

FÉLCSOPORTOK

NAGY ATTILA

2013.06.28

Tartalomjegyzék

Bevezető	4
1. A félcsoporth és csoport fogalma	6
1.1. A művelet fogalma	6
1.2. A félcsoporth fogalma	8
1.3. Általános asszociativitás és kommutativitás	11
1.4. Félcsoporth kitüntetett elemei	13
1.5. A csoport fogalma; ekvivalens definíciók	15
1.6. Félcsoporth részfélcsoporthjai	16
1.7. Félcsoporth részcsoporthjai	21
2. Félcsoporth kongruenciái	24
2.1. Binér relációk félcsoporthja	24
2.2. Ekvivalenciarelációk	27
2.3. Félcsoporth kongruenciarelációi, faktorfélcsoporth	28
2.4. Csoport-, illetve nullelemes csoport-kongruenciák	32
3. Félcsoporth homomorfizmusai	39
3.1. Homomorfizmustétel, Izomorfizmustételek	40
3.2. Szabad félcsoporthok	42
4. Félcsoporth ideáljai, a Green-relációk	45
4.1. Minimális, 0-minimális ideálok	46
4.2. 0-minimális bal oldali ideálok	48
4.3. Rees-féle kongruencia, Rees-féle faktorfélcsoporth	51
4.4. Félcsoporth főfaktorai	53
4.5. A Green-féle \mathcal{L} -, \mathcal{R} -, \mathcal{H} -, \mathcal{D} -relációk	56
5. Félcsoporthok ideálbővítése	65
5.1. Ideálbővítés, parciális transzformációk	65
5.2. Félcsoporthok translációs burka	68

5.3. Gyengén redukzív félcsoporthok	71
6. Reguláris félcsoporthok, inverz félcsoporthok	78
6.1. Reguláris elem	78
6.2. Neumann-féle inverz	80
6.3. Reguláris félcsoporthok	83
6.4. Inverz félcsoporthok	86
7. Jobb egyszerű és jobb 0-elemes félcsoporthok	92
7.1. Idempotens elemet tartalmazó jobb egyszerű félcsoporthok	95
7.2. Idempotens elemet nem tartalmazó jobb egyszerű félcsoporthok	99
7.3. Baer-Levi félcsoporthok	102
8. Egyszerű és 0-elemes félcsoporthok	106
8.1. Egyszerű félcsoporthok	106
8.2. Croisot-Teissier félcsoporthok	106
8.3. 0-elemes félcsoporthok	110
9. Teljesen egyszerű és teljesen 0-elemes félcsoporthok	114
9.1. A teljesen 0-elemes félcsoporthok jellemzése	114
9.2. Rees-féle mátrixfélcsoporthok, a Rees-tétel	124
9.3. Teljesen egyszerű félcsoporthok	132
9.4. Brandt-félcsoporthok	134
10. Félcsoporthok félháló-felbontása	141
10.1. Félcsoporthok legszűkebb félháló-kongruenciája	141
10.2. Arkhimédészi félcsoporthok félhálaja	145
10.3. Félcsoporthok erős félhálaja	157
10.4. Kötegek	160
11. Félcsoporthok szubdirekt szorzata	166
11.1. Szubdirekt irreducibilis félcsoporthok	169
11.2. Szubdirekt irreducibilis kommutatív félcsoporthok	174
12. Permutálható félcsoporthok	182
12.1. Permutálható félcsoporthok ideáljai	183
12.2. Permutálható félcsoporthok epimorf képei	185
12.3. Kommutatív permutálható félcsoporthok	187
13. Félcsoporthok beágyazása csoportokba	189
13.1. Kommutatív félcsoporthok beágyazása csoportba	189
13.2. Egy elégséges feltétel	192

13.3. Egyszerűsítéssel félcsoporthányadoscsoportha	194
14. Félcsoporthok beágyazása csoportok uniójába	198
14.1. Kommutatív félcsoporthok legszűkebb gyengén szeparatív kongruenciája	199
14.2. Kommutatív gyengén szeparatív félcsoporthok	202
15. Félcsoporthalgebrák	205
15.1. Véges dimenziós algebrák kitüntetett elemei	205
15.2. Véges dimenziós algebra nilpotens ideáljai	208
15.3. Féligegyszerű algebrák	212
15.4. Félcsoporthalgebrák	213
16. Félcsoporthok mátrixreprezentációi	218
16.1. Jobbreguláris reprezentáció	218
16.2. Félcsoporthok direkt szorzatának jobbreguláris reprezentációja	219
16.3. Félcsoporthok félhálójának jobbreguláris reprezentációja	222
17. Megoldások	227
Tárgymutató	239
Irodalomjegyzék	242

Bevezető

Mivel szinte minden, a gyakorlatban fontos algebrai struktúra definíciójában szerepel a szóban forgó műveletre (műveletekre) vonatkozóan az asszociativitás követelménye, ezért elméleti szempontból hasznosak számunkra az olyan algebrai struktúrával kapcsolatos információk, amelyben egy művelet van értelmezve, s ez a művelet asszociatív. Az ilyen algebrai struktúrát félcsoporthnak nevezzük. A félcsoporthnak nem csak az algebrai struktúrák elméletében, hanem az alkalmazásokban is jut szerep. A számítógéptudományban közvetlenül is alkalmazható automataelméletben, a karakterisztikus félcsoporth révén, a félcsoporthelméleti eredmények felhasználást nyerhetnek. Itt utalunk a [9] könyvre és a [3], [4] elektronikus jegyzetekre.

A félcsoporthok elmélete lényegében a múlt század 40-es, 50-es éveiben vette kezdetét. Magyar matematikusok is szép eredményeket értek el ezen a területen. Az irodalomjegyzékben említésre kerül tőlük példaként néhány olyan munka ([12], [14], [17], [18], [20], [27], [30], [36], [37], [39]), amelyek témája kapcsolódik e jegyzet egyes fejezeteinek témáihoz.

A félcsoporth fogalma a csoport fogalmának, illetve a gyűrű fogalmának általánosítása. A csoport olyan félcsoporth, amelyen a tekintetbe vett művelet invertálható, a gyűrű pedig egy olyan multiplikatív félcsoporth, amely egy másik művelettel, az úgynevezett összeadással együtt bizonyos feltételeknek tesz eleget. Ez a tény a félcsoporthelmélet kialakulásának kezdetén determinálta a félcsoporthelméleti kutatások jellegét. Egyrészt jellemző volt, hogy a vizsgálatok középpontjában főleg olyan félcsoporthok álltak, amelyek sokban hasonlítottak a csoportokhoz, például abban, hogy minden elemnek van valamilyen értelemben vett inverze (reguláris félcsoporthok, inverz félcsoporthok). A kezdeti kutatásokat másrészt az is jellemezte, hogy a félcsoporthok vizsgálata során a gyűrűelmélet főbb eredményeit igyekeztek átfogalmazni a félcsoporthokra.

Az algebrai struktúrák vizsgálatában a kongruenciák központi szerepet játszanak. Ebből a szempontból lényeges különbség van a félcsoporthok és a fenti összehasonlításban szereplő csoportok, illetve gyűrűk között. Egyrészt azért, mert amíg a csoportok, illetve gyűrűk esetében kölcsönösen egyértelmű megfeleltetés van a kongruenciák és a csoportok normális részcsoporthjai, illetve a gyűrűk ideáljai között, addig a félcsoporthok esetében sokkal kedvezőtlenebb a helyzet. Ugyan egy félcsoporth bizonyos részstruktúrái, például az ideálok, vagy a reflexív unitér részfélcsoporthok meghatározzák az illető félcsoporth egy-egy

kongruenciáját, de a félcsoportok esetében nincsenek olyan részstruktúrák, amelyek kölcsönösen egyértelmű módon determinálnák egy félcsoport kongruenciáit. Másrészt azért, mert a félcsoportok esetén - ugyan két kongruencia infimuma (hasonlóan a csoportokhoz és a gyűrűkhöz) megegyezik a kongruenciák metszetével - két kongruencia szuprémuma általában nehezen kezelhető. Ugyan ismert, hogy egy félcsoport két kongruenciájának szuprémuma megegyezik a két kongruencia uniójának tranzitív lezártjával, azonban ennek az egyes vizsgálatokban való alkalmazása általában nehézkes. Vannak olyan kongruenciákkal kapcsolatos konstrukciók, amelyek hatásosan alkalmazhatóak a csoportok, illetve a gyűrűk vizsgálatakor, viszont a félcsoportok elméletében nem működnek kellőképpen, az előzőekben részletezett okok miatt. A kongruenciákban megnyilvánuló különbözőség korlátot szabott a fentebb vázolt általánosítási törekvéseknek, s a félcsoportelmélet már kialakulásának korai szakaszában kiérlelte a saját módszereit. Olyan speciális konstrukciók jelentek meg a kutatásokban, illetve a már meglévők közül olyanok kerültek előtérbe, amelyek eredményesen használhatók a félcsoportok vizsgálatában. Ilyenek például a félcsoportok különböző típusú köteg-felbontásai, főleg a félháló-felbontás, illetve a félcsoportoknak szubdirekt irreducibilis félcsoportok szubdirekt szorzatára való felbontása. A jegyzetben külön fejezetet szentelünk mind a félháló-felbontásnak, mind a szubdirekt szorzatnak, ezen belül a szubdirekt irreducibilis félcsoportoknak.

A 17 fejezetből álló jegyzet a Budapesti Műszaki és Gazdaságtudományi Egyetemen a Matematika Alapszak keretén belül "Félcsoportelmélet" címmel tartott szabadon választható tárgyam előadásainak anyaga alapján készült. A jegyzet az [5], [6], [11], [20], [25] [38] könyvek jelöléseit, fogalmait használja, és egyes fejezeteinek eredményei is feldolgozásra kerültek. Beépítésre került a [7], [10], [16], [19], [21], [23], [28], [32], [33], [34], [39], [41] cikkekben publikált eredmények némelyike is.

Az 1. fejezetben a félcsoportelmélet legalapvetőbb fogalmaival, a 2. fejezetben a félcsoportok kongruenciáival, a 3. fejezetben a félcsoportok homomorfizmusaiival, a 4. és 5. fejezetekben a félcsoportok ideáljaival, illetve ideálbővítéseivel, a 6. fejezetben a reguláris félcsoportokkal és az inverz félcsoportokkal, a 7. és 8. fejezetekben a jobb (0-)egyszerű, illetve a (0-) egyszerű félcsoportokkal, a 9. fejezetben a teljesen (0-) egyszerű félcsoportokkal, a 10. fejezetben a félcsoportok félháló-felbontásával, a 11. fejezetben a félcsoportok szubdirekt szorzatával, illetve a szubdirekt irreducibilis félcsoportokkal, a 12. fejezetben a permutálható félcsoportokkal, a 13. és 14. fejezetekben félcsoportoknak csoportokba, illetve csoportok uniójába való beágyazhatóságával, a 15. fejezetben a félcsoportalgebrákkal, a 16. fejezetben félcsoportok jobbrekuláris mátrixreprezentációjával foglalkozunk. Az egyes fejezetek végén feladatok találhatóak. A 17. fejezet ezek megoldásait tartalmazza.

A jegyzet lektorálását Szőke Magdolna végezte. Köszönetet mondok lelkiismeretes munkájáért. Értékes megjegyzéseivel, javaslataival nagymértékben hozzájárult ahhoz, hogy minden bizonyítási részlet érthető, a jegyzet könnyen olvasható legyen.

Nagy Attila

1. fejezet

A félcsoport és csoport fogalma

1.1. A művelet fogalma

1.1. Definíció Legyen n tetszőleges pozitív egész szám, és legyenek A_1, \dots, A_n tetszőleges nem üres halmazok. Az A_1, \dots, A_n halmazok ebben a sorrendben képezett Descartes szorzatán az

$$A_1 \times \dots \times A_n = \{(a_1, \dots, a_n) : a_1 \in A_1, \dots, a_n \in A_n\}$$

halmazt értjük, azaz mindazon n -elemű sorozatok halmazát, amely sorozatok mindegyikében az i -dik elem az A_i halmaz valamely eleme.

1.2. Definíció Legyen A tetszőleges nem üres halmaz, és legyen n tetszőleges pozitív egész szám. Az n -szeres $A \times \dots \times A$ Descartes szorzatnak az A halmazba való egyértelmű leképezését az A halmazon értelmezett n -változós műveletnek nevezzük.

1.3. Definíció Egy olyan (nem üres) A halmazt, amelyen értelmezve van legalább egy művelet, algebrai struktúrának nevezünk. Ennek jelölése: $(A; \Omega)$, ahol Ω jelöli az A halmazon értelmezett műveletek halmazát. Az A halmazt az algebrai struktúra alaphalmazának is szokták nevezni.

Ebben a jegyzetben műveleten mindig kétváltozós műveletet fogunk érteni. Ha $*$ jelöl egy A halmazon értelmezett (kétváltozós) műveletet, akkor az $(a, b) \in A \times A$ elempár $*$ szerinti képét $*(a, b)$ helyett $a * b$ módon jelöljük. Az $a * a$ elemet jelölhetjük $2a$ -val, de jelölhetjük a^2 -tel is, annak mintájára, hogy a számoknál $a + a$ helyett $2a$ -t, illetve $a \cdot a$ helyett a^2 -t írunk. Az első esetben azt mondjuk, hogy additív írásmódot, a második esetben multiplikatív írásmódot használunk. Additív írásmód esetén a művelet jeleként a $+$ jelet, multiplikatív írásmód esetén a művelet jeleként a \cdot jelet használjuk. Multiplikatív írásmód esetén (ha nem okoz félreértést) a művelet jelét elhagyjuk, s az $a \cdot b$ kifejezés helyett egyszerűen ab -t írunk. Ebben a jegyzetben főleg multiplikatív írásmódot használunk.

1.4. Megjegyzés Ha nem okoz félreértést, vagy ha nincs szükség rá, akkor egy algebrai struktúrát csak az alaphalmazával jelöljük. Ezek szerint, A jelölhet egy halmazt és egy algebrai struktúrát is.

1.5. Megjegyzés Egy műveletet táblázatos formában is megadhatunk. Például, egy $A = \{a, b\}$ alaphalmaz esetén a következő táblázatban

	a	b
a	b	b
b	b	a

az a -sor b -oszlopának eleme az ab műveleti eredmény; jelen példánkban ez egyenlő b -vel. Egy, a fentieknek megfelelően konstruált táblázatot Cayley-féle művelettáblának nevezünk.

1.6. Definíció Azt mondjuk, hogy egy A halmazon értelmezett művelet asszociatív, ha tetszőleges $a, b, c \in A$ elemek esetén fennáll az

$$a(bc) = (ab)c$$

egyenlőség. A műveletről azt mondjuk, hogy kommutatív, ha tetszőleges $a, b \in A$ elemekre teljesül az

$$ab = ba$$

egyenlőség. Azt mondjuk, hogy a művelet invertálható (az A halmazon), ha tetszőleges $(a, b) \in A \times A$ elempárhoz megadhatók A -nak olyan x és y elemei, amelyekre teljesülnek az

$$ax = b \quad \text{és} \quad ya = b$$

egyenlőségek.

1.7. Megjegyzés Ha egy legalább kételemű A halmazon azt a műveletet tekintjük, amelynél tetszőleges $(a, b) \in A \times A$ elempár esetén $ab = b$ teljesül, akkor világos, hogy a művelet nem kommutatív. Az is világos, hogy a szóban forgó művelet nem invertálható, mert ugyan tetszőleges $(a, b) \in A \times A$ elempár esetén az $ax = b$ egyenlőség az A halmaz $x = b$ elemére teljesül, de $a \neq b$ esetén A -nak nincs olyan y eleme, amelyre $ya = b$ teljesülne.

1.8. Megjegyzés Az egész számok halmazán az összeadás asszociatív, kommutatív és invertálható. A szorzás is asszociatív és kommutatív, viszont nem invertálható. A racionális számok \mathbb{Q} halmazán a szorzás asszociatív és kommutatív, valamint a $\mathbb{Q} \setminus \{0\}$ halmazon invertálható.

1.2. A félcsoport fogalma

1.9. Definíció Egy egyműveletes algebrai struktúrát *gruppoidnak* nevezünk.

1.10. Definíció Egy S *gruppoidról* azt mondjuk, hogy *félcsoport*, ha az S -en értelmezett művelet asszociatív. Ha a művelet még kommutatív is, akkor az S félcsoportot *kommutatív félcsoportnak* nevezük.

Mindenekelőtt ismertetünk két módszert, amelyek alkalmasak annak eldöntésére, hogy egy véges S *gruppoid* félcsoport-e vagy nem.

1. módszer:

Legyen $(S; \cdot)$ véges *gruppoid*. Az S egy rögzített a eleme esetén definiáljuk az S elemei között a következő műveleteket: $x \circ y = (x \cdot a) \cdot y$, illetve $x \diamond y = x \cdot (a \cdot y)$. Világos, hogy az S összes x, y elemére az $(x \cdot a) \cdot y = x \cdot (a \cdot y)$ egyenlőség akkor és csak akkor teljesül, ha a \circ és \diamond műveletek megegyeznek. Az $x \circ y$ műveleti eredményeket beírhatjuk egy táblázatba, amely táblázat az S -en értelmezett eredeti művelet Cayley-féle művelettáblájából úgy kapható meg, hogy annak x -sorát ($x \in S$) kicseréljük az xa -sorára. Hasonlóan, az $x \diamond y$ műveleti eredményeket ugyancsak beírhatjuk egy táblázatba, amely táblázat az S -en értelmezett eredeti művelet Cayley-féle művelettáblájából úgy kapható meg, hogy annak y -oszlopát ($y \in S$) kicseréljük az ay -oszlopára. Tehát $(S; \cdot)$ akkor és csak akkor félcsoport, ha tetszőleges S -beli a elemhez az előzőekben felírt két táblázatban az azonos helyen álló elemek egymással rendre megegyeznek. Az asszociativitás teljesülésének most részletezett tesztelését *Light-féle asszociativitási tesztnek* nevezzük.

Tekintsük példaként a következő Cayley-féle művelettáblával definiált $S = \{a, b\}$ *gruppoidot*:

\cdot	a	b
a	b	a
b	b	b

Az a elem által definiált \circ művelethez tartozó táblázat:

	a	b
b	b	b
b	b	b

Az a elem által definiált \diamond művelethez tartozó táblázat:

	a	b
a	b	a
b	b	b

Mivel ebben a két táblázatban már van eltérés, ezért a b elemhez tartozó táblázatokat már nem is kell összehasonlítani; az eredeti Cayley-táblázattal definiált \cdot művelet nem asszociatív.

2. módszer:

Legyen S véges, n elemű grupoid. Rögzítsük S elemeinek egy sorrendjét. Legyen ez például $\{s_1, s_2, \dots, s_n\}$. Legyen \mathbb{F} tetszőleges test. Jelölje 0 , illetve 1 az \mathbb{F} nullelemét, illetve egységelemét. Tetszőleges $s \in S$ elemhez definiáljunk egy \mathbb{F} test feletti $n \times n$ -típusú $\mathbf{R}^{(s)}$ módon jelölt mátrixot a következőképpen:

$$\mathbf{R}^{(s)} = (r_{i,j}^{(s)}),$$

ahol

$$r_{i,j}^{(s)} = \begin{cases} 1, & \text{ha } s_i s = s_j \\ 0, & \text{különben.} \end{cases}$$

Az így definiált mátrixot az S grupoid s eleméhez tartozó \mathbb{F} test feletti (az S elemeinek fenti sorrendje által meghatározott) jobb oldali mátrixának nevezzük.

Az S grupoid valamely s eleméhez tartozó jobb oldali mátrix duálisaként értelmezhetjük a bal oldali mátrixot is, azaz azt az \mathbb{F} feletti $n \times n$ -típusú $\mathbf{L}^{(s)} = (l_{i,j}^{(s)})$ mátrixot, melynek $l_{i,j}^{(s)}$ elemeit a következőképpen értelmezzük:

$$l_{i,j}^{(s)} = \begin{cases} 1, & \text{ha } s s_j = s_i \\ 0, & \text{egyébként.} \end{cases}$$

Például, ha S a következő Cayley-táblázattal definiált grupoid:

\cdot	s_1	s_2
s_1	s_2	s_2
s_2	s_2	s_1

akkor az S elemeihez az $\{s_1, s_2\}$ sorred szerint hozzárendelt jobb oldali, illetve bal oldali mátrixok a következők:

$$\mathbf{R}^{(s_1)} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{R}^{(s_2)} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix},$$
$$\mathbf{L}^{(s_1)} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{L}^{(s_2)} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

1.11. Tétel Egy véges $S = \{s_1, s_2, \dots, s_n\}$ halmazon értelmezett művelet esetén az alábbi feltételek egymással ekvivalensek.

- (1) A művelet asszociatív az S halmazon.
- (2) Tetszőleges $s_i, s_j \in S$ elemek esetén $\mathbf{R}^{(s_i)} \mathbf{R}^{(s_j)} = \mathbf{R}^{(s_i s_j)}$.

(3) Tetszőleges $i, j \in S$ elemek esetén $\mathbf{L}^{(s_i)}\mathbf{L}^{(s_j)} = \mathbf{L}^{(s_i s_j)}$.

Bizonyítás. Jelölje \underline{e}_{s_t} ($1 \leq t \leq n$) azt az n -elemű sorozatot, amelyben a t -edik elem az \mathbb{F} test egységeleme, a többi eleme pedig az \mathbb{F} test nulleleme.

Legyenek $s_i, s_j \in S$ tetszőleges elemek. Világos, hogy az $\mathbf{R}^{(s_i)}\mathbf{R}^{(s_j)}$ mátrix k -dik sora

$$\underline{e}_{(s_k s_i) s_j}.$$

Mivel az $\mathbf{R}^{(s_i s_j)}$ mátrix k -dik sora

$$\underline{e}_{s_k(s_i s_j)},$$

ezért

$$\mathbf{R}^{(s_i)}\mathbf{R}^{(s_j)} = \mathbf{R}^{(s_i s_j)}$$

akkor és csak akkor, ha

$$\underline{e}_{(s_k s_i) s_j} = \underline{e}_{s_k(s_i s_j)},$$

azaz, ha

$$(s_k s_i) s_j = s_k(s_i s_j)$$

minden $k \in S$ elemre. Következésképpen az (1) és (2) feltételek egymással ekvivalensek.

Mivel az $\mathbf{L}^{(s_i)}\mathbf{L}^{(s_j)}$ mátrix k -dik oszlopa

$$\underline{e}_{s_i(s_j s_k)},$$

továbbá az $\mathbf{L}^{(s_i s_j)}$ mátrix k -dik oszlopa

$$\underline{e}_{(s_i s_j) s_k},$$

ezért

$$\mathbf{L}^{(s_i)}\mathbf{L}^{(s_j)} = \mathbf{L}^{(s_i s_j)}$$

akkor és csak akkor teljesül, ha

$$\underline{e}_{s_i(s_j s_k)} = \underline{e}_{(s_i s_j) s_k},$$

azaz, ha

$$s_i(s_j s_k) = (s_i s_j) s_k$$

minden $k \in S$ elem esetén. Így az (1) és (3) feltételek ekvivalensek. \square

Az előző tétel lehetőséget ad egy kétváltozós művelet asszociativitásának tesztelésére: ahhoz, hogy egy véges S grupoid félcsoporth legyen, szükséges és elegendő, hogy teljesüljenek az $\mathbf{R}^{(a)}\mathbf{R}^{(b)} = \mathbf{R}^{(ab)}$ (illetve az $\mathbf{L}^{(a)}\mathbf{L}^{(b)} = \mathbf{L}^{(ab)}$) egyenlőségek tetszőleges S -beli a és b elem esetén.

1.3. Általános asszociativitás és kommutativitás

1.12. Tétel *Legyen S egy félcsoport. Akkor tetszőleges $n \geq 3$ egész szám és S elemeiből képezett tetszőleges n elemű sorozat esetén az elemek adott sorrendben képezett szorzata nem függ attól, hogy a szorzatot milyen zárójelezés mellett számítjuk ki.*

Bizonyítás. Legyen S tetszőleges félcsoport. A tétel bizonyítását a szorzatban szereplő elemszámra (n -re) vonatkozó teljes indukcióval végezzük. $n = 3$ esetén nincs mit bizonyítani, mert a tétel állítása ebben a speciális esetben az asszociativitás definíciója miatt igaz.

Legyen $n \geq 4$ tetszőleges egész szám. Tegyük fel, hogy az állítást már igazoltuk minden n -nél kisebb tényezőszámra. Legyenek $a_1, a_2, \dots, a_n \in S$ tetszőleges elemek. Megmutjuk, hogy az $a_1, a_2, \dots, a_n \in S$ elemek ebben a sorrendben vett, tetszőleges $Z[a_1, a_2, \dots, a_n]$ zárójelezése szerinti szorzatára mindig igaz, hogy

$$Z[a_1, a_2, \dots, a_n] = (((a_1 a_2) \cdots) a_{n-1}) a_n.$$

Az világos, hogy a $Z[a_1, a_2, \dots, a_n]$ szorzatban valamely $i = 1, \dots, n - 1$ indexre az a_i és az a_{i+1} elemek $(a_i a_{i+1})$ formában szerepelnek. Ha ezt a szorzatot S egyetlen elemének tekintjük, akkor a $Z[a_1, a_2, \dots, a_n]$ szorzat az S félcsoport $n - 1$ elemének szorzataként tekinthető. Az indukciós feltételt használva, a következőket kapjuk. Az $i = 1$ esetben nyilvánvalóan teljesül a

$$Z[a_1, a_2, \dots, a_n] = (((a_1 a_2) \cdots) a_{n-1}) a_n.$$

egyenlőség. Ha $1 < i < n - 1$, akkor

$$Z[a_1, a_2, \dots, a_n] = (((a_1 a_2) \cdots (a_i a_{i+1})) \cdots) a_n;$$

miel a jobb oldalon szereplő szorzat első tényezője n -nél kevesebb tényezőt tartalmaz, ezért az megegyezik az

$$((a_1 a_2) \cdots a_{n-2}) a_{n-1}$$

szorzattal, és így

$$Z[a_1, a_2, \dots, a_n] = (((a_1 a_2) \cdots) a_{n-1}) a_n.$$

Végül vizsgáljuk az $i = n - 1$ esetet. Ekkor

$$Z[a_1, a_2, \dots, a_n] = (((a_1 a_2) \cdots) a_{n-2}) (a_{n-1} a_n).$$

A jobb oldalon szereplő szorzat az S félcsoport három elemének, az

$$x = ((a_1 a_2) \cdots) a_{n-2},$$

valamint az a_{n-1} és az a_n elemek

$$x(a_{n-1}a_n)$$

szorzata, ami az asszociativitás miatt megegyezik az

$$(xa_{n-1})a_n$$

szorzattal, és így

$$Z[a_1, \dots, a_n] = (((a_1a_2) \cdots) a_{n-1})a_n. \quad \square$$

1.13. Megjegyzés Egy S félcsoport tetszőleges a eleme és tetszőleges n pozitív egész szám esetén értelmezve van az a^n hatvány, amely olyan n -tényezős szorzat, melynek minden tényezője a . Így

$$a^1 = a, \quad a^2 = aa, \quad a^3 = aa^2 = a^2a, \dots$$

Additív írásmód esetén értelemszerűen az na alakú n -tagú összegekről beszélhetünk; ekkor

$$1a = a, \quad 2a = a + a, \quad 3a = a + 2a = 2a + a, \dots$$

1.14. Tétel Legyen S tetszőleges kommutatív félcsoport. Akkor tetszőleges $n \geq 2$ egész szám és S tetszőleges n számú eleme esetén az elemek szorzata nem függ az elemek sorrendjétől.

Bizonyítás. Legyen S tetszőleges kommutatív félcsoport. A bizonyítást az elemek számára (n -re) vonatkozó teljes indukcióval végezzük el. $n = 2$ esetén nincs mit bizonyítani, mert a tétel állítása ebben a speciális esetben a kommutativitás definíciója miatt igaz.

Legyen $n \geq 3$ tetszőleges egész szám. Tegyük fel, hogy az állítás igaz minden n -nél kisebb tényezőszámra. Legyenek $a_1, \dots, a_n \in S$ tetszőleges elemek. Az előző tétel miatt elegendő azt megmutatni, hogy

$$(((a_{\pi(1)}a_{\pi(2)}) \cdots) a_{\pi(n-1)})a_{\pi(n)} = (((a_1a_2) \cdots) a_{n-1})a_n,$$

ahol π az $\{1, 2, \dots, n\}$ halmaz tetszőleges permutációja.

Ha $n = \pi(n)$, akkor

$$(((a_{\pi(1)}a_{\pi(2)}) \cdots) a_{\pi(n-1)})a_{\pi(n)} = (((a_{\pi(1)}a_{\pi(2)}) \cdots) a_{\pi(n-1)})a_n,$$

ahol a jobb oldali szorzat első tényezője (amely egy $n - 1$ tényezős szorzat) az indukciós feltétel miatt megegyezik azzal a szorzattal, amelyben az elemek szigorúan növekvő indexszel követik egymást, s ezért

$$(((a_{\pi(1)}a_{\pi(2)}) \cdots) a_{\pi(n-1)})a_{\pi(n)} = (((a_1a_2) \cdots) a_{n-1})a_n.$$

Ha $j = \pi(n) \neq n$, akkor

$$(((a_{\pi(1)}a_{\pi(2)}) \cdots)a_{\pi(n-1)})a_j = a_j(((a_{\pi(1)}a_{\pi(2)}) \cdots)a_{\pi(n-1)}).$$

A jobb oldalon szereplő szorzatban a második tényező az indukciós feltétel miatt átírható úgy, hogy abban az első tényező indexe $j + 1$ legyen (a többi tényező sorrendje tetszőleges). Az asszociativitás miatt az átalakított jobboldali szorzat egyenlő azzal a szorzattal, amelyben az első tényező $a_j a_{j+1}$ (a többi tényező sorrendje tetszőleges). Az $a_j a_{j+1}$ szorzatot S egyetlen elemének tekintve, az indukciós feltételt felhasználásával, innen már könnyen adódik az

$$(((a_{\pi(1)}a_{\pi(2)}) \cdots)a_{\pi(n-1)})a_{\pi(n)} = (((a_1 a_2) \cdots)a_{n-1})a_n$$

egyenlőség.

□

1.4. Félcsoport kitüntetett elemei

1.15. Definíció Egy S félcsoport valamely f elemét az S bal oldali [jobb oldali] nullelemének nevezzük, ha minden S -beli a elem esetén $fa = f$ [$af = f$] teljesül. Egy S félcsoport valamely elemét az S nullelemének nevezzük, ha az illető elem az S -nek bal oldali és jobb oldali nulleleme.

Tetszőleges nem üres S halmaz esetén, S -en értelmezhetjük a következő műveletet: tetszőleges $a, b \in S$ esetén legyen $ab = a$ [$ab = b$]. Világos, hogy ez a művelet asszociatív, azaz S erre a műveletre nézve félcsoport, amelyben minden elem bal oldali [jobb oldali] nullelem.

1.16. Definíció Egy olyan félcsoportot, amelyben minden elem bal oldali [jobb oldali] nullelem, balzéró [jobbzeró] félcsoportnak fogunk nevezni.

1.17. Lemma Minden félcsoportnak legfeljebb egy nulleleme lehet. Ha egy félcsoportnak van jobb oldali és bal oldali nulleleme, akkor mindegyikből csak egy van, amelyek egybeesnek, s a félcsoport egyetlen nullelemét adják.

Bizonyítás. Ha e , illetve f egy félcsoport bal oldali, illetve jobb oldali nullelemei, akkor $e = ef = f$. Ez bizonyítja a lemma minden állítását. □

Tetszőleges S félcsoport esetén jelölje S^0 azt a félcsoportot, amely megegyezik S -sel, ha S -nek van nulleleme és $|S| > 1$, ellenkező esetben viszont azt a félcsoportot, melyet S -ből úgy származtatunk, hogy az S halmazt kiegészítjük egy $0 \notin S$ elemmel, s az $S \cup \{0\}$ halmazon úgy értelmezünk egy műveletet, hogy a művelet eredménye az S -beli

elemek között legyen egyenlő az eredeti S -beli műveleti eredménnyel, viszont tetszőleges $x \in S \cup \{0\}$ elem esetén $x0$ és $0x$ is legyen egyenlő a 0 elemmel. Világos, hogy S^0 olyan félcsoport, amelynek van nulleleme. Az első esetben az eredeti, S -beli nullelem, a második esetben az S -hez adjungált elem.

Tetszőleges S nem üres halmaz tetszőleges a eleme esetén definiálhatunk S -en egy $*$ műveletet a következőképpen: tetszőleges $x, y \in S$ esetén legyen $x * y = a$. Világos, hogy $(S, *)$ egy félcsoport, amelyben a nullelem. Ebben a félcsoportban bármely két elem szorzata a nullelem. Egy ilyen félcsoportot *zéró félcsoportnak* nevezünk.

1.18. Definíció Egy S félcsoport valamely e elemét a félcsoport bal oldali egységelemének nevezzük, ha S minden s eleme esetén fennáll az $es = s$ egyenlőség. Félcsoport jobb oldali egységelemének fogalma a bal oldali egységelem fogalmának duálisa. Egy félcsoport valamely elemét a félcsoport egységelemének nevezünk, ha az bal oldali és egyben jobb oldali egységeleme a félcsoportnak.

1.19. Tétel Minden félcsoportnak legfeljebb egy egységeleme van. Továbbá, ha egy félcsoportnak van jobb oldali és bal oldali egységeleme is, akkor azok egyenlőek, s az S félcsoport egyetlen egységelemét adják.

Bizonyítás. Jelölje e , illetve f egy S félcsoport bal oldali, illetve jobb oldali egységelemét. Akkor

$$e = ef = f.$$

Ez bizonyítja a tétel mindkét állítását. □

1.20. Definíció Egy egységelemes félcsoportot monoidnak is nevezünk.

1.21. Megjegyzés Minden S félcsoporthoz adjungálhatunk egy, az S által nem tartalmazott e elemet, és az $S \cup e$ halmazon definiálhatunk egy \circ műveletet úgy, hogy legyen

$$e \circ s = s \circ e = s$$

tetszőleges $s \in S \cup e$ esetén, s az S -beli műveletet változatlanul hagyjuk. Az világos, hogy ezzel egy olyan félcsoportot definiáltunk, amelyben e egységelem.

Jelölés: Tetszőleges S félcsoport esetén jelölje S^1 az S félcsoportot, ha S -ben van egységelem, egyébként pedig jelölje azt a félcsoportot, amelyet S -ből egy egységelem adjungálásával nyerünk az előző megjegyzésben szereplő módon.

1.22. Definíció Egy e egységelemes S félcsoport valamely b elemét [c elemét] egy $a \in S$ elem bal oldali [jobb oldali] inverzének nevezzük, ha $ba = e$ [$ac = e$] teljesül. Egy $a^{-1} \in S$ elemről azt mondjuk, hogy az $a \in S$ elem inverze, ha a^{-1} az a elem bal oldali és jobb oldali inverze is.

1.23. Tétel *Egységelemes félcsoporthban minden elemnek legfeljebb egy inverze van. Továbbá, ha egy a elemnek van jobb oldali és bal oldali inverze is, akkor azok egyenlők, és az a elem egyetlen inverzét adják.*

Bizonyítás. Jelölje a' , illetve a'' egy egységelemes S félcsoporth valamely a elemének bal oldali, illetve jobb oldali inverzét. Akkor, e -vel jelölve az S egységelemét,

$$a' = a'e = a'(aa'') = (a'a)a'' = ea'' = a''$$

adódik. Ez bizonyítja a tétel mindkét állítását. □

1.5. A csoport fogalma; ekvivalens definíciók

1.24. Definíció *Egy S félcsoporthot csoportnak nevezünk, ha van egységeleme, és minden elemének van inverze. Ha emellett még kommutatív is a művelet, akkor kommutatív csoportról beszélünk.*

1.25. Tétel *Tetszőleges S félcsoporthon a következő feltételek egymással ekvivalensek:*

- (1) S csoport;
- (2) S -nek van olyan e jobb oldali egységeleme, hogy S minden elemének van S -ben e -re vonatkozó jobb oldali inverze, azaz minden $a \in S$ elemhez van olyan $a^{-1} \in S$ elem, hogy $aa^{-1} = e$;
- (3) S -nek van olyan f bal oldali egységeleme, hogy S minden elemének van S -ben f -re vonatkozó bal oldali inverze, azaz minden $a \in S$ elemhez van olyan $a^{-1} \in S$ elem, hogy $a^{-1}a = f$;
- (4) Az S -en értelmezett művelet invertálható, azaz tetszőleges $a, b \in S$ elemekhez vannak olyan $x, y \in S$ elemek, amelyekre $ax = b$ és $ya = b$ teljesül;
- (5) Minden $a \in S$ elemre $Sa = S$ és $aS = S$.

Bizonyítás. Az nyilvánvaló, hogy az (1) feltételből következik a (2) és a (3) feltétel. Mivel tetszőleges $a, b \in S$ elemek esetén az $x = a^{-1}b$ és $y = ba^{-1}$ elemekre teljesülnek az $ax = b$ és $ya = b$ egyenlőségek, ezért az (1) feltételből következik a (4) feltétel is.

A következő lépésként megmutatjuk, hogy (2) maga után vonja (1)-et. Tegyük fel, hogy az S félcsoporthban van olyan e jobb oldali egységelem, hogy S minden elemének van jobb oldali inverze erre a jobb oldali egységelemre nézve. Legyen a tetszőleges S -beli elem. Jelölje a_0 az a -nak, a_1 az a_0 -nak egy-egy jobb oldali inverzét az e jobb oldali egységelemre nézve, azaz

$$aa_0 = e = a_0a_1.$$

Akkor

$$a_0a = (a_0a)e = (a_0a)(a_0a_1) = a_0(aa_0)a_1 = a_0ea_1 = a_0a_1 = e,$$

tehát a_0 bal oldali inverze a -nak e -re nézve. Így

$$ea = (aa_0)a = a(a_0a) = ae = a,$$

tehát e kétoldali egységeleme S -nek. Így (1) teljesül.

Az előzőekhez hasonlóan igazolható, hogy a (3) feltételből következik az (1) feltétel.

Az eddigi eredményekből már az is következik, hogy az (1), a (2) és a (3) feltételek egymással ekvivalensek.

Mivel a (4) és (5) feltételek nyilvánvalóan ekvivalensek, elegendő már csak azt megmutatni, hogy a (4) feltételből következik az (2) feltétel. Ehhez tegyük fel, hogy tetszőleges $a, b \in S$ elemekhez vannak olyan $x, y \in S$ elemek, amelyekre $ax = b$ és $ya = b$ teljesül. Legyen $a \in S$ tetszőleges, rögzített elem. Akkor megadható olyan e elem, amelyre $ae = a$ teljesül. Legyen $b \in S$ tetszőleges elem. Akkor van olyan $y \in S$ elem, hogy $ya = b$. Ezért

$$be = (ya)e = y(ae) = ya = b,$$

azaz e az S félcsoport jobb oldali egységeleme. Mivel a művelet invertálható, tetszőleges $a \in S$ elemhez megadható olyan $a^{-1} \in S$ elem, hogy $aa^{-1} = e$. Tehát (2) teljesül. \square

1.6. Félcsoport részfélcsoportjai

1.26. Definíció Egy S félcsoport valamely nem üres T részhalmazát az S félcsoport részfélcsoportjának nevezzük, ha T zárt az S -beli műveletre nézve, azaz $ab \in T$ teljesül minden $a, b \in T$ elem esetén.

1.27. Definíció Egy S félcsoport valamely nem üres I részhalmazát bal oldali ideálnak (vagy balideálnak) nevezzük, ha minden $s \in S$ és minden $a \in I$ elem esetén $sa \in I$, azaz $SI \subseteq I$; a jobb oldali ideál (vagy jobbideál) fogalma a bal oldali ideál fogalmának duálisa. Ha I jobbideálja és balideálja is egy S félcsoportnak, akkor azt mondjuk, hogy I kétoldali ideálja (vagy ideálja) S -nek.

Az világos, hogy egy félcsoport minden balideálja (jobbideálja, ideálja) részfélcsoport. Az ideálok részletesebb vizsgálatával a 4. fejezet foglalkozik.

1.28. Definíció Egy S félcsoport valamely nem üres G részhalmazát az S félcsoport generátorrendszerének nevezzük, ha S tetszőleges s eleméhez megadhatók G -nek olyan g_1, \dots, g_n elemei, hogy $s = g_1g_2 \cdots g_n$. Ekkor az $S = \langle G \rangle$ jelölést használjuk. Ha S -nek van véges sok elemet tartalmazó generátorrendszere, akkor azt mondjuk, hogy S végesen generálható. Ha S -nek van egyetlen elemet tartalmazó generátorrendszere, akkor azt

mondjuk, hogy S ciklikus félcsoporth. S egy nem üres A részhalmaza esetén az A elemeiből képezhető összes $a_1 \cdots a_n$ ($n \geq 1$, $a_1, \dots, a_n \in A$) szorzat az S egy részfélcsoportját alkotja, melyet az A által generált részfélcsoporthnak nevezünk és $\langle A \rangle$ -val jelölünk. Tehát $\langle A \rangle = \cup_{n=1}^{\infty} A^n$. Az világos, hogy $\langle A \rangle$ megegyezik az A -t tartalmazó részfélcsoporth metszetével.

1.29. Tétel Tetszőleges S félcsoporth tetszőleges a eleme esetén $\langle a \rangle$ izomorf vagy a pozitív egész számok additív félcsoporthjával, vagy pedig $\langle a \rangle = \{a, a^2, \dots, a^i, \dots, a^{i+m-1}\}$, ahol i az a legkisebb pozitív egész szám, amelyhez van olyan $i \neq j$, hogy $a^i = a^j$, m pedig az legkisebb pozitív egész szám, amelyre $a^i = a^{i+m}$ teljesül; ekkor az is igaz, hogy $K_a = \{a^i, \dots, a^{i+m-1}\}$ izomorf az egészek mod m additív csoportjával, $(\mathbb{Z}_m; +)$ -szal.

Bizonyítás. Legyen a egy S félcsoporth tetszőleges eleme. Két esetet különböztetünk meg.

1. eset: $a^i = a^j$ akkor és csak akkor teljesül valamely i és j pozitív egész számra, ha $i = j$. Ekkor a

$$\varphi : a^i \mapsto i$$

az $\langle a \rangle$ ciklikus félcsoporthnak a pozitív egész számok additív félcsoporthjára való izomorfizmusa.

2. eset: Megadhatók olyan $i \neq j$ pozitív egész számok, amelyekre $a^i = a^j$ teljesül. Jelölje a továbbiakban i azt a legkisebb pozitív egész számot, amelyre $a^i = a^j$ teljesül valamely $j \neq i$ pozitív egészre. Jelölje továbbá m azt a legkisebb pozitív egész számot, amelyre $a^i = a^{i+m}$. Ekkor persze

$$a^{i+km} = a^{i+m} a^{(k-1)m} = a^i a^{(k-1)m} = a^{i+m} a^{(k-2)m} = a^i a^{(k-2)m} = \dots = a^i,$$

és ezért tetszőleges pozitív egész n esetén megadhatók olyan k és t nemnegatív egészek ($t = 0, \dots, m-1$), amelyekre $n = km + t$, s ezért

$$a^{i+n} = a^{i+km+t} = a^{i+km} a^t = a^{i+t}.$$

Így

$$\langle a \rangle = \{a, a^2, \dots, a^i, \dots, a^{i+m-1}\}$$

és $K_a = \{a^i, \dots, a^{i+m-1}\}$ az S félcsoporth részfélcsoporthja. Jelölje j azt a $0 \leq j \leq m-1$ egész számot, melyre $i+j$ osztható m -mel. Mivel $i, i+1, \dots, i+m-1$ egymást követő m pozitív egész szám, ezért egy és csak egy ilyen j szám létezik. Tetszőleges $a^{i+t} \in K_a$ elemre

$$a^{i+j} a^{i+t} = a^{km} a^{i+t} = a^{i+km+t} = a^{i+t},$$

így a^{i+j} a K_a félcsoporth egységeleme. Legyen $a^{i+t} \in K_a$ tetszőleges. Mivel $0 \leq t \leq m-1$, ezért megadható olyan $0 \leq k \leq m-1$ egész szám, hogy $i+t+i+k$ osztható m -mel. Így

$$a^{i+t} a^{i+k} = a^{i+j}.$$

Tehát a^{i+k} az a^{i+t} elem inverze, és így K_a részcsoportja az S félcsoportnak. Az elmondottakból az is következik, hogy

$$\varphi : a^{i+t} \mapsto [i+t]$$

izomorfizmusa K_a -nak $(\mathbb{Z}_m; +)$ -ra, ahol $[i+t]$ jelöli \mathbb{Z}_m -nek azt az elemét (\mathbb{Z} azon kongruencia-osztályát $(\text{mod } m)$), amely tartalmazza az $i+t$ számot. \square

1.30. Definíció *Egy S félcsoport valamely a eleme által generált ciklikus részfélcsoport rendjét az a elem rendjének nevezzük és $o(a)$ -val jelöljük. Egy véges rendű elemet periodikus elemnek is szoktunk nevezni.*

1.31. Megjegyzés *Ha a egy S félcsoport véges rendű eleme, akkor az előző tételben szereplő jelöléseket használva, i -t az a elem indexének, a m -et pedig az a elem periódusának nevezzük. Ezeket az elnevezéseket használva, azt kapjuk, hogy*

$$o(a) + 1 = \text{index} + \text{periódus}.$$

1.32. Definíció *Egy S félcsoportot periodikus félcsoportnak nevezünk, ha minden eleme periodikus.*

1.33. Tétel *Egy periodikus S félcsoport minden elemének valamely hatványa benne van S egy részcsoportjában.*

Bizonyítás. Legyen a egy periodikus S félcsoport tetszőleges eleme. Az 1.29. Tétel szerint $K_a = \{a^i, \dots, a^{i+m-1}\}$ izomorf az egészek mod m additív csoportjával. Ebből már következik a tétel állítása. \square

William Burnside angol matematikus 1902-ben tette fel a következő kérdést: egy végesen generálható, véges rendű elemeket tartalmazó csoport szükségszerűen véges-e, vagy nem. Ennek félcsoportelméleti megfelelője: egy végesen generált periodikus félcsoport szükségszerűen véges-e, vagy nem. Erre a kérdésre 1984-ben adott választ A. Restivo és C. Reutenauer ([32]). Tőlük származik a lentebbi 1.36. Tétel.

1.34. Definíció *Legyen $n \geq 2$ tetszőleges egész szám. Azt mondjuk, hogy egy S félcsoport rendelkezik n -re vonatkozóan a permutációtulajdonsággal, ha az S félcsoport elemeinek tetszőleges n -elemű s_1, \dots, s_n sorozatához magadható olyan n -edfokú nem-identikus σ permutáció, hogy $s_1 \cdots s_n = s_{\sigma(1)} \cdots s_{\sigma(n)}$.*

1.35. Definíció *Azt mondjuk, hogy egy S félcsoport rendelkezik a permutációtulajdonsággal, ha rendelkezik valamely $n \geq 2$ egész számra vonatkozóan a permutációtulajdonsággal.*

1.36. Tétel (*Burnside probléma félcsoporthokra*) Egy végesen generált periodikus félcsoport akkor és csak akkor véges, ha rendelkezik a permutációtulajdonsággal.

Bizonyítás. Legyen S véges félcsoport. Ekkor S végesen generált és periodikus. Legyen

$$n = 1 + 2|S|,$$

így $n \geq 3$. Megmutatjuk, hogy S rendelkezik n -re vonatkozóan a permutációtulajdonsággal. Legyenek $s_1, \dots, s_n \in S$ tetszőleges elemek. Tekintsük az S félcsoport következő elemsorozatot:

$$s_1, s_1s_2, s_1s_2s_3, \dots, s_1s_2 \cdots s_n.$$

Az n definíciója miatt megadhatók olyan i, j, k egészek, amelyekre $1 \leq i < j < k \leq n$ teljesül, és fennállnak a következő egyenlőségek:

$$s_1 \cdots s_i = s_1 \cdots s_j = s_1 \cdots s_k.$$

Legyen

$$u = s_1 \cdots s_i, \quad x = s_{i+1} \cdots s_j, \quad y = s_{j+1} \cdots s_k,$$

ezért

$$u = ux = uxy,$$

amiből

$$uyx = uxyx = ux = uxy$$

adódik. Így

$$s_1 \cdots s_k = s_1 \cdots s_i s_{j+1} \cdots s_k s_{i+1} \cdots s_j,$$

amiből következik, hogy S rendelkezik a permutációtulajdonsággal.

Fordítva, legyen S olyan végesen generált periodikus félcsoport, amely rendelkezik a permutációtulajdonsággal. Akkor megadható olyan $n \geq 2$ egész szám, hogy az S félcsoport rendelkezik az n -re vonatkozó permutációtulajdonsággal. Jelölje A az S félcsoport egy véges generátorrendszerét. A 3.15. Tétel szerint létezik az \mathcal{F}_A szabad félcsoportnak az S félcsoporthoz való olyan φ homomorfizmusa, amely annak az

$$f : A \mapsto A \subseteq S$$

leképezésnek a kiterjesztése, amely A minden elemének önmagát felelteti meg. Az \mathcal{F}_A szabad félcsoport elemeit szavaknak fogjuk nevezni, és egy $w \in \mathcal{F}_A$ szó hosszát $|w|$ fogja jelölni. Tekintsük az A halmaz egy teljes rendezését. Ennek segítségével értelmezzük az \mathcal{F}_A szabad félcsoporton egy $<$ (teljes) rendezést a következőképpen. Tetszőleges $u, v \in \mathcal{F}_A$ szavak esetén $u < v$ akkor és csak akkor, ha u hossza kisebb v hosszánál, vagy a két szó hossza megegyezik, de u megelőzi v -t az A -n tekintett teljes rendezés által meghatározott lexikografikus rendezés szerint. A [33]-ben található 4.2.7 Tétel szerint minden $p \geq 2n$ egész számhoz megadható olyan $N(p)$ pozitív egész szám, hogy minden legalább $N(p)$ hosszúságú \mathcal{F}_A -beli w szóra a következő két feltétel valamelyike teljesül.

- (1) Léteznek olyan \mathcal{F}_A -beli u, v, x_1, \dots, x_n elemek (szavak), hogy w előáll $w = ux_1 \cdots x_n v$ alakban mégpedig úgy, hogy tetszőleges n -edfokú $\sigma \neq id$ permutáció esetén

$$ux_{\sigma(1)} \cdots x_{\sigma(n)}v < w.$$

- (2) Megadhatók olyan \mathcal{F}_A -beli u, v, x szavak, hogy w előáll

$$w = ux^p v$$

alakban, ahol az x szó hossza legfeljebb $n - 1$.

Mivel S periodikus és A véges, ezért megadható olyan $p \geq 2n$ egész szám, hogy minden legfeljebb n hosszúságú w szó esetén az S félcsoportban

$$\varphi(w)^p = \varphi(w)^{p'}$$

teljesül valamely $p' < p$ kitevőre. Megmutatjuk, hogy S minden s eleméhez van olyan $N(p)$ -nél kisebb hosszúságú w szó, hogy $s = \varphi(w)$. Ez már bizonyítja, hogy az S félcsoport véges. Legyen tehát s tetszőleges S -beli elem. Legyen w az \mathcal{F}_A szabad félcsoport $\varphi(s)^{-1}$ részhalmazának minimális eleme a fenti $<$ rendezés szerint. Megmutatjuk, hogy w hossza kisebb $N(p)$ -nél. Tegyük fel ennek ellenkezőjét. Ekkor w -re teljesül a fenti (1) és (2) feltétel valamelyike.

Vizsgáljuk először azt az esetet, amikor w -re a fenti (1) feltétel teljesül. Akkor léteznek olyan \mathcal{F}_A -beli u, v, x_1, \dots, x_n szavak, hogy w előáll

$$w = ux_1 \cdots x_n v$$

alakban mégpedig úgy, hogy tetszőleges n -edfokú nem-identikus σ permutáció esetén

$$ux_{\sigma(1)} \cdots x_{\sigma(n)}v < w.$$

Válasszuk σ -t olyannak, amely a permutáció-tulajdonság miatt az x_1, \dots, x_n elemsorozathoz tartozik. Ekkor viszont

$$s = \varphi(w) = \varphi(ux_{\sigma(1)} \cdots x_{\sigma(n)}v),$$

és így

$$ux_{\sigma(1)} \cdots x_{\sigma(n)}v \in \varphi(s)^{-1}.$$

Az (1) feltétel miatti

$$ux_{\sigma(1)} \cdots x_{\sigma(n)}v < w$$

eredmény viszont ellentmond annak, hogy w a $\varphi(s)^{-1}$ halmaz minimális eleme.

Vizsgáljuk most azt az esetet, amikor w -re a (2) feltétel teljesül. Akkor megadhatók olyan \mathcal{F}_A -beli u, v, x szavak, hogy w előáll $w = ux^pv$ alakban és az x szó hossza legfeljebb $n - 1$. Így

$$s = \varphi(w) = \varphi(ux^pv) = \varphi(u)\varphi(x^p)\varphi(v) = \varphi(u)\varphi(x^{p'})\varphi(v) = \varphi(ux^{p'}v),$$

amiből

$$ux^{p'}v \in \varphi(s)^{-1}$$

következik. Mivel $p' < p$, ezért az $ux^{p'}v$ szó hossza kisebb a w szó hosszánál, ami ellentmond annak, hogy w a $\varphi(s)^{-1}$ halmaz minimális eleme.

Mivel mindkét esetben ellentmondásra jutottunk, szükségképpen teljesül, hogy a w szó hossza kisebb az $N(p)$ pozitív egész számnál. A fenti megjegyzés figyelembevételével a tételt ezzel bebizonyítottuk. \square

1.37. Definíció Egy S félcsoport e elemét idempotens elemnek nevezzük, ha $e^2 = e$, azaz $o(e) = 1$.

1.38. Definíció Ha egy S félcsoport minden eleme idempotens, akkor az S félcsoportot kötegnek nevezzük. Egy kommutatív kötegre azt mondjuk, hogy félháló.

1.39. Megjegyzés Tetszőleges S félcsoport idempotens elemeinek E_S halmazán definiált $e \leq f$ ($e, f \in E_S$) akkor és csak akkor ha $e = ef = fe$ reláció reflexív, antiszimmetrikus és tranzitív, azaz egy parciális rendezés. A továbbiakban, ha idempotens elemek közötti parciális rendezésről lesz szó, akkor mindig a most definiált \leq parciális rendezésre gondolunk.

1.7. Félcsoport részcsoportjai

1.40. Definíció Egy S félcsoport részcsoportján értjük S olyan részfélcsoportját, amely csoport.

Ha e egy S félcsoport idempotens eleme, akkor $\{e\}$ részcsoportja S -nek. Tehát S minden e idempotens eleméhez tartozik S -nek legalább egy részcsoportja, amelynek e az egységelem. A következőkben egy félcsoport adott e idempotens eleméhez (az előbb említett módon) tartozó részcsoportjaival foglalkozunk.

1.41. Tétel Egy S félcsoport tetszőleges e idempotens eleme esetén

$$G_e = \{a \in S : a = ae = ea, aa' = a'a = e \text{ valamely } a' \in S \text{ elemre}\}$$

S -nek olyan részcsoportja, amely tartalmazza S mindazon részcsoportjait, amelyekben e egységelem. Minden ilyen G_e maximális részcsoportja S -nek (abban az értelemben, hogy nincs S -nek olyan részcsoportja, amely valódi módon tartalmazná G_e -t). Továbbá S bármely két különböző maximális részcsoportjának metszete üres.

Bizonyítás. Ha $a, b \in G_e$, akkor

$$e(ab) = (ab)e = ab$$

és

$$(ab)(b'a') = (b'a')(ab) = e.$$

Ezért G_e részfélcsoport. Az világos, hogy minden $a \in G_e$ esetén az $aa' = a'a = e$ feltételből $(aa')e = aa'$ és $e(a'a) = a'a$ következik, és így

$$a'aa' \in Se \cap eS.$$

Továbbá

$$(a'aa')a = (a'a)(a'a) = e^2 = e,$$

és

$$a(a'aa') = (aa')(aa') = e^2 = e.$$

Tehát

$$a'aa' \in G_e.$$

Az előzőekből világos az is, hogy $a'aa'$ az $a \in G_e$ elem G_e -beli inverze. Tehát G_e csoport. A definíció alapján világos, hogy G_e tartalmazza S mindazon részcsoportjait, amelyekben e az egységelem. Ha $G_e \cap G_f \neq \emptyset$ valamely $e, f \in E_S$ elemekre, akkor tetszőleges $x \in G_e \cap G_f$ elem esetén $e = xx'$ és $f = x''x$ ($x' \in G_e, x'' \in G_f$), s ezért

$$e = xx' = (fx)x' = f(xx') = fe = (x''x)e = x''(xe) = x''x = f,$$

amiből

$$G_e = G_f$$

következik. Ezért

$$G_e \cap G_f = \emptyset, \quad \text{ha} \quad e \neq f.$$

Ezzel a tételt bebizonyítottuk. □

1.42. Tétel *Tetszőleges S félcsoporton az alábbi feltételek egymással ekvivalensek.*

- (1) S részcsoportjainak uniója.
- (2) S diszjunkt részcsoportjainak uniója.

Bizonyítás. Az 1.41. Tétel felhasználásával nyilvánvaló. □

Feladatok

1.1. (Megoldás: 17.1.) Mutassuk meg, hogy az $S = \{a, b\}$ halmaz az

	a	b
a	b	a
b	b	a

Cayley-táblázattal definiált műveletre nézve nem alkot félcsoportot, de az elemeihez tartozó jobb mátrixok félcsoportot alkotnak!

1.2. (Megoldás: 17.2.) Mutassuk meg, hogy valamely A és B halmazok $A \times B$ descartes szorzata az $(a_1, b_1) * (a_2, b_2) = (a_1, b_2)$ műveletre nézve olyan félcsoportot alkot, amelynek minden eleme idempotens.

1.3. (Megoldás: 17.3.) Mutassuk meg, hogy egy A grupoid esetén

$$S = \{a \in A : (\forall x, y \in A) a(xy) = (ax)y\}$$

az A egy részfélcsoportja.

1.4. (Megoldás: 17.4.) Mutassuk meg, hogy egy félcsoport akkor és csak akkor véges, ha véges sok részfélcsoportja van.

2. fejezet

Félcsoport kongruenciái

2.1. Binér relációk félcsoportja

2.1. Definíció Egy $X \neq \emptyset$ halmazon értelmezett (binér) reláción az $X \times X$ halmaz egy részhalmazát értjük. Az X halmaz összes binér relációinak halmazát \mathcal{B}_X jelöli. Az (x, x) ($x \in X$) párok halmazát az X identikus relációjának nevezzük, és ι_X -szel (vagy csak ι -val) fogjuk jelölni. A teljes $X \times X$ halmazt az X halmaz univerzális relációjának nevezzük, és ω_X -szel (vagy csak ω -val) fogjuk jelölni.

2.2. Definíció Az X halmaz tetszőleges α és β relációi esetén azt mondjuk, hogy α része β -nak (jel.: $\alpha \subseteq \beta$), ha mint az $X \times X$ halmaz részhalmazai között fenáll a megfelelő tartalmazás, azaz az $(a, b) \in \alpha$ feltételből $(a, b) \in \beta$ következik.

2.3. Megjegyzés Két reláció akkor és csak akkor egyenlő egymással, ha mindegyik tartalmazza a másikat.

2.4. Definíció Legyenek α és β egy X halmaz tetszőleges relációi. Jelölje $\alpha \circ \beta$ a következő relációt:

$$\alpha \circ \beta = \{(a, b) \in X \times X : \text{van olyan } c \in X \text{ elem, hogy } (a, c) \in \alpha, (c, b) \in \beta\}.$$

Ezt a relációt az α és β relációk kompozíciójának nevezzük.

2.5. Tétel Tetszőleges X halmazon értelmezett összes (binér) reláció \mathcal{B}_X halmaza a relációk kompozíciójára nézve félcsoportot alkot.

Bizonyítás. Legyenek $\alpha, \beta, \gamma \in \mathcal{B}_X$ tetszőlegesek. Ha

$$(a, b) \in (\alpha \circ \beta) \circ \gamma$$

valamely $a, b \in X$ elemekre, akkor van olyan $x \in X$ elem, hogy

$$(a, x) \in \alpha \circ \beta \quad \text{és} \quad (x, b) \in \gamma.$$

Ekkor, alkalmas $y \in X$ elemre,

$$(a, y) \in \alpha, \quad (y, x) \in \beta \quad \text{és} \quad (x, b) \in \gamma.$$

Ekkor viszont

$$(a, y) \in \alpha \quad \text{és} \quad (y, b) \in \beta \circ \gamma$$

miatt

$$(a, b) \in \alpha \circ (\beta \circ \gamma).$$

Így

$$(\alpha \circ \beta) \circ \gamma \subseteq \alpha \circ (\beta \circ \gamma).$$

Hasonlóan igazolható a fordított tartalmazás is. Ezért

$$(\alpha \circ \beta) \circ \gamma = \alpha \circ (\beta \circ \gamma). \quad \square$$

2.6. Definíció Tetszőleges $\alpha \in \mathcal{B}_X$ reláció esetén legyen $\alpha^{-1} = \{(a, b) \in X \times X : (b, a) \in \alpha\}$.

2.7. Lemma $(\alpha \circ \beta)^{-1} = \beta^{-1} \circ \alpha^{-1}$ tetszőleges $\alpha, \beta \in \mathcal{B}_X$ esetén.

Bizonyítás. Legyen

$$(a, b) \in (\alpha \circ \beta)^{-1}.$$

Ekkor

$$(b, a) \in \alpha \circ \beta,$$

és ezért valamely $x \in X$ elemre

$$(b, x) \in \alpha \quad \text{és} \quad (x, a) \in \beta.$$

Így

$$(a, x) \in \beta^{-1} \quad \text{és} \quad (x, b) \in \alpha^{-1},$$

tehát

$$(a, b) \in \beta^{-1} \circ \alpha^{-1}.$$

Ebből

$$(\alpha \circ \beta)^{-1} \subseteq \beta^{-1} \circ \alpha^{-1}$$

következik. Hasonlóan bizonyítható a fordított tartalmazás is. □

2.8. Megjegyzés Tetszőleges $\alpha, \beta \in \mathcal{B}_X$ esetén $\alpha \subseteq \beta$ maga után vonja $\alpha^{-1} \subseteq \beta^{-1}$ teljesülését.

2.9. Definíció Egy X halmazon értelmezett α relációról azt mondjuk, hogy reflexív, ha $\iota \subseteq \alpha$; szimmetrikus, ha $\alpha \subseteq \alpha^{-1}$; tranzitív, ha $\alpha \circ \alpha \subseteq \alpha$.

2.10. Megjegyzés Ha α szimmetrikus reláció, akkor $\alpha = \alpha^{-1}$, mert az $\alpha \subseteq \alpha^{-1}$ tartalmazásból $\alpha^{-1} \subseteq (\alpha^{-1})^{-1} = \alpha$ következik. Ha β reflexív és tranzitív, akkor $\beta \circ \beta = \beta$, mert az $(a, b) \in \beta$ feltételből (a β reflexivitása miatti $(b, b) \in \beta$ tartalmazást is használva) $(a, b) \in \beta \circ \beta$ következik. Tehát a tranzitivitás miatti $\beta \circ \beta \subseteq \beta$ tartalmazás mellett a $\beta \subseteq \beta \circ \beta$ tartalmazás is teljesül. Azért $\beta \circ \beta = \beta$.

2.11. Megjegyzés Ha ϱ_0 egy S félcsoporton értelmezett reláció, akkor

$$\varrho_1 = \varrho_0 \cup \iota$$

a ϱ_0 relációt tartalmazó legszűkebb reflexív reláció,

$$\varrho_2 = \varrho_0 \cup \varrho_0^{-1} \cup \iota$$

a ϱ_0 relációt tartalmazó legszűkebb reflexív és szimmetrikus reláció.

2.12. Lemma Ha α és β egy X halmazon értelmezett reflexív relációk, akkor $\alpha \circ \beta$ is reflexív reláció X -en.

Bizonyítás. Ha $\alpha, \beta \in \mathcal{B}_X$ reflexív, akkor minden $a \in X$ elem esetén

$$(a, a) \in \alpha \quad (a, a) \in \beta,$$

és ezért

$$(a, a) \in \alpha \circ \beta.$$

Tehát

$$\iota \subseteq \alpha \circ \beta,$$

azaz $\alpha \circ \beta$ reflexív relációja X -nek. □

2.13. Lemma Tetszőleges $\alpha, \beta \in \mathcal{B}_X$ szimmetrikus relációk esetén $\alpha \circ \beta$ akkor és csak akkor szimmetrikus, ha $\alpha \circ \beta = \beta \circ \alpha$.

Bizonyítás. Legyenek $\alpha, \beta \in \mathcal{B}_X$ szimmetrikus relációk.

Először tegyük fel, hogy

$$\alpha \circ \beta = \beta \circ \alpha$$

teljesül. Akkor

$$\alpha \circ \beta = \alpha^{-1} \circ \beta^{-1} = (\beta \circ \alpha)^{-1} = (\alpha \circ \beta)^{-1}$$

miatt $\alpha \circ \beta$ szimmetrikus.

Fordítva, tegyük fel, hogy $\alpha \circ \beta$ szimmetrikus. Akkor

$$\alpha \circ \beta = (\alpha \circ \beta)^{-1} = (\beta)^{-1} \circ (\alpha)^{-1} = \beta \circ \alpha. \quad \square$$

2.2. Ekvivalenciarelációk

2.14. Definíció Az X halmazon értelmezett reflexív, szimmetrikus és tranzitív relációt ekvivalenciarelációnak nevezünk.

2.15. Megjegyzés Egy S félcsoport ϱ relációja esetén a

$$\varrho^t = \varrho \cup (\varrho \circ \varrho) \cup (\varrho \circ \varrho \circ \varrho) \cup \dots$$

reláció a ϱ relációt tartalmazó legszűkebb tranzitív reláció. Az S valamely w és w' elemeire tehát

$$(w, w') \in \varrho^t$$

akkor és csak akkor teljesül, ha megadható S elemeinek olyan

$$w = w_0, w_1, \dots, w_n = w'$$

sorozata, hogy

$$(w_i, w_{i+1}) \in \varrho$$

teljesül minden $i = 0, \dots, n-1$ indexre. Ez, illetve a 2.11. Megjegyzés alapján egy S félcsoport tetszőleges ϱ_0 relációja esetén

$$(\varrho_0 \cup \varrho_0^{-1} \cup \iota)^t$$

a ϱ_0 relációt tartalmazó legszűkebb ekvivalencia reláció.

2.16. Tétel Tetszőleges $\alpha, \beta \in \mathcal{B}_X$ ekvivalenciarelációk esetén $\alpha \circ \beta$ akkor és csak akkor ekvivalenciareláció, ha $\alpha \circ \beta = \beta \circ \alpha$.

Bizonyítás. Legyenek $\alpha, \beta \in \mathcal{B}_X$ olyan ekvivalenciarelációk, amelyekre

$$\alpha \circ \beta = \beta \circ \alpha$$

teljesül. A 2.12. Lemma és a 2.13. Lemma szerint $\alpha \circ \beta$ reflexív és szimmetrikus. Mivel

$$\begin{aligned} (\alpha \circ \beta)^2 &= (\alpha \circ \beta) \circ (\alpha \circ \beta) \\ &= \alpha \circ (\beta \circ \alpha) \circ \beta = \alpha \circ (\alpha \circ \beta) \circ \beta \\ &= (\alpha \circ \alpha) \circ (\beta \circ \beta) = \alpha \circ \beta, \end{aligned}$$

ezért $\alpha \circ \beta$ tranzitív is. Így $\alpha \circ \beta$ ekvivalenciareláció.

Fordítva, ha $\alpha \circ \beta$ ekvivalenciareláció, akkor a 2.13. Lemma szerint $\alpha \circ \beta = \beta \circ \alpha$. \square

2.3. Félcsoport kongruenciarelációi, faktorfélcsoport

2.17. Definíció Egy S félcsoport valamely α relációjáról akkor mondjuk, hogy balról kompatibilis (az S -beli műveletre nézve), ha tetszőleges S -beli a, b, s elemek esetén az $(a, b) \in \alpha$ feltételekből $(sa, sb) \in \alpha$ következik. A jobbról való kompatibilitás fogalma a balról való kompatibilitás fogalmának duálisa.

2.18. Tétel Tetszőleges S félcsoport balról [jobbról] kompatibilis relációinak halmaza a \mathcal{B}_S relációfélcsoport részfélcsoportja.

Bizonyítás. Legyenek α és β egy S félcsoport tetszőleges balról kompatibilis relációi. Tegyük fel, hogy

$$(a, b) \in \alpha \circ \beta$$

teljesül az S valamely a és b elemeire. Ez definíció szerint azt jelenti, hogy van S -nek olyan x eleme, hogy

$$(a, x) \in \alpha \quad \text{és} \quad (x, b) \in \beta.$$

Legyen s az S félcsoport tetszőleges eleme. Mivel α és β az S balról kompatibilis relációi, ezért

$$(sa, sx) \in \alpha \quad \text{és} \quad (sx, sb) \in \beta,$$

amiből

$$(sa, sb) \in \alpha \circ \beta$$

következik. Ebből már adódik a tétel balról kompatibilis relációkra vonatkozó állítása. A jobbról kompatibilis relációkra vonatkozó állítás hasonlóan bizonyítható. \square

2.19. Definíció Egy S félcsoport valamely σ ekvivalenciarelációját balkongruenciának nevezzük, ha σ balról kompatibilis az S -beli műveletre nézve, azaz ha S tetszőleges a, b, s elemei esetén az $(a, b) \in \sigma$ feltételből $(sa, sb) \in \sigma$ következik. A jobbkongruencia fogalma a balkongruencia fogalmának duálisa.

2.20. Definíció Egy S félcsoport valamely α relációjáról akkor mondjuk, hogy kompatibilis (az S -beli műveletre nézve), ha tetszőleges S -beli a, b, c, d elemek esetén az $(a, b) \in \alpha$ és $(c, d) \in \alpha$ feltételekből $(ac, bd) \in \alpha$ következik.

2.21. Definíció Egy S félcsoport valamely σ ekvivalenciarelációját kongruenciarelációnak (röviden: kongruenciának) nevezzük, ha kompatibilis az S -beli műveletre nézve, azaz S tetszőleges a, b, c, d elemei esetén az $(a, b) \in \sigma$, $(c, d) \in \sigma$ feltételekből $(ac, bd) \in \sigma$ következik.

2.22. Tétel Egy S félcsoport valamely ekvivalenciarelációja akkor és csak akkor kongruenciareláció, ha az balkongruencia és egyben jobbkongruencia.

Bizonyítás. Legyen σ egy S félcsoporth valamely ekvivalenciarelációja. Ha σ kongruencia és $(a, b) \in \sigma$, $(a, b \in S)$, akkor tetszőleges S -beli c elem esetén (mivel $(c, c) \in \sigma$) következik, hogy

$$(ca, cb) \in \sigma$$

és

$$(ac, bc) \in \sigma.$$

Fordítva, ha σ balkongruencia és jobbkongruencia, akkor tetszőleges S -beli a, b, c, d eleme esetén az $(a, b) \in \sigma$, $(c, d) \in \sigma$ feltételekből

$$(ac, bc) \in \sigma \quad \text{és} \quad (bc, bd) \in \sigma$$

következik. Mivel σ tranzitív, ezért

$$(ac, bd) \in \sigma. \quad \square$$

2.23. Megjegyzés Ha ϱ_0 egy S félcsoporth tetszőleges relációja, akkor a ϱ_0 -t tartalmazó kongruenciák halmaza nem üres, mivel ω , azaz az S univerzális relációja kongruencia és $\varrho_0 \subseteq \omega$. Mivel kongruenciák bármely rendszerének metszete is kongruencia, ezért létezik egy, a ϱ_0 -t tartalmazó legszűkebb ϱ kongruencia; ez a ϱ_0 -t tartalmazó összes S -beli kongruenciának a metszete. Könnyen ellenőrizhető, hogy az S félcsoporth valamely a és b elemeire $(a, b) \in \varrho$ akkor és csak akkor teljesül, ha megadható az S félcsoporth elemeinek olyan véges

$$a = c_0, c_1, \dots, c_n = b$$

sorozata, hogy minden $i = 1, \dots, n - 1$ indezhez megadhatók olyan

$$u_i, v_i \in S \quad \text{és} \quad x_i, y_i \in S^1$$

elemek, hogy

$$c_i = x_i u_i y_i, \quad c_{i+1} = x_i v_i y_i, \quad \text{és} \quad (u_i, v_i) \in \varrho_0 \cup \varrho_0^{-1} \cup \iota.$$

2.24. Tétel Egy S félcsoporth kongruenciáinak halmaza akkor és csak akkor részfélcsoporthja a \mathcal{B}_S relációfélcsoporthnak, ha S tetszőleges α és β kongruenciái esetén $\alpha \circ \beta = \beta \circ \alpha$.

Bizonyítás. Tegyük fel, hogy egy S félcsoporth kongruenciáinak halmaza részfélcsoporthja a \mathcal{B}_S relációfélcsoporthnak. Legyenek α és β az S félcsoporth tetszőleges kongruenciái. Ekkor persze α is és β is egy-egy ekvivalenciarelációja az S félcsoporthnak. A feltétel miatt $\alpha \circ \beta$ az S félcsoporth kongruenciája, s ezért ekvivalenciarelációja is. Így A 2.16. Tétel miatt $\alpha \circ \beta = \beta \circ \alpha$. Tehát az S félcsoporth bármely két kongruenciája egymással felcserélhető.

Fordítva, tegyük fel, hogy egy S félcsoporth tetszőleges kongruenciái egymással felcserélhetőek. Legyenek α és β az S tetszőleges kongruenciái, tehát ekvivalenciarelációk.

A **2.16.** Tétel értelmében $\alpha \circ \beta$ is ekvivalenciareláció. Mivel α és β bal kompatibilis és jobb kompatibilis relációi S -nek, ezért a **2.18.** Tétel miatt $\alpha \circ \beta$ bal kompatibilis és jobb kompatibilis ekvivalenciarelációja S -nek, és így $\alpha \circ \beta$ az S félcsoport bal- és egyben jobbkongruenciája. A **2.22.** Tétel miatt ebből már következik, hogy $\alpha \circ \beta$ az S félcsoport kongruenciája. Tehát az S félcsoport binér relációinak félcsoportján belül az S kongruenciáinak halmaza zárt a \circ műveletre nézve, azaz S kongruenciáinak halmaza az S relációfélcsoportjának részfélcsoportja. \square

2.25. Megjegyzés Egy S félcsoport kongruenciáinak $\mathcal{L}(S)$ halmaza a relációk tartalmazására, mint parciális rendezésre nézve háló. Ebben a hálóban az identikus reláció a legkisebb elem, az univerzális reláció a legnagyobb elem.

2.26. Tétel Legyen σ egy S félcsoport kongruenciarelációja. Ekkor a σ -osztályok S/σ faktorhalmaza a σ -osztályok $[a]_\sigma [b]_\sigma = [ab]_\sigma$ módon definiált szorzására nézve félcsoportot alkot.

Bizonyítás. A σ ekvivalenciareláció S -beli műveletre való kompatibilitása miatt $[a]_\sigma [b]_\sigma = [ab]_\sigma$ művelet az S/σ faktorhalazon. Mivel tetszőleges $a, b, c \in S$ elemek esetén

$$\begin{aligned} ([a]_\sigma [b]_\sigma) [c]_\sigma &= [ab]_\sigma [c]_\sigma \\ &= [(ab)c]_\sigma = [a(bc)]_\sigma = [a]_\sigma [bc]_\sigma \\ &= [a]_\sigma ([b]_\sigma [c]_\sigma), \end{aligned}$$

ezért a művelet asszociatív, ami bizonyítja a tétel állítását. \square

2.27. Definíció Az előző tételben szereplő félcsoportot az S félcsoport σ kongruencia szerinti faktorfélcsoportjának nevezzük.

2.28. Definíció Legyenek α és β egy S félcsoport olyan kongruenciái, amelyekre $\alpha \subseteq \beta$ teljesül. Jelölje β/α az S/α faktorfélcsoport azon binér relációját, amely szerint két S/α -beli $[a]_\alpha$ és $[b]_\alpha$ elemre

$$[a]_\alpha \beta/\alpha [b]_\alpha \Leftrightarrow a \beta b.$$

2.29. Tétel Tetszőleges S félcsoport tetszőleges $\alpha \subseteq \beta$ kongruenciái esetén β/α az S/α faktorfélcsoport kongruenciarelációja.

Bizonyítás. Az világos, hogy β/α ekvivalenciareláció. Legyenek $[a]_\alpha$ és $[b]_\alpha$ az S/α faktorfélcsoport olyan elemei, amelyekre

$$[a]_\alpha \beta/\alpha [b]_\alpha$$

teljesül. Ez azzal ekvivalens, hogy $a \beta b$. Legyen $[s]_\alpha \in S/\alpha$ tetszőleges.

$$[s]_\alpha [a]_\alpha = [sa]_\alpha \beta/\alpha [sb]_\alpha = [s]_\alpha [b]_\alpha,$$

mert

$$sa \beta sb.$$

Tehát β/α az S/α faktorfélcsoport bal oldali kongruenciája. Hasonlóan igazolható, hogy β/α az S/α faktorfélcsoport jobb oldali kongruenciája. A 2.22. Tétel szerint β/α az S/α faktorfélcsoport kongruenciája. \square

2.30. Tétel *Tetszőleges S félcsoport tetszőleges α kongruenciája esetén kölcsönösen egyértelmű megfeleltetés van az S/α faktorfélcsoport kongruenciái és az S félcsoport α -t tartalmazó kongruenciái között. Ennél a megfeleltetésnél az S valamely $\beta \supseteq \alpha$ kongruenciájának az S/α faktorfélcsoport β/α kongruenciája felel meg.*

Bizonyítás. A 2.29. Tétel szerint

$$\phi: \beta \mapsto \beta/\alpha$$

az S félcsoport α kongruenciáját tartalmazó kongruenciák halmazának az S/α faktorfélcsoport kongruenciáinak halmazába való egyértelmű leképezése. Megmutatjuk, hogy ϕ szürjektív és injektív.

Legyen β^* az S/α faktorfélcsoport tetszőleges kongruenciája. Jelölje β az S félcsoporton a következőképpen értelmezett relációt: valamely $a, b \in S$ elemek esetén

$$a \beta b \iff [a]_\alpha \beta^* [b]_\alpha.$$

Könnyen ellenőrizhető, hogy β az S félcsoport egy kongruenciarelációja, valamint hogy

$$\phi(\beta) = \beta/\alpha = \beta^*.$$

Tehát ϕ szürjektív.

A ϕ injektivitásának vizsgálatához tegyük fel, hogy

$$\phi(\beta) = \phi(\gamma)$$

teljesül az S félcsoport valamely α -t tartalmazó β és γ kongruenciáira. Tegyük fel, hogy

$$a \beta b$$

valamely $a, b \in S$ elemekre. Akkor

$$[a]_\alpha \beta/\alpha [b]_\alpha,$$

és így a $\phi(\beta) = \phi(\gamma)$ feltétel miatt

$$[a]_\alpha \gamma / \alpha [b]_\alpha,$$

és így

$$a \gamma b.$$

Tehát

$$\beta \subseteq \gamma.$$

Hasonlóan igazolható, hogy

$$\gamma \subseteq \beta.$$

Tehát

$$\beta = \gamma.$$

Következésképpen ϕ injektív. □

2.4. Csoport-, illetve nullelemes csoport-kongruenciák

2.31. Tétel *Legyen S tetszőleges félcsoporth és H az S tetszőleges nem üres részhalmaza. Akkor a*

$$\mathcal{P}_H = \{(a, b) \in S \times S : (\forall x, y \in S) xay \in H \Leftrightarrow xby \in H\}$$

reláció az S félcsoporth egy kongruenciája; a

$$W_H = \{c \in S : (\forall x, y \in S) xcy \notin H\}$$

részhalmaz vagy üres vagy olyan ideálja S -nek, amely egy \mathcal{P}_H -osztály.

Bizonyítás. Az világos, hogy \mathcal{P}_H ekvivalencia reláció. Mivel tetszőleges $a, b, c, x, y \in S$ elemek esetén az

$$x(ca)y \in H, \quad \text{azaz} \quad (xc)ay \in H$$

akkor és csak akkor teljesül, ha

$$(xc)by \in H, \quad \text{azaz} \quad x(cb)y \in H,$$

ezért az

$$(a, b) \in \mathcal{P}_H$$

feltételből

$$(ca, cb) \in \mathcal{P}_H$$

következik. Tehát \mathcal{P}_H az S félcsoporth egy bal oldali kongruenciája. Hasonlóan igazolható, hogy \mathcal{P}_H az S jobb oldali kongruenciája. Így a 2.22. Tétel szerint \mathcal{P}_H az S félcsoporth egy kongruenciája.

Ha $c \in W_H$ és $s, x, y \in S$ tetszőleges elemek, akkor $x(sc)y = (xs)cy \notin H$ és így $sc \in W_H$. Hasonlóan igazolható, hogy $cs \in W_H$. Tehát, ha W_H nem üres, akkor az S egy ideálja. Az világos, hogy (az utóbbi esetben) W_H egy \mathcal{P}_H -osztály. □

2.32. Definíció Az előző tételben definiált \mathcal{P}_H kongruenciát a S félcsoporth H részhalma által definiált főkongruenciának nevezzük.

A következő tétel előtt emlékeztetünk arra, hogy tetszőleges S félcsoporth esetén S^1 jelöli azt a félcsoporthot, amely megegyezik S -sel abban az esetben, ha S -ben van egység-elem, egyébként pedig S -ből egy egységelem adjungálásával nyerhető.

2.33. Tétel Legyen H egy S félcsoporth tetszőleges nem üres részhalma. Akkor

$$\mathcal{P}_H^1 = \{(a, b) \in S \times S : (\forall x, y \in S^1) xay \in H \Leftrightarrow xby \in H\}$$

az S félcsoporth kongruenciája; a H részhalma \mathcal{P}_H^1 -osztályok uniója; a

$$W_H^1 = \{c \in S : (\forall x, y \in S^1) xcy \notin H\}$$

részhalma vagy üres vagy olyan ideálja S -nek, amely egy \mathcal{P}_H^1 -osztály.

Bizonyítás. Az világos, hogy \mathcal{P}_H^1 ekvivalenciareláció. Legyenek a és b az S félcsoporth olyan elemei, amelyekre

$$(a, b) \in \mathcal{P}_H^1$$

teljesül. Legyen $s \in S$ tetszőleges elem. Akkor minden $x, y \in S^1$ elemre

$$x(sa)y = (xs)ay \in H$$

akkor és csak akkor, ha

$$x(sb)y = (xs)by \in H.$$

Tehát

$$(sa, sb) \in \mathcal{P}_H^1,$$

és így \mathcal{P}_H^1 balkongruencia. Hasonlóan igazolható, hogy \mathcal{P}_H^1 jobbkongruencia. Így a 2.22. Tétel miatt \mathcal{P}_H^1 az S félcsoporth kongruenciája.

Mivel tetszőleges $h \in H$ és $a \notin H$ elemek esetén

$$1h1 \in H \quad \text{és} \quad 1a1 \notin H,$$

ezért

$$(h, a) \notin \mathcal{P}_H^1.$$

Ebből már következik, hogy a H részhalma \mathcal{P}_H^1 -osztályok uniója.

Legyen

$$c \in W_H^1$$

tetszőleges elem. Akkor az S félcsoporth tetszőleges s eleme esetén

$$sc \in W_H^1.$$

Ellenkező esetben léteznének olyan $x, y \in S^1$ elemek, amelyekre

$$(xs)cy = x(sc)y \in H$$

teljesülne, amiből

$$c \notin W_H^1$$

következne. Mivel ez ellentmond a $c \in W_H^1$ kiinduló feltételnek, ezért valóban

$$sc \in W_H^1.$$

Hasonlóan igazolható, hogy

$$cs \in W_H^1.$$

Tehát ha W_H^1 nem üres, akkor az S félcsoport ideálja. A definíció alapján világos, hogy (az utóbbi esetben) W_H^1 egy \mathcal{P}_H^1 -osztály. \square

2.34. Definíció Egy S félcsoport H részhalmazát bal unitér részhalmaznak nevezzük, ha tetszőleges $a, b \in S$ elemek esetén az $a, ab \in H$ feltételből $b \in H$ következik. A jobb unitér részhalmaz fogalma a bal unitér részhalmaz fogalmának duálisa. Egy részhalmazt unitér részhalmaznak nevezzük, ha az egyszerre bal unitér és jobb unitér részhalmaz.

2.35. Tétel Egy S félcsoport tetszőleges unitér H részfélcsoportja esetén $\mathcal{P}_H = \mathcal{P}_H^1$. Továbbá az is igaz, hogy $W_H = W_H^1$.

Bizonyítás. Az világos, hogy

$$\mathcal{P}_H^1 \subseteq \mathcal{P}_H$$

tetszőleges $H \subseteq S$ részhalmaz esetén. A fordított tartalmazási reláció igazolásához tekintsünk két elemet, a -t és b -t az S félcsoportból. Tegyük fel, hogy $(a, b) \in \mathcal{P}_H$ valamely S -beli a és b elemek esetén. Legyenek $u, v \in S^1$ tetszőleges elemek. Tegyük fel, hogy

$$uav \in H.$$

Akkor tetszőleges $h_1, h_2 \in H$ elemek esetén

$$(h_1u)a(vh_2) \in H,$$

mert H részfélcsoport. Mivel $h_1u, vh_2 \in S$, ezért

$$(h_1u)b(vh_2) \in H.$$

Mivel H bal unitér, ezért a $h_1, h_1ubvh_2 \in H$ tartalmazásokból

$$ubvh_2 \in H$$

következik. Mivel H jobb unitér, ezért az $ubvh_2, h_2 \in H$ tartalmazásokból

$$ubv \in H$$

következik. Hasonlóan igazolható, hogy ha $ubv \in H$, akkor $uav \in H$. Következésképpen

$$(a, b) \in \mathcal{P}_H^1.$$

Így

$$\mathcal{P}_H = \mathcal{P}_H^1.$$

Az világos, hogy ha $c \in W_H^1$ valamely $c \in S$ elemre teljesül, akkor $c \in W_H$. Ha pedig $d \in W_H$ teljesül valamely $d \in S$ elemre, akkor $d \in W_H^1$ is teljesül. Ugyanis, ha d nem lenne eleme W_H^1 -nak, akkor léteznének olyan $x, y \in S^1$ elemek, amelyekre $xdy \in H$ teljesülne. Akkor viszont tetszőleges $h_1, h_2 \in H$ elemek esetén $(h_1x)d(yh_2) \in H$ teljesülne, mivel H részfélcsoport. Ez viszont azt jelentené, hogy $d \notin W_H$, mivel $h_1x, yh_2 \in S$. Ez pedig ellentmondás. Az előzőekből már következik, hogy $W_H = W_H^1$. \square

2.36. Definíció Egy S félcsoport valamely H részhalmazát reflexív részhalmaznak nevezzük, ha tetszőleges $a, b \in S$ esetén $ab \in H$ akkor és csak akkor teljesül, ha $ba \in H$.

2.37. Definíció Egy félcsoportot nullelemes csoportnak nevezünk, ha valamely G csoportból úgy származtatható, hogy G -hez egy nullelemet adjungálunk.

2.38. Tétel Ha H egy S félcsoport reflexív és unitér részfélcsoportja, akkor az S/\mathcal{P}_H faktorfélcsoport csoport vagy nullelemes csoport.

Fordítva, ha σ egy S félcsoport olyan kongruenciája, hogy az S/σ faktorfélcsoport csoport vagy nullelemes csoport, akkor megadható az S félcsoportnak olyan reflexív és unitér H részfélcsoportja, amelyre $\sigma = \mathcal{P}_H$ teljesül.

Bizonyítás. Legyen H egy S félcsoport reflexív unitér részfélcsoportja. A 2.31. Tétel, illetve a 2.33. Tétel szerint \mathcal{P}_H , illetve \mathcal{P}_H^1 az S félcsoport kongruenciái. Mivel a feltétel szerint H unitér, ezért

$$\mathcal{P}_H = \mathcal{P}_H^1.$$

A 2.33. Tétel szerint W_H egy \mathcal{P}_H -osztály, H pedig osztályok uniója. Legyenek $a, b \in H$ tetszőleges elemek. Megmutatjuk, hogy H egyetlen osztály. Tegyük fel, hogy $xay \in H$ valamely $x, y \in S$ elemekre. Mivel H reflexív, ezért

$$yxa \in H.$$

Mivel H unitér és $a \in H$, ezért

$$yx \in H.$$

Mivel H részfélcsoport és $b \in H$, ezért

$$yxb \in H,$$

amiből H reflexivitása miatt

$$xby \in H$$

következik. Hasonlóan igazolható, hogy az $xby \in H$ feltételből $xay \in H$ következik. Tehát

$$(a, b) \in \mathcal{P}_H.$$

Következésképpen H egy \mathcal{P}_H -osztály.

Legyenek $a, b \in S \setminus W_H$ tetszőleges elemek. Akkor megadhatók olyan $x, y, u, v \in S$ elemek, melyekre

$$xay, ubv \in H$$

teljesül. Mivel H reflexív, ezért

$$yxa, bvu \in H.$$

Mivel H részfélcsoport, ezért

$$yxabvu \in H,$$

amiből

$$ab \notin W_H$$

következik. Így $S \setminus W_H$ félcsoport. Ha W_H nem üres, akkor az S/\mathcal{P}_H faktorfélcsoportban a W_H -nak megfelelő elem nullelem (mivel az S ideálja), s a faktorfélcsoport úgy áll elő, hogy annak egy részfélcsoportjához ($(S \setminus W_H)/\mathcal{P}_H$ -hoz) a W_H -nak megfelelő nullelem van adjungálva. Megmutatjuk, hogy $(S \setminus W_H)/\mathcal{P}_H$ a faktorfélcsoport egy részcsoportja. Legyenek $s, x, y \in S$ és $h \in H$ tetszőleges elemek. H reflexivitása miatt

$$xshy \in H$$

akkor és csak akkor teljesül, ha

$$yxsh \in H,$$

amely a H unitér volta miatt akkor és csak akkor igaz, ha

$$yxs \in H.$$

Ez utóbbi tartalmazás a H reflexivitása miatt akkor és csak akkor igaz, ha

$$xsy \in H.$$

Következésképpen H a faktorfélcsoport jobb oldali egységeleme. Hasonlóan igazolható, hogy bal oldali egységelem is. Legyen $a \in S \setminus W_H$ tetszőleges elem. Akkor vannak olyan S -beli x és y elemek, hogy

$$xay \in H,$$

azaz

$$yxa \in H.$$

Mivel $yx \notin W_H$, ezért az yx elemet tartalmazó \mathcal{P}_H -osztály az a elemet tartalmazó \mathcal{P}_H -osztály bal oldali inverze. Ezzel beláttuk, hogy az S/\mathcal{P}_H faktorfélcsoport vagy csoport vagy nullelemes csoport.

Megfordítva, legyen α egy S félcsoport olyan kongruenciája, melyre az S/α faktorfélcsoport csoport vagy nullelemes csoport. Jelölje H az S félcsoport azon α -osztályát, amely a faktorfélcsoport egységeleme. Az világos, hogy H reflexív és unitér részfélcsoportja S -nek. Megmutatjuk, hogy $\mathcal{P}_H = \alpha$. Jelölje φ az S félcsoportnak az S/α faktorfélcsoportra való természetes homomorfizmusát. Legyenek $a, b \in S$ tetszőleges elemek. Az

$$a, b \in W_H$$

feltétel akkor és csak akkor teljesül, minden $x, y \in S$ elem esetén

$$xay, xby \notin H,$$

azaz

$$\varphi(x)\varphi(a)\varphi(y) \neq e, \quad \varphi(x)\varphi(b)\varphi(y) \neq e,$$

ahol e jelöli az S/α faktorfélcsoport egységelemét. Ez utóbbi pedig azzal ekvivalens, hogy

$$\varphi(a) = \varphi(b) = 0,$$

ahol 0 jelöli az S/α faktorfélcsoport nullelmét. Tegyük fel a továbbiakban, hogy $a, b \in S \setminus W_H$. Ha

$$(a, b) \in \mathcal{P}_H$$

akkor vannak olyan $x, y \in S$ elemek, amelyek esetén

$$\varphi(x)\varphi(a)\varphi(y) = e = \varphi(x)\varphi(b)\varphi(y).$$

Ebből

$$\varphi(a) = \varphi(b)$$

adódik, azaz

$$(a, b) \in \alpha.$$

Fordítva, ha

$$(a, b) \in \alpha,$$

akkor minden $x, y \in S$ elemre

$$(xay, xby) \in \alpha,$$

és ezért $xay \in H$ akkor és csak akkor, ha $xby \in H$, mivel H egy α -osztálya S -nek. Ezzel bebizonyítottuk, hogy $\mathcal{P}_H = \alpha$. \square

Feladatok

2.1. (Megoldás: 17.5.) Mutassuk meg, hogy tetszőleges S félcsoporthoz esetén $\sigma = \{(a, b) \in S \times S : (\exists n \in \mathbb{N}^+) ab^n = b^{n+1}, ba^n = a^{n+1}\}$ ekvivalenciareláció!

2.2. (Megoldás: 17.6.) Mutassuk meg, hogy tetszőlege jobb zéró [bal zéró] félcsoporthoz minden ekvivalenciarelációja kongruenciareláció!

2.3. (Megoldás: 17.7.) Mutassuk meg, hogy egy S jobb zéró [bal zéró] félcsoporthoz minden α és β kongruenciára akkor és csak akkor teljesül az $\alpha \circ \beta = \beta \circ \alpha$ egyenlőség, ha $|S| \leq 2$.

2.4. (Megoldás: 17.8.) Mutassuk meg, hogy egy háromelemű félhálóhoz megadhatók olyan α és β kongruenciák, amelyekre nem teljesül az $\alpha \circ \beta = \beta \circ \alpha$ egyenlőség!

2.5. (Megoldás: 17.9.) Mutassuk meg, hogy tetszőleges S félcsoporthoz esetén az $\rho = \{(a, b) \in S \times S : (\forall x \in S) xa = xb\}$ reláció kongruenciareláció!

3. fejezet

Félcsoport homomorfizmusai

3.1. Definíció Egy S félcsoportnak egy T félcsoportba való ϕ leképezését homomorfizmusnak nevezzük, ha S tetszőleges a és b elemei esetén $\phi(ab) = \phi(a)\phi(b)$ teljesül. Ha a ϕ homomorfizmus szürjektív, akkor azt is szoktuk mondani, hogy ϕ epimorfizmus, és ekkor T az S félcsoport homomorf (vagy epimorf) képe. Ha a ϕ homomorfizmus injektív, akkor azt mondjuk, hogy ϕ az S félcsoportnak a T félcsoportba való beágyazása. Ha a ϕ homomorfizmus bijektív (azaz szürjektív és injektív), akkor azt mondjuk, hogy ϕ az S félcsoportnak a T félcsoportra való izomorfizmusa; ekkor ϕ inverze T -nek S -re való izomorfizmusa, s ezért azt is mondjuk, hogy S és T egymással izomorfak. Egy félcsoport önmagába való homomorfizmusait a félcsoport endomorfizmusainak, önmagára való izomorfizmusait pedig a félcsoport automorfizmusainak nevezzük. Egy S félcsoport endomorfizmusai a leképezések kompozíciójára nézve monoidot (egységelemes félcsoportot) alkotnak, melyben az invertálható elemek az S automorfizmusai.

3.2. Megjegyzés Ha σ egy S félcsoport kongruenciarelációja, akkor a $\varphi : s \mapsto [s]_\sigma$ ($s \in S$) az S félcsoportnak az S/σ faktorfélcsoportra való homomorfizmusa. Ezt a homomorfizmust természetes (vagy kanonikus) homomorfizmusnak nevezzük.

3.3. Lemma Legyen φ egy S félcsoportnak valamely T félcsoportba való homomorfizmusa. Akkor $\ker_\varphi = \{(a, b) \in S \times S : \varphi(a) = \varphi(b)\}$ az S félcsoport kongruenciája.

Bizonyítás. Az világos, hogy \ker_φ ekvivalenciareláció. Mivel tetszőleges $a, b, s \in S$ elemekre az $(a, b) \in \ker_\varphi$ feltételből

$$\varphi(sa) = \varphi(s)\varphi(a) = \varphi(s)\varphi(b) = \varphi(sb)$$

következik, ezért \ker_φ balkongruencia S -en. Hasonlóan bizonyítható, hogy \ker_φ jobbkongruencia S -en. \square

3.4. Definíció Ha φ egy S félcsoportnak egy T félcsoportba való homomorfizmusa, akkor az S félcsoport \ker_φ kongruenciáját a φ homomorfizmus magjának nevezzük.

3.5. Megjegyzés Ha σ az S félcsoport egy kongruenciája és φ S -nek az S/σ faktorfélcsoportra való természetes homomorfizmusa, akkor $\ker_\varphi = \sigma$

3.1. Homomorfizmustétel, Izomorfizmustételek

3.6. Tétel (Homomorfizmustétel) Ha φ az S félcsoportnak egy T félcsoportra való (szürjektív) homomorfizmusa, akkor $T \cong S/\ker_\varphi$.

Bizonyítás. Tetszőleges $x \in T$ esetén legyen

$$\Phi(x) = [a]_{\ker_\varphi},$$

ahol $a \in S$ olyan elem, amelyre $x = \varphi(a)$ teljesül. Ha

$$\varphi(a) = x = \varphi(b)$$

teljesül valamely $a, b \in S$ elemekre, akkor

$$[a]_{\ker_\varphi} = [b]_{\ker_\varphi},$$

amiből következik, hogy Φ a T félcsoportnak az S/\ker_φ faktorfélcsoportba való jól definiált, egyértelmű leképezése. A φ szürjektivitása azt biztosítja, hogy minden $t \in T$ elemnek legyen képe. A Φ azért szürjektív, mert φ értelmezési tartománya S . A Φ injektivitásának bizonyításához tegyük fel, hogy

$$\Phi(\varphi(a)) = \Phi(\varphi(b))$$

valamely $a, b \in S$ elemek esetén. Akkor

$$[a]_{\ker_\varphi} = [b]_{\ker_\varphi},$$

azaz

$$(a, b) \in \ker_\varphi,$$

és ezért

$$\varphi(a) = \varphi(b).$$

Tehát Φ valóban injektív. Mivel tetszőleges $a, b \in S$ elemek esetén

$$\Phi(\varphi(a)\varphi(b)) = \Phi(\varphi(ab)) = [ab]_{\ker_\varphi} = [a]_{\ker_\varphi}[b]_{\ker_\varphi} = \Phi(\varphi(a))\Phi(\varphi(b)),$$

ezért Φ homomorfizmus. Tehát Φ a T félcsoportnak az S/\ker_φ faktorfélcsoportra való izomorfizmusa. \square

3.7. Következmény *Tetszőleges S félcsoporthoz, ha $\varphi_1 : S \mapsto T_1$ és $\varphi_2 : S \mapsto T_2$ olyan szürjektív homomorfizmusok, melyekre $\ker_{\varphi_1} = \ker_{\varphi_2}$ teljesül, akkor $T_1 \cong T_2$.*

Bizonyítás. Az állítás a homomorfizmustétel következménye, mert

$$T_1 \cong S/\ker_{\varphi_1} \cong S/\ker_{\varphi_2} \cong T_2. \quad \square$$

3.8. Lemma *Legyen S tetszőleges félcsoporthoz és H az S -nek egy részfélcsoporthoz. Akkor S tetszőleges σ kongruenciája esetén*

$$[H]_{\sigma} = \{s \in S : (\exists h \in H) (s, h) \in \sigma\}$$

az S félcsoporthoz részfélcsoporthoz.

Bizonyítás. Ha $s_1, s_2 \in [H]_{\sigma}$, akkor

$$(s_1, h_1), (s_2, h_2) \in \sigma$$

alkalmas $h_1, h_2 \in H$ elemekkel. Mivel

$$h_1 h_2 \in H$$

és

$$(s_1 s_2, h_1 h_2) \in \sigma,$$

ezért $[H]_{\sigma}$ részfélcsoporthoz S -nek. \square

Legyen σ egy S félcsoporthoz kongruenciája. Legyen X az S egy nem üres részhalmaza. Jelölje $\sigma|_X$ a σ -nak X -re való leszűkítését, azaz $\sigma|_X = \{x, y \in X \times X : (x, y) \in \sigma\}$.

Ha X σ -osztályok uniója, akkor $\sigma|_X$ helyett σ -t is fogunk használni.

3.9. Tétel (I. Izomorfizmustétel) *Legyen σ az S félcsoporthoz tetszőleges kongruenciája, H pedig tetszőleges részfélcsoporthoz. Akkor $[H]_{\sigma}/\sigma \cong H/(\sigma|_H)$.*

Bizonyítás. Legyen φ a $[H]_{\sigma}$ félcsoporthoz a $[H]_{\sigma}/\sigma$ faktorfélcsoporthoz való természetes homomorfizmusa. A $[H]_{\sigma}$ definíciója miatt

$$\varphi([H]_{\sigma}) = \varphi(H),$$

és így φ -nek H -ra való leszűkítés H -nak $\varphi([H]_{\sigma})$ -ra való homomorfizmusa, melynek magja $\sigma|_H$. Ezért $[H]_{\sigma}/\sigma \cong H/(\sigma|_H)$. \square

3.10. Tétel (II. Izomorfizmustétel) *Legyenek α és β egy S félcsoporth tetszőleges kongruenciái az $\alpha \subseteq \beta$ feltétellel. Akkor*

$$\beta/\alpha = \{([a]_\alpha, [b]_\alpha) \in S/\alpha \times S/\alpha : (a, b) \in \beta\}$$

($a, b \in S$) az S/α faktorfélcsoporth kongruenciája, és $(S/\alpha)/(\beta/\alpha) \cong S/\beta$.

Bizonyítás. A 2.29. Tétel szerint β/α az S/α faktorfélcsoporth kongruenciája. Legyenek φ_1 , illetve φ_2 az S -nek S/α -ra, illetve S/α -nak $(S/\alpha)/(\beta/\alpha)$ -ra való természetes homomorfizmusai. Valamely $a, b \in S$ elemekre

$$(a, b) \in \ker_{\varphi_1 \circ \varphi_2} \Leftrightarrow ((a)\varphi_1)\varphi_2 = ((b)\varphi_1)\varphi_2 \Leftrightarrow ([a]_\alpha)\varphi_2 = ([b]_\alpha)\varphi_2;$$

az utóbbi egyenlőség azzal ekvivalens, hogy

$$([a]_\alpha, [b]_\alpha) \in \beta/\alpha,$$

ami az $(a, b) \in \beta$ teljesülését jelenti. Tehát $\ker_{\varphi_1 \circ \varphi_2} = \beta$. A homomorfizmustétel miatt $(S/\alpha)/(\beta/\alpha) \cong S/\beta$. \square

3.11. Tétel *Legyen α egy S félcsoporth tetszőleges kongruenciája. A $\beta \mapsto \bar{\beta} = \beta/\alpha$ leképezés az S félcsoporth α -t tartalmazó kongruenciáinak hálóját izomorf módon képezi le az S/α faktorfélcsoporth kongruenciáinak hálójára.*

Bizonyítás. Az S/α faktorfélcsoporth tetszőleges β kongruenciája esetén jelölje β^* az S félcsoporth azon relációját, amelynél az S két eleme, mondjuk a és b , akkor és csak akkor állnak relációban, ha $([a]_\alpha, [b]_\alpha) \in \beta$. Könnyen igazolható, hogy β^* az S félcsoporth kongruenciája és $\bar{\beta}^* = \beta$. Mivel az S félcsoporth tetszőleges $\tau \supseteq \alpha$ kongruenciája esetén $(\bar{\tau})^* = \tau$, ezért a $\varrho \mapsto \bar{\varrho}$ és $\tau \mapsto \tau^*$ leképezések egymás inverzei. Így $\beta \mapsto \bar{\beta} = \beta/\alpha$ leképezés az S félcsoporth α -t tartalmazó kongruenciáinak hálóját bijektív módon képezi az S/α félcsoporth kongruenciáinak hálójára. Itt nem részletezzük, de könnyen igazolható, hogy a leképezés (háló-) homomorfizmus. \square

3.2. Szabad félcsoporthok

Tetszőleges $X \neq \emptyset$ halmaz esetén jelölje \mathcal{F}_X az X elemeiből képezhető összes véges sorozatok halmazát. Ezen az X halmazon értelmezzük egy szorzásnak nevezett \cdot műveletet a következőképpen. Tetszőleges X -beli $[x_1, \dots, x_m]$ és $[y_1, \dots, y_n]$ sorozatok esetén legyen $[x_1, \dots, x_m] \cdot [y_1, \dots, y_n] = [x_1, \dots, x_m, y_1, \dots, y_n]$.

3.12. Tétel *Tetszőleges $X \neq \emptyset$ halmaz esetén $(\mathcal{F}_X; \cdot)$ félcsoporth.*

Bizonyítás. Legyenek $\omega_1 = [x_1, \dots, x_k]$, $\omega_2 = [y_1, \dots, y_m]$, $\omega_3 = [z_1, \dots, z_n]$ tetszőleges \mathcal{F}_X -beli sorozatok. Akkor

$$\begin{aligned} (\omega_1 \cdot \omega_2) \cdot \omega_3 &= [x_1, \dots, x_k, y_1, \dots, y_m] \cdot \omega_3 = \\ &= [x_1, \dots, x_k, y_1, \dots, y_m, z_1, \dots, z_n] = \\ &= \omega_1 \cdot [y_1, \dots, y_m, z_1, \dots, z_n] = \omega_1 \cdot (\omega_2 \cdot \omega_3). \end{aligned} \quad \square$$

3.13. Definíció Az előzőekben definiált $(\mathcal{F}_X; \cdot)$ félcsoportot az X halmaz feletti szabad félcsoportnak nevezzük. Az \mathcal{F}_X szabad félcsoport segítségével képezett \mathcal{F}_X^1 monoidot (egységelemes félcsoportot) az X halmaz feletti szabad monoidnak nevezzük; az \mathcal{F}_X -hez adjungált egységelemre az "üres szó" kifejezéssel szoktunk hivatkozni.

3.14. Tétel Azonosítva az X halmaz x elemét az egységelemű $[x]$ sorozattal, X az \mathcal{F}_X szabad félcsoport egy generátorrendszeré.

Bizonyítás. Mivel tetszőleges \mathcal{F}_X -beli $[x_1, \dots, x_m]$ sorozat esetén

$$[x_1, \dots, x_m] = [x_1] \cdot [x_2] \cdots [x_m],$$

ezért az állítás nyilvánvaló. □

Az előző tétel alapján az \mathcal{F}_X -beli tetszőleges $[x_1, \dots, x_m]$ sorozatot $x_1 \cdots x_m$ szorzat alakban is írhatjuk.

3.15. Tétel Legyen S tetszőleges félcsoport és $X \neq \emptyset$ tetszőleges halmaz. Akkor X -nek az S -be való tetszőleges egyértelmű ϕ leképezéséhez megadható az \mathcal{F}_X szabad félcsoportnak az S félcsoportba való olyan ϕ^* homomorfizmusa, melynek X -re való leszűkítése egyenlő ϕ -vel, azaz $\phi(x) = \phi^*(x)$ teljesül minden $x \in X$ elemre.

Bizonyítás. Valamely $\phi : X \mapsto S$ leképezés esetén értelmezzünk egy

$$\phi^* : \mathcal{F}_X \mapsto S$$

leképezést a következőképpen. Tetszőleges $x_1 \cdots x_m \in \mathcal{F}_X$ esetén legyen

$$\phi^*(x_1 \cdots x_m) = \phi(x_1) \cdots \phi(x_m).$$

Mivel tetszőleges

$$x_1 \cdots x_m; \quad y_1 \cdots y_n \in \mathcal{F}_X$$

elemek esetén

$$\begin{aligned} \phi^*((x_1 \cdots x_m) \cdot (y_1 \cdots y_n)) &= \phi^*(x_1 \cdots x_m \cdot y_1 \cdots y_n) = \\ &= \phi^*(x_1 \cdots x_m) \phi^*(y_1 \cdots y_n) \end{aligned}$$

teljesül, ezért ϕ^* az \mathcal{F}_X szabad félcsoportnak az S félcsoportba való homomorfizmusa. A $\phi(x) = \phi^*(x)$ egyenlőségnek minden $x \in X$ elemre való teljesülése nyilvánvaló. □

3.16. Tétel Minden S félcsoport izomorf egy szabad félcsoport valamely faktorfélcsoportjával.

Bizonyítás. Legyen S tetszőleges félcsoport. Tekintsük az S halmaz feletti szabad félcsoportot. Jelölje ϕ az S halmaz identikus leképezését. A 3.15. Tétel szerint megadható az \mathcal{F}_S szabad félcsoportnak az S félcsoportra olyan ϕ^* szürjektív homomorfizmusa, melynek S -re való leszűkítése ϕ . Így a félcsoportokra érvényes homomorfizmus-tétel szerint az S félcsoport izomorf az $\mathcal{F}_X/\ker\phi^*$ faktorfélcsoporttal. \square

Az előzőek alapján lehetőségünk van arra, hogy konstruáljunk olyan S félcsoportot, amelyet valamely X részhalmaza generál, és a generáló elemekre valamely $v_i = w_i$ ($i \in I$) azonosságok, másnéven definiáló relációk teljesülnek (v_i és w_i a generálóelemek valamely véges szorzatai). Tekintsük az X halmaz feletti \mathcal{F}_X szabad félcsoportot. A v_i , illetve w_i szorzatok egyértelműen meghatározzák \mathcal{F}_X egy-egy v'_i , illetve w'_i elemét. Például, ha $v_i = x_1x_2^3$ ($x_1, x_2 \in X$), akkor v'_i az $[x_1, x_2, x_2, x_2] \in \mathcal{F}_X$ elemét jelenti. Jelölje ϱ_0 az \mathcal{F}_X félcsoport azon binér relációját, amelyet a (v'_i, w'_i) ($i \in I$) párok alkotnak. Jelölje ϱ az \mathcal{F}_X félcsoport ϱ_0 relációja által generált kongruenciáját. Jelölje φ az \mathcal{F}_X szabad félcsoportnak az \mathcal{F}_X/α^* faktorfélcsoportra való természetes homomorfizmusát. Világos, hogy $\varphi(X)$ az S félcsoport generátorrendszere és $\varphi(v_i) = \varphi(w_i)$ miatt S -ben a $\varphi(X)$ generátorrendszer elemeire teljesülnek az előírt definiáló relációk.

Bizonyítás nélkül megemlítjük a következő tételt.

3.17. Tétel Legyen ϱ egy X halmaz feletti \mathcal{F}_X szabad félcsoport valamely ϱ_0 relációja által generált kongruencia. Legyen φ az \mathcal{F}_X szabad félcsoportnak az \mathcal{F}_X/ϱ faktorfélcsoportra való természetes homomorfizmusa. Legyen S egy félcsoport és ϕ az \mathcal{F}_X -nek S -be való olyan homomorfizmusa, amelyre $\phi(u) = \phi(v)$ teljesül minden $(u, v) \in \varrho_0$ párra. Akkor van az \mathcal{F}_X/ϱ faktorfélcsoportnak az S félcsoportba olyan θ homomorfizmusa, hogy tetszőleges $w \in \mathcal{F}_X$ elem esetén $\theta(\varphi(w)) = \phi(w)$ teljesül.

Feladatok

3.1. (Megoldás: 17.10.) Mutassuk meg, hogy egy \mathcal{F} félcsoport akkor és csak akkor egy X halmaz feletti szabad félcsoport, ha tetszőleges S félcsoport és X -nek S -be való tetszőleges f leképezéséhez megadható \mathcal{F} -nek S -be való olyan homomorfizmusa, melynek X -re való leszűkítése megegyezik f -fel.

3.2. (Megoldás: 17.11.) Mutassuk meg, hogy ha X és Y olyan halmazok, melyek között létezik egy bijektív leképezés, akkor az X és az Y feletti szabad félcsoportok egymással izomorfak.

4. fejezet

Félcsoport ideáljai, a Green-relációk

Mint ahogy azt már az 1. Fejezetben definiáltuk (1.27. Definíció), egy S félcsoport valamely nem üres L részhalmazát bal oldali ideálnak nevezzük, ha minden $s \in S$ és minden $a \in L$ elem esetén $sa \in L$. Egy S félcsoport nem üres R részhalmazát jobb oldali ideálnak nevezzük, ha minden $s \in S$ és $a \in R$ esetén $as \in R$. Ha I jobb oldali és bal oldali ideálja is egy S félcsoportnak, akkor azt mondjuk, hogy I kétoldali ideálja, vagy röviden ideálja S -nek.

4.1. Definíció Egy S félcsoport S -től különböző ideáljait valódi ideáloknak nevezzük. Egy félcsoportot egyszerűnek nevezünk, ha nincs valódi ideálja.

4.2. Tétel Egy S félcsoport akkor és csak akkor egyszerű, ha $S = SaS$ teljesül minden a eleme esetén.

Bizonyítás. Az világos, hogy tetszőleges S félcsoport tetszőleges a eleme esetén SaS az S egy ideálja. Így, ha S egy egyszerű félcsoport, akkor tetszőleges $a \in S$ elem esetén $S = SaS$.

Fordítva, tegyük fel, hogy S olyan félcsoport, amelyre tetszőleges $a \in S$ esetén teljesül az $S = SaS$ egyenlőség. Legyen I az S egy ideálja. Akkor tetszőleges $a \in I$ elem esetén

$$S = SaS \subseteq I,$$

amiből

$$I = S$$

következik. Tehát S -nek nincs valódi ideálja, azaz S egyszerű félcsoport. \square

4.3. Megjegyzés Egy legalább kételemű 0-elemes S félcsoport nem lehet egyszerű, mert $\{0\}$ ideálja S -nek.

4.4. Definíció Egy 0-elemes S félcsoport $\{0\}$ -tól és S -től különböző ideáljait valódi ideáloknak nevezzük.

4.5. Megjegyzés Ha egy 0-elemes S félcsoportnak nincsenek valódi ideáljai, akkor $S^2 = \{0\}$ vagy $S^2 = S$, mert S^2 az S ideálja. Az első esetben S -nek minden, 0-át tartalmazó részhalmaza ideálja S -nek, ezért S legfeljebb kételemű félcsoport.

4.6. Definíció Egy 0-elemes S félcsoportot 0-egyszerűnek nevezünk, ha $S^2 \neq \{0\}$ és S -nek nincsenek valódi (azaz $\{0\}$ -tól és S -től különböző) ideáljai.

4.7. Tétel Egy 0-elemes S félcsoport akkor és csak akkor 0-egyszerű, ha minden $0 \neq a \in S$ elem esetén $SaS = S$.

Bizonyítás. Legyen S 0-egyszerű félcsoport. Akkor $S = S^2 \neq \{0\}$. Legyen

$$B = \{b \in S : SbS = \{0\}\}.$$

Az világos, hogy B az S félcsoport ideálja. Ha $B \neq \{0\}$ teljesülne, akkor B megegyezne S -sel, amiből $S^3 = \{0\}$ és így $S^2 = \{0\}$ adódna, ami ellentmondás. Tehát $B = \{0\}$, azaz $SaS = S$ minden $0 \neq a \in S$ elemre.

Fordítva, legyen S olyan nullelemes félcsoport, amelyben $SaS = S$ teljesül minden $0 \neq a \in S$ elemre. Akkor $S^3 = S$, amiből $S^2 \neq \{0\}$ következik. Legyen A az S félcsoport tetszőleges nem-nulla ideálja. Akkor tetszőleges $0 \neq a \in A$ esetén $S = SaS \subseteq SAS \subseteq A$, amiből $A = S$ adódik. Tehát S 0-egyszerű félcsoport. \square

4.8. Megjegyzés Ha egy egyszerű félcsoporthoz egy nullelemet adjungálunk, akkor 0-egyszerű félcsoportot kapunk. Ha egy 0-egyszerű félcsoport olyan, hogy nem tartalmaz 0-tól különböző nullosztót, azaz a félcsoport tetszőleges a, b elemei esetén $ab = 0$ akkor és csak akkor teljesül, ha $a = 0$ vagy $b = 0$, akkor a 0-elem elhagyásával olyan félcsoport keletkezik, amelyik egyszerű.

4.1. Minimális, 0-minimális ideálok

4.9. Definíció Egy S félcsoport valamely M ideálját minimális ideálnak nevezzük, ha nem tartalmazza valódi módon S egyetlen ideálját sem.

4.10. Megjegyzés Ha A és B egy S félcsoport ideáljai, akkor AB is ideálja S -nek és $AB \subseteq A \cap B$. Ebből következik, hogy minden félcsoportnak legfeljebb egy minimális ideálja van. Ha egy félcsoportnak van minimális ideálja, akkor azt a félcsoport magjának nevezzük. Könnyen látható, hogy egy félcsoportnak akkor és csak akkor van magja, ha összes ideáljának metszete nem üres.

4.11. Tétel Ha M egy S félcsoport minimális ideálja, akkor M egyszerű félcsoport.

Bizonyítás. Legyen M egy S félcsoporth minimális ideálja. Mivel $M^2 \subseteq M$ és M^2 az S ideálja, ezért $M^2 = M$. Legyen $a \in M$ tetszőleges elem. Mivel S^1aS^1 az S félcsoporth M által tartalmazott ideálja, ezért $S^1aS^1 = M$. Innen $M = M^3 = MS^1aS^1M \subseteq MaM \subseteq M$ következik. Ezért $MaM = M$. A 4.2. Tétel miatt ez azt jelenti, hogy M egyszerű. \square

4.12. Következmény *Ha egy félcsoporthnak van magja, akkor ez a mag egyszerű félcsoporth.*

Bizonyítás. A 4.11. Tétel alapján az állítás nyilvánvaló. \square

4.13. Megjegyzés *Ha egy S félcsoporth tartalmaz egy 0-elemet, akkor az az S félcsoporth minden ideáljában benne van, s ezért S -nek egyetlen minimális ideálja a $\{0\}$.*

4.14. Definíció *Egy nullelemet tartalmazó S félcsoporth valamely M ideálját 0-minimális ideálnak nevezzük, ha $M \neq \{0\}$ és 0 az egyetlen olyan ideálja S -nek, amelyet M valódi módon tartalmaz.*

4.15. Tétel *Ha M egy 0-minimális ideálja egy nullelemes S félcsoporthnak, akkor $M^2 = \{0\}$ vagy M 0-egyszerű részfélcsoporthja S -nek.*

Bizonyítás. Tegyük fel, hogy $M^2 \neq \{0\}$. Akkor $M^2 = M$. Legyen $a \in M$, $a \neq 0$ tetszőleges elem. Mivel S^1aS^1 az S félcsoporth M által tartalmazott, nullelemtől különböző ideálja, ezért $S^1aS^1 = M$. Innen $M = M^3 = MS^1aS^1M \subseteq MaM \subseteq M$ következik. Ezért $MaM = M$. A 4.7. Tétel miatt ez azt jelenti, hogy M 0-egyszerű. \square

4.16. Tétel *Ha M egy nullelemes S félcsoporth olyan 0-minimális ideálja, amelyre $M^2 \neq \{0\}$ teljesül, akkor S minden $\{0\} \neq L \subseteq M$ bal oldali ideálja esetén $L^2 \neq \{0\}$.*

Bizonyítás. Legyen L az S félcsoporth olyan nem-nulla bal oldali ideálja, amely a 0-minimális M ideálnak részhalmaza. Akkor LS az S félcsoporth olyan kétoldali ideálja, amelyre

$$LS \subseteq M$$

teljesül. Mivel M 0-minimális ideálja S -nek, ezért

$$LS = \{0\} \quad \text{vagy} \quad LS = M.$$

Ha $LS = \{0\}$, akkor $0 \in L$ miatt L kétoldali ideálja S -nek, s ezért az $L \neq \{0\}$ feltétel miatt

$$L = M.$$

Így

$$M^2 = LM \subseteq LS = \{0\},$$

ami viszont ellentmond az M -re vonatkozó $M^2 \neq \{0\}$ feltételnek. Ezért

$$LS = M.$$

Ekkor viszont

$$M = M^2 = LSLS \subseteq L^2S,$$

amiből már következik $L^2 \neq \{0\}$. □

4.2. 0-minimális bal oldali ideálok

4.17. Definíció Egy nullelemes S félcsoporth $\{0\} \neq L$ bal oldali ideálját 0-minimális bal oldali ideálnak nevezzük, ha 0 az egyetlen olyan bal oldali ideálja S -nek, amelyet M valódi módon tartalmaz.

4.18. Tétel Ha L egy nullelemes S félcsoporth olyan 0-minimális bal oldali ideálja, amelyre $L^2 \neq \{0\}$ teljesül, akkor fennáll az $L = Sa$ egyenlőség tetszőleges $0 \neq a \in L$ elemre.

Bizonyítás. Legyen L a 0-elemes S félcsoporth olyan 0-minimális bal oldali ideálja, amelyre $L^2 \neq \{0\}$ teljesül. Legyen $0 \neq a \in L$ tetszőleges elem. Az világos, hogy Sa az S olyan legalább kételemű bal oldali ideálja, amelyik az L egy részhalmaza. Megmutatjuk, hogy $Sa \neq \{0\}$. Tegyük fel, indirekt módon, hogy $Sa = \{0\}$. Legyen $s \in S$ tetszőleges elem. Akkor

$$s\{0, a\} = \{0, sa\} = \{0\} \subseteq \{0, a\},$$

azaz $\{0, a\}$ az S félcsoporth bal oldali ideálja. Ebből az $a^2 = 0$ egyenlőség is adódik. Mivel $a \neq 0$ és $\{0, a\} \subseteq L$, ezért az L bal oldali ideál 0-minimális volta miatt $L = \{0, a\}$. Ebből pedig $L^2 = \{0\}$ következik, amely ellentmond az eredeti $L^2 \neq \{0\}$ feltételnek. Tehát $Sa \neq \{0\}$. Ebből pedig $Sa = L$ következik, mert L az S félcsoporth 0-minimális bal oldali ideálja. □

4.19. Tétel Ha L egy nullelemes S félcsoporth 0-minimális bal oldali ideálja, akkor tetszőleges $s \in S$ elem esetén $Ls = \{0\}$ vagy Ls az S egy 0-minimális bal oldali ideálja.

Bizonyítás. Legyen L a 0-elemes S félcsoporth tetszőleges 0-minimális bal oldali ideálja. Legyen $s \in S$ tetszőleges elem. Tegyük fel, hogy $Ls \neq \{0\}$. Az világos, hogy Ls az S félcsoporth bal oldali ideálja. Megmutatjuk, hogy Ls az S 0-minimális bal oldali ideálja is. Ehhez tekintsük S -nek olyan tetszőleges A bal oldali ideálját, amelyet az Ls bal oldali ideál tartalmaz. A bizonyítás akkor lesz kész, ha megmutatjuk, hogy $A = \{0\}$ vagy $A = Ls$. Ehhez először is definiáljuk a következő halmazt:

$$B = \{b \in L : bs \in A\}.$$

A B definíciója miatt világos, hogy

$$Bs \subseteq A.$$

Legyen x az A tetszőleges eleme. Mivel $A \subseteq Ls$, ezért létezik olyan $t \in L$ elem, hogy $x = ts$. Ezen utóbbi egyenlőségből viszont $t \in B$ következik, tehát $x \in Bs$. Azt kaptuk tehát, hogy

$$A \subseteq Bs.$$

Ebből és a fenti $Bs \subseteq A$ tartalmazásból

$$A = Bs$$

adódik. A következőkben megmutatjuk, hogy B az S félcsoport bal oldali ideálja. Legyenek $t \in S$ és $b \in B$ tetszőleges elemek. Akkor

$$tbs \in tA \subseteq A.$$

Továbbá az is igaz, hogy

$$tb \in tL \subseteq L.$$

Tehát tb az L olyan eleme, amelyre $tbs \in A$ teljesül, amiből a B definíciója miatt

$$tb \in B$$

következik. Tehát B az S bal oldali ideálja. Az L bal oldali ideál 0-minimalitása miatt $B = \{0\}$ vagy $B = L$. Az első esetben

$$A = \{0\},$$

a második esetben

$$A = Ls$$

adódik. □

4.20. Tétel *Legyen M egy nullelemes S félcsoport olyan 0-minimális ideálja, amely tartalmazza S -nek egy 0-minimális bal oldali ideálját. Akkor M az S félcsoport mindazon 0-minimális bal oldali ideáljainak uniója, amelyeket M részhalmazként tartalmaz.*

Bizonyítás. Jelölje A az S félcsoport M által tartalmazott összes 0-minimális bal oldali ideáljainak unióját. Azt kell bizonyítanunk, hogy $A = M$. Az világos, hogy A az S félcsoport bal oldali ideálja. Megmutatjuk, hogy A az S félcsoport jobb oldali ideálja is. Legyenek $a \in A$ és $s \in S$ tetszőleges elemek. Az A definíciója miatt van S -nek olyan, az M által tartalmazott 0-minimális L bal oldali ideálja, hogy $a \in L$. A 4.19. Tétel miatt $Ls = \{0\}$ vagy Ls az S félcsoport 0-minimális bal oldali ideálja. Az is igaz, hogy

$$Ls \subseteq MS \subseteq M.$$

Így

$$Ls \subseteq A.$$

Következésképpen

$$as \in A.$$

Tehát A valóban jobb oldali ideálja az S félcsoportnak. Mivel a feltételek szerint M tartalmaz legalább egy 0-minimális bal oldali ideált, ezért

$$A \neq \{0\}.$$

Tehát A az S félcsoport legalább kételemű, M által tartalmazott ideálja. Mivel M az S félcsoport 0-minimális ideálja, ezért

$$A = M. \quad \square$$

4.21. Tétel *Legyen M egy nullelemes S félcsoport olyan 0-minimális ideálja, amelyre $M^2 \neq \{0\}$ teljesül. Ha S -nek van olyan 0-minimális bal oldali ideálja, amelyet M részhalmazként tartalmaz, akkor M minden bal oldali ideálja bal oldali ideálja S -nek is.*

Bizonyítás. Legyen M egy nullelemes S félcsoport olyan 0-minimális ideálja, amelyre $M^2 \neq \{0\}$ teljesül. A 4.15. Tétel miatt M egy 0-egyszerű félcsoport. Legyen a az M tetszőleges 0-tól különböző eleme. A 4.7. Tétel szerint

$$MaM \neq \{0\},$$

és így

$$Ma \neq \{0\}.$$

Tegyük fel hogy S -nek van olyan 0-minimális bal oldali ideálja, amelyet M részhalmazként tartalmaz. A 4.20. Tétel szerint M előáll az S félcsoport M által tartalmazott 0-minimális bal oldali ideáljainak uniójaként. Legyen L tetszőleges nem nulla bal oldali ideálja M -nek. Legyen $a \in L \setminus \{0\}$ tetszőleges elem. Akkor az előzőek szerint van S -nek olyan 0-minimális $L_0 \subseteq M$ bal oldali ideálja, melyre

$$a \in L_0 \setminus \{0\}$$

teljesül. Mivel $Ma \neq \{0\}$, ezért $Ma = L$, és így $a \in Ma$. Ez azt jelenti, hogy

$$L = \cup_{a \in L} Ma.$$

Így tetszőleges $s \in S$ elem esetén $sL \subseteq \cup_{a \in L} Ma = L$. Tehát L az S félcsoport bal oldali ideálja. \square

4.3. Rees-féle kongruencia, Rees-féle faktorfélcsoporth

4.22. Lemma *Legyen S tetszőleges félcsoporth és A az S tetszőleges ideálja. Akkor*

$$\varrho_A = \{(a, b) \in S \times S : a = b \text{ vagy } a, b \in A\}$$

az S félcsoporth kongruenciája.

Bizonyítás. Az világos, hogy ϱ az S félcsoporth egy ekvivalenciarelációja. Legyenek $a, b \in S$ tetszőleges elemek az $(a, b) \in \varrho_A$ feltétellel. Akkor tetszőleges $s \in S$ esetén $as = bs$ vagy $as, bs \in A$. Hasonlóan, $sa = sb$ vagy $sa, sb \in A$. Így ϱ_A az S félcsoporth egy jobb-, illetve balkongruenciája. A 2.22. Tétel szerint ϱ_A az S félcsoporth egy kongruenciája. \square

4.23. Definíció *A ϱ_A kongruenciát az S félcsoporth A ideálja szerinti Rees-féle kongruenciának nevezzük. A szerinte vett faktorfélcsoporthot az S félcsoporth A ideálja szerinti Rees-féle faktorfélcsoporthjának nevezzük és S/A -val jelöljük.*

Megjegyezzük, hogy a 4.22. Lemmában definiált ϱ_A reláció az $A = \emptyset$ esetben az S félcsoporth identikus relációja, s ekkor persze az S/ϱ_A faktorfélcsoporth izomorf S -sel. Ebben az esetben is az S/A jelölést fogjuk használni az S/ϱ_A helyett. A fentiek szerint tehát S/\emptyset olyan faktorfélcsoporthot jelöl, amely izomorf S -sel.

Egy $(S; \cdot)$ félcsoporth A ideálja szerinti Rees-féle faktorfélcsoporthjára úgy is tekinthetünk, mint egy olyan félcsoporthra, amelynek az elemeit úgy is megkaphatjuk, hogy az $S \setminus A$ halmazhoz adjungálunk egy $0 \notin S \setminus A$ elemet, s az így kapott halmazon a következőképpen definiáljuk a műveletet: Tetszőleges $a, b \in (S \setminus A) \cup \{0\}$ elemekre

$$ab = \begin{cases} a \cdot b, & \text{ha } a, b, a \cdot b \in (S \setminus A) \\ 0 & \text{különben.} \end{cases}$$

A továbbiakban, ha szükséges, egy S/A Rees-féle faktorfélcsoporthra az előzőeknek megfelelő formában fogunk hivatkozni. Ezt tesszük már a következő tételekben is.

4.24. Tétel *Legyen J egy ideálja, T pedig egy részfélcsoporthja egy S félcsoporthnak. Akkor $J \cap T$ ideálja T -nek, $J \cup T$ részfélcsoporthja S -nek, valamint*

$$(J \cup T)/J \cong T/(J \cap T).$$

Bizonyítás. Mivel

$$(J \cup T)^2 = J^2 \cup JT \cup TJ \cup T^2 \subseteq J \cup T,$$

ezért $J \cup T$ részfélcsoporthja S -nek.

Legyenek $t \in T$ és $a \in J \cap T$ tetszőleges elemek. Akkor

$$ta, at \in T,$$

mivel T részfélcsoportha S -nek. Ugyanakkor

$$ta, at \in J,$$

mert $a \in J$ és J ideálja S -nek. Tehát

$$ta, at \in J \cap T,$$

és így $J \cap T$ ideálja T -nek. Ebből természetesen az is következik, hogy J ideálja $J \cup T$ -nek. Így tekinthetjük a $(J \cup T)/J$ és a $T/(J \cap T)$ Rees faktorokat. Ezekre kapjuk, hogy

$$(J \cup T)/J = ((J \cup T) \setminus J) \cup 0 = (T \setminus J) \cup 0,$$

valamint

$$T/(J \cap T) = (T \setminus (J \cap T)) \cup 0' = (T \setminus J) \cup 0',$$

ahol 0 , illetve $0'$ jelöli a faktorfélcsoporthok nullelemeit a fenti sorrendnek megfelelően. \square

4.25. Tétel *Legyen J egy S félcsoporth tetszőleges ideálja. Jelölje θ az S félcsoporthnak az S/J Rees-féle faktorfélcsoporthra való természetes homomorfizmusát. Akkor az $A \mapsto \theta(A) = A/J$ leképezés kölcsönösen egyértelmű megfeleltetést létesít az S félcsoporth J -t tartalmazó A ideáljai és az S/J faktorfélcsoporth ideálja között, mégpedig úgy, hogy az S félcsoporth tetszőleges, J -t tartalmazó A ideálja esetén*

$$(S/J)/(A/J) \cong S/A.$$

Bizonyítás. Tekintsük az S/J Rees-féle faktorfélcsoporthot $(S \setminus J) \cup \{0\}$ formában. Akkor tetszőleges S -beli $A \supseteq J$ ideál esetén $\theta(A) = A/J = (A \setminus J) \cup \{0\}$. Mivel θ homomorfizmus, ezért $\theta(A)$ ideálja S/J -nek. Könnyen ellenőrizhető, hogy ha Q tetszőleges ideálja az S/J Rees-féle faktorfélcsoporthnak, akkor $A = \theta^{-1}(Q)$ az S félcsoporth $J = \theta^{-1}(0)$ -t tartalmazó ideálja, amelyre $\theta(A) = Q$ teljesül. Így θ szürjektív leképezése az S félcsoporth J -t tartalmazó ideáljainak halmazáról az S/J Rees-féle faktorfélcsoporth ideáljait tartalmazó halmazra. Megmutatjuk, hogy θ injektív is. Először is, ha A és B az S félcsoporth J -t tartalmazó olyan ideáljai, amelyekre $A \subset B$ teljesül, akkor

$$A \setminus J \subset B \setminus J.$$

Így, ha mindkét halmazhoz ugyanazt a 0 -elemet adjungáljuk, akkor az A/J Rees-féle faktorfélcsoporth a B/J Rees-féle faktorfélcsoporth valódi részfélcsoporthjaként tekinthető. Ebből pedig már következik, hogy ha az S félcsoporth valamely, J -t tartalmazó A és B ideáljaira $\theta(A) = \theta(B)$, azaz $A/J = B/J$ teljesül, akkor $A = B$. Tehát θ valóban injektív. Az S félcsoporth J -t tartalmazó tetszőleges A ideálja esetén $(S/J)/(A/J) = ((S/J) \setminus (A/J)) \cup \{0\} = S \setminus A \cup \{0\} \cong S/A$. \square

4.26. Következmény Legyenek J és J' egy S félcsoporthoz olyan ideáljai, amelyekre $J \subset J'$ teljesül. Annak szükséges és elégséges feltétele, hogy J maximális J' -ben (abban az értelemben, hogy nincs S -nek olyan K ideálja, amelyre $J \subset K \subset J'$ teljesülne) az, hogy J'/J 0-minimális ideálja az S/J Rees-féle faktorfélcsoporthoz. Ebben az esetben J'/J vagy 0-egyszerű vagy zéró félcsoporthoz.

Bizonyítás. A 4.25. Tételt szerint J maximális J' -ben akkor és csak akkor, ha az S/J Rees-féle faktorfélcsoporthoz J'/J nem tartalmazza S/J egyetlen ideálját sem valódi módon. Mivel S/J nullelemes és $J \neq J'$, ezért ezen utóbbi feltétel éppen azt jelenti, hogy J'/J az S/J faktorfélcsoporthoz 0-minimális ideálja. A 4.15. Tétel szerint ekkor J'/J vagy 0-egyszerű vagy zéró félcsoporthoz. \square

4.27. Következmény Egy S félcsoporthoz valamely M ideálja akkor és csak akkor maximális (valódi) ideálja S -nek, ha az S/M Rees-féle faktorfélcsoporthoz nincs valódi nem $\{0\}$ ideálja. Ebben az esetben S/M vagy 0-egyszerű, vagy egy kételemű zéró félcsoporthoz.

Bizonyítás. A 4.25. Tétel szerint kölcsönösen egyértelmű kapcsolat van a 0-elemes S/M Rees-féle faktorfélcsoporthoz ideáljai és az S félcsoporthoz M -et tartalmazó ideáljai között. Ennél a megfeleltetésnél S/M nulleleme az M ideálnak felel meg. Az M maximalitása miatt S/M -nek nincs a $\{0\}$ -tól különböző ideálja. Ha $(S/M)^2 \neq \{0\}$, akkor az S/M félcsoporthoz 0-egyszerű. Ha $(S/M)^2 = \{0\}$, akkor S/M minden 0-t tartalmazó részhalmaza ideál, s így S/M egy kételemű zéró félcsoporthoz. \square

4.4. Félcsoporthoz főfaktorai

4.28. Definíció Az S félcsoporthoz valamely nem üres A részhalmazát tartalmazó bal oldali ideálok metszetét az A által generált bal oldali ideálnak nevezzük. Ha $A = \{a\}$, akkor az a elem által generált fő balideálról beszélünk, amelyet $L(a)$ -val jelölünk. Világos, hogy $L(a) = a \cup Sa = S^1a$. Ennek duálisa az a elem által generált fő jobbideál, amelyet $R(a)$ -val jelölünk. Világos, hogy $R(a) = a \cup aS = aS^1$. Az a elem által generált főideált $J(a)$ -val jelöljük. Nem nehéz belátni, hogy $J(a) = a \cup aS \cup Sa \cup SaS = S^1aS^1$.

4.29. Megjegyzés Egy S félcsoporthoz tetszőleges a eleme esetén, azon S -beli elemek, amelyek ugyanazt a főideált generálják, mint az a elem, $J(a)$ -nak egy nem üres részhalmazát alkotják; ezt a részhalmazt J_a -val fogjuk jelölni. A $J(a) \setminus J_a$ halmazt $I(a)$ -val jelöljük.

4.30. Tétel Tetszőleges S félcsoporthoz bármely a eleme esetén $I(a)$ vagy üres vagy az S félcsoporthoz ideálja.

Bizonyítás. Tegyük fel, hogy $I(a)$ nem üres egy S félcsoporthoz valamely a eleme esetén. Legyenek $s \in S$ és $b \in I(a)$ tetszőleges elemek. Ha az $bs \in J(a)$ szorzat nem lenne

$I(a)$ -ban, akkor $bs \in J_a$ teljesülne, azaz fennálna a $J(a) = J(bs)$ egyenlőség. Mivel $J(bs) \subseteq J(b)$, ezért a $J(a) \subseteq J(b)$ tartalmazást kapnánk eredményül. Mivel $b \in J(a)$, ezért $J(b) \subseteq J(a)$. A két tartalmazásból $J(a) = J(b)$ és így $b \in J_a$ következik, ami ellentmond a $b \in I(a) = J(a) \setminus J_a$ tartalmazásnak. Így $bs \in I(a)$. Hasonlóan igazolható, hogy $sb \in I(a)$, tehát $I(a)$ ideálja S -nek. \square

4.31. Definíció Egy S félcsoport főfaktorain a $J(a)/I(a)$ faktorfélcsoportokat értjük ($a \in S$).

4.32. Tétel Tetszőleges félcsoport tetszőleges főfaktora vagy egyszerű félcsoport, vagy 0-egyszerű félcsoport, vagy zéró félcsoport.

Bizonyítás. Legyen S egy félcsoport és $a \in S$ egy tetszőleges elem. Ha $I(a) = \emptyset$, akkor $J(a)$ az S félcsoport minimális ideálja. Akkor viszont a 4.11. Tétel miatt $J(a) \cong J(a)/I(a)$ egyszerű félcsoport. Vizsgáljuk tehát azt az esetet, amikor $I(a) \neq \emptyset$. Mivel $I(a)$ maximális ideál $J(a)$ -ban, ezért a 4.26. Következmény szerint a $J(a)/I(a)$ Rees-féle faktorfélcsoport vagy 0-egyszerű vagy zéró félcsoport. \square

4.33. Definíció Egy S félcsoportot féligegyszerű félcsoportnak nevezünk, ha minden főfaktora vagy egyszerű, vagy 0-egyszerű.

4.34. Definíció Egy S félcsoport fősorozatán olyan (S -sel kezdődő és az üres halmazzal végződő)

$$S = S_1 \supset S_2 \supset \cdots \supset S_m \supset S_{m+1} = \emptyset$$

véges sorozatot értünk, amelyben szereplő S_i -k ($i = 1, \dots, m$) az S félcsoport ideáljai, és tetszőleges $i = 1, \dots, m$ index esetén nem adható meg S -nek olyan J ideálja, amelyre $S_i \supset J \supset S_{i+1}$ teljesülne (azaz a sorozat nem finomítható). A fenti fősorozat faktorain az S_i/S_{i+1} ($i = 1, \dots, m$) faktorfélcsoportokat értjük (az S_m/S_{m+1} félcsoport izomorf S_m -mel).

4.35. Megjegyzés (A 4.26. Következmény miatt), ha

$$S = S_1 \supset S_2 \supset \cdots \supset S_m \supset S_{m+1} = \emptyset$$

egy S félcsoport fősorozata, akkor tetszőleges $i = 1, \dots, m - 1$ index esetén az S_i/S_{i+1} félcsoport vagy egy 0-egyszerű félcsoport vagy egy zéró félcsoport. Az S_m/S_{m+1} félcsoport pedig egyszerű, mivel S_m egyszerű és $S_m/S_{m+1} \cong S_m$.

4.36. Tétel Legyen S olyan félcsoport, amelynek van egy

$$S = S_1 \supset S_2 \supset \cdots \supset S_m \supset S_{m+1} = \emptyset$$

fősorozata. Akkor kölcsönösen egyértelmű megfeleltetés létezik a fősorozat faktorai és az S félcsoport főfaktorai között, mégpedig úgy, hogy az egymásnak megfeleltetett félcsoportok egymással izomorfak. Speciálisan, az S bármely két fősorozata egymással izomorf, azaz kölcsönösen egyértelmű megfeleltetés van bármely két fősorozat faktorai között úgy, hogy az egymásnak megfeleltetett faktorok egymással izomorfak. Az S azon ideálja, amely a fősorozat utolsó nem üres eleme, az S félcsoport magja.

Bizonyítás. Tekintsük a fősorozat tetszőleges $i = 1, \dots, m$ indexhez tartozó S_i/S_{i+1} faktorát. Legyen $a \in S_i/S_{i+1}$ tetszőleges. Az világos, hogy $J(a) \cup S_{i+1}$ az S félcsoport olyan ideálja, amelyre $S_i \supseteq J(a) \cup S_{i+1} \supset S_{i+1}$ teljesül. Mivel S_i és S_{i+1} egy fősorozat egymás melletti elemei, ezért ebből a tartalmazásból

$$J(a) \cup S_{i+1} = S_i$$

következik.

Legyen $b \in I(a)$ tetszőleges. Akkor

$$b \in S_{i+1}.$$

Ellenkező esetben azt kapnánk, hogy $J(b) \cup S_{i+1} = S_i$, amiből $a \in J(b)$ következne, ellentmondva a $b \in I(a)$ feltételnek. Így tehát minden $b \in I(a)$ elemre $b \in S_{i+1}$ teljesül, s ezért

$$I(a) \subseteq S_{i+1}.$$

Másrészről viszont, ha $c \in J(a) \cap S_{i+1}$, akkor

$$J(c) \subseteq S_{i+1},$$

ezért

$$J(c) \neq J(a),$$

ami azt eredményezi, hogy

$$c \in I(a).$$

Ez, és közvetlenül az előzőekben bizonyított $I(a) \subseteq S_{i+1}$ tartalmazás azt eredményezi, hogy

$$I(a) = J(a) \cap S_{i+1}.$$

A 4.24. Tétel szerint

$$J(a)/(J(a) \cap S_{i+1}) \cong (J(a) \cup S_{i+1})/S_{i+1}.$$

A bal oldali faktorfélcsoport izomorf a $J(a)/I(a)$ faktorfélcsoporttal, a jobb oldali pedig az S_i/S_{i+1} faktorfélcsoporttal. Tehát, a fősorozat S_i/S_{i+1} faktora izomorf a $J(a)/I(a)$ főfaktorral.

Továbbá,

$$J_a = J(a) \setminus I(a) = (J(a) \cup S_{i+1}) \setminus (i(a) \cup S_{i+1}) = S_i \setminus S_{i+1}.$$

Ezért, ha $a' \in S_i \setminus S_{i+1}$, akkor $J(a') = J(a)$. Tehát az S_i/S_{i+1} -hez tartozó $J(a)/I(a)$ főfaktor nem függ attól, hogy az a elemet hogyan választjuk $S_i \setminus S_{i+1}$ -ből. Másrészt, ha a az S félcsoporthoz tetszőleges eleme, akkor van olyan $i \in \{1, \dots, m\}$ index, hogy $a \in S_i \setminus S_{i+1}$. Így az

$$S_i/S_{i+1} \mapsto J(a)/I(a)$$

kölsönösen egyértelmű leképezése a fősorozat faktorai halmazának az S félcsoporthoz főfaktorai halmazára. Ebből az is következik, hogy kölsönösen egyértelmű megfeleltetés van bármely két fősorozat faktorai között úgy, hogy az egymásnak megfeleltetett faktorkok egymással izomorfak. Mivel a fősorozat utolsó nem üres eleme nem tartalmazza S egyetlen ideálját sem valódi módon, ezért ez az elem az S félcsoporthoz magja. \square

4.5. A Green-féle \mathcal{L} -, \mathcal{R} -, \mathcal{H} -, \mathcal{D} -relációk

Tetszőleges S félcsoporthoz definiáljuk a következő relációkat. Azt mondjuk, hogy S valamely a és b elemei \mathcal{L} -relációban [\mathcal{R} -relációban] állnak, ha az általuk generált fő balideálok [fő jobbideálok] megegyeznek, azaz, $S^1a = S^1b$ [$aS^1 = bS^1$]. Az világos, hogy \mathcal{L} az S félcsoporthoz egy jobbkongruenciája, \mathcal{R} pedig az S egy balkongruenciája. Az \mathcal{L} és \mathcal{R} relációk metszetét \mathcal{H} -val jelöljük.

4.37. Lemma *Tetszőleges S félcsoporthoz esetén $\mathcal{L} \circ \mathcal{R} = \mathcal{R} \circ \mathcal{L}$.*

Bizonyítás. Tegyük fel, hogy $(a, b) \in \mathcal{L} \circ \mathcal{R}$ teljesül egy S félcsoporthoz valamely a és b elemeire. Akkor $(a, c) \in \mathcal{L}$ és $(c, b) \in \mathcal{R}$ teljesül S valamely c elemére, azaz, megadhatók olyan $u, v \in S^1$ elemek, hogy $a = uc$ és $b = cv$. Legyen $d = av = ucv = ub$. Mivel \mathcal{L} jobb kongruencia, ezért $(a, c) \in \mathcal{L}$ -ből $(av, cv) \in \mathcal{L}$, azaz, $(d, b) \in \mathcal{L}$ következik. Mivel \mathcal{R} bal kongruencia, ezért $(c, b) \in \mathcal{R}$ -ből $(uc, ub) \in \mathcal{R}$, azaz, $(a, d) \in \mathcal{R}$ következik. Így $(a, b) \in \mathcal{R} \circ \mathcal{L}$. Tehát $\mathcal{L} \circ \mathcal{R} \subseteq \mathcal{R} \circ \mathcal{L}$. A fordított tartalmazás hasonlóan bizonyítható. \square

Az $\mathcal{L} \circ \mathcal{R} = \mathcal{R} \circ \mathcal{L}$ ekvivalenciarelációt \mathcal{D} -vel fogjuk jelölni. Egy S félcsoporthoz tetszőleges a eleme esetén L_a , R_a , H_a , illetve D_a fogja jelölni az S -en értelmezett \mathcal{L} -, \mathcal{R} -, \mathcal{H} -, illetve \mathcal{D} -reláció azon osztályát, amely az a elemet tartalmazza.

4.38. Tétel (Green-tétel) *Legyenek a és b egy S félcsoporthoz \mathcal{R} -ekvivalens elemei úgy, hogy $b = as$ és $a = bs'$. Akkor az $\sigma : x \mapsto xs$ ($x \in L_a$) az L_a -nak L_b -re, $\sigma' : y \mapsto ys$, ($y \in L_b$) pedig L_b -nek L_a -ra való olyan injektív leképezései, amelyek egymás inverzei. Továbbá, mindkét leképezés \mathcal{R} -osztály tartó, azaz $(x, x\sigma) \in \mathcal{R}$ és $(y, y\sigma') \in \mathcal{R}$ teljesül minden $x \in L_a$ és $y \in L_b$ elemre.*

Bizonyítás. Legyen $x \in L_a$ tetszőleges. Mivel \mathcal{L} jobb kongruencia S -en, ezért $(x, a) \in \mathcal{L}$ -ből

$$(xs, b) \in \mathcal{L}$$

következik, és így

$$xs \in L_b.$$

Tehát σ az L_a részhalmazt az L_b részhalmazba képezi. Hasonlóan bizonyítható, hogy σ' az L_b részhalmazt az L_a részhalmazba képezi.

Ahhoz, hogy megmutassuk, hogy $\sigma\sigma'$ identikus leképezés L_a -n, tekintsünk egy tetszőleges $x \in L_a$ elemet. Ehhez az elemhez megadható olyan $t \in S^1$ elem, amely eleget tesz az

$$x = ta$$

egyenlőségnek. Ekkor viszont

$$(x)\sigma\sigma' = xss' = tass' = tbs' = ta = x,$$

azaz $\sigma\sigma'$ identikus leképezés az L_a részhalmazon.

Hasonlóan igazolható, hogy $\sigma'\sigma$ identikus leképezés az L_b részhalmazon. Így tehát σ az L_a -nak L_b -re, σ' pedig L_b -nek L_a -ra való olyan injektív leképezései, amelyek egymás inverzei.

Mivel tetszőleges $x \in L_a$ elem esetén

$$(x)\sigma = xs$$

és (a fentiek szerint)

$$x = (x)\sigma s',$$

ezért

$$(x, (x)\sigma) \in \mathcal{R}.$$

Tehát σ \mathcal{R} -osztály tartó. Hasonlóan igazolható, hogy σ' is \mathcal{R} -osztály tartó. \square

4.39. Tétel *Legyenek a és c egy S félcsoport \mathcal{D} -ekvivalens elemei. Ha b az S olyan eleme, amelyre $(a, b) \in \mathcal{R}$ és $(b, c) \in \mathcal{L}$, továbbá $as = b$, $bs' = a$, $tb = c$, $t'c = b$ ($s, s', t, t' \in S^1$), akkor az $x \mapsto txs$ ($x \in H_a$) és $z \mapsto t'zs'$ ($z \in H_c$) leképezések H_a és H_c közötti olyan bijekciók, amelyek egymás inverzei. Ebből következően, az ugyanazon \mathcal{D} -osztályban lévő \mathcal{H} -osztályok számossága egymással megegyezik.*

Bizonyítás. A 4.38. Tétel duálisa szerint a $\tau : y \mapsto ty$ ($y \in R_b$) az R_b -nak R_c -re, $\tau' : z \mapsto t'z$ ($z \in R_c$) pedig R_c -nek R_b -re való olyan injektív leképezései, amelyek egymás inverzei. Továbbá, mindkét leképezés \mathcal{L} -osztály tartó.

Legyenek σ , illetve σ' a Green-tételben szereplő leképezések, de itt σ -nak a H_a -ra, illetve σ' -nek H_b -re való leszűkítéseit tekintsük. Mivel az eredeti leképezések a Green-tétel

szerint \mathcal{R} -osztálytartók, ezért σ leszűkítése H_a -nak H_b -re, a σ' leszűkítése pedig H_b -nek H_a -ra való kölcsönösen egyértelmű leképezése. Hasonlóan, legyenek τ , illetve τ' a bizonyítás előző részében szereplő leképezések, de azoknak is csak a H_b -re, illetve H_c -re való leszűkítéseit tekintsük. Mivel mindkettő \mathcal{L} -osztálytartók a Green-tétel duálisa szerint, ezért τ leszűkítése H_b -t H_c -re, a τ' leszűkítése pedig H_c -t H_b -re képezi le kölcsönösen egyértelmű módon. Így $\sigma\tau$ a H_a -nak H_c -re, a $\tau'\sigma'$ pedig a H_c -nek H_a -ra való kölcsönösen egyértelmű leképezése, amelyek ráadásul egymás inverzei. Ezzel igazoltuk a tétel állítását. \square

4.40. Tétel *Legyen S tetszőleges félcsoport. Ha L jelöli S egy tetszőleges \mathcal{L} -osztályát, R pedig egy tetszőleges \mathcal{R} -osztályát, akkor az LR szorzat minden eleme S egy \mathcal{D} -osztályában van.*

Bizonyítás. Legyenek a, b, a', b' az S félcsoport olyan elemei, melyekre $a, a' \in L$ és $b, b' \in R$ teljesül. Mivel \mathcal{L} jobb kongruencia, ezért

$$ab, a'b \in L.$$

Mivel \mathcal{R} bal kongruencia, ezért

$$a'b, a'b' \in R.$$

Következésképpen

$$ab \mathcal{L} a'b \mathcal{R} a'b',$$

azaz

$$ab \mathcal{D} a'b'.$$

Így az LR szorzat minden eleme egy \mathcal{D} -osztályban van. \square

4.41. Lemma *Ha L egy 0-elemes S félcsoport 0-minimális bal oldali ideálja, akkor $L \setminus \{0\}$ egy \mathcal{L} -osztálya S -nek.*

Bizonyítás. Legyen $a \in L \setminus \{0\}$ tetszőleges elem. Akkor vagy

$$Sa = L$$

vagy

$$Sa = \{0\}.$$

Ha $Sa = L$ teljesül minden $a \in L \setminus \{0\}$ elemre, akkor

$$S^1a = S^1b$$

teljesül minden $a, b \in L \setminus \{0\}$ elemre, és így

$$L \setminus \{0\} \subseteq L_a.$$

Ha $c \in L_a$, akkor

$$c \in S^1a = L,$$

és így

$$L_a \subseteq L \setminus \{0\}.$$

Tehát

$$L \setminus \{0\} = L_a.$$

Vizsgáljuk most azt az esetet, amikor $Sa = \{0\}$ valamely $a \in L \setminus \{0\}$ elemre. Akkor $\{0, a\}$ az S félcsoporthoz L által tartalmazott nem-zéró bal oldali ideálja. Ezért

$$L = \{0, a\} = S^1a,$$

amiből következik, hogy $S^1x = S^1a$ akkor és csak akkor teljesül valamely $x \in S$ elemre, ha $x = a$. Tehát

$$L_a = \{a\} = L \setminus \{0\}. \quad \square$$

4.42. Tétel Egy S félcsoporthoz tetszőleges e idempotens eleme jobb oldali egységeleme L_e -nek, bal oldali egységeleme R_e -nek és kétoldali egységeleme H_e -nek.

Bizonyítás. Ha $a \in L_e$, akkor $a \in Se$ és így $ae = a$. Hasonlóan, ha $a \in R_e$, akkor $ea = a$. Mivel $H_e = R_e \cap L_e$, ezért $ae = ea = a$ szükségképpen teljesül minden $a \in H_e$ elemre az előzőek miatt. \square

4.43. Tétel Tetszőleges félcsoporthoz minden \mathcal{H} -osztálya legfeljebb egy idempotens elemet tartalmaz.

Bizonyítás. A tétel állítása a 4.42. Tételt nyilvánvaló következménye. \square

4.44. Lemma Legyen H egy S félcsoporthoz tetszőleges \mathcal{H} -osztálya. Ha valamely $h \in H$ és $s \in S$ elem esetén $hs \in H$, akkor $Hs = H$. Hasonlóan, ha $sh \in H$, akkor $sH = H$.

Bizonyítás. Tegyük fel, hogy $hs \in H$ valamely $h \in H$ és $s \in S$ elemekre. Akkor

$$(hs, h) \in \mathcal{H} = \mathcal{L} \cap \mathcal{R},$$

és ezért

$$H = H_h = H_{hs},$$

valamint

$$R_h = R_{hs}, \quad L_h = L_{hs}.$$

Mivel $h \in R_{hs}$, ezért a 4.38. Tétel miatt

$$x \mapsto xs$$

L_h -nak $L_{hs} = L_h$ -ra való kölcsönösen egyértelmű \mathcal{R} -osztály tartó leképezése. Ez utóbiból következik, hogy a vizsgált leképezés H -nak H -ra való kölcsönösen egyértelmű leképezése, s ezért

$$Hs = H.$$

A 4.38. Tétel duálisának felhasználásával hasonlóan bizonyítható, hogy ha $sh \in H$, akkor $sH = H$. \square

4.45. Tétel *Ha egy S félcsoporthárom eleme, a, b, ab az S ugyanazon \mathcal{H} -osztályában vannak, akkor ez a \mathcal{H} -osztály az S félcsoporth egy részcsoporthja. Speciálisan, az idempotens elemeket tartalmazó \mathcal{H} -osztályok mindegyike részcsoporthja S -nek.*

Bizonyítás. Legyenek a és b egy S félcsoporth olyan elemei, amelyekre $a, b, ab \in H$ teljesül, ahol H az S egy \mathcal{H} -osztályát jelöli. A 4.44. Lemma szerint $Hb = H$. Legyenek $c, d \in H$ tetszőleges elemek. Akkor

$$cb \in Hb = H.$$

Mivel $c, cb \in H$, ezért a 4.44. Lemma szerint $cH = H$. Így $cd \in H$. Újból alkalmazva a 4.44. Lemmát, azt kapjuk, hogy $Hd = H$. Tehát H tetszőleges c és d elemei esetén

$$cH = Hd = H,$$

amiből az 1.25. Tétel szerint már következik, hogy H az S félcsoporth egy részcsoporthja. \square

4.46. Tétel *Egy S félcsoporth tetszőleges a, b elemei esetén $ab \in R_a \cap L_b$ akkor és csak akkor teljesül, ha $R_b \cap L_a$ tartalmaz egy idempotens elemet. Ha ez a helyzet, akkor $aH_b = H_a b = H_a H_b = H_{ab} = R_a \cap L_b$.*

Bizonyítás. Tegyük fel, hogy $ab \in R_a \cap L_b$ teljesül valamely $a, b \in S$ elemekre. Az $ab \in R_a$ tartalmazásból az következik, hogy van S -nek olyan b' eleme, hogy

$$(ab)b' = a.$$

Ebből viszont a 4.38. Tétel szerint az adódik, hogy

$$\sigma : x \mapsto xb \quad (x \in L_a)$$

L_a -nak L_{ab} -re,

$$\sigma' : y \mapsto yb'$$

pedig L_{ab} -nek L_a -ra való olyan kölcsönösen egyértelmű \mathcal{R} -osztály tartó leképezései, amelyek egymás inverzei. A kiinduló feltétel miatt $ab \in L_b$, s ezért $L_{ab} = L_b$. Ebből viszont az következik, hogy σ' a $b \in L_b$ elemet a $bb' \in L_a$ elembe viszi. A σ' leképezés \mathcal{R} -osztály tartó tulajdonsága miatt az is igaz, hogy $bb' \in R_b$. Így

$$bb' \in R_b \cap L_a.$$

Ebből viszont

$$(bb')^2 = (bb')(bb') = ((bb')\sigma)\sigma' = (bb')(\sigma \circ \sigma') = (bb')id_{L_a} = bb'$$

adódik, azaz bb' az $R_b \cap L_a$ egy idempotens eleme.

Fordítva, tegyük fel, hogy $R_b \cap L_a$ tartalmaz egy e idempotens elemet. A 4.42. Tétel szerint e az R_b -ben bal oldali egységelem, s ezért

$$eb = b.$$

Mivel $e \mathcal{R} b$ (és $eb = b$), ezért a 4.38. Tétel szerint

$$\sigma : x \mapsto xb \quad (x \in L_e)$$

L_e -nek L_b -re való \mathcal{R} -osztály tartó, kölcsönösen egyértelmű leképezése. Mivel $a \in L_e$, ezért

$$ab \in L_b.$$

Mivel $\sigma \mathcal{R}$ -osztály tartó, ezért

$$ab \in R_a.$$

Így

$$ab \in R_a \cap L_b.$$

Eddig tehát beláttuk, hogy egy S félcsoport tetszőleges a, b elemei esetén $ab \in R_a \cap L_b$ akkor és csak akkor teljesül, ha $R_b \cap L_a$ tartalmaz egy idempotens elemet.

A bizonyítás teljessé tételéhez meg kell még mutatni, hogy ha $R_b \cap L_a$ tartalmaz egy idempotens elemet, akkor az $aH_b = H_a b = H_a H_b = H_{ab} = R_a \cap L_b$ egyenlőségek teljesülnek.

Tegyük fel tehát, hogy valamely $a, b \in S$ elemek esetén $R_b \cap L_a$ tartalmaz egy e idempotens elemet. Legyenek $x \in H_a$ és $y \in H_b$ tetszőleges elemek. Akkor

$$e \in R_y \cap L_x,$$

amiből - a fenti két feltétel ekvivalenciáját is használva - következik, hogy

$$xy \in R_x \cap L_y = R_a \cap L_b.$$

Mivel x , illetve y tetszőleges H_a -, illetve H_b -beli elemek, ezért

$$H_a H_b \subseteq R_a \cap L_b.$$

Mivel $L_e = L_a$ és $L_b = L_{ab}$, ezért

$$\sigma : x \mapsto xb \quad (x \in L_a)$$

L_a -nak L_{ab} -re való \mathcal{R} -osztály tartó leképezése, s ezért az is igaz, hogy σH_a -t H_{ab} -re képezi le, s ezért $H_a b = H_{ab}$. Tehát

$$H_a b \subseteq H_a H_b \subseteq R_a \cap L_b = H_{ab} = H_a b,$$

s ezért

$$H_a b = H_a H_b = H_{ab} = R_a \cap L_b.$$

Hasonlóan igazolható, hogy $a H_b = H_{ab}$. Így valóban teljesülnek a tételben szereplő $a H_b = H_a b = H_a H_b = H_{ab} = R_a \cap L_b$ egyenlőségek. \square

Legyen D egy félcsoport tetszőleges \mathcal{D} -osztálya. Jelöljön 0 egy olyan szimbólumot, amely nem eleme D -nek. Legyen $T = D \cup \{0\}$. A T halmazon definiáljunk egy $*$ műveletet a következőképpen. Tetszőleges $a, b \in D$ elemek esetén legyen

$$a * b = \begin{cases} ab, & \text{ha } ab \in R_a \cap L_b, \\ 0 & \text{különben;} \end{cases}$$

továbbá legyen

$$a * 0 = 0 * a = 0 * 0 = 0.$$

4.47. Lemma $(T; *)$ egy félcsoport.

Bizonyítás. A $*$ művelet asszociativitásának igazolásához tekintsünk tetszőleges $a, b, c \in T$ elemeket. Ha ezek közül mindkettő nulla, akkor

$$(a * b) * c = 0 = a * (b * c).$$

Tegyük fel, hogy valamelyikük nem nulla. Vizsgáljuk először azt az esetet, amikor

$$a * (b * c) \neq 0.$$

Ekkor

$$b * c \neq 0,$$

ami a $*$ művelet definíciója miatt a

$$b * c = bc \in R_b \cap L_c$$

teljesülését jelenti. Emiatt

$$R_{bc} = R_b \quad \text{és} \quad L_{bc} = L_c.$$

Mivel a

$$0 \neq a * (b * c) = a * (bc)$$

feltétel teljesül, ezért

$$a * (bc) = a(bc) \in R_a \cap L_{bc},$$

és így

$$R_{bc} \cap L_a$$

tartalmaz egy idempotens elemet. Mivel a fentiek szerint $R_{bc} = R_b$, ezért

$$R_b \cap L_a$$

tartalmaz egy idempotens elemet. A 4.46. Tétel miatt ez ekvivalens az

$$ab \in R_a \cap L_b$$

feltétellel. Ebből egyrészt

$$R_{ab} = R_a,$$

másrészt

$$a * b = ab \neq 0$$

adódik. Ha ezek mellett feltesszük, hogy

$$(ab) * c = (a * b) * c = 0,$$

akkor ebből a feltételből

$$a(bc) = (ab)c \notin R_{ab} \cap L_c = R_a \cap L_{bc}$$

adódik, amiből a 4.46. Tétel miatt az következik, hogy

$$R_{bc} \cap L_a$$

nem tartalmaz idempotens elemet. Ez ellentmondás, hiszen korábban éppen ennek az ellenkezőjét kaptuk. Így szükségképpen

$$(a * b) * c \neq 0.$$

Ekkor persze

$$(ab) * c \neq 0 \quad \text{és} \quad a * b \neq 0,$$

és ezért

$$a * (b * c) = a(bc) = (ab)c = (a * b) * c.$$

Nem részletezzük, de az előzőekhez hasonlóan igazolható, hogy ha

$$(a * b) * c \neq 0,$$

akkor

$$a * (b * c) \neq 0$$

és

$$(a * b) * c = a * (b * c).$$

Ezzel beláttuk, hogy a $*$ művelet asszociatív a $T = D \cup \{0\}$ halmazon, azaz $(T; *)$ félcsoport. \square

Feladatok

4.1. (Megoldás: 17.12.) Egy 0-elemes félcsoportot nil félcsoportnak nevezünk, ha tetszőleges a eleméhez megadható olyan n pozitív egész szám, hogy $a^n = 0$. Mutassuk meg, hogy nincs 0-egyszerű nil félcsoport.

4.2. (Megoldás: 17.13.) Egy S félcsoportot \mathcal{R} -kommutatívnak nevezünk, ha tetszőleges $a, b \in S$ elemek esetén $ab \in baS^1$ teljesül. Mutassuk meg, hogy egy S félcsoport akkor és csak akkor \mathcal{R} -kommutatív, ha S Green-féle \mathcal{R} ekvivalenciája kommutatív kongruencia!

5. fejezet

Félcsoportok ideálbővítése

5.1. Definíció Legyen A tetszőleges, Q pedig nullelemes (de egyébként tetszőleges) félcsoport. Az S félcsoportot az A félcsoportnak a Q félcsoporttal képezett ideálbővítésének (röviden bővítésének) nevezzük, ha S tartalmaz olyan, az A -val izomorf B ideált, hogy az S/B Rees-féle faktorfélcsoport izomorf Q -val.

5.2. Megjegyzés Megjegyezzük, hogy a továbbiakban A -t mindig azonosítjuk B -vel. Feltehetjük, hogy $A \cap Q = \emptyset$. Ekkor $S = A \cup Q^*$ formában is tekinthető, ahol Q^* jelöli a $Q \setminus \{0\}$ halmazt. Tehát, ha arra a kérdésre akarunk választ kapni, hogy van-e olyan S félcsoport, amely egy A félcsoportnak egy nullelemes Q félcsoporttal való ideálbővítése, akkor azt is kérdezhetjük, hogy lehet-e az $S = A \cup Q^*$ halmazon olyan \circ assziatív műveletet értelmezni, melynek A -ra való leszűkítése megegyezik az eredeti A -beli művelettel, továbbá A az (S, \circ) félcsoportnak olyan ideálja, hogy az S/A Rees-féle faktorfélcsoport izomorf Q -val.

5.1. Ideálbővítés, parciális transzformációk

5.3. Definíció Nem üres S halmaz esetén az $S \times S$ halmaz valamely nem üres részhalmazának S -be való egyértelmű leképezését az S halmazon értelmezett parciális műveletnek nevezzük. Egy parciális művelettel ellátott halmazt parciális grupoidnak nevezünk.

5.4. Definíció Egy S parciális grupoidnak egy S' parciális grupoidba való θ leképezését parciális homomorfizmusnak nevezzük, ha tetszőleges $a, b \in S$ elemek esetén az alábbiak teljesülnek: ha az ab szorzat értelmezve van S -ben, akkor a $\theta(a)\theta(b)$ szorzat értelmezve van S' -ben és $\theta(ab) = \theta(a)\theta(b)$.

5.5. Tétel Legyen $(A; \cdot)$ tetszőleges, $(Q; *)$ pedig nullelemes félcsoport. Legyen θ a $Q^* = Q \setminus \{0\}$ parciális félcsoportnak az A félcsoportba való parciális homomorfizmusa. Legyen

$S = A \cup (Q \setminus \{0\})$. Az S -en értelmezzünk egy \circ műveletet a következőképpen: Tetszőleges $a, b \in A$ és $x, y \in Q$ elemek esetén legyen

$$x \circ y = \begin{cases} x * y & \text{ha } x * y \neq 0 \text{ } Q\text{-ban} \\ \theta(x)\theta(y), & \text{ha } x * y = 0 \text{ } Q\text{-ban;} \end{cases} \quad (5.1)$$

$$a \circ x = a \cdot \theta(x); \quad (5.2)$$

$$x \circ a = \theta(x) \cdot a; \quad (5.3)$$

$$a \circ b = a \cdot b. \quad (5.4)$$

Akkor $(S; \circ)$ félcsoport, amely A -nak Q -val való bővítése. Ha A egységelemes félcsoport, akkor A -nak Q -val való minden bővítése a fenti módon (azaz parciális homomorfizmusokkal) konstruálható.

Bizonyítás. A tétel állításának első részéhez tulajdonképpen csak azt kell bizonyítani, hogy a tételben definiált művelet asszociatív. Ez a bizonyítás technikai jellegű. Nyolc eset van, amelyeket AAA , AAQ^* , ... módon fogunk jelölni attól függően, hogy a háromtényezős szorzatban szereplő elemek hol helyezkednek el. Például az AAQ^* esetén az első két tényező A -beli, a harmadik tényező pedig Q^* -beli elem. A következőkben jelöljenek a, b és c tetszőleges A -beli, x, y és z pedig tetszőleges Q^* -beli elemeket.

AAA eset: Itt tulajdonképpen nincs is mit bizonyítanunk, mert az A belüli elemek közötti \circ művelet megegyezik az A -beli eredeti \cdot művelettel, amely viszont asszociatív.

AAQ^* eset:

$$\begin{aligned} (a \circ b) \circ x &= (a \cdot b) \circ x = (a \cdot b) \cdot \theta(x) = a \cdot (b \cdot \theta(x)) = \\ &= a \cdot (b \circ x) = a \circ (b \circ x). \end{aligned}$$

Az AQ^*A , Q^*AA és Q^*AQ^* esetek vizsgálata az AAQ^* esethez hasonló.

AQ^*Q^* eset:

$$(a \circ x) \circ y = (a \cdot \theta(x)) \circ y = (a \cdot \theta(x)) \cdot \theta(y) = a \cdot (\theta(x)\theta(y)).$$

Ha $x * y = 0$, akkor

$$a \cdot (\theta(x)\theta(y)) = a \cdot (x \circ y) = a \circ (x \circ y).$$

Ha $x * y \neq 0$, akkor

$$a \cdot (\theta(x)\theta(y)) = a \cdot (\theta(xy)) = a \circ (x * y) = a \circ (x \circ y).$$

A Q^*Q^*A eset vizsgálata az előző esethez hasonló.

$Q^*Q^*Q^*$ eset: Ha $x * y * z \neq 0$, akkor

$$(x \circ y) \circ z = (x * y) * z = x * (y * z) = x \circ (y \circ z).$$

Ezért vizsgálhatjuk az $x * y * z = 0$ esetet.

Ha $x * y \neq 0$ Q -ban, akkor

$$(x \circ y) \circ z = (x * y) \circ z = (\theta(x * y) \cdot \theta(z)) = (\theta(x) \cdot \theta(y)) \cdot \theta(z).$$

Ha $x * y = 0$ Q -ban, akkor

$$(x \circ y) \circ z = (\theta(x)\theta(y)) \circ z = (\theta(x) \cdot \theta(y)) \cdot \theta(z).$$

Ha $y * z \neq 0$ Q -ban, akkor

$$x \circ (y \circ z) = x \circ (y * z) = \theta(x) \cdot \theta(y * z) = \theta(x) \cdot (\theta(y) \cdot \theta(z)).$$

Ha $y * z = 0$ Q -ban, akkor

$$x \circ (y \circ z) = x \circ (\theta(y) \cdot \theta(z)) = \theta(x) \cdot (\theta(y) \cdot \theta(z)).$$

A fenti négy eset eredményeinek figyelembevételével a \circ művelet asszociativitása a $Q^*Q^*Q^*$ esetben is teljesül. Ezzel a tétel első állítását bebizonyítottuk.

A második rész bizonyításához tegyük fel, hogy $(S; \circ)$ olyan félcsoport, amely előáll egy egységelemes $(A; \cdot)$ félcsoportnak egy nullelemes $(Q; *)$ félcsoporttal való ideálbővítéseként. A korábbi megjegyzés szerint feltehetjük, hogy A az S félcsoport egy ideálja, és tetszőleges $a, b \in A$ elemek esetén $a \cdot b = a \circ b$. Megmutatjuk, hogy megadható a Q^* parciális félcsoportnak az A félcsoportba olyan θ parciális homomorfizmusa, hogy tetszőleges $a, b \in A$ és $x, y \in Q$ elemek esetén a tételbeli

$$x \circ y = \begin{cases} x * y & \text{ha } x * y \neq 0 \\ \theta(x) \cdot \theta(y), & \text{ha } x * y = 0, \end{cases}$$

$$a \circ x = a \cdot \theta(x); \quad x \circ a = \theta(x) \cdot a; \quad a \circ b = a \cdot b$$

egyenlőségek teljesülnek, azaz az S -en értelmezett \circ művelet a θ parciális homomorfizmus által van meghatározva.

Legyen $x \in Q \setminus \{0\}$ tetszőleges elem. e -vel jelölve A egységelemét,

$$x \circ e = e \circ (x \circ e) = (e \circ x) \circ e = e \circ x.$$

Legyen θ a $(Q \setminus \{0\}; *)$ parciális félcsoportnak az A félcsoportba való következő leképezése:

$$\theta : x \mapsto x \circ e.$$

Megmutatjuk, hogy θ parciális homomorfizmus. Tegyük fel, hogy x és y a $Q \setminus \{0\}$ olyan elemei, amelyekre $x * y \neq 0$ teljesül. Akkor

$$x \circ y = x * y,$$

és ezért

$$\theta(x) \cdot \theta(y) = (x \circ e) \cdot (y \circ e) = (x \circ e) \circ (y \circ e) = x \circ (e \circ (y \circ e)) = x \circ (y \circ e) = (x * y) \circ e = \theta(x * y).$$

Ez éppen azt igazolja, hogy θ a $(Q \setminus \{0\}; *)$ parciális félcsoportnak az A félcsoportba való parciális homomorfizmusa.

A továbbiakban legyenek $a, b \in A$ és $x, y \in Q \setminus \{0\}$ tetszőleges elemek. Ha $x * y \neq 0$, akkor $x \circ y \notin A$ teljesül S -ben, és így

$$x \circ y = x \circ y.$$

Ha $x * y = 0$, akkor $x \circ b \in A$. Így

$$x \circ y = (x \circ y) \circ e = x \circ (y \circ e) = x \circ (e \circ (y \circ e)) = (x \circ e) \circ (y \circ e) = \theta(x) \circ \theta(y) = \theta(x) \cdot \theta(y).$$

Továbbá, tetszőleges $x \in Q^*$ -ra

$$a \circ x = (a \circ e) \circ x = a \circ (e \circ x) = a \circ \theta(x) = a \cdot \theta(x),$$

$$x \circ a = x \circ (e \circ a) = (x \circ e) \circ a = \theta(x) \circ a = \theta(x) \cdot a,$$

$$a \circ b = a \cdot b.$$

Ezzel azt is megmutattuk, hogy az S en értelmezett \circ művelet a

$$\theta : x \mapsto x \circ e$$

parciális homomorfizmus által van meghatározva. □

5.2. Félcsoportok translációs burka

Egy X halmaz önmagába való egyértelmű leképezését az X halmaz egy *transzformációjának* nevezzük. Jelölje \mathcal{T}_X az X összes transzformációinak halmazát. A \mathcal{T}_X halmazon kétféleképpen is értelmezhetünk egy \circ műveletet. Ha \mathcal{T}_X elemeit úgy tekintjük, mint balról ható transzformációk, akkor tetszőleges $\alpha(\cdot), \beta(\cdot) \in \mathcal{T}_X$ transzformációk esetén legyen $\alpha \circ \beta$ a \mathcal{T}_X azon eleme, amelyre tetszőleges $x \in X$ elem esetén $(\alpha \circ \beta)(x) = \alpha(\beta(x))$ teljesül. Viszont, ha \mathcal{T}_X elemeit úgy tekintjük, mint jobbról ható transzformációk, akkor tetszőleges $(\cdot)\alpha, (\cdot)\beta \in \mathcal{T}_X$ transzformációk esetén legyen $\alpha \circ \beta$ a \mathcal{T}_X azon eleme amelyre tetszőleges $x \in X$ elem esetén $(x)(\alpha \circ \beta) = ((x)\alpha)\beta$ teljesül. Mindkét esetben \mathcal{T}_X félcsoportot alkot a megfelelő műveletre nézve; ezeket a félcsoportokat az X halmaz feletti *teljes bal transzformációfélcsoportnak*, illetve *teljes jobb transzformációfélcsoportnak* nevezzük. A következőkben egy S félcsoport speciális bal, illetve jobb transzformációival foglalkozunk.

5.6. Definíció Egy S félcsoport (balról ható) $\lambda(\cdot)$ transzformációját bal translációnak nevezzük, ha S tetszőleges x, y elemei esetén $\lambda(xy) = \lambda(x)y$. Az S félcsoport (jobbról ható) $(\cdot)\varrho$ transzformációját jobb translációnak nevezzük, ha tetszőleges $x, y \in S$ elemek esetén $(xy)\varrho = x(y)\varrho$ teljesül. Azt mondjuk, hogy egy λ bal transláció és egy ϱ jobb transláció láncszemet alkotnak, ha S tetszőleges x, y elemei esetén $x\lambda(y) = (x)\varrho y$ teljesül.

5.7. Lemma Egy S félcsoport bal [jobb] translációinak $\Lambda [P]$ halmaza a \mathcal{T}_S bal [jobb] transzformációfélcsoport egy részfélcsoportja.

Bizonyítás. A bal oldali esettel foglalkozunk. A jobb oldali eset hasonlóan igazolható. Ha $x, y \in S$ és $\lambda_1, \lambda_2 \in \Lambda$ tetszőlegesek, akkor

$$(\lambda_1\lambda_2)(xy) = \lambda_1(\lambda_2(xy)) = \lambda_1((\lambda_2(x))y) = \lambda_1(\lambda_2(x))y = ((\lambda_1\lambda_2)(x))y. \quad \square$$

Egy S félcsoport tetszőleges a eleme esetén jelölje $\lambda_a [\varrho_a]$ az S félcsoportnak azon transzformációját, amelyre tetszőleges $s \in S$ elem esetén $\lambda_a(s) = as$ [$(s)\varrho_a = sa$] teljesül. Könnyen ellenőrizhető, hogy $\lambda_a [\varrho_a]$ az S félcsoport bal [jobb] translációja. λ_a -t [ϱ_a -t] az S félcsoport (a eleme által definiált) *belső bal [jobb] translációjának* nevezzük. Az $x(ay) = (xa)y$ egyenlőség miatt λ_a és ϱ_a láncszemet alkotnak.

Jelölje Λ_0 , illetve P_0 egy S félcsoport *belső bal*, illetve *belső jobb* translációinak halmazát.

5.8. Lemma Tetszőleges S félcsoport esetén az $a \mapsto \lambda_a$, illetve az $a \mapsto \varrho_a$ megfeleltetések ($a \in S$) az S félcsoportnak Λ_0 -ra, illetve P_0 -ra való homomorfizmusai.

Bizonyítás. Mivel tetszőleges $s, a, b \in S$ elemek esetén

$$\lambda_{ab}(s) = (ab)s = a(bs) = \lambda_a(\lambda_b(s)) = (\lambda_a\lambda_b)(s),$$

valamint

$$(s)\varrho_{ab} = s(ab) = (sa)b = ((s)\varrho_a)\varrho_b = (s)(\varrho_a\varrho_b),$$

ezért az állítás nyilvánvaló. \square

5.9. Definíció Tetszőleges S félcsoport esetén az $a \mapsto \lambda_a$, illetve $a \mapsto \varrho_a$ ($a \in S$) homomorfizmust az S félcsoport *bal*, illetve *jobbreguláris* reprezentációjának nevezzük.

5.10. Definíció Egy S félcsoportot *bal [jobb] reduktnak* nevezünk, ha tetszőleges $a, b \in S$ elemek esetén az $xa = xb$ [$ax = bx$] egyenlőségnek minden $x \in S$ elemre való teljesüléséből $a = b$ következik.

5.11. Lemma Egy S félcsoport *jobb [bal] reguláris* reprezentációja akkor és csak akkor *injektív* (másképpen: *hű*), ha S *bal [jobb] reduktnak*.

Bizonyítás. S jobbrekuláris reprezentációja injektív akkor és csak akkor, ha tetszőleges $a, b \in S$ elemek esetén a $\varrho_a = \varrho_b$ egyenlőségéből, azaz az $xa = xb$ egyenlőségnek minden $x \in S$ elemre való teljesüléséből $a = b$ következik. Ez éppen azt jelenti, hogy S bal redukzív. A duális állítás hasonlóan adódik. \square

5.12. Lemma *Tetszőleges S félcsoporthoz az S^1 félcsoporthoz jobb, illetve bal reguláris reprezentációja injektív.*

Bizonyítás. Mivel S^1 egységelemes félcsoporthoz, ezért S^1 bal, illetve jobb redukzív. Így az 5.11. Lemma szerint S jobb, illetve bal reguláris reprezentációja injektív. \square

5.13. Definíció *Tetszőleges S félcsoporthoz az S^1 félcsoporthoz jobb, illetve bal reguláris reprezentációjának S -re való leszűkítését az S félcsoporthoz kiterjesztett jobb, illetve bal reguláris reprezentációjának nevezzük.*

5.14. Lemma *Tetszőleges S félcsoporthoz kiterjesztett jobb [bal] reguláris reprezentációja injektív.*

Bizonyítás. Az 5.12. Lemma szerint nyilvánvaló. \square

5.15. Tétel *Minden félcsoporthoz be lehet ágyazni egy teljes bal [jobb] transzformációfélcsoportba.*

Bizonyítás. Legyen S tetszőleges félcsoporthoz. Az világos, hogy S beágyazható az S^1 félcsoporthozba. Tekintsük az S^1 félcsoporthoz feletti \mathcal{T}_{S^1} teljes bal transzformációfélcsoportot. Az 5.7. Lemma szerint S^1 bal translációi a \mathcal{T}_{S^1} teljes bal transzformációfélcsoporton belül egy részfélcsoportot alkotnak. Az 5.12. Lemma szerint S^1 -et be lehet ágyazni ebbe a részfélcsoportba. Így S beágyazható a \mathcal{T}_{S^1} teljes bal transzformációfélcsoportba. A duális állítás hasonlóan igazolható. \square

5.16. Lemma *Legyenek λ és ϱ egy S félcsoporthoz tetszőleges bal, illetve jobb translációi. Legyen $a \in S$. Akkor*

$$\lambda\lambda_a = \lambda_{\lambda(a)}, \quad \text{és} \quad \varrho_a\varrho = \varrho_{(a)\varrho}.$$

Ha λ és ϱ láncszemet alkotnak, akkor

$$\lambda_a\lambda = \lambda_{(a)\varrho} \quad \text{és} \quad \varrho\varrho_a = \varrho_{\lambda(a)}.$$

Bizonyítás. Minden $x \in S$ esetén

$$\begin{aligned} (\lambda\lambda_a)(x) &= \lambda(ax) = (\lambda(a))x = \lambda_{\lambda(a)}(x), \\ (x)\varrho_a\varrho &= (xa)\varrho = x((a)\varrho) = (x)\varrho_{(a)\varrho}. \end{aligned}$$

Ha λ és ϱ láncszemet alkotnak, akkor

$$\begin{aligned} (\lambda_a\lambda)(x) &= \lambda_a(\lambda(x)) = a(\lambda(x)) = ((a)\varrho)x = \lambda_{(a)\varrho}(x), \\ (x)(\varrho\varrho_a) &= ((x)\varrho)\varrho_a = ((x)\varrho)a = x(\lambda(a)) = (x)\varrho_{\lambda(a)}. \end{aligned} \quad \square$$

Jelölések: Tetszőleges S félcsoporthoz esetén jelölje $\Omega(S)$ az S azon λ bal transzlációiból, illetve ϱ jobb transzlációiból álló (λ, ϱ) párok halmazát, amelyek láncszemet alkotnak. Jelölje $\Omega_0(S)$ a (λ_a, ϱ_a) párok halmazát.

5.17. Lemma *Tetszőleges S félcsoporthoz esetén $\Omega(S)$ egységelemes félcsoporthoz alkot a*

$$(\lambda_1, \varrho_1)(\lambda_2, \varrho_2) = (\lambda_1\lambda_2, \varrho_1\varrho_2)$$

műveletre nézve. Ennek a félcsoporthoz $\Omega_0(S)$ egy részfélcsoporthoz. Az

$$a \mapsto (\lambda_a, \varrho_a)$$

leképezés S -nek $\Omega_0(S)$ -re való homomorfizmusa.

Bizonyítás. Legyenek λ_1 és λ_2 tetszőleges bal transzlációk, ϱ_1 és ϱ_2 pedig tetszőleges jobb transzlációk. Az nyilvánvaló, hogy $\lambda_1\lambda_2$ bal transzláció, $\varrho_2\varrho_1$ pedig jobb transzláció. Legyenek $x, y \in S$ tetszőlegesek. Akkor

$$x((\lambda_1\lambda_2)(y)) = x(\lambda_1(\lambda_2(y))) = ((x)\varrho_1)(\lambda_2(y)) = (((x)\varrho_1)\varrho_2)y = ((x)(\varrho_1\varrho_2))y.$$

Ezért $\lambda_1\lambda_2$ és $\varrho_1\varrho_2$ láncszemet alkotnak. Tehát $\Omega(S)$ félcsoporthoz. Az világos, hogy az S félcsoporthoz id_S identikus leképezése bal-, illetve jobb transzláció, és $(id_S(\cdot), (\cdot)id_S) \in \Omega(S)$. Továbbá, $(id_S(\cdot), (\cdot)id_S)$ az $\Omega(S)$ egységeleme. Mivel

$$(\lambda_a, \varrho_a)(\lambda_b, \varrho_b) = (\lambda_{ab}, \varrho_{ab}),$$

ezért $\Omega_0(S)$ részfélcsoporthoz $\Omega(S)$ -nek. Az 5.8. Lemma szerint

$$a \mapsto (\lambda_a, \varrho_a)$$

az S félcsoporthoz az $\Omega_0(S)$ félcsoporthoz való homomorfizmusa. □

Az $\Omega(S)$ félcsoporthoz az S félcsoporthoz transzlációs burkának, az $\Omega_0(S)$ részfélcsoporthoz az $\Omega(S)$ félcsoporthoz belső részének nevezzük. Egy $(\lambda, \varrho) \in \Omega(S)$ bitranszlációt belső bitranszlációnak nevezünk, ha $(\lambda, \varrho) \in \Omega_0(S)$.

5.3. Gyengén redukív félcsoporthoz

5.18. Definíció *Egy S félcsoporthozról akkor mondjuk, hogy gyengén redukív, ha tetszőleges $a, b \in S$ elemek esetén az $ax = bx$ és $xa = xb$ minden $x \in S$ -re való teljesüléséből $a = b$ következik.*

5.19. Lemma *Egy S félcsoport akkor és csak akkor gyengén redukzív, ha az*

$$a \mapsto (\lambda_a, \varrho_a)$$

leképezés az S félcsoportnak az $\Omega_0(S)$ félcsoportra való izomorfizmusa.

Bizonyítás. Legyen S gyengén redukzív félcsoport. Tegyük fel, hogy

$$(\lambda_a, \varrho_a) = (\lambda_b, \varrho_b)$$

valamely $a, b \in S$ elemekre. akkor

$$\lambda_a = \lambda_b \quad \text{és} \quad \varrho_a = \varrho_b,$$

s ezért S minden x elemére

$$ax = bx \quad \text{és} \quad xa = xb$$

teljesül. Mivel S gyengén redukzív, ezért

$$a = b.$$

Fordítva, tegyük fel, hogy az

$$a \mapsto (\lambda_a, \varrho_a)$$

homomorfizmus injektív. Ha $a, b \in S$ olyan elemek, hogy S minden x elemére

$$ax = bx \quad \text{és} \quad xa = xb$$

teljesül, akkor

$$(\lambda_a, \varrho_a) = (\lambda_b, \varrho_b),$$

s ezért

$$a = b.$$

Tehát S gyengén redukzív. □

5.20. Tétel *Legyen S gyengén redukzív félcsoport. Azonosítsuk S -et az S translációs burkának belső részével, azaz az $\Omega_0(S)$ félcsoporttal. Ekkor S ideálja az $\Omega(S)$ félcsoportnak, továbbá minden $a \in S$ és $(\lambda, \varrho) \in \Omega(S)$ esetén $(\lambda, \varrho)a = \lambda(a)$ és $a(\lambda, \varrho) = (a)\varrho$.*

Bizonyítás. Az 5.16. Lemmát használva,

$$(\lambda, \varrho)a = (\lambda, \varrho)(\lambda_a, \varrho_a) = (\lambda\lambda_a, \varrho\varrho_a) = (\lambda_{\lambda(a)}, \varrho_{\lambda(a)}) = \lambda(a)$$

és

$$a(\lambda, \varrho) = (\lambda_a, \varrho_a)(\lambda, \varrho) = (\lambda_a\lambda, \varrho_a\varrho) = (\lambda_{(a)\varrho}, \varrho_{(a)\varrho}) = (a)\varrho. \quad \square$$

5.21. Tétel Legyen $(A; \cdot)$ egy gyengén redukív félcsoport és $(Q; *)$ tetszőleges nullemes félcsoport. Legyen $(S'; \circ)$ az $\Omega(A)$ félcsoportnak a Q félcsoporttal képezett valamely ideálbővítése. Legyen $S = A \cup (Q \setminus \{0\}) \subseteq S'$. $(S; \circ)$ akkor és csak akkor olyan részfélcsoportja az $(S'; \circ)$ félcsoportnak, amely A -nak Q -val való bővítése, ha Q tetszőleges $a * b = 0$ feltételt teljesítő a és b elemei esetén az $a \circ b$ szorzat S -ben van.

Fordítva, ha A -nak van Q -val való $(S; \diamond)$ ideálbővítése, akkor $\Omega(A)$ -nak van Q -val olyan $(S'; \circ)$ ideálbővítése, amelynek $(S; \diamond)$ egy részfélcsoportja.

Bizonyítás. Legyen $(S'; \circ)$ az $\Omega(A)$ félcsoportnak a Q félcsoporttal képezett valamely ideálbővítése. Mivel $\Omega(A)$ egységelemes félcsoport, ezért az 5.5. Tétel szerint a \circ művelet a Q^* parciális grupoidnak az $\Omega(A)$ félcsoportba való valamely θ parciális homomorfizmusa által van meghatározva. Tetszőleges $x \in Q^*$ elem esetén legyen

$$\theta(x) = (\lambda_x, \varrho_x).$$

Az 5.5. Tétel (5.3) feltétele szerint az $\Omega(A)$ félcsoport tetszőleges (λ, ϱ) , valamint Q^* tetszőleges x elemei esetén

$$(\lambda, \varrho) \circ x = (\lambda, \varrho)(\lambda_x, \varrho_x) = (\lambda\lambda_x, \varrho\varrho_x).$$

Ha ezt az eredmény alkalmazzuk az A félcsoport tetszőleges a eleméhez tartozó (λ_a, ϱ_a) elemre, akkor (figyelembe véve, hogy A -t azonosíthatjuk $\Omega_0(A)$ -val) azt kapjuk, hogy

$$a \circ x = (\lambda_a\lambda_x, \varrho_a\varrho_x) = (\lambda_{(a)\varrho_x}, \varrho_{(a)\varrho_x}) \in A,$$

alkalmazva az 5.16. Lemmát is. Így

$$A \circ Q^* \subseteq A.$$

Hasonlóan igazolható, hogy

$$Q^* \circ A \subseteq A.$$

Ezért

$$A \circ S \subseteq A \quad \text{és} \quad S \circ A \subseteq A.$$

Ha S részfélcsoportja S' -nek, akkor a fentiek alapján A ideálja S -nek és így S az A -nak Q -vel való ideálbővítése. Az előzőek szerint, S akkor és csak akkor részfélcsoportja S' -nek ha $Q^* \circ Q^* \subseteq S$, ami ekvivalens azzal, hogy tetszőleges $s, t \in Q^*$ elemek esetén $s * t = 0$ -ból $s \circ t \in S$ következik.

A fordított állítás bizonyításához tegyük fel, hogy az $(S; \diamond)$ félcsoport az A félcsoportnak a Q félcsoporttal képezett ideálbővítése. Feltehetjük, hogy $S = A \cup Q^*$. Tetszőleges $x \in Q^*$ elem esetén tekintsük az A részfélcsoporton a következőképpen értelmezett $\lambda_x()$ és $()\varrho_x$ leképezéseket:

$$\lambda_x : a \mapsto x \diamond a; \quad \varrho_x : a \mapsto a \diamond x.$$

Mivel A az $(S; \diamond)$ félcsoport ideálja, ezért $\lambda_x()$ és $(\)\varrho_x$ az A félcsoport önmagába való leképezései (más szóval: transzformációi). Mivel tetszőleges $a, b \in A$ elemek esetén

$$\lambda_x(a \cdot b) = \lambda_x(a \diamond b) = x \diamond (a \diamond b) = (x \diamond a) \diamond b = (\lambda_x(a)) \diamond b = \lambda_x(a) \cdot b,$$

ezért λ_x az A félcsoportnak egy bal translációja. Hasonlóan igazolható, hogy ϱ_x az A félcsoportnak egy jobb translációja. Mivel tetszőleges $a, b \in A$ elemek esetén

$$a \cdot \lambda_x(b) = a \diamond \lambda_x(b) = a \diamond (x \diamond b) = (a \diamond x) \diamond b = ((a)\varrho_x) \diamond b = (a)\varrho_x \cdot b,$$

ezért a (λ_x, ϱ_x) rendezett pár láncszemet alkot, azaz

$$(\lambda_x, \varrho_x) \in \Omega(A).$$

Tekintsük a

$$\phi : x \mapsto (\lambda_x, \varrho_x) \in \Omega(A), \quad x \in Q^*$$

leképezést. Megmutatjuk, hogy ϕ a Q^* parciális félcsoportnak az $\Omega(A)$ translációs burokba való parciális homomorfizmusa. Ehhez tegyük fel, hogy x és y a Q^* parciális félcsoport tetszőleges olyan elemei, amelyekre $xy \neq 0$ teljesül. Mivel $\Omega(A)$ félcsoport, ezért benne a $\phi(x)\phi(y)$ szorzat értelmezve van. Ezért csak azt kell megmutatni, hogy $\phi(xy) = \phi(x)\phi(y)$. Az világos, hogy

$$\lambda_{xy} = \lambda_x \lambda_y, \quad \text{és} \quad \varrho_{xy} = \varrho_x \varrho_y.$$

Ezért

$$\phi(xy) = (\lambda_{xy}, \varrho_{xy}) = (\lambda_x \lambda_y, \varrho_x \varrho_y) = (\lambda_x, \varrho_x)(\lambda_y, \varrho_y) = \phi(x)\phi(y).$$

Tehát

$$\phi(xy) = \phi(x)\phi(y)$$

valóban teljesül. Ezzel beláttuk, hogy ϕ a Q^* parciális félcsoportnak az $\Omega(A)$ translációs burokba való parciális homomorfizmusa.

Mivel az $\Omega(A)$ translációs burok olyan félcsoport, amelynek van egységeleme, ezért az 5.5. Tétel szerint a ϕ parciális homomorfizmus meghatározza $\Omega(A)$ -nak Q -val való valamely $(S'; \circ)$ bővítését. Részletesebben: Tetszőleges $a, b \in A$ és $x, y \in Q^*$ elemek esetén legyen

$$x \circ y = \begin{cases} x * y & \text{ha } x * y \neq 0 \text{ } Q\text{-ban} \\ \phi(x)\phi(y), & \text{ha } x * y = 0 \text{ } Q\text{-ban,} \end{cases}$$

$$a \circ x = a \cdot \phi(x); \quad x \circ a = \phi(x) \cdot a; \quad a \circ b = a \cdot b.$$

Bizonyításunk teljessé tételéhez elegendő már csak azt megmutatni, hogy tetszőleges $s, t \in S$ elemek esetén $s \circ t = s \diamond t$. Legyenek s és t tetszőleges S -beli elemek.

Ha $s, t \in A$, akkor $s \circ t = st = s \diamond t$ nyilvánvalóan teljesül.

Ha $s \in A$ és $t \in Q^*$, akkor

$$s \circ t = s \cdot \phi(t) = (s)\varrho_t,$$

felhasználva az 5.20. Tételt is. Mivel

$$(s)\varrho_t = s \diamond t,$$

ezért

$$s \circ t = s \diamond t.$$

Ha $s \in Q^*$ és $t \in A$, akkor pedig (felhasználva az 5.20. Tételt is)

$$s \circ t = \phi(s) \circ t = \lambda_s(t) = s \diamond t.$$

Tekintsük végül azt az esetet, amikor $s, t \in Q^*$. Ha $s * t \neq \{0\}$ a Q félcsoportban, akkor

$$s \diamond t = s * t = s \circ t.$$

Ha $st = 0$ a Q félcsoportban, akkor

$$s \diamond t \in A,$$

s ezért minden $a \in A$ elemre

$$(a)(\varrho_s \varrho_t) = ((a)\varrho_s)\varrho_t = (a \diamond s) \diamond t = a \diamond (s \diamond t) = (a)\varrho_{s \diamond t}.$$

Így

$$\varrho_s \varrho_t = \varrho_{s \diamond t}.$$

Hasonlóan igazolható, hogy

$$\lambda_s \lambda_t = \lambda_{s \diamond t}.$$

Ezen eredmények, valamint az 5.5. Tétel felhasználásával azt kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} s \circ t &= \phi(s)\phi(t) = (\lambda_s, \varrho_s)(\lambda_t, \varrho_t) = \\ &= (\lambda_s \lambda_t, \varrho_s \varrho_t) = (\lambda_{s \diamond t}, \varrho_{s \diamond t}) = s \diamond t. \end{aligned} \quad \square$$

Az előző tétel azt a problémát, hogy gyengén redukív A félcsoportok esetén megtaláljuk S nek valamely nullelemes Q félcsoporttal képezett összes ideálbővítését, redukálja arra a problémára, hogy megtaláljuk a $Q^* = Q \setminus \{0\}$ parciális grupoidnak az A félcsoport $\Omega(A)$ translációs burkába való összes olyan ϕ parciális homomorfizmusát, amelyre teljesül, hogy tetszőleges $s, t \in Q^*$ elem esetén az $st = 0$ egyenlőségnek a Q -ban való teljesülése esetén a $\phi(s)\phi(t)$ szorzat A -ban van (és nem csak $\Omega(A)$ -ban).

5.22. Definíció Legyen A tetszőleges, Q pedig egy nullelemes félcsoport. Legyen W a $Q^* = Q \setminus \{0\}$ halmaz elemeiből alkotott azon (s, t) rendezett párok halmaza, amelyek esetén $st = 0$ a Q félcsoportban. A W halmaznak az A félcsoportba való tetszőleges (egyértelmű) leképezését a Q félcsoportnak az A félcsoportba való elágazásának nevezzük. Ha θ a Q^* parciális grupoidnak az A félcsoportba való parciális homomorfizmusa és ϕ a W halmaznak A -ba való olyan leképezése, amely tetszőleges $(s, t) \in W$ elempárhoz a

$$\phi((s, t)) = \theta(s)\theta(t)$$

szorzatot rendel, akkor ϕ -t a Q félcsoportnak az A félcsoportba való, a θ által indukált elágazásának nevezzük.

Bizonyítás nélkül közöljük a következő eredményt.

5.23. Tétel Legyen A egy gyengén redukív, Q pedig egy nullelemes félcsoport. Legyen ϕ a Q félcsoportnak az A félcsoportba való elágazása. Legyenek továbbá

$$s : \mapsto \lambda_s \quad \text{és} \quad s : \mapsto \varrho_s$$

a Q^* -nak az A félcsoport bal, illetve jobb translációinak Λ , illetve P félcsoportjába való olyan leképezései, amelyekre a következők teljesülnek (tetszőleges $s, t \in Q^*$ és tetszőleges $x, y \in A$ elemek esetén)

$$\lambda_s \lambda_t = \begin{cases} \lambda_{st}, & \text{ha } st \neq 0 \text{ } Q\text{-ban} \\ \lambda_{\phi((s,t))}, & \text{ha } st = 0 \text{ } Q\text{-ban,} \end{cases} \quad (5.5)$$

$$\varrho_s \varrho_t = \begin{cases} \varrho_{st}, & \text{ha } st \neq 0 \text{ } Q\text{-ban} \\ \varrho_{\phi((s,t))}, & \text{ha } st = 0 \text{ } Q\text{-ban,} \end{cases} \quad (5.6)$$

$$x(\lambda_s(y)) = ((x)\varrho_s)y, \quad \text{azaz, } \lambda_s \text{ és } \varrho_s \text{ láncszemet alkotnak.} \quad (5.7)$$

Legyen $S = A \cup Q^*$, és definiáljunk egy \circ műveletet S -en a következőképpen: tetszőleges $s, t \in Q^*$ és tetszőleges $x, y \in A$ elemek esetén

$$s \circ t = \begin{cases} st, & \text{ha } st \neq 0 \text{ } Q\text{-ban} \\ \phi((s, t)), & \text{ha } st = 0 \text{ } Q\text{-ban;} \end{cases} \quad (5.8)$$

$$s \circ x = \lambda_s(x); \quad (5.9)$$

$$x \circ s = (x)\varrho_s; \quad (5.10)$$

$$x \circ y = xy. \quad (5.11)$$

Akkor $(S; \circ)$ az A félcsoportnak a Q félcsoporttal való ideálbővítése. Fordítva, az A -nak Q -val való tetszőleges ideálbővítése az előzőekben részletezett módon konstruálható.

Feladatok

- 5.1.** (Megoldás: 17.14.) Mutassuk meg, hogy ha egy S félcsoporth tartalmaz bal oldali egységelemet, akkor S bal redukzív!
- 5.2.** (Megoldás: 17.15.) Mutassuk meg, hogy egy S félcsoporth esetén az 5.8. Tételben szereplő $a \mapsto \varrho_a$ ($a \in S$) homomorfizmus akkor és csak akkor injektív, ha S bal redukzív!
- 5.3.** (Megoldás: 17.16.) Mutassuk meg, hogy tetszőleges balzéró (jobbzeró) félcsoporth translációs burka izomorf az összes önmagába való leképezéseinek félcsoporthjával!
- 5.4.** (Megoldás: 17.17.) Mutassuk meg, hogy tetszőleges G csoport esetén a G translációs burka izomorf G -vel!
- 5.5.** (Megoldás: 17.18.) Mutassuk meg, hogy egy L balzéró és egy R jobbzeró félcsoporth $L \times R$ direkt szorzata gyengén redukzív!

6. fejezet

Reguláris félcsoportok, inverz félcsoportok

6.1. Reguláris elem

6.1. Definíció Egy S félcsoport valamely a elemét reguláris elemnek nevezzük, ha van az S félcsoportnak olyan x eleme, hogy $axa = a$ teljesül.

Egy félcsoport minden idempotens eleme reguláris. Tehát, ha egy félcsoport tartalmaz idempotens elemet, akkor tartalmaz reguláris elemet is. A következő lemmából adódik ennek az állításnak a megfordítása is.

6.2. Lemma Ha $axa = a$ teljesül egy S félcsoport valamely a és x elemeire, akkor az S félcsoport ax és xa elemei idempotens elemek.

Bizonyítás. Ha $axa = a$ teljesül egy S félcsoport valamely a és x elemére, akkor

$$(ax)^2 = (ax)(ax) = (axa)x = ax$$

és

$$(xa)^2 = (xa)(xa) = x(axa) = xa.$$

□

6.3. Tétel

- (1) Ha a egy S félcsoport reguláris eleme, akkor $aS^1 = aS$ és $S^1a = Sa$.
- (2) Ha a és b egy S félcsoport reguláris elemei, akkor a $\mathcal{L} b$ [a $\mathcal{R} b$] akkor és csak akkor teljesül, ha $Sa = Sb$ [a $S = bS$].

Bizonyítás. Legyen a egy S félcsoport reguláris eleme. Akkor megadható olyan S -beli x elem, hogy

$$axa = a.$$

Így

$$aS^1 = \{a\} \cup aS = \{axa\} \cup aS \subseteq aS \subseteq aS^1,$$

s ezért $aS^1 = aS$. Hasonlóan igazolható, hogy $S^1a = Sa$. A (2) feltétel az \mathcal{L} -reláció, illetve az \mathcal{R} -reláció definíciója és a tétel (1) állítása miatt nyilvánvaló. \square

6.4. Tétel *Egy S félcsoport valamely a eleme akkor és csak akkor reguláris, ha az S félcsoport a eleme által generált fő bal oldali és fő jobb oldali ideálja idempotens elemmel generálható, azaz megadhatók olyan e és f idempotens elemek, hogy $S^1a = Se$ és $aS^1 = fS$.*

Bizonyítás. Ha a reguláris elem, akkor a 6.3. Tétel miatt

$$aS^1 = aS \quad \text{és} \quad S^1a = Sa.$$

A reguláris elem definíciója alapján megadható olyan $x \in S$ elem, amelyre

$$axa = a$$

teljesül. Legyen

$$e = xa.$$

A 6.2. Lemma szerint e idempotens eleme S -nek. Mivel

$$Sa = Saxa = Sae \subseteq Se = Sxa \subseteq Sa,$$

ezért

$$Sa = Se.$$

Hasonlóan igazolható, hogy az $f = ax$ idempotens elemmel

$$aS = fS$$

teljesül.

Fordítva, tegyük fel, hogy

$$S^1a = Se$$

teljesül az S félcsoport valamely a eleme és valamely e idempotens eleme esetén. Akkor vannak S^1 -nek olyan x és y elemei, hogy

$$a = xe \quad \text{és} \quad e = ya$$

teljesül. Ekkor

$$ae = xe^2 = xe = a$$

és így

$$a = ae = aya,$$

azaz a reguláris elem (ha $y = 1$, akkor a idempotens elem és ezért $a = aaa$). \square

6.2. Neumann-féle inverz

6.5. Definíció Egy S félcsoport a és b elemeiről azt mondjuk, hogy egymás (Neumann-féle) inverzei, ha együtt teljesítik az $aba = a$ és $bab = b$ feltételek mindegyikét. Ilyenkor azt is szoktuk mondani, hogy a b elem az a elem (Neumann-féle) inverze (és hasonlóan, az a elem b elem (Neumann-féle) inverze).

Ha a és b egymás inverzei, akkor a 6.2. Tétel szerint ab és ba idempotens elemek. Adott $a \in S$ elem esetén jelölje $V(a)$ az a összes (S -beli) inverzének halmazát, azaz

$$V(a) = \{b \in S : aba = a, bab = b\}.$$

6.6. Lemma Ha a egy S félcsoport reguláris eleme, akkor a -nak van S -ben legalább egy inverze.

Bizonyítás. Ha a reguláris eleme egy S félcsoportnak, akkor van S -nek olyan x eleme, hogy

$$axa = a.$$

Legyen

$$b = xax.$$

Akkor

$$aba = a(xax)a = (axa)(xa) = axa = a$$

és

$$bab = (xax)a(xax) = x(axa)(xax) = xa(xax) = x(axa)x = xax = b. \quad \square$$

6.7. Lemma Ha e, f, ef, fe egy S félcsoport idempotens elemei, akkor ef és fe egymás inverzei.

Bizonyítás. Legyenek e és f egy S félcsoport olyan idempotens elemei, amelyek esetén ef és fe is idempotens elemek. Akkor

$$(ef)(fe)(ef) = ef^2e^2f = efef = (ef)^2 = ef.$$

Hasonlóan igazolható, hogy

$$(fe)(ef)(fe) = fe. \quad \square$$

6.8. Tétel Legyen D egy S félcsoport tetszőleges \mathcal{D} -osztálya.

- (1) Ha D tartalmaz egy reguláris elemet, akkor D minden eleme reguláris (ekkor D -t reguláris \mathcal{D} -osztálynak nevezzük).

- (2) Ha D reguláris, akkor minden olyan \mathcal{L} -osztály és \mathcal{R} -osztály, amely benne van D -ben, tartalmaz egy idempotens elemet.

Bizonyítás. A 6.4. Tétel szerint egy S félcsoporth valamely a eleme akkor és csak akkor reguláris, ha az $R_a [L_a]$ osztály tartalmaz legalább egy idempotens elemet. Ebből viszont már következik, hogy ha egy \mathcal{R} -osztály [\mathcal{L} -osztály] tartalmaz egy idempotens elemet, akkor az osztály minden eleme reguláris. Tehát, ha egy D osztály tartalmaz egy a reguláris elemet, akkor R_a minden eleme reguláris. Mivel a D által tartalmazott \mathcal{L} -osztályok mindegyikének R_a -val vett metszete nem üres, ezért a D -ben lévő \mathcal{L} -osztályok mindegyike tartalmaz egy reguláris elemet, s így minden ilyen \mathcal{L} -osztálynak minden eleme (az előzőek szerint) reguláris. Mivel D előáll \mathcal{L} -osztályok uniójaként, ezért D minden eleme reguláris.

A (2) állítás a 6.4. Tétel következménye. \square

6.9. Megjegyzés A 6.8. Tétel (1) állítása szerint, ha egy \mathcal{D} -osztály nem reguláris, akkor nem tartalmazhat idempotens elemet (mivel egy idempotens elem szükségképpen reguláris). Így, ha a 4.47. Lemmában vizsgált $(T; *)$ félcsoporth olyan \mathcal{D} -osztály által van definiálva, amely nem reguláris, akkor (a 4.46. Tétel szerint) a $(T; *)$ félcsoporth bármely két elemének szorzata egyenlő a nullelemmel, azaz $(T; *)$ egy zéró félcsoporth. Ezért a $(T; *)$ félcsoporth igazából akkor érdekes számunkra, ha reguláris \mathcal{D} -osztály segítségével van definiálva. Ezt láthatjuk majd a 9. fejezetben szereplő 9.23., 9.24. és 9.25. tételekben.

6.10. Tétel Ha a és a' egy S félcsoporth olyan elemei, amelyek egymás inverzei, akkor az $e = aa'$ és $f = a'a$ idempotens elemekre $e \in R_a \cap L_{a'}$ és $f \in R_{a'} \cap L_a$ teljesülnek. Továbbá $a', e, f \in D_a$.

Bizonyítás. Az világos, hogy

$$ea = af = a$$

és

$$a'e = fa' = a'.$$

Ebből már következik

$$e \in R_a \cap L_{a'} \subseteq D_a$$

és

$$f \in R_{a'} \cap L_a \subseteq D_a,$$

figyelembe véve az e és f elemek definícióját is. Ekkor

$$e \in D_a \cap L_{a'}$$

miatt

$$L_{a'} \cap D_a \neq \emptyset,$$

amiből

$$a' \in L_{a'} \subseteq D_a$$

következik. Tehát

$$a', e, f \in D_a.$$

□

6.11. Tétel *Tetszőleges S félcsoport tetszőleges a reguláris eleme esetén az alábbiak teljesülnek.*

- (1) *Az a elem minden inverze D_a -ban van.*
- (2) *Egy b elemhez tartozó \mathcal{H} -osztály akkor és csak akkor tartalmazza az a elem valamely inverzét, ha az $R_a \cap L_b$ és $R_b \cap L_a$ \mathcal{H} -osztályok mindegyike tartalmaz egy idempotens elemet.*
- (3) *Nincs S -nek olyan \mathcal{H} -osztálya, amely az a -nak egynél több inverzét tartalmazná.*

Bizonyítás. Az (1) állítás a 6.10. Tétel következménye. Ahhoz, hogy megmutassuk (2) teljesülését, tegyük fel először, hogy H_b tartalmazza az a elem egy a' inverzét. A 6.10. Lemma szerint az $R_a \cap L_b (= R_a \cap L_{a'})$ \mathcal{H} -osztály tartalmazza az aa' idempotens elemet, az $R_b \cap L_a (= R_{a'} \cap L_a)$ \mathcal{H} -osztályok pedig az $a'a$ idempotens elemet. Fordítva, legyen e egy idempotens eleme $R_a \cap L_b$ -nek, f pedig egy idempotens eleme $R_b \cap L_a$ -nak. Mivel $a \mathcal{R} e$ és $a \mathcal{L} f$, ezért a 4.42. Tétel miatt

$$ea = a = af.$$

Továbbá, a 6.3. Tétel miatt

$$e = ax, \quad f = ya$$

valamely $x, y \in S$ elemekre. Legyen

$$a' = fxe.$$

Akkor

$$\begin{aligned} fa' &= a'e = a', \\ aa' &= afxe = axe = e^2 = e, \\ a'a &= fa'a = yaa'a = yea = ya = f. \end{aligned}$$

Mivel

$$aa'a = ea = a \quad \text{és} \quad a'aa' = a'e = a',$$

ezért a' és a egymás inverzei. Az

$$fa' = a' \quad \text{és} \quad a'a = f$$

egyenlőségekből

$$a' \mathcal{R} f$$

következik. Az

$$a'e = a' \quad \text{és} \quad aa' = e$$

egyenlőségekből pedig

$$a' \mathcal{L} e$$

adódik. Így

$$a' \in R_f \cap L_e = R_b \cap L_b = H_b.$$

A (3)-as feltétel igazolásához tekintsünk olyan \mathcal{H} -ekvivalens b és c elemeket az S félcsoportból, melyek egy a elem inverzei. A 6.10. Lemma szerint az ab idempotens elem $R_a \cap L_b$ -ban, az ac idempotens elem pedig $R_a \cap L_c$ -ben van. Azonban $L_b = L_c$, és így

$$ab = ac$$

a 4.43. Tétel szerint. Az $R_a = R_c$ feltételből hasonló okok miatt következik, hogy

$$ba = ca.$$

Így

$$b = bab = cab = cac = c.$$

□

6.3. Reguláris félcsoportok

6.12. Definíció Egy S félcsoportot reguláris félcsoportnak nevezünk, ha S minden eleme reguláris.

6.13. Tétel Tetszőleges S félcsoporton az alábbi feltételek egymással ekvivalensek.

- (1) S reguláris félcsoport.
- (2) S minden \mathcal{L} -osztálya tartalmaz legalább egy idempotens elemet.
- (3) S minden \mathcal{R} -osztálya tartalmaz legalább egy idempotens elemet.

Bizonyítás. Legyen S reguláris félcsoport. Jelölje L az S valamely \mathcal{L} -osztályát. Legyen $a \in L$ tetszőleges elem. Mivel a 6.4. Tétel szerint van S -nek olyan e idempotens eleme, amelyre

$$Sa = Se$$

teljesül, ezért

$$e \in L.$$

Tehát (1)-ből következik (2). Hasonlóan igazolható, hogy (1)-ből következik (3).

Tegyük fel, hogy (2) teljesül egy S félcsoportra. Ez azt jelenti, hogy tetszőlege $a \in S$ elem \mathcal{L} -relációban van S valamely e idempotens elemével, azaz

$$S^1 a = Se.$$

Más szavakkal: az a elem által generált fő bal oldali ideál az e idempotens elemmel generálható. A 6.4. Tétel miatt ebből már következik, hogy a az S félcsoport reguláris eleme. Tehát (2)-ből következik (1). Hasonlóan igazolható, hogy (3)-ból következik (1). Ezzel pedig bizonyítást nyert, hogy a tételben szereplő három feltétel egymással ekvivalens. \square

6.14. Tétel *Egy S félcsoport akkor és csak akkor reguláris, ha $R \cap L = RL$ teljesül az S tetszőleges jobb oldali R és tetszőleges bal oldali L ideáljaira.*

Bizonyítás. Legyenek R és L egy S félcsoport tetszőleges jobb oldali, illetve bal oldali ideáljai. Akkor

$$RL \subseteq R \cap L.$$

Tegyük fel, hogy S reguláris. Akkor tetszőleges $a \in R \cap L$ elem esetén

$$a = axa = a(xa) \in RL$$

teljesül az S félcsoport alkalmas x elemével. Így

$$R \cap L \subseteq RL.$$

Ennek, és a fenti tartalmazásnak eredményeként

$$R \cap L = RL.$$

Fordítva, tegyük fel, hogy S olyan félcsoport, amelyben

$$R \cap L = RL$$

teljesül tetszőleges jobb oldali R , illetve tetszőleges bal oldali L ideálokra. Legyen

$$a \in S$$

tetszőleges elem. Akkor

$$R(a) \cap L(a) = R(a)L(a),$$

ahol $R(a)$, illetve $L(a)$ jelölik az S félcsoport a által generált jobb oldali, illetve bal oldali ideálját. Mivel

$$a \in R(a) \cap L(a),$$

ezért

$$a \in R(a)L(a) = aS^1S^1a \subseteq aS^1a,$$

azaz van olyan $x \in S^1$ elem, hogy

$$a = axa.$$

Tehát a az S félcsoport reguláris eleme (abban az esetben, amikor x az S^1 egységeleme, akkor a idempotens elem, s így szükségképpen reguláris). Mivel a az S félcsoport tetszőleges eleme volt, ezért S reguláris félcsoport. \square

6.15. Definíció Egy S félcsoport valamely a elemét teljesen regulárisnak nevezzük, ha megadható olyan S -beli x elem, amelyre $axa = a$ és $ax = xa$ teljesül. Egy S félcsoportot teljesen reguláris félcsoportnak nevezünk, ha S minden eleme teljesen reguláris.

6.16. Tétel Egy S félcsoport akkor és csak akkor teljesen reguláris, ha S előáll részcsoporthainak uniójaként.

Bizonyítás. Legyen S olyan félcsoport, amely előáll G_i ($i \in I$) részcsoporthainak uniójaként. Legyen $a \in S$ tetszőleges elem. Akkor $a \in G_j$ valamely $j \in I$ index esetén. Mivel G_i csoport, ezért az a elem G_i -beli x inverzére

$$axa = a, \quad ax = xa$$

teljesül, azaz a az S félcsoport teljesen reguláris eleme. Mivel a az S félcsoport tetszőleges eleme, ezért S teljesen reguláris félcsoport.

Fordítva, tegyük fel, hogy S egy teljesen reguláris félcsoport. Legyen $a \in S$ tetszőleges elem. Mivel a teljesen reguláris, ezért van S -nek olyan x eleme, hogy

$$axa = a, \quad \text{és} \quad ax = xa.$$

A 6.2. Lemma szerint

$$e = ax = xa$$

az S félcsoport idempotens eleme. Mivel $ae = ea = a$ és $ax = xa = e$, ezért az 1.41. Tétel szerint

$$G_e = \{s \in S : s = se = es, \quad \text{és} \quad (\exists s' \in S) \quad ss' = s's = e\}$$

S -nek olyan részcsoporthja, amely tartalmazza S mindazon részcsoporthait, amelyekben e egységelem. Az világos, hogy

$$a \in G_e.$$

Ebből már következik, hogy S előáll részcsoporthainak uniójaként. \square

6.17. Definíció Egy S félcsoport valamely a elemét bal [jobb] egyszerűsíthetőnek nevezzük, ha minden $x, y \in S$ elem esetén az $ax = ay$ [$xa = ya$] feltételből $x = y$ következik. Ha egy félcsoport minden eleme bal [jobb] egyszerűsíthető, akkor a félcsoportot bal [jobb] egyszerűsítéssel félcsoportnak nevezzük. Ha egy félcsoport bal egyszerűsítéssel is és jobb egyszerűsítéssel is, akkor egyszerűsítéssel félcsoportnak nevezzük.

6.18. Tétel Minden egyszerűsítéssel, reguláris félcsoport szükségképpen csoport.

Bizonyítás. Legyen S egyszerűsítéssel, reguláris félcsoport. Akkor tetszőleges $a \in S$ elemhez van olyan $x \in S$ elem, hogy $axa = a$ teljesül. Így tetszőleges $b \in S$ elem esetén $axab = ab$, amiből a bal egyszerűsíthetőség miatt $xab = b$ adódik. Ekkor viszont $bxab = b^2$, amiből a jobb egyszerűsíthetőség miatt $bx a = b$ adódik. Tehát xa az S félcsoport egységeleme. Tehát minden $a \in S$ elem esetén van olyan $x \in S$ elem, hogy xa az S egységeleme. Az x elem tehát az a elem bal oldali inverze. Ebből már következik, hogy S csoport. \square

6.4. Inverz félcsoportok

6.19. Definíció Egy S félcsoportot inverz félcsoportnak nevezünk, ha minden elemének van egy és csak egy inverze.

6.20. Tétel Tetszőleges S félcsoport esetén az alábbi feltételek egymással ekvivalensek:

- (1) S reguláris félcsoport, amelynek idempotens elemei egymással felcserélhetőek.
- (2) S minden fő jobb ideálja és minden fő bal ideálja egyetlen idempotens elemmel generálható.
- (3) S inverz félcsoport.

Bizonyítás. (1)-ből következik (2): Legyen S olyan reguláris félcsoport, melynek idempotens elemei egymással felcserélhetőek. A 6.4. Tétel miatt S minden fő bal oldali és fő jobb oldali ideálja idempotens elemmel generálható. Tegyük fel, hogy $Se = Sf$ teljesül valamely S -beli e és f idempotens elemekre. Akkor megadhatók olyan $x, y \in S$ elemek, amelyekre

$$e = xf, \quad f = ye$$

teljesül. Az első egyenlőségből

$$ef = (xf)f = xf^2 = xf = e,$$

a második egyenlőségből pedig

$$fe = (ye)e = ye^2 = ye = f$$

adódik. Ezek az egyenlőségek az e és f elemek egymással való felcserélhetősége miatt az

$$e = ef = fe = f$$

teljesülését eredményezik. Így S minden fő bal oldali ideálja egyetlen idempotenssel generálható. Hasonló módon bizonyítható, hogy S minden fő jobb oldali ideálja egyetlen idempotenssel generálható. Így (1)-ből következik (2).

(2)-ből következik (3): Legyen S olyan félcsoport, amely teljesíti a (2) feltételt. A 6.4. Tétel miatt S reguláris félcsoport. Legyen $a \in S$ tetszőleges elem. A 6.6. Lemma szerint A -nak van legalább egy b inverze. Tegyük fel, hogy valamely S -beli c elem is inverze a -nak. Akkor

$$aba = a, \quad bab = b,$$

$$aca = a, \quad cac = c.$$

A 6.4. Tétel bizonyítását is figyelembe véve, ezekből könnyen adódik, hogy

$$Sba = Sa = Sca$$

és

$$abS = aS = acS.$$

A (2) feltétel miatt

$$ba = ca$$

és

$$ab = ac,$$

mivel a 6.2. Lemma szerint ba, ca, ab, ac idempotens elemek. A ba és ca szorzatok ugyanazt a fő bal oldali ideált (Sa -t), az ab és ac szorzatok pedig ugyanazt a fő jobb oldali ideált (aS -et) generálják. Ebből pedig

$$b = bab = bac = cac = c$$

következik, azaz az a elemnek pontosan egy inverze van. Következésképpen S inverz félcsoport.

(3)-ből következik (1): Legyen S egy inverz félcsoport. Mivel egy inverz félcsoport reguláris, ezért csak azt kell megmutatni, hogy S bármely két idempotens eleme felcserélhető. Legyenek e és f az S félcsoport tetszőleges idempotens elemei. Először megmutatjuk, hogy ha e és f idempotens elemei S -nek, akkor ef is idempotens elem. Legyen a egy inverze ef -nek. Akkor

$$(ef)a(ef) = ef$$

és

$$a(ef)a = a.$$

Legyen

$$b = ae.$$

Akkor

$$(ef)b(ef) = (ef)a(eef) = (ef)a(ef) = ef$$

és

$$b(ef)b = (ae)(ef)(ae) = (ae)a(ef) = ae = b.$$

Ezért b inverze ef -nek. Ekkor viszont

$$ae = a,$$

mivel ef -nek csak egy inverze lehet. Hasonlóan igazolható, hogy

$$fa = a.$$

Ezért

$$a^2 = (ae)(fa) = a(ef)a = a,$$

azaz a idempotens elem. Mivel idempotens elem önmagának inverze, ezért

$$a = ef,$$

azaz ef idempotens elem. Hasonlóan igazolható, hogy fe is idempotens elem. Ekkor viszont a 6.7. Lemma miatt fe az ef inverze. Mivel ef idempotens, ezért ef önmagának is inverze, amiből $ef = fe$ következik. Tehát S olyan reguláris félcsoporthatár, melynek idempotensei egymással felcserélhetőek. \square

6.21. Következmény Egy S félcsoporthatár akkor és csak akkor inverz félcsoporthatár, ha S minden \mathcal{L} -osztálya és minden \mathcal{R} -osztálya tartalmaz egy és csak egy idempotens elemet.

Bizonyítás. Legyen S inverz félcsoporthatár. Akkor S teljesíti a 6.20. Tétel (3) feltételét. Ebből viszont következik a (2) feltétel, ami annyit jelent, hogy S minden \mathcal{L} -osztálya és minden \mathcal{R} -osztálya pontosan egy idempotens elemet tartalmaz.

Fordítva, ha S olyan félcsoporthatár, amelyben minden \mathcal{L} -osztály és minden \mathcal{R} -osztály pontosan egy idempotens elemet tartalmaz, akkor S minden fő bal oldali ideálja és minden fő jobb oldali ideálja pontosan egy idempotenssel generálható, azaz S teljesíti a 6.20. Tétel (2) feltételét. Ebből a feltételből következik (3) feltétel, s ezért S inverz félcsoporthatár. \square

6.22. Lemma Ha e és f egy inverz S félcsoporthatár idempotens elemei, akkor $Se \cap Sf = Sef (= Sfe)$.

Bizonyítás. Ha $a \in Se \cap Sf$, akkor

$$ae = af = a,$$

és így

$$aef = af = a,$$

ami miatt

$$a \in Sef.$$

Tehát

$$Se \cap Sf \subseteq Sef.$$

Fordítva, ha $a \in Sef = Sfe$, akkor

$$aef = afe = a,$$

ami miatt

$$ae = af = a,$$

azaz

$$a \in Se \cap Sf.$$

Tehát

$$Sef \subseteq Se \cap Sf.$$

Következésképpen,

$$Se \cap Sf = Sef. \quad \square$$

6.23. Definíció Egy X halmaz $(\cdot)\alpha$ kölcsönösen egyértelmű parciális transzformációján X egy Y részhalmazának egy $Y' = (X)\alpha$ részhalmazra való bijekcióját értjük. Az α inverzét a szokásos módon értelmezzük, és α^{-1} -gyel jelöljük, azaz $(y')\alpha^{-1} = y$ akkor és csak akkor, ha $(y)\alpha = y'$ ($y \in Y$, $y' \in Y'$).

Jelölje \mathcal{I}_X az X összes kölcsönösen egyértelmű parciális transzformációinak halmazát, beleértve az X üres részhalmazának önmagára való leképezését, amelyet 0-val jelölünk és üres transzformációnak nevezünk. A \mathcal{I}_X halmazon definiálunk egy műveletet a következőképpen. Legyenek $\alpha, \beta \in \mathcal{I}_X$ tetszőleges transzformációk. Legyen Y az α , Z pedig a β értelmezési tartománya. Ha $(Y)\alpha \cap Z = \emptyset$, akkor legyen $\alpha\beta = 0$. Ha $(Y)\alpha \cap Z \neq \emptyset$, akkor legyen $\alpha\beta \in \mathcal{I}_X$ -nek az az eleme, amelynek értelmezési tartománya $((Y)\alpha \cap Z)\alpha^{-1}$ és minden $v \in ((Y)\alpha \cap Z)\alpha^{-1}$ esetén legyen $(v)\alpha\beta = ((v)\alpha)\beta$.

6.24. Lemma Tetszőleges X halmaz esetén \mathcal{I}_X inverz félcsoportot alkot a fent definiált műveletre nézve.

Bizonyítás. Az asszociativitás teljesülése nyilvánvaló, ezért \mathcal{I}_X félcsoport. Mivel minden $\alpha \in \mathcal{I}_X$ esetén $\alpha\alpha^{-1}\alpha = \alpha$ (és $\alpha^{-1}\alpha\alpha^{-1} = \alpha^{-1}$), ezért \mathcal{I}_X reguláris félcsoport. Legyen α tetszőleges idempotens eleme \mathcal{I}_X -nek. Legyen Y az α értelmezési tartománya. Mivel α^2 értelmezési tartománya $(Y \cap Y\alpha)\alpha^{-1}$, ezért $(Y \cap Y\alpha)\alpha^{-1} = Y$, amiből $Y \cap Y\alpha = Y\alpha$, s ebből pedig $Y\alpha \subseteq Y$ következik. Legyen $a \in Y\alpha$ tetszőleges elem. Akkor $a = b\alpha$ ($b \in Y$), s ezért $a\alpha = b\alpha\alpha = b\alpha = a$, azaz α identikusan hat $Y\alpha$ -n. Ebből az is következik, hogy $Y = Y\alpha$, mivel α bijektív. Tehát \mathcal{I}_X valamely eleme akkor és csak akkor idempotens elem, ha identikusan hat X valamely részhalmozán. Ezért az idempotens elemek egymással felcserélhetőek. Ebből viszont a 6.20. Tétel miatt \mathcal{I}_X inverz félcsoport. \square

6.25. Definíció *A \mathcal{I}_X félcsoportot az X halmaz feletti szimmetrikus inverz félcsoportnak nevezzük.*

A csoportelméletben jól ismert az a tétel, hogy minden csoport izomorf egy permutációcsoporttal. Ennek a tételnek az inverz félcsoportokra való általánosítása a következő tétel.

6.26. Tétel *Minden S inverz félcsoport izomorf az S feletti szimmetrikus inverz félcsoport egy részfélcsoportjával.*

Bizonyítás. Legyen S inverz félcsoport. Minden $a \in S$ elemhez rendeljük hozzá $Sa^{-1} = Saa^{-1}$ -nek $Sa = Sa^{-1}a$ -ra való $\varrho_a : x \mapsto xa$ leképezését. Nyilvánvaló, hogy $\varrho_{a^{-1}}$ Sa -t képezi le Sa^{-1} -re. Legyenek $x \in Sa^{-1}$ és $y \in Sa$ tetszőleges elemek. Akkor $xaa^{-1} = x$ és $ya^{-1}a = y$. Ezért

$$(x)\varrho_a\varrho_{a^{-1}} = xaa^{-1} = x$$

és

$$(y)\varrho_{a^{-1}}\varrho_a = ya^{-1}a = y,$$

amiből következik, hogy ϱ_a és $\varrho_{a^{-1}}$ egymás inverzei \mathcal{I}_S -ben, azaz $\varrho_a^{-1} = \varrho_{a^{-1}}$. Megmutatjuk, hogy az $a \mapsto \varrho_a$ megfeleltetés izomorfizmus. Először belátjuk, hogy a megfeleltetés injektív. Tegyük fel, hogy $\varrho_a = \varrho_b$, ($a, b \in S$). Akkor $Saa^{-1} = Sbb^{-1}$, s ezért $aa^{-1} = bb^{-1}$, mivel idempotensek. Ha $x \in Saa^{-1}$, akkor $xa = (x)\varrho_a = (x)\varrho_b = xb$. Mivel $a^{-1} \in Saa^{-1}$, ezért $a^{-1}a = a^{-1}b$. Ekkor viszont

$$a = aa^{-1}a = aa^{-1}b = bb^{-1}b = b.$$

Végül megmutatjuk, hogy a megfeleltetés művelettartó, azaz $\varrho_a\varrho_b = \varrho_{ab}$. A ϱ_{ab} értelmezési tartománya $S(ab)(ab)^{-1}$. A $\varrho_a\varrho_b$ értelmezési tartománya $(Saa^{-1} \cap Sbb^{-1})\varrho_{a^{-1}}$. Alkalmazva a 6.22. Lemmát,

$$Saa^{-1} \cap Sbb^{-1} = Saa^{-1}bb^{-1} = Sabb^{-1}.$$

Így

$$(Saa^{-1} \cap Sbb^{-1})\varrho_{a^{-1}} = (Sabb^{-1})a^{-1} = Sabb^{-1}a^{-1} = S(ab)(ab)^{-1}.$$

Tehát ϱ_{ab} és $\varrho_a\varrho_b$ értelmezési tartománya megegyezik. Mivel minden $s \in S$ elemre

$$(s)\varrho_{ab} = s(ab) = (sa)b = (s)(\varrho_a\varrho_b),$$

ezért

$$\varrho_{ab} = \varrho_a\varrho_b.$$

□

Feladatok

6.1. (Megoldás: 17.19.) Mutassuk meg, hogy inverz félcsoporth tetszőleges a és b elemei esetén $(ab)^{-1} = b^{-1}a^{-1}$, ahol $(\cdot)^{-1}$ jelöli egy S -beli elem (Neumann-féle) inverzét.

6.2. (Megoldás: 17.20.) Mutassuk meg, hogy egy kommutatív reguláris félcsoporth részcsoporthok úniója.

6.3. (Megoldás: 17.21.) Mutassuk meg, hogy egyetlen idempotens elemet tartalmazó reguláris félcsoporth szükségképpen csoport.

7. fejezet

Jobb egyszerű és jobb 0-egyszerű félcsoporthok

7.1. Definíció Egy S félcsoporth S -től különböző jobb oldali [bal oldali] ideáljait valódi jobb oldali [bal oldali] ideáloknak nevezzük. Egy félcsoporthot jobb [bal] egyszerűnek nevezünk, ha nincs valódi jobb [bal] oldali ideálja.

7.2. Tétel Egy S félcsoporth akkor és csak akkor jobb [bal] egyszerű, ha $aS = S$ ($Sa = S$) teljesül minden $a \in S$ eleme esetén.

Bizonyítás. Legyen S jobb egyszerű félcsoporth. Tetszőleges $a \in S$ elem esetén, aS az S egy jobb oldali ideálja, s ezért

$$aS = S.$$

Fordítva, tegyük fel, hogy minden $a \in S$ elem esetén $aS = S$. Legyen R tetszőleges jobb oldali ideálja S -nek. Akkor tetszőleges $a \in R$ elem esetén

$$S = aS \subseteq RS \subseteq R,$$

azaz az $R \subseteq S$ tartalmazás miatt

$$R = S$$

következik. Tehát S jobb egyszerű. □

7.3. Tétel Egy félcsoporth akkor és csak akkor csoport, ha jobb egyszerű és bal egyszerű.

Bizonyítás. A 7.2. Tétel és az 1.25. Tétel felhasználásával a tétel állítása nyilvánvaló. □

7.4. Tétel Minden kommutatív egyszerű félcsoporth csoport.

Bizonyítás. Ha S kommutatív egyszerű félcsoporth, akkor bal egyszerű is és jobb egyszerű is, s ezért a 7.3. Tétel miatt S egy csoport. □

7.5. Megjegyzés Ha egy S félcsoporthnak van 0 nulleleme, akkor $\{0\}$ az S bal oldali és jobb oldali ideálja; az S -től és $\{0\}$ -tól különböző bal-, illetve jobb oldali ideálokat valódi bal-, illetve jobb oldali ideáloknak nevezzük. Ha S -ben nincs valódi bal-, illetve valódi jobb oldali ideál, akkor S -nek nincs valódi ideálja, s ezért a 4.5. Megjegyzés szerint $S^2 = S$ vagy $S^2 = \{0\}$. Ezen utóbbi esetben S -nek legfeljebb két eleme van.

7.6. Definíció Egy nullelemes S félcsoporthot jobb 0-egyszerűnek [bal 0-egyszerűnek] nevezünk, ha $S^2 \neq \{0\}$ és S -nek nincs valódi jobb [bal] oldali ideája.

7.7. Tétel Legyen S egy nullelemes félcsoporth. S jobb 0-egyszerű [bal 0-egyszerű] akkor és csak akkor, ha $S - \{0\}$ jobb egyszerű [bal egyszerű] félcsoporth.

Bizonyítás. Legyen S tetszőleges nullelemes félcsoporth. Tegyük fel, hogy S jobb 0-egyszerű. Tegyük fel, hogy a és b az S félcsoporth olyan nem nulla elemei, amelyekre $ab = 0$ teljesül. Akkor

$$Z_a = \{x \in S : ax = 0\}$$

az S félcsoporth b -t tartalmazó jobb oldali ideálja, amely egyenlő S -sel az S félcsoporth jobb 0-egyszerűsége miatt. Ekkor viszont $aS = \{0\}$, amiből következik, hogy

$$Z = \{x \in S : xS = \{0\}\}$$

az S félcsoporth a -t tartalmazó jobb oldali ideálja. Mivel S jobb 0-egyszerű, ezért

$$Z = S.$$

Ez viszont azt eredményezi, hogy

$$S^2 = \{0\},$$

ami ellentmondás. Tehát S -ben a nemnulla elemek egy részfélcsoporthot alkotnak. Legyen B tetszőleges jobb oldali ideálja $S - \{0\}$ -nak. Akkor

$$\{0\} \neq B \cup \{0\}$$

jobb oldali ideálja S -nek, és így

$$B \cup \{0\} = S.$$

Ebből

$$B = S - \{0\}$$

adódik. Tehát $S - \{0\}$ jobb egyszerű félcsoporth.

Fordítva, legyen $S - \{0\}$ jobb egyszerű félcsoporth. Akkor

$$(S - \{0\})^2 = S - \{0\}.$$

Így

$$S^2 \neq \{0\}.$$

Legyen B tetszőleges nemnulla jobb oldali ideálja S -nek. Az világos, hogy $0 \in B$. Mivel $B - \{0\}$ jobb oldali ideálja az $S - \{0\}$ félcsoporthoz, ezért

$$B - \{0\} = S - \{0\}$$

az $S - \{0\}$ félcsoporthoz jobb egyszerűsége miatt. Így

$$B = S.$$

Tehát S jobb 0-egyszerű. Ezzel a tételt bebizonyítottuk a jobb oldali esetre. A bal oldali eset bizonyítása hasonlóan végezhető el. \square

7.8. Megjegyzés Az előző tétel alapján a jobb 0-egyszerű, illetve a bal 0-egyszerű félcsoporthoz megkaphatjuk, ha a jobb egyszerű, illetve a bal egyszerű félcsoporthoz null-elemet adjungálunk.

7.9. Tétel Egy 0-elemes S félcsoporthoz akkor és csak akkor bal [jobb] 0-egyszerű, ha tetszőleges $a \in S \setminus \{0\}$ elem esetén $Sa = S$ [$aS = S$].

Bizonyítás. Legyen S egy 0-elemes félcsoporthoz. A 7.7. Tétel szerint S bal 0-egyszerű akkor és csak akkor, ha $G = S \setminus \{0\}$ bal egyszerű félcsoporthoz. Ezért ha S bal 0-egyszerű, akkor tetszőleges $a \in G$ elem esetén

$$Sa = (\{0\} \cup G)a = \{0\} \cup Ga = \{0\} \cup G = S,$$

felhasználva a 7.2. Tételt is. Fordítva, ha minden $a \in S \setminus \{0\}$ elem esetén $Sa = S$, akkor tetszőleges $L \neq \{0\}$ bal oldali ideál tetszőleges $a \neq 0$ elemére

$$S = Sa \subseteq L$$

adódik, s ezért azt kapjuk, hogy

$$L = S,$$

amiből már következik, hogy S bal 0-egyszerű. \square

7.10. Tétel Tetszőleges 0-elemes S félcsoporthoz a következő feltételek egymással ekvivalensek.

- (1) S jobb 0-egyszerű és bal 0-egyszerű;
- (2) $G = S - \{0\}$ csoport, és így S a G csoportból egy nullelem adjungálásával áll elő.

Bizonyítás. Legyen S egy 0-elemes félcsoporth. Tegyük fel, hogy S jobb 0-egyszerű és bal 0-egyszerű. Akkor a 7.7. Tétel miatt $G = S \setminus \{0\}$ bal egyszerű és jobb egyszerű félcsoporth. A 7.3. Tétel miatt G egy csoport.

Fordítva, ha $S \setminus \{0\}$ csoport, akkor minden $a \in G$ elem esetén

$$aS = a(\{0\} \cup G) = \{0\} \cup G = S.$$

Hasonlóan adódik, hogy

$$Sa = S.$$

A 7.9. Tétel miatt S jobb- és bal 0-egyszerű. □

7.1. Idempotens elemet tartalmazó jobb egyszerű félcsoporthok

7.11. Lemma *Jobb egyszerű félcsoporth minden idempotens eleme bal oldali egységelem.*

Bizonyítás. Legyen e egy jobb egyszerű S félcsoporth tetszőleges idempotens eleme. Mivel S jobb egyszerű, ezért tetszőleges $a \in S$ elemhez megadható S -nek olyan x eleme, melyre

$$ex = a$$

teljesül. Így,

$$ea = e(ex) = e^2x = ex = a$$

minden $a \in S$ elemre. Tehát e bal oldali egységelem S -nek. □

A következőkben azokkal a jobb egyszerű félcsoporthokkal foglalkozunk, amelyek tartalmaznak legalább egy idempotens elemet (ilyenek például a véges jobb egyszerű félcsoporthok).

7.12. Lemma *Ha S olyan jobb egyszerű félcsoporth, amely tartalmaz legalább egy idempotens elemet, akkor S bal egyszerűsíthető.*

Bizonyítás. Jelöljön S egy olyan jobb egyszerű félcsoporthot, amely tartalmaz legalább egy idempotens elemet. Legyenek $a, b, c \in S$ tetszőleges elemek. Tegyük fel, hogy

$$ca = cb.$$

Legyen $f \in E_S$ tetszőleges idempotens elem. A 7.11. Tétel szerint f az S bal oldali egységelem. Mivel S jobb egyszerű, ezért van S -nek olyan x eleme, hogy

$$cx = f.$$

Legyen

$$e = xc.$$

Akkor

$$e^2 = xcxc = xfc = xc = e,$$

azaz

$$e \in E_S,$$

felhasználva azt is, hogy f az S bal oldali egységeleme. Így

$$a = ea = xca = xcb = eb = b.$$

Tehát S bal egyszerűsítéses. □

7.13. Lemma *Legyen S jobb egyszerű félcsoporth, $e \in S$ tetszőleges idempotens elem. Akkor Se csoport.*

Bizonyítás. Legyen e egy jobb egyszerű S félcsoporth tetszőleges idempotens eleme. A 7.11. Tétel miatt e bal oldali egységeleme S -nek. Így az Se részfélcsoporthnak e bal oldali egységeleme. Mivel minden $a \in Se$ elem $a = se$ alakban írható valamely $s \in S$ elemmel, ezért

$$ae = (se)e = se^2 = se = a,$$

azaz e az Se részfélcsoporthban jobb oldali egységelem is. Tehát Se egységelemes félcsoporth (benne e az egységelem). Legyen

$$a \in Se$$

tetszőleges elem. Mivel S jobb egyszerű, ezért van olyan $x \in S$ elem, hogy

$$ax = e.$$

Ebből

$$a(xe) = (ax)e = e^2 = e$$

adódik. Tehát $xe \in Se$ az $a \in Se$ elem jobb oldali inverze. Ebből már következik az 1.25. Tétel szerint, hogy Se az S félcsoporth részcsoporthja. □

7.14. Definíció *Egy S félcsoporthot jobbcsoporthnak nevezünk, ha jobb egyszerű és bal egyszerűsítéses.*

7.15. Lemma *Egy S félcsoporth akkor és csak akkor jobbcsoporth, ha az $ax = b$ egyenletnek van egy és egy megoldása S -ben minden $(a, b) \in S \times S$ elempár esetén.*

Bizonyítás. A Lemma állítása a jobbcsoport definíciójának, illetve a 7.2. Tételnek közvetlen következménye. \square

Könnyen ellenőrizhető, hogy minden csoport jobbcsoport, illetve minden jobbzéró félcsoporthoz is jobbcsoport.

7.16. Tétel *Tetszőleges S félcsoporthoz a következő feltételek egymással ekvivalensek:*

- (1) S jobbcsoport.
- (2) S jobb egyszerű, és tartalmaz legalább egy idempotens elemet.
- (3) S egy csoportnak és egy jobbzéró félcsoporthoz a direkt szorzata.

Bizonyítás. (1)-ből következik (2): Minden jobbcsoport jobb egyszerű definíció szerint, ezért csak azt kell megmutatni, hogy minden jobbcsoport tartalmaz legalább egy idempotens elemet. Legyen a egy S jobbcsoport tetszőleges eleme. S jobb egyszerűsége miatt van olyan $e \in S$ elem, hogy

$$ae = a,$$

és így

$$ae^2 = ae,$$

amiből

$$e^2 = e$$

következik S bal egyszerűsíthetősége miatt. Tehát e az S félcsoporthoz idempotens eleme.

(2)-ből következik (3): Legyen S olyan tetszőleges jobb egyszerű félcsoporthoz, amely tartalmaz legalább egy idempotens elemet. A 7.11. Lemma szerint S minden idempotens eleme az S bal oldali egységeleme. A 7.12. Lemma szerint S bal egyszerűsíthető. A 7.13. Lemma szerint minden S -beli e idempotens elem esetén Se az S részcsoporthoz.

A bizonyítás további részében legyen e az S egy rögzített idempotens eleme. Jelölje G az Se részcsoporthoz. Mivel E_S minden eleme az S bal oldali egységeleme, ezért E_S az S jobbzéró részfélcsoporthoz. Meg fogjuk mutatni, hogy a G csoportnak az E_S jobb zéró félcsoporthoz képezett $G \times E_S$ direkt szorzata izomorf S -sel. Pontosabban, megmutatjuk, hogy

$$\Phi : (g, f) \mapsto gf$$

a $G \times E_S$ direkt szorzatnak S -re való izomorfizmusa. Mivel

$$\begin{aligned} \Phi((g_1, f_1)(g_2, f_2)) &= \Phi((g_1g_2, f_1f_2)) = \Phi((g_1g_2, f_2)) = \\ &= (g_1g_2)f_2 = g_1f_1g_2f_2 = \Phi((g_1, f_1))\Phi((g_2, f_2)), \end{aligned}$$

ezért Φ a $G \times E_S$ direkt szorzatnak az S félcsoportha való homomorfizmusa. Tegyük fel, hogy

$$\Phi((g_1, f_1)) = \Phi((g_2, f_2)),$$

azaz

$$g_1 f_1 = g_2 f_2.$$

Akkor

$$g_1 = g_1 e = g_1 f_1 e = g_2 f_2 e = g_2 e = g_2$$

és így

$$g_2 f_2 = g_1 f_1 = g_2 f_1.$$

Mivel S bal egyszerűsítéssel, ezért

$$f_2 = f_1.$$

Tehát

$$(g_1, f_1) = (g_2, f_2),$$

és ezért Φ injektív. Már csak azt kell megmutatni, hogy Φ szürjektív. Legyen $a \in S$ tetszőleges elem. Akkor $ax = a$ valamely $x \in S$ -re, amiből $ax^2 = ax$, ebből pedig $x^2 = x$ következik (ez utóbbi az S bal egyszerűsíthetősége miatt). Így $x \in E_S$, és

$$\Phi((ae, x)) = aex = ax = a.$$

Tehát Φ szürjektív. Így $S \cong G \times E_S$.

(3)-ból következik (1): A bizonyítás triviális, mivel egy csoport és egy jobbzéró fél-csoport jobbcsoport, ezért azok direkt szorzata is jobbcsoport. \square

7.17. Tétel *Egy félcsoporth akkor és csak akkor jobbcsoport, ha olyan diszjunkt részcsoporthainak uniója, melyek egységelemei a félcsoporth jobbzéró részfélcsoporthját alkotják.*

Bizonyítás. Legyen S jobbcsoport. Akkor a 7.11. Tétel miatt S minden idempotens eleme bal oldali egységelem, s ezért S idempotenseinek E_S halmaza az S félcsoporth egy jobbzéró részfélcsoporthját alkotja. Legyenek $a \in S$ és $e \in E_S$ tetszőleges elemek. Mivel S jobb egyszerű, ezért megadható olyan $x \in S$ elem, amelyre $ax = e$ teljesül. Ebből $axa = ea = a$ adódik, mivel e bal oldali egységeleme S -nek. megszorozva ezen utóbbi egyenlőséget x -szel balról, azt kapjuk, hogy $(xa)^2 = xa$, azaz, $f = xa \in E_S$. Így $a = axa = af \in Sf$. Mivel Sf részcsoporthja S -nek (lásd a 7.13. Tételt), ezért azt kaptuk eredményként, hogy S minden eleme benne van S egy részcsoporthjában. Így S diszjunkt részcsoporthok uniója, s a részcsoporthok egységelemei (azaz az S idempotens elemei) az S egy jobbzéró részfélcsoporthot alkotják.

Fordítva, legyen S olyan félcsoporth, amely olyan diszjunkt részcsoporthainak uniója, amelyek egységelemei az S félcsoporth jobbzéró részfélcsoporthját alkotják. A felbontásban szereplő részcsoporthok az S maximális részcsoporthjai. A 7.16. Tétel szerint elegendő

azt megmutatni, hogy S jobb egyszerű. Legyenek $a, b \in S$ tetszőleges elemek. Akkor megadhatók olyan S -beli e és f idempotens elemek, hogy

$$a \in G_e \quad \text{és} \quad b \in G_f,$$

ahol G_e és G_f jelölik S azon maximális részcsoportjait, amelyek egységelemei az e , illetve az f idempotens elemek. Jelöljük

$$a^{-1} \in G_e, \quad b^{-1} \in G_f$$

az a , illetve b elemek inverzeit (G_e -ben, illetve G_f -ben). Akkor

$$aa^{-1}b = eb = e(fb) = (ef)b = fb = b,$$

és így

$$b \in aS.$$

Mivel b az S félcsoport tetszőleges eleme, ezért

$$Sa = S.$$

Tehát S minden a eleme esetén $Sa = S$, amiből a 7.2. Tétel miatt az következik, hogy S jobb egyszerű. \square

7.18. Tétel *Idempotens elemet tartalmazó jobb egyszerűsítéses jobb egyszerű félcsoport csoport.*

Bizonyítás. Ha egy jobb egyszerű S félcsoport tartalmaz egy idempotens elemet, akkor a 7.16. Tétel miatt S egy e egységelemű G csoportnak és egy R jobbzerő félcsoportnak a direkt szorzata. Mivel $(e, b)(e, a) = (e, c)(e, a)$ tetszőleges $a, b, c \in R$ elemekre, ezért, ha S jobb egyszerűsítéses is, akkor $b = c$ teljesül (minden $b, c \in R$ elemre). Így $|R| = 1$, s ezért S izomorf a G csoporttal. \square

7.2. Idempotens elemet nem tartalmazó jobb egyszerű félcsoportok

7.19. Tétel *Ha S egy olyan jobb egyszerű félcsoport, amely nem tartalmaz idempotens elemet, akkor S minden \mathcal{L} -osztálya egy elemet tartalmaz.*

Bizonyítás. Legyenek a és b egy idempotens elem nélküli jobb egyszerű félcsoport olyan elemei, amelyek esetén

$$S^1a = S^1b.$$

Akkor megadhatók olyan $x, y \in S^1$ elemek, hogy

$$a = xb \quad \text{és} \quad b = ya.$$

Tegyük fel, hogy $a \neq b$. Akkor az $x, y \neq 1$, és így $xy \in S$. Ekkor viszont

$$a = xya,$$

ahol $xy \in S$. Mivel S jobbegyszerű, ezért

$$aS = S,$$

s így van olyan $u \in S$ elem, hogy

$$xy = au.$$

Ebből és az előbbi egyenlőségből

$$a = aua,$$

amiből pedig

$$(au)^2 = xyau = au$$

következik. Tehát au az S félcsoport idempotens eleme, ellentmondva az S -re vonatkozó feltételnek. Így $a = b$. Következésképpen S minden \mathcal{L} -osztálya egy elemet tartalmaz. \square

7.20. Tétel *Ha S egy olyan jobb egyszerű félcsoport, amely nem tartalmaz idempotens elemet, akkor S minden a és b eleme esetén az $ax = b$ egyenletnek S -ben végtelen sok megoldása van.*

Bizonyítás. Legyen S olyan jobb egyszerű félcsoport, amely nem tartalmaz idempotens elemet. Legyenek $a, b \in S$ tetszőleges elemek. Jelölje $M_a \subseteq S$ az $ax = b$ egyenlet megoldásainak (nemüres) halmazát. Mivel $bS = S$ is teljesül, ezért megadható olyan $y \in S$ elem, hogy

$$by = a.$$

Tekintsük a

$$\varphi : x \mapsto xyx$$

leképezést ($x \in M_a$). Az $ax = b$ és $by = a$ egyenlőségekből

$$axy = a,$$

ezen utóbbi egyenlőségből pedig

$$a\varphi(x) = a(xyx) = ax = b$$

adódik. Tehát

$$\varphi(M_a) \subseteq M_a.$$

Az világos, hogy φ -nek nincs fixpontja M_a -ben. Ugyanis, ha valamely $x \in M_a$ elem esetén fennállna az $xyx = x$ egyenlőség, akkor xy az S félcsoport idempotens eleme lenne, ami nem lehet az S -re vonatkozó feltételek miatt. Tetszőleges $x \in M_a$ elemmel képezzük az M elemeiből álló

$$\varphi^{(0)}(x) = x, \varphi^{(1)}(x) = \varphi(x), \dots, \varphi^{(n+1)}(x) = \varphi(\varphi^{(n)}(x)), \dots \quad (7.1)$$

sorozatot. Az világos, hogy

$$\varphi^{(m)}(x) \in xSx$$

minden m pozitív egész számra. Tegyük fel, hogy

$$\varphi^{(n)}(x) = \varphi^{(m)}(x)$$

valamely $n > m$ nemnegatív egész számra. Akkor

$$\varphi^{(m)}(x) = \varphi^{(n)}(x) = \varphi^{(n-m)}(\varphi^{(m)}(x)) \in \varphi^{(m)}(x)S\varphi^{(m)}(x),$$

amiből azt kapjuk, hogy $(\varphi^{(m)}(x))s$ az S félcsoport idempotens eleme valamely $s \in S$ elemmel. Ez ellentmond annak a feltételnek, hogy S -nek nincs idempotens eleme. Tehát a (7.1) sorozat elemei az M_a halmaz páronként különböző elemei. Az M_a halmaz tehát végtelen sok elemet tartalmaz. \square

7.21. Tétel *Ha S egy olyan jobb egyszerű félcsoport, amely nem tartalmaz idempotens elemet, akkor S minden eleme az S végtelen sok különböző fő balideáljának eleme.*

Bizonyítás. Legyen b egy idempotens elem nélküli jobb egyszerű félcsoport tetszőleges eleme. Rögzített $a \in S$ elem esetén jelölje M_a az $ax = b$ egyenlet összes S -beli megoldásainak halmazát. Az előző tétel miatt M_a végtelen sok elemet tartalmaz. Ha u és v az M_a különböző elemei, akkor

$$b = au \in Su$$

és

$$b = av \in Sv,$$

valamint a 7.19. Tétel szerint $Su \neq Sv$. Így b végtelen sok különböző fő balideál eleme. \square

7.22. Tétel *Ha S egy olyan jobb egyszerű félcsoport, amely nem tartalmaz idempotens elemet, akkor S minden x eleme esetén Sx is idempotens elem nélküli jobb egyszerű félcsoport.*

Bizonyítás. Legyen $x \in S$ tetszőleges. Az világos, hogy Sx olyan részfélcsoportja S -nek, amely nem tartalmaz idempotens elemet. Legyen $a \in Sx$ tetszőleges eleme. Mivel S jobbegyszerű, ezért

$$aS = S.$$

Így

$$a(Sx) = (aS)x = Sx.$$

Tehát a 7.2. Tétel szerint Sx jobb egyszerű. \square

A továbbiakban azokkal az idempotens elem nélküli jobb egyszerű félcsoportokkal foglalkozunk, amelyek jobb egyszerűsítések. Példa ilyen félcsoportra az ún. Baer-Levi félcsoport.

7.3. Baer-Levi félcsoportok

7.23. Definíció Jelöljenek $p \geq q$ tetszőleges végtelen számosságokat. Egy S félcsoportot (p, q) -típusú Baer-Levi félcsoportnak nevezünk, ha megadható olyan p számosságú A halmaz, hogy S az A halmaz önmagába való mindazon injektív η leképezéseinek félcsoportja (a leképezések kompozíciójára nézve), amelyek esetén az $A \setminus A\eta$ halmaz számossága q .

7.24. Tétel Tetszőleges $p \geq q$ számosságok esetén létezik (p, q) -típusú Baer-Levi félcsoport.

Bizonyítás. Legyen A egy p számosságú halmaz. Legyenek ξ és η az A önmagába való olyan injektív leképezései, amelyekre az $A \setminus A\xi$ és $A \setminus A\eta$ halmazok számossága q . A tétel bizonyításához meg kell mutatni, hogy az $A \setminus A\xi\eta$ halmaz számossága is q . Mivel η injektív, ezért $A \setminus A\xi$ -t injektív módon képezi le $A\eta \setminus A\xi\eta$ -ra, és így $|A \setminus A\xi| = |A\eta \setminus A\xi\eta|$. Mivel

$$A \setminus A\xi\eta = (A \setminus A\eta) \cup (A\eta \setminus A\xi\eta),$$

és a jobb oldalon álló két diszjunkt halmaz mindegyikének a végtelen q a számossága, ezért az $A \setminus A\xi\eta$ halmaz számossága is q . \square

7.25. Tétel Minden Baer-Levi félcsoport idempotens elem nélküli, jobb egyszerűsítéssel és jobb egyszerű.

Bizonyítás. Legyen S egy (p, q) -típusú Baer-Levi félcsoport, azaz egy p számosságú A halmaz önmagába való mindazon injektív η leképezéseinek félcsoportja, amelyek esetén az $A \setminus A\eta$ halmaz számossága q . Tetszőleges $\eta \in S$ leképezésre

$$|A \setminus A\eta| = |A\eta \setminus A\eta^2|.$$

A q jelentése miatt

$$\eta^2 \neq \eta.$$

Így az S félcsoportnak nincs idempotens eleme.

A következőkben megmutatjuk, hogy S jobb egyszerű. Legyenek α és β tetszőleges S -beli elemek. Jelölje γ az A halmaz önmagába való olyan leképezését, amely tetszőleges $x \in A$ elem esetén az $x\alpha$ elemhez az $x\beta$ elemet rendeli, az $A \setminus A\alpha$ halmaz elemein pedig a következőképpen hat: mivel $|A \setminus A\alpha| = |A \setminus A\beta| = q$, ezért van az $A \setminus A\alpha$ halmaznak az $A \setminus A\beta$ halmazba olyan δ injektív leképezése, amely esetén az $(A \setminus A\beta) \setminus ((A \setminus A\alpha)\delta)$

halmaz számossága q ; tetszőleges $y \in A \setminus A\alpha$ elem esetén legyen $y\gamma = y\delta$. Világos, hogy γ az S egy eleme és

$$\alpha\gamma = \beta.$$

Így

$$\alpha S = S$$

tetszőleges $\alpha \in S$ elem esetén. A 7.2. Tétel szerint S jobb egyszerű félcsoport.

Már csak azt kell megmutatni, hogy S jobb egyszerűsítéses. Tegyük fel, hogy

$$\alpha\beta = \gamma\beta$$

teljesül az S félcsoport valamely α, β, γ elemeire. legyen x az A halmaz tetszőleges eleme. Akkor

$$x\alpha\beta = x\gamma\beta.$$

Mivel β injektív, ezért

$$x\alpha = x\gamma,$$

amiből már következik, hogy

$$\alpha = \gamma. \quad \square$$

7.26. Lemma *Legyen S egy idempotens elem nélküli jobb egyszerű félcsoport. Akkor tetszőleges $x, y \in S$ esetén $xy \neq y$.*

Bizonyítás. Tegyük fel, hogy

$$xy = y$$

teljesül valamely $x, y \in S$ elemekre. Mivel S jobb egyszerű, ezért

$$yS = S,$$

és ezért van olyan $z \in S$ elem, hogy

$$yz = x.$$

Ebből viszont

$$x^2 = x(yz) = (xy)z = yz = x$$

következik, azaz x az S félcsoport idempotens eleme. Ez viszont ellentmond annak a feltételnek, hogy S nem tartalmaz idempotens elemet. Tehát igaz a lemma állítása. \square

7.27. Lemma *Legyen S egy idempotens elem nélküli jobb egyszerűsítéses, jobb egyszerű félcsoport. Akkor tetszőleges $x \in S$ elem esetén $|S \setminus Sx| = |S|$.*

Bizonyítás. Mivel minden véges félcsoporth tartalmaz legalább egy idempotens elemet, ezért a feltétel miatt S szükségképpen végtelen számosságú. Legyen $s \in S$ tetszőleges elem. Legyen ϕ az S félcsoporth önmagába való azon leképezése, amely tetszőleges $x \in S$ elemhez hozzárendel egyet azon $x' \in S$ elemek közül, amelyekre $xx' = s$ teljesül. Mivel S jobb egyszerű, ezért $xS = S$, s emiatt van legalább egy olyan $x' \in S$ elem, ami az $xx' = s$ feltételnek eleget tesz. Ha

$$\phi(x) = \phi(y),$$

akkor

$$x\phi(x) = s = y\phi(y) = y\phi(x),$$

amiből az S félcsoporth jobb egyszerűsíthetősége miatt

$$x = y$$

következik. Tehát a ϕ leképezés injektív. Így

$$|S| = |\phi(S)|.$$

Megmutatjuk, hogy $\phi(S) \cap Ss = \emptyset$. Tegyük fel, indirekt módon, hogy van S -nek olyan z eleme, amely benne van a $\phi(S) \cap Ss$ halmazban. Akkor

$$z = \phi(x) = ys$$

valamely $x, y \in S$ elemekre. Ekkor viszont

$$s = x\phi(x) = xys,$$

ami ellentmond a 7.26. Lemmának. Így valóban igaz, hogy

$$\phi(S) \cap Ss = \emptyset,$$

és ezért

$$\phi(S) \subseteq S \setminus Ss.$$

Emiatt viszont

$$|S| = |\phi(S)| \leq |S \setminus Ss| \leq |S|,$$

azaz

$$|S \setminus Ss| = |S|$$

adódik. □

7.28. Tétel *Legyen S idempotens elem nélküli, jobb egyszerűsítéssel, jobb egyszerű félcsoporth. Akkor S -et be lehet ágyazni egy (p, p) -típusú Baer-Levi félcsoporthba, ahol $p = |S|$.*

Bizonyítás. Az 5.14. Lemma szerint az S félcsoport kiterjesztett jobbrekuláris reprezentációja, azaz az egységelemes S^1 félcsoport reguláris reprezentációjának S -re való leszűkítése az S félcsoport egy hű reprezentációja. Ennél a reprezentációnál az S tetszőleges s eleméhez az S^1 félcsoport s eleméhez tartozó ϱ_s belső jobb translációja van hozzárendelve, azaz S^1 -nek a

$$\varrho_s : \begin{cases} 1 \mapsto s \\ x \mapsto xs, x \in S \end{cases}$$

módon definiált önmagába való leképezése. Erre a leképezésre

$$|S^1 \setminus (S^1)\varrho_s| = |S^1 \setminus (s \cup Ss)| = |S \setminus Ss|$$

teljesül, mivel $|S|$ végtelen. Így, használva a 7.27. Lemmát is, azt kapjuk, hogy

$$|S^1| = |S| = |S \setminus Ss| = |S^1 \setminus (S^1)\varrho_s|.$$

Ez viszont azt jelenti, hogy ϱ_s eleme annak a (p, p) -típusú Baer-Levi félcsoporthoz ($p = |S|$), amely S^1 önmagába való leképezéseiből áll. \square

Bizonyítás nélkül közöljük a következő tételt (lásd a [6] könyv Theorem 8.8. tételét).

7.29. Tétel *Egy S félcsoporthoz akkor és csak akkor lehet beágyazni egy idempotens elem nélküli jobb egyszerűsítéssel, jobb egyszerű félcsoporthoz, ha S idempotens elem nélküli jobb egyszerűsítéssel félcsoporthoz.*

Feladatok

7.1. (Megoldás: 17.22.) Mutassuk meg, hogy bal egyszerű félcsoporthoz minden jobb unitér részfélcsoporthoz bal egyszerű!

7.2. (Megoldás: 17.23.) Mutassuk meg, hogy ha N unitér, H pedig reflexív unitér részfélcsoporthoz egy S bal egyszerű félcsoporthoz, akkor $N \cap H \neq \emptyset$.

7.3. (Megoldás: 17.24.) Mutassuk meg, hogy ha H és N egy S bal egyszerű félcsoporthoz olyan reflexív, unitér részfélcsoporthoz, melyeknek nincs nemtriviális csoport-homomorf képük, akkor $N = H$.

8. fejezet

Egyszerű és 0-egyszerű félcsoporthok

Az egyszerű, illetve 0-egyszerű félcsoporth fogalmakat korábban már definiáltuk (4.1. Definíció, 4.6. Definíció). Ebben a fejezetben részletes vizsgálataikkal foglalkozunk.

8.1. Egyszerű félcsoporthok

8.1. Tétel *Ha egy S félcsoporth előáll minimális jobb oldali ideáljainak uniójaként, akkor S egyszerű félcsoporth.*

Bizonyítás. Tegyük fel, hogy egy S félcsoporth előáll R_i ($i \in I$) minimális jobb ideáljainak uniójaként. Legyenek $x \in S$ és $y \in R_i$ tetszőleges elemek ($i \in I$). Akkor yxS az S olyan jobb oldali ideálja, amelyik benne van az R_i minimális jobb oldali ideálban. Ezért

$$yxS = R_i.$$

Ezért

$$S = \cup_{i \in I} R_i = \cup_{y \in S} yxS = SxS.$$

A 4.2. Tétel szerint ez azt jelenti, hogy S egyszerű félcsoporth. □

A következő részben az egyszerű félcsoporthok egy speciális típusával foglalkozunk.

8.2. Croisot-Teissier félcsoporthok

Legyenek p és q olyan végtelen számosságok, amelyekre $p \geq q$ teljesül. Legyen A olyan halmaz, melynek számossága nagyobb vagy egyenlő mint p . Legyen $\mathcal{E} = \{\mathcal{E}_i : i \in I\}$ az A halmazon értelmezett páronként különböző olyan ekvivalenciarelációk halmaza, amelyek szerint vett A/\mathcal{E}_i faktorhalmazok mindegyike p számosságú. Az A halmaz egy B részhalmazáról azt mondjuk, hogy \mathcal{E} által jól szeparált, ha B számossága p és minden

egyes \mathcal{E}_i -nek a B -re való $\mathcal{E}_i \cap (B \times B)$ leszűkítése a B identikus relációja, azaz B minden \mathcal{E}_i -osztályból legfeljebb egy elemet tartalmaz. Minden $i \in I$ indexre jelölje T_i az A -nak önmagába való mindazon $(\cdot)\eta_i$ leképezéseinek halmazát, amelyekre a következők teljesülnek:

1. $\eta_i \circ \eta_i^{-1} = \mathcal{E}_i$;
2. A -nak valamely, \mathcal{E} által jól szeparált B részhalmaza esetén
 - (a) $A\eta_i \subseteq B$ és
 - (b) $|B \setminus A\eta_i| = q$.

Megjegyezzük, hogy ha A -nak van \mathcal{E} által jól szeparált részhalmaza, akkor a T_i halmaz egyetlen $i \in I$ indexre sem üres.

A következőkben egy ilyen esetre vonatkozó példát ismertetünk. Legyen I tetszőleges nem üres halmaz. Jelöljön E egy végtelen p számosságú halmazt. Jelölje A az E halmaznak önmagával képezett $|I|$ -szeres descartes szorzatát, azaz A mindazon kiválasztási függvények halmaza, amelyek minden I -beli i indexhez egy E -beli elemet rendelnek. Tetszőleges $j \in I$ index esetén legyen \mathcal{E}_j az A halmaz következő ekvivalenciarelációja: valamely $a, b \in A$ elem akkor és csak akkor álljon relációban, ha $a(j) = b(j)$. Az világos, hogy

$$|A/\mathcal{E}_j| = |E| = p.$$

Az is igaz, hogy az A halmaz mindazon b elemeinek B halmaza, amelyekre

$$b(i) = b(j)$$

teljesül minden $i, j \in I$ indexre, az A -nak egy, az \mathcal{E} által jól szeparált részhalmaza.

Ha az A halmaz tartalmaz \mathcal{E} által jól szeparált részhalmazt, akkor a fent definiált leképezések $\cup_{i \in I} T_i$ halmazát $CT(A, \mathcal{E}, p, q)$ -val fogjuk jelölni.

8.2. Lemma $CT(A, \mathcal{E}, p, q)$ olyan idempotens elem nélküli félcsoportot alkot a leképezések kompozíciójára nézve, amelyben a T_i részhalmazok jobb oldali ideált alkotnak.

Bizonyítás. Annak bizonyításához, hogy $CT(A, \mathcal{E}, p, q)$ olyan félcsoport, amelyben a T_i részhalmazok jobb oldali ideált alkotnak elegendő azt megmutatni, hogy tetszőleges $i, j \in I$ indexek és tetszőleges $\xi \in T_i, \eta \in T_j$ elemek esetén $\xi\eta \in T_i$. Legyenek tehát $i, j \in I$ és $\xi \in T_i, \eta \in T_j$ tetszőlegesek. Akkor

$$\xi \circ \xi^{-1} = \mathcal{E}_i, \quad \eta \circ \eta^{-1} = \mathcal{E}_j,$$

továbbá megadható A -nak két olyan, \mathcal{E} által jól szeparált X és Y részhalmaza amelyekre

$$A\xi \subseteq X, \quad A\eta \subseteq Y,$$

valamint

$$|X \setminus A\xi| = |Y \setminus A\eta| = q$$

teljesülnek. Ezen feltételekből egyrészt

$$(\xi\eta) \circ (\xi\eta)^{-1} = \xi \circ \eta \circ \eta^{-1} \circ \xi^{-1} = \xi \circ \mathcal{E}_j \circ \xi^{-1} = \xi \circ \iota_X \circ \xi^{-1} = \xi \circ \xi^{-1} = \mathcal{E}_i$$

következik. Legyen

$$Z = X\eta.$$

Akkor

$$|Z| = |X| = p,$$

mert X jól szeparált \mathcal{E} által, s ezért η -nak X -re való leszűkítése bijektív. Mivel

$$Z \subseteq A\eta \subseteq Y,$$

azaz Z benne van egy \mathcal{E} által jól szeparált részhalmazban, valamint $|Z| = p$, ezért Z jól szeparált \mathcal{E} által. Az

$$A\xi \subseteq X$$

tartalmazás miatt

$$A\xi\eta \subseteq X\eta = Z.$$

Az η -nak X -re való leszűkítése bijekció, ezért

$$q = |X \setminus A\xi| = |(X \setminus A\xi)\eta| = |X\eta \setminus A\xi\eta| = |Z \setminus A\xi\eta|.$$

A fentiek együtt azt eredményezik, hogy

$$\xi\eta \in T_i.$$

Ezzel megmutattuk, hogy $CT(A, \mathcal{E}, p, q)$ olyan félcsoportot alkot a leképezések kompozíciójára nézve, amelyben a T_i részhalmazok jobb oldali ideált alkotnak.

A bizonyítás hátralévő részében megmutatjuk, hogy a $CT(A, \mathcal{E}, p, q)$ félcsoport nem tartalmaz idempotens elemet. Tegyük fel, indirekt módon, hogy a $CT(A, \mathcal{E}, p, q)$ félcsoportnak van olyan ξ eleme, amelyre $\xi^2 = \xi$ teljesül. Jelölje X az A halmaz egy olyan, \mathcal{E} által jól szeparált részhalmazát, amelyre $A\xi \subseteq X$ és $|X \setminus A\xi| = q$ áll fenn. Mivel ξ -nek X -re való leszűkítése bijekció (a jólszeparálhatóság miatt), ezért

$$|X\xi \setminus A\xi^2| = q.$$

Mivel

$$X\xi \subseteq A\xi,$$

ezért viszont a $\xi^2 = \xi$ feltétel miatt

$$X\xi \setminus A\xi^2 = \emptyset, \quad \square$$

ami ellentmond az előző eredménynek, mivel q végtelen számosságot jelöl.

8.3. Definíció A $CT(A, \mathcal{E}, p, q)$ félcsoportot Croisot-Teissier-féle félcsoportnak nevezzük.

8.4. Lemma Egy $CT(A, \mathcal{E}, p, p)$ félcsoportban a T_i részhalmaz minden $i \in I$ index esetén minimális jobbideál.

Bizonyítás. Legyen T_i ($i \in I$) egy $S = CT(A, \mathcal{E}, p, p)$ Croisot-Teissier-féle félcsoportot definiáló részhalmazok egyike. T_i a 8.2. Tétel szerint az S félcsoport egy ideálja. Legyenek $\xi, \eta \in T_i$ tetszőleges elemek. Akkor megadható A -nak két olyan, \mathcal{E} által jól szeparált X és Y részhalmaza amelyekre

$$A\xi \subseteq X, \quad A\eta \subseteq Y,$$

valamint

$$|X \setminus A\xi| = |Y \setminus A\eta| = p$$

teljesülnek. Definiáljuk A -nak önmagába való ζ leképezését a következőképpen. Először ζ -nak $A\xi$ -n való hatását értelmezzük. Tetszőleges $x \in A$ esetén rendelje ζ az $x\xi$ elemhez az $x\eta$ elemet. Mivel

$$\xi \circ \xi^{-1} = \mathcal{E}_i = \eta \circ \eta^{-1},$$

ezért ζ jól definiált, egyértékű leképezés. Valójában ζ az $A\xi$ halmaznak az $A\eta$ halmazra való bijekciója. Mivel X jól szeparált \mathcal{E} által és mert $A\xi \subseteq X$, ezért minden $x \in A$ elem esetén X az $x\xi$ osztályából nem tartalmaz más elemet. Ennek az osztálynak minden eleméhez rendelje ζ az $x\eta$ elemet. Jelölje C azon \mathcal{E}_i osztályok halmazát, amelyeknek $A\xi$ -vel vett metszete az üres halmaz. Mivel

$$|A/\mathcal{E}_i| = p,$$

ezért

$$|C| \leq p.$$

Mivel q végtelen és

$$|Y \setminus A\eta| = q,$$

ezért megadható C -nek $Y \setminus A\eta$ -ba egy olyan δ bijekciója, amelyre

$$|(Y \setminus A\eta) \setminus C\delta| = p$$

teljesül. Válasszunk egy ilyen δ -t, és definiáljuk ζ -t a C halmazhoz tartozó \mathcal{E}_i osztályokon a következőképpen: adott C -hez tartozó \mathcal{E}_i osztály minden eleméhez ζ rendelje hozzá az $Y \setminus A\eta$ halmaz azon elemét, amelyet δ az \mathcal{E}_i osztályhoz rendelt. Az világos, hogy

$$\zeta \circ \zeta^{-1} = \mathcal{E}_i,$$

$$A\zeta \subseteq Y$$

és

$$|Y \setminus A\zeta| = |(Y \setminus A\eta) \setminus C\delta| = p.$$

Mindezek miatt

$$\zeta \in S = CT(A, \mathcal{E}, p, p).$$

Továbbá az is nyilvánvaló, hogy

$$\xi\zeta = \eta.$$

Az előzőek alapján tehát minden $\xi \in T_i$ elem esetén

$$\xi S = T_i.$$

Ebből viszont már adódik, hogy T_i minimális jobbideálja S -nek. \square

8.5. Tétel Minden Croisot-Teissier-féle $CT(A, \mathcal{E}, p, p)$ félcsoport idempotens elem nélküli egyszerű félcsoport, amely T_i ($i \in I$) minimális jobbideáljainak uniója.

Bizonyítás. Legyen $CT(A, \mathcal{E}, p, p)$ tetszőleges Croisot-Teissier-féle félcsoport. A 8.2. Lemma szerint a $CT(A, \mathcal{E}, p, p)$ félcsoport nem tartalmaz idempotens elemet. A 8.4. Lemma szerint a $CT(A, \mathcal{E}, p, p)$ félcsoportot definiáló T_i ($i \in I$) részhalmazok a $CT(A, \mathcal{E}, p, p)$ félcsoport minimális jobb oldali ideáljai. Mivel $CT(A, \mathcal{E}, p, p)$ ezen jobb oldali ideálok uniója, ezért a 8.1. Lemma szerint $CT(A, \mathcal{E}, p, p)$ egyszerű félcsoport. \square

Bizonyítás nélkül közöljük a következő két tételt (lásd a [6] könyv Theorem 8.18. és Theorem 8.19. tételeit).

8.6. Tétel Minden olyan idempotens elem nélküli egyszerű félcsoportot, amely tartalmaz legalább egy minimális jobb ideált, be lehet ágyazni egy Croisot-Teissier-féle félcsoportba.

8.7. Tétel Egy S félcsoportot akkor és csak akkor lehet beágyazni egy idempotens elem nélküli jobb egyszerű félcsoportba, ha S nem tartalmaz idempotens elemet, és tetszőleges $a, b \in S$ elemek esetén az $ax = bx$ egyenlőségnek valamely $x \in S$ elemre való teljesüléséből az következik, hogy $ay = by$ minden $y \in S$ elemre.

8.3. 0-egyszerű félcsoportok

8.8. Lemma Legyen S olyan 0-egyszerű félcsoport, amely tartalmaz egy 0-minimális bal oldali ideált és egy 0-minimális jobb oldali ideált. Akkor S bármely L 0-minimális balideáljához tartozik legalább egy olyan R 0-minimális jobbideál, amelyre $LR \neq \{0\}$ teljesül.

Bizonyítás. Legyen L a 0-egyszerű S félcsoporth tetszőleges balideálja. Mivel LS az S kétoldali ideálja, ezért

$$LS = \{0\} \quad \text{vagy} \quad LS = S.$$

Ha $LS = \{0\}$, akkor $L^2 = \{0\}$. Mivel ez ellentmond a 4.16. Lemmának, ezért $LS = S$. Így $Lc \neq \{0\}$ valamely $c \in S$ elemre. A 4.20. Lemma duálisa szerint S 0-minimális jobbideálok uniója. Így $c \in R$ az S valamely R 0-minimális jobbideáljára. Így $LR \neq \{0\}$. \square

8.9. Lemma *Legyen S egy 0-egyszerű félcsoporth. Akkor S tetszőleges L 0-minimális bal oldali ideálja és tetszőleges $a \in L \setminus \{0\}$ elem esetén $Sa = L$.*

Bizonyítás. Mivel Sa az S félcsoporth L által tartalmazott bal oldali ideálja, ezért

$$Sa = \{0\} \quad \text{vagy} \quad Sa = L.$$

Mivel S 0-egyszerű, ezért az $a \neq 0$ feltétel miatt

$$SaS = S,$$

felhasználva a 4.7. Tételt is. Emiatt az $Sa = \{0\}$ egyenlőség nem teljesülhet, ellenkező esetben ugyanis azt kapnánk, hogy $S = \{0\}$, ami ellentmondana annak a feltételnek, hogy S 0-egyszerű. Így csak az

$$Sa = L$$

egyenlőség teljesülhet, mint ahogy azt állítottuk. \square

8.10. Definíció *Egy S félcsoporth valamely $e \neq 0$ idempotens elemét primitív idempotens elemnek nevezzük, ha tetszőleges f idempotens elem esetén az $f \leq e$ (1.39. Megjegyzés) feltételből $f = 0$ vagy $f = e$ következik.*

8.11. Lemma *Legyen S egy 0-egyszerű félcsoporth. Legyenek L , illetve R az S félcsoporth olyan 0-minimális bal oldali, illetve 0-minimális jobb oldali ideáljai, amelyekre $LR \neq \{0\}$ teljesül. Akkor érvényesek a következők:*

- (1) $LR = S$;
- (2) RL olyan félcsoporth, amely egy csoportból nullelem adjungálásával származtatható (azaz: nullelemes csoport);
- (3) $RL = R \cap L$;
- (4) $R = eS$, $L = Se$, $RL = eSe$, ahol e jelöli az $RL \setminus \{0\}$ csoport egységelemét;
- (5) Az $RL \setminus \{0\}$ csoport e egységeleme az S egy primitív idempotens eleme.

Bizonyítás. (1) : Mivel LR a 0-egyszerű S félcsoporth nem-zéró ideálja, ezért

$$LR = S.$$

(2) : Mivel

$$S = S^2 = LRLR,$$

ezért

$$RL \neq \{0\}.$$

Legyen

$$a \in RL \setminus \{0\}$$

tetszőleges elem. Akkor

$$a \in R \setminus \{0\}.$$

A 8.9. Lemma duálisa miatt

$$aS = R.$$

Mivel

$$S = LR = LaS,$$

ezért

$$La \neq \{0\}.$$

Így La az S félcsoporth L által is tartalmazott nem-zéró bal oldali ideálja. Ebből

$$La = L$$

következik, mert L az S félcsoporth 0-minimális bal oldali ideálja. Következésképpen

$$RLa = RL.$$

A 7.2. Tétel miatt ez azt jelenti, hogy RL bal 0-egyszerű félcsoporth. A 7.7. Tétel miatt $RL \setminus \{0\}$ egy bal egyszerű félcsoporth, és RL ebből a 0-elem adjungálásával áll elő. Hasonlóan igazolható, hogy RL jobb nullegyszerű félcsoporth és $RL \setminus \{0\}$ jobb egyszerű félcsoporth. Mivel egy jobb egyszerű és egyben bal egyszerű félcsoporth csoport, ezért az előzőekből már adódik, hogy $RL \setminus \{0\}$ az S egy részcsoporthja; ebből RL a 0-elem adjungálásával származtatható.

(3) : Mivel $RL \subseteq R \cap L$ nyilvánvalóan teljesül, csak az $R \cap L \subseteq RL$ tartalmazást mutatjuk meg. Jelölje e az $RL \setminus \{0\}$ csoport egységelemét. A 4.41. Lemma, illetve annak duálisa szerint $(R \setminus \{0\}) \cap (R \setminus \{0\})$ az S -félcsoporth egy \mathcal{H} -osztálya. Ez tartalmazza az e idempotens elemet, s ezért a 4.45. Tétel szerint ez a \mathcal{H} -osztály szükségképpen részcsoporthja S -nek. Így $R \cap L$ egy nullemes csoport. Ha $a \in R \cap L$, akkor $a = ae \in RL$, mivel $a \in R$ and $e \in L$. Tehát

$$R \cap L \subseteq RL.$$

(4) : Mivel $e \in L \setminus \{0\}$, ezért a 8.9. Lemma miatt

$$Se = L.$$

Hasonlóan adódik, hogy

$$eS = R.$$

Így

$$RL = eSSe = eSe.$$

(5) : Tegyük fel, hogy f az S olyan idempotens eleme, melyre

$$f \leq e$$

teljesül. Akkor

$$f \in eSe.$$

Mivel (4) szerint

$$eSe = RL$$

RL pedig (2) miatt nullelemes csoport, melynek e az egységeleme, ezért $f = 0$ vagy $f = e$, hiszen nullelemes csoportban csak két idempotens van, a nullelem és az egységelem. Tehát e primitív idempotens. \square

Feladatok

8.1. (Megoldás: 17.25.) Mutassuk meg, hogy egy félcsoport akkor és csak akkor kommutatív és 0-egyszerű, ha egy kommutatív csoportból származtatható egy nullelem adjungálásával.

8.2. (Megoldás: 17.26.) Mutassuk meg, hogy nincs 0-egyszerű nil félcsoport.

9. fejezet

Teljesen egyszerű és teljesen 0-egyszerű félcsoportok

Az előző fejezet második részében vizsgált Croisot-Teissier-féle félcsoportok speciális idempotens elem nélküli egyszerű félcsoportok. Ebben a fejezetben speciális idempotens elemet tartalmazó egyszerű, illetve 0-egyszerű félcsoportokat vizsgálunk.

9.1. Definíció Egy legalább kételemű egyszerű S félcsoportot [illetve egy 0-egyszerű S félcsoportot] teljesen egyszerűnek [teljesen 0-egyszerűnek] nevezünk, ha tartalmaz egy primitív idempotens elemet. Az egyelemű félcsoportot teljesen egyszerűnek tekintjük.

9.1. A teljesen 0-egyszerű félcsoportok jellemzései

9.2. Lemma Legyen S egy teljesen 0-egyszerű félcsoport. Akkor S tetszőleges e primitív idempotens eleme esetén $L = Se$, illetve $R = eS$ az S félcsoport egy-egy olyan 0-minimális bal oldali, illetve 0-minimális jobb oldali ideálja, amelyekre teljesül, hogy RL az S olyan részcsoporthja, melynek egységeleme e .

Bizonyítás. A bizonyítás során csak azt fogjuk részletesen igazolni, hogy $R = eS$ az S félcsoport 0-minimális jobb oldali ideálja, mert ehhez hasonlóan igazolható, hogy $L = Se$ az S félcsoport 0-minimális bal oldali ideálja. Először is megjegyezzük, hogy mivel

$$e = e^2 \in eS = R,$$

ezért

$$R \neq \{0\}.$$

Legyen A az S félcsoport olyan nem-null jobb oldali ideálja, amelyet az R részhalmazként tartalmaz. Jelölje a az A egy tetszőleges elemét. Mivel

$$a \in eS,$$

ezért

$$ea = a.$$

Mivel az S félcsoport 0-egyszerű és $a \neq 0$, ezért

$$SaS = S$$

a 4.7. Tétel szerint, s ezért megadhatók olyan $x', y' \in S$ elemek, hogy

$$x'ay' = e.$$

Bevezetve az

$$x = ex'e \quad \text{és} \quad y = y'e$$

jelöléseket, fennállnak a következő egyenlőségek:

$$xay = e, \quad ex = xe = x, \quad ye = y.$$

Legyen

$$f = ayx.$$

Ekkor

$$\begin{aligned} f^2 &= ay(xay)x = ayex = ayx = f, \\ ef &= (ea)yx = ayx = f, \\ fe &= ay(xe) = ayx = f. \end{aligned}$$

Tehát f az S félcsoport olyan idempotens eleme, amelyre

$$f \leq e$$

teljesül. Mivel

$$e = e^2 = x(ayx)ay = xfay,$$

ezért

$$f \neq 0,$$

amiből

$$e = f$$

következik, hiszen e az S félcsoport primitív idempotens eleme a feltétel szerint. Így viszont

$$e = ayx \in aS,$$

amiből

$$R = eS \subseteq aS^2 \subseteq A$$

következik. Ezért

$$A = R.$$

Tehát R az S félcsoport 0-minimális jobb oldali ideálja.

Mivel $e \neq 0$ és az S félcsoport 0-egyszerű, ezért

$$LR = SeeS = SeS = S \neq \{0\},$$

amiből a 8.11. Lemma szerint az következik, hogy $RL \setminus \{0\}$ az S egy részcsoportja. Mivel

$$0 \neq e \in eSe = eS^2e = eSSe = RL,$$

ezért e az RL egységeleme. □

9.3. Tétel *Egy 0-egyszerű félcsoport akkor és csak akkor teljesen 0-egyszerű, ha tartalmaz legalább egy 0-minimális bal oldali ideált és legalább egy 0-minimális jobb oldali ideált.*

Bizonyítás. Legyen S egy teljesen 0-egyszerű félcsoport. Akkor S tartalmaz legalább egy e primitív idempotens elemet. A 9.2. Lemma szerint $L = Se$ az S félcsoport 0-minimális bal ideálja, $R = eS$ pedig az S egy 0-minimális jobb oldali ideálja.

Fordítva, tegyük fel, hogy S olyan 0-egyszerű félcsoport, amely tartalmaz egy 0-minimális bal oldali, illetve 0-minimális jobb oldali ideált. Legyen L tetszőleges 0-minimális bal oldali ideálja S -nek. A 8.8. Lemma miatt van olyan R 0-minimális jobbideál S -ben, amelyre

$$LR \neq \{0\}$$

teljesül. A 8.11. Lemma (5) feltétele miatt S tartalmaz egy primitív idempotens elemet, s emiatt S teljesen 0-egyszerű. □

9.4. Következmény *Minden teljesen 0-egyszerű félcsoport előáll 0-minimális bal [jobb] oldali ideáljainak uniójaként.*

Bizonyítás. Legyen S teljesen 0-egyszerű félcsoport. Az előző tétel miatt S tartalmaz 0-minimális bal oldali és 0-minimális jobb oldali ideált. A 4.20. Tétel miatt S , mint önmaga 0-minimális ideálja előáll 0-minimális bal oldali (hasonlóan, 0-minimális jobb oldali) ideáljainak uniójaként. □

9.5. Definíció *Egy nullelemes S félcsoportot 0-biegszerűnek nevezünk, ha tetszőleges nullától különböző a és b elemei esetén $(a, b) \in \mathcal{D}$.*

9.6. Tétel *Minden teljesen 0-egyszerű félcsoport 0-biegszerű és reguláris.*

Bizonyítás. Legyen S egy teljesen 0-egyszerű félcsoport. Legyenek $a, b \in S$ tetszőleges nem-zéró elemek. Meg fogjuk mutatni, hogy $a \mathcal{D} b$. A 9.4. Következmény szerint a benne van S valamelyik L 0-minimális bal oldali ideáljában, b pedig az S valamelyik R 0-minimális jobb oldali ideáljában. A 8.9. Lemma szerint

$$L = Sa \quad \text{és} \quad R = bS.$$

A 4.41. Lemma, illetve annak duálisa szerint,

$$L_a = L \setminus \{0\} \quad \text{és} \quad R_b = R \setminus \{0\}.$$

A 4.7. Tétel szerint

$$SaS = S = SbS.$$

Így

$$S = S^2 = SbSSaS \subseteq S(bSa)S,$$

és ezért

$$bSa \neq \{0\}.$$

Mivel $a \in L$ és $b \in R$, ezért

$$bSa \subseteq R \cap L,$$

amiből következik, hogy

$$bSa \setminus \{0\} \subseteq R_b \cap L_a,$$

és ezért

$$a \mathcal{D} b.$$

Tehát az S félcsoport 0-biegyszerű.

Mivel S teljesen 0-egyszerű, ezért $S \setminus \{0\}$ tartalmaz egy idempotens elemet. Mivel $S \setminus \{0\}$ az S egy \mathcal{D} -osztálya, és mert egy idempotens elem reguláris, ezért a 6.8. Tétel szerint $S \setminus \{0\}$ minden eleme reguláris. Mivel a 0-elem reguláris, ezért S reguláris félcsoport. \square

9.7. Tétel *Legyen S egy teljesen 0-egyszerű félcsoport.*

- (1) *Ha $a \in S$ és $a^2 \neq 0$, akkor $a^2 \in H_a$ és H_a csoport.*
- (2) *Ha $a, b \in S$ és $ab \neq 0$, akkor $ab \in R_a \cap L_b$.*
- (3) *Ha $a, b \in S$, akkor $H_a H_b = 0$ vagy $H_a H_b = R_a \cap L_b$; akármelyik eset is áll fenn, mindig igaz, hogy $H_a H_b = H_{ab}$.*

Bizonyítás. (1) Legyen S egy teljesen 0-egyszerű félcsoporth és $a \in S$ tetszőleges az $a^2 \neq 0$ feltétellel. A 9.4. Következmény szerint van S -nek olyan 0-minimális L bal oldali ideálja, hogy

$$a \in L.$$

Ekkor persze

$$0 \neq a^2 \in L$$

is teljesül. A 4.41. Tétel szerint $L \setminus \{0\}$ egy \mathcal{L} -osztálya S -nek. Mivel $a^2 \neq 0$, és ezért $a \neq 0$, valamint $a, a^2 \in L \setminus \{0\}$, ezért

$$a \mathcal{L} a^2.$$

Hasonlóan igazolható, hogy

$$a \mathcal{R} a^2.$$

Következésképpen

$$a \mathcal{H} a^2,$$

amiből a 4.45. Tétel miatt már következik, hogy H_a csoport.

(2) Tekintsük S két olyan a és b elemét, amelyekre

$$ab \neq 0$$

teljesül. A 9.6. Tétel miatt

$$a \mathcal{D} b,$$

és ezért

$$R_b \cap L_a \neq \emptyset.$$

Legyen

$$c \in R_b \cap L_a$$

tetszőleges elem. Akkor

$$c^2 \in L_a R_b.$$

A 4.40. Tétel szerint $L_a R_b$ benne van az S valamely \mathcal{D} -osztályában. Mivel a 9.6. Tétel szerint S 0-bisimple, ezért S -nek két \mathcal{D} -osztálya van; ezek $\{0\}$ és $S \setminus \{0\}$. Mivel a feltétel szerint $ab \neq 0$, ezért csak

$$L_a R_b \subseteq S \setminus \{0\}$$

tartalmazás lehetséges. Így

$$c^2 \neq 0.$$

Jelen tétel (1) állítása miatt $H_c = R_b \cap L_a$ csoport. A 4.46. Tétel miatt

$$ab \in R_a \cap L_b.$$

(3) Legyenek a és b tetszőleges S -beli elemek. Ha

$$ab = 0,$$

akkor

$$H_a H_b \subseteq L_a R_b = \{0\},$$

mivel a 4.40. Tétel szerint $L_a R_b$ benne van az S valamely \mathcal{D} -osztályában, de S -nek csak két \mathcal{D} -osztálya van, $\{0\}$ és $S \setminus \{0\}$. Ebből viszont már következik, hogy

$$H_a H_b = \{0\} = H_0 = H_{ab}.$$

Vizsgáljuk most azt az esetet, amikor

$$ab \neq 0.$$

Jelen tétel (2) állítása szerint

$$ab \in R_a \cap L_b,$$

és emiatt (felhasználva a 4.46. Tételt is)

$$H_a H_b = R_a \cap L_b = H_{ab}. \quad \square$$

9.8. Definíció Egy monoidot (jelölje e az egységelemet) biciklikus félcsoporthnak nevezünk, ha megadható olyan $\{a, b\}$ kételemű részalmlaza S -nek, amely generálja S -et az egyetlen $ab = e$ generáló reláció mellett. Jelölése: $C(a, b)$.

Egy $C(a, b)$ biciklikus félcsoporth minden eleme egyértelműen írható $b^m a^n$ alakban (m és n nemnegatív egészek).

9.9. Tétel Legyenek e, a, b egy S félcsoporth olyan elemei, amelyekre $ae = ea = a$, $be = eb = b$, $ab = e$, $ba \neq e$ teljesülnek. Akkor az S félcsoporth $\langle a, b \rangle$ részfélcsoporthjának minden eleme egyértelműen kifejezhető $b^m a^n$ (m és n nemnegatív egészek) alakban; így $\langle a, b \rangle$ biciklikus félcsoporth.

Bizonyítás. Az világos, hogy az a és b elem által generált $\langle a, b \rangle$ részfélcsoporth az S egy olyan részmonoidja, melynek e az egységeleme. Az $ab = e$ feltétel miatt $\langle a, b \rangle$ minden eleme kifejezhető $b^m a^n$ alakban, ahol m és n tetszőleges nem-negatív egész számok (megjegyezzük, hogy $a^0 = b^0 = e$). Már csak azt kell megmutatni, hogy az ilyen alakban való előállítás egyértelmű. Ehhez először megmutatjuk, hogy az a és b elemek rendje szükségképpen végtelen. Tegyük fel, indirekt módon, hogy a véges rendű. Akkor megadhatók olyan h és k pozitív egész számok, hogy

$$a^{h+k} = a^h.$$

Jobbról szorozva ezt az egyenlőséget b^h -nal, az $ab = e$ feltétel miatt

$$a^k = e$$

adódik. Ekkor viszont

$$b = eb = a^k b = a^{k-1} ab = a^{k-1} e = a^{k-1}$$

és így

$$ba = a^k = e,$$

amely ellentmond a $ba \neq e$ feltételnek. Hasonlóan igazolható, hogy b rendje végtelen.

A bizonyítás következő lépéseként megmutatjuk, hogy az $a^h = b^k$ egyenlőségnek valamely h és k nem-negatív egészekre való teljesüléséből $h = k = 0$ következik. Tegyük fel, hogy

$$a^h = b^k$$

valamely h és k nem-negatív egészekre. Akkor

$$a^{h+k} = a^k b^k = e.$$

A bizonyítás előző része miatt $h + k = 0$, amiből már nyilvánvaló módon következik

$$h = 0, \quad k = 0.$$

Speciális esetként előbb megmutatjuk, hogy e egyértelműen áll elő $b^m a^n$ formában, azaz a $b^h a^k = e$ (h és k nemnegatív egészek) egyenlőségéből $h = 0$ és $k = 0$ következik. Tegyük fel tehát, hogy

$$e = b^h a^k$$

teljesül valamely h és k nemnegatív egészekkel. Ha $k = 0$, akkor $h = 0$. Megmutatjuk, hogy a $k > 0$ nem teljesülhet. Ugyanis, ha $k > 0$, akkor

$$b = eb = b^h a^k b = b^h a^{k-1},$$

amiből az a elemmel történő jobbról való szorzás után

$$ba = b^h a^k = e$$

adódik, ami ellentmond a $ba \neq e$ feltételnek.

A bizonyítás utolsó lépéseként tegyük fel, hogy

$$b^m a^n = b^i a^j$$

teljesül valamely m, n, i, j nemnegatív egészekkel. Tegyük fel, hogy $i \neq m$. Az általánosítás megszorítása nélkül feltehetjük, hogy $i < m$. Ha megszorozzuk a fenti egyenlőséget balról a^i -vel,

$$b^{m-i} a^n = a^j$$

adódik. Ha $j \geq n$, akkor ezen utóbbi egyenlőségnek b^n -nel jobbról való szorzása után

$$b^{m-i} = a^{j-n}$$

adódik, ami az előzőek miatt nem lehetséges, hiszen a b elem kitevője, $m-i$ pozitív egész, amiről az előző (speciális) bizonyítási részben mutattuk meg, hogy nem lehetséges. Így j és n között csak a $j < n$ nagyságrendi viszony lehetséges. Viszont ez is ellentmondáshoz vezet, hiszen ha a fenti $b^{m-i}a^n = a^j$ egyenlőséget jobbról megszorozzuk a b^j hatvánnyal, akkor

$$b^{m-i}a^{n-j} = e$$

adódik, ami nem lehetséges a fentiek miatt, mert $m-i > 0$. Ezzel a bizonyítást elvégeztük. \square

9.10. Tétel *Ha e egy 0-egyszerű, de nem teljesen 0-egyszerű S félcsoporthnak valamely nem-zéró idempotens eleme, akkor S tartalmaz olyan biciklikus részfélcsoporthot, amelynek e az egységeleme.*

Bizonyítás. Mivel S nem teljesen 0-egyszerű, ezért az e idempotens elem nem primitív. Így van S -nek olyan nem-zéró f idempotens eleme, amelyre $f < e$ teljesül. Ezért

$$ef = fe = f$$

és

$$e \neq f.$$

Mivel $f \neq 0$ és S 0-egyszerű, ezért

$$SfS = S,$$

és ezért megadhatók olyan $x, y \in S$ elemek, hogy

$$xfy = e.$$

Vezessük be a következő jelöléseket:

$$u = exf, \quad v = fye.$$

Akkor

$$eu = uf = u, \quad fv = ve = v, \quad uv = e.$$

Legyen

$$g = vu.$$

Akkor

$$g^2 = vuvu = veu = vu = g,$$

$$fg = fvu = vu = g,$$

$$gf = vu f = vu = g.$$

Így g az S félcsoport olyan idempotens eleme, amelyre

$$g \leq f$$

teljesül. Mivel $f < e$, ezért

$$g < e.$$

Azt kaptuk tehát, hogy az S félcsoportnak van két olyan eleme, u és v , amelyekre

$$uv = e$$

és

$$vu \neq e,$$

továbbá

$$ue = u = eu, \quad ve = v = ev$$

teljesülnek. Akkor viszont a 9.9. Tétel szerint $\langle u, v \rangle$ az S félcsoport olyan biciklikus részfélcsoportja, amelynek e az egységeleme. \square

9.11. Következmény *Ha e egy egyszerű, de nem teljesen egyszerű S félcsoportnak valamely idempotens eleme, akkor S tartalmaz olyan biciklikus részfélcsoportot, amelynek e az egységeleme.*

Bizonyítás. Legyen S egy olyan egyszerű félcsoport, amely nem teljesen egyszerű. Mivel az egyelemű félcsoportot is teljesen egyszerűnek tekintjük definíció szerint, ezért $|S| \geq 2$. Az S egyszerűsége miatt ebből az is következik, hogy S nem tartalmaz nullelemet. Legyen e az S egy idempotens eleme. Az világos, hogy az S^0 félcsoport 0-egyszerű, de nem teljesen 0-egyszerű. Továbbá, e az S^0 félcsoport nem nulla idempotens eleme. A 9.10. Tétel szerint S^0 -nak van olyan $\langle u, v \rangle$ biciklikus részfélcsoportja, amelynek e az egységeleme. Az $uv = e \neq 0$ feltétel miatt $u, v \in S$. Így $\langle u, v \rangle \subseteq S$. \square

9.12. Tétel *Egy 0-egyszerű S félcsoport akkor és csak akkor teljesen 0-egyszerű, ha minden elemének valamely hatványa benne van S valamely részcsoportjában.*

Bizonyítás. Ha S teljesen 0-egyszerű félcsoport, akkor a 9.7. Tétel szerint S minden eleme benne van S egy részcsoportjában. Ugyanis, ha a az S tetszőleges eleme, akkor vagy $a^2 = 0$ vagy pedig H_a az S egy részcsoportja. Mivel $\{0\}$ egyelemű részcsoportja S -nek, ezért az $a^2 = 0$ esetben is igaz, hogy a valamelyik hatványa a^2 benne van S valamelyik részcsoportjában.

Fordítva, tegyük fel, hogy S olyan 0-egyszerű félcsoport, amelyben bármely elem valamelyik hatványa benne van S egy részcsoportjában. Először megmutatjuk, hogy S -nek van nem-nilpotens eleme. Legyen $0 \neq a \in S$ tetszőleges elem. Akkor a 4.7. Tétel szerint

$$a \in SaS,$$

és így

$$a = xay$$

valamely $x, y \in S$ elemekkel. Ekkor viszont

$$a = x^n ay^n$$

is teljesül tetszőleges n pozitív egész számra. Mivel $a \neq 0$, ezért pl. $x^n \neq 0$ minden n pozitív egész számra, és így x nem nilpotens elem. A feltétel szerint x valamely hatványa benne van S egy részcsoportjában; ennek a részcsoportnak az egységeleme nem egyenlő az S nullelemével. Akkor viszont S -nek van nem-zéró e idempotens eleme. Ha S nem lenne teljesen 0-egyszerű, akkor a 9.10. Tétel szerint S tartalmazna egy $\langle u, v \rangle$ biciklikus részfélcsoportot e egységelemmel ($uv = e$, $vu \neq e$). Megmutatjuk, hogy ez ellentmondásra vezet. A feltétel szerint van olyan n pozitív egész szám, amelyre u^n benne van S valamely részcsoportjában. Jelölje f ennek a részcsoportnak az egységelemét, valamint x a p^n elem inverzét ebben a részcsoportban. Mivel

$$u^n v^n = e,$$

ezért

$$fe = fu^n v^n = u^n v^n = e.$$

Mivel

$$xu^n = f,$$

ezért

$$fe = xu^n e = xu^n = f.$$

A két egyenlőségből

$$e = f$$

adódik, és így

$$v^n = ev^n = fv^n = xv^n v^n = xe = xf = x.$$

Akkor viszont

$$v^n u^n = xu^n = f = e,$$

ami viszont ellentmond annak, hogy a $\langle u, v \rangle$ biciklikus részfélcsoport. □

9.13. Következmény Minden periodikus 0-egyszerű félcsoport teljesen 0-egyszerű.

Bizonyítás. Az 1.33. Tétel szerint periodikus S félcsoport minden elemének valamely hatványa benne van S egy részcsoportjában. Így a tétel állítása következik a 9.12. Tételből. \square

9.14. Tétel Minden véges 0-egyszerű félcsoport teljesen 0-egyszerű.

Bizonyítás. Mivel minden véges félcsoport periodikus, az állítás a 9.13. Tétel miatt nyilvánvaló. \square

9.2. Rees-féle mátrixfélcsoportok, a Rees-tétel

Legyen G egy csoport. Jelölje G^0 (a korábbiaknak megfelelően) azt a félcsoportot, amelyet a G csoportból úgy származtatunk, hogy ahhoz egy nullelemet adjungálunk. Legyen X egy tetszőleges nem üres halmaz, és legyen $i \mapsto a_i$ X -nek G^0 -ba való leképezése. Ha $a_i = 0$ minden $i \in X$ indexre, akkor a $\sum_{i \in X} a_i$ összeget definiáljuk úgy, hogy az legyen egyenlő a 0 elemmel. Ha $a_j \neq 0$ valamely $j \in X$ indexre, de az összes többi $i \in X$ indexre $a_i = 0$, akkor a $\sum_{i \in X} a_i$ összeget szintén definiáljuk úgy, hogy az legyen egyenlő az a_j elemmel. Ha $a_j \neq 0$ és $a_k \neq 0$ teljesül valamely $j \neq k$ indexekre, akkor a $\sum_{i \in X} a_i$ összeget nem definiáljuk.

Legyenek I és Λ tetszőleges nem üres halmazok. A G^0 feletti $I \times \Lambda$ típusú mátrixot Rees-mátrixnak nevezzük, ha legfeljebb egy olyan eleme van, amely nem egyenlő a 0 elemmel. Ha ez az elem a G csoport a eleme, amely a mátrixban az i -dik sorban, illetve a j -dik oszlopban áll (azaz az (i, j) rendezett párhoz van hozzárendelve), akkor a mátrixot $(a)_{ij}$ módon is fogjuk jelölni. A $(0)_{ij}$ kifejezést is fogjuk használni; ez tetszőleges $i \in I$ és $j \in \Lambda$ index esetén azt az $I \times \Lambda$ -típusú Rees-mátrixot fogja jelölni, amelynek minden eleme a 0 elemmel egyenlő, azaz az $I \times \Lambda$ típusú nullmátrixról van szó.

Legyen $P = (p_{\lambda i})$ egy G^0 feletti tetszőleges $\Lambda \times I$ típusú mátrix (vagyis nem feltétlenül egy Rees-mátrix). A továbbiakban ezt a mátrixot szendvicsmátrixnak fogjuk nevezni. Ha $(a)_{ij}$ és $(b)_{rt}$ tetszőleges $I \times \Lambda$ -típusú Rees-mátrixok, akkor a fenti végtelen összeg definíciója és a mátrixok szokásos szorzásának definíciója alapján értelmezve van az $(a)_{ij}P(b)_{rt}$ mátrixszorzat. Könnyen belátható, hogy ez a szorzat megegyezik az $(ap_{jr}b)_{it}$ Rees-mátrixszal.

9.15. Lemma Egy G^0 nullelemes csoport feletti tetszőleges $I \times \Lambda$ típusú Rees-mátrixok tetszőleges rögzített $\Lambda \times I$ -típusú P szendvicsmátrix esetén egy $\mathcal{M}^0(G; I, \Lambda; P)$ módon jelölt félcsoportot alkotnak az $(a)_{ij} \circ (b)_{rt} = (a)_{ij}P(b)_{rt} = (ap_{jr}b)_{it}$ módon definiált műveletre nézve.

Bizonyítás. A lemma előtti megjegyzés alapján nyilvánvaló. \square

9.16. Definíció Az előző lemmában szereplő $\mathcal{M}^0(G; I, \Lambda; P)$ félcsoportot (a G^0 nullelemes csoport feletti $I \times \Lambda$ -típusú, P szendvicsmátrixú) Rees-féle mátrixfélcsoportnak nevezzük.

Bizonyítás nélkül megemlítjük a következő tételt ([5]):

9.17. Tétel *Ugyanazon G csoport feletti, $\mathcal{M}^0(G; I, \Lambda; P)$ és $\mathcal{M}^0(G; I, \Lambda; P')$ Rees-féle mátrixfélcsoporthok izomorfak, ha létezik I -nek G -be egy $i \mapsto u_i$, valamint Λ -nak G -be egy $\lambda \mapsto v_\lambda$ leképezése úgy, hogy $p'_{\lambda i} = v_\lambda p_{\lambda i} u_i$ minden $i \in I$ és $\lambda \in \Lambda$ indexre teljesül, ahol $P = (p_{\lambda i})$ és $P' = (p'_{\lambda i})$.*

9.18. Definíció *Egy P szendvicsmátrixot regulárisnak nevezünk, ha minden sorában és minden oszlopában van legalább egy nem nulla elem.*

9.19. Tétel *Egy $S = \mathcal{M}^0(G; I, \Lambda; P)$ Rees-féle mátrixfélcsoport akkor és csak akkor reguláris, ha a P szendvicsmátrix reguláris.*

Bizonyítás. Legyen $S = \mathcal{M}^0(G; I, \Lambda; P)$ egy G^0 0-elemes csoport feletti $P = (p_{\lambda i})$ szendvicsmátrixú Rees-féle mátrixfélcsoport. Legyenek $a, b \in G$; $i, j \in I$; $\lambda, \mu \in \Lambda$ tetszőleges elemek. Akkor

$$(a)_{i\lambda} \circ (b)_{j\mu} \circ (a)_{i\lambda} = (ap_{\lambda j} b p_{\mu i} a)_{i\lambda}.$$

Ez a szorzat akkor és csak akkor egyenlő az $(a)_{i\lambda}$ elemmel, ha

$$p_{\lambda j} b p_{\mu i} = a^{-1}.$$

Adott $(a)_{i\lambda}$ elemhez akkor és csak akkor létezik ilyen $(b)_{j\mu}$ elem, ha $p_{\lambda j} \neq 0$ és $p_{\mu i} \neq 0$ teljesül valamely $j \in I$ és $\mu \in \Lambda$ indexekre; ez pedig akkor és csak akkor teljesül, ha a P szendvicsmátrix λ -adik sora és i -dik oszlopa is tartalmaz egy-egy G -beli (nem-nulla) elemet. Ebből már következik a tétel állítása. \square

9.20. Definíció *Ha egy G^0 feletti $\Lambda \times I$ -típusú reguláris $P = (p_{\lambda i})$ szendvicsmátrix esetén megadható olyan $\lambda_0 \in \Lambda$ és $i_0 \in I$ index, hogy minden $i \in I$ és minden $\lambda \in \Lambda$ esetén a $p_{\lambda i_0}$ és $p_{\lambda_0 i}$ elemek mindegyike vagy nulla vagy megegyezik a G csoport egységelemévé, akkor azt mondjuk, hogy a P szendvicsmátrix normált.*

9.21. Lemma *Minden reguláris $S = \mathcal{M}^0(G; I, \Lambda; P)$ Rees-féle mátrixfélcsoport izomorf egy olyan $S = \mathcal{M}^0(G; I, \Lambda; P')$ mátrixfélcsoporttal, amelyben szereplő P' szendvicsmátrix normált.*

Bizonyítás. Legyen $S = \mathcal{M}^0(G; I, \Lambda; P)$ egy Rees-féle mátrixfélcsoport. A 9.17. Tételben szereplő jelöléseket használva, legyen u_i ($i \in I$) a $p_{\lambda_0 i} \in G$ elem inverze, ha $p_{\lambda_0 i} \neq 0$, egyébként pedig legyen $u_i = e$ (e a G egységeleme); legyen továbbá $v_\lambda = e$ minden $\lambda \in \Lambda$ indexre. Legyen $Q = (q_{\lambda i})$ az a G^0 feletti $\Lambda \times I$ -típusú mátrix, melyben $q_{\lambda i} = v_\lambda p_{\lambda i} u_i$. Ebben a mátrixban $q_{\lambda_0 i} = p_{\lambda_0 i} (p_{\lambda_0 i})^{-1} = e$ vagy $q_{\lambda_0 i} = 0$, az u_i -től függően. A 9.17. Tétel szerint $\mathcal{M}^0(G; I, \Lambda; P)$ és $\mathcal{M}^0(G; I, \Lambda; Q)$ egymással izomorfak. Ugyanezt a gondolatmenetet alkalmazzuk Q -ra, valamely rögzített $i_0 \in I$ indexre, kapunk egy olyan G^0 feletti $\Lambda \times I$ -típusú P' mátrixot, amely normált, valamint $\mathcal{M}^0(G; I, \Lambda; Q)$ és $\mathcal{M}^0(G; I, \Lambda; P')$ egymással izomorfak. Ebből már következik a lemma állítása. \square

9.22. Tétel Legyen $S = \mathcal{M}^0(G; I, \Lambda; P)$ egy Rees-féle mátrixfélcsoport. Akkor a következő feltételek egymással ekvivalensek.

- (1) S 0-egyszerű.
- (2) S reguláris.
- (3) S teljesen 0-egyszerű.

Bizonyítás. Legyen $S = \mathcal{M}^0(G; I, \Lambda; P)$ egy Rees-féle mátrixfélcsoport. Tegyük fel, hogy S nem reguláris. Akkor a 9.19. Tétel szerint a P szendvicsmátrixnak van olyan sora vagy oszlopa, amelyben minden elem a nulla. Tegyük fel, hogy az i -dik oszlopra igaz az, hogy abban minden elem nulla. Könnyen ellenőrizhető, hogy

$$R_i^0 = \{(a)_{i\lambda} : a \in G, \lambda \in \Lambda\} \cup \{0\}$$

az S félcsoport nem-zéró nilpotens ideálja. Az az eset, amikor a P szendvicsmátrix λ -adik sora csupa nulla, hasonlóan kezelhető. Ebből az következik, hogy S nem 0-egyszerű. Tehát (1) implikálja (2)-t.

Tegyük fel, hogy S reguláris. Legyenek $(a)_{i\lambda}$ és $(b)_{j\mu}$ az S félcsoport tetszőleges elemei, ahol $a \neq 0$. A 9.19. Tétel szerint a P szendvicsmátrix i -dik oszlopában, illetve λ -dik sorában vannak olyan elemek, pl. $p_{\mu i}$ és $p_{\lambda v}$ elemek, amelyek nem egyenlők a nullelemmel. Legyen

$$c = b(p_{\mu i} a p_{\lambda v})^{-1}.$$

Jelölje e a G csoport egységelemét. Akkor

$$(c)_{j\mu} (a)_{i\lambda} (e)_{v\mu} = (b)_{j\mu},$$

és így

$$S(a)_{ij} S = S.$$

A 4.7. Tétel alapján ebből az következik, hogy S 0-egyszerű félcsoport. Tehát a (2) feltételből következik az (1) feltétel. Ez a bizonyítás előző részével együtt azt eredményezi, hogy az (1) és (2) feltételek egymással ekvivalensek.

A (3) feltételből következik az (1) és így a (2) feltétel. Elegendő már csak azt megmutatni, hogy a (2) feltételből következik a (3) feltétel. Tegyük fel tehát, hogy S reguláris. Könnyen belátható, hogy S nem-zéró idempotens elemei pontosan az

$$\epsilon_{i\lambda} = (p_{\lambda i}^{-1})_{i\lambda}$$

mátrixok. Mivel P reguláris, ezért S -nek van nem-zéró idempotens eleme. Legyenek $\epsilon_{i\lambda}$ és $\epsilon_{j\mu}$ az S olyan nem-zéró idempotens elemei, amelyekre

$$\epsilon_{i\lambda} \epsilon_{j\mu} = \epsilon_{j\mu} \epsilon_{i\lambda} = \epsilon_{j\mu}$$

teljesül. Akkor

$$(p_{\lambda i}^{-1} p_{\lambda j} p_{\mu j}^{-1})_{i\mu} = (p_{\mu j}^{-1} p_{\mu i} p_{\lambda i}^{-1})_{j\lambda} = (p_{\mu j}^{-1})_{j\mu},$$

amiből

$$i = j \quad \text{és} \quad \lambda = \mu$$

és így

$$e_{i\lambda} = e_{j\mu}$$

következik. Következésképpen S minden nem-zéró idempotens eleme primitív. Tehát S teljesen 0-egyszerű. Így a (3) feltétel teljesül. \square

A következőkben megmutatjuk, hogyan lehet Rees-féle félcsoportot konstruálni egy S félcsoport olyan \mathcal{D} -osztálya segítségével, amely osztálynak minden eleme reguláris.

Legyen D egy S félcsoport reguláris \mathcal{D} -osztálya. Jelölje

$$\{R_i : i \in I\}$$

és

$$\{L_\lambda : \lambda \in \Lambda\}$$

az S félcsoport D által tartalmazott \mathcal{R} -osztályainak, illetve \mathcal{L} -osztályainak halmazát. A D által tartalmazott \mathcal{H} -osztályok halmaza

$$\{H_{i\lambda} : i \in I, \lambda \in \Lambda\},$$

ahol

$$H_{i\lambda} = R_i \cap L_\lambda.$$

A 6.8. Tétel szerint D tartalmaz legalább egy idempotens elemet. Jelöljön e egy D -beli idempotens elemet. Jelölje H_{11} az e -t tartalmazó \mathcal{H} -osztályt, valamint R_1 , illetve L_1 az R_e , illetve L_e osztályokat; ezzel persze feltettük, hogy 1 az I -nek és a Λ -nek is eleme, de ez nem fog problémát okozni a továbbiakban. A 9.7. Tétel szerint H_{11} részcsoportja S -nek.

Tetszőleges $i \in I$, illetve tetszőleges $\lambda \in \Lambda$ indexekhez válasszunk ki egy

$$r_i \in H_{i1},$$

illetve egy

$$q_\lambda \in H_{1\lambda}$$

elemet. Ezek segítségével definiáljunk a H_{11}^0 nullelemes csoport feletti $\Lambda \times I$ -típusú $P = (p_{\lambda i})$ mátrixot a következőképpen:

$$p_{\lambda i} = \begin{cases} q_\lambda r_i, & \text{ha } q_\lambda r_i \in H_{11}, \\ 0 & \text{különben.} \end{cases}$$

Ennek a mátrixnak a segítségével képezzük az $\mathcal{M}^0(H_{11}; I, \Lambda; P)$ Rees-féle mátrixfél-csoportot. A 4.46. Tétel szerint $q_\lambda r_i \in H_{11}$ akkor és csak akkor teljesül, ha $H_{i\lambda}$ tartalmaz egy idempotens elemet. A 6.8. Tétel szerint tetszőleges $\lambda \in \Lambda$ index esetén L_λ tartalmaz egy idempotens elemet. Ez az idempotens elem benne van valamelyik R_i osztályban, és így benne van a $H_{i\lambda}$ osztályban. Az előbb említettek miatt ez azt jelenti, hogy a P mátrix λ -adik sorában tetszőleges λ esetén mindig van legalább egy nem nulla elem. Hasonló igaz az oszlopokra is. Tehát a P mátrix reguláris. A 9.19. Tétel szerint az $\mathcal{M}^0(H_{11}; I, \Lambda; P)$ Rees-féle mátrixfél-csoport reguláris, s ezért a 9.22. Tétel miatt $\mathcal{M}^0(H_{11}; I, \Lambda; P)$ teljesen 0-egyszerű.

Az előzőekben definiált $\mathcal{M}^0(H_{11}; I, \lambda; P)$ Rees-féle mátrixfél-csoport konstrukciójában szereplő H_{11} részcsoporthoz és az $r_i \in H_{i1}$, illetve $q_\lambda \in H_{1\lambda}$ elemek másképp való választásával más-más Rees-féle mátrixfél-csoportot kapunk. Megmutatható viszont, hogy ezek egymással izomorfak. Valójában azt fogjuk megmutatni, hogy mindegyikük izomorf a D osztály által a 4.47. Lemma előtt definiált $(T; *)$ fél-csoporttal.

9.23. Tétel *Legyen D egy S fél-csoport reguláris \mathcal{D} -osztálya, H_{11} a D egy részcsoporthoz és $r_i \in H_{i1}$, illetve $q_\lambda \in H_{1\lambda}$ tetszőleges elemek. Akkor D minden eleme egyértelműen kifejezhető $r_i a q_j$ ($a \in H_{11}$) alakban. Továbbá*

$$\phi((a)_{i\lambda}) = \begin{cases} r_i a q_\lambda, & \text{ha } a \neq 0, \\ 0, & \text{ha } a = 0 \end{cases}$$

az $\mathcal{M}^0(H_{11}; I, \lambda; P)$ Rees-féle mátrixfél-csoportnak a D osztály segítségével definiált 4.47. Lemmában szereplő $(T; *)$ fél-csoportra való izomorfizmusa.

Bizonyítás. Legyen $\lambda \in \Lambda$ tetszőleges. A 6.8. Tétel szerint a D által tartalmazott \mathcal{R} -osztályok, illetve \mathcal{L} -osztályok mindegyike tartalmaz idempotens elemet, ezért L_λ -ban is van idempotens elem; jelölje e_λ ezek egyikét. Legyen $k \in I$ az az index, amelyre

$$e_\lambda \in R_k$$

teljesül. Ekkor

$$e_\lambda \in H_{k\lambda}.$$

Legyen b a $H_{k1} = R_k \cap L_1$ \mathcal{H} -osztály tetszőleges eleme. A 6.11. Tétel (2) állítása szerint ez a \mathcal{H} -osztály akkor és csak akkor tartalmazza a $H_{1\lambda} = R_1 \cap L_\lambda$ korábban már kiválasztott q_λ elem valamely inverzét, ha $R_{q_\lambda} \cap L_b = R_1 \cap L_1 = H_{11}$ és $R_b \cap L_{q_\lambda} = R_k \cap L_\lambda = H_{k\lambda}$ mindegyike tartalmaz idempotens elemet. Mivel H_{11} részcsoporthoz és az e_λ idempotens elem a $H_{k\lambda}$ egy eleme, ezért $H_{k1} = R_k \cap L_1$ tartalmazza q_λ egy inverzét, mégpedig a 6.11. Tétel (3) állítása szerint pontosan egy inverzét. Jelölje q'_λ ezt az inverzet, e pedig a H_{11} csoport egységelemét. A 4.42. Tétel szerint e bal oldali egységeleme az $R_e = R_1 = R_{q_\lambda}$ osztálynak és így

$$e q_\lambda = q_\lambda.$$

Mivel $H_{k\lambda} = R_k \cap L_\lambda = R_{q'_\lambda} \cap L_{q_\lambda}$ tartalmazza az e_λ idempotens elemet, ezért a 4.46. Tétel szerint

$$q_\lambda q'_\lambda \in R_{q_\lambda} \cap L_{q'_\lambda} = R_1 \cap L_1 = H_{11},$$

és így

$$q_\lambda q'_\lambda = e,$$

mert $q_\lambda q'_\lambda$ idempotens eleme az e egységelemes H_{11} csoportnak (csoportnak viszont pontosan egy idempotens eleme van). Legyen $s = q_\lambda$ és $s' = q'_\lambda$. Akkor $es = q_\lambda$ és $q_\lambda s' = e$, mivel $eq_\lambda = q_\lambda$ és $q_\lambda q'_\lambda = e$. A 4.38. Tétel szerint az

$$x \mapsto xq_\lambda \ (x \in L_1) \quad \text{és} \quad y \mapsto yq'_\lambda \ (y \in L_\lambda)$$

L_1 -nek L_λ -ra, illetve L_λ -nak L_1 -re való olyan kölcsönösen egyértelmű, \mathcal{R} -osztály tartó leképezései, amelyek egymás inverzei.

Az előzőekhez hasonlóan, minden $i \in I$ indexhez van a korábban már kiválasztott $r_i \in H_{i1} = R_i \cap L_1$ elemnek R_1 -ben van olyan r'_i inverze, hogy az

$$x \mapsto r_i x \ (x \in R_1) \quad \text{és} \quad y \mapsto r'_i y \ (y \in R_i)$$

leképezések \mathcal{L} -osztály tartó, kölcsönösen egyértelmű leképezések, amelyek egymás inverzei. A 4.39. Tétel szerint

$$x \mapsto r_i x q_\lambda \ (x \in H_{11}) \quad \text{és} \quad y \mapsto r'_i y q'_\lambda \ (y \in H_{i\lambda})$$

minden $i \in I$ és $\lambda \in \Lambda$ indexre H_{11} -nek $H_{i\lambda}$ -ra, illetve $H_{i\lambda}$ -nak H_{11} -re való olyan kölcsönösen egyértelmű leképezései, amelyek egymás inverzei. Mivel minden D -beli elem pontosan egy $H_{i\lambda}$ osztálynak eleme, ezért a tételben definiált ϕ leképezés \mathcal{M}^0 -nak T -re való kölcsönösen egyértelmű leképezése. Ebből pedig már következik, hogy D minden eleme előáll a tételben megfogalmazott szorzatalakban egyértelműen.

Már csak annak igazolása van hátra, hogy ϕ művelettartó. Legyenek $a, b \in H_{11}$, $i, j \in I$ és $\lambda, \mu \in \Lambda$ tetszőleges elemek. Mivel

$$\phi((a)_{i\lambda} \circ (b)_{j\mu}) = \phi((ap_{\lambda j}b)_{i\mu})$$

és

$$\phi((a)_{i\lambda}) * \phi((b)_{j\mu}) = (r_i a q_\lambda) * (r_j b q_\mu),$$

ezért azt kell megmutatni, hogy

$$\phi((ap_{\lambda j}b)_{i\mu}) = (r_i a q_\lambda) * (r_j b q_\mu).$$

Vizsgáljuk először azt az esetet, amikor

$$p_{\lambda j} = 0.$$

Ekkor

$$\phi((ap_{\lambda_j}b)_{i\mu}) = \phi(0) = 0.$$

Tehát elegendő azt megmutatni, hogy

$$(r_i a q_\lambda) * (r_j b q_\mu) = 0$$

a $(T; *)$ félcsoportban. Mivel $p_{\lambda_j} = 0$, ezért a P szendvicsmátrix definíciója alapján

$$q_\lambda r_j \notin H_{11},$$

és ezért a 4.46. Tétel szerint $H_{j\lambda}$ nem tartalmaz idempotens elemet. Mivel

$$r_i a q_\lambda \in H_{i\lambda} \quad \text{és} \quad r_j b q_\mu \in H_{j\mu},$$

ezért a 4.46. Tétel miatt

$$r_i a q_\lambda r_j b q_\mu \notin H_{i\mu},$$

és ezért a T -n értelmezett $*$ művelet definíciója szerint

$$(r_i a q_\lambda) * (r_j b q_\mu) = 0$$

$(T; *)$ félcsoportban.

A bizonyítás hátralévő részében vizsgáljuk a

$$p_{\lambda_j} \neq 0$$

esetet. Ekkor

$$q_\lambda r_j \in H_{11},$$

és ezért a 4.46. Tétel szerint $H_{j\lambda}$ tartalmaz idempotens elemet. Mivel

$$r_i a q_\lambda \in H_{i\lambda} \quad \text{és} \quad r_j b q_\mu \in H_{j\mu},$$

Ezért a 4.46. Tétel miatt

$$r_i a q_\lambda r_j b q_\mu \in H_{i\mu},$$

és ezért a T -n értelmezett $*$ művelet definíciója szerint

$$(r_i a q_\lambda) * (r_j b q_\mu) = (r_i a q_\lambda)(r_j b q_\mu) = (r_i a p_{\lambda_j} b q_\mu) = \phi((a p_{\lambda_j} b)).$$

Tehát mindkét esetben

$$\phi((a p_{\lambda_j} b)_{i\mu}) = (r_i a q_\lambda) * (r_j b q_\mu). \quad \square$$

A következőkben a teljesen 0-egyszerű félcsoportokat jellemezzük a Ress-féle mátrix-félcsoportok segítségével.

Először bebizonyítjuk a következő tételt:

9.24. Tétel *Legyen S teljesen 0-egyszerű félcsoporth, és jelölje D az S félcsoporth 0-elemt nem tartalmazó (egyetlen) \mathcal{D} -osztályát. Akkor ezen \mathcal{D} -osztállyal megszerkesztett, közvetlenül a 4.47. Lemma előtt definiált $(T; *)$ félcsoporth izomorf az S félcsoporthtal.*

Bizonyítás. A 9.6. Tétel miatt az S félcsoporth 0-biegyszerű, azaz S -nek két \mathcal{D} -osztálya van: $\{0\}$ és $D = S \setminus \{0\}$. Így tulajdonképpen az S alaphalmaz azonosítható a $T = D \cup \{0\}$ halmazzal. Már csak azt kellene belátni, hogy tetszőleges $a, b \in S = T$ elemek esetén $ab = a * b$. Legyenek $a, b \in S = T$ tetszőleges elemek. Ha

$$ab \neq 0,$$

akkor a 9.7. Tétel szerint

$$ab \in R_a \cap L_b,$$

és így a $*$ művelet definíciója alapján

$$ab = a * b.$$

Ha

$$ab = 0,$$

akkor viszont

$$ab \notin R_a \cap R_b,$$

és ezért a $*$ művelet definíciója alapján

$$a * b = 0 = ab.$$

Tehát az $S = T$ halmazon az S -beli eredeti művelet megegyezik a $*$ művelettel. \square

Ezek után megfogalmazzuk és bebizonyítjuk a fejezet főtételeét.

9.25. Tétel (Rees-tétel) *Egy félcsoporth akkor és csak akkor teljesen 0-egyszerű, ha izomorf egy nullemes csoporth feletti reguláris Rees-féle mátrixfélcsoporthtal.*

Bizonyítás. Legyen S olyan félcsoporth, amely izomorf egy $\mathcal{M}^0(G; I, \Lambda; P)$ reguláris Rees-féle mátrixfélcsoporthtal. Akkor a 9.22. Tétel szerint S teljesen 0-egyszerű.

Fordítva, legyen S egy teljesen 0-egyszerű félcsoporth. A 9.6. Tétel szerint S egy 0-biegyszerű félcsoporth, és így

$$S = D \cup \{0\},$$

ahol D az S félcsoporth \mathcal{D} -osztálya. Mivel S teljesen 0-egyszerű, ezért D tartalmaz legalább egy idempotens elemet. Mivel egy idempotens elem reguláris, ezért a 6.8. Tétel miatt D minden eleme reguláris. Így megkonstruálhatunk D segítségével egy, az előzőekben tekintett $\mathcal{M}^0(H_{11}; I, \Lambda; P)$ Rees-féle mátrixfélcsoporthot és a vele izomorf $(T; *)$ félcsoporthot. A 9.24. Tétel szerint az S félcsoporth izomorf a $(T; *)$ félcsoporthtal. Így S izomorf az $\mathcal{M}^0(G; I, \Lambda; P)$ Rees-féle mátrixfélcsoporthtal. \square

9.26. Megjegyzés A Rees-féle mátrixfélcsoporthoz van egy másik fajta megközelítése. Egy G^0 nullelemes csoport, valamint I és Λ nem üres halmazok $G^0 \times I \times \Lambda$ Descartes-szorzatán értelmezzünk egy $*$ műveletet a következőképpen. Képezzünk a G^0 elemeiből egy $\Lambda \times I$ típusú $P = (p_{\lambda i})$ mátrixot, majd ennek felhasználásával tetszőleges $(g; i, \lambda)$ és $(h; j, \mu)$ elemhármassal esetén legyen

$$(g, i, \lambda) * (h, j, \mu) = (gp_{j\lambda}h, i, \mu).$$

Könnyen ellenőrizhető, hogy a $*$ művelet asszociatív. Az $S = (G^0 \times I \times \Lambda; *)$ félcsoporthoz $a(0, i, \lambda)$ alakú elemek egy ideált alkotnak; az S félcsoporthoz ezen ideál szerinti Rees-féle faktorfélcsoporthoz izomorf az $\mathcal{M}^0 = (G^0; I, \Lambda; P)$ Rees-féle mátrixfélcsoporthoz.

9.3. Teljesen egyszerű félcsoporthoz

A 4.8. Megjegyzés szerint, ha egy teljesen egyszerű félcsoporthoz egy nullelemet adjunk, akkor egy teljesen nulleges egyszerű félcsoporthoz kapunk. Továbbá, ha egy teljesen nulleges egyszerű félcsoporthoz nincs nullától különböző nullosztó, akkor a 0-elem elhagyásával egy teljesen egyszerű félcsoporthoz keletkezik. Egy $\mathcal{M}^0 = (G^0; I, \Lambda; P)$ Rees-féle mátrixfélcsoporthoz akkor és csak akkor nincs nullától különböző nullosztó, ha a P szendvicsmátrix egyetlen eleme sem nulla. Ha ez a helyzet, akkor az $\mathcal{M}^0 = (G^0; I, \Lambda; P)$ félcsoporthoz a nullelem elhagyásával keletkezett félcsoporthoz izomorf egy olyan $\mathcal{M} = (G; I, \Lambda; P)$ módon jelölt félcsoporthoz, amelynek alaphalmaza a $G \times I \times \Lambda$ halmaz, a művelet pedig a következőképpen van értelmezve:

$$(g; i, \lambda)(h; j, \mu) = (gp_{\lambda j}h; i, \mu).$$

9.27. Definíció Egy G csoport elemeiből képezett $\Lambda \times I$ típusú P mátrixszal megkonstruált $\mathcal{M} = (G; I, \Lambda; P)$ félcsoporthoz a G csoport feletti, P szendvicsmátrixú, $I \times \Lambda$ -típusú Rees-féle mátrixfélcsoporthoz nevezzük.

Az előző megjegyzés, valamint a Rees-tétel alapján kimondható a következő tétel.

9.28. Tétel Egy félcsoporthoz akkor és csak akkor teljesen egyszerű, ha izomorf egy csoport feletti Rees-féle mátrixfélcsoporthoz.

9.29. Tétel Minden teljesen egyszerű félcsoporthoz gyengén redukálható.

Bizonyítás. Legyen S teljesen egyszerű félcsoporthoz. Akkor a 9.28. Tétel szerint S izomorf egy G csoport feletti Rees-féle mátrixfélcsoporthoz. Jelölje $(a, i, \lambda); (b, j, \mu)$ az S két tetszőleges elemét. Tegyük fel, hogy

$$(a, i, \lambda)(x, t, \tau) = (b, j, \mu)(x, t, \tau)$$

és

$$(x, t, \tau)(a, i, \lambda) = (x, t, \tau)(b, j, \mu)$$

teljesül az S félcsoport minden (x, t, τ) elemére. Ekkor

$$(ap_{\lambda t}x, i, \tau) = (bp_{\mu t}x, j, \tau)$$

és

$$(xp_{\tau i}a, t, \lambda) = (xp_{\tau j}b, t, \mu),$$

amiből

$$i = j, \quad \lambda = \mu$$

valamint

$$ap_{\mu t}x = ap_{\lambda t}x = bp_{\mu t}x$$

következik. Mivel a, b, x és $p_{\mu t}$ a G csoport elemei, ezért az utolsó egyenlőségből

$$a = b$$

következik. Tehát

$$(a, i, \lambda) = (b, j, \mu).$$

Következésképpen S gyengén redukzív. □

Bizonyítás nélkül közöljük a következő tételt.

9.30. Tétel *Legyen $S = \mathcal{M}(G; I, J; P)$ egy $P = (p_{j,i})$ szendvicsmátrixú G csoport feletti Rees-féle mátrixfélcsoport (azaz, S egy teljesen egyszerű félcsoport). Jelölje \mathcal{T}_I , illetve \mathcal{T}_J az I (balról ható), illetve J (jobbról ható) összes transzformációinak félcsoportját. Akkor*

$$\Omega(S) = \{(k, a, h) \in \mathcal{T}_I \times G \times \mathcal{T}_J : (\forall i \in I, j \in J) p_{j,k(i)}ap_{(j_0)h,i} = p_{j,k(i_0)}ap_{(j)h,i}\}.$$

Az $\Omega(S)$ tetszőleges (k, a, h) és (f, b, g) elemeinek szorzata a következő:

$$(k, a, h)(f, b, g) = (k \circ f, ap_{(j_0)h,f(i_0)}b, h \circ g).$$

Egy $(k, a, h) \in \Omega(S)$ elem akkor és csak akkor belső bitranszláció, ha k and h konstans transzformációk. Azonosítva S -et $\Omega(S)$ belső részével, tetszőleges $(k, a, h) \in \Omega(S)$ és $(g; i, j) \in S$ elemek esetén

$$(k, a, h)(g; i, j) = (ap_{k(j_0),i}g; k(i), j),$$

$$(g; i, j)(k, a, h) = (gp_{j,(i_0)h}a; i, (j)h).$$

9.4. Brandt-félcsoportok

Mint ahogy azt már korábban definiáltuk (5.3. Definíció), egy nem üres A halmaz esetén az $A \times A$ halmaz valamely nem üres részhalmazának A -ba való egyértelmű leképezését az A halmazon értelmezett parciális műveletnek nevezzük. Egy parciális művelettel ellátott halmazt parciális grupoidnak nevezünk.

9.31. Definíció *Brandt-grupoidon olyan B parciális grupoidot értünk, amelyre teljesülnek az alábbiak:*

(B1) *Ha $ab = c$ ($a, b, c \in B$) akkor a három elem bármelyike egyértelműen meg van határozva a másik kettő által.*

(B2) *B tetszőleges a, b, c elemeire teljesülnek az alábbiak:*

(1) *Ha ab és bc definiálva vannak, akkor $(ab)c$ és $a(bc)$ is definiálva vannak, és $(ab)c = a(bc)$.*

(2) *Ha ab és $(ab)c$ definiálva vannak, akkor bc és $a(bc)$ is definiálva vannak, és $(ab)c = a(bc)$.*

(3) *Ha bc és $a(bc)$ definiálva vannak, akkor ab és $(ab)c$ is definiálva vannak, és $(ab)c = a(bc)$.*

(B3) *B tetszőleges a eleméhez egyértelműen léteznek olyan B -beli e, f és a' elemek, amelyekre $ea = af = a$ és $a'a = f$ teljesülnek.*

(B4) *Ha e és f B -nek olyan elemei, amelyekre $e^2 = e$, illetve $f^2 = f$ teljesül, akkor létezik olyan B -beli a elem, hogy $ea = af = a$.*

9.32. Lemma *Legyen B egy parciális grupoid. Jelöljön 0 egy olyan szimbólumot, amely nem reprezentál egyetlen B -beli elemet sem. Az $S = B^0 = B \cup \{0\}$ halmazon definiáljunk egy \circ műveletet a következőképpen ($a, b \in B$):*

$$a \circ b = \begin{cases} ab, & \text{ha } ab \text{ definiálva van } B\text{-ben,} \\ 0 & \text{egyébként;} \end{cases}$$

továbbá

$$a \circ 0 = 0 \circ a = 0 \circ 0 = 0.$$

$S = B^0$ akkor és csak akkor alkot félcsoportot a \circ műveletre nézve, ha B teljesíti a 9.31. Definíció (B2)(2) és (B2)(3) feltételeit.

Bizonyítás. Tegyük fel, hogy egy B parciális grupoid teljesíti a 9.31. Definíció (B2)(2) és (B2)(3) feltételeit. Legyenek

$$a, b, c \in B^0$$

tetszőleges elemek. Ha ezen elemek valamelyike egyenlő a 0 elemmel, akkor

$$a \circ (b \circ c) = 0 = (a \circ b) \circ c.$$

A továbbiakban tehát feltehetjük, hogy

$$a, b, c \in B.$$

Ha

$$a \circ (b \circ c) \neq 0,$$

akkor

$$b \circ c \neq 0,$$

amiből a \circ művelet definíciója miatt következik, hogy a bc és $a(bc)$ szorzatok definiálva vannak B -ben és

$$bc = b \circ c,$$

valamint

$$a(bc) = a \circ (b \circ c).$$

A 9.31. Definíció (B2)(3) feltétele szerint B -ben definiálva vannak az ab és $(ab)c$ szorzatok, és

$$(ab)c = a(bc).$$

A \circ művelet definíciója alapján

$$ab = a \circ b$$

és

$$(ab)c = (a \circ b) \circ c.$$

Így

$$a \circ (b \circ c) = a(bc) = (ab)c = (a \circ b) \circ c.$$

Hasonlóan igazolható az

$$a \circ (b \circ c) = a(bc) = (ab)c = (a \circ b) \circ c$$

egyenlőség teljesülése az $(a \circ b) \circ c \neq 0$ esetben. Még az $a \circ (b \circ c) = 0$ és $(a \circ b) \circ c = 0$ eset tárgyalása van hátra, de ekkor az

$$a \circ (b \circ c) = (a \circ b) \circ c$$

egyenlőség nyilvánvalóan teljesül, hiszen mindkét oldali kifejezés egyenlő a 0 elemmel.

Fordítva, tegyük fel, hogy $S = B^0$ félcsoport a tételben definiált \circ műveletre nézve. Legyenek $a, b, c \in B$ tetszőleges elemek. Tegyük fel, hogy a bc és $a(bc)$ szorzatok definiálva voltak az B -n értelmezett eredeti parciális művelet szerint. Akkor

$$b \circ c = bc$$

és

$$a \circ (b \circ c) = a(bc).$$

A \circ művelet asszociativitása miatt

$$(a \circ b) \circ c = a \circ (b \circ c).$$

Ebből viszont az következik, hogy

$$(a \circ b) \circ c \neq 0,$$

és persze az is, hogy

$$a \circ b \neq 0.$$

A \circ művelet definíciója alapján ez azt jelenti, hogy ab és $(ab)c$ szorzatok értelmezve vannak B -ben és

$$\begin{aligned} ab &= a \circ b, \\ (ab)c &= (a \circ b) \circ c. \end{aligned}$$

A \circ művelet asszociativitása miatt

$$(ab)c = a(bc)$$

is következik. Tehát a (B2)(3) feltétel teljesül. Hasonlóan igazolható a (B2)(2) feltétel B -ben való teljesülése. \square

9.33. Definíció *Egy B Brandt-gruppoidból az előző lemma szerint származtatott $S = B^0$ félcsoportot Brandt-félcsoportnak nevezzük. Egy kicsit részletesebben: Brandt-félcsoporton egy olyan 0-elemes S félcsoportot értünk, amely teljesíti a következő feltételek mindegyikét:*

- (A1) *Ha a, b és c az S olyan elemei, amelyekre $ac = bc \neq 0$ vagy $ca = cb \neq 0$ teljesül, akkor $a = b$.*
- (A2) *Ha a, b és c az S olyan elemei, amelyekre $ab \neq 0$ és $bc \neq 0$ teljesülnek, akkor $abc \neq 0$ is teljesül.*

(A3) Az S tetszőleges $a \neq 0$ eleméhez létezik egy és csak egy olyan $e \in S$ elem, melyre $ea = a$ teljesül, egy és csak egy olyan $f \in S$ elem, amelyre $af = a$ teljesül, valamint egy és csak egy olyan $a' \in S$ elem, amelyre $a'a = f$ teljesül (e -t az a bal oldali egységelemének, f -et az a jobb oldali egységelemének, a' -t pedig az a inverzének is szokták nevezni).

(A4) Ha e és f a nullelemtől különböző idempotens elemek, akkor $eSf \neq \{0\}$.

Megjegyezzük, hogy a fenti definícióban szereplő feltételek nem függetlenek. Bebizonyítható, hogy az (A1) és (A2) feltételek az (A3) feltételből következnek. Így érvényes a következő tétel.

9.34. Tétel A 9.33. Definícióban szereplő (A1) és (A2) feltételek az (A3) feltétel következményei, így egy 0-elemes S félcsoport akkor és csak akkor Brandt félcsoport, ha teljesíti a 9.33. Definícióban szereplő (A3) és (A4) feltételeket.

Bizonyítás. Tegyük fel, hogy egy 0-elemes S félcsoport teljesíti az (A3) feltételt. Ahhoz, hogy megmutassuk az (A1) és (A2) feltételek teljesülését, először néhány előkészítő részeredményt bizonyítunk. Legyen $a \in S$ tetszőleges elem. Jelölje e az a bal oldali egységelemét, f pedig az a jobb oldali egységelemét. Jelölje a' az a inverzét. Ekkor $ea = a$, $af = a$ és $a'a = f$. Megmutajuk, hogy a következő egyenlőségek is teljesülnek:

$$e^2 = e, \quad f^2 = f, \quad fa' = a'e = a', \quad aa' = e. \quad (9.1)$$

Mivel az $ea = a$ feltételből

$$e^2a = e(ea) = ea = a$$

következik, ezért

$$e^2 = e, \quad (9.2)$$

mert az a bal oldali egységeleme egyértelműen meghatározott. Hasonlóan igazolható, hogy

$$f^2 = f. \quad (9.3)$$

Mivel

$$a = af = a(a'a) = (aa')a,$$

ezért

$$aa' = e, \quad (9.4)$$

ugyancsak az a bal oldali egységelemének egyértelmű létezése miatt. Az

$$(a'e)a = a'(ea) = a'a = f$$

teljesüléséből

$$a'e = a' \quad (9.5)$$

adódik az a elem inverzének egyértelmű létezése miatt. Ez azt jelenti, hogy e az a' elem jobb oldali egységeleme. Hasonlóan igazolható, hogy

$$fa' = a', \quad (9.6)$$

és így f az a' elem bal oldali egységeleme. Mivel (a fentiek szerint) $aa' = e$, ezért a az a' elem inverze, azaz

$$(a')' = a. \quad (9.7)$$

A bizonyítás következő részében megmutatjuk, hogy S tetszőleges e és f idempotens elemei esetén az $ef \neq 0$ feltételből $e = f$ következik. Legyen tehát e és f az S két idempotens eleme. Tegyük fel, hogy

$$ef \neq 0.$$

Legyen

$$a = ef.$$

Akkor $ea = a$ és $af = a$. Legyen a' az a elem inverze, azaz az S azon egyértelműen meghatározott eleme, amelyre $a'a = f$ teljesül. A (9.4) és a (9.6) eredmények miatt

$$e = aa' = (ef)a' = e(fa') = ea',$$

amiből

$$a' = e$$

következik, hiszen az e elemnek önmaga az egyértelműen meghatározott jobb oldali egységeleme, itt viszont azt kaptuk eredményül, hogy a' is jobb oldali inverze e -nek. Ekkor viszont (felhasználva (9.7)-t is)

$$a = (a')' = e' = e$$

következik. Mivel

$$ee = e = a = ef,$$

ezért

$$e = f.$$

Az eddigi eredmények felhasználásával a következőkben bebizonyítjuk, hogy valamely $a, b \in S$ elemek esetén $ab \neq 0$ akkor és csak akkor teljesül, ha az a elem jobb oldali egységeleme megegyzik a b elem bal oldali egységelemével. Tekintsünk tehát két S -beli a és b elemet. Jelölje f az a jobb oldali egységelemét, e pedig a b bal oldali egységelemét. Tegyük fel, hogy

$$ab \neq 0.$$

(A 9.2) és (9.3) egyenlőségek miatt

$$e^2 = e, \quad f^2 = f.$$

Mivel

$$0 \neq ab = (af)(eb) = a(fe)b,$$

ezért

$$fe \neq 0.$$

A bizonyítás előző részének eredményét használva,

$$e = f.$$

Fordítva, tegyük fel, hogy

$$e = f.$$

Akkor

$$f = f^2 = fe = (a'a)(bb') = a'(ab)b',$$

és így

$$ab \neq 0.$$

A bizonyítás következő részében most már megmutatjuk, hogy teljesül az (A1) feltétel. Ehhez tegyük fel, hogy

$$ac = bc \neq 0$$

valamely $a, b, c \in S$ elemekre. Az előzőek miatt a c elem e bal oldali egységeleme megegyezik az a és b elemek jobb oldali egységelemével. Ha c' jelöli a c elem inverzét, akkor

$$cc' = e,$$

és így

$$a = ae = a(cc') = (ac)c' = (bc)c' = b(cc') = be = b.$$

Hasonlóan igazolható, hogy a $ca = cb \neq 0$ feltételből $a = b$ következik.

A bizonyítás hátralévő részében megmutatjuk, hogy az (A2) feltétel is teljesül. Legyenek $a, b, c \in S$ olyan elemek, amelyek esetén

$$ab \neq 0 \quad \text{és} \quad bc \neq 0.$$

Ekkor (az előzőeknek megfelelően) az a elem jobb oldali egységeleme megegyezik a b elem bal oldali egységelemével, ami jól láthatóan az bc szorzatnak is bal oldali egységeleme. Így

$$a(bc) \neq 0. \quad \square$$

Bizonyítás nélkül közöljük az alábbi tételt (lásd az [5] könyv Theorem 3.9 tételét).

9.35. Tétel *Egy 0-elemes S félcsoporton az alábbi feltételek egymással ekvivalensek.*

- (1) S egy Brandt félcsoport.
- (2) S egy teljesen 0-egyszerű inverz félcsoport.
- (3) S izomorf egy olyan reguláris $\mathcal{M}^0 = (G^0; I, I; E)$ Rees-féle mátrixfélcsoporttal, amely az $I \times I$ típusú E egységmátrixszal van definiálva.

Feladatok

9.1. (Megoldás: 17.27.) Mutassuk meg, hogy egy L balzéró félcsoporth és egy R jobbzeró félcsoporth $L \times R$ direkt szorzata teljesen egyszerű!

9.2. (Megoldás: 17.28.) Mutassuk meg, hogy két félcsoporth direkt szorzata akkor és csak akkor teljesen egyszerű, ha mindkét félcsoporth teljesen egyszerű!

9.3. (Megoldás: 17.29.) Mutassuk meg, hogy egy teljesen 0-eyszerű félcsoporth minden 0-tól különböző idempotens eleme primitív!

10. fejezet

Félcsoportok félháló-felbontása

10.1. Definíció Legyen \mathcal{C} félcsoportok egy osztálya. Egy S félcsoport valamely σ kongruenciáját \mathcal{C} -kongruenciának nevezzük, ha az S/σ faktorfélcsoport benne van \mathcal{C} -ben; az ehhez tartozó partíciót az S félcsoport \mathcal{C} -felbontásának nevezzük. Ha σ a legszűkebb \mathcal{C} -kongruencia (ha létezik ilyen), akkor a hozzá tartozó partíciót S legbővebb \mathcal{C} -felbontásának nevezzük, s az S/σ faktorfélcsoportról azt mondjuk, hogy az S legbővebb \mathcal{C} -homomorf képe.

10.2. Megjegyzés Az világos, hogy ha \mathcal{V} félcsoportoknak tetszőleges varietása, akkor az S -en értelmezett \mathcal{V} -kongruenciák metszete is \mathcal{V} -kongruencia, s így létezik S -nek legszűkebb \mathcal{V} -kongruenciája, azaz legbővebb \mathcal{V} -felbontása. Megemlítjük, hogy félcsoportok egy \mathcal{V} osztályát varietásnak nevezzük, ha megadható azonosságoknak olyan \mathcal{I} családja, hogy \mathcal{V} mindazon félcsoportokból áll, amelyek teljesítik az \mathcal{I} -ben lévő azonosságok mindegyikét.

10.1. Félcsoportok legszűkebb félháló-kongruenciája

Mint ahogy azt már korábban definiáltuk (1.38. Definíció), ha egy S félcsoport minden eleme idempotens, akkor az S félcsoportot kötegnek nevezzük. Egy kommutatív kötegre azt mondjuk, hogy félháló. Mivel tetszőleges félcsoportban igaz, hogy akármennyi félháló-kongruencia metszete is félháló-kongruencia, ezért minden félcsoportnak létezik legszűkebb félháló-kongruenciája. Ebben a fejezetben megkonstruáljuk tetszőleges félcsoport legszűkebb félháló-kongruenciáját.

10.3. Definíció Egy félcsoportot félháló-felbonthatatlannak nevezünk, ha az univerzális relációja az egyetlen félháló-kongruenciája.

A következőkben megmutatjuk, hogy minden félcsoport felbontható félháló-felbonthatatlan félcsoportok félhálójára.

Legyen S egy félcsoporth. Jelölje σ az S félcsoporth azon binér relációját, amely szerint az S félcsoporth a és b elemeire $(a, b) \in \sigma$ akkor és csak akkor teljesül, ha a osztja a b elem valamelyik hatványát, azaz megadható olyan m pozitív egész szám, illetve megadhatók olyan $x, y \in S^1$ elemek, amelyekre

$$xay = b^m$$

teljesül. Az világos, hogy σ reflexív reláció. Jelölje ϱ a σ reláció tranzitív lezártját, azaz az S félcsoporth azon relációját, amely szerint az S félcsoporth valamely a és b elemére az $(a, b) \in \varrho$ feltétel akkor és csak akkor teljesül, ha megadható az S elemeinek olyan

$$a = a_0, a_1, \dots, a_n = b$$

sorozata, amelyben szereplő a_i ($i = 0, 1, \dots, n-1$) elemek mindegyikére teljesül, hogy

$$(a_i, a_{i+1}) \in \sigma.$$

10.4. Lemma *Egy S félcsoporth tetszőleges a és b elemei, valamint akármilyen m pozitív egész szám esetén $a^m b^m \varrho ab \varrho ba$.*

Bizonyítás. A bizonyítást az m -re vonatkozó teljes indukcióval végezzük. Legyen S félcsoporth, a és b pedig tetszőleges S -beli elemek. Mivel

$$\sigma \subseteq \varrho$$

és

$$(x^2, x) \in \sigma$$

minden $x \in S$ elemre, ezért (a σ definíciója miatt)

$$ab \sigma baba = (ba)^2 \sigma ba.$$

Tehát az állítás igaz $m = 1$ -re:

$$ab \varrho ba. \tag{10.1}$$

Tegyük fel, hogy $m > 1$ és az állítás igaz minden m -nél kisebb kitevőre. Akkor az indukciós feltétel és az előzőekben nyert (10.1) eredmény felhasználásával adódik, hogy tetszőleges $a, b \in S$ elemek esetén

$$\begin{aligned} a^m b^m &= a(a^{m-1}b^m) \varrho (a^{m-1}b^m)a \sigma (a^{m-1}b^m)^2 \sigma (a^{m-1}b^m) = \\ &= (a^{m-1}b^{m-1})b \varrho b(a^{m-1}b^{m-1}) \sigma (a^{m-1}b^{m-1})^2 \sigma (a^{m-1}b^{m-1}) \varrho ab \varrho ba. \end{aligned}$$

Tehát

$$a^m b^m \varrho ab \varrho ba. \quad \square$$

10.5. Lemma Ha $(a, b) \in \sigma$ teljesül egy S félcsoporth valamely a és b elemei esetén, akkor tetszőleges $c \in S$ elemre $(ca, cb) \in \varrho$ és $(ac, bc) \in \varrho$.

Bizonyítás. Tegyük fel, hogy $(a, b) \in \sigma$ teljesül egy S félcsoporth valamely a és b elemei esetén. Akkor léteznek olyan S^1 -beli x és y elemek, valamint megadható olyan m pozitív egész szám, hogy

$$xay = b^m.$$

Legyen $c \in S$ tetszőleges elem. Akkor a 10.4. Lemma szerint

$$ca \sigma (ayc)^2 \sigma ayc \sigma (c^m xay)^2 \sigma c^m xay = c^m b^m \varrho cb.$$

Ebből már adódik

$$(ca, cb) \in \varrho.$$

Így

$$ac \varrho ca \varrho cb \varrho bc. \quad \square$$

Legyen λ az S félcsoporth azon relációja, amely szerint az S félcsoporth a és b elemeire $(a, b) \in \lambda$ akkor és csak akkor teljesül, ha $(a, b) \in \varrho$ és $(b, a) \in \varrho$.

10.6. Tétel Tetszőleges S félcsoporth esetén a λ reláció az S félcsoporth legszűkebb félhálókongruenciája. A λ -osztályok félháló-felbonthatatlan félcsoporthok.

Bizonyítás. Az világos, hogy λ az S félcsoporth egy ekvivalenciarelációja. Mivel ϱ a σ tranzitív lezártja, ezért a 10.5. Lemma szerint ϱ balról kompatibilis és jobbról kompatibilis az S -beli műveletre nézve. Így λ is rendelkezik ezekkel a tulajdonságokkal. Következésképpen λ az S félcsoporth egy kongruenciája (használva a 2.22. Tételt is). Mivel

$$(x, x^2) \in \sigma \quad \text{és} \quad (x^2, x) \in \sigma$$

tetszőleges $x \in S$ elem esetén, ezért λ köteg-kongruencia, azaz

$$(x, x^2) \in \lambda$$

minden $x \in S$ elem esetén. A 10.4. Lemma alapján viszont világos, hogy λ kommutatív kongruencia. Tehát λ az S félcsoporth félháló-kongruenciája.

Legyen ξ az S félcsoporth tetszőleges félháló-kongruenciája. Legyen $Y = S/\xi$. Definiáljunk az S félcsoporthon egy $<_\xi$ relációt a következőképpen: $x <_\xi y$ akkor és csak akkor, ha $x \in S_\alpha$, $y \in S_\beta$ ($\alpha, \beta \in Y$) és $\alpha \leq \beta$ (azaz, $\alpha\beta = \beta$). Az így definiált $<_\xi$ relációra teljesül, hogy

$$(x, y) \in \xi \quad \longleftrightarrow \quad x <_\xi y \quad \text{és} \quad y <_\xi x.$$

Megjegyezzük azt is, hogy az $(x, y) \in \sigma$ feltétel maga után vonja $x <_{\xi} y$ teljesülését. Így az $(a, b) \in \varrho$ feltételből $a <_{\xi} b$ következik. Tegyük fel, hogy

$$(a, b) \in \lambda$$

teljesül az S félcsoport valamely a és b elemeire. Akkor

$$a <_{\xi} b \quad \text{és} \quad b <_{\xi} a,$$

amiből

$$(a, b) \in \xi$$

következik. Tehát

$$\lambda \subseteq \xi.$$

Ez éppen azt bizonyítja, hogy λ az S félcsoport legszűkebb félháló-kongruenciája.

Legyen S_{α} az S félcsoport egy λ -osztálya. Mivel S/λ elemei idempotensek, ezért S_{α} félcsoport. Megmutatjuk, hogy S_{α} félháló-felbonthatatlan. Legyenek $a, b \in S_{\alpha}$ tetszőleges elemek. Mivel $(a, b) \in \lambda$, ezért van az S elemeinek olyan

$$a = a_0, \dots, a_k = b = b_0, \dots, b_t = a$$

sorozata, amelyben minden elem (az utolsót nem számítva) osztja a következő valamely hatványát, azaz

$$x_{i-1}a_{i-1}y_{i-1} = a_i^{m_i} \quad (i = 1, \dots, k)$$

és

$$z_{j-1}b_{j-1}u_{j-1} = b_j^{n_j} \quad (j = 1, \dots, t)$$

teljesül alkalmas $m_i, n_j \geq 1$ pozitív egész számokra és $x_i, y_i, z_j, u_j \in S$ elemekre. Így

$$a_0 <_{\lambda} \dots <_{\lambda} a_k <_{\lambda} b_1 <_{\lambda} \dots <_{\lambda} b_t,$$

amiből

$$a \lambda b \lambda a_i \lambda b_j$$

következik minden $i = 1, \dots, k; j = 1, \dots, t$ indexre. Ez azt jelenti, hogy a fenti sorozatban szereplő a_i és b_j elemek mindegyike benne van S_{α} -ban. Az

$$x_{i-1}a_{i-1}y_{i-1} = a_i^{m_i}$$

egyenlőségből

$$(a_i x_{i-1}) a_{i-1} (y_{i-1} a_i) = a_i^{m_i+2}$$

következik. Megjegyezzük, hogy mivel

$$a_i <_{\lambda} a_i x_{i-1} <_{\lambda} a_i^{m_i+2},$$

ezért

$$a_i x_{i-1}, y_{i-1} a_i \in S_\alpha.$$

Hasonlóan igazolható, hogy

$$b_j y_{j-1}, u_{j-1} b_j \in S_\alpha.$$

Jelölje σ_α , ϱ_α , illetve λ_α az S_α félcsoporton definiált σ , ϱ , illetve λ relációkat. Az előzőekből következően

$$a_{i-1} \sigma_\alpha a_i \quad (i = 1, \dots, k)$$

és

$$b_{j-1} \sigma_\alpha b_j \quad (j = 1, \dots, t).$$

Így

$$a \varrho_\alpha b, \quad b \varrho_\alpha a.$$

Következésképpen

$$a \lambda_\alpha b.$$

Tehát λ_α az S_α félcsoport univerzális relációja. Mivel λ_α az S_α félcsoport legszűkebb félháló-kongruenciája, ezért S_α -nak csak egyetlen félháló-kongruenciája van, az univerzális reláció. Ez pedig éppen azt jelenti, hogy S_α félháló-felbonthatatlan. \square

10.7. Következmény Minden félcsoport felbontható félháló-felbonthatatlan félcsoportok félhálójára.

Bizonyítás. A 10.6. Tétel alapján nyilvánvaló. \square

10.8. Következmény Egy S félcsoport akkor és csak akkor félháló-felbonthatatlan, ha tetszőleges $a, b \in S$ elemek esetén megadható S elemeinek egy olyan

$$a = a_0, \dots, a_n = b$$

sorozata, amely esetén az a_{i-1} elem osztja az a_i elem valamelyik hatványát ($i = 1, \dots, n$).

Bizonyítás. Az állítás a 10.6. Tétel következménye. \square

10.2. Arkhimédieszi félcsoportok félhálója

10.9. Definíció Egy S félcsoportot arkhimédieszi félcsoportnak nevezünk, ha bármely két elemét véve, mindegyik osztója a másik egy alkalmas hatványának.

10.10. Lemma Minden arkhimédieszi félcsoport félháló-felbonthatatlan.

Bizonyítás. A 10.8. Következmény szerint nyilvánvaló. \square

10.11. Következmény Minden egyszerű félcsoport félháló-felbonthatatlan.

Bizonyítás. Mivel a 4.2. Tétel szerint egy félcsoport akkor és csak akkor egyszerű, ha tetszőleges a eleme esetén $SaS = S$, ezért minden egyszerű félcsoport arkhimédeszi. Így a 10.10. Lemma miatt igaz az állítás. \square

10.12. Definíció Egy S félcsoportot bal (jobb) Putcha-félcsoportnak nevezünk, ha minden $x, y \in S$ elem esetén az $y \in xS^1$ ($y \in S^1x$) feltételből $y^m \in x^2S^1$ ($y^m \in S^1x^2$) következik valamely m pozitív egész számmal.

Egy S félcsoportot Putcha-félcsoportnak nevezünk, ha minden $x, y \in S$ elem esetén az $y \in S^1xS^1$ feltételből $y^m \in S^1x^2S^1$ következik valamely m pozitív egész számmal.

10.13. Lemma S akkor és csak akkor bal (jobb) Putcha-félcsoport, ha tetszőleges $x, y \in S$ elemekhez és tetszőleges n pozitív egész számhoz megadható olyan m pozitív egész szám, amelyre $(xy)^m \in x^nS^1$ ($(xy)^m \in S^1y^n$) teljesül.

Bizonyítás. Legyen S egy bal Putcha-félcsoport. Mivel $xy \in xS^1$, ezért megadható olyan t pozitív egész szám, amelyre

$$(xy)^t \in x^2S^1$$

teljesül. Ebből viszont az következik, hogy minden k pozitív egész számhoz van olyan p pozitív egész szám, hogy

$$(xy)^p \in x^{2^k}S^1.$$

Legyen n tetszőleges pozitív egész szám. Tegyük fel, hogy

$$2^k \geq n.$$

Akkor

$$(xy)^m \in x^nS^1 \subseteq x^{2^k}S^1$$

teljesül valamely m pozitív egész számra.

Fordítva, tegyük fel, hogy egy S félcsoport teljesíti azt a feltételt, hogy tetszőleges $x, y \in S$ elemekhez és tetszőleges n pozitív egész számhoz megadható olyan m pozitív egész szám, amelyre

$$(xy)^m \in x^nS^1$$

teljesül. Tegyük fel, hogy

$$y \in xS^1$$

valamely $x, y \in S$ elemekre. Ekkor

$$y^2 = xu,$$

ahol u az S valamely eleme. Ha alkalmazzuk az S -re vonatkozó feltételünket $n = 2$ esetre, akkor megadható olyan m pozitív egész szám, amelyre

$$y^{2m} = (xu)^m \in x^2S^1.$$

Ez viszont azt jelenti, hogy S bal Putcha-félcsoport. A jobb Putcha-félcsoportokkal kapcsolatos állítás bizonyítása a bal oldali esethez hasonló. \square

10.14. Lemma *Minden bal (jobb) Putcha-félcsoport egyben egy Putcha-félcsoport.*

Bizonyítás. Legyen S egy bal Putcha-félcsoport. Legyenek $a, b \in S$ tetszőleges elemek a

$$b \in S^1 a S^1$$

feltétellel, azaz

$$b = xay$$

valamely $x, y \in S^1$ elemekkel. Feltehetjük, hogy az x és y elemek valamelyike S -ben van, mert $a = b$ -re az állítás igaz. Akkor viszont a **10.13.** Lemma szerint megadható olyan m pozitív egész szám, hogy

$$(a(yx))^m \in a^2 S^1.$$

Ebből viszont

$$b^{m+1} = (xay)^{m+1} = x(ayx)^m ay \in S^1 a^2 S^1$$

adódik. Tehát S Putcha-félcsoport. A jobb oldali eset bizonyítása a bal oldali esethez hasonlóan bizonyítható. \square

10.15. Tétel *Egy S félcsoport akkor és csak akkor bontható fel arkhimédeszi félcsoportok félhálójára, ha S Putcha-félcsoport. Ebben az esetben a félháló-felbontásnak megfelelő legszűkebb félháló-kongruencia a következő:*

$$\eta = \{(a, b) \in S \times S : (\exists m, n \in \mathbb{N}^+) a^m \in SbS, b^n \in SaS\}.$$

Bizonyítás. Legyen S egy Putcha-félcsoport. Legyen η a tételbeli reláció. Világos, hogy η az S reflexív és szimmetrikus relációja. (Megjegyezzük, hogy η tetszőleges S félcsoport esetén reflexív és szimmetrikus.) Megmutajuk, hogy η tranzitív is S -en. Legyenek $a, b, c \in S$ tetszőleges elemek az

$$(a, b) \in \eta$$

és

$$(b, c) \in \eta$$

feltétellel. Ez azt jelenti, hogy

$$a^m \in SbS, \quad b^n \in SaS$$

és

$$b^t \in ScS, \quad c^k \in SbS$$

teljesül valamely m, n, t, k pozitív egész számokkal. Mivel S Putcha-félcsoport, ezért pinden r pozitív egész számhoz megadható olyan u pozitív egész szám, amelyre

$$c^u \in Sb^{2^r}S$$

teljesül. Tegyük fel, hogy

$$2^r \geq n.$$

Akkor

$$c^u \in Sb^{2^r}S \subseteq SaS.$$

Hasonlóan,

$$a^v \in ScS$$

valamely v pozitív egész számmal. Következésképpen η tranzitív.

Ahhoz, hogy megmutassuk, hogy η kongruencia S -en, Tekintsünk olyan S -beli a és b elemeket, amelyekre

$$(a, b) \in \eta$$

teljesül. Ez azt jelenti, hogy megadhatók olyan m, n pozitív egész számok és olyan $x, y, u, v \in S$ elemek, amelyekre

$$a^m = ubv, \quad b^n = xay.$$

Legyen $s \in S$ tetszőleges. Jelöljön k olyan pozitív egész számot, amelyre

$$2^k \geq m$$

teljesül. Mivel S Putcha-félcsoport, és mivel $sa \in S^1aS^1$, ezért megadható olyan t pozitív egész szám, hogy

$$(sa)^t \in Sa^{2^k}S.$$

Így léteznek olyan $e, f \in S$ elemek, hogy

$$(sa)^t = ea^{2^k}f = ea^m a^{2^k-m}f = eubva^{2^k-m}f.$$

Ebből viszont

$$(sa)^{t+1} = eu(bva^{2^k-m}fs)a \in Sbva^{2^k-m}fsS$$

adódik. Mivel S Putcha-félcsoport, ezért megadható olyan p pozitív egész szám, amelyre

$$(sa)^p \in S(bva^{2^k-m}fs)^2S \subseteq SsbS$$

teljesül. Hasonlóan bizonyítható, hogy

$$(sb)^q \in SsaS$$

valamely q pozitív egész számmal. Így

$$(sa, sb) \in \eta.$$

Tehát η az S félcsoporth balkongruenciája. Hasonlóan igazolható, hogy η az S félcsoporth jobbkongruenciája. Következésképpen η az S félcsoporth kongruenciája. Mivel

$$(a, a^2) \in \eta$$

és

$$(bc, cb) \in \eta$$

teljesül tetszőleges $a, b, c \in S$ elemekre, ezért az $Y = S/\eta$ faktor félcsoporth félháló. Így az S félcsoporth az S_α ($\alpha \in Z$) η -osztályok félhálójája. Megmutatjuk, hogy az S félcsoporth S_α ($\alpha \in Z$) részfélcsoporthjai arkhimédeszi félcsoporthok. Legyen S_α tetszőleges η -osztály. Akkor tetszőleges $a, b \in S_\alpha$ elemekhez megadhatók olyan m, n pozitív egész számok, valamint olyan $x, y, u, v \in S$ elemek, hogy

$$xay = b^m, \quad ubv = a^n.$$

Tegyük fel, hogy

$$x \in S_\gamma, \quad y \in S_\delta.$$

Akkor

$$\alpha = \alpha\gamma\delta \in Y,$$

azaz

$$S_\alpha = S_{\alpha\gamma\delta}.$$

Mivel

$$(xayx)a(yxay) = b^{3m}$$

és

$$xayx, yxay \in S_{\alpha\gamma\delta} = S_\alpha,$$

ezért

$$b^{3m} \in S_\alpha a S_\alpha.$$

Hasonlóan,

$$a^{3n} \in S_\alpha b S_\alpha.$$

Így S_α arkhimédeszi félcsoporth.

Megmutatjuk, hogy η az S félcsoporth legszűkebb félháló-kongruenciája. Legyen σ az S félcsoporth tetszőleges félháló-kongruenciája. Tegyük fel, hogy $(a, b) \in \eta$ valamely $a, b \in S$ elemekre, azaz $xay = b^i$ és $ubv = a^j$ teljesül valamely $x, y, u, v \in S$ elemekre és valamely i, j pozitív egész számokkal. Akkor

$$a \sigma a^j = ubv \sigma ub^{i+1}v = xaybv \sigma xaubvy =$$

$$xa^{j+1}y \sigma xay = b^i \sigma b.$$

Ezért

$$\eta \subseteq \sigma.$$

Fordítva, tegyük fel, hogy egy S félcsoporthoz Y félhálójában S_α ($\alpha \in Y$) arkhimédieszi félcsoporthoz tartoznak. Tegyük fel, hogy

$$b \in S^1 a S^1$$

valamely $a, b \in S$ elemekre. Akkor

$$xay = b^3$$

valamely $x, y \in S$ elemekkel. Világos, hogy $xay = b^3$ és xa^2y ugyanabban az S_α osztályban vannak. Mivel S_α arkhimédieszi félcsoporthoz tartozik, ezért megadható olyan k pozitív egész szám, amelyre

$$b^{3k} \in S_\alpha xa^2y S_\alpha \subseteq Sa^2S$$

teljesül. Ez viszont annyit jelent, hogy az S félcsoporthoz Putcha-félcsoporthoz tartozik. \square

10.16. Következmény Legyen S olyan félcsoporthoz, amely előáll S_α ($\alpha \in Y$) arkhimédieszi félcsoporthoz Y félhálójaként. Akkor S tetszőleges G részcsoporthoz van olyan $\alpha \in Y$ elem, hogy $G \subseteq S_\alpha$.

Bizonyítás. Mivel a G elemei az S félcsoporthoz ugyanazon η -osztályához tartoznak, ezért az állítás nyilvánvaló. \square

10.17. Következmény Minden bal (jobb) Putcha-félcsoporthoz felbontható arkhimédieszi félcsoporthoz félhálójára.

Bizonyítás. A 10.14. Lemma és a 10.15. Tétel szerint nyilvánvaló. \square

10.18. Következmény Minden kommutatív félcsoporthoz előáll kommutatív arkhimédieszi félcsoporthoz félhálójaként.

Bizonyítás. Legyen S kommutatív félcsoporthoz. Legyenek $a, b \in S$ tetszőleges elemek. Tegyük fel, hogy

$$b \in S^1 a S^1.$$

Akkor megadhatók olyan $x, y \in S^1$ elemek, melyekre

$$b = xay$$

teljesül. Mivel S kommutatív, ezért

$$b^2 = (xay)^2 = x^2 a^2 y^2,$$

amiből

$$b^2 \in S^1 a^2 S^1$$

következik. Tehát S Putcha-félcsoporthoz tartozik. A 10.15. Tétel szerint S kommutatív arkhimédieszi félcsoporthoz félhálójára tartozik. \square

10.19. Definíció Egy 0-elemes S félcsoportot nil félcsoportnak nevezünk, ha minden a eleméhez megadható olyan n pozitív egész szám, amelyre $a^n = 0$ teljesül. Egy S félcsoportot nilpotens félcsoportnak nevezünk, ha $S^n = \{0\}$ teljesül valamely n pozitív egész számra.

Minden nilpotens félcsoport nil, de a fordított állítás általában nem igaz. Érvényes viszont a következő.

10.20. Lemma Minden véges nil félcsoport nilpotens.

Bizonyítás. Legyen S véges nil félcsoport. Az S végessége miatt megadható olyan n pozitív egész szám, hogy S jobb oldali ideáljainak bármely szigorúan csökkenő láncja nem hosszabb n -nél. Legyenek

$$a_1, a_2, \dots, a_n, a_{n+1} \in S$$

tetszőleges elemek. Az

$$a_1 S^1 \supseteq a_1 a_2 S^1 \supseteq \dots \supseteq a_1 \dots a_n S^1 \supseteq a_1 \dots a_n a_{n+1} S^1$$

lánca hossza $n + 1$, ezért

$$a_1 \dots a_k S^1 = a_1 \dots a_k a_{k+1} S^1$$

valamely $1 \leq k \leq n$ egész számra. Így megadható olyan $x \in S$ elem, amelyre

$$a_1 \dots a_k = a_1 \dots a_k a_{k+1} x$$

teljesül. Ebből

$$a_1 \dots a_k = a_1 \dots a_k (a_{k+1} x)^t$$

következik minden t pozitív egész számra. Mivel S nil félcsoport, ezért

$$(a_{k+1} x)^m = 0$$

valamely m pozitív egész számra, amiből

$$a_1 \dots a_k = 0,$$

és így

$$a_1 \dots a_n = 0$$

adódik. Tehát

$$S^n = \{0\},$$

azaz, S nilpotens félcsoport. □

Világos, hogy minden nil félcsoporthat arkhimédeszi. A nil félcsoporthat fontos szerepet játszanak az idempotens elemet tartalmazó arkhimédeszi félcsoporthat szerkezetének leírásában. Ezt mutatja a következő struktúratétel.

10.21. Tétel *Egy S félcsoporthat akkor és csak akkor idempotens elemes arkhimédeszi félcsoporthat, ha idempotens elemet tartalmazó egyszerű félcsoporthatnak nil félcsoporthat való ideálbővítése.*

Bizonyítás. Legyen S olyan arkhimédeszi félcsoporthat, amely tartalmaz egy e idempotens elemet. Az világos, hogy $K = SeS$ az S egy ideálja. Mivel S arkhimédeszi, ezért S minden ideálja tartalmazza S összes idempotens elemét. Érvényes ez K -ra is. Legyen A az S tetszőleges ideálja. Tetszőleges $a \in A$ elem esetén

$$e \in S^1 a S^1 \subseteq A$$

(mert $S^1 a S^1$ és A az S ideáljai), amiből

$$K \subseteq A$$

következik. Tehát K az S félcsoporthat magja. Így K az S egy minimális ideálja, s ezért K egy idempotens elemet tartalmazó egyszerű félcsoporthat. Az világos, hogy S a K -nak az S/K Rees-féle faktorfélcsoporthat való ideálbővítése. Mivel S arkhimédeszi félcsoporthat, ezért az S/K Rees-féle faktorfélcsoporthat nil félcsoporthat.

Fordítva, tegyük fel, hogy egy S félcsoporthat egy idempotens elemes, egyszerű K félcsoporthatnak egy Q nil félcsoporthat való ideálbővítése. Feltehetjük, hogy $S = K \cup Q^*$, ahol $Q^* = Q \setminus \{0\}$. Legyenek $a, b \in S$ tetszőleges elemek. Mivel Q nil félcsoporthat, ezért megadhatók olyan n és m pozitív egész számok, amelyekre

$$a^n, b^m \in K.$$

K egyszerű félcsoporthat, ezért

$$a^n \in K b^n K \subseteq S^1 b S^1,$$

azaz b osztja az a elem n -edik hatványát. Hasonlóan,

$$b^m \in S^1 a S^1,$$

Azaz a osztja a b elem m -edik hatványát. Tehát S arkhimédeszi félcsoporthat. □

10.22. Tétel *Egy S félcsoporthat akkor és csak akkor olyan kommutatív arkhimédeszi félcsoporthat, amely tartalmaz idempotens elemet, ha előáll egy kommutatív csoportnak egy kommutatív nil félcsoporthat való ideálbővítéseként.*

Bizonyítás. Legyen S olyan kommutatív arkhimédeszi félcsoporth, amely tartalmaz egy idempotens elemet. A 10.21. Tétel szerint S egy egyszerű K félcsoporthnak egy N nil félcsoporthtal való ideálbővítése. Mivel a kommutatív egyszerű félcsoporth mindegyike csoport (7.4. Tétel), ezért K egy kommutatív csoport. Mivel N az S epimorf képe, ezért N kommutatív. Tehát S a K kommutatív csoportnak az N kommutatív nil félcsoporthtal való ideálbővítése.

Fordítva, tegyük fel, hogy S olyan félcsoporth, amely előáll egy kommutatív K csoportnak egy kommutatív N nil félcsoporthtal való ideálbővítéseként. A 10.21. Tétel miatt S idempotens elemet tartalmazó arkhimédeszi félcsoporth. Legyenek $a, b \in S$ tetszőleges elemek. Ha $ab \notin K$ (azaz $ab \neq 0$ az N -ben; 0 az N nulleleme), akkor $ab = ba \neq 0$ N -ben, és így $ab = ba \notin K$ az S félcsoporthban. Ha $ab \in K$, (azaz $ab = 0$ az N -ben), akkor $ba = 0$ az N -ben és így $ba \in K$ az S -ben, amiből

$$ab = (ab)e = a(be) = a(e(be)) = (ae)(be) = (be)(ae) = b(e(ae)) = b(ae) = (ba)e = ba$$

következik. Tehát

$$ab = ba$$

mindkét esetben. Következésképpen S kommutatív félcsoporth. □

10.23. Tétel *Idempotens elem nélküli kommutatív arkhimédeszi félcsoporthok mindegyikének van nemtriviális csoport-epimorf képe.*

Bizonyítás. Legyen S egy idempotens elem nélküli kommutatív, arkhimédeszi félcsoporth. Legyen $a \in S$ tetszőleges. Legyen továbbá

$$H_a = \{x \in S : (\exists m, n \in \mathbb{N}^+) xa^m = a^n\}.$$

Világos, hogy $a^t \in H_a$ minden pozitív egész t kitevőre. Egyszerűen igazolható, hogy H_a reflexív és unitér részfélcsoporthja S -nek. Mivel S arkhimédeszi, ezért tetszőleges $b \in S$ elem esetén van olyan $x \in S$ elem, hogy xb megegyezik az a valamely hatványával, s ezért $xb \in H_a$. Ha S valamely a elemére $H_a \neq S$, akkor az S félcsoporth \mathcal{P}_{H_a} főkongruencia szerinti faktorcsoporth nem triviális. Ha $H_a = S$ volna minden S -beli a elemre, akkor $a \in H_{a^2}$ és így

$$a(a^2)^m = (a^2)^n$$

teljesülne valamely pozitív egész n és m kitevőkre. Mivel a bal oldali kitevő páratlan a jobb oldali páros, ezért az a elem periodikus elem lenne, s ezért S tartalmazna egy idempotens elemet az 1.29. Tétel szerint. Ez viszont nem lehetséges az S -re tett feltétel szerint. □

10.24. Tétel *Tetszőleges S félcsoporthra az alábbi feltételek egymással ekvivalensek:*

- (1) S egy egyszerű bal és jobb Putcha-félcsoporth.

(2) S egy teljesen egyszerű félcsoporth.

Bizonyítás. Legyen S egy egyszerű bal és jobb Putcha-félcsoporth. Legyen $x \in S$ tetszőleges elem és $n \geq 3$ tetszőleges egész szám. Megmutatjuk, hogy x^n az S félcsoporth egy reguláris eleme. Mivel S egyszerű félcsoporth, ezért

$$x^{n-2} \in Sx^nS$$

és ezért megadhatók olyan $u, v \in S$ elemek, amelyekre

$$x^n = xux^nvx$$

teljesül. Az xu elemmel balról, a vx elemmel jobbról szorozgatva ezt az egyenlőséget azt kapjuk, hogy tetszőleges m pozitív egész szám esetén

$$x^n = (xu)^m x^n (vx)^m.$$

A 10.13. Lemma szerint megadható olyan m pozitív egész szám, amelyre

$$(xu)^m \in x^n S$$

és

$$(vx)^m \in Sx^n$$

teljesül. Így

$$x^n \in x^n S x^n,$$

azaz x^n az S félcsoporth egy reguláris eleme. A 6.2. Lemma szerint ekkor viszont az S félcsoporth tartalmaz legalább egy idempotens elemet. Ezek után megmutatjuk, hogy az S félcsoporth teljesen egyszerű. Tegyük fel, indirekt módon, hogy S nem teljesen egyszerű. Akkor a 9.11. Következmény szerint S tartalmaz egy

$$C = \langle p, q; pq = e \rangle$$

biciklikus félcsoporthot (itt az e idempotens elem a C egységeleme). Az világos, hogy

$$qp \in S^1 p.$$

Mivel S jobb Putcha-félcsoporth, ezért

$$qp = (qp)^m = xp^2$$

valamely $x \in S^1$ és alkalmas m pozitív egész számmal. Így

$$xe = xp^2 q^2 = qp q^2 = q^2 \in C,$$

valamint

$$xep^2 = xp^2,$$

és ezért

$$qp = xp^2 = xep^2 = q^2p^2.$$

Ez viszont ellentmondás, mert C elemeit egyértelműen lehet előállítani $q^u p^v$ alakban. Tehát S valóban teljesen egyszerű.

Fordítva, tegyük fel, hogy S egy teljesen egyszerű félcsoporth. Akkor a 9.28. Tétel szerint S izomorf egy P szendvicsmátrixú, G csoport feletti Rees-féle $\mathcal{M} = \mathcal{M}(G; I, J; P)$ mátrixfélcsoporthal. Azonosítsuk S -et \mathcal{M} -mel. Legyenek $(a; i, j)$, $(b; k, n) \in S$ tetszőleges elemek. Akkor

$$(a; i, j)(b; k, n) = (a; i, j)^2((p_{j,i}ap_{j,i})^{-1}p_{j,k}b; i, n) \in (a; i, j)^2S,$$

amiből adódik, hogy S egy bal Putcha-félcsoporth. Hasonlóan igazolható, hogy S jobb Putcha-félcsoporth. \square

10.25. Definíció Egy A félcsoporthnak valamely Q nullelemes félcsoporthtal való S bővítéséről akkor mondjuk, hogy reakt bővítés, ha (azonosítva A -t S azon ideáljával, amely szerinti Rees-féle faktorfélcsoporthja izomorf Q -val) megadható S -nek A -ra olyan homomorfizmus, amely A elemeit fixen hagyja.

10.26. Tétel Tetszőleges S félcsoporthon a következő feltételek egymással ekvivalensek.

- (1) S idempotens elemet tartalmazó, arkhimédieszi bal és jobb Putcha-félcsoporth,
- (2) S egy teljesen egyszerű félcsoporthnak egy nil félcsoporthtal való reakt bővítése.

Bizonyítás. Legyen S egy olyan arkhimédieszi bal és jobb Putcha-félcsoporth, amely tartalmaz legalább egy idempotens elemet. A 10.24. Tétel szerint S egy idempotens elemet tartalmazó egyszerű K félcsoporthnak az $N = S/K$ nil félcsoporthtal való ideál-bővítése. Az világos, hogy egy bal és jobb Putcha-félcsoporth tetszőleges ideálja is bal és jobb Putcha-félcsoporth. Így K is jobb és bal Putcha-félcsoporth. Ebből viszont a 10.24. Tétel szerint az következik, hogy K teljesen egyszerű, s ezért a 9.28. Tétel miatt izomorf egy $\mathcal{M}(I; G, J; P)$ Rees-féle mátrixfélcsoporthal. Mivel K gyengén redukív a 9.29. Tétel miatt, ezért az 5.20. Tétel szerint K az $\Omega(K)$ translációs burok egy ideálja. A 9.30. Tétel szerint

$$\Omega(K) = \{(k, a, h) \in \mathcal{T}_I \times G \times \mathcal{T}_J : (\forall i \in I, j \in J) p_{j,k(i)}ap_{(j_0)h,i} = p_{j,k(i_0)}ap_{(j)h,i}\}.$$

Az $\Omega(K)$ translációs burok két elemének (k, a, h) -nak és (f, b, g) -nek a szorzata

$$(k, a, h)(f, b, g) = (k \circ f, ap_{(j_0)h,f(i_0)}b, h \circ g).$$

Továbbá, ha $(g; i, j) \in K$ és $(k, a, h) \in \Omega(K)$ tetszőleges elemek, akkor

$$(k, a, h)(g; i, j) = (ap_{(j_0)h,i}g; k(i), j) \in K$$

és

$$(g; i, j)(k, a, h) = (gp_{j,k(i_0)}a; i, (j)h) \in K.$$

Egy $(k, a, h) \in \Omega(K)$ bitranszláció akkor és csak akkor belső bitranszláció, ha k és h konstans transzformációk. Az 5.21. Tétel szerint $\Omega(K)$ -nak van olyan $N = S/K$ -val való $(S', +)$ ideálbővítése, amelynek S egy részfélcsoportja. Jelölje e az $\Omega(K)$ egységelemét. Akkor

$$\phi: x \mapsto x + e$$

S' -nek $\Omega(K)$ -ra való retrakt homomorfizmusa. Az S' félcsoporton érvényes művelet ϕ által meg van határozva: Ha $x, y \in N^* = N - \{0\}$ és $s, t \in \Omega(K)$, akkor $x + t = \phi(x)t$, $t + x = t\phi(x)$, $s + t = st$; ha $xy \neq 0$ N -ben, akkor $x + y = xy$, ha $xy = 0$ N -ben akkor viszont $x + y = \phi(x)\phi(y)$. Megmutatjuk, hogy ϕ -nek S -re való leszűkítése S -nek K -ra való retrakt homomorfizmusa. Elegendő azt megmutatni, hogy minden $s \in N^*$ esetén $\phi(s) \in K$, azaz $\phi(s)$ a K egy belső bitranszlációja. Legyen s az N^* egy tetszőleges eleme, és legyen

$$\phi(s) = (k, a, h) \in \Omega(K).$$

Mivel N nil félcsoport, ezért

$$s^n \in K$$

valamely n pozitív egész számmal. Így

$$(k, a, h)^n = (k_0, b, h_0).$$

Legyen

$$(g; i, j) \in K$$

tetszőleges elem. Mivel S egy bal Putch-félcsoport, ezért a 10.13. Lemma szerint megadható olyan m pozitív egész szám és olyan $x \in S$ elem, hogy

$$(s(g; i, j))^m = s^n x.$$

Legyen

$$\phi(x) = (k_x, b_x, h_x) \in \Omega(K).$$

Akkor

$$\begin{aligned} & ((ap_{(j_0)h,i}gp_{j,k(i)})^{m-1}ap_{(j_0)h,i}g; k(i), j) = (ap_{(j_0)h,i}g; k(i), j)^m \\ & = ((k, a, h)(g; i, j))^m = (\phi(s)(g; i, j))^m = (s(g; i, j))^m = \phi((s(g; i, j))^m) = \\ & \phi(s^n x) = (k, a, h)^n \phi(x) = (k_0, b, h_0)(k_x, b_x, h_x) = (k_0, bp_{h_0, k_x(i_0)}b_x, (h_0)h_x). \end{aligned}$$

Ebből

$$k(i) = k_0$$

adódik minden $i \in I$ indexre, azaz k konstans transzformáció. Az S -re vonatkozó jobb Putcha feltétel felhasználásával, hasonlóan bizonyítható, hogy h is konstans transzformáció. Így

$$\phi(s) \in K.$$

Ezzel bebizonyítottuk, hogy (1)-ből következik (2).

Mivel egy teljesen egyszerű félcsoporthal arkhimédeszi jobb és bal Putcha-félcsoporthal, ezért könnyen ellenőrizhető, hogy (2)-ből következik (1). \square

10.3. Félcsoporthal erős félhálójája

10.27. Definíció Legyen Y egy félháló, és legyenek S_α ($\alpha \in Y$) tetszőleges félcsoporthal úgy, hogy $S_\alpha \cap S_\beta = \emptyset$ minden $\alpha \neq \beta$ ($\alpha, \beta \in Y$) esetén. Tegyük fel, hogy minden $\alpha \geq \beta$ ($\alpha, \beta \in Y$) esetén van olyan $(\cdot)\phi_{\alpha,\beta}$ homomorf leképezése S_α -nak S_β -ba, hogy az alábbiak teljesülnek

$$(1) \quad \phi_{\alpha,\alpha} = id_{S_\alpha}, \quad (\alpha \in Y),$$

$$(2) \quad \phi_{\alpha,\beta} \circ \phi_{\beta,\gamma} = \phi_{\alpha,\gamma} \quad \text{minden } \alpha \geq \beta \geq \gamma \quad (\alpha, \beta, \gamma \in Y) \text{ esetén.}$$

Az $S = \cup_{\alpha \in Y} S_\alpha$ halmazon definiáljunk egy $*$ műveletet a következőképpen. Ha $a \in S_\alpha$ és $b \in S_\beta$, akkor legyen

$$a * b = (a)\phi_{\alpha,\alpha\beta}(b)\phi_{\beta,\alpha\beta},$$

ahol a jobb oldalon $(a)\phi_{\alpha,\alpha\beta}$ és $(b)\phi_{\beta,\alpha\beta}$ között az $S_{\alpha\beta}$ félcsoporthalbeli műveletet kell tekinteni. Könnyen ellenőrizhető, hogy S erre a műveletre nézve félcsoporthal alkot, és S az S_α félcsoporthalok Y félhálójája. Ezt a félcsoporthal erős félhálójának nevezzük és $S = [Y; S_\alpha, \phi_{\alpha,\beta}]$ -val jelöljük. A $\{\phi_{\alpha,\beta}\}_{\alpha \geq \beta}$ leképezés-családot az S -en értelmezett műveletet meghatározó homomorfizmusok tranzitív rendszerének nevezzük.

Megjegyezzük, hogy $\alpha > \beta$ esetén $S_\alpha \cup S_\beta$ retrakt bővítése S_β -nak.

Egy S félcsoporthal Clifford-félcsoporthalnak nevezzük, ha S reguláris és idempotensei S minden elemével felcserélhetőek. A 6.20. Tétel szerint minden Clifford-félcsoporthal inverz félcsoporthal. A következő tétel a Clifford-félcsoporthalok szerkezetéről is fontos információt ad.

10.28. Tétel Tetszőleges S félcsoporthal esetén az alábbi feltételek egymással ekvivalensek:

$$(1) \quad S \text{ részcsoporthal félhálójája.}$$

(2) S részcsoportok erős félhálója.

(3) S Clifford-félcsoport.

Bizonyítás. Világos, hogy az (1) és (2) feltételek ekvivalenciájához elegendő csak azt bizonyítani, hogy (1)-ből következik (2). Legyen az S félcsoport a G_α részcsoportok Y félhálója ($\alpha \in Y$). Legyenek α és β tetszőleges Y -beli elemek az $\alpha \geq \beta$ feltétellel. Ha e_β jelöli G_β egységelemét, akkor

$$\varphi_{\alpha,\beta} : a \mapsto ae_\beta \quad (a \in G_\alpha)$$

a G_α részcsoportnak a G_β részcsoportba való leképezése. Mivel tetszőleges $a, b \in G_\alpha$ esetén

$$(ab)\varphi_{\alpha,\beta} = (ab)e_\beta = a(be_\beta) = a(e_\beta(be_\beta)) = (ae_\beta)(be_\beta) = (a)\varphi_{\alpha,\beta}(b)\varphi_{\alpha,\beta},$$

ezért $\varphi_{\alpha,\beta}$ homomorfizmus. Az világos, hogy

$$\varphi_{\alpha,\alpha} = id_{G_\alpha}$$

minden $\alpha \in Y$ -ra. Legyenek $\alpha, \beta, \gamma \in Y$ tetszőleges elemek úgy, hogy $\alpha \geq \beta \geq \gamma$. Akkor

$$e_\beta e_\gamma = (e_\beta)\varphi_{\beta,\gamma}$$

miatt $e_\beta e_\gamma$ a G_γ egységeleme, azaz

$$e_\beta e_\gamma = e_\gamma.$$

Ezért tetszőleges $a \in G_\alpha$ esetén

$$(a)\varphi_{\alpha,\gamma} = ae_\gamma = ae_\beta e_\gamma = (a)\varphi_{\alpha,\beta} \circ \varphi_{\beta,\gamma}.$$

Továbbá, tetszőleges $\alpha, \beta \in Y$ és tetszőleges $a \in G_\alpha, b \in G_\beta$ esetén

$$ab = (ab)e_{\alpha\beta} = (ae_{\alpha\beta})(be_{\alpha\beta}) = (a)\varphi_{\alpha,\alpha\beta}(b)\varphi_{\beta,\alpha\beta}.$$

Ezért S a G_α ($\alpha \in Y$) részcsoportok erős félhálója.

A következőkben megmutatjuk, hogy (2)-ből következik (3). Tegyük fel, hogy az S félcsoport G_α ($\alpha \in Y$) csoportok erős félhálója. Az világos, hogy S minden eleme reguláris. Az S idempotens elemei a G_α csoportok egységelemei. Ha $e_\alpha \in G_\alpha$ idempotens elem $b_\alpha (\in G_\beta)$ pedig tetszőleges elem S -ben, akkor

$$\begin{aligned} e_\alpha b_\beta &= (e_\alpha)\phi_{\alpha,\alpha\beta}(b_\beta)\phi_{\beta,\alpha\beta} = e_{\alpha\beta}(b_\beta)\phi_{\beta,\alpha\beta} = \\ &= (b_\beta)\phi_{\beta,\alpha\beta} = ((b_\beta)\phi_{\beta,\alpha\beta})e_{\alpha\beta} = (b_\beta)\phi_{\beta,\alpha\beta}(e_\alpha)\phi_{\alpha,\alpha\beta} = b_\beta e_\alpha. \end{aligned}$$

Tehát S Clifford-félcsoport. A bizonyítás hátralévő részében megmutatjuk, hogy (3)-ból következik (1). Legyen S egy Clifford-félcsoport. Akkor (definíció szerint) S reguláris és S idempotensei felcserélhetőek S bármelyik elemével. Legyen $a \in S$ tetszőleges elem. Mivel S reguláris, ezért van S -nek olyan x eleme, amelyre $axa = a$ teljesül. A 6.2. Lemma szerint ax és xa idempotens elemek. Így ezek az elemek az S tetszőleges elemével felcserélhetőek, azaz benne vannak az S félcsoport $Z(S)$ centrumában. Emiatt

$$xa = xaxa = x(ax)a = (ax)xa = ax(xa) = a(xa)x = axax = ax.$$

Így az S félcsoport teljesen reguláris (lásd a 6.15. Definíciót). A 6.16. Tétel szerint S előáll csoportok úniójaként. Az 1.42. Tétel szerint S előáll diszjunkt G_i ($i \in I$) részcsoporthoz úniójaként. Megmutatjuk, hogy S a G_i ($i \in I$) csoportok félhálója. Jelölje e_i , illetve e_j a G_i , illetve G_j ($i, j \in I$) részcsoporthoz egységelemét. Mivel $e_i, e_j \in Z(S)$, ezért

$$e_i e_j = e_j e_i.$$

Továbbá,

$$(e_i e_j)^2 = e_i^2 e_j^2 = e_i e_j,$$

azaz van olyan G_k ($k \in I$) részcsoporthoz, hogy $e_i e_j = e_j e_i$ a G_k egységeleme. Jelölje ezt az egységelemet e_k . Ha $a \in G_i$ és $b \in G_j$ tetszőleges elemek, akkor ($e_i, e_j \in Z(S)$ miatt)

$$(ab)e_k = (ab)(e_i e_j) = (ae_i)(be_j) = ab$$

és (az előzőhöz hasonlóan)

$$e_k(ab) = ab, (ba)e_k = ba, e_k(ba) = ba.$$

Tehát

$$ab, ba \in e_k S \cap S e_k = e_k S e_k.$$

Így

$$G_i G_j, G_j G_i \subseteq e_k S e_k.$$

Jelölje a^{-1} , illetve b^{-1} az $a \in G_i$, illetve $b \in G_j$ elem G_i , illetve G_j csoportbeli inverzét. Az előzőek szerint

$$b^{-1} a^{-1}, a^{-1} b^{-1} \in e_k S e_k.$$

Igy

$$(ab)(b^{-1} a^{-1}) = a e_j a^{-1} = e_j (a a^{-1}) = e_i e_j = e_k$$

és (az előzőhöz hasonlóan)

$$(b^{-1} a^{-1})(ab) = e_k, (ba)(a^{-1} b^{-1}) = e_k, (a^{-1} b^{-1})(ba) = e_k.$$

Az 1.41. Tétel szerint ez azt jelenti, hogy

$$ab, ba \in G_{e_k},$$

ahol G_{e_k} jelöli az S félcsoport azon maximális részcsoportját, amelyben e_k az egységelem. Az világos, hogy

$$G_{e_k} = G_k.$$

Igy

$$ab, ba \in G_k.$$

Következésképpen

$$G_i G_j, G_j G_i \subseteq G_k.$$

Ebből már következik, hogy az S félcsoport a G_i ($i \in I$) részcsoportok félhálója. \square

10.4. Kötegek

Az előzőekben már definiáltuk a köteg fogalmát (1.38. Definíció). A kötegek vizsgálatában fontos szerepet játszanak a derékszögű kötegek. Lássuk ezek egyik definícióját!

10.29. Definíció *Legyenek A és B tetszőleges nem üres halmazok. Az $A \times B$ Descartes-szorozaton definiáljunk egy műveletet a következőképpen: Ha (a_1, b_1) és (a_2, b_2) tetszőleges $A \times B$ -beli elemek, akkor legyen $(a_1, b_1)(a_2, b_2) = (a_1, b_2)$. Könnyen ellenőrizhető, hogy ezzel egy asszociatív műveletet definiáltunk $A \times B$ -n. Az így definiált félcsoportot derékszögű kötegnek nevezzük.*

A következő tétel a derékszögű kötegek jellemzésével foglalkozik. Szerepet játszik benne a félcsoportok (külső) direkt szorzata. Valamely A és B félcsoportok (külső) direkt szorzatán értjük azt a félcsoportot, melynek alaphalmaza az $A \times B$ Descartes-szorozat, és tetszőleges $(a_1, b_1), (a_2, b_2) \in A \times B$ elempárok esetén $(a_1, b_1)(a_2, b_2) = (a_1 a_2, b_1 b_2)$.

10.30. Tétel *Tetszőleges S félcsoporton a következő feltételek egymással ekvivalensek.*

- (1) S derékszögű köteg;
- (2) S sehol sem kommutatív (minden $a, b \in S$ esetén $ab = ba$ -ból $a = b$ következik);
- (3) S köteg és teljesíti az $aba = a$ azonosságot;
- (4) S köteg és teljesíti az $abc = ac$ azonosságot;
- (5) S egy balzéró és egy jobbzeró félcsoport (külső) direkt szorzata.

Bizonyítás. Az nyilvánvaló, hogy (1)-ből következik (2). Megmutatjuk, hogy (2)-ből következik (3): Legyen S sehol sem kommutatív félcsoport. Tetszőleges $a \in S$ elem esetén a és a^2 egymással felcserélhetők, ezért $a = a^2$, azaz S köteg. Mivel tetszőleges $a, b \in S$ elemek esetén

$$a(aba) = aba = (aba)a,$$

ezért

$$a = aba.$$

Így S teljesíti (3)-at.

Most belátjuk, hogy (3)-ból következik (4): Legyenek $a, b, c \in S$ tetszőleges elemek. Akkor

$$abc = (aca)(bc) = a(cabc) = ac.$$

Tehát S teljesíti (4)-et.

Megmutatjuk, hogy (4)-ből következik (5): Tegyük fel, hogy S teljesíti (4)-t. Legyen $a \in S$ tetszőleges elem. Legyen $L = Sa$ és $R = aS$. Akkor $sata = sa$ és $asat = at$ ($s, t \in S$) miatt L egy balzéró, R pedig egy jobbzéró félcsoport. Megmutatjuk, hogy $S \cong L \times R$. Az $(sa, at) \in L \times R$ elemmel legyen $\phi((sa, at)) = sat$. Mivel minden $s \in S$ elemre $s = sas$, ezért ϕ szürjektív. Megmutatjuk, hogy ϕ injektív. Tegyük fel, hogy $\phi((sa, at)) = \phi((ua, av))$ valamely $s, t, u, v \in S$ elemekre. Akkor $sat = uav$ és így

$$sa = sata = uava = ua,$$

valamint

$$at = asat = auav = av.$$

Tehát

$$(sa, at) = (ua, av),$$

amely azt eredményezi, hogy ϕ injektív. Mivel

$$\phi((sa, at)(ua, av)) = \phi((sa, av)) = sav$$

és

$$\phi((sa, at))\phi((ua, av)) = (sat)(uav) = sav,$$

ezért ϕ homomorfizmus. Tehát ϕ egy izomorf leképezése az $L \times R$ direkt szorzatnak az S -re. Már csak annak igazolása van hátra, hogy (5)-ből következik (1). De ez a derékszögű köteg definíciója alapján nyilvánvaló. \square

10.31. Tétel *Tetszőleges S köteg esetén*

$$\sigma = \{(a, b) \in S \times S : a = aba \text{ és } b = bab\}$$

az S legszűkebb félháló-kongruenciája.

Bizonyítás. Az nyilvánvaló, hogy σ reflexív és szimmetrikus. Megmutatjuk, hogy σ tranzitív. Tegyük fel, hogy $a\sigma b$ és $b\sigma c$ teljesül az S köteg valamely a, b, c elemeire. Akkor

$$a = aba = a(bcb)a = ab(cba)(cba) = a(bcb)a(cba) = (aba)(cba) = acba$$

és, hasonlóan,

$$a = abca.$$

Ezekből viszont

$$a = (acba)(abca) = (ac)(bab)(ca) = a(cbc)a = aca$$

adódik. Hasonló módon bizonyítható, hogy

$$c = cac.$$

Így $a\sigma c$. Tehát σ tranzitív.

Megmutatjuk, hogy σ jobbkongruencia. Legyenek $a, b, c \in S$ tetszőleges elemek. Tegyük fel, hogy $a\sigma b$. Akkor

$$\begin{aligned} (ac)(abc)(ac) &= (ac)(abc)(abac) = a(cab)(cab)(ac) = a(cab)(ac) \\ &= (ac)(abac) = (ac)(ac) = ac, \\ (abc)(ac)(abc) &= (ab)(ca)(ca)(bc) = (ab)(ca)(bc) = (abc)(abc) = abc. \end{aligned}$$

Így $ac\sigma abc$. Továbbá,

$$(bc)(abc)(bc) = (bc)(abc) = (babc)(abc) = b(abc)(abc) = (bab)c = bc,$$

és

$$(abc)(bc)(abc) = (abc)(abc) = abc.$$

Így $bc\sigma abc$. Mivel σ tranzitív, ezért $ac\sigma bc$. Tehát σ jobbkongruencia. Hasonlóan bizonyítható, hogy σ balkongruencia. Ezért σ kongruencia. Mivel

$$ab = (ab)(ba)(ab)$$

és

$$ba = (ba)(ab)(ba),$$

ezért $ab\sigma ba$. Így S/σ kommutatív köteg, azaz félháló.

Legyen τ az S köteg tetszőleges félháló-kongruenciája. Akkor az $a\sigma b$ feltételt teljesítő $a, b \in S$ elemekre

$$a = aba\tau bab = b$$

következik. Tehát $\sigma \subseteq \tau$, azaz σ az S köteg legszűkebb félháló-kongruenciája. \square

10.32. Következmény Minden köteg derékszögű kötegek félhálója.

Bizonyítás. Legyen S tetszőleges köteg. A 10.31. Tétel szerint

$$\sigma = \{(a, b) \in S \times S : a = aba \text{ és } b = bab\}$$

az S legszűkebb félháló-kongruenciája. Ha A az S egy σ -osztálya, akkor bármely $a, b \in A$ esetén $(a, b) \in \sigma$ miatt $a = aba$. Tehát A -ban teljesül a 10.30. Tétel (3)-as feltételében szereplő azonosságot, s ezért A derékszögű köteg. Tehát az S köteg derékszögű kötegek félhálója. \square

10.33. Tétel Legyen Y félháló. Tetszőleges $\gamma \in Y$ elem esetén legyenek L_γ és R_γ tetszőleges nem üres halmazok úgy, hogy $L_\gamma \cap L_\delta = R_\gamma \cap R_\delta = \emptyset$, ha $\delta \neq \gamma$. Legyen $S_\gamma = L_\gamma \times R_\gamma$. Minden $\gamma \geq \delta$ esetén legyenek adottak valamely $\alpha_{\delta, \gamma} : S_\gamma \rightarrow \mathcal{T}(L_\delta)$ és $\beta_{\gamma, \delta} : S_\gamma \rightarrow \mathcal{T}(R_\delta)$ függvények. Jelölje $\alpha_{\delta, \gamma}^{(i, \mu)}$, illetve $\beta_{\gamma, \delta}^{(i, \mu)}$ az $(i, \mu) \in S_\gamma$ elemhez az $\alpha_{\delta, \gamma}$, illetve $\beta_{\gamma, \delta}$ által rendelt $\mathcal{T}(L_\delta)$ -beli, illetve $\mathcal{T}(R_\delta)$ -beli elemet.

Tegyük fel, hogy minden $\gamma, \delta \in Y$ és minden $(i, \mu) \in S_\gamma$, $(j, \nu) \in S_\delta$ elemekre teljesülnek a következők.

$$(1) [\alpha_{\gamma, \gamma}^{(i, \mu)}] = i, [\beta_{\gamma, \gamma}^{(i, \mu)}] = \mu,$$

$$(2) [\alpha_{\gamma, \delta}^{(i, \mu)} \alpha_{\gamma, \delta}^{(j, \nu)}] = k, [\beta_{\gamma, \delta}^{(i, \mu)} \alpha_{\delta, \gamma}^{(j, \nu)}] = \xi \text{ valamely } (k, \xi) \in S_{\gamma\delta} \text{ elemre,}$$

$$(3) \text{ a (2) jelöléseit használva, minden } \epsilon < \gamma\delta \text{ esetén } \alpha_{\epsilon, \gamma\delta}^{(k, \xi)} = \alpha_{\epsilon, \gamma}^{(i, \mu)} \alpha_{\epsilon, \delta}^{(j, \nu)} \beta_{\gamma, \delta, \epsilon}^{(k, \xi)} = \beta_{\gamma, \epsilon}^{(i, \mu)} \beta_{\delta, \epsilon}^{(j, \nu)}.$$

Legyen $S = \cup_{\alpha \in Y} S_\alpha$. A fenti jelöléseket használva, definiáljunk egy $*$ műveletet S -en a következőképpen $(i, \mu) * (j, \nu) = (k, \xi)$. Akkor $(S, *)$ köteg. Fordítva, minden köteget így lehet konstruálni.

Bizonyítás. Annak bizonyítása, hogy $(S, *)$ köteg, technikai jellegű. Ahhoz, hogy minden köteget a tételben részletezett módon lehet konstruálni, tekintsünk egy tetszőleges S köteget. A 10.32. Következmény szerint S előáll S_γ derékszögű kötegek Y félhálójaként. A 10.30. Tétel miatt minden $\gamma \in Y$ esetén vannak olyan L_γ balzéró és R_γ jobbzéró félcsoporthok, hogy $S_\gamma \cong L_\gamma \times R_\gamma$. S_γ -t azonosítani fogjuk $L_\gamma \times R_\gamma$ -val, és S -et $S = \cup_{\gamma \in Y} (L_\gamma \times R_\gamma)$ formában tekintjük. Természetesen feltehetjük, hogy $L_\gamma \cap L_\delta = R_\gamma \cap R_\delta = \emptyset$, ha $\gamma \neq \delta$.

Legyenek γ és δ tetszőleges Y -beli elemek úgy, hogy $\gamma \geq \delta$. Legyen $(i, \mu) \in S_\gamma$ tetszőleges. Ha $(j, \nu) \in S_\delta$, akkor $(i, \mu)(j, \nu) = (k, \xi) \in S_\delta$, és így

$$(k, \xi) = (i, \mu)(j, \nu)[(i, \mu)(j, \nu)](j, \nu) = (k, \xi)(j, \nu) = (k, \nu),$$

és ezért $\xi = \nu$. Ha $(j, \sigma) \in S_\delta$, akkor

$$(i, \mu)(j, \sigma) = (i, \mu)[(j, \nu)(j, \sigma)] = [(i, \mu)(j, \nu)](j, \sigma) = (k, \nu)(j, \sigma) = (k, \sigma)$$

amely azt mutatja, hogy k nem függ a ν -tól. Így definiálhatunk egy $\alpha_{\delta, \gamma}^{(i, \mu)}$ függvényt L_δ -n, amely teljesíti a következő feltételt:

$$(i, \mu)(j, \nu) = (\alpha_{\delta, \gamma}^{(i, \mu)} j, \nu) \quad ((i, \mu) \in S_\gamma, (j, \nu) \in S_\delta, \gamma \geq \delta).$$

Ennek duálisaként, definiálhatunk egy $\beta_{\gamma, \delta}^{(i, \mu)}$ függvényt R_δ -n, amely teljesíti a következő feltételt:

$$(j, \nu)(i, \mu) = (j, \nu \beta_{\gamma, \delta}^{(i, \mu)}) \quad ((i, \mu) \in S_\gamma, (j, \nu) \in S_\delta, \gamma \geq \delta).$$

Ez lehetővé teszi, hogy definiáljuk a következő függvényeket.

$$\alpha_{\delta, \gamma} : (i, \mu) \mapsto \alpha_{\delta, \gamma}^{(i, \mu)}, \quad ((i, \mu) \in S_\gamma, \gamma \geq \delta)$$

$$\beta_{\gamma, \delta} : (i, \mu) \mapsto \beta_{\gamma, \delta}^{(i, \mu)}, \quad ((i, \mu) \in S_\gamma, \gamma \geq \delta).$$

(1) közvetlenül következik $\alpha_{\delta, \gamma}^{(i, \mu)}$ és $\beta_{\gamma, \delta}^{(i, \mu)}$ definíciójából. Legyen $(i, \mu) \in S_\gamma$ és $(j, \nu) \in S_\delta$. Akkor $(i, \mu)(j, \nu) = (k, \xi)$ valamely $(k, \xi) \in S_{\gamma\delta}$ -ra. Legyen $\epsilon \leq \gamma\delta$ és legyen $(l, \eta) \in S_\epsilon$. Akkor

$$(\alpha_{\epsilon, \gamma\delta}^{(k, \xi)} l, \eta) = (k, \xi)(l, \eta) = (i, \mu)(j, \nu)(l, \eta) = (\alpha_{\epsilon, \gamma}^{(i, \mu)} \alpha_{\epsilon, \delta}^{(j, \nu)} l, \eta)$$

és így

$$\alpha_{\epsilon, \gamma\delta}^{(k, \xi)} = \alpha_{\epsilon, \gamma}^{(i, \mu)} \alpha_{\epsilon, \delta}^{(j, \nu)}.$$

Ebből következik a (2) formula; az $\epsilon = \gamma\delta$ választás mellett pedig az (1) formula. Ugyanebből adódik (3) első képlete, ha feltesszük, hogy $\epsilon < \gamma\delta$. A (2) és (3) második képlete az első képletek duálisai. A (2)-ből és (k, ξ) definíciójából adódik, hogy $(i, \mu)(j, \nu) = (i, \mu) * (j, \nu)$. Ezzel a tételt bebizonyítottuk. \square

Feladatok

10.1. (Megoldás: 17.30.) Egy S félcsoport valamely F részfélcsoportját filternek nevezzük, ha S tetszőleges a, b elemei esetén $ab \in F$ -ből $a, b \in F$ következik. Legyen J egy S félcsoport filtereinek valamely nem üres részhalmaza. Mutassuk meg, hogy

$$\sigma_J = \{(a, b) \in S \times S : (\forall F \in J) a, b \in F \text{ vagy } a, b \notin F\}$$

az S félcsoport egy félháló-kongruenciája.

10.2. (Megoldás: 17.31.) Mutassuk meg, hogy egy S félcsoport tetszőleges félháló-kongruenciája az előző feladatban szereplő módon konstruálható!

10.3. (Megoldás: 17.32.) A 10.8. Következmény felhasználása nélkül mutassuk meg, hogy minden arkhimédeszi félcsoport félháló-felbonthatatlan.

10.4. (Megoldás: 17.33.) Egy S félcsoportot gyengén kommutatív félcsoportnak nevezünk, ha tetszőleges $a, b \in S$ elemekhez megadhatók olyan $x, y \in S^1$ elemek és olyan n pozitív egész szám, amelyekre $(ab)^n = xa = by$ teljesül. Mutassuk meg, hogy gyengén kommutatív S félcsoport előáll arkhimédeszi félcsoportok félhálójaként!

10.5. (Megoldás: 17.34.) Mutassuk meg, hogy egy gyengén kommutatív félcsoport arkhimédeszi komponensei gyengén kommutatívak!

11. fejezet

Félcsoportok szubdirekt szorzata

11.1. Definíció Akkor mondjuk, hogy egy S félcsoport az S_i ($i \in I$) félcsoportok szubdirekt szorzata, ha az S_i ($i \in I$) félcsoportok direkt szorzatának van olyan S -sel izomorf T részfélcsoportja, hogy a direkt szorzat S_i ($i \in I$) félcsoportokra való projekcióinak T -re való leszűkítése szürjektív.

11.2. Tétel Legyen S tetszőleges félcsoport. Ha α_i ($i \in I$) az S félcsoport olyan kongruenciái, amelyekre $\bigcap_{i \in I} \alpha_i = \iota_S$ teljesül, akkor S az S/α_i ($i \in I$) faktorfélcsoportok szubdirekt szorzata. Fordítva, ha S az S_i ($i \in I$) félcsoportok szubdirekt szorzata, akkor megadhatók S -nek olyan α_i ($i \in I$) kongruenciái, amelyekre $\bigcap_{i \in I} \alpha_i = \iota_S$, valamint $S_i \cong S/\alpha_i$ ($i \in I$) teljesül.

Bizonyítás. Legyen S tetszőleges félcsoport, valamint α_i ($i \in I$) az S félcsoport olyan kongruenciái, amelyekre $\bigcap_{i \in I} \alpha_i = \iota_S$ teljesül. Jelölje S_i ($i \in I$) az S/α_i faktorfélcsoportot. Képezzük a $\prod_{i \in I} S_i$ direkt szorzatot. Jelölje φ S -nek a direkt szorzatba való következő leképezését: tetszőleges $s \in S$ elem esetén legyen $\varphi(s)$ a direkt szorzat azon eleme, amely tetszőleges $i \in I$ indexhez az $S_i = S/\alpha_i$ félcsoport azon elemét, azaz S azon α_i szerinti osztályát rendeli, amely az s elemet tartalmazza. Képletszerűen:

$$(\varphi(s))(i) = [s]_{\alpha_i}.$$

Az világos, hogy φ egyértelmű leképezés. Mivel tetszőleges $s, t \in S$ esetén

$$(\varphi(st))(i) = [st]_{\alpha_i} = [s]_{\alpha_i} [t]_{\alpha_i} = (\varphi(s))(i) (\varphi(t))(i) = ((\varphi(s)(\varphi(t)))(i)),$$

ezért φ az S félcsoportnak a direkt szorzatba való homomorf leképezése. A következőkben megmutatjuk, hogy φ injektív. Tegyük fel, hogy

$$\varphi(s) = \varphi(t)$$

valamely $s, t \in S$ elemekre. Akkor minden $i \in I$ indexre

$$(\varphi(s))(i) = (\varphi(t))(i),$$

azaz

$$[s]_{\alpha_i} = [t]_{\alpha_i}$$

teljesül, amiből az adódik, hogy

$$(s, t) \in \bigcap_{i \in I} \alpha_i.$$

Mivel $\bigcap_{i \in I} \alpha_i = id_S$, ezért

$$s = t.$$

Tehát φ valóban injektív. Jelölje S^* az S félcsoport φ szerinti képét. Legyen $i \in I$ tetszőleges index. Tekintsük az $S_i = S/\alpha_i$ félcsoport $[s]_{\alpha_i}$ elemét. A $\varphi(s) \in S^*$ elemnek a π_i projekció szerinti képe $(\varphi(s))(i) = [s]_{\alpha_i}$. Így a π_i projekciónak az S^* félcsoporthoz való leszűkítése szürjektív. Következésképpen S^* és így S az S_i ($i \in I$) félcsoporthoz szubdirekt szorzata.

Fordítva, tegyük fel, hogy egy S félcsoport előáll bizonyos S_i ($i \in I$) félcsoporthoz szubdirekt szorzataként. Akkor van az S_i ($i \in I$) félcsoporthoz direkt szorzatának olyan S^* részfélcsoporthoz, hogy S izomorf S^* -gal és a π_i ($i \in I$) projekcióknak S^* -ra való leszűkítései szürjektívek minden $i \in I$ index esetén. Azonosítsuk S -et S^* -gal, s jelölje α_i ($i \in I$) a π_i homomorfizmus S -re való leszűkítésének magját. Tegyük fel, hogy

$$(s, t) \in \bigcap_{i \in I} \alpha_i.$$

Akkor minden π_i ($i \in I$) esetén

$$\pi_i(s) = \pi_i(t)$$

teljesül, amiből az $s = t$ egyenlőség következik. Tehát $\bigcap_{i \in I} \alpha_i = \iota_S$. □

11.3. Definíció Egy S félcsoporthoz szubdirekt irreducibilis félcsoporthoz nevezünk, ha S bárhogy is áll elő S_i ($i \in I$) félcsoporthoz szubdirekt szorzataként, van legalább egy olyan $j \in I$ index, melyhez tartozó projekcióhomomorfizmus S -et izomorf módon képezi S_j -re.

11.4. Tétel Egy S félcsoporthoz akkor és csak akkor szubdirekt irreducibilis, ha kongruenciáinak tetszőleges $\alpha_i, i \in I$ családja esetén $\bigcap_{i \in I} \alpha_i = \iota_S$ akkor és csak akkor teljesül, ha van legalább egy $j \in I$ index, hogy $\alpha_j = \iota_S$.

Bizonyítás. A 11.2. Tétel alapján nyilvánvaló. □

A szubdirekt irreducibilis félcsoporthoz szerepét mutatja a következő tétel:

11.5. Tétel (Birkhoff-tétel) Minden félcsoporthoz felbontható szubdirekt irreducibilis félcsoporthoz szubdirekt szorzatára.

Bizonyítás. Legyen S tetszőleges félcsoporth. Ha S egyelemű, akkor a tétel állítása nyilvánvaló. Tegyük fel, hogy $|S| \geq 2$. Az S félcsoporth tetszőleges, egymástól különböző a és b elemei esetén jelölje $P_{a,b}$ az S félcsoporth mindazon Φ kongruenciáinak halmazát, amelyre $(a,b) \notin \Phi$ teljesül. $P_{a,b} \neq \emptyset$, mert $\iota_S \in P_{a,b}$. A $P_{a,b}$ halmaz a relációk tartalmazására nézve részben rendezett. Legyen

$$\alpha_1 \subseteq \alpha_2 \subseteq \dots \subseteq \alpha_n \subseteq \dots$$

$P_{a,b}$ -beli kongruenciák egy monoton növekedő sorozata. Az világos, hogy

$$\cup_{i=1}^n \alpha_i \in P_{a,b}.$$

Tehát $P_{a,b}$ minden részláncának van $P_{a,b}$ -ben felső korlátja. A Zorn-Lemma miatt $P_{a,b}$ -ben van maximális elem. Jelöljön $\psi(a,b)$ egy maximális elemet.

Következő lépésként megmutatjuk, hogy az $S/\psi(a,b)$ faktorfélcsoporthok minden $(a,b) \in S \times S$ $a \neq b$ elempár esetén szubdirekt irreducibilisek. Legyenek $\alpha_i/\psi(a,b)$ ($i \in I$) az $S/\psi(a,b)$ faktorfélcsoporth olyan kongruenciái, amelyekre

$$\cap_{i \in I} (\alpha_i/\psi(a,b)) = \iota_{S/\psi(a,b)}$$

teljesül. A 2.30. Tétel szerint S -ben

$$\cap_{i \in I} \alpha_i = \psi(a,b).$$

Mivel $\psi(a,b)$ maximális S azon α kongruenciái között, melyekre $(a,b) \notin \alpha$ teljesül, ezért van olyan $j \in I$ index, hogy

$$\alpha_j = \psi(a,b),$$

azaz

$$\alpha_j/\psi(a,b) = \iota_{S/\psi(a,b)}.$$

A 11.4. Tétel miatt ez éppen azt jelenti, hogy az $S/\psi(a,b)$ faktorfélcsoporth szubdirekt irreducibilis.

A bizonyítás hátralévő részében megmutatjuk, hogy az S félcsoporth előáll az $S/\psi(a,b)$ ($a,b \in S, a \neq b$) faktorfélcsoporthok szubdirekt szorzataként. A 11.2. Tétel miatt elegendő megmutatni, hogy

$$\cap_{a,b \in S, a \neq b} \psi(a,b) = id_S.$$

Legyenek $x, y \in S$ tetszőleges elemek. Tegyük fel, hogy

$$x \neq y.$$

Akkor

$$(x,y) \notin \psi(x,y),$$

amiből

$$(x,y) \notin \cap_{a,b \in S, a \neq b} \psi(a,b)$$

következik. Tehát

$$\cap_{a,b \in S, a \neq b} \psi(a,b) = id_S. \quad \square$$

11.1. Szubdirekt irreducibilis félcsoporthok

11.6. Tétel *Tetszőleges S félcsoporthra a következő három feltétel egymással ekvivalens.*

- (1) S szubdirekt irreducibilis.
- (2) S^1 szubdirekt irreducibilis.
- (3) S^0 szubdirekt irreducibilis.

Bizonyítás. Mivel az egyelemű és kételemű félcsoporthok szubdirekt irreducibilisek, feltehetjük, hogy $|S| \geq 2$. Feltehetjük továbbá azt is, hogy $S^1 \neq S$ és $S^0 \neq S$. Először is megjegyezzük, hogy ha α egy S^1 félcsoporth olyan kongruenciája, melynek S -re való α^* leszűkítésére $\alpha^* = \iota_S$ teljesül, akkor $\alpha = \iota_{S^1}$. Ugyanis, ha $a \in S$ -re $(a, 1) \in \alpha$ teljesül, akkor minden $b \in S$ elem esetén $(ab, b) \in \alpha$ és $(ba, b) \in \alpha$, amiből $ab = ba = b$ következik, hiszen $ab, ba \in S$, és $b \in S$ α -osztálya csak b -t tartalmazza. Azt kaptuk, hogy a az S félcsoporth egységeleme, s ezért $S = S^1$, ami ellentmond az $S \neq S^1$ feltételnek.

(1)-ből következik (2): Tegyük fel, hogy S szubdirekt irreducibilis félcsoporth. Legyen α_i ($i \in I$) az S^1 kongruenciáinak olyan családjá, melyre

$$\bigcap_{i \in I} \alpha_i = \iota_{S^1}$$

teljesül. Jelölje α_i^* az α_i ($i \in I$) kongruencia S -re való leszűkítését. Akkor

$$\bigcap_{i \in I} \alpha_i^* = \iota_S.$$

Mivel az S félcsoporth szubdirekt irreducibilis, ezért valamely $j \in I$ indexre

$$\alpha_j^* = id_S.$$

Az előzőekben tett megjegyzés szerint ebből

$$\alpha_j = id_{S^1}$$

következik. A 11.4. Tétel szerint S^1 szubdirekt irreducibilis.

(2)-ből következik (1): Legyen S^1 szubdirekt irreducibilis. Legyen α_i^* ($i \in I$) az S félcsoporth kongruenciáinak olyan családjá, amelyre

$$\bigcap_{i \in I} \alpha_i^* = \iota_S$$

teljesül. Tetszőleges $i \in I$ indexre jelölje α_i az S^1 félcsoporth azon ekvivalenciarelációját, amely szerint az S^1 félcsoporth egységeleme önállóan alkot egy osztályt, az S elemeinek α_i -osztálya megegyezik az S -beli α_i^* -osztályával. Könnyen ellenőrizhető, hogy α_i kongruencia az S^1 félcsoporthon és

$$\bigcap_{i \in I} \alpha_i = \iota_{S^1}.$$

Mivel S^1 szubdirekt irreducibilis, ezért

$$\alpha_j = \iota_{S^1}$$

valamely $j \in I$ indexre, amiből

$$\alpha_j^* = \iota_S$$

következik. Így S szubdirekt irreducibilis, azaz (1) teljesül.

Az (1) és (3) feltételek ekvivalenciája az előzőekhez hasonlóan bizonyítható a következők figyelembevételével: Ha α egy S^0 félcsoporthoz olyan kongruenciája, melynek S -re való α^* leszűkítésére $\alpha^* = \iota_S$ teljesül, akkor $\alpha = \iota_{S^0}$. Ugyanis, ha $(a, 0) \in \alpha$, teljesül valamely $a \in S$ elemre, akkor minden $b \in S$ elemre $(ab, 0) \in \alpha$ és $(ba, 0) \in \alpha$, amiből $ab, ba \in S$ miatt $ab = ba = a$ következik, azaz a az S nulleleme, s ezért $S = S^0$, ami ellentmond az $S \neq S^0$ feltételnek. Ebből a fentiekhez hasonlóan igazolható, hogy az (1) és (3) feltételek egymással ekvivalensek. \square

11.7. Definíció Egy S félcsoporthoz szívén (ha létezik) az S azon legalább kételemű ideálját értjük, amelyet az S minden legalább kételemű ideálja részhalmazként tartalmaz. Egy kételemű szívet primitív szívnek nevezünk.

Ha K egy S félcsoporthoz szíve, akkor $K^2 (\subseteq K)$ ideálja S -nek, és így $K^2 = K$ vagy $K^2 = \{0\}$. Az első esetben azt mondjuk, hogy K globálisan idempotens, a második esetben pedig azt, hogy K nilpotens.

11.8. Definíció Egy S félcsoporthoz valamely c elemét diszjunktív elemnek nevezzük, ha a

$$\mathcal{P}_{\{c\}}^1 = \{(a, b) \in S \times S : (\forall x, y \in S^1) \ xay = c \text{ akkor és csak akkor, ha } \ xby = c\}$$

kongruencia egyenlő az S félcsoporthoz identikus relációjával.

11.9. Tétel Ha egy nullelemes S félcsoporthoz van nem-nulla diszjunktív eleme, akkor S -nek van szíve, valamint az is igaz, hogy S összes diszjunktív eleme benne van ebben a szívben.

Bizonyítás. Legyen k egy S félcsoporthoz nem-nulla diszjunktív eleme. Mivel

$$r(k) = \{s \in S : (\forall x, y \in S^1) \ xsy \neq k\}$$

egy $\mathcal{P}_{\{k\}}^1$ -osztály és egyben egy ideálja is S -nek, ezért

$$r(k) = \{0\},$$

mivel $\mathcal{P}_{\{k\}}^1 = \iota_S$. Legyen I az S olyan ideálja, amely tartalmazza a nullelemtől különböző elemet. Mivel $r(k) = \{0\}$, ezért az I tetszőleges $a \neq 0$ eleme esetén mindig megadhatók olyan $x, y \in S^1$ elemek, hogy

$$xay = k.$$

Így

$$k \in I.$$

Mivel a nullelemtől különböző k diszjunktív elem benne van minden nem-nulla ideálban, ezért S -nek van K szíve. Az előzőekből az is következik, hogy S összes diszjunktív eleme benne van K -ban. \square

11.10. Tétel Minden legalább kételemű szubdirekt irreducibilis S félcsoporthoz van legalább két diszjunktív eleme.

Bizonyítás. Legyen S szubdirekt irreducibilis félcsoport. Minden $c \in S$ elemhez tekintjük a 2.33. Tételben definiált $\mathcal{P}_{\{c\}}^1$ kongruenciát. A 2.33. Tétel szerint $\{c\}$ egy $\mathcal{P}_{\{c\}}^1$ -osztály. Így

$$\bigcap_{c \in S} \mathcal{P}_{\{c\}}^1 = \iota_S.$$

Mivel S szubdirekt irreducibilis, ezért a 11.4. Tétel miatt van olyan $d_1 \in S$ elem, amelyre $\mathcal{P}_{\{d_1\}}^1 = \iota_S$ teljesül, azaz d_1 az S félcsoport diszjunktív eleme. Az is világos, hogy

$$\bigcap_{(c \in S \setminus \{d_1\})} \mathcal{P}_{\{c\}}^1 = \iota_S.$$

Ugyancsak az S félcsoport szubdirekt irreducibilitását használva, azt kapjuk, hogy van olyan $d_2 (\neq d_1)$ eleme S -nek, amelyre $\mathcal{P}_{\{d_2\}}^1 = \iota_S$ teljesül, azaz d_2 az S félcsoport d_1 -től különböző diszjunktív eleme. \square

Az előző tétel miatt, ha egy szubdirekt irreducibilis félcsoporthoz primitív a szíve, akkor szükségképpen diszjunktív a nulleleme. Nem bizonyítjuk, de érvényes ennek az állításnak a megfordítása is, azaz igaz a következő tétel:

11.11. Tétel Egy primitív szívű félcsoport akkor és csak akkor szubdirekt irreducibilis, ha a nulleleme diszjunktív.

11.12. Definíció Egy nullelemes S félcsoport A_S annullátorán értjük S mindazon x elemienek összességét, melyekre $xS = Sx = \{0\}$ teljesül.

11.13. Tétel Egy nemtriviális annullátorú félcsoport akkor és csak akkor szubdirekt irreducibilis, ha van a nullelemtől különböző diszjunktív eleme.

Bizonyítás. Legyen S egy nemtriviális A_S annullátorú félcsoport. Akkor S -nek van legalább két eleme. Ha S szubdirekt irreducibilis, akkor a 11.10. Tétel szerint S -nek van legalább két diszjunktív eleme, így van a nullelemtől különböző diszjunktív eleme.

Fordítva, tegyük fel, hogy S -nek van a nullelemtől különböző k diszjunktív eleme. Akkor a 11.9. Tétel szerint S -nek van K szíve, amely tartalmazza S összes diszjunktív elemét. Legyen $g \in A_S \setminus \{0\}$ tetszőleges. Akkor tetszőleges $u \in S$ elem esetén

$$ug = gu = 0.$$

Így

$$g \in r(k) \cup \{k\}.$$

Mivel $r(k) = \{0\}$, ezért $g = k$, így $A_S = \{0, k\} = K$, amiből az következik, hogy a K szív primitív. Megmutatjuk, hogy 0 az S diszjunktív eleme. Legyenek $e \neq f$ az S teszőleges elemei. Mivel k diszjunktív, ezért

$$(e, f) \notin \mathcal{P}_{\{k\}}^1.$$

Így megadhatók olyan $x, y \in S^1$ elemek, amelyekre

$$xey = k, \quad xfy \neq k$$

teljesül. Ha

$$xfy = 0,$$

akkor

$$(e, f) \notin \mathcal{P}_{\{0\}}^1.$$

Ha pedig

$$xfy \neq 0,$$

akkor megadhatók olyan $u, v \in S^1$ elemek, hogy

$$uxfyv = k,$$

mivel $r(k) = \{0\}$. Mivel $xfy \neq k$, ezért u és v egyike benne van S -ben. Mivel $k \in A_S$, ezért

$$ukv = 0.$$

Így

$$uxeyv = ukv = 0.$$

Tehát megint

$$(e, f) \notin \mathcal{P}_{\{0\}}^1.$$

Ebből már következik, hogy

$$\mathcal{P}_{\{0\}}^1 = \iota_S.$$

Tehát 0 diszjunktív elem. A 11.11. Tétel miatt S szubdirekt irreducibilis. \square

11.14. Definíció Egy olyan S félcsoportot, amelynek magja az S egy részcsoportja, homocsoportnak nevezünk.

11.15. Tétel Egy nullelem nélküli szubdirekt irreducibilis homocsoport szükségképpen csoport.

Bizonyítás. Legyen S egy nullelem nélküli homocsoport. Jelölje G az S magját e pedig a G részcsoport egységelemét. Mivel S nem nullelemes, ezért $|G| \geq 2$. Jelölje φ az S félcsoportnak a G csoportra való következő leképezését: tetszőleges $s \in S$ elem esetén legyen

$$\varphi(s) = es.$$

Mivel G az S félcsoport ideálja, ezért φ az S félcsoportnak a G részcsoportba való leképezése. Mivel

$$eg = g$$

minden $g \in G$ elemre, ezért φ az S félcsoportnak a G részcsoportra való leképezése. Legyenek $s, t \in S$ tetszőleges elemek. Akkor

$$\varphi(st) = e(st) = (es)t = ((es)e)t = (es)(et) = \varphi(s)\varphi(t),$$

felhasználva azt is, hogy $es \in G$ és e a G egységeleme. Tehát φ az S félcsoportnak a G részcsoportra való homomorfizmusa. Jelölje α ennek a homomorfizmusnak a magját, azaz

$$\alpha = \{(a, b) \in S \times S : ea = eb\}.$$

A 3.3. Lemma szerint α az S félcsoport kongruenciarelációja. Jelölje β a G ideál szerinti Rees-féle kongruenciát. Tegyük fel, hogy

$$(a, b) \in \alpha \cap \beta$$

valamilyen $a, b \in S$ elemekre. Mivel

$$(a, b) \in \beta,$$

ezért

$$a = b \quad \text{vagy} \quad a, b \in G.$$

Mivel

$$(a, b) \in \alpha,$$

azaz

$$ea = eb,$$

ezért az $a, b \in G$ esetben is

$$a = ea = eb = b$$

adódik. Tehát

$$\alpha \cap \beta = \iota_S.$$

Ha S szubdirekt irreducibilis, akkor $\alpha = \iota_S$, ugyanis a $|G| \geq 2$ feltétel miatt $\beta = \iota_S$ nem lehetséges. Mivel tetszőleges $s \in S$ elem esetén

$$e(es) = es,$$

azaz

$$(s, es) \in \alpha,$$

ezért

$$s = es \in G.$$

Így $S \subseteq G$, azaz $S = G$. □

11.2. Szubdirekt irreducibilis kommutatív félcsoporthok

Adott p prímszám esetén jelölje \mathbf{Z}_{p^∞} az összes n pozitív egész kitevőre tekintett p^n -edik komplex egységgyökök multiplikatív csoportját. Egy csoportot *kváziciklikus p -csoport*nak nevezünk, ha izomorf a \mathbf{Z}_{p^∞} csoporttal.

11.16. Tétel *Egy kommutatív csoport akkor és csak akkor szubdirekt irreducibilis, ha izomorf egy kváziciklikus p -csoport (p egy prímszám) valamely részcsoportjával.*

Bizonyítás. Legyen S egy kommutatív szubdirekt irreducibilis csoport. Akkor S -nek van egy A legszűkebb, nem csak az e egységelemet tartalmazó részcsoportja. Ezért A egy p prímrendű ciklikus csoport. Legyen $e \neq s \in S$ tetszőleges. A része az s elem által generált $[s]$ ciklikus részcsoportnak. Így $[s]$ nem lehet végtelen (mert végtelen ciklikus részcsoport minden részcsoportja végtelen ciklikus részcsoport). Ezért s rendje osztható p -vel, és így $[s]$ tartalmaz p -edrendű elemet. Ha $[s]$ rendje $p^\alpha r$, ahol p nem osztja r -et, akkor

$$[s] = [s^{p^\alpha}] \times [s^r].$$

Mivel $A \not\subseteq [s^r]$, ezért $[s^r] = \{e\}$. Így s rendje p valamely pozitív kitevőjű hatványa. Tehát S egy p -csoport. Mivel S szubdirekt felbonthatatlan, ezért direkt felbonthatatlan is. Jól ismert csoportelméleti eredmény, hogy egy direkt felbonthatatlan p -csoport izomorf a kváziciklikus p -csoport egy részcsoportjával. Mivel a fordított állítás nyilvánvaló, ezért a tételt bebizonyítottuk. □

11.17. Tétel *Egy félcsoport akkor és csak akkor globálisan idempotens szívű szubdirekt irreducibilis kommutatív félcsoport, ha izomorf G -vel vagy G^0 -lal vagy F -fel, ahol G egy kváziciklikus p -csoport (p prímszám) valamely legalább kételemű részcsoportjával izomorf, F pedig egy kételemű félháló.*

Bizonyítás. Legyen S egy globálisan idempotens szívű szubdirekt irreducibilis félcsoport. Jelölje K az S szívét. Először vizsgáljuk azt az esetet, amikor S nem tartalmaz null-elemet. Akkor K egyszerű, és így a 7.4. Tétel szerint K egy csoport, azaz S nullelem

nélküli homocsoport. A 11.15. Tétel szerint S egy csoport. Ebből pedig a 11.16. Tétel felhasználásával adódik, hogy S izomorf egy kváziciklikus p -csoport (p egy prímszám) valamely legalább kételemű részcsoporthal.

A következőkben tegyük fel, hogy S -nek van egy 0 nulleleme. Megmutatjuk, hogy S -ben a nem-nulla elemek egy részfélcsoportot alkotnak. Tegyük fel, indirekt módon, hogy

$$ab = 0$$

valamely $a, b \in S$ nem nulla elemekre. Világos, hogy

$$A = \{b \in S : ab = 0\}$$

az S -nek egy nem-nulla ideálja. Így az S félcsoport K szíve ennek az A ideálnak részalmezeje. Akkor viszont

$$aK = \{0\}.$$

Legyen

$$B = \{a \in S : aK = \{0\}\}.$$

Világos, hogy B az S egy nemnulla ideálja, és így

$$K \subseteq B,$$

amiből

$$K^2 = \{0\}$$

következik. Ez ellentmond annak a feltételnek, hogy K globálisan idempotens. Ezért

$$S = G \cup \{0\},$$

ahol G az S félcsoport egy részfélcsoportja. Mivel a feltétel szerint S szubdirekt irreducibilis, ezért a 11.6. Tétel miatt G szubdirekt irreducibilis kommutatív félcsoport.

Ha G -nek van egy 0^* -gal jelölt nulleleme, akkor

$$\{0, 0^*\}$$

az S félcsoport egy ideálja, amely egyben az S szíve. Tehát S olyan szubdirekt irreducibilis félcsoport, melynek szíve primitív. A 11.11. Tétel miatt az S nulleleme diszjunktív, azaz

$$\mathcal{P}_{\{0\}}^1 = \{(a, b) \in S \times S : (\forall x, y \in S^1) xay = 0 \Leftrightarrow xby = 0\} = \iota_S.$$

Mivel G részfélcsoport és $S = G \cup \{0\}$, ezért tetszőleges $a \in G$ elem esetén $xay = 0$ akkor és csak akkor, ha $x = 0$ vagy $y = 0$. Ha a két eset közül bármelyik is teljesül, akkor tetszőleges $b \in G$ elem esetén $xby = 0$. Tehát valamely $x, y \in S^1$ elemekre vagy $xGy \cap \{0\} = \emptyset$ vagy $xGy = \{0\}$. Így tetszőleges $a, b \in G$ esetén

$$(a, b) \in \mathcal{P}_{\{0\}}^1,$$

amiből a $\mathcal{P}_{\{0\}}^1 = \iota_S$ egyenlőség miatt $a = b$ következik. Tehát $|G| = 1$. Következésképpen S egy kételemű félháló.

Ha G -nek nincs nulleleme, akkor G egy globálisan idempotens szívű szubdirekt irreducibilis (kommutatív) félcsoporth, s így a bizonyítás előző része miatt G egy legalább kételemű részcsoporthja egy kváziciklikus p -csoportnak (p egy prímszám). Az S félcsoporth pedig ebből származtatható egy nullelem adjungálásával, azaz $S = G^0$.

Az világos, hogy a tételben szereplő félcsoporthok globálisan idempotens szívű szubdirekt irreducibilis kommutatív félcsoporthok. Ezzel a tételt bebizonyítottuk. \square

11.18. Tétel *Egy nemtriviális annullátorú kommutatív félcsoporth akkor és csak akkor szubdirekt irreducibilis, ha van a nullelemtől különböző diszjunktív eleme.*

Bizonyítás. A 11.13. Tétel szerint triviális, mert az idézett tétel tetszőleges nemtriviális annullátorú S félcsoporthra érvényes. \square

11.19. Tétel *Egy legalább kételemű S félcsoporth akkor és csak akkor triviális annullátorú, nilpotens szívű szubdirekt irreducibilis félcsoporth, ha tartalmaz egy egységelemet, egy nem-nulla diszjunktív elemet, valamint egy nullától különböző nullosztót úgy, hogy a nem-nullosztók halmaza S -nek egy szubdirekt irreducibilis részcsoporthja.*

Bizonyítás. Legyen S olyan legalább kételemű szubdirekt irreducibilis félcsoporth, melynek K szíve nilpotens, és az annullátora triviális. A 11.10. Tétel szerint S -nek van legalább két diszjunktív eleme, s ezek mindegyike benne van K -ban. Így a nem-nulla diszjunktív elem nullosztó. Legyen

$$F = \{f \in S; Kf = \{0\}\}.$$

Mivel $K^2 = \{0\}$, ezért

$$K \subseteq F.$$

Az világos, hogy F az S egy ideálja. Mivel S annullátora csak S nullelemét tartalmazza, ezért K nem annullátora S -nek, és így

$$F \neq S.$$

Vezessük be a következő jelöléseket.

$$G = S - F, \quad K_0 = K - \{0\}, \quad F_0 = F - K.$$

Ekkor

$$\{\{0\}, K_0, F_0, G\}$$

az S félcsoporth olyan diszjunkt részalmazai, melyek úniója S (F_0 lehet üres is). Ha $g \in G$, akkor

$$gK \neq \{0\},$$

azaz

$$gK = K,$$

mert gK ideálja S -nek. Világos, hogy $I = \{s \in S; gs = 0\}$ ideálja S -nek. K -t nem tartalmazza I , ezért

$$I = \{0\},$$

azaz g nem nullosztó. Mivel az F elemei nullosztók, ezért G az S nem-nullosztóinak halmaza. Mivel S szíve legalább két elemet tartalmaz, ezért minden $k \in K_0$ elemre

$$K = Sk = Gk \cup \{0\}$$

teljesül, azaz van olyan $e \in S$ elem, hogy

$$ek = k.$$

Legyen

$$J = \{s \in S; es = s\}.$$

Látható, hogy J az S félcsoport legalább két elemet tartalmazó ideálja. Így

$$K \subseteq J.$$

Ezért

$$ek = k$$

minden $k \in K$ elemre. Akkor viszont

$$e^n k = k$$

minden pozitív egész n -re és minden $k \in K$ elemre. Legyen

$$\alpha = \{(a, b) \in S \times S; e^n a = e^m b \text{ valamely } n, m \text{ pozitív egész számokra}\}.$$

Világos, hogy α az S félcsoport olyan kongruenciája, amelyre $\alpha|K = \iota_K$ teljesül. Akkor

$$\alpha \cap \rho_K = \iota_S,$$

ahol ρ_K jelöli az S félcsoport K szerinti Rees-féle kongruenciáját. Mivel S szubdirekt irreducibilis és $\rho_K \neq \iota_S$, ezért

$$\alpha = id_S.$$

Mivel $(es, s) \in \alpha$ minden $s \in S$ elemre, ezért

$$es = s$$

minden $s \in S$ elemre, azaz e az S félcsoport egységeleme.

Legyenek $g \in G$ és $k \in K_0$ tetszőleges elemek. Akkor

$$Ggk = K_0,$$

és így van olyan $g_1 \in G$ elem, melyre

$$g_1gk = k$$

teljesül. Az előzőekhez hasonlóan igazolható, hogy g_1g az S félcsoport egységeleme. Így g_1 a g elem inverze. Tehát G az S félcsoport egy részcsoportja.

Tegyük fel, hogy

$$g_1k = g_2k$$

teljesül valamely $g_1, g_2 \in G$ és $k \in K_0$ elemekre. Akkor

$$k = g_1^{-1}g_2k,$$

és így $g_1^{-1}g_2$ az S félcsoport egységeleme, azaz

$$g_1 = g_2.$$

Mivel $Gk = K_0$, ezért ezen eredményből az következik, hogy a G és K_0 halmazok számossága megegyezik. Legyen η a G csoport valamely H részcsoportja által meghatározott kongruenciája. Vezessük be a következő jelölést:

$$\eta^* = \{(a, b) \in S \times S; a \in bH\}.$$

Nem nehéz belátni, hogy η^* az S félcsoport olyan kongruenciája, melynek G -re való leszűkítése η . Jelölje η_i , $i \in I$ a G egy olyan kongruencia-családját, melyre

$$\bigcap_{i \in I} \eta_i = id_G$$

teljesül. Jelölje η_i^* ($i \in I$) az S azon kongruenciáját, melyet η_i segítségével az előző módon definiálunk. Ha $k_1, k_2 \in K_0$, akkor

$$k_1 = gk_2$$

valamely $g \in G$ elemmel. Ezért $(k_1, k_2) \in \eta_i^*$ pontosan azt jelenti, hogy $k_1 \in k_2H_i$ vagy, hogy van olyan $g_i \in H_i$ elem, melyre $k_1 = k_2g_i$ teljesül, azaz $k_2g = k_2g_i$, azaz (a fentiek miatt) $g = g_i$, ami azza ekvivalens, hogy $g \in H_i$. Így $(k_1, k_2) \in \bigcap_{i \in I} \eta_i^*$ akkor és csak akkor, ha $g \in \bigcap_{i \in I} H_i$, amely akkor és csak akkor teljesül, ha $g = e$, azaz ha $k_1 = k_2$. Tehát

$$\rho_K \cap \left(\bigcap_{i \in I} \eta_i^* \right) = \iota_S.$$

Mivel S szubdirekt irreducibilis, ezért van olyan $i \in I$ index, hogy

$$\eta_i^* = id_S$$

és így $\eta_i = id_G$. Tehát G egy szubdirekt irreducibilis csoport.

Fordítva, tegyük fel, hogy S olyan egységelemes kommutatív félcsoport, melynek triviális az annullátora, tartalmaz egy nem-nulla diszjunktív elemet és egy nem-nulla nullosztót, továbbá az is teljesül, hogy a nem nullosztók G halmaza S egy szubdirekt irreducibilis részcsoportha. Megmutatjuk, hogy S szubdirekt irreducibilis félcsoport. Először is megjegyezzük, hogy az S egységeleme benne van G -ben, és így megegyezik a G egységelemével. Legyen k_0 az S egy nem-nulla diszjunktív eleme. A 11.9. Tétel szerint S -nek van K szíve. Ha f egy nullelemtől különböző nullosztó, akkor $ff_1 = 0$ valamely $f_1 \neq 0$ elemmel. Minden $k \in K$ -hoz megadhatók olyan $x, y \in S$ elemek, hogy

$$xf_1y = k.$$

Így

$$fk = xff_1y = 0,$$

ami annyit jelent, hogy k annullálja az $F = S - G$ halmazt. Így

$$FK = \{0\}.$$

Ha G -nek csak egy eleme van, akkor $S = F^1$ és F olyan félcsoport, melynek annullátora legalább két elemű, továbbá tartalmaz egy nem-nulla diszjunktív elemet. A 11.19. Tétel szerint F szubdirekt irreducibilis. A 11.6. Tétel miatt ekkor $S = F^1$ is szubdirekt irreducibilis.

Tegyük fel a továbbiakban, hogy G -nek egynél több eleme van. Mivel G szubdirekt irreducibilis, ezért van G -nek egy legszűkebb, nem csak az egységelemet tartalmazó H részcsoportha. Jelölje η az S egy tetszőleges nem-identikus kongruenciáját. A tekintett k_0 diszjunktív elemet tartalmazó η -osztály legalább kételemű. Ugyanis, ha egyelemű lenne, akkor S tetszőleges olyan egymástól különböző a és b elemei esetén, amelyekre

$$(a, b) \in \eta$$

teljesül, az következne, hogy

$$(xay, xby) \in \eta$$

minden $x, y \in S^1$ esetén, amiből pedig az adódna, hogy $xay = k_0$ akkor és csak akkor, ha $xby = k_0$. Ez viszont ellentmond annak, hogy k_0 diszjunktív elem. Így tehát létezik olyan S -beli $s \neq k_0$ elem, amelyre

$$(s, k_0) \in \eta$$

teljesül. Ha $s \notin K$, akkor az s elem által generált SsS ideál (valódi módon) tartalmazza K -t, s ezért

$$xsy = k_0$$

valamely $x, y \in S$ elemekre, amiből

$$(xk_0y, k_0) \in \eta$$

következik. Ha $xy \in G$, akkor

$$s = (xy)^{-1}k_0 \in K,$$

ami ellentmond az $s \notin K$ feltételnek. Így

$$xy \notin G.$$

Mivel $S \setminus G = F$ és $FK = \{0\}$, ezért

$$xk_0y = 0.$$

Így

$$(k_0, 0) \in \eta$$

és

$$(hk_0, 0) \in \eta$$

minden $h \in H$ elemre. Tehát

$$\{(u, v) \in S \times S; u = v \text{ vagy } u, v \in Hk_0\} \subseteq \eta.$$

Ha $s \in K_0$, akkor

$$s = g_0k_0$$

valamely $g_0 \in G$ elemre, mert $K = Sk_0 = Gk_0 \cup \{0\}$. Ebben az esetben a G csoport mindazon g elemeinek halmaza, melyekre $(gk_0, k_0) \in \eta$ teljesül a G egy nem-identikus részcsoportját alkotja (ez a részcsoport tartalmazza a $g_0 \neq e$ elemet). Így H benne van ebben a részcsoportban és ezért

$$\{(u, v) \in S \times S; u = v \text{ vagy } u, v \in Hk_0\} \subseteq \eta.$$

Tehát mindkét esetben azt kaptuk, hogy

$$\{(u, v) \in S \times S; u = v \text{ vagy } u, v \in Hk_0\} \subseteq \eta.$$

Jelölje η_0 az S összes nem-identikus kongruenciáinak metszetét. Az

$$\{(u, v) \in S \times S; u = v \text{ vagy } u, v \in Hk_0\} \subseteq \eta_0$$

és

$$|Hk_0| \geq 2$$

miatt $\eta_0 \neq \iota_S$. Így S szubdirekt irreducibilis. □

Feladatok

11.1. (Megoldás: 17.35.) Mutassuk meg, hogy az alábbi Cayley-táblával definiált fél-csoport szubdirekt irreducibilis!

	e	f	k_1	k_2	0
e	e	e	k_1	k_1	0
f	f	f	k_2	k_2	0
k_1	k_1	k_1	0	0	0
k_2	k_2	k_2	0	0	0
0	0	0	0	0	0

Mely elemek alkotják a félcsoport szívét?

11.2. (Megoldás: 17.36.) Mutassuk meg, hogy az alábbi Cayley-táblával definiált fél-csoport szubdirekt irreducibilis!

	e	a	u	v	0
e	e	a	0	0	0
a	a	e	0	0	0
u	u	v	0	0	0
v	v	u	0	0	0
0	0	0	0	0	0

Mely elemek alkotják a félcsoport szívét?

12. fejezet

Permutálható félcsoportok

12.1. Definíció Egy S félcsoportot permutálható félcsoportnak nevezünk, ha kongruenciái egymással felcserélhetőek, azaz az S félcsoport tetszőleges α és β kongruenciái esetén $\alpha \circ \beta = \beta \circ \alpha$.

12.2. Tétel Minden csoport permutálható félcsoport.

Bizonyítás. Legyenek α és β egy G csoport tetszőleges kongruenciái. Akkor léteznek (egyértelműen) a G csoportnak olyan N , illetve M normális részcsoporthai, amelyek az α , illetve a β kongruenciákat meghatározzák (pl. α esetén $(a, b) \in \alpha$ akkor és csak akkor, ha $ab^{-1} \in N$). Tegyük fel, hogy

$$(a, b) \in \alpha \circ \beta$$

teljesül valamely $a, b \in G$ elemekre. Akkor van olyan $x \in G$ elem, hogy

$$(a, x) \in \alpha \quad \text{és} \quad (x, b) \in \beta,$$

azaz

$$ax^{-1} \in N \quad \text{és} \quad xb^{-1} \in M.$$

Ebből viszont

$$ab^{-1} \in NM = MN$$

adódik, ami miatt megadhatók olyan $m \in M$ és $n \in N$ elemek, amelyekre

$$ab^{-1} = mn$$

teljesül. Ekkor viszont

$$a(nb)^{-1} = ab^{-1}n^{-1} = m \in M$$

miatt

$$(a, nb) \in \beta.$$

Mivel

$$(nb)b^{-1} = n \in N,$$

ezért

$$(nb, b) \in \alpha.$$

Következésképpen

$$(a, b) \in \beta \circ \alpha.$$

Tehát

$$\alpha \circ \beta \subseteq \beta \circ \alpha.$$

A fordított tartalmazás hasonlóan igazolható. Így

$$\alpha \circ \beta = \beta \circ \alpha. \quad \square$$

Bizonyítás nélkül közöljük az alábbi eredményt:

12.3. Tétel *Egy $\mathcal{M}(G; I, J; P)$ Rees-féle mátrixfélcsoporth akkor és csak akkor permutálható, ha $|I| \leq 2$ és $|J| \leq 2$.*

12.1. Permutálható félcsoporthok ideáljai

12.4. Tétel *Ha I tetszőleges ideálja, α pedig tetszőleges kongruenciája egy permutálható S félcsoporthnak, akkor I benne van S valamely α -osztályában vagy pedig α -osztályok uniója.*

Bizonyítás. Legyen I tetszőleges ideálja, α pedig tetszőleges kongruenciája egy permutálható S félcsoporthnak. Ha I nem része egyetlen α osztálynak sem, és nem áll elő α -osztályok uniójaként sem, akkor megadhatók olyan $a, b \in S$ elemek, amelyekre

$$(a, b) \notin \alpha, \quad [a]_\alpha \cap I \neq \emptyset, \quad a \notin I, \quad b \in I$$

teljesül. Akkor tetszőleges

$$x \in [a]_\alpha \cap I$$

elem esetén

$$(a, x) \in \alpha \quad (x, b) \in \varrho_I$$

teljesül, ahol ϱ_I jelöli az S félcsoporth I ideálja szerinti Rees-féle kongruenciát. Így

$$(a, b) \in \alpha \circ \varrho_I = \varrho_I \circ \alpha,$$

azaz megadható S -nek olyan y eleme, hogy

$$(a, y) \in \varrho_I \quad (y, b) \in \alpha.$$

Mivel $a \notin I$, ezért

$$y = a,$$

és így

$$(a, b) \in \alpha,$$

ami ellentmondás. □

12.5. Tétel *Permutálható félcsoport ideáljai láncot alkotnak a tartalmazásra nézve.*

Bizonyítás. Jelölje I és J egy permutálható S félcsoport tetszőleges ideáljait. A 12.4. Tétel szerint I benne van valamelyik ρ_J -osztályban vagy ρ_J -osztályok úniója. Mivel

$$I \cap J \neq \emptyset,$$

ezért az első esetben $I \subseteq J$, a második esetben pedig $J \subseteq I$. □

12.6. Tétel *Nil félcsoport akkor és csak akkor permutálható, ha ideáljai láncot alkotnak a tartalmazásra nézve.*

Bizonyítás. Legyen S nil félcsoport. Ha S permutálható, akkor a 12.5. Tétel szerint az S ideáljai láncot alkotnak a tartalmazásra nézve.

Fordítva, tegyük fel, hogy S ideáljai láncot alkotnak a tartalmazásra nézve. Legyen α az S tetszőleges kongruenciája. Megmutatjuk, hogy ez mindig egy ideál szerinti Rees-féle kongruencia. Ha α az identikus reláció, akkor α úgy tekinthető, mint az S nulleleme által definiált Rees-féle kongruencia. Tegyük fel a továbbiakban, hogy $\alpha \neq \iota_S$. Legyenek a és b olyan elemek, amelyek nem egyenlők egymással és

$$(a, b) \in \alpha.$$

Tekintsük az általuk generált főideálokat. Mivel a feltétel szerint S ideáljai láncot alkotnak a tartalmazásra nézve, ezért e két ideál valamelyike tartalmazza a másikat. Az általánosság megszorítása nélkül feltehetjük, hogy

$$S^1 a S^1 \subseteq S^1 b S^1.$$

Akkor megadhatók olyan $x, y \in S^1$ elemek, hogy

$$a = xby,$$

és így

$$(b, xby) \in \alpha.$$

Ebből viszont

$$(b, x^n b y^n) \in \alpha$$

következik minden n pozitív egész számra. Mivel $a \neq b$, ezért x és y valamelyike eleme S -nek, amiből következik, hogy x vagy y valamelyik hatványa egyenlő nullával. Ebből viszont

$$(b, 0) \in \alpha,$$

és így

$$(a, 0) \in \alpha$$

következik. Azt kaptuk, hogy ha egy α -osztály nem egyelemű, akkor az a 0-át tartalmazó α -osztály. Mivel a 0-val α -relációban álló elemek halmaza S -nek egy I ideálja, α az I ideál szerinti Rees-féle kongruencia. Mivel S -nek csak Rees-féle kongruenciái vannak, ezért az S kongruenciái láncot alkotnak a tartalmazásra nézve. Ebből már következik, hogy S permutálható félcsoport. \square

12.2. Permutálható félcsoportok epimorf képei

12.7. Tétel *Permutálható félcsoport tetszőleges epimorf képe is permutálható.*

Bizonyítás. Legyen φ egy permutálható S félcsoportnak valamely T félcsoportra való homomorfizmusa. Jelölje σ a φ homomorfizmus magját. A homomorfizmustétel miatt

$$T \cong S/\sigma.$$

Legyenek $\alpha' = \alpha/\sigma$ és $\beta' = \beta/\sigma$ a T félcsoport tetszőleges kongruenciái. Tegyük fel, hogy

$$([a]_\sigma, [b]_\sigma) \in \alpha' \circ \beta'$$

valamely $a, b \in S$ elemekre. Akkor van olyan $x \in S$ elem, hogy

$$([a]_\sigma, [x]_\sigma) \in \alpha' \quad \text{és} \quad ([x]_\sigma, [b]_\sigma) \in \beta'.$$

Ekkor

$$(a, x) \in \alpha \quad \text{és} \quad (x, b) \in \beta,$$

azaz

$$(a, b) \in \alpha \circ \beta = \beta \circ \alpha,$$

és ezért van olyan $y \in S$ elem, hogy

$$(a, y) \in \beta \quad \text{és} \quad (y, b) \in \alpha.$$

Ekkor viszont

$$([a]_\sigma, [y]_\sigma) \in \beta' \quad \text{és} \quad ([y]_\sigma, [b]_\sigma) \in \alpha',$$

amiből

$$([a]_\sigma, [b]_\sigma) \in \beta' \circ \alpha'$$

következik. Így

$$\alpha' \circ \beta' \subseteq \beta' \circ \alpha'.$$

Hasonlóan igazolható a fordított tartalmazás. Így

$$\alpha' \circ \beta' = \beta' \circ \alpha'. \quad \square$$

12.8. Tétel *Ha S olyan permutálható félcsoport, amely tartalmaz egy valódi ideált, akkor S -nek nincs nemtriviális csoport-epimorf képe.*

Bizonyítás. Legyen S olyan permutálható félcsoport, amelyben van egy valódi (azaz az S -től különböző) I ideál. Legyen σ az S olyan kongruenciája, amely szerinti faktorfélcsoport csoport. Jelölje φ az S félcsoportnak az S/σ csoportra való természetes homomorfizmusát. A 12.4. Tétel szerint I benne van valamely σ -osztályban vagy pedig σ -osztályok uniója. Az első esetben az I -t tartalmazó σ -osztály φ szerinti képe az S/σ csoport nulleleme. Ez nem lehetséges, mivel egy legalább kételemű csoportnak nincs nulleleme. A második esetben az I φ -szerinti képe az S/σ csoport egy valódi ideálja, ami szintén ellentmondás, hiszen nemtriviális csoportnak nincs valódi ideálja. \square

12.9. Tétel *Legyen I egy S félcsoport ideálja, φ pedig I -nek egy G csoportra való homomorfizmusa. Akkor megadható S -nek G -re olyan ϕ homomorfizmusa, melynek I -re való leszűkítése megegyezik φ -vel.*

Bizonyítás. Legyen I egy S félcsoport olyan ideálja, amelynek van egy G csoportra való φ homomorfizmusa. Jelölje σ ennek az epimorfizmusnak a magját. A 2.38. Tétel szerint van I -nek olyan H reflexív unitér részfélcsoportja, hogy $\sigma = P_H$, ahol P_H jelöli az I félcsoport H szerinti, a 2.32. Definícióban értelmezett főkongruenciáját. Legyen α az S félcsoport következő relációja: Tetszőleges $a, b \in S$ elemek esetén $(a, b) \in \alpha$ pontosan akkor, ha minden $x, y \in I$ elem esetén az $xay \in H$ tartalmazás akkor és csak akkor teljesül, ha teljesül az $xy \in H$ tartalmazás. Nem nehéz belátni, hogy α az S félcsoport egy kongruenciája és $\alpha|I = P_H$. Mivel tetszőleges $a \in S$ és $h \in H$ elemre $(ha, a) \in \alpha$ és mert $ha \in I$, ezért $S/\alpha \cong G$. Ebből már következik a tétel állítása. \square

12.10. Tétel *Ha egy permutálható S félcsoportnak I egy valódi ideálja, akkor sem S -nek, sem I -nek nincs nemtriviális csoport-epimorf képe.*

Bizonyítás. A 12.8. Tétel és a 12.9. Tétel szerint nyilvánvaló. \square

12.11. Tétel *Egy S félháló akkor és csak akkor permutálható, ha $|S| \leq 2$.*

Bizonyítás. Legyen S permutálható félháló. Emlékeztetünk arra, hogy az " $e \leq f$ ($e, f \in S$) akkor és csak akkor, ha $ef = e$ " reláció parciális részbenrendezés S -en. Könnyen ellenőrizhető, hogy tetszőleges $e \in S$ elem esetén $\{x; x \leq e\}$ az S ideálja. A 12.5. Tétel szerint S ideáljai láncot alkotnak a tartalmazásra nézve, így ez a parciális rendezés jólrendezés S -en, azaz S bármely a és b eleme esetén a következők valamelyike teljesül: $a < b$, $a = b$, $a > b$. Tegyük fel, hogy $|S| \geq 3$. Legyenek $a > b > c$ az S tetszőleges elemei. Akkor az

$$X = \{x \in S : x \geq a\}, \quad Y = \{y \in S : a > y > c\}, \quad Z = \{z \in S : c \geq z\}$$

részhalmozok az S egy osztályozását adják. Könnyen ellenőrizhető, hogy az ehhez tartozó σ ekvivalenciareláció az S félháló egy kongruenciája. Az S/σ félháló egy háromelemű félháló, amely a 12.7. Tétel szerint permutálható. Az viszont könnyen igazolható, hogy a háromelemű félhálók nem permutálhatóak. Ez ellentmondás. Tehát $|S| \leq 2$. \square

12.12. Tétel Minden permutálható félcsoport vagy félháló-felbonthatatlan, vagy előáll két félháló-felbonthatatlan félcsoport félhálójaként.

Bizonyítás. Legyen S permutálható félcsoport. A 10.7. Következmény szerint S előáll félháló-felbonthatatlan félcsoportok Y félhálójaként. Mivel Y az S félcsoport epimorf képe, ezért Y is permutálható a 12.7. Tétel szerint. A 12.11. Tétel felhasználásával adódik, hogy $|Y| \leq 2$, ami annyit jelent, hogy S vagy félháló-felbonthatatlan (amikor $|Y| = 1$) vagy előáll két félháló-felbonthatatlan félcsoport félhálójaként (ha $|Y| = 2$). \square

12.13. Tétel Ha egy permutálható S félcsoport két félháló-felbonthatatlan S_1 és S_0 részfélcsoportjainak félhálója mégpedig úgy, hogy $S_0 S_1 \subseteq S_0$, akkor S_1 egyszerű félcsoport.

Bizonyítás. Legyen I tetszőleges ideálja S_1 -nek. Akkor $I \cup S_0$ ideálja S -nek. Jelölje λ az S félcsoport legszűkebb félhálókongruenciáját; ennek osztályai S_1 és S_0 . Mivel az $I \cup S_0$ ideál belemetsz mindkét λ -osztályba, ezért a 12.4. Tétel miatt $I \cup S_0 = S$, és így $I = S_1$. Tehát S_1 egyszerű félcsoport. \square

12.3. Kommutatív permutálható félcsoportok

12.14. Tétel Egy kommutatív arkhimédieszi félcsoport akkor és csak akkor permutálható, ha izomorf vagy egy csoporttal, vagy egy olyan kommutatív nil félcsoporttal, amelyben az oszthatóság teljes rendezés.

Bizonyítás. Legyen S egy permutálható kommutatív, arkhimédieszi félcsoport. Ha S egyszerű, akkor a 7.4. Tétel szerint S egy csoport. Ha nem egyszerű, akkor a 12.8. Tétel szerint nincs nemtriviális csoport-epimorf képe. Akkor viszont S tartalmaz egy idempotens elemet a 10.23. Tétel miatt. A 10.22. Tétel szerint S előáll egy kommutatív G

csoportnak egy N kommutatív nil félcsoporthal való ideálbővítéseként. A 12.8. Tétel miatt $|G| = 1$ és így S izomorf N -nel. A 12.6. Tétel miatt S ideáljai láncot alkotnak a tartalmazásra nézve, s ezért S -ben az oszthatóság teljes rendezés. A 12.2. Tétel és a 12.6. Tétel miatt a tételben felsorolt félcsoporthok permutálhatóak. \square

Bizonyítás nélkül közöljük az alábbi eredményt (lásd a [10] cikk Theorem 13. tételét):

12.15. Tétel *Egy kommutatív nem-arkhimédieszi félcsoporth akkor és csak akkor permutálható, ha előáll egy G csoport és egy olyan N nil félcsoporth félhálójaként, amely G csoporthatás szerinti orbitjai olyan kommutatív nil félcsoporthot alkotnak, melyben az oszthatóság teljes rendezés.*

Feladatok

12.1. (Megoldás: 17.37.) Mutassuk meg, hogy egy háromelemű félháló nem permutálható.

12.2. (Megoldás: 17.38.) Mutassuk meg, hogy egy félcsoporth ideáljai akkor és csak akkor alkotnak láncot a tartalmazásra nézve, ha főideáljai láncot alkotnak a tartalmazásra nézve ([39]).

13. fejezet

Félcsoportok beágyazása csoportokba

A fejezet első tételében félcsoportoknak csoportokba való beágyazhatóságára adunk szükséges feltételt.

13.1. Tétel *Ha egy S félcsoport beágyazható egy csoportba, akkor S egyszerűsítéssel felcsoport.*

Bizonyítás. Tegyük fel, hogy egy S félcsoport beágyazható egy G csoportba. Akkor van G -nek olyan T részfélcsoportja, amely az S félcsoporttal izomorf. Elegendő azt megmutatni, hogy T egyszerűsítéssel. Legyenek $a, b, x \in T$ tetszőleges elemek. Tegyük fel, hogy

$$xa = xb.$$

Mivel G csoport, ezért létezik az $x \in T \subseteq G$ elemnek inverze G -ben, azaz létezik olyan

$$x^{-1} \in G$$

elem, hogy

$$x^{-1}x = e,$$

ahol e jelöli a G csoport egységelemét. Így

$$a = ea = (x^{-1}x)a = x^{-1}(xa) = x^{-1}(xb) = (x^{-1}x)b = eb = b.$$

Tehát T bal egyszerűsítéssel. Hasonlóan igazolható, hogy T jobb egyszerűsítéssel is. \square

13.1. Kommutatív félcsoport beágyazása csoportba

Kommutatív félcsoportok esetén az "egyszerűsítéssel" fogalom nem csak szükséges, hanem elégséges feltétel is csoportokba való beágyazhatósághoz, azaz igaz a következő tétel:

13.2. Tétel *Egy kommutatív S félcsoport akkor és csak akkor ágyazható be egy csoportba, ha az S félcsoport egyszerűsítéssel.*

Bizonyítás. A 13.1. Tétel miatt elég csak azt megmutatni, hogy minden kommutatív egyszerűsítéssel félcsoport beágyazható egy csoportba. Legyen tehát S tetszőleges kommutatív, egyszerűsítéssel félcsoport. Az $S \times S$ Descartes-szorzaton definiáljunk egy α relációt a következőképpen:

$$(a, b) \alpha (c, d) \quad \text{akkor és csak akkor, ha} \quad ad = cb.$$

Megmutatjuk, hogy α ekvivalenciareláció. Az világos, hogy α reflexív és szimmetrikus. Tegyük fel, hogy

$$(a, b) \alpha (c, d) \quad \text{és} \quad (c, d) \alpha (e, f)$$

valamely $a, b, c, d, e, f \in S$ elemekre. Akkor

$$ad = cb \quad \text{és} \quad cf = ed,$$

amiből

$$(af)c = a(cf) = a(ed) = (ad)e = (cb)e = (eb)c$$

adódik, felhasználva néhányszor, hogy S kommutatív félcsoport. Mivel S egyszerűsítéssel, ezért az utóbbi egyenlőségből

$$af = eb$$

következik, ami azzal ekvivalens, hogy

$$(a, b) \alpha (e, f).$$

Tehát α ekvivalenciareláció az $S \times S$ halmazon. Megmutatjuk, hogy α az $S \times S$ kommutatív félcsoport kongruenciája. Legyenek $a, b, c, d, x, z \in S$ tetszőleges elemek az

$$(a, b) \alpha (c, d)$$

feltétellel. Akkor

$$ad = cb,$$

amiből

$$xazd = xczb$$

következik. Ezen utóbbi egyenlőség ekvivalens az

$$(x, z)(a, b) = (xa, zb) \alpha (xc, zd) = (x, z)(c, d)$$

feltétellel. Tehát α balkongruencia, és így kongruencia az $S \times S$ kommutatív félcsoporton. Az S félcsoport kommutativitása miatt

$$(a, a) \alpha (b, b)$$

tetszőleges $a, b \in S$ elemek esetén. Továbbá, ha

$$(a, b) \alpha (c, c)$$

valamely $a, b, c \in S$ elemekre teljesül, akkor

$$ac = cb,$$

amiből S kommutativitása és egyszerűsítése miatt

$$a = b$$

adódik. Tehát az $S \times S$ direkt szorzat összes (a, a) alakú elemeinek E halmaza egy α -osztály. Mivel tetszőleges $a, b, c \in S$ elemek esetén

$$(a, a)(b, c) = (ab, ac) \alpha (b, c),$$

valamint

$$(b, c)(a, a) = (ba, ca) \alpha (b, c),$$

ezért az E osztály az $(S \times S)/\alpha$ faktorfélcsoport egységeleme. Mivel tetszőleges $a, b \in S$ elemek esetén az $(a, b)(b, a)$ és $(b, a)(a, b)$ szorzatok benne van az E osztályban, ezért a (b, a) elemet tartalmazó α -osztály az (a, b) elemet tartalmazó α -osztály inverze. Tehát az $(S \times S)/\alpha$ faktorfélcsoport csoport.

Tekintsük az S félcsoportnak az $(S \times S)/\alpha$ faktorcsoportba való azon ϕ leképezését, amely az S félcsoport a eleméhez az (a^2, a) osztályát rendeli. Ha

$$\phi(a) = \phi(b),$$

akkor

$$(a^2, a) \alpha (b^2, b),$$

amiből

$$a^2b = b^2a,$$

azaz

$$a = b$$

következik. Tehát ϕ injektív. Mivel tetszőleges $a, b \in S$ elemek esetén $\phi(ab)$ az $((ab)^2, ab)$ elemet tartalmazó osztály, $\phi(a)\phi(b)$ pedig (a^2, a) és a (b^2, b) elemeket tartalmazó osztályok szorzata; ezen utóbbi osztályok szorzata az $((ab)^2, ab)$ elemet tartalmazó osztály, felhasználva, hogy $a^2b^2 = (ab)^2$. Így $\phi(ab) = \phi(a)\phi(b)$. Tehát ϕ homomorfizmus. Következésképpen ϕ az S félcsoportnak az $(S \times S)/\alpha$ csoportba való beágyazása. \square

13.2. Egy elégséges feltétel

13.3. Definíció Egy S félcsoportot jobb reverzibilis félcsoportnak nevezünk, ha tetszőleges $a, b \in S$ elemek esetén $Sa \cap Sb \neq \emptyset$.

13.4. Tétel Minden jobb reverzibilis, egyszerűsítéses félcsoportot be lehet ágyazni egy csoportba.

Bizonyítás. Legyen S egy jobb reverzibilis, egyszerűsítéses félcsoport. Jelölje \mathcal{I}_S az S összes kölcsönösen egyértelmű parciális transzformációinak félcsoportját, azaz az S szimmetrikus inverz félcsoportját (6.25. Definíció). Tetszőleges $\alpha \in \mathcal{I}_S$ elem esetén jelölje $D(\alpha)$ és $R(\alpha)$ az α leképezés értelmezési tartományát, illetve értékészletét (azaz a képhalmazát).

Tetszőleges $a \in S$ elem esetén tekintsük az S félcsoport a eleméhez tartozó ϱ_a belső jobb translációját; $D(\varrho_a) = S$, $R(\varrho_a) = Sa$, és tetszőleges $x \in S$ elemre $(x)\varrho_a = xa$. Mivel S bal egyszerűsítéses, ezért $\varrho_a \in \mathcal{I}_S$. Ugyanezen ok miatt S bal redukzív, és ezért az 5.11. Lemma szerint $\phi : a \mapsto \varrho_a$ ($a \in S$) az S félcsoportnak az \mathcal{I}_S félcsoportba való izomorfizmusa. Egy ϱ_a leképezés ($a \in S$) inverze az a $\varrho_a^{-1} \in \mathcal{I}_S$ parciális transzformáció, melyre $D(\varrho_a^{-1}) = Sa$, $R(\varrho_a^{-1}) = S$, és tetszőleges $x \in S$ elem esetén $(xa)\varrho_a^{-1} = x$.

Jelölje H a \mathcal{I}_S félcsoport $(S)\phi = \{\varrho_a : a \in S\}$ részfélcsoportja által generált inverz részfélcsoportját. Ennek az inverz félcsoportnak minden eleme véges sok ϱ_a , illetve ϱ_b^{-1} ($a, b \in S$) alakú leképezés szorzata. Mivel mindkét típusú leképezés értelmezési tartománya és értékészlete az S félcsoport egy-egy bal oldali ideálja, ezért az S félcsoportra vonatkozó jobb reverzibilitás miatt szorzatuk nem lehet az üres leképezés, s ezért H nem tartalmazza az üres leképezést, azaz az \mathcal{I}_S nullelemét.

Vezessük be a következő jelölést: tetszőleges $\alpha, \beta \in \mathcal{I}_S$ leképezések esetén jelentse

$$\alpha \subseteq \beta$$

azt a feltételt, hogy

$$D(\alpha) \subseteq D(\beta)$$

$$(x)\alpha = (x)\beta \quad (\forall x \in D(\alpha)).$$

A H halmazon definiálunk egy \sim relációt a következőképpen:

$$\alpha \sim \beta, (\alpha, \beta \in H) \quad \Leftrightarrow \quad (\exists \gamma \in H) \quad \gamma \subseteq \alpha, \gamma \subseteq \beta.$$

Megmutatjuk, hogy \sim kongruenciareláció a H félcsoporton. Az világos, hogy \sim reflexív és szimmetrikus. A tranzitivitás igazolásához tegyük fel, hogy

$$\alpha \sim \beta \sim \gamma$$

teljesül valamely $\alpha, \beta, \gamma \in H$ leképezésekre. Ez azt jelenti, hogy megadhatók olyan $\delta_1, \delta_2 \in H$ leképezések, hogy

$$\delta_1 \subseteq \alpha, \delta_1 \subseteq \beta, \delta_2 \subseteq \beta, \delta_2 \subseteq \gamma.$$

Ekkor

$$D(\delta_1) \subseteq D(\alpha) \cap D(\beta), D(\delta_2) \subseteq D(\beta) \cap D(\gamma).$$

Legyen

$$\delta = \delta_2 \delta_2^{-1} \delta_1.$$

Akkor

$$D(\delta) \subseteq D(\delta_2).$$

Ezért, ha

$$x \in D(\delta),$$

akkor

$$(x)\delta = (((x)\delta_2)\delta_2^{-1})\delta_1 = (x)\delta_1 = (x)\beta = (x)\delta_2.$$

Így

$$\delta \subseteq \delta_1 \subseteq \alpha \text{ és } \delta \subseteq \delta_2 \subseteq \gamma.$$

Tehát

$$\alpha \sim \gamma.$$

A következőkben megmutatjuk, hogy \sim a H félcsoport kongruenciarelációja. Tegyük fel, hogy

$$\alpha \sim \alpha', \beta \sim \beta'$$

valamely $\alpha, \alpha', \beta, \beta' \in H$ elemekre. Akkor vannak olyan H -beli γ és δ elemek, amelyekre

$$\gamma \subseteq \alpha, \gamma \subseteq \alpha', \delta \subseteq \beta, \delta \subseteq \beta'$$

teljesül. Ebből

$$\gamma\delta \subseteq \alpha\beta \text{ és } \gamma\delta \subseteq \alpha'\beta'$$

következik. Így

$$\alpha\beta \sim \alpha'\beta'.$$

Tehát \sim a H félcsoport egy kongruenciája.

A bizonyítás következő részében megmutatjuk, hogy a

$$G = H / \sim$$

faktorfélcsoport csoport. Ehhez elegendő megmutatni, hogy adott $\alpha, \beta \in H$ elemekhez léteznek olyan $\xi, \eta \in H$ elemek, hogy $\alpha\xi \sim \eta\alpha \sim \beta$ teljesül. Világos, hogy

$$\xi = \alpha^{-1}\beta \text{ és } \eta = \beta\alpha^{-1}$$

alkalmas elemek, hiszen

$$\alpha\alpha^{-1}\beta \subseteq \beta \text{ és } \beta\alpha\alpha^{-1} \subseteq \beta.$$

Mivel H nem tartalmazza az üres leképezést, ezért a G csoport nem egyelemű.

Jelölje $(\cdot)\psi$ a H félcsoportnak a G csoportra való természetes homomorfizmusát. Megmutatjuk, hogy ψ -nek $(S)\phi$ -re való leszűkítése injektív. Tegyük fel tehát, hogy

$$(\varrho_a)\psi = (\varrho_b)\psi$$

valamely $a, b \in S$ elemekre. Akkor $\varrho_a \sim \varrho_b$, és így van olyan $\gamma \in H$ elem, hogy

$$\gamma \subseteq \varrho_a \gamma \subseteq \varrho_b.$$

Mivel H nem tartalmazza az üres leképezést, ezért $D(\gamma) \neq \emptyset$. Legyen

$$x \in D(\gamma)$$

tetszőleges elem. Akkor

$$xa = xb,$$

amiből

$$a = b$$

és így $\varrho_a = \varrho_b$ következik.

Mivel ϕ izomorf módon képezi le S -et $(S)\phi$ -re, ezért a ψ -re éppen most bizonyítottak miatt $(\cdot)(\phi \circ \psi)$ az S félcsoportnak a G csoportba való beágyazása. \square

13.3. Egyszerűsítéses félcsoport hányadoscsoportja

13.5. Definíció Egy G csoportról azt mondjuk, hogy egy egyszerűsítéses S félcsoport bal hányadoscsoportja, ha G részfélcsoportként tartalmaz S -et, és G minden g eleme felírható $g = a^{-1}b$ alakban valamely $a, b \in S$ elemekkel.

13.6. Tétel Egy egyszerűsítéses S félcsoportnak akkor és csak akkor van bal hányadoscsoportja, ha S jobb reverzibilis.

Bizonyítás. Legyen S olyan egyszerűsítéses félcsoport, melynek van G bal hányadoscsoportja. Akkor G minden eleme felírható $a^{-1}b$ alakban valamely $a, b \in \varphi(S)$ elemekkel. Legyenek $a, b \in S$ tetszőleges elemek. Akkor vannak olyan $x, y \in S$ elemek, hogy

$$ab^{-1} = x^{-1}y.$$

Ebből

$$xa = yb$$

adódik, s ezért

$$Sa \cap Sb \neq \emptyset.$$

Tehát S jobb reverzibilis félcsoporth.

Fordítva, tegyük fel, hogy S jobb egyszerűsítéses és jobb reverzibilis félcsoporth. A 13.4. Tétel szerint feltehetjük, hogy van olyan G csoport, amelynek S részfélcsoporthja. Legyen

$$G' = \{a^{-1}b : a, b \in S'\}.$$

Megmutatjuk, hogy G' a G csoport egy részcsoportja, amiből már következik, hogy G' az S félcsoporth bal hányadoscsoportja. Ha

$$a^{-1}b \in G',$$

akkor

$$(a^{-1}b)^{-1} = b^{-1}a \in G'.$$

Tehát G' zárt az inverzképzésre nézve. Legyenek

$$a^{-1}b, c^{-1}d \in G'$$

tetszőleges elemek. Mivel S' jobb reverzibilis, ezért vannak olyan $x, y \in S'$ elemek, amelyekre

$$xb = yc$$

teljesül. Akkor viszont G -ben

$$bc^{-1} = x^{-1}y,$$

és így

$$a^{-1}bc^{-1}d = a^{-1}x^{-1}yd = (xa)^{-1}(yd) \in G'.$$

Tehát G' zárt a G -beli műveletre nézve. Tehát G' a G egy részcsoportja. \square

13.7. Tétel *Jobb reverzibilis, egyszerűsítéses félcsoporth bármely két $(G_1; \cdot)$ és $(G_2; \circ)$ bal hányadoscsoportjai esetén létezik G_1 -nek G_2 -re olyan izomorfizmusa, amely S elemeit fixen hagyja.*

Bizonyítás. Legyenek $(G_1; \cdot)$ és $(G_2; \circ)$ egy egyszerűsítéses, jobb reverzibilis S félcsoporth bal hányadoscsoportjai. Legyen

$$\phi(a^{-1} \cdot b) = a^{-1} \circ b.$$

Megmutatjuk, hogy ϕ a G_1 -nek G_2 -re való izomorfizmusa. Mindenekelőtt megmutatjuk, hogy ϕ injektív. Tegyük fel, hogy

$$\phi(a^{-1} \cdot b) = \phi(c^{-1} \cdot d)$$

valamely $a, b, c, d \in S$ elemekre. Akkor

$$a^{-1} \circ b = c^{-1} \circ d,$$

amiből

$$b = a \circ c^{-1} \circ d$$

adódik. Mivel S jobb reverzibilis, ezért vannak olyan $x, y \in S$ elemek, amelyekre

$$xa = yc$$

és így

$$a \circ c^{-1} = x^{-1} \circ y,$$

és ezért

$$b = x^{-1} \circ y \circ d.$$

Ebből pedig

$$b \circ d^{-1} = x^{-1} \circ y,$$

azaz

$$xb = yd$$

adódik. Ez viszont G_1 -ben a

$$b \cdot d^{-1} = x^{-1} \cdot y,$$

azaz a

$$b = x^{-1} \cdot y \cdot d$$

egyenlőséget eredményezi. A fenti $xa = yc$ egyenlőségből

$$x^{-1} \cdot y = a \cdot c^{-1}$$

adódik, s ezért

$$b = a \cdot c^{-1} \cdot d.$$

Így

$$a^{-1} \cdot b = c^{-1} \cdot d.$$

Tehát ϕ injektív.

Legyenek

$$a^{-1} \cdot b, c^{-1} \cdot d \in G_1$$

tetszőleges elemek. Mivel S jobb reverzibilis, ezért megadhatók olyan $x, y \in S$ elemek, amelyekre

$$xb = yc,$$

és így

$$b \cdot c^{-1} = x^{-1} \cdot y \text{ és } b \circ c^{-1} = x^{-1} \circ y$$

teljesül. Ennek alapján

$$(a^{-1} \cdot b) \cdot (c^{-1} \cdot d) = (xa)^{-1} \cdot (yd) \text{ és } (a^{-1} \circ b) \circ (c^{-1} \circ d) = (xa)^{-1} \circ (yd).$$

Tehát

$$\phi((a^{-1} \cdot b) \cdot (c^{-1} \cdot d)) = \phi((xa)^{-1} \cdot (yd)) = (xa)^{-1} \circ (yd),$$

és

$$\begin{aligned} \phi(a^{-1} \cdot b) \circ \phi(c^{-1} \cdot d) &= (a^{-1} \circ b) \circ (c^{-1} \circ d) = a^{-1} \circ (b \circ c^{-1}) \circ d = \\ &= a^{-1} \circ (x^{-1} \circ y) \circ d = (xa)^{-1} \circ (yd). \end{aligned}$$

Tehát ϕ homomorfizmus. Következésképpen ϕ a G_1 csoportnak a G_2 csoportra való izomorf leképezése. Az világos, hogy ϕ az S elemeit fixen hagyja. \square

Feladatok

13.1. (Megoldás: 17.39.) Mutassuk meg, hogy egy gyengén kommutatív félcsoport akkor és csak akkor ágyazható be csoportba, ha egyszerűsítéses.

13.2. (Megoldás: 17.40.) Mutassuk meg, hogy ha egy S félcsoport beágyazható egy periodikus csoportba, akkor S is periodikus csoport!

14. fejezet

Félcsoportok beágyazása csoportok uniójába

14.1. Definíció Egy S félcsoportról azt mondjuk, hogy bal [jobb] szeparatív, ha az $ab = a^2$ és $ba = b^2$ [$ab = b^2$ és $ba = a^2$] feltételekből $a = b$ következik minden $a, b \in S$ elemre. Egy olyan félcsoportot, amely bal szeparatív és egyben jobb szeparatív is, szeparatív félcsoportnak nevezünk. Egy S félcsoportot gyengén szeparatív félcsoportnak nevezünk, ha $a^2 = ab = b^2$ az $a = b$ teljesülését eredményezi tetszőleges $a, b \in S$ elemekre.

Világos, hogy minden bal [jobb, gyengén] egyszerűsítéssel félcsoport bal [jobb, gyengén] szeparatív. A gyengén szeparatív félcsoportok fontosságára utal a következő tétel.

14.2. Tétel Ha egy S félcsoport beágyazható egy olyan félcsoportba, amely csoportok uniója, akkor S gyengén szeparatív.

Bizonyítás. Tegyük fel, hogy egy S félcsoportot be lehet ágyazni egy H félcsoportba, amely részcsoporthainak uniója. Azonosítsuk S -et H azon részfélcsoportjával, amellyel az S izomorf. A 1.42. Tétel szerint H diszjunkt részcsoporthok uniója. Legyenek $a, b \in S \subseteq H$ tetszőleges elemek. Tegyük fel, hogy

$$a^2 = ab = b^2.$$

Ekkor a és b a H félcsoport ugyanazon részcsoporthjának elemei. Beszorozva balról a fenti egyenlőség bal oldali részét az a elem szóban forgó részcsoporthbeli inverzével, azt kapjuk, hogy

$$a = b.$$

Tehát S gyengén szeparatív. □

A következő részben megmutatjuk, hogy kommutatív félcsoportok esetén a csoportok uniójaként előálló félcsoportba való beágyazhatóságnak nem csak szükséges, hanem elégsége feltétele is a gyengén szeparativitás. Ehhez viszont néhány előkészítő eredményre van szükségünk. Ezért először ezeket tárgyaljuk.

A 10.18. Következmény szerint minden kommutatív félcsoport előáll kommutatív arkhimédeszi félcsoportok félhálójaként. A következőkben a gyengén szeparatív kommutatív félcsoportokat fogjuk jellemezni az ezen félháló-felbontásban szereplő arkhimédeszi komponensek segítségével. Mindenekelőtt bebizonyítunk egy tételt, amely megmutatja, hogyan konstruálhatjuk meg a kommutatív félcsoportok legszűkebb gyengén szeparatív kongruenciáját.

14.1. Kommutatív félcsoportok legszűkebb gyengén szeparatív kongruenciája

14.3. Tétel *Tetszőleges kommutatív S félcsoport esetén*

$$\sigma = \{(a, b) \in S \times S : (\exists n, m \in \mathbb{N}^+) ab^m = b^{m+1}, ba^n = a^{n+1}\}$$

az S félcsoport legszűkebb gyengén szeparatív kongruenciája.

Bizonyítás. Legyen S tetszőleges kommutatív félcsoport. Az világos, hogy σ reflexív és szimmetrikus. Megmutatjuk, hogy σ tranzitív is. Mindenek előtt megjegyezzük, hogy ha

$$ab^m = b^{m+1}, ba^n = a^{n+1}$$

teljesül valamely $a, b \in S$ elemre és m, n pozitív egészre, akkor mindig van olyan t pozitív egész szám (pl. $t = \max\{m, n\}$), hogy

$$ab^t = b^{t+1}, ba^t = a^{t+1}.$$

Legyenek $a, b, c \in S$ tetszőleges elemek az

$$a \sigma b, \text{ és } b \sigma c$$

feltétellel. Akkor léteznek olyan n és m pozitív egész számok, melyekre

$$ab^n = b^{n+1}, ba^n = a^{n+1}$$

és

$$bc^m = c^{m+1}, cb^m = b^{m+1}.$$

Legyen

$$k = (n + 1)(m + 1) - 1 = n(m + 1) + m.$$

Akkor

$$\begin{aligned} ac^k &= ac^{n(m+1)}c^m = a(bc^m)^n c^m = ab^n c^{m(n+1)} = \\ &= b^{n+1} c^{m(n+1)} = (bc^m)^{n+1} = c^{(m+1)(n+1)} = c^{k+1}. \end{aligned}$$

Hasonlóan igazolható, hogy

$$ca^k = a^{k+1}.$$

Így

$$a \sigma c.$$

A következő lépésként megmutatjuk, hogy σ az S félcsoport egy kongruenciája. Mivel S kommutatív félcsoport, ezért elegendő azt megmutatni, hogy σ az S egy jobbkongruenciája. Legyenek $a, b, c \in S$ tetszőleges elemek. Tegyük fel, hogy

$$a \sigma b.$$

Akkor

$$ab^n = b^{n+1}, \quad ba^n = a^{n+1}$$

valamely n pozitív egész számra. Akkor

$$(ac)(bc)^n = ab^n c^{n+1} = b^{n+1} c^{n+1} = (bc)^{n+1}.$$

Hasonlóan igazolható, hogy

$$(bc)(ac)^n = (ac)^{n+1}.$$

Következésképpen

$$ac \sigma bc.$$

Tehát σ az S félcsoport egy jobbkongruenciája. Megmutatjuk, hogy σ gyengén szeparatív kongruencia. Legyenek $a, b \in S$ tetszőleges elemek. Tegyük fel, hogy

$$a^2 \sigma ab \sigma b^2.$$

Ekkor léteznek olyan m és n pozitív egész számok, melyekre

$$(ab)(a^2)^m = (a^2)^{m+1} \text{ és } (ab)(b^2)^n = (b^2)^{n+1}.$$

Akkor viszont

$$ba^{2m+1} = a^{2m+2} \text{ és } ab^{2n+1} = b^{2n+2}.$$

Így

$$a \sigma b.$$

Tehát σ az S félcsoport egy gyengén szeparatív kongruenciája.

Már csak annak igazolása van hátra, hogy σ az S legszűkebb gyengén szeparatív kongruenciája. Ehhez tekintsük S egy tetszőleges gyengén szeparatív ρ kongruenciáját. Tegyük fel, hogy

$$a \sigma b$$

teljesül az S valamely a és b elemeire. Meg fogjuk mutatni, hogy $a \rho b$. Az a és b elemekre tett feltétel szerint megadható olyan n pozitív egész szám, hogy

$$ab^n = b^{n+1}, \quad ba^n = a^{n+1}.$$

Ekkor persze

$$ab^n \rho b^{n+1} \text{ és } ba^n \rho a^{n+1}.$$

Ha $n = 1$, akkor

$$a^2 \rho ab \rho b^2,$$

amiből a ρ kongruencia gyengén szeparatív tulajdonsága miatt

$$a \rho b$$

következik. Tehát feltehetjük, hogy $n \geq 2$. Akkor ($n = 2$ esetén az $ab^{n-2} = ab^0$ szorzatot a -nak tekintve)

$$\begin{aligned} (ab^{n-1})^2 &= (ab^{n-2})(ab^n) \rho (ab^{n-2})b^{n+1} = (ab^{n-1}b^n = \\ &= (ab^n)b^{n+1} \rho b^{n+1}b^{n-1} = (b^n)^2. \end{aligned}$$

Ezekből az egyenlőségekből, az $x = ab^{n-1}$ és $y = b^n$ jelöléseket bevezetve, a következő adódik:

$$x^2 \rho xy \rho y^2.$$

Mivel ρ gyengén szeparatív kongruencia, ezért

$$a \rho b,$$

azaz

$$ab^{n-1} \rho b^n.$$

Hasonlóan igazolható, hogy

$$ba^{n-1} \rho a^n.$$

Ezzel megmutattuk, hogy az

$$ab^n \rho b^{n+1} \text{ és } ba^n \rho a^{n+1}$$

feltételből következik az

$$ab^{n-1} \rho b^n \text{ és } ba^{n-1} \rho a^n$$

eredmény. A gondolatmenetet tovább folytatva, végül is azt kapjuk, hogy

$$a^2 \varrho ab \varrho b^2,$$

amiből a ϱ kongruencia gyengén szeparatív tulajdonsába miatt

$$a \varrho b$$

következik. Tehát

$$\sigma \subseteq \varrho,$$

azaz σ az S félcsoport legszűkebb gyengén szeparatív kongruenciája. \square

14.4. Következmény *Ha a és b egy kommutatív, gyengén szeparatív S félcsoport két olyan eleme, amelyekre $ab^m = b^{m+1}$ és $ba^n = a^{n+1}$ teljesül valamely m és n pozitív egész számokkal, akkor $a = b$.*

Bizonyítás. Mivel egy kommutatív gyengén szeparatív S félcsoport esetén az ι_S identikus reláció szeparatív, ezért $\sigma \subseteq \iota_S$ az előző tétel miatt. Ebből már következik az állítás. \square

14.2. Kommutatív gyengén szeparatív félcsoportok

14.5. Tétel *Egy kommutatív félcsoport akkor és csak akkor gyengén szeparatív, ha arkhimédészi komponensei egyszerűsítések.*

Bizonyítás. Legyenek S_i ($i \in I$) egy kommutatív S félcsoport arkhimédészi komponensei.

Tegyük fel, hogy S gyengén szeparatív. Akkor az S_i ($i \in I$) félcsoportok mindegyike gyengén szeparatív. Legyenek $a, b, x \in S_i$ ($i \in I$) tetszőleges elemek. Tegyük fel, hogy

$$ax = bx.$$

Mivel S_i arkhimédészi félcsoport, ezért léteznek olyan $u, v \in S$ elemek, hogy

$$xu = a^m \text{ és } xv = b^n$$

teljesül valamely m és n pozitív egész számokra. Akkor

$$a^{m+1} = axu = bxu = ba^m$$

és

$$b^{n+1} = bxv = axv = ab^n.$$

A [14.3.](#) Tétel szerint

$$a \sigma b.$$

Mivel S_i gyengén szeparatív, ezért a 14.4. Következmény szerint $a = b$. Tehát S_i egyszerűsítéses félcsoporthoz tartozik.

Fordítva, tegyük fel, hogy az S_i ($i \in I$) arkhimédieszi komponensek egyszerűsítésesek. Legyenek $a, b \in S$ tetszőleges elemek az

$$a^2 = ab = b^2$$

feltétellel. Ha $a \in S_i$ és $b \in S_j$, akkor $a^2 = b^2$ és $a^2 \in S_i$, valamint $b^2 \in S_j$ miatt $i = j$ és $a, b \in S_i$. Mivel S_i egyszerűsítéses, ezért az $a^2 = ab = b^2$ feltételből $a = b$ következik. Tehát S gyengén szeparatív. \square

Ezek után rátérhetünk a fejezet fő tételére:

14.6. Tétel *Egy kommutatív S félcsoporthoz akkor és csak akkor ágyazható be olyan félcsoporthoz, amely részcsoporthozainak uniója, ha S gyengén szeparatív.*

Bizonyítás. Ha egy S kommutatív félcsoporthoz beágyazható egy olyan félcsoporthoz, amely részcsoporthozainak uniója, akkor a 14.2. Tétel szerint S gyengén szeparatív.

Fordítva, legyen S olyan kommutatív félcsoporthoz, amely gyengén szeparatív. A 10.18. Következmény szerint S előáll S_i ($i \in I$) arkhimédieszi félcsoporthozok Y félhálójaként. A 14.5. Tétel szerint minden egyes S_i félcsoporthoz egyszerűsítéses. Mivel az S_i félcsoporthozok kommutatívak, ezért a bal oldali ideáljaik mindegyike kétoldali ideál. Mivel egy félcsoporthozban tetszőleges két ideál metszete soha nem üres, ezért az S_i félcsoporthozok jobb reverzibilisek. Így a 13.6. Tétel szerint minden egyes S_i félcsoporthoznak van G_i hányados csoportja (G_i minden eleme kifejezhető ab^{-1} alakban valamely $a, b \in S_i$ elem segítségével; $ab^{-1} = cd^{-1}$ akkor és csak akkor, ha $ad = bc$). Mivel az S_i félcsoporthozok páronként diszjunktak, feltehetjük, hogy a G_i csoportok is ilyenek. Legyen

$$T = \cup_{i \in I} G_i.$$

A T halmazon definiálunk egy \circ műveletet a következőképpen: Legyenek $a \in G_i$ és $b \in G_j$ ($i, j \in I$) tetszőleges T -beli elemek. Akkor

$$a = a_1 a_2^{-1} \text{ és } b = b_1 b_2^{-1}$$

valamely $a_1, a_2 \in S_i$ és $b_1, b_2 \in S_j$ elemekkel. Legyen

$$a \circ b = (a_1 b_1)(a_2 b_2)^{-1}.$$

Az világos, hogy $a \circ b \in G_{ij}$. Megmutatjuk, hogy ha $a = a_3 a_4^{-1}$ és $b = b_3 b_4^{-1}$, akkor $(a_1 b_1)(a_2 b_2)^{-1} = (a_3 b_3)(a_4 b_4)^{-1}$, és így az $a \circ b$ szorzat független az a , illetve b elem S_i , illetve S_j elemeinek segítségével való előállításától. Valóban, ha a -ra és b -re az

$$a = a_3 a_4^{-1} \text{ és } b = b_3 b_4^{-1}$$

előállítás is érvényes, akkor

$$a_1a_4 = a_2a_3 \text{ és } b_1b_4 = b_3b_3,$$

ezért

$$(a_1b_1)(a_4b_4) = (a_2b_2)(a_3b_3)$$

teljesül S_{ij} -ben. Ekkor viszont

$$(a_1b_1)(a_2b_2)^{-1} = (a_3b_3)(a_4b_4)^{-1}$$

valóban teljesül G_{ij} -ben.

A következőkben megmutatjuk, hogy a \circ művelet asszociatív. Legyenek

$$a = a_1a_2^{-1} \in G_i, \quad b = b_1b_2^{-1} \in G_j, \quad c = c_1c_2^{-1} \in G_k$$

tetszőleges elemek ($i, j, k \in I$). Akkor

$$\begin{aligned} (a \circ b) \circ c &= ((a_1b_1)(a_2b_2)^{-1}) \circ (c_1c_2^{-1}) = ((a_1b_1)c_1)((a_2b_2)c_2)^{-1} = \\ &= (a_1(b_1c_1))(a_2(b_2c_2))^{-1} = (a_1a_2^{-1}) \circ ((b_1c_1)(b_2c_2)^{-1}) = a \circ (b \circ c). \end{aligned}$$

Így T olyan félcsoport, amely a G_i ($i \in I$) csoportok uniója, és az is igaz, hogy T részhalmazként tartalmazza S -et. Már csak azt kell megmutatni, hogy tetszőleges $a, b \in S$ elemek esetén $a \circ b$ megegyezik az a és b elemek S félcsoportbeli ab szorzatával. Legyenek tehát $a \in S_i$ és $b \in S_j$ ($i, j \in I$) tetszőleges elemek. Mivel

$$a = a^2a^{-1} \text{ és } b = b^2b^{-1},$$

ezért G_{ij} -ben

$$a \circ b = (a^2b^2)(ab)^{-1} = (ab)^2(ab)^{-1} = ab. \quad \square$$

Feladatok

14.1. (Megoldás: 17.41.) Mutassuk meg, hogy minden gyengén szeparatív félcsoport gyengén redukzív!

14.2. (Megoldás: 17.42.) Egy S félcsoportot gyengén egyszerűsítésnek nevezünk, ha tetszőleges $a, b, c \in S$ elemek esetén az $ac = bc$ és $ca = cb$ feltételek együttes teljesüléséből $a = b$ következik. Mutassuk meg, hogy ha egy gyengén kommutatív S félcsoport arkhimédieszi komponensei gyengén egyszerűsítések, akkor S gyengén szeparatív!

15. fejezet

Félcsoportalgebrák

A fejezet első három szakaszában összefoglaljuk a test feletti asszociatív algebrákkal kapcsolatos azon legfontosabb fogalmakat, illetve eredményeket, amelyek a negyedik szakaszban felhasználásra kerülnek a félcsoportalgebrák vizsgálata során.

15.1. Véges dimenziós algebrák kitüntetett elemei

15.1. Definíció Egy \mathbb{F} test feletti algebrán olyan $\mathcal{A} = (A; +, \cdot)$ gyűrűt értünk, amely esetén $(A; +)$ vektortér \mathbb{F} felett és tetszőleges $a, b \in A$ és tetszőleges $\alpha \in \mathbb{F}$ esetén

$$(\alpha a)b = a(\alpha b) = \alpha(ab)$$

teljesül. Az algebra dimenzióján az algebrának, mint \mathbb{F} feletti vektortérnek a dimenzióját értjük.

Ebben a jegyzetben mindvégig véges dimenziós algebrákkal fogunk foglalkozni.

15.2. Definíció Egy \mathcal{A} algebra részalgebráján \mathcal{A} -nak olyan részhalmazát értjük, amely \mathcal{A} -nak, mint vektortérnek altere, s egyben részgyűrűje \mathcal{A} -nak, mint gyűrűnek.

Mivel egy vektortér tetszőleges $B \supset C$ alterei esetén $\dim B > \dim C$, ezért ha egy \mathcal{A} algebra dimenziója $n \in \mathbb{N}^+$, akkor \mathcal{A} részalgebráinak nincs $n + 1$ -nél hosszabb szigorúan csökkenő lánc.

15.3. Definíció Egy \mathcal{A} algebra ideálján \mathcal{A} -nak olyan részalgebráját értjük, amely ideálja \mathcal{A} -nak, mint gyűrűnek.

15.4. Definíció Egy \mathcal{A} algebra a elemét nilpotens elemnek nevezzük, ha megadható olyan n pozitív egész szám, amelyre $a^n = 0$ teljesül. Az $a \in \mathcal{A}$ elemet valódi nilpotens elemnek nevezzük, ha minden $x \in \mathcal{A}$ elem esetén xa nilpotens elem (ekkor ax is nilpotens, mert $(xa)^n = 0$ -ból $(ax)^{n+1} = a(xa)^n x = 0$ következik).

15.5. Definíció Egy algebra a elemét idempotens elemnek nevezzük, ha $a^2 = a$.

15.6. Tétel Minden olyan véges dimenziós algebrában, amely tartalmaz legalább egy nem nilpotens elemet, van legalább egy nullától különböző idempotens elem.

Bizonyítás. Legyen a egy \mathbb{F} test feletti véges dimenziós \mathcal{A} algebra nem nilpotens eleme. Legyen $n \geq 1$ az \mathcal{A} dimenziója. Akkor az a, a^2, \dots, a^{n+1} elemrendszer lineárisan függő \mathbb{F} felett, azaz megadhatók olyan \mathbb{F} -beli $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{n+1}$ elemek, amelyek között van legalább egy elem, amely nem az \mathbb{F} nulleleme, továbbá teljesül az

$$\alpha_1 a + \alpha_2 a^2 + \dots + \alpha_{n+1} a^{n+1} = 0$$

egyenlőség.

Vizsgáljuk először azt az esetet, amikor $\alpha_1 \neq 0$. Akkor a fenti egyenlőség

$$\alpha_1 a + ca = 0$$

alakban írható, ahol

$$c = \alpha_2 a + \dots + \alpha_{n+1} a^n.$$

Mivel $a \neq 0$ és $\alpha_1 \neq 0$, ezért

$$c \neq 0.$$

A fenti $\alpha_1 a + ca = 0$ egyenlőségből

$$a = \left(-\frac{c}{\alpha_1}\right)a$$

adódik. Ezen utóbbi egyenlőségből

$$a^k = \left(-\frac{c}{\alpha_1}\right)a^k$$

következik minden k pozitív egész számra. Így

$$\begin{aligned} \left(-\frac{c}{\alpha_1}\right)^2 &= -\frac{1}{\alpha_1} \left(-\frac{c}{\alpha_1}\right) (\alpha_2 a + \dots + \alpha_{n+1} a^n) = \\ &= -\frac{1}{\alpha_1} (\alpha_2 a + \dots + \alpha_{n+1} a^n) = -\frac{c}{\alpha_1}, \end{aligned}$$

azaz $-c/\alpha_1$ az \mathcal{A} algebra nullelemtől különböző idempotens eleme.

A következőkben vizsgáljuk azt az esetet, amikor $\alpha_1 = 0$. Jelölje m_0 azt a legkisebb indexet, amelyre $\alpha_{m_0} \neq 0$, továbbá jelölje $m_0 + h \leq n + 1$ azt a legnagyobb azon $j \leq n + 1$ index közül, amelyre $\alpha_j \neq 0$. Tehát a fenti

$$\alpha_1 a + \alpha_2 a^2 + \dots + \alpha_{n+1} a^{n+1} = 0$$

egyenlőség tényleges alakja

$$\alpha_{m_0} a^{m_0} + \cdots + \alpha_{m_0+h} a^{m_0+h} = 0,$$

amely legfeljebb $h + 1$ nem nulla tagot tartalmaz. Szorozzuk be ezt az egyenlőséget rendre a -val, a^2 -tel, és így tovább, $a^{(m_0-1)h}$ -val. Így, az eredeti mellett, $(m_0 - 1)h$ új egyenlőség is teljesül. Ezen új és a kiinduló egyenletekben az a elem legkisebb hatványa m_0 , a legnagyobb hatványa pedig $m_0 + h + (m_0 - 1)h = m_0(h + 1)$. Jelöljük az a^{m_0} hatványt b -vel. Akkor a vizsgált egyenletekben b legkisebb hatványa 1 (ez a kiinduló egyenlet első tagja), legnagyobb hatványa pedig $h + 1$ (ez az új egyenletek közül az utolsó egyenlet utolsó tagja). Az egyenletekben az a elemnek legfeljebb $m_0 h + 1$ számú különböző hatványa szerepel; ezek közül legfeljebb $h + 1$ olyan van, ahol a kitevő az m_0 pozitív egész számszorosa (ezek a b elem különböző pozitív egész kitevős hatványai), és legfeljebb $(m_0 - 1)h$ olyan, ahol a kitevő nem osztható m_0 -al. Mivel ezen utóbbi hatványok száma nem nagyobb az egyenletek számánál, ezért ezek kifejezhetők a b pozitív egész kitevős hatványaival, és így a kiinduló egyenlet

$$\alpha_{m_0} b + \cdots + \alpha_r b^r = 0$$

alakra hozható, amelyben $\alpha_{m_0} \neq 0$ és még legalább egy másik együttható sem egyenlő a nullával. Mivel a b elem nem nilpotens, ezért a bizonyítás első részét a b elemre alkalmazva (az ottani a helyett) adódik, hogy az \mathcal{A} algebrának van nem nulla idempotens eleme. \square

15.7. Tétel *Legyen \mathcal{A} olyan véges dimenziós algebra, amelynek nem minden eleme nilpotens. Akkor \mathcal{A} tetszőleges nem valódi a nilpotens eleméhez van olyan $0 \neq e \in \mathcal{A}$ idempotens elem és olyan $x \in \mathcal{A}$ elem, hogy $ax = e$.*

Bizonyítás. Legyen $a \in \mathcal{A}$ tetszőleges nem valódi nilpotens elem. Akkor $a\mathcal{A}$ az \mathcal{A} algebra egy részalgebrája. Ha ez nem tartalmaz idempotens elemet, akkor a 15.6. Tétel miatt minden eleme nilpotens. Ez viszont azt jelenti, hogy a valódi nilpotens elem, ami ellentmond a feltételnek. Így $a\mathcal{A}$ tartalmaz legalább egy nullától különböző e idempotens elemet, s ezért $ax = e$ teljesül valamely $x \in \mathcal{A}$ elemre. \square

15.8. Tétel *Egy véges dimenziós \mathcal{A} algebra összes valódi nilpotens elemeinek halmaza az \mathcal{A} algebrának egy ideálja.*

Bizonyítás. Legyen \mathcal{A} egy \mathbb{F} test feletti véges dimenziós algebra. Először megmutatjuk, hogy ha a az \mathcal{A} algebra valódi nilpotens eleme, akkor tetszőleges $\alpha \in \mathbb{F}$ elem esetén αa is valódi nilpotens elem. Legyen $a \in \mathcal{A}$ tetszőleges valódi nilpotens elem. Akkor minden $s \in \mathcal{A}$ és minden $\alpha \in \mathbb{F}$ esetén megadható olyan n pozitív egész szám, hogy

$$0 = ((\alpha s)a)^n = (s(\alpha a))^n,$$

amiből már következik, hogy aa valódi nilpotens elem.

Az előzőekből az is következik, hogy valamely a valódi nilpotens elem ellentettje, azaz $-a$ is valódi, hiszen $-a = (-1)a$. Itt -1 jelöli az \mathbb{F} test egységelemének ellentettjét.

A következőkben megmutatjuk, hogy ha a az \mathcal{A} algebra valódi nilpotens eleme, akkor tetszőleges $s \in \mathcal{A}$ elem esetén sa és as is valódi nilpotens elemek. Ha a valódi nilpotens elem, akkor tetszőleges $x, s \in \mathcal{A}$ elemek esetén megadható olyan n pozitív egész szám, hogy

$$0 = ((xs)a)^n = (x(sa))^n.$$

Tehát sa valódi nilpotens elem. Hasonlóan igazolható, hogy as is valódi nilpotens elem.

Már csak annak bizonyítása van hátra, hogy az \mathcal{A} algebra valódi nilpotens elemeinek összege is valódi nilpotens. Legyenek a és b az \mathcal{A} algebra valódi nilpotens elemei. Tegyük fel, indirekt módon, hogy $a+b$ nem valódi nilpotens elem. Akkor a 15.7. Tétel miatt van \mathcal{A} -nak olyan $e \neq 0$ idempotens eleme, hogy valamely $x \in \mathcal{A}$ elemre

$$(a+b)x = ax + bx = e.$$

A fentiek miatt ax és bx valódi nilpotens elemek. Így $eaxe$ és $ebxe$ nilpotens elemek. Ha n jelöli $eaxe$ nilpotenciájának fokát, akkor

$$0 = (eaxe)^n = (e - ebxe)^n = e - cbxe,$$

azaz

$$e = cbxe$$

teljesül valamely $c \in \mathcal{A}$ elemmel. Ez viszont ellentmondás, mert $cbxe$ valódi nilpotens elem, e pedig egy nem nulla idempotens elem. Tehát két valódi nilpotens elem összege is szükségképpen valódi nilpotens elem. Ezzel a tételt bebizonyítottuk. \square

Egy \mathcal{A} algebra valamely \mathcal{B} ideálja esetén a \mathcal{B} elemeiből képezhető összes k -tényezős szorzatok (k egy pozitív egész szám) halmaza által generált altér az \mathcal{A} algebra ideálja. Ezt az ideált a \mathcal{B} ideál k -dik hatványának nevezzük (és \mathcal{B}^k módon jelöljük).

15.2. Véges dimenziós algebra nilpotens ideáljai

15.9. Definíció Egy \mathcal{A} algebra \mathcal{B} ideálját nil ideálnak nevezzük, ha minden eleme nilpotens. Egy \mathcal{B} ideált nilpotens ideálnak nevezünk, ha megadható olyan k pozitív egész szám, amelyre $\mathcal{B}^k = \{0\}$ teljesül, azaz a \mathcal{B} elemiből képezhető összes k -tényezős szorzat egyenlő az \mathcal{A} nullelemével.

Az nyilvánvaló, hogy egy algebra minden nilpotens ideálja nil. Az állítás megfordítása általában nem igaz. Véges dimenziójú algebraik esetén más a helyzet. Érvényes a következő tétel.

15.10. Tétel Véges dimenziós algebra minden nil ideálja nilpotens.

Bizonyítás. Legyen \mathcal{B} egy véges dimenziós \mathcal{A} algebra egy ideálja. Legyen a \mathcal{B} dimenziója n . Legyenek $b_1, \dots, b_{n+2} \in \mathcal{B}$ tetszőleges elemek. Az világos, hogy

$$b_1\mathcal{B}, b_1b_2\mathcal{B}, \dots, b_1b_2 \cdots b_{n+1}\mathcal{B}, b_1b_2 \cdots b_{n+1}b_{n+2}\mathcal{B}$$

a \mathcal{B} ideál olyan részalgebrái, amelyekre

$$b_1\mathcal{B} \supseteq b_1b_2\mathcal{B} \supseteq \cdots \supseteq b_1b_2 \cdots b_{n+1}\mathcal{B} \supseteq b_1b_2 \cdots b_{n+1}b_{n+2}\mathcal{B}$$

teljesül. Mivel ennek a láncnak a hossza $n + 2$, ezért ez a lánc nem lehet szigorúan monoton csökkenő, azaz van olyan $k \in \{1, \dots, n + 1\}$ index, hogy

$$b_1 \cdots b_k\mathcal{B} = b_1 \cdots b_k b_{k+1}\mathcal{B}.$$

Mivel

$$b_1 \cdots b_k b_{k+1} \in b_1 \cdots b_k\mathcal{B},$$

ezért

$$b_1 \cdots b_k b_{k+1} \in b_1 \cdots b_k b_{k+1}\mathcal{B},$$

és ezért van olyan $x \in \mathcal{B}$ elem, amelyre

$$b_1 \cdots b_k b_{k+1} = b_1 \cdots b_k b_{k+1}x$$

teljesül. Ebből az egyenlőségből

$$b_1 \cdots b_k b_{k+1} = b_1 \cdots b_k b_{k+1}x^t$$

adódik minden pozitív egész t kitevőre. Mivel \mathcal{B} nil ideál, ezért $x^m = 0$ valamely pozitív egész m kitevőre. Ebből pedig

$$b_1 \cdots b_k b_{k+1} = 0$$

következik. Mivel $k + 1 \leq n + 2$, ezért

$$b_1 \cdots b_k \cdots b_{n+2} = 0,$$

és így

$$\mathcal{B}^{n+2} = \{0\}. \quad \square$$

15.11. Megjegyzés Mivel egy véges dimenziós \mathcal{A} algebra minden \mathcal{B} részalgebrája is véges dimenziós algebra és \mathcal{B} ideálja önmagának, ezért ha \mathcal{B} minden eleme nilpotens, akkor \mathcal{B} nilpotens, azaz megadható olyan k pozitív egész szám, hogy \mathcal{B} elemiből képezett k -tényezős szorzatok mindegyike egyenlő a nullelemmel.

15.12. Megjegyzés *Az világos, hogy egy algebra valódi nilpotens elemeinek mindegyike nilpotens. A 15.8. Tétel szerint egy véges dimenziós algebra összes valódi nilpotens elemei ideált alkotnak. Így ebben az ideálban minden elem nilpotens. Következésképpen ez az ideál nilpotens ideál.*

Egy \mathcal{A} algebrát nilpotens algebrának nevezünk, ha $\mathcal{A}^k = \{0\}$ valamely k pozitív egész számra. Véges dimenziójú algebra esetén ez azzal ekvivalens (lásd a 15.10. Tételt), hogy minden eleme nilpotens.

15.13. Tétel *Véges dimenziós nilpotens algebra minden epimorf képe is nilpotens.*

Bizonyítás. Legyen \mathcal{A} egy véges dimenziós nilpotens algebra és φ az \mathcal{A} -nak egy \mathcal{T} algebrára való homomorfizmusa. Legyen $\varphi(x) \in \mathcal{T}$ ($x \in \mathcal{A}$) tetszőleges elem. Akkor van olyan n pozitív egész szám, hogy

$$(\varphi(x))^n = \varphi(x^n) = \varphi(0_A) = 0_T,$$

ahol 0_A és 0_T jelöli az \mathcal{A} , illetve a \mathcal{T} algebra nullelemét. Így \mathcal{T} minden eleme nilpotens. Mivel \mathcal{T} is véges dimenziós algebra, ezért a 15.10. Tétel miatt \mathcal{T} nilpotens. \square

15.14. Tétel *Ha egy véges dimenziós \mathcal{A} algebrának \mathcal{B} olyan nilpotens ideálja, hogy az \mathcal{A}/\mathcal{B} faktoralgebra nilpotens, akkor \mathcal{A} is nilpotens.*

Bizonyítás. Jelölje φ az \mathcal{A} algebrának az \mathcal{A}/\mathcal{B} faktoralgebrára való természetes homomorfizmusát. Legyen $a \in \mathcal{A}$ tetszőleges elem. Akkor van olyan n pozitív egész szám, hogy

$$(\varphi(a))^n = 0_{\mathcal{A}/\mathcal{B}}.$$

Ez viszont azt jelenti, hogy

$$a^n \in \mathcal{B},$$

és ezért

$$(a^n)^k = 0_A$$

valamely pozitív egész k kitevőre. Tehát \mathcal{A} minden eleme nilpotens. A 15.10. Tétel miatt \mathcal{A} nilpotens algebra. \square

15.15. Tétel *Véges dimenziós \mathcal{A} algebra összes nilpotens ideáljainak \mathcal{U} összege szintén nilpotens; \mathcal{U} tartalmazza \mathcal{A} összes nilpotens bal oldali ideálját és összes nilpotens jobb oldali ideálját is.*

Bizonyítás. Legyenek \mathcal{B} és \mathcal{C} egy véges dimenziós \mathcal{A} algebra nilpotens ideáljai. Akkor

$$(\mathcal{B} + \mathcal{C})/\mathcal{B} \cong \mathcal{C}/(\mathcal{B} \cap \mathcal{C}).$$

A **15.14.** Tétel miatt $\mathcal{B} + \mathcal{C}$ nilpotens ideál. Tehát \mathcal{A} -ban véges sok nilpotens ideál összege is nilpotens.

Legyen $a \in \mathcal{U}$ tetszőleges. Akkor megadhatók olyan \mathcal{A} -beli $\mathcal{A}_1, \dots, \mathcal{A}_k$ nilpotens ideálok, hogy

$$a = a_1 + \dots + a_k$$

valamely $a_i \in \mathcal{A}_i$ ($i = 1, \dots, k$) elemekre. Mivel az $\mathcal{A}_1, \dots, \mathcal{A}_k$ nilpotens ideálok összege nilpotens, ezért az $a \in \mathcal{A}_1 + \dots + \mathcal{A}_k$ elem is nilpotens. Tehát \mathcal{U} minden eleme nilpotens.

A **15.10.** Tétel miatt \mathcal{U} nilpotens ideál.

Legyen \mathcal{R} az \mathcal{A} algebra egy nilpotens jobb oldali ideálja. Akkor $\mathcal{R} + \mathcal{AR}$ az \mathcal{A} algebra egy ideálja. Teljes indukcióval bizonyítható, hogy

$$(\mathcal{R} + \mathcal{AR})^n \subseteq \mathcal{R}^n + \mathcal{AR}^n$$

teljesül tetszőleges n pozitív egész szám esetén. Mivel \mathcal{R} nilpotens, ezért az előző tartalmazásból következik, hogy $\mathcal{R} + \mathcal{AR}$ is nilpotens. Mivel

$$\mathcal{R} \subseteq \mathcal{R} + \mathcal{AR},$$

ezért \mathcal{R} minden eleme nilpotens, és így a **15.11.** Megjegyzés szerint \mathcal{R} nilpotens, azaz $\mathcal{R} \subseteq \mathcal{U}$. Hasonlóan igazolható, hogy \mathcal{U} tartalmazza az \mathcal{A} algebra összes nilpotens bal oldali ideálját is. \square

15.16. Definíció Egy véges dimenziós \mathcal{A} algebra összes nilpotens ideáljának összegét az algebra nilradikáljának nevezzük, és \mathcal{R} -rel jelöljük.

15.17. Tétel Véges dimenziós algebra nilradikálja megegyezik a valódi nilpotens elemek halmazával.

Bizonyítás. Legyen \mathcal{R} egy véges dimenziós \mathcal{A} algebra nilradikálja. Jelölje \mathcal{V} az \mathcal{A} valódi nilpotens elemeinek halmazát. A **15.12.** Megjegyzés miatt

$$\mathcal{V} \subseteq \mathcal{R}.$$

Ha $r \in \mathcal{R}$ és $a \in \mathcal{A}$, akkor $ar \in \mathcal{R}$ és így \mathcal{R} nilpotens volta miatt ar nilpotens elem, ami miatt a valódi nilpotens elem, s ezért $a \in \mathcal{V}$. Tehát

$$\mathcal{R} \subseteq \mathcal{V}.$$

Következésképpen

$$\mathcal{R} = \mathcal{V}. \quad \square$$

15.3. Féligegyszerű algebrák

15.18. Definíció Egy \mathcal{A} algebrát féligegyszerű algebrának nevezünk, ha nilradikálja triviális, azaz $\mathcal{R} = \{0\}$.

Bizonyítás nélkül közöljük az alábbiakat:

15.19. Tétel (Wedderburn 1. tétele) Egy véges dimenziós \mathcal{A} algebra akkor és csak akkor féligegyszerű, ha előáll véges sok olyan \mathcal{A}_i ($i = 1, \dots, n$) kétoldali ideáljának

$$\mathcal{A} = \mathcal{A}_1 \oplus \dots \oplus \mathcal{A}_n$$

direkt összegeként, amelyek mindegyike egyszerű algebra (azaz nincs valódi ideáljuk). A direkt felbontásban szereplő ideálok az \mathcal{A} algebra által egyértelműen meg vannak határozva.

A 15.19. Tételben szereplő felbontásban előforduló \mathcal{A}_i ($i = 1, \dots, n$) ideálokat az \mathcal{A} algebra egyszerű komponenseinek nevezzük. Ezek számát $Cl(\mathcal{A})$ -val jelöljük és az algebra osztályszámának nevezzük.

Megjegyezzük, hogy a 15.19. Tételben szereplő \mathcal{A} algebra bármely nem-nulla \mathcal{B} ideálja esetén megadhatók az

$$\mathcal{A} = \mathcal{A}_1 \oplus \dots \oplus \mathcal{A}_n$$

felbontásban szereplő ideálok közül olyanok, amelyek úniója a \mathcal{B} ideál.

15.20. Tétel Legyen

$$\mathcal{A} = \mathcal{B}_1 \supset \mathcal{B}_2 \supset \dots \supset \mathcal{B}_n \supset \mathcal{B}_{m+1} = \{0\}$$

egy \mathbb{F} test feletti véges dimenziós \mathcal{A} algebra relatív ideálsorozata (azaz \mathcal{B}_{i+1} ideálja \mathcal{B}_i -nek ($i = 1, \dots, m$)). Az \mathcal{A} algebra akkor és csak akkor féligegyszerű, ha a $\mathcal{B}_i/\mathcal{B}_{i+1}$ ($i = 1, \dots, m$) faktoralgebrák mindegyike féligegyszerű. Ebben az esetben

$$Cl(\mathcal{A}) = \sum_{i=1}^n Cl(\mathcal{B}_i/\mathcal{B}_{i+1}).$$

15.21. Tétel (Wedderburn 2. tétele) Egy \mathbb{F} test feletti véges dimenziós \mathcal{A} algebra akkor és csak akkor egyszerű, ha izomorf egy \mathbb{F} test feletti divízióalgebra (olyan algebra, amely ferdetest) elemeiből képezett $n \times n$ -típusú mátrixok teljes mátrixgyűrűjével, ahol n egy pozitív egész szám. Az n egyértelműen, a divízióalgebra pedig izomorfia erejéig egyértelműen van meghatározva az \mathcal{A} algebra által.

15.4. Félcsoportalgebrák

15.22. Definíció Legyen S egy félcsoport, \mathbb{F} pedig egy test. Az S félcsoport \mathbb{F} feletti algebráján egy olyan \mathbb{F} feletti \mathcal{A} algebrát értünk, amely tartalmaz egy olyan \bar{S} részhalmazt, amely bázisa \mathcal{A} -nak, mint vektortérnek, és egyben az \mathcal{A} algebra multiplikatív félcsoportjának egy olyan részfélcsoportja, amely izomorf S -sel.

15.23. Tétel Tetszőleges S félcsoport és tetszőleges \mathbb{F} test esetén létezik S -nek \mathbb{F} feletti algebrája.

Bizonyítás. Tetszőleges S félcsoport és tetszőleges \mathbb{F} esetén jelölje $\mathbb{F}[S]$ az S félcsoportnak az \mathbb{F} testbe való összes olyan

$$a : s \mapsto a(s)$$

leképezéseinek halmazát, amelyek esetén az S mindazon s elemeinek halmaza, amelyekre $a(s) \neq 0$ teljesül, véges vagy üres. Nem nehéz ellenőrizni, hogy $\mathbb{F}[S]$ kommutatív csoportot alkot az

$$a + b : s \mapsto a(s) + b(s)$$

műveletre nézve. Továbbá $\mathbb{F}[S]$ vektortér \mathbb{F} felett, ha egy $\alpha \in \mathbb{F}$ skalárral való szorzást az alábbi módon értelmezzük:

$$(\alpha a) : s \mapsto \alpha a(s).$$

Definiáljunk az $\mathbb{F}[S]$ halmazon egy szorzást a következőképpen: valamely $a, b \in \mathbb{F}[S]$ elemek szorzata legyen az a $c \in \mathbb{F}[S]$ elem, amelyre

$$c(s) = \sum_{xy=s} a(x)b(y)$$

teljesül tetszőleges $s \in S$ elem esetén. Nem nehéz belátni, hogy ezzel a művelettel $\mathbb{F}[S]$ egy \mathbb{F} feletti algebra.

Tetszőleges $s \in S$ elem esetén jelölje $\bar{s}(t)$ az $\mathbb{F}[S]$ következő elemét:

$$\bar{s}(t) = \begin{cases} 1, & \text{ha } t = s \\ 0, & \text{ha } t \neq s. \end{cases}$$

Itt 1, illetve 0 az \mathbb{F} test egységelemét, illetve nullelemét jelöli. Nem nehéz belátni, hogy ezen $\bar{s}(t)$ leképezések \bar{S} halmaza az $\mathbb{F}[S]$ algebra multiplikatív félcsoportjának olyan részfélcsoportja, amely izomorf az S félcsoporttal ($s \mapsto \bar{s}$ egy izomorfizmus). Továbbá, \bar{S} az $\mathbb{F}[S]$ egy bázisa. \square

Ha $a \in \mathbb{F}[S]$ tetszőleges, és s_1, \dots, s_k az S mindazon elemeinek halmaza, amelyekre $a(s_i) \neq 0$ ($i = 1, \dots, k$), akkor

$$a = \alpha_1 \bar{s}_1 + \dots + \alpha_k \bar{s}_k, \quad (15.1)$$

ahol $\alpha_i = a(s_i)$ ($i = 1, \dots, k$).

Ha az \bar{S} elemeit azonosítjuk az S elemeivel, akkor a (15.1) egyenlőség a következő alakban is írható:

$$a = \alpha_1 s_1 + \dots + \alpha_k s_k.$$

Véges $S = \{s_1, \dots, s_n\}$ félcsoporthoz esetén $\mathbb{F}[S]$ tetszőleges a eleme

$$a = \alpha_1 s_1 + \dots + \alpha_n s_n$$

alakban írható, mert azoknak a tagoknak az együtthatói, amelyek ténylegesen nem szerepelnek az összegben választhatók 0-nak. Így ha $a = \alpha_1 s_1 + \dots + \alpha_n s_n$ és $b = \beta_1 s_1 + \dots + \beta_n s_n$ az $\mathbb{F}[S]$ tetszőleges elemei, valamint $\xi \in \mathbb{F}$, akkor

$$a + b = (\alpha_1 + \beta_1) s_1 + \dots + (\alpha_n + \beta_n) s_n,$$

$$\xi a = (\xi \alpha_1) s_1 + \dots + (\xi \alpha_n) s_n,$$

$$ab = \gamma_1 s_1 + \dots + \gamma_n s_n,$$

ahol $\gamma_k = 0$, ha $s_k \notin S^2$, egyébként pedig

$$\gamma_k = \sum_{1 \leq i, j \leq n; s_i s_j = s_k} \alpha_i \beta_j.$$

Bizonyítás nélkül közöljük a következő tételt (lásd az [5] könyv 5.2 alfejezetében található Maschke's Theorem néven szereplő tételt).

15.24. Tétel (Maschke-tétel) *Legyen G egy véges csoport, \mathbb{F} pedig egy tetszőleges test. Az $\mathbb{F}[G]$ algebra akkor és csak akkor féligegyszerű, ha az \mathbb{F} test karakterisztikája nem osztja a G csoport rendjét.*

15.25. Definíció *Legyen S egy 0-elemes félcsoporthoz, \mathbb{F} pedig egy test. Jelölje $\mathbb{F}_0[S]$ azt az \mathbb{F} feletti algebrát, melynek van olyan B bázisa, amelyre $B \cup \{0\}$ az $\mathbb{F}_0[S]$ algebra multiplikatív félcsoporthozjának az S félcsoporthoztal izomorf részfélcsoporthozja.*

Az világos, hogy egy 0-elemes S félcsoporthoz esetén $\mathbb{F}[0]$ az $\mathbb{F}[S]$ félcsoporthozalgebra egy ideálja. Továbbá az is igaz, hogy $\mathbb{F}_0[S] \cong \mathbb{F}[S]/\mathbb{F}[0]$. Az $\mathbb{F}[S]/\mathbb{F}[0]$ faktoralgebrában $B = \{s + \mathbb{F}[0] : s \in S \setminus \{0\}\}$ egy bázis.

15.26. Megjegyzés Ha egy S félcsoporthoz adjungálunk egy nullelemet (függetlenül attól, hogy S -ben van-e nullelem vagy nincs), akkor az így keletkezett $S \cup \{0\}$ félcsoporthoz $\mathbb{F}_0[S \cup \{0\}] \cong \mathbb{F}[S]$ teljesül.

15.27. Tétel Bármely S félcsoporthoz tetszőleges T ideálja esetén $\mathbb{F}[S]/\mathbb{F}[T] \cong \mathbb{F}_0[S/T]$.

Bizonyítás. Legyen T az S félcsoporthoz tetszőleges ideálja. Az világos, hogy $\mathbb{F}[T]$ ideálja $\mathbb{F}[S]$ -nek. Ha $s, t \in S \setminus T$ és $s \neq t$, akkor

$$(s + \mathbb{F}[T]) \cap (t + \mathbb{F}[T]) = \emptyset.$$

Ellenkező esetben $s - t$ az $\mathbb{F}[T]$ -nek lenne eleme, ami $s, t \in S \setminus T$ miatt nem lehetséges, hiszen $\mathbb{F}[T]$ elemei a T elemeiből \mathbb{F} -beli együtthatókkal képezett formális összegek. Legyen

$$B = \{s + \mathbb{F}[T] : s \in S \setminus T\}.$$

Világos, hogy $B \cup \mathbb{F}[T]$ az $\mathbb{F}[S]/\mathbb{F}[T]$ algebra multiplikatív félcsoportjának az S/T faktorfélcsoporthoz izomorf részfélcsoportja. Az is igaz, hogy B az $\mathbb{F}[S]$ algebra bázisa. Így $\mathbb{F}[S]/\mathbb{F}[T] \cong \mathbb{F}_0[S/T]$. \square

15.28. Tétel Véges 0-elemes S félcsoporthoz esetén az $\mathbb{F}[S]$ algebra akkor és csak akkor féligegyszerű, ha az $\mathbb{F}_0[S]$ algebra féligegyszerű.

Bizonyítás. Jelölje 0 az S nullelemét. Legyen \mathbb{F} tetszőleges test. A 15.24. Tétel miatt $\mathbb{F}[0]$ féligegyszerű. A 15.27. Tétel szerint

$$\mathbb{F}_0[S] \cong \mathbb{F}[S]/\mathbb{F}[0].$$

Mivel

$$\mathbb{F}[S] \supseteq \mathbb{F}[0]$$

az $\mathbb{F}[S]$ algebra egy relatív ideálsorozata, ezért a 15.20. Tétel szerint $\mathbb{F}[S]$ akkor és csak akkor féligegyszerű, ha $\mathbb{F}[S]/\mathbb{F}[0] \cong \mathbb{F}_0[S]$ féligegyszerű. \square

Egy véges S félcsoporthoz mindig tartalmaz

$$S = S_1 \supset S_2 \supset \cdots \supset S_n \supset S_{n+1} = \emptyset$$

fősorozatot (lásd a 4.34. Definíciót). A 4.36. Tétel szerint S bármely két fősorozata egymással izomorf.

15.29. Tétel Egy véges S félcsoporthoz esetén az $\mathbb{F}[S]$ algebra akkor és csak akkor féligegyszerű, ha az S félcsoporthoz tetszőleges

$$S = S_1 \supset S_2 \supset \cdots \supset S_n \supset S_{n+1} = \emptyset$$

fősorozatához tartozó $\mathbb{F}[S_i/S_{i+1}]$ ($i = 1, \dots, n$) algebrák mindegyike féligegyszerű (megjegyezzük, hogy $S_n/\emptyset \cong S_n$).

Bizonyítás. Legyen

$$S = S_1 \supset S_2 \supset \cdots \supset S_n \supset S_{n+1} = \emptyset$$

egy véges S félcsoporth fősorozata. Megállapodva abban, hogy $\mathbb{F}[\emptyset]$ jelölje az $\mathbb{F}[S]$ félcsoportalgebra $\{0\}$ ideálját, az

$$\mathbb{F}[S] = \mathbb{F}[S_1] \supset \mathbb{F}[S_2] \supset \cdots \supset \mathbb{F}[S_n] \supset \mathbb{F}[S_{n+1}] = \{0\}$$

sorozat az $\mathbb{F}[S]$ félcsoportalgebra ideáljainak egy sorozata. A 15.27. Tétel szerint

$$\mathbb{F}[S_i]/\mathbb{F}[S_{i+1}] \cong \mathbb{F}_0[S_i/S_{i+1}]; \quad (i = 1, \dots, n-1).$$

Ugyanakkor

$$\mathbb{F}[S_n]/\mathbb{F}[S_{n+1}] = \mathbb{F}[S_n] \cong \mathbb{F}_0[S_n] = \mathbb{F}_0[S_n/S_{n+1}].$$

A 15.20. Tétel szerint $\mathbb{F}[S]$ akkor és csak akkor féligegyszerű, ha a fenti $\mathbb{F}[S_i]/\mathbb{F}[S_{i+1}]$ ($i = 1, \dots, n$) faktorok mindegyike féligegyszerű. Így, a 15.28. Tételt is használva, $\mathbb{F}[S]$ akkor és csak akkor féligegyszerű, ha az $\mathbb{F}[S_i/S_{i+1}]$ algebrák mindegyike féligegyszerű. \square

A 4.33. Definíció szerint egy S félcsoporthot féligegyszerű félcsoporthnak nevezünk, ha főfaktorai (azaz a fősorozatainak faktorai) egyszerűek vagy 0-egyszerűek.

15.30. Tétel *Ha egy véges S félcsoporth esetén az $\mathbb{F}[S]$ félcsoportalgebra féligegyszerű, akkor az S félcsoporth féligegyszerű.*

Bizonyítás. Legyen S olyan félcsoporth, amely esetén $\mathbb{F}[S]$ féligegyszerű algebra. Legyen

$$S = S_1 \supset S_2 \supset \cdots \supset S_n \supset S_{n+1} = \emptyset$$

az S egy fősorozata. A 15.29. Tétel szerint az $\mathbb{F}[S_i/S_{i+1}]$ algebrák mindegyike féligegyszerű. A 15.28. Tétel szerint az $\mathbb{F}_0[S_i/S_{i+1}]$ algebrák mindegyike féligegyszerű. Ebből már következik, hogy az S_i/S_{i+1} faktorfélcsoporthban nem lehet bármely két elem szorzata nulla, mert ha az lenne, akkor az $\mathbb{F}_0[S_i/S_{i+1}]$ algebrában is bármely két elem szorzata a nulla lenne, ami viszont ellentmondana annak a ténynek, hogy az $\mathbb{F}_0[S_i/S_{i+1}]$ algebra féligegyszerű. \square

A fejezet végén bizonyítás nélkül megemlítünk speciális félcsoporthok félcsoportalgebrájával kapcsolatos néhány tételt (lásd az [5] könyv Theorem 5.21., Corollary 5.24., Corollary 5.25. és Theorem 5.26. eredményeit).

15.31. Tétel *Legyen S egy véges kommutatív félcsoporth, \mathbb{F} pedig egy test. Az $\mathbb{F}[S]$ félcsoportalgebra akkor és csak akkor féligegyszerű, ha S előáll olyan csoportok uniójaként, melyek rendje nem osztható az \mathbb{F} test karakterisztikájával.*

15.32. Tétel *Ha egy véges egyszerű S félcsoport valamely \mathbb{F} test feletti $\mathbb{F}[S]$ algebrája féligegyszerű, akkor S csoport.*

15.33. Tétel *Ha egy véges S félcsoport valamely \mathbb{F} test feletti $\mathbb{F}[S]$ algebrája féligegyszerű, akkor S magja (azaz S összes ideáljának metszete) az S részcsoportja.*

15.34. Tétel *Egy véges inverz S félcsoport valamely \mathbb{F} test feletti $\mathbb{F}[S]$ algebrája akkor és csak akkor féligegyszerű, ha az \mathbb{F} test karakterisztikája 0 vagy olyan prímszám, amely nem osztja S egyetlen részcsoportjának rendjét sem.*

Feladatok

15.1. *(Megoldás: 17.43.)* Mutassuk meg, hogy tetszőleges G véges, kommutatív p -csoport (p prímszám) és tetszőleges p -karakterisztikájú \mathbb{F} test esetén az $\mathbb{F}[G]$ csoportalgebra minden bal oldali nullosztója nilpotens.

15.2. *(Megoldás: 17.44.)* Mutassuk meg, hogy ha G egy véges p -csoport (p prímszám) és \mathbb{F} egy p -karakterisztikájú test, akkor tetszőleges $g \in G$ elem esetén $e - g$ az $\mathbb{F}[G]$ csoportalgebra nilpotens eleme, ahol e a G csoport egységeleme!

16. fejezet

Félcsoportok mátrixrepresentációi

Ebben a fejezetben egy speciális mátrixrepresentációval, véges félcsoportok jobbrekuláris representációjával kapcsolatos mátrixrepresentációval foglalkozunk.

16.1. Jobbrekuláris representáció

Legyen S egy véges félcsoport, \mathbb{F} pedig egy test. Az $S \times S$ halmaznak az \mathbb{F} testbe való egyértelmű \mathbf{A} leképezéseit \mathbb{F} test feletti S -mátrixoknak nevezzük. Ha rögzítjük egy n -elemű S félcsoport elemeinek egy

$$\{s_1, \dots, s_n\}$$

sorrendjét, akkor minden S -mátrix felírható a szokásos "táblázatos" formában: egy \mathbf{A} mátrixhoz tartozó $n \times n$ -es táblázat i -dik sorának j -dik eleme megegyezik az \mathbb{F} test $\mathbf{A}(s_i, s_j)$ elemével. A bizonyítások egyszerűbbé tétele végett a vizsgált S félcsoporthoz tartozó S -mátrixokat a félcsoport valamely rögzített sorrendjéhez tartozó, az előzőekben részletezett táblázatos formában fogjuk tekinteni.

Jelölje 1 , illetve 0 egy \mathbb{F} test egységelemét, illetve nullelemét. Egy véges $S = \{s_1, \dots, s_n\}$ félcsoport tetszőleges s eleméhez tekintjük a következő S -mátrixot:

$$\mathbf{R}^{(s)} = [r_{i,j}^{(s)}]_{n \times n},$$

ahol

$$r_{i,j}^{(s)} = \begin{cases} e & \text{ha } s_i s = s_j, \\ 0 & \text{különben.} \end{cases}$$

Ezt a mátrixot az S elemhez tartozó \mathbb{F} test feletti jobb mátrixnak nevezzük (lásd az 1. Fejezetet). Az 1.11. Tétel szerint

$$\mathcal{R}_{\mathbb{F}} : s \mapsto \mathbf{R}^{(s)}$$

az S félcsoport \mathbb{F} test feletti n -edfokú reprezentációja. Ez lényegében az S félcsoport jobbrekuláris reprezentációja. Ez a reprezentáció akkor és csak akkor hű (azaz injektív), ha S bal redukzív, azaz tetszőleges $a, b \in S$ elemek esetén az $xa = xb$ feltételnek minden $x \in S$ elemre való teljesüléséből $a = b$ következik.

Tetszőleges n -elemű véges S félcsoport és tetszőleges \mathbb{F} test esetén jelölje $\mathcal{A}(\mathcal{R}_{\mathbb{F}}(S))$ az \mathbb{F} test feletti $n \times n$ típusú mátrixok $M_n(\mathbb{F})$ teljes mátrixalgebrájának az $\mathcal{R}_{\mathbb{F}}(S)$ által generált részalgebráját.

16.2. Félcsoportok direkt szorzatának jobbrekuláris reprezentációja

16.1. Tétel *Tetszőleges véges bal redukzív S_1 és S_2 félcsoportok, valamint tetszőleges \mathbb{F} test esetén*

$$\dim[\mathcal{A}(\mathcal{R}_{\mathbb{F}}(S_1))] \dim[\mathcal{A}(\mathcal{R}_{\mathbb{F}}(S_2))] = \dim[\mathcal{A}(\mathcal{R}_{\mathbb{F}}(S_1 \times S_2))].$$

Bizonyítás. Legyenek $S_1 = \{a_i : i = 1, \dots, |S_1|\}$ és $S_2 = \{b_j : j = 1, \dots, |S_2|\}$ tetszőleges véges bal redukzív félcsoportok, \mathbb{F} pedig tetszőleges test. Tekintsük az S_1 és S_2 félcsoportok jobbrekuláris reprezentációit. Jelölje $\mathbf{A}^{(a_i)}$ és $\mathbf{B}^{(b_j)}$ az $a_i \in S_1$ és $b_j \in S_2$ elemek \mathbb{F} feletti (a fenti sorrendhez tartozó) jobb mátrixait. Tekintsük az $S_1 \times S_2$ félcsoport eleminek következő elrendezését:

$$S_1 \times S_2 = \{(a_1, b_1); \dots; (a_1, b_{|S_2|}); \dots; (a_{|S_1|}, b_1); \dots; (a_{|S_1|}, b_{|S_2|})\}.$$

Nem nehéz észrevenni, hogy egy $(a_i, b_j) \in S_1 \times S_2$ elemhez (az előbb részletezett sorrend szerint) tartozó \mathbb{F} feletti $\mathbf{C}^{(a_i, b_j)}$ jobb mátrix olyan $\mathbf{C}_{k,t}^{(a_i, b_j)}$ ($k, t \in \{1, \dots, |S_1|\}$) mátrixok blokkmátrixa, amelyekre

$$\mathbf{C}_{k,t}^{(a_i, b_j)} = a_{k,t}^{(a_i)} \mathbf{B}^{(b_j)}$$

teljesül, ahol $a_{k,t}^{(a_i)}$ ($k, t = 1, \dots, |S_1|$) jelöli az $\mathbf{A}^{(a_i)}$ mátrix k -dik sorának t -dik elemét. Mivel S_1 és S_2 bal redukzív félcsoportok, ezért $S_1 \times S_2$ is bal redukzív. Így annak jobbrekuláris reprezentációja hű. Tegyük fel, hogy $\dim \mathcal{A}(\mathcal{R}_{\mathbb{F}}(S_1)) = m$ és $\dim \mathcal{A}(\mathcal{R}_{\mathbb{F}}(S_2)) = n$. Jelölje \mathcal{B}_1 és \mathcal{B}_2 az $\mathcal{A}(\mathcal{R}_{\mathbb{F}}(S_1))$, illetve a $\mathcal{A}(\mathcal{R}_{\mathbb{F}}(S_2))$ részalgebrák egy-egy bázisát. Tegyük fel, hogy $\mathcal{B}_1 = \{\mathbf{A}^{(a_1)}, \dots, \mathbf{A}^{(a_m)}\}$ és $\mathcal{B}_2 = \{\mathbf{B}^{(b_1)}, \dots, \mathbf{B}^{(b_n)}\}$. Megmutatjuk, hogy a $\mathbf{C}^{(a_i, b_j)}$ ($i = 1, \dots, m; j = 1, \dots, n$) mátrixok az $\mathcal{A}(\mathcal{R}_{\mathbb{F}}(S_1 \times S_2))$ részalgebrának egy bázisát alkotják.

Ahhoz, hogy megmutassuk, hogy a $\mathbf{C}^{(a_i, b_j)}$ ($i = 1, \dots, m; j = 1, \dots, n$) mátrixok lineárisan függetlenek \mathbb{F} felett, tegyük fel, hogy

$$\sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^m \gamma_{j,i} \mathbf{C}^{(a_i, b_j)} = \mathbf{0}_{mn \times mn}$$

valamely $\gamma_{j,i} \in \mathbb{F}$ skalárokkal. Akkor tetszőleges $k, t \in \{1, \dots, |S_1|\}$ indexekre

$$\sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^m \gamma_{j,i} \mathbf{C}_{k,t}^{(a_i, b_j)} = \mathbf{0}_{n \times n},$$

azaz

$$\sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^m \gamma_{j,i} a_{k,t}^{(a_i)} \mathbf{B}^{(b_j)} = \mathbf{0}_{n \times n}$$

adódik. Ekkor viszont

$$\sum_{j=1}^n (\sum_{i=1}^m \gamma_{j,i} a_{k,t}^{(a_i)}) \mathbf{B}^{(b_j)} = \mathbf{0}_{n \times n},$$

amiből tetszőleges $j = 1, \dots, n$ (and every $k, t = 1, \dots, |S_1|$) index esetén

$$\sum_{i=1}^m \gamma_{j,i} a_{k,t}^{(a_i)} = 0,$$

mert a $\mathbf{B}^{(b_1)}, \dots, \mathbf{B}^{(b_n)}$ mátrixok lineárisan függetlenek \mathbb{F} felett. Mivel a $\gamma_{j,i}$ együtthatók nem függenek k -től és t -től, ezért

$$\sum_{i=1}^m \gamma_{j,i} \mathbf{A}^{(a_i)} = \mathbf{0}_{m \times m}$$

adódik minden $j = 1, \dots, n$ indexre. Mivel a $\mathbf{A}^{(a_1)}, \dots, \mathbf{A}^{(a_m)}$ mátrixok lineárisan függetlenek \mathbb{F} felett, ezért $\gamma_{j,i} = 0$ minden $j = 1, \dots, n$ és $i = 1, \dots, m$ indexre.

A következőkben megmutatjuk, hogy a $\mathbf{C}^{(a_i, b_j)}$ ($i = 1, \dots, m; j = 1, \dots, n$) mátrixok generálják az $\mathcal{A}(\mathcal{R}_{\mathbb{F}}(S_1 \times S_2))$ részalgebrát. Legyen $(x, y) \in S_1 \times S_2$ tetszőleges elem. Mivel \mathcal{B}_2 bázisa az $\mathcal{A}(\mathcal{R}_{\mathbb{F}}(S_2))$ részalgebrának, ezért megadhatók olyan $\beta_j \in F$ ($j = 1, \dots, n$) skalárok, amelyekre

$$\mathbf{B}^{(y)} = \sum_{j=1}^n \beta_j \mathbf{B}^{(b_j)}$$

teljesül. Ekkor viszont tetszőleges $k, t \in \{1, \dots, |S_1|\}$ indexek esetén

$$a_{k,t}^{(x)} \mathbf{B}^{(y)} = \sum_{j=1}^n \beta_j a_{k,t}^{(x)} \mathbf{B}^{(b_j)}.$$

Mivel \mathcal{B}_1 bázisa az $\mathcal{A}(\mathcal{R}_{\mathbb{F}}(S_1))$ részalgebrának, ezért magadhatók olyan $\alpha_i \in F$ ($i = 1, \dots, m$) skalárok, melyekre

$$\mathbf{A}^{(x)} = \sum_{i=1}^m \alpha_i \mathbf{A}^{(a_i)},$$

azaz,

$$a_{k,t}^{(x)} = \sum_{i=1}^m \alpha_i a_{k,t}^{(a_i)}$$

teljesül tetszőleges $k, t = 1, \dots, |S_1|$ esetén. Így

$$\begin{aligned} a_{k,t}^{(x)} \mathbf{B}^{(y)} &= \sum_{j=1}^n \beta_j (\sum_{i=1}^m \alpha_i a_{k,t}^{(a_i)}) \mathbf{B}^{(b_j)} = \\ &= \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^m (\beta_j \alpha_i) (a_{k,t}^{(a_i)} \mathbf{B}^{(b_j)}), \end{aligned}$$

amiből

$$\mathbf{C}_{k,t}^{(x,y)} = \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^m (\beta_j \alpha_i) \mathbf{C}_{k,t}^{(a_i, b_j)}$$

következik tetszőleges $k, t = 1, \dots, |S_1|$ indexekre. Mivel az α_i ($i = 1, \dots, m$) és β_j ($j = 1, \dots, n$) együtthatók nem függenek k -től és t -től, ezért

$$\mathbf{C}^{(x,y)} = \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^m (\beta_j \alpha_i) \mathbf{C}^{(a_i, b_j)}. \quad \square$$

16.2. Tétel *Legyen \mathbb{F} egy test és legyenek S_1, S_2 tetszőleges véges bal redukzív félcsoporthok. Akkor*

$$\mathcal{A}(\mathcal{R}_{\mathbb{F}}(S_1)) \otimes \mathcal{A}(\mathcal{R}_{\mathbb{F}}(S_2)) \cong_{\text{Alg}} \mathcal{A}(\mathcal{R}_{\mathbb{F}}(S_1 \times S_2)),$$

ahol \otimes a tenzori szorzás, \cong_{Alg} pedig az algebra-izomorfizmus jele.

Bizonyítás. A 16.1. Tétel jelöléseit használjuk. Tekintsük az $\mathcal{A}(\mathcal{R}_{\mathbb{F}}(S_1))$ és $\mathcal{A}(\mathcal{R}_{\mathbb{F}}(S_2))$ vektorterek

$$\mathcal{A}(\mathcal{R}_{\mathbb{F}}(S_1)) \otimes \mathcal{A}(\mathcal{R}_{\mathbb{F}}(S_2))$$

tenzori szorzatát.

Az

$$\mathbf{A}^{(a_i)} \otimes \mathbf{B}^{(b_j)} \quad (i = 1, \dots, m; j = 1, \dots, n)$$

tenzorok egy bázisát alkotják a $\mathcal{A}(\mathcal{R}_{\mathbb{F}}(S_1)) \otimes \mathcal{A}(\mathcal{R}_{\mathbb{F}}(S_2))$ tenzori szorzatnak, melyek között a szorzás a következőképpen van értelmezve:

$$(\mathbf{A}^{(a_i)} \otimes \mathbf{B}^{(b_j)})(\mathbf{A}^{(a_k)} \otimes \mathbf{B}^{(b_t)}) = (\mathbf{A}^{(a_i a_k)} \otimes \mathbf{B}^{(b_j b_t)}).$$

A 16.1. Tétel szerint

$$\{\mathbf{C}^{(a_i, b_j)} : i = 1, \dots, m; j = 1, \dots, n\}$$

bázisa az $\mathcal{A}(\mathcal{R}_{\mathbb{F}}(S_1 \times S_2))$ algebrának. Közöttük a szorzás:

$$\mathbf{C}^{(a_i, b_j)} \mathbf{C}^{(a_k, b_t)} = \mathbf{C}^{(a_i a_k, b_j b_t)}.$$

Mivel

$$\dim(\mathcal{A}(\mathcal{R}_{\mathbb{F}}(S_1)) \otimes \mathcal{A}(\mathcal{R}_{\mathbb{F}}(S_2))) = \dim(\mathcal{A}(\mathcal{R}_{\mathbb{F}}(S_1 \times S_2)))$$

a 16.1. Tétel miatt, ezért a

$$\phi : (\mathbf{A}^{(a_i)} \otimes \mathbf{B}^{(b_j)}) \mapsto \mathbf{C}^{(a_i, b_j)} \quad i = 1, \dots, m; j = 1, \dots, n$$

leképezés az $\mathcal{A}(\mathcal{R}_{\mathbb{F}}(S_1)) \otimes \mathcal{A}(\mathcal{R}_{\mathbb{F}}(S_2))$ vektortérnek az $\mathcal{A}(\mathcal{R}_{\mathbb{F}}(S_1 \times S_2))$ vektortérre való izomorfizmusa. Mivel

$$\begin{aligned} \phi((\mathbf{A}^{(a_i)} \otimes \mathbf{B}^{(b_j)})(\mathbf{A}^{(a_k)} \otimes \mathbf{B}^{(b_t)})) &= \phi((\mathbf{A}^{(a_i a_k)} \otimes \mathbf{B}^{(b_j b_t)})) = \\ &= \mathbf{C}^{(a_i a_k, b_j b_t)} = \mathbf{C}^{(a_i, b_j)(a_k, b_t)} = \mathbf{C}^{(a_i, b_j)} \mathbf{C}^{(a_k, b_t)} = \\ &= \phi((\mathbf{A}^{(a_i)} \otimes \mathbf{B}^{(b_j)})) \phi((\mathbf{A}^{(a_k)} \otimes \mathbf{B}^{(b_t)})), \end{aligned}$$

ezért ϕ az $\mathcal{A}(\mathcal{R}_{\mathbb{F}}(S_1)) \otimes \mathcal{A}(\mathcal{R}_{\mathbb{F}}(S_2))$ tenzori szorzatnak az $\mathcal{A}(\mathcal{R}_{\mathbb{F}}(S_1 \times S_2))$ algebrára való algebra-izomorfizmusa. \square

16.3. Félcsoportok félhálójának jobbrekuláris reprezentációja

16.3. Tétel *Legyen S olyan véges félcsoport, amely valamely bal redukzív A és B félcsoportok félhálója. Akkor*

$$\dim \mathcal{A}(\mathcal{R}_{\mathbb{F}}(S)) \geq \dim \mathcal{A}(\mathcal{R}_{\mathbb{F}}(A)) + \dim \mathcal{A}(\mathcal{R}_{\mathbb{F}}(B)).$$

Bizonyítás. Világos, hogy A és B valamelyike ideálja S -nek. Tegyük fel, hogy A teljesíti ezt a feltételt. Ha $c, d \in S$ olyan elemei S -nek, amelyekre $xc = xd$ teljesül minden $x \in S$ elemre, akkor $c^2 = cd$ és $dc = d^2$. Mivel S az A és B félhálója, ezért cd és dc mindketten vagy A -ban, vagy mindketten B -ben vannak. Így c és d mindketten vagy A -ban vagy B -ben vannak. Mivel A és B bal redukzív, ezért $c = d$. Tehát S bal redukzív, és így az S jobbrekuláris reprezentációja hű. Legyen $A = \{a_1, \dots, a_n\}$ és $B = \{b_1, \dots, b_m\}$. Legyen $\mathbf{A}^{(a_i)}$ ($i = 1, \dots, n$), illetve $\mathbf{B}^{(b_j)}$ ($j = 1, \dots, m$) az $a_i \in A$, illetve a $b_j \in B$ elemhez (a fenti sorrend szerint) tartozó jobb mátrix.

Tekintsük az S elemeinek következő sorrendjét:

$$S = \{a_1, \dots, a_n, b_1, \dots, b_m\}.$$

Az S félcsoport s elemeihez (ezen rögzített sorrend szerint) tartozó $\mathbf{C}^{(s)}$ jobb mátrixok olyan

$$\mathbf{C}_{k,t}^{(s)} \quad (k, t \in \{1, 2\})$$

blokkok 2×2 -típusú mátrixai, amely blokkokra a következők teljesülnek: a $\mathbf{C}_{1,1}^{(s)}$ blokk $n \times n$ -típusú, a $\mathbf{C}_{2,2}^{(s)}$ blokk $m \times m$ -típusú, továbbá tetszőleges $a_i \in A$ elem esetén $\mathbf{C}_{1,1}^{(a_i)} = \mathbf{A}^{(a_i)}$, $\mathbf{C}_{2,2}^{(a_i)} = \mathbf{0}_{m \times m}$, tetszőleges $b_j \in B$ esetén pedig $\mathbf{C}_{2,2}^{(b_j)} = \mathbf{B}^{(b_j)}$. Tegyük fel, hogy

$$\dim \mathcal{A}(\mathcal{R}_{\mathbb{F}}(A)) = k \quad \text{és} \quad \dim \mathcal{A}(\mathcal{R}_{\mathbb{F}}(B)) = t.$$

Legyen $\mathbf{A}^{(a_i)}$ ($i = 1, \dots, k$) illetve $\mathbf{B}^{(b_j)}$ ($j = 1, \dots, t$) egy-egy bázisa az $\mathcal{A}(\mathcal{R}_{\mathbb{F}}(A))$, illetve $\mathcal{A}(\mathcal{R}_{\mathbb{F}}(B))$ algebrának. Megmutatjuk, hogy a $\mathbf{C}^{(a_i)}$ és $\mathbf{C}^{(b_j)}$ ($i = 1, \dots, k; j = 1, \dots, t$) mátrixok együtt egy lineárisan független rendszert alkotnak. Tegyük fel, hogy

$$\sum_{i=1}^k \alpha_i \mathbf{C}^{(a_i)} + \sum_{j=1}^t \beta_j \mathbf{C}^{(b_j)} = \mathbf{0}_{(n+m) \times (n+m)}.$$

Akkor

$$\sum_{i=1}^k \alpha_i \mathbf{C}_{2,2}^{(a_i)} + \sum_{j=1}^t \beta_j \mathbf{C}_{2,2}^{(b_j)} = \mathbf{0}_{m \times m},$$

és így

$$\sum_{j=1}^t \beta_j \mathbf{B}^{(b_j)} = \mathbf{0}_{m \times m},$$

mert $\mathbf{C}_{2,2}^{(a_i)} = \mathbf{0}_{m \times m}$ és $\mathbf{C}_{2,2}^{(b_j)} = \mathbf{B}^{(b_j)}$ minden $a_i \in A$ és $b_j \in B$ elem esetén. Mivel a $\mathbf{B}^{(b_j)}$ ($j = 1, \dots, t$) mátrixok lineárisan függetlenek, ezért $\beta_j = 0$ minden $j = 1, \dots, t$ indexre. Így

$$\sum_{i=1}^k \alpha_i \mathbf{C}^{(a_i)} = \mathbf{0}_{(n+m) \times (n+m)},$$

amiből

$$\mathbf{0}_{n \times n} = \sum_{i=1}^k \alpha_i \mathbf{C}_{1,1}^{(a_i)} = \sum_{i=1}^k \alpha_i \mathbf{A}^{(a_i)}$$

következik. Mivel az $\mathbf{A}^{(a_i)}$ ($i = 1, \dots, k$) mátrixok lineárisan függetlenek, ezért $\alpha_i = 0$ minden $i = 1, \dots, k$ indexre. Tehát a

$$\mathbf{C}^{(a_1)}, \dots, \mathbf{C}^{(a_k)}, \mathbf{C}^{(b_1)}, \dots, \mathbf{C}^{(b_t)}$$

mátrixok lineárisan függetlenek. Így

$$\dim \mathcal{A}(\mathcal{R}_{\mathbb{F}}(S)) \geq \dim \mathcal{A}(\mathcal{R}_{\mathbb{F}}(A)) + \dim \mathcal{A}(\mathcal{R}_{\mathbb{F}}(B)). \quad \square$$

16.4. Tétel *Legyen S olyan véges félcsoport, amely előáll valamely bal redukzív A és B félcsoportok erős félhálójaként úgy, hogy $AB \subseteq A$. Ha $\dim \mathcal{A}(\mathcal{R}_{\mathbb{F}}(B)) = |B|$ akkor*

$$\dim \mathcal{A}(\mathcal{R}_{\mathbb{F}}(S)) = \dim \mathcal{A}(\mathcal{R}_{\mathbb{F}}(A)) + \dim \mathcal{A}(\mathcal{R}_{\mathbb{F}}(B)).$$

Bizonyítás. A 16.3. Tétel jelöléseit használjuk. Mivel S az $A = \{a_1, \dots, a_n\}$ and $B = \{b_1, \dots, b_m\}$ félcsoportok félhálója, és mert A ideálja S -nek, ezért megadható B -nek A -ba olyan φ homomorfizmusa, hogy $b_j a_i = (b_j) \varphi a_i$ teljesül minden $b_j \in B$ és $a_i \in A$ elemre. Ez a homomorfizmus indukálja az $\{1, \dots, m\}$ halmaznak az $\{1, \dots, n\}$ halmazba való következő φ^* leképezését: $\varphi^*(j) = i$ akkor és csak akkor, ha $(b_j) \varphi = a_i$. Ebből következik, hogy a $\mathbf{C}_{1,2}^{(a_i)}$ mátrix j -dik sora ($j = 1, \dots, m$) megegyezik az $\mathbf{A}^{(a_i)}$ mátrix $(\varphi^*(j))$ -dik sorával tetszőleges $a_i \in A$ elem esetén. Így, ha egy $\sum_{i=1}^k \beta_i \mathbf{A}^{(a_i)}$ lineáris kombináció egyenlő egy $\mathbf{A}^{(a)}$ ($a \in A$) mátrixszal, akkor $\sum_{i=1}^k \beta_i \mathbf{C}_{2,1}^{(a_i)}$ egyenlő a $\mathbf{C}_{2,1}^{(a)}$ mátrixszal. Mivel $\dim \mathcal{A}(\mathcal{R}_{\mathbb{F}}(B)) = |B| = m$, ezért a 16.3. Tétel bizonyítása szerint a

$$\mathbf{C}^{(a_1)}, \dots, \mathbf{C}^{(a_k)}, \mathbf{C}^{(b_1)}, \dots, \mathbf{C}^{(b_m)}$$

mátrixok lineárisan függetlenek. Megmutatjuk, hogy generálják is az $\mathbb{F}_{(n+m) \times (n+m)}$ algebra $\mathcal{A}(\mathcal{R}_{\mathbb{F}}(S))$ részalgebráját. Ehhez elegendő azt megmutatni, hogy minden $\mathbf{C}^{(a_j)}$ ($j = k+1, \dots, n$) mátrix előáll az $\mathbf{C}^{(a_1)}, \dots, \mathbf{C}^{(a_k)}, \mathbf{C}^{(b_1)}, \dots, \mathbf{C}^{(b_m)}$ mátrixok lineáris kombinációjaként. Legyen $\mathbf{C}^{(a)}$, $a \in \{a_{j+1}, \dots, a_n\}$ tetszőleges mátrix. Akkor

$$\mathbf{A}^{(a)} = \sum_{i=1}^k \beta_i \mathbf{A}^{(a_i)}$$

valamely $\beta_i \in \mathbb{F}$ skalárokkal. A fentiek szerint ebből az egyenlőségből

$$\mathbf{C}_{2,1}^{(a)} = \sum_{i=1}^k \beta_i \mathbf{C}_{2,1}^{(a_i)}$$

következik, és így

$$\mathbf{C}^{(a)} = \sum_{i=1}^k \beta_i \mathbf{C}^{(a_i)}.$$

Tehát a

$$\mathbf{C}^{(a_1)}, \dots, \mathbf{C}^{(a_k)}, \mathbf{C}^{(b_1)}, \dots, \mathbf{C}^{(b_m)}$$

mátrixok az $\mathcal{A}(\mathcal{R}_{\mathbb{F}}(S))$ részalgebra egy bázisát alkotják. Következésképpen

$$\dim \mathcal{A}(\mathcal{R}_{\mathbb{F}}(S)) = \dim \mathcal{A}(\mathcal{R}_{\mathbb{F}}(A)) + \dim \mathcal{A}(\mathcal{R}_{\mathbb{F}}(B)). \quad \square$$

16.5. Tétel *Ha egy véges S félcsoport valamely bal redukzív S_{α} ($\alpha \in Y$) félcsoportok Y félhálójára, akkor*

$$\dim \mathcal{A}(\mathcal{R}_{\mathbb{F}}(S)) \geq \sum_{\alpha \in Y} \dim \mathcal{A}(\mathcal{R}_{\mathbb{F}}(S_{\alpha})).$$

Bizonyítás. Az állítást az $n = |Y|$ -re vonatkozó teljes indukcióval végezzük. Az $n = 1$ esetben az állítás nyilvánvaló. Az $n = 2$ eset a 16.3. Tételből adódik. Tegyük fel a továbbiakban, hogy $n \geq 3$. Tegyük fel azt is, hogy az állítás igaz minden n -nél kisebb számosságú Y félháló esetén. A továbbiakban tekintsünk egy olyan esetet, amelyben szereplő félhálóra $|Y| = n$ teljesül. Legyen S olyan véges félcsoport, amely bal redukzív S_{α} , $\alpha \in Y$ félcsoportok Y félhálójára. Mivel Y félháló és $|Y| \geq 3$, ezért megadhatók olyan $\alpha, \beta \in Y$ elemek, amelyekre

$$\alpha\beta \neq \beta$$

teljesül. Jelölje I_{β} az Y félháló β eleme által generált ideálját. Világos, hogy

$$I_{\beta} = \{\xi \in Y : \xi\beta = \xi\}.$$

Mivel

$$\beta, \alpha\beta \in I_{\beta},$$

ezért az $\alpha\beta \neq \beta$ feltételből

$$|I_{\beta}| \geq 2$$

következik.

Először tekintsük azt az esetet, amikor $I_{\beta} \neq Y$. Ekkor $|Y \setminus I_{\beta}| \leq n - 2$. Mivel I_{β} részfélcsoportja Y -nak, ezért az S félcsoport S_{ξ} ($\xi \in I_{\beta}$) részfélcsoportjainak A_{β} -val jelölt

uniója az S félcsoport egy részfélcsoportja. Mivel $I_\beta \subset Y$, ezért (az indukciós feltétel miatt)

$$\dim \mathcal{A}(\mathcal{R}_{\mathbb{F}}(A_\beta)) \geq \sum_{\xi \in I_\beta} \dim \mathcal{A}(\mathcal{R}_{\mathbb{F}}(S_\xi)).$$

Mivel I_β ideálja Y -nak, ezért az S félcsoport az S_η ($\eta \in Y \setminus I_\beta$) részfélcsoportok és az A_β részfélcsoport félhálójája. Mivel $|Y \setminus I_\beta| + 1 \leq n - 1$, ezért (az indukciós feltételt is használva)

$$\dim \mathcal{A}(\mathcal{R}_{\mathbb{F}}(S)) \geq \dim \mathcal{A}(\mathcal{R}_{\mathbb{F}}(A_\beta)) + \sum_{\eta \in Y \setminus I_\beta} \dim \mathcal{A}(\mathcal{R}_{\mathbb{F}}(S_\eta)).$$

Ez és a fenti

$$\dim \mathcal{A}(\mathcal{R}_{\mathbb{F}}(A_\beta)) \geq \sum_{\xi \in I_\beta} \dim \mathcal{A}(\mathcal{R}_{\mathbb{F}}(S_\xi))$$

egyenlőtlenség együttesen a

$$\dim \mathcal{A}(\mathcal{R}_{\mathbb{F}}(S)) \geq \sum_{\alpha \in Y} \dim \mathcal{A}(\mathcal{R}_{\mathbb{F}}(S_\alpha))$$

egyenlőtlenséget eredményezik.

A következőkben azt az esetet vizsgáljuk, amikor $I_\beta = Y$. Ebben az esetben β az Y egységeleme, és így $\xi \eta \neq \beta$ minden $\beta \notin \{\xi, \eta\}$ elemekre. Valóban, ha lennének olyan $\xi, \eta \in Y$ elemek, amelyekre $\xi \neq \beta$, $\eta \neq \beta$ és $\xi \eta = \beta$ teljesülne, akkor minden $\alpha \in Y$ elem esetén azt kapnánk, hogy $\alpha \eta \xi = \alpha \beta = \alpha$, amiből $\alpha \xi = \alpha$ következne. Ez azt jelentené, hogy ξ az Y egységeleme, amely nem lehetséges amiatt, mert β is az Y egységelem és $\xi \neq \beta$. Így $X = Y \setminus \{\beta\}$ az Y egy részfélhálójája. Jelölje S^* az S félcsoport azon részfélcsoportját, amely az S_τ , $\tau \in X$ részfélcsoportok X félhálójája. Akkor S az S^* és S_β részfélcsoportok félhálójája, s ezért a 16.3. Tétel miatt

$$\dim \mathcal{A}(\mathcal{R}_{\mathbb{F}}(S)) \geq \dim \mathcal{A}(\mathcal{R}_{\mathbb{F}}(S^*)) + \dim \mathcal{A}(\mathcal{R}_{\mathbb{F}}(S_\beta)).$$

Mivel $|X| = |Y| - 1$, ezért (az indukciós feltételt is használva)

$$\dim \mathcal{A}(\mathcal{R}_{\mathbb{F}}(S^*)) \geq \sum_{\tau \in X} \dim \mathcal{A}(\mathcal{R}_{\mathbb{F}}(S_\tau)).$$

Következésképpen

$$\dim \mathcal{A}(\mathcal{R}_{\mathbb{F}}(S)) \geq \sum_{\alpha \in Y} \dim \mathcal{A}(\mathcal{R}_{\mathbb{F}}(S_\alpha)). \quad \square$$

16.6. Tétel *Legyen S olyan véges félcsoport, amely valamely bal redukzív S_α ($\alpha \in Y$) félcsoportok Y félhálójája. Ha minden $\alpha \in Y$ index esetén $\dim \mathcal{A}(\mathcal{R}_{\mathbb{F}}(S_\alpha)) = |S_\alpha|$, akkor $\dim \mathcal{A}(\mathcal{R}_{\mathbb{F}}(S)) = |S|$.*

Bizonyítás. A 16.5. Tétel felhasználásával

$$\sum_{\alpha \in Y} |S_\alpha| = |S| \geq \dim \mathcal{A}(\mathcal{R}_{\mathbb{F}}(S)) \geq \sum_{\alpha \in Y} \dim \mathcal{A}(\mathcal{R}_{\mathbb{F}}(S_\alpha)) = \sum_{\alpha \in Y} |S_\alpha|$$

adódik, és így $\dim \mathcal{A}(\mathcal{R}_{\mathbb{F}}(S)) = |S|$. □

16.7. Tétel *Ha egy véges S félcsoport S_α ($\alpha \in Y$) monoidok Y félhálója, akkor*

$$\dim \mathcal{A}(\mathcal{R}_{\mathbb{F}}(S)) = |S|.$$

Bizonyítás. Az világos, hogy minden M monoid bal redukzív, és $\dim \mathcal{A}(\mathcal{R}_{\mathbb{F}}(M)) = |M|$. Így az állítás a 16.6. Tétel következménye. □

16.8. Tétel *Ha S véges Clifford félcsoport, akkor tetszőleges \mathbb{F} test esetén*

$$\dim \mathcal{A}(\mathcal{R}_{\mathbb{F}}(S)) = |S|.$$

Bizonyítás. A 10.28. Tétel szerint egy félcsoport akkor és csak akkor Clifford félcsoport, ha csoportok félhálója. Így az állítás a 16.7. Tétel következménye. □

16.9. Tétel *Ha S véges félháló, akkor tetszőleges \mathbb{F} test esetén $\dim \mathcal{A}(\mathcal{R}_{\mathbb{F}}(S)) = |S|$.*

Bizonyítás. Mivel egy félháló egyelemű félcsoportok félhálója, ezért az állítás a 16.7. Tétel következménye. □

Feladatok

16.1. *(Megoldás: 17.45.)* Mutassuk meg, hogy véges $S = \{s_1, \dots, s_n\}$ félcsoport és tetszőleges \mathbb{F} test esetén $\sum_{i=1}^n \alpha_i \mathbf{R}^{(s_i)} = \mathbf{0}$ akkor és csak akkor teljesül valamely $\alpha_i \in \mathbb{F}$ skalárok esetén, ha $\sum_{i=1}^n \alpha_i s_i$ az $\mathbb{F}[S]$ félcsoportalgebra jobb annullátorának eleme.

16.2. *(Megoldás: 17.46.)* Tetszőleges véges, n -elemű $S = \{s_1, \dots, s_n\}$ félcsoport és tetszőleges \mathbb{F} test esetén jelölje $\mathcal{R}_{\mathbb{F}}^*$ az $\mathbb{F}[S]$ félcsoportalgebrának az $M_n(\mathbb{F})$ teljes mátrixalgebrába való következő reprezentációját: $\mathcal{R}_{\mathbb{F}}^*(\alpha_1 s_1 + \dots + \alpha_n s_n) = \alpha_1 \mathcal{R}_{\mathbb{F}}(s_1) + \dots + \alpha_n \mathcal{R}_{\mathbb{F}}(s_n)$. Mutassuk meg, hogy $\mathcal{R}_{\mathbb{F}}^*$ magja ($\text{Ker} \mathcal{R}_{\mathbb{F}}^* = \{a \in \mathbb{F}[S] : \mathcal{R}_{\mathbb{F}}^*(a) = \mathbf{0}\}$) megegyezik az $\mathbb{F}[S]$ félcsoportalgebra jobb oldali annullátorával!

17. fejezet

Megoldások

Az 1. fejezet feladatainak megoldásai

17.1. (az 1.1. feladat megoldása) Világos, hogy

$$\mathbf{R}^{(a)} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \mathbf{R}^{(b)} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

és $(\mathbf{R}^{(a)})^2 = \mathbf{R}^{(a)}$, $\mathbf{R}^{(a)}\mathbf{R}^{(b)} = \mathbf{R}^{(b)}$, $\mathbf{R}^{(b)}\mathbf{R}^{(a)} = \mathbf{R}^{(a)}$, $(\mathbf{R}^{(b)})^2 = \mathbf{R}^{(b)}$. Tehát S_F^R félcsoportot alkot a mátrixok szorzására nézve. Ugyanakkor $\mathbf{R}^{(a)}\mathbf{R}^{(b)} = \mathbf{R}^{(b)} \neq \mathbf{R}^{(a)} = \mathbf{R}^{(ab)}$. Így S nem félcsoport a vizsgált műveletre nézve (pl. $(ba)b = b^2 = a \neq b = ba = b(ab)$).

17.2. (az 1.2. feladat megoldása) Tetszőleges $a_1, a_2, a_3 \in A$ és $b_1, b_2, b_3 \in B$ elemek esetén $((a_1, b_1) * (a_2, b_2)) * (a_3, b_3) = (a_1, b_2) * (a_3, b_3) = (a_1, b_3) = (a_1, b_1) * (a_2, b_3) = (a_1, b_1) * ((a_2, b_2) * (a_3, b_3))$. Tehát a művelet asszociatív. Továbbá, tetszőleges $(a, b) \in A \times B$ esetén $(a, b)^2 = (a, b) * (a, b) = (a, b)$, és így az $((A \times B); *)$ félcsoport minden eleme idempotens.

17.3. (az 1.3. feladat megoldása) Tetszőleges $a, b \in S$ és tetszőleges $x, y \in A$ elemek esetén $(ab)(xy) = a(b(xy)) = a((bx)y) = (a(bx))y = ((ab)x)y$. Tehát S zárt az A -beli műveletre nézve. Mivel tetszőleges $a, b, c \in S$ esetén $a(bc) = (ab)c$, ezért S az A grupoid egy részfélcsoportja.

17.4. (az 1.4. feladat megoldása) Az világos, hogy véges félcsoportnak véges sok részfélcsoportja van. Fordítva, tegyük fel, hogy S olyan félcsoport, amelynek véges sok részfélcsoportja van. Az S tetszőleges eleme által generált ciklikus részfélcsoport nem lehet végtelen, mert végtelen ciklikus részfélcsoportnak végtelen sok részfélcsoportja van, amelyek az S -nek is részfélcsoportjai. Mivel S minden eleme benne van az általa generált részfélcsoportban, ezért S előáll véges ciklikus részfélcsoportok úniójaként. Mivel a feltétel miatt a ciklikus részcsoportok száma véges, ezért S előáll véges sok véges ciklikus részfélcsoport úniójaként. Ebből már következik, hogy S véges sok elemet tartalmaz.

A 2. fejezet feladatainak megoldásai

17.5. (a *2.1. feladat megoldása*) Az világos, hogy σ reflexív és szimmetrikus. A σ tranzitivitásának igazolásához tegyük fel, hogy valamely $a, b, c \in S$ elemekre teljesülnek az $(a, b) \in \sigma$ és $(b, c) \in \sigma$ feltételek. Akkor $ab^n = b^{n+1}$, $ba^n = a^{n+1}$, $bc^n = c^{n+1}$ és $cb^n = b^{n+1}$ teljesül valamely n pozitív egész számra. Így $a^{2n} = a^{n+1}a^{n-1} = ba^n a^{n-1} = ba^{2n-1} = \dots = b^n a^n$. Hasonlóan adódik, hogy $c^{2n} = b^n c^n$. Így $ac^{2n} = ab^n c^n = b^{n+1} c^n = bb^n c^n = bc^{2n} = bc^n c^n = c^{n+1} c^n = c^{2n+1}$. Az előzőekhez hasonlóan igazolható, hogy $ca^{2n} = a^{2n+1}$. Tehát $(a, c) \in \sigma$. Így σ tranzitív. Következésképpen σ ekvivalencia reláció.

17.6. (a *2.2. feladat megoldása*) Legyen S tetszőleges jobbzéró félcsoport! Legyen α az S halmazon értelmezett tetszőleges ekvivalenciareláció! Ha $(a, b) \in \alpha$ valamely $a, b \in S$ elemekre, akkor tetszőleges $s \in S$ elem esetén $as = s = bs$, és ezért $(as, bs) \in \alpha$. Tehát α jobb kongruencia. Továbbá, $sa = a \alpha b = sb$, amiből következik, hogy α bal kongruencia. A *2.22.* Tétel szerint α az S egy kongruenciarelációja. Balzéró félcsoportok esetén a megoldás hasonló.

17.7. (a *2.3. feladat megoldása*) Legyen S olyan jobbzéró félcsoport, amelyben bármely két kongruencia felcserélhető egymással. A *2.1.* Feladat szerint S minden ekvivalenciarelációja kongruenciareláció, ezért S bármely két ekvivalenciarelációja felcserélhető egymással. Tegyük fel, hogy $|S| > 2$. Legyenek $a, b, c \in S$ páronként különböző elemek. Jelölje $\alpha_{a,b}$ az S azon ekvivalenciarelációját, melynek osztályai az S kételemű $\{a, b\}$ részhalmaza, valamint ezen részhalmaz komplementerében lévő elemek mint egyelemű részhalmazok. Jelölje $\alpha_{b,c}$ a kételemű $\{b, c\}$ részhalmazzal az előzőek mintájára definiált ekvivalenciarelációt. Mivel $(a, b) \in \alpha_{a,b}$ és $(b, c) \in \alpha_{b,c}$, ezért $(a, c) \in \alpha_{a,b} \circ \alpha_{b,c}$. Mivel a feltétel szerint $\alpha_{a,b} \circ \alpha_{b,c} = \alpha_{b,c} \circ \alpha_{a,b}$, ezért $(a, c) \in \alpha_{b,c} \circ \alpha_{a,b}$, azaz létezik olyan $x \in S$ elem, hogy $(a, x) \in \alpha_{b,c}$ és $(x, c) \in \alpha_{a,b}$. Mivel $a \notin \{b, c\}$, ezért $a = x$ és így $(a, c) \in \alpha_{a,b}$, amiből $c \in \{a, b\}$ következik, ami viszont ellentmond annak a feltételnek, hogy a, b, c az S félcsoport páronként különböző elemei. Tehát szükségképpen $|S| \leq 2$ A fordított állítás igazolása igen egyszerű. A megoldás hasonló abban az esetben, amikor S balzéró félcsoport.

17.8. (a *2.4. feladat megoldása*) Legyen S egy háromelemű félháló. Mivel S véges, ezért S -nek van 0 nulleleme (ez az S három elemének szorzata). Jelöljük a másik két elemet a -val, illetve b -vel. Ha $ab = 0$, akkor $I = \{0, a\}$ és $J = \{0, b\}$ ideálok. Legyen α az S azon ekvivalenciarelációja, melynek osztályai $I = \{0, a\}$ és $\{b\}$, továbbá jelölje β az S azon ekvivalenciarelációja, melynek osztályai $J = \{0, b\}$ és $\{a\}$. Könnyen ellenőrizhető, hogy α és β az S kongruenciarelációi. Mivel $(a, 0) \in \alpha$ és $(0, b) \in \beta$, ezért $(a, b) \in \alpha \circ \beta$. Ha $\alpha \circ \beta$ egyenlő lenne a $\beta \circ \alpha$ relációval, akkor $(a, b) \in \beta \circ \alpha$ teljesülne, azaz lenne S -nek olyan y eleme, hogy $(a, y) \in \beta$ és $(y, b) \in \alpha$ teljesülne. Az első feltételből $y = a$ adódna, ami miatt $(a, b) \in \alpha$ teljesülne, ami viszont nem lehetséges. Tehát $\alpha \circ \beta \neq \beta \circ \alpha$. Ha

$ab = ba \neq 0$, akkor $ab = ba = a$ vagy $ab = ba = b$. Vizsgálhatjuk csak az egyik (pl. $ab = ba = a$) esetet. Jelölje γ azt az ekvivalenciarelációt, melynek osztályai $\{a, b\}$ és $\{0\}$. Legyen α az előzőekben definiált ekvivalenciareláció. Nem nehéz belátni, hogy α és γ az S kongruenciarelációi. Mivel $(0, a) \in \alpha$ és $(a, b) \in \gamma$, ezért $(0, b) \in \alpha \circ \gamma$. Ha $(0, b)$ benne lenne a $\gamma \circ \alpha$ relációban, akkor lenne S -nek olyan x eleme, hogy $(0, x) \in \gamma$ és $(x, b) \in \alpha$ teljesülne. Ebből $x = 0$, illetve $(0, b) \in \alpha$ következne, ami ellentmondás. Tehát $\alpha \circ \beta \neq \beta \circ \alpha$.

17.9. (a 2.5. feladat megoldása) Az világos, hogy a ϱ reláció ekvivalenciareláció. Megmutatjuk, hogy ϱ az S félcsoport jobbkongruenciája, illetve balkongruenciája. Tegyük fel, hogy $(a, b) \in \varrho$ valamely $a, b \in S$ elemekre, azaz $xa = xb$ minden $x \in S$ elemre teljesül. Legyen $c \in S$ tetszőleges elem. Akkor $xac = xbc$, azaz $(ac, bc) \in \varrho$. Tehát ϱ jobbkongruencia. Mivel $x(ca) = (xc)a = (xc)b = x(cb)$, ezért $(ca, cb) \in \varrho$. Tehát ϱ balkongruencia. Így a 2.22. Tétel miatt ϱ az S félcsoport kongruenciája.

A 3. fejezet feladatainak megoldásai

17.10. (a 3.1. feladat megoldása) Legyen \mathcal{F}_X egy X halmaz feletti szabad félcsoport. A 3.15. Tétel szerint tetszőleges S félcsoport és tetszőleges $f : X \mapsto S$ leképezéshez megadható az \mathcal{F}_X szabad félcsoportnak az S félcsoportba való olyan homomorfizmusa, amelyre $\varphi(x) = f(x)$ teljesül tetszőleges $x \in X$ esetén.

Fordítva, tegyük fel, hogy F olyan félcsoport, melynek van olyan X részhalmaza, amely generálja F -et és minden S félcsoport esetén X -nek S -be való tetszőleges f leképezése kiterjeszthető F -nek S -be való φ homomorfizmusává. Válasszuk S -et és f -et speciális módon; legyen $S = \mathcal{F}_X$ és $f = id_X$, azaz X -nek $S = \mathcal{F}_X$ -be való azon leképezése, amely X minden elemének (S -beli) önmagát felelteti meg. A feltétel szerint van F -nek \mathcal{F}_X -be olyan φ homomorfizmusa, amely X minden eleméhez önmagát rendeli. Legyenek $x_1, \dots, x_n \in X$ tetszőleges elemek. Legyen $x_1 \cdots x_n \in \mathcal{F}_X$ tetszőleges elem. Mivel az F -beli $x_1 \cdots x_n$ szorzathoz φ az \mathcal{F}_X félcsoport $\varphi(x_1) \cdots \varphi(x_n) = x_1 \cdots x_n$ elemét rendeli, ezért φ szürjektív. Ha $\varphi(x_1 \cdots x_n) = \varphi(y_1 \cdots y_m)$ valamely $x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_m \in X$ esetén, akkor (mivel φ homomorfizmus és X elemein az identikus) \mathcal{F}_X -ben $x_1 \cdots x_n = y_1 \cdots y_m$, amiből $n = m$ és $x_i = y_i$ következik minden $i = 1, \dots, n$ indexre. Tehát F -ben $x_1 \cdots x_n = y_1 \cdots y_m$. Így φ injektív. Következésképpen F izomorf \mathcal{F}_X -szel.

17.11. (a 3.2. feladat megoldása) Legyenek X és Y olyan halmazok, amelyekhez létezik egy $f : X \mapsto Y$ bijektív leképezés. Tekintsük az \mathcal{F}_X és \mathcal{F}_Y szabad félcsoportokat. a 3.1. Feladat szerint megadható olyan $\varphi : \mathcal{F}_X \mapsto \mathcal{F}_Y$ homomorfizmus, amely az f kiterjesztése. Legyen $y_1 \cdots y_n \in \mathcal{F}_Y$ tetszőleges elem. Mivel az \mathcal{F}_X félcsoport $f^{-1}(y_1) \cdots f^{-1}(y_n)$ eleméhez φ az \mathcal{F}_Y félcsoport $\varphi(f^{-1}(y_1)) \cdots \varphi(f^{-1}(y_n)) = f(f^{-1}(y_1)) \cdots f(f^{-1}(y_n)) = yx_1 \cdots y_n$ elemét rendeli, ezért φ szürjektív. Ha $\varphi(x_1 \cdots x_n)$ egyenlő $\varphi(x'_1 \cdots x'_m)$ -mel valamely $x_1, \dots, x_n, x'_1, \dots, x'_m \in X$ esetén, akkor \mathcal{F}_Y -ban

$f(x_1) \cdots f(x_n) = f(x'_1) \cdots f(x'_m)$, amiből $n = m$ és $f(x_i) = f(x'_i)$ következik minden $i = 1, \dots, n$ indexre. Mivel f bijektív, ezért $x_i = x'_i$ minden $i = 1, \dots, n$ indexre. Tehát F -ben $x_1 \cdots x_n = x'_1 \cdots x'_m$. Így φ injektív. Tehát az \mathcal{F}_X és \mathcal{F}_Y szabad félcsoporthok izomorfak.

A 4. fejezet feladatainak megoldásai

17.12. (a 4.1. feladat megoldása) Indirekt módon, tegyük fel, hogy van olyan S nil félcsoporth, amely 0-egyszerű. Akkor $S^2 \neq \{0\}$ (ekkor $S \setminus \{0\} \neq \emptyset$) és S nek csak két ideálja van: S és $\{0\}$. Legyenek $a, b \in S \setminus \{0\}$ tetszőleges elemek az $a \neq b$ feltétellel. A 4.7. Tétel szerint $SaS = S = SbS$. Így megadhatók olyan $x, y, u, v \in S$ elemek, hogy $a = xby$ és $b = uav$. Ekkor $a = xuavy$, amiből $a = (xu)^n a (vy)^n$ következik tetszőleges pozitív egész n -re. Mivel $a \neq b$, ezért $xu \in S$ vagy $vy \in S$. Így $(xu)^m = 0$ vagy $(vy)^k = 0$ valamely pozitív egész m , illetve k számokra. Így $a = 0$, amiből $b = 0$ is következik. Tehát $S \setminus \{0\}$ csak egy elemet tartalmazhat. Ha a jelöli ezt az elemet, akkor $a^2 = 0$, mivel S nil félcsoporth. Ekkor viszont $S^2 \{0\}$, ami ellentmondás. Tehát nem fordulhat elő, hogy egy nil félcsoporth 0-egyszerű lenne.

17.13. (a 4.2. feladat megoldása) Legyen S egy \mathcal{R} -kommutatív félcsoporth. Az S félcsoporth Green-féle \mathcal{R} ekvivalenciája bal oldali kongruencia. Először megmutatjuk, hogy jobbkongruencia is. Legyenek $a, b, s \in S$ tetszőleges elemek. Tegyük fel, hogy $(a, b) \in \mathcal{R}$. Akkor megadhatók olyan $x, y \in S^1$ elemek, hogy $a = bx$ és $b = ay$. Ha $a = b$, akkor $as = bs$ és így $(as, bs) \in \mathcal{R}$. Ha $a \neq b$, akkor $x, y \in S$. Mivel az S félcsoporth \mathcal{R} -kommutatív, ezért $as = bxs \in bsxS^1$ és $bs = ays \in asyS^1$. Tehát $(as, bs) \in \mathcal{R}$. Így \mathcal{R} jobb oldali kongruencia. A 2.22. Tétel miatt \mathcal{R} az S félcsoporth kongruenciája. Mivel tetszőleges $a, b \in S$ elemek esetén $ab \in baS^1$ és $ba \in abS^1$, ezért $(ab, ba) \in \mathcal{R}$. Tehát \mathcal{R} az S félcsoporth kommutatív kongruenciája.

Fordítva, tegyük fel, hogy S olyan félcsoporth, amelyen a Green-féle \mathcal{R} ekvivalencia kommutatív kongruencia. Akkor tetszőleges $a, b \in S$ elemek esetén $(ab, ba) \in \mathcal{R}$, azaz $abS^1 = baS^1$, amiből következik, hogy $ab \in baS^1$.

Az 5. fejezet feladatainak megoldásai

17.14. (az 5.1. feladat megoldása) Legyen S olyan félcsoporth, melynek van bal oldali egységeleme. Legyenek $a, b \in S$ tetszőlegesek. Tegyük fel, hogy $xa = xb$ teljesül minden $x \in S$ elemre. Ha x helyébe az S egy bal oldali egységelemét írjuk, kapjuk az $a = b$ egyenlőséget.

17.15. (az 5.2. feladat megoldása) Egy S félcsoporth esetén az $a \mapsto \varrho_a$ ($a \in S$) leképezés akkor és csak akkor injektív, ha tetszőleges $a, b \in S$ elemek esetén a $\varrho_a = \varrho_b$ feltételből,

azaz az $(x)\varrho_a = (x)\varrho_b$ egyenlőségnek minden $x \in S$ elemre való teljesüléséből $a = b$ következik. Mivel az $(x)\varrho_a = (x)\varrho_b$ egyenlőség az $xa = xb$ egyenlőséget jelenti, ezért már következik a feladat állítása.

17.16. (az 5.3. feladat megoldása) Csak a balzéro esetet vizsgáljuk. Legyen L tetszőleges balzéro félcsoporth. Ha λ az L tetszőleges önmagába való leképezése, akkor tetszőleges $a, b \in L$ elemek esetén $\lambda(ab) = \lambda(a) = (\lambda(a))b$. Tehát λ az L egy bal translációja, azaz L minden önmagába való leképezése bal transláció. Legyen ϱ az L tetszőleges jobb translációja. Akkor tetszőleges $a, b \in L$ elemek esetén $a = a((b)\varrho) = (ab)\varrho = (a)\varrho$. Tehát L -nek csak egyetlen jobb translációja van; ez az L identikus leképezése. Ha λ az L tetszőleges önmagába való leképezése, és ι jelöli L identikus leképezését, akkor tetszőleges $a, b \in L$ esetén $a(\lambda(b)) = a = ab = ((a)\iota)b$. Tehát (λ, ι) láncszemet alkotnak. Az L translációs burka $(\Omega(S))$ az összes olyan (λ, ι) párból áll, ahol λ az L tetszőleges önmagába való leképezése. A $(\lambda, \iota) \mapsto \lambda$ leképezés $\Omega(L)$ -nek az L összes önmagába való leképezéseinek félcsoporthjára való izomorfizmus.

17.17. (az 5.4. feladat megoldása) Legyen G tetszőleges csoport. Jelölje (λ, ϱ) a G translációs burkának egy elemét. Jelölje e a G egységelemét. Akkor $\lambda(e) = e(\lambda(e)) = ((e)\varrho)e = (e)\varrho$. Legyen $g \in G$ tetszőleges elem. Akkor $\lambda(g) = \lambda(eg) = \lambda(e)g$ és $(g)\varrho = (ge)\varrho = g((e)\varrho)$. Tehát λ , illetve ϱ a G ugyanazon eleméhez tartozó belső bal-, illetve jobb translációi. Így $\Omega(G)$ izomorf $\Omega_0(G)$ -vel. Mivel G gyengén redukív, ezért G izomorf $\Omega_0(G)$ -vel. Következésképpen G translációs burka, $\Omega(G)$ izomorf G -vel.

17.18. (az 5.5. feladat megoldása) Legyenek (a, b) és (c, d) tetszőleges $L \times R$ -beli elemek. Tegyük fel, hogy minden $(x, y) \in L \times R$ elemre $(a, b)(x, y) = (c, d)(x, y)$ és $(x, y)(a, b) = (x, y)(c, d)$. Akkor $(a, y) = (ax, by) = (a, b)(x, y) = (c, d)(x, y) = (cx, dy) = (c, y)$, és így $a = c$. Továbbá, $(x, b) = (xa, yb) = (x, y)(a, b) = (x, y)(c, d) = (xc, yd) = (x, d)$, és így $b = d$. Következésképpen $(a, b) = (c, d)$.

A 6. fejezet feladatainak megoldásai

17.19. (a 6.1. feladat megoldása) Legyen $x \in S$ az $a \in S$ elem, $y \in S$ pedig a $b \in S$ elem inverze. Akkor $axa = a$, $xax = x$, $byb = b$ és $yby = y$. A 6.2. Tétel szerint ax , xa , by , yb idempotens elemek, így egymással felcserélhetőek a 6.20. Tétel szerint. Ekkor $ab(yx)ab = a(by)(xa)b = a(xa)(by)b = (axa)(byb) = ab$ és $(yx)(ab)(yx) = y(xa)(by)x = y(by)(xa)x = (yby)(xax) = yx$. Tehát $(ab)^{-1} = b^{-1}a^{-1}$.

17.20. (a 6.2. feladat megoldása) Legyen S egy kommutatív reguláris félcsoporth. Akkor S teljesen reguláris, és ezért a 6.16. Tétel szerint S kommutatív csoportok úniója.

17.21. (a 6.3. feladat megoldása) Legyen a egy S reguláris félcsoporth tetszőleges eleme. Akkor van olyan $x \in S$ elem, amelyre

$$axa = a$$

teljesül. A 6.2. Lemma szerint ax és xa idempotens elemek. Ha S -nek csak egyetlen idempotens eleme van, akkor

$$ax = xa,$$

és ezért az a elem teljesen reguláris. Így S teljesen reguláris félcsoporth. A 6.16. Tétel szerint S csoportok uniója. Mivel S csak egyetlen idempotens elemet tartalmaz, ezért S csoport.

A 7. fejezet feladatainak megoldásai

17.22. (a 7.1. feladat megoldása) Legyen U egy bal egyszerű S félcsoporth jobb unitér részfélcsoporthja. Legyenek $a, b \in U$ tetszőleges elemek. Mivel S bal egyszerű, ezért a 7.2. Tétel duálisa szerint van S -nek olyan x eleme, amelyre $xa = b$ teljesül. Mivel U jobb unitér, ezért $a, xa \in U$ az $x \in U$ tartalmazást eredményezi. Tehát $Ua = U$ tetszőleges $a \in U$ esetén. Ez a 7.2. Tétel szerint éppen azt jelenti, hogy U bal egyszerű.

17.23. (a 7.2. feladat megoldása) Legyen $b \in N$ tetszőleges elem. A 7.1. Feladat szerint N bal egyszerű. Így van olyan $x \in N$ elem, melyre $b = xb$ teljesül. Tekintsük a H által definiált \mathcal{P}_H főkongruenciát (2.32. Definíció). A 2.38. Tétel szerint (figyelembe véve, hogy S -nek önmagától különböző ideálja) \mathcal{P}_H az S félcsoporth csoport-kongruenciája; H ennek egyetlen osztálya, mégpedig a faktorcsoporth egységeleme. Ezért tetszőleges $h \in H$ elem esetén $(b, hb) \in \mathcal{P}_H$. Így $(xb, hb) \in \mathcal{P}_H$. Mivel \mathcal{P}_H csoport-kongruencia, ezért $(x, h) \in \mathcal{P}_H$. Mivel $h \in H$ és H egyetlen $\text{cal}P_H$ -osztály, ezért $x \in H$, amiből $x \in N$ miatt $N \cap H \neq \emptyset$ következik.

17.24. (a 7.3. feladat megoldása) A 7.2. Feladat szerint $N \cap H \neq \emptyset$. Könnyen igazolható, hogy $N \cap H$ reflexív unitér részfélcsoporthja S -nek, így N -nek is és H -nak is. Mivel az N félcsoporth $N \cap H$ reflexív, unitér részfélcsoporthja szerinti főkongruencia csoportkongruencia, ezért az N -re vonatkozó feltétel miatt $N \cap H = N$. Hasonlóan adódik, hogy $N \cap H = H$. Tehát $N = H$.

A 8. fejezet feladatainak megoldásai

17.25. (a 8.1. feladat megoldása) Legyen S egy kommutatív, 0-egyszerű félcsoporth. Tegyük fel, hogy $ab = 0$ teljesül valamely S -beli $a \neq 0$ és $b \neq 0$ elemekre. Mivel $A = \{x \in S : xb = 0\}$ ideálja S -nek és $a \in A$, ezért az S félcsoporth 0-egyszerűsége

miatt $A = S$. Így $Ab = \{0\}$. Legyen $B = \{y \in S : ay = \{0\}\}$. Világos, hogy B az S egy ideálja, és $b \in B$. Ezért $B = S$, amiből $S^2 = \{0\}$ következik. Ez viszont ellentmond az S félcsoport 0-egyszerűségének (ugyanis $S^2 \neq \{0\}$). Tehát $G = S - \{0\}$ az S félcsoport részfélcsoportja. Ha I ideálja G -nek, akkor $I \cup \{0\} \neq \{0\}$ ideálja S -nek, amiből $I \cup \{0\} = S$ következik. Ebből pedig $I = G$ adódik. Tehát G egy kommutatív egyszerű félcsoport, ami miatt G egy csoport. Így $S = G^0$. Az világos, hogy kommutatív G csoport esetén G^0 egy kommutatív 0-egyszerű félcsoport.

17.26. (a 8.2. feladat megoldása) Legyen S egy 0-egyszerű nil félcsoport. Akkor $|S| \geq 2$. Legyenek $a, b \in S$ tetszőleges elemek az $a \neq 0$ és $b \neq 0$ feltétellel. Akkor $SaS = S$ és $SbS = S$ a 4.7. Tétel szerint. Így megadhatók olyan $x, y, u, v \in S$ elemek, hogy $a = xby$ és $b = uav$. Ebből $a = xuavy$ adódik. Mivel S nil félcsoport, ezért van olyan n pozitív egész szám, hogy $a = (xu)^na(vy)^n = 0a0 = 0$. Tehát $a = b$. Következésképpen $S = a \cup \{0\}$. Mivel S nil félcsoport, szükségképpen $a^2 = 0$, és így $S^2 = \{0\}$, ami ellentmondás.

A 9. fejezet feladatainak megoldásai

17.27. (a 10.1. feladat megoldása) Legyen L egy balzéró, R pedig egy jobbzeró félcsoport. Ha $|L| = |R| = 1$, akkor $S = L \times R$ egyelemű, s ezért teljesen egyszerű. Tegyük fel, hogy $|S| \geq 2$. Legyen I az S egy ideálja. Legyen $(a, b) \in I$ tetszőleges elem. Akkor tetszőleges $(x, y) \in S$ elemre $(x, y) = (xax, yby) = (x, y)(a, b)(x, y) \in I$, amiből következik, hogy $S = L \times R$ egyszerű félcsoport. Az világos, hogy S minden eleme idempotens. Legyen $(e, f) \in S$ tetszőleges elem. Ha valamely $(a, b) \in S$ elemre $(a, b) \leq (e, f)$, azaz $(a, b) = (a, b)(e, f) = (e, f)(a, b)$, akkor $(a, b) = (a, f) = (e, b)$, amiből $(a = e$ és $b = f$, azaz $(a, b) = (e, f)$ adódik. Tehát S minden eleme primitív idempotens. Így $S = L \times L$ teljesen egyszerű.

17.28. (a 9.2. feladat megoldása) Legyenek A és B tetszőleges félcsoportok. Legyen $S = A \times B$. Tegyük fel, hogy A és B teljesen egyszerű félcsoportok. Feltehetjük, hogy $|A| > 1$ és $|B| > 1$. Legyen $(a, b) \in S$ tetszőleges elem. Mivel A és B egyszerű, ezért $AaA = A$ és $BbB = B$. Így $(A \times B)(a, b)(A \times B) = AaA \times BbB = A \times B$. Tehát $A \times B$ egyszerű félcsoport. Legyenek $e \in A$ és $f \in B$ primitív idempotens elemek. Akkor tetszőleges $(a, b) \in A \times B$ idempotens elem esetén az $(a, b) \leq (e, f)$ feltételből, azaz az $(a, b) = (a, b)(e, f) = (e, f)(a, b)$ feltételből $(a, b) = (ae, bf) = (ea, fb)$, amiből pedig $a = ae = ea$ és $b = bf = fb$ következik. Mivel e és f primitív idempotensei A -nak, illetve B -nek, ezért $a = e$ és $b = f$, azaz $(a, b) = (e, f)$. Tehát (e, f) az $S = A \times B$ direkt szorzat primitív idempotens eleme. Tehát S teljesen egyszerű félcsoport.

Fordítva, tegyük fel, hogy $S = A \times B$ teljesen egyszerű. Feltehetjük, hogy $|A| > 1$ és $|B| > 1$. Ha I_A az A félcsoport egy ideálja, akkor $I_A \times B$ az $A \times B$ félcsoport ideálja, és így megegyezik $A \times B$ -vel, amiből $I_A = A$ következik. Tehát A egyszerű félcsoport. Hasonlóan igazolható, hogy B is egyszerű. Legyen (e, f) az $A \times B$ egy primitív idempotens

elem. Akkor e az A idempotens eleme. Ha $a = ae = ea$ teljesül valamely A -beli a idempotens elemre, akkor $(a, f) = (a, f)(e, f) = (e, f)(a, f)$, amiből $(a, f) = (e, f)$, azaz $a = e$ következik. tehát e az A primitív idempotens eleme. Hasonlóan igazolható, hogy f a B primitív idempotens eleme. Tehát A és B teljesen egyszerű félcsoportok.

17.29. (a 9.3. feladat megoldása) Legyen S egy teljesen 0-egyszerű félcsoport. A 9.25. Tétel szerint S izomorf egy reguláris Rees-féle mátrixfélcsoporttal. Legyen $(a)_{ij}$ tetszőleges nem nulla idempotens elem. Legyen $(b)_{kt}$ egy tetszőleges nem nulla idempotens elem a $(b)_{kt} \leq (a)_{ij}$ feltétellel. Akkor $(b)_{kt} = (b)_{kt}(a)_{ij} = (a)_{ij}(b)_{kt}$, amiből $(b)_{kt} = (bp_{ti}a)_{kj} = (ap_{jk}b)_{it}$ következik. Így $k = i$, $t = j$ és $b = bp_{ti}a = ap_{jk}b$ következik. Mivel $(b)_{kt} \neq 0$, ezért $b = p_{tk}^{-1}$, és így a $b = bp_{ti}a$ egyenlőségből $b = p_{tk}^{-1}p_{ti}a = p_{ti}^{-1}p_{ti}a = a$ adódik. Így $(a)_{ij} = (b)_{kt}$. Tehát $(a)_{ij}$ primitív idempotens. Következésképpen S minden nem nulla idempotens eleme primitív.

A 10. fejezet feladatainak megoldásai

17.30. (a 10.1. feladat megoldása) Az nyilvánvaló, hogy σ_J az S félcsoport ekvivalenciarelációja. Legyenek $a, b, s \in S$ tetszőleges elemek. Tegyük fel, hogy $(a, b) \in \sigma_J$. Ha $a, b \in F$ valamely F filterre, akkor $sa, sb \in F$ vagy $sa, sb \notin F$ attól függően, hogy $s \in F$, vagy $s \notin F$. Ha $a, b \notin F$, akkor tetszőleges $s \in S$ esetén $sa, sb \notin F$, mert F komplementere prím ideál. Tehát σ_J bal oldali kongruencia. Hasonlóan adódik, hogy σ_J jobb oldali kongruencia. Tehát σ_J az S félcsoport egy kongruenciája. Mivel minden F filterre és minden $a \in S$ elemre $a^2 \in F$ akkor és csak akkor teljesül, ha $a \in F$, ezért $(a, a^2) \in \sigma_J$ minden $a \in S$ elemre. Tehát az S/σ_J faktorfélcsoport egy köteg. Tegyük fel, hogy $ab \in F$ teljesül S valamely F filtere és valamely a, b elemei esetén. Akkor $a \in F$ és $b \in F$, de ekkor $ba \in F$. Ezért $(ab, ba) \in \sigma_J$, s ezért az S/σ_J faktorfélcsoport egy félháló.

17.31. (a 10.2. feladat megoldása) Legyen σ egy félháló-kongruenciája egy S félcsoportnak. Jelöljük az S/σ félhálót Y -nal, és a σ -osztályokat S_α -val ($\alpha \in Y$). Adott $\alpha \in Y$ elem esetén legyen $F_\alpha = \cup_{\beta \geq \alpha, \beta \in Y} S_\beta$. Ha $\beta \geq \alpha$ és $\delta \geq \alpha$, azaz $\beta\alpha = \alpha$ és $\delta\alpha = \alpha$, akkor $\beta\delta\alpha = \alpha$, és ezért $\beta\delta \geq \alpha$. Ebből az adódik, hogy F_α részfélhálóját S -nek. Ha $\beta\delta \geq \alpha$, azaz $\beta\delta\alpha = \alpha$, akkor $\beta\alpha = \alpha$ and $\delta\alpha = \alpha$, és így $\beta \geq \alpha$ és $\delta \geq \alpha$. Ez viszont azt jelenti, hogy F_α filter. Legyen J az F_α filterek halmaza. Megmutatjuk, hogy $\sigma = \sigma_J$. Ha $(a, b) \in \sigma$, akkor $a, b \in F_\alpha$ vagy $a, b \notin F_\alpha$ minden $\alpha \in Y$ -ra. Ezért $(a, b) \in \sigma_J$. Tehát $\sigma \subseteq \sigma_J$. Tegyük fel, hogy $(a, b) \in \sigma_J$. Jelölje ξ és η az Y azon elemeit, amelyekre $a \in S_\xi$ és $b \in S_\eta$ teljesül. Mivel $a \in F_\xi$, ezért $b \in F_\xi$, amiből $\eta \geq \xi$ következik. Mivel $b \in F_\eta$, ezért $a \in F_\eta$, amiből $\xi \geq \eta$ következik. Ezért $\xi = \eta$, azaz $(a, b) \in \sigma$. Tehát $\sigma_J \subseteq \sigma$. Következésképpen $\sigma = \sigma_J$.

17.32. (a 10.3. feladat megoldása) Legyenek a és b egy S arkhimédieszi félcsoport tetszőleges elemei. Akkor $a^n = xby$ és $b^m = uav$ teljesül valamely pozitív egész n és m

számra, valamint S valamely x, y, u, v elemeire. Legyen τ tetszőleges félháló-kongruencia S -en. Akkor

$$a \tau a^n = xby \tau xb^{m+1}y \tau xb^m yb = xuavyb \tau(xby)(uav) = \\ a^n(uav) \tau ua^{n+1}v \tau uav = b^m \tau b.$$

Tehát τ az S félcsoport univerzális relációja. Így S félháló-felbonthatatlan.

17.33. (a 10.4. feladat megoldása) Legyen S gyengén kommutatív félcsoport. A 10.15. Tétel miatt elegendő azt megmutatni, hogy S Putcha-félcsoport. Legyenek $a, b \in S$ tetszőleges elemek. Tegyük fel, hogy a osztja b -t, azaz $xay = b$ teljesül valamely $x, y \in S^1$ elemekre. Akkor $(bx)a(yb) = b^3$. Mivel $bx, a, yb \in S$, ezért megadható olyan m pozitív egész szám, valamint olyan $u, v \in S$ elemek, amelyekre $v(bx)a = ((bx)a(yb))^m = a(yb)u$. Ebből $b^{6m} = ((bx)a(yb))^{2m} = v(bx)aa(yb)u$ adódik. Tehát a^2 osztja a b elem $6m$ -edik hatványát.

17.34. (a 10.5. feladat megoldása) Legyen S gyengén kommutatív félcsoport. Az előző feladat szerint S előáll S_α ($\alpha \in Y$) arkhimédieszi félcsoportok Y félhálójaként. Legyen $\alpha \in Y$ tetszőleges. Akkor tetszőleges $a, b \in S_\alpha$ elemekhez megadható olyan m pozitív egész szám, valamint olyan $x, y \in S$ elemek, amelyekre $xa = (ab)^m = by$ teljesül. Ha $x \in S_\xi$ és $y \in S_\eta$, akkor az $\alpha\xi = \alpha$ és $\eta\alpha = \alpha$, azaz $S_\alpha S_\xi \subseteq S_\alpha$ és $S_\eta S_\alpha \subseteq S_\alpha$. Így $(ab)x, y(ab) \in S_\alpha$ és $((ab)x)a = (ab)^{m+1} = b(y(ab))$. Tehát S_α gyengén kommutatív.

A 11. fejezet feladatainak megoldásai

17.35. (a 11.1. feladat megoldása) A félcsoport szíve: $K = \{0, k_1, k_2\}$.

17.36. (a 11.2. feladat megoldása) A félcsoport szíve: $K = \{0, u, v\}$.

A 12. fejezet feladatainak megoldásai

17.37. (a 12.1. feladat megoldása) Legyen S egy háromelemű félháló. Akkor S -nek van nulleleme (a három elem szorzata). Jelölje a nullelemet 0 , a másik két elemet pedig a és b . Tegyük fel, hogy S permutálható. Ha $ab = 0$, akkor $I = \{0, a\}$ és $J = \{0, b\}$ az S ideáljai. A 12.5. Tétel szerint permutálható félcsoport ideáljai láncot alkotnak a tartalmazásra nézve, így $ab \neq 0$. Vizsgáljuk az $ab = a$ esetet. Akkor $I = \{0, a\}$ az S ideálja. Legyen α az S félháló azon ekvivalenciája, melynek osztályai $\{a, b\}$ és 0 . Világos, hogy α az S félháló kongruenciája is. A 12.4. Tétel szerint I -nek benne kellene lenni valamely α -osztályban, vagy elő kellene állni α -osztályok uniójaként. Itt viszont egyik sem teljesül. Tehát az $ab = a$ feltétel is ellentmondáshoz vezet. Hasonló a helyzet az $a = b$ feltétel esetén is. Így S nem lehet permutálható.

17.38. (a 12.2. feladat megoldása) Elegendő azt megmutatni, hogy ha a főideálok láncot alkotnak a tartalmazásra nézve, akkor az ideálok is láncot alkotnak a tartalmazásra nézve. Legyen tehát S olyan félcsoport, melynek főideáljai láncot alkotnak a tartalmazásra nézve. Legyenek A és B az S tetszőleges ideáljai. Tegyük fel, hogy $A \not\subseteq B$ és $B \not\subseteq A$. Akkor vannak olyan $a \in A$ és $b \in B$ elemek, hogy $a \notin B$ és $b \notin A$. A feltétel szerint $J(a) \subseteq J(b)$ vagy $J(b) \subseteq J(a)$. Az első esetben $J(b) \subseteq B$ miatt $a \in B$, ami ellentmondás. Hasonló okok miatt a második feltétel is ellentmondásra vezet. Így S tetszőleges A és B ideáljai esetén az $A \subseteq B$ vagy $B \subseteq A$ feltételek egyikének kell teljesülni. Tehát S ideáljai láncot alkotnak a tartalmazásra nézve.

A 13. fejezet feladatainak megoldásai

17.39. (a 13.1. feladat megoldása) A 13.1. Tétel szerint, ahhoz, hogy egy S félcsoport beágyazható legyen egy csoportba, szükségképpen S -nek egyszerűsítésnek kell lennie. Fordítva, tegyük fel, hogy S gyengén kommutatív, egyszerűsítéses félcsoport. Legyenek $a, b \in S$ tetszőleges elemek. Mivel S gyengén kommutatív, ezért van olyan n pozitív egész szám, hogy

$$(ab)^n \in Sa.$$

Mivel

$$(ab)^n \in Sb$$

nyilvánvalóan teljesül, ezért

$$Sa \cap Sb \neq \emptyset.$$

Tehát S jobbreverzibilis. A 13.4. Tétel szerint minden jobb reverzibilis, egyszerűsítéses félcsoport beágyazható egy csoportba.

17.40. (a 13.2. feladat megoldása) Tegyük fel, hogy egy S félcsoport beágyazható egy periodikus G csoportba. Feltehetjük, hogy $S \subseteq G$. Legyen $s \in S$ tetszőleges elem. Mivel G periodikus, ezért megadható olyan n pozitív egész szám, hogy $e = s^n \in S$. Ebből már következik a feladat állítása.

A 14. fejezet feladatainak megoldásai

17.41. (a 14.1. feladat megoldása) Legyen S gyengén szeparatív félcsoport. Legyenek $a, b \in S$ tetszőleges elemek. Tegyük fel, hogy $ax = bx$ és $xa = xb$ teljesül minden $x \in S$ elemre. Akkor az első egyenlőségből az $x = b$ választással $ab = b^2$, a második egyenlőségből az $x = a$ választással $a^2 = ab$ adódik. Tehát $a^2 = ab = b^2$. Mivel S gyengén szeparatív, ezért ezen utóbbi egyenlőségből $a = b$ következik. Tehát S gyengén redukzív.

17.42. (a *14.2. feladat megoldása*) Legyen S gyengén kommutatív félcsoport. Akkor S előáll gyengén kommutatív arkhimédészi S_α ($\alpha \in Y$) félcsoportok félhálójaként. Tegyük fel, hogy ezek mindegyike gyengén egyszerűsítes. Legyenek $a, b \in S$ tetszőleges elemek. Tegyük fel, hogy $a^2 = ab = b^2$. Akkor van olyan $\alpha \in Y$ elem, hogy $a, b \in S_\alpha$. Az

$$a^2 = ab = b^2$$

feltételből

$$(ba)(ba) = b(ab)a = b^3a = b^2(ba) = (ab)(ba)$$

és

$$(ba)(ba) = b(ab)a = ba^3 = (ba)a^2 = (ba)(ab)$$

következik. Mivel $ab, ba \in S_\alpha$ és S_α gyengén egyszerűsítes, ezért

$$ab = ba.$$

Így

$$a^2 = ab = ba = b^2.$$

Mivel S_α gyengén egyszerűsítes, ezért $a = b$. Tehát S gyengén szeparatív.

A 15. fejezet feladatainak megoldásai

17.43. (a *15.1. feladat megoldása*) A véges p -csoportok szükségképpen p -hatvány rendűek. Jelölje $q = p^n$ a G rendjét. Legyen $a \in \mathbb{F}[G]$ tetszőleges elem. Akkor $g = \alpha_1 g_1 + \dots + \alpha_q g_q$ valamely $\alpha_1, \dots, \alpha_q \in \mathbb{F}$ skalárokkal. Ha a bal oldali nullosztó, akkor van olyan $0 \neq b \in \mathbb{F}[G]$ elem, hogy $0 = ab$, amiből $a^q b = 0$ következik. Mivel az $\mathbb{F}[G]$ csoportalgebra kommutatív, ezért érvényes benne a binomiális tétel, és így (figyelembe véve, hogy \mathbb{F} karakterisztikája p) $a^q = (\alpha_1 g_1 + \dots + \alpha_q g_q)^q = \alpha_1^q g_1^q + \dots + \alpha_q^q g_q^q = \alpha_1^q e + \dots + \alpha_q^q e = (\alpha_1^q + \dots + \alpha_q^q)e$, ahol e jelöli a G csoport egység-elemét. Így $0 = a^q b = (\alpha_1^q + \dots + \alpha_q^q)eb = (\alpha_1^q + \dots + \alpha_q^q)b$, amiből $b \neq 0$ miatt $(\alpha_1^q + \dots + \alpha_q^q)$ következik. Így $a^q = (\alpha_1^q + \dots + \alpha_q^q)e = 0e = 0$. Tehát a nilpotens elem.

17.44. (a *15.2. feladat megoldása*) Legyen a G rendje p^k . Mivel e felcserélhető g -vel és \mathbb{F} karakterisztikája p , ezért a binomiális tétel alkalmazásával $(e-g)^{p^k} = e - g^{p^k} = e - e = 0$.

A 16. fejezet feladatainak megoldásai

17.45. (a *16.1. feladat megoldása*) Jelölje $(\mathbb{F})^n$ az \mathbb{F} test elemiből képezett n -elemű sorozatok vektortérét. Jól ismert tény, hogy megadható az $\mathbb{F}[S]$ félcsoportalgebra $\{s_1, \dots, s_n\}$ bázisának segítségével az $\mathbb{F}[S]$ vektortérnek az $(\mathbb{F})^n$ vektortérre való φ izomorfizmusa.

Egy $a \in \mathbb{F}[S]$ elem $\varphi(a)$ képét az a elem $\{s_1, \dots, s_n\}$ bázisra vonatkozó koordinátás alakjának nevezzük. Jelölje \underline{e}_i az $s_i \in S \subseteq \mathbb{F}[S]$ elem koordinátás alakját, azaz azt az n -elemű sorozatot, melynek i -dik eleme az \mathbb{F} egységeleme, a többi pedig az \mathbb{F} nulleleme. Jelölje $k * i$ azt a $t \in \{1, \dots, n\}$ indexet, amelyre $s_k s_i = s_t$ teljesül. Világos, hogy az $\mathbf{R}^{(s_i)}$ mátrix k -dik sora egyenlő $\underline{e}_{k*i} \in (\mathbb{F})^n$ vektorral, és így $\sum_{i=1}^n \alpha_i \mathbf{R}^{(s_i)} = \mathbf{0}$ akkor és csak akkor teljesül, ha minden $k = 1, \dots, n$ indexre $\sum_{i=1}^n \alpha_i \underline{e}_{k*i} = \underline{0}$ teljesül, ahol $\underline{0}$ az $(\mathbb{F})^n$ nullvektorát jelöli. Ezen utóbbi egyenlőség akkor és csak akkor teljesül $(\mathbb{F})^n$ -ben minden $k = 1, \dots, n$ indexre, ha $\sum_{i=1}^n \alpha_i s_k s_i = 0$, azaz $s_k (\sum_{i=1}^n \alpha_i s_i) = 0$ teljesül az $\mathbb{F}[S]$ félcsoporthalgebrában minden $k = 1, \dots, n$ indexre. Ez pedig éppen azzal ekvivalens, hogy $\sum_{i=1}^n \alpha_i s_i$ az $\mathbb{F}[S]$ félcsoporthalgebra jobb annullátorának eleme.

17.46. (a [16.2. feladat megoldása](#)) $\alpha_1 s_1 + \dots + \alpha_n s_n \in \mathbb{F}[S]$ akkor és csak akkor van benne az $\mathcal{R}_{\mathbb{F}}^*$ magjában, ha $\alpha_1 \mathbf{R}^{(s_1)} + \dots + \alpha_n \mathbf{R}^{(s_n)} = \mathbf{0}$. Az előző feladat szerint ez akkor és csak akkor teljesül, ha $\alpha_1 s_1 + \dots + \alpha_n s_n$ benne van $\mathbb{F}[S]$ jobb oldali annullátorában.

Tárgymutató

- 0-egyszerű félcsoporth, 46
- \mathcal{D} -reláció, 56
- \mathcal{H} -reláció, 56
- \mathcal{L} -reláció, 56
- \mathcal{R} -reláció, 56

- additív írásmód, 6
- algebra, 205
- algebra dimenziója, 205
- algebra ideálja, 205
- algebra idempotens eleme, 206
- algebra nil ideálja, 208
- algebra nilpotens eleme, 205
- algebra nilpotens ideálja, 208
- algebra nilradikálja, 211
- algebra relatív ideálsorozata, 212
- algebra valódi nilpotens eleme, 205
- algebrai struktúra, 6
- algebrai struktúra alaphalmaza, 6
- annullátor, 171
- arkhimédeszi félcsoporth, 145
- asszociatív művelet, 7
- automorfizmus, 39

- Baer-Levi félcsoporth, 102
- bal 0-egyszerű félcsoporth, 93
- bal egyszerű félcsoporth, 92
- bal egyszerűsítéses félcsoporth, 86
- bal hányadoscsoport, 194
- bal oldali egységelem, 14
- bal oldali ideál; balideál, 16
- bal oldali inverz, 14
- bal oldali nullelem, 13
- bal Pucha-félcsoporth, 146

- bal redukzív félcsoporth, 69
- bal szeparatív félcsoporth, 198
- bal transláció, 69
- balkongruencia, 28
- balzéró [jobbzéro] félcsoporth, 13
- beágyazás, 39
- belső bal transláció, 69
- belső jobb transláció, 69
- biciklikus félcsoporth, 119
- binér reláció, 24
- Brandt-félcsoporth, 136
- Brandt-gruppoid, 134

- Cayley-féle művelet tábla, 7
- ciklikus félcsoporth, 17
- Clifford-félcsoporth, 157
- Croisot-Teissier-féle félcsoporth, 109
- csoport, 15

- derékszögű köteg, 160
- direkt szorzat, 160
- diszjunktív elem, 170
- divízióalgebra, 212

- egységelem, 14
- egyszerű algebra, 212
- egyszerű félcsoporth, 45
- egyszerűsítéses félcsoporth, 86
- ekvivalenciareláció, 27
- elágazás, 76
- elem indexe, 18
- elem periódusa, 18
- elem rendje, 18
- endomorfizmus, 39

epimorfizmus, 39
 félcsoport, 8
 félcsoport szíve, 170
 félcsoport test feletti algebrája, 213
 félcsoportalgebra, 213
 félcsoportok erős félhálója, 157
 félcsoportok szubdirekt szorzata, 166
 félháló, 21
 félháló-felbonthatatlan félcsoport, 141
 féligegyszerű algebra, 212
 féligegyszerű algebra osztályszáma, 212
 fő balideál, 53
 fő jobbideál, 53
 faktorfélcsoport, 30
 generátorrendszer, 16
 globálisan idempotens szív, 170
 Green-relációk, 56
 grupoid, 8
 gyengén egyszerűsítési félcsoport, 204
 gyengén kommutatív félcsoport, 165
 gyengén redukív félcsoport, 71
 gyengén szeparatív félcsoport, 198
 halmazok Descartes szorzata, 6
 homocsoport, 172
 homomorfizmus, 39
 homomorfizmus magja, 39
 homomorfizmusok tranzitív rendszere, 157
 ideál, 16
 ideálbővítés, 65
 idempotens elem, 21
 invertálható művelet, 7
 inverz, 14
 inverz félcsoport, 86
 izomorfizmus, 39
 jobb 0-egyszerű félcsoport, 93
 jobb egyszerű félcsoport, 92
 jobb egyszerűsítési félcsoport, 86
 jobb oldali egységelem, 14
 jobb oldali ideál; jobbideál, 16
 jobb oldali inverz, 14
 jobb oldali nullelem, 13
 jobb Putchá-félcsoport, 146
 jobb redukív félcsoport, 69
 jobb reverzibilis félcsoport, 192
 jobb szeparatív félcsoport, 198
 jobb transláció, 69
 jobbcsoport, 96
 jobbkongruencia, 28
 jobbreguláris reprezentáció, 69
 kölcsönösen egyértelmű parciális transzformáció, 89
 köteg, 21
 kétoldali ideál; ideál, 16
 kanonikus homomorfizmus, 39
 kiterjesztett jobb [bal] reguláris reprezentáció, 70
 kommutatív csoport, 15
 kommutatív félcsoport, 8
 kommutatív művelet, 7
 kongruencia, 28
 kongruenciareláció, 28
 kváziciklikus p -csoport, 174
 Light-féle asszociativitási teszt, 8
 művelet, 6
 monoid, 14
 multiplikatív írásmód, 6
 Neumann-féle inverz, 80
 nil félcsoport, 151
 nilpotens algebra, 210
 nilpotens elem, 205
 nilpotens félcsoport, 151
 nilpotens szív, 170
 nilradikál, 211
 permutálható félcsoport, 182

Putcha-félcsoport, 146

részalgebra, 205

részfélcsoport, 16

Rees mátrix, 124

Rees-féle faktorfélcsoport, 51

Rees-féle kongruencia, 51

Rees-féle mátrixfélcsoport, 124

reflexív reláció, 26

reguláris elem, 78

reguláris félcsoport, 83

relációk kompozíciója, 24

szabad félcsoport, 43

szeparatív félcsoport, 198

szimmetrikus inverz félcsoport, 90

szimmetrikus reláció, 26

szubdirekt irreducibilis félcsoport, 167

teljes bal transzformációfélcsoport, 68

teljes jobb transzformációfélcsoport, 68

teljesen 0-egyszerű félcsoport, 114

teljesen egyszerű félcsoport, 114

teljesen reguláris elem, 85

teljesen reguláris félcsoport, 85

természetes homomorfizmus, 39

transzformáció, 68

transzlációs burok, 71

tranzitív reláció, 26

valódi ideálok, 92

valódi nilpotens elem, 205

zéró félcsoport, 14

Irodalomjegyzék

- [1] Almeida, J., S. Margolis, B. Steinberg, M. Volkov, *Representation Theory of Finite Semigroups*, Transaction of The American Mathematical Society, Vol. 361, No. 3, 2009, 1429 - 1461
- [2] Auinger, K. and Szendrei, M.B., *Reesmatrix semigroups and the regular semidirect product*. J. Aust. Math. Soc. 79(2005), no. 1, 39–60.
- [3] Babcsányi, I., *Automaták, Nyelvek, Kódok*, BME, Matematika Intézet, Algebra Tanszék, 2007, elektronikus jegyzet, www.math.bme.hu/babcs/
- [4] Babcsányi, I., *Algebrai Automataelmélet*, BME, TTK, Matematika Intézet, 2011, elektronikus jegyzet, <http://tankonyvtar.ttk.bme.hu/pdf/18.pdf> (ISBN: 978-963-279-461-7)
- [5] Clifford, A.H. & G.B. Preston, *The Algebraic Theory of Semigroups I.*, Amer. Math. Soc., Providence, R.I., 1961
- [6] Clifford, A.H. & G.B. Preston, *The Algebraic Theory of Semigroups II.*, Amer. Math. Soc., Providence, R.I., 1967
- [7] Clifford, A.H. and M. Petrich, *Some classes of completely regular semigroups*, J. Algebra, 46(1977), 462-480
- [8] Fuchs, L., *Algebra*, Nemzeti Tankönyvkiadó, Budapest, 1997
- [9] Gécseg, F. & I. Peák, *Algebraic Theory of Automata*, Akadémiai Kiadó, Budapest, 1972
- [10] Hamilton, H., *Permutability of congruences on commutative semigroups*, Semigroup Forum, 10(1975), 55-66
- [11] Howie, J.M., *An Introduction to Semigroup Theory*, Academic Press, London/New York/San Francisco, 1976

- [12] Jürgensen, H., Miglioniri, F., Szép, J., *Semigroups*, Akadémiai Kiadó, Budapest, 1991
- [13] Kurosh, A.G., *Csoportelmélet*, Akadémiai Kiadó, Budapest, 1952
- [14] Lajos, S., *Generalized ideals in semigroups*, Acta Sci. Math. (Szeged), 22(1961), 217-222
- [15] Ljapin, E. S., *Semigroups*, American Mathematical Society Providence, Rhode Island, 1963
- [16] Marcus, A., *Retract extensions of completely simple semigroups by nil semigroups*, Mathematica, Tom. 34(57), No. 1, 1992, 37-41
- [17] Márki, L., *On locally regular Rees matrix semigroups*, Acta Sci. Math. (Szeged) 37 (1975), 95–102.
- [18] Megyesi, L., Pollák Gy., *Über die Struktur der Hauptidealhalbgruppen. I.* Acta Sci. Math. (Szeged) 29(1968) 261–270
- [19] Nagy, A., *The least separative congruence on a weakly commutative semigroup*, Czech. Math. J., 32(1982), 630-632
- [20] Nagy, A., *Special Classes of Semigroups*, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht/Boston/London, 2001
- [21] Nagy, A., *On faithful representations of finite semigroups S of degree $|S|$ over the fields*, International Journal of Algebra, Vol. 7, 2013, no. 3, 115 - 129
- [22] Okniński, J., *Semigroup Algebras*, Monographs and Textbooks in Pure and Applied Mathematics, 138, Marcel Dekker, Inc., New York, 1991.
- [23] Peirce, B., *Linear Associative Algebra*, American Journal of Mathematics, Vol. 4. No. 1(1881), 97-229
- [24] Petrich, M., *Introductions to semigroups*, Merrill Books, Columbus, Ohio, (1973)
- [25] Petrich, M., *Lectures in Semigroups*, Akademie-Verlag-Berlin, 1977
- [26] Petrich, M., *Inverse semigroups*, John Wiley and Sons, 1984
- [27] Pollák, Gy., *Construction of bisimple inverse semigroups from right cancellative semigroups*, Math. Sem. Notes Kobe Univ. 7(1979), no. 2, 421–426.
- [28] Pondělíček, B., *On weakly commutative semigroups*, Czech. Math. J., 25(1975), 20-23

- [29] Putcha, M. S., *Semilattice decomposition of semigroups*, Semigroup Forum, 6(1973), 12-34
- [30] Rédei, L., *The theory of finitely generated commutative semigroups*, Akadémiai Kiadó, Budapest, 1956
- [31] Rees, D., *On semigroups*, Proc. Cambridge Phil. Soc., 36(1940), 387-400
- [32] Restivo, A & C. Reutenauer, *On the Burnside problem for semigroups*, J. Algebra, 89(1984), 102-104
- [33] Rowen, L.H., *Polynomial Identities in Ring Theory*, Academic Press, New York; London, 1980
- [34] Schein, B.M., *Homomorphism and subdirect decompositions of semigroups*, Pacific Journal of Mathematics, 17(1966), 529-547
- [35] Schein, B. M., *Commutative semigroups where congruences form a chain*, Semigroup Forum, 17(1969), 523-527
- [36] Steinfeld, O., *On a generalization of completely 0-simple semigroups*, Acta Sci. Math. (Szeged) 28(1967) 135–145
- [37] Szendrei, M.B., *On an extension of semigroups*. Acta Sci. Math. (Szeged) 39(1977), no. 3-4, 367–389.
- [38] Szász, F.A., *Radicals of Rings*, Akadémiai Kiadó, Budapest, 1981
- [39] Szász, G., *Eine Charakteristik der primidealhalbgruppen*, Publicationes Mathematicae, Tom. 17. Fasc. 1-4(1970), 9-213
- [40] Tamura T., *Commutative semigroups whose lattice of congruences is a chain*, Bull. Soc. Math. France, 97(1969), 369-380
- [41] Tamura T., *Note on the greatest semilattice decomposition of semigroups*, Semigroup Forum, 4(1972), 255 - 261