Bevezető matematika példatár

Kádasné Dr. V. Nagy Éva
Nagy Ilona

2013.06.01.

Tartalomjegyzék

Bevezető

A BME Matematika Intézet oktatóinak sokéves tapasztalata szerint a felsőfokú tanulmányok elkezdésekor azok a hallgatók küzdenek nagyobb nehézségekkel a matematikát igénylő tárgyakban, akik a középiskolai matematika lényegi részeiben nem eléggé járatosak. Ebben segít a Bevezető matematika tárgy.

A tárgyi tartalom azon részeket emeli ki a középiskolai anyagból, amelyeket feltétlenül és nagy biztonsággal tudni és használni kell. Erre épülnek a további tanulmányok matematikából.

Fontosnak tartjuk a fejben való számolást, azaz a kalkulátor használata nélkül is tudni kell egész számokkal, törtekkel műveleteket végezni. Alapvető azonosságokat, állításokat segédeszköz használata nélkül kívülről tudni kell, például másodfokú egyenlet megoldóképlete, elemi algebrai és trigonometriai azonosságok, gyökvonás, hatványozás, logaritmus azonosságai, Pitagorasz tétele, szinusztétel, koszinusztétel. Elemi függvények képét ismerni kell, a sorozatokra vonatkozó alapvető definíciókat tudni kell, egyenes és kör egyenletét stb. A példatárbeli feladatokat mindenféle segédeszköz nélkül célszerű megoldani. Az itt szereplő definíciók, összefüggések olyan alapvetőek a felsőfokú matematikában, mint az ábécé betűinek ismerete. Egy írott szöveg tartalmát nem fogja megérteni az, aki a betűket csak segédeszköz használatával ismeri fel. A matematika sikeres alkalmazásához a mérnöki és természettudományi tárgyakban a megértés nem elég, sok gyakorlásra és tárgyi tudásra is szükség van.

Ajánlott irodalomként a középiskolai tankönyvek mellett ajánljuk a *Thomas-féle Kalkulus 1.* egyetemi tankönyvet.

1. fejezet

Gyakorlatok

1.1. Műveletek törtekkel, hatványokkal, gyökökkel

Határozza meg az alábbi kifejezések értékét segédeszközök használata nélkül!

1.1. Feladat $3[(-2)-(-3)]+(-2)(-3)$

1.2. Feladat $\dfrac{4\{[(2-3)\cdot 5+4]\cdot 2+3\}+10}{7}$

1.3. Feladat $\left[\left(\dfrac{3(7+2)-8}{-3}+7\right)\cdot 2\right] : \dfrac{-6}{(-3)(-2)}$

1.4. Feladat $6^{-3}\cdot(-2)^5\cdot 12^{-1}\cdot(-3)^4$

1.5. Feladat $\dfrac{26^{-4}\cdot 25^{-4}}{60^{-8}}+\left[\left(\dfrac{1}{1024}\right)^{\frac{1}{5}}\right]^{-\frac{3}{2}}$

1.6. Feladat $\left(\dfrac{1}{6}\right)^{-\frac{2}{3}} : \left(\dfrac{36}{125}\right)^{-\frac{2}{3}}+\left(8^{-\frac{1}{3}}\right)^{-2}$

1.7. Feladat $\left(\dfrac{12^4\cdot 5^5}{3^4} : \dfrac{2^7\cdot 55^6}{(-11)^6}\right)^{-2}$

Írja fel prímhatványok szorzataként az alábbi kifejezéseket!

1.8. Feladat $24^2\cdot 42^3\cdot 12^2\cdot 28\cdot 18^3$

1.9. Feladat $\dfrac{3^5\cdot 8^5\cdot 20^4\cdot 49}{16^4\cdot 6^4\cdot 70^2}$

Számolja ki az alábbi kifejezések értékét segédeszköz használata nélkül!

1.10. Feladat $\dfrac{2^{10}+2^{11}-2^{12}}{2^9+2^{10}}$

1.11. Feladat $\dfrac{1{,}6\cdot 10^{-3}\cdot 2{,}5\cdot 10^{5}}{2\cdot 10^{-2}}$

1.12. Feladat $\dfrac{360000\cdot 0{,}0000025}{0{,}009}$

1.13. Feladat $\sqrt{\dfrac{2-\sqrt{2}}{2+\sqrt{2}}}+\sqrt{\dfrac{2+\sqrt{2}}{2-\sqrt{2}}}$

1.14. Feladat $\left(\sqrt{16+2\sqrt{55}}-\sqrt{16-\sqrt{220}}\right)^2$

Rendezze növekvő sorrendbe az alábbi számokat!

1.15. Feladat $A=-10^3;\ B=\ln 5;\ C=\lg 100;\ D=-\frac{7}{8}$

1.16. Feladat $A=2^{\frac{2}{3}};\ B=4^{-\frac{1}{3}};\ C=25^{\frac{1}{2}};\ D=\dfrac{5}{100};\ E=\sqrt{8};\ F=\sqrt[3]{27}$

1.17. Feladat $A=\sin 60^\circ;\ B=\operatorname{tg} 45^\circ;\ C=\cos 45^\circ;\ D=\operatorname{ctg}(-45^\circ);\ E=\cos 135^\circ$

1.18. Feladat $A=\sqrt{(-3)^2};\ B=\sin\dfrac{7\pi}{3};\ C=\log_3\dfrac{1}{9}$

1.19. Feladat

$$A=\sqrt{7+4\sqrt{3}};B=\sqrt{11-6\sqrt{2}};C=\sqrt{9-4\sqrt{5}};D=\sqrt{4-2\sqrt{3}}-\sqrt{4+2\sqrt{3}}$$

Hozza a lehető legegyszerűbb alakra az alábbi kifejezéseket!

1.20. Feladat $\left(\sqrt{a^5\cdot\sqrt[5]{a^2}}\right)\cdot\left(\sqrt{a^5}\cdot\sqrt[5]{a^2}\right):\dfrac{\sqrt[5]{a\cdot\sqrt[3]{a}}}{\sqrt[3]{a^2}}\qquad (a>0)$

1.21. Feladat $\dfrac{(-2)^{n+1}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^n}{\left(\sqrt[3]{64}\right)^n+16^{\frac{n}{2}}}$

1.22. Feladat $\dfrac{9^{\frac{n}{2}+1}+\left(\sqrt{3}\right)^{2n+2}}{36^{\frac{n}{2}}+\left(\sqrt{6}\right)^n\cdot\left(\sqrt{3}\right)^n\cdot\left(\sqrt{2}\right)^n}$

1.23. Feladat $\dfrac{16^{\frac{n}{2}} - 2^{2n+3}}{125^{\frac{n}{3}} + \left(\sqrt{5}\right)^{2n+2}}$

1.24. Feladat $\dfrac{a-b}{(a+b)^2} \cdot \sqrt{\dfrac{(a^2-b^2)^6}{(a-b)^{10}}}$ $\qquad (a \neq \pm b)$

1.25. Feladat $\dfrac{x^2}{x^2-8x+16} \cdot \dfrac{25-x^2}{5x-x^2} \cdot \dfrac{x^2-16}{(5+x)(4+x)}$ $\qquad (x \neq 0, \pm 4, \pm 5)$

1.26. Feladat $\dfrac{1 - \dfrac{x^2}{x^2-1}}{2 + \dfrac{3x-1}{1-x}}$ $\qquad (x \neq \pm 1)$

1.27. Feladat $\dfrac{x-4}{x+4} - \dfrac{x+4}{x-4} + \dfrac{16x}{x^2-16}$ $\qquad (x \neq \pm 4)$

1.28. Feladat $\left(\dfrac{2}{x^2-x} - \dfrac{2x}{1-x^2}\right) \cdot \dfrac{2x^2+2x}{x^3-1} + \dfrac{4}{x-1}$ $\qquad (x \neq 0, \pm 1)$

1.29. Feladat $\left(\dfrac{2c}{c+2} - \dfrac{2c}{3c-6} + \dfrac{8c}{c^2-4}\right) \cdot \dfrac{c-2}{c^2-4c}$ $\qquad (x \neq 0, \pm 2, 4)$

1.30. Feladat $\sqrt{x \cdot \sqrt{x}} \cdot \dfrac{\sqrt[4]{x \cdot \sqrt[3]{x^2}}}{\sqrt[6]{x}}$ $\qquad (x > 0)$

1.31. Feladat $\sqrt{x^{-1} \cdot \sqrt{x \cdot \sqrt[3]{x}}}$ $\qquad (x > 0)$

1.32. Feladat $\sqrt{\dfrac{x}{\sqrt[3]{x^2 \cdot \sqrt{x}}}}$ $\qquad (x > 0)$

1.33. Feladat $\sqrt[4]{x \cdot \sqrt[3]{x^2 \cdot \sqrt{x^3}}} - \sqrt{x \cdot \sqrt[12]{x}}$ $\qquad (x > 0)$

1.2. A logaritmus fogalma; arány- és százalékszámítás

Rendezze növekvő sorrendbe az alábbi kifejezéseket segédeszköz használata nélkül!

1.1. Feladat $A = \lg \sqrt[3]{1000}$; $B = \log_2 0{,}25$; $C = \log_3 \dfrac{1}{\sqrt[3]{3}}$; $D = \ln \dfrac{1}{e^4}$

1.2. Feladat $A = \left(\dfrac{1}{9}\right)^{\log_{\sqrt{3}} 5}$; $B = 0{,}25^{\log_2 3}$; $C = 3^{\log_{\frac{1}{3}} 2}$

1.3. Feladat $A = 3^{2-\log_3 10}$; $B = \left(\sqrt{2}\right)^{3-\log_2 5}$; $C = 8^{\log_2 6-2}$

1.4. Feladat $A = (\lg 1{,}2 + \lg 1{,}5 - \lg 0{,}9)$; $B = (2\ln 5 - 2)$; $C = \left(3\log_2 8 - \dfrac{1}{2}\log_{\frac{1}{2}} 16\right)$

1.5. Feladat *Fejezze ki A-t az következő kifejezésből:* $q = \dfrac{\lg A - \lg C}{\lg 5}$.

1.6. Feladat *Fejezze ki q-t az következő kifejezésből:* $2^p \cdot 5^q = 10$.

Számolja ki az alábbi kifejezések értékét segédeszköz használata nélkül!

1.7. Feladat $\sqrt{25^{1-\log_5 10}} + \left(\dfrac{\sqrt{10}}{10}\right)^{\lg 9-2}$

1.8. Feladat $49^{1-\log_7 2} - 5^{-\log_5 4} + \sin \dfrac{34\pi}{3}$

1.9. Feladat $(\sin 60°)^{\sqrt[3]{8}} + \dfrac{3^{10}+3^{11}}{3^{12}-3^{10}} + \left(\dfrac{1}{49}\right)^{\log_{\sqrt{7}} 2}$

1.10. Feladat $(-\cos 30°)^{\sqrt[3]{-8}} + 5000000 \cdot 0{,}000002 + 0{,}25^{\log_{16} 25}$

1.11. Feladat $-0{,}04^{-\frac{1}{2}} + 100^{\lg 5} - 81^{-\frac{3}{4}}$

1.12. Feladat $3^{1+\log_9 4-\log_{\frac{1}{3}} 5} + \dfrac{2}{10^{-\lg 3}}$

1.13. Feladat *Egy kocka éleit 1 cm-rel növeljük, így a térfogat értéke az eredeti felszín értékének* $\dfrac{7}{6}$ *-ával nő. Mekkora volt a kocka éle?*

1.14. Feladat *A ló* 1 *hónap alatt eszik meg egy kocsi szénát, a kecske* 2 *hónap alatt, a juh* 3 *hónap alatt. Hány hónap alatt eszik meg egy kocsi szénát a ló, a kecske és a juh együtt?*

1.15. Feladat 80000 *Ft-ot beteszünk a bankba* 10%*-os évi kamat mellett. Mennyi pénzünk lesz* 5 *év múlva?*

1.16. Feladat *Egy csoport* 40 *hallgatójának* 30%*-a kék szemű és* 40%*-a szőke. Tudjuk, hogy a kék szemű hallgatók* $\frac{3}{4}$ *-e szőke. Hány olyan hallgató van, aki se nem szőke, se nem kék szemű?*

1.17. Feladat *Két betét, amelyek közül az első kétszer akkora, mint a második, évente* 6325 *eurót kamatozik. A kamatláb a nagyobb, illetve a kisebb betétre* 4%*, illetve* 3,5%*. Mekkora volt a két betét értéke?*

1.18. Feladat *Egy* 50 *cm sugarú kör sugarát* 10 *cm-rel csökkentjük. Hány százalékkal csökken a területe?*

1.19. Feladat *Legyen* $f(x) = \dfrac{x+1}{x^2+1}, x > 0$. *Hány százalékkal változik az* f *függvény értéke, ha az* $x = 1$ *értékét*

1. 2%*-kal növeljük;*
2. 3%*-kal csökkentjük?*

1.20. Feladat *Legyen* $f(x) = \dfrac{x+1}{x^2+1}, x > 0$. *Hány százalékkal kell növelni, illetve csökkenteni az* $x = 1$ *értékét, ha azt szeretnénk, hogy az* f *függvény értéke*

1. 1%*-kal nőjön;*
2. 2,5%*-kal csökkenjen?*

1.21. Feladat *Egy gép értéke évente* 20%*-kal csökken. Két év használat után a gépet akkori értékének* $\frac{3}{4}$*-éért eladták. Az eredeti értékének hány százalékáért jutott az új tulajdonos a géphez?*

1.22. Feladat *Fényszűrő lemezeket raknak egymás mögé. Az első elnyeli a ráeső fényenergia* 30%*-át, a második a ráeső fényenergia* 50%*-át, a harmadik pedig a ráeső energia* 20%*-át. A három lemez együttesen az eredeti fénysugár energiájának hány százalékát nyeli el?*

1.23. Feladat *Egy üzem kétféle minőségű terméket gyárt. Az I. osztályú termék gyártásából származik a bevétel* 80%*-a. Hogyan változik az üzem bevétele, ha az I. osztályú termék termelését* 20%*-kal növelik, a II. osztályú termék termelését* 20%*-kal csökkentik?*

1.24. Feladat *Egy kabát árát* 20%*-kal csökkentették. Hány százalékkal kell emelni ennek a kabátnak az új árát, hogy újra az eredeti árat kapjuk?*

1.25. Feladat *Egy fenyőerdő faállománya jelenleg* 8000 *fa. Minden évben kivágják az állomány* 20%*-át, de ültetnek* 800 *új fát is. Feltéve, hogy az állomány egyéb okból nem változik, hány fából állt a faállomány két évvel ezelőtt?*

1.26. Feladat *Lola, az elefánt, ha nagyon szomjas, akkor testtömegének* 84%*-a víz. Itatás után* 1600 *kg-ot nyom, és ekkor testtömegének* 85%*-a víz. Hány kg-os Lola, amikor nagyon szomjas?*

1.3. Elemi függvények tulajdonságai, ábrázolásuk

1.1. Feladat *Rajzolja fel az* $f(x) = 1 - \dfrac{2x}{x+5}$ *függvény képét! Milyen* x *esetén lesz* $f(x) > 0$*? Hol metszi az* f *függvény az* y *tengelyt? Adja meg* $f(1) + f(-1)$ *értékét!*

1.2. Feladat *Rajzolja fel az* $f(x) = 3^x$ *és* $g(x) = 3^{-x}$ *függvények képeit! Adja meg* $f(a+2) - f(a-2)$ *és* $g(a+2) - g(a-2)$ *értékeit! Határozza meg az* $f(g(x))$ *és a* $g(f(x))$ *függvényeket!*

1.3. Feladat *Rajzolja fel az* $f(x) = \sin 2x$, $g(x) = \sin \dfrac{x}{2}$ *és* $h(x) = |x - \pi|$ *függvények képeit! Ezek közül melyik függvény lesz szigorúan monoton növő a* $]\,0;\pi\,[$ *nyílt intervallumon?*

Adja meg az alábbi függvények zérushelyeit és értelmezési tartományát!

1.4. Feladat $f(x) = \dfrac{2x(x-2)^2 - 2(x-2)\cdot x^2 \cdot 2}{(x-2)^4}$

1.5. Feladat $f(x) = \dfrac{4(x^2-1)\cdot x \cdot x^3 - 3x^2 \cdot (x^2-1)^2}{x^6}$

1.6. Feladat $f(x) = \dfrac{2x(x^2-4)^2 + 2(x^2-4)\cdot 3x \cdot x^2}{(x^2-4)^4}$

1.7. Feladat $f(x) = \dfrac{3x^2(x-3)^2(x+1)^2 - (3x^2-9x)(x^2-1)^2}{(x-3)^4(x+1)^2}$

1.8. Feladat *Legyen* $f(x) = \ln^2 x$ *és* $g(x) = \sqrt[3]{x^2+1}$. *Mivel egyenlő* $f(g(x))$, $f(g(0))$, $g(f(x))$ *és* $g(f(1))$*?*

1.9. Feladat *Legyen* $f(x) = e^{x^2}$ *és* $g(x) = \sin 3x$. *Mivel egyenlő* $f(g(x))$, $f(g(0))$, $g(f(x))$ *és* $g(f(0))$*?*

Ábrázolja az alábbi függvényeket, adja meg az inverzüket, és ezt is ábrázolja!

1.10. Feladat $f(x) = 4 - \dfrac{2}{x+3}, \quad x > -3$

1.11. Feladat $g(x) = 2^{x-1} + 1$

1.12. Feladat $h(x) = 2\ln x + 1, \quad x > 0$

1.13. Feladat $l(x) = \sqrt{x+2}, \quad x \geq -2$

1.14. Feladat *Ábrázolja az alábbi függvényt! Mivel egyenlő* $f(1)$ *és* $f(-2)$*?*

$$f(x) = \begin{cases} 5 - |x|, & \textit{ha } x \geq -1 \\ e^{-x}, & \textit{ha } x < -1 \end{cases}$$

1.15. Feladat *Ábrázolja az alábbi függvényt! Adja meg a* g *függvény minimális és maximális értékét a* $[-3, 2]$ *intervallumon!*

$$g(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x^2}, & \textit{ha } |x| > 1 \\ x^3, & \textit{ha } |x| \leq 1 \end{cases}$$

1.16. Feladat *Ábrázolja az alábbi függvényt! Adja meg a* h *függvény lokális minimum- és maximumhelyeit a* $[-2, 5]$ *intervallumon!*

$$h(x) = \begin{cases} x^2 - 2x, & \textit{ha } x \leq 2 \\ (x-2)(4-x), & \textit{ha } x > 2 \end{cases}$$

Határozza meg az alábbi függvények értelmezési tartományát és zérushelyeit!

1.17. Feladat $f(x) = 3 - \sqrt{1-2x}$

1.18. Feladat $f(x) = \sqrt{5 - |x+2|}$

1.19. Feladat $f(x) = \ln\left(x - \dfrac{1}{x}\right)$

1.20. Feladat $f(x) = \lg(5 - |1-x|)$

1.21. Feladat $f(x) = \lg(2 + x - x^2)$

1.22. Feladat $f(x) = \sqrt{2 + \log_3 x}$

1.23. Feladat *Legyen* $f(x) = ax^7 + bx^3 + cx - 5, (a, b, c \in \mathbb{R})$. *Mennyivel egyenlő* $f(7)$, *ha* $f(-7) = 7$*?*

1.4. Algebrai egyenletek és egyenlőtlenségek

Oldja meg az alábbi egyenleteket a valós számok halmazán!

1.1. Feladat $x + 2|x-3| = 9$

1.2. Feladat $|x^2 - 2x| = 1$

1.3. Feladat $x^2 + 7|x| - 8 = 0$

1.4. Feladat $|x^2 + 3x| + x^2 - 2 = 0$

1.5. Feladat $\dfrac{6}{x} = -2|x-1| + 6$

1.6. Feladat $\sqrt{(x+3)^2} + \sqrt{(x-4)^2} = 10$

Oldja meg az alábbi egyenlőtlenségeket a valós számok halmazán!

1.7. Feladat $|2x-1| < 4$

1.8. Feladat $\sqrt{x^2 - 8x + 16} \geq 3$

1.9. Feladat $|x^2 - 5| > 4$

1.10. Feladat $|x-3| \geq 1 - 2x$

Oldja meg az alábbi egyenleteket a valós számok halmazán!

1.11. Feladat $\left(1 + \dfrac{4}{x^2 + x - 6}\right) \cdot \left(\dfrac{1}{x+1} + 1\right) = 0$

1.12. Feladat $x^4 + 5x^3 - 6x^2 = 0$

1.13. Feladat $\dfrac{x+3}{x-4} + \dfrac{22}{x^2 - 16} = \dfrac{7x+6}{x+4} - \dfrac{3}{x-4}$

1.14. Feladat $\dfrac{3-7x}{2x+4} - \dfrac{1{,}5 - 3{,}5x}{x+2} = 0$

1.15. Feladat $\dfrac{x^2 - 5x + 6}{x^2 - 7x + 12} = 2$

1.16. Feladat $\dfrac{2x}{x+2} - \dfrac{x+2}{2-x} = \dfrac{x^2 + 12}{x^2 - 4}$

1.17. Feladat $4x^4 - 3x^2 - 1 = 0$

Oldja meg az alábbi egyenlőtlenségeket a valós számok halmazán!

1.18. Feladat $2x - \dfrac{3}{x-1} \geq 3$

1.19. Feladat $\dfrac{x}{x-1} > \dfrac{2}{x+4}$

1.20. Feladat $\dfrac{x^2 - 5x + 6}{x^2 - 5x - 6} \geq 0$

1.21. Feladat $2 - \dfrac{x-1}{x} < \dfrac{x}{x+1}$

1.22. Feladat *Határozza meg a b és c paraméterek értékét, ha tudjuk, hogy minden x valós számra $(x+2)(x+b) = x^2 + cx + 6$.*

1.23. Feladat *Melyik az a másodfokú egyenlet, amelynek két gyöke $\left(\dfrac{1}{2}\right)$ és $\left(-\dfrac{1}{3}\right)$?*

Adja meg az alábbi egyenletek megoldásait az a paraméter függvényében!

1.24. Feladat $(ax-1)^2 + (x-a)^2 = x^2 - 2 + a^2$

1.25. Feladat $(ax+1)^2 + (ax+1)(ax-1) = 4$

1.26. Feladat $(1-a)x^2 + x + a = 0$

1.27. Feladat *Legyen x_1 és x_2 az $x^2 + px + q = 0$ egyenlet két valós gyöke. Írja fel az együtthatók segítségével az alábbi kifejezéseket:*

1. $x_1 + x_1x_2 + x_2$
2. $(x_1 + x_2)^2$
3. $x_1^2 + x_2^2$
4. $(x_1 - x_2)^2$
5. $\dfrac{1}{x_1} + \dfrac{1}{x_2}$

1.28. Feladat *Legyen x_1 és x_2 a $p^2x^2 + x + (p+2) = 0$ egyenlet két valós gyöke. Hogyan válasszuk meg a p paraméter értékét úgy, hogy a a gyökök szorzatára $x_1x_2 > 1$ teljesüljön?*

1.29. Feladat *Milyen k valós szám esetén van az $x^2 - kx + (3-k) = 0$ egyenletnek két azonos megoldása?*

1.30. Feladat *Milyen k valós szám esetén van az $x^2 - (k+3)x + 4 = 0$ egyenletnek két különböző valós megoldása?*

1.31. Feladat *Milyen k valós szám esetén nincs valós megoldása az $x^2 + kx - (2k-5) = 0$ egyenletnek?*

1.32. Feladat *Az $y = ax^2 + bx + c$ egyenletű parabola csúcspontja $M(1, -1)$, a parabola és az x tengely egyik metszéspontja 2. Határozza meg a, b, c értékét!*

1.33. Feladat *Határozza meg az $f(x) = -3x^2 + 2x + 5$ függvény legnagyobb értékét!*

1.34. Feladat *Határozza meg az $f(x) = 2x^2 - 5x + 1$ függvény legkisebb értékét!*

1.5. Gyökös, exponenciális, logaritmusos egyenletek és egyenlőtlenségek

Oldja meg az alábbi egyenleteket, egyenlőtlenségeket a valós számok halmazán!

1.1. Feladat $\sqrt{\frac{2}{3} - 5x} - \sqrt{3x + \frac{1}{2}} = 0$

1.2. Feladat $\sqrt{x+2} + \sqrt{1-3x} = 0$

1.3. Feladat $\sqrt{10-x} = x - 10$

1.4. Feladat $\sqrt{4x-7} = 1 - x$

1.5. Feladat $\sqrt{2x^2 - 3x - 10} - x = 0$

1.6. Feladat $\sqrt{2-x} - \sqrt{x+7} = -3$

1.7. Feladat $\sqrt{x-4} + \sqrt{x-1} = \sqrt{x+4}$

1.8. Feladat $x + 3\sqrt[3]{x^2} - 18\sqrt[3]{x} = 0$

1.9. Feladat $\sqrt{9-5x} = \sqrt{3-x} + \frac{6}{\sqrt{3-x}}$

1.10. Feladat $\dfrac{\sqrt{x+1}+2}{\sqrt{x+1}-1} = \dfrac{x+1}{x-2}$

1.11. Feladat $\sqrt{x+6-4\sqrt{x+2}} + \sqrt{x+11-6\sqrt{x+2}} = 1$

1.12. Feladat $(x+2)\sqrt{x^2-2x+3} \geq 0$

1.13. Feladat $\sqrt{4x+17} > x+3$

Oldja meg az alábbi egyenleteket a valós számok halmazán!

1.14. Feladat $2^{|x+1|+x} = 2$

1.15. Feladat $3^{x-1} + 3^x + 3^{x+1} = 39$

1.16. Feladat $2^x + 38 \cdot 2^{x+1} + 2^{x+2} = 3^x + 2 \cdot 3^{x+1} + 3^{x+2}$

1.17. Feladat $\left(\dfrac{1}{2}\right)^{\frac{2x+3}{2x-1}} = \left(\dfrac{1}{4}\right)^{\frac{x+9}{2x+2}}$

1.18. Feladat $3^{2x^2+2x-12} = 9^{\frac{x-2}{x+3}}$

1.19. Feladat $\left(\dfrac{25}{4}\right)^2 \left(\dfrac{8}{125}\right)^{3x-1} = \left(\dfrac{5}{2}\right)^{1-x}$

1.20. Feladat $2^{3x+4} \cdot \dfrac{8^{2x-1}}{\sqrt{16^{x+1}}} = \left(\dfrac{1}{64}\right)^{2-x}$

1.21. Feladat $5^x = 5^{-x} + \dfrac{24}{5}$

1.22. Feladat $\dfrac{1+4^{x-1}}{4^x} = \dfrac{17}{2^{x+3}}$

1.23. Feladat $4^x - 4^{\sqrt{x}+1} = 3 \cdot 2^{x+\sqrt{x}}$

Oldja meg az alábbi egyenlőtlenségeket a valós számok halmazán!

1.24. Feladat $\sqrt{9^x+8-3^{x+2}} > 3^x - 5$

1.25. Feladat $4^{3-|x|} < 32$

1.26. Feladat $\left(\dfrac{2}{7}\right)^{10-3x} \leq \dfrac{49}{4}$

1.27. Feladat $\left(\frac{1}{3}\right)^{x^2-x-17} > \frac{1}{27}$

Oldja meg az alábbi egyenleteket a valós számok halmazán!

1.28. Feladat $\frac{\lg(x-10)}{1-\lg 5} = 2$

1.29. Feladat $\frac{\log_7(x+4)}{\log_7(x+2)} = 2$

1.30. Feladat $\lg\sqrt{x-5} + \lg\sqrt{2x-3} + 1 = \lg 30$

1.31. Feladat $\log_3\left[(x-4)(x+3)\right] = \log_3(5x+4)$

1.32. Feladat $\log_8(23x+8) - 2\log_8(4x+4) = -\frac{2}{3}$

1.33. Feladat $\lg\sqrt{x^2-3x} - \lg\sqrt{3-x} = \lg 5$

1.34. Feladat $\ln(x^2+2x-3) = \ln\frac{x-1}{x+3}$

1.35. Feladat $2\lg 2 - 1 + \lg(x^3+1) = \lg\left(\frac{1}{x^3}+1\right)$

1.36. Feladat $\log_x(x^3+3x^2-27) = 3$

1.37. Feladat $\log_{x+1}(2x^2+1) = 2$

1.38. Feladat $\log_2(\log_3(\log_4 x)) = 0$

1.39. Feladat $\log_{\frac{1}{4}}(\log_{16}(\log_2 x)) = 1$

Oldja meg az alábbi egyenlőtlenségeket a valós számok halmazán!

1.40. Feladat $\log_3(x^2-2x) < 0$

1.41. Feladat $\log_4(5-6x) \leq 2$

1.42. Feladat $\log_{\frac{1}{2}}(3x-4) > \log_2\frac{1}{8}$

1.43. Feladat $\log_{\frac{1}{3}}(x^2+3x-1) < -1$

1.6. Trigonometrikus azonosságok és egyenletek

1.1. Feladat *Töltse ki az alábbi táblázatot segédeszköz használata nélkül!*

	$0°$	$30°$	$45°$	$60°$	$90°$	$135°$	$180°$	$210°$	$240°$	$270°$	$300°$	$315°$
$\sin\varphi$												
$\cos\varphi$												
$\operatorname{tg}\varphi$												

1.2. Feladat *Számítsa ki a hiányzó értékeket a φ meghatározása nélkül!*

$\sin\varphi$	$\frac{3}{4}$		$\frac{8}{17}$			
$\cos\varphi$		$\frac{5}{12}$			$\frac{63}{65}$	
$\operatorname{tg}\varphi$				$\frac{35}{12}$		$\frac{21}{20}$

1.3. Feladat *Oldja meg az alábbi egyenleteket segédeszköz használata nélkül!*

- $\sin 2\varphi = 1;\quad \sin 2\varphi = -\frac{1}{2};\quad \sin\frac{\varphi}{2} = -1;\quad \sin\frac{\varphi}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2}$
- $\cos 2\varphi = 0;\quad \cos 2\varphi = \frac{\sqrt{3}}{2};\quad \cos\frac{\varphi}{2} = 1;\quad \cos\frac{\varphi}{2} = -\frac{1}{2}$
- $\operatorname{tg} 2\varphi = 0;\quad \operatorname{tg} 2\varphi = -1;\quad \operatorname{tg}\frac{\varphi}{2} = 1;\quad \operatorname{tg}\frac{\varphi}{3} = \frac{1}{\sqrt{3}}$
- $\operatorname{ctg} 3\varphi = 1;\quad \operatorname{ctg} 3\varphi = -\frac{1}{\sqrt{3}};\quad \operatorname{ctg}\frac{\varphi}{3} = -\sqrt{3};\quad \operatorname{ctg}\frac{\varphi}{2} = 0$

1.4. Feladat *Oldja meg az alábbi egyenleteket segédeszköz használata nélkül!*

- $\sin^2\varphi = 1;\quad \cos^2\varphi = \frac{1}{2};\quad \operatorname{tg}^2\varphi = 3$
- $\sin\varphi = \operatorname{ctg}\varphi;\quad \sin\varphi = -\operatorname{ctg}\varphi;\quad \cos\varphi = \operatorname{tg}\varphi$

1.5. Feladat *Fejezze ki minden* $\varphi \in\ ]0, 90°[$ *esetén*

- $\sin\varphi$*-t és* $\cos\varphi$*-t* $\operatorname{tg}\varphi$ *segítségével;*
- $\operatorname{tg}\varphi$*-t* $\sin\varphi$ *segítségével és* $\operatorname{tg}\varphi$*-t* $\cos\varphi$ *segítségével!*

1.6. Feladat *Fejezze ki*

- $\cos 2\varphi$ *segítségével* $\sin^2 \varphi$*-t és* $\cos^2 \varphi$*-t;*
- $t = \operatorname{tg} \dfrac{\varphi}{2}$ *segítségével* $\sin \varphi$*-t és* $\cos \varphi$*-t!*

1.7. Feladat *Adja meg az* α *forgásszöget segédeszköz használata nélkül, ha*

- $\cos \alpha = \dfrac{1}{2}, \quad \sin \alpha = -\dfrac{\sqrt{3}}{2}$
- $\cos \alpha = -\dfrac{\sqrt{3}}{2}, \quad \sin \alpha = \dfrac{1}{2}$
- $\operatorname{tg} \alpha = 1$ *és* α *a harmadik síknegyedben van.*

Hozza egyszerűbb alakra a következő kifejezéseket!

1.8. Feladat $\sin \varphi(\operatorname{tg} \varphi + \operatorname{ctg} \varphi) + \cos \varphi(\operatorname{tg} \varphi + \operatorname{ctg} \varphi)$

1.9. Feladat $(\sin \varphi - \cos \varphi)(1 + \sin \varphi \cos \varphi) + (\sin \varphi + \cos \varphi)(1 - \sin \varphi \cos \varphi)$

Számítsa ki a következő kifejezésk értékét!

1.10. Feladat $\operatorname{tg} \dfrac{21\pi}{4} + \sqrt[5]{\sin(-7\pi)}$

1.11. Feladat $\log_\pi \left[\left(\cos \dfrac{2\pi}{3} + \sin \dfrac{2\pi}{3} \right)^2 - \sin \dfrac{4\pi}{3} \right]$

Oldja meg az egyenleteket a megadott intervallumon!

1.12. Feladat $8 \cos 2x + 7 \cos^2 x = 5 \sin x + \dfrac{27}{4}, \quad x \in [0, \pi]$

1.13. Feladat $\operatorname{tg} x + \operatorname{tg}^2 x + \operatorname{ctg} x + \operatorname{ctg}^2 x = 4, \quad x \in \left] 0, \dfrac{\pi}{4} \right]$

1.14. Feladat $\sqrt{1 - \cos^2 x} - \cos 2x = 0, \quad x \in [0, 2\pi]$

Oldja meg az alábbi egyenleteket!

1.15. Feladat $\sin x + \cos^3 x = \cos x + \sin^3 x$

1.16. Feladat $3 \cos 2x = -\sin x + 3$

1.17. Feladat $4\cos^2 x + 8\sin x + 1 = 0$

1.18. Feladat $\cos x + \dfrac{\sin^2 x}{\cos x} + \sin x + \sin 2x = \dfrac{1}{\cos x}$

1.19. Feladat $\dfrac{\cos 2x}{\operatorname{ctg}^2 x - \operatorname{tg}^2 x} = \dfrac{1}{4}\sin^2 2x$

1.20. Feladat $(1 - \cos 2x)^2 + (1 + \sin 2x)^2 = 1$

1.21. Feladat $\sin 3x - \cos 2x \cdot \sin x = \cos x$

1.22. Feladat $2\cos^3 x + \cos(\pi - x) = 0$

Számítsa ki az alábbi kifejezések értékét segédeszköz használata nélkül!

1.23. Feladat $\cos 15^\circ \cdot \sin 15^\circ$

1.24. Feladat $\sin 30^\circ \cdot \cos 15^\circ + \cos 30^\circ \cdot \sin 15^\circ$

1.25. Feladat $\cos 10^\circ \cdot \cos 20^\circ - \sin 10^\circ \cdot \sin 20^\circ$

1.26. Feladat $\cos^2 15^\circ - \sin^2 15^\circ$

1.27. Feladat $\sin 70^\circ \cdot \sin 40^\circ + \dfrac{1}{2}\cos 110^\circ$

1.28. Feladat $\cos^2 22{,}5^\circ$

1.7. Sorozatok; egyenletrendszerek

1.1. Feladat *Legyen az (a_n) számtani sorozat, melyben $a_5 = 17$ és $a_7 = 10$. Határozza meg a sorozat első tagját, differenciáját, és a sorozat első nyolc tagjának összegét.*

1.2. Feladat *Egy derékszögű háromszög oldalai egy számtani sorozat egymást követő tagjai. A háromszög területe 150 cm^2. Mekkorák az oldalak?*

1.3. Feladat *Legyen az (a_n) számtani sorozat, melyben $d = 0{,}5$, $S_n = 38$ és $S_{n+4} = 69$. Mennyi a_1 és n?*

1.4. Feladat *Legyen (a_n) számtani sorozat, melyben $a_1+a_2+a_3 = -12$ és $a_1 \cdot a_2 \cdot a_3 = 80$. Határozza meg a sorozat első három tagját!*

1.5. Feladat *Legyen* (a_n) *mértani sorozat, melyben* $a_1+a_2+a_3=39$ *és* $a_1 \cdot a_2 \cdot a_3 = 729$. *Határozza meg a sorozat első három tagját!*

1.6. Feladat *Legyen* (a_n) *mértani sorozat.*

1. $a_2 = 3$, $a_6 = 12$. $S_{10} = ?$
2. $a_3 = 3$, $a_9 = 24$. $S_{12} = ?$
3. $a_4 - a_2 = a_2 + a_3 + a_4 = -6$. $a_1 = ?$, $q = ?$

1.7. Feladat *Egy számtani sorozat első öt tagjának összege 25. Az első, második és ötödik egy mértani sorozat szomszédos tagjai. Határozza meg, hogy mennyi az* a_1, *a* d *és a* q*!*

1.8. Feladat *Egy számtani sorozat első három tagjának összege* 21. *Ha az elsőhöz* 6*-ot, a másodikhoz* 13*-at és a harmadikhoz* 30*-at adunk, akkor egy mértani sorozat egymás utáni tagjait kapjuk. Mi a számtani sorozat?*

1.9. Feladat *Egy mértani sorozat első három tagjának összege* 63. *Ha az első taghoz* 3*-at adunk, a harmadikból* 30*-at kivonunk, akkor egy számtani sorozat egymást követő tagjait kapjuk. Mi a mértani sorozat?*

1.10. Feladat *Egy számtani sorozat* 12. *tagja, valamint az első* n *tagjának összege is* 0. *A sorozat első* $(2n-1)$ *darab tagjának az összege* 495. *Adja meg a sorozat első* $3n$ *tagjának összegét!*

1.11. Feladat *Egy* (a_n) *számtani sorozatban* $a_1 = \sqrt{2}$. *Az* a_1, a_2, a_4 *ebben a sorrendben egy mértani sorozat első három tagja. Adja meg a mértani sorozat első* 10 *tagjának összegét!*

Oldja meg az alábbi egyenletrendszereket a valós számpárok halmazán!

1.12. Feladat

$$\begin{aligned} x^2 + xy &= 210 \\ y^2 + xy &= 231 \end{aligned}$$

1.13. Feladat

$$\begin{aligned} xy + x + y &= 29 \\ xy - 2x - 2y &= 2 \end{aligned}$$

1.14. Feladat

$$(2x+y)^2 = 16$$
$$x - \frac{1}{y} = \frac{1}{2}$$

1.15. Feladat

$$x^2 - 6xy + 9y^2 = 25$$
$$x + \frac{1}{y} = 9$$

1.16. Feladat

$$x + \frac{3}{4}y = 9$$
$$\frac{x}{2} - \frac{2y}{3} = \frac{1}{3}$$

1.17. Feladat

$$\frac{x+2}{3} - \frac{y-3}{4} = 3$$
$$\frac{3}{x+2} - \frac{1}{y-3} = 0$$

1.18. Feladat

$$\frac{1}{x-2y} - \frac{2}{2x-y} = 3$$
$$-\frac{2}{x-2y} + \frac{5}{2x-y} = -5$$

1.19. Feladat

$$\frac{6}{x-5} + \frac{1}{y-2} = 2$$
$$\frac{4}{x-5} + \frac{3}{y+2} = 3$$

1.20. Feladat

$$y - x = 44$$
$$\sqrt{\frac{6x}{x+y}} + \sqrt{\frac{x+y}{6x}} = \frac{5}{2}$$

1.21. Feladat

$$3^x + 4^y = 73$$
$$3^x \cdot 4^y = 576$$

1.22. Feladat

$$2x - 4\sqrt{x} + y - 4 = 0$$
$$5\sqrt{x} - y = 17$$

1.23. Feladat

$$\frac{\sqrt{x}}{2} + y = 4$$
$$y^2 - \sqrt{x} = 27$$

1.24. Feladat

$$3^{\log_3 x} - 2^{\log_4 y} = 77$$
$$3^{\log_3 \sqrt{x}} - 2^{\log_{16} y} = 7$$

1.25. Feladat

$$\log_2(xy) = 5$$
$$\log_{\frac{1}{2}}\left(\frac{x}{y}\right) = 1$$

1.26. Feladat

$$8^{2x+1} = 32 \cdot 2^{4y-1}$$
$$5 \cdot 5^{x-y} = \sqrt{25^{2y+1}}$$

1.27. Feladat

$$3^y \cdot 9^x = 81$$
$$\lg(x+y)^2 - \lg x = 2\lg 3$$

1.28. Feladat

$$3 \cdot 2^{x+y} - 5 \cdot 2^{x-y} = 182$$
$$5 \cdot 2^x \cdot 2^y - 4 \cdot 2^x \cdot 2^{-y} = 312$$

1.8. Koordinátageometria

1.1. Feladat *Legyenek* $\mathbf{a} = (2, 3)$, $\mathbf{b} = (-3, 2)$ *és* $\mathbf{c} = (5, -1)$. *Adja meg a következő vektorokat:* $\mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{c}$*;* $3(2\mathbf{a} - \mathbf{b})$*;* $(\mathbf{a} + \mathbf{b})\mathbf{c}$*;* $(\mathbf{a} - \mathbf{b})(\mathbf{b} + \mathbf{c})$*;* $|\mathbf{a} - \mathbf{b}|$.

1.2. Feladat *Legyenek* $\mathbf{a} = (2, 5)$, $\mathbf{b} = (-10, 2)$ *és* $\mathbf{c} = (-6, 12)$.

1. *Bontsa fel a* $\mathbf{c}$ *vektort* $\mathbf{a}$*-val és* $\mathbf{b}$*-vel párhuzamos összetevőkre!*
2. *Bontsa fel a* $\mathbf{b}$ *vektort* $\mathbf{c}$*-vel párhuzamos és* $\mathbf{c}$*-re merőleges összetevőkre!*
3. *Adjon meg* $(\mathbf{a} + \mathbf{b})$*-re merőleges egységnyi hosszúságú vektort!*

1.3. Feladat *Legyen* $\mathbf{a} = (4, 3)$ *és* $\mathbf{b} = (-1, 2)$. *Mennyi az* $\mathbf{ab}$ *skaláris szorzat? Mekkora az* $\mathbf{a}$ *és* $\mathbf{b}$ *által bezárt szög?*

1.4. Feladat *Adja meg a* p *paraméter összes olyan értékét, amelyre az* $\mathbf{a} = (6, -5)$ *és* $\mathbf{b} = (p, 3)$ *vektorok párhuzamosak; merőlegesek; illetve hegyesszöget zárnak be egymással!*

1.5. Feladat *Adott három pont:* $A(2, 0)$, $B(-5, 4)$, $C(-1, 3)$. *Mekkorák az* ABC *háromszög szögei? Adja meg az összes lehetséges* $D(x, y)$ *pontot úgy, hogy a pontok egy paralelogramma csúcspontjai legyenek!*

1.6. Feladat *Adott két pont:* $A(2, 6)$ *és* $B(-3, 2)$. *Adja meg*

1. *az* A *és* B *távolságát!*
2. *az* $\overline{AB}$ *szakasz felezőpontjának és harmadolópontjainak koordinátáit!*
3. *az* $\overline{AB}$ *szakasz felezőmerőlegesének egyenletét!*
4. *az* A*,* B *pontokon átmenő egyenes egyenletét és az egyenes meredekségét!*
5. *annak a körnek az egyenletét, amelynek az* $\overline{AB}$ *szakasz egy átmérője!*

1.7. Feladat *Adott két pont:* $C(-1, -1)$ *és* $D(1, 3)$. *Adja meg azt a pontot, amely* C*-től és* D*-től is* 3 *egység távolságra van!*

1.8. Feladat *Az* x*, illetve az* y *tengely melyik pontja van egyenlő távolságra az* $A(2, 7)$ *és* $B(6, -1)$ *pontoktól?*

1.9. Feladat *Mennyi az* $A(3, -1)$, $B(1, 4)$ *és* $C(-7, -9)$ *csúcspontú háromszög súlypontjának az origótól vett távolsága?*

1.10. Feladat *Adott két egyenes:* $g : 5x - 4y = 14$, $h : 2x - 3y = 3$ *és a* $P(5, 2)$ *pont. Adja meg*

1. a két egyenes metszéspontjának a P-től való távolságát.

2. azon egyenes egyenletét, amely átmegy a P-n és a két egyenes metszéspontján.

3. azon egyenes egyenletét, amely átmegy a P-n és párhuzamos g-vel.

4. azon egyenes egyenletét, amely átmegy a P-n és és merőleges h-ra.

5. a P pont és a h egyenes távolságát!

1.11. Feladat *Határozza meg a $P(2,5)$ pontnak az $y = 3x + 9$ egyenletű egyenesre vonatkozó tükörképét!*

1.12. Feladat *A $C(-1,2)$ középpontú kör átmegy a $P(3,-2)$ ponton. Mekkora a kör sugara? Adja meg a kör egyenletét!*

1.13. Feladat *A paraméterek mely értékeire lesz köregyenlet?*

1. $x^2 + y^2 + 4x + 10y + a = 0$

2. $4x^2 + Ay^2 - 32x + 24y + Bxy + C = 0$

1.14. Feladat *Írja fel annak a körnek az egyenletét, amely átmegy a $P(8,-1)$ ponton, és érinti a koordinátatengelyeket!*

1.15. Feladat *Írja fel annak a körnek az egyenletét, amely érinti a koordinátatengelyeket és a $3x + 4y = 12$ egyenletű egyenest!*

1.16. Feladat *Írja fel annak az egyenesnek az egyenletét, amely merőleges a $2x-5y = 7$ egyenletű egyenesre, és átmegy az $x^2 + 8x + y^2 - 6y = 10$ egyenletű kör középpontján!*

1.17. Feladat *Írja fel az $x^2+y^2-4x-6y-12 = 0$ egyenletű kör 5 abszcisszájü pontjaiba húzott érintőinek egyenletét!*

1.18. Feladat *Az $x^2 + y^2 - 18x + 6y - 166 = 0$ egyenletű körhöz a $P(25,-15)$ pontból érintőket húzunk. Mik az érintők egyenletei?*

1.19. Feladat *Írja fel az $A(0,9)$, $B(5,10)$ és $C(-7,2)$ pontokon áthaladó kör egyenletét!*

1.20. Feladat *Milyen hosszú az $x^2+y^2+6x-16y+24 = 0$ egyenletű kör azon legrövidebb húrja, amely a $P(1,4)$ ponton átmegy?*

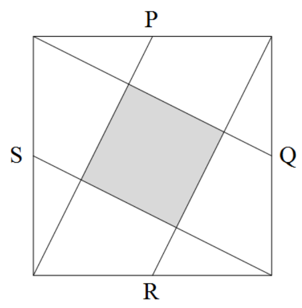
1.21. Feladat *Egy paralelogramma két oldalegyenesének egyenlete: $3x + 2y = 13$ és $5x - 3y = -10$, egy csúcspontja pedig $P(-7,-2)$. Adja meg a többi csúcs koordinátáit!*

1.22. Feladat *Adottak az $A(1,4)$, $B(5,-2)$ és $C(-1,3)$ pontok. Írja fel az ABC háromszög magasságvonalainak egyenletét!*

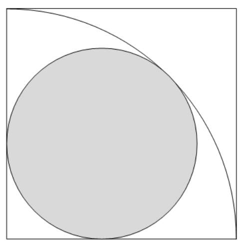
1.23. Feladat *Adottak az $A(5,3)$, $B(2,5)$ és $C(6,-1)$ pontok. Határozza meg az ABC hármszög A csúcsból induló súlyvonalának az origótól való távolságát!*

1.9. Síkidomok kerülete, területe; testek

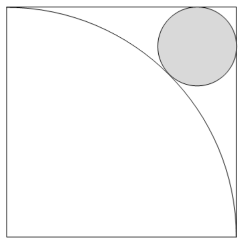
1.1. Feladat *Mekkora a satírozott rész területe, ha a P, Q, R, S pontok az egységnyi oldalú négyzet oldalfelező pontjai?*



1.2. Feladat *Mekkora az ábrán látható körlemez sugara, ha a négyzet oldala egységnyi hosszú?*



1.3. Feladat *Mekkora az ábrán látható körlemez sugara, ha a négyzet oldala egységnyi hosszú?*



1.4. Feladat *Egy egységnyi területű egyenlő szárú háromszög szárszöge* $30°$. *Mekkora a háromszög szára és alapja?*

1.5. Feladat *Mekkora az* a *oldalú szabályos háromszög magassága és területe?*

1.6. Feladat *Egy szabályos háromszög magassága* m. *Mekkora az oldala és a területe?*

1.7. Feladat *Egy szabályos hatszög két párhuzamos oldalának távolsága* 6 *egység. Hány egység hosszú a hatszög oldala? Mekkora a hatszög területe?*

1.8. Feladat *Egy szabályos háromszög köré írható kör sugara* 2 *egység. Mekkora a háromszög beírt körének sugara? Mekkora a háromszög oldala és területe ?*

1.9. Feladat *Egy körbe és a kör köré is egy-egy szabályos háromszöget írunk. Mennyi a két háromszög területének aránya?*

1.10. Feladat *Egy háromszöget egyik középvonala mentén kettévágunk. Milyen területarányú részek keletkeznek?*

1.11. Feladat *Három* r *sugarú, egymást érintő kör köré írjunk mindhárom kört érintő kört. Mekkora a három kört magában foglaló kör sugara?*

1.12. Feladat *Egy derékszögű háromszög átfogója* 41 *cm, területe* 180 *cm*^{2}. *Mekkorák a befogók?*

1.13. Feladat *Egy téglalap oldalai* $AB = 9$ *cm,* $BC = 3$ *cm. Az* AB *oldalnak melyik* P *pontja van* A*-tól és* C*-től egyenlő távolságra?*

1.14. Feladat *Egy téglalap egyik oldala* 2 *cm. A téglalap átlójának mérőszáma megegyezik területének mérőszámával. Bizonyítsa be, hogy a téglalap átlója az egyik oldallal* $30°$*-os szöget zár be.*

1.15. Feladat *Egy téglalap kerülete* 68 *cm, átlója* 26 *cm. Hány cm*^{2} *a területe?*

1.16. Feladat *Az egységnyi területű rombusz egyik szöge* $150°$. *Mekkorák a rombusz oldalai és átlói?*

1.17. Feladat *Mekkorák a szimmetrikus trapéz alapjai, ha középvonala* 45 *mm, szára* 41 *mm, magassága* 9 *mm?*

1.18. Feladat *Két szabályos tetraéder felszínének aránya* $1 : 2$. *Mekkora a térfogatuk aránya?*

1.19. Feladat *Egy kúp alakú* 1 *dl-es poharat fél dl folyadék magasságának hányadrészéig tölt meg?*

1.20. Feladat *Egy kocka lapátlójának hossza* $\sqrt{6}$*. Milyen hosszú a kocka testátlója?*

1.21. Feladat *Milyen messze van az* a *élű kocka testátlója egy rá nem illeszkedő csúcstól?*

1.22. Feladat *Egy szabályos négyoldalú gúla alapéle* 12 *dm, magassága* 6 *dm. Mekkora annak a kockának az éle, amelynek négy csúcsa a gúla alapján, másik négy csúcsa pedig a gúla oldalélein van?*

1.23. Feladat *Egy forgáskúp alapkörének sugara* 12 *cm, alkotója* 20 *cm. A kúpba azzal közös tengelyű, egyenlő oldalú hengert írunk. Mekkora a henger térfogata? (Az egyenlő oldalú henger tengelymetszete négyzet.)*

1.24. Feladat *Mekkora a gömb térfogata, ha a gömbbe írt egyenes körkúp alapkörének sugara* 12 *cm, alkotója pedig* 32 *cm?*

1.25. Feladat *Egy félgömbbe kockát helyezünk el úgy, hogy a kocka négy csúcsa határkörének síkjába, négy csúcsa pedig a félgömbbe essék. Mekkora a félgömb sugara, ha a kocka éle* a*?*

1.26. Feladat *Mekkora az* a *élű szabályos tetraéder két kitérő élének távolsága?*

1.27. Feladat *Mekkora az* a *élű szabályos tetraéder térfogata?*

1.28. Feladat *Állítsunk vízszintes síkon álló, három egymást érintő* R *sugarú gömbre egy ugyancsak* R *sugarú negyediket. Mekkora a négy gömbből álló test magassága?*

2. fejezet

Megoldások

2.1. Műveletek törtekkel, hatványokkal, gyökökkel

2.1.1 Megoldás

$$3[(-2)-(-3)]+(-2)(-3)=3\cdot 1+6=9$$

2.1.2 Megoldás

$$\frac{4\{[(2-3)\cdot 5+4]\cdot 2+3\}+10}{7}=\frac{4[(-1)\cdot 2+3]+10}{7}=\frac{4\cdot 1+10}{7}=2$$

2.1.3 Megoldás

$$\left[\left(\frac{3(7+2)-8}{-3}+7\right)\cdot 2\right]:\frac{-6}{(-3)(-2)}=\left[\left(\frac{27-8}{-3}+7\right)\cdot 2\right]:(-1)=$$
$$\left[\frac{19-21}{-3}\cdot 2\right]:(-1)=-\frac{4}{3}$$

2.1.4 Megoldás

$$6^{-3}\cdot(-2)^5\cdot 12^{-1}\cdot(-3)^4=6^{-3}\cdot(-1)\cdot 2^5\cdot 6^{-1}\cdot 2^{-1}\cdot 3^4=-6^{-3}\cdot 6^{-1}\cdot 2^4\cdot 3^4=$$
$$-6^{-3}\cdot 6^{-1}\cdot 6^4=-1$$

2.1.5 Megoldás

$$\frac{26^{-4}\cdot 25^{-4}}{60^{-8}}+\left[\left(\frac{1}{1024}\right)^{\frac{1}{5}}\right]^{-\frac{3}{2}}=\frac{60^8}{26^4\cdot 25^4}+\left[\left(\frac{1}{2^{10}}\right)^{\frac{1}{5}}\right]^{-\frac{3}{2}}=$$
$$\frac{(2^2\cdot 3\cdot 5)^8}{2^4\cdot 13^4\cdot 5^8}+\left[\left(2^{-10}\right)^{\frac{1}{5}}\right]^{-\frac{3}{2}}=\frac{2^{16}\cdot 3^8\cdot 5^8}{2^4\cdot 13^4\cdot 5^8}+\left(2^{-2}\right)^{-\frac{3}{2}}=\frac{2^{12}\cdot 3^8}{13^4}+2^3$$

2.1.6 Megoldás

$$\left(\frac{1}{6}\right)^{-\frac{2}{3}} : \left(\frac{36}{125}\right)^{-\frac{2}{3}} + \left(8^{-\frac{1}{3}}\right)^{-2} = \left(\frac{1}{6}\right)^{-\frac{2}{3}} \cdot \left(\frac{125}{36}\right)^{-\frac{2}{3}} + \left(\frac{1}{8^{\frac{1}{3}}}\right)^{-2} =$$
$$\left(\frac{125}{6\cdot 36}\right)^{-\frac{2}{3}} + \left(\frac{1}{2}\right)^{-2} = \left(\frac{6^3}{5^3}\right)^{\frac{2}{3}} + 2^2 = \frac{6^2}{5^2} + 4 = \frac{36}{25} + 4 = \frac{136}{25}$$

2.1.7 Megoldás

$$\left(\frac{12^4\cdot 5^5}{3^4} : \frac{2^7\cdot 55^6}{(-11)^6}\right)^{-2} = \left(\frac{3^4\cdot 2^8\cdot 5^5}{3^4}\cdot\frac{11^6}{2^7\cdot 5^6\cdot 11^6}\right)^{-2} = \left(\frac{2}{5}\right)^{-2} = \frac{25}{4}$$

2.1.8 Megoldás

$$24^2\cdot 42^3\cdot 12^2\cdot 28\cdot 18^3 = (2^3\cdot 3)^2\cdot(2\cdot 3\cdot 7)^3\cdot(2^2\cdot 3)^2\cdot(2^2\cdot 7)\cdot(2\cdot 3^2)^3 =$$
$$(2^6\cdot 3^2)\cdot(2^3\cdot 3^3\cdot 7^3)\cdot(2^4\cdot 3^2)\cdot(2^2\cdot 7)\cdot(2^3\cdot 3^6) = 2^{18}\cdot 3^{13}\cdot 7^4$$

2.1.9 Megoldás

$$\frac{3^5\cdot 8^5\cdot 20^4\cdot 49}{16^4\cdot 6^4\cdot 70^2} = \frac{3^5\cdot(2^3)^5\cdot(2^2\cdot 5)^4\cdot 7^2}{(2^4)^4\cdot(2\cdot 3)^4\cdot(2\cdot 5\cdot 7)^2} = \frac{3^5\cdot 2^{15}\cdot 2^8\cdot 5^4\cdot 7^2}{2^{16}\cdot 2^4\cdot 3^4\cdot 2^2\cdot 5^2\cdot 7^2} =$$
$$\frac{2^{23}\cdot 3^5\cdot 5^4\cdot 7^2}{2^{22}\cdot 3^4\cdot 5^2\cdot 7^2} = 2\cdot 3\cdot 5^2$$

2.1.10 Megoldás

$$\frac{2^{10}+2^{11}-2^{12}}{2^9+2^{10}} = \frac{2^{10}\cdot(1+2-2^2)}{2^9\cdot(1+2)} = \frac{2\cdot(-1)}{3} = -\frac{2}{3}$$

2.1.11 Megoldás

$$\frac{1{,}6\cdot 10^{-3}\cdot 2{,}5\cdot 10^5}{2\cdot 10^{-2}} = 0{,}8\cdot 10^{-1}\cdot 2{,}5\cdot 10^5 = 2\cdot 10^4$$

2.1.12 Megoldás

$$\frac{360000\cdot 0{,}0000025}{0{,}009} = \frac{36\cdot 10^4\cdot 25\cdot 10^{-7}}{9\cdot 10^{-3}} = 4\cdot 25\cdot 10^{-3}\cdot 10^3 = 100$$

2.1.13 Megoldás

$$\sqrt{\frac{2-\sqrt{2}}{2+\sqrt{2}}} + \sqrt{\frac{2+\sqrt{2}}{2-\sqrt{2}}} = \frac{\left(\sqrt{2-\sqrt{2}}\right)^2 + \left(\sqrt{2+\sqrt{2}}\right)^2}{\sqrt{2+\sqrt{2}}\cdot\sqrt{2-\sqrt{2}}} =$$
$$\frac{(2-\sqrt{2})+(2+\sqrt{2})}{\sqrt{4-2}} = \frac{4}{\sqrt{2}} = 2\sqrt{2}$$

2.1.14 Megoldás

$$\left(\sqrt{16+2\sqrt{55}}-\sqrt{16-\sqrt{220}}\right)^2=\left(\sqrt{\left(\sqrt{5}+\sqrt{11}\right)^2}-\sqrt{\left(\sqrt{5}-\sqrt{11}\right)^2}\right)^2=$$
$$\left(\left|\sqrt{5}+\sqrt{11}\right|-\left|\sqrt{5}-\sqrt{11}\right|\right)^2=\left((\sqrt{5}+\sqrt{11})-(\sqrt{11}-\sqrt{5})\right)^2=\left(2\sqrt{5}\right)^2=20$$

2.1.15 Megoldás $B<\ln e^2=2;\ C=\lg 10^2=2\Rightarrow A<D<B<C$

2.1.16 Megoldás $B=\dfrac{1}{\sqrt[3]{4}};\ C=5;\ D=\dfrac{1}{20};\ E=2^{\frac{3}{2}};\ F=3\Rightarrow$
$D<B<A<E<F<C$

2.1.17 Megoldás $A=\dfrac{\sqrt{3}}{2};\ B=1;\ C=\dfrac{\sqrt{2}}{2};\ D=-1;\ E=-\dfrac{\sqrt{2}}{2};\Rightarrow$
$D<E<C<A<B$

2.1.18 Megoldás $A=|-3|=3;\ B=\sin\left(2\pi+\dfrac{\pi}{3}\right)=\sin\dfrac{\pi}{3}=\dfrac{\sqrt{3}}{2};\ C=\log_3 3^{-2}=-2$
$\Rightarrow C<B<A$

2.1.19 Megoldás

$$A=\sqrt{\left(2+\sqrt{3}\right)^2}=\left|2+\sqrt{3}\right|=2+\sqrt{3}\Rightarrow 3<A<4$$
$$B=\sqrt{\left(3-\sqrt{2}\right)^2}=\left|3-\sqrt{2}\right|=3-\sqrt{2}\Rightarrow 1<B<2$$
$$C=\sqrt{\left(2-\sqrt{5}\right)^2}=\left|2-\sqrt{5}\right|=\sqrt{5}-2\Rightarrow 0<C<1$$
$$D=\sqrt{\left(1-\sqrt{3}\right)^2}-\sqrt{\left(1+\sqrt{3}\right)^2}=\left|1-\sqrt{3}\right|-\left|1+\sqrt{3}\right|=(\sqrt{3}-1)-(1+\sqrt{3})=-2$$

A sorrend: $D<C<B<A.$

2.1.20 Megoldás

$$\left(\sqrt{a^5\cdot\sqrt[5]{a^2}}\right)\cdot\left(\sqrt{a^5}\cdot\sqrt[5]{a^2}\right):\frac{\sqrt[5]{a\cdot\sqrt[3]{a}}}{\sqrt[3]{a^2}}=a^{\frac{5}{2}}\cdot a^{\frac{1}{5}}\cdot a^{\frac{5}{2}}\cdot a^{\frac{2}{5}}\cdot\frac{a^{\frac{2}{3}}}{a^{\frac{1}{5}}\cdot a^{\frac{1}{15}}}=$$
$$a^5\cdot\frac{a^{\frac{2}{5}}\cdot a^{\frac{2}{3}}}{a^{\frac{1}{15}}}=a^5\cdot\frac{a^{\frac{16}{15}}}{a^{\frac{1}{15}}}=a^5\cdot a=a^6$$

2.1.21 Megoldás

$$\frac{(-2)^{n+1}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^n}{\left(\sqrt[3]{64}\right)^n+16^{\frac{n}{2}}}=\frac{(-1)^{n+1}\cdot 2^{n+1}\cdot 2^{-n}}{4^n+4^n}=\frac{(-1)^{n+1}\cdot 2}{2\cdot 4^n}=\frac{(-1)^{n+1}}{4^n}$$

2.1.22 Megoldás

$$\frac{9^{\frac{n}{2}+1}+\left(\sqrt{3}\right)^{2n+2}}{36^{\frac{n}{2}}+\left(\sqrt{6}\right)^n\cdot\left(\sqrt{3}\right)^n\cdot\left(\sqrt{2}\right)^n}=\frac{9\cdot 3^n+3\cdot 3^n}{6^n+\left(\sqrt{6}\right)^n\cdot\left(\sqrt{6}\right)^n}=\frac{12\cdot 3^n}{2\cdot 6^n}=\frac{6\cdot 3^n}{2^n\cdot 3^n}=\frac{6}{2^n}$$

2.1.23 Megoldás

$$\frac{16^{\frac{n}{2}}-2^{2n+3}}{125^{\frac{n}{3}}+\left(\sqrt{5}\right)^{2n+2}}=\frac{4^n-8\cdot 4^n}{5^n+5\cdot 5^n}=-\frac{7}{6}\cdot\left(\frac{4}{5}\right)^n$$

2.1.24 Megoldás

$$\frac{a-b}{(a+b)^2}\cdot\sqrt{\frac{(a^2-b^2)^6}{(a-b)^{10}}}=\frac{a-b}{(a+b)^2}\cdot\sqrt{\frac{(a-b)^6\cdot(a+b)^6}{(a-b)^{10}}}=$$

$$\frac{a-b}{(a+b)^2}\cdot\sqrt{\frac{(a+b)^6}{(a-b)^4}}=\frac{a-b}{(a+b)^2}\cdot\frac{|(a+b)^3|}{(a-b)^2}=\frac{|a+b|}{a-b}$$

2.1.25 Megoldás

$$\frac{x^2}{x^2-8x+16}\cdot\frac{25-x^2}{5x-x^2}\cdot\frac{x^2-16}{(5+x)(4+x)}=$$

$$\frac{x^2}{(x-4)^2}\cdot\frac{(5-x)(5+x)}{x(5-x)}\cdot\frac{(x-4)(x+4)}{(5+x)(4+x)}=\frac{x}{x-4}$$

2.1.26 Megoldás

$$\frac{1-\dfrac{x^2}{x^2-1}}{2+\dfrac{3x-1}{1-x}}=\frac{\dfrac{x^2-1-x^2}{x^2-1}}{\dfrac{2-2x+3x-1}{1-x}}=\frac{-1}{x^2-1}\cdot\frac{1-x}{1+x}=\frac{1}{(1-x)(1+x)}\cdot\frac{1-x}{1+x}=\frac{1}{(1+x)^2}$$

2.1.27 Megoldás

$$\frac{x-4}{x+4}-\frac{x+4}{x-4}+\frac{16x}{x^2-16}=\frac{(x-4)^2-(x+4)^2}{(x+4)(x-4)}+\frac{16x}{x^2-16}=$$

$$\frac{(x^2-8x+16)-(x^2+8x+16)+16x}{x^2-16}=\frac{-16x+16x}{x^2-16}=0$$

2.1.28 Megoldás

$$\left(\frac{2}{x^2-x}-\frac{2x}{1-x^2}\right)\cdot\frac{2x^2+2x}{x^3-1}+\frac{4}{x-1}=$$
$$\left(\frac{2}{x(x-1)}+\frac{2x}{(x-1)(x+1)}\right)\cdot\frac{2x(x+1)}{(x-1)(x^2+x+1)}+\frac{4}{x-1}=$$
$$\frac{2x+2+2x^2}{x(x-1)(x+1)}\cdot\frac{2x(x+1)}{(x-1)(x^2+x+1)}+\frac{4}{x-1}=\frac{2}{x-1}\cdot\frac{2}{x-1}+\frac{4}{x-1}=$$
$$\frac{4+4x-4}{(x-1)^2}=\frac{4x}{(x-1)^2}$$

2.1.29 Megoldás

$$\left(\frac{2c}{c+2}-\frac{2c}{3c-6}+\frac{8c}{c^2-4}\right)\cdot\frac{c-2}{c^2-4c}=$$
$$\left(\frac{1}{c+2}-\frac{1}{3(c-2)}+\frac{4}{(c-2)(c+2)}\right)\cdot 2c\cdot\frac{c-2}{c(c-4)}=$$
$$\frac{3(c-2)-(c+2)+12}{3(c-2)(c+2)}\cdot\frac{2(c-2)}{c-4}=\frac{2c+4}{3(c+2)}\cdot\frac{2}{c-4}=\frac{4}{3(c-4)}$$

2.1.30 Megoldás

$$\sqrt{x\cdot\sqrt{x}}\cdot\frac{\sqrt[4]{x\cdot\sqrt[3]{x^2}}}{\sqrt[6]{x}}=x^{\frac{1}{2}}\cdot x^{\frac{1}{4}}\cdot\frac{x^{\frac{1}{4}}\cdot x^{\frac{1}{6}}}{x^{\frac{1}{6}}}=x$$

2.1.31 Megoldás

$$\sqrt{x^{-1}\cdot\sqrt{x\cdot\sqrt[3]{x}}}=x^{-\frac{1}{2}}\cdot x^{\frac{1}{4}}\cdot x^{\frac{1}{12}}=x^{-\frac{1}{6}}=\frac{1}{\sqrt[6]{x}}$$

2.1.32 Megoldás

$$\sqrt{\frac{x}{\sqrt[3]{x^2\cdot\sqrt{x}}}}=\frac{x^{\frac{1}{2}}}{x^{\frac{2}{6}}\cdot x^{\frac{1}{12}}}=x^{\frac{1}{2}}\cdot x^{-\frac{1}{3}}\cdot x^{-\frac{1}{12}}=x^{\frac{1}{12}}=\sqrt[12]{x}$$

2.1.33 Megoldás

$$\sqrt[4]{x\cdot\sqrt[3]{x^2\cdot\sqrt{x^3}}}-\sqrt{x\cdot\sqrt[12]{x}}=x^{\frac{1}{4}}\cdot x^{\frac{2}{12}}\cdot x^{\frac{3}{24}}-x^{\frac{1}{2}}\cdot x^{\frac{1}{24}}=x^{\frac{13}{24}}-x^{\frac{13}{24}}=0$$

2.2. A logaritmus fogalma; arány- és százalékszámítás

2.2.1 Megoldás

$$A = \lg 10 = 1; B = \log_2 2^{-2} = -2; C = \log_3 3^{-\frac{1}{3}} = -\frac{1}{3}; D = \ln e^{-4} = -4$$
$$\Rightarrow D < B < C < A$$

2.2.2 Megoldás

$$A = \left(\left(\sqrt{3}\right)^{-4}\right)^{\log_{\sqrt{3}} 5} = \left(\sqrt{3}\right)^{-4\log_{\sqrt{3}} 5} = \left(\sqrt{3}\right)^{\log_{\sqrt{3}} 5^{-4}} = 5^{-4} = \frac{1}{625}$$
$$B = \left(\frac{1}{4}\right)^{\log_2 3} = \left(2^{-2}\right)^{\log_2 3} = 2^{-2\log_2 3} = 2^{\log_2 3^{-2}} = 3^{-2} = \frac{1}{9}$$
$$C = \left(\left(\frac{1}{3}\right)^{-1}\right)^{\log_{\frac{1}{3}} 2} = \left(\frac{1}{3}\right)^{-\log_{\frac{1}{3}} 2} = \left(\frac{1}{3}\right)^{\log_{\frac{1}{3}} 2^{-1}} = 2^{-1} = \frac{1}{2}$$
$$\Rightarrow A < B < C$$

2.2.3 Megoldás

$$A = \frac{3^2}{3^{\log_3 10}} = \frac{9}{10}$$
$$B = \frac{\left(\sqrt{2}\right)^3}{\left(\sqrt{2}\right)^{\log_2 5}} = \frac{2\sqrt{2}}{2^{\frac{1}{2}\log_2 5}} = \frac{2\sqrt{2}}{2^{\log_2 \sqrt{5}}} = \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{5}} = \frac{4}{\sqrt{10}} = \frac{4\sqrt{10}}{10}$$
$$C = \frac{\left(2^3\right)^{\log_2 6}}{\left(2^3\right)^2} = \frac{2^{3\log_2 6}}{\left(2^2\right)^3} = \frac{2^{\log_2 6^3}}{4^3} = \frac{6^3}{4^3} = 1{,}5^3 = \frac{15 \cdot 2{,}25}{10}$$
$$\Rightarrow A < B < C$$

2.2.4 Megoldás

$$A = \lg \frac{1{,}2 \cdot 1{,}5}{0{,}9} = \lg \frac{12 \cdot 15}{90} = \lg \frac{3 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 5}{9 \cdot 10} = \lg 2$$
$$B = \ln 5^2 - \ln e^2 = \ln \frac{25}{e^2} > \ln \frac{25}{9} > \ln 2 > \lg 2$$
$$C = 3\log_2 2^3 - \frac{1}{2}\log_{\frac{1}{2}} \left(\frac{1}{2}\right)^{-4} = 3 \cdot 3 - \frac{1}{2} \cdot (-4) = 11$$
$$\Rightarrow A < B < C$$

2.2.5 Megoldás

$$q = \frac{\lg A - \lg C}{\lg 5} \Rightarrow q \cdot \lg 5 = \lg A - \lg C \Rightarrow \lg 5^q = \lg \frac{A}{C} \Rightarrow 5^q = \frac{A}{C} \Rightarrow A = C \cdot 5^q$$

2.2.6 Megoldás

$$2^p \cdot 5^q = 10 \Rightarrow p \lg 2 + q \lg 5 = 1 \Rightarrow q = \frac{1 - p \lg 2}{\lg 5}$$

2.2.7 Megoldás

$$\sqrt{25^{1-\log_5 10}} + \left(\frac{\sqrt{10}}{10}\right)^{\lg 9 - 2} = \sqrt{\frac{25}{5^{2\log_5 10}}} + \left(10^{-\frac{1}{2}}\right)^{\lg 9 - 2} = \frac{5}{\sqrt{5^{\log_5 100}}} + 10^{-\frac{1}{2}\lg 9 + 1} =$$

$$\frac{5}{\sqrt{100}} + 10^{\lg \frac{1}{3}} \cdot 10 = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} \cdot 10 = \frac{23}{6}$$

2.2.8 Megoldás

$$49^{1-\log_7 2} - 5^{-\log_5 4} + \sin \frac{34\pi}{3} = \frac{49}{7^{2\log_7 2}} - \frac{1}{5^{\log_5 4}} + \sin\left(10\pi + \frac{4\pi}{3}\right) =$$

$$\frac{49}{4} - \frac{1}{4} + \sin\left(\frac{4\pi}{3}\right) = 12 - \frac{\sqrt{3}}{2}$$

2.2.9 Megoldás

$$(\sin 60°)^{\sqrt[3]{8}} + \frac{3^{10} + 3^{11}}{3^{12} - 3^{10}} + \left(\frac{1}{49}\right)^{\log_{\sqrt{7}} 2} = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 + \frac{1+3}{3^2 - 1} + \left(\left(\sqrt{7}\right)^{-4}\right)^{\log_{\sqrt{7}} 2} =$$

$$\frac{3}{4} + \frac{4}{8} + \frac{1}{16} = \frac{21}{16}$$

2.2.10 Megoldás

$$(-\cos 30°)^{\sqrt[3]{-8}} + 5000000 \cdot 0{,}000002 + 0{,}25^{\log_{16} 25} =$$

$$\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^{-2} + 5 \cdot 10^6 \cdot 2 \cdot 10^{-6} + \left(16^{-\frac{1}{2}}\right)^{\log_{16} 25} = \frac{4}{3} + 10 + \frac{1}{5} = \frac{173}{15}$$

2.2.11 Megoldás

$$-0{,}04^{-\frac{1}{2}} + 100^{\lg 5} - 81^{-\frac{3}{4}} = -\left(\frac{4}{100}\right)^{-\frac{1}{2}} + 10^{2\lg 5} - \left(3^4\right)^{-\frac{3}{4}} =$$

$$-\sqrt{\frac{100}{4}} + 10^{\lg 25} - 3^{-3} = -5 + 25 - \frac{1}{27} = \frac{539}{27}$$

2.2.12 Megoldás

$$3^{1+\log_9 4-\log_{\frac{1}{3}} 5}+\frac{2}{10^{-\lg 3}}=\frac{3\cdot 3^{\log_9 4}}{3^{\log_{\frac{1}{3}} 5}}+2\cdot 10^{\lg 3}=\frac{3\cdot 9^{\frac{1}{2}\log_9 4}}{\left(\frac{1}{3}\right)^{-\log_{\frac{1}{3}} 5}}+2\cdot 3=$$

$$\frac{3\cdot 4^{\frac{1}{2}}}{5^{-1}}+6=6\cdot 5+6=36$$

2.2.13 Megoldás *Legyen a kocka éle* x*, ekkor térfogata* x^3*, felszíne* $6x^2$*, a megnövelt kocka térfogata* $(x+1)^3$*. A feltételekből* $(x+1)^3=x^3+\frac{7}{6}\cdot 6x^2 \Rightarrow 4x^2-3x-1=0$*, ahonnan* $x=1$ *(mivel* $x>0$*). Tehát az kocka élei* 1 *cm-esek voltak.*

2.2.14 Megoldás *A ló* 1 *hónap alatt* 1 *kocsi szénát, a kecske* 1 *hónap alatt* $\frac{1}{2}$ *kocsi szénát, a juh* 1 *hónap alatt* $\frac{1}{3}$ *kocsi szénát eszik meg. A három állat együtt* 1 *hónap alatt* $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}=\frac{11}{6}$ *kocsi szénát eszik meg. Így a ló, a kecske és a juh együtt* 1 *kocsi szénát* $\frac{6}{11}$ *hónap alatt eszik meg.*

2.2.15 Megoldás 5 *év múlva* $80000\cdot 1{,}1^5=128840{,}8$ *Ft-unk lesz.*

2.2.16 Megoldás *A csoportban összesen* $40\cdot 0{,}3=12$ *kék szemű és* $40\cdot 0{,}4=16$ *szőke hallgató van. Szőke és kék szemű* 9 *hallgató. Azon hallgatók száma, akik szőkék vagy kék szeműek,* $12+16-9=19$*. Se nem szőke, se nem kék szemű* $40-19=21$ *hallgató.*

2.2.17 Megoldás *Legyen a kisebb betét értéke* x*. Ekkor* $0{,}035x+0{,}04\cdot 2x=6325$*. Innen a kisebb betét értéke* $x=\frac{6325}{0{,}115}=55000$ *euró, a nagyobb betét értéke* 110000 *euró.*

2.2.18 Megoldás *A kis kör és a nagy kör területének aránya* $\frac{T_1}{T_2}=\frac{40^2\pi}{50^2\pi}=\frac{16}{25}=0{,}64$*, tehát a kis kör területe a nagy kör területének* 64%*-a. Így az eredeti kör területe* 36%*-kal csökkent.*

2.2.19 Megoldás *Az* $x=1$ *pontban* $f(1)=1$*. Az* $x=1$ *értékét* 2%*-kal növelve*

$$f(1{,}02)=\frac{1{,}02+1}{1{,}02^2+1}\approx 0{,}99,$$

így f *értéke* 1%*-kal csökken. Az* $x=1$ *értékét* 3%*-kal csökkentve*

$$f(0{,}97)=\frac{0{,}97+1}{0{,}97^2+1}\approx 1{,}015,$$

így f *értéke* 1,5%*-kal nő.*

2.2.20 Megoldás *Ha az $x = 1$ értéke k-szorosára változik és f értéke 1%-kal nő, akkor a* $\dfrac{k+1}{k^2+1} = 1{,}01 \cdot f(1)$ *összefüggésből k-ra az $1{,}01k^2 - k + 0{,}01 = 0$ másodfokú egyenlet adódik, ahonnan $k_1 \approx 0{,}01$ és $k_2 \approx 0{,}98$. Tehát ahhoz, hogy f értéke 1%-kal nőjön, $x = 1$ értékét 99%-kal vagy 2%-kal kell csökkenteni.*

Ha az $x = 1$ értéke k-szorosára változik és f értéke 2,5%-kal csökken, akkor a $\dfrac{k+1}{k^2+1} = 0{,}975 \cdot f(1)$ *összefüggésből k-ra a $0{,}975k^2 - k + 0{,}025 = 0$ másodfokú egyenlet adódik, ahonnan $k \approx 1{,}05$ (mivel $k > 0$). Tehát ahhoz, hogy f értéke 2,5%-kal csökkenjen, $x = 1$ értékét 5%-kal kell növelni.*

2.2.21 Megoldás *Legyen a gép értéke x. Két év múlva a gépet $x \cdot 0{,}8^2 \cdot \dfrac{3}{4} = x \cdot 0{,}48$-ért adták el, ami az eredeti érték 48%-a.*

2.2.22 Megoldás *Az első lemez átengedi a ráeső fényenergia 70%-át, a második a ráeső fényenergia 50%-át, a harmadik pedig a ráeső energia 80%-át. A három lemez együttesen az eredeti fénysugár energiájának $0{,}7 \cdot 0{,}5 \cdot 0{,}8 = 0{,}28$-szorosát engedi át. Tehát a három lemez együttesen az eredeti fénysugár energiájának 72%-át nyeli el.*

2.2.23 Megoldás *Legyen az üzem bevétele x. A változtatások után az új bevétel*

$$x \cdot (0{,}8 \cdot 1{,}2 + 0{,}2 \cdot 0{,}8) = x \cdot 1{,}12,$$

tehát az üzem bevétele 12%-kal nőtt.

2.2.24 Megoldás *Legyen a kabát ára x. Ha a csökkentett árat y-szorosára növelik, akkor az $x \cdot 0{,}8 \cdot y = x$ egyenletből $y = 1{,}25$, tehát 25%-kal kell növelni az árat.*

2.2.25 Megoldás *Legyen a két évvel ezelőtti faállomány x. Ekkor az*

$$(x \cdot 0{,}8 + 800) \cdot 0{,}8 + 800 = 8000$$

egyenletből $x = 10250$ adódik.

2.2.26 Megoldás *Legyen az elefánt testtömege t, amikor nagyon szomjas. Itatás után a testének víztartalmát kétféleképpen kifejezve, t-re a következő egyenlet adódik:*

$$0{,}84t + (1600 - t) = 0{,}85 \cdot 1600$$

ahonnan $t = 1500$ kg.

2.3. Elemi függvények tulajdonságai, ábrázolásuk

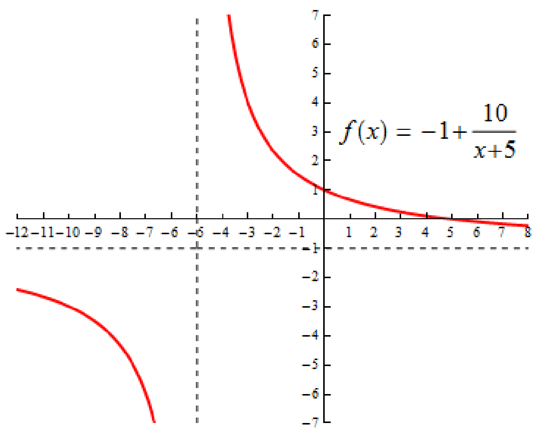
2.3.1 Megoldás *Az ábrázoláshoz az f függvényt a következő alakra hozzuk:*

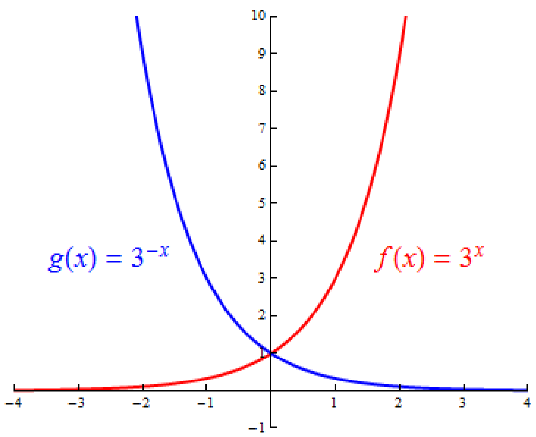
$$f(x) = 1 - \frac{2x}{x+5} = 1 - \frac{2(x+5)-10}{x+5} = -1 + \frac{10}{x+5}$$

$f(x) > 0 \Leftrightarrow \dfrac{x+5-2x}{x+5} > 0 \Leftrightarrow \dfrac{5-x}{x+5} > 0 \Leftrightarrow (5-x>0$ *és* $x+5>0)$ *vagy* $(5-x<0$ *és* $5+x<0) \Leftrightarrow -5<x<5$

$f(1)+f(-1) = \left(-1+\dfrac{10}{1+5}\right) + \left(-1+\dfrac{10}{-1+5}\right) = -2 + \dfrac{10}{6} + \dfrac{10}{4} = \dfrac{13}{6}$

Az f függvény az y tengelyt $y = f(0) = 1$-nél metszi.





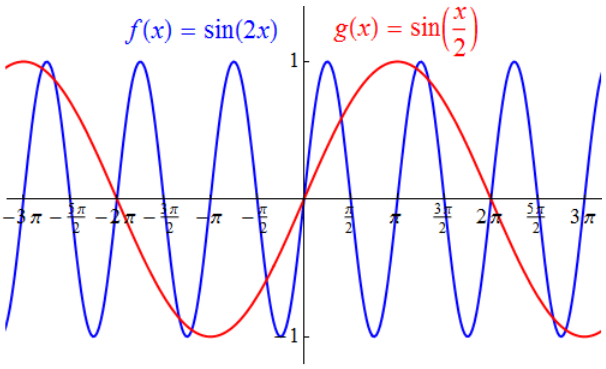
2.3.2 Megoldás

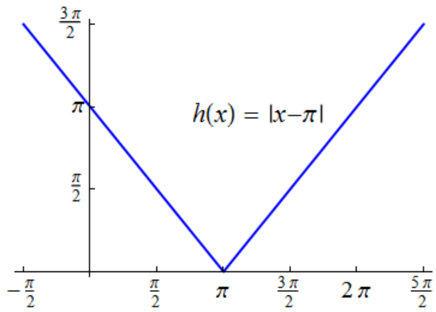
$$f(a+2) - f(a-2) = 3^{a+2} - 3^{a-2} = 3^a \cdot 9 - 3^a \cdot \frac{1}{9} = 3^a\left(9 - \frac{1}{9}\right) = \frac{80}{9} \cdot 3^a$$

$$g(a+2) - g(a-2) = 3^{-(a+2)} - 3^{-(a-2)} = 3^{-a} \cdot \frac{1}{9} - 3^{-a} \cdot 9 = 3^{-a}\left(\frac{1}{9} - 9\right) = -\frac{80}{9} \cdot 3^{-a}$$

$$f(g(x)) = 3^{g(x)} = 3^{3^{-x}}; \quad g(f(x)) = 3^{-f(x)} = 3^{-3^x}$$

2.3.3 Megoldás *Az* $f(x) = \sin 2x$, $g(x) = \sin \dfrac{x}{2}$ *és* $h(x) = |x-\pi|$ *függvények közül csak a g függvény szigorúan monoton növő a* $]\,0;\pi\,[$ *nyílt intervallumon.*





2.3.4 Megoldás

$$f(x) = \frac{2x(x-2)^2 - 2(x-2)\cdot x^2 \cdot 2}{(x-2)^4} = \frac{2x(x-2) - 4x^2}{(x-2)^3} = \frac{-2x^2-4x}{(x-2)^3} = \frac{-2x(x+2)}{(x-2)^3}$$

f értelmezési tartománya: $D_f = \mathbb{R} \setminus \{2\}$. *$f$ zérushelyei:* $x_1 = 0, x_2 = -2$.

2.3.5 Megoldás

$$f(x) = \frac{4(x^2-1)\cdot x \cdot x^3 - 3x^2 \cdot (x^2-1)^2}{x^6} = \frac{4x^2(x^2-1) - 3(x^2-1)^2}{x^4} =$$
$$= \frac{(x^2-1)\left[4x^2 - 3(x^2-1)\right]}{x^4} = \frac{(x-1)(x+1)(x^2+3)}{x^4}$$

f értelmezési tartománya: $D_f = \mathbb{R} \setminus \{0\}$. *$f$ zérushelyei:* $x_1 = 1, x_2 = -1$.

2.3.6 Megoldás

$$f(x) = \frac{2x(x^2-4)^2 + 2(x^2-4)\cdot 3x \cdot x^2}{(x^2-4)^4} = \frac{2x(x^2-4) + 6x^3}{(x^2-4)^3} = \frac{8x^3 - 8x}{(x-2)^3(x+2)^3} =$$
$$= \frac{8x(x-1)(x+1)}{(x-2)^3(x+2)^3}$$

f értelmezési tartománya: $D_f = \mathbb{R} \setminus \{-2, 2\}$. *$f$ zérushelyei:* $x_1 = 0, x_2 = -1, x_3 = 1$.

2.3.7 Megoldás

$$f(x) = \frac{3x^2(x-3)^2(x+1)^2 - (3x^2-9x)(x^2-1)^2}{(x-3)^4(x+1)^2} =$$
$$= \frac{3x^2(x-3)^2(x+1)^2 - 3x(x-3)(x-1)^2(x+1)^2}{(x-3)^4(x+1)^2} = \frac{3x^2(x-3) - 3x(x-1)^2}{(x-3)^3} =$$
$$= \frac{3x\left[x(x-3) - (x^2-2x+1)\right]}{(x-3)^3} = \frac{-3x(x+1)}{(x-3)^3}$$

f értelmezési tartománya: $D_f = \mathbb{R} \setminus \{-1, 3\}$. *$f$ zérushelye:* $x = 0$.

2.3.8 Megoldás

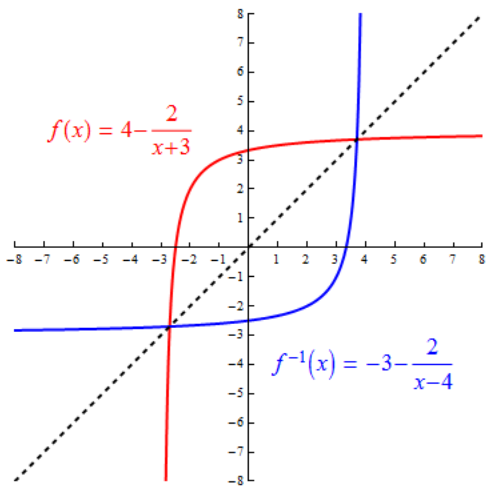
$$f(g(x)) = \ln^2(g(x)) = \ln^2\left(\sqrt[3]{x^2+1}\right), \; x \in \mathbb{R}; \quad f(g(0)) = f(1) = 0$$
$$g(f(x)) = \sqrt[3]{(f(x))^2+1} = \sqrt[3]{(\ln^2 x)^2+1} = \sqrt[3]{\ln^4 x+1}, \; x \in \mathbb{R}^+; \quad g(f(1)) = g(0) = 1$$

2.3.9 Megoldás

$$f(g(x)) = e^{(g(x))^2} = e^{(\sin 3x)^2}, \; x \in \mathbb{R}; \quad f(g(0)) = f(0) = e^0 = 1$$
$$g(f(x)) = \sin(3f(x)) = \sin\left(3e^{x^2}\right), \; x \in \mathbb{R}; \quad g(f(0)) = g(1) = \sin 3$$

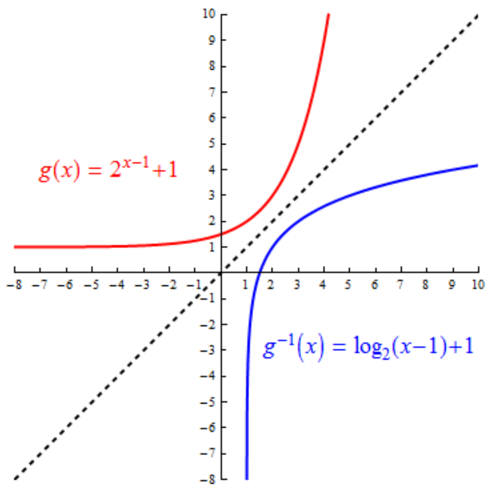
2.3.10 Megoldás *Az* $f(x) = 4 - \dfrac{2}{x+3}$ *függvény szigorúan monoton növő a* $]-3;\infty[$ *intervallumon, így létezik inverze. Az inverz meghatározása:*

$$y = 4 - \frac{2}{x+3} \Rightarrow x = 4 - \frac{2}{y+3} \Rightarrow x - 4 = -\frac{2}{y+3} \Rightarrow y = -3 - \frac{2}{x-4} \Rightarrow$$
$$f^{-1}(x) = -3 - \frac{2}{x-4}, \; x \in \,]-\infty;4[$$



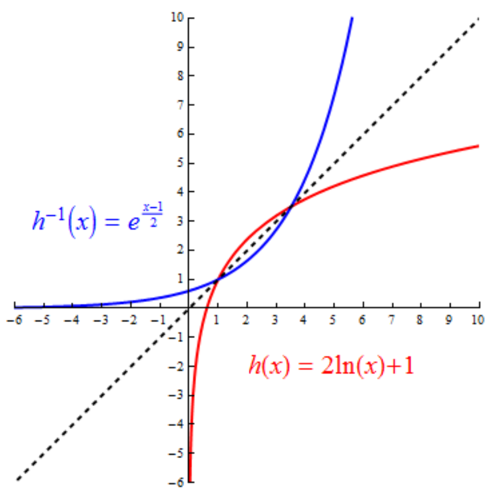
2.3.11 Megoldás *A* $g(x) = 2^{x-1} + 1$ *függvény szigorúan monoton növő, így létezik inverze. Az inverz meghatározása:*

$$y = 2^{x-1} + 1 \Rightarrow x = 2^{y-1} + 1 \Rightarrow x - 1 = 2^{y-1} \Rightarrow y = \log_2(x-1) + 1 \Rightarrow$$
$$g^{-1}(x) = \log_2(x-1) + 1, \; x \in \,]1;\infty[$$



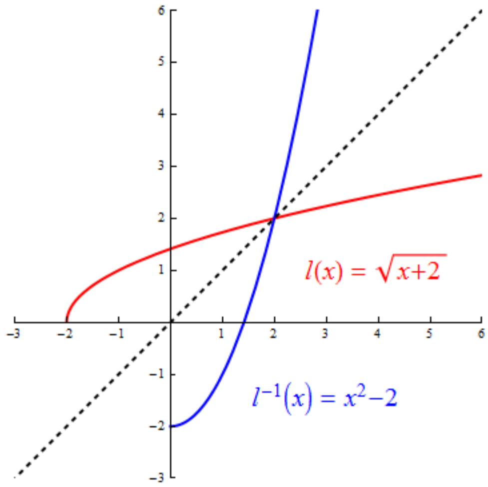
2.3.12 Megoldás *A $h(x) = 2\ln x + 1$ függvény szigorúan monoton növő a $]0;\infty[$ intervallumon, így létezik inverze. Az inverz meghatározása:*

$$y = 2\ln x + 1 \Rightarrow x = 2\ln y + 1 \Rightarrow \frac{x-1}{2} = \ln y \Rightarrow y = e^{\frac{x-1}{2}} \Rightarrow$$
$$h^{-1}(x) = e^{\frac{x-1}{2}},\ x \in \mathbb{R}$$

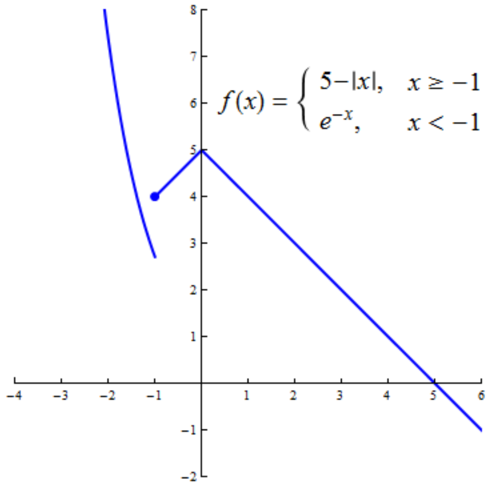


2.3.13 Megoldás *Az $l(x) = \sqrt{x+2}$ függvény szigorúan monoton növő a $[-2;\infty[$ intervallumon, így létezik inverze. Az inverz meghatározása:*

$$y = \sqrt{x+2} \Rightarrow x = \sqrt{y+2} \Rightarrow x^2 = y + 2 \Rightarrow y = x^2 - 2 \Rightarrow$$
$$l^{-1}(x) = x^2 - 2,\ x \in [0;\infty[$$

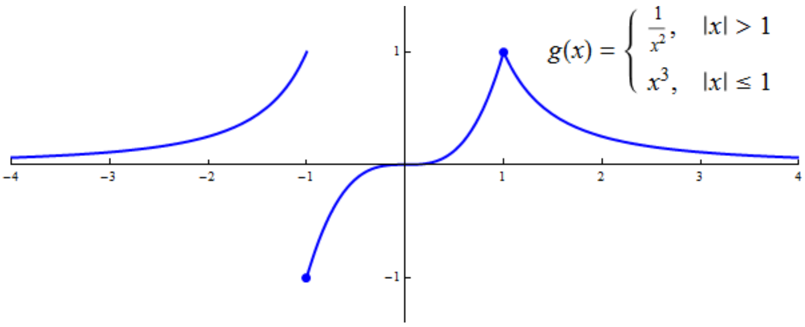


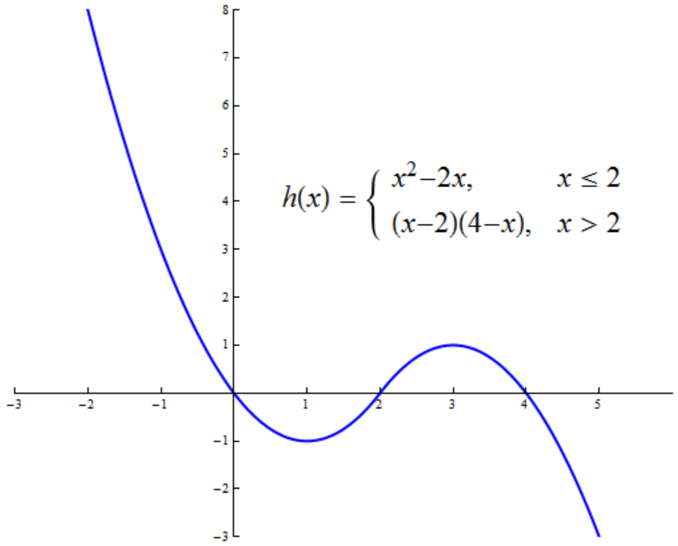
2.3.14 Megoldás $f(1) = 4; \quad f(-2) = e^2$



2.3.15 Megoldás *A g függvény minimális érteke a $[-3, 2]$ intervallumon -1, melyet az $x_1 = -1$ helyen vesz fel, maximális értéke 1, melyet az $x_2 = 1$ helyen vesz fel.*

2.3.16 Megoldás *A h függvény lokális minimumhelyei a $[-2, 5]$ intervallumon $x_1 = 1$ és $x_2 = 5$, az utóbi globális minimumhely is, a függvényértékek $h(1) = -1$, $h(5) = -3$. A lokális maximumhelyek $x_3 = 3$ és $x_4 = -2$, az utóbbi globális maximumhely is, a függvényértékek $h(3) = 3$, $h(-2) = 8$.*





2.3.17 Megoldás *f értelmezési tartománya: az $1 - 2x \geq 0$ egyenlőtlenségből $x \leq \frac{1}{2}$, azaz $D_f = \,]-\infty; \frac{1}{2}]$. f zérushelye: a $3 - \sqrt{1-2x} = 0$ egyenletből $x = -4$.*

2.3.18 Megoldás *f értelmezési tartománya: az $5 - |x+2| \geq 0$ egyenlőtlenségből $|x+2| \leq 5 \Leftrightarrow -5 \leq x+2 \leq 5 \Leftrightarrow -7 \leq x \leq 3$, azaz $D_f = [-7; 3]$. f zérushelyei: az $5 - |x+2| = 0$ egyenletből $x + 2 = \pm 5$, így $x_1 = -7$ és $x_2 = 3$.*

2.3.19 Megoldás *A logaritmus definíciója miatt $x - \dfrac{1}{x} > 0 \Leftrightarrow \dfrac{x^2-1}{x} > 0 \Leftrightarrow (x^2 - 1 > 0$ és $x > 0)$ vagy $(x^2 - 1 < 0$ és $x < 0) \Leftrightarrow x > 1$ vagy $-1 < x < 0$, tehát f értelmezési tartománya: $D_f = \,]-1; 0[\cup]1; \infty[$.*
f zérushelyei: az $x - \dfrac{1}{x} = 1$ egyenletből $x^2 - x - 1 = 0$, ahonnan $x_{1,2} = \dfrac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$.

2.3.20 Megoldás *A logaritmus definíciója miatt* $5-|1-x|>0 \Leftrightarrow |1-x|<5 \Leftrightarrow -5<x-1<5 \Leftrightarrow -4<x<6$, *tehát* f *értelmezési tartománya:* $D_f =]-4;6[$.
f *zérushelyei: az* $5-|1-x|=1$ *egyenletből* $|x-1|=4$, *ahonnan* $x_1=-3$ *és* $x_2=5$.

2.3.21 Megoldás *A logaritmus definíciója miatt* $2+x-x^2>0 \Leftrightarrow x^2-x-2<0 \Leftrightarrow (x-2)(x+1)<0 \Leftrightarrow -1<x<2$, *tehát* f *értelmezési tartománya:* $D_f =]-1;2[$.
f *zérushelyei: a* $2+x-x^2=1$ *egyenletből* $x^2-x-1=0$, *ahonnan* $x_{1,2}=\dfrac{1\pm\sqrt{5}}{2}$.

2.3.22 Megoldás f *értelmezési tartománya: a* $2+\log_3 x \geq 0$ *egyenlőtlenségből* $\log_3 x \geq -2 = \log_3 \dfrac{1}{9}$, *így* $x \geq \dfrac{1}{9}$, *azaz* $D_f = \left[\frac{1}{9};\infty\right[$. f *zérushelye: a* $2+\log_3 x = 0$ *egyenletből* $x=\dfrac{1}{9}$.

2.3.23 Megoldás *A* $g(x)=f(x)+5$ *függvény páratlan, így* $g(-x)=-g(x)$. *Ezt felhasználva* $g(-7)=-g(7)=f(-7)+5=7+5=12$, *tehát* $g(7)=-12$. *Így* $f(7)=g(7)-5=-17$.

2.4. Algebrai egyenletek és egyenlőtlenségek

2.4.1 Megoldás *Ha* $x\geq 3$, *akkor* $|x-3|=x-3$, *így az egyenlet:* $x+2(x-3)=9$, *ahonnan* $x=5$. *Ha* $x<3$, *akkor* $|x-3|=-(x-3)$, *így az egyenlet:* $x-2(x-3)=9$, *ahonnan* $x=-3$. *Tehát a megoldás:* $x_1=5$, $x_2=-3$.

2.4.2 Megoldás *Ha* $x\leq 0$ *vagy* $x\geq 2$, *akkor* $|x^2-2x|=x^2-2x$, *így az egyenlet:* $x^2-2x-1=0$, *ahonnan* $x=1+\sqrt{2}$ *vagy* $x=1-\sqrt{2}$. *Ha* $0<x<2$, *akkor* $|x^2-2x|=-(x^2-2x)$, *így az egyenlet:* $-x^2+2x-1=0$, *ahonnan* $x=1$. *Tehát a megoldás:* $x_{1,2}=1\pm\sqrt{2}$, $x_3=1$.

2.4.3 Megoldás *Ha* $x\geq 0$, *akkor* $|x|=x$, *így az egyenlet:* $x^2+7x-8=0$ $\Rightarrow (x-1)(x+8)=0$, *ahonnan* $x=1$ *vagy* $x=-8$, *de ez utóbbi nem lehet a feltétel miatt. Ha* $x<0$, *akkor* $|x|=-x$, *így az egyenlet:* $x^2-7x-8=0 \Rightarrow (x+1)(x-8)=0$, *ahonnan* $x=-1$ *vagy* $x=8$, *de ez utóbbi nem lehet a feltétel miatt. Tehát a megoldás:* $x_1=1$, $x_2=-1$.

2.4.4 Megoldás *Ha* $x\leq -3$ *vagy* $x\geq 0$, *akkor az egyenlet:* $(x^2+3x)+x^2-2=0$, *ahonnan* $x=\dfrac{1}{2}$ *vagy* $x=-2$, *de ez utóbbi nem lehet a feltétel miatt. Ha* $-3<x<0$, *akkor az egyenlet:* $-(x^2+3x)+x^2-2=0$, *ahonnan* $x=-\dfrac{2}{3}$. *Tehát a megoldás:* $x_1=\dfrac{1}{2}$, $x_2=-\dfrac{2}{3}$.

2.4.5 Megoldás *Ha* $x \geq 1$, *akkor az egyenlet:* $\frac{6}{x} = -2(x-1) + 6 \Rightarrow 2x^2 - 8x + 6 = 0$ $\Rightarrow (x-1)(x-3) = 0$, *ahonnan* $x = 1$ *vagy* $x = 3$. *Ha* $x < 1$, *akkor az egyenlet:* $\frac{6}{x} = -2(-x+1) + 6 \Rightarrow 2x^2 + 4x - 6 = 0 \Rightarrow (x+3)(x-1) = 0$, *ahonnan* $x = -3$ *vagy* $x = 1$, *de ez utóbbi megoldást már megkaptuk. Tehát a megoldás:* $x_1 = 1$, $x_2 = 3$, $x_3 = -3$.

2.4.6 Megoldás $\sqrt{(x+3)^2} + \sqrt{(x-4)^2} = 10 \Leftrightarrow |x+3| + |x-4| = 10$. *Ha* $x \geq 4$, *akkor az egyenlet:* $(x+3) + (x-4) = 10$, *ahonnan* $x = \frac{11}{2}$. *Ha* $-3 \leq x < 4$, *akkor az egyenlet:* $(x+3)-(x-4) = 10$, *ami ellentmondásra vezet. Ha* $x < -3$, *akkor az egyenlet:* $-(x+3) - (x-4) = 10$, *ahonnan* $x = -\frac{9}{2}$. *Tehát a megoldás:* $x_1 = \frac{11}{2}$, $x_2 = -\frac{9}{2}$.

2.4.7 Megoldás $|2x-1| < 4 \Leftrightarrow -4 < 2x - 1 < 4 \Leftrightarrow -3 < 2x < 5 \Leftrightarrow -\frac{3}{2} < x < \frac{5}{2}$

2.4.8 Megoldás $\sqrt{x^2 - 8x + 16} \geq 3 \Leftrightarrow \sqrt{(x-4)^2} \geq 3 \Leftrightarrow |x-4| \geq 3 \Leftrightarrow x - 4 \geq 3$ *vagy* $x - 4 \leq -3 \Leftrightarrow x \geq 7$ *vagy* $x \leq 1$.

2.4.9 Megoldás $|x^2 - 5| > 4 \Leftrightarrow x^2 - 5 > 4$ *vagy* $x^2 - 5 < -4 \Leftrightarrow x^2 > 9$ *vagy* $x^2 < 1$ $\Leftrightarrow |x| > 3$ *vagy* $|x| < 1 \Leftrightarrow x < -3$ *vagy* $x > 3$ *vagy* $-1 < x < 1$.

2.4.10 Megoldás *Ha* $x \geq 3$, *akkor az egyenlőtlenség:* $x - 3 \geq 1 - 2x$, *ahonnan* $x \geq \frac{4}{3}$ $\Rightarrow x \geq 3$. *Ha* $x < 3$, *akkor az egyenlőtlenség:* $-(x-3) \geq 1 - 2x$, *ahonnan* $x \geq -2 \Rightarrow$ $-2 \leq x < 3$. *Tehát a megoldás:* $x \geq -2$.

2.4.11 Megoldás

$$\left(1 + \frac{4}{x^2 + x - 6}\right) \cdot \left(\frac{1}{x+1} + 1\right) = 0 \Leftrightarrow \frac{x^2 + x - 2}{x^2 + x - 6} \cdot \frac{x+2}{x+1} = 0$$
$$\Leftrightarrow \frac{(x+2)(x-1)}{(x+3)(x-2)} \cdot \frac{x+2}{x+1} = 0 \quad \Rightarrow x \neq -3, x \neq -1, x \neq 2$$

A megoldás: $x_1 = -2$, $x_2 = 1$.

2.4.12 Megoldás

$$x^4 + 5x^3 - 6x^2 = 0 \Leftrightarrow x^2(x^2 + 5x - 6) = 0 \Leftrightarrow x^2(x+6)(x-1) = 0$$

A megoldás: $x_1 = 0$, $x_2 = -6$, $x_3 = 1$.

2.4.13 Megoldás $\dfrac{x+3}{x-4}+\dfrac{22}{x^2-16}=\dfrac{7x+6}{x+4}-\dfrac{3}{x-4} \quad \Rightarrow x \neq \pm 4.$
Az egyenletet x^2-16*-tal szorozva:*

$$(x+3)(x+4)+22=(7x+6)(x-4)-3(x+4) \Leftrightarrow x^2+7x+34=7x^2-25x-36$$
$$\Leftrightarrow 3x^2-16x-35=0$$

A megoldás: $x_1=-\dfrac{5}{3}$, $x_2=7$.

2.4.14 Megoldás $\dfrac{3-7x}{2x+4}-\dfrac{1{,}5-3{,}5x}{x+2}=0 \quad \Rightarrow x \neq -2.$ *Az egyenletet* $2(x+2)$*-vel szorozva azonosságot kapunk:* $(3-7x)-(3-7x)=0$. *A megoldás:* $x \in \mathbb{R} \setminus \{-2\}$.

2.4.15 Megoldás

$$\frac{x^2-5x+6}{x^2-7x+12}=2 \Leftrightarrow \frac{(x-3)(x-2)}{(x-3)(x-4)}=2 \quad \Rightarrow x \neq 3$$
$$\Rightarrow \frac{x-2}{x-4}=2 \Rightarrow x-2=2(x-4) \Rightarrow x=6$$

A megoldás: $x=6$.

2.4.16 Megoldás $\dfrac{2x}{x+2}-\dfrac{x+2}{2-x}=\dfrac{x^2+12}{x^2-4} \quad \Rightarrow x \neq \pm 2.$
Az egyenletet x^2-4*-gyel szorozva:*

$$2x(x-2)+(x+2)^2=x^2+12 \Leftrightarrow 3x^2+4=x^2+12 \Leftrightarrow x^2=4 \Leftrightarrow x=\pm 2$$

Ez nem lehet a feltétel miatt, így az egyenletnek nincs megoldása.

2.4.17 Megoldás *A* $y := x^2 \geq 0$ *változó bevezetésével* y*-ra másodfokú egyenlet adódik:* $4y^2-3y-1=0$, *melynek gyökei* $y_1=1$ *és* $y_2=-\dfrac{1}{4}$, *de ez utóbbi nem lehet a feltétel miatt. A megoldás:* $x_1=1$, $x_2=-1$.

2.4.18 Megoldás *Az egyenlőtlenséget* 0*-ra rendezve:*

$$2x-\frac{3}{x-1} \geq 3 \Leftrightarrow \frac{2x(x-1)-3-3(x-1)}{x-1}>0 \Leftrightarrow \frac{2x^2-5x}{x-1}>0 \Leftrightarrow \frac{x(2x-5)}{x-1}>0$$

A tört pontosan akkor pozitív, ha a számláló és a nevező azonos előjelű. A számláló $x<0$ *vagy* $x>\dfrac{5}{2}$ *esetén pozitív,* $0<x<\dfrac{5}{2}$ *esetén negatív. A nevező* $x>1$ *esetén pozitív,* $x<1$ *esetén negatív. A megoldás:* $0<x<1$ *vagy* $x>\dfrac{5}{2}$.

2.4.19 Megoldás *Az egyenlőtlenséget* 0*-ra rendezve:*

$$\frac{x}{x-1} > \frac{2}{x+4} \Leftrightarrow \frac{x(x+4)-2(x-1)}{(x-1)(x+4)} > 0 \Leftrightarrow \frac{x^2+2x+2}{(x-1)(x+4)} > 0 \Leftrightarrow \frac{(x+1)^2+1}{(x-1)(x+4)} > 0$$

A számláló minden x-re pozitív, így a tört pontosan akkor pozitív, ha a nevező is pozitív, azaz $x < -4$ vagy $x > 1$.

2.4.20 Megoldás $\frac{x^2-5x+6}{x^2-5x-6} \geq 0 \Leftrightarrow \frac{(x-2)(x-3)}{(x-6)(x+1)} \geq 0$. *A tört pontosan akkor nemnegatív, ha a számláló és a nevező azonos előjelű, vagy a számláló nulla. A számláló nulla vagy pozitív, ha $x \leq 2$ vagy $x \geq 3$, és negatív, ha $2 < x < 3$. A nevező pozitív, ha $x < -1$ vagy $x > 6$, és negatív, ha $-1 < x < 6$. A megoldás: $x < -1$ vagy $2 \leq x \leq 3$ vagy $x > 6$.*

2.4.21 Megoldás *Az egyenlőtlenséget* 0*-ra rendezve:*

$$2 - \frac{x-1}{x} < \frac{x}{x+1} \Leftrightarrow \frac{2x(x+1)-(x-1)(x+1)-x^2}{x(x+1)} < 0 \Leftrightarrow \frac{2x+1}{x(x+1)} < 0$$

A tört pontosan akkor negatív, ha a számláló és a nevező különböző előjelű. A számláló $x > -\frac{1}{2}$ esetén pozitív, $x < -\frac{1}{2}$ esetén negatív. A nevező $x < -1$ vagy $x > 0$ esetén pozitív, $-1 < x < 0$ esetén negatív. A megoldás: $x < -1$ vagy $-\frac{1}{2} < x < 0$.

2.4.22 Megoldás $(x+2)(x+b) = x^2+cx+6 \Leftrightarrow x^2+(b+2)x+2b = x^2+cx+6$
Az egyenlőség pontosan akkor teljesül minden x valós számra, ha a két polinom megfelelő együtthatói egyenlők, azaz $b+2=c$ és $2b=6$. Innen $b=3$ és $c=5$.

2.4.23 Megoldás *Ha a másodfokú tag együtthatója* 1*, akkor az egyenlet gyöktényezős alakja*

$$\left(x-\frac{1}{2}\right)\left(x+\frac{1}{3}\right) = 0 \Rightarrow x^2 - \frac{1}{6}x - \frac{1}{6} = 0 \Rightarrow 6x^2 - x - 1 = 0$$

2.4.24 Megoldás $(ax-1)^2+(x-a)^2 = x^2-2+a^2 \Leftrightarrow a^2x^2-4ax+3=0$. *Az egyenletnek $a=0$ esetén nincs megoldása, $a \neq 0$ esetén a megoldás:*

$$x_{1,2} = \frac{4a \pm \sqrt{16a^2-12a^2}}{2a^2} = \frac{2a \pm |a|}{2a^2} = \frac{2a \pm a}{2a^2} = \frac{2 \pm 1}{a} \Rightarrow x_1 = \frac{1}{a}, x_2 = \frac{3}{a}$$

2.4.25 Megoldás $(ax+1)^2+(ax+1)(ax-1) = 4 \Leftrightarrow a^2x^2+ax-2=0$. *Az egyenletnek $a=0$ esetén nincs megoldása, $a \neq 0$ esetén a megoldás:*

$$x_{1,2} = \frac{-a \pm \sqrt{a^2+8a^2}}{2a^2} = \frac{-a \pm 3|a|}{2a^2} = \frac{-a \pm 3a}{2a^2} = \frac{-1 \pm 3}{2a} \Rightarrow x_1 = \frac{1}{a}, x_2 = -\frac{2}{a}$$

2.4.26 Megoldás *Az* $(1-a)x^2+x+a=0$ *egyenletnek* $a=1$ *esetén* $x=-1$ *megoldása. Ha* $a \neq 1$*, akkor*

$$x_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{1-4a(1-a)}}{2(1-a)} = \frac{-1 \pm |2a-1|}{2(1-a)} = \frac{-1 \pm (2a-1)}{2(1-a)} \Rightarrow x_1 = -1, x_2 = \frac{a}{a-1}$$

2.4.27 Megoldás *Az* $x^2+px+q=0$ *polinom gyökeinek összege:* $x_1+x_2=-p$*, a gyökök szorzata:* $x_1x_2=q$*. Így*

1. $x_1 + x_1x_2 + x_2 = (x_1+x_2) + x_1x_2 = -p+q$
2. $(x_1+x_2)^2 = (-p)^2 = p^2$
3. $x_1^2 + x_2^2 = (x_1+x_2)^2 - 2x_1x_2 = (-p)^2 - 2q = p^2 - 2q$
4. $(x_1-x_2)^2 = x_1^2 - 2x_1x_2 + x_2^2 = (x_1+x_2)^2 - 4x_1x_2 = p^2 - 4q$
5. $\dfrac{1}{x_1} + \dfrac{1}{x_2} = \dfrac{x_1+x_2}{x_1x_2} = -\dfrac{p}{q}$

2.4.28 Megoldás

$$x_1x_2 > 0 \Leftrightarrow \frac{p+2}{p^2} > 1 \Leftrightarrow \frac{p+2-p^2}{p^2} > 0 \Leftrightarrow \frac{p^2-p-2}{p^2} < 0 \Leftrightarrow \frac{(p-2)(p+1)}{p^2} < 0$$

A megoldás: $-1 < p < 0$ *vagy* $0 < p < 2$.

2.4.29 Megoldás *Az egyenletnek pontosan akkor van két azonos megoldása, ha a diszkrimináns nulla.*

$$D = k^2 - 4(3-k) = 0 \Leftrightarrow k^2 + 4k - 12 = 0 \Leftrightarrow (k+6)(k-2) = 0$$

A megoldás: $k_1 = -6, k_2 = 2$.

2.4.30 Megoldás *Az egyenletnek pontosan akkor van két különböző valós megoldása, ha a diszkrimináns pozitív.*

$$D = (k+3)^2 - 16 > 0 \Leftrightarrow k^2 + 6k - 7 > 0 \Leftrightarrow (k+7)(k-1) > 0$$

A megoldás: $k < -7$ *vagy* $k > 1$.

2.4.31 Megoldás *Az egyenletnek pontosan nincs valós megoldása, ha a diszkrimináns negatív.*

$$D = k^2 + 4(2k-5) < 0 \Leftrightarrow k^2 + 8k - 20 < 0 \Leftrightarrow (k+10)(k-2) < 0$$

A megoldás: $-10 < k < 2$.

2.4.32 Megoldás *Mivel a parabola csúcspontja* $(1, -1)$ *és átmegy a* $(2, 0)$ *ponton, ezért átmegy a* $(0, 0)$ *ponton is, hiszen szimmetrikus az* $x = 1$ *egyenletű egyenesre. A három pont koordinátáit behelyettesítve a parabola egyenletébe, a következő egyenletrendszert kapjuk:* $-1 = a + b + c$, $0 = 4a + 2b + c$, $0 = c$, *ahonnan* $a = 1$, $b = -2$. *A parabola egyenlete:* $y = x^2 - 2x$.

2.4.33 Megoldás

$$f(x) = -3x^2 + 2x + 5 = -3\left(x^2 - \frac{2}{3}x - \frac{5}{3}\right) = -3\left[\left(x - \frac{1}{3}\right)^2 - \frac{1}{9} - \frac{5}{3}\right] =$$
$$= -3\left(x - \frac{1}{3}\right)^2 + \frac{16}{3}$$

A maximum értéke $\frac{16}{3}$.

2.4.34 Megoldás

$$f(x) = 2x^2 - 5x + 1 = 2\left(x^2 - \frac{5}{2}x + \frac{1}{2}\right) = 2\left[\left(x - \frac{5}{4}\right)^2 - \frac{25}{16} + \frac{1}{2}\right] =$$
$$= 2\left(x - \frac{5}{4}\right)^2 - \frac{17}{8}$$

A minimum értéke $-\frac{17}{8}$.

2.5. Gyökös, exponenciális, logaritmusos egyenletek és egyenlőtlenségek

2.5.1 Megoldás *A négyzetgyökjel alatti kifejezések nemnegatívak, azaz* $\frac{2}{3} - 5x \geq 0$ *és* $3x + \frac{1}{2} \geq 0$, *így* $-\frac{1}{6} \leq x \leq \frac{2}{15}$ *lehet csak.* $\sqrt{\frac{2}{3} - 5x} - \sqrt{3x + \frac{1}{2}} = 0 \Rightarrow \frac{2}{3} - 5x = 3x + \frac{1}{2}$, *ahonnan a megoldás:* $x = \frac{1}{48}$.

2.5.2 Megoldás *A négyzetgyökjel alatti kifejezések nemnegatívak, azaz* $x + 2 \geq 0$ *és* $1 - 3x \geq 0$, *így* $-2 \leq x \leq \frac{1}{3}$ *lehet csak. Mivel* $\sqrt{x+2} \geq 0$ *és* $\sqrt{1 - 3x} \geq 0$, *ezért az összegük csak úgy lehet 0, ha mindkét kifejezés értéke 0, azaz* $x + 2 = 0$ *és* $1 - 3x = 0$. *Ez azonban ellentmondásra vezet, így a feladatnak nincs megoldása.*

2.5.3 Megoldás *A négyzetgyökjel alatti kifejezés nemnegatív, azaz* $10-x \geq 0$*. Mivel a bal oldal nemnegatív, ezért* $x-10 \geq 0$ *is teljesül, így a megoldás:* $x=10$*.*

2.5.4 Megoldás *A négyzetgyökjel alatti kifejezés nemnegatív, azaz* $4x-7 \geq 0$*, így* $x \geq \frac{7}{4}$*. Mivel a bal oldal nemnegatív, ezért* $1-x \geq 0$ *is teljesül, azaz* $x \leq 1$*. Ez azonban ellentmondás, így a feladatnak nincs megoldása.*

2.5.5 Megoldás *A négyzetgyökjel alatti kifejezés nemnegatív, azaz* $2x^2-3x-10 \geq 0$*, ahonnan* $x \leq \frac{3-\sqrt{89}}{4} \approx -1{,}6$ *vagy* $x \geq \frac{3+\sqrt{89}}{4} \approx 3{,}1$*. Az egyenletet átrendezve:* $\sqrt{2x^2-3x-10}=x$*. Mivel a bal oldal nemnegatív, ezért* $x \geq 0$ *is teljesül, így megoldásként csak* $3{,}1$*-nél nagyobb értékek jöhetnek szóba. Négyzetre emelve:* $2x^2-3x-10=x^2$ $\Rightarrow x^2-3x-10=(x-5)(x+2)=0$*, ahonnan* $x=5$ *vagy* $x=-2$*, de ez utóbbi nem lehet, tehát a megoldás:* $x=5$*.*

2.5.6 Megoldás *A négyzetgyökjel alatti kifejezések nemnegatívak, azaz* $2-x \geq 0$ *és* $x+7 \geq 0$*, így* $-7 \leq x \leq 2$*. Az egyenletet átrendezve:* $\sqrt{2-x}=\sqrt{x+7}-3$*. Mivel a bal oldal nemnegatív, ezért* $\sqrt{x+7}-3 \geq 0$ *is teljesül, ahonnan* $x+7 \geq 9$*, azaz* $x \geq 2$*. A feltételekből csak* $x=2$ *jöhet szóba, ami megoldása az egyenletnek.*

2.5.7 Megoldás *A négyzetgyökjel alatti kifejezések nemnegatívak, azaz* $x-4 \geq 0$*,* $x-1 \geq 0$ *és* $x+4 \geq 0$*, ahonnan* $x \geq 4$*. Négyzetre emelve:*

$$x-4+2\sqrt{(x-4)(x-1)}+x-1=x+4 \Rightarrow 2\sqrt{(x-4)(x-1)}=9-x$$

Ismét négyzetre emelve: $4(x^2-5x+4)=x^2-18x+81 \Rightarrow 3x^2-2x-65=0$*, ahonnan* $x=5$ *vagy* $x=-\frac{13}{3}$*, de ez utóbbi nem lehet, tehát a megoldás:* $x=5$*.*

2.5.8 Megoldás *Legyen* $y:=\sqrt[3]{x}$*. Ekkor* $x+3\sqrt[3]{x^2}-18\sqrt[3]{x}=0 \Leftrightarrow y^3+3y^2-18y=0$ $\Leftrightarrow y(y^2+3y-18)=0 \Leftrightarrow y(y+6)(y-3)=0$*, ahonnan* $y_1=0$*,* $y_2=-6$*,* $y_3=3$*. A megoldás:* $x_1=0$*,* $x_2=-216$*,* $x_3=27$*.*

2.5.9 Megoldás *A négyzetgyökjel alatti kifejezések nemnegatívak, továbbá a tört nevezője nem 0, így* $9-5x \geq 0$ *és* $3-x>0$*, ahonnan* $x \leq \frac{9}{5}$*. Négyzetre emelve:* $9-5x=3-x+12+\frac{36}{3-x} \Rightarrow \frac{18}{x-3}=2x+3 \Rightarrow 2x^2-3x-27=0$*, ahonnan* $x=-3$ *vagy* $x=\frac{9}{2}$*, de ez utóbbi nem lehet, így a megoldás:* $x=-3$*.*

2.5.10 Megoldás *Feltételek:* $x+1 \geq 0$, $\sqrt{x+1}-1 \neq 0$ *és* $x-2 \neq 0$, *azaz* $x \geq -1$, $x \neq 0$ *és* $x \neq 2$. *Legyen* $a := \sqrt{x+1} \geq 0$. *Ekkor*

$$\frac{\sqrt{x+1}+2}{\sqrt{x+1}-1} = \frac{x+1}{x-2} \Rightarrow \frac{a+2}{a-1} = \frac{a^2}{a^2-3} \Rightarrow (a+2)(a^2-3) = a^2(a-1) \Rightarrow$$
$$a^2 - a - 2 = 0 \Rightarrow (a-2)(a+1) = 0$$

Mivel $a+1>0$, *ezért* $a=2$, *tehát a megoldás:* $x=3$.

2.5.11 Megoldás *Feltétel:* $x \geq -2$. *Legyen* $a := \sqrt{x+2} \geq 0$. *Ekkor*

$$\sqrt{x+6-4\sqrt{x+2}} + \sqrt{x+11-6\sqrt{x+2}} = 1 \Rightarrow \sqrt{a^2+4-4a} + \sqrt{a^2+9-6a} = 1 \Rightarrow$$
$$\sqrt{(a-2)^2} + \sqrt{(a-3)^2} = 1 \Rightarrow |a-2| + |a-3| = 1$$

Ha $a \geq 3$, *akkor az egyenlet:* $(a-2)+(a-3)=1$, *ahonnan* $a=3$, *így* $x=7$.
Ha $2 \leq a < 3$, *akkor az egyenlet:* $(a-2)-(a-3)=1$, *ami azonosság, ahonnan* $2 \leq \sqrt{x+2} < 3$, *így* $2 \leq x < 7$.
Ha $0 \leq a < 2$, *akkor az egyenlet:* $-(a-2)-(a-3)=1$, *ahonnan* $a=2$, *de ez nem lehet.*
A megoldás: $2 \leq x \leq 7$.

2.5.12 Megoldás *Az egyenlőtlenséget átalakítva:* $(x+2)\sqrt{(x-1)^2+2} \geq 0$. *Mivel a gyökjel alatti kifejezés pozitív, ezért az egyenlőtlenség pontosan akkor teljesül, ha* $x \geq -2$.

2.5.13 Megoldás *Feltétel:* $4x+17 \geq 0$, *azaz* $x \geq -\frac{17}{4}$. *A bal oldal nemnegatív, így az egyenlőtlenség nyilvánvalóan teljesül, ha* $x+3<0$, *azaz* $-\frac{17}{4} \leq x < -3$. *Ha* $x \geq -3$, *akkor mindkét oldal nemnegatív, így négyzetre emelve:*

$$4x+17 > x^2+6x+9 \Rightarrow x^2+2x-8 < 0 \Rightarrow (x+4)(x-2) < 0 \Rightarrow -4 < x < 2,$$

ahonnan $-3 \leq x < 2$. *A megoldás:* $-\frac{17}{4} \leq x < 2$.

2.5.14 Megoldás $2^{|x+1|+x} = 2 \Rightarrow |x+1|+x = 1$. *Ha* $x \geq -1$, *akkor az egyenlet:* $(x+1)+x=1$, *ahonnan* $x=0$. *Ha* $x<-1$, *akkor az egyenlet:* $-(x+1)+x=1$, *ami ellentmondásra vezet. A megoldás:* $x=0$.

2.5.15 Megoldás

$$3^{x-1}+3^x+3^{x+1} = 39 \Rightarrow 3^x\left(\frac{1}{3}+1+3\right) = 39 \Rightarrow 3^x \cdot \frac{13}{3} = 39 \Rightarrow 3^x = 9$$

A megoldás: $x=2$.

2.5.16 Megoldás

$$2^x\,(1+38\cdot 2+4)=3^x(1+2\cdot 3+9)\Rightarrow 2^x\cdot 81=3^x\cdot 16\Rightarrow \left(\frac{2}{3}\right)^x=\left(\frac{2}{3}\right)^4$$

A megoldás: $x=4$.

2.5.17 Megoldás

$$\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{2x+3}{2x-1}}=\left(\frac{1}{4}\right)^{\frac{x+9}{2x+2}}\Rightarrow \frac{2x+3}{2x-1}=2\cdot\frac{x+9}{2x+2}\Rightarrow (2x+3)(x+1)=(x+9)(2x-1)\Rightarrow$$
$$2x^2+5x+3=2x^2+17x-9\Rightarrow 12x=12$$

A megoldás: $x=1$.

2.5.18 Megoldás *Feltétel:* $x\neq -3$.

$$3^{2x^2+2x-12}=9^{\frac{x-2}{x+3}}\Rightarrow 9^{x^2+x-6}=9^{\frac{x-2}{x+3}}\Rightarrow (x+3)(x-2)=\frac{x-2}{x+3}\Rightarrow$$
$$(x+3)^2(x-2)-(x-2)=0\Rightarrow (x-2)\left[(x+3)^2-1\right]=0\Rightarrow$$
$$(x-2)(x+2)(x+4)=0$$

A megoldás: $x_1=2$, $x_2=-2$, $x_3=-4$.

2.5.19 Megoldás

$$\left(\frac{25}{4}\right)^2\left(\frac{8}{125}\right)^{3x-1}=\left(\frac{5}{2}\right)^{1-x}\Rightarrow\left(\frac{5}{2}\right)^4\left(\frac{5}{2}\right)^{-3(3x-1)}=\left(\frac{5}{2}\right)^{1-x}\Rightarrow 4-9x+3=1-x$$

A megoldás: $x=\dfrac{3}{4}$.

2.5.20 Megoldás

$$2^{3x+4}\cdot\frac{8^{2x-1}}{\sqrt{16^{x+1}}}=\left(\frac{1}{64}\right)^{2-x}\Rightarrow 2^{3x+4}\cdot 2^{3(2x-1)}\cdot 2^{-2(x+1)}=2^{-6(2-x)}\Rightarrow$$
$$2^{7x-1}=2^{-12+6x}\Rightarrow 7x-1=-12+6x$$

A megoldás: $x=-11$.

2.5.21 Megoldás *Legyen* $a:=5^x>0$. *Ekkor az egyenlet:*

$$a=\frac{1}{a}+\frac{24}{5}\Rightarrow 5a^2-24a-5=0$$

ahonnan $a=5$ *vagy* $a=-\dfrac{1}{5}$, *de ez utóbbi nem lehet. Így a megoldás:* $x=1$.

2.5.22 Megoldás

$$\frac{1+4^{x-1}}{4^x}=\frac{17}{2^{x+3}}\Rightarrow 8(1+4^{x-1})=17\cdot 2^x\Rightarrow 8+2\cdot 4^x=17\cdot 2^x\Rightarrow$$
$$2\cdot(2^x)^2-17\cdot 2^x+8=0\Rightarrow 2^x=\frac{17\pm 15}{4}$$

Innen $2^x=8$ *vagy* $2^x=\frac{1}{2}$, *így a megoldás:* $x_1=3$, $x_2=-1$.

2.5.23 Megoldás *Feltétel:* $x\geq 0$.

$$4^x-4^{\sqrt{x}+1}=3\cdot 2^{x+\sqrt{x}}\Rightarrow (2^x)^2-4\cdot(2^{\sqrt{x}})^2=3\cdot 2^x\cdot 2^{\sqrt{x}}$$

Legyen $a:=2^x>0$ *és* $b:=2^{\sqrt{x}}>0$. *Ekkor az egyenlet:*

$$a^2-3ab-4b^2=0\Rightarrow(a-4b)(a+b)=0$$

Mivel $a+b>0$, *ezért az egyenlőség pontosan akkor teljesül, ha* $a=4b$, *így*

$$2^x=4\cdot 2^{\sqrt{x}}\Rightarrow 2^x=2^{2+\sqrt{x}}\Rightarrow x=2+\sqrt{x}\Rightarrow$$
$$\left(\sqrt{x}\right)^2-\sqrt{x}-2=0\Rightarrow(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}+1)=0$$

Mivel $\sqrt{x}+1>0$, *ezért az egyenlőség pontosan akkor teljesül, ha* $\sqrt{x}=2$, *így a megoldás:* $x=4$.
Megjegyzés: A feladat úgy is megoldható, hogy az $a^2-3ab-4b^2=0$ *egyenletet* b^2*-tel* ($b>0$) *elosztjuk, így* $\frac{a}{b}$*-re másodfokú egyenletet kapunk:* $\left(\frac{a}{b}\right)^2-3\left(\frac{a}{b}\right)-4=0$.

2.5.24 Megoldás *Legyen* $a:=3^x>0$. *Ekkor*

$$\sqrt{9^x+8-3^{x+2}}>3^x-5\Rightarrow\sqrt{a^2-9a+8}>a-5\Rightarrow\sqrt{(a-8)(a-1)}>a-5$$

Feltétel: $a\leq 1$ *vagy* $a\geq 8$, *mivel a négyzetgyökjel alatti kifejezés nemnegatív. Ha* $a\leq 1$, *akkor a jobb oldal negatív, így az egyenlőtlenség nyilvánvalóan teljesül. Innen* $3^x\leq 1$, *így* $x\leq 0$. *Ha* $a\geq 8$, *akkor a jobb oldal pozitív, így négyzetre emelve:*

$$a^2-9a+8>a^2-10a+25,$$

ahonnan $3^x>17$, *így* $x>\log_3 17$. *A megoldás:* $x\leq 0$ *vagy* $x>\log_3 17$.

2.5.25 Megoldás

$$4^{3-|x|}<32\Rightarrow 2^{6-2|x|}<2^5\Rightarrow 6-2|x|<5\Rightarrow|x|>\frac{1}{2}$$

A megoldás: $x<-\frac{1}{2}$ *vagy* $x>\frac{1}{2}$.

2.5.26 Megoldás

$$\left(\frac{2}{7}\right)^{10-3x} \leq \frac{49}{4} \Rightarrow \left(\frac{2}{7}\right)^{10-3x} \leq \left(\frac{2}{7}\right)^{-2} \Rightarrow 10-3x \geq -2$$

A megoldás: $x \leq 4$.

2.5.27 Megoldás

$$\left(\frac{1}{3}\right)^{x^2-x-17} > \frac{1}{27} \Rightarrow \left(\frac{1}{3}\right)^{x^2-x-17} > \left(\frac{1}{3}\right)^{3} \Rightarrow x^2-x-17 < 3 \Rightarrow (x-5)(x+4) < 0$$

A megoldás: $-4 < x < 5$.

2.5.28 Megoldás *Feltétel:* $x > 10$. *Azonos átalakításokkal:*

$$\lg(x-10) = 2(1-\lg 5) = 2 - 2\lg 5 = \lg 100 - \lg 5^2 = \lg\frac{100}{25} = \lg 4$$

Így $\lg(x-10) = \lg 4 \Rightarrow x - 10 = 4$, *tehát a megoldás:* $x = 14$.

2.5.29 Megoldás *Feltételek:* $x+4>0$, $x+2>0$ *és* $\log_7(x+2) \neq 0$, *ahonnan* $x > -2$ *és* $x \neq -1$.

$$\frac{\log_7(x+4)}{\log_7(x+2)} = 2 \Rightarrow \log_7(x+4) = 2\log_7(x+2) \Rightarrow \log_7(x+4) = \log_7(x+2)^2 \Rightarrow$$
$$x+4 = (x+2)^2 \Rightarrow x^2+3x = 0 \Rightarrow x(x+3) = 0$$

Innen $x = 0$ *vagy* $x = -3$, *de ez utóbbi nem lehet, így a megoldás:* $x = 0$.

2.5.30 Megoldás *Feltételek:* $x-5>0$ *és* $2x-3>0$, *ahonnan* $x > 5$.

$$\lg\sqrt{x-5} + \lg\sqrt{2x-3} + 1 = \lg 30 \Rightarrow \lg\sqrt{(x-5)(2x-3)} = \lg 30 - \lg 10 = \lg 3 \Rightarrow$$
$$\sqrt{(x-5)(2x-3)} = 3 \Rightarrow (x-5)(2x-3) = 9 \Rightarrow 2x^2 - 13x + 6 = 0 \Rightarrow x = \frac{13 \pm 11}{4}$$

innen $x = 6$ *vagy* $x = \frac{1}{2}$, *de ez utóbbi nem lehet, így a megoldás:* $x = 6$.

2.5.31 Megoldás *Feltételek:* $(x-4)(x+3) > 0$ *(azaz* $x < -3$ *vagy* $x > 4$*) és* $5x+4>0$, *ahonnan* $x > 4$.

$$\log_3[(x-4)(x+3)] = \log_3(5x+4) \Rightarrow (x-4)(x+3) = 5x+4 \Rightarrow$$
$$x^2 - 6x - 16 = 0 \Rightarrow (x-8)(x+2) = 0$$

ahonnan $x = 8$ *vagy* $x = -2$, *de ez utóbbi nem lehet, így a megoldás:* $x = 8$.

2.5.32 Megoldás *Feltételek:* $23x + 8$ *és* $4x + 4 > 0$, *ahonnan* $x > -\dfrac{8}{23}$.

$$\log_8(23x+8) - 2\log_8(4x+4) = -\frac{2}{3} \Rightarrow \log_8 \frac{23x+8}{(4x+4)^2} = -\frac{2}{3} \Rightarrow \frac{23x+8}{(4x+4)^2} = 8^{-\frac{2}{3}} \Rightarrow$$
$$\frac{23x+8}{16(x+1)^2} = \frac{1}{4} \Rightarrow 23x+8 = 4(x+1)^2 \Rightarrow 4x^2 - 15x - 4 = 0 \Rightarrow x = \frac{15 \pm 17}{8}$$

A megoldás: $x_1 = 4$, $x_2 = -\dfrac{1}{4}$.

2.5.33 Megoldás *Feltételek:* $x^2 - 3x = x(x-3) > 0$ *(azaz* $x < 0$ *vagy* $x > 3$*) és* $3 - x > 0$, *ahonnan* $x < 0$.

$$\lg\sqrt{x^2-3x} - \lg\sqrt{3-x} = \lg 5 \Rightarrow \lg\frac{\sqrt{x^2-3x}}{\sqrt{3-x}} = \lg 5 \Rightarrow \lg\sqrt{\frac{x(x-3)}{3-x}} = \lg 5 \Rightarrow$$
$$\lg\sqrt{-x} = \lg 5 \Rightarrow \sqrt{-x} = 5 \Rightarrow -x = 25$$

A megoldás: $x = -25$.

2.5.34 Megoldás *Feltételek:* $x^2+2x-3 = (x-1)(x+3) > 0$, *azaz* $x < -3$ *vagy* $x > 1$. *Ekkor* $\dfrac{x-1}{x+3} > 0$ *is teljesül.*

$$\ln(x^2+2x-3) = \ln\frac{x-1}{x+3} \Rightarrow (x-1)(x+3) = \frac{x-1}{x+3} \Rightarrow$$
$$(x+3)^2(x-1) - (x-1) = 0 \Rightarrow (x-1)\left[(x+3)^2 - 1\right] = 0 \Rightarrow$$
$$(x-1)(x+2)(x+4) = 0$$

Innen a feltétel figyelembevételével a megoldás: $x = -4$.

2.5.35 Megoldás *Felhasználva, hogy* $2\lg 2 - 1 = \lg 4 - \lg 10 = \lg\dfrac{2}{5}$, *az egyenlet a következő alakra hozható:* $\lg\dfrac{2(x^3+1)}{5} = \lg\left(\dfrac{1}{x^3}+1\right) \Rightarrow \dfrac{2(x^3+1)}{5} = \left(\dfrac{1}{x^3}+1\right)$. *Legyen* $y = x^3$. *Ekkor* $2y^2 - 3y - 5 = 0$, *ahonnan* $y = -1$ *vagy* $y = \dfrac{5}{2}$, *de könnyen látható, hogy* $y = -1$ *nem lehet. A megoldás:* $x = \sqrt[3]{\dfrac{5}{2}}$.

2.5.36 Megoldás *A logaritmus definíciója alapján:* $x^3 = x^3 + 3x^2 - 27 \Rightarrow x^2 = 9$, *ahonnan* $x = 3$ *vagy* $x = -3$, *de ez utóbbi nem lehet, mivel a logaritmus alapja pozitív. A megoldás:* $x = 3$.

2.5.37 Megoldás *Feltételek:* $x+1>0$ *és* $x+1\neq 1$, *azaz* $x>-1$ *és* $x\neq 0$. *A logaritmus definíciója alapján:* $(x+1)^2=2x^2+1 \Rightarrow x^2+2x+1=2x^2+1 \Rightarrow x^2-2x=x(x-2)=0$, *ahonnan* $x=2$ *vagy* $x=0$, *de ez utóbbi nem lehet. A megoldás:* $x=2$.

2.5.38 Megoldás *A logaritmus definíciója alapján:*

$$\log_2(\log_3(\log_4 x))=0 \Rightarrow \log_3(\log_4 x)=1 \Rightarrow \log_4 x=3 \Rightarrow x=4^3=64$$

2.5.39 Megoldás *A logaritmus definíciója alapján:*

$$\log_{\frac{1}{4}}(\log_{16}(\log_2 x))=1 \Rightarrow \log_{16}(\log_2 x)=\frac{1}{4} \Rightarrow \log_2 x=16^{\frac{1}{4}}=2 \Rightarrow x=2^2=4$$

2.5.40 Megoldás *Feltétel:* $x^2-2x=x(x-2)>0$, *ahonnan* $x<0$ *vagy* $x>2$.

$$\log_3(x^2-2x)<0=\log_3 1 \Rightarrow x^2-2x<1 \Rightarrow x^2-2x-1<0$$

Az $x^2-2x-1<0$ *egyenlőtlenségből:* $1-\sqrt{2}<x<1+\sqrt{2}$. *Így a feltétel figyelembevételével a feladat megoldása:* $1-\sqrt{2}<x<0$ *vagy* $2<x<1+\sqrt{2}$.

2.5.41 Megoldás *Feltétel:* $5-6x>0$, *ahonnan* $x<\frac{5}{6}$.

$$\log_4(5-6x)\leq 2=\log_4 16 \Rightarrow 5-6x\leq 16 \Rightarrow -\frac{11}{6}\leq x$$

A megoldás: $-\frac{11}{6}\leq x<\frac{5}{6}$.

2.5.42 Megoldás *Feltétel:* $3x-4>0$, *ahonnan* $x>\frac{4}{3}$.

$$\log_{\frac{1}{2}}(3x-4)>\log_2\frac{1}{8}=-3=\log_{\frac{1}{2}}8 \Rightarrow 3x-4<8 \Rightarrow x<4$$

A megoldás: $\frac{4}{3}<x<4$.

2.5.43 Megoldás *Feltétel:* $x^2+3x-1>0$, *ahonnan* $x<\dfrac{-3-\sqrt{13}}{2}\approx -3{,}3$ *vagy* $x>\dfrac{-3+\sqrt{13}}{2}\approx 0{,}3$.

$$\log_{\frac{1}{3}}(x^2+3x-1)<-1=\log_{\frac{1}{3}}3 \Rightarrow$$
$$x^2+3x-1>3 \Rightarrow x^2+3x-4=(x+4)(x-1)>0$$

A megoldás: $x<-4$ *vagy* $x>1$.

2.6. Trigonometrikus azonosságok és egyenletek

2.6.1 Megoldás

	$0°$	$30°$	$45°$	$60°$	$90°$	$135°$	$180°$	$210°$	$240°$	$270°$	$300°$	$315°$
$\sin\varphi$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{1}{\sqrt{2}}$
$\cos\varphi$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{\sqrt{2}}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$
$\operatorname{tg}\varphi$	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$	$-$	-1	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	$\sqrt{3}$	$-$	$-\sqrt{3}$	-1

2.6.2 Megoldás *A következő összefüggések felhasználásával a hiányzó értékek kiszámíthatók:* $\cos^2\varphi + \sin^2\varphi = 1 \Rightarrow 1 + \operatorname{tg}^2\varphi = \frac{1}{\cos^2\varphi} \Rightarrow \cos^2\varphi = \frac{1}{1+\operatorname{tg}^2\varphi}$

$\sin\varphi$	$\frac{3}{4}$	$\pm\frac{\sqrt{119}}{12}$	$\frac{8}{17}$	$\pm\frac{35}{37}$	$\pm\frac{16}{65}$	$\pm\frac{21}{29}$
$\cos\varphi$	$\pm\frac{\sqrt{7}}{4}$	$\frac{5}{12}$	$\pm\frac{15}{17}$	$\pm\frac{12}{37}$	$\frac{63}{65}$	$\pm\frac{20}{29}$
$\operatorname{tg}\varphi$	$\pm\frac{3}{\sqrt{7}}$	$\pm\frac{\sqrt{119}}{5}$	$\pm\frac{8}{15}$	$\frac{35}{12}$	$\pm\frac{16}{63}$	$\frac{21}{20}$

2.6.3 Megoldás

- $\sin 2\varphi = 1 \Rightarrow 2\varphi = \frac{\pi}{2} + 2k\pi \Rightarrow \varphi = \frac{\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$
- $\sin 2\varphi = -\frac{1}{2} \Rightarrow 2\varphi = \frac{7\pi}{6} + 2k\pi$ vagy $2\varphi = \frac{11\pi}{6} + 2k\pi \Rightarrow \varphi = \frac{7\pi}{12} + k\pi$ vagy $\varphi = \frac{11\pi}{12} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$
- $\sin\frac{\varphi}{2} = -1 \Rightarrow \frac{\varphi}{2} = \frac{3\pi}{2} + 2k\pi \Rightarrow \varphi = 3\pi + 4k\pi, k \in \mathbb{Z}$
- $\sin\frac{\varphi}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \frac{\varphi}{2} = \frac{\pi}{3} + 2k\pi$ vagy $\frac{\varphi}{2} = \frac{2\pi}{3} + 2k\pi \Rightarrow \varphi = \frac{2\pi}{3} + 4k\pi$ vagy $\varphi = \frac{4\pi}{3} + 4k\pi, k \in \mathbb{Z}$
- $\cos 2\varphi = 0 \Rightarrow 2\varphi = \frac{\pi}{2} + k\pi \Rightarrow \varphi = \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$

- $\cos 2\varphi = \dfrac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow 2\varphi = \dfrac{\pi}{6} + 2k\pi$ vagy $2\varphi = -\dfrac{\pi}{6} + 2k\pi \Rightarrow \varphi = \dfrac{\pi}{12} + k\pi$ vagy $\varphi = -\dfrac{\pi}{12} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$
- $\cos \dfrac{\varphi}{2} = 1 \Rightarrow \dfrac{\varphi}{2} = 2k\pi \Rightarrow \varphi = 4k\pi, k \in \mathbb{Z}$
- $\cos \dfrac{\varphi}{2} = -\dfrac{1}{2} \Rightarrow \dfrac{\varphi}{2} = \dfrac{2\pi}{3} + 2k\pi$ vagy $\dfrac{\varphi}{2} = -\dfrac{2\pi}{3} + 2k\pi \Rightarrow \varphi = \dfrac{4\pi}{3} + 4k\pi$ vagy $\varphi = -\dfrac{4\pi}{3} + 4k\pi, k \in \mathbb{Z}$
- $\operatorname{tg} 2\varphi = 0 \Rightarrow 2\varphi = k\pi \Rightarrow \varphi = \dfrac{k\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$
- $\operatorname{tg} 2\varphi = -1 \Rightarrow 2\varphi = \dfrac{3\pi}{4} + k\pi \Rightarrow \varphi = \dfrac{3\pi}{8} + \dfrac{k\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$
- $\operatorname{tg} \dfrac{\varphi}{2} = 1 \Rightarrow \dfrac{\varphi}{2} = \dfrac{\pi}{4} + k\pi \Rightarrow \varphi = \dfrac{\pi}{2} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$
- $\operatorname{tg} \dfrac{\varphi}{3} = \dfrac{1}{\sqrt{3}} \Rightarrow \dfrac{\varphi}{3} = \dfrac{\pi}{6} + k\pi \Rightarrow \varphi = \dfrac{\pi}{2} + 3k\pi, k \in \mathbb{Z}$
- $\operatorname{ctg} 3\varphi = 1 \Rightarrow \operatorname{tg} 3\varphi = 1 \Rightarrow 3\varphi = \dfrac{\pi}{4} + k\pi \Rightarrow \varphi = \dfrac{\pi}{12} + \dfrac{k\pi}{3}, k \in \mathbb{Z}$
- $\operatorname{ctg} 3\varphi = -\dfrac{1}{\sqrt{3}} \Rightarrow \operatorname{tg} 3\varphi = -\sqrt{3} \Rightarrow 3\varphi = -\dfrac{\pi}{3} + k\pi \Rightarrow \varphi = -\dfrac{\pi}{9} + \dfrac{k\pi}{3}, k \in \mathbb{Z}$
- $\operatorname{ctg} \dfrac{\varphi}{3} = -\sqrt{3} \Rightarrow \operatorname{tg} \dfrac{\varphi}{3} = -\dfrac{1}{\sqrt{3}} \Rightarrow \dfrac{\varphi}{3} = -\dfrac{\pi}{6} + k\pi \Rightarrow \varphi = -\dfrac{\pi}{2} + 3k\pi, k \in \mathbb{Z}$
- $\operatorname{ctg} \dfrac{\varphi}{2} = 0 \Rightarrow \dfrac{\varphi}{2} = \dfrac{\pi}{2} + k\pi \Rightarrow \varphi = \pi + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$

2.6.4 Megoldás

- $\sin^2 \varphi = 1 \Rightarrow \sin \varphi = \pm 1 \Rightarrow \varphi = \dfrac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$
- $\cos^2 \varphi = \dfrac{1}{2} \Rightarrow \cos \varphi = \pm \dfrac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow \varphi = \dfrac{\pi}{4} + \dfrac{k\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$
- $\operatorname{tg}^2 \varphi = 3 \Rightarrow \operatorname{tg} \varphi = \pm\sqrt{3} \Rightarrow \varphi = \dfrac{\pi}{3} + k\pi$ vagy $\varphi = -\dfrac{\pi}{3} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$

- $\sin\varphi = \operatorname{ctg}\varphi \Rightarrow \sin\varphi = \dfrac{\cos\varphi}{\sin\varphi} \Rightarrow 1-\cos^2\varphi = \cos\varphi \Rightarrow \cos^2\varphi + \cos\varphi - 1 = 0 \Rightarrow$
  $\cos\varphi = \dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}$ (a másik gyök nem megfelelő, mivel -1-nél kisebb) $\Rightarrow$
  $\varphi = \pm\arccos\dfrac{-1+\sqrt{5}}{2} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$
- $\sin\varphi = -\operatorname{ctg}\varphi \Rightarrow \sin\varphi = -\dfrac{\cos\varphi}{\sin\varphi} \Rightarrow 1-\cos^2\varphi = -\cos\varphi \Rightarrow \cos^2\varphi - \cos\varphi - 1 = 0$
  $\Rightarrow \cos\varphi = \dfrac{1-\sqrt{5}}{2}$ (a másik gyök nem megfelelő, mivel 1-nél nagyobb) $\Rightarrow$
  $\varphi = \pm\arccos\dfrac{1-\sqrt{5}}{2} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$
- $\cos\varphi = \operatorname{tg}\varphi \Rightarrow \cos\varphi = \dfrac{\sin\varphi}{\cos\varphi} \Rightarrow 1-\sin^2\varphi = \sin\varphi \Rightarrow \sin^2\varphi + \sin\varphi - 1 = 0 \Rightarrow$
  $\sin\varphi = \dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}$ (a másik gyök nem megfelelő, mivel -1-nél kisebb) $\Rightarrow$
  $\varphi = \arcsin\dfrac{-1+\sqrt{5}}{2} + 2k\pi$ vagy $\varphi = \pi - \arcsin\dfrac{-1+\sqrt{5}}{2} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$

2.6.5 Megoldás

- $\sin^2\varphi = \dfrac{\sin^2\varphi}{\cos^2\varphi + \sin^2\varphi} = \dfrac{\operatorname{tg}^2\varphi}{1+\operatorname{tg}^2\varphi} \Rightarrow \sin\varphi = \dfrac{\operatorname{tg}\varphi}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\varphi}}$
- $\cos^2\varphi = \dfrac{\cos^2\varphi}{\cos^2\varphi + \sin^2\varphi} = \dfrac{1}{1+\operatorname{tg}^2\varphi} \Rightarrow \cos\varphi = \dfrac{1}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\varphi}}$
- $\operatorname{tg}^2\varphi = \dfrac{\sin^2\varphi}{\cos^2\varphi} = \dfrac{\sin^2\varphi}{1-\sin^2\varphi} \Rightarrow \operatorname{tg}\varphi = \dfrac{\sin\varphi}{\sqrt{1-\sin^2\varphi}} = \dfrac{1}{\sqrt{\dfrac{1}{\sin^2\varphi} - 1}}$
- $\operatorname{tg}^2\varphi = \dfrac{\sin^2\varphi}{\cos^2\varphi} = \dfrac{1-\cos^2\varphi}{\cos^2\varphi} \Rightarrow \operatorname{tg}\varphi = \dfrac{\sqrt{1-\cos^2\varphi}}{\cos\varphi} = \sqrt{\dfrac{1}{\cos^2\varphi} - 1}$

2.6.6 Megoldás

- $\cos^2\varphi + \sin^2\varphi = 1$, $\cos^2\varphi - \sin^2\varphi = \cos 2\varphi \Rightarrow \sin^2\varphi = \dfrac{1-\cos 2\varphi}{2}$,
  $\cos^2\varphi = \dfrac{1+\cos 2\varphi}{2}$

- $\sin\varphi = \dfrac{2\sin\frac{\varphi}{2}\cos\frac{\varphi}{2}}{\cos^2\frac{\varphi}{2}+\sin^2\frac{\varphi}{2}} = \dfrac{\dfrac{2\sin\frac{\varphi}{2}\cos\frac{\varphi}{2}}{\cos^2\frac{\varphi}{2}}}{\dfrac{\cos^2\frac{\varphi}{2}+\sin^2\frac{\varphi}{2}}{\cos^2\frac{\varphi}{2}}} = \dfrac{2\operatorname{tg}\frac{\varphi}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{\varphi}{2}} = \dfrac{2t}{1+t^2}$
- $\cos\varphi = \dfrac{\cos^2\frac{\varphi}{2}-\sin^2\frac{\varphi}{2}}{\cos^2\frac{\varphi}{2}+\sin^2\frac{\varphi}{2}} = \dfrac{1-\operatorname{tg}^2\frac{\varphi}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{\varphi}{2}} = \dfrac{1-t^2}{1+t^2}$

2.6.7 Megoldás

- $\cos\alpha = \dfrac{1}{2}$, $\sin\alpha = -\dfrac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \alpha = -\dfrac{\pi}{3} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$
- $\cos\alpha = -\dfrac{\sqrt{3}}{2}$, $\sin\alpha = \dfrac{1}{2} \Rightarrow \alpha = \dfrac{5\pi}{6} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$
- $\operatorname{tg}\alpha = 1$ és α a harmadik síknegyedben van $\Rightarrow \alpha = \dfrac{5\pi}{4} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$

2.6.8 Megoldás

$$\sin\varphi(\operatorname{tg}\varphi + \operatorname{ctg}\varphi) + \cos\varphi(\operatorname{tg}\varphi + \operatorname{ctg}\varphi) = (\sin\varphi + \cos\varphi)\left(\frac{\sin\varphi}{\cos\varphi} + \frac{\cos\varphi}{\sin\varphi}\right) =$$
$$(\sin\varphi + \cos\varphi)\cdot\frac{\sin^2\varphi + \cos^2\varphi}{\sin\varphi\cos\varphi} = \frac{\sin\varphi + \cos\varphi}{\sin\varphi\cos\varphi} = \frac{1}{\cos\varphi} + \frac{1}{\sin\varphi}$$

2.6.9 Megoldás

$$\begin{aligned}
&(\sin\varphi - \cos\varphi)(1 + \sin\varphi\cos\varphi) + (\sin\varphi + \cos\varphi)(1 - \sin\varphi\cos\varphi) = \\
&2\sin\varphi + (\sin^2\varphi\cos\varphi - \sin\varphi\cos^2\varphi) + (-\sin^2\varphi\cos\varphi - \sin\varphi\cos^2\varphi) = \\
&2\sin\varphi - 2\sin\varphi\cos^2\varphi = 2\sin\varphi(1 - \cos^2\varphi) = 2\sin^3\varphi
\end{aligned}$$

2.6.10 Megoldás

$$\operatorname{tg}\frac{21\pi}{4} + \sqrt[5]{\sin(-7\pi)} = \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} + 5\pi\right) + \sqrt[5]{0} = \operatorname{tg}\frac{\pi}{4} = 1$$

2.6.11 Megoldás

$$\begin{aligned}
&\log_\pi\left[\left(\cos\frac{2\pi}{3} + \sin\frac{2\pi}{3}\right)^2 - \sin\frac{4\pi}{3}\right] = \\
&\log_\pi\left(\cos^2\frac{2\pi}{3} + \sin^2\frac{2\pi}{3} + 2\cos\frac{2\pi}{3}\sin\frac{2\pi}{3} - \sin\frac{4\pi}{3}\right) = \\
&\log_\pi\left(1 + \sin\frac{4\pi}{3} - \sin\frac{4\pi}{3}\right) = \log_\pi 1 = 0
\end{aligned}$$

2.6.12 Megoldás

$$8\cos 2x + 7\cos^2 x = 5\sin x + \frac{27}{4} \Rightarrow 8(\cos^2 x - \sin^2 x) + 7\cos^2 x = 5\sin x + \frac{27}{4} \Rightarrow$$
$$8(1 - 2\sin^2 x) + 7(1 - \sin^2 x) = 5\sin x + \frac{27}{4} \Rightarrow 23\sin^2 x + 5\sin x - \frac{33}{4} = 0 \Rightarrow$$
$$\sin x = \frac{-5 \pm 28}{46}$$

Innen $\sin x = \frac{1}{2}$ *vagy* $\sin x = -\frac{33}{46}$, *de ez utóbbi nem lehet, mivel* $x \in [0, \pi]$.
A megoldás: $x_1 = \frac{\pi}{6}$, $x_2 = \frac{5\pi}{6}$.

2.6.13 Megoldás *A feladat megoldásához felhasználjuk, hogy minden p pozitív számra* $p + \frac{1}{p} \geq 2$, *és az egyenlőség pontosan akkor teljesül, ha* $p = 1$.
(Ugyanis, $p + \frac{1}{p} \geq 2 \Leftrightarrow p^2 - 2p + 1 \geq 0 \Leftrightarrow (p-1)^2 \geq 0$.*) Mivel* $x \in \,]0, \frac{\pi}{4}]$ *esetén* $\operatorname{tg} x > 0$ *és* $\operatorname{ctg} x > 0$, *ezért*

$$\left(\operatorname{tg} x + \frac{1}{\operatorname{tg} x}\right) + \left(\operatorname{ctg} x + \frac{1}{\operatorname{ctg} x}\right) \geq 4$$

és az egyenlőség pontosan akkor teljesül, ha $\operatorname{tg} x = 1$, *azaz* $x = \frac{\pi}{4}$.

2.6.14 Megoldás

$$\sqrt{1 - \cos^2 x} - \cos 2x = 0 \Rightarrow |\sin x| - (\cos^2 x - \sin^2 x) = 0 \Rightarrow 2\sin^2 x + |\sin x| - 1 = 0$$

Ha $\sin x \geq 0$, *azaz* $0 \leq x \leq \pi$ *vagy* $x = 2\pi$, *akkor az egyenlet:* $2\sin^2 x + \sin x - 1 = 0$, *ahonnan* $\sin x = \frac{1}{2}$ *vagy* $\sin x = -1$, *de ez utóbbi nem lehet. Innen a megoldás:* $x_1 = \frac{\pi}{6}$, $x_2 = \frac{5\pi}{6}$.
Ha $\sin x < 0$, *azaz* $\pi < x < 2\pi$, *akkor az egyenlet:* $2\sin^2 x - \sin x - 1 = 0$, *ahonnan* $\sin x = -\frac{1}{2}$ *vagy* $\sin x = 1$, *de ez utóbbi nem lehet. Innen a megoldás:* $x_3 = \frac{7\pi}{6}$, $x_4 = \frac{11\pi}{6}$.

2.6.15 Megoldás

$$\sin x + \cos^3 x = \cos x + \sin^3 x \Rightarrow \sin x(1 - \sin^2 x) = \cos x(1 - \cos^2 x) \Rightarrow$$
$$\sin x \cos^2 x = \cos x \sin^2 x \Rightarrow \sin x \cos x(\cos x - \sin x) = 0$$

Innen $\sin x = 0$ *vagy* $\cos x = 0$ *vagy* $\cos x = \sin x$. *A megoldás:* $x = \frac{\pi}{2} + \frac{k\pi}{2}$ *vagy* $x = \frac{\pi}{4} + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

2.6.16 Megoldás

$$\begin{aligned}&3\cos 2x = -\sin x + 3 \Rightarrow 3(\cos^2 x - \sin^2 x) = -\sin x + 3 \Rightarrow\\&3(1 - 2\sin^2 x) = -\sin x + 3 \Rightarrow 6\sin^2 x - \sin x = 0 \Rightarrow\\&\sin x(6\sin x - 1) = 0\end{aligned}$$

Innen $\sin x = 0$ *vagy* $\sin x = \frac{1}{6}$*. A megoldás:* $x = k\pi$ *vagy* $x = \arcsin\frac{1}{6} + 2k\pi$ *vagy* $x = \pi - \arcsin\frac{1}{6} + 2k\pi$*,* $k \in \mathbb{Z}$*.*

2.6.17 Megoldás

$$4\cos^2 x + 8\sin x + 1 = 0 \Rightarrow 4(1 - \sin^2 x) + 8\sin x + 1 = 0 \Rightarrow 4\sin^2 x - 8\sin x - 5 = 0$$

Innen $\sin x = \frac{8-12}{8} = -\frac{1}{2}$ *(a másik gyök nem megfelelő, mivel* 1*-nél nagyobb).*
A megoldás: $x = \frac{7\pi}{6} + 2k\pi$ *vagy* $x = \frac{11\pi}{6} + 2k\pi$*,* $k \in \mathbb{Z}$*.*

2.6.18 Megoldás *Feltétel:* $\cos x \neq 0$.

$$\begin{aligned}&\cos x + \frac{\sin^2 x}{\cos x} + \sin x + \sin 2x = \frac{1}{\cos x} \Rightarrow\\&\cos^2 x + \sin^2 x + \sin x\cos x + \sin 2x\cos x = 1 \Rightarrow 1 + \sin x\cos x + 2\sin x\cos^2 x = 1 \Rightarrow\\&\sin x\cos x(1 + 2\cos x) = 0\end{aligned}$$

Innen $\sin x = 0$ *vagy* $\cos x = -\frac{1}{2}$*. A megoldás:* $x = k\pi$ *vagy* $x = \pm\frac{2\pi}{3} + 2k\pi$*,* $k \in \mathbb{Z}$*.*

2.6.19 Megoldás *Feltétel:* $x \neq \frac{k\pi}{4}, k \in \mathbb{Z}$

$$\begin{aligned}&\frac{\cos 2x}{\operatorname{ctg}^2 x - \operatorname{tg}^2 x} = \frac{1}{4}\sin^2 2x \Rightarrow \frac{\cos^2 x - \sin^2 x}{\dfrac{\cos^2 x}{\sin^2 x} - \dfrac{\sin^2 x}{\cos^2 x}} = \frac{1}{4}(2\sin x\cos x)^2 \Rightarrow\\&\frac{\cos^2 x - \sin^2 x}{\cos^4 x - \sin^4 x} \cdot \sin^2 x\cos^2 x = \sin^2 x\cos^2 x \Rightarrow\\&\frac{\cos^2 x - \sin^2 x}{(\cos^2 x - \sin^2 x)(\cos^2 x + \sin^2 x)} \cdot \sin^2 x\cos^2 x = \sin^2 x\cos^2 x\end{aligned}$$

Az egyenlet azonosság: $x \in \mathbb{R} \setminus \{\frac{k\pi}{4}, k \in \mathbb{Z}\}$*.*

2.6.20 Megoldás

$$\begin{aligned}
&(1-\cos 2x)^2+(1+\sin 2x)^2=1 \Rightarrow\\
&(1-2\cos 2x+\cos^2 2x)+(1+2\sin 2x+\sin^2 2x)=1 \Rightarrow\\
&2(1-\cos 2x+\sin 2x)=0 \Rightarrow\\
&(\cos^2 x+\sin^2 x)-(\cos^2 x-\sin^2 x)+2\sin x\cos x=0 \Rightarrow\\
&2\sin^2 x+2\sin x\cos x=0 \Rightarrow\\
&\sin x(\sin x+\cos x)=0
\end{aligned}$$

A szorzat pontosan akkor nulla, ha valamelyik tényezője nulla. A megoldás: $x=k\pi$ *vagy* $x=\dfrac{3\pi}{4}+k\pi$, $k\in\mathbb{Z}$.

2.6.21 Megoldás

$$\begin{aligned}
&\sin 3x-\cos 2x\cdot\sin x=\cos x \Rightarrow\\
&\sin(x+2x)-\cos 2x\cdot\sin x=\cos x \Rightarrow\\
&\sin x\cdot\cos 2x+\cos x\cdot\sin 2x-\cos 2x\cdot\sin x=\cos x \Rightarrow\\
&\cos x\cdot\sin 2x-\cos x=0 \Rightarrow\\
&\cos x(\sin 2x-1)=0
\end{aligned}$$

A szorzat pontosan akkor nulla, ha valamelyik tényezője nulla. A megoldás: $x=\dfrac{\pi}{2}+k\pi$ *vagy* $x=\dfrac{\pi}{4}+k\pi$, $k\in\mathbb{Z}$.

2.6.22 Megoldás

$$\begin{aligned}
&2\cos^3 x+\cos(\pi-x)=0 \Rightarrow\\
&2\cos^3 x-\cos x=0 \Rightarrow\\
&\cos x(2\cos^2 x-1)=0 \Rightarrow\\
&\cos x\cdot\cos 2x=0
\end{aligned}$$

A szorzat pontosan akkor nulla, ha valamelyik tényezője nulla. A megoldás: $x=\dfrac{\pi}{2}+k\pi$ *vagy* $x=\dfrac{\pi}{4}+\dfrac{k\pi}{2}$, $k\in\mathbb{Z}$.

2.6.23 Megoldás

$$\cos 15^\circ\cdot\sin 15^\circ=\frac{1}{2}\sin(2\cdot 15^\circ)=\frac{1}{4}$$

2.6.24 Megoldás

$$\sin 30^\circ \cdot \cos 15^\circ + \cos 30^\circ \cdot \sin 15^\circ = \sin(30^\circ + 15^\circ) = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

2.6.25 Megoldás

$$\cos 10^\circ \cdot \cos 20^\circ - \sin 10^\circ \cdot \sin 20^\circ = \cos(10^\circ + 20^\circ) = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

2.6.26 Megoldás

$$\cos^2 15^\circ - \sin^2 15^\circ = \cos(2 \cdot 15^\circ) = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

2.6.27 Megoldás

$$\sin 70^\circ \cdot \sin 40^\circ + \frac{1}{2}\cos 110^\circ = \sin 70^\circ \cdot \sin 40 + \frac{1}{2}(\cos 70^\circ \cos 40^\circ - \sin 70^\circ \sin 40^\circ) =$$

$$\frac{1}{2}(\cos 70^\circ \cos 40^\circ + \sin 70^\circ \sin 40^\circ) = \frac{1}{2}\cos(70^\circ - 40^\circ) = \frac{\sqrt{3}}{4}$$

2.6.28 Megoldás

$$\cos^2 22{,}5^\circ = \frac{1 + \cos(2 \cdot 22{,}5^\circ)}{2} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{2 + \sqrt{2}}{4}$$

2.7. Sorozatok; egyenletrendszerek

2.7.1 Megoldás $a_5 = a_1 + 4d = 17, a_7 = a_1 + 6d = 10 \Rightarrow d = -\frac{7}{2}, a_1 = 31.$ *Az első nyolc tag összege:*

$$S_8 = \frac{a_1 + a_8}{2} \cdot 8 = \frac{2a_1 + 7d}{2} \cdot 8 = 150$$

2.7.2 Megoldás *Legyenek a befogók* $a - d$, a, *az átfogó* $a + d$. *Ekkor* $(a - d)a = 300$, $(a - d)^2 + a^2 = (a + d)^2$. *Innen* $a = 20, d = 5$, *tehát az oldalak hossza* 15 *cm,* 20 *cm és* 25 *cm.*

2.7.3 Megoldás $S_{n+4} - S_n = a_{n+1} + a_{n+2} + a_{n+3} + a_{n+3} = 69 - 38 = 31 \Rightarrow$
$(a_1 + nd) + (a_1 + (n + 1)d) + (a_1 + (n + 2)d) + (a_1 + (n + 3)d) = 31 \Rightarrow$
$4a_1 + d(4n + 6) = 31 \Rightarrow 2a_1 = 14 - n.$

$$S_n = \frac{2a_1 + 0,5(n - 1)}{2}n = 38,$$

innen a) $n = 8, a_1 = 3$ *vagy b)* $n = 19, a_1 = -2{,}5.$

2.7.4 Megoldás *Felhasználva, hogy* $a_1 = a_2 - d$ *és* $a_3 = a_2 + d$, *az* $(a_2-d)+a_2+(a_2+d) = -12$ *egyenletet kapjuk, ahonnan* $a_2 = -4$. *A* $(-4-d)\cdot(-4)\cdot(-4+d) = 80$ *egyenletből* $d = \pm 6$. *A sorozat tagjai* $d = 6$ *esetén* $a_1 = -10, a_2 = -4, a_3 = 2$, $d = -6$ *esetén* $a_1 = 2, a_2 = -4, a_3 = -10$.

2.7.5 Megoldás *Felhasználva, hogy* $a_1 = \dfrac{a_2}{q}$ *és* $a_3 = a_2 \cdot q$, *az* $\dfrac{a_2}{q} \cdot q \cdot a_2 \cdot q = 729$ *egyenletet kapjuk, ahonnan* $a_2 = 9$. *A* $\dfrac{9}{q} + 9 + 9q = 39$ *egyenletből* $q = 3$ *vagy* $q = \dfrac{1}{3}$. *A sorozat tagjai* $q = 3$ *esetén* $a_1 = 3, a_2 = 9, a_3 = 27$, $q = \dfrac{1}{3}$ *esetén* $a_1 = 27, a_2 = 9, a_3 = 3$.

2.7.6 Megoldás *1.* $a_6 = a_2 \cdot q^4 \Rightarrow q^4 = 4 \Rightarrow q = \pm\sqrt{2}$.

$q = \sqrt{2}$ *esetén* $S_{10} = a_1 \cdot \dfrac{q^{10}-1}{q-1} = \dfrac{3}{\sqrt{2}} \cdot \dfrac{(\sqrt{2})^{10}-1}{\sqrt{2}-1} = 3 \cdot \dfrac{2^5-1}{2-\sqrt{2}} = \dfrac{93}{2-\sqrt{2}} = \dfrac{93(2+\sqrt{2})}{2}$

$q = -\sqrt{2}$ *esetén* $S_{10} = \dfrac{93(2-\sqrt{2})}{2}$

2. $a_9 = a_3 \cdot q^6 \Rightarrow q^6 = 8 \Rightarrow q = \pm\sqrt{2}$.

$q = \sqrt{2}$ *esetén* $S_{12} = a_1 \cdot \dfrac{q^{12}-1}{q-1} = \dfrac{3}{2} \cdot \dfrac{(\sqrt{2})^{12}-1}{\sqrt{2}-1} = \dfrac{3}{2} \cdot \dfrac{64-1}{\sqrt{2}-1} = \dfrac{189(\sqrt{2}+1)}{2}$

$q = -\sqrt{2}$ *esetén* $S_{12} = \dfrac{189(-\sqrt{2}+1)}{2}$

3. $a_4 - a_2 = a_2 + a_3 + a_4 \Rightarrow a_2(q^2-1) = a_2(1+q+q^2) \Rightarrow q^2 - 1 = 1 + q + q^2 \Rightarrow q = -2$ *(mivel* $q \neq 0$*).*

$a_2(q^2-1) = -6 \Rightarrow a_2 = -2 \Rightarrow a_1 = \dfrac{a_2}{q} = 1$.

2.7.7 Megoldás $a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 = (a_3 - 2d) + (a_3 - d) + a_3 + (a_3 + d) + (a_3 + 2d) = 5a_3 = 25 \Rightarrow a_3 = 5$. *Mivel* $b_1 = a_1, b_2 = a_2, b_3 = a_5$ *mértani sorozat, ezért* $b_2^2 = b_1 \cdot b_3$, *azaz* $a_2^2 = a_1 \cdot a_5 \Rightarrow (a_3-d)^2 = (a_3-2d)(a_3+2d) \Rightarrow (5-d)^2 = 25 - 4d^2 \Rightarrow 5d^2 - 10d = 0 \Rightarrow d(d-2) = 0 \Rightarrow d = 0$ *vagy* $d = 2$. $d = 0$ *esetén* $a_1 = 5, q = 1$*;* $d = 2$ *esetén* $a_1 = 1, q = 3$.

2.7.8 Megoldás $a_1 + a_2 + a_3 = (a_2 - d) + a_2 + (a_2 + d) = 21 \Rightarrow a_2 = 7$. *Mivel* $b_1 = a_1 + 6, b_2 = a_2 + 13, b_3 = a_3 + 30$ *mértani sorozat, ezért* $b_2^2 = b_1 \cdot b_3$, *azaz* $(a_2+13)^2 = (a_1+6)(a_3+30) \Rightarrow (a_2+13)^2 = (a_2-d+6)(a_2+d+30) \Rightarrow 400 = (13-d)(37+d)$. *Innen* $d = -27$ *vagy* $d = 3$. *A számtani sorozat* $a_1 = 34, a_2 = 7, a_3 = -20$ *vagy* $a_1 = 4, a_2 = 7, a_3 = 10$.

2.7.9 Megoldás *Legyenek a mértani sorozat tagjai* a_1, a_2, a_3*. Az első feltételből*

$$a_1 + a_2 + a_3 = a_1(1 + q + q^2) = 63.$$

Mivel $b_1 = a_1 + 3, b_2 = a_2, b_3 = a_3 - 30$ *számtani sorozat, ezért* $2b_2 = b_1 + b_3$*, azaz* $2a_2 = (a_1 + 3) + (a_3 - 30) \Rightarrow 2a_1q = a_1 + 3 + a_1q^2 - 30$*, azaz*

$$a_1(1 - 2q + q^2) = 27.$$

Az előző feltétellel együtt q-ra a $4q^2 - 17q + 4 = 0$ *másodfokú egyenlet adódik. Innen* $q = \frac{1}{4}$ *és a sorozat* $a_1 = 48, a_2 = 12, a_3 = 3$ *vagy* $q = 4$ *és a sorozat* $a_1 = 3, a_2 = 12, a_3 = 48$*.*

2.7.10 Megoldás *A feltételekől* $a_{12} = a_1 + 11d = 0 \Rightarrow a_1 = -11d$*.* $S_n = \frac{a_1 + a_n}{2} \cdot n = 0$ $\Rightarrow a_1 + a_n = 0 \Rightarrow a_n = 11d$*.* $a_n = a_1 + (n-1)d \Rightarrow 11d = -11d + (n-1)d \Rightarrow d(n-23) = 0$ $\Rightarrow n = 23$ *(mivel* $d \neq 0$*).*

$$S_{2n-1} = S_{45} = \frac{2a_1 + 44d}{2} \cdot 45 = \frac{2 \cdot (-11d) + 44d}{2} \cdot 45 = 495.$$

Innen $d = 1$ *és* $a_1 = -11$*.*

$$S_{69} = \frac{-11 + (-11 + 68)}{2} \cdot 69 = 1587.$$

2.7.11 Megoldás (a_n) *számtani sorozat, ezért* $a_2 = \sqrt{2} + d$ *és* $a_4 = \sqrt{2} + 3d$*. Mivel* a_1, a_2, a_4 *mértani sorozat, ezért* $a_2^2 = a_1 \cdot a_4$*, azaz* $(\sqrt{2} + d)^2 = \sqrt{2}(\sqrt{2} + 3d)$*. Innen* $d = 0$ *vagy* $d = \sqrt{2}$*.* $d = 0$ *esetén a sorozat minden tagja* $\sqrt{2}$*, így* $q = 1$*, tehát* $S_{10} = 10a_1 = 10\sqrt{2}$*.* $d = \sqrt{2}$ *esetén* $q = \frac{a_2}{a_1} = \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = 2$*, tehát* $S_{10} = \sqrt{2} \cdot \frac{2^{10} - 1}{2 - 1} = 1023 \cdot \sqrt{2}$*.*

2.7.12 Megoldás *Az* $x^2 + xy = 210$ *és* $y^2 + xy = 231$ *egyenleteket összeadva* $(x + y)^2 = 441 \Rightarrow |x + y| = 21$*. Ha* $x + y = 21$*, akkor a megoldás* $x_1 = 10, y_1 = 11$*. Ha* $x + y = -21$*, akkor a megoldás* $x_2 = -10, y_2 = -11$*.*

2.7.13 Megoldás *Az* $xy + x + y = 29$ *és* $xy - 2x - 2y = 2$ *egyenletekből* $3(x + y) = 27$ *és* $3xy = 60 \Rightarrow x + y = 9$ *és* $xy = 20 \Rightarrow x(9 - x) = 20 \Rightarrow x^2 - 9x + 20 = (x - 4)(x - 5) = 0$*. A megoldás:* $x_1 = 4, y_1 = 5$*;* $x_2 = 5, y_2 = 4$*.*

2.7.14 Megoldás *A* $(2x + y)^2 = 16$ *egyenletből* $|2x + y| = 4$*, az* $x - \frac{1}{y} = \frac{1}{2}$ *egyenletből* $2x = 1 + \frac{2}{y}$*. Ha* $2x + y = 4$*, akkor y-ra az* $y^2 - 3y + 2 = (y - 1)(y - 2) = 0$ *egyenlet adódik, ahonnan* $y = 1$ *vagy* $y = 2$*. Ha* $2x + y = -4$*, akkor y-ra az* $y^2 + 5y + 2 = 0$ *egyenlet adódik, ahonnan* $y = \frac{-5 \pm \sqrt{17}}{2}$*. A megoldás:* $x_1 = \frac{3}{2}$*,* $y_1 = 1$*;* $x_2 = 1$*,* $y_2 = 2$*;* $x_3 = \frac{-3 + \sqrt{17}}{4}$*,* $y_3 = \frac{-5 - \sqrt{17}}{2}$*;* $x_4 = \frac{-3 - \sqrt{17}}{4}$*,* $y_3 = \frac{-5 + \sqrt{17}}{2}$*.*

2.7.15 Megoldás *Az* $x^2 - 6xy + 9y^2 = 25$ *egyenletből* $|x - 3y| = 5$, *az* $x + \frac{1}{y} = 9$ *egyenletből* $x = 9 - \frac{1}{y}$. *Ha* $x - 3y = 5$, *akkor* y*-ra a* $3y^2 - 4y + 1 = 0$ *egyenlet adódik, ahonnan* $y = 1$ *vagy* $y = \frac{1}{3}$. *Ha* $x - 3y = -5$, *akkor* y*-ra a* $3y^2 - 14y + 1 = 0$ *egyenlet adódik, ahonnan* $y = \frac{7 \pm \sqrt{46}}{3}$. *A megoldás:* $x_1 = 8$, $y_1 = 1$; $x_2 = 6$, $y_2 = \frac{1}{3}$; $x_3 = 2 + \sqrt{46}$, $y_3 = \frac{7 + \sqrt{46}}{3}$; $x_4 = 2 - \sqrt{46}$, $y_4 = \frac{7 - \sqrt{46}}{3}$.

2.7.16 Megoldás *Az* $x + \frac{3}{4}y = 9$ *és* $\frac{x}{2} - \frac{2y}{3} = \frac{1}{3}$ *egyenletekből* $12x + 9y = 108$ *és* $12x - 16y = 8$, *ahonnan* $25y = 100$, *így a megoldás:* $x = 6$, $y = 4$.

2.7.17 Megoldás *Az* $\frac{x+2}{3} - \frac{y-3}{4} = 3$ *és* $\frac{3}{x+2} - \frac{1}{y-3} = 0$ *egyenletekből* $y - 3 = \frac{x+2}{3}$, *így* x*-re az* $\frac{x+2}{3} - \frac{x+2}{12} = 3$ *egyenlet adódik. A megoldás:* $x = 10$, $y = 7$.

2.7.18 Megoldás *Az* $\frac{1}{x-2y} - \frac{2}{2x-y} = 3$ *egyenlet kétszeresét a* $-\frac{2}{x-2y} + \frac{5}{2x-y} = -5$ *egyenlethez hozzáadva,* $\frac{1}{2x-y} = 1 \Rightarrow \frac{1}{x - 2(2x-1)} - 2 = 3$. *A megoldás:* $x = \frac{3}{5}$, $y = \frac{1}{5}$.

2.7.19 Megoldás *A* $\frac{6}{x-5} + \frac{1}{y-2} = 2$ *egyenlet* 2*-szereséből a* $\frac{4}{x-5} + \frac{3}{y+2} = 3$ *egyenlet* 3*-szorosát kivonva,* y*-ra a következő egyenlet adódik:* $\frac{2}{y-2} - \frac{9}{y+2} = -5$, *ahonnan* $5y^2 - 7y + 2 = 0 \Rightarrow y = 1$ *vagy* $y = \frac{2}{5}$. *A megoldás:* $x_1 = 7$, $y_1 = 1$; $x_2 = \frac{51}{7}$, $y_2 = \frac{2}{5}$.

2.7.20 Megoldás *Legyen* $\sqrt{\frac{6x}{x+y}} := a \geq 0$. *Ekkor a* $\sqrt{\frac{6x}{x+y}} + \sqrt{\frac{x+y}{6x}} = \frac{5}{2}$ *egyenletből* $2a^2 - 5a + 2 = 0$, *ahonnan* $a = 2$ *vagy* $a = \frac{1}{2}$. *Ha* $a = 2$, *akkor a* $\frac{6x}{x+y} = 4$ *és* $y - x = 44$ *egyenletekből* $x_1 = -88$, $y_1 = -44$. *Ha* $a = \frac{1}{2}$, *akkor a* $\frac{6x}{x+y} = \frac{1}{4}$ *és* $y - x = 44$ *egyenletekből* $x_2 = 2$, $y_2 = 46$.

2.7.21 Megoldás *Legyen* $3^x := a \geq 0$ *és* $b := 4^y \geq 0$. *Ekkor a* $3^x + 4^y = 73$ *és* $3^x \cdot 4^y = 576$ *egyenletekből* $a^2 - 73a + 576 = 0$, *ahonnan* $a = 9$ *vagy* $a = 64$. *Ha* $a = 9$ *és* $b = 64$, *akkor* $x_1 = 2$, $y_1 = 3$. *Ha* $a = 64$ *és* $b = 9$, *akkor* $x_2 = \log_3 64$, $y_2 = \log_4 9$.

2.7.22 Megoldás *A* $2x - 4\sqrt{x} + y - 4 = 0$ *és* $5\sqrt{x} - y = 17$ *egyenleteket összeadva* $\sqrt{x}$*-re a* $2x + \sqrt{x} - 21 = 0$ *másodfokú egyenletet kapjuk, melynek gyökei* 3 *és* $-\dfrac{7}{2}$, *de ez utóbbi nem lehet, mivel* $\sqrt{x} \geq 0$. *A megoldás:* $x = 9$, $y = -2$.

2.7.23 Megoldás *A* $\dfrac{\sqrt{x}}{2} + y = 4$ *és* $y^2 - \sqrt{x} = 27$ *egyenletekből* $y^2 - (8 - 2y) = 27 \Rightarrow y^2 + 2y - 35 = (y+7)(y-5) = 0$, *ahonnan* $y = -7$ *vagy* $y = 5$, *de ez utóbbi nem lehet, mivel* $\sqrt{x} \geq 0$. *A megoldás:* $x = 484$, $y = -7$.

2.7.24 Megoldás *A* $3^{\log_3 x} - 2^{\log_4 y} = 77$ *és* $3^{\log_3 \sqrt{x}} - 2^{\log_{16} y} = 7$ *egyenletekből* $x - \sqrt{y} = 77$ *és* $\sqrt{x} - \sqrt[4]{y} = 7$. *Mivel* $x - \sqrt{y} = (\sqrt{x} - \sqrt[4]{y})(\sqrt{x} + \sqrt[4]{y})$, *ezért* $\sqrt{x} + \sqrt[4]{y} = 11$. *A* $\sqrt{x} - \sqrt[4]{y} = 7$ *és* $\sqrt{x} + \sqrt[4]{y} = 11$ *egyenletekből* $2\sqrt{x} = 18$, *így a megoldás:* $x = 81$, $y = 16$.

2.7.25 Megoldás *A* $\log_2(xy) = 5$ *és* $\log_{\frac{1}{2}}\left(\dfrac{x}{y}\right) = 1$ *egyenletekből* $xy = 32$ *és* $\dfrac{x}{y} = \dfrac{1}{2}$, *így* $x^2 = 16$, *azaz* $x = \pm 4$. *A megoldás:* $x_1 = 4$, $y_1 = 8$; $x_2 = -4$, $y_2 = -8$.

2.7.26 Megoldás *A* $8^{2x+1} = 32 \cdot 2^{4y-1}$ *és* $5 \cdot 5^{x-y} = \sqrt{25^{2y+1}}$ *egyenletekből* $2^{6x+3} = 2^{4y+4}$ *és* $5^{x-y} = 5^{2y}$, *ahonnan* $6x + 3 = 4y + 4$ *és* $x - y = 2y$. *Az egyenletrendszer megoldása:* $x = \dfrac{3}{14}$, $y = \dfrac{1}{14}$.

2.7.27 Megoldás *A* $3^y \cdot 9^x = 81$ *és* $\lg(x+y)^2 - \lg x = 2\lg 3$ *egyenletekből* $3^{2x+y} = 3^4$ *és* $\lg\dfrac{(x+y)^2}{x} = \lg 9$, *ahonnan* $2x + y = 4$ *és* $(x+y)^2 = 9x$.
Így $x^2 - 17x + 16 = (x-16)(x-1) = 0$, *ahonnan* $x = 1$ *vagy* $x = 16$. *A megoldás:* $x_1 = 1$, $y_1 = 2$; $x_2 = 16$, $y_2 = -28$.

2.7.28 Megoldás *Legyen* $2^{x+y} := a \geq 0$ *és* $2^{x-y} := b \geq 0$. *Így a* $3 \cdot 2^{x+y} - 5 \cdot 2^{x-y} = 182$ *és* $5 \cdot 2^x \cdot 2^y - 4 \cdot 2^x \cdot 2^{-y} = 312$ *egyenletekből* $3a - 5b = 182$ *és* $5a - 4b = 312$, *ahonnan* $a = 64$ *és* $b = 2 \Rightarrow 2^{x+y} = 2^6$ *és* $2^{x-y} = 2 \Rightarrow x + y = 6$ *és* $x - y = 1$. *Az egyenletrendszer megoldása:* $x = \dfrac{7}{2}$, $y = \dfrac{5}{2}$.

2.8. Koordinátageometria

2.8.1 Megoldás $\mathbf{a}+\mathbf{b}+\mathbf{c}=(4,4)$; $3(2\mathbf{a}-\mathbf{b})=(21,12)$; $(\mathbf{a}+\mathbf{b})\mathbf{c}=-10$; $(\mathbf{a}-\mathbf{b})(\mathbf{b}+\mathbf{c})=11$; $|\mathbf{a}-\mathbf{b}|=\sqrt{26}$.

2.8.2 Megoldás 1. *Legyen* $\mathbf{c}=\alpha\mathbf{a}+\beta\mathbf{b}$. *Innen* $2\alpha-10\beta=-6,5\alpha+2\beta=12$. *Az egyenletrendszer megoldása:* $\alpha=2,\beta=1$, *tehát az* $\mathbf{a}$ *vektorral párhuzamos összetevő:* $\alpha\mathbf{a}=(4,10)$, *a* $\mathbf{b}$ *vektorral párhuzamos összetevő:* $\beta\mathbf{b}=(-10,2)$.

2. *A* $\mathbf{c}$ *vektorral párhuzamos például a* $\mathbf{c}_1=(-1,2)$ *vektor. A* $\mathbf{c}$*-re merőleges például a* $\mathbf{c}_2=(2,1)$ *vektor. Legyen* $\mathbf{b}=\alpha\mathbf{c}_1+\beta\mathbf{c}_2 \Rightarrow -\alpha+2\beta=-10, 2\alpha+\beta=2$. *Innen* $\alpha=\frac{14}{5}, \beta=-\frac{18}{5}$, *tehát az* $\mathbf{c}$*-vel párhuzamos összetevő:* $\mathbf{c}_p=\alpha\mathbf{c}_1=\left(-\frac{14}{5},\frac{28}{5}\right)$, *a* $\mathbf{c}$*-re merőleges összetevő:* $\mathbf{c}_m=\beta\mathbf{b}=\left(-\frac{36}{5},-\frac{18}{5}\right)$.
   Másik megoldás:
   $$\mathbf{c}_p=\left(\mathbf{b}\cdot\frac{\mathbf{c}}{|\mathbf{c}|}\right)\cdot\frac{\mathbf{c}}{|\mathbf{c}|}=\frac{60+24}{36+144}\cdot(-6,12)=\frac{7}{15}\cdot(-6,12)=\left(-\frac{14}{5},\frac{28}{5}\right)$$
   $$\mathbf{c}_m=\mathbf{b}-\mathbf{c}_p=\left(-\frac{36}{5},-\frac{18}{5}\right)$$

3. *Az* $\mathbf{a}+\mathbf{b}=(-8,7)$ *vektorra merőleges például a* $(7,8)$ *vektor, melynek hossza* $\sqrt{113}$. *Az* $\mathbf{a}+\mathbf{b}$*-re merőleges két egységvektor:* $\left(\frac{7}{\sqrt{113}},\frac{8}{\sqrt{113}}\right)$, $\left(-\frac{7}{\sqrt{113}},-\frac{8}{\sqrt{113}}\right)$.

2.8.3 Megoldás *A két vektor skaláris szorzata:* $\mathbf{ab}=4\cdot(-1)+3\cdot 2=2$. *Legyen* α *az* $\mathbf{a}$ *és* $\mathbf{b}$ *által bezárt szög* $\Rightarrow \cos\alpha=\frac{\mathbf{ab}}{|\mathbf{a}|\cdot|\mathbf{b}|}=\frac{2}{\sqrt{25\cdot 5}}=\frac{2}{5\cdot\sqrt{5}} \Rightarrow \alpha=\arccos\frac{2}{5\cdot\sqrt{5}}\approx 79{,}7^\circ$.

2.8.4 Megoldás *Az* $\mathbf{a}$ *és* $\mathbf{b}$ *vektorok pontosan akkor párhuzamosak, ha van olyan* λ *valós szám, melyre* $\mathbf{a}=\lambda\mathbf{b} \Rightarrow 6=\lambda p$ *és* $-5=3\lambda$, *ahonnan* $p=-\frac{18}{5}$.
Az $\mathbf{a}$ *és* $\mathbf{b}$ *vektorok pontosan akkor merőlegesek, ha* $\mathbf{ab}=6p-15=0$, *azaz* $p=\frac{5}{3}$.
Az $\mathbf{a}$ *és* $\mathbf{b}$ *vektorok pontosan akkor zárnak be hegyesszöget egymással, ha* $\mathbf{ab}=6p-15>0$, *azaz* $p>\frac{5}{3}$.

2.8.5 Megoldás *Legyenek a háromszög A, B, C csúcsnál lévő szögei* α, β, γ. $\overrightarrow{AB}=(-7,4)$ *és* $\overrightarrow{AC}=(-3,3) \Rightarrow \cos\alpha=\frac{21+12}{\sqrt{65}\sqrt{18}}=\frac{11}{\sqrt{130}}$, *így* $\alpha\approx 15{,}26^\circ$. *Hasonlóan,* $\beta\approx 15{,}71^\circ$, $\gamma\approx 149{,}04^\circ$. *A második feladatnak három megoldása van: a paralelogramma negyedik csúcsát úgy kapjuk, hogy a háromszög csúcsait a szemközti oldal felezőpontjára*

tükrözzük. Legyen $D_1(x_1, y_1)$ *az* A *pont tükörképe a* BC *oldal* $F_1\left(-3, \frac{7}{2}\right)$ *felezőpontjára. Ekkor* $\frac{2+x_1}{2} = -3$ *és* $\frac{0+y_1}{2} = \frac{7}{2}$*, így a tükörkép:* $D_1(-8, 7)$*. Hasonlóképpen, a* B *pontot tükrözve az* AC *oldal* $F_2\left(\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right)$ *felezőpontjára, a tükörkép:* $D_2(6, -1)$*. A* C *pontot tükrözve az* AB *oldal* $F_3\left(-\frac{3}{2}, 2\right)$ *felezőpontjára, a tükörkép:* $D_3(-2, 1)$*.*
Másik megoldás:

$$D_1(x_1, y_1) = (-1, 3) + \overrightarrow{AB} = (-1, 3) + (-7, 4) = (-8, 7)$$
$$D_2(x_2, y_2) = (-1, 3) + \overrightarrow{BA} = (-1, 3) + (7, -4) = (6, -1)$$
$$D_3(x_3, y_3) = (2, 0) + \overrightarrow{CB} = (2, 0) + (-4, 1) = (-2, 1)$$

2.8.6 Megoldás

1. *Az* $A(2, 6)$ *és* $B(-3, 2)$ *pontok távolsága a* $\overrightarrow{BA} = (5, 4)$ *vektor hossza:* $d(A, B) = \left|\overrightarrow{BA}\right| = \sqrt{25 + 16} = \sqrt{41}$*.*

2. *Az* $\overline{AB}$ *szakasz felezőpontja:* $F\left(-\frac{1}{2}, 4\right)$*.*
   Az A*-hoz közelebbi harmadolópont:* $H_1\left(\frac{2 \cdot 2 - 3}{3}, \frac{2 \cdot 6 + 2}{3}\right) = \left(\frac{1}{3}, \frac{14}{3}\right)$*.*
   A B*-hez közelebbi harmadolópont:* $H_2\left(\frac{2 \cdot (-3) + 2}{3}, \frac{2 \cdot 2 + 6}{3}\right) = \left(-\frac{4}{3}, \frac{10}{3}\right)$*.*

3. *Az* $\overline{AB}$ *szakasz* f *felezőmerőlegesének normálvektora:* $\mathbf{n}_f = \overrightarrow{BA} = (5, 4)$*. Az egyenes átmegy az* F *ponton, így* f *egyenlete:* $5x + 4y = 5 \cdot (-0{,}5) + 4 \cdot 4$*, azaz* $5x + 4y = 13{,}5$*.*

4. *Az* A*,* B *pontokon átmenő* e *egyenes normálvektora:* $\mathbf{n}_e = (4, -5)$ *így az egyenes egyenlete:* $4x - 5y = 4 \cdot 2 - 5 \cdot 6$*, azaz* $4x - 5y = -22$*. Az egyenes meredeksége:* $m = \frac{4}{5}$*.*

5. *Az* $\overline{AB}$ *átmérőjű kör középpontja* F*, sugara* $r = \frac{\sqrt{41}}{2}$*, így a kör egyenlete:*

$$(x + 0{,}5)^2 + (y - 4)^2 = \frac{41}{4}$$

2.8.7 Megoldás *A* C *középpontú* 3 *sugarú* k_1 *kör egyenlete:* $(x+1)^2 + (y+1)^2 = 9$*. A* D *középpontú* 3 *sugarú* k_2 *kör egyenlete:* $(x-1)^2 + (y-3)^2 = 9$*. A keresett pontok a két* *kör metszéspontjai. A k_1 kör egyenletéből kivonva a k_2 kör egyenletét, $4x + 8y - 8 = 0$ adódik (amely éppen a $\overline{CD}$ szakasz felezőmerőlegesének egyenlete). Innen x-et kifejezve és a k_1 kör egyenletébe beírva, $(3 - 2y)^2 + (y + 1)^2 = 9 \Rightarrow 5y^2 - 10y + 1 = 0$, ahonnan $y = 1 \pm \frac{2\sqrt{5}}{5}$. A keresett pontok: $P_1\left(-\frac{4\sqrt{5}}{5}, 1 + \frac{2\sqrt{5}}{5}\right)$, $P_2\left(\frac{4\sqrt{5}}{5}, 1 - \frac{2\sqrt{5}}{5}\right)$.*

2.8.8 Megoldás *A keresett pontok az $\overline{AB}$ szakasz f felezőmerőlegesének az x, illetve az y tengellyel alkotott metszéspontjai. Az $\overline{AB}$ szakasz felezőpontja: $F(4, 3)$. Az $\overrightarrow{AB} = (4, -8)$ vektorral párhuzamos például az $\mathbf{n}_f = (1, -2)$ vektor, amely normálvektora az f egyenesnek. Így f egyenlete: $x - 2y = -2$. Az f egyenes az x tengelyt a $P(-2, 0)$ pontban, az y tengelyt a $Q(0, 1)$ pontban metszi.*

2.8.9 Megoldás *A háromszög súlypontja: $S\left(\frac{3+1-7}{3}, \frac{-1+4-9}{3}\right) = (-1, -2)$, így a súlypont origótól vett távolsága $\sqrt{(-1)^2 + (-2)^2} = \sqrt{5}$.*

2.8.10 Megoldás *Az $5x - 4y = 14$, $2x - 3y = 3$ egyenletrendszer megoldása: $x = \frac{30}{7}$, $y = \frac{13}{7}$, így a g és h egyenesek metszéspontja: $M\left(\frac{30}{7}, \frac{13}{7}\right)$.*

1. *Az $M\left(\frac{30}{7}, \frac{13}{7}\right)$ és $P(5, 2)$ pontok távolsága az $\overrightarrow{MP} = \left(\frac{5}{7}, \frac{1}{7}\right)$ vektor hossza: $d(M, P) = \left|\overrightarrow{MP}\right| = \frac{\sqrt{26}}{7}$.*

2. *Az M és P pontokon átmenő egyenes normálvektora: $\mathbf{n} = (1, -5)$, így az egyenes egyenlete: $x - 5y = 5 - 5 \cdot 2$, azaz $x - 5y = -5$.*

3. *A P ponton átmenő, g-vel párhuzamos e egyenes normálvektora megegyezik g normálvektorával: $\mathbf{n}_e = \mathbf{n}_g = (5, -4)$, így e egyenlete: $5x - 4y = 5 \cdot 5 - 4 \cdot 2$, azaz $5x - 4y = 17$.*

4. *A P ponton átmenő, h-ra merőleges f egyenes normálvektora merőleges h normálvektorára: $\mathbf{n}_f \perp \mathbf{n}_h = (2, -3) \Rightarrow \mathbf{n}_f = (3, 2)$, így f egyenlete: $3x + 2y = 3 \cdot 5 + 2 \cdot 2$, azaz $3x + 2y = 19$.*

5. *A h és f egyenesek metszéspontja: $Q\left(\frac{63}{13}, \frac{29}{13}\right)$, így a P pont és h egyenes távolsága a $\overrightarrow{PQ} = \left(-\frac{2}{13}, \frac{3}{13}\right)$ vektor hossza: $d(P, h) = \left|\overrightarrow{PQ}\right| = \frac{1}{\sqrt{13}}$.*

Megjegyzés: A $P(x_0, y_0)$ pont és az $Ax + By + C = 0$ egyenletű e egyenes távolsága: $d(P,e) = \dfrac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$. *Az előző példában:* $d(P,h) = \dfrac{|2 \cdot 5 - 3 \cdot 2 - 3|}{\sqrt{2^2 + (-3)^2}} = \dfrac{1}{\sqrt{13}}$.

2.8.11 Megoldás *A $P(2,5)$ ponton átmenő, $e : -3x + y = 9$ egyenesre merőleges f egyenes normálvektora: $\mathbf{n}_f = (1,3)$, így f egyenlete: $x + 3y = 17$. Az e és f egyenesek metszéspontja: $M(-1,6)$. Legyen $Q(x,y)$ a P pontnak az e egyenesre vonatkozó tükörképe. Ekkor $\dfrac{2+x}{2} = -1$, $\dfrac{3+y}{2} = 6$, így a tükörkép: $Q(-4,7)$.*

2.8.12 Megoldás *A $C(-1,2)$ középpontú, $P(3,-2)$ ponton átmenő kör sugara a $\overrightarrow{CP} = (4,-4)$ vektor hossza: $r = \sqrt{16+16} = 4\sqrt{2}$. A kör egyenlete: $(x+1)^2 + (y-2)^2 = 32$.*

2.8.13 Megoldás

1. *Az $x^2 + y^2 + 4x + 10y + a = 0$ egyenletből $(x+2)^2 + (y+5)^2 = 29 - a$, ami pontosan akkor köregyenlet, ha $a < 29$.*
2. *A $4x^2 + Ay^2 - 32x + 24y + Bxy + C = 0$ egyenletben $A = 4, B = 0$, ahonnan $(x-4)^2 + (y+3)^2 = 16 + 9 - \dfrac{C}{4} > 0 \Rightarrow C < 100$.*

2.8.14 Megoldás

A $P(8,-1)$ ponton átmenő, tengelyeket érintő kör középpontja $C(r,-r)$, ahol r a kör sugara. Innen $(8-r)^2 + (-1+r)^2 = r^2 \Rightarrow r^2 - 18r + 65 = (r-5)(r-13) = 0$, ahonnan a körök sugara $r_1 = 5$, $r_2 = 13$. A körök egyenlete: $(x-5)^2 + (y+5)^2 = 25$ és $(x-13)^2 + (y+13)^2 = 169$.

2.8.15 Megoldás *A kör az első síknegyedben van, így középpontja $C(r,r)$, ahol r a kör sugara. A $3x + 4y = 12$ egyenletű egyenes a tengelyeket az $A(4,0)$ és $B(0,3)$ pontokban metszi. A feladatnak két megoldása van. Felhasználva a külső pontból húzott érintők egyenlőségét, az A-ból és B-ből a körhöz húzott érintők hosszának összege az AB szakasz hosszával egyenlő, azaz $(4-r) + (3-r) = 5$, ahonnan $r = 1$, így ekkor a kör egyenlete: $(x-1)^2 + (y-1)^2 = 1$. A másik megoldás hasonlóan: $(r-4) + (r-3) = 5$, ahonnan $r = 6$, így ekkor a kör egyenlete: $(x-6)^2 + (y-6)^2 = 36$.*

2.8.16 Megoldás *A kör egyenlete: $(x+4)^2 + (y-3)^2 = 35$, így a kör középpontja: $C(-4,3)$. Az C-n átmenő, $e : 2x - 5y = 7$ egyenesre merőleges f egyenes normálvektora: $\mathbf{n}_f = (5,2)$, így f egyenlete: $5x + 2y = -14$.*

2.8.17 Megoldás *A kör egyenlete: $(x-2)^2 + (y-3)^2 = 25$, így a kör középpontja $C(2,3)$. Az $(5-2)^2 + (y-3)^2 = 25$ egyenletből $y_1 = 7$, $y_2 = -1$, így az érintési pontok $P(5,7)$ és $Q(5,-1)$. A P-beli érintő normálvektora: $\overrightarrow{CP} = (3,4)$, így a P-beli érintő egyenlete: $3x + 4y = 43$. A Q-beli érintő normálvektora: $\overrightarrow{CQ} = (3,-4)$, így a Q-beli érintő egyenlete: $3x - 4y = 19$.*

2.8.18 Megoldás *A kör egyenlete:* $(x-9)^2+(y+3)^2=256$, *így középpontja* $C(9,-3)$. *A* $\overline{CP}$ *szakasz felezőpontja* $F(17,-9)$. *Az* F *középpontú,* $r=\left|\overrightarrow{CF}\right|=10$ *sugarú Thalész-kör egyenlete:* $(x-17)^2+(y+9)^2=100$. *Az érintési pontok e két kör metszéspontjai:* $P(25,-3)$ *és* $Q\left(\frac{337}{25},-\frac{459}{25}\right)$. *A* P*-beli érintő normálvektora* $\overrightarrow{CP}=(16,0)$, *így a* P*-beli érintő párhuzamos az* y *tengellyel, egyenlete:* $x=25$. *A* Q*-beli érintő normálvektora* $\overrightarrow{CQ}=\left(\frac{112}{25},-\frac{384}{25}\right)$, *amellyel párhuzamos például a* $(7,-24)$ *vektor. Így a* Q*-beli érintő egyenlete:* $7x-24y=535$.

2.8.19 Megoldás *A feladat kétféleképpen oldható meg. Vagy kiszámítjuk a három pont által meghatározott háromszög köré írható kör középpontját az oldalfelező merőlegesek metszéspontjaként; vagy a kör egyenletébe behelyettesítjük külön-külön a három adott pont koordinátáit, és a három egyenletből a kör középpontjának koordinátáit és a kör sugarát kiszámíthatjuk. A megoldás:* $(x-5)^2+(y+3)^2=169$.

2.8.20 Megoldás *A kör egyenlete:* $(x+3)^2+(y-8)^2=49$. *A* $P(1,4)$ *ponton átmenő húrok közül az a legrövidebb, amelynek a felezőpontja* P. *A húr egyenesének normálvektora:* $\mathbf{n}=\overrightarrow{CP}=(4,-4)$, *amellyel párhuzamos az* $(1,-1)$ *vektor. A húr egyenesének egyenlete:* $x-y=-3$, *ahonnan* $x=y-3$. *Ezt a kör egyenletébe beírva a* $2y^2-16y+15=0$ *egyenlet adódik. Innen a húr végpontjai:* $A\left(1-\frac{\sqrt{34}}{2},4-\frac{\sqrt{34}}{2}\right)$, $B\left(1+\frac{\sqrt{34}}{2},4+\frac{\sqrt{34}}{2}\right)$. *A húr hossza az* $\overrightarrow{AB}=\left(\sqrt{34},\sqrt{34}\right)$ *vektor hossza:* $2\sqrt{17}$.

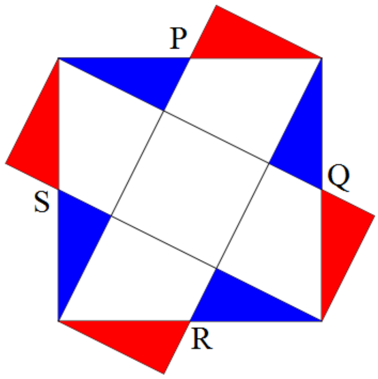
2.8.21 Megoldás *A* $P(-7,-2)$ *ponton átmenő,* $e: 3x+2y=13$ *egyenessel párhuzamos egyenes:* $g: 3x+2y=-25$. *A* P*-n átmenő,* $f: 5x-3y=-10$ *egyenessel párhuzamos egyenes:* $h: 5x-3y=-29$. *A paralelogramma többi csúcsát az* e, f, g, h *egyenesek metszéspontjaiként kapjuk. Az* e *és* f *egyenesek metszéspontja:* $A(1,5)$; e *és* h *metszéspontja:* $B(-1,8)$; f *és* g *metszéspontja:* $C(-5,-5)$.

2.8.22 Megoldás *Az* A *ponton átmenő magasságvonal normálvektora:* $\overrightarrow{BC}=(-6,5)$, *így az egyenes egyenlete:* $-6x+5y=14$. *A* B *ponton átmenő magasságvonal normálvektora:* $\overrightarrow{CA}=(2,1)$, *így az egyenes egyenlete:* $2x+y=8$. *A* C *ponton átmenő magasságvonal normálvektora:* $\overrightarrow{AB}=(4,-6)$, *amellyel párhuzamos a* $(2,-3)$ *vektor, így az egyenes egyenlete:* $2x-3y=-11$.

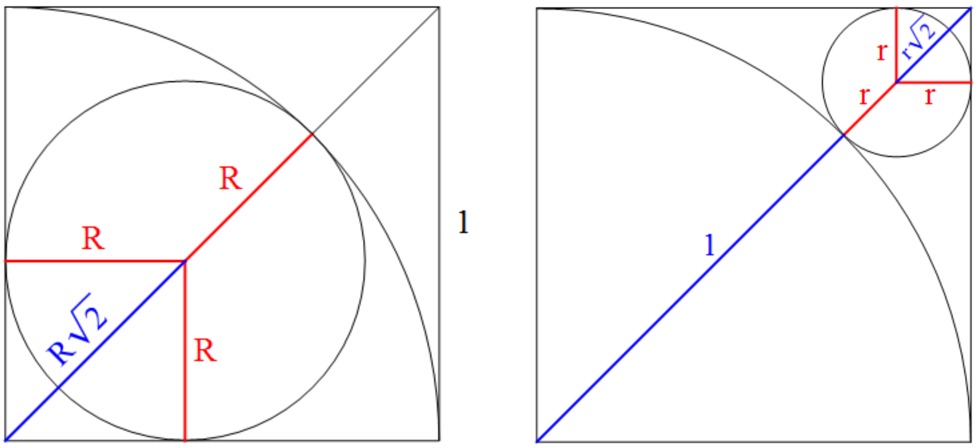
2.8.23 Megoldás *A* BC *oldal felezőpontja:* $F(4,2)$, *továbbá* $\overrightarrow{FA}=(1,1)$. *Az* A *csúcson átmenő* f *súlyvonal normálvektora:* $\mathbf{n}_f=(1,-1)$, *így* f *egyenlete:* $x-y=2$. *Az origón átmenő,* f*-re merőleges* e *egyenes normálvektora:* $\mathbf{n}_e=(1,1)$, *így* e *egyenlete:* $x+y=0$. *Az* e *es* f *egyenesek metszéspontja:* $M(1,-1)$. *Így a súlyvonal origótól való távolsága:* $\sqrt{2}$.

2.9. Síkidomok kerülete, területe; testek

2.9.1 Megoldás *A kék háromszögeket a P, Q, R, S pontokra tükrözve a piros háromszögeket kapjuk, így öt egybevágó kis négyzet keletkezik, melyek területösszege* 1*. Így a középső négyzet területe* $\frac{1}{5}$.



2.9.2 Megoldás *Legyen a körlemez sugara* R*. Ekkor* $R\sqrt{2}+R=1$*, ahonnan* $R=\frac{1}{\sqrt{2}+1}=\sqrt{2}-1$.



2.9.3 Megoldás *Legyen a körlemez sugara* r*. Ekkor* $1+r+r\sqrt{2}=\sqrt{2}$*, ahonnan* $r=\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}+1}=(\sqrt{2}-1)^2=3-2\sqrt{2}$.

2.9.4 Megoldás *Legyen az egyenlő szárú háromszög alapja* a *és szára* b. *A háromszög területe:* $T = \frac{1}{2}b^2 \sin 30^\circ = \frac{b^2}{4} = 1$, *így a háromszög szára:* $b = 2$. *A koszinusztételből* $a^2 = b^2 + b^2 - 2b^2 \cos 30^\circ = 8\left(1 - \frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 4\left(2 - \sqrt{3}\right)$, *ahonnan a háromszög alapja:* $a = 2\sqrt{2 - \sqrt{3}}$.

2.9.5 Megoldás *A háromszög magassága:* $m = \frac{a \cdot \sqrt{3}}{2}$, *területe:* $T = \frac{a \cdot m}{2} = \frac{a^2 \cdot \sqrt{3}}{4}$.

2.9.6 Megoldás *A háromszög oldala:* $a = \frac{2m}{\sqrt{3}}$, *területe:* $T = \frac{m^2}{\sqrt{3}}$.

2.9.7 Megoldás *A szabályos hatszög szemközti csúcsait összekötve hat egybevágó szabályos háromszöget kapunk, melyek magassága* $m = 3$. *A hatszög oldala:* $a = \frac{2m}{\sqrt{3}} = 2\sqrt{3}$. *A hatszög területe:* $T = 6 \cdot \frac{m^2}{\sqrt{3}} = 18\sqrt{3}$.

2.9.8 Megoldás *Legyen a szabályos háromszög magassága* m, *köréírt körének sugara* R, *beírt körének sugara* r. *A köréírt és a beírt kör középpontja a magasságvonal oldalhoz közelebbi harmadolópontja, így* $R = \frac{2}{3}m$ *és* $r = \frac{1}{3}m$, *ahonnan* $R = 2r$, *azaz a beírt kör sugara* 1 *egység, a háromszög magassága:* $m = 3$ *egység. A háromszög oldala:* $a = \frac{2m}{\sqrt{3}} = 2\sqrt{3}$, *területe:* $T = \frac{m^2}{\sqrt{3}} = 3\sqrt{3}$.

2.9.9 Megoldás *Egy szabályos háromszög oldalfelező pontjait összekötve négy egybevágó szabályos háromszöget kapunk, ahol a középső háromszög köréírt köre és az eredeti háromszög beírt köre megegyezik. Így egy körbe írt és a kör köré írt szabályos háromszögek területének aránya* $1 : 4$.

Másik megoldás: Legyen a kör sugara r, *a beírt háromszög magassága* m *és a köréírt háromszög magassága* M. *Ekkor* $r = \frac{M}{3}$ *és* $r = \frac{2}{3}m$. *A beírt és köréírt háromszögek magasságának aránya* $\frac{m}{M} = \frac{1}{2}$, *így területük aránya:* $\left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}$.

2.9.10 Megoldás *Egy háromszög oldalfelező pontjait összekötve négy egybevágó háromszöget kapunk. Így egy háromszöget egy középvonala* $1 : 3$ *területarányú részekre bont.*

2.9.11 Megoldás *Legyen* R *a három,* r *sugarú kört magában foglaló kör sugara. Az* r *sugarú körök középpontjait összekötve egy* $2r$ *oldalú szabályos háromszöget kapunk, melynek magassága* $m = r \cdot \sqrt{3}$, *így* $R = \frac{2}{3}m + r = r \cdot \frac{2\sqrt{3} + 3}{3}$.

2.9.12 Megoldás *Legyen a derékszögű háromszög két befogója a és b. A háromszög területe:* $T = \dfrac{ab}{2} = 180$, *továbbá a Pitagorasz-tételből* $a^2 + b^2 = 41^2$. *Így* $a^4 - 41^2a^2 + 360^2 = 0$, *ahonnan* $a = 9$, $b = 40$ *vagy* $a = 40$, $b = 9$. *A háromszög befogói* 9 *cm és* 40 *cm hosszúak.*

2.9.13 Megoldás *Legyen* $x = AP = PC$, *ekkor* $BP = 9 - x$. *A Pitagorasz-tételből* $x^2 = (9 - x)^2 + 3^2$, *ahonnan* $x = 5$, *tehát a* P *pont az* A*-tól* 5 *cm távolságra van.*

2.9.14 Megoldás *A téglalap oldalai legyenek* $a = 2$ *és* b, *a* b *oldallal szemközti szög* α. *A feltételből a téglalap átlójának hossza* $2b$. *Így* $\sin\alpha = \dfrac{b}{2b} = \dfrac{1}{2}$, *ahonnan* $\alpha = 30°$.

2.9.15 Megoldás *A téglalap oldalai legyenek* a *és* b. *Ekkor a feltételekből* $a + b = 34$ *és* $a^2 + b^2 = 26^2$. *A téglalap területe:*

$$T = ab = \frac{(a+b)^2 - (a^2+b^2)}{2} = \frac{34^2 - 26^2}{2} = \frac{(34-26)(34+26)}{2} = \frac{8 \cdot 60}{2} = 240$$

2.9.16 Megoldás *A rombusz oldala legyen* a, *átlói* e *és* f. *Ekkor a rombusz területe:* $1 = a^2 \sin 30°$, *ahonnan* $a = \sqrt{2}$. *Felhasználva, hogy a rombusz átlói merőlegesen felezik egymást, a rombusz területe az átlókkal kifejezve:* $1 = \dfrac{ef}{2}$, *továbbá a Pitagorasz-tételből* $\left(\dfrac{e}{2}\right)^2 + \left(\dfrac{f}{2}\right)^2 = a^2 = 2$. *Így* $e^4 - 8e^2 + 4 = 0$, *ahonnan* $e = \sqrt{4 \pm 2\sqrt{3}} = \sqrt{\left(1 \pm \sqrt{3}\right)^2} = $ $= \sqrt{3} \pm 1$. *A rombusz oldalának hossza* $\sqrt{2}$, *átlóinak hossza* $\sqrt{3} + 1$ *és* $\sqrt{3} - 1$.

2.9.17 Megoldás *A szimmetrikus trapéz alapjai legyenek* a *és* c. *Ekkor* $a + c = 2 \cdot 45 = 90$ *és* $41^2 = 9^2 + \left(\dfrac{a-c}{2}\right)^2 \Rightarrow (a - 45)^2 = 41^2 - 9^2 = (41 - 9)(41 + 9) = 32 \cdot 50 = 64 \cdot 25$ $\Rightarrow a - 45 = \pm 40 \Rightarrow a = 85$ *vagy* $a = 5$. *A trapéz alapjai* 85 *mm és* 5 *mm hosszúak.*

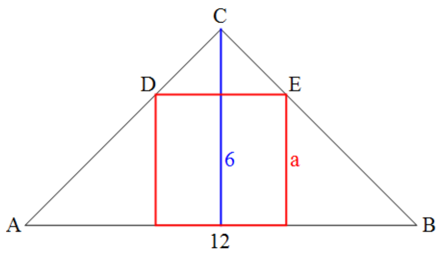
2.9.18 Megoldás *A felszínek arányából a két tetraáder éleinek aránya* $1 : \sqrt{2}$, *ezért térfogatuk aránya* $1 : \left(\sqrt{2}\right)^3 = 1 : 2\sqrt{2}$.

2.9.19 Megoldás *Mivel a folyadékkúp térfogatának és a pohár térfogatának aránya* $1 : 2$, *ezért a két kúp magasságának aránya* $\dfrac{1}{\sqrt[3]{2}} \approx 0{,}8$.

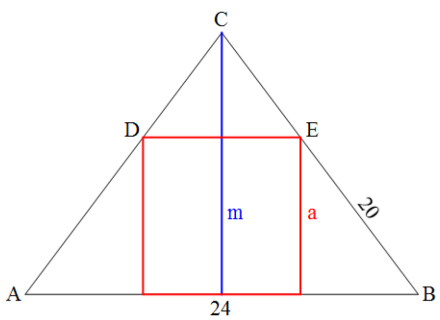
2.9.20 Megoldás *Az* a *élű kocka lapátlójának hossza* $a\sqrt{2}$, *testátlójának hossza* $a\sqrt{3}$. *Így* $a\sqrt{2} = \sqrt{6}$, *ahonnan a kocka élének hossza* $a = \sqrt{3}$, *tehát a kocka testátójának hossza* 3.

2.9.21 Megoldás *Az a élű kockának valamely lapátlójára merőleges síkmetszete olyan téglalap, melynek oldalai a és $a\sqrt{2}$, a téglalap átlója pedig a kocka testátlója, azaz $a\sqrt{3}$. Legyen a keresett távolság x, ez a téglalap csúcsának az átlótól való távolsága. Ekkor a téglalap területét kétféleképpen felírva, $a \cdot a \cdot \sqrt{2} = x \cdot a \cdot \sqrt{3}$, ahonnan $x = a\sqrt{\frac{2}{3}}$.*

2.9.22 Megoldás *Tekintsük a gúlának azt a síkmetszetét, amely tartalmazza a gúla magasságvonalát és két szemközti alapél oldalfelező pontját. Legyen a kocka éle a. Az ábra alapján az ABC és DEC háromszögek hasonlósága miatt $\frac{a}{6-a} = \frac{12}{6}$, ahonnan $a = 4$, tehát a kocka éle 4 cm.*

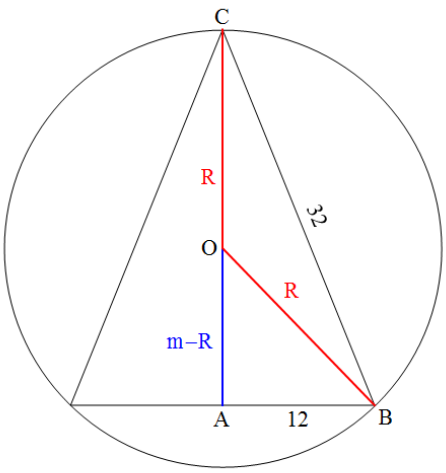


2.9.23 Megoldás *A forgáskúp és a henger közös tengelyére illeszkedő síkmetszet esetén az ábra alapján a kúp magassága: $m = \sqrt{20^2 - 12^2} = 16$. Az ABC és DEC háromszögek hasonlósága miatt $\frac{a}{16-a} = \frac{24}{16}$, ahonnan a henger magassága: $a = \frac{48}{5} = 9{,}6$, így a henger sugara: $r = 4{,}8$. A henger térfogata: $V = r^2\pi a = 4{,}8^2 \cdot \pi \cdot 9{,}6 \approx 694,9\ cm^3$.*

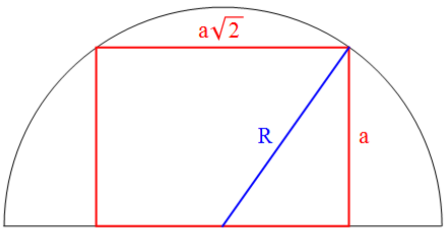


2.9.24 Megoldás *Legyen a kúp magassága m, a gömb sugara R. A kúp tengelyére illeszkedő síkmetszet esetén az ábra alapján a kúp magassága a CAB derékszögű háromszögben: $m = AC = \sqrt{32^2 - 12^2} = 4\sqrt{55}$. Az OAB derékszögű háromszögben $(m-R)^2 + 12^2 = R^2$, ahonnan $R = \dfrac{128}{\sqrt{55}}$. Így a gömb térfogata:*

$$V = \frac{4}{3}R^3\pi = \frac{4}{3}\left(\frac{128}{\sqrt{55}}\right)^3 \pi \approx 21536\, cm^3$$



2.9.25 Megoldás *Legyen a félgömb sugara R. A kocka alapnégyzetének átlójára illeszkedő, az alapsíkra merőleges síkmetszet esetén az ábra alapján $R^2 = a^2 + \left(\dfrac{a \cdot \sqrt{2}}{2}\right)^2 = \dfrac{3}{2}a^2$, ahonnan a gömb sugara: $R = a \cdot \sqrt{\dfrac{3}{2}}$.*



2.9.26 Megoldás *Legyen az a élű szabályos tetraéder kitérő éleinek távolsága y. Metsszük el a tetraédert egy olyan síkkal, amely illeszkedik az egyik élre és a szemközti él felezőpontjára. A síkmetszet egy olyan egyenlő szárú háromszög, melynek alapja a, szára $m = \frac{a\sqrt{3}}{2}$ és az alaphoz tartozó magassága y. Ekkor $y^2 = m^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2 = \frac{a^2}{2}$, ahonnan $y = \frac{a\sqrt{2}}{2}$.*

Másik megoldás: Az a élű tetraéder belefoglalható egy olyan kockába, melynek lapátlói a tetraéder élei. Ekkor a tetraéder kiérő éleinek távolsága éppen a kocka élének hossza, azaz $\frac{a\sqrt{2}}{2}$.

2.9.27 Megoldás *Legyen a tetraéder testmagassága x. Az előző feladathoz hasonlóan, metsszük el a tetraédert egy olyan síkkal, amely illeszkedik az egyik élre és a szemközti él felezőpontjára. A síkmetszet egy olyan egyenlő szárú háromszög, melynek alapja a, az alaphoz tartozó magassága $y = \frac{a\sqrt{2}}{2}$, szára $m = \frac{a\sqrt{3}}{2}$ és a szárhoz tartozó magassága x. Ekkor $a \cdot y = m \cdot x \Rightarrow a \cdot \frac{a\sqrt{2}}{2} = \frac{a\sqrt{3}}{2} \cdot x$, ahonnan $x = a \cdot \sqrt{\frac{2}{3}} = a \cdot \frac{\sqrt{6}}{3}$. A tetraéder alaplapjának területe $\frac{a^2\sqrt{3}}{4}$, így a tetraéder térfogata: $V = \frac{1}{3} \cdot \frac{a^2\sqrt{3}}{4} \cdot \frac{a\sqrt{2}}{\sqrt{3}} = \frac{a^3\sqrt{2}}{12}$.*

2.9.28 Megoldás *A négy gömb középpontját összekötve egy $2R$ élű szabályos tetraédert kapunk, melynek testmagassága az előző feladat alapján $2R \cdot \sqrt{\frac{2}{3}}$. Így a négy gömbből álló test magassága: $2R\left(1 + \sqrt{\frac{2}{3}}\right)$.*

3. fejezet

Nehezebb feladatok

3.1. Feladatok

3.1. Feladat *Igazoljuk, hogy az*

$$\frac{1}{1\cdot 3}+\frac{1}{5\cdot 7}+\frac{1}{9\cdot 11}+\ldots+\frac{1}{(4n+1)(4n+3)}+\ldots$$

sor konvergens!

3.2. Feladat *Határozza meg annak a körnek az egyenletét, amely az*

$$(x-2)^2+(y-9)^2=4,$$

$$(x-1)^2+(y-2)^2=4$$

és

$$(x-9)^2+(y-8)^2=4$$

egyenletekkel megadott köröket kívülről érinti!

3.3. Feladat *Mutassuk meg, hogy*

$$(x-a)^2(b-c)+(x-b)^2(c-a)+(x-c)^2(a-b)$$

az x-től független három elsőfokú tényező szorzatára bontható!

3.4. Feladat *Konvergens-e vagy sem a*

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{2n+1}{n^2+n}$$

sor? Ha konvergens, mennyi az összege?

3.5. Feladat *Melyik az a négyjegyű négyzetszám, amelyben az első két számjegy megegyezik, és az utolsó két számjegy is megegyezik?*

3.6. Feladat *Oldjuk meg a következő egyenletrendszert:*

$$\begin{aligned} x + y + z &= a \\ x^2 + y^2 + z^2 &= b \\ x^3 + y^3 + z^3 &= c. \end{aligned}$$

Speciális eset: $a = -1$, $b = 5$, $c = -7$.

3.7. Feladat *Egyenlő kerületű derékszögű haromszögek közül melyiknek legnagyobb a területe?*

3.8. Feladat *Bizonyítsuk be, hogy*

$$n! \leq 2\left(\frac{n}{2}\right)^n.$$

3.9. Feladat *Oldjuk meg a következő trigonometrikus egyenletet:*

$$4 \cdot \operatorname{tg} 3x + 4 \cdot \operatorname{tg} 2x + 5 \cdot \operatorname{tg} x = 0.$$

3.10. Feladat *Számítsuk ki az*

$$a_n = \prod_{k=2}^{n} \left(1 - \frac{1}{k^2}\right)$$

sorozat határértékét!

3.11. Feladat *Konvergens-e, és ha igen, mi a határértéke annak a sorozatnak, amelynek általános tagja*

$$a_n = \frac{n^n}{5^n \cdot n!}\ ?$$

3.12. Feladat *Hány valós gyöke van az*

$$1 + x + \frac{x^2}{2} + \ldots + \frac{x^n}{n} = 0$$

egyenletnek?

3.13. Feladat *Melyiknek a legnagyobb a területe az adott körszeletbe rajzolható olyan téglalapok közül, amelyeknek egyik oldala a körszelet húrján nyugszik?*

3.14. Feladat *Számísuk ki a következő határértéket:*

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[2n]{\cos^2 n + \frac{(2n+1)\sin^2 n}{2n}}.$$

3.15. Feladat *Bizonyítsuk be, hogy ha az*

$$x^3 + px^2 + qx + r = 0$$

egyenlet mindhárom gyöke pozitív, akkor a gyökök reciprok értékeinek összege (q-tól független) kisebb, mint

$$-\frac{p^2}{2r}.$$

3.16. Feladat *Számítsuk ki az alábbi sorozat határértékét, ha $x > 0$:*

$$a_n = \left(\frac{1+\sqrt[n]{x}}{2}\right)^n.$$

3.2. Megoldások

3.2.1 Megoldás *Alakítsuk át az általános tagot:*

$$\frac{1}{(4n+1)(4n+3)} = \frac{1}{2}\frac{(4n+3)-(4n+1)}{(4n+3)(4n+1)} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{4n+1} - \frac{1}{4n+3}\right)$$

A sor így írható:

$$\frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \ldots + \frac{1}{4n+1} - \frac{1}{4n+3} + \ldots\right).$$

Ez olyan váltakozó előjelű sor, amelynek általános tagja zérushoz tart és tagjai abszolút értékben szigorúan monoton csökkennek, a sor tehát Leibniz kritériuma értelmében konvergens.

3.2.2 Megoldás *Legyen a keresett kör középpontja $M(\alpha;\beta)$, sugara r. Mivel a megadott körök mindegyike 2 sugarú, ezért M mindhárom kör középpontjától $r+2$ távolságra van:*

$$(\alpha-1)^2 + (\beta-2)^2 = (r+2)^2$$
$$(\alpha-2)^2 + (\beta-9)^2 = (r+2)^2$$
$$(\alpha-9)^2 + (\beta-8)^2 = (r+2)^2.$$

Két egyenletből kivonva ugyanazt a harmadikat

$$(\alpha-1)^2 - (\alpha-2)^2 + (\beta-2)^2 - (\beta-9)^2 = 0$$
$$(\alpha-9)^2 - (\alpha-2)^2 + (\beta-8)^2 - (\beta-9)^2 = 0$$

adódik, amiből átalakítások után

$$\alpha + 7\beta = 40$$
$$-7\alpha + \beta = -30.$$

Ennek az egyenletrendszernek a gyökei $\alpha = \beta = 5$. Ennek ismeretében $r = 3$-hoz már könnyen eljuthatunk. A keresett kör egyenlete tehát

$$(x-5)^2 + (y-5)^2 = 9.$$

3.2.3 Megoldás *Végezzük el a négyzetre emelést:*

$$(x^2 - 2ax + a^2)(b-c) + (x^2 - 2bx + b^2)(c-a) + (x^2 - 2cx + c^2)(a-b),$$

aztán a szorzást és összevonást. Kapjuk:

$$a^2b - a^2c + b^2c - ab^2 + ac^2 - bc^2.$$

Erről pedig a szorzások elvégzésével könnyen megállapíthatjuk, hogy egyenlő a

$$(b-a)(c-b)(a-c)$$

szorzattal.

3.2.4 Megoldás *Bontsuk az általános tag abszolút értékét résztörtek összegére:*

$$\frac{2n+1}{n^2+n} = \frac{A}{n} + \frac{B}{n+1} = \frac{(A+B)n+A}{n^2+n}.$$

Ez csak úgy lehet, ha

$$A+B=2 \quad \textit{és} \quad A=1,$$

amiből $B=1$ következik. Az n-edik részletösszeg tehát:

$$S_n = -1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \ldots + (-1)^n \frac{1}{n} + (-1)^n \frac{1}{n+1} =$$
$$= -1 + (-1)^n \frac{1}{n+1},$$

ezért a sor konvergens és összege:

$$S = \lim_{n\to\infty} S_n = -1 + \lim_{n\to\infty} (-1)^n \frac{1}{n+1} = -1.$$

3.2.5 Megoldás *Legyen a keresett szám N^2. A feltételek szerint*

$$N^2 = \overline{aabb} = 11(10^2a+b).$$

Az N^2 tehát osztható 11-gyel, így 11^2-nel is, és az

$$N^2 = 11(99a+a+b)$$

előállítás azt eredményezi, hogy

$$a+b=11,$$

hiszen a és b egyjegyű és $a \neq 0$. Ez utóbbi felhasználásával kapjuk:

$$N^2 = 11^2(9a+1),$$

tehát $9a+1$-nek is négyzetszámnak kell lennie. Ez pedig csak akkor következhet be, ha $a=7$, de akkor $b=4$. Így a feltételeket kielégítő négyjegyű szám:

$$7744 = 88^2.$$

3.2.6 Megoldás *Érvényes az alábbi két azonosság:*

$$(x+y+z)^2 - (x^2+y^2+z^2) = 2(xy+yz+zx)$$

$$(x+y+z)^3 - (x^3+y^3+z^3) = 3(x+y+z)(xy+yz+zx) - 3xyz.$$

Egyenleteink figyelembevételével az első azonosságból

$$xy + yz + zx = \frac{a^2 - b}{2},$$

a másodikból

$$xyz = \frac{3a\frac{a^2-b}{2} - a^3 + c}{3} = \frac{a^3 - ab}{2} + \frac{c - a^3}{3} = \frac{a^3 - 3ab + 2c}{6}$$

adódik. A gyökök és együtthatók összefüggéseinek felhasználásával a

$$W^3 - aW^2 + \frac{a^2 - b}{2}W - \frac{a^3 - 3ab + 2c}{6} = 0$$

harmadfokú egyenletet kapjuk, s ennek gyökei adják az (x, y, z) *megoldáshármast.*
Ha $a = -1$, $b = 5$, $c = -7$, *akkor*

$$W^3 + W^2 - 2W = W(W^2 + W - 2) = 0,$$

tehát $x = W_1 = 0$, $y = W_2 = 2$, $z = W_3 = -1$. *Mivel mindhárom egyenletünk* x*-ben,* y*-ban és* z*-ben szimmetrikus, a további megoldások még:*

$$(0; -1; 2);\ (2; 0; -1);\ (2; -1; 0);\ (-1; 0; 2);\ (-1; 2; 0).$$

Ha $b = a^2$ *és* $c = a^3$, *akkor a megoldások:*

$$(0; 0; a);\ (0; a; 0);\ (a; 0; 0).$$

3.2.7 Megoldás *Ha a derékszögű háromszög befogói* x *és* y, *átfogója pedig* z, *akkor egyrészt*

$$x^2 + y^2 = z^2,$$

másrészt

$$x + y + z = 2s$$

teljesül, ahol $2s$ *a háromszög kerülete.*
Ezekből

$$2xy = (x + y)^2 - (x^2 + y^2) = (2s - z)^2 - z^2 = 4s^2 - 4sz$$

adódik. A háromszög T *területe:*

$$T = \frac{xy}{2} = s^2 - sz = s(s - z)$$

az átfogó függvénye. Így, ha z értéke csökken, akkor a terület nő.
De a derékszögű háromszögben

$$x + y > z \geq \frac{x+y}{\sqrt{2}}$$

teljesül, ezért a z legkisebb értéke $\frac{x+y}{\sqrt{2}}$ lehet. Ebben az esetben viszont a háromszög egyenlő szárú, ugyanis a négyzetes és számtani közép között fennáll a

$$\sqrt{\frac{x^2+y^2}{2}} = \frac{z}{\sqrt{2}} \geq \frac{x+y}{2}$$

egyenlőtlenség, és az egyenlőség akkor érvényes, ha $x = y$. Az adott kerületű derékszögű háromszögek közül tehát az egyenlő szárúak a maximális területűek, és mivel $x = y$, ezért

$$2x + \frac{2x}{\sqrt{2}} = 2s,$$

azaz

$$x = s(2 - \sqrt{2}) = y.$$

Így a maximális terület:

$$T_{max} = \frac{x^2}{2} = s^2(3 - 2\sqrt{2}).$$

3.2.8 Megoldás *A bizonyítást teljes indukcióval végezzük.*
Könnyen ellenőrizhető, hogy $n = 1$-re és $n = 2$-re az egyenlőség teljesül. Tegyük fel, hogy valamely természetes k-ra állításunk igaz, s következtessünk $k+1$-re. Indukciós feltevésünk értelmében

$$(k+1)! = k!(k+1) \leq 2\left(\frac{k}{2}\right)^k (k+1) \leq 2\left(\frac{k+1}{2}\right)^k \cdot \frac{k+1}{2} =$$
$$= 2\left(\frac{k+1}{2}\right)^{k+1},$$

hacsak

$$\left(\frac{k}{2}\right)^k (k+1) \leq \left(\frac{k+1}{2}\right)^k \cdot \frac{k+1}{2},$$

azaz ha

$$2k^k \leq (k+1)^k.$$

Márpedig a binomiális tétel szerint ez minden $k \geq 1$-re teljesül, ugyanis

$$(k+1)^k = k^k + \binom{k}{1} k^{k-1} + \ldots + 1 \geq 2k^k,$$

mert nemnegatív tagokat hagytunk el. Ezzel állításunkat igazoltunk.

3.2.9 Megoldás *Mivel*

$$\operatorname{tg} 2x = \frac{2 \operatorname{tg} x}{1 - \operatorname{tg}^2 x}$$

és

$$\operatorname{tg} 3x = \frac{\operatorname{tg} 2x + \operatorname{tg} x}{1 - \operatorname{tg} 2x \cdot \operatorname{tg} x} = \frac{\dfrac{2 \operatorname{tg} x}{1 - \operatorname{tg}^2 x} + \operatorname{tg} x}{1 - \dfrac{2 \operatorname{tg} x}{1 - \operatorname{tg}^2 x} \cdot \operatorname{tg} x} =$$

$$= \frac{2 \operatorname{tg} x + \operatorname{tg} x - \operatorname{tg}^3 x}{1 - \operatorname{tg}^2 x - 2 \operatorname{tg}^2 x} = \frac{3 \operatorname{tg} x - \operatorname{tg}^3 x}{1 - 3 \operatorname{tg}^2 x},$$

ezért

$$4 \cdot \frac{3 \operatorname{tg} x - \operatorname{tg}^3 x}{1 - 3 \operatorname{tg}^2 x} + 4 \cdot \frac{2 \operatorname{tg} x}{1 - \operatorname{tg}^2 x} + 5 \operatorname{tg} x = 0,$$

amiből vagy

$$\operatorname{tg} x = 0,$$

vagy

$$\frac{12 - 4 \operatorname{tg}^2 x}{1 - 3 \operatorname{tg}^2 x} + \frac{8}{1 - \operatorname{tg}^2 x} + 5 = 0.$$

Ebből

$$12 - 4 \operatorname{tg}^2 x - 12 \operatorname{tg}^2 x + 4 \operatorname{tg}^4 x + 8 - 24 \operatorname{tg}^2 x + 5 - 15 \operatorname{tg}^2 x - 5 \operatorname{tg}^2 x + 15 \operatorname{tg}^4 x = 0,$$

azaz

$$19 \operatorname{tg}^4 x - 60 \operatorname{tg}^2 x + 25 = 0.$$

Az első esetben

$$x_1 = \operatorname{arctg} 0 = k\pi \quad (k \in \mathbb{Z}),$$

a másodikban, mivel másodfokúra redukálható negyedfokú egyenletről van szó:

$$x_{2,3,4,5} = \operatorname{arctg}\left(\pm\sqrt{\frac{30 \pm 5\sqrt{17}}{19}} \right).$$

3.2.10 Megoldás *Az a_n a következőképpen írható:*

$$a_n = \prod_{k=2}^{n} \left(1 - \frac{1}{k^2}\right) = \prod_{k=2}^{n} \frac{(k-1)(k+1)}{k^2} =$$

$$= \frac{1 \cdot 3}{2^2} \cdot \frac{2 \cdot 4}{3^2} \cdot \frac{3 \cdot 5}{4^2} \cdots \frac{(n-1)(n+1)}{n^2} =$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{4}{3} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{5}{4} \cdots \frac{n-1}{n} \cdot \frac{n+1}{n} = \frac{1}{2} \cdot \frac{n+1}{n},$$

ugyanis, mint látjuk, az első és utolsó tényező kivételével minden tényező mellett annak reciproka is előfordul, tehát

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2}\cdot\frac{n+1}{n} = \frac{1}{2}.$$

3.2.11 Megoldás *Mivel a_n minden n-re pozitív és*

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(n+1)^{n+1}\cdot 5^n\cdot n!}{5^{n+1}\cdot(n+1)!n^n} = \frac{1}{5}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n < \frac{3}{5}, \quad ha \quad n>1,$$

vagyis

$$a_{n+1} < \frac{3}{5}a_n < a_n,$$

tehát a sorozat szigorúan monoton csökkenő és alulról korlátos, ezért konvergens is. Legyen a határérték s (ahol tehát s nemnegatív véges érték). Vegyük észre, hogy

$$\begin{aligned} a_{2n} &= \frac{(2n)^{2n}}{5^{2n}\cdot(2n)!} = \frac{4^n\cdot n^n\cdot n^n}{5^n\cdot 5^n\cdot 2n(2n-1)\ldots(n+1)\cdot n!} = \\ &= \frac{4^n n^n}{5^n\cdot 2n(2n-1)\ldots(n+1)}\cdot a_n. \end{aligned}$$

Viszont

$$\frac{4^n n^n}{5^n\cdot 2n(2n-1)\ldots(n+1)} = \left(\frac{4}{5}\right)^n\cdot\frac{n}{2n}\cdot\frac{n}{2n-1}\cdots\frac{n}{n+1} < \left(\frac{4}{5}\right)^n,$$

ezért

$$0 \le \lim_{n\to\infty} a_{2n} \le \lim_{n\to\infty}\left(\frac{4}{5}\right)^n a_n = s\cdot\lim_{n\to\infty}\left(\frac{4}{5}\right)^n = s\cdot 0 = 0,$$

amiből ismert tétel alapján $a_n \to 0$ következik.

3.2.12 Megoldás *Azonnal látjuk, hogy a gyököket csak a negatív számok között kereshetjük. Legyen*

$$f(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \ldots + \frac{x^n}{n}.$$

Ennek deriváltja:

$$f'(x) = 1 + x + x^2 + \ldots + x^{n-1} = \frac{x^n-1}{x-1}.$$

Két esetet vizsgálunk:
1. Ha n páros, akkor

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} f(x) = \infty,$$

és $f'(x) = 0$-nak egyetlen valós gyöke $x = -1$, így az $f(-1)$ függvényérték a folytonos $f(x)$ függvénynek helyi és egyben abszolút minimuma is. Mivel pedig

$$f(-1) = 1 - 1 + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \ldots + \left(\frac{1}{n-2} - \frac{1}{n-1}\right) > 0,$$

így az eredeti egyenletnek nincs valós gyöke.
2. Ha n páratlan, akkor

$$\lim_{n\to-\infty} f(x) = -\infty; \quad \lim_{n\to\infty} f(x) = \infty,$$

s ezért, mivel $f(x)$ folytonos, legalább egy zérushelye van. A függvénynek azonban csak egy zérushelye lehet, mert $f'(x)$ folytonos, egyetlen x esetén sem zérus, és mivel például $f(0) = 1$, így $f'(x) > 0$ minden x-re. Az $f(x)$ függvény tehát szigorúan monoton növekvő, így csak egy zérushelye lehet.
Az $f(x) = 0$ egyenletnek tehát egy valós gyöke van, ha $f(x)$ fokszáma páratlan, és nincs valós gyöke, ha $f(x)$ páros fokszámú.

3.2.13 Megoldás *Az adott körszelethez tartozó húr hossza legyen $PQ = 2h$, a kör sugara r, középpontja O. A PQ húrt a rá merőleges átmérő messe E-ben. Egy olyan téglalap csúcsai, amelynek egyik oldala az adott húron nyugszik és másik két csúcsa a körön van, A, B, C, D. Az adott húrral párhuzamos BC oldalt az OE egyenes messe F-ben. Ha $OF = x$, akkor*

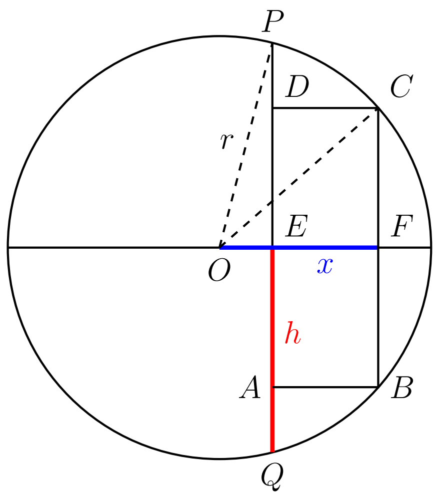
$$FC = \sqrt{r^2 - x^2}$$

és

$$EF = x - \sqrt{r^2 - h^2},$$

így a téglalap területe

$$T = 2\left(x - \sqrt{r^2 - h^2}\right)\sqrt{r^2 - x^2}.$$



Ennek a $T(x)$ függvénynek kell meghatároznunk a maximumát. A $T(x)$-nek ott lehet maximuma, ahol az első deriváltja 0-val egyenlő.

$$\begin{aligned}
T'(x) &= 2\sqrt{r^2-x^2} + 2\left(x - \sqrt{r^2-h^2}\right) \cdot \frac{-2x}{2\sqrt{r^2-x^2}} = \\
&= \frac{2(r^2-x^2) - 2x(x-\sqrt{r^2-h^2})}{\sqrt{r^2-x^2}} = \\
&= \frac{2r^2-4x^2+2x\sqrt{r^2-h^2}}{\sqrt{r^2-x^2}} = \frac{2x^2-x\sqrt{r^2-h^2}-r^2}{-\frac{1}{2}\sqrt{r^2-x^2}}
\end{aligned}$$

akkor zérus, amikor a számláló az, megoldandó tehát a

$$2x^2 - x\sqrt{r^2-h^2} - r^2 = 0$$

egyenlet.

$$x_{1,2} = \frac{\sqrt{r^2-h^2} \pm \sqrt{r^2-h^2+8r^2}}{4} = \frac{\sqrt{r^2-h^2} \pm \sqrt{9r^2-h^2}}{4}.$$

Mivel az

$$F(x) = 2x^2 - x\sqrt{r^2-h^2} - r^2$$

függvény képe parabola, ezért az

$$x = \frac{\sqrt{r^2-h^2} \pm \sqrt{9r^2-h^2}}{4}$$

helyen a $T(x)$-nek maximuma van. Az x_2 negatív gyök azt az esetet jelenti, amikor az F (s így a téglalap is) a húr másik oldalán van. Mivel x-szel az OF hosszúságát jelöltük, ezért e gyök abszolút értékét vesszük. A maximális terület x_1 esetén:

$$\begin{aligned}
T_{max} &= 2\left(\frac{\sqrt{r^2-h^2}+\sqrt{9r^2-h^2}}{4} - \sqrt{r^2-h^2}\right)\sqrt{r^2 - \left(\frac{\sqrt{r^2-h^2}+\sqrt{9r^2-h^2}}{4}\right)^2} = \\
&= \frac{1}{8}\left(\sqrt{9r^2-h^2} - 3\sqrt{r^2-h^2}\right)\sqrt{6r^2+2h^2-2\sqrt{(r^2-h^2)(9r^2-h^2)}}.
\end{aligned}$$

A másik esetben

$$|x_2| = \frac{\sqrt{9r^2-h^2} - \sqrt{r^2-h^2}}{4},$$

s a maximális terület ekkor:

$$T_{max} = \frac{1}{8}\left(\sqrt{9r^2-h^2} + 3\sqrt{r^2-h^2}\right)\sqrt{6r^2+2h^2+2\sqrt{(r^2-h^2)(9r^2-h^2)}}.$$

3.2.14 Megoldás *Írjuk át a sorozat n-edik elemét:*

$$a_n = \sqrt[2n]{\frac{2n\cos^2 2n + 2n\sin^2 n + \sin^2 n}{2n}} = \sqrt[2n]{\frac{2n + \sin^2 n}{2n}}.$$

Mivel pedig

$$a_n = \sqrt[2n]{1 + \frac{\sin^2 n}{2n}} \geq 1$$

és

$$\sqrt[2n]{1 + \frac{\sin^2 n}{2n}} \leq \sqrt[2n]{1 + \frac{1}{2n}} < \sqrt[2n]{2},$$

ezért

$$1 \leq \lim_{n\to\infty} a_n \leq \lim_{n\to\infty} \sqrt[2n]{2} = 1,$$

vagyis

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 1.$$

3.2.15 Megoldás *A gyökök és együtthatók összefüggése alapján*

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 &= -p \\ x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_1 &= q \\ x_1x_2x_3 &= -r, \end{aligned}$$

és mivel feltétel szerint a gyökök mind pozitívak, ezért

$$p < 0; \quad q > 0; \quad r < 0.$$

A második egyenlőséget a harmadikkal osztva kapjuk:

$$\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \frac{1}{x_3} = -\frac{q}{r}.$$

Azt kell tehát csak belátnunk, hogy

$$-\frac{q}{r} < -\frac{p^2}{2r}.$$

Ebből $-2r\,(>0)$*-rel való szorzás után*

$$2q < p^2$$

adódik, ami viszont igaz, mert

$$\begin{aligned} 2q &= 2(x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_1) = \\ &= (x_1 + x_2 + x_3)^2 - (x_1^2 + x_2^2 + x_3^2) < (x_1 + x_2 + x_3)^2 = p^2. \end{aligned}$$

3.2.16 Megoldás *Alkalmazzuk a következő jelölést:*

$$f(t) = \left(\frac{1+\sqrt[t]{c}}{2}\right)^t,$$

ahol $c > 0$ *és* t *tartson a végtelenhez. Végezzük el az alábbi átalakítást:*

$$\left(\frac{1+\sqrt[t]{c}}{2}\right)^t = \left[\frac{2+(\sqrt[t]{c}-1)}{2}\right]^t = \left(1+\frac{\sqrt[t]{c}-1}{2}\right)^t =$$

$$= \left[\left(1+\frac{1}{\frac{2}{\sqrt[t]{c}-1}}\right)^{\frac{2}{\sqrt[t]{c}-1}}\right]^{\frac{t}{2}\left(\sqrt[t]{c}-1\right)} = [g(t)]^{h(t)}.$$

Mivel

$$\frac{2}{\sqrt[t]{c}-1} \to \pm\infty$$

ha $t \to \infty$*, aszerint, hogy* $c > 1$ *vagy* $c < 1$*, ezért*

$$g(t) \to e,$$

s már csak $h(t)$ *határértékét kell megvizsgálnunk. Írjuk* $h(t)$*-t ilyen alakban:*

$$h(t) = \frac{\sqrt[t]{c}-1}{\frac{2}{t}},$$

s mivel itt mind a számláló, mind a nevező 0*-hoz tart, alkalmazhatjuk rá L'Hospital szabályát. A számláló deriváltja:*

$$\left(\sqrt[t]{c}-1\right)' = -\frac{\sqrt[t]{c}\cdot\ln c}{t^2},$$

a nevezőé pedig

$$-\frac{2}{t^2},$$

így

$$\frac{\sqrt[t]{c}\cdot\ln c}{2} \to \frac{\ln c}{2} = \ln\sqrt{c},$$

tehát

$$[g(t)]^{h(t)} \to e^{\ln\sqrt{c}} = \sqrt{c}.$$

Az eredeti jelöléssel tehát

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \sqrt{x}.$$