitív egészt keressük, amelyre $\left(\frac{5}{6}\right)^n < \frac{1}{2}$.

A 7.14. feladat megoldása

A válasz $\frac{1}{2}$, ezt alább indokoljuk.

Képzeljük el Anna és Balázs összes lehetséges $(n-1)$ dobásból álló sorozatait (ez $2^{n-1} \cdot 2^{n-1}$ egyenlő esélyű sorozatpár). Ezek közül a esetben Anna dobott több fejet d

esetben ugyannyi fejet dobtak, míg b esetben Balázs dobott többet. Nyilvánvaló, hogy $a = b$.

Anna most még egyet dob. Ha már eddig is több fejet dobott, mint Balázs, akkor akár fejet, akár írást dob nála lesz több fej. Ha eddig ugyanannyi fejet dobtak, akkor pontosan akkor lesz nála több fej, ha új dobása fej. Ha pedig Balázs dobott az első $(n-1)$ dobásban több fejet, akkor bármit dob, nem tudja megelőzni Balázst.

Tehát $(2a+d)$ esetben lesz Annánál több fej, és $(d+2b)$ esetben nem lesz nála több fej. Mivel $a = b$, így $(2a+d) = (d+2b)$, azaz ugyanannyi esetben dob több fejet Anna, mint amennyiben nem dob többet, a fent megadott válasz igazolást nyert.

A 7.15. feladat megoldása

$\frac{1}{2}$, hiszen így is fogalmazható a kérdés: ha dobáljuk a kockát, mi az esélyesebb, hogy előbb lesz ötös, mint hatos vagy fordítva?

15.3. Várható érték – feladatok

A 7.1. feladat megoldásai

A 7.1. a) mego.

A húzások száma szempontjából egy $p = \frac{4}{7}$ paraméterű geometriai eloszlásról van szó. Ennek várható értéke, azaz a játék átlagos hossza $\frac{1}{p} = \frac{7}{4} = 1,75$.

A 7.1. b) fel. I. megoldása

A várható nyereménye véges mennyiség, hiszen átlagosan véges sokat dob és húzásonként nyereménye korlátos, max. 50 Ft. Ha nem fizet előzetesen semmit, akkor A várható nyereménye, az E_A mennyiség kielégíti az alábbi összefüggést:

$$E_A = \frac{4}{7} \cdot 0 + \frac{2}{7} \cdot (50 + E_A) + \frac{1}{7} \cdot (20 + E_A),$$

hiszen az esetek $\frac{4}{7}$ részében A azonnal zöldet húz és így nem nyer semmit, az esetek $\frac{2}{7}$ részében pirosat húz, amivel 50 Ft-ot nyer és újrakezdi a játékot – a továbbiakban átlagosan E_A összeget nyer –, végül az esetek $\frac{1}{7}$ részében fehéret húz, 20 Ft-ot kap és kezdi elölről a játékot. A fenti egyenletből $E_A = 30$, tehát átlagosan 30 Ft-ot nyerne A, akkor igazságos a játék, ha ezt az x összeget fizeti ki előre B-nek.

A 7.1. b) fel. II. megoldása

Az (7.1. a) feladat megoldásában láttuk, hogy átlagosan 1.75-ször dob A, tehát az olyan dobásainak átlagos száma, amelynél nyer pénzt 0.75 (az utolsó dobásnál nem nyer). Az olyan dobásoknál, amelyeknél nyer, átlagos nyereménye $\frac{2\cdot 50+20}{3} = 40$ Ft. így átlagos nyereménye $0.75 \cdot 40 = 30$ Ft. Akkor igazságos a játék, ha ezt az összeget fizeti ki előre B-nek.)

A 7.2. fel. eredménye

a) 2 *b)* 3.

A 7.3. feladat megoldásai

A 7.3. a) mego.

Komplementer módszerrel számolva így szól a kérdés: mennyi az esélye, hogy három dobásból legfeljebb egyszer kaptunk fejet?

A 7.3. b) mego.

$p(\chi = n) = \binom{n-1}{1}\left(\frac{1}{2}\right)^n$.

A 7.3. c) fel. I. megoldása

Az $E = \sum_{n=1}^{\infty} np(\chi = n) = \sum_{n=1}^{\infty} n(n-1)\left(\frac{1}{2}\right)^n$ végtelen összeget kell kiszámolnunk.

Ha

$$f(x) = \frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + \ldots + x^n + \ldots,$$

akkor

$$f'(x) = \frac{1}{(1-x)^2} = 1 + 2x + 3x^2 + 4x^3 \ldots + nx^{n-1} + \ldots,$$

és

$$f''(x) = \frac{2}{(1-x)^3} = 2 + 3\cdot 2x + 4\cdot 3x^2 \ldots + (n-1)nx^{n-2} + \ldots,$$

Így a keresett E kifejezés épp

$$\frac{1}{4}f''(\frac{1}{2}) = \frac{2}{(1-\frac{1}{2})^3} = 2\cdot 1\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^0 + 3\cdot 2\left(\frac{1}{2}\right)^1 + 4\cdot 3\left(\frac{1}{2}\right)^2 \ldots + (n-1)n\left(\frac{1}{2}\right)^{n-2} + \ldots,$$

azaz $E = \frac{2}{(1-\frac{1}{2})^3} = 4$.

A 7.3. c) fel. II. megoldása

Az első fejig átlagosan 2-t kell várni, utána az első fejig megint átlagosan 2-t, összesen tehát átlagosan 4-et.

A 7.4. fel. eredménye

$p(\chi = n) = \binom{n-1}{1}\left(\frac{1}{6}\right)^2\left(\frac{5}{6}\right)^{n-2}$.

A dobások számának várható értéke 12.

A 7.5. feladat megoldásai

A 7.5. fel. I. megoldása

Összesen $\binom{5}{2} = 10$ sorrendben lehet kihúzni mind az öt golyót. Az alábbi táblázatban a nyerő golyókat N-nel, a vesztőket V-vel jelöltük és a bal oldali oszlopban összegyűjtöttük a lehetséges kihúzási sorrendeket.

sorrend	megállás	nyereség
NNVVV	N	10
NVNVV	N	10
NVVNV	N	10
NVVVN	N	10
VNNVV	VN	0
VNVNV	VN	0
VNVVN	VN	0
VVNNV	VVNN	0
VVNVN	VVNVN	-10
VVVNN	VVVNN	-10

A táblázat második oszlopában azt írtuk le, hogy hol javasoljuk a játék befejezését. Röviden összefoglalva: *játsszunk, de álljunk meg azonnal, ha már nem veszteséges nekünk az adott játék, illetve ha nem jutunk ilyen helyzetbe, akkor húzzuk ki az összes golyót.*

A harmadik oszlopba írtuk az adott esethez tartozó nyereményünket. A tíz eset egyenlő esélyű, így az ebben az oszlopban található számok átlaga, a 2, az átlagos nyereményt adja meg, ha a fenti stratégiával játsszuk mindig a játékot. Mivel az átlagos nyeremény pozitív, így érdemes játszani a játékot ezzel a stratégiával.

I. megjegyzés a 7.5. fel. I. megoldásához

Ha az 1 pénz egy aranyrudat jelent, akkor erősen meggondolandó, hogy játsszunk, hiszen komoly esélye van, hogy vesztünk és így tönkremegyünk. Tehát az „érdemes-e játszani” kérdésre a válasz nem csak a nyeremény várható értékén múlik.

UI. megjegyzés a 7.5. fel. I. megoldásához

Általában a „stratégia" a táblázat második, a „megállás" oszlopában található sorozatok megadását jelenti. Nem írhatunk ide 10 tetszőleges sorozatot. Ha egyszer úgy döntöttünk, hogy valahol befejezzük a játékot, akkor egy másik esetben nem folytathatjuk ugyanonnan tovább vagy nem állhatunk meg hamarabb: pl. nem lehet az NNVVV esetben a megállás NN-nél 20-as nyereménnyel, míg NVNVV esetén N-nél 10-es nyereménnyel. A megállás oszlopában tehát egyik sorozat sem lehet egy másik kezdőszelete. Ugyanakkor mind a 10 sorozatnak kell legyen ebben az oszlopban kezdőszelete (ami lehet maga az öttagú sorozat is), hiszen minden esetben el kell tudnunk dönteni mikor állunk meg.

Megmutatható, hogy a lehetséges stratégiák között nincs a fentinél jobb, azaz olyan, amelynél a nyeremény átlagos értéke 2-nél nagyobb lenne.

A 7.5. fel. II. megoldása

Kezeljük a feladatot általánosan! Az egyszerűség kedvéért legyen most a nyerő golyó húzásáért kapott illetve a vesztőért befizetendő összeg 10 helyett csak 1 egységnyi pénz és jelölje n a nyerő golyók számát, v pedig a vesztőkét. A játékos optimális stratégia melletti várható nyereményét jelölje ebben az általános esetben $E_{n,v}$.

$E_{n,v} \geq 0$, hiszen ha a játékos nem játszik, akkor 0 a várható nyereménye, és a „nem játszás" is egy lehetséges stratégia, ennél egy optimális stratégia nem lehet rosszabb.

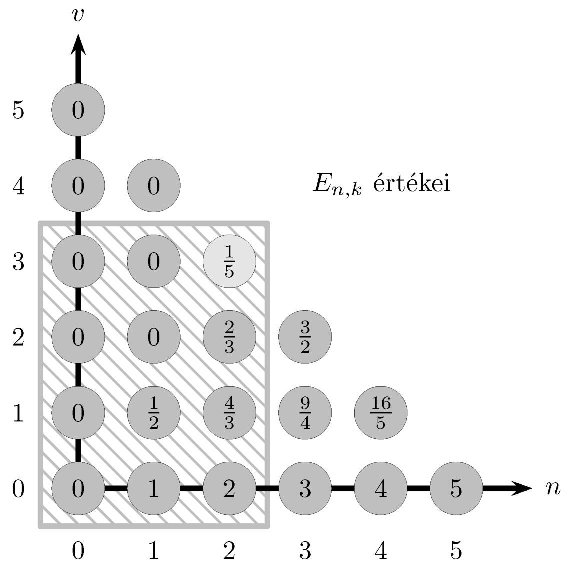
Minden nemnegatív n és v értékhez tartozik egy-egy egyértelműen meghatározott $E_{n,v}$ szám, melynek alább meg is adjuk a rekurzív előállítását. Ehhez először is vegyük észre, hogy $E_{0,v} = 0$ azaz ha nincs nyerő golyó, akkor nem érdemes játszani, míg $E_{n,0} = n$, tehát ha csak nyerő golyók vannak, akkor azokat mind érdemes kihúzni. Tehát az $E_{n,v}$ számok meghatározásakor a Pascal háromszöghöz hasonlóan egy számháromszöget kell kitöltenünk (lásd a 15.2 ábrát), amelynek már látjuk a „szélét".

Az $n \geq 1$, $v \geq 1$ esetben az $E_{n,v}$ kifejezést rekurzívan állíthatjuk elő az alábbi gondolatmenettel. Ha n nyerő és v vesztő golyó van és húzunk, akkor $\frac{n}{n+v}$ eséllyel nyerő golyót húzunk, tehát nyerünk 1 pénzt és a létrejött állapotban $(n-1)$ nyerő és v vesztő golyó marad az urnában, míg $\frac{v}{n+v}$ eséllyel vesztő golyót húzunk, tehát vesztünk 1 pénzt és a létrejött állapotban n nyerő és $(v-1)$ vesztő golyó marad az urnában. Persze lehet, hogy nem is érdemes húzni. Ennek alapján:

$$E(n,v) = \begin{cases} \frac{n}{n+v}\left(1 + E_{n-1,v}\right) + \frac{v}{n+v}\left(-1 + E_{n,v-1}\right) & \text{ha ez pozitív} \\ 0 & \text{egyébként} \end{cases} \tag{15.14}$$

A 15.2 ábrán leolvashatók a rekurzió alapján kiszámolt $E_{n,k}$-értékek.

A konkrét feladat megoldásához csak a szürkén csíkozott téglalapba eső értékeket kell sorban meghatározni, hogy eljussunk a vizsgált $E_{2,3} = \frac{1}{5}$ értékhez. Ez pozitív, tehát a „Kinek kedvez ez a játék? Érdemes-e kérni egyáltalán húzást?" kérdésekre az a válasz,



15.2. ábra.

hogy a játékosnak kedvez a játék, érdemes húznia. A stratégia is leolvasható, hiszen ahol 0 van a táblázatban, ott nem érdemes húzni, azzal biztosan nem járunk jobban. Így a táblázat alapján az első húzást követően pontosan akkor állunk meg és nem játsszuk végig a játékot, ha olyan állapotot érünk el, amelyben több vesztő golyó van a dobozban, mint nyerő.

A 7.6. c) mego.

Egy adott szám akkor lesz a kisebbik kihúzott szám, ha őt kihúzták, és a másik kihúzott szám a nála nagyobb számok közül került ki. Így a kedvező esetek száma könnyen kiszámolható. Alább figyelembe vesszük, hogy összesen $\binom{n}{2} = \binom{10}{2} = 45$ eset van.

Jelölje χ a legkisebb számot! Ekkor

$$p(\chi = 1) = \frac{9}{45}; \qquad p(\chi = 2) = \frac{8}{45}; \qquad p(\chi = 3) = \frac{7}{45}; \qquad \ldots;$$

$$\ldots; \qquad p(\chi = 8) = \frac{2}{45}, \qquad p(\chi = 9) = \frac{1}{45}, \qquad p(\chi = 10) = 0,$$

általában tehát $p(\chi = i) = \frac{10-i}{45}$, ahol $i \in \{1, 2, 3, \ldots, 10\}$.

A kisebbik szám legvalószínűbb értéke tehát 1.

A 7.6. d) mego.

A kisebbik szám várható értéke:

$$E=\sum_{i=1}^{10} i\cdot p(\chi=i)=\frac{1\cdot 9+2\cdot 8+3\cdot 7+\ldots+8\cdot 2+9\cdot 1}{45}=$$

$$=\frac{165}{45}=\frac{11}{3}\approx 3,6666666667.$$

A 7.6. e) mego.

Mivel most $p(\chi=i)=\frac{n-i}{\binom{n}{2}}$, így a várható értékre vonatkozó formula ebben az esetben

$$E=\sum_{i=1}^{n} i\cdot p(\chi=i)=\frac{2}{n(n-1)}\sum_{i=1}^{n} i\cdot(n-i).$$

A fenti képlet végén egy összeg áll, amelynek tagjai olyan szorzatok, amelyben a két tényező összege n. Tehát a szorzótábla $(n-1)$-edik átlójában álló számokról van szó. Itt bővebb magyarázat nélkül közöljük, hogy ennek az összegnek az értéke $\binom{n+1}{3}$, azaz

$$E=\frac{2}{n(n-1)}\binom{n+1}{3}=\frac{2}{n(n-1)}\cdot\frac{(n+1)n(n-1)}{3\cdot 2}=\frac{n+1}{3}.$$

Ez az eredmény összhangban van a b) feladatra kapott speciális esetre vonatkozó eredménnyel.

A 7.6. f) mego.

A

$$\frac{p(\chi=i+1)}{p(\chi=i)}=\frac{n-i-1}{n-i}$$

hányados értéke mindig kisebb 1-nél, tehát i növekedtével $p(\chi=i)$ értéke is nő, azaz a kisebbik szám legvalószínűbb értéke az 1.

A 7.6. g) mego.

Jelölje χ a második legkisebb számot! Ekkor általában

$$p(\chi=i)=\frac{\binom{i-1}{1}\cdot\binom{10-i}{2}}{\binom{10}{4}},$$

míg konkrétan (az Excel vagy az OpenOffice Calc programmal számolva:

$$
\begin{array}{ll}
p(\chi=1)=0, & p(\chi=2)=\frac{1\cdot\binom{8}{2}}{\binom{10}{4}}\approx 0,1333333333,\\
p(\chi=3)=\frac{\binom{2}{1}\cdot\binom{7}{2}}{\binom{10}{4}}=0,2 & p(\chi=4)=\frac{\binom{3}{1}\cdot\binom{6}{2}}{\binom{10}{4}}\approx 0,2142857143,\\
p(\chi=5)=\frac{\binom{4}{1}\cdot\binom{5}{2}}{\binom{10}{4}}\approx 0,1904761905 & p(\chi=6)=\frac{\binom{5}{1}\cdot\binom{4}{2}}{\binom{10}{4}}\approx 0,1428571429,\\
p(\chi=7)=\frac{\binom{6}{1}\cdot\binom{3}{2}}{\binom{10}{4}}\approx 0,0857142857 & p(\chi=8)=\frac{\binom{7}{1}\cdot 1}{\binom{10}{4}}\approx 0,0333333333,\\
p(\chi=9)=0, & p(\chi=10)=0.
\end{array}
$$

A fenti adatok alapján a második legkisebb szám legvalószínűbb értéke a 4.

A 7.6. h) mego.

A fenti adatokkal az

$$E=\sum_{i=2}^{8} i\cdot p(\chi=i)=\frac{1}{\binom{10}{4}}\sum_{i=2}^{8} i\cdot\binom{i-1}{1}\cdot\binom{10-i}{2}$$

összeget az Excel vagy az OpenOffice Calc programmal kiszámolva az $E\approx 4,4$ közelítő értékhet jutunk. Valójában ez a pontos eredmény, mint ahogy az általános eset levezetéséből alább kiderül.

A 7.6. i) mego.

Az általános esetben a várható érték összeg alakja:

$$E=\sum_{i=2}^{n-2} i\cdot p(\chi=i)=\frac{1}{\binom{n}{4}}\sum_{i=2}^{n-2} i\cdot\binom{i-1}{1}\cdot\binom{n-i}{2}=$$

$$=\frac{2}{\binom{n}{4}}\sum_{i=2}^{n-2}\frac{i(i-1)}{2}\cdot\binom{n-i}{2}$$

azaz

$$E=\frac{2}{\binom{n}{4}}\sum_{i=2}^{n-2}\binom{i}{2}\cdot\binom{n-i}{2}. \tag{15.15}$$

Alább kombinatorikai értelmezést adunk a $\binom{i}{2}\cdot\binom{n-i}{2}$ kifejezésnek és a belőle felépülő összegnek. Ha az

$$\{1,\quad 2,\quad 3,\quad \ldots,\quad (n-1),\quad n,\quad (n+1)\}$$

halmaz elemeiből kiválasztunk ötöt, akkor az $(i+1)$ szám épp ennyiféleképpen lehet a középső. Valóban, az

$$\{1, \quad 2, \quad 3, \quad 4, \quad \ldots, \quad (i-1), \quad i\}$$

számok közül kell kiválasztani kettőt, a két legkisebb számot – ez $\binom{i}{2}$ lehetőség – és az

$$\{(i+2), \quad (i+3), \quad \ldots, \quad (n-1), \quad n, \quad (n+1)\}$$

számok közül – tehát $(n-i)$ szám közül – is kettőt, a két legnagyobbat – ez $\binom{n-i}{2}$ lehetőség. A 15.15 jobb oldalán található összegben, ahogy haladunk i-vel sorra vesszük a lehetőségeket a középső számra, tehát az összeg értéke $\binom{n+1}{5}$. Így

$$E = \frac{2}{\binom{n}{4}} \cdot \binom{n+1}{5} = \frac{2 \cdot \frac{(n+1)\cdot n\cdot(n-1)\cdot(n-2)\cdot(n-3)}{5\cdot4\cdot3\cdot2}}{\frac{n\cdot(n-1)\cdot(n-2)\cdot(n-3)}{4\cdot3\cdot2}} = 2\frac{n+1}{5}.$$

Pl. $n = 10$ esetén $E = \frac{22}{5} = 4,4$ összhangban a h) feladat eredményével.

A 7.6. j) mego.

Mivel

$$p(\chi = i) = \frac{\binom{i-1}{1}\cdot\binom{n-i}{2}}{\binom{n}{4}},$$

így

$$\frac{p(\chi = i+1)}{p(\chi = i)} = \frac{i \cdot \frac{(n-i-1)(n-i-2)}{2}}{(i-1)\cdot\frac{(n-i)(n-i-1)}{2}} = \frac{i\cdot(n-i-2)}{(i-1)\cdot(n-i)} \tag{15.16}$$

Az i növekedtével meddig nő $p(\chi = i)$ értéke, tehát meddig nagyobb 1-nél a (15.16) tört értéke? A

$$\frac{i\cdot(n-i-2)}{(i-1)\cdot(n-i)} > 1 \iff i\cdot(n-i-2) > (i-1)(n-i) \iff$$

$$\iff in - i^2 - 2i > in - i^2 - n + i \iff n > 3i$$

levezetés szerint ha $i < \frac{n}{3}$, akkor még érdemes növelni i-t, tehát az $\frac{n}{3}$ tört felső egészrészénél van a maximum (az $\frac{n}{3}$-nál nem kisebb legkisebb egésznél) illetve, ha $\frac{n}{3}$ egész, akkor az ennél eggyel nagyobb számnál is maximális a valószínűség. pl. $n = 10$ esetén $\frac{n}{3} = 3,3\ldots$, így 4-nél van a maximum, ahogy az g) feladatban láttuk is. De $n = 12$ esetén 4 és 5 egyaránt maximális.

előzetes megjegyzés a 7.7. feladathoz Fogalmazzuk meg a kérdést matematikailag!

Van, aki így fogalmazza: *melyik az a legnagyobb n, amelyre nagyobb az esélye, hogy addig még nem dobtunk hatost, mint annak, hogy dobtunk?*

Ez egy nagyon jó kérdés, de nem illeszkedik a feladathoz. Ha pl a k számot dobva k milliárd Ft-ot nyernénk, míg hatos dobás esetén a tanár azt mondaná nekünk szúrós szemmel, hogy „ejnye bejnye”, akkor is ez lenne a matematikai kérdés?

Logikus ezzel a matematikai kérdéssel foglalkozni: *Legyen n vállalt dobásra kiszámolva várható nyereményünk $E(n)$. Mely nemnegatív egész n esetén van az E függvénynek maximuma?*

Határozzuk meg először $E(1)$ és $E(2)$ értékét!

A 7.8. feladat megoldása

A χ_i valószínűségi változó értéke legyen 1, ha az i-edik diák önmagát húzta és legyen az érték 0, ha nem önmagát húzta. A χ_i várható értéke, $E_i = \frac{1}{35}$. A keresett várható érték

$$E = E_1 + E_2 + \ldots + E_{35} = 35 \cdot \frac{1}{35} = 1.$$

A 7.9. feladat megoldása

Ha k kép van és azok közül l rögzített kép előfordulására várunk, akkor az első előfordulás $\frac{l}{k}$ paraméterű geometriai eloszlású, így annak várható értéke, az l kép első megjelenésének átlagos ideje $\frac{k}{l}$.

Először várunk a 20 közül bármelyik kép megjelenésére ($k = 20$, $l = 20$). Ez természetesen az első húzásnál bekövetkezik: $\frac{k}{l} = \frac{20}{20} = 1$. Ezután a 20-ból már csak a maradék 19 bekövetkezésére várunk: most $k = 20$ és $l = 19$, tehát átlagosan $\frac{20}{19}$ lépést kell várnunk. És így tovább, ha már megjelent $(i-1)$ kép, akkor az i-edik megjelenésére átlagosan $\frac{20}{21-i}$ lépést kell várni. A várható értékek összeadódnak:

$$E = 20 \cdot \left(\frac{1}{20} + \frac{1}{19} + \frac{1}{18} + \ldots + \frac{1}{3} + \frac{1}{2} + 1\right).$$

15.4. Feltételes valószínűség – feladatok megoldása

A 7.1. feladat megoldásai

A 7.1. fel. I. megoldása

a) Hibás megoldás

Összesen 42 golyó van és ezekből 23 fehér, tehát $\frac{23}{42}$ a kérdezett valószínűség.

Ez a megoldás hibás. Módosítsuk a feladatot! Képzeljük el, hogy az első 9 dobozban egy-egy kék golyó van és fehér golyó egyáltalán nincs bennük, míg a 10. dobozban 81 fehér golyó van és nincs kék! A fenti gondolatmenettel ebben az esetben azt kapnánk, hogy $\frac{81}{90} = \frac{9}{10}$ a fehér golyó húzásának esélye és $\frac{1}{10}$ a kék golyó húzásáé, holott épp fordított a helyzet: $\frac{9}{10}$ az esélye, hogy az első 9 doboz valamelyikét választjuk, azaz kéket húzunk és csak $\frac{1}{10}$ a valószínűsége, hogy az utolsó dobozt választjuk, azaz fehéret húzunk.

A 7.1. a) fel. II. megoldása

a) Mindegyik doboz választása egyforma, mindegyiké $\frac{1}{10}$. Annak esélye, hogy az első dobozból húzunk, és az fehér lesz $\frac{1}{20}$. Tehát ha F jelöli azt az eseményt, hogy fehéret húzunk, A_k $k \in \{1, 2, \dots, 10\}$ pedig azt, hogy az k. dobozból húzunk, akkor

$$p(FA_1) = \frac{1}{10} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{20},$$

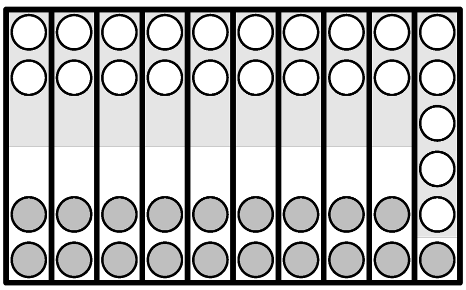
és általában $k \in \{1, 2, \dots, 9\}$ esetén $p(FA_k) = \frac{1}{20}$, míg

$$p(FA_{10}) = \frac{1}{10} \cdot \frac{5}{6} = \frac{1}{12}.$$

Így annak esélye, hogy fehéret húzunk:

$$p(F) = p(FA_1) + p(FA_2) + \ldots + p(FA_{10}) = 9 \cdot \frac{1}{20} + \frac{1}{12} = \frac{8}{15}.$$

A 15.3 ábrán úgy rajzoltuk a dobozokat, hogy egyenlő nagyságúak legyenek és minden egyes doboznak annyiad részét festettük halványszürkére amennyi a dobozban a fehér golyók aránya. A kérdés az, hogy a teljes területnek – a dobozok összterületének – hányad része a szürke terület.



15.3. ábra.

A 7.1. b) mego.

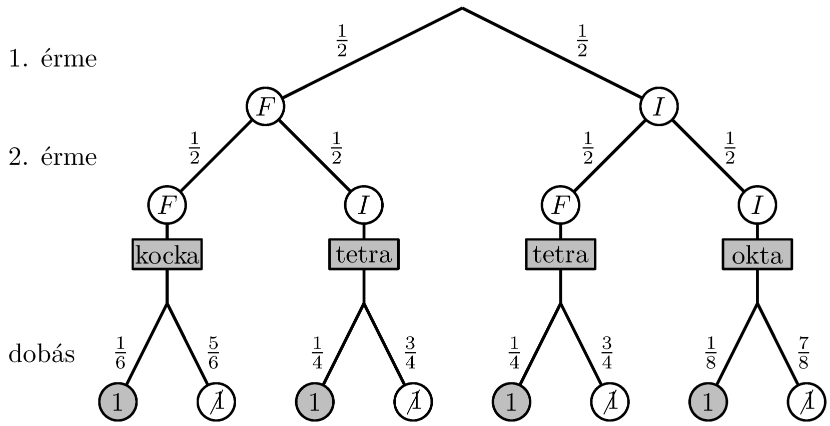
Most az a kérdés, hogy az 7.1. a) fel. II. megoldásának 15.3 ábráján a szürke területnek hányad része esik a 10. dobozba. A szürke terület aránya az egészhez $p(F) = \frac{8}{15}$, a 10. doboz szürke részének aránya az egészhez $p(FA_{10}) = \frac{1}{12}$, így a kérdezett valószínűség:

$$\frac{p(FA_{10})}{p(F)} = \frac{\frac{1}{12}}{\frac{8}{15}} = \frac{5}{32} = 0,15625.$$

A 7.2. feladat megoldásai

A 7.2. fel. I. megoldása

A 15.4 ábrán felrajzoltuk az eljáráshoz tartozó, az elágazó eseteket szimbolizáló „fát”, és az egyes valószínűségeket is feltüntettük.



15.4. ábra.

Az ábrán szürkével jelöltük azokat a végállapotokat, amelyekben 1-est dobtunk.

a) A keresett valószínűség leolvasható a 15.4 ábráról, ha a megfelelő végállapotokhoz tartozó utakon képezzük a valószínűségek szorzatát, majd azok összegét:

$$\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{6}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{8}=$$
$$=\frac{1}{4}\cdot\left(\frac{1}{6}+\frac{2}{4}+\frac{1}{8}\right)=\frac{19}{96}\approx 0,1979166667.$$

b) Másként: az 1-eshez vezető

$$\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{6},\quad \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4},\quad \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4},\quad \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{8}$$

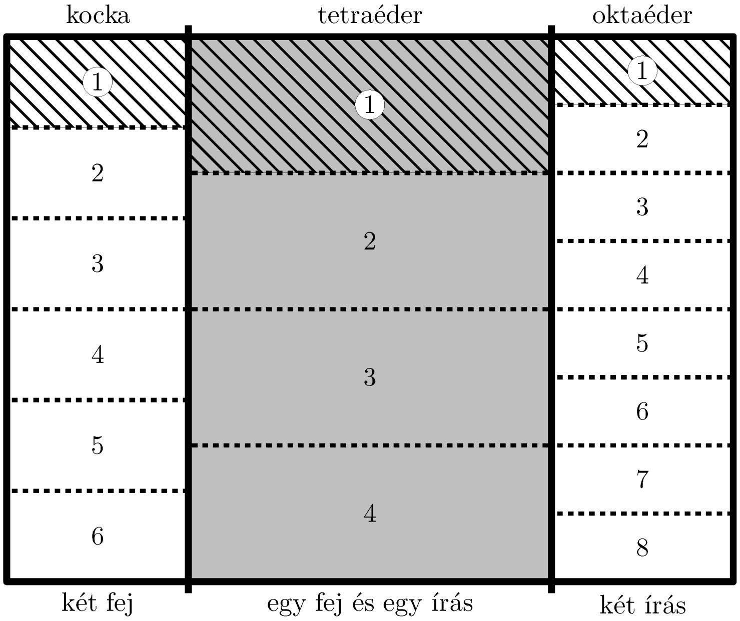
„súlyú” szálak között milyen arányú a két középső szál súlya?

$$\frac{\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4}}{\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{6}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{8}}=$$

$$=\frac{\frac{1}{8}}{\frac{19}{96}}=\frac{12}{19}\approx 0,631578947.$$

A 7.2. fel. II. megoldása

Az eseteket a 15.5 területarányos ábrán jelenítettük meg.



15.5. ábra.

A középső szürke sáv egy fej és egy írás dobásának felel meg, ez kétszer akkor, mint akár a két fejnek megfelelő bal oldali sáv, akár a két írásnak megfelelő jobb oldali. Mindegyik függőleges sávot annyi egyforma részre osztottunk, ahány oldala van a neki megfelelő poliédernek és beleírtuk a dobható számokat. Az 1-eseknek megfelelő részt bevonalkáztuk mind a három sávban.

a) A kérdés az ábrának megfelelően: *határozzuk meg a vonalkázott rész területét a teljes területhez képest!* A válasz:

$$\frac{1}{4}\frac{1}{6}+\frac{1}{2}\frac{1}{4}+\frac{1}{4}\frac{1}{8}=\frac{19}{96}\approx 0,1979166667.$$

b) A kérdés az ábrának megfelelően: *határozzuk meg a vonalkázott szürke rész területét a teljes vonalkázott területhez képest!* A válasz:

$$\frac{\frac{1}{2}\frac{1}{4}}{\frac{1}{4}\frac{1}{6}+\frac{1}{2}\frac{1}{4}+\frac{1}{4}\frac{1}{8}}=\frac{12}{19}\approx 0,631578947.$$

A 7.2. fel. III. megoldása

Ez a megoldás csak nyelvezetében új az előző megoldásokhoz képest.

Vizsgáljuk az alábbi eseményeket: az érmékkel két fejet (FF), két írást(II), illetve egy-egy fejet és írást dobtunk (FI); 1-est dobtunk ($D1$). Ismertek az alábbi valószínűségek:

$$p(FF)=\frac{1}{4};\qquad p(FI)=\frac{1}{2};\qquad p(II)=\frac{1}{4};$$

és feltételes valószínűségek:

$$p(D1|FF)=\frac{1}{6};\qquad p(D1|FI)=\frac{1}{4};\qquad p(D1|II)=\frac{1}{8}.$$

Meghatározandó az $p(FI|D1)$ feltételes valószínűség. Az ilyen típusú kérdéseket oldja meg a Bayes-tétel, amelyet az FF, FI, II teljes eseményrendszerre és a $D1$ eseményre így írhatunk fel:

$$p(FI|D1)=\frac{p(D1|FI)p(FI)}{p(D1|FF)p(FF)+p(D1|FI)p(FI)+p(D1|II)p(II)},$$

azaz

$$p(FI|D1)=\frac{\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{2}}{\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{4}+\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{2}+\frac{1}{8}\cdot\frac{1}{4}}=\frac{12}{19}\approx 0,631578947.$$

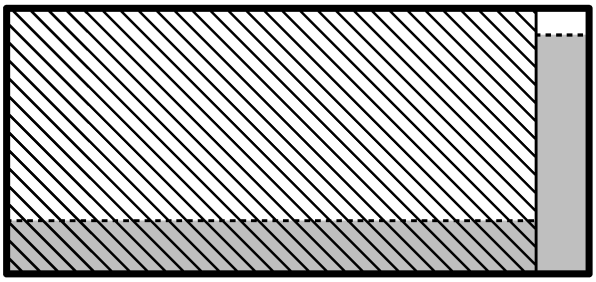
A 7.6. feladat megoldása

Ábrázoljuk a hazai lakosságot, benne a tébécések és a nem tébécések valamint a pozitív illetve negatív teszteredményt produkálók halmazát az elemszámokkal területarányos ábrán.

A vastagvonalú alaphalmaz jelképezi hazánk lakosságát. A bal oldali vonalkázott rész az egészségeseket (azaz a nem tébécések részhalmazát), a jobb oldali „sima” rész a tébécéseket. A szürke terület a pozitív tesztet produkálók részhalmaza.

Az egyes tartományok területe az egészhez képest:

fehér vonalkázott: $0,997\cdot 0,8=0,7976$; szürke vonalkázott: $0,997\cdot 0,2=0,1994$; fehér sima: $0,003\cdot 0,1=0,0003$; szürke sima: $0.003\cdot 0,9=0,0027$;



15.6. ábra.

Az egyes kérdések megfelelői az ábrán:

a) A szürke rész hanyad része sima? $\frac{0{,}0027}{0{,}0027+0{,}1994} \approx 0{,}0133597229$. Tehát pozitív teszt esetén $1{,}33597229\%$ a betegség esélye.

b) A fehér rész hanyad része sima? $\frac{0{,}0003}{0{,}0003+0{,}7976} \approx 0{,}0003759870$. Tehát negatív teszt esetén csak $0{,}03759870\%$ a betegség esélye.

c) A pozitív teszt több mint négyszeresére növelte a betegség esélyét, a negatív teszt a kilencedére csökkentette. Csak pozitív teszt esetén érdemes az alaposabb (és feltehetően drágább) vizsgálatokat elvégezni.

A 7.7. feladat megoldásai

A 7.7. fel. I. megoldása

(*A legnagyobb valószínűség elve*)

Az alábbi táblázat tartalmazza, hogy adott $k \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ esetén mennyi az esélye, hogy tíz húzás közül éppen r-szer húzunk pirosat.

		k					
		1	2	3	4	5	6
r	0	**0,26308**	0,05631	0,00909	0,00098	0,00005	0,00000
	1	**0,37582**	0,18771	0,15457	0,00977	0,00092	0,00003
	2	0,24160	**0,28157**	0,14733	0,04395	0,00687	0,00039
	3	0,09204	**0,25028**	0,23574	0,11719	0,03055	0,00309
	4	0,02301	0,14600	**0,24753**	0,20508	0,08911	0,01622
	5	0,00394	0,05840	0,17822	**0,24609**	0,17822	0,0584
	6	0,00047	0,01622	0,08911	0,20508	**0,24753**	0,14600
	7	0,00004	0,00309	0,03055	0,11719	0,23574	**0,25028**
	8	0,00000	0,00039	0,00687	0,04395	0,14733	**0,28157**
	9	0,00000	0,00003	0,00092	0,00977	0,15457	**0,18771**
	10	0,00000	0,00000	0,00005	0,00098	0,00909	**0,05631**

Adott r esetén a legnagyobb értékhez (vastagon szedett) tartozó k-t érdemes választani.

Megjegyzés a 7.7. fel. I. megoldásához

Hasonlítsuk össze az arányosan adódó $8r/10$ értéket a k-ra előbb kapott ajánlattal:

r:	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$8r/10$:	0	0,8	1,6	2,4	3,2	4	4,8	5,6	6,4	7,2	8
ajánlat:	1	1	2	2	3	4	5	6	6	6	6

Látható, hogy a legnagyobb valószínűség elvén kapott k megegyezik az „arányosság” elvén kapott értékhez legközelebbi k egész számmal.

A 7.7. fel. II. megoldása

(*Bayes tétel*)

Az A_k esemény jelentse azt, hogy a dobott szám k, a B_r esemény, hogy a kihúzott piros golyók száma r. $A_1, A_2, \dots, A_6$ teljes eseményrendszer, így a keresett valószínűség Bayes tétele szerint:

$$P(A_k|B_r) = \frac{P(B_r|A_k)P(A_k)}{\sum_{n=1}^{6} P(B_r|A_n)P(A_n)} = \frac{\frac{1}{6}\binom{10}{r}\left(\frac{k}{8}\right)^r\left(\frac{8-k}{8}\right)^{10-r}}{\sum_{n=1}^{6}\frac{1}{6}\binom{10}{r}\left(\frac{n}{8}\right)^r\left(\frac{8-n}{8}\right)^{10-r}}.$$

Táblázatban:

$P(A_k\|B_r)$		k					
		1	2	3	4	5	6
r	0	$\mathbf{0,79837}$	$0,17090$	$0,02760$	$0,00296$	$0,00017$	$0,00000$
	1	$\mathbf{0,59767}$	$0,29852$	$0,08678$	$0,01553$	$0,00146$	$0,00005$
	2	$0,33476$	$\mathbf{0,39014}$	$0,20415$	$0,06089$	$0,00952$	$0,00054$
	3	$0,12627$	$\mathbf{0,34337}$	$0,32342$	$0,16078$	$0,04192$	$0,00424$
	4	$0,03165$	$0,20084$	$\mathbf{0,34050}$	$0,228211$	$0,12258$	$0,02232$
	5	$0,00546$	$0,08074$	$0,24641$	$\mathbf{0,34025}$	$0,24641$	$0,08074$
	6	$0,00067$	$0,02303$	$0,12650$	$0,29117$	$\mathbf{0,35140}$	$0,20726$
	7	$0,00006$	$0,00485$	$0,04797$	$0,18400$	$0,37014$	$\mathbf{0,39298}$
	8	$0,00000$	$0,00080$	$0,014318$	$0,09153$	$0,30688$	$\mathbf{0,58646}$
	9	$0,00000$	$0,00011$	$0,00362$	$0,03860$	$0,21570$	$\mathbf{0,74197}$
	10	$0,00000$	$0,00001$	$0,00083$	$0,01470$	$0,13689$	$\mathbf{0,84757}$

Adott r esetén a legnagyobb értékhez (vastagon szedett) tartozó k-t érdemes választani.

Megjegyzés a 7.7. fel. megoldásaihoz

Mindkét megoldásban egy-egy táblázatban egy adott r értéknek megfelelő sorból választottuk ki a legnagyobb (valószínűségnek megfelelő) elemet. Az I. megoldásban ezek a valószínűségek nem ugyanahhoz az eloszláshoz tartoztak, így egymáshoz képesti arányukból nem következtethetünk a nekik megfelelő k értékek valószínűségének arányára. A II. megoldásban egy-egy sor egy-egy eloszlás, így pl. joggal mondhatjuk: ha nyolcszor húzunk ki piros golyót, akkor $30,688\%$ annak valószínűsége, hogy 5 piros (és 5 fehér) golyó van az urnában.

15.5. Markov láncok – feladatok megoldása

A 7.1. feladat megoldása

Annak esélye, hogy $n = 2011$ egymás utáni dobás mindegyike 6-os: $p = \left(\frac{5}{6}\right)^n$. Ez a p szám egy nagyon piciny pozitív szám. A $q = 1 - p$ szám csak egy kicsit kisebb 1-nél, ez azt adja meg, mennyi az esélye, hogy n egymást követő dobás nem mindegyike 6-os.

Osszuk a dobássorozatot $n = 2011$-es blokkokba. Az első blokkba tartozik az első n dobás, a második blokkba az $(n + 1)$. dobás és az azt követő további $(n - 1)$ dobás, stb. Megmutatjuk, hogy 1 valószínűséggel már az egyik ilyen blokk is csupa hatosból áll és figyelembe sem vesszük a többi n-es blokkot.

Annak esélye, hogy az első k blokk egyike sem áll csupa 6-os dobásból q^k. Ez a mennyiség k növelésével bármely pozitív számnál kisebb lesz, így 0 az esélye, hogy soha sem lesz csupa hatosból álló blokk.

A 7.2. feladat megoldása

Jelölje n közlekedési lámpa esetén annak esélyét, hogy nem találkozunk közvetlenül egymás után két tilos jelzéssel p_n. Tehát $p_1 = 1$ és $p_2 = 1 - 0,4^2 = 0,84$. Tekintsünk most n lámpa esetét, ahol $2 < n$.

Ha az utolsó lámpa piros (ennek esélye $0,4$), akkor az előtte levőnek zöldnek kell lennie (ennek esélye $0,6$) és az első $(n-2)$ lámpa tetszőleges, csak ne legyen két egymást követő piros (ennek esélye p_{n-2}).

Ha viszont az utolsó lámpa zöld (ennek esélye $0,6$), akkor az előtte levő $(n-1)$ lámpa tetszőleges, csak ne legyen köztük két egymást követő piros (ennek esélye p_{n-1}).

Ennek alapján a rekurzió:

$$p_n = 0,4 \cdot 0,6 \cdot p_{n-2} + 0,6 p_{n-1}.$$

Felírhatjuk a másodrendű homogén lineáris rekurzió explicit képletét vagy kiszámíthatjuk a sorozat tagjait Excel vagy OpenOffice Calc programmal is:

$$p_1 = 1; \qquad p_2 = 0,84; \qquad p_3 = 0,744; \qquad p_4 = 0,648;$$

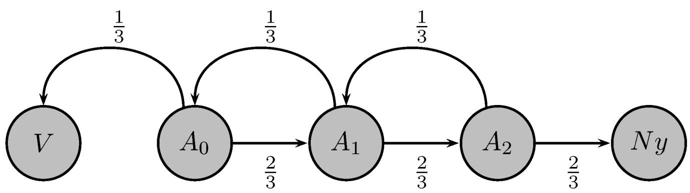
$$p_5 = 0,56736; \qquad p_6 = 0,495936; \qquad p_7 = 0,433728; \qquad p_8 = 0,37926144.$$

Tehát a kérdezett valószínűség $0,37926144$.

A 7.3. feladat megoldásai

A 7.3. fel. I. megoldása

A próbának öt állapota van: V – a vitéz vesztett, A_0 – még három-, A_1 – még két-, A_2 – még egy próba van a vitéz előtt, Ny – a vitéz nyert. Jelölje az egyes állapotokból indulva a vitéz nyerési esélyét p_V, p_0, p_1, p_2 és p_{Ny}. Értelemszerűen $p_V = 0$ és $p_{Ny} = 1$, míg a többi ismeretlen valószínűségre felírható egy egyenletrendszer.



15.7. ábra.

A 15.7 ábra alapján:

$$p_0 = \frac{1}{3} \cdot 0 + \frac{2}{3} \cdot p_1, \qquad p_1 = \frac{1}{3} \cdot p_0 + \frac{2}{3} \cdot p_2, \qquad p_2 = \frac{1}{3} \cdot p_1 + \frac{2}{3} \cdot 1.$$

Az első és utolsó egyenletből kifejezzük p_1-gyel p_0-t illetve p_2-t és ezeket a középső egyenletbe helyettesítjük:

$$p_1 = \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{2}{3} \cdot p_1\right) + \frac{2}{3} \cdot \left(\frac{1}{3} \cdot p_1 + \frac{2}{3} \cdot 1\right),$$

azaz

$$p_1 = \frac{4}{9}p_1 + \frac{4}{9}, \quad \Longrightarrow \quad \frac{5}{9}p_1 = \frac{4}{9}, \quad \Longrightarrow \quad p_1 = \frac{4}{5},$$

és ebből a keresett valószínűség $p_0 = \frac{2}{3} \cdot p_1 = \frac{8}{15}$.

A 7.3. fel. II. megoldása

Eredmény: $\frac{8}{15}$.

A feladat a következőkben vizsgált Ferde foci (lásd a 7.1. feladatot) egyik változata, a vitéz a $[0, 4]$ pályán „focizik”, $b = \frac{1}{3}$ eséllyel balra, $j = \frac{2}{3}$ eséllyel jobbra lép, 1-ről indul és 4-be szeretne jutni.

A 7.4. feladat megoldásai

A 7.4. b) mego.

A keresett valószínűség 0. A „Hosszú sorozat is várható” című 7.1. feladat alapján ugyanis világos, hogy 1 valószínűséggel lesz $n = 6$ egymás utáni dobás, amelyik mind fej. Ennyi egymást követő fej dobás biztos beviszi az egyik kapuba a labdát.

A 7.4. a) mego.

Jelölje az A játékos nyerési esélyét – tehát azt, hogy a 6-os kapuba kerül a labda – p_i, ha kezdetben az i számnál áll a bőrgolyó. Az értelmezés szerint tehát $p_0 = 0$ és $p_6 = 1$. Ha a labda b valószínűséggel megy balra és $1 - b = j$ valószínűséggel jobbra, akkor

$$p_k = b \cdot p_{k-1} + j \cdot p_{k+1}, \text{ ha } k \in \{1, 2, 3, 4, 5\}, \tag{15.17}$$

az a) feladatban tehát

$$p_k = \frac{p_{k-1} + p_{k+1}}{2}. \tag{15.18}$$

A $\{p_k\}$ sorozat bármelyik tagja a szomszédainak számtani közepe, tehát ez a sorozat számtani sorozat. A sorozat 0. tagja 0, a 6. tagja 1, közötte egyenletesen oszlik el:

$$p_1 = \frac{1}{6}, \qquad p_2 = \frac{2}{6}, \qquad p_3 = \frac{3}{6}, \qquad p_4 = \frac{4}{6}, \qquad p_5 = \frac{5}{6}$$

A kérdezett valószínűség tehát $p_2 = \frac{1}{3}$.

A 7.4. c) mego.

A fenti (15.17) képletet most a $b = \frac{1}{3}$, $j = \frac{2}{3}$ paraméterekkel kell alkalmazni, tehát (15.18) analogonjaként a

$$p_k = \frac{1 \cdot p_{k-1} + 2 \cdot p_{k+1}}{3} \tag{15.19}$$

összefüggéshez jutunk. Képzeljük el a

$$p_0, \quad p_1, \quad p_2, \quad p_3, \quad p_4, \quad p_5, \quad p_6$$

számokat a számegyenesen. A (15.19) formula a vektorgeometriából ismert: gondoljunk az osztópont helyvektorára. Ha így nézünk rá, akkor (15.19) elárulja, hogy a p_k számnak megfelelő pont a számegyenesen a p_{k-1}, p_{k+1} számoknak megfelelő pontok harmadolópontja, méghozzá a p_{k+1}-hez közelebbi harmadolópont.

Ha $p_6 - p_5 = 1 - p_5 = x$, akkor $p_5 - p_4 = 2x$, $p_4 - p_3 = 4x$, $p_3 - p_2 = 8x$, $p_2 - p_1 = 16x$, végül $p_1 - p_0 = p_1 = 32x$. Mivel

$$1 = p_6 - p_0 = (p_6 - p_5) + (p_5 - p_4) + \ldots + (p_1 - p_0) = x + 2x + \ldots + 32x,$$

így $x = \frac{1}{1+2+4+8+16+32} = \frac{1}{63}$ és

$$p_1 = \frac{32}{63}, \qquad p_2 = \frac{48}{63}, \qquad p_3 = \frac{56}{63}, \qquad p_4 = \frac{60}{63}, \qquad p_5 = \frac{62}{63}.$$

A kérdezett valószínűség tehát $p_2 = \frac{48}{63}$.

15.6. Normális eloszlás – feladatok megoldása

A 7.1. fel. eredménye

a) 2,3%, *b)* 9,2%, *c)* 65,7%.

A 7.2. fel. eredménye

a) 0,1%, *b)* 168,7 cm, *c)* [145; 171] (cm-ben).

15.7. Megismerés Bayes módján – feladatok megoldása

A 7.1. feladat megoldása

Ahhoz, hogy el tudjunk indulni a feladat megoldásában meg kell állapodni egy prior (előzetes) valószínűségeloszlásban. Erről nem a matematika dönt, sokkal inkább a már megismert fizikai körülmények és ismeretek. Mi lesz a prior? Az adott esetben a kísérlet előtt fogalmunk sincs róla, milyen a színeloszlás. Ezt a teljes tudatlanságot valószínűleg akkor fejezzük ki megfelelő módon, ha kezdetben a fehér kvarkok M számának mind a négy lehetséges értékét egyenlően valószínűnek tekintjük[1]:

$$P_E(M) = \frac{1}{4}$$

(E itt az „előzetes” szóra utal, ez a valószínűség semmiképpen sem függhet attól, hogy mi a később elvégzendő kísérlet eredménye).

Most már alkalmazhatjuk a Bayes-tételt. Annak valószínűsége, hogy a fehér golyók száma M a kísérlet elvégzése után:

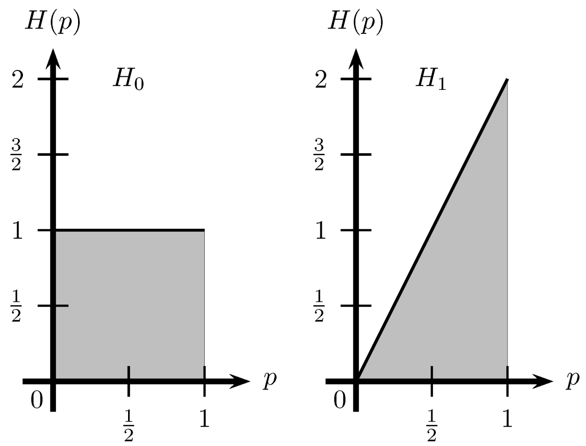
$$P_U(M) = \frac{1}{12}M^2(3-M)^3.$$

A 7.2. feladat megoldása

a) A fej dobás valószínűsége a H_0 prior valószínűségeloszlás esetén

$$P(F) = \int_0^1 p \cdot H_0(p)\, dp = \int_0^1 p\, dp = \frac{1}{2}. \tag{15.20}$$

b) A Bayes-tétel szerint (lásd a 15.8 ábrát):



15.8. ábra.

[1] Ez Laplace vitatható megközelítése. „Ez a tudatlanság egyenletes eloszlású” – gúnyolják ellenfelei. Lásd [PÓLYPL][144-145. o.]

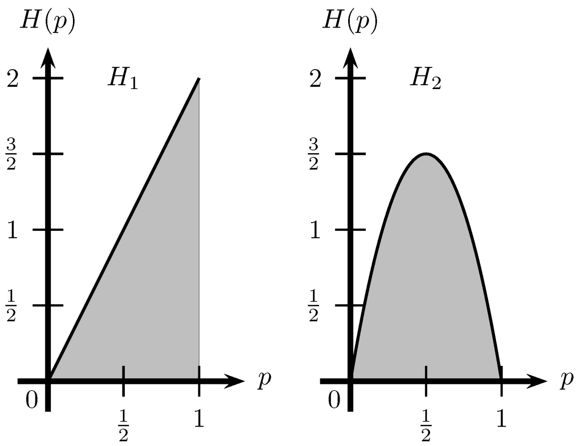
$$H_1(p) = \frac{pH_0(p)}{\int_0^1 p \cdot H_0(p)\, dp} = 2p. \tag{15.21}$$

c) Az írás valószínűsége a H_1 prior valószínűségeloszlás esetén

$$P(I) = \int_0^1 (1-p) \cdot H_1(p)\, dp = \int_0^1 (1-p) \cdot 2p\, dp = \frac{1}{3}. \tag{15.22}$$

d) A Bayes-tétel szerint most (lásd a 15.9 ábrát):

$$H_2(p) = \frac{(1-p)H_1(p)}{\int_0^1 (1-p) \cdot H_1(p)\, dp} = 6p(1-p). \tag{15.23}$$



15.9. ábra.

e) A fej valószínűsége:

$$P(F) = \int_0^1 p \cdot H_2(p)\, dp = \int_0^1 6p^2(1-p)\, dp = \frac{1}{2}. \tag{15.24}$$

f) $H_m^r(p) = \frac{(m+1)!}{r!(m-r)!} p^r (1-p)^{m-r}$, a következő próbálkozásra a fej esélye

$$\int_0^1 p \cdot H_m^r(p)\, dp = \frac{r+1}{m+2}.$$

16. fejezet

Gondolkodási módszerek – feladatok megoldása

16.1. Józan ész – feladatok megoldása

A 8.1. feladat megoldása

A feladat többféleképp megoldható. Könnyen eredményre juthatunk szisztematikus próbálgatással, vagy ötletes megfontolásokkal (ha a tyúkok fél lábon, a nyulak 2 hátsó lábon állnának, akkor 70 láb lenne a talajon. Az 50 állat mindegyikének van egy lába a talajon, a maradék 20 láb a nyulakhoz tartozik, tehát 20 nyúl és 30 tyúk van).

Algebrai megoldás esetén az $x + y = 50$ és $2x + 4y = 140$ egyenletrendszert kell megoldanunk.

Megjegyzés a 8.1. feladathoz

Meggondolhatjuk, hogy mi a helyzet más fej-, illetve lábszámok esetén, feladhatjuk a feladatot 3 lábú székek és 4 lábú asztalok, vagy pl. hétfejű sárkányok szerepeltetésével.

A 8.2. feladat megoldása

Némi próbálgatással minden kívánt eredmény elérhető. A $(7, 0)$ pl. a következőképp:

$(0, 0)$ $(0, 5)$ $(5, 0)$ $(5, 5)$ $(8, 2)$ $(0, 2)$ $(2, 0)$ $(2, 5)$ $(7, 0)$.

A 8.3. feladat megoldása

Az egyes keverékek kiszámításával megkapható, hogy a kérdéses mennyiségek egyenlők.

Másrészt, meggondolva, hogy mivel végül ugyanannyi folyadék lesz a poharakban, mint eredetileg volt; ugyanannyi bor lesz a vízben, amennyi víz a borban. Ez utóbbi megfontolás akárhány oda-vissza töltögetés esetén is működik.

A 8.4. feladat megoldása

Bármily meglepő, a teljes erdő 50%-áról van szó. A megmaradt erdőnek ugyanis a 2%-a lesz olyan, ami nem fenyőfa, ami azt jelenti, hogy az erdő 50%-a marad meg.

A 8.5. feladat megoldása

Ha az AE dobozból választunk golyót, akkor abból kiderül (mivel AE nem lehet), hogy abban AA vagy EE van. Ha az eredmény AA, akkor az AA feliratú dobozban AE nem lehet, mert akkor az EE doboz felirata igaz lenne. Így az AA feliratúban csak EE lehet, az EE feliratúban pedig AE kell, hogy legyen.

Hasonlóan gondolható végig, hogy mi a helyzet, ha az AE dobozban 2 ezüst golyót találunk.

16.2. Logikai fejtörők

A 8.1. feladat megoldása

Az A és a 7-es kártyát kell megfordítani. Ha az A túloldalán nem 2010 osztója áll vagy ha a 7 túloldalán magánhangzó áll, akkor az cáfolja az állítást (hiszen a 7 nem osztója 2010-nek). A 2 (2010 osztója) illetve az M (nem magánhangzó) túloldalán bármi is van, az nem cáfolja az állítást.

A 8.2. feladat megoldása

A lapon 6 igaz állítás található ($2 \times 2 = 4$, legfeljebb 6, 7, 8, 9, 10).

Ha pontosan x igaz az állítások közül, akkor a $2 \times 2 = 4$, a legfeljebb x, legfeljebb $x + 1, \dots$ legfeljebb 10 az igazak. Ez $1 + (11 - x) = x$, azaz $x = 6$ igaz állítást jelent.

Megjegyzés a 8.2. feladathoz

Ha még egy – „Ezen a lapon legfeljebb 11 igaz állítás van." – állítás szerepelne a lapon, nem lenne megoldás. Érdemes egyrészt az állítások száma szerint, másrészt a „ legfeljebb" helyett „legalább" szerepeltetésével diszkutálni a feladatot.

A 8.3. feladat megoldása

Először is: teljesen felesleges volt megkérdezni az első szigetlakót, hogy ő miféle, erre ugyanis akár lovag (aki igazat mond), akár lókötő (aki hazudik) azt fogja válaszolni, hogy ő lovag. A második megkérdezett ezek szerint biztos, hogy igazat mondott, tehát ő lovag. Nem hazudott, tehát a harmadik szigetlakó lókötő. Az elsőről nem tudjuk, miféle.

A 8.4. feladat megoldásai

A 8.4. a) mego.

A lókötő nem lehet, mert ebben az esetben az állítása igaz lenne. A tehát lovag, és mivel igaz az, hogy legfeljebb az egyikük lovag, B lókötő.

A 8.4. b) mego.

A és B szereposztására nézve 4 lehetőség van. (A is és B is lovag; A lovag, B lókötő; B lókötő és A lovag; mindketten lókötők). Ha A lovag, akkor állítása igaz B mibenlététől függetlenül. Ha A lókötő, akkor B lovag, így csak annyit tudunk meg állításából, hogy nem lehetnek mindketten lókötők.

A 8.4. c) mego.

Ha A lovag akkor azért, ha lókötő, akkor (mivel állítása csak akkor lehet hamis, ha a második fele hamis) azért nem kell megennie kalapját.

Megjegyzés a 8.4. feladathoz

Megkérdezhetjük, hogy mi a helyzet akkor, ha A mindhárom állítást egy kérdésen belül kijelenti. Ekkor A lókötő nem lehet, mert akkor az a) állítás igaz lenne. Így A lovag, az a) állítás igaz, emiatt B lókötő. A kalapját nem kell megennie.

A 8.5. feladat megoldása

A csütörtök az egyetlen nap, amikor ezek az állítások elhangozhattak.

16.3. A szimmetria felismerése – feladatok megoldása

A 8.1. feladat megoldása

A kezdő játékosnak van nyerő stratégiája, első lépésben a középső (5.) érmét érdemes megfordítania, ezután pedig mindig az ellenfél lépésének tükörképét. Ez a stratégia tetszőleges páratlan számú érme esetén működik, páros számú érme esetén a 2. játékos nyerhet (szimmetrikus lépésekkel).

A 8.2. feladat megoldása

Ha a kezdő játékos az asztal közepére rak először érmét, és azután mindig a másik játékos (akár középpontos, akár tengelyes) szimmetrikus képére, akkor nyerhet.

A 8.3. feladat megoldásai

A 8.3. a) mego.

Az összes szám összege 45 (tehát osztható 3-mal). A számok között minden 3-as maradékosztályból 3-3 szám szerepel. A kezdő játékos nyerhet, ha 3-mal osztható számmal kezd. Ezután ha ellenfele is 3-mal oszthatót választ, akkor utána ő is, ha 1 maradékot adót, akkor ő (ugyanolyan előjellel) 2 maradékot adót, ha 2 maradékot adót, akkor ő 1 maradékot adót.

A 8.3. b) mego.

Ekkor is nyerhet a kezdő. Arra kell törekednie (és ez könnyen megoldható), hogy utolsónak ne 3-mal osztható szám maradjon. Bármi történt is az első 8 lépésben, övé az utolsó szó, és ha pl. 1 maradékot adó szám maradt, akkor – függően a már kiválasztottak összegétől – vagy az 1 hozzáadásával, vagy a levonásával (vagy bármelyikkel) elérheti célját.

16.4. Gondolkodjunk visszafelé! – feladatok megoldása

A 8.1. feladat megoldása

A véghelyzetből érdemes kiindulnunk.

Ha végül mindenkinek 8 aranya volt, akkor C vesztése előtt A-nak 4, B-nek 4, C-nek 16 aranya kellett, hogy legyen. Az előző körben B veszített, így akkor (A és C pénzének megduplázása előtt) A-nak2, B-nek 14, C-nek 8 aranya lehetett csak. Az ezt megelőző körben (mielőtt A a vesztése miatt megduplázta volna pénzüket) A-nak 13, B-nek 7, C-nek 4 aranya volt.

A 8.2. feladat megoldásai

A 8.2. a) mego.

Ha már csak 4 gyufa van a kupacban, akkor (könnyen meggondolható, hogy) a soron következő játékos minden lehetséges lépésével veszít, így célunk az, hogy lépéseink után 4 gyufa maradjon. Ezt akkor tudjuk biztosan elérni, ha előzőleg 8 gyufát hagytunk a kupacban stb.

Érdemes átengedni a kezdés jogát, ugyanis akármennyit vesz el a kezdő játékos, el tudjuk érni, hogy lépésünk után 16 gyufa maradjon, a következő lépésváltás után 12, majd 8, 4, 0.

A 8.2. b) mego.

Hasonló megfontolások alapján, ha a gyufák száma 4-gyel osztható, akkor a második játékosnak van nyerő stratégiája, egyébként pedig a kezdőnek.

A 8.2. c) mego.

Ha n osztható $m + 1$-gyel, akkor a második játékosnak, ha nem, akkor a kezdőnek van nyerő stratégiája.

További kérdés a 8.2. feladathoz

Hogyan változik a 8.2.. a) feladat játékának stratégiája, ha csak 1 vagy 3 gyufa vehető el?

A 8.3. feladat megoldásai

Segítség a 8.3. feladathoz

Játsszunk! Ismerjük fel azokat az egyszerű (kevés gyufából álló) helyzeteket, ahonnan már biztosan nyerünk, illetve ahonnan biztosan vesztünk!

A 8.3. feladat megoldása

Ha mindkét kupacban $1 - 1$ gyufa van, akkor a soron következő játékos veszít. Tehát érdemes arra törekednünk, hogy a mi hozzuk létre ezt az állapotot. Honnan hozhatjuk létre? Ha előzetesen mi érjük el, hogy $2 - 2$ gyufa legyen a két kupacban, akkor a másik játékos következő lépése után azonnal nyerünk, vagy létrehozzuk az „$1 - 1$" állapotot és úgy nyerünk.

Általában, ha elérjük, hogy a két kupacban egyenlő számú gyufaszál legyen, akkor a másik játékos kénytelen elrontani ezt a szimmetriát és mi újra létrehozhatjuk, ha ugyanannyi szálat veszünk el a másik kupacból, mint ellenfelünk az előbb az egyikből.

Ha kezdő játékos a 7-es kupacból elvesz kettőt, akkor létrehozza a szimmetriát és a szimmetrizáló stratégiát végig tudja követni, biztosan nyer.

A 8.4. feladat megoldásai

A 8.4. a) mego.

Ha a kezdő játékos minden lépésénél arra törekszik, hogy a véghelyzetből kiinduló átlóra lépjen, akkor nyerhet. (Más méretű $-k \times n$ –es sakktáblák esetén ha $k = n$, akkor második játékosnak van, nyerő stratégiája.)

A 8.4. b) mego.

a)

5						V		
4					V			
3				V				
2			V					
1		V						
0	V							
	0	1	2	3	4	5	6	7

b)

5						V		
4					V			
3				V				
2			V					
1	V							
0		V						
	0	1	2	3	4	5	6	7

16.1. ábra.

Ha az veszít, aki a bal alsó sarokba lép, akkor a játékosok célja az, hogy olyan mezőre lépjenek végül, ahonnan már csak a bal alsó sarokba lehet lépni. Vagyis a cél a $(0; 1)$ vagy $(1; 0)$ mező (lásd a 16.1 ábrát) elérése. Az a) feladatrész stratégiája most is majdnem tökéletes. A főátlón érdemes tartani a bástyát, de az $(1; 1)$ átlós mező helyett a $(0; 1)$ vagy $(1; 0)$ mezők egyikét kell választani.

Megjegyzés a 8.4. feladathoz

Az a)-ban ismertetett játék „ugyanaz”, mint a 8.3. feladat játéka.

A 8.5. feladat megoldása

A táblát az éppen sorra kerülő játékos szempontjából töltjük ki (lásd a 16.2 ábrasorozatot). A „+” jellel jelöltük azokat a mezőket, amelyekről elindulva ő nyerhet, ha jól játszik, illetve „V” jelet írtunk, ha onnan indulva nem ő, hanem ellenfele tud nyerni. A bal alsó sarokkal kezdődik a tábla kitöltése: ez a soron következő játékos számára vesztő mező

(„V”), hiszen az előző lépésben a nyerést jelentette az idelépés. A továbbiakban minden mezőt „+”-szal jelölünk, ha onnan „V”-vel jelölt mezőre lehet lépni, és „V”-vel, ha onnan csak „+”-szal jelölt mezőre lehet lépni.

V							

+					+		
+				+			
+			+				
+		+					
+	+						
V	+	+	+	+	+	+	+

+					+		
+				+			
+			+				
+	V	+					
+	+	V					
V	+	+	+	+	+	+	+

+	+	+		+	+	+	
+	+	+	+	+	+		
+	+	+	+	+			
+	V	+	+	+	+	+	+
+	+	V	+	+	+	+	+
V	+	+	+	+	+	+	+

+	+	+	V	+	+	+	
+	+	+	+	+	+		
+	+	+	+	+	V		
+	V	+	+	+	+	+	+
+	+	V	+	+	+	+	+
V	+	+	+	+	+	+	+

+	+	+	V	+	+	+	+
+	+	+	+	+	+	+	V
+	+	+	+	+	V	+	+
+	V	+	+	+	+	+	+
+	+	V	+	+	+	+	+
V	+	+	+	+	+	+	+

16.2. ábra.

Mindkét játékos célja az, hogy „V”-szal jelölt mezőre lépjen, így hozva ellenfelét „vesztő” helyzetbe. Ennek megfelelően folytattuk a 16.2 ábrasorozat kitöltését.

Kiderül, hogy a kezdő nyerhet, hiszen nem „vesztő” mezőről indul és (háromféleképpen is) tud „vesztő” mezőre lépni.

Megjegyzés a 8.5. feladathoz

Ez ugyanaz a játék, mint ha két kupac gyufaszálból felváltva vehetnének el a játékosok egy kupacból akármennyit vagy egyszerre mindkét kupacból azonos számú gyufát.

A 8.6. feladat megoldása

A 8.5. feladat megoldása alapján minden egyes helyzetről eldöntjük, hogy az onnan induló játékos nyer („+”) vagy veszt („V”). Most két táblát is kell rajzolnunk: egyet a „passzolás előtti” egyet pedig a „passzolás utáni” helyzeteknek. A „passzolás utáni” állapotokat már ismerjük a 8.4. a) feladatból: a $(0;0)-(5;5)$ átlós vonal helyzetei (az onnan indulónak) vesztők, a többi helyzet nyerő. A „passzolás előtti” állapotoknál a bal alsó mező szintén vesztő, hiszen, ha az előző játékos oda lépett, akkor már ő nyert, hiába passzolna, aki onnan lépne. Az összes többi mező a $(0;0)-(5;5)$ átlós vonalon nyerő

(„+”), hiszen passzolással vesztő helyzetbe hozhatjuk ellenfelünket. A tábla további kitöltése a 16.3 ábrán követhető nyomon.

Már nem lehet passzolni

5	+	+	+	+	+	V	+	+
4	+	+	+	+	V	+	+	+
3	+	+	+	V	+	+	+	+
2	+	+	V	+	+	+	+	+
1	+	V	+	+	+	+	+	+
0	V	+	+	+	+	+	+	+
	0	1	2	3	4	5	6	7

Még lehet passzolni

5	+					+		
4	+				+			
3	+			+				
2	+		+					
1	+	+						
0	V	+	+	+	+	+	+	+
	0	1	2	3	4	5	6	7

Még lehet passzolni

5	+					+		
4	+				+			
3	+			+				
2	+	V	+					
1	+	+	V					
0	V	+	+	+	+	+	+	+
	0	1	2	3	4	5	6	7

Még lehet passzolni

5	+	+	+			+		
4	+	+	+		+			
3	+	+	+	+				
2	+	V	+	+	+	+	+	+
1	+	+	V	+	+	+	+	+
0	V	+	+	+	+	+	+	+
	0	1	2	3	4	5	6	7

Még lehet passzolni

5	+	+	+	+	+	+		
4	+	+	+	V	+	+	+	+
3	+	+	+	+	V	+	+	+
2	+	V	+	+	+	+	+	+
1	+	+	V	+	+	+	+	+
0	V	+	+	+	+	+	+	+
	0	1	2	3	4	5	6	7

Még lehet passzolni

5	+	+	+	+	+	+	V	+
4	+	+	+	V	+	+	+	+
3	+	+	+	+	V	+	+	+
2	+	V	+	+	+	+	+	+
1	+	+	V	+	+	+	+	+
0	V	+	+	+	+	+	+	+
	0	1	2	3	4	5	6	7

16.3. ábra.

Látható, hogy kezdőnek a $(6;5)$ mezőre érdemes lépnie, majd mindig valamelyik vesztő („V”) mezőre tennie a bástyát a 16.3 ábra első és utolsó táblája szerint.

I. megjegyzés a 8.6. feladathoz

A fenti „egy passzos játék” úgy is felfogható, mintha egy térbeli $2 \times 6 \times 8$-es táblán játszanánk passz nélkül, de két szint megfelelő sarokmezőjére is nyerést ér rálépni.

II. megjegyzés a 8.6. feladathoz

Hogyan érdemes játszani két ill három engedélyezett passz esetén?

A 8.7. feladat megoldásai

A 8.7. a) mego.

A második játékos nyerhet, ha mindvégig arra törekszik, hogy mindkét kupacban páros számú kavics maradjon lépése után. Ekkor ugyanis ellenfele mindig csak olyat tud lépni, hogy legalább az egyik kupacban páratlan sok kavics maradjon, és a kívánt véghelyzetre (mindkét kupacban 0 legyen) ez nem teljesül.

Ezt a második játékos el is tudja érni, valahányszor ellenfele csak egy kupacból vesz egyet, akkor ő ugyanebből a kupacból vehet el egyet, ha pedig ellenfele mindkét kupacból vesz el egyet-egyet, akkor ő is.

Megjegyzés a 8.7. a) feladathoz

Ez ugyanaz a játék, mint ha egy 9×11-es sakktábla jobb felső sarkában álló bábúval lépnének felváltva vagy 1-et balra, vagy 1-et lefelé, vagy 1-et átlósan balra le. A balra lépés jelenti az egyik kupac, a lefelé lépés a másik kupac 1-gyel való csökkentését, az átlós lépés a mindkét kupac eggyel - eggyel való csökkentését. A 16.4 ábrán „V”-vel jelöltük azokat a pozíciókat, ahonnan a soron következő játékos (ha ellenfele jól játszik) veszít (mert csak „+”-szal jelölt mezőre tud lépni), és „+” jellel jelöltük azokat, ahonnan „V” jelű mezőre lehet lépni, így ellenfelüket hozva vesztő helyzetbe.

8	V	+	V	+	V	+	V	+	V	+	V
7	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+
6	V	+	V	+	V	+	V	+	V	+	V
5	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+
4	V	+	V	+	V	+	V	+	V	+	V
3	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+
2	V	+	V	+	V	+	V	+	V	+	V
1	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+
0	V	+	V	+	V	+	V	+	V	+	V
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10

A 8.7. b) mego.

Most is a másodiknak van nyerő stratégiája. Ha egy 9×11-es négyzetrácson az a) feladat stratégiájának megfelelően látjuk el „+” jelekkel és „V” jelekkel a mezőket (lásd a 16.4 ábrát), kiderül, hogy kell játszania.

A 8.8. feladat megoldása

A két játékos kiindulási pozíciója között 100 a különbség. ezt szeretnék 0-ra csökkenteni. Aki 4-re csökkenti, nyerhet. Hasonlóképp, bármilyen 4-gyel osztható különbség esetén, a soron következő játékos el tudja érni, hogy a két játékos pozíciója közti különbség 4-gyel osztható legyen, és így nyerhet. Mivel kezdetben 4-gyel osztható (100) a pozíciójuk különbsége, a második játékosnak van nyerő stratégiája.

8	+	+	V	+	V	+	V	+	V	+	V
7	V	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+
6	+	+	V	+	V	+	V	+	V	+	V
5	V	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+
4	+	+	V	+	V	+	V	+	V	+	V
3	V	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+
2	+	+	V	+	V	+	V	+	V	+	V
1	V	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+
0	+	V	+	V	+	V	+	V	+	V	+
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10

Segítség a 8.9. feladathoz

A verseny állását most egy 2×25-ös táblázatban követhetjük. Az egyik sor annak felel meg, hogy páros számú gyufánk van, a másik annak, hogy páratlan, míg az oszlopok a megmaradt gyufák számát jelzik. Keressük meg a nyerő és a vesztő mezőket a játék végétől visszafelé haladva.

16.5. Skatulyaelv – feladatok megoldása

A 8.1. feladat megoldása

Három szelvény elég, ha az egyiket csupa 1-gyel, egy másikat csupa 2-vel, a harmadikat csupa x-szel töltjük ki, biztosan lesz legalább 5 találatunk.

A 8.2. feladat megoldása

A lehetséges 3-as maradékok vizsgálatából kiderül, hogy az állítás igaz (ha van köztük 3-mal osztható, kész vagyunk, ha nincs, akkor vagy 3 azonos maradékkal van dolgunk melyek összege osztható 3-mal, vagy van 1-et is és 2-t is adó maradék, melyek gazdájának összege szintén osztható 3-mal).

Több szám esetén legyenek ezek a_1, a_2, a_3, $\ldots$ a_k. Tekintsük az a_1, a_1+a_2, $a_1+a_2+a_3$, $\ldots$ $a_1+a_2+a_3+\ldots+a_k$ összegeket (k darab). Ha mindegyik összeg különböző maradékot ad k-val osztva, akkor van ezek között 0 maradékot adó, vagyis k-val osztható. Ha van köztük (legalább) kettő, amelyek azonos maradékot adnak k-val osztva, akkor e két összeg különbsége – ami szintén az eredeti számokból képezhető összeg – lesz k-val osztható.

A 8.3. feladat megoldása

a) 46-ot. 45-öt ugyanis még ki lehet húzni piros nélkül ($25 + 15 + 5 = 45$), de ha 46-ot húzunk ki, akkor csak 34 golyó marad meg a 80-ból, nem maradhat meg mindegyik piros.

b) 41-et. 40-et ugyanis még ki lehet húzni piros nélkül ($25 + 15 = 40$), de ha 41-et húzunk ki, akkor csak 39 golyó marad meg a 80-ból, nem maradhat meg az összes piros is és az összes fekete is ($35 + 5 = 40$).

c) 76-ot. 75-öt ugyanis még ki lehet húzni fekete nélkül ($35 + 25 + 15 = 75$), de ha 76-ot húzunk ki, akkor csak 4 golyó marad meg a 80-ból, nem maradhat meg mindegyik fekete. Ugyanezen okból 76 golyó kihúzása esetén az összes piros se maradhat meg – lásd az a) feladatot –, tehát a kihúzottak között piros és fekete is lesz.

d) 36-ot. Ha még nincs a kihúzottak között két különböző színű, akkor a kihúzottak mind azonos színűek. A legtöbb azonos színű pirosból van, 35. Tehát 35 golyót még ki lehet húzni úgy, hogy ne legyenek köztük különböző színűek, de 36 golyó kihúzása esetén már biztosan lesznek köztük különbözőek is.

e) 9-et. Ha nem teljesül a feltétel, akkor mindegyik színből legfeljebb két golyó van. Négyféle szín van, tehát a kihúzott golyók száma legfeljebb $4 \cdot 2 = 8$. Ez lehetséges is, mindegyik színből van legalább 2 golyó. Tehát 8 kihúzott golyó esetén még előfordulhat, hogy nem teljesül a feltétel, 9-nél már biztosan teljesül.

A 8.4. feladat megoldása

a) Legkevesebb $F + S + Z + 1$ húzás esetén lesz biztosan piros a kihúzott golyók között. Most tehát $F + S + Z + 1 = 5$, amiből $F = 1$ és $G = F + S + Z + P = 7$.

b) Legkevesebb $Z + S + \max(P, F) + 1$ húzás esetén lesz biztosan piros is és fekete is a kihúzott golyók között. Ezek szerint $4 + S + 3 + 1 = 10$, amiből $S = 2$, $G = F + S + Z + P = 11$.

A 8.5. feladat megoldása

Ha 50 kőtömböt kell hét teherautóra rakni, akkor lesz olyan teherautó, amelyre legalább nyolc kőtömb kerül, hiszen $7 \cdot 7 = 49 < 50$. A nyolc legkisebb kőtömb össztömege azonban nagyobb, mint $8 \cdot 250 = 2000$ kg, azaz több mint két tonna. A leírt szabályokkal tehát az elszállítás nem lehetséges.

A 8.6. feladat megoldása

Itt is a skatulya-elvről van szó. Az első számjegy 9-féle, az utolsó 10-féle lehet, tehát összesen 90 lehetőség van az első és utolsó számjegyet illetően (vagyis annyi, ahány kétjegyű szám van). Ha $2 \cdot 90 = 180$ számunk van, akkor még lehetséges, hogy minden ilyen lehetőség épp kétszer fordul elő (pl. az összes kétjegyű szám, valamint ugyanezek úgy háromjegyűvé alakítva, hogy mindegyik közepére beszúrunk egy nullást), de 181 szám közül már biztosan van három melyek első és utolsó jegyükben is megegyeznek.

A 8.7. feladat megoldása

Három egymást követő számjegy legfeljebb 1000-féle lehet (000, 001, ... 999). Ha minden (az összes számjegy-hármas) lehetőség véges sokszor fordulna elő, akkor összesen is csak véges sok tizedes jegye lehetne a π-nek, ami nem igaz, tehát biztosan van olyan, ami végtelen sokszor szerepel.

A 8.8. feladat megoldása

Ha a kiválaszthatóak között nincs 45 különböző, akkor a 2010 szám legfeljebb 44-féle. Beskatulyázva a számokat 44 dobozba, lesz olyan doboz, ahova legalább 45 szám kerül (hiszen $44 \cdot 45 = 1980 < 2010$). Ez viszont azt jelenti, hogy ha nincs 45 különböző szám, akkor van 45 egyenlő.

A 8.9. feladat megoldásai

A 8.9. fel. I. megoldása

Az

$$a + b = c + d$$

egyenlőség az

$$a - c = d - b$$

összefüggésbe megy át. A 25 szám közül $\binom{25}{2} = 300$ különböző módon választható ki kettő. A két szám különbsége (nagyobbik – kisebbik) mindig 1 és 99 közé eső egész szám. A 99-fél különbségből lesz olyan, amelyet kétszer is megkapunk, és abból a két egyenlő értékű különbségből készíthetünk két egyenlő összeget.

Megjegyzés a 8.9. fel. I. megoldásához

Ez a megoldás így hibás. Pl $65 - 64 = 66 - 65$, de ha ebből összeget akarunk készíteni: $65 + 65 = 66 + 64$, akkor nem megfelelő összeállítást kapunk, ugyanaz a szám kétszer szerepel benne.

A megoldás javítható. Valójában lesz olyan különbség, amelyet háromszor is megkapunk ($2 \cdot 99 < 300$) és ezek közül lesz kettő közös elem nélkül. Ha ugyanis az egyiknek mind a két másikkal van közös eleme, pld

$$65 - 64 = 66 - 65, \qquad \text{és} \qquad 66 - 65 = 67 - 66,$$

akkor a két másiknak nem lehet közös eleme:

$$67 - 66 = 65 - 64.$$

Valóban a mindkettővel közösködő pár két száma olyan intervallumot határol, amelyik elválasztja egymástól a másik két párt.

A 8.9. fel. II. megoldása

A $\binom{25}{2} = 300$ pár 300 kéttagú összeget ad, de az összegek lehetséges értékei $1 + 2 = 3$-tól $100+99 = 199$-ig terjednek, tehát csak 197 különböző lehet közöttük. Az egyenlő összegű párok tagjai között most nem lehetnek egyenlőek, mert ha az összeg és egy-egy tag is egyenlő , akkor a másik tag is egyenlő, de akkor nem két különböző párról van szó.

Megjegyzés a 8.9. fel. II. megoldásához

Mivel $\binom{21}{2} = 210$, így Pisti akkor is ki tudna választani egyenlő összegeket, ha csak 21 cédulája maradna. $\binom{20}{2} = 190 < 197$, így 20 cetli esetén a fenti gondolatmenet nem jó, de ettől még nincs kizárva, hogy 20 cédula is mindig elég két egyenlő összegű párhoz.

A 8.10. feladat megoldása

A 21 számból $\binom{21}{2} = \frac{21\cdot 20}{2} = 210$ számpár készíthető. Ezeknek 210 lehetséges pozitív különbsége van: a lehetséges legkisebb az 1, a legnagyobb a 69, tehát a különbségek lehetséges értékei csak 69-félék lehetnek. $3 \cdot 69 < 210$, így valóban lesz olyan különbség érték, amelyik négyszer is előfordul a párokban képzett különbségek között.

16.6. Invariancia-elv – feladatok megoldása

A 8.1. feladat megoldása

Nem lehet, az összeg mindenképp osztható lesz 9-cel. (Az, hogy egy számjegyet milyen – a helyértékének megfelelő - 10-hatvánnyal szorzunk, nem változtat a 9-es maradékán.)

A 8.2. feladat megoldása

a) Nem érhető el, hiszen a csúcsokba írt számok összegének kettes maradéka (paritása) a folyamat során nem változik, de az elején 1 (páratlan) a végén 0 (páros) kellene, hogy legyen.

b) Ez sem lehetséges, annak ellenére, hogy az előző gondolatmenet nem ad kizáró okot. Tekintsük most az $a - b + c - d$ összeget, ahol a, b, c, d a négyzet csúcsaiba írt számokat jelentik, a és c az egyik szemközti párt, b és d a másikat. Ennek az összegnek az értéke is változatlan (invariáns) a folyamat során, hiszen mindkét szemközti párban egy-egy szám értéke nő. Az előjeles összeg értéke a folyamat elején 2, a végén pedig 0-t kellene, hogy kapjunk, ami nem lehetséges.

A 8.3. feladat megoldása

a) Igen elérhető, pl. így: (5, 11, 14) $\to$ (9, 9, 18) $\to$ (15, 15, 15).

b) Nem érhető el. Bármelyik két csúcsnál található gyufák számának különbsége hármas maradéka változatlan és $9 - 5 = 4$, aminek hármas maradéka 1.

A 8.4. feladat megoldása

Vegyük észre, hogy $(a; b) \to a + b + a \cdot b = (a + 1)(b + 1) - 1$, vagyis ha letörlünk két számot, a náluk 1-gyel nagyobb számok szorzatánál 1-gyel kisebb szám kerül a táblára.

Továbbá ennek alapján az eljárás bármelyik fázisában

$$((a; b); c)) \to (a+1)(b+1)-1+1+c+((a+1)(b+1)-1)(c+1) = (a+1)(b+1)(c+1)-1(= (a; (b; c)).$$

Így a táblán lévő számoknál eggyel nagyobb számok szorzatának értéke az eljárás során nem változik, mindig ugyanannyi: $2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot \ldots \cdot 21$. Valóban, az $a, b \to a + b + a \cdot b$ csere előtt e szorzat két megfelelő tényezője $(a+1)(b+1)$, a csere után pedig $a+b+a\cdot b+1$, és ennek a két kifejezésnek az értéke mindig megegyezik egymással. Így az utolsónak maradó szám $2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot \ldots \cdot 21 - 1(= 21! - 1)$.

Megjegyzés a 8.4. fel. megoldásához

Az $a \circ b = a + b + ab$ művelet a pozitív egészek halmazán asszociatív, így erre a műveletre nézve a pozitív egészek félcsoportot alkotnak.

A 8.5. feladat megoldása

Ha egyszínű kaméleonok találkoznak, nem történik semmi. Ha két különböző színű találkozik, akkor függően attól, hogy milyenek, két féle színűnek csökken 1-gyel-1-gyel a létszáma, míg a harmadik színűeknek 2-vel nő.

Megfigyelve az egyes színek hármas maradékát, ezek eredetileg rendre (sz, b, z) (1, 0, 2) voltak, vagyis a három létszám három különböző maradékot adott 3-mal osztva.

Akármilyen két különböző színű kaméleon találkozik, a keletkező színek 3-as maradéka mindig háromféle lesz, így ebből a kezdő helyzetből nem érhető el, hogy mind egyszínűek legyenek.

A 8.6. feladat megoldása

Jelölje az egyes részekben levő kavicsok számát körüljárás szerinti sorrendben egy adott pillanatban rendre a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6, a_7, a_8. Invariánsnak most megfelel a

$$a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + a_5 - a_6 + a_7 - a_8$$

mennyiség, mert ebben minden egyes lépésben egy-egy pozitív és egy-egy negatív előjelű mennyiség értéke nő eggyel-eggyel, tehát a teljes előjeles összeg értéke változatlan. Mivel a folyamat elején az összeg értéke

$$1 - 1 + 1 - 1 + 3 - 2 + 1 = 2,$$

így ez marad végig. Ha mindenütt ugyanannyi kavics lenne, akkor 0 lenne az összeg, tehát ez nem érhető el.

16.7. Indirekten – feladatok megoldása

A 8.1. feladat megoldása

Felhasználva a $\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta = \frac{\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta}{1 - \operatorname{tg}\alpha \operatorname{tg}\beta}$ azonosságot kiderül, hogy ha $\operatorname{tg} 1°$ racionális lenne, akkor $\operatorname{tg} 2°$ ($\alpha = 1°$ és $\beta = 1°$) is racionális lenne. Folytatva az eljárást, azt kapnánk, hogy $\operatorname{tg} 30° = \frac{\sqrt{3}}{3}$ is racionális lenne, ami ellentmondás feltételezésünkkel. Tehát a $\operatorname{tg} 1°$ irracionális.

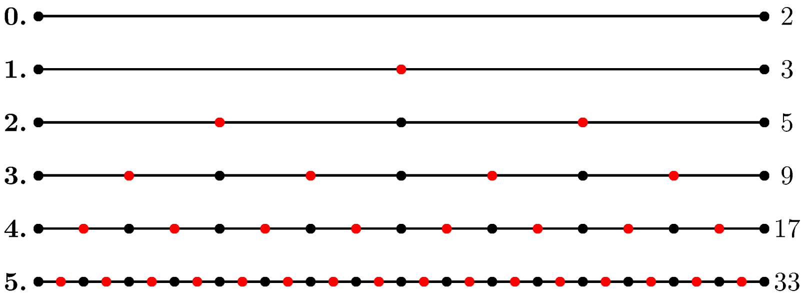
Megjegyzés a 8.1. fel. megoldásához

Ha valaki az összegzést 45°-ig folytatja, akkor $\operatorname{tg} 45° = 1$-re jut, így nem kap ellentmondást. Tanulságos megbeszélni, hogy az, hogy nem jutottunk ellentmondásra, nem jelenti azt, hogy a feltételezés igaz.

16.8. Újra és újra – feladatok megoldása

A 8.1. feladat megoldása

Induljunk ki abból, hogy kezdetben csak két csipesz van, a karnis két végén és haladjunk lépésről lépésre (lásd a 16.4 ábrát)!



16.4. ábra.

Bal oldalon tüntettük fel, hogy hanyadik lépésnél tartunk, jobb oldalt pedig felírtuk a csipeszek számát. Pirossal jelöltük az adott lépésben felrakott új csipeszek helyét.

Jelölje cs_n a csipeszek számát az n-edik lépés után. Tehát

$$cs_0 = 2, \qquad cs_1 = 3, \qquad cs_2 = 5, \qquad cs_3 = 9, \qquad cs_4 = 17, \qquad cs_5 = 33, \ldots$$

Rekurzió

Vegyük észre, hogy ha x csipesz van feltéve, akkor közöttük $(x-1)$ szakasz van, így $(x-1)$ új csipeszt kell felraknunk. Tehát ezután már $x+(x-1) = 2x-1$ csipeszünk lesz. A sorozat tagjai tehát a $cs_0 = 2$ kezdőelemből a $cs_{n+1} = 2cs_n - 1$ képlettel – úgynevezett *rekurzió*val – számolhatók.

az explicit képlet

A rekurzív képlet hátránya, hogy a sorozat egy tagjának kiszámolásához az összes korábbi tagot meg kell határozni. Szeretnénk olyan formulát – úgynevezett *explicit* képletet – találni, amely n értékével fejezi ki cs_n értékét.

A sorozat első néhány tagjának konkrét értékéből megsejthetjük ezt a képletet.

Állítás: $cs_n = 2^n + 1$.

Az állítást teljes indukcióval igazoljuk.

I. Az állítás teljesül-e a legkisebb szóbajövő elemre?

Igen, $n = 0$-ra $cs_n = cs_0 = 2$, a fenti képletben pedig $2^n + 1 = 2^0 + 1 = 1 + 1 = 2$.

II. Ha az állítás teljesül $n = k$-ra, akkor biztosan teljesül-e $n = (k+1)$-re is?

Igen, ha $cs_k = 2^k + 1$, akkor a rekurzió szerint

$$cs_{k+1} = 2 \cdot (2^k + 1) - 1 = (2 \cdot 2^k + 2) - 1 = 2^{k+1} + 1,$$

ami pont az állítást adja $n = (k+1)$-re.

az explicit képlet másik magyarázata

Felejtsük el a jobb szélen álló csipeszt! Így a szabályt is módosíthatjuk: most minden csipesztől jobbra (meghatározott távolságra, de a darabszám szempontjából ez lényegtelen) kell elhelyeznünk egy-egy új csipeszt. Így a csipeszek száma minden lépésben duplázódik. Ha eredetileg 1 csipesz volt (a bal szélen), akkor az n-edik lépés után 2^n darab lesz. Az eredeti feladatban tehát $cs_n = 2^n + 1$.

A 8.2. feladat megoldása

Írjuk fel a számokat kettes számrendszerben! $2048 = 2^{11}$, tehát 11 bittel minden szóba-jövő szám felírható. Alább csak 31-ig számolunk öt bittel:

00001	00010	00011	00100
00101	00110	00111	01000
01001	01010	01011	01100
01101	01110	01111	10000
10001	10010	10011	10100
10101	10110	10111	11000
11001	11010	11011	11100
11101	11110	11111	

Az első menetben a páratlan számokat húztuk ki, tehát azokat, amelyek utolsó bitje 1. A megmaradt szám utolsó bitja tehát 0 lesz.

00001	00010	00011	00100
00101	00110	00111	01000
01001	01010	01011	01100
01101	01110	01111	10000
10001	10010	10011	10100
10101	10110	10111	11000
11001	11010	11011	11100
11101	11110	11111	

Ezután a páros helyen álló számokat töröljük, tehát azokat, amelyekben a jobbról második bit 0. Megmaradnak azok, amelyekben a jobbról második bit 1.

00001	00010	00011	00100
00101	00110	00111	01000
01001	01010	01011	01100
01101	01110	01111	10000
10001	10010	10011	10100
10101	10110	10111	11000
11001	11010	11011	11100
11101	11110	11111	

Megint a páratlan helyen álló számok törlése következik, tehát azoké, amelyekben a jobbról harmadik bit 0. Megmaradnak azok, amelyekben a jobbról harmadik bit 1.

00001	00010	00011	00100
00101	00110	00111	01000
01001	01010	01011	01100
01101	01110	01111	10000
10001	10010	10011	10100
10101	10110	10111	11000
11001	11010	11011	11100
11101	11110	11111	

Most a páros helyen álló számokat töröljük, tehát azokat, amelyekben a jobbról negyedik bit 1-es. Megmaradnak azok, amelyekben a jobbról negyedik bit 0.

Innentől kezdve már azok a számok maradnak meg, amelyekben a jobbról számítva páratlanadik bit 1-es, míg a jobbról számítva párosadik bit 0-ás.

Ezt teljes indukcióval igazolhatjuk. A legutóbbi két lépésben pont ezt láttuk.

Tegyük fel most, hogy az előbb egy párosadik lépés volt, tehát azokat a számokat töröltük, amelyekben a jobbról párosadik jegy 1-es és megmaradtak azok a számok, amelyekben a jobbról párosadik jegy a 0. Ezek közül a legkisebb nem is tartalmaz több bitet, de elé tehetünk egy 0-t, mint ahogy a fenti táblázatokban is „kipótoltuk” elől a rövid számokat 0-kkal. Most a páratlanadik számokat töröljük, tehát ezzel kezdjük, azaz kitöröljük azokat a számokat, amelyekben a következő, tehát jobbról páratlanadik helyen álló bit 0-s, megmaradnak ezen a helyen az 1-esek.

Ha viszont legutóbb egy páratlanadik lépés volt, tehát azokat a számokat töröltük, amelyekben a jobbról páratlanadik jegy 0-ás és megmaradtak azok a számok, amelyekben a jobbról páratlanadik jegy az 1. Ezek közül a legkisebb nem is tartalmaz több bitet, de elé tehetünk egy 0-t. Ez a szám most meg is marad, mert a páros helyen álló számokat töröljük, tehát azokat, amelyekben az új, tehát párosadik heylen álló bit 1-es és megmaradnak itt a 0-k.

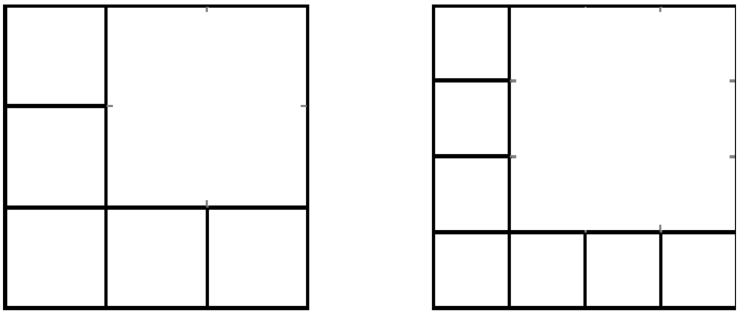
Ennek alapján a legutoljára megmaradt szám a

$$10101010110_2 = 1366_{10}.$$

A 8.3. feladat megoldása

a) Négyzetszám számú darabra nyilván felosztható, így pl. 4 darabra is.

Ha a keletkező négyzetek közül egyet 4 darabra osztunk, azzal 3-mal tudjuk növelni a részek számát. (Így tetszőleges $n = 3k + 1$ alakú számra – pl. 7-re – fel tudjuk osztani.)



6 8

6 vagy 8 részre is fel tudjuk osztani (lásd a 16.8. ábrát). Így ha már 6, 7. és 8 darabra fel tudtuk darabolni a négyzetünket, és 3-mal tudjuk növelni a részek számát, akkor 3-mal növelve a részek számát 6-tól kezdve akárhány (így 2010) négyzetre feldarabolható egy négyzet.

Megjegyzés a 8.3. a) feladat megoldásához

Észrevehetjük, hogy a 6 és a 8 mintájára (4-től kezdve) akármilyen páros darabszámra feldarabolható a négyzetünk, 3-mal való növeléssel megkapjuk 7-től kezdve a páratlan darabszámokat is.

Könnyen bizonyítható, hogy 2 vagy 3 négyzetre nem darabolható fel egy négyzet, (minden csúcsra illeszkednie kell valamelyik darabnak). Arra, hogy 5 darabra sem, érjük be a szemléleten alapuló indoklással.

b) Bármilyen háromszög felosztható 2 derékszögű háromszögre, ha a leghosszabb oldalához tartozó magasságvonalát behúzzuk. Ez az eljárás folytatható, így egy tetszőleges háromszöget akárhány derékszögűre felbonthatunk.

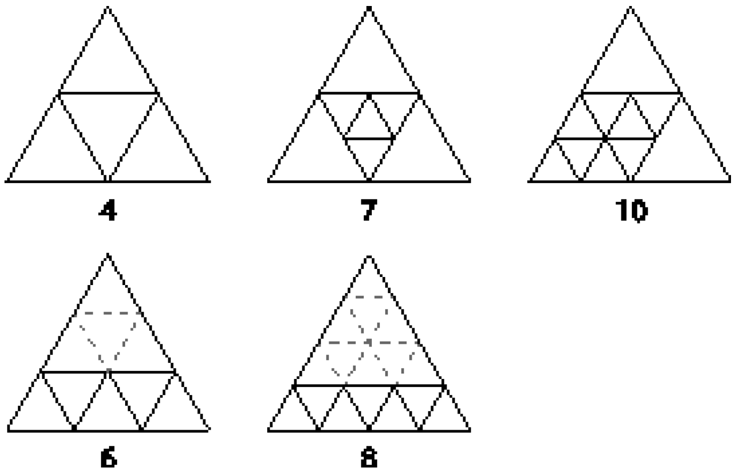
c) A négyzet négyzetekre darabolásának minden esetének megfeleltethető a szabályos háromszög szabályos háromszögekre való darabolása (lásd a 16.8. feladatot).

Megjegyzés a 8.3. c) feladat megoldásához

Ebből újabb szemléltetést kaphatunk arra, hogy az első n páratlan szám összege n^2, ugyanis ha minden oldalt n részre osztunk, és az osztópontokat összekötjük az oldalakkal, párhuzamos szakaszokkal, akkor éppen n^2 darab szabályos háromszöget kapunk, melyeket soronként összeszámolva a páratlan számok összegét kapjuk.

d) A c)-hez analóg módon járhatunk el.

e) Minden háromszöget feldarabolhatunk 2 derékszögű háromszögre, és minden derékszögű háromszöget – a derékszögű csúcsot az átfogó felezőpontjával összekötve (Thalész-tétel) – 2 egyenlőszárú háromszögre. Így minden háromszöget fel tudunk darabolni 4



egyenlőszárúra, és ezt folytatva 3-mal tudjuk növelni a részek számát. (Tehát minden $(3k+1)$ alakú megvan.)

Hat egyenlőszárú háromszöget kaphatunk pl. úgy. hogy a beírt kör középpontját összekötjük az oldalakkal való érintési pontokkal és ezeket egymással (felhasználva, hogy a körhöz húzott érintőszakaszok egyenlők). (Tehát 6-tól kezdve minden $(3k)$ alakú megvan).

8-at (vagy akár már 5-öt is) pedig pl. úgy, hogy a legrövidebb oldalt felmérjük valamelyik hosszabb oldalra, a megmaradó háromszöget pedig felosztjuk 7 egyenlőszárú háromszögre. (Ha szabályos volt a háromszögünk, akkor ez nem megy, de szabályos háromszögre már láttuk, hogy felosztható 8 szabályos – így egyenlőszárú – háromszögre).

16.9. Az információ mennyisége – feladatok megoldása

A 8.1. feladat megoldása

Ha a vándor s_1 utat tett meg sík talajon, azután s_2 utat hegynek felfelé, akkor visszafelé menet is s_1 utat tett meg sík talajon, és s_2 utat lefelé. Az ehhez szükséges idő 5 óra volt, így

$\frac{s1}{4} + \frac{s2}{3} + \frac{s2}{6} + \frac{s1}{4} = 5$ óra.

Ebből $s_1 + s_2 = 10$ km, vagyis összesen 20 km-t tett meg.

Az, hogy látszólag kevés az adat, és mégsem, azon múlik, hogy a megadott sebesség adatok közül az egyik (a sík talajon való) éppen harmonikus közepe a másik kettőnek.

A 8.2. feladat megoldása

a)

Egy vágás nem elég. Első nap ugyanis 1-et kell fizetnünk, így csak egy 1-es és egy 6 egység hosszú darab lenne jó, de második nap így nem tudnánk fizetni.

Két vágás elég. Ha darabjaink hossza: 1, 2 és 4 cm, akkor 1-től 7-ig minden összeg fizethető. Az n összeg felírása az n kettes számrendszerbeli alakjának felel meg.

Megjegyzés

Másképp nem is végezhetjük el a két vágást. Csak az $1-3-3$-as felosztás jönne szóba, de azzal 2 nap nem fizethető ki.

b) Mit jelent az, hogy „variáljuk, folytassuk a feladatot!”?

Ennek a feladatnak két adata van: hány napig maradunk, hányszor kell vágni. Az előbbi adott, az utóbbi a meghatározandó. Változtathatjuk az adott paramétert:

c) Hányszor kell vágni, ha 2010 napi akar maradni (és 2010cm-es az aranyrúd)?

Kicserélhetjük az adott és a meghatározandó paramétert:

d) Hány napig maradhat, ha 3-szor vághat (tehát négy darabot hozhat létre) és annyi cm hosszú rudat vihet, ahány napig maradni akar?

Módosíthatjuk a feltételeket is, de lehet, hogy matematikailag teljesen érdektelen kérdéshez jutunk. Pl

e) Hányszor kell vágni, ha 7 napig akar maradni, naponta kell fizetnie, de a fogadós nem tud visszaadni (a megkapott rúddarabokat beteszi a bankba)?

Alább csak a c) feladattal foglalkozunk.

8.2. c) feladat megoldása

Tíz vágással megoldható a feladat. Az első tíz rész hossza:

$$2^0=1,\quad 2^1=2,\quad 2^2=4,\quad 2^3=8,\quad 2^4=16,\quad 2^5=32,$$

$$2^6=64,\quad 2^7=128,\quad 2^8=256,\quad 2^9=512.$$

Ezekkel – a kettes számrendszer alapján – kifizethető minden összeg 1-től

$$1+2+4+8+\ldots+512=1024-1=1023$$

-ig. A rúdból így megmaradt egy $2010-1023=987$ egység hosszú rész. Ha ehhez hozzátesszük a többi darab segítségével előállított $1, 2, 3, 4, \ldots 1023$ nap kifizetésének megfelelő összegeket, akkor minden egyes nap kifizetését megoldjuk.

Kilenc vágással csak 10 darab jön létre. Minden kifizetés a 10 darabból néhány kiválasztását (amelyekkel fizetünk) jelenti. A 10 elemű halmaznak azonban csak $2^{10}=1024$ részhalmaza van (ráadásul ezek egyike az üres halmaz, és különböző halmazok esetleg azonos értékű összeget is jelenthetnek) így 2010-nél biztosan kevesebb fajta összeg állítható elő belőlük.

Megjegyzés

Ha n napig akarunk maradni, akkor az n cm hosszú rudat kb $\log_2 n$ részre kell vágni.

A 8.3. feladat megoldásai

A 8.3. a) mego.

Egy vágással megoldható a probléma. Ha a sorban 3. láncszemet vágjuk el, akkor a lánc három részre esik, egy kettő és egy négy láncszemből álló részre és az egy darab elvágott láncszemre. Ezekkel a kettes számrendszer alapján kirakható mindegyik összeg 1-től 7-ig.

A 8.3. c) mego.

Ha két szemet elvágunk, akkor lesz eleve két 1-es darabunk és a közöttük levő legfeljebb három rész.

Ha a következő legkisebb darab 4-es lenne, akkor 3-as összeget nem lehetne kifizetni. Tehát a következő legkisebb darab mérete háromféle lehet: 1-es, 2-es vagy 3-as. Nézzük meg, hogy ezekben az esetekben mely összegek fizethetők ki (a már meglevő két 1-essel):

$$H_1 = \{1, 2, 3\}, \qquad H_2 = \{1, 2, 3, 4\}, \qquad H_3 = \{1, 2, 3, 4, 5\}.$$

Látható, hogy a két 1-essel és a 3-assal kifizethető összegek halmazának valódi részhalmaza a másik két esetben nyert halmaz. Így nem fordulhat elő, hogy harmadik legkisebb elemnek érdemes legyen az 1-est vagy a 2-est venni a 3-as helyett. Valóban, ha a későbbeikban választott lánchosszakkal kifizethető összegek halmaza G, akkor az összes láncdarabbal kifizethető összegek a az

$$F_i = \{h + g | h \in H_i, g \in G\}$$

halmaz elemei és itt $H_1 \subset H_3$-ből illetve $H_2 \subset H_3$-ból nyilván következik, hogy $F_1 \subset F_3$ illetve $F_2 \subset F_3$.

Az 1, 1, 3 hosszúságú láncdarabokból nem fizethető ki 6 szemnyi összeg (azaz $6 \notin H_3$) így bővítésnek hozzá kell venni egy legfeljebb 6 hosszú darabot. Ha épp egy 6-ost veszünk hozzá, akkor a

$$1, \quad 2, \quad 3, \quad 4, \quad 5, \quad 6, \quad 7, \quad 8, \quad 9, \quad 10, \quad 11$$

összegek mind kifizethetők lesznek, ennél rövidebb darab hozzávétele esetén a fenti halmaznak csak egy valódi részhalmaza lesz kifizethető. A fenti módon most is megmutatható, hogy nem érdemes a 6-nál rövidebb darab hozzávétele.

Hasonlóan mutatható meg, hogy az utolsó darab leghosszabb lehetséges és egyben legoptimálisabb mérete a 12. Így 1-től 23 minden összeg kifizethető lesz. Tehát a vándor $n = 23$ esetén (és ennél kisebb n-ekra) maradhat n hosszú lánccal 1-től n napig bárhány napra, ha maximum két szemet vághat ketté.

A 8.3. b) mego.

Egy szem átvágásával csak legfeljebb három rész keletkezik és három tagból csak $2^3 - 1$ valódi összeg képezhető, így nem fizethető ki 20-ig minden összeg. Két szem átvágásával megoldható a kifizetés, pl ha a részek hossza 1, 1, 3, 6 és 9. Valóban, láttuk, hogy az első néggyel 1-től 11-ig minden összeg kifizethető, és ha ezek mindegyikéhez hozzávesszük még a 9-est, akkor 10-től 20-ig is minden összeg kifizethető lesz.

A 8.3. d) mego.

Ha k szemet elvág a vándor, akkor van eleve k szeme, azaz k darab „1 hosszúságú láncdarabja", amivel fizethet és létrejön még $k+1$ láncdarab.

A $(k+1)$ az a legkisebb mennyiség, ami nem fizethető ki a k szemmel. Ha nem lenne a k szemen kívül egy legfeljebb $(k+1)$ hosszú láncdarab, akkor a $(k+1)$ mennyisége nem lehetne kifizetni. A A 8.3. c) fel. megoldásában leírt módon bizonyítható, hogy nem lehet érdemes a $(k+1)$ hosszú darabnál rövidebb darabot választani.

Van tehát k szemünk, egy $(k+1)$-hosszú láncunk és még k láncdarabunk. Most $k + (k+1) + 1 = 2(k+1)$ az a legkisebb mennyiség, amit a már meglevő szemekkel és darabbal nem tudunk kifizetni, tehát az előzőekhez hasonlóan látható, hogy egy ilyen hosszú láncdarabot érdemes választani a maximális eset megkereséséhez.

Teljes indukcióval igazolható, hogy a k szem mellett a $(k+1)$ darab hossza az optimális elrendezésben

$$(k+1), \qquad 2(k+1), \qquad 4(k+1), \qquad \ldots, \qquad 2^i(k+1) \qquad \ldots \qquad 2^k(k+1),$$

és a leghosszabb vállalható időszak ezek összege: $2^{k+1}(k+1) - 1$ nap.

Valóban, ha valamely i-re (pl fent $i = 1$-re) már láttuk, hogy a k szem mellett a maximális elrendezés legrövidebb darabjainak hosszai $(k+1)$, $2(k+1)$, $\ldots$,$2^i(k+1)$, amelyekkel az 1, 2, $\ldots 2^{i+1}(k+1) - 1$ összegek mind kifizethetők, akkor a már látott módon indokolható, hogy egy $2^{i+1}(k+1)$ hosszú darabot érdemes választanunk, és ezzel a

$$2^{i+1}(k+1), 2^{i+1}(k+1)+1, \ldots, 2^{i+1}(k+1) + 2^{i+1}(k+1) - 1 = 2^{i+2}(k+1) - 1$$

összegek is mind kifizethetők.

Tehát k vágással maximum $2^{k+1}(k+1) - 1$ napig maradhat a vándor, ha minden egyes napon fizetnie kell.

A 8.4. feladat megoldása

Érdemes a többféle mérési stratégiát összehasonlítani mielőtt kiderülne, hogy 1 mérés elég.

Ha ugyanis pl. az első ládából 1, a másodikból 2, a harmadikból 3 db. stb. érmét teszünk a mérlegre, akkor a „túlsúly” az $1 + 2 + 3 + \ldots + 10 = 55$-höz képest elárulja, melyik ládában van a hibás súly.

Megjegyzés a 8.4. feladathoz

A feladat többféleképpen is módosítható. Meggondolható pl., hogy mi a helyzet akkor, ha több ládában is lehetnek hibás súlyok, de egy ládában csak egyfélék. Ekkor persze az egy-egy ládában levő súlyok darabszámát érdemes „elég sokra” megnövelni. Ilyenkor is elég egy mérés. (Ha különböző 2-hatvány számú érméket veszünk ki az egyes ládákból, akkor a súlytöbblet megint elárulja, hogy melyekben voltak hibásak, ugyanis minden szám egyértelműen áll elő 2-hatványok összegeként.)

A 8.5. feladat megoldása

A mérleg háromféleképp állhat: vagy a bal serpenyője a nehezebb, vagy a jobb, vagy egyensúlyban van, azaz egyenlő súlyok vannak a két serpenyőben. Ha 3-3 súlyt rakunk a két serpenyőbe, akkor jó esetben az egyik nehezebb lesz (ha egyensúlyban vannak, akkor a kimaradó 4 súly között van a hibás). Ebben az esetben a nehezebb súlyok közül 1-et-1-et felrakva megtudjuk, melyik a nehezebb, ha egyensúlyt tapasztalunk, akkor a kimaradó. Ha eredetileg egyensúly volt (a kimaradt 4 súly között volt a hibás), akkor egy méréssel többre van szükség, vagyis 3-ra.

Megjegyzés a 8.5. feladathoz

Érdemes különböző súlyszámokkal is megoldani a feladatot, hogy világos legyen, hogy a 3 hatványai játszanak döntő szerepet. 9 súly esetén 2 mérés elég, 10-nél – mint láttuk – 3 mérés kell, de meggondolható, hogy 3 mérés 11, 12, sőt akár 27 súly esetén is elég.

A 8.1. feladat megoldása

Néhány példa:

Módszer	Példák
Teljes indukció	3.2., 3.7., 4.9., 4.3., 4.2., 4.5., 4.7., 5.2., 5.9., 5.11., 5.2., 6.22., 6.40., 6.41., 6.6., 6.7., 8.1., 8.2., 8.3.
Indirekt	3.2., 4.9., 6.2. a) és b), 6.5., 6.5., 8.1., 9.11., 5.10.
Venn diagram	2.12., 2.13., 2.16., 4.10., 5.3., 5.4., 5.12.
„nincs mo”	2.4., 3.2. p), 3.5., 3.5., 4.4. h), 4.5. a) és b), 4.2. 4.3. b), 5.1. b), 5.2., 6.10. b)
Próbálgatás	2.1., 3.1.
Esetszétvál.	2.6., 2.6., 3.4., 3.5., 3.6.
Táblázat	2.4., 3.5., 4.2., 4.5., 4.6.
Szorzattá	2.17.
Közepek	3.1., 3.2.

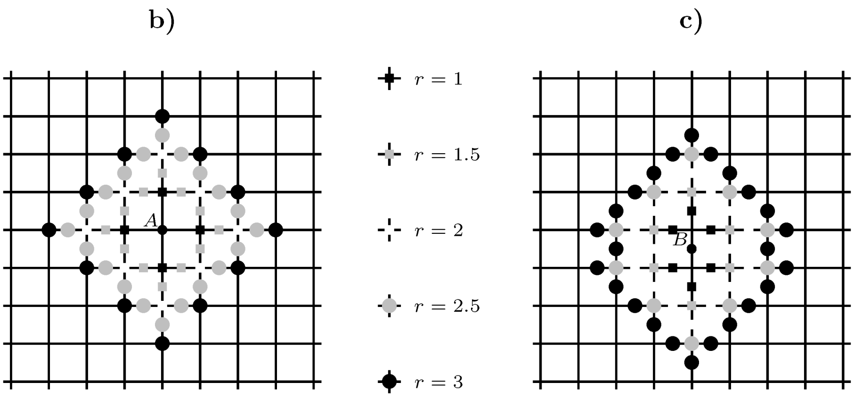
17. fejezet

Geometria feladatok megoldása

17.1. Kutyageometria –megoldások

A 9.1.. mego.

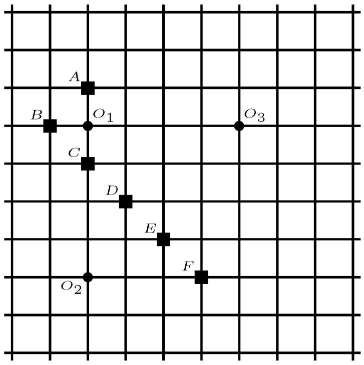
a) $|AB| = 4,5;\qquad |BC| = 3,5;\qquad |CA| = 3.$
b-k) Lásd a 17.1. ábrát!



17.1. ábra.

A 9.2. feladat megoldása

A 17.2. ábráról leolvasható, hogy
a) 1, a C pont;
b) 3, az A, B és C pontok;
c) 4, a C, D, E és F pontok.



17.2. ábra.

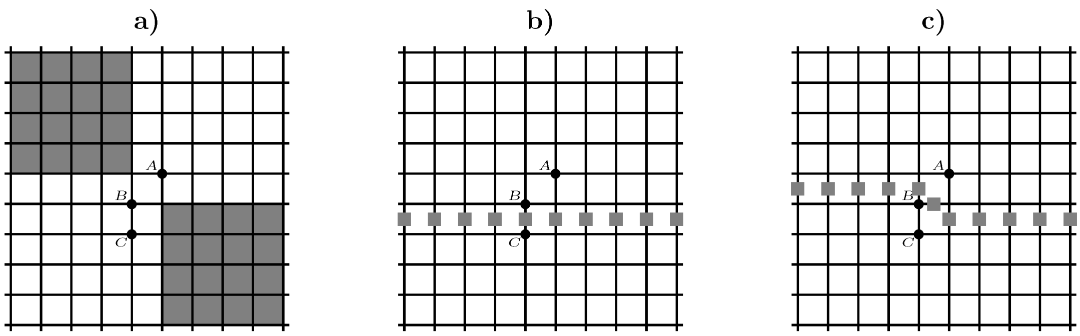
A 9.3. feladat megoldása

a) Két (zárt) síknegyed összes (a rácsvonalakra eső) pontja megfelelő;

b) Egy euklideszi egyenes rácsvonalakkal való metszéspontjai adják a mértani helyet;

c) Két ellenkező állású euklideszi félegyenes és a végpontjaik közti szakasznak a rácsvonalakkal való metszéspontjai alkotják a mértani helyet.

Lásd a 17.3. ábrát!



17.3. ábra.

d) Megfelelők az $(n; 3,5)$ koordinátájú pontok, ahol $n \geq 5$ egész szám.

e) Igen, pld. $A(5,5)$, $C(4,3)$, $D(6,3)$.

f) Igen, lásd a d) feladatot.

g) Igen, pld. $A(5,5)$, $C(4,3)$, $D(6,4)$.

A 9.4. fel. eredménye

igaz.

A 9.5. fel. eredménye

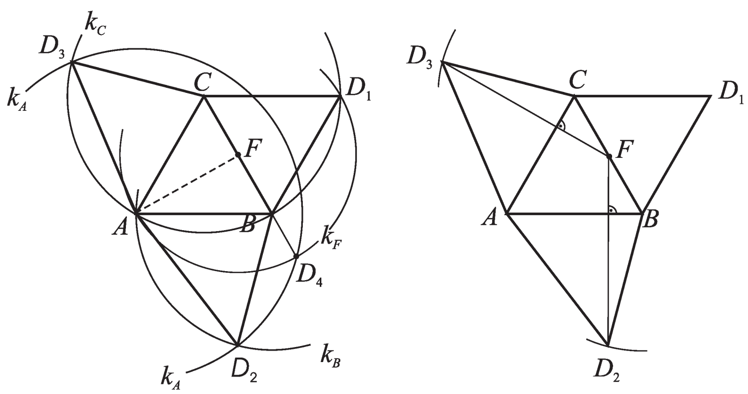
lehet.

17.2. A térgeometria elemei – megoldások

A 9.1. feladat megoldásai

A 9.1. a) mego.

A test magassága legfeljebb akkora lehet, mint bármelyik oldallapjának magassága. A szabályos háromszög oldallapot tehát úgy kell felhajtanunk, hogy merőlegesen álljon az alaplapra.



17.4. ábra.

Jelölje az alap csúcsait A, B és C, a piramisnak az alappal szemközti csúcsát a térben D, és az oldallapoknak az ABC háromszög síkjában kiterített hálójának csúcsai legyenek BCD_1, ABD_2 és CAD_3 (lásd a 17.4. ábrát). Legyen BCD_1 a szabályos háromszög alakú oldallap! Az A, B, C, D_1 pontokat tehát adottnak tekinthetjük, a feladat D_2 és D_3 megszerkesztéséből áll.

$BD = BD_1 = BD_2$, tehát D_2 a B középpontú BD_1 sugarú k_B körön van, míg D_3 a C középpontú CD sugarú k_C körön.

Innen kétféle befejezést is adunk. Első eljárásunkban megszerkesztjük az AD távolságot.

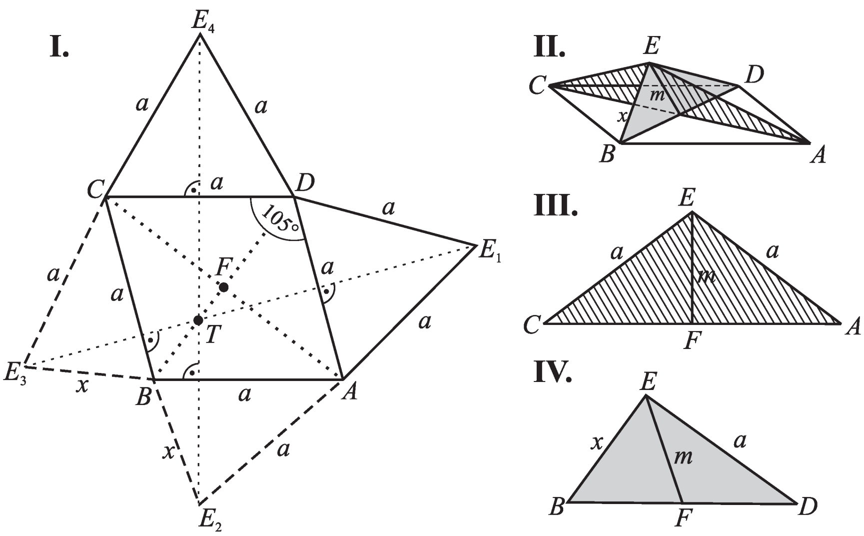
Forgassuk le az AFD háromszöget az AF tengely körül az alapsíkba. $AF \perp FD$ és $AF \perp FB$, így D a forgatásnál a BC egyenes egy D_4 pontjába kerül. Az alapsíkban dolgozva D_4-et az F középpontú FD_1 sugarú k_F kör metszi ki BC-ből. Az $AD_4 = AD$ sugarú A középpontú k_A körnek a k_B, k_C körökkel való metszéspontja lesz D_2 ill. D_3. (A megoldásban sehol sem kellett törődni az ábrába nem berajzolt másik metszéspontokkal, mert azok mindig az eredetivel egybevágó megoldást adtak.)

A második gondolatmenetben azt vesszük figyelembe, hogy a BD_2A palástdarab felhajtásakor a D_2 pontnak az F pont feletti D pontba kell kerülnie. A felhajtás egy AB tengely körüli folyamatos forgatás, aminek során D_2 olyan pályát ír le, hogy az alapsíkra való merőleges vetülete az AB forgástengelyre merőleges egyenesen mozog. Ezek szerint $FD_2 \perp AB$, így D_2-t az F pontból az AB egyenesre állított merőleges egyenes metszi ki k_B-ból.

Ehhez hasonlóan szerkeszthető a D_3 pont is.

A 9.1. b) mego.

Legyen a piramis alapja az a oldalú $ABCD$ rombusz, $CDA\angle = 105°$, a piramis alappal szemközti csúcsát jelölje E, az alapsíkba kiterített oldallapok legyenek ADE_1, BAE_2, CBE_3 és DCE_4 (lásd a 17.5. ábrát).



17.5. ábra.

Legyenek ADE_1 és DCE_4 a szabályos háromszögek. Az A, B, C, D, E_1, E_4 pontokat tehát adottnak tekinthetjük, az E_2, E_3 pontokat kell megszerkesztenünk. Ehhez rendelkezésünkre állnak az $AE_2 = CE_3 = a$ sugarú A ill. C középpontú körök.

Innen kétféle befejezést is adunk. Első eljárásunkban megszerkesztjük a $BE_2 = BE_3 = x$ szakaszt, ami után E_2 és E_3 a megfelelő körök metszéspontjaként könnyen adódik.

Az AEC, BED térbeli háromszöglapok közös része egy m szakasz, melynek egyik végpontja az AC, BD szakaszok közös F felezőpontja. Az AEC háromszögben m súlyvonal, így m az AEC-vel egybevágó ABC háromszögből épp BF-nek adódik.

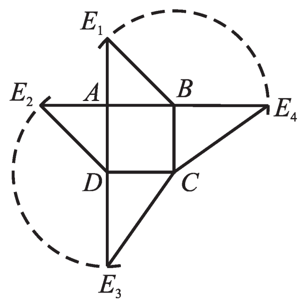
A BDE háromszöget (illetve egy azzal egybevágó háromszöget a síkban) könnyen megszerkeszthetünk, hiszen adott benne BD, $DE = a$ és az E-hez tartozó m súlyvonal. A $BE = x$ szakaszt ezzel elő is állítottuk.

A második gondolatmenetben az E csúcsnak az alapsíkra való T merőleges vetületét keressük meg és használjuk fel. Vegyük észre, hogy a DE_1A, CE_4D palástdarabok felhajtásakor, tehát a DA illetve CD tengelyek körüli forgatáskor E_1 illetve E_4 a T pont „fölé" kerül. A forgatás során E_1 és E_4 alapsíkra vonatkozó merőleges vetülete egy-egy DA-ra illetve CD-re merőleges egyenesen mozog. Ezek szerint T az E_1-ből DA-ra és az E_4-ből CD-re állított merőleges egyenesek metszéspontja.

E két egyenes meghosszabbítására illeszkedik E_3 illetve E_2. Ennek igazolásához csak a CE_3B, BE_2A lapok „felhajtását" kell meggondolnunk és a BA, CD illetve a CB, DA egyenesek párhuzamosságát kell figyelembe vennünk.

A 9.1. c) mego.

Az $ABCDE$ piramis kiterített vázát szerkesztjük meg. Az $ABCD$ alapnégyzetet könnyen megrajzolhatjuk, majd emellé kell megkeresnünk az ABE, DAE, CDE, BCE oldallapok ABE_1, DAE_2, CDE_3, BCE_4 kiterített megfelelőit (lásd a 17.6. ábrát). A szerkesztés lépései:



17.6. ábra.

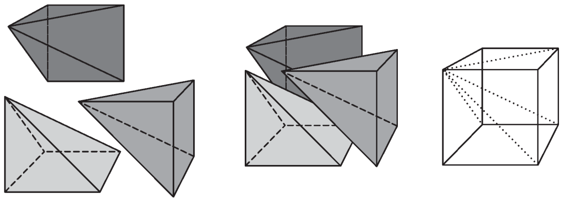
1. Az AB, AD oldalakra egy-egy derékszögű, egyenlő szárú háromszöget szerkesztünk: BAE_1 és DAE_2.

2. Az E_3 csúcs a CD él körüli forgatáskor (felhajtáskor) az A fölötti E csúcsba kerül, ezért E_3 az AD egyenesen van, D-től A-val ellenkező irányban. Másrészt $DE = DE_2 = DE_3$, tehát E_3 a D középpontú DE_2 sugarú körre is illeszkedik. A kör és a félegyenes metszéspontjaként kapjuk az E_3 pontot.

3. Hasonlóan szerkeszthető az E_4 pont.

A 9.1. d) mego.

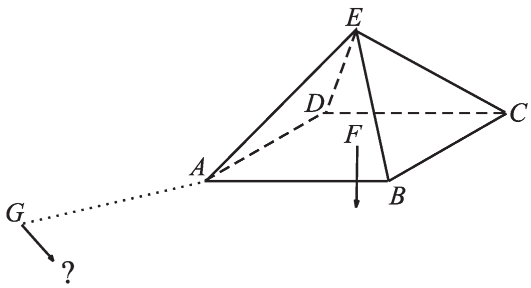
Lehetséges, a három piramisból kaphatunk egy kockát (lásd a 17.7. ábrát). Ehhez úgy kell összeilleszteni őket, hogy a három piramisban a négyzetlappal szemközti csúcs (E) ugyanott legyen.



17.7. ábra.

A 9.1. e) mego.

A 17.8. ábrán az AEC, ABC háromszögek egybevágóak, hiszen megfelelő oldalaik egyenlők. Így AEC is egyenlő szárú derékszögű háromszög, benne $FE = FA$ ($= FB$). Így $FG = FA + AG = 70 + 77 = 147$ cvimedli. A kút alja a G, F pontokkal félszabályos háromszöget alkot, így a ferde alagút hossza $2 \cdot 147 = 294$ cvimedli.

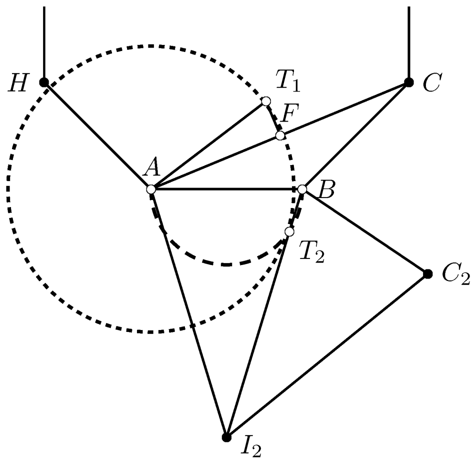


17.8. ábra.

A 9.1. f) mego.

Az $ABCDEFGH$ szabályos nyolcszög alapú gúla csúcsa legyen I. Ha az AIB egyenlő szárú háromszögben az A csúcsból induló magasság talppontja a BI oldalon T, akkor ez egyben a BIC egyenlő szárú háromszög C-ből induló magasságának talppontja is. Az AIB, BIC lapok szöge az $AIC\angle$.

Ha az AC szakasz felezőpontja U, akkor az AUT háromszög szögei: $AUT\angle = 90°$, $UTA\angle = 75°$, $TAU\angle = 15°$. Forgassuk le az ATU háromszöget az AC egyenes körül az alapsíkra (lásd a 17.9. ábrát), legyen itt T képe T_1. Az AUT_1 háromszög szerkeszthető, hiszen A, U adott és a háromszög szögei is szerkeszthetők.



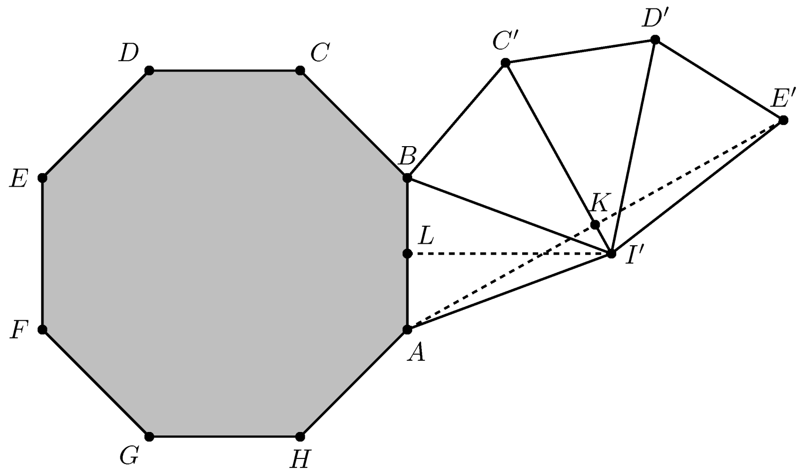
17.9. ábra.

Másrészt terítsük ki az AIB, BIC lapokat az alapnyolcszög síkjába úgy, hogy az AIB lap az AB oldal mellé kerüljön – a síkban ez az AI_2B háromszög – és hozzá illeszkedjen az AI_2 szakasz mellett a BIC lap kiterített változata, a síkon BI_2C_2. A T pont kiterített képe az AI_2B háromszög A-ból induló magasságának T_2 talppontja. Ez a pont az A középpontú T_1-en átmenő kör és az AB szakasz Thalesz körének metszéspontja. Ebből T_2 szerkeszthető és a CT_2 egyenes meghúzásával és annak az AB felezőmerőlegesére való tükrözésével megszerkeszthető az AI_2B oldallap és ebből kiindulva könnyen befejezhető a teljes palást is.

A 9.1. g) mego.

Terítsük ki az $ABCDEFGH$ szabályos nyolcszög alapú I csúcsú szabályos gúlát úgy, hogy ABI, BCI, CDI, DEI oldallapjai rendre egymás mellé kerüljenek, tehát a kiterítésnél az A, B, C, D, E, I pontoknak rendre az A, B, C', D', E', I' pontok, az ABI, BCI, CDI, DEI háromszöglapoknak a ABI', $BC'I'$, $C'D'I'$, $D'E'I'$ háromszögek feleljenek meg a 17.10. ábra szerint. Az A és E közti legrövidebb felületi vonalnak az AE' szakasz felel meg. Legyen még L az AB, K az AE' szakasz felezőpontja és jelölje az oldallapok csúcsszögének felét α, tehát $AI'L\angle = \alpha$, míg $AI'K\angle = 4\alpha$.

Ha a gúla alapéle $AB = a$ a legrövidebb felületi távolság A és E közt (az ábrán AE') b, míg a gúla oldaléle $AI = AI' = r$, akkor az $AI'K$ háromszögben $\sin\alpha = \frac{a}{2r}$, míg az



17.10. ábra.

$AI'K$ háromszögben $\sin 4\alpha = \frac{b}{2r}$, tehát

$$\frac{b}{a} = \frac{\sin 4\alpha}{\sin \alpha} = 8\cos^3\alpha - 4\cos\alpha.$$

A konkrét esetben – $a = 51,2$ és $b = 145,5$ – a $\cos\alpha$-ra harmadfokú egyenlet megoldható pld a WolframAlfa webes kalkulátor segítségével: az egyetlen valós gyök a $\cos\alpha = \frac{15}{16}$. Ebből $\sin\alpha = \frac{\sqrt{31}}{16}$ és így az $AI'L$ háromszögből

$$AI' = r = \frac{a}{2\sin\alpha} = \frac{512}{\sqrt{31}} \approx 73,5663.$$

A gúla valóban létrejön, mert $\alpha \approx 20,36° < 360°/16$ és ilyenkor a legrövidebb felületi AE távolság valóban négy szomszédos oldallapon megy végig, mint a 17.10. ábrán.

A 9.2. fel. eredménye

Nem.

A 9.3. feladat megoldása

2 vagy 4 részre könnyű felosztani a tortát.

Belátható, hogy ha a fedőlap kerületét n egyenlő részre osztjuk, és az osztópontokat a fedőnégyzet középpontjával összekötve vágunk a fedőlapra merőlegesen, akkor a kívánt tulajdonságú darabokat kapjuk akármilyen n pozitív egész szám esetén.

17.3. Egyszerűbb számítási feladatok – megoldások

A 9.1. fel. eredménye

a) $\frac{\alpha+\beta}{2}$.

b) A két egyenes által határolt szögek $(\alpha+\beta)$ és $180° - (\alpha+\beta)$ nagyságúak, ezek közül a nem nagyobbik a két magasságvonal egyenesének szöge.

c) A körülírt kör középpontja bármelyik két csúccsal egyenlő szárú háromszögeket alkot. Ezekkel számolva – külön vizsgálva azt az esetet, amikor a középpont a háromszögön kívül vagy annak valamelyik oldalán helyezkedik el – kapjuk eredményül a 2γ szöget.

Természetesen hivatkozhatunk a kerületi és középponti szögek tételére is vagy ebből a feladatból indulva igazolhatjuk a tételt.

d) $\left|\frac{\beta-\gamma}{2}\right|$.

A 9.2. fel. egy megoldási ötlete

Vetítsük az ábrát merőlegesen a két kimaradt (szemköztes) oldalra merőleges egyenesre.

a 9.3. feladat megoldása

A szárak meghosszabbításának metszéspontja az egyik alappal is és a másik alappal is derékszögű háromszöget alkot. Thalesz tételének megfordítása szerint ennek a metszéspontnak bármelyik alap felezőpontjától való távolsága azon alap hosszának fele. Ebből azonnal adódik a feladat állítása.

A 9.4. feladat megoldása

A paralelogramma szomszédos szögeinek összege 180°, így feleik összege 90°, ezért a szögfelezők alkotta négyszög – ha létrejön – téglalap. Thalesz tétele szerint a paralelogramma bármely oldala felezőpontjának távolsága az oldal végpontjaiból induló szögfelezők metszéspontjától az oldal hosszának felével egyenlő. Ráadásul e két pontot összekötő egyenes – a szögekkel való számításból könnyen adódik – párhuzamos a paralelogramma oldalaival, azaz a létrejövő téglalap bármelyik átlójának egyenese egybeesik a paralelogramma megfelelő szemköztes oldalainak felezőpontját összekötő egyenessel. Ebből azonnal adódik a feladat állítása.

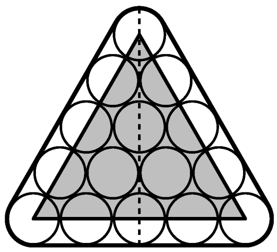
A 9.5. feladat megoldása

Lásd Laczkó László „Ismételjük a geometriát egy feladaton keresztül!” című írását a

http://matek.fazekas.hu/portal/tanitasianyagok/Laczko_Laszlo/geoism/geoism.html weboldalon, ahol jelenleg 19 különböző megoldás olvasható erre a példára.

A 9.6. feladat megoldása

A szélső golyók középpontjai egy szabályos háromszöget határolnak (lásd a 17.11. ábrát). E szabályos háromszög oldala a golyók r sugarának nyolcszorosa, Magassága pedig az AH szakasz hosszánál $2r$-rel kisebb.



17.11. ábra.

A szabályos háromszög magasságának és oldalának aránya $\frac{\sqrt{3}}{2}$, azaz:

$$8r \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = AH - 2r,$$

amiből

$$r = \frac{AH}{4\sqrt{3}+2} \approx 19 \text{ mm}.$$

A biliárdgolyó átmérője kb 38 mm.

17.4. Összetett számítási feladatok – megoldások

A 9.1. feladat megoldása

Legyen a nagy szabályos háromszög oldalának hossza 2 egység, így területe $\sqrt{3}$ egységnégyzet. Ha egy oldal mentén n kör van, akkor legyen r_n egy kis kör sugara. Így egy oldal hossza

$$2 = \sqrt{3}r_n + 2(n-1)r_n + \sqrt{3}r_n,$$

amiből $r_n = \frac{1}{\sqrt{3}+(n-1)}$. A körök száma $\frac{n(n+1)}{2}$, így a kis körök területének összege:

$$T_n = \frac{\frac{n(n+1)}{2}}{\left(\sqrt{3}+(n-1)\right)^2}\pi, \tag{17.1}$$

míg a kis körök összterületének és a háromszög T területének aránya:

$$\frac{T_n}{T}=\left(\frac{\pi}{\sqrt{3}}\right)\frac{1}{\frac{2(n-1)^2}{n(n+1)}+\frac{4\sqrt{3}(n-1)}{n(n+1)}+\frac{6}{n(n+1)}}=\left(\frac{\pi}{\sqrt{3}}\right)\frac{1}{2+\frac{4\sqrt{3}-6}{n+1}+\frac{8-4\sqrt{3}}{n(n+1)}}. \tag{17.2}$$

a) A kérdezett értékek

$$\begin{aligned}\frac{T_1}{T}&=\frac{\pi}{3\sqrt{3}}&\approx 0,604599788\\ \frac{T_2}{T}&=\frac{3\pi}{\sqrt{3}(\sqrt{3}+1)^2}&\approx 0,729009112\\ \frac{T_3}{T}&=\frac{6\pi}{\sqrt{3}(\sqrt{3}+2)^2}&\approx 0,781349612\end{aligned}$$

b) A (17.2) képletről leolvasható, hogy a területarány n növekedtével szigorúan monoton nő. Kiszámolható, hogy $n=60$ esetén az arány kb $0,899921115$, de $n=61$ esetén már $0,900034929$, tehát legalább 61 kört kell venni egy oldalon, hogy a kis körök területének összege elérje a a háromszög területének 90%-át.

c) A (17.2) képletről leolvasható, hogy a területarány határértéke

$$\frac{\pi}{2\sqrt{3}}\approx 0,9068996821.$$

A 9.2. feladat megoldása

a) Az n-edik hópehely kerülete: $k_n=3\cdot\left(\frac{4}{3}\right)^{n-1}$, így a kérdezett érték $\frac{\ln\frac{2013}{3}}{\ln\frac{4}{3}}+1$ felső egész része, azaz 24.

b) Ha T_n jelöli az n-edik hópehely területét és $T_1=1$, akkor

$$T_2=1+\frac{1}{3},\quad T_3=1+\frac{1}{3}+\frac{4}{9}\frac{1}{3},\quad T_4=1+\frac{1}{3}+\frac{4}{9}\frac{1}{3}+\left(\frac{4}{9}\right)^2\frac{1}{3},\quad \ldots$$

hiszen lépésenként 4-szer annyi oldalszakaszdarab lesz, mint korábban és mindegyiken egy 9-ed akkora terület, mint korábban.

$$\lim_{n\mapsto\infty}T_n=1+\frac{1}{3}\left(1+\frac{4}{9}+\left(\frac{4}{9}\right)^2+\ldots\right)=1+\frac{1}{3}\frac{1}{1-\frac{4}{9}}=\frac{8}{5}.$$

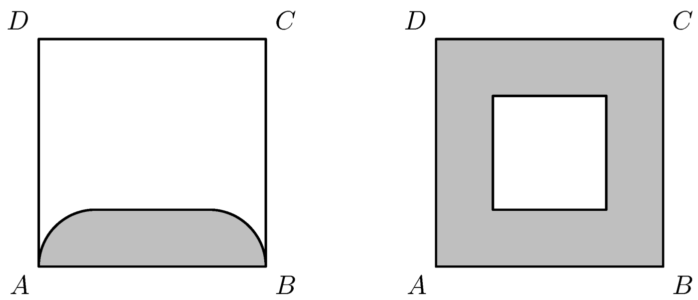
A 9.4. feladat megoldása

A körlapnak két lényegesen különböző elhelyezkedése van: átmérőjének két végpontja vagy a négyzetnek

a) ugyanazon az oldalán van, vagy

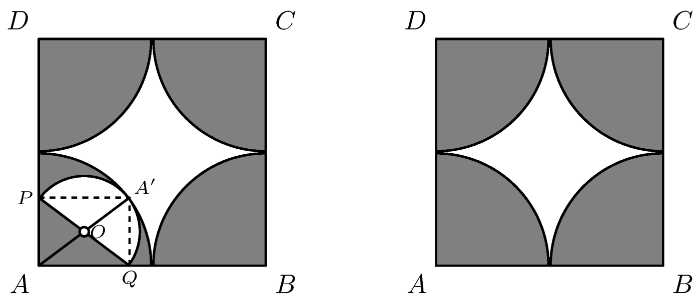
b) két egymásra merőleges oldalán helyezkedik el.

a) Ha az 1 cm sugarú félkört végigtoljuk egy oldal mentén úgy, hogy közben a félkör határoló átmérője végig az oldalra illeszkedik, akkor közben a félkörlap egy olyan tartományt súrol, amely két negyedkörből és egy téglalapból áll. A négy oldalon ugyanezt tekintve egy 1 cm szélességű sávot kapunk a négyzet belseje felé (lásd a 17.12. ábrát).



17.12. ábra.

b) Ha az átmérő egyik végpontja az egyik, a másik végpontja egy másik oldalra illeszkedik, akkor a súrolt tartomány egy 2 cm sugarú negyedkör, melynek középpontja a két oldal találkozási pontja (lásd a 17.13. ábrát). Ezt alább indokoljuk.



17.13. ábra.

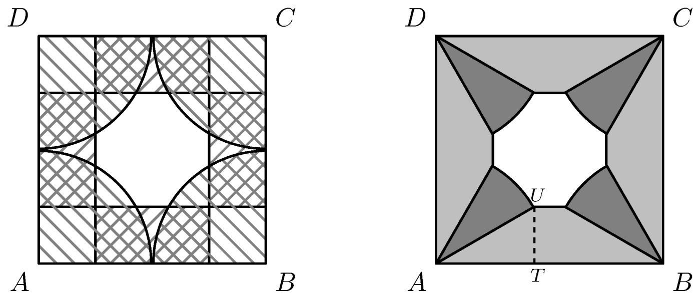
Ha az A csúcs melletti oldalakon fordul a PQ átmérőjű félkörlap, akkor tekintsük a PQ szakasz O felezőpontját, és az A csúcs O pontra vonatkozó A' középpontos tükörképét! PAQ derékszögű háromszög, így $PAQA'$ derékszögű paralelogramma, azaz téglalap. Ebből következően $AA' = PQ = 2$ és $AO = 1$. A PQ átmérő mozgása során a félkörlap

OA' sugara tehát az A körüli 1 és 2 cm sugarú körök közti tartományt söpri végig úgy, hogy A körül forog.

Megmutatható, hogy a félkörlap végigsúrolja az A körüli 1 cm sugarú negyedkörlapot is, de ez most nem lényeges, mert ezt a tartományt már az A)-ban leírt helyzetű körök is fedik.

A háromszögegyenlőtlenség miatt a félkörlap nem lóghat ki az A körüli 2 cm sugarú körből, hiszen a lap minden pontja a körlap O középpontjától legfeljebb 1 cm távolságra van, és $OA = 1$ cm.

Tehát a B) pontban leírt körök valóban a négyzet csúcsai körüli 2 cm sugarú negyedkör tartományokat söprik végig.



17.14. ábra.

Az A)-ban és B)-ben leírt tartományok egyesítését szétbonthatjuk körcikkekre és trapézokra (lásd a 17.14. ábrát). A B)-ben leírt körcikk körívének és az A) pontban leírt tartomány határának egy közös pontja az ábrán látható U pont. Ez a pont 1 cm-re van az AB oldalegyenestől ($UT = 1$) és 2 cm-re az A ponttól, tehát az ATU derékszögű háromszög félszabályos:

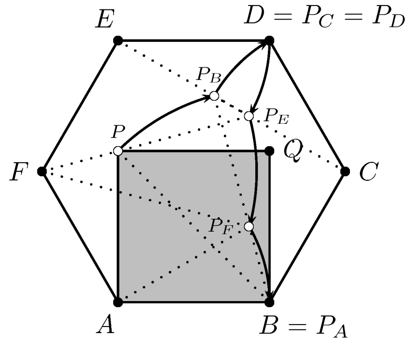
$$TAU\angle = 30^\circ, \qquad AT = \sqrt{AU^2 - UT^2} = \sqrt{3}.$$

A vizsgált tartomány tehát négy darab 30°-os középponti szögű 2 cm sugarú körcikkből és négy darab olyan trapézból áll, amelyek alapjai 4 illetve $(4 - 2\sqrt{3})$ cm hosszúak, magasságuk pedig 1 cm. Az r sugarú kör („360°-os kp-i szögű körcikk”) területe $r^2\pi$, így tartományunk területe:

$$\frac{4 \cdot 30}{360} 4\pi + 4\frac{\left((4-2\sqrt{3})+4\right)\cdot 1}{2} = 4 \cdot \left(\frac{\pi}{3} + 4 - \sqrt{3}\right) \approx 13,26 \text{ cm}.$$

A 9.5. feladat megoldása

A P pont által bejárt útvonal a 17.15. ábrán látható. A B körüli $\widehat{PP_B}$ ív sugara $600\sqrt{2}$, a C körüli $\widehat{P_BP_C}$ ív sugara 600, a D körüli $\widehat{P_CP_D}$ „ív” sugara 0, az E körüli $\widehat{P_DP_E}$ ív sugara 600, az F körüli $\widehat{P_E P_F}$ ívé $600\sqrt{2}$ végül az A körüli $\widehat{P_F P_A}$ ív sugara 600 egység. Mindegyik ív középponti szöge 30°, azaz mindegyik ív az azonos sugara félkör kerületének hatoda. A teljes út hossza $600\frac{\pi}{6}\left(3+2\sqrt{2}\right)$.



17.15. ábra.

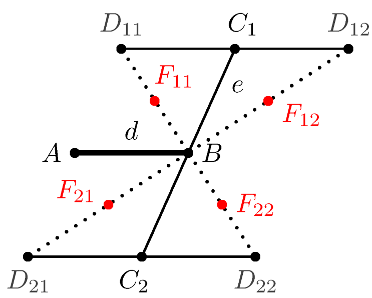
17.5. A sík egybevágóságai– megoldások

A 9.1. feladat megoldása

A 9.1. fel. I. megoldása

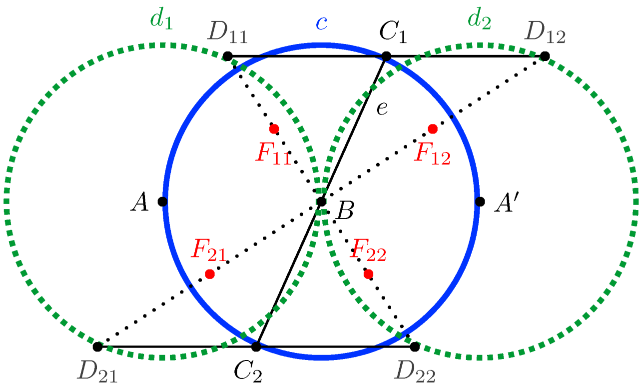
(*Több transzformáció*)

Ha felvesszük B-n át az e egyenest, akkor a d szakaszt rajta még két irányban mérhetjük fel és a kapott C ponton át AB-vel húzott párhuzamosból is két irányba mehetünk tovább D-hez.



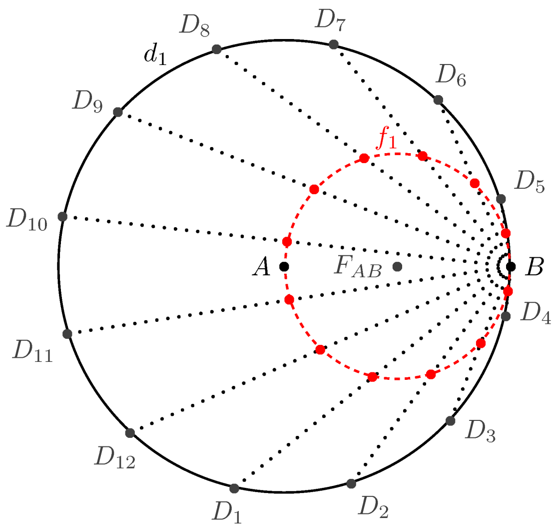
17.16. ábra.

A C pont egy B középpontú, d sugarú c körön mozoghat. A D pontot úgy kapjuk, hogy C-t eltoljuk az $\overrightarrow{AB}$ vagy a $\overrightarrow{BA}$ vektorral, így D két körön, a c körnek ezekkel a vektorokkal való d_1, d_2 eltoltjain mozoghat (lásd a 17.16. ábrát). A d_1 kör középpontja A, a d_2-é pedig a B pont $\overrightarrow{AB}$ vektorral való eltoltja, a 17.16. ábrán A'.



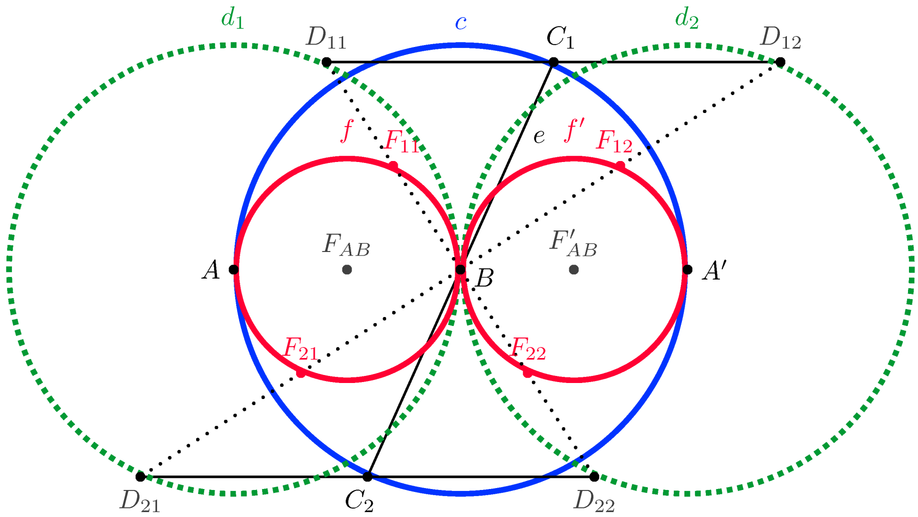
17.17. ábra.

Most megszerkesztjük a BD szakasz F felezőpontját (lásd a 17.17. ábrát). Ha ezt elvégezzük a d_1 kör összes pontjára, akkor a d_1 kört a B pontból a felére kicsínyítjük ($\lambda = \frac{1}{2}$ arányú B centrumú középpontos nagyítást alkalmazunk). Ennél a transzformációnál – amely megtartja a szakaszok arányát – a d_1 kör képe egy feleakkora sugarú f_1 kör, melynek középpontja a BA szakasz F_{AB} középpontja (lásd a 17.18. ábrát).



17.18. ábra.

A keresett F pontok mértani helye tehát két kör, melyek sugara $\frac{d}{2}$ és középpontjuk az AB illetve az $A'B$ szakasz F_{AB}, illetve F'_{AB} felezőpontja (lásd a 17.19. ábrát).



17.19. ábra.

Megjegyzés a 9.1. fel. I. megoldásához

A kapott $ABCD$ négyszög (vagy az $A'BCD$ négyszög) paralelogramma, hiszen AB, CD szemköztes oldalai párhuzamosak és egyenlőek, sőt rombusz is, mert két szomszédos oldala is egyenlő: $AB = BC = d$.

A 9.1. fel. II. megoldása

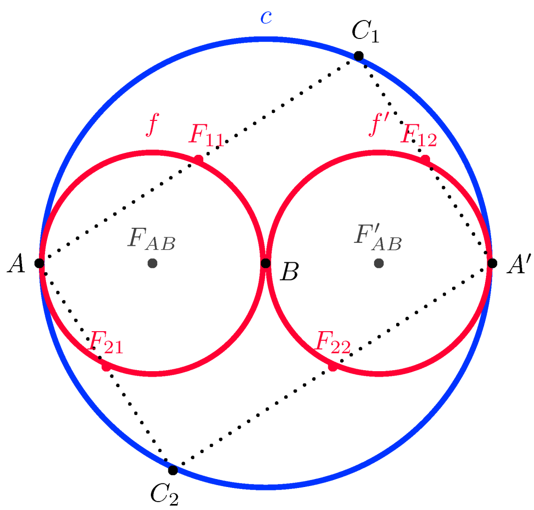
(*Paralelogramma*)

A paralelogramma átlói felezve metszik egymást. Az $ABCD$ négyszög paralelogramma, tehát a keresett F pont az AC átló felezőpontja (lásd a 17.20. ábrát). A C pont a c körön mozog, így F mértani helye a c kör A-ból illetve A'-ből $\frac{1}{2}$ arányban kicsinyített képeként is származtatható.

A 9.1. fel. III. megoldása

(*Rombusz*)

A rombusz átlói merőlegesek egymásra, így $AFB\angle = 90°$, azaz F illeszkedik az AB vagy az $A'B$ szakasz Thalesz körére. Meg kell még mutatnunk, hogy a két Thalesz kör minden pontja megfelelő. Ha F a két Thalesz kör bármelyikének pontja és az A (A') és a B pont F-re középpontosan tükrözött képe C és D, akkor $d = AB = DC = BC$ és $AB \| CD$, így készen vagyunk, F valóban előáll a feladatban leírt szerkesztés eredményeként.



17.20. ábra.

A 9.1. fel. IV. megoldása

A BC szakasz F_{BC} felezőpontja egy B középpontú c^* kört fut be. Az $F_{BC}F_{BD}$ szakasz a BCD háromszög középvonala, tehát párhuzamos CD-vel és feleakkora, mint CD. Az $F = F_{BD}$ pontok tehát a c^* körnek az $\pm\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$ vektorokkal való eltoltjait futják be.

A 9.2. feladat megoldása

Futtassuk a B_p próbapontot az b egyenesen és minden helyzetében képezzük azt a B'_p pontot, amelyre F a BB' szakasz felezőpontja! Az így kapott B'_p pontok a b egyenes F-re középpontosan tükrözött képén, a b' egyenesen helyezkednek el.

A szerkesztendő A pont az a kör és a b' egyenes metszéspontja, a B pont az A pontnak az F-re középpontosan (vissza)tükrözött képe.

A megoldások száma tehát b' és a metszéspontjainak száma, ami lehet 2, 1 vagy 0.

Segítség a 9.3. feladathoz

Első menetben feledkezzünk meg az egyik adatról, az l körről.

a) Futtassuk a K pontot a k körön és minden helyzetében rajzoljuk meg az összes olyan L pontot, amelyre a KL szakasz adott állású és hosszúságú. Mi az így kapható L pontok mértani helye? Használhatunk dinamikus geometriai szoftvert.

b-c-d) Futtassuk a K pontot a k körön és minden helyzetében rajzoljuk meg az összes olyan L pontot, amelyre a KL egyenesen az A pont a megadott feltételnek tesz eleget. Mi az így kapható L pontok mértani helye?

A 9.4. feladat megoldása

Futtassuk a B_p próbapontot a b egyenesen és minden helyzetében képezzük azt a B_p^+ és azt a B_p^- pontot, amelyre az $AB_pB_p^+$ háromszög szabályos és pozitív körüljárású és amelyre $AB_pB_p^-$ szabályos, de negatív körüljárású! Az így kapott B_p^+ és az B_p^- pontok mértani helye is egy-egy egyenes, nevezetesen a b egyenes A körül $60°$-kal illetve $-60°$-kal elforgatott b^+ illetve b^- képe.

A szerkesztendő C pont a c egyenesnek a b^+ egyenessel való metszéspontja illetve a b^- egyenessel való metszéspontja, a B pont pedig a C pont A körül $-60°$-kal illetve $60°$-kal (vissza)forgatott képe. Mivel b^+ és b^- nem párhuzamosak, így biztosan lesz megoldás. Tipikusan egy-egy, tehát összesen két megoldás van, de b^+ és b^- egyike párhuzamos is lehet c-vel, amikor nincs megoldás, de egybe is eshet c-vel, amikor végtelen sok megoldás van.

A 9.6. feladat megoldása

Toljuk el az AM szakaszt az $\overrightarrow{MN}$ vektorral (ez nem az M, N pontoktól függ, hanem a folyó szélességétől és irányától)! Ekkor M képe N, A képe A'. Az $A'NB$ töröttvonal hossza, megegyezik az AM, NB szakaszok hosszának összegével, így az utóbbi akkor minimális, ha $A'NB$ egy egyenes szakasz.

A 9.7. feladat megoldása

Vegyük fel az egyik alapot, legyen ez AB és rajzoljuk meg A körül az egyik szár hosszával a k_D kört, míg B körül a másik szár hosszával a k_C kört. Keressük a k_C körön azt a C pontot és k_D-n azt a D pontot, amelyre a $\overrightarrow{DC}$ vektor párhuzamos és azonos irányítású az $\overrightarrow{AB}$ vektorral, de hossza a másik alap hosszával egyezik meg. A C, D pontok még nem ismertek, de a $\overrightarrow{DC}$ vektor az adott alapok segítségével az A, B pontok felvétele után megszerkeszthető. Toljuk el a k_D kört a $\overrightarrow{DC}$ vektorral, jelölje képét k'_D, középpontját A'. A szerkesztendő C pont a k_C, k'_D körök metszéspontja, míg D a kapott C pont $-\overrightarrow{DC}$ vektorral eltolt képe.

A megoldások száma attól függ, hogy a k'_D, k_C köröknek hány metszéspontja van. Végtelen sok metszéspont és így végtelen sok megoldás pontosan akkor van, ha a szerkesztésben $k'_D = k_C$, azaz ha $B = A'$ és k_C, k_D sugarai egyenlők, azaz ha a két szár egymással egyenlő és a két alap is egyenlő egymással. Ilyenkor paralelogrammákat kapunk.

Minden más esetben a két körnek 0, 1 vagy két metszéspontja van. Akkor nem jön létre metszéspont, ha az $|AA'| = |AB - CD|$, AD, BC szakaszokból nem szerkeszthető háromszög, tehát ha a két szár és az alapok különbsége nem teljesíti a háromszög-egyenlőtlenséget. Ilyenkor trapéz sincs.

Ha egy metszéspont van, akkor az AB egyenesre vonatkozó tengelyes szimmetria miatt ez az AB egyenesen van, egy elfajult (szakasszá laposodott) trapézt kapunk. Ez akkor fordul elő, ha a két szár összege vagy különbsége egyenlő az alapok különbségével.

Végül minden más esetben két metszéspont van, de az említett szimmetria miatt ez csak egy megoldást ad.

A 9.8. fel. megoldási ötlete

Ha az ABC háromszöget tükrözzük a BC oldal F_A felezőpontjára, akkor az $ABDC$ paralelogrammához jutunk, ahol D az A pont képe. Az ADB háromszög oldalai az eredeti háromszög két oldalával és a harmadikhoz tartozó súlyvonal kétszeresével egyeznek meg.

A 9.9. feladat megoldásai

A 9.9. fel. I. megoldása

Legyen $\overrightarrow{MA} = \underline{a}$, $\overrightarrow{AB} = \underline{b}$, $\overrightarrow{BN} = \underline{c}$, $\overrightarrow{DC} = \underline{d}$. Így egyrészt

$$\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BN} = \underline{a} + \underline{b} + \underline{c},$$

másrészt

$$\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{MD} + \overrightarrow{DC} + \overrightarrow{CN} = -\underline{a} + \underline{d} - \underline{c},$$

így a két kifejezés összegéből

$$2\overrightarrow{MN} = \underline{b} + \underline{d} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{DC}.$$

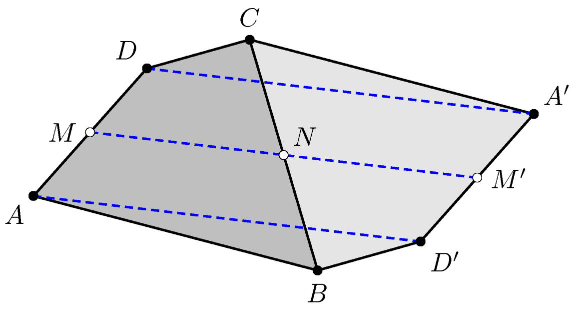
Két vektor hosszának összege mindig legalább akkora, mint az összegvektor hossza és egyenlőség pontosan akkor áll, ha a két söszeadandó az onos állású és irányítású, tehát ha az $ABCD$ négyszög trapéz, melyben $AB \parallel CD$.

A 9.9. fel. II. megoldása

Tükrözzük a négyszöget középpontosan a BC oldal N felezőpontjára. Ekkor $B' = C$, $C' = B$ és az $AD'A'D$ négyszög paralelogramma, amelyben középvonal az MM' szakasz, melynek felezőpontja N (lásd a 17.21. ábrát).

A $DA'C$ háromszög oldalai $DA' = MM' = 2MN$, $A'C = AC' = AB$, és CD.

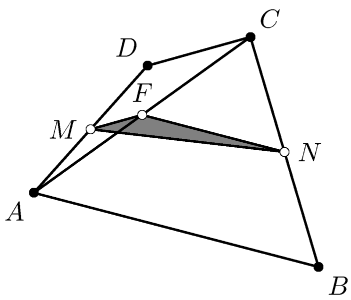
Ha az $ABCD$ négyszög trapéz, méghozzá $AB \parallel CD$, akkor a CA' CD szakaszok egy egyenesbe esnek és C-től ellenkező irányban állnak, tehát a $DA'C$ háromszög a DA' szakasszá fajul és így $2MN = AB + CD$. Megfordítva, ha $2MN = AB + CD$, akkor a DA', $A'C$, CD szakaszokból csak egy olyan elfajult háromszög illeszthető össze, amelyben C az $A'D$ oldalon van, tehát $A'C$ és DC egyállású, azaz az $ABCD$ négyszög trapéz.



17.21. ábra.

A 9.9. fel. III. megoldása

Húzzuk be az $ABCD$ négyszög AC átlóját és jelöljük be rajta annak F felezőpontját! Az ACD háromszögben MF középvonal, tehát feleakkora, mint CD és párhuzamos vele (lásd a 17.22. ábrát). Az ACB háromszögben FN középvonal, tehát feleakkora, mint AB és párhuzamos vele. Az M, F, N háromszögből tehát $\frac{1}{2}CD + \frac{1}{2}AB \geq MN$ és egyenlőség pontosan akkor teljesül, ha F az MN szakaszon van, tehát ha $AB \parallel CD$.



17.22. ábra.

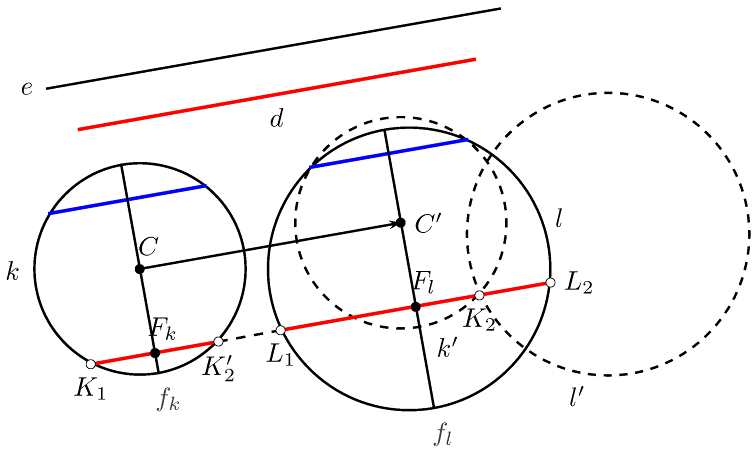
A 9.10. feladat megoldása

Megmutatható, hogy $2\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{DB}$ és az utóbbi vektor párhuzamos a szögfelezővel, ha $|AB| = |CD|$.

A 9.11. feladat megoldása

Az e-vel párhuzamos húrok felezőpontjai az egymással párhuzamos (és e-re merőleges) f_k, f_l egyeneseken vannak. Toljuk el az f_k egyenest önmagával merőleges irányban, hogy képe az f_l egyenes legyen. A k kör képét jelölje ennél az eltolásnál k'.

a) A k, l körök egymással egyenlő hosszúságú, e-vel párhuzamos egyenesre illeszkedő húrjai helyett most az l és k' körök hasonló helyzetű húrjait vizsgáljuk. Ezek felezőpontjai is egybeesnek, így a két húr is megegyezik egymással. Tehát a k', l körök közös húrja a keresett húr (lásd a 17.23. ábrát). Ezt visszatolva megkapjuk a k kör megfelelő húrját.



17.23. ábra.

b) Jelölje a keresett húrokat K_1K_2 és L_1L_2 az ábra szerint, felezőpontjukat F_k, F_l. Az a) rész megoldásában alkalmazott eltolásnál F_k képe F_l, legyen K_2 képe $K_2' \in k'$ (lásd a 17.23. ábrát).

Az L_1K_2' szakasz hossza az L_1F_l, F_lK_2' szakaszok hosszának összege, tehát az adott d szakasz felével egyezik meg. Toljuk el az l kört az előző eltolással azonos irányban $\frac{d}{2}$ hosszúságú vektorral! Az így kapott l' körre illeszkedik a K_2' pont, tehát K_2' az l', k' körök metszéspontja. Segítségével egyszerűen szerkeszthető a húr.

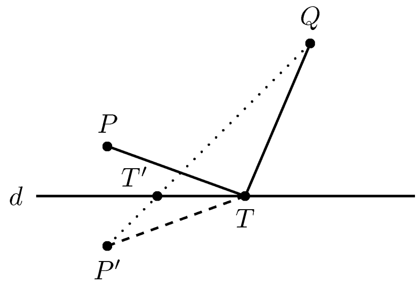
A 9.12. feladat megoldásai

Segítség a 9.12. a) feladathoz

Legyen P' a P pont d-re vonatkozó tükörképe. Mutassuk meg, hogy $PD = P'D$ és ennek alapján becsüljük a $PD + DQ$ összeget!

A 9.12. a) mego.

Legyen T a d egyenes tetszőleges pontja, P' a P pont d-re vonatkozó tükörképe és T' a $P'Q$ szakasz d egyenessel való metszéspontja (lásd az alábbi ábrát).



17.24. ábra.

Állítjuk, hogy akkor kapjuk a legrövidebb töröttvonalat, ha a T' ponthoz megyünk a d egyenesen. Tehát azt akarjuk bizonyítani, hogy a 17.24. ábrán

$$PT' + T'Q < PT + TQ, \tag{17.3}$$

ha $T \neq T'$. Vegyük észre, hogy a tükrözés miatt $P'T = PT$ és $P'T' = PT'$, így $PT' + T'Q = P'T' + T'Q = P'Q$, míg $PT + TQ = P'T + TQ$ úgyhogy a bizonyítandó (17.3) egyenlőtlenség nem más, mint a háromszög-egyenlőtlenség a $P'QT$ háromszögben.

A 9.12. b) mego.

Legyen A a szög a szárának tetszőleges pontja, B a b szár egy pontja és jelölje P' a P pont a-ra vonatkozó tükörképét. A b szár P' ponthoz legközelebbi pontja legyen B'. A B' pont értelemszerűen a P' pontból a b szár egyenesére bocsájtott merőleges talppontja, ha ez magára a b szárra esik (lásd a 17.25. ábra bal oldalát), nem annak meghosszabbítására, illetve a B' pont a szög csúcsa, ha a talppont kívül van a száron (a 17.25. ábrán jobb oldalon). Végezetül legyen A' a PB' szakasz és az a szár metszéspontja, ami természetesen megegyezik B'-vel, ha az a szög csúcsa.

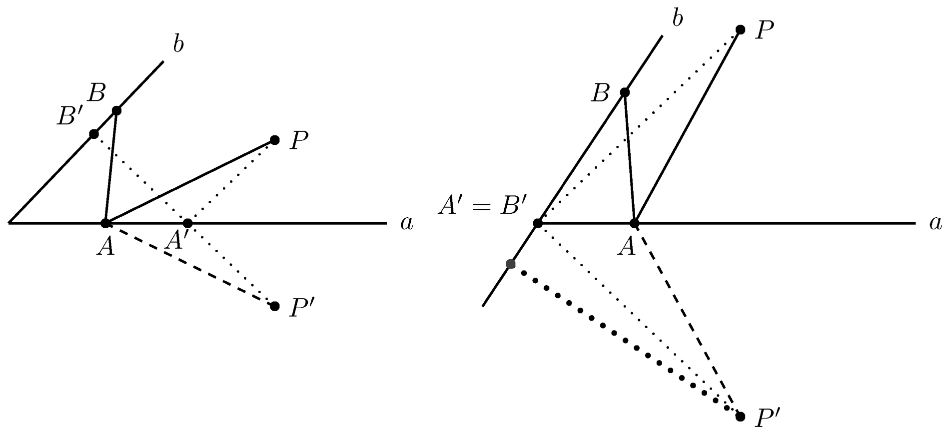
Állítjuk, hogy a legrövidebb töröttvonal a $PA'B'$, azaz a fenti ábrán

$$PA' + A'B' < PA + AB. \tag{17.4}$$

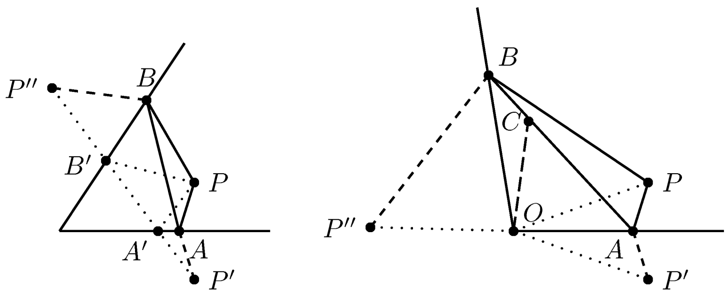
Valóban, most a tükrözés révén $PA' = P'A'$ és $PA = P'A$, így $P'A' + A'B' = P'B'$, míg $PA + AB = P'A + AB$, de P' és a b szár között a legrövidebb töröttvonal a PB' szakasz, minden más hosszabb nála.

A 9.12. c) mego.

Ha P' illetve P" a P pontnak az a szár egyenesére illetve a b szár egyenesére vonatkozó tükörképe, akkor $OP' = OP'' = OP$ és $P'OP''\sphericalangle = 2\gamma$, ahol γ az a, b szárak szöge.



17.25. ábra.



17.26. ábra.

Két esetet különböztetünk meg aszerint, hogy $\gamma < 90°$ vagy $\gamma \geq 90°$ (lásd a 17.26. ábrát).

Az első esetben a P pontot is tartalmazó $P'OP''$ szögtartomány konvex, a $P'P''$ szakasz elmetszi az a, b szárakat. Legyenek a metszéspontok A' és B'. Megmutatjuk, hogy $PA'B'P$ a legrövidebb töröttvonal. Legyen $PABP$ egy tetszőleges másik töröttvonal. A tükrözés miatt $PA = P'A$, $PB = P''B$, $PA' = P'A'$, $PB' = P''B'$, így $PA+AB+BP = P'A + AB + BP'$, míg $PA' + A'B' + B'P = P'A' + A'B' + B'P'' = P'P''$, tehát a $PABP$ töröttvonal egyenlő hosszúságú egy valahol biztosan megtörő P' és P'' közti töröttvonallal, míg $PA'B'P$ a $P'P''$ szakasszal egyenlő hosszú. Ebben az eetben tehát megleltük a legrövidebb töröttvonalat.

Most vizsgáljuk a $\gamma \geq 90°$ esetet. Ilyenkor az $A' = B' = O$ pontokhoz tartozó $PA'B'P$ azaz $POOP$ elfajult töröttvonal adja a minimumot.

Tekintsük most a $P'P''$ szakasz felezőmerőlegesét. Állítjuk, hogy ez az O ponttól a $P'P''$ szakasz felezőpontjával ellenkező irányban kettévágja az adott szögtartományt.

Legyen $P'OP\angle = 2\alpha$, $POP''\angle = 2\beta$ és állítsunk az a szárral β szöget bezáró szögszárat O-ból. Ugyanezt a szögszárat kapjuk, ha az ellenkező irányban a b szárral α szöget bezáró szögszárat állítunk O-ból, hiszen $(\alpha+\beta)+(\alpha+\beta) = 2\alpha+2\beta$. Így ez a szögszár épp a tekintettbe vett felezőmerőlegesnek az a, b szárak közti szögtartományba eső része. Azért van a felezőmerőlegesen, mert O is azon van és az OP',OP'' egyenesekkel azonos szöget zár be, és azért van a szögtartományban, mert annak határaitól az a, b szárak $\alpha+\beta$ szögétől kisebb szöget mértünk fel, mikor a szögekkel képeztük.

Tekintsünk egy tetszőleges $PABP$ töröttvonalat. Ha A és B egyike megegyezik Oval, a másik különbözik tőle, akkor könnyen igazolható, hogy a POP töröttvonal rövidebb nála. A $P'P''$ szakasz felezőmerőlegesének egyik oldalán van az a, másikon a b szögszár, így ha A és B is különbözik O-tól, akkor a felezőmerőleges egy belső C pontjában metszi el az AB szakaszt. Ekkor

$$PA+AB+BP = P'A+AC+CB+BP'' > P'C+CP'' > P'O+OP'' = PO+OP.$$

A 9.12. d) mego.

Mozgassuk a P_A pontot a BC egyenesen és minden helyzetében keressük azokat a $P_B \in AC$, $P_C \in AB$ pontokat, amelyekre a $P_AP_BP_CP_A$ töröttvonal hossza minimális. Láttuk, hogy alapvetően két lényegesen különböző eset van és az esetszétválasztás nem a P_A pont helyzetén múlik, hanem a $BAC\angle = \gamma$ szög nagyságán.

Ha $\gamma < 90°$, akkor képezzük a P_A pont AB illetve AC egyenesre vonatkozó P' illetve P'' tükörképét és a legrövidebb P_A-t tartalmazó záródó töröttvonal hossza a $P'P''$ szakasz hosszával lesz egyenlő, és ez a szakasz kimetszi az AB, AC oldalakon a minimumot szolgáltató P_C, P_B pontokat.

Ismeretes, hogy a $P'AP''$ háromszög mindig egyenlő szárú és a szárak szöge mindig 2γ, tehát ez a háromszög a P_A pont különböző választásai esetén egymáshoz mindig hasonló. Az AP', AP'' szárak az AP_A szakasz hosszával egyeznek meg, így a töröttvonal $P'P''$-vel egyenlő hossza is akkor lesz minimális, ha AP_A hossza minimális. Az AP_A szakasz hossza szigorúan monoton fogy, ahogy P_A-val közelítünk az ABC háromszög A-ból induló magasságának talppontjához. Így ha az ABC háromszög B-nél és C-nél fekvő belső szögei is hegyesszögek, akkor AP_A pontosan abban az esetben minimális, ha P_A az A-ból induló magasság talppontja, míg ha a BC oldal egyik csúcsánál tompaszög van, akkor a P_A pontot ide kell tennünk. Az utóbbi esetben P_B és P_C közül az egyik is ez a csúcs, a másik pedig ennek a csúcsnak a szemközti oldalra vonatkozó tükörképe lesz, tehát a minimális kerületű háromszög elfajul, a tompaszöghöz tartozó dupla magasságot kapjuk.

Ha $\gamma \geq 90°$, akkor a $P_B = P_C = A$ esetben lesz a minimum, tehát a minimális összhosszt adó töröttvonal az elfajult P_AAP_A háromszög. P_A változtatásával ez úgy tehető a legrövidebbé, ha P_A-nak az A-ból induló magasság talppontját választjuk.

Tompaszögű háromszögben tehát a minimális kerületet adó háromszög elfajult: a tompaszög csúcsához tartozó dupla magasság. Hegyesszögű háromszög esetén mindegyik oldalon a magasság talppontját kell választani, tehát a talpponti háromszög adja a minimumot.

A 9.13. feladat megoldásai

A 9.13. fel. I. megoldása

Hibás

Jelölje a trapéz csúcsait A, B, C és D, ahol $a = AB$ a hosszabbik, $c = CD$ a rövidebbik alap, míg $b = BC$ és $d = DA$ a szárak. Messe a C-n át az AD egyenessel párhuzamosan húzott egyenes az AB egyenest A'-ben! Mivel az $AA'CD$ négyszög paralelogramma, így $d = AD = A'C$ és $A'B = a - c = 10$ cm.

Az $A'BC$ háromszög $A'B$ alapja és az ahhoz tartozó magassága ismert, a feladat lényegében a háromszög másik két oldala összhosszának, az $A'C + CB = d + b$ mennyiségnek a minimumát, pontosabban az ennél az $a + c = 40$ konstanssal nagyobb számot kérdezi.

Jelölje a C csúcsnak az AB egyenesen való vetületét C'. Számoljunk az $A'B$ egyenesen előjelesen, legyen A'-től B-felé a pozitív irány és legyen előjeles értelemben $A'C' = x$. Ezzel $d^2 = A'C^2 = x^2 + m^2 = x^2 + 144$, míg $b^2 = BC^2 = (10-x)^2 + m^2 = (10-x)^2 + 144$. A $b + d$ mennyiség helyett kereshetjük a $b^2 + d^2$ mennyiség minimumhelyét, ez ugyanott lesz, csak értéke más. A vizsgált függvényünk

$$f(x) = b^2 + d^2 = 2x^2 - 20x + 388 = 2(x-5)^2 + 338,$$

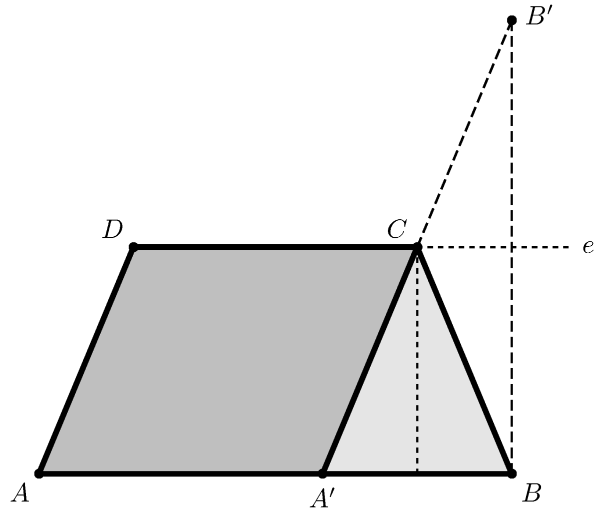
amelynek $x = 5$-nél van a minimuma, tehát amikor az $A'CB$ háromszög egyenlő szárú, azaz amikor az $ABCD$ trapéz egyenlő szárú. Ilyenkor $b^2 = d^2 = 5^2 + 12^2 = 13^2$, azaz a trapéz kerülete 50 cm.

Megjegyzés a 9.13. fel. I. megoldásához

A fenti megoldás hibájára világít rá a következő, a 9.15. példa. Nem lehet a szakaszösszeg helyett a négyzetösszeget minimalizálni. Itt nehezebb ezt a kérdést tisztázni, mert ebben a feladatban a négyzetösszegre is ugyanaz a minimum adódik, mint az összegre, tehát a hibás gondolatmenetre megerősítést ad az eredmény.

A 9.13. fel. II. megoldása

Dolgozzunk az előző megoldásban az $ABCD$ trapézból szerkesztett $A'BC$ háromszöggel (lásd a 17.27. ábrát, ahol A' az AB alap és a C csúcson át az AD szárral párhuzamosan húzott egyenes metszéspontja)! Láttuk, hogy az $ABCD$ trapéz kerületének minimalizálása egyet jelent az $A'BC$ háromszögben az $A'C + CB$ összeg minimalizálásával.



17.27. ábra.

Ennek a háromszögnek tehát adott az egyik oldala

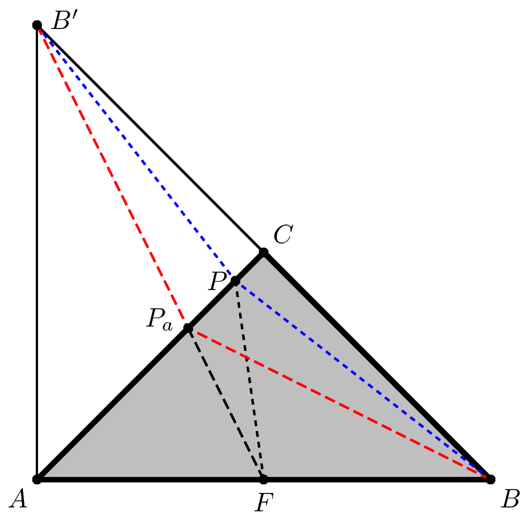
$$A'B = AB - AA' = AB - CD = 10,$$

és a hozzá tartozó magassága: $m_C = 12$. Ha rögzítjük az A', B pontokat a síkon, akkor az $A'B$ oldalhoz tartozó magasság megadása azt jelenti, hogy C-t az $A'B$ egyenessel párhuzamos, tőle 12 cm-re húzott e egyenesen kell választani (a két ilyen egyenes egyikén). Korábbi példáinkból ismert feladat egy speciális eseténél vagyunk: az A', B pontok között keresünk egy minimális hosszúságú töröttvonalat, amely az $A'B$ egyenessel párhuzamos e egyenesen törik meg. Ha a B csúcs e-re vonatkozó tükörképe B', akkor a minimumot az $A'B'$ és e egyenesek C metszéspontja adja. Ekkor e az $A'BB'$ háromszög egyik középvonala, hiszen párhuzamos annak $A'B$ oldalával és átmegy a BB' oldal felezőpontján. Így tehát C is felezőpontja az $A'B'$ szakasznak, azaz a $A'BB'$ derékszögű háromszög átfogójának, vagyis C az $A'B'$ szakasz Thalesz körének középpontja. Ebből csak az kell nekünk, hogy $CB = CA' = DA$ azaz eredeti trapézunk húrtrapéz. A CBA' egyenlő szárú háromszög $A'B$ alapjának fele 5 cm, az alaphoz tartozó magasság 12 cm, így a szár 13 cm, a trapéz kerülete $25 + 15 + 2 \cdot 13 = 66$ cm.

A 9.14. feladat megoldásai

A 9.14. a) mego.

Ez a példa a 9.12.. feladat a) részének egy változata. Jelölje a B pontnak az AC egyenesre vonatkozó tükörképét B' és tekintsük az AC egyenes tetszőleges P pontját (lásd a 17.28. ábrát).



17.28. ábra.

Jelölje a $B'F$, AC egyenesek metszéspontját P_a. Állítjuk, hogy a P_a pont választására lesz legkisebb a vizsgált szakaszösszeg. Valóban, a tükrözés miatt $BP = B'P$ és $BP_a = B'P_a$, és ha $P \neq P_a$, akkor használhatjuk az FPB' háromszögre a háromszög-egyenlőtlenséget:

$$BP + PF = B'P + PF > B'PF = B'P_a + P_aF = BP_a + P_aF,$$

azaz a $BP_a + P_aF$ szakaszösszeg minden más szóbajövő összegnél kisebb.

Megjegyzés a 9.14. a) fel. megoldásához

Az ABB' háromszögben az AC, $B'F$ szakaszok súlyvonalak, így harmadolják egymást. Az a) feladat minimumát adó P_a pont az AC szakasz C felőli *harmadoló*pontja.

A 9.14. b) mego.

Illesszünk a háromszöghöz egy koordinátarendszert, melyben

$$C(0;0), \qquad A(1;0), \qquad B(0;1)$$

és így $F(\frac{1}{2},\frac{1}{2})$, továbbá $P\in AC$ pontosan akkor teljesül, ha valamely $x\in\mathbb{R}$ számmal $P(x,0)$.

Mivel
$$PF^2+PB^2=(x-\frac{1}{2})^2+(0-\frac{1}{2})^2+(x-0)^2+(0-1)^2=$$
$$=2x^2-x+\frac{3}{2}=2\left(x-\frac{1}{4}\right)^2+\frac{11}{8},$$
így a négyzetösszeg $x=\frac{1}{4}$ esetén minimális, tehát ha P az AC szakasz C felőli *negyedelő*pontja.

Megjegyzés a 9.14. a), b) feladatok megoldásához

Az a) és b) feladatokat eredménye különböző, más pont minimalizálja az összeget, mint a négyzetösszeget.

A 9.15. feladat megoldásai

Segítség a 9.15. feladathoz

Tekintsük azt a D pontot a háromszög külsejében, amelyre $AM=MD$ és $DK=KB$.

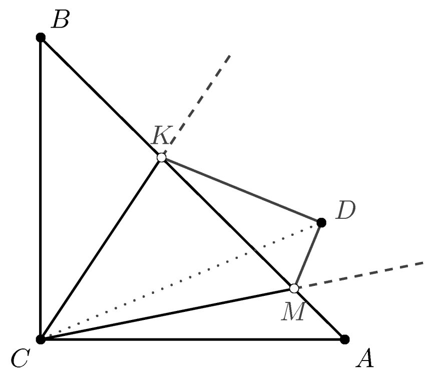
A 9.15. fel. I. megoldása

(*Tükrözések szorzata*)

Mivel az CM, CK egyenesek szöge 45°, így az ezekre az egyenesekre való tükrözések kompozíciója a C körüli 90°-os forgatás. Ennél A képe B, tehát az A pont CM-re vonatkozó D tükörképe megegyezik a B pont CK-ra vonatkozó tükörképével.

Fel fogjuk használni, hogy a CM-re vonatkozó tükrözésnél az $MAC\angle$ képe az $MDC\angle$, az AM szakasz képe pedig a DM szakasz, illetve a CK-ra vonatkozó tükrözésnél az $CBK\angle$ képe az $CDK\angle$, a BK szakasz képe pedig a DK szakasz (lásd a 17.29. ábrát).

$KDM\angle=90°$, hiszen
$$KDM\angle=KDC\angle+CDM\angle=KBC\angle+MAC\angle=180°-ACB\angle,$$
így a feladat állítása a KDM háromszögre vonatkozó Pitagorasz tétel:
$$AM^2+KB^2=MD^2+DK^2=KM^2.$$

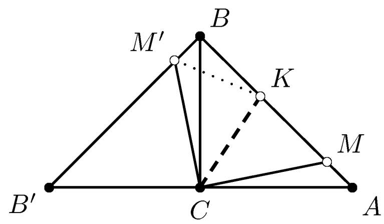


17.29. ábra.

A 9.15. fel. II. megoldása

(*Forgatás*)

Forgassuk el az ábrát C körül 90°-kal (lásd a 17.30. ábrát)! Legyen M képe M', B képe B'. Mivel $MCM'\angle = 90°$, $CM = CM'$ és $MCK\angle = KCM'\angle = 45°$, így $M'K = KM$. Az elforgatás miatt $AM = BM'$, így a feladat állítása a KBM' derékszögű háromszögre vonatkozó Pitagorasz tétel.



17.30. ábra.

A 9.16. feladat megoldásai

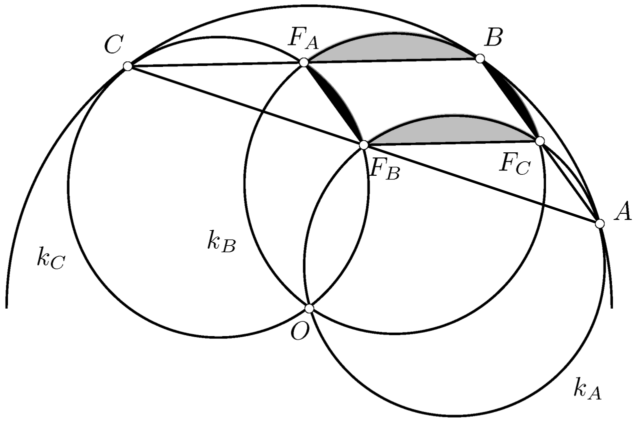
Segítség a 9.16. feladathoz

Rajzoljuk be az ABC háromszög oldalait, tegyünk megfigyelést!

A 9.16. feladat megoldása

Jelölje F_A a k_B, k_C körök O-tól különböző metszéspontját. Mivel k_C-ben C az O-val átellenes pont, így Thalesz tétele szerint $CF_AO\angle = 90°$. Hasonlóan igazolható, hogy

$OF_AB\angle = 90°$, azaz F_A illeszkedik a BC szakaszra, sőt annak felezőpontja, hiszen a BC a k kör húrja és a rá F_A-ban állított merőleges átmegy O-n. Ugyanígy igaz, hogy az AC szakasz F_B felezőpontja illeszkedik a k_A, k_C körökre, illetve AB F_C felezőpontja a K_B, k_A körökre (lásd a 17.31. ábrát).



17.31. ábra.

Állítjuk, hogy a vizsgált tartomány területe egyenlő a $BF_AF_BF_C$ paralelogramma területével, azaz az ABC háromszög területének felével. Valóban, az $\overrightarrow{F_BF_A} = \overrightarrow{F_CB} = \overrightarrow{AF_C}$ vektorral való eltolás az F_BF_C középvonalat az F_AB szakaszba, míg a k_A kört a k_B körbe viszi, így az ábrán szürkével jelölt két körszelet egyikét a másikba képezi. Ugyanígy igazolható, hogy a k_C körből az F_AFB középvonal által levágott szelet egybevágó a k_B körből az F_CB szakasz által levágott szelettel. A két egybevágóság segítségével a körívek által határolt tartomány átdarabolható a paralelogrammába.

A 9.17. feladat megoldásai

A 9.17. fel. I. megoldása

A kerületi szögek tétele szerint

$$60° = ABC\angle = APC\angle, \qquad 60° = BAC\angle = BPC\angle.$$

Az $AB = BC = CA = d$, $PA = a$, $PB = b$, $PC = c$ rövidítő jelölésekkel az APC, BPC háromszögekre vonatkozó koszinusz-tétel:

$$a^2 + c^2 - ac = d^2, \qquad b^2 + c^2 - bc = d^2.$$

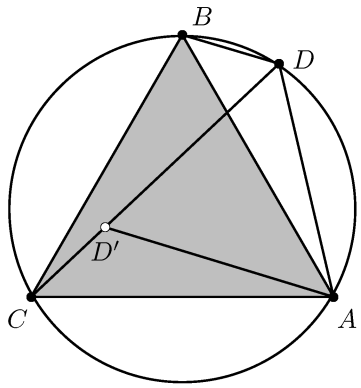
E két egyenlet különbségében felismerhetjük a szorzatalakot:

$$(a - b)(a + b - c) = 0.$$

Az első tényező akkor zérus, ha D az AB ív felezőpontja, azaz PCA, PCB félszabályos háromszögek, $c = 2a = 2b = a + b$. Tehát az $a + b = c$ feltétel mindig teljesül, éppen ez a feladat állítása.

A 9.17. fel. II. megoldása

Mérjük föl a DC szakaszra a PA szakaszt (lásd a 17.32. ábrát)! Legyen D' a DC szakaszon az a pont, amelyre $DD' = DA$! Mivel a kerületi szögek tétele miatt $CDA\angle = 60°$, így a $DD'A$ háromszög szabályos. Azt is mondhatjuk, hogy D' a D pont képe az A pont körüli $60°$-os forgatásnál. Mivel ennél a forgatásnál a B csúcs képe C, így a DB szakasz képe a $D'C$ szakasz, azaz $DA + DB = DD' + D'C = DC$.



17.32. ábra.

Megoldási ötlet a 9.18. feladathoz
Tükrözzük a háromszöget és a PX, PY szakaszokat az alap egyenesére!

Megoldási ötlet a 9.19. feladathoz
Használjuk fel, hogy két szomszédos oldal felezőpontját összekötő szakasz párhuzamos és feleakkora, mint a megfelelő oldal vagy átló. Dolgozhatunk transzformációkkal is, pld. előző észrevételünk azt mondja ki, hogy két középpontos tükrözés eredője eltolás.

A háromszög és az ötszög lényegében egyértelműen szerkeszthető. Négyszög viszont pontosan akkor szerkeszthető, ha az oldalfelezőpontok paralelogrammát alkotnak, olyankor viszont végtelen sok megoldás van.

Részletesebb lásd pld. a Bergengóc Példatár I. 114. feladatát.

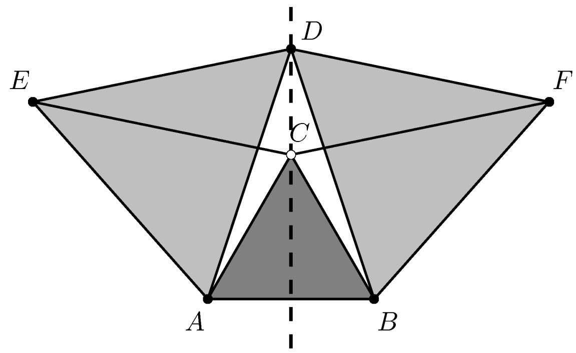
A 9.20. feladat megoldásai

Segítség a 9.20. feladathoz

A szóbajövő legrövidebb szerkesztés jó is. Igazoljuk!

A 9.20. feladat megoldása

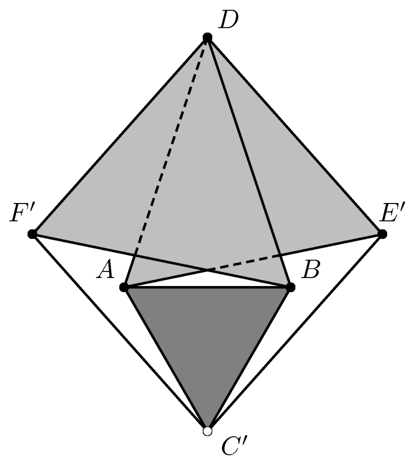
A körzőnyílás nagyságát jelölje d. Legyen D az az egyik pont, amelyre $AD = BD = d$ és állítsuk az ABD háromszög AD, BD oldalaira kifelé az ADE, BFD szabályos háromszögeket. Az E és F ponttól is d távolságra levő egyik pont D, legyen a másik C (lásd a 17.33. ábrát).



17.33. ábra.

Állítjuk, hogy ABC szabályos háromszög. Ennek igazolásához alkalmazzunk A körüli 60°-os forgatást! Ekkor D képe $D' = E$. Mi lehet B', a B pont képe? Egyrészt ABB' szabályos háromszög, tehát B' illeszkedik AB felezőmerőlegesére. Másrészt $BD = d$, így $B'D' = d$. Tehát B' az AB felezőmerőlegesének olyan pontja, amely $D' = E$-től d távolságra van. A D, C pontok rendelkeznek ezekkel a tulajdonságokkal és nyilvánvalóan nem lehet több ilyen pont, tehát $B' = D$ vagy $B' = C$. Az első lehetőség kizárt, hiszen $AD = BD = d > AB$, így $B' = C$, tehát szerkesztésünk helyes.

Az AB egyenes másik oldalára szerkesztve D-t megkaphatjuk az AB-ra emelt másik szabályos háromszög harmadik csúcsát is. Érdekes, hogy ha az eredeti szerkesztés D pontjából kiindulva az AD, BD oldalakra *befelé* állítjuk az ADE', BDF' szabályos háromszögeket, akkor az E', F' középpontú d sugarak metszéspontjaként is megkapjuk a keresett C' pontot (lásd a 17.34. ábrát). Miért?



17.34. ábra.

17.5.1. Egy ábra az elemekből – megoldások

A 9.21. a) mego.

Forgassuk el az ABC háromszöget A körül 90°-kal (a 17.35. ábrán balra)! Ekkor C képe $C' = I$. A B pont B' képére $DAB'\angle = 180°$, hiszen $DAB\angle = 90°$. Így A a DB' szakasz felezőpontja, tehát IA a $DB'I$ háromszög súlyvonala, azaz a DAI, $AB'I$ háromszögek területe egyenlő. Ez mutatja, hogy mindegyik kérdezett háromszög területe egyenlő az ABC háromszög területével.

A 9.21. b) mego.

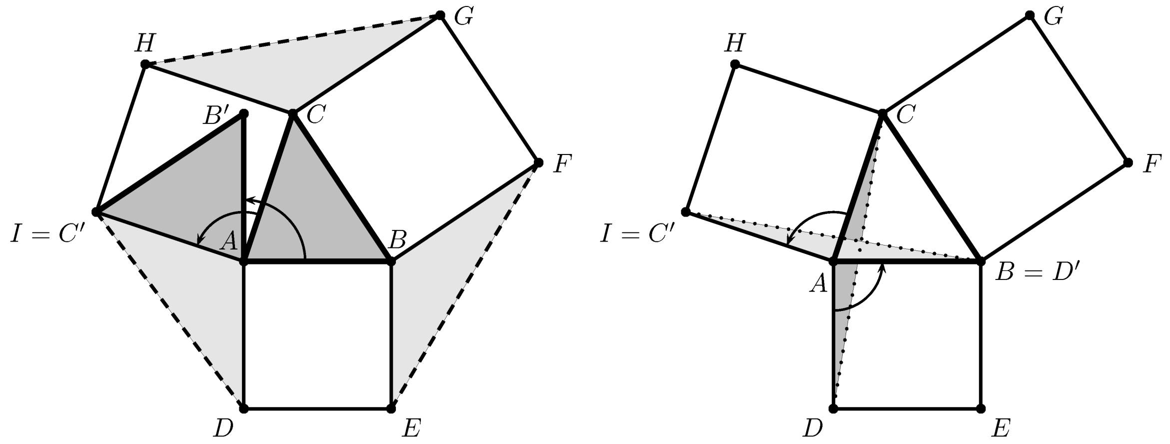
Az A körüli 90°-os forgatásnál még D képe $D' = B$, így a DC szakasz elforgatottja a BI szakasz (lásd a 17.35. ábra jobb oldalát). Tehát $DC = BI$.

A 9.21. c) fel. I. megoldása

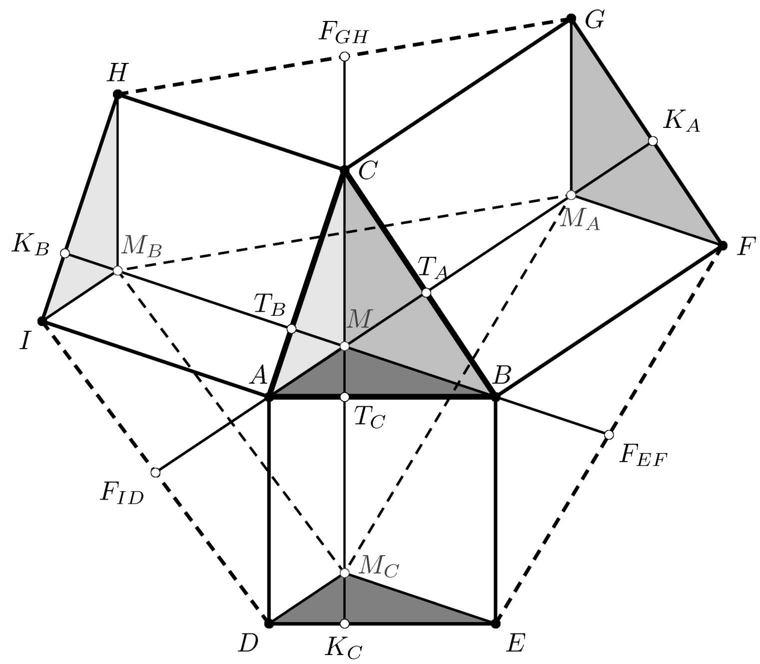
Háromszög létrehozása eltolással

Jelölje az ABC háromszög magasságpontját M és toljuk el az AMB háromszöget a $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BE}$ vektorral a DM_CE háromszögbe, a BMC háromszöget a $\overrightarrow{BF} = \overrightarrow{DG}$ vektorral az FM_AG háromszögbe, végül a CMA háromszöget a $\overrightarrow{CH} = \overrightarrow{AI}$ vektorral a HM_BI háromszögbe (lásd a 17.36. ábrát)!

Az így kapott ábrán M_AM_B a GH szakasz eltoltja a $\overrightarrow{CM} = \overrightarrow{GM_B} = \overrightarrow{HM_A}$ vektorral, míg M_BM_C az ID szakasz eltoltja a $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{IM_B} = \overrightarrow{DM_C}$ vektorral, végül M_CM_A az EF szakasz eltoltja a $\overrightarrow{BM} = \overrightarrow{EM_C} = \overrightarrow{FM_A}$ vektorral.



17.35. ábra.



17.36. ábra.

Az a) feladatrész állítása szerint az IDA, EFB, GHC háromszögek területe egyenlő, így az $M_AM_BM_C$ háromszöget egyenlő részekre osztják az M_CM, M_AM, M_BM szakaszok. A háromszögben egy és csakis egy olyan pont van, melyet a csúcsokkal összekötve három egyenlő területű háromszög jön létre: a súlypont. Tehát M az $M_AM_BM_C$ háromszög súlypontja. Az M_CM egyenes tehát felezi az M_AM_B szakaszt, így annak M_CM-mel párhuzamos eltoltját, a GH szakaszt is felezi. Ugyanígy M_BM felezi EF-et és M_AM az ID-t.

A 9.21. c) fel. II. megoldása

Vektorok

$\overrightarrow{BA} = \overrightarrow{CA} - \overrightarrow{CB}$, tehát

$$\overrightarrow{BA}^{-90^\circ} = \overrightarrow{CA}^{-90^\circ} - \overrightarrow{CB}^{-90^\circ} = \overrightarrow{CA}^{-90^\circ} + \overrightarrow{CB}^{90^\circ}, \tag{17.5}$$

míg $\overrightarrow{CH} = \overrightarrow{CA}^{-90^\circ}$, $\overrightarrow{CG} = \overrightarrow{CB}^{90^\circ}$, $\overrightarrow{CF_{GH}} = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{CH} + \overrightarrow{CG}\right)$, azaz

$$\overrightarrow{CF_{GH}} = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{CA}^{-90^\circ} + \overrightarrow{CB}^{90^\circ}\right). \tag{17.6}$$

A (17.5), (17.6) egyenletek összevetése mutatja, hogy a CGH háromszög CF_{GH} súlyvonala valóban merőleges az ABC háromszög AB oldalegyenesére, sőt az is kiderült, hogy CF_{GH} fele olyan hosszú, mint az AB oldal. Hasonlóan igazolható az összefüggés a többi oldalpárra.

A 9.21. c) fel. III. megoldása

Komplex számok

Az előző megoldás komplex számokkal is elmondható. Ha C a komplex számsíkunk origója és A-nak az a, B-nek a b komplex szám felel meg, akkor a

$$H, \qquad G, \qquad F_{GH}$$

számoknak megfelelő komplex szám rendre

$$-ia, \qquad ib, \qquad \frac{-i}{2}a + \frac{i}{2}b,$$

így a

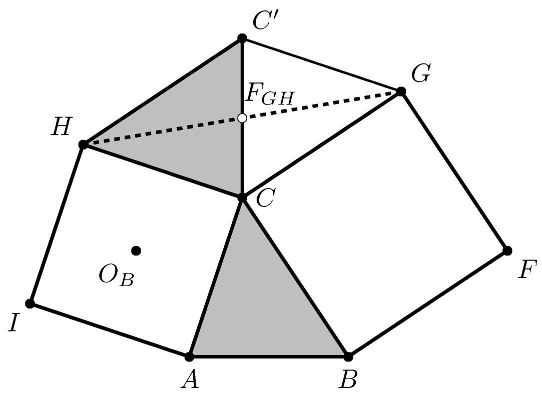
$$\frac{-i}{2}a + \frac{i}{2}b = \frac{1}{2} \cdot i \cdot (b - a)$$

algebrai azonosság mutatja, hogy a CF_{GH} szakasz fele olyan hosszú, mint az AB szakasz és merőleges rá.

A 9.21. c) fel. IV. megoldása

Középpontos tükrözés, forgatás

Ha középpontosan tükrözzük a CHG háromszöget a HG oldal felezőpontjára, akkor a $CGC'H$ paralelogrammához jutunk. Ha a CHC' háromszöget elforgatjuk $-90°$-kal az $ACHI$ négyzet O_B középpontja körül, akkor az ACB háromszöget kapjuk (lásd a 17.37. ábrát). Valóban, H a C csúcsba, C a B pontba képződik és a $\overrightarrow{HC'} = \overrightarrow{CG}$ vektor $-90°$-os elforgatottja $\overrightarrow{CB}$, így a HC' oldal képe a CB oldal. A CGH háromszög CC' súlyvonalegyenese merőleges az AB egyenesre, hiszen az előbbi $-90°$-os elforgatottja az utóbbi. Épp ezt akartuk igazolni.



17.37. ábra.

A 9.21. d) fel. I. megoldása

A CAT_C, BAT_B háromszögek hasonlóak, hiszen szögeik egyenlők. Így $\frac{AT_C}{AC} = \frac{BT_B}{BA}$, azaz $AT_C \cdot BA = BT_B \cdot AC$, tehát a $t_{ADK_CT_C} = t_{AT_BK_BI}$. Ehhez hasonlóan igazolható a többi egyenlőség.

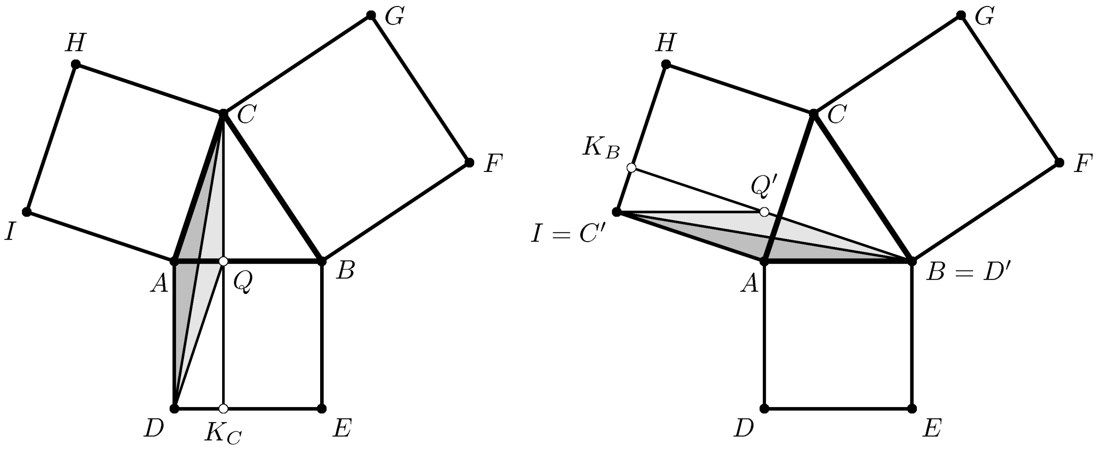
A 9.21. d) fel. II. megoldása

(*Euklidesz útján*)

A CAD háromszöget egészítsük ki a $CADQ$ paralelogrammává. Mivel AD párhuzamos az ABC háromszög C-ből induló magasságával, így Q a CK_C magasságvonalra esik. (Az 17.38. ábrán Q épp az AB oldalra esik, de ez csak az adott ábra specialitása.)

Ennek a paralelogrammának a területe egyenlő az ADK_CT_C téglalap területével.

Alkalmazzuk az a)-b) feladatokban látott transzformációt, az A körüli $90°$-os forgatást! Ez az ADC háromszöget az ABI háromszögbe viszi, az $ADQC$ paralelogrammát



17.38. ábra.

pedig egy olyan $ABQ'I$ paralelogrammába, amelynek Q' csúcsa az AI-vel párhuzamos BK_B egyenesre, az ABC háromszög egyik magasságvonalára esik.

Az $ABQ'I$ paralelogramma területe egyenlő az AT_BK_BI téglalap területével, azaz $t_{AT_BK_BI} = t_{ADK_CT_C}$. Hasonlóan igazolható a többi összefüggés.

I. megjegyzés a 9.21. d) fel. II. megoldásához

A d) feladat állítása a koszinusz-tétel egy szimmetrikus megfogalmazása. így is fogalmazható: az AB oldalra írt négyzet területe a T_AK_AGC, T_BCHK_B téglalapok területének összegével kevesebb, mint a BC, CA oldalakra írt négyzetek területének összege. De

$$CT_A = CA \cdot \cos ACB\angle, \qquad CT_B = CB \cdot \cos ACB\angle,$$

így

$$t_{T_AK_AGC} = CB \cdot CA \cdot \cos ACB\angle, \qquad t_{T_BCHK_B} = CA \cdot CB \cdot \cos ACB\angle,$$

így valóban az ismert $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma$ képlethez jutunk.

II. megjegyzés a 9.21. d) fel. II. megoldásához

A fenti ábrákon hegyesszögű háromszöget látunk. Kissé más az ábra, ha az ABC háromszög egyik szöge, pl γ, tompaszög. Olyankor az AT_AK_AI téglalap tartalmazza a T_ACHK_A téglalapot, területük különbségeként kapjuk az AC oldalra írt négyzet területét.

A 9.21. e) mego.

Az I pont az AB egyenesre T_I-ben állított i merőlegesen, az F pont az AB-re T_F ben állított f merőleges egyenesen kell legyen. Mivel az I pont A körüli $-90°$-os elforgatottja C, és szintén C-t kapjuk, ha F-et $90°$-kal forgatjuk B körül, így C az i egyenes A körüli $-90°$-os i^- elforgatottjának és az f egyenes B körüli $90°$-os f^+ elforgatottjának közös pontja. Az i, f egyenesek párhuzamosak, így i^- és f^+ egyállású, azaz párhuzamosak vagy egybeesnek. Távolságuk a velük párhuzamos AB egyenestől AT_I illetve BT_F. Ha ennek a két szakasznak a hossza nem egyenlő egymással, akkor nincs megoldás, ha egyenlő, akkor pedig végtelen sok van: C-t az $i^- = f^+$ egyenes bármelyik pontjának választhatjuk.

Megjegyzés a 9.21. e) fel. megoldásához

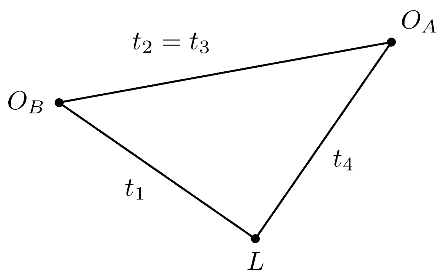
$T_I I A\angle = BAC\angle$ és $T_F F B\angle = ABC\angle$, hiszen mindkét esetben merőleges szárú szögekről van szó. Így az e) feladatban igazolt $AT_I = BT_F$ feltétel a $T_I I A$, $T_F F B$ derékszögű háromszögek alapján a szokásos jelölésekkel: $b\sin\alpha = a\sin\beta$. Ez a szinusz-tétel egy formája.

A 9.21. f) fel. I. megoldása

Tekintsük az O_B pont körüli $90°$-os és az O_A pont körüli $90°$-os forgatásokat és ezek

$$O_A^{90°} \circ O_B^{90°} \tag{17.7}$$

kompozícióját. A (17.7) jelölést jobbról kell olvasni: először az O_B körüli forgatást végezzük el. Az O_B pont körüli $90°$-os elforgatás két olyan tengelyes tükrözéssel helyettesíthető, amely tengelyek egymást O_B-ben $45°$-ban metszik. Pontosítás: az első tengelytől (t_1) a második tengelyig (t_2) mért irányított szög $45°$-os. Vegyük fel ezt a két tengelyt úgy, hogy a második épp O_A-n menjen át. Az O_A körüli $90°$-os elforgatást helyettesítő tengelyeket pedig úgy vegyük fel, hogy az első (t_3) menjen át O_B-n (lásd az 17.39. ábrát).



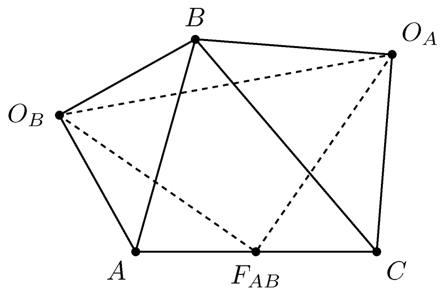
17.39. ábra.

Az így kapott t_1, t_2, t_3, t_4 tengelyekkel

$$O_B^{90°} \circ O_A^{90°} = (t_4 \circ t_3) \circ (t_2 \circ t_1) = t_4 \circ (t_3 \circ t_2) \circ t_1 = t_4 \circ t_1, \tag{17.8}$$

tehát az eredő transzformáció a t_1, t_4 tengelyek L metszéspontjára vonatkozó középpontos tükrözés, hiszen e két tengely szöge 90°.

Az $O_A^{90°} \circ O_B^{90°}$ transzformációnál az AB csúcs képe B, hiszen $O_B^{90}(A) = C$, $O_A^{90}(C) = B$. A középpontos tükrözés középpontja tehát az AB szakasz F_{AB} felezőpontja (lásd az 17.40. ábrát).



17.40. ábra.

Gondolatmenetünk szerint az O_BF_{AB}, O_AF_{AB} egyenesek megegyeznek a korábbi t_1, t_4 tengelyekkel, melyek egymással bezárt szöge 90°, míg mindketten 45°-ban hajlanak az O_AO_B egyeneshez.

A 9.21. f) fel. II. megoldása

Nagyítsuk az O_BF_{AB} szakaszt az A csúcsból, az O_AF_{AB} szakaszt pedig a B csúcsból a kétszeresére. Az O_BF_{AB}, O_AF_{AB} szakaszok helyett képeik, a velük párhuzamos és kétszer akkora HB, GA szakaszokat vizsgáljuk (lásd a 17.41. ábrát).

Az a), b) feladatokban látható módon az AG szakasz a BH szakasz C körüli 90°-os elforgatottja, tehát egyenlő hosszúak és merőlegesek egymásra.

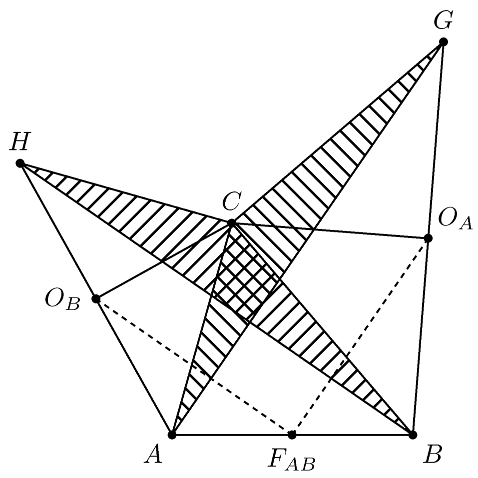
A 9.21. f) fel. III. megoldása

(*Vektorok*)

Használjuk az I. megoldás ábráját, de jelöljük be az AC, BC oldalak F_{AC}, F_{BC} felezőpontjait is! Azt fogjuk megmutatni, hogy az $\overrightarrow{F_{AB}O_B}$ vektor derékszögű elforgatottja a $\overrightarrow{F_{AB}O_B}$ vektor.

Vegyük észre, hogy

$$\overrightarrow{F_{AB}O_B} = \overrightarrow{F_{AB}F_{AC}} + \overrightarrow{F_{AC}O_B},$$



17.41. ábra.

ahol

$$\overrightarrow{F_{AB}F_{AC}} = \overrightarrow{BF_{BC}} = \overrightarrow{F_{BC}O_A}^{90°}$$

és

$$\overrightarrow{F_{AC}O_B} = \overrightarrow{AF_{AC}}^{90°} = \overrightarrow{F_{AB}F_{BC}}^{90°},$$

tehát

$$\overrightarrow{F_{AB}O_A}^{90°} = \overrightarrow{F_{AB}F_{BC}}^{90°} + \overrightarrow{F_{BC}O_A}^{90°} = \overrightarrow{F_{AC}O_B} + \overrightarrow{F_{AB}F_{AC}} = \overrightarrow{F_{AB}O_B}.$$

A 9.21. f) fel. IV. megoldása

(*Komplex számok*)

Legyen ABC pozitív körüljárású és helyezzünk egy komplex számsíkot az ábrára úgy, hogy C legyen az origója. Ha az A, B pontoknak az a, b komplex számok felelnek meg, akkor a H, I, O_B pontoknak rendre a

$$-ia, \qquad a + (-i)a, \qquad \frac{1-i}{2}a$$

komplex számok felelnek meg, ahol $i^2 = -1$, míg a G, F, O_A pontoknak rendre az

$$ib, \qquad b + ib, \qquad \frac{1+i}{2}b$$

számok felelnek meg. Az AB szakasz felezőpontjának megfelelő szám az $\frac{a+b}{2}$. Azt kell megmutatnunk, hogy az $\overrightarrow{F_{AB}O_B}$ vektor 90°-os elforgatottja az $\overrightarrow{F_{AB}O_A}$ vektor, azaz hogy

$$i \cdot \left(\frac{1+i}{2}b - \frac{a+b}{2}\right) = \left(\frac{1-i}{2}a - \frac{a+b}{2}\right).$$

Így egyszerű számítással igazolható a geometriai összefüggés.

A 9.21. g) fel. I. megoldása

Tekintsük az I körüli $45°$-os és $\sqrt{2}$-szeres $I_{\sqrt{2}}^{45°}$ forgatva nyújtást és az F körüli $45°$-os és $\frac{\sqrt{2}}{2}$-szeres $F_{\frac{\sqrt{2}}{2}}^{45°}$ forgatva nyújtást. A két transzformáció τ eredőjéről három dolgot állapítunk meg:

- τ egy $90°$-os forgatás;
- $\tau(J) = J$;
- $\tau(A) = B$.

Az eredő transzformáció tehát egy J körüli $90°$-os forgatás, amely A-t B-be viszi, így az AJB háromszög egyenlő szárú és derékszögű.

A 9.21. g) fel. II. megoldása

Az e) feladatot illetve annak megoldását hívjuk segítségül. A $T_I T_F F I$ négyszög egy derékszögű trapéz. Ebben – épp az e)-ben láttuk – a $T_I T_F$ szár felezőpontja az AB szakasz F_{AB} felezőpontja. Ezért a trapéz $F_{AB}J$ középvonala merőleges a $T_I T_F$ szárra (lásd a 17.42. ábrát).

Még azt kell igazolnunk, hogy az $F_{AB}J$ középvonal hossza az AB oldal hosszának fele, tehát, hogy a $T_I I$, $T_F F$ alapok hosszának összege AB-val egyenlő. Alkalmazzuk az e) megoldásában használt forgatásokat. Az A körüli $-90°$-os forgatásnál az $AT_I I$ háromszög képe az $AT_I'C$ háromszög, míg a B körüli $90°$-os forgatásnál $BT_F F$ képe $BT_F'C$, ahol az $ABT_F'T_I'$ négyszög téglalap, így

$$T_I I + T_F F = T_I'C + T_F'C = AB.$$

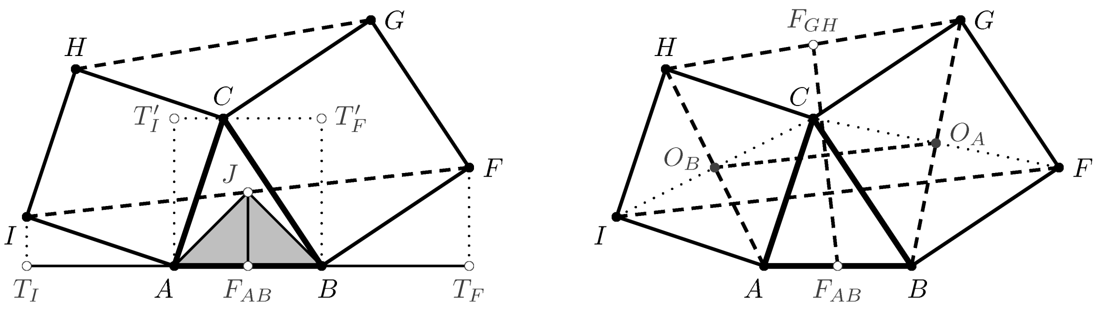
Megjegyezzük, hogy előfordulhat, hogy a $T_I T_F F I$ négyszög egy hurkolt trapéz és egyúttal C nem a $T_I'T_F'$ szakaszra, hanem annak meghosszabbítására esik. Előjeles szakaszokkal, az AB egyenestől való távolságot is előjelesen értelmezve ekkor is hasonlóan igazolható az állítás.

A 9.21. g) fel. III. megoldása

(*Komplex számok*)

Az f) feladat komplex számos megoldását folytatva most az IF szakasz J felezőpontjának megfelelő komplex szám:

$$j = \frac{(1-i)a + (1+i)b}{2} = \frac{1-i}{2}a + \frac{1+i}{2}b.$$



17.42. ábra.

Itt azt kell igazolni, hogy a $\overrightarrow{JA}$ vektor 90°-os elforgatottja a $\overrightarrow{JB}$ vektor, azaz, hogy

$$i\cdot\left(a-\frac{1-i}{2}a-\frac{1+i}{2}b\right)=\left(b-\frac{1-i}{2}a-\frac{1+i}{2}b\right),$$

ami beszorzással könnyen ellenőrizhető.

A 9.21. h) mego.

Az $ABGH$ négyszög középvonalai paralelogrammát határoznak meg. Esetünkben ez a paralelogramma négyzet, hiszen az O_AF_{AB}, O_BF_{AB} középvonalak egyenlőek és merőlegesek egymásra. A négyzet $F_{AB}F_{GH}$, O_AO_B átlói egyenlő hosszúak és egymásra merőlegesek. Az IJ szakasz párhuzamos és kétszer akkora, mint az O_AO_B szakasz (középvonal a CIF háromszögben), így az állítás igazolást nyert.

17.6. Körök, kerületi szögek – megoldások

17.6.1. Két metsző kör szelői – megoldások

Segítség a 9.2. a) feladathoz

Vizsgáljuk az AB kerületi szögét a k körben K-nál illetve az l körben L_A-nál!

Az alábbi linken animáció látható:

http://matek.fazekas.hu/portal/elte/elemifgyujt/html/01.html

A 9.2. a) mego.

Dolgozzunk irányított szögekkel! Legyen $K_1, K_2 \in k$, $L_1, L_2 \in l$ két-két megfelelő pont, tehát K_1 és K_2 a K, L_1 és L_2 az L_A szerepét játssza, azaz $A \in K_1L_1$, $A \in K_2L_2$. Egyrészt

$$L_1K_1B\sphericalangle \equiv AK_1B\sphericalangle \equiv AK_2B\sphericalangle \equiv L_2K_2B\sphericalangle \pmod{180^\circ}, \tag{17.9}$$

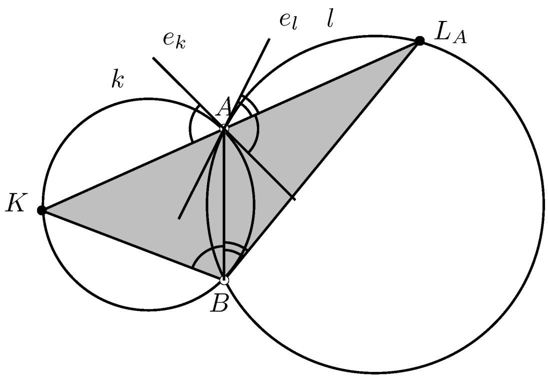
ahol a két szélső egyenlőség (kongruencia) azért teljesül, mert L_1, A és K_1, illetve L_2, A és K_2 egy egyenesen van, míg a középső a kerületi szögek tétele a k körben. Másrészt ehhez hasonlóan

$$BL_1K_1\sphericalangle \equiv BL_1A\sphericalangle \equiv BL_2A\sphericalangle \equiv BL_2K_2\sphericalangle \pmod{180^\circ}. \tag{17.10}$$

Azt kaptuk, hogy az L_AK egyeneshez a KB, L_AB egyenesek állandó szögben hajlanak, amiből következik, hogy az L_AKB háromszög szögei állandó nagyságúak.

A 9.2. b) fel. I. megoldása

Jelölje a k illetve az l kör A pontbeli érintőjét e_k illetve e_l, az A ponton is átmenő KL_A egyenest e (lásd a 17.43. ábrát).



17.43. ábra.

Az érintő szárú kerületi szögre vonatkozó tételt a k körben a KA húrra alkalmazva kapjuk, hogy

$$e\,e_k\sphericalangle \equiv KBA\sphericalangle \pmod{180^\circ},$$

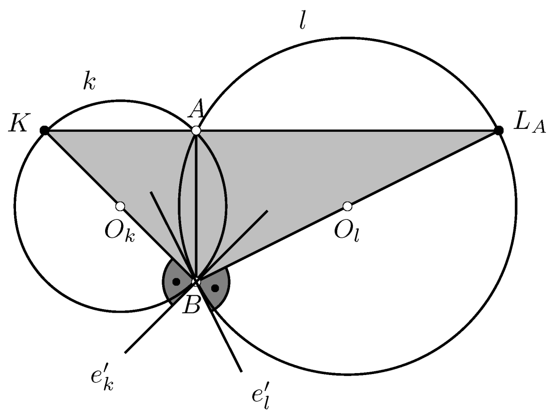
míg az l kör L_AA húrjára

$$e_le\sphericalangle \equiv ABL_A\sphericalangle \pmod{180^\circ},$$

tehát e két egyenlet (kongruencia) összegéből

$$e_le_k\sphericalangle \equiv KBL_A\sphericalangle \pmod{180^\circ},$$

azaz a $KBL_A\sphericalangle$ irányított szög az l kör és a k kör A-beli érintőinek irányított szögével egyezik meg.



17.44. ábra.

A 9.2. b) fel. II. megoldása

Válasszuk K-nak a k körön B-vel átellenes pontot (lásd a 17.44. ábrát).

Ilyenkor L_A az l körön B-vel átellenes pont. A körök B-beli érintői a BL_A, BK átmérőkre merőleges egyenesek, tehát a merőleges szárú szögek miatt az l és a k kör B-beli érintőinek irányított szöge az $L_ABK\sphericalangle$ szöggel egyezik meg (mod 180°).

A 9.2. c) mego.

Vizsgáljuk az L_ABK, L_ABL_B háromszögeket! Az előbbiben az a) feladatrész szerint B-nél állandó szög van, de (mod 180°) ugyanez a szög van az utóbbi háromszögben is B-nél, azaz az l körben az L_AL_B húr kerületi szöge állandó, így az L_AL_B szakasz hossza is állandó.

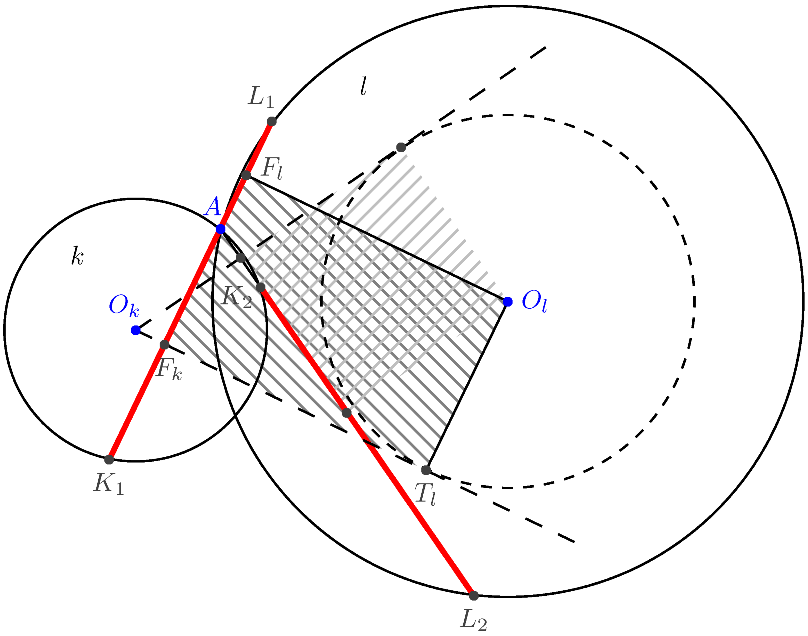
A 9.2. d) fel. I. megoldása

Az a) feladatrész állítása szerint az egyik metszésponton átmenő szelő a másik metszésponttal egymáshoz hasonló háromszögeket alkot. Egy ilyen háromszög megszerkeszthető és felnagyítható, hogy a szelőnek megfelelő oldala megfelelő hosszúságú legyen. Adott a két kör közös ponjainak távolsága, így meghatározható (tipikusan két lehetőség), hogy a szelőnek megfelelő oldalon hol van a körök közös pontja. Ezután a szelő már egyszerűen szerkeszthető be a körpárba.

A 9.2. d) fel. II. megoldása

Induljunk ki a kész 17.45. ábrából! Az O_K és O_L középpontú k, l körök A metszéspontján át szerkesztett KL szelő $K \in k$, $L \in l$ legyen a kívánt a hosszúságú. Az AK, AL húrok

F_K, F_L felezőpontjait összekötő szakasz hossza $\frac{a}{2}$. Tekintsük az O_l középpontból az $F_K O_K$ egyenesre bocsájtott merőleges T_l talppontját. A $T_l F_k F_l O_l$ négyszög téglalap, hiszen a T_l, F_l, F_k csúcsainál derékszög van. E téglalapnak ismert az $\frac{a}{2} = F_k F_l = T_l O_l$ oldala és az $F_k T_l$ egyenes egy pontja, így megszerkeszthetjük: ez az egyenes ugyanis az O_l középpontú $\frac{a}{2}$ sugarú körhöz húzott érintő.



17.45. ábra.

Ha $\frac{a}{2} < O_k O_l$, akkor O_k kívül van a szerkesztett körön, két érintő, két megoldás is van. Ha $a = 2O_k O_l$ akkor csak egy érintő, és abból származóan csak egy megoldás van, az $O_k O_l$ centrálissal párhuzamos szelő. A szelődarab hossza nem lehet $2O_k O_l$-nél nagyobb.

A 9.2. e) mego.

Fent megkaptuk, hogy a maximális hossz $2O_k O_l$.

Megoldási ötlet a 9.2. f) feladathoz

Számoljunk a $K_A A B K_B$, $L_A A B L_B$ húrnégyszögek szögeivel!

Segítség a 9.2. g) feladathoz

A mértani helyet megsejthetjük az alábbi animáció alapján. Vizsgáljuk külön az $AL_A F$, AKF háromszögeket!

http://matek.fazekas.hu/portal/elte/elemifgyujt/html/02.html

A 9.2. g) fel. I. megoldása

Ha B a két adott kör másik metszéspontja, akkor a KBL_A háromszög hasonlóság erejéig adott, így a KBF háromszög alakja is adott. Tekintsük azt a B centrumú τ forgatva nyújtást, amely K-t az F-be képezi. Ez a k kört a keresett mértani helybe, a $\tau(k)$ körbe viszi. E kör minden pontja megfelelő, mert F pontjához a τ^{-1} inverz leképezés olyan K pontot rendel, amelyből kiindulva a kapott KL_A szakasz felezőpontja $\tau(K) = \tau(\tau^{-1}(F))$, azaz F lesz.

A 9.2. g) fel. II. megoldása

Dinamikus geometriai szoftver segítségével megsejtettük, hogy a keresett mértani hely egy olyan kör, amely átmegy az A, B pontokon is. Ezért az AF szakasz f felezőmerőlegesét vizsgáljuk és ehhez segít, ha az AK, AL_A szakaszok egymással párhuzamos f_k, f_l felezőmerőlegeseit is tekintetbe vesszük.

Az AK, AL_A szakaszok a k illetve az l kör húrjai, így f_k átmegy a k kör O_k középpontján, míg f_l az l kör O_l középpontján.

Az A centrumú $\frac{1}{2}$ arányú nyújtás L_A-t az f_l egyenes egy F_l pontjára, K-t az f_k egyenes egy F_k pontjára képezi, így F-et az F_kF_l szakasz felezőpontjára, az f_k, f_l párhuzamos egyenesek közti sáv felezőegyenesének egy pontjába viszi. Tehát az f egyenes felezi az egymással és vele párhuzamos f_k, f_l egyenesek közti sávot, így a K pont bármely helyzetében átmegy az O_kO_l szakasz O felezőpontján. Az O pont tehát egyforma messze van A-tól és F-től, így F illeszkedik az O középpontú A-n átmenő k_f körre.

Megfordítva, ha F a k_f kör pontja, akkor az AF egyenesre merőleges O_k, O_l-en átmenő f_k, f_l tengelyekre tükrözve A-t kapjuk a keresett K, L_A pontokat, amelynek felezőpontja F.

A 9.2. h) mego.

Az AK, AL_A szakaszok f_k, f_l felezőmerőlegesei egymással párhuzamosak. A KO_k egyenes az AO_k egyenes tükörképe f_k-ra, míg az L_AO_l egyenes az AO_l egyenes tükörképe f_l-re. Mivel az AO_k, AO_l egyenesek szöge rögzített, így a KO_k, L_AO_l egyenesek szöge is adott, tehát a keresett P pontok az O_lO_k szakasz egy látókörén helyezkednek el. Amikor KA párhuzamos az O_kO_l centrálissal, akkor $P = B$, tehát a mértani hely az O_k, O_l, B ponthármas körülírt köre.

A 9.2. i) fel. I. megoldása

Tekintsük az A_kO_lB háromszög körülírt körét. Tudjuk, hogy erre illeszkedik az A_kB oldal felezőmerőlegesének és az $A_kO_lB\angle$ szögfelezőjének metszéspontja. O_k illeszkedik a felezőmerőlegesre, hiszen a k körben $O_kA_k = O_kB$ és O_k illeszkedik a szögfelezőre is, hiszen a k, l körök O_kO_l centrálisa felezi az $AO_lB\angle$ szöget. Ezzel igazoltuk, hogy az A_k, B, O_l, O_k pontok egy körön vannak és hasonlóan igazolható, hogy az A_l, B, O_l, O_k is egy körön vannak, tehát mind az öten egy körre illeszkednek.

A 9.2. i) fel. II. megoldása

A h kör a h) feladatrészben kapott mértani hely. Ha a h) feladatban AK a k kör átmérő egyenese, akkor az ottani L_A az itteni A_l és a P pont is az A_l pont, tehát $A_l \in h$. Hasonlóan igazolható, hogy $A_k \in h$.

A 9.2. j) mego.

$CA_lA\angle = CA_lO_k\angle = CBO_k\angle = ABO_k\angle = BAO_k\angle = CAA_l\angle$. Ez az egy soros levezetés mutatja, hogy $CAA_l\angle = CA_lA\angle$ azaz az ACA_l háromszög egyenlő szárú. Hasonlóan igazolható, hogy az ACA_k háromszög is egyenlő szárú, tehát a CA, CA_l, CA_k szakaszok mind egyenlők egymással.

Segítség a 9.2. k) feladathoz

Mutassuk meg, hogy $D_lA = BA_l$ és $D_kA = BA_k$.

A 9.2. k) mego.

Megmutatjuk, hogy a k körben a BA, B_kD_k húrokhoz ugyanakkor középponti szögek tartoznak. Ebből következik, hogy ezek a húrok egyenlő hosszúak, így az O_kA_kCA deltoid O_kC átlójára való tükrözés amellett, hogy kicseréli A-t és A_k-t, egyúttal D_k-t és B-t is kicseréli, tehát a D_kA, BA_k húrokat is kicseréli. Hasonlóan igazolható, hogy $D_lA = BA_l$, ami bizonyítja a feladat állítását.

$$D_kO_kA_k\angle = 2D_kAA_k\angle = 2AA_kA_l\angle = 2O_lA_kA_l\angle = 2O_lO_kA_l\angle = 2O_lO_kA\angle = BO_kA\angle.$$

a 9.2. l) mego.
Q mértani helye nyomon követhető az alábbi animáción.
http://matek.fazekas.hu/portal/elte/elemifgyujt/html/03.html

A 9.2. m) mego.

A K, P, L_A, Q pontok egy körön vannak, nevezetesen a PQ szakasz Thalesz körén. Valóban, a k kör K-beli érintője és átmérője merőleges egymásra, azaz $QKP\angle = 90°$ és ehhez hasonlóan $QL_AP\angle = 90°$.

Most megmutatjuk, hogy a K, B, L_A, Q pontok is egy körön vannak. A k körben a KA húr kerületi és érintős szárú kerületi szöge egyenlő:

$$KBA\sphericalangle \equiv QKA\sphericalangle \pmod{180°},$$

és ehhez hasonlóan az l körben az AL_A húr kerületi és érintő szárú kerületi szöge:

$$ABL_A\sphericalangle \equiv AL_AQ\sphericalangle QKA\sphericalangle \pmod{180°}.$$

A két kongruencia összege:

$$KBL_A\sphericalangle \equiv KQL_A\sphericalangle \pmod{180°},$$

ami épp azt fejezi ki, hogy Q és B a KA húr azonos látókörére illeszkedik.

Beláttuk, hogy a K, B, P, L_A, Q pontok mind egy q körön vannak és azt is, hogy ennek középpontja a PQ szakasz H felezőpontja. Alább még igazoljuk, hogy ez a H pont illeszkedik a h körre.

Ehhez azt kell megmutatnunk, hogy

$$BO_kP\sphericalangle \equiv BHP\sphericalangle \pmod{180°}.$$

A q körben a BP húr középponti és kerületi szöge:

$$BHP\sphericalangle \equiv 2BKP\sphericalangle \pmod{180°}.$$

Másrészt a KO_kB egyenlő szárú háromszög O_k-nál fekvő külső szöge

$$BO_kP\sphericalangle \equiv 2BKP\sphericalangle \pmod{180°},$$

amivel igazoltuk is, hogy H illeszkedik a h körre.

A 9.2. n) mego.

A B, P pontok a q és a h körre is illeszkednek, így a h kör H-hoz húzott sugara illeszkedik a BP szakasz felezőmerőlegesére. Ezért a h kör H-beli érintője merőleges a BP felezőmerőlegesére és párhuzamos a BP egyenessel. A QB egyenes is merőleges a BP szakaszra, hiszen a q kör a PQ szakasz Thalesz köre és erre illeszkedik B is. A h kör H-beli érintője tehát merőleges a BQ szakaszra és átmegy a q kör középpontján, amelyre Q és B is illeszkedik, tehát az érintő egyben a BQ szakasz felezőmerőlegese is. Ezt akartuk igazolni.

Ha valamely kör egy pontját tükrözzük ugyanezen kör össze érintőjére, akkor kardioidot kapunk. Ha itt K befutja a k kört, akkor P és H befutja a h kört. A h-ra illeszkedő B pont tükörképe a h kör H-beli érintőjére egy kardioidot ír le.

A 9.2. o) fel. szemléltetése

Az alábbi interaktív animáción vizsgálhatjuk a problémát, kirajzolva látjuk a KL szakasz felezőmerőlegesét ahogy a két pont forog saját körén. Kérhetjük, hogy a felezőmerőleges nyoma maradjon az ábrán.

`http://matek.fazekas.hu/portal/elte/elemifgyujt/html/19i.html`

A 9.2. o) fel. I. megoldása

Mértani hely

Csak azt az esetet vizsgáljuk, amikor az $AO_kK\sphericalangle$, $AO_lL\sphericalangle$ szögek nagysága egyenlő és emellett irányításuk is megegyezik. Ekkor a k-beli illetve l-beli $KBA\sphericalangle$, $ABL\sphericalangle$ szögek egymás ellentettjei modulo 180°, azaz B illeszkedik a KL egyenesre. A g) feladatrészben láttuk, hogy a KL szakasz felezőpontja egy olyan kört fut be, amelynek középpontja az O_kO_l centrális szakasz F felezőpontja, és amely átmegy az A, B pontokon is. A KL szakasz felezőmerőlegese e kör B-ből induló húrjának másik végpontjában a húrra állított merőleges egyenes. Thalesz tételének megfordítása szerint ez az egyenes átmegy a kör B-vel átellenes $U = U_B$ pontján. Ez a pont – a B pont F-re vonatkozó tükörképe – tehát mindig egyforma távolságra van K-tól és L-től.

A 9.2. o) fel. II. megoldása

Tükrözések kompozíciója

Azt kell igazolnunk, hogy a KL szakasz t felezőmerőlegese mindig átmegy egy rögzített U ponton. A t-re vonatkozó tengelyes tükrözés U-t V-be viszi és nincs is más olyan tükrözés, amely képes erre. Megkeressük más módon is a K-t L-be képező tükrözést, előállítjuk őt három egy ponton átmenő tengelyes tükrözés szorzataként.

Legyen τ_K ill. τ_L a KA illetve az AL szakasz felezőmerőlegese, metszéspontjuk S és jelölje τ_A az AS egyenest (lásd a 17.46. ábrát).

Vizsgáljuk először az irányítástartó esetet, azaz legyen most

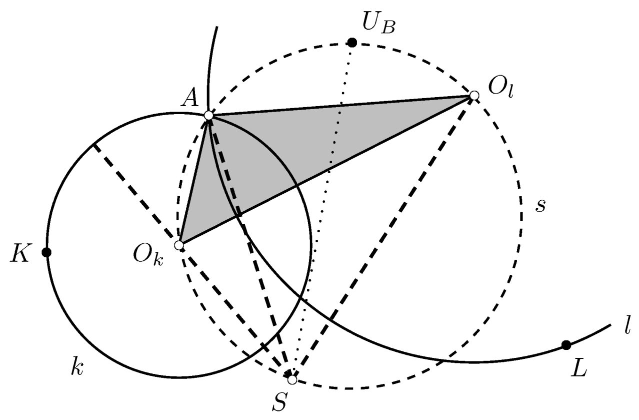
$$KO_kA\sphericalangle \equiv LO_lA\sphericalangle \pmod{360^\circ}.$$

Ezen szögek felére:

$$AO_kS\sphericalangle \equiv AO_lS\sphericalangle \pmod{180^\circ}, \tag{17.11}$$

azaz O_k, O_l, A és S egy s körön vannak.

Mivel a tükrözésekre $\tau_K(K) = A$, $\tau_A(A) = A$ és $\tau_L(A) = L$, így $\tau_L \circ \tau_A \circ \tau_K(K) = L$. A három egy ponton átmenő tükrözés fenti kompozíciója egyetlen tükrözéssel is helyettesíthető. Forgassuk el a τ_A, τ_L tengelyeket S körül azonos szöggel úgy, hogy τ_A egybeessen τ_K-val. Jelölje τ_L képét τ_L'. Az egymással φ szöget bezáró tengelyekre való



17.46. ábra.

tükrözések kompozíciója a tengelyek metszéspontja körüli 2φ szögű forgatás, így most a $\tau_L \circ \tau_A$, $\tau'_L \circ \tau_K$ transzformációk megegyeznek egymással és ezért

$$\tau_L \circ \tau_A \circ \tau_K = \tau'_L \circ \tau_K \circ \tau_K = \tau'_L.$$

Messe a τ'_L egyenes az s kört az U_B pontban. Mivel $\tau_L \tau'_L \sphericalangle \equiv \tau_A \tau_K \sphericalangle \pmod{180°}$, így $LSU_B \sphericalangle \equiv ASU_K \sphericalangle \pmod{180°}$, azaz az s kör $O_l U_B$, AO_k ívei egyenlők, így az U_B pont rögzített, nevezetesen U_B az A tükörképe az $O_l O_k$ szakasz felezőmerőlegesére.

A korábban leírtak miatt τ'_L a KL szakasz felezőmerőlegese, tehát U_B a keresett pont.

Térjünk át az irányításváltó esetre, azaz legyen

$$KO_k A \sphericalangle \equiv -LO_l A \sphericalangle \pmod{360°}$$

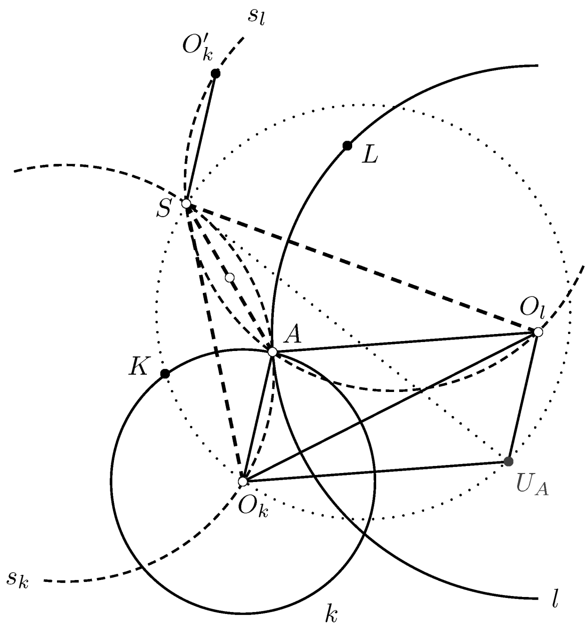
és így ezen szögek felére:

$$AO_k S \sphericalangle \equiv -AO_l S \sphericalangle \pmod{180°}. \tag{17.12}$$

Ez ezt jelenti, hogy az $O_k AS$, $O_l AS$ háromszögek s_k, s_l körülírt körei egyenlő sugarúak, de különbözőek (lásd a 17.47. ábrát).

Most is bevezetjük az irányítástartó esetben látott τ_K, τ_A, τ_L egyeneseket illetve a rájuk vonatkozó tükrözéseket és az ezek kompozícióját jelentő τ'_L tükrözést illetve annak ugyanígy jelölt tengelyét. Toljuk el az s_L kört az $\overrightarrow{AO_k}$ vektorral! Jelölje s_L képét s'_L, O_l képét U_A!

Állítjuk, hogy s'_L az O_k, U_A pontokon kívül még S-en is átmegy. Valóban, az s_k, s_l egyenlő sugarú köröket egymásra képezi az SA szakasz felezőpontjára vonatkozó középpontos tükrözés, és ennél az $O_k \in s_K$ pont képe épp az az $O'_k \in s_L$ pont lesz, amelyet az $\overrightarrow{AO_k}$ vektorral való eltolás S-be visz, hiszen $AO_k SO'_k$ paralelogramma.



17.47. ábra.

Az s'_L körben az O_kU_A húrhoz ugyanakkor a kerületi szög tartozik, mint s_L-ben AO_l-hez, tehát $O_kSU_A\sphericalangle \equiv ASO_l\sphericalangle \pmod{180°}$, azaz $U_A \in \tau'_L$. Tehát az U_A pont egyenlő távol van a K, L pontoktól az irányításváltó esetben.

A 9.2. o) fel. III. megoldása

Komplex számok

A komplex számsíkon dolgozunk. Jelölje az A, B, O_k, O_l pontoknak megfelelő komplex számokat rendre a, b, o_k és o_l. A K, L pontoknak a

$$o_k + \epsilon \cdot (a - o_k), \qquad o_l + \epsilon \cdot (a - o_l) \tag{17.13}$$

számok felelnek meg az első esetben és

$$o_k + \epsilon \cdot (a - o_k), \qquad o_l + \bar{\epsilon} \cdot (a - o_l) \tag{17.14}$$

a másodikban, ahol ϵ egységnyi abszolútértékű komplex szám. Ahogy K és L befutja k-t illetve l-et, úgy ϵ befutja a komplex egységkört. Alább csak az első esetet számoljuk végig, a második hasonlóan kezelhető.

Olyan z komplex számot keresünk, egyforma messze van a K-nak és az L-nek megfelelő komplex számtól, azaz amelyre a

$$\begin{aligned}(z-o_k-\epsilon\cdot(a-o_k))\left(\overline{z-o_k-\epsilon\cdot(a-o_k)}\right)&=\\=\quad(z-o_l-\epsilon\cdot(a-o_l))\left(\overline{z-o_l-\epsilon\cdot(a-o_l)}\right)&\end{aligned}\tag{17.15}$$

összefüggés minden egységnyi abszolútértékű ϵ komplex számra teljesül. A (17.15) összefüggés első ránézésre bonyolultnak tűnik, de $\alpha\cdot\epsilon+\overline{\alpha}\cdot\overline{\epsilon}+\gamma=0$ alakba rendezhető, ahol α és γ komplex számok. Könnyű megmutatni, hogy ilyen összefüggés akkor és csakis akkor teljesül minden ϵ egységre, ha $\alpha=\gamma=0$. Ezt az elvet alkalmazva kapjuk, hogy

$$z=\frac{o_k\overline{o_k}-o_l\overline{o_l}}{\overline{o_k}-\overline{o_l}}+a \tag{17.16}$$

megfelelő.

Ha az O_kO_l centrálist választjuk a komplex számsík valós tengelyének, akkor az o_k, o_l számok valósak, ha még AB a képzetes tengely, akkor $b=-a$ és ekkor (17.16) egyszerűbben így írható:

$$z+b=o_k+o_l, \tag{17.17}$$

ami épp azt fejezi ki, hogy az O_kBO_lV négyszög paralelogramma.

A 9.2. o) fel. IV. megoldása

A szimmetria kiemelése

Az O_k középpontú r_k sugarú k kör és az O_l középpontú r_l sugarú l kör mellett tekintsük az O_k középpontú r_l sugarú l' kört és az O_l középpontú r_k középpontú k' kört is, azaz tükrözzük eredeti két körünket az O_kO_l szakasz t felezőmerőlegesére (lásd a 17.48. ábrát). A k, l körök metszéspontjai A és B, a k', l' körök metszéspontjai legyenek U_B és U_A, a t-re való tükrözésnél U_B az A képe, U_A a B képe.

Az irányítástartó esetben a KO_kU_B, U_BO_lL háromszögek egybevágóak, hiszen két-két oldaluk és köztük lévő szög megegyezik egymással:

$$KO_k=U_BO_l=r_k,\qquad O_kU_B=O_lL=r_l,$$

$$U_BO_kK\sphericalangle=U_BO_kA\sphericalangle+AO_kK\sphericalangle=U_BO_lA\sphericalangle+AO_lL\sphericalangle=U_BO_lL\sphericalangle,$$

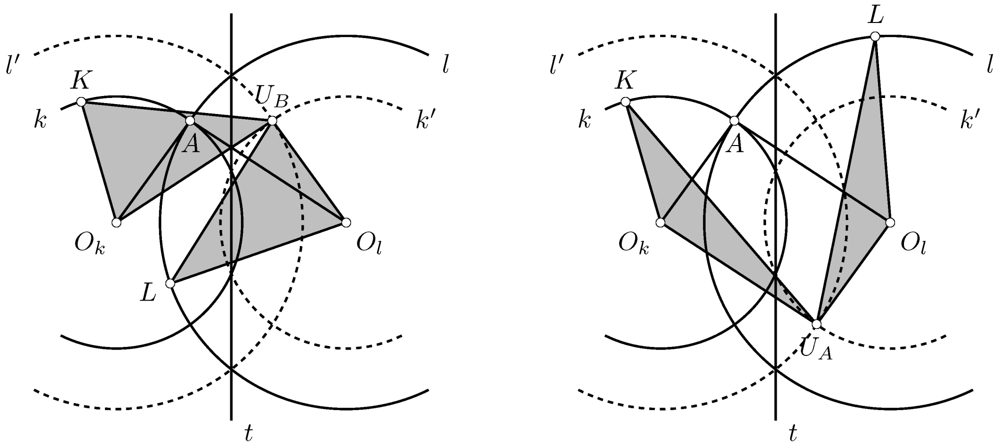
így a harmadik oldalak is egyenlők: $KU_B=U_BL$.

Az irányításváltó esetben a KO_kU_A, U_AO_lL háromszögek egybevágóak, hiszen két-két oldaluk és köztük lévő szög megegyezik egymással:

$$KO_k=U_BO_l=r_k,\qquad O_kU_B=O_lL=r_l,$$

$$U_AO_kK\sphericalangle=U_AO_kA\sphericalangle+AO_kK\sphericalangle=AO_lU_A\sphericalangle+LO_lA\sphericalangle=LO_lU_A\sphericalangle,$$

így a harmadik oldalak is egyenlők: $KU_A=U_AL$.



17.48. ábra. Lásd a http://matek.fazekas.hu/portal/elte/elemifgyujt/html/20i.html animációt!

A 9.2. p) fel. I. megoldása

Az o) feladat első részében használt U_B pont – a B pontnak az O_kO_l szakasz F felezőpontjára tükrözött képe lesz megfelelő V-nek.

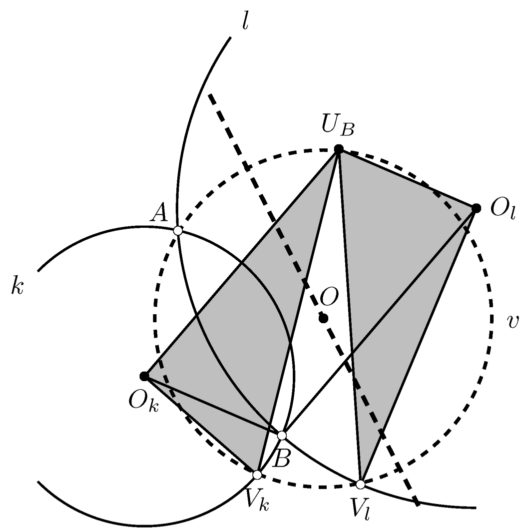
Mivel AB felezőmerőlegese az O_kO_l egyenes, így AU_B felezőmerőlegese egybeesik O_kO_l felezőmerőlegesével. Legyen O tetszőleges pont ezen a felezőmerőlegesen (lásd a 17.49. ábrát). Tekintsük egyrészt az O középpontú A-n és U_B-n átmenő v kört, amely k-t és v-t még V_k-ban és V_l-ben metszi, tekintsük továbbá azt az O körüli φ forgatást, amely O_l-t O_k-ba viszi. Megmutatjuk, hogy $\varphi(U_B) = V_k$ és $\varphi^{-1}(U_B) = V_l$, amiből következik, hogy $U_BV_k = U_BV_l$.

A φ transzformáció az U_B pontot a v körön forgatja, de egyúttal a k kör egy pontjába viszi, hiszen O_l-t O_k-ba képezi és az O_lU_B távolság is k sugarával egyezik meg: a k körben $O_kV_k = O_kB$, míg az $O_kBO_lU_B$ paralelogrammában $O_kB = O_lU_B$. Mivel $k \cap v = \{A, V_k\}$, így $\varphi(U_B) = V_k$ vagy $\varphi(U_B) = A$. Mindig az előbbi eset valósul meg. Valóban, O az AU_B, O_kO_l szakaszok közös felezőmerőlegesén van, így az utóbbi eset csak akkor fordul elő, ha $O = O_kA \cap O_lU_B$, de ekkor a v kör A-ban érinti k-t, tehát a V_k pont is A-ban van.

Hasonlóan igazolható, hogy $\varphi^{-1}(U_B) = V_l$, amiből már következik a feladat állítása.

A 9.2. p) fel. II. megoldása

Induljunk ki a kész ábrából és alkalmazzunk rá V centrumú inverziót! A k, l körök képei az egymást az A, B pontok A', B' képeiben metsző k', l' körök lesznek. A v kör képe az A' ponton átmenő v' egyenes, amely a V_k, V_l pontok V_k', V_l' képeiben metszi a k', l'



17.49. ábra.

köröket. A V pont egyforma messze van a V_k', V_l' pontoktól, tehát V illeszkedik az A'-n átmenő $V_k'V_l'$ szelő felezőmerőlegesére.

Ez a szituáció az o) feladatrész második részének bizonyításából ismerős. Az ott látható módon megmutatható, hogy V az A' pont középpontosan tükrözött képe a k', l' körök középpontját összekötő szakasz felezőpontjára.

17.6.2. Két kör közös érintői – megoldások

Segítség a 9.3. a) feladathoz

Az összefüggést megsejthetjük az alábbi animáció alapján.

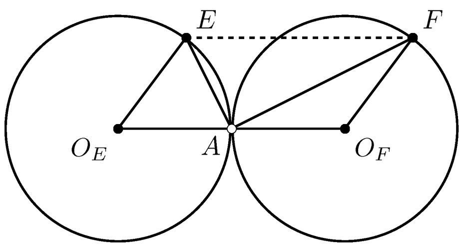
http://matek.fazekas.hu/portal/elte/elemifgyujt/html/06.html

A 9.3. a) fel. I. megoldása

Középponti szögek

Rajzoljuk be a körök adott pontokhoz vezető O_EE, O_EA, O_FA, O_FF sugarait (lásd a 17.50. ábrát)! Mivel a két kör érinti egymást, így az O_E, O_F középpontok és az A érintési pont egy egyenesen vannak, $|O_EO_F| = 2R$.

Az EO_EA háromszögben $O_EEA\angle = EAO_E\angle$, míg FO_FA-ban $AFO_F\angle = O_FAF\angle$. Mivel $EAF\angle = 90°$, így $EAO_E\angle + O_FAF\angle = 90°$ és ebből a két háromszög kimaradt szögeinek összege: $EO_EA\angle + AO_FF\angle = 180°$, azaz $O_EE \parallel O_FF$. Mivel $|O_EE| = |O_FF|$, így az O_EO_FFE négyszög paralelogramma, azaz $EF = O_EO_F = 2R$.

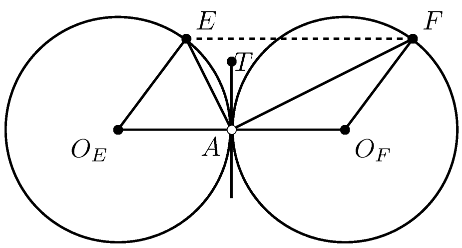


17.50. ábra.

Megjegyzés a 9.3. fel. I. megoldásához

Az előző megoldás fő része frappánsabban mondható el az érintő szárú kerületi szög alkalmazásával.

Az $EO_EA\angle$ szög a k_E körben az EA húr középponti szöge, tehát az $EAT\angle$ érintő szárú kerületi szög duplája (lásd a 17.51. ábrát). Ugyanígy az $AO_FF\angle$ szög a k_F körben az AF húr középponti szöge, azaz a $TAF\angle$ érintő szárú kerületi szög kétszerese. Mivel $90° = EAT\angle + TAF\angle$, így $EO_EA\angle + AO_FF\angle = 180°$.



17.51. ábra.

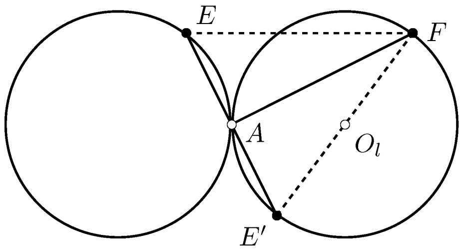
A 9.3. a) fel. II. megoldása

Tükrözés

Legyen az E pont A-ra középpontosan tükrözött képe E'. Mivel $EAF\angle = 90°$, így E' egyben az E pont AF egyenesre tengelyesen tükrözött képe is (lásd a 17.52. ábrát). Ezért egyrészt $EF = FE'$, másrészt $90° = EAF\angle =' EAF\angle$, azaz Thalesz tételének megfordítása szerint $E'F$ az l kör átmérője. Ebből $EF = E'F = 2R$.

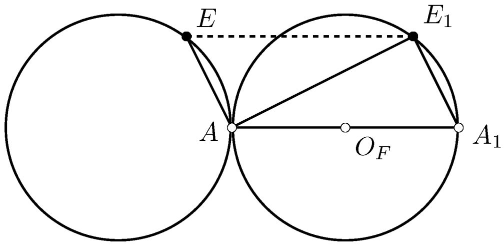
A 9.3. a) fel. III. megoldása

Eltolás



17.52. ábra.

Tekintsük azt az eltolást, amely az E pontot tartalmazó k_E kört az F pontot tartalmazó k_F körbe viszi. Ennek $\overrightarrow{O_EO_F}$ vektorának hossza $2R$. Jelölje az E, F pontok eltoltját E_1, A_1 (lásd a 17.53. ábrát).



17.53. ábra.

Az AA_1E_1E paralelogrammában $A_1E_1A\angle = 90°$, hiszen AA_1 az l kör átmérője. Másrészt a paralelogrammában $A_1E_1A\angle = E_1AE\angle$, azaz $F = E_1$ és $|EF| = |EE_1| = |AA_1| = 2R$.

A 9.3. b) fel. I. megoldása

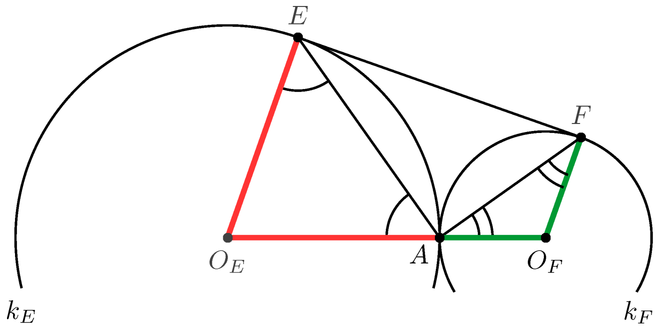
Az egyes körökben két-két sugár egyenlő szárú háromszöget alkot(lásd a 17.54. ábrát): $O_EE = O_EA$, illetve $O_FF = O_FA$. Az egyenlő szárú háromszög alapon fekvő szögei egyenlők:

$$\alpha = O_EEA\angle = O_EAE\angle, \qquad \beta = O_FFA\angle = O_FAF\angle.$$

A vizsgált $EAF\angle$ kifejezhető az $O_EAO_F\angle$ egyenes-szögből:

$$\gamma = EAF\angle = 180° - \alpha - \beta.$$

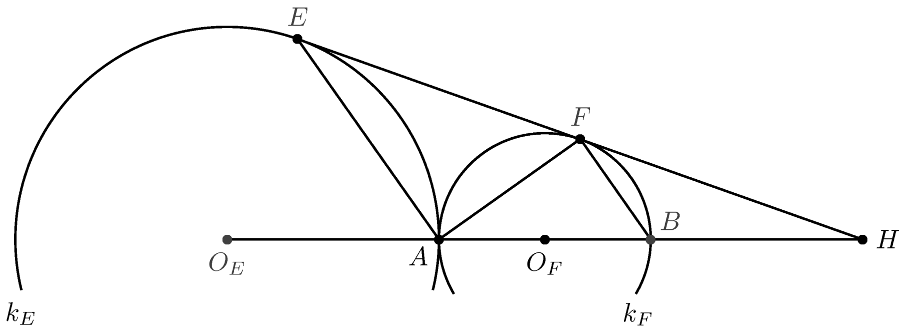
Az OE_E, O_FF sugarak merőlegesek az EF érintőre, így $FEA\angle = 90° - \alpha$, $EFA\angle = 90° - \beta$. E két szög összege épp γ, így az EFA háromszög belső szögeinek összege 2γ, amiből a kérdezett γ szög $90°$-nak adódik.



17.54. ábra.

A 9.3. b) fel. II. megoldása

A két kör egymásba nagyítható A-ból egy negatív aránnyal és egymásba nagyítható egy másik, H pontból is, ahonnan pozitív arányú nagyítást kell alkalmazni. Ez a H pont a centrális és a külső érintők közös metszéspontja (lásd a 17.55. ábrát).



17.55. ábra.

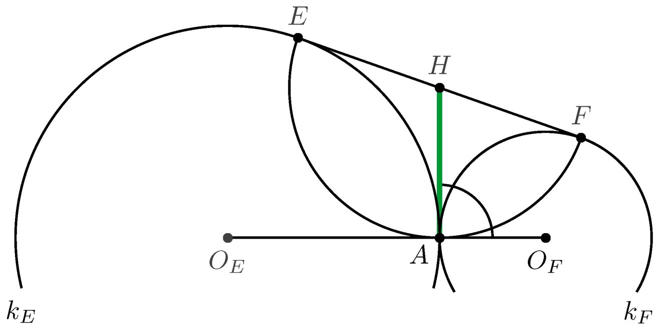
Amikor az E-t tartalmazó k_E kört H-ból az F-et tartalmazó k_F körbe nagyítjuk (illetve kicsinyítjük), akkor a k_E körön a centrális A-pontja a k_F kör centrálisra illeszkedő B pontjába képződik, míg az AE szakasz képe a BF szakasz lesz. A középpontos hasonlóságnál egyenes képe mindig az eredeti egyenessel egyállású, azaz most $AE \| BF$.

Ebből fakadóan az $EAF\angle$, $AFB\angle$ szögek váltószögek, tehát egyenlők. Az utóbbi szög a k_F körben Thalesz tétele szerint derékszög, így a kérdezett szög is az.

A 9.3. d) mego.

Jelölje a két kör közös pontját A, az A-beli közös érintőjüket a, EF és a metszéspontját H (lásd a 17.56. ábrát).

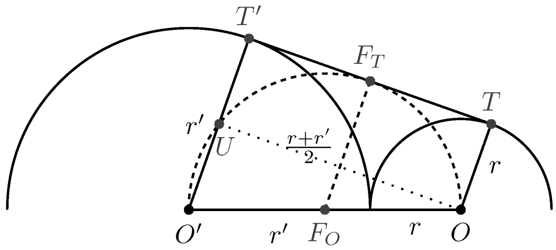
H-ből az egyik körhöz húzott két érintőszakasz HE és HA, a másik körhöz innen húzott érintők HA és HF, így $HE = HA = HF$, azaz H az EF szakasz Thalesz körének középpontja, HA a Thalesz kör sugara. $a = HA$ a két kör A-beli érintője, tehát HA merőleges az előre adott körök centrálisára, tehát a Thalesz kör A-ban érinti a centrálist.



17.56. ábra.

A 9.3. e) mego.

A két adott kör, az érintőpár és a Thalesz kör is tengelyesen tükrös az adott körök OO' centrálisára, így elég az egyik érintővel – a 17.57. ábrán TT'-bel – foglalkozni.



17.57. ábra.

Az adott körök r illetve r' hosszúságú OT, $O'T'$ sugarai merőlegesek a TT' közös érintőre, így a $TT'O'O$ négyszög derékszögű trapéz. A két adott kör érinti egymást, így a trapéz OO' szárának hossza $r + r'$, tehát a vizsgált Thalesz kör sugara $\frac{r+r'}{2}$. A trapéz F_OF_T középvonalának hossza az alapok számtani közepe, tehát $\frac{r+r'}{2}$. Ez azt jelenti, hogy a vizsgált Thalesz kör, amelynek középpontja F_O, átmegy a TT' közös érintő F_T pontján. A Thalesz kör érinti is a TT' közös érintőt, mert az F_OF_T középvonal párhuzamos a trapéz OT, $O'T'$ alapjaival, így merőleges TT'-re.

A 9.3. f) mego.

Egy külső és egy belső érintőegyenes négy olyan szögtartományra osztja a síkot, amelyek közül kettő szomszédos tartományban van a két adott kör és érinti a szögszárakat. Ezért a két kör középpontja a két egyenes két szögfelezőjén helyezkedik el. Mivel két metsző egyenes szögfelezői merőlegesek egymásra, így az érintők metszéspontja a középpontok Thalesz körén van.

A 9.3. g) fel. I. megoldása

Tekintsük az E_KAE_L háromszög c_E körülírt körében a E_KA húr E_L-nél található kerületi szögét és az A-nál fekvő érintő szárú kerületi szögét valamint az F_KAF_L háromszög c_F körülírt körében a F_KA húr F_L-nél található kerületi szögét és az A-nál fekvő érintő szárú kerületi szögét. A két kör pontosan akkor érinti egymást, ha ez a két kerületi szög az $E_LAF_L\sphericalangle$ szöggé áll össze, azaz ha ha

$$E_KE_LA\sphericalangle + AF_LF_K\sphericalangle \equiv E_KAF_K\sphericalangle \pmod{180^\circ}. \tag{17.18}$$

Az E_KAF_K háromszögben

$$E_KAF_K\sphericalangle \equiv 180^\circ - F_KE_KA\sphericalangle - AF_KE_K\sphericalangle \pmod{180^\circ} \tag{17.19}$$

és a K körben az F_KA, E_KA húr kerületi szögei egyenlők az érintő szárú kerületi szögekkel, azaz

$$F_KE_KA\sphericalangle \equiv F_LF_KA\sphericalangle \pmod{180^\circ}, \qquad AF_KE_K\sphericalangle \equiv AE_KE_L\sphericalangle \pmod{180^\circ}, \tag{17.20}$$

így

$$E_KAF_K\sphericalangle \equiv 180^\circ - \frac{F_LF_KE_K\sphericalangle + F_KE_KE_L\sphericalangle}{2} \pmod{180^\circ}. \tag{17.21}$$

Ehhez hasonlóan, az L kör AE_L, F_LA húrjainak kerületi és érintő szárú kerületi szögei:

$$E_KE_LA\sphericalangle \equiv E_LF_LA\sphericalangle \pmod{180^\circ}, \qquad AF_LF_K\sphericalangle \equiv AE_LF_L\sphericalangle \pmod{180^\circ}, \tag{17.22}$$

és így

$$E_KE_LA\sphericalangle + AF_LF_K\sphericalangle \equiv \frac{E_KE_LF_L\sphericalangle + E_LF_LF_K\sphericalangle}{2} \pmod{180^\circ}. \tag{17.23}$$

$$\begin{gathered} E_KE_LA\sphericalangle + AF_LF_K\sphericalangle - E_KAF_K\sphericalangle \equiv \\ \equiv \tfrac{E_KE_LF_L\sphericalangle + E_LF_LF_K\sphericalangle + F_LF_KE_K\sphericalangle + F_KE_KE_L\sphericalangle}{2} \pmod{180^\circ}, \end{gathered} \tag{17.24}$$

de itt a jobb oldalon az $E_KE_LF_LF_K$ négyszög belső szögösszegének fele áll, így (17.24) egyenlet igazolja (17.18) relációt, tehát a két kör érinti egymást A-ban.

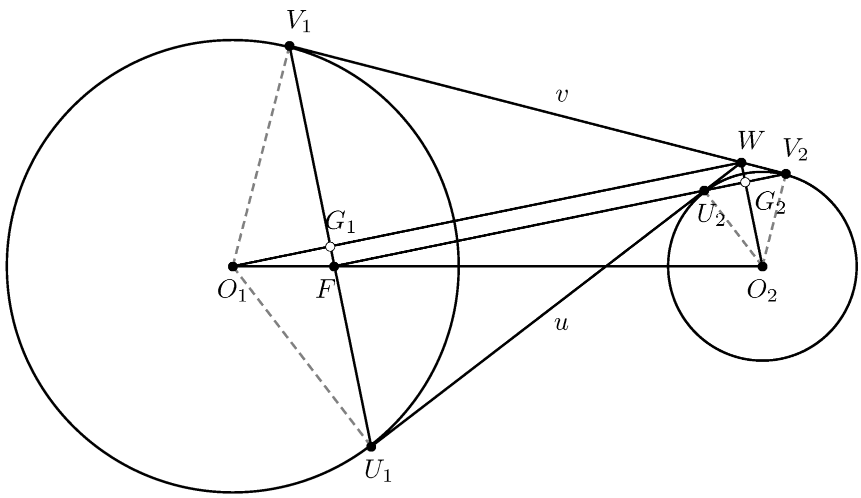
A 9.3. g) fel. II. megoldása

Alkalmazzunk A centrumú inverziót. A K, L körök képe egy-egy egyenes lesz – K' és L' –, amelyek metszik egymást (a K, L körök másik metszéspontjának képében).

Az e, f közös érintőegyenesek képe a K' és az L' egyenest is érintő e' és f' kör lesz. Ez a két kör a K', L' egyenesek által határolt négy szögtartomány közül ugyanabban lesz, hiszen az e és az f egyenes is a K, L körök által meghatározott négy tartomány közül ugyanabban - a végtelen nagyban van. Az azonos szögtartományban a szögszárakat érintő körök egymásból egy olyan nagyítással kaphatók, amelynek középpontja a szög csúcsa. Így az egyik kör és a két szár érintési pontját összekötő egyenes párhuzamos a másik kör és a két szár érintési pontjait összekötő egyenessel. Ez a két egyenes épp a E_KE_LA, F_KF_LA körök inverziónál származó képe, tehát ezek a körök valóban érintik egymást A-ban.

A 9.3. h) fel. I. megoldása

Tekintsük a két kör u közös belső érintőjét és a v közös külső érintőt. Ezek egyeneseinek metszéspontja legyen W, érintési pontjaik a k_1, k_2 körökön rendre U_1 és U_2 illetve V_1 és V_2 (lásd a 17.58. ábrát).



17.58. ábra.

Vegyük fel a V_2U_2 egyenes és a V_1U_1 egyenes F metszéspontját. A V_2U_2 egyenes a $V_2O_2U_2W$ deltoid egyik átlója, merőleges a másik átlóra az $U_2WV_2\angle$ WO_2 szögfelezőjére. A V_1U_1 egyenes pedig a $V_1O_1U_1W$ deltoidban átló, és így merőleges a másik átlóra, a $V_1WU_1\angle$ WO_1 szögfelezőjére. Mivel $V_1WU_1\angle$ és $U_2WV_2\angle$ kiegészítő szögek, így WO_1, WO_2 szögfelezőik egymásra merőlegesek és merőlegesek egymásra az ezekre merőleges

V_1U_1, V_2U_2 egyenesek is. Ebből következik, hogy a V_1V_2, U_1U_2 szakaszok Thalesz körei átmennek az F ponton. Ha igazoljuk, hogy F illeszkedik a teljes ábra O_1O_2 szimmetriatengelyére, akkor azzal igazoljuk, hogy F-en mind a négy Thalesz kör átmegy. Hasonlóan igazolható a másik közös pont létezése is.

Tekintsük az egymáshoz hasonló $O_2U_2WV_2$, $WU_1O_1T_1$ deltoidokat és bennük az átlók G_2, G_1 metszéspontjait. A hasonlóság révén

$$\frac{O_2G_2}{O_2W} = \frac{WG_1}{WO_1}, \tag{17.25}$$

de a G_1FG_2W négyszög téglalap, azaz $WG_1 = G_2F$, tehát

$$\frac{O_2G_2}{O_2W} = \frac{G_2F}{WO_1}. \tag{17.26}$$

Az az O_2 centrumú középpontos nagyítás, amely a G_2 pontot W-be képezi a GF egyenest az ezzel párhuzamos, de W-n átmenő WO_1 egyenesbe viszi és (17.26) azt mondja ki, hogy ekkor F képe épp O_1 lesz. Ez azt is jelenti, hogy O_2, F és O_1 egy egyenesen vannak, amit igazolni akartunk.

A 9.3. h) fel. II. megoldása

Az említett Thalesz körök merőlegesek mindkét adott körre. Ismeretes, hogy két közös pont nélküli kör koncentrikus körökbe invertálható. Ilyenkor a két adott körre merőleges körök képei a két koncentrikus körre merőleges „kögyenesek” (körök vagy egyenesek) lesznek, amelyek nem mások mint a koncentrikus körök középpontján átmenő egyenesek. Ha ezeket az egyeneseket visszainvertáljuk, akkor két ponton átmenő köröket kapunk.

17.7. Hasonlóságok és affinitások – megoldások

A 9.1. feladat megoldásai

A 9.1. fel. I. megoldása

Jelölje a szög csúcsát A, szögfelezőjét f, a körív és f metszéspontját F, a körív F-beli érintőegyenesét a, végül az a egyenesnek a szögszárak egyenesével való metszéspontjait B és C.

A szárakat érintő kör középpontja az f egyenesen van, így a szerkesztendő köré is, és ez a kör F-ben érinti az adott körcikk ívét. Ezért a szerkesztendő kör az ABC háromszög beírt köre, amely könnyen szerkeszthető.

A 9.1. fel. II. megoldása

Az szögszárakat érintő körök egymásból a szögszárak A metszéspontjából középpontos nagyítással kaphatók meg. Vegyünk fel egy tetszőleges k_p próbakört, amely érinti a b, c szögszárakat és a körcikk belsejében van. Legyen k_p és b érintési pontja B_p, k_p-nek az A-tól legtávolabbi pontja, tehát a szögtartomány f szögfelezőjének a k_p-vel való megfelelő metszéspontja F_p.

Úgy szeretnénk felnagyítani a k_p kört A-ból, hogy F_p az adott körcikk ívének F felezőpontjába kerüljön. Húzzunk párhuzamost F-en át az F_pB_p egyenessel, messe ez a párhuzamos a b szögszárat T_b-ben. Ha a nagyításnál F_p az F-be képződik, akkor B_p a T_b-be megy, tehát T_b a szerkesztendő kör érintési pontja b-n. A rajta át b-re állított merőleges kimetszi f-ből a szerkesztendő kör középpontját.

A 9.3. feladat megoldásai

A 9.3. fel. I. megoldása

(*Terület*)

A DFC, CFB háromszögek alapja ($DF = FB$) és C-hez tartozó magassága is egyenlő, így egyenlő területűek. A DFC, AFD háromszögek alapja ($AD = DC$) és F-hez tartozó magassága is egyenlő, így ezek egyenlő területűek. Alább ebből azt fogjuk használni, hogy az AFC, FCB háromszögek területének aránya 2.

Legyen $\lambda = \frac{AE}{EB}$ a keresett arány! Az AEF, EBF háromszögek AE, EB alapjainak aránya λ, míg ehhez tartozó magasságuk azonos, így területük aránya is λ. Ugyanezen okból az AEC, EBC háromszögek területének aránya is λ. Az AFC, FCB háromszögek ezen arányos területű háromszögek halmazelméleti különbségeként kaphatók meg, így az ő területük aránya is λ. Előbb láttuk, hogy ez az arány 2, tehát $\frac{AE}{EB} = \lambda = 2$.

A 9.3. fel. II. megoldása

(*Segédvonal, hasonlóság*)

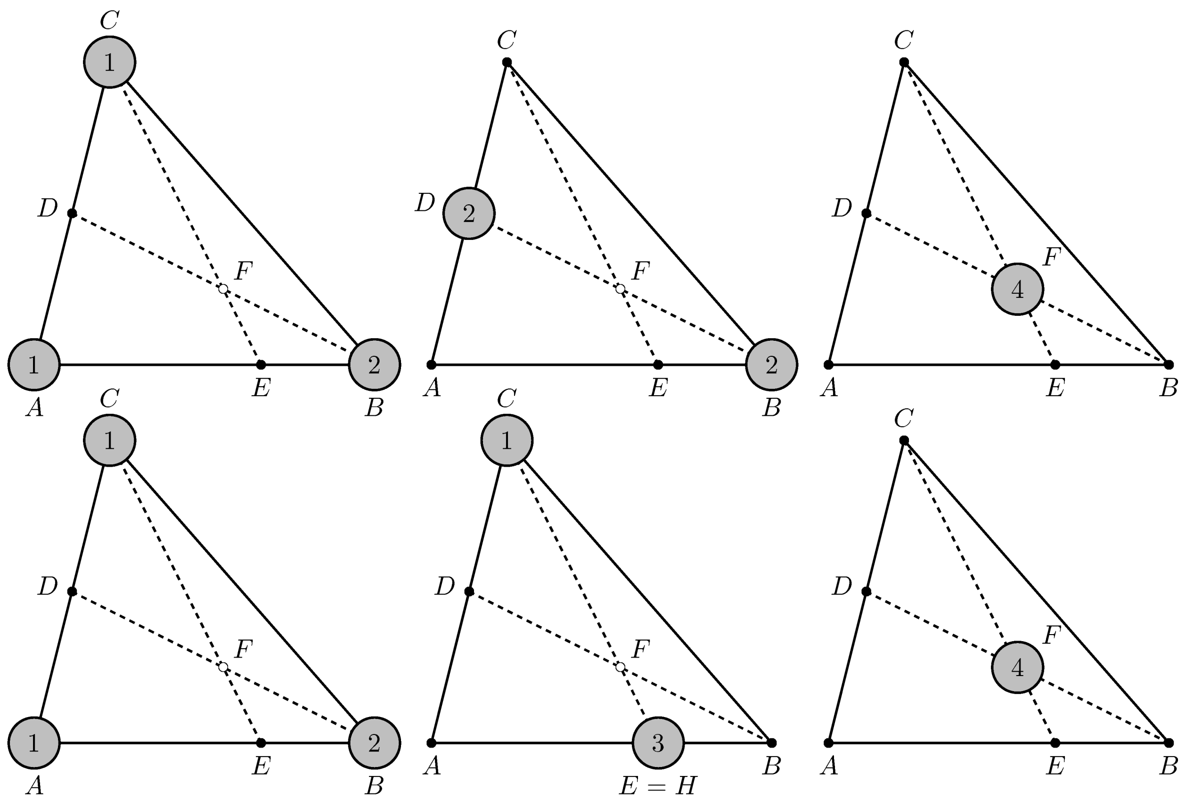
Húzzunk párhuzamost CE-vel D-n át! Messe ez a vonal AB-t G-ben. Mivel D felezi AC-t, így DG középvonal az AEC háromszögben, így $AG = GE$. Másrészt F felezi BD-t, így FE középvonal a DGB háromszögben, azaz $GE = EB$, vagyis E harmadolja az AB szakaszt.

A 9.3. fel. III. megoldása

(*Fizika*)

Helyezzünk az A, C csúcsokba $1-1$ egységnyi, a B csúcsba 2 egységnyi tömeget. Kétféleképpen is meghatározzuk e tömegpontrendszer súlypontját (lásd a 17.59. ábrasorozatot).

Az A, C-beli súlyok tömegközéppontja D-ben van, fizikai értelemben ez a részrendszer egy D-ben elhelyezett 2 egységnyi tömeggel ekvivalens. Ha ehhez hozzávesszük a B-be rakott 2 egységnyi tömeget, akkor látjuk, hogy a teljes rendszer tömegközéppontja F-ben van. Röviden: $(A^1; C^1; B^2) \equiv (D^2; B^2) \equiv (F^4)$.



17.59. ábra.

Másrészt az A-beli egységnyi és a B-beli két egységnyi tömeg súlypontja az AB szakasz B felőli H harmadolópontjában van, a teljes rendszeré pedig a HC szakasz H felőli J negyedelőpontjában. Röviden: $(A^1; C^1; B^2) \equiv (H^3; C^1) \equiv (J^4)$.

A tömegközéppont a szerkesztési eljárástól független, tehát $F = J$ és így $H = E$, azaz E harmadolja az AB szakaszt.

A 9.3. fel. IV. megoldása

(*Vektorok*)

Az előző megoldás látványos és egyszerű, matematikailag az alábbi vektoralgebrai azonosságot fejezi ki:

$$\frac{\left(\frac{\underline{a}+\underline{c}}{2}\right)+\underline{b}}{2}=\frac{3\left(\frac{2\underline{b}+\underline{a}}{3}\right)+\underline{c}}{4}. \tag{17.27}$$

Közös nevezőre hozással, a zárójelek felbontásával meggyőződhetünk a fenti azonosság helyességéről. Ha tetszőleges origó mellett $\underline{a}$, $\underline{b}$, $\underline{c}$ rendre az A, B, C csúcsok helyvektorai, akkor a bal oldalon $\frac{\underline{a}+\underline{c}}{2}$ a D pont helyvektora, a teljes bal oldal pedig a DB szakasz F felezőpontjáé. A jobb oldalon $\frac{2\underline{b}+\underline{a}}{3}$ az AB szakasz B felőli H harmadolópontjának helyvektora, míg a teljes jobb oldal a HC szakasz H felőli negyedelőpontjáé. Ez csak úgy egyezhet meg F-fel, ha H megegyezik E-vel, azaz E harmadolja az AB szakaszt.

Megjegyzés a 9.3. fel. III-IV. megoldásaihoz

A fenti példában ha az A, B, C pontokban rendre $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$ (összesen tehát 1) egységnyi súlyt teszünk, akkor a rendszer tömegközéppontja F-ben lesz. Ha tetszőleges origóból az A, B, C csúcsok helyvektorai $\underline{a}$, $\underline{b}$ és $\underline{c}$, akkor $\frac{1}{4}\underline{a}+\frac{1}{2}\underline{b}+\frac{1}{4}\underline{c}$ vektor az F pont helyvektora. Az

$$\left(\frac{1}{4},\frac{1}{2},\frac{1}{4}\right)$$

számhármast az F pont A, B, C alappontokhoz tartozó *baricentrikus koordinátái*nak nevezzük.

A 9.4. feladat megoldásai

A 9.4. fel. I. megoldása

Ha $t_{AC_1P}=x$, akkor $t_{PC_1B}=2x$ és ha $t_{BPA_1}=y$, akkor $t_{A_1PC}=2y$. Mivel $2t_{ABA_1}=t_{A_1AC}$, és $t_{ABA_1}=3x+y$, továbbá $t_{A_1AC}=2y+t_{CPA}$, így $t_{CPA}=6x$. Tudjuk, hogy $2t_{AC_1C}=t_{CC_1B}$, ahol $t_{AC_1C}=t_{AC_1P}+t_{APC}=7x$ és $t_{CC_1B}=t_{PC_1B}+t_{PBA_1}+t_{PA_1C}=2x+3y$, tehát $y=4x$.

Végül $\frac{CB_1}{B_1A}=\frac{t_{CB_1B}}{t_{BB_1A}}$ és $\frac{CB_1}{B_1A}=\frac{t_{CB_1P}}{t_{PB_1A}}$, így

$$\frac{CB_1}{B_1A}=\frac{t_{CB_1B}-t_{CB_1P}}{t_{BB_1A}-t_{PB_1A}}=\frac{t_{CPB}}{t_{BPA}}=\frac{3y}{3x}=4.$$

A 9.4. fel. II. megoldása

(*Fizika*)

Úgy akarunk tömegeket rakni az A, B, C csúcsokba, hogy a tömegközéppont P-ben legyen. Két dologra kell figyelnünk.

1. A-ban kétszer annyi tömeg legyen, mint B-ben, mert így – és csakis így – e kettő tömegközéppontja C_1-ben lesz, a teljes rendszeré pedig a CC_1 egyenesen.
2. B-ben kétszer annyi tömeg legyen, mint C-ben, mert így – és csakis így – e kettő tömegközéppontja A_1-ben lesz, a teljes rendszeré pedig az AA_1 egyenesen.

A megfelelő súlyozás: C-be 1, B-be 2, A-ba 4 egységnyi tömeg. Ekkor az A-beli és a C-beli tömeg súlypontja az AC szakasz azon B_1 pontjában lesz, amelyre $\frac{CB_1}{B_1A} = 4$ és ez a pont a BP, AC egyenesek metszéspontja.

A 9.4. fel. III. megoldása

(*Vektorok*)

A fizikus megoldásnak megfelelő vektorgeometriai azonosság:

$$\frac{4\underline{a} + 2\underline{b} + \underline{c}}{7} = \frac{3\frac{\underline{c}+2\underline{b}}{3} + 4\underline{a}}{7} = \frac{6\frac{2\underline{a}+\underline{b}}{3} + \underline{c}}{7} = \frac{5\frac{4\underline{a}+\underline{c}}{5} + 2\underline{b}}{7}.$$

Az első egyenlőség mutatja, hogy az AA_1 szakasz egy pontjáról van szó, a második, hogy a CC_1 szakasz pontja a P, míg a harmadik adja meg a keresett arányt.

A 9.4. fel. IV. megoldása

(*Ceva tétele*)

Hajós György „Bevezetés a geometriába” című könyvének 309-310. oldalain található a problémát általánosan kezelő összefüggés.

A 9.4. fel. V. megoldása

(*Affinitás*)

Bármelyik háromszög átvihető bármelyik másikba affin transzformációval, tehát a sík olyan önmagára való bijektív leképezésével, amely egyenest egyenesre képez és bármely egyenesen belül megtartja a szakaszok hosszának arányát. Ilymódon a feladat kérdése tetszőleges háromszögben kiszámolható és ugyanúgy igaz lesz minden háromszögben. Választhatunk pl. olyan B-ben derékszögű háromszöget, amelyben koordinátageometriával gyorsan kezelhető a feladat.

A 9.5. feladat megoldásai

A 9.5. fel. eredménye

18.

A 9.5. fel. I. megoldása

A BM alaphoz tartozó BMA, BMA_1 háromszögek egyenlő területűek, így a BM_1 alaphoz tartozó B_1MA, BMA_1 háromszögek területe is egyenlő, mindkettőé 3. Jelölje még T az A_1B_1C háromszög területét!

Mivel
$$\frac{CB_1}{B_1A} = \frac{T_{A_1B_1C}}{T_{A_1B_1A}} = \frac{T_{BB_1C}}{T_{BB_1A}},$$
így $\frac{T}{6} = \frac{T+10}{10}$, amiből $T = 15$ és a kérdezett érték 18.

A 9.5. fel. II. megoldása

Fejezzük ki $M(a, b, c)$ baricentrikus koordinátáit, tehát találjuk ki milyen a, b, c tömegeket kell az A, B, C csúcsokba helyezni, hogy a tömegközéppont M-ben legyen. Mivel $\frac{B_1M}{B_1B} = \frac{3}{3+7}$, tehát $b = \frac{3}{10}$, és $\frac{A_1M}{A_1A} = \frac{7}{7+7}$, ezért $a = \frac{7}{14} = \frac{1}{2}$.

Tehát M koordinátái $(1/2, 3/10, 1/5)$, vagyis $\frac{ABM}{ABC} = \frac{1}{5}$. Tehát ABC területe $5 \cdot 7 = 35$, amiből a négyszög területe $35 - (3 + 7 + 7) = 18$.

A 9.6. feladat megoldásai

A 9.6. fel. eredménye

$ST = \frac{7}{12}$.

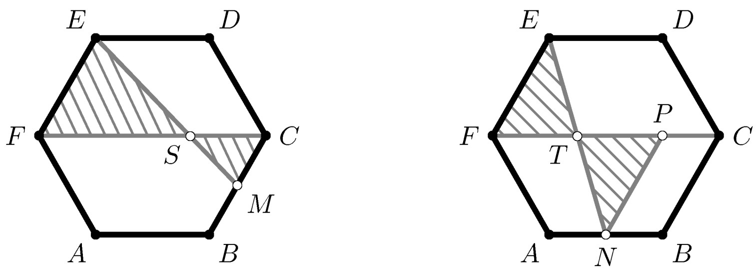
A 9.6. fel. I. megoldása

(*Hasonlóság*)

Az EFS, MCS háromszögek hasonlóak, a hasonlósági arány $\frac{EF}{CM} = 2$, így $\frac{FS}{SC} = 2$. Mivel $FC = 2$, ezért $FS = \frac{4}{3}$, $SC = \frac{2}{3}$.

Jelölje az N-en át EF-fel párhuzamosan húzott egyenes és CF metszéspontját P (lásd a 17.60. ábrát)! Az EFT, NPT háromszögek egybevágóak, így $FT = \frac{1}{2}FP = \frac{1}{2}\left(2 - \frac{1}{2}\right) = \frac{3}{4}$.

Kapjuk, hogy $TS = FS - FT = \frac{4}{3} - \frac{3}{4} = \frac{7}{12}$.



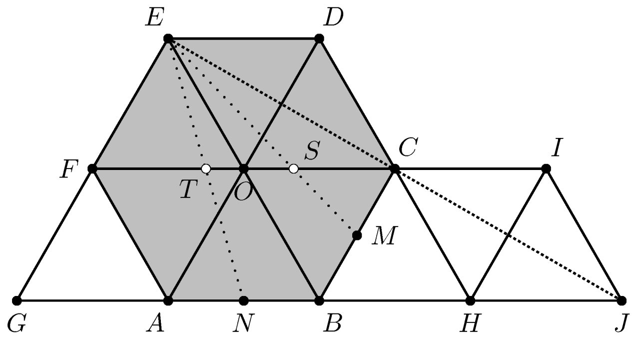
17.60. ábra.

A 9.6. fel. II. megoldása

(*Súlypont*)

Folytassuk a szabályos hatszög oldalai is középpontján átmenő átlói által meghatározott szabályos háromszögrácsot a 17.61. ábra szerint. Mivel $\frac{JN}{NG} = \frac{5/2}{3/2} = \frac{5}{3}$, így $\frac{CT}{TF} = \frac{5}{3}$, azaz $CT = \frac{5}{8}CF = \frac{5}{4}$.

Az S pont a BCE háromszög EN, CO súlyvonalainak metszéspontja, tehát a háromszög súlypontja. Az S pont harmadolja a CO súlyvonalat, azaz $CS = \frac{2}{3}$. Ebből $TS = CT - CS = \frac{5}{4} - \frac{2}{3} = \frac{7}{12}$.

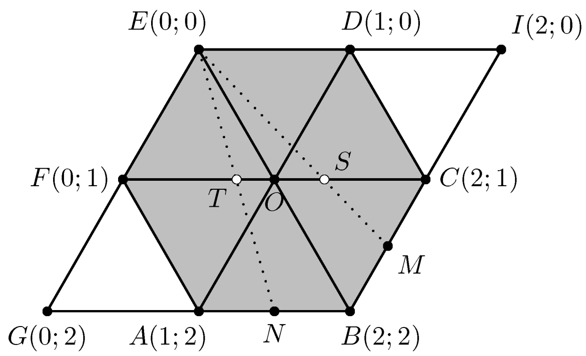


17.61. ábra.

A 9.6. fel. III. megoldása

(*Vektorok, ferde koordináta-rendszer*)

Legyen E koordináta-rendszerünk origója és legyenek $\overrightarrow{ED} = \underline{d}$ és $\overrightarrow{EF} = \underline{f}$ a bázisvektorok. A 17.62. ábrán felrajzoltuk a koordináta-rendszer pozitív síknegyedének sarkában található 2×2-es rácsát.



17.62. ábra.

Leolvasható, hogy $M(2;\frac{3}{2})$, $N(\frac{3}{2};2)$, tehát az EM, EN, FC egyenesre rendre azok az $(x;y)$ pontok illeszkednek, amelyekre $y=\frac{3}{4}x$, $y=\frac{4}{3}x$, $y=1$. Így keresett $S=EM\cap FC$, $T=EN\cap FC$ pontjaink: $S(\frac{4}{3};1)$, $T(\frac{3}{4};1)$. Ebből $\overrightarrow{TS}=\frac{7}{12}\underline{d}$, azaz $|TS|=\frac{7}{12}$.

A 9.7. fel. eredménye

$T_{CDE}=4$, $T_{DAE}=6$.

A 9.8. feladat megoldásai

A 9.8. fel. I. megoldása

Legyen a háromszög kerületén tetszőlegesen felvett P pont az AC oldalon, az A csúcshoz közelebb, mint C-hez. (Mindig betűzhetjük így a háromszöget.) A BF_B súlyvonal felezi a háromszög területét, ezért P-t a BC egyenes egy X pontjával kell majd összekötnünk.

Jelöljük a PXC háromszög X-hez tartozó magasságát m_X-szel, az ABC B-hez tartozó magasságát m_B-vel. A PX egyenes akkor felezi a területet, ha

$$2m_X\cdot PC=AC\cdot m_B,\qquad \textit{azaz}\qquad \frac{m_X}{m_B}=\frac{AC}{2PC}.$$

Az aránypár alapján megszerkeszthető az ismeretlen m_X magasság. Ehhez egy tetszőleges origóból két félegyenest indítunk, melyek közül az egyikre felmérjük az origóból az AC és a $2PC$ távolságokat, a másikra pedig m_B hosszát. Ezután a $2PC$ és m_B hosszúságú szakaszok végpontjait összekötő egyenessel párhuzamost húzunk az AC hosszúságú szakasz végpontján át. Ez a másik félegyenesből hasonlóság miatt épp egy m_X hosszúságú szakaszt metsz le.

m_X ismeretében megszerkeszthetjük az X pontot. Mindig pontosan egy megoldást kapunk.

A 9.8. fel. II. megoldása

Ugyanazt a betűzést használjuk, mint az előző megoldás. Legyen F a BC oldal felezőpontja. Húzzuk meg a PF egyenest, és húzzunk vele párhuzamost az A ponton keresztül! Az A ponton átmenő új egyenes X-ben metszi BC-t. (Most használjuk fel, hogy P az A-hoz közelebb van, mint C-hez.) Húzzuk meg az $AXFP$ trapéz átlóit! Az átlók metszéspontja T. A trapéz ismert tulajdonsága miatt a XTF és az ATP háromszögek területe egyenlő. Mivel AF súlyvonal, így ABF és AFC háromszögek területe megegyezik, ezért

$$T_{ABF} + T_{ATP} - T_{FTX} = T_{ACF} + T_{FTX} - T_{ATP},$$

vagyis a PX szakasz felezi az ABC háromszög területét.

A 9.8. fel. III. megoldása

Tegyük fel, hogy PX az a szakasz, mely a P-n átmenve felezi az ABC háromszög területét. Ugyanakkor a BF_BC háromszög is a háromszög területének fele, mert BF_B súlyvonal. Ezért PX nem haladhat egyik "fél" háromszögben sem, azaz PX és BF_B metszi egymást. A CPX és az F_BCB háromszög területe egyenlő, mindkettő az ABC háromszög területének fele.

Két egyenlő területből ugyanazt a területet elvéve megintcsak két egyenlő területet kapunk. Ebben az esetben a CF_BX háromszöget vesszük el mindkettőből, így a BXF_B és a PXF_B háromszögek területe egyenlő kell legyen. E két háromszög F_BX alapja egybeesik, harmadik csúcsuk ugyanabban a félsíkban van, tehát területük pontosan akkor egyenlő, ha XF_B egyenese párhuzamos BP egyenesével.

Tehát a szerkesztendő X pontot a BP-vel F_B-n át húzott párhuzamos metszi ki a BC szakaszból.

Segítség a 9.9. feladathoz

Igazoljuk, hogy az $ABCD$ trapéz AC, BD átlóinak E metszéspontját az AD, BC szárak meghosszabbításainak F metszéspontjával összekötő egyenes felezi a trapéz alapjait! (Mutassuk meg, hogy a két alap felezőpontja egy egyenesen van E-vel és külön azt is, hogy F-fel is egy egyenesen van.)

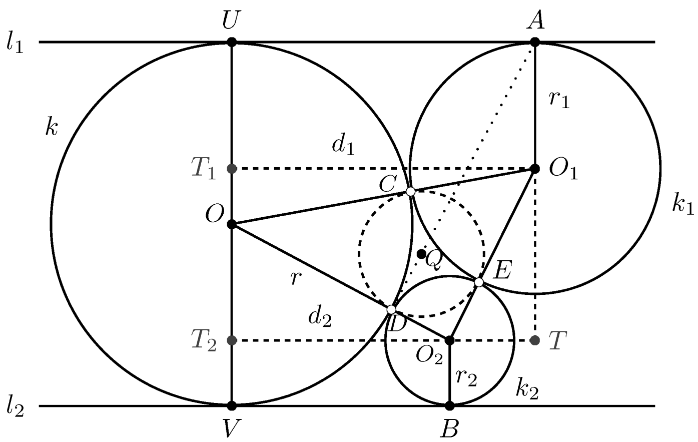
A 9.11. feladat megoldása

Gondolkozzunk indirekten. Tegyük fel, hogy van ilyen szerkesztés. Vetítsük át a szerkesztés ábráit a tér egy pontjából egy másik, az eredetivel nem párhuzamos síkra! Igazoljuk, hogy ugyanaz az eljárás ott nem a felezőpontot adja.

A 9.12. feladat megoldásai

A 9.12. fel. I. megoldása

Jelölje a k kör érintési pontját l_1-en ill. l_2-n U ill. V, a k, k_1, k_2 körök középpontjait rendre O, O_1 és O_2, az O_1-ből ill. O_2-ből UV-re bocsájtott merőleges talppontját T_1 ill. T_2, az O_2T_2, AO_1 egyenesek metszéspontját T, az O_1T_1, O_2T_2 szakaszok hosszát d_1 ill. d_2 (lásd a 17.63. ábrát).



17.63. ábra.

A C, D, E érintési pontok rendre az érintkező körpárok O_1O, O_2O, O_1O_2 centrálisaira esnek. A C, D, E pontok úgy osztják fel az O_1O_2O háromszög oldalait, hogy a csúcsok felőli részek egymással egyenlőek: $O_1C = O_1E$, $O_2E = O_2D$, $OD = OC$. Könnyű igazolni, hogy csak egyféleképpen oszthatók fel így a háromszög oldalai és, hogy az O_1O_2O háromszög beírt körének érintési pontjai is így osztják fel az oldalakat. Tehát a C, D, E pontokon átmenő kör az O_1O_2O háromszög beírt köre. A feladat igazolásához ezek után elég megmutatni, hogy $DA \perp OO_2$ és ezzel analóg módon $CB \perp OO_1$.

Ha adott két pont, itt O és O_2, akkor kereshetjük azon P pontok halmazát, amelyeknek a két ponttól való távolsága négyzetének különbsége előre adott állandóval egyenlő: $OP^2 - O_2P^2 = OD^2 - O_2D^2$. Ismeretes, hogy ez a mértani hely a két adott pontra merőleges egyenes. Ebből kifolyólag elég igazolnunk, hogy ábránkon

$$OA^2 - O_2A^2 = OD^2 - O_2D^2. \tag{17.28}$$

A (17.28) relációban az OA^2, O_2A^2 mennyiségek kiszámolásához az OUA, O_2TA derékszögű háromszögeket használjuk. A k, k_1, k_2 körök sugarait rendre r, r_1 és r_2 jelölik. Pitagorasz tétele szerint:

$$\begin{aligned} OA^2 &= r^2 + d_1^2 \\ O_2A^2 &= (2r-r_2)^2 + (d_1-d_2)^2, \end{aligned} \tag{17.29}$$

így

$$OA^2 - O_2A^2 = 4rr_2 + 2d_1d_2 - 3r^2 - r_2^2 - d_2^2. \tag{17.30}$$

Az O_1T_1O, O_2T_2O, O_1TO_2 derékszögű háromszögekre felírjuk a Pitagorasz tételt:

$$\begin{aligned} (r_1+r)^2 &= d_1^2 + (r-r_1)^2 \\ (r_2+r)^2 &= d_2^2 + (r-r_2)^2 \\ (r_1+r_2)^2 &= (d_1-d_2)^2 + (2r-r_1-r_2)^2 \end{aligned} \tag{17.31}$$

Az első két egyenletből

$$\begin{aligned} 4rr_1 &= d_1^2 \\ 4rr_2 &= d_2^2, \end{aligned} \tag{17.32}$$

míg a harmadikból ezek felhasználásával

$$2r^2 = d_1d_2. \tag{17.33}$$

Az (17.32)-(17.33) összefüggések alapján (17.30) így írható:

$$OA^2 - O_2A^2 = 4rr_2 + 4r^2 - 3r^2 - r_2^2 - 4rr_2 = r^2 - r_2^2 = OD^2 - O_2D^2. \tag{17.34}$$

Épp ezt akartuk igazolni.

A 9.12. fel. II. megoldása

L.4.1. Lemma Ha a feladat ábráján V az l_2 egyenes és a k kör érintési pontja, míg U az l_1 és k érintési pontja, akkor V, C és A egy egyenesen vannak, U, C és B is egy egyenesen vannak, sőt B, E és A is egy egyenesen vannak.

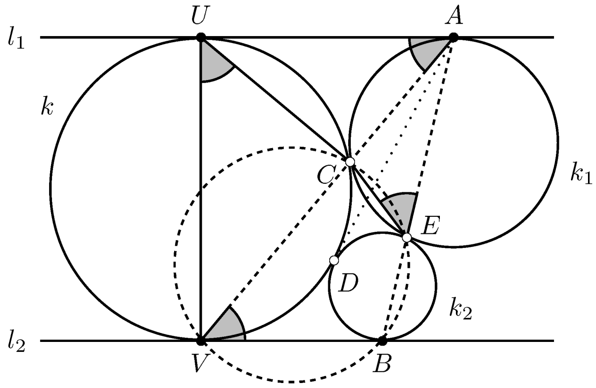
a lemma igazolása A k_1, k körök belső hasonlósági pontja az érintési pontjuk, C. Ebből a pontból a k_1 kör k-ba nagyítható. Ennél a nagyításnál a k_1 kör l_1 érintőjének képe a k kör egy l_1-gyel párhuzamos érintője lesz, ami épp l_2. Így az A érintési pont képe a V érintési pont, tehát ez a két pont egy egyenesen van C-vel. Hasonlóan igazolható a másik két ponthármas kollinearitása. Q.E.D.

L.4.2. Lemma A feladat ábráján az AD egyenes érinti a k, k_2 köröket.

a lemma igazolása

A k, k_2 körök közös pontbeli közös érintője a két kör hatványvonala, tehát mindössze annyit kell belátnunk, hogy az A pontnak a k, k_2 körökre vonatkozó hatványa egyenlő.

Lemma L.4.1. szerint a k kör és az l_2 egyenes V érintési pontja az AC egyenesen van. Az A pont k-ra vonatkozó hatványa $AC \cdot AV$ és ehhez hasonlóan A-nak a k_2-re vonatkozó hatványa $AE \cdot AB$, így azt kell igazolnunk, hogy $AC \cdot AV = AE \cdot AB$, tehát azt, hogy a C, V, B, E pontok egy körön vannak.



17.64. ábra.

A k_1 körben az AC húr kerületi szöge $\alpha = CEA\angle$, míg a húr érintő szárú kerületi szöge $\alpha = CAU\angle$. A $CAU\angle$ szög váltószöge a $CVB\angle$, így $\alpha = CEA\angle = CVB\angle$ tehát $CEBV$ valóban húrnégyszög, a lemmát igazoltuk.

A lemmából gyorsan következik a feladat állítása (lásd a 17.64- ábrát). AD érinti k-t és k_2-t és ehhez hasonlóan BC érinti k-t és k_1-et. Ekkor Q rajta van a k, k_1 és a k, k_2 körök közös érintőjén, azaz hatványvonalán is, így Q a k, k_1, k_2 körök hatványpontja. Így rajta van k_1 és k_2 E-n átmenő közös érintőjén is, azaz QE érinti k_1 és k_2 köröket. Ekkor viszont $QC = QE$ és $QD = QE$, mivel a QC, QE egyenesek a k_1 kör, QD, QE egyenesek pedig a k_2 kör érintői a Q pontból. Így $QC = QD = QE$, tehát a feladat állítását igazoltuk.

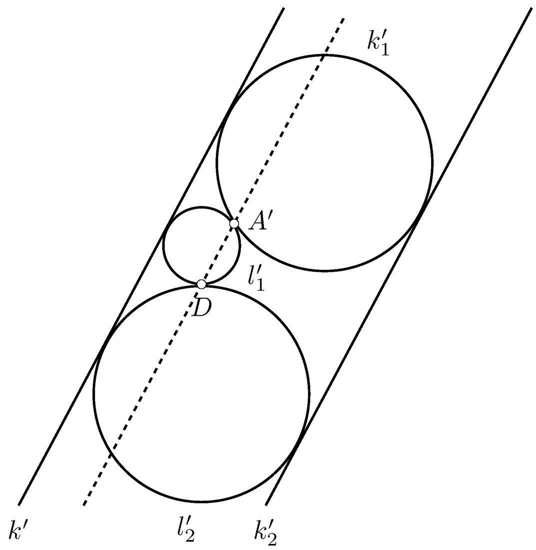
A 9.12. fel. III. megoldása

Lemma L.4.2-re adunk új bizonyítást. Invertáljuk az ábrát D-re! Ekkor a k és k_2 érintő körök képei a k' és k_2' párhuzamos egyenesek, l_1 és l_2 képei az l_1' és l_2' egymást D-ben érintő körök, k_1 képe k_1' kör, A képe A' (lásd a 17.65. ábrát).

Ekkor DA' nyilván párhuzamos k'-vel és k_2'-vel. Ezért DA' invertált képe, a DA egyenes is érinti a k, k_2 köröket, ahogy a lemma is állította.

A 9.12. fel. IV. megoldása

Lemma L.4.2-re adunk még egy bizonyítást. Tekintsük a k, k_2 körök D-beli közös érintőegyenesének az l_1 egyenessel vett A' metszéspontját. (Azt kell igazolnunk, hogy A'



17.65. ábra.

megegyezik A-val.) Invertáljuk az ábrát az A' középpontú D-n átmenő i körre!

Ennél az inverziónál az l_1, k, k_2 alakzatok képe önmaga. Az l_2 egyenes érinti az l_1, k, k_2 alakzatokat, tehát l_2 képe olyan B'-n átmenő kör, amely érinti l_1, k, k_2 mindegyikét. Csak egy olyan kör van – ez szemléletesen „nyilvánvaló”, de alább igazoljuk is –, amely érinti a három alakzatot. A k_1 kör egy ilyen kör, tehát az egyetlen ilyen kör: $B' = E$, $A' = A$.

Lemma L.4.4. Ha a k kör érinti az egymással párhuzamos l_1, l_2 egyeneseket és a k_2 kör érint l_2-t valamint k-t kívülről, akkor egyetlen egy olyan k_1 kör van, amely érinti l_1-et és k-t, valamint k_2-t kívülről.

a Lemma L.4.4. bizonyításának vázlata

A k-t és l_1-et érintő körök középpontjai és a k-t és l_2-t érintő körök középpontjai is egy-egy parabolát alkotnak. Ráadásul ez a két parabola párhuzamos tengelyű, azonos állású és paraméterük (a fókuszuk és a vezéregyenesük távolsága is) egyenlő. Metszéspontjaik számítása egy

$$\left.\begin{array}{rcl} y & = & ax^2 + b_1x + c_1 \\ y & = & ax^2 + b_2x + c_2 \end{array}\right\}$$

alakú egyenletrendszer megoldására vezet, amelynek legfeljebb egy megoldása van.

A 9.13. feladat megoldásai

A 9.13. a) mego.

Ha az egyik szelő a k kört az A, B, a másik szelő az A', B' pontokban metszi, akkor a k kör AA' húrjaihoz tartozó B-nél és B'-nél megjelenő kerületi szögeit illetve a BB' húr A-nál és A'-nél megjelenő kerületi szögeit figyelembe véve igazolható, hogy a PAB', $PA'B$ háromszögek hasonlóak, azaz $\frac{PA}{PB'} = \frac{PA'}{PB}$, amiből átszorzással kapjuk a bizonyítandó $PA \cdot PB = PA' \cdot PB'$ összefüggést.

A 9.13. b) mego.

A bizonyítást építhetjük arra, hogy az érintő a szelő határhelyzete és $PA \cdot PB$ szorzat értéke folytonosan (nem) változik. Alkalmazhatjuk az érintő szárú kerületi szögek tételét is, mely szerint $ATP\sphericalangle \equiv ABT\sphericalangle \pmod{180^\circ}$ és így igazolható a PTA, PBT háromszögek hasonlósága.

A 9.13. c) mego.

Válasszuk szelőnek a kör középpontját átmenő egyenest! Ha a $PA \cdot PB$ szorzat értékét előjelesen értelmezzük – tehát ez a szorzat negatív, ha P elválasztja az A, B pontokat, azaz ha P a k kör belső pontja – akkor minden esetben a $PA \cdot PB = PO^2 - r^2$ összefüggéshez jutunk.

A 9.13. d) mego.

Ha a k kört l-be képező H centrumú nagyítás aránya λ, akkor

$$HA_l = \lambda HA_k, \qquad HB_l = \lambda HB_k,$$

tehát

$$A_kA_l = HA_l - HA_k = (\lambda - 1)HA_k, \qquad B_kB_l = HB_l - HB_k = (\lambda - 1)HB_k,$$

azaz

$$A_kA_l \cdot B_kB_l = (\lambda - 1)^2 HA_k \cdot HB_k,$$

ahol $HA_k \cdot HB_k$ a H pont k körre vonatkozó hatványa, tehát a vizsgált szorzat értéke valóban független a szelő választásától.

A 9.13. e) mego.

Ha a két körnek van H-n át közös T_kT_l érintője, akkor $A_kA_l \cdot B_kB_l = T_kT_l^2$. Akár van közös érintő, akár nincs $A_kA_l \cdot B_kB_l = O_kO_l^2 - (r_k \pm r_l)^2$, ahol a „$-$” előjel szükséges, ha H külső hasonlósági pont és „$+$” előjel, ha H belső hasonlósági pont.

A 9.14. feladat megoldásai

A 9.14. fel. I. megoldása

Az a), b) részfeladatokat egyszerre oldjuk meg. Jelölje a k_1, k_2 körök vizsgált hasonlósági pontját O_{12}, a k_2, k_3 körök tekintetbe vett hasonlósági pontját O_{23} és legyen a k_1-et k_2-be képező O_{12} centrumú h_{12} középpontos nagyítás aránya λ_{12}, a k_2-t k_3-ba vivő O_{23} centrumú h_{23} nagyítás aránya λ_{23}.

Megmutatjuk, hogy a két középpontos nagyítás kompozíciója is középpontos nagyítás, ha a két arány szorzata nem 1. A Azt is látni fogjuk, hogy a kompozíció centruma a két adott nagyítás centrumának egyenesén van, aránya pedig a két nagyítási arány szorzata. Az a) feladatrészben a külső hasonlósági pontokhoz pozitív arányú nagyítások tartoznak, ezek szorzata, a kompozíció nagyítási aránya is pozitív, tehát centruma a k_1, k_3 körök O_{13} hasonlósági pontja is külső hasonlósági pont. A belső hasonlósági pontok a köröket egymásra képező negatív arányú középpontos nagyítások centrumai. Az előjelek figyelembevételével azt kapjuk, hogy két belső hasonlósági pont egyenesére a harmadik körpár külső hasonlósági pontja illeszkedik, míg egy belső és egy külső hasonlósági pont egyenesén a harmadik körpár belső hasonlósági pontja van.

Helyvektorokkal számolunk. A P pont képe az O_{ij} centrumú λ_{ij} arányú nagyításnál (helyvektorokkal számolva): $\lambda_{ij}(\underline{P}-\underline{O_{ij}})+\underline{O_{ij}}$, tehát a kompozíciónál P képe:

$$\lambda_{23}\left(\lambda_{12}(\underline{P}-\underline{O_{12}})+\underline{O_{12}}-\underline{O_{23}}\right)+\underline{O_{23}}=\lambda_{23}\lambda_{12}\underline{P}+\lambda_{23}(1-\lambda_{12})\underline{O_{12}}+(1-\lambda_{23})\underline{O_{23}}=$$

$$=\lambda_{23}\lambda_{12}\left(\underline{P}-\frac{\lambda_{23}(1-\lambda_{12})\underline{O_{12}}+(1-\lambda_{23})\underline{O_{23}}}{1-\lambda_{23}\lambda_{12}}\right)+\frac{\lambda_{23}(1-\lambda_{12})\underline{O_{12}}+(1-\lambda_{23})\underline{O_{23}}}{1-\lambda_{23}\lambda_{12}},$$

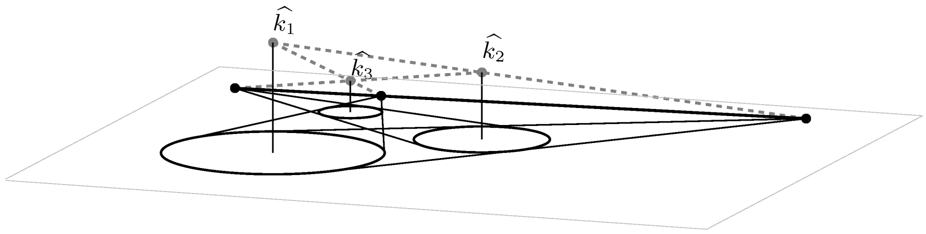
ami azt mutatja, hogy a kompozíció egy $\lambda_{23}\lambda_{12}$ arányú $\frac{\lambda_{23}(1-\lambda_{12})\underline{O_{12}}+(1-\lambda_{23})\underline{O_{23}}}{1-\lambda_{23}\lambda_{12}}$ centrumú középpontos nagyítás, tehát az arány valóban a két eredeti arány szorzata és a centrum valóban a két eredeti centrum egyenesén van.

A 9.14. fel. II. megoldása

A feladat megoldásához lépjünk ki a térbe!

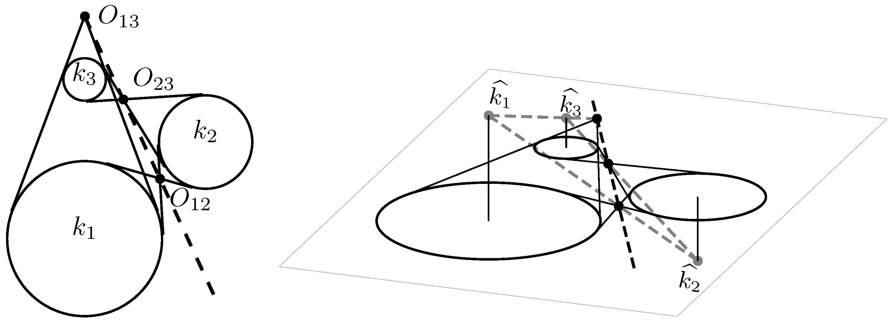
a) Minden egyes kör középpontja fölött, az alapsíkra merőlegesen, attól akkora távolságban, mint a kör sugara vegyünk fel egy pontot. A k_i körhöz ilymódon rendelt pontot jelölje $\widehat{k_i}$ (lásd a 17.66. ábrát).

Amikor az O_{12} pontból a k_2 kört a k_1 körbe nagyítjuk, akkor egyúttal átvisszük a $\widehat{k_2}$ pontot a $\widehat{k_1}$ pontba. A $\widehat{k_2}$, $\widehat{k_1}$ pontok egyenese tehát átmegy O_{12}-n és hasonlóan igazolható, hogy O_{23} illeszkedik a $\widehat{k_2}\widehat{k_3}$ egyenesre, O_{13} pedig $\widehat{k_1}\widehat{k_3}$-ra. Az említett három térbeli egyenes egy síkban van, nevezetesen a $\widehat{k_1}\widehat{k_2}\widehat{k_3}$ síkban, tehát O_{12}, O_{23} és O_{13} is benne van ebben a síkban. Ugyanakkor ez a három pont benne van a k_i körök síkjában, tehát a két sík metszésvonalán, azaz egy egyenesen helyezkednek el. Ezzel a feladatot megoldottuk!



17.66. ábra.

b) Most az egyik, mondjuk a k_2 körhöz úgy rendeljünk térbeli pontot, hogy azt középpontjában az alapsíkra merőlegesen ne *fölfelé*, hanem *lefelé* vegyük fel (lásd a 17.67. ábrát)!



17.67. ábra.

Láthatjuk, hogy a $\widehat{k}_2\widehat{k}_3$, $\widehat{k}_1\widehat{k}_2$ egyenesek így a k_2, k_3 illetve a k_1, k_2 körök közös *belső* hasonlósági pontját metszik ki az alapsíkból, a $\widehat{k}_1\widehat{k}_3$ egyenes pedig továbbra is a külső hasonlósági pontban metszi azt. Ezek szerint a 2. feladatot variálhatjuk: ha a három kör közül két körpárnál a közös belső hasonlósági pontot vesszük, egynél pedig a külsőt, akkor is egy egyenesre illeszkedik a három hasonlósági pont.

A 9.15. feladat megoldása

Lépjünk ki a térbe, vegyük fel a síkra merőleges tengelyen az időt! Az egyeneseken egyenletesen mozgó pontok „világvonala” egy-egy térbeli egyenes lesz. Mutassuk meg, hogy ezen egyenesek egy síkba esnek!

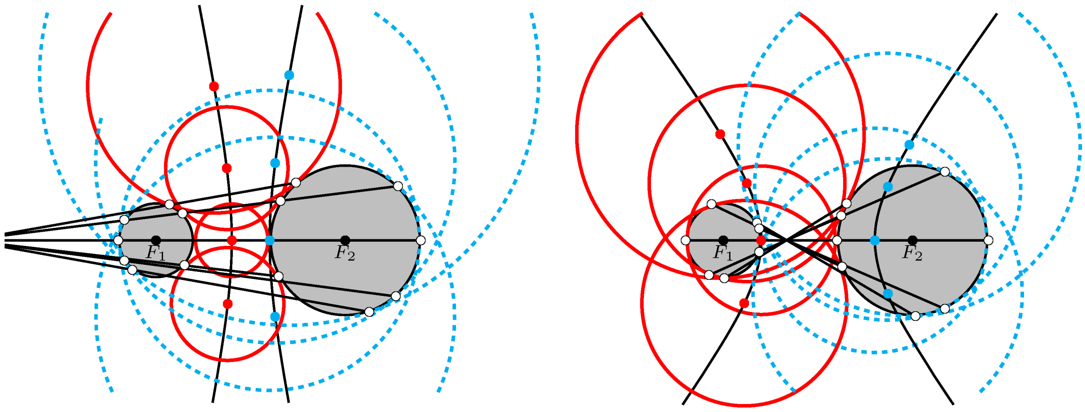
A 9.16. feladat megoldása

Tekintsük az ABC háromszög i beírt körét és az i, ω köröknek azt H hasonlósági pontját, melyből pozitív arányú nagyítás képezi egyik kört a másikra. Az i, ω, c_A körök páronkénti (külső) hasonlósági pontjai H, U_A és A, tehát korábbi feladatunk szerint ezek egy egyenesen vannak. H illeszkedik az AU_A egyenesre és ugyanúgy a BU_B, CU_C egyenesekre is, tehát H épp a keresett pont.

A 9.17. feladat megoldása

a) A k_1, k_2 körök egymáshoz viszonyított elhelyezkedése alapján három esetet különböztetünk meg: (1) a két kör kölcsönösen egymás külsejében van (lásd a 17.68. ábrapárt); (2) egyik a másik belsejében van (lásd a 17.69. ábrapárt); (3) metszik egymást (lásd a 17.70. ábrapárt). Az érintkező körök esete az első két eset határhelyzeteként fogható fel, elemzését az olvasóra bízzuk.

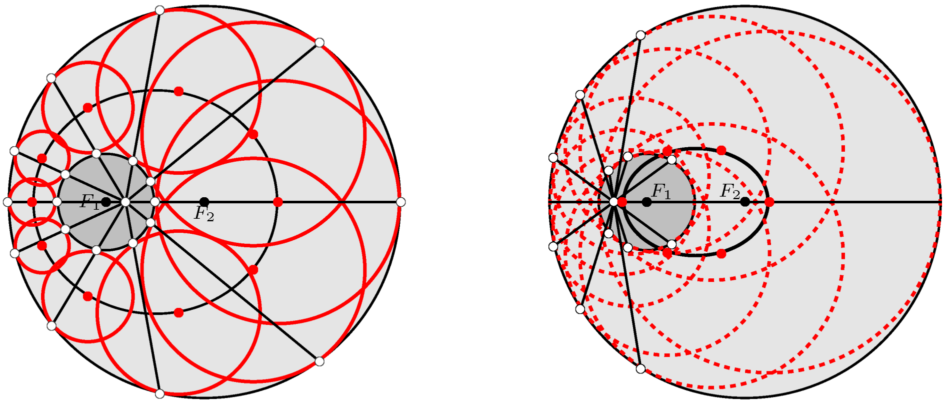
Az m kör k_1-hez és k_2-höz viszonyított elhelyezkedése alapján mind a három eseten belül két alesetet különböztetünk meg az ábrák szerint. Ezek az esetek egyaránt alkalmasak a mértani hely és az érintési pontokat összekötő egyenesek rendszerének egységes kezeléséhez. Alább k_1, k_2 és m középpontját rendre F_1, F_2 és O, míg k_1 és k_2 sugarát r_1 és r_2 jelöli.



Hiperbola: $|OF_2 - OF_1| = r_2 - r_1$ Hiperbola: $|OF_2 - OF_1| = r_2 + r_1$

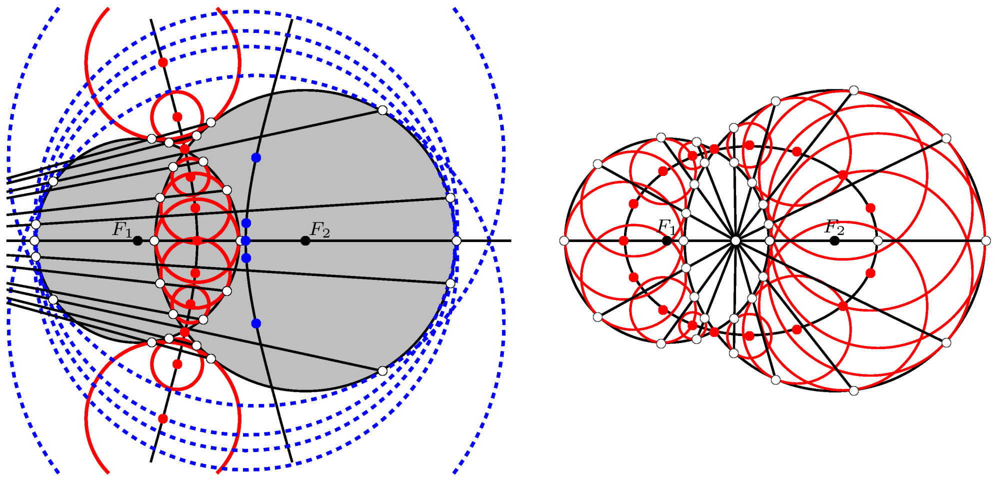
17.68. ábra.

b) Az, hogy az m kör a k_1 kört M_1-ben, k_2-t M_2-ben érinti azt is jelenti, hogy m és k_1 egyik hasonlósági pontja M_1, míg M és k_2 egyik hasonlósági pontja M_2. Így a 9.14. („Hasonlósági pontok kollinearitása") feladat állítása szerint az M_1M_2 egyenes átmegy a k_1, k_2 körök egyik hasonlósági pontján.



Ellipszis: $|OF_2 + OF_1| = r_2 + r_1$ Ellipszis: $|OF_2 + OF_1| = r_2 - r_1$

17.69. ábra.



Hiperbola: $|OF_2 - OF_1| = r_2 - r_1$ Ellipszis: $|OF_2 + OF_1| = r_2 + r_1$

17.70. ábra.

Segítség a 9.18. feladathoz

A válaszokat megsejthetjük az alábbi animáció alapján.
`http://matek.fazekas.hu/portal/elte/elemifgyujt/html/07.html`

A 9.18. feladat megoldásai

A 9.18. fel. I. megoldása

Jelölje a k kör e átmérőegyenesére merőleges átmérőt HI, ahol I azon a félkörlapon van, amelybe a köröket írjuk, míg H a másikon. Jelölje továbbá O_k a k kör középpontját r_k pedig a sugarát.

a) Tekintsük a HI átmérőre I-ben állított d merőleges egyenest. Ha O egy olyan r sugarú kör középpontja, amely E-ben érinti e-t és K-ban k-t, akkor a TO egyenes a $T_d = TO \cap d$ pontban merőleges d-re. Mivel

$$O_kO = O_kK - OK = r_k - r \tag{17.35}$$

és

$$T_dO = T_dT - OT = r_k - r, \tag{17.36}$$

így $O_kO = T_dO$ azaz O egy olyan parabolán helyezkedik el, amelynek fókusza O_k, vezéregyenese d. Ezen a parabolán vannak a k kör és az e egyenes A, B metszéspontjai is – a k-t és e-t érintő nulla sugarú körök középpontjai. A félkörlapon elhelyezkedő körök középpontjai csak a parabola A és B közti ívén helyezkedhetnek el, ott viszont bárhol, hiszen ha ott egy O pontra és e-re, d-re vonatkozó vetületeire teljesülnek a (17.35), (17.36) relációk, akkor az érintőkört is könnyen megrajzolhatjuk O köré.

b) Állítjuk, hogy a H pont megfelelő. A k-t és e-t érintő o kör érintse k-t K-ban, e-t E-ben. A K pont az o, k körök hasonlósági pontja, egy K centrumú pozitív arányú nagyítás képezi o-t k-ba. Ennél a nagyításnál az o-kör E-beli érintője, azaz e, a k kör egy olyan érintőjébe megy át, amely e-vel párhuzamos, de e-től nem a K-t tartalmazó félsíkban helyezkedik el, azaz nem d. Az egyetlen ilyen érintő a H-beli érintő, azaz K, E és H valóban egy egyenesen vannak.

c) A k körben a HA húr kerületi szöge 45°:

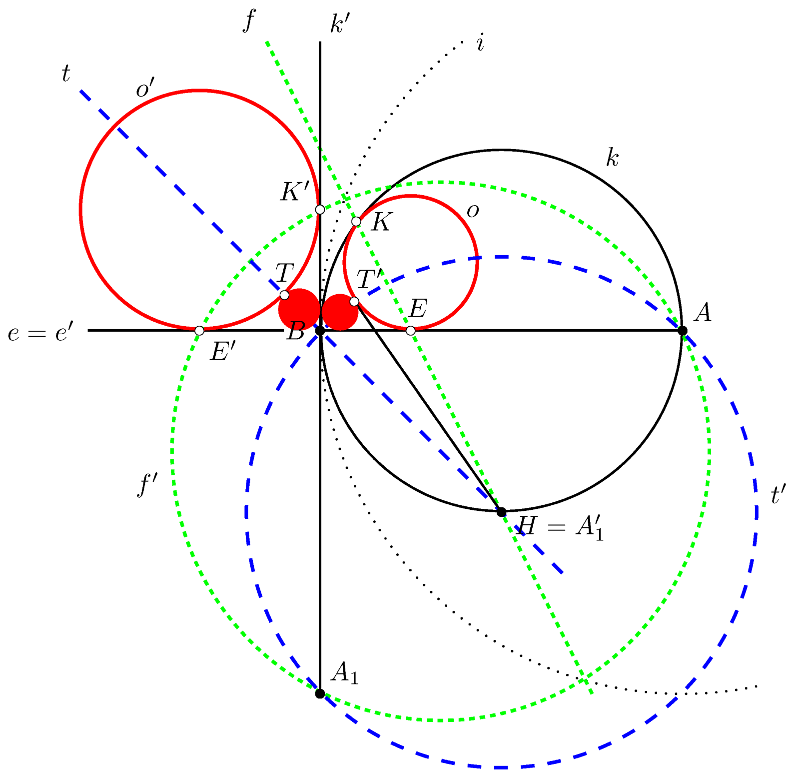
$$HKA\angle = EKA\angle = 45°,$$

így az AEK háromszög k_{EA} körülírt körében az EA húr kerületi szöge is 45°. Másrészt $HAE\angle = 45°$, tehát EAH a k_{EA} kör EA húrjának érintő szárú kerületi szöge, azaz HA érinti ezt a kört. A szelőtétel szerint $HA^2 = HE \cdot HK$, ahol a HA független az o körtől, tehát H az összes szóbajövő o kör hatványpontja. így bármelyik két érintkező kör közös pontbeli közös érintője (hatványvonala) átmegy H-n is hossza HA. Az érintési pontok a H középpontú A-n átmenő körön helyezkednek el.

Ha T e kör A és B közti rövidebbik ívének tetszőleges pontja, akkor tekintsük a TH és e egyenesek által határolt, de az e egyenes H-val ellentétes oldalán található két szögtartományt. írjunk ezekbe olyan kört, amely érinti k-t és k belsejében van. Az előző levezetés szerint ezek a HT szárat egy-egy H-tól HA távolságra levő pontban, tehát T-ben érintik, azaz egymást is T-ben érintik.

A 9.18. fel. II. megoldása

b) Jelölje k és e metszéspontjait A és B egy megfelelő k-t és e-t érintő kört o, érintési pontjait K és E. Alkalmazzunk A centrumú inverziót! Ennél e és k képe egy-egy olyan egyenes – $e' = e$ és k' –, amely átmegy B képén, a B' ponton (a 17.71. ábrán az A középpontú B-n átmenő i körre invertáltunk, így $B = B'$). Az e', k' egyenesek négy szögtartományra osztják a síkot, ezek egyike annak a félkörlapnak a képe, amelybe a köröket írjuk.



17.71. ábra.

Az o kör képe az adott szögtartományba írt, a szárakat érintő o' kör, érintési pontjai, E' és K' az E, K pontok képei. Az $f = EK$ egyenes képe az E', K', A pontokon átmenő f' kör. Azt kell igazolni, hogy f' mindig átmegy még egy rögzített ponton.

A szögtartomány szögfelezője, az $E'K'$ szakasz t felezőmerőlegese az o' kör egyik szimmetriatengelye. Az A pont erre tükrözött képe, A_1 illeszkedik az o' körre, és így A_1 inverziónál származó (ős)képe, A_1' illeszkedik o-ra.

c) Az e', k' köröket érintő – a megfelelő szögtartományba eső – körök egymással való érintési pontjainak mértani helye a szögtartomány t szögfelezője (pontosabban annak a szögtartományba eső félegyenese). Ennek az inverziónál származó t' képe a keresett mértani hely. Ez egy olyan kör (megfelelő íve), amely átmegy az A, B pontokon és felezi az e egyenes és a k kör szögét.

Állítjuk, hogy a t' kör középpontja az A_1' pont. Valóban, bármely inverziónál igaz, hogy egyenes képének középpontja, a centrum egyenesre való tükörképének inverz képe, esetünkben $i\,(t(A)) = i(A_1) = A_1'$. Mivel t az e, k' egyenesek szögfelezője, így $A_1 \in k'$, tehát $A_1' \in k$, sőt ábránkon $BA_1'A\angle = 90°$ és $ABA_1'\angle = 45°$, tehát A_1' a k kör AB ívének felezőpontja.

Könnyedén szerkeszthetünk az e', k' egyenesek határolta megfelelő szögtartományba a t szögfelező tetszőleges pontján átmenő, a szögszárakat érintő kört. A szög csúcsát kivéve mindig két ilyen kör van, amelyek egymást is érintik. Ezek inverz képei egymást a t' kör megfelelő ívén egymást érintő körök lesznek, tehát t'-nek a vizsgált félkörlap belsejéhez tartozó minden pontja lehet érintési pont.

A 9.18. fel. III. megoldása

b) Alkalmazzunk egy olyan inverziót, amely kicseréli a k kör e egyenesre eső AB átmérőjét a tekintetbe vett félkörlap AB félkörívével!

Van ilyen inverzió, ennek centruma a k kör AB-re merőleges átmérőjének a félkörlapra nem illeszkedő H végpontja. Ha H centrumú inverziót alkalmazunk, akkor k képe egyenes lesz, hiszen H a k körön van, ha olyan inverziót alkalmazunk, amelynél A és B fix, akkor a k kör képe az e egyenes lesz, hiszen ez az egyetlen egyenes A-n és B-n át.

Tekintsük az AB szakasz valamely E pontját! A HE egyenes metszi a k kör H-t nem tartalmazó AB ívét, jelölje ezt a metszéspontot K. Van egy olyan o kör, amely E-ben érinti e-t és átmegy K-n. Az E, K pontokat a vizsgált inverzió kicseréli egymással, hiszen az e egyenest és a k kört is kicseréli egymással. Emiatt a teljes o kört önmagára képezi az inverzió. Ez azt is jelenti, hogy o érinti k-t K-ban, hiszen o érinti e-t E-ben és E képe K, e képe k, és az inverzió érintkezéstartó.

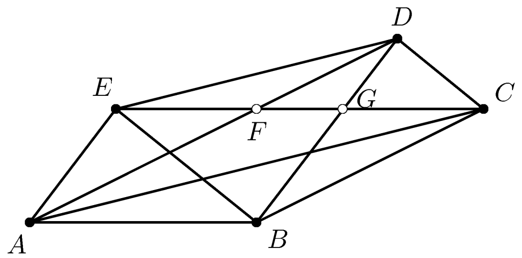
Az a) feladatrész megoldása alapján világos, hogy egyetlen olyan kör van, amely az e egyenest az AB szakaszának egy rögzített E pontjában érinti és érinti a k kör rögzített AB ívét is: egy parabola és egy – a tengelyével párhuzamos – egyenes metszéspontja. Ezt a kört az előbb meg is szerkesztettük, látható, hogy az érintési pontokat összekötő EK egyenes mindig átmegy a H ponton.

c) Ha az AB szakaszt és a k kör AB ívét érintő o_1, o_2 köröknek egyetlen közös pontja van, akkor az szükségképpen helyben marad a b)-ben vizsgált inverziónál, hiszen o_1 és o_2 is önmagára képződik, így közös pontjuk is egy közös pontjukba képződik. Ez azt jelenti, hogy egyetlen közös pontjuk az inverzió alapkörén, a H középpontú HA sugarú körön van. Ha P ezen kör rövidebbik AB ívének tetszőleges pontja, és o olyan kör, amely P-ben érinti a HP egyenest, akkor o szükségképpen fix a vizsgált inverziónál. két olyan kör van, jelben o_1 és o_2, amely emellet még e-t is érinti, ezek szükségképpen k-t is érintik, ráadásul egymást is P-ben. Tehát a vizsgált körív minden pontja előáll érintési pontként.

A 9.19. feladat megoldása

a) Tekintsük az $ABCDE$ ötszöget, amely rendelkezik a feladatban megadott tulajdonsággal (lásd a 17.72. ábrát).

Tekintsük pl. a $\lambda = \frac{AC}{DE}$ arányt. Jelölje az $ACDE$ trapéz AD, CE átlóinak metszéspontját F. Az AFC, DFE háromszögek hasonlóak, így $\frac{AF}{FD} = \frac{AC}{DE} = \lambda$. A DA, DB szögszárakat az AB-vel párhuzamos EC egyenes F-ben ill. G-ben metszi, így $\frac{GB}{DG} = \frac{AF}{FD} = \lambda$. Az EGB, CGD háromszögek is hasonlóak, így $\frac{EB}{CD} = \frac{GB}{DG} = \lambda$. Azt kaptuk, hogy egy átló és a vele párhuzamos oldal aránya megegyezik a szomszédos oldallal párhuzamos átló és e szomszédos oldal arányával. Ebből következik, hogy az átló/oldal arány minden párnál azonos.



17.72. ábra.

Mivel $BC = AF = \lambda FD$ és $\lambda BC = AD = AF + FD$, így $\lambda^2 FD = \lambda FD + FD$, azaz $\lambda^2 - \lambda - 1 = 0$, amiből a pozitív érték az aranymetszés aránya: $\lambda = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$.

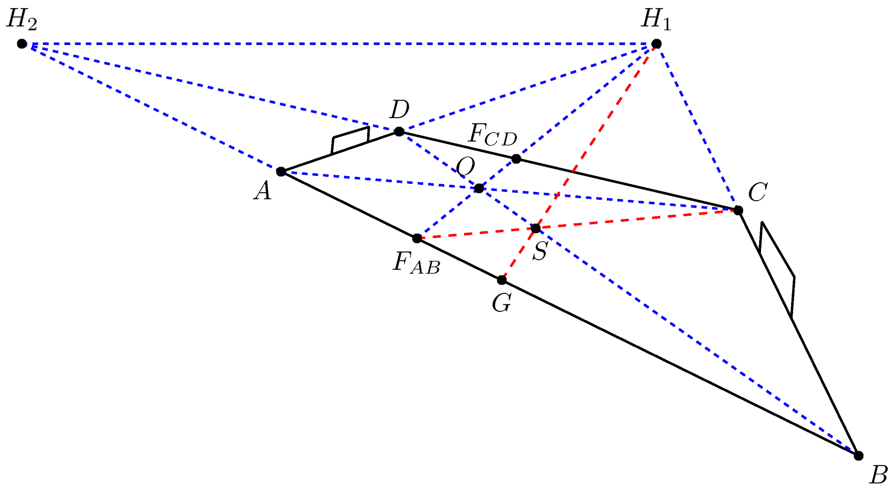
b) Alkalmazzunk egy affin transzformációt, amely egy szabályos ötszög három egymást követő csúcsát az A, B, C pontokba viszi. A szabályos ötszög képe megfelelő lesz, hiszen az affin transzformáció párhuzamos egyeneseket párhuzamos egyenesekbe képez.

17.8. A projektív geometria elemei – megoldások

A 9.1. feladat megoldása

A fényképezés egy vetítésnek fogható fel. A külvilágot a fényképezőgép P fókuszpontjából a film Σ síkjára vetítjük. A fényképen megjelenő $ABCD$ négyszög a valóságos focipálya, az $A'B'C'D'$ téglalap képe ennél a vetítésnél. Az $A'D'$ alapvonal és a P fókuszpont egy Σ_{AD} síkot alkot, ez a sík tartalmazza a fókuszpontot az oldalvonal bármely pontjával összekötő egyenest, tehát az AD egyenes a Σ_{AD} sík és a Σ sík metszésvonala. Az $A'D'$-vel párhuzamos $B'C'$ alapvonal és a P pont síkja Σ_{BC}, melynek Σ-val való metszete a BC egyenes. A Σ_{AD} és a Σ_{BC} sík is tartalmazza a P ponton át az $A'D'$, $B'C'$ egyenesekkel párhuzamosan húzott h_1 egyenest. Ha h_1 a film Σ síkját H_1-ben metszi, akkor H_1 egyben az AD, BC egyenesek metszéspontja is. A focipálya valódi síkjában az $A'D'$, $B'C'$ egyenesekkel párhuzamos egyenesek képei mind H_1-en mennek át, mert bármelyik ilyen egyenes és a P pont olyan síkot feszít ki, amely tartalmazza a h_1 egyenest.

Ehhez hasonlóan a focipálya $A'B'$, $C'D'$ oldalvonalainak és az ezekkel párhuzamos egyeneseknek olyan egyenesek a képei, pl AB és CD, amelyek a Σ sík egy H_2 pontján haladnak át (lásd a 17.73. ábrát).



17.73. ábra.

a) A pálya középpontja az $A'C'$, $B'D'$ átlók O' metszéspontja, ennek O képét megkapjuk az AC, BD egyenesek metszéspontjaként. A pálya középvonala az O' ponton át az $A'D'$, $B'C'$ alapvonalakkal párhuzamosan húzott egyenes, melynek képe tehát az OH_1 egyenes. OH_1 egyenes és az AB, CD egyenesek F_{AB}, F_{CD} metszéspontjai az oldalvonalak felezőpontjainak képei.

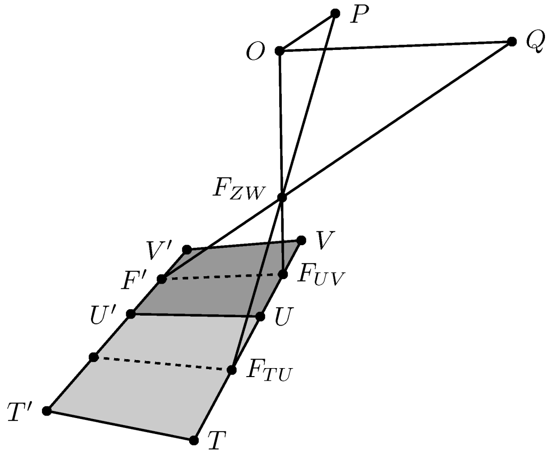
b) Felhasználjuk, hogy a súlypont harmadolja a súlyvonalat. A pálya oldalvonalainak F'_{AB}, F'_{CD} felezőpontjai és a B' sarokzászló alkotta háromszög egyik súlyvonala $O'B'$, egy másik súlyvonala $F'_{AB}C'$ így a háromszög S' súlypontjának képe a Σ síkon $S = F_{AB}C \cap OB$. A harmadolóvonal az SH_1 egyenes.

A 9.2. feladat megoldásai

A 9.2. d) mego.

Erre a feladatrészre adunk egy számolás nélküli indoklást. Legyen festőhöz legközelebbi parkettalap az $UVV'U'$ lap, a festő szeme a Q pont, az UV, $U'V'$ szakaszok felezőpontja F_{UV} és F', az F' pont képe a vásznon F_{ZW}. Az $UVV'U'$ parkettalappal szomszédos egyik négyzetlap (lásd a 17.74. ábrát) $TUU'T'$, ezen a TU oldalél felezőpontja F_{TU}.

A vizsgált TU', UV' átlókkal párhuzamos a parkettalapok síkjában az $F_{TU}F'$ egyenes is, melynek képe a vásznon az $F_{TU}F_{ZW}$ egyenes, amely tehát szintén P-ben metszi az OP horizontot. Az $F_{UV}F'$, $F_{UV}F_{TU}$ szakaszok egyenlőek egymással, hiszen mindketten egyenlők a parketta négyzetlapok oldalával. Az $F_{ZW}F_{UV}F'$, $F_{ZW}F_{UV}F_{TU}$ háromszögek így egybevágó derékszögű háromszögek, amelyek az $F_{UV}O$ tengely körüli derékszögben egymásba forgathatók. Ez a forgatás egyúttal egymásba viszi a P, Q pontokat is, hiszen ezek a pontok az egymásba forduló $F_{TU}F_{ZW}$, $F'F_{ZW}$ egyeneseknek a forgatásnál önmagába képződő OPQ síkkal (a Q ponton áthaladó a parkettalapok, azaz a földfelszín síkjával párhuzamos síkkal) való metszéspontjai.



17.74. ábra.

A 9.4. feladat megoldása

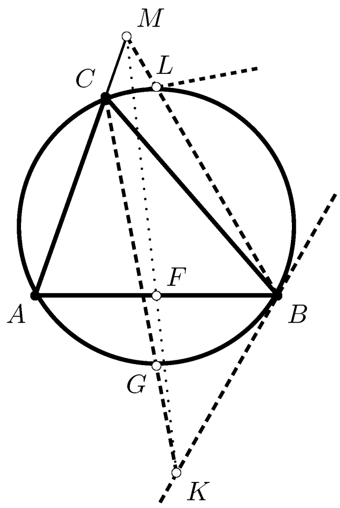
A Pascal tétel azt mondja ki, hogy ha az $A_1A_2A_3A_4A_5A_6$ hatszög csúcsai valamely k kúpszeletre illeszkednek, akkor az oldalegyenesek $A_1A_2 \cap A_4A_5$, $A_2A_3 \cap A_5A_6$, $A_3A_4 \cap A_6A_1$ metszéspontjai egy egyenesen vannak. A hatszög csúcsai között azonosak is lehetnek, ha két egymást követő csúcs – például $A_1 = A_2$ – azonos, akkor összekötő egyenesük – A_1A_2 – a k kúpszelet adott pontbeli érintője.

Térjünk vissza feladatunkra. Jelölje G a k kör és a CK szögfelező metszéspontját. Ismeretes, hogy az AB oldal felezőmerőlegese a körülírt kört ugyanott metszi, ahol az $ACB\angle$ két szögfelezője is ($C-n$ kívül). Tehát az AB oldal F felezőpontja a GL egyenesen van.

Alkalmazzuk a Pascal tételt a k körbe írt $BBACGL$ elfajult hatszögre![VITRF]

$$BB \cap CG = K, \qquad BA \cap GL = F, \qquad AC \cap LB = M,$$

tehát K, F és M valóban egy egyenesen vannak.



17.75. ábra.

17.9. Speciális görbék – megoldások

A 9.1. feladat megoldása

A kérdéskörről részletes elemzés található Hraskó András „Egy szív titkai” című írásában a

http://matek.fazekas.hu/portal/tanitasianyagok/Hrasko_Andras/kardioid/

weboldalon.

Irodalomjegyzék

[ÁBANA] Ábrahám Gábor, *Az analízis alkalmazásai*, http://matek.fazekas.hu/portal/tanitasianyagok/Abraham_Gabor/analalk/.

[ÁBFXM] Ábrahám Gábor, *Az* $f^{-1}(x) = f(x)$*típusú egyenletekről,* avagy az írástudók felelőssége és egyéb érdekességek, http://matek.fazekas.hu/portal/tanitasianyagok/Abraham_Gabor/irfel/.

[ÁBHRT] Ábrahám Gábor, *A háromszög és a terület*, http://matek.fazekas.hu/portal/tanitasianyagok/Abraham_Gabor/harter/.

[ÁBSZG] Ábrahám Gábor, *Szélsőérték feladatok megoldása elemi geometriai eszközökkel*, http://matek.fazekas.hu/portal/tanitasianyagok/Abraham_Gabor/szelgeo/.

[AMBVMF] Ambrus Gabriella, *Valóságközeli matematika, munkafüzet 5–12. o.*, Műszaki Kiadó, 2007.

[ANDGF] Andrásfai Béla, *Gráfelmélet*, Polygon, Szeged, Polygon könyvtár sorozat, JATE Bolyai Intézet, 1997

[ANDVS] Andrásfai Béla, *Versenymatek gyerekeknek*, Calibra kiadó, ISBN=963 7740 20 1, 1988

[ANDNB] George E. Andrews, *Number theory*, Dover Publications Inc., New York, 1994.

[APÁC5] Csahóczi Erzsébet, Csatár Katalin, Kovács Csongorné, Morvai Éva, Széplaki Györgyné, *Matematika Tankönyv 5. osztály, I-II. kötet*, Apáczai Kiadó

[ÁRHAR] Árokszállási Tibor, *Középiskolás fokon*, http://matek.fazekas.hu/portal/tanitasianyagok/Arokszallasi_Tibor/harmad/.

[ÁRHRK] Árki Tamás és Hraskó András, *Kísérletező geometria*, http://matek.fazekas.hu/portal/tanitasianyagok/Arki_Tamas/kisgeo/

[ARTPR] Art of Problem Solving, http://www.artofproblemsolving.com/

[BABSZ] Babai László, *Számításelmélet*, előadás a Fazekasban 2004. májusában, http://matek.fazekas.hu/portal/tanitasianyagok/Babai_Laszlo/Szamitas_0405/eloadas_0405.html.

[BAILO] Jean-Claude Baillif, *Logikai sziporkák*, Gondolat, 1989, ISBN=963 282 213 7

[BALOA] M. Balk és Ju. Lomakin, *Egyenlőtlenségek bizonyatása deriválással*, az *Analízis és algebra* kötetben, 71–75 old., 1994, Bjuro Kvantum, Iskola a Kvantban sorozat, 4/94 szám.
http://kvant.mccme.ru/1979/10/dokazatelstvo_neravenstv_s_pom.htm

[BARSZM] Pálfalvi Józsefné, *Barátkozzunk a számokkal!*, Tankönyvkiadó, 1990 ISBN=963 18 2096 3 Újabb kiadás: Typotex.

[BECAB] Henry W. Gould, Timothy J. Glatzer, *Bell and Catalan Numbers: A Research Bibliography of Two Special Number Sequences*,
http://www.math.wvu.edu/~gould/BibGood%20final.pdf.

[BEKÁC] Bege Antal, Kása Zoltán, *Coding objects related to Catalan numbers*, Studia Univ. Babeş-Bolyai, Informatica, Volume XLVI, Number 1, 2001.
http://www.ms.sapientia.ro/~kasa/begekasa.pdf.

[BERG1] szerkesztette Fazakas Tünde és Hraskó András, *Bergengóc példatár*, Typotex, 1999 ISBN=963 9132 31 4.

[BERG2] szerkesztette Fazakas Tünde és Hraskó András, *Bergengóc példatár 2.*, Typotex, 2001 ISBN=963 9326 10 0.

[BGAFB] V. G. Boltyanszkij, I. C. Grohberg, *Alakzatok felbontása kisebb alakzatokra*, Tankönyvkiadó, 1976, ISBN=963 17 1842 5.

[BGKOG] V. G. Boltyanszkij, I. C. Grohberg, *Tételek és feladatok a kombinatorikus geometriából*, Tankönyvkiadó, 1970.

[BHINV] B. V. Rajarama Bhat *Invariants*, Resonance – journal of science education, Indian Academy of Sciences, Bangalore, ISSN: 0971-8044,
http://www.ias.ac.in/resonance/July2010/p595-603.pdf.

[BIHES] Bizám György és Herczeg János, *Sokszínű logika*, 2. kiadás, 1985, Műszaki Könyvkiadó, ISBN=963 10 6016 0.

[BIHEJ] Bizám György és Herczeg János, *Játék és logika* 85 feladatban, 1971, Műszaki Könyvkiadó.

[BOFOLO] Bognár László és Forrai Gábor, *Esszéírás és informális logika*, http://www.uni-miskolc.hu/~bolantro/informalis/

[BOGAL] Bognár Jánosné, *A Galton-deszka*, az [HÓDMOZ] kötet 119-135. oldalain.

[BONTV] Bognár Jánosné, Nemetz Tibor, Tusnády Gábor, *Ismerkedés a véletlennel*, Tankönyvkiadó, 1980., Középiskolai szakköri füzetek, ISBN=963 17 4813 8.

[BONTIP] Bonifert Domonkos, *Néhány Tipikus problémaszituáció matematikából*, Mozaik Oktatási Stúdió, Szeged, 1992.

[CABRI] *CABRILOG*, a Cabri program fejlesztőinek honlapja, http://www.cabri.com/.

[CIND] *Cinderella*, az interaktív geometriai program honlapja, http://www.cinderella.de/tiki-index.php

[COCAT] Cofman Judit, *Catalan numbers for the classroom?*, Elemente der Mathematik, Volume 52, Issue 3 , pp 108-117., Birkhäuser Verlag, http://link.springer.com/article/10.1007%2Fs000170050018#page-1.

[COMEX] A. Combes, *Exercises et problèmes de mathèmatiques avec solutions* (classes de 2.), Vuibert, Paris, 1963.

[COXGE] Harold Scott MacDonald Coxeter, *A geometriák alapjai*, Műszaki Könyvkiadó, 1987, Reprint kiadás, Typotex, ISBN 978-963-2791-21-0, http://ebookee.org/Coxeter-H-S-M-Introduction-to-Geometry-2ed-Wiley-1969-_127486.html.

[COXPR] Harold Scott MacDonald Coxeter, *Projektív geometria* 1986, Gondolat, ISBN 9612816781.

[CSIGRU] Csirmaz László, *Játékok és Grundy számaik*, Középiskolai Matematikai és Fizikai Lapok, 1980. december, http://www.komal.hu/cikkek/csirmaz/grundy/grundy.h.shtml.

[CSIKPR] Csikós Balázs, Kiss György *Projektív geometria*, Polygon jegyzet, 2011, http://www.math.u-szeged.hu/polygon/csikoskiss.pdf, http://www.typotex.hu/konyv/projektiv_geometria.

[CUMCD] Marc Culler és Howard Masur *Fractals, Chaos and Complex Dynamics* A Research Experience for Undergraduates, UIC, August 2002, http://homepages.math.uic.edu/~culler/chaos/

[CURVEB] Shirley B. Gray, Stewart Venit, Russ Abbott, *National curve bank*, http://curvebank.calstatela.edu/home/home.htm.

[CUTKNT] Alexander Bogomolny, *Cut the knot* (Interactive Mathematics Miscellany and Puzzles), http://www.cut-the-knot.org/

[CXGRÚ] H. S. M. Coxeter, S. L. Greitzer, *Az újra felfedezett geometria*, angolul: Geometry Revisited, Gondolat könyvkiadó, 1977, http://analgeomatica.files.wordpress.com/2008/11/geometryrevisited_coxetergreitzer_0883856190.pdf.

[DBEVAL] Fried Katalin, Korándi József, TörökJudit, *Bevezetés a modern algebrába*, 2012, http://www.cs.elte.hu/~kfried/tamop-algebra3/Fried_Korandi_Torok-Bevezetes_a_modern_algebraba.pdf.

[DECAT] Tom Davis, *Catalan numbers*, http://mathcircle.berkeley.edu/BMC6/pdf0607/catalan.pdf.

[DEVCH] Robert L. Devaney, *Dinamikus rendszerek és technológiák a Boston Egyetem honlapján*, http://math.bu.edu/DYSYS/

[DLMF] *NIST Digital Library of Mathematical Functions* http://dlmf.nist.gov/

[DSVÁL] Dobos Sándor, *Olimpiai válogatóversenyek 2001-2005*, Bolyai János Matematikai Társulat, 2005

[EGYKO] Elekes György, *Kombinatorika feladatok - egyetemi jegyzet*, ELTE, 1992. http://matek.fazekas.hu/portal/tanitasianyagok/Elekes_Gyorgy/elekes_kombfel.pdf.

[EGYVGS] Elekes György, *Véges matematika - egyetemi jegyzet*, ELTE, 2002.

[EPSAC] David Eppstein, University of California, linkgyűjtemény: *Geometry in action* http://www.ics.uci.edu/~eppstein/geom.html

[ERDAL] Erdős Gábor, *Algoritmusok*, A [FEK12] kötet 76-83. oldalain.

[ÉRDMT] Kosztolányi József, Mike János és Vincze István, *Érdekes matematikai feladatok*, Mozaik Oktatási Stúdió, Szeged, 1992, ISBN=963 7679 19 7

[ERSUR] Erdős Pál és Surányi János, *Válogatott fejezetek a számelméletből*, Polygon, Szeged, 2. átdolgozott kiadás, 2004 ISSN=1218–4071.

[ESCHER] Maurits Cornelis Escher, *The official M. C. Escher website*, http://www.mcescher.com/

[EUKEL] Euklidész, *Elemek*, Gondolat Kiadó, 1983, http://mek.oszk.hu/00800/00857/.

[EUCLID] László István és Simon Péter, *Az Euklides dinamikus geometriai szerkesztőprogram*, http://www.mozaik.info.hu/Homepage/Mozaportal/MPdigitalis.php?op=euklides;
lásd még http://matek.fazekas.hu/euklides/hun/euklides.htm.

[FEK10] Felelős kiadó: Pintér Ferenc, *Általános és középiskolai matematikai tehetséggondozás*, 2010. okt. 6-9., Zalai Matematikai Tehetségekért Alapítvány, ISBN: 978 963 88350 1 7.
http://matek.fazekas.hu/portal/tanitasianyagok/zalamat/2010/.

[FEK12] Felelős kiadó: Pintér Ferenc, *Felkészítés általános- és középiskolai kistérségi matematikai tehetséggondozásra*, 2012. okt. 17-20., Zalai Matematikai Tehetségekért Alapítvány, ISBN: 978 963 88350 6 2.
http://matek.fazekas.hu/portal/tanitasianyagok/zalamat/2012/.

[FELVA] William Feller, *Bevezetés a valószínűségszámításba és alkalmazásaiba*, 1978, Műszaki Könyvkiadó, ISBN=963 10 2070 3.

[FFF] Imrecze Zoltánné, Reiman István, Urbán János, *Fejtörő feladatok felsősöknek*, Szalay Könyvkiadó, Kisújszállás, 3. átdolgozott kiadás, 1999.

[FORGEO] *Forum Geometricorum*, aklasszikus euklideszi geometria folyóirata, http://forumgeom.fau.edu/.

[FRCFU] Jonathan Wolfe (executive director), Fractal Foundation, http://fractalfoundation.org/

[FRELI] Freud Róbert, *Lineáris algebra*, ELTE Eötvös Kiadó, 2006, ISBN: 9634634710.

[FRESG] Friedl Katalin, Recski András, Simonyi Gábor, *Gráfelméleti feladatok*, 2006, Typotex, ISBN=963 9664 01 4,
http://www.interkonyv.hu/konyvek/Gr%C3%A1felm%C3%A9leti_feladatok.

[FRGYSZ] Freud Róbert, Gyarmati Edit, *Számelmélet*, Nemzeti Tankönyvkiadó, 2006.

[FRPRŐ] Freud Róbert, *Prímszámok – ősi problémák, új eredmények*, előadás 2005. november 22-én a Fazekasban,
http://matek.fazekas.hu/portal/eloadas/2005/eloadas_2005_11_22_freud.html.

[FRISZ] Fried Ervin, *Oszthatóság és számrendszerek*, Tankönyvkiadó, 5. kiadás, 1982, ISBN=963 17 6224 6, Általános iskolai szakköri füzet.

[FRPRM] Freud Róbert, *Prímszámok – ősi problémák, új eredmények*, Előadás 2005. november 22-én a Fővárosi Fazekas Mihály Gimnáziumban, http://matek.fazekas.hu/portal/eloadas/2005/eloadas_2005_11_22_freud.html.

[GÁDÉL] szerkesztette Gádor Endréné, *Élő matematika*, Tanulmányok, Tankönyvkiadó, 3. kiadás, 1975.

[GÁHASZ] Gábos Adél és Halmos Mária, Matematika-módszertani kutatócsoport, *Számelmélet munkafüzet I. osztály*, Calibra kiadó, 1991.

[GARDIV] Martin Gardner, *New Mathematical Diversions from Scientific American*, The University of Chicago Press, 1961, ISBN=0-226-28247-3

[GARING] Garay Barnabás, *Az ingamozgás kaotikussága*, előadás a Fazekasban, 2009. nov. 24-én, http://matek.fazekas.hu/portal/eloadas/2009/gb/talpharkaosz.pdf.

[GELKO] J. M. Gelfand, E. G. Glagoljeva, A. A. Kirillov, E. E. Snol, *A koordinátamódszer*, ISBN 978-963-2791-22-7, http://www.interkonyv.hu/konyvek/?isbn=978-963-2791-22-7

[GEOGB] *A GeoGebra dinamikus geometriai szerkesztőprogram honlapja*, www.geogebra.org/

[GEOI] Horvay Katalin és Reiman István, *Geometriai feladatok gyűjteménye I.*, Nemzeti Tankönyvkiadó Rt, 33. kiadás, 2004 ISBN=963 19 4795 5.

[GERFI] Gerőcs László, *A Fibonacci-sorozat általánosítása*, 2. átdolgozott és bővített kiadás, Gondolkodók kiskönyvtára, Scolar Kiadó, 1998, ISBN: 978-963-857-958-7

[GIKSKK] Jevgenyij Jakovlevics Gik, *Sakk és matematika*, Gondolat, 1989, ISBN=963 282 136 X.

[GOHAS2] E. G. Gotman, *Geometriai transzformációk II.: hasonlóságok*, Kvant folyóirat, 1989/3. 52-55 old, http://kvant.mirror1.mccme.ru/1989/03/geometricheskie_preobrazovaniy.htm.

[GORCL] Catherine A. Gorini, *Using Clock Arithmetic to Send Secret Messages*, Mathematics Teacher folyóirat, Mathematical Association of America, 1996/Feb. magyar fordításban lásd itt: http://matek.fazekas.hu/portal/kutatomunkak/codes/codesm.html.

[GSHAT] Gombos Éva és Somogyi László, *Matematika határok nélkül*, Scolar Kiadó, 1997 ISBN=963 85341 7 6.

[HATWEB] *A „Matematika határok nélkül" weblapja*, készíti és fenntartja Dr. Ökördi Péterné, a Berzsenyi Dániel Gimnázium tanára, http://berzsenyi.hu/~kulcsar/

[GYREF] Gyapjas Ferenc és Reiman István, *Elemi matematikai feladatgyűjtemény*, I. kötet, Tankönyvki, ELTE egyetemi jegyzet,1965.

[HAJGR] Hajnal András, *Gráfelmélet - a speciális matematikatagozatok számára írt tankönyv III. kötetének egy fejezete*, Tankönyvkiadó, 2. kiadás, 1973.

[HAJKO] Hajnal Péter, *Elemi kombinatorikai feladatok*, Polygon könyvtár sorozat, Polygon, Szeged, 1997.

[HAJÓS] Hajós György, *Bevezetés a geometriába*, 6. kiadás, 1971, Tankönyvkiadó, ISBN=963 17 4736 0.

[HÓDÉRD] szerkesztette Hódi Endre, *Matematikai érdekességek*, Gondolat, 1969.

[HÓDMOZ] szerkesztette Hódi Endre, *Matematikai mozaik*, Typotex, 1999, A Matematikai érdekességek kibővített változata. Szabadon elérhető ebook-ként: http://www.hik.hu/tankonyvtar/site/books/b123/index.html.

[HOXKOR] Hoksza Zsolt (Tóth Géza előadásától inspirálva) „Kombinatorikus geometria és a Ramsey-tétel" http://matek.fazekas.hu/portal/kutatomunkak/Hoksza_Zsolt/ramsey.html,

[HRSZKD] Hraskó András és Szőnyi Tamás, *Kódok*, http://matek.fazekas.hu/portal/tanitasianyagok/Hrasko_Andras/kodok/.

[HRASZV] Hraskó András, *Egy szív titkai*, http://matek.fazekas.hu/portal/tanitasianyagok/Hrasko_Andras/kardioid/.

[HRATÖM] Hraskó András, *Tömegközéppont és nyomatékok a geometriában*, http://matek.fazekas.hu/portal/tanitasianyagok/Hrasko_Andras/termtud2011/tomeg/tomegkp.pdf.

[HRPVA] Hraskó Péter, *Valószínűség*, Fizikai Szemle 2008/7-8, ill. a „Biztos, hogy az energia megmarad? – és más esszék a fizikáról" kötetben, Typotex 2012

[IGNTA] J. I. Ignatyev, *A találékonyság birodalmában*, Tankönyvkiadó, 1982 Általános Iskolai szakköri füzet, ISBN=963 17 6631 4.

[JAGZS] I. M. Jaglom, *A zsák meg a foltjai*, Kömal, 2001, január, 10 - 20. oldal, online magyarul (hibás): http://db.komal.hu/KomalHU/cikk.phtml?id=200141, online oroszul: http://kvant.mccme.ru/1974/02/zaplaty_na_kaftane.htm.

[JASZ6] Jakucs Erika, *Számelmélet, 6. osztály – egy lehetséges felépítés*, http://matek.fazekas.hu/portal/tanitasianyagok/Jakucs_Erika/Szelm/.

[JANIM] Jakab Tamás, *Nim & Co.*, a [KÖZN2] kötet 107-111. oldalain.

[JAÖTL] Jakab Tamás, *Néhány valószínűségszámítási probléma – egy ötlet*, a [KÖZN1] kötet 70-76. oldalain

[JATÜ6] Jakucs Erika, *Tengelyes tükrözés – 6. osztály – egy lehetséges felépítés*, http://matek.fazekas.hu/portal/tanitasianyagok/Jakucs_Erika/geo/.

[JBKVX] Jaglom, Boltyanszkij, *Konvex alakzatok*, Bolyai János Matematikai Társulat.

[KAGEE] Nicholas D. Kazarinoff, *Geometriai egyenlőtlenségek*, Gondolat Kiadó, 1980, ISBN: 9632808568.

[KALAUZ] Kosztolányi József, Makay Géza, Pintér Klára és Pintér Lajos, *Matematika problémakalauz I.*, Polygon, Szeged, 1999

[KAL94] Urbán János, *A Kalmár László Matematikaverseny feladatai és megoldásai 94-98* (Matematika tizenéveseknek), Mozaik Oktatási Studió, 1999, ISBN 963 697 271 0.

[KAVLA] V. N. Kazatkin, L. I. Vladükina, *Algoritmusok és játékok*, Középiskolai szakköri füzetek, Tankönyvkiadó, 1988, ISBN: 963-18-0854-8.

[KGYFEJ] B. A. Korgyemszkij, *Matematika fejtörők*, Gondolat Könyvkiadó, 1972

[KIBAL] Kiss Emil, *Bevezetés az algebrába*, Elméleti matematika sorozat, Typotex, ISBN 978-963-2791-13-5

[KONKR] Ronald L. Graham, Donald E. Knuth, Oren Patashnik, *Konkrét matematika*, Műszaki Könyvkiadó Kft, 1998, ISBN: 9631614420.

[KÖMAL] *Középiskolai Matematikai és Fizikai Lapok*, A Bolyai János Matematikai Társulat és az Eötvös Loránd Fizikai Társulat folyóirata, http://www.komal.hu.

[KÖMARH] *A Kömal digitális archívuma*, a Középiskolai Matematikai és Fizikai Lapok scannelt archívuma,
http://db.komal.hu/scan/

[KÖVAL] Csatár Katalin, Harró Ágota,Hegyi Györgyné, Lövey Éva, Morvai Éva, Széplaki Györgyné, Ratkó Éva, *Valószínűségszámítás feladatok kezdőknek*, Középiskolai Matematikai és Fizikai Lapok weboldala, 2003,
http://www.komal.hu/cikkek/valszam/valszam.h.shtml.

[KÖZN1] Szerkesztette Horányi Gábor, *Közös nevezőnk a matematika*, Kőszeg, 2001, Fazekas–Lauder.

[KÖZN2] Szerkesztette Horányi Gábor, *Közös nevezőnk a matematika*, Kőszeg, 2002, KÁOKSZI-Fazekas–Lauder.

[KUERD] Kubatov Antal, *Az Erdős-Mordell egyenlőtlenség*,
http://matek.fazekas.hu/portal/tanitasianyagok/Kubatov_Antal/ErdMord/.

[KUÉRN] Kubatov Antal, *Azok a csodálatos érinténégyszögek*,
http://matek.fazekas.hu/portal/tanitasianyagok/Kubatov_Antal/erinto/erintof.html.

[KUFAL] A. G. Kuros, *Felsőbb algebra*, Typotex, Reprint kiadás, ISBN 978-963-2791-39-5.

[KVNWEB] *Kvant, fizikai és matematikai tudományos népszerűsítő folyóirat*, A Szovjet, majd az Orosz Tudományos Akadémia és a Pedagógiai Tudományok Akadémiájának lapja,
http://kvant.mirror0.mccme.ru/.

[KVT68] szerkesztette Sz. I. Tokarev, *Matematika 6-8, Kvant kis iskolások részére*, A Kvant újság melléklete, No. 3/98, Bjuro Kvantum, 1998, ISBN=5 85843 011 2, A Kvant folyóiratban a 6-8-osoknak kitűzött versenyfeladatok 1990-től 1997-ig. Az alábbi url-en magyar fordításban olvashatók a példák, és megoldásaik.
http://matek.fazekas.hu/portal/feladatbank/gyujtemenyek/Kvant/Kvant.htm.

[LATAN1] Laczkovich Miklós, T. Sós Vera, *Analízis I.*, Nemzedékek Tudása Tankönyvkiadó, 2006, ISBN: 9789631957044.

[LATAN2] Laczkovich Miklós, T. Sós Vera, *Analízis II.*, Nemzedékek Tudása Tankönyvkiadó, 2007, ISBN: 9789631960846.

[LATSEJ] Laczkovich Miklós, *Sejtés és bizonyítás*, Elméleti matematika sorozat, Második kiadás, ISBN 978-963-2791-50-0

[LCSZM] Lánczos Kornél, *Számok mindenütt*, Gondolat, 1972.

[LCGET] Lánczos Kornél, *A geometriai térfogalom fejlődése* – A geometriai fogalmak fejlődése Püthagorasztól Hilbertig és Einsteinig, Gondolat, Budapest, 1976, Typotex, 2010, reprint kiadás, ISBN 978-963-2791-20-3

[LHFURF] Johannes Lehmann, *Furfangos matematika*, Gondolat Könyvkiadó, 1976.

[LOVKO] Lovász László, *Kombinatorikai problémák és feladatok*, Elméleti matematika sorozat, 2. kiadás, 1999, Typotex, ISBN 978-963-9664-93-7, http://www.tankonyvtar.hu/hu/tartalom/tkt/kombinatorikai-problemak/.

[LOPEV] Lovász László, Pelikán József, Vesztergombi Katalin, *Kombinatorika – az általános és középiskolai matematika szakkörök számára*, Typotex, Tinitudomány sorozat, 2004, ISBN=963 9326 88 7.

[LOPEVD] Lovász László, Pelikán József, Vesztergombi Katalin, *Diszkrét matematika*, Elméleti matematika sorozat, 2. javított kiadás, 2010, Typotex. ISBN 978-963-2790-85-5, http://www.interkonyv.hu/konyvek/Diszkr%C3%A9t%20matematika.

[LUSCÉ] Lukács Ottó, Scharnitzky Viktor, *Érdekes matematikai gyakorló feladatok VII.*, Typotex, 1994, ISBN=963 7546 50 2.

[MAKMAT] ELTE Tanárképző Főiskolai Kar Matematika Tanszéke, *Matematikatanárképzés, matematikatanár-továbbképzés*, 2. szám, 1994. november, Calibra Kiadó, ISSN: 1217-6656

[MÁTFR] Máté László, *Fraktáldimenziókról egyszerűen*, előadás a Fazekasban 2008. nov. 25-én, http://matek.fazekas.hu/portal/tanitasianyagok/Mate_Laszlo/boxdim/boxdim.pdf.

[MATKV] *Matkönyv*, Matematika tagozatos online feladatgyűjtemény a Fazekas matematika portálján, http://matek.fazekas.hu/mathdisplay/

[MÁTREK] Máté László, *Rekurzív sorozatok*, Középiskolai szakköri füzetek, Tankönyvkiadó, 1980, ISBN: 963-17-5114-7.

[MATVR1] Hajós György, Neukomm Gyula, Surányi János, *Matematikia versenytételek, I. rész*, Tankönyvkiadó, 1987-ben átdolgozta Surányi János, ISBN=963 18 0426 7 összkiadás.

[MATVR2] Hajós György, Neukomm Gyula, Surányi János, *Matematikia versenytételek, II. rész*, Tankönyvkiadó, 1986-ban átdolgozta Surányi János, ISBN=963 17 4736 0.

[MATVR3] Surányi János, *Matematikai versenytételek III. rész*, Tankönyvkiadó, 1992 ISBN=963 18 4406 4.

[MAUTLÁ] Maurer I. Gyula, *Tizedes törtek és lánctörtek*, Dacia Könyvkiadó, Kolozsvár-Napoca, 1981

[MAZSVS] Magyar Zsolt, *Valószínűségszámítás és statisztika*,
http://matek.fazekas.hu/portal/tanitasianyagok/Magyar_Zsolt/valstat/.

[MOLTRF] szerkesztette Molnár Emil, *Elemi matematika (Geometriai transzformációk)*, II. kötet, Tankönyvkiadó, ELTE egyetemi jegyzet, 17. kiadás, 1992.

[MOL47] szerkesztette Molnár Emil, *Matematikai versenyfeladatok gyűjteménye (1947-1970)*, Tankönyvkiadó, 1974, ISBN=963 17 0091 7.

[MMORT] Majoros Mária és Orosz Gyula, *Tehetséggondozás matematikából*, Tóth Könyvkereskedés és Kiadó Kft, Debrecen, ISBN=963 9081 42 6.

[MOSJT] Dr Mosonyi Kálmán, *Matematikai játékok*, Tankönyvkiadó, Általános iskolai szakköri füzet, 1977.

[MO50V] Frederick Mosteller, *50 különleges valószínűségszámítási feladat megoldásokkal*, Izdatyelsztvo Nauka, Moszkva, 1971, ISBN=978 5 94057 262 6, Az eredeti kiadás angol: Fifty challenging problems in probability with solutions, Courier Dover Publications,
http://books.google.com/books?id=QiuqPejnweEC

[MNFRC] Michael Frame, Benoit Mandelbrot és Nial Neger, *Fraktálok*,
http://classes.yale.edu/fractals/

[MURAR] M. Ram Murty, *Artin's conjecture on primitive roots*, The Mathematical Intelligencer, Vol. 10., No. 4, 1988, pp 59-67.
http://www.math.ucsb.edu/~agboola/teaching/2005/winter/old-115A/murty.pdf.

[MT2008] *A Fazekas 2008. évi matektábora, Feladatok és megoldások*,
http://matek.fazekas.hu/portal/feladatbank/egyeb/Haziversenyek/Faztabor/2008/.

[NIZUB] Ivan Niven, Herbert S. Zuckerman, *Bevezetés a számelméletbe*, Műszaki Könyvkiadó, 1978, ISBN: 963-102-369-9.

[NMZVA] Nemetz Tibor, *Valószínűségszámítás*, Typotex, 1998 Speciális matematika-tankönyvek sorozat, ISBN=963 9132 27 6.

[NMZWG] Nemetz Tibor és Wintsche Gergely, *Valószínűségszámítás és statisztika mindenkinek*, Polygon, Szeged, Polygon könyvtár sorozat, 1999.

[NRICH] *NRICH, enriching mathematics*, for teachers and for those learning mathematics, University of Cambridge, http://nrich.maths.org/

[OEIS] Neil J. A. Sloane, *The On-Line Encyclopedia of Integer Sequences*, http://oeis.org/.

[OGYALG] Orosz Gyula, *Algoritmusok*, a [KÖZN2] kötet 139-156. oldalain.

[OGYMAR] Orosz Gyula, *Markov-láncok*, Fazekas matematika portál, 2008, http://matek.fazekas.hu/portal/tanitasianyagok/Orosz_Gyula/Mar/markov.html.

[OGYNEM] Orosz Gyula (szerkesztő), *Külföldi középiskolai matematikai versenyek*, Fazekas matematika portál, 2003,
http://matek.fazekas.hu/portal/feladatbank/gyujtemenyek/Nem/index.htm.

[OGYREK] Orosz Gyula, *Rekurzív sorozatok*, Fazekas matematika portál, 2003,
http://matek.fazekas.hu/portal/tanitasianyagok/Orosz_Gyula/Rek/index.htm.

[OGYVAL] Orosz Gyula, *Valószínűségszámítási érdekességek*, Fazekas matematika portál, 2004,
http://matek.fazekas.hu/portal/tanitasianyagok/Orosz_Gyula/Val/val.html.

[OSZTJ] Varga Tamás, *Osztójáték*, az *Élő matematika* kötetben, 161–178 old., 1975, Tankönyvkiadó, 3. kiadás ISBN=963 17 1047 5,
a cikk egy része a neten: http://db.komal.hu/KomalHU/cikk.phtml?id=198801.

[OSSZ14] Kosztolányi József, Mike János, Kozmáné Jakab Ágnes, Dr Szederkényi Antalné, Vincze István, *Összefoglaló feladatgyűjtemény 10-14 éveseknek*, Mozaik Oktatási Stúdió, Szeged, 10. kiadás, 2004, ISBN=963 697 100 5.

[PÁDID] Pálfalvy Józsefné, *Matematika didaktikusan*, Typotex, 2000, Szabadon letölthető:
http://www.hik.hu/tankonyvtar/site/books/b122/.

[PAJTU] Pataki János, *A zsebrádiótól Turán tételéig* – Jegyzetek egy matekóráról,
http://matek.fazekas.hu/portal/tanitasianyagok/Pataki_Janos/elemek/elemek.html;

[PAPPRP] Papp Ildikó, *Projektív geometria példatár*, Mobidiák anyag, Debreceni Egyetem,
http://www.inf.unideb.hu/oktatas/mobidiak/Papp_Ildiko/Projektiv_geometria_peldatar/Peldatar_vegleges.pdf.

[PATAG] Pataki János, *Az algebra és a geometria házassága*, Élet és Tudomány, LVIII/50., 2003/dec/12, A Diákoldal melléklet XLIV-XLVII oldalain, XIII. évf. 6. szám.

[PATMU] Pataki János, *Változatok a szimmetriára: így működik a Muirhead-egyenlőtlenség*, KöMaL 2005. október, 394. o.,
http://db.komal.hu/KomalHU/showpdf.phtml?tabla=Cikk&id=200867.

[PELCO] Pelikán József, *Matematikai konstansok*, előadás a Fazekasban 2006. november 21-én,
http://matek.fazekas.hu/portal/eloadas/2006/eloadas_2006_11_21_pelikan.php.

[PERALG] Ja. I. Perelman, *Szórakoztató algebra*, Gondolat, III. átdolgozott, bővített kiadás, 1975, ISBN=963 280 214 4.

[PEREJT] Ja. I. Perelman, *Matematikai történetek és rejtvények*, Gondolat, 1979, ISBN=963 280 825 8.

[PIAN1] Pintér Lajos, *Analízis I.*, Speciális matematika-tankönyvek sorozat, ISBN 978-963-9548-95-4,
http://www.interkonyv.hu/konyvek/?isbn=978-963-9548-95-4.

[PIAN2] Pintér Lajos, *Analízis II.*, Speciális matematika-tankönyvek sorozat, ISBN 978-963-9132-30-6 (e-book), ISBN 10 963-9132-30-6,
http://www.interkonyv.hu/konyvek/?isbn=978-963-9132-30-6.

[PKSZM] Pintér Klára, *Számelmélet – Számoljunk maradékokkal!*, Sulinet, 0641. MODUL,

http://www.sulinet.hu/tanar/kompetenciateruletek/2_matematika/3_modulleirasok-tanar-tanulo-eszkoz/2_a_tipus/6-evfolyam/2_tanari_modulok/064-temakor/amat_0641__tanar.pdf

[POLYDR] *A Polydron cég weblapja*, http://www.polydron.co.uk/

[PÓLYGO] Pólya György, *A gondolkodás iskolája* III. bõvített kiadás, Gondolat Kiadó, 1971.

[PÓLYIN] Pólya György, *Indukció és analógia* (A matematikai gondolkodás mûvészete I.), Gondolat Kiadó, 1988.

[PÓLYPL] Pólya György, *A plauzibilis következtetés* (A matematikai gondolkodás mûvészete II.), Gondolat Kiadó, 1989.

[PÓLYPR] Pólya György, *A problémamegoldás iskolája I-II.* Tankönyvkiadó, 1967-1968.

[PÓLYTE] Pólya György, *Matematikai módszerek a természettudományban*, Gondolat Kiadó, 1984.

[POGRÓ] Pogáts Ferenc, *Rózsaablakok és társaik*, 2004, http://matek.fazekas.hu/portal/tanitasianyagok/Pogats_Ferenc/rozsa/rozsaabl.html.

[POGSF] Pogáts Ferenc, *Sorminták, frízek*, 2004, http://matek.fazekas.hu/portal/tanitasianyagok/Pogats_Ferenc/sor/sorfriz.html.

[POGTÜ] Pogáts Ferenc, *A sík egybevágóságai és a tengelyes tükrözések*, 2003, http://matek.fazekas.hu/portal/tanitasianyagok/Pogats_Ferenc/sik/index.htm.

[POGVEK] Pogáts Ferenc, *Vektorok, koordinátageometria, trigonometria*, Speciális matematika-tankönyvek sorozat, Typotex, 2009, ISBN: 9789632790701, http://www.interkonyv.hu/konyvek/?isbn=978-963-9132-24-5.

[POJASZ] Jakucs Erika, Pogáts Ferenc, *A szépség matematikája*, 2004, http://matek.fazekas.hu/portal/tanitasianyagok/Pogats_Ferenc/szep/szepmat.html.

[PRAREC] Jens Kruse Andersen, *Primes in Arithmetic Progression Records*, http://users.cybercity.dk/~dsl522332/math/aprecords.htm.

[PRJTV] Péter Rózsa, *Játék a végtelennel*, Typotex, 7. kiadás, 1999, ISBN=963 9548 37 5.

[PRGEO1] V. V. Prasolov, A matematika szakkörök könyvtára, 15. kötet, *Síkgeometriai feladatok*, I. rész, 1986 Nauka, Moszkva, oroszul: zadacsi po planimetrii.

[PRGEO2] V. V. Prasolov, A matematika szakkörök könyvtára, 16. kötet, *Síkgeometriai feladatok*, II. rész, 1986 Nauka, Moszkva.

[RBEGYM] Rábai Imre, *Készítsünk egymásra épülő feladatokat!*, A Matematika Tanítása, 1987. ápr. XXXIV. évf. 4. szám, 85-87. oldallak az alábbi linken: http://matek.fazekas.hu/portal/tanitasianyagok/Rabai_Imre/Rabai_1_5.pdf.

[RBSOP] Rábai Imre, *Egy (talán soha el nem készülő) tanpéldatár feladataiból*, 2-4. oldallak az alábbi linken:
http://matek.fazekas.hu/portal/tanitasianyagok/Rabai_Imre/Rabai_1_1.pdf.

[RBV40] Rábai Imre, *Válogatás 40 év matematika felvételi feladataiból*, 19-28. oldal az alábbi linken:
http://matek.fazekas.hu/portal/tanitasianyagok/Rabai_Imre/Rabai_1_2.pdf.

[RBVT01] Rábai Imre, *Legyenek tanpéldáink! (Feladatcsaládok – Milyenek legyenek a példatárak*, 7. oldal az alábbi linken:
http://matek.fazekas.hu/portal/tanitasianyagok/Rabai_Imre/Rabai_1_1.pdf.

[RBMÉFW] Rábai Imre, *Mérőlapok felvételire*, 1981/ápr., 1997/nov., 1998/jan., 1998/nov., 1999/jan., 1999/nov., 2000/jan., +2003-as szakkör, mind megoldásokkal,
http://matek.fazekas.hu/portal/tanitasianyagok/Rabai_Imre/Rabai_1_4.pdf.

[RBMF?] Rábai Imre, *Megfordítható? (Pontosan akkor – akkor és csakis akkor – szükséges feltétel*, 11-16.. oldal az alábbi linken:
http://matek.fazekas.hu/portal/tanitasianyagok/Rabai_Imre/Rabai_1_1.pdf.

[RBMF1] Rábai Imre, *Néhány megfordítható tétel*, A Matematika Tanítása, 1976. ápr. XXIII. évf. 2. szám,
http://matek.fazekas.hu/portal/tanitasianyagok/Rabai_Imre/Rabai_1_5.pdf.

[RB2EGY] Rábai Imre, *Kétismeretlenes egyenletek*, 29-34.. oldal az alábbi linken:
http://matek.fazekas.hu/portal/tanitasianyagok/Rabai_Imre/Rabai_1_2.pdf.

[REGRS] Recski András, *Gráfok színezése*, előadás a Fazekasban 2008 jan. 22-én,
http://matek.fazekas.hu/portal/eloadas/2007/eloadas_2008_01_22_recski.html.

[REH4D] Julie Rehmeyer, *Seeing in four dimensions* – Mathematicians create videos that help in visualizing four-dimensional objects, Science News, http://www.sciencenews.org/view/generic/id/35740/description/Seeing_in_four_dimensions.

[REIEG] Reiman István, *Fejezetek az elemi geometriából*, Tankönyvkiadó, 1987, ISBN=963 18 0257 4, Újabb kiadás: Typotex.

[REIHA] Reiman István, *A geometria és határterületei*, Szalay Kft, 2001, ISBN: 9632370120.

[REIHOP] Horvay Katalin, Reiman István, *Projektív geometria*, kézirat, Eötvös Loránd Tudományegyetem Természettudományi Kar 1980, majd Tankönyvkiadó, 1999.

[REIKX] Reiman István, *Geometriai feladatok megoldása a komplex számsíkon*, Tankönyvkiadó, Középiskolai szakköri füzetek, 1957.

[REIOL] Reiman István, *Nemzetközi Matematikia Diákolimpiák 1959-1994*, Typotex, 1998 ISBN=963 7546 76 6.

[REIVK] Reiman István, *Vektorok a geometriában*, Középiskolai szakköri füzetek, Tankönyvkiadó, 1971.

[RÉNYAM] Rényi Alfréd, *Ars Mathematica*, Typotex, 2005, ISBN:13 978 963 7546 58 7 http://www.interkonyv.hu/konyvek/?isbn=978-963-7546-58-7.

[RÉNYBI] Rényi Alfréd, *A barkohba játék és az információelmélet*, a Matematikai mozaikban[HÓDMOZ], http://www.tankonyvtar.hu/en/tartalom/tkt/matematikai-mozaik/ar16.html.

[RÉNYSZ] Rényi Alfréd, *A szerencsejátékok és a valószínűségszámítás*, az [HÓDMOZ] kötet 193-215. oldalain.

[RÉNYLE] Rényi Alfréd, *Levelek a valószínűségről*, Typotex, ISBN: 10 963-7546-44-8, http://mek.oszk.hu/00800/00859/

[RHSBS] Reiczigel Jenő, Harnos Andrea, Solymos Norbert *Biostatisztika nem statisztikusoknak*, 2010, javított utánnyomás, Pars Kft. http://biostatkonyv.hu/

[RSZAK] Róka Sándor, *Szakköri feladatok matematikából*, Tóth Könyvkereskedés, Debrecen, 1996 ISBN=963 9029 28 9

[RSZÓR] Sz. N. Olehnyik, J. V. Nyeszterenko, M. K. Potapov, *Régi szórakoztató feladatok*, Műszaki Könyvkiadó, 1990.

[RUIFR] Jules J.C.M. Ruis, *Fractal.org, Centre for Fractal Design and Consultancy*, http://www.fractal.org/.

[R2000] Róka Sándor, *2000 feladat az elemi matematika köréből*, Typotex, 1999, ISBN=963 9132 50 0.

[SALADT] David Salsburg, *The Lady Testing Tea* (How statistics revolutionized science in the twentieth century), Holt Paperbacks, 2002, ISBN: 0805071342.

[SANDEU] Ed Sandifer, *How Euler Did It*, http://www.maa.org/news/howeulerdidit.html.

[SÁRGA] Bartha Gábor, Bogdán Zoltán, Csúri József, Duró Lajosné, Gyapjas Ferencné, Kántor Sándorné és Pintér Lajosné, *Matematika feladatgyűjtemény I.*, Nemzeti Tankönyvkiadó, 12. kiadás, 1998, ISBN=963 18 8911 4.

[SÁRSZ] Sárközy András, *Számelmélet példatár*, 1976, Műszaki Könyvkiadó, Bolyai sorozat, ISBN=963 10 0915 7.

[SÁRKX] Sárközy András, *Komplex számok példatár*, Műszaki Könyvkiadó, 1973, Bolyai sorozat.

[SÁSUSZ] , Sárközy András és Surányi János, *Számelmélet feladatgyűjtemény*, Tankönyvkiadó, Eötvös Loránd Tudományegyetem Természettudományi Kar, Kézirat, 6. kiadás,1978

[SEDID] Stephen Senn, *Dicing with Death*, Cambridge University Press, 2003, ISBN: 0521540232.

[SHMCM] Claude Elwood Shannon, A Mathematical Theory of Communication, The Bell System Technical Journal, Vol. 27, pp. 379–423, 623–656, July, October, 1948, http://cm.bell-labs.com/cm/ms/what/shannonday/shannon1948.pdf.

[SI200] Waclaw Sierpinski, *200 feladat az elemi számelméletből*, Középiskolai Szakköri Füzetek, Tankönyvkiadó, 1972.

[SINFG] Simonyi Gábor, *Információközlés és gráfelmélet*, előadás a Fazekasban 2009. szeptember 29-én, http://matek.fazekas.hu/portal/eloadas/2009/eloadas_2009_09_29_simonyi.html.

[SKETCH] *The Geometer's Sketchpad Resource Center*, http://www.dynamicgeometry.com/

[SKLA1] D. O. Sklarszkij, N. N. Csencov, I. M. Jaglom, Válogatott feladatok és tételek az elemi matematika köréből, I. kötet, *Aritmetika és algebra*, Tankönyvkiadó, note=Újabban a Typotex kiadó is megjelentette, ISBN=963 17 3843 4, 1979

[SKLA21] D. O. Sklarszkij, N. N. Csencov, I. M. Jaglom, Válogatott feladatok és tételek az elemi matematika köréből, 2/1. kötet, *Geometria I. (Planimetria)*, Tankönyvkiadó, note=Újabban a Typotex kiadó is megjelentette, ISBN=963 17 3843 4, 1972

[SKLA3] D. O. Sklarszkij, N. N. Csencov, I. M. Jaglom, Válogatott feladatok és tételek az elemi matematika köréből, 3. kötet, *Geometria II. (Sztereometria)*, Tankönyvkiadó, 1968

[SMUAL] Raymond Smullyan, *Alice rejtvényországban*, Typotex, 2009, ISBN: 9789632790657.

[SMUHÖ] Raymond Smullyan, *A hölgy vagy a tigris?*, Typotex, 2010, ISBN: 9789632790824.

[SMUGÖ] Raymond Smullyan, *Gödel Nemteljességi tételei*, Typotex, 2003, ISBN: 9639548987.

[SMUMI] Raymond Smullyan, *Mi a címe ennek a könyvnek?*, Typotex, 2009, ISBN: 9632790336.

[SOVAL] Solt György, *Valószínűségszámítás példatár*, Műszaki Könyvkiadó Kft, 2000, Bolyai sorozat, ISBN=978 963 1630374.

[SURALG] Surányi László, *Algebra* (Testek, gyűrűk, polinomok), Typotex, 2004, ISBN=10 963-7546-61-8.

[STACKX] *Mathematics Stack Exchange*, ahol bármit kérdezhetsz matematikáról, http://math.stackexchange.com/.

[SZÁSTA] Számadó László, *A statisztika alapjai*, Középiskolai Matematikai és Fizikai Lapok weboldala, 2003, http://www.komal.hu/cikkek/statszaml/statisztika.h.shtml.

[SZASZM] Dr. Szalay Mihály, *Számelmélet*, A speciális matematika osztályok számára, Tankönyvkiadó, 1991, Újabb kiadás a Typotex Kiadónál.

[SZEBAL] Szele Tibor, *Bevezetés az algebrába*, Tankönyvkiadó, 1977, ISBN: 963-17-2289-9.

[SZEMFA] Szeminárium a Fazekasban, http://matek.fazekas.hu/portal/tovabbkepzesek/szeminarium.

[SZGPX] Székely J. Gábor, *Paradoxonok a véletlen matematikájában*, Typotex, edition=2. átdolgozott kiadás, 2004, ISBN=978 963 2790 89 3, http://books.google.com/books/?id=0So4I9CIVW0C

[S111AE] Schultz János, *111 feladat algebrai egyenlőtlenségekre*, http://matek.fazekas.hu/portal/tanitasianyagok/Schultz_Janos/111algegylotlenseg/.

[S111AL] Schultz János, *111 algebra feladat*, http://matek.fazekas.hu/portal/tanitasianyagok/Schultz_Janos/111algfel/.

[S50SK] Schultz János, *A skatulya-elv alkalmazásai*, http://matek.fazekas.hu/portal/tanitasianyagok/Schultz_Janos/50skatulya/.

[TAGRP] Ben Green, Terence Tao, *The primes contain arbitrarily long arithmetic progressions*, Annals of Mathematics 167 (2): 481–547. http://arxiv.org/pdf/math/0404188v6.pdf.

[TEACH] Jim Noble, Richard Wade, Oliver Bowles, *teachmathematics.net*, Lessons to look forward to, http://www.teachmathematics.net/.

[TÖRFIB] Török Judit, *A Fibonacci-sorozat*, Tankönyvkiadó, 1984 Középiskolai szakköri füzetek, ISBN=963 17 7222 5.

[ÚJMOZ] szerkesztette Hraskó András, *Új matematikai mozaik*, Typotex, 2002, ISBN=963 9326 41 0, Szabadon elérhető ebook-ként: http://www.tankonyvtar.hu/hu/tartalom/tkt/uj-matematikai-mozaik-uj/adatok.html.

[URBHA] Urbán János, *Határérték-számítás*, Bolyai sorozat, Műszaki Könyvkiadó, 2006, ISBN: 963163072.

[URBLO] Urbán János, *Matematikai logika*, Speciális matematika-tankönyvek sorozat, Typotex, ISBN: 978-963-2797-25-0

[URB+15] Urbán János, *Matek+ 15 éveseknek*, Mozaik Oktatási Stúdió, Szeged, 1993.

[VAKV1] szerkesztette N. B. Vasziljeva, *Kvant feladatgyűjtemény*, I. kötet, A Kvant feladatai 1970-től 1980-ig, Bjuro Kvantum, 1997, ISBN=5 85843 002 3.

[VAKV2] szerkesztette N. B. Vasziljeva, *Kvant feladatgyűjtemény*, I. kötet, A Kvant feladatai 1981-től 1994-ig Bjuro Kvantum, 1997, ISBN=5 85843 004 X.

[VARGA1] Pogáts Ferenc, *Varga Tamás matematika versenyek*, Typotex, 1995, ISBN=963 7546 58 8.

[VARGA2] Pogáts Ferenc, *Varga Tamás matematika versenyek II.*, Typotex, 1997, ISBN=963 7546 84 7.

[VARGA3] Pogáts Ferenc és Fazakas Tünde, *Varga Tamás matematika versenyek III.*, Typotex, 2003, ISBN=963 9326 80 1.

[VARLO1] Varga Tamás, *Matematikai logika kezdőknek I.*, Tankönyvkiadó, 1969 (2. kiadás), Kiss Emil idézi a neten:
http://www.cs.elte.hu/~ewkiss/bboard/mt/log.pdf.

[VARLO1] Varga Tamás, *Matematikai logika kezdőknek II.*, Tankönyvkiadó, 1969 (2. kiadás).

[VILKO] N. J. Vilenkin, *Kombinatorika*, Műszaki Könyvkiadó, 1987, ISBN=963 10 6836 6.

[VITRF] Vigassy Lajos, *Geometriai transzformációk*, 1963, Tankönyvkiadó.

[VIVLG] Virág Bálint, *Véletlen gráfok*, előadás a Fazekasban 2010 okt. 5-én,
http://matek.fazekas.hu/portal/eloadas/2010/Perkolacioelmelet_vegl.pdf;

[WALPNO] John Walker, *Introduction to Probability and Statistics*,
http://www.fourmilab.ch/rpkp/experiments/statistics.html.

[WWSZE] Warren Weaver, *Szerencse kisasszony* – A valószínűség elmélete, Kairosz Kiadó, 1997, ISBN: 9638572470

[WIBAY] Dieter Wickmann, *Bayes-statisztika*, Elte Eötvös Kiadó, ISBN: 963 463 311 0.

[WILIN] Norman John Wildberger, *Insights into mathematics* – video előadássorozat
http://www.youtube.com/user/njwildberger,
http://web.maths.unsw.edu.au/~norman/YouTube.htm.

[WOLFM] Eric W. Weisstein (alapító): *Wolfram Mathworld*, a Mathematica szoftver fejlesztőinek oldala, lexikonnal, a WolframAlpha internetes számítógéppel és sok mkás szolgáltatással, http://mathworld.wolfram.com/

[XAHCUR] Xah Lee síkgörbe lexikona,
http://xahlee.info/SpecialPlaneCurves_dir/specialPlaneCurves.html.

[ZARUB] szerkesztette N. N. Szergejeva, *Nemzetközi Matematikai Olimpiák*, Nauka, 1987,Moszkva, Bibliotecska Matematicseszkovo kruzska sorozat, vüpuszk 17.

[ZVNAA] A. Zvonkin, *Az analízis segít az algebrának*, az *Analízis és algebra* kötetben 64–70 old., 1994, Bjuro Kvantum, Iskola a Kvantban sorozat, 4/94 szám.

[20SZÁM] Szerkesztette Kiss Géza, *Számvetés*,20 éves a Nagy Károly Matematikai Diák-találkozó, Zalai Matematikai Tehetségekért Alapítvány, 2010, Nagykanizsa.

[+PLUSM] *Plus internet magazine*, University of Cambridge, http://plus.maths.org/