Geometria és modellek (hiperbolikus geometria modellezésnek eszközei)

Győrfi, Zoltán

2014

Tartalom

Geometria és modellek (hiperbolikus geometria modellezésnek eszközei)

Tartalom

[Relativitáselmélet]

1 Szemléletes hiperbolikus geometria I.

Szemléletes hiperbolikus geometria I.

"[...] a jól nevelt emberek általában derék emberekké lesznek; nem szabad a nevelést lekicsinyíteni, mert az az első feltétele, hogy a derék emberek legszebb tulajdonságai kialakuljanak."

Platón, Törvények, 644 a-b

A mai előadás témái

- Kit mi hozott ide?
- Ki látott már modellt?
- Mi a szemlélet?
- Mi a geometria?

- A geometria, mint fizika. (Minden ellenkező híresztelés ellenére a geometria a legősibb mesterség.)
- A geometria, mint matematika
- A geometria, mint filozófia (Geometria filozófusoknak)
- Az előadássorozat vázlata
- A "mi fizikánk" bemutatása

Kit mi hozott ide?

?

Ki látott már modellt?

- A hiperbolikus geometria modelljeit?
- Az euklideszi geometria modelljeit?
- Mi a modell?
    - A modell, mint szemlélet
    - A modell, mint görbe tükör
    - A modell, mint látvány
    - A modell, mint számolási segítség
    - A modell, mint az ismeretlen (eleddig szemléletlen) bemutatása egy ismertnek vélt szemlélet görbe tükrében

Mi a szemlélet?

- A szemlélet hasznáról
- A szemlélet káráról.
- Szemlélet és modellek.
- "szemléltetés"

Mi a geometria?

- A történelmi geometriák.
    - Euklideszi
    - Hiperbolikus
    - Elliptikus geometria
- A geometria.
- A merev testek elmozgatása.
    - Az abszolút geometria
    - A párhuzamosság problémája
- A geometria, mint fizika
    - Merev testek mozgatása
    - A párhuzamosság problémája
- A történelmi geometriák modern felfogása
    - Transzformációk.
    - Az egybevágósági tarnszformációk.
    - Affin transzformációk (ez már a modernebb felfogás része)
- Riemenn geometria (idáig nem [sem] jutunk el)

A geometria, mint fizika.

- A legősibb mesterség
    - As the crow flies (légvonalban, a síkon, a gömbön, a hiperbolikus síkon, stb.)
    - Amerre a kutyák mennek...
    - "Föl-földobott kő" El-eldobott kő
- A körző és a vonalzó fizikája

A geometria, mint matematika

- A geometria (matematikai) objektumai
- A megfelelő fizikai objektumok
- Pl. egyenes, mi is az egyenes?
- A történelmi kérdés értelmetlensége
- Poincaré rossz felfogása (rossz hasonlata)

A geometria, mint filozófia

- A filozófusok réges régen nem tanulnak matematikát
- A fogalmak tana
- A fogalmak üressége
- Az analitikus állítás
- A szintetikus állítás
- A geometria axiómái

Az előadássorozat vázlata

- Egy fizika bemutatása (We are, we are the Flatlanders.)
- Egyenesek, ködobások, szerkesztő eszközök
- Egy dinamikus geometria szoftver bemutatása.
- Geometriánk, mint abszolút geometria (abszolút tételek)
- Az egybevágósági axiómarendszerek összehasonlítása
- Geomteriánk, mint nem-euklideszi geometria (nem-euklideszi tételek))
- A "steril affin geometria" felfedezése a hiperbolikus síkon
- Hogyan lesz az affin geometriából euklideszi geometria?
- Az euklideszi geometria modellje a hiperbolikus síkon.
- A hiperbolikus geometria vizsgálata az euklideszi geometria ismeretében
    - Az abszolút szinusztétel
    - A hiperbolikus kör kör kerülete
    - A párhuzamossági szög
- A hiperbolikus sík görbülete, a görbület fizikai tartalma
- A hiperbolikus geometria modelljei a hiperbolikus geometrián belül
    - Hjelmslev modell
    - Klein modell
    - Poincaré modell

A mi fizikánk bemutatása

- Fizikai szerkesztő eszközök
- Itt ez van...
- Később meglátjuk, hogy miből lesz a cserebogár (pl. kör)
- ...?

A mi fizikánk: Itt így repül a holló...

2 Szemléletes hiperbolikus geometria II.

Szemléletes hiperbolikus geometria II.

"Ej Szolón, Szolón, ti görögök, mindig gyermekek vagytok, öreg görög pedig nincs is. [...] Mindnyájan ifjak vagytok lelkileg: mert nincs lelketekben ősi hagyományon alapuló régi meggyőződés, sem időtől szürke ismeret."

Platón, Timaiosz 22b.

A hangulatlámpa világa

Az óra vázlata

- A fizikai eszköz bemutatása. A lámpa világa.
- Próbáljuk beleélni magunkat egy másik világba! (a lámpavilág: síkvilág)
- Itt a holló másképp száll: "vonal" mentén a lámpa világában.
- Pontok és vonalak (egyenesek) a lámpa világában
- Alapszerkesztések
- Papposz tétele
- Az abszolút geometria kérdése. (Mi a geometria?)
- Pascal "kozmikus" tétele a lámpa világában
- A párhuzamosságról általában
- Szakaszmásolás
- Nevezhetjük-e vonalainkat egyeneneseknek?
- Mitől geometria a geometria? (Geometria-e a lámpa világa?)

Egy másik (sík-)világ, a lámpa világa (A fizikai eszköz bemutatása)

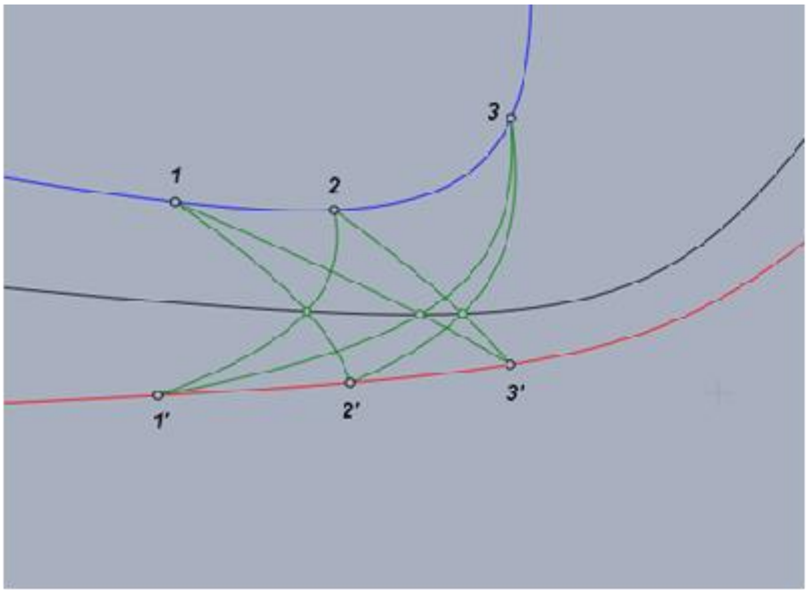
Pontok és vonalak - - Alapszerkesztések - -

- Pontok

- Vonalak
- Metsző vonalak
- Nem metsző vonalak
- Pont illeszkedése vonalra
- Vonal illeszkedése pontokra
- Két pont meghatároz egy vonalat
- Vonal aszimptotikus vonalai egy pontonból (párhuzamosok)
- Ultrapárhuzamosok
- Két vonal közös aszimptotikus vonalai (közös párhuzamosok)
- Szakaszmásolás

Nevezhetjük-e vonalainkat egyeneseknek?

Papposz tétele (290 – 350)

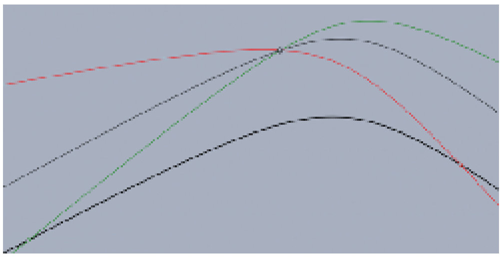


Papposz tétele itt leegyszerűsített formában szerepel: $1, 2, 3; 1', 2', 3'$.

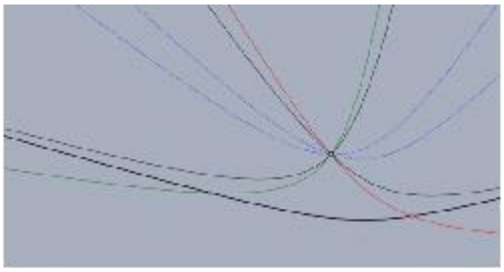
A párhuzamosságról általában

- A nem metsző- és az ekvidisztáns- helyzet összemosódása az euklideszi geometriában (Euklidész)
- Bolyai (1802-1860), Lobacsevszkíj (1792-1856) és Gauss (1777-1855) szétválasztották ezeket a vonatkozásokat
- Legyen adott egy síkban egy egyenes és egy rá nem illeszkedő pont. A ponton keresztül kétféle egyenes húzható: olyan, amely metszi az előbbi egyenest és olyan, amelyik nem. Ha a pontban forgatjuk az egyenest, akaz egyszer csak „granyícsnaja” / „elpattanó” helyzetbe kerül…

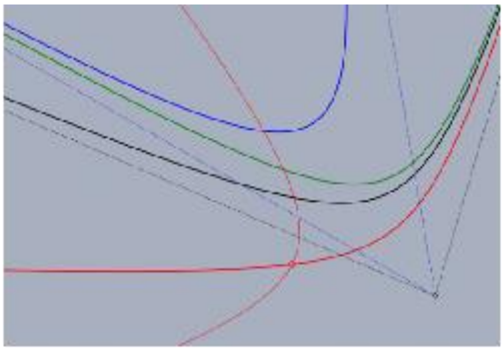
Az euklideszi párhuzamosság



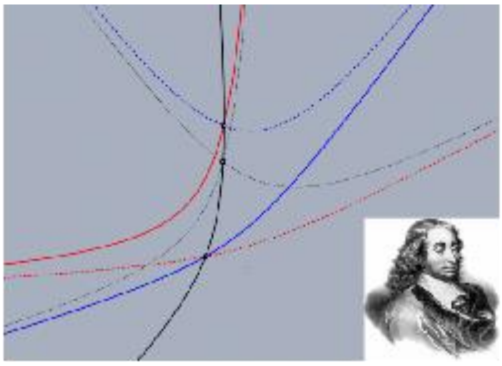
A hiperbolikus párhuzamosság



A "mi" párhuzamosságunk hiperbolikus jellegű



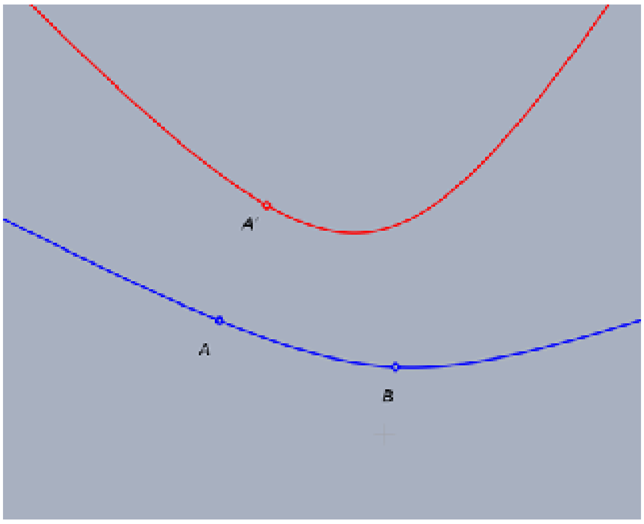
Miféle igazság ez? Pascal (1623 – 1662) kozmikus tétele



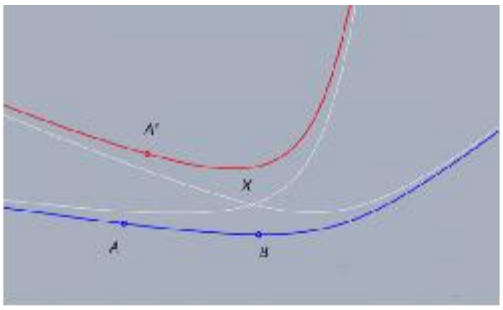
Az abszolút geometria kérdése

- Mitől geometria a geometria?
- Az egybevágóság fogalma
- Mereve testek mozgatása
- Hogyan modellezzük ezt?
- A szakaszmásolás kérdése.
- Elég-e, ha szakaszokat tudunk másolni?
- Az egybevágósági axiómák...

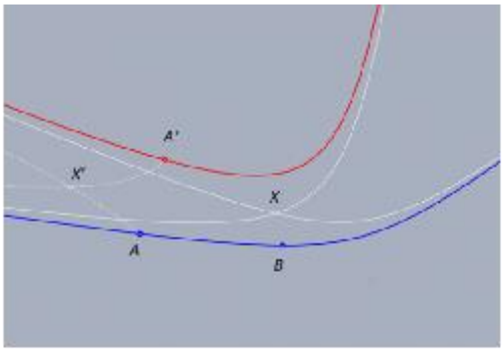
A szakaszmásolási "feladat" kitűzése



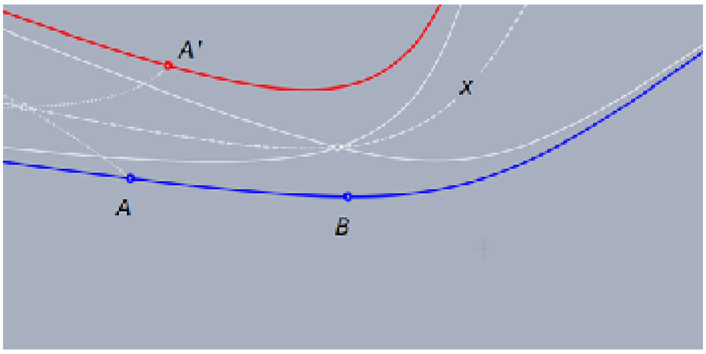
Szakaszmásolási feladat megoldása 1. lépés(ellenoldali közös párhuzamosok metszéspontja)



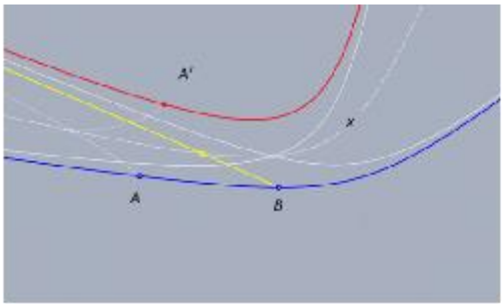
Szakaszmásolási feladat megoldása 2. lépés(párhuzamos az ellenegyenshez a szakaszkezdőpontokból)



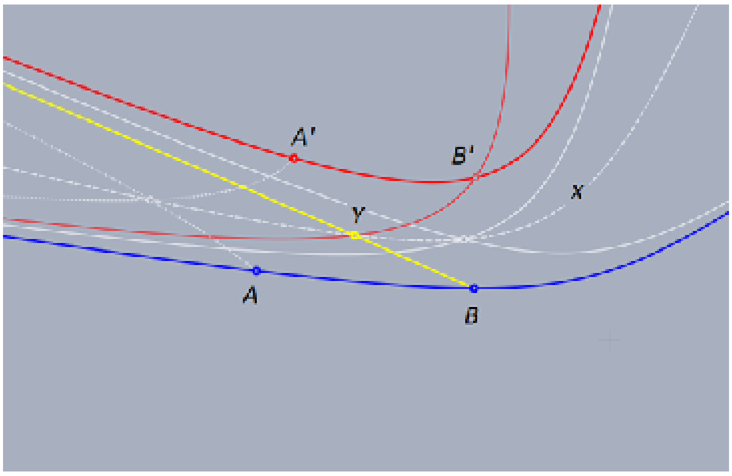
A metszéspontok összekötése egyenessel (3. lépés)



Párhuzamos húzása a meglevő szakaszvégponthoz(4. lépés)



Újabb párhuzamos és a végeredmény (5. lépés)



Az abszolút geometria kérdése(mégegyszer)

- Mitől geometria a geometria?
- Az egybevágóság fogalma
- Mereve testek mozgatása
- Hogyan modellezzük ezt?
- A szakaszmásolás kérdése.
- Elég-e, ha szakaszokat tudunk másolni?
- Az egybevágósági axiómák...
- Milyen axiómák vannak még?

3 Szemléletes hiperbolikus geometria III.

Szemléletes hiperbolikus geometria III.

A mai első Platón idézet

"Ha tehát a világ testének síknak kellet volna lennie, minden mélység nélkül [...]."
Timaiosz, 32a-b.

Ismétlés

- A lámpa világa
- Éljük bele magunkat!
- Mit fedezhetnek fel világuk természetéről a hiperbólkus síkvilág lakói?
- A párhuzamosság kérdése.
- Alapszerkesztések
- Szakaszmásolás

Az abszolút geometriáról(Első nyomok Eukleidésznél ,Bolyai tudatosította.)

- Félreértés ne essék, nincs is olyan, hogy abszolút geometria!
- A ketegoricitás (?) kérdése.
- Vagy hiperbolikus, vagy euklideszi lesz a geometria, ha modellezzük fizikailag vagy egy másik matematikai részterület gyomrában.
- Mi egy hiperbolikus sík-világban játszunk abszolút geometriát.
- Mi is az abszolút geometria?
- Nem feledjük: egybevágóság van, de a párhuzamosságról még nem beszélünk.

- Mondhatjuk-e, hogy a lámpavilág vonalai egyenesek?
- Akkor igen, ha jól működő egybevágósági masinériát tudunk felépíteni -
- vagyis, ha kipréselünk ebből a világból egy abszolút geometriát, ami szükségképpen hiperbolikus lesz, mert a "helybéli" párhuzamossági axióma hiperbolikus.

Miért a hiperbolikus síkon mutatjuk be az abszolút geometriát?

"Módszerünk előnye, hogy amikor az egyiket már szerepeltetjük, nem kell tettetnünk, hogy a másikat még nem ismerjük." Hajós György (1912-1972) Bevezetés a geometriába, 11. l., Tankönykiadó, 1964. (Hajós egészen másról "szól", amikor a fenti mondatot leírja.)

Most lenne száz éves!

Ismétlés(Vissza az előző óra diáihoz!)

Az abszolút geometria logikai felépítése

(A Pasch-Veblen féle axiómarendszer Nehogy valaki megijedjen! Ez csak ízelítő az axiomatikus tárgyalásból.)

Definiálatlan alapfogalmak:

- Pont (a kiterjedés nélküli izé…)
- Közrefogás (a "közötte van" definiálatlan fogalma)(Ha csak a pont és a közrefogás axiómáit adjuk meg, akkor rendezett geometriáról beszélünk.)
- Egybevágóság (A mozgás, a merev test megjelenítése a geometriában definiálatlan fogalomként)(Rendezett geometria $+$ Egybevágóság $=$ Abszolút geometria, ami azonban vagy hiperbolikus vagy eukleidészi. Tertium non datur!)

A rendezett geometria első 4 axiómája és a szakasz definíciója

R1 Legalább két pont létezik.

R2 Ha A és B két különböző pont, akkor van legalább egy olyan C pont, amelyre $[ACB]$ áll. "C A és B között van." "C elválasztja A -t és B -t."

R3 Ha $[ABC]$ áll, akkor $A \neq C$.

R4 Ha $[ABC]$, akkor $[CBA]$, de nem igaz $[BCA]$.

Tétel. Ha $[ABC]$, akkor nem igaz $[CAB]$.

Tétel. Ha $[ABC]$, akkor $A \neq B \neq C$.

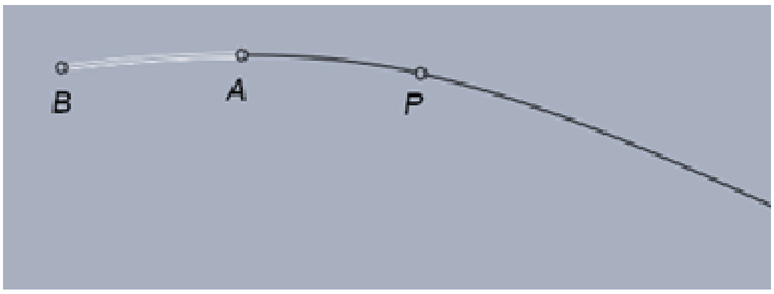
Definíció (szakasz) $A \neq B$; az AB szakasz azon P pontok összessége, melyekre $[APB]$ áll.

Tétel. Sem A , sem B nem tartozik az AB szakaszhoz.

Az intervallum, a félegyenes és az egyenes

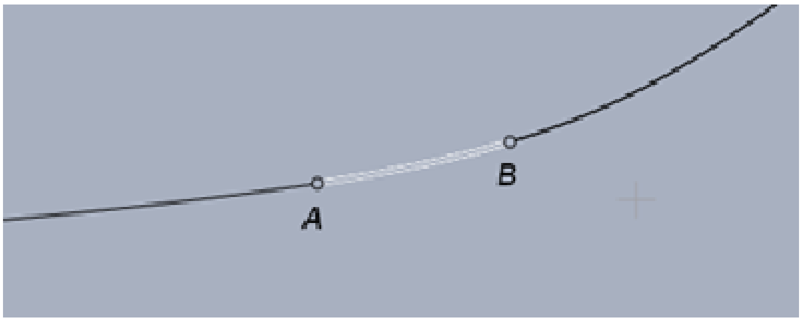
Definíció. Az AB intervallum az AB szakasz A -val és B -vel együtt.

Definíció. A B/A félegyenes azon P pontokból áll, melyekre $[BAP]$. A a B/A félegyenes kezdőpontja. Írhatjuk: AP félegyenes.



Tétel. Az A kezdőpont nem tartozik a B/A félegyeneshez.

Definíció. Az AB egyenes az A/B félegyenes, a B/A félegyenes és az AB intervallum egyesítése.



A rendezett geometria további axiómái

R5 Ha $C \neq D$ az AB egyenes pontjai, akkor A vagy B rajta van az CD egyenesen.

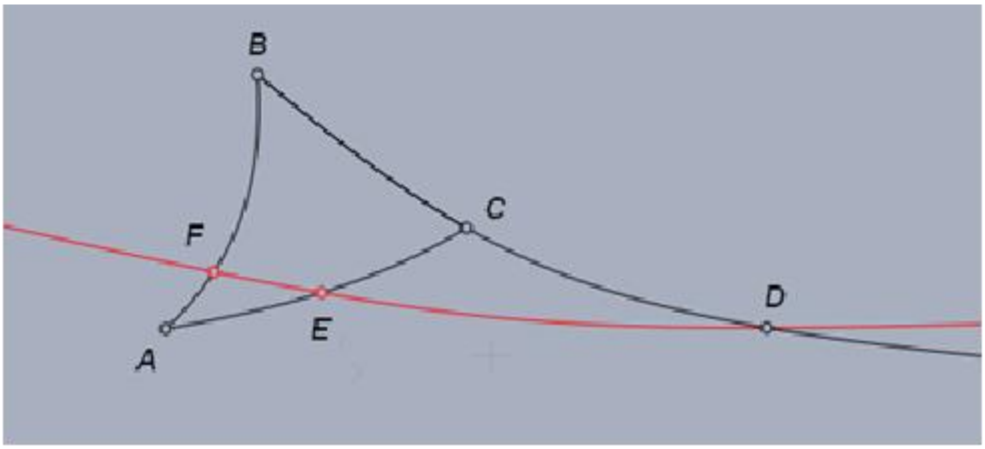
Tétel. Ha $C \neq D$ az AB egyenes pontjai, akkor az AB egyenes azonos a CD egyenessel.

A "nem csak egyenesen vagyunk" axióma:

R6 Van legalább egy C pont, ami nincs rajta az AB egyenesen.

Definíció. Az ABC háromszög a három (A, B, C) nem egy egyenesen levő (nem kollineáris) pont által meghatározott 3 intervallum egyesítése. A megfelelő szakaszok a háromszög oldalai.

R7 Ha ABC egy háromszög és $[BCD]$ és $[CEA]$ igaz, akkor a DE egyenesen van olyan$F$ pont hogy $[AFB]$.



A sík definíciója és a síkaxióma

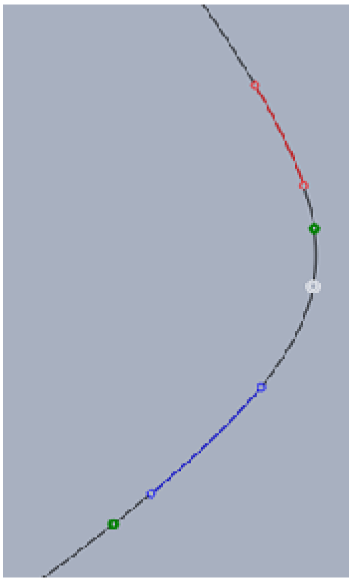
Definíció. Ha ABC egy háromszög, akkor az ABC sík azon pontok összessége, amelyek kollineáriasak a háromszög egy vagy két oldalának valamely pontpárjával.

R8. Nincs több pont csak a síkban levők.

A mai második Platón idézet

"Amin eddig áthaladtunk előadásunkban, abban [...] az Ész formáló munkássága tárult fel; de ehhez hozzá kell még fűznünk azt is, ami a Szükségszerűség folytán keletkezett. Ugyanis e rendezett világ születése vegyületként: a Szükségszerűség és az Ész egyesüléséből jött létre [...]" Timaiosz, 47e-48a.

F. A folytonossági axióma



Az abszolút geometria

A rendezett geometria a Folytonossági axiómával és az egybevágósági axiómákkal kiegészítve

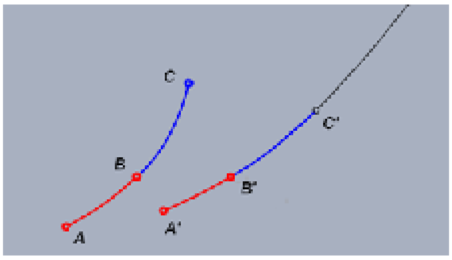
Jelölés: $AB = CD$, "AB egybevágó CD -vel" Mi is a szakaszmásolás? Az egybevágósági axiómák:

E1. $A \neq B$, akkor bármely E/C félegyenesen egy és csak egy D pont van, hogy $AB = CD$.

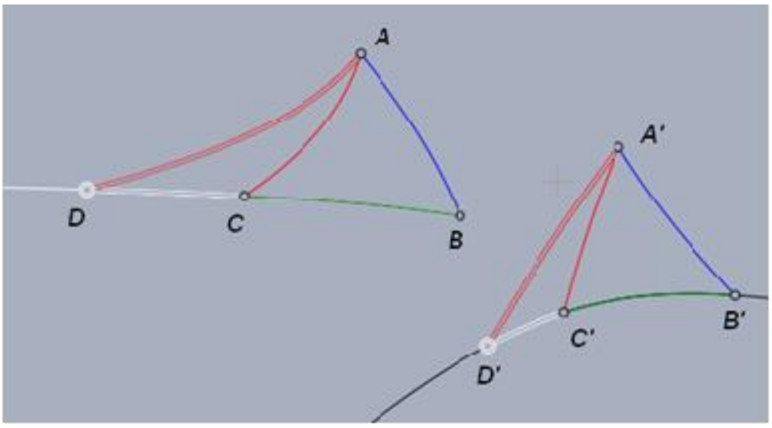
E2. Ha $AB = CD$, $CD = EF$, akkor $AB = EF$.

E3. $AB = BA$

E4. Ha $[ABC]$ és $[A'B'C']$ és $AB = A'B'$ és $BC = B'C'$, akkor $AC = A'C'$.



E5 Ha ABC és $A'B'C'$ két olyan háromszög, hogy $AB = A'B'$, $BC = B'C'$, $AC = A'C'$, és $[BCD]$, $[B'C'D']$ és $BD \neq B'D'$, akkor $AD = A'D'$.



4 Szemléletes hiperbolikus geometria IV.

Szemléletes hiperbolikus geometria IV.

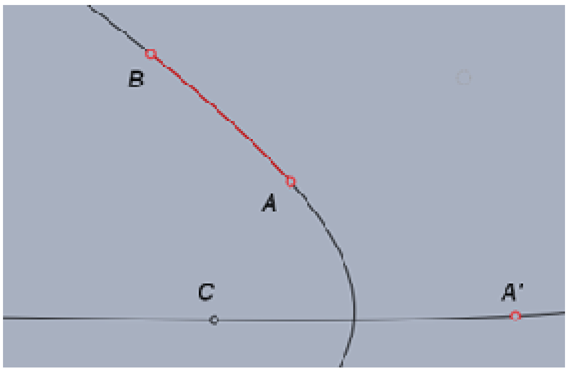
Ismétlés

- Mit fedezhetnek fel világuk természetéről a hiperbolikus síkvilág lakói?
- Szakaszmásolás
- Dedekind féle folytonossági axióma.
- (Archimédesz hihetetlen zsenialitása.)

Szakaszmásolás metsző egyenesek között(ismétlés és kiegészítés)

A feladat az AB szakasz lemásolása C/A’ félegyenesre A’-ből.

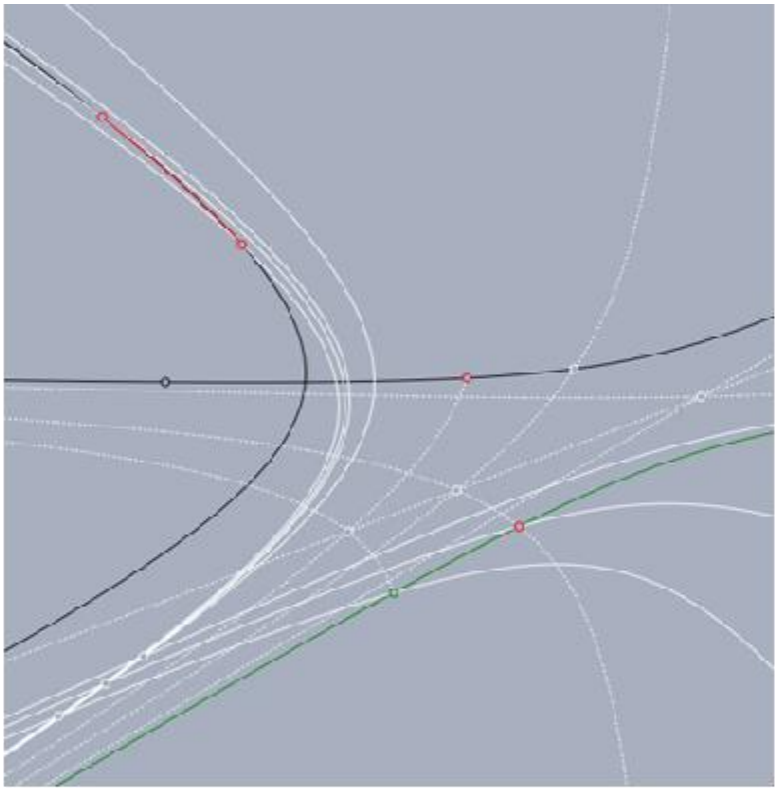
A megoldás: Felveszek egy olyan egyenest, amelyik egyik egyenesemet sem metszi és arra lemásolom a szakaszt, majd onnan a "célegyenesre" másolok.



Mindezt meg sem lehet csinálni az Eukleidészi geometriában!

Akkor mitől abszolút geometria ez? A szakaszmásolási eljárást, mint

fekete dobozt kell felfogni! Azután pedig nem használjuk a jelen vonalrendszerünk párhuzamossági tulajdonságait.



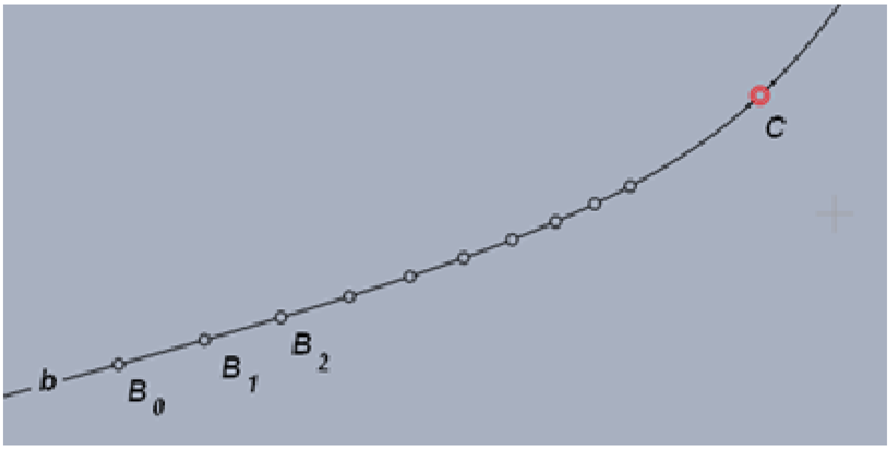
Miért a hiperbolikus síkon mutatjuk be az abszolút geometriát?

"Néha a szándékosan torz rajz jobban segíti az okoskodást."

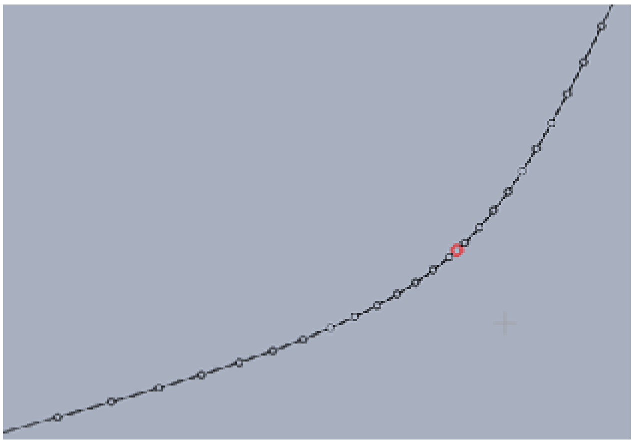
Hajós György, Bevezetés a geometriába, 22 B1 megjegyzés, Tankönykiadó, 1964.

Archimédész axiómája

Tétel. A $b = B_0C$ egyenesen legyen B_0B_1 egy szakasz úgy, hogy $[B_0B_1C]$. Legyenek továbbá $B_0B_1 = B_1B_2 = B_2B_3 = \cdots = B_{n-1}B_n$. Van olyan n, hogy már $[B_0CB_n]$.



Mégis igaznak látszik Archimédész axiómája:



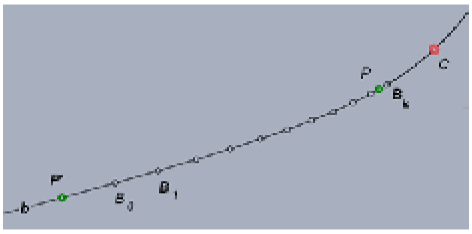
Most ez nálunk axióma vagy tétel?

Ezt most bizonyítottuk? Vagy be kell bizonyítanunk?

Az Archimédész tétel bizonyítása

Indirekt bizonyítás:

Tegyük fel, hogy bármely n -re $[B_0 B_n C]$. (A $B_n = C$ eset érdektelen, mert akkor $n+1$ játszhatná n szerepét.) Legyen A a b egyenes azon P pontjainak halmaza, amelyek vagy a $C/B0$ félegyeneshez tartoznak, vagy van olyan k, hogy $[B_0 P B_k]$ és B_0 is legyen A -ban. B pedig legyen a b többi pontja. Sem A, sem B nem üres: Minden B_i benne van A -ban és C benne van B -ben.)



Belátható,hogy A és B az F axiómának megfelelően osztja két részre a b egyenest;

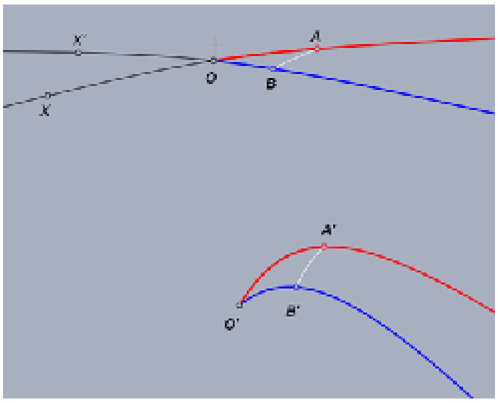
f -nek tehát van egy olyan E pontja, amelyik $[X'EX]$, ha X az A -ban X' pedig a B -ben van.

Melyikhez tartozik E ? Egyik B_k sem lehet E , és B_k között sem lehet E. , E tehát EB -beli.

Legyen E' olyan, hogy $[B_0 E' E]$ és $E'E = B_0 B_1$. Ilyen E' létezését az R_2 és az E_1 axiómák biztosítják, továbbá $E'A$ -beli. Ezért van olyan k , hogy $[B0E'Bk]$ ugyanakkor $E'E = B_k B_{k+1}$ és A definíciója szerint $B_{k+1} A$ -ban van pedig túl kell nyúljon E -n, mert az egybevágóság egyértelmű. Ezzel ellentmondásra jutottunk.

Szög

Két közös kezdőpontú X/O , X'/O félegyenes meghatároz egy szöget. A két félegyenes a szög szárai. A szög szárain levő A, B ponttal kifejezve: AOB egy szög. Ezzel a jelöléssel el lehet kerülni a körülményeskedést a félegyenesekkel. De, ha két egyenessel adom meg a szöget, akkor valahogy meg kell mondanom, hogy a négy lehetséges szög közül melyikről van szó. Ezen kívül az irányítás is lényeges lehet. $AOB = BOA$? Szögek egybevágósága

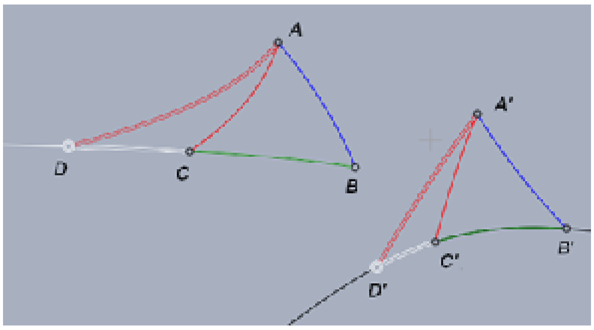


Az AOB szög egybevágó az $A'O'B'$ szöggel, ha A -t, B -t, A' -t és C' -t meg lehet úgy is adni, hogy $OA = O'A'$, $OB = O'B'$ és $BA = B'A'$.

Egyértelmű ez?

Igen (Emlékezzünk!):

E5 Ha ABC és $A'B'C'$ két olyan háromszög, hogy $AB = A'B'$, $BC = B'C'$, $AC = A'C'$, és $[BCD]$, $[B'C'D']$ és $BD = B'D'$, akkor $AD = A'D'$.

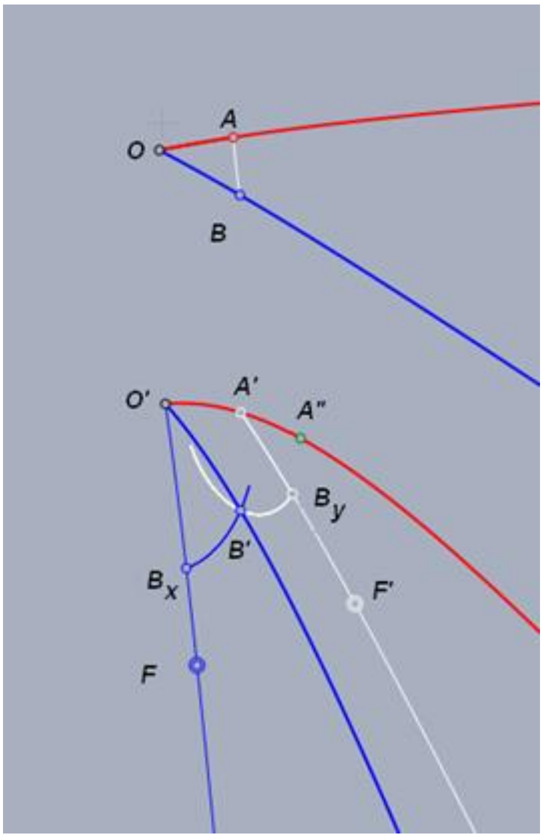


De hogyan kell szöget másolni, ha szakaszt már tudunk másolni?

A szög másolása.

Szakaszmásolással nem nagyon megy, de próbájuk meg! Adott AOB és $O'A''$. Meg kell szerkeszteni B' -t úgy, hogy AOB és $A'O'B'$ egybevágó legyen.

1. Felveszem az $O'A$" félegyenesen az A' pontot úgy, hogy $OA = O'A'$.
2. Felveszek egy O' -ből kiinduló és egy A' -ből kiinduló félegyenest. $(O'F, A'F')$
3. Felveszem az $OB = O'B_x$ és az $AB = A'B_y$ szakaszokat.
4. "Kitapogatom", hogy hol van B' .



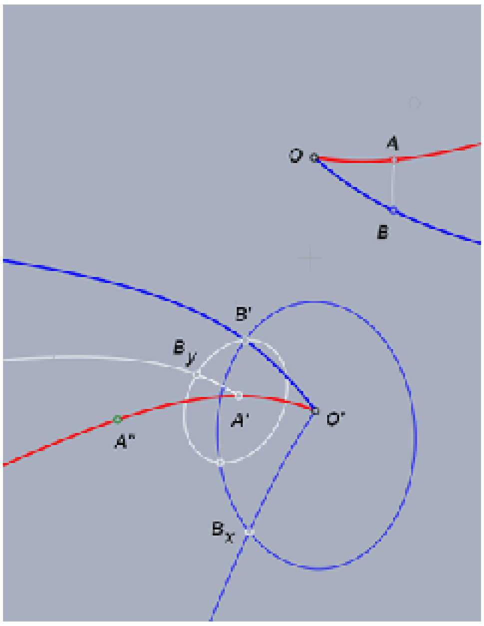
A kör felfedezése

Az iménti tapogatózásnál köríveket használtam.

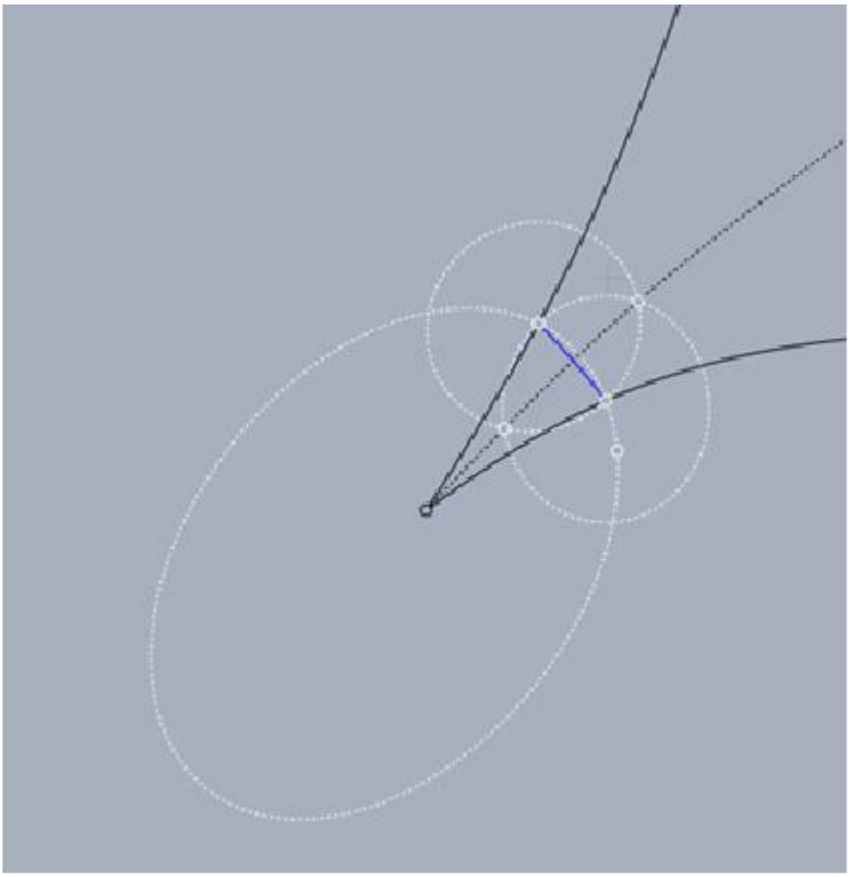
Definíció. Az O középpontú AB sugarú kör azoknak a P pontoknak a sereglete, amelyekre $OP = AB$. A szögmásolásnál köröket kell használni.

Ha van körzőnk…

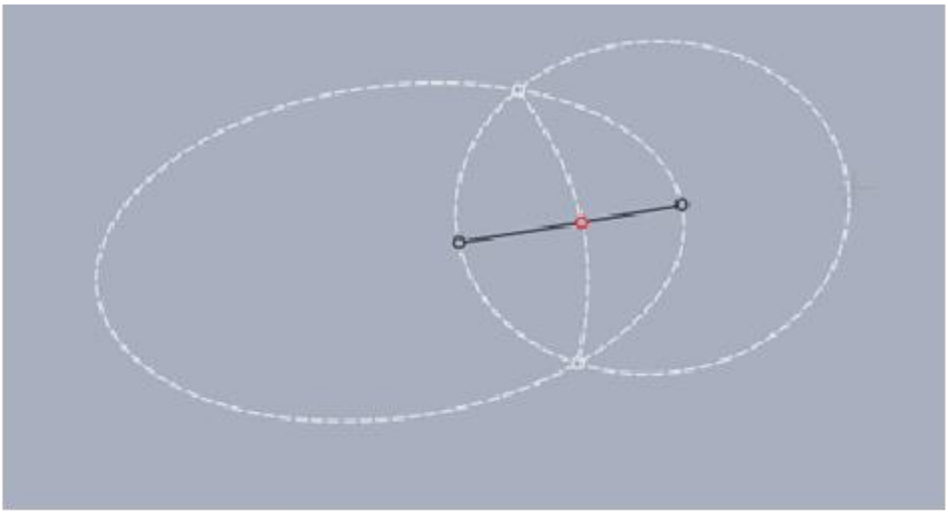
A jobb oldalon a "rendes" szerkesztés látható.



Szögfelezés



Szakaszfelezés

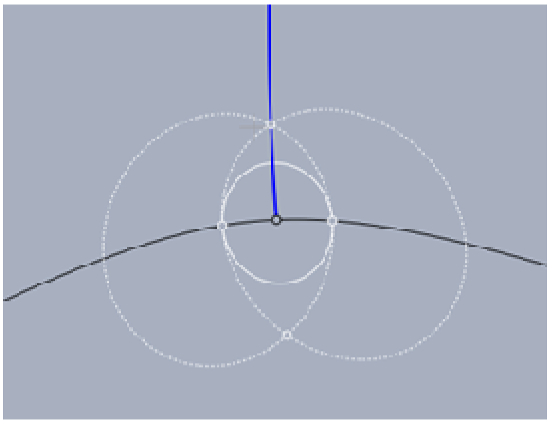


A merőlegesség

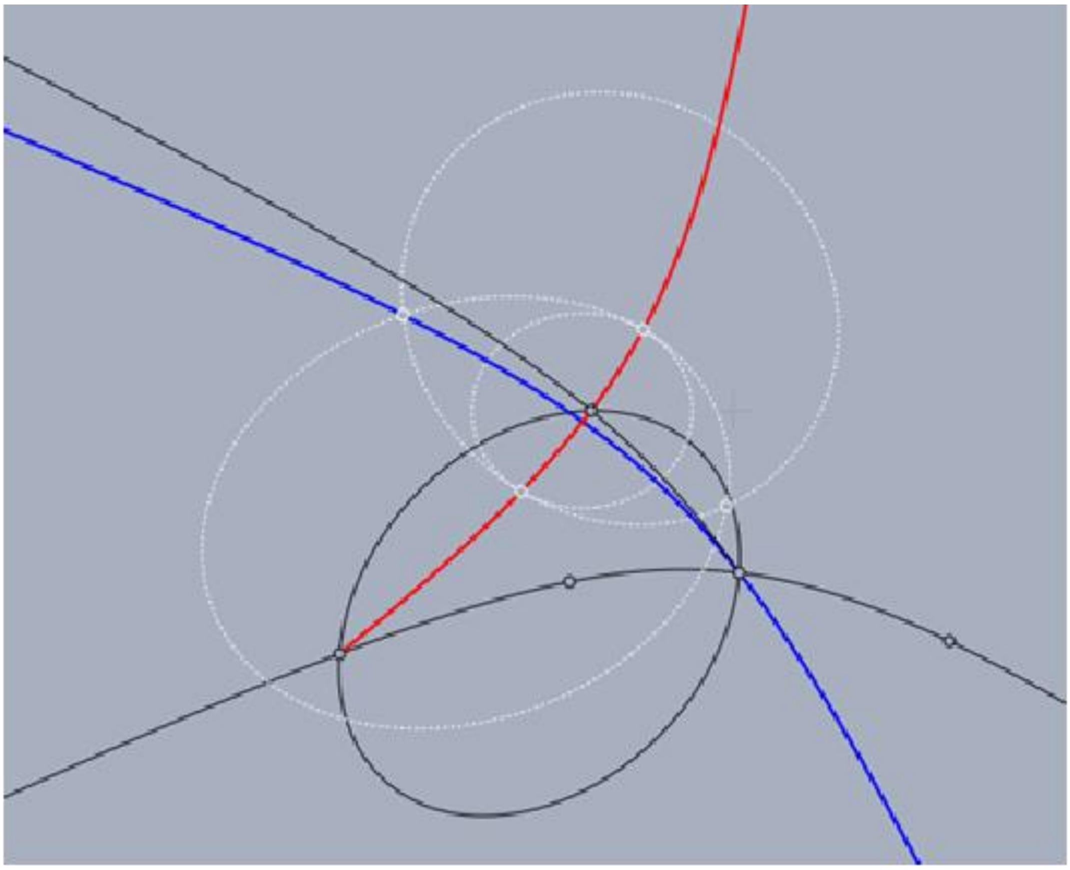
Definíció. A derékszög egybevágó a mellékszögével.

Definíció. Két egyenes merőleges egymásra, ha félegyeneseik derékszögeket határoznak meg.

Hogyan kell merőlegest szerkeszteni?



A Thálesz tétel (Na az nem igaz!)

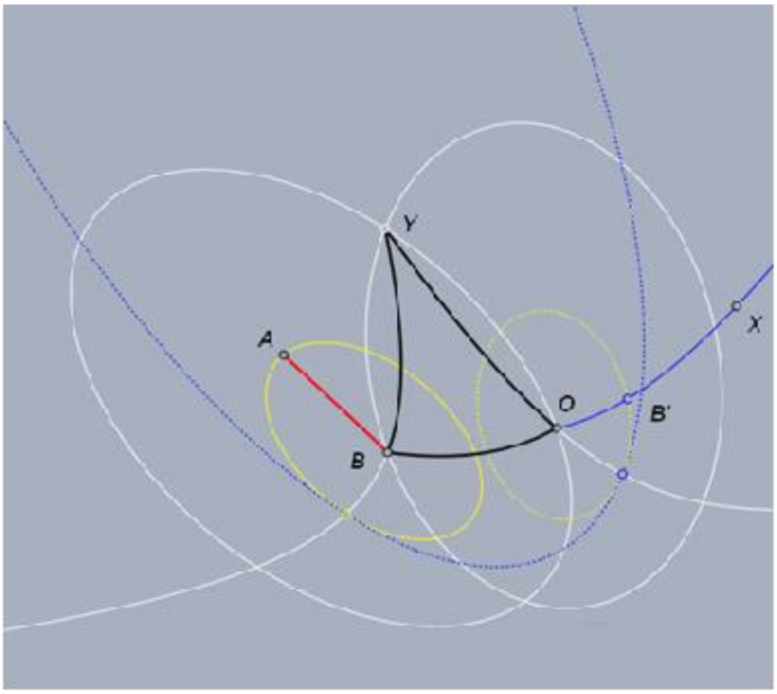


Az eukleidészi szakaszmásolás az új segédeszközzel

A feladat, az AB szakasszal egybevágó szakaszt kell szerkeszteni az OX félegyenesre az O pontból. EU I 1 Tétele.

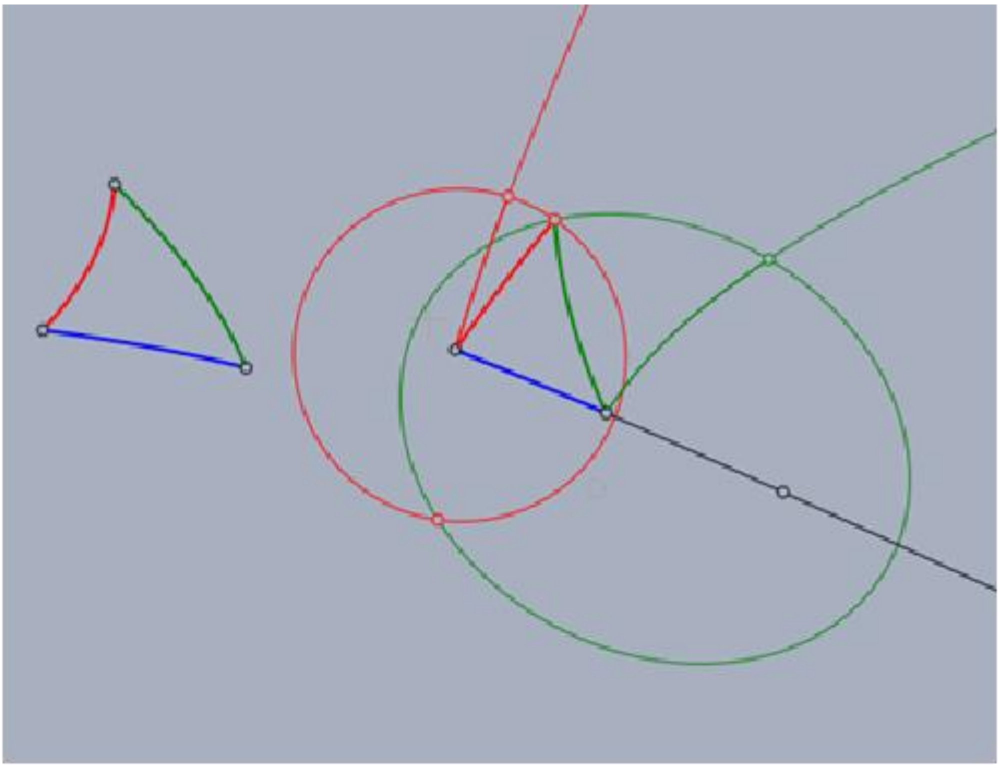
BO fölé lehet egyenlő oldalú háromszöget szerkeszteni. EU I 2 Tétele.

Lehet $OB' = AB$ szakaszt szerkeszteni az OX félegyenesre. A bizonyítások konstruktívak, a szerkesztéseket adja meg Eukleidész.



Háromszög másolása

Ugyanúgy kell csinálni, mint a szögmásolást, de most a pontok adottak.



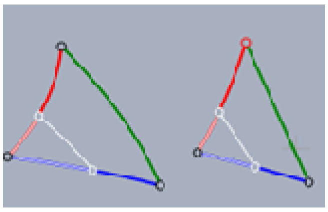
A háromszögekre vonatkozó egybevágósági tételekkel ezek után nem kell sokat szórakozni.

Az egybevágóság fogalma általánosabban

Egy alakzat (ponthalmaz) egybevágó egy másikkal, ha megfelelő pontpárjaikat összekötő szakaszok egybevágóak.

Mi az, hogy megfelelő?

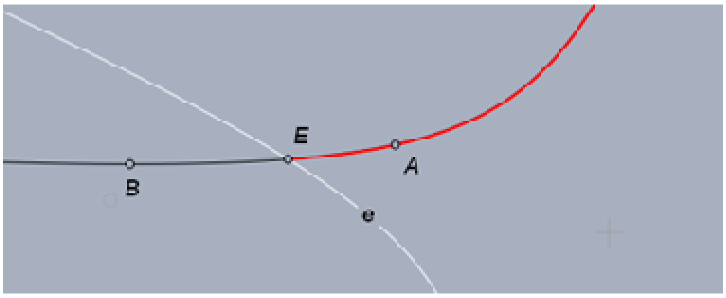
Háromszögek esetében ez nyilvánvaló (lehet).



De hogy van ez általában? Mi az, hogy mozgás?

A félsík

Definíció. Az e egyenes és egy hozzá nem tartozó B pont egy B/e egy félsíkot határoz meg: a B/e azon pontok összessége, amelyek rajta vannak valamilyen B/E félegyenesen, ahol E az e egyenes pontja.

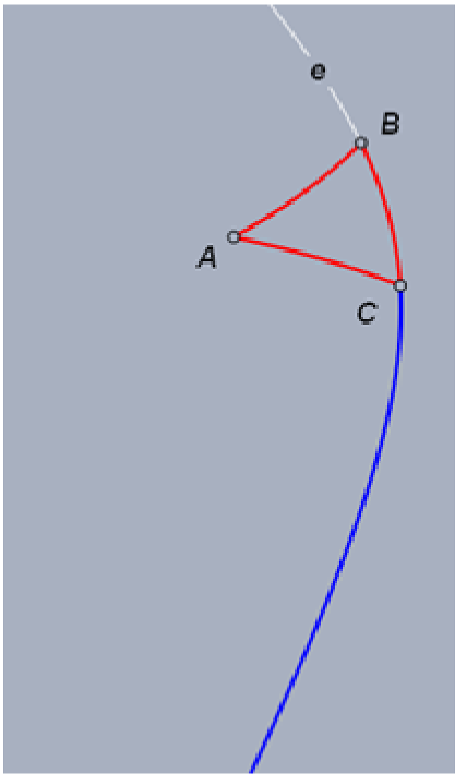


Miért rossz a következő definíció?

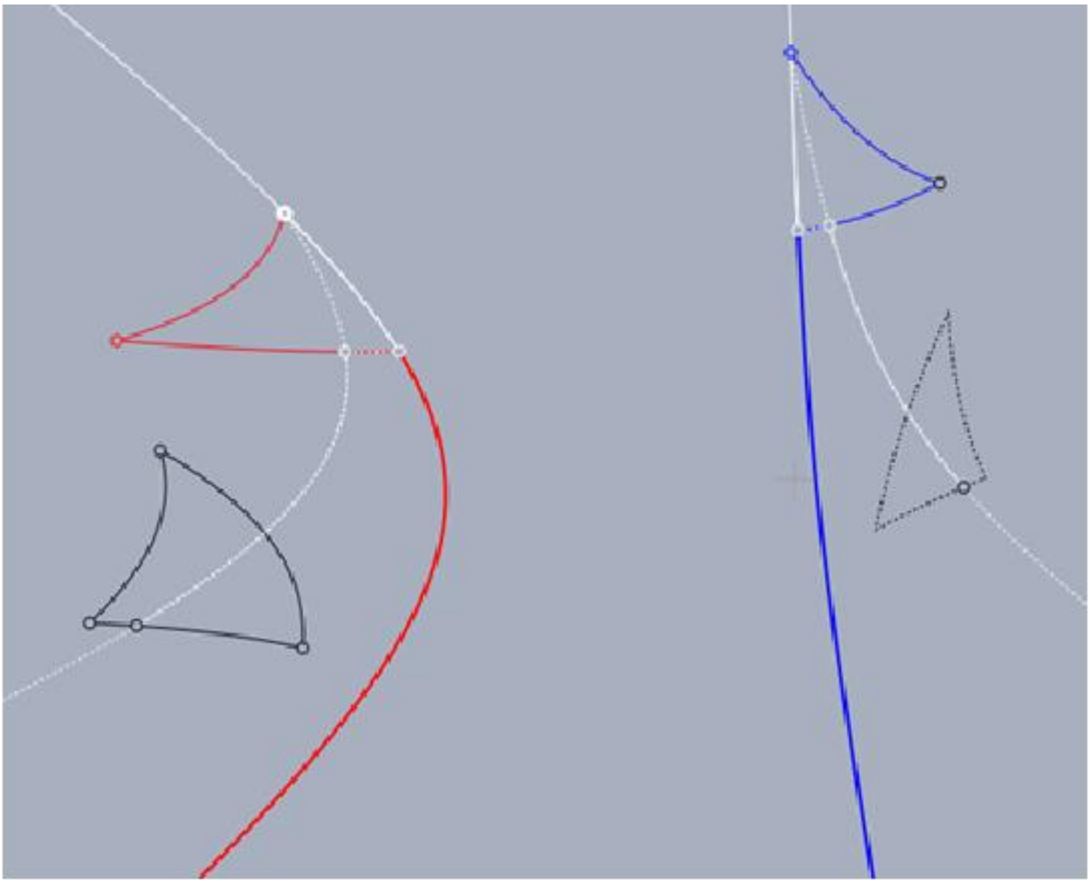
Az e egyenes és egy nem hozzá tartozó A pont egy eA félsíkot határoz meg: (i) A hozzá tartozik. (ii) Minden D pont hozzátartozik, amelyekre vagy $[EAD]$ vagy $[EDA]$ teljesül. Abszolút rossz ? Hogy lehet egy definíció rossz?

A zászló (Bot és vászon)

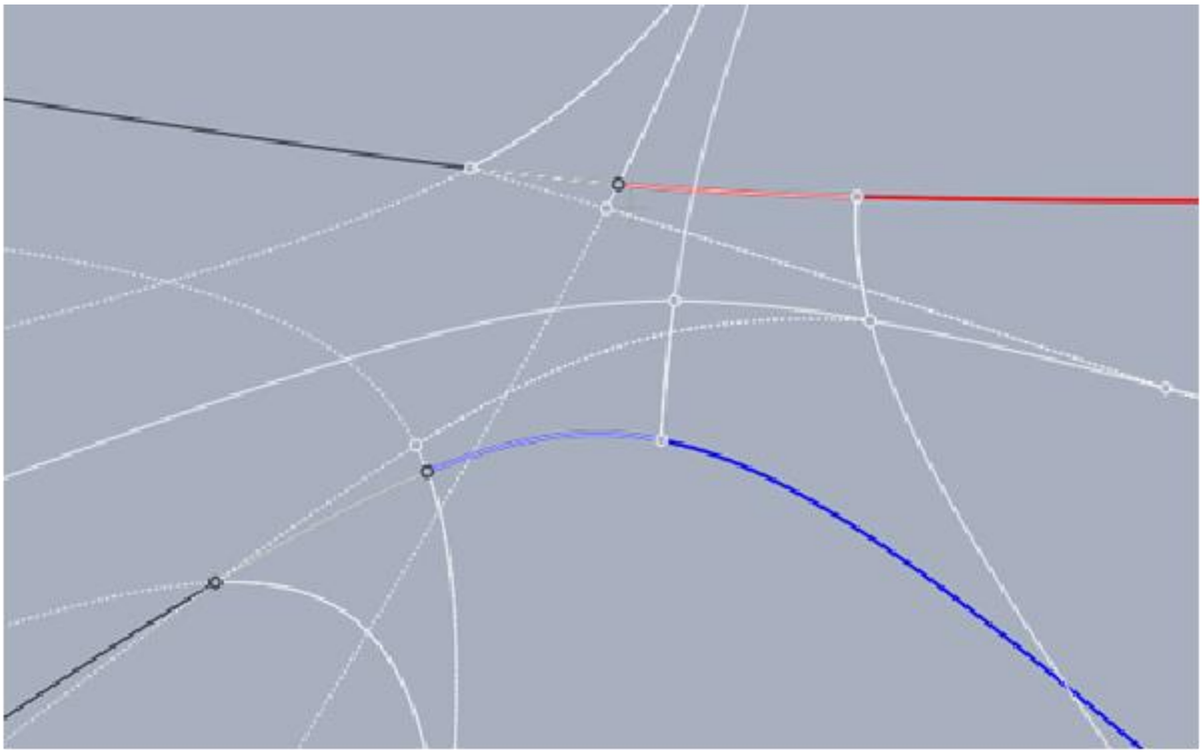
Definíció: Egy eA félsík és az e egyenes egy B/C félegyenese egy zászlót határoz meg, amely az eA félsíkból és a B/C félegyenesből áll.



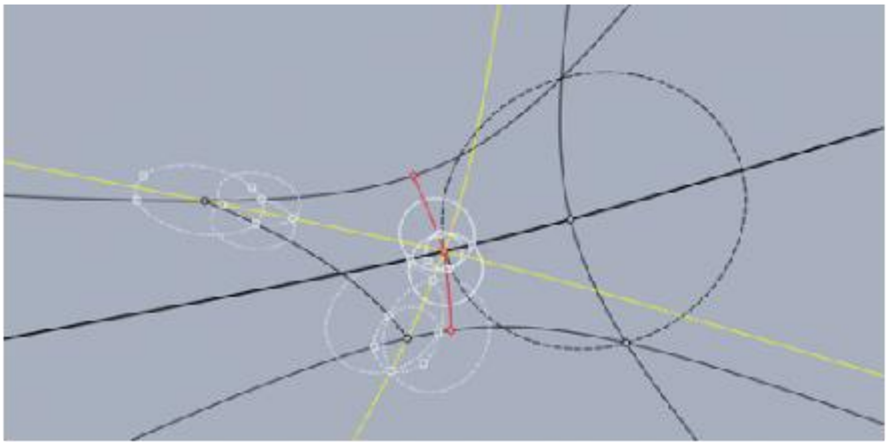
Az egybevágósági transzformáció definícója zászlókkal



A Hjelmslev féle középvonal, mint az egybevágósági transzformáció fixegyenese



A szimmetriavonal megszerkesztése



5 Szemléletes hiperbolikus geometria V/1.

Szemléletes hiperbolikus geometria V/1.

Egy már említett Platón idézet és két "modern" gondolat

"Amin eddig áthaladtunk előadásunkban, abban [...] az Ész formáló munkássága tárult fel; de ehhez hozzá kell még fűznünk azt is, ami a Szükségszerűség folytán keletkezett. Ugyanis e rendezett világ születése vegyületként: a Szükségszerűség és az Ész egyesüléséből jött létre [...]" Platón, Timaiosz, 47e-48a.

"Tudatunkban fogalmat alkothatunk az otthonunkról, [...] az elektromos áramról, az atomokról, [...] és más univerzumokról. Ezek a fogalmi képek jelentik az egyetlen valóságot, amelyet ismerünk. [...] Ebből következőleg egy jól megalkotott modell létrehozza a saját valóságát." S. Hawking L. Mlodinow, A nagy terv. (Akkord, 2011, 204. o.)

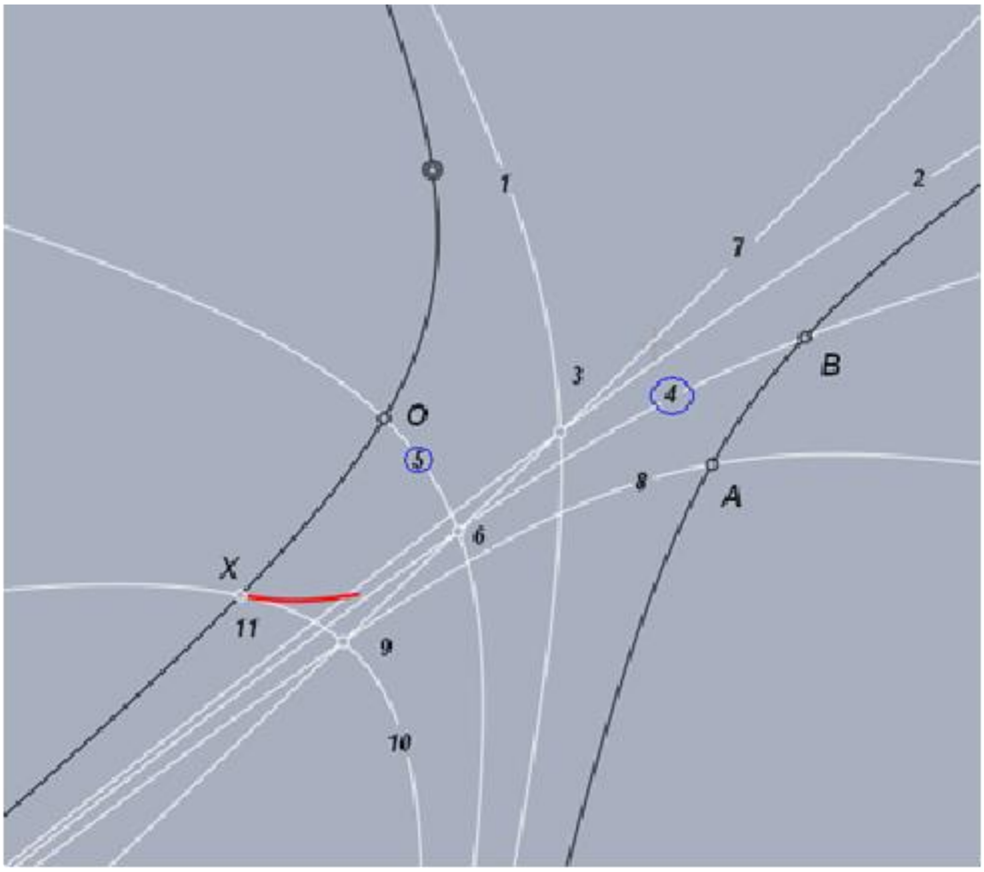
"Nem abban áll a feladat, hogy a [geométer] azt fürkéssze, amit az alakzaton vagy akár annak puszta fogalmán észrevesz [...]; és, ha bizonyossággal akar valamit a priori módon tudni, akkor semmit nem szabad a dolognak tulajdonítania, ha az nem következik szükségszerűen abból, amit – fogalma alapján – ő maga helyezett bele." Kant, A tiszta ész kritikája, BXII.

Ismétlés

- A körző "megszerkesztése"
- Érintő szerkesztése körhöz (szögmásolás)
- A szimmetriavonal

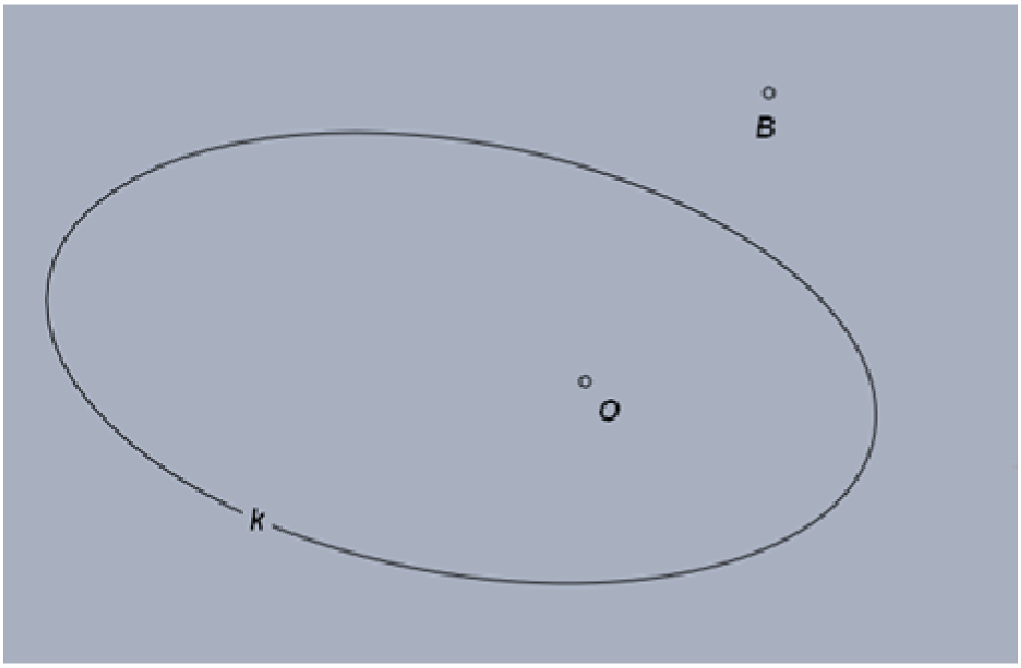
- A háromszög szögeinek összege
- Lényeges-e a "középpont" helyzete?

A körző megszerkesztése



Az egyes szerkesztési lépéseket megszámoztam.

Érintő szerkesztése körhöz

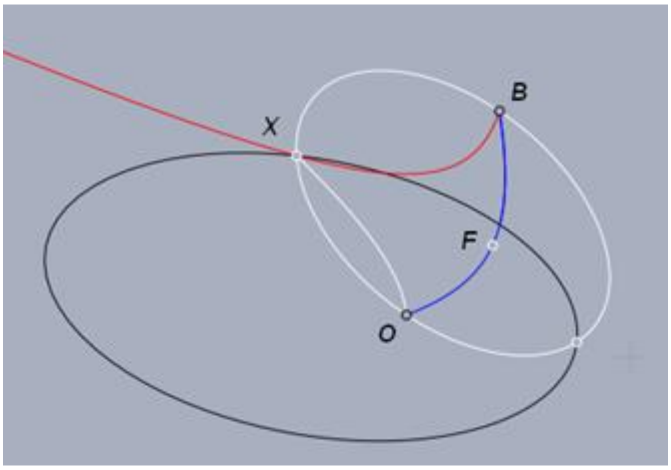


Húzzunk érintőket a B pontból a k körhöz!

Hogy csinálnánk az Eukleidészi geometriában?

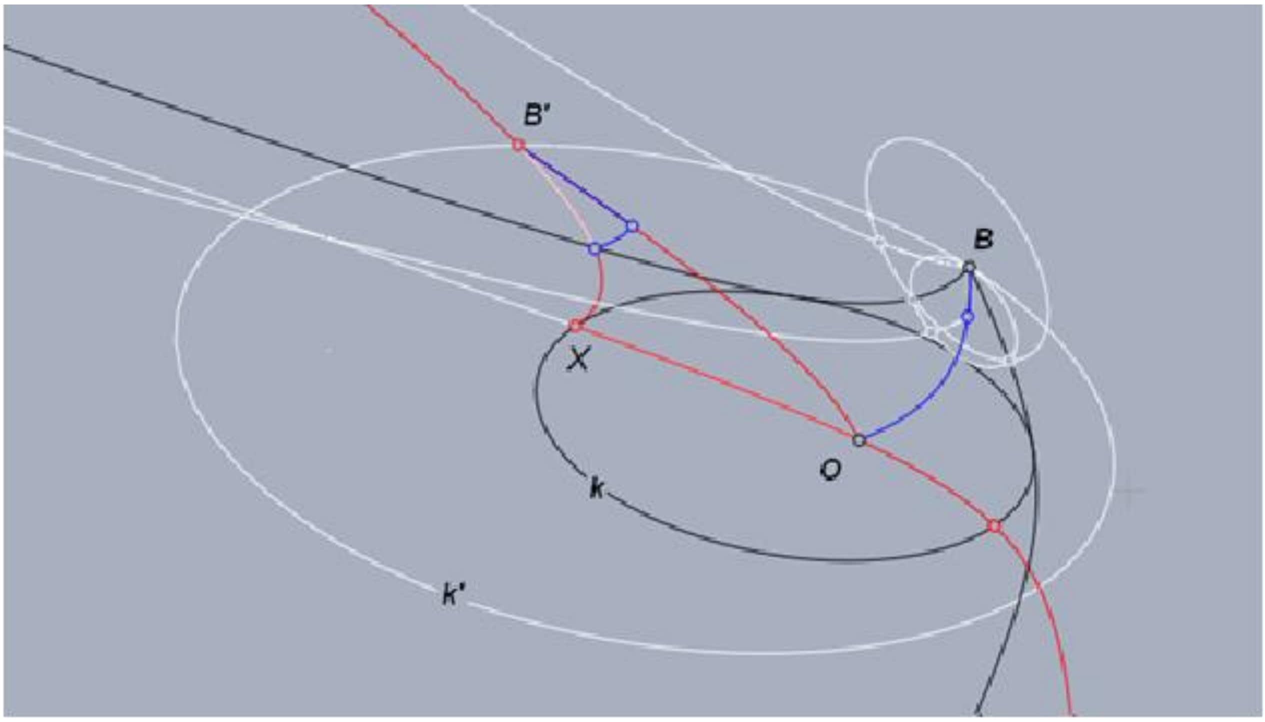
Mi a megoldás? Van-e abszolút szerkesztés?

Ez volna az eukleidészi megoldás



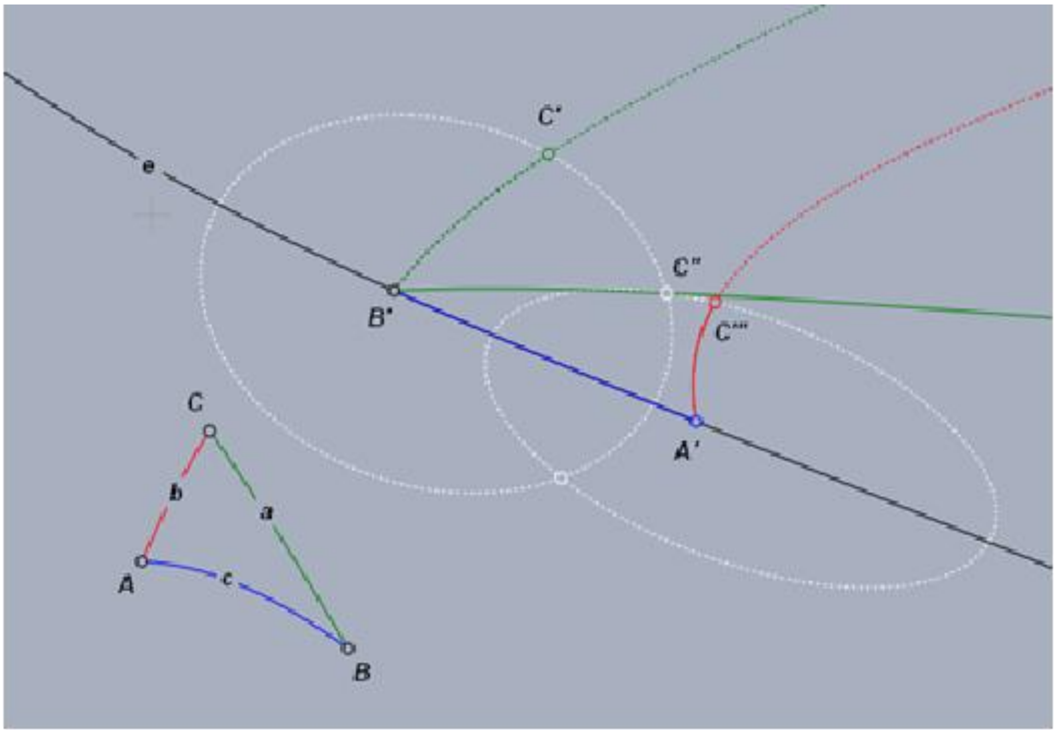
OB felezőpontjából megrajzoljuk az OXB „Thálesz” kört és abban reménykedünk, hogy OXB derékszög. Mivel nem az, BX nem is érintő.

Az érintőszerkesztési feladat megoldása szögmásolással



Megrajzoljuk az $OB(k')$ kört és a k körön felveszünk egy X pontot, melyet összekötünk az O -val, ezután merőlegest állítunk X -ben XO -ra. XB' érintője k -nak. Már csak az $OB'X$ szöget kell a két lehetséges irányban B -nél BO -ra másolni és már meg is van a két érintő.

A háromszög szögeinek összege



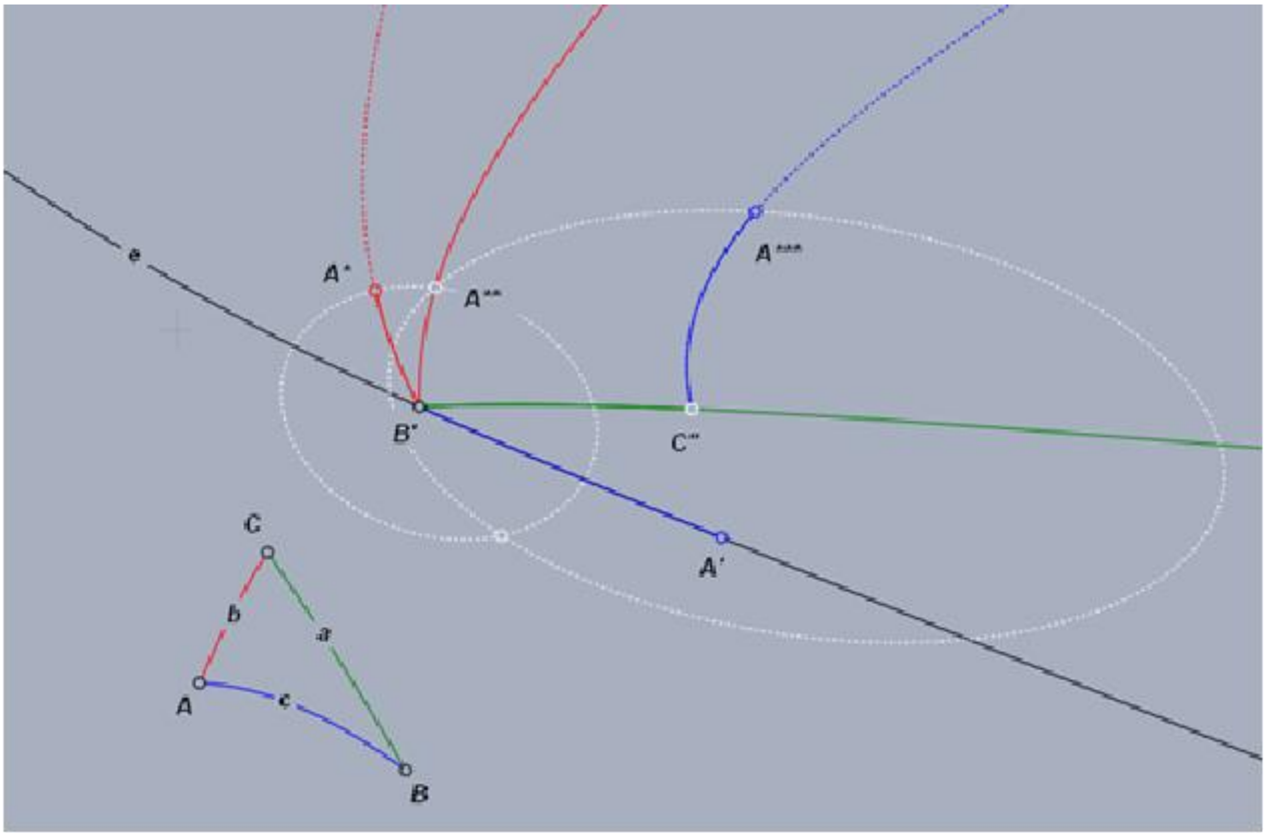
Az ABC háromszög szögeit rendre felmérjük "egymásra" az e egyenes pontjából.

Ezen az ábrán a $B'C"$ egyenest szerkesztettem meg úgy, hogy a $C"B'A'$ szög egybevágó legyen az ABC szöggel.

(Ez úgy értem el, hogy biztosítottam: $B'A' = BA, AC = A'C'" = A'C"$, $BC = B'C' = B'C"$.)

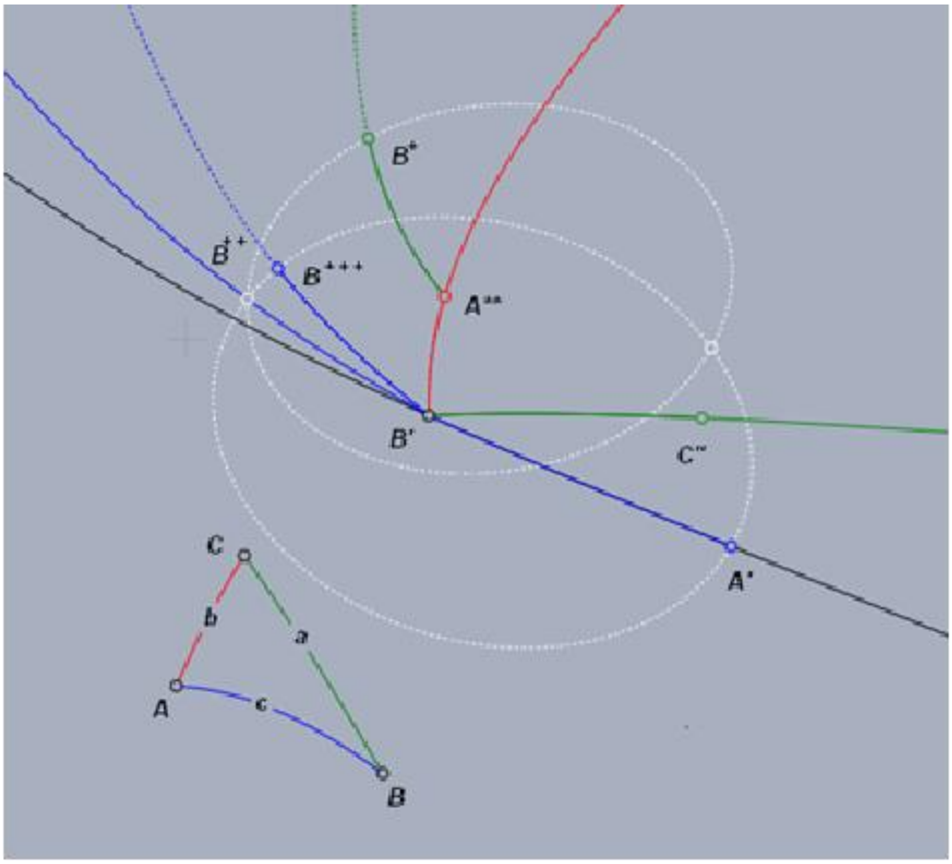
A következő lépésben a BCA szöget fogom felmérni a $B'C"$ félegyenesre…

Folytatás



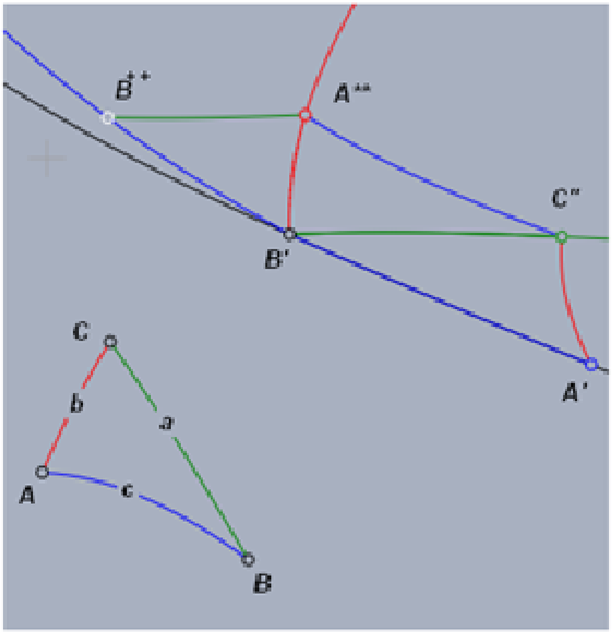
Ezen az ábrán a $B'A^{++}$ egyenest szerkesztettem meg úgy, hogy az $A^{++}B'C"$ szög egybevágó legyen az BCA szöggel. Ezt úgy értem el, hogy biztosítottam: $B'C" = BC$
, $AB = C"A^{+++} = C"A^{++}$ és $B'A^{+} = B'A^{++} = AC$. A következő lépésben a CAB szöget fogom felmérni a $B'A^{++}$ félegyenesre...

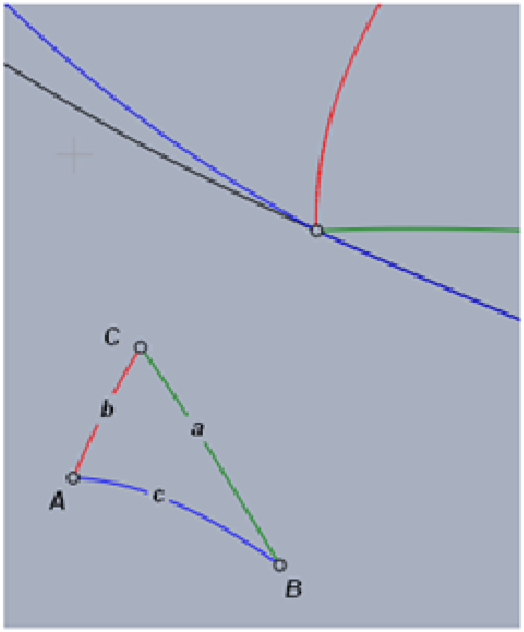
Folytatás



Ezen az ábrán a $B'A^{++}$ egyenest szerkesztettem meg úgy, hogy
az $A**B'B++$ szög egybevágó legyen az CAB szöggel. Ezt úgy értem el, hogy biztosítottam: $B'A**=CA$
, $A**B+=A**B++=CA$ és $B'B+++=B'B++=AB$.
Az $A'B'B++$ szög tehát az ABC háromszög szögeinek összege abban az értelemben, hogy a megfelelő szögeket egymás hegyére-hátára mértem.

A végeredmény



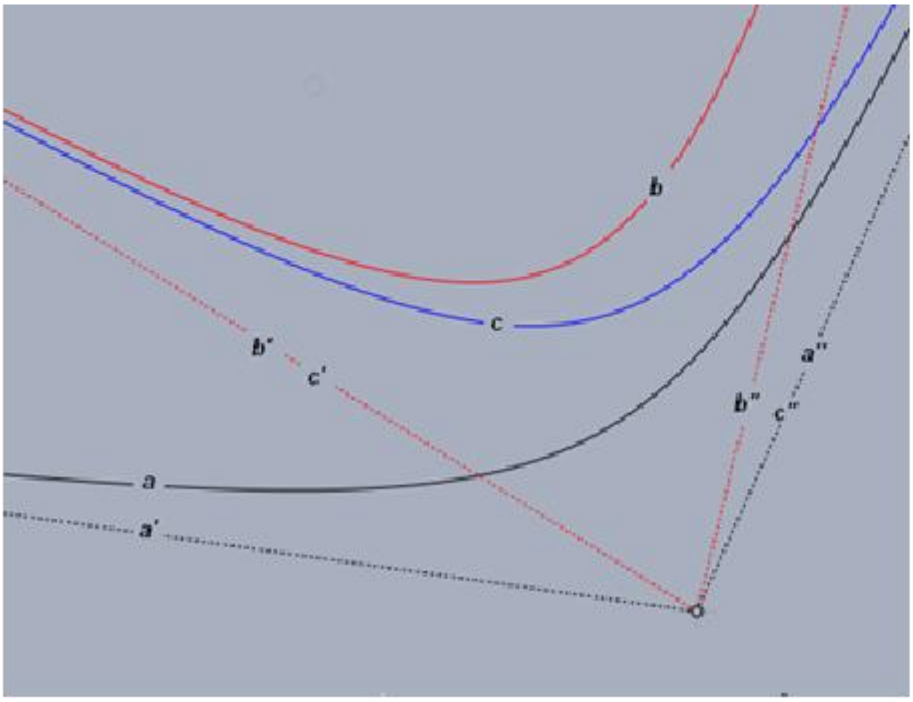


Az a. ábra azt "mutatja", hogy a $B'A'C"$, a $B'C"A**$ és a $B'A**B++$ háromszögek egybevágóak az ABC háromszöggel.

A b. ábra pedig azt mutatja, hogy az ABC háromszög szögeinek összege, a kék-kék szög nem adja ki az egyenesszöget (nem ad ki két derékszöget).

Ha az ABC háromszöget mozgatjuk, akkor láthatóvá válik, hogyan változik a szögek összege a mérettel; minél kisebb a háromszög annál inkább egyenesszög a szögek összege; minél nagyobb a háromszög annál kisebb a szögek összege.

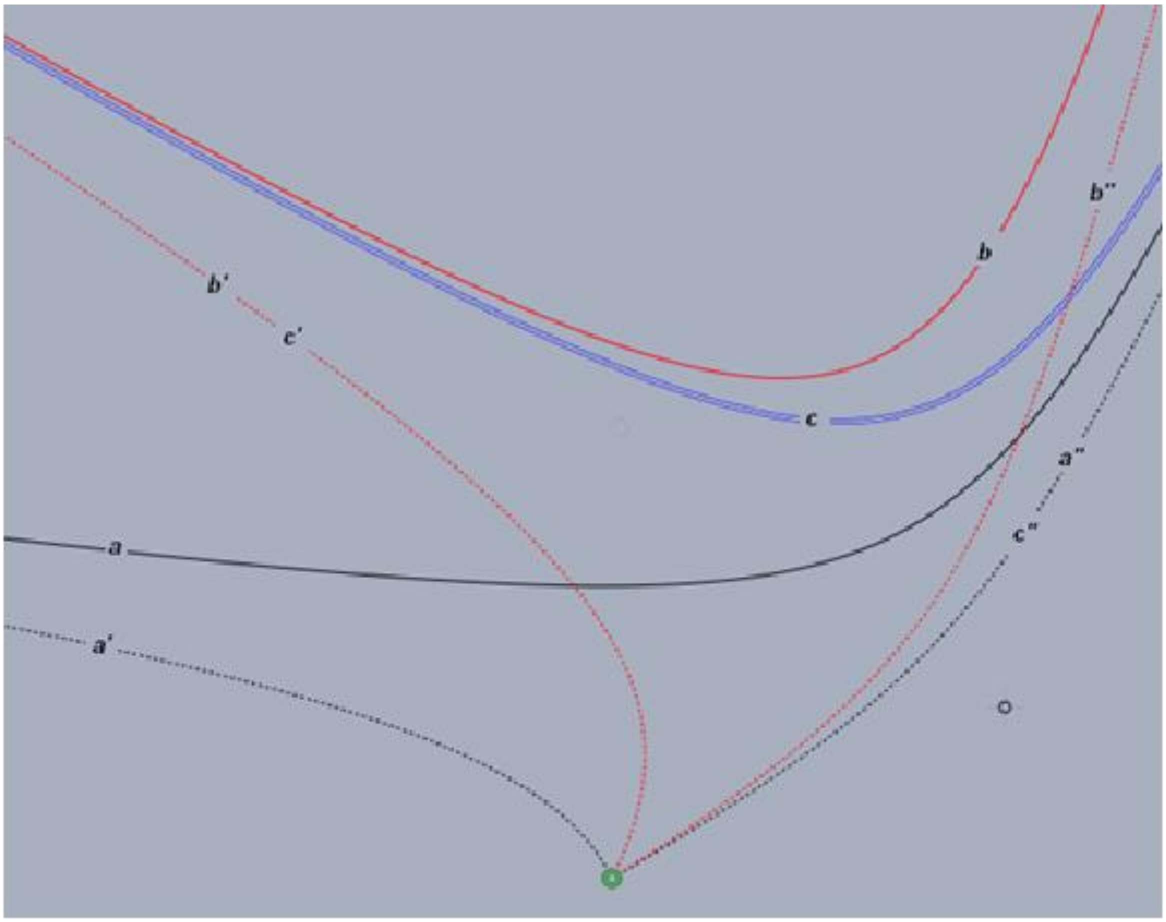
Lényeges-e a "középpont" helyzete?



a és b közös párhuzamosát, c-t így "konstruáltuk" a fizikai modell segítségével.

Új középpont

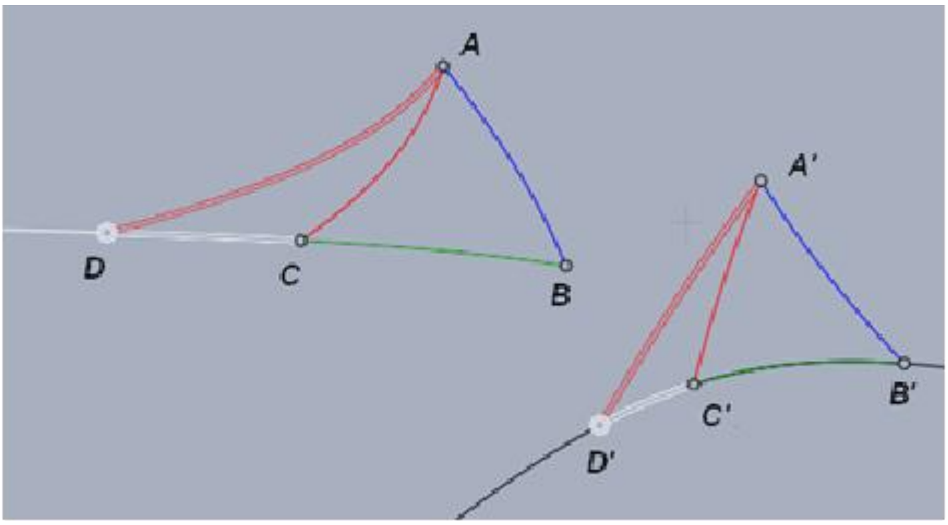
Ha egy új középpontból ugyanezt csinálnánk ugyanarra az eredményre jutnánk. Ez triviális a konstrukció szerint. A programmal még azt is vizsgálhatjuk, hogy mi történik, ha a fizikai középpontot áthelyeznénk. Milyen értelemben helyezzük át a középpontot?



Kitérő

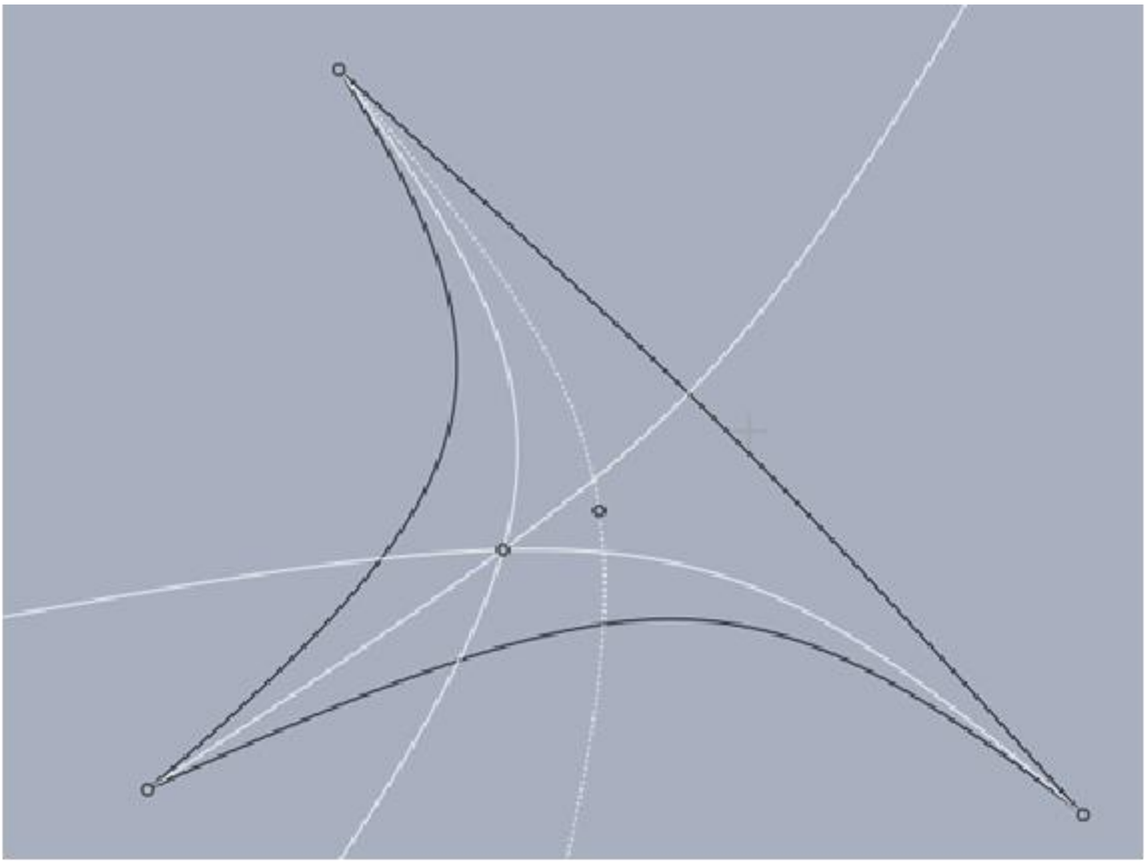
Egy nem-abszolút geometria, amelyben a közrefogási és az egybevágósági axiómák majdnem teljesülnek.

- R1, ..., R8 teljesül
- E1, ..., E4 teljesül, de E5 nem.

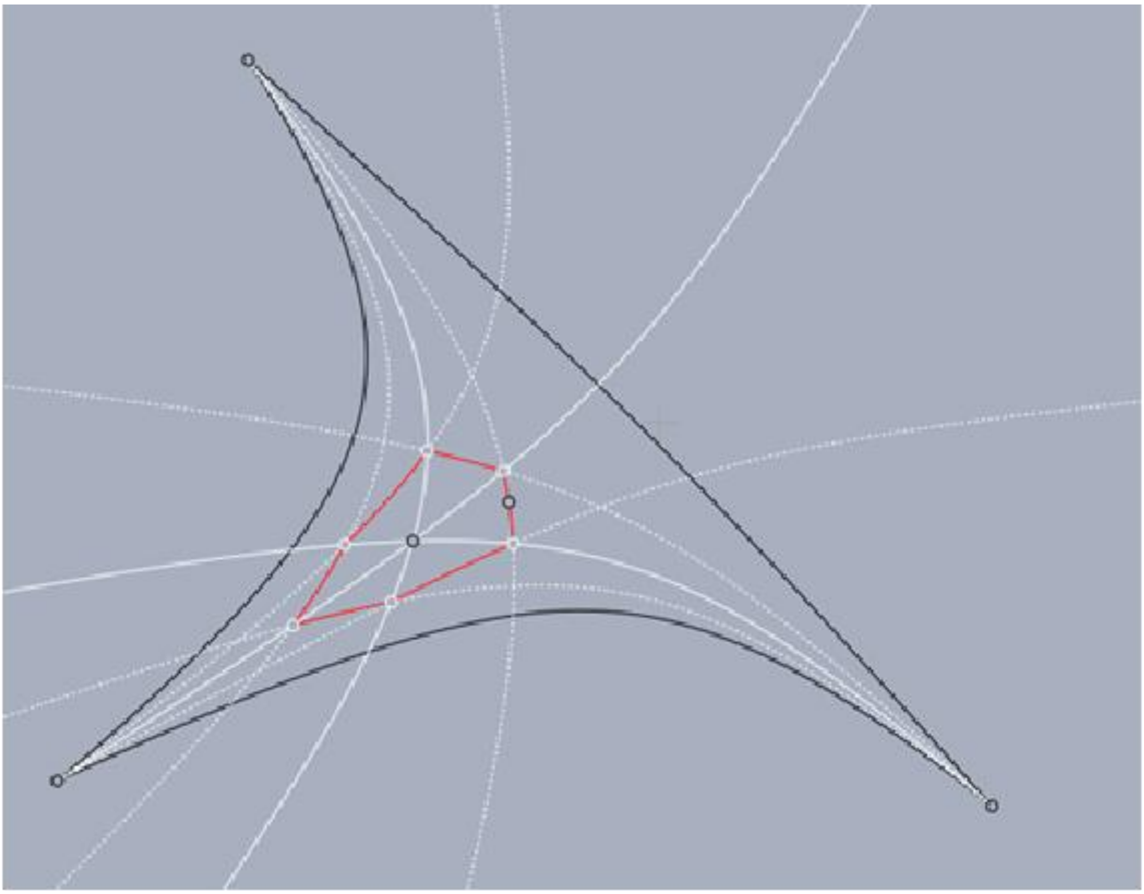


A sík, a vonalzó és körző

A sík, a vonalzó és körző definíciójával kezdjük. Egy modell a hiperbolikus síkon belül.

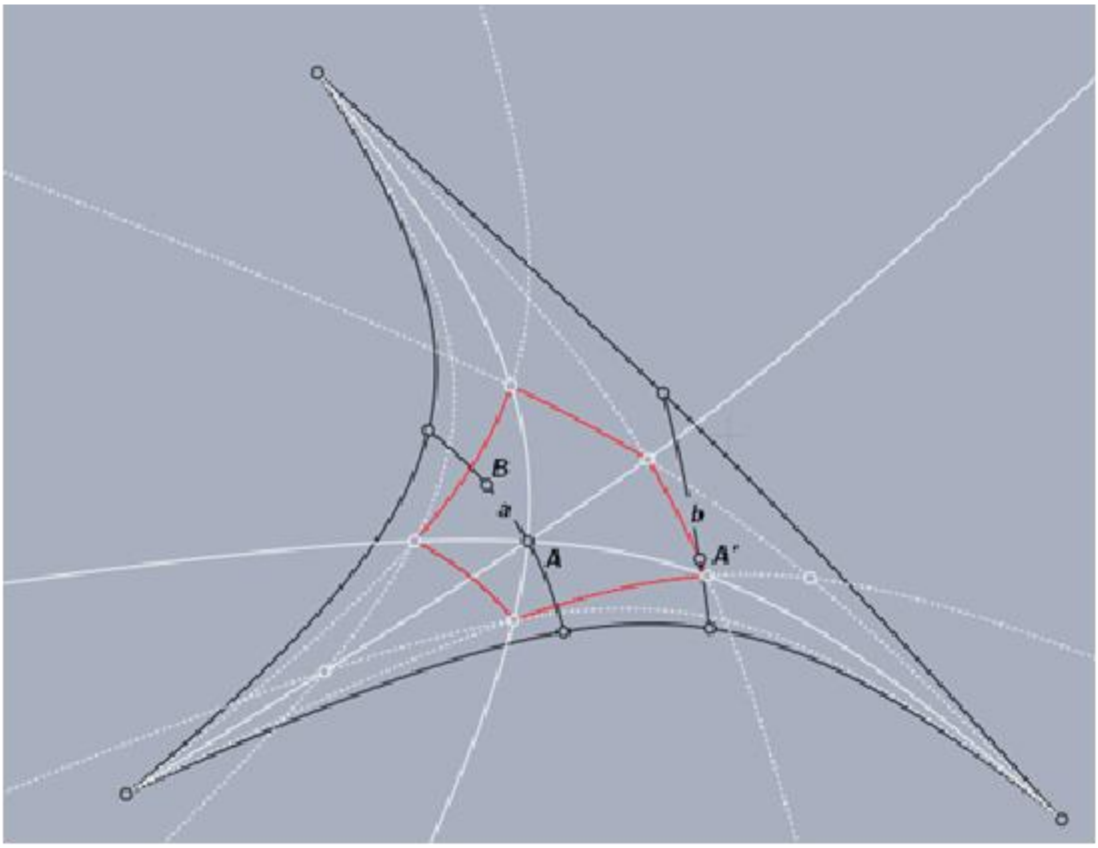


A kör és az egyenes



Szakaszmásolás eukleidészi módon

A feladat: Adott az AB szakasz és a b egyenrs az A' ponttal. AB lemásolandó b -be A' -ből, úgy, hogy $AB = A'B'$.)



Kíséreltileg igazolható, hogy E1,..., E4 teljesül, de E5 nem.

(Az ellenpélda jó bizonyításnak is.)

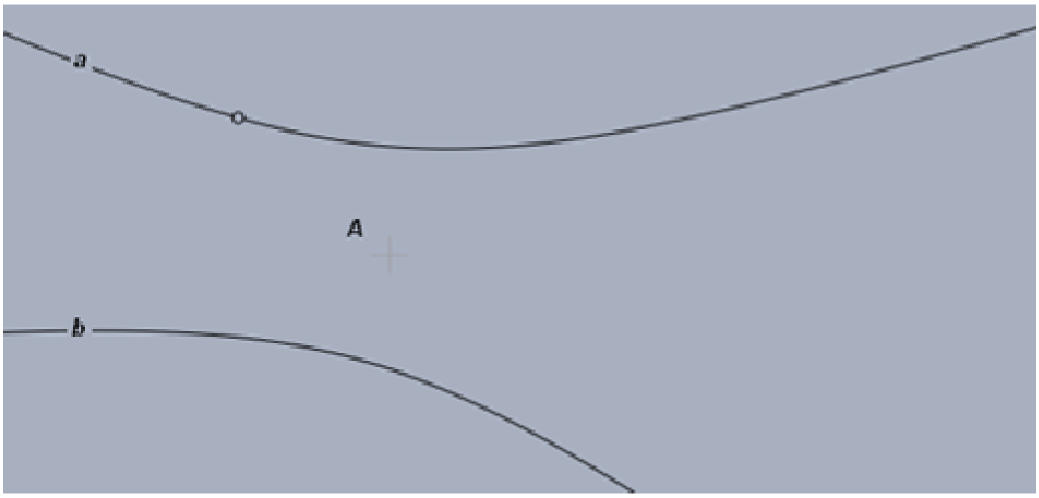
6 Szemléletes hiperbolikus geometria V/2.

Szemléletes hiperbolikus geometria V/2.

Új anyag

- Izogonalitás
  - Izogonalitás metsző egyenesek esetében: a szögfelező
  - Kör szerkesztése az izogonalitás alapján
- Néhány további abszolút tétel
  - A Háromszögek nevezetes vonalai
- Merőleges izogonalitás
- A közös merőleges (merőleges izogonalitás szerkesztése)
  - A Hilbert-féle szerkesztés
  - A közös párhuzamos
- A közös párhuzamos Hibert-féle szerkesztése
- A Bolyai-féle szerkesztés (párhuzamosok szerkesztése)
- Az első rész (abszolút geo.) grandiózus összefoglalása

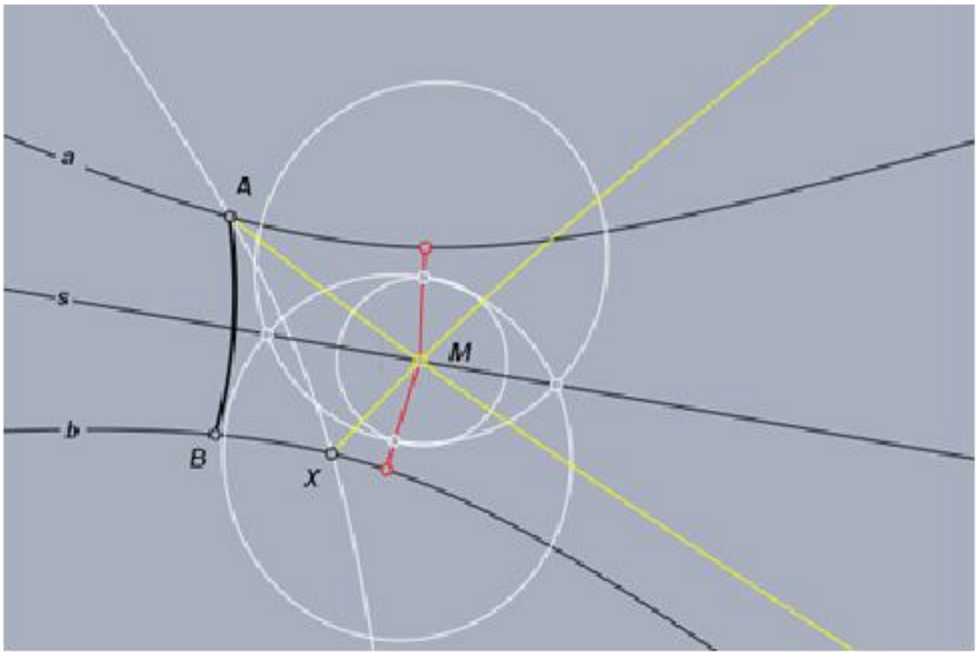
Izogonális egyenes szerkesztése nem metsző egyenesek esetében (A feladat)



Adott az a, b nem metsző egyenes-pár és megszerkesztendő az A ponton keresztül egy olyan c egyenes, mely a -t és b -t egybevágó szögekben metszi.

A szerkesztés menete

1. A b egyenesen felveszünk egy tetszőleges X pontot.
2. Meghúzzuk az AX egyenest.
3. Megszerkesztjük az adódó metszéspontokban a szögfelezőket.
4. A szögfelezők metszéspontjából (M) merőlegeseket állítunk a -ra és b -re



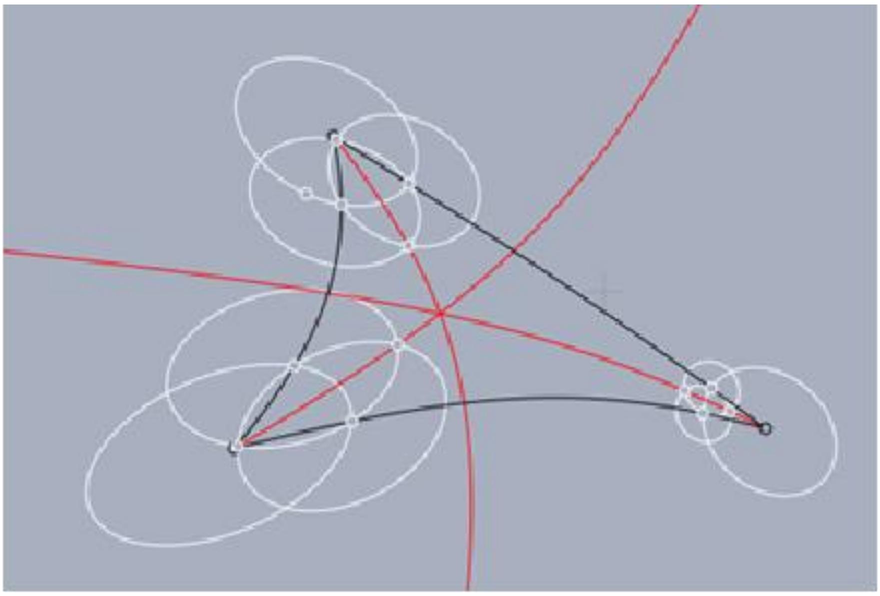
A. Megszerkesztjük az s szimmetriavonalat. Ennek menete:

B. Merőlegest bocsátunk A -ból a szimmetriavonalra. Az AB szakasz izogonális az ab egyenessel.

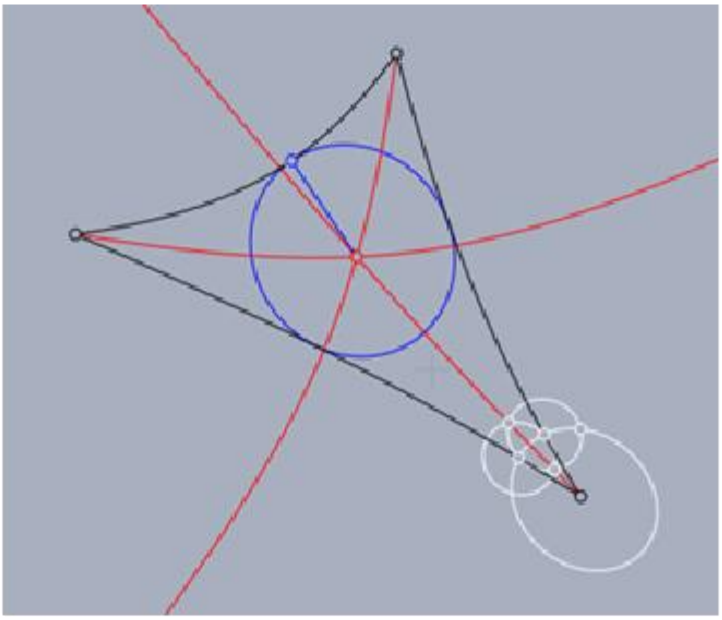
Hf.: (1) Biz.be, hogy AB valóban izogonális ab -vel.

(2) Mely zászlópárnak, mint egybevágósági transzformációnak fixegyenese s ? (3) Melyik Hjelmslev vonal az s ?

A háromszög szögfelezői egy pontban metszik egymást

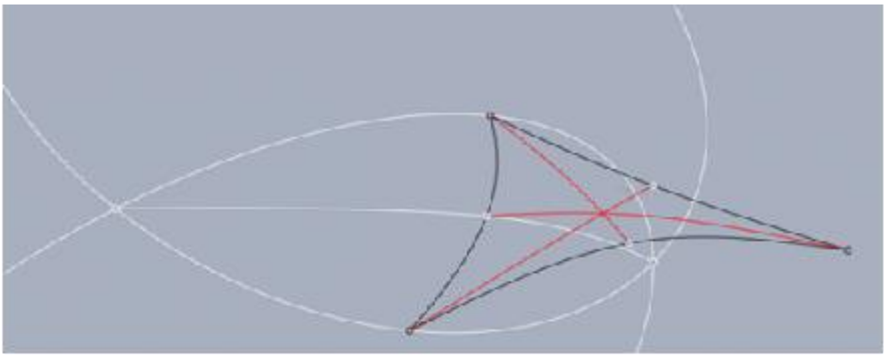


A szögfelező egyenesek metszéspontja a háromszögbe írt kör középpontja.



Súlypont

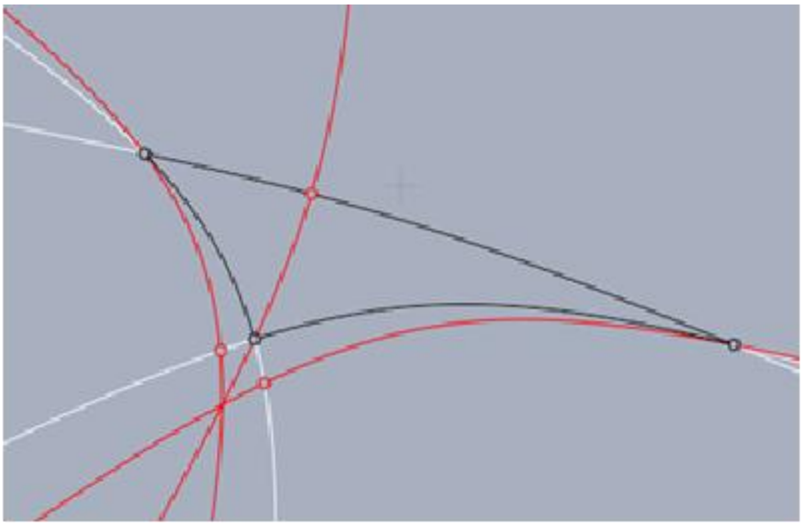
A háromszög csúcsait a szemben levő oldalak felezőpontjával összekötő szakaszok egy pontban metszik egymást.

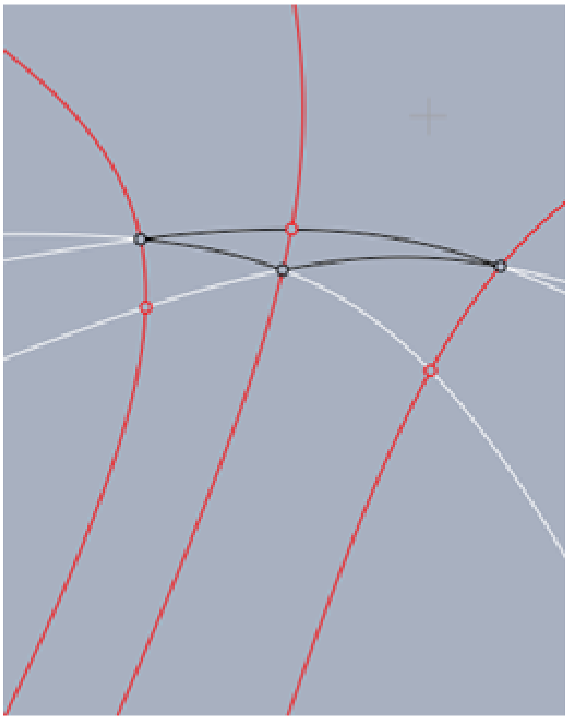


Magasságpont

Ha a háromszög magasságvonalai metszik egymást, akkor egy pontban metszik egymást.

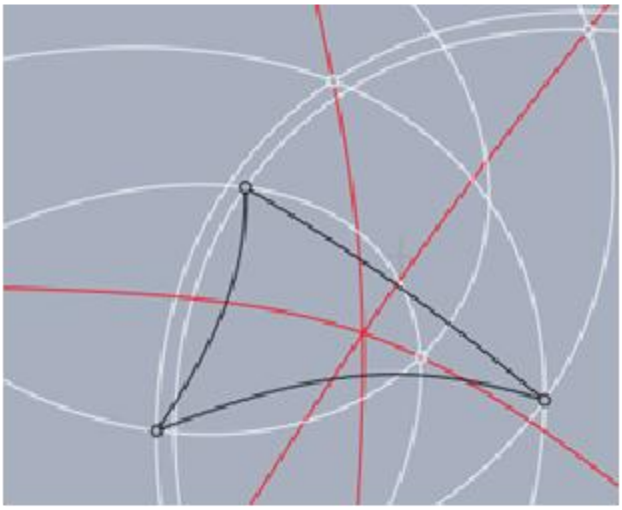
Ha nem, akkor ...

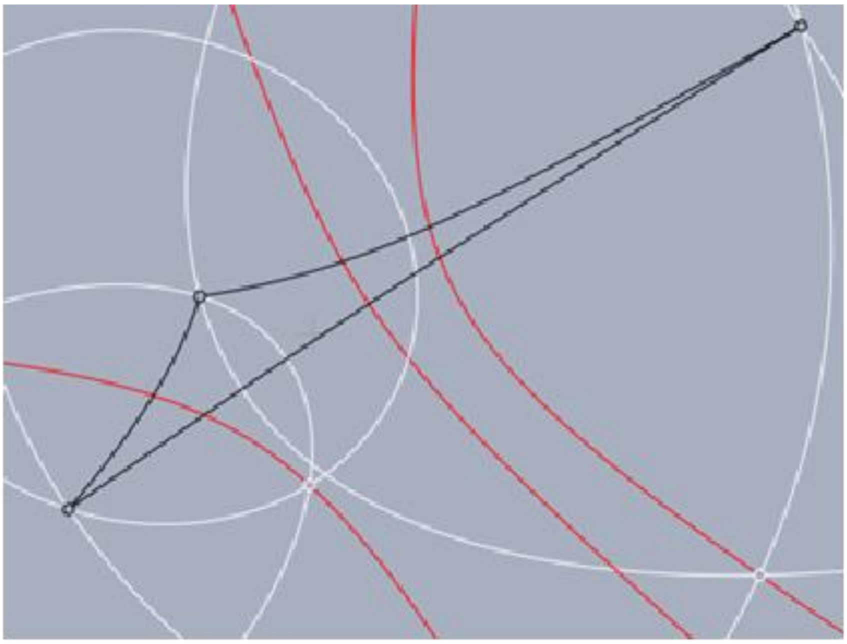




Oldalfelező merőlegesek

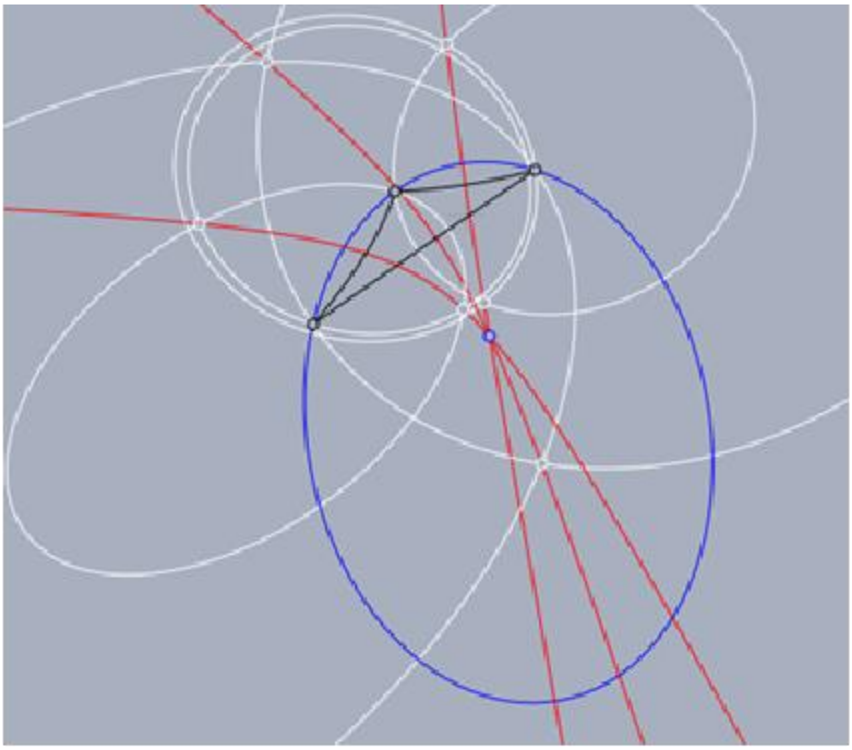
Ha a háromszög oldalfelező merőlegesei metszik egymást, akkor egy pontban metszik egymást. Ha nem, ...





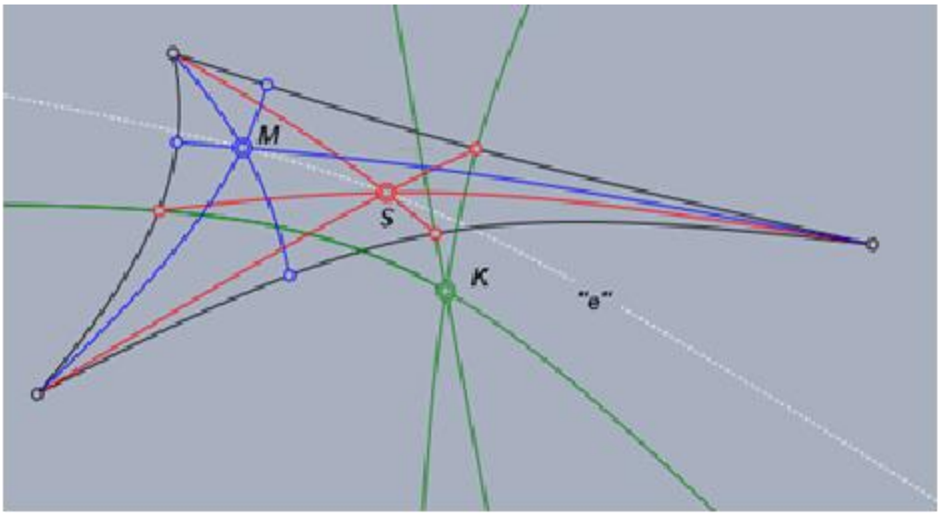
Körülírt kör

Ha a háromszög oldalfelező merőlegesei metszik egymást, akkor a metszéspont a körülírt kör középpontja. (Ha nem metszik egymást ezek a pontok, akkor...)



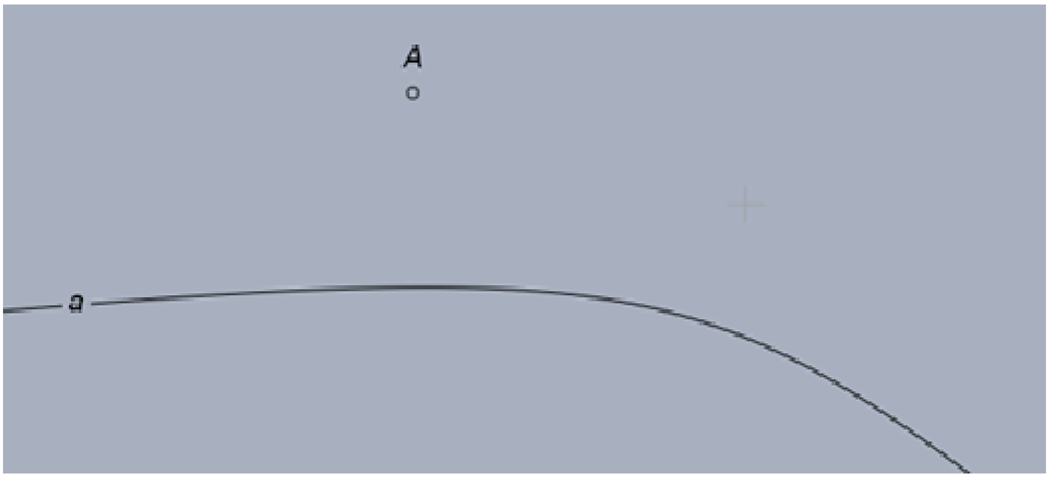
Euler vonal

A háromszög magasságpontját, súlypontját és a körülírt kör középpontját összekötő egyenes... Hát ilyen nincs...



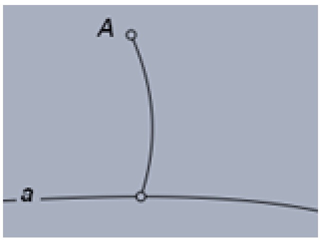
A Bolyai-féle szerkesztés

Párhuzamos szerkesztése abszolút körzővel és vonalzóval

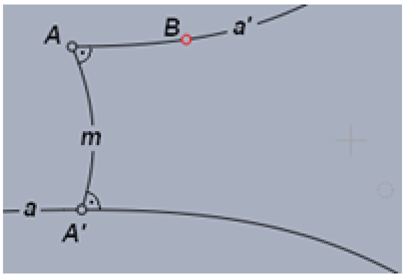


A feladat párhuzamost szerkeszteni az A ponton át az a egyeneshez

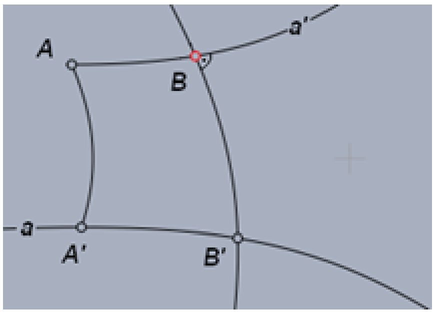
A szerkesztés menete



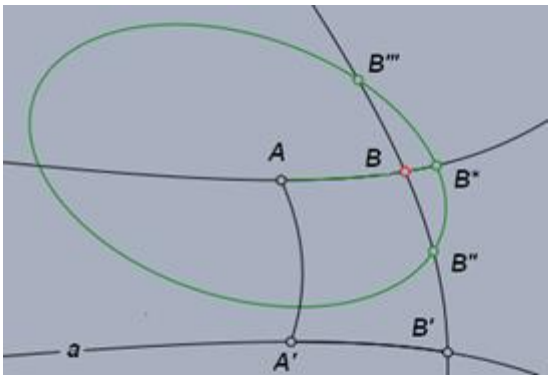
A -ból egy merőleges szakaszt ejtünk a -ra.



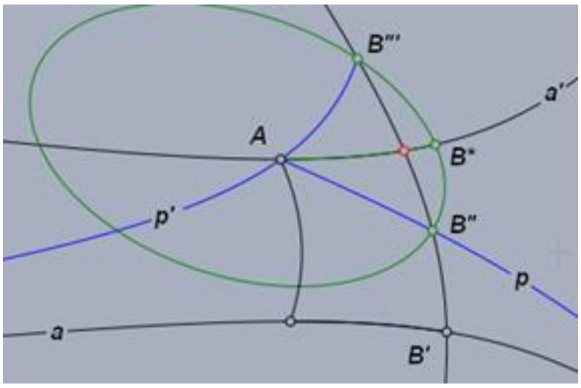
A -ban merőleges félegyenest állítunk m -re és a' -n felveszünk egy B pontot.



B -ben merőlegest állítunk a' -re.



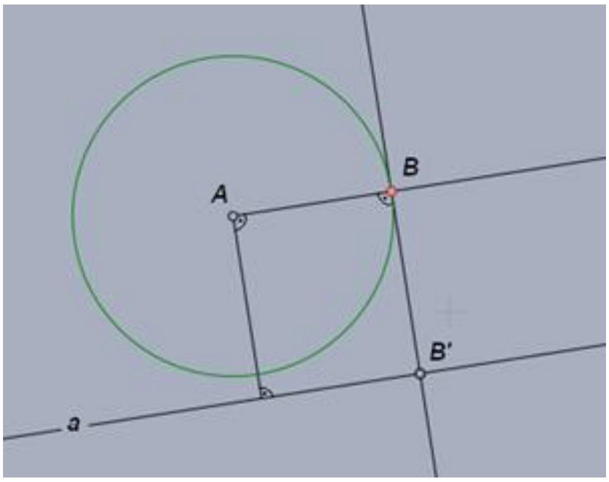
$A'B'$ -t felmérjük A -ból, AB -re; $A'B' = AB*$.



p és p' a keresett párhuzamosok.

Ugyanez eukleidészi esetben

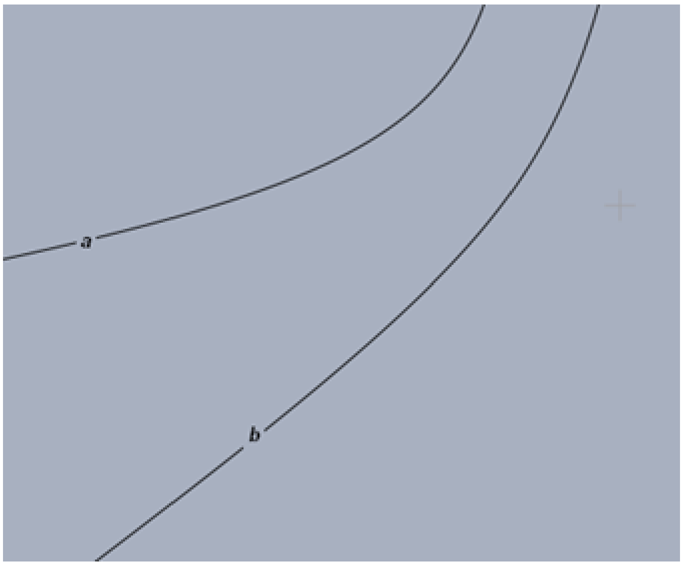
Ugyanez a szokásos eukleidészi esetben a megszokott eukleidészi szemléletben



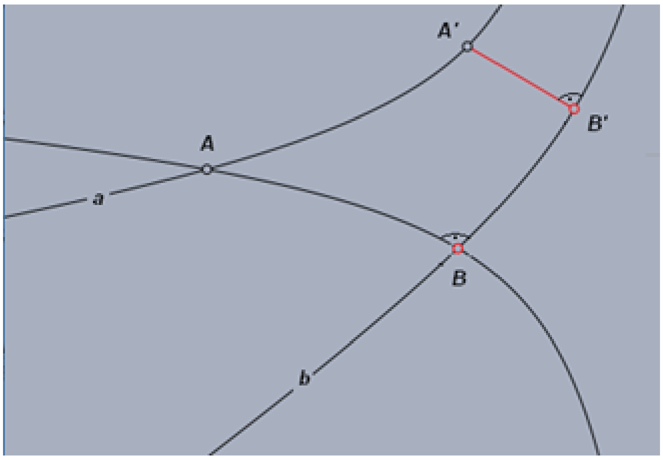
Tehát ez egy trivialitás az eukleidészi esetben; mégis ez egy abszolút szerkesztés.

Közös merőleges

Két nem metsző, a, b egyenes közös merőlegesének megszerkesztése abszolút körzővel és vonalzóval (Hilbert)



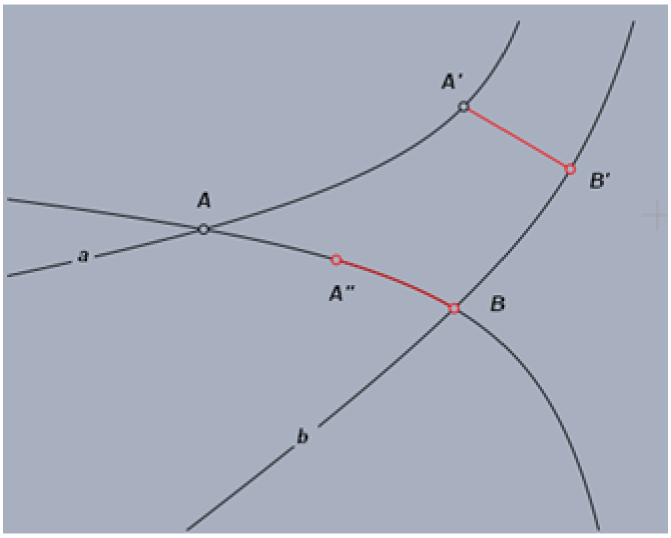
Első két lépés



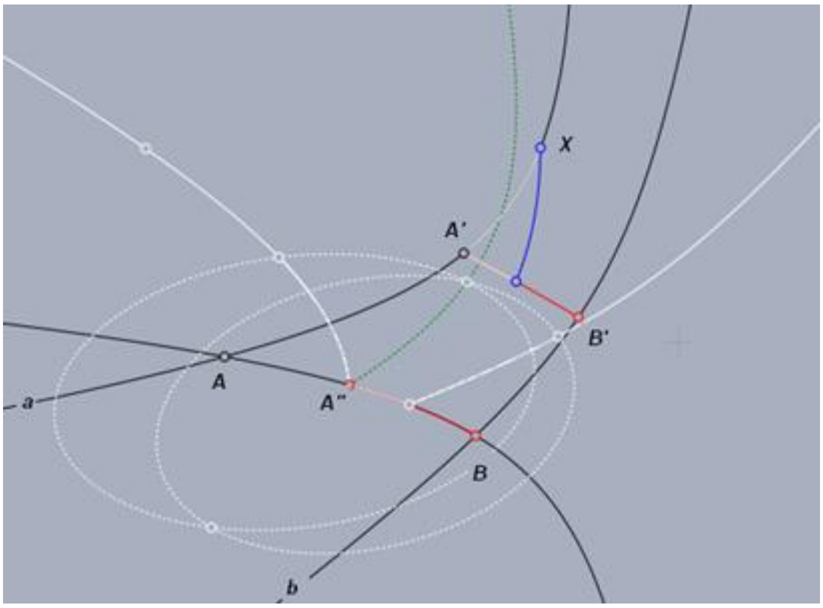
Vegyünk fel az egyik egyenesen két pontot: A , A' . Ezekből a pontokból bocsássunk merőlegeseket a másik egyenesre.

Folytatás - 3. lépés

3. Felmérem a rövidebb (ez esetben a $B'A'$) szakaszt a B' pontból az AB' egyenesre. $B'A' = B'A$”.



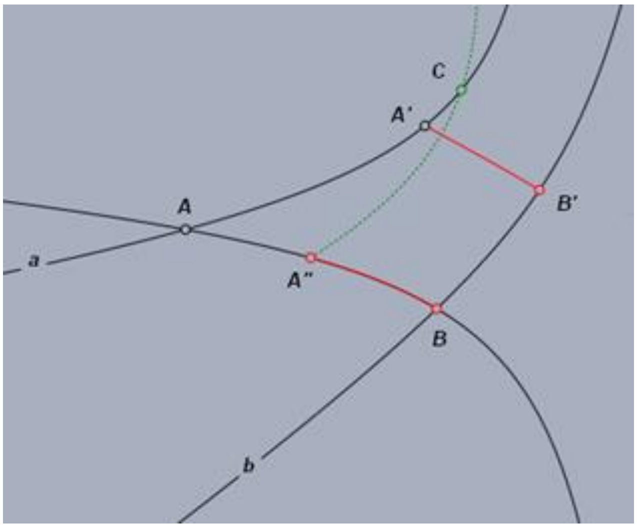
Folytatás - 4. lépés



4. Felmérem a B’A’X szöget a AB szakaszra az A” pontból.

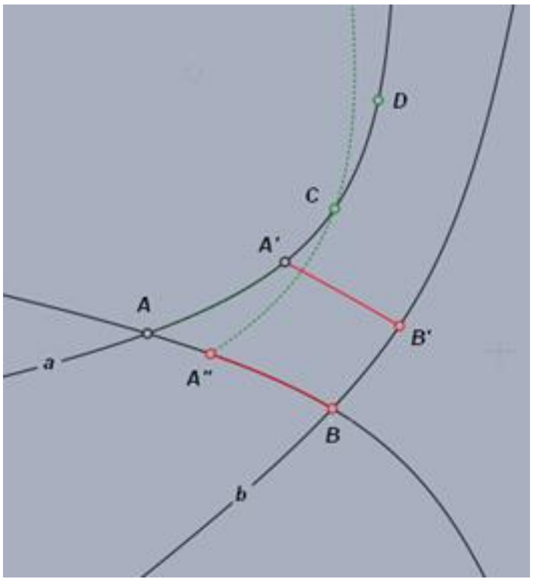
Folytatás - 5. lépés

5. Az eredményül kapott szögszár és a metszéspontját jelölje C .



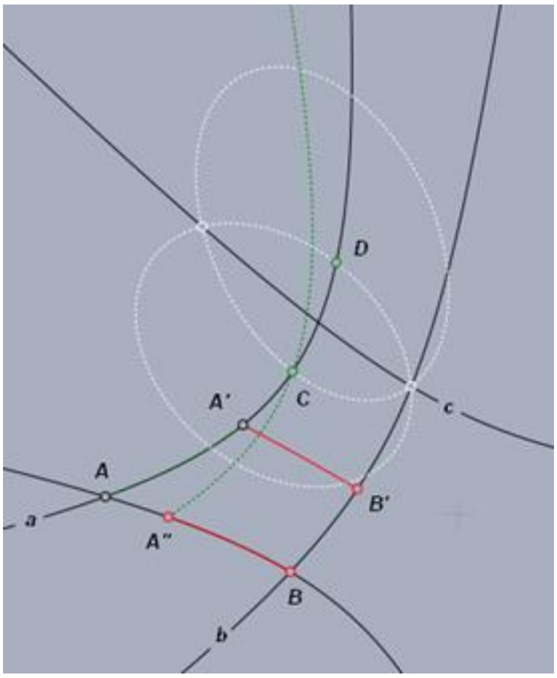
Folytatás - 6. lépés

6. $A"C$ -t felmérem A' -ből az a -ra. A végpontot: D .



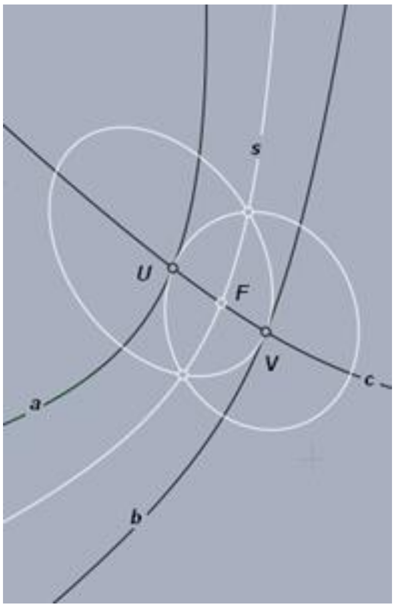
Folytatás - 7. lépés

7. Veszem CD felezőmerőlegesét, ez a és b egyértelmű (az eukleidészi geometriában nem egyértelmű) közös merőlegese c.

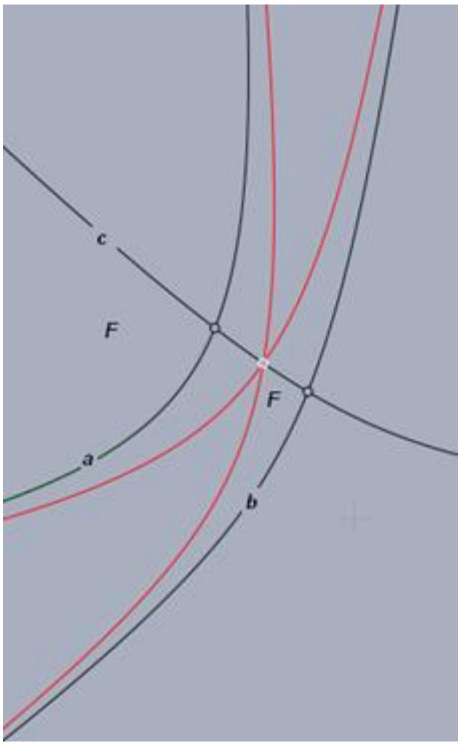


c helyzete nem függ A és A' megválasztásától!

Egy (A) közös merőleges ismeretében megszerkeszthetőek a közös párhuzamosok.

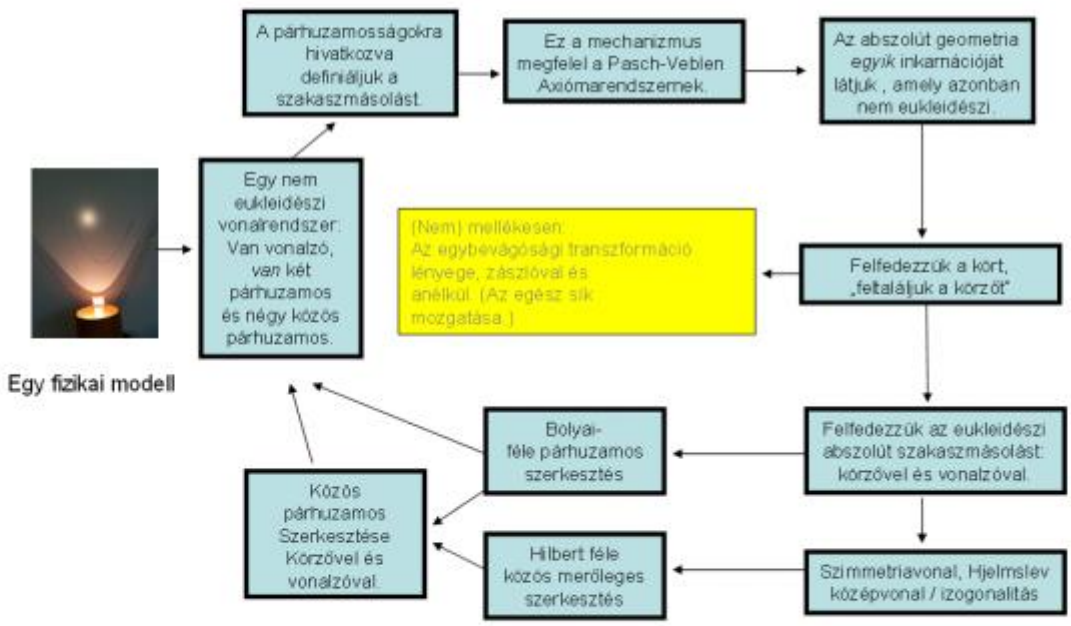


A közös merőleges c és az egyenesek (a,b) metszéspontja felezőmerőlegese a szimmetriavonal(s).



A F -ből a -hoz húzott párhuzamos párhuzamos b -vel is és viszont. Megszerkesztettem a és b két (lényeges) közös párhuzamosát.

Az első rész fő gondolatmenete



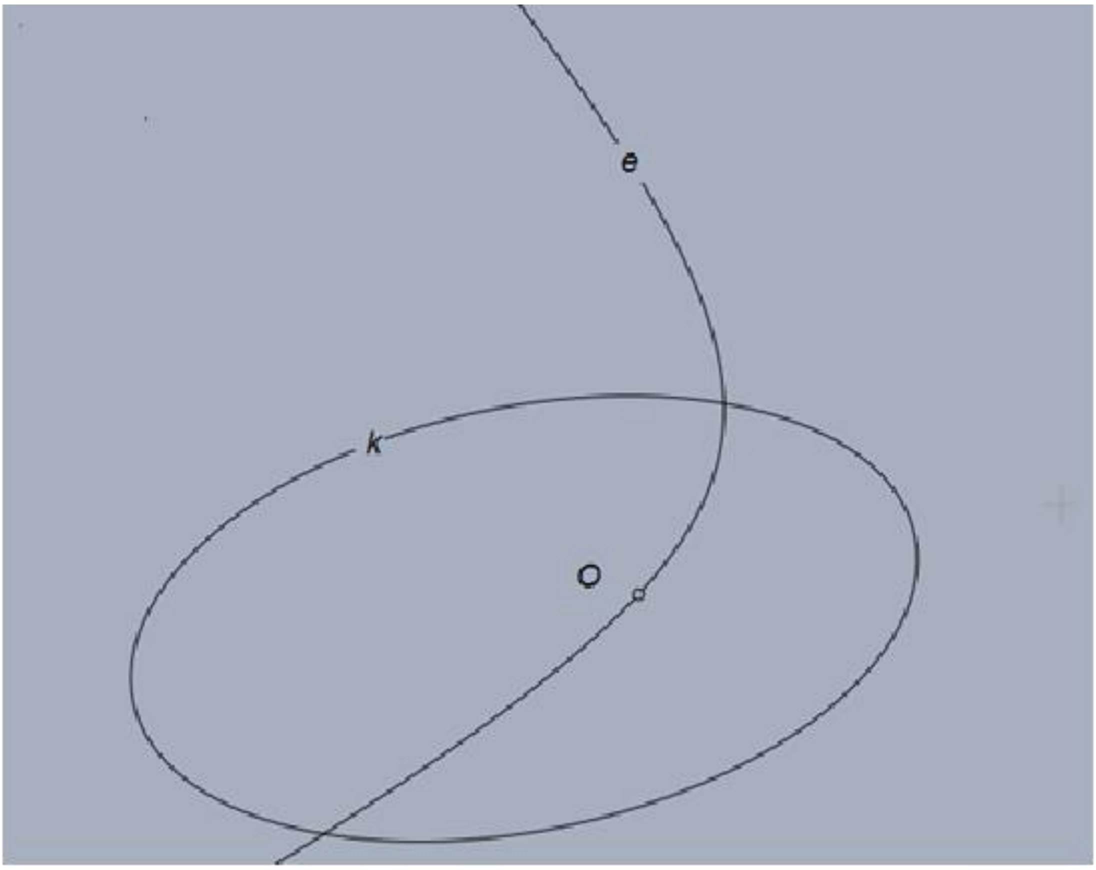
7 Szemléletes hiperbolikus geometria VI/1.

Szemléletes hiperbolikus geometria VI/1.

Új szerkesztések

- Egy újabb abszolút szerkesztés
  - Érintő szerkesztése egy a kör középpontján átmenő egyenessel párhuzamosan
- Két nem abszolút tétel
  - Pascal kozmikus tétele
  - Egy ismeretlen tétel
- A hiperbolikus sík modellje a hiperbolikus síkon: a Hjelmslev modell (Az egyszerű definíció, ism.)
  - A Hjelmslev transzformáció eredeti megadása(Hjelmslev)
  - A két Hjelmslev transzformáció azonossága
  - A párhuzamosságról a Hjelmslev modellben
  - Az egybevőgóságról a Hjelmslev modellben
  - A merőlegességről a Hjelmslev modellben
- A Pascal tétel és az „ismeretlen tétel” bizonyítása a Hjelmslev modell segítségével.

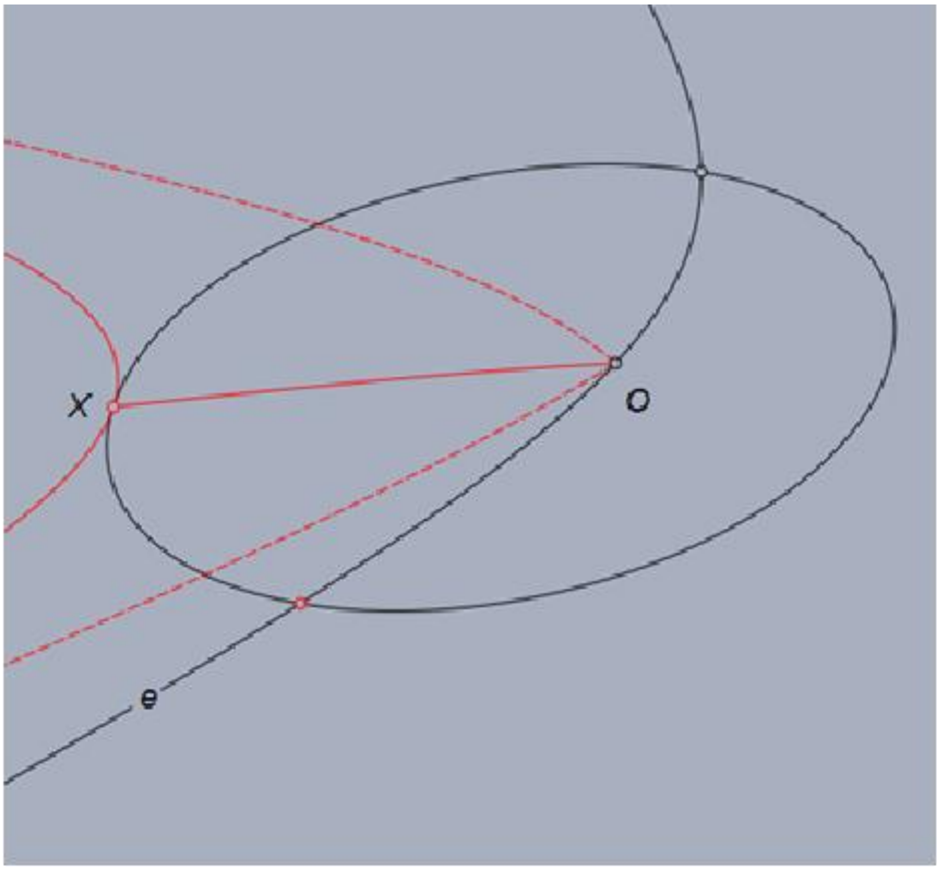
Érintő szerkesztése körhöz egy külső pontból



Érintő(ket) kell szerkeszteni, úgy hogy az érintő egyenes(ek) Párhuzamosak legyenek e-vel.

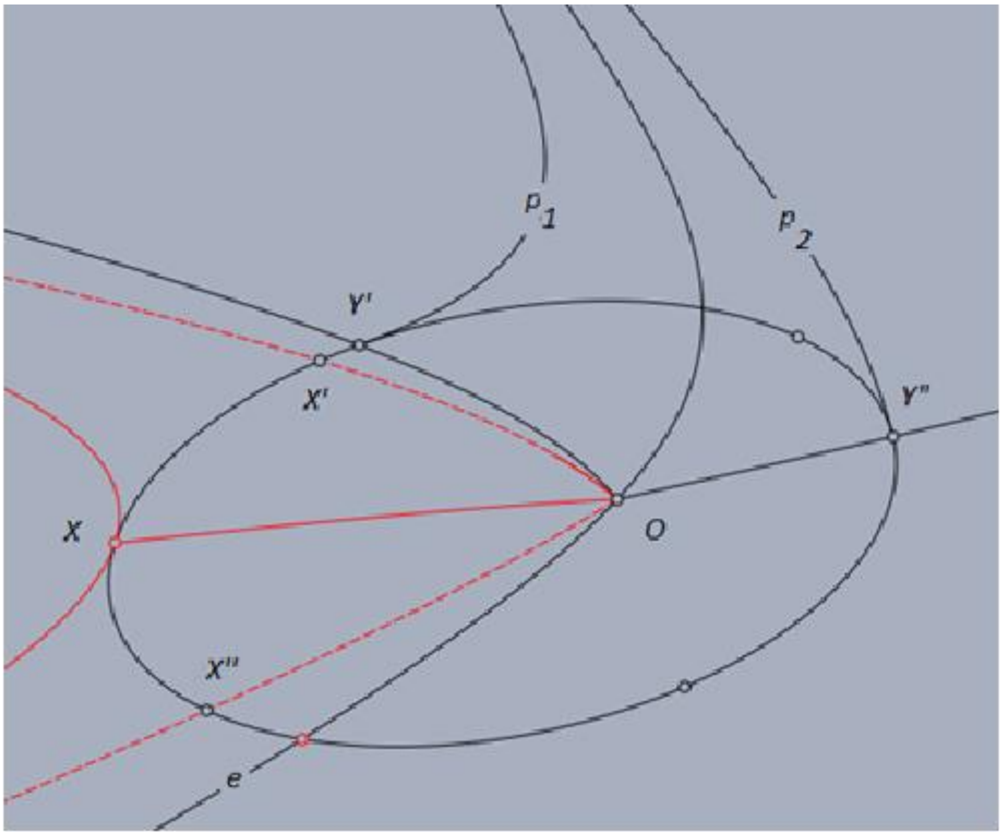
Első lépés:

Felveszek a körön egy tetszőleges pontot (X) és ehhez a sugarat (OX) és erre a sugárra egy merőleges egyenest, amely érintője a körnek.



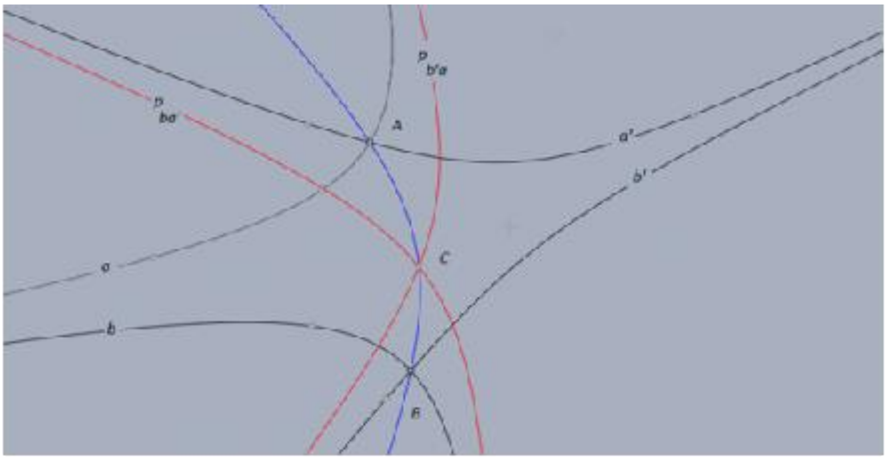
Második lépés:

Lemásolom az $XOX' = XOX"$ szöget az O pontból az e Két oldalára. Ezek lesznek a $p1$ és a $p2$ félegyenesek, melyek érintői a körnek.

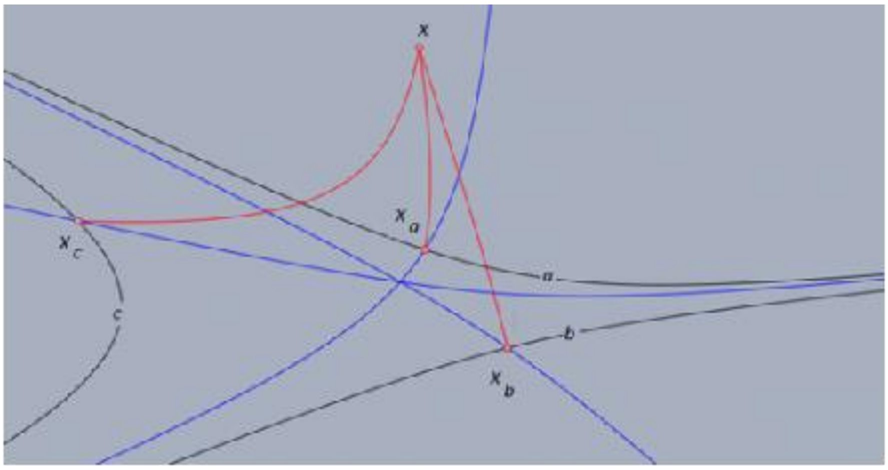


Ez a szerkesztés lényegében azonos az "érintő szerkesztése körhöz egy külső pontból" feladat megoldásával. Most azonban ki kellett terjesztenünk az egybevágóság fogalmát végtelen nagy háromszögekre! Ezt explicite nem Tettük meg, de nyilvánvaló dolog.

Pascal "kozmikus" tétele

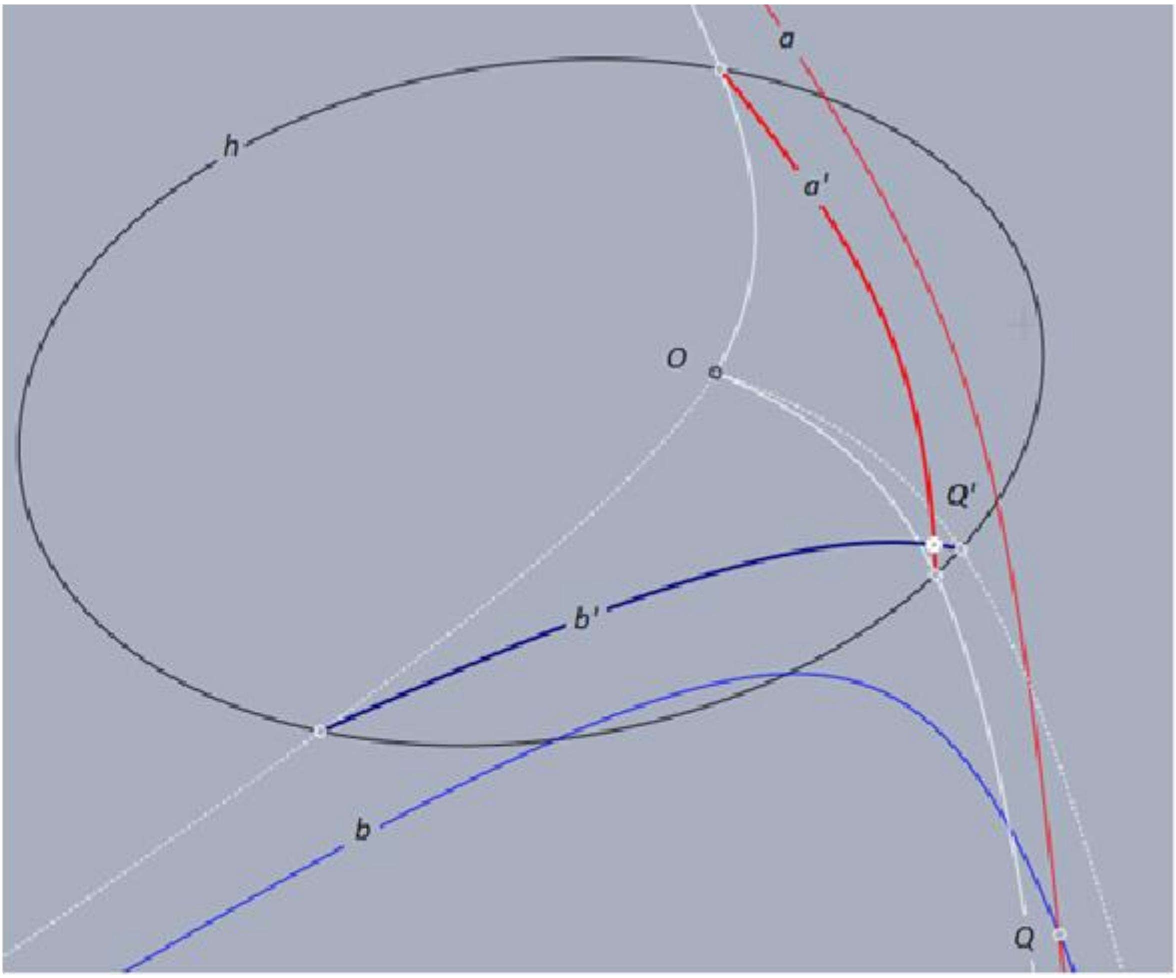


Egy (számomra) ismeretlen tétel



Legyenek a , b , c páronként párhuzamos egyenesek és X egy tetszőleges pont. Az X pontból állítsunk merőlegeseket ezekre az egyenesekre. A talppontokat X_a , X_b és X_c jelöli. Ha egy a -val és b -vel párhuzamos egyenest húzunk X_c-ből, egy c -vel és a -val párhuzamos egyenest húzunk X_b -ből, majd egy c -vel és a -val párhuzamos egyenest húzunkk X_b -ből, akkor ezek az egyenesek egy pontban találkoznak.

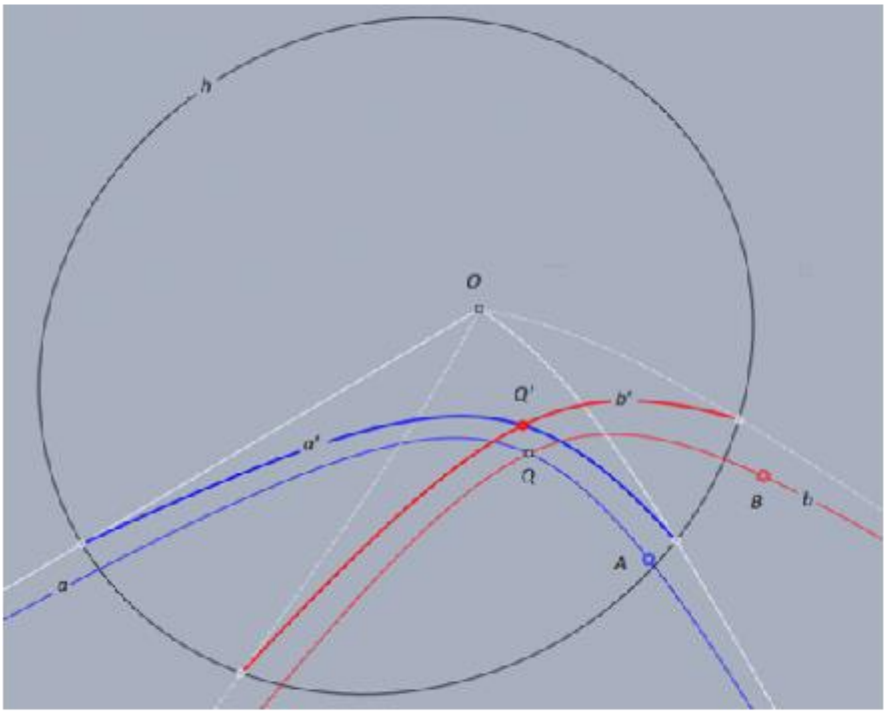
A Hjelmslev modell (ism)



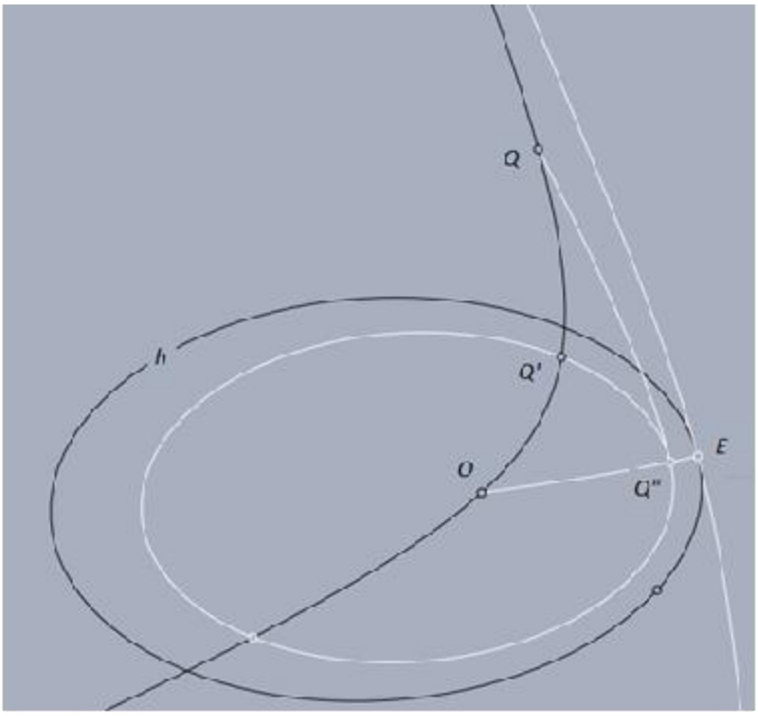
A kérdés az, hogy az a és b egyenes Q metséspontját jól reprezentálja-e a képük, a' és b' metszéspontja Q'? Egyértelmű-e e ez a ponttranszformáció?

A Hjelmslev féle pont transzformáció egyértelműségéről

Kísérleti „igazolás”: Fixen tartva Q -t, A és B mozgatható, Q' marad.



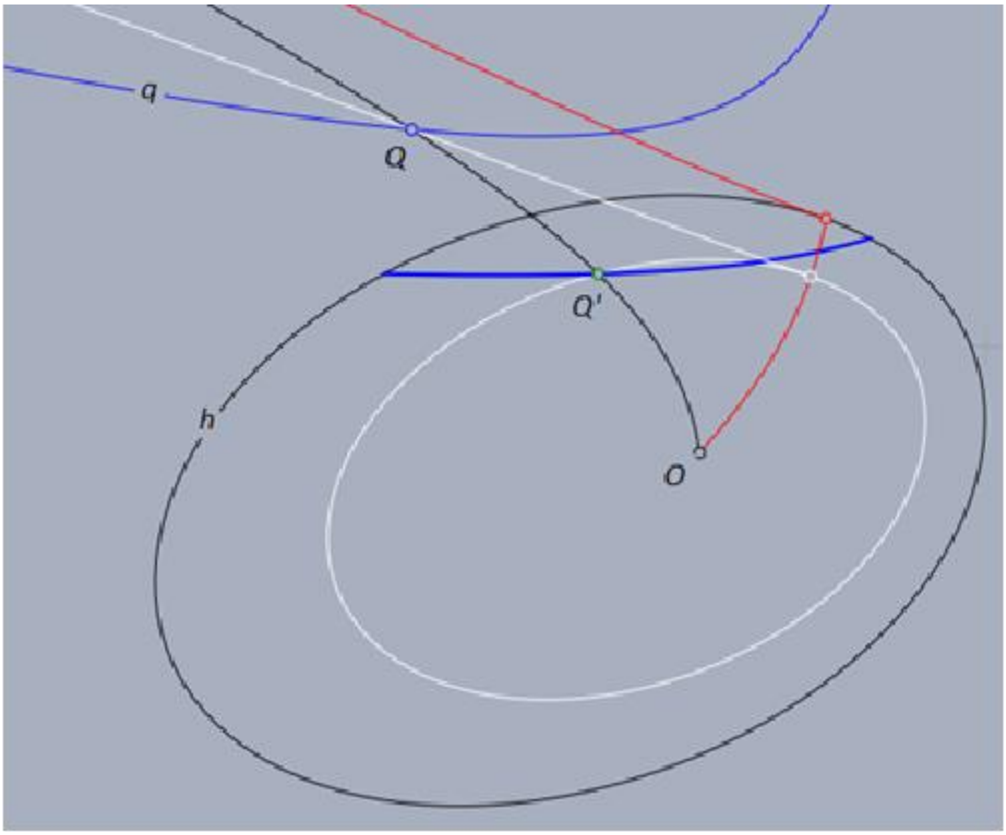
A Hjelmslev transzformáció eredeti megadása



A Q pont Q' Hjelmslev-féle képét a következőképpen határozzuk meg.

1. Meghúzzuk az OQ egyenest.
2. OQ -val párhuzamos érintőt húzunk a h körhöz. E az érintési pont.
3. Meghúzzuk az OE sugarat.
4. Q -ból merőlegest állítunk OE -re.
5. A OQ" sugarú kör segítségével megkapjuk Q' -t Q képét.

Hjelmslev tétele

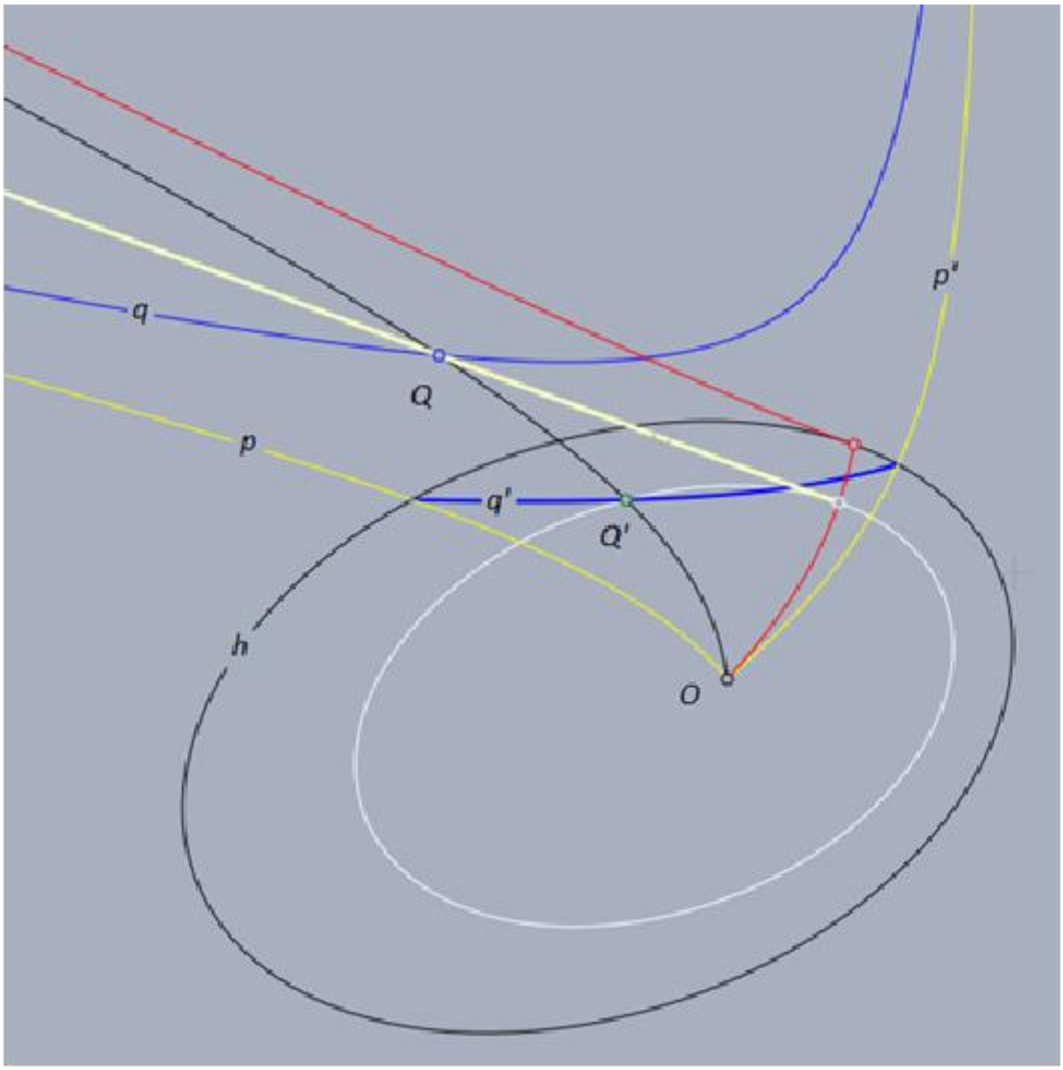


A q egyenesen levő Q pontok Hjelmslev transzformációval nyert Q' képei egy h -beli hiperbolikus szakaszon vannak.

Vagyis egyenes képe szakasz.

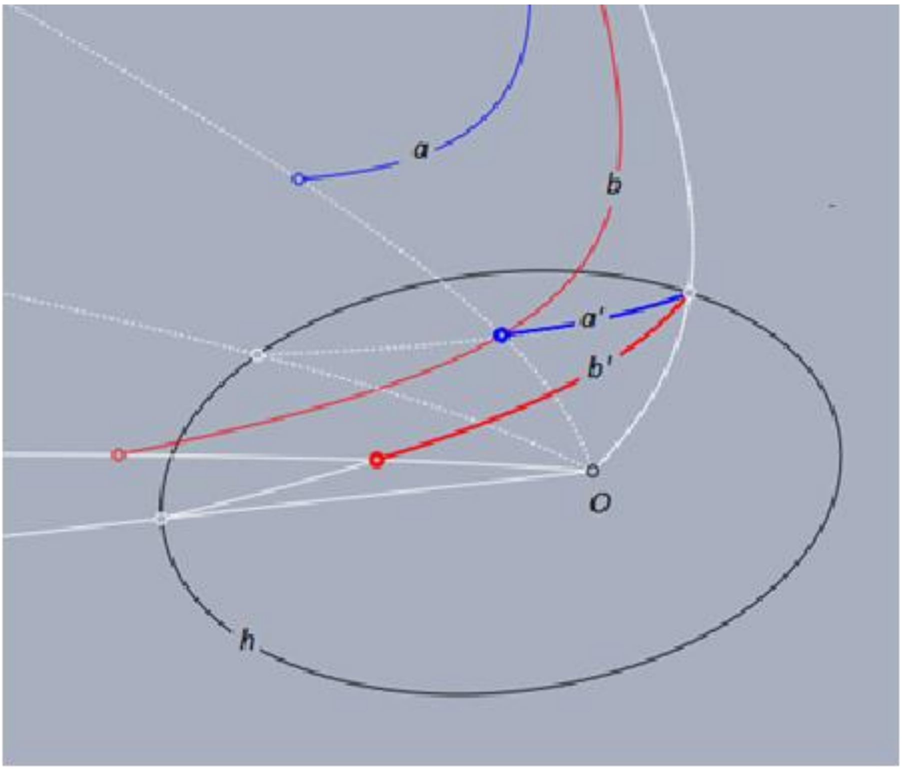
A két Hjelmslev transzformáció azonossága

(kísérleti ellenőrzés)



A q egyeneshez O -ból húzott p és p' párhuzamosok a $q'h$ körön (nem) levő pontjaiban metszik a h kört. Vagyis a két változat ugyanazt az eredményt adja.

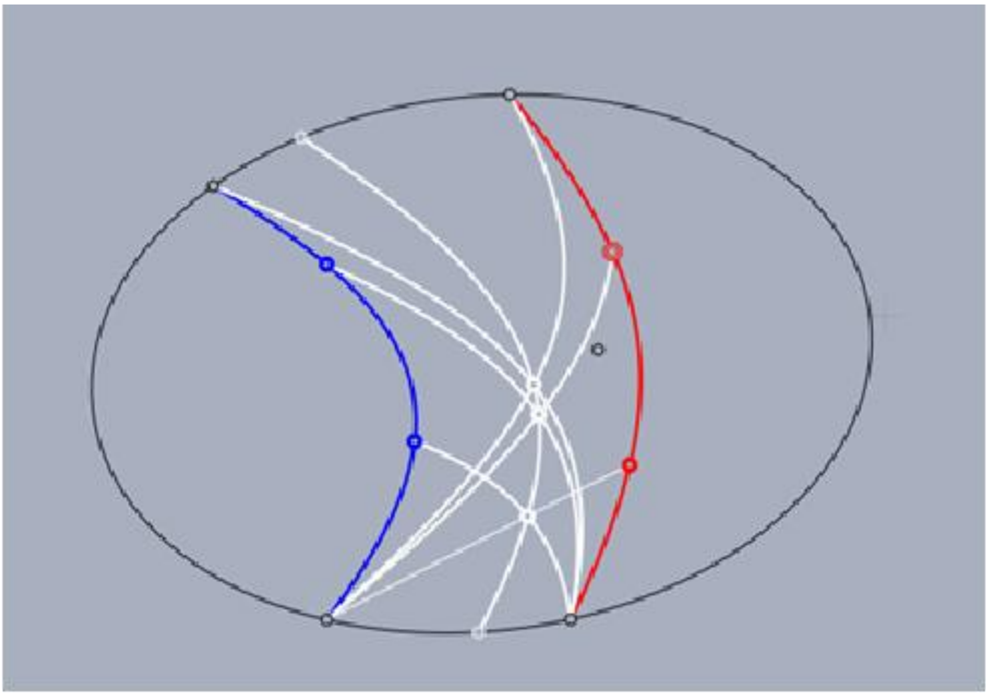
A párhuzamosságról a Hjelmslev féle modellben



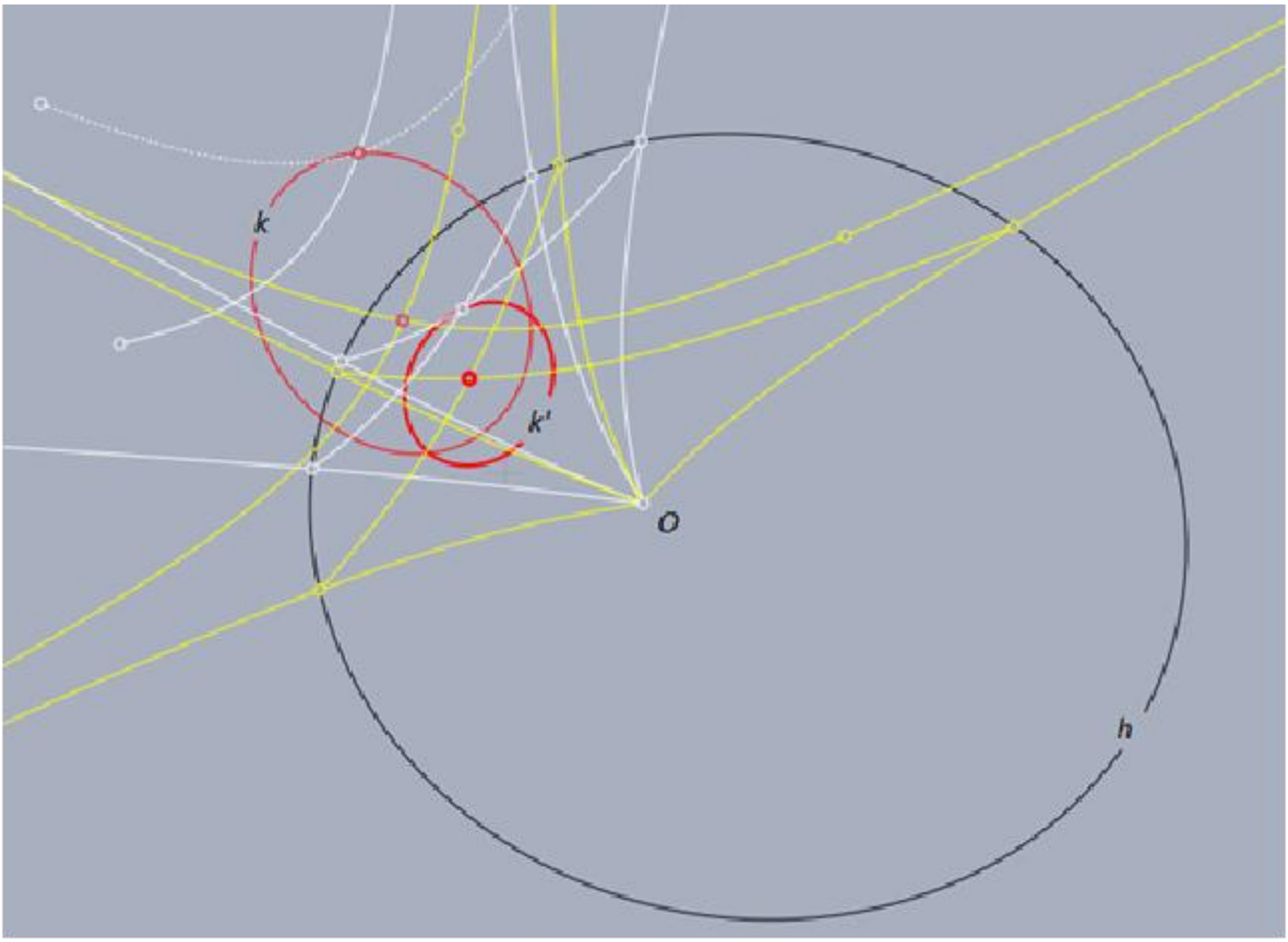
Párhuzamos egyenesek (félegyenesek olyan szakaszoknak felelnek meg a Hjelmslev modellben, amelyek a Hjelmslev körö találkoznak.

Ebből következik,hogy a szakaszmásolási szerkesztés egy az egyben átvehető.

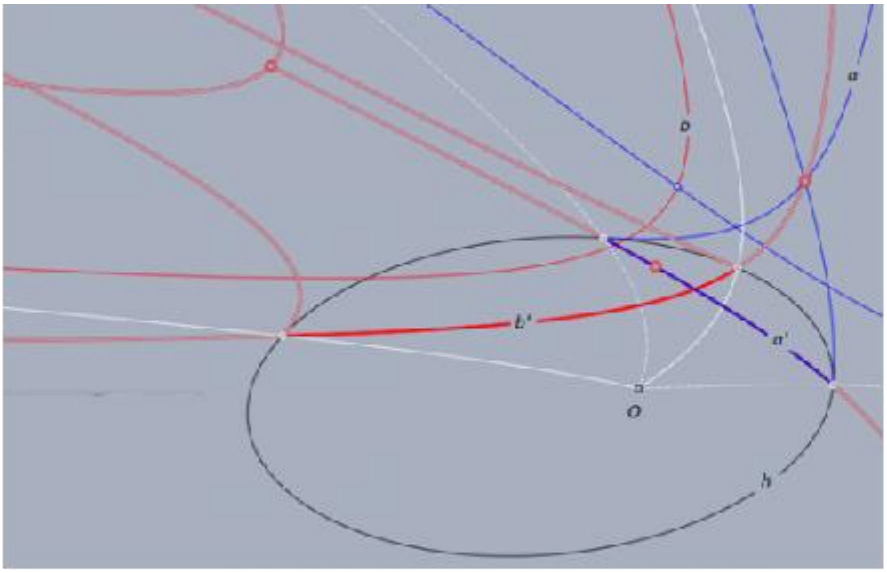
A szakaszmásolási szerkesztés



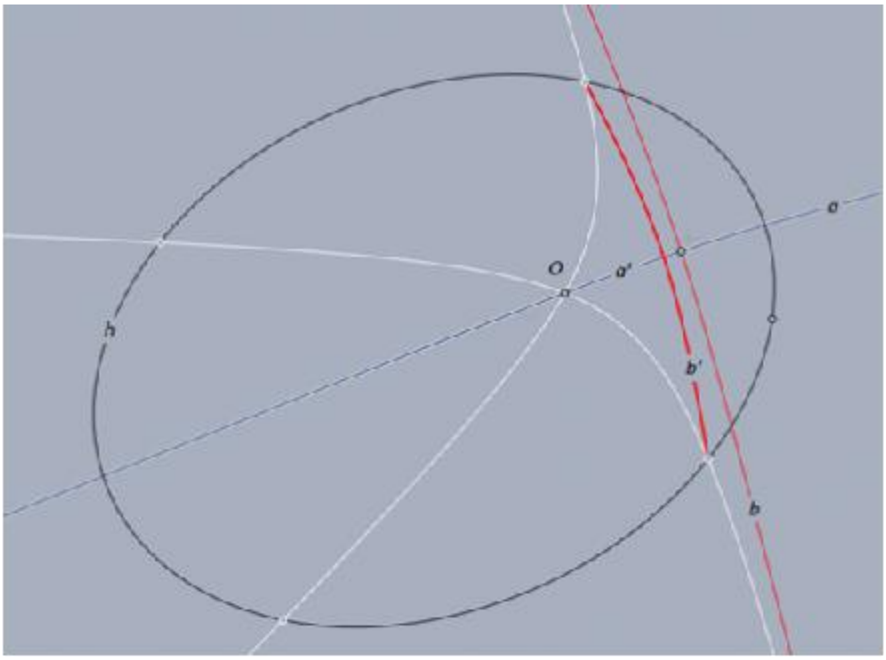
A kör képe a Hjelmslev modellben



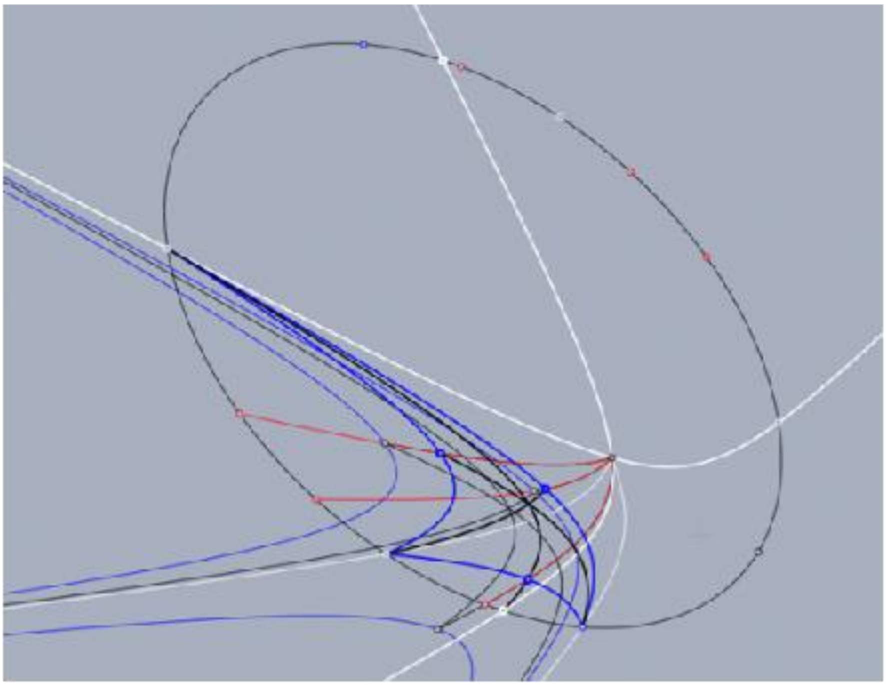
A merőlegesség megfelelője a Hjelmslev modellben



A merőlegesség egy speciális esetben



Az "ismeretlen" tétel biz.



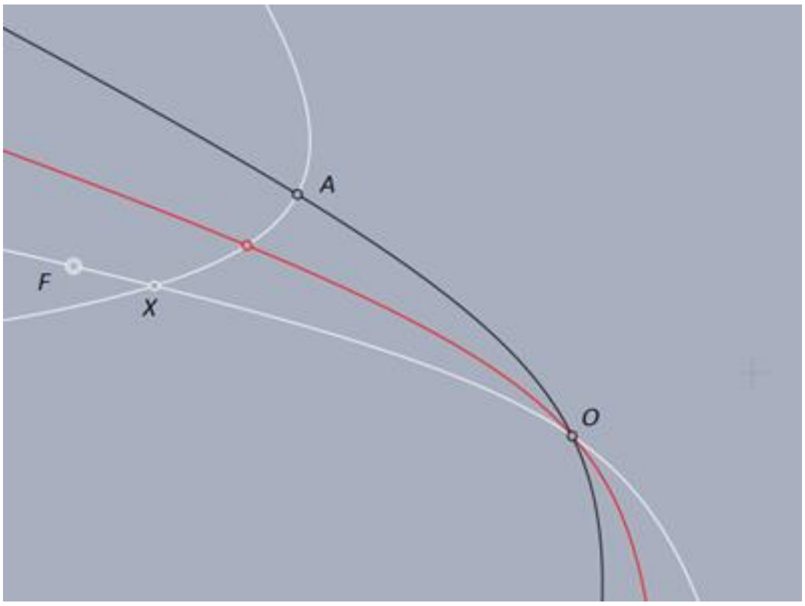
8 Szemléletes hiperbolikus geometria VI/2.

Szemléletes hiperbolikus geometria VI/2.

Témakörök

- Az izogonalitás fogalmának segítségével definiálható görbék az eukleidészi és a hiperbolikus geometriában
  - Izogonalitás metsző egyenesek esetében: kör. (első típusú sugársor)
  - Izogonalitás közös merőlegessel bíró egyenes sor esetében: hiperciklus (második típusú sugársor)
  - Izogonalitás párhuzamos egyenes sor esetében: paraciklus (harmadik típusú sugársor)
- Az izogonális görbék leglényegesebb tulajdonságai
  - Viszonyuk az egybevágósághoz (hiperciklus = ekvidisztásns,)
  - Ismétsés. Ekvidisztáns egyeneshez: nem egyenes.
  - Önmagukban elcsúsztathatóak "ciklusokáá
  - Mit lehet kezdeni három ponttal? Bolyai Farkas Tétele.
  - Hiperciklus szerkesztése, ha két pontja és bázis egyenesének egy pontja adott
- Az ekvidisztánsok rendszere, ha egy első típusú hiperbolikus sugársor adott
  - Egyértelmű párhuzamosság
  - Az affin sík axiomarendszere
    - A közrefogási axiómák
    - Az affin Desargues tétel
  - "Szakaszmásolás" az affin síkon
- Záró kérdés: hogyan lesz az affin síkból euklídeszi sík?

A kör

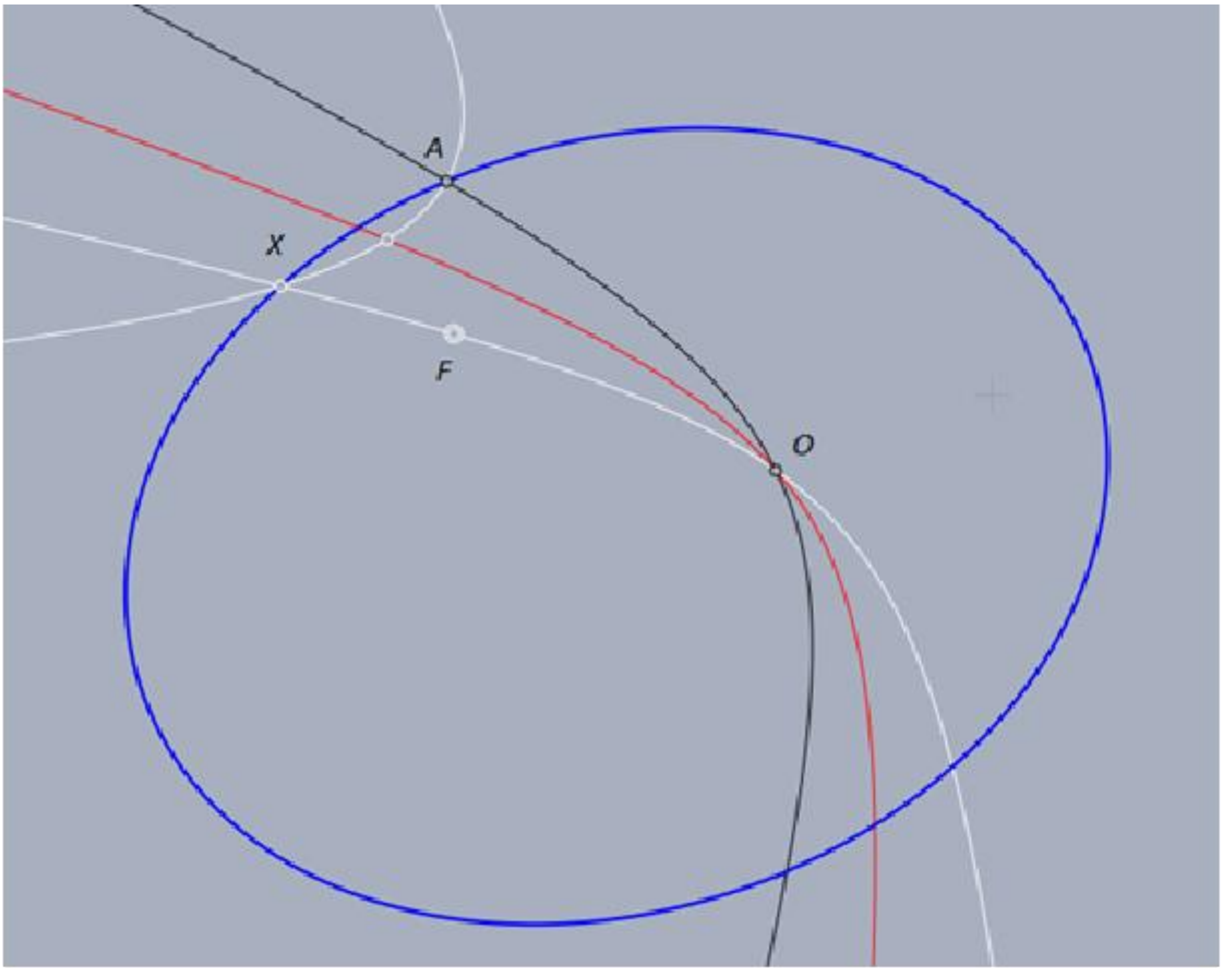


Feladat: (1) Adott egy O pont és az OA , OF egyenesek.

(2) Szerkesszük meg az X pontot úgy, hogy AX izogonális legyen $OAOX$ -szel.

(3) Vizsgáljuk az X pont útját midőn F körüljárja O -t.

Az eredmény egy kör:



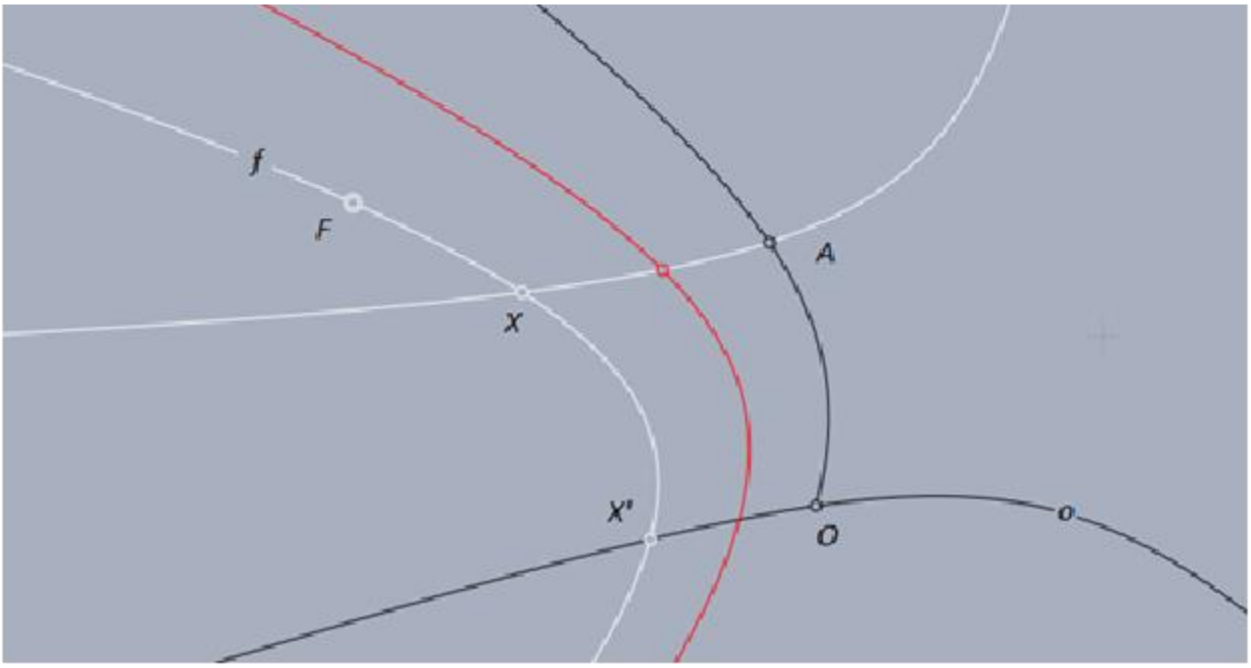
$OX = OA$, F helyzetétől függetlenül.

Feladat:

(1) Adott o egy egyenes és rajta egy O pont. Legyenek f és AO o-ra merőleges egyenesek.

(2) Szerkesszük meg az X pontot úgy, hogy AX izogonális legyen OA - f-el.

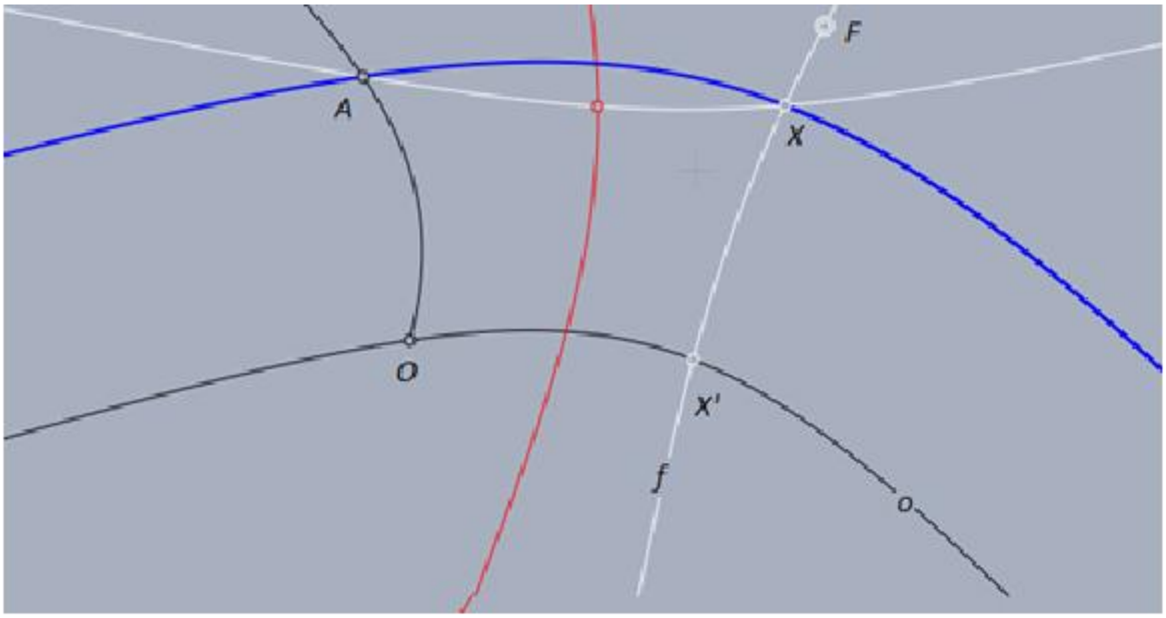
(3) Vizsgáljuk az X pont útját midőn F mozog.



Hiperciklus

Az eredmény egy vonal, ami nem egyenes.

Neve hiperciklus. Helyzete csak o -tól és A -tól függ.

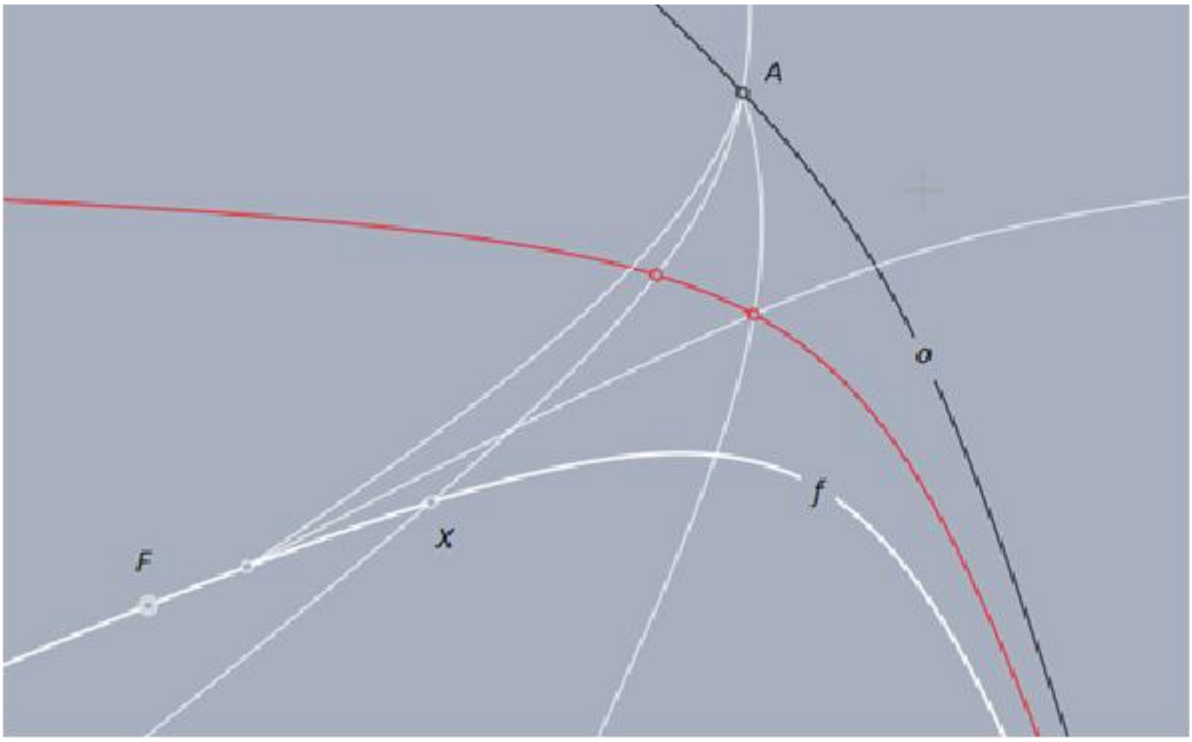


Feladat:

(1) Adott egy o egyenes és rajta egy A pont. Legyen f o -val párhuzamos egyenes, amely F -en keresztül megy.

(2) Szerkesszük meg az X pontot úgy, hogy Ao izogonális legyen XA -val.

(3) Vizsgáljuk az X pont útját midőn F mozog.

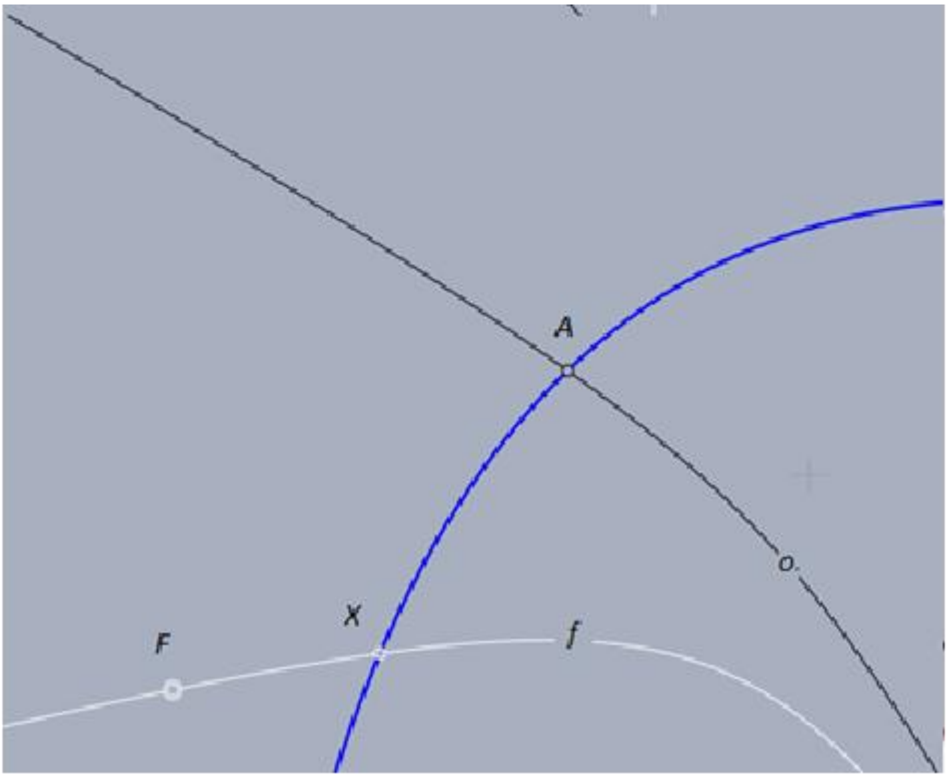


Paraciklus

Az eredmény egy vonal, ami nem egyenes és nem kör.

Neve paraciklus (horociklus [Lobacsevszkíj], L-vonal [Bolyai]). Helyzete csak o -tól és A -tól függ.

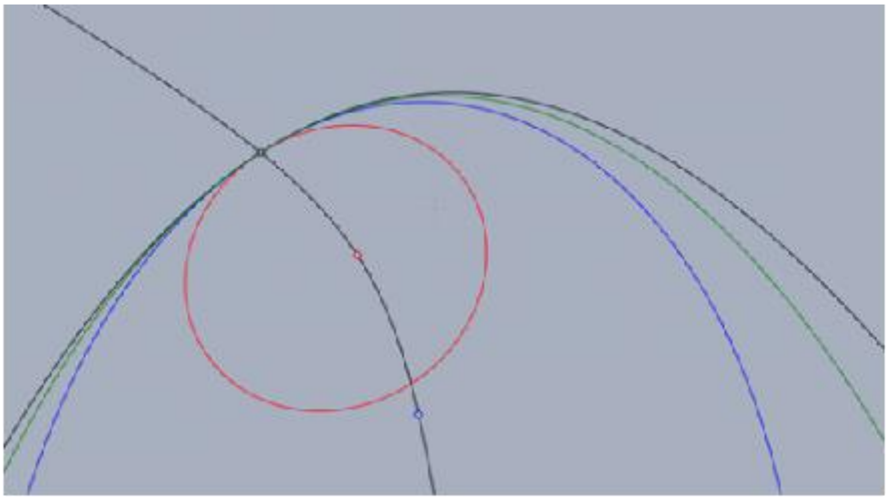
Két zászló, melyek a síkot úgy mozgatják, hogy a hiperciklus önmagában csúszik el.



A paraciklus

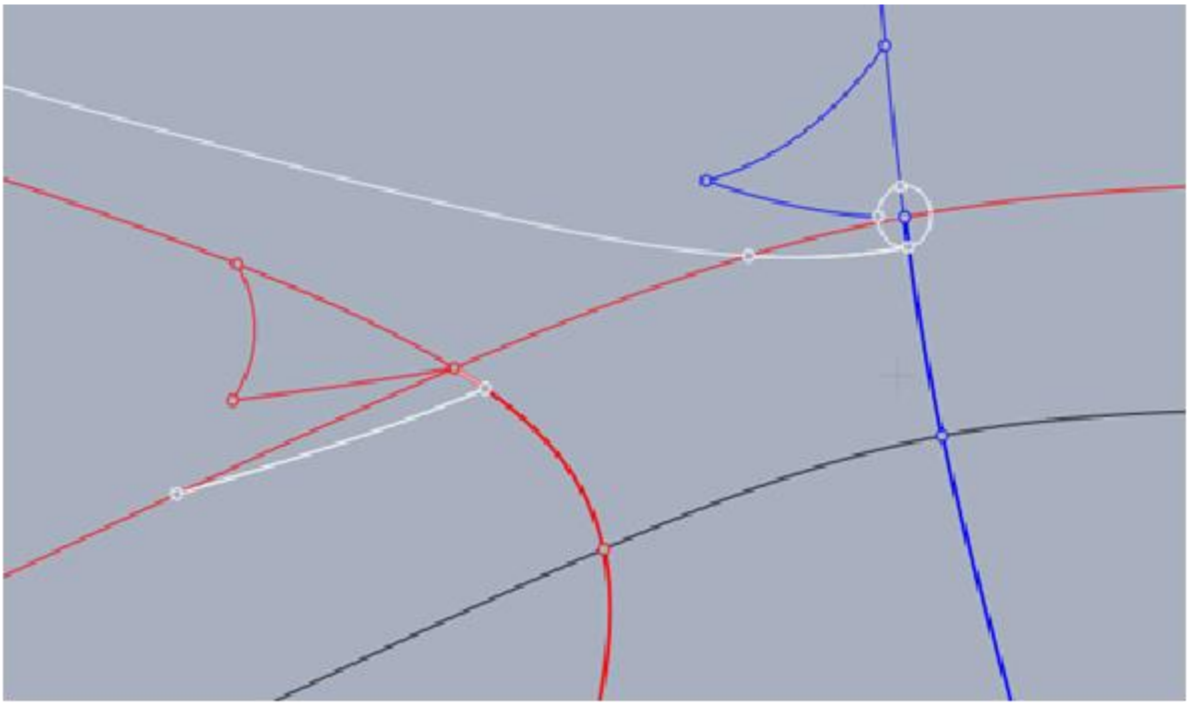
A paraciklus leginkább egy "végtelen sugarú" körhöz hasonlít.

"Határkör", ahogy Lobacsevszkíj nevezte.



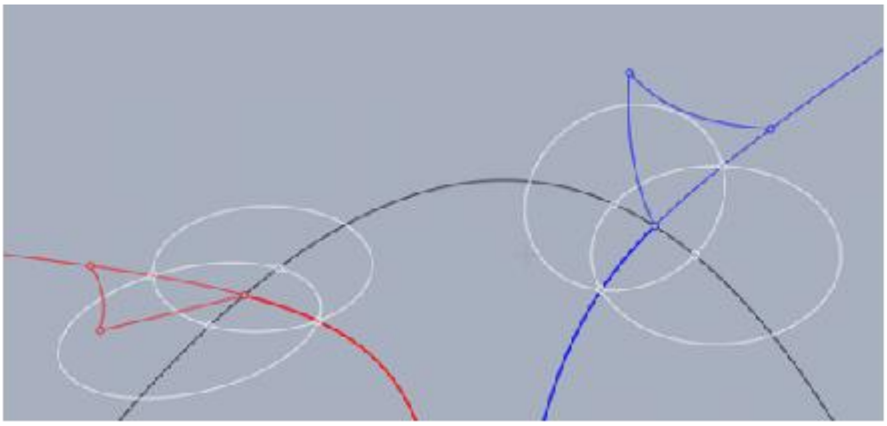
Hiperciklus elcsúszása

Két zászló, melyek a síkot úgy mozgatják, hogy a hiperciklus önmagában csúszik el.



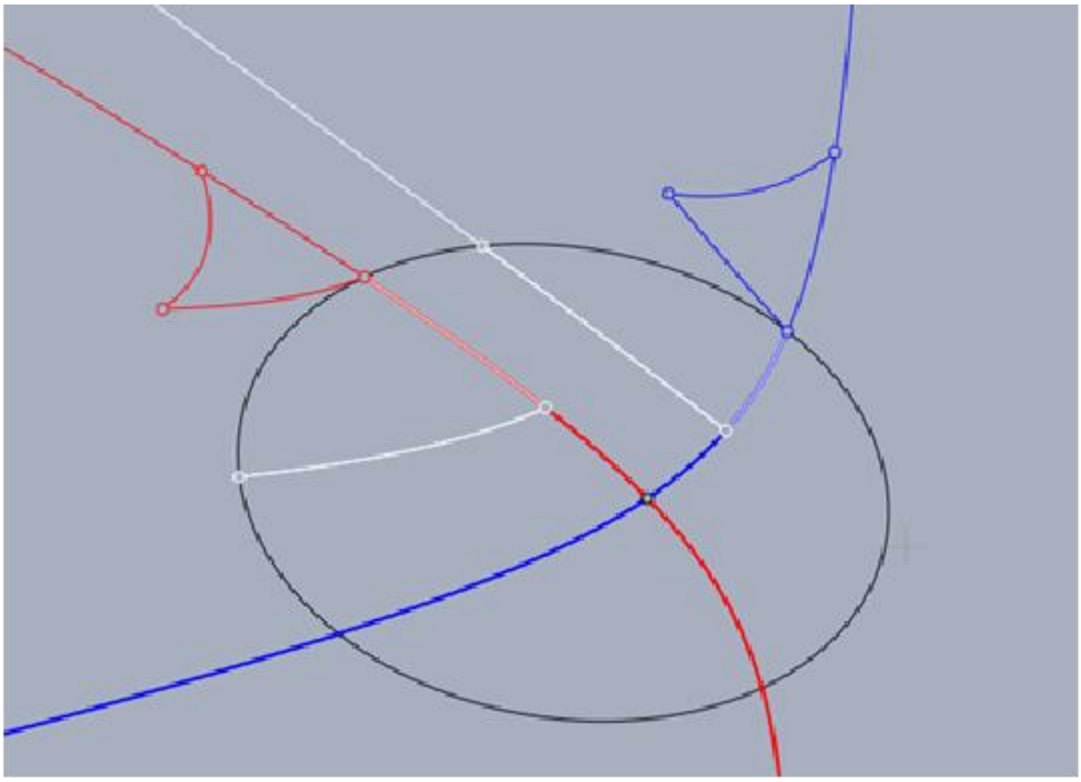
Paraciklus elcsúszása

Két zászló, melyek a síkot úgy mozgatják, hogy a paraciklus önmagában csúszik el



Kör elcsúszása

Két zászló, melyek a síkot úgy mozgatják, hogy a kör önmagában csúszik el.

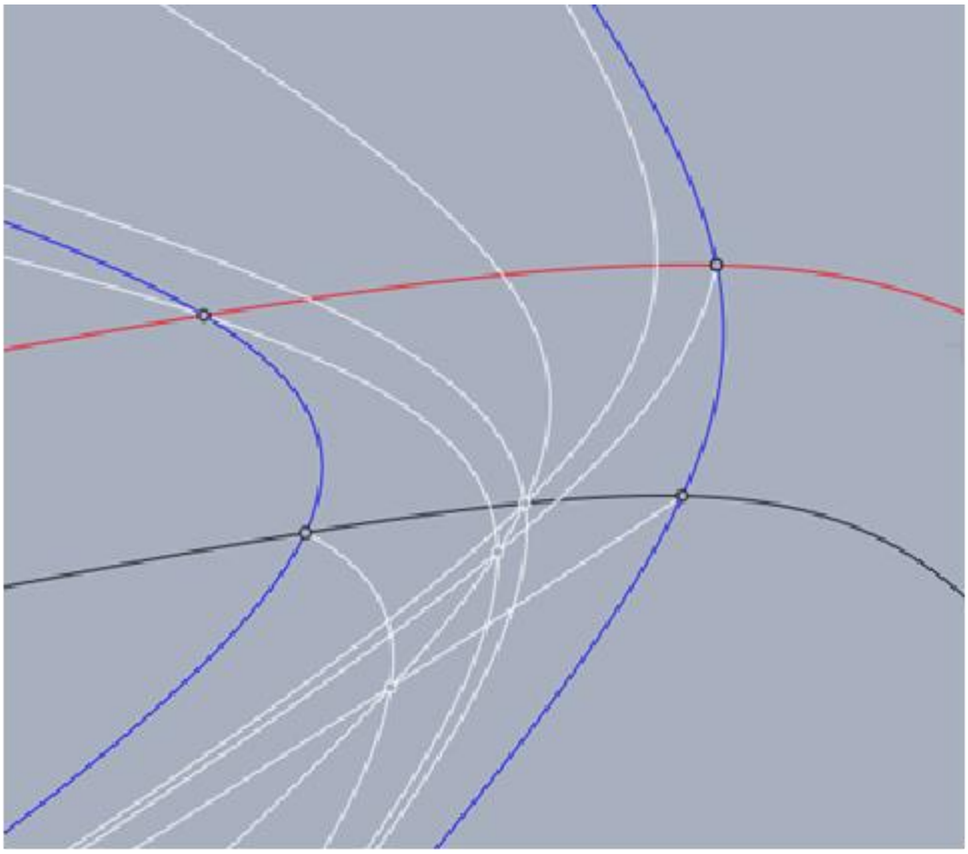


Ekvidisztáns az egyeneshez

A hiperciklus: ekvidisztáns az egyeneshez, de nem egyenes.

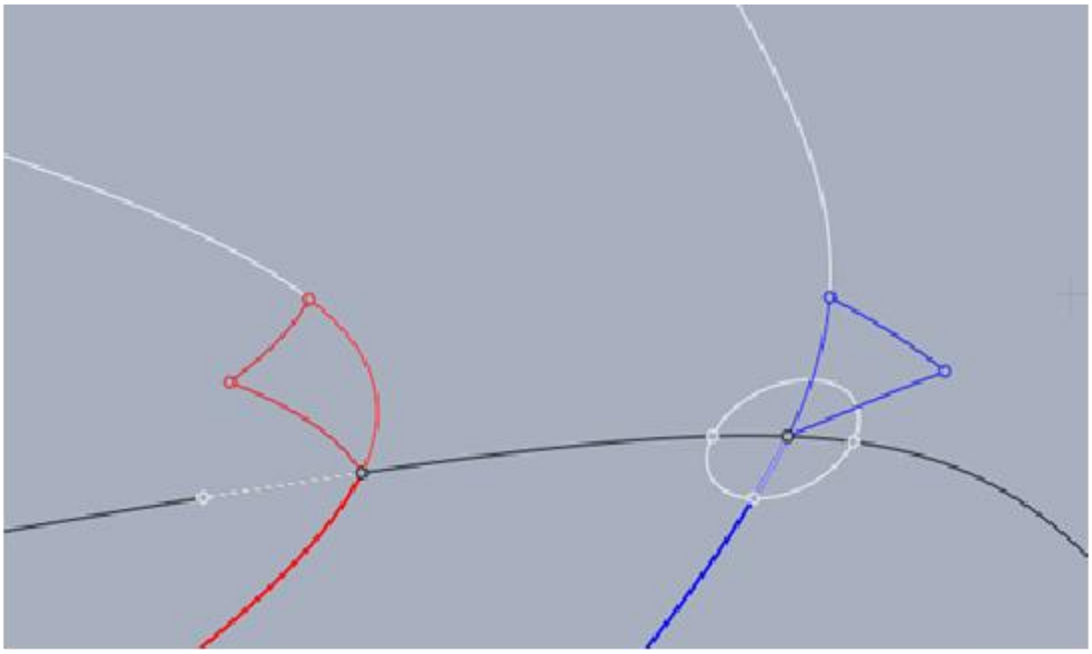
A kék egyenesek merőlegesek a fekete egyenesre.

A kimetszett szakaszok egybevágóak.



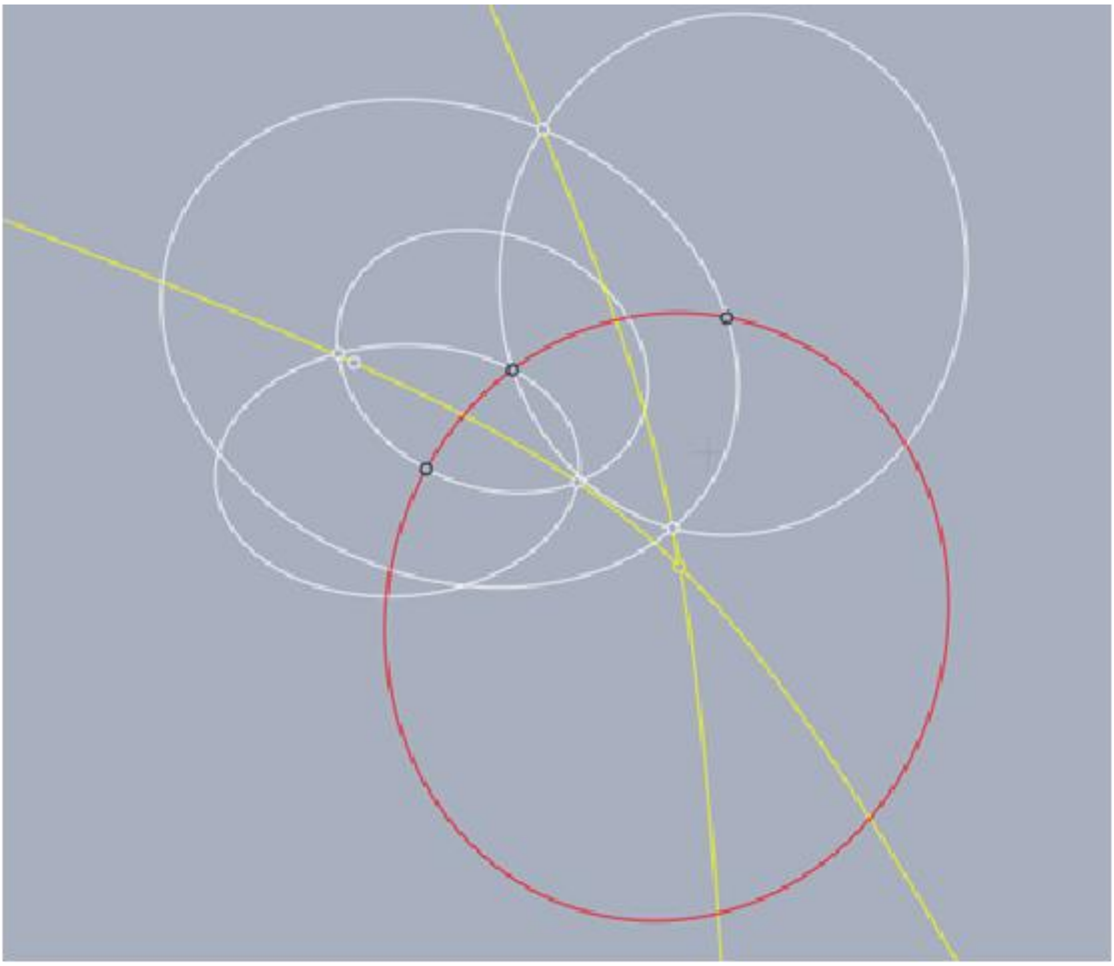
Egyenes eltolása

Két zászló, amelyek az egyenest önmagában tolják el.



Három pont

Mit lehet kezdeni három ponttal?



Bolyai Farkas tétele:

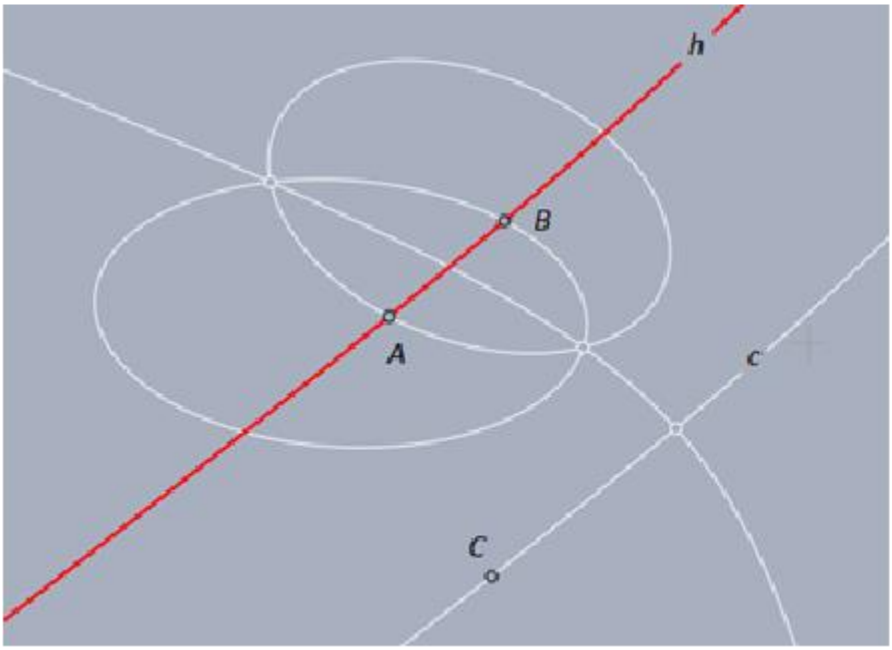
Ha három ponton át vagy egyenes vagy kör megy át, akkor a geometria eukleidészi. Vagyis: Az az axioma, hogy három pont egy egyenest vagy egy kört határoz meg: az eukleidészi párhuzamossági axióma helyettesítő axiómája lehet.

A mi abszolút geometriánk nem eukleidészi! (Mint láttuk.)

Ekvidisztáns szerkesztése

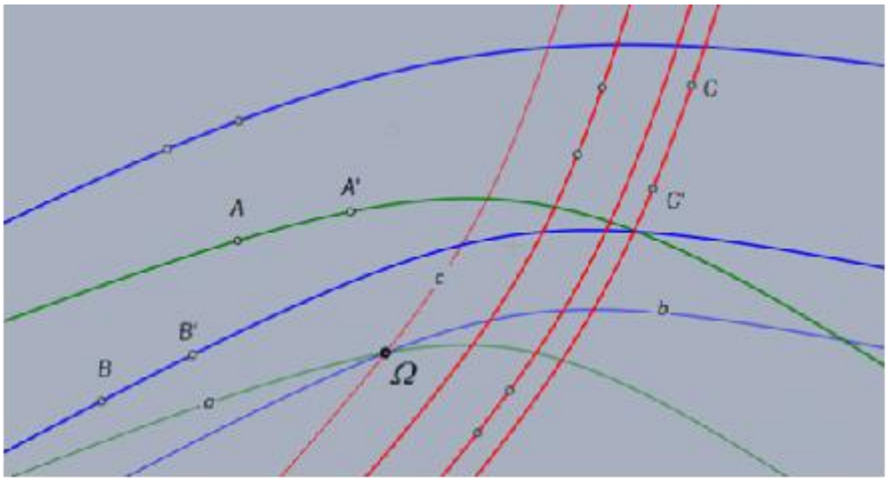
Ekvidisztáns szerkesztése, ha két pontja és bázis egyenesének egy pontja adott

Adott A , B és C . A és B a megszerkesztendő ekvidisztáns pontjai; C a bázis egyenes pontja. Megszerkesztjük az AB szakasz felező merőlegesét és C -ből merőlegest állítunk erre: c ; c a bázis egyenes. A c -hez A -n keresztül szerkesztett ekvidisztáns kereszül meg B -n is – és fordítva.



Ekvidisztánsok

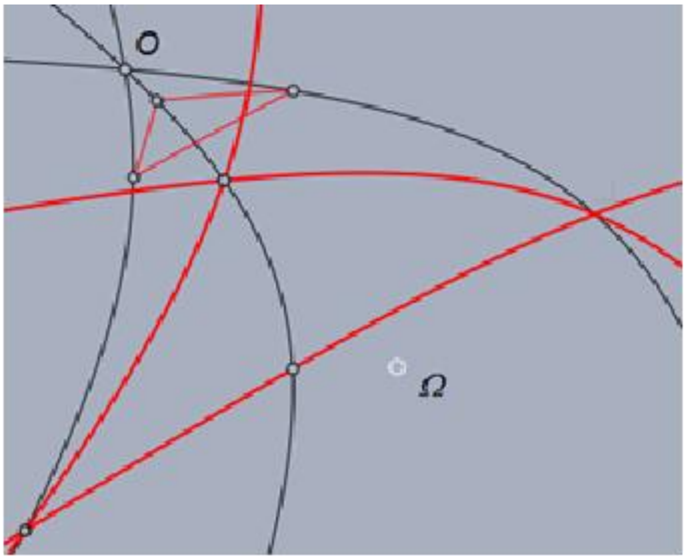
Rögzítsünk most egy Ω pontot a hiperbolikus síkon és tekintsük erra a pontra úgy, mint egy ekvidisztánsokból alkotott rendszer bázisegyeneseinek közös pontjára. (Két pont egyértelműen meghatároz egy ilyen ekvidisztánst, ha Ω adott



Vonalak rendszere

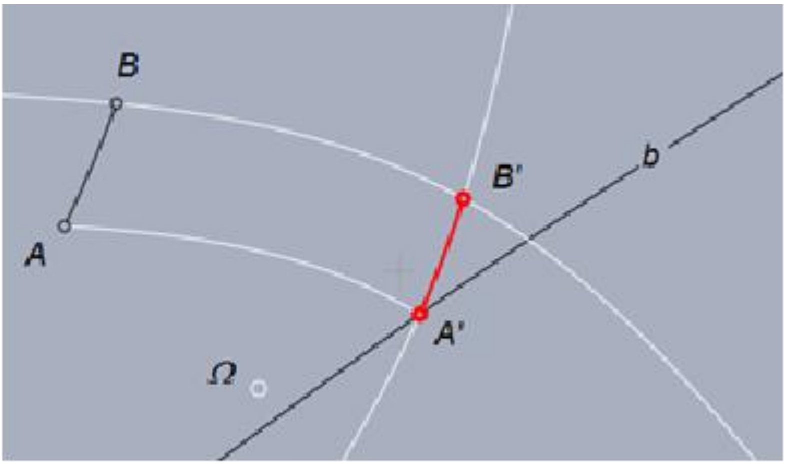
Ezeknek a vonalaknak a rendszere megint olyan, mintha egyenesekről lenne szó:

- Két pont meghatározza őket
- Teljesülnek a közrefogási axiómák
- De a párhuzamossági axióma most eukleidészi.
- Még egy szép, de axiomatikusan megkövetelendő tulajdonság teljesül:
- AZ affin Desarges tétel.



Az ilyen vonalrendszerrel megáldott síkot hívják affin síknak.

Szakaszmásolás az affin síkon



Nincs kör: Tehát nem tudunk szakaszt másolni.

De mi legyen a kör?

Záró kérdések:

Hogyan nő ki az affin geometriából az eukleidészi geometria?

A kérdés jelentős, mert ha sikerül megcsinálnunk a most kapott affin síkon az eukleidészi geometriát, akkor modellezzük az eukleidészi geometriát a hiperbolikus síkon.

Miért érdekel minket ez? Ez segíthet a hiperbolikus geometriát jobban megérteni, hiszen Eukleidészi szemléletünk már van...

9 Szemléletes hiperbolikus geometria VII/1.

Szemléletes hiperbolikus geometria VII/1.

Témák

Ismétlés

- A hyperciklus izogonalitásra alapozott definíciója
- A hyperciklus ekvidisztanciára alapozott definíciója
- A két definíció azonossága
- Ekvidisztáns szerkesztése, ha két pontja és egy harmadik pont adott
- "Párhuzamos" ekvidisztáns szerkesztése, ha a harmadik pont és egy ekvidisztáns már adott.
- Egy pont rögzítése a hiperbolikus síkon egy új, érdekes vonalrendszert ad a kezünkbe.

Az affin sík logikai felépítése (Artin-Coxeter)

- a-egyenesek és h-egyenesek

A hiperbolikus sík Klein modellje a hiperbolikus síkon (előrevetítés)

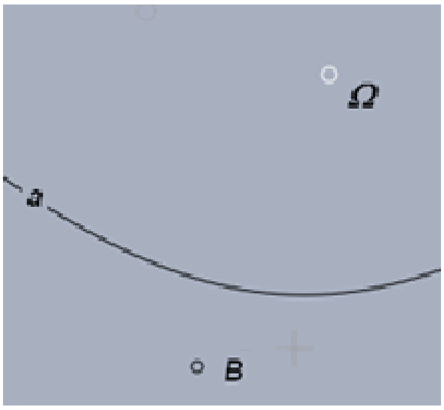
Mérés az affin (és a hiperbolikus) síkon

- Felezés, Összeadás, Szakasz egyenes mentén való eltolása.
- Az affin (hiperbolikus) számegyenes
- Hilbert furcsa axiómája (kitérő)
- A nagy kérdés
- Szürreális számok (kitérő)
- Hjelmslev tételek az affin síkon
- Az affin és a hiperbolikus hossz közötti kapcsolat kérdése
- Az affin sík minden egyeneséhez külön egység kell, mert nincs kör(ző)
- Átmérés körző nélkül az egyik a-egyenesről egy másik a-egyenesre

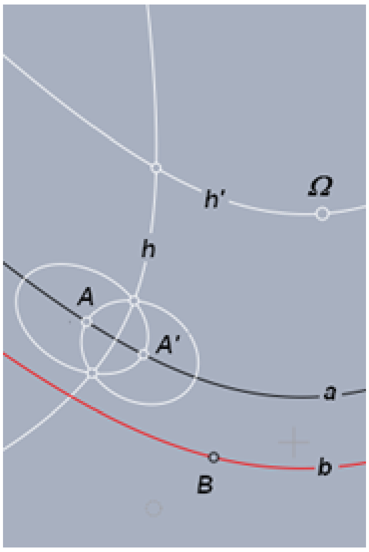
A Pantográfia művészete

- A homotécia (középpontos nyújtás)
- A homotécia tulajdonságai (fixpont, nyújtási arány, eltolás, mint spec. Eset)
- A pantográf paradoxona
- Miért homotécia eszköz a merev rudakból összeszerelt pantográf?

"Párhuzamos" ekvidisztánsok szerkesztése



Adott az a a-egyenes és rajta kívül egy B pont. Megszerkesztendő a B ponton át egy olyan b a-egyenes, amely nem metszi a-t.



Nyilván egy olyan b a-egyenest kell szerkesztenünk, amelynek Ω-t tekintve a -val közös a bázis$h$ -egyenese.

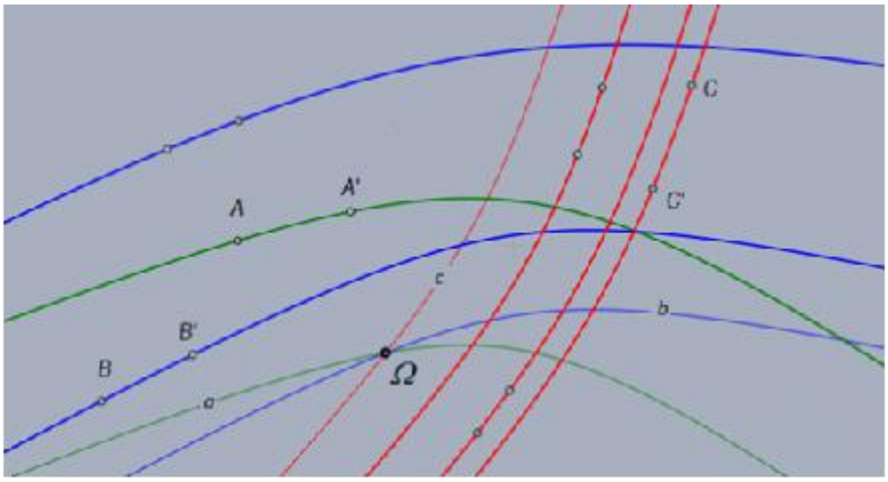
Felveszünk tehát két pontot A -n és megszerkesztjük h -körök és h -egyenesek segítségével a h ' bázis ah -egyenest.

Milyen értelemben "párhuzamosak" a , b és h' ?

Pontosan az eukleidészi (affin) értelemben.

Ekvidisztánsok

Rögzítsünk most egy Ω pontot a hiperbolikus síkon és tekintsük erra a pontra úgy, mint egy ekvidisztánsokból alkotott rendszer bázisegyeneseinek közös pontjára. (Két pont egyértelműen meghatároz egy-egy ilyen ekvidisztánst, ha W adott.)



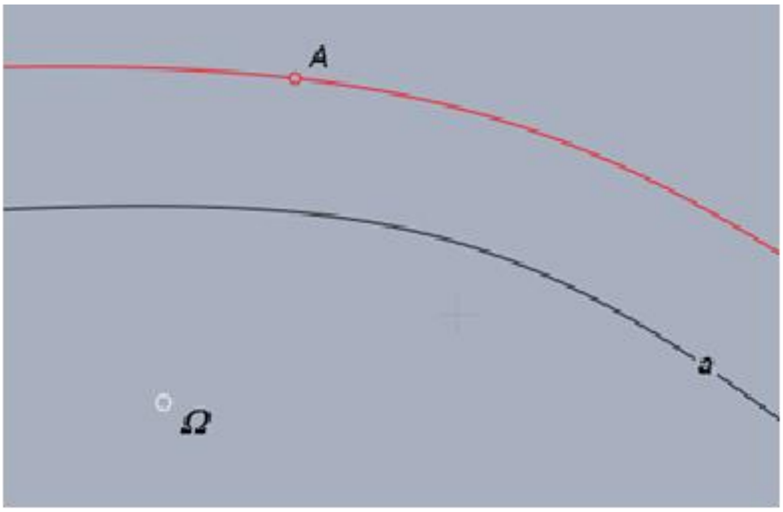
Az affin geometria logikai felépítése (Artin-Coxeter)

- Definiálatlan alapfogalmak:

    - Pont (a kiterjedés nélküli izé...)
    - Közrefogás (a "közötte van" definiálatlan fogalma)
- Definiált fogalmak:
    - a-Szakasz, a-intervalum
    - a-Félegyenes, a-egyenes
    - a-Sík
- Az affin geometria axiómái:
    - A rendezett geometria axiómái (R1, ...R7)
    - A folytonossági axióma
    - A affin (eukleidészi) párhuzamossági axióma (P)
    - Az affin Desargues tétel (D)

Az affin párhuzamossági axióma

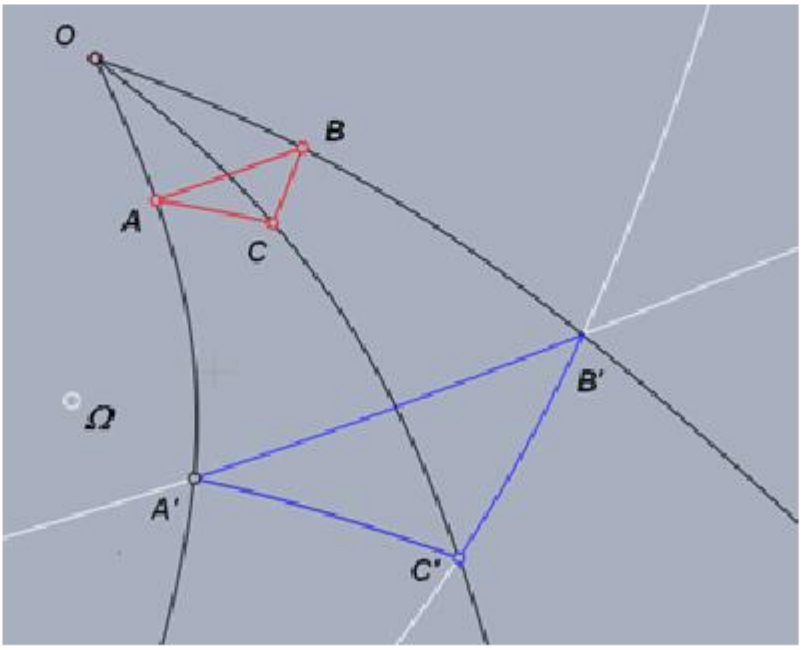
P Bármely a a-egyeneshez és egy kívüle fekvő ponton át egyetlen egy olyan a -egyenes húzható, amely nem metszi a -t.



A mi esetünkben ez a definícióból adódik.

D Az affin Desargues "tétel", most axióma

(Tétel is axióma is, mikor hogy)



Adottak az OA , OB , OC a-félegyenesek és így az ABC a-háromszög.
Legyen AB és AC párhuzamos $A'B'$ -vel és $A'C'$ -vel.

Ekkor CB is párhuzamos $C'B'$ -vel.

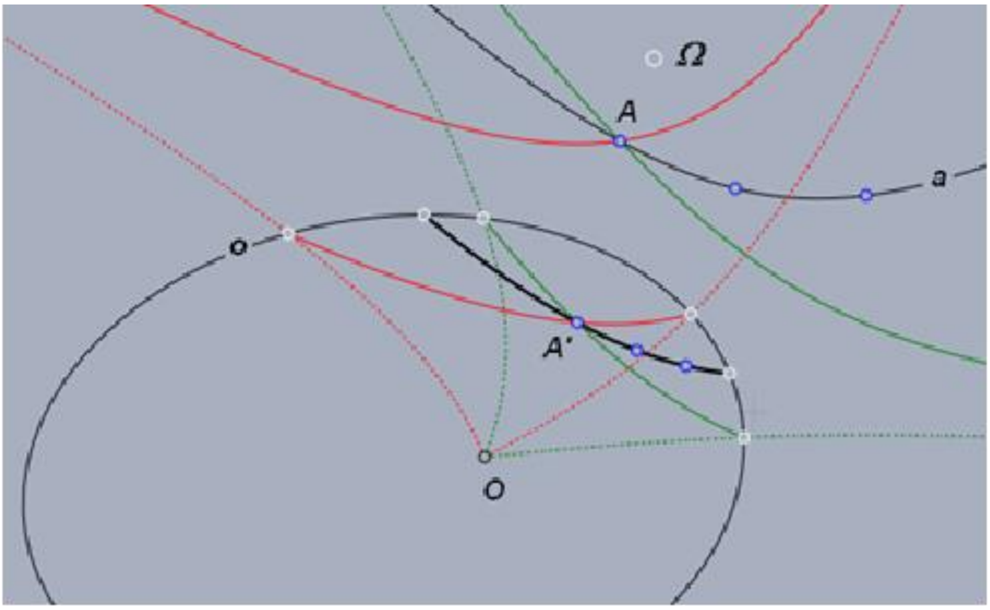
Megjegyzések:

1. Ezt bizonyítani kellene, mint a hiperbolikus geometria egy tételét. De a szemléletre és a kísérleti eredményekre hagyatkozunk.
2. Az affin sík töbi axiómájából viszont nem vezethető le ez az állítás.
3. Az abszolút geometriának sem tétele, mert kell hozzá a párhuzamosság.
4. Az eukleidészi geometriának viszont tétele, kell hozzá a párhuzamosság és az egybevágóság. (Hilbert, Grundlagen...)

Rájöttem, hogy mit csinálok én itten (Kis szerénységgel...)

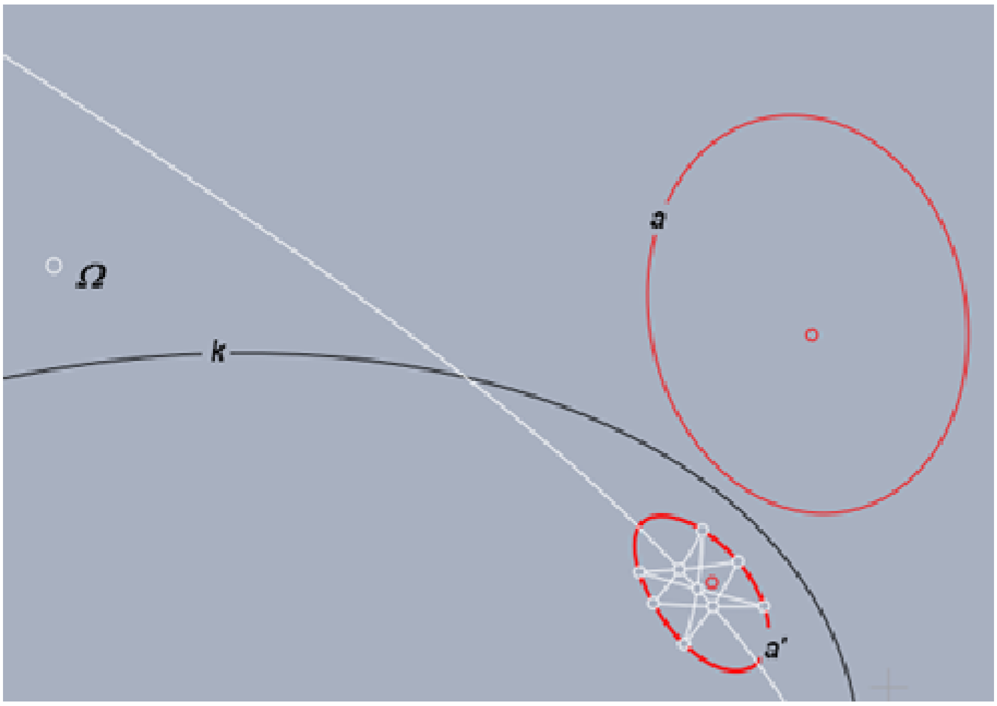
"Annyi csak a szándékom, hogy e fogalmakat működésbe hozzam, s hasznuk majd a használatban fog megmutatkozni [...]." (I. Kant (1724-1804), Kísérlet a negatív mennyiségek fogalmának a világbölcseletbe való bevezetésére)

A hiperbolikus sík Klein modellje a hiperbolikus síkon



Hiperbolikus kör képe kúpszelet szerű.

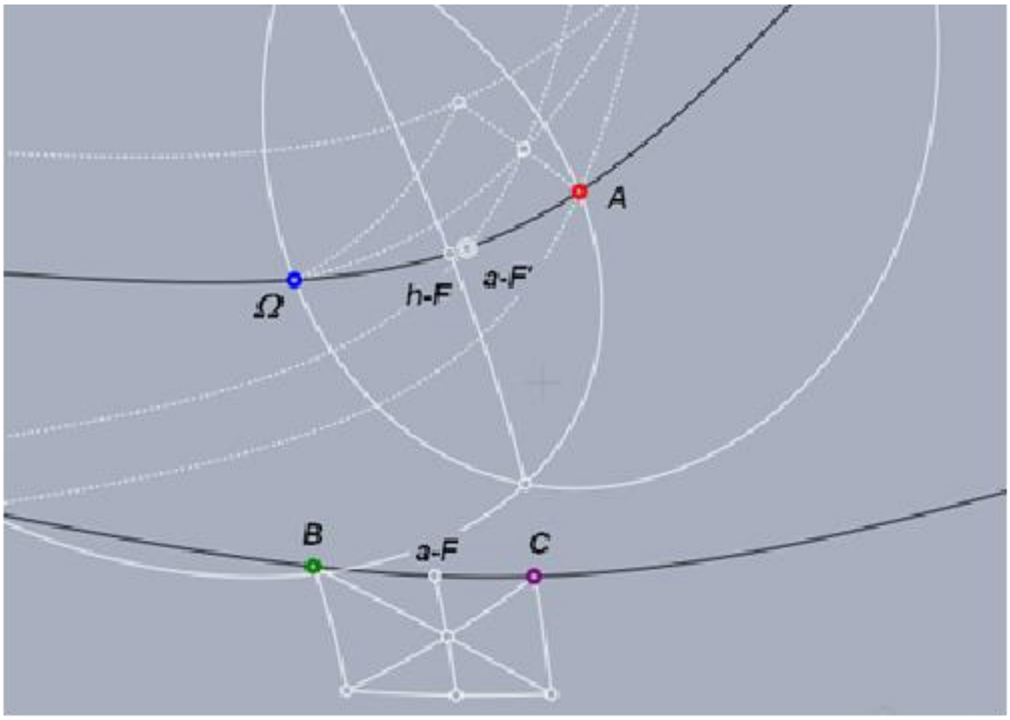
Most azonban affin egyenesek teljesítik a Pascal tételt.



A kérdés:

Van affin kúpszelet?

Szakasz felezése

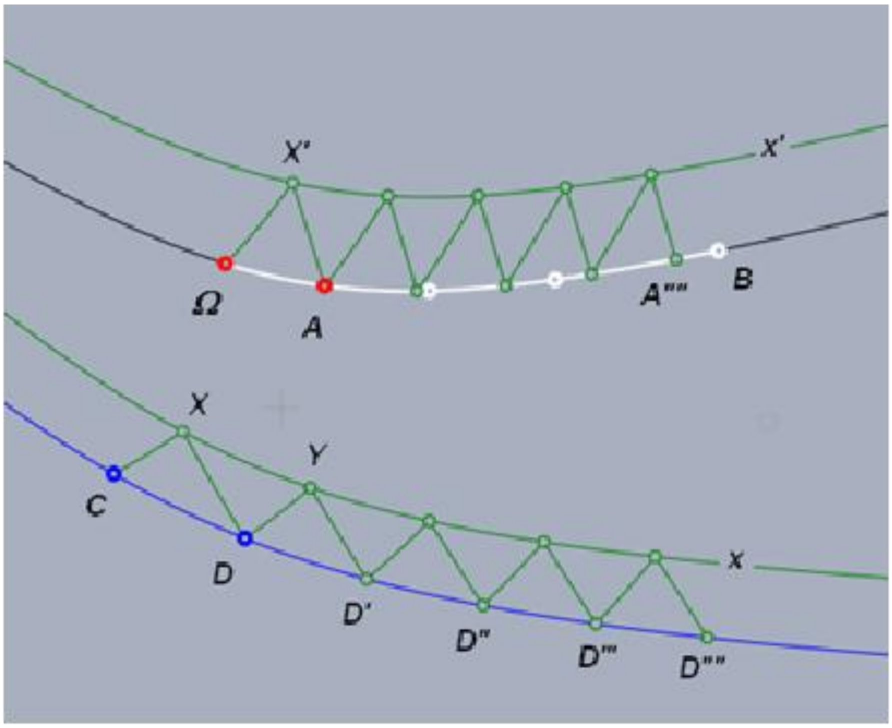


A BC szakasz egy a-szakasz: Az a-felezés módszere a paralelogramma módszer.

Tehát a paralelogramma átlói a-felezik egymást a "középpontban".

Az ΩA szakasz egyszerre a-szakasz és h-szakasz: kétféleképpen lehet felezni. Egyszer majd tudnunk kéne, mi a kapcsolat. (Most az a-felezésről van szó)

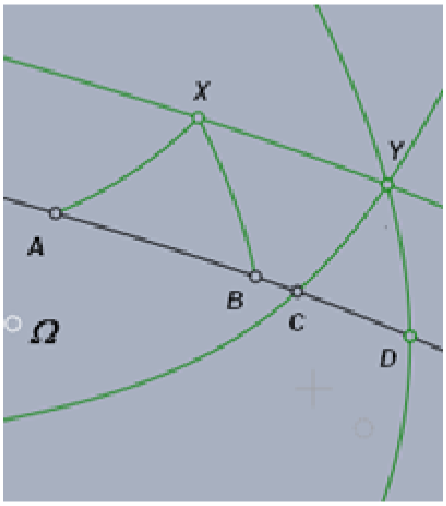
Szakasz eltolása az affin és a hiperbolikus síkon



a) A feladat a CD a-szakasz eltolása a D pontba. (1) Húzok egy tetszőleges X párhuzamost a a-egyeneshez és azon felveszek egy tetszőleges pontot.

(2) A CX a-egyenessel húzok egy párhuzamost a D ponton keresztül; ez kijelöli az Y pontot.

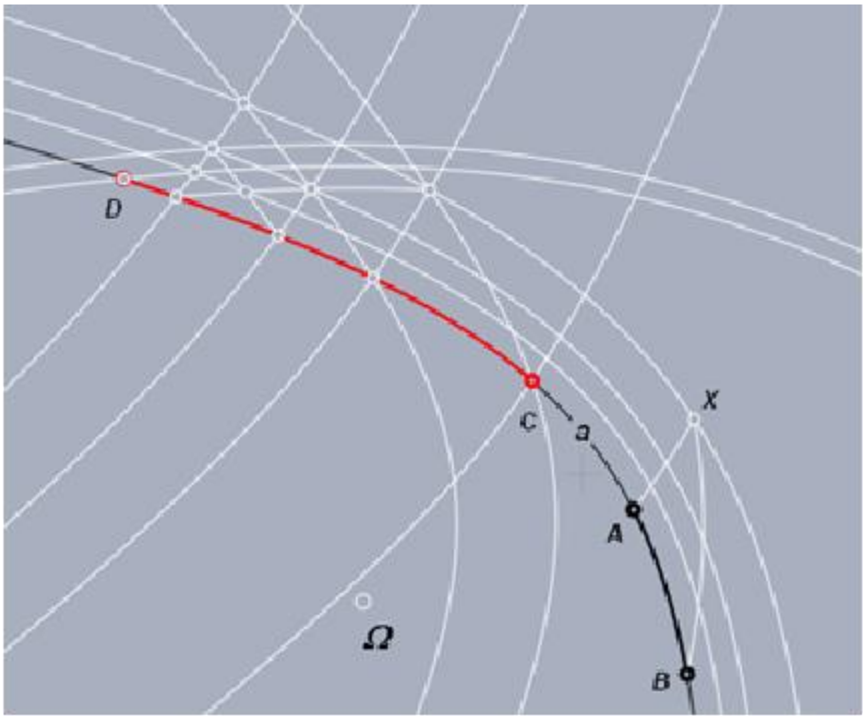
(3) Az Y ponton keresztül húzok egy párhuzamost a DX -szel; ez kijelöli a D' pontot. Stb. Ugyanezt az ΩA ah-szakasszal is meg lehet csinálni. Kétféleképpen is...



b) A lemásolt szakasznak nem kell feltétlenül a lemásolandó szakasz végpontjából indulni. A feladat lehet az AB a-szakasz lemásolása a C pontból az AB a-egyenesre. Megoldás azonos.

A-szakasz-egységben kifejezett hossza

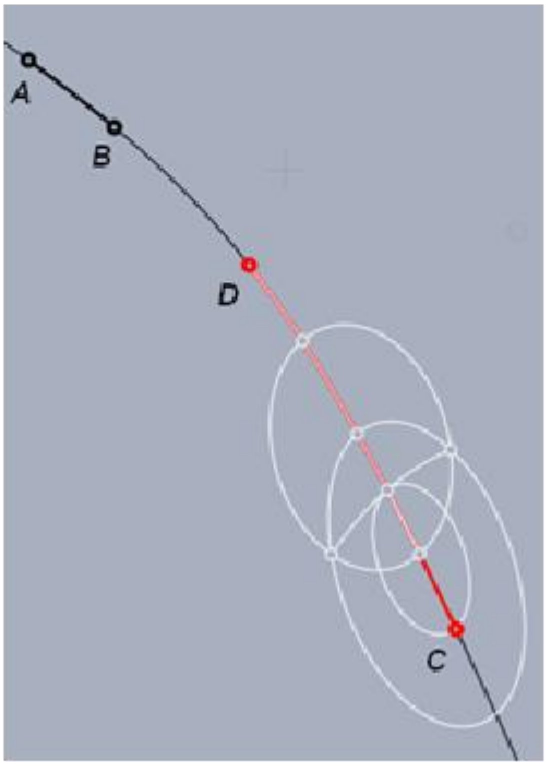
Az AB a-egyenesen lévő CD a-szakasz AB a-szakasz-egységben kifejezett hossza: $2\frac{1}{4}$, azaz $\frac{9}{4}$.



A diadikus törtek mindenütt sűrűn helyezkednek el a valós egyenesen.

Vagyis, ha egy affin egyenes egy szakasza egységként, és egy kezdőpont adott, akkor a valós számok megfeleltethetőek az affin egyenes pontjainak. Az a-síkon is van valamiféle egybevágóság: ha egy egyenesen (vagy egy vele párhuzamos egyenesen maradunk) és megadunk egy egységszakaszt; akkor ezekre a párhuzamos a-egyenesekre kiterjeszthetjük az AB egységben való mérést.

A fenti ábrán pl. azt találtuk, hogy $CD = \frac{9}{4}AB$.



Ugyanígy a hiperbolikus egyeneseken. Ha egy h-szakasz, mint egység adott, akkor ebben az egységben megmérhetünk bármilyen szakaszt. Az egység szakasznak és a lemérendő szakasznak most nem is kell ugyanazon az egyenesen lenni.

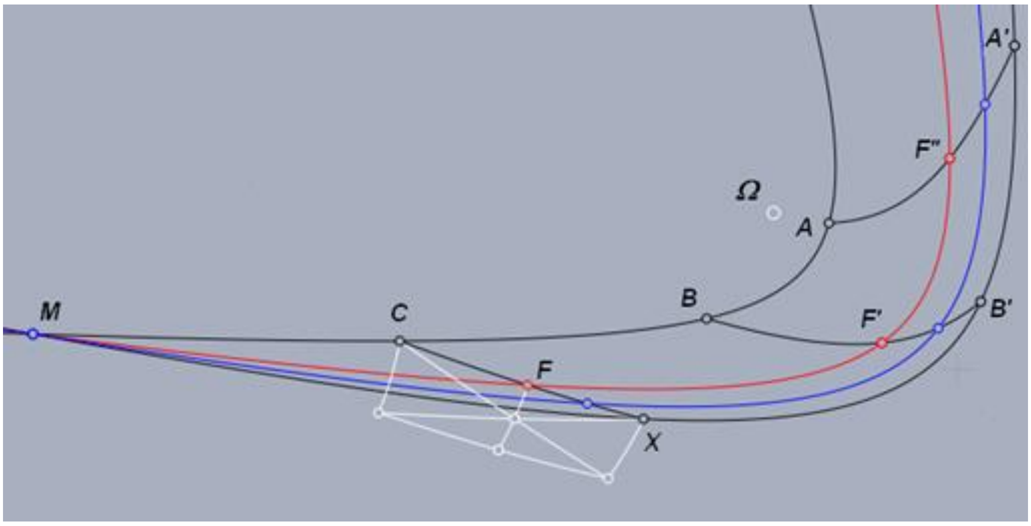
A fenti ábrán pl. azt találtuk, hogy $CD = \frac{9}{2}AB$.

Olvasnivaló

Ha valaki azt hinné, hogy a valós egyenes és a geometriai egyenes megfeleltetése világos a számára annak ajánlott:

D. E. Knuth: Számok valóson innen és túl. (Gondolat, 1987)

Egy affin Hjelmslev tétel



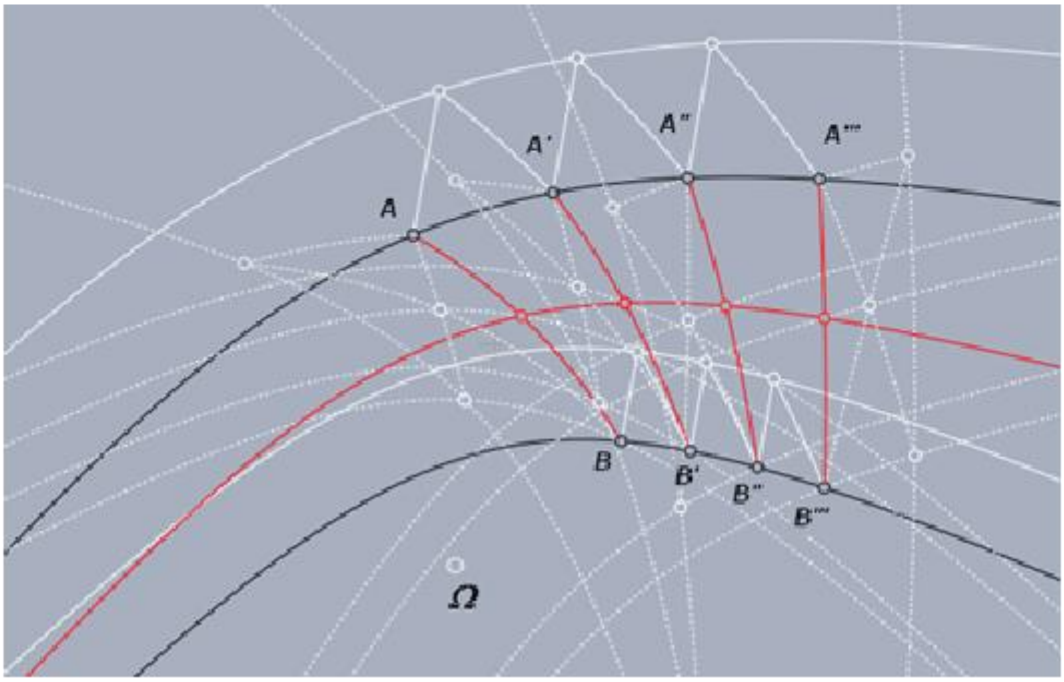
Az MA a-egyenesen felvesszük a tetszőleges C, B pontokat. Továbbá, felvesszük az ugyancsak tetszőleges MX egyenest. A B', A' pontok úgy keletkeznek, hogy CX -szel a-párhuzamost húzunk B -n és A -n át. A CX , a BB' és az AA' a-szakaszok affin felezőpontjait jelölje F, F' és F".

F, F' és F" egy a-egyenesre esnek.

A fehér paralelogramma a felezést szolgálja.

Ugyanígy a "háromnegyedelő ($\frac{n}{2k}$-adoló)" pontok (kék) is egy a-egyenesre esnek. Megjegyzés: Ezek az a-Hjelmslev egyenesek átmennek az M ponton is. Vajon szög $\frac{n}{2k}$-adoló a-egyenesek ezek? Heee? Mi az, hogy affin szög?

"Az" affin Hjelmslev tétel



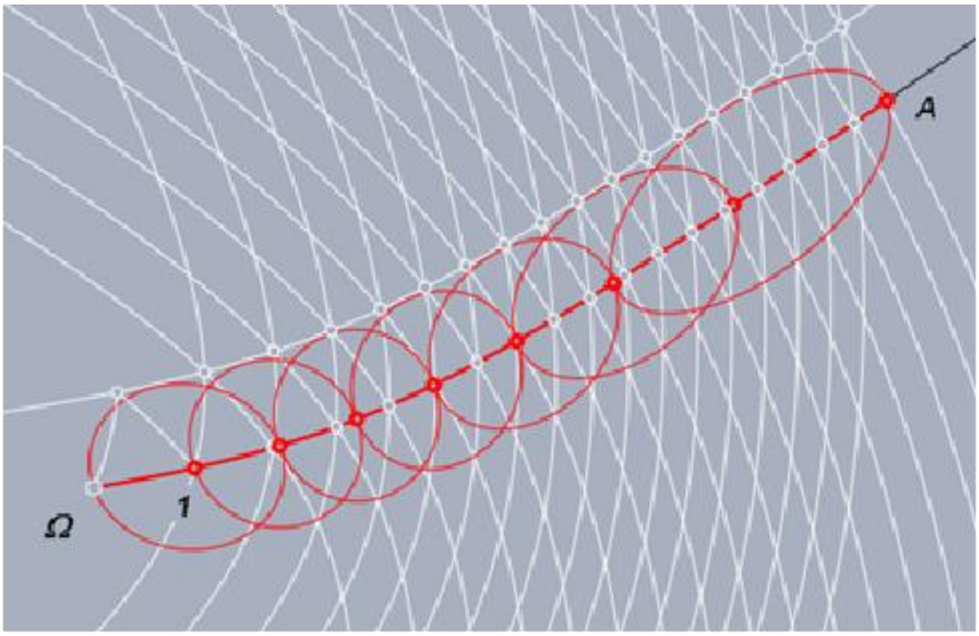
Az AA' egyenesen az A'' , A''' pontokat úgy vettem fel,
hogy $AA' = A'A'' = A''A'''$ legyen affin értelemben; a fehér segéd a-egyenesek szolgáltak az AA’ a-szakasz másolásakor.

Ugyanígy a tetszőleges BB' egyenesen $BB' = B'B'' = B''B'''$ affin értelemben.

Az AB , a $A'B'$, $A''B''$ és az $A'''B'''$ a-szakaszok affin felezőpontjai egy a-egyenesre esnek.

Ez a tény is azt mutatja, hogy az affin szakaszok egyenlősége egyenesenként értendő (nincs összehasonlítás) és a felezőpontok viselkedése az abszolút geometriában tanultaknak megfelelő.

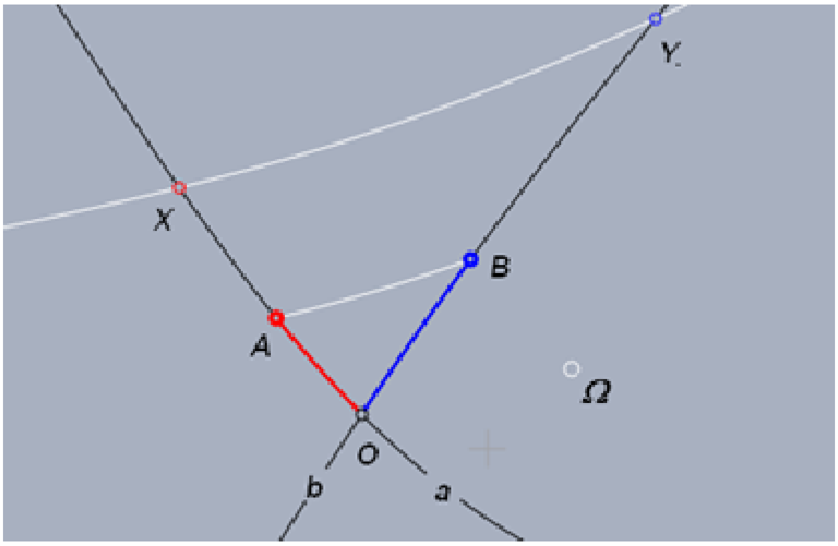
Egy később megválaszolandó nagy kérdés:



Itt az ΩA ah-szakasz hosszát mértem meg egy közös Ω_1 egységszakasz h-szerű és a-szerű sorozatos másolásával. ΩA h-hossza 8 egységnek, a-hossza pedig 18 egységnek adódott.

Vajon mi az összefüggés W -ból induló ah-szakaszok a-hossza és a h-hossza között? $a = f(h)$; $18 = f(8)$; és $5 = f(4)$; f ?

Átmérés egyik egyenesről a másikra

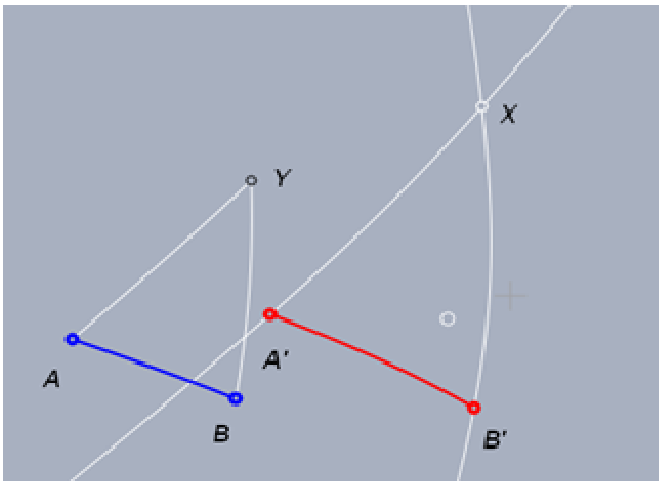


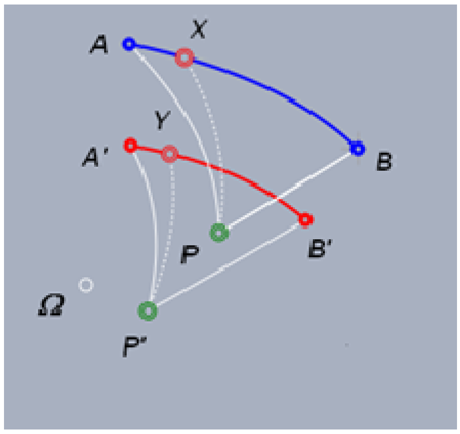
Legyen adott két metsző a-egyenes, a és b , valamint ezeken két külön egység OA és OB . Legyen a -n adott az u hosszú a-szakasz $(OX = uOB)$. b -n elő kell állítani az „ugyancsak”u hosszú $OY = uOB$ a-szakaszt.

a és b vagy metszik egymást, vagy párhuzamosak, vagy egybe esnek. ha párhuzamosak, vagy egybe esnek, akkor szó szerint előállítható $OY = uOB$.

Ha a és b párhuzamosak vagy egybe esnek, akkor is lehet különböző egység rajtuk.

A homotécia, mint a számunkra legkedvesebb affin transzformáció

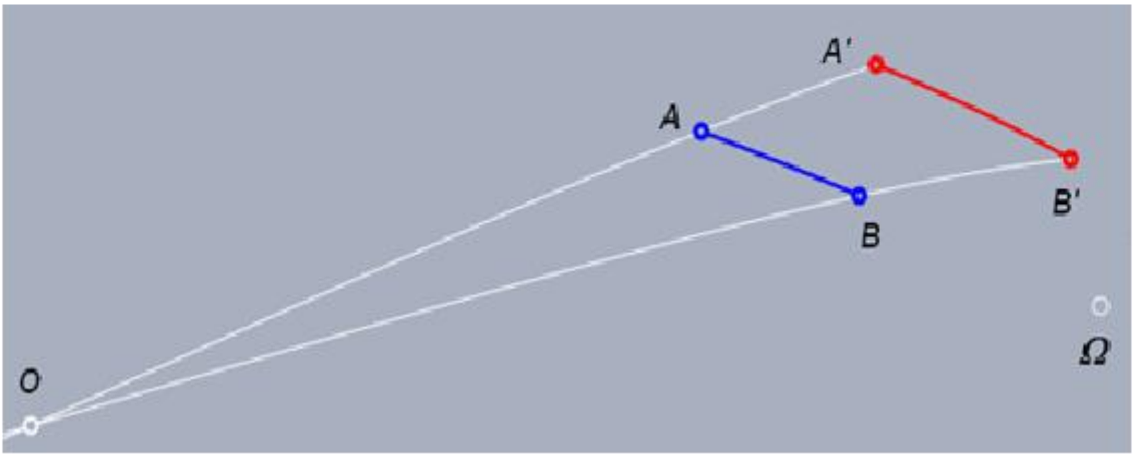




Definíció: Két párhuzamos, AB és $A'B'$ a-szakasz határozza meg. Az X pontot a-összekötjük az $A'B'$ pontokkal majd az eredményül kapott a-egynesekkel párhuzamosokat húzunk az A és a B pontokon keresztül. Ezek metszéspontja az eredmény: Y . Ha X az egyik szakaszon van, akkor egy P segéd pont felvételével a másik ábrán megadott módon kell eljárni.

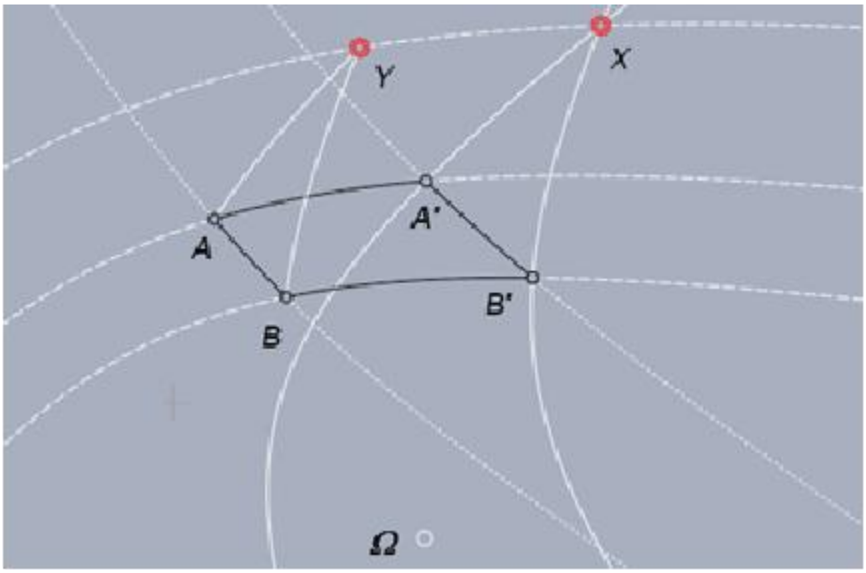
Jelölése $AB \to A'B'$, vagy $A'B' \to AB$ (Az utóbbi esetben Y a tárgypont és X a képpont.

A homotécia fixpontja



Fixpontja az AA' és a BB' a-egyenesek metszéspontja, ha nincs ilyen metszéspont, akkor ez egy $A \to A'$ vagy $B \to B'$ eltolás...

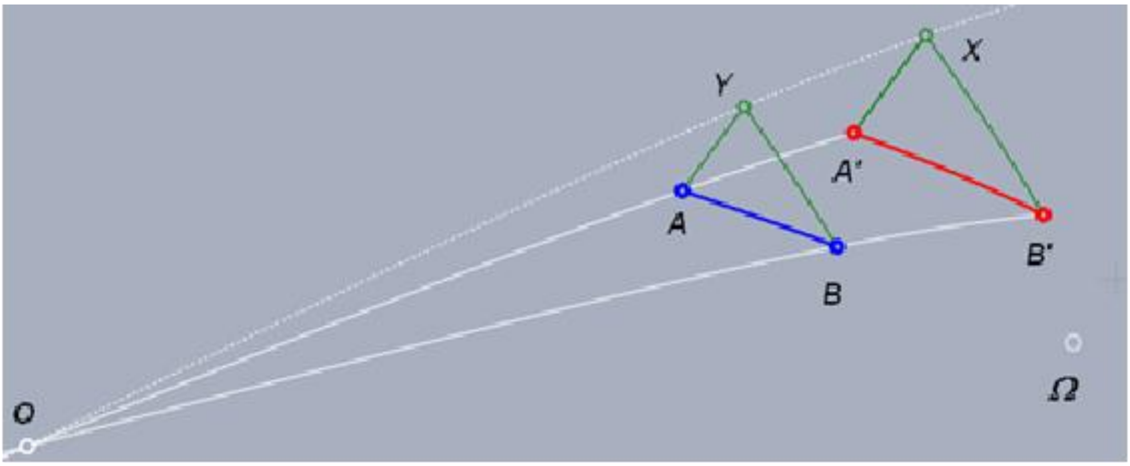
Az eltolás, mint a homotécia speciális esete



Most nincs fixpont, mert AA' és BB' is párhuzamosak. Az eltolást így jelöljük: $A \to A'$. ($Y \to X$, $B \to B$ ')

Homotécia fixpontja

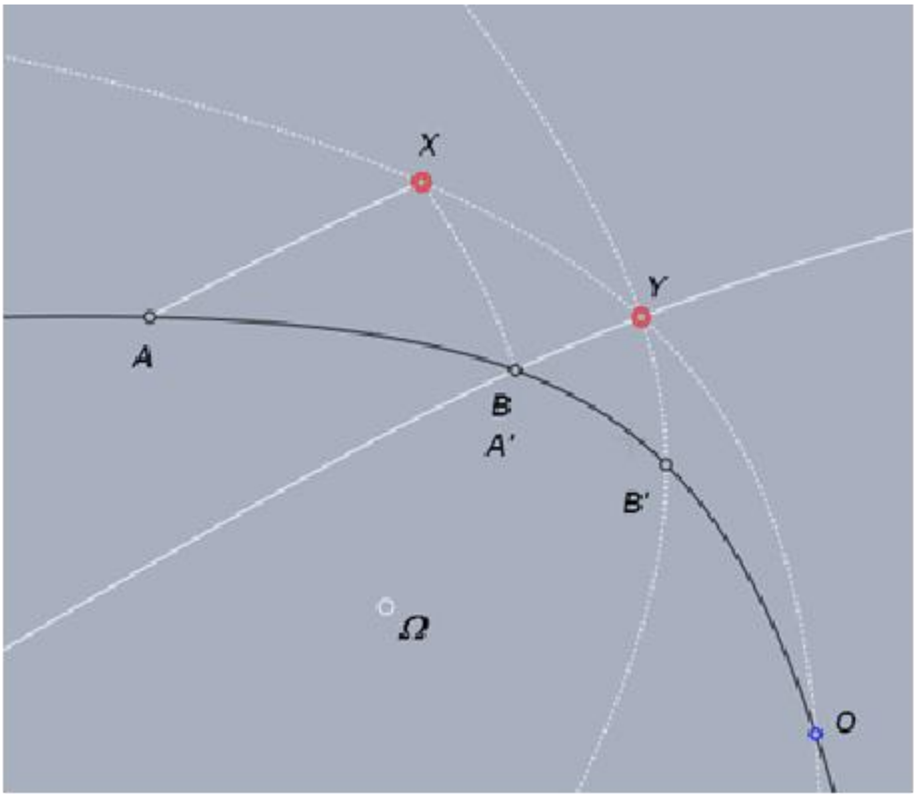
Ha egy homotéciának van fixpontja, akkor a megfelelő pontokat összekötő a-egyenesek is átmennek a fixponton. Az ilyen a-egyenesek ugyanakkor fix(a-)egyenesek is.



Ebből kifolyólag minden további nélkül megegyezhetünk abban,
hogy A képe A' (vagy fordítva) és B képe B' (vagy fordítva)

Ez értelemszerűen kiterjeszthető az eltolásokra is.

Fontos speciális eset(ek)



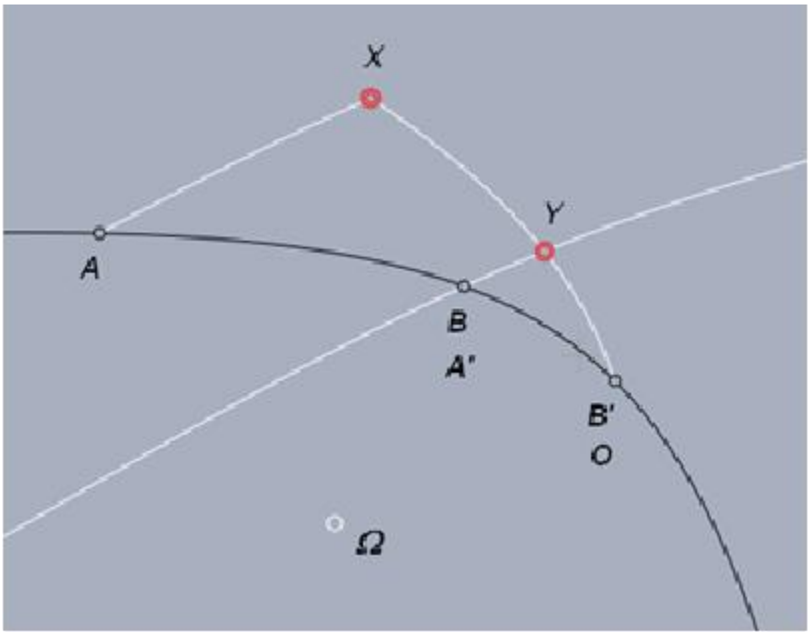
Amikor AB és $A'B'$ egy egyenesen vannak, a következő homotéciákról beszélhetünk:

$AB \to BB'$ vagy $AB' \to BB'$ vagy $BB' \to AB$ vagy $AB \to BB'$.

Ha $AB = BB'$, akkor eltolásról van szó és nincs fixpont.

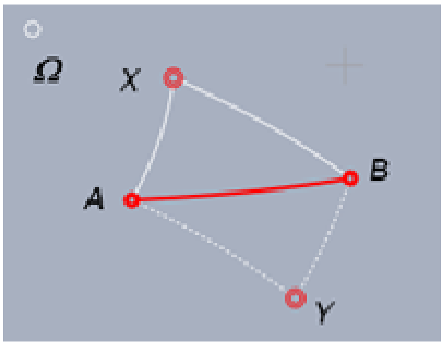
A fenti ábrán az $AB \to BB'$ eset látszik. (Ha X az AB a-egyenesen van, akkor az eredeti definícióban megadott módon kell eljárni.)

Egy érdekes eset



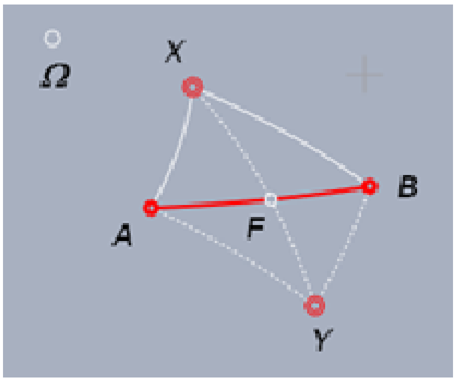
Érdemes külön figyelmet fordítani a fenti ($AB' \to BB'$) esetre, ekkor $O = B'$ a fixpont.

Félfordulat



Az $AB \to BA$ homotéciát félfordulatnak nevezzük, és $A \leftrightarrow B$ -vel jelölhetjük.

Az elnevezés jogos, mert tényleg az AB a-szakasz felezőpontjára való tükrözésről van szó.

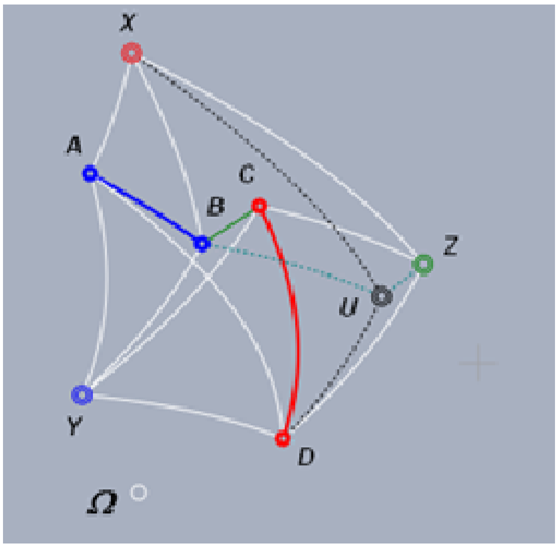


Ezt nagyon könnyű belátni. Hiszen def. szerint egy paralelogrammát rajzoltunk. Húzzuk meg ennek XY átlóját is! Minthogy az átlók felezik egymást, X valóban a paralelogramma középpontjára, az átlók közös felező pontjára való tükrözés.

Félfordulatok szorzata

Két félfordulat „szorzata" (egymásutáni alkalmazása): eltolás, méghozzá két eltolás szorzata.

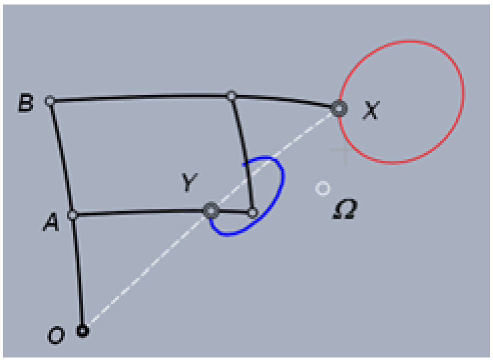
$A \leftrightarrow B$ majd $C \leftrightarrow D = A \to\to D$ majd $B \to C$



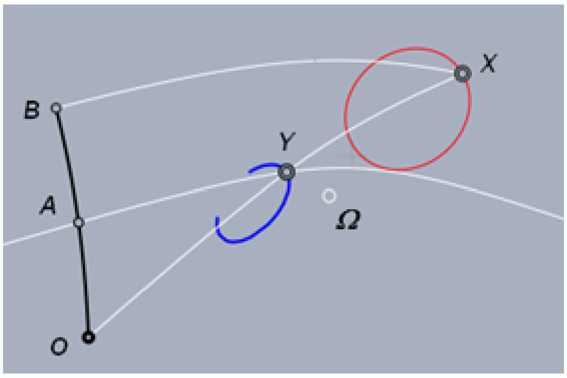
Ezt tegnap (2012. november 7-én), a Nagy Októberi Szocialista Forradalom eredményein merengve találtam, de nem tudtam bebizonyítani...

A pantográfia művészete

Az egyállású hasonlóság, vagy középpontos nyújtás (homotécia) más megközelítése



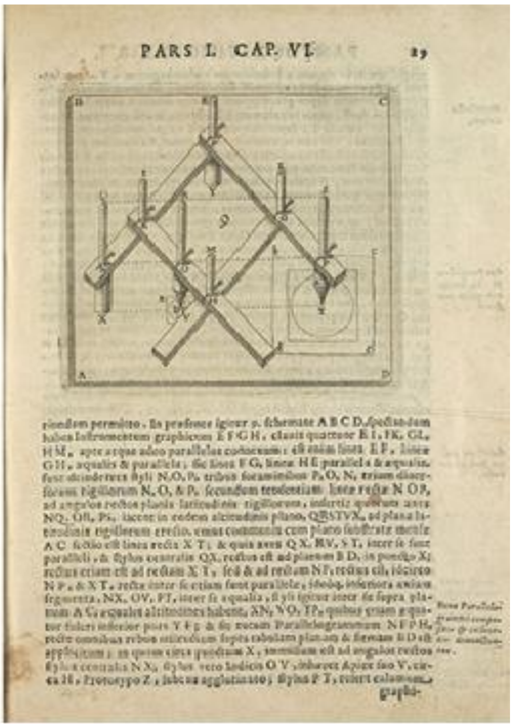
A merev pantográf (eukleidészi)



A "gumipantográf" (homotécia)

Ugyanarról a homotéciáról van szó és a fixpont is ugyanaz!

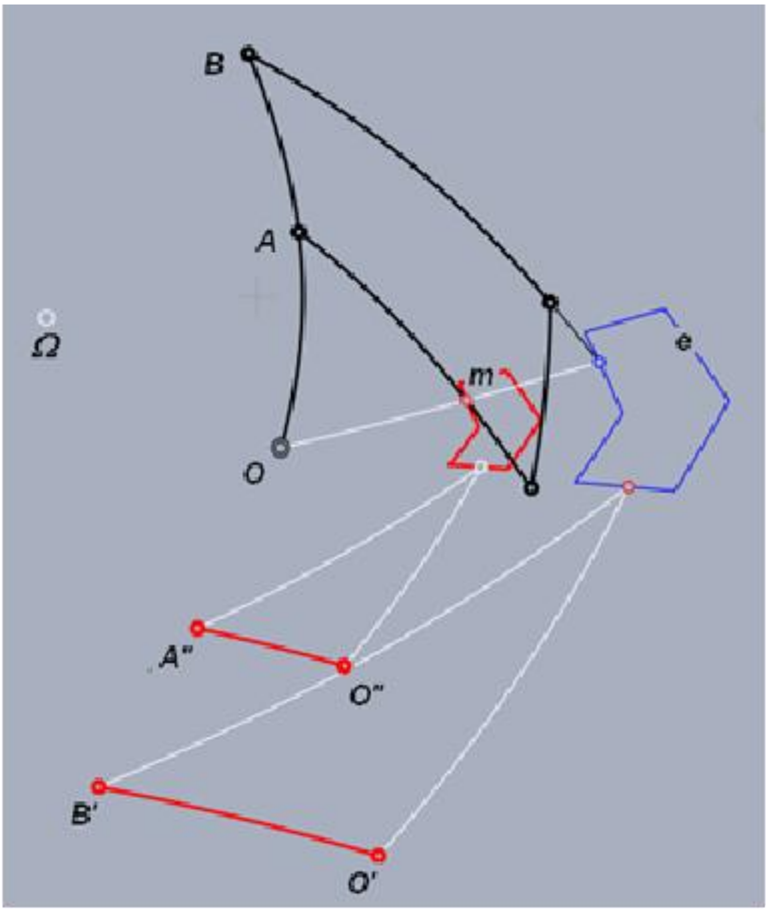
Christoph Scheiner, (1575-1650)



PARS I. CAP. VI. 29

Pantographice seu ars delineandi (Rom, 1631)

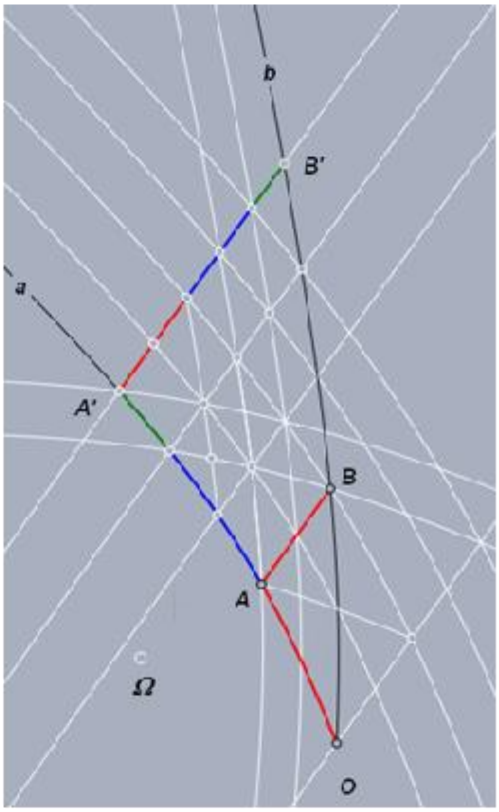
Ezzel a kérdéssel foglalkozunk most:



Ez az eukleidészi (merev lécekből alkotott) (OAB) pantográf és a párhuzamos affin szakaszokkal (   ) megadott gumipantográf ugyanazt a hatást fejti ki az e, "eredeti alakzatra"

Mi a titok nyitja?

A kérdés megvilágításához a homotécia tulajdonságaival kell megismerkednünk.



Nem párhuzamos a-egyenesek között a szó eukleidészi értelemben nem tudunk szakaszokat egybevágólag áthelyezni. Viszont, ha az egység egyenesenként külön adott (pl. az eukleidészi geometriában van körző), akkor ezen egységekben kifejezve beszélhetünk affin (arányos) egybevágóságról.

A mellékelt ábra mutatja, hogy páruzamosok ügyes húzogatásával elérhető, hogy konzisztens módon beszélhessünk a-szakaszok arányosságáról. Legyen definíció szerint az egyenesenként választott egység a-szakaszok aránya 1. Továbbá párhuzaos egyeneseken legyen ugyanaz az egység. Ezzel:

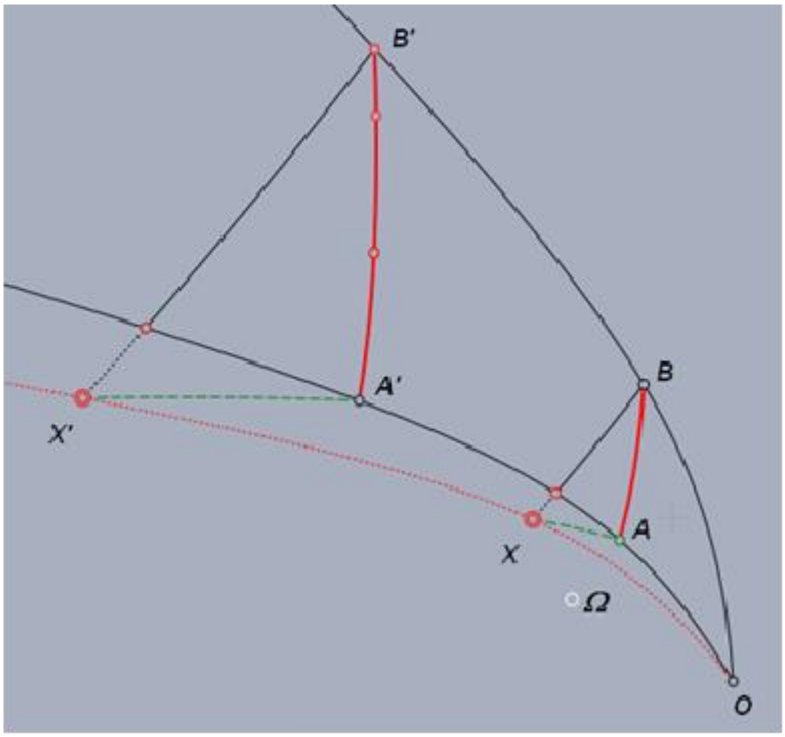
$$1 = \frac{OA}{AB} = \frac{OA'}{A'B'} = (2\frac{1}{2})/(2\frac{1}{2}) = 1$$

és

$$\frac{A'B'}{AB} = \frac{OA'}{OA} = 2\frac{1}{2}$$

Ez pusztán annyit jelent, hogy OA' -ben annyiszor van meg a saját (OA) egysége ahányszor $A'B'$ – ben a saját egysége (AB).

Homotécia tulajdonságai - folytatás



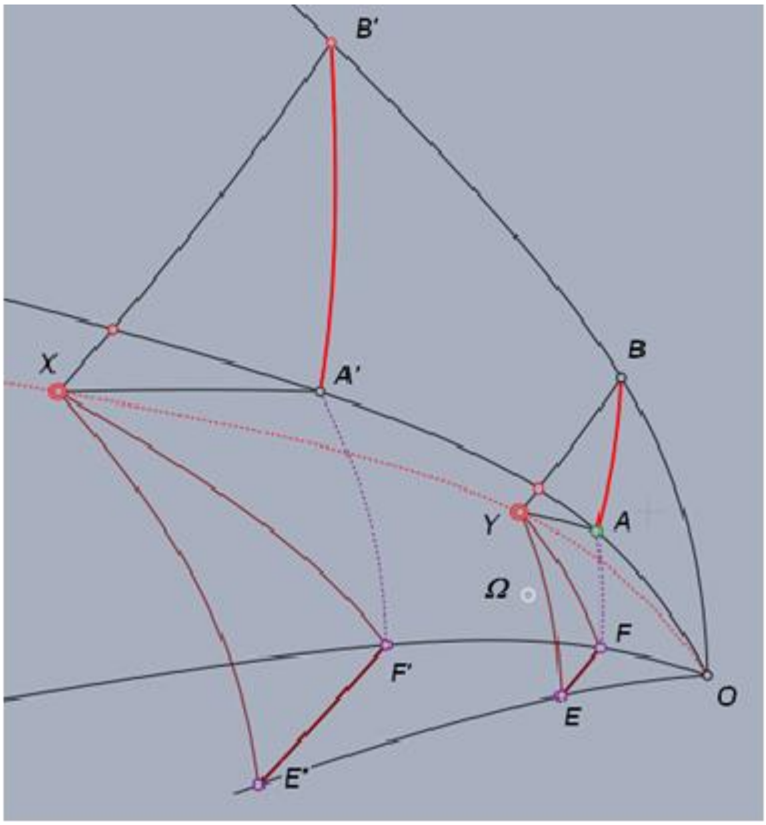
Legyen $AB \to A'B'$ egy homotécia, O fixponttal. X képe pedig legyen X' . $(XX'átmegyO-n)$

Az iménti okoskodással most azt is beláthatjuk, hogy nem csak $OA/AB = OA'/A'B'$,
és $A'B'/AB = OA'/OA \;\; OX'/OX = OA'/OA = X'B'/XB = A'B' = AB$.

Vagyis a tárgypontot a képponttal összekötő OX' és OX szakaszokra áll, Hogy az $AB \to A'B'$ homotécia aránya $A'B'/AB$ és fixpontja ugyanaz, mint az $XB \to X'B'$ homotécia aránya és fixpontja. Vagyis a homotéciákat az arányuk és a fixpontjuk meghatározza.

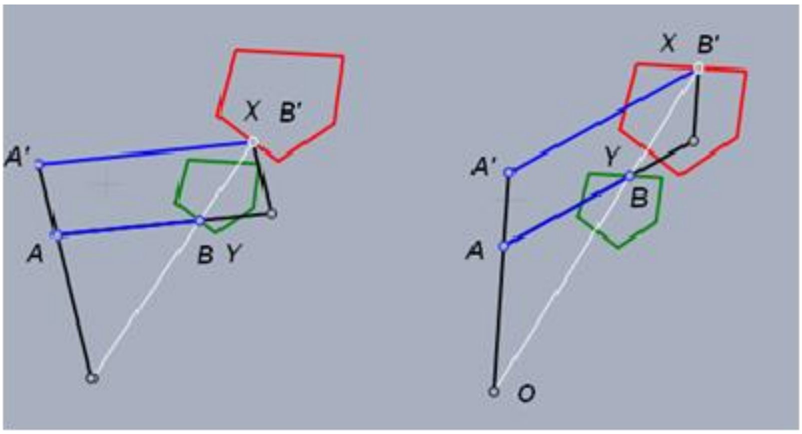
Szokták azt is mondani, hogy az "$O(l)$ homotécia" , amely egy olyan $AB \to A'B'$ homotécia, hogy $l = A'B'/AB.$

Homotéciák serege



Így keletkeztethető ekvivalens homotéciák egy egész serege. Most $AB \to A'B'$, $FA \to F'A'$, $EF \to E'F'$, $XA' \to YA$, $XB' \to YB$ ilyen homotéciák. Mintha az O fixpont körül forgathatnánk ugyanazt a homotéciát, amely mindig más és más alakban jelnik meg amennyiben, a szereplő egyeneseken mindig más és más egységet használunk kénytelenül. Használhatnánk éppen ugyanazt az egységet is, ha tudnánk. De nem tudjuk, mert ez affin geometria.

Homotencia és pantográf



VISZONT a merev pantográf pont ezt csinálja: homotéciát forgat egy fixpont körül. Ám a szakaszhosszakat közös egységben méri, mert tudja mi az a merevség vagy egybevágóság. Mi viszont még nem tudjuk ezt. Ezzel megmagyaráztuk az eukleidészi (merev) pantográf működését. Vagy a homotécia lényegét magyaráztuk a merev pantográffal? Az most egy cseppet sem zavaró, hogy az affin geometriában nem lehet merev pantográfot készíteni. (A fenti, merev pantográfokat ábrázoló rajzok csalással készültek – eukleidészi ismeretek egyelőre jogtalan felhasználásával…)

Most mi tényleg nem az eszünket játsszuk, amikor az affin geometriában ragaszkodunk bizonyos szerkesztési korlátozásokhoz, mert nekünk tényleg fogalmunk sincs egyelőre arról, hogy mi a kör – a különböző és nem párhuzamos a-egyenesek közötti méretközvetítő eszköz. Íme egy újabb példa arra, hogy a nem-tudás kincs. (A butaság ereje!!!)

Mit magyarázunk mivel?

A mai utolsó kérdés

A merev pantográf és a homotécia összehasonlítása, a a félfordulat tükrözésszerű működése, az affin Hjelmslev tételek tartalma arra a gondolatra ragadtat(hat), hogy az affin sík magában hordozza – legalábbis csírájában – az eukleidészi egybevágóságot. A kört keressük tehát...(Ez a szakaszmásolás természetes eszköze.)

Ez az egybevágóság azonban igencsak különbözni fog a hiperbolikus egybevágóságtól, mert az affin párhuzamossági axióma nem azonos a hiperbolikussal.

Szóval?

10 Szemléletes hiperbolikus geometria VII/2.

Szemléletes hiperbolikus geometria VII/2.

Témák

Az affin transzformációkról (szintetikusan, ismétlés)

- Homotécia

- Eltolás
- Félfordulat
- -Az affin transzformáció általában (hatása két háromszögre)

Az affin transzformáció szintetikusan

- Az Affin koordinátarendszer
- Az affin transzformáció általában (hatása két háromszögre)
- Az affin koordináta
- Feszítés
- Nyírás
- Tükrözés

Az affin transzformációkról (analitikusan)

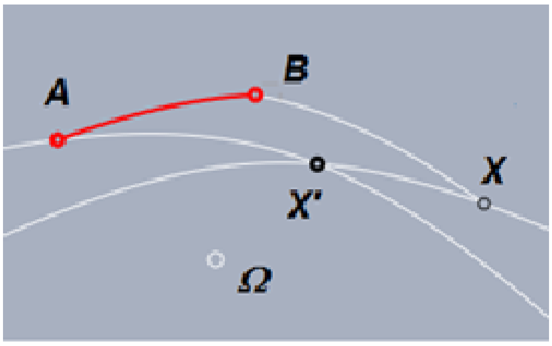
- Az affin koordinátarendszer-pár, mint két háromszög
- Affin transzformáció megadása egy koordinátarendszer párral
- Az affin transzformációk, mint koordináta transzformációk

Fontos, analitikusan adott affin transzformációk

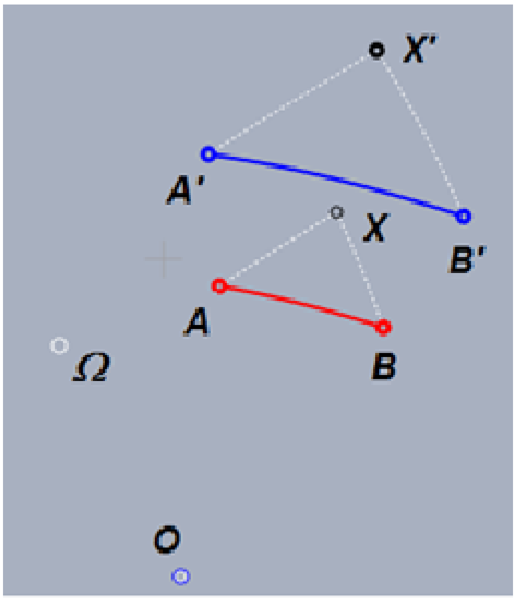
- A homotécia, mint koordináta transzformáció
- Galilei geometria (nyírás)
- Speciális relativitáselmélet (Minkowski geometria)
- Forgatás (ami nincs)

Az egyenes egyenlete

Eltolás és homotécia

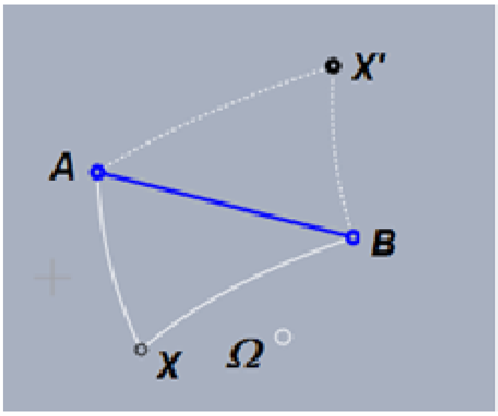


Az $A \to B$ vagy $B \to A$ eltolás az X pontot az X'-be viszi vagy fordítva.



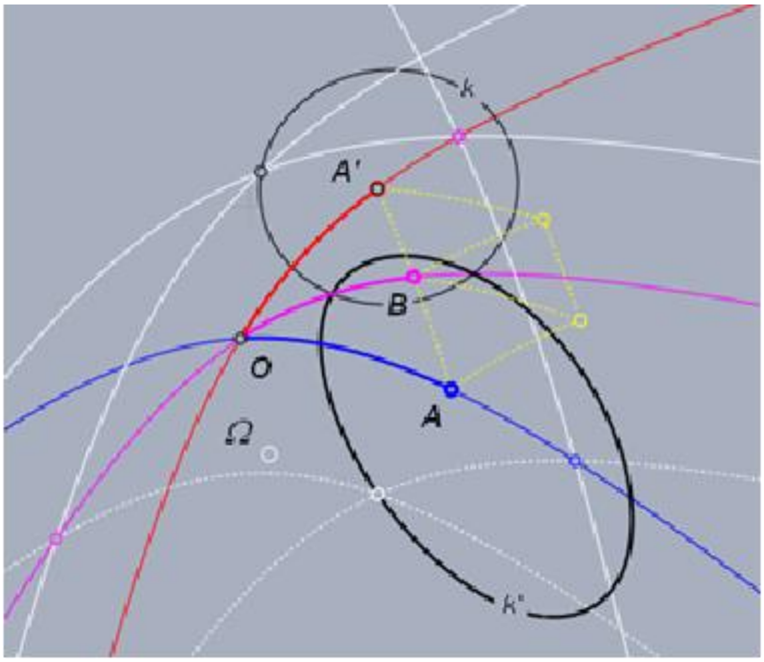
Az $AB \to A'B'$ eltolás vagy az $A'B' \to AB$ az X pontot az X'-be viszi vagy fordítva.

Félfordulat



Az $A \leftrightarrow B$ vagy az X pontot az X'-be viszi vagy fordítva.

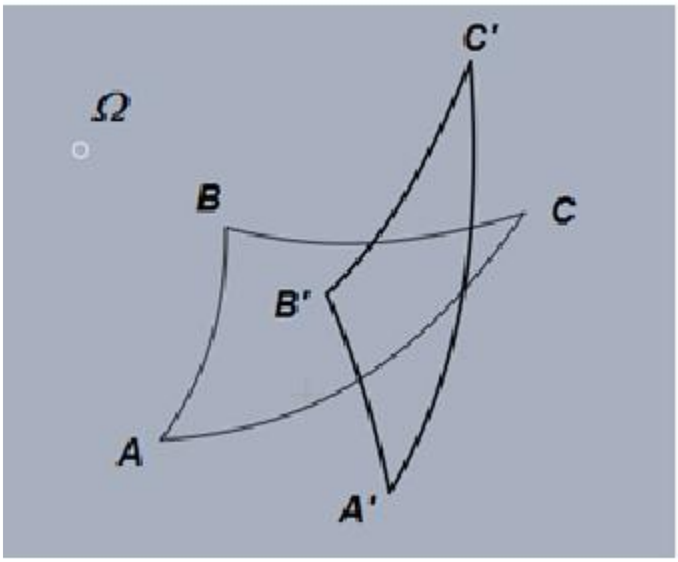
Az affin tükrözés (tengelyes)

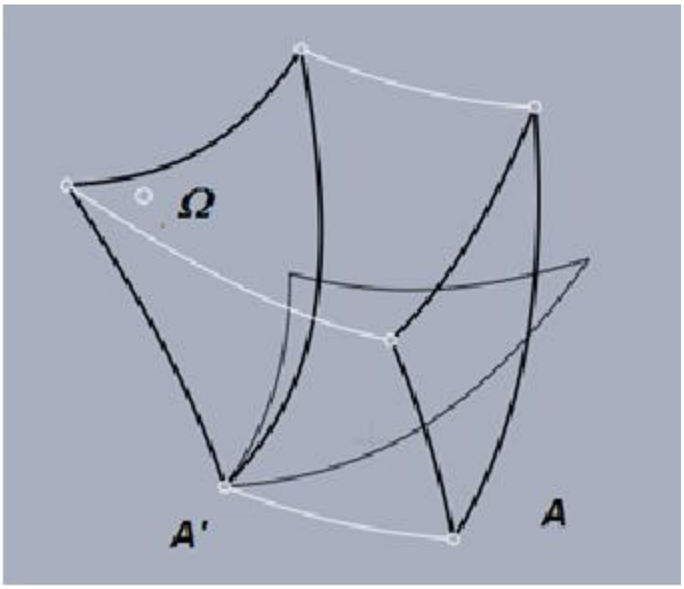


Az $OBA' \to OBA$ affinitásról van szó, de most az AA' a-szakaszt a B pont felezi.

Általában: háromszöget háromszögbe

Ezt mindig el lehet képzelni, mint egy $A \to A'$ eltolást és háromszögek közötti transzformációt, ahol a háromszögek egyik csúcsa egybe esik.





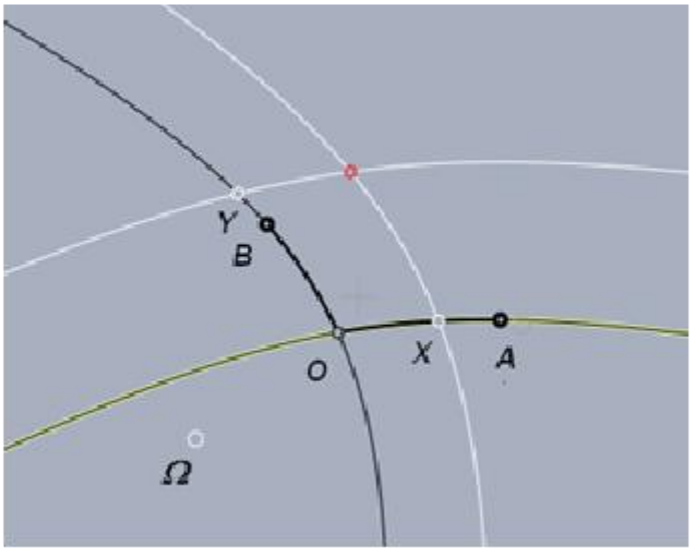
Háromszöget háromszögbe - folytatás

Egy háromszöget mindig fel lehet úgy fogni, mint egy affin koordináta rendszert.

Két olyan háromszög, melyek egyik csúcsa (legalább) közös felfogható, mint két affin koordinátarandszer. Az az affinitás, amelyik az egyik háromszöget a másik háromszögbe transzformálja definíció szerint a megfelelő koordináta-transzformáció.

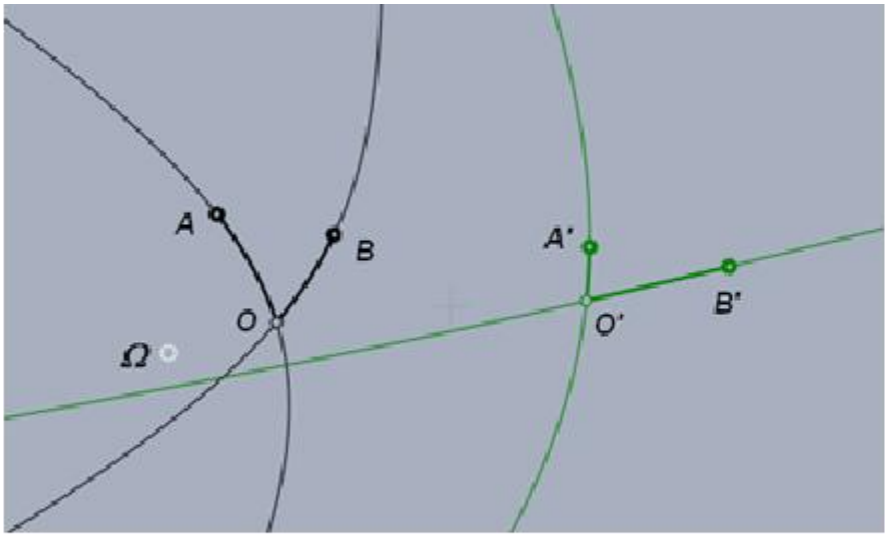
Ezt fejtjük ki az alábbiakban.

Az affin koordinátarendszer



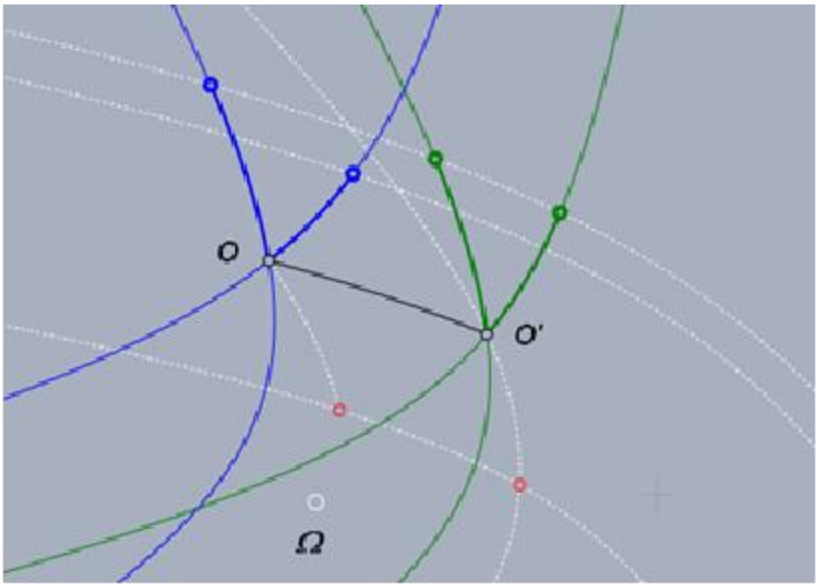
A BOA a szóban forgó háromszög ...

Az affin transzformáció általában



A feladat az OAB koordinátarendszerben adott alakzatot az $O'A'B'$ koordinátarendszerben úgy előállítani, hogy az alakzat megfelelő pontjainak koordinátái azonosak legyenek. (Természetesen ekkor $OAB \to O'A'B'$)

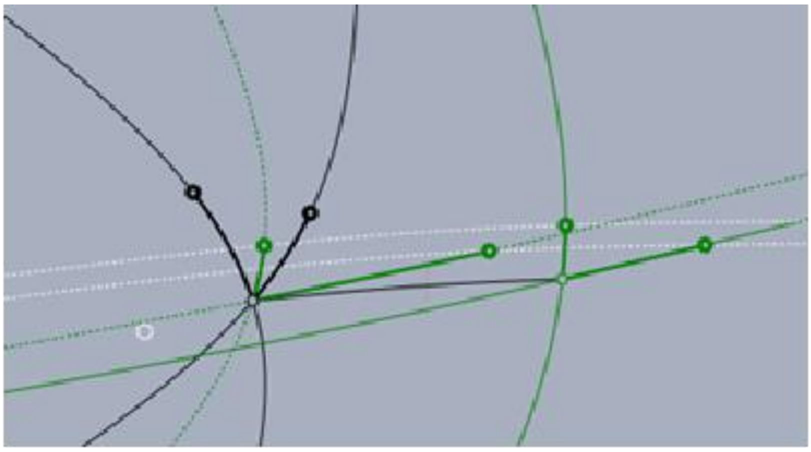
Az eltolás



Az eltoláshoz nem kell eljátszani azt, hogy koordináta transzformációt végzünk. Az $O \to O'$ eltolást egy homotetikusan egybevágó háromszögpárral megadott koordinátarendszer-párral "nagyképűsítettük".

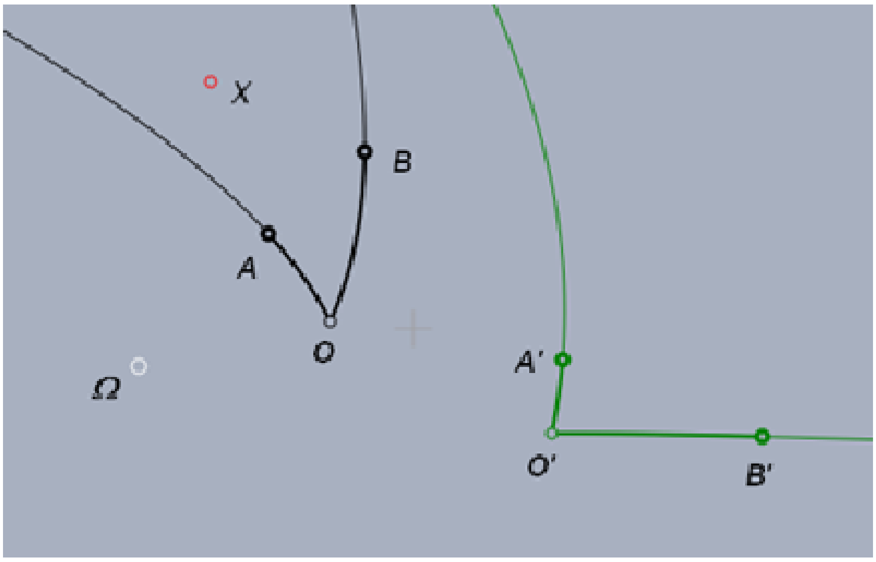
Általában a koordináta transzformációról

A két koordinánatarendszert egybeejtjük eltolással majd a transzformált alakzatot visszatoljuk a helyére



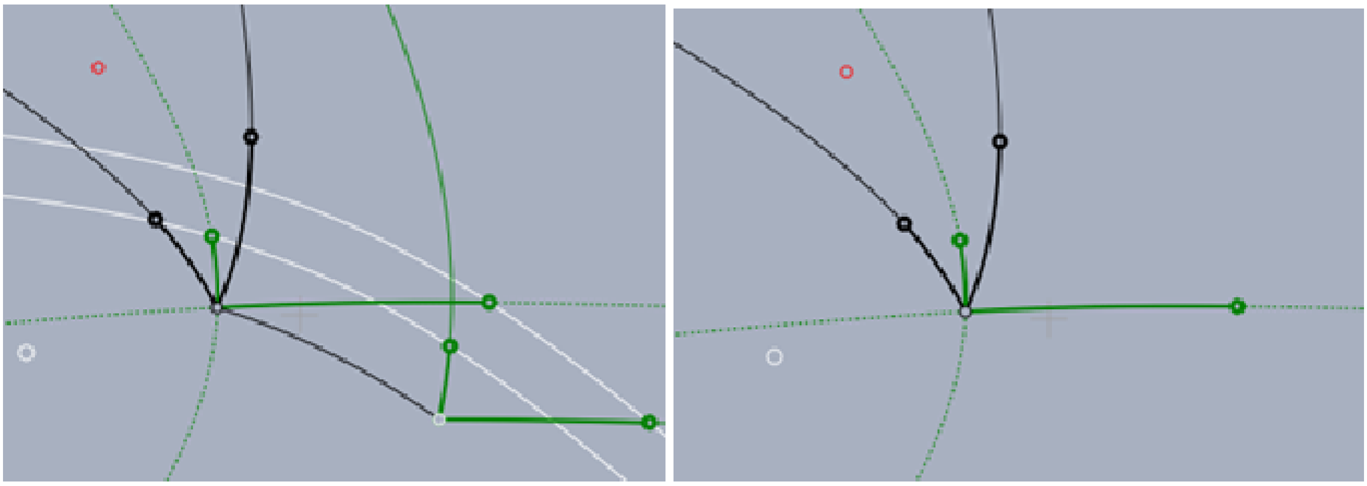
Pédaképpen:

Transzformáljuk a piros (X) pontot az OAB koordinátarenszerből az $O'A'B'$ koordinátarendszerbe úgy, hogy a koordinátái azonosak legyenek az új rendszerben a régi rendszerbeli koordinátákkal



1. lépés

(1) Határozzuk meg az eltolást OAB -ből $O'A'B'$ -be és toljuk $O'A'B'O$ -ba

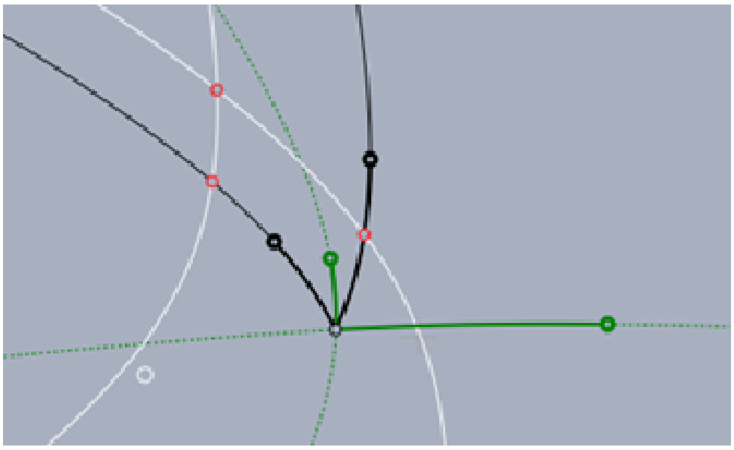


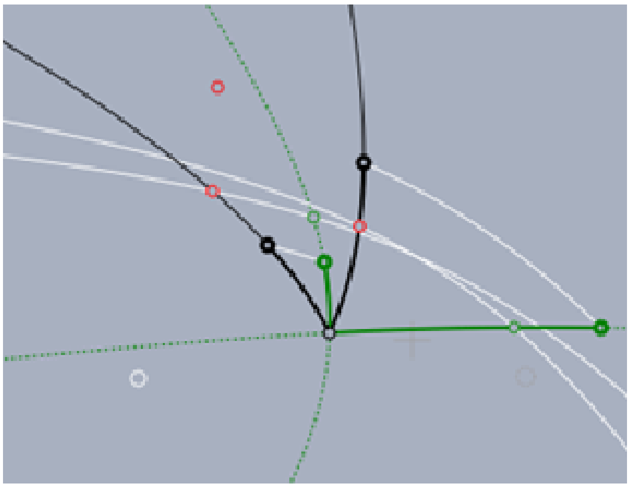
Itt a jobb oldali ábra már nem mutatja az eredeti zöld koodináta rendszert csak annak O -ba tolt megfelelőjét.

2. és 3. lépés

(2) Határozzuk meg a piros pont fekete koordinátarendszerbeli koordinátáit

(3) Transzformáljuk a piros pont koordinátáit a zöld rendszerbe úgy, hogy a koordináták azonosak maradjanak.

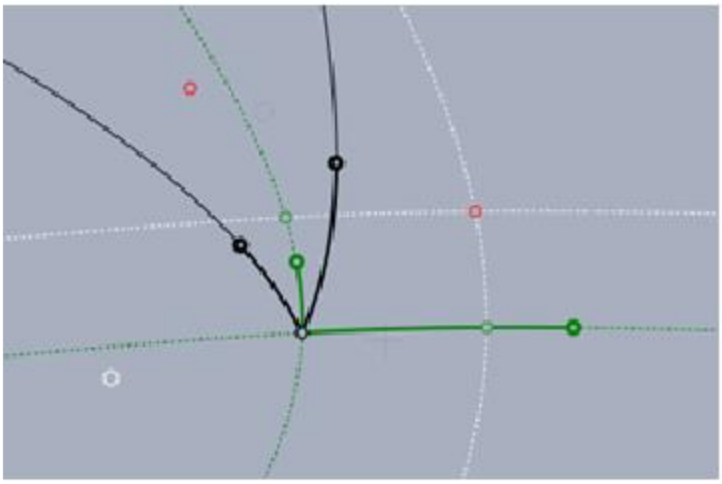


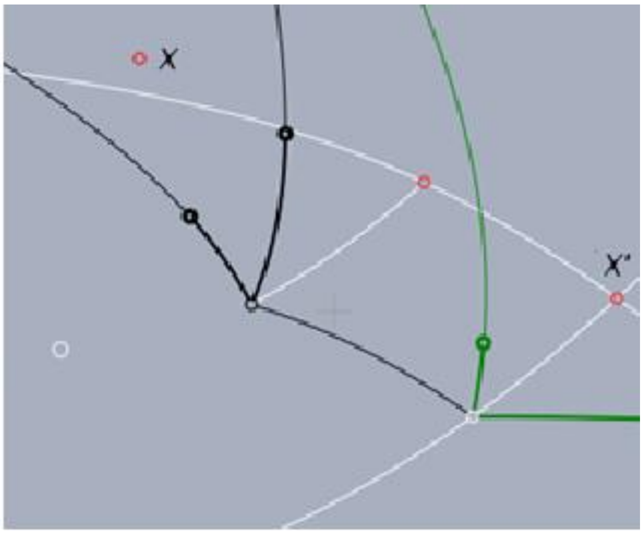


4. és 5. lépés

(4) Határozzuk meg a piros pont zöld koordinátarendszerbeli képét

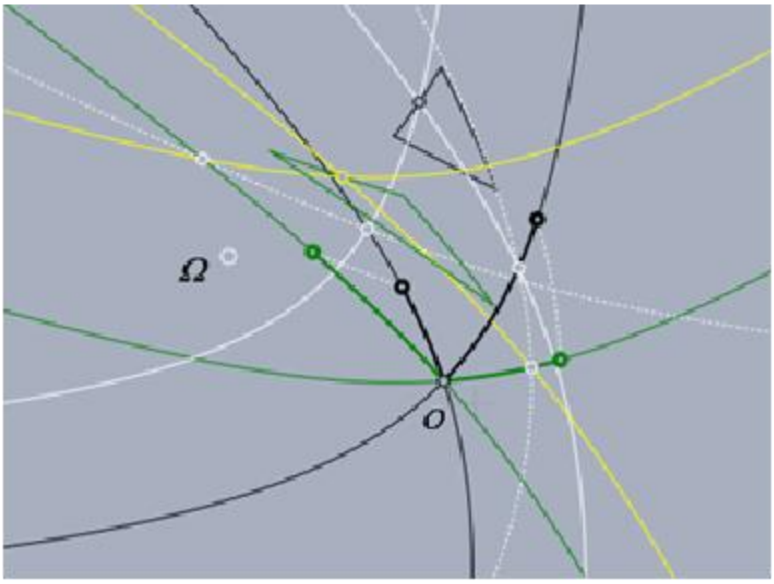
(5) Toljuk vissza zöld koordinátarendszer a piros ponttal együtt a helyére



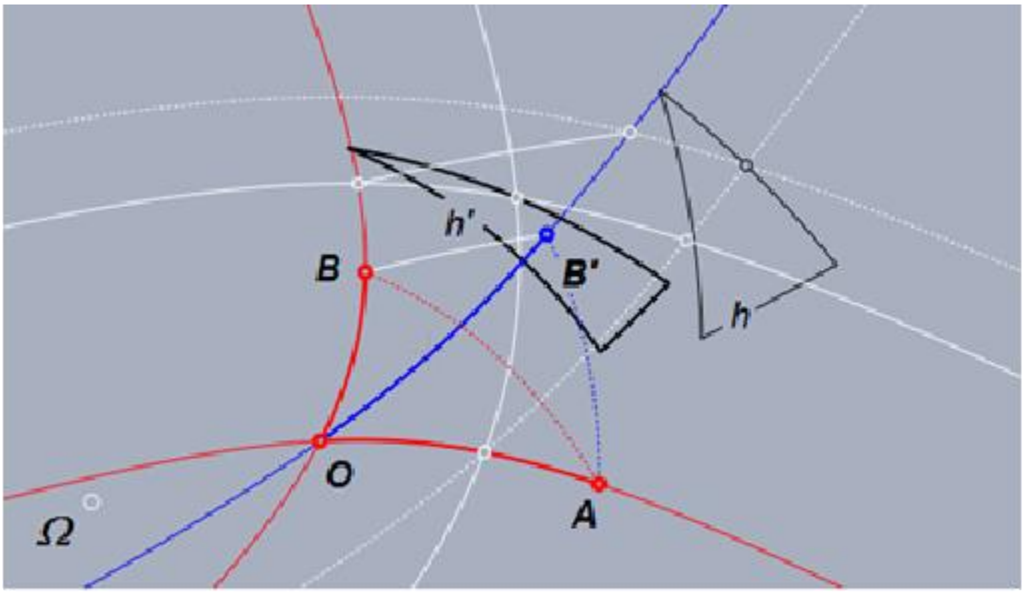


Háromszög transzformálások

Példaképp transzformáljuk a fekete háromszöget a fekete koordinátarendszerből a zöldbe

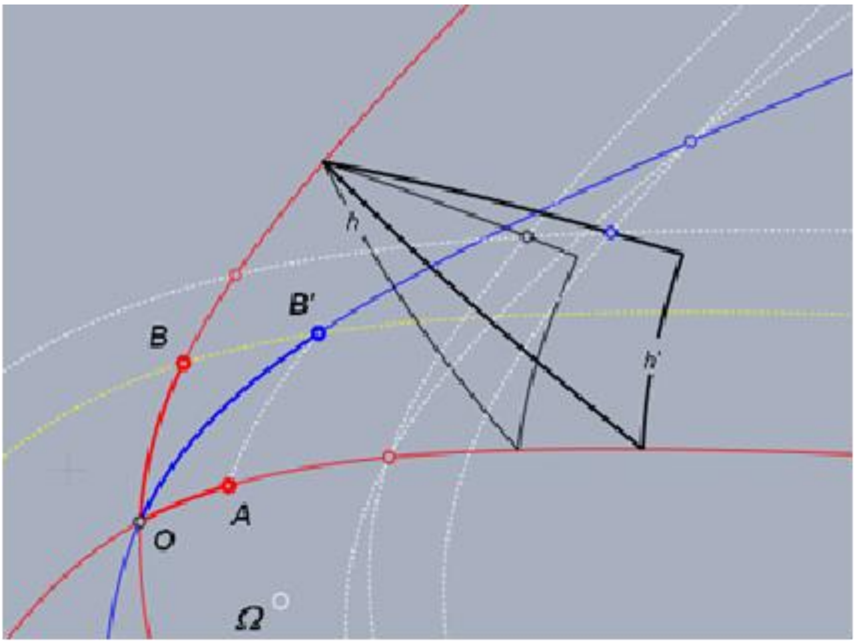


A feszítés



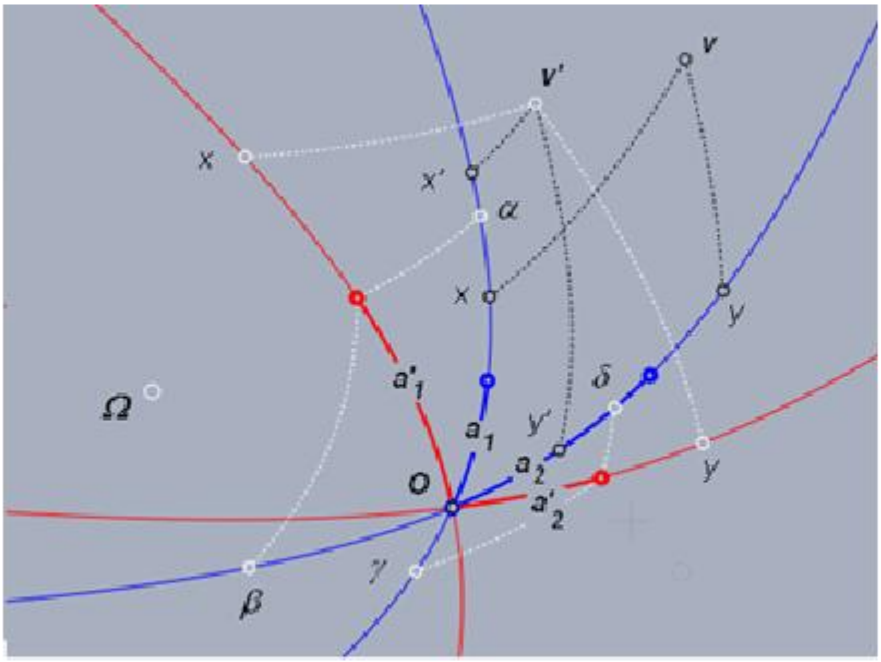
A feszítés $OAB \rightarrow OAB'$ alakú affinitás. Most a megfelelő affin koordinátarendszer pár az OA ,OB és az OA ,OB' egységekkel van megadva.

A nyírás



A nyírás a feszítés speciális esete: BB' párhuzamos OA -val.

Az affin transzformáció analitikus alakja



A $v \to v'$ affin transzformáció lényege, hogy két (most egybe ejtett; kék és piros) rendszerben a két különböző pont koordinátái azonosak (a vektoriális írásmód segítségével):

$$v = xa_1 + ya_2$$
$$v' = xa'_1 + ya'_2$$

A kérdés: Ha adottak a vesszős (piros) koordinátarendszer egységeinek koordinátái az eredetiben (kék):

$$a'_1 = aa_1 + ba_2$$
$$a'_2 = ga_1 + da_2,$$

akkor hogyan fejezhető ki az $(x, y) \to (x', y')$ kapcsolat? Az eltolás figyelembevétele triviális; ezzel most nem foglalkozunk.

Az $(x, y) - > (x', y')$ kapcsolatról

$$v = a_1 x + a_2 y \text{és}$$
$$v' = a'_1 x + a'_2 y$$

v' kifejezésébe az új egységeket helyettesítve:

$$v' = (\alpha a_1 + \beta a_2)x + (\gamma a_1 + \delta a_2)y =$$
$$a_1(\alpha x + \gamma y) + a_2(\beta x + \delta y)$$

ugyanakkor

$$a'_1 = \alpha a_1 + \beta a_2$$
$$a'_2 = \gamma a_1 + \delta a_2$$

vagyis

$$x' = \alpha x + \gamma y$$
$$y' = \beta x + \delta y$$

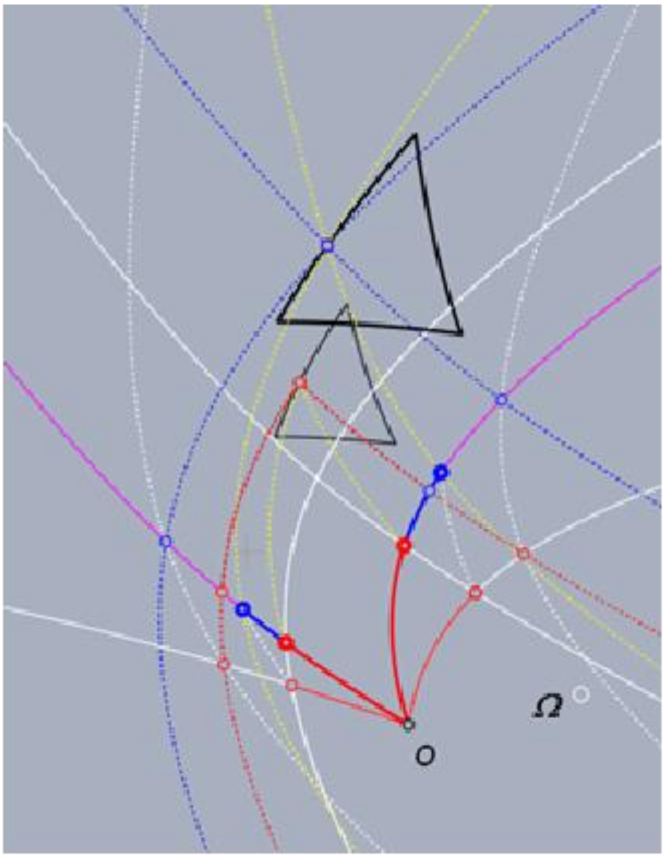
Az affinitások csoportja

Az affinitásokat egymás után alkalmazva is affinitást kapunk. Ha $ad - gb \neq 0$, akkor az inverz elem is létezik. A hatástalan egységelem: $\alpha = 1$, $\gamma = 0$, $\beta = 0$, $\delta = 1$.

Az $\alpha\delta - \gamma\beta \neq 0$ feltételnek megfelelő affinitások algebrai értelemben csoportot alkotnak.

Mi itt speciális affinitásokat az affinitás csoport részcsortjait vizsgáljuk.

A homotécia példája



Most $\alpha = 3/4$, $\beta = 0$, $\gamma = 0$, $\delta = 3/4$ Vagyis:

$$x' = 3/4x$$
$$y' = 3/4y$$

A homotécia részcsoport

Az (α, δ) paraméterű a homotáciát a következőképpen definiáljuk:

$$x' = ax$$
$$y' = dy.$$

Könnyű belátni, hogy a homotéciák "egymásközt" maradnak, csoportot alkotnak:
Két homotécia egymás utáni alkalmazása is homotécia.

Legyen tehát egy (α^* ,δ^*) paraméterű homotéciánk is:

$$x'' = a^* x'$$
$$y'' = d^* y'$$

és alkalmazzuk az (α ,δ) után az (α^* ,δ^*) homotéciát:

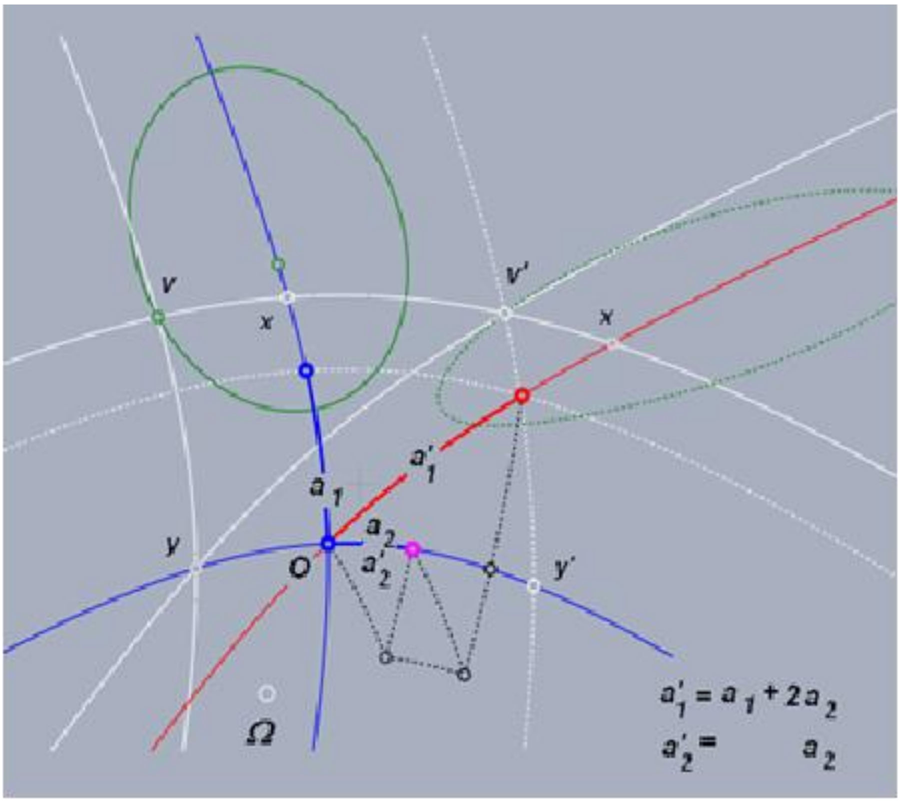
$$x'' = a^* x' = a^* a x y'' = d^* y' = d^* d y.$$

A két homotéciát egymás után alkalmazva (szorozva őket) a ($\alpha\alpha^*$, $\delta\delta^*$) homotéciát kapjuk.

Egy (α ,δ) homotéciának inverze is van: az ($1/\alpha$, $1/\delta$) homotécia. Nyilván: sem α , sem δ nem lehet 0. A homotéciák között hatástalan egységelem is van: $\alpha = 1$, $\delta = 1$.

A homotéciák tehát algebrai értelemben is csoportot alkotnak, az összes affinitások csoportjának egy részcsoportját.

A nyírás példája



Most tehát $\alpha = 1$, $\beta = 2$, $\gamma = 0$, $\delta = 1$ Vagyis: $x' = x$, $y' = 2x + y$

Általában a nyírás: $x' = x$, $y' = bx + y$

A nyírás csoport (Galilei geometria)

A β paraméterű a nyírást a következőképpen definiáljuk: $x' = x$, $y' = bx + y$

Könnyű belátni, hogy a nyírások "egymásközt" maradnak, csoportot alkotnak: Két nyírás egymás utáni alkalmazása is nyírás.

Legyen tehát egy β^* paraméterű nyírásunk is: $x'' = x'$, $y'' = \beta^* x' + y'$ és alkalmazzuk a b nyírás után a b^* nyírást:

$$\begin{aligned} x'' &= x' = x \\ y'' &= \beta^* x' + y' = \beta^* x + \beta x + y = (\beta^* + \beta)x + y. \end{aligned}$$

A β nyírás és a β^* nyírás egymás után alkalmazva (szorozva) a $\beta^* + \beta$ nyírást adják.

Egy β nyírásnak inverze is van: a $-\beta$ nyírás.

A nyírások között hatástalan egységelem is van: $\beta = 0$. A nyírások tehát algebrai értelemben is csoportot alkotnak, az összes affinitások csoportjának egy részcsoportját.

A feszítés csoport

A (α , β) paraméterű a feszítést a következőképpen definiáljuk:

$$\begin{aligned} x' &= \alpha x \\ y' &= \beta x + y, \end{aligned}$$

Könnyű belátni, hogy a feszítések "egymásközt" maradnak, csoportot alkotnak: Két feszítés egymás utáni alkalmazása is feszítés. Legyen tehát egy (γ^* , δ^*) paraméterű feszítésünk is:

$$\begin{aligned} x'' &= \alpha^* x' \\ y'' &= \beta^* x' + y' \end{aligned}$$

és alkalmazzuk a (α , β) feszítés után a (α^* , β^*) feszítést:

$$x'' = \alpha^* x' = \alpha^* \alpha x$$
$$y'' = \beta^* x' + y' = \beta^* \alpha x + \beta x + y = (\beta^* \alpha + \beta) x + y.$$

A (α , β) feszítés és a (α^* , β^*) feszítés egymás után alkalmazva (szorozva őket) a ($\beta^*\alpha + \beta$, $\alpha^*\alpha$) feszítést adják.

Egy (α , β) feszítésnek inverze is van, ha $\alpha \neq 0$: a ($1/\alpha$, $-\beta/\alpha$) feszítés. A nyírások között hatástalan egységelem is van: $(1, 0)$. A nyírások tehát algebrai értelemben is csoportot alkotnak, az összes affinitások csoportjának egy részcsoportját.

A Lorentz csoport (specrel)

$$x' = \frac{x - vy}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

$$y' = \frac{-\frac{v^2}{c^2}x + y}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

Itt $v < c$ a paraméter (c rögzített). Ha az u paraméterű és a v paraméterű transzformációkat egymás után alkalmazzuk, akkor a

$$w = \frac{u + v}{1 + \frac{uv}{c^2}}$$

paraméterű transzformációt kapjuk.

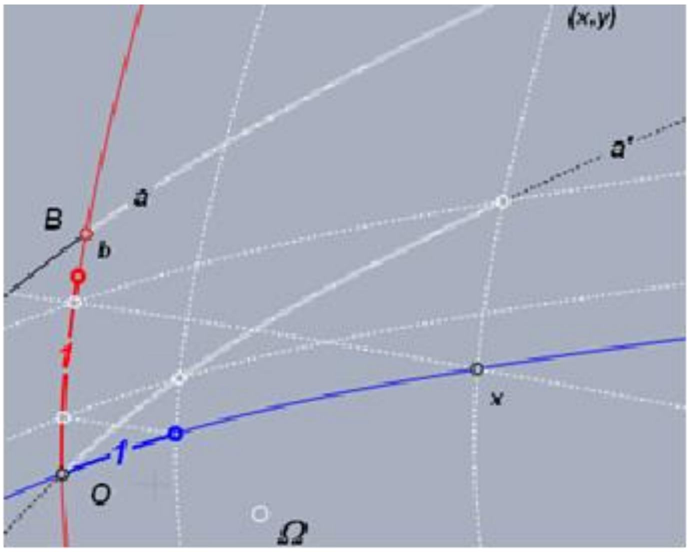
Az eukleidészi forgatás

$$x' = \cos(\lambda)x - \sin(\lambda)y$$
$$y' = \sin(\lambda)x + \cos(\lambda)y$$

Ha két ilyen λ és κ paraméterű transzformációt egymás után alkalmazunk, akkor a paraméterek összeadódnak.

Az affin síklakó nem veszi majd észre, hogy kör rajzolódik ki előtte miközben a paraméter 0 és $2p$ között vándorol.

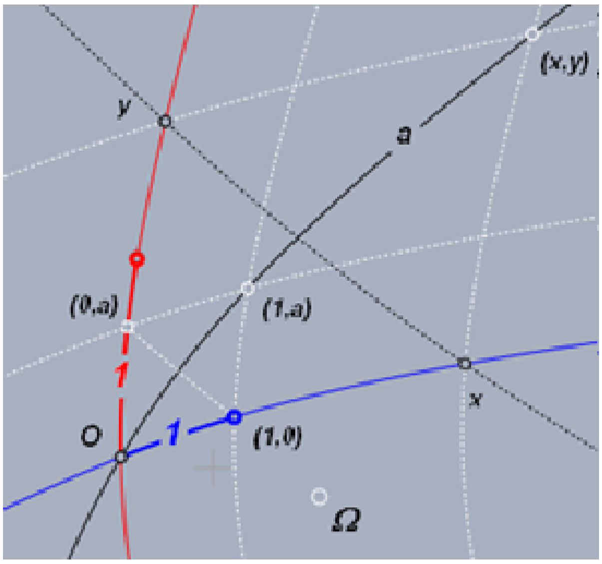
Az a-egyenes leírása affin koordinátarendszerekben (szintetikusan)



Adott a piros-kék affin "kétél" az $(1,1)$ egységekkel, és a a-egyenes, amely keresztül megy O -n

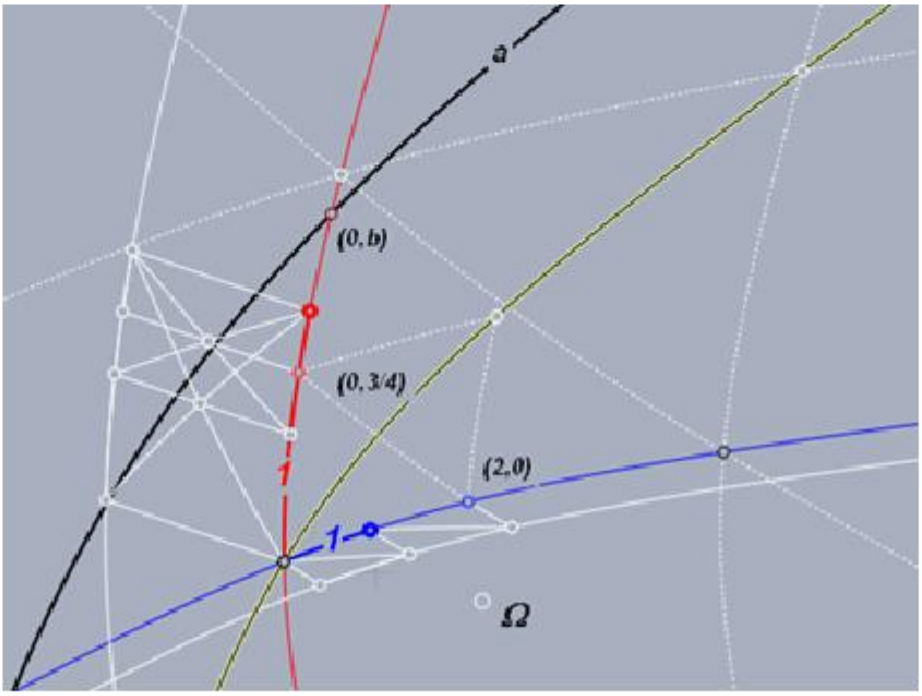
Hogyan kell megszerkeszteni egy x -hez az y -t?

1. Felveszem az $(1,a)$ pontot és az $(1,0)(0,a)$ szakaszt.
2. A $(0,x)$ ponton át párhuzamost húzok ezzel.
3. A párhuzamos a piros tengelyen kijelöli a $(0,y)$ pontot. a tehát a paramétere, a „meredeksége” az ilyen a-egyenesnek.



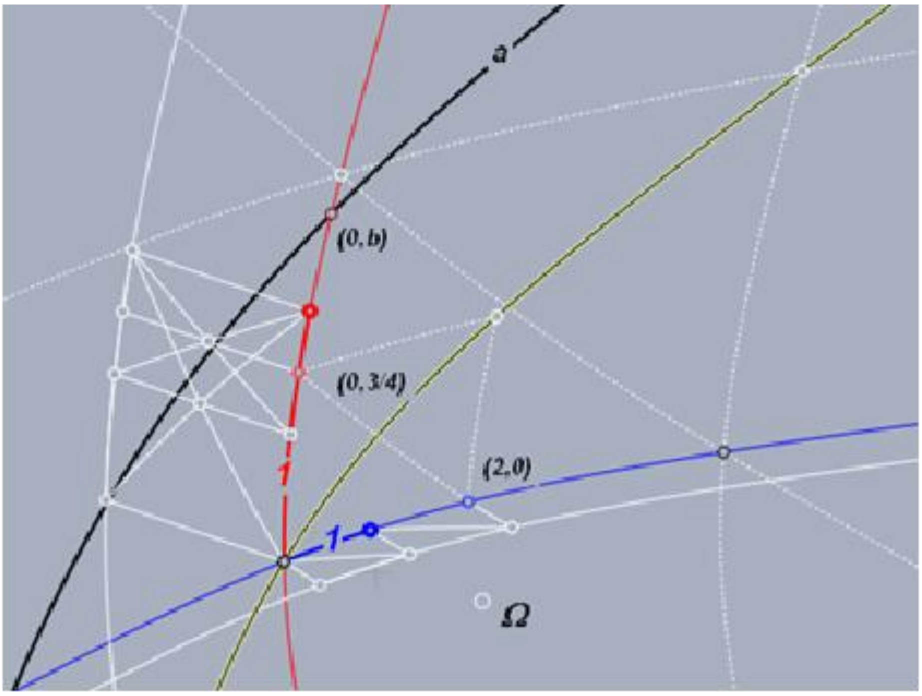
Ha a nem megy keresztül az O ponton, akkor van még egy eltolási paraméter: b .

Ha az a-egyenes meredeksége és tengelymetszete adott



Most a meredekség a $(2,0)(0,3/4)$ szakasszal adott, az eltolás pedig a $(0,b)$ ponttal.

Az egyenes egyenlete



$y = mx + b$, ha a meredekséget $(p,0)(0,q)$ adja meg, akkor $m = q/p$, b pedig $(0,b)$-ből származik.

11 Szemléletes hiperbolikus geometria VIII.

Szemléletes hiperbolikus geometria VIII.

Témáink

A kúpszeletek affin definíciója

- Ellipszis (a torz tojás)
- Hiperbola
- Parabola – paraciklus

Szörnyszülött geometriák az affin síkon

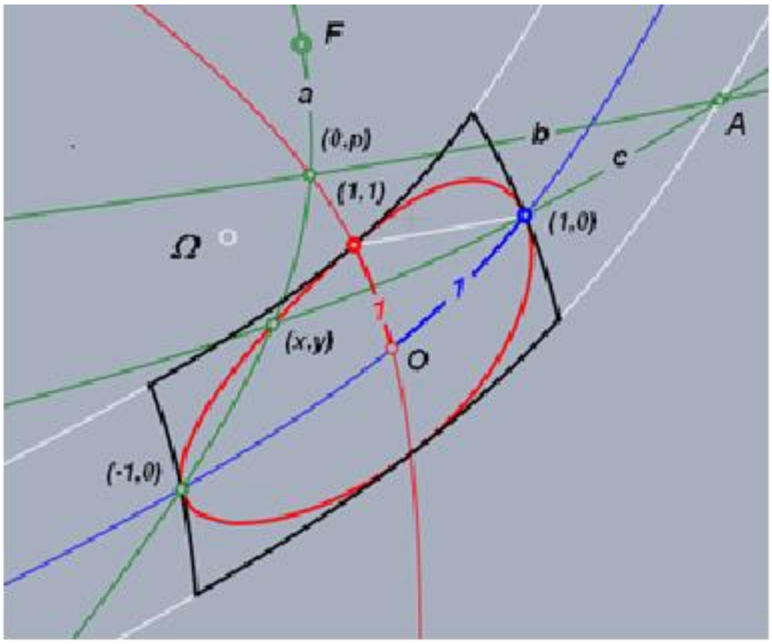
- Egy szörnyszülött eukleidészi geometria
- Egy szörnyszülött hiperbolikus geometria
- A Hjelmslev modell és Klein modell
- A kör: közös gyermek, vagy anya - újra feltűnik

A befoglaló (modell-tartó) hiperbolikus geometria előállítása a benne modellezett affin síkon.

- A kör, mint közös gyermek

- A kör méretétől függ. Hogy eltaláljuk-e a modellt-tartó geometriát
- A "normális" eukleidészi geometria a hiperbolikus síkon
- Egy abszolút egység

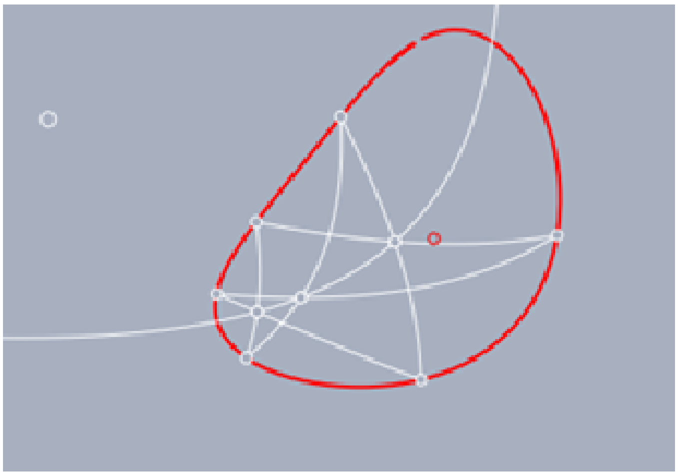
Az "ellipszis" affin definíciója



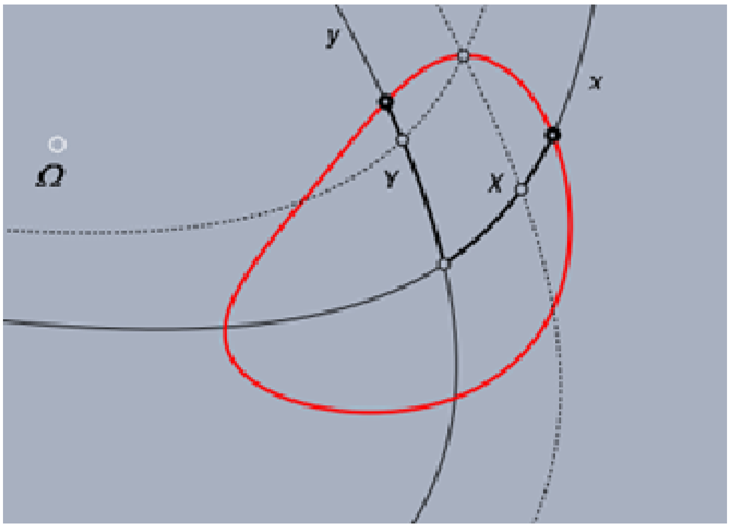
Az ellipszis egy pontjának megszerkesztése

1. Adott vastag fekete "egység" paralelogramma; ez meghatározza az ellipszist.
2. Megszerkesztem a paralelogramma átlóit, O középpontját és a piros-kék koordináta rendszert az egységekkel (1 és 1).
3. A $(-1,0)$ ponton keresztül meghúzom az F pontjánál fogva mozgatható a a-egyenest.
4. a metszi a piros koordináta tengelyt a $(0,p)$ pontban
5. $(0,p)$-n keresztül meghúzom az $(1,0)$ és $(1,1)$ pontokat összekötő egyenessel párhuzamos b a-egyenest.
6. b elmetszi az $y=-1$ a-egyenest az A pontban.
7. Az A pontot összekötöm az $(1,0)$ pottal; ez a c a-egyenes.
8. A c a-egyenes elmetszi az a a-egyenest az (x,y) koordinátájú pontokban.
9. F-et mozgatva kirajzolódik az ellipszis.

Milyen értelemben ellipszis a kapott torz tojás?



A Pascal-féle "egyszerűsített kúpszelet indikátor" pozitív jelzést ad a-vonalakkal.



Ha a szerkesztést analitikus szemmel nézzük, akkor észrevehetjük, hogy a torz tojás egyenlete: $x^2 + y^2 = 1$. Nem hogy ellipszis, de kör ,HA AKAROM.

(Még: megjegyzések az a-egyenes egyenletéről és az egységek megadásáról a koordinátatengelyeken. Ebből a torz tojásból kikel az eukleidészi és a hiperbolikus geometria is.

Levezetjük a torz tojás egyenletét

Az a egyenlete:

$$y = px + p$$

A b egyenlete:

$$y = -x + p$$

Az A pont koordinátái: $(p+1,-1)$. A c egyenlete:

$$y=-\frac{1}{p}x+\frac{1}{p}$$

Az (x,y) pontok közötti összefüggést úgy határozom meg, hogy a egyenletéből is és c egyenletéből is kifejezem p-t:

$$p=\frac{y}{x+1}$$

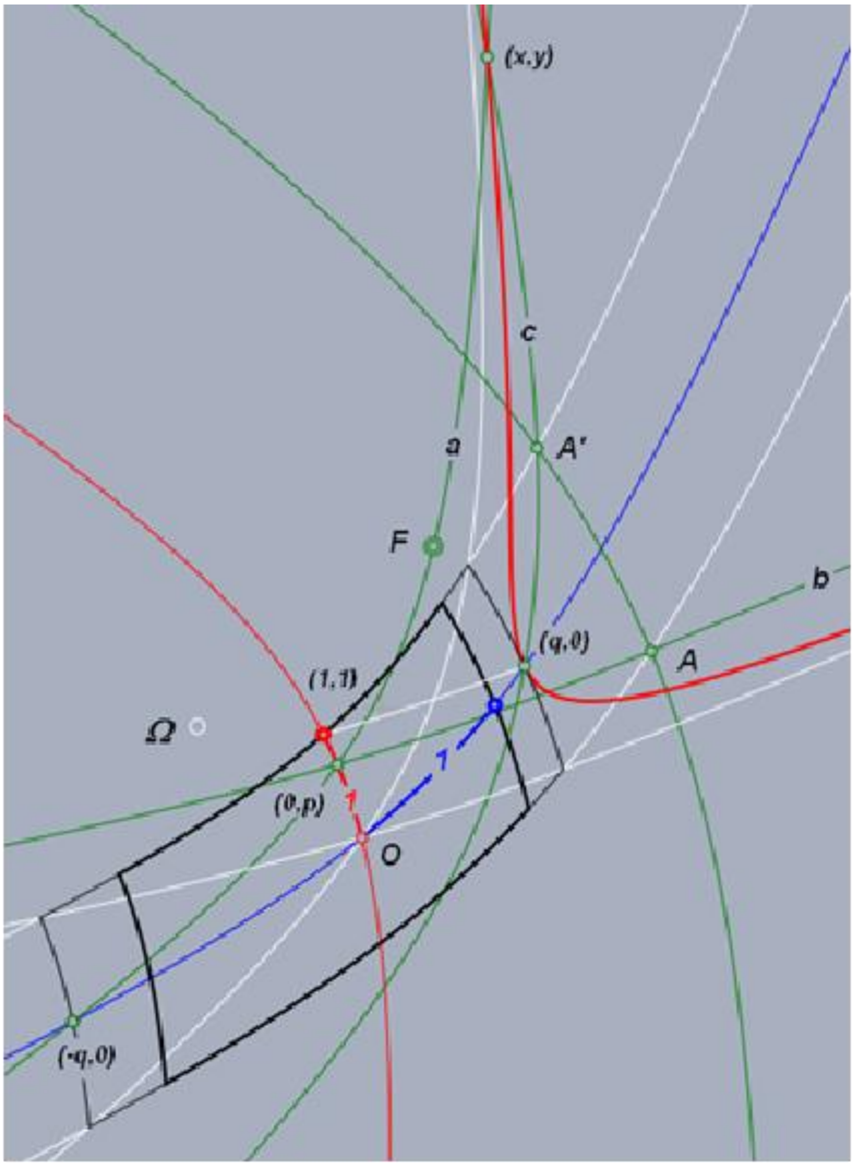
és

$$p=\frac{1-x}{y}$$

Ezeket összevetve kiderül, hogy a torz tojás egy egységsugarú kör:

$$x^2+y^2=1.$$

A $(q,1)$ paraméterű torz hiperbola affin definíciója



A hiperbola ág egy pontjának megszerkesztése

1. Adott vastag fekete "egység" paralelogramma, az O középpontja és a piros-kék koordináta rendszer az egységekkel (1 és 1).
2. A kék tengely irányában q egységnyire megnyújtom a paralelogrammát. Ez az ellenkező irányban is változást hoz. Így keletkezik a vékony fekete paralelogramma.
3. A $(-q, 0)$ ponton keresztül meghúzom az F pontjánál fogva mozgatható a a-egyenest.
4. a metszi a piros koordináta tengelyt a $(0, p)$ pontban
5. $(0, p)$-n keresztül meghúzom az $(q, 0)$ és az $(1, 1)$ pontokat összekötő a-egyenessel párhuzamos b a-egyenest.
6. b elmetszi az $y = -1$ a-egyenest az A pontban.
7. Az A ponton át párhuzamost húzok a piros tengellyel. Ez a párhuzamos elmetszi az $y = 1$ a-egyenest az A' pontban.

8. Az A' pontot összekötöm az $(q,0)$ ponttal; ez a c a-egyenes.
9. A c a-egyenes elmetszi az a a-egyenest az (x,y) koordinátájú pontokban.
10. F -et mozgatva kirajzolódik a q paraméterű hiperbola.

Levezetjük a torz hiperbola egyenletét

Az a egyenlete:

$$y = \frac{p}{q}x + p$$

A b egyenlete:

$$y = -\frac{1}{q}x + p$$

Az A pont koordinátái: $(q(1+p), -1)$.

Az A' pont koordinátái: $(q(1+p), 1)$.

A c egyenlete:

$$y = \frac{1}{p}\frac{x}{q} - \frac{1}{p}$$

Az (x,y) pontok közötti összefüggést úgy határozom meg, hogy a egyenletéből is és c egyenletéből is kifejezem p -t:

$$p = \frac{\frac{x}{q} - 1}{y}$$

és

$$p = \frac{y}{\frac{x}{q} + 1}$$

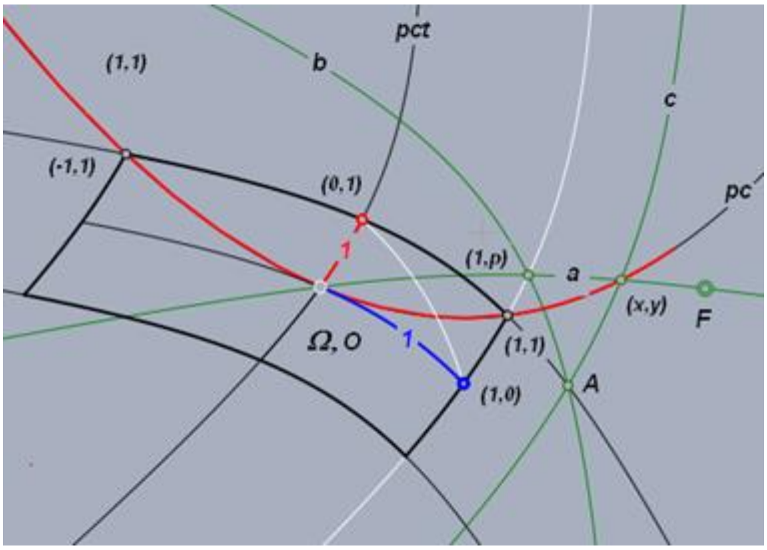
Ezeket összevetve kiderül, hogy a torz micsoda egy $(q,1)$ paraméterű hiperbola:

$$\frac{x^2}{q^2} - y^2 = 1.$$

A paraciklus affin reprodukciója

A paraciklus (parabola) pontjainak megszerkesztése affin eszközökkel

1. Adott a vastag fekete "egység" paralelogramma az O, Ω középpontja és a piros-kék koordináta rendszer az egységekkel: (1 és 1).
2. A "függőleges" koordinátatengely most egy az Ω–án, az $(1,1)$ és a $(-1,1)$ pontokon átmenő paraciklus (pct) egyik sugara.
3. A $(0,0)$ ponton keresztül meghúzom az F pontjánál fogva mozgatható a a-egyenest.
4. a metszi a fehér $x=1$ egyenletű egyenest az $(1,p)$ pontban.
5. Az $(1,p)$ ponton keresztül meghúzom az $(0,1)$ és az $(1,0)$ pontokat összekötő a-egyenessel párhuzamos b a-egyenest.
6. b elmetszi az $y=1$ a-egyenest az A pontban.
7. Az A ponton át párhuzamost húzok a piros tengellyel; (pct)-vel. Ez a párhuzamos elmetszi az a a-egyenest az (x,y) pontban.
8. F-et mozgatva kirajzolódik a pc paraciklus.



A paraciklus egyenlete

Levezetjük a paraciklus egyenletét az imént megadott affin koordinátaraendszerben
Az a egyenlete:

$$y = px$$

A b egyenlete:

$$y = -x + p + 1$$

Az A pont koordinátái: $(1,p)$. A c egyenlete:

$$x = p$$

Az (x, y) pontok közötti összefüggést úgy határozom meg, hogy a egyenletéből kifejezem –t, és az eredményt összevetem egyenletével:

$$p = \frac{y}{x}$$

és

$$p = x$$

Kiderül, hogy a paraciklus egyenlete a jelen koordinátarendszerben:

$$y = x^2.$$

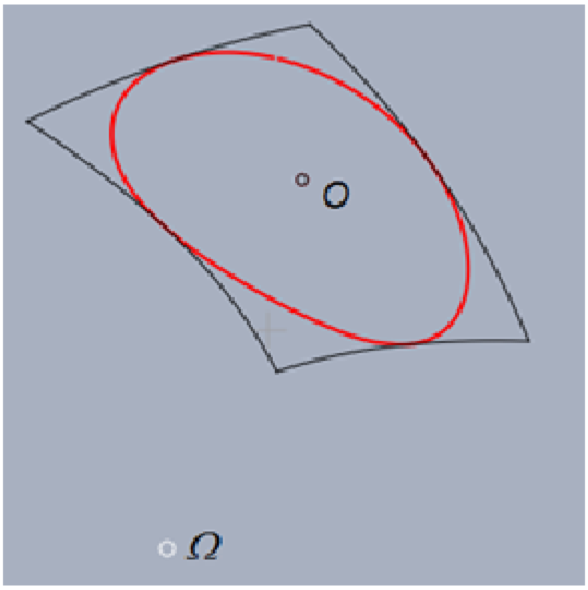
Hiperbolikus egyenes és kör reprodukciója

Hogy lehetne a hiperbolikus egyenest is és a hiperbolikus kört is reprodukálni egy affin rendszerben?

- Előbb megállapítjuk, hogy a hiperbolikus geometria előáll az affin síkon anélkül is, hogy pontosan a tartalmazó (modellt-tartó) hiperbolikus geometriát kapnánk.
- Ugyanígy megkapjuk az eukleidészi geometriát is.
- Végül saját magában (a modellt-tartó) hiperbolikus geometriában is megkapjuk önmagát a benne modellezett affin síkon.
- Mi a kapcsolat a visszakapott (modellt-tartó) hiperbolikus geometria és az azt visszaadó affin geometri által generált eukleidészi geometria között?
- A kör (a torz tojás) közös gyermek.
- Vagy mindhárom geometria ugyanabból a torz tojásból kel ki.
- Végül: a szokásos kérdés: mi volt előbb, torz tojás vagy a torz geometria.
- Melyik geometria nem torz?
- A másik tükrében minden királynő torz! (GyZ: 2012. nov.)

A hiperbolikus geometria affin

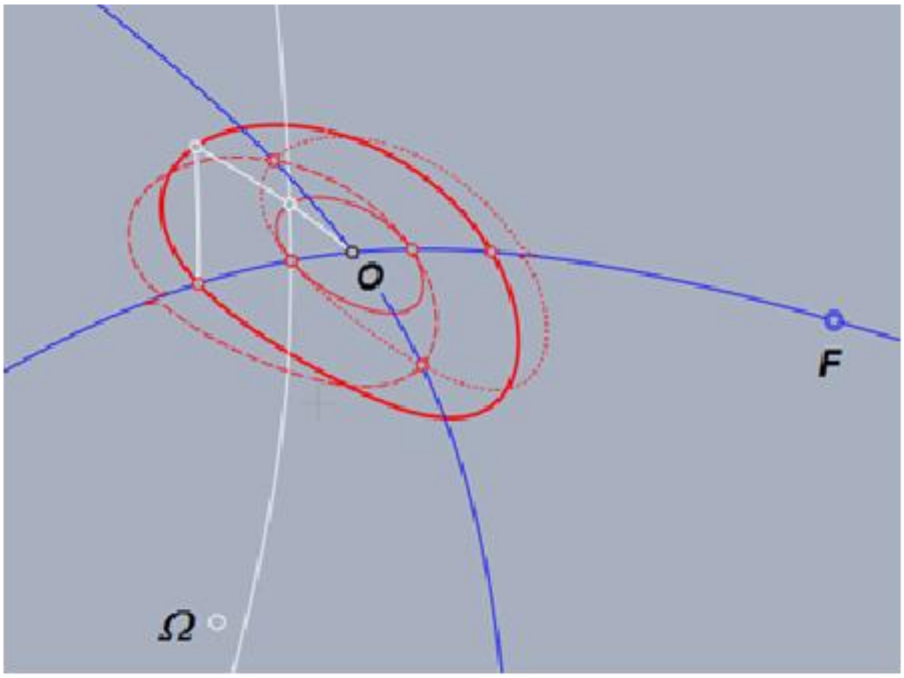
A hiperbolikus geometria affin síkon való felfedezéséhez kiindulópont az iménti tojt torz tojás



1. A terv a következő: megpróbáljuk kitalálni, hogy ehhez a piros körhöz hogyan lehetne az összes meghatározó egység-paralelogrammát megszerkeszteni.
2. Ha megvannak ezek az egységparalelogrammák, akkor talán forgatni is lehetne őket.
3. Ha nyújthatóak is lennének (q) ezek a forgatható paralelogrammák, akkor forgatható és torzítható hiperbolákat is lehetne csinálni.
4. Gondoljunk a lámpára, ami fizikailag létrehozta az első hiperbolikus geometriánkat.

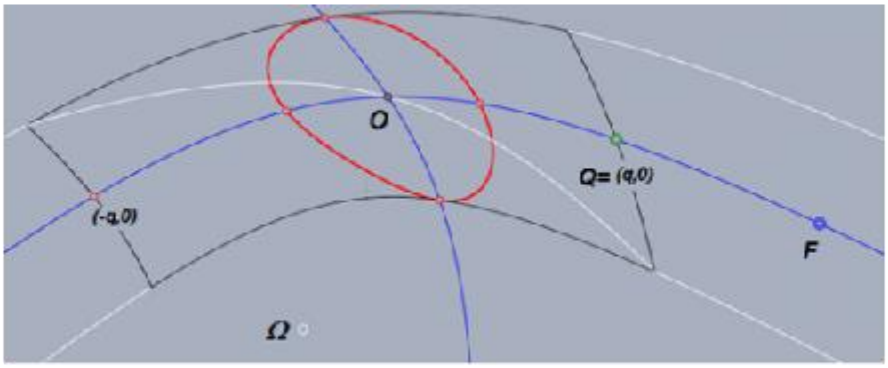
A definiáló paralelogramma forgathatóvá tétele

1. A probléma az, hogy a két koordinátatengely nincsen össze "szögelve", mert nincs szög.
2. Először tehát merev szöget kell csinálni.Az eukleidészi merőlegességet próbáljuk megvalósítani.



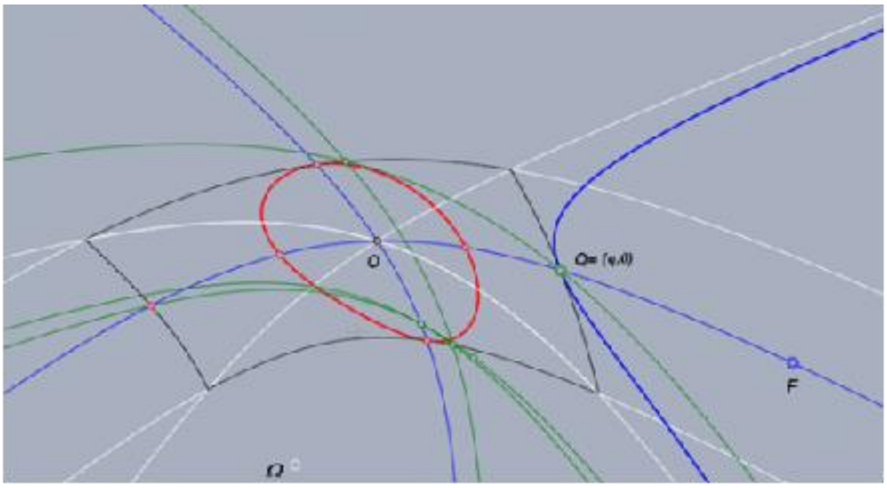
Ellipszis körül mozgatható paralelogramma

Megszerkesztjük az F , $Q = (q, 0)$ pontoknál fogva az ellipszis körül mozgatható paralelogrammát a hiperbola szerkesztés előkészítésére.



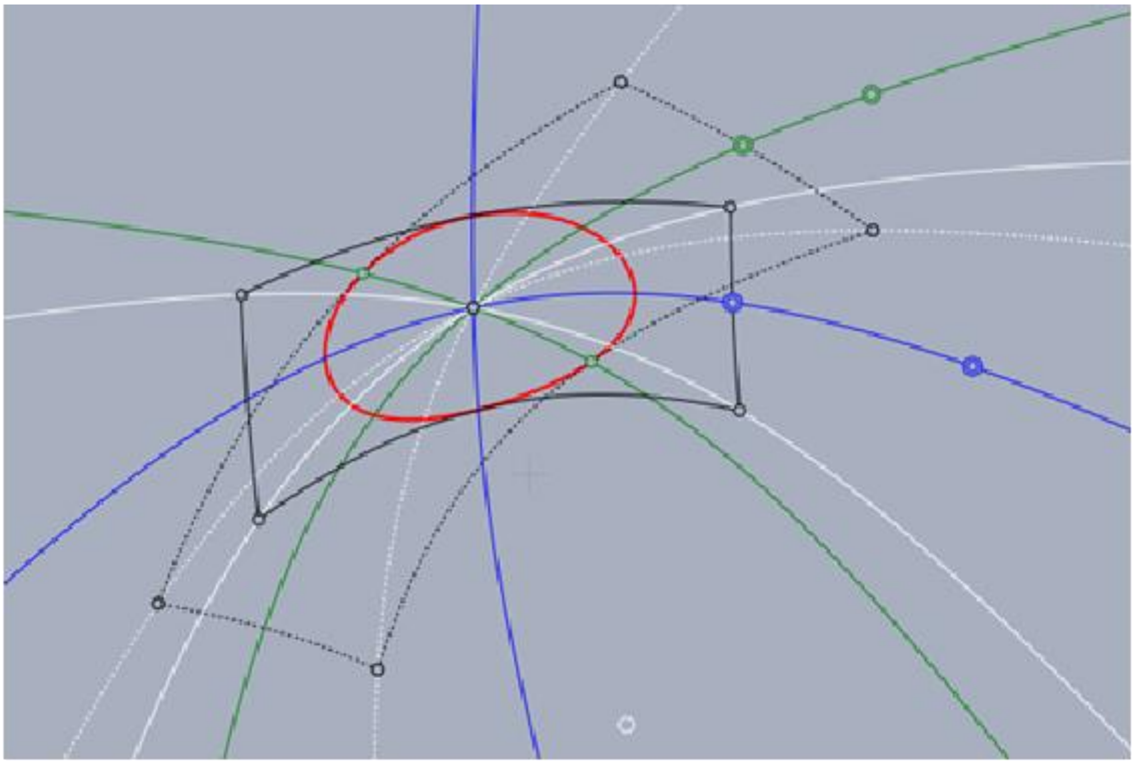
A kész hiperbolikus geometria az affin síkon

legalábbis az egyenesek...



A különböző lámpaernyő beállítások

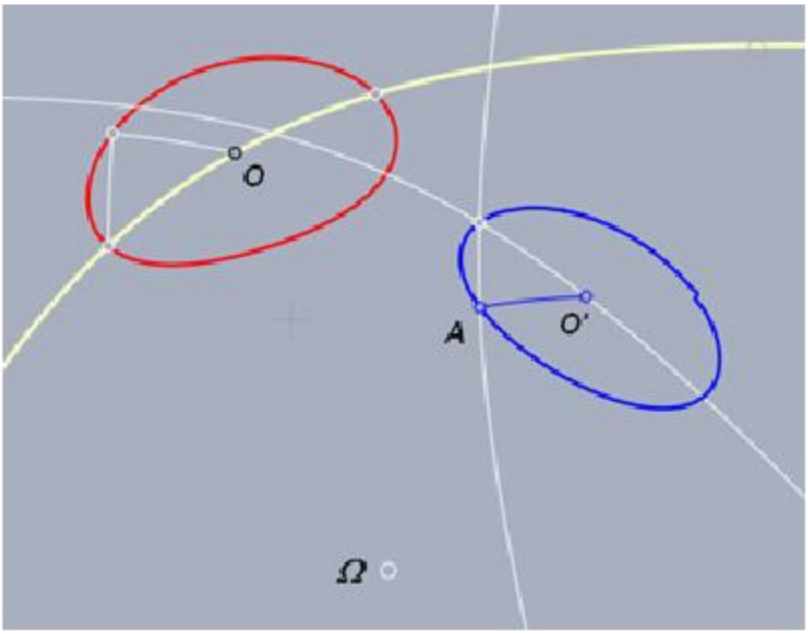
(A hiperbolikus párhuzamosság beállításokhoz)



A körök már csak innen adódnak, ahogy azt már láttuk.

Az egyenesek: az affin egyenesek.

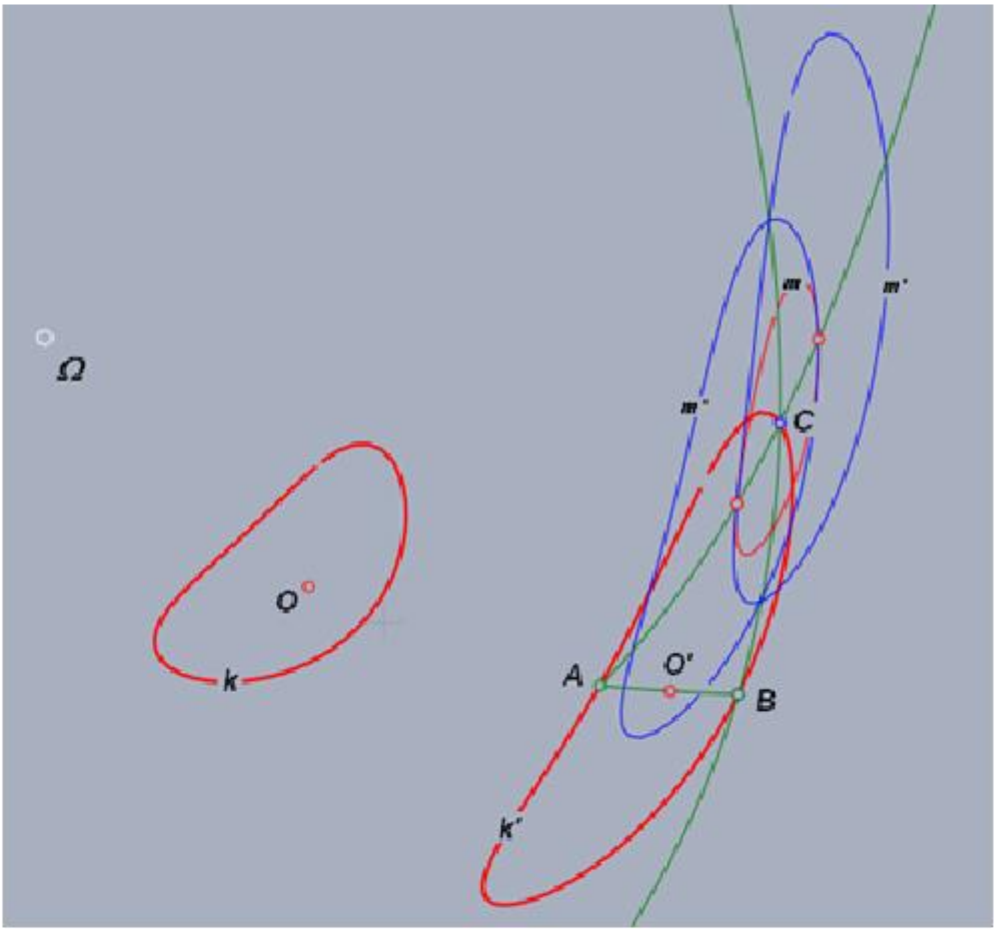
Az eukleidészi geometria az affin síkon



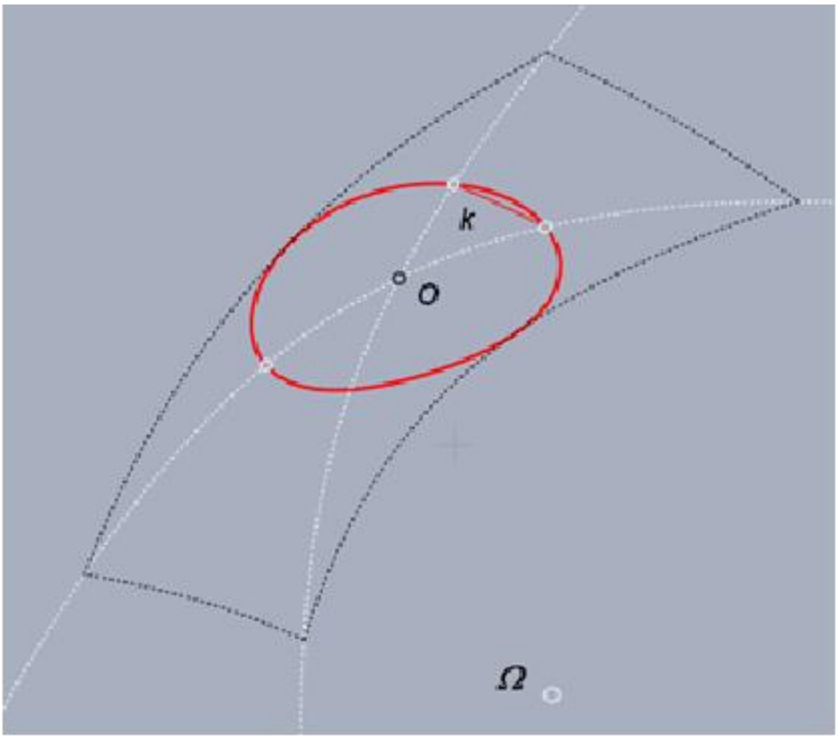
Ha az alapkör adott, akkor tetszőleges AO' szakaszhoz definiálható az alapkör homtetikus (párhuzamosan) hasonló megfelelő mása.

A kör esetén a párhuzamos hasonlóság és a hasonlóság nem megkülönböztethető fogalmak.

A Thalész tétel a minta kör homotetikus másolataival

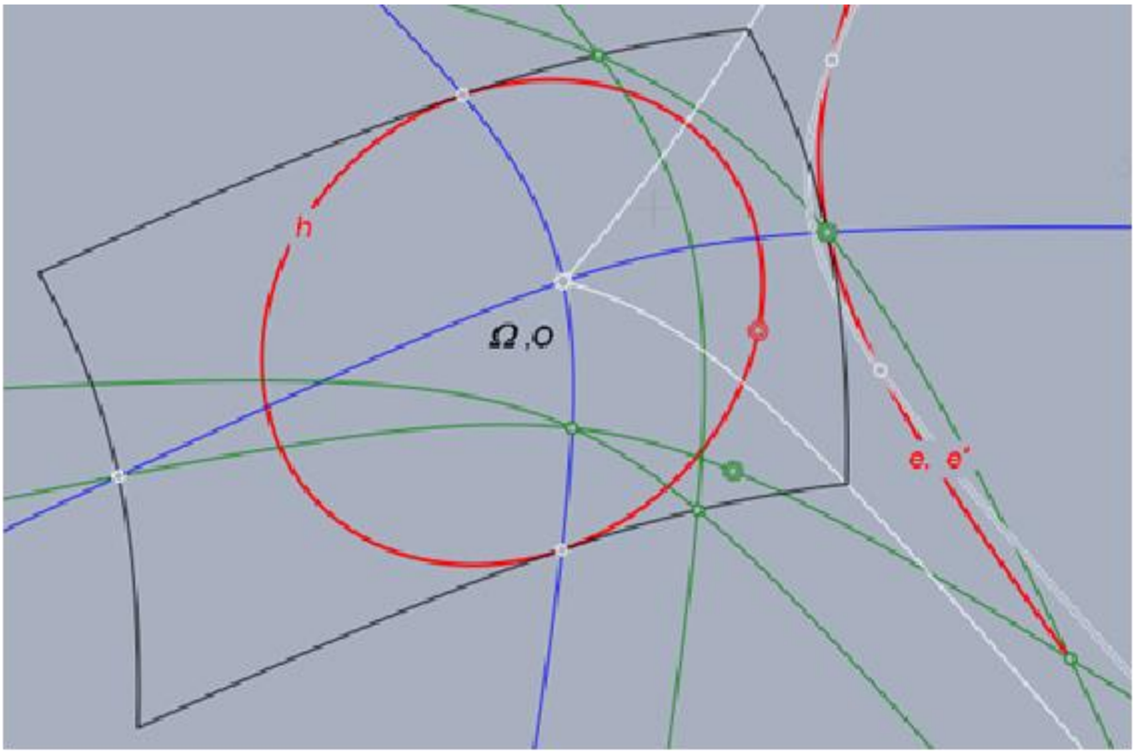


A Klein modell torz alakja



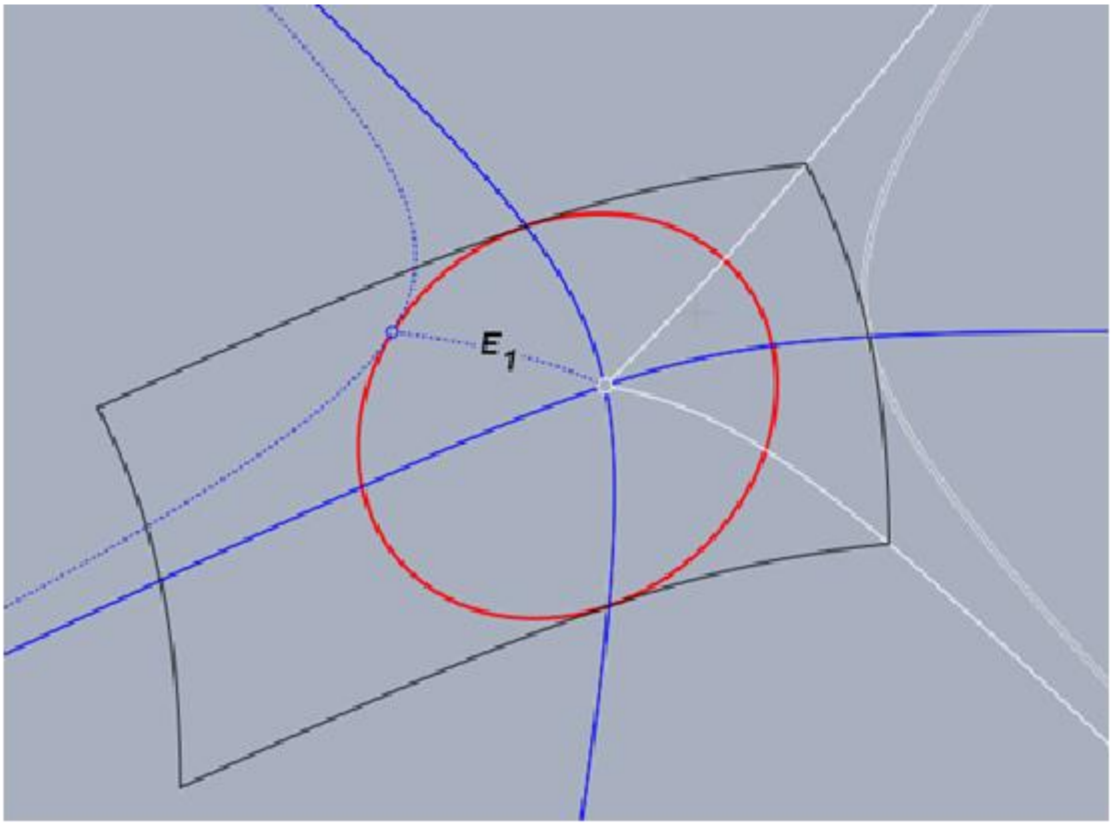
Centrumok

Mi történik, ha az affin centrumot és a minta kör cetrumát egybeejtjük?



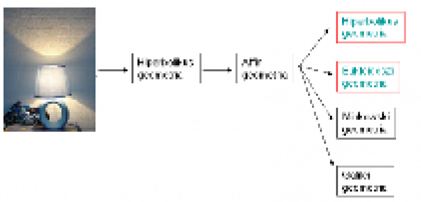
Ha az affin mintakörnek "megfelelő" a mérete, akkor a minta adó hiperbolikus sík és az affin modellben értelmezett hiperbolikus sík egybeesik.

Az első abszolút egység



Ha a minta kör hiperbolikus, ha az affin centrum egybeesik ennek centrumával és sugara E_1 , akkor az affin hiperbolák egybeesnek a hiperbolikus egyenesekkel.

Amit eddig végeztünk



12 Szemléletes hiperbolikus geometria IX.

Szemléletes hiperbolikus geometria IX.

Témáink

Az eukleidészi geometria a hiperbolikus síkon

- Ismétlés: az eukleidésizi geometria a hiperbolikus síkon
- Az eukleidészi geometria axiomarendszere
- A hiperbolikus és az eukleidészi kör izogonalitásos definíciója
- A Hjelmslev modell és a Klein modell (a húrok)
- Közös körök és közös ekvidisztánsok
- A hiperbolikus kör kerülete és az eukleidészi kör kerülete
- Az abszolút szinusz tétel
- A hiperbolikus hossz és az eukleidészi hossz közötti összefüggés kérdése
- A Klein modell (ismétlés)

A tárgy összefüggésrendszere nagy vonalakban A Klein modell tetszőleges kört tekintve

- A kettős viszony és tulajdonságai
- A hiperbolikus hossz számszerű kifejezése (egy konstans erejéig)

Az eukleidészi geometria axiómarendszere

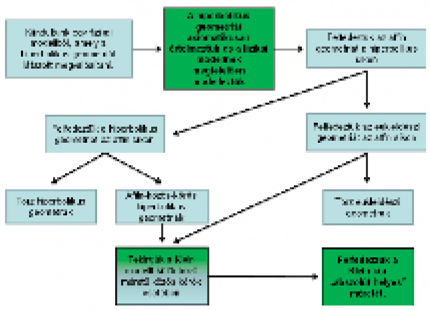
- Rendezési axiómák: R1, ..., R7
- Sík axióma: R8 (Extra Hungariam non vita est.)

- Folytonossági axióma: F
- Egybevágósági axiómák: E1, ...E5
- Affin párhuzamossági axióma: A1

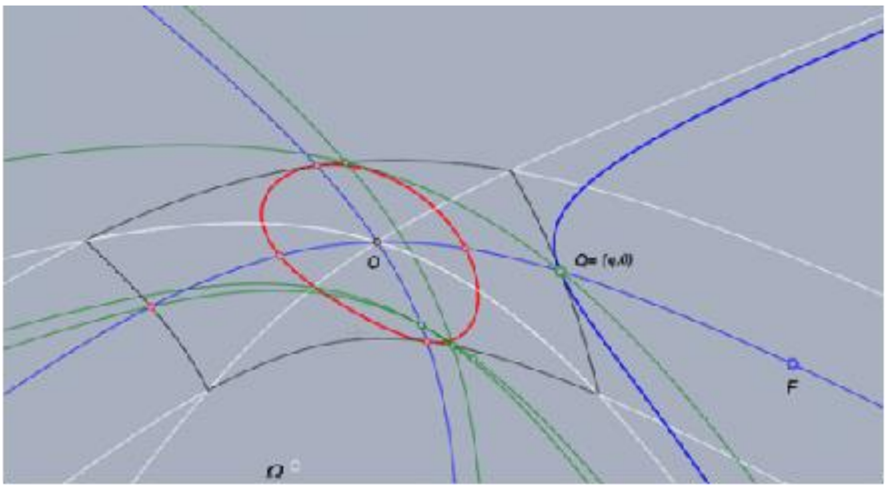
Az affin Desargues tétel már bizonyítható az eukleidészi síkon.

(E1, ..., E5 nélkül ez nem bizonyítható, ha fenntartjuk R8-at [Hilbert]. R8-nélkül, tehát kilépve az affin térbe és a térbeli affin axiómákat felvéve az Affin párhuzamossági axióma megint bizonyítható; az egybevágósági axiómákra nem kell hivatkozni.)

A tárgy összefüggésrendszere nagy vonalakban



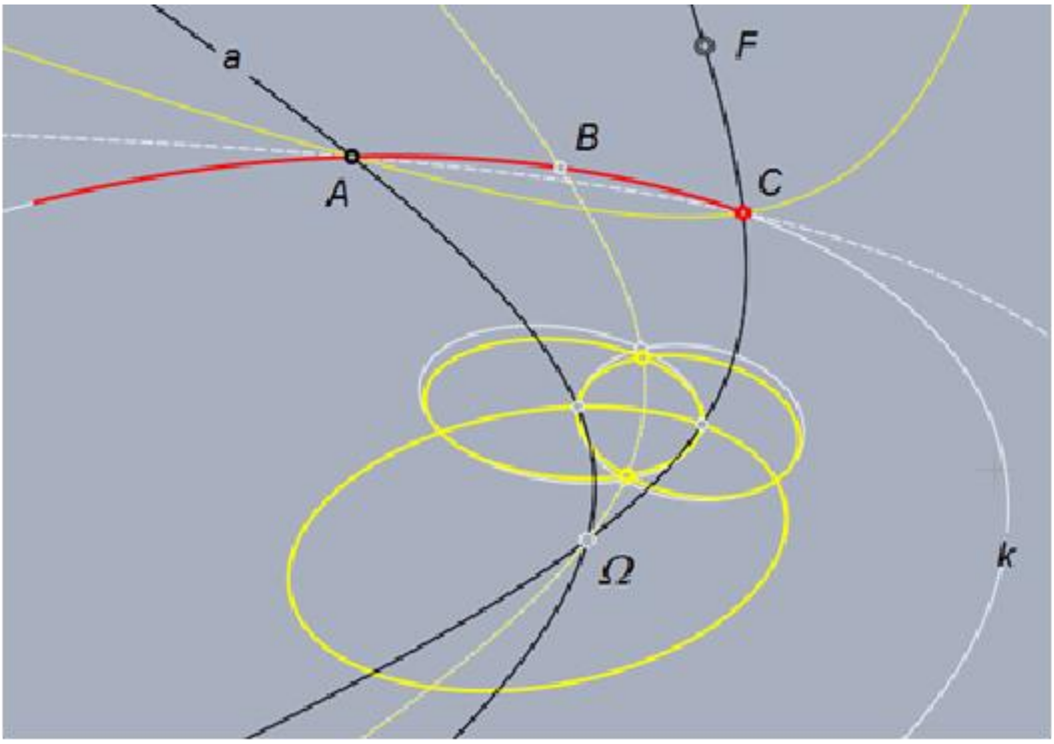
Emlékeztető ábra



Itt el lehetne mondani, hogy ellipszist nem csak a korábban ismertetett szerkesztéssel, hanem a Pascal tétel alapján is lehet szerkeszteni. (De akkor annak hol a közepe?)

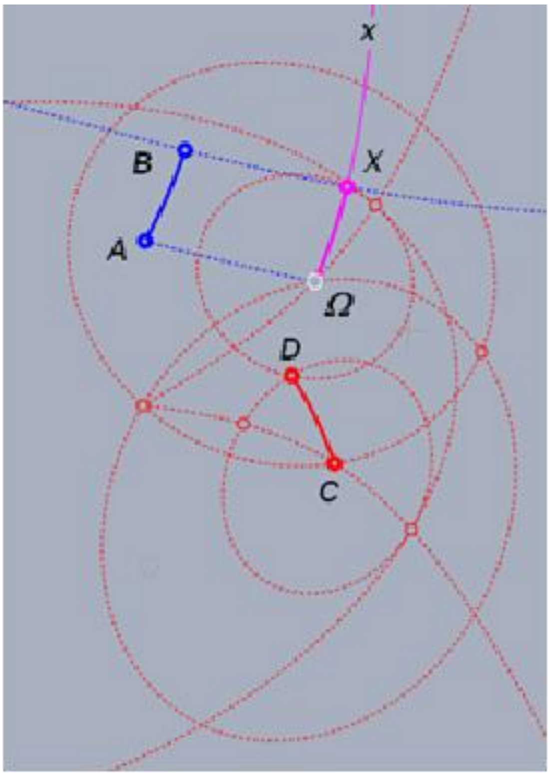
Körök egybeesése

Az Ω középpontú eukleidészi és hiperbolikus kör egybeesik (Az izogonális szerkesztéskor a szögfelezőt a megfelelő "objektumokkal" definiáljuk.)



Vegyük észre, hogy a $AB = BC$ hiperbolikus és eukleidészi értelemben is!

A materiális egybevágóság fogalma



A hiperbolikus síkon úgy definiáltuk az affin síkot, majd az eukleidészi síkot, hogy az Ω ponton áthaladó affin (eukleidészi) és hiperbolikus egyenesek egybeestek.

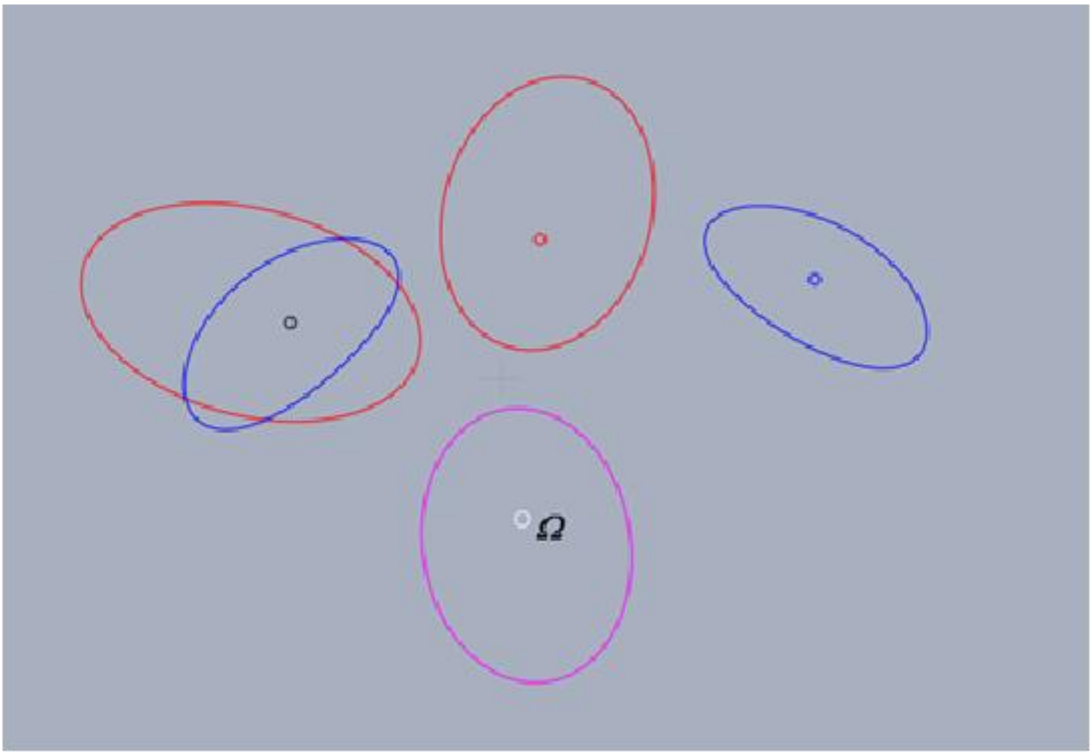
Többször és többféle módszerrel is meggyőződhettünk arról, hogy az Ω középpontú eukleidészi és hiperbolikus körök is egybeesnek.

Ha a fentiekben tárgyalt módszerrel egymásra illesztett eukleidészi és hiperbolikus sík két alakzatát sikerül úgy elmozgatni, hogy egybe essenek, akkor azokat materiálisan egybevágóaknak fogjuk nevezni. Ha ugyanannak a geometriának az egyvágósági transzformációját alkalmazzuk, akkor egyszerűen egybevágóságról van szó.

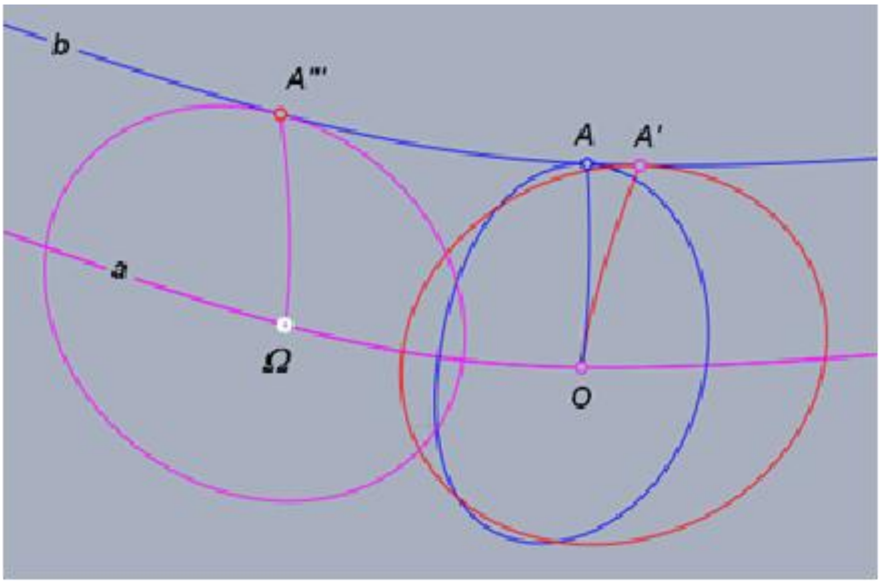
Az ábrán egy AB eukleidészi és egy CD hiperbolikus szakasz látható. Mind a kettőt az Ω pontba mozgattam a megfelelő egybevágósági transzformációval. Eredményül két egymáson fekvő, de mégis különböző két szakaszt kaptam. Szakaszok esetében a fenti esetben azt mondom, hogy materiálisan egybevágóak. Materiálisan egybevágó sugarú körök nyilvánvalóan materiálisan egybevágóak...

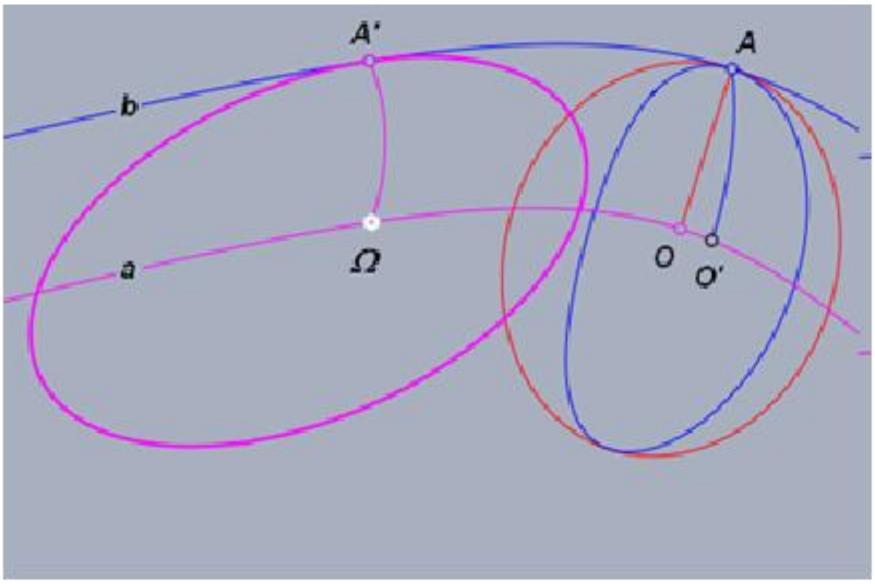
Materiálisan egybevágó körök

Az ábrán több materiálisan egybevágó, de különböző kör szerepel. A kék körök eukleidésziek, a piros körök hiperbolikusak. Mindkét körfajtát a megfelelő egybevágóság az Ω pont körüli alapzatba mozgatja. Ezek tehát materiálisan egybevágó alakzatok.



Materiálisan egybevágó alakzatok

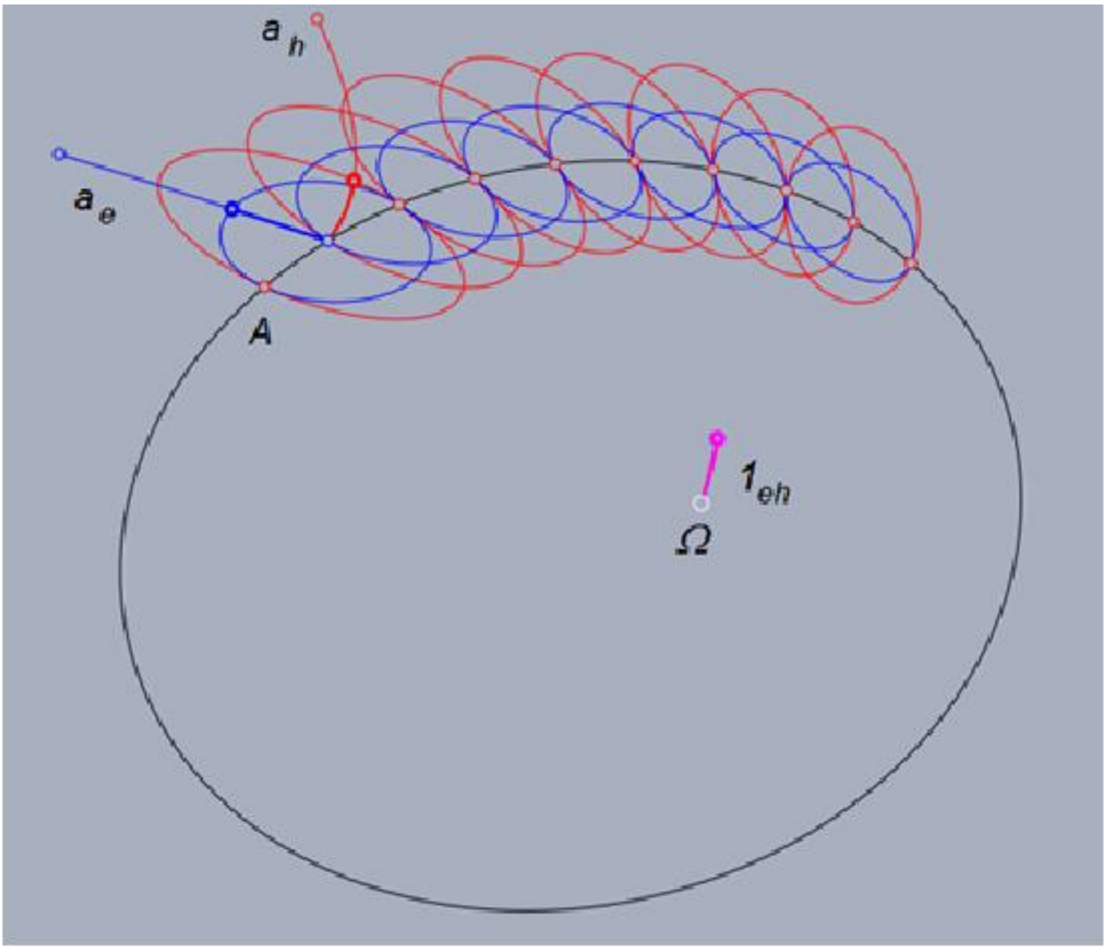




Egyszerű materiálisan egybevágó alakzatok: körök, melyek középpontja egy $h-e$ közös egyenesen van és sugaraik, mint ekvidisztáns sugarak merőlegesek a megfelelő hipebolikus, illetve közös egyenesre.

Materiálisan egybevágó sugarú körök

Az Ω köré rajzolt materiálisan egybevágó sugarú körök egybe esnek. Mi a helyzet a kerületükkel? Az Ω pontban felvett kis közös egységben lemérhetjük a kétféle kerületet. Ha a kis közös egység elég kicsi, akkor a kétféle kerület megegyezni látszik. Hogy pontosan egyenlőek, azt a X. fejezetben be is fogjuk bizonyítani. Ebben a fejezetben bizonyítás nélkül elfogadjuk azt az állítást, hogy a két kerület – közös egységben mérve – egyenlő.



Ez az ábra mutatja, hogy 1_{eh} -nak a nagy kör sugarához képest nem is kell olyan nagyon kicsinek lenni és már a kétféle (piros és kék) kis körökkel mérve a nagy kör kerületét a két mérés (közel) azonosnak találjuk.

Egyeseket ez arra a téves állításra bátorít, hogy...

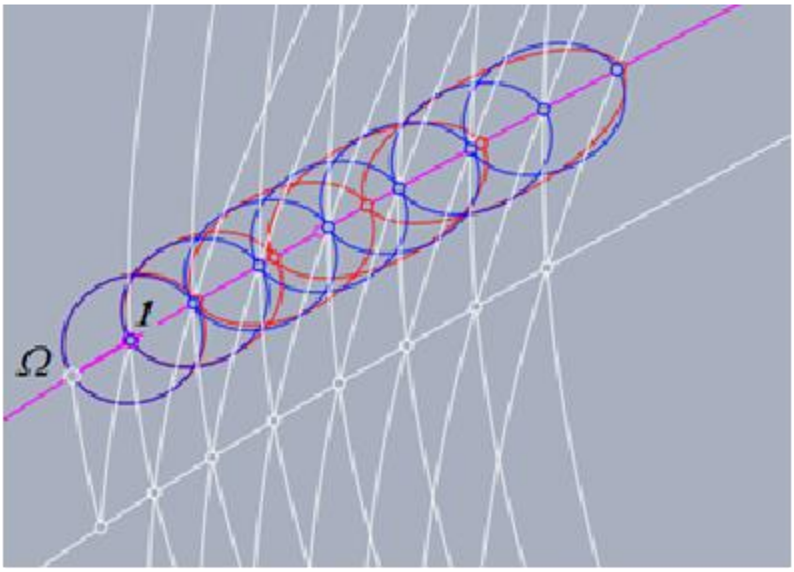
(Ki sem mondom. Ez jó példa a mérnöki és a matematikusi gondolkodás különbözőségére! A mérnök elhiszi a téves állítást és nem is csalódik, amíg jól alkalmazza. A matematikus viszont három napig idegroncsként rohangál a kávéfőzője és a papírjai között.)

A hiperbolikus kör kerülete

Mivel a hiperbolikus kör kerülete egyenlő a vele materiálisan egybevágó eukleidészi kör kerületével, a hiperbolikus kerületképlet nem lehet más, mint

$$Or = 2\pi f(r),$$

ahol $f(r)$ az r hiperbolikus hosszúságú szakasz eukleidészi hossza. (Ox az x sugarú kör kerületét jelöli.)



Itt újra fel kell tennünk a kérdést az f függvény konkrét formájára vonatkozólag!

Kék: eu-hosszmérés

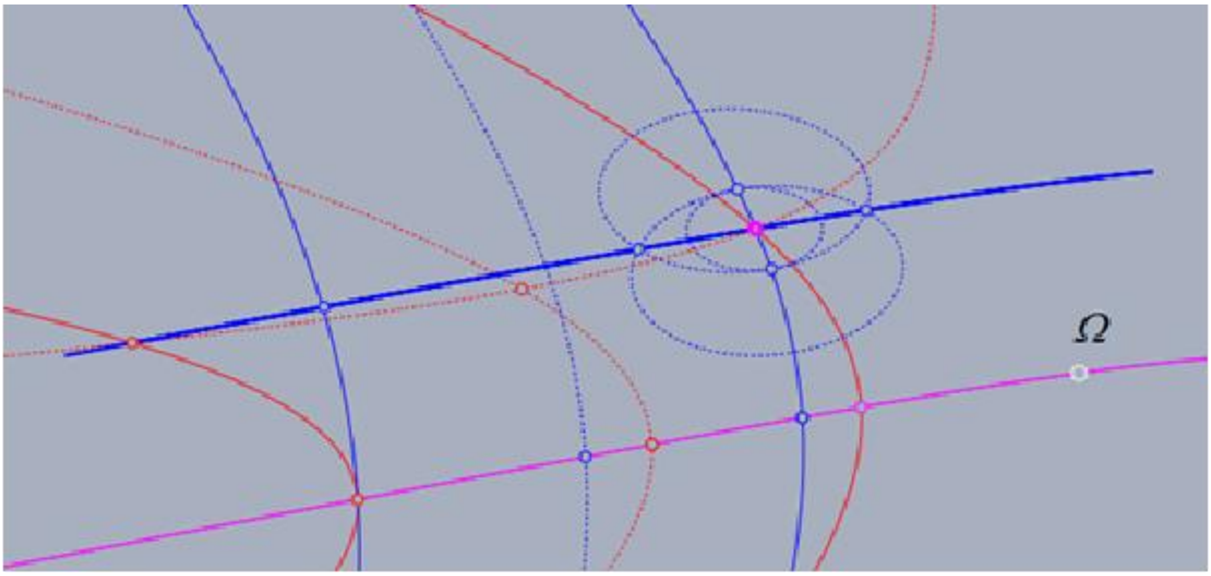
Piros: h-hosszmérés

Fehér: affin-hosszmérés

De előbb...

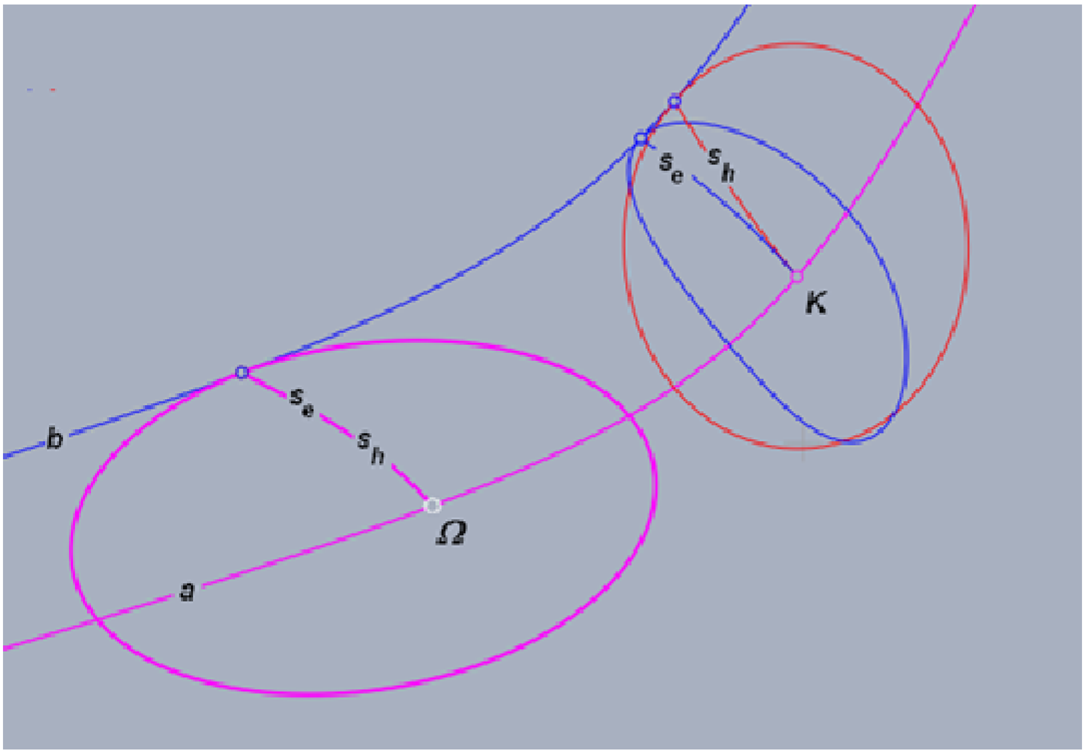
Ekvidisztánsok

Az Ω középponton átmenő közös egyenesek eukleidészi és hiperbolikus ekvidisztánsai egybeesnek (Az izogonális szerkesztéskor a szögfelezőt a megfelelő "objektumokat" használjuk.)



Ekvidisztánsok folytatás

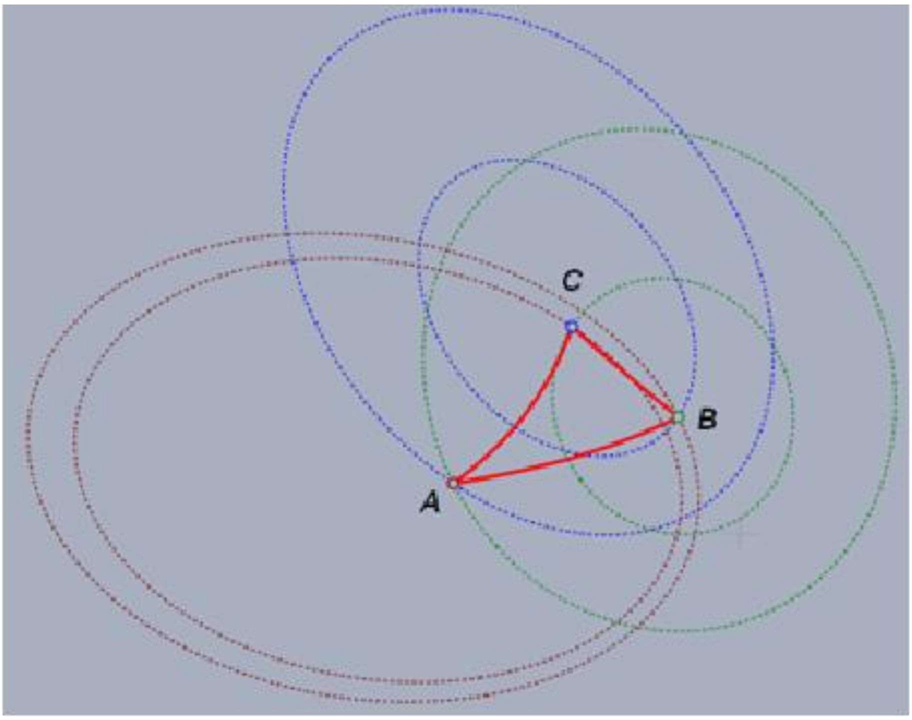
Az Ω ponton keresztül húzott a e-h-egyenes és a vele ekvidisztáns b e-egyenes (egyszerre eukleidészi és hiperbolikus ekvidisztáns) e-sugarai és h-sugarai materiálisan egybevágóak:



A piros h-kör és a kék e-kör materiálisan egybevágóak,
közös K középpontjukat Ω-ba tolva egybe esnek és azonos egységben mérve kerületük azonos.

Az abszolút szinusztétel

(Bolyai, Appendix 25.)



Tetszőleges háromszögben az oldalakkal szemben fekvő szögek szinuszai úgy aránylanak egymáshoz, mint azoknak a köröknek a kerületei, melyek sugarai éppen a szóban forgó oldalak:

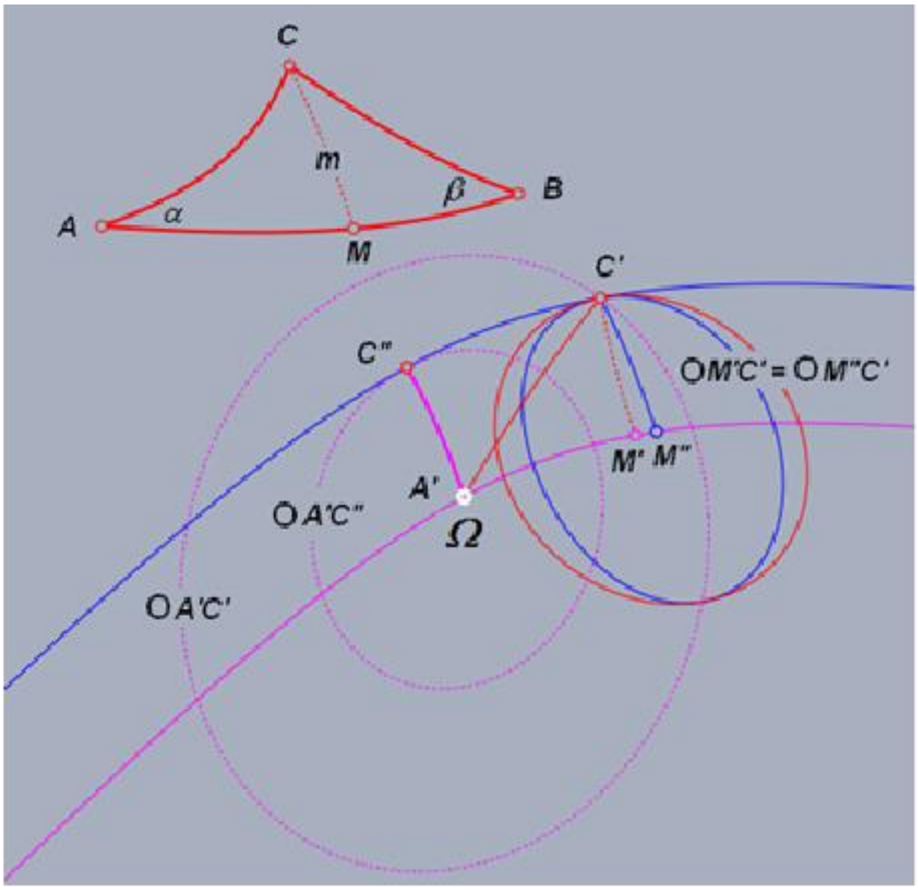
$$\sin(CAB) : \sin(CBA) = OCB : OAC, \sin(ACB) : \sin(CBA) = OAB : OAC, \sin(ACB) :$$

($Ox =$ az x sugarú kör kerülete.)

Bolyai az Appendixben térbeli bizonyítást adott. Most megmutatom, hogy a materiális egybevágóság fogalmára alapozva egészen egyszerű síkbeli bizonyítás is lehetséges.

Az abszolút szinusz tétel (felének) bizonyítása

A bizonyítás lényege: nyilvánvaló, hogy a szinusz tétel az eukleidészi geometriában az imént kimondott formában is igaz. Ezek után felhasználjuk a materiális egybevágóság fogalmát és azt a tényt, hogy materiálisan egybevágó sugarú körök eukleidészi és a hiperbolikus kerülete azonos.



C -ből merőlegest állítottam az ABC hiperbolikus háromszög AB oldalára; M magasságpont, m magasságvonal.

Az AMC derékszögű hiperbolikus háromszöget lemásoltam a Ω pontba. Így keletkezett az AMC -vel egybevágó $A'M'C'$ derékszögű hiperbolikus háromszög. C' -ből eukleidészi merőleges állítottam az $A'M'$ közös egyenesre. Így keletkezett az $A'M''C'$ derékszögű eukleidészi háromszög.

A megfelelő materiális egybevágóságokra hivatkozva:

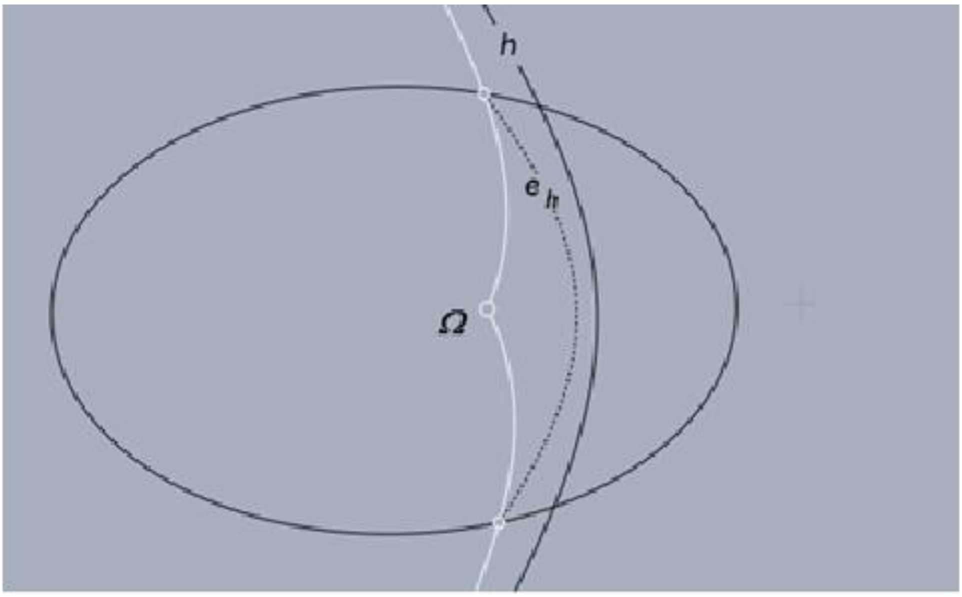
$$\sin(a) = OMC/OAC.$$

Ugyanezt a BMC háromszög esetében is meg lehet figyelni:

$$\sin(b) = OMC/OCB.$$

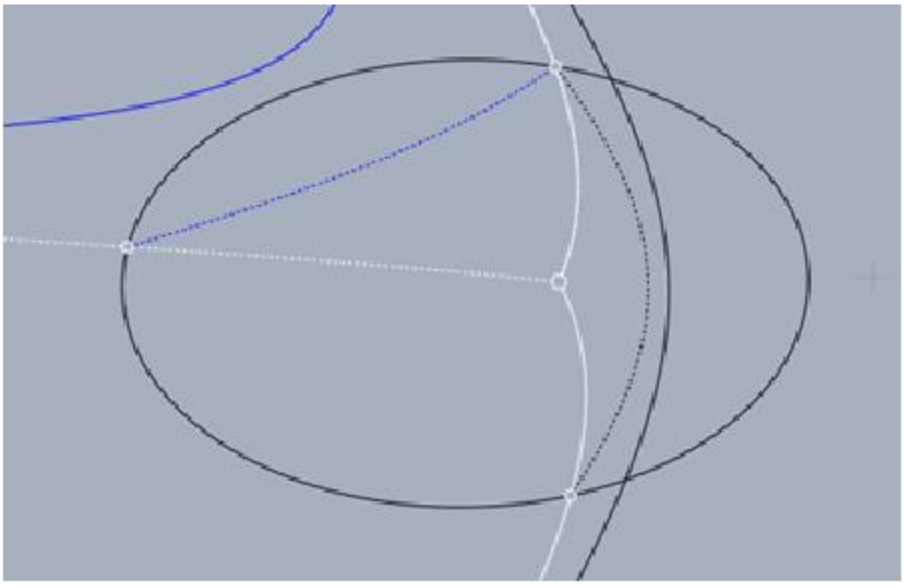
A két egyenlőséget elosztva egymással kapjuk a szinusz tétel egyik állításának hiperbolikus változatát.

Még egyszer a Klein modellről



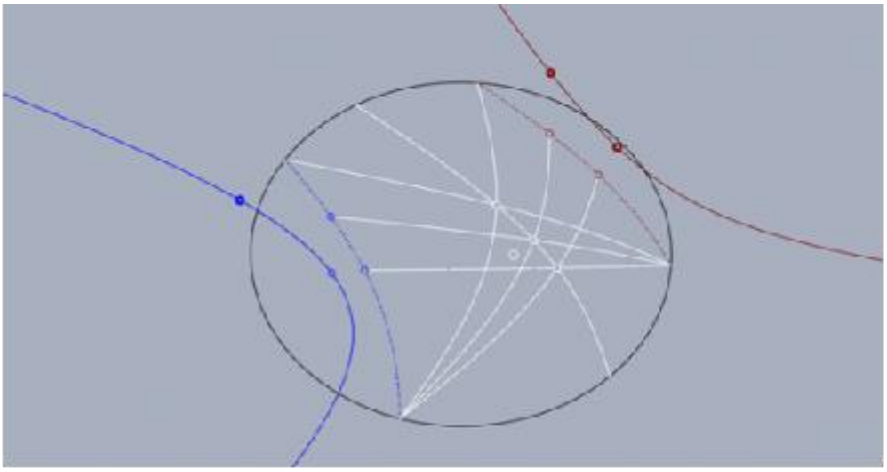
Mostantól csak azzal a helyzettel foglalkozunk, amikor a Klein kör középpontja egybeesik Ω-val.

Párhuzamosok képe a Klein modellben

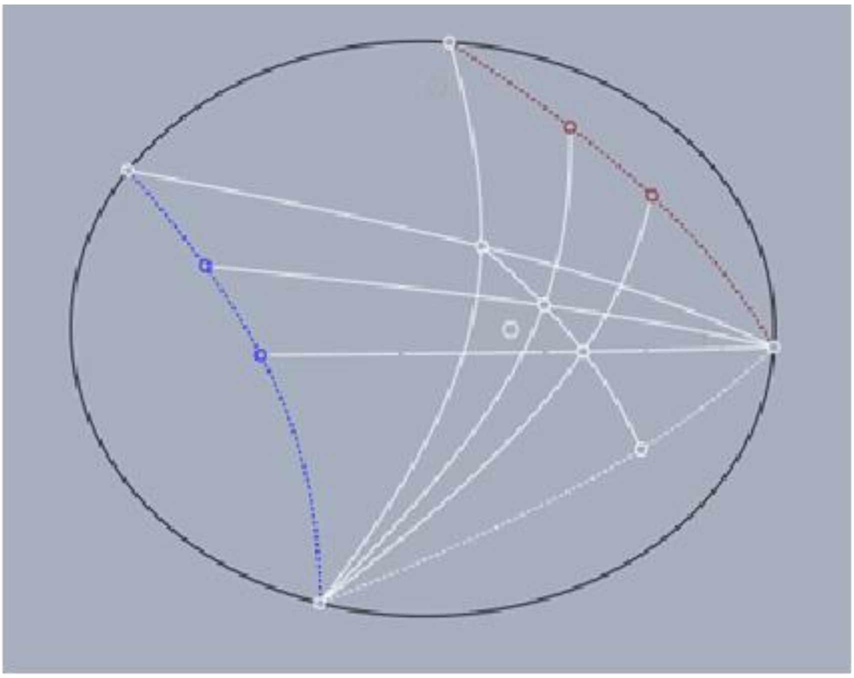


Párhuzamosok képe a Klein körön belül olyan, hogy a "végpontjai" magán a Klein körön találkoznak.

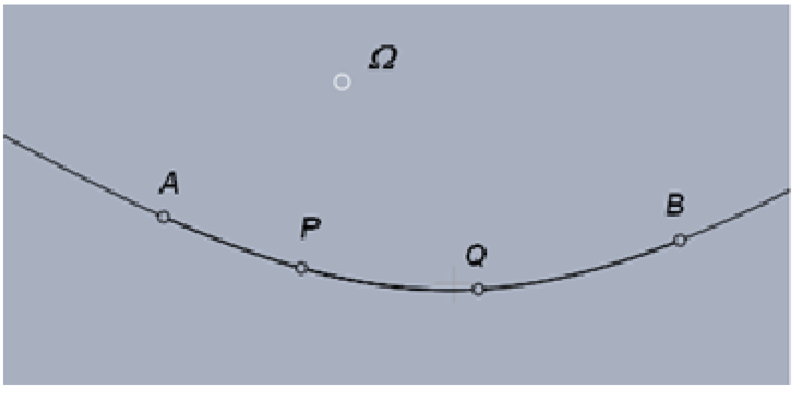
A szakaszmásolási szerkesztés képe a Klein körön belül



A szakaszmásolás "vetítéssel" történik



A kettős viszony definíciója



Legyen

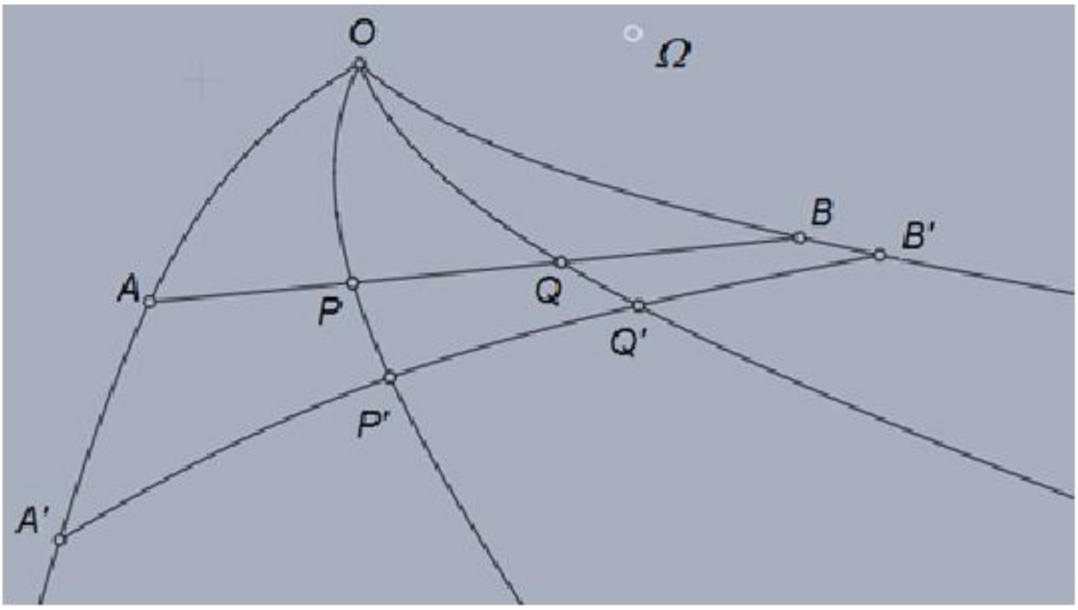
$$(ABPQ) = PA/PB : QA/QB.$$

Az $(ABPQ)$ kettős viszonynak A és B az alapja és P, Q a pontjai. A pontok sorrendje nem feltétlenül az ábra szerinti; a kettős viszony kifejezésében számít a a szakaszvégpontok sorrendje. Ennek megfelelően a kettős viszony lehet pozitív is, negatív is. Az ábra szerinti helyzetben a kettős viszony értéke pozitív.

A továbbiakban azonban a mindig az ábra szerinti helyzettel foglalkozunk, azaz a kettős viszonynak azt a speciális esetét tekintjük csak, amikor:

$[APQ]$, $[PQB]$, $[APB]$, $[AQB]$. Ekkor tehát a kettős viszony pozitív és a szakaszhosszakat mindig pozitívnak lehet venni. Továbbá: a szakaszhosszak számolásakor nem leszünk tekintettel a szakasz jelölésekor használt végpontsorrenddel. ($AP = PA$, stb.)

Papposz tétele



Tekintsük az O -val konkurrens egyeneseket és két másik egyenest, melyek ezek mindegyikét metszi.

$$(ABPQ) = (A'B'P'Q'),$$

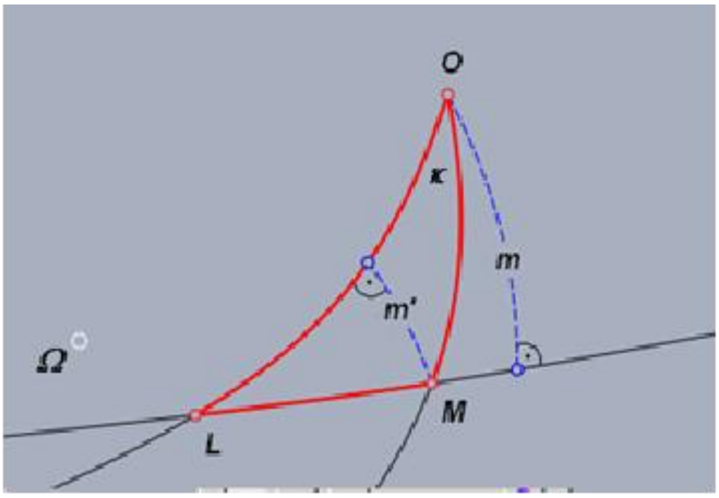
azaz

$$PA/PB : QA/QB = P'A'/P'B' : Q'A'/Q'B'.$$

A kimetszett pontok kettős viszonyai megegyeznek függetlenül a metsző egyenesek helyzetétől, ha a pontok léteznek és egymásnak megfelelnek.

Papposz tételének bizonyítása

Papposz tételének bizonyításához tekintsük a következő egyszerű gondolatmenetet:



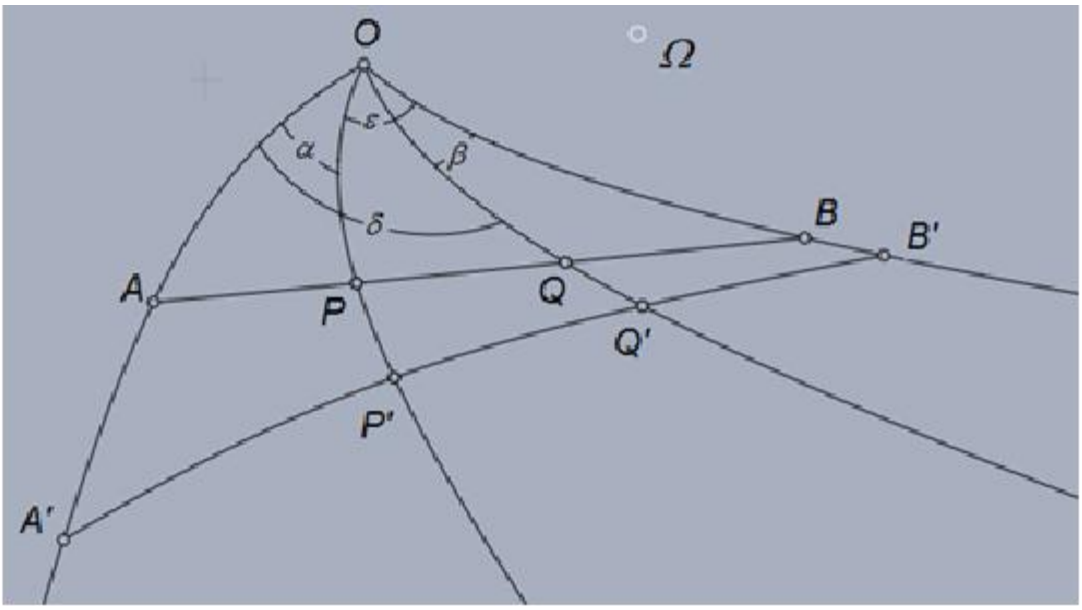
Az ábrabeli OLM háromszög területét kétféleképpen is ki lehet számítani:

$$T = LMm/2$$
$$T = OLm'/2 = OLOM sin(k)/2$$

Vagyis

$$LMm = OLOM sin(k).$$

Bizonyítás folytatása



Az előző gondolatmenetet most alkalmazzuk az OAP, az OAQ, az OPQ és az OPB háromszögekre. (Most is m jelöli az O-ból AB-re ejtett magasságvonal hosszát.)

Azt kapjuk, hogy (i) $PAm = OAOP\sin(\alpha)$,

(ii) $QAm = OAOQ\sin(\delta)$,

(iii) $PBm = OPOB\sin(\varepsilon)$,

(iv) $QBm = OQOB\sin(\beta)$.

Bizonyítás folytatása 2.

Most osszuk el egymással (i)-t és (iii)-at, valamit (ii) és (iv)-et:

$$PA/PB = OA/OB\sin(\alpha)/\sin(\varepsilon)$$

és

$$QA/QB = OA/OB\sin(\delta)/\sin(\beta).$$

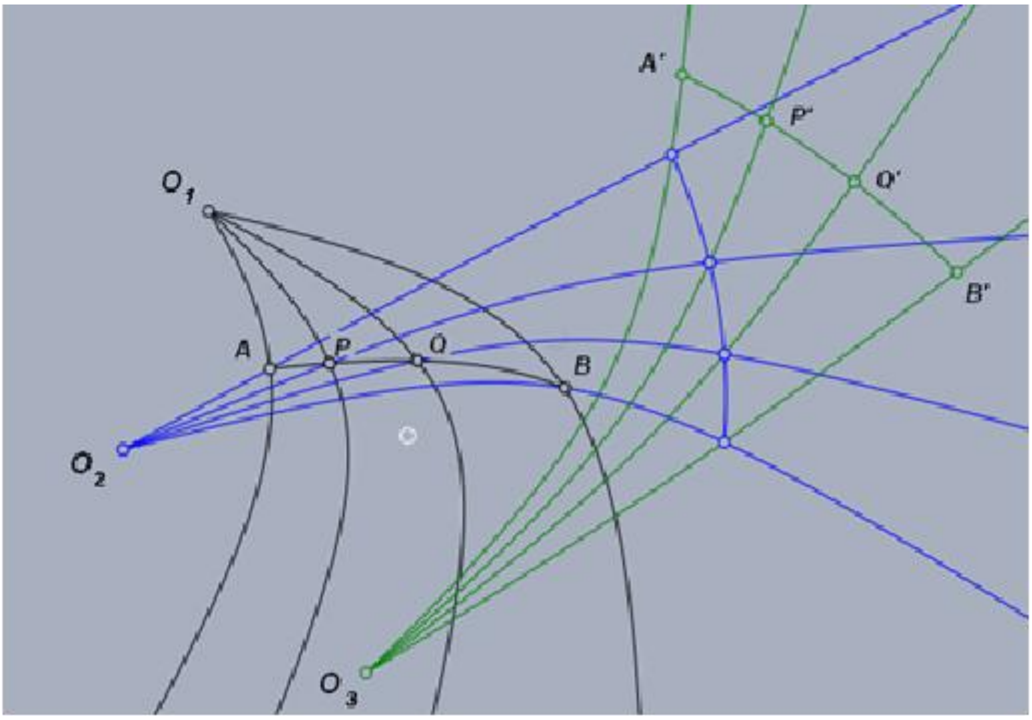
Most ezt a két kifejezést is osszuk el egymással! Azt kapjuk, hogy

$$PA/PB : QA/QB = \sin(\alpha)/\sin(\varepsilon) : \sin(\delta)/\sin(\epsilon).$$

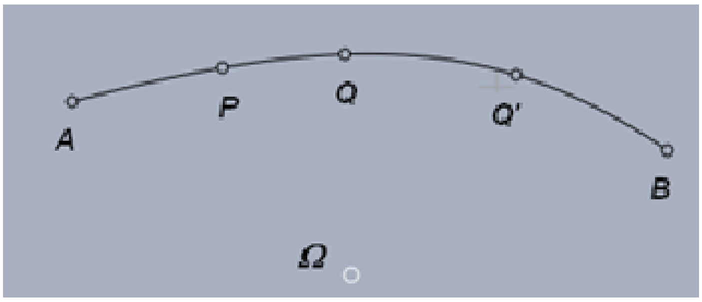
Ugyanezt kaptuk volna, ha A, P, Q, B helyett A', P', Q', B'-ről beszéltünk volna. Ezzel bizonyítottuk Papposz tételét.

A Papposz tétel következménye

Papposz tételének felbecsülhetetlen értékű következménye, hogy ismételt "vetítések" során a megfelelő pontnégyesek kettős viszonya nem változik.



A kettős viszony egy tulajdonsága:



Összefüggő szakaszok esetén a kettős viszony szorzódik:

$$(ABPQ') = (ABPQ)(ABQQ')$$

Tudni illik:

$$PA/PB : QA/QB * QA/QB : Q'A/Q'B = PA/PB : Q'A/Q'B.$$

Vegyük észre, hogy az általunk tekintett pont-elredezések esetén a kettősviszony mindig ≤ 1, 1-hez tart, ha $P \to Q$,

és 0-hoz tart, ha $P \to A, P \to B, Q \to A, Q \to B$.

Ha A és B rögzített, akkor a közéjük eső szakaszokra nézve a kettős viszony reciprokának logaritmusa (negatív ligaritmusa) távolságfüggvény szerűen viselkedik:

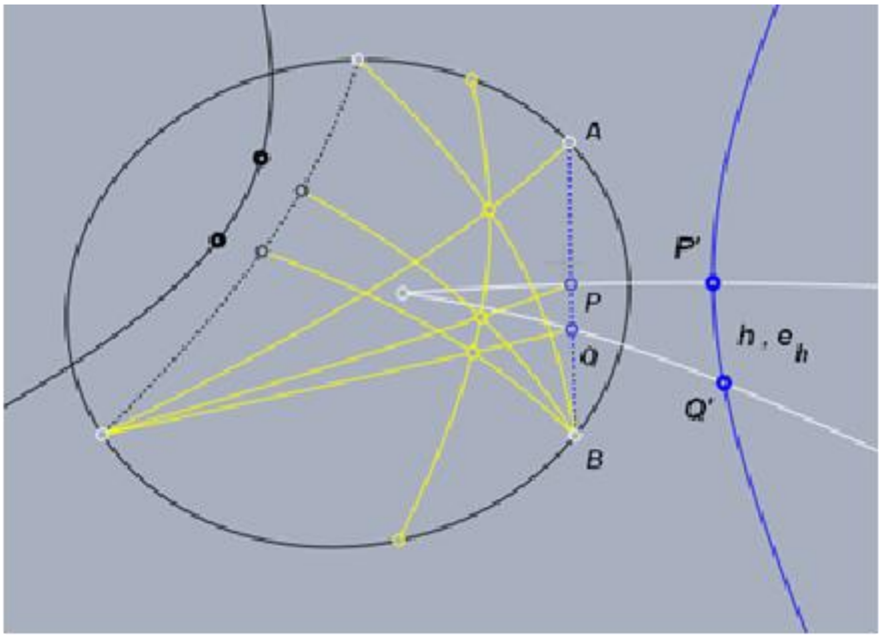
$$\log(1/ABPQ') = \log(1/ABPQ) + \log(1/ABQQ')$$

Mivel mindegy, hogy milyen logaritmust használunk, használhatjuk a természetes alapú logaritmust is, de a kapott "távolságfüggvény" csak egy konstans szorzó erejéig van meghatározva. Lehet mondani tehát, hogy az AB szakaszon a PQ szakaszok hosszát a kettős viszony reciprkának természetes alapú logaritmusával mérjük:

$$d_{AB}(PQ) = K\ln(1/ABPQ)$$

K az AB szakaszon levő egy dimenziós hiperbolikus geometria paramétere.

A tanultak alkalmazás a hiperbolikus síkon



A szakasz másolást el lehet végezni a Klein körön belül is. A külső szakaszméretek és a belső szakaszméretek között teljes harmónia van.

Ezzel a hiperbolikus szakasz h-hossza és a neki megfelelő (bizonyos) eukleidészi szakaszok e-hossza között kapcsolatot teremtettünk.

1. $h_{P'Q'} = K\ln(1/(ABPQ))$
2. Mit mondhatunk K természetes választásáról? Semmit?
3. De mit tudtunk meg a $h\ -eh$ kapcsolatról? Semmit?

Ezekre a kérdésekre a következő, egyben utolsó órán válaszolunk.

13 Szemléletes hiperbolikus geometria X.

Szemléletes hiperbolikus geometria X.

Témák

Az eukleidészi geometria a hiperbolikus síkon

- Ismétlés: A Klein modell önmagában
- Ismétlés: A Klein modell a hiperbolikus síkba ágyazva
- Ismétlés: A hiperbolikus sík reprodukciója affin szerkesztéssel
- Ismétlés: A torz tojás esete
- Ismétlés: Kiindulás egy hiperbolikus köből
- Kérdés: Milyen körméret esetén reprodukáljuk pontosan a hiperbolikus síkot
- Kérdés: Mi a viszonya a jól reprodukált hiperbolikus síknak a vele együtt születő eukleidészi síkhoz?

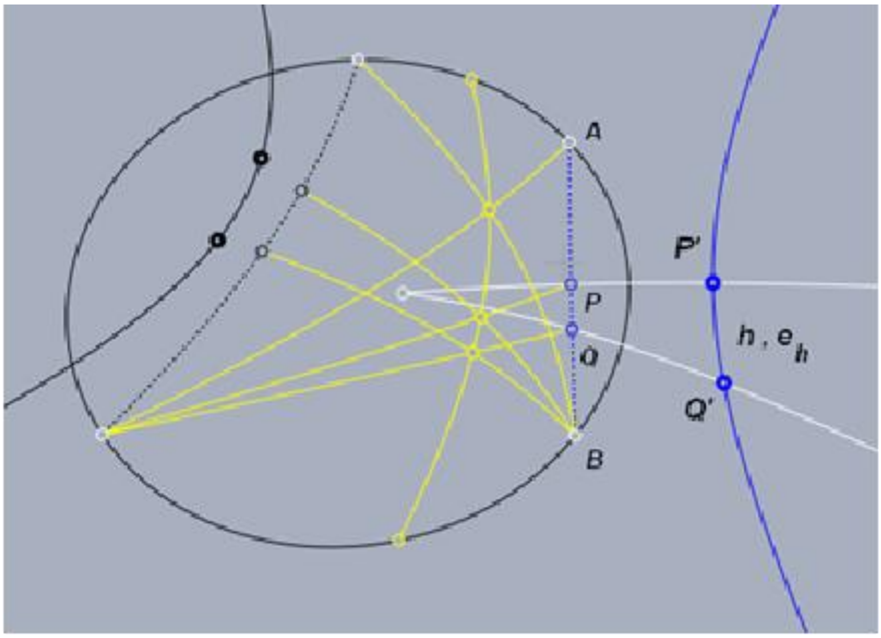
A z-transzformáció

- A z-transzformáció definíciója
- Alakzatok z-transformáltja
- Hogyan lehet egy hiperbolikus egyenes ismeretében a megfelelő kört reprodukálni?
- A Klein transzformáció és a z-transzformáció
- A hiperbolikus sík paramétere

A hiperbolikus hossz és az eukleidészi hossz viszonya Hiperbolikus kozmológia

- A nagy iránytű
- A párhuzamossági szög
- A generáló kör sugarának hiperbolikus hossza
- A paraciklus egységszakasz
- Ha változik a paraméter.

A Klein modell önmagában és a hiperbolikus síkba ágyazva



A szakasz másolást el lehet végezni a Klein körön belül is.

A külső szakaszméretek és a belső szakaszméretek között teljes harmónia van. Ezzel a hiperbolikus szakasz h-hossza és a neki megfelelő (bizonyos) eukleidészi szakaszok e-hossza között kapcsolatot teremtettünk.

(1) $hP'Q' = k/2\ln(1/(ABPQ)) = -k/2\ln((ABPQ))$

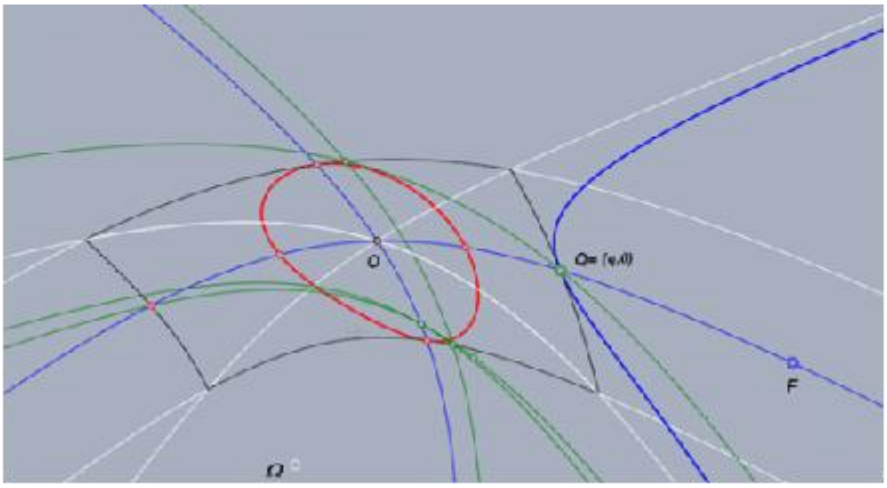
(2) A fenti összefüggés csak k erejéig meghatározott. (az $1/2$-es szorzót kényelmi okokból vezettük be. Írhattunk volna egyszerűen k-t is.)

(3 De mit tudtunk meg a h – eh kapcsolatról?

(4) És mit tudhatunk meg k geometriai jelentéséről?

Emlékeztető

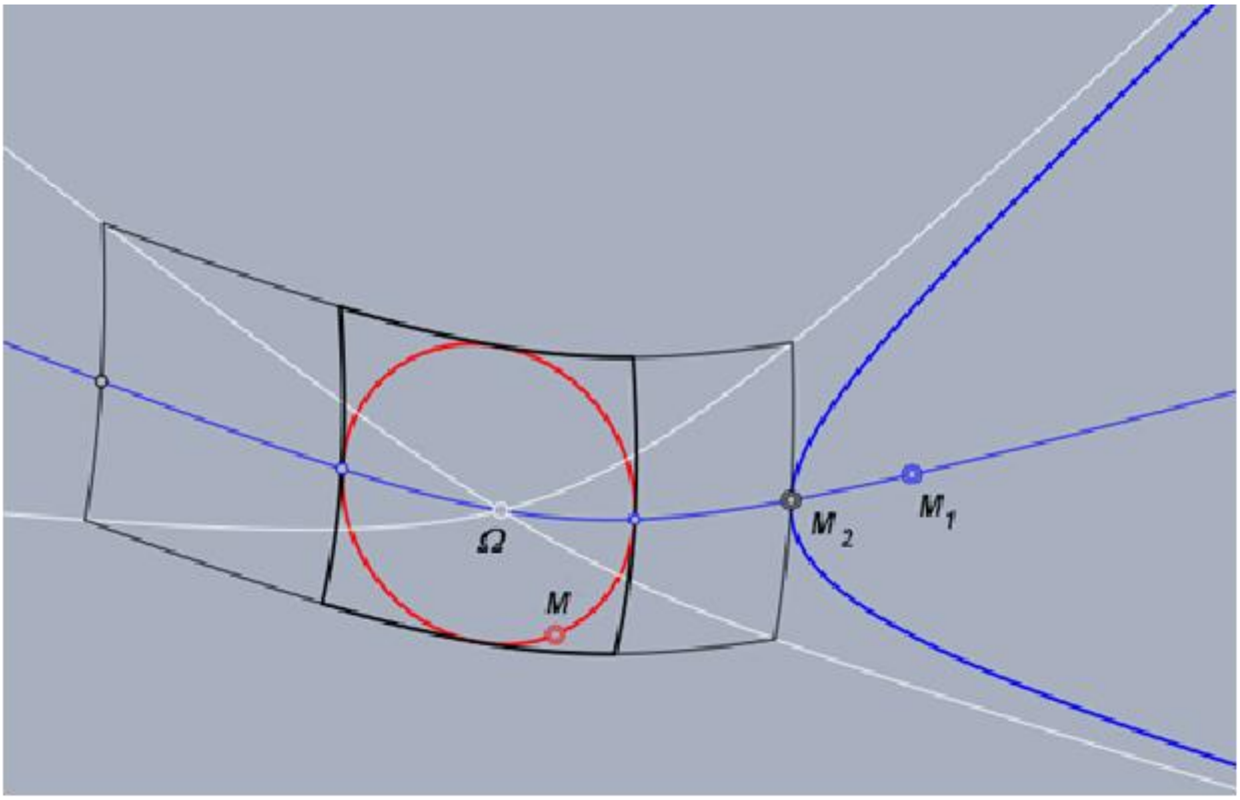
Emlékeztető ábra a hiperbolikus sík torz tojásos reprodukciójához



Jegyezzük meg, hogy a torz tojásból az eukleidészi geometria is kikel, ha homotetikusan szétszórjuk tetszőleges helyekre és tetszőleges sugarakkal.

Emlékeztető 2.

Emlékeztető ábra a hiperbolikus sík Ω középpontú hiperbolikus körre alapozott reprodukciójához

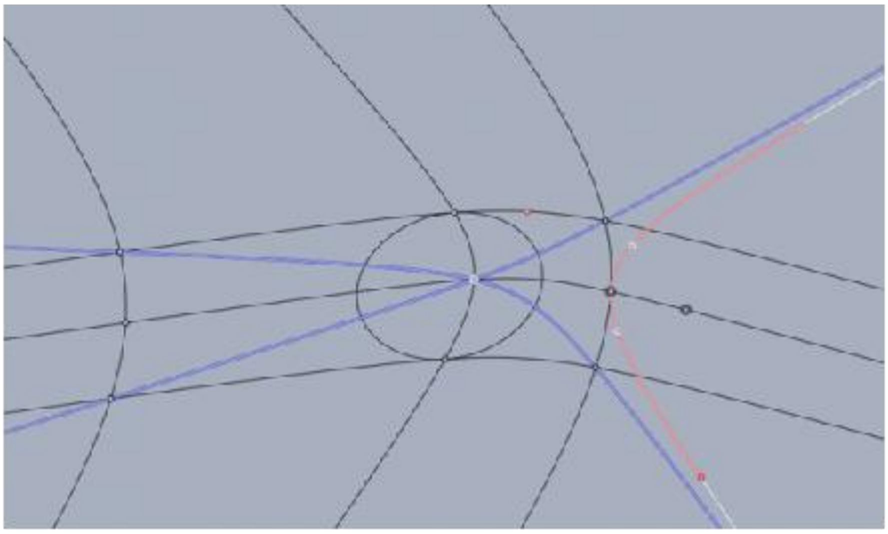


Kérdés: Látva, hogy egy bizonyos körméret esetén pontosan reprodukáljuk a hiperbolikus síkot felvethető a kérdés: hogyan jellemezhető ez a speciális körméret?

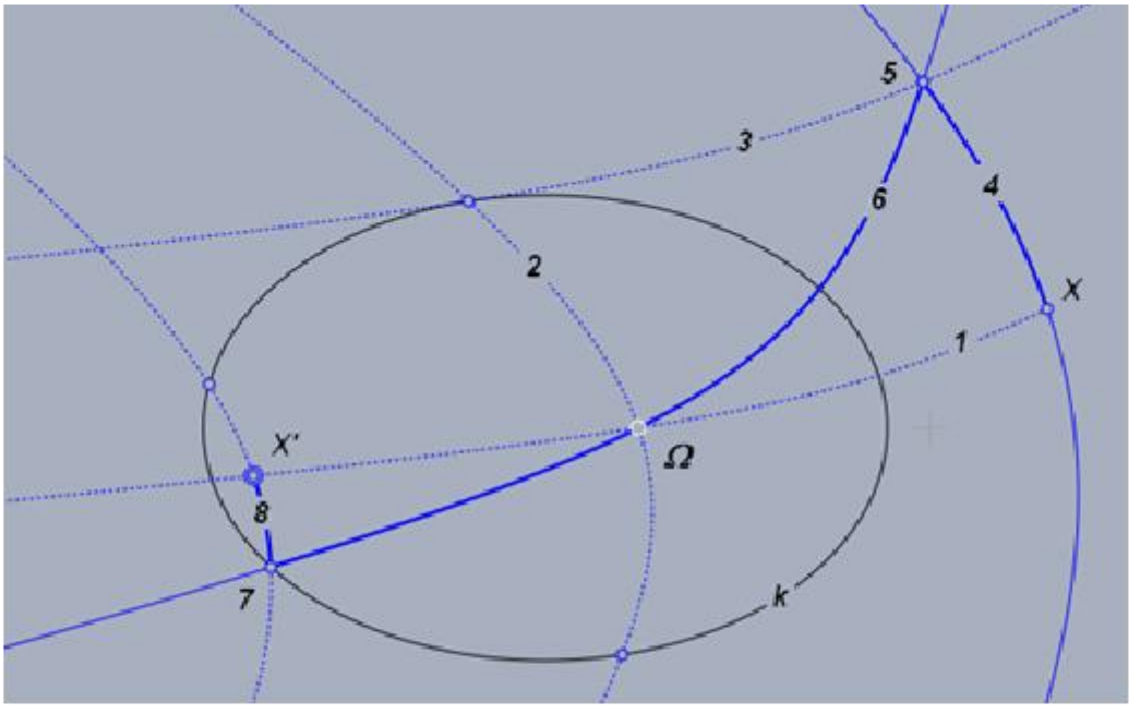
Egyszerű válasz: azt is lehetne mondani, hogy a speciális körméret az, amelyik az ismert affin hiperbolaszerkesztést felhasználva ugyanazt a hiperbolikus síkot produkálja, amelyikből az affin szerkesztésnél használt Ω pont és az affin egyenesekként használt ekvidisztánsok származtak.

Körméret

A "véletlenül" eltalált körméret: A piros vonal az affin szerkesztéssel nyert hiperbola és a piros vonal a program által generált hiperbola



A z-transzformáció definíciója

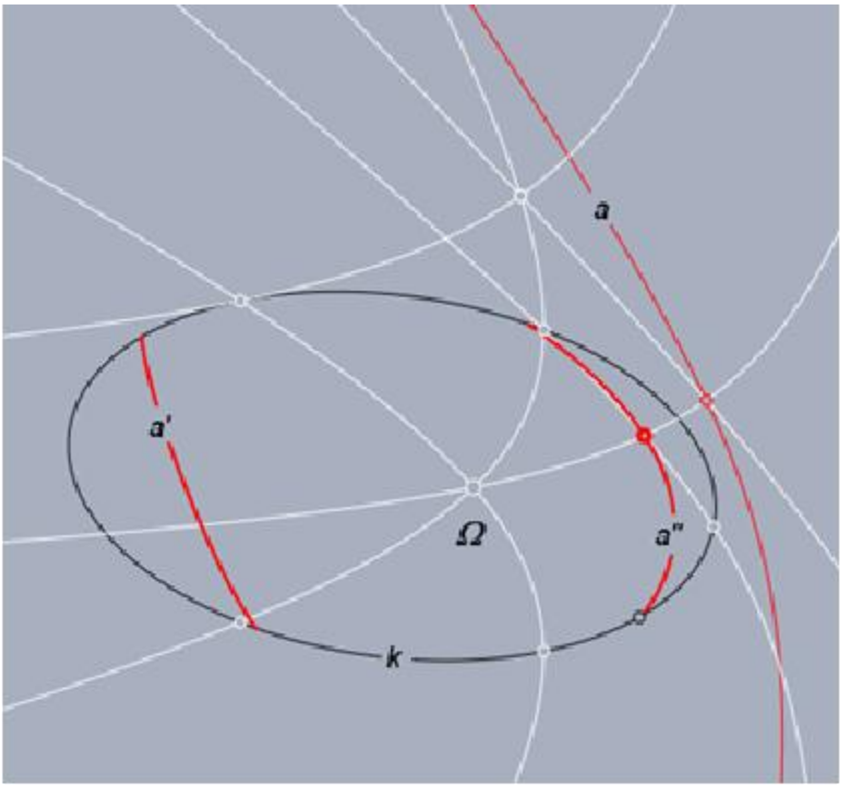


Legyen adott az Ω középpontú k hiperbolikus kör. Az X pontot fogjuk a belsejébe transzformálni a következő lépésekben:

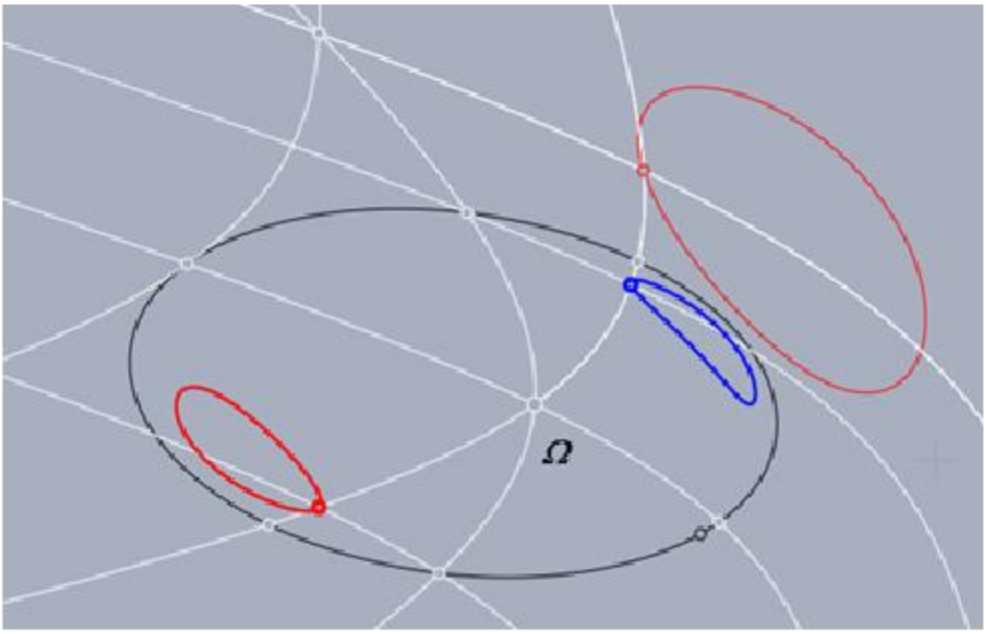
1. Meghúzzuk az $X\Omega$ e-h-közösegyenest.
2. e-Merőlegest állítunk erre Ω-ban.
3. Ahol ez elmetszi a k -t, ott e-párhuzamost húzunk 1-gyel.
4. 1-re e-merőlegest állítunk X -ben.
5. Meghatározzuk 4 és 3 5 metszéspontját.
6. 5-ből Ω-n át húzunk egy közös egyenest.
7. Ez 7 ben elmetszi a k -t.
8. 7 ből e-merőlegest bocsájtunk 1-re.
9. Ahol ez a 8 merőleges metszi 1-et ott lesz X , X' képe.

Jegyezzük meg, hogy ugyanígy egy X'' pontot is választhattunk volna, ha 6 és k nem jelölt metszéspontjából húzunk e-merőlegest 1-re

Egy h-egyenes két z-transzformáltja

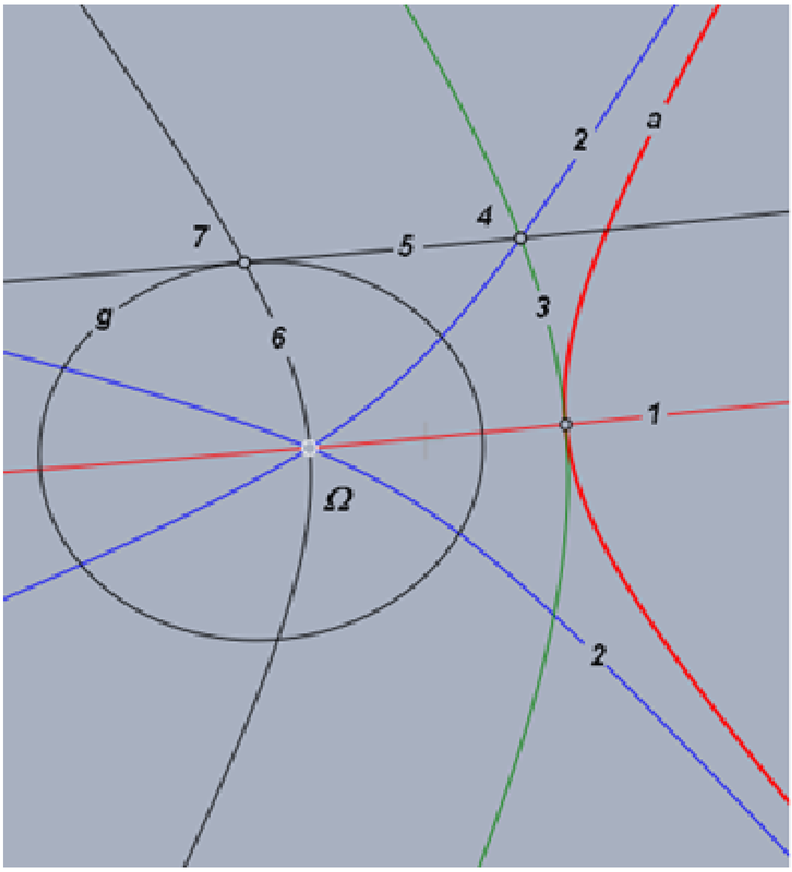


Csak játékból: egy eukleidészi kör (két) z-transzformáltja



"Generáló" kör

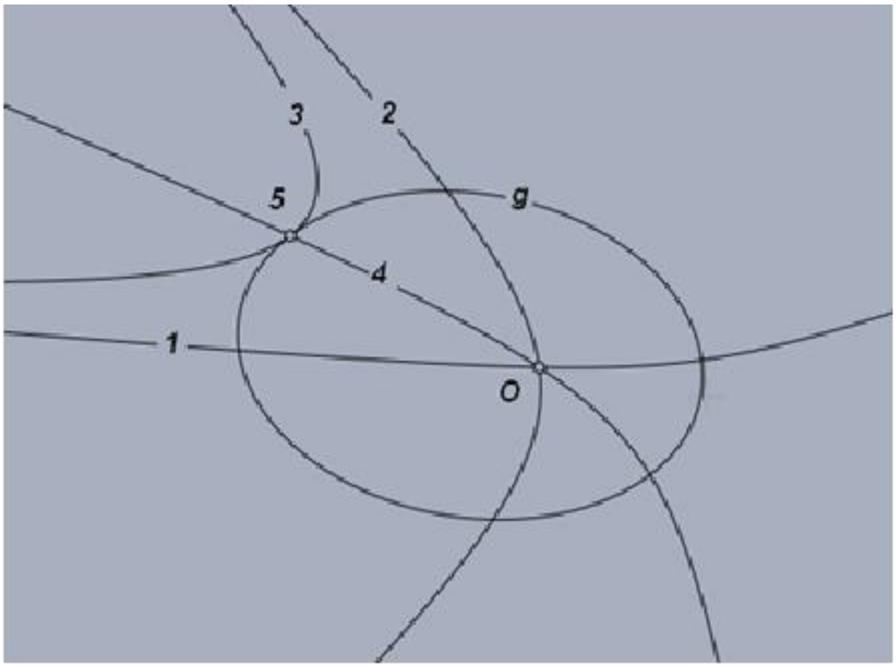
Hogyan lehet egyetlen hiperbolikus egyenes ismeretében a megfelelő méretű, "generáló" kört reprodukálni?



Adott a és Ω. Szerkesszük meg a generáló kört!

1. Ω-ból e-h-merőlegest állítok a-ra.
2. Ω-ból párhuzamosokat húzok a-hoz: 2 és 2.
3. a és 1 metszéspontjában e-merőlegest állítok 1-re; ez 3.
4. Az egyik 2 és 3 metszéspontját jelölje 4.
5. 4-en át e-párhuzamost húzok 1-gyel.
6. Ω-ban e-h-merőlegest állítok 1-re: 6.
7. 6 és 5 metszépontja, 7 a keresett g generáló kör egy pontja.
8. Bármely más hiperbolikus egyenesből kiindulva ugyanezt a generáló kört kapom. Miért?

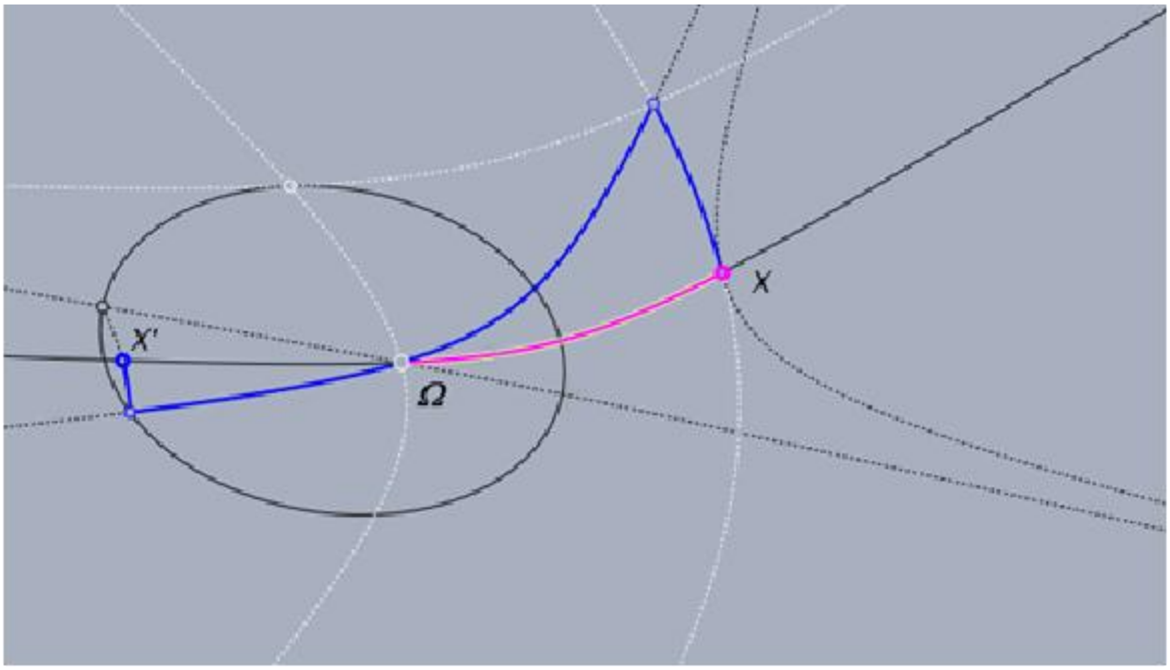
A g generáló kör legegyszerűbb megszerkesztése



Adott az O pont. Szerkesszük meg köré a g generáló kört.

1. O-n keresztül felveszem az 1 h-egyenest.
2. O-ban h-merőlegest állítok erre: 2.
3. Megszerkesztem ezek közös párhuzamosát: 3.
4. Merőlegest állítok O-ból 3-ra.
5. 3 és metszéspontját jelölje 5.
6. $O5$ a keresett generáló kör sugara.

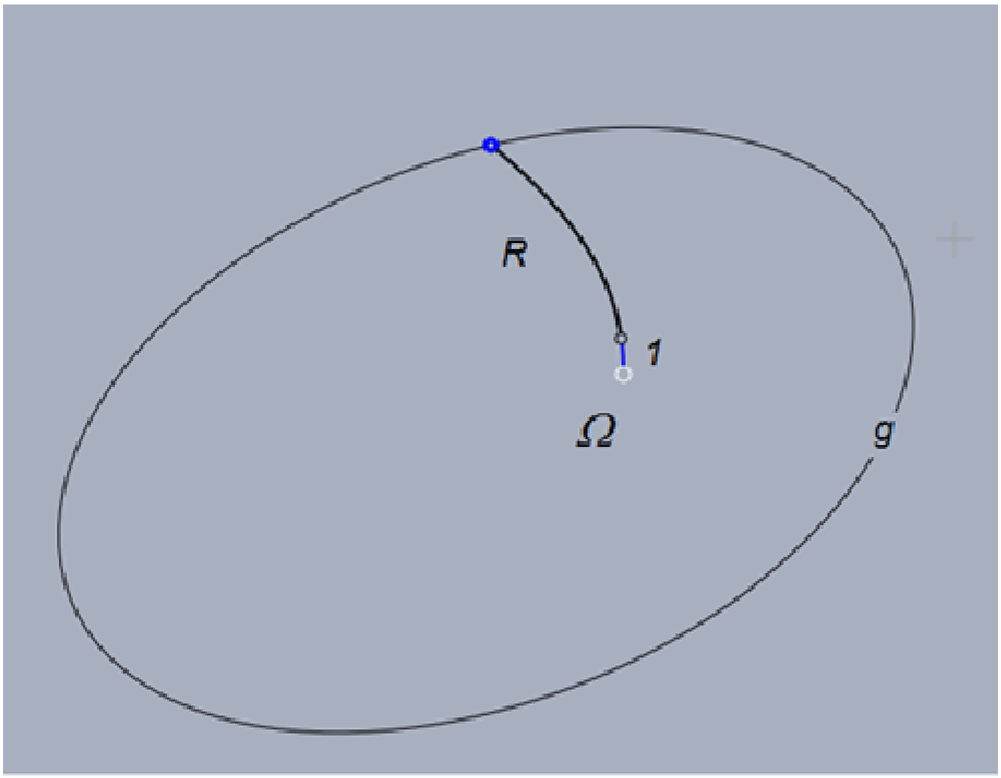
A generáló kör, mint Klein kör



Ha generáló kört használjuk Klein körnek, akkor a z-transzformáció és a Klein transzformáció eredménye egybeesik. Ez azért jó, mert

1. A Klein körön berül ki tudjuk számítani a ΩX és $X'\Omega$ hiperbolikus hosszát. (Ezek egy konstans erejéig meghatározzák egymást.)
2. Ki tudjuk számítani $X'\Omega$ eukleidészi hosszát.
3. Eukleidészi kapcsolat ismeretében (z-transzformáció) ki tudjuk számítani $X'\Omega$ és ΩX eukleidészi hosszát.
4. Meghatározhatjuk a régen vágyott f függvényt, amely e-h-szakaszok esetén összekapcsolja azok eukleidészi és hiperbolikus hosszát.

A hiperbolikus sík paramétere



A hiperbolikus sík paraméterének felvétele, előkészületek a számoláshoz

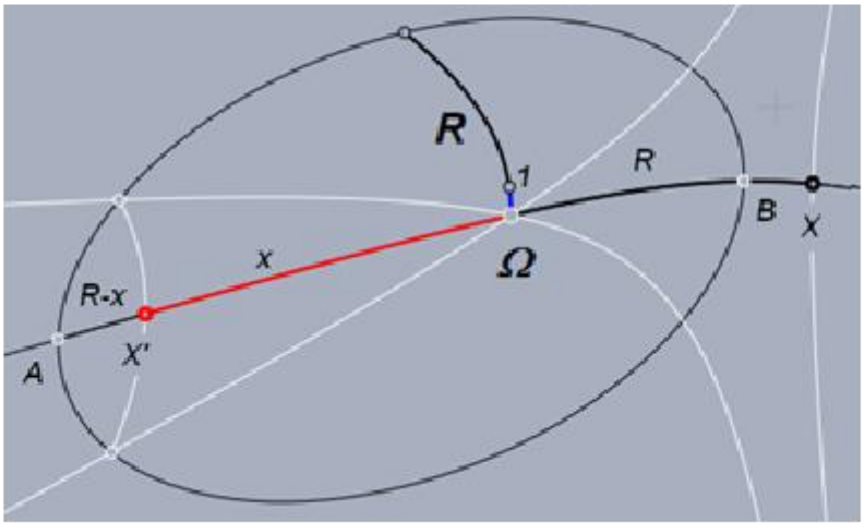
Vegyük fel Ω-ban a kis 1 egységet. Ezt a kis egységet mostantól rögzítettnek tekintjük.

A generáló kör sugara ebben az egységben eukleidészi értelemben legyen R .

Az alábbiakban a generáló kört tekintjük Klein körnek és a hiperbolikus sík paraméterét k -val jelöljük. Megpróbáljuk k -t és R -et úgy hangolni, hogy az 1 egység egyszerre legyen az eu-egység és a h-egység is.

Euklidészi hossz

A h hiperbolikus hosszúságú szakasz eukleidészi hossza a Klein modellben.



Legyen $h\Omega X$ hiperbolikus hossza h, és legyen $X'\Omega$ eukleidészi hossza x. Ekkor

$$h = -k/2\ln(ABX'W) = -k/2\ln((R-x)/(R+x)),$$

azaz

$$2h/k = \ln((R+x)/(R-x))$$

vagy

$$e^{2h/k}(R-x) = R+x.$$

Tehát

$$x(e^{2h/k}+1) = R(e^{2h/k}-1)$$

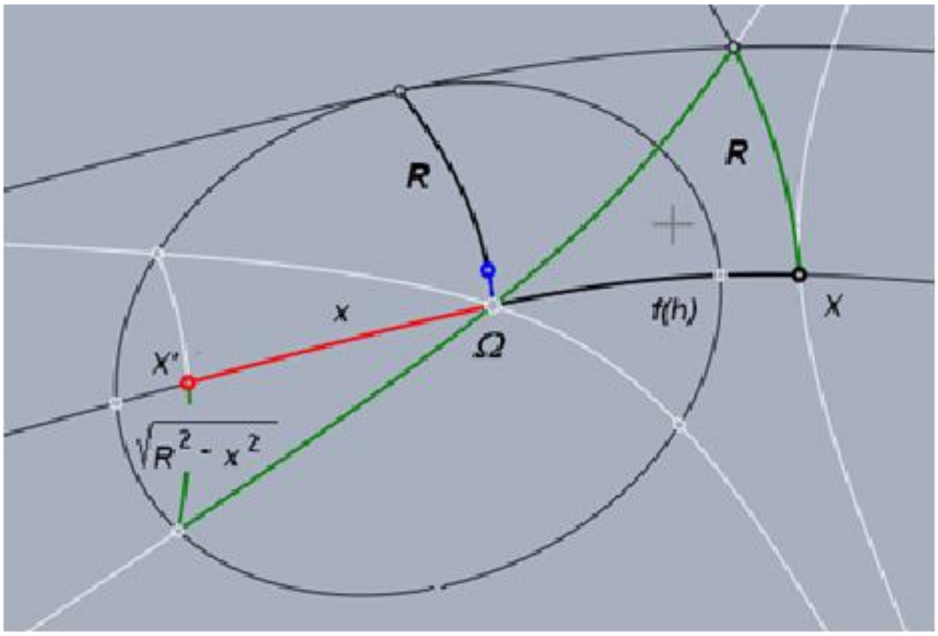
Így

$$x = R(e^{h/k}-e^{-h/k})/(e^{h/k}+e^{-h/k})$$

vagy

$$x = R\,\mathrm{sh}(h/k)/\,\mathrm{ch}(h/k).$$

Az z-transzformációs összefüggésre hivatkozva:



$$f(h)/R = x/(R^2 - x^2)^{1/2}$$

Ha innen is kifejezzük x -et, azt kapjuk, hogy

$$x = f(h)R/(R^2 + f(h)^2)^{1/2}$$

A két, x-re kapott kifejezést összevetve:

$$f(h)/(R^2 + f(h)^2)^{1/2} = \mathrm{sh}(h/k)/\mathrm{ch}(h/k).$$

Innen az f kifejezhető:

$$f(h) = R\,\mathrm{sh}(h/k)$$

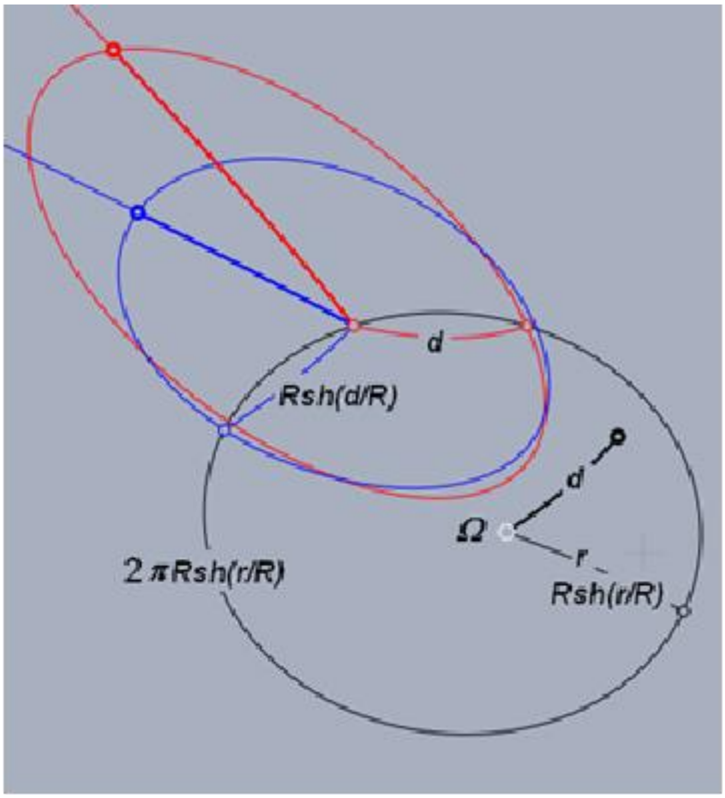
Vagyis, ha a generáló kör eukleidészi sugara R , akkor a h hiperbolikus hosszúságú h-e-egyenes eukleidészi hossza h/k sh-jának R -szerese. A hiperbolikus sík paraméterének k -t neveztük. Ahhoz, hogy az 1 egység közös legyen R és k között az

$$1 = R\,\mathrm{sh}(1/k)$$

összefüggésnek kell fennállnia. Eszerint

$$R = (\mathrm{sh}(1/k))^{-1} vagy k = (a\,\mathrm{sh}(1/R))^{-1}.$$

Visszatérve a hiperbolikus kör kerületképletére...



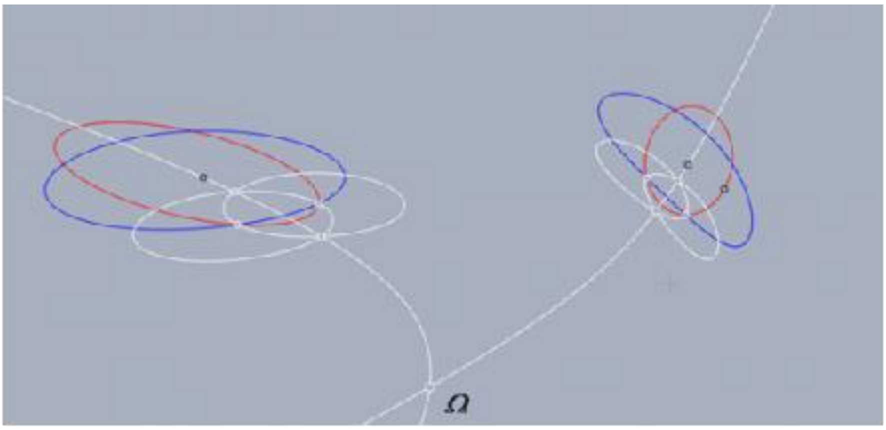
Ha $K(r)$ az r sugarú hiperbolikus kör kerülete és d hosszúságú húrok felmérésével közelítjük ezt a kerületet, akkor $K(r)/d$ db. húrt mérünk fel. Ha minden alkalommal d helyett $R\,\mathrm{sh}(d/R)$-t mondunk, akkor összesen

$$K(r)/d(R\,\mathrm{sh}(d/R)-d)=K(r)(R\,\mathrm{sh}(d/R)/d-1)$$

hibát követünk el. Mi történik, ha $d\to 0$? Nyilvánvaló, hogy a hiba 0-hoz tart...

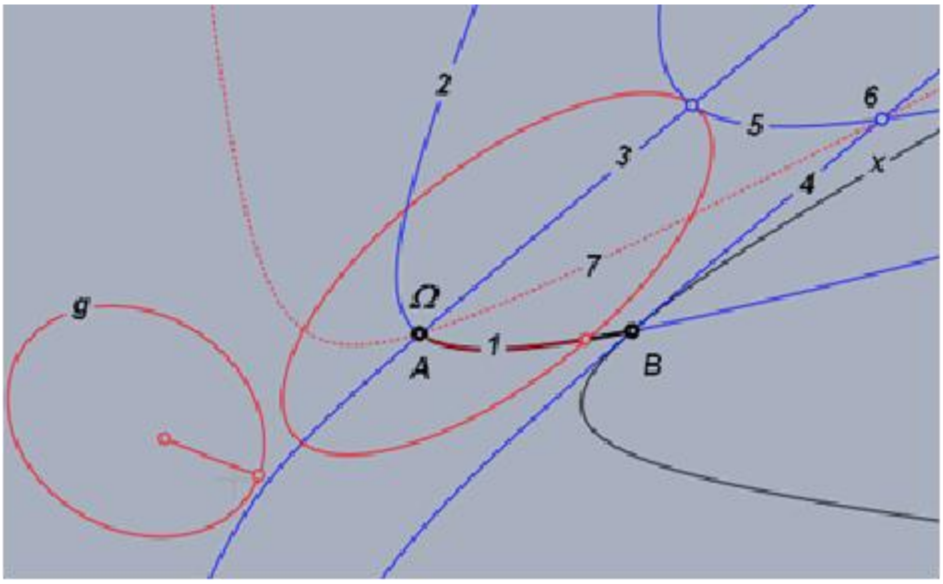
A nagy iránytű

A hiperbolikus sík középpontjáról értelmetlen beszélni. A rajta növesztett eukleidészi sík középpontját viszont megmutatja a nagy iránytű. Olyan ez, mint a földgömb és a mágneses tere...



Párhuzamossági szög

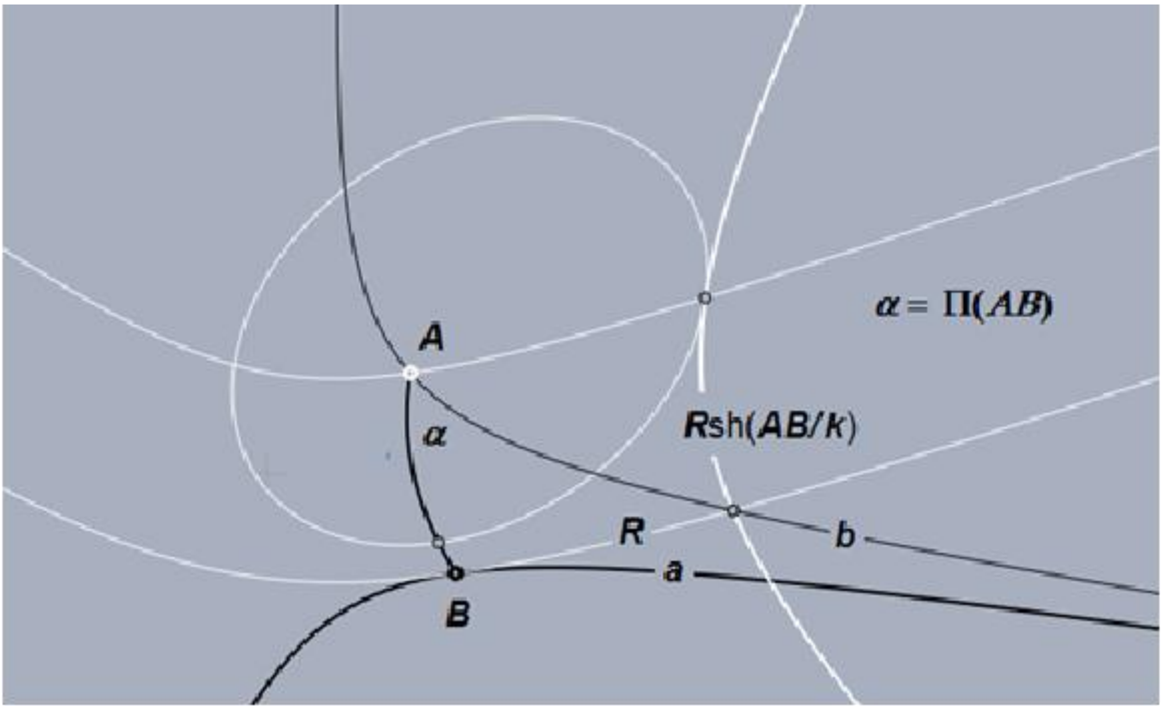
A hiperbolikus geometria párhuzamossági szögének eukleidészi szerkesztése
Legyen adott egy g generáló kör, az AB hiperbolikus szakasz és a B pontban az AB szakaszra állított x merőleges. Szerkesszünk párhuzamost A -ból x -hez. Ennek a megszerkesztendő párhuzamosnak az AB -vel bezárt szögét nevezzük az AB szakaszhoz tartozó párhuzamossági szögnek. Ismerjük a Bolyai féle szerkesztést, de most ne ezt használjuk! Kapcsolatba akarjuk hozni a párhuzamossági szerkesztést a hiperbolikus síkunkon felvett eukleidészi geometriával.



A szerkesztés:

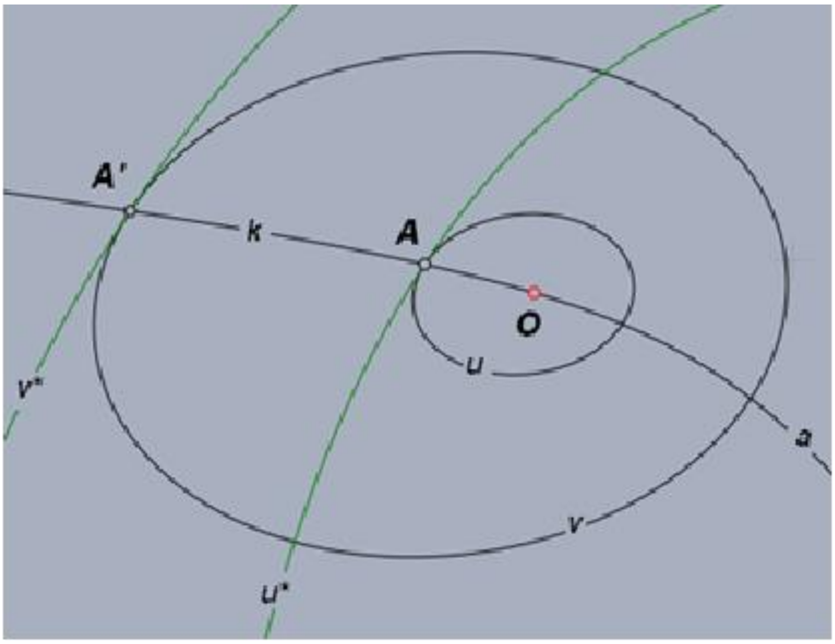
1. Az AB -re felmérem a g kör sugarát. Ld. az 1 szakaszt.
2. A -ban felveszem Ω-t és AB -t meghosszabbítom a 2 e-h-egyenessé. Továbbá $A-\Omega$-centrummal 1 sugarú e-h-kört szerkesztek.
3. A -ban e-merőlegest állítok 2-re: 3.
4. B -ben e-merőlest állítok 2-re: 4.
5. Abban a pontban, ahol g másolata metszi 3-mat e-párhuzamost húzok a 2 e-h-egyenessel.
6. 4 és 5 metszéspontját meghatározom: 6.
7. Az $\Omega-A$ pontot a 6 ponttal összekötő 7 e-h egyenes a keresett h -párhuzamos.

A párhuzamossági szög kiszámítása



$$\mathrm{tg}(\Pi(AB)) = 1/\,\mathrm{sh}(AB/k)$$

A paraciklus egység (A változatosság kedvéért.)



Legyenek v és u az a egyenesen levő közös, O középpontú r_1, ill. r_2 sugarú hiperbolikus körök úgy, hogy $r_1 - r_2 = k$, ahol k a sík paramétere, melyet a közös "1" egységben felmérve értünk. Most távolítsuk A -tól O -t az a egyenesen, de úgy, hogy A' és A helyben maradjanak. A mindenkori kör-kerület arány:

$$\mathrm{sh}(r_1/k)/\,\mathrm{sh}(r_2/k) = (e^{r_1/k} - e^{-r_1/k})/(e^{r_2/k} - e^{-r2/k}) = (1 - e^{-2r1/k})/(e^{-1} - e^{-(r2+r1)/k}) \to e,$$

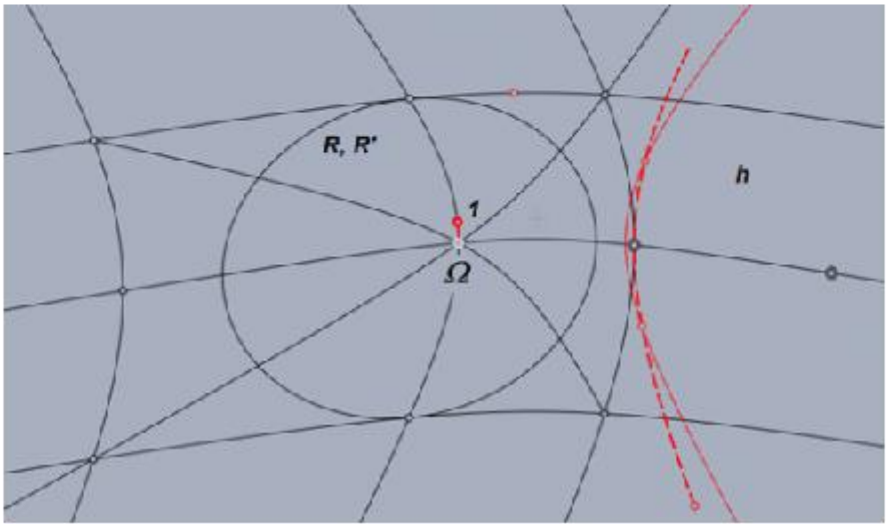
ha r_1 és r_2 tartanak a végtelenhez.

Mellékesen a két kör hozzásimul az u^* , v^* paraciklusokhoz...

Milyen következtetést vonhatunk le ebből az e hossz-arányú paraciklus ívek távolságára vonatkozólag?

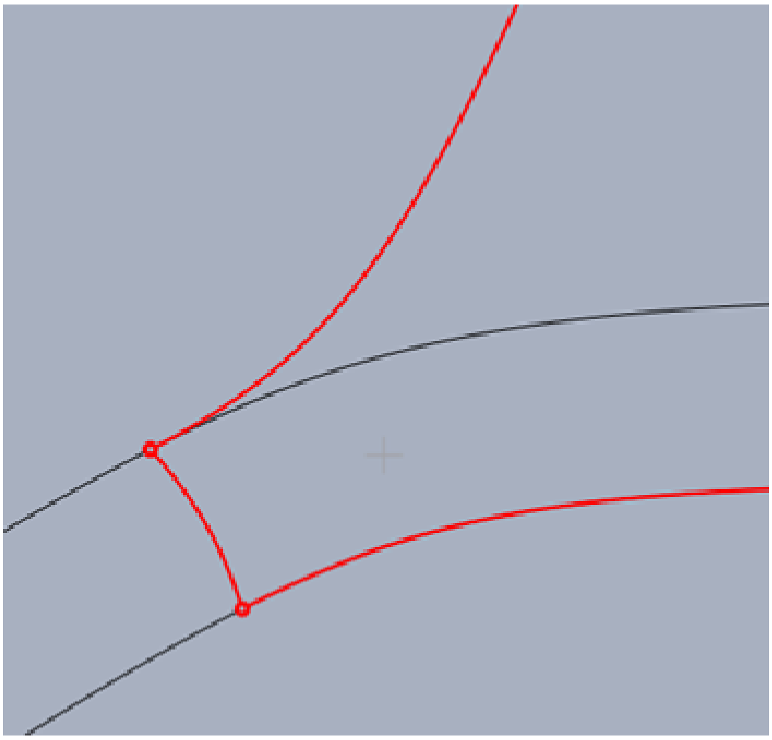
Ha változik a hiperbolikus sík paramétere

Észre veszi-e a hiperbolikus síklakó, ha a paraméter változik??? (Változik a tér alakja.)



Vegyük észre, hogy a kérdésnek csak akkor van értelme, ha az 1 egység.

Relativitáselmélet



A fekete sínpáron haladó merev kiskocsi tengelyére húzóerő hat. Ha kellően nagy a sebesség, a kiskocsi szétrepül. Nem lehet eltitkolni az egyenes vonalú egyenletes sebességgel való haladást; hiszen nem is egyenes vonalú.