Matematika módszertani példatár

Ambrus Gabriella, Munkácsy Katalin, Szeredi Éva,
Vásárhelyi Éva, Wintsche Gergely
Matematikatanítási és Módszertani Központ
Szerkesztette Vásárhelyi Éva
Lektorálta Pálfalvi Józsefné

2013.06.10.
TÁMOP4.1.2.A/1-11/1-2011-0064

Tartalomjegyzék

Előszó

A módszertani példatár segítséget kíván nyújtani a matematika tanároknak és a tanárjelölteknek ahhoz, hogy a képzés során elsajátított szakmai és módszertani ismereteket minél hatékonyabban tudják alkalmazni a tanítási gyakorlatban. A példatár anyagával az iskolai matematika széles körét kívánjuk áttekinteni az ott felmerülő módszertani kérdések szempontjából. Az iskolai gyakorlatban közvetlenül is alkalmazható gyakorlati példákon keresztül tárgyalunk egyrészt olyan módszertani lehetőségeket, amelyek segítségével az adott probléma elkerülhető, másrészt olyanokat, amelyek segítségével megkönnyíthetjük a probléma felismerését, harmadrészt a tanítási helyzetek megoldására alkalmas lehetőségek differenciált és széles választékát szeretnénk felkínálni a leendő és működő tanároknak.

A módszertani példatár hiánypótló, mert nem áll rendelkezésre olyan módszertani irodalom, amely az általános és középiskolai matematika módszertani kérdéseit jelentős mértékben közös alapra helyezi és ugyanakkor a konkrét példákban a tanulók életkori sajátosságai szerint differenciál.

Az elektronikus jegyzet alkalmas arra, hogy a feladatmintákat az érintett korosztály szempontjából differenciáltan elemezzük. A felhasználó számára azonban adott a lehetőség, hogy igény szerint betekintést nyerjen a vizsgált téma sajátosságaiba a megelőző, illetve a rákövetkező korosztály esetében.

Az elágazás lehetősége mellett igen nagy előny a példatár elektronikus volta abból a szempontból is, hogy az eszközök használat közben bemutathatók, tipikus viselkedésminták demonstrálhatók.

Mivel az iskolai munka alapvető szabályozója a NAT és a kerettanterv, a példatár fejezetei is ezekhez igazodnak, a matematika nagy területei szerint tagolódnak. Minden területhez összegyűjtöttük az oda tartozó alapfeladatokat és kompetenciákat, a matematikán belülre és kívülre mutató kapcsolatokat, valamint az adott területhez tartozó ismeretrendszer életkor szerinti épülését, majd kitérünk arra, hogy az adott terület sajátos eszközeivel hogyan fejleszthető a tanulók problémamegoldó képessége. Az alapfeladatok listáját a legalacsonyabb óraszámú általános iskolai és a gimnáziumi képzés kerettantervéből alapján gyűjtöttük ki. Ha eltérünk attól, azt külön jelezzük. Így például a Valószínűség, statisztika fejezetben szereplő „Néhány kiemelkedő magyar matematikus nevének ismerete, esetenként kutatási területének, eredményének megnevezése." elvárást a matematika mindegyik területén fontosnak tartjuk.

Az egyes példák nem csupán abban az összefüggésben fontosak, ahogyan itt besoroltuk. (Hiszen éppen ezért választottuk ezeket a fontos példákat!) Például a nyitott feladatok között szerepel az $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}+\frac{1}{d}=1$ egyenlet megoldása a pozitív egész számok között, de tartozhatna az algebra fejezetbe, vagy a problémamegoldási stratégiák, bizonyítási módszerek, teljes indukció, stb. témakörökbe. Az ilyen keresztkapcsolatokra néha utalunk, de továbbiak megkeresését (éppen az olvashatóság miatt) az olvasóra bízzuk. Javasoljuk továbbá, hogy olyan saját példákat gondoljon ki, amelyek az iskolai gyakorlat több területén is hasznosíthatók. Bemutatunk néhány ilyen példát is a jegyzetben. A 1995-ös OKTV feladat például a modellalkotás, a valószínűségszámítás, a térgeometria, a hasonlóság alkalmazásai és az analízis területén is hasznosítható.

A matematika módszertani záróvizsga tételei 12 részben fogják át a tanári munka elméletét és gyakorlatát. Természetes, hogy felkészüléskor egymással szoros kapcsolatban, szerves egységben kell kezelni a 12 tételt. Ez a jegyzet a 2012. évi tételsort integrálja. Az elektronikus jegyzet előnye éppen az, hogy az új tanárképzés bevezetésekor aktualizálható. Mivel a kerettanterv és a tételek struktúrája eltérő, találnunk kellett valamilyen kompromisszumos összefésülést.

Egy lehetséges felkészülés lehet a záróvizsgához, hogy a javasolt vázlatokat a saját tanulási és tanítási gyakorlatukból vett példák segítségével teszik tartalmassá és személyessé. Ezt a szemléletet tükrözi a jegyzetben a SAJÁT PÉLDA jelzés. Ezzel elérhetik, hogy olyan matematikai tartalomról beszél(get)hetnek a vizsgán, amelyet maguk választottak, jobban szeretnek, magabiztosabban kezelnek.

A Matematikadidaktikai szemelvénygyűjtemény nem tematikus, és nem is átfogó jellegű, de sok tekintetben hiánypótló.

Egyfelől ízelítőként magyar szerzőknek a XX. század második felében megjelent olyan matematikai, módszertani írásaiból állítottuk össze, amelyek közvetve, vagy közvetlenül számottevően befolyásolták a magyarországi matematikatanítást, de ma már nem könnyen elérhetők. Az anyag jó része egy kéziratként létező gyűjteményből való, amely anyagi okokból nem tudott megjelenni (Ambrus G., Munkácsy, K. 1990). Ebben szó van Dienes Zoltánról (1916-), aki elsősorban az általa konstruált didaktikai eszköz révén (Dienes készlete) ismert Magyarországon. Tőle nem írást, hanem egy általános iskolában megtartott óráját bemutató Varga Tamás (1919-1987) cikket közlünk. Péter Rózsa (1905-1977) a matematika alapjaival foglalkozott, talán a legelvontabb matematikai részterülettel – és fontosnak tartotta, hogy a matematikát mindenki számára érthetővé tegye. Nagy sikert aratott könyvéből idézünk két rövid részletet. Pólya György matematikadidaktikai elveit néhány rövid részlettel kíséreljük meg érzékeltetni. Varga Tamás volt az, aki a legsokoldalúbb munkát végezte az „új matek" elterjesztése érdekében az 1960-70-es években. Tevékenységét néhány írásával kívánjuk felidézni.

Másfelől a mai matematika módszertani és didaktikai kutatási eredményekből is bemutatunk néhány részletet. Bár a szerzők folyamatosan beépítették eredményeiket az oktatásba, mégsem érdektelen a mai értelemben vett tudományos igénnyel megírt dolgozatokból vett szemelvényekbe beleolvasni. Az idézett értekezésrészletek bő irodalmi hivatkozást tartalmaznak, ezek elérhetőségét kozvetlenül a szemelvény után közöljük.

Végül néhány gyakorlati tanács a jegyzet használatához.

Az irodalomjegyzékben sok magyar és még ennél is több idegennyelvű forrás található. Az elektronikusan elérhető irodalom internetes adatait a nyelv megjelölésével adjuk közre.

Sok matematikai és módszertani feladatot és példát tartalmaz a jegyzet, amelyek többségéhez – helyenként többféle – megoldási javaslatot, módszertani megjegyzést írtunk. A könnyebb kezelhetőség reményében javaslataink közvetlenül követik a feladatot. *Éppen ezért hangsúlyozzuk, hogy az eredményes tanuláshoz célszerű a megoldás elolvasása előtt elgondolkodni a feladaton, önálló megoldással próbálkozni, és a saját megoldást összevetni az általunk javasoltakkal.*

Örülünk a feladatokkal, megoldásokkal kapcsolatos észrevételeknek, kérjük ezeket küldjék a hraskoa@fazekas.hu vagy a vasarely@elte.hu címre.

Eredményes munkát és jó szórakozást kívánnak a szerzők!

0.1. Köszönetnyilvánítás

A példatár az ELTE TTK Matematikai Intézet Matematikatanítási és Módszertani Központ aktív és nyugállományú oktatóinak, az ő tanáraiknak, ismerőseiknek és barátaiknak több évtizedes tanítási és kutatói tapasztalataira épít. Köszönjük mindazoknak, akik ezeket elmondták vagy leírták.

A példatár anyagi fedezete a TÁMOP pályázat, amelynek előkészítése, koordinálása, a szöveg- és ábrakonverziók segítése és ellenőrzése Fried Katalinnak köszönhető.

A szerzők hálásak Pálfalvi Józsefné javaslataiért és tanácsaiért és lelkiismeretes lektori munkájáért.

Végül köszönjük mindazoknak a programozóknak, akik a LaTeX, a GeoGebra és HotPotetoes szabad szoftverek fejlesztésével lehetővé tették számunkra az animációkkal színesített és gazdagított feladatgyűjtemény önálló létrehozását.

Ambrus Gabriella, Munkácsy Katalin, Szeredi Éva, Vásárhelyi Éva, Wintsche Gergely

1. fejezet

A matematika és a matematika tanítása

Az iskolában, az egyetemen, tanártovábbképzésen, baráti körben, a családon belül, szóval lépten-nyomon szembesülünk a következő kérdéssekkel.

- Milyen a korszerű műveltség?
- Mennyi a matematikai ismeretek, a matematikai gondolkodásmód részesedése a teljes kultúrkincsben?
- Mit és hogyan használ a matematika tanulmányaiból az, aki esküszik rá, hogy semmit?
- Hol húzódnak a matematika tanári szakma határai?
- Mi az, amit csak a matematika, mi az, amit a matematika is (esetleg sajátosan) tud közvetíteni?
- Ismereteket, ismeretrendszereket vagy az ismeretek elsajátításának, rendezésének fogásait kell-e tanítani?
- A szakma elkülönülő jellegzetességeinek szakavatott közvetítésére, vagy inkább az egységes világkép kialakítására kell-e a hangsúlyt helyezni?
- Mit és milyen szerkezetben tartalmazzon a tananyag?
- Tanítható-e a problémamegoldás? Mikor térül meg? Mikor van erre idő? Mi lesz a tantervvel? Mit hagyjak ki?

Tanár, diák, szülő, mindenki a „gazdaságos” tanulás fortélyait akarja megtalálni. Elődeink biztosan tudták a titkot, hiszen számos neves tudóst bocsájtottak útjára. A (sikeres) magyar matematikatanítási hagyományok tartalmi és módszertani elemeit kutatva az embernek az a benyomása támad, hogy a fentihez hasonló kérdések számukra nem választási kényszerrel, hanem súlypontválasztás, aránykijelölés formájában merültek fel. A mai tantervviták kizáró „vagy” kérdései helyett az „is” uralkodott, és talán ettől vált gazdagabbá, érdekesebbé és hatékonyabbá a matematika tanítása és tanulása.

A matematikáról alkotott mindenféle elképzelés (kognitív és affektív komponensekkel) alkotja egy ember matematikai világképét (Törner, 2002 [229]). A matematika tanulását a személyes érdeklődésen túl erősen befolyásolja a társadalom, szűkebben a szülői ház és a kortársak véleménye a matematikáról és a matematikusokról.

A vélemény kialakulásához nagyban hozzájárulnak korunk különböző médiumai is (Korándi, J. 2012 [130]).

Az előbbieken kívül nagy hatással van a diákok szemléletére a tanár által a matematikáról közvetített kép, amit meghatároz a tanár saját matematikáról alkotott elképzelése. Ez utóbbival kapcsolatban sokféle vonatkozásban olvashatunk a módszertani szakirodalomban, ebből csak két fontos művet emelünk ki: Grigutsch, S., Raatz, U., Törner, G. 1997 [95], Leder, G. C., Pehkonen, E., Törner, G. 2002 [141].

A tanárok matematikai világképe elég hamar kialakul és később már nehezen változtatható (Schommer-Aikins, M. 2004 [201]). Fontos tehát, hogy ez a kép minél sokoldalúbb, teljesebb legyen mind a matematika, mind a matematika tanítása szempontjából.

Ezzel a fejezettel ehhez szeretnénk néhány vonatkozásban hozzájárulni.

1.1. Tendenciák a matematikában és a matematika tanításában

A matematika és a matematika tanításának kapcsolatáról matematikatudomány és a matematikatanítás történetének áttekintésével alkothatnak képet.

Ez persze sem terjedelme, sem interdiszciplinaritása miatt nem fér bele egy ilyen jegyzetbe. De nem is cél, hogy pl. a XVII. század német kereskedőinek számolási tudományát teljes részletességgel ismerjék.

Itt csupán felhívjuk a figyelmet néhány szempontra és megadunk néhány autentikus forrást.

1.1. Feladat: *Tájékozódjon a tananyag és a matematika tudomány kapcsolatáról.*

- *Gondolja át a matematika történetének fő szakaszait.*
- *Keressen régi és új matematikai tartalmakat az aktuális matematika tananyagban.*
- *Gyűjtsön össze nevezetes megoldatlan problémákat.*
- *Ismerje neves magyar matematikusok nevét és fő eredményeit.*

- *Ismerje neves kortárs magyar matematikusok nevét és fő eredményeit.*

MEGJEGYZÉSEK A FELADATHOZ:
a) Első ismerkedésként

- a wikipedia szócikkét, abból is elsősorban a további irodalmat és a linkeket javasoljuk,

  http://hu.wikipedia.org/wiki/A_matematika_története,

- vagy az origo által közzétett beszélgetéseket Lovász Lászlóval: (vendégünk volt Lovász László matematikus)

  A matematika gondolkodásra nevel

  Tehetségek, versenyek, mítoszok

  A mai legnagyobb problémák

  http://www.origo.hu/vendegszoba/tudomany/20071016-az-origo-vendege-volt-lovasz-l
  html?pIdx=2

b) Igényesebb olvasmány az interneten

- Császár Ákos Matematikai kutatások hazánkban című tanulmánya

  http://epa.oszk.hu/00700/00775/00017/448-457.html.

- Laczkovich Miklós Mi a matematika? – A matematikai igazságról címmel publikált előadása

  www.origo.hu/attached/20061106lackovich.rtf

Jó minőségű és érdekes videofelvételeket találhatnak a
http://mindentudas.hu/elodasok-cikkek/item/
címen, többek között a következőket:

- Katona Gyula: Hogyan lett „magyar matematika” a kombinatorika?
- Laczkovich Miklós: Mi a matematika? - A matematikai igazságról
- Lovász László: Mit kívánnak a számítógépek a matematikától és mit adnak neki?
- Lovász László: Meddig nőnek a nagy hálózatok?

c) Tudományos igényű elmélyedésre is alkalmasak Deák Ervin: A matematikatudomány története tárgyhoz írott füzetei
http://mathdid.elte.hu/html/mscmattudtoert.html
d) A magyar matematikatanítás jellemzőit emeli ki nemzetközi összehasonlításban például Ambrus A. [5], Andrews P. [23] Vásárhelyi É. [250].

1.1.1. Matematikatanítási irányzatok

A tanár tanítási stílusát elsősorban adott tárggyal kapcsolatos, ebben az esetben a matematikáról és matematika tanításáról alkotott elképzelései és saját egyénisége határozzák meg. Fontos, hogy a matematika módszertani tanulmányok során többféle lehetséges tanítási módszer előkerüljön, mintegy lehetőséget teremtve arra, hogy különféle tanítási elképzelések beépüljenek az egyénileg kialakuló tanítási stílusba.

A tanítási stílusokban különféle főbb irányzatok érvényesülnek, amelyek egymástól elég jól elkülöníthetők. Ezek között leggyakrabban a következő irányzatokat említik a matematika tanításával kapcsolatban: hagyományos oktatás, problémamegoldó oktatás, gyakorlatorientált oktatás, realisztikus matematikaoktatás, projektorientált oktatás, New-Math vagy formalista-strukturalista irányzat (vö. Ambrus A. 1995 [2], Zimmermann, B. 1981 [258], Claus, H.J. 1989 [48]).

A hagyományos és problémamegoldó tanítási irányzat

Magyarországon leginkább elterjedt tanítási stílusok a hagyományos és a problémaorientált tanítási stílus. A hagyományos oktatás, ahogy a neve is mutatja inkább a hagyományokon, a lassan változó, jól bevált régi módszereken alapul. A problémamegoldó módszer Pólya György tanítási elképzelésén alapul, melynek fő gondolata a feladatok, témák problémacentrikus tárgyalása, nagy hangsúlyt helyezve a problémamegoldás folyamatára, a problémamegoldó gondolkodás fejlesztésére (vö. Pólya, Gy. 1967 [184], Ambrus A. 1995 [2], Schoenfeld, A.H. 1985 [200], Zimmermann, B. 1981 [258]).

Az alábbiakban röviden összefoglaljuk azokat a főbb vonásokat, amelyek alapján összehasonlítható és el is különíthető e két alapvetően különböző oktatási elképzelés.

A hagyományos oktatás jellemzői:

Az ismeretelsajátítás a szokásos menet szerint történik: új anyag ismertetése, közvetlen alkalmazás, gyakorlás, további alkalmazások és összetettebb feladatok; A tanár elsődlegesen „tanítja” a tanulókat, így elsősorban a bemutatott anyag utánzására ösztönzi őket, miközben a tantervi anyag elsajátítására koncentrál. Meg van győződve arról, hogy a tanulók (csak) azt tanulják meg matematikából, amit megtanítanak nekik. A feladatok a tananyag feldolgozásához illeszkednek, különböző, tananyaggal kapcsolatos célok elérését segítik elő, általában egymástól függetlenek és kis lépésekben vezetik a tanulót. A gyakorlás a későbbiekben számon kérendő ismeretekre helyezi a hangsúlyt. A feladatok megoldásait általában gyorsan lehet „ jó”-nak vagy „rossz”-nak értékelni, mivel a tanulók egyéni elgondolásai, esetlegesen különféle eredményre vezető megoldási módok nem kerülnek elő. A tanuló igyekszik tökéletes megoldásokat készíteni és elveti azokat az ötleteket, amelyek ehhez nem segítik hozzá, és hozzászólásaiban inkább a teljes megoldás ismertetésére szorítkozik (ha szerinte tud ilyet). A tanulók inkább egyénileg dolgoznak a jobban teljesítők időnként további feladatot kapnak, de az osztály leginkább együtt dolgozik; a megoldásokat is közösen beszélik meg; a jó megoldást leginkább saját eredményüknek tartják.

A problémamegoldó stílus jellemzői:

Az ismeretelsajátításban központi helyen van a felvetett probléma, amelynek megoldásához ismeretrendezésre, problémamegoldó stratégiák kiválasztására van szükség és nem maradhat el a talált, lehetőleg többféle megoldási mód vizsgálata (reflexió) sem. Definíciók, megjelölések itt is előzetes közlésre kerülnek, ám a fogalmakat, tételeket problémába ágyazva tárgyalják.

A tanár inkább a tanulói aktivitást igyekszik elősegíteni, így az önálló felfedezést, a rendezett „kutatást" ösztönzi, elsősorban a megfelelő tanulói tevékenységre koncentrál. Meg van győződve arról, hogy a tanulóknak is vannak megfelelő matematikai ötleteik, és hogy ezek beépíthetők ismereteikbe.

A feladatok általában összefüggnek egymással, közöttük gyakoriak a „nagy lépések" és a differenciálásra is lehetőséget teremtenek.

Leginkább elmélyítő, kiegészítő gyakorlófeladatok szerepelnek.

A tanulók egyéni, esetleg különböző eredményre vezető elképzelései megvitatásra kerülnek.

A tanuló igyekszik tökéletes megoldásokat készíteni, de azokkal az ötletekkel is foglalkozik, amelyek nem vezetnek ilyenekhez és ezeket a feladat megbeszélésekor megemlíti.

A tanulók leginkább párokban vagy különböző szempontok szerint szervezett csoportokban dolgoznak (ezek szervezése függ az adott feladattól, és történhet például a tanulók teljesítménye alapján); és gyakran átélik, hogy órai munkájuk eredménye az egész osztály együttes munkájának köszönhető.

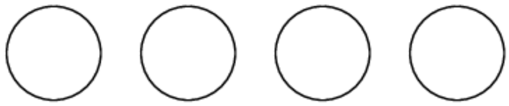
A gyakorlatban a tanárok egyéniségüknek, tanításról alkotott elképzelésüknek, tapasztalataiknak megfelelően alkalmazzák leginkább e két stílus valamilyen elegyét. Így *inkább hagyományosnak vagy inkább problémamegoldónak* mondható stílus szerint tanítanak.

Ahhoz, hogy egyrészt minél jobban érzékelni lehessen a kétféle tanítási stílus közötti különbséget, illetve, hogy a két stílus jegyeiből tudatosan is beépíthessünk elemeket saját stílusunkba, érdemes „stílusgyakorlatok"-at végezni. Ez azt jelenti, hogy érdemes megpróbálni egy-egy téma tanításához adott stílusú feldolgozást elképzelni. Ez a terv lehet például egy feladatlap, ami meghatározza gyakorlatilag az óra menetét.

A kétféle tanítási stílusban használható feladatanyag, illetve tananyagfelépítés összehasonlításához bemutatunk két feladatlapot, amelyek tartalmilag a törtek tanításának bevezetéséhez készültek. Természetesen ilyen feladatlapok más tanítási stílusok összehasonlításához is készülhetnek.

I. Feladatlap

1. Egyenlő köreid vannak. A körök egy egységet jelentenek. Színezd be a körök egy negyedét, egy nyolcadát, három nyolcadát, egy harmadát!



Béla azt állítja, hogy egy hatod részt színezett be. Igaza van-e?

………

2. Színezd be a csillagok háromnegyed részét pirossal! Hány piros csillagod van? Meg tudod mondani, hogy a csillagok hányad része nem piros?

× × × ×

× × × ×

× × × ×

………

$\frac{3}{4}$ **(három negyed), azt jelöli, hogy az „egy negyedből" hármat vettünk.**

A törteknél szokásos jelölések:

$\frac{3}{4}$ számláló / törtvonal / *nevező*

3. Törteket szakaszokkal is szemléltethetünk:

	Az egység	12 cm
	$\frac{1}{2}$	6 cm

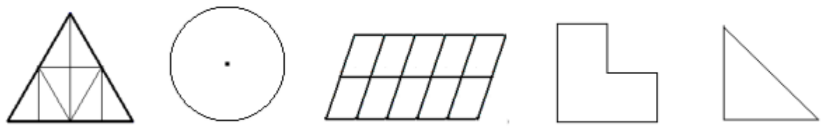
Jelöld be a megadott részeket a szakaszokon (12 cm):

	$\frac{1}{4}$	… cm
	$\frac{1}{3}$	… cm
	$\frac{3}{4}$	… cm

1.1. ábra. Az I. feladatlap 1. oldala

4. Minden alakzat egy egységet jelent. Színezd ki bennük a megadott részeket!

a) b) c) d) e)



$\frac{1}{4}$ $\frac{3}{4}$ $\frac{3}{10}$ $\frac{3}{4}$ $\frac{1}{2}$

5. Mekkora rész van színezve, ha minden alakzat egy egységet jelent?

a) b) c) d) e)

6. Rajzolj egy 15 cm-es szakaszt! Ez az egység. Színezd pirossal az $\frac{1}{3}$, kékkel a $\frac{3}{5}$ részét!

7. Vasárnap egy osztály $\frac{3}{4}$ része kiránduláson vett részt. Hány tanuló volt kirándulni, ha az osztály létszáma 32?
(Rajzolhatsz is, ha akarsz!)

1.2. ábra. Az I. feladatlap 2. oldala

II. Feladatlap

1. Egyforma téglalapokat rajzoltunk. Színezz különbözőképpen:

Egy fél					
Egy negyed					
Egy nyolcad					

Egy felet röviden így jelölünk: $\frac{1}{2}$ (1 osztva 2-vel). Ez a jelölésmód azt jelenti, hogy az egészet két egyenlő részre osztottuk és a részek közül egyet vettünk.

Hogyan írnád fel a feladatban szereplő többi törtet?

....

2. Keress a törtek között több megoldást!

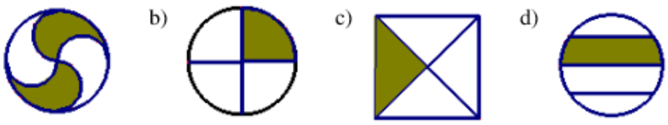
$$\frac{1}{2} < \square < \square < \ldots$$

$$\ldots < \square < \square < \frac{1}{2}$$

....

3. Kakukktojás keresése (melyik nem illik a sorba szerinted?)

a) b) c) d)



Miért döntöttél így, írd le!

....

4. Adj meg két további tagot, amelyek illenek a sorba!.

a) b) c)

Miért ezeket választottad? Tudsz másféle megoldást is?

....

5. Meg tudod mondani mekkora rész színezett, ha egy-egy alakzat egy egységet jelent?

a) b) c) d) e)

1.3. ábra. A II. feladatlap

Elemzés a feladatlapokhoz:

Az első lap feladatai folytonos és diszjunkt mennyiségek törtrészének kiszámításával foglalkoznak már ismert feladattípusok segítségével. Az első három feladatban a törtrész leolvasásához kész „eszköz” (ábra) áll a tanulók rendelkezésére, a negyedik és ötödik feladatban nekik kell esetenként kiegészíteni ábrát. Az első három feladat a törtek fogalmának alapismereteit veszi át (egyenlő részekre osztás, törtrész ábrázolása, törtrész megnevezése, jelölése, elnevezések), már ismert modelleken dolgozva.

A negyedik és ötödik feladat az ismeretek alkalmazását jelenti, e két feladat (adott törtrész beszínezése, beszínezett rész nagyságának megadása) egymás inverzeinek tekinthető. A részfeladatok ebben a két feladatban nem nehézségi sorrendben követik egymást. E két feladat az előbbieken kívül annyiban függ össze, hogy az I. feladatlapon az 5e, ami könnyű feladat, segítséget adhat a 4. feladat d részének megoldásához. Bár az így készíthető felosztása nem könnyű és nem is várható el előzmények nélkül a tanulóktól. Feltételezhető, hogy aki ilyen felosztással oldotta meg a 4d-t, az vagy ismerte a feladatot, (ami általában nem jellemző), vagy az 5e megoldása után visszatért a 4d megoldásához (ez a várható). Megnézzük, hogy aki jól megoldotta az 5e-t, azok közül hányan oldották meg ezzel a felosztással a 4d-t, azaz hány esetben segítette az 5e feladat a 4d-t. Ez azt is jelenti általában, hogy ezek a tanulók a feladatokat nemcsak egymás utáni sorrendben oldották meg rendre, hanem átgondolva hol volt problémájuk, képesek voltak arra is, hogy visszalépjenek, amikor ötlethez jutottak.

Az 6. feladat „rokona” a 3.-nak, de ebben az előbbi feladatban a tanuló egy szakaszon végzi a szükséges méréseket és számításokat. Feltehető, hogy aki tudta a 3. feladat helyes megoldását, azt átgondolva ezt is helyesen oldotta meg.

A 7. feladat törtrész kiszámításával kapcsolatos. A 2., 3. és 7. feladat azonos tartalmú, az utóbbi esetben nem kötelező az ábrázolás, míg az előbbiek megoldásához hozzátartozik.

A második feladatlap 1. feladata többféle jó beszínezést kér azaz több megoldást adott törtrész megadásához. Mivel a tanulók korábbi tanulmányaik során feltételezhetően már többféleképpen megadták egységtéglalap törtrészét, a feladat megoldásához rendelkeztek kellő előzetes tapasztalattal. A nehézséget, a problémahelyzetet egyrészt a többféle jó megoldás megkeresése jelenti (kiválasztás a bennük élő képekből egyéni meggondolás segítségével) hiszen megadott felosztás most nem segíti a megoldást másrészt a megoldás megfelelő lejegyzése. Gyakorlatilag egyfajta nyitott feladattal állunk szemben, hiszen több megoldást kell megadni ugyanarra a feladatra.

A II. feladatlap 2. feladatának második része az 1. feladatra épül(het) amennyiben a megoldás az egység egymás után végrehajtott többszöri felezésének felhasználásával készül. A 2. feladat első része annyiban kapcsolódik az első feladathoz, hogy jó megoldás adható meg úgy is, ha az $\frac{1}{2}$- ből rendre „egyre többet” veszek, például $\frac{2}{2}$, $\frac{3}{2}$, $\frac{4}{2}$.

A 2. feladat azért nehéz, mert egy feladaton belül kell váltani ($\frac{1}{2}$-hez képest kisebb, nagyobb tört megadása; számláló, nevező figyelése).

Nem megszokott jelenség, hogy egy magyar matematika feladatban kakukktojás keresésre kerül sor, mint ez a II. feladatlap 3. feladat esetében történik. Pedig ezek a feladatok különböző ismeretek, gyakran hagyományostól eltérő alkalmazásán túl jó lehetőséget biztosítanak arra, hogy vélemények ütközzenek, különböző elgondolások megvitatásra kerüljenek, és ezen felül motiváló hatással is bírnak. Ez a feladat is a „nyitott" feladatok körébe tartozik, hiszen többféle jó megoldása van. A törtekkel kapcsolatos „környezet" miatt elsősorban a törtek témakörből várhatók megoldások.

A két feladatlap megoldásával kapcsolatban iskolai tapasztalatok is vannak (Ambrus G. 2008a [15]).

1.2. Feladat: *Készítsen egy választott témához hagyományos és problémamegoldó stílus szerinti feladatlapot!*

A továbbiakban röviden bemutatunk néhány további tanítási stílust azok közül, amelyek hatással voltak, illetve vannak a magyar matematikaoktatásra.

A New-Math vagy strukturalista irányzat

A New Math irányzatát megelőzte a Bourbaki csoport matematikusainak munkássága (Halmos, P. 1998 [103]), akik a második világháború előtt publikálták munkáikat. Céljuk a modern matematika egységesítésének, szintézisének megvalósítása volt. Az ehhez kapcsolódó matematikatanítási elgondolás mely a matematikát szigorú szabályok által felépített rendszernek tekintette „Új Matematika" angolul a „New Math", előtérbe került a XX. század közepén az úgynevezett „Szputnyiksokk" hatására, melyet 1957-ben az akkori Szovjetunió által fellőtt szputnyik váltott ki.

Az irányzat képviselői a matematikát, mint tudományt hangsúlyozták. Három matematikai alapstruktúrát, a rendezési, az algebrai, és a topológiai struktúrát emelték ki és ezek köré rendezték az ismereteket.

A tanításban eszerint fontos szerepet kapott a matematikai szaknyelv precíz használata, a tananyag a matematika deduktív jellegét tükrözte, előtérbe kerültek a halmazelméleti definíciók, a halmazokra épülő felépítés.

A tanítási irányzat jellemzője a teljesítményorientáltság, vagyis a teljesítményre és a sikerre való törekvés.

A tanítási irányzat kritikája az a tapasztalat, hogy, ez a tanítási módszer és a formalista felfogás nem felel meg a tanulók életkori, tanulási sajátosságainak. Ezen kívül fontos megemlíteni, hogy háttérbe szorította a problémamegoldó gondolkozásmódot és a matematika gyakorlati alkalmazását, a tartalmi, tárgyi vonatkozású gondolkodási módokat, az általános pedagógiai, érzelmi és a szociális célokat.

Az oktatásban általában nem hozott sikert az irányzat. Ellenpontként jelent meg a „Back to Basics" mozgalom, vagyis „vissza az alapokhoz", és ugyancsak a formalista irányzat hatására jelent meg a problémamegoldó tanítási módszer és a gyakorlatorientált matematikaoktatás.

Post-New Math – Varga Tamás tanítási irányzata

Az Új matematika tanítási irányzata Magyarországon is hatást gyakorolt az oktatásra. Mivel a módszer hibái már elég hamar érzékelhetőek voltak, a tapasztalatok felhasználásával dolgozta ki Varga Tamás az általa Post-New Math-nak nevezett Komplex matematikatanítási módszert (Klein, S. 1980 [126]).

Elméletének lényege, hogy a matematikatanításnak a tanuló aktív részvételével kell történnie és a gondolkodását formáló folyamatnak kell lennie a tényszerű ismeretek mechanikus tanítása helyett. A tanulók ismeretei az életkori sajátosságaikat figyelembe vevő tapasztalatszerzési folyamat során növekednek. A tanulói felfedezés által fejlődik a problémamegoldó gondolkodásuk, kreatívabbá válnak.

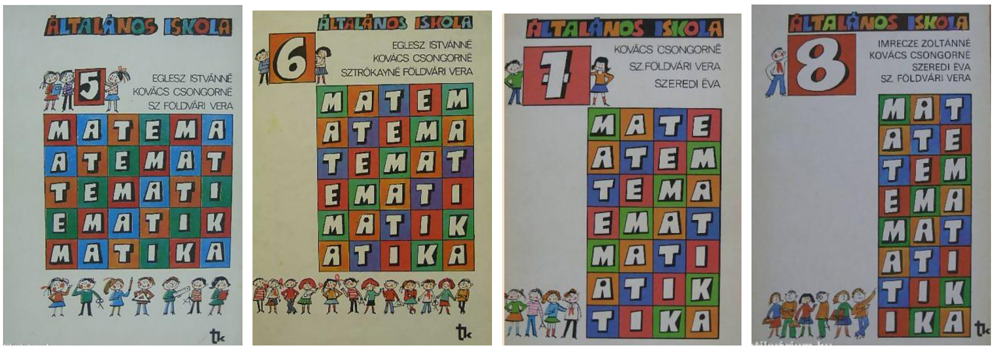
Ennek alapján 1963-ban Budapesten egy általános iskolában elkezdődött a komplex matematikatanítás bevezetése Varga Tamás vezetésével. A kísérlet célja az volt, hogy a különböző szinteken levő tanulók mindegyike a neki megfelelő matematikaoktatást kapja, a leggyengébb és a legjobb tanuló is megfelelő szintű tananyagot tanulhasson. Az 1978-ban bevezetett új általános iskolai tantervet már Varga Tamás irányításával folyó komplex kísérletre alapozták.

A komplex matematikatanítás céljai alapján a tananyag és a tanítási módszerek fejlesztését irányozta elő. Addig a matematikának csak kisebb részterületével foglalkoztak, nem is nevezték matematikának, a tárgy neve számtan és mértan volt. Az 1978-as tantervekben jelenik meg először a matematika név, az 1. osztálytól a 12. osztályig. Megváltozott tehát a tananyag, megváltoztak a tanítás kereteit és szervezési formái is. A tananyag legjelentősebb hányada a számtan az algebrával együtt és a geometria lett, ezek kiegészültek a halmazok és a logika, függvények, sorozatok, kombinatorika, valószínűségszámítás, statisztika témakörökkel. A tanításban használt eszközök köre kibővült, így a hagyományos tankönyveken kívül használtak a munkalapokat, feladatlapokat, különböző új szemléltető eszközöket is. A frontális oktatás mellett megjelent a tanulók páros és csoportos munkája is.

„Az 1978-as tanterv hosszú időn át meghatározta a magyar matematikatanítást. A valóság természetesen sokban különbözött a tanterv készítőinek elképzeléseitől, objektív és szubjektív körülmények hatására a tanterv és a kapcsolódó tankönyvek sok vitát váltottak ki, sokak számára idegen volt a szemlélet, sokan tartották túlméretezettnek az anyagot, a gyengébb eredményekért a tantervet és a tankönyveket hibáztatták. Mindez vezetett a nyolcvanas években bekövetkezett korrekcióhoz.

A viták, tiltakozások és változtatások ellenére a 60-as években megindult reformmozgalom, a 78-as tanterv és mindezeken belül Varga Tamás munkássága maradandó hatást gyakorolt a magyar matematikatanításra. Ma már szinte mindenki számára természetes, hogy az iskolába lépés kezdetétől lehet a gyerekeknek „igazi”matematikát tanítani, nemcsak a régi számolást és mérést. A gyerekek aktív részvétele, felfedező tevékenysége minden életkorban, minden témakörben az oktatás fontos tényezője. A gyerekek képességeinek fejlesztése, az egyéni különbségek figyelembevétele, a matematika megszerettetése, a gondolkodás, a kreativitás fejlesztése ma már didaktikai közhelynek számít, pedig ezek az elvek és ezek következményeiként kialakult módszerek korábban késhegyig menő vitákat váltottak ki és sok továbbképzőprogramra, tapintatos tanácsadásra volt szükség ezek elterjesztéséhez." (Pálfalvi, 2000 [168])

1.3. Feladat: *Az úgynevezett „kockás" felsőtagozatos tankönyvsorozat könyvei és munkafüzetei Varga Tamás módszerének szellemében készültek (a fedőlapjukon látható négyzetekben a betűkből a matematika szó olvasható – innen az elnevezés is). A sorozat kötetei segítségével kövesse nyomon a függvényfogalom fejlődését 5-8. osztályig. (A kötetek iskolai könyvtárakban illetve az Országos Pedagógiai Könyvtár és Múzeum Tankönyvtárában is megtalálhatók).*



1.4. ábra. Kockás könyvek [65], [66], [133], [114]

A realisztikus matematikaoktatás

A hagyományos értelemben vett alkalmazások tanítása mint említettük, általában nem a gyerekek saját világából való példákon történik, és az így közvetített világkép inkább statikusnak mondható, szemben a gyerekek világával, ami dinamikus. De Lange szerint jelenleg az alkalmazott matematika tanításának az a fő feladata, hogy integrálja a matematikaoktatásban a gyerekközeli világ dinamikáját. Freudenthal elképzelése, mely szerint a valóságot használjuk a matematizálás kiindulásaként, a Van Hiele által megfogalmazott tanulási szintekkel együtt adja a realisztikus matematikatanítás elméleti alapját.

A tanulási folyamat szintjei Van Hiele szerint:

1. szint: A gyerek akkor éri el a gondolkodás első szintjét, amikor már képes általa ismert séma (minta) ismert jellemzőivel dolgozni.

2. szint: Amikor már képes dolgozni a jellemzők egymás közötti kapcsolataival is, elérte ezt a szintet.

3. szint: Ezt a szintet akkor éri el, amikor elkezd dolgozni e kapcsolatok belső jellemzőivel. (De Lange 1996, [140] 58.o.)

A hagyományos tanítás De Lange szerint gyakran kezdődik a második vagy harmadik szinten. A természetes és hatékony eljárás azonban az, ha valamilyen matematikai tartalom valóságbeli megjelenését vizsgáljuk, majd ebből fejlesztjük ki a formális operációkat a második, illetve harmadik szinten.

A realisztikus matematikaoktatási irányzatot Freudenthal irányításával Hollandiában dolgozták ki az Utrechti Egyetemen. Az irányzat szerint az iskolának hozzá kell ahhoz járulnia, hogy a tanulók megértsék a matematikának a társadalomban és saját életükben betöltött szerepét. Ugyancsak fontosnak tartja a tanulók matematikához való pozitív hozzáállásának kialakítását.

Jellemző vonásai, hogy hangsúlyozza

– a matematikai alkotómunkát a tényszerű ismeretekkel szemben;

– a technikák helyett az elvek fontosságát;

– sok lehetőséget biztosít matematikai problémák megoldására.

A realisztikus matematikaoktatás didaktikai alapelvei:

(a) Matematika kontextusokban

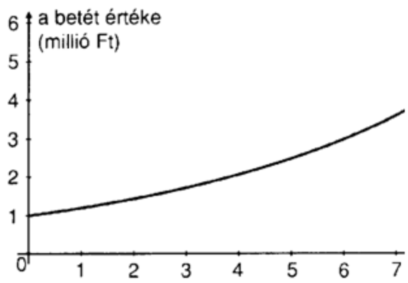
A tanulók matematikai aktivitása egy konkrét kontextusban megy végbe. A cél olyan intuitív fogalmak összegyűjtése a kontextus alapján, amelyekben az adott matematikai elmélet, struktúra lényeges szempontjai tükröződnek. Ez a konkrét szituáció az alapja a konkrét elmélet megalkotásának. A tanulás kezdeti szakaszában szükséges egy konkrét orientációs bázis a kialakítandó fogalommal kapcsolatban. Lényeges, hogy a matematikai elméletek kiindulópontjai és alkalmazási területei is valóságbeli kontextusok.

(b) Horizontális és vertikális matematizáció

Az intuitív, informális, kontextusfüggő szintről a reflexív, formális szisztematikus szintre való áttérés vizuális modellek, modell-szituációk, különböző anyagok, sémák, diagramok, segítségével történik meg. Ez a horizontális matematizáció folyamata. A vertikális matematizáció a szisztematikus, formális ismeretek kiépítését jelenti.

(c) A tanulók saját produktumainak fontossága

A tanulóknak lehetőséget kell kapniuk arra, hogy a matematikai elveket, koncepciókat a valóságból vett problémák megoldása révén maguk fejlesszék ki. Ez igen fontos alapelv. Az is lényeges, hogy a tanulók lehetőséget kapjanak saját megoldási stratégiáik alkalmazására.



1.5. ábra. A bankbetét változása

(d) Szociális vonatkozás, interakciók

A tanulók saját eredményeiket összehasonlítják, ütköztetik társaikéval. Ez lerövidítheti a tanulási folyamatot, hiszen ennek során a tanulóban tudatosulnak a saját eredmények hibái, előnyei. A csoportosan végzett elemzések a saját gondolatok megfelelő bemutatása, a különböző eredmények értékelése, és ezek összevetése a tanár magyarázatával mind ezt segítik. Fontos, hogy a tanulás nem egyéni aktivitás, hanem adott társadalomban történik.

(e) Összefüggések, kapcsolatok

Az új eredményeket a meglévő ismeretrendszerbe kell beilleszteni. A különböző területek globális kapcsolatainak észrevétele, fejlesztése alapvetően fontos.

1.4. Példa: *Az exponenciális növekedés Vizsgálatunk tárgya az exponenciális növekedés, amelyet ezúttal a kamatszámítás szemléltet. A grafikon évi* 20 *%-os kamat mellett mutatja az* 1 *millió Ft-os bankbetét változását.*

A grafikon elkészítése után megkérdezhetjük, hogy hány év múlva lesz a bankbetét összege 1,2 millió Ft, 1,4 millió Ft, …. Ezek után bevezethetünk egy szituációtól függő definíciót: $log_{1,2}1,728$ jelenti azt az években mért időtartamot, amely alatt az 1 millió Ft-os bankbetétből 1,728 millió Ft-os bankbetét lesz, ha az évi kamat 20 %, azaz a változás faktora 1,2.

A logaritmus fontosabb tulajdonságait is érdemes ehhez a szituációhoz kapcsolódva megsejtetni, és szóban is megfogalmaztatni. Például, ha a betét összege elérte a 2 millió forintot, még egy év szükséges ahhoz, hogy 20 %-os kamat mellett 2,4 millió Ft-ra növekedjen az összeg. Az előbbi definíció felhasználásával $\log_{1,2} 2 + 1 = \log_{1,2} 2,4$.

Példák segítségével eljuthatunk a szorzat logaritmusára vonatkozó azonossághoz, de utána természetesen nem hagyhatjuk ki annak formális bizonyítását. (vö. Takács, T. 2001 [223])

Miután konkrét szituációból eljutottunk absztrakció és formalizálás segítségével a matematikai ismerethez, érdemes az ismeret alkalmazását ugyancsak gyakorlati feladatokon végezni. Ilyen szemléletű matematikaoktatás esetén a számonkérésnek is hasonló szemléletűnek kell lennie.

1.5. Feladat: *Nézzen utána Hans Freudenthal és az általa létrehozott Freudenthal Intézet tevékenységének az interneten!*

A gyakorlatorientált matematikaoktatás

Bár a gyakorlatorientált matematika-oktatás és a realisztikus matematikaoktatás nem különül el élesen egymástól, érdemes felhívni a figyelmet arra a lényegi különbségre, hogy az előbbi esetén a tantervbe beépülő, alkalmazási problémák feldolgozásáról van szó, míg ez utóbbi esetben az egész matematikaoktatás valóságközeli problémák feldolgozásán alapul, mint azt az előző részben láttuk. Az alkalmazási problémák más tantárgyakból és a mindennapi életből is származhatnak.

A gyakorlatorientált matematikaoktatás céljai (vö. Claus, H.J. 1989 [48] 164-165.):

– A mindennapi élet azon összefüggéseinek mélyebb megértése, amelyek matematikai ismeretek nélkül csak részben lenne lehetséges.

– A matematika jelentőségének felismerése a mindennapi élet szempontjából.

– A matematika alkalmazásai más tudományterületeken (tantárgyakban).

– A „matematizálás” tanítása (problémák matematikai megfogalmazása, modellalkotás...).

Humenberger (1995 [112]) úgy véli, hogy az alkalmazások tanítása a matematikában nem csodaszer, amely egycsapásra megold mindenféle oktatási, transzfer és motivációs problémát. Nézete szerint a helyes álláspont az, ha a matematikatudás felépítésében az alkalmazások és a valós világra vonatkozó összefüggések a matematikai ismeretekkel egyenlő rangra emelkednek. Az alkalmazásorientált oktatáshoz azonban alapvető matematikai ismeretek alapos tudása nélkülözhetetlen, hiszen különben csak trivialitások vagy (és) spekulációk színterévé változik a matematikaóra.

A következőkben egy osztrák tankönyvsorozat feladataiból mutatunk be néhányat. A tankönyvsorozat közgazdasági jellegű középiskolások számára készült, ezért a megtanult matematikai ismereteket elsősorban ezen a területen igyekszik alkalmazni. Arra is törekszik, hogy a matematika tananyagot alkalmazásközpontúan tárgyalja. (Kronfellner, Peschek 1999 [136])

1.6. Példa: *A linzi Stadion*

Egy újsághír szerint 17 600 focirajongó látta a zsúfolt linzi Stadionban a slágernek számító LASK Wiener Austria mérkőzést. Nemcsak a nézőknek érte meg, hanem az egyesületi pénztárnak is, amely számára a megemelt belépőjegyárak (állóhely 50 Schilling, ülőhely 80 Schilling) összesen 1 138 000 Schilling jövedelmet jelentettek.
Hány állóhelye van a linzi Stadionnak?

1.7. Példa: *Közvéleménykutatás*

Egy közvéleménykutatás szerint, amelyet 1820 fiatal körében végeztek (ebből 780 lány) átlagosan csak minden tizedik fiatal érdeklődik a politika iránt. A lányok körében ez az arány $\frac{1}{15}$*, ami az előzőnél még kevesebb. Mennyi ez az arány a fiúknál?*

1.8. Feladat: *Oldja meg a következő feladatot és hasonlítsa össze a hagyományos feladatokkal!*
Egy reklámkiadványból: „Ez a csodálatos sztereomagnó az öné lehet mindössze 3630 Schillingért. Felajánlunk azonban önnek egy kamatmentes részletfizetési lehetőséget is: 11 havi részlet, és egy olyan befizetés, amely csupán 70 Schillinggel kerül többe mint egy havi törlesztőrészlet. (Készpénzfizetés esetén 302 Schillinget spórol.)”
Egyértelmű a szöveg?

Számítsd ki az utánfizetés mértékét és a havi törlesztőrészletet!

A projektorientált oktatás

A projekt népszerű és divatos kifejezés. Mivel rövid és frappáns, és persze nem utolsó sorban kellőképpen idegen hangzású, már a köznapi élet kisebb nagyobb összefüggő feladathalmazainak megjelölésére is használják (pl. ezt az utazásprojektet inkább elhalasztom, a tanulásprojekt következik), s ha belegondolunk, sok esetben jogosan. Az oktatás területén alig több, mint 100 éve jelent meg, de az utóbbi idők változásait figyelve komoly karrierre számíthat ezen a területen is.

1.9. Feladat: *Nézzen utána a projekt szó jelentéseinek!*

1.10. Feladat: *Nézzen utána az interneten a projektekkel való tanítás főbb jellemzőinek, különös tekintettel a projektek szervezésével és megvalósításával kapcsolatos főbb mozzanatokra!*

A projekt módszer tiszta alkalmazása, vagyis a csak projektekkel történő tanítás sok nehézségbe ütközik és a tanárok részéről is nagy az ellenállás. Helyette az úgynevezett „projektorientált” oktatás használatos inkább. Ebben az esetben a szaktanár a hangsúlyt a matematikára helyezi, s bár más tantárgyak is szerephez jutnak a projekt megvalósításánál, legfeljebb tanácsért fordul más tantárgyakat tanító kollégákhoz. Még gyakoribb az a megoldás, hogy a gyerekek közreműködésével gyűjtik össze és alkalmazzák a más tantárgyakból szükséges ismereteket (Claus, H.J. 1989 [48], Ambrus A. 1995 [2]).

A projektorientált oktatás főbb jellemzői:

- A környező világ problémáira koncentrál.
- Több tantárgy ismereteit is használja a problémák megoldásához.
- A tanulók érdeklődése, szükséglete, a tanulók által elfogadott, őket motiváló cél központi helyet kapnak.
- Nem a matematikai képességek fejlesztése az elsődleges cél, hanem a környező világ problémáinak megértése.
- Hangsúlyt kap a tanulói autonómia. A hagyományos matematikaoktatásban sok esetben tanul olyat a diák, melynek szükségességét nem tudja indokolni a tanár. A projekt esetében kívánatos, hogy a tanulók beleszólhassanak a témaválasztásba, lehetőleg ők dönthessenek arról, milyen téma, milyen céllal szerepeljen.
- Fontos a tanulók teljesítményének közös, kritikus értékelése.
- A pedagógus szerepe tanácsadó, szervező, segítő, a főszereplő a diák.
- A kidolgozásnál előtérbe kerül a csoportmunka.
- Az ismeretszerzés alapja a tevékenység, az új ismeretek legfőbb forrása a tapasztalat.
- Alkotó jellegű, a végeredmény bemutatható.

1.11. Feladat: *Gyűjtsön érveket és ellenérveket a projektorientált oktatással kapcsolatban!*

Példák és ötletek iskolában is megvalósítható projektekre.

(a) Bliccelés (9-10 osztálytól)

A jegy nélkül utazásban van valami vagányság, de sokszor más ok (is) közrejátszik. Mondjuk figyelmetlenség, hogy nem gondoskodtunk időben jegyről, bérletről, és persze az egyre magasabb jegy, illetve bérletár is riasztó. Bármi legyen is az oka a bliccelésnek, a bevételkiesés kárt okoz az érintett közlekedési vállalatnak, s végső soron ez áthárul a fizető utasokra.

Vegyük tehát nagyító alá a következő témákat: Milyen arányú a bliccelés a járműveken? Mekkora emiatt a bevételkiesés?

A témához kapcsolódó feladatjavaslatok:

1. Gondolkodjatok el közösen a témáról, határozzátok meg közelebbről mit szeretnétek vizsgálni a témával kapcsolatban!
2. Milyen információkra lesz szükség a feldolgozáshoz?
3. A gyűjtött anyag feldolgozása, következtetések.

Eredményeiteket tegyétek közkinccsé poszteren, interneten, iskolai újságban...

(b) A dohányzás (8.-9. osztálytól)

A témaindításhoz felhasználhatók különféle adatok a dohányzással kapcsolatban. A téma kiválóan alkalmas arra, hogy hosszabb-rövidebb projekt keretében (akár többféle formában) kerüljön feldolgozásra.

A témához kapcsolódó feladatjavaslatok:

1. Egy szál cigaretta ára hogyan alakult az elmúlt 10 év során?
2. A dohányzás egészségügyi vonatkozásairól készíts áttekintő feldolgozást!
3. Hogyan alakult a dohányzók száma a 15 évnél idősebb lakosság körében az elmúlt 20 évben?

(c) Kerékpározás (10.-12. osztálytól)

Ez is inkább nagyobbaknak szóló téma, de egyes részletei hatodik, hetedik osztálytól már érdekesek lehetnek. Ez a projekt többféle tárgykörből való ismeretre építhet, a matematika itt csak egy ezek között (fizika, testnevelés, biológia-egészségvédelem-környezetvédelem, földrajz).

A témához kapcsolódó feladatjavaslatok:

1. Készíts átfogó feldolgozást az utóbbi 10 év kerékpáros balesetek statisztikájának felhasználásával!
2. A kerékpár és a kerékpározás fizikája

1.12. Feladat: *Az előbbi ötletek felhasználásával készítsen tervet adott évfolyam számára egy miniprojekt elkészítéséhez, ha lehet, próbálja is ki iskolai tanításban!*

1.13. Feladat: *Gyűjtsön további ötleteket iskolai körülmények között is megvalósítható projektekre különböző évfolyamok számára.*

A kompetencia alapú matematikatanítás

A matematikai kompetencia

A matematikai kompetencia matematikai ismeretek, matematika-specifikus készségek és képességek, általános készségek és képességek, valamint motívumok és attitűdök együttese.

A fogalom pontos tartalma a matematikai kompetencia komponensrendszerként való értelmezésével írható le.

A matematikai kompetenciának többféle értelmezése is van. (vö. például Mogan Niss (2003, idézi, Ambrus G. (2008b [16]), megtalálható a szemelvénygyűjteményben). Ezek elemzésével illetve összehasonlításával nem foglalkozunk.

A következő táblázatban a magyar matematikai kompetencia értelmezés komponensrendszere olvasható. (lásd Fábián és mások [73])

Készségek	Gondolkodási képességek	Kommunikációs képességek	Tudásszerző képességek	Tanulási képességek
számlálás számolás mennyiségi következtetés becslés mérés mértékegység- váltás szöveges- feladat- megoldás	rendszerezés kombinativitás deduktív következtetés induktív következtetés valószínűségi következtetés érvelés, bizonyítás	reláció- szókincs szövegértés szöveg- értelmezés térlátás térbeli viszonyok ábrázolás, prezentáció	probléma- érzékenység probléma- reprezentáció eredetiség kreativitás probléma- megoldás metakogníció	figyelem rész-egész észlelés emlékezet feladat- tartás feladat- megoldási sebesség

1.1. táblázat. A matematikai kompetencia komponensrendszere

A kompetenciaalapú matematikatanítási mozgalom mögött Magyarországon a Varga Tamás által szorgalmazott fejlesztő tanítás felfogása áll. A hosszú út elve szerint nem iparkodunk mindenáron a magaslatokba, hanem körülnézünk azon a szinten, amelyen éppen vagyunk. Megnézzük, hogy mire jó az a mégoly csekély ismeret, eljárás, ..., amit éppen felfedeztünk, megismertünk. Az adott szinten kompetens (szakértő, mester) módon bánunk az (esetleg teljesen új) ismerettel.

1.1.2. Matematikai modellalkotás az oktatásban, alkalmazás-orientált matematikaoktatás. (5. tétel)

Matematikán kívüli problémák matematikai modellezése, néhány alkalmazás ismerete.

1. **A matematikai modell fogalma**

   A modell szó többféle értelemben használatos, lehetséges jelentései például a következők:

   – valamilyen alapeset (standard), esetleg példa, amely utánzásra, összehasonlításra szolgál;
   – valamilyen épület, szerkezet stb. kicsinyített változata (makett);
   – személy vagy tárgy, aki (amely) alapján művészeti alkotás készül;
   – állítások, kapcsolatok rendszere, amely eleget tesz bizonyos axióma rendszernek.

   A matematikai modell valamely szituáció részleges matematikai reprezentációja, amely a modellezési folyamat során jön létre. A modellezés vagy modellalkotás során valamilyen – többnyire matematikán kívüli – problémát vagy kérdést oldunk meg úgy, hogy matematikán belüli kontextusba helyezzük azt. A probléma matematizálásának módja sokszor bonyolult és nem lineáris folyamat. Az elkészült modell és a valóság egybevetése gyakran szükségessé teszi a modell módosítását, esetleg teljes elvetését.

   A modell és a létrejöttéhez szükséges modellezési folyamat szoros kapcsolatban van egymással, és elmondható, hogy maga a folyamat éppolyan fontos (néha talán még fontosabb is), mint eredménye, a modell.

   Összegezve a következő meghatározást vehetjük alapul:

   A matematikai modell egy elméleti séma, amelynek tanulmányozása megkönnyíti az adott jelenség, szituáció megértését és vizsgálatát.

2. **A modellezés folyamata**

   A modellezési folyamat leírására többféle ábra készült már, mostanában leginkább a következő használatos:

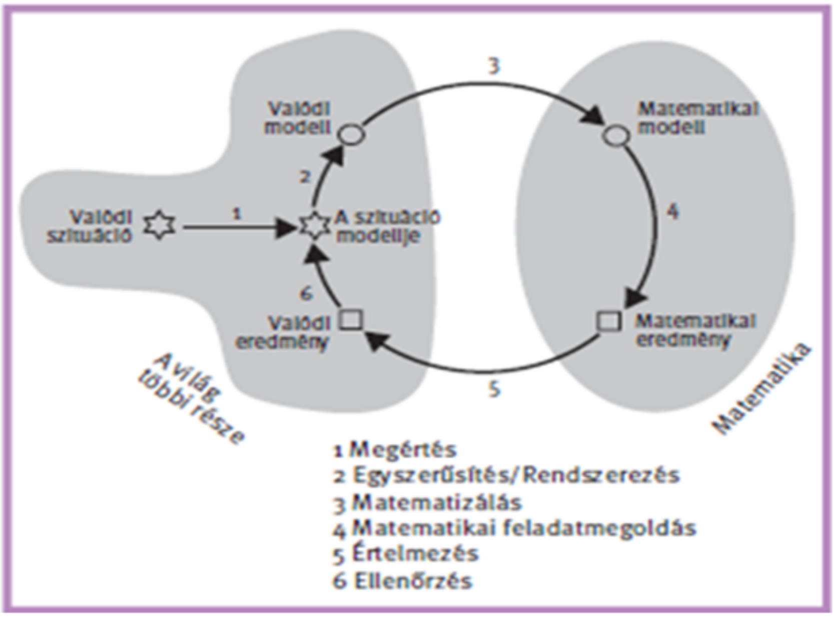
   Az **első lépés a szituáció megértése**, ekkor készül el a szituációs modell.

   A továbbiakban a modellezés folyamatában csak ez vesz részt, vagyis az a „valóság”, ahogyan a tényleges szituációt megértettük, értelmeztük.

   Folyamatból való kilépés nincs jelezve, ezzel is utalva arra, hogy szükség esetén **a ciklus akár többször is végrehajtható**; ha már az eredmény elfogadható, akkor fejeződik be.

   A hangsúly a folyamaton van,

   - aminek segítségével elkészül egy (több) modell, és
   - a modell(ek) alapján számítások végezhetők az adott szituációra vonatkozóan.



1.6. ábra. Blum és Leiß, 2006 [34]

Ezeket értékelve, összevetve, az adott szituáció esetére átgondolva, figyelembe véve a meghatározott feltételeket, adunk végül (lehetséges) választ a feladatban megfogalmazott kérdésre.

3. **Példa modellezésre: Vízparti séta**

   (SAJÁT PÉLDÁT kell kigondolni!)

   1.14. Példa: *Béla bácsi és unokája Lili a parton sétálgatnak. Megszámolták, hogy Lili átlagosan 70 lépéssel tudja megtenni a tölgyfa és a fenyőfa közötti utat. Béla bácsinak ehhez körülbelül 30 lépés kellett. Béla bácsi 180 cm magas.*

   Mekkora lehet a két fa távolsága? Hány éves lehet Lili?

   A példában szereplő szituáció egyszerű, érdekessége, hogy nagyon különböző szintű megoldások készíthetők aszerint, hogy milyen modellt alkotunk a kérdéses távolság és életkor becslésére.

   Megoldás a modellezési ciklus alapján (általános iskola negyedik osztálytól):

1.	Megértés	Egyszerű szituáció, nem okoz gondot
2.	Egyszerűsítés, valós modell készítése	Ha ismernénk a nagyapa lépéshosszát, akkor a kislány lépésének hossza és a két fa távolsága is számítható lenne. Mi befolyásolja a lépéshosszat? - kor, - magasság, - mindkettő. Hogyan befolyásolják ezek a lépéshosszat? *Egyszerűsítés:* Feltesszük például, hogy a nagypapa és a kislány egyaránt közel egyenletes lépéshosszal sétál. Mérés alapján a nagypapa lépéshossza kb. 80 cm lehet (ehhez 180 cm körüli magasságú férfiak lépéshosszának átlaga is vehető, vagy a mérések alapján a „legjobban valószínű” érték).
3.	Matematikai modell	A két fa távolsága nagypapa lépéshosszának 30-szorosa. Lili lépésének hossza pedig a fák távolságának 70-ed része.
4.	Számítások a modellben	A két fa távolsága 2400 cm = 24 m. Ebből Lili lépésének hossza kb. 34 cm.
5.	Értékelés és egybevetés a valósággal	A kislány lépéshossza körülbelül egy 5-7 éves kislányénak megfelelő.

Az értékelés és a megfontolás magasabb évfolyamokon kibővíthető:

Ha a lépéshossz egyenesen arányos lenne a testmagassággal, akkor az előbbi értékek alapján irreálisan alacsony érték adódna a kislány magasságára: $\frac{30\cdot180}{80} = 76,5$ cm. Ez a magasság jellemzően 1 éven aluli gyermek magassága lenne, aki viszont nem képes 34 cm-es sétalépésekre. Ezek szerint érdemes lenne a magasságon kívül más tényezőket is figyelembe venni a lépéshossz megállapításához. (Ettől most eltekintünk, mert bonyolítaná az eljárást.)

További lehetőség: több 180 cm-es férfi lépéshosszának megmérése és átlag számítása.

Feltehető, hogy a nagypapa és a kislány fogják egymás kezét, és akkor valószínűleg hatással vannak egymás haladására, például úgy, hogy a kislány szaporázza a lépteit, hogy együtt haladhasson a nagypapával, ekkor idősebb kislány is szóba jöhet.

Az is az egyszerűsítések közé tartozik, hogy ettől eltekintünk. Ennek alapján a kislány életkorára és magasságára igen eltérő eredmények is adódhatnak.

Jól látható, hogy a feltételek alapján elkészített modellben számolva a kapott eredmény csak a figyelembe vett feltételek között érvényes (validálás).

4. **A modellezési feladatok legfontosabb jellemzői**

- *Nyitottság*

  Míg a hagyományos feladatok többsége zárt, a modellezési feladatok meghatározó tulajdonsága, hogy nyitott. Nyitott feladatokról akkor beszélünk, amikor a feladat megadásánál a kiindulási állapot, a célállapot vagy a kettőt összekötő megoldási mód nem előre tisztázott. (Egy feladat zárt, ha a kiindulási és a célállapot, illetve a megoldási mód is egyértelműen meghatározott.)

- *Komplexitás*

  A valóság általában bonyolult, összetett, így ha a modellezéshez le is egyszerűsítjük, illetve több ponton egyértelművé is teszünk benne egyes részleteket így is „komplex” marad a szituáció. Azaz általában többféle ismeretre (matematikai és nem matematikai) és többféle eljárásra lehet szükség a modellezési feladatok megoldásához.

- *Valóságközeliség*

  Bármennyire is életszerű egy feladat, azért a valóság általában más. Részben azért, mert a valóságos világ túl összetett ahhoz, hogy ezt az iskolában teljes bonyolultságában vizsgáljuk, részben azért, mert sok jelenség a szakemberek számára is csak „közelítőleg” vizsgálható, elemezhető. A modellek feltételeinek (érvényességének) meghatározásával az adott szituáció tovább „távolodik” a valós helyzettől, viszont egyben vizsgálhatóvá is válik – az adott körülmények között.

- *Autentikusság (valódiság, hitelesség)*

  Ez lényegében azt jelenti, hogy témájuknál és a szükséges ismeretek (nemcsak matematikai), illetve a megoldásukhoz elvárt gondolkodási mód alapján az adott korosztály számára megfelelőek. Van olyan elképzelés is, ami az autentikusságot a téma és a korosztály megfelelésére szűkíti le.

- *Problémaközpontúság*

  Mint már szerepelt is az eddigiekben, probléma megoldása valamilyen akadály leküzdését is jelenti. A modellezési feladatok esetében már a kezdetekkor számos kérdés tisztázásra vár, nem lehet rutinszerűen eljárni. Előfordul, hogy egy nagyobb probléma kisebb részproblémákra bontásával tudjuk megoldani a feladatot.

5. **A modellezési feladatok alaptípusai**

   A modellezés céljától függően különböző típusú modelleket hozhatunk létre:

   a) Leíró: célja egy jelenség leírása, leképezése; például egy híd alakjának leírása parabola segítségével
   b) Normatív (előíró): célja a folyamatok adott körülmények között történő végbemenetelének megadása illetve előírása; például a Newton féle lehűlési törvény képlete
   c) Előrejelző: célja, hogy meg tudjunk jósolni valamit; például hogyan alakul a villamos energia ára a következő 10 évben?
   d) Magyarázó: célja magyarázat adása, a (jobb) megértés elérése; például miért nem merülsz el a vízben, ha csónakázni mész a Balatonon?

   Természetesen előfordulhat, hogy egy-egy modellnek többféle célja is van, így akár több kategóriába is beletartozhat.

6. **Iskolai alkalmazás**

   Pár, illetve csoportmunkában végezhető. Jól használható többféle kooperatív módszer is. A csoportok munkája megfelelő szempontok alapján értékelhető, az értékelés lehet szummatív és formatív.

7. **További szempont: Modellezési feladatok és kompetenciák kapcsolata**

Irodalom

Ambrus Gabriella: Modellezési feladatok.[22]
Ambrus Gabriella: Gondolatok a valóságközeli matematikaoktatásról.[21]
Vancsó Ödön: Matematikai modellezés nehézségei egy OKTV feladat kapcsán.[239]

Kitekintő irodalom

Ambrus Gabriella: Titanic a Balatonon és más modellezési feladatok matematikából középiskolásoknak.[18]
Tóth Bettina: Modellezési feladatok a matematikában. [228]

1.2. Matematikadidaktikai alapelvek

1.2.1. A fogalmak tanításának alapkérdései, a fogalmak tanításával kapcsolatos módszerek, eljárások, feladattípusok (1. tétel)

A fogalom lényegét tekintve logikai szempontból valamely objektum lényeges elemeit magában foglaló gondolategység. A következőkben rövid vázlatot talál a fogalmak tanításával kapcsolatos főbb kérdések áttekintéséhez.

1.15. Feladat: *Nézzen utána a szükséges ismereteknek és keressen saját példákat a SAJÁT PÉLDA jelzésű vázlatpontokhoz. (Ambrus A. 1995 [2], Skemp, R. R. 2005 [206]).*

1. Absztrakció és osztályba sorolás – szempontok – SAJÁT PÉLDA
2. Fogalmak kapcsolata
   - Empirikus és teoretikus fogalomképzés – SAJÁT PÉLDA
   - Fogalom tartalma és terjedelme
   - Fölérendelt, alárendelt és mellérendelt fogalom
3. Fogalmak fajtái (de más felosztás is lehet)
   - Tárgyi fogalmak – SAJÁT PÉLDA
   - Reláció-fogalmak – SAJÁT PÉLDA
   - Műveleti fogalmak – SAJÁT PÉLDA
4. Fogalmak osztályozása (Egy fogalom terjedelmének részhalmazokra bontása adott feltételek mellett)
   - A felosztás egy meghatározott lényeges tulajdonság, jegy alapján történik.
   - A részhalmazok közül bármely kettőre teljesül, hogy nincs közös elemük.
   - A kapott részhalmazok egyesítése az eredeti halmaz (a fogalom terjedelme).
   - A fogalom az osztályozás során keletkezett fogalmak legközelebbi fölérendelt fogalma. Például a konvex négyszögek osztályozása.
5. A definíciók szerkezete, a definíciók fajtái
   - Definiálás a (legközelebbi) fölérendelt fogalom és a megkülönböztető tulajdonság(ok) alapján – SAJÁT PÉLDA
   - Genetikus definíció (a fogalom keletkezése alapján) – SAJÁT PÉLDA
   - Rekurzív definíció – SAJÁT PÉLDA
   - Konvencionális definíciók (szimbólumokkal) – SAJÁT PÉLDA
   - Közvetett definiálás axiómák segítségével – SAJÁT PÉLDA
   - Leírás, magyarázat, példákon keresztüli absztrakció – SAJÁT PÉLDA
6. Tartalmi követelmények definíciókkal szemben
   - Teljesség

– Ellentmondásmentesség

– Nem lehet körbenforgó

– Pontos, egyértelmű

– A meghatározó részben csak már (alapfogalmak és) definiált fogalmak szerepelhetnek

– A definíció (lehetőleg) ne tartalmazzon felesleges elemeket

– A definiált objektum egyértelmű legyen.

– A definícióban szerepelnie kell a meghatározandó fogalomnak (A definíció rendszerint egy olyan mondat, melynek állítmánya az, hogy „nevezzük”.)

7. Módszertani követelmények definíciókkal szemben: Skemp 2005 [206] felhívja a figyelmet a matematikai és a matematika tanulása közben használt definíciók közötti különbségre, figyelmeztet az életkori sajátosságok figyelembevételére.

   – Definíció segítségével senkinek nem közvetíthetünk az általa ismerteknél magasabb rendű fogalmakat, hanem csakis oly módon, hogy megfelelő példák sokaságát nyújtjuk.

   – Minthogy a matematikában az előbb említett példák majdnem mind különböző fogalmak, ezért mindenekelőtt meg kell győződnünk arról, hogy a tanuló már rendelkezik ezekkel a fogalmakkal.

   – A tanulók életkori sajátosságainak megfelelően tisztázni kell a definícióban szereplő elemek jelentését és jelentőségét.

   – A tanulók életkori sajátosságainak megfelelően tudatosítani kell a szereplő szavakköznapi jelentésével való kapcsolatot.

8. Fogalmak tanításának stratégiái

   – Induktív út, előnyök, hátrányok – SAJÁT PÉLDA

   – Deduktív út, előnyök, hátrányok – SAJÁT PÉLDA

   – Analógia segítségével (Pólya, Gy. 1988 [187]) – SAJÁT PÉLDA

9. A fogalom megerősítése, rögzítése

   – A szkéma eszközként szolgál új ismeret elsajátításához, olyan struktúra, amely integrálja a meglevő tudást az egyén tudásrendszerében (Skemp 2005 [206]).

   – Az új ismeretek beépülése ebbe a rendszerbe asszimiláció és akkomodáció által lehetséges. (Piaget, J. 1980. [179])
   SAJÁT PÉLDA.

– A fogalom megerősítéséhez, rögzítéséhez hozzájárul például az ismétlés, az alkalmazás, az eltérő, elterelő környezetben való szerepeltetés. Ez nehezíti a fogalom elkülönítését, ezért túl korai szakaszban nem tanácsos szerepeltetni).

Irodalom

Ambrus András: Bevezetés a matematika didaktikába. [2] 57-72.

Kitekintő irodalom

Pólya György: Indukció és analógia. [187] 19-47.
Skemp, R. R.: A matematikatanulás pszichológiája. [206] 24-73.

1.16. Feladat: *Keressen példákat az iskolai gyakorlatból definiálási hibákra.*

1.17. Feladat: *A fogalmak tanításával kapcsolatos feladattípusokat az exponenciális függvény bevezetésével kapcsolatban mutatjuk be. Készítsen egy másik fogalom tanításához a példa szempontjai szerinti feldolgozást!*

1.18. Példa: *Az exponenciális függvény bevezetésével kapcsolatos feladatok*

1. *Bevezető feladat: Az* $f(t) = 50 \cdot 0,8^t$ *függvény írja le egy termoszban a kávé lehűlését, ahol az időt órában, a kávé hőmérsékletét Celsius fokban mérjük. (Bár nem feltétlenül szükséges, de megnyugtatóan hat annak tisztázása, hogy mikor kezdjük megfigyelni a folyamatot, vagy a megfigyelés kezdetekor mért hőmérsékletet.)*
   a) *Készíts a* $t = 0, 1, 2, 3, 4, 5$ *értékekre értéktáblázatot!*
   b) *Számítsd ki az* $f(-1), f(-2), f(-3)$ *értékeket. Értelmezd ezen adatokat hőmérsékletként.*
   c) *Add meg az* $f(t)$ *függvény értelmezési tartományát, ha 95 Celsius fokos forró kávét öntöttünk a termoszba és a külső hőmérséklet 10 Celsius fok.*
   d) *Mekkora lesz a kávé hőmérséklete 20, 30, 45 perc illetve 1,5 óra múlva?*
   e) *Ábrázold a feladatban szereplő összes értékpárt derékszögű koordinátarendszerben. Kösd össze a pontokat és indokold meg, hogy a pontok összekötése értelmes dolog!*
2. *Fogalom definiálása: Ha több bevezető feladat szerepel, célszerű a tanulókkal megfogalmaztatni a definíciót.*

   Pl.: Az $f(t) = c \cdot a^t$ *(*$a > 0$ *és* $a \neq 1$*) hozzárendelési szabállyal exponenciális függvényt adunk meg.*
3. *Fogalomazonosítási feladatok*

a) Exponenciális függvények kiválasztása adott függvények közül. (Pl.: lineáris, négyzetes, köbös, de többféle exponenciális is)

b) Adott kapcsolatok közül azok kiválasztása, melyeket exponenciális függvény ír le. (Pl. A négyzet oldala és területe, a betét összege és az idő, adott növekedési rátájú lakosság száma és az idő, a rádióaktív izotóp bomlása, állandó gyorsulással megtett út és az idő kapcsolata)

c) Adott grafikonok közül kiválasztani azokat, melyek egy exponenciális függvény grafikonja lehetnek. (pl.: lineáris, négyzetes, négyzetgyökös, növő és fogyó exponenciális függvények grafikonjai)

4. *Fogalomrealizálási feladatok: Adj meg két exponenciális függvényt háromféle reprezentációban, konkrét, valódi szituáció leírásával, grafikonnal és szimbolikus formában.*

5. *Fogalom beágyazása fogalomhierarchiába, osztályozás. Például a hozzárendelések, függvények, exponenciális függvények kapcsolatának ábrázolása Venn diagram segítségével, vagy a monoton, szigorúan monoton és az exponenciális függvények kapcsolatának ábrázolása Venn diagram segítségével.*

6. *Definíció következményeinek vizsgálata:*

   a) A c konstans meghatározása

   b) A függvény tetszőleges h időközönkénti változásának meghatározása (növekedési faktor).

   b) Ha a kitevő összeg, akkor a függvényérték ...

7. *Alkalmazási feladatok*

   a) A rádióaktív sugarak intenzitása betonban haladva a d távolsághoz viszonyítva exponenciálisan csökken. A $d = 25cm$ távolságban az eredeti intenzitásérték 1 %-ára csökken az intenzitás. Milyen d értékre csökken az eredeti intenzitás 10 %-ára, illetve az eredeti érték 0,01 %-ára az intenzitás? Hogyan értelmezhetjük a „felezési vastagság” fogalmát egy adott anyagra vonatkozólag?

   b) Egy baktérium tenyészetben N_0 baktérium található. 2 óra elteltével 800, újabb 2 óra elteltével 2500 baktériumot állapítottak meg. Hány baktérium volt kezdetben és hány 9 órával a kezdet után, ha ezen időre exponenciális növekedést tételezünk fel?

   c) A légkörben és minden élő organizmusban ugyanazon konstans arányban található a C14-es rádióaktív szénizotóp, melynek felezési ideje kb. 5760 év. Az élő organizmus kihalása után a C14 rész exponenciálisan csökken.

d) Egy Hammurábi idejéből való babilóniai város ásatásai során 1950-ben talált fadarabban az eredeti C14 mennyiség 64 %*-a volt meg. Mikor élt Hammurábi király?*

Megjegyzés: A különböző időszámítási módszerek más-más adathoz vezetnek, a mi „kutatásunk" szerint kb. i.e. 1770.)

1.19. Feladat: *Fogalomépítés: A következő részlet a négyzetgyök fogalmának bevezetéséről szól. A tervezet két ponton is kiegészítésre szorul, ha a tanításban használni akarjuk. Próbálja meg megtalálni, hogy a fogalomépítés szempontjából hol hiányzik egy-egy láncszem, mivel kellene kiegészíteni ezt az amúgy jó anyagot.*

Bemelegítő feladat: A táblára rajzoljuk a következő táblázatot.

Dobó (négyzetszám)								
Elkapó (eredeti szám)								

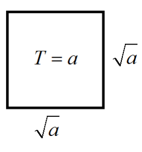
1.2. táblázat. A kitöltendő táblázat

Egy labdát dobálunk körbe, aki dobja a labdát, az gondol egy számot, négyzetre emeli, majd megmondja a szám négyzetét. Aki elkapja, az megnevezi azt a számot, amire a dobó gondolt, vagyis aminek a négyzete a dobó által mondott szám. Mindenki, miután továbbdobta a labdát, a táblához megy és felírja az általa adott választ, valamint az általa mondott négyzetszámot a táblázatba. Ezek után megbeszéljük a gyerekekkel

Dobó (négyzetszám)	49	25	16	1	9	4	625	100
Elkapó (eredeti szám)	7	5	4	1	3	2	25	10

1.3. táblázat. A kitöltött táblázat

a négyzetgyök definícióját: Jelöljük a-val egy négyzet területét! Az a területű négyzet oldalának hosszát az a négyzetgyökének nevezzük, és $\sqrt{a}$-val jelöljük. Másként megfogalmazva: $\sqrt{a}$ az a nemnegatív szám, melynek négyzete a.



MEGJEGYZÉSEK A FELADATHOZ: A tervezet elemzése

1. A bemelegítő feladat remekül készíti elő a négyzetgyök fogalmát. Hiányossága, hogy nem gondol arra a fontos esetre, hogy a dobó esetleg negatív számot is gondolhatott, tehát az elárult szám lehet negatív szám négyzete is.

   Miért fontos, hogy ez itt előkerüljön? Hogyan lehet ezt elérni?

   Amikor egy-egy fogalom előkészítésére példákat gyűjtünk, fontos, hogy a fogalom egyetlen fontos tulajdonságát se hanyagoljuk el. A négyzetgyök esetében amúgy is gondot okoz, hogy nem „tiszta” megfordítása a négyzetreemelésnek. Már az előkészítésben gondot kell fordítanunk arra, hogy lássák, miért is kötjük ki a definícióban azt, hogy a négyzetgyök pozitív.

   Megbeszélhetjük, hogy az egyértelműség kedvéért állapodjunk meg abban, hogy mindenki csak pozitív számra gondol a játékban. Ezzel ráirányíthatjuk a figyelmüket annak a kikötésnek a fontosságára, hogy a négyzetgyök az nemnegatív.

   Ha a gyerekek negatív számra is gondolnak, az szerencsés a fogalomépítés szempontjából, hiszen ekkor megállapodhatunk abban, hogy most csak nemnegatív számokkal játszunk. Ha nem, akkor beállhatunk a játékba, és mi lehetünk a „rendbontók” akik negatív számra gondolnak.

2. A másik, komolyabb hiányosság az, hogy a jó bemelegítő játéknak semmi kapcsolata nincs a kimondott definícióval. Az óratészlet legfontosabb momentuma marad homályban, az, hogy hogyan beszélik meg a négyzetgyök definícióját.

   Mivel egészítené ki ezt a részt?

   Néhány segítő kérdést felsorolunk:

   Mit beszélünk meg? Mit mondhatnak a gyerekek? Mit szeretnénk, hogy kimondásra kerüljön az idézetben adott definíció előtt?

   Nincs-e szükség további feladatokra a definíció kimondása előtt?

   Vajon miért ezt a definíciót választotta a hallgató?

   A megválaszolatlan mondat után közölt definíció hibája, hogy nincs közvetlen kapcsolata a korábban összegyűjtött példákkal. A vázlatban szereplő előkészítés alapján várható lenne, hogy a gyerekek például azt mondják, hogy

   – egy szám négyzetgyöke egy olyan nemnegatív szám, melyet négyzetre emelve az eredeti számot kapom eredményül.

   – vagy másképpen: a négyzetgyökvonás egy olyan művelet, amelynek eredménye az a nemnegatív szám, melynek négyzete visszaadja azt a számot, melyből négyzetgyököt vontunk.

   – vagy még másképpen: a négyzetgyökvonás egy olyan függvény, amely minden nemnegatív számhoz hozzárendeli azt a nemnegatív számot, melynek négyzete az eredeti szám.

A hallgató által közölt definíció jó, de egészen más példákkal kell előkészíteni. Például olyanokkal, amelyekben adott területű négyzet oldalát számolják ki a gyerekek és ki kell térni a 0 esetére is. Mindenképpen szükség van ilyen példákra is, és az itt adott definícióra is, hogy lássák, hogy mindegyik esetben ugyanahhoz a fogalomhoz jutunk.

1.2.2. Bizonyítások tanításának alapkérdései (2. tétel)

A bizonyítások jellemzői az általános- és középiskolában:
– a bizonyítások elfogadása egy szociális folyamat, melynél a tartalmi megértés legalább olyan fontos szerepet játszik, mint a formális kritériumok,
– a matematikai gondolkodási folyamatok legalább olyan fontosak, mint a matematikai eredmények,
– a matematikai tartalom hangsúlyozása a formalizmus helyett.

A tanulók bizonyítási igénye és a bizonyítások befogadásának képessége erősen függ az életkortól és a tanuló matematikai gondolkodásmódjától is!

A bizonyítási tevékenység feltételezi a tanuló részéről a következtetési képességet és az absztrakt fogalmakkal való műveletek végzését. Piaget szerint a gyermek gondolkodása több fokozaton át jut el a formális szintig (műveletek előtti szakasz, konkrét műveletek szakasza, formális műveletek szakasza). A formális műveletek végzésére általában 12-13 éves korban lesznek képesek a tanulók. Ezek alapján a legtöbb országban 6., ill. 7. osztályban fordulnak elő először explicite bizonyítások. Ez az időszak a konkrét műveletekről a formális műveletekre való áttérés periódusa, a szemléletes még jelentős szerepet játszik. Ezért is van jelentősége az ún. prematematikai bizonyításoknak, melyeknél konkrét, materiális objektumokkal való manipulálás, illetve a matematikai tényállások, kapcsolatok szemléltetése képek, vázlatok segítségével fontos szerepet játszanak (tartalmi, szemléletes bizonyítások).

Argumentációk, indoklások, bizonyítások

A nemzetközi matematikadidaktikai szakirodalomban egy szélesebb értelemben vett bizonyításfogalmat használnak. A szigorúan vett bizonyítások mellett egyre inkább előtérbe kerülnek – főként az alsóbb osztályokban – az argumentációk, indoklások.

A nem formális bizonyítások szükségességét a matematikaoktatásban az alábbi didaktikai elvek is hangsúlyozzák:

– fokozatosság elve,
– a reprezentációs szintek variálásának elve,
– a szemléltetési eszközök variálásának elve,
– spiralitás elve,
– operatív elv.

Prematematikai bizonyítások

Semadeni (1976) szerint egy prematematikai bizonyítás bizonyos konkrét cselekvésekből áll, melyek:

– először mint konkrét fizikai cselekvések kerülnek realizálásra (tárgyakkal végzett cselekvések, képek rajzolása, ábra alapján történő okoskodás stb.),

– ezt követi egy interiorizációs folyamat (a cselekvés belső, szellemi elvégzése),

– végső fázis az általánosítás (a tanuló biztos abban, hogy a felhasznált módszer nemcsak néhány konkrét esetben igaz, hanem minden olyan esetben, amelyre az állítás vonatkozik).

BIZONYÍTÁSOK TANÍTÁSI FÁZISAI

A bizonyítások tanítása során négy fázist különböztetünk meg, ezek

1. a tételek megsejtése;
2. a bizonyítási ötlet megtalálása;
3. a bizonyítási stratégiák, módszerek alkalmazása;
4. a bizonyítás rögzítése, leírása: reflexió.

Az egyes fázisok a gondolkozás során gyakran nem különülnek el egymástól, és a sorrendjük is cserélődhet.

Tételek megsejtését szolgáló eljárások, bizonyítási ötlet megtalálása

- *Tételek megfordítása.* Pl.: Pitagorasz tétele és megfordítása; Párhuzamos szelők tétele és megfordítása; Oszthatósági szabályok, stb.

- *Analógia alapján.* Az analógiás következtetés olyan gondolkodási művelet, amely alkalmazásakor két vagy több jelenségnek, dolognak bizonyos tulajdonságokban, viszonyokban, struktúrában való megegyezése alapján más tulajdonságban, viszonyban, struktúrában való megegyezésüket is sejtjük. Pl.: Síkgeometriai tételek térbeli megfelelői.

- *Általánosítás.* Egy szűkebb osztály elemeire vonatkozó összefüggést analógiás következtetés segítségével átviszünk egy ezen osztályt tartalmazó tágabb osztály elemeire. Pl.: Pitagorasz-tétel és koszinusztétel; 9-cel való oszthatóság tízes számrendszerben és $(g-1)$-gyel való oszthatóság g alapú számrendszerben; stb.

- *Indukció* Induktív következtetésnek nevezzük azt az eljárást, amikor valamely osztályon (halmazon) belül az egyes esetekből az általánosra következtetünk. Pl.: Konkrét szerkesztésekből a magasságpont létezésének megsejtése; sorozat általános tagjának megsejtése, stb.

- *Számítási feladat megoldása, elemzése* Pl.: Konkrét teljes négyzetté alakításokból a másodfokú egyenlet megoldóképletének megsejtése, stb.

- *Szerkesztési feladat megoldása, elemzése* Pl.: Thalesz tétel; párhuzamos szelők tétele, stb.

- *Egy geometriai konfiguráció elemzése* Pl.: Húrnégyszögtétel, stb.
- *Algebrai tételek megsejtése és bizonyítása geometriai szemléltetés alapján* Pl.: Kéttagú összeg négyzete; két pozitív szám számtani és mértani közepe közötti összefüggés, stb.

Bizonyítási stratégiák, módszerek

Egy $A \Rightarrow B$ szerkezetű tétel bizonyítása során a tétel A feltételét és az adott elmélet már ismert tételeit, definícióit, axiómáit fölhasználva helyes logikai következtetések segítségével kell eljutni a tétel B következményéhez. Ez a lépéssorozat gyakran hosszú, bonyolult. Ezért is célszerű a tanulók számára tudatosítani bizonyos stratégiákat, melyek alkalmazása megkönnyíti a következtetési lánc megtalálását.

Az iskolai gyakorlatban bizonyítási előforduló módszerek:

- *Direkt bizonyítások*

  Például történhet így a szinusz tétel; oszthatósági szabályok; stb. igazolása.

- *Teljes indukciós bizonyítások*

  A természetes számokon érvényes (vagy természetes számokon érvényesre visszavezethető) állításokra működik. Az indukció Peano axiómáján alapul. De az iskolában a szemléletre építünk!

  A bizonyítás két dolog belátásából áll:

  I. Állításunk a szóbajövő legkisebb természetes t számra (általában, de nem kizárólag a 0-ra vagy az 1-re) igaz;

  II. Ha az állításunk egy természetes számra igaz, akkor a rákövetkezőre is igaz. (Öröklődés.)

  I. és II. teljesülése esetén az állítást minden t-nél nem kisebb természetes számra igaznak tekintjük.

  Például történhet így összegzési formulák igazolása; kombinatorikai problémák megoldása, stb.

- *Indirekt bizonyítások*

  Logikai alapok

  1. Ellentmondás törvénye: $A \wedge \neg A$ mindig hamis.

  2. A harmadik kizárásának törvénye: $A \vee \neg A$ mindig igaz.

  Az indirekt bizonyítási módok kérdésében a nemzetközi matematika-didaktikai szakirodalom nem egységes. A sokféle logikai variáns miatt itt egy didaktikai szempontokon alapuló osztályozást mutatunk be.

1. Direkt kipróbálás. Lehetetlenségi állítás esetén az összes szóba jövő eset kipróbálása, és annak megmutatása, hogy egyik sem valósulhat meg. Pl.: Bizonyítandó, hogy a $H = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ halmaz nem bontható fel két olyan részhalmazra, hogy mindkét részhalmazban csak olyan számok szerepeljenek, melyek különbsége nincs az illető részhalmazban!

2. Létezési állítások igazságának megmutatása. Belátjuk, hogy a nem létezés lehetetlen. Például történhet így a skatulyaelv alkalmazása.

3. Általános állítás hamisságának megmutatása ellenpélda segítségével. Például történhet így a valós számok körében a $(a + b)^2 \neq a^2 + b^2$ igazolása, stb.

4. Általános állítás igazságának, létezési állítás hamisságának igazolása logikai következtetések segítségével.

Az indirekt bizonyítások típusai:

- Kontrapozíció

  Formulával:

$$(A \Rightarrow B) \Leftrightarrow (\neg B \Rightarrow \neg A)$$

  A kontrapozíció módszere gyakran fordul elő a matematikaoktatásban. Például:

  a) Fogalomazonosítás;

  b) Kontrollmódszerek:

  - dimenziópróba

    Egy fizikai mennyiségre vonatkozó formula mindkét oldalán azonos dimenziónak kell szerepelnie.

  - szimmetriaelv

    Ha egy egyenletrendszerben a változók szerepe szimmetrikus, akkor ez a szimmetria a megoldásokban is megjelenik. Pl. A téglalap a és b oldalának mérőszáma egész. Mennyi az a és b oldal hossza, ha a téglalap kerületének és területének mérőszáma megegyezik. Ha valahonnan tudjuk, hogy az egyik megoldás a (3;6) számpár, akkor tudhatjuk, hogy a (6;3) pár is megoldás lesz.

  - függvénytulajdonságok felhasználása

    Egyenletek, egyenlőtlenségek megoldása során gyakran könnyebb megoldást találni, vagy éppen megmutatni, hogy nincs megoldás, ha az egyenlet két oldalán álló kifejezéseket egy-egy függvény hozzárendelési szabályának tekintjük. Az így kapott függvények tulajdonságai alapján könnyebben célba érünk. Pl.: $\sqrt{1 - x^2} = x - 1$ a bal oldalon álló kifejezés 1-nél nem nagyobb x-re van értelmezve és a kifejezés értékei nem negatívak. A jobb oldalon álló lineáris függvény 1-nél kisebb x-re negatív, igy $x = 1$ az egyetlen megoldás.

- „Reductio ad absurdum" „Lehetetlen dologra való visszavezetés." A bizonyítandó állítás tagadásának felhasználásával ellentmondáshoz jutunk.
  - Ellentmondás az indirekt feltevésnek; formulával:

    $$(\neg A \Rightarrow A) \Rightarrow A$$

    Például a „végtelen sok prímszám létezik" állítás Euklidesz-féle bizonyítása.
  - Következtetés egy állításra és annak tagadására; formulával:

    $$(A \Rightarrow (B \wedge \neg B)) \Rightarrow \neg A$$

    Például történhet így a „nem létezik szabályos rácsháromszög" állítás bizonyítása.
  - Ellentmondás a tétel feltételének

    Például történhet így annak bizonyítása, hogy „ha hét pont úgy helyezkedik el egy egységsugarú körben, hogy bármely kettő távolsága legalább 1, akkor egyik pont egybeesik a kör középpontjával".
  - Ellentmondás egy ismert tételnek, definíciónak, axiómának;

    Formulával:

    $$((A \wedge \neg B) \Rightarrow (C \wedge \neg C)) \Rightarrow (A \Rightarrow B)$$

    , ahol C jelöli az ismert tételt.

    Például történhet így annak bizonyítása, hogy egy pozitív valós szám és a reciprokának összege mindig legalább 2.
- Elimináció módszere

  Ha egy állítás matematikai objektumok olyan halmazára vonatkozik, amely például A,B és C részhalmazokra bontható és az állítás szerint a C részhalmaz elemei rendelkeznek egy bizonyos tulajdonsággal, ezt úgy is megmutathatjuk, hogy kizárjuk az A, illetve B halmazokat.

  Formulával:

  $$((A \vee B \vee C) \wedge (\neg A \wedge \neg B)) \Rightarrow C)$$

  Például történhet így annak bizonyítása, hogy ha egy háromszögben $a^2 > b^2 + c^2$ teljesül, akkor az a oldallal szemközti szög nagyobb, mint 90°, azaz a háromszög tompaszögű.

Tanulói problémák az indirekt bizonyításokkal kapcsolatban

A legtöbb tanuló direkt, illetve konstruktív módon gondolkodik, önmagától, tanári segítség nélkül ritkán folyamodik indirekt módszerhez.

Az indirekt bizonyítás lényeges pontja az ellentmondáshoz jutás. Az ellentmondást mint olyat viszont fel kell ismerni, ami stabil tudást kíván meg a tanulóktól.

A problémák megoldásánál hiányzik a tudatos stratégiaválasztás. A legtöbb tanuló spontán lát hozzá valamit csinálni a feladattal kapcsolatban.

A tanulók nem ismerik azokat a stratégiákat, melyek elvezethetnek a megoldási ötlethez.

Javaslatok az indirekt bizonyítások tanításával kapcsolatban

Már az alsó tagozaton lehetséges és kell is olyan feladatokat kitűzni, melyek indirekt okoskodást kívánnak.

Alapvetően fontos a „feltétel" és „következmény" világos megkülönböztetése. Ez különösen akkor okoz gondot, ha a tétel nem „Ha ..., akkor ..." formában van megfogalmazva.

Az állítások tagadásának képzése állandó, folyamatos feladat.

A prematematikai bizonyítások között is forduljanak elő indirekt bizonyítások.

Az indirekt bizonyítások bevezetésére aritmetikai példák általában alkalmasabbak, mint a geometriai példák.

Tudatosítani kell a tanulókban, hogy az indirekt bizonyítási módot gyakran célszerű alkalmazni a következő esetekben:

– tételek megfordítása;

– létezési és „nem létezési" állítások igazolása;

– olyan állításoknál, melyek következmény részében a „nem" szó előfordul;

– olyan állításoknál, melyeknél kevés a megkülönböztetendő eset (pl. háromszög: hegyesszögű, derékszögű, tompaszögű; egész szám: páros, páratlan; egy pont elhelyezkedhet egy körön belül, a körön, a körön kívül; stb.);

– amikor az egyéb módszerek alkalmazása nem járt eredménnyel.

Irodalom Ambrus András: Bevezetés a matematika didaktikába. 1995. [2] 73-106.

Kitekintő irodalom Lakatos Imre: Bizonyítások és cáfolatok. [139]

1.3. Az iskolai matematika keretrendszere és segédeszközei

Az iskolai matematika keretrendszerét a NAT és a kerettanterv adja. A kerettantervek kiadásának és jogállásának rendjéről szóló 51/2012. (XII. 21.) számú EMMI rendelet mellékletei a `http://www.ofi.hu/kerettanterv-2012` címen találhatók. E szerint „Összességében

- A matematikai tanulmányok végére a matematikai tudás segítségével önállóan tudjanak megoldani matematikai problémákat.
- Kombinatív gondolkodásuk fejlődésének eredményeként legyenek képesek többféle módon megoldani matematikai feladatokat.
- Fejlődjön a bizonyítási, diszkussziós igényük olyan szintre, hogy az érettségi után a döntési helyzetekben tudjanak reálisan dönteni.
- Feladatmegoldásokban rendszeresen használják a számológépet, elektronikus eszközöket.
- Tudjanak a síkban, térben tájékozódni, az ilyen témájú feladatok megoldásához célszerű ábrákat készíteni.
- A feladatmegoldások során helyesen használják a tanult matematikai szakkifejezéseket, jelöléseket.
- A tanulók váljanak képessé a pontos, kitartó, fegyelmezett munkára, törekedjenek az önellenőrzésre, legyenek képesek várható eredmények becslésére.
- A helyes érvelésre szoktatással fejlődjön a tanulók kommunikációs készsége.
- A középfokú matematikatanulás lezárásakor rendelkezzenek a matematika alapvető kultúrtörténeti ismereteivel, ismerjék a legnagyobb matematikusok felfedezéseit, legyen rálátásuk a magyar matematikusok eredményeire."

(A kerettantervekhez mutató linkeket részletezve lásd az irodalomjegyzékben [122] alatt.)

Az iskolai munkában használható és használandó segédeszközök (tankönyvek, példatárak, elektronikus és hagyományos kiadványok, tanulóprogramok, internetes portálok, modellek, poszterek, aktív tábla, stb.) kiválasztása előtt érdemes áttekinteni a matematikatanulással kapcsolatos reprezentációs elméleteket.

1.3.1. A matematikatanulással kapcsolatos reprezentációs elméletek. (3. tétel)

„Nem szabad semmi olyat elmulasztani, aminek valami esélye van arra, hogy a diákokhoz közelebb hozza a matematikát. A matematika nagyon absztrakt tudomány – éppen ezért nagyon konkrétan kell előadni."

Pólya György

„Hallom és elfelejtem. Látom és megjegyzem (emlékszem rá). Csinálom és megértem."

Konfucius

„The more ways we teach, the more people we reach
And, the more ways we reach each
And, the more deeply what we teach will reach
(Minél többféleképpen tanítunk, annál több embert érünk el,
És minél többféleképpen érjük el őket,
Annál mélyebben fogják elsajátítani, amit tanítunk."

www.KaganOnline.com

A matematikai információkat – fogalmakat, törvényszerűségeket, eljárásokat, elveket – különféle formákban reprezentálhatjuk. A külső reprezentációk (megfigyelhető, látható, hallható, észlelhető, manipulálható) fajtái: tárgyi, képi (vizuális) és szimbolikus. A belső reprezentációk (kódolás, emléknyomok) az agyunkban létrejövő idegsejt kapcsolatok, hálózatok. A hatékony tanulás alapfeltétele a lényeges információk pontos kódolása, tárolása és előhívhatósága. Az agykutatás legújabb eredményei felhívják a figyelmet a többfajta kódolás szükségességére, előnyeire.

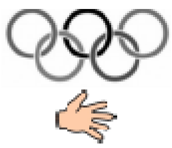
A matematikai gondolkodás nagyon komplex tevékenység, amelyben agyunk különböző területei vesznek részt: elsősorban a frontális és halánték lebenyekben zajlik a komplex matematikai gondolkodás, de amikor a matematikai problémákat vizualizáljuk a vizuális kortex is közreműködik. A matematikai készségek erősen nyelvfüggők, így komplex olvasási teljesítményekre van szükség, amelyben a Broca és Wernicke agyterületek vesznek részt.

1. Példák külső reprezentációkra

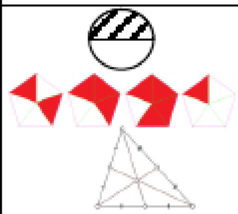
(SAJÁT PÉLDA KELL)

A mi példáink:

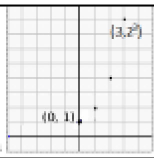
a) Természetes szám

ENAKTÍV KONKRÉT MANIPULATÍV TÁRGYI MATERIÁLIS	*IKONIKUS KÉPI VIZUÁLIS*	*SZIMBÓLIKUS*
Tapasztalatgyűjtés, megfigyelés		*Verbális és matematikai*
kupacolás ötösével, öt darab golyó, és egyéb halmazok, üres halmaz 		öt, V, 5, (12-7), lg 100000 maradékos osztás, prím, prímtényezőre bontás, lnko, lkkt, euklideszi algoritmus, stb.

b) Törtszám

ENAKTÍV *KONKRÉT MANIPULATÍV* *TÁRGYI MATERIÁLIS*	*IKONIKUS* *KÉPI* *VIZUÁLIS*	*SZIMBÓLIKUS*
Tapasztalatgyűjtés, megfigyelés		*Verbális és matematikai*
Osztozkodás, elfelezés, torták, gyümölcsök felosztása, szétosztása, egyforma szeletek, arányos osztozkodás 		fél, egy osztva kettővel, kétfelé osztva, egyketted, $\frac{1}{2}$, $\frac{2}{4}$ 0,5, számkörbővítés, racionális számtest

c) Exponenciális függvény

ENAKTÍV *KONKRÉT MANIPULATÍV* *TÁRGYI MATERIÁLIS*	*IKONIKUS* *KÉPI* *VIZUÁLIS*	*SZIMBÓLIKUS*
Tapasztalatgyűjtés, megfigyelés		*Verbális és matematikai*
Tengeri barna alga a megfigyelés kezdetekor 1 m hosszú. Hetente megkétszereződik a hossza. Vizsgáljuk az idő és a hossz kapcsolatát a megfigyelési idő alatt.	grafikon 	$f(x) = 2^x$ f_N: $\mathbf{N}\to\mathbf{N}$, f_Q: $\mathbf{Q}\to\mathbf{Q}$, limesz, mon. f: $\mathbf{R}\to\mathbf{R}$,

d) Eltolás

ENAKTÍV *KONKRÉT MANIPULATÍV* *TÁRGYI MATERIÁLIS*	*IKONIKUS* *KÉPI* *VIZUÁLIS*	*SZIMBÓLIKUS*
Egy szekrény eltolása, vonat a síneken, óriáskerék 	Eltoltak felismerése, indoklása, szerkesztések eltolással	vektorok, transzformáció-csoportok, fixelemek $T_{\underline{v}}$

2. Áttérés egyik reprezentációról a másikra

A hatékony, rugalmas tanulás, problémamegoldás fontos feltétele egyik reprezentációról a másikra való áttérés. A külső reprezentációs táblázatunkban az exponenciális függvénynél a szituáció szöveges leírása, grafikon és képlet szerepel. Konkrét összetartozó értékeket könnyen tudunk alkotni az megadott információk alapján, azaz értéktáblázatot is tudunk szerkeszteni.

<table>
<tr><td colspan="3" rowspan="3">Szituációk
Képek és szöveges leírások</td><td>Táblázatok</td><td>Grafikonok</td><td>Képletek</td></tr>
<tr><td colspan="3">Modellalkotási készségek</td></tr>
<tr><td>Mérés</td><td>Ábrázolás grafikonnal</td><td>Kapcsolat leírása szimbolikusan</td></tr>
<tr><td rowspan="3">Interpretációs készségek</td><td>Táblázatok</td><td>Olvasás</td><td></td><td>Pontonkénti ábrázolás</td><td>Képlet illesztése az adatokhoz</td></tr>
<tr><td>Grafikonok</td><td>Értelmezés</td><td>Leolvasás</td><td></td><td>Képlet illesztése a grafikonhoz</td></tr>
<tr><td>Képletek</td><td>Paraméterek észrevétele</td><td>Számolás</td><td>Ábrázolás</td><td></td></tr>
</table>

(SAJÁT PÉLDA KELL)

3. A belső reprezentációkról

Az emlékezés időtartama és az előhívhatóság szempontjából érdemes meggondolni, hogy melyik funkció hogyan aktiválható és fejleszthető.

a) *Észlelési memória*: Érzékszerveink segítségével felfogott külső információk, pillanatokig maradnak csak fenn, ha figyelmet szentelünk neki.

b) *Munkamemória*: Amit figyelmünk fontosnak, érdekesnek tart, az átkerül az un. munkamemóriába. Munkamemória agyunk azon része, amelyben a gondolkodás, problémamegoldás koncentrálódik. A munkamemória komponensei agyunk különböző területein lokalizálódnak. (bővebben a kislexikonban a 8.2.4)

c) *A hosszú távú memória tartalma lehet*

   - deklaratív (explicit) tudás: szemantikus tudás a világról való általános tudást jelenti,
   - epizodikus tudás az időben lefolyó, helyhez kötött eseményeket, mint sztorikat jelenti.
   - nem deklaratív (implicit) tudás: procedurális tudás a kognitív, motoros, valamint az észleléssel kapcsolatos jártasságokat jelenti.

A munkamemóriával kapcsolatos nehézségek

- Funkcionális kötöttség: képtelenség egy ismerős objektum, fogalom új módon való felhasználására: pl. $2x + 4$ csak algebrai szempontból való értelmezése
- Beállítódás: ragaszkodás egy bevált megoldáshoz, még ha létezik egy egyszerűbb módszer is.
- Összezavarodás: a nem releváns, tévútra vezető információkat nem tudja elnyomni.

- Egyénenként nagy különbség van a munkamemória kapacitását illetően. (frontális tanítás csak kismértékben tud igazodni e tényhez).

4. Reprezentációkkal kapcsolatos elvek

A) Paivio kettős kódolás elmélete szerint az információ két memóriarendszerben raktározható el: egy képszerű (vizuális) és egy jelentésen alapuló (verbális) rendszerben. Olyan verbálisan, szimbolikusan közvetített információk, amelyeket a befogadó (tanuló) jól el tud képzelni magának vizuálisan, könnyebben megtanulható. A vizuális képzelet lehetősége (egy szó konkrétsága) a legszorosabban összefügg könnyebb megtanulhatóságával.

B) Dolgozzuk fel a matematikai tananyagot háromféle reprezentációs szinten!

Törekedni kell az új matematikai ismeretek feldolgozásánál a konkrét-manipulatív, képi és szimbolikus reprezentációk párhuzamos használatára lehetőleg minden korosztálynál. Tanulási problémákkal küzdő tanulók számára elengedhetetlenül szükséges lehet a manipulatív eszközök használata. A helyzetet árnyalja, hogy a tanulók tanulási stílusa jelentősen eltérhet egymásétól: lehet inkább verbális, absztrakt vagy inkább vizuális, konkrét jellegű.

A különféle reprezentációk alkalmazását a matematika tanulásában, tanításában nagyon gondosan kell tervezni és végrehajtani. Előfordulhat, hogy egy tanuló a manipulatív dolgokkal, mint olyanokkal jól tud bánni, de nem látja a kapcsolatukat a kívánt matematikai műveletekkel, fogalmakkal. A hatékony alkalmazás elérése lassú folyamat, ezért sok tanár inkább csak a szimbolikus műveletek megtanulását szorgalmazza, anélkül, hogy a tanulók számára lenne egy képi, konkrét háttér, amely számukra a szimbolikus műveletek értelmét megvilágítja.

C) Tanítsunk mindkét agyfélteke számára!

Hámori József Az emberi agy aszimmetriái c. könyvében részletesen elemzi a bal illetve jobb agyfélteke jellemzőit. Kutatásai és a nemzetközi kutatási eredmények összegzése alapján arra a következtetésre jut, hogy az emberek 85%-ánál az illető agyféltekére dominánsan jellemzőek az alább felsorolt tulajdonságok.

Bal félteke	Jobb félteke
beszéd, nyelvhasználat	néma, látó, térmanipuláló
szekvenciális, digitális	egyidejű, analóg
logikus, analitikus	szintetikus, holisztikus
algebrikus	geometrikus, intuitív
intellektuális	ösztönös
konvergens	divergens
következtető	képzelőerő, kreativitás
racionális	irracionális
absztrakt (gondolkodás)	tárgycentrikus (gondolkodás)
realisztikus, objektív	impulzív, szubjektív
humorérzék nincs	humorérzék
irányított	szabad
időérzékelő	időtlen

A tanároknak törekedni kell olyan matematikai órák tartására, melyek sokkal több jobb agyfélteke használatot kívánnak, mivel sajnos a „hagyományos" matematikaoktatás balfélteke orientált.

D) Gazdag fogalomképzet (concept image)

Shlomo Vinner izraeli matematikadidaktikus vezette be a fogalomképzet (concept image) elnevezést a matematikadidaktikai szakirodalomban. Fogalomképzetnek nevezzük a fogalom nevéhez kapcsolt teljes kognitív struktúrát, mely tartalmazza a vizuális reprezentációkat (képek, diagramok, grafikonok) mentális képeket (belső kapcsolatokat), konkrét tapasztalatokat, konkrét példákat, élményeket, tulajdonságokat, eljárásokat.

E) Használjunk előhívást segítő jeleket, címkéket, eseményeket!

Ha a matematikai információ feldolgozásához egy esemény, kép kapcsolódik, akkor ezek a teljes információ felidézését is elősegíthetik. Egy jó ábra a megfelelő bizonyítást „beindíthatja". A teljes ábra segít áttekintést nyerni a teljes bizonyítási folyamatról. Egy sztori a megfelelő fogalom felidézését ösztönözheti. Tapasztalataink szerint például a tengeri barna algás történet az exponenciális, logaritmikus fogalmakat aktivizálhatja.

1.20. Feladat: *Dolgozzon ki saját példát tárgyi, képi reprezentációk használatára.*

MEGJEGYZÉSEK A FELADATHOZ:

I. Egész számok összeadása és kivonása

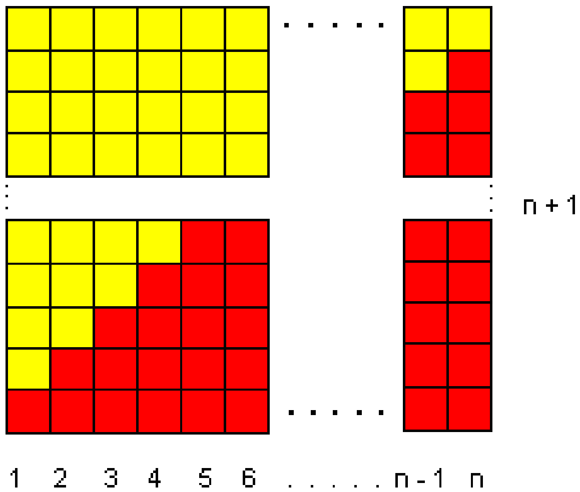
Piros és kék korongok használata, lényegében a vagyon-adósság modell egyszerűsített, konkretizált változata. Kék és piros korongok állnak a tanulók rendelkezésére. A kék korong +1 eurót, 1 piros korong -1 eurót jelent. A tanulók konkrét tevékenység révén modellálják az egész számok összeadását és kivonását, az összeadás a megfelelő színű korongok hozzáadását jelenti, míg a kivonás az elvételét. Az elején rögzíteni kell, hogy egy piros és egy kék korong kiegyenlíti egymást, a „vagyonunkhoz" akárhány piros-kék párt hozzátehetünk, vagyoni állapotunk nem változik.

Például a 2 - (-3) kivonást modellezhetjük a következőképpen. Van két kék korongunk, ahhoz, hogy elvehessünk 3 piros korongot, 3 kék-piros korongpárt kell hozzátennünk, így végrehajtható lesz az elvétel, az eredmény (+5) lesz, hiszen 5 kék korongunk marad.

Tapasztalatok szerint az oktatásban csupán a korongok rajzolása szerepel. Bár ez a tevékenység is konkrét, lényegében a konkrét koronghasználat képi kódolását jelenti, ezért a valódi koronghasználat élménye is szükséges. A képi reprezentációval párhuzamosan rögzíteni kell a tapasztalatokat szimbolikusan is (verbálisan és műveletekkel), hogy összekapcsolódjon a tevékenység, a szóhasználat és a matematikai lejegyzés módja.

II. Az első n pozitív egész szám összege

Geometria módszer



Algebrai módszer (a geometriai módszer analógiájára, de úgy is tekinthetjük, hogy a geometriai módszer ezt szemlélteti)

Írjuk fel kétszer egymás alá az első n pozitív egész szám összeg először 1-től n-ig, majd n-től 1-ig

$$\begin{array}{c|ccccccccccccccccc} & 1 & + & 2 & + & 3 & + & 4 & + & \cdots & + & n-3 & + & n-2 & + & n-1 & + & n \\ + & n & + & n-1 & + & n-2 & + & n-3 & + & \cdots & + & 4 & + & 3 & + & 2 & + & 1 \\ \hline & n+1 & + & n+1 & + & n+1 & + & n+1 & + & \cdots & + & n+1 & + & n+1 & + & n+1 & + & n+1 \end{array}$$

Az egymás alá került tagok egy-egy párt alkotnak és mindegyiknek az összege $n+1$. n ilyen pár van, tehát a két sorban levő számok összege $n(n+1)$ és ez az első n pozitív egész szám összegének duplája.

Megjegyzések

- Fiatalabb tanulóknál szükség lehet konkrét, tárgyi tevékenység, azaz színes papírnégyzetek használata.
- Az algebrai módszer lényegében a vizuális (konkrét) megoldás kódolása szimbolikusan.
- Számoknak megfelelő számú egységnégyzetet feleltetünk meg, az összeget az egységnégyzetek száma fogja jelenteni. Sok tanulónak nem egyszerű áttérni a területre a számok összegéről.
- Sok tanuló a téglalapok oldalainál a teljes hosszúságot, mint egy számot adja meg. Ahhoz, hogy általánosítani lehessen, az ábrán látható módon a tevékenységre kell ráirányítani a figyelmet, a lépcső fordított helyzetű ráhelyezésével az utolsó tagra az első tag kerül. ($7+1$ illetve $n+1$ a függőleges oldal)

Irodalom

Ambrus András: A konkrét és vizuális reprezentációk használatának szükségessége az iskolai matematikaoktatásban.[4]

Bruner, J. S. Új utak az oktatás elméletéhez. [44] 72-106.

Kitekintő irodalom Vásárhelyi Éva: Fogalomalkotás és reprezentációk. [248]

1.3.2. Szemléletesség és szemléltetés

1. A szemlétesség elve

A matematika tanításában kétféle irányzattal találkozunk: az elvonatkoztatásra törekvéssel – amely megkísérli a sokféle anyagból a logikai szempontokat kimunkálni és azokat rendszeres összefüggésbe hozni –, és a másik irányzattal, a szemléletesség elvével.

A szemléletesség elve olyan oktatás követelményét fejezi ki, amely a lehetőségeknek megfelelően az érzéki észlelésre, a megfigyelésre támaszkodik, az ismeretek alapvető forrásául a valóság tárgyai és jelenségei, vagy azok ábrázolása szolgál. A szemléletesség elve ezek felhasználásának szükségességét és azt az elvárást fejezi ki, hogy az így elsajátított fogalmak megfeleljenek a valóságnak. A szemléletesség elvére támaszkodó ismeretszerzés fontos eszköze a tanulók megfigyelő-képessége és gondolkodása. A valódi tárgy, jelenség helyettesítése képekkel vagy szavakkal csak ekkor elegendő, ha van feleleveníthető élmény.

2. A szemléltetés

A szemléletesség elvének a gyakorlatban történő érvényesítése a szemléltetés. A szemléltetés az oktatás folyamatában tudatosan alkalmazott eljárás, amely egyaránt vonatkozik a pedagógus és a tanulók tevékenységére. Az oktatás folyamatában felhasznált eszközök (a szemléltető eszközök), vagy a valóság tárgyainak és jelenségeinek megfigyelése teszi lehetővé az érzéki észlelést. Ennek folyamatában a pedagógus – a gyermekek aktív részvétele mellett – érzékszerveikre hat, s ezzel elősegíti:

- a pontos és világos képzetek kialakítását a külvilág tárgyairól és jelenségeiről,
- a tárgyak és jelenségek összefüggéseinek és törvényszerűségeinek feltárását,
- a megalapozott általánosítást.

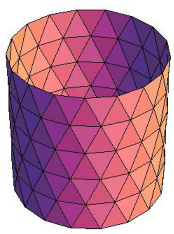
A szemléltetés biztosítja az érzéki megismerés és elvont gondolkodás szoros kapcsolatát, megkönnyíti a tanulók számára a tananyag mélyebb megértését, s ezáltal biztosítja az ismeretek tartós bevésését is. Már évekkel ezelőtt kísérletekkel igazolták, hogy a szemléltető eszközök alkalmazása fokozza az oktatás eredményességét, ha azok több érzékszerv számára hozzáférhetők. Éppen ezért törekszünk arra, hogy a szemléltetés során lehetőleg több érzékszervet foglalkoztassunk.

A szemléletes gondolkodásmód kialakításával lehetővé tudjuk tenni a matematika lényegébe való behatolást, annak egyszerűbb megértését. A szemléltetés ténye a közvetlen tanulási effektuson túl a tanulási kompetenciára is hat, legitimmé teszi a saját tapasztalat bevonását az ismeretszerzésbe.

Szemléltethetjük

- az egyenes arányosságot a kádba folyó víz magasságának növekedésével;
- a csap nyitásával, zárásával befolyásolható a vízmennyiség változása (növekvő, konstans függvény), sőt, ha egy dugót kihúzunk, akkor csökken a vízszint (fogyó függvény);
- az egész számok körében korongokkal, pálcikákkal problémamegoldást is végezhetünk (fejek, lábak a kétlábú és négylábú állatokat tartalmazó ketrecben);
- adott definíciós feltétel szükségességét ellenpélda modelljével kiemelhetjük. (Pl. a Schwatz féle ellenpélda a felszín definiálásánál:

  http://demonstrations.wolfram.com/CylinderAreaParadox/



A szemléltetés közben meg kell győződni arról, hogy azt vették-e tudomásul a tanulók, amire rá akartuk irányítani a figyelmet. Például a poliéderek alkotóelemeit leszámoltathatjuk különböző (tömör, élvázas, nyitható, ...) modelleken, animáción, ábrán. Ennek hatékonyságát egyszerű elképzelt testekre vonatkozó direkt és indirekt feladatokkal ellenőrizhetjük. Például hány éle, lapja, csúcsa van egy 5-szög (6, 7, ...) alapú hasábnak, gúlának? Inverz feladatként megadhatjuk az élek, lapok, csúcsok számát és el kell dönteni, hogy hasábra vagy gúlára gondoltunk. (8 él, 5 lap, 5 csúcs – négyszög alapú gúla; 9 él, 5 lap, 6 csúcs – háromszög alapú hasáb; 10 él, 5 lap, 6 csúcs – ötszög alapú gúla)

3. Szemléltetés a térgeometria tanításában – a geometriai térszemlélet fejlesztése

A geometria tanításának egyik legfontosabb feladata a térszemlélet fejlesztése, a helyes térlátás kialakítása.

A geometriai térszemléleten a képességek, készségek olyan matematikailag irányított komplex együttesét értjük, amely lehetővé teszi

- a térbeli alakzatok alakjának, nagyságának, helyzetviszonyának helyes elképzelését;
- a látott, vagy elképzelt alakzatoknak a geometria törvényeire épülő egyértelmű ábrázolását;
- az egyértelműen ábrázolt alakzatok helyes rekonstrukcióját;
- a különböző térbeli (matematikai, műszaki stb.) problémák konstruktív megoldását, a megoldás képi, vagy nyelvi megfogalmazását.

Gyakori jelenség, hogy térszemlélet értelmezésében túlzott nyomatékot kap a rajzkészség, valamint a reprodukáló vagy rekonstruáló képesség. Annak a képességnek, amellyel a térbeli dolgokat, problémákat elképzeljük, illetve lerajzoljuk, alapja a tanulás, illetve tanulás révén megszerzett ismeret.

Az emberi képességek, készségek különbözősége – így a térszemlélet különbözősége is – nemcsak a velünk született adottságból fakad, hanem jelentős részben a személyiség egész fejlődési folyamatából.

A matematikai ismeretrendszerbe ágyazott térszemlélet legfontosabb feltétele, hogy minél több térélményt, az életkori sajátosságoknak megfelelő szintű térgeometriai problémát, ismeretanyagot kapjanak a tanulók. Eközben szem előtt kell tartani a szemléletesség és a fokozatosság elvét.

Az általános iskolában nem a méretes feladatokkal, hanem a topológia területén lehet elősegíteni a tanulók térszemléletének fejlesztését. A sok számolás túl fárasztó és nem nyújt elég térélményt a tanulóknak.

A térszemlélet fejlesztésében nagyon sok segítséget adnak a különböző térbeli modellek, a térgeometria megértésének érdekében elkészített számítógépes programok, 3D-animációk, a didaktikai megfontolásokkal szerkesztett jó kivitelezésű (tankönyvi) rajzok, dia-sorozatok, írásvetítő transzparensek.

A szemléltető eszközök egyik csoportjába tartoznak az ún. demonstrációs eszközök, amelyeket a pedagógus órai bemutatásra használ. A szemléltetés része a tanári magyarázat, amellyel a tanulók tapasztalatszerzését, megfigyelését céltudatossá tehetjük. Nagyon fontos ügyelnünk arra, hogy helyes arányokat alakítsunk ki a megfigyelés és a magyarázat között.

A szemléltető eszközök másik csoportja az egyéni tanulást segíti elő. Ennek során a tanuló kap valamiféle információt (amelyet egy program, könyv stb. hordoz), és önállóan, párban vagy csoportban feldolgozza azt.

A szemléltetésben is előfordulhatnak hibák, például a megfigyelés elszakítása az absztrakt gondolkodástól, a szemléltető anyag túlzsúfoltsága, stb.

A térgeometria tanítását legegyszerűbben és egyben a leghatékonyabban valódi tárgyak, modellek használatával, szemléletesen kivitelezett ábrák, animációk, interaktív feladatlapok segítségével tehetjük sikeresebbé. A szép modellek és rajzok esztétikai élményt nyújtanak, felkeltik a tanuló érdeklődését, kíváncsiságát, s ezzel megnyílhat az út a problémamegoldás belső szépségének meglátása előtt.

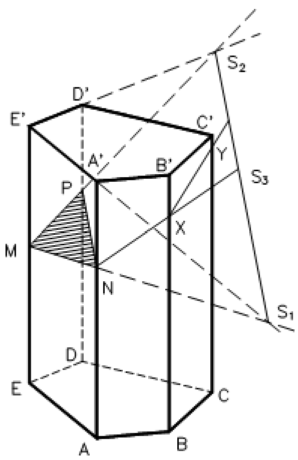
A térbeli modellek alkalmazásánál a modellt, illetve ábrázolást egymással kölcsönhatásban kell alkalmazni. A tanulók (lehetőleg önállóan) készítsék el minél több test modelljét. Négy periódust célszerű az oktatásban kialakítani:

1. manipuláció, megfigyelés, problémamegoldás valódi tárgyak, modellek használatával;
2. modellek megfigyelése, a tapasztalatok ábrázolása;
3. ábra elsődlegessége mellett modellen ellenőrizni a gondolatmenetet;
4. ábrák segítségével történő problémamegoldás.

A szemléltetés egyik leggyakoribb megjelenési formája az ábrák használata. Az ábrák értelmezése sem alakul ki spontán a tanulókban, a helyes ábraolvasás elsajátíttatása folyamatos, türelmes oktató-nevelő munkát igényel. A geometria szemléltetésekor nagyon fontos például az, hogy ne csak speciális helyzetben ábrázoljuk az adott alakzatot, továbbá gondoskodjunk a szemünk képalkotásának jobban megfelelő 3D-hatású ábrázolásról.

1.21. Feladat: *Problémamegoldás ábra alapján. Adott az $ABCDEA'B'C'D'E'$ hasáb és adottak az M, N, P pontok úgy, hogy $M \in EE', N \in AA'$ és $P \in DD'$. Határozza meg a hasábnak az MNP síkkal alkotott metszetét!*

MEGJEGYZÉSEK A FELADATHOZ:



Az MN egyenes az $A'E'$ egyenest egy S_1 pontban metszi, MP az $E'D'$-t S_2-ben.

Az S_1, S_2 pontok illeszkednek az MNP síkra (a háromszög síkjára) és a hasáb fedőlapjának a síkjára is, azaz az S_1S_2 egyenes a két sík metszésvonala. Ez a metszésvonal az $ABA'B'$ (oldallap) és az $A'B'C'D'E'$ (fedőlap) síkok $A'B'$ metszésvonalát egy S_3 pontban, a három sík közös pontjában metszi. Az S_3N egyenes a BB' élt egy X pontban, az MNP síkkal alkotott döféspontban metszi. Az S_4 pont az előzőekkel analóg módon megszerkeszthető (S_4 a BB' él metszéspontja a fedőlapsík és a metszősík S_1S_2 metszésvonalával), és az XS_4 egyenes kimetszi a CC' élből az Y pontot.

Az $MNPYX$ ötszög a keresett metszetidom.

A 3D animációkhoz

Az egyik, nem interaktív animációs típusban a teljes folyamat (akár beavatkozás nélkül) végigkövethető, a másik (interaktív) típusban önállóan lehet és kell kísérletezni ahhoz, hogy a vizsgált geometriai kapcsolatokat több oldalról megfigyelhessük. Ha nem interaktív animációról van szó, akkor is beavatkozásra bíztatjuk a felhasználót: a lejátszó szolgáltatásaitól függően megválaszthatja a lejátszás irányát és sebességét. A csúszka segítségével megkeresheti a fontos részleteket és ezekre figyelve többször is futtathatja az animációt. A legjellemzőbb kép kimerevítése lehetőséget ad az összefüggések megfigyelésére, rögzítésére.

Lásd például a számok négyzetösszegére vonatkozó 7.38 animációt

A kreatív megfigyeléshez dinamikus geometriai programcsomagok is hozzájárulhatnak az interaktív feladatlapokkal. Mivel a geometriai térszemlélet tanulási folyamat eredménye, a mozgó jelenségek álló helyzetben történő elemzésével hatékonyan támogatható a térszemlélet fejlesztése. A dinamikus geometriai szoftverek lehetővé teszik, hogy a szemünk elé táruló látványt a meghatározó adatok mozgatásával átalakítsuk, miközben a logikai kapcsolatrendszer változatlan marad. A szerkesztés végső adatai a kiindulási adatok változtatását követő kényszermozgást végeznek. A kiindulási adatokat mozgathatjuk kézzel vagy automatikusan a kijelölt értelmezési tartományok befuttatásával.

A térbeli alakzatok ábrázolása a képernyőn eleve információvesztéssel jár, hiszen két dimenziós ábrát tudunk csak készíteni. A dinamikus adatkezelés és az alapvető ábrázolási módszerek kombinálása lehetővé teszik, hogy mozgás közben a takart részek is láthatóvá váljanak és az ábra térbeli élményt adjon.

1.3.3. A tanítás tervezése (11. tétel)

Az oktatási folyamat tervezése – lebonyolítása – értékelése

1.22. Feladat: *Gondoljon ki egy konkrét tervet.*

a) Érzékeltesse a tervezés, lebonyolítás és az értékelés közti kölcsönhatást!

b) Egy tanegységet egy kiválasztott modell szerint strukturáljon.

c) Egy tanegységet legalább két kiválasztott modell szerint strukturáljon és a struktúrákat hasonlítsa össze!

MEGJEGYZÉSEK A FELADATHOZ:

A tanárban él egy IDEÁLIS ELKÉPZELÉS, amely szerint ismeri a tanulók testi, lelki, tudásbeli állapotát, szintjét: VAN állapot;

tudja, hogy a tanulónak jó felkészültségűvé, ... kell válnia: KELL állapot; hiszi, hogy a két állapotot össze tudjuk kötni, azaz a VAN állapotból a KELL állapotba tudja juttatni a tanulót:

$$\mathrm{F(VAN) = KELL}$$

A mindennapi VALÓSÁGBAN van egy közvetett, szubjektív képe a tanuló kiindulási állapotáról: ψ(VAN); van egy interpretációja a tanuló céljáról, a szülő és a társadalom (nem is ellentmondásmentes) elvárásáról: ψ*(KELL); hite, tapasztalata, szaktudása birtokában megpróbálja összekötni a két állapotot egy F* leképezéssel (mert ugye máshonnan indul és máshová akar jutni, mint az ideális elképzelésben):

$$\mathrm{F}^*(\psi(\mathrm{VAN})) = \psi(\mathrm{KELL})$$

Ezt a sémát nem azért írjuk le, hogy a munka értelmét megkérdőjelezzük, csak körültekintésre és szerénységre szeretnénk inteni általa. Sokszor csak annyit merünk mondani, hogy érdemes, hasznos lehet, próbálkozzon, ... Ritkán, de azért néha arra is rámutatunk, hogy nem kell, nem érdemes vagy éppen nem szabad.

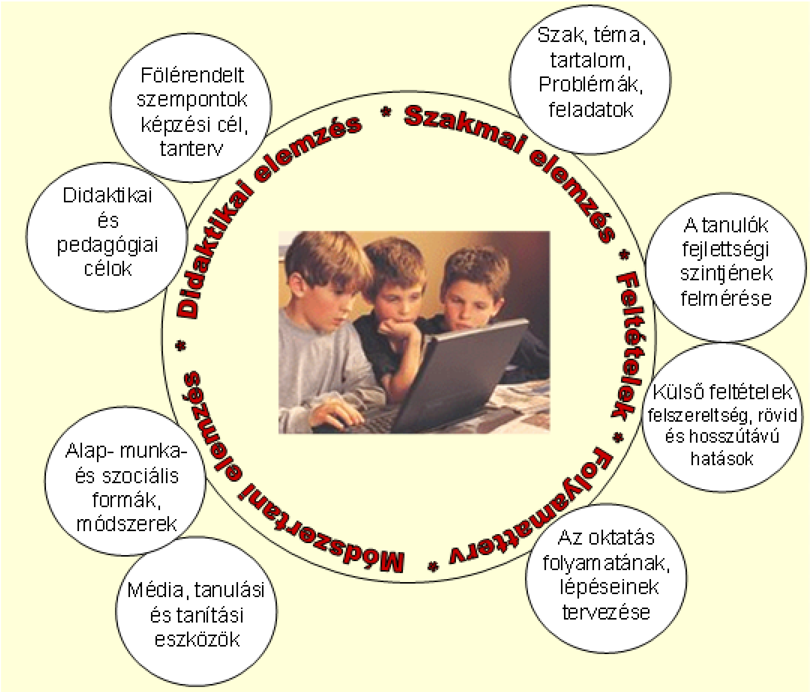
Tendenciák, fő feladatok és módszerek kijelölésében egyrészt nem is olyan nagy a bizonytalanság, másrészt a bizonytalanság sem teszi feleslegessé a tervezést, sőt körültekintőbben, több változattal, körültekintőbben kell készülni a tényleges szituációra.

1. A tervezés funkciói Az óra

- szakszerűségének biztosítása (Nehogy elfelejtkezzünk fontos és ésszerű döntésekről.)

- ellenőrizhetővé tétele (Annak – utólagos – vizsgálata, hogy a tervezés során hozott döntések a kívánt eredményekhez vezettek-e.)
- ismételhetővé tétele (A számítógép szerepe mindebben)

2. A tervezés elemei (Körmodell: mindig szem előtt tarthatjuk az összes szempontot)



3. A tervezés szintjei

Tanterv: fölérendelt célok, normák, tanévi és tágabb áttekintés

Tanmenet: a tananyag elrendezése, a fogalmak, eljárások, tételek logikai hálója; célok, időbeosztás, média, stb.

Heti terv: áttekinthető időtartamra (1-3 hét) tartalom, idő és módszer szerinti tervezése

Napi terv: osztály, tantárgy, időpont, téma, célok, a tartalom strukturálása (indítás, motiváció, fontos tanulási lépések, szociális és munkaformák, média, ismétlési, illetve rögzítési fázisok, házi feladatok, utógondozás megbeszélések a vezetőtanárral, ...

Egy óra terve

4. Részletes tervezés *4.1 Feltételek, körülmények*

Subjektív: tudati (kognitív), szociális, érzelmi (emocionális), motorikus feltételeinek feltárása, illetve biztosítása: a szükséges ismeretek, jártasságok és készségek mozgósítása

Objektív: az iskola, osztály, tanuló lehetőségei, technikai felszereltség, évszak, napszak, hosszútávú és rövidtávú hatások (computer, bejárás, ...)

4.2 Célok

Mit akarunk elérni?

Kognitív célok, ismeretek, szakmai célok, tartalmi célok, eszközhasználati célok, képességek és jártasságok

Érzelmi, beállítódási célok

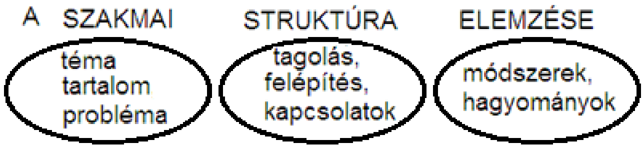
Nevelési célok, pedagógiai célok, szociális célok, értékrend, pszichomotorikus célok

A szakma, a tartalom, a tanulócsoport, a tantervi irányelvek által indukált irányok, globális és finom célok (NAT tanulási és ellenőrzési követelmények)

Miről ismerszik meg az eredményesség?

A célokat ismerjék meg a tanulók – Mit? Miért? Hogyan?

4.3 Szakmai elemzés - a szakmai struktúra elemzése



A) Pre-pedagógiai szakmai elemzés a szakszerűség, szakismeret talaján. A tartalom nemcsak egy tananyag, hanem egy műveltségi terület része is.

B) Pedagógiai szakmai elemzés a szaktudomány és a tanuló közötti közvetítés pedagógiai és didaktikai eszközei szempontjából.

4.4 Szakdidaktikai elemzés – a tervezés centruma

A komplex tananyag mely részei kerüljenek a központba, melyeket lehet kiegészítő tartományba sorolni? (Alap – Kiegészítő)

Mi az anyag jelentősége a tanulók jelenlegi és jövőbeni élete szempontjából?

Melyek a prototípus (mesterpélda) értékű problémák, feladatok a téma, a fogalom, a módszer szempontjából?

A cél eléréséhez milyen módszereket kell a tanulóknak (meg)ismerni?

Milyen tudati, érzelmi, szociális, motorikus ... szintről indulnak a tanulók?

A didaktikai elemzésből vezethetők le az óra alapját adó konkrét tanulási célok.

4.5 Módszertani elemzés

A módszerek igazítása a tartalomhoz, célokhoz, feltételekhez („A közvetítés eszközrendszere")

A tananyag és a diák találkozásának optimalizálása (pedagógiai és didaktikai szempontokból körülhatárolt mértékben).

A célok, a tartalom és a módszerek szoros kapcsolatban kell, hogy álljanak! (tanuláspszichológiai szempontok elsőrendűsége, pl. kül. érzékszervekre hatni, stabilitás, ...)

Módszerek variációja (munka- és szociális formák, média, segédanyag)

Az önálló döntési és tevékenységi kompetenciát fokozatosan erősíteni.

Akár csoportmunkát, akár frontális módszert választunk, az osztály matematikai szintjétől, motiváltságától függ, hogy mennyi önállósággal tudnak eredményesen dolgozni a diákok. Ezek nem statikus feltételek, megfelelő módszerekkel fejleszthető az önállóság igénye és képessége. *4.6 Az óra lefolyásának terve*

Az oktatás időbeli kereteit szabja meg, az egyes lépéseket folyamattá fogja össze. Az óra lefolyási terve segít abban, hogy a tanár a konkrét történésekre figyeljen, észrevegye a terv hiányosságát, előre nem látott nehézségeket.

Létezik kis és nagylépéses oktatási módszer (a szakmai rendszer és a tanulási törvényszerűségek határozzák meg a szakaszolást)

Tájékoztatni kell a tanulókat a legfontosabb lépésekről. (Informáló indítás).

Technikailag egyszerű és áttekinthető forma javasolt. A felesleges kötöttségeket kerüljük.

Az óraterv egy lehetséges tagolása és példák óraszerkezetekre

Feltételek
- Az óra a heti tervben, az osztály helyzete, adatai, munka- és szociális viszonyok
- Feltételezhető ismeretek, érdeklődés, a tanárhoz való viszony
- Az egyes tanulók
- Szervezeti keretek: felszereltség, időkeretek, ülésrend ...

Szakmai elemzés
- A szakmai rendszer - tartalom, téma, probléma

Didaktikai elemzés
- Tantervi előírások
- A tanulók szempontjai- a téma jelenlegi és jövőbeli jelentősége
- Az anyag formai és tartalmi elrendezése

Célok

Módszertani elemzés
- A választott módszer
- oktatási-, munka-, megbeszélés- és szociális formák
- Alternatívák, lehetséges tanulási nehézségek és a megfelelő segítség, differenciálási kínálat, média, segédeszközök

Lefolyás

Irodalom (1 – használt, 2 –Kollegának, 3 – tanulónak)

Mellékletek
- Feladatlapok
- Táblakép

I.	II.	III.	IV.
Indítás	Ráhangolás	Problémafelvetés	Indítás
Célok	Problémafelvetés	A probléma strukturálása	Motiváció
Rávezetés	Kidolgozás	Problémamegoldás	Elmélyítés
Kidolgozás	Transzfer	Értékelés, elmélyítés	Ismétlés
Gyakorlás	Lezárás	Általánosítás	Összefoglalás
Rögzítés	Kitekintés		Alkalmazás
Lezárás			

Formai minta

Szak:	Osztály	Dátum
Tanegység		
Téma		
Célok		Média
Idő	Tervezett lépések	Szociális és munkaformák

1.23. Feladat: *Példákon keresztül gondolja át saját tapasztalatait arról, hogy*

a) *melyek a tervezhető és melyek a szituációfüggő komponensei egy órának;*

b) *mikor részesítené az elemenkénti tapasztalatszerzést és mikor a szintetizáló haladást;*

c) *mikor van szükség egységes, illetve egyéni (partner, csoport) szinten differenciált munkára;*

d) *hogyan itéli meg az improvizálás szükségességét és hogyan viszonyul hozzá?*

Irodalom

NAT, Kerettantervek, kompetencia alapú kerettanterv és programcsomag [122]

1.3.4. Ellenőrzés, értékelés a matematikaoktatásban (12. tétel)

1. Mit mérünk, értékelünk?

- tudásszintet (készségek és jártasságok szintjét is beleértve) – megfelel-e és milyen mértékben felel meg a tanterv követelményeinek, elegendő-e a továbbhaladáshoz.

  Ezek a követelmények a tanítási folyamat konkrét szintjeihez kötődnek, ahhoz, hogy a gyerek milyen iskolatípusban, hányadik osztályban milyen témakört tanul.

- kompetenciát (lásd 27. oldalon a táblázatot)

  A kompetencia mérése alapvetően független attól, hogy a gyerek milyen iskolatípusba, hányadik osztályba jár. Azt méri, hogy egy gyerek egy területen milyen szinten áll a kompetencia „ideálisként”, 100%-ként megállapított kritériumához képest.

2. Mérés, értékelés az osztályban

Az iskolai munkában a mérés egyik alapvető eszköze a dolgozat íratása. A dolgozatok összeállítása, értékelése a mérés céljától függően többféle lehet:

- helyzetfeltárás – a továbbhaladáshoz szükséges, kulcsfontosságú ismeretek meglétét ellenőrzi. Pontozhatjuk, de nem osztályozzuk. Abban a döntésben segít, hogy a továbbhaladás előtt mit és milyen mélységben kell átismételnünk. (Diagnosztikus értékelés)

- fejlesztés – egy-egy tudáselem feldolgozottságának a szintjét méri. Pontozhatjuk, de nem osztályozzuk. Annak megállapításában segít, hogy kinek van szüksége pótlásra, korrepetálásra, vagy esetleg az egész anyagot – egy más megközelítésben - újra kell tanítanunk. (Formatív értékelés)

- lezárás, minősítés – egy-egy tanítási szakasz végén elért szintet méri. Az elért eredményt osztályzattal is mérjük. (Szummatív értékelés)

Mindegyik típushoz kaphatók kész, kidolgozott mérőlapok, amelyek lefedik a teljes tananyagot.

(SAJÁT PÉLDA)

A szóbeli felelet (nem csak feleltetés) az ellenőrzés és értékelés másik, nem kevésbé fontos területe. Alkalmas mindazoknak a céloknak a szolgálatára, mint a dolgozat, de elsődlegesen a formatív értékelésre érdemes használnunk. Hátránya, hogy az eredményt nehezebb számokban meghatározni, előnye, hogy természetesebben beleilleszthető a tanítás folyamatába, és mélyebb bepillantást tesz lehetővé.

3. Kompetenciamérések

A kompetenciamérések 2001 őszétől kezdődtek. A 2007-2008. tanévtől kezdődően minden évben országosan felmérik a 6., 8. és 10. évfolyamos tanulók körében a szövegértési képességeket és a matematikai eszköztudást. A mérőlapok központilag készülnek, és kidolgoztak egy szoftvert, ami minden tanár számára hozzáférhetővé teszi az eredményeket. Összehasonlíthatja a munkáját az országos átlaggal, emellett figyelemmel követheti az egyes gyerekek matematikai kompetenciájának fejlődését az évek során.

A kompetenciamérés

- nem az adott tanévi tananyag ismeretanyagának számonkérése
- az elsajátított ismeretek alkalmazásának képességét vizsgálja mindennapi életből vett feladatok megoldásában
- valamilyen életszerű szituációban megjelenő probléma matematizálását, megoldását és a megoldás kommunikálását kéri a matematika különböző területeit érintve (mennyiségek és műveletek; hozzárendelések és összefüggések; alakzatok síkban és térben; események statisztikai jellemzői és valószínűsége).

A kompetenciamérések talán legfontosabb célja a fejlesztés középpontú tanítás támogatása. A készségek, képességek fejlődése ugyanis többéves folyamat, amelynek során minden gyerek a maga ütemében juthat el a fejlettség egyre magasabb szintjeire, és amihez folyamatos, témákon, tanéveken, iskolafokozatokon átívelő fejlesztésre van szükség.

A kompetenciamérések segítenek abban, hogy a tanárok követhessék, hogy egy-egy kompetencia fejlesztésében, az optimumként megállapított kritériumhoz képest hol tart a tanuló, az osztály, az iskola, az ország az értékelés időpontjában. „Megtudhatjuk továbbá, hogy mit kell még tenni, mekkora utat kell még bejárni az optimális használhatóság kritériumának eléréséig. Ezt nevezik diagnosztikus kritériumorientált értékelésnek."

http://www.kir.hu/okmfit/: készség és képességmérés

A legfontosabb, un. kulcskompetenciákhoz tehát megállapították a 100%-os teljesítésnek a kritériumát. és a mérések során azt mérik, hogy ennek hány százalékával rendelkezik. Ennek megfelelően a gyerekek egy-egy kompetenciában elért fejlettségi szintjét öt kategóriába sorolják: előkészítő, kezdő, haladó, befejező és optimum. (SAJÁT PÉLDA)

4. A matematika érettségi vizsga

Az érettségi követelményeit két szinten határozták meg:

középszinten a mai társadalomban tájékozódni és alkotni tudó ember matematikai ismereteit kell megkövetelni, ami elsősorban a matematikai fogalmak, tételek gyakorlati helyzetekben való ismeretét és alkalmazását jelenti;

az emelt szint tartalmazza a középszint követelményeit, de az azonos módon megfogalmazott követelmények körében az emelt szinten nehezebb, több ötletet igénylő feladatok szerepelnek. Ezen túlmenően az emelt szint követelményei között speciális anyagrészek is találhatók, mivel emelt szinten elsősorban a felsőoktatásban matematikát használó, illetve tanuló diákok felkészítése történik.

A vizsga formája középszinten írásbeli, emelt szinten írásbeli és szóbeli.

A matematika érettségi vizsga által értékelt és mért legfontosabb területek:

- logikusan gondolkodás
- állítások, bizonyítások szabatos megfogalmazása;
- számolási technikák, becslési készség, az önellenőrzés igénye
- statisztikai gondolatok megértése, felhasználása, a függvény- vagy függvényszerű kapcsolatok értelmezése
- síkbeli és térbeli szituációk ábrázolása, kapcsolódó számolások;
- tanult ismeretek alkalmazása más területeken;
- gyakorlati kérdésekhez kapcsolódó modellalkotás, problémamegoldó stratégiák alkalmazása;
- matematikai segédeszközök (függvénytáblázat, zsebszámológép, számítógép) célszerű alkalmazása;

Az emelt szinten a felsoroltakon kívül mért további területek

- a felsőfokú matematikai tanulmányokhoz szükséges alapok;
- hipotézis, sejtés, bizonyított állítás megkülönböztetése;
- kombinatív készség, kreatív gondolkodás;

A feladatsor összeállításakor az alábbi tartalmi arányok az irányadók:

- Gondolkodási módszerek, halmazok, logika, kombinatorika, gráfok 20%
- Aritmetika, algebra, számelmélet 25%

- Függvények, az analízis elemei 15%
- Geometria, koordinátageometria, trigonometria 25%
- Valószínűségszámítás, statisztika 15%

A részletes tartalmi követelmények megtalálhatók pl. a következő címen:
http://www.oh.gov.hu/letolt/okev/doc/erettsegi_40_2002_201201/matematika_vk.pdf
(SAJÁT PÉLDA)

5. Nemzetközi mérések Országunk a hazai kompetenciamérések mellett több nemzetközi mérésben is részt vesz melyeket az OECD (Organisation for Economic Co-operation and Development/ Gazdasági Együttműködési és Fejlesztési Szervezet), illetve az IEA (International Association for the Evaluation of Education Achievement – Tanulói Teljesítmények Vizsgálatának Nemzetközi Társasága) szervez.

- PISA (Programme for International Student Assessment) méréseket az OECD szervezi. Háromévenként rendezik meg a 15 éves korosztály számára. Háromféle műveltségterületet vizsgálnak (szövegértés, matematika, természettudomány) melyek közül egy mindig hangsúlyosabb szerepet kap. A vizsgálat során elsősorban nem az iskolai tananyag számonkérése a cél, hanem annak felmérése, hogy a tanulók megállják-e helyüket a mindennapi életben, képesek-e tudásukat hasznosítani, új ismereteket befogadni és azokat alkalmazni.
- A TIMSS-vizsgálatokat (Trends in International Mathematics and Science Study) az IEA szervezi. Négyévenként felmérik a 4. és 8. évfolyamos tanulók teljesítményét a matematika és a természettudományok területén. A felmérés fontos részét képezi a különböző háttéradatok gyűjtése pl. a tantervek tartalmáról és azok megvalósulásáról, a tanárok felkészültségéről, a rendelkezésre álló forrásokról.

  http://www.oh.gov.hu/orszagos-nemzetkozi/nemzetkozi-meresek

1.24. Feladat: *Hogyan szerepelt Magyarország ezeken a méréseken?*

Irodalom Ambrus András: Bevezetés a matematika didaktikába. [2] 178-179. és 187-197. Országos kompetenciamérés. [164] Érettségi Követelmények. [70] **Kitekintő irodalom** Andrews, Paul: A magyar matematikaoktatás helyzete nemzetközi színtéren. [23] 83-90.

1.3.5. A matematikaórák kommunikációs terének (keretének) kialakítása

A matematikatanárok jelölik ki, hogy a matematika órákon miről lehet és miről nem lehet beszélni. Ez történhet explicit és implicit módon.

1.25. Feladat: *Mutasson be példákat!*

1.26. Feladat: *Elemezze a következő szituációkat!*

- *Szöveges feladat az ötödik osztályban:*

  A nagymama süteményéből először elfogyott a fele, majd a negyedrésze, így 6 darab maradt. Hány sütemény volt eredetileg?

  Meg lehet kérdezni: Másodszorra a maradék, vagy az eredeti mennyiség negyede fogyott el?

  Nem illik megkérdezni: Milyen süteményt sütött a nagymama?

- *A másodfokú egyenlet megoldóképlete a gimnáziumban*

  Meg lehet kérdezni: Miért kell $(\frac{b}{2})^2$*-t kivonni?*

  Nem illik megkérdezni: Mire kell ez nekem? Nem illik a tanár azon a kérdésre, hogy mit nem értesz, a diáknak úgy válaszolnia, hogy „Semmitse”.

MEGJEGYZÉSEK A FELADATHOZ: A megoldás vázlata

Mielőtt kialakulnának a kommunikációs szabályok, feltételezhetjük, hogy az „illetlen” kérdések is valódi tanulói problémákat tükröznek. Érdemes velük foglalkozni.

„Milyen süteményt sütött a nagymama?” – nem rossz kérdés, hiszen azért adunk fel szöveges feladatot, hogy a gyerekek elképzeljék a szituációt. Azonban el kell mondanunk, hogy a süteményekről inkább később beszéljünk, és valóban találjunk rá alkalmat, szünetben, kiránduláson, hogy beszéljünk róla, beszéljünk a gasztronómiáról is.

Érdemes segíteni a diákoknak, hogy problémájukat hogyan fogalmazhatják meg úgy, hogy az ne legyen sértő, pl. Elvesztettem a fonalat. Vagy: Percek (vagy órák) óta nem tudom követni, miről van szó. Tudna segíteni, kérem?

1.27. Feladat: *Gyakori példatípus, hogy szövegbe ágyazzuk a számítást. Gyorsan kiolvassuk az információt, számolunk és formális szöveges választ adunk, közben el is felejtjük az eredeti kérdést. Miben látja ennek a gyakorlatnak a fogyatékosságát?*

MEGJEGYZÉSEK A FELADATHOZ:

Érdemes időt szánni a szöveg és az eredmény tényleges összevetésére. Ehhez a szituációt nem elterelő nehezítésnek, hanem a matematikai tevékenységet gazdagító elemként kell kezelni. Az egész érvelés is könnyebb lehet a szituációval leírva.

$4 : \frac{1}{2}$ elvégzése és az eredmény ellenőrzése is közelebb áll és a valósággal való kapcsolatot is mutatja, ha pl. 4 méteres szalagból vágunk fél méteres darabokat és meg akarjuk mondani, hogy hány gyereknek jut.

A tevékenység, a matematikai szimbólum és a szóbeli megfogalmazás egységéhez mindegyik irányra szükség van.

$500-(300-70)$ kiszámítási szabályát könnyebb megérteni, ha pl. Egy raktárban 500 láda van, amiből felraknak egy teherautóra 300 ládát, de túlsúlyt jelez a mérleg, ezért levesznek 70 darabot és elmegy a teherautó. Hány láda marad a raktárban? alakban adjuk fel a feladatot. Sőt, ekvivalens átalakításhoz is vezethet: a raktárban először 200 marad: $500 - 300$, majd visszahoznak 70-et: $(500 - 300) + 70$ vagy eleve csak 230-at visznek el a készletből: $(a-b)-(-c) = a-(b-c)$. Felírhatnánk az autó szempontjából is.

1.28. Feladat: *Készítsen hasonló példákat. Használhat más modellt is, pl. az adósságcédulákat.*

1.3.6. Szakszerűség és egyenrangú véleménycsere

A matematika óra sok más óránál alkalmasabb a demokratikus nevelésre, mert a matematika érvelni tanít és viszonylag csekély tényismeret birtokában előfordul(hat), hogy a tanár tudáselőnye kevésbé lényeges, mint a gyerekek nagyobb kreativitása.

A véleménycserében elhangzanak korábban nem használt gyermekszáj típusú és hivatalos elnevezések is. Néhány szempontra érdemes figyelni:

Túl sok új, hivatalos elnevezés megbontja a beszélgetés dinamikáját, lerontja a manipulációs élményt, fogalomépítés helyett üres szavak betanulásává válhat a folyamat.

Később módosítandó, zsákutcás elnevezéseket általában nem érdemes tanárnak bevezetnie, mert sokkal több bosszúságot okoznak később, mint amekkora előnyt jelent pillanatnyilag egy kis rövidítés.

A gyermekszáj elnevezések akkor keletkeznek, ha a mondanivalóhoz hiányzik a megfelelő megnevezés és a gyerekek a szükséghelyzetben kitalálnak valamit (például tartozás helyett megadomforint). Ezeket érdemes befogadni, ha nem tapad hozzájuk a kialakítandó fogalomtól idegen jelentés. Ha a kitalált gyerekszáj elnevezés jelent már valami mást a matematikában, akkor érdemes óvatosan másfelé terelni a beszélgetést anélkül, hogy rájuk zúdítanánk az összes elnevezést. (pl. a törtvonal elnevezés nem alkalmas a töröttvonal leírására, mert a törtvonal már foglalt; az egyenlőszárú háromszög szárai által bezárt szöget inkább rövidítsük szárszögnek, mint csúcsszögnek, mert mi tudjuk, hogy a csúcsszög elnevezést az egyenesek által alkotott átellenes szögtartományok összekapcsolására foglalták le; a húrtrapéz elnevezés szerencsésebb, mint az egyenlőszárú vagy a szimmetrikus trapéz, stb.)

1.4. Matematikadidaktikai szemelvények I.

1.4.1. Dienes Zoltán Budapesten tanított – Varga Tamás: Csoportelmélet a Jázmin utcában

Megjelent: A Matematika Tanítása 1968/1.

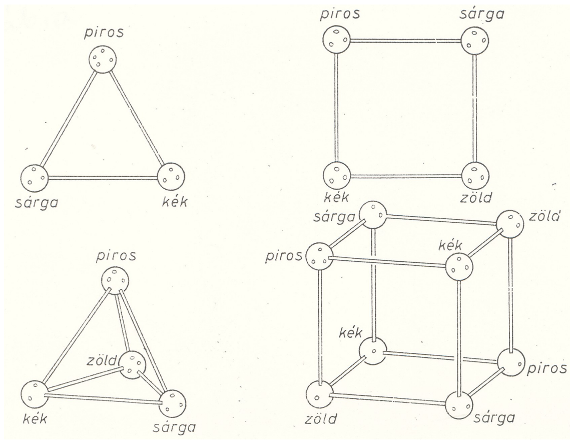
Dienes Zoltán Pál, a világhírű, világjáró matematika-pedagógus, novemberben négy napig Budapesten volt. Nem meghívásra, mint más országokba, nem hivatalos programmal, csak magánlátogatásra jött. 88 éves édesanyját látogatta meg. De ha már itt volt, elment a Jázmin utcai általános iskolába. A tucatnyi kísérleti osztály közül, ahol az ő kezdeményezése alapján folyik új témák és új rendszerek bevezetése, egy általános iskolai 3. osztályba. Négy napom át tanította a gyerekeket. Első alkalommal – szokatlan időben, vasárnap délelőtt – egy szűk körű társaság is jelen lehetett az óráján, a Magyar Tudományos Akadémia Matematikai Kutató Intézete Didaktikai Szemináriumának résztvevői. A következő napokon még ők sem voltak hivatalosak. Ennek az utolsó három napnak a munkájáról számolok be lapunk olvasóinak.

A gyerekek – Justh Kornélné osztálya – asztalok mellett ültek, négyes csoportokban. Ebben a külterületi iskolában meg tudták valósítani azt, hogy a szokott előadóteremszerű elrendezés helyett pillanatok alatt műhellyé lehessen alakítani az osztálytermet két-két kétszemélyes asztalka összetolásával. Ez a környezet jobban is illik az olyan számtan-órákhoz, ahol nincsenek előadások, nincs vezénylés, hanem munka folyik. Vagy inkább játék? – Nehéz volna itt különbséget tenni.

A „számtanóra” szó mindenképpen furcsán illik arra, ami ott most folyt, de arra is, ami általában folyik ezekben az osztályokban. Babylon-építőkészletből háromszögeket, négyzeteket, tetraédereket és kockákat állították össze a gyerekek (egy kis segítséggel). Az első háromnak minden csúcsa más színű volt; a kocka szemközti csúcsaiba egyező színű golyók kerültek.

Ezzel készen voltak a munkaeszközök, a matematikai absztrakció kiindulópontjai. Az egyik asztalnál az egyik-, a másiknál a másikféle eszközzel játszottak. Néhol két példány is volt ugyanabból az eszközből. Az egyik példány volt a „tanú”. Ez mindig ottmaradt változatlanul az asztalon, amíg a másikat forgatták, hogy „tanúskodjon” arról, mi volt az eredeti helyzet a forgatások előtt.

Ennyiből és a cikk címéből már sejthetik az olvasók, mi volt ezeknek az óráknak a tárgya: azoknak a transzformációknak a tanulmányozása, amelyek ezeket az alakzatokat önmagukba viszik át. Ezek persze forgások különféle irányú tengelyek körül, és ezek a forgások (az egy helyben hagyást is hozzájuk véve) mindegyik esetben csoportot alkotnak. Könnyű végiggondolni, hogy például a háromszöget hatféle forgatás viszi át önmagába. Ha vízszintes síkban képzeljük el, akkor ezek: három vízszintes tengely körüli 180°-os és egy függőleges tengely körüli 120°-os és 240°-os forgatás, hatodiknak pedig az egy helyben hagyás, vagyis bármelyik tengely körüli 0°-os (vagy 360°-os) forgatás. Ez az összes lehetséges transzformáció, ami a háromszöget önmagába viszi át. Az olyasmi,



1.7. ábra. Babylonból összeállított alakzatok

mint az ellenkező irányú ($-180°$-os, $-120°$-os) vagy többszöri forgatás ($540°$-os, $480°$-os) eredményét tekintve nem ad újat. Transzformációknál mindig csak a kezdő- és a végállapot számít, az nem, hogyan jutottunk az előbbiből az utóbbiba.

Azt is könnyű végiggondolni, hogyha a hat transzformáció közül bármelyik kettőt bármilyen sorrendben egymás után végezzük el, az eredmény a hat transzformáció egyike lesz; vagy hogy a hat közül bármelyiket, a hat közül valamelyikkel „visszacsinálhatjuk". Ezek a tulajdonságok (és mások, amelyek triviálisan teljesülnek) fejezik ki azt, hogy a háromszög hat lehetséges transzformációja az „egymás után végzés" műveletére vonatkozóan csoportot alkot.

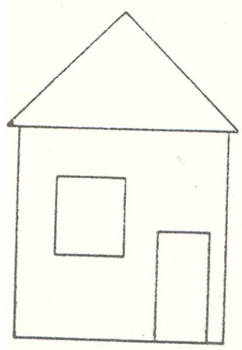
Mindezt csak emlékeztetőül azoknak, akik – talán valamikor régen hallottak valamit a csoportelméletről, egyetemi vagy főiskolai szinten. Ezek a gyerekek azonban alsó tagozatos szinten tanulták a csoportelméletet. Próbáljuk hát elfelejteni ezeket a tudós dolgokat és a gyerekek szemével nézni azt, ami következik.

Dienes professzor („professzor bácsi", mondták a gyerekek) asztaltól asztalhoz ment, és néhány perc alatt itt is, ott is elindított valami vizsgálódást. Azok a gyerekek, akik még nem kerültek sorra, feladatlapokon dolgoztak. Itt csak arról lesz szó részletesen, amit a háromszöggel csináltak. Hosszú volna mindazt leírni, ami ezen a három napon történt.

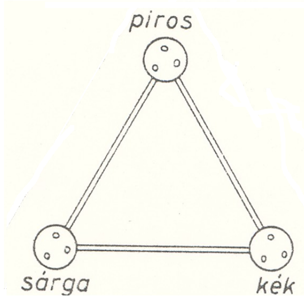
– Forgassátok azt a háromszöget mindenféleképpen – mondta a gyerekeknek – és rajzoljatok mindig ilyem házakat róla (lerajzolt nekik néhány ilyen házat).

– A háztetőt mindig olyanra színezzük, amilyen színű az a felső golyó a háromszögben, az ablakot olyanra, amilyen ez itt lent balról, az ajtót meg a harmadik színre.

A Babylon-háromszöget papírlapra tette, és körülrajzolta, hogy a gyerekek mindig így tegyék le, ne hegyével lefelé vagy valami más módon. Erre azért volt szükség, hogy a gyerekek a forgatásokkal csakugyan „önmagába transzformálják" a háromszöget.



1.8. ábra. A ház



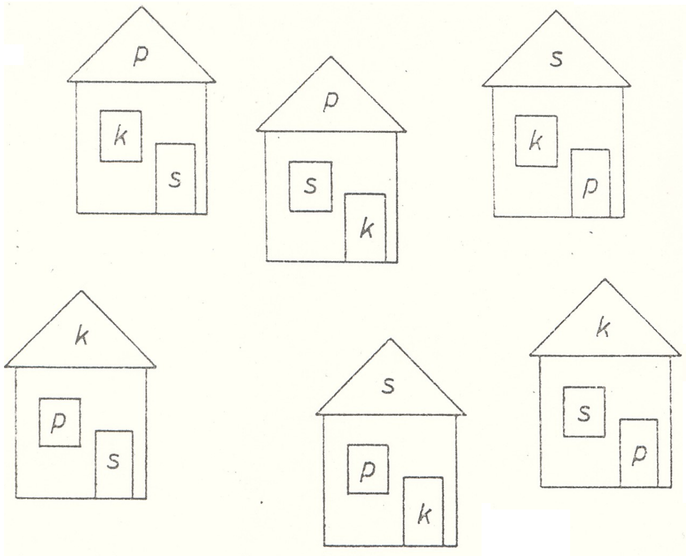
1.9. ábra. A három szín

Ennyi elég is volt a munka elindításához. Mikor visszajött ehhez az asztalhoz, a gyerekek már fölrajzoltak hét házat. Hetet, nem hatot, és így persze voltak köztük egyformák. Nem is egy pár, hanem kettő mint hamarosan kiderült, vagyis a gyerekek egy lehetőséget kihagytak, kettőt pedig kétszer rajzoltak meg.

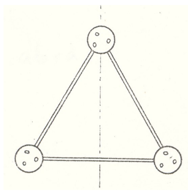
Ezeket a hibákat hamar korrigálták, és itt volt a papíron a hat különböző ház, a háromszög hatféle helyzetének megfelelően.

– Ezek között a házak között vannak autóbuszjáratok, és vannak villamosjáratok – mondja most nekik. Ha a háromszöget így forgatom el (120°-kal elfordítja az, óramutató járása szerint), akkor az azt mutatja, hogy ebből a házból ebbe a házba (mutatja a kezdeti és végállapotnak megfelelő házat) autóbusz megy. Ha így forgatom el (180°-os fordulat egy meghatározott vízszintes tengely körül), akkor ettől a háztól ehhez a házhoz villamosnak kell járnia (mutatja megint a házakat). Rajzoljatok be annyi villamos- és autóbuszjáratot, amennyit csak találtok!

A kedves olvasó jól teszi, ha (Babylon-játék híján) egy papír háromszög forgatásával állapítja meg és rajzolja fel, milyen is ennek a mesebeli városnak a közlekedési hálózata. Persze elképzelés alapján is felrajzolhatja. Néha a gyerekek is ezt teszik. A hálóza-



1.10. ábra. A hat különböző ház



1.11. ábra. 180°-os fordulat vízszintes tengely körül

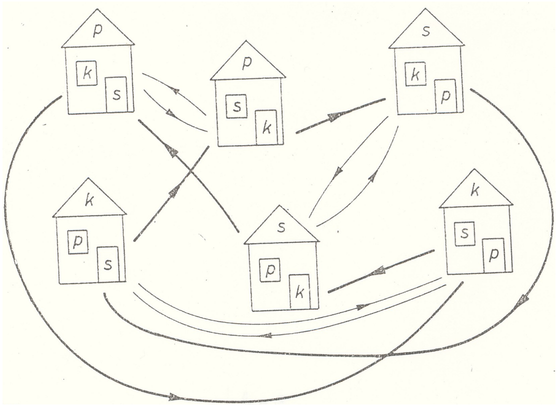
tot a következő ábra mutatja. (Az autóbuszjáratokat vastag vonal különbözteti meg a villamosjáratoktól.)

Megbeszélik, hogy a villamosok ugyanazokon az útvonalakon oda-vissza járnak, de az autóbuszok nem. „Körforgalom” – mondja az egyik gyerek szakszerűen.

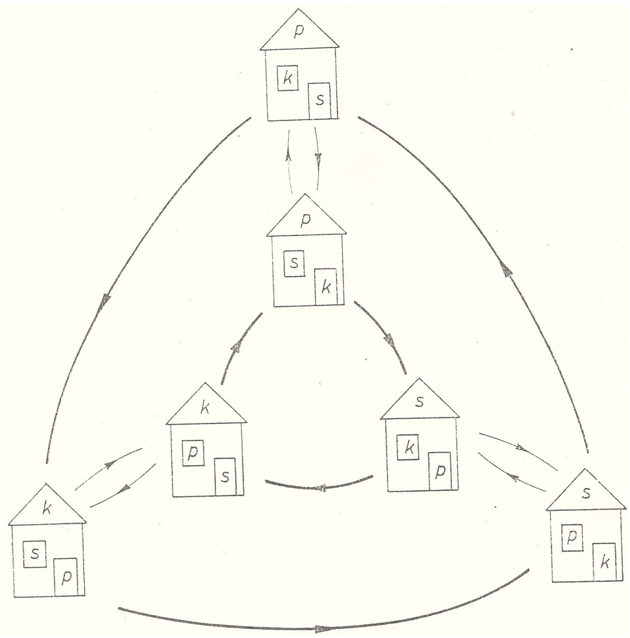
– Ez így nagyon bonyolult – mondja Dienes professzor. Tervezzünk egy másik várost, ahol szebben helyezkednek el a házak, és nem ilyen kusza a közlekedés.

Nézzétek csak, ez az autóbuszjárat errefelé megy körbe-körbe, ez a másik meg amarra. Legyen ez a város belsejében, amaz meg kívül. És a villamosvonalak legyenek minél rövidebbek, hogy kevés pénzzel meg lehessen őket építeni. Megint otthagyja a gyerekeket, másik asztalhoz megy, itt pedig lassan kialakul a „szép” közlekedési hálózat.

– Valaki elindul innen – mondja, amikor legközelebb ehhez az asztalhoz ér, mutatva a rajzon a fölül levő házat –, közlekedik valamerre a városban, látogatóba megy, bevásárol stb., aztán hazamegy. Írjuk csak ide le, hogy milyen útvonalakon megy végig! És elkezdi leírni a lehetséges útvonalakat. A végére odaírják, „= 0”, ami azt is jelentheti, hogy



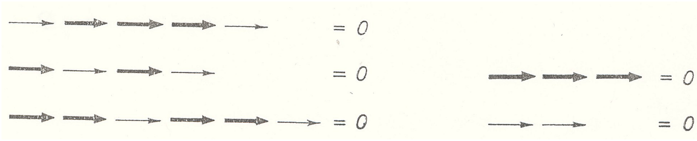
1.12. ábra. A mesebeli város közlekedési hálózata



1.13. ábra. A mesebeli város szép közlekedési hálózata

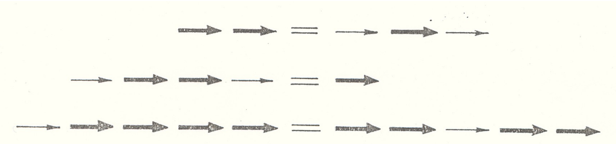
„OTTHON" vannak, azt is, hogy végül semmi sem változott, ugyanott vannak, ahol induláskor voltak.

A gyerekeknek tetszenek a bonyolult utazások, és meglátják a legegyszerűbbeket is. Kipróbálják azt is, hogy aki egy másik házban lakik, milyen utazások után ér haza. Örömmel állapítják meg, hogy akárhol lakik is valaki, ugyanolyan utazások után lesz megint otthon.



1.14. ábra. Utazások

Ezután olyan utazásokat terveznek, amelyek máshol érnek véget, nem otthon. Ilyen egyenlőséget találnak:



1.15. ábra. Egyenlő utak

– Most már talán nincs is szükség a térképre – mondja Dienes proíesszor. Meg tudnátok térkép nélkül is mondani, hogy lehet ezt az utat egyszerűbben megtenni? És fölír egy jó hosszú sorozatot vékony és vastag nyilakból.

1.16. ábra. A kiindulási nyílsorozat

A gyerekek eleinte tanácstalanok, aztán lassan rájönnek ilyesféle szahályokra:

Ha valahol egymás mellett van két vékony nyíl, azokat mindig el lehet hagyni.

Három vastag nyilat is el lehet hagyni.

Vastag-vékony-vastag-vékony egymás után szintén elhagyható.

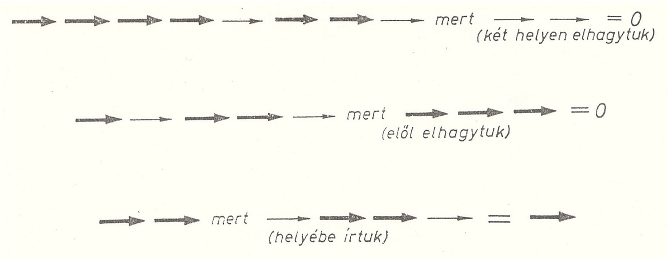
Vékony-vastag-vastag-vékony helyett egy vastagot lehet írni.

Ezeket (és a többi, itt fel nem sorolt változtatásokat) ellenkező értelemben is el lehet végezni, pl. két vékony nyilat nemcsak elhagyni lehet, hanem akárhová betoldani is.

Rájönnek, hogy ezek a szabályok voltaképpen az utazásokra tett eddigi megállapításokat fejezik ki szavakban.

Ezek alapján megtanulják, hogy lehet a nyílsorozatokat egyszerűsíteni, vagy esetleg „bonyolítani”, más ekvivalens jelsorozatokkal pótolni. Az ábrán látható nyílsorozatból például sorra ezeket kapják:

A négy alakzat közül a legegyszerűbbnek – a szabályos háromszögnek – a transzformációiról volt itt szó. Más gyerekek bonyolultabb térképeket rajzoltak. Voltak, akik



1.17. ábra. A kapott nyílsorozatok

kevesebbre jutottak az alatt a három nap alatt, amelynek a számtanóráit ez a cikk sűrítve leírta. De mindannyian örömüket találták a munkában. Sejtelmük sem volt arról, hogy felsőbb algebrával foglalkoztak. Túlzás is volna azt mondani, hogy ezek a 8-9 éves Jázmin utcai gyerekek három nap alatt „megismerkedtek a csoport fogalmával", vagy „eljutottak az axiomatikus módszer alkalmazásáig". Hosszú még az út odáig. De annyi bizonyos, hogy igazi matematikai feladatokat oldottak meg, és miközben úgy érezték, hogy csak játszanak, fontos matematikai gondolatok kezdtek kialakulni a fejükben. Semmi sem fejeződött be ezekben a napokban, de lényeges dolgok kezdődtek el.

1.4.2. Péter Rózsa: Határtalan sűrűség

Részlet a Teremtő forma c. könyvből

(Az előzményekben a racionális számokról volt szó.)

Próbáljunk eligazodni köztük. Először is látjuk, hogy az egész számok is ott vannak köztük; ezek felfoghatók 1 nevezőjű törteknek. Pl. $\frac{3}{1}$, ha arra az értelmezésre gondolunk, hogy ez 3 osztását jelenti 1-gyel, valóban 3. Az egész számokat és a törteket közös néven racionális számoknak hívják – ez már előreveti az árnyékát annak, hogy lesznek kevésbé racionálisan megalkotott számok is.

Nullán kívül (ez felfogható $\frac{0}{2}$ -nek, $\frac{0}{3}$ -nak, $\frac{0}{4}$ -nek, s.í.t.), melyik lesz a legkisebb tört? Világos, hogy nem az $\frac{1}{12}$, mert ennél $\frac{1}{13}$ is kisebb: ha eggyel többfelé osztunk egy tortát, a szeletek kisebbek lesznek. De ugyanez a helyzet, bármilyen törttel is próbálkozunk: $\frac{1}{100}$ -nál kisebb $\frac{1}{101}$ is, $\frac{1}{1000}$-nél kisebb $\frac{1}{1001}$ is. Tehát a racionális számok közt nemcsak legnagyobb nincs, mint az egész számok közt, hanem legkisebb sem.

Jó, hát megkezdeni nem tudjuk a racionális számok felsorolását. Induljunk ki egy tetszés szerint választott kis törtből, pl. az $\frac{1}{12}$- ből és próbáljuk legalább innen kezdve rendre felsorolni a racionális számokat. Melyik az $\frac{1}{12}$-et követő tört? Ez nem lehet a mi vonalunkon következő $\frac{1}{6}$, hiszen tudjuk, hogy $\frac{1}{12}$ és $\frac{1}{6}$ számtani közepe e két tört közé esik, tehát $\frac{1}{6}$ -nál közelebb esik $\frac{1}{12}$-hez.

De bármilyen más $\frac{1}{12}$-től jobbra eső számot is mondtam volna $\frac{1}{6}$ helyett, ugyanígy képezhettem volna $\frac{1}{12}$-nek és e számnak a számtani közepét, és ez ismét közelebb esett volna $\frac{1}{12}$-hez a gondolt számnál. Tehát $\frac{1}{12}$ nek nincs közvetlen rákövetkezője, arról sem lehet szó, hogy innen kezdve soroljuk fel a racionális számokat. Általában ugyanígy látható be, hogy bármily közel eső racionális számokat is veszünk szemügyre a számegyenesen, ezek nem közvetlen szomszédok, esik közéjük más racionális szám is. Ez az, amit úgy fejeznek ki, hogy a racionális számok halmaza „mindenütt sűrű”.

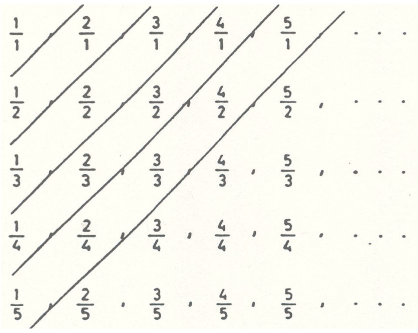
Itt a végtelennek egy új képével találkozunk: a természetes számsor vagy a tözsszámok végtelen növekedése után a határtalan sűrűséggel. Nincs olyan nagy szám, aminél még nagyobb ne volna a természetes számok vagy a törzsszámok sorozatában – ez a pontos értelme annak, amit a matematikus így fejez ki: e sorozatok a végtelenhez közelednek.

És nincs olyan kicsi szám, aminél közelebb ne volnának racionális számok $\frac{1}{12}$-hez: ezt fejezik ki úgy, hogy $\frac{1}{12}$ sűrűsödési helye a racionális számok halmazának; természetesen nemcsak $\frac{1}{12}$, hanem minden más racionális szám is sűrűsödési hely.

És mégis el lehet rendezni minden racionális számot egyetlen sorozatba, ha nem is nagyság szerint.

Hogy végtelen sok számsorozatba el lehet rendezni őket, azt már láttuk, amikor az egyes törtegységekből alkotott sorozatokat más-más számvonalon ábrázoltuk; írjuk az egyöntetűség kedvéért az egészeket is tört alakban, s.í.t.

De most arról van szó, hogy ezeket egyetlen sorozatba rendezzük. Ez megtörténhetik úgy, hogy a berajzolt ferde vonalak mentén elhelyezkedő számokat írjuk rendre egymás után; így persze előbb-utóbb mind sorrakerülnek:



1.18. ábra. A törtek táblázata

$$\frac{1}{1}, \frac{2}{1}, \frac{1}{2}, \frac{3}{1}, \frac{2}{2}, \frac{1}{3}, \frac{4}{1}, \frac{3}{2}, \frac{2}{3}, \frac{1}{4}, \frac{5}{1}, \frac{4}{2}, \frac{3}{3}, \frac{2}{4}, \frac{1}{5}, \ldots$$

Egyre hosszabb, de mindig véges sok számból álló csoportok követik egymást, tehát csakugyan egyetlen sorozatot kapunk, aminek felírását bárki folytathatja, ha megértette a képezési szabályt; sőt akkor is, ha rá se néz a fenti táblázat ferde vonalaira, de észreveszi, hogy az első csoportban levő egyetlen tört számlálójának és nevezőjének összege 2, a második csoport mindkét törtjében 3 a számláló és nevező összege, a harmadik csoport törtjében 4, s.í.t., az utoljára felírt csoportban 6. Ennek alapján ugyanis $7 = 6 + 1 = 5 + 2 = 4 + 3 = 3 + 4 = 2 + 5 = 1 + 6$ lévén, a következő csoport így képezhető:

$$\frac{6}{1}, \frac{5}{2}, \frac{4}{3}, \frac{3}{4}, \frac{2}{5}, \frac{1}{6},$$

és most már bárki gépiesen folytathatja az eljárást.

Márpedig egy végtelen sorozat éppen akkor tekinthető teljesen megadottnak, ha a benne levő törvényszerűség felismerése után akármeddig felírhatja a tagjait akárki.

Sorozatunkban persze megegyező értékű számok is lesznek, hiszen ezt már a számvonalakon is láttuk, ha tehát csak egyszer akarunk felírni minden racionális számot, akkor a képezési szabályhoz azt is hozzá kell venni, hogy a közben fellépő egyszerűsíthető törteket hagyjuk ki. A sorozat eddig felírt részéből például $\frac{2}{2}, \frac{4}{2}, \frac{3}{3}, \frac{2}{4}$ marad ki, ezek közül $\frac{2}{2}, \frac{3}{3}$ 1-gyel, $\frac{4}{2}$ a $\frac{2}{1}$-gyel, $\frac{2}{4}$ az $\frac{1}{2}$-vel egyenlő értékű, tehát valójában így kezdődik a racionális számok sorozata:

$$\frac{1}{1}, \frac{2}{1}, \frac{1}{2}, \frac{3}{1}, \frac{1}{3}, \frac{4}{1}, \frac{3}{2}, \frac{2}{3}, \frac{1}{4}, \frac{5}{1}, \frac{1}{5}, \ldots,$$

és ez gépiesen folytatható. Így sorra meg tudom mondani, hogy mi e sorozat első, második, harmadik, ... tagja: a sorozat megszámozható; kissé félreérthető szakkifejezéssel „megszámlálhatónak” mondják.

Ez az egyszerű tény ismét valami meglepő jelenségre világít rá; arra, hogy a racionális számok (vagyis valamennyi tört) határtalan sűrűsége ellenére, egy bizonyos értelemben „ugyanannyi" racionális szám van, mint egész szám. Hogyan lehet végtelen sokaságokat összehasonlítani egymással?

Erre egy egyszerű mód kínálkozik. Ha egy tánciskolában tudni akarom: ugyanannyi fiú van-e jelen, mint lány, nem kell őket külön-külön megszámlálnom. Elég az a felszólítás: tessék táncra kérni a hölgyeket! Ha azután egyetlen fiú sem marad pár nélkül és egyetlen lány sem árul petrezselymet, akkor már tudom, hogy egyenlő sokan vannak. Ezt az összehasonlítási módot végtelen számosságokra is át lehet vinni, ha két végtelen halmaz elemeit össze lehet párosítani egymással úgy, hogy egyik halmazból se maradjon pár nélkül egyetlen elem se, akkor azt mondjuk, hogy ezek a halmazok egyenlő számosságúak.

Mármost a racionális számok imént felírt sorozata összepárosítható a természetes számok 1, 2, 3, 4, 5, 6,... sorozatával. Az 1-et sorozatunk első tagjával: $\frac{1}{1}$-gyel párosítsuk össze, a 2-t sorozatunk második tagjával: $\frac{2}{1}$-gyel, a 3-at $\frac{1}{2}$-vel, s.í.t., pl. 10-et a sorozat tizedik tagjával, $\frac{5}{1}$-gyel; ha azt akarom tudni, hogy 100-nak mi lesz a párja, előbb a megadott eljárással előállítom a racionális számok sorozatának századik tagját – és az lesz. Világos, hogy ezt az összepárosítást bárki bármeddig folytathatja, és lehetetlenség akár a természetes számok, akár a racionális számok sorozatában egyetlen elemet is megadni, amely így pár nélkül maradna. Tehát ebben az értelemben a racionális számok halmaza és a természetes számok halmaza valóban egyenlő számosságú, annak ellenére, hogy a racionális számok mindenütt sűrű halmazában az egész számok is el vannak szórva mazsolák gyanánt, látszólag elenyésző kisebbségben.

Ez megint rávilágít egy nagy fontosságú jelenségre: a végtelennel nagyon csínján kell bánni. Vannak, akik mindenre érvényes logikai elvnek tekintik, hogy a rész kisebb az egésznél, de most láttunk egy ellenpéldát: a természetes számok csak egy elenyésző részét teszik ki a racionális számok halmazának, mégis ugyanakkora a számosságuk. Az ilyen általános logikai elveket a tapasztalatok egész sokaságából vonta el az ember, de minden tapasztalat csak a végesben játszódhatott le. Sok zavarra vezetett már, hogy a végesben tapasztaltakból leszűrt elvet rá akarták húzni a végtelenre is. A végtelen ráz egyet magán és kibújik alóla.

Hogy az ember mégis nagyon berzenkedik az ellen, hogy bárhol is egyenlővé válhasson a rész az egésszel, annak bizonyára az az oka, hogy nemcsak a tapasztalás tartja fenn a logikai elveket, hanem tudatalatti erők is.

Az ember szinte az erkölcsi világrendet érzi meginogni attól, hogy a rész versenyre kelhet az egésszel. De talán éppen ezért jelenti egy kicsit a tiltott gyümölcs örömét is a kimerészkedés a szigorú törvények világából a szabadabb végtelenbe.

1.4.3. Péter Rózsa: Ismét megfogjuk a végtelent

Megjelent: Péter Rózsa: Játék a végtelennel. TK. 1977.

Térjünk vissza egy kis időre a végtelenből a kézzelfogható világba, és gondoljunk megint arra, hogy a kezünkön, amellyel ezt a világot megfogni próbáljuk, 10 ujj van. Nem lehetne-e a törteket is belekényszeríteni a tízes számrendszerbe?

Emlékezzünk csak vissza: az egyesektől balra volt a 10-szer akkora egységek, a tízesek helye, ezektől balra következtek a tízszerte nagyobb százasok, s.í.t. Szinte magától kínálkozik, hogy ezt a rendet jobb felé is folytassuk: az egyesektől jobbra írjuk az első helyre a tizedeket, a második helyre a tizedek tizedrészeit, a századokat, a harmadikra az ezredeket, s.í.t. De ezeket az új egységeket valahogyan el kell választani az egyesektől, mert hiába gondolom én, hogy 12-ben az 1 egy egyest, a 2 két tizedet jelent, ezt minden más ember mégis tizenkettőnek fogja olvasni. Ezért teszik ki az ún. „tizedesvesszőt": 1,2 és nem szabad elfeiejteni, hogy ez csak rövidítés $1 + \frac{2}{10}$ helyett; ugyanígy

$$32,456 = 32 + \frac{4}{10} + \frac{5}{100} + \frac{6}{1000}.$$

Így jutunk a tizedesszámokhoz.

Azok a törtek, amelyeknek a nevezője 10, 100, 1000, vagy a tízes számrendszer bármely más egysége, mind felírható tizedesalakban is. Pl.

$$\frac{23}{100} = \frac{20}{100} + \frac{3}{100}.$$

$\frac{20}{100}$-ot egyszerűsíthetjük úgy, hogy a számlálóját is, a nevezőjét is osztjuk 10-zel:

$$\frac{23}{100} = \frac{2}{10} + \frac{3}{100},$$

és egészek ebben nincsenek, tehát végülis $\frac{23}{100} = 0,23$.

De vajon minden tört felírható-e tizedesszám gyanánt?

Az átalakítás legegyszerűbb módja az, hogy elvégezzük a törtalakban kijelölt osztást:

$$\frac{6}{5} = 6 : 5 = 1 \text{ marad } 1,$$

a megmaradó 1-et tizedekre váltjuk, így 10 tized lesz belőle, ezt 5-tel osztva 2 tizedet kapunk, így az eredményben ki kell tenni a tizedesvesszőt: 6 : 5 = 1,2, tehát $\frac{6}{5} = 1,2$.

Hasonlóan $\frac{7}{25} = 7 : 25 = 0,2$. Most 20 tized maradt, ezt 200 századra válthatjuk fel, ha 200 századot 25-tel osztunk, 8 századot kapunk: 7 : 25 = 0,28, tehát $\frac{7}{25} = 0,28$.

De gyakran már a legegyszerűbb esetekben megakadunk!

$$\begin{array}{l} \frac{4}{9} = 4 : 9 = 0,44\ldots \\ \quad\quad 40 \\ \quad\quad\ 40 \\ \quad\quad\quad 4 \end{array}$$

ez az osztás sohasem fejeződik be; akármeddig is folytatjuk, addig marad még 4. Tehát $\frac{4}{9}$ nem írható fel tizedesszám gyanánt. Pedig milyen kényelmes tizedesszámokkal számolni! Hogy csak egy példát hozzak föl erre: micsoda gyerekjáték egy tizedesszámot 10-zel megszorozni!

Ha pl. ez a feladat:

$$45,365 \cdot 10,$$

akkor csak arra kell gondolnunk, hogy 4 tízes 10-szerese 4 százas, 5 egyes 10-szerese 5 tízes, 3 tized 10-szerese 3 egész, s.í.t. Rögtön látjuk, hogy az egész feladatot elintézhetjuk azzal, hogy a tizedesvesszőt egy hellyel jobbra visszük:

$$453,65,$$

hiszen így minden helyi érték eggyel halra tolódott, és pl. a tízesekből százasok lettek. Ha az eredményt még egyszer megszorozzuk 10-zel:

$$4536,5,$$

akkor már az eredeti szám 100-szorosát kapjuk (pl. az 5 egyesből itt 5 százas lett), és ebből rögtön látható, hogy 100-zal úgy szorozhatunk, hogy két hellyel visszük jobbra a tizedesvesszőt.

Ugyanígy látható be, hogy 10-zel osztani a tizedesvessző balra tolása útján lehet. Ez pedig igazán nem nagy fáradság. De jó volna minden törtet tizedesalakban írni!

Hát nézzük csak meg újra, hol akadtunk meg?

$$\begin{array}{l} \frac{4}{9} = 4 : 9 = 0,44\ldots \\ \quad\;\; 40 \\ \quad\;\;\; 40 \\ \quad\;\;\;\; 4 \end{array}$$

itt mindig 4 marad, abból mindig 40 lesz, ha felváltjuk kisebb egységekre, és 40-ben a 9 mindig 4-szer van meg. Ha ez az osztás nem is ér soha véget, mégis teljesen a kezünkben van az eredménye: 4-es ismétlődik benne a végtelenségig.

Erre azt mondja a gyakorlat embere: még ha véget is érne ez az osztás pl. a tizedik tagjánál, én akkor sem használnám fel az egész eredményt. Hiszen nekem legfeljebb deciliterekre van szükségem (és egy deciliter annyi, mint egy tized liter), vagy centiméterekre (és egy centiméter a méter századrésze) esetleg grammokra (és egy gramm ezredrésze a kilogrammnak); azt az elenyészően csekély mennyiséget, ami még egy ezredrész után van, igazán szőrszálhasogatás figyelembe venni. Nekem az egész végtelen tizedesszámból csak ennyi kell

0,4 vagy 0,44 vagy 0,444,

tehát úgy számolhatok $\frac{4}{9}$-del is, mint egy becsületes véges tizedesszámmal.

A fizikusnak ennél több jegyre is lehet szüksége a maga jóval pontosabb méréseiben, de ezekben is van egy ún. hibahatár: a fizikus meg tudja becsülni, hogy az ember érzékszerveinek és az eszközök tökéletlenségének következtében körülbelül mekkora ingadozás várható a kísérletek megismétlésekor, és ennél kisebb tizedesjegyet már a számolásban sem érdemes figyelembe vennie. Feltehető, hogy az eszközök tökéletesedni fognak, a mérések hibahatára szűkebb lesz, de valami hiba mindig fenn fog maradni, valahol – ha nagyon messze is – meg lehet majd állni

$$0,4444\ldots$$

tizedesjegyeinek sorában. Nem baj, hogy nem tudjuk előre: meddig kell majd elmennünk a távoli jövőben; azt előre is tudjuk, hogy még oly messzire is sikerülni fog elmenni, mert $\frac{4}{9}$-nek ezt a kifejtését minden határon túl ismerjük: tudjuk, hogy minden határon túl ismét csak 4-esek következnek.

Hát legalább ilyen értelemben tizedesszámmá alakítható-e minden tört? Vagy másképpen téve fel a kérdést: ha egy osztás sohasem fejeződik be, legalább valamilyen szabály szerint követik-e egymást az eredmény tizedesjegyei, úgy, hogy az mégis ad áttekintést az egészről?

Könnyen belátható, hogy erre már igennel felelhetünk: minden ilyen kifejtés előbb-utóbb „szakaszossá" válik, előbb-utóbb fellép benne egy számcsoport, amely ettől kezdve állandóan ismétlődik.

Vizsgáljuk meg például a $\frac{21}{22}$ törtet.

Ha 22-vel osztunk, a maradék mindenesetre 22-nél kevesebb; ha tehát sohasem fejeződik be az osztás, minden maradék az

1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20, 21

számok egyike. Tegyük fel, hogy van egy 21 fiókos szekrényünk, és e számok egy-egy fiók feliratai. Ha osztás közben pl. 7 marad egyszer, akkor a 7-es fiókba beteszünk egy golyót. Ha az osztást türelmesen folytatjuk, a 22-ik lépéskor már 22 golyót kellett elhelyezni a 21 fiókban, és így bizonyos, hogy lesz fiók, amelybe két golyó is jut: legkésőbb 21 lépés után meg kell ismétlődnie valamelyik maradéknak. De ha szerencsénk van, már jóval előbb megismétlődik valamelyikük, s ha egyszer ugyanaz a maradék, innen kezdve minden megismétlődik. Figyeljük meg ezt a példánkon:

$$\begin{array}{l} \frac{21}{22} = 21 : 22 = 0,954 \\ \quad\ 210 \\ \quad\quad 120 \\ \quad\quad\ 100 \\ \quad\quad\quad 12, \end{array}$$

megálljunk! ... már volt egyszer 12-es maradék. Itt kezdődik az ismétlődés:

$$
\begin{array}{l}
21 : 22 = 0,9545454\ldots \\
\quad\;\; 210 \\
\quad\;\;\; 120 \\
\quad\;\;\;\; 100 \\
\quad\;\;\;\;\; 120 \\
\quad\;\;\;\;\;\; 100 \\
\quad\;\;\;\;\;\;\; 120 \\
\quad\;\;\;\;\;\;\;\; 100
\end{array}
$$

tehát egyetlen „rendellenes” 9-estől eltekintve 54 ismétlődik a végtelenségig.

Fordítva, ha ilyen szakaszos tizedesszámmal állunk szemben, rá lehet ismerni, hogy ez melyik törtnek a kifejezése. Induljunk ki 0,9545454...-ből és tegyük fel, hogy még nem ismerjük azt a törtet, amely ehhez vezetett. Ha nem ismerjük, nevezzük el x-nek:

$$x = 0,9545454\ldots$$

Ha ezt 1000-rel szorozzuk, azaz három hellyel jobbra visszük a tizedesvesszőt, éppen az első szakasz végéig terjedő rész kerül az egészek helyére:

$$1000x = 954,5454\ldots$$

Ha pedig 10-zel szorozzuk x-et, az egészek helyére éppen a szakaszok előtti rendellenes rész kerül:

$$10x = 9,5454\ldots$$

Ha az előbbiből kivonjuk az utóbbit, akkor egyrészt x-nek 1000-szereséből a 10-szeresét kell elvenni, és így x-nek a 990-szerese marad, másrészt a tizedesvessző utáni részek mindkét számban 54 végtelen megismétlődéséből állnak és így teljesen megegyeznek, tehát kivonáskor kiesnek: 954 és 9 különbsége pedig 945, így végül

$$990x = 945.$$

Vigyük még a 990-es szorzót osztóul a jobboldalra:

$$x = \frac{945}{990}$$

Ezt a törtet 45-tel lehet egyszerűsíteni:

$$945 = 45 \cdot 21 \text{ és } 990 = 45 \cdot 22,$$

tehát

$$x = \frac{21}{22}$$

és tudtuk is, hogy ennyi.

Közben azonban elkövettünk egy vigyázatlan lépést: nem figyeltünk a végtelenre. 0,9545454...-et itt nem csak egy bizonyos pontosságig, hanem a végtelenségig felírva képzeltük el és úgy szorozgattuk, mintha csak valami véges szám lenne. Mi jogon tesszük fel eleve, hogy 0,9545454...-nak van valami véges értelme?

A továbbiakat inkább egy egyszerűbb példán gondoljuk végig, hiszen az ugyanolyan problematikus, hogy 1,1111...-nek, ahol az 1-esek a végtelenségig ismétlődnek, véges értelme van-e. Érdekes, hogy egy ilyen végtelen tizedeskifejtésen nem szoktak fennakadni az emberek, de azon már megütköznek, ha ilyen végtelen összeadást látnak:

$$1+\frac{1}{10}+\frac{1}{100}+\frac{1}{1000}+\frac{1}{10000}+\ldots \text{ a végtelenségig,}$$

holott ez csak más írásmód az előbbi helyett. De nem azt hibáztatom, hogy az utóbbin megütköznek, inkább azt, hogy az első alakban elfogadják ugyanezt.

Mert az

$$1, \frac{1}{10}, \frac{1}{100}, \frac{1}{1000}, \frac{1}{10000}, \ldots$$

sorozatot még a maga végtelenségében is adottnak tekinthetjük, hiszen akárki akármeddig folytathatja, de olyan végigjártnak tekinteni ezt a végtelen utat, hogy a tagjait mind össze is adhassuk, mégiscsak merész elképzelés.

Mit kell ezen érteni?

Egy ismert matematikusunk még kisdiák korában a következő példával világította meg önmagának a végtelen sor összegének fogalmát.

Volt egy csokoládéfajta, amit úgy akartak népszerűvé tenni, hogy szelvényt is csomagoltak a burkoló ezüstpapírba, és aki 10 ilyen szelvényt beszolgáltatott, az egy újabb tábla csokoládét kapott cserébe. Ha van egy ilyen tábla csokoládém, a teljes csomagolásban, mennyit ér ez valójában?

Természetesen nemcsak 1 tábla csokoládét ér, mert a szelvény is benne van, és egy szelvényért adnak $\frac{1}{10}$ csokoládét (hiszen 10-ért lehet egy csokoládét kapni). De ehhez a tizedcsokoládéhoz egy tized szelvény is jár, s ha egy szelvényért $\frac{1}{10}$ csokoládét kaphatunk, akkor az $\frac{1}{10}$ szelvényért ennek a tizedrészét: $\frac{1}{100}$ csokoládét. Ehhez az $\frac{1}{100}$ csokoládéhoz tartozik egy század szelvényrészlet is, és ezért ismét tizedannyit adnak, $\frac{1}{100}$-nak a tizedrésze pedig $\frac{1}{1000}$ csokoládé. S í.t., a végtelenségig; látható, hogy ez sohasem szakad meg és így az én 1 tábla csokoládém szelvényestül voltaképpen

$$1+\frac{1}{10}+\frac{1}{100}+\frac{1}{1000}+\frac{1}{10000}+\ldots$$

csokoládét ér.

Másrészt meg fogom mutatni, hogy egész pontosan $1\frac{1}{9}$ csokoládé az értéke. Az ebben levő 1 egész természetesen magának a természetben adott csokoládénak az értéke, tehát csak azt kell megmutatnom, hogy az ehhez mellékelt szelvény $\frac{1}{9}$ csokoládét ér. Ehhez elég azt bizonyítanom, hogy 9 szelvény ér 1 csokoládét, mert akkor hiztos, hogy egy szelvény ennek a 9-ed részét éri. Márpedig az egy pillanat alatt igazolható, hogy 9 szelvény értéke egész pontosan 1 csokoládé. Mert tegyük fel, hogy nekem van 9 szelvényem; bemegyek a cukorkaüzletbe és ezt mondom: „Kérek egy tábla csokoládét; itt a helyszínen szeretném elfogyasztani és majd a végén fizetek." Elfogyasztom a csokoládét, kiveszem a hozzá csatolt szelvényt, és most már l0 szelvényem van, csakugyan fizethetek, és ez tiszta üzlet: megettem egy csokoládét, és egy fia szelvényem sem maradt. A 9 szelvény pontos ellenértéke tehát valóban 1 csokoládé, 1 szelvényé $\frac{1}{9}$ csokoládé, egy csokoládéé szelvényestül $1\frac{1}{9}$ csokoládé. Tehát az

$$1 + \frac{1}{10} + \frac{1}{100} + \frac{1}{1000} + \frac{1}{10000} + \dots$$

végtelen sor összege egész pontosan $1\frac{1}{9}$, kézzel foghatóan, sőt megehetően.

Így fogalmazhatjuk meg ezt az eredményt: ha valami első, durva közelítésben 1, valamivel finomabb közelítésben $1+\frac{1}{10}$ még jobb közelítésben, de még mindig pontatlanul $1 + \frac{1}{10} + \frac{1}{100}$, s.í.t. a végtelenségig, akkor ez a valami teljes pontossággal $1\frac{1}{9}$.

1.4.4. Pólya György: Egy szerkesztési feladat

Részlet A gondolkodás iskolájából. [185]

Adott háromszögbe írjunk négyzetet úgy, hogy két csúcsa a háromszög alapjára, a másik két csúcsa pedig a háromszög másik két oldalára essék.

„Mit keresünk?"

„Egy négyzetet."

„Mi van adva?"

„Egy háromszög, semmi más."

„Mit kötünk ki?"

„A négyzet négy csúcsa a háromszög kerületén legyen, kettő a háromszög alapján, a másik kettő pedig a másik két oldalon."

„Kielégíthető-e a kikötés?"

„Azt hiszem, igen. Nem vagyok egészen biztos benne."

„Úgy látom, nem találod túl könnyűnek a feladatot. Ha nem boldogulsz a kitűzött feladattal, próbálkozz először egy rokon feladattal. Nem tudnád kielégíteni a kikötésnek egy részét?"

„Mit értsek a kikötés egy részén?"

„Láthatod, hogy a kikötés a négyzet négy csúcspontjára vonatkozik. Hány csúcsa van a négyzenek?"

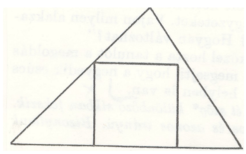
„Négy."

„Hát ne tégy kikötést mind a négy csúcsra. Tartsd meg a kikötés egy részét, a többbit ejtsd el. Melyik csúcsra vonatkozó kikötésnek lehet könnyen eleget tenni?"

„Könnyű olyan négyzetet rajzolni, amelynek két, sőt három csúcsa a kerületen fekszik."

„Rajzolj ábrát!"

A diák felrajzolja az ábrát.

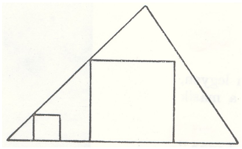


1.19. ábra. A diák ábrája

„A kikötés egy részét tartottad csak meg, a többbit elejtetted. Mennyire van így meghatározva az ismeretlen?"

„A négyzet így nincs egyértelműen meghatározva, több olyan négyzet is van, amelynek három csúcsa fekszik a háromszög kerületén."

„Helyes. Rajzolj ábrát!" A diák felrajzolja az ábrát. „Azt mondod, hogy a kikötés megmaradt része nem határozza meg egyértelműen a négyzetet. Hát hogyan változhat?"



1.20. ábra. A diák újabb ábrája

...

„A négyzet három csúcsa a háromszög kerületén van, de a negyedik nincs még azon a helyen, ahol lennie kellene. Mint mondtad, a négyzet még nincs egyértelműen meghatározva, változhat még. Ugyanezt mondhatjuk a négyzet negyedik csúcspontjáról. Mennyiben változhat a negyedik csúcs helyzete?”

...

„Ha akarod, vizsgáld meg kísérleti úton. Rajzolj több olyan négyzetet, amelynek három csúcsa a háromszög kerületén van, az előbb rajzolt kettőhöz hasonló elhelyezésben. Rajzolj kis és nagy négyzeteket. Vajon milyen alakzatot ír le a negyedik csúcs? Hogyan változhat?”

A tanár most már igen közel hozta a tanulót a megoldás alapötletéhez: ha a tanuló megsejti, hogy a negyedik csúcs egyenest ír le, akkor már helyben is van.

1.4.5. Pólya György: Dogmatizmus és alkotó szellem

Részlet A gondolkodás iskolájából. [185]

Dogmatizmus és alkotó szellem két egymással ellentétes magatartás szabályokkal szemben.

1. A dogmatizmus a szabály betű szerinti, merev, vak alkalmazása olyan esetekben, amelyekre a szabály alkalmazható és olyan esetekben is, amelyekre a szabály nem alkalmazható. Sok dogmatikus egyszerűen ostoba, akinek sohasem sikerült megértenie, mi is az a szabály, amellyel ő olyan lelkiismeretesen és megkülönböztetés nélkül operál.

Más dogmatikusok egészen eredményesek; ezek legalább kezdetben – mielőtt dogmatikusokká lettek – értették a szabályokat, és emellett jó szabályt választottak, olyat, amely sokszor beválik és csak egyes esetekben mond csődöt.

Az igazi alkotó szellem a szabály természetes könnyedséggel az ítélőképességgel való alkalmazásában nyilvánul meg olyankor, mikor a szabály valóban alkalmazható, anélkül azonban, hogy a szabály szavai akár egy pillanatra is elfeledtetnék a feladat lényegét, vagy a helyzet kívánta lehetőségeket.

2. Gyűjteményünk kérdései és útmutatásai segíthetnek mind a feladatmegoldóknak, mind a tanároknak. Ehhez azonban először is az kell, hogy értsék meg jól ezeket a kérdéseket és útmutatásokat, sajátítsák el helyes használatukat, próbálkozások és tévedések, kudarcok és sikerek árán szerezve tapasztalatot alkalmazásukban. Másodszor: sohasem szabad ezeket dogmatikusan alkalmazni. Soha ne tégy fel kérdést, soha ne alkalmazz útmutatást vakon, megkülönböztetés nélkül, merev szokás rabjaként. Légy felkészülve több kérdésre és útmutatásra, és használd eszedet és ítélőképességedet. Nehéz és izgalmas feladattal van dolgod? Ösztönözze lépéseidet a feladat figyelmes és elfogulatlan vizsgálata. Segíteni akarsz a diákon? Amit mondasz neki, fakadjon az ő nehézségeinek együttérző megértéséből.

De ha hajlamodnál fogva dogmatikus vagy, és kénytelen vagy valamilyen szabályra támaszkodni, akkor a következő szabályt vésd fejedbe: A legelső az, hogy vedd elő saját eszedet.

1.4.6. Pólya György: Egyenletek felállítása

Részlet A gondolkodás iskolájából. [185]

Egyenletek felállítása olyan művelet, amely hasonlít az egyik nyelvből a másik nyelvre való fordításra. Ez a hasonlat, melyet Newton használt Arithmetica Universalis-ában, hozzájárulhat ahhoz, hogy tisztázzuk azoknak a nehézségeknek a természetét, melyeket diákok és tanárok ezzel kapcsolatban egyaránt éreznek.

1. Egyenletet felállítani azt jelenti, hogy matematikai szimbólumokkal kell kifejezni egy szavakban kifejezett kikötést: közönséges nyelvről le kell a szöveget fordítani a matematikai kifejezések nyelvére. Azok a nehézségek, amelyek egyenletek felállításakor felmerülnek, fordítási nehézségek.

Ahhoz, hogy egy mondatot magyarról franciára fordítsunk, két dolog szükséges. Először is maradéktalanul meg kell értenünk a magyar mondatot. Másodszor jól kell ismernünk a francia nyelv sajátos kifejezési formáit. Ugyanúgy áll a helyzet akkor is, amikor egy szavakban megadott kikötést matematikai szimbólumokkal akarunk kifejezni. Először is alaposan meg kell értenünk a kikötést. Másodszor jól kell ismernünk a matematika sajátos kifejezési formáit.

Egy magyar mondatot aránylag könnyű szóról szóra franciára fordítani. De vannak olyan magyar kifejezésmódok, amelyeket nem lehet szó szerint lefordítani. Ha mondatunkban előfordul egy ilyen kifejezésmód, akkor nehéz lesz a fordítás: nem annyira az egyes szavaknak, mint inkább a mondat egészének értelmére kell figyelnünk; mielőtt a mondatot lefordítjuk, át kell alakítanunk.

Sokban hasonló a helyzet az egyenletek felállításával kapcsolatban is. Könnyű esetekben a szöveges fogalmazás úgyszólván automatikusan tagolódik olyan egymást követő részekre, amelyek közvetlenül átírhatók matematikai szimbólumokba. Nehezebb esetekben a kikötés egyes részei nem fordíthatók le közvetlenül a matematikai szimbólumok nyelvére. Ebben az esetben nem annyira magára a szövegre kell figyelnünk, mint inkább a szöveg értelmére. Mielőtt megkezdjük leírni matematikai jelekkel, esetleg át kell rendeznünk a kikötést. Közben szem előtt kell tartanunk azt is, hogy a matematikai jelölésmódoknak milyen lehetőségei állnak rendelkezésünkre.

Akár könnyű, akár nehéz esetről is van azonban szó, meg kell értenünk a kikötést, szét kell választanunk a kikötés különböző részeit, és fel kell tennünk a kérdést: Le tudod-e írni őket? Könnyű esetekben előfordulhat, hogy a kikötést azonnal szét tudjuk tagolni matematikai szimbólumokkal kifejezhető részekre; nehéz esetekben nemegyszer távolról sem magától értetődő, hogyan lehet a kikötést elemeire bontani.

1.4.7. Pólya György: Előrehaladás és elért eredmény

Részlet A gondolkodás iskolájából. [185]

Előrejutottál már valamennyire? Mi lényegeset értél el? A feladat megoldása közben nem árt, ha – akár saját magunknak, akár a diákoknak – feltesszük ezeket a kérdéseket. Így megszokjuk, hogy az egyes konkrét esetekben előrehaladásunkat és eredményeinket többé-kevésbé megbecsüljük. Konkrét esetekben ez még csak megy, de az előrehaladás és az elért eredmény általános jellemzése nem könnyű feladat. Pedig ezt a lépést a konkréttól az általánosig meg kell tennünk, ha heurisztikai tanulmányainkat valamennyire is teljessé akarjuk tenni: általánosságban kell tisztáznunk, hogy a feladatmegoldásban mi határozza meg az előrehaladást és az eredményeket.

1. Ahhoz, hogy megoldjunk egy feladatot, mindenekelőtt tudnunk kell, miről van szó benne. Ki kell válogatnunk és össze kell gyűjtenünk az odavágó elemeket kezdetben még alvó tudásunkból. A megoldás végén a feladatról alkotott képünk sokkal gazdagabb, mint az elején. Sokkal többet értünk meg a feladatból, mint eleinte. Miből származik ez a többlet? Abból, amit közben tudásanyagunkból elővettünk. Ahhoz, hogy megkapjuk a megoldást, különböző lényeges tényeket kell felidéznünk. Ha matematikai feladatról van szó, vissza kell emlékeznünk korábban megoldott feladatokra, ismert tételekre, definíciókra. Az ilyen lényeges elemeknek tudásanyagunkból való kikeresését mozgósításnak nevezhetjük.

2. Ahhoz azonban, hogy megoldjunk egy feladatot, nem elég egyes elszigetelt tényeket felidézni, hanem a tényeket össze kell kapcsolnunk egymással. Az összekapcsolás meg kell, hogy feleljen a feladat természetének. Ha matematikai feladatról van szó, a felidézett anyagot a bizonyítás során egységes egésszé kell formálnunk. Ezt az összeillesztő és összekapcsoló tevékenységet szervezésnek nevezhetjük.

3. A valóságban a mozgósítást és a szervezést sohasem lehet egymástól szétválasztani. Ha feszült figyelemmel dolgozunk egy feladaton, csak olyan tényeket mozgósítunk tudásanyagunkból, amelyek többé-kevésbé összefüggésben állnak célunkkal és ezután már nincs más dolgunk, mint a felidézett és mozgósított anyagot összekapcsolni és megszervezni.

A mozgósítás és szervezés csupán két mozzanata ugyanannak az összetett folyamatnak, amelynek még több más mozzanata is van.

4. Munkánk előrehaladásának egy másik mozzanata az, hogy felfogásmódunk megváltozik. A feladatról alkotott felfogásunkat a felidézett, odaillesztett, bedolgozott anyag jelentősen gazdagítja. Feladatunkat a bizonyítás végén sokkal jobban értjük, mint amikor hozzáfogtunk.

Hogy feladatunk kezdeti felfogásától mélyebb, megfelelőbb felfogáshoz juthassunk el, egyre újabb álláspontokat kísérletezünk ki, különböző szempontok felől közelítjük meg a feladatot. Aligha haladhatnánk előre FELADATUNK VARIÁLÁSA nélkül.

1.4.8. Varga Tanás: Matematika – születőfélben

Megjelent a Néhány hazai és külföldi kísérlet kötetben, 1972-ben.

Nevetni és sírni egyszerre lehetne azon, milyennek látják a matematikát máskülönben művelt, tudós emberek is. Összetévesztik a torzképével. De hát ki a hibás? Hátha nem is találkoztak az igazival, csak hitvány utánzatával? SELYE JÁNOS, a stressz világhírű kutatója így ír (Álomtól a felfedezésig, 342.old.): „Sokszor hallom, hogy minden embernek, akármivel foglalkozik, alapos logikai és matematikai képzést kellene kapnia, mert így tanul meg gondolkodni. Én ezt nem hiszem. Sőt, ez az ismeret csak megbéníthatja a félig-meddig intuitív gondolkodás szabad áramlását, amely például az orvostudományi kutatás legmélyebb alapja. A formális logika és a matematika kétségkívül megtanít arra, hogyan gondolkodjunk a formális logikáról és a matematikáról." Nehéz helyzetbe hoztam magam ezzel az idézettel, mert Selye professzor nagy tekintély. Miért hinnék el nekem jobban, mint neki, mire jó – és mire rossz – a matematika? (S vele bölcsen párosítva, a logika.) Pedig nyilvánvaló, hogy nem az igaziról beszél, hanem az utánzatáról.

Arról viszont találóan nyilatkozik. Hasonlata a szabad áramlás megbénításáról telitalálat. Nem úgy tanultuk-e legtöbben a matematikát, hogy ha zárójelet látsz, bontsd fel? Hogy mindenre van valami szabály vagy képlet, s ezt a sok szabályt, képletet meg kell tanulni, és pontosan tudni kell alkalmazni?

Lassan mégis utat tör magának az iskolában az a másik matematika, az igazi, amely nincs sínhez kötve. Amelyben helye van a gondolatok szabad áramlásának, a fantáziának, az intuíciónak és – igen – az esztétikumnak, a szép keresésének is. A születőfélben levő, in statu nascendi matematika, ahogy PÓLYA GYÖRGY nevezi.

Az alkotó matematikusok mindig is ilyennek ismerték a matematikát.

Különös: az iskolai matematika gyakran azzal igyekszik a tudományosság látszatát kelteni, hogy rejtegeti kialakulásának nyomait, intuitív vonásait. Végleges, deduktív tudomány képében igyekszik azonnal megjelenni, mintha szégyellné a származását. De éppen ezzel válik tudománytalanná. S ezzel teszi az érett, deduktív matematikát hozzáférhetetlenné.

Hozzáférhetővé akkor válik a gyerekek számára a matematika, ha vállalja, hogy félkész áru.

Vagy talán inkább barkácskészlet: egy csomó alkatrész, amiből a gyerek építhet. Mégpedig nemcsak egyfélét, hanem – fantáziáját, intuícióját, „gondolatainak szabad áramlását" is segítségül híva – ezt meg azt. De persze nem akármiféle limlomot, hanem csupa szép, érdekes, hasznos, fontos dolgot. Hiszen ezek tudják igazán megmozgatni a fantáziát is.

Csak a művészi alkotótevékenységen és a tudományos kutatómunkán át vezet út a deduktív matematika megértése felé. Aki nem tud egy kicsit művész és egy kicsit tudós lenni, az a matematikából csak a formulákat látja, maga a matematika idegen marad neki.

De hát elvárhatjuk-e, hogy mindenkiből (hacsak kicsit is) művész és tudós legyen?

Eszerint igaz volna, hogy a matematika kevesek kiváltsága?

Ezt persze szívesen elhiszik sokan. Az is, aki úgy érzi, hogy a kiváltságosak közé tartozik (lám, ő kivételes adomány birtokosa), de az is, aki a másik osztályba sorolja magát (hiszen akkor nem kell szégyellnie, hogy nem érti a matematikát, osztozik ebben a többséggel: ők is a normálisak, amazok a furcsák).

Hadd mondok ki egy hipotézist: matematikai művész- és tudósképzésre minden szellemileg ép gyerek alkalmas.

A képességek különbözőek, ez igaz; de azért ha egy gyereknek nehéz a „matek" többnyire nem a képességeivel van baj, hanem azzal, hogy az alkotókedvét nem sikerült megmozgatni. Ha ez sikerül, akkor hatékonyabb – és etikailag veszélytelenebb – motivációs erőhöz jutunk, mint az ösztönzésül osztogatott csillagocskák meg ötösök.

Ezt a hipotézist persze igazolni is kell, sok oldalról, különböző körülmények között.

Ezen dolgozik egy munkaközösség az Országos Pedagógiai Intézet irányításával, 1962 óta. Már száznál több osztályban, Szombathelytől Sárospatakig. Alkalmazkodva a mindenkori valósághoz, de a távolabbi célok tudatában. Ezen dolgozik még sok munkaközösség világszerte.

Úgy látszik, a matematika tanításának humánusabbá tételéhez megértek a feltételek. Lehet, hogy most egy vagy két évtized alatt nagyobbat lép előre az iskolai matematika, mint az előző száz évben,

Nem abban, hogy még nagyobb súllyal nehezedik a gyerekekre, hanem abban, hogy közelebb kerül hozzájuk és beépül a gondolkodásukba az a sok pozitívum, amit a korszerű matematika adhat. Azok nélkül a negatívumok nélkül, amikkel a nem korszerű, a formálisan tanult matematika csakugyan merevebbé teheti valakinek a gondolkodását.

Érdekes volna elemezni azokat a feltételeket, amelyek egyrészt szükségessé, másrészt lehetségessé tették a fordulatot:

- a matematika XIX. és XX. századi fejlődését (ami az iskolai anyagot szinte érintetlenül hagyta);
- az egységesítő tendenciák térnyerését az utóbbi évtizedekben; azt a felismerést, hogy az egységesebbé váló matematika iskolai anyagnak is könnyebb, mint az, amit megszoktunk;
- az abból eredő (máig is erős) ellenállásnak a lassú leküzdését, hogy hajlamosak vagyunk könnyebbnek tekinteni (másokra vetítve is) azt, amit megszoktunk.

Aztán a pszichológia némely új eredményét, ezzel együtt a pedagógiai szemlélet átalakulását;

- többek között a belső motiváció fontosságának elfogadását;
- vagy annak pontosabb körvonalazását; mit várhatunk a gyerekektől már kicsi korukban, amit azelőtt fel sem tételeztünk volna, viszont mit nem várhatunk, amit azelőtt reménytelenül hajszoltunk ...

De beszéljünk a fordulatnak csak egyetlen, talán legfőbb mozgatójáról: a tudományos-technikai forradalomról. Arról, hogy az ember, miután testi erejét a gépek munkába állításával az elmúlt egy-két évszázad alatt gyorsuló ütemben megsokszorozta (ma a föld minden lakosára átlagosan annyi energia jut, mintha több tucatnyi rabszolgát hajszolna reggeltől estig), most szellemi erejét kezdi „gondolkozó” géprabszolgák útján még nagyobb mértékben fokozni.

Az a számtani anyag és azok a tanítási módszerek, amelyek minden eddigi reform ellenére ma is élnek és hatnak, akkor alakultak ki, amikor gépek híján emberek adtak össze hosszú számoszlopokat, végeztek olyan számításokat, amelyeket a mai gépek ezred-, milliomodannyi idő alatt megbízhatóbban tudnak elvégezni.

A növekedés ütemére jellemző, hogy földünkön az egy főre jutó energiatermelés körülbelül minden évtizedben kétszereződik meg (ez sem csekélység!), a számológépkapacitás viszont már két-három évenként.

Iszonyatos hatalom birtokába kerül az emberiség, és ez a pedagógia felelősségét is növeli, feladatait is befolyásolja. Jóra használja-e és értelmesen használja-e növekvő erőit a viharosan serdülő emberiség?

A matematika tanításának tartalmát és módszereit közvetlenül az utóbbi kérdés érinti. (Közvetve persze az előbbi, a húsba vágóbb is.)

Mégpedig nem felületesen érinti, hanem alapvetően meghatározza.

A jövő embere tisztán fogja látni, mire képes és mire nem képes a komputer (és a kisebb gépek egész skálája). Saját képességeit aszerint fejleszti, s ez értelmi tevékenységében lényeges hangsúlyeltolódásokra vezet.

Persze csak nagy fáziskéséssel; de nemzetek és társadalmak maradhatnak le vagy törhetnek föl annak következtében, hogy mekkora ez a fáziskésés.

A mechanikus készségek szerepe csökken, illetve olyan mértékig marad meg, milyen mértékig segítik más, fontosabb, a gépekkel szemben versenyképes vagy éppen helyettesíthetetlen képességek – például az ötletesség és az absztrakciós képesség – fejlődését.

Két példát mondok erre. Az egyik egyben válasz egy gyakran feltett kérdésre: kell-e ezután is egyszeregyet tanulni?

Kell – pontosabban: érdemes, hasznos –, de nem ugyanazért és nem ugyanúgy, amiért és ahogy azelőtt.

Érdemes egyszeregyet tanulni, mert mély matematikai gondolatok gazdag példaanyaga.

És úgy érdemes, hogy felfedező utak közben ráeszmélünk ezekre a gondolatokra is, túl az olyan asszociatív kapcsolatokon, mint az, hogy „hatszor hét”-re „negyvenkettő” a kádencia.

Felfedezéseket ritkán tesznek zárt sorokban, vezényszóra, díszlépésben. Inkább elmélyedve, belefeledkezve valamilyen tevékenységbe és az ahhoz fűződő gondolatokba.

Kisgyerekeknél különösen fontos, hogy tevékenység irányítsa a gondolkozásukat, és tapasztalataikon mérjék le elképzeléseik értékét. Sok kitűnő eszközt és eljárást dolgoztak ki ehhez: DIENES ZOLTÁN ezeknek egyik legjelesebb kutatója. Nem szemléltetőeszközöket mutat fel a tanító, hanem munkaeszközökkel dolgoznak a gyerekek. Mégpedig többfélével, hogy ne kötődjenek egyhez; absztrahálják, ami bennük közös.

Az ilyen tevékenység közben felfigyelnek a gyerekek például $3 \cdot 7$, $6 \cdot 7$ és $9 \cdot 7$ összefüggéseire: arra, hogy $21 + 42 = 63$ ugyanúgy, ahogy $3 + 6 = 9$; hogy 21-nek a kétszerese 42, háromszorosa 63, mint ahogy a 3-nak is a 6 és a 9.

Lehetséges, hogy később jutnak el így a „készség fokára", (érdekes, néha előbb), de mindenesetre érettebb, maradandóbb ismeretekhez jutnak és emberhez méltóbb úton. Nemcsak a válaszokat tudják, hanem úgy igazodnak el az egyszeregyben, mint a Jázmin utca környékén az arrafelé lakó gyerekek.

A másik példa azt illusztrálja, hogy a tananyagnak is át kell alakulnia, nemcsak a tanítás és tanulás módjának.

Egy éve lehet, hogy olvastam egy szép riportot sok-sok háromgyerekes családról. Fényképek és nyilatkozatok szemléltették, milyen boldog is egy olyan család, ahol pontosan három gyerek van.

Nyilvánvaló volt a cikk népesedéspolitikai tendenciája: 3 az optimális szám, a szolidan bővített újratermelés. Ez az igazi hazafiúi tett. Ti 2, 1 és 0 gyerekesek – ebben a sorrendben fokozva – érezzétek elmarasztalva magatokat: stagnálásra és kihalásra ítélnétek a nemzetet. Ti viszont 4, 5 és több gyerekesek, egy kicsit túloztatok. Ilyen arányú szaporulatot nem győzne az ország.

Mi köze ennek a matematika tananyagához? Az, hogy a tananyagban ma nem szerepel az eloszlás fogalma és több szempontú elemzése. Egy szempont emelkedik ki: az átlag. A köztudatban is csak ez él. Nem mérlegeljük eléggé, hogy egy olyan eloszlás, mint mondjuk 0, 1, 2, 2, 3, 3, 3, 4, 5, 7 nemcsak a realitást fejezi ki jobban, hanem nevelési vagy egyéb szempontból esetleg előnyösebb is lehet, mint az ugyanolyan átlagú 3, 3, 3, 3, 3, 3, 3, 3, 3 eloszlás. (Példánkban öten nőnek föl kis, 1 vagy 2 gyermekes családban.)

Nem hibás-e a matematika tanterve is abban, hogy az egyoldalúan átlagcentrumú szemlélet úgy eluralkodott?

Matematikai statisztika az általános iskolában – ez így ijesztően hangzik. De ha a szórás és más efféle fogalmak intuitív kialakítását, fokozatos érlelését jelenti, akkor a matematikatanítás megújulásának lehet része.

Két példa nem sokat árul el, de itt abba kell hagynom. Mondanivalómat így summáznám: mozgalom indult Magyarországon és szerte a világon egy szó köznyelvi jelentésének és érzelmi töltésének módosítására.

1.4.9. Varga Tamás: Imre

Megjelent: A Matematika Tanítása folyóiratban 1963/6.

Úgy tudtam, hatéves. Amikor megjelent az ajtóban egy gondozónő és a helyi tanács egyik képviselője kíséretében, kisebbnek találtam, mint amilyennek képzeltem. Pedig rosszul tudtam a korát: két hónapja töltötte be a hetediket. Bár alacsony, nem fejletlen. Kerek képű, telt. Délután jött hozzám, harminckét fokos melegben; előtte az egész Délelőttöt a Gyermeklélektani Intézetben töltötte, feladatokat adtak neki. Elsoroltak neki tizenöt számot szabálytalan összevisszaságban; elismételte. Ugyanazt visszafelé is el tudta mondani, csak a 17 helyett 71-et mondott – ezt is megfordította. Többjegyű számokat szoroz és oszt fejben. Azért is hozták fel megvizsgálni, mert kiderült az iskolában, hogy számtanból toronymagasan van a többiek felett. Most végezte az első osztályt. Az anyjának tíz gyereke van, ő a tizedik. Az apja nem él velük, részegeskedései miatt kitiltották a faluból, ahova az ő tanyájuk is tartozik. Mielőtt az anyja őt megszülte volna, elkeseredésében a kútba ugrott, de kihúzták. Másnap született Imre. Anyja nehéz körülmények között nevelte fel.

Az anyja írástudatlan, két nővére is az. Valamit talán felszedhetett a gyerek számtanból az iskolába járó testvéreitől, de tanítani senki sem tanította iskoláskora előtt. Négyéves korában az anyjának egyszer azt mondta a piacról hazafelé jövet: „Édesanyám, becsapták egy forint negyvennel." Utánaszámolt az anyja, hát csakugyan. Ekkor vette észre, hogy a fia már számol. De amikor a gyerek iskolába került, nem szólt a tanítónak, vagy nem úgy, hogy az komolyan vette volna. A gyerek csak ült, ült a számtanórákon, csöndben volt, egyszer el is aludt. A tanító beküldte az igazgatóhoz egy kis fejmosásra. Ott bökte ki a gyerek, hogy ő azt már mind tudja, amiről számtanórán szó van. Kiderült, hogy sokkal többet is tud!

A gyerekben nincs semmi abnormális, semmi koravénség, semmi egzaltáltság. Magabiztos, de nem látszik, hogy el volna kapatva. Gyerekes, játékos. A Cuisenaire-készlettel (1 cm-es kocka, 2, 3, ... 10 cm-es oszlop különböző színű műanyagból) kedvére játszik, sorba rakja. Számolgatni kezdünk. Kétműveletes feladatokat is adok neki. $57+89-89$-re azonnal rámondja, hogy 57. Látszik, nem gép módjára számol, az értelem felől közelíti meg a feladatokat, nem az algoritmusok felől. $27 \cdot 37$-en kb. fél percig gondolkodik. Nagy örömmel mondja, hogy 999. Tetszik neki, hogy ilyen szép szám.

Gondoljon most ő egy számot, mondom. Adjon hozzá 28-at. Ehhez még adjon 59-et. Amit kapott, abból vegye el azt, amit először gondolt. Mindent fejben számol. Amikor látom, hogy kész a számolással, megmondom én a végeredményt: 87. Fölnevet és bólint. Tetszik neki, hogy én tudom, amit pedig csak ő tudhatna. Elárulja, hogy 5-re gondolt. Megmondom, hogy ezt nem tudtam volna kitalálni, csak azt, amit utoljára kapott. Leírom neki, mi az, amit kiszámított: $5 + 28 + 59 - 5$. Megérti, hogy a végén azt vette el, amit ő gondolt, csak az maradt, amit én adtam hozzá. Elismételjük más számokkal is. Most én gondolok, ő találja ki, javaslom. Erre nem vállalkozik.

Megpróbálom felidéztetni vele az előző példa számait. Nehezen megy. A számemlékezete – ha korához képest fejlett is – nem rendkívüli.

Felírom neki:

$$1, 2, 4, 8, 16$$

Tudná-e folytatni? Nem látja a szabályosságot, 24-et mond. Amikor kiigazítom 32-re, a következőnek akkor is 48-at gondolja. Ez új, gondolja. Ez új gondolat neki, nem erőltetem a kitalálást, látom, hogy mindenáron összeadni akar, megmondom, én úgy számoltam: $1 + 1 = 2$, $2 + 2 = 4$, $4 + 4 = 8$ stb., folytassa fejben, ameddig kedve van. 65536-nál jelenti ki, hogy most már inkább nem folytatja. Addig nem hibázott.

Ötször háromszor két gyufásdoboz átlátszó papírba csomagolva, ezt kapja a kezébe. Meg tudja-e mondani, anélkül, hogy felbontaná, hány gyufásdoboz? „Nem tudom" – mondja.

Ezt a gondolatot még elő kell készíteni. Elébe adok egy doboz építőkockát, 2 hatványai szerint mennek a darabok, 1-től (egy köbcentiméteres kockáktól) 64-ig. A felületükön rovátkolás jelzi az egységkockákra való felosztást, mint a Dienes-féle szemléltetőeszközöknél. (Ahhoz készítettem kiegészítő doboznak.) Sorba kell raknia a darabokat nagyság szerint, aztán meg kell mondania, melyik hány kis kockából áll. Kis kocka van elég, megpróbálhatja felépíteni, ha így könnyebb. A 16-osat és 32-eset ($2 \cdot 2 \cdot 4$ és $2 \cdot 4 \cdot 4$) még építés nélkül megmondja. A 64-es kocka alakú. Először ezt is 16-nak mondja. Elkezdi felépíteni egységkockákból. Amikor 16-ot beépített, kénytelen belátni, hogy ez kevés. Előveszi a 64-es kockát, fél perc alatt megmondja, hogy 64. Így mondja: itt van 16, ez is 16, még 16 és még 16. Most már a becsomagolt gyufásdobozokat is visszaadom neki. Megnézi és megmondja, hogy 30. „És 9 forintba kerül" – teszi hozzá. „Honnan tudod, hogy nem 40 filléres gyufa?" „Látom rajta."

Tégla alakban összerakott és becsomagolt kis kockákat kap. A 60-at először 48-nak mondja, 5 helyett 4-et számlált az egyik irányban. „Biztos?" – kérdezem. Jobban megnézi, kijavítja. A térfogatszámítás módja körül már nincs nehézsége, bár egy szó sem esett arról, hogy szélességszer hosszúságszor magasság, vagy más efféle, és láthatóan teljesen új volt neki a gondolat.

Hét zöld és három piros fából készült játékgombát adok oda neki. „Nézzed meg, miből vannak!" Először nem felel. „Vasból?" „Nem – mondja nevetve –, fából." „Milyen színűek?" „Ezek pirosak, ezek kékek." Ráhagyom. „Milyen alakúak?" Nem felel, nekem kell megmondani, hogy gombák akarnak lenni. „Szedtél már gombát?" „Szedtem."

„Hány piros gomba van itt?"– térek most rá az előkészítés után a híres Piaget-féle feladatra. „Három." „Hány kék: gomba?" „Hét." „Hány gomba van fából?" „Tíz." „Mi van több, kék gomba vagy fagomba?" „Kék." ‚Hát hány kék gomba van?" „Hét." „És hány fagomba van?" „Tíz." „Hát mi van több, kék gomba vagy fagomba?" „Kék van több."

Olyan szabályszerűen felel, mintha olvasta volna Piaget-nál, hogy az ilyen korú gyereknek hogy kell felelni. Éppúgy köti az, amit lát, az egésznek egy részét éppúgy nem tudja az egésztől külön gondolni és az egésszel összehasonlítani, mint más ilyen korú gyerekek.

Megint a kis kockákat adom oda neki. Megmutatom, hogy lehet 14 kockát két egyforma sorban kirakni. 15 kockát ki tudna rakni több sorban? Kirakja. 16-ot? Azt is. 17-et? Ezt én mutatom neki, hogy sem kettesével, sem hármasával, sehogy sem lehet több sorban kirakni. Megértette a gondolatot, már nem is kellenek neki a kockák. Megmondja, hogy a 18-at kettesével, hármasával is ki lehet rakni. A 19-en gondolkozik. „Nem lehet kirakni" – mondja. Elsorolja a 20 kirakásait, a 21-et is megmondja. A 22-re váratlanul azt mondja, nem lehet. Talán csak 10-en aluli számokra gondolt. „Kettesével nem tudnád?" „De igen, kétszer tizenegy." Nagyobb számot mondok neki: „84-et hogy tudnád kirakni?" Félpercnyi szünetekkel elmondja: „2-szer 42" „3-szor 28", „4-szer 21." Az 5-nél nagyon sokáig gondolkozik. „Nem lehet?" – kérdezem. „Nem" – mondja. „Mennyi marad ki?" „Egy." (Talán úgy gondolta, hogy egy kellene még hozzá.)

„Bementem a boltba, láttam egy polcon csokiszeleteket. Nyolc darabot akartam venni, de nem tudtam megvenni, mert egy forinttal kevesebb pénzem volt. Ezért csak hetet vettem. Így megmaradt 50 fillérem. Mennyibe került egy szelet csoki?"

Lehet, hogy félreértette a kérdést, mert kis gondolkozás után mindjárt a hét szelet csoki árát mondta meg. (Először 11,50-et mondott, aztán kiigazította 10,50-re.)

Egy másik feladat előkészítésére megkérdeztem tőle, hogy fiúk és lányok is járnak-e abba az osztályba, ahol tanul. Bólint. „Hány lány, hány fiú?" Számolgatja magában, aztán mondja: „9 lány, 22 fiú." „Miért olyan kevés lány?" – kérdem csodálkozva. Vállat von, ez a kérdés nem érdekli. (Kezdem érteni az analfabéta anyát és nővéreit. Azon a vidéken még nagyon erősen élhet az emberekben az, hogy minek egy lánynak iskola.)

Most következett a feladat. „Én egy olyan osztályban tanítok, ahova összesen 34-en járnak. Hattal több a fiú, mint a lány. Meg tudnád-e mondani, hány lány és hány fiú jár ebbe az osztályba?" Nem tart sokáig, amíg megadja a helyes választ. „Honnan tudod?" „Hogy jöttél rá?" – Ilyen kérdéseket már előbb is próbáltam feltenni, nem sok eredménnyel. Ő még csak azon gondolkozik, amit ki kell számítania vagy következtetnie; azon egyelőre nem gondolkozik, hogy ő hogyan gondolkozik.

Már több mint egy órája itt van, ideje lesz abbahagyni. Adok neki ajándékba kétméteres acél mérőszalagot, megtanítom, hogy kell kivenni a tokjából és visszatenni. Borzasztóan tetszik neki, hogy hajlik, visszaugrik, reccsen, de nem törik el. Kipróbálom azt is, tud-e hosszúságot becsülni és mérni. „Milyen hosszú lehet ez a ceruza?" Hallgat. „Egy méter? 3 cm?" Nevet és azt mondja: 20 cm. „Na lássuk." Minden segítség nélkül odateszi a ceruzát a mérőszalag mellé; megállapítja, hogy 18 cm. (Milliméter eltérés ha lehetett. Nem szándékosan adtam ilyen mérnivalót, de jobb hogy így volt, mert nem lett volna most idő belemenni a közelítéssel kapcsolatos kérdésekbe vagy a milliméter magyarázatába.) Kap feladatlapokat is. Az első rovatba be kell mindent írnia, mit mér; a következőbe azt, hogy mielőtt még megmérné, mennyinek gondolja; aztán a mérés eredményét és végül az eltérést, + vagy − jellel aszerint, hogy többnek gondolta-e előre, mint amennyi lett vagy kevesebbnek. (Az utolsó oszlopbeli érték tehát a két előbbi szám különbsége a megfelelő előjellel. Ő ezt persze még nem tudja, ez csak előkészítése az előjeles szám fogalmának.) Kap még néhány apróságot, dobozt is mindehhez, aminek külön örül. Megígéri, hogy ha készen van egy feladatlap kitöltésével, elküldi. Reméljük, nem fog elkallódni.

1.4.10. Varga Tamás: A függvényfogalom előkészítése I.

Megjelent: A Matematika tanítása folyóiratban 1983/3

Vázlat:

1. Mit értünk függvényen? Mi az a függvényfogalom, amelyet elő akarunk készíteni?
2. Függvényfogalom vagy függvényfogalmak? Mit akarunk elérni az előkészítésükkel?
3. A függvényfogalmak előkészítése a matematikai fogalmak rendszerében.
4. A függvényfogalmak előkészítése a tanulók értelmi fejlődésének részeként.
5. Hogyan folyik iskoláink alsó osztályaiban a függvényfogalmak előkészítese?

1. A függvényfogalmat akarjuk előkészíteni, majd kialakítani. De mit értünk függvényen? A szóhasználat nem egységes. Matematikusok vagyunk, tudjuk, hogy a definíciókról szóló viták nagy része üres szócséplés. Mihelyt tisztázzuk, milyen értelemben használunk egy szót – például éppen a függvény szót –, meg tudjuk értetni magunkat azokkal is, akik más szóhasználathoz vannak szokva. Erre a tisztázásra azonban szükség van. Tartozom annak a megindokolásával is, hogy a többféle változat közül miért kötünk ki az egyik és nem egy másik mellett. Ugyanakkor megértem és respektálom, ha mások – kollégáim, barátaink – más terminológiát részesítenek előnyben, talán más szempontoktól vezérelve.

   Szinte csak találomra említek két könyvet, amelyben megtalálható a tantervünkben alapul vett terminológia:

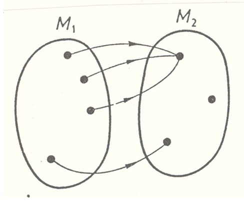
   K. A. Hirsch: Kleine Enzyklopadie der Mathematik, VEB Bibliographisches Institut, Leipzig.

   V.M. Bragyisz: Metogyika prepodavanyija matyematyiki v szrednyej skole, Ucspedgiz, Moszkva.

   Arról a nagyon általános függvényfogalomról van szó, amelyet röviden így jellemezhetünk: egy M_1 halmazról egy M_2 halmazba való egyértelmű leképzés. Engedjék el a két halmaz Descartes-szorzatának részhalmazával való (pedagógiai szempontból egyébként sem előnyös) fogalmazást, ehelyett egy ábrával és egy táblázattal egészítem ki a fenti tömör leírást. A $-$ jelek jelentése a táblázatban nem, nem lehet; a $+$ jeleké: igen, lehet (ti. mondott tulajdonságú eleme az M_1, illetve M_2 halmaznak.)

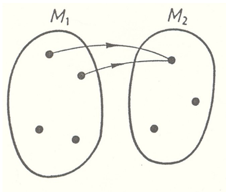
   A fenti értelemben a „függvény” szó a francia applicationnal szinonim. Szokás néha olyan módon különböztetni meg a két fogalmat, hogy az M_1 halmazra vonatkozóan csak a nyilak unicitását kötjük ki, egzisztenciáját nem: Ilyen értelemben beszélhetünk például

$$\mathbb{R} \to \mathbb{R} \quad x \mapsto \frac{1}{x}$$



	Lehet olyan eleme, amelyhez 0 nyíl tartozik	1	>1
M_1	−	+	−
M_2	+	+	+

1.21. ábra. A hozzárendelés szabályai



	Lehet olyan eleme, amelyhez 0 nyíl tartozik	1	>1
M_1	+	+	−
M_2	+	+	+

1.22. ábra. A hozzárendelés módosított szabályai

függvényről is, nem kell az értelmezési tartományt a definícióban pontosan megadnunk pl. így:

$$\mathbb{R} \setminus 0 \to \mathbb{R} \quad x \mapsto \frac{1}{x}$$

ami ugyan itt könnyű, de ha a nevezőben bonyolultabb kifejezés, például x helyett egy ötödfokú polinom van, akkor már nehézkesebb. Ebbe a vitába nem megyünk bele; egyébként a függvényfogalom előkészítése idején az alapul vett halmazok precizirozását nem is tartjuk mindig szükségesnek.

Egy másik, szintén nagyon elterjedt definíció az előzőnél annyiban szűkebb, hogy kikötjük:

M_2 csak számok halmaza lehet,

M_1 pedig számoké, számpároké általában szám n-eseké, és eszerint beszélünk egy-, két-, általában n-változós függvényekről.

A zsebszámológépek – a programozhatók is – többnyire ilyen függvényeket állítanak elő; lásd például az 1.23 táblázatot. Előállíthatók azonban zsebszámológépekkel valamivel általánosabb értelemben vett függvények is, amelyekben például M_2 elemei nem számok, hanem számpárok vagy számhármasok (példa erre: derékszögű koordinátáival megadott vektor átalakítása polárkoordinátás alakba vagy viszont); vagy számhalmazok (például természetes számokhoz osztóik halmazát rendeljük) vagy M_1 és M_2 elemei is mátrixok.

A felsorolt függvények mind valamilyen numerikus információhoz rendelnek ugyan-

Számológépekkel előállítható függvények (többek közt)

Egyváltozósak (input: x)	Kétváltozósak (input: x és y)	Többváltozósak (input: x_i, $i=1; \dots; n$)
$-x$	$x+y$	$\sum\limits_{i=1}^{n} x_i$
$\frac{1}{x}$	$x-y$	$\prod\limits_{i=1}^{n} x_i$
x^2	xy	$\frac{\sum\limits^{n} x_i}{n}$, $\sqrt[n]{\prod\limits^{n} x_i}$
$\sqrt{x}$	$\frac{x}{y}$	$\frac{n}{\sum\limits^{n} \frac{1}{x_i}}$, $\sqrt{\sum\limits^{n} x_i^2}$
$\lvert x \rvert$	x^y	$(x_1; \dots; x_n)$ (lnko.)
$[x]$, ENT x	$\sqrt[y]{x}$	$[x_1; \dots; x_n]$ (lkkt.)
$\{x\}$ FRAC x	$\frac{x+y}{2}$	max $(x_1; \dots; x_n)$
sin x	$\sqrt{xy}$	min $(x_1; \dots; x_n)$
cos x	$\frac{2}{\frac{1}{x}+\frac{1}{y}}$	med $(x_1; \dots; x_n)$ (medián)
tan x	$\sqrt{x^2+y^2}$	mod $(x_1; \dots; x_n)$ (modusz)
arc sin x	$(x; y)$	
arc cos x	$[x; y]$	
arc tan x	max $(x; y)$	
e^x	min $(x; y)$	
ln x	x kerekítése y tizedesjegyre vagy y értékes jegyre	
10^x		
lg x		
átszámítások (radián, fok, újfok; 10-es számrendszerből 8-asba vagy 60-asba és vissza)		

1.23. ábra. Számológépekkel előállítható függvények

csak numerikus információt. A számológépek (kalkulátorok) és a számítógépek (komputerek) közt a határvonal ma már elmosódóban van, de leginkább talán ezzel különböztetjük meg őket; a kalkulátorok inputja és outputja numerikus, a komputerek viszont perifériáiktól függően elvben bármilyen típusú információ feldolgozására alkalmasak; bemenő és kijövő adataik egyaránt lehetnek számok, szövegek, ábrák, fizikai mennyiségek stb.

Azzal, hogy a függvény tágabb és szűkebb fogalmát kapcsolatba hoztam a komputerekkel, illetve kalkulátorokkal, bizonyos mértékig már anticipáltam azt, amire fejtegetéseimben később részletesebben is kitérek, a függvényfogalom előkészítésének hogyanját. Didaktikailag célszerű, szemléletes analógiáról van itt csupán szó, nem pedig a kiszámítható függvényeknek Turing-gépekkel (minden számítógép absztrakt modelljével) való előállíthatóságáról.

Ennek az analógiának a szempontjából közömbös, hogy a gép előállítja-e a függvényt – kiszámítja-e az értékeit – vagy csupán előhív és kijelez valamilyen utasítás nyomán bizonyos tárolt adatokat. Hogy folytassam az anticipálást: a tanulók bizonyos adatait tárolhatja a gép – anyja neve, születési helye, ideje, lakcíme, testmagassága stb. – és a név betáplálására előhívhatja ezeket. Ennek persze semmi köze sincs kiszámíthatósághoz, Turing-géphez. Ahhoz sincs köze, hogy milyen program alapján rendeli hozzá a gép a bemenő adatokhoz a kijövőket. A gépet ebből a szempontból fekete doboznak tekintjük. A hozzárendelés ténye a fontos, nem a módja. Ilyen és csak ilyen értelemben fogadhatjuk el a számítógépeket az általános értelemben vett függvények metaforáiként, a kalkulátorokat pedig a numerikus értelemben vett függvények metaforáiként. Ha még meggondoljuk, hogy a zsebszámológépek tömeges (az óráéhoz hasonló mértékű) elterjedését a jelek szerint egy-két évtizedes fáziskéséssel követi a számítógépek tömeges elterjedése is, akkor erős érveket találtunk az ennek megfelelő általánosságú függvényfogalom mellett, bárhogyan nevezzük is azt.

2. Mit akarunk elérni egy fogalom – esetünkben a függvényfogalom – kialakításával?

   Azt, hogy a tanulók a fogalmat definiálni – más fogalmakra visszavezetni – tudják (vagy ha alapfogalom egy bizonyos matematikai rendszerben, akkor ki tudják fejteni más fogalmakkal való kapcsolataikat)? Esetleg ezt is el szeretnénk érni, de ez szinte csak ünnepélyes záróaktusa egy fogalom kialakításának.

   Vagy inkább azt, hogy a tanulók konkrét esetekben el tudják dönteni, függvény-e valami vagy nem? Ez is céljaink közé tartozhat, de aligha ez a legfőbb célunk.

   Felbonthatjuk teendőinket és a függvény általános fogalma helyett (előtt? után?) függvények egész sorával kapcsolatban tűzhetjük ki az említett célokat: ismerjenek rá, hogy például lineáris, másodfokú, exponenciális stb. függvénnyel van-e dolguk, és esetleg definiálni is tudják ezeket a függvényeket. Ilyen értelemben nem is a függvényfogalom, hanem függvényfogalmak kialakítását tekinthetjük feladatunknak.

   Tovább is mehetünk: az, hogy lineáris függvény, gyűjtőfogalom, függvények egy halmaza tartozik ide. Más gyűjtőfogalmak: szakaszonként lineáris, monoton növekvő, monoton csökkenő, szigorúan monoton stb. Azt akarjuk, hogy ezekre is ráismerjenek a tanulók.

3. Mit jelent ráismerni egy függvényre? Felismerni formula alapján? (Pl. $c = \frac{10^6-d}{3}$-ban meglátai az $y = ax + b$ alakot). Felismerni értéktáblázat, grafikon alapján?

Jelenti mindezt, de ennél sokkal többet is. A „sokkal több” főként a matematikán kívüli alkalmazásokat foglalja magában. A tanuló akkor rendelkezik a lineáris (kvadratikus, exponenciális stb.) függvény alkalmazásra kész fogalmával, ha nemcsak formula, táblázat vagy grafikon alakjában ismeri fel az ilyen függvényeket, hanem a legkülönfélébb szituációkban is. Például tisztában van azzal, hogy az olyan látszólag nagyon különböző szituációkban, mint „nekem 2-vel több van, mint neked” „nekem 3-mal kevesebb van, mint neked” „nekem 5-ször annyi van” „kettőnknek együtt 10 van” „az enyémnek a felehússzal kevesebb, mint a tied kétszerese” stb., van valami közös: ezek mind lineáris kapcsolatok.

Természetes, hogy az olyan fogalmak kialakításakor sem elégedhetünk meg a matematikán belüli ráismeréssel, mint például monoton (vagy szigorúan monoton) növekvő (vagy csökkenő). Azért említem éppen ezeket a példákat, mert bőséges tapasztalatom van arra vonatkozóan, hogy ezek az egyszerű és alapvetően fontos fogalmak művelt embereknek is mennyire hiányoznak nemcsak a szókincséből, hanem az operatív fogalomrendszeréből is. Arra gondolok, hogy például nem világos előttük a különbség szigorúan monoton csökkenő függvény és fordított arányosság között: az utóbbiról beszélnek, de vagy az előbbire gondolnak, vagy – még inkább maguk előtt sem világos, hogy voltaképpen mire gondolnak.

A vázlatban feltett kérdések közül a 2.-ra és részben a 3.-ra a fentiek alapján így adom meg a választ: a függvényfogalom (helyesebben fogalmak) kialakításával elsőrendű célunk a tanulók intuíciójának fejlesztése. Az intuitive megragadott fogalomra ráépülhet minden egyéb: matematikai formanyelv, definíció, tételek, feladatmegoldási módszerek. Ha azonban ez hiányzik, akkor az az idő és energia, amit az utóbb felsoroltak elsajátíttatására fordítunk, nagy részben kárbavész. Az intuitív fogalom jellemzője, hogy szervesen beépül a tanulók teljes fogalomrendszerébe – tehát nemcsak matematikai fogalmainak rendszerébe! – és ezért operatív.

Bár egy matematikai fogalom operativitása elsősorban matematikán kívüli alkalmazhatóságában nyilvánul meg, térjünk vissza mégis ahhoz a kérdéshez, hogyan kapcsolódik az általunk kialakítandó fogalom egyéb matematikai fogalmakhoz, témákhoz.

Minden erőfeszítésünk ellenére nem alaptalanok az iskolát ért olyan kifogások, hogy tantárgyakra tördelt tudást, sőt a tantárgyakon belül is darabokra széteső tudást közvetít. Ilyen veszéllyel a matematikaoktatásban is szembe kell néznünk. Ezt a veszélyt csökkenti olyan fogalmak kialakítása, amelyek integráló jellegűek, átszövik az egész matematikát – és ezeknek a fogalmaknak olyan módon való kialakítása, hogy ez az integráló jelleg érvényesülhessen, vagyis a tanulók előtt feltáruljanak az eltérő megjelenés mögött a közös vagy rokon gondolatok. A függvényfogalom erre kiválóan alkalmas. Különösen igaz ez akkor, ha nem szorítkozunk a numerikus függvényfogalomra. Három példát említek:

a) Sorozatok mint függvények. Egyaránt gondolhatunk számok, alakzatok, bármilyen matematikai vagy nem matematikai objektumok sorozatára; ha van egy első, egy második stb. elemük, akkor pusztán ez a rendezés megfelelteti az elemeket az 1, 2, ... számoknak – a pozitív egész számoknak, (vagy 0 indexszel kezdve, a 0, 1, 2, ... természetes számoknak – terminológiai vitába itt sem kívánok bocsátkozni).

   Megint anticipálok, a hogyanról beszélek: könnyebben elvezethetjük a tanulókat arra a belátásra, hogy a sorozatokat függvényekként kezelhetjük, ha eleinte önállóan lépnek fel.

b) Geometriai transzformációk mint függvények. Vegyük példaként a legegyszerűbbeket, az egybevágósági transzformációkat. Közülük az irányítástartók szemléletesen mozgatással valósíthatók meg – a síkbeli egybevágósági transzformációk akkor is, ha nem irányítástartók (igaz, akkor térbeli mozgatással). A mozgatásos megvalósítás azonban félreértéseknek is lehet forrása, ugyan miért mondjuk: egy eltolásra és az inverzére, hogy együttes eredményük a 0-eltolás? Három és egy negyed fordulatot miért nem különböztetünk meg egyetlen negyedfordulattól vagy ellenkező irányú háromnegyedfordulattól? Mindennapos tapasztalataink szerint ezek nagyon is különböznek egymástól. A transzformációszemlélet kialakítását segíti az, ha a tanulók megértették másféle függvények kapcsán azt, amit a számítógépanalógia említésekor hangsúlyoztam: hogy nem törődünk azzal, mi történik a bemenő információval, milyen módon adódik belőle a kijövő információ, csak azzal törődünk, hogy minek mi felel meg. Ilyen értelemben a 46-tal való szorzás és a 23-mal való osztás egymásutánja pontosan ugyanazt a függvényt valósítja meg, mint a 2-vel való szorzás, ha bonyolult módon is. Aki ezt a gondolatot algebrai köntösbe öltöztetve megértette, az geometriai összefüggésben is könnyebben megérti – vagy megfordítva.

c) Logikai függvények. Az olyan univerzális információfeldolgozó gépek, amilyeneknek a tanulók a függvényeket látják, arra is programozva lehetnek, hogy egy-egy betáplált mondatról eldöntsék, igaz-e a mondat vagy téves – vagy pedig sem nem igaz, sem nem téves, például ha kérdőmondatról vagy felszólító mondatról van szó. Lehetséges, hogy több bedobott mondat csak abban különbözik, hogy ugyanazon a helyen más-más szám szerepel benne, például „az 5 prímszám" „a 6 prímszám" általánosan: „az x prímszám"; vagy „1-nek az 5-szöröse 6-tal nagyobb, mint 1-nek a négyzete"; „2-nek az 5-szöröse, 6-tal nagyobb, mint 2-nek a négyzete"; ..., általánosan: $5x = x^2+6$, Ezek az egyváltozós logikai függvények speciális esetként magukba foglalják az egyismeretlenes egyenleteket (egyenlőtlenségeket stb.). Alaphalmazuknak az a része, ahol igazak, a függvény igazsághalmaza. A kétváltozós logikai függvények vagyis a binér relációk hasonló módon választják ki egy alaphalmazból (változóik alap-halmazának Descartes-szorzatából) igazsághalmazukat. A binér relációk ilyen értelemben speciális függvények (logikai függvények), ez nem kevésbé fontos összefüggés, mint az, amit inkább szoktak hangsúlyozni, hogy ti. a függvények a binér relációk speciális eseteinek tekinthetők.

Hozhatnék még példákat a matematika más ágaiból – például a kombinatorikából és a valószínűségszámításból is – annak érzékeltetésére, hogy a függvények valóban mindent átható módon vannak jelen a matematikában. Nem kell megtennem, már csak azért sem, mert tudom, hogy más előadók bővebben is kitérnek ezekre a matematikán belüli kapcsolatokra. Saját témám szempontjából azt kívánom hangsúlyozni, hogy olyan összefüggésekről van szó, amelyeket nemcsak a függvényfogalom rendszeres tárgyalásakor lehet – és véleményem szerint érdemes is – megvilágítani, hanem a függvényfogalom előkészítése idején, a legalacsonyabb szinten, azt mondhatnám kezdettől fogva.

4. Ezzel máris vázlatom 4. pontjához értem. Erről nem is szándékozom hosszan beszélni, hiszen nem választható el az 5. ponttól, annak bemutatásától, mit jelenthet a függvényfogalom ilyen értelmű előkészítése valóságos iskolai szituációban, példaanyag, eszközök, módszerek tekintetében. Csupán a témák korai kezdésének, az egységes matematika egészben való elkezdésének elvi alapjáról szólok.

   Abból indulok ki, amit nem szeretünk nagydobra verni, de amit egymásközt azért el kell ismernünk, mert csak így tudunk változtatni rajta: hogy a matematika tanítására fordított idő a tanulók jelentékeny részénél igen csekély hatásfokú.

   Franciaországban nagy port vertek fel azok a széles körű vizsgálatok, amelyeket „Hány éves a kapitány?” címszó alatt foglalhatok össze. Egy jellegzetes kérdés, amelyet 6-12 éves tanulók százainak tettek fel: egy hajón 17 kecskét és 22 tehenet szállítottak. Hány éves volt a hajóskapitány? A megkérdezetteknek mindenütt jelentős százaléka válaszolta azt: 39 éves. Ugyanezek a tanulók a példatárakban szereplő számtani feladatokat átlagos eredménnyel, esetleg az átlagnál is jobb eredménnyel oldották meg. A vizsgálat végzői azt akarták igazolni – és ez sikerült is nekik –, hogy az eredmények rendszerint látszateredmények. A tanulók formális ismertetőjelek alapján többnyire csak „megsaccolják” megtippelik, hogy a feladatban szereplő számokkal milyen művelet jöhet szóba, és azt gyorsan elvégzik. Itt összeadás jöhetett szóba. Figyelmüket annyira leköti a számítás technikai része (az, hogy minél előbb valamilyen számszerű eredményhez jussanak), hogy a szituáció átgondolására – például arra, hogy van-e köze a kérdésnek az adatokhoz – nem jut idejük, energiájuk. De ez általában nem is hiányzik: feladatmegoldó stratégiájuk többnyire enélkül is beválik.

   Feladatmegoldó stratégiájuk iskolai tapasztalataik nyomán alakult ki bennük. Tanítóik annakidején hasonló iskolai tapasztalatokban részesültek, és ez saját feladatmegoldó stratégiáikra és pedagógiai stratégiáikra is kihat.

Egy pedagógus továbbképző előadáson az előadó ismertette a „Hány éves a kapitány?” vizsgálat eredményét. A tanárok hitetlenkedtek: egy-két kivételesen gyenge tanuló talán ad ilyen válaszokat, de a diákok – az ő diákjaik – többségéről ez elképzelhetetlen.

Mivel a továbbképzésen a diákok nem voltak jelen, az előadó a hallgatók meggyőzése érdekében a következőt javasolta: állítsanak össze együtt egy feladatsorozatot azoknak a tanároknak a számára, akiknek ugyanakkor a szomszédos teremben folyt a továbbképzése, olyan feladatokkal, amelyek a tanárok nívóján megfelelnek a 6-12 éves diákoknak feltett „Hány éves a kapitány?” típusú kérdéseknek. A feladatsorozat megtalálható a Bulletin de l'Association des Professeurs des Mathématiques legutóbbi számában. Csak egyet idézek, amely ennek a szimpoziumnak a témájába vág:

Jelölje meg az alábbi állítások közül azokat, amelyek igazak: az ϵ szám

a) minden számnál nagyobb,

b) végtelen kicsi,

c) pozitív,

d) minden számnál kisebb,

e) 0-hoz bármilyen közel lehet, de nem lehet 0.

Az eredmény megdöbbentő volt; a tanárok reagálása saját kapitány-típusú, példáikra lényegében nem különbözött diákjaik reagálásától.

Felteszem a kérdést: a franciaországi matematikaoktatás hiányosságaira világít-e rá ez a történet, vagy általánosabb érvénye és tanulságai vannak?

A magam részéről hajlok arra, hogy azt mondjam: a történet a mi országaink szempontjából sincs híján tanulságoknak. A matematikaoktatás az egész világon túlnyomórészt S-R (stimulus-response, inger-válasz) típusú tanulást feltételez és segít. Ez a szabály, csekélyszámú a kivétel. Jórészt ebbe az irányba hatnak a tantervek a vizsgarendszerek, az oktatás és a pedagógusképzés hagyományai. Ez alól tanárok és diákok egyaránt igen nehezen tudják kivonni magukat, bár kétségtelenül vannak erre is példák. Túl messze vinne a témámtól, ha az okokat boncolni kezdeném, hiszen ez nem a függvényfogalom előkészítésének kérdése már, hanem egy sokkal általánosabb kérdés: milyen mértékig alkalmas és mennyiben nem alkalmas az inger-válasz típusú tanulás, – amelyre a hagyományos oktatás a leginkább épít, és amely az ismeretszerzés számos területén eredményes is, – matematikai ismeretek elsajátítására, matematikai fogalmak kialakítására, matematikai képességek fejlesztésére.

Ami ebből témámmal szorosan összefügg, az a következő: a függvényfogalom csírái a gyermeki gondolkodásban ugyanúgy megjelennek már iskoláskor előtt, mint például a számmal, a térrel vagy a véletlennel kapcsolatos gondolatcsírák, és az oktatás fő feladata, eredményességének kulcsa nagy mértékben az, hogy segítse a tanulókat a saját gondolatcsíráik kibontására, továbbfejlesztésére. A fejlesztésközéppontú matematikaoktatásban ezért nem is úgy merül fel a kérdés, hogy a függvényfogalom előkészítése melyik életkorban, milyen osztályokban történjék, hanem úgy, hogy melyik életkorban, milyen osztályokban milyen módon folyjék. (Csak zárójelben jegyzem meg, hogy nem az a lényeges, milyen tantervi címszó alatt folyik a függvényfogalom előkészítése. Abból, hogy a tantervben explicite szerepel vagy nem szerepel a függvény címszó, nem következik, hogy valamilyen módon mégis folyik-e vagy nem folyik ennek a fontos fogalomnak az előkészítése az életkornak megfelelő szinten.)

5. Témámnak ezt a legfontosabb pontját két iskoláskor előtti példával kezdem. Mindkettő Eszter nevű ötéves unokámmal kapcsolatos, akit már kezdenek érdekelni a számok, bár sem a szülei, sem a nagyszülei, sem mások (pl. óvónők) nem ösztönzik őt erre különösebben. A két példa, amelyet elmondok, szintén számokkal kapcsolatos, de Önök fel fogják ismerni benne a függvényfogalom kezdeményeinek megjelenését is.

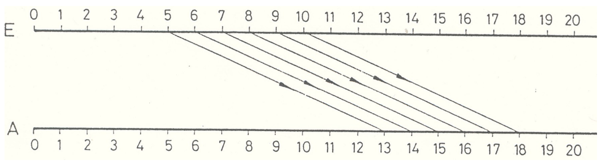
   Eszter – mint annyi más öt-hat éves gyerek – megtanulta és szereti mondogatni a számokat 1-től elég sokáig, egy kis segítséggel százig, százon fölül is. Érdeklik a számokkal kifejezhető dolgok, például az életkorok. Tudja, hogy ő most volt 5 éves, unokatestvére, Andi pedig 13 éves. Ebből kiindulva elkezdte mondogatni, hogy jövőre ő 6 éves lesz, Andi akkor 14 éves, azután ő 7, Andi 15, amikor ő 8, akkor Andi 16 – így eljutott minden kérdezés és segítség nélkül odáig, hogy amikor ő 10 éves lesz, akkor Andi 18 éves lesz. Itt elunta, megállt. Megalkotta életének talán első függvénytáblázatát, amelyet mi így tennénk át írásba:

Amikor Eszter	5	6	7	8	9	10 éves
akkor Andi	13	14	15	16	17	18 éves

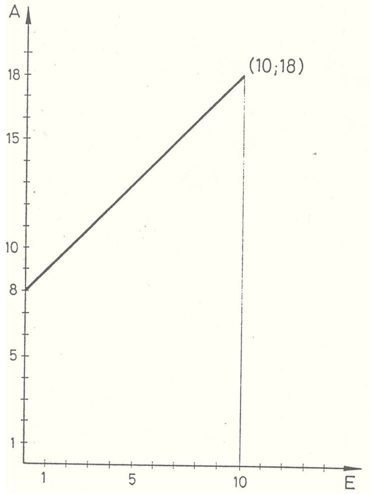
   1.4. táblázat. Eszter és Andi életkora

   és például így sűrítenénk formulába: $A = E + 8$, ábrázolnánk az 1.24 és az 1.25 ábrán látható módokon.

   Esztertől távol vannak, nem életkorához mértek a függvénynek ezek a megjelenési formái. Már csak azért sem, mert például nem tud összeadni. A 8 hozzáadása a saját életkorához képességeit messze meghaladná. Nem is 8 hozzáadásával számítja ki a saját mindenkori életkorából az Andiét, hanem az egyetlen birtokában levő számolási technikát alkalmazza, a továbbszámlálást, pontosabban annak egy fejlettebb változatát, amit párhuzamos továbbszámlálásnak nevezhetnék. (Már ismerkedik egy másik technikával, a visszafelé számlálással, de arra itt nincs szüksége.) A fentiek közül a táblázatos forma volna talán a legközelebb hozzá, ha tudna



1.24. ábra. Eszter és Andi életkora 1



1.25. ábra. Eszter és Andi életkora 2

akár szöveget, akár számokat írni és olvasni – de nem tud, éppen csak kezd. Marad a függvény verbális, szóbeli megjelenési formája. Ezt példánkban az

amikor ..., akkor ...

szókapcsolat fejezi ki, de kifejezhetik például a

ha ..., akkor ...

amelyik ..., az ...

ez ..., az ...

én ..., te ...

nálam ..., nálad ...

nem ..., hanem ...

szókapcsolatok, sok más, nem numerikus változatban is.

Most térek rá második példámra, amely szintén Eszterrel és a párhuzamos továbbszámlálással kapcsolatos.

Eszternek és kisöccsének a szobájában van egy bordásfal. Eszter szeret mellette kézenállni. Röviddel az előző eset (életkorokra vonatkozó számításai) után Eszter megfigyelte, melyik rúdig ér föl a lába kézenálláskor. Megszámolta, hogy alulról a hetedik rúdig. (Egyúttal azt is megállapította, hogy a bordásfalnak összesen 14 foka van.) Jelen voltam, előttem számolgatta, nekem újságolta megfigyelését. Előzőleg hallottam szüleitől Eszternek a saját és Andi életkorára vonatkozó számításairól, és annyit mondtam: „5 éves vagy és a hetedik rúdig ér a lábad". Eszternek is ugyanaz járhatott a fejében, mert folytatta: „Amikor 6 éves leszek, akkor a nyolcadik rúdig fog érni, amikor 7 éves leszek, akkor a kilencedikig..." – egy idő után elnevette magát, a 14. fok körül sejthette már, hogy nem ilyen egyszerű a dolog. „Én pedig most 62 éves vagyok" – mondtam ekkor „és a 64. fokig ér föl a lábam". Ennyiben maradtunk. Eszter nem számolt utána – mint mondtam, nem tud összeadni, talán még a 2-vel továbbszámlálást sem ismerte fel abban, hogy én a 62-vel a 64-et párosítottam. Arról sincs sok sejtelme, hogy mekkora szám is az a 62 vagy a 64, de annyi mégis van, hogy felismerje a helyzet abszurditását.

Mi játszódhatott le tehát Eszter fejében?

a) Először is adva volt egy (feltehetően csecsemőkorban, anyjával való kapcsolatában gyökeredző, a beszélni tanulással együtt érlelődő) gondolkodási forma, a párképzés.

b) Azután megtanulta az „egy-kettő-három" kezdetű mondókát, és ennek felhasználásával kezdte elsajatítani azt az alapvetően fontos matematikai technikát, amit számlálásnak nevezünk.

c) Ennek és a párképzésnek az összekapcsolása révén kialakította a páros továbbszámlálás technikáját.

d) Ez a technika képessé tette egy olyan matematikai modell szóbeli megalkotására, amelyet írásban például így fejezhetünk ki:

x	5	6	7	8	9	10
y	13	14	15	16	17	18

1.5. táblázat. Eszter párhuzamos számolása

képletben így: $y = x + 8$ vagy $x \mapsto x + 8$.

e) Ezt a matematikai modellt először olyan szituációban alkalmazta, amelyre az jól illeszkedik. (Az életkor-különbség két személy között gyakorlatilag állandó, a relativitáselméletből következik ugyan, hogy lehet eltérés, de ez tapasztalati világunkban elhanyagolhatóan kicsi.)

f) Az elsajátított technikát (sugalmazásomra!) megpróbálta áttenni egy másik szituációra. Ez olyan matematikai modellhez vezetett, amely az (5;13) számpár helyett az (5;7) számpárral kezdődött, a technika alkalmazása szempontjából ez nem ütközött nehézségbe.

g) A matematikai modellt azután visszavetítette a szituációra: elképzelte a párhuzamos továbbszámlálással kapott további számpárokat, és kezdett felderengeni előtte, hogy valami nincs rendben.

Eszter tehát a kialakított modellt olyan összefüggésben is alkalmazni próbálta, amelyre az nem jól illeszkedett. Szeretném felhívni a figyelmet ennek a sikertelen, hibás alkalmazásnak a rendkívüli fontosságára, fejlesztő, nevelő értékére. A széles értelemben vett tanulás lényegéhez tartozik, hogy amit tanultunk – motorosan, verbálisan, gondolkodási modellként, bárhogy – azt alkalmazni is igyekszünk, és eközben, ennek révén is, felderítjük alkalmazhatóságának korlátait. Egyaránt fontos annak a felismerése, hogy a páros továbbszámlálás technikája és az ennek révén kialakított $x \mapsto x + n$ alakú függvény alkalmazható az „amikor én ..., akkor ő ..." fajtájú életkoros feladatokra (az élettartam megszabta korlátokon belül, amit szintén fel kell idővel ismernie Eszternek és az Esztereknek), és az, hogy sok más esetben viszont nem alkalmazható, vagy csak szinte véletlenül, kivételesen, nem szükségszerűen alkalmazható. Az utóbbiakhoz tartoznak az „amikor én ennyi éves vagyok, akkor eddig érek fel" feladatok. Eszter testmagassága nem növekszik évről évre egy-egy bordásfalfoknyival, és általában nem is egyenletesen növekszik.

Eszter matematikai gondolkodásának a fejlődése jó úton van: várható, hogy az ezután elsajátítandó technikákat és a segítségükkel kialakítandó matematikai modelleket is megpróbálja majd különféle szituációkra alkalmazni, és alkalmazhatóságukról elgondolkozni. Ez már egy metatechnika, ha ugyan szabad rá a technika szót alkalmazni.

A „kapitány-feladatok" egyik tanulsága az, hogy a matematikai modellek alkalmazhatóságának a vizsgálata az iskolában – úgy látszik – háttérbe szorul. A tanulók jelentékeny része olyan feladatmegoldási stratégiákat alakít ki – nyilván nem az iskolától függetlenül, sőt feltehetően éppen az iskola hatására – amelyekben a műveletek technikai részére fordított erőfeszítése mellett alárendelt szerepet játszik az adott szituációhoz illő matematikai modell kiválasztása. Így például nem sokat törődnek annak az eldöntésével, hogy a feltett kérdés milyen kapcsolatban van, van-e bármilyen kapcsolatban is a közölt adatokkal.

Az Eszter-történetek elmondásában természetesen az is vezérelt, hogy szívemhez közelálló személyről van szó. Úgy gondolom azonban, hogy ezen a szubjektív motívumon túl objektív tanulságokat is le lehet szűrni belőlük.

Hadd utaljak vissza arra, amit az előző pont végén mondtam: hogy az iskolai oktatás eredményességének kulcskérdése, mennyire tudja felismerni és tovább érlelni azokat a gondolatcsírákat, amelyek a gyermekekben már az iskoláskor előtt megjelentek. Egyebek közt a függvényfogalom kezdeményeit is. A két történet talán segített megvilágítani, milyen gondolatcsírákra, kezdeményekre utaltam.

1.4.11. Varga Tamás: Az új matek – Számolás fejben, írásban, géppel

Varga Tamás az „új matek” címmel cikksorozatot írt, ez az írás megjelent az Élet és Tudomány, 1980. II. 8., 6. számában.

Kérdezzenek meg találomra tíz embert az új matekról és a számolásról. Fogadni mernék, hogy legalább kilencen úgy vélik: sajnos, a számolás az bizony háttérbe szorul! Tele vannak aggodalommal, hogy baj lesz, máris baj van, katasztrófa felé sodródik a nemzet, fiaink és leányaink nem tanulnak meg többé számolni.

A középiskolások

nem tudják az egyszeregyet?

Lám, az új matek!

Hogy a középiskoláig fel sem jutott az új tanterv? Még jó. Mi lesz, ha feljut? Akkor aztán végképp befellegzik a számolni tudásnak!

Hogy a felmérések nem igazolják ezt a borúlátást? Nem kell hinni nekik! A közértbe nem tudom leengedni a gyereket, de közben teletömik a fejét halmazzal, függvénnyel, csupa „magas” matematikával, amit a tanítója sem ért. Mit értsen belőle a gyerek? De ha megértené is, mire jó az neki? Számolásra pedig nem jut idő. Pedig az az egy, aminek értelme volna!

Így a szülők, a nagyszülők, a nénikék. Nem mind, de nagyon sokan! Nem rosszindulatból, sőt tele jóakarattal, gyermekféltéssel.

A közvélemény nyomása ránehezedik a *pedagógusokra* is. Nem csoda, ha a híresztelésekből ők is elhisznek, az aggodalmakból ők is átvesznek valamit. Hiszen rájuk háramlik a tanterv megvalósításának a terhe: a számtanról a matematikára való átállásnak – valójában a számtan matematikává való kiterjesztésének – nagy feladata. Érthető, hogy vannak köztük olyanok, akik az átállás első éveiben még nem találják meg a helyes egyensúlyt, nem tudják jól beilleszteni a számolást a matematika egészébe.

Az egyensúlyzavarnak az az egyik fajtája, hogy túlméretezik a tanterv megvalósításában a nem számolási jellegű elemeket. Nem látják még át, hogy a mateknak szinte minden témája *számokkal kapcsolatos*, számolásra ad alkalmat. Nem alakult még ki a gyakorlatuk abban, hogy ezeken az egyéb témákon át a számolást is érdekesebbé tegyék. Elhiszik, hogy a számolásnak a tantervben alárendelt szerepe van, s a vélt tantervi célokat a számolás háttérbe szorításával akarják megvalósítani. Rossz esetben el is határolják magukat: „Nem helyeslem, de most ez kell, hát legyen!”

Gyakoribb egy másféle egyensúlyzavar. Ennek is az a hiedelem van a hátterében, hogy az új tanterv elhanyagolja a számolást. „Nem baj, kedves anyukák – hangzik a megnyugtatás szülői értekezleteken, fogadóórákon –, mi azért megtanítjuk a műveleteket!” Vagy egy pedagógiai lapban közölt interjú szavaival: „Mi, akik már hosszú esztendők óta tanítunk, az újakat a régi, bevált módszerekkel kombináljuk, s bizony nem vetjük meg az egyszeregyet sem.”

Nem akarják az egyszeregyet, hát ne tanítsuk! – így foglalhatjuk össze az egyik végletes álláspontot. A másikat pedig így: *nem akarják az egyszeregyet, de azért tanítsuk!* (Az egyszeregybe persze az összes számolási készség beleértendő.) Mindkettő téves föltevésen alapszik, de a második ezen belül mégis józanabb. Aki még nem látja át a tanterv céljait, az jobban teszi, ha úgy tanít, ahogy véleménye és lelkiismerete szerint a gyerekek érdeke kívánja; ezt nem győzzük hangsúlyozni. Inkább valósítson meg a nevelő egyelőre kevesebbet a megváltozott célokból – annyit, amennyire meggyőződéssel képes –, mint egyszerre mindent, de meggyőződése ellenére. Az új tanterv alapelveinek egyik kulcsszava a türelem: nem siettetni, kivárni, amíg rájönnek a tanulók a megoldásra, amíg megérlelődnek bennük a fogalmak. De nemcsak a tanításban, hanem a tanterv megvalósításában is szükség van türelemre, kivárásra!

Azoknak a pedagógiai módszereknek a megérlelődése, amelyek az új tanterv megvalósításához szükségesek, *még hosszabb* időt, *még több* megértést *kíván, mint a fogalmaknak* a gyerekek fejében való megérlelődése. Az átmeneti időben, sőt azon túl is, a legjobb, amit a nevelők tehetnek, éppen az, hogy „az újakat a régi bevált módszerekkel” kombinálják. Ebben – téves kiindulása ellenére is – igazat kell adnunk az imént idézett pedagógusnak.

Arról azonban nem mondhatunk le – a gyerekek érdekében nem, hiszen értük van a tanterv –, hogy megértessük a tévesen tájékoztatott közvéleménnyel, különösen pedig a nevelőkkel: a tanterv a számolási készségekben *változásokat*, hangsúlyáthelyezéseket, időbeli eltolódásokat, új megközelítéseket hoz. Összességükben a számolási készségek súlya nem csökken, de a gyerekeknek

nem ugyanazt, nem ugyanakkor és nem ugyanúgy

kell tudniuk, mint eddig.

Mindegyik változásnak alapos oka van. Így annak is, hogy az egyszeregyet és más műveleteket is *később kell tudni* az új tanterv szerint, mint eddig. Az előző cikkben (Színek és számok, 1980/2.) már láttuk, miért: a hosszabb tanulási idő alatt jobban megalapozott, tartósabb tudást szereznek a diákok. Igencsak félreérti ezt az, aki csupán annyit lát belőle, hogy a régi másodikosoknak tudniuk kellett az egyszeregyet, a mostaniaknak nem kell. Pedig ez még csak nem is pontos így. Valójában azelőtt mindenkinek *tudnia kellett volna* már másodikos korában az egyszeregyet, az új tanterv pedig *időt hagy* annak, aki addigra *nem képes értelmesen* megtanulni, s nem szorítja rá, hogy akkor pedig tanulja meg értelmetlenül. A különbségek figyelembevételével módot ad mindenkinek az értelmes tanulásra. (Mindenkinek? – ez azért túlzás. Szerényebben: több diáknak, mint eddig. De még ez is a megvalósítástól függ. A *lehetőség* nyílt meg erre, semmi több.)

Ennyit az időeltolódásról, a *mikor*ról.

Hát a hangsúlyok mennyiben tolódnak el? Egyáltalán, miféle számolási készségeket kellett fejlesztenie eddig az iskolának. s mi változik meg most?

Hagyományaink szerint számolni kétféleképpen lehet: *fejben* vagy *írásban.* A közvélemény erről a kétféle számolási módról tud, ezeket félti.

De mit mondanának, ha valaki kijelentené, hogy közlekedni csak kétféleképpen lehet: gyalog vagy lovon? Bizonyára azt, hagy emberünk elmaradt a kortól, a honfoglalás korába képzeli magát! Aki lovas-kocsira, gőzösre, kerékpárra is gondol, az még mindig el van maradva száz évvel. Az elektronikus számolás- és számítástechnikában most tízszer olyan gyors a fejlődés: ugyanígy el van maradva az, aki a

gépi számolást

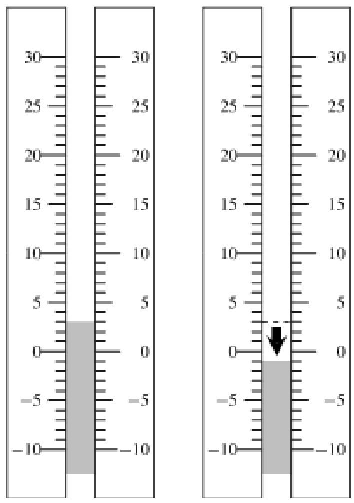
nem sorolja a számolási készségekhez.

A közlekedés alapja a gyaloglás, a számolásé a fejszámolás. Fejben számolni ugyanúgy meg kell tanulnia mindenkinek, mint járni (hacsak nem testi fogyatékos). A *gépek* célirányos használata azonban éppúgy része a számolási kultúrának – éppúgy a *számolási készségek* közé tartozik –, ahogy a közlekedési eszközök célirányos használata része a közlekedési kultúrának. Célirányos: vagyis ki kell tudnunk választani a célunknak és lehetőségeinknek legmegfelelőbb (közlekedési vagy számítási) eszközt, s tudnunk kell élni vele. Esetleg mások közvetítéséve1, ahogy az utasszállító repülőgépet sem magunk vezetjük, s a nagy számítógépet sem magunk programozzuk. Vagy közvetlenül, mint ahogy a saját kocsinkat, a saját zsebszámológépünket, s nem is olyan nagyon sokára a személyes számítógépünket is használjuk. Ha a mai kisdiákok várható életpályájára és a számolási-számítási-informatikai műveltség tág értelmezésére gondolunk, akkor felkészítésükben ezt sem hagyhatjuk figyelmen kívül.

Nézzünk a közelmúltba is! Az iskolákban elsajátítható számolási készségeik közé nálunk néhány évtizeddel ezelőtt kis híján bekerült a logarléchasználat. Azért csak *kis híján* – ellentétben például az NDK-val –, mert a lécek a tanulók többségének elérhetetlenül drágák maradtak: négyszer-ötször annyiba kerültek, mint az NDK-ban vagy a Szovjetunióban. (Pedig egy magyar találmány révén épp nálunk lehettek volna a legolcsóbbak!) Miért? Aki ezt a rejtélyt megfejti, az talán segít elejét venni annak, hogy a zsebszámológépekkel és a személyes számítógépekkel is így ne járjunk majd.

A logarléc fölött eljárt az idő. A logaritmustábla mint számolóeszköz fölött is, zsebszámolókkal azonban – amelyek sokkal pontosabbak, többféle számolás végzésére alkalmasak, egyszerűbben kezelhetők, s mindenben felülmúlják a számolás régebbi segédeszközeit – iskoláinkat egyelőre nem tudjuk ellátni. Azt pedig nem tehetjük meg, hogy azokhoz a tanulókhoz képest, akik hazulról számológépet hoznak, hátrányos helyzetbe hozzuk a többieket, ezért aztán hiába hódít világszerte az a felismerés, hogy a zsebszámolók – megfelelő pedagógiai segítséggel – a hagyományos számolási készségeknek sem ártanak, sőt segítik fejlesztésüket, előnyeikkel mégis csak korlátozott mértékben élhetünk.

Az *írásbeli számolásra* egyre kevésbé lesz szükség a zsebszámolók tömeges elterjedése után; erre utal a fenti (ló-kerékpár stb.) hasonlat. De ha csökken is a fontossága, semmivé talán mégsem zsugorodik. A kerékpárnak némelyik fejlettebb ország közlekedésében nagyobb szerep jut, mint minálunk. (Külön kerékpársávok segítik ezt például Dániában, Hollandiában.) Nem szólva arról, hogy a kerékpár sporteszköz is, akár a hátasló. Az unokáimnak akkor is tanítanám az írásbeli műveleteket, ha a tananyagból kimaradnának: látjátok, gép nélkül, papíron is ki lehet ezt számítani Egy kicsit tovább tart, eltéveszteni is könnyebb, gyakorlati haszna nemigen van, mégis jó érzés tudni, hogy szükség esetén kivághatjuk magunkat ilyen módon. Az időt is az óráról, az égtájat az iránytűről olvassuk le, nem a Nap állásáról, mégis jó tudni, hogy ha ismerjük az egyiket, meg tudjuk állapítani a másikat (persze csak nehézkesen és pontatlanul)!



A tanítás módjára, a *hogyan*ra szintén hat az, hogy az írásbeli számolás hovatovább csak kedvtelés, egyre kevésbé komoly gyakorlati eljárás. Mivel a gépi számolással úgysem veheti fel a versenyt, nincs értelme a tanításban túlságosan törekedni a gyorsaságra, másodpercek megtakarítására. Sokkal fontosabb ennél az, hogy a tanulók könnyen megértsék – tehát könnyebben meg is jegyezzék – a kiszámítás módján. Sőt: lehetőleg *jöjjenek rá maguk*. Ez az utóbbi egyébként a fejszámolásban is fontos szempont. Nemrég mesélte egy kollégám, hogy a kisfia így számította ki a $3 \cdot 6$-ot: $6 \cdot 6 = 36$, annak a fele 18. Aki megszokja, hogy

maga keresse az utat

az eredményhez, az sok ilyen meglepő összefüggésre bukkan. Ezek erősebben lehorganyozzák a fejekben az ismereteket, mint a gépies gyakoroltatás.

Lássunk most egy példát az írásbeli kivonásra, mégpedig a nálunk legismertebb módjára, ahogyan majdnem mindnyájan tanultuk, s ahogy ma is sokfelé tanítják! Vajon értjük-e, miért éppen a megszokott lépések adják a helyes eredményt? Vagy csak megszoktuk és megjegyeztük, sok-sok ismétlés után? Ha kaptunk is rá magyarázatot, megérte-e az arra fordított idő? Átlagosan nyolcéveseknek való-e a gondolatmenet?

A számolás lépései:

$$\begin{array}{r} 4\ 2\ 3 \\ -\ 1\ 6\ 4 \\ \hline 9 \end{array}$$ 4 meg **9** az 13, marad 1…

$$\begin{array}{r} 4\ 2\ 3 \\ -\ 1\ 6\ 4 \\ \hline 5\ 9 \end{array}$$ …meg 6 az 7, meg **5**, az 12, marad 1…

$$\begin{array}{r} 4\ 2\ 3 \\ -\ 1\ 6\ 4 \\ \hline 2\ 5\ 9 \end{array}$$ …meg 1 az 2, meg **2**, az 4.

A szövegben kövéren szedett – hangsúlyosan kimondott – számjegyek adják az eredmény számjegyeit, jobbról bal felé.

De miért számolunk *jobbról bal felé*? (Az osztást pedig miért végezzük balról jobb felé, ha a többi alapműveletben fordított a sorrend?) Miért mondjuk mindig, hogy „meg": kivonás ez, vagy összeadás? Miért beszélünk 13-ról? Mit jelent az, hogy „marad 1"?

A magyarázat: 3-ból nem tudunk 4-et kivonni, ehelyett 13-ból vonunk ki 4-et. Vagyis inkább 13-ra pótoljuk a 4-et, ami az eredmény szempontjából ugyanaz: ezért a „meg". Úgy számolunk, mintha a felső szám – szakszerűen: a kisebbítendő – nem négyszázhuszon-*három* volna, hanem négyszázhuszon-*tizenhárom*. Vagyis tízzel növeljük az utolsó jegyét. A 164-nek viszont a középső jegyét, a tízeseit növeljük, mégpedig 1-gyel. Úgy számolunk, mintha nem 164 volna, hanem 174. Ezt jelenti az, hogy „marad 1, meg 6 az 7": egy tízest adunk a 6-hoz. Így tízzel nagyobb számból vonunk ki tízzel nagyobb számot, mint kellett volna. Nem baj, az eredmény ugyanaz. A magyarázatnak nincs vége: ezt a trükköt még egyszer kell alkalmaznunk, 2 tízes helyett fönt 12 tízessel, lent pedig 1 százas helyett 2 százassal számolunk. Így végül is 110-zel nagyobb számból vonunk ki ugyancsak 110-zel nagyobb számot, úgy kapjuk meg a helyes eredményt.

Miért van szükség ezekre a bonyodalmakra?

Azzal kezdtük a magyarázatot, hogy 3-ból nem tudunk 4-et kivonni. Ha tárgyakra gondolunk, csakugyan nem: elvenni, megenni, zsebre rakni stb. nem lehet 3 közül 4-et. De a mai harmadikosoknak a kivonás *nemcsak* ezt jelentheti. Már egy évvel előbb elkezdtek ismerkedni a *negatív számokkal*. Volt a kezükben például olyan hőmérőmodell, amelyen beállíthatnak 3 Celsius-fok hőmérsékletet, ezt csökkenthetik 4 fokkal, s leolvashatják, hogy most (mínusz egy) fok a hőmérséklet.

Próbáljuk ezekután elhitetni velük, hogy nem tudnak kivonni 3-ból 4-et, 2-ből 6-ot! Hát hogyne tudnának! Nekik az a természetes, hogy a kivonást itt *el lehet végezni* nemcsak a százasokkal, hanem a tízesekkel és az egyesekkel is (egyébként akármilyen sorrendben):

$$\begin{array}{rrr} 4 & 2 & 3 \\ -\,1 & 6 & 4 \\ \hline 3 & ^{-}4 & ^{-}1 \end{array}$$

$$\begin{array}{rrr} 4 & 2 & 3 \\ -\,1 & 6 & 4 \\ \hline 3 & ^{-}4 & ^{-}1 \\ 2 & 6 & ^{-}1 \\ 2 & 5 & 9 \end{array}$$

Hát ez meg mi? Háromszáz-mínusznegyvenmínuszegy; van ennek értelme?

Van, és nem is olyan nehéz megfejteni az értelmét. Háromszáz és mínusz negyven együtt kétszázhatvan. Kétszázhatvan és mínusz egy, az meg kétszázötvenkilenc:

Mostantól tehát *így kell kivonni*?

Nem így *kell*, de így is *lehet*. Ez csupán egy a lehetséges számolási módok közül. Akinek másképp könnyebb, érthetőbb, az számoljon másképp!

Szülők, nevelők, felnőttek, figyelem! Törekedjünk arra, hogy

saját nehézségeinket ne tulajdonítsuk gyermekeinknek!

Ne higgyük, hogy ha mi valamit, valahogy könnyűnek tekintünk, mert úgy szoktuk meg, az nekik is úgy könnyebb!

Ez egyébként nemcsak az írásbeli kivonásra, nemcsak a műveletekre érvényes. Az új mateknak talán ez a legnagyobb nehézsége: eltérni a megszokottól, az elkopott, idejétmúlt sablonoktól. A matematikában és a pedagógiában egyaránt. Sokan kiegyeznének azzal, ha az iskola legalább annyira megtanítaná a gyerekeket számolni ezentúl is, mint eddig. A sablonoktól való megszabadulás megengedi, hogy ennél *magasabbra tegyük a mércét*. Persze nem mindenfajta hagyományos számolási módban. De például a fejszámolásban – a sablonokon túllépő, gyors, ha kell, hozzávetőleges fejszámolásban, becslésben – okvetlenül!

Azok, akik a közért vagy zöldség- és gyümölcsboltok árusainak a számolási készségét kérik számon az iskolától, nem is tévednek nagyot. A profi szinthez persze szakmai gyakorlat kell. De a *számolási módokban* tanulhat tőlük az iskola. Ők aztán *nem sablonok szerint* számítják ki például 1 kg 580 g banán árát kilónként 33 forintjával. Feleznek, összeadnak, kivonnak, becsülnek, kerekítenek, s úgy mondják ki pillanatok alatt – mondhatjuk a legközelebbi forintra fölfelé kerekítve – az 53 forintot. A számok érzékelése, az *éppen csak szükséges* pontossággal végzett gyors, közelítő számítás; olyan képességek ezek, amelyeket a mai iskolának az eddiginél jobban fejlesztenie kell. Ehhez persze egyebek közt az egyszeregy ismerete is szükséges!

Láthatjuk: nem ugyanazt, nem ugyanakkor és nem ugyanúgy kell tudni számolásból ezentúl, mint eddig, de *nem is kevesebb az, amit tudni kell.*

1.5. Matematikadidaktikai szemelvények II.

1.5.1. Ambrus Gabriella: Gondolatok a törtek tanításával kapcsolatban az 5.-6. osztályban

A tanulmány Ambrus, G: Bővül a számkör – Közönséges törtek az 5. évfolyamon, In: Tanári Kincsestár, RAABE Tanácsadó és Kiadó Kft., 2002 május, 2.1, 1-30 és Ambrus G., Wagner, A.: Mivel is kezdjünk? Témaindító feladatokról a „tört szorzása törttel" anyagrész kapcsán c. cikkeiből részleteket tartalmaz. [9],[19], [20]

A törtek tanítása fontos és hangsúlyos része az általános iskolai tananyagnak. A törtrész előállítása, jelölése képi formában és szimbólumokkal, a tört kétféle értelmezése, a törtek írásmódjai, a törtekkel végzett műveletek mind olyan területek, amelyek gondos előkészítést és kidolgozást kívánnak a tanítás során. Ebben a tanulmányban először a törtek tanításának néhány általános kérdésével foglalkozunk, nem mellőzve egy kis tanítástörténetet sem.

Ezután a tört szorzása törttel témakör bevezetési lehetőségeivel foglalkozunk, mely a konkrét feladatokon túl arra is ötleteket, szempontokat ad, milyen módon lehet más témakörökhöz bevezető feladatokat tervezni.

1. Közönséges törtek – tizedes törtek (Melyiket? Mikor?)

A törtek tanításának érdekes kérdése, hogy tizedes törteket vagy (és) közönséges törteket tanítsunk. A jelenlegi gyakorlat a tizedestörtek tanításánál a közönséges törtekkel kapcsolatos ismeretekre is támaszkodik, a tizedestörtek tanítása nem különül el azonban a közönséges törtekétől, gyakorlatilag azzal párhuzamosan folyik. Ennek egyik bizonyítéka az a tény, hogy az ötödik osztályban bevezetésre kerülnek a tizedestörtek is, noha még nem ismert minden művelet a közönséges törtek körében. Annak, hogy a közönséges törtek tanítása általában előbb kezdődik, mint a tizedestörteké valószínűleg történeti okai is vannak.

A közönséges törteket a méréseknél kezdték használni, míg a tizedestörtek akkor váltak fontossá, amikor a tízes mértékrendszer bevezetésre került. Így az előbbiek már jóval az időszámítás kezdete előtt megjelentek, míg a tizedestörtek csak az utóbbi századokban.

„A ... tizennyolcadik században ... a Riese Ádám által feldolgozott anyag uralkodik, melyhez itt-ott a tizedes törtek járulnak; de nem mindenütt, mert gyakorlati fontosságuk csak a század végén keletkezett, a mikor a méter-rendszert bevezették." (Beke 1909, [29] 7.o.)

Ma már természetesnek érezzük, hogy mindkét írásmód szerepel, de érdemes módszertani szempontból elgondolkodni azon, milyen előnyei vannak a közönséges törtek tanításának a tizedestörtekével szemben és fordítva.

A közönséges törtek előnyei a tizedestörtekkel szemben:

– A közönséges kis nevezőjű törteket könnyebb előállítani, szemléltetni mint a többjegyű (tized, század ...) tizedestörteket. Például: $\frac{3}{8} = 1,375$.

– A sokszor használatos $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{6}$ is könnyebben érthető ilyen írásmódban, mint tizedestörtekként.

– A közönséges törtekkel végzett műveletek könnyen „átvihetők” a tizedestörtek körében a műveletekre.

– A közönséges törtekkel egyúttal minden pozitív racionális számot elő tudunk állítani. A tizedestörteknél először a véges tizedestörtek kerülnek tárgyalásra, azaz csak a racionális számoknak egy részhalmaza. A periodikus tizedestörtek a kezdeti szakaszban nem szerepelnek.

– Már egyszerű osztási feladatoknál is fellép a periodicitás problémája a tizedestörtek körében, például: $2 : 3 = ...$

– A közönséges törteknél pontos értékekkel dolgozunk, míg a tizedestörteknél szükségképpen hamar felmerül a kerekítés problémája.

A tizedestörtek előnyei a közönséges törtekkel szemben

– A mindennapi életben a számításoknál szinte kizárólag tizedestörtek szerepelnek. Így a gyerekeknek vannak bizonyos előismereteik tizedestörtekkel kapcsolatosan. Így az új törtekkel kapcsolatos ismereteket is hamarabb és könnyebben alkalmazhatják a gyakorlatban. Ezzel szemben a közönséges törtek egyes mértékek (pl. idő) kivételével csak erőltetetten szerepelnek tankönyvekben valós szituációkban (pl. $\frac{1}{5}$ kg liszt), és csak bizonyos törtek fordulnak elő gyakran ($\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{8}$, $\frac{3}{4}$). A legtöbb mennyiség megadására inkább a tizedestörtek maradnak.

– A tizedestört jól értelmezhető a helyiértéktáblázat kiterjesztésével, amit a gyerekek már a természetes számok tanulásánál megismernek, így a (tizedes)törtekkel való számolás közvetlenül kapcsolható az egész számokkal végzett műveletekhez. Így a körülményes jelölésrendszer és a közönséges törtekkel kapcsolatos fogalmak (például: számláló, nevező, bővítés, egyszerűsítés, azonos nevezőjű, különböző nevezőjű) sem szükségesek.

– A tizedestörtes írásmód „egyértelműbb” mint a közönséges törtes.

Az előbbi előnyök és hátrányok áttekintésében segít az 1.6 táblázat (vö. Padberg 1995, [165] 21.).

Felmerül az előbbiekkel kapcsolatban az is, hogy mit tanítsunk előbb, közönséges törteket, vagy tizedestörteket.

Tankönyvkutatások szerint a XVIII.- XIX. században például az amerikai tankönyvek között találhatunk példákat arra, hogy

	Közönséges törtek	Tizedes törtek
1.	Összehasonlítás $\frac{3}{4}, \frac{18}{25}, \frac{7}{8}$ Közös nevezőre hozás $\frac{150}{200}, \frac{144}{200}, \frac{175}{200}$ tehát $\frac{144}{200} < \frac{150}{200} < \frac{175}{200}$	 0,75; 0,72; 0,875 itt erre nincsen szükség $0,72 < 0,75 < 0,875$
2.	Egyszerűsítés (Bővítés) $\frac{12}{16} = \frac{3}{4}$	 $0,750 = 0,75$
3.	Összeadás $\frac{7}{8} + \frac{2}{5} = \frac{35}{40} + \frac{16}{40} = \frac{51}{40} = 1\frac{11}{40}$	 $0,875 + 0,4 = 1,275$
4.	Kivonás $\frac{7}{8} - \frac{2}{5} = \frac{35}{40} - \frac{16}{40} = \frac{19}{40}$	 $0,875 - 0,4 = 0,475$
5.	Szorzás $\frac{7}{8} \cdot \frac{2}{5} = \frac{7 \cdot 2}{8 \cdot 5} = \frac{7}{4 \cdot 5} = \frac{7}{20}$	 $0,875 \cdot 0,4 = 0,3500 = 0,35$
6.	Osztás $\frac{7}{8} : \frac{2}{5} = \frac{7}{8} \cdot \frac{5}{2} = \frac{7 \cdot 5}{8 \cdot 2} = \frac{35}{16} = 1\frac{3}{16}$	 $0,875 : 0,4 = 8,75 : 4 = 2,1875$

1.6. táblázat. Előnyök és hátrányok

– kizárólag közönséges törteket tanítottak,

– csak a tizedestörtek értelmezéséhez használtak közönséges törteket,

– teljesen párhuzamosan tanították a tizedes és közönséges törteket minden művelet esetében,

– tizedestörtekkel kezdték a törtek tanításást,

– közönséges törtekkel kezdték a tanítást.

(vö. Jones 1960 idézi: Padberg 1995, [165] 22.)

Érdekes megemlíteni, hogy ezzel a kérdéskörrel például Beke Manó a magyar matematikatanítás reformjának vezető egyénisége is foglalkozott a XX. század elején. Abban a kérdésben, hogy a törtek tanítása hogyan kezdődjön, a közönséges törtekkel való indítás mellett foglalt állást:

„ Még azon is vitatkoznak sokan, hogy kell-e törtszámokat tanítanunk? Mások meg azt a kérdést feszegetik, hogy mit kell előbb tanítanunk, a közönséges törteket-e vagy a tizedes törteket? És kuruczok meg labanczok, welfek és ghibellinek nem víttak elkeseredettebb harczokat, mint az újabbkori számtani methodika e vitás kérdéseinek szóvivői. Miből eredt ez a kérdés, melyről elődeink mit sem tudtak? Kétségtelenül a tizesrendszer újabbkori elterjedése, mértékeink átalakulása okozta.... A törtekkel való műveletek rendszeres tanítására a gyakorlati élet szempontjából ma már tényleg nincs szükségünk.

Ellenben a tizedes törteket most már nélkülöznünk nem lehet. De ha a gyakorlati élet nem is követeli a törtekkel való műveletek rendszeres ismeretét, ha mindennapi számvetéseit el is végezheti mindenki a különböző nevezőjű törtek összeadásának, a törtekkel való sokszorozás- és osztásnak ismeret nélkül; mégsem nélkülözhetjük azonban a törtek ismeretét és a legegyszerűbb törtekkel, ... való számvetést. ... A törtekkel való műveletek rendszeres tárgyalására azonban egyáltalán nem volna szükség.... A közönséges tört ismeretének okvetlenül meg kell előznie a tizedes törtét. Már csak azon egyszerű okból is, hogy az egyszerűbb, a természetesebb előzze meg a complikáltabbat. De meg a gyermek tapasztalati körében is előbb jelentkezik a közönséges tört, mint a tizedes tört." (Beke 1909, [29] 169.)

2. Törtek tanítása – egy kis történeti kitérő

A közönséges törtek tanítása régóta szerepel az alapfokú oktatásban, hiszen a törtekkel végzett műveletek hozzátartoztak a mindennapi élethez szükséges ismeretekhez. Az egyiptomi Rhind papiruszon (ie. 2000-1700) is szerepel már például, törzstörtekkel való számolás formájában. (A papirust 1858-ban Rhind angol tudós találta meg, majd megfejtése után kiderült, hogy lényegében tankönyv, amelyből feltehetően tisztségviselőket oktattak. Tartalmát tekintve 85 probléma és megoldása szerepel rajta, változatos témakörökből: kenyérsütés, sörkészítés, állatok takarmányozása, takarmányraktározás.)

Az egyiptomiak a törteket különböző nevezőjű törzstörtek összegeként (különbségeként) fogták fel. Például:

$$\frac{2}{5} = \frac{1}{3} + \frac{1}{15} \text{ vagy } \frac{2}{3} = 1 - \frac{1}{3}$$

(ld. még: Gazsó, Mosonyi, Vörös 1979, 29-30.)

A magyar vonatkozású emlékek közül megemlítjük Maróthi (1743 [145]) Arithmeticaját, amelyben a szerző részletesen foglalkozik a törtekkel és a törtekkel kapcsolatos műveletekkel. „A' Törtt-szám (vagy amint Deákul hívják, Fractio,) ollyan szám, a'melly egy egésznek bizonyos részét vagy darabját jelenti. Mellyet hogy meg-érthess, vedd eszedbe, hogy minden dolgot, p.o. singet, forintot, fontot, napot, órát, 'sa't. el-oszthatunk két három és több akárhány egyenlő részekre; avagy tsak úgy gondolhatjuk, mintha el-vólna osztva. ... Ha már p.o. a singet 4-felé osztod, 's egyik részét vészed; a' leszsz egy negyed rész (vagy fertály). A'melly szám ezt a 4-d részt jerlenti az Törtt-szám." (Maróthi 1743, [145] 136-137.)

A latin elnevezések helyett magyar neveket is keresett, így bevezeti a „numerator" helyett a „felső" és a „denominator" helyett az „alsó" elnevezést, amelyek a ma használatos „számláló" és „nevező" őseinek tekinthetők. Megkülönböztet „igaz törtszámokat" amelyek egy egésznél kisebbek, és „költött (vagy csinált) törtszámokat" is. Maróthi, akárcsak kortársai a műveletek elvégzését nem magyarázza, hanem elmondja a az adott eljárás végrehajtásának menetét, majd kidolgozott feladatokon mutatja be az alkalmazást.

(Érdekes feladat lehet a gyerekeknek (is), mai ismereteinkkel általánosan bebizonyítani egy-egy eljárás helyességét.)

Megemlítjük még, hogy a π közelítésére Maróthi a $\frac{22}{7}$ értéket ajánlja.

„Egy hordónak a szélessége belöl (vagy a Diameterje) 31 újjnyi. Kérdés, hány újjnyi leszsz a fenekének a Kerületi...

A Hármas regulát így rendelem: Ha a Diameter 7 újjnyi; leszsz a Kerületi 22 újjnyi: Hát ha a Diameter 31 újjnyi? Jö-ki 4-diknek $97\frac{3}{7}$."

Az említett „hármas regula" esetén természetesen arányszámításról van szó, és a következő az eljárás:

Felírom:	7	22	31
Elosztom 7-tel az első két számot	1	$\frac{22}{7}$	31
Majd összeszorzom az utolsó kettőt	$\frac{22}{7} \cdot 31$	$= \frac{682}{7}$	$= 97\frac{3}{7}$

1.7. táblázat. A hármas regula

(Maróthi, 1743, [145] 365.)

(1 ujj kb. 1,9 cm)

A törtek tanítására vonatkozó szabályok, javaslatok a XIX. században kimondottan tanítók számára készült kézikönyvekben is megtalálhatók. Ezekben módszertani útmutatások, fogalmak tisztázása és feladatok szerepelnek, az utóbbiak általában részben kidolgozva. A korabeli tanítási felfogást is tükrözi az a módszertani bevezető, amelyet az ismeretlen szerző írt a „Törtszámok" rész bevezetéseként egy 1859-ből származó „Vezérkönyvben" ([252] 279-280.)

Érdemes még megjegyezni a könyvben:

– A „számláló" és a „nevező" már a mai értelemben használatosak.

– Törtekként (vagy törtszámokként) csak az 1-nél kisebb törteket szerepelteti, az 1-nél nagyobbak itt „áltörtek". Használatos a vegyesszám kifejezés is, például a $2\frac{3}{4}$ vegyesszám.

– A törtvonal ferde.

– A törtek kétféle értelmezése a mai értelemben szerepel.

– tizedes törtek tanítása nem szerepel benne.

Ebből az időből olyan tankönyveket is említhetünk is amelyekben már megtalálható a tizedestörtek tanítása, mégpedig a közönséges törtek után, például Mócznik Ferenc (1862) gimnáziumi tankönyvét.

Figyelemreméltó az is, hogy az egynél kisebb törtek itt (és más tankönyvekben) szintén kiemeltek, ezek a „valódi törtek", míg a többi „áltört". Ez utóbbiak jelölésére más szavak is ismeretesek voltak ebben az időben, de ezeket itt nem részletezzük.

Egy 1899-ben megjelent „Pedagogiai Kalauz"-ban az ötödik és hatodik elemi osztály számára készített tanmenetből, és egy rövid feladatgyűjteményből megismerhetjük a törtekkel kapcsolatos tananyaggal is. (Soós, 1899, [207] 34.) A törtek tanítására eszerint a tanmenet szerint 5. osztályban mindössze 6 és fél óra jutott.

3. A törtek az iskolában (bevezetés, fogalmak)

Arra a kérdésre, hogy mi a tört többféle válasz adható. A tört lehet:
– nagyság
– lineáris egyenlet megoldása
– függvény (operátor) (vö. Padberg, 1995 [165])
Ezek alapján lehetséges, legalábbis elvileg, a törtek különböző bevezetése is.

Ha a törtet mint nagyságot, mennyiséget értelmezzük, akkor olyan konkrét törtekből indulunk ki, amelyek a gyerekek számára már ismertek lehetnek, mint például $\frac{1}{8}$ kg, $\frac{3}{4}$ óra. Ezek révén jutunk el absztrakció segítségével egy meghatározott mértékhez, amelyet „egész" vagy „egység" néven vezetünk be. A ma használatos törtbevezetések leginkább ezen alapulnak, és hasonlóan történhetett korábban is.

Nézzük meg ezt a megközelítést egy kissé, tanuláslélektani szempontból. Bruner elmélete szerint minden gondolkodási folyamat háromféle síkon mehet végbe, aszerint, hogy az ember hogyan kódolja a külvilágból származó információkat:
„1. Materiális sík (enaktív sík)

Az ismeretszerzés egy cél elérésére szolgáló konkrét tárgyi tevékenységek, cselekedetek, manipulációk révén megy végbe.

2. Ikonikus sík

Az ismeretszerzés szemléletes képek, illetve elképzelt szituációk segítségével történik.

3. Szimbolikus sík

Ismeretszerzés matematikai szimbólumok és a nyelv segítségével. ...

A legtöbb tanulói aktivitásnál a reprezentációs síkok egymásba mennek át. ... Az egyik reprezentációs módról a másikra való áttérés növeli a rugalmasságot, és a problémamegoldás hatékonyságát." (Ambrus A. 1995, [2] 37-40.)

Az előbbieknek a törtek bevezetésénél például a következők felelhetnek meg:
1. enaktív sík

Adott rész kirakás színes rudakkal, csokoládé elosztása többféleképpen adott számú gyerek között, ismert mennyiségek megnevezése (konkrét törtek értelmezése).

2. ikonikus sík

Adott alakzaton megadott törtrész beszínezése, egység ismeretében beszínezett rész megadása szóban (betűkkel lejegyezve), $\frac{3}{4}$ óra bejelölése.

3. szimbolikus sík

Törtrész megadása a szokásos írásmóddal.

A törtek közötti ekvivalenciaosztály értelmezése az algebrából ismert (nekünk tanároknak). A természetes számokból álló számpárok ekvivalenciaosztályaiként vezetik be a racionális számokat.

A tört értelmezése lineáris egyenlet megoldásaként konkrét példán a következőt jelenti. $3x = 5, x = \frac{5}{3}$, azaz az $\frac{5}{3}$ tört a $3x = 5$ lineáris egyenlet megoldásaként jelenik meg.

Két tört, például $\frac{3}{4}$ és $\frac{4}{7}$ összeadása a következőképpen értelmezhető ebben a modellben: A mondott törtek a $4x = 3$ és a $7y = 4$ egyenletek megoldásai. Szükségünk van egy olyan egyenletre, amelynek $x + y$ a megoldása. Ezt előbbi egyenletek megfelelő „bővítésével" (egyenlő együtthatók) találhatjuk meg: $28x = 21$ és $28y = 16$ összeadásával: $28(x + y) = 37$.

Érdekes felfogása ez a törteknek, de a tanításban nehézkes lenne alkalmazni. Nyilvánvaló, hogy 5.-6. osztályban a gyerekek még nem rendelkeznek a szükséges absztrakt ismeretekkel az egyenletekkel kapcsolatban, márpedig a törtek tanítása nem halogatható tovább. Az is komoly probléma lenne ezzel a bevezetésmóddal kapcsolatban, hogy a gyerekekben erősödne az a képzet, hogy az egyenleteknek mindig egyértelmű megoldása van. Ez pedig komoly félreértést okozhat.

A törtet operátorként felfogni első látásra elég furcsának tűnik. Nézzük azonban a következő, mindennapi életben is használatos kifejezésmódot: „6 kg $\frac{2}{3}$-a 4 kg" Ezt úgy is felfoghatjuk, hogy a „$\frac{2}{3}$-a" révén a 6 kg-hoz a 4 kg-t rendeltük hozzá. Így a „$\frac{2}{3}$" egy függvénnyé (operátorrá) vált, amely valamely m értékhez az m $\frac{2}{3}$-át rendeli hozzá.

További fogalmakkal a törtek tanításának többféle felépítése is elképzelhető, ezeket itt nem részletezzük. (vö. például Padberg, 1995 [165]) Ez utóbbi felfogásnak az alapja a matematika tisztán struktúrákban való elképzelése.

3.1 A tört kétféle értelmezésének kérdése, egy érték többféle alak

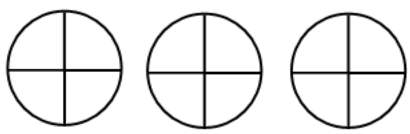
A tört kétféle értelmezésénél érdemes kitérni arra, hogy nem osztható el minden dolog (tárgy) darabra igazságosan például három gyerek között, vegyünk csak mondjuk 2 pizzát, 2 üveg narancslét, 2 könyvet vagy 2 lufit. (Amikor az első tapasztalatokat „gyűjtjük" a törtekkel kapcsolatban olyan mennyiségeket osztunk, amelyek, akárhány részre oszthatók, például alakzatok, folyadékok ...)

Különböző igazságos elosztási szituációk segíthetik adott tört többféle alakjának előállítását, és egyúttal ezek egyenértékűségének bizonyítását.

Osszunk el például 3 (ugyanakkora) pizzát 4 gyerek között igazságosan (mindenki ugyanannyit kap).

1. szituáció

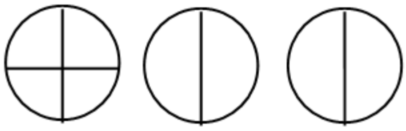
A 3 pizza egymás után, nem egyidőben érkezik az asztalra. (Vagy: különbözőek a pizzák és minden gyerek mindegyikből kér.) A következő felosztás várható:



1.26. ábra. 1. szituáció

2. szituáció

Először egy pizza érkezik, majd két pizza egyidőben és a pizzák egyformák. A következő felosztás várható:



1.27. ábra. 2. szituáció

3. szituáció

A három pizza egyidőben érkezik és egyformák. Ekkor többféle elosztás is lehetséges, például: (Ezeknél az eseteknél érdemes lerajzoltatni azt is, mit kap egy-egy gyerek.)

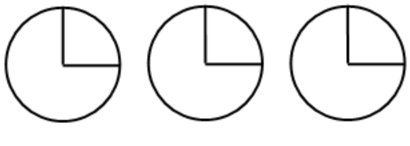
El lehet azon is gondolkodni, hogyan alakul az elosztás az egyes esetekben, ha különbözőek a pizzák.Különböző pizzafajták és a gyerekek kívánságai még további lehetőségeket kínálnak. Fontos, hogy a gyerekek egy-egy felosztást többféle modellen is „átéljenek", és lássák a felosztások egyenértékűségét.

3.2 Tört – törtszám kérdése

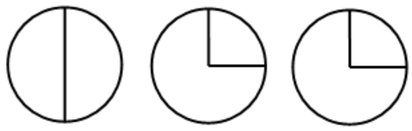
A szóhasználat nem mindenütt egységes. A régebbi tankönyvek, kézikönyvek szóhasználata szerint ezek szinonímaként használhatók, a „tört" gyakorlatilag a „törtszám" rövidítése. Ma más a helyzet. Például Padberg (1995 [165]) „törtekkel megjelenített törtszámokról" tesz említést. Úgy véli, a törtek akkor válnak törtszámokká, amikor a gyerekek számára világossá válik, hogy ezekkel ugyanazt lehet csinálni, mint más számokkal, azaz lehet

– ezeket nagyság szerint rendezni,
– számegyenesen ábrázolni,
– ezekkel számolni.

A mai magyar matematikaoktatásban különbséget teszünk tört és törtszám között. Amikor a „tört" szót használjuk, a számláló és nevező segítségével felírt alakra gondolunk. Az ilyen alakban felírt számok vagy egészek vagy nem egészek, vagyis törtszámok. Fontos megjegyezni, hogy nem célszerű egymástól megkülönböztetni a hányadosalakot és a törtalakot. Mindkettő osztást jelent.



1.28. ábra. 3a. szituáció



1.29. ábra. 3b. szituáció

4. Bevezető feladatok tervezése a tört szorzása törttel témához

A „tört szorzása törttel” egyike azoknak a fejezeteknek, amelyek előtt a tanárnak külön is érdemes elgondolkodni azon, milyen feladattal indítson, hogy a gyerekekben a téma iránt érdeklődést keltsen, hiszen első ránézésre nem túl érdekes témáról van szó.

A német matematikadidaktikai irodalomban a következő lehetőségek szerepelnek például a bevezető illetve problémafelvető feladatok motiváló szerepének növelése esetében (Barzel et.al. 2011 [27]): Kognitív konfliktus teremtése, kép, ábra, modell stb. bemutatása, kísérlet, tevékenység, játék elvégzése, egy történet elmesélése, célzott házifeladatok adása, mintapéldák megfelelő feldolgozása.

A következő bevezető problémák a „tört szorzása törttel” témakört több oldalról közelítik. A további feladatvariációk példákat mutatnak arra, hogyan lehet az eredeti problémát könnyíteni vagy nehezíteni, esetleg új tartalmalat belevinni (pl. mértékegységeket, grafikus ábrázolást, ábrázolást koordinátarendszerben ...). Ilyen módon is hangsúlyozni szeretnénk hogy a bevezető feladatok tartalma variálható, és ebben az esetben figyelembe vehetőek a különböző tanítási célok és lehetőségek is.

1. Problémafelvetés – Bevezetés matematikán belüli kapcsolatokkal a (geometria, algebra, mértékek)

Egy téglalap oldalai $\frac{1}{2}$ és $\frac{3}{4}$ részei egy nagyobb téglalap oldalainak. Mekkora a téglalap területe?

Ennél a bevezetésnél a geometria az algebrával kapcsolódik össze. A megoldás során szükséges, hogy gondolatban a geometriai ábrázolás, és egy oldalhossz valahányad része illetve a keresett rész egész területhez viszonyított aránya között „ide-oda ugorjunk”.

A gondolkodást kezdhetjük például a következőképpen: Mi lenne ha a téglalap egyik oldala 10 cm, a másik 12 cm? Hogyan nézne ki ebben az esetben a keresett terület? Mi lenne a helyzet egy egységoldalú négyzet esetében (8 x 8 cella)? Ekkor a cellák leszámolhatók, tehát az eredmény $\frac{24}{64} = \frac{3}{8}$.

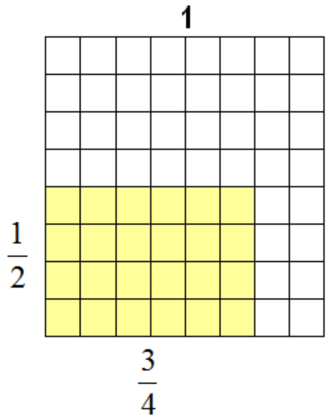
Az 1. problémafelvetés 1. variációja

Egy négyzet oldala $\frac{1}{3}$ része egy nagyobb négyzet oldalának. Mekkora a területe?

Az 1. problémafelvetés 2. variációja

Hány kilométer egy adott ($\frac{1}{4}$ km vagy 1,5 km) hosszú szakasz harmadrésze?

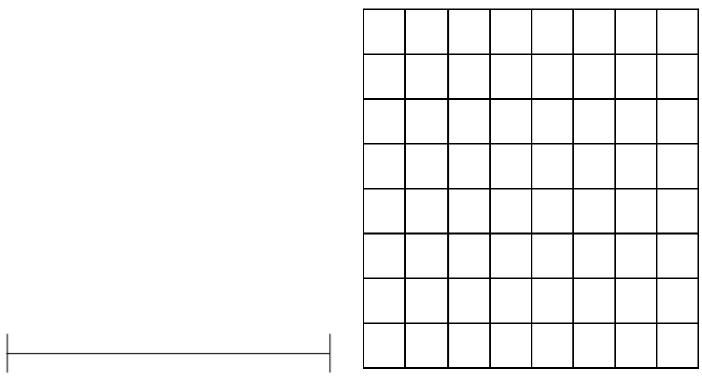
Az 1. és 2. variációk alternatívák az 1. problémafelvetéshez, miközben láthatóan megmaradt a matematikán belüli kapcsolatok előbbi hangsúlya.



1.30. ábra. A négyzet felosztása

2. Problémafelvetés – Nyelvi-értelmező bevezetés (valahányadrész megadása)

Mekkora az $\frac{1}{2}$-nek a $\frac{3}{4}$ része? Színezd be a megfelelő részt az alábbi egységszakaszon, illetve egységnégyzetben!



Ennél a bevezetésnél a megnevezett rész kerül ábrázolásra: egy szakasz vagy egységnégyzet felének a $\frac{3}{4}$ részét kell kiszínezni. A két ábra segítségével meg lehet beszélni (értelmezni) hogy $\frac{1}{2}$-szer $\frac{3}{4}$ ugyanazt jelenti mint $\frac{1}{2}$-nek a $\frac{3}{4}$ része.

A 2. problémafelvetés 1. variációja – Más számokkal

Mennyi $\frac{1}{2}$-nek az $\frac{1}{4}$ része? Próbálj többféle megoldási módot megadni!

A feladatban szereplő számok megváltoztatása megkönnyíti további megoldási módok megadását, korábbi tapasztalatokra támaszkodva. Ezekkel a számokkal akár többféleképpen is gondolkodhatnak a tanulók:

– „ Mivel egy egész szám $\frac{1}{4}$ részét megkaphatom úgy, hogy az egész számot megszorzom $\frac{1}{4}$-del, így az $\frac{1}{2}$-nek az $\frac{1}{4}$ része $\frac{1}{2}$-szer $\frac{1}{4}$. És azt már tudom, hogy $\frac{1}{2}$-szer $\frac{1}{4}$ az $\frac{1}{8}$."

– „ $\frac{1}{2}$ egynegyed része azt jelenti, hogy $\frac{1}{2} : 4$, és az $\frac{1}{8}$"

3. Problémafelvetés – Tevékenységorientált bevezetés – Hajtogatás

Hajts félbe egy A3-as papírt! Hajtsd szét, és színessel színezd be a felét, majd újra hajtsd össze! Ezután hajtsd mégegyszer félbe a lapot!
Most hajtsd mégegyszer félbe! Ezután hajtogasd teljesen szét a lapot és figyeld meg a jelölt részt. Írd le: mi történt?
Most színezd be a már kiszínezett rész felét egy másik színnel!
Ezután hajtsd megint össze a lapot majd mégegyszer félbe.
Hajtsd teljesen szét a lapot és figyeld az utóbb beszínezett részt! Írd le: mi történt?
A papírod segítségével próbáld válaszolni a következő kérdéseket.
*M*ekkora

$\frac{1}{2}$-nek az $\frac{1}{2}$ része?
$\frac{1}{2}$-nek az $\frac{1}{4}$ része?
$\frac{1}{2}$-nek az $\frac{1}{8}$ része?

A tevékenységorientált bevezetés révén a tanulók cselekvés közbeni megfigyelés során jutnak el a művelet megértéséhez. Az egyes cselekvések során le kell írniuk, hogy mit csinálnak, és azt is, hogy eközben mit figyelnek meg.

4. Problémafelvetés – Bevezetés valóságközeli szituációval

A hatodikosok hosszas tárgyalások után végre engedélyt kaptak arra, hogy egy kertet létesítsenek az iskolaudvaron. A lehető legnagyobb területet szeretnék felhasználni ehhez és arra a kérdésükre, hogy mekkora rész áll rendelkezésükre az udvaron, a következő választ kapták:

„Legfeljebb az udvar $\frac{1}{8}$ részét használhatjátok kertnek."

Arra a kérdésre, hogy mekkora is az udvar, a következő információt kapják:

„Az iskola teljes alapterületének pontosan a $\frac{2}{3}$ része udvar."

A hatodikosok tanácstalanok, mivel még azt sem tudják kiszámítani, hogy az udvar hányad részét használhatják.

Kérdésükre az iskolaigazgató válasza:

„Az iskola alapterülete 2328 m^2."

Gondold meg, hogyan számolhatták ki a tervezett kert méretét a hatodikosok! Keress többféle megoldást!

Ennél a feladatnál a korábbi ismeretek alapján úgy járhatunk el, hogy először kiszámítjuk a 2328 m^2 $\frac{2}{3}$ részét (az udvar nagysága).

Ez (2328-szor $\frac{2}{3}$) 1552 m^2. Ezután számítjuk a tervezett kert nagyságát, (1552-ször $\frac{1}{8}$), ami 194 m^2.

A számításból adódhat az a gondolat, hogy a feladat megoldása a következő módon is felírható: $(2328\cdot\frac{2}{3})\cdot\frac{1}{8} = 2328\cdot(\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{8})$, ahol a második esetben a zárójelben a tervezett kert teljes alapterülethez viszonyított aránya található, és nyilvánvalóan mindkét számítás eredménye a keresett 194 m^2.

Ebből adódik $\frac{194}{2328}$ felírásával végül egyszerűsítés után, hogy a zárójeles szorzat eredménye $\frac{1}{12}$, azaz $\frac{2}{3} \cdot \frac{1}{8} = \frac{1}{12}$, és ezzel az eredménnyel témánknak megfelelően tovább is tudunk dolgozni ...

A $\frac{194}{2328}$ egyszerűsítése nem egyszerű ebben az életkorban, de jó alkalom például problémaorientált megoldásra a nehézkes és időigényes rutinszámolás helyett.

Először 2-vel egyszerűsítve $\frac{97}{1164}$-et kapunk. Mivel a számláló páratlan a nevező pedig páros, így további egyszerűsítés páros számmal nem lehetséges. Ezek után megvizsgálható az egyszerűsítés lehetősége rendre a 3, 5, 7, 9, (11) számokkal – és látható, hogy nem megy. (A 3, 5, 9 számokkal kapcsolatos oszthatósági szabályok ismerete gyorsítja az eljárást).

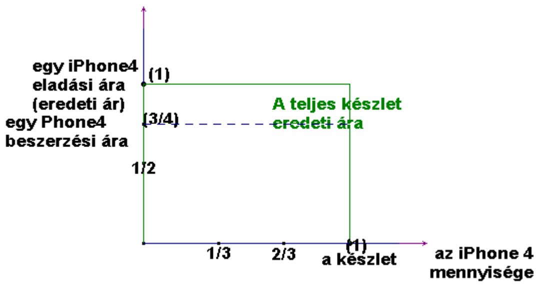
Ebből következik, hogy 97 prímszám. (Miért is?) Tehát $\frac{97}{1164}$ legfeljebb akkor egyszerűsíthető, ha 97 osztója az 1164-nek. Ez pedig fennáll, és így a legegyszerűbb alak $\frac{1}{12}$.

A 4. problémafelvetés 1. variációja – alternatív feladat

*E*gy marketingmenedzser az új iPhone 4S piacra kerülésével egyidejűleg azt a feladatot kapta, hogy a korábbi iPhones típus raktárkészletét számolja fel minél gazdaságosabban. Az iPhone 4 beszerzési ára $\frac{2}{3}$ része az eladási árnak.

Abból a célból, hogy legalább a beszerzési ár megtérüljön, (azaz ne legyen veszteség) a piaci lehetőségek ismeretében a menedzser a következő akciót javasolja: a készlet $\frac{2}{3}$ részét árusítsák ki az eladási ár $\frac{3}{4}$ részéért. Ezután a megmaradt készletet a továbbiakban árulják az eladási ár feléért.

Ezzel a stratégiával eléri-e célját a marketingmenedzser?

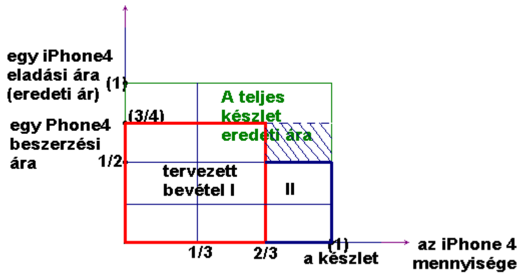


1.31. ábra. Ábra a tanulóknak

Mivel a feladat nem könnyű és nem várható el, hogy a gyerekek maguktól rájönnek milyen ábra segíthetne, fontos a segítő rajzot is odaadni nekik a megoldáshoz (az 1.31 ábra).

Az ábrával történő megoldás annak is fontos, aki enélkül is helyesen dolgozott, mert fontos problémamegoldó stratégiát tanul vele.

Ennek segítségével végül megadható $\frac{2}{3}$-szor $\frac{3}{4}$, és ebből adódik $\frac{2}{4} = \frac{1}{2}$ rész, azaz az akció első részében az eredeti ár fele lesz a tervezett bevétel. A további akcióban a



1.32. ábra. Példa a megoldásra

maradékot ($\frac{1}{3}$ „rész") az ár feléért akarják eladni, és így nem teljesíthető a terv, ahogy az ábra is mutatja.

Várhatóan van, aki észreveszi, hogy a második akciónál általában az erdeti ár $\frac{3}{4}$ részénél kisebb árral nem érhető el a cél. Ezt a gondolatot akkor is fontos megbeszélni a tanulókkal, ha a megoldás során nem merült ez fel.

5. Problémafelvetés – Folyamatorientált (direkt) bevezetés

A hatodikos Áron a múlt órán tanult arról, hogyan lehet két törtet összeszorozni. Nézd meg milyen feladatmegoldások és ábrák vannak a füzetében. Próbáld megmagyarázni, hogyan számolt és milyen kapcsolatban állnak az ábrák a megoldásokkal!

Ahol szükséges írd be a hiányzó megoldásokat!

$\frac{1}{4}$-szer $\frac{1}{4} = \frac{1}{16}$
$\frac{1}{2}$-szer $\frac{1}{4} = \frac{1}{8}$
$\frac{3}{4}$-szer $\frac{1}{2} = \frac{3}{8}$
$\frac{1}{4}$-szer $\frac{1}{3} =$
$\frac{1}{5}$-ször $\frac{2}{3} =$

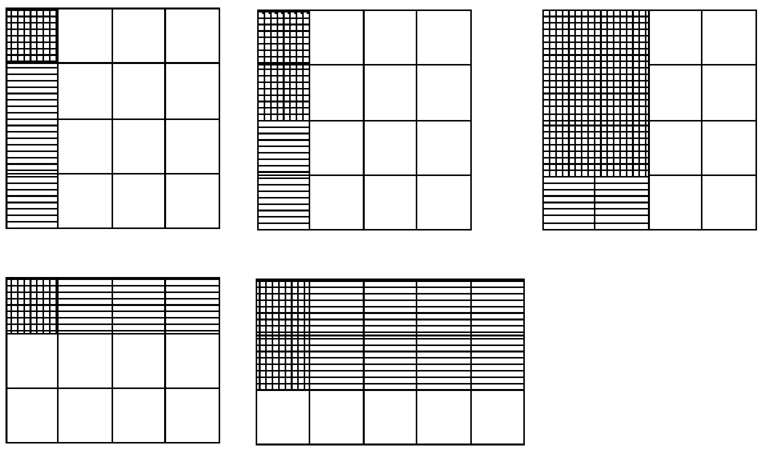
Ennél a bevezetésnél feladatok és az ábrák segítségével a tanulók önállóan fogalmazhatják meg a szabályt. Ez a bevezetés közvetlenül szabálymegfogalmazásához vezet, míg a korábbiak előkészítést adtak ahhoz.

Megjegyzés:

Az előbbiekben bemutatott bevezető feladatokból összeállítást is készíthetünk, hogy a törtek szorzásának vonatkozásai minél teljesebben kerüljenek tárgyalásra, ezeket egymás után oldhatják meg a tanulók.

5. Gondolatok bevezető feladatok tervezéséhez

Egyáltalán nem könnyű megfelelő, kellően problémaorientált bevezető feladatokat készíteni. Mindenekelőtt fontosak az eredeti ötletek és ezek kidolgozásához pedig nem kevés idő is szükséges esetenként.



1.33. ábra. Hogyan számolt Áron?

A összegyűjtöttünk néhány szempontot, amelyek segíthetik a bevezető feladatok tervezését. Ez a gyűjtemény inkább elgondolkodásra szeretne késztetni, nem követ fontossági sorrendet és bizonyára nem is teljes.

Szempontok bevezető feladatok tervezéséhez:

- Megoldható-e a feladat az eddigi előismeretekkel, a korosztálynak megfelelő problémamegoldási stratégiákkal, és természetesen a józan ész segítségével ...
- Érdekes-e az adott feladat a tanulóknak? Esetleg izgalmas, vagy netán vidám a téma?
- Megfelelő szintű-e a nehézségi fok? Eléggé gondolkodtató-e a feladat?
- Lehetőséget ad-e a feladat arra, hogy a tanulók megvitassák a benne megfogalmazott kérdést?
- Könnyen variálható-e a feladat? Például szükség esetén könnyíthető-e mondjuk a számok megfelelő változtatása révén, vagy ábrával segítségével?
- A feladattal megfelelően elérhető-e a kitűzött matematikai cél?
- Milyen további feladatok szükségesek még a téma megfelelő kifejtéséhez?
- Megfelelően változatos bevezető feladatokat készítek-e általában, vagy inkább ugyanolyan típusokat szeretek használni bevezetésként?
- A bevezető feladatok lehetőséget adnak-e különféle ismeretek összekapcsolására? Előkerülnek-e ennek során a matematika különböző területei is?

- Vannak-e olyan valós szituációk, amelyek az adott matematikai téma használhatóságát közvetlenül mutatják?
- ...

Szempontok bevezető feladatok alkalmazásához:

- A probléma megoldásához milyen külön segédanyagot kapnak a tanulók?
- Milyen is legyen ez a segédanyag konkrétan?
- Milyen előnye és hátránya van ezen anyagok használatának?
- Mikor kapják ezeket az anyagokat a tanulók? (Mindjárt az elején, esetleg valamikor később ...)
- Milyen formában kapják a tanulók a feladatokat? Írásban? Képek illetve ábrák segítségével? Szóban? Szövegesen magyarázó ábrákkal vagy anélkül?
- Milyen segítséget kaphatnak a gyengébben teljesítők a feladatmegoldáshoz?
- ...

1.5.2. Ambrus Gabriella: Törtek bevezetése kétféle felfogásban

A szöveg rövidített változata az Iskolakultúra 2008/1, 78-92. megjelent tanulmánynak. http://www.iskolakultura.hu/ikultura-folyoirat/documents/2008/2008-1-2.pdf 2013.02.26.

A következőkben két feladatlappal foglalkozom, amelyek ötödikes gyerekek számára készültek azzal a céllal, hogy törtekkel kapcsolatos ismereteiket a témakörrel való foglalkozás kezdeti szakaszában, gyakorolják, mélyítsék és kiegészítsék. A két feladatlap elkészítésénél a Magyarországon leginkább elterjedt hagyományos és problémaorientált tanítási stílust vettem alapul. (A feladatlapokat már idéztük ebben a könyvben, lásd az 1.1. és az 1.2., illetve az 1.3. ábrákon. – az ábra számát jelző linkre klikkelve megjelenítheti azt.)

Az első feladatlap (I) hagyományos feladatokat tartalmaz, míg a második lap (II) részben egymásra épülő feladatok megoldásával arra is alkalmas, hogy a tanulók egyénileg dolgozva bővítsék ismereteiket. Ez utóbbi lapon szokatlan feladatok is szerepelnek, amelyek megoldása többféle szempontból is problémahelyzet elé állítja a tanulókat.

A két feladatlapot négy különböző iskolában ötödikes tanulók, 4 tanulócsoport (A, B, C, D), összesen 85-en oldották meg a 2004-2005-ös tanévben. A munkában önkéntesen résztvevő tanárok külön lapon kaptak „eligazítást”, többek között megkértem őket, hogy

– jellemezzék röviden az osztályt matematika tanulás(i kedv) és tudás szempontjából,

– döntsék el, hogy egy vagy két órában oldja meg osztályuk a két lapot; de adják meg, hogy melyik változatot választották,

– lehetőleg a törtek tanulásának bevezető részében dolgozzanak a lapokkal, és jelezzék, hogy abban az évben már körülbelül hány órában foglalkoztak törtekkel,

– a gyerekek önállóan dolgozzanak, de ha kell kérhetnek segítséget, (ezt adott esetben jelezzék)

– írják le, melyik feladatokat találták a tanulók nehéznek és azt is, melyik feladat tetszett illetve nem tetszett a tanulóknak.

A tanári válaszok alapján a következőket tudhattuk meg:

A

- Átlagos képességű osztály (18 fő), többségük szereti a matematikát, sok mindent jól tudnak már a törtek témakörből az alsó tagozatos tanulmányaik alapján
- 2 órában oldották meg a feladatlapokat
- ebben az évben még nem foglalkoztak a törtekkel
- nehéznek tartották az I. 4d, 5c, 6, 7 és a II.2,3,4, 5b feladatokat

B

- jó képességű csoport (14 fő), szívesen tanulják a matematikát, sok a jól dolgozó, szorgalmas gyerek,
- 1 órában oldották meg a két feladatlapot
- Már volt az idén: tört fogalma, törtrész meghatározása, tört ábrázolása számegyenesen
- Nehéznek találták a II. 1, 3, 4 feladatokat, és a tanár úgy vélte, hogy a II.3 feladat „nem szerencsés, talán hibás is. Az a) ábra $\frac{1}{4}$ helyett $\frac{1}{2}$-et ad meg, azt hiszem ezzel a feladat határozatlanná válik. (Ha 4 ábrából kettő nem illik a sorba, az már nem kakukktojás.) Ha 3 ábrába 1 nem illik, akkor szinte tetszőlegesen folytathatja a gyerek – 4. feladat. Ebben a két feladatban a gyerekek az első ábrát gyakran kimondatlanul is $\frac{1}{4}$-nek vették."

C

- Vegyes csoport (27 fő), „szélsőséges összetételű osztály" (10-12 versenyképes, 4-5 nagyon gyenge), a matekot a többség szereti
- 2 órában írták
- már foglalkoztak valamennyit törtekkel
- a nehézségről nincs információ

D

- Az osztályon belül (26 fő) nagy eltérések vannak. A középmezőny szorgalmas együttműködő.
- 2 órában írták
- a törtek témakörével nemrég (3-4 órája) kezdtek foglalkozni
- időnként gond volt a feladatok megértésével. Nehéz az I. 4, 6 feladat.

A tanárok szerint a gyerekek általában szívesen dolgoztak a lapokon, részletes vélemény arról, hogy melyik feladat tetszett illetve nem tetszett, csak az A csoport esetében érkezett (szmájli formában). Az ő véleményük szerint legjobban tetszett az I.5. feladat (5 tetszett, 1 nem tetszett szavazat) és legkevésbé tetszett a II.2 feladat (8 nem tetszett, 1 tetszett szavazat).

Ebben a csoportban, akiknek tetszett egy feladat, azok azt általában nem vagy csak részben oldották meg jól.

A II.3. feladat 4 tanulónak tetszett, 1-nek kifejezetten nem, a többi nem nyilvánított véleményt. A II. 4 3 tanulónak tetszett és 3 tanulónak nem tetszett. A II.5 feladat 2 tanulónak tetszett 1-nek nem tetszett. A többi feladattal összehasonlítva ez utóbbi volt a „legközömbösebb" (azaz a legtöbb tanulónak közömbös) feladat.

A feladatlapok szerkezete és összefüggések a feladatok között; a tanulói megoldások elemzésének szempontjai

Az első feladatlap folytonos és diszkrét mennyiségek törtrészének kiszámításával foglalkozik már ismert feladattípusok segítségével.

Az első három feladatban a törtrész leolvasásához kész „eszköz" (ábra) áll a tanulók rendelkezésére, a negyedik és ötödik feladatban nekik kell esetenként kiegészíteni ábrát. Az első három feladat a törtek fogalmának alapismereteit veszi át (egyenlő részekre osztás, törtrész ábrázolása, törtrész megnevezése, jelölése, elnevezések), már ismert modelleken dolgozva.

A negyedik és ötödik feladat az ismeretek alkalmazását jelenti, e két feladat (adott törtrész beszínezése, beszínezett rész nagyságának megadása) egymás inverzeinek tekinthető. A részfeladatok ebben a két feladatban nem nehézségi sorrendben követik egymást. E két feladat az előbbieken kívül annyiban függ össze, hogy az I.5e (ami könnyű feladat) segítséget adhat I.4d megoldásához. Az I.4d így készíthető felosztása nem könnyű és nem is várható el előzmények nélkül a tanulóktól. Feltételezhető, hogy aki ilyen felosztással oldotta meg a 4d-t, az vagy ismerte a feladatot, (ami általában nem jellemző), vagy az 5e megoldása után visszatért a 4d megoldásához (ez a várható).

Megnézzük, hogy aki jól megoldotta az I.5e-t, azok közül hányan oldották meg ezzel a felosztással a I.4d-t, azaz hány esetben segítette az 5e feladat a 4d-t. Ez azt is jelenti általában, hogy ezek a tanulók a feladatokat nemcsak egymás utáni sorrendben oldották meg rendre, hanem átgondolva hol volt problémájuk, képesek voltak arra is, hogy visszalépjenek, amikor ötlethez jutottak.

Az I.6. feladat „rokona" a 3.-nak, de ebben az előbbi feladatban egy szakaszon a tanuló végzi a szükséges méréseket és számításokat.

Feltehető, hogy aki tudta a 3. feladat helyes megoldását, azt átgondolva ezt is helyesen oldotta meg.

A 7. feladat törtrész kiszámításával kapcsolatos. A 2., 3. és 7. feladat azonos tartalmú, az utóbbi esetben nem kötelező az ábrázolás, míg az előbbiek megoldásához hozzátartozik.

A második lap 1. feladata többféle jó beszínezést kér azaz több megoldást adott törtrész megadásához. Mivel a tanulók korábbi tanulmányaik során feltételezhetően már többféleképpen megadták egységtéglalap törtrészét, a feladat megoldásához rendelkeztek kellő előzetes tapasztalattal. A nehézséget, a problémahelyzetet egyrészt a többféle jó megoldás megkeresése jelenti (kiválasztás a bennük élő képekből egyéni meggondolás segítségével) hiszen megadott felosztás most nem segíti a megoldást másrészt a megoldás megfelelő lejegyzése. Gyakorlatilag egyfajta nyitott feladattal állunk szemben hiszen több megoldást kell megadni ugyanarra a feladatra.

A II.2 második része a II.1. feladatra épül (het) amennyiben a megoldás az egység egymás után végrehajtott többszöri felezésének felhasználásával készül. A 2. feladat első része annyiban kapcsolódik az első feladathoz, hogy jó megoldás adható meg úgy is, ha az $\frac{1}{2}$ ből rendre „egyre többet" veszek, például $\frac{2}{2}$, $\frac{3}{2}$, $\frac{4}{2}$.

A II.2 feladat azért nehéz, mert egy feladaton belül kell váltani ($\frac{2}{2}$-hez képest kisebb, nagyobb tört megadása; számláló, nevező figyelése).

Nem megszokott jelenség, hogy egy magyar matematika feladatban kakukktojás keresésre kerül sor, mint ez a II.3 feladat esetében történik. Pedig ezek a feladatok különböző ismeretek, gyakran hagyományostól eltérő alkalmazásán túl jó lehetőséget biztosítanak arra, hogy vélemények ütközzenek, különböző elgondolások megvitatásra kerüljenek, és ezen felül motiváló hatással is bírnak.

Ez a feladat is a „nyitott" feladatok körébe tartozik, hiszen többféle jó megoldása van.

A törtekkel kapcsolatos „környezet" miatt elsősorban a törtek témakörből várhatók megoldások.

Várható helyes megoldások törtekkel kapcsolatban:

A d) mivel ebben az esetben nem határozható meg mekkora rész színezett.

A d) mivel nem tudom megadni a színezett rész nagyságát (de a többi esetben igen).

A d) mivel a kört nem egyenlő részekre osztották.

A tanulóknak meg kellett indokolniuk válaszaikat, hiszen abból látszik, hogy elfogadható-e a válasz.

Például a d) helyes válasz, ha az indoklásban utalás van arra, hogy ebben az esetben nem egyenlő részekre történt a felosztás. Viszont helytelen válasz abban az esetben, ha az indoklás szerint „nem az alakzat negyede lett beszínezve". Ugyanis így a megoldó helytelenül azt állítja, hogy a többi három alakzat esetében a negyed színezett.

Hasonlóan helytelen és helyes is lehet az a) mint „kakukktojás". Helytelen, ha az indoklás az, hogy itt „nem a negyedrész színezett" vagy, hogy „mert itt két negyed van beszínezve". Ebben az esetben a megoldó feltételezi, hogy a többi esetben azonos rész, azaz egy negyed színezett.

Várható nem törtekkel kapcsolatos helyes megoldások:

Az a) mivel itt nem egyenes szakaszokkal osztották fel az alakzatot.

Az a) mert azon két rész van beszínezve a többi esetben csak egy.

A c) mivel az nem kör.

A feladat abból a szempontból is problémahelyzet elé állítja a tanulókat, hogy akár törtes, akár nem törtes megoldást keres, nem jut célhoz közvetlenül az ismert eljárások között keresgélve, hiszen az ábrákat egyenként, illetve párosával, valamint együtt is vizsgálnia kell.

Amennyiben a tanuló a törtes megoldás keresésénél marad, úgy véleményünk szerint az I. feladatlap 1,4,5 valamint a II. feladatlap 1. feladata segítheti a megoldást hiszen ezek alakzat törtrészének meghatározását gyakoroltatják többféle módon. Az is lehet, hogy a II.3 feladat „törtes" megoldása azért sikerül, mert a tanuló kellő ismeretekkel rendelkezik a törtekről, és ezt az említett 4 feladat lényegileg jó megoldása mutatja.

Az, hogy a tanuló nem törtes megoldást keres, az várhatóan abban az esetben fordul elő egyrészt, ha a törtekkel kapcsolatos ismeretei elég biztosak, a két lap feladatai nem okoznak különösebb nehézséget, így van ideje, energiája ebből a gondolatkörből kilépve is gondolkodni. Másrészt abban az esetben, ha a törtekkel igen nehezen dolgozik még vagy általában nem szereti a szokásos matematika feladatokat, így szívesebben választ más tartalmú megoldást. Az előbbi esetek többféleképpen „keverten" is előfordulhatnak.

Ha a tanuló azt válaszolta, hogy a sorba nem illő d) jelű ábra a „kakukktojás" mert nincs egyenlő részekre osztva, ez az egyébként helyes válasz még nem jelenti azt, hogy tudja, alakzat törtrészének meghatározásához szükséges a megfelelő egyenlő részekre osztottság megléte, lehetősége. Ugyanis ez az indoklás adódhat csupán abból, hogy például a szimmetriaérzéke szerint válaszolt. Erre a jelenségre utalhat az, hogy ha a II.3 feladat helyes megoldása esetén az 5/b feladat megoldása nem megy.

Ha viszont az szerepel a válaszban, hogy a d) esetet azért választotta, mert ebben nem tudja meghatározni a színezett rész nagyságát, (de a többiben igen), akkor várhatóan az 5.b-re is jó megoldást ad.

Véleményünk szerint a „kakukktojáskeresés" amellett, hogy a meghatározhatatlan nagyságú területrészt is szerepeltet, kizökkenti a tanulókat a szokásos feladatmegoldási rutinból, így segíthet abban, hogy nem szokványos válaszokat is le merjenek írni. Ugyanis az 5b helyes megoldását, – azaz, hogy nem tudja mennyi a színezett rész–, gátolhatja az iskolai gyakorlat, mely szerint a „nem tudom" tárgyi hiányosság esetén használatos, valamint, hogy matematikaórán a feladatoknak konkrét megoldása szokott lenni. Emiatt a tanuló elbizonytalanodhat, jól gondolkodott-e, ha nem tud ilyen megoldást adni, és nem ír semmit. Vélhetően tehát a jó megoldásra gondolt szerintünk az, aki az 5. feladat esetében például csak a b) feladatra nem írt semmit (nem merte leírni, hogy nem tudom), és így a helyet alatta üresen hagyta, ám a többi részfeladatot helyesen megoldotta. Az előforduló néhány ilyen esetben az 5b és ezzel a teljes feladat megoldását helyesnek vettem. A II.4.-hez összesen 2, részben jó próbálkozás akadt, ami arra utal, hogy ez szokatlanabb volt, mint a II.3. Értékelhető megoldások hiányában ezzel a feladattal ebben a részben nem foglalkozom.

A feladatokban megjelenő matematikai kompetenciákról

A matematikai kompetencia fogalmat Mogens, Niss (2003 [147]) rendszere szerint használom. A matematikában kompetensnek lenni Mogens, Niss (2003 [147]) szerint jelenti a matematikai tartalom ismeretének, megértésének, használatának és kidolgozásának képességét matematikán belüli és kívüli kontextusok esetében. A matematikai kompetencia jól felismerhető, fő alkotórésze az előbbi képességnek, és a kompetenciák nem feltétlenül függetlenek egymástól. Niss a következő fő kompetenciákat tartja számon:

1. Matematikai gondolkodás képessége (Mathematical thinking skill)

2. Matematikai érvelés képessége (Mathematical argumentation skill)
3. Modellezési képesség (Modelling skill)
4. Probléma felvető és megoldó képesség (Problem posing and solving skill)
5. Reprezentáló képesség (Representation skill)
6. Szimbolizmusra, formalizmusra való képesség (Symbolic, formal skill)
7. Kommunikációs képesség (Communication skill)
8. Segédletek és segédeszközök (ismeretére, használatára való) képesség (Aids and tool skill)

A táblázatban annak bemutatására, hogy az egyes feladatok véleményem szerint mely kompetenciákat fejlesztik, felhasználtam Mogens, Niss (2003 [147]) fő kompetenciáinak további részletezését.

A táblázatból kitűnik, hogy az I. feladatlap feladatai az első négy kompetenciaterületet nem igazán fejlesztik, viszont az 5. (Megjelenítés), a 6. (Szimbolizmus, formalizmus), valamint a 7. (Kommunikáció) fejlesztésében valamivel hangsúlyosabb szerepet játszanak, mint a II. feladatlap feladatai.

A II. feladatlap feladataira általában nemcsak az a jellemző, hogy egyenként lényegesen több kompetenciát fejlesztenek, mint az I. feladatlapé, hanem a „kompetenciaeloszlás" is egyenletesebb. Ezek a tények a feladatok problémafelvető és általában nyitott jellegének következményei.

Ha számszerűen nézzük, akkor a II. feladatlap feladatai összességében több kompetenciát és ezeket egyenként többször fejlesztik, mint az I. feladatlap, pedig azon több feladat szerepel. A két feladatlap esetében hasonló összehasonlító vizsgálatot végeztem a magyar NAT-ban és az osztrák Lehrplan 2000-ben előírt fejlesztendő alapkészségek alapján (Ambrus G. 2003 [10]). Az I. (hagyományos) feladatlapra jellemző volt, hogy általában kevesebb alapkészséget, de ezeket többször gyakoroltatta (a kötelezően előírtat szinte az összes feladat), mint a II. feladatlap feladatai. A II. (problémamegoldó) feladatlap esetében a gyakoroltatott alapkészségek a feladatok között egyenletesebb eloszlást mutattak, mint az I. feladatlapnál.

A két elemzés alapján a következők állapíthatók meg:

- A NAT előírásainak mindkét lap megfelelt, a kompetenciák közül a hagyományos feladatok jóval kevesebbet fejlesztettek, mint a problémaorientáltak.
- A hagyományos lap a kompetenciák fejlesztéséhez kevésnek bizonyult.
- A II. lap többféle alapkészséget, de ezeket kevesebbszer gyakoroltatta, míg az I. lap kevesebbet, de ezeket többször. Ezzel mintegy kiegészítik egymást az alapkészségek fejlesztése tekintetében, hiszen a hangsúlyosakat a hagyományos lap is jobban hangsúlyozza.
- A hagyományos feladatlap feladatai egyes kompetenciákat valamivel jobban előtérbe helyezett, mint a II. feladatlap (összehasonlítás a feladatokban való előfordu-

Matematikai kompetenciák	I. feladatlap							II. feladatlap				
	1	2	3	4	5	6	7	1	2	3	4	5
1. Matematikai gondolkodás												
Matematikai kérdések feltevésének és az adható válaszok jellegének ismerete …	+						+		+	+	+	+
Elvek kiterjesztése és az eredmények általánosítása									+			
Különbségtétel különböző jellegű matematikai állítások között												
Koncepció érvényességi körének megértése, kezelése, korlátozása												
2. Matematikai probléma felvetése és megoldása												
Probléma beazonosítása meghatározása (tiszta, alkalmazott; nyitott végű, zárt)								+	+	+	+	
Különböző jellegű problémák megoldása				+				+	+	+	+	+
3. Matematikai modellezés												
Meglevő modell alapelveinek és tulajdonságainak elemzése										+		
Meglevő modellek lefordítása, interpretálása …												
Adott témában tényleges modellezés												
4. Matematikai érvelés												
Mások bizonyításának követése, értékelése												
Különbségtétel matematikai bizonyítás és más bizonyítások között pl. heurisztikus bizonyítás	+										+	
Bizonyítás alapvonalának felismerése, elkülönítése a részletektől												
Formális és nemformális bizonyítás készítése, heurisztikus bizonyítás átalakítása matematikaivá	+									+	+	
5. Matematikai tartalmak megjelenítése												
Matematikai objektumok, jelenségek, szituációk különböző reprezentációinak értékelése, használata, interpretációja…				+		+						
Ugyanazon entitások különböző reprezentációinak megértése, felhasználása és korlátok				+		+		+		+		+
Választás és váltás reprezentációk között					+	+	+	+				+
6. Matematikai szimbolizmus és formalizmus												
Szimbolikus és formális matematikai nyelv dekódolása, interpretációja és kapcsolata köznapi nyelvvel		+		+		+						
Formális matematikai rendszerek természetének és szabályainak értése												
Fordítás köznapiról formális, szimbolikus nyelvre					+		+	+				+
Szimbólumokat és formulákat tartalmazó matematikai kifejezések kezelése és használata				+	+	+			+			
7. Kommunikáció matematikán kívül, belül és a matematikáról												
Mások szóbeli, írott, vetített szövegeinek megértése	+						+	+		+	+	
Saját gondolatok kifejezése különböző módokon, különböző szinteken		+			+		+			+	+	
8. Segédeszközök használata												
Általános tájékozottság és a használati kör ismerete												
Képesség az eszközök átgondolt használatára, alkalmazására	+									+		+

1.34. ábra. Kompetenciák fejlesztése

lás alapján), viszont ezzel egyidejűleg más kompetenciák fejlesztése, (amely a II. lapnál megtörtént) elmaradt.

Ez utóbbi tény várhatóan megfigyelhető általában a hagyományos feladatoknál, így felmerül az a lehetőség, hogy bár a problémaorientált feladatok a kompetenciák fejlesztését általában jobban támogatják, néhány kompetencia célzott fejlesztése hagyományos feladatokkal is történhet. Ez lényegileg a kétféle tanítási stílus, az alapkészségek esetében már említett, egymást kiegészítő jellegét jelenti a kompetenciaalapú tanítás esetén is.

A helyes feladatmegoldások számának alakulása és a kompetenciák

A következő táblázatban azok számát tüntettük fel, akik az adott feladatokat legfeljebb egy hibával megoldották, illetve a II.1 feladat esetében jó megoldásokat készítettek, és legalább 2-2-t soronként, azaz lényegileg jól dolgoztak. A továbbiakban a „helyes megoldók" ezeket a lényegileg jól dolgozókat is jelentik. A II.3 esetében a jó megoldást (betűjel és indoklás helyes megadása) jelenti a helyes megoldást értelemszerűen. Ezen kívül a következőket vettem figyelembe:

– Az 1. feladatban Béla rajzának értékelésekor fontos az indoklás, de mivel külön nem kértük, és ötödikesekről van szó, az egyértelmű „nem" választ is helyesnek vettem.

– Ha egy jó megoldás elkészült a II.2 feladathoz, a feladatmegoldást jónak vettem.

– Vélhetően a jó megoldásra gondolt, mint már korábban az 5. feladat esetében az aki csak a b) feladatra nem írt semmit, azaz a helyet alatta üresen hagyta, ám a többi részfeladatot helyesen megoldotta. Az előforduló néhány ilyen esetben az 5b és ezzel a teljes feladat megoldását helyesnek vettem (ld. megjegyzések a feladatok összefüggéseinek tárgyalásánál).

	I. feladatlap							II. feladatlap					
Csoport	1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.	1.	2.	3.	4.	5.	5/b
A (18 fő)	12	10	13	11	16	11	9	5	7	6	0	2	0
B (14 fő)	12	10	13	13	11	14	14	12	12	10	0	7	5
C (27 fő)	25	19	22	23	24	19	21	24	18	18	1	11	7
D (26 fő)	17	20	16	13	16	12	10	9	11	16	1	2	5
Összesen	**66**	**59**	**64**	**60**	**67**	**56**	**54**	**51**	**48**	**50**	**2**	**22**	**17**

1.35. ábra. A helyes megoldók száma csoportonként és feladatonként.

A több kompetenciát fejlesztő feladat helyes megoldói általában kevesebben vannak, de a II.3 feladat kivétel. Ennek egyik oka az lehet, hogy a feladat nem az összetettsége, több részfeladata miatt fejleszt több kompetenciát, hanem a feladat megfogalmazása teszi ezt lehetővé. Erre még visszatérek. Azonos a kompetenciaszám (6) mégis a II.1 feladatot jóval többen oldották meg jól, mint a II.5-t. A fő ok itt a szükséges ismeretek

Feladat	I.1	I.4	I.6	II.1	II.2	II.3	II.4	II.5
Helyes megoldók száma	66	60	56	51	48	50	2	22
Kompetenciák száma	5	5	5	6	5	9	7	6

1.36. ábra. A legalább 5 kompetenciát fejlesztő feladatok.

eltérő mennyiségében illetve mélységében keresendő. Hiszen míg a II.1 feladat ismert alakzat (téglalap) adott törtrészének kiszínezését kéri bár kissé szokatlan formában, addig a II.5 minden részfeladatában a megadott egységalakzat alapján kell gondolkodni, sőt a felosztást egyes esetekben ki is kell egészíteni. További „nehezítés”, hogy egy részfeladat (a b)) esetében azt is meg kell gondolni, hogy nincsen megoldás.

Az eredmények is mutatják, hogy önmagában a kompetenciák feltérképezése nem alkalmas a feladatok jellemzésére, összehasonlítására. Adott kompetencia fejlesztése különböző nehézségű illetve – ezzel valamennyire összefüggésben, – eltérő matematikai tartalomgazdagságú feladatokkal is lehet. A II. feladatlapon több ismeret kerül általában gyakorlásra (Ambrus, G, 2003). Ennek alapján megállapítható, hogy a több ismeret felhasználását igénylő feladatok általában több kompetencia fejlesztését is lehetővé teszik.

Az a tény, hogy könnyebbnek és nehezebbnek bizonyuló feladatok (ebben az esetben a II.3) is fejleszthetnek viszonylag nagyszámú kompetenciát, azt a lehetőséget is jelenti, hogy megfelelően fogalmazott könnyű feladatokkal is számos kompetencia fejleszthető. Ezért is fontos, hogy feladatok tudatos vizsgálata, átfogalmazási és kiegészítési lehetőségeinek elemzése.

A megoldások további értékelése a feladatlapok elemzésénél megadott szempontok alapján

1. Azok közül akik jól oldották meg az I.3-t hányan oldották meg jól az I.6-t

	I.3 jó	I.6 jó ha az I.3 jó	I.6 jó
A	13	10	11
B	13	13	14
C	22	18	19
D	16	12	12

1.37. ábra. Akik jól oldották meg az I.3-t

A két feladat lényegileg helyes megoldása mutat összefüggést. Az I.6 megoldói lényegében megegyeznek azokkal, akik az I.3 mellett az I.6-t is helyesen oldották meg. Az I.3 jó megoldói feltehetően azért vannak általában többen mint az I.6-é, mert az előbbi ismertebb feladattípus, másrészt az első feladatok között szerepel, azaz a tanulók többsége eljutott idáig.

2. Azok közül, akik jól oldották meg az I.5e-t, hányan oldották meg az ott megadott alakzatfelosztás alkalmazásával az I.4d-t

	I.5e jó	I.4d jó megoldása 5e felosztásával készült (és 5e jó)	I.4d jó más módszerrel (és 5e jó)
A	16	2	-
B	13	-	7
C	26	7	5
D	23	-	4

1.38. ábra. Akik jól oldották meg az I.5e-t

Az eredményekből látszik, hogy az I.5e feladat nem segítette a 4d megoldását. Ennek oka lehet, hogy

– az 5e és a 4d részfeladatokban az egységalakzat nem jelentette számukra ugyanazt az alakzatot az eltérő arányok miatt

– a feladatokat sorban szokták elvégezni, kapcsolatot nem is keresnek köztük, (főleg nem visszafelé) (ld. hagyományos típusú oktatás jellemzői)

3. Ha a II.3 jó, akkor az I.1, 4, 5 és II.1 feladat illetve a II.5b feladat is jó

	II.3 jó	I.1, 4, 5 és II.1, 3 jó	I.1, 4,5 és II.1 jó	Ha II.3 jó, II.5b jó	II.5b jó
A	10	6	8	4	6
B	18	14	19	7	7
C	7	1	3	0	0
D	16	4	6	2	5

1.39. ábra. Akik jól oldották meg a II.3-t és ...

A II.3 feladatra általában törtekkel kapcsolatos helyes megoldás érkezett. Az I.1,4,5 és II.1 feladatok helyes megoldása esetén sok esetben a II.3 is jó.

Általában igaz, hogy a „kakukktojás keresés” jobban ment, mint az 5.b feladat megoldása. A II.3. feladat jó megoldása nem jelentette azt, hogy a lapon az 5b-t is meg tudták oldani a tanulók, de a II.5b jó megoldói főleg azok közül kerültek ki, akik a II.3-t is jól megoldották.

4. Azok a megoldások, ahol nem törtekkel kapcsolatos ismereteket alkalmaztak a II.3 feladat jó megoldásában:

A: –

B: 1 A jelzett 4 feladatot maximum 1 hibával, a II.5 3 hibával, az 5b-t jól oldotta meg

C: 2 Mindketten a megelőző (említett) 4 feladatot gyengén, a II.5-t 3 hibával, az 5b rosszul oldották meg

D: 2 Az egyik az I. lap 3 idézett feladatát 1-2 hibával, a másik több mint 3 hibával oldotta meg, mindkettőnél: rossz a II.1, a II.5-ben mindkét esetben 3 hiba található, és mindketten rosszul oldották meg az 5b-t.

Aki nem törtes megoldást adott (igen kevesen) az közepesen teljesített inkább.

A viszonylag jó teljesítményt nyújtók között csak egy akadt, aki nem törtekkel kapcsolatos megoldást készített a II.3. feladathoz. A II.3. feladathoz több megoldás keresésének nyoma elvétve található, két helyes megoldás két esetben szerepel csak (A és D csoportban 1-1), három, vagy annál több megoldás pedig sehol sem.

A II.3 feladat jó megoldása nem jelentette azt, hogy a II.5b-t is sikerült megoldani, ahogy ez feltételezhető is volt (vö. II.3 feladat).

5. Annak vizsgálata, hogy hogyan oszlanak meg a helyes és helytelen válaszok az 5b)-re aszerint, hogy a 3d)-re milyen (helyes) indoklás érkezett.

Helyes és helytelen válaszok az 5b)-re aszerint, hogy 3d)-re milyen (helyes) indoklás érkezett:

d), mert nem tudom a színezett rész nagyságát megállapítani	5b jó	5b rossz
A: 2	2	–
B: –	–	–
C: –	–	–
D: –	–	–
d), mert nem egyenlő részekre van osztva		
A: 7	2	5
B: 16	6	10
C: 4	–	4
D: 12	–	12

1.8. táblázat. 3d) helyes, 5b) jó vagy rossz

Ebből látszik, hogy az 3d)-re helyesen válaszolók közül:

– kevesen válaszolták azt a II.3. esetében, hogy azért, mert nem tudják a színezett rész nagyságát,

– akik ezt válaszolták (2), azok az 5b)-t is helyesen oldották meg,

– a „d) mert nem egyenlő részekre van osztva” helyes válasz mellett gyakrabban adtak helytelen választ az 5b-re, mint helyeset.

A tanulói munkák alapján

Messzemenő következtetések nem vonhatók le, hiszen ehhez nem rendelkezünk elég nagyszámú adattal. Az rendelkezésre álló kitöltések alapján a következők állapíthatók meg:

– A feladatlapok alapján több esetben is az derült ki, hogy a tanulók nem kerestek kapcsolatot a feladatok között (I.4d-I.5e, II.3-II.5b). Még a viszonylag jó teljesítményt nyújtó csoportok esetében is ez volt a helyzet.

– Úgy tűnik a tanulók gondolkodása erősen kötődött a konkrét tananyaghoz a II.3 megoldásánál (lásd törtes megoldások), és még az egyébként matematikaórákon szereplő szimmetria-meggondolások vagy alakzat alakja szerinti válogatás is ritkán jutott az eszükbe.

– A II.3 feladat a legtöbb tanuló érdeklődését felkeltette, hiszen a legtöbben foglalkoztak ezzel a feladattal. A várható megoldások mindegyike előfordult, és ahogy számítottunk rá, törtekkel kapcsolatos volt a legtöbb. Ez kapcsolatot mutat az említett 4 korábbi feladat helyes megoldásával.

– A II.3 esetében a „d) mert nem egyenlő részekre van osztva" megoldás szerepelt a törtes megoldások közül a leggyakrabban, és ezt nem annyira a megelőző feladatokkal (az említett néggyel) mint inkább a törtek témakörének kezdeti szakaszával lehet összefüggésbe hozni.

– A szokatlan II.3 feladat helyes megoldása nem bizonyult nehezebbnek, mint a vele kapcsolatba hozható 4 korábbi feladat jó szintű megoldása, sőt ...

– Több szempont együttes figyelembe vétele meghaladta a tanulók képességét ahogy ez a II.3 és II.4 feladatok megoldásából kiderült. Ennek részben életkori oka lehet.

– Több lehetséges (különböző eredményű) megoldás keresése nem jellemző a vizsgált csoportok esetében.

Tanulságok a vizsgálattal és a feladatlapok készítésével kapcsolatban

A kitöltés és a tanároktól kapott válaszok alapján úgy tűnik, hogy tanárt és diákot is jobban elő kell készíteni. Ez jelenti egyrészt szokatlan megfogalmazású és nyitott feladatok előzetes megismertetését, alkalmazását, másrészt technikai részleteket, például hogy a tanulóktól várt véleményt a lapon kell megkérdezni például a következő formában:

Véleményedet aláhúzással jelezd:

Tetszett	Közömbös	Nem tetszett

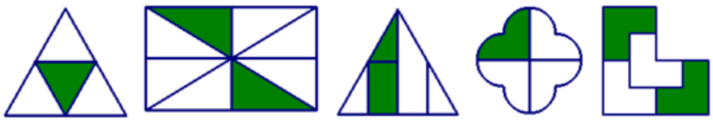
Mennyire volt számodra nehéz a feladat, karikázd be.

1	2	3	4	5
nehéz				könnyű

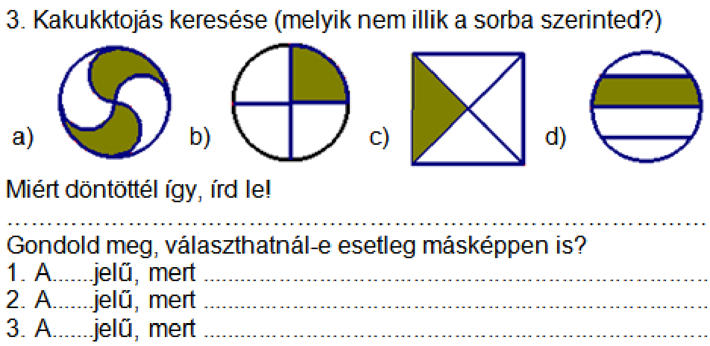
Javaslatok a feladatlapok javítására a tapasztalatok alapján:

- Az I.4d és I.5e részfeladatok esetében ugyanolyan legyen az egységalakzat. Például:

- A II.3 feladat szövegén változtatni kell, hiszen tanár és diák is jelezte, hogy megértése gondot okoz. Jelezni kell, hogy többféle megoldás is lehetséges. A tapasztalatok alapján például a következőképpen:



1.40. ábra. 1. módosítási javaslat



1.41. ábra. 2. módosítási javaslat

- A II.4 esetében nem ment a szabálykeresés. A tanulók gyakran a negyedrészre osztottsággal foglalkoztak, de figyelmen kívül hagyták a beszínezett rész nagyságát és nem foglalkoztak az ábrák „egymásutániságával”. A feladat értelmezése keveredett a II.3 feladatéval. A következő átfogalmazás segíthet ezen a problémán:

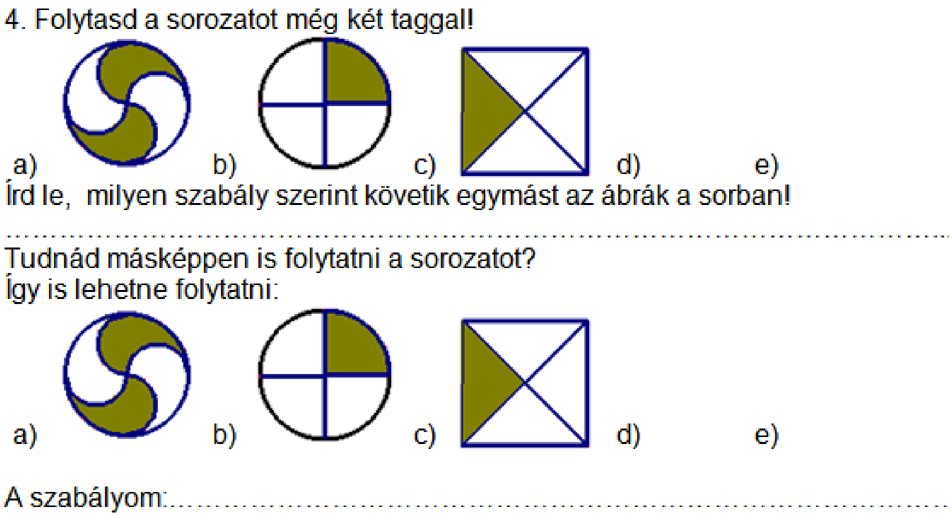
Érdemes lenne az előbbiek figyelembevételével is kipróbálni és értékelni a feladatlapokat.

Záró gondolatok ...

Az elemzésből látszik, hogy a hagyományos feladatlap – bár megtanítja a szükséges ismereteket – például a kompetenciák fejlesztése terén kiegészítésre szorul. Az is kiderült, hogy a tanulóknak általában nehézségeik vannak összefüggések meglátásában, több megoldás keresésében. Általában nyitottak új típusú feladatokra, azonban nem mindig tudnak mit kezdeni ezekkel.

Az említett gondok megoldásában segít, ha a biztos ismereteket nyújtó jó hagyományos oktatás esetén is beépülnek más stílus elemei a tanítási gyakorlatba. Ilyen lehet a problémaorientált oktatás szellemében készült feladatcsoportok beiktatása, például megfelelően szerkesztett feladatlap segítségével.

A tapasztalatok felvetik a kérdést, hogy azonos matematikai tartalom mellett mennyire befolyásolja a helyes megoldás elkészítését a megfogalmazás. Ha a tartalom jó megoldását akarjuk „mérni”, akkor a szövegben arra kell törekedni, hogy az a tanulók számára minél érthetőbb legyen, hiszen a megfogalmazás megértésének nehézségei eleve gátolhatják a helyes megoldást. Szokatlan tartalmú feladatok esetében ezt különösen nem könnyű elérni. (Természetesen más a helyzet, ha a valamilyen szempont alapján készített megfogalmazás megértését is vizsgálni akarjuk.)


4. Folytasd a sorozatot még két taggal!

a) b) c) d) e)

Írd le, milyen szabály szerint követik egymást az ábrák a sorban!

....

Tudnád másképpen is folytatni a sorozatot?

Így is lehetne folytatni:

a) b) c) d) e)

A szabályom:..

1.42. ábra. 3. módosítási javaslat

Ez a probléma nemzetközi felmérések esetében is megjelenik, amelyekben a tanulók találkoznak számukra szokatlan szövegezésű feladatokkal is.

1.5.3. Hegyvári Norbert: Egyetemi matematika az iskolában

Előszó

A matematikával való foglalkozás eddig jobbára egyirányú volt; Az általános iskolai ismeretekre épült a középiskolai, a középiskolaira az egyetemi.

A fenti cím alatt meghirdetett előadás valamiképpen ezen út megfordítását is ígéri; célként tűzi ki, hogy megmutassa, az egyetemi oktatás hogyan jelenik meg az általános iskolában és a középiskolában. Szeretnénk megmutatni, hogy bizonyos az iskolai matematikaoktatásban szereplő témáknak mi a háttere, hogyan ágyazódik be a matematika nagy hálójába.

Az előadás formájából adódóan természetesen ez nem lehet teljes. Noha témakörökre és fejezetekre osztott a tematika, ezek azonban korántsem lezártak. Az előadás sikeres teljesítéséhez (és így a sikeres vizsgához is) az anyaghoz tematikájában, de inkább szellemében kapcsolódó ú.n. *portfólió* beadása szükséges. Néhány előadás és néhány oldal elolvasása után remélhetőleg világos lesz, mi is ez.

Ez az ellentétes irányú vizsgálat, amit az előadás célként tűzött ki, talán választ ad arra a néha-néha (főleg sikertelen vizsga utáni) felcsattanó hallgatói kifogásra „Minek ez nekem! Úgy se fogom ezt tanítani!".

Egy rövid anekdotát hadd illesszek végül ide:

Székely Mihályt, a kiváló magyar operaénekest egyszer megállította az egyik barátja az operaház előtt. „Mihály! Tegnap csodálatos voltál a Don Carlosban! Azok a mély regiszterek, amit kiénekeltél!" Székely így felelt: „Köszönöm! De tudod miért volt ilyen tiszta a mély regiszterem? Nos, mert tudok még két hanggal lejjebb is..."

Göd, 2012. január hava

Irracionális számok; $\sqrt{2}$

A köznapi ember, ha megkérnénk, hogy mondjon egy irracionális számot, nagy többségében feltehetőleg a π-t mondaná, annak ellenére, hogy középiskolában a közelébe se jut, hogy ezt bizonyítsa. A $\sqrt{2}$ ókori görögöktől származó bizonyítása kerül terítékre a középiskolákban, ami így szól:

1.29. Tétel: *A $\sqrt{2}$ irracionális.*

Bizonyítás:

Ez jól ismert, csak a teljesség kedvéért:

Indirekt tegyük fel, hogy létezik $a, b \in \mathbb{Z}$, $b > 0$ és $(a, b) = 1$ úgy, hogy

$$\sqrt{2} = \frac{a}{b}.$$

Négyzetre emeléssel

$$2b^2 = a^2$$

így tehát a^2 és ezért $a = 2a'$ $(a' \in \mathbb{Z})$ páros szám. Helyettesítéssel

$$b^2 = 2a'^2$$

azaz b is páros, ami ellentmond az $(a, b) = 1$ feltételnek. $\square$

Ebben a fejezetben két dolgot szeretnénk megmutatni. Az egyik, hogy a fenti állításnak több olyan bizonyítása is van, ami ú.n. „egyetemi matematikát” igényel (érzékeltetve azt, hogy a matematika egy háló is, ahol sok minden szorosan összefügg egymással).

A másik dolog talán még fontosabb: Középiskolában elvétve találkozunk irracionális számokkal (talán a $\sqrt{2}, \sqrt{3}$, stb. kivételével mással nem is (?)) és csak az egyetemen szembesülhetünk, (ha előtte nem olvastunk halmazelméleti könyveket) hogy valójában az irracionális számok vannak „többségben”. (népszerűen fogalmazva a valós számok zsákjából egy számot véletlenszerűen kivéve az 1 valószínűséggel lesz irracionális – sőt transzcendens – szám). Ezért adunk egy csokor irracionális számot, talán szokatlanokat is, amit viszont középiskolában is elmondhatunk.

Akkor tehát a többi bizonyítás:

2. Bizonyítás:

Indirekt tegyük fel, hogy létezik $a, b \in \mathbb{Z}$, $b > 0, (a, b) = 1$ ahol b minimális. Úgy, hogy

$$\sqrt{2} = \frac{a}{b}.$$

Nyilván

$$a > b, \ \frac{a}{b} < 2 \Leftrightarrow b > a - b.$$

$$\frac{2b-a}{a-b} = \frac{2-a/b}{a/b-1} = \frac{2-\sqrt{2}}{\sqrt{2}-1} = (2-\sqrt{2})(\sqrt{2}+1) = \sqrt{2},$$

ellentmondásban azzal, hogy b a legkisebb nevezőjű előállítás ($a - b < b$). □

3. Bizonyítás:

Bizonyítjuk a következő tételt:

1.30. Tétel: *Ha $\alpha \in \mathbb{R}^+$ és $\exists p_1, p_2, \ldots, q_1, q_2, \cdots \in \mathbb{N}$, úgy. hogy*

$$|\alpha p_n - q_n| \neq 0, \ n \in \mathbb{N},$$

és $p_n, q_n \to \infty$ esetén

$$|\alpha p_n - q_n| \to 0,$$

akkor α irracionális.

Bizonyítás: Indirekt, ha $\alpha = \frac{a}{b}$, $b > 0, (a, b) = 1$, akkor mivel $|\alpha p_n - q_n| \to 0$, van olyan n, hogy

$$|\alpha p_n - q_n| = |\frac{a}{b}p_n - q_n| < \frac{1}{b},$$

és így

$$0 < |ap_n - bq_n| < 1,$$

ami nem lehet, mivel $ap_n - bq_n$ egész szám. □

Ebből következik $\sqrt{2}$ irracionalitása; legyen $p_1 = q_1 = 1$, továbbá $q_{n+1} = q_n^2 + 2p_n^2$ és $p_{n+1} = 2p_nq_n$. Ekkor teljes indukcióval ellenőrizhető, hogy

$$0 < |\sqrt{2}p_n - q_n| < \frac{1}{2^{2^{n-1}}}.$$

4. Bizonyítás:

Legyen

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Elsőként számítsuk ki A sajátértékét:

$$det(A - \lambda I) = det \begin{pmatrix} -1-\lambda & 2 \\ 1 & -1-\lambda \end{pmatrix} = 0,$$

amiből

$\lambda_1 = \sqrt{2} - 1 \quad \lambda_2 = -\sqrt{2} - 1$.

A $\lambda_1 = \sqrt{2} - 1$-hez tartozó sajátaltér

$$W = \left\{ \begin{pmatrix} \sqrt{2}x \\ x \end{pmatrix} : \quad x \in \mathbb{R}. \right\}$$

A sajátaltér egy egyenes, melynek meredeksége $\sqrt{2}/2$.

Az A leképezés *kontrakció* (összehúzó), ami azt jelenti, hogy ha $\underline{v} \in W$, akkor

$$|A\underline{v}| = |(\sqrt{2} - 1)\underline{v}| < |\underline{v}|,$$

ezért

$$|A^k\underline{v}| = |(\sqrt{2} - 1)^k\underline{v}| \to 0,$$

mivel $(\sqrt{2} - 1)^k \to 0$.

Végül vegyük észre, hogy A rácspontot rácspontba visz át, mert

$$A \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -a + 2b \\ a - b \end{pmatrix}, \quad a, b \in \mathbb{N}.$$

Így azonban a sajátaltéren nincs rácspont, mert egyrészt rácspontot rácspontba visz át A^k, másrészt kontrakció a sajátaltéren. □

További irracionális számok

1.31. Tétel: *A következő valós számok irracionálisak:*

$$\cos \frac{\pi}{2^n}; \quad n > 1 \quad \log_3(1 + \sqrt{2}); \quad \log_2 3 + \log_4 5.$$

Ezek bizonyítása középiskolai szintű feladat.

Útmutatás: Ha $x_n := \cos \frac{\pi}{2^n}$, akkor $n > 1$ esetén $x_{n+1} = \sqrt{\frac{x_n + 1}{2}}$.

Feladatok:

1. Ha $r, r', \ldots$ racionális számokat, $i, i', \ldots$ irracionális számokat jelölnek, milyen számok lesznek:

$$r + r';\ r + i;\ i + i';\ rr';\ ri;\ ii'; r^{r'};\ r^i;\ i^r;\ i^{i'}\ ?$$

(feltéve, hogy léteznek)

Irracionális-e
2. $\log_2 3$?
3. $\log_3(1+\sqrt{2})$?
4. $\sqrt{2}+\sqrt{3}$?
5. $\log_2 3 + \log_4 5$?

Végtelen tizedestörtek

Ismeretes, hogy egy végtelen tizedestört akkor és csak akkor racionális, ha felírásában a jegyei valahonnan kezdve periodikusak.
Így tizedestört alakban is könnyű irracionális számokat gyártani.

A következő tételben egy kevéssé nyilvánvaló tizedestörtről igazoljuk, hogy irracionális:

1.32. Tétel: *Legyenek* $(2),(3),(p_3),(p_4),(11),(p_6)\dots$ *a prímszámok sorozata a tízes számrendszerben felírva. Ekkor az*

$$\alpha := 0,(2)(3)(p_3)(p_4)(11)(p_6)\dots$$

tizedestört irracionális valós szám.

Erre a tételre két bizonyítást adunk.

I. Bizonyítás:
Az első bizonyítás a következő (nem túl könnyen bizonyítható) Dirichlet-től származó állításon alapszik:

Ha $a,b\in\mathbb{N}$; *és* $(a,b)=1$ *akkor az* $x_n = a+b\cdot n;\quad n=1,2,\dots$ *sorozatban végtelen sok prímszám található.*

Tegyük akkor most fel, hogy α racionális, méghozzá van egy $p_1\dots,p_k$ peródusa ($p_i\in\{0,1,\dots,9\}; i=1,2,\dots,k.$). Mivel végtelen sok prímszám van (lásd a következő fejezetet) a periódus nem minden eleme 0. Dirichlet tétel miatt a $10^{2k}\cdot n+1$ sorozatban végtelen sok prím van. Ezek olyan számok, amik a tízes számrendszerben felírva jobbról az első jegy 1, utána $2k-1$ 0 jegy következik, ami ellentmond annak, hogy a periódus nem a konstans 0 sorozat.

II. Bizonyítás:
Az előző bizonyításban nem tudtunk utánajárni a Dirichlet tétel bizonyításának. A most következő bizonyításban minden részletet igazolunk. Sőt, egy kicsit többet bizonyítunk:

1.33. Tétel: *Tegyük fel, hogy* $\{b_i\}_{i=1}^{\infty} \subseteq \mathbb{N}$ *és*

$$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{b_i} = \infty.$$

Ekkor a $\beta = 0,(b_1)(b_2)\dots(b_k)\dots$ *szám irracionális, ahol a* b_i *elemeket a tízes számrendszerben írtuk fel.*

A következő fejezetben igazolni fogjuk, hogy a prímszámok reciprok összege divergens. Ezzel teljessé fogjuk tenni a bizonyítást.

Legyen $(u_1)(u_2)\dots(u_s)$ egy tetszőleges, rögzített mintázat a tízes számrendszerben és legyen X azon pozitív egészek halmaza, amelyek a tízes számrendszerben ezt a mintázatot nem tartalmazzák. Tehát például ha 2012 ez a mintázat, akkor $2.1\mathbf{20}.\mathbf{12}4 \notin X$, de $421.012 \in X$.

Az általánosabb tétel igazolásához a következő állításra van szükségünk.

1.34. Tétel: *Legyen* X *a fent definiált halmaz. Ekkor*

$$\sum_{z \in X} \frac{1}{z} < \infty,$$

azaz e pozitív tagú végtelen sor konvergens.

E tétel pl. abban a formában talán ismert feladat, hogy *„Bizonyítsuk be, hogy a 7 számjegyet nem tartalmazó természetes számok reciprok összege konvergens!”*

Bizonyítás:

A bizonyítást arra az esetre végezzük el, amikor a mintázat mondjuk a 17. Az általános eset e bizonyítás másolata. Nyilván 100-ig 99 olyan szám van ami nem tartalmazza mintázatként a 17-t. Jelölje S_n az n-edik részletösszeget és H_n a harmonikus sor n-edik részletösszegét. Ekkor

$$S_n = \left(H_{100} - \frac{1}{17}\right) + \frac{1}{101} + \dots + \frac{1}{116} + \frac{1}{118} + \dots \frac{1}{x_n}$$

(x_n az X n-edik tagja.)

$$S_n = \left(H_{100} - \frac{1}{17}\right) + \frac{1}{100}\left(\frac{1}{1,01} + \dots + \frac{1}{1,16} + \frac{1}{1,18} + \dots \frac{1}{x_n/100}\right) <$$

$$< \left(H_{100} - \frac{1}{17}\right) + \frac{1}{100}\left(\frac{1}{\lfloor 1,01 \rfloor} + \dots + \frac{1}{\lfloor 1,16 \rfloor} + \frac{1}{\lfloor 1,18 \rfloor} + \dots \frac{1}{\lfloor x_n/100 \rfloor}\right).$$

Vegük észre, hogy egy $\lfloor x_n/100 \rfloor$ szám 99-szer fordul elő és hogy az $\{\lfloor x_n/100 \rfloor\}$ sorozat is olyan, amelyik nem tartalmazza a 17 mintázatot. Így

$$S_n < H_{100} - \frac{1}{17} + \frac{99}{100} S_n,$$

így

$$S_n < 100 \left(H_{100} - \frac{1}{17} \right),$$

azaz az S_n sorozat korlátos, nyilván monoton növő, így konvergens.

Most már könnyen igazolhatjuk a $\beta = (b_1)(b_2) \cdots (b_k) \cdots$ szám irracionalitását: tegyük fel indirekt, hogy β racionális. Akkor tehát van egy $(p_1)(p_2) \cdots (p_t)$ periódus a tízes számrendszerbeli felírásában. Legyen $s > 2t$ és az $(u_1)(u_2) \cdots (u_s)$ 2 és 3 számokból álló olyan mintázat, amelyikben nem fordul elő a $(p_1)(p_2) \cdots (p_t)$ mintázat. Ilyen nyilván van. Mivel az $(u_1)(u_2) \cdots (u_s)$ mintázatot nem tartalmazó egészek reciprok összege konvergens, ám $\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{b_i} = \infty$ divergens, ebből következőleg a $\{b_i\}$ sorozatnak végtelen sok olyan tagja van, amelyik az $(u_1)(u_2) \cdots (u_s)$ mintázatot tartalmazza. Azaz β-ban végtelen sokszor előfordul egy olyan mintázat, amelyik a $(p_1)(p_2) \dots (p_t)$ periódust nem tartalmazza ellentmondásként. □

1.35. Feladat: *Gyűjtse össze a témához tartozó kulcsszavakat!*

Végtelen sok prímszám van

A címben szereplő kijelentés egyike azoknak, amelyek jól ismertek. Eukleidésztől származó gyönyörű bizonyítás sokaknak az első lépés a matematikában (Erdős Pál saját bevallása szerint ez a bizonyítás irányította gyerekként a figyelmét a számelmélet felé).

Ebben a fejezetben erre az állításra öt bizonyítást adunk, a matematika különböző területeire „evezve". Emiatt sok közülük többetmondó lesz, pusztán az adott kijelentésnél.

1.36. Tétel: *Végtelen sok prímszám van.*

I. Bizonyítás:

Ez a jól ismert Eukleidésztől származó bizonyítás: ha $p_1, p_2, \ldots, p_k$ az összes (k darab) prímszám, akkor az

$$N := p_1 \cdot p_2 \cdots p_k + 1$$

szám prímtényezői között nem szerepelhet $p_1, p_2, \ldots, p_k$ közül egyik se. $\square$

II. Bizonyítás:

A bizonyítás Pólya Györgytől származik és így hangzik:

Tekintsük az $\{F_k = 2^{2^k} + 1;\ k = 0, 1, 2, \ldots\}$ ú.n. Fermat-számok sorozatát.

(Megjegyeznénk, hogy megoldatlan probléma, hogy ezek között van-e végtelen sok prímszám. Az első öt ilyen szám az; azonban $F_5 = 2^{2^5} + 1 = 641 \cdot 6700417$.)

Igazolni fogjuk, hogy $k \neq n$ esetén $(F_k, F_n) = 1$. (Ebből következik, hogy végtelen sok prím van, hiszen végtelen sok Fermat-számunk van és mindegyik prímtényezős felbontásában az előzőek felbontásában szereplő prímektől különböző prím szerepel.)

Ehhez azt fogjuk igazolni, hogy ha $k < n$, akkor

$$F_k | F_n - 2.$$

Valóban ebből akkor ha $d|F_k$ akkor $d|F_n - 2$ és ha $d|F_n$ akkor $d|F_n - (F_n - 2) = 2$. Tehát a legnagyobb közös osztó $d|2$; a Fermat számok páratlanok, azaz $d = 1$.

Az $F_k|F_n - 2$ bizonyításához mindössze azt kell észrevennünk, hogy

$$F_k(F_k - 2) = (2^{2^k} + 1)(2^{2^k} - 1) = (2^{2^k})^2 - 1 = 2^{2^{k+1}} - 1 = F_{k+1} - 2.$$

Ezért

$$F_{k+1}F_k(F_k - 2) = F_{k+1}(F_{k+1} - 2) = F_{k+2} - 2,$$

innen teljes indukcióval

$$F_{k+s} \cdots F_{k+1}F_k(F_k - 2) = F_{k+s+1} - 2,$$

azaz minden $s > 1$ esetén $F_k|F_{k+s+1} - 2$, ami $s := n - k - 1$ választással az állítás. $\square$

III. Bizonyítás:

Ez a bizonyítás Erdőstől származik. Másfelől ez teszi teljessé az előző fejezetben igazolt $\alpha := (2)(3)(p_3)(p_4)(11)(p_6)\ldots$ valós szám irracionalitását.

1.37. Tétel: *Legyen $p_1 = 2, p_2 = 3, \ldots,$ a prímszámok sorozata. Ekkor*

$$\sum_i \frac{1}{p_i} = \infty.$$

Ebből nyilván következik, hogy végtelen sok prímszám van; véges sok prímszám, véges összeget adna.

Bizonyítás:

Tegyük fel indirekt, hogy

$$\sum_i \frac{1}{p_i} < \infty$$

azaz, hogy a sor konvergens. Ekkor létezik egy olyan küszöbindex, n_0, hogy

$$\sum_{i=n_0+1} \frac{1}{p_i} < \frac{1}{2}.$$

Legyen $N = 4^{n_0+1} + 1$.

N-ig a számokat két osztályba fogjuk sorolni: Az A osztályba azokat, amiknek csak $p_1 < p_2 < \cdots < p_{n_0}$ a prímosztójuk, a B halmazba a többi elemet, tehát azokat, amelyeknek van olyan prímosztójuk, p_k, amelyikre $k > n_0$.

Egy $n \in A$ elemet felírunk egy négyzetszám és egy négyzetmentes szám szorzataként. (Például a $600 = 10^2 \cdot 2 \cdot 3$.) Tehát

$$n = k^2 \cdot p_1^{\varepsilon_1} \cdot p_2^{\varepsilon_2} \cdot \dots \cdot p_{n_0}^{\varepsilon_{n_0}},$$

ahol $\varepsilon_i = 0$ vagy 1.

Mivel

$$k^2 \leq n \leq N,$$

ezért $k \leq \sqrt{N}$. Azaz az első tényező legfeljebb $\sqrt{N}$ különböző szám lehet. A

$$p_1^{\varepsilon_1} \cdot p_2^{\varepsilon_2} \cdot \dots \cdot p_{n_0}^{\varepsilon_{n_0}}$$

tényezőben $\varepsilon_i = 0$ vagy 1, ezért ez legfeljebb 2^{n_0} különböző lehet.

Így A halmazban legfeljebb

$$\sqrt{N} 2^{n_0}$$

szám lehet.

Vegyük most a B halmazt; ezekben tehát olyan számok vannak, amelyeknek **nem minden** prímosztója az első n_0 közül kerül ki, tehát **van** n_0 sorszámúnál nagyobb sorszámú osztója. Azaz lehet p_{n_0+1}-gyel osztható, p_{n_0+2}-vel osztható, stb. Így B-ben legfeljebb

$$\left\lfloor \frac{N}{p_{n_0+1}} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{N}{p_{n_0+2}} \right\rfloor + \dots \leq$$
$$N \cdot \left(\frac{1}{p_{n_0+1}} + \frac{1}{p_{n_0+2}} + \dots \right) < \frac{N}{2}$$

elem lehet (felhasználva, hogy $\sum_{i=n_0+1} \frac{1}{p_i} < \frac{1}{2}$).

Ebből következik, hogy az A halmazban legalább $N/2$ elem van. Azt kapjuk tehát, hogy

$$\frac{N}{2} \leq |A| \leq \sqrt{N} 2^{n_0}.$$

Átrendezéssel

$$4^{n_0+1} + 1 = N \leq 4^{n_0+1}$$

ami ellentmondás. $\square$

IV. Bizonyítás:

Euler bizonyítása. Ez volt a csírája annak a bizonyításnak, ami a prímszámok számára aszimptotikus becslést ad. A bizonyításban végtelen sorok szerepelnek, amelyek abszolút konvergensek tehát a véges összegeknél megszokott műveletet (pl. disztributivitást) szabadon használhatjuk.

Indirekt, ha véges sok prímszám lenne $p_1, p_2, \ldots, p_k$, készítsük el a k számú végtelen mértani sort:

$$1 + \frac{1}{p_i} + \frac{1}{p_i^2} + \frac{1}{p_i^3} + \cdots + \frac{1}{p_i^{t_i}} + \cdots = \frac{1}{1 - \frac{1}{p_i}},$$

$i = 1, 2, \ldots k$.

Szorozzuk össze őket, azaz vegyük a

$$\prod_{i=1}^{k} \left(\sum_{t_i=0}^{\infty} \frac{1}{p_i^{t_i}} \right) = \prod_{i=1}^{k} \frac{1}{1 - \frac{1}{p_i}}.$$

A jobb oldalon egy véges szám áll.

A már említett szabály szerint a bal oldali zárójeleket felbonthatjuk. Vegyük észre, hogy a felbontás után bármely $n \in \mathbb{N}$ számra $\frac{1}{n}$ pontosan egyszer szerepel. Valóban, ha

$$n = p_1^{\alpha_1} \cdot p_2^{\alpha_2} \cdot \cdot p_k^{\alpha_k},$$

ahol $\alpha_i \geq 0$ egész, $(i = 1, 2, \ldots k,)$ akkor $\frac{1}{n}$ úgy szerepel, ha az $i-$edik mértani sorból az

$$\frac{1}{p_i^{\alpha_i}}$$

tagot választjuk és ezeket a prímhatványokat összeszorozzuk. Tehát

$$\prod_{i=1}^{k} \left(\sum_{t_i=1}^{\infty} \frac{1}{p_i^{t_i}} \right) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}.$$

A $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ sor divergens, a baloldal egy véges szám ellentmondásként.

V. Bizonyítás:

Ez Gelfand-tól származó bizonyítás.

1. Legyen

$$p(x) = a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0$$

egész együtthatós nem azonosan 0 polinom, amelyikre az $x \in [0,1]$ intervallum elemeire $p(x) \geq 0$. Mivel $p(x)$ folytonos és nem azonosan 0, azt kapjuk, hogy

$$0 < \int_0^1 p(x)dx = \left[a_n \frac{x^{n+1}}{n+1} + \cdots + a_1 \frac{x^2}{2} + a_0 x \right]_0^1 = \frac{A}{[1,2,\ldots,n+1]},$$

ahol A pozitív egész, és $[1,2,\ldots,n+1]$ az első $n+1$ egész szám legkisebb közös többszöröse. Tehát $A \geq 1$ és így

$$\int_0^1 p(x)dx \geq \frac{1}{[1,2,\ldots,n+1]}.$$

2. Mi is $[1,2,\ldots,N]$ prímtényezős felbontása?

Pl. $[1,2,\ldots,10]$: ebben a $2,3,5,7$ prímek szerepelnek. 2 harmadik hatványon, 3 második, 5 és 7 első hatványon. Azaz $[1,2,\ldots,10] = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7$.

Általában tehát $[1,2,\ldots,N]$ prímtényezős felbontásában $p_1, p_2, \ldots, p_k$ szerepel, ahol

$$k = \pi(N),$$

az N-ig szereplő prímek száma és p_i az α_i hatványon, ahol

$$p_i^{\alpha_i} \leq N < p_i^{\alpha_i+1}.$$

Így

$$[1,2,\ldots,N] = \prod_{i=1}^{k} p_i^{\alpha_i} \leq N^k = N^{\pi(N)}.$$

Tehát az 1. pontban elmondottakkal együtt:

$$\int_0^1 p(x)dx \geq \frac{1}{[1,2,\ldots,n+1]} \geq \frac{1}{(n+1)^{\pi(n+1)}}.$$

3. Végül legyen $p(x) := \left(x(1-x)\right)^k$. Ez nyilván egész együtthatós, a $[0,1]$ intervallumban az $x(1-x)$ egy „lefelé nyíló” parabola, melynek a 0 és 1 a gyökei tehát $(0,1)$-en pozitív értékű is, ezért $\left(x(1-x)\right)^k$ is az. Itt $x(1-x) \leq 1/4$, így

$$p(x) := \left(x(1-x)\right)^k \leq \frac{1}{4^k} \quad x \in [0,1].$$

Ezért
$$\int_0^1 p(x)dx := \int_0^1 (x(1-x))^k\, dx \le \int_0^1 \frac{1}{4^k} dx = \frac{1}{4^k}.$$
A $p(x)$ foka $n = 2k$. Tehát az 1. és 2. pontok miatt
$$\frac{1}{(n+1)^{\pi(n+1)}} = \frac{1}{(2k+1)^{\pi(2k+1)}} \le \int_0^1 p(x)dx \le \frac{1}{4^k}.$$
Átrendezve
$$4^k \le (2k+1)^{\pi(2k+1)}$$
és mindkét oldal logaritmusát véve
$$2k \ln 2 \le \pi(2k+1)\ln(2k+1)$$
azaz
$$\ln 2 \frac{2k}{\ln(2k+1)} \le \pi(2k+1).$$
Egy kis analízissel kapjuk:

1.38. Tétel: *Bármely $\varepsilon > 0$ számhoz létezik k_0, hogy $N > N_0$ esetén*
$$(\ln 2 - \varepsilon)\frac{N}{\ln(N)} \le \pi(N).$$

Ha $\varepsilon < \ln 2$ és mivel
$$\lim_{N\to\infty} \frac{N}{\ln(N)} = \infty,$$
ezért
$$\lim_{N\to\infty} \pi(N) = \infty,$$
azaz végtelen sok prímszám van. □

1.39. Feladat: *Gyűjtse össze a témához tartozó kulcsszavakat!*

Struktúrák I.

Talán magyarázni sem kell, hogy az egyetemi tanulmányok itt, a struktúrák vizsgálatában szélesítették ki az általános iskolában és a középiskolában tanultakat jelentős mértékben. Nem csak a zártság, asszociativitás, kommutativitás stb. fogalmát árnyalta, hanem beágyazott olyan tételeket is mint például a Euler-Fermat tétel egy általánosabb struktúra tulajdonságba. Ezekről a későbbiekben részletesen lesz szó.

Néhány feladat megoldásán keresztül szeretnénk néhány olyan bizonyítást mutatni, ami túlnő a középiskolai anyagon, ám arra visszavetülve más, szélesebb megvilágításban láttatja azt.

Kezdjük!

A következő feladatok bizonyítása során többször fogjuk használni a lineáris algebrában használt tételt:

1.40. Tétel: *Legyen A és B két négyzetes mátrix ($A, B \in \mathbb{R}^{n\times n}$). Ekkor*

$$\det(A \cdot B) = \det(A) \cdot \det(B).$$

A feladatok:

1.41. Feladat: *Legyen $A := \{n : n = a^2 + b^2; a, b \in \mathbb{N}\}$. Bizonyítsuk be, hogy a szorzásra nézve zárt!*

Ez középiskolában is feladható feladat. Akik járatosak a kéttagú kifejezések négyzetének számolásában, könnyebben-nehezebben megoldják a feladatot.

Nézzünk két másik megoldást:

1. Megoldás:

Ha $n = a^2 + b^2$, akkor könnyű látni, hogy $n = \det A = \det \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}$ és hasonlóan, ha $m = x^2 + y^2$, akkor $m = \det B = \det \begin{pmatrix} x & y \\ -y & x \end{pmatrix}$. Az AB mátrix szorzat

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} ax - by & ay + bx \\ -bx - ay & ax - by \end{pmatrix}.$$

Használva az említett tételt, kapjuk, hogy

$$(a^2 + b^2)(x^2 + y^2) = (ax - by)^2 + (ay + bx)^2.$$

2. Megoldás:

Legyen $z_1 = a + bi$ komplex szám, $z_2 = x + yi$ a másik komplex szám. Használjuk fel, hogy

$$(a^2 + b^2) \cdot (x^2 + y^2) = |z_1|^2 \cdot |z_2|^2 = |z_1 \cdot z_2|^2 = (ax - by)^2 + (ay + bx)^2.$$

Egy hasonló feladat

1.42. Feladat: *Egy szám $x = a^2 + 2b^2$ $(a, b \in \mathbb{N})$ akkor a háromszorosa is ilyen:* $3x = A^2 + 2B^2$ $(A, B \in \mathbb{N})$

Megoldhatjuk így is:

$$x = \det \begin{pmatrix} a & \sqrt{2}b \\ -\sqrt{2}b & a \end{pmatrix} \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x \cdot 3 = \det \begin{pmatrix} a & \sqrt{2}b \\ -\sqrt{2}b & a \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -\sqrt{2} \\ \sqrt{2} & 1 \end{pmatrix} = (a + 2b)^2 + 2(a - b)^2.$$

Egy pillanatig sem szeretnénk azt a látszatott kelteni, hogy ez a megoldás *egyszerűbb*, mint rájönni, hogy mi is a háromszoros előállítása. Arra akartuk csak felhívni a figyelmet, hogy ez egy *módszer*, ami alkalmas ilyen jellegű feladatok megoldására.

A következő feladatnál azonban némileg tanácstalanul állnánk, ha „elemi” megoldást keresnénk:

1.43. Feladat: *Bizonyítsuk be, hogy az*

$$S = \{x : \exists a, b, c \in \mathbb{N}; x = a^3 + b^3 + c^3 - 3abc\}$$

halmaz zárt a szorzásra nézve.

Megoldás:

Legyen $x = a^3 + b^3 + c^3 - 3abc$ és $y = A^3 + B^3 + C^3 - 3ABC$. Ekkor találhatunk két 3×3-as mátrixot melyeknek a determinánsai éppen x és y :

$$x = \det \begin{pmatrix} a & b & c \\ c & a & b \\ b & c & a \end{pmatrix} \quad y = \det \begin{pmatrix} A & B & C \\ C & A & B \\ B & C & A \end{pmatrix}.$$

Ekkor

$$x \cdot y = \det \left(\begin{pmatrix} a & b & c \\ c & a & b \\ b & c & a \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} A & B & C \\ C & A & B \\ B & C & A \end{pmatrix} \right) =$$

$$= \det \begin{pmatrix} aA+bC+cB & aB+bA+cC & aC+bB+cA \\ aC+bB+cA & aA+bC+cB & aB+bA+cC \\ aB+bA+cC & aC+bB+cA & aA+bC+cB \end{pmatrix}.$$

Ebből már leolvasható, hogy a szorzat is S-ben van;

$$x \cdot y = U^3 + V^3 + W^3 - 3UVW,$$

ahol $U = aA + bC + cB$; $V = aB + bA + cC$; $W = aC + bB + cA$.

Néhány nevezetes sorozatra vonatkozó ismert azonosságokat is levezethetünk az idézett tétel segítségével.

Legyen

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

és tekintsük az $\{F_k\}_{k=1}^{\infty} = \{1, 1, 2, 3, 5, 8, \dots\}$ Fibonacci sorozatot. Egyszerűen ellenőrizhető a következő tétel:

1.44. Tétel: *Ha $k \in \mathbb{N}$, akkor*

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^k = \begin{pmatrix} F_{k+1} & F_k \\ F_k & F_{k-1} \end{pmatrix}.$$

A bizonyítás teljes indukcióval egyszerű.

A tételnek számos, a középiskolából is ismerhető következménye van:

Következmények:

1. Bármely $k \in \mathbb{N}$ esetén

$$F_{k+1}F_{k-1} - F_k^2 = (-1)^k.$$

Ez az előbbi tételből és abból következik, hogy

$$\det\left(\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^k\right) = \left(\det\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\right)^k = (-1)^k.$$

2. Bármely $k, s \in \mathbb{N}$ esetén

$$F_{k+1}F_s + F_kF_{s-1} = F_{s+1}F_k + F_sF_{k-1} = F_{k+s}.$$

Ennek bizonyítása a mátrixok szorzásán alapszik:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^k \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^s = \begin{pmatrix} F_{k+1} & F_k \\ F_k & F_{k-1} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} F_{s+1} & F_s \\ F_s & F_{s-1} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^{k+s} = \begin{pmatrix} F_{k+1}F_{s+1} + F_kF_s & F_{k+1}F_s + F_kF_{s-1} \\ F_{s+1}F_k + F_sF_{k-1} & F_kF_s + F_{k-1}F_{s-1} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} F_{k+s+1} & F_{k+s} \\ F_{k+s} & F_{k+s-1} \end{pmatrix}.$$

A következő tétel a Fibonacci számok explicit előállítására vonatkozik.

1.45. Tétel: *Bármely* $k \in \mathbb{N}$

$$F_k = \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\left(\frac{\sqrt{5}+1}{2} \right)^k - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^k \right)$$

Bizonyítás:

1. Használni fogjuk, hogy ha A egy lineáris leképezés és $\underline{v}$ egy sajátvektora, λ sajátértékkel, azaz

$$A\underline{v} = \lambda \underline{v},$$

akkor bármely $k \in \mathbb{N}$, esetén

$$A^k \underline{v} = \lambda^k \underline{v}.$$

(Bizonyítása egyszerű teljes indukció.)

Legyen

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Számítsuk ki a sajátértékeit; azaz

$$\det \begin{pmatrix} 1-\lambda & 1 \\ 1 & -\lambda \end{pmatrix} = \lambda^2 - \lambda - 1 = 0$$

egyenlet gyökeit kell meghatározni. Ezek

$$\lambda_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \qquad \lambda_2 = \frac{1-\sqrt{5}}{2}.$$

Ha $\underline{v}_1 = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ sajátvektor, akkor

$$A\underline{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+b \\ a \end{pmatrix} = \lambda_1 \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}.$$

Amiből például

$$\underline{v}_1 = \begin{pmatrix} \frac{1+\sqrt{5}}{2} \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Az előzőekben megkaptuk, hogy $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^k = \begin{pmatrix} F_{k+1} & F_k \\ F_k & F_{k-1} \end{pmatrix}$ és $\lambda_1^k = \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^k$. Így az $A^k\underline{v}_1 = \lambda_1^k\underline{v}_1$ vektor első koordinátáit összehasonlítva azt kapjuk, hogy

$$\frac{\sqrt{5}+1}{2}F_{k+1} + F_k = \left(\frac{\sqrt{5}+1}{2}\right)^{k+1}. \quad (*)$$

Hasonló számolással kapjuk, hogy ha a sajátérték $\lambda_2 = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$ sajátvektora $\underline{v}_2 = \begin{pmatrix} \frac{1-\sqrt{5}}{2} \\ 1 \end{pmatrix}$ és megint az $A^k\underline{v}_2 = \lambda_2^k\underline{v}_2$ vektor, akkor első koordinátáit összehasonlítva azt kapjuk, hogy

$$\frac{\sqrt{5}-1}{2}F_{k+1} - F_k = -\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{k+1}. \quad (**)$$

$(*)$-ot és $(**)$-ot összeadva és $\sqrt{5}$-tel osztva a tételbeli formulát kapjuk F_{k+1}-re.

Mennyi az F_N?

Valójában a Fibonacci sorozat elemeinek a kiszámítására a következő lehetőségeink vannak:

1. *A rekurzív képlet alapján.*
2. *Az előző „misztikus” képlet alapján.*
3. *...*

Az 1. nyilván nehézkes, lassú. A 2. elég reménytelen; $\sqrt{5}$ hatványaival számolni nehéz.

A 3. lehetőséget nyitva hagytuk.

Erre az $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^k = \begin{pmatrix} F_{k+1} & F_k \\ F_k & F_{k-1} \end{pmatrix}$ képlet lesz segítségünkre; ha a szorzást és az összeadást egy-egy lépésnek tekintjük, akkor két 2×2 mátrix összeszorzása 12 lépés. Mivel F_N-et az $A^N = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^N$-ből ki tudjuk olvasni így járhatunk el:

Legyen N 2-es számrendszerbeli felírása

$$N = \sum_{i=0}^{k} \varepsilon_i 2^i,$$

ahol ε_i vagy 0 vagy 1. Mivel $2^k \leq N < 2^{k+1}$, ezért $k \leq \log_2 N$. Számítsuk ki az A^{2^i} $i = 1, 2, \ldots k$ mátrixokat, $12k$ lépésben, majd ahol $\varepsilon_i = 1$ azokat a hatványokat szorozzuk össze, ez megint legfeljebb $12k$ lépés. Így megkaptuk az

$$A^{\sum_{i=1}^{k} \varepsilon_i 2^i} = A^N$$

mátrixot.

Kaptuk tehát a következő tételt:

1.46. Tétel: *F_N értéke legfeljebb $24 \log_2 N$ lépésben meghatározható.*

Ez nagy N értékekre jóval gyorsabb, mint rekurzív módon kiszámítani F_N értékét N lépésben.

Apropó, hogyan szorzunk össze két egész számot?

A válasz: nyilván ahogy az iskolában tanultuk.

Tehát ha két számunk x és y, n jegyű számok, akkor minden jegyet minden jeggyel összeszorzunk, ez $n \times n$ szorzás, majd összeadjuk; ez kb $2n$ lépés. Az összeadást a továbbiakban ne számoljuk, a lépésszám jóval kevesebb, mint a szorzásnál. A válasz így

Két n jegyű számot n^2 lépésben lehet összeszorozni.

Ez a múlt század közepéig nem is volt kardinális kérdés; nem volt mód nagy számokat gyorsan összeszorozni.

A következő tétel mondható egyetemi matematikának, amelyik az iskolában jelenik meg, de csak abban az értelemben, ahogy a *kérdést felveti.* A segédeszközök teljes mértékben rendelkezésre állnak középiskolában is.

1.47. Tétel: *Két n jegyű számot lehet $\leq 2n^{\log_2 3} \sim 2n^{1.585..}$ lépésben is összeszorozni.*

Ezt a meglepő eredményt egyetemi hallgató korában Karacuba vette észre (Kolmogorov egy kérdésére válaszolva).

Bizonyítás:

Jelölje $L(n)$ a két n jegyű szám összeszorzásához szükséges lépések számát (itt tehát a számjegyekkel való szorzást számoljuk, a részösszeadásokat nem, mivel ezek nagyságrendben kisebbek).

Írjuk fel

$$2^{k-1} < n \leq 2^k.$$

Nyilván $L(n) \leq L(2^k)$. Tehát a két szám számjegyeinek a száma páros (sőt 2-hatvány). Tehát legyen adva x és y, mindkettő $2N := 2^k$ jegyű (ha nem, pótoljuk ki az elején nullákkal). Ha minden számjegyet minden számjeggyel összeszorzunk, akkor $4L(N)$ lépést tettünk. Ügyesebben a következőképpen járhatunk el: Írjuk fel x-et, y-t így

$$x = 10^N A + D \qquad y = 10^N B + C,$$

(tehát A, B, C, D N jegyű számok). Ekkor

$$x \cdot y = 10^{2N} AB + 10^N (AC + BD) + CD.$$

Szükségünk van tehát AB, CD és $AC + BD$-re (ha mind a négyre külön-külön, akkor maradna a $4L(N)$ lépés). Ám megúszhatjuk mindössze hárommal is: vegyük az

$$AB, \quad CD, \quad (A + D)(B + C) - AB - CD = AC + BD$$

szorzatokat. Evvel 3 N jegyű számot szoroztunk össze (megspóroltuk az AC és BD külön-külön kiszámítását). Így a rekurzióval

$$L(2^k) = L(2N) \leq 3L(N) = 3L(2^{k-1}).$$

Ezt az eljárást iterálva kapjuk, hogy

$$L(2^k) \leq 3^2 L(2^{k-2}),$$

és így tovább, azaz

$$L(n) \leq L(2^k) \leq 3^k L(1) = 2^{\log_2 3k} \leq 2n^{\log_2 3k}.$$

$\square$

1.48. Feladat: *Gyűjtse össze a témához tartozó kulcsszavakat!*

Struktúrák II.

Ebben a fejezetben olyan feladatokat gyűjtöttünk egybe, amelyek a megszokott műveleti tulajdonságokkal *nem* rendelkeznek ill. bizonyos műveleti tulajdonságokból kell következtetni másokra. A használt műveletek jól ismertek, a segítségükkel definiáltak műveletekről igazoljuk, a „szokatlant”.

A feladatok egy része nemzetközi versenyfeladat, jelezni is fogjuk, hogy honnan származnak.

Többször fog szerepelni az ú.n. csoport fogalma.

Egy $G, \circ$ csoport, ha teljesül rá, hogy

1. zárt ($\forall a, b \in G,\ a \circ b \in G$)
2. asszociatív,
3. létezik egységelem ($\exists e \in G$, hogy $\forall a \in G, e \circ a = a \circ e = a$) valamint
4. létezik az inverz ($\forall a \in G,\ \exists a^{-1}$, hogy $a \circ a^{-1} = a^{-1} \circ a = e$.)

Tehát nem tettük fel a *kommutativitást*.

Az első feladat egy 1971-es Putnam (amerika) matematikai versenyfeladat:

1.49. Feladat: *Egy $(S, \circ)$ struktúráról a következőket tudjuk:*

(1) $\forall x \in S, \quad x \circ x = x.$

(2) $\forall x, y, z \in S, \quad (x \circ y) \circ z = (y \circ z) \circ x.$

Bizonyítsuk be, hogy a $\circ$ művelet kommutatív.

Megoldás:

Legyen x, z két tetszőleges elem $S-$ben. Megmutatjuk, hogy $x \circ z = z \circ x$.

A (2)-ben legyen $x = y$. Ekkor

$$(x \circ x) \circ z = (x \circ z) \circ x,$$

mivel $x \circ x = x$ ezért

$$x \circ z = (x \circ z) \circ x.$$

„Szorozzuk” meg jobbról z-vel

$$(x \circ z) \circ z = ((x \circ z) \circ x) \circ z$$

és használjuk megint (2)-t

$$(z \circ z) \circ x = (x \circ z)(x \circ z).$$

(1)-et használva mindkét oldalra

$$z \circ x = x \circ z.\square$$

Egy hasonló feladat:

1.50. Feladat: *Egy* $(T, \circ)$ *struktúráról a következőket tudjuk:*
$\forall x, y \in T$,
(1) $x \circ (x \circ y) = y$,
(2) $(y \circ x) \circ x = y$.
Bizonyítsuk be, hogy a $\circ$ *művelet kommutatív.*

Megoldás:
Megmutatjuk, hogy bármely $a, b \in T$ teljesül, hogy $a \circ b = b \circ a$.
(1)-ben legyen $x = b \circ a$, és $y = a$, ahol $a, b \in T$. Ekkor

$$(b \circ a) \circ ((b \circ a) \circ a) = a,$$

(2) miatt a második zárójelben levő kifejezés b, így

$$(b \circ a) \circ b = a.$$

„Szorozzuk" meg jobbról b-vel

$$((b \circ a) \circ b) \circ b = a \circ b.$$

Megint (2) miatt a bal oldal $b \circ a$, így

$$b \circ a = a \circ b.\square$$

Az előzőekben tárgyaltak mintapéldái lehetnek annak, ahogy bizonyos szabályokból következtetünk (az általános- és középiskolában kétkedés nélkül elfogadott) tulajdonságra; a kommutativitásra.

Ebben a tekintetben rokon azokhoz az algebrai feladatokhoz, amelyekbe algebrai azonosságokat kell igazolni.

Az előző két példával rokon, ám egy kicsit nehezebb, ugyancsak kommutativitásra vonatkozó feladatot mutatunk be:

1.51. Feladat: *Legyen* $(G, \cdot)$ *egy csoport, melyen definiálunk egy leképezést:* $\varphi : G \mapsto G$ $\varphi(x) = x^3$*. Tegyük fel* φ*-ről, hogy* **homomorfizmus** *és hogy* **injektív***. Igazoljuk, hogy ekkor a csoport kommutatív.*

Mielőtt a megoldáshoz fognánk, idézzük fel, mit is jelent a két feltétel:

1. φ **homomorfizmus**, ami azt jelenti, hogy $\forall a, b \in G$ teljesül, hogy $\varphi(a \cdot b) = \varphi(a) \cdot \varphi(b)$.
2. φ **injektív**, azaz, ha $a \neq b$ akkor $\varphi(a) \neq \varphi(b)$.

Megoldás:

Mivel φ homomorfizmus, így

$$(xy)^3 = x^3y^3$$

teljesül minden $x, y \in G$ elemre. Balról x-szel, jobbról y-nal egyszerűsítve

$$y(xy)x = x^2y^2.$$

Az asszociativitást használva

$$y(xy)x = (yx)(yx) = (yx)^2,$$

így

$$(yx)^2 = x^2y^2.$$

Balról yx-szel beszorozva

$$(yx)^3 = yx^3y^2,$$

és mivel $(yx)^3 = y^3x^3$, egy y-nal balról leosztva

$$y^2x^3 = x^3y^2$$

teljesül. (Tehát az x^3 y^2 elemek már kommutálnak).

Most már be tudjuk bizonyítani, hogy $\forall a, b \in G$ $ab = ba$. Legyen $y = a^3;\ x = b^2$ és helyettesítsük ezeket be:

$$(a^3)^2(b^2)^3 = (b^2)^3(a^3)^2,$$

$$(a^2)^3(b^2)^3 = (b^2)^3(a^2)^3.$$

Mivel a köbre emelés homomorfizmus

$$(a^2b^2)^3 = (b^2a^2)^3$$

és mivel injektív

$$a^2b^2 = b^2a^2.$$

Balról a-val, jobbról b-vel szorozva

$$a^3b^3 = ab^2a^2b$$

vagy másként

$$(ab)^3 = a^3b^3 = ab^2a^2b,$$

$$(ab)(ab)(ab) = (ab)ba(ab).$$

Jobbról, balról (ab)-vel egyszerűsítve

$$ab = ba.\square$$

Az általános iskolában, a gimnáziumokban meggyökeresedhetett az az elképzelés, hogy az

$$a^{k_1}b^{s_1} \cdot a^{k_2}b^{s_2} \cdots a^{k_u}a^{s_v} = a^{m_1}b^{t_1} \cdot a^{m_2}b^{t_2} \cdots a^{m_w}a^{t_z},$$

egyenlőség eldöntéséhez csak át kell rendeznünk a bal, ill. jobb oldalt és a kitevőket össze kell hasonlítani:

$$k_1 + k_2 + \dots k_u = m_1 + m_2 + \dots m_w;$$

és

$$s_1 + s_2 + \dots s_v = t_1 + t_2 + \dots t_z$$

a szükséges és elégséges feltétele ennek. Az elképzelés a valós számok testében (és sok más középiskolában szokásosan használt struktúrában) igaz.

A következő, nagyon szellemes megjegyzés példa arra, hogy nem kommutatív struktúrában ez nem igaz:

1.52. Tétel: *Legyen* $F = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ *és* $G = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

Ekkor

$$F^{k_1}G^{s_1} \cdot F^{k_2}G^{s_2} \cdots F^{k_u}G^{s_v}$$

csak egyféleképpen írható fel, a szorzat egyértelmű.

Bizonyítás:

Azt mondjuk, hogy egy

$$\underline{v} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

vektor pozitív, ha $x, y > 0$. Mivel

$$F\underline{v} = \begin{pmatrix} x+y \\ x \end{pmatrix}; \quad G\underline{v} = \begin{pmatrix} y \\ x+y \end{pmatrix},$$

ezért mind F, mind G pozitív vektort pozitív vektorba visz át.

A $\underline{v}$-ról azt mondjuk, hogy felső típusú, ha $x > y$ és azt, hogy alsó típusú, ha $x < y$ (tehát az (x, x) típusú vektorokról nem mondunk semmit). Jegyezzük meg, hogy ha $\underline{v}$ pozitív vektor, akkor $F\underline{v}$ képe felső típusú és $G\underline{v}$ képe alsó típusú. Tegyük most fel, hogy az F-ek hatványaiból és a G-k hatványaiból készítünk két különböző szorzatot, U-t és V-t és tegyük fel, hogy ezek egyenlők $U = V$ és az összes ilyen példa közül ezek a legrövidebbek.

Az U és V nem kezdődhet ugyanúgy; mivel mind F, mind G invertálhatók, azért ha ugyanúgy kezdődnének, le lehetne velük egyszerűsíteni és lenne rövidebb példa. Tehát tegyük fel, hogy

$$U = F \cdot U'; \qquad V = G \cdot V'.$$

Legyen most $\underline{w}$ egy pozitív vektor. Ekkor, mint láttuk F és G és így minden hatványa pozitív vektorba viszi át a pozitív vektort. Ezért

$$U'\underline{w}; \qquad V'\underline{w}$$

vektorok pozitívak. Ám

$$U\underline{w} = F \cdot U'\underline{w}$$

felső típusú és

$$V\underline{w} = G \cdot V'\underline{w}$$

alsó típusú ellentmondásként. □

E paragrafusban utolsóként nézzük a 2009-es Nemzetközi Matematikai Diákolimpia egyik feladatát, amelyben ugyancsak felcserélhetőségről van szó:

1.53. Feladat: *Ha A, B, C mátrixok, akkor*

$$(A - B)C = BA^{-1} \quad \Leftrightarrow \quad C(A - B) = A^{-1}B,$$

feltéve, hogy az A^{-1} és C^{-1} inverzek léteznek.

Megoldás:

1. Először megmutatjuk, hogy $C = I$ esetén miért igaz az állítás, majd ebből levezetjük az általános esetet. Mindössze azt használjuk fel, hogy a multiplikatív inverzek felcserélhetőek; $x \cdot x^{-1} = 1 \;\Leftrightarrow\; x^{-1} \cdot x = 1$. Belátjuk, hogy

$$A - B = BA^{-1} \quad \Leftrightarrow \quad A - B = A^{-1}B.$$

Ha $A - B = BA^{-1}$, akkor $A - B - BA^{-1} + I = I$ teljesül. Ám

$$A - B - BA^{-1} + I = (A - B)(A^{-1} + I) = I,$$

azaz $(A - B)$ és $(A^{-1} + I)$ egymás multiplikatív inverzei. Ezért igaz, hogy

$$(A^{-1} + I)(A - B) = I,$$

felbontva a zárójeleket

$$I - A^{-1}B + A - B = I \quad \Leftrightarrow \quad A - B = A^{-1}B.$$

2. Az általános eset; felbontva a zárójelet

$$(A - B)C = BA^{-1};$$

$$AC - BC = BA^{-1} = (BC)(AC)^{-1}.$$

1.-ben A helyett AC-vel, B helyett BC-vel felírva

$$AC - BC = BA^{-1} = (BC)(AC)^{-1} \quad \Leftrightarrow \quad AC - BC = (AC)^{-1}(BC) = C^{-1}A^{-1}BC,$$

C^{-1}-zel jobbról C-vel balról beszorozva

$$C(A - B) = A^{-1}B.\square$$

Megjegyzések:

1. Az előző feladatban nem használtuk, hogy mátrixokról volt szó; valójában tetszőleges gyűrűben is elmondható lett volna a feladat.

2. Ezek a feladatok arra szerettek volna rávilágítani, hogy középiskolai versenyszintű feladatokban is fellelhető alapvető, a struktúrákkal kapcsolatos állítások. A következő paragrafusban még közvetlenebb kapcsolatra szeretnénk rámutatni.

1.54. Feladat: *Gyűjtse össze a témához tartozó kulcsszavakat!*

Strukturák III.

Ezt a rövid fejezetet kezdjük egy feladatsorral:

1.55. Feladat: *Legyen* $\mathbb{F}$ *egy tetszőleges test és legyen* $0_F = 0$ *a nulla eleme. Bizonyítsuk be, hogy*

$\forall a, b \in \mathbb{F},\ a, b \neq 0$ *teljesül, hogy*
1. $-(a \cdot b^{-1}) = (-a) \cdot b^{-1} = a \cdot (-b^{-1})$.
2. $(-a)^{-1} = -(a^{-1})$.
3. $a \cdot b^{-1} = (-a) \cdot (-b^{-1})$.

Milyen „szabályok" következnek ezekből az állításokból?

A következőkben hivatkozunk néhány jól ismert tételre a csoportelméletből:

1.56. Tétel: *1. Legyen* G *egy véges csoport. Ekkor bármely* $H < G$ *részcsoportjára igaz, hogy* $|H|$ *elemszáma osztója* $|G|$ *elemszámának.*

2. $\forall g \in G;\quad g^{|G|} = 1,$ *ahol* 1 *a csoport egységeleme.*

1.57. Tétel: *Egy prímrendű csoport ciklikus.*

Most kulcsszavak keresése helyett feladatokban tűzzük ki az iskolai kapcsolatot.

A középiskolákban is előkerül (néha csak speciális formában) az Euler-Fermat-tétel.

1.58. Feladat: *Az előző tételek közül melyik tétel és hogyan kapcsolódik az Euler-Fermat-tételhez?*

Ugyancsak előkerül (megint néha csak speciális formában) a $\mod p$ *primitív gyök* fogalma.

1.59. Feladat: *Az előző tételek közül melyik tétel és hogyan kapcsolódik a primitív gyök fogalmához?*

Szitaformula

Általános- és középiskolából jól ismert feladat a következő:

1.60. Feladat: *Egy* 32 *fős osztályban a gyerekek négy nyelvet tanulnak:* 15*-en angolul,* 10*-en németül,* 9*-en franciául. Angolul és németül* 6*-an, angolul és franciául* 4*-en, németül és franciául* 4*-en tanulnak. A három nyelvet* 3*-an választották. Az osztály többi tanulója csak az oroszt tanulja. Hányan vannak ők?*

Ezt a feladatot általában ú.n. Venn-diagrammal szokás megoldani.

Van azonban másik megoldás is, a logikai szita segítségével: a 32-ből kiszitáljuk a 15 angolt, 10 németet, a 9 franciát, azonban kétszer vontuk le az angol-németet s.í.t. Tehát akik csak oroszul tanulnak:

$$32 - 15 - 10 - 9 + 6 + 4 + 4 - 3 = 9.$$

Ebben a pontban ennek a módszernek egy nagyon hasznos alkalmazását mutatjuk be, amit középiskolában is elmondhatunk, és amelynek egyetemi anyag a háttere. Ezeket a kulcsszavakat kellene összegyűjteni a paragrafus végén.

Ezen alkalmazás előtt két jól ismert feladatot (tétel formájában) említünk bizonyítás nélkül:

1.61. Tétel:
1. *Egy hat pontú teljes gráf éleit két színnel színezve, mindig található a gráfban egyszínű háromszög. Sőt, legalább két egyszínű is van, és ennél több nem állítható.*
2. *Egy* 17 *pontú teljes gráf éleit három színnel színezzük. Ekkor mindig található a gráfban egyszínű háromszög.*

1.62. Tétel: *Ha egy n pontú gráf éleinek a száma $> \frac{n^2}{4}$, akkor a gráfban van háromszög.*

Az első tétel ú.n. Ramsey-típusú tétel, a második a Turán tétel speciális esete. E két tételt, mint következményt vezethetjük le a következő állításból, ahol a logikai szitát (és még más eszközt is) használunk:

1.63. Tétel: *Egy n pontú G gráfban az egyszínű háromszögek száma legalább*

$$\frac{n(n-1)(n-5)}{24}.$$

Bizonyítás:

Használjuk a szitaformulát: az összes háromszögek számából szitálunk: Először azokat hagyjuk el, amelyeknek van a komplementer gráfban élük; egy ilyen élhez $n-2$ pont csatlakozik egy háromszöget alkotva. Tehát

$$\Delta(G) = \binom{n}{3} - \overline{e}(n-2) \dots .$$

Most azokat a háromszögeket kell „visszaadnunk”, amelyeknek két komplementer gráfbeli élük is van. Ezt most a csúcsoknál számoljuk le: az i-edik pontból $\overline{\varphi}_i$ komplementer él fut ki. Ebből kell két élt kiválasztani, ezek ugyanis akkor olyan háromszöget határoznak meg, amelyeknek van két komplementer éle. Végül le kell vonni azokat a háromszögeket, amelyeknek mindhárom oldala komplementer él. Ezek száma definíció szerint $\Delta(\overline{G})$. Így

$$\Delta(G) = \binom{n}{3} - \overline{e}(n-2) + \sum_{i=1}^{n} \binom{\overline{\varphi}_i}{2} - \Delta(\overline{G}).$$

A további becslésekhez az alábbi állításra van szükségünk:

Állítás:

Az $f(x) := \frac{x^2-x}{2}$ függvény konvex, tehát igaz rá, hogy bármely $x_1 < x_2 < \dots < x_n$ esetén

$$f\left(\frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n}\right) \leq \frac{\sum_{i=1}^{n} f(x_i)}{n}.$$

Mivel az $\binom{n}{2}$ binomiális együtthatót is az $\frac{n^2-n}{2}$ képlettel számoljuk ki, bevezethetjük f-re az $f(x) := \binom{x}{2}$ jelölést. Ekkor a fenti állítás így írható le:

$$\binom{\frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n}}{2} \leq \frac{\sum_{i=1}^{n} \binom{x_i}{2}}{n}$$

Tehát a szita képletben a $\sum_{i=1}^{n} \binom{\overline{\varphi}_i}{2}$ tagot így becsülhetjük

$$\sum_{i=1}^{n} \binom{\overline{\varphi}_i}{2} \geq n \cdot \binom{\frac{\sum_{i=1}^{n} \overline{\varphi}_i}{n}}{2}.$$

A $\sum_{i=1}^{n} \overline{\varphi}_i$ éppen a komplementer élek kétszerese, tehát

$$\sum_{i=1}^{n} \binom{\overline{\varphi}_i}{2} \geq n \cdot \binom{\frac{\sum_{i=1}^{n} \overline{\varphi}_i}{n}}{2} = n \cdot \binom{\frac{2\overline{e}_i}{n}}{2} = \frac{2\overline{e}^2}{n} - \overline{e}.$$

Így a szitaképletben az egyszínű háromszögek számára (ha úgy gondolunk a gráfra és a komplementerére, mint a teljes gráf éleinek két-színezésére) azt kapjuk, hogy

$$\Delta(G) + \Delta(\overline{G}) \geq \binom{n}{3} - \overline{e}(n-2) + \frac{2\overline{e}^2}{n} - \overline{e}.$$

Ez $\overline{e}$-nak másodfokú függvénye, amelynek minimuma az $\overline{e} = \frac{n(n-1)}{4}$-ben van. Ezt behelyettesítve kapjuk, hogy

$$\Delta(G) + \Delta(\overline{G}) \geq \binom{n}{3} - \overline{e}(n-2) + \frac{2\overline{e}^2}{n} - \overline{e} \geq \frac{n(n-1)(n-5)}{24}.$$

$\square$

Ha $n = 6$, akkor a jobb oldal nagyobb, mint 1, azaz egy 6 pontú gráf éleit két színnel színezve, van legalább két egyszínű háromszög található a gráfban.

Ha valaki mondjuk, azt szeretné bizonyítani, hogy egy $n = 8$ pontú gráfban van 7 egyszínű háromszög, akkor ez nem lenne olyan egyszerű feladat (azonban a fenti leszámlálásból rögtön következik).

1.64. Tétel: *Egy n pontú e élű gráfban a háromszögek száma legalább*

$$\frac{e(4e-n^2)}{3n}.$$

Bizonyítás:

A bizonyításhoz két dolgot kell észrevennünk:

1. A $\sum_{i=1}^{n} \binom{\overline{\varphi}_i}{2}$ összegben a $\Delta(\overline{G})$-t háromszor számoltuk, tehát

$$\sum_{i=1}^{n} \binom{\overline{\varphi}_i}{2} \geq 3\Delta(\overline{G}),$$

így a szita képletben

$$\Delta(G) \geq \binom{n}{3} - \overline{e}(n-2) + \frac{2}{3}\sum_{i=1}^{n} \binom{\overline{\varphi}_i}{2} \geq \binom{n}{3} - \overline{e}(n-2) + \frac{2}{3}\left(\frac{2\overline{e}^2}{n} - \overline{e}\right).$$

Másfelöl

2. Nyilván

$$\overline{e} = \frac{n}{2} - e.$$

Ezt a fenti becslésbe beírva, kis számolással adódik, hogy

$$\Delta(G) \geq \frac{e(4e-n^2)}{3n}.$$

$\square$

Ebből pedig a másodikként említett tételt kapjuk; ha $e > \frac{n^2}{4}$, akkor $\frac{e(n^2-4e)}{3n} > 0$, azaz van háromszög a gráfban. Valójában sokkal többet olvashatunk le. Ha az él szám nagyobb az említettnél, *hirtelen* nagyon „sok” háromszög lesz G-ben.

1.65. Feladat: *Gyűjtse össze a témához tartozó kulcsszavakat!*

Végtelen leszállás-Teljes indukció

Teljes indukcióval megoldható feladatokban bővelkednek mind a középiskolai, mind az egyetemi feladatsorok, tételek. Az ú.n. végtelen leszállás (infinite descent) módszerrel operáló bizonyítást viszont jóval kevesebbet találunk. Jól ismert Fermat tétele (ő írta le, és nevezte így el ezt a bizonyítási eljárást).

Most két állítást bizonyítunk ezzel a módszerrel. Ebben a paragrafusban is a kulcsszavak keresése helyett végtelen leszállás módszerével megoldható feladatok keresését ajánljuk.

1.66. Tétel: *Az*

$$a^2 + b^2 = 3(c^2 + d^2)$$

egyenletnek az egészek körében nincs megoldása, ha a, b, c, d nem egyszerre 0.

Bizonyítás:

Mivel $3|a^2 + b^2$ és mivel $x^2 \equiv 0,\ 1(\mod 3)$ ezért $3|a$ és $3|b$. Így $a = 3a_1$; $b = 3b_1$ és így

$$3(a_1^2 + b_1^2) = c^2 + d^2 \text{ és } |a_1| < |a|, |b_1| < |b|.$$

Ezt az eljárást folytatva pozitív egész számok csökkenő és végtelen sorozatát kapjuk ellentmondásként.

A következő feladat, amiben ugyancsak a végtelen leszállás módszerét (és a teljes indukciót) használjuk, Terence Taotól származik.

1.67. Tétel: *Tegyük fel, hogy egy G véges csoport négy elemére, $a, b, c, d \in G$*

$$ab = ba^2 \quad bc = cb^2 \quad cd = dc^2 \quad da = ad^2.$$

Ekkor ez csak úgy teljesülhet, ha $a = b = c = d = 1$.

Bizonyítás:

1. A $ab = ba^2$ feltételt úgy is írhatjuk, hogy $a^2 = b^{-1}ab$. Innen teljes indukcióval igazolható, hogy

$$a^{2^n} = b^{-n}ab^n. \quad (*)$$

2. Jelölje egy x elem rendjét $o(x) = s$, azaz $x^s = 1$.

Igazolni fogjuk, hogy ha p egy prímszám és $p|o(a)$, akkor $o(b)|p-1$. Legyen $o(b)=n$. Akkor $(*)$ és $b^{-n}=b^n=1$ miatt $a^{2^n}=a$, azaz

$$a^{2^n-1}=1.$$

De így

$$p|o(a)|2^n-1,$$

ezért a kis Fermat-tétel miatt $n=o(b)|p-1$.

3. Ezért az 1. ill. 2. pontokban elmondottak alapján:

$$p_1|o(a) \Rightarrow o(b)|p_1-1$$

ezért, ha

$$p_2|o(b) \Rightarrow p_2 < p_1.$$

$$p_2|o(b) \Rightarrow o(c)|p_2-1$$

ezért, ha

$$p_3|o(c) \Rightarrow p_3 < p_2.$$

$$p_3|o(c) \Rightarrow o(d)|p_3-1$$

$$p_4|o(d) \Rightarrow p_3 < p_4.$$

Végül

$$o(a)|p_4-1; p_5|o(a) \Rightarrow p_5 < p_4.$$

Így prímek egy végtelen csökkenő sorozatát kaptuk.

Ellentmondást akkor nem kapunk, ha ezek a prímek nem léteznek, azaz mindegyik elem rendje 1, azaz maguk is az egységek, vagy akkor sincs ellentmondás, ha feltesszük, hogy a csoport végtelen számosságú.

Függvények, Egyenletek, Polinomok

Ebben a paragrafusban olyan egyenleteket tekintünk, amelyek megoldása nem a szokásos utat követi, és amik mögött lépten-nyomon fellelhetők az egyetemen tanultak.

1.68. Feladat: *Bizonyítsuk be, hogy ha $a < b < c$, akkor az*

$$(x-a)(x-b)+(x-a)(x-c)+(x-c)(x-b)=0$$

egyenletnek léteznek valós gyökei x_1, x_2, amelyekre $a < x_1 < b < x_2 < c$.

I. Megoldás:

Ha felbontjuk a zárójeleket és összegyűjtjük a közös tagokat, akkor egy másodfokú egyenletet kapunk:

$$3x^2 - 2(a+b+c) + (ab+ac+bc) = 0.$$

Két különböző valós gyökünk van, ha

$$D = 4(a+b+c)^2 - 12(ab+ac+bc) > 0.$$

Ám

$$D = 4(a^2+b^2+c^2-ab-ac-bc) = 2((a-b)^2+(a-c)^2+(c-b)^2),$$

ami nyilván pozitív. A $a < x_1 < b < x_2 < c$ feltétel bizonyítását most nem végezzük el.

II. Megoldás:

Legyen $p(x) = (x-a)(x-b)+(x-a)(x-c)+(x-c)(x-b)$. Az $a < b < c$ feltétel miatt

$$p(a) = (a-c)(a-b) > 0; \quad p(b) = (b-a)(b-c) < 0; \quad p(c) = (c-a)(c-b) > 0,$$

amiből következik az állítás. A részletes indoklást elhagytuk; a Kulcsszavaknál kell kiegészíteni, mit is használtunk pontosan itt.

III. Megoldás:

Legyen $f(x) = (x-a)(x-b)(x-x)$. Ekkor

$$f'(x) = (x-a)(x-b)+(x-a)(x-c)+(x-c)(x-b),$$

léteznek tehát x_1, x_2, amelyekre $a < x_1 < b < x_2 < c$ és $f'(x_1) = f'(x_2) = 0$.

1.69. Feladat: *Gyűjtse össze a témához tartozó kulcsszavakat!*

1.70. Feladat: *Legyen*

$$p(x) = x^4 + 3x^3 - 7x^2 + x + 2.$$

Írjuk fel $p(x)$-et, mint $(x-1)$ polinomját!

I. Megoldás (vázlat):

Tehát meg kell határozni az A, B, C, D és E értékét úgy, hogy

$$x^4 + 3x^3 - 7x^2 + x + 2 = A(x-1)^4 + B(x-1)^3 + C(x-1)^2 + D(x-1) + E$$

legyen.

Felbontva a zárójeleket, az öt ismeretlenre egy lineáris egyenletrendszert kapunk. Ezt a jól ismert Gauss-Jordan eliminációs módszerrel a középiskolában (is) megoldhatjuk.

II. Megoldás

Az E nyilván $p(1)$; $p'(1) = D$; $p''(1) = 2C$; $p'''(1) = 6B$; A nyilván 1.
Így

$$x^4 + 3x^3 - 7x^2 + x + 2 = (x-1)^4 + 14(x-1)^3 + 8(x-1)^2.$$

Kulcsszó: (Ezt a bizonyítási ötletet milyen általános tétel bizonyításánál használják?)

III. Megoldás:

Használjuk az $f(x)$ polinomra a maradékos osztást, azaz osszuk el $f(x)$−et $(x-1)$-gyel. A maradék nyilván E lesz, A hányadost megint osszuk el $(x-1)$-gyel, a maradék D lesz. Folytatva az eljárást megkapjuk az összes együtthatót.

1.71. Feladat: *Oldjuk meg a következő egyenletet!*

$$8^x(3x+1) = 4$$

Megoldás:

Gyorsan látható, hogy az $x = 1/3$ megoldás. (Talán ezt sugallja az is, hogy 8, egy köbszám az alapja az exponenciális tényezőnek).

Világos, hogy meg kell néznünk, van-e más megoldás: mivel mind 8^x, mind $(3x+1)$ szigorúan növekedő függvények, az egyenletnek legfeljebb egy megoldása lehet.

Kulcsszó: (A monotonitáson kívül miket is használtunk fel?)

1.72. Feladat: *Oldjuk meg!*

$$4^x = 2x + 1$$

Megoldás:

Az $x = 0$ és az $x = 1/2$ a megoldások.

Kulcsszó: (Milyen alaki tulajdonságait használtuk fel a 4^x és az $1 + 2x$ függvényeknek?)

1.73. Feladat: *Oldjuk meg!*

$$2^x + 3^x = 5^x$$

Megoldás:

Ekvivalens átalakítás után:

$$\left(\frac{2}{5}\right)^x + \left(\frac{3}{5}\right)^x = 1.$$

Ennek az $x = 1$ és csak ez a megoldása.

Kulcsszó: Mit használtunk fel?

1.74. Feladat: *Oldjuk meg!*

$$4^x + 9^x + 25^x = 6^x + 10^x + 15^x$$

Megoldás:

Legyen $a = 2^x$; $b = 3^x$; $c = 5^x$. Ekkor az egyenlet

$$a^2 + b^2 + c^2 = ab + ac + bc$$

alakba írható át. Ez ekvivalens az

$$(a - b)^2 + (a - c)^2 + (b - c)^2 = 0$$

egyenlettel.

A megoldás $x = 0$.

Kulcsszó:

A középiskolában előkerül a függvények **periódusának**, a periodikus függvényeknek a fogalma.

Például a trigonometrikus függvények és egyenletek megoldásánál fontos, hogy hangsúlyozott legyen a periodikus megoldások jelzése (és $+k2\pi:\ k \in \mathbb{Z}$ vagy $+k\pi:\ k \in \mathbb{Z}$ stb.) Általában is fontos, hogy tudjuk, milyen a *szerkezete* a periódusok halmazának. Erre a következő egyszerű állítás ad választ:

1.75. Tétel: *Legyen P_f a minden valós számon értelmezett függvény periódusainak a halmaza, azaz legyen*

$$P_f := \{p \in \mathbb{R} : \forall x \in \mathbb{R} \; f(x+p) = f(x)\}.$$

(értsük ebbe a halmazba a $p = 0$ értéket is).

Ekkor a $(P_f, +)$ egy additív csoport.

Bizonyítás:

Mivel $P_f \subseteq \mathbb{R}$, továbbá 0 az egységelem ezért csak a zártságot és inverz létezését kell igazolni.

1. Zárt

Ha $p_1, p_2 \in P_f$, akkor $\forall x \in \mathbb{R}$

$$f(x + (p_1 + p_2)) = f((x + p_1) + p_2) = f(x + p_1) = f(x).$$

Az első egyenlőségnél azt használtuk, hogy p_2, a másodiknál azt, hogy p_1 periódus.

2. Inverz

Ha $p \in P_f$, akkor

$$f(x) = f(x + p - p) = f((x - p) + p) = f(x - p) = f(x + (-p)),$$

azaz $-p \in P_f$.

A kérdést meg is fordíthatjuk; ha adott a $(P, +)$ additív csoport van-e olyan f, hogy $P_f = P$? A válasz igenlő:

1.76. Tétel: *Legyen $(P, +)$ egy additív csoport, $P \subseteq \mathbb{R}$ és 0 az egységelem. Ekkor létezik olyan mindenhol értelmezett f függvény, hogy*

$$P_f = P.$$

Az utóbbi tételt feladatként – speciális esetben – fel is adhatjuk szakkörön (természetesen nem szükséges megemlíteni, hogy a P csoport).

Bizonyítás:

Legyen

$$f(x) = \begin{cases} 1 & x \in P \\ 0 & x \notin P \end{cases}$$

Bebizonyítjuk, hogy $P_f = P$.

Legyen $p \in P$. Ekkor ha $x \in P$, akkor $f(x) = 1$ és $p + x \in P$, mivel P zárt az összeadásra, de így $f(x+p) = 1$. Ha $x \notin P$, akkor $x + p \notin P$, (ellenkező esetben, azaz ha

$x + p = p'$, akkor $x = p' - p \in P$ ellentmondásként) így $f(x) = 0$ és $f(x + p) = 0$. Azt kaptuk, hogy mindkét esetben, azaz $\forall x \in \mathbb{R}$,

$$f(x + p) = f(x).$$

Végül azt kell igazolnunk, ha $q \notin P$, akkor q nem periódus. $0 \in P$, így $f(0) = 1$, de $f(0 + q) = f(q) = 0$, azaz q nem periódus.

□

Megjegyzések:

1. A bizonyításban szereplő $f(x)$ függvény emlékeztet bennünket az analízisben megismert Dirichlet függvényre. Ez persze nem véletlen.

1.77. Feladat: *Határozzuk meg a Dirichlet függvény P_D periódushalmazát!*

2. Ez is egy jó alkalom, hogy – mondjuk szakkörön – struktúrák-függvények ismereteket bővítsük. Például legyen $P = \{p = a + b\sqrt{2} : a, b \in \mathbb{Z}\}$ halmazzal definiáljuk a fenti megadásos függvényt. A bizonyítás során - mármint, hogy P halmaz (és csak ezek) elemei a periódusok, valójában végigmegy a csoport axiómákon.

Periodikus függvényekkel kapcsolatosan további sok szép feladatot lehet készíteni az előbb elmondottak alapján.

Ismert feladat a következő:

1.78. Feladat: *Tegyük fel, hogy $f(x)$ és $g(x)$ mindenhol értelmezett függvények p ill. q szerint periodikusak és hogy p/q racionális szám.*

Igazoljuk, hogy $f(x) + g(x)$ is periodikus függvény!

Megoldás:

A feltétel szerint $p/q = a/b$; $a, b \in \mathbb{Z}$; $b > 0$. Ekkor

$$p \cdot b = q \cdot a$$

és mivel ha egy szám periódus, annak egész számú többszöröse is az, ezért

$$f(x + p \cdot b) + g(x + q \cdot a) = f(x) + g(x)$$

azaz $f(x) + g(x)$, $P = p \cdot b = q \cdot a$ szerint periodikus függvény.

(Ebben a megoldásban is előjött a periódushalmaz csoport tulajdonsága).

Logika

Újsághír:

„Ha István napján szép az idő

A népi jóslat szerint, ha karácsony második napján szép, napos idő van, akkor száraz nyár és jó bor várható. A mai borús, esős nap tehát nem sok jót ígér a borászoknak.”

NOL, 2012.12.25.

Talán ez az egyik legfontosabb fejezete e jegyzetnek. A köznapi beszédben is igencsak sokszor előfordul logikailag hibás indoklás, kijelentés, (mindjárt meg is vizsgáljuk a fenti idézett újsághírt).

A matematika órákon viszont kiemelt szerepe van annak, hogy a szabatos gondolkodást tanítsuk; ennek komoly része az, hogy minden nehézség, „gondolkodás nélkül” használjuk az alapvető logikai szabályokat, és (ha kell) észrevegyük a hamis következtetéseket.

Vizsgáljuk meg, mi a gond az idézett újsághírrel. Két állítás és a közöttük levő következtetés a megfigyelésen alapuló néphit: A állítás: $A =$karácsony második napján szép, napos idő van. $B =$száraz nyár és jó bor várható. A népi megfigyelés:

$$A \Rightarrow B.$$

Miért kesereg az újságíró? „A mai borús, esős nap tehát nem sok jót ígér a borászoknak.”

Azaz implicit azt mondja:

$\neg A =$*a mai borús, esős nap*; $\neg B =$*nem sok jót ígér a borászoknak (= nem várható jó bor)*

és a kijelentés:

$$\neg A \Rightarrow \neg B.$$

Azonban $A \Rightarrow B$ kijelentés nem azonos $\neg A \Rightarrow \neg B$ állítással. Az újságíró hamis következtetést tett.

Megjegyzés:

Talán egy érdekes projekt lehet hamis következtetések után vadászni a médiában.

Helyesen $\neg B \Rightarrow \neg A$, azaz a következő lenne a helyes (reméljük nem így lesz);

„A 2013. év nyara borongós volt, rossz szőlőtermést szüreteltek; persze, az elmúlt karácsony másnapja nem is volt szép, napos”.

Érdemes tisztázni, és számos példán megerősíteni a szükséges, az elégséges és a szükséges és elégséges feltételeket. Számos ekvivalencia bizonyításakor, (ami nem is olyan ritka a középiskolában) azt mondjuk:

Az

$$A \Leftrightarrow B$$

állítást bizonyítjuk; első lépésben a „szükséges”

$$A \Rightarrow B$$

feltételt bizonyítjuk, második lépésben a

$$B \Rightarrow A$$

„elégséges” feltételt igazoljuk.

NEM HAGYHATJUK KÉTSÉGEK KÖZÖTT A TANULÓKAT, HOGY PONTOSAN MIT ÉRTÜNK EZ ALATT,

azaz mi minek a szükséges, illetve elégséges feltétele.

A „szükséges” és „elégséges” szavak az állítások egymáshoz viszonyított szerepében kapnak értelmet. Érdemes elmondani a klasszikus:

„Ha esik az eső, akkor vizesek az utcák”
kijelentést.

A „vizesek az utcák” az „esik az eső” szükséges feltétele (valóban ha esik az eső, szükségképpen vizesek az utcák); A=esik az eső; B=vizesek az utcák, az előbbi kijelentés $A \Rightarrow B$ formában írható le, míg az esik az eső mondat a vizes a járda mondat elégséges feltétele: (valóban a vizes járdához pl. elég, ha esik az eső). Természetesen hangsúlyozni kell, hogy nem azt állítottuk, hogy itt a feltételek szükséges **és** elégséges feltételek. Ezen a példán is szépen lehet illusztrálni, hogy ez se azonos $\neg A \Rightarrow \neg B$ állítással.

Talán érdemes megjegyezni, hogy a szükséges feltétel a sokszor használt latin „sine qua non” kifejezés.

Kijelentéslogika

Az egyetemi logika előadásain ismertetett kijelentéslogika elemei lehetőséget adnak arra, hogy számos, néha igencsak nehezen követhető, játékos matematikai – logikai feladat megoldását könnyebben átláthassuk.

Emlékeztetnénk, hogy egy

$$X_1, X_2, \ldots, X_n \models K$$

következtetés helyes, ha mindannyiszor, amikor a premisszák $(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ helyesek, a konklúzió (K) helyes.

Lássunk néhány példát és annak didaktikai vonatkozását:

1. „*– A Van Gogh tényleg hiányzik a falról – szólt Watson, és odasétált a kandallóhoz – de vajon tényleg elllopták-e? – Nos, – nézett Watsonra Holmes, és kivette a pipát a*

szájából, – ha a Van Gogh-ot tényleg ellopták, és nem White a tolvaj, akkor csak nappal történhetett az eset. Holmes leült a bőrfotelbe és folytatta. – Ha a Van Gogh-ot tényleg ellopták, – ismételte meg - és éjszaka volt... nos, akkor világos: White a tolvaj."

Döntsük el, hogy Sherlock Holmes helyesen következtetett-e!

Felírjuk a következtetési sémáját Holmes kijelentéseinek. Legyen
A=Van Gogh-ot tényleg ellopták
B=nem White a tolvaj
C=nappal történt az eset.
Ekkor a kijelentés

$$A \wedge B \to C,\ A \wedge \neg C\ \models \neg B.$$

A következetetés helyes: ha a premisszák helyesek, akkor a konklúzió is helyes. Az állítás igazságtartalmát $|\cdot|$−vel jelöljük.

Mivel $|A \wedge \neg C| = i$, ezért $|A| = |\neg C| = i$ és így $|A| = i$, $|C| = h$. $|A \wedge B \to C| = i$ és $|C| = h$, ezért $|A \wedge B| = h$ (hamisból következhet hamis), így $|B| = h$, tehát $\neg B$, a konklúzió igaz. Mint sokszor, most is Holmes-nak volt igaza.

Az ilyen feladatok megoldásánál több probléma is felmerülhet:

1. A szövegértés. Ezeknél a feladatoknál sokszor kissé mesterkélt a szöveg (a feladat szerzője, jelen esetben e sorok írója a következtetési sémát írta fel, és kreált hozzá többé-kevésbé épkézláb történetet).

2. A mondatrészek értelmezése. Meggyőződésem, hogy ilyen feladatot csak bizonyos érettségi fok mellett lehet feladni (akkor is, mondjuk szakkörön), továbbá, talán meglepő módon a formalizmus segíti a megoldást. Tehát érdemes kijelentések értékéről beszélni, továbbá tisztázni a műveletek értékeit. (Az előbbi feladatban is fontos, a matematikában is hasznos műveletek, diszjunkció, konjunkció, implikáció, negáció szerepeltek.)

Tapasztalatom szerint az alábbi alapkövetkeztetések igazságának bizonyításai népszerűek a hallgatóság körében:

Modus ponens:

$$A, A \to B \models B$$

Indirket bizonyítás:

$$\neg A \to \neg B, B \models B$$

Kontrapozíció:

$$A \to B \models \neg B \to \neg A$$

Hipotetikus szillogizmuss:

$$A \to B, B \to C \models A \to C$$

Reductio ad absurdum:

$$\neg A \to B, \neg A \to \neg B \models A$$

1.79. Feladat: *Készítsünk szöveget az alábbi következtetési formulához, és döntsük el igazságtartalmát.*

$$\neg A \to (B \vee C), \neg B \to (\neg A \wedge D), D \to (B \vee C) \models B$$

1.5.4. Korándi József: A Good Will Hunting című film matematikai tartalmának feldolgozása általános-, illetve középiskolai tanulók számára

Részlet a Matematika és a média kapcsolatának vizsgálata c. PhD értekezésből (lásd Korándi 2012 [130]).

A matematika tanítása során alapvető, de az egyik legnehezebb feladat a nem, vagy csak kevéssé motivált tanulók érdeklődésének felkeltése.

Ennek egyik – eleddig a benne rejlő lehetőségekhez képest ki nem használt – eszköze lehet a populáris kultúrában helyenként megjelenő matematikai tartalmak bevitele a tanórákra. A továbbiakban egy feladatsort mutatunk be, mely elsősorban középiskolások számára készült a filmben előforduló matematikai tartalmak alapján. Mint korábban már utaltunk rá, az ebben az eszközben rejlő lehetőségeket egy népszerű, világszerte sikeres film, a Good Will Hunting ilyen szempontból való feldolgozásával mutatjuk be. Ebben a filmben a felmerülő problémák a véges matematika tárgykörébe tartoznak, annak különböző területeit érintik. Ez esetünkben különösen indokolttá teszi ennek a filmnek a választását: Magyarországon több évtizedre visszanyúló hagyománya van a gráfelmélet középiskolában való tanításának. A gráfelmélet a kutatásokkal párhuzamosan bekerült a magyarországi tananyagba, tankönyvekbe. A szakterület nemzetközi szinten is jegyzett művelője, Gallai Tibor is írt tankönyvet középiskolások számára, például 1949-ben is jelent meg ilyen (Gallai, T., Péter, R. [87]). A gráfelmélet azóta is jelen van a tantervekben, tankönyvekben, feladatgyűjteményekben és a ma használatos taneszközök közül is számosban található gráfelmélet – természetesen a legkülönbözőbb szinteken és feldolgozási módokon. Például: Gerőcs és mások 2010 [89]; Hajnal, I. 1982 [98]; Hajnal, I., Pintér, F. 2001 [100]; Kocsis és mások 2007 [127]; Kosztolányi és mások 2005 [132]. Az, hogy a problémákat egy széles körben ismert, a filmes szakma és a közönség által is elismert filmből tudjuk választani valószínűleg jelentősen növeli az érdeklődést a problémák iránt. Saját egyetemi tanítási tapasztalatom is azt mutatja, hogy a filmben megjelenő matematikai problémák bemutatása az órákon komoly figyelemfelkeltő és érdeklődés fokozó hatással bír.

A film matematikai mélység és nehézség szempontjából elég különböző problémákat jelenít meg. A filmben időnként említés történik ezek nehézségéről is, de az, hogy a filmben mit mondanak róluk, még csak köszönő viszonyban sincs a problémák valódi nehézségével. A film számára ezek dekorációk és díszletek.

Nekünk azonban lehetőséget nyújtanak az érdeklődés felkeltése mellett, és azon túl is, hogy bizonyos matematikai tartalmakat megismertessünk a tanulókkal, matematikai kompetenciájukat fejlesszük.

A matematikai tartalmak többfélesége lehetőséget ad arra is, hogy különböző szinteken és képzettségi fokokon lévő tanulók számára is érdekes és tartalmas anyagot tudjunk belőle felépíteni.

A megjelenő problémákat, feladatokat kétféleképpen fogjuk vizsgálni.

1. Megnézzük, melyik milyen szintű matematikai képzettséget igényel, milyen szinten lévők számára mit mond, illetve kik számára tudhat releváns tananyag lenni.

2. Konkrét feladatsorokon, illetve felépítésen keresztül példát mutatunk arra, hogy a különböző szinteken tanulók számára hogyan lehet feldolgozni ezeket a feladatokat, felvillantva a továbblépés lehetőségét is.

A vizsgált matematikai tartalmak a filmben táblákon jelennek meg, így mi is „táblánként” tekintjük át a problémákat.

1. tábla

A tábla filmbeli szerepéről: A film főhőse – Will Hunting –, aki bár rendkívüli matematikai képességekkel és tudással rendelkezik, de rossz szociális háttere miatt az MIT-n takarítóként dolgozik. A kép azt a jelenetet mutatja, amikor a napi munkája során rátalál a folyosói táblára, melyre a hallgatók számára írtak fel feladatokat, azzal, hogy aki a szemeszter végéig megoldja a feladatokat, az rendkívüli jutalmakban részesül, például a megoldása megjelenik az egyetem folyóiratában is.

A tábla a filmben csak matematikai díszlet a különleges sorsú szereplő zsenialitásának érzékeltetésére. (Ő ugyanis egy-két napon belül, lényegében fejben megoldja a problémákat.) A matematikai tartalom a szakértő számára is korrekt módon jelenik meg, a filmben be nem mutatott elméleti háttér rekonstruálható. Ezt ebben a dolgozatban meg is tettük. A nehézségi fok és a kérdések komplexitásának érzékeltetése minden didaktikai alapot nélkülöz, teljesen esetleges, pontosabban teljesen a film dramaturgiájának van alárendelve.

A tábla képe tisztán látható, alkalmas arra, hogy matematikai szempontból korrekt módon elemezzük.

Idézzük fel a feladatokat:

Legyen G az 1.44. ábrán látható gráf.

Keresse meg

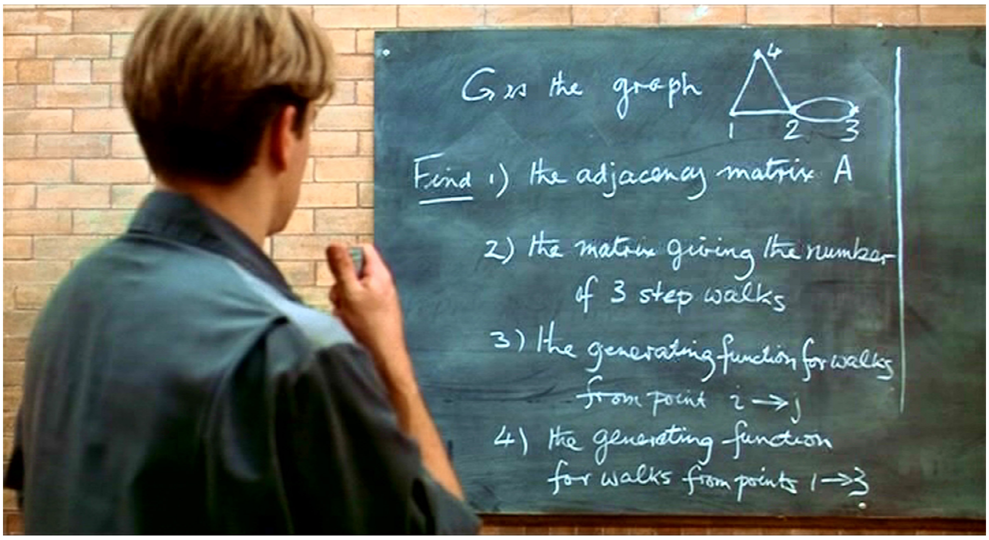
1. *az A szomszédsági mátrixot;*

2. *azt a mátrixot, amelyik megadja a három-hosszú séták számát;*

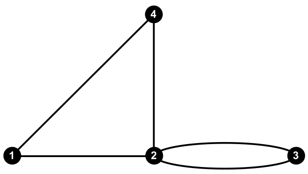
3. *az i pontból a j pontba vezető séták generátor-függvényét;*

4. *az 1 pontból a 3 pontba vezető séták generátor-függvényét!*

A feladatok – mint azt az előző részben részletesen kifejtettük – alapvetően az egyetemi tananyaghoz kapcsolódnak, matematikai kurzusok részét képezhetik.



1.43. ábra.



1.44. ábra.

Egy matematikus számára jól ismert fogalmakkal dolgoznak, a szakember számára a *ráismerés* élményét adja. A mozgósított tudásanyag felöleli az analízis, a lineáris algebra, a kombinatorika és a gráfelmélet bizonyos fejezeteit.

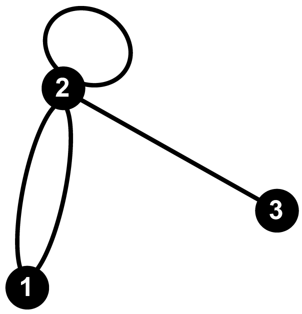
A matematika szakos hallgatók számára már általában nem egyszerűen ráismerésről van szó. Egy átlagos hallgató a megértéshez szükséges ismereteket tanulmányai során több tantárgyon keresztül, folyamatosan kapja, sajátíthatja el. Viszont épp ezért jó lehetőséget adhatnak a feladatok bizonyos fogalmak bevezetésére, elsajátítására és gyakorlására. Megfigyeltük, hogy a sikerorientált személyiségek számára motiváló tényező lehet, hogy a filmben ezek kifejezetten nehéz problémákként vannak aposztrofálva, még akkor is, ha a hallgató tisztában van vele, hogy ez nem a feladatok valódi nehézségi foka.

A matematikusi, illetve matematika szakos hallgatói megközelítését a problémáknak a korábbi fejezet tartalmazza.

Ha az előképzettségtől függetlenül akarunk eljárni, akkor érdemes egy, az elemzési folyamat tipikus lépéseit felfűző feladatsorozatban feldolgozni a témát. Így biztosíthatjuk a tanulás feltételeit (emlékeztetés, közös jelölés, szóhasználat azoknál, akiknek vannak ilyen irányú előismereteik, ugyanakkor önálló problémamegoldás azoknak, akik most szerzik meg a szükséges ismereteket). A 3., illetve 4. feladatot nem gondoljuk ilyen módon feldolgozhatónak, mivel az olyan előképzettséget és a téma iránti olyan elkötelezettséget igényel, ami egyetemi szint alatt általában nem remélhető.

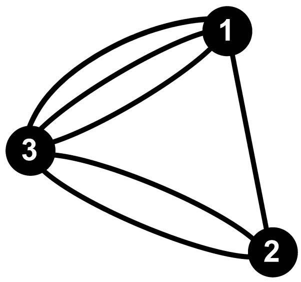
Az első két problémát azonban – épp úgy, mint a filmben megjelenő további problémák – számottevő matematikai előképzettséget nem igényel, ezek lényegében tetszőleges középiskolai, esetenként általános iskolai osztályba bevihetőek. A segítségükkel megszerezhető ismeretek, fejleszthető képességek és kialakítható attitűdök összhangban vannak a NAT célkitűzéseivel, az ott megfogalmazott célok részét képezik. Mivel azonban a konkrét anyagnak csak egy része szerepel a közoktatás törzsanyagában, ezért célszerűbb lehet ezeket szakkörökön, esetleg matematikai táborokban feldolgozni.

Az első két feladatra alapuló gyakorlat-sorozatnak kiindulása lehet egy-két olyan feladat, amelyek még a filmben szereplőnél is egyszerűbb gráfokat használ. Amikor mondjuk a



1.45. ábra. f_1: 3 *pontú gráf, hurokéllel, kettős éllel*

és



1.46. ábra. f_2: 3 *pontú gráf, hurokél nélkül, többszörös élekkel*

gráfokkal kapcsolatban adjuk feladatul egy-egy szomszédsági mátrix elkészítését, akkor a gyengébb képességű, illetve a kudarckerülő típusú tanulókat is sikerélményhez juttathatjuk. E feladatokban a lehetőségekhez mérten érdemes a szakkifejezéseket kerülni, különösen eleinte. Tehát a tanulókat nem mátrixokról kérdezzük, hanem például olyan feladatokat adunk fel, mint az alábbiak:

- Készítsünk T_1 táblázatot, hogy az f_1 rajzon melyik pont melyikkel hányszor van összekötve!
- Készítsünk T_2 táblázatot, hogy az f_2 rajzon/gráfon melyik pont melyikkel hányszor van összekötve!

E két feladat után már bátran feladhatjuk a filmbeli táblán szereplő 1. számú feladatot:

- Készítsünk T_3 táblázatot, hogy az alábbi gráfon melyik pont melyikkel hányszor van összekötve! (GWH 1. tábla, 1. feladat.)

A szaknyelv használatát előkészítendő megemlíthetjük – és ezt a filmbeli szöveg megértése szükségessé is teszi –, hogy az ilyen táblázatokat szomszédsági mátrixoknak szokták nevezni.

Általános iskolás tanulóknál az alacsonyabb absztrakciós készség miatt a rajzokat történetekbe ágyazhatjuk, de legalábbis mint konkrét helyzetről – pl. városokat vagy házakat összekötő utakról – készített térképeket vezethetjük elő, ezzel is fejlesztve a modellalkotási képességüket.

A táblázat (mátrix) felírása után felhívhatjuk a tanulók figyelmét, hogy az első „nehéz problémát" megoldottuk. Ez a sikerélmény motiváló lehet a kapott táblázat/mátrix elemzésére (például, hogy szimmetrikus) és következő kérdés megválaszolásához vezető feladatsorhoz is.

A GWH táblán szereplő második kérdés megválaszolásához például egy ehhez hasonló feladatsoron keresztül vezethetjük el a tanulókat:

- Hányféleképpen tudunk elmenni az egyes pontokból egy-egy pontba két lépésben az f_2 rajzon? Készítsünk róla egy $T_{2;2}$ táblázatot!
- Készítsük el ugyanezt a – $T_{3;2}$ – táblázatot a 3. (filmbeli) gráfhoz!

(Mindkét feladatban elsődleges szerepet játszik a manipulatív tevékenység, majd az adatok begyűjtése és rendszerezése, az eredmények ábrázolása.)

- Keressünk összefüggést a T_2 és a $T_{2;2}$ táblázat között!
- Fent áll-e ugyanez az összefüggés a T_3 és a $T_{3;2}$ táblázat között?

(Összefüggések keresése, felismerése és megfogalmazása. Analógiák felismerése és alkalmazása.)

- Mi okozhatja felismert összefüggést? (Nevezetesen, hogy az új táblázat – pl. $T_{3;2}$ – egy elemét úgy kaphatjuk, hogy a T_3 megfelelő sorában és oszlopában lévő számokat rendre összeszorozzuk és a kapott számokat összeadjuk.) Véletlen ez, az adott gráfokra jellemző, vagy minden (véges) gráfnál ezt tapasztalnánk?

(Logikai kapcsolat felismerése, megfogalmazása, bizonyítása. A felismert elv érvényességi körének vizsgálata, megfogalmazása.)

- Keressünk három lépésből álló „sétákat” az f_2 és f_3 gráfokon!
- Készítsünk $T_{2;3}$ és $T_{3;3}$ táblázatokat a korábbiakhoz hasonlóan, tehát az egyes helyekre a megfelelő pontok közötti három lépéses séták számát írjuk!

(Manipulatív tevékenység, de már az elméleti ismeretek birtokában. Várhatóan a tanulók a néhány séta számának megkeresése után már inkább gondolkozni fognak, megpróbálják a korábban tapasztalt összefüggést az új helyzetre átvinni. Ehhez kapcsolódhatnak, illetve ezt segíthetik a következő kérdések.)

- Lehet-e használni valami módon a kétlépéses táblázatoknál megismert elvet ezekben az esetekben?
- Miért igaz az összefüggésünk a három lépéses sétákra?

(A bizonyítási igény fejlesztése. Várhatólag a tanulók nagyobbik része először csak az összefüggést általánosítja a háromlépéses esetre, az érvényesség megfontolása, pláne bizonyítása nélkül.)

- Hogyan általánosíthatjuk a tapasztaltakat tetszőleges gráfra és tetszőlegesen hosszú sétákra? Igazoljuk is a megfogalmazott állítást!

(A szűkebb körben tapasztalt és bizonyított összefüggések általánosítása. Az érvényességi kör keresése. A bizonyítási igény és a bizonyítási technikák fejlesztése.)

A film 2. feladatát már a $T_{3;3}$ táblázat felírásával megoldottuk. Erre hívjuk fel a tanulók figyelmét! Viszont a téma kapcsán számos kérdés vetődött fel, amelyek létjogosultságát ilyen módon nem kellett külön indokolni, azok természetes módon kapcsolódtak a kiindulási helyzethez, a filmhez.

Az 1. tábla 1. és 2. problémájának ilyen módon való tárgyalása további kibontakozási lehetőségeket rejt magában. Mégpedig a mátrix-szorzás egy nem szokványos, de természetes bevezetését teszi lehetővé. Általános gyakorlat ugyanis, hogy a mátrixok szorzását a puszta technika ismertetésével tanítjuk, jobbára egyetemen. A hallgatók számára ez nem csupán nehezen megjegyezhető, de általában teljesen értelmetlennek is tartják, és csak elhiszik, hogy ennek így van értelme, ezt így célszerű csinálni. A mátrixok és a homogén lineáris leképezések kapcsolata, ami jól láthatóvá teszi végre, hogy mátrixokat tényleg így érdemes összeszorozni, általában jóval később kerül elő a tananyagban, és olyan kurzusok is vannak, ahol ez az összefüggés így nem is fogalmazódik meg.

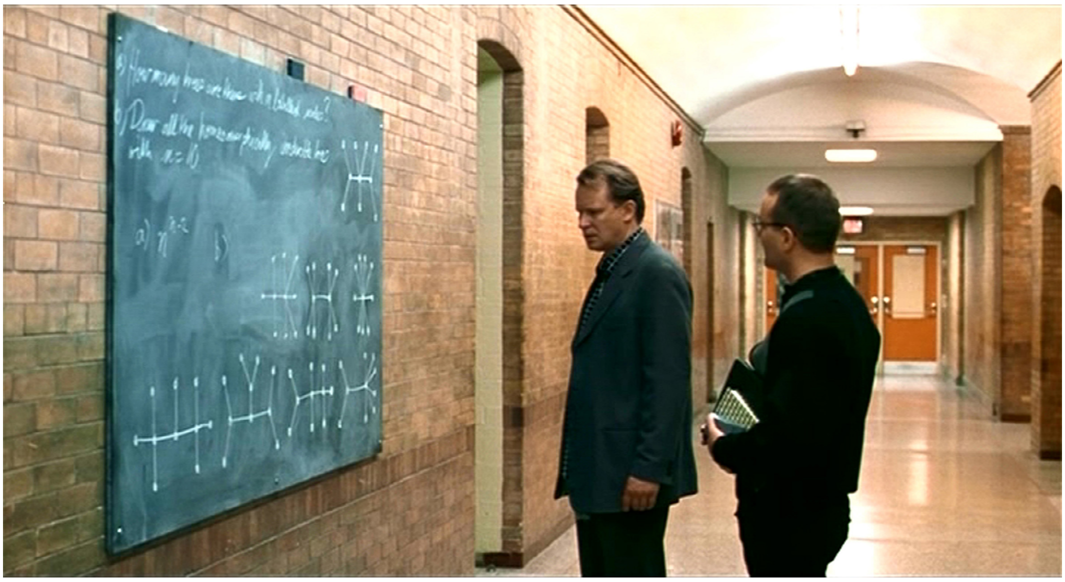
A szomszédsági mátrix viszont általában már az első féléves anyagban megjelenik, sőt, például a fent vázolt módon a közoktatásba is bevihető. A séták számlálásával természetes módon ismerhető fel a szomszédsági mátrix szorzásának és hatványozásának elve és a módszer értelmes volta, hatékonysága az n-hosszú séták számának meghatározásában. Innen már ugyancsak természetes módon általánosítható a mátrixok szorzása nem csak szimmetrikus mátrixok (pl. irányított gráfok segítségével), utána pedig nem csak négyzetes mátrixok esetére is.

2. tábla

A film szerint az első feladatsort Will Hunting megoldotta, a végeredményeket felírta a hirdetőtáblára. A megoldásokra a hallgatók és a tanszék oktatói rátalálnak, de a megoldó személye nem lesz ismert előttük.

A tanszék egy újabb feladatsort ír fel a táblára, immáron kifejezetten az ismeretlen megoldónak címezve.

Ez a kép a filmben a matematika tanszék által kitűzött második feladatsort mutatja, Will Hunting végeredményeivel együtt, abban a percben, amikor a tanszék két oktatója – Lambeau professzor és Tom – a megoldásokra rátalál.

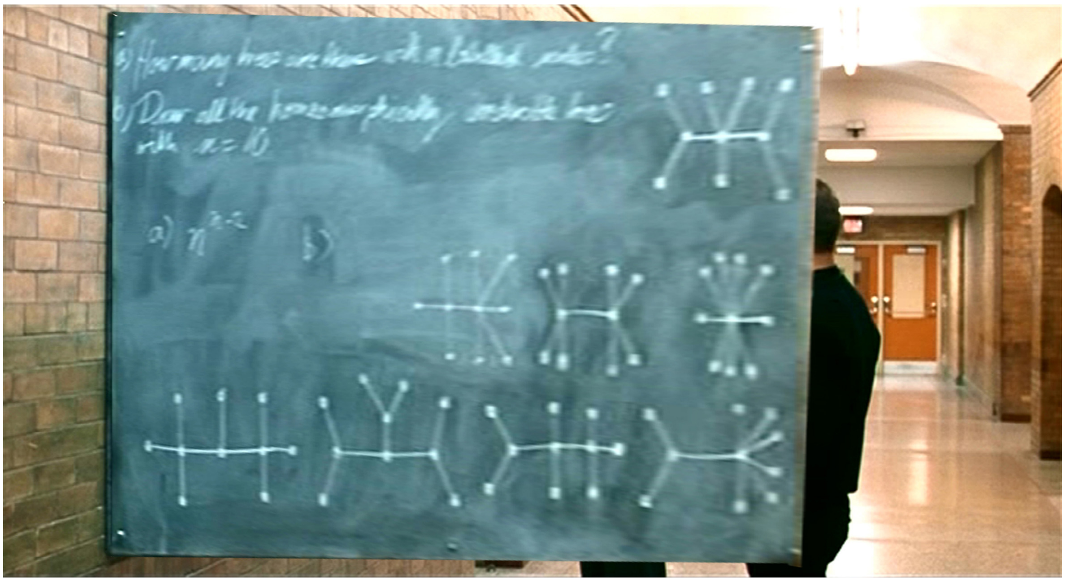


1.47. ábra.

Ez a filmnek az kockája, amelyen legjobban látható a tábla. De az írás rajta itt sem olvasható tisztán, kissé elmosódott, ráadásul perspektivikusan erősen rövidült. Különösen problematikus a kérdések elolvasása.

Ez a kép alkalmas lehet arra, hogy a tanulókkal elbeszélgessünk a perspektivikus ábrázolás tulajdonságairól, de minthogy ez nem a filmben szerepeltetett probléma, ezért ezzel a lehetőséggel a megemlítésén túl most nem foglalkozunk részletesen.

A tábla képét azonban alkalmas grafikai program segítségével „beforgatva” a lap síkjába a rövidülést megszüntethetjük.



1.48. ábra.

Az így látható táblakép már lényegében elolvasható, annyira mindenképpen, hogy matematikai szempontból elemezzük. (Az angolul nem tudó diákok számára természetesen le is kell fordítanuk a szöveget.)

A feladatok:

a) Hány n-csúcsú fa létezik, ha a csúcsok számozottak?
(How many trees are there with n labeled vertices?)

b) Rajzolja le az összes homeomorfikusan felbonthatatlan fát $n = 10$ *esetén!*
(Draw all the homeomorphically irreducible trees with $n = 10$.*)*

Mint azt az előző fejezetben részleteztük, egy matematikustól vagy egy matematika szakos hallgatótól mindkét probléma csak egészen alapfokú ismereteket kíván.

Közép-, illetve általános iskolai tanulóknak viszont a két feladat egészen eltérő nehézségű, kellő előkészítés nélkül számukra ezek elég nehéz problémák.

Az első – *a)* – feladatra a válasz a közismert Cayley-tétel. Mint az a táblán a válaszban is látható, az ilyen fák száma n^{n-2}.

A film sajátossága, hogy sem az előző, sem a mostani táblán szereplő problémáknál nem szerepel az eredmény levezetése, az állítások bizonyítása. Pedig a matematika művelésének egyik legfontosabb része, hogy állításainkat bizonyítjuk. A matematikai kompetencia egyik legfontosabb összetevője, hogy „a matematikai kompetencia birtokában az egyén… követni és értékelni tudja az érvek láncolatát, matematikai úton képes indokolni az eredményeket, megérti a matematikai bizonyítást.” [NAT]

A Cayley-tételt általában a Prüfer-kód segítségével szoktuk bizonyítani, ami egy szellemes, de egyáltalán nem nyilvánvaló módszer fa-gráfok kódolására.

A problémát alkalmasan megfogalmazva azonban ez a feladat is kiválóan alkalmas lehet a matematikai kompetencia számos összetevőjének fejlesztésére.

Egy lehetséges feladatsor középiskolások számára az a) feladat feldolgozásához:

(A számozott feladatok, mint ez majd a szövegből is látható lesz, több esetben is egész feladatcsoportokat jelentenek.)

1. feladat: Egy szigeten 3 (4, 6, 12, 200) város van. Legalább, illetve legfeljebb hány utat kell építeni, ha azt szeretnénk, hogy bármely városból bármely városba el lehessen jutni épített úton? Minden út, ami két várost köt össze egynek számít, a hosszától függetlenül.

Ezzel a feladattal a tanulók gyakorolhatják egy lényegében valós probléma matematikai modellezését.

A városokat nevek helyett számokkal jelöljük. (*Elvonatkoztatás a konkrét hosszúságtól, szimbólumok használata.*)

3 és 4 város esetén a tanulók konkrét-manipulatív módon, kísérletezve állapíthatják meg az eredményt. Ugyanezt a módszert használhatják 6 városnál maximális útszám keresése esetén. Közben a szisztematikus próbálgatással a rendszerező képességük is fejlesztődik. A 3 és 4 városról szóló konkrét esetben már összefüggést fedeznek fel, megsejtik, hogy az utak minimális száma nem függ a konkrét utaktól, csak a városok számától. Felismerik, hogy a legtöbb utat akkor építjük, ha bármely két város között utat építünk.

Számítani lehet arra, hogy legkésőbb a 6 város esetén rájönnek arra is, hogy akkor minimális az utak száma, ha nem lehet sehogyan sem körbe menni az utakon. (Fa gráf.)

Már 4 város esetén előkerül a bizonyítás igénye, egyelőre oly módon, hogy az összes esetet megrajzolva le lehet olvasni az utak számát. Itt derül ki a két eset közötti legmarkánsabb különbség, az, hogy míg a maximális számú utak esetében elegendő egy gráfot megrajzolni, addig a minimális útszám keresésekor több, nem is feltétlen könnyen összegyűjthető eset van, amiket mind meg kéne rajzolni, ha az utak számának leolvasását választjuk bizonyítási módszerül.

Az összes minimális úthálózat megrajzolása során felvetődik, hogy bizonyos hálózatok „lényegében" nem térnek el egymástól, legalábbis ami az utak számát illeti. (*Tapasztalatok összegyűjtése, analógiák keresése, megfogalmazása.*) Ez alkalmat ad arra is, hogy a számozott és a számozatlan csúcsú gráfok különbözőségére ráirányítsuk a figyelmüket. (A konkrét úthálózatnál nyilván nem mindegy, mely városokat köt össze közvetlenül út. Az utak száma szempontjából viszont vannak egymással ekvivalens esetek. Ez jó alkalom arra is, hogy előkészítsük a filmben a folyosói táblán *b*-vel jelölt feladatot, amelyben már számozatlan csúcsú gráfok szerepelnek.)

Innentől érdemes a maximális és a minimális számú utakra vonatkozó kérdéseket külön vizsgálni.

max.:

• 6, illetve 12 város esetén az utak maximális számára vonatkozó kérdésnél már várható, hogy le is rajzolják az utakat, és számszerűen is megfogalmazzák az összefüggést. (*A rajztól – a konkrétumtól – való elvonatkoztatás; az absztrakciós készség fejlesztése; összefüggések felismerése, számszerű megfogalmazása.*) Ugyanezt megfogalmazzák 200 város esetére is. Ebben az esetben viszont már nem lehet áttekinthetően megrajzolni az összes utat tartalmazó ábrát és az utakat leszámlálni, megjelenik a bizonyítás igénye. A konkrét esetek bizonyítása után felvetjük a következő feladatot.

2. feladat: n számú város esetén legfeljebb hány utat lehet építeni?

A 200 városnál megfogalmazott összefüggést általánosítjuk. (*Összefüggések megfogalmazása, általánosítása; jelölések, képletek, formulák alkalmazása.*) Az ugyancsak a 200 városnál alkalmazott gondolatmenet általánosításával az összefüggést bizonyítjuk is.

Ez a gondolatmenet az iskolai tanagyag számos helyén előfordul, a szabályos sokszögek átlóinak összeszámlálásánál épp úgy, mint a számtani sorozat összegképletének bizonyításakor, vagy a kombinatorikai feladatoknál, ismétlés nélküli kombinációként. Ezeknek a kapcsolódási pontoknak a megmutatásával elsősorban az analógiák használatának képességét fejleszthetjük.

min.:

• Már 6 város esetén is gyakorlatilag esélytelen, hogy az összes lehetséges minimális számú utat építő hálózatot megrajzolják a tanulók. Erre, mint nehézségre hívjuk is fel a figyelmüket akkor is, ha esetleg ők maguk nem fogalmazzák meg. Ezzel ugyanis előkészítjük a filmbeli probléma tárgyalását is, természetes módon vetődik fel a kérdés, hogy vajon hány ilyen úthálózat lehetséges, hány ilyen vázlatot (gráfot) kéne megvizsgálnunk, hogy az összes eset előforduljon. (*Probléma felvetés.*)

A tanulók azonban 6 város esetén is valószínűleg könnyen felismerik, hogy az általuk megrajzolt úthálózatok mindegyike olyan, hogy benne az utak száma 5. Várhatóan a korábbi tapasztalatok – 3 és 4 város – alapján megfogalmazzák azt is, hogy az utak száma mindig eggyel kevesebb a városok számánál. (*Összefüggések felismerése, általánosítás.)*

Az a tanulók korától és matematikai kompetenciájuk fejlettségétől függ, hogy ezek alapján bizonyítottnak tekintik-e, hogy 6 város esetén mindig legalább 5 utat kell építeni.

12 város esetén a tanulók megfogalmazzák, hogy a minimális számú utat tartalmazó hálózatok esetén mindig eggyel kevesebb utat kell építeni, mint ahány város van. Ekkor újra hangsúlyozhatjuk, hogy az összes esetet meg kéne nézzük, hogy leszámlálással bizonyíthassuk az állításunkat. Megmondhatjuk az összes lehetséges úthálózat számát is – ami 61 917 364 224 – érzékeltetendő a módszer használhatatlanságát már ennyi város esetén is. (*Probléma-érzékenység és bizonyítási igény fejlesztése. A változatos módszerek szükségességének érzékeltetése.*)

Ekkor – tanulónként változó mértékű tanári segítséggel – beláthatják a tanulók az állítást 12, illetve 200 város esetére. Várhatóan a megtalált bizonyítások olyanok lesznek, amelyek bármely más város-szám esetén is alkalmazhatóak. *(„Naiv indukció", konkrétban* *az általános. Pre-matematikai bizonyítás* Ambrus A. 1995. [2] 77-79.)

3. feladat: Ezek után általánosan is megfogalmazzuk, megfogalmaztatjuk az összefüggést és annak bizonyítását is. (*Absztrakciós képesség fejlesztése, szimbólumok használata, logikai lánc kiépítése, használata.*)

4. feladat: Mutassuk meg, hogy tetszőleges számú város között épített bármely minimális úthálózat esetén lesz olyan város, amelyikből csak egy irányba vezet út!

Ezzel a kérdéssel előkészíthetjük a tábla a) feladatának megoldását. A bizonyításához nem kell más, mint az a gondolat, hogyha nem lenne ilyen város, akkor valamely városból elindulva mindig tovább tudnánk menni minden városból, mígnem olyan városba jutunk, ahol már jártunk. Ekkor viszont valahol körbe mentünk, vagyis nem volt minimális az úthálózat. (*Logikai következtetési séma gyakorlása – indirekt bizonyítás.*)

5. feladat: Fogalmazzuk át az állításunkat gráfokra! („Minden fa-gráfban van elsőfokú pont”.) (*Absztrakciós készség fejlesztése, fogalmak kialakítása, rögzítése, használatuk gyakorlása.*)

6. feladat: Az építők döntöttek az egyik minimális úthálózat mellett. Mi módon tudhatják leírni, melyik tervet fogadták el, ha valamiért nem szabad rajzolniuk, csak a városok sorszámait használhatják?

(Természetes gondolat: Írják le párban azon a városok számait, amelyeket út köt össze!)

A feladat egyszerű és jól átlátható az általános esetben is, így ezt a feladatot nem kérdezzük meg konkrét számú városokra.

7. feladat: Hogyan kódolják az úthálózat tervét, ha arra törekszenek, hogy minél rövidebb számsorozatot használjanak?

A feladat kitűzésekor tetszőleges mese található ki arra, miért szükséges a számsorozat hosszát minimalizálni. Arról viszont már érdemes lehet hosszasabban beszélni, hogy számos olyan valós helyzet van, amikor igen fontos a jelek, illetve a matematikai műveletek számának minimalizálása. *(Konkrét problémák matematikai modellezése, alapvető bonyolultság-elméleti fogalmak megértése.)*

Ennek a feladatnak kapcsán a tanulók – szükség esetén jelentős tanári segítséggel – eljuthatnak a Prüfer-kód ötletéhez: Vágjuk le áganként a fát! (Végülis szűkebb udvarokon, vagy más, környezetükre veszélyes módon álló fákat gyakorta vágnak ki úgy, hogy előbb az ágait vágják le.) Tekintsük a legkisebb sorszámú olyan várost, melyből csak egy út vezet ki, és írjuk le ezen város (egyértelmű) szomszédjának a számát. Utána ezt a várost a hozzá vezető úttal együtt „hagyjuk el” a tervrajzról! Így egy $n-1$ hosszúságú számsorozatot kapunk. De ez $n-2$ hosszúságúra csökkenthető, hiszen az utolsó leírt szám mindig a legnagyobb sorszám, amit a városok megnevezésére használtunk – n –, így ezt fölösleges leírni. Tehát egy $n-2$ hosszúságú számsorozattal leírhatjuk az úthálózatot, gráfot.

A gondolat várhatóan nem természetes a tanulók számára, így több konkrét feladattal és tanári utasítással, illetve közléssel egyengethetjük a tanulók gondolkodásának útját.

A kód ötletének közös megfogalmazása után következik annak vizsgálata, hogy vajon egy adott úthálózat kódja egyértelműen meghatározott-e, illetve minden ilyen $n-2$ hosszúságú számsorozathoz tartozik-e egyértelműen meghatározott fa-gráf. Ez a vizsgálat megint konkrét esetek vizsgálatából kiindulva juthat el az általános összefüggés felismeréséig és bizonyításáig.

8. feladat: Hány különböző úthálózat lehetséges 3, 4, 6, 12, illetve 200 város esetén?

Fogalmazzuk át a feladatot gráfokra!

A feladat megoldása a 7. feladat eredményét felhasználva kombinatorikai feladattá válik: 3, 4, 6, 12, illetve 200 különböző számból hány 1, 2, 4, 10, illetve 198 hosszúságú jelsorozat készíthető? (*Tanultak felidézése, megfogalmazása, alkalmazása.*)

9. feladat: Hány n-csúcsú fa létezik, ha a csúcsok számozottak?

Ez már a filmbeli táblán szereplő feladat. A 8. feladatban alkalmazott „naiv indukció" precíz megfogalmazásával a filmben is szereplő eredményt kapjuk.

A b) feladat különösen izgalmas módszertani szempontból, elsősorban a probléma didaktikai sokrétűsége miatt.

A feladat látszólag igen nehéz, hiszen „homeomorfikusan irreducibilis" gráfokról szól. De csak látszólag. Valójában a feladat általános iskolába is bevihető, egy közepes képességű tanuló is a siker reményével láthat hozzá a megoldásához.

A szakkifejezések használata mint általában, ez esetben is erősen hozzájárul a kognitív gát kialakulásához. Mint e dolgozat szerzője a hallgatóinak el is szokta mondani, a legegyszerűbb matematikai probléma is igen nehézzé válik, ha a leírásában szereplő fogalmakat nem ismerjük.

Jelen esetben a szakkifejezés különösen bonyolult fogalmat sejtet, ezért a feladat ismertetése majd megoldása igen erős emóciókat válthat ki egy általános iskolai osztályban, így a feladathoz és az általa tanultakhoz erősebb kötődést hozhat létre.

Az, hogy egy gráf „homeomorfikusan irreducibilis" – mint e dolgozatban már írtam is – mindössze annyit jelent, hogy nincsen benne másodfokú pont.

Tehát a problémát például a következő módon fogalmazhatjuk át középiskolások számára:

„Rajzoljátok le az összes 10 pontú fa gráfot, amelyiknek nincsen másodfokú pontja, ha az egyes pontokat nem különböztetjük meg."

Általános iskolások számára – minthogy gráfokról még nem tanultak, és absztrakciós szintjük is alacsonyabb – a következő, az eredeti problémára vezető feladatot adhatjuk:

„Rajzoljátok meg az összes olyan tíz város közötti úthálózat vázlatát, amely olyan, hogy:

- Bármely városból bármely városba el lehet jutni.

- Nem lehet benne körbe menni.
- Nincs olyan város, amelyiken csak áthaladó út lenne, vagyis minden város vagy végállomás, vagy legalább három fele vezet belőle út.”

Általános iskolai osztályban az absztrakciós készség fejlesztését szolgálja annak tisztázása, hogy az eredeti feladat megoldása ekvivalens az átfogalmazottéval.

Akár közép-, akár általános iskolásoknak adjuk fel a feladatot, a tanulók nem túl hosszú idő után mind a tíz megoldást megrajzolják.

Sőt, általában ennél – látszólag – többet is találnak.

Általános iskolában a bizonyítási igény és a topologikus szemlélet kialakítását, illetve fejlesztését szolgálja az a vizsgálat, amelyben a látszólag eltérő megoldásokról kiderítik, hogy „lényegében” azonosak. Ugyancsak a bizonyítási igény és készség fejlesztésére szolgál annak tisztázása, hogy megtalálták-e az összes, a feladat feltételeinek megfelelő gráfot. Annak bizonyítása, hogy a felsorolt tíz eseten kívül nincsen más, az esetek rendszerezésével történhet. A rendszerezés alapja lehet a pontok lehetséges fokszáma, vagy a gráfban található utak hossza.

Középiskolában az ez iránt érdeklődő tanulókkal számítógépes programot is írathatunk, amely az összes lehetséges megoldást megkeresi. Ez is, mint az esetek rendszerezése, az algoritmikus gondolkozást fejleszti.

A probléma tárgyalásának újabb szintjét jelenti, ha a diákok felvetik (vagy a tanár felveti), hogy tetszőleges számú pont (illetve város) esetén hány gráfból áll a megoldás. A tanulók számára most az lehet meglepő, és így érzelmi kötődéseket kialakító, hogy az általánosított probléma már tényleg igen nehéz, még senki sem tudta megoldani. Ez – mint a nagy nyitott problémák felvetés általában is – alkalmas a tanulók érdeklődésének felkeltésére, illetve fokozására. Várhatólag néhány érdeklődőbb tanuló meg is próbálkozik azzal, hogy majd ő megoldja – ez főleg középiskolában várható –, amely próbálkozás még sikertelenség esetén is számos matematikai kompetencia fejlesztésére alkalmas.

3. tábla

Ez a harmadik, egyben utolsó olyan jelenet a filmben, amikor a szereplők pontosan értelmezhető matematikai tartalommal foglalkoznak.

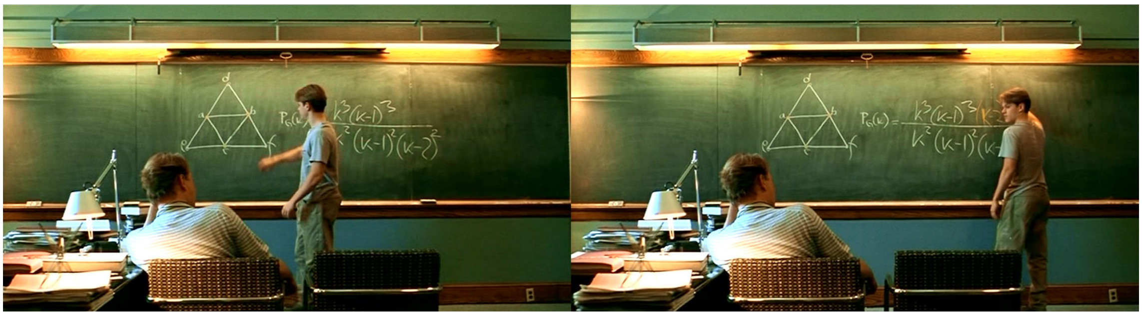
Abból a jelenetből való, amelyben a táblán a filmbeli professzor és Will Hunting közösen csinálnak matematikát, úgy, hogy felváltva írnak a táblára.

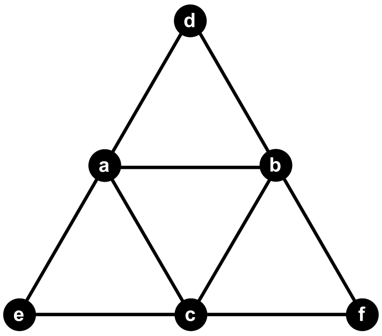
A tábla jól olvasható, bár a filmben valamelyik része mindig takarásban van, így most két képet szerepeltetünk.

A táblán ez a rajz és ez a képlet szerepel:

A rajz egy gráf rajza, egy nap-gráfé. A képlet pedig ennek a gráfnak a kromatikus polinomja. Vagyis egy olyan polinom, ami azt adja meg, hogy egy adott gráfot hányféleképpen lehet k darab színnel jólszínezni.

Azt, hogy ez a polinom ilyen törtes formában milyen gondolatmenet során jön ki, a korábbi részben már megírtuk. De ugyanez a probléma elemi eszközökkel, középisko-





$$P_G(k) = \frac{k^3(k-1)^3(k-2)^6}{k^2(k-1)^2(k-2)^2}$$

1.49. ábra. A táblán szereplő rajz és képlet

lában is vizsgálható, alkalmas az érdeklődés felkeltésére és a matematikai kompetencia fejlesztésére.

Ehhez mutatunk egy lehetséges felépítést.

Az alábbi feladatokban a gráfok csúcsait megkülönböztetjük. (Számozott csúcsok.)

- Rajzoljuk meg az összes olyan n-pontú gráfot, amelyek színezhetőség szempontjából különböznek! ($n = 1$; 2; 3 vagy 4)

(Manipulatív tevékenység során összefüggések felismerése, megfogalmazása. A rendszerezőképesség fejlesztése. A bizonyítási igény fejlesztése.)

(A továbbiakban csak egyszerű, számozott csúcsú gráfokkal foglalkozunk.)

- Az első feladat megoldása során kapott gráfok közül melyiket hányféleképpen lehet kiszínezni 1, 2, 3, 4 vagy 5 színnel?

(Manipulatív tevékenység, erre épülő csoportosítások, általánosítások. A felismert összefüggések megfogalmazása, képletekbe foglalása a fogalmazási készséget, az absztrakciós szintet és a jelölések, képletek használatát fejleszti. Várhatóan több, egymásnak ellentmondó formulát írnak fel a tanulók. Ezek ütköztetése a szaknyelv-használatot, az érvelési készséget, a bizonyítási igényt és a bizonyítási készségüket is fejleszti.)

- Az első feladat megoldása során kapott gráfok közül melyiket hányféleképpen lehet kiszínezni k színnel?

(Manipulatív tevékenység. Összefüggések absztrakt megfogalmazása, képletekbe foglalása. A bizonyítási igény és a bizonyítási technikák fejlesztése.)

- Hányféleképpen színezhető k színnel egy n hosszú lánc? Hányféleképpen színezhető k színnel egy n hosszú kör?

(Analógiák keresése és használata. Képlethasználat.)

- Hányféleképpen színezhető k színnel az 1.49. ábrán látható gráf?

Ez maga a filmbeli probléma. (A ráismerés élménye, motiváció.) A tárgyalt feladatok után ezt a tanulók többsége meg tudja oldani. (Sikerélmény nyújtása a tanulóknak, önbizalmuk erősítése.)

- Ha egy két komponensű gráf egyik komponensét $f(k)$-, másik komponensét $g(k)$-féleképpen lehet színezni k színnel, akkor hányféleképpen lehet színezni a gráfot?
- Milyen összefüggés érvényes egy olyan gráf esetén, amelynek m komponense van, amely komponensek külön-külön $f_1(k)$, $f_2(k)$, $\ldots$, $f_m(k)$-féleképpen színezhetők k színnel?

(Kombinatorikus gondolkozás fejlesztése. Absztrakciós készség fejlesztése. Általánosítás, analógiák felismerése, használata.)

- Adott egy egyszeresen összefüggő gráfunk, amelynek egy elválasztó éle által összekötött G_1 és G_2 részgráfját $f_1(k)$-, illetve $f_2(k)$-féleképpen lehet k színnel színezni. Hányféleképpen színezhető k színnel a gráf?
- Miért biztos, hogy egy gráf k színnel való színezéseinek száma mindig k egy polinomjával írható le?

Az egyszerűbb, közvetlenül a filmbeli problémákhoz kapcsolódó feladatok után nem lesz riasztó nehezebb, mélyebb összefüggések felismerését célzó feladatok, problémák vizsgálata sem. (Kombinatorikus gondolkozás fejlesztése. Absztrakciós készség fejlesztése. Belső matematikai összefüggések keresése, felismerése, megfogalmazása.)

1.5.5. Munkácsy Katalin: Mi a hátrányos társadalmi helyzet és hogyan mutatkozik meg a matematika órán?

Részlet a Tehetséggondozás hátrányos helyzetű tanulók körében című PhD dolgozatból. (lásd Munkácsy 2012 [148])

A hátrányos helyzetű tanulók matematikatanulásának speciális jellemzőit sokféle szempontból vizsgálták, ezeket kívánom bemutatni, majd összehasonlítani a magyar tanulók egy viszonylag szűk rétegének, az összevont tanulócsoportban tanuló kisiskolások sajátosságaival.

A hátrányos helyzetű tanulók matematikatanulását akadályozó tényezők igen sokrétűek, ezért interdiszciplináris vizsgálatot végeztem. A pedagógiai fejlesztő folyamat minden mozzanatában (tervezés, végrehajtás, értékelés során) szociológiai, pszichológiai, pedagógiai, didaktikai és matematikai szempontok szerint (különböző mélységben) végeztem az elemzést.

Az Európában kialakult oktatási rendszer nagyon korán és nagyon szorosan összefonódott az írásbeliséggel. Az oktatásszociológusok, pl. Sáska Géza (2006 [198]) véleménye szerint az írásbeliség iskolai dominanciája révén válik a társadalmi hátrány iskolai hátránnyá.

Különböző statisztikai vizsgálatokra és matematika-didaktikai kutatásokra építve bemutatom, hogy a családok társadalmi-gazdasági helyzete a matematikatanulásra is jelentős hatással van annak ellenére, hogy a mindennapi gyakorlatban sok ezzel ellentétes példával is találkozhatunk.

Az iskolai oktatásban a természetes tanulás mindhárom szintjére (tárgyi, képi és szimbolikus reprezentáció) szükség van. A középosztályból érkező tanulók iskolába lépéskor már rendelkeznek azokkal a kompetenciákkal, amelyek lehetővé teszik, hogy korábbi tárgyi tapasztalataikat felelevenítsék, és ezáltal tartalommal töltsék meg a szavakra és más szimbólumokra épülő iskolai tanulást. A hátrányos helyzetű tanulók tapasztalati bázisa is szegényesebb, de elsősorban abban nincs gyakorlatuk, hogy a tapasztalataikat hogyan fogalmazzák meg, hogyan kapcsolják hozzá a tanítási órákon hallott és olvasott fogalmakhoz és összefüggésekhez.

Ezért kísérletünk szempontjából Bruner tanuláselmélete különösen jelentős. Ő a megszerzett ismeretek reprezentációit (enaktív-tárgyi, ikonikus-képi, szimbolikus-nyelvi és egyéb jelek) részletesen vizsgálta a tanítás és tanulás szempontjából. Hangsúlyozta, hogy ezek nem mereven egymásra épülő fokozatok, hanem közöttük szoros oda-vissza ható kapcsolat van. Kiemelte továbbá, hogy a tanulás során a különböző reprezentációs formák között dinamikus egyensúly kialakítása szükséges. Bruner tanuláselméletét és alkalmazási lehetőségeit a hátrányos helyzetű tehetséges, fiatal tanulók tanulásának nézőpontjából tekintem át.

A mentálisan egészséges tanulók tanulási eredményességének egyik legfontosabb feltétele a kíváncsiság, a tanulás vágya. A leckét nem író tanulók esetében gyakran feltételezzük a tanulási motiváció hiányát, holott a háttérben akár erős teljesítménymotiváció is állhat, de annak működését tanulási akadályok gátolhatják. A tanítási órák gátló tényezői a hátrányos helyzetű tanulók esetében különösen erősek lehetnek, ezért szükséges olyan motivációs rendszert vizsgáló eszközt keresni, ami ezeket az akadályokat lehetőség szerint kikerüli, ilyen eszköz Kuhl személyiségtesztje, amelyet részletesebben is bemutatok.

Megvizsgálok olyan irányzatokat, amelyek szintén támogatják az esélyegyenlőség didaktikai eszközökkel történő javítását. A magyar tanárképzés és tanártovábbképzés szempontjából bemutatom és elemzem az összevont tanulócsoportos iskolák pedagógusainak sajátos helyzetét.

A pedagógiai fejlesztő tevékenységet elméleti és gyakorlati előzmények oldaláról megalapozva valósítjuk meg.

A tanulók szociokulturális helyzete és a tanulmányi eredmények összefüggései statisztikai vizsgálatok és empirikus kutatások tükrében

A hátrányos helyzetű tanulók számára a műszaki tudományok, a matematika, a természettudományok területén nagyobb lehetőség van a kiemelkedésre, mint egyéb területeken. Ezt tükrözik az európai továbbtanulási adatok: az ilyen irányokat képviselő főiskolákon, egyetemeken a legmagasabb a hátrányos helyzetű tanulók aránya. Az USA-ban eltérő a helyzet, ott ezek az arányok mások, ott elsősorban a szociális munkás képzésben és ehhez közelálló területeken találunk nagyobb arányban hátrányos helyzetből származó fiatalokat. A tudósok oldaláról vizsgálva is hasonló képet kapunk: a hátrányos helyzetből származó, kiemelkedő eredményeket elérő tudósok között sok a matematikus. A tudományos élet csúcsain mutatkozó, óriási eredményeket elérő, szegény családból származó matematikusok világraszóló eredményei eltakarják azt a tényt, hogy a matematika nagyon nehéz, „buktató" tantárgy. A hátrányos helyzetű fiatalok tömegei számára a matematika tantárgyban elszenvedett sikertelenség a legfőbb oka az iskola korai elhagyásának, a lemorzsolódásnak, és részben a gyenge matematikai eredmények okozzák, hogy sok tehetséges, de hátrányos helyzetből származó fiatal meg sem kísérli a felsőoktatásba való bejutást.

Országos és nemzetközi mérések néhány tapasztalata

Az oktatáspolitikában a hátrányos helyzetű tanulók nyilvántartása terén is nagy különbségek vannak az egyes államok között. Franciaországban tilos bármely, a tanuló származására vonatkozó adat nyilvántartása „ ... a francia közoktatási intézményekben az állampolgárok egyenlőségét axiómaként kezelő köztársasági elv jegyében valóságos tabutémává vált a gyerekek nyelvi, etnikai hovatartozása." (Bajomi, 1997 [24]). Az USA-ban ezzel ellentétben nagyon részletes statisztikák készültek a tanulók etnikai hovatartozása szerint (NAEP, é. n.). Az adatok azt mutatják, hogy az etnikai hovatartozás és a társadalmi helyzet, valamint a tanulmányi eredmények között szoros összefüggés van. A következő táblázat azt mutatja, hogy az USA-ban az etnikai-nyelvi háttér hogyan nyilvánul meg az iskolai eredményekben. A tantárgytesztekkel mért eredmények alapján a tanulók teljesítményét négy kategóriába sorolják. A két felső szint elérése jelenti a követelmények teljesítését. A „Fehér”-ek alkotják a tanulók többségét, közülük 7 % éri el olvasásból és 2 % matematikából a legmagasabb szintet, ezzel szemben az amerikai indiánoknak csak 3 %-a került a legjobb csoportba olvasásból, matematikából viszont a mérési határ alatt van a legjobban teljesítők aránya. Érdekes, hogy csak az ázsiai származású tanulók körében fordul elő, hogy jobbak matematikából mint olvasásból. Az adatok 1998-ban, illetve 1996-ban végzett reprezentatív mérésekből származnak, a 12. osztályos fiatalokra vonatkoznak.

Etnikai, nyelvi csoport	A legmagasabb szintet elérő tanulók aránya saját csoportjukon belül, %-ban kifejezve		A jó szintet elérő tanulók aránya saját csoportjukon belül, %-ban kifejezve	
	Olvasás	Matematika	Olvasás	Matematika
Fehér	7	2	47	20
Ázsiai	6	7	38	33
Indián	3	0	27	3
Spanyol	2	0	26	6
Fekete	1	0	18	4

1.50. ábra. Teszteredmények, 12. évfolyam, USA reprezentatív minta, 1998 (olvasás) és 1996 (matematika). (Forrás: NAEP)

A lemorzsolódási adatok ugyanezt a tendenciát tükrözik. A hátrányos helyzetű, a többségitől eltérő szocio-kulturális háttérből származó fiatalok között magasabb a lemorzsolódási arány. Ezt a képet valamelyest módosítja az ázsiai fiatalok átlagosnál kisebb lemorzsolódási aránya.

A kutatók az állami oktatási statisztikákon kívül más forrásokból is hozzájuthatnak az adatokhoz, például a hátrányos helyzetű tanulókat a kapott juttatások, étkezési és egyéb állami segélyek igénybevétele alapján azonosítják. Gyakran a másik oldalról közelítik meg a társadalmi helyzet és az iskolai eredmények közötti lehetséges összefüggéseket: a különböző tesztekben az alsó teljesítmény-harmadba kerülő tanulók családi hátterét igyekeznek feltárni.

Magyarázatok a gyengébb teljesítményre

Sokan az itt bemutatott ellentmondást: a hátrányos helyzetű fiatalok egy kis részének a matematika területén elért jelentős sikerei, és nagy hányaduknak matematikatanulási kudarcai közötti feszültséget a tanulók motiválatlanságával magyarázzák. Mi úgy gondoljuk, érdemes megvizsgálni alternatív magyarázatokat is. Sok kutatási eredmény utal arra, hogy a tanulók erős tanulási motivációval lépnek az iskolába, de ott kudarcok sorozata éri őket, így indokolatlan azt mondanunk, hogy motiválatlanok, mégsem tudnak képességeiknek megfelelően teljesíteni.

Az okokat keresve feltételezhetjük, hogy a hátrányos helyzetű tanulók gyenge iskolai matematikai eredményeit jelentősen befolyásolják azok a kulturális különbségek, amelyek a tanulók családjának kultúrája (pl. a szóbeliségnek nagyobb a jelentősége, mint az írásbeliségnek, a szóbeli kommunikáció is eltérő) és az iskolák középosztályra jellemző kultúrája között megfigyelhető. Ezek a különbségek tanítási órákon elsősorban a kommunikációs akadályokban jelentkeznek, amelyek azonban az órákat megtartó tanárok számára sokszor rejtve maradnak, miként azt a később elemzett kutatások be is bizonyítják.

A hátrányos helyzetű gyerekek többsége jó, néhányan kiemelkedően jó értelmi képességekkel rendelkezik, de nem alakulnak ki megfelelő mértékben azok a kompetenciáik, amelyek a hagyományos iskolai oktatáshoz szükségesek. A tanulásra való felkészültség és az iskolaérettség nagyon különböző lehet, erre több kutatás és az iskolai tapasztalatok is ráirányíthatják figyelmünket, pl. a higiéniás szokások fejletlensége az osztálytermi munkát erősen akadályozza, de ez a matematikai képességek szempontjából indifferens jelenség.

A nyelvészetben a szociális dialektust vizsgálják, vagyis társadalmi csoportok szerint tagolt nyelvhasználatot, amely szerint a hátrányos helyzetből származó gyerekek a saját környezetükben felmerülő szituációkban tökéletesen kommunikálnak, de az iskolai helyzetekben tanácstalanná válnak. A pedagógiai kutatásokban is elemezték a szimbólumokra, a kifinomult szóbeli, majd írásbeli kommunikációra épülő oktatási módszerek társadalmi hatásait. Sáska Géza (2006 [198]) megmutatta, hogy a társadalmakban az írásbeliség elterjedtségének történeti hagyományai milyen szoros kapcsolatban állnak az iskolai teljesítménnyel. A PISA eredmények nemcsak általában korrelálnak az egyes országok gazdasági-társadalmi fejlettségével, hanem szoros kapcsolatban vannak ezen belül egy sajátos elemmel, az európai alfabetizációval. Azok az országok értek el jó eredményeket a PISA matematika tesztjeiben is, ahol már a XX. század elején általános volt, még a falusi lakosság körében is, az írni-olvasni tudás.

Tanulmányok, óramegfigyelésre alapozott kutatások

A kutatók azt tapasztalták, hogy az órai történésekből a tanárok keveset vettek észre, pontosabban félreértették a gyerekektől érkező jelzéseket (Tuveng és Wold, 2005 [233]), (Gorgorio és Planas, 2005 [93]). A norvég kutatásban eltér a gyerekek által beszélt nyelv és az oktatás nyelve, a spanyol példában a tanár is, meg a tanuló is spanyolul beszélt, de a diák annak egy Dél-Amerikában kialakult változatát beszélte.

- *Egy norvég példa*

Két norvég pszichológus (Tuveng és Wold, 2005 [233]), egyikük nyelvész, másikuk matematikai végzettséggel is rendelkezik, egy norvég iskolában végzett vizsgálatában a matematikatanulás nyelvi problémáit kereste. Ebben a kutatásban osztálytermi keretek között vizsgálják a tanulók meglévő nyelvi kompetenciái és a tanuláshoz szükséges nyelvi kompetenciák közötti eltérést. A szerzők megkülönböztetik a megértés nyelvészeti és matematikai fogalmát. 10 matematikaórát figyeltek meg és rögzítettek 9-10 éves tanulókból álló csoportban. Ez a csoport egy fél osztály volt, a tanulók tizenegyen voltak, hatuknak norvég volt az anyanyelve, a többiek más nyelveken beszéltek, ők Indiából, Oroszországból, Horvátországból, Szomáliából érkeztek. A kutatók a diákokkal norvég nyelvi és matematikai teszteket töltettek ki. Az órák után félig-strukturált interjúkat készítettek a matematikatanárral és a diákokkal. Azt tapasztalták, hogy a megfigyelt 10 óra alatt egyszer fordult elő, hogy az egyik külföldről érkezett diák megkérdezte egy számára idegen szó jelentését norvég társától, a pedagógustól nem kérdezték meg a szavak jelentését.

Lehetséges, hogy nem is fordult elő más nyelvi probléma? Az interjúk során, amikor a tanárral együtt visszahallgatták az óráiról készült felvételeket, a pedagógus csak a tanítás logikai kérdéseivel foglalkozott, azon gondolkodott, hogy lehetett volna-e másképpen felépíteni valamelyik részletét az adott órának. Soha nem utalt a tanulók esetleges nyelvi problémáira, és a kutatók kérdéseire sem tudott felidézni ilyen esetet. A bevándorló családok gyerekei viszont az órák jelentős részében nem értették a tanár szavait. A tanulók közül csak az a két külföldi gyerek, aki a legjobb eredményeket érte el a norvég és a matematika teszten is, tudta megfogalmazni az interjúkban, hogy nyelvi problémái vannak, nem érti, hogy mi történik a matematika órákon. A beszélgetésekből az is világossá vált, hogy a norvég anyanyelvű tanulók sem mindig értették a feladatok szövegét. A külföldről érkezett tanulóknak a tanári közlések hétköznapi szavainak megértésével voltak gondjaik, így a matematikai problémákhoz gyakran el sem jutottak.

Rövid részlet egy tanulóval készült interjúból. Szonja igen tehetséges, mind matematikából, mind norvég nyelvből, ő érte el a legjobb eredményt a kisebbségi gyerekek között.

Kérdező: Kíváncsi vagyok, előfordult-e az órán, hogy csinálni kellett volna valamit, de nem értetted, hogy mit.

Szonja: Igen, néha.

Kérdező: Igen, néha. Néha a dolgok egy kicsit nehezek. Mit gondolsz, mi volt nehéz ma?

Szonja: Nem értem, mit mondanak.

Kérdező: Nem érted, mit mondanak, aha. De kik?

Szonja: Azt nem tudom pontosan.

Kérdező: Amit nem értesz, azt Karin (a tanítónő) mondja, vagy valami másról van szó?

Szonja: Néha megértem, amit Karin mond.

Kérdező: Néha megérted, amit Karin mond.

Szonja: De nem mindig.

Az interjúkban, akárcsak az órákon, arra nem volt mód, hogy a gyerekek anyanyelvükön beszéljenek a nyelvi problémáikról. Nehéz helyzet áll elő: ahhoz, hogy a gyerekek segítséget kérhessenek, meg kell érteniük saját problémáikat és azt meg kell tudniuk fogalmazni – ehhez pedig fejlett metakognitív képességek kellenek, ami meghaladja a 8-9 évesek lehetőségeit. Így ők a problémák elrejtését választják, amivel aktuálisan elkerülik a konfliktusokat, de hosszabb távon akadályozzák saját fejlődésüket. Szonja igen aktívan részt vett az osztály életében, és csak a magnófelvétel visszahallgatásakor tűnt fel, hogy szinte sohasem beszélt. Viszont ha mégis megszólalt, remek volt a kiejtése, és egyébként igen jó kapcsolatban volt az osztálytársaival, és kitűnően mozgott. A társasági sikeréhez a nyelvi problémák elrejtésére volt szükség.

Részlet a tanárral készült interjúból:

Kérdező: Volt valami, amit a gyerekek azért nem tudtak megcsinálni, mert nem értették, mit kérsz? Vagy valami más ok lehetett a háttérben?

Karin, a tanítónő: Kevés időt szánnak rá. Nem gyakorolnak eleget.

Később Karin azt hangsúlyozta, hogy a matematika lényege a vizualitás, nem a szavakon múlik a megértése. A tanítónő szerint a tanulók nehézségeit a gyenge figyelmük okozza, valamint általában a speciális nevelési szükségletük, ami alatt az intellektuális fejlődésbeli lemaradást kell értenünk.

Karin azzal, hogy miről beszélt, illetve miről nem beszélt, mintát adott arra, hogy mi tartozik a matematika órára. Az órán elhangzó szavak jelentésének megkérdezése nem való a matematika órára. Karin az új tananyag új matematikai szakkifejezésein kívül soha, egyetlen szó jelentését nem magyarázta el a tanulóknak, és nem is ellenőrizte, hogy értik-e a tanulók a szavait.

A vizsgálat fontos kutatásmódszertani tapasztalatot is hozott: az órák gondos, több megfigyelő által végzett megfigyelése és az alkalmazott technikai eszközök ellenére egyedül az órai megfigyelésből nem derültek ki a tanulók nyelvi problémái, ehhez szükség volt az órákat követő interjúkra is (Tuveng és Wold, 2005 [233]).

- *A barcelonai kutatás*

Núria Gorgorio és Núria Planas Barcelonában végezték kutatásaikat a katalán oktatási minisztérium nagy összegű támogatásával a nem spanyol és nem katalán gyerekek iskolai matematikatanulására vonatkozóan (Gorgorio, Planas 2005 [93]).

A globalizációs folyamatok hatására sok tanuló nem anyanyelvén és nem családjának hagyományos környezetében tanul. A kutatás igen jól dokumentált. Az órákon képmagnó-felvételeket készítettek, megfigyelő ült az osztályokban, és az óraleírásokat több szakértő elemezte. A kutatás eredménye: a kulturális különbségek megtalálhatók a matematikai műveltség hagyományos elemeiben, pl. a különböző kultúrákban másképpen írják a számokat, másként számolnak, másféle mérési eljárásokat alkalmaznak, de ezek nem befolyásolják lényegesen a tanulási folyamatot. A fő különbség a matematikával összefüggő elvárásokban van és annak megítélésben, hogy mi a matematikai tudás személyes értéke az egyes tanulók számára. A matematikatanulás fontosságával kapcsolatban alakultak ki konfliktusok a tanulók és a tanárok között. Számunkra különösen érdekes a konfliktusok megnyilvánulása, maga az a tény, hogy egyáltalán felszínre kerültek a különféle értékek, a közöttük lévő konfliktusok, másrészt ezek megbeszélhetők voltak, nem ütköztek elutasításba.

Idézünk egy jellegzetes esetet a tanulmányból, egy rövid, az órán elhangzott dialógust:

Saima, egy indiai kislány: Tanárnő, rosszul érzem magam az Ön osztályában.

Tanár: Hogy érted ezt? Miért mondod?

Saima: Ugyanazt a matematikát tanulom, mint a fiúk, de én nem akarom ugyanazt a munkát végezni. Nem akarok mérnök lenni. Kérem, foglalkozhatnék lányoknak való matematikával?

Meglepő, hogy a kislány kifejezte érzéseit, mert Spanyolországban is jellemző, hogy a félreértéseknek, az eltérő tanulói igényeknek csak kisebbik része nyilvánul meg az órákon, nagyobb részük rejtve marad. Joel gondjai is csak az órákat követő interjúban kerültek felszínre:

Kérdező: És mi a helyzet a matematikával? Nehezen megy?

Joel: Igen, de ez nem az én hibám.

Kérdező: Hogy érted ezt?

Joel: Karibi vagyok.

Kérdező: És ...? Mit akarsz ezzel mondani?

Joel: Nem vagyok katalán, nem vagyok spanyol. Amikor a tanárok beszélgetnek velem, azt hiszik spanyol vagyok, mert hasonlóan beszélek, mint ők. De hát láthatja, én néger vagyok!

Kérdező: Santo Domingoban nem spanyolul beszéltek?

Joel: De igen, de az egy másik spanyol nyelv. Vannak közös szavaink, de ennyi az egész!

Kérdező: Hm. Nézzük, mi történik a matek órákon!

Joel: A tanár nagyon kedves nő, igazán. Amikor rám néz, abbahagyja a katalánt és spanyolul kezd beszélni. Néha nagyon furcsa dolgokat mond, de ezt egyáltalán nem veszi észre. Higgyen nekem, én egyszerűen képtelen vagyok odafigyelni. (A párbeszédeket a szerző fordította.)

A fiú meg tudta fogalmazni a problémáját, de csak a kutatóknak mondta el. Tanárának nem szólt annak ellenére, hogy kapcsolatuk elég jónak tűnik.

- *Egy ausztrál példa*

  Ausztráliában a matematikatanárok többsége elfogadja, hogy a matematika kulturálisan meghatározott tantárgy egy multikulturális társadalomban. (Thomas, 1997, [227] i.m. 35). A szélesebb közvélemény nem így gondolkodik: a matematikát kulturálisan semlegesnek tartja, amelynek tanulása során a diákok nyelvi gondjai nem akadályozzák a munkát. A tanulmányt író matematikatanár saját szociológiai ismereteire és empátiás képességére hagyatkozva oldotta meg a menekült gyerekek matematikatanulási problémáit. Az osztályában megjelenő kelet-timori menekültek nyilvánvalóan más kulturális háttérből származnak, mint az osztály többi tanulói. A tanár nem ismerte az új tanulók nyelvét, sajátos nemzeti kultúráját. A menekültek bizonytalan, átmeneti helyzete nem tette lehetővé, hogy a matematikatanár a tananyagot a gyerekekhez igazítsa, ezt elvi megfontolásból sem tartotta indokoltnak, mégis hatékonyan tudott segíteni tanítványainak. Ezt úgy oldotta meg, hogy kifejezte tiszteletét a más kultúra iránt, bátorította a tanulókat, hogy egymás között saját anyanyelvükön is beszéljék meg a tananyagot, és ő maga is nagy figyelmet fordított arra, hogy segítse a tanulókat, ugyanakkor kifejezze, hogy jó eredményeket vár el tőlük.

  A kelet-timori menekültek megjelenése Ausztráliában változatos kérdéseket vetett fel és ráirányította a figyelmet a nem angolul beszélő, a nem a nyugati kultúrában nevelkedő tanulók problémáira. A szerző szerint a más anyanyelvű, más kultúrájú tanulóknak több időre van szükségük, több figyelmet, nagyobb empátiát igényelnek a tanároktól, mint a többségi gyerekek, de az egyenlő esélyek jobb megközelítése érdekében mindenkinek ugyanazt a tananyagot kell tanulnia.

Következtetéseim a három röviden bemutatott kutatás alapján

A tanítási órák hatékonyságát sok tényező befolyásolja, közöttük olyanok is, amelyek a tanárok előtt rejtve maradnak. A tanítási órákon zajló bonyolult folyamatok feltárására nagy szükség volna. E feladat aktualitása összefügg a hazánkban zajló társadalmi változásokkal is. Növekszik a társadalmi differenciáltság, ami abban is megnyilvánul, hogy az iskolák egy részében egyre nagyobb vagy talán egyre feltűnőbb a különbség a pedagógusok és tanítványaik szociokulturális hátterében. Tovább nehezíti a pedagógusok és természetesen a tanulók munkáját, hogy Magyarországon is megjelent az öröklődő munkanélküliség. A munkanélküli szülők családjában felnövekedő gyerekek számára nincsen olyan minta, ami segítené őket a rendszeresen ismétlődő feladatok megoldásában, a napirend megtartásában. A változó feltételekhez való alkalmazkodást könnyebbé tenné, ha a pedagógusoknak lehetőségük volna a rendszeres szakmai tapasztalatszerzésre, speciális szakmódszertani ismeretek elmélyítésére. Ezt még ma Magyarországon sem a folyóiratok, sem egyéb intézményes tanárképzési formák nem tudják a szükséges mértékben biztosítani.

A hátrányos helyzetű gyerekek és az iskolai matematikatanulás

A tanulási folyamat logikája, a reprezentációs szintek

A tanuláselméletek általában, mint például a mai oktatási gyakorlatot is erősen befolyásoló nagy pedagógusok, így Comenius és Herbart művei is, az adott kor iskolai oktatási gyakorlatából, annak hiányosságaiból kiindulva a tanulás általuk feltárt sajátosságaira építve adtak olyan elméleti megalapozást, amit később az iskolában törekedtek felhasználni. Bruner (1968 [43]) a tanulás és az iskolai tanulás fogalmát külön fogalomként értelmezi, és elemzi a kettő kapcsolatát. Bruner a szputnyik-sokk után kapcsolódott be az amerikai oktatási reformmozgalmakba, annak egyik magas tisztséget betöltő, sokat publikáló, vezető szakemberévé vált, aki ma is részt vesz a tudományos életben.

Elmélete nagy hatással volt a XX. és már mondhatjuk, a XXI. századi matematikadidaktikára is. Sok, azóta született mű alkalmazza a bruneri elméletet az oktatás valamely szintjére, valamely sajátos területére. Az elsősorban a tanárképzést szolgáló összefoglaló módszertani könyvekbe beépült a bruneri szemlélet (Ambrus A.; 1995. [2], Czeglédy, 1994 [57]). Más szerzők a matematikatanulás valamely fontos részterületét emelik ki, pl. a fogalomalkotást és az algoritmusok tanulását (Pinto, Tall, 2002 [182]). Igen nagy irodalma van az értelmileg gátolt tanulók számára alkalmas gyógypedagógiai és gyógypedagógiai jellegű oktatásnak. A társadalmi helyzetük miatt hátrányos helyzetű tanulók esetében az elmélet konkretizálása még nem történt meg.

Munkámban építek a reprezentációs szintekre vonatkozó matematika-didaktikai kutatásoknak az utóbbi évtizedekben elért eredményeire, utalok itt Nakahara összefoglalójára (2008 [159]), de a dolgozatban – terjedelmi okok miatt – elsősorban azt mutatom meg, hogy Bruner több évtizede megjelent művei a hátrányos helyzetű tehetséges, 6-10 éves tanulókra vonatkozóan mit mondanak.

A tanulás még ma is élő, régi, a társadalmi környezettől elszigetelt fogalmát leginkább a Rousseau által megteremtett, idealizált magántanár-tanítvány viszony jeleníti meg. A valódi tanulás a diákok társas kapcsolataival szoros összefüggésben valósul meg, az iskolában és azon kívül is. Dolgozatomban igyekszem a bruneri elméletnek speciálisan az iskolai oktatásra vonatkozó oldalát kiemelni.

Az iskolai tanulás – a sok bekövetkezett változás ellenére is – elsősorban a beszélgetésen, tanári közléseken és az íráson-olvasáson keresztül történik. De ez nem a tanulás maga, hanem annak csak egy része. A teljes tanulási folyamat három, nem élesen elkülönülő szakaszból áll, amelyeket a három reprezentációs szinttel írhatunk le. A konstruktivista tanuláselméletek egyik kulcsfogalma a mentális reprezentáció, amelynek előzményei Arisztotelész tükrözés-elméletéig vezet-hetők vissza. Ma a pszichológia és a pedagógia mellett a mesterséges intelligencia kutatásában játszik jelentős szerepet. Bruner a filozófia és a kognitív pszichológia reprezentációs elméleti megközelítését a tanulás gyakorlati fogalmára és ezáltal az iskolai tanulásra alkalmazta.

Bruner az iskolán kívül megszerzett tapasztalatokat igen fontosnak tartja, és a hatékonyabb tanulást lehetővé tevő tanórai munkát úgy tervezte meg, hogy abba beépítette azokat a folyamatokat is, amelyek egyébként az órán kívül zajlanak.

A tanulás ebben az elméletben az a folyamat, amely során a külső valóság leképeződik az agyban, ez a tárgyi valóságtól való fokozatos eltávolodást jelent. A tárgyakat előbb képek helyettesítik (bizonyos esetekben a szagok, hangok és a valóság más emlékei is szerepet kapnak), később már a képekre sincs szükség, a valóságot a szimbólumok jelenítik meg, amelyek lehetnek szavak, jelek, formulák, vagy akár kotta is.

Bruner (1968 [43]) szerint három módja van annak, ahogyan a valóságot gondolkodásunkban leképezzük, ezek a cselekvésre alapozott, tárgyi reprezentáció (enaktív), a képi (ikonikus) (Bruner, 1968, [43] 27-28.) és a szimbolikus (szövegekre, jelekre alapozott) reprezentáció. A fejlődés azt jelenti, hogy a leképezés mindhárom formájával egyre magasabb szinten rendelkezünk.

Ez a folyamat nem merev szakaszosságot jelent, hanem ciklikus ismétlődést, ahol az egyes szakaszok is átalakulhatnak egymásba, összefolyhatnak. Pl. az integráljel a kezdő tanulónak nagyon absztrakt szimbólum, a felsőoktatásban ikonikus jele lehet egy bonyolult összefüggésnek, annak viszont, aki valamilyen matematikai probléma megoldásán dolgozik, már szinte a tárgyi szintre jellemző konkrét jelentéssel bír.

A tanulás eredményessége érdekében minél változatosabb reprezentációs módokat szükséges a tanulók számára felkínálni, amelyek között ők viszonylagos szabadsággal mozoghatnak. A korábban elterjedt programozott oktatási elvekkel szemben Bruner elveti a merev, nagyon részletes előírásokat, mert szerinte a reprezentációs formák közötti átmenet rejtett (Bruner, i.m. 31.). Részben még kutatásra vár a szintek közötti kapcsolat, részben már tudható, hogy az átmenet természete olyan, amelyben nincsenek éles, pontosan megállapítható határok, az átmenet a reprezentációs formák között folytonos (Bruner, i.m. 96.) és állandóak a visszatérések, előreugrások.

Tehát a tanulás hosszú és bonyolult folyamat, előre nem látható kitérőkkel és előreugrásokkal, amelyek a körülményektől, a tanuló pillanatnyi állapotától függenek. Az oktatásnak ezért egyszerre kell tervszerűnek lennie és szabadságot hagynia. Bruner sokszor ír arról, hogy nem lehet merev keretek közé szorítani a tanulási folyamatot. Azt is kiemeli, hogy ez nem azt jelenti, hogy a pedagógusnak nem kell megterveznie a folyamatot, hanem azt, hogy finom módszerekkel kell elemeznie, hogy mi történik, ennek milyen a kapcsolata az előzetes tervekhez és célokhoz, és az elemzés eredményeképpen kell dönteni az adott pillanatban történő beavatkozás jellegéről.

A reprezentációs elmélet már kezdetben összekapcsolódott a matematika-tanítással. Egy matematikatanulási konferencia hatására, az ottani előadása nyomán született meg 1960-ban Bruner nagyjelentőségű könyve: The Process of Education (Cambridge, MA: Harvard University Press). A matematikatanulás kérdései később is rendszeresen visszatérnek műveiben. A következő példa a 60-as évekből származik, az 1966-os könyvben jelent meg, (magyarul Bruner, 1974 [44]). A folyamatot Bruner itt a 85-109. oldalon mutatja be, és több külön tanulmányt is írt e tárgyról (Bruner,1974, [44] 87. jegyzetei).

A kísérletben négy tanuló vett részt, kilencévesek, értelmiségi családból származtak, szüleik Bruner egyetemi kollégái voltak, magas, 120-130 közötti IQ-értéket mértek esetükben. A 4 gyerekkel 6 „tanító", köztük Dienes Zoltán foglalkozott. 6 héten keresztül. Heti 4 alkalommal, két-két órán át tanultak matematikát a gyerekek. Számok tényezőkre bontásával, az összeadás és a szorzás disztributivitásával és kommutativitásával, valamint másodfokú függvényekkel foglalkoztak. Bruner természetesen maga is hangsúlyozza, hogy a helyzet nem tipikus. A kísérlet célja a tanulás vizsgálata volt, a munka a gondolkodási folyamat szerkezetéről adott felvilágosítást. Természetesen a résztvevő tanulók sokat fejlődtek, de a kutatók ezt külön mérésekkel nem dokumentálták. A gyerekek építőkészletet kaptak, ezek elemei fából készült, nagy négyzetek voltak ismeretlen oldalhosszúsággal, valamint egység oldalú kis négyzetek és olyan téglalapok, amelyek egyik oldala egységnyi volt, a másik pedig a nagy négyzet oldalával egyezett meg.

Bruner megjegyzi, hogy még ebben a kivételesen jó oktatási helyzetben sem volt könnyű ezeket az eszközöket a gyerekek kezébe adni, mert nehéz volt velük elfogadtatni, hogy a nagy négyzet oldalhossza egy rögzített, de pontosan nem meghatározott érték, amit szükségtelen, például vonalzóval, lemérni.

A Bruner által megtervezett kísérletben a gyerekek feladata az volt, hogy a készlet elemeiből nagyobb négyzeteket rakjanak ki. A gyerekeknek táblázatba kellett foglalniuk tapasztalataikat, amihez néhány speciális jelet is megismertek, esetükben szigorúan a modellekre vonatkoztatva.

Például $x^2 + 2x + 1 = (x + 1)(x + 1)$.

Bruner kísérletében később áttértek a geometriai reprezentációról az algebraira, és a mérleg kiegyensúlyozásával jutottak általánosítható ismeretekhez, pl. ez a modell alkalmas magasabb fokú kifejezések bemutatására is. Bár ez a vizsgálat nem osztályteremben, hanem különleges, laboratóriumi keretek között zajlott, és egyetemi tanárok gyerekei voltak a tanulók, mégis igen fontos tanulságot rejt a hátrányos helyzetű tanulók vonatkozásában is.

Az egyik tanulság, hogy a matematikai ismeretek szigorú egymásra épülésének elvét nem szabad mereven kezelnünk, a gyereki fejlődés menete eltérhet a matematikai fogalomalkotás szokásos menetétől, ezért jól megszervezett, tárgyi és képi reprezentáció esetén a tanulók képesek az egyébként nekik szánt tananyagnál sokkal mélyebb ismeretek elsajátítására is. Ez különösen fontos a megbízhatatlan előismeretekkel rendelkező tanulók oktatása esetében.

A hiányzó előismeretek pótlása, a szokásos gyakorló feladatok monotonsága helyett a különleges új ismeretek megszerzése olyan tanulási örömöt és sikert jelenthet, ami visszahat a kötelező tananyag elsajátítására is.

Bruner úgy véli, „hogy minden készségnek vagy tudásnak van megtanításra alkalmas változata, bármely életkorban kezdjük is a tanítást – bármennyire is előkészítő jellegű változatról van szó" (Bruner, 1968, [43] 59.). Ez a többször visszatérő tétel bátorított arra, hogy a saját kutatásunkban a kísérleti csoportokban nehéz, kisiskoláskorban szokatlan témákkal foglalkozzunk.

A másik tanulság, hogy a szemléltetés sok megoldandó didaktikai feladatot jelent. Nem elég megmutatni a tárgyi eszközöket, azokhoz megoldandó, manipulatív feladatokat is kell rendelni, és gondoskodnunk kell a megszerzett ismeretek szimbolikus szinten történő rögzítéséről is.

A tárgyaknak különös jelentősége van. Tárgyi tapasztalatok nélkül – amelyeket meg lehet szerezni az iskolában, vagy vissza lehet emlékezni korábbi tapasztalatokra – nincs mire épülnie az új ismeretnek, de a reflektálatlan tapasztalatokból értetlenség születik. Ha a gyerekek nem kapnak időben kellő segítséget, akkor egy matematikai fogalom tárgyi reprezentálására tervezett eszköz könnyen válhat a matematikai fogalom szimbólumává, így az enaktív szint helyett a tanulóknak a szimbólumok szimbólumával kellene foglalkozniuk. A bemutatott matematikai példában az x oldalhosszúságú négyzet jelentett problémát, a gyerekek kezdetben zavarba estek tőle, meg akarták mérni a hosszát. Iskolai tapasztalataim szerint hasonló helyzet állhat elő a logikai készlet alkalmazásával is.

Azok a gyerekek, akik korábban nem élték át a halmazba sorolás problémáit, pl. a színek szerint csoportosított kisautók esetében mit tegyenek egy többszínű autóval, a nagyon egyértelműen meghatározott elemeket tartalmazó készlettel dolgozva éppen a csoportosíthatóságot veszik nehezen észre. Számukra a logikai készlet nem a korábbi tapasztalatok lényegét kiemelő eszköz, hanem egy olyan új játék, amivel nem tudják a matematikatanulás szempontjából megtervezett játékokat játszani.

A tanulás feltételei

Ma a gyerekek túlnyomó többsége iskolában tanul, ezért a tanuláselméleteknek az iskolai tanulás szempontjából meghatározó elemeit emelem ki. (Bár ma sajnálatos módon éppen a hátrányos helyzetű, beilleszkedési nehézségekkel küzdő gyerekek egy részét helyezik magántanulói státuszba a pedagógiai problémákkal megbirkózni nem tudó iskolák. Korábban a leggazdagabb, illetve a valamilyen különleges tehetséggel rendelkező, például a sport, a zene, vagy éppen a sakk területén kiemelkedő diákok váltak csak magántanulóvá,) A közösségben történő tanulás előnye, hogy a tanuláshoz szükséges szociális tapasztalatok minden további szervezés nélkül adottak.

A kognitív pszichológia a tanulást a korábbi elméleteknél sokkal szélesebb fogalomként értelmezi, a képességek fejlődését vizsgálja a régi tanuláselméletekkel (szöveges tanulás, mechanikus inger-válasz elmélet) szemben.

A korábbi tanuláselméletek a megértés folyamatát „fekete dobozként” kezelték, a látható, a viselkedésben közvetlenül megnyilvánuló jelenségekre koncentráltak. Arra helyezték a hangsúlyt, hogy hogyan érhető el, hogy a tanulók helyes választ adjanak a nekik feltett kérdésekre. Ezeket az irányzatokat újabban a szakirodalom összefoglalóan behaviorista tanuláselméletek néven említi, kitágítva ezzel a korábban csak egy irányzatra vonatkozó kifejezés jelentését. Ide tartoznak Skinner galambokkal végzett kísérletei, az inger-válasz elmélet és a programozott oktatást megalapozó elvek is, mint az azonnali megerősítés elve, a tananyag apró lépésekre bontásának elve. Jelentős változás következett be a 60-as években, amikor a több tudományterületen összegyűlt eredmények nyomán új tudományos részterületek jöttek létre. A pszichológiában a kognitív pszichológia, amely elsősorban a problémamegoldás folyamatát vizsgálta és emellett olyan magasabb rendű agyi folyamatokat is, mint pl. az emlékezés.

A pedagógiában a kognitív tanuláselméletek születtek meg, ezek között legjelentősebbek a konstruktivista tanuláselméletek, amelyeknek az elmúlt évtizedek során kialakultak radikális és mérsékelt változatai is. A konstruktivista tanuláselméletek két nagy pszichológus, Piaget (1999 [181]) és Vigotszkij (1966) [254] életművét tekintik előzményüknek. Piaget a tanulónak a tárgyi valósággal való kapcsolatára helyezte a hangsúlyt, Vigotszkij a társas környezet jelentőségét emelte ki.

Piaget és Vigotszkij hangsúlyozzák, hogy a tanulás aktív folyamat, amelyben a tanulók nem befogadják a tudást, nem átveszik a tanárok által közvetített ismereteket, hanem saját tapasztalataik alapján – amelyben az iskolai tanulmányok is jelentős szerepet játszanak – megkonstruálják azokat.

Ennek a konstrukciónak az alapja a gyerekekben meglévő fogalomcsíra. A mai pedagógiai elméletben általánosan elfogadott konstruktív nézet szerint, a tanulók nem lépésről lépésre gyűjtik be a tapasztalatokat és építik fel tudásukat, hanem a már meglévő, átfogó de még részletekben szegény világképüket gazdagítják és formálják át folyamatosan a megszerzett új ismeretekkel, amelyeknek egyik fontos összetevője a tapasztalat.

Vigotszkij (1966) [254]elmélete szerint az értelmi képességek fejlődését alapvetően a gyerek társas környezete határozza meg. Minden új képesség először az emberek közötti kapcsolatban jelenik meg, és csak később válik belsővé, a gyermeki gondolkodás részévé. Ezzel szorosan összefügg a legközelebbi fejlődési zóna elmélete: a gyermekek fejlődése szempontjából nem az a döntő, hogy egy adott pillanatban mit tud, hanem az, hogy mi az a szint, ahova el tud jutni. Ez a lehetőség is a társas kapcsolatban válik valósággá. Főműve az USA-ban 1962-ben jelent meg, és már a hatvanas évektől meghatározója az amerikai fejlődéselméleteknek.

A Piaget és Vigotszkij nézetei közötti ellentét matematikatanítási nézőpontból

Cole és Wertsch (é. n. [49]) nyomán úgy fogalmazható meg: mi segíti jobban a matematikatanulást, a pedagógus és a gyerekek beszélgetése, vitája vagy a gyerekek önálló kísérletezése, tárgyakkal, eszközökkel végzett manipulációja. A szerzők szerint az oktatási gyakorlatot tekintve az elméleti különbségek elmosódnak: sok tanulnivaló van Piaget-tól is és Vigotszkijtól is, elveik a gyakorlatban összeegyeztethetők, jól kiegészítik egymást.

Az anyanyelv ismerete

Ebben a részben az anyanyelv fontosságát emelem ki, de valójában egy nyelv fontosságáról van szó. Amennyiben az oktatás nem a kisgyerek anyanyelvén történik, akkor az oktatás nyelvét kell a tanulónak jó színvonalon elsajátítania.

Az anyanyelvnek, a kisgyerek első nyelvének megtanulása rendkívül fontos a későbbi iskolai tanulás szempontjából, mert:

- A nyelv eszköze a tanulásnak
- A nyelv eredménye a tanulásnak
- Az első nyelv megtanulása modellje a későbbi tanulásnak

Az értelmi fejlődés tartalmazza az egyre növekvő képességet arra, hogy szavak vagy szimbólumok által cselekvéseinket vagy cselekvési szándékunkat önmagunkban tudatosítsuk és másokkal közöljük. (Bruner, i. m. 18-19.) Ebben a fejezetben Bruner 1968-ban magyarul is kiadott művére fogok hivatkozni, amennyiben egyéb utalás nem szerepel.

A nyelvi eszközök igen változatosak. Meg kell különböztetnünk a beszédet és az írást, mert az írás már önmagában két erős absztrakciót jelent. Megszűnik az élőbeszéd anyagszerűsége, a hanghordázás, a hanglejtés, a szünetek és az egyéb szóbeli elemek hiányoznak, valamint nincs jelen a kommunikációs partner sem, az információ fogadóját a tanulónak el kell képzelnie. Elemezte Vigotszkij nyomán Bruner az írást és olvasást, mint másodlagos absztrakciót (i. m. 163.). A történelemben voltak olyan kultúrák, amelyek az írásbeliség nélkül is magas civilizációs szintre jutottak, illetve voltak olyan korszakok, amelyekben a művelt emberek sem tudtak írni-olvasni. Ma a tudományos nézetekkel való ismerkedésnek előfeltétele az írás-olvasás.

Az anyanyelv tanulásának szerepét Bruner kiemelkedően fontosnak tartja. Nem az az elsődleges, hogy a tanuló mondanivalóját szabatosan fogalmazhassa meg mások számára, bár természetesen ez is fontos, hanem az, hogy saját maga számára világosan fogalmazzon (i. m. 151-161.).

Később a kisgyerekek nyelvtanulásával külön kötetben is foglalkozott: Bruner (1983 [45]). Az 1966-os könyv megjelenésének idejében a nem angol anyanyelvű amerikaiak száma és aránya lényegesen kisebb volt a mainál, és sem az őslakosok, sem a régi sem az új, nem angol anyanyelvű bevándorlók problémái akkor még nem kerültek a politikai és pedagógiai érdeklődés előterébe. Valószínűleg ezért van, hogy Bruner nem differenciálta a nyelvi problémákat a gyerek anyanyelve, anyanyelvjárása és az oktatás nyelve közötti különbségek szerint. A nyelvi problémák kutatása a könyv megírása óta, és ebben Brunernek is jelentős szerepe van, kiszélesedett.

A nyelvészek megkülönböztetnek nyelvfejlődési zavart, ami az idegrendszer normálistól eltérő működésével van kapcsolatban, valamint a társadalmi elvárásoktól eltérő nyelvhasználatot. A probléma elméleti kérdéseivel először Bernstein foglalkozott. Az ő elmélete a korlátozott és kidolgozott kódokról sok jelenségre magyarázatot ad, de azóta lényegesen finomabb elemzésre van lehetőség a társadalmi dialektusok, a „social dialects" fogalmának bevezetésével. Az azonos nyelvet beszélők nyelvhasználata nemcsak földrajzi régiók szerint térhet el, hanem az egyes társadalmilag meghatározott helyzetű csoportoknak is lehetnek sajátos nyelvváltozatuk, ami, néhány erre vonatkozó kutatás szerint, éppúgy akadályozhatja az iskolai történések megértését, mintha a tanulónak általa nem ismert nyelven kellene tanulnia.

A kommunikációs problémák sokszor nehezen észrevehetőek. Amikor a gyerekek a feltett kérdésre rossz választ adnak, Bruner szerint az a leghatékonyabb pedagógiai stratégia, ha kiderítjük, milyen kérdésre válaszoltak, mi az, amit ők megválaszoltak a mi kérdésünk helyett. Újabb vizsgálat is megerősítette annak fontosságát, hogy figyeljünk arra, vajon mire válaszolnak a gyerekek. Piaget híres korong-kísérletében, amelyben a mennyiségi állandóság kialakulását vizsgálta, a kisgyerekek a két, ugyanannyi korongot tartalmazó sor közül következetesen azt tartották nagyobbnak, amelyikben az elemek jobban szét voltak húzva, nagyobb helyet foglaltak el, akkor is, ha a hosszabb sorban kevesebb elem volt. Ellenben amikor korongok helyett, egy később megismételt kísérletben, csokoládé drazsékkal végezték el a kísérleteket, már nem lehetett őket becsapni. A nagyobb helyet, több teret foglal el és a nagyobb mennyiség közötti különbség a fogalmak szintjén még nem jelent meg a gyerekek gondolkozásában, de ha választaniuk kellet a számukra fontos dolgok, a csokoládé kupacok között, akkor tudták, melyik halmaz felé érdemes nyúlni.

A kíváncsiság és a tanulás vágya

A hátrányos helyzetű, rossz tanulmányi eredményű tanulók esetében a matematikatanítás céljai sokszor nagyon lecsökkennek, cél a tanítási órák minél kevesebb konfliktussal történő megtartása. Holott a tanulás akkor hatékony, ha az intenzív bekapcsolódást kíván a tanulóktól.

A tanulás Bruner szerint örömszerző tevékenység, és az iskolai oktatás célja, hogy a tanulók képesek legyenek átélni a tanulás örömét, és ezáltal elérjék a tanulás elvárt egyéb eredményeit is. A tanulásnak a kognitív tényezőkön túli személyes feltételeire Bruner többféle megközelítésben is utal. Külön fejezetet szentel a tanulás vágyának (i. m. 165-186). Ebben a tanulni akarás kérdésével foglalkozik. A tanulni akarásnak két alapvető összetevője van: a kíváncsiság és a kompetencia-motiváció.

A kíváncsiság biológiai örökségünk, a környezet felkutatására vonatkozó vágy nélkül nem volna lehetőség a túlélésre. Valamit tudni megcsinálni, vagyis a kompetencia-motiváció, szintén biológiai örökség. Az állatkölykök és az embergyerekek is kitartóan törekednek arra, hogy valamit meg tudjanak fogni, el tudjanak dobni, és így tovább, és ez láthatóan nagy örömet jelent számukra.

Az iskolai tanulás nem a gyerekek természetes érdeklődésén, önkéntelen figyelmén alapul, ezért a pedagógusoknak irányítaniuk kell a tanulók figyelmét. „A kíváncsiságnak erőteljesebb szellemi tevékenység medrébe való terelése éppen azt követeli, hogy a kíváncsiság passzív, receptív, epizodikus formájából átmenet jöjjön létre a kíváncsiság tartós és aktív formájába" (i. m. 170.). Itt a hagyományos motiválástól eltérő didaktikai feladatról van szó. Látványos, szórakoztató elemekre csak a tanulási folyamat egyes szakaszainak kezdetén van vagy lehet szükség, a későbbiekben maga a tanulási folyamat, a gyerek tevékenysége jelenti a motiváló erőt, mert „minden alapos ismeretszerzés ösztönző, jutalmazó" (i. m. 51.). A tanítási folyamat eredményességének tehát központi kérdése, hogy a gyerekekben eleve meglévő kíváncsiságot képes-e a tananyagra irányítani a tanár.

Az anyanyelv ismerete, a kíváncsiság, a tanulás vágya mind olyan feltétel, ami az elképzelt ideális magántanítványi viszonyban is és az iskolai órákon is szükséges az eredményes tanuláshoz. Azonban van az iskolai tanulásnak néhány olyan feltétele, ami a hagyományokon alapszik, ami a tömegoktatás követelményeiből származik. Ezek a feltételek nem a tanulást nehezítik meg, hanem csak annak kialakult iskolai formáit, de ezek nem teljesülése mégis a tanulásból zárja ki elsősorban a hátrányos helyzetű tanulókat.

A tanulónak a tanulásra alkalmasnak kell lennie, de (i. m. 50.) az alkalmasságra az iskolának kellene megtanítania az otthon nem felkészített gyerekeket. Az iskolában kezdetben az óvatosságot, a nőies finomságot várjuk el a tanulóktól, a felfedezés bátorsága helyett. „Iskoláinkban a gyerek elsőnek sokszor ezt tapasztalja: tanulni annyit jelent, hogy vissza kell emlékeznie valamire, amikor kérdéseket tesznek fel, holmijait valami meg nem határozott módon mindig rendben kell tartania, a gondolatok olyan menetét kell követnie, amelyet inkább kívülről diktálnak, semmint belülről erednek, és a helyes válaszért megjutalmazzák." – írja Bruner a hatvanas évek amerikai iskolájáról, ami a mi iskoláinkra is jellemző kép (i. m. 179.). A diákoknak meg kell tanulniuk, hogy a tanulás felfedezés, kaland, küzdelem, ami magában hordja saját jutalmát, a tanulás örömét. A tanulás nehéz pillanataiban dől el, hogy a tanulók milyen stratégiát választanak, a szembeszállást vagy a meghátrálást (i. m. 187-212). A tanulási akadályozottságból többnyire meghátrálás következik, a tanuló nem foglalkozik az adott feladattal, a helyett mással foglalkozik. Bruner felsorol saját pszichológusi tapasztalataiból olyan példákat, amikor a tanulás nem az ismeretszerzést, a több tudás elsajátítását szolgálja, hanem a családi, iskolai konfliktusok kezelésének félresikeredő eszköze. A tanulás lehet a családi hatalmi harcok eszköze, ahol a hatalomgyakorlás módja a nemtanulás is lehet. Lehet, hogy a tanuló a tananyaggal való foglalkozás helyett a tanárral vagy a tanulótársaival folytat harcot.

A tanulási akadályok sokszor irracionálisak, ezért irracionális eszközökkel is lehet segíteni a leküzdésüket. Egy kutatási programban Bruner tutorként foglalkozott egy tanulóval, akinek hibás mondatokat kellett nyelvtani házi feladatként átformálnia. A tanuló félt, hogy nem fogja megtudni, hogy jó-e a megoldása. Bruner felajánlotta, hogy reggelenként olvassa fel neki telefonba a saját megoldását, amit Bruner meghallgat, de nem javít ki. Egy hét múlva a tanuló belejött az ilyen típusú feladatok megoldásába, és a tulajdonképpen irracionális telefonos segítséget már ő is szinte tréfának tekintette (i. m. 204.). Sokszor a kudarcok miatt rettegő tanulók félelmeit meglepő ötletekkel lehet csökkenteni.

A tanulás társas kapcsolat, ezért a tanuláshoz a tanulóknak az elemi társaskapcsolati kompetenciák birtokában kell lennie (i. m. 70.) Hiszen a tanulás, különösen kezdetben, legalább két embert, a tanulót és a tanárt feltételezi, azonban az órákon a többi tanulóval kialakuló kapcsolat is befolyásolja a tanulási szituációt. A tanulónak meg kell tanulnia, hogy észrevegye, ha valamit nem ért, és képesnek kell lennie arra, hogy ezt jelezni tudja tanárának, majd később ez váljon saját magának szóló jelzéssé (i. m. 82.). Ez azonban igen magas szintű képességeket tételez fel, sok tanuló éppen ebből a szempontból szorul leginkább segítségre. A probléma észlelése és megfogalmazása metakogníciót igényel, a probléma kimondása pedig kommunikációs jártasságot és bátorságot. Az újabb kutatások szerint – ezekből később néhányat bemutatok – éppen azok a tanulók igyekeznek a leginkább elrejteni a megértési problémáikat, akiknek pedig a legnagyobb szükségük volna segítségre. Ők így próbálják elkerülni a konfliktushelyzeteket, ezzel hosszú távon nagyon megnehezítik fejlődésüket.

Ahhoz, hogy a tanulók számára is jelentőséggel bírjon a tananyag, érdekessé kell tenni számukra. Bruner a társadalomismeret témakörében elemzi, hogy különleges, meglepő ismeretekkel lehet ráirányítani a tanulók figyelmét saját környezetük, a számukra ismerős világ sajátosságaira. A tanulók által elsajátítandó ismeretekhez látszólag felesleges, nagy kitérők végigjárása vezet el. A társadalom életét két nagyon egyszerűen szervezett, néhány szempontból ellentétes, más szempontokból nagyon hasonlóan élő nép példáján mutatja be, az egyik egy eszkimó, a másik egy egyenlítői közösség. Az észak-amerikai és európai gyerekek számára egzotikus világ felkelti a gyerekek spontán érdeklődését, és ezáltal mély odafigyeléssel foglalkoznak olyan kérdésekkel is, amelyek a hagyományos tananyag részei.

Bruner alkalmazta a filmet is, mert „élénkíti a beszélgetést" (Az oktatás kultúrája, 110-113.). A tananyag gazdagítása a természettudományos tárgyakban és különösen a matematikában gyakran a tananyag nehezebbé tételét jelenti, azonban egyre bővülnek azok a tapasztalatok, amelyek azt mutatják, hogy a kötelező tananyagon túli ismeretek beépítése az iskolai tanulás folyamatába – ezekben a tantárgyakban is – megkönnyítheti a tanulást. A tananyag gazdagításának elve a matematikában úgy is megvalósítható, hogy a tananyaghoz közvetlenül nem kapcsolódó, didaktikailag megalapozottan kiválasztott, meglepetést okozó feladatokat adunk, amelyekkel segítjük a tanulókat, hogy jobban megértsék a kötelezően elsajátítandó ismereteket is.

A szellemi munka elemi technikáit a gyerekek jó esetben még az iskoláskor előtt, otthon tanulják meg (i. m. 47.), ilyenek a manipulálás, szemlélődés. A könnyen elterelhető, felszínes kíváncsiság helyett az elmélyült odafigyelést, a kitartó próbálkozást segítő környezetre van szükség.

Az esélykompenzálás lehetőségei a matematikaoktatásban

A hátrányos helyzet és a matematikatanulás összefüggéseit feltáró, összehasonlító elemzések még nem születtek meg. Egymással párhuzamosan futó, a gyakorlatban kialakult, elméletileg többé-kevéssé megalapozott fejlesztő programok vannak, amelyekből képet kaphatunk a szervezők pedagógiai nézeteiről, a felmerülő problémákról és a választott megoldási módszerekről is.

Szükséges-e a többségitől eltérő, más matematikatanítás a hátrányos helyzetű tanulók számára? Az alapkérdést illetően nincs egyetértés, de nincsenek viták sem, az ellentétes nézetek képviselői a matematikatanítás különböző területein, egymástól függetlenül építik fel saját programjaikat.

Esélyjavító programok tartalmi és módszertani differenciálás nélkül

Vannak olyan irányzatok, amelyek szerint semmilyen megkülönböztetés nem szükséges, mindenkinek ugyanazt a matematikát kell tanulnia, ugyanazon az úton, csak a hátrányos helyzetű tanulóknak több segítséget kell kapniuk tanáraiktól. Ebben az irányzatban azt tartják célszerűnek, ha a problémás tanulók egyenletesen elosztva vannak jelen az osztályokban. Sehol sem túl magas az arányuk, így a rájuk irányuló tanári többletfigyelem ellenére az osztály egészében a munka úgy folyhat, mintha nem is lennének hátrányos helyzetű tanulók az osztályban. Ezt a nézetet fogalmazta meg például a magyar és az USA-beli tapasztalatokra egyaránt hivatkozva a Kertesi-Kézdi szerzőpáros (2005 [123]).

A holland MATRA modellben szervezett többlettámogatást kapnak a rászoruló tanulók. Itt a hátrányos helyzetű családokkal való foglalkozással, a kisgyermekkori intenzív fejlesztő programokkal, sok különórával és szabadidős tevékenységgel teszik alkalmassá a gyerekeket arra, hogy később zökkenők nélkül beilleszkedjenek az iskolai életbe. A holland programot már több országban, így Magyarországon is alkalmazzák (Bognár, 2005). A folyamatról kedvező a résztvevők véleménye, bár eredményeket még nem állapítottak meg. Ebben a modellben pozitív diszkriminációt alkalmaznak részben az iskolán kívül, részben az iskolákban. Hasonló modellt követnek sok magyar iskolában, órarendszerűen szervezett felzárkóztató programokat szerveznek: külön foglalkozások keretében kívánják megszüntetni a hátrányos helyzetű tanulók lemaradását annak érdekében, hogy a többiekkel együtt haladhassanak a matematikatanulás szokásos útján.

Az eddig említett programok közös vonása, hogy az iskolai oktatást lényegében változatlanul hagyva az egyes tanulóknak nyújtanak különböző formákban segítséget, hogy ők könnyebben alkalmazkodhassanak a változatlan iskolai feltételekhez.

Ezeknek a felzárkóztató programoknak az eddig tapasztalt csekély eredménye felértékeli az egyéb stratégiákat. Sokan úgy vélik, és én is úgy gondolom, hogy ezek a felzárkóztató programok eleve kudarcra vannak ítélve, hiszen azok a hátrányból induló gyerekeket ugyanazon az úton kívánják végigvezetni, mint a többségieket. Azonban a hátrányok egyik összetevője éppen a lassabb haladási tempó, ezért a többiek utolérése reménytelen feladat. Tehát más segítő módszerre van szükség. Attól függően, hogy mit változtatnak meg a többségi matematikatanulási programokhoz képest, alakultak ki az eltérő megoldások. E programok közös vonása, amelyet sok amerikai matematikatanulási esélynövelő program tanulmányozása alapján állapítottam meg, hogy nem addig akarnak foglalkozni a tanulókkal, amíg ők utolérik a többieket, ez általánosságban túlzottan magas, a tehetséges tanulók esetében pedig alacsony célkitűzés lenne, hanem olyan impulzusokat adnak a tanulóknak, amelyek hatására elindulhatnak a matematika tanulásának útján, és azon már érdeklődésüknek, tehetségüknek megfelelő, egyénenként különböző távolságokra juthatnak el. Ezek az impulzusok nem egyszeriek, hanem hosszan tartó folyamatok keretében gyakran ismétlődnek. A következőkben a különböző amerikai programokra említünk néhány példát.

Az USA-ban alkalmazott néhány esélynövelő program

A matematikai tehetséggondozás területén Magyarország nagyhatalom, a világ matematikai tehetséggondozással foglalkozó szaktekintélyei odafigyelnek a magyar módszerekre, sok elemét átveszik. A Középiskolai Matematikai Lapok világszerte nagy népszerűségnek örvend, különösen, amióta angolul is megjelenik. Mégis érdemes megvizsgálnunk, mi történik az Egyesült Államokban, hogyan foglalkoznak ott a hátrányos helyzetű fiatalokkal, hogyan keresik a tehetségígéreteket. Több olyan kezdeményezés is van, amelyben a matematikai tehetséggondozás a tehetség felfedezése előtt megkezdődik. Erről a látszólagos ellentmondásról és a feloldásáról szól a dolgozat következő része.

Az USA kisebbségi matematikatanítását két elv kölcsönhatása teszi izgalmassá, változatossá.

Az egyik az ország demokratikus hagyománya, az egyenlőség illúziója és vágya, amelynek pedagógiai vonatkozásairól Dewey nagyon határozottan írt: az iskolának egyenlő esélyeket kell adnia. Ezt a cél többféle iskolai mozgalom és a törvények is segítik például azzal, hogy a tanulók származása nyilvántartható, a rászorulók megtalálása és a folyamatok ellenőrzése könnyebb mint Európában. A „senkit sem hagyunk le” (No Child Left Behind) törvény a hátrányos helyzetűek pozitív diszkriminációját jelenti, olyan programok támogatását, amelyek az esélyeket növelik. Ez kormányzati ellenőrzéssel, támogatással történik.

A másik elv az egyéni szabadság, a korlátlan lehetőségek elve – vagy inkább vágya – szerint a kitűnőségeknek joguk van a legjobb oktatásra. A tehetségeseknek joguk van a tehetségük kibontakoztatására, ez nekik és az országnak egyaránt érdeke. Joguk van az egyéni utakhoz, akkor is, ha ennek az egyenlő esélyeket csökkentő hatása is lehet.

A két elv egyidejű érvényesülését a hátrányos helyzetű tehetséges tanulóknak nyújtott speciális képzési formák keretében törekednek megvalósítani. A fejlesztő programokban figyelembe veszik, hogy a tanulás feltételei közül a tanulni akarás képessége függ leginkább az otthoni környezettől, ezért nem a programba belépéskor, hanem a folyamat végén kell a diákoknak dönteniük arról, hogy akarnak-e matematikával foglalkozni. Csak a tehetséggondozó program első szakaszából való kilépéskor, tehát a segítő szakasz végén, az egyéni sajátosságokhoz is alkalmazkodó fejlesztő program hatásait figyelembe véve foglalkoznak a pedagógusok azzal, hogy tehetséges-e a tanuló, és mihez van tehetsége.

A matematikai tehetséggondozó programokban a választott célcsoport, például az indián tanulók közül bárki bekapcsolódhat a programba anélkül, hogy ehhez előzetes feltételeket szabnának, ez a demokratikus elv érvényesülése. A gyerekek érdeklődéséhez igazított magas színvonalú tananyag pedig a matematikai tehetség felismerését és kibontakoztatását teszi lehetővé. A látszólag egymásnak ellentmondó célok: a lemorzsolódás megakadályozása és a legmagasabb szintű továbbtanulásra való felkészítés sok programban egyidejűleg, integráltan történik. A No Child Left Behind programok ellenőrzése-értékelése során is mindig együtt figyelik és értékelik a lemorzsolódási adatokat és azt, hogy hogyan gondoskodnak az iskolák a tehetségesekről. Ez az integrált szemlélet jelenti az amerikai tehetséggondozó programok újszerűségét.

A hátrányos helyzetű tanuló politikailag korrekt, pedagógiai célokra alkalmazott amerikai elnevezése: a tudományos életben alulreprezentált kisebbségek tagja. Ők alkotják a következő részben bemutatott fejlesztő programok célcsoportját. Az összehasonlító elemzéseket az internetről gyűjtött, egyetemi és oktatásirányítási dokumentumok alapján végeztem.

A SUMMA kutatócsoport

Az Amerikai Matematikai Társaság keretein belül működik egy kutatócsoport SUMMA

(Strengthening Underrepresented Minority Mathematics Achievement) elnevezéssel, amelynek célja, hogy a kisebbségieket segítsék jó matematikai teljesítmények elérésében. Az eredeti fogalmazás magyarul csak körülményesen írható le: matematikai kutatásokban nem résztvevő (még nagyobb korrektségre törekvő megfogalmazásban: önmagukat a számarányuknál kisebb létszámban képviselő) csoportok segítése. A kutatócsoport foglalkozik az iskolai oktatásra háruló feladatokkal is.

A Berkeley Egyetem programjai

Berkeley-ben van a központja a SEED Project-nek, a Speciális nevelési szükségletű diákok tanulásával foglalkozó programnak.

A William F. Johntz elveire épülő program szerint azoknak a fiataloknak, akik már kudarcot vallottak matematikából, nem az iskolában egyszer már végigjárt utat kell követniük, hanem a magas presztízsű felsőbb matematikával való ismerkedés keretében kell elsajátítaniuk a továbbtanuláshoz és az iskolai zárótesztek sikeres megírásához szükséges matematikai alapismereteket (Burn, 1995).

Az egyetemen a kisebbségi, afro-amerikai hallgatók matematikatudásának problémáit is vizsgálták, és megoldásokat kerestek rájuk a Merit program keretében, amelynek főbb sajátosságait a következőkben foglalom össze:

1. rámutat a tévedésre: motiválatlanságot feltételeznek a fekete fiatalokról, holott sok fekete fiatal magasan motivált, csak a sorozatos kudarcok miatt marad le
2. nem a felzárkóztatásra törekszik a program, hanem annál többre, a kiválóság elérésére bíztatják a fiatalokat
3. a kiscsoportos tanulásnak kiemelt szerepe van, mert a közösség megerősítésén keresztül emeli tagjainak tanulási motivációt a tanulás nehéz pillanataiban
4. az egyéni tutorálás szintén szerepet kap a programban

A program 2002-ben lezárult. Jelenleg a Berkeley Egyetem matematikai köröket szervez a tehetséges diákoknak, követve a magyar, orosz és más kelet-európai hagyományokat.

Kétnyelvűséggel a globális társadalomért

A Kétnyelvűséggel a globális társadalomért, Biliteracy For A Global Society programban a nyelvi hátrányok leküzdésére azt a módszert választják, hogy a matematikát az iskolába lépéstől kezdve két nyelven, angolul és a gyerekek anyanyelvén, spanyolul tanítják. A legújabb vizsgálatok alapján ez a szép elv eltorzult, hatásában az ellenkezőjére fordult: a kezdő szakasz végén a gyerekek nyelvi teszteket oldanak meg, és csak a leggyengébben teljesítők kerülnek a kétnyelvű osztályba. Tehát a kétnyelvű oktatás a hátrányos helyzetű tanulók szegregációjának legális módszerévé változott, ezért több amerikai államban betiltották a kétnyelvűséghez való alkalmazkodásnak ezt a formáját.

Newcomers programok

A bevándorlók (newcomers) esélyeit növelő, központilag szervezett programok is vannak. Nemcsak az ország hagyományos kisebbségei, hanem a bevándorló családok gyermekei is hátrányos helyzetben vannak az iskolákban. Az ő megsegítésüket tűzte ki célul a Newcomers mozgalom. Sajátossága, hogy az érintett pedagógusok rendszeresen találkoznak egymással, közösen oldják meg az oktatás során felmerülő problémákat. Kidolgozták értékelési rendszerüket, a bekapcsolódó iskolák tevékenységét igen részletes, kérdőíves módszerrel ellenőrzik és értékelik.

Következtetéseim

A programokról nem készültek összehasonlító elemzések. Az általam elérhető források alapján megállapítható, hogy sikerüknek sok összetevője van.

Először is matematikailag, pedagógiailag jól megalapozott programokról van szó.

Másodszor: a programba bekerülő fiatalok érzik a feléjük áramló bizalmat, és a személyre szóló törődéssel együtt járó magas elvárásokat.

Harmadszor ezekbe a csoportokba nem kerülnek be az eleve előnyös helyzetből indulók, egyrészt azért, mert számukra van sok egyéb szervezett lehetőség, és így nem is kívánkoznak bekerülni, másrészt azért, mert ezeket a programokat gyakran etnikai, nemzetiségi és ezekhez hasonló kritériumok alapján szervezik: például az indiánoknak, vagy a spanyol anyanyelvűeknek, így mások nem is jelentkezhetnek. Ez azért fontos, mert a teljesítménymérések sokszor és egybehangzóan kimutatták, hogy a hátrányos helyzet megszüntetésére alkalmazott, hatékonynak látszó módszerek eredményeképpen minden tanuló fejlődik, de azok, akik jobb helyzetből indulnak, gyorsabban fejlődnek, így a jobb egyéni és jobb átlageredmények mellett a különbségek tovább nőnek, a hátrányok megmaradnak.

A sikeres esélynövelő programok kezdeti szakaszában a hátrányos helyzetű tanulóknak nem kell megküzdeniük az előnyből indulókkal. A lassabban haladó tanulók frusztrációját csökkentheti a tanulók időszakos elkülönítése egymástól.

Ezt a megoldást Magyarországon Pósa Lajos (1995 [190]) is alkalmazza tehetséggondozó szakkörein: a munka egyes szakaszaiban a diákok nem látják gyorsabban dolgozó társaikat, így saját tempójukban, önállóan, kudarcok nélkül tudják megoldani a matematikai problémákat.

Az esélyegyenlőtlenség csökkentése érdekében kialakított programok speciálisan a hátrányos helyzethez alkalmazkodnak. Kiemelem legjellegzetesebb vonásaikat:

- A szervezés szempontjából: nincs előzetes válogatás, kemény felvételi vizsga, az ismert hátráltató okok miatt elegendő a leendő tanulók érdeklődése.
- A tananyag kiválasztása szerint: bátran választanak olyan matematikai problémákat és olyan módszereket, amelyek a közoktatás egésze szempontjából nehéznek minősülnének.

- A fejlesztő programok nem az iskolai tananyag ismétlésével kezdődnek. Kezdetben a gyakorlás helyett kreativitást igénylő és az adott előképzettséggel már éppen megoldható matematikai problémákkal foglalkoznak, akkor is, ha a feladatban szereplő kérdések pontos megválaszolására, a számítások elvégzésére még nincs lehetőség.

A matematikatanulást hátrányos társadalmi helyzetben segítő programok azt mutatják, hogy nincsenek titkos receptek, hanem szokatlan, de bárki számára megismerhető stratégiák vannak, amelyeknek közös vonása, hogy elindítják a tanulókat a matematika felé vezető úton. Ezeknek az impulzusokat adó programoknak a tapasztalatai a magyar iskolákban is felhasználhatók az esélyek javítására.

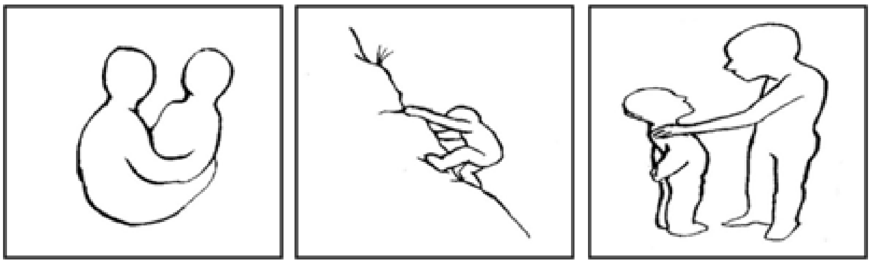
Az igényes matematikatanulás feltételeinek vizsgálata, a teljesítménymotiváció szituatív mérése A hátrányos helyzetű tanulók tanulási problémáinak hátterében a pedagógusok gyakran a tanulók motiválatlanságát feltételezik. Úgy gondolom, valódi motiválatlanság, a tanulás elutasítása igen ritka, és akkor is inkább csak az idősebb tanulók körében fordul elő. A kisiskolások motivációjának megismerésére Kuhl (1999 [137]) megszerkesztett egy mérőeszközt, amelyet Vásárhelyi Éva alkalmazott Magyarországon. Vásárhelyi Éva útmutatása alapján módom volt megismerni a vizsgálati eszközt, és a szerzőtől írásos engedélyt kaptam, hogy azt átdolgozzam a kisiskolások didaktikai célú vizsgálatára. A dolgozatnak ebben a részében az eredeti mérőeszközt mutatom be, azokat az elemeit hangsúlyozva, amelyeket majd az empirikus részben magam is felhasználok.

A tanulás, ezen belül a matematikatanulás pszichológiájának kérdése sokoldalúan vizsgált terület, most csak Klein Sándor (1980 [126]) kutatásaira utalok. Dolgozatomban egy részterületet, a tanulók motivációját emelem ki. Olyan tanulók, akik látszólag motiválatlanok, nem, vagy nem szívesen végzik az iskolai feladatokat, bármely családi háttérből kikerülhetnek, de különösen nagy gondot a hátrányos helyzetű családok gyermekei esetében jelentenek. Fontos megvizsgálni, hogy az iskolai tanulással szembeni ellenszenv nagy valószínűséggel miből származik: a személyiség struktúrája tér el ezeknek a tanulóknak az átlagos tanulókétól, és ebben az esetben komplex pedagógiai-pszichológiai támogatást is igényelnek, vagy pedig kíváncsi, tanulni vágyó diákokról van szó, akik az iskolában tanulási akadályokba ütköznek, és ezért elsősorban tantárgypedagógiai elemzésekkel és változtatásokkal segíthetjük őket. Feltételezem, hogy az iskolában rosszul teljesítő, nehezen tanuló 6-10 éves gyerekek többsége esetében ez utóbbiról van szó, ezért a motiváció a vizsgálatunk egyik fontos problémája.

*Az OMT teszt (**O**peranter-**M**otiv-**T**est)*

Az OMT teszt (Kuhl, 1999 [137]) a dinamikus személyiségtesztek közé tartozik. A legkomplexebb motivációs térkép létrehozását teszi lehetővé. Elméleti háttere a személyiség és a környezet interakciójának elemzése. A személyiség hajtóerőit vizsgálja három nagy területen. Egységben vizsgálja a motivációk értelmi és érzelmi meghatározottságát. A személyiség önszabályozó funkcióit a tesztben a szerző egy új, saját fejlesztésű eszközzel, egy projektív teszttel méri. A dinamikus szemléletnek megfelelően ahhoz, hogy a személyiség mozgatórugói működésbe lépjenek, a vizsgálati személyeket kihívást jelentő szituációba helyezik. Ezt olyan képsorozattal valósítják meg, ami erős felhívó jelleggel rendelkezik. A tesztben alkalmazott 15 kép közül azt a hármat mutatom be, amelyeket az empirikus vizsgálat előmérés szakaszában alkalmaztam is. Az egyes képek a három motívumcsoport 5-5 ábrás sorozatának indító képei.

A különböző lélektani állapotokat előhívó ábrákon látszólag egyszerű, hétköznapi jelenetek vannak, ezek azonban a hozzájuk tartozó kérdésekkel együtt: Kik vannak a képen? Mi történik? Hogy érzik magukat a szereplők? Miért érzik így magukat? Mi fog történni ezután? – kiváltják a vizsgálati személyek érzelmeit és közlési vágyát is.



1.51. ábra. Jellegzetes hívóképek az OMT tesztből

OMT teszt feladatlapok

A motívumcsoportok: a Kötődés (kapcsolat), a Teljesítmény (kompetencia), a Hatalom (érvényesülés).

Ezeknek öt szintjét állapítja meg a teszt. A tanulók válaszait e szinteken kell elhelyeznünk. A részletes besorolási útmutató néhány jellegzetes elemét kiemelem.

Motiváció

A pszichológiából származó fogalomnak nagy a jelentősége a pedagógiában. A motiválásra sok pedagógiai kutatás irányult. A sok és szerteágazó pedagógiai feladat közül a matematika iránti érdeklődés felkeltése talán a legnehezebb. E téren új kutatási irányzat alakult ki, amely a könnyebb felismerhetőség érdekében a motiváció elnevezést új jelzővel látta el, így kelekezett mastery motivation fogalma, ami magyarul „elsajátítási motiváció”-ként látszik elterjedni (Józsa, 2007). A Bruner által is felvetett gondolatokat, hogy a kíváncsiság és a kompetenciaigény ősi örökségünk, neuropszichológiai és nagymintás statisztikai vizsgálatok is igazolták. Újabb megfogalmazásban: az emberek velük született tulajdonsága a környezet felfedezésére irányuló kíváncsiság, valamint a képességek „öncélú” fejlesztésének igénye. Ezek a kutatások más megvilágításba helyezik a matematikadidaktika feladatait: a motiválás nem külső eszköz, hanem fundamentális elv: a tanulás örömének megőrzésére, fenntartására kell törekednünk.

A motiválás matematikaórán alkalmazható eszközeit Czeglédy István foglalta össze módszertan könyvében (1994 [57])

- A tananyag tartalmából adódó lehetőségek
- Az alkalmazott módszerek, eszközök, munkaformák motivációs lehetőségei
- Az értékelés mint motiváló tényező
- A tanár személyiségtulajdonságai mint motívumok

Motívumcsoportok

Kuhl három motívumcsoport 5-5 szintjét különbözteti meg:

Kötődés (kapcsolat, jele K)

K1 örömteli, érzelmi részvétel a kapcsolatban

K2 barátkozás, kifelé irányuló, felszínesebb kapcsolat

K3 a visszautasítás pozitív kezelése

K4 biztonságra törekvés

K5 függés, magány, mellőzöttség

Teljesítménymotiváció (kompetencia, jele T),

T1 öröm egy tevékenységben, kíváncsiság

T2 elismerés-motiváltság

T3 kudarc-legyőzés, egy feladat elkerülése

T4 kudarckerülés (semmitse elrontani)

T5 tanácstalanság, félelem

Hatalom, hierarchia (a társas kapcsolatokban elfoglalt helyzethez való alkalmazkodás, jele H)

H1 vezetés, együttérzés, mások segítése

H2 elismerést, tekintélyt kivívni

H3 önigazolás, érzelem, pl. harag kinyilvánítása

H4 félelem a hatalom elvesztésétől, másik oldalról: kötelességérzet

H5 tehetetlenség, bűntudat.

Az OMT teszt – az örömmel végzett tevékenységet,
– a meleg érzelmi kapcsolat kialakításának képességét és
– a hatalomnak a másokat segítő vonását
tekinti leginkább pozitívnak, a szorongást, a félelmet, az elhagyatottság-érzést pedig a legnegatívabbnak. A közömbösség a válaszok elutasításában, elviccelésében is megjelenhet.

Pedagógiai alkalmazás

A háttérben álló mély személyiséglélektani eredményekre építve, de azokból csak a pedagógiai folyamatokban közvetlenül használható elemekre koncentrálva a teszt alkalmazható a tanulási folyamat optimalizálására (Vásárhelyi, 2008 [249]). A diákoknak a három skálán való elhelyezkedését mutató adatokból a pedagógusok a tanítási órákon alkalmazható, a diákok egyéni sajátosságaihoz illeszkedő módszertani segítséget kaphatnak. A teszt segítséget nyújt abban, hogy a pedagógusok megtalálják azt az egy-két tanulót, akik intenzív támogatásra szorulnak, a többiek esetében pedig elsősorban arról van szó, hogy a tanulók maguk választhassanak munkaformák, tanulási szervezési formák és feladatok közül az órák oktatási és nevelési feladataival összefüggésben.

A teszt pedagógiai alkalmazhatóságának éppen az ad különös jelentőséget, hogy a személyre szabott nevelési módszerek a tanuláson, a tanulás sikeresebbé és örömtelibbé tételén keresztül érvényesülnek. Ennek következtében ez a vizsgálat és a ráépülő egyéni pedagógia egyedülálló a nemzetközi szakirodalomban.

A gyakorlatban esetenként megfigyelhető tendenciával szemben az OMT eredményekre épülő alkalmazkodás a tanulókhoz nem merül ki abban, hogy a tanulók által mutatott képességnek látszólag megfelelve csökkentjük az egyes tanulókkal szemben támasztott követelményeket. Itt a siker elérését segítjük, elsősorban azáltal differenciálva, hogy mely tanulóktól várunk el önálló döntéseket, és kiket segítünk a döntések meghozatalában, illetve kiket mentünk fel a döntések felelőssége alól a számukra megfelelő munkaformák és feladatok kijelölésével.

Vásárhelyi Éva (Vásárhelyi, 2008 [249]) kutatásokat végzett azért, hogy az OMT teszt tapasztalatai a iskolai munkában is alkalmazhatóak legyenek. A tanulók egyéni sajátosságainak személyiségdinamikai összetevőiből származtat oktatási-nevelési feladatokat és megoldási javaslatokat. E munka nagy értéke, hogy a személyiségjellemzők és a pedagógiai munka közötti kapcsolatokat sok szinten dolgozza ki. A vizsgálati adatok komplex elemzésén alapuló hosszútávú fejlesztési feladatok mellett óraszervezési javaslatokat is találunk. E dolgozat keretei között csak néhány, a matematika órán alkalmazható gondolatot emelek ki.

A Kapcsolat motívumcsoport (A dolgozat e részében az eredeti skála szerinti jelöléseket alkalmazom, az empirikus részben megfordítom az irányt, hogy az illeszkedjen az osztályzatokhoz.)

K1 besorolást kapnak azok a tanulók, akik a személyes kapcsolat intimitását veszik észre, fogalmazzák meg a rajzok láttán, jellemzője a „melegség". Itt e motívum megőrzése a pedagógiai cél és ennek kiaknázása az eredményes tanulás érdekében. Várhatóan a tanulók kiscsoportban, maximum négyfős kiscsoportban tudnak legjobban dolgozni, és a csoporttagok választását rájuk lehet bízni.

K2 besorolás az „egyenrangú" kapcsolat. E tanulók számára már nem olyan természetes a kapcsolatok kialakítása, ők ebbe sok energiát fektetnek, valószínűleg többet is, mint a tanulásba. Itt a tanulók számára a projektmunka az ideális és olyan részfeladatok az érintett tanulóknak, ahol nekik személyesen kell felelősséget vállalniuk a munka sikereéért a többi tanuló érdekében.

A **K3** a megküzdő tanuló, aki „felveszi a kesztyűt". Számára fontos, hogy szabadon választhassa a szociális formát. Ő a körülményektől függően egyaránt jól tud önállóan és csoportban is dolgozni.

A **K4** csoportban is küzd a tanuló a közvetlen társas kapcsolatokért, de félénk, sokszor sikertelenek a próbálkozásai. Ő nem tud csoportot választani, számára jó megoldás az osztálymunka, illetve a pedagógus által jól összeállított csoport, amelyben barátai, lehetséges barátai vannak. Itt a tanulás segítőjévé válhat a társaskapcsolati kompetenciák fejlődésének, segítheti a tanulót az egyedüllét elleni küzdelemben.

A **K5** tanuló már egyedül van, és önállóan nem is képes változtatni ezen a helyzeten, nem küzd a számára is fontos kapcsolatokért. A tanár feladata, hogy beillessze, integrálja vagy reintegrálja a tanulót a csoportba. Kezdetben úgy, hogy maga kezdeményez kapcsolatot a tanulóval, majd később ebbe a páros kapcsolatba más tanulókat is bevon. A tanár katalizátor szerepet tölt be. A gyerekek elszigetelődése származhat iskolai konfliktusokból is és otthoni problémákból is, mindkét esetben gyógyító hatású lehet a pedagógusok segítő beavatkozása.

A Teljesítmény motívumcsoport

T1: Ő az, aki „tüzet fog”, és hagyhatjuk őt dolgozni. Szociális és emocionális segítségre lehet szüksége, arra, hogy a pedagógus behívja a közös munkába. Önmagától a páros munkát – egy baráttal közösen – vagy az egyéni munkát választja.

T2: a külső normák szabályozzák, mások által is elismert teljesítményre törekszik. Számára hasznos, ha a szabadon választható feladatok mellett a megoldásukért kapható pontszámot is feltüntetjük, vagyis fontos a formális kritériumok explicit kifejtése. Az így kapott pozitív teljesítmény-visszajelzés az elégedettség forrása.

T3: számára a teljesítés kihívás, nagy feladat. Kudarcot is el tud viselni, de nagy szüksége van a külső visszajelzésre, szükségesek az apró biztosítékok a sikerre. (Ide tartoznak általában a hátrányos helyzetű gyerekek, a későbbi iskolaévek során. Az iskolakezdéskor még az otthoni magabiztossággal kezelik a projektív teszt helyzeteit, az iskolai kudarcok később generalizálódnak.)

T4: ők a kudarckerülő gyerekek. Meg kell tanulniuk a kudarcokat is kezelni. Számukra tervezni kell a sikerélményt, a háttérből támogatni őket. Fontos megvárni, amíg ők kérik a segítséget, mert ezzel is erősítjük azt az érzést, hogy képesek uralni a helyzetet a kisebb-nagyobb kudarcok ellenére is.

T5: ők a bizonytalan helyzetbe sodródott kudarckerülők, már nem bíznak a sikerben. Rajtuk vonatkoztatási személy tud csak segíteni, olyan domináns és szeretett felnőtt, akitől elfogadják a dicséretet. Számukra fontos, hogy a segítség szinte láthatatlan legyen, természetes módon következzen egy-egy adott szituációból. Elképzelhető, hogy más gyerekkel is együtt tudnak működni, de ez sokszor a véletleneken múlik.

A skálák tetején lévő kategóriákban a tanulók várhatóan az iskolai tanulás természetes menetében megkapják a fejlődésükhöz szükséges hatásokat. A másik végén a személyiségfejlesztés és a matematikai kompetenciák fejlesztése bonyolult módon összefonódik. A különböző problémákkal küszködő tanulókat először segíteni kell a rossz helyzetből való kilábalásban, ehhez a pedagógusok és a többi gyerekek adhatnak az elfogadás által segítséget. Az apró, néha mesterségesen megtervezett tanulási sikerek a pozitív életérzéseket erősíthetik, és az így megerősödött tanulóktól várható el a későbbi eredményesebb, hatékonyabb tanulás.

Szociális struktúra „Hatalom” motívumcsoport

H1: számára fontos a teljesítmény, csoportban a vezetésre törekszik, ő a segítőkész, támogató vezető. Gyakori pedagógusi tévedés, amikor ezeket a tanulókat „kisinasként” vonják be a közös munkába, és ezáltal a teljesítmény helyett csak a segítő attitűdöt erősítik. Célszerűbb, ha eszközt adunk a kezükbe, megtanítjuk számukra azokat az eljárásokat, amivel másoknak segíthetnek. Ők várhatóan a mások érdekében nagyobb intenzitással fognak tanulni, mintha csak saját magukért tennék, pl. a szöveges feladatok megoldása egyes lépéseinek tudatosítása.

H2: Szeret szerepelni, de ezt nem biztos, hogy társai elfogadják. A tanár segíthet, hogy szereplési vágya mögött biztos alapok, pl. tantárgyi teljesítmény is legyen.

H3: az önszerveződő típus. Sem vezetésre nem törekszik, sem vezetőt nem keres a maga számára. Fontos, hogy a feladat legyen kedvére való. Könyvek és egyéb források „kézbe adásával" segíthetjük őt a jobb teljesítményhez és egyben szociális kompetenciájának fejlesztéséhez, az elfogadóbb, türelmesebb társas kapcsolatok kialakításához.

H4: Bátorítani kell, hozzásegíteni a saját ötletek megvalósításához. Számára fontos, hogy szabadon választhassa meg a feladatot és a megoldási módszert is. A sokféle megoldás bemutatása és elfogadása nagyon fontos. Itt tágabb körre gondolunk, mint a matematikai problémák többféle megoldása, beleértendő az is, hogy kitől és hogyan kér segítséget. Az elfogadható kezdeményezések támogatásával támogathatjuk a problémamegoldáshoz szükséges bátorság kialakulását.

H5: nem találja helyét, nem látja a megoldandó, megoldható feladatokat. Az ilyen tanulók érdekében különösen nagy jelentősége van a projektmunkának, ahol ők olyan részfeladatokat kaphatnak, amelyek eredményei kihagyhatatlanok, megkerülhetetlenek az egész program sikere érdekében.

Rövid összegzés

Az OMT teszttel végzett eddigi vizsgálatok eredményei arra utalnak, hogy a hátrányos helyzetből fakadó problémákkal küzdő gyerekek motivációs rendszere ép.

Általában igaz, hogy magas a teljesítménymotivációjuk, jól érzik magukat az érzelmileg telített kapcsolatokban, a társaskapcsolati hierarchiát segítő jellegű aszimmetriaként képesek megélni.

Feltételezhetjük, hogy a jelenleginél több és nem kevesebb intellektuális élményt várnak az iskolában.

Számukra nem a tananyagcsökkentés jelenti az elsődleges megoldást. Kreativitást igénylő, érdekes problémákat kell felvetnünk, és a csak monotóniatűrést igénylő, sokszor meg sem értett feladatok kiküszöbölésére kell törekednünk.

A csökkentett követelmények hosszú távú hátrányai nyilvánvalóak a későbbi pályaválasztási esélyek szempontjából, de rövid távon sem jelentenek megoldást, hiszen nagyon sok oka lehet az alacsony teljesítménynek. Ezek közül csak egy részt alkotnak az értelmi működés zavarai, amelyek gyógypedagógiai módszerekkel csökkenthetők, lassúbb haladási ütemmel, sok gyakorlással, az idegi kapcsolatok állandó erősítésével, a követelmények minimalizálásával. Más esetekben, éppen a szociális okok miatti hátrányos helyzet esetében, a kihívását jelentő nehéz de megoldható feladatok eredményezhetnek sikeres tanulást.

Kuhl pszichológiai kutatásai a matematikadidaktika számára igen fontos következménnyel járnak. A tanulási alkalmasság két alapfeltétele, a motivációk és az írásbeli kifejezés képessége egy teszttel vizsgálható, amely a pedagógiai gyakorlat számára leegyszerűsített változatban könnyen és hatékonyan alkalmazható.

A tanulókra jellemző motivációs szerkezetnek – a didaktikai alkalmazáshoz szükséges mértékű – ismerete támpontokat ad az osztályok munkájának megtervezéséhez és a differenciált egyéni fejlesztéshez is.

A matematikatörténet szerepe a reprezentációs módok szerint szervezett matematikatanításban

A matematikatörténetnek igen sok funkciója van a hátrányos helyzet következményeinek leküzdésében, ezért sem az elméleti elemzésből, sem a fejlesztő programokból nem hagyható ki.

Bár sok tanár szerint a matematikatanulás legeredményesebb módja, ha a tanulók a legszűkebb értelemben tekintett matematikai ismeretekre koncentrálnak, és így nem kapnak helyet az órákon a szemléletalakító és érdekes történeti mozzanatok, az utóbbi évek kutatásai alapján azonban célszerű a tanulást és a matematikát is tágabb nézőpontból szemlélni. Érdemes figyelmet fordítani arra, hogy az adott téma és módszer milyen hatással van a matematikáról alkotott kép formálására, elősegíti-e, hogy ez a kép bővíthető, korrigálható legyen, és a mindennapi matematikai tevékenységben eligazítsa a diákot. A széles látókörű tervezés alapját a fundamentális elvek megtalálása és alkalmazása jelenti.

Schweiger szerint (2006 [203]) a fundamentális elvek keresése maga is fontos folyamat, hiszen feltételezi a matematikáról és matematikából szerzett ismeretek felidézését, összehasonlítását és rendszerezését. A fundamentális elvek egyike a történeti nézőpont. A matematikatörténet didaktikailag átgondolt iskolai alkalmazását illetően figyelemre méltó összefoglaló mű a Fauvel és Maanen (2000 [72]) által szerkesztett könyv, amely az ICME kutatócsoport munkáját foglalja össze.

A matematikatörténeti szemléletmód a hátrányos helyzetű tanulók tanításában különösen fontos. Az iskolai oktatás céljainak és feladatainak figyelembevételével beépített matematikatörténeti vonatkozások is hidat jelenthetnek a mindennapi élet problémái és a matematika szimbolikus világa között.

Bár a régebbi nemzetközi jelentőségű magyar matematikatörténeti kutatások (Szabó Árpád, 1997 [212]), (Szénássy Barna, 1970 [217]) középpontjában nem az iskolai alkalmazhatóság állt, a mai kutatások közül kiemelkednek azok, amelyek a matematikatanítás történetének bemutatásán keresztül (Kántor Sándorné, 2009 [116]), illetve a matematikai fogalmak történeti és logikai megalapozása révén (Deák Ervin, 2007 [62]) formálják a pedagógusok szemléletét.

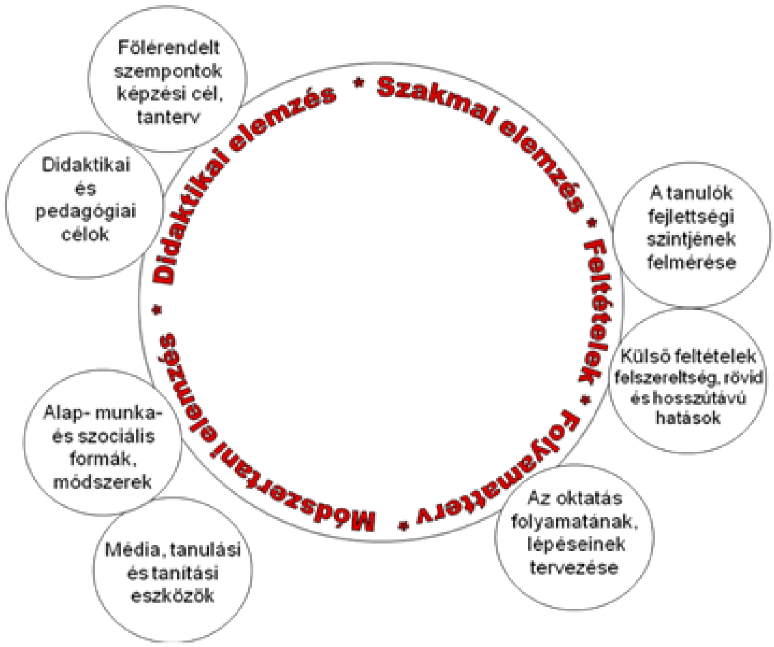
A történetiség tehát elsősorban szemléletmódot jelent és nem megtanulandó ismereteket. A feladat nem a történeti tények tanítása, nem a történeti összefüggések felvázolása. A történeti szemléletmód megnyilvánulhat a tananyag felépítésében, mivel a matematikatörténeti adatok rámutathatnak arra, hogy a látszólag egyszerű logikai lépések milyen hosszú idő alatt váltak ismertté és elfogadottá. Továbbá a matematikatörténet segítséget jelenthet a manipulációs feladatok összeállításában is: az időben távoli korok matematikai eszközei és eljárásai a matematikai gondolkodás és tevékenység valóságközeli formáira mutatnak ma is követhető, ugyanakkor történeti patinával bevont példákat. A matematika egyszerre filozofikus, történeti és gyakorlatias szemléletmódjának példája Philip Davis és Reuben Hersh könyve (1984 [58]).

A tanítási folyamat tervezését befolyásoló néhány sajátos tényező az összevont tanulócsoportos iskolákban

A didaktikai, módszertani tervezés A tanulási folyamat tervezését a számos didaktikai irodalom körmodellben ábrázolja, ami kiemeli a tervezésben figyelembe veendő elemek egymásra épülését és ciklikusságát.

Dolgozatomban ezeket az általános szempontokat részletesen a kisiskolák szempontjából tekintem át. Ebben a részben a modell szemléletét követve azt mutatom be, hogy a külső tényezők hogyan hatnak a didaktikai folyamatokra.

Az összevont tanulócsoportos oktatás az általános iskolás magyar diákoknak ma már csak közel 1 %-át érinti, ezért kevéssé ismert ez az oktatásszervezési forma. A feltételek bemutatása során a kisiskolák sajátosságaira részletesebben is kitérek. A feltételek és a lehetőségek elemzésére épül rá az oktatási folyamat tervezése, amelynek megvalósult elemei megváltoztatják a kiinduló helyzetet, így a következő szakasz tervei már ezeken a megváltozott feltételeken



1.52. ábra. A tervezés körmodellje

alapulnak.

Az összevont tanulócsoportos iskolák jellemzői

Az összevont tanulócsoportos oktatás ma elsősorban a világ szegény országaiban jellemző szervezési forma, de gyakori még pl. az ipari államok mezőgazdasági vidékein. Előfordul azonban a városokban is, részben a hátrányos helyzetű körzetekben, részben a magas társadalmi tekintélyű alternatív iskolákban.

Az összevont tanulócsoportos oktatás azt jelenti, hogy ugyanabban a tanteremben, egyidőben, egy tanár irányításával egyszerre több évfolyam tanulói tanulnak. Ez az oktatási forma az iskolarendszerű oktatás kialakulásakor általános volt, nagyon sokáig fennmaradt, mint normál oktatási forma. Az osztályrendszerű oktatást először Comenius valósította meg. Angliában az 1800-as években szervezték meg az azonos életkorú diákok számára az évfolyamrendszerű oktatást, elsősorban azért, mert így a növekvő létszámú diákságot kisebb költséggel lehet tanítani.

Comenius osztályrendszere nem érintette a falusi iskolákat, azokban sokáig még a Szent István által kialakított rend élt tovább, a falusi gyerekek társadalomba illeszkedéséhez szükséges minimális ismeretek nyújtása volt a feladat, és ezt évfolyamokra bontás nélkül valósították meg.

Magyarországon a vegyes életkorú csoportokban történő tanulás még a XX. században is tipikus szervezési forma volt. Az ötvenes években 50 % fölött volt az összevont tanulócsoportban tanuló diákok aránya. Ez az arány napjainkig folyamatosan, bár eltérő intenzitással, csökken.

A felekezeti iskolák 1945 utáni megszüntetése következtében a falvakban nagyobb létszámú iskolákat szerveztek a kis létszámú, más-más felekezethez tartozó iskolákból.

A hetvenes évektől a körzetesítés során nemcsak azonos településeken, egymás közelében fekvő iskolákat vonták össze, hanem különböző falvak iskoláit is. Sok faluban megszűnt az iskola, a gyerekek bejáróvá váltak. A rendszerváltás után néhány kisfalu visszaszerezte iskoláját, egy-egy újonnan önállóvá vált település is iskolát alapított – ezek többsége összevont tanulócsoportos iskola, pl. Pörbölyön, Pogányban.

A szigorúbb gazdálkodás, az önkormányzati felelősség következtében ma a kisiskolák nem külső utasításra, hanem a gazdasági körülmények hatására szűntek és szűnnek meg. Kompromisszumos megoldásnak látszik a tagiskolákká való átalakulás, ami azt jelenti, hogy megszűnik az iskola szervezeti önállósága, de az oktatás megmarad a kistelepüléseken annak ellenére, hogy ott a tanulólétszám igen alacsony.

Általában 20-50 gyerek tanul ezeknek az általános iskoláknak az alsó tagozatán. Az összevonás vagy az 1. és a 2. osztály és a 3. és a 4. osztályt érinti, vagy pedig az 1.-t a 3.-kal, a 2.-at a 4.-kel vonják össze. Nagyon ritkán, szükséghelyzetben előfordul, hogy az első négy osztályból hármat vonnak össze. Az összevont tanulócsoportos oktatás nemcsak oktatásszervezési formát, hanem sajátos társadalmi hátteret is jelent. A kistelepüléseken a munkalehetőség nagyon kevés, így a felnőttek többsége a környező nagyobb településre jár dolgozni, és gyakran magával viszi a 6-10 éves gyerekét is. A kisiskolákban a munkanélküliséggel, a tartós betegséggel és hasonló problémákkal küzdő családok gyermekei vannak többségben – bár kivételek is szép számmal előfordulnak.

A kisiskolák társadalmi szerepe

Magyarországon az összevont tanulócsoportos iskolákban tanuló alsós tanulók aránya megyénként változik, az országos átlag 2001-ben $1,1$ % volt.

A nemzetközi tendenciákról Mihály Ildikó írt rövid összefoglalást (2000 [154]), amelyben elsősorban Coombs elemzésére hivatkozva (Education for Rural Development) amellett érvel, hogy a kisiskolák és a városi nagyiskolák eredményessége közötti különbséget meg kell szüntetni, de nem a kisiskolák megszüntetésével, hanem azok fejlesztésével.

A kisiskolák felszereltsége, sokszor még az épületeik állapota is rosszabb, mint az országos átlag, lehetőségeik szegényesebbek, bár az egy tanulóra eső fenntartási költségük még így is magasabb, mint a nagyobb létszámú iskolákban. Nem feledkezhetünk meg azonban arról, hogy a kistelepülések diákjainak is joguk van családi környezetben élni, és 6-10 éves korban indokolatlan hosszú, esetenként egy óránál is hosszabb napi utazásra kényszeríteni őket. A kisiskoláknak mindezekkel együtt jelentős településmegtartó szerepük is van. Éppen a település életével való szoros összefonódás miatt helytelen az az ítélet, hogy a kisiskolák szükségképpen rosszul felszereltek. Az iskolák helyzete a falvak iskolával kapcsolatos attitűdjeitől és az adott település gazdasági erejétől egyaránt függ, valamint nagy a szerepük a történeti folyamatoknak is. Iskolalátogatásaink során, amit fotókkal is dokumentáltunk, néhány különlegesen jól felszerelt, de sajnálatos módon lassan elnéptelenedő iskolával is találkoztunk. Szinte minden kisiskolára jellemző, hogy a pedagógusok igyekeznek a lehetőségek szerinti legjobb feltételeket biztosítani a tanuláshoz.

Oktatási módszerek az összevont tanulócsoportos iskolákban

Az önálló és a közös órák rendszere

Speciális módszerek akkor alakultak ki, amikor a kisiskolák aránya lényegesen lecsökkent, de számuk még jelentős volt, ez az 1960-as évekre tehető. Ma kevés helyen folyik szervezett felkészítés az összevont tanuló-csoportos osztályokban folyó oktatásra, ezek egyike a bajai tanítóképző (Rendes-Fátrai, é. n. [195]). Az összevont osztályokban a tanítás a legújabb hagyományok szerint követi az osztályrendszerű oktatási formában kialakult megoldásokat: a tanulók osztályrendszerben tanulnak. Ez úgy oldható meg, hogy a tanítási óra egy részében az osztálytanító az egyik évfolyammal dolgozik, eközben a másik évfolyam önállóan dolgozik, elsősorban a munkafüzet feladatait oldja meg, majd később cserélődnek a feladatok. Az eltelt időben felmerült a változatosabb szervezési formák alkalmazásának igénye is, ezt szolgálja a később bemutatásra kerülő ViVe modell.

A bajai speciálkollégium igényesen összeállított tananyaga nagy figyelmet szentel a felzárkóztatásra és a tehetséggondozásra is, de nem foglalkozik a hátrányos helyzetű tehetséges tanulók problémáival, akiknek – bár tanulási nehézségekkel is küzdenek – optimális fejlődésükhöz a kötelezőt meghaladó tananyagra volna szükségük, vagyis az elkülönülten alkalmazott felzárkóztatás és tehetséggondozás helyett ezek integrációjára.

Vertikális-virtuális csoportok

Paradox módon a kisiskolák egyik legnagyobb oktatási problémája a csoportmunka alkalmazásának korlátozott lehetősége. Jelen kutatás empirikus szakaszát egy nemzetközi kisiskolás program keretében végeztem, az én felelősségem volt a matematikatanítási kísérletek szervezése, elemzése. Anita Pincas angol pedagógiai kutatóval közösen kidolgoztuk a ViVe modellt a kisiskolákban alkalmazható szervezési formák változatosabbá tétele érdekében. Azt tapasztaltuk, hogy a kis tanulói létszámnak – minden előnye ellenére – sok hátránya is van. A modellt, újszerűsége miatt, röviden ismertetem.

Hagyományosan a kisiskolákban a tanulók osztályonként külön padsorban ültek, pl. az egyikben az öt harmadikos, a másikban a négy negyedikes tanuló. A gyerekek az óra egy részében önálló munkát végeztek, a másik részében közvetlenül foglalkozott velük tanítójuk, és óránként akár több alkalommal is történt váltás. Ez a frontális munkának a kisiskolák számára kialakított változata. Kétségtelen előnye, hogy a tanulók közvetlenül is tanulhatnak tanítójuktól, valamint nagy tapasztalatra tesznek szert az önálló tanulásban, amit a felső tagozatos tanáraik értékelni is szoktak (a tanítók szóbeli közlése), viszont kevés lehetőség van a tanulók közötti együttműködésre. A csoportmunka ötletét a tanítók elvetették, mondván az osztály kis létszámú, sem lehetőség, sem szükség nincs a további bontásra.

A ViVe modell lényege a gyerekek közötti együttműködésnek, a tanulási és munkakapcsolat lehetőségének minél sokoldalúbb biztosítása. Az osztályonkénti négy-öt tanuló, pusztán azért, mert létszámuk annyi, mint általában egy csoporté lenni szokott, nem csoport, hiszen a csoportalakítás is a csoportmunka szerves része. Ilyen kis létszám esetében nincs lehetőség a pedagógiai céloknak és a didaktikai feladatoknak megfelelő csoportalakításra. Ezért gondoljuk azt, hogy szükség van az osztályon belüli vegyes életkorú csoportokra (vertikálisan szervezett csoport), a személyes munkakapcsolatok sokféleségének megtapasztalására, és a tanulóknak arra is igényük van, hogy hasonló életkorú, hasonló osztályba járó tanulókkal is kapcsolatba kerüljenek, amire ma már az internet a nagy földrajzi távolságok ellenére is lehetőséget nyújt (virtuális csoportok szervezése). A virtuális csoportok kialakítására már alsó tagozaton is nyílt lehetőség, de előnyei elsősorban az idősebb tanulók esetében mutatkoznak meg. A feladatoknak megfelelően alakuló csoportok megváltoztatják a tanulók társas kapcsolatait és e változások pozitív vonásait hangsúlyozva is fokozhatják a tanulók munkakedvét a pedagógusok.

A történeti szemléletre épülő tervezési szempontok

A tervezésnél, a tanulói hibák és félreértések, tanulási nehézségek megértésében nagy segítséget jelenthet, ha a tanárok tudnak a fejlődési folyamat hosszadalmasságáról, problémáiról, például:

- a negatív számok nagyon késői, a komplex számokkal egyidejű megjelenése a matematikában,
- a végtelen halmazok definiálásának nehézsége: el kellett vetni azt az annyira nyilvánvalónak tekintett és Euklidesznél axiómaként is megfogalmazott állítást, hogy a rész kisebb, mint az egész, mert ez a végtelen számosságok esetében már nem igaz,
- a folytonosság szemléletes egyszerűsége, ugyanakkor definiálásának bonyolultsága közötti feszültség.

Továbbá a matematikatörténeti anekdoták nemcsak pihentető epizódjai lehetnek a tanulásnak, hanem újszerű, meglepő kapcsolatokra mutathatnak rá.

A matematikatörténet nemcsak arra a kérdésre segít megtalálni a választ, hogy mi a matematika, hogyan és miért alakultak ki a matematikának az iskolai oktatásban is fontos fogalmai, hanem lehetőséget kínál arra is, hogy a tanulók megismerjék egy másik nép kultúráját. Ebből a szempontból a számírások különböző változatai és az alapműveleteknek a különböző kultúrákban kialakult, néha évezredekig is használt algoritmusai a legérdekesebbek.

A matematikatörténet, miközben feltárja a matematikai fogalmak kialakulásának bonyolult útját, egyben azt is megmutatja, hogy ugyanazon fogalmak elsajátításának többféle hatékony útja lehetséges. A matematikatörténet az érdekességek motiváló szerepén és a matematikatörténeti tények, folyamatok műveltséggyarapító funkcióján túl a tanítás egyetlen jó formájának keresése helyett az alternatív megoldások megismerésére, az azok közötti választásra késztet. A matematikatörténet oktatásban betölthető szerepéről rövid összefoglaló található az OTKA kutatási beszámolómban.

A tehetséggondozás sajátos kérdései

Az elemzett fejlesztő programok tapasztalatainak alkalmazásához szükséges volt áttekinteni a kisiskolások matematikatanulására vonatkozó közleményeket is, kiemelem Szendrei Julianna és C. Neményi Eszter tanulmányait [51], [216]. A tehetséggondozás intézményesített formáit, az életkori sajátosságok miatt a felsőtagozatos és az idősebb diákok számára szervezték meg, (Balogh, 2004 [26]). Azonban ez nem csökkenti, hanem növeli az alsó tagozatos matematikaoktatással foglalkozók felelősségét, mert a tanítási órák keretében szükséges a tehetségígéretek felismerése és olyan fejlesztésük, amely lehetővé teszi későbbi bekapcsolódásukat az tehetséggondozási folyamatba. A tehetséggondozás egyre intenzívebben kutatott megoldásainak el kellene jutniuk a kisiskolákba is, a pedagógusok ez irányú továbbképzésére is nagy szükség volna. A tehetséggondozás modern elveit a kisiskolások matematikatanulására vonatkozó ismeretekkel vetem össze.

A tehetség azonosítása és a tehetséggondozás

A kisiskolákban mind a matematikai tehetség azonosítása, mind a tehetséggondozás komoly akadályokba ütközik. Vannak kitűnően működő szakkörök és szakköri példatárak (pl. Brenyo M-né és mts-i, 1984 [39], Brenyo, 2004 [40]), de ezek eredményei nehezen jutnak el a hátrányos helyzetű iskolákba és a hátrányos helyzetű tanulókhoz.

Szükség van arra, hogy a pedagógusok olyan módszereket alkalmazzanak, amelyek azt feltételezik, hogy minden tanuló tehetséges matematikából is, így remény volna arra, hogy a szunnyadó tehetség valóban felszínre kerülhessen.

Felfedeztető tanítás

Bruner szerint minden tanulás felfedezés, minden tanulónak fel kell fedeznie a maga számára a világot. A felfedeztető tanítás ezt segíti: a szaktanárnak, így a matematikatanárnak is olyan tanulási körülményeket kell kialakítania, amelyek támogatják az ismeretek megszerzésének folyamatát a tárgyi tevékenységtől, a tárgyakkal végzett problémamegoldástól kezdve az érzéki képek kialakításán keresztül a fogalmi szintig, ami – az ismeretek sokrétűsége miatt igen változatos lehet. Ilyenek a fogalmak matematikai szempontok szerinti kategorizálása, a fogalmak matematikai definíciója, összefüggések megsejtése és szavakkal vagy formulákkal való megfogalmazása, a sejtések ellenőrzése, különböző eljárások, algoritmusok folyamatábrán vagy egyéb módon történő rögzítése, megismert problémamegoldási eljárások alkalmazása valamilyen szempontból lényegesen új feladatban.

A felfedezés ebben az értelmezésben a tanulás következetesen megvalósított folyamatát jelenti és nem a matematikai alkotómunkára, az új matematikai összefüggések megtalálására való előkészítést (természetesen azt sem zárva ki, de nem célul kitűzve).

A felfedeztető tanítás jól előkészített tananyagot igényel. Bruner matematikai kísérleteiben Dienes Zoltán vezetésével dolgozták ki a különleges tananyagot. Szükség van az állandó tanári figyelemre.

A tanulónak, miközben önállóan dolgozik a kapott probléma megoldásán, biztonságban kell éreznie magát, tudnia kell, hogy valóban a cél, a probléma megoldása felé halad és próbálkozásai jól szolgálják ezt a célt.

A tanárnak ezért állandóan mérlegelnie kell, beavatkozzon-e a folyamatba és hogyan változtassa meg a tanulási körülményeket, hogy azok hatékony tanulást tegyenek lehetővé (Bruner, 1968, [43] 104.). Ez a tanári tevékenység nem a kiemelkedő matematikai tehetségek felismerése érdekében történik (ismét kijelenthetjük, hogy azt sem kizárva, de nem célul kitűzve), hanem az átlagosan jó képességű gyerekeket segíti. Erre a segítségre, ha az iskolai tananyagot messze meghaladó szintű ismeretekről van szó, a legtehetségesebb, legjobb otthoni körülmények közül érkező tanulóknak is szükségük van.

A szokásos iskolai tananyag megtanulása során különleges tanári figyelemre és a tanulási folyamat következetes végigvitelére elsősorban azoknak van szükségük, akik hátrányos körülmények közül érkeznek. Ők azok, akik a kisgyerekkori fejlődésük során szert tesznek az elemi intellektuális technikákra: megtanulják a saját környezetükben szükséges nyelvet, vagyis jól beszélik közösségük társadalmi dialektusát. Kialakulnak azok az absztrakciós képességeik, amelyek révén a szokásos iskolai feltételek között is el tudják sajátítani az írás-olvasást, kíváncsiak és erős bennük a kompetencia motiváció. Ahhoz, hogy mindezeket a képességeiket az iskolai matematikatanulás formális szintjén is alkalmazni tudják, sok segítségre szorulnak, pedagógiai támogatást kell kapniuk a hidak kiépítésében. Ettől a segítségtől várható, hogy a későbbiekben a többi tanulóhoz hasonlóan, a tanulási folyamat jelentős hányadában, számukra is elegendő lesz, ha tárgyi tapasztalataikra szavakkal hivatkoznak, vagy képek-rajzok segítségével hívják elő azokat. Más esetekben pedig, a tanulás bármely szintjén, ki kell használni a tárgyi tevékenységekben rejlő nagy lehetőségeket.

Matematika a hátrányos helyzetű tanulók számára, az utca matematikája

A (dolgozatban) korábban bemutatott statisztikai adatok szerint a matematika, a kevés de nagyon fontos kivételtől eltekintve, nem olyan tantárgy, amelyben a hátrányos helyzetű gyerekek sikereket érhetnek el. Éppen ezért igen fontosak azok az eredmények, amelyek arra vonatkoznak, hogyan tehető a matematikatanulás sikeressé.

T. Nunes (1993 [161]) összehasonlításokat végzett az „utca matematikája" és az iskolai matematika között. Megállapította, hogy az utcákon „kereskedő" gyerekek bonyolult számításokat képesek pontosan, gyorsan és fejben elvégezni, míg hasonló nehézségűeket iskolai körülmények között nem.

1.5.6. Munkácsy Katalin: A matematikadidaktika néhány eszköze a hátrányos társadalmi helyzet kompenzálására

Részlet a Tehetséggondozás hátrányos helyzetű tanulók körében című PhD dolgozatból. (lásd Munkácsy 2012 [148])

1. A vizsgálat hipotézisei

Főhipotézis

A tehetség társadalmi háttértől és etnikai hovatartozástól független, egyenletes eloszlásából kiindulva azt feltételezzük, hogy a hátrányos helyzetű tanulóknál a tehetséggondozás elérhetőségének egyenlőtlenségéből fakadó tudásbeli elmaradásról és nem képességhiányról van szó. A hátrányos társadalmi helyzetű tanulók többsége kommunikációs zavarral küzd, ez a közvetlen akadálya az eredményes iskolai szereplésüknek.

A tantárgypedagógiai elméleti és gyakorlati eredmények alkalmazásával lehetőség van olyan tananyagelrendezésre és feldolgozásra, amely lehetővé teszi a differenciált fejlesztést.

Megfelelő továbbképzési, támogatási formák segítségével a pedagógusok elsajátíthatják a kis tudású és a tanulás élményét még nem ismerő, de tehetséges tanulók tanítására alkalmas fogásokat.

A két társadalmi közeg közötti különbségből – vagyis a tanítók középosztálybeli és az összevont tanulócsoportos iskolák hátrányos társadalmi helyzetű tanulói közötti különbségből – fakadó kommunikációs zavar felismerésére és kezelésére a tanítók felkészítendők és felkészíthetők.

Ezen hipotézisek vizsgálatát az elméleti kutatás során kezdtem meg, majd empirikusan vizsgálható részhipotézisekre bontottam.

A főhipotézis alapján fogalmaztam meg azt a három hipotéziscsoportot, amelyeket a kutatás során empirikusan is vizsgáltam.

1. hipotézis

1.a) A gyerekek motivációjának szerkezete (kötődés, teljesítmény, a társas kapcsolatokban elfoglalt szerephez való viszony) a hátrányos helyzet ellenére is jó, nem akadályozza az eredményes munkát.

1.b) A kommunikáció és az írás-olvasás területén meglévő problémák ellenére az őket érdeklő témákban kifejezőkészségük árnyalt.

2. hipotézis

2.a) Az új pedagógiai-didaktikai módszerek és eszközök Bruner reprezentációs elmélete alapján adaptálhatók a vizsgált körülményekre (6-10 éves életkor, hátrányos helyzet).

2.b) Az általunk kidolgozott és alkalmazott specifikus módszertani eljárások nyomán megnő a gyerekek tantárgy-specifikus (matematikatanulási) motivációja.

3. hipotézis

3.a) A tanulás pozitív élményét nyújthatjuk a tanulóknak akkor is, ha tudásbeli és műveltségi hiányosságok akadályozzák őket az életkoruknak megfelelően elvárt, tantervekben meghatározott, a tankönyvekben közvetített tanulási folyamat követésében.

3.b) Az eltérő tapasztalatokból származó súlyos kommunikációs zavarok a kombinált didaktikai módszerekkel rövid távon is eredményesen oldhatók.

3.c) A kombinált módszer a nem azonosított tehetség kibontakozását is elősegíti.

Módszerünk elnevezésére a kombinált jelzőt alkalmazzuk, mivel ez az érzelmileg semleges kifejezés a kísérleti oktatás több sajátosságára is utal. Részletesebb kifejtése az empirikus vizsgálatok fejezetben olvasható.

A vizsgálat célja az volt, hogy az irodalmi adatokkal részben már alátámasztott hipotéziseimet a hátrányos helyzetű magyar tanulók körében vizsgáljam.

A három részhipotézis vizsgálatára három, viszonylag elkülöníthető részvizsgálatot végeztem. Ezek tapasztalataira és az irodalmi elemzésekre építve válaszolom meg a fő hipotézist.

Az első hipotézist Kuhl (1999 [137]) tesztjének Vásárhelyi Éva segítségével elvégzett adaptálásával vizsgáltam.

A második hipotézis igazolása Bruner és Pólya (1965 [42]) vizsgálataira épül. Híressé vált kísérletük alapján választottam ki a kísérleti szakaszban tanított fogalmakat és az alkalmazott módszereket, saját vizsgálatom feltételeihez alkalmazkodva. A tapasztalatokat 16 iskolából gyűjtöttem össze.

A harmadik hipotézis feltételezését egy esettanulmány-jellegű iskolai vizsgálattal erősítettem meg.

2. A vizsgálat felépítése

A hátrányos helyzetű tehetséges tanulók tanulási problémáinak vizsgálatára kiindulópontként az összevont tanulócsoportos iskolákat választottuk.

A kutatás az ELTE TTK Multimédiapedagógiai Központjának és Matematikatanítási Módszertani Központjának együttműködésében valósult meg. A kutatás vezetője Kárpáti Andrea. Munkácsy Katalin a matematikai részprogramot irányította, és részt vett az iskolák egyéb tevékenységeinek megszervezésében is. A végzett munka kutatási jelentései mellett tanulmányok és előadások is születtek. (Kárpáti 2007 [118]), (Kárpáti, Munkácsy 2008 [119]). A vizsgálat keretét a NEMED (Network of Multigrade Education, Az összevont tanulócsoportos iskolák együttműködési hálózata) program jelentette, ez a kisiskolák helyzetét vizsgáló, görög irányítású európai uniós támogatású program volt, amely később más nemzetközi keretben folytatódott. Az alsó tagozatos vizsgálatot megelőzte egy, a BAZ megyében, a cigány nemzetiségi oktatást folytató iskolákban végzett fejlesztő program, amelyről kötet született, amelyben szerepel a matematikatanítási tanulmányom (Kárpáti 2006 [117]).

Ma az összevont tanulócsoportos iskolákban túlnyomóan hátrányos helyzetű diákok tanulnak. A helyben lakó többi családban a jobb körülmények között élő, munkaviszonnyal rendelkező szülők többsége a közeli, nagyobb településeken dolgozik, és oda viszi magával az iskoláskorú gyerekeket is.

Ezek a kisiskolák elsősorban a nehezen megközelíthető, rossz tömeg-közlekedésű településeken maradtak fenn, a közvetlen találkozásokra kevés lehetőségünk volt, ezért a pedagógiai vizsgálatomban sokféle módszert integráltam, és felhasználtam az informatikai eszközök kínálta, a távmunkában alkalmazott lehetőségeket is. Elutaztunk kisiskolákba, és távoli helyszíneken, valamint a pedagógusokat az egyetemen is vendégül látva tartottam előkészítő foglalkozásokat a számítógépek és elsősorban az internet oktatási alkalmazásának lehetőségéről. Azt tapasztaltuk, hogy a tanítók jelentős részének van lehetősége az internet elérésére, de annak előnyeit az iskolai munkájukban korábban nem alkalmazták. 50 felett van azoknak az iskoláknak a száma, ahol a pedagógusok a programunk keretében használtak először informatikai eszközöket a tanításban.

A kisiskolák pedagógusainak sajátos helyzete miatt a klasszikus megfigyelés és az azt követő kísérlet helyett a pedagógusok és a kutatók team-munkáján alapuló, a résztvevő megfigyelés elemeit felhasználó módszert alkalmaztunk, építve a Malara (2004 [144]) által kidolgozott együttműködési technikákra is.

Az összevont tanulócsoportos iskolák legtöbbjében elhivatott, a gyerekeket szerető pedagógusok dolgoznak, akik azonban kevés segítséget kapnak sajátos feladataik megoldásához. A kisiskolák önállóságának megszűnése, a tagiskolává válás még inkább megnehezíti, hogy a hasonló helyzetű pedagógusok szakmai közösséget alkossanak, mivel elsősorban a saját, nagy létszámú iskolájukhoz kapcsolódnak. A kutatás során megszerveződött Gárdonyi kör fennmaradt, és egy lehetséges szakmai fórumként működik.

A populáció Az összevont tanulócsoportos kisiskolák Magyarországon, igen kevés kivételtől eltekintve, alsó tagozatos iskolák és tagiskolák. A tanulók között (esetenként jelentős mértékű) túlkorosság is előfordul.

Ezeknek az iskoláknak a számáról, az ott tanuló diákok és az ott tanító pedagógusok létszámáról bizonytalan adataink vannak, hasonlóképpen az európai helyzethez. Ciprus kivételével egyetlen országban sincs naprakész statisztika az összevont tanulócsoportos iskolákról, annak ellenére, hogy számos gazdag országban is fontos elemét képezik az oktatási rendszernek (NEMED tapasztalatok).

A vizsgált populációból, az összevont tanulócsoportos iskolákból, félig-véletlen módszerekkel választottunk ki iskolákat az Oktatási Minisztériumtól kapott lista (OM, 2001) alapján Minden olyan magyar iskolának kiküldtünk tájékoztatót, a részvételre felhívó levelet, amelyik a listán szerepelt, mint összevont oktatást végző alsó tagozatos iskola, ez 575 iskola volt, és közel 100 iskolából kaptunk választ. Ezek egy része érdeklődés, illetve udvarias elutasítás volt, más iskolákkal, ezek száma 60 feletti, különböző mélységű kapcsolata alakult ki az ELTE-n működő kutatócsoportnak. Az iskolák önként jelentkeztek, nem kisorsoltuk azokat, de a jelentkezés motivációja annyira változatos volt, hogy mintánk nagy valószínűséggel reprezentálja a magyar alsó tagozatos összevont tanulócsoportos iskolákat. Erre utal, hogy bár semmit nem tettünk ennek érdekében, a területi eloszlás egyenletes, Magyarország minden tájáról kerültek a mintába iskolák.

A részvizsgálatok

Az iskolai vizsgálat három részvizsgálatból állt, amelyben felhasználtam a Roma Informatikai Projekt (Kárpáti, 2006 [117]) tapasztalatait is.

A tanulók motivációs szerkezetének vizsgálata A motivációs rendszert és a tanulók íráskészségének, az íráskészség kommunikációs célú alkalmazhatóságának vizsgálata egységet alkotott. Ennek nemcsak technikai oka volt, vagyis az, hogy a Kuhl tesztet írásos adatgyűjtéssel valósítottuk meg, hanem tartalmilag is szoros összefüggés van a két terület között. A pszichológiai teszt a tanulni akarásról nyújt információkat, a kommunikációs célra alkalmazható írás képessége pedig a tanulási képesség egy fontos mutatója. Bruner szerint az írás elsajátítása a tanulók szimbolikus szintű tanulási képességének jele, mivel az írásbeli kommunikáció során a vevő nincs jelen, maga az írás pedig a beszéd hangzó elemeinek jelekké formálása.

Tájékozódó vizsgálat Magas teljesítménymotivációjuk, és átlagosan jó képességeik ellenére a vizsgált hátrányos helyzetű tanulók gyengén szerepelnek az iskolában, nem aktívak a matematikaórákon és nem fordítanak kellő figyelmet a házi feladatokra. Az ellentmondás feloldásának egyik lehetséges módja, hogy a tanulás elutasítását feltételezzük ezen tanulók esetében. Az alternatív magyarázat, hogy a tanulók olyan nyelven, olyan kulturális köntösben kapják az új ismereteket, amelyet nem értenek, és így bár akarnak, mégsem képesek megfelelni az elvárásoknak. Ez utóbbi feltételezés vizsgálatára a kísérleti órákat úgy terveztük meg, hogy a tanulók számára nehéz ismereteket tárgyi tevékenységbe illesztettük.

Esettanulmány

A sok, 16 iskolára kiterjedő vizsgálati szakaszra építve a munkát négy iskolában folytattuk, ezen belül is egy iskolában a folyamat jelentős részén én is jelen voltam, közre is működtem. Azt vizsgáltam, hogy olyan új fogalom, a poliéder fogalmának tanulása során, amellyel korábban nemcsak a tanulók nem találkoztak, de amely az iskolai oktatás tananyagában sem szerepel, hogyan valósítható meg a tárgyi tevékenység révén végzett problémamegoldás.

A kombinált módszer

- A tanulók pillanatnyi előismereteiből indulunk ki, amelyek szintje jelentősen elmarad attól, amit általánosan elvárnak az adott korosztálytól, de az alacsony kiindulási színvonal ellenére a tantervek optimális követelményeit célozzuk meg, építve a tanulók átlagosan jó, illetve kiemelkedő értelmi képességére.
- A matematikadidaktikában ismert módszereket és eszközöket kombináljuk a tanulók sajátos igényeinek és az iskolák speciális helyzetének megfelelően.
- A tanulási folyamat egy-egy részletének teljes ívét megtervezzük a tárgyi tapasztalatok szintjétől a matematikai szimbólumok révén megvalósított tudásrögzítésig, szemben a többségi tanulóknál alkalmazható módszerekkel, ahol a tanárok támaszkodhatnak a tanulók korábbi, reflektált tapasztalataira, és a csak szóbeli ismeretközvetítés is hatékony lehet.

  Ezek a reflektált tapasztalatok igen egyszerű megfigyelések és az azokat követő rövid beszélgetések lehetnek a többségi családok mindennapi életében, mint pl.: Miért esik le a kő? Mert nehéz. Miért repül el a léggömb? Mert könnyű. Vagy például: Oszd el igazságosan a cukorkát a testvéreddel! Ne feledd, az egyik oszt, a másik választ!

- Az ismeretek bővítését, a készségek fejlesztését olyan tanulási környezetben valósítjuk meg, ami a tanulás pozitív élményét nyújtja azoknak a gyerekeknek is, akiknél az elemi intellektuális technikák (írás, olvasás, számolás) hiányoznak vagy nagyon alacsony színvonalúak.
- Az iskolák nehéz helyzete ellenére, éppen a hátrányok csökkentése érdekében alkalmazzuk a számítógépeket is, a számítógéppel segített oktatás legegyszerűbben megvalósítható változatait.
- A különböző feladatokat a tanulók különböző értelmi képességeihez igazodva különböző szinteken oldhatják meg, pl. a lassabban érő tanulók gyakrabban térnek vissza korábbi feladatokhoz, hosszabb időt töltenek a tárgyi szintű tevékenységekkel, elsősorban gyakorló jellegű feladatokat oldanak meg az eszközökkel és nem (még a tárgyak segítségével sem), vagy csak rövidebb ideig foglalkoznak matematikai problémamegoldással.
- A tanulók kommunikációs képességeit intellektuális élmények nyújtásával és az azokról való beszélgetéssel fejlesztjük, hogy ezen az úton vezessük el őket a tankönyvi és egyéb szövegek megértéséhez és a helyes írásbeli kommunikációhoz.
- Nagy szerepet kapnak a tanulási folyamatban a tárgyak és a számítógépek segítségével közvetített képek, képsorozatok. Az eszközhasználatban felhasználtam a tanszékünkön összegyűlt tapasztalatokat, amelyeket például Berta Tünde foglalt össze (2003 [31]). Későbbiekben szemléletesebb kifejezést szeretnék alkalmazni a kombinált módszer helyett, mint pl. impulzust adó oktatás vagy elpattintó oktatás.

3. A tanítandó fogalmak matematikai és módszertani elemzése

Az iskolai matematikaanyag elemzését két oldalról valósítottam meg. Egyrészt vizsgáltam a pedagógusok által nehéznek ítélt tananyagrészeket, kerestem a problémák matematikai magyarázatát. Másrészt egy matematikai fogalom, a poliéder elemzése révén kerestem a tananyag – didaktikailag a korábbiakban indokolt – gazdagításának lehetőségét.

A tanítandó fogalmak kiválasztása

A kísérleti tananyagot különböző szempontok összehangolásával választottam ki.

- Bebizonyosodott, hogy – a közvélekedéssel ellentétben – a matematikaoktatás eredményességét illetően sem elhanyagolható, sőt kiemelkedő jelentőségű befolyásoló tényező a tanulók társadalmi háttere. Elsősorban a nemzetközi (NAEP, é. n.) és a hazai statisztikák pl. a PISA mérések hazai eredményei (Vári, 2003 [242]) támasztják alá ezt az összefüggést).
- A társadalmi hátrány a matematika órán nyelvi hátrányként is akadályozza a tanulást, ami általában rejtve marad az órát tartó pedagógus számára, ezt több külföldi osztálytermi kutatás igazolja (Gorgorio, Planas 2005 [93]; Tuveng, Wold 2005 [233]).
- A matematikadidaktikai kutatások alapján, Brunernek és követőinek, valamint Magyarországon Varga Tamásnak a kutatásai alapján a tárgyi tevékenység megítélése megváltozott. Nemcsak előkészítője, kiegészítője a matematikai problémamegoldásnak, hanem a

problémamegoldás egyik megjelenési formája is lehet. A gyakorlatban még sok a megválaszolatlan kérdés. Az iskolai matematikatanulás kezdő szintjén az elsajátítandó matematikai ismeretek között dominálnak az aritmetikai ismeretek. A tanulók problémamegoldó képességeinek fejlesztésében indokoltan nagy szerepet kap az alapműveletekre vonatkozó tapasztalatok nyújtása. A kutatási eredmények arra utalnak, hogy az aritmetikai ismeretek biztos elsajátításához is gyorsabban el lehet jutni egyéb, korábban az oktatás alsó fokán még nem tanított matematikai területek megismertetése révén. Ehhez más módszerek szükségesek, mint a magasabb oktatási szinteken, hiszen számításokkal, korrekt indoklásokkal ebben a korban még nem alátámasztható összefüggésekről van szó (Vásárhelyi, 1999 [243]).

- A tananyag gazdagítása, pl. matematikatörténeti elemekkel való kiegészítése és a változatos tanulásszervezési formák az egyébként nehéz körülmények között dolgozó iskolákban, így az összevont tanulócsoportos iskolákban is elősegíti a törzsanyag sikeres elsajátítását A változatos módszerek alkalmazásának szükségességét Czeglédy István is kiemeli (1994, [57]).

- A tehetséggondozás kialakított formáiból sok elemet kell alkalmazni az oktatásban azért, hogy a tehetség azonosítása során a tanulók gyenge előismeretei ne vezethessenek téves eredményekre (Balogh, 2004 [26]).

- A matematikai fogalmak nyelvi szempontból is igen különbözőek. A poliéder például latin eredetű szó, így hangalakja a gyerekben nem vált ki képzeteket. A téglatest fogalmának megértését az nehezíti, hogy a téglatestek körébe tartozik a kocka is, valamint nagyon lapos, nagyon hosszú téglatestek is, nemcsak azok, amelyeknek alakja hasonlít az építkezéseknél használt téglákhoz. Tovább bonyolítja a helyzetet, hogy a tanulók egy részének beletartozik az aktív szókincsébe a tégla szó, mások pedig az iskolai matematikaórán használják először.

A tanított résztémák a következők voltak:

1. *Poharak, mérés, mértékegységek*

   Célunk a mérés és a mértékegység fogalmának kialakítása, elmélyítése volt az űrtartalom alkalmilag választott egységekkel történő mérése révén. Azt a mindennapi tapasztalatot terveztük beépíteni a matematikai ismeretek körébe, hogy ha mértékegységgel mérünk meg egy mennyiséget, akkor abból többre van szükségünk, mintha ugyanezt nagyobb egységgel tennénk.

2. *Kirándulás, térbeli tájékozódás*

   Célunk a három térbeli irány szavainak, le-föl, előre-hátra, jobbra-balra használatával a térbeli tájékozódás tudatossá tétele, a térfogalom kialakítása első lépéseinek megtétele volt. Feladatnak választottuk térbeli alakzatok építését, a párhuzamosság és a merőlegesség, az azonos élhossz reprodukálását különböző modellekkel. Célunk volt továbbá a bal és jobb oldal, a balra és jobbra kanyarodás fogalmának gyakorlása.

3. *Időkerék, egyiptomi számírás és az első lépések a matematikai bizonyítás felé*

   A történelmi keret segítségével elősegítettük két, didaktikailag nagyon különböző jellegű fogalom mélyebb megértését. Az egyik a mi számírásunk, ami annyira egyszerűnek, nyilvánvalónak tűnik, hogy egy másik kultúra alapvetően más megoldásának ismerete segíthet megérteni a benne rejlő tartalmat, a helyiértékes számírás lényegét. A másik fogalom a bizonyítás, amely éppen hogy nagyon távolinak, idegennek látszik. Nehéz észrevenni, hogy mindennapi életünkhöz valójában milyen közel áll, hiszen szinte minden döntésünk feltételezéseken, hipotéziseken alapul.

4. *Utazás, adatkezelés*

   Célunk volt egyszerű példán megismertetni a tanulókkal az alkalmazott matematika néhány sajátosságát, elősegíteni a gyakorlatszerzést az adatok gyűjtésében és elrendezésében, a feladatok megfogalmazásában és megoldásában.

5. *Poliéderek*

   Célunk volt a poliéder szemléletes fogalmának kialakítása, azáltal, hogy bemutattuk a poliéderek fajtáit, tulajdonságait, valamint néhány példát a nem poliéder testekre. Gyakoroltattuk poliéderek összehasonlítását, megkülönböztetését az élek, lapok, csúcsok száma alapján.

A poliéderfogalom a matematikában és a tanulásban

Miért a poliédereket választottam?

A pedagógiai és a matematikadidaktikai vizsgálatok arra utalnak, hogy érdemes a hagyományosan a magasabb életkorban tanított ismeretek jelentős részét már fiatalabb tanulóknak bemutatni és lehetőséget adni számukra, hogy az adott témában önálló felfedezéseket tegyenek, a fogalomcsírák kialakuljanak. Erre elsősorban a hátrányos helyzetű tehetséges tanulóknak van szükségük. Vannak gyerekek, akik már kis korukban képesek arra, hogy elvont, szimbolikus szinten fedezzenek fel összefüggéseket, ez nagyon jó alapot jelent a számolási ismeretek megszerzéséhez, és később kiindulópontja az algebra tanulásának is. A számok ismerete nagyon sajátos gyerekkorban. Akinek kialakult, szilárd, jó számfogalma van, az a mások számára elvont számokat is konkrét létezőnek érzi és érti, az a konkrét gondolkodás szintjén tud a számokkal dolgozni. A tanulók egy részének tehát teljesíthetőek a számokkal összefüggő követelmények, pl.

– Számok bontása tízesek és egyesek összegére

– Kerek tízesek összeadása, kivonása, pótlása számfeladatokkal és egyszerű szöveges feladatokkal. Tagok felcserélhetősége

– Írásbeli összeadás: műveleti tulajdonságok megfigyelése – a tagok és az összeg változásainak összefüggései (Szabóné, 2010 [214]).

A számolás, pontosabban szólva a számokkal való munka azoknak a tanulóknak, akik már iskolába lépéskor képesek matematikaórákon is a szimbolikus gondolkodásra, a további ismeretszerzés szilárd alapjait jelentik mind az ismereteket, mind a problémamegoldás módját illetően. Azoknak a tanulóknak, akik tapasztalataikat még nem képesek elvont formában általánosítani, a számolás mellett nagy szükségük van a matematika más területeivel való ismerkedésre. Ennek különböző lehetőségeit próbáltuk ki vizsgálatunkban.

A reprezentációs formák egymás közötti összefüggéseinek vizsgálatára, valamint hatásuk megfigyelésére a tanulási folyamaton belül a poliéderekkel összefüggő fogalmak tanítása alkalmas példának látszik. Egyrészt magukat a poliédereket reprezentáló tárgyak közül sok ismerős a gyerekeknek, könnyen bemutathatók, jól ábrázolhatók, viszonylag könnyen lehet beszélni sok itt felmerülő egyszerű fogalomról.

Másrészt a poliéderfogalom kapcsán, annak sok különféle lehetséges tárgyi-képi reprezentációja következtében a matematika sok és elmélyült tudást igénylő részterületével kerülhetnek kapcsolatba a tanulók (méretes geometria, szemléletes szélsőérték-problémák a felszín-térfogat összefüggései révén, gráfelmélet, topológia, térbeli orientáció, szimmetriacsoportok) és sokféle matematikai tevékenységet próbálhatnak ki: fogalomalkotás és kategorizálás, definiálás, összefüggések kimondása és azok ellenőrzése, problémamegoldás. A poliéderekkel kapcsolatban sok olyan fogalom felmerül, amelyek hátrányos helyzetben nem tartoznak bele a hétköznapi szókincsbe, pl. él, téglatest, de más környezetben megszokottak.

Az az ellentmondásos helyzet, hogy a poliéder (és alkotórészeinek) fogalma része lett a nyugati közgondolkodásnak és a hétköznapi szókincsnek, ugyanakkor korrekt matematikai definíciója a felsőbb matematika körébe tartozik – ez olyan intellektuális feszültséget jelent, amivel foglalkoznunk kell, amikor a szociális szempontból, a társas kapcsolataiban hátrányos helyzetű, ugyanakkor mentálisan egészséges tanulók fejlődését kívánjuk segíteni. A tapasztalatok és a megfogalmazás nehézsége között húzódó feszültség kezelésére fel kell készülnünk, és a diákokat is fel kell készíteni rá. A magyar családok egy része ugyanis használja a poliéder szót, másik része viszont nem. Az iskolai oktatásban ebben az esetben is ütközik két fontos elv: az egyik, hogy matematikaórán lehetőleg alapfogalmakat és definiált fogalmakat használjunk, a másik, hogy a gyerekek kompetenciáit nyelvi szinten is közelítsük egymáshoz.

A térszemléletre épülő feladatok gyerekkortól felnőttkorig szinte mindenkinek nehezek A perspektivikus szemlélet későn, 10 éves kor felett alakul ki, ezért alsó tagozatban a tankönyvek kétdimenziós ábrái nem adnak elég segítséget a térbeli képességek fejlesztéséhez. A vizuális nevelés szakirodalma alapján szükséges valódi (használt, elhasznált) tárgyakat bevinni az osztálytermekbe. Az ezzel kapcsolatos szervezési feladatokra, a felmerülő nehézségekre, a problémák megoldási lehetőségeire, az egész terület fontosságára külön fel kell hívni a pedagógusok figyelmét.

A poliéder fogalma, a definiálás problémája

A poliéder legtermészetesebbnek tűnő definíciója: síklapokkal határolt test. A test azonban szintén nem definiált fogalom, és nem is alapfogalom.

A poliéder szabatos definíciója Hajós György (1966 [101]) könyvében: „Az olyan térrészt, amelyet véges sok sokszögtartomány határol, s amely teljes egyenest nem tartalmaz, poliédernek (poliédertest) nevezzük. A határoló sokszögtartományok együttesen poliéderfelületet (zárt poliéderfelület, poliéder) alkotnak.” (Hajós 1966 [101] 26. oldal).

Ha megvizsgáljuk a határolás definícióját, azonnal látszik, hogy milyen nehézségekbe ütközünk.

Ennek a definíciónak a magja a „határolt térrész”, vagyis olyan térbeli ponthalmazról van szó, aminek határa van. A határolás fogalmának definiálási folyamata a tér nem a sokszögtartományokhoz tartozó pontjainak két osztályba történő besorolásán alapul, amelynek tulajdonságai:

1. Ha egy szakasz két különböző osztályba tartozó pontot köt össze, akkor van a sokszögtartományokkal közös pontja.
2. A sokszögtartományok minden pontján áthalad egy olyan töröttvonal, amely a sokszögtartományok más pontját nem tartalmazza, és két különböző tartományhoz tartozó pontot köt össze.

Ez a definíció nélkülöz minden természetességet. Ha szemléletesen követni szeretnénk a definíciót, azt kell látnunk, hogy tulajdonképpen arról van szó, hogy a határoló alakzat valóban határol, tehát annak egyik oldalán, lokálisan tekintve, csak az alakzathoz tartozó, másik oldalán az alakzathoz nem tartozó pontok vannak. Másképpen fogalmazva, a poliéder minden pontja vagy határpont vagy belső pont, az analízisben használt értelemben. A definiálás során a folytonosság megragadásának problémájába ütköztünk, amelynek erre az esetre vonatkozó speciális megoldása is igen mély megfontolásokat igényel.

A térrész definiálásában a problémát tulajdonképpen az jelenti, hogyan fogalmazzuk meg azt, hogy a poliédertest pontjai a térnek olyan részhalmazát jelentik, amely az egyenesen intervallumnak felel meg, vagyis a folytonosság fogalmával találkozunk. Az analízis terminológiájával a poliédertestnek azt a tulajdonságát emeljük ki, hogy az olyan ponthalmaz, amelynek van térfogata, létezik nullától eltérő Riemann integrálja.

A poliéder definiálására további lehetőségek is vannak.

Reiman István (1999 [194]) pl. direkt módon nem definiálja a poliéder fogalmát, egy induktív meghatározást ad: hasáb, gúla, szabályos testek a poliéderek tágabb fogalmába tartoznak.

A legújabb irodalomban a poliéderek többdimenziós általánosításai, a politopok szerepelnek, és itt az analízisbeli eszközök alkalmazása természetes módon jelen van.

Konvex poliéderek

A konvex poliéder olyan poliéder, amely tartalmazza bármely két pontjának összekötő szakaszát. Ez a definíció egyszerre jelent globális megkötést, a konvex poliéder olyan alakzat, „amiben nem lehet elbújni”, és lokálisat is, mivel lényegében azt is kimondjuk, hogy a poliéderek esetében a határpontok kivételével minden pont belső pont.

A poliéder fogalom nélkül közvetlenül is definiálható a konvex poliéder.

A konvex poliéder egy térbeli véges ponthalmaz konvex burka (Hajós [101] i. m. 29.), ahol a konvex burok a tartalmazó alakzatok közül a legkisebbet jelenti.

A konvex poliéderekből tetszőleges poliéder felépíthető. Minden poliéder (a tetszőleges poliéder akár a szemléletes, akár a „határolt térrész” értelemben), tetraéderekké bontható (Hajós [101] i. m. 212.), vagyis bármely poliéder felépíthető tetraéderekből. Így az nem jelent nehézséget, hogy a tetszőleges poliéder közvetlenül nem definiálható az elemi geometria eszközeivel.

Poliéderek az iskolában

A poliéder szó a magyar matematika tantervekben nem szerepel. A poliéder helyettesítésére az iskolai gyakorlatban a mértani test fogalma terjedt el. Ezzel a fogalommal természetesen más ponthalmazra utalunk, nem csak a poliéderekre, hanem az iskolai oktatásban a térmértanban előforduló, közelebbről meg nem határozott, „ismerős” testeket jelöljük ezzel az elnevezéssel.

A mértani test matematikatanítási, módszertani fogalma kétféle értelemben használatos.

Az első értelmezés szerint olyan tárgyakat vagy másképpen, kicsit kibővítve a tárgyak fogalmát, olyan alakzatokat jelent, amelyeknek csak a geometriai fogalmakkal leírható tulajdonságait vesszük tekintetbe. Egy fogason lógó kabátot, mint mértani testet talán könnyebb elképzelni, ha a kabát formáját gipsszel kiöntjük, és ettől kezdve eltekintünk a színétől, az anyagának minőségétől és egyéb, a hétköznapi életben fontos tulajdonságától, és csak pontok távolságával, a pontjai által meghatározott szakaszok és síkok szögével és hasonló kérdésekkel foglalkozunk.

A másik értelmezés szerint mértani test a hasáb, a henger, a kúp, a gúla, a gömb, és ezekhez hozzávesznek még néhány más érdekes, sok szimmetriával rendelkező alakzatot is, mint pl. a szabályos testeket és a tóruszt, valamint az ezekből az alapformákból összerakott bonyolultabb alakzatokat.

Már maga a kétféle jelentéstartalom is bizonytalanságot tükröz, így azt gondolom, hogy az iskolában a mértani test fogalmát csak megszokásból használjuk.

Az első értelemben a fogalom mögött a valóság és a matematikai modell kapcsolata rejlik. Nem látszik szükségesnek, hogy azelőtt beszéljünk arról, hogy mit vizsgál a geometria, hogyan születik meg a valódi tárgyak fogalmából egy speciális térbeli ponthalmaz fogalma, mielőtt a gyerekekben felmerül ez a kérdés.

A második értelemben a szabatosság látszata miatt egy valójában definiálhatatlan, érdektelen fogalommal nehezítjük a geometriai alakzatok megismerését.

Poliéderek a tananyagban

A NAT az első 4 évfolyam követelményét egy egységként határozza meg, ennek következtében az egyes kerettantervek között nagy különbség lehet abban a tekintetben, hogy az egyes ismereteket melyik évfolyam tervébe építik be, de a legtöbb tanterv szerint a 3. osztályban ismerkednek meg a tanulók a téglatest fogalmával. Pontosabban fogalmazva inkább azt mondhatjuk, hogy a harmadik osztályban csak a téglatest elnevezést tanulják meg a gyerekek.

A fogalmat nem kötik a tankönyvek a téglához, nincs mögötte szemléletes tartalom, így a téglatestet és a téglalapot gyakran összekeverik a tanulók. Nem ismerkednek meg másféle testekkel, nem neveznek meg más hasábokat, poliédereket és egyéb, nem poliédereket sem, holott például a gömb minden tanuló számára ismert.

A legtöbb helyi tanterv szerint az 5. osztályban, a téglatest térfogatának kiszámításán keresztül találkoznak a térfogat fogalmával a tanulók.

Felnőttek számára nagyon világos, könnyen érthető a szemléltetés: ha a téglatest oldalait kis egész számokkal mérjük, akkor az egységkockákkal könnyen kitölthető a test és így leszámolható, illetve szorzással kiszámolható a térfogat. Ezt az algoritmust mutatják a tankönyvi illusztrációk. Problémát jelent azonban, hogy a tanulók térszemlélete még nem elég fejlett a perspektivikus ábrázoláshoz. Pszichológiai vizsgálatok szerint 10 éves kor után éri el a tanulók többsége azt a fejlettséget, ami a síkbeli ábrák értelmezéséhez szükséges, ezért a magyarázó rajzok – a téglatest élvázával – sok tanuló számára érthetetlenek.

Később, nyolcadik osztályban és a középiskolában, elsősorban a méretes feladatok körében kerülnek elő a poliéderek. A középiskolások körében a gúlák testmagasságának kiszámítását kérő feladatok általában nehéznek bizonyulnak.

A poliéderekkel kapcsolatos érdekességek a matematikatörténetben

A poliéder fogalom kialakításához érdemes a történeti előzményekre is támaszkodni. Az összegyűjtött információk részben a tanárok háttértudását bővítik, részben közvetlenül is alkalmazhatók a tanításban.

Már az írott történelem előtti korból vannak olyan emlékek, amelyek arra utalnak, hogy a poliéderek korán felkeltették az emberek érdeklődését. A hétköznapi életben az első, tömegesen előállított poliéder az építkezésekhez használt, agyagból égetett tégla volt. A téglának előállítási módja és története is rokon a kenyér sütésével, nagyon ősi technológiákról van szó (Pogácsás Tibor). Az építkezésekhez használt tégla már az ókori Egyiptomból előkerült. A téglatest alakját, méretét és arányait előállításának (sorozatgyártás), beépítésének (illeszkedjen a kőműves kezébe) és az építésben való felhasználásának (stabilitás) követelményei határozták meg, ezért formája hosszú időn keresztül nagy állandóságot mutatott.

A párhuzamosság, a derékszögek kérdése, természetesen kimondatlanul, a téglák esetében már akkor jelentkezett, amikor az emberek papírt még nem használtak, nem ismerték a szerkesztési eljárásokat, vagyis mielőtt a geometriában összefoglalt tudás megszületett volna.

Az őskori régészeti emlékek között találtak olyan amulettként használt, apró, sokszögletű tárgyakat, amelyek sok szimmetriával rendelkeztek. Ez arra utal, hogy már ekkor felfigyeltek a poliéderek néhány további fajtájára.

Az írott történeti források utalnak a természetben megtalálható geometriai alakzatok korai felismerésére. Különösen a makroszkopikus méretű kristályok, a kőzetek és az ásványok kínálnak alkalmat sokféle szimmetria és egyéb geometriai jellemző megfigyelésére.

A csillagászatban szimbolikus jelentésük volt a poliédereknek.

Euklidesz: Elemek

A szabályos testek is és a téglatestek is fontos szerepet kapnak Euklidesz művében [71]. A téglatest térfogatának definícióján alapul az egyre bonyolultabb testek térfogatának kiszámítása. A szabályos testek megkonstruálása és annak bebizonyítása, hogy pontosan öt szabályos test van, az euklideszi geometria egyik csúcsteljesítménye, a geometria tárgyalásának célja lehetett. Az ókori geometriában az archimédeszi testek és az egyéb, részben szabályos testek is jelentős szerepet játszottak.

Középkor

Az egyre bonyolultabbá váló építészet és a kockákkal játszott szerencsejátékok további új ismereteket halmoztak föl, miközben az ékszerészek változatlanul állították elő a szép mesterséges kristályformákat.

Euler

A XVI. században merült fel újra a poliéderek matematikai vizsgálatának igénye. Már Descartes tett megállapításokat egyes poliéder-tulajdonságokról, de Euler volt az, aki felfedezte, hogy a poliédereket a 0 dimenziós csúcsok, az 1 dimenziós élek és a 2 dimenziós lapok jellemzik (Lakatos, 1998, [139] 22.).

Euler poliédertétele az elemi térgeometria nagy eredménye, amelynek bizonyítása hosszú időn keresztül foglalkoztatta a matematikusokat, és egyben a topológia megszületését is jelenti (Lakatos, 1998 [139]). Euler tétele nyomán nem általában a poliéder, hanem az egyszerű poliéder fogalmának definiálása történt meg a példák és ellenpéldák elemzésének bonyolult folyamatában.

Egy, a poliéderfogalom tanításából következő érdekes logikai feladat, a poliéder belseje.

A poliéder definiálása során felmerült másik kérdés, hogy a sokszögtartományok által határolt két térrész közül melyik a poliéder, egyszerűen megoldható: az a rész a poliéder, amelyik nem tartalmaz egyenest. Ez a kérdés is természetesen csak akkor merül fel, ha a szemlélettől szigorúan el akarunk szakadni, egyébként nyilvánvaló a válasz. A definiálás folyamata viszont, ha már felmerült a kérdés, a tanulók számára is igen érdekessé tehető a telefon metaforával.

A síkbeli analóg feladat:

A sík három, egymást három pontban metsző egyenese a síkot két tartományra osztja, az egyik a háromszög, a másik annak komplementere.

Telefonbeszélgetésben, vagyis a rámutatás lehetősége nélkül, határozd meg, hogy a másik fél által, a sokszögvonallal létrehozott két tartomány közül melyik a háromszög.

A tanulók általában a papírra rajzolt ábrára gondolnak, és a gyakori válasz, hogy a kisebbik alakzat. A papíron könnyű olyan ábrát készíteni, ami ellenpéldát jelent. A teljes sík vonatkozásában a kisebb-nagyobb reláció nehezen definiálható, így eljutunk az egyenest nem tartalmazó síkbeli alakzathoz. Hasonló lépéseken keresztül vizsgálhatjuk a poliéder belsejének a fogalmát is.

4. Részvizsgálatok

A tanulók motivációs rendszerének és az íráskészségük kommunikációs célú alkalmazhatóságának vizsgálatához J. Kuhl (1999 [137]) motivációs (OMT) tesztjét adaptáltuk.

A bonyolult pszichológiai összefüggések mérésére alkalmas eszközt mi didaktikai következtetések levonására alkalmaztuk. Célunk az volt, hogy képet kapjunk a vizsgált 6-10 éves gyerekek tanulási készültségéről. A teszt didaktikai célú adaptálásán túl fontos szempont volt a kisiskolák sajátos helyzetéhez való alkalmazkodás is. A közlekedési nehézségek, az iskolák nehezen megközelíthetősége miatt szükséges volt, hogy az adatokat az osztályok saját tanítói felvehessék, és hogy a vizsgálat csoportosan, írásban elvégezhető legyen.

A 15 kép közül hármat választottunk ki az elővizsgálathoz, az utóvizsgálatban ezek közül egyet megtartottunk és ehhez választottunk további két képet. Az eredeti kérdéseket is lefordítottuk a gyerekek nyelvére:

1. Kit látsz a képen?
2. Hogy érzi magát?
3. Miért érzi magát így?
4. Mi a történet vége?

Megfordítottuk a skálázás irányát, hogy az az osztályzatoknak megfelelő legyen, ezért a pozitív végpontokat jelöltük 5-tel.

A megbízható adatok érdekében a pontozást többféleképpen ellenőriztem. Magam végeztem az összes válasz értékelését, ennek szakaszai a következők voltak:

A véletlenszerűen kiválasztott első 16 tesztlapot közösen értékeltük témavezetőmmel. Megtanultam azokat a kulcsszavakat, amelyek eligazítottak egy-egy bonyolultabb esetben.

A második szakaszban önállóan pontoztam, majd Vásárhelyi Éva ellenőrizte a besorolásaimat. Kevés esetben kellett segítséget kérnem, illetve még ritkábban fordult elő, hogy egy-egy besorolásom tévesnek bizonyult.

A harmadik szakaszban ugyanazoknak a válaszoknak a pontozását újra elvégeztem, és a két eredményt összehasonlítottam. Az eltérések aránya 4 % alatt volt.

A későbbiekben néhány véletlenszerűen kiválasztott lapot újrakódoltam és a hibaarány később sem romlott.

16 összevont tanulócsoportos kisiskolában végeztük a vizsgálatokat, összesen 243 gyerekkel. (A résztvevő iskolák és a tanulók listája, valamint a kutatás egyéb dokumentumai az ELTE Médiatár archívumában találhatók meg. A munka folyamán készült képanyag szintén a dokumentáció részét alkotja.)

Azoknak az iskoláknak, amelyek felhívásunkra válaszoltak, felkínáltuk a lehetőséget egy fejlesztő programban való részvételre is. A feltételek megismerése után ebben az első szakaszban 16 iskola vett részt. Így alakult ki a 16 iskolás minta.

Bár maga a bekapcsolódás szándéka az átlagosnál magasabb szintű pedagógiai érdeklődést jelez, a beszélgetések tapasztalatai alapján a részvétel motivációja olyan sokféle volt, hogy mintánk közel véletlen mintának tekinthető.

Voltak, akik azért jelentkeztek, mert nagyon jól értettek a számítógépekhez, és ezt a tudásukat az oktatás területén kívánták alkalmazni, és voltak, akik soha nem használtak még számítógépet. és most érezték úgy, hogy szükségük van informatikai műveltségre. Voltak iskolák, amelyek jobb feltételek között működtek, és az iskola vezetősége vállalta a továbbképzés utazási költségeit, és erkölcsileg támogatta a pedagógusok részvételét, és voltak olyan pedagógusok, akik annyira reménytelennek látták az iskolájuk helyzetét, hogy a mi segítségünkkel próbáltak alternatív megoldást találni személyes sorsuk rendezésére.

A minta véletlenszerűségére utal, hogy bár semmit nem tettünk az egyenletes területi eloszlás érdekében, ez nagyrészt mégis megvalósult. (A dolgozat mellékletében felsorom a 16 iskolát.)

A kisiskolák jellegéből, a saját településükön betöltött szerepükből következik, hogy az iskolai és az iskolán kívüli programok nincsenek mereven szétválasztva. A programokba bevont gyerekek köre sem pontosan meghatározott.

Az iskolai rendezvényeken részt vesznek például a korábban végzett tanulók és a jelenlegiek kisebb testvérei is. Az is gyakran előfordul, hogy nemcsak a formálisan egy tanulócsoportba tartozó gyerekek tevénykednek együtt, hanem a tanulók tágabb csoportja, akár azért, mert helyettesíteni kell valamelyik pedagógust, akár azért, mert valamilyen program különösen érdekesnek ígérkezik.

Ezek miatt lehetővé tettük, hogy egy-egy iskolából akár az egyik, akár mindkét tanulócsoport jelentkezzen a programra, csak azt kértük, hogy a benevezett tanulók vegyenek részt minden kísérleti foglalkozáson, töltsenek ki minden felmérő lapot, de azt nem korlátoztuk, ellenkezőleg, támogattuk, hogy a be nem nevezett tanulók is vegyenek részt a fejlesztő foglalkozásokon.

A vizsgálat menete: Az első szakasz, a 16 iskolás vizsgálat elején és végén gyűjöttük az adatokat. Postán kaptam meg a válaszokat.

A kisiskolások írásának fejlettsége még alacsony színvonalú, a szokásos helyzetekben az írás technikája elvonja figyelmüket az önkifejezés lényegi elemeitől. Az OMT teszt képei azonban erős felhívó jelleggel rendelkeznek, ezért a néhány fővel történt kipróbálás alapján arra számítottunk, hogy a gyerekek, a rajzoláshoz hasonlóan, képesek lesznek a kreatív önkifejezésre. Ezért vállaltuk a gyerekek írásbeli vizsgálatának nehézségeit, de az elsősök, valamint az idősebb és segítségre szoruló gyerekek diktálhatták is a pedagógusoknak válaszaikat. A döntést az önálló írásról vagy diktálásról a pedagógusokra, illetve magukra a gyerekekre bíztuk. Ez a kis osztálylétszámok miatt nem jelentett problémát.

Az iskolák a gyerekek létszámának megfelelő példányban megkapták a 3-3 rajzot a válaszok számára üresen hagyott résszel. A pedagógusok a táblára írták a kérdéseket, amelyeket az eredeti kérdések pontos fordítása nyomán alkalmaztunk a gyerekek életkorához.

A kapott eredmények elemzése során a személyiségnek csak néhány, az iskolai matematikatanulás szempontjából releváns elemét vettük tekintetbe.

Tapasztalatok

Az OMT vizsgálat adatai ordinális skálán helyezkednek el, ezért az erre vonatkozó kvalitatív elemzést szolgáló módszereket alkalmaztuk.

A gyerekek túlnyomó többsége – előzetes várakozásunknak megfelelően, azt néha meg is haladva – írásban is a gyerekrajzokhoz hasonló természetességgel fejezte ki magát. Ezekre példákat a B. jelű iskola tanulói eredményeinek közlésekor mutatok.

Íráskép: A vizsgálat tapasztalatai alapján összevont pontszámmal értékeltük az írásképet, ebben felhasználtuk Nagy József (2007) tanulmányának tapasztalatait az alsós tanulók íráskészségéről és annak értékeléséről.

Íráskép 1	Összesen
0	138
1	3
2	30
3	34
4	22
Összesen	227

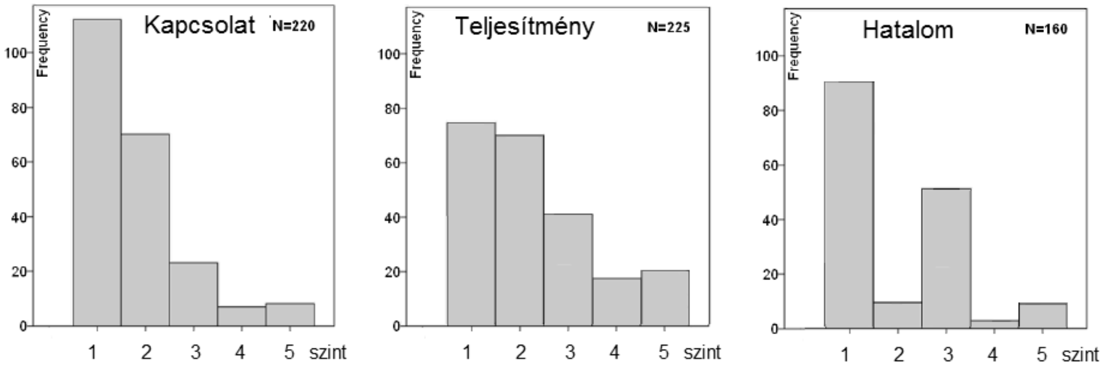
1.9. táblázat. Íráskép

A 243 gyerek közül az első OMT tesztet 227 tanuló írta meg (a hiányzó 16 adat iskolai hiányzásból ered).

138 esetben a pedagógusok írták le a választ, 89 esetben a tanulók. A tanulók által írt 89 válaszból 3 nem volt értelmezhető. 30 esetben az egyébként nehezen olvasható válasz azért volt érthető, mert az értékelő számára ismerős volt a szituáció, a fennmaradó 56 esetben a tanulók több-kevesebb hibával, de lényegében jól olvashatóan válaszoltak.

A 138 válasz, amit a pedagógusok írtak le, részben félreértésből származott. Több tanító így akart nekünk segíteni, hogy minél szebb munkákat kaphassunk, ezért a pedagógusok nemcsak az elsősök, a kisegítő iskolások és az írni még csak nagyon nehezen tudó gyerekek helyett írták le a válaszokat, hanem az iskola összes tanulója helyett. Miután megbeszéltük, hogy számunkra elegendő, ha érthető a gyerekek válasza, a megformálás szépségénél és pontosságánál fontosabb érték a gyerekek önálló munkája, az elő- és az utómérés között 61-ről 49 %-ra csökkent a pedagógusok által leírt válaszok aránya.

A válaszok tartalmi kategorizálása: A kötődés, teljesítmény, társadalmi hierarchia tartalmú válaszok megoszlása a Kuhl által definiált szintek között.



1.53. ábra. A szintek szerinti eloszlás

A teljesítmény-motivációra utaló válaszok alapján a 237 tanuló közül 225 tanuló a teljesítményt örömként, sikerforrásként, kisebb részben szorongást tükröző fogalomként értelmezi. A kötődés, illetve a hatalom vonatkozásában nagyobb arányú volt a bizonytalanság.

Az egyes területeken kapott adatok közötti kapcsolatot tekintve azt tapasztaltuk, hogy a teljesítmény és a hatalom motívumcsoportok között van gyenge szignifikáns (Spearman) korreláció.

Azok a tanulók, akik esetében magasabb volt a pozitív teljesítménymotiváció, azok a hatalmi helyzetet is inkább felelősségvállalásként, segítségnyújtásként értelmezték, ezzel szemben azok, akik a teljesítménykényszert szorongáskeltő helyzetként élték meg, azok a hatalmi helyzetben is inkább a kiszolgáltatottságot látták.

A személyes kapcsolat bensőségessége sem a hatalmi helyzettel, sem a teljesítménymotivációval nem mutatott jellemző kapcsolatot.

A gyenge pozitív kapcsolat utalhat arra, hogy a tanulók valamely háttérben álló ok miatt hasonlóképpen értelmezik a különböző képeket, de utalhat arra is, hogy a tanuló személyiségére az örömteli érzések, a segítőkészség vagy pedig a szorongás jellemző inkább. Ugyanakkor az, hogy a különböző motívumcsoportok között nincs szignifikáns kapcsolat, a három terület viszonylagos önállóságára utal.

A 243 gyerek közül 129-től van adatunk az elő. és utómérésről is. A létszámbeli eltérés legfontosabb oka, hogy a második vizsgálat a tanév végén volt, ezért a késve, hiányosan vagy egyáltalán meg nem érkező válaszok pótlására már nem volt lehetőségünk.

Az elő- és az utómérés eredményeinek összehasonlításakor kis pozitív változást találtunk, de ez inkább a véletlennek tulajdonítható.

A hatalom, társadalmi hierachia esetében a változás negatív, és ez valószínűleg nem véletlen.

A kísérletünk számára legfontosabb a teljesítmény motivációcsoportban az öt szint közötti megoszlás-arányok nagyon hasonlóak. 39-39 elmozdulás volt negatív és pozitív irányban is, 51 pedig változatlan maradt. Ez megfelel a várakozásunknak. Ez egyrészt utal arra, hogy rövid idő alatt lényegesen nem változik a teljesítménymotiváció. A mindkét irányú, azonos mértékű változásra magyarázatul szolgálhat az egyik tanuló válasza, aki az előmérésnél a kötelességet említette a hegymászásnál, második esetben viszont arról írt, hogy egy gyerek mászik a hegyre, mert nagyon szeret hegyet mászni, de sietnie kell, mert még nincs kész a leckéje. A teljesítmény öröme megjelent nála, lehetséges, hogy éppen az érdekes iskolai feladatok hatására, de ez nem terjedt ki a tanulásra. Valószínűleg ő is, mint a magyar tanulók túlnyomó többsége, tanuláson a házi feladatok megírását és a szövegszerű tanulást, különösen a memoriterek, versek megtanulását érti. A gyerekek egy része, feltehetően a program hatására, megtapasztalta több újfajta tevékenység örömét, de ezek az élmények nem kötődnek számukra a tanuláshoz, tanulásnak továbbra is a fárasztó feladatokat tartják. A tanulók egy részére a tevékenységi formák gazdagodása, másik részére a hagyományos házi feladatok változatlansága lehetett erősebb hatással.

A harmadik motívumcsoport esetében kapott pontszámok csökkenése, vagyis az, hogy a gyerekek a hatalomról negatívabb érzelmeket írtak le, összefügghet azzal, hogy két, jellegében erősen különböző rajzot használtunk. Tervezem ennek a kapcsolatnak a későbbi vizsgálatát.

A statisztikai adataink arra is módot adtak, hogy az OMT előzetes teszt, az íráskép, a matematika és a magyar nyelvi osztályzatok alapján klasztereket képezzünk. Azt a két osztályt kihagytuk, amelyben értelmi sérült tanulók tanulnak.

Osztályzatok: A vizsgálatot megelőző félévi jegyek (az írásos értékelés ellenére megkértük a pedagógusokat, hogy osztályzatban értékeljenek).

Íráskép: A tanulókat két csoportba soroltuk: a legalább elég jól olvashatóan író tanulókéba és azoknak a csoportjába, akik nem maguk írták le válaszaikat, vagy nem értékelhető választ írtak.

A klaszterezést is SPSS programmal végeztük. A hierarchikus módszert választottunk, 9 klaszterig vontuk össze az adatokat. Ebben a vizsgálatban még nem néztük, milyen közös jellemzőjük van az egy csoportba kerülő, hasonló pontszámokat elérő tanulóknak. Arra voltunk kíváncsiak, hogy igaz-e, hogy az azonos iskolába járó tanulók hasonló eredményeket produkálnak a mért területeken. Amennyiben az egy iskolába járó tanulók között találtunk volna egy-egy jellemző, túlsúlyban lévő klaszert, akkor az előbbi kérdésre igen lett volna a válaszunk.

A gyerekek egy adott iskolához tartozása és eredményei hasonlósága alapján kialakított csoportok között véletlenszerű kapcsolat van.

Ez megerősíti azt a feltételezést, hogy bár nagyon nagyok az egyes települések közötti különbségek, és a környezet erősen hat az iskolákra, a gyerekek teljesítményét jobban befolyásolják a személyes adottságaik, mint az, hogy melyik iskolába járnak.

A pedagógiai feladatokban a közös elemek dominálnak, függetlenül a nagy földrajzi távolságoktól.

Ezek az adatok más oldalról támasztják alá azt a tapasztalatunkat, hogy az ország különböző területein dolgozó, összevont tanulócsoportban tanító pedagógusok szakmailag megalapozott közös munkájára nagy szükség volna.

A statisztikai elemzések nem mutattak ki értékelhető változást a tanulók motivációjában a kísérleti oktatás előtti és utáni helyzetben. Ennek több lehetséges magyarázata van.

– A kísérlet hatására nem történt változás.

– Történt változás, de az rövid távon nem jelent mérhető változást.

– Ellentétes irányú változások történtek, a tanulók egy részének könnyebbé, szebbé vált a tanulás, másoknak – éppen a kísérleti órák hatására – a matematikai élmények nem változtatták meg a tanulásról alkotott képüket, a kellemes szellemi élmények szemben állnak az egyre inkább kötelességszerűnek érzett szokásos órákkal.

Jelen kutatás keretei között a legmegbízhatóbb magyarázat megtalálására nem volt lehetőség.

Kísérleti órák Speciális módszereinket a tanulási folyamatot meghatározó tényezők figyelembevételével, a tanulás pedagógiai és didaktikai feltételeinek biztosítására törekedve dolgozzuk ki. Ebből az elemzési folyamatból a matematikadidaktikai elemeket emeljük ki.

A tanulók szociológiai státusza a jelen kutatásban annyiban speciális, hogy a hátrányos helyzetű tanulók közül is az összevont tanulócsoportos iskolákban tanuló diákokat választottam. Mivel ezek az iskolák infrastrukturálisan elzárt, munkalehetőséget nem kínáló településeken találhatók, az iskolafenntartó nem módszertani műhelyként, hanem kényszerből működteti az összevont formát. Ezt azért szükséges hangsúlyozni, mert a tanulók túlnyomó többségben hátrányos helyzetűek, és a társadalmi helyzet által meghatározott, intézményesült problémákkal küzdenek. Korábban a falusi tanulók jelentős hányada a társadalmi helyzettől függetlenül tanult összevont tanulócsoportos iskolában, ami akár módszertani előnyt is jelenthetett. A tanulók hátrányos helyzete és az iskolai eredményeik kapcsolatát, néhány jellemző adatot és összefüggést kiemelve, bemutattam az előző fejezetekben.

A hátrányos helyzetű tanulók egy része, jó általános kognitív képességei alapján éppen matematika tantárgyból képes kiemelkedő teljesítményre. Többségük mégis a matematikából elszenvedett kudarcok miatt hagyja el idő előtt az iskolát, vagy mond le a nagyobb igényeket támasztó továbbtanulási formákról. A matematikatanulással szembeni ellenérzésekkel, a matematika-tanulási eredménytelenség miatti rosszkedvvel találkoztam az összevont tanulócsoportokra irányuló nemzetközi együttműködésben folytatott kutatás során is. Néhány e témával foglalkozó külföldi szerzővel (Gorgorio és Planas, Wold) megegyező tapasztalatom szerint félreértések sorozata nehezíti a gyerekek és tanítóik közötti viszonyt. Ezek a félreértések nem tudatosulnak egyik félben sem, így az osztálytermi gyakorlatban megoldásukra kevés a remény.

A matematikatanítás céljai a NAT alapján

„A matematikai kompetencia a matematikai gondolkodás fejlesztésének és alkalmazásának képessége, felkészítve ezzel az egyént a mindennapok problémáinak megoldására is. A kompetenciában és annak alakulásában a folyamatok és a tevékenységek éppúgy fontosak, mint az ismeretek. A matematikai kompetencia – eltérő mértékben – felöleli a matematikai gondolkodásmódhoz kapcsolódó képességek alakulását, használatát, a matematikai modellek alkalmazását (képletek, modellek, struktúrák, grafikonok/táblázatok), valamint a törekvést ezek alkalmazására."

A NAT a magyar matematikatanításban alkalmazott spirális felépítés elve szerint a fogalmak építésének megkezdését már az iskolába lépéstől kezdődően előírja, és természetesen épít az iskoláskor előtti fejlődés eredményeire is. A gyerekek közötti jelentős különbségek miatt nagyon megfontoltan és differenciáltan támaszt követelményeket a tanulókkal szemben.

Kutatási programunkban centrális elemként kezeljük „a matematika élményének nyújtását".

Az összevont tanulócsoportos iskolák pedagógusai a kis létszám ellenére is túlterheltek, mert feladataik igen sokrétűek, beleértve a nagy iskolákéhoz hasonló mértékű adminisztrációt is, és az összevont tanulócsoportok miatt összetettebb az óra előkészítése. Az esetek többségében barátságos környezetet, családias, jó légkört, egyénre szabott figyelmet tudnak nyújtani tanítványaiknak, de a matematikatanulást hatékonyan segítő módszereket nem eléggé ismernek. Az összevont tanulócsoportok tanítóinak felelőssége pedig nagyobb, mert a tanulók az átlagosnál kevesebb segítséget, bíztatást kapnak otthon a tanuláshoz.

A matematikatanítás általánosan alkalmazott módszerein túl a hátrányos helyzetű tehetséges tanulók számára speciális segítő módszereket adaptáltam, illetve dolgoztam ki.

A Magyarországon és külföldön, elsősorban az USA-ban alkalmazott tehetséggondozó és esélynövelő programok számos matematikadidaktikai elemét integráltam. A tervezés és a megvalósítás során törekedtem az alkalmazott módszerek szociológiai, pedagógiai, didaktikai és matematikai megalapozására, alkalmas kompromisszumok kimunkálására. A matematikailag megalapozott, logikailag korrekt ismeretek elsajátítását úgy segítettük, hogy közben a személyiségfejlődés és a társadalmi beilleszkedés szempontjait is messzemenően figyelembe vettük. A vizsgálat tapasztalatainak leírása során a legjellemzőbb szempontokra koncentrálok.

A tematikát a pedagógusokkal együttműködve a tantervi témák közül választottunk ki. Egyrészt olyan témákat választottunk, amelyeket a tanítók különösen nehéznek találnak (mértékegységek), másrészt alkalmas témát kerestem a kiemelkedő teljesítmény hipotézisének vizsgálatára (poliéder).

Kiemelt szerepet kaptak az oktatási eszközök, ezen belül az informatikai eszközök. Az iskolák nehéz megközelíthetősége miatt az oktatás de a kutatás szempontjából is az információk cseréjének legfontosabb csatornája az internet volt. Rendszeresen használtunk oktatási célra készült szemléltetőeszközöket és egyéb tárgyakat. A program keretében elkészült PowerPoint prezentációkat a későbbiekben részletesen is bemutatom.

A kísérleti szituáció összetett és újszerű volta miatt a reflexiók jelentősége is kiemelt fontosságú volt. Az órai események utólagos dokumentálása több célt is szolgált. Az órán történtekről ezen az úton kaphattunk információkat, mivel a hospitálásoknak sok akadálya volt, csak kevés órán lehettem jelen. A kisiskolák többségére a nagy földrajzi távolságokon túl is jellemzőek a rossz közlekedési viszonyok. Ezen túlmenően a zárt falusi kisközösségekben a külső megfigyelő, az idegen jelenléte számottevően zavarja az iskolai munka normális menetét.

Az órák pedagógiai, didaktikai történései jelentősen befolyásolták az éppen soron következő kísérleti óra megtervezését, ezért nagyon fontosak voltak a pedagógusok jelzései. Az óravezetést is befolyásolta az órákról írandó összefoglalók önként vállalt kötelezettsége: hozzájárult a reflexív tanári magatartás megvalósításához.

A pedagógusokat felkészítettük a megfigyelési módszerek alkalmazására. Az órák megtartása során kértük a tanítókat, hogy figyelmüket megosztva koncentráljanak a tanulók tevékenységére, figyeljék a tanulók reakcióit, és azoknak megfelelően alakítsák az órák menetét, folyamatosan reagálva a gyerekek jelzéseire. A tipikus tanulói reakciók alapján fogalmaztuk meg a soron következő kísérleti órákra vonatkozó módszertani javaslatainkat.

Az órák végén írásos véleményt kértünk a tanulóktól is. Ezzel elsősorban a tanulók figyelmét igyekeztünk a tanulásra irányítani, de fontosnak tarjuk ezt a kommunikációs képesség fejlesztése szempontjából is. Mind az órákat tartó pedagógusok, mind a fejlesztő program szempontjából hasznosak voltak a tanulóktól kapott visszajelzések is.

A kéthetes ciklusok végén, a szakaszok lezárásakor és az empirikus vizsgálat végén is elemeztem saját módszereimet is, mind kutatás-módszertani szempontból, mind az alkalmazott fejlesztési eljárásokat illetően.

A körmodell (228) alkalmazása tanárképzési szempontból is fontos tanulságokkal szolgált. A tanárok is és a leendő tanárok is problémamegoldásként csak a matematikai problémák megoldását azonosították. Ebben a kísérletben a kutatási folyamat empirikus szakaszának vázát képezte a tanítás megszervezése a körmodell alapján. A kutatásba bevont pedagógusok a körmodell egyes elemeit több-kevesebb önállósággal alkalmazták. A tanárképzés során érdemes lesz nagyobb figyelmet fordítani a didaktikai problémák tudatosítására, hogy a matematikatanárok a didaktikai problémák szakszerű megoldásának folyamatát is munkájuk integráns részének tekintsék.

A kutatás következő szakaszában érdemes lesz a résztvevő pedagógusok rendelkezésére bocsátani a körmodellnek az adott szituációra adaptált változatát, hogy ezzel is elősegítsük a még tudatosabb didaktikai tervezést.

A kombinált módszer

Miként korábban említettük, módszerünk elnevezésére a kombinált jelzőt alkalmazzuk. Későbbiekben szemléletesebb kifejezést szeretnék alkalmazni, mint pl. impulzust adó oktatás vagy elpattintó oktatás. Az új elnevezéssel arra kívánunk majd utalni, hogy a hátrányos helyzetű tehetséges tanulók

- folyamatos figyelmet igényelnek tanáraiktól, mert a társadalmi helyzetből fakadó hátrányok a jó pedagógiai munka ellenére is, a magasabb életkorban is új és új problémákat okozhatnak,
- ennek a segítségnek lökésszerűnek kell lennie, át kell lendítenie a tanulókat az éppen jelentkező akadályokon, mégpedig úgy, hogy önállóságukat, a saját tanulásukkal szembeni felelősségüket nem csökkentjük, hanem erősítjük.

A tananyag kiválasztása és elrendezése

A kísérleti órákat kéthetenként egyszer tartottuk, ezekre az órákra viszonylag kötetlenül választhattunk a tantervben előírt tananyagból. Az alsó tagozatos tantervben kiemelt fontosságú feladat a számkörbővítés, az aritmetikai és a prealgebrai ismeretek elsajátítása. A kísérleti órák tematikájában ezek a területek direkt módon nem szerepeltek, a tanulók e témákat hagyományos módon tanulták. A hátrányos helyzetű tehetséges tanulók gyakran könnyen, sőt túl könnyen megtanulják a számolási műveleteket. Nem kapcsolják viszont azokat sem tapasztalataikhoz (otthon nemigen számolják meg, hány gombóc van a tálon, és mennyi marad, ha ketten esznek belőle három-három darabot), sem megfigyeléseikhez (ha a kisebbítendőt és a kivonandót ugyanazzal a számmal csökkentjük, a különbség nem változik), a reflektált tapasztalatok hiányában. Ezért a matematika tananyagnak azokat a részeit választottam ki, amelyekben a gyerekek tényleges tapasztalataira építve ismerhetnek meg új fogalmakat és összefüggéseket. A kísérletben vizsgált résztémák: a mértékegységváltás előkészítése alkalmilag választott mértékegységekkel való méréssel, játékos térbeli tájékozódási feladatok, régi számírások a mi számírásunk mélyebb megértése és a beavatottság érzése érdekében, szöveges feladatok logikai buktatók nélkül (itt a számolást a gyerekek által gyűjtött adatok, a becslés és a véletlen adatok bevonása tette érdekessé) és a poliéderfogalom építése.

Kiemelt célunk a matematikatanítás egyik központi feladatának megvalósítása az adott körülmények között: a gyerekek hétköznapi tapasztalatai és a szimbolikus formában kifejezett matematikai összefüggések közötti kapcsolat kiépítése.

A tanítási stratégia: tárgyi tevékenység és történetmesélés

A tanulók pillanatnyi előismereteiből indulunk ki, amelyek szintje jelentősen elmarad attól, amit általánosan elvárnak az adott korosztálytól, de az alacsony kiindulási színvonal ellenére a kiválasztott részterületeken a tantervek optimális követelményeit célozzuk meg, építve a tanulók átlagosan jó, illetve kiemelkedő értelmi képességére.

A pedagógusok az egyéni differenciálás eszközét korábban is alkalmazták. A differenciálás a vizsgálatban kiegészült a hátrányos helyzetű tehetséges tanulókra vonatkozó differenciálási elvek bemutatásával és a gyakorlati alkalmazással, a tapasztalatok elemzésével. A hátrányos társadalmi helyzetből fakadó kommunikációs akadályok csökkentése alapvetően kétféle speciális feladatot jelentett. A matematikai problémákat szemléletesen, a tanulók nyelvi szintjéhez igazítottan, képekkel és tárgyi tevékenységgel közvetítettük. A tanulók kommunikációs képességének fejlesztése érdekében, hogy a későbbiekben kevesebb segítséggel, illetve külön segítség nélkül is tudják követni a szokásos módon megtartott tanítási órákat, tudják használni a tankönyveket és egyéb nyomtatott segédleteket, sikeresek legyenek a felmérő dolgozatok megírásában, sok, a matematikával összefüggő beszélgetést szerveztünk, írásbeli és rajzos feladatokat adtunk a gyerekeknek.

A társadalmi helyzetből és az egyéni képességekből származó eltéréseken túl a differenciálás a tanulók pillanatnyilag mozgósítható előismereteit és aktuális figyelmi szintjét és érdeklődését figyelembe vette, eszerint kaptak, illetve választhattak feladatokat.

A tárgyi problémamegoldáson keresztül kaptak jelentést és értelmet a matematika elvont fogalmai. Pl. a mértékegységváltást a különféle űrtartalmú edényekkel végzett öntögetés, a tapasztalatok megbeszélése segítette. A téglatestekre vonatkozó számítási feladatokat és a poliéderfogalom építését a poliéderekkel kapcsolatos építő, illetve mozgásos játékok készítették elő. A problémák változatosak voltak. Volt olyan, amelyik nyilvánvalóan matematikai ötleteket, kreativitást igényelt és volt olyan is, ami a tanulók túlnyomó többsége számára csak alkalmazási feladat volt, néhányan mégis problémaként élték meg, és a megoldás során olyan tapasztalatokat szereztek, amelyek hatékonyan segítik a későbbi tanulást. A tárgyi problémamegoldás tervezését nehezítette, hogy gyakran nem könnyű a látott jelenség fizikai vonatkozásaitól eltekinteni, és a megcélzott matematikai összefüggésre koncentrálni.

A feladatok jelentéssel telítését szolgálták azok a történetek, amelyek a macicsalád példáján keresztül mutatták meg az elvégzendő feladatok kapcsolatát a mindennapi élet tapasztalataival.

Mindig nagyon fontos, hogy a tanulókat érdekeljék a matematikaórákon felvetett problémák, sajátjaiknak érezzék azokat. Sok szép példát olvashatunk arról, hogy egy-egy, a gyerekek által felvetett probléma megoldása érdekében a pedagógusok irányításával milyen mély matematikai ismeretekhez juthatnak el a tanulók. A közzétett didaktikai eredmények alkalmazása nagy nehézségbe ütközik. Az adott probléma egy más osztályban már nem a gyerekek saját problémája. A tanulók bevonását diasorozatok segítségével oldottuk meg, amelyek egy macicsalád történeteit mesélik el. A gyerekek közösséget éreznek a macikkal, így az ő problémáik a gyerekek problémáivá válnak.

A kísérleti tanítási órák szervezeti formái

A frontális és az egyéni munka kiegészül kiscsoportban végzett munkával.

A tanulók a csoportmunka során változatos élményeket éltek át. A sikerélményeken túl a közös munka történései, az örömök és a súrlódások órai megbeszélésének lehetősége a matematikatanulásba való érzelmi és akarati bevonódást erősítették.

A tanulók kommunikációs képességeinek, elsősorban a kommunikációs szándéknak az erősítése

A nyelvszociológia társadalmi dialektus fogalma „social dialect” alátámasztja Bruner régebbi és az azóta folytatott újabb kutatások eredményeit, amelyek szerint a hátrányos helyzet az iskolában elsősorban nyelvi hátrányként jelenik meg.

A matematikatanulásra vonatkozó néhány új kutatási eredmény tapasztalatai alapján a tanulók nyelvi hátrányuk miatt gyakran el sem juthatnak a matematikai problémához, már tanáraik hétköznapi közléseit sem értik meg, így eleve be sem kapcsolódnak a munkába.

A beszélgetéseket a nagyon egyszerű: Mi történt az órán? kérdéssel indítottunk, és a maci-történetekben példát mutattunk arra, milyen válaszok juthatnak más gyerekek eszébe a kérdés hallatán. Fontosnak tartottuk, hogy a matematikatanulás kezdetén, az egyébként is nehezen megszólaló gyerekek bátran meséljenek valódi élményeikről, pl. verekedtünk X-szel, örültem, hogy pancsoltunk, mert ezekből kiindulva juthatunk el a matematikatanulási szempontból releváns tapasztalatok felidézéséhez és megfogalmazásához.

A kísérleti tanítási órák munkaformái

Tárgyi tevékenység, megbeszélés, a tapasztalatok lejegyzése.

A matematikadidaktikában ismert módszereket és eszközöket kombináljuk a tanulók sajátos igényeinek és az iskolák speciális helyzetének megfelelően.

A tanulási folyamat egészét megtervezzük a tárgyi tapasztalatok szintjétől a matematikai szimbólumok révén megvalósított tudásrögzítésig, szemben a többségi tanulóknál alkalmazható módszerekkel, ahol a tanárok támaszkodhatnak a tanulók korábbi, reflektált tapasztalataira, és a csak szóbeli ismeretközvetítés is hatékony lehet.

Ezek a reflektált tapasztalatok igen egyszerű megfigyelések és az azokat követő rövid beszélgetések lehetnek a többségi családok mindennapi életében, mint

- Miért esik le a kő? Mert nehéz. Miért repül el a léggömb? Mert könnyű.
- Oszd el igazságosan a cukorkát a testvéreddel! Ne feledd, az egyik oszt, a másik választ!

Az ismeretek bővítését, a készségek fejlesztését olyan tanulási környezetben valósítjuk meg, ami a tanulás pozitív élményét nyújtja azoknak a gyerekeknek is, akiknél az elemi intellektuális technikák hiányoznak vagy nagyon alacsony színvonalúak.

Az iskolák nehéz helyzete ellenére, éppen a hátrányok csökkentése érdekében alkalmazzuk a számítógépeket is, a számítógéppel segített oktatás legegyszerűbben megvalósítható változatát.

Az iskolai matematikatanulás iránti érdeklődés felkeltése és fenntartása

A vizsgálatnak ez a szakasza a 2006-07-es tanév második félévében zajlott, az előkészítés már az előző tanévben megkezdődött.

A matematikai programmal párhuzamosan egyéb tevékenységeket is szerveztünk, illetve bekapcsolódtunk már hagyományos, az iskola által szervezett iskolán kívüli programokba.

Az iskolák pedagógusai szakmai-módszertani segítséget és segédeszközöket kaptak a NEMED program keretében, és vállalták, hogy a kapott instrukciók alapján elvégzik az írásos és rajzos adatgyűjtést, matematikából megtartanak négy kísérleti órát, és beszámolnak tapasztalataikról, valamint kísérleti foglalkozásokat tartanak a vizuális nevelés területén is.

A részvizsgálat mintája 16 iskola 243 tanulója

A vizsgálatba bevont tanulók között 40 első, 42 második, 98 harmadik és 63 negyedik osztályos volt. A fiúk $\frac{2}{3}$-ot tettek ki, ami talán azzal magyarázható, hogy a szülők a kislányokat inkább magukkal viszik a közeli nagyobb településre, ahol ők maguk is dolgoznak.

Az iskolák némelyike nem teljes létszámmal vett részt a vizsgálatban. A pedagógusoktól azt kértük, hogy a harmadik osztályosok kerüljenek be a mintába. Egyrészt, mert tőlük vártuk, hogy képesek lesznek az írásbeli kommunikációra, másrészt annak érdekében, hogy a következő évben felmenő rendszerben is folytatódhasson a program.

Módszertani gazdagítás a kísérleti matematikaórákon

A program matematikából 4 kéthetes részszakaszra volt bontva. A pedagógusok irányításunkkal valósították meg a programot.

Előkészítés: Milyen tananyagokra, milyen formában van szükség az iskolákban? Mire utalnak a pedagógus beszámolók, milyen igények feltételezhetők a szakirodalom alapján?

A tanítókkal folytatott megbeszélések és a tantervi követelmények elemzése alapján választottam ki témákat, amelyekre elkészítettük a ppt bemutatókat és megírtam a módszertani leveleket.

A legfontosabb szempontok a tantervi követelmények és a gyakorlatban felmerülő tanulási problémák voltak.

Technikai feltételek: Az iskolák technikai felszereltsége igen különböző volt. Voltak iskolák jól felszerelt számítógépes teremmel, és volt olyan is, ahol a tanítónő egy kölcsönkapott laptopot vitt be magával az iskolába. Az iskolák kis tanulói létszáma miatt már egyetlen, kivetítő nélküli számítógép is lehetővé tette a számítógéppel segített tanulást. A munka sikeressége következtében megnőtt az iskolákban az igény a számítógépekre, és különböző források felhasználása révén általában sikerült javítani a feltételeket. A programba jelentkezett 16 iskolával interneten keresztül tartottuk kapcsolatot, amit alkalmanként postai levelezés, szükség esetén telefonos beszélgetés egészített ki. Volt lehetőség személyes találkozásra is. Az előkészítő szakaszban néhányszor iskolában is vezettem számítógépes és módszertani témákról megbeszéléseket. Az egyetemen is szerveztünk összejöveteleket, ahol a matematikai módszertani, valamint az internet alkalmazásnak, az e-mailek küldésének és fogadásának technikáját és kialakult szokásait tárgyaló és gyakorló megbeszéléseket én vezettem.

A teammunka szervezése: A kísérleti órák tapasztalatait a pedagógusok leírták, e-mailben elküldték, majd ezekből összefoglalót készítettem, és azt visszaküldtem a munkában résztvevő pedagógusoknak. Annak ellenére, hogy az iskolák egy része nem volt rákötve az internetre, az e-mailes kapcsolattartás nem okozott problémákat, családi és egyéb segítséggel a levelezést sikerült megoldani. Ezek az összefoglalók egyrészt biztatást jelentettek a pedagógusoknak, jelezték, hogy fontosak a megfigyeléseik, másrészt megismerhettek sok, a sajátjuktól eltérő módszertani megoldást. A módszertani sokszínűség tényének bemutatása és a kipróbált új ötletek átadása is része volt a munkánknak.

A kutatás dokumentálása másképpen megoldhatatlan volt, ezért írásos beszámolót kértem a tanítóktól, ugyanakkor, mint azt a körmodell bemutatásánál is jeleztem, a saját munkára való reflektálás, a korábbi tapasztalatok tudatos beépítése az oktatási folyamat következő szakászának megtervezésébe – ez a hatékony pedagógiai tevékenység fontos eleme volt.

A gyerekektől is kértem írásos beszámolót Mi történt az órán? címmel. Érdekes dokumentumokat kaptam ezen az úton is, de a fejlesztési folyamatnak is lényegi eleme volt ez a feladat, mert a tanulók kommunikációs képességeit az iskolai standardnak megfelelő szintre kell emelni. A szellemi munka élményeinek átélése, az erre való reflektálás képessége az eredményesség egyik alapfeltétele. A fogalmazás, annak írásos formája szoros kapcsolatban van az egyszerű hétköznapi beszéddel, ugyanakkor a verbalitás a tanulás szimbolikus szintjének egyik megnyilvánulási formája. A tanulóktól kapott írásos reflexiók jelentősen hozzájárultak a pedagógusok önértékelő tevékenységének fejlesztéséhez.

Vegyes életkorú csoportok: A csoportmunkára szükség van a tanulás hatékonyságának emeléséhez. A csoportalakítás lényege nemcsak a szokásos osztálylétszámnál kisebb létszám – ez eleve adott az összevont tanulócsoportok többségében – hanem a társas viszonyok megváltozása: nincs közvetlen tanári irányítás, viszont a gyerekek között legális, sőt elvárt együttműködés van.

Az órák megtartása

Az órákat a gyerekek saját tanítói tartották, ezért a program fontos része volt a kialakított kiegészítő anyag kreatív alkalmazására való felkészítés és a pedagógiai munka folyamatos támogatása.

A kísérleti témák tanításának szerkezete

Célom az volt, hogy a kísérleti órákon a gyakorlás helyett a fogalomépítés és a problémamegoldás kerüljön előtérbe. Ezt szolgálták a macis ppt-k, amelyeknek a megtekintését megelőzte az adott téma előkészítése a ppt-vel párhuzamosan, illetve a tanítók döntésének megfelelően közvetlenül előtte, illetve utána kapták a cselekvéses feladatokat, vegyes életkori csoportokban a tanulók, majd ezt követte a tapasztalatok megbeszélése, leírása.

Az órákon

- Előkészítés
- A bemutató megnézése és közben beszélgetés
- Tárgyi tevékenység, rajzolás, problémamegoldás szimbolikus síkon is
- Mi történt az órán? beszélgetés, tudatosítás
- A tanulók írásos visszajelzése

Az órák után

- A pedagógusok írásos beszámolója az órákról
- A kutatásvezető visszajelzése

- Az új téma előkészítése

A választott témák

A szokásos aritmetikai, síkgeometriai, logikai feladatokhoz az analízisből, térgeometriából, topológiából, matematikatörténetből és egyéb területekről is kapcsoltunk problémákat. Ezzel nem a nehezítés, hanem a könnyítés volt a célunk.

A prealgebrai feladatok (pl. Hogyan változik a különbség, ha a kisebbítendőt és a kivonandót is ugyanazzal a számmal csökkentjük?) a jó számfogalomra, tehát már egy jó absztrakciós szintre épülő újabb absztrakciót jelentenek, ezért a számokkal, a számok jelölésével csak most ismerkedő, de egyébként okos gyerekeknek is túl nehezek, túl elvontak.

Az első évben négy területtel foglalkoztunk kiemelten. Ezeket a témákat korábban már felsoroltam, most kissé részletesebben is bemutatom őket.

Olyan témákat választottunk a tantervi anyagból, amelyeket a tanítók nehéznek tartottak, és nem is nagyon tudtak magyarázatot adni arra, hogy miért olyan nehezek ezek a témák. Az egyes témaválasztások indoklását az összevont tanulócsoportos iskolák pedagógusaival folytatott beszélgetések alapján fogalmazom meg.

1. *Mérés, becslés, mértékegységek*

   Miért nem tudnak mértékegységet váltani? A tanítók nem látták, hogy milyen sok részismeret és milyen fejlett absztrakciós képesség szükséges a mérés, mértékegység lényegének megértéséhez. Nekünk sem volt a problémákat megoldó csodaötletünk. A segítséget az jelentette, hogy észrevették a tanítók, mennyi buktató van a méréses, mértékegység átváltásos feladatokban, így eredményeket csak hosszú távon lehet remélni, azonban a nehézségek egy része leküzdhető élményt adó, szórakoztató tevékenységekkel is. A tanulók olyan feladatokat kaptak, amelyekben a mérésekkel összefüggésben valamilyen problémát kellett megoldani.

   Ilyen volt az öntögetős feladat a számunkra egyszerű, de a tanulók egy részének problémát jelentő kérdése: ha az adott folyadékmennyiséget kétszer akkora űrtartalmú pohárral mérjük, akkor hogyan változik a mérőszám. A képek éppen azt tették lehetővé, hogy a feladat világosan megfogalmazható legyen az előző mondat ijesztő szakkifejezései nélkül, így a válasz is egyszerűvé vált a már meglévő tapasztalatokra építve.

   A mértékegységváltást egyszerű, mechanikus feladatnak tekintették a pedagógusok, nem gondolva arra, hogy az a mérésekkel kezdődő bonyolult absztrakciós folyamat, amelynek matematikai hátterét a mértékelmélet jelenti.

   A mérésekhez becslési feladatokat is kapcsoltunk. Gyakori, hogy a becslés lényegét, a kiszámítást könnyebbé tevő voltát nem értik a tanulók.

2. *Térbeli tájékozódás*

   A pedagógusok rendszeresen felmérik az elsős tanulók térbeli tájékozódási képességét. A vizsgálatunkban részt vevő pedagógusok elmondták, hogy korábban rögzítették a tanulói eredményeket, majd később nem foglalkoztak a problémákkal. Ezzel a programmal segítettünk a fejlesztésben, ötleteket adtunk, és bátorítottuk a tanítókat saját ötleteik kipróbálására.

3. *Számolás és érvelés, matematikatörténeti érdekességek*

   A gyerekeknek meg kell mutatnunk, hogy a számolás része az emberek életének, nemcsak iskolai, iskolás feladat. A számolás révén egy másik, érdekes kultúra belsejébe kerülünk.

4. *A bizonyítás fogalmának előkészítése*

   Sok gyerekben – a pedagógusok egy részében is – olyan kép él a matematikáról, hogy ez az a tudomány, ahol minden biztos, egyértelmű. Meg kell mutatnunk, hogy a kételkedés nem az ellenállás, a motiválatlanság jele, hanem a matematika lényege. Az állításokban addig kételkedünk, kételkednünk kell, amíg azokat nem bizonyították be.

5. *Adatgyűjtés, becslés, táblázatkészítés*

   A szöveges feladatok nagyon nehezek a gyerekek jelentős hányada számára. a nagy, nemzetközi jelentőségű kutatások eredményei és saját tapasztalataink alapján a szöveges feladatok rejtett logikai finomságaihoz el sem jutnak a gyerekek, mert a szövegértés hétköznapi értelmében sem értik meg a feladatot. Nem értik azt a szituációt, amely a feladatot tartalmazza és azt sem, hogy nekik miért kell az adott témával foglalkozni. Az általunk választott keret az utazás volt. Az utazás, általánosságban ismerős szituáció, és a macik története miatt személyessé vált a helyzet, az utazási költség kiszámítása értelmes feladat volt. A differenciálódás lehetősége leginkább ebben a témában nyilvánult meg:

   - voltak, akik képeseknek bizonyultak jó becsléseket adni a változó feltételekhez igazodva
   - voltak, akik a becsléssel nem is próbálkoztak, de képeseknek bizonyultak korrekt számolások elvégzésére
   - néhányan a számolás helyett vonat- és repülőjegyeket terveztek, rajzoltak és színeztek, ezzel a szituációt értelmezték a maguk számára, bár nem matematikai, de a matematikai megértést előkészítő tevékenységet végeztek

6. A becsléssel kapcsolatos problémák

   A tanítók látták, hogy a becslés nehéz a tanulók számára, elmesélték például, hogy amikor többjegyű számok szorzatát kell megbecsülni a tanulóknak, titokban elvégzik az írásbeli szorzást, majd a kapott eredményhez közeli számot adnak meg becslésként.

   Feltételezhető, hogy a számfogalom bizonytalanságának egy meg-nyilvánulási formájával találkozunk: az írásos műveletek algoritmusát megtanulták a diákok, de az általuk is használt számok jelentésével sok a probléma, azok nagyságrendjét, egymáshoz viszonyított értékét, a műveletvégzés hatását nem érzik. Az utazási szituációban a közelítő számításnak könnyen látható értelme van. A számolást tágabb összefüggésbe helyeztük, így a számolást motiváltuk, és a statisztika tanulását is előkészítettük.

Képek által irányított tanulás

A kommunikáció fő eszköze a kép volt. A matematikai témákra a mackócsalád életének eseményeivel irányítottuk a tanulók figyelmét. Így valósítottuk meg, hogy a tervezett problémák kerüljenek elő, ugyanakkor a gyerekeknek is megadtuk a lehetőséget, hogy ezeket a témákat a maguk módján kapcsolják saját életük tapasztalataihoz.

A didaktikai irodalomban sok szép, oktatási alkalmazásra kínált, kidolgozott téma olvasható, amelyekben egy-egy tanulói kérdésből kiindulva, a tanulók kíváncsiságára építve, szinte észrevétlenül tanulják meg a tanulók a matematikai tananyagot. A példák meggyőzően mutatják azt az élményt, azt a tanulói aktivitást, amiből kiindult a szépen felépített oktatási egység. Más osztályok tanulói számára azonban az esetek nagy részben ez a megközelítés éppen úgy kívülről jövő gondolat, mint a hagyományos tankönyvi felépítés. A macicsalád történetei indirekt módon irányítják a tanulók figyelmét.

A képsorozat módszertani mintát adott a pedagógusoknak. Lehetőségeket kínált a folyamat sokszempontú elemzésére, ezzel is segíteni kívántuk a tanítási tudatosságot.

Mintát adott a gyerekeknek is: utánozni lehet a macikat. A legelső diasorozatba be is illesztettünk néhány mondatot, ahogyan a macik megfogalmazták, mit történt, miközben az öntögetéses űrtartalom mérésről tanultak. A gyereknek mutatott példáink:

„Kis pohárból több kell.

Először találgattunk, azután kipróbáltuk.

Matekórán is lehet pancsolni.

Nem kellett sokat olvasni, mert minden le volt rajzolva.

Tetszettek a mackók.

Az otthoni poharakkal is kipróbálom"

Ezzel sikerült a gyerekek figyelmét ráirányítani magára a tanulási folyamatra is. A nyelvi akadályok csökkentek azáltal, hogy a tanulók látták azt a szituációt, ami a matematikai probléma keretét jelentette, és így azt is látták, hogy mi a feladatuk. Ötleteket mutattunk a tárgyakkal végzett munkára: a macik olyan tárgyakkal tevékenykednek, ami az iskolába is bevihető, nem veszélyes, nem drága, könnyen elérhető, ugyanakkor új tapasztalatokra lehet szert tenni általuk.

Például nagy sikere volt az egyensúly játéknak. Ez a játék kézügyességet igényel, az egyensúlyérzéket fejleszti, látszólag nem kapcsolódik matematikai képességekhez. Mégis, igen nagy a matematikatanulási jelentősége, hiszen az egyenletek megoldását a mérlegelv alapján tanítjuk, miközben a mai gyerekek alig találkoznak kétkarú mérleggel. A gyakorlatban is használható mérleg egyensúlyi helyzetét könnyebb megtalálni, mint egy körlapét a véletlenszerűen ráhelyezett tárgyakkal. Éppen ezért úgy gondoljuk, ezáltal emlékezetes élményt nyújtottunk a tanulóknak, és azt remélhetjük, hogy e játék tapasztalatait a tanulók majd át tudják vinni a mérlegelv tanulására, és így gazdagabb jelentéstartalommal fognak telítődni a mérleges tankönyvi ábrák is.

Egy óra bemutatása, a matematikatörténeti téma, óraleírás

Az órákon a matematikatörténet jelentős szerepet kapott, mert a tananyag gazdagításának egyik célszerű módja a matematikatörténet alkalmazása. Elsősorban a régi számírásokat tanítottuk, mert általuk

- újabb indokot tudtunk mutatni számok használatára, motiváltuk a tanulókat a számolásra
- a tanulók megtapasztalhatták, hogy többféle számírás létezik,
- szemléletessé válik a megállapodás (a konvenció) szerepe a matematikában (másrészről ezzel megkezdhetjük az axiómák felé vezető utak kiépítését is)
- bepillantást nyertek egyik másik kultúrába, a matematika által annak részévé váltak, példát láthattak a különböző kultúrák egymás mellett, egymás után létezésére
- olyan új ismeretet sajátítottak el, ami különlegesség, ami a család és az ismerősök előtt a magas műveltség tekintélyét adta az iskolás gyereknek.

Két témát választottunk, ezek az egyiptomi számírás és egy, a Pitagorasz-tételt előkészítő, szemléletes állítás empirikus vizsgálata voltak.

A munkát ebben az esetben is egy diasorozat szervezte. A két témának megfelelően két részből állt, az első az egyiptomi kalandozás, a másik a görög volt.

Az egyiptomi számírást azért választottam, mert a hieroglifák megismerése a beavatottság érzését, a magas műveltségbe való betekintés lehetőségét nyújtja. A matematikatörténetnek az egyiptomi matematika fontos része. Az egyiptomi eredetű szorzást és osztást még a középkorban is rendszeresen tanították és használták Európában a helyiértékes számírás elterjedése előtt. A különleges és matematikailag hiteles számírás megtanulása könnyű, annak szigorúan additív felépítése miatt, természetesen ennek ára is van, az alapműveletek elvégzése nehezebb, mint a helyiértékes számírásban, de érdekességképpen a szorzás megtanulható, sokaknak örömet szerez. A római számok is sok szempontból megfeleltek volna céljainknak, de az egyiptomi előnye volt éppen annak ismeretlensége, ami nemcsak a gyerekekre hatott erős motiváló erővel, hanem a pedagógusok is most ismerkedtek vele, ezért természetesebb volt a lassabb, türelmesebb haladás. További előnyt jelentett, hogy a számjegyeket nem betűk, hanem egyéb jelek jelölték. A témák kiválasztása során figyelembe vettem a korábbi tanítási, tanárképzési tapasztalatokat is, amelyek egy része szakdolgozatban is megjelent (Rózsahegyi, 2006)

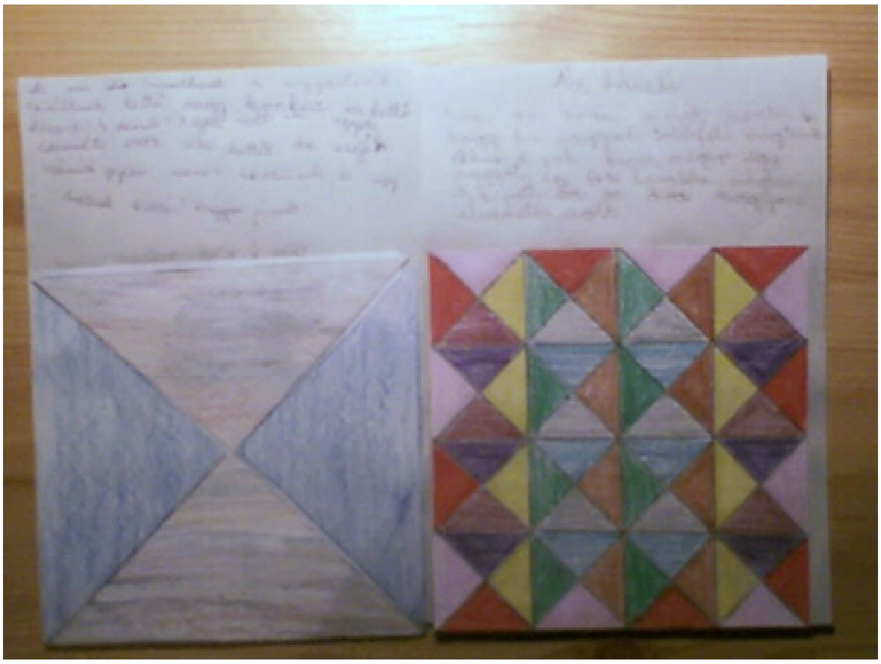
Ismerkedés a görög geometriai gondolatokkal

A Pitagorasz-tétel mélyen beépült az európai közgondolkodásba, ezért választottam ezt a tételt.

A Mi az, hogy bizonyítás? – kérdés megismertetése felé vezet el ez a téma. A hipotézisek felállítása és döntés azok igazságértékéről természetes emberi tevékenység, alapvetőbb, mint a számfogalom és a számolni tudás. Ezért, már igen hamar megérthetik a tanulók, hogy mit jelent egy matematikai állítás, és vizsgálhatják annak igazságtartalmát is. (Közvetlenebb célom ezzel a feladattal a számelméleti és elemi geometriai igaz-hamis állítások előkészítése.)

Természetesen a szabatos matematikai bizonyításra csak sokkal később érnek meg a tanulók, itt csak felvillantottuk a hipotézis ellenőrzésének egy lehetőségét. A Pitagorasz-tétel előkészítéseként szemléletes kérdést választottam: csokoládék közül kell választani. A csokoládékat négyzet alakú papírlapok szemléltetik, a választási lehetőség: egy nagy, 14 cm oldalhosszúságú négyzet, illetve két kisebb, 10-10 cm oldalhosszúságú négyzet.

Innen indulva többféle úton haladtak a kollégák. Volt, aki megkérdezte a gyerekeket, ők melyiket választanák, a két kicsit vagy az egy nagyot. S ezután ellenőrizték a döntést. Volt, aki elmondta a gyerekeknek, hogy mindegy, melyiket választják (egyenlő vastagságot feltételezve), a két csokimennyiség megegyezik. A gyerekek nem hitték el, ezért tanítójuk javasolta az állítás ellenőrzését, amit tárgyi szintű hipotézisvizsgálattal valósítottak meg. A gyerekek átdarabolással, valódi, ollóval végzett átdarabolással próbáltak meggyőződni az állítás igazságáról. Az átlós irányú vágás megtalálásához segítségre volt szükségük, de az ötlet annyira megragadta őket, hogy kértek még színes papírokat, és szép ritmusú ábrákat, képeket készítettek. Erre a tapasztalatra (is) építhetünk a felső tagozaton a szabatosság felé vezető úton.



1.54. ábra. Egy 9 éves tanuló munkája

A tanítók és a gyerek által írt beszámolók tapasztalatai

A tanítók írásos beszámolói több célt is szolgáltak. A távoli kisiskolákkal interneten keresztül kommunikáltunk. Így küldtük el és kaptuk meg az információkat, a kutatást e nélkül lehetetlen lett volna megvalósítani. A tanártovábbképzést is szolgálta a pedagógusok önreflexiója és a kapott beszámolókból készített összefoglalók eljuttatása minden résztvevőhöz. A pedagógusokkal egyéni levelezés formájában is tartottam a kapcsolatot.

A feladatok a hagyományos matematikai feladatokhoz képest szokatlanok voltak, talán túl egyszerűnek tűnhetnek, olyanoknak, amikkel nem is érdemes a tanulóknak foglalkozniuk. A tapasztalatok cáfolták ezt az aggodalmat.

„A poharas feladatot elvégeztük, a gyerekek leírták az észrevételeiket. Mindenki öntözgetett, de először meglepetésemre nem sok jelentkező akadt a feladatra. Nézték egymást, figyeltek, hogy ki jelentkezik. Hármasával méricskéltek, és hirtelen minden kéz a levegőben volt, hogy öntözgetni szeretne, így minden gyerek méricskélt. Tehát a lelkesedéssel nem volt probléma. Elhangzott, hogy nagyobb edénnyel sokkal egyszerűbb teletölteni bármit, mert kevesebbszer kell meríteni. Azt sajnálom, hogy otthoni folytatásra egyik tanuló sem gondolt, nem vetítették ki a mindennapi tevékenységekre. A harmadikos tanulók, mivel ők ezt már tanulták, a matematika nyelvén fogalmazták meg gondolataikat. Beszélgetés után (adtam ötletet, hogy otthon üvegekbe, különböző nagyságú üvegekbe lehet töltögetni, ez megmozgatta a fantáziájukat) elhangzott a homokozás. – Megmérem, hogy a homokozó vödrömbe hány kispohár víz fér. – Anyukám hány pohár tejből készít tejbegrízt. Összegzésül: tetszett a feladat, remélem a következőnél szabadabban tudnak majd gondolkodni és fogalmazni." (D. Márta)

A kezdeti visszahúzódás láthatóan nem azért van, mert túl könnyű, triviális a feladat, hanem a bizonytalantól való félelem miatt. Mennyivel erősebb lehet ez a félelem, ha matematikai problémát kell egyedül, írásban, tétre menően megoldani. Ezért nagyon fontos, hogy a konkrét tapasztalatokon túl bátorítást kapjanak a tanulók a próbálkozásra, ami a későbbi munka során várhatóan interiorizálódik.

Ebben a példában nagyon jól látszik, hogy a mértékegységváltásban lévő összefüggés a mérőszám és a mértékegység között milyen egyszerűen, szemléletesen, nyilvánvaló tudásként fogalmazható meg hétköznapi nyelven: nagyobb edénnyel sokkal egyszerűbb teletölteni bármit, mert kevesebbszer kell meríteni. A mértékegységváltási feladatokat a gyerekek mégis gyengén oldják meg a felmérésekben, és e mögött nemcsak technikai hiányosságok, a váltószámok nem ismerete áll, hanem a kapcsolat hiányzik a hétköznapi, ismerős tevékenység és a matematikai feladat között. Hasonló eredményeket mutat be Az utca matematikája című könyvében Theresina Nunes.

A következő példa azt igazolja, hogy nehéz a pedagógusoknak a hagyományos szemléltetésről áttérni a tárgyi problémamegoldásra. A feladat testek építése volt, valamint a jobb-bal oldal megállapítása álló és mozgó tárgyak esetében.

„A foglalkozásnak nagy sikere volt, érdekesnek találták a gyerekek, örömmel készítették el a testeket. Először megbeszéltük a háromszög és a négyszögek tulajdonságait – élek, sarkok számát, majd a térbeli formákat bemutattam mintadarabok segítségével. Kerestünk a tanteremben hasonló tárgyakat, majd megbeszéltük a lapok, csúcsok élek számát. Hozzáfogtunk ezután az építéshez, mely nagyon könnyen ment az elsősöknek is, aminek nagyon megörültem, mert azt gondoltam, ez még nehéz lehet számukra. A nagyobbak pillanatok alatt több testet is készítettek, nagyon büszkék voltak a teljesítményükre. A nehezebb feladat ezután jött, azt kértem tőlük, mint a pilóták a sötétben, úgy navigálják ők is a társukat, amikor egymásnak háttal kellett építeniük. Ezt is sikeresen megoldotta a többség, főleg a 3.-4.-es tanulók. A kisebbeknél többen mondták közben, hogy nem értik, nehéz az utasítást követni, de kis segítséggel sikerült a feladatot megoldani. A térirányok gyakorlásához számomra is izgalmas játékot találtam ki: kineveztünk egy mozdonyvezetőt, a többiek felsorakoztak egymás háta mögé, beszálltak a vonatba egymás vállát fogva. Majd megkértem őket, hogy csukják be a szemüket és csak a mozdonyvezetőt irányítottam. A tanteremben és a folyosón kellett lassan, egymásra vigyázva haladniuk. Előre, hátra, jobbra, balra, mellé, mögé stb. szerepeltek az utasításban." (M. Judit)

A hagyományos szemléltetésre utalnak a kiemelt szavak: Először megbeszéltük a háromszög és a négyszögek tulajdonságait – élek, sarkok számát, majd a térbeli formákat bemutattam mintadarabok segítségével. Kerestünk a tanteremben hasonló tárgyakat, majd megbeszéltük a lapok, csúcsok élek számát. Ugyanakkor ez a beszámoló azt is megmutatja, hogy a mozgásos problémamegoldás során a pedagógus milyen alkotó módon dolgozott, egy későbbi beszámolóban írta, hogy „mint a pilóták a sötétben, úgy navigálják ők is társukat”. És a pedagógus – bár ezt explicit módon nem írta le – kreatív módon alkalmazkodott a gyerekek eltérő életkorához, képességeihez: mivel az egyéni munka nehéznek bizonyult ezért a gyerekek csoportosan megoldható, játékos feladatot kaptak: „kineveztünk egy mozdonyvezetőt, a többiek felsorakoztak egymás háta mögé, beszálltak a vonatba egymás vállát fogva”.

Hasonló tapasztalatokról számolt be a tanítónő egy másik iskolából.

„Elindítottam a ppt-t, nagyon örültek, többen mondták: Ezek a mackók, ezeket már ismerjük!

A fás kérdésre úgy válaszoltak, hogy hármat számoltam, és mindenki azt a kezét emelte a magasba, amely irányt helyesnek tartotta. A fánál csak egy tévedés volt, ám a Melyik autó kanyarodik jobbra? kérdésnél már többen hibáztak. Hogy pontosíthassuk a választ, krétával a parkettára rajzoltam az útkereszteződést, és két széket raktunk ki, a bizonytalankodók a „vezetőülésbe” ültek, így megfigyelhették, merre tekerik a kormányt, merre kanyarodik az autó. Persze az is ráült a székre, aki jól válaszolt, mert hát ezt ki kellett próbálni. (Jónás Ádám pl. 3. osztályos, tökéletesen biztos a térirányokban, de állította, hogy ő a kék autót válaszolta, tehát ki kell próbálnia.)” (K. Maca)

A gyerekek kitartó, elmélyült munkáját dokumentálja ez a fotósorozat, S. Zita tanítványai láthatók a képeken.

1.55. ábra.

A megtervezett kommunikációs lehetőség és az érdekes feladatok a gyerekekből kommunikációs aktivitást váltottak ki. A következő beszámolót elküldő tanítónő osztályában a legérdekesebb feladat a matematikatörténeti ismeretek, ezen belül az egyiptomi számírás tanulása

1.56. ábra.

volt. A gyerekek örömmel vettek részt ezen az órán, és viszonylag hosszú beszámolókban le is írták élményeiket, amelyekhez tanítónőjük megjegyzéseket is fűzött.

- Azt tanultam meg, hogy mit jelentenek a hieroglifa rudak, és azt, hogy elől vannak a kis számok, hátul a nagyok, és azt, hogy a falba ütötték bele az élüket. Nagyon jól éreztem magam, mert találgatni kellett és szorozni. (2. o.) – ő ügyes kislány, de ilyen aktív még sosem volt, sőt a legtöbb okosságot ő mondta ezen a foglalkozáson.

- Nagyon tetszett a hieroglifák tanulása. Jó volt, és könnyen ment. Jó, hogy tudom, hogyan kell írni. Remélem, hogy még fogunk ilyet írni. (2. o.)

- Azt tanultam meg, hogy a fáraók nem tudtak írni, csak az írnokok. Hogy a sivatagban a hieroglifával az írnok hogy szoroz. Azért volt jó, mert számolnunk is kellett, és ötletes kérdések is voltak. (3. o.)

- Azt tanultam meg, hogyan kell egyiptomiul számolni. Jó volt, mert izgalmas volt. (4. o.)

- Fordított sorrend, nem tudtak írni, csak az írnokok. Jól éreztem magam. (4. o.) – a másik legaktívabb gyermek ezen az órán. Ő az, aki rendszeresen nem készít házi feladatot, nem olvas, rengeteg időt tölt a tévés rajzfilmek előtt, de ő ismerte egyedül a hieroglifa szót, és ezekből a rajzfilmekből egyiptomi istenek, fáraók nevét sorolta.

- Azt tudtam meg, hogy az arab számok számjegyeinek összege = a hieroglifás számjeleinek összegével. Nagyon jól éreztem magam, mert az ilyen feladatok érdekelnek. (4. o.) – ő a legmatematikásabban gondolkodó tanulónk, aki hamar megfogalmazta az előbb leírt összefüggést.

- Azt tudtam meg, hogy Görögországban római számmal írnak, Ázsiában hieroglifákkal. (mi Afrikáról beszéltünk és a múltról). Jól éreztem magam, mert sok mindenről meg-

1.57. ábra.

tudtam valamit, és csendben volt mindenki, és figyelt, amit a tanító néni mondott. (4. o.)

- Azt tanultam meg, hogy amikor írjuk a más számot, akkor hátulról kezdjük. Jó volt, mert dolgoztunk, és gondolkoztunk is. (4. o.)

- Sok mindent megtanultam. Érdekes, hogyan éltek a múltban. Furcsa a jelük, ahogy a falra írtak. Remélem, sok ilyenféle feladat lesz. Nekem nincs rossz gondolatom, mert tetszett az egész. (4. o.) (S. Zita tanulói)

A nagy érdeklődést tükröző beszámolókból kiolvasható néhány tévedés is, ami részben a PowerPoint prezentáció leegyszerűsítéseiből származik. A félreértésekre e-mailben hívtam fel a tanítónő figyelmét, és javaslatokat írtam azok korrigálására is.

Később egyensúly játékot is tanítottam, pontosabban a macik tanítottak a gyerekeknek. Az ismeretfejlesztési cél az egyensúly fogalmának megismerése volt, ezzel a későbbiekben sok gondot okozó mérlegelvet készítettem elő szemléletesen. A másik cél a problémamegoldási folyamat gyakorlása volt. A feladat világos, egyértelmű: minél több apró tárgyat kell felhelyezni a körlapra úgy, hogy az ne boruljon föl. A feladat mégsem egyszerű, mert a lemez könnyen felborul, ugyanakkor már egy-egy darab rárakása is már látható sikert jelent. Hibázás után gyorsan újra lehet kezdeni próbálkozással, stratégia keresésével.

A tanítók kérése alapján beiktatott szöveges feladatot is szituációs játék keretében kapták a gyerekek. A direkt szövegezésű feladat: „Mennyibe kerültek a jegyek, ha az egyes jegyek ára és mennyisége adott?”, előkészíti a szokásos indirekt szövegezésű feladatokat. A feladat, egyszerűsége ellenére azért volt mégis problémamegoldás, mert a gyerekek maguk gyűjtötték össze az adatokat (utasok száma, jegyek ára, az utazási kedvezmények változatai), megbecsülték a várható részösszegeket. Így végül a kiszámoláskor kapott végeredmény a bennük megfogalmazódott kérdésekre adott válasz volt.

1.58. ábra.

„Az utolsó téma megvalósításához óvónő kollégámat is bevontam. Nem volt nehéz, mivel egy épületben van az iskola és az óvoda. Az óvó néni bejött megkérdezni a Megy a gőzös című gyerekdalt, amit az óvodában tanított nekik, de most nem jut eszébe. A gyerekek nagy örömmel igyekeztek felfrissíteni kolléganőm emlékezetét, eljátszva és elénekelve a dalocskát. Ekkor én megjegyeztem, hogy igen sok utas van azon a vonaton jegy nélkül.

Természetesen azonnal nagy jegy-gyártásba fogtak, mindenki elképzelése szerint. Megbeszéltük, hogy kik utaznak, milyen jegyet vásárolnak és hol. Amikor a jegy elkészült, nem volt hol eladni, megvásárolni, ezért kénytelenek voltunk utazási irodát nyitni. A jegyek árának a meghatározásánál a kisebbek is nagyon hamar ráéreztek a különbségekre, az arányokra. A becslésekkel is megbirkóztak, amíg egy napot, kisebb számokkal számolgattunk. Miután eldöntöttük, az iroda beindításában mindenki részt kell vállaljon, az I.-II. osztályosok külön feladatot kaptak. Hirdetéseket fogalmaztak meg, plakátot terveztek az iroda reklámozásához. A IV. osztály dobókocka segítségével egy napra meghatározta az eladott felnőtt, gyerek és csoportjegyek számát, majd kiszámolta ezek számát egy hónapra, külön-külön. Következett az összes eladott jegyek száma, majd ezek értéke. Nagyon érdekes volt látni az izgalmat, vajon mennyi pénzünk lesz? A végén levő játék síri csendet váltott ki, még a lélegzetüket is visszatartották az én izgága, zajos gyermekeim.

Ők mondták:

„Megmondom apukámnak, utazási irodát nyisson, én majd készítem a jegyeket – repülőt veszek, de csak felnőttjegy lesz, a gyerekeket ingyen viszem – nem szeretem, mert nem engedték, hogy én tegyem a lapra a gyufaszálat.” (T. Tünde, Kiskapus, Románia) A tapasztalatok azt mutatták, hogy a feladatok alkalmasak a differenciálásra. A mintába két gyógypedagógiai csoport is bekerült, idézek egy ilyen osztályból érkezett beszámolóból is. A tanítók a gyerekek képességeihez alkalmazkodva vezették az órákat, a gyerekek pedig egyéni képességeik szerint vették ki a részüket a közös munkából.

„A negyedik matek témát is megoldottuk. Nagyon örültem az elnagyolt feladatadásnak, mert nekünk ez bizonyult a legnehezebbnek. Jócskán leegyszerűsítve a következőt „csináltuk”

1.59. ábra.

belőle: a kerettörténetet felhasználva fogalmakat tisztáztunk (utazási iroda, teljes árú jegy, kedvezményes stb.), majd el is játszottuk az utazásszervezést. A kialakított csoportok saját budapesti utazásukat tervezték: jegyeket készítettek, tippeltek – nagyon messze voltak a reális értéktől, pedig kis számokat használtunk – rögzítettük ezeket az adatokat táblázatba. Az ügyességi játék nagyszerű volt, mindannyian rendkívül élveztük! A beszélgetéskor elhangzottakból:

- Nagyon tetszett, hogy csináltunk jegyeket. Ráírtuk, hogy felnőtt, meg gyerek, meg kedvezményes. Meg összeszámoltuk, hogy hány forintba kerül.
- Az tetszett, amikor, készítettük a jegyeket, meg még az, hogy nagyon szépek voltak a filctollak. Más színekkel csináltuk a jegyeket. Én a gyerekjegyet csináltam, 2 forint volt.
- Nekem tetszett az üveges feladat. Rá kellett tenni az üveg tetejére a golyót, a golyóra pedig a kerek lapot és azokra a tárgyakat tenni, hogy nehogy leessen. A matematikában nekem az nem tetszik, hogy kivonást kell csinálni. A szövegértés feladatokat szeretem. Sajnáljuk, hogy a mateknak vége, hiányozni fognak ezek az órák! Sokat tanultunk általa, belőle és róla. Köszönöm az érdekes feladatokat, a jól követhető instrukciókat, a segítő, bíztató visszajelzéseket! Kíváncsian várjuk az utómérést. A meglévő anyagokat majd postázom." (M. Zsuzsa)

A tanítónő szabadkozása ellenére a beszámolók azt mutatják, hogy az órák hangulata, a gyerekek aktivitása, sőt a megszerzett, a matematikatanulás szempontjából lényeges tapasztalatok között nincs nagy különbség, ezek jórészt függetlenek a gyerekek képességeitől. A továbblépés lehetőségei viszont lényegesen mások. A gyógypedagógiai csoportban a pozitív élményként megélt matematikatanulási problémamegoldás erőt, kedvet adhat a „kivonáshoz", amint azt az egyik gyerek jelezte, utalva tanulási nehézségeire.

A tehetséges gyerek számára pedig sokfelé nyitott az út, számukra a tantervi anyag gazdagítható, versenyfeladatokkal és más matematikai problémákkal. A történet nyomán bonyolultabb,

1.60. ábra.

logikai összefüggések kibontását is igénylő szöveges feladatok, például az árakkal kapcsolatosak és a mozgásos feladatok irányába is érdemes elmenni. Folytatható a dobókockás tapasztalatok gyűjtése, ez elvezethet kombinatorikai és valószínűségszámítási feladatokhoz.

A reális adatok gyűjtése, táblázatok készítése, statisztikák olvasása pedig a gyakorlatközeli feladatokon keresztül vezet el matematikai, alkalmazott matematikai problémák megértéséhez.

Összegzés A tapasztalatokat összegezve megállapíthatjuk, hogy a PowerPoint bemutatók, kiegészítve a módszertani levelekkel és a tanítók közötti tapasztalatcserével és tudásmegosztással, lehetővé tették a kísérleti oktatás megszervezését ebben az egyébként pedagógiai kutatásokban szokatlan formában is, ahol a kísérletvezető nem lehetett jelen az órákon, és a pedagógusoknak szóló információk nem voltak előzetesen minden részletükben kidolgozva, azok módosultak a munka során kapott visszajelzések alapján. A kísérlet során a rendszeres internetkapcsolat és az alkalmankénti személyes megbeszélések révén bebizonyosodott, hogy a tanulók matematika órai aktivitása jelentősen megnőtt. Olyan munkát végeztek, olyan feladatokat oldottak meg, amelyeket korábban nem voltak képesek. A gyerekek rendszeres visszajelzést kaptak teljesítményükről. Hasonlóképpen a pedagógusok is azonnal értesültek végzett munkájuk értékéről, és segítséget kaphattak a félreértések tisztázásához, a felmerülő problémák megoldásához.

5. Esettanulmány, a poliéderek tanítása

- A vizsgálat előkészítése, háttérmunkálatok

  Bruner kísérletei alapján „bármi megtanítható a gyerekeknek az ő szintjükön”, úgy gondoltam, hogy a szokásosnál bátrabban lehet választani problémákat a nehéznek tartott matematikai területekről is. Támaszkodtam Varga Tamásnak a szorzótábla tanításval kapcsolatban megfogalmazott véleményére is: ha a gyerekek izgalmas problémákat oldanak meg, amelyek keretében a szorzásra is szükségük van, szinte észrevétlenül, külön erőfeszítés nélkül megtanulják az 1x1-et is.

1.61. ábra.

- Tanítási stratégia

  A tananyag tartalma a tanulók képességeihez igazodik, ami a normális eloszlást követi, és nem, vagy igen kevéssé függ a tanulók társadalmi, hátrányos helyzetétől, tehát a megszokottnál nehezebb tartalmakról van szó A tanítás stílusa a tanulók kommunikációs képességeihez igazodik: az új ismeretek, feladatok, problémák tárgyi, cselekvéses szinten fogalmazódnak meg a képek narratív kontextusba kerülnek, mert a steril ábrák nehezen érthetőek, a vizuális környezet megtervezésével és a problémák történetbe helyezésével tesszük érdekessé, érthetővé, jelentéssel telítetté a geometriai ábrákat is a szimbolikus szinten alkalmazzuk a verbális kommunikációt, segítjük a tanulókat, hogy tapasztalataik megfogalmazásával tudatosítsák tapasztalataikat, és ezzel egy időben tanítjuk a matematika jelölési technikáit is.

- A kommunikációs képesség fejlesztése

  Mivel a hátrányos helyzetű tanulók legközvetlenebb tanulási akadálya a kommunikációs képességek iskolában elvártnál alacsonyabb szintje, ezért ennek fejlesztésére kiemelt figyelmet fordítunk. Alapvetően arra építhetünk, hogy a tanulóknak nincsenek pszichológiai értelemben beszédfejlődési zavaraik, a saját családi környezetükben az ott kialakuló élethelyzeteknek megfelelően kommunikálnak, de az iskolában mást várnak el tőlük. Kétféle segítségre van szükségük: a nyelvi eszközeik gazdagítására, és az eszközök hiányosságai miatt kialakult gátlások és hibás stratégiák oldására. A fejlesztéseket a következő területeken valósítottuk meg:

  – A kommunikációs szándék és akarat segítése

    A szövegek belső kohéziójának erősítése, ezen belül az egyszerű logikai összefüggések, ÉS, VAGY alkalmazásának gyakorlása A szókincs bővítése olyan új fogalmak szisztematikus bevezetésével, amelyeket szerencsésebb körülmények között spontán módon sajátítanak el a tanulók

– Társas kapcsolatok fejlesztése

  A hátrányos helyzetű tanulók gyakran elszigetelődnek. Az összevont tanulócsoportos kisiskolákban ezt az elszigetelődést a hagyományosan kialakított tanulási formák felerősítik: a kis, gyakran csak 3-8 fős osztálylétszámok miatt a pedagógusok nem alkalmaznak csoportmunkát, vagy az egész osztállyal foglalkoznak, vagy egyéni munkát végeznek a tanulók. (A későbbi iskolafokokon a kisiskolák tanulói kitűnnek azzal, milyen magas szintet érnek el az önálló munkában, bár ez valószínűleg a fegyelmezettségüket jelenti és nem a kreativitásuk magas szintjét.) Rendhagyó óráinkon a csoportszervezésnek különböző formáit alkalmaztuk. A tanulást közösségi élménnyé tettük. A csoportfeladatok miatt kialakult tanulói viták és azok megoldásai a kommunikációs képességek fejlődését közvetlenül is segítették.

- Céljaink a poliéderek tanítása során:

  A gyerekek ismerjenek rá a poliéderekre, meg tudják különböztetni a poliédereket az egyéb testektől. Ismerjék fel, hogy a poliédereket az élek-lapok-csúcsok számával jellemezhetjük.

  A téglatestek tekintetében a matematikailag szabatos fogalomépítés megkezdése Segítségnyújtás az önálló problémamegoldásban. A tanulás új, aktív és kreatív módszereinek megismertetése.

- A tanulási folyamat menete

  A tanítási órák felépítése a korábbiakban kialakult vázlatot követte. A pedagógusok bevezették a témát, majd megnézték a PowerPoint bemutatót. Ezek után a tanulók tárgyi problémamegoldási feladatokat kaptak. Az órák a tapasztalatok és az élmények megbeszélésével zárultak. Az elkészített, az órákon bemutatott prezentációkat és az alkalmazott munkafüzetet CD-n mellékelem.

- A részvizsgálat mintája

  A munkának ebben az intenzívebb szakaszában négy iskola vett részt. Az esettanulmányban a B jelű iskolában szerzett tapasztalatokat elemzem. A negyedik osztálynak hat tanulója van.

  A poliéderek kísérleti tanítását mind a négy iskolában megvalósítottuk. A dolgozatban a négy közül az egyikben szerzett tapasztalatokat mutatom be. A következő táblázat fejlécében a számok, illetve a számpárokból az első számok, a vizsgálat idejére, (1) elővizsgálat, (2) utóvizsgálat, a második számok a motivációs szintekre utalnak.

A szöveges válaszok rövid ismertetése

Név	Omt K1	Omt T1	Omt H1	Omt K2	Omt T2	Omt H2	Írás-kép1	Írás-kép2	Mat.	Ma-gyar
B. Dorina	4	4	3	4	3	3	2	2	4	4
B. Regina	4	4	5	4	4	1	2	2	2	3
B. Szabina	5	2	3	4	3	3	2	2	4	4
C. Ágnes	5	4	4	3	1	2	3	3	4	5
M. Pál	5	1	5	4	3	5	2	3	3	3
R. Laura	4	4	4	5	4	3	2	2	3	3

1.62. ábra. A vizsgálat a B jelű iskolában

A motivációs állapot norma szerinti besorolása értékes információ a tanuló személyiségéről, de a válaszok egyedi értékelése még mélyebb megismerést tesz lehetővé. Az alábbi példákon lehet látni, hogy a tanulók az írástechnikai problémák ellenére világosan ki tudják fejezni az adott képpel kapcsolatos asszociációikat. Az elemző pedagógus ezeket az üzeneteket tudja a kudarctól való félelem vagy a sikerre való vágyakozás, stb. motivumaiként értékelni.

A tanulók ábrákra adott reflexióit betűhíven közlöm. Az egyes betűk megformálásában mutatkozó problémák így nem láthatóak, ugyanakkor a nyomtatott szövegre való áttérés kiemeli a betűhibákat, amelyek az írás lendületének ismeretében kevéssé voltak zavaróak.

B. Dorina

Összbenyomás: Hibás írás, érthető tartalom, bizakodás jellemző rá

Elő: „egy ember hegyet mász. bátornak érzi magát. mert bátor. végül fel mászot a hegyre."

Utó: „Krisztián felmászik a dobtetőre. Nagyon izgul. Hogy leesik-e. Avégén feltudot mászni a dobtetőre."

B. Regina

Összbenyomás: Hibás írás, érthető tartalom, derűs bizakodás

Elő: „Bátor erös volt mert okosvol hogy felmaszot a hegy csucsra mert olyan erős volt és így volt a vége."

Utó: „Jol érzi magát csak egy kicsit izgatotan érzi magá és egy kicsit fél és izzad és egy kicsit bátor. okos és nem néz le és fázi. tul lassan mászi és erő nyugot. jol kapaszkodi a kezével jol tapad a cipölye és erősnek érzi magát."

B. Szabina

Összbenyomás: Hibás írás, érthető tartalom, leküzdött szorongás

Elő: „Miki hegyet mászot. Egy kicsit fél. Attol hogy leesik. megcsúszott és leeset. Bevitték a korházba és egy hétmolva haza mehetet Miki.”

Utó: „Sándor hegyet mászik. Egy kicsit fél. Mert fél hogy leesik. Felmászot a hegycsucsra.”

A B. gyerekek hármasikrek, nagyon különböző viselkedéssel, megjelenéssel. A pedagógus azt emelte ki, hogy ki melyik tantárgyat kedveli, miben sikeres valamelyikük. Ezek alapján a követelményeket általában nehezen teljesítik, de az iskolában jól érzik magukat.

Cs. Ágnes

Összbenyomás: Korrekt írás, szorongást tükröző tartalom

A legjobb tanuló, okos, szorgalmas, jó családi háttérrel

Elő: „A gyerek bátor volt. Egy nagy hegyre mászott fel.”

Utó: „Egy ember hegyet mászik. Egy kicsit fáradt. Azért érzi magát így mert nehéz mászni. Szegény ember le esett.”

M. Pál

Összbenyomás: Korrekt írás, leküzdött szorongás

Az elmúlt évben nagy családi problémák voltak körülötte, ebben az évben ezek megoldódtak, az egyik legjobb tanulóvá vált.

Elő: „Nagyon fél. Rosszul érzi magát. Mert nagyon fél.”

Utó: „Mászi az ember. izgatottnak érzi magát. Mert fél hogy leesik. Felér a hegyre.”

R. Laura

Összbenyomás: Hibás írás, érthető tartalom, magabiztosság

Rohamosan fejlődő tanuló

Elő: „Andris felmászot a hegyre. nagyon bátra viselkedet és feltudot mászni a hegytetejére.”

Utó: „Egy ember hegyet mász. Frisnek érzi magát. mert még nem mászot hegyet. Felmászot a tetejébe.”

A tanítás folyamata

Korábbi megbeszéléseink alapján az iskolában a poliéderekkel összefüggő fogalmakkal sokféle formában találkoztak a gyerekek, a napközis foglalkozásokon is, és az órákon is. Azon az órán én is jelen voltam, amelyiken az osztály tanítója, megbeszéléseink alapján, az éleken való mozgást állította a munka középpontjába. Az óra után lehetőségem volt az iskola mind a 6 negyedik osztályos tanulójával egyenként foglalkoznom. A tanulók segítségemmel oldották meg a feladatlap feladatait.

Az órai munka szervezése, a reprezentációs módokra fordított kiemelt figyelemmel

- Enaktív szint

  Mozgás az éleken, Hogyan juthatok el egyik csúcspontból egy másikba? A manipuláció sajátosságai: A gyerekek által készített modelleken kívül általában valódi tárgyakat használtunk, pl. a szertári „mértani testek” helyett óriási (a gyerekeket elbűvölő méretű), csomagolásra korábban már felhasznált papírdobozt, ezzel is erősítve azt az érzést, hogy a matematika szorosan kapcsolódik a hétköznapi valósághoz.

  A nézelődésen és a modellek előállítása során szerzett tapasztalatokon túl problémamegoldásokat kértünk a tanulóktól, ezekre a későbbiekben példákat mutatok.

- Ikonikus szint

  Érzelemgazdag képek szerepeltek a filmekben. Ezáltal fontossá tettük a poliédereket a tanulók számára, és egyben mintákat is adtunk a pedagógusoknak, hogy minél sokoldalúbban közelítsék meg a tanítandó témát.

  A macicsalád történetébe beépítettük a szafarit. Önmagában is izgalmas, új, sokféle beszélgetésre alkalmas a fogalom. Itt és most két vonatkozásban volt különösen jelentős: az egyik: az oroszlán szerepeltetéséhez keretet jelentett (erre a meglepő szereplőre nagy szükségünk volt didaktikai szempontból, amit a későbbiekben részletezek), a másik: a poliéderek változatos előfordulási formáit így egy tematikus fotógyűjtemény mutathatta be. A történetben a macipapa poliédereket fényképezett, ezáltal az absztrakciónak egy váratlan példáját láthatták a gyerekek: a fényképeken drágakövek, kristályok, épületek voltak, amelyeket nem utólag soroltunk be a poliéderek közé, hanem eleve a poliéderek fényképezése volt a cél, a diákon a macipapa a poliéderekre keresett példákat. Így a deduktív és az induktív ismeretszerzési módokat is váltogattuk.

- Szimbolikus szint

  A bruneri tanuláselmélet csúcsán a szimbolikus reprezentáció áll.

  A hagyományos matematikatanításban a szimbolikus reprezentáció két formája, a természetes beszéd a tanulási folyamat kiindulópontját, a matematikai szimbólumok alkalmazása pedig a matematikatanulás magas szintjét, bizonyos értelemben annak csúcsát jelenti. A kutatási eredmények és saját tapasztalataink alapján nagyon fontosnak bizonyult a különböző szimbólumok következetesen egymást váltó alkalmazása.

A poliéderek tanítása során szerzett tapasztalatok leíró jellegű bemutatása

a) Beszélgetés a tapasztalatokról

   A gyerekek példákat láthattak arra, hogy a valóság különböző jelenségei miképpen válhatnak a matematikai vizsgálat tárgyaivá, és erről beszélgettek is. További beszédtémát jelenthet, hogy hogyan és miért változnak a valóság bonyolult alakzatai az iskolai tananyagban annyira egyszerű és szabályos testekké, mint a kocka, téglatest, gömb. A változatos, meglepő elemeket tartalmazó megközelítés provokálta a beszélgetést, bátorította a tanulói kérdéseket.

b) Jelekkel megoldható feladatok

Új, bár nagyon természetes jelölést vezettünk be a poliéder élein való mozgásra, az egyszerű nyilakat: előre-hátra, jobbra-balra, le-föl. A tárgyakon a két adott csúcsot összekötő élek megtalálása nem jelentett gondot, a mozgások szavakkal kísérése sem volt nehéz. Ugyanez a perspektivikus ábrán már megoldhatatlan feladat elé állította a tanulók többségét. Egy kocka rajzán megkülönböztetni az előre-hátra mozgást a jobbra-balra irányú mozgástól külön megállapodást igényelne, hacsak a kocka nincs belehelyezve egy jól felismerhető környezetbe. Azonban ennél jóval nagyobb a probléma. A képolvasás ebben a korban alapvető nehézséget okozott. Körülbelül 10 éves kor alatt nem alakul ki a perspektivikus látásmód, ennek következtében a tanulók számára – a nekünk teljesen egyértelmű – le-föl irány sem volt világos egy élvázas test perspektivikus képén. A gyerekek közül többen a fölfelé mozgást hátrafelé mozgásnak, vagyis távolodásnak látták. Ennek a problémának a kiküszöbölésére új szimbólumot vezettem be, a fekvő kisoroszlánként megszemélyesített négyzetesoszlopon már világos volt, mit jelentenek az irányok (előre-hátra, jobbra-balra, le-föl).

A perspektivikus ábrázolás olvasási képességének fejlesztésére természetesen nemcsak a vizsgálatunk miatt van szükség. Ahhoz, hogy a gyerekek gyakorolhassák az elemi térgeometriai tájékozódást, ennek a témának a tankönyvben is meg kell jelennie, e megjelenés hagyományos módja pedig a legegyszerűbb poliéderek egyikének, a téglatestnek a perspektivikus tankönyvi ábrája. A harmadik osztályos tankönyvekben valóban meg is jelennek ezek az ábrák. Vizsgálatunk alapján a mértani ábrákat kezdetben ismerős szituációt idéző környezetben volna érdemes bemutatni, és innen eljutni az absztrakt ábrákhoz.

Új fogalmak

Olyan munkalapokat tervezetem, amelyekben a tanulók a maguk számára feljegyezhetik, tanítói segítséggel, a közös munka során szerzett tapasztalataikat, azaz a munkalapok jegyzetfüzetként szolgálnak. A jegyzetfüzet egyik célja a tanulók számára új fogalmak, elnevezések rögzítése, megszilárdítása volt. A matematikaórákon általában az szokott problémát okozni, hogy egyes szavaknak más a hétköznapi és más a matematikai jelentése. Hátrányos helyzetben gyakori, hogy a tanulók egyáltalán nem ismernek olyan, a hétköznapi életből származó szavakat, amelyeket a tankönyvek és a pedagógusok is magától értetődő termé-szetességgel használnak, pl. él. Ha a tanulók tárgyi szinten és nem verbális formában találkoznak a matematikai feladatokkal, akkor ez a hátrány csökkenthető, azonban a tárgyi szinten történő matematikatanulás nem helyettesítheti, hanem kiegészíti a fogalmi tanulást. Ezért a tanulók verbális képességeinek fejlesztésére is nagy figyelmet fordítottunk.

Az új fogalmak tanulásának folyamatát arra a tapasztalatra építettük, hogy a fogalomalkotás módja a matematikában és a mindennapi életben különböző: Pl. az asztal szó és fogalom tanulásának útja, hogy rámutatunk, megnevezzük, és nem foglalkozunk a definiálással. Kezdetben nem fontos, hogy mi tartozik még az adott konkrét tárgyon és más, a környezetben könnyen felismerhető tárgyakon kívül az asztal fogalmába és mi nem. A felsőbb fogalom, megkülönböztető fogalom, mint a definiálás két lépése fel sem merül ezen a szinten.

Néhány példán bemutatom, hogy a szavak jelentésének megbeszélése – bár nagyon távol áll a matematikai definíciótól, mégis – a definiáláshoz vezető út nélkülözhetetlen kiinduló pontja.

A téglalap

A téglalap fogalma a definíciója alapján: Olyan négyszög, aminek minden szöge derékszög – egyértelmű, szabatos definíció, de a benne szereplő fogalmak sokkal nehezebbek a tanulók számára, mint a téglalap felismerése az egyszerű ráismerés szintjén.

A matematikailag korrekt definíció előnye, hogy később nem kell pontosítani, módosítani, azonnal és végérvényesen lehetővé teszi a téglalapok és a nem téglalapok elkülönítését. Ennek viszont ára van, mégpedig az, hogy a definíció nehezen érthető. Csak akkor alkalmazható, ha a tanulók az iskolán kívül már találkoztak a téglalap szóval, ha a szót meghallják, egy bizonyos, általuk téglalapként ismert alakzat jelenik meg a gondolatukban. Ha nem így van, akkor analógiával, rámutatással lehet élni, azt mondani például, hogy a könyvek lapjai téglalap alakúak, vagy más hasonló, az adott körülményekhez illő megoldást érdemes választani. Csak ha már maga a szó ismerős, akkor célszerű a fogalomépítés definícióra épülő folyamatát megkezdeni.

Tapasztalataim szerint a gyerekek könnyen tanulnak új szavakat, feltéve, ha lehetőséget kapnak a tanulásra, és nem azt érzik, hogy elvárják tőlük valami számukra idegen dolog ismeretét, amit már korábbról tudniuk kellene.

Fontosnak tartottuk, hogy a matematikában is használt új fogalmak tanulása kövesse a gyerekek anyanyelv-tanulásának módját, legyen a hétköznapi élet szótanulásához hasonlító a folyamat, mivel az elnevezések megismerésének nagy jelentősége van a megismerési folyamatban. (Csak utalok arra, hogy a névadás mágikus jelentőségű sok kultúrában.)

Mi az órákon igyekeztünk egyeztetni az új szavak tanulásának leggazdaságosabb, hétköznapi módját a matematikailag jól használható fogalomépítés első lépéseivel.

További példákat sorolok föl.

Poliéder

A poliéderek a szögletes testek. Ezek poliéderek, ezek meg nem.

Az általam meglátogatott órán a gyerekek még az ilyen bevezetéstől is megrettentek. A tanító egy remek ötlettel nagyszerűen oldotta a feszültséget, megkérdezte: Ugye ismertek idegen szavakat? Ugye mindenki hallott a terminátorról. Hát az is, meg ez is egy idegen szó. A tanteremben ülő összesen 12 harmadikos és negyedikes tanuló közül 11-en elnevették magukat és ment tovább a tanulás, csak egyetlen kisfiú tért vissza még percek múlva is a terminátorra. Ő volt az egyedüli, akinek figyelmét ez az analógia elterelte. Később, amikor már tárgyi szinten tevékenykedhetett, ő is bekapcsolódott a munkába. Szerencsére a kis létszám lehetővé tette, hogy a kiesést, tanítói segítséggel, be tudja hozni.

Tórusz

Olyan, mint az úszógumi. A tórusz minden gyereknek nagyon tetszett, azonnal megtanulták, és alkalmazni is tudták az elnevezést. Talán azért, mert valami sejtelmes, idegenszerű van ebben az alakzatban, a többi testhez képest nagyon mások a szimmetriái.

Hasáb

A téglák és a szögletes oszlopok hasábok. Mondjatok még példákat a hasábokra! Meglepődtem, mert ez volt a poliéderek között a legnehezebben megérthető fogalom, ennek használatában követték el a legtöbb hibát. A tapasztalatok alapján ennek feltételezhető oka, hogy a hasábok a mindennapi életben fekhetnek az alaplapjukon is, meg az oldallapjukon is, szemben például a gúlával, ami a gyakorlatban mindig az alaplapján áll. A háromszög alapú hasáb például ismerős a gyerekeknek, mint háztető-forma, de ez a hasáb nem az alaplapján, hanem az egyik oldallapján fekszik.

Az új fogalmak bevezetésekor a jegyzetfüzet a mindennapi életből ismert tárgyakhoz, (építményhez) testeket kapcsol. Szándékosan a legnyilvánvalóbb kapcsolatokat idéztük föl, illetve mutattuk be, pl. gömb-labda, gúla-piramis. A testek mellett az első lapon szerepel a nevük, a másodikon a tanulóknak kell a testek rajzát megfelelő nevekkel összekötniük. Ekkor az elnevezések ismeretére már számítunk, de természetesen szükség estén szóban segítünk. Nem nehezítettük a tanulók feladatát nehezen besorolható alakzatokkal. Úgy gondoljuk, hogy mint a szavak tanulása során is, az későbbi feladat, hogy a szélsőséges, nehezen besorolható példákkal is találkozzanak a tanulók.

Más a helyzet, amikor a szavak hétköznapi jelentésétől sokszor eltérő, pontos matematikai fogalmakat építjük. A tanulásnak abban a szakaszában már feltétlenül szükséges a fogalom határainak kijelölése, az odatartozó és az oda nem tartozó elemek minél pontosabb elkülönítése.

Problémák

A.) A testeknek térfogatuk van, térfogat és felszín kapcsolata

A gyerekek a síkgeometriát tanulják először, a síkelemekkel kezdik az ismerkedést, a gyurma jelzi, hogy kiléptünk a térbe. Itt nem síkokkal és kitérő egyenesekkel kezdünk foglalkozni, és pl. az egyenesek párhuzamosságára vonatkoztatva a tranzitivitással, hanem testekkel, ezért a térfogatra utalást nagyon fontosnak tartom. Természetesen nem az egzisztenciális kérdést, van-e és mikor van térfogat, hanem: hogyan változik a térfogat, mi a kapcsolat a felszín és a térfogat között. Ez a kapcsolat most még olyan tudás, ami a kezükben van, szorosan kötődik a tárgyi tapasztalatokhoz, a megfogalmazásnak az igénye fel sem merül, nincs is rá szükség. A kezünkben lévő tudás megerősítése érvényessé teszi a gyerek otthonról hozott tudását az iskolában, így a hidak kiépítésének megkönnyítésével erősíti a tanulási vágyat, segíti az új kultúra megismerését. És egy távlati érték: később, a felszín-térfogat összefüggéseire épülő szélsőértékes feladatok megoldásához jó alapot jelenthet, hogy korábban már látták a kapcsolatot a mindennapi tapasztalat és a matematika között. Néhány példa a térfogat és felszín összefüggéseire:

– Sógyurmát nyújtsunk ki, hogy szárítsuk, mint a gyúrt tésztát, illetve gömbölyítsük össze, hogy ne száradjon ki.

– A sógyurma mézes sütit jelképezzen, amiből karácsonyfadíszt készítünk, amit csokiba mártunk. Milyen alakot válasszunk, hogy minél több csoki legyen az adott sütiken (lapos, zsinórszerű, csillagforma, sok kicsi gömb)?

– Képzeljük azt, hogy a sógyurmánk egy darab krumpli. Hogyan vágjuk föl, ha azt akarjuk, hogy gyorsan megfőjön?

– Csináljunk téglát a gyurmából! (Ne téglatestet, hanem az építkezésekről ismerős téglát!) Miközben a gyerekek megpróbálják utánozni a tégla formáját, ami elég nehéz feladat, sok tulajdonságot meg kell figyelniük, merőlegesség, párhuzamosság, ekvivalenciák és arányok. Csináljunk új téglatesteket a gyurmából! Jól növeljük meg a felszínét!

A megbeszélés során szinte észrevétlenül használhatók a kifejezések, mint él, lap, csúcs, élhosszúság, stb.

Ez olyan lapos lett, mint egy rajztábla, nagyon jó. Az egyik éle sokkal rövidebb, mint a másik kettő, stb.

Te sok kis téglalapot csináltál, valóban, így is jól megnőtt a felszín.

A gyurmázás tapasztalataiból most még nem szükséges semmit sem akár szavakkal, akár jelekkel megfogalmazni. A tapasztalatok esetünkben az elnevezések egyre gazdagabb tartalommal való telítődésében jelentkeznek.

B.) Építés, hajtogatás

Az építési feladatnak narratív jelleget adtam, részben egy-egy ismerős, a gyerekek számára fontos szituáció felidézésével (város, saját falu, macik faluja), részben azzal, hogy kértem a tevékenység kommentálását.

„1. Az összegyűjtött dobozokból építsetek várost! Mondjátok is el, mit csináltok! Pl.: Ezt a hasábot ide állítom, ez lesz az áruház. Ezt a másik hasábot ide fektetem, ez lesz a pályaudvar. Ez a henger meg egy szálloda lesz.

2. Építsétek meg a saját iskolátok környékét is!

3. Szerintetek hol lakik a macicsalád? Építsétek meg az ő falujukat is!"

6-10 éves korban a térbeli tapasztalatok lejegyzésének adekvát módja az alaprajz lerajzolása, ezért ezt is feladatul adtuk a gyerekeknek.

C.) Mozgás az éleken

Kocka helyett a könnyebb eligazodás biztonságát nyújtó négyzetes oszlopot választottam, és azt meg is személyesítettük. Egy fekvő hasáb lett a fekvő oroszlán, amelyiknek arca, farka, lábfeje is volt, így azonnal egyértelművé váltak a jobbra-balra irányok, élesen megkülönböztethetőek lettek az előre-hátra irányoktól, és a le-föl is ismerős helyzetben fordult elő. Az éleken sétálás kérdése a poliéder egy-egy csúcsába elhelyezett bolhák segítségével már könnyen érthető és szemléletes volt: Hány bolhaugrással (éleken, mindig közeledve, csúcsról-csúcsra) jut el az egyik bolha a másikhoz?

Az előrajzolt minta alapján maguk a tanulók hajtogatták, ragasztották meg a kisoroszlánt.

A feladat több részből állt:

1. Utak keresése, mutogatás nagy modelleken, az utak szavakkal kísérése: hátra, fel, jobbra, majd ugyanez a saját kicsi, állatfigurás poliéderen.

2. Út berajzolása papírra az oroszlános ábrán.

3. Út berajzolása papírra a négyzetes oszlopon, ahol a nem látható élek is jelölve vannak, de a tájékozódást segítő rajzos elemek már nem szerepelnek.

4. Az út szavakkal kísérése.

5. Tanulói jegyzet készítése táblázatos formában az irányokat jelentő szimbólumok alkalmazásával.

Az első négy feladatot minden tanuló meg tudta oldani, az ötödikben többen is segítségre szorultak.

D.) Szabályos testek, háromszöglapokból építhető testek

A bevezető feladatok a poliéderek és a nem poliéderek megkülönböztetését segítették. A téglatestekkel való ismerkedés után ismét tágítottam a kört. A gyerekek nagy érdeklődéssel figyelték a Hajós könyv poliéder ábráját, amely az egyszerű poliéderek és a nem egyszerűek megkülönböztetését segítik. Ezzel kapcsolatban is kaptak a gyerekek életkoruknak megfelelő feladatot: a szabályos testek axonometrikus ábráján kellett kiválasztaniuk azokat, amelyek szívószálakból könnyen megépíthetők. Ez a feladat alkalmat adott az elmúlt évi tapasztalatok felidézésére: háromszöglapokból álló testeteket könnyű szívószálakból, vagyis élekből és csúcsokból megépíteni, mert 3 pont mindig egy síkban van, a négyszögeket és a többi sokszögeket merevíteni kell. Tehát a feladat a háromszöglapokból felépülő szabályos testek megjelölése volt, hátterében pedig a testek síkbeli ábrázolásának olvasása állt.

E.) Egy inverz feladat

Táblázatban megadott adatokhoz testeket kerestek a gúlák és a hasábok között, találgatással, majd ellenőrizték a megoldást. Elő- és utómérés jellegű feladat a poliéderekkel kapcsolatban: Él- lap-csúcsszámolás, B jelű iskola, 4. oszt. 2007. december Az alábbi táblázatok tartalmazzák a tanulók szóbeli válaszait (az élek, lapok és csúcsok számát) valódi, illetve elképzelt testen a kísérlet előtt és után. A satírozott (téves) válaszok csökkenése meggyőzően mutatja a fejlődést.

	él	lap	csúcs
M. PÁL	8	6	8
R. LAURA	8	6	8
B. DORINA	8	6	8
B. REGINA	8	4	8
B. SZABINA	8	6	8
CS. ÁGNES	8	6	8

1.63. ábra. B iskola előmérés: tégla, kézben tartott gyufásdoboz

	él	lap	csúcs
M. PÁL	8	6	8
R. LAURA	8	4	8
B. DORINA	8	6	8
B. REGINA	8	6	8
B. SZABINA	6	6	8
CS. ÁGNES	8	8	8

1.64. ábra. B iskola előmérés: elképzelt kocka

	él	lap	csúcs
M. PÁL	12	6	8
R. LAURA	12	6	8
B. DORINA	12	6	8
B. REGINA	12	6	8
B. SZABINA	12	6	8
CS. ÁGNES	12	6	8

1.65. ábra. B iskola utómérés: tégla, kézben tartott gyufásdoboz

	él	lap	csúcs
M. PÁL	8	6	12
R. LAURA	6	6	8
B. DORINA	8	6	12
B. REGINA	8	6	8
B. SZABINA	12	6	6
CS. ÁGNES	12	6	8

1.66. ábra. B iskola utómérés: elképzelt kocka

A kapott adatok alapján láthatjuk, hogy a kézbe adott test alkotóelemeinek leszámolásában jelentős javulás következett be. Egyik magyarázat lehet, hogy a tanulók már olyan sokat gyakorolták, hogy végül elsajátították az új, az élek, lapok, csúcsok számára vonatkozó ismeretet. Alternatív magyarázatot is találhatunk, a sokféle megközelítés hatására értelemmel és jelentéssel telítődtek a téglatestekkel kapcsolatos fogalmak, ezért érdekessé vált a tanulók számára a kérdés, meg akarták és meg is tudták oldani a feladatot. Az is kiolvasható a táblázatokból, hogy a tanulók nem tanulták meg az ÉLCs adatokat, mivel az elképzelt kockára egyikük kivételével mindannyian hibás választ adtak, viszont megtanulták a fogalmakat és a megoldási stratégiát, mert a kézbe kapott gyufásskatulyán már hibátlanul leolvasták a megfelelő adatokat.

Az inverz feladat

A test neve vagy rajza	él	lap	csúcs
	9	5	6
	8	5	5

1.10. táblázat. Az inverz feladat

Ez a feladat több szempontból is igen nehéz, elsősorban azért, mert semmilyen szemléletes segítséget nem kínáltunk a probléma megértéséhez, bár megkaphatták volna a tanulók az adott számú élt és csúcsot modellező pálcikákat és gömböket is. Másrészt ez a feladat a korábbi feladathoz képest fordított gondolkodást igényelt: nem adott poliédert kellett a tanulóknak vizsgálniuk, hanem a kapott adatok alapján rekonstruálni kellett a két poliédert. Ez sokkal nehezebb az eredetinél, felnőttek számára is izgalmas probléma lehet.

A feladat valóban nehéznek bizonyult. A gyerekek egy része sikeresen birkózott meg vele. Ők kitöltötték a táblázat megfelelő rubrikáit. Vizsgálatunkban csak egy tanuló volt, aki hozzákezdett a munkához, majd feladta. Őt érdekelte a megoldás is, a közösen elkészített ábrán ellenőrizte, hogy az élek, lapok és csúcsok száma valóban megegyezik a megadottakkal. A többieket nem zavarta, hogy egy számukra érdektelen táblázatot kihagytak. Ők nyugodtan passzolhatták a feladatot. Nem tartottam szükségesnek sem a megoldás megmutatását, sem a probléma rávezető, tárgyi szintű feladattá átalakítását, mert ebben az esetben nem az ismeretek bővítése volt a didaktikai cél, hanem a már meglévő ismeretek alkalmazhatóságának ellenőrzése váratlan, új helyzetben.

A kombinált módszer alkalmazásának tapasztalatai

Eltértünk a tananyag lineáris felépítésétől, a spirális tananyag-felépítést a szokásosnál tágabban értelmeztük, a későbbi évek, sőt iskolafokozatok anyagából is választottunk problémákat, pl. mérlegelv, poliéderfogalom, és ezekkel a gyerekek szintjén de a matematikai háttér lényeges elemeinek megtartásával foglalkoztunk.

A kísérleti órák tananyagát a bruneri tanuláselméletre építve terveztük meg: a mintát az órai tanulási folyamat megvalósításához képekkel megfogalmazott, történetbe ágyazott diasorozat adta. A gyerekek az órákon valódi tárgyakkal és saját maguk készítette eszközökkel dolgoztak. Ebben a szakaszban nem használtuk a szokásos szemléltető eszközöket, pl., színesrúdkészlet, logikai készlet, magas technológiai szinten előállított mértani személtető eszközök, mert azok logikai tisztasága a formális gondolkodás magas szintjét igényli a tanulóktól is.

Csoportmunkát alkalmaztunk, amelynek keretében a gyerekek közvetlen tanítói irányítás nélkül tudtak együtt dolgozni. Ez újdonság volt a kisiskolákban, mert az igen kis, 3-8 fős osztálylétszámok miatt a tanítók korábban csak a frontális, illetve az egyéni munkát alkalmazták. Az adott körülmények között szükségképpen vegyes életkorú csoportok az interperszonális kapcsolatokat bővítették, és az egyéni differenciálás gazdagabb lehetőségét teremtették meg.

1.5.7. Szeredi Éva: Elméleti alapok

Részlet a Geometria mozgásban. Az egybevágósági transzformációk tanításának egy új módszere című PhD dolgozatból (lásd Szeredi 2011 szeredi2011)

1. Matematikai háttér Az egybevágóság fogalma a geometriában alapvető fontosságú. Annak igazolására, hogy két alakzat egybevágó-e alapvetően kétféle stratégiát kínálunk az iskolai tananyagban. Az egyik stratégia a háromszögek egybevágóságának alapeseteit (vagy az ezekből levezethető, sokszögek, poliéderek egybevágóságára vonatkozó tételeket) felhasználva igazolni az egybevágóságot.

A másik stratégia olyan egybevágósági transzformáció keresése, ami egyik alakzatot a másokba viszi.

1.1 Egybevágósági transzformációk „Két alakzatnak, vagy egy alakzat két részének az összehasonlítása, egybevetése a geometriában állandóan jelentkező szükséglet; ez a szükséglet alakította ki a geometriai transzformációk fogalmát." (Reiman: A geometria határterületei [193])

Az egybevágósági transzformációk azzal a tulajdonsággal bírnak, hogy minden szakaszt vele egyenlőbe visznek. Ebből következik, hogy ezek a transzformációk rendelkeznek az egyenes-, félegyenes-, sík- és szögtartás tulajdonságaival is, ilyen módon alapvető segítséget nyújtanak abban, hogy „egyforma" részleteket, egyenlő szakaszokat, szögeket stb. keressünk.

1.2 Egybevágó alakzatok Két alakzatot akkor nevezünk egybevágónak, ha pontjaik között létesíthető egy távolságtartó megfeleltetés, azaz ha valamely egybevágósággal egymásba vihetők. E szerint a definíció szerint két egybevágó alakzat összes megfelelő pontpárjának egyenlő távolságra kell lennie egymástól, tehát az egybevágóság eldöntéséhez – ha az egybevágósági transzformációkat ki akarnánk kerülni – az összes megfelelő pontpár összehasonlítására lenne szükség. Szerencsére ennél sokkal kevesebb megfelelő részlet egyenlősége is elég az egybevágósághoz, erről szólnak azok a tételek, melyekre a „háromszögek egybevágóságának alapesetei"-ként, vagy a „háromszögek egybevágóságának elégséges feltételei"-ként szoktunk hivatkozni.

1.3 Az egybevágóságfogalom axiomatikus megalapozása

„Lélektani szempontból talán a mozgás, sőt még inkább a szimmetria (tükrözés) a primitívebb (az egybevágóságfogalomnál), s az egybevágóság ebből származtatott fogalom. Ez adja azt az ötletet, hogy állítsunk össze olyan axiómarendszert, mely a tükrözést vagy a mozgást mint alapfogalmat meghatározza, s arra építsük fel a geometriát." (Kárteszi: A geometria-tanítás korszerűsítéséről [121])

Bár Magyarországon az általános és középiskolákban nem szigorú, axiomatikus felépítésben tanítjuk a geometriát, a tantervek törekszenek arra, hogy a geometria anyag struktúrája minél szisztematikusabban épüljön, lehetőséget kínálva a deduktív gondolkodás fokozatos fejlesztésére. Az egybevágóságfogalom mindegyik felépítésben középponti szerepet játszik, tehát a matematikai háttér vizsgálatakor döntő, hogy vázlatosan áttekintsük, hol van ennek a fogalomnak a helye a különböző axiomatikus felépítési lehetőségekben.

Reiman István: „A geometria határterületei című" könyvének bevezető részében világosan megfogalmazza az iskolai geometria-tanítás hátterében meghúzódó két legfontosabb felépítési lehetőséget. „A szemléletes síkban annak a kijelentésnek, hogy két alakzat egybevágó, jól érzékelhető tartalma van, ugyanis egy olyan „mozgás” létezésére utal, amely az egyik alakzatot a másikba viszi át. A geometriának a szemlélettől független, logikai megalapozásánál két szakasz vagy két szög egybevágóságát a Hilbert-i axiómarendszer alapfogalomnak tekinti, melyet csak a rá kirótt axiómák értelmeznek. A mozgásnak alapfogalomként való elfogadása, egy szintén lehetséges – a Hilbertitől eltérő – axiomatikus tárgyalási mód.” (Reiman, 1986 [193]).

Ilyen, a mozgásra mint alapfogalomra épített axiómarendszert dolgozott ki Hajós György. (Hajós 1971 [101])

Kárteszi (1972, [121] 173-174.) „A geometriatanítás korszerűsítéséről” című könyvében a hilberti rendszer mellett szintén felveti az egybevágóság fogalmának mozgásra alapozott felépítését, ezeken felül azonban egy harmadik lehetőséget is kínál: „Ha a tükrözést választjuk alapfogalomnak, akkor, amiként az Hjelmslev, Thomsen, Bachmann nyomán ma már tudjuk, az euklideszi geometria egy a mai matematikába szervesebben beillő felépítésének alapjául fogadhatjuk.” (Kárteszi, 1972, [121] 174.)

Az egybevágósági transzformációk tanításának hátterében mind a három féle, fent említett axiomatikus felépítésnek megtaláljuk a nyomait – indirekten, nem formálisan –, amint azt a későbbiekben látni fogjuk.

A következő szakaszokban ismertetem, hogyan épülnek egymásra Hilbert és Hajós axiómarendszerében azok az egybevágósággal kapcsolatos fogalmak és tételek, melyek az iskolai tananyagban is szerepelnek. Vázlatosan bemutatom a harmadik felépítési lehetőséget is.

1.4 Egybevágósági axiómák Hilbert rendszerében

Ebben az axiómarendszerben szakaszok és szögek egybevágósága alapfogalom. Szakaszok és szögek halmazában tekintsünk egy-egy kétváltozós relációt, melynek tulajdonságait az egybevágósági axiómák rögzítik. Két relációban levő szakaszt vagy szöget egyaránt kongruensnek (egybevágónak) nevezünk. Jelölésekkel: $|AB| \equiv |A'B'|$, illetve $hk\angle \equiv h'k'\angle$.

III1: Ha adott egy CD szakasz és egy AB félegyenes, akkor van ezen a félegyenesen egyetlen olyan M pont, hogy $CD \equiv AM$. Minden szakasz kongruens önmagával.

III3: Ha AB és BC egy e egyenes közös belső pont nélküli szakaszai, továbbá $A'B'$ és $B''C'$ ugyanazon, vagy egy másik e' egyenes olyan közös belső pont nélküli szakaszai, amelyekre $AB \equiv A'B'$ és $BC \equiv B'C'$, akkor $AC \equiv A'C'$.

III4: Legyen egy α síkban egy hk valódi szög, továbbá ugyanabban az α, vagy egy másik α' síkban egy δ' félsík, s ennek határvonalán egy O' kezdőpontú h' félegyenes. Ekkor a δ' félsíkban van egyetlen olyan O' kezdőpontú k' félegyenes, melyre $hk\angle \equiv h'k'\angle$. Minden szög önmagával kongruens.

III5: Ha két, ABC és $A'B'C'$ háromszögre teljesülnek az $AB \equiv A'B'$, $AC \equiv A'C'$ és $BAC\angle \equiv B'A'C'\angle$, akkor $ABC\Delta \equiv A'B'C'\Delta$.

A háromszögek, sokszögek, poliéderek egybevágóságának alapesetei közvetlenül levezethetők Hilbert III5. axiómájából (természetesen használva a többi axiómát is). A sík egybevágósági transzformációiról ebben a felépítésben bizonyítani kell, hogy valóban távolságtartóak. Ennek egy lehetséges módja az, hogy a tengelyes tükrözésről – a sokszögek egybevágóságára kapott elégséges feltételek alapján belátjuk, hogy távolságtartó, majd megmutatjuk, hogy a sík minden egybevágósága előáll tengelyes tükrözések szorzataként. A szimmetrikus alakzatok alapvető tulajdonságai akár a háromszögek egybevágóságának elégséges feltételeiből, akár az egybevágósági transzformációk tulajdonságaiból levezethetőek. Ilyen módon eljuthatunk az egyszerű szimmetrikus alakzatok, a szakaszfelező merőleges, a szögfelező, a kör és érintője, a szimmetrikus háromszögek és a paralelogramma tulajdonságainak megállapításához, ezek ismeretében pedig az iskolai anyag összes elemi tétele néhány következtetési lépéssel levezethető. A felépítés tehát vázlatosan így ábrázolható:

axiómák és alapfogalmak
↓
háromszögek (sokszögek, poliéderek) egybevágóságának elégséges feltételei
↓ ↘
tengelyes tükrözés tulajdonságai → egyszerű szimmetrikus alakzatok tulajdonságai
↓ ↗
többi egybevágósági transzformáció tulajdonságai ↓
a tananyag további elemi tételei

1.5 Az elemi geometria Hjelmslev-Bachmann-féle megalapozásáról

Kárteszi Ferenc a geometriatanítás korszerűsítéséről írott könyvében (1972, [121] 170-175.) bemutatja ennek a felépítésnek az alapjait. Az ő anyaga alapján állítottam össze a következő vázlatos ismertetőt.

Ebben a felépítésben az involúció (másodrendű transzformáció vagy tükrözés) fogalma az, amelyet olyan axiómarendszerrel kell meghatározni, hogy az ezek szorzataként előálló transzformációk az egybevágóság-fogalom származtatására alkalmasak legyenek.

Ennek módját, egydimenziós esetben, részleteiben bemutatja, majd az egyenest a síkba beágyazva a rendszert kiegészíti három hagyományos illeszkedési axiómával, amelyhez mindössze még két axiómát kell hozzátennie, hogy az euklideszi geometriához hasonló, metrikus geometriát nyerjen.

A felépítés vázlatosan így ábrázolható:

axiómák és alapfogalmak
↓
tükrözések szorzataként előálló transzformációk tulajdonságai
↓
↓ sokszögek egybevágóságának elégséges feltételei
a tananyag további elemi tételei

1.6 A mozgás és a mérés axiómái Hajós axiómarendszerében

Ebben a felépítésben nem az egybevágóság fogalma, hanem a mozgás és a távolság tekintendő alapfogalomnak.

VII. A mozgás két pont összekötő szakaszát a két elmozgatott pont összekötő szakaszába, az egyenest egyenesbe, a síkot síkba viszi.

VIII. Egy és csak egy olyan térmozgás van, amely egy adott félsíkot és ennek határán adott félegyenest megadott helyzetbe, egy adott félsíkba és annak határán adott félegyenesbe visz át. (Ha a térmozgás nem változtatja meg egy félsík és egy ennek határán elhelyezkedő félegyenes helyzetét, akkor nem változtatja meg a tér egyetlen pontjáét sem.)

A mérésről szóló axiómák azokra az osztályokra vonatkoznak, amelyeket a mozgással egymásba átvihető pontpárok alkotnak. Ezeknek az osztályoknak mindegyikéhez hozzárendelhető egy-egy pozitív valós szám, amelyet az osztályba tartozó pontpárok távolságának mondunk, s amely rendelkezik az axiómákban kimondott tulajdonságokkal.

IX. Egy szakaszt bármely belső pontja két olyan szakaszra bont fel, amelyek hosszának összege az eredeti szakasz hossza. (Akkor is igaz, ha véges sok szakaszra való felbontásról van szó.)

X. Ha a hosszegység adott, akkor bármely A kezdőpontú félegyenesen egy és csak egy olyan B pont található, amelyre nézve az AB távolság egy adott pozitív valós szám.

(Hajós 1971 [101] 11.)

A mozgások geometriai transzformációk, hozzárendelést létesítenek a tér pontjai között. Szakaszok és szögek egyenlőségét az egymásra mozgathatósággal definiáljuk. Ennek alapján természetes, hogy a mozgások távolságtartó transzformációk. Definíció szerint a távolságtartó transzformációkat egybevágóságoknak nevezzük, tehát ebben a felépítésben a mozgások az egybevágóságok „prototípusai".

Hajós a sík tengelyes tükrözését térbeli mozgásként definiálja. A mozgás távolság- és szögtartó tulajdonságából vezeti le a tengelyes tükrözés tulajdonságait, valamint a háromszögek egybevágóságának elégséges feltételeit.

Fontos még számunkra az a tény, hogy a sík minden egybevágósága tekinthető térbeli mozgás síkra való leszűkítésének. Ez következik abból, hogy a sík minden egybevágósága előállítható legfeljebb három tengelyes tükrözés szorzataként. Azt is fontos megmutatni, hogy a tér egybevágóságai nem mind mozgások.

A felépítés vázlata:

axiómák és alapfogalmak
↓
tükrözések szorzataként előálló transzformációk tulajdonságai
↓
↓ sokszögek egybevágóságának elégséges feltételei
a tananyag további elemi tételei

A Hajós-féle és a Hilbert-féle rendszerre alapozott felépítések között a döntő különbség abban van, hogy Hajósnál az egybevágóság definíciója és a róla szóló tételek jelentős része közvetlenül a mozgás fogalmára épül. A sík egybevágóságainak, így speciálisan a tengelyes tükrözésnek a tulajdonságairól szóló állítások igazolásához nincsen szükség a háromszögek egybevágóságának elégséges feltételeire.

Az azonban nem magától értetődő ebben a felépítésben, hogy hogyan lehet a sík egybevágóságait a mozgási axiómákra alapozva definiálni. Ezek a definíciók természetesen különböznek azoktól, melyek a sík egybevágóságait pontonként megadott hozzárendelési szabályként definiálják. Meg kell tehát még azt is mutatni, hogy a mozgatással megadott definíciók egyenértékűek a „megszokott" – hozzárendelési szabállyal megadott – transzformáció-definíciókkal.

1.7 A sík egybevágóságai

Tengelyes tükrözés:

Adott a t tengely. A tengelyes tükrözés olyan mozgatás, ami a tengely minden pontját önmagába viszi és a határolt félsíkokat felcseréli. A tengelyes tükrözés inverze önmaga.

Belátható, hogy ennél a transzformációnál egy tetszőleges, a tengelyre nem illeszkedő P pontra és P' képére igaz, hogy a t tengely a PP' felező merőlegese.

Bizonyítás: Ha a P pont nem illeszkedik a t tengelyre, akkor definíciónk szerint P' a tengely másik félsíkjában van, ezért az illeszkedési axiómák szerint az összekötő szakasz metszi a t tengelyt egy M pontban. P képe P', M képe önmaga, tehát PM képe $P'M$, amiből a távolságok egyenlőségének definíciója alapján következik, hogy $PM = P'M$. Beláttuk tehát, hogy a tengely felezi az összekötő szakaszt.

Jelöljünk ki a tengelyen egy M-től különböző X pontot, és tekintsük a $PMX\angle$ szöget. PM félegyenes képe $P'M$, az XM félegyenes képe önmaga, tehát a $PMX\angle$ képe a $P'MX\angle$. A szögek egyenlőségének definíciója alapján tehát $PMX\angle = P'MX\angle$, mivel pedig ezek együtt teljesszöget alkotnak, azért ez azt jelenti, hogy MX merőleges PP'-re. Ezzel tehát beláttuk, hogy a tengely merőleges az összekötő szakaszra.

Középpontos tükrözés:

Adott egy O középpont. A középpontos tükrözés olyan mozgatás, ami egy az O-ból induló félegyenest ugyanazon egyenes másik, szintén O-ból induló félegyenesébe viszi és a határolt félsíkokat felcseréli.

A középpontos tükrözés inverze önmaga.

Az előbbi bizonyításhoz hasonlóan belátható, hogy ez a mozgás egy tetszőleges P pontot olyan P' pontba visz, hogy O pont a PP' szakasz felezőpontja.

Forgatás:

Adott az O pont és az α irányított szög, melynek szárai az O-ból indulnak. A forgatás egy olyan mozgatás, ami az α irányított szög kezdőszárát a másik szárra viszi, a kezdőszárat határoló, a másik szárat tartalmazó félsíkot pedig a másik szárat határoló, a kezdő szárat nem tartalmazó félsíkba viszi.

Inverze az ugyanazon pont körüli, ellenkező irányú irányított szöggel való elforgatás. A középpontos tükrözés, olyan speciális forgatás, ahol $\alpha = 180°$.

Az előbbi bizonyításhoz hasonlóan belátható, hogy a forgatás egy olyan hozzárendelés, amely a P pontot P' pontba viszi úgy, hogy az $OP = OP'$ és POP' irányított szög $= \alpha$.

Eltolás:

Adott egy AB irányított szakasz. Az eltolás egy olyan mozgatás, ami az AB félegyenest a B-ből induló ugyanolyan irányú félegyenesbe, a határolt félsíkot önmagába viszi.

Inverze az ellenkező irányú BA irányított szakasz által meghatározott eltolás.

Az előbbi bizonyításhoz hasonlóan belátható, hogy ez olyan hozzárendelés, amely a P pont képét olyan P' pontba viszi, hogy a PP' által megadott vektor megegyezzék az AB irányított szakasz által megadott vektorral. Ennek igazolásához már szükség van a párhuzamossági axiómára is.

Csúszástükrözés:

Adott egy AB irányított szakasz. A csúszástükrözés egy olyan mozgatás, ami az AB félegyenest a B-ből induló ugyanolyan irányú félegyenesbe viszi, és a határolt félsíkokat felcseréli.

Inverze egy ellenkező irányú irányított szakasszal megadott csúszástükrözés.

Az előbbi bizonyításhoz hasonlóan belátható, hogy ez olyan hozzárendelés, amely tetszőleges P pont P' képét úgy kapjuk, hogy a P pontot először tükrözzük az AB irányított szakasz által meghatározott egyenesre, majd eltoljuk az AB irányított szakasz által megadott vektorral.

Identitás:

Az az egybevágóság, amelyben minden pont képe önmaga.

Érdemes rámutatni, hogy a tengelyes tükrözéshez és a csúszástükrözéshez mozgatáskor feltétlenül ki kell lépni a térbe, míg a többi mozgatás a síkon belül maradva is elvégezhető (síkbeli mozgások).

2. Tanuláspszichológiai és didaktikai háttér

„Az emberi elme nem egy tisztán logikai valóság. Működésének komplexitása gyakran ellentmondásban van a matematika logikájával. Nem mindig a tiszta logika az, amiből a tisztánlátásunk születik, és nem a véletlenek okozzák a hibákat, amiket vétünk. Hogy megértsük, mi történik ezekben a folyamatokban, mind a sikeres, mind a hibás esetekben, világosan kell látnunk a különbséget a matematikai fogalmak formális definiálása és azon kognitív folyamatok között, melyek által a fogalom kialakult.” (Tall 1981 [224])

Dolgozatom fő tézise az, hogy a transzformációtanításban alkalmazott szemléltetési módoknak kulcsszerepük van az egybevágóság-fogalom alakulásában. Ennek alátámasztását a fogalomalkotással, ezen belül is a szemléltetésnek, valamint az alkalmazott eljárásoknak a fogalomalkotásban játszott szerepével kapcsolatos elméletekre alapozom.

2.1 A fogalomalkotás A matematikai fogalomalkotás az értelem igen magas szintű működésének eredménye. A dolgozatom szempontjából nagyon fontosnak érzem, hogy bemutassam azokat az elméleti megállapításokat, melyek ennek a folyamatnak mélyebb megértését szolgálják.

2.1.1 Asszimiláció és akkomodáció Először Skemp elméletét ismertetem. Skemp, Piaget elgondolásait továbbfejlesztve, kidolgozott egy modellt, amelyet az utóbbi évek kutatásai még tovább finomítottak. Piaget az értelem működését alkalmazkodásként és újra-alkalmazkodásként definiálja és a külvilággal való „cserefolyamatokként” értelmezi. Piaget (1993, [180]19-21.) szerint „...az alkalmazkodást a szervezetnek a környezetre gyakorolt tevékenysége és a visszaható cselekvések, ... az asszimiláció és a hozzáidomulás közti egyensúlyként, vagyis a pszichikum és a tárgyak közt fennálló cserefolyamatok egyensúlyaként határozhatjuk meg.” Miközben a külvilágból érkező tapasztalatokat asszimiláljuk, ezeket osztályokba soroljuk, fogalmakat alkotunk. A fogalomalkotásnak alapvetően két, lényegileg különböző, útja van. Az induktív (példákon alapuló) és a deduktív (definíción alapuló) fogalomalkotás. Ez a két út általában ötvöződik egy-egy konkrét fogalom fokozatos kialakulásában. Skemp modellje szerint legegyszerűbb fogalmainkat közvetlen érzékleti tapasztalatok alapján alkotjuk meg, melyek az absztrakció legalsó emeletét képezik. Ezeket a fogalmakat ismét osztályokba sorolva az absztrakció második emeletén elhelyezkedő fogalmakat nyerünk. Meglévő fogalmainkból példák és ellenpéldák megfigyelésén át, a hasonlóságok és különbségek intuitív megragadásán keresztül juthatunk egyre magasabb szintű fogalmakhoz. Ilyen módon fogalmaink hierarchikus rendszert alkotnak, ahol egy A fogalom magasabb rendű, mint B fogalom, amennyiben a B az A fogalom egy példája.

Már meglévő fogalmainkból azok példáiból új halmazokat hozhatunk létre, definícióval alkothatunk belőlük új fogalmakat. A definíció valójában egy „szabály", melynek alapján minden dologról eldönthető, hogy hozzátartozik-e az újonnan létrehozott halmazhoz.

Összefoglalva, „nagyon sok olyan fogalmat használunk, amelyeknek nincs formális definíciójuk, felismerésüket tapasztalat alapján, a megfelelő kontextusban való használat során tanuljuk meg. Később ezeknek a fogalmaknak a jelentéstartalma finomodhat, és növekvő pontossággal értelmezhetjük őket a precíz definíció kényelmével, vagy akár anélkül." (Tall és Vinner, 1981, [224] 2. o.)

Egyre bővülő fogalmaink az alá és fölérendeltség mellett sok egyéb szállal kapcsolódnak egymáshoz, – átfedik, kiegészítik, felidézik egymást –, összetett struktúrákba, szkémákba rendeződnek.

Skemp – Piaget metaforáját továbbfejlesztve – az új fogalmak alkotása során két alapvető műveletet különböztet meg, az asszimiláció és az akkomodáció műveletét. Egy új fogalom asszimilálása Skemp (2005 [206]) terminológiájában azt jelenti, hogy a tanulás során a fogalmat – minél több szállal – hozzákapcsoljuk korábbi ismereteinkhez, beleágyazzuk egy már meglévő struktúrába. A megértés élménye ezeknek a kapcsolatoknak a felismerésével és gazdagságával függ össze. Előfordulhat azonban, hogy az új fogalom nem illik bele, vagy akár ellentmondásban van már meglevő szkémáink valamelyikével, és az új fogalom befogadásához a szkémát meg kell változtatni. „Egy állandó, növekvő szkéma helyett, melynek segítségével az egyén megszervezi múltbeli tapasztalatait és asszimilálja az új adatokat, a szkémának akkomodálódni kell az új helyzethez." (Skemp, 2005, [206] 59. o.)

2.1.2 Fogalomképzet – Concept image A fogalomalkotás folyamatában a fogalomhoz egy idő után egy vagy több szimbólumot – nevet, jelet, esetenként képet – is társítunk, ami lehetővé teszi a fogalom kommunikálását, és segíti annak szellemi manipulálását. Ennek az eddig felvázolt képnek, egy alapvető hiányosságára mutat rá Tall, amikor ezt mondja: „De a teljes kognitív struktúra, ami színezi a fogalom jelentését, lényegesen bővebb, mint egyetlen szimbólum felidézése. Több mint bármilyen mentális kép, legyen az bár képi, szimbolikus, vagy más egyéb. Egy fogalom felidézésének és manipulálásának a mentális folyamatai során sok asszociált folyamat is életbe lép, tudatosan és nem tudatosan befolyásolva a jelentést és a használatot." (Tall, 1981, [224] 1-2. o.) Ezt a teljes kognitív struktúrát nevezték el röviden „concept image"-nek, fogalomképzetnek. Magát a „concept image" – fogalomképzet – kifejezést Schlomo Vinner alkotta meg 1980-ban. Rövid definícióját David Tall-lal együtt adták meg (Tall, 1981 [224]): „A fogalomképzet az elmének azokból a kognitív struktúráiból tevődik össze, amelyek egy bizonyos fogalommal asszociációs kapcsolatban vannak." Tall és Gray (1994 [94]) azt állítja, hogy bizonyos fogalmak megalkotásában a tevékenységek és eljárások meghatározó szerepet játszhatnak.

2.1.3 Procept elmélet „Tekintetbe véve azon fogalmak fontosságát, melyek egyszerre folyamatok (processes) és termékek (products), furcsának találtam, hogy ezeknek nincs nevük." Tall (1991

[225])

Sfard (1987 [205], in Meissner, 2001 [152]) különbséget tesz két fajta matematikai definíció között: vannak definíciók, melyek az absztrakt fogalmakra úgy hivatkoznak, mintha azok konkrét tárgyak lennének, és vannak fogalmak, melyek folyamatokra és tevékenységekre vonatkoznak – mint összeadás, szorzás, kerekítés, deriválás, stb. Az utóbbi fogalom-típus számára alkotja meg Tall a procept fogalmát, amire Gray-vel közösen (Gray, Tall, 1994 [94]) a következő definíciót adják: „Egy elemi procept három összetevőnek az ötvözete: egy eljárás (process), ami egy matematikai tárgyat (object) eredményez, és egy szimbólum, amely az eljárást és a tárgyat egyaránt képviseli. Egy procept olyan elemi proceptek együttese, melyeknek a tárgya közös."

2.1.4 Konfliktusok a fogalomépítésben A szkémák szerinti tanulás előnyeit és hátrányait Skemp (2005, [206] 59-60. o.) így foglalja össze: „Ha szkémák szerint tanulunk – ami ebben az összefüggésben azonos az értelmes tanulással –, akkor nem csupán hatásosabban tudjuk megtanulni azt, amivel éppen foglalkozunk, de egyszersmind olyan szellemi eszközt dolgozunk ki a magunk számára, amellyel megkönnyíthetjük az adott területen a későbbi tanulást. És ami talán még ennél is fontosabb: ha következetesen használjuk ezt az eszközt, akkor egyszersmind a szkéma korábban elsajátított részeit is megszilárdítjuk." „Pillanatnyilag viszont úgy tűnik, hogy éppen a szkémák rendkívüli ereje jelenti a legnagyobb hátrányokat is, minthogy a meglevő szkémákban igen erős az önfenntartás iránti tendencia. Ha tehát olyan helyzetek jönnek létre, amelyekben ezek a szkémák már nem megfelelőek, akkor a szkémáknak ez a stabilitása az alkalmazkodóképesség gátjává válik. ... Az egyén számára a szkéma olyan értéket jelent, hogy mindenfajta megváltoztatásával szemben rendkívüli ellenállást fejthet ki." Ilyenfajta akkomodációra a legkörültekintőbb matematikai nevelés mellett is szükség van időről időre (pl. gondoljunk a negatív, vagy a törtszámokkal végzett műveletek bevezetésére). (A matematikai nevelés egyik igen fontos haszna lehet, hogy csökkenti a meglévő gondolati struktúrák megváltoztatásától való félelmet, nyitottabbá tesz az elő látásra idegen gondolatok felé, csökkenti a gondolkodás előítéletességét.)

Tall és Vinner (Tall, 1981 [224]) is nagy fontosságot tulajdonít a fogalomalkotás során keletkező konfliktusoknak. Szerintük egy fogalomképzet, miközben fokozatosan fejlődik, nem szükségszerűen koherens elemekből áll, tartalmazhat egymásnak ellentmondó elemeket. Ezek meg is férhetnek egymás mellett, ugyanakkor későbbi konfliktusok forrásaivá is válhatnak. Ezt azzal magyarázzák, hogy egy időben a fogalomképzetnek csak egy része aktiválódik. Különböző időpontokban előhívhatunk egymásnak kisebb-nagyobb mértékben ellentmondó részleteket anélkül, hogy az ellentmondást észlelnénk. Ilyenkor „potenciális konfliktus faktorokról" beszélünk. Ezek akkor válnak „kognitív konfliktus faktorokká", amikor az egymásnak ellentmondó aspektusok egyszerre jelennek meg. „Bizonyos körülmények között ezek a kognitív konfliktus faktorok nem tudatosan idéződnek fel, és a konfliktus maga csupán az értetlenség halvány érzésében mutatkozik meg. ... A potenciális konfliktus faktorok egy súlyosabb típusa, amikor a fogalomképzet egyik része magával a formális fogalom-definícióval van ellentétben. Az ilyen faktorok komolyan gátolhatják a formális elmélet tanulását" (Tall, 1981, 4. o.) Ezeknek a konfliktusoknak a feloldása egyszerűbb, ha az ellentmondás verbalizálható, racionálisan végiggondolható. Amennyiben azonban a gondolkodásunk nem-verbális elemeit, „láthatatlan szkémáit" kell módosítani, különösen nehéz a dolgunk, hiszen az sem tudatos, hogy mivel van az új fogalom ellentmondásban, sőt még az ellentmondás ténye sem válik világossá. Ami a felszínen látható, az annyi, hogy egy gyerek sikeres, számára szellemi játék a matematika, vagy éppen ellenkezőleg, kudarcos, teljesen irracionális módon képtelen egyszerű dolgok megértésére is.

2.1.5 A geometria fogalmai Mivel a dolgozatom az egybevágóságfogalom tanításának a problémáival foglalkozik, ehhez szükségem van a fogalomépítés pszichológiájának speciálisan geometriára vonatkozó megállapításaira is.
A térbeli gondolkodás szintjei Különböző modelljei vannak a térbeli gondolkodás fejlődésének. Ennek szintjeivel kapcsolatosan vannak viták. Jelen dolgozatban az alábbi, van Hiele házaspár által kidolgozott, széles körben elfogadott kidolgozott modellt találtam leghasznosabbnak (van Hiele, 1959).
Vizuális szint: az alakzatokat a látvány alapján különbözteti meg. Analitikus szint: az alakzatokra az alkotórészeiket is figyelembe véve tekint, és az alakzatok osztályaiban képes közös tulajdonságokat felfedezni.
Informális következtetések szintje: a korábban felfedezett tulajdonságokat logikailag is képes összekapcsolni.
A dedukció szintje: képes tételeket deduktívan bizonyítani A szigorú matematika szintje: a tételeket axiómarendszerre alapozza. A gyerekek térbeli gondolkodásának szintjeit a későbbiekben összevetjük az egybevágósági procept kialakulásának a különböző fázisaival.

Tall et al (2000a) mutatnak példákat proceptekre az algebra, analízis, stb., területéről, de geometriából nem. Az a felfogásuk, hogy azon a területen nincsenek proceptek, mivel „... a gondolkodás fejlődése a geometriában nagyon más.” Meissner (2001 [152]) másként gondolkodik erről, és némileg módosítja a proceptek kialakulásáról alkotott korábbi képet, úgy, hogy a geometriai fogalomalkotás is beleférjen az elméletbe.

A magam részéről azt gondolom, hogy az egybevágóság fogalma procept a fogalom eredeti értelmezése szerint is. Itt nem csak arra gondolok, hogy a mi megközelítésünk szerint az egybevágóság egy függvény, és a függvényfogalom fontos eleme Tall eredeti listájának is. A transzformációtanítás bármelyik felépítési módszerét elemezve egészen nyilvánvaló, hogy a tanítási gyakorlatban az egybevágóság fogalma tevékenységek és eljárások elvégzése során alakul ki.

2.2 Reprezentációk A tanítás során az ismeretek átadásához, kommunikálásához különböző típusú szemléltetési módokat, külső reprezentációkat használunk. Ezek befolyásolják azt, hogy az ismeret hogyan képeződik le, hogyan reprezentálódik a gyerekek gondolkodásában, hogyan épül be a már meglévő ismeretek rendszerébe. Bruner (1974, [44] 72. o.) terminológiájával: mennyire lesz „gazdaságos”, mekkora lesz a tényleges „kifejező értéke”.

2.2.1 Bruner reprezentációelmélete Bruner osztályozásának megfelelően a reprezentációk három fő típusba sorolhatók: „A tudás bármely területe (vagy a területen belül bármely probléma) háromféle módon képezhető le: egy bizonyos eredmény elérésére alkalmas cselekvések sorozatával (enaktív leképezés); olyan összegező képek vagy vázlatok sorozatával, amelyek valamely fogalmat jelölnek anélkül, hogy azt teljesen meghatároznák (ikonikus leképezés); és olyan szimbólumrendszerből származtatott szimbolikus vagy logikai ítéletek sorozatával, amelyet ítéletek alkotására és átalakítására vonatkozó szabályok és törvények határoznak meg (szimbolikus leképezés).” (Bruner, 1974, [44] 72. o.)

A szimbolikus leképezés fogalma Bruner terminológiájában és a szimbólum, mint egy procept egyik összetevője Tallnál, nem feltétlenül fedi egymást. A leglényegesebb különbség az, hogy míg Brunernél a szimbolikus leképezés a fogalom absztrakt, – racionális, verbális – komponensét jelenti, Tall (1995 [226]) a szimbólumot egy olyan mechanizmusnak (pivot) tekinti, ami kétféle működést indíthat be, vagy egy eljárás végrehajtását, vagy egy fogalomról való gondolkodást. Ennek alátámasztására egyrészt Piaget-ra hivatkozik – „cselekedetek és műveletek a gondolkodás, vagy asszimiláció tematikus tárgyaivá válnak" (in Tall 1995, [226] 1. o.) másrészt Dubinsky-t idézi: „...a konstrukció, ami talán a legfontosabb a matematika számára és a legnehezebb a diákoknak ..." nem más, mint „... egy (dinamikus) eljárás bekebelezése (encapsulation) vagy átalakítása egy (statikus) dologgá." (Dubinsky, 1991, in Tall 1995, [226] 1. o.)

2.2.2 Duál-kód elmélet Paivio duál kód elmélete tovább finomítja Bruner modelljét. „A DCT (Dual Code Theory) szerint a megismerés két különálló alrendszer működését kívánja meg, egy verbális rendszer – ami közvetlenül a nyelvre – és egy non-verbális rendszer (imagery) – ami a nem-nyelvi (nonlinquistic) dolgokra és eseményekre specializálódott." (Paivio, 2006, [167] 3. o.)

A rendszerek belső reprezentációs egységei – melyek mindannyiszor aktiválódnak, amikor tárgyakat vagy szavakat felismerünk, manipulálunk, vagy éppen csak gondolunk rájuk – a „logogen", illetve „imagen" elnevezést kapták. Paivio kísérletei azt bizonyítják, hogy ezek „modalitásspecifikusak, tehát különböző logogenjeink és imagenjeink vannak a tárgyak illetve a nyelv képi, hallási, érzelmi (haptic) és mozgásos jellemzőinek megfelelően." (Paivio, 2006, [167] 3. o.).

Piaget és Skemp elmélete, az új információnak egy szkémába történő asszimilációjáról illetve akkomodációjáról, abban különbözik a duál kód elmélettől, hogy az utóbbiban alapvető fontossága van a nem-verbális és verbális komponenseknek. (Paivio, 2006, [167] 31-32. o.).

Tall és Vinner meghatározását Paivio elméletével összevetve, egy fogalomhoz tartozó képzet – „concept image" – mindazokat a verbális és nem verbáliss komponenseket, logogeneket és imageneket tartalmazza, melyek a fogalommal asszociációs kapcsolatban vannak. Más megfogalmazásban a concept image egy fogalom belső reprezentációinak az együttese.

2.2.3 A reprezentációk szerepe a megértésben „A mélyebb megértéssel járó jutalom sokkal erősebb indíték az erőfeszítésre, semmint annak mostanáig tudatában voltunk."(Bruner, [44] 1974)

A szkémák, fogalmi rendszerek a megértésben alapvető szerepet játszanak. Skemp szerint (2005, [206] 63. o.) „valamit megérteni annyit jelent, mint asszimilálni egy megfelelő szkémába." Vásárhelyi Éva (2007 [248]) tovább finomítja Skemp gondolatát: „A belső reprezentációk közötti kapcsolat az ismeretek egy hálózatát adja, és ezek a kapcsolatok teszik lehetővé az egyik ismeretről a másik ismeretere való áttérést. A fogalmak mentális képét a tárgyi, képi és szimbolikus reprezentációk rendszere alkotja. ... Egy elvet, fogalmat akkor értünk meg, ha annak belső reprezentációja a belső reprezentációs hálózatunk részévé válik. A megértés fokát a kapcsolatok száma, erőssége és stabilitása jellemzi. Tehát a megértés nem más, mint a fogalmak, elvek közötti kapcsolatok létrejötte."

A kapcsolatrendszerekben történő fogalomalkotás előnyeire világít rá Hiebert és Carpenter (Hiebert és Carpenter, 1992, in Tall, 1995, [226] 6. o.). „Egyik előnye annak a hajlandóságnak, hogy kapcsolatokat létesítsünk egy új fogalom és a már meglévők között, hogy a kapcsolatba ágyazott tudásra jobban emlékszünk. Ennek talán két magyarázata is van. Először is, a tudásnak egy teljes hálózata kisebb valószínűséggel hibásodik meg, mint egy izolált információ. Másodszor pedig, az információ visszakeresése esélyesebb, ha az hozzákapcsolódik egy nagyobb hálózathoz. Egyszerűen több útja van a felidézésnek."

2.2.4 Külső reprezentáció – szemléltetés „... a dolgok lényegesek, a szavak csak esetlegesek; a dolgok a test, a szavak csak ruha; a dolgok a mag, a szavak a héj és kéreg. Mindkettőt meg kell egyszerre jeleníteni az értelem számára, de főképpen a dolgokat, mert azok épp annyira tárgyai a megértésnek, mint a nyelv." (Comenius)

Láttuk, hogy a formális definíciók mellett a fogalomképzet nem verbális, nem tudatos elemeinek, kulcsfontosságú szerepe van a megértésben, a matematikai gondolkodásban. Ezek alakulása pedig szorosan összefügg a külső reprezentációkkal – a fogalom különböző szemléltetési módjaival.

Ambrus András (2008b [4]) szerint a külső reprezentációk alkalmasak arra, hogy befolyásuljuk a belső reprezentációk között kialakuló összefüggések alakulását. „Egy fogalom, koncepció külső és belső reprezentációi között kapcsolat van. A belső reprezentációk között is kapcsolatok vannak. A belső reprezentációkat befolyásolja a külső reprezentáció jellege. A belső reprezentációk közötti kapcsolat szimulálható a megfelelő külső reprezentációk közötti kapcsolatok létrehozásával."

Dolgozatom középponti témája a szemléltetés szerepe az egybevágósági transzformációk transzformációk tanításában, ezért, számomra a külső reprezentációk szerepe a fogalomépítésben különösen fontos. Emiatt szeretném külön is hangsúlyozni a felvázolt elméletnek néhány idetartozó, különösen fontos tényezőjét.

A sorrend

A belső reprezentációs rendszerek alakulása függ attól is, hogy a diák mikor, milyen sorrendben, milyen formában találkozik annak külső reprezentációival. Bruner (1974, [44] 78-79. o.) szerint: „a sorrend, amelyben a tanuló az ismeretek valamely területén szembekerül az egyes anyagrészekkel, hatással van arra, hogy az anyagot milyen nehézségek árán fogja elsajátítani." ... „Ha igaz az, hogy az értelmi fejlődés általában az enaktív leképezéstől az ikonikuson keresztül a valóság szimbolikus leképezése felét tart, akkor valószínű, hogy az optimális sorrend ugyanebben az irányban fog haladni. De ez nyilvánvalóan konzervatív doktrína. Mert ha a tanuló már valamiféle fejlett szimbolikus rendszerben gondolkodik, akkor lehetséges az első két szakasz megkerülése. Ám ez azzal a kockázattal jár, hogy a tanuló esetleg majd nem rendelkezik olyan megfelelő képzetrendszerrel, amelyre visszatérve támaszkodhatna, ha a szimbolikus átalakításaival nem sikerül a problémát megoldania."

A külső reprezentációk, a konkrét szemléltetési módok megválasztása

Az, hogy egy konkrét tanulási szituációban melyik reprezentáció a legalkalmasabb, sok mindentől függhet – életkortól, személyiségtől, neveltetéstől, képzettségtől, továbbá magától az érintett műveltségterülettől, és ezen belül a szűkebb témáktól is.

Az előbbiekben láttuk, hogy az ikonikus és még inkább az enaktív reprezentációk igen erős hatással lehetnek a gyerekek gondolkodásában kialakuló nem verbális fogalomképzetekre. Amennyiben ezek ellentmondásban vannak a formális elmélettel akkor nehezen detektálható és nehezen kijavítható kognitív konfliktus faktorok forrásaivá válhatnak. Ennek fordítottja is igaz, eszközül is szolgálhatnak ilyen típusú konfliktus faktorok módosítására.

A szemléltető eszközök használatának módja, időtartama

A szemléltető eszközöket használhatjuk demonstrációként, vagy a gyerekek által használt manipulációs eszközként, rövidebb, ideig, bevezető jelleggel, vagy hosszabb ideig, munkaeszközként. Paivio a szemléltető eszközök használatát duál kódú eljárásoknak nevezi (dual-coding processes). Azt állítja, hogy nem elég ezeket a fogalmak bevezetésére használni, komoly sikereket úgy lehet elérni, ha elegendő ideig, szisztematikusan használjuk őket. (Paivio, 2006, [167] 13. o.).

1.5.8. Szeredi Éva: Transzformációtanítási módszerek

Részlet a Geometria mozgásban. Az egybevágósági transzformációk tanításának egy új módszere című PhD dolgozatból (lásd Szeredi 2011 szeredi2011)

Ebben a fejezetben azt szeretném áttekinteni, hogy a magyar iskolai gyakorlatban hogyan jelent meg az egybevágósági transzformációk tanítása a különböző tanítási segédanyagokban – tantervekben, tankönyvekben, módszertani útmutatókban, szakköri füzetekben, tanítási kísérletekről szóló kiadványokban – hogyan gondolkodtak erről a témáról a matematika tanítással foglalkozó legjobb szakemberek.

A fejezet elején a tantervek tükrében áttekintem, hogy a transzformációk tanítása hogyan vált itthon a geometria tanítás középponti gondolatává.

1. A transzformációtanítás története Magyarországon, tantervek alapján „Ez a szó (curriculum) olyan pályát jelent, amelyet meg kell futni. Ezt a szót talán helytelenül használjuk. A curriculumnak olyan készségek tökéletes elsajátítását kell tartalmaznia, amelyek viszont még nagyobb teljesítményképességű készségek birtoklásához vezetnek" (Bruner, 1974 [44])

A geometria az 1700-as években kezdett megjelenni a magyarországi matematikatanításban. Maróthi György debreceni professzor (1743 [145]) ezt írja Aritmetikájában: „Nem lehet pedig kimondani, mely igen hasznos a gyermeki elmének élesítésére az Aritmetica és ha lehet a Geometria." Tankönyvében a geometriát csak néhány példán keresztül érinti, de ez így is egy nagy előrelépést jelent, hisz korábban a geometria tanítása egyáltalán nem került szóba. Tantervi szinten a geometria a kiegyezés után jelenik meg a magyar oktatásban, akkor is inkább a gimnáziumokban és a polgári megfelelő osztályaiban. Mértan címen a speciális sokszögek és testek tulajdonságai (szemlélet alapján), egybevágóság, hasonlóság, terület- felszín- és térfogatszámítás, szerkesztések, mérések az az anyag, aminek a tanítását a tanterv javasolja. (Cser Andor, 1963 [54])

Az 1924-es középiskolás tantervbe már bekerül az idomok szimmetriájának témaköre az I. (mai számozással 5.) osztály anyagába. „Az idomok egybevágósága, hasonlósága és szimmetriája szemléleti alapokon." (Tanterv a középiskolák számára. 1924)

Az 1946-os tantervben „a mérsékelt mértani anyag (speciális alakzatok kerülete, területe, felszíne, térfogata, szimmetria, egybevágóság, hasonlóság) rendszertelen felépítésű, teljesen szemléletre alapul." (dr. Iker János 1989 [113])

Az 1950-ben megjelenő középiskolás tantervben – a „reális tagozat I. osztály"-ban – a transzformációk témaköre minden eddiginél nagyobb szerepet kap: „A tengelyes tükrözés tulajdonságai és alkalmazása, tengelyesen tükrös idomok. Középpontos tükrözés tulajdonságai és alkalmazásai. Paralelogrammák tulajdonságai." (Tanterv a középiskolák számára,1950)

„Az 1950-es „Számtan és mértan" tanterv célkitűzései között először szerepel a valóság és a matematika kapcsolatainak feltárása, a felismert törvényszerűségek dialektikus materialista szempontú alkalmazása. További új és előremutató cél a függvényszerű gondolkodás alapjainak lerakása. Azonnal hozzá kell tennünk, hogy az új célok megvalósítása a gyakorlatban – részletes útmutatások és kellő tapasztalatok hiányában – nem vagy csak sematikusan történt meg." – írja dr. Iker János (1989 [113]).

Mindenesetre új tankönyvek készülnek, „melyek felvették a harcot a statikus geometriai szemlélet ellen: először jelennek meg a 6. osztálytól átdarabolások, mozgatások, transzformációk." (dr. Iker János 1989 [113]).

Az 1958-as tantervben már az általános iskolában is szerepel a transzformációk tanítása, de nem válik az anyag szerves részévé. Míg végül az 1962-es középiskolai, majd a hetvenes évek átfogó általános iskolai tantervreformjában (1974 ideiglenes, 1978 új komplex matematikatanítási tanterv) a szemléletes és a rendszeres geometriatanítás igényével megjelennek az egybevágósági transzformációk.

2. A geometriai transzformációk megadása Az egymást követő tantervreformokhoz mindannyiszor újabb tankönyvek születtek, melyek általában felhasználták a hazai és külföldi didaktikai kutatások eredményeit.

A függvény- és transzformáció-középpontú oktatás egyre jobban foglalkoztatja a tanítás megreformálását kívánó tanárokat, módszertani szakembereket, sőt matematikusokat is. A 60-as évektől egyre több, a geometriatanítás korszerűsítését célzó oktatási kísérlet indul, amelyek fő célja, hogy a transzformációkat a geometria tananyag középponti, szervező elvévé tegyék és tanításának módszerét kidolgozzák. A tankönyvek mellett a népszerűsítő matematikai irodalomban és a különböző módszertani kiadványokban is szép számmal találunk a transzformációk tanításának témakörével foglalkozó írásokat.

Ezekben az anyagokban két törekvés világosan megfigyelhető. Az egyik a törekvés arra, hogy szisztematikus, matematikailag minél tisztább felépítésben tárgyalják a geometriát. A másik az, hogy a feldolgozás szemléletes legyen, minél közelebb a gyerekek élményvilágához.

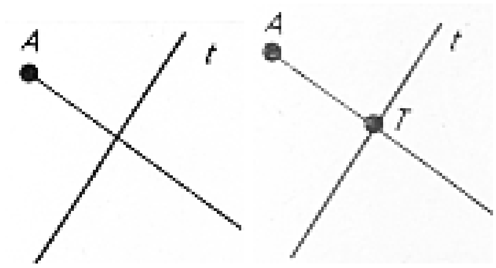
2.1 Transzformációtanítás az alsó-tagozaton Az 1978-as tanterv bevezetése óta a transzformációkkal már az alsó-tagozaton is elkezdünk foglalkozni.

Az alsóbb osztályokban az alakzatok egybevágóságának fogalma az összeilleszthetőséggel, egymásra fektethetőséggel, egymás helyére mozgathatósággal kapcsolatos természetes és ésszerű tapasztalatokon alapszik. Egy síkbeli alakzat átmásolása egy átlátszó papírra és egy másik alakzattal való összeillesztése magától értetődő módszer annak eldöntésére, hogy két alakzat egybevágó-e vagy sem. Amennyiben egybevágóak, akkor a mozgó átlátszó papír egy természetes hozzárendelést valósít meg a két alakzat pontjai között.

2.2 Transzformációtanítás a felső-tagozaton és a középiskolában Az összeilleszthetőség, a másolat egymásra, illetve egymás helyére mozgathatósága természetesen pontatlan eljárás az egybevágóság megállapítására. A felsőbb osztályokban ennél egzaktabb egybevágóságfogalomra van szükség. (Annál is inkább, mert alakzatok lehetnek úgy is egybevágóak, hogy nem mozgathatók egymás helyére – mint például egy jobb és egy bal cipő.) Emellett azonban a matematikatanítási szakemberek a szemléletességtől sem akarnak elszakadni, különösen az általános iskolásoknak szóló anyagokban... Ennek megfelelően a transzformációk tanításának kezdetén két különböző úton adják meg a sík egybevágóságait.

(1) A transzformációkat meg tudjuk egy olyan hozzárendelési szabállyal adni, ami a sík minden egyes pontjához megmondja, hogyan kapjuk meg a hozzátartozó képpontot. Ez a megadási mód egy precíz utasítást ad arra, hogy a sík egyes pontjainak hol a képe. Ezek a definíciók valójában egy egyértelmű szerkesztési eljárást adnak a kép előállítására abban az esetben, ha az eredeti alakzat pontokból, illetve egyenesek és (vagy) körök részhalmazaiból épül fel.

1. példa: (Eglesz et al. 1981, [67] 244. o.) „Ha adott a síkon egy egyenes, a tükörtengely (t-vel jelöljük), akkor a sík bármely pontjának a tükörképéhez eljuthatunk többféleképpen is. Például így:

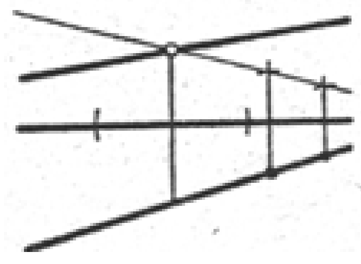


Merőlegest állítunk a pontból a tengelyre. Ez a tengelyt T pontban metszi. A TA távolságot a tengely másik partján, a T ponttól kezdve is felmérjük a merőlegesre. Így jutunk az A' ponthoz. Az A' pontot az A pont képének nevezzük.

(2) A sík mindegyik egybevágóságát meg tudjuk valósítani egy papír mozgatásával – ami a síkot (vagy a síknak egy részét) szemlélteti. Ez a mozgatás minden pontot a neki megfelelő képbe visz, egy olyan utasítást alapján, ami azt mondja meg, hogy hogyan kerülnek az egyes pontok a képükbe. Ez a megadási mód szemléletesebb, közelebb áll az intuitív egybevágóság-fogalomhoz.

A mozgatás egy általában pontatlannak tekintett, nehézkes eljárás, amellyel azonban nem csak pontok, egyenesek és körök képét tudjuk előállítani. Előnye, hogy természetes módon magában hordozza az egybevágósági transzformációk több fontos tulajdonságát.

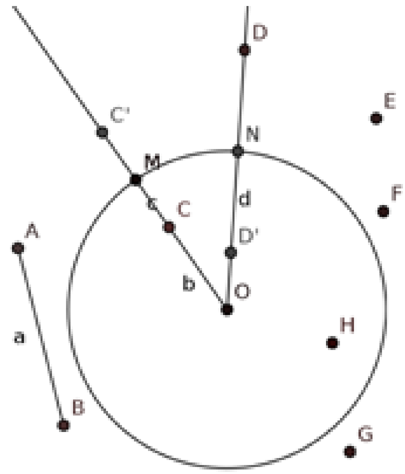
2. példa: (Gallai-Péter 1952, [88] 298. o.) „Tükörrel való tükrözés helyett úgy is megkaphatjuk a tükörképet, hogy a tükrözés tengelye mentén ráhajtjuk a papiros rajzos felét a másikra, és ceruzánkat erősen megnyomva, még egyszer végigvezetjük a rajzon; így a papiros másik felére átvésődik bármelyik tükröznivaló egyenes és pont nyoma.



Szabályszerű szerkesztésben persze sem tükröt, sem hajtogatást nem alkalmazhatunk. E helyett úgy oldjuk meg feladatunkat, hogy megszerkesztjük az (alsó) egyenes két tetszés szerinti pontjának tükörképét (merőlegeseket bocsátva a vízszintesig, és ugyanannyival meghosszabbítva őket); és megrajzoljuk a két tükörképen átmenő egyenest. Így kapjuk az (alsó) egyenes tükörképét."

A legtöbb felépítésben mindkét megadási mód szerepel egymás mellett. A „kockás könyvek"-hez tartozó munkalapokban találhatunk egy különlegesebb hozzárendelést is.

1.80. Példa: *(Csahóczi et al., 1986. [52] 19. o.) Keress egyszerű szabályt, és ennek alapján szerkeszd meg az adott körön kívül levő A pont képét, a B pont képét, az E, az F, a G és a H pont képét! Rajzold meg az AB szakasz minél több pontjának képét! Mit gondolsz, milyen vonal lesz az AB szakasz képe?*



Ez a furcsa transzformáció nem adható meg mozgatással, körre tükrözésnek is nevezhetjük.

A tengelyes tükrözést megadhatjuk pontonkénti hozzárendelési szabállyal és mozgatással is. Távolságtartó, szögtartó, egyenestartó transzformáció. A körre tükrözés (szabályát lásd később, 493. oldal) nem egybevágóság, eltorzítja (el is szakíthatja) az egyeneseket, megváltoztatja a távolságokat, szögeket (bár akad néhány kivételes eset), ráadásul a kör középpontjának nincs képe.

3. Az egybevágóság szemléltetése „A geometria tanulása kezdetén a tapasztalatból, szemléletből való kiindulásnak sokkal nagyobb szerepet kell kapnia, mint az eddigi, hagyományos iskolai oktatásban. A szemlélet sokoldalú és erős foglalkoztatása nélkül a geometria magasabb szintű tanítása és tanulása hamarosan mesterkéltté, formálissá torzul. Az intuitív források fejletlensége és erőtlensége folytán az absztrahálásra és általánosításra, a problémalátásra és a probléma megoldására való készség nem fejlődik ki valójában."(Kárteszi, 1966 [120])

A fenti példák közül a körre tükrözés példája különösen világosan mutatja, hogy ez a fajta „pontonkénti hozzárendelési szabály" nem garantálja az egybevágóságot. Ilyenfajta definíció esetén tehát ezt „hozzá kell tanítanunk" az egybevágósági transzformációkhoz. Erre a többféle megoldást látunk a különböző anyagokban.

3.1 Szemléltetés nélkül

Van, főleg a középiskolás tankönyvek között olyan, amelyben a szerző egyszerűen közli ezeket a tulajdonságokat. Különösebb indoklás nélkül leszögezi, hogy bizonyos transzformációk rendelkeznek a távolságtartás tulajdonságával.

Hajnal Imre speciális matematika osztályok számára írott tankönyvében [99] először megadja a távolságtartás definícióját, majd felsorolja a távolságtartó transzformációkat és megadja a megfelelő hozzárendelési utasításokat. (A dolgozatban Függelék I. A)

Természetesen lehet a tiszta Hilbert-féle utat követni, és az egybevágósági axiómákból, a háromszögek egybevágóságának alapesetei segítségével bizonyítani a távolságtartást. Erre a tankönyvirodalomban nem találtam példát, feladatgyűjteményben igen. (A dolgozatban Függelék I. B)

3.2 Szemléltetés méréssel

Vannak olyan példák is, ahol a módszer kidolgozói törekednek a szemléltetésre, de a mozgatáson alapuló okoskodásokat el akarják kerülni. Erre példa az a kísérlet, amit az Egri Ho Si Minh Tanárképző Főiskolán dolgoztak ki dr. Pelle Béla vezetésével. (dr. Jakab Albert et al. (1972 [172], 1980 [115]). Ebben a felépítésben a tengelyes tükrözés tulajdonságait egy kibővített axiómarendszernek tekintették. Erre az alapra építve a sík többi egybevágóságáról bizonyították, hogy előállnak tengelyes tükrözések egymásutánjaként, tehát távolság és szögtartó transzformációk.

Ennek a kísérletnek a matematikai hátterében feltehetőleg a Hjelmslev-Bachmann-féle felépítés áll. Az axiomatikus alapozást a tervezők azzal próbálják megkerülni, hogy a tengelyes tükrözés tulajdonságait szemlélet alapján megállapítják, alaptételekbe foglalják. Erre a célra egy sablont használtak, melynek segítségével előállították egy négyszög tengelyes tükörképét, majd képen és tükörképen összehasonlító méréseket végeztek. (A dolgozatban Függelék I. C).

A leggyakoribb megoldás azonban mégis az, hogy szerzők a mozgatással való szemléltetéshez folyamodnak a sík egybevágósági transzformációinak a bevezetéséhez, illetve azok tulajdonságainak alátámasztásához.

3.3 Szemléltetés mozgatással

A tanítási gyakorlatban a sík egybevágóságait sok esetben egy darab papírral szemléltetjük. Ez a darab papír jelképezi a mozgó síkot, (esetleg annak csak egy részét), amit a mozgatással önmagába, mégis egy új helyzetbe vihetünk.

Ez a módszer, elsősorban az általános iskolások számára íródott anyagokban teljesen általános, de több kiváló középiskolás könyv is van, amelyik ezt az utat követi. Vannak azonban különbségek, abban is, hogy hogyan adják meg ezeket a mozgatásokat és abban is, hogy hogyan használják fel azokat az egybevágóság alátámasztására.

A mozgatással való szemléltetés már egészen korán szerepel, mellékes, komolytalan szemléltetésként, olyan, háború előtti tankönyvekben is, ahol a geometriai transzformációknak a szerepe még meglehetősen jelentéktelen. (A dolgozatban Függelék I. E)

A Gallai Tibor és Péter Rózsa által írt híres középiskolai tankönyvcsaládban a transzformációk mozgatással való szemléltetése már fontos szerepet kap az egybevágóságfogalom alakításában. (A dolgozatban Függelék I. F) [87], [88]

Az 1962-es tantervben először jelent meg az egybevágósági transzformációk tanítása a szemléletes és a rendszeres geometriatanítás igényével. Az 1962-es tantervhez új középiskolás tankönyvsorozat is készült [110], [111], melynek szerzői – Pálmay Lóránt és Horvay Katalin – mindketten szakértői a geometriai transzformációk tanításához kapcsolódó hazai és külföldi kutatásoknak. A sík egybevágósági transzformációit mozgatással vezetik be. Erre a szemléletes bevezetésre alapozva fogalmazzák meg a távolság és szögtartást, valamint a hozzárendelési szabályt, amely a képek szerkesztését a továbbiakban lehetővé teszi. (A dolgozatban Függelék I. H)

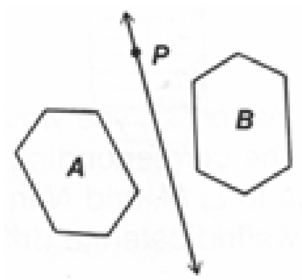
A függelékben bemutatunk egy részletet Gádor Endréné (1971 [86]) tanári segédkönyvéből is (A dolgozatban Függelék I. I), amit a 62-es tanterv alapján íródott általános iskolás tankönyvcsaládhoz készített, speciálisan a geometriai transzformációk tanításáról. Gádorné felfogása számomra különösen fontos, több szempontból is. Egyrészt, nagy hangsúlyt fektet arra, hogy a gyerekek maguk tevékenykedjenek. Ez eddig összhangban van a Pelle-féle kisérlettel is, ahol a kísérlet irányítói szintén fontosnak tartják az egyéni tapasztalatszerzést, de abban a mérésekre helyezik a hangsúlyt. Gádorné azonban a mozgatással való kísérletezést állítja a középpontba.

A „kockás" könyvek és az utánuk következő – dr. Hajdú Sándor által szerkesztett – tankönyvsorozat [97] a Pálmay-Horvay-féle feldolgozáshoz hasonló szemléletben tárgyalja a transzformációkat, természetesen az általános iskolások életkorának megfelelő szinten. (A dolgozatban Függelék I. J)

4. Egy angol transzformációtanítási módszer „Síkidomok egybevágóságára úgy gondolhatunk, hogy ha az egyiket lemásoljuk, akkor a másolat a másikra illeszthető."(Collier, 1976 [50])

A magyar példák mellé a sok külföldi módszerből egyet szeretnék bemutatni, ami fontos segítség volt az általunk kidolgozott módszer megalkotásában. A következő részletek egy tanárképzési céllal írott geometria könyvből valók. Collier (1976 [50]) a transzformációval kapott képeket átlátszó papír mozgatásával nyeri. A képek előállításához a sík minden egybevágóságára részletes mozgatási utasítást ad, módszere azonban több szempontból is eltér a Magyarországon megszokottaktól. Ezért két síkbeli egybevágóságnak – a tengelyes tükrözésnek és a pont körüli forgatásnak – részletesen megadom a könyvbeli leírását, hogy a későbbiekben hivatkozhassak rájuk.

4. példa (Collier 1976. [50] 123. o.)
Tengelyes tükrözés:



„Tegyük fel, hogy adott az A alakzat és azt kell tükrözni az adott l egyenesre. A következő módszerhez átlátszó papírra van szükséged, és a következő lépeseket kell követned:

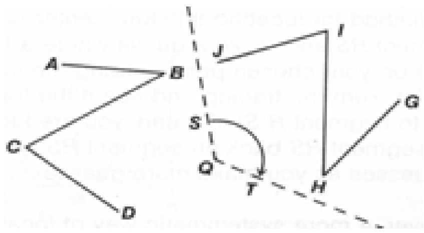
(1) Helyezd az átlátszó papírt az A alakzat és az l egyenes fölé; másold át az A alakzatot, az l egyenest és a P segédpontot.

(2) Emeld fel a másolópapírodat és fordítsd át úgy, hogy az l egyenes másolata egybeessék az eredeti l egyenessel és a P pont másolata egybeessék a P ponttal.

(3) Az A alakzat „tükörképe" átlátszik az átlátszó papírlap másik oldaláról. Ha szeretnél maradandó képet kapni a tükörképről, akkor indigó segítségével visszakopírozhatod az eredeti

mellé. Ezeknek az utasításoknak a végrehajtása előállítja az ábra B alakzatát, mint az A alakzat tengelyes tükörképét az l egyenesre. Vigyázzunk, hogy a tengelyt és a P segédpontot is lemásoljuk. Ha elhagyjuk a segédpontot, akkor nem biztos, hogy a valódi tengelyes tükörképet kapjuk. Lehet, hogy „csúszás tükrözés"-t végzünk tengelyes tükrözés helyett."

Forgatás:



„Adott egy egyszerű, nyitott görbe, $ABCD$, amint az ábrán látható, és tegyük fel, hogy neked el kell $ABCD$-t forgatnod a Q pont, mint a forgatás középpontja körül, ST irányított szöggel. A következő eljáráshoz átlátszó papírra van szükséged, és a következő lépeseket kell követned:

(1) Helyezd az átlátszó papírt az alakzat fölé (beleértve a Q, S és T pontokat is) és másold át az $ABCD$ görbét valamint az ST ívet.

(2) Tartsd a ceruzádat úgy, hogy a Q másolata rajta maradjon a Q ponton.

(3) Miközben a Q pontnál együtt tartod az eredeti lapot és a másolópapírt, forgasd el a másolópapírt (ne az eredetit) addig, amíg az S pont másolata találkozik a T ponttal.

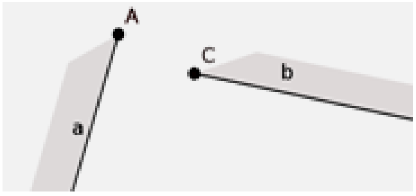
(4) A lemásolt alakzat a keresett elforgatott kép. Ha szeretnél egy maradandó képet kapni az elforgatott képről, akkor indigó segítségével visszakopírozhatod az eredeti mellé."

5. A „zászlós módszer" Ebben a részben a sík egybevágósági transzformációinak egy újfajta szemléltetésével foglalkozom, és azzal hogy erre alapozva hogyan adhatjuk meg a sík egybevágóságait, úgy, hogy az ne csak egy rövid ideig használt szemléltetés legyen, hanem legitim eleme az egybevágósággal kapcsolatos ismereteiknek.

5.1 A zászlós módszer születése

A főiskolai tanításomban tapasztalt gondolkodási hibák (melyeket a dolgozat előzményeként már bemutattam), a saját középiskolás – tanulóként és tanárként szerzett – tapasztalataim, továbbá a Hajós-féle, mozgásokra alapozott egybevágóság-fogalom mélyebb megértése voltak azok a hatások, melyek egy eddigiektől eltérő szemléltetési módszer keresésére ösztönöztek. Egy olyan módszertani megoldás keresésére, mely egyszerre megfelel az általános és középiskolás gyerekek képességeinek, gondolkodási szintjének, mindennapi tapasztatainak, s mindeközben összhangban áll a geometria axiomatikus felépítésével. Fokozatosan egyre világosabb lett, hogy a mozgás fogalma kulcsfontosságú ezekben a problémákban is, és a probléma megoldásában is.

Két fontos példa állt előttem, egyik a Hajós axiómákban megadott mozgásfogalom, a másik pedig az előző fejezetben ismertetett angol módszer, amelyik a szemléltetésnek sokkal fontosabb szerepet ad a transzformáció tanításban, mint a magyar hagyomány, és amelyik a tengelyes tükrözésnél elszakad a kötött pályával való mozgatástól. Olyan módszert kerestem, amely összeegyezteti az átlátszó papír segítségével történő, kisgyerekekhez közelálló szemléltetést és a Hajós-féle, félsíkkal-félegyenessel való egységes, tiszta megadási módot. Első lépésként a főiskolai tanításomban elkezdtem használni az átlátszó papírt a mozgás szemléltetésére úgy, hogy a mozgást két félegyenes és határolt félsík segítségével adtam meg. Ezzel sikerült a főiskolás hallgatók számára a mozgási axiómákat érthetőbbé tenni, de ugyanakkor egyértelmű volt, hogy ez a módszer, ebben a formában, az iskolai gyakorlatban nem használható.



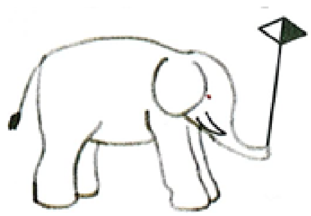
A félegyenes által határolt félsík szokatlan alakzatához valami egyszerű szemléltetést kellett még találnom. Ebben az segített, hogy Hajós György ezt az alapalakzatot – félsík határán egy félegyenessel – az előadásaiban mindig zászlónak nevezte. Ebből született az iskolás gyerekek számára a fehér és a fekete zászló, amit egy mozgatás során fedésbe kell hozni egy átlátszó papír segítségével.

5.2 Mozgás megadása zászlók segítségével

„Ha az alakzat mozog, akkor pontjai új helyzetbe kerülnek, de lehetnek közöttük helyben maradó pontok is. Mozgás közben az alakzat alakja nem változik meg. Szó lehet az egész tér, azaz a tér valamennyi pontjának együttes mozgásáról is. Egy alakzat mozgását mindig kiegészíthetjük az egész tér mozgásává. Úgy gondolhatjuk tehát, hogy egy alakzat mozgásakor a mozgó tér viszi az alakzatot új helyzetbe. Nem gondolunk arra, hogy a mozgó alakzat pontjai milyen helyzetet foglalnak el, hanem csak arra, hogy a mozgás révén milyen kezdő helyzetből milyen véghelyzetbe jutottak." (Hajós 1971 [101] 10. o.)

A dolgozatban tárgyalandó új módszerben a sík egybevágósági transzformációit mozgatással szemléltetjük. Olyan utasításokat adunk, melyek könnyen megjegyezhetőek, végrehajtásuk pedig egyszerű, segítségükkel gyorsan, és elég jó pontossággal előállítható a transzformált kép. A transzformáció megadásában a mozgatás pályája semmi szerepet nem játszik, kizárólag a kezdő és véghelyzet határozza meg.

A transzformáció elvégzéséhez szükségünk van átlátszó papírra. A mozgatást két zászló segítségével adjuk meg, egy fehér és egy fekete zászlóval. Mindegyik zászló egy szakaszból (a zászlórúd), és egy hozzáillesztett háromszögből áll. A két zászló egyforma alakú és méretű, az egyik fehér, a másik pedig fekete.

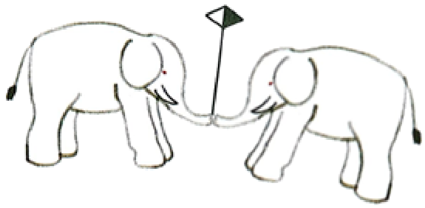


Az ábra egy ilyen példát mutat: (Példánkban a két zászlórúd egybeesik.)

A gyerekek a következő utasítást kapják:

5. példa (Szeredi, Kovács, 2003, [218] 56. o.)

„Másold át a megadott ábrát (alakzatot) a fehér zászlójú mutatóval együtt az átlátszó papírra! Ezután emeld fel a másolatot, majd tedd le úgy, hogy a fehér zászlójú mutató pontosan fedje a fekete zászlóját! (Ha ezután az átlátszó papírra újra átmásolod az eredeti ábrát is, akkor azon együtt lesz az elmozgatással kapott kép és az eredeti rajz.)”



Ennek az eljárásnak a „zászlós módszer” nevet adtam.

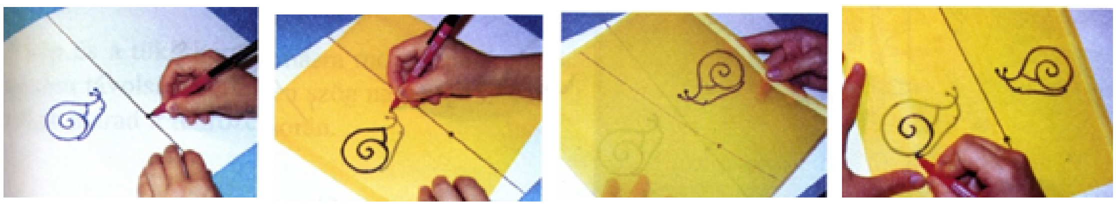
Lássuk, hogyan lehet a sík különböző egybevágóság típusait ilyen módon definiálni az általános iskolás gyerekek szintjén.

A) Tengelyes tükrözés

Először gondosan megmagyarázzuk az eljárást, ahogyan a tengelyes tükörkép előállítható.

6. példa (Szeredi, Kovács, 2004, [219] 31. o.)

„Tegyük a másolópapírt az ábrára, másoljuk át a rajzot és az egyenest is, majd a másolópapírt emeljük fel és tegyük le úgy, hogy a tükörtengely pontjai önmagukra kerüljenek, de a tengely két oldala felcserélődjön!”



Ahhoz, hogy a tengely pontjait pontosan egymásra tudjuk illeszteni, meg kell jelölnünk rajta egy pontot.

Ha ezután az eredeti rajzot újra átmásoljuk a másolópapírra, megkapjuk együtt az eredeti rajzot és tükörképét.

Ezen az eljáráson alapul a definíció:

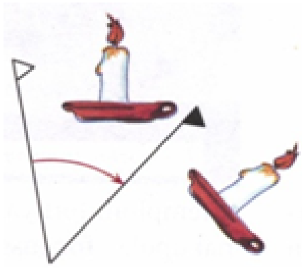
„Adott egy t egyenes, a tengely. Ha a síkot úgy mozgatjuk el, hogy a tengely pontjai önmagukra kerülnek, és a tengely által határolt két félsík helyet cserél, akkor a tengelyes tükörképet kapjuk.” (Szeredi, Kovács, 2004, [219] 31. o.)

Ezt a definíciót 6. osztályos gyerekek nyelvén fogalmaztuk meg, ugyanakkor szinte szó szerint megegyezik a tengelyes tükrözés Hajós által megadott, egyetemistáknak szóló, definíciójával (Hajós 1971 [101] 43 o.).

Nehezebb a helyzet a sík többi egybevágósága esetében.

B) Forgatás

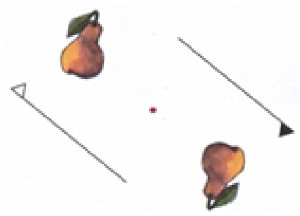
A forgatást, eltolást, csúszástükrözést a matematikai háttér című fejezetben már definiáltuk térbeli mozgásként is. Az ott adott, precíz matematikai definíciókat nehéz lenne megérteni egy iskolás gyereknek. Helyette két zászló segítségével adjuk meg a transzformációt az ábrákon látható módon.



A forgatást egy középponttal és egy irányított szöggel adjuk meg. Ha az irányított szöget a forgatás középpontjába tesszük, és az ábrának megfelelően rátesszük a zászlókat, akkor ezzel pontosan, és minden gyerek számára világosan megadtuk a forgatást.

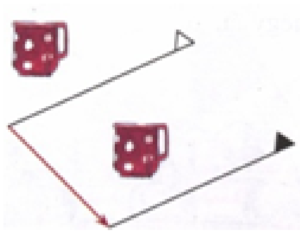
C) Középpontos tükrözés

Ez természetesen a forgatás egy speciális esete, például így is megadhatjuk:



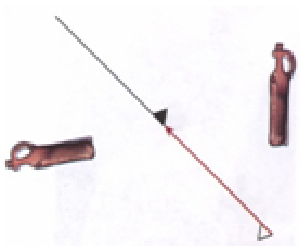
D) Eltolás

Hasonlóan egyszerű az eltolás zászlókkal történő megadása is. Az eltolást egy irányított szakasszal adhatjuk meg. Ha arra az ábrának megfelelően zászlókat illesztünk, megadtuk az eltolást.



E) Csúszástükrözés

Ezzel a módszerrel a csúszástükrözést is könnyűszerrel megadhatjuk.



A csúszástükrözéssel való foglalkozást a tankönyvek amúgy gondosan elkerülik, mert nehéz elhitetni róla a gyerekekkel (sőt a tanárokkal is), hogy az nem két egybevágóság egymásutánja, hanem egyetlen transzformáció. Ezzel a módszerrel a gyerekek számára természetes, hogy ez egyetlen transzformáció, ami egyszerre rokona az eltolásnak és a tengelyes tükrözésnek is. A zászlórúd helye úgy változik, mint az eltolásnál, a zászló háromszöge pedig két ellentétes félsíkba mutat, mint a tengelyes tükrözésnél.

5.3 A zászlós szemléltetésre alapozott transzformáció-tanítás

A megtanított anyag tartalmában nincs számottevő különbség a korábbi feldolgozási módszerekhez képest, a sorrendben és a hangsúlyokban azonban igen. Ezért ebben a részben röviden felvázolom ennek a mozgatásra alapozott felépítésnek a menetét. Ennek az útnak azokat az állomásait, melyeket a fogalomépítés szempontjából különösen fontosnak tartok, a következő fejezetekben, a „zászlós módszer” mélyebb elemzésében részleteiben is bemutatom.

A tantervnek megfelelően 6. osztályban bevezetjük a tengelyes tükrözést, 7. osztályban a középpontos tükrözéssel és 8. osztályban az eltolással foglalkozunk részletesebben. Ezek mindegyikét először mozgatásként vezetjük be, azaz a gyerekek megtanulnak egy egyszerű eljárást a transzformált kép előállítására átlátszó papír segítségével. A másolópapír használatára alapozzuk a transzformáció-tulajdonságok felismerését. Ennek a módszernek a használata során sokféle tapasztalatszerzési lehetőséget kínálunk az alakzat és kép megfigyelésére, összetartozó részletek keresésére, a közöttük lévő kapcsolatok vizsgálatára.

Eközben lehetőség nyílik arra, hogy az egyes transzformációk minél több tulajdonságát a gyerekek tudatosítsák, megfogalmazzák, továbbá, hogy, a pont és képe között felismert összefüggések alapján, a pontonkénti hozzárendelési szabályokat megfogalmazzák, valamint hogy megismerjék azokat a körzős-vonalzós eljárásokat, melyekkel egy pont képét előállíthatják.

A másolópapírt a körzős vonalzós szerkesztések mellett a korábbiaknál sokkal tovább használják feladatmegoldásra, szimmetrikus alakzatok, vagy egybevágó alakzatpárok összetartozó részleteinek vizsgálatára, érvelések alátámasztására.

6. A bemutatott módszerek főbb jellemzői A bemutatott anyagok alapján megfogalmazhatunk néhány általános megállapítást.

Láttuk, hogy nem minden felépítés törekszik a szemléltetésre.

A legtöbb esetben azonban a szemléltetés fontos szerepet kap.

Az angol módszer a magyar hagyományoktól elsősorban abban tér el, hogy

- térbeli mozgással definiálja az egyes egybevágóságokat;
- ezekre építi az egyes egybevágóságok tárgyalását, nemcsak illusztrációként használja ezeket;
- nem hagyja ki a csúszástükrözést a sík egybevágóságai közül;
- egyetlen esetben – a tengelyes tükrözésnél – úgy adja meg a mozgatási utasítást, hogy csak a kezdő és véghelyzetet rögzíti.

A „zászlós módszer” a magyar transzformáció-tanítási hagyományoktól elsősorban abban tér el, hogy az egybevágóságok megadására pontos és könnyen megvalósítható, egyszerű módszert kínál, melyben csupán a kezdő és véghelyzet számít. Ez maga után von egy sor további, kisebb-nagyobb változást is a fogalomépítésben, amit az alábbi táblázatban foglaltam össze.

A magyar hagyomány főbb jellemzői	***A zászlós módszer főbb jellemzői***
A szemléltetéshez a legtöbb esetben a mozgatást használják – egy kivágott, vagy megrajzolt alakzatot tartalmazó papír meghatározott úton történő mozgatását;	A szemléltetéshez a legtöbb esetben egy átlátszó papír mozgatását használja, mely a transzformálandó alakzat mellett tartalmaz egy zászló is, melyet egy másik, rögzített zászlóba mozgatva kapjuk meg az alakzatunk képét;
A mozgatások pont vagy tengely körüli forgatásokhoz, eltolásokhoz kapcsolódó mindennapi tapasztalatokon alapszanak. Azoknak is prototipikus változataihoz, amikor a mozgatás kötött pályán – egy rögzített pont, vagy tengely körül, eltolásnál pedig egy párhuzamos sínpár mentén – történik;	A mozgatások nem kapcsolódnak szorosan a forgatásokról, eltolásokról szerzett mindennapi tapasztalatok prototipikus változataihoz. A pontok pályája akármilyen lehet, egy-egy transzformáció meghatározásában csak a mozgó sík kezdő és véghelyzete számít;
A hangsúly mindeközben az alakzatok mozgatásán van, a papírdarab – bár szimbolikusan reprezentálhatná a mozgó síkot – inkább csak az alakzat hordozója marad;	A hangsúly az átlátszó papír mozgatásán van, a papírdarab szimbolikusan reprezentálja a mozgó síkot, miközben az alakzatot is a transzformált képébe viszi;
A szemléltetés kiindulási alapot ad a vizsgált transzformáció invariáns tulajdonságainak megállapításához, ezeket a tulajdonságokat a gyerekek intuitív egybevágóság fogalmára alapozza;	A zászlókkal megadott mozgatás lehetőséget ad az összetartozó részletek alapos megfigyelésére, így egyrészt a transzformáció invariáns tulajdonságainak megállapítására, másrészt a szimmetriákon alapuló okoskodásokra, szimmetrikus alakzatok tulajdonságainak leolvasására, bizonyítására;
Az a tanítási fázis, amelynek során mozgatással szemléltetjük az egyes egybevágóságokat, szinte minden esetben egy rövid bevezető időszakot jelent;	A sík egybevágósági transzformációinak térbeli mozgással való megadása, megvalósítása része marad a tanítási folyamatnak, akár az érettségiig;
Erre a szemléltetésre alapozva megalkotják a hozzárendelési szabályt, mely a későbbiekben átveszi a precíz definíció szerepét, ami egy pontonkénti hozzárendelési szabályt jelent, és melynek segítségével a transzformált kép körzővel, vonalzóval megszerkeszthető.	A szemléltetésre alapozva megalkotják a hozzárendelési szabályt, melyet a későbbiekben a mozgás-definícióval párhuzamosan, ekvivalens definícióként használnak a diákok. Ennek segítségével megtanulják a megfelelő eljárásokat egy pont transzformált képének körzővel, vonalzóval való szerkesztésére, amit párhuzamosan használnak a megfelelő átlátszó papíros eljárásokkal.

1.5.9. Szeredi Éva: Az egybevágóság általános fogalma felé

Részlet a Geometria mozgásban. Az egybevágósági transzformációk tanításának egy új módszere című PhD dolgozatból (lásd Szeredi 2011 szeredi2011)

Ebben a fejezetben szeretném röviden megmutatni, hogy hogyan folytatjuk tovább az egybevágósági transzformációk tanítását; válaszolni Malara (1995, [143]166. o.) kérdésére, hogy „vajon lehetséges-e, és milyen mértékig, felülemelkedni a transzformáció mint cselekvés (action) fogalmán, és eljutni a transzformáció mint hozzárendelés fogalmához?"

A mozgatásoktól tovább kell lépnünk, hogy eljussunk az általános egybevágóságfogalomhoz, már csak azért is, mert a térbeli mozgások a tér egybevágóságainak csak egy részhalmazát (részcsoportját) alkotják. El kell jutnunk oda, hogy az egybevágóságok a tér önmagára történő távolságtartó leképezései. Ennek az útnak három fontos állomása:

- a mozgásként megadott transzformációk pont-pont hozzárendelési szabállyal való megadása;
- a transzformációk ekvivalenciájának kérdése;
- a távolság és szögtartás és egyéb transzformáció tulajdonságok általános vizsgálata.

1. Transzformációk megadása pontonként Amíg a mozgatás többé-kevésbé egy mellékes, vagy éppen szükséges, de nem igazán kívánatos, esetleg kifejezetten nemkívánatos eleme volt a transzformáció-tanításnak, addig természetes volt a törekvés, hogy a mozgatással való szemléltetést minél hamarabb felváltsa a hozzárendelések pontonkénti, szabatos megadási módja.

A zászlós módszerben a tengelyes tükrözés pontonkénti hozzárendelési szabályát csak akkor vezetjük be, amikor a tükörkép mozgatással való előállításában, összetartozó részletek keresésében, a tulajdonságok megfigyelésben már gyakorlatot szereztek a gyerekek. Fontosnak tartottuk az anyag felépítésében, hogy az egybevágóságok szög- és távolságtartó tulajdonságai természetes módon fejlődjenek tovább az egybevágóságról szerzett gyerekkori tapasztalatokból.

A tengelyes tükrözés pontonkénti hozzárendelési szabályának bevezetését elképzelt (vagy akár valódi) tornaórai játékhoz kapcsoltuk. A feldolgozásmódnak több érdekes tanulsága is van, ezért részletesen idézem a megfelelő tankönyvi részletet.

9. példa: (Szeredi, Kovács, 2004, [219] 37. o.) „Tükrözés pontonként

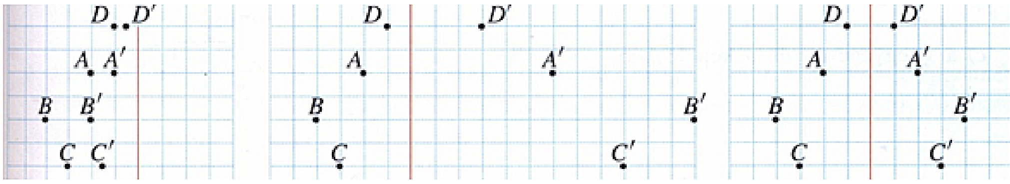
A gyerekek tornaünnepélyre készülődnek. A tornatanár segítségül négyzethálót festett fel a pályára. A pálya közepén egy egyenest pirossal megjelölt. Ilyen gyakorlatokat végeztetett a gyerekekkel:

a) Sípszóra mindenki szaladjon a legrövidebb úton az egyeneshez és utána tovább még ugyanannyit!

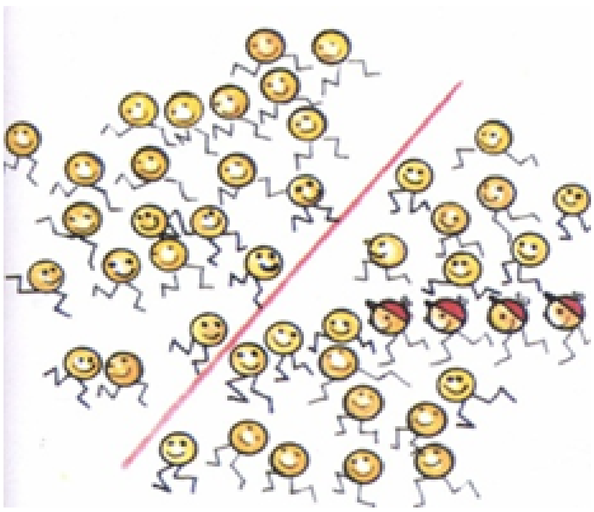
b) Sípszóra mindenki szaladjon a legrövidebb úton az egyeneshez és utána vissza feleannyit!

c) Sípszóra mindenki szaladjon a legrövidebb úton az egyeneshez és utána tovább még háromszorannyit!

Párosítsd össze a szabályokat a képekkel! (A képeken Anna helyét A, az új helyét pedig A' jelöli. B és B' Bélát, C és C' Csabát, D és D' Danit jelöli.) Melyik szabálynál kerülnek a gyerekek a piros egyeneshez képest a tükörképek helyére?”



„Az a) szabály éppen a tengelyes tükörképébe juttatja a gyerekeket. Elképzelhetjük az egész síkot úgy, mint egy végtelenbe nyúló, hatalmas sportpályát, aminek a pontjai – akár a gyerekek – át tudnak rendeződni különböző szabályok szerint. Például, ha a síkon adott egy egyenes akkor a pontok ilyen utasítást kaphatnak:



Sík pontjai figyelem!

Mindenki szaladjon a legrövidebb úton az egyeneshez, és onnan tovább még ugyanannyit!

Ez az utasítás a tengelyes tükörképükbe juttatja a sík pontjait. Ilyen módszerrel minden ponthoz hozzápárosítunk, vagyis hozzárendelünk egy másikat. Ezt az eredeti pont képének nevezzük. Az eredeti pont betűjelével, és még egy vesszővel jelöljük őket.

Ha meg van adva a t egyenes, akkor a sík bármelyik pontjának tengelyes tükörképét úgy kaphatjuk, hogy a P pontból merőlegest állítunk a t tengelyre, majd ennek a meghosszabbításán megkeressük azt a pontot, ami a tengelytől ugyanolyan messze van, mint az eredeti P pont. Ez a P' pont a P pont t tengelyre vonatkozó tükörképe.”

Ennek a megadásnak egy fontos momentuma a tréfásan megfogalmazott hozzárendelési utasítás, és a hozzátartozó ábra a futkározó pontokkal.

A tanári útmutató azt javasolja, hogy beszélgessünk a gyerekekkel az ábráról, arról, hogy valójában a sík minden pontjára vonatkozik az utasítás, de mi csak néhány pontra, például egy szakasz pontjaira, és a képükre vagyunk kíváncsiak. Azokat megjelöljük, úgy is képzelhetjük, mintha sapkát adnánk rájuk, és csak azt figyeljük meg, hogy azok hová kerülnek. Ez összecseng a másolópapír használatával, ami a teljes mozgó síkot jelképezi a rajta kijelölt alakzattal együtt, és segíti annak a képnek a kialakulását, hogy egy geometriai transzformáció során az alaphalmaz minden pontja részt vesz a transzformációban. Ugyanakkor az összehasonlítás rávilágít a feldolgozásmód egy hibájára is. Hozzárendeléshez ugyanis itt is hozzákapcsoltuk a mozgás képzetét. Itt a pontok külön-külön mozognak, és míg a „zászlós módszer”-nél nagy hangsúlyt tettünk arra, hogy a mozgatás pályája ne számítson, itt minden egyes pont mozgását előírtuk.

Annak köszönhetően, hogy a mozgatással való megadás egyenrangú a pontonként megadott hozzárendelési szabállyal, természetes módon vetődik fel az, hogy támpontokat keressünk a különböző transzformációk összehasonlításához.

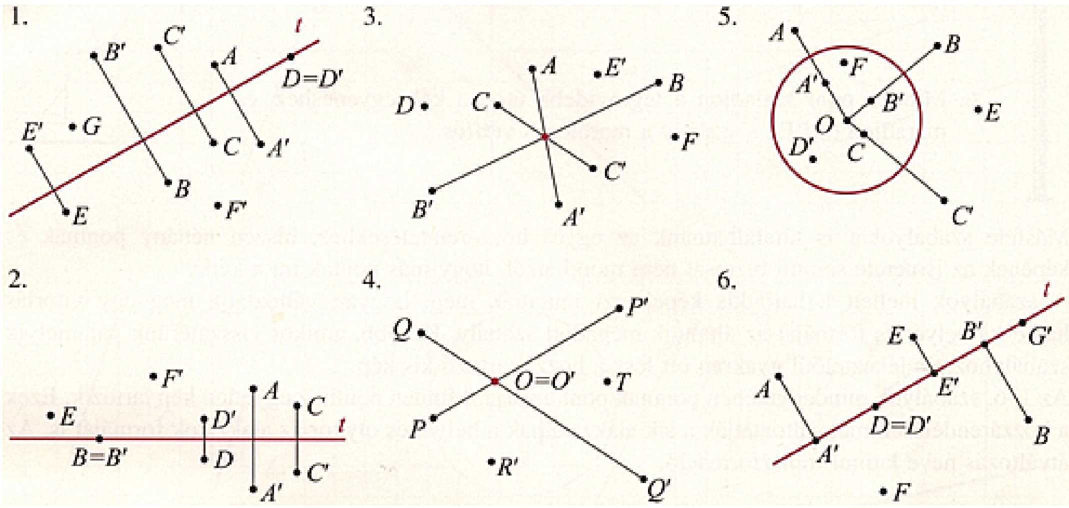
Ehhez szolgáltat kiindulási alapot a következő feladat.

10. példa (Szeredi, Kovács, 2003, [218] 53. o.)

Pont-pont hozzárendelések

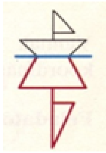
„Játsszunk szabályjátékot pontokkal!

Az alaphalmaz elemei a lap síkjának pontjai legyenek. Megadtunk néhány pontot és némelyiknek a párját is. Mi lehet az egyes hozzárendelések szabálya? Amelyik pontnak nem adtuk meg a képét, annak keresd meg! Amelyiknek pedig csak a képét adtuk meg, annak keresd meg az eredetijét!”

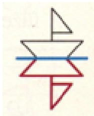


A feladathoz a tankönyv közöl egy-egy lehetséges megoldást is, (a lehetséges szó itt nagyon fontos, hangsúlyt fektetünk arra, hogy ez a néhány adott pár nem határozza meg a hozzárendelést), méghozzá kicsi képekkel együtt, amelyek szemléletesebben is megmutatják, hogyan változtatják meg az alakzatokat az egyes hozzárendelések.

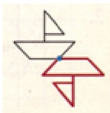
1. Sík pontjai figyelem! Minden pont szaladjon a legrövidebb úton (vagyis az egyenesre merőleges irányban) a piros egyeneshez, majd fusson tovább kétszerannyit! (Így az egyenesen levő pontok helyben maradnak.)



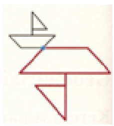
2. Sík pontjai figyelem! Minden pont szaladjon a legrövidebb úton a piros egyeneshez, majd fusson tovább ugyanannyit! (Így az egyenesen levő pontok helyben maradnak.) Szabályunk éppen a tengelyes tükrözés. A tengelyes tükrözést egy egyenessel adjuk meg.



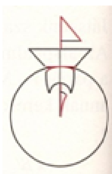
3. Sík pontjai figyelem! Minden pont szaladjon a legrövidebb úton a piros ponthoz, majd fusson tovább ugyanannyit! Ez a szabály a középpontos tükrözés. A középpontos tükrözést egy ponttal adjuk meg.



4. Sík pontjai figyelem! Minden pont szaladjon a legrövidebb úton a piros ponthoz, majd fusson tovább kétszerannyit! Ez egy középpontos nagyítás, egy ponttal és a nagyítás arányával adjuk meg.



5. Sík pontjai figyelem! Minden pont szaladjon a legrövidebb úton a piros körhöz, (vagyis a kör középpontja felé mutató irányban), majd tovább ugyanannyit!



6. Sík pontjai figyelem! Minden pont szaladjon a legrövidebb úton a piros egyeneshez, és maradjon ott! Ez a szabály a merőleges vetítés.

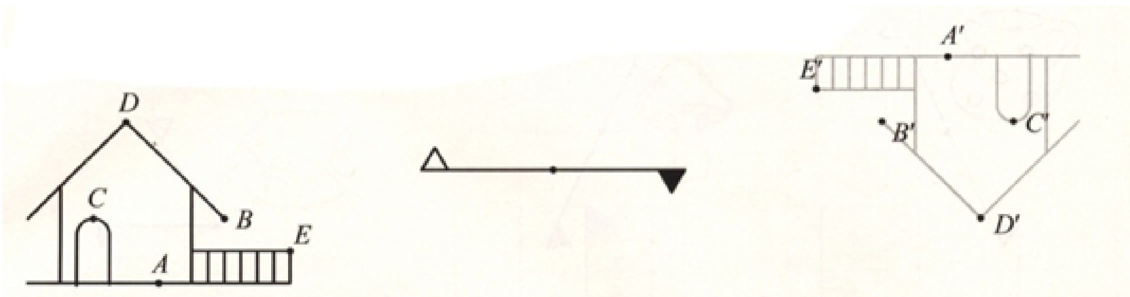
Ez a feladat sokféle összehasonlítási lehetőséget kínál, így alkalmas a különböző transzformációtulajdonságok összehasonlítására, a transzformációk csoportosítására. Erre a feladatra alapozva vezettük be az egybevágóság fogalmának általánosítását, és transzformációk egyenlőségének fogalmát.

2. Transzformációk ekvivalenciája A kétféle – mozgatással és pontonkénti hozzárendelésként való – megadás hátterében ott áll a transzformációk ekvivalenciájának a kérdése. A zászlós módszer nagy előnyének látom, hogy ez a kérdés ebben a felépítésben természetes módon, a gyerekek számára érthetően, mégis precízen tárgyalható.

11. példa (Szeredi, Kovács, 2003, [218] 59. o.)

A 3. szabály (ld. a 10. példát) szerint szerkesztettük meg a házikó kijelölt pontjainak a képét. Középpontunk az O pont volt.

Átlátszó papír segítségével mozgassuk el a házikót a zászlók szerint!



Azt tapasztaljuk, hogy a megadott pontokhoz mindkét eljárás ugyanazokat a képpontokat rendeli. A 3. szabály és a megadott mozgatás valóban ugyanazt a transzformációt adja meg.

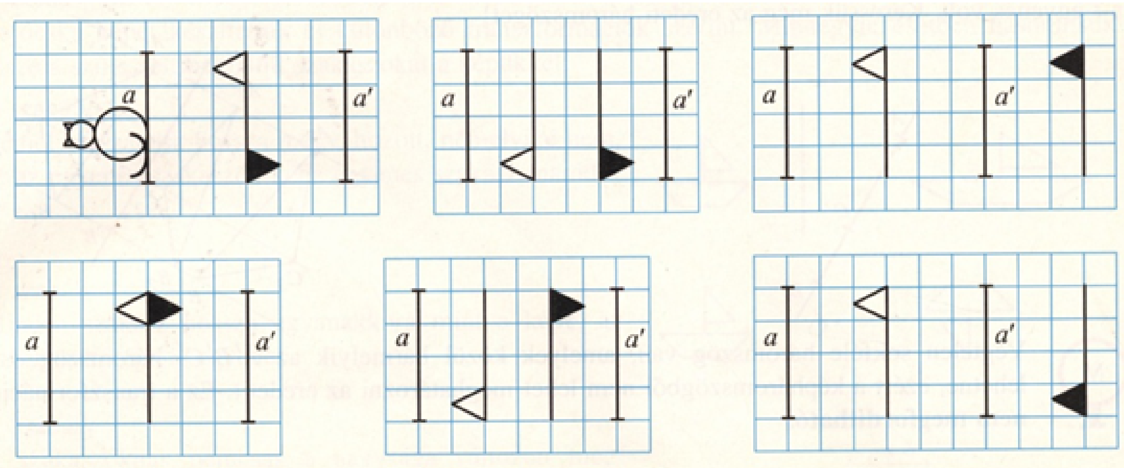
Látjuk, hogy ugyanazt a hozzárendelést több különböző módon is megadhatjuk. Ha két transzformáció olyan, hogy az egyik transzformáció bármely ponthoz ugyanazt a képpontot rendeli mint a másik, akkor a két transzformáció egyenlő. A sík egybevágóságait úgy adjuk meg térbeli mozgásokkal, hogy csak a kezdő és véghelyzet számít. Ez a szemléltetés nagyon jó alapot ad annak a megértéséhez, hogy a sík két transzformációja – vagy két akármilyen függvény – megegyezik, ha minden ponthoz ugyanazt a képpontot rendelik – általánosabban, ha az alaphalmazuk megegyezik és minden elemhez ugyanazt az elemet rendeljük hozzá.

Ez egy nehéz definíció, Skemp fogalmi hierarchiájában meglehetősen magasan helyezkedne el. Ennek a fogalomnak az alakulásában nagyon sokat számít az, hogy, hogy a gyerekek fejében kialakuló belső kép összhangban van-e ezzel a definícióval. Lássunk néhány tankönyvi részletet arra is, hogyan segíthetjük a zászlós módszerben ezen a területen is a fogalomalkotást.

(A következő feladatnak külön érdekessége az, hogy egyaránt jól tudtam használni az általános iskolában és egyetemi geometria kurzuson is).

12. példa (Szeredi Kovács, 2003, [218] 61. o.)

Melyik ugyanaz, melyik más? A zászlópárokkal mozgásokat adtunk meg, melyek mindegyike az a szakaszt az a'-be mozgatja. A megadott mozgások közül melyek azonosak, melyek különböznek?



Ellenőrizheted magad, ha ráülteted a cicát a szakaszra, és megfigyeled, hogy hova kerül. A megegyező mozgatások ugyanoda viszik a cicát, a különbözőek nem.

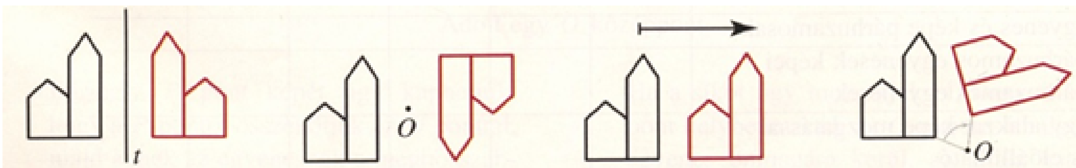
3. Általános transzformációtulajdonságok A transzformáció tulajdonságok összeválogatásakor legfontosabb megfigyelési szempontjaink a távolság-, szög- és egyenestartás voltak. Ehhez a korábbi 10. példa kiváló kiindulási alapot biztosít: a felsorolt transzformációk között találunk olyanokat, amelyekben némelyik szakasz hossza és némelyik szög nagysága is megváltozik (1. szabály), továbbá olyanokat, amelyekben minden szakasz és minden szög ugyanakkora, mint a képe (3. szabály), valamint olyanokat is, melyekben minden szög ugyanakkora, mint a képe és minden szakasz hossza kétszeresére nő (4. szabály). Azt is észrevehetjük, hogy az utóbbi két esetben egyenesek képe biztosan egyenes marad, egyébként azonban lehet, hogy némelyik egyenes képe „elgörbül”.

Mindezen megfigyelések alapján a feladatban adott hozzárendeléseket felhasználhatjuk a transzformációk három nagy osztályának a reprezentálására:

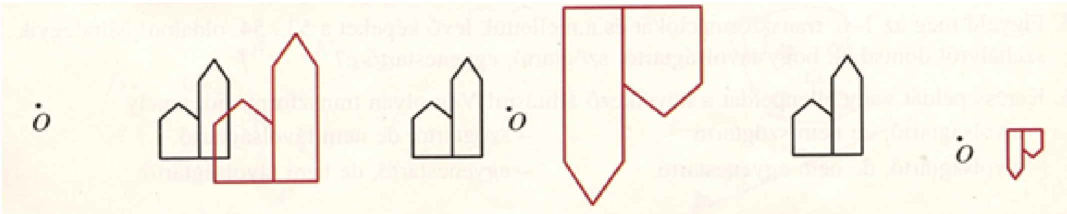
13. Példa (Szeredi, Kovács, 2003, [218] 63. o.)

„Tulajdonságaik alapján a transzformációkat három nagy csoportba sorolhatjuk:

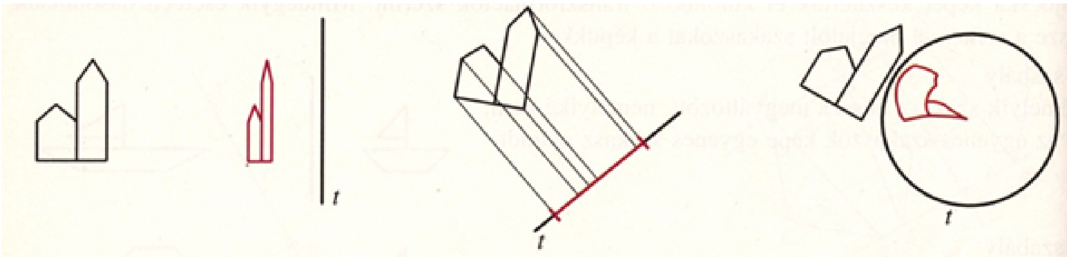
A transzformációk között vannak olyanok, amelyek a távolságokat és a szögeket változatlanul hagyják. Egyenest egyenesbe visznek. Ilyenek például a tengelyes tükrözés, a középpontos tükrözés, ilyen minden mozgás. Ezeket egybevágósági transzformációknak nevezzük.



A transzformációk között vannak olyanok, amelyek a szögeket nem változtatják meg. A távolságok megváltoznak ugyan, de az arányaik megmaradnak, azaz minden távolság ugyanannyiszorosára változik. Egyenest egyenesbe visznek. A kép hasonlít az eredetire, annak nagyított, vagy kicsinyített mása. Ezeket hasonlósági transzformációknak nevezzük.



A transzformációk között vannak olyanok, amelyekben a távolságok, a távolságok arányai és a szögek is megváltoznak. Lehet, hogy az egyenesek képe sem egyenes. A kép az eredetinek eltorzított változata. Ezeket torzító transzformációknak nevezzük.

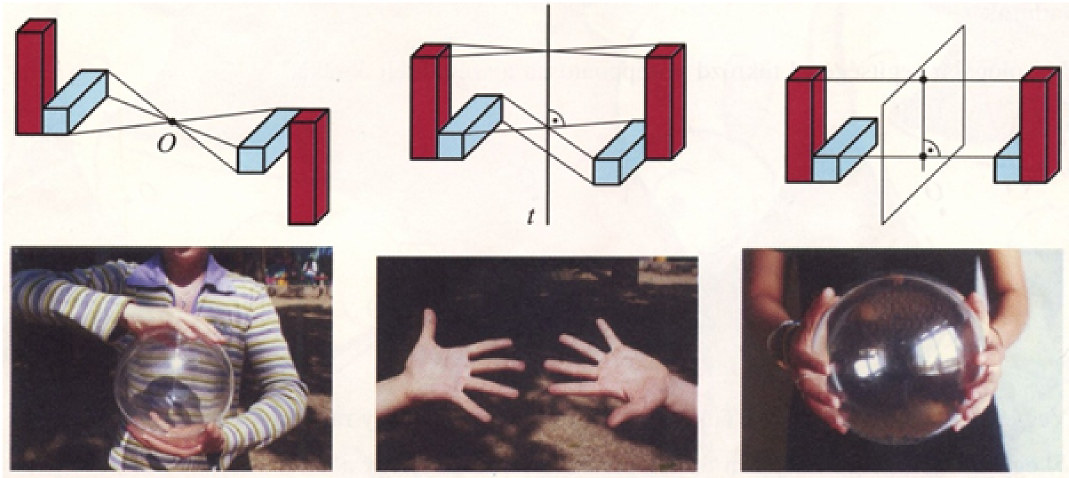


Ehhez a gondolatsorhoz kapcsolódva röviden kitérünk néhány térbeli egybevágóságra is – a térbeli pontra, egyenesre és síkra való tükrözéshez – példákat gyűjtünk, alakzatpárokat építünk. Ezekre a tapasztalatokra alapozva megállapítjuk, hogy a térben vannak olyan egybevágó alakzatok, melyek mozgással nem vihetők egymásba.

14. Példa (Szeredi, Kovács, 2003, [218] 67. o.):

Síkban eddig egyenesre és pontra tükröztünk, térben pontra, egyenesre és síkra is lehet tükrözni.

Tükrözés		
pontra	egyenesre	síkra
Adott egy		
O tükörközéppont.	t tükörtengely.	T tükörsík.
Tér pontjai figyelem!		
Fussatok a legrövidebb úton a		
tükörközépponthoz,	tükörtengelyhez,	tükörsíkhoz,
majd onnan egyenesen tovább ugyanannyit.		



Amint a példa látványosan mutatja, ez a felépítés kedvez az analógiás gondolkodás fejlesztésének is, rámutat a sík és tér szoros rokonságára. Amennyiben az óraszám ezt megengedi, az itt ismertetett példa jó kiindulás lehet az egybevágósági transzformáció és a mozgás fogalma közötti különbség tisztázására is.

1.5.10. Török Judit: Matematika órák elemzésének 2 eszköze

Részlet az Angol, belga, magyar, és spanyol matematikatanítási hagyományok összehasonlítása c. doktori értekezéséből (lásd Török, 2007 [230])

1. Kódlap (CS)

A kvantitatív elemzést szolgáló adatok gyűjtéséhez egy kódlapot (CS: coding scheeme) használtunk, amely a hosszas egyeztetés során kialakult megfigyelési szempontjainkat tartalmazta három fő kategóriába sorolva: matematikai fókusz, matematikai kontextus, módszertani eszközök. Az órákat epizódokra bontottuk, ahol egy epizódnak tekintettük az órának azt a részét, melyen belül a tanár módszertani szándékai nem változnak. Minden felvett órához kitöltöttünk egy kódlapot, melyen epizódról epizódra bejelöltük, hogy szempontjaink közül melyek voltak megfigyelhetők az illető epizódban.

Country:		Class		Date			Time		Topic		
School :		Episode									
Teacher:											
	Start time										
Mathematical focus	Conceptual										
	Derivational										
	Structural										
	Procedural										
	Efficiency										
	Problem solving										
	Reasoning										
Mathematical context	Real world fabricated data										
	Not real world fabricated data										
	Real world genuine data										
	Not real world genuine data										
Didactics	Activating prior knowledge										
	Exercising prior knowledge										
	Explaining										
	Sharing										
	Exploring										
	Coaching										
	Assessing / Evaluating										
	Motivating										
	Questioning										
	Differentiation										
Materials used by the teacher											
Materials used by the student											

1.67. ábra. Kódlap

A kódlap szempontrendszere és az egyes kategóriák definíciói:

Matematikai fókusz

- *Fogalmi*: a tanár láthatóan hangsúlyt fektet a fogalomépítésre, segíti a tanulók fogalmi fejlődését

- *Levezetés*: a tanár szándéka új matematikai ismeretek létrehozása a meglevőkből
- *Strukturális*: a tanár kapcsolatokat kíván teremteni különböző matematikai területek, fogalmak, tulajdonságok stb. között
- *Eljárás*: a tanár szándéka valamilyen eljárás, technika vagy algoritmus elsajátíttatása
- *Hatékonyság*: a tanár hangsúlyt fektet a rugalmas gondolkodást, kritikai hozzáállást, elegáns megoldások igényét fejlesztő eljárások vagy technikák elsajátítására
- *Problémamegoldás*: a tanár összetettebb, nem rutin jellegű feladatok megoldását várja a tanulóktól
- *Érvelés*: a tanár hangsúlyt fektet az érvek megfogalmaztatására, a megoldások igazolására, megvitatására

Matematikai kontextus

Egy feladatról vagy tevékenységről akkor mondjuk, hogy kapcsolódik a valódi világhoz, ha közvetlenül a valódi világból vagy annak hiteles reprezentációjából ered, és eredményei a valóságban alkalmazhatók. Így még ha a benne szereplő adatok kitaláltak is, ha a feladat igazán vagy hihetően valóságos, akkor a valódi világhoz kapcsolódónak tekintjük. Ha például akár egy valódi, akár egy kitalált szoba kitapétázásának költségeiről szól a feladat, akkor valamilyen értelemben vett valóságból merít és a valóságban alkalmazható.

Egy feladat vagy tevékenység nem kapcsolódik a valódi világhoz, ha nem a valóságból ered vagy nem valódi alkalmazásról szól. Ha például a feladat egy pöttyökből álló ábrasorozat folytatásáról és képzési szabályának kitalálásáról szól, akkor az nem kapcsolódik a valódi világhoz. Fontos, hogy ha a feladat a valóságból merít, de nem kapcsolódik vissza a valósághoz, akkor sem tekintjük valódi világhoz kapcsolódónak. Ha például a tanulók azt a feladatot kapják, hogy mérjék meg egy asztal hosszúságát és a feladatnak nincs más célja, mint hogy hosszúságot mérjenek, akkor ez a feladat nem kapcsolódik a valódi világhoz, mert nincs köze valódi alkalmazáshoz. Ebben az esetben a valódi világ csak egy háttér kontextust szolgáltat a feladatnak de nem valódi része annak. Ha viszont a feladat része lenne mondjuk egy asztalok gyártásáról szóló problémának, akkor már a valóságban alkalmazhatónak, így a valódi világhoz kapcsolódónak tekinthetnénk.

Egy feladatról azt mondjuk, hogy eredeti adatokon alapszik, ha az adatok vagy igaziak, vagyis a valódi világból erednek, vagy a tanulók saját tevékenységéből származnak. Ha például a tanulóknak egy tankönyvi vagy a tanár által mondott egyenletet kell megoldaniuk, akkor az adatok nem eredetiek, hiszen a tanár vagy a tankönyvszerző találta ki azokat. Ha viszont a tanulók feladata összefüggések keresése saját maguk által gyártott egyenletek alapján, akkor a feladatot eredeti adatokon alapulónak tekintjük. Ha a tanulók feladata a háromszög szögeire vonatkozó összefüggés felfedezése szabadon választott, saját maguk által rajzolt háromszögekben, akkor is eredeti adatokról beszélünk.

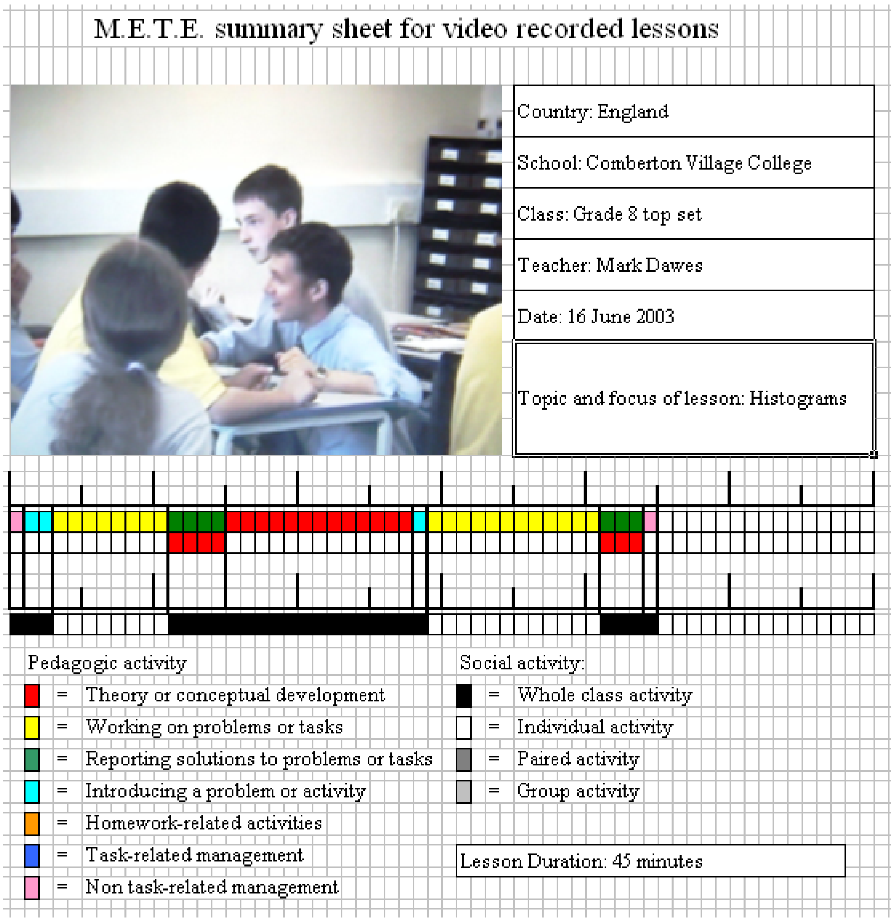
Egy feladat nem eredeti adatokon alapszik, ha adatai kitaláltak. A legtöbb tankönyv legtöbb feladata nem eredeti adatokra vagy a tanulók saját tevékenységére támaszkodik. Ha például egy adott sorozat összegét kell a tanulóknak kiszámolniuk, akkor nem beszélhetünk eredeti adatokról, ha viszont az összegképletet kell felfedezniük saját gyártású sorozatokon keresztül, akkor igen.

Módszertani eszközök

- *Korábbi ismeretek aktiválása*: olyan régebben tanult anyag átismétlése, amely előkészíti az új anyagot.
- *Korábbi ismeretek gyakorlása*: olyan régebben tanult anyag ismétlése, amely nem kapcsolódik az óra további részeihez.
- *Tanári magyarázat*: A tanár elmagyaráz egy gondolatot vagy megoldást. Ez lehet valaminek a bemutatása, egyszerű közlés vagy a magasabb szintű matematikai gondolkodás pedagógiai modellezése. Ezekben az esetekben a tanár szolgáltatja az információt tanulói közreműködés nélkül vagy kevés tanulói közreműködéssel.
- *Gondolatok közzététele*: A tanulók elmondják a többieknek ötleteiket, megoldásaikat vagy válaszaikat. A megbeszélés során a tanár sokkal inkább a vitavezető szerepét játssza, mint hogy információkat szolgáltatna.
- *Felfedeztetés*: A tanár olyan tevékenységgel foglalja el a tanulókat, amelyet nem ő irányít, és amely egy új matematikai gondolatot eredményez. Ez lehet tanulói kutatás vagy egy felépített feladatsor, de a tanulóktól minden esetben elvárják, hogy megfogalmazzák felfedezéseiket.
- *Tanári segítség*: A tanár ötletet ad, megjegyzést tesz vagy belekérdez, hogy elősegítse a feladat megértését és végrehajtását, vagy hogy kijavítsa a hibákat, tisztázza a félreértéseket.
- *Értékelés*: A tanár értékeli vagy osztályozza a tanulók tevékenységét, hogy megítélje az osztály teljesítményét.
- *Motiválás*: A tanár a személyiségéből fakadókon túlmutatóan tesz azért, hogy a tanulók matematikáról alkotott képe, hozzáállása vagy érzelmi viszonya javuljon.
- *Kérdve kifejtés*: A tanár – esetleg szókratészi – kérdések sorozatán keresztül vezeti el a tanulókat új matematikai fogalmak felépítéséhez vagy régebbiek tisztázásához, finomításához.
- *Differenciálás*: A tanár láthatóan megkísérel különbséget tenni a tanulók között, akár különböző feladatokkal és tevékenységekkel vagy különböző segédeszközökkel, akár az elvárt eredményekkel – a tanulók szükségleteihez és egyéniségéhez igazodva.

2. Szintézis-lap (LS)

Szintén minden órához elkészítettük az úgynevezett Reusser-sheet egy módosított változatát, a szintézis-lapot (LS: Lesson synthesis sheet), amely egy oldalra tömörítve ad képet az órán történtekről. A lap tetején egy – az órára jellemző – fotó mellett az óra néhány fontos adata szerepel (iskola neve, tanár neve, osztály, dátum, az óra címe). Ezt két dupla soros idővonal követi, melyeken az óra menetének megfelelően percről percre színkódokkal jelöltük egyiken az órán folyó pedagógiai tevékenységfajtákat, másikon az éppen megfigyelhető munkaformákat (osztálymunka, egyéni munka, páros munka, csoportmunka).



1.68. ábra. Szintézislap

A megfigyelt pedagógiai tevékenységek és azok definíciói:

- *Elmélet vagy fogalomépítés*: A tanár vagy új elméleti anyagot illetve fogalmakat vezet be, vagy korábbi ismereteket aktivizál – esetleg tanulói közreműködéssel.
- *Feladatmegoldás*: A tanulók bármilyen fajta feladatokon dolgoznak egyénileg, párban, csoportmunkában vagy frontálisan.

- *Megoldások megbeszélésen*: A tanár arra kéri a tanulókat, hogy számoljanak be a feladattal kapcsolatos tapasztalataikról. Ez jelentheti megoldások, eljárások, ötletek, nehézségek stb. elmondását.
- *Probléma vagy feladat kitűzése*: A tanár világossá teszi a feladatot vagy elvárt tevékenységet, tisztázza a fogalmakat vagy feltételeket, esetleg elmagyarázza az eszközök használatát, vagy emlékezteti a tanulókat a szükséges technikákra.
- *Házi feladattal kapcsolatos tevékenység*: A tanár házi feladatot ad fel, utasításokat ad azzal kapcsolatban, vagy megbeszélik a házi feladatok megoldásait.
- *Feladattal kapcsolatos szervezés*: Feladatlapok, eszközök stb. szétosztása, vagy pl. a tanulók párokba, csoportokba stb. osztása a munkához.
- *Egyéb szervezés*: Fegyelmezés, óra eleji jelentés, névsorolvasás, bejelentések.

1.5.11. Vancsó Ödön: Matematikadidaktikai elméletek

Részlet a Klasszikus és Bayes-statisztika a matematikadidaktikában című PhD dolgozatból (lásd Vancsó 2005 [238])

Először a matematika oktatás széles körben elterjedt elméletei között a saját pozíciómat határozom meg, mivel e nélkül sok fontos részlete a munkának nehezebben érthető. Majd a szűkebb téma didaktikájából szeretném azokat a munkákat jelezni, amelyek jelentős szerepet játszottak álláspontom kialakításában.

Három nagy didaktikai áramlatot neveznék meg. Ezek

1. A genetikus matematikaoktatási koncepció
2. A konstruktivista pedagógia a matematikaoktatásban
3. A realisztikus matematikaoktatási koncepció

1. A genetikus matematikaoktatási koncepció és rövid története

Elsőként a genetikus matematikai oktatási koncepcióról, s a realisztikus matematikaoktatáshoz kötődő kapcsolatáról írnék. Két összefoglaló forrásra támaszkodom: egy könyv (Claus,1989 [48]) matematikai oktatási koncepciók fejezetének 4. „A genetikus matematikaoktatás” címet viselő alfejezete, illetve a Mathematik-Lehren folyóirat 1998-as 83. Genetikus matematikaoktatás: a fogalmi nyitottság című tematikus száma.

Történetileg először Fridrich W. Lindner (1779-1851) fogalmaz meg egy genetikus koncepciót: „Ha a maggal foglalkozunk, akkor ezzel befolyásoljuk a későbbi fa tulajdonságait, míg ha csupán a fa egy ágával, akkor az egész fa nem az elképzeléseinknek megfelelően fog fejlődni.” [142] A biológiából kölcsönzött példa az oka a genetikus oktatási koncepció elnevezésnek is.

A következő nagy hatású pedagógus, aki magát az elnevezést az általa kiadott folyóiratban bevezette, Karl W. E. Mager (1810-1858) volt. Először különbözteti meg a tudományt és az oktatást, és a logikai rendszerrel a fejlődés genetikai rendszerét állítja szembe. Ugyanebben az időben F.A.W. Diesterweg (1790-1866) is ebbe a körbe sorolható nézeteket fejt ki: „Kezdjük az oktatást a tanuló álláspontjáról!” „Ne a készet, a befejezettet, hanem az egyest, az alakulót juttassuk el a tanulóhoz.” „Azok a nézetek, amelyek szerint nem a tudományt kell a tanulónak átadni, hanem meg kell engedni neki, hogy maga fedezze fel, és tevékenyen járuljon hozzá az elsajátításhoz. Ez a tanítási módszer a legjobb, a legnehezebb és a legegyedibb is egyben.” (Diesterweg, 1950, 34. oldal, illetve a 2. idézet forrása Winter, 1984 118-119. o.)

F. Klein [125] említi analógiaként a biogenetikus törvényt, amely szerint az egyed fejlődése során végig megy a fajfejlődés teljes útján, igaz lerövidítve azt (filogenezis és ontogenezis). Ezt alkalmazza a tanuló szellemi fejlődésére, mely szerint az is valamilyen módon végighalad az emberiség eddigi fejlődésén, legalábbis a főbb állomásokon. Eszerint a genetikus elméletben van egy történeti és egy pszichológiai komponens. Az előbbi az emberiség matematikai fejlődését, a másik az egyedfejlődést követi.

O. Toeplitz világította meg a matematikatörténet szerepét a genetikus oktatásban. Az oktatásban csak ritkán alkalmazzuk azt, amit Toeplitz „direkt genetikus módszernek” nevezett, amelyben a tanulóknak „közvetlenül a felfedezést mutatjuk be, a maga teljes dramatikájával”.

Gyakoribb az, amit ő „indirekt genetikus módszernek” mondott, nevezetesen hogy a tanár a történet elemzéséből megtanulja mi az igazi magja, tulajdonképpeni értelme a bevezetni kívánt fogalmaknak, illetve a belőlük levonható következtetéseknek, amelyeknek azonban már semmi közük nem lesz a tényleges történethez. Ez utóbbi szintén lehet drámai (sőt kell is hogy az legyen), de már nem történelmi, hanem történeti. Erről, a genetikus matematikadidaktikai felfogásban új elképzelésről Deák Ervin írt először például (Deák 2005)-ben. Ezt fogom magam is követni, a 3. fejezet a történelmi elemzést tartalmazza, s ez indirekt épül be a 4. fejezetbe.

A mai koncepciót két névhez köthetjük: M. Wagenscheinhez és A. I. Wittenberghez. Wagenschein Töplitz és Klein alapelveit összekapcsolja a példákon keresztül történő és a szokratészi tanítás alapelveivel. A tananyag-korlátozás szerinte az első követelmény az oktatás átalakításához (ez hazánkban is újra és újra előkerül, többnyire sikertelenül, bár az új érettségi követelmények esetén végre valami mérsékelt csökkentést észrevehetünk), amelynek alátámasztására Ernst Machot idézi, aki 1881-ben mondta a következőket: „nincs rosszabb, mint az a szegény ember, aki túl sokat tanult. Az egészséges, erőteljes ítélőképesség helyett, amely talán létrejöhetett volna akkor is, ha semmit sem tanul, gondolatai állandóan szinte hipnotikusan néhány szót, tételt, formulát követnek, mindig ugyanazon az úton.” A tananyagkorlátozás egyet jelent nála a példákon keresztül történő tanítással, amely megköveteli, hogy olyan alkalmas témákat válasszunk ki, amelyek az egészet megvilágítják. Erre mutat oktatási példákat és a matematika esetén két vezéreszmét emel ki:

(1) a matematika viszonya a fizikai világhoz, és (2) a bizonyítás fontosságát. Ezek nálunk

is vissza-visszatérő viták tárgyát képezik, hogy többet, vagy inkább gondolkozni tanítsunk, a vég nélküli ismeret kontra készség vita.

A. I. Wittenberg nézeteiben sokat vett át Wagenscheintől, egyben azonban eltérnek, hogy az ő elképzelései inkább az elitoktatásra vonatkoznak, míg Wagenschein közoktatásban gondolkodott. Ezért a gondolatait kevésbé részletezném, azért is, mert elsősorban a geometriaoktatással foglalkozott, abban fejtette ki elképzeléseit. A nála legfontosabb kulcsfogalmak, amelyek jelentőségét magam is szem előtt tartanám: Újrafelfedezés, amelyhez állandó visszapillantás és folyamatos reflexió szükséges; ehhez első helyen említi a nyugodt saját tempójú munka lehetőségének a biztosítását, és a nyitottságot, amellyel újabb és újabb problémákhoz jutunk. Ez nagyon fontos szerintem is a mai nagyon zártnak tűnő matematikaoktatást tekintve.

A fő kritikája a genetikus módszernek mindig ugyanoda tér vissza, az időhöz. A felfedeztető oktatás olyan időigényes, annyira más szervezést igényel, hogy nehézségei miatt hajlamos a tanár elvetni. Ezt cáfolni nyilván csak konkrét oktatási példával lehetne, erről most nem szól a dolgozat, ezért nem is foglalok állást.

Christoph Selter cikkében Schubringot követve a genetikus matematikaoktatás két fő ágát különbözteti meg. Felfogása szerint ezek egymást kiegészítő, az érem két oldalát képező megközelítések (a mai kvantummechanika szóhasználatából átvéve a komplementaritás szó illik ide). A történeti genetikus irányzat középpontjában a tananyag fejlesztése áll, míg a pszichologikus genetikus irányzat esetén a figyelem középpontjában maga a tanuló, az ő megismerési folyamatának a fejlődése képezi a vizsgálat tárgyát.

Ebből számomra két fontos dolog következett, egyrészt a téma történetének a tanulmányozása, másrészt a struktúrák felderítésének a fontossága, mielőtt valaminek a tanításáról gondolkozunk. Ezt a 2. és 3. fejezetben fogjuk konkrétan látni. A 4. fejezet példái pedig a konstruktivista, a realisztikus és a genetikus módszerek közül a nem direkt történeti módszert követve születtek.

2. A konstruktivista pedagógia a matematikaoktatásban

A matematikaoktatásban az egyik legjelentősebb képviselője eme irányzatnak a német E. von Glasersfeld, itthon a szegedi iskola Csapó B., Csikós Cs. illetve Budapesten Nahalka I. számít ehhez az irányzathoz tartozónak. Nem keverendő össze magának a matematikának a konstruktivista felfogásával, amely a holland Brouwer nevéhez fűződik, s amelyben csak a megkonstruálható objektumoknak van létjogosultsága, és az arisztoteleszi „a harmadik kizárásának" az elvét sem lehet használni. (Bővebben pl. Trosztnyikov, 1981. [232])

Az általam vizsgált konstruktivizmusnak a lényege pszichológiai eredetű, azaz a tudást az agy megkonstruálja, és nem egyszerűen felveszi, felszívja, ahogyan azt korábban gondoltuk. Azaz a matematikai fogalmak esetén sem elegendő a definíció, hanem az már a végállomása kellene, hogy legyen annak a folyamatnak, amelyben megszületik az új fogalom. Látszik, hogy az előbb említett genetikus koncepcióhoz közelálló elképzelésről van szó, azaz lehetséges az összeegyeztetésük. Azt is látni fogjuk, hogy a következő alfejezetben bemutatott realisztikus matematikaoktatási koncepcióval is összeegyeztethető, legalábbis a konstruktivizmusnak egy iránya.

Alapvetően maguk az észleletek is megkonstruálódnak az agyban, nem egyszerű lenyomatai a körülöttünk lévő világnak, ezért az agyműködés jobb megismerése a matematikaoktatásban is hatalmas változásokat kellene, hogy indukáljon. Mindez még gyerekcipőben jár, hiszen mint Nahalka írja „4. Sok-sok vizsgálat, de a hétköznapi tapasztalat is mutatja, hogy a magyar iskolákban a tanítás-tanulás még ma is elsősorban a pedagógus által vezérelt, a gyerek önállóságát csak minimálisan biztosító tevékenység. 5. A tanórák többségén a pedagógusok döntő többsége a gyerekek csoportját egységes „masszának" tekinti, Magyarországon szinte nincs kultúrája a pedagógiai differenciálásnak ... 7. A magyar pedagógiai gyakorlatban az értékelés egy avitt tanulás-lélektani ideológiára építve valójában az „idomítást" szolgálja. Annak eszköze, hogy a gyerekek a tudást – amíg egyáltalán meg kell tartaniuk (az érettségiig) – képesek legyenek tökéletesen reprodukálni." Annak illusztrálására, hogy az egységes külső kényszer hová vezet, ha a gyerek nem tudja ezt az ún. tudást beilleszteni a saját világképébe, idézzük a Nahalka könyv egy másik részletét az igazán találóan gyerektudománynak nevezett világ bemutatását célzó fejezetből:

„A gyerektudomány a világra vonatkozó, a világ jelenségeinek magyarázatára, előrejelzésére szolgáló, nagy elvontságú tételeknek, „elméleteknek" a gyermek tudatában kialakult összességét, pontosabban rendszerét jelenti. Az intenzív kutatásokat ezen a területen már maga Piaget (1972 [178]) elkezdte.

A huszadik század hetvenes éveitől gyorsult fel a gyermeki világ, a speciális „tévhitek" a gyermeki elképzelések kutatása. Ezen az alapon azonban minden olyan tudományos elmélet, amelyet már meghaladtunk nevezhető tévhitnek, így a sokszor negatív értelemben használt szó nem biztos, hogy szerencsés.

Kiderült, hogy a gyerekek az őket körülvevő világról paradigmaértékű konstrukciókat alkotnak; ezek a legritkább esetben felelnek meg a tudomány, vagy az iskolai tanítás elvárásainak;

ezek a konstrukciók rendkívül stabilak; stabilitásukban kifejezetten gátjai lehetnek az iskolai ismeretszerzésnek; s hogy ezek a konstrukciók adaptív szerepet töltenek be a gyermek és a környezete közötti kapcsolatokban. A konstruktivizmusnak több típusa is használatos a matematika tanításában:

– radikális konstruktivizmus: a tudást nem lehet csak úgy, egyszerűen átörökíteni 'konyhakészen', felnőttről gyermekre vagy tanárról diákra, hanem aktívan fel kell építeni minden egyes tanuló tudatában, saját tevékenységeik eredményeként. A tanulókat általában foglalkoztatják a jelentések, ám amennyiben a tanítási programok nem tisztázzák sikeresen a megfelelő jelentéseket, ők saját jelentéseket társíthatnak például fogalmakhoz, szimbólumokhoz. Ernest véleménye szerint azonban ez a fajta konstruktivizmus nélkülözi a szociális dimenziót, amelyben a tanulók egymástól függve, egymást támogatva tanulnak.

– szociális-konstruktivizmus: a matematika egy szociális konstrukció. Annak felismeréséből fakad, hogy szociális folyamatba ágyazottan a tanulók könnyebben építhetik saját tudásukat.

– szocio-konstruktivizmus: ez a fajta szociális konstruktivizmus csak a matematikaoktatásban fejlődött ki. Tulajdonságai hasonlóak a realisztikus matematikaoktatáséihoz; például néhány alapelve: a matematika problémamegoldáson keresztüli tanítása, a tanulóknak egymással, illetve a tanárral folytatott kommunikációjának bátorítása, a tanulóknak a problémamegoldás során saját stratégiáik használatának értékelése és ösztönzése.

3. A realisztikus matematikaoktatási koncepció (RME)

Ez a koncepció, amely mára az egyik legelismertebb irányzattá vált, eredetileg Hans Freudenthaltól eredeztethető. Fontos megjegyezni, hogy Freudenthal igen jó viszonyban volt Varga Tamással, és így a komplex matematikaoktatási elképzelés elemeit is megtalálhatjuk az RME-ben. Mára a róla elnevezett utrechti Freudenthal Institut a fellegvára azon matematikusoknak, didaktikusoknak és tanároknak, akik eme koncepció kiteljesítésén dolgoznak azzal a céllal, hogy a teljes matematikaoktatás ebben a szellemben kiépüljön. Mára ez többé-kevésbé sikerült is. Az igen sok publikációból Frank Ildikó, aki személyesen is volt Hollandiában, készített egy összefoglalót, amelyből most magam is idéznék. „A matematikát az embereknek nem egy zárt rendszerként kell megismerniük, hanem egyfajta tevékenységként: a valóság matematizálásának folyamataként, avagy, amennyiben lehetséges, a matematika matematizálásának folyamataként (Freudenthal, 1968. [80] 7.o).

A realisztikus matematikatanítás szemléletmódjának két kulcsgondolata:

a matematikát kapcsolatba kell hozni a valósággal, és hogy

a matematika emberi tevékenység.

A „realisztikus" jelző sokak számára félreérthető lehet. A holland „zich realiseren" ige jelentése „elképzelni". Azaz a „realisztikus" szó inkább arra a törekvésre utal, mely szerint a tanulók elé számukra elképzelhető problémahelyzeteket kellene tárni. Ez utóbbi azonban nem jelenti azt, hogy a valósággal való kapcsolat ne volna fontos. Azt jelenti csupán, hogy a szövegkörnyezet nem feltétlenül szorítkozik kizárólag a valós, környező világra. A tündérmesék fantáziavilága, vagy akár még a matematika formális világa is megfelelő lehet a problémák szövegkörnyezetéül, amennyiben a tanulók számára „valósak”.

Ez igen fontos idézet Marja von Panhuizentől (Van den Heuvel, M., Panhuizen, 2002 [105]), mivel a szóhasználat sokszor nagyon félrevezető lehet. Azaz nem a reális (valóságos) szót kell érteni a realisztikus jelző mögött.

Ezeket a gondolatokat valósítom meg részben a (dolgozat) 2. és főleg a 4. fejezetében, ahol valójában problémákon keresztül vezetve próbáljuk meg matematizálni témánkat, utóbbi fejezetben két különböző módon is. Ami világosan mutatja, hogy nem feltétlenül egyértelmű a létrejövő konstrukció.

Egy másik igen figyelemre méltó megfogalmazás az RME felfogásához:

A matematikaoktatás egy irányított újrafelfedezési folyamat, melynek során a tanulók egy a matematika egykori fejlődéstörténete által motivált folyamatot tapasztalhatnak meg. A „felfedezés” szó a tanulási folyamat során tett lépésekre utal, az „irányított” pedig a tanulási folyamatok létrejöttének környezetére. Az újrafelfedezés elvének további ihletői lehetnek nem formális megoldási eljárások: tanulói nem formális stratégiák gyakran tekinthetők előre „megsejtett” formálisabb eljárásoknak. Ebben az esetben az újrafelfedezési eljárás a matematizáció koncepcióit használja útmutatóként, vezérlő elvként. Ezt hazánkban a Varga Tamás féle csoport, majd a Bolyai Matematikaoktatási Kísérleti csoportja Surányi János és később Pósa Lajos vezetésével szintén alapelvnek tartotta. Az egyetlen problémám, hogy mai napig inkább csak a tehetséggondozásban használatosak ezek az elvek.

A matematizáció két módja

Treffers (1987 [231]) kétféle matematizációt különböztet meg az oktatás szempontjából: horizontális és vertikális matematizációt.

Horizontális matematizáció

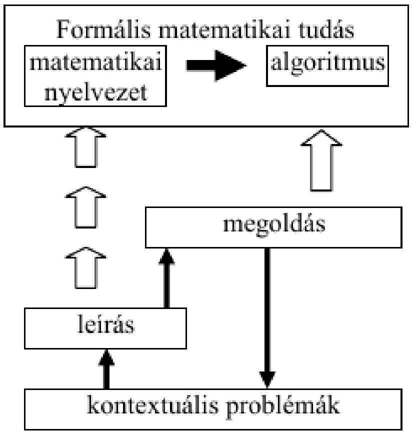
A horizontális matematizáció esetében matematikai eszközök kerülnek elő, s ezeket az eszközöket használják a tanulók egy mindennapi életből vett probléma átszervezésére és megoldására. Jelenthet ez például egy specifikus matematikai észrevételt, felismerését egy általános szövegösszefüggésben, egy probléma sematizálását, formalizálását, szemléltetését, kapcsolatok, szabályosságok felfedezését, különböző problémák hasonló aspektusainak felfedezését, valós probléma matematikai problémává való átültetését és valós probléma ismert matematikai problémává való átültetését.

Vertikális matematizáció

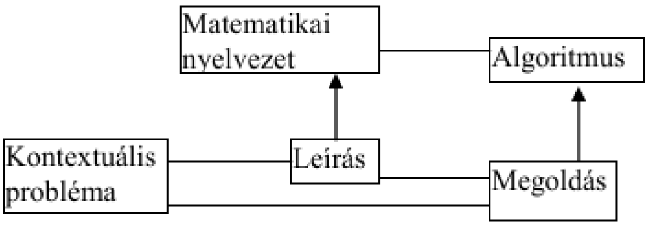
A vertikális matematizáció pedig épp ellenkezőleg, a matematikai rendszeren belül végrehajtott újraszervezést és műveletvégzést jelöli. Ez jelenthet például reláció kifejezését képlet formájában, szabályosságok bizonyítását, modellek finomítását, különböző modellek használatát, modellek összekapcsolását és egységesítését, egy matematikai modell formalizálását és általánosítását.

Freudenthal megfogalmazása szerint a horizontális matematizáció tartalmazza a lét világából a szimbólumok világába való átlépést, míg a vertikális matematizáció a szimbólumok világán belüli mozgást jelenti (Freudenthal, H. 1991 [81]).

A következő ábrák (az 1.69. és az 1.70. ábrák, Gravemeijer, 1994) azt szemléltetik, hogy mind a horizontális (üres nyíl), mind a vertikális (tele nyíl) matematizáció helyt kap annak



1.69. ábra. Az irányított újrafelfedezés modellje



1.70. ábra. A horizontális és vertikális matematizáció ábrázolása

érdekében, hogy végül alapvető matematikai fogalmak vagy formális matematikai nyelvezet kifejlődjék.

A tanulási folyamat az egymással összefüggésbe hozható, kontextuális problémáknál kezdődik. A horizontális matematizáció eszközeivel való tevékenykedés során a tanuló egy informális vagy egy formális matematikai modellre tesz szert. A megoldás, összehasonlítás, megvitatás során a tanuló vertikális matematizációt hajt végre, és végül matematikai megoldáshoz jut el. Ezután a tanuló értelmezi a megoldást és a használt stratégiát egy másik hasonló (kontextuális-) probléma esetében is.

Treffers (1987 [231]) a matematikaoktatást a horizontális illetve vertikális matematizáció függvényében a következő négy típusba sorolja.

Az egyes osztályok elnevezése, Freudenthal (1991 [81]) leírását felhasználva:

- mechanisztikus, vagy tradicionális megközelítés: drill-gyakorlaton és mintákon alapszik, (mintegy gépként tekintve az embert). A tanulói tevékenységek egy mintamegoldás vagy egy algoritmus memorizálására korlátozódnak. Hibák akkor merülnek fel, ha a tanulók olyan problémákkal találkoznak, melyek eltérnek tanultaktól. (Ez gyakori a magyar iskolákban.)

- empirikus megközelítés: a tanulókat a környező létező világból származó dolgokkal foglalkoztatják s olyan helyzetekkel, melyekben vertikális matematizációs tevékenységeket kell

Típus	Horizontális matematizáció	Vertikális matematizáció
Mechanisztikus (aritmetikus)	−	−
Empirikus	+	−
Strukturális	−	+
Realisztikus	+	+

1.11. táblázat. A matematikaoktatás négyféle típusa

végrehajtaniuk. Az általánosított problémahelyzetekkel azonban nem szembesítik őket, s így nem is sarkallják őket modell vagy képlet kitalálására. (Ezt szokták a gyakorlati megközelítés kritikájaként megfogalmazni.)

- strukturalista megközelítés: vagy „Új Matematika megközelítés" (New Math), ami a halmazelméleten alapszik, folyamatábrán és játékokon, amelyek horizontális matematizációs eszközöknek is tekinthetők, ám ezek egy 'ad hoc' létrehozott világból származnak, melyeknek semmi közük a létező világhoz. (Legjobban ezt a román matematikaoktatásban lehet megfigyelni.)
- realisztikus megközelítés, egy valós világbeli vagy egy kontextuális problémát tekint a matematika tanulásának kiindulópontjául. Ezután horizontális matematizációs tevékenységekkel feldolgozza azt, azaz a tanulók átszervezik a problémát, megpróbálják azonosítani a probléma matematikai aspektusait, valamint felfedezni a szabályosságokat és kapcsolatokat. Ezután, vertikális matematizációt alkalmazva a tanulók eljutnak a matematikai koncepciókhoz, fogalmakhoz.

RME és a szocio-konstruktivista matematikaoktatás

Főbb hasonlóságok a realisztikus és a szocio-konstruktivista matematikaoktatás között:

- mindkettő a konstruktivizmustól függetlenül fejlődött ki.
- a tanulóknak lehetőségük van megosztani a tapasztalataikat a többiekkel
- a matematika és a matematika tanulásának hasonlatosságai:
  - a matematika kreatív emberi tevékenység
  - amikor a tanulók hatékony problémamegoldási módszereket fejlesztenek ki, matematikai tanulás történik
  - mindkettő célja olyan matematikai tevékenységek végzése, melyek később matematikai objektumokká „alakíthatók" (Freudenthal, H. 1991 [81])

Főbb különbségek a két oktatási módszer közt:

- az RME csak a matematikatanításban alkalmazott, míg a konstruktivizmus sok más területen is használt (lásd még De Lange, J. 1996 [140]);

- a szocio-konstruktivista tanár nem ajánl az oktatás fejlesztésére vonatkozó heurisztikákat, nincs meg az RME segített újra-felfedeztető tevékenysége (a tanár nem használ olyan módszert, mellyel a múltban nyert tapasztalatokra építkezve, vagy gyakorlati megoldási módok után kutatva oldana meg problémákat).

1.5.12. Vancsó Ödön: A tudományról alkotott kép, modern tudományelmélet

Részlet a Klasszikus és Bayes-statisztika a matematikadidaktikában című PhD dolgozatból (lásd Vancsó 2005 [238])

A matematikai statisztika két konkurens elméletének megértéséhez szükség van egy bizonyos áttekintéshez a matematika-, illetve általában a tudományfilozófia területén, mivel a különbségek nem a felületen, hanem egészen a mélyen húzódnak. Valószínűleg éppen ez indokolja a vitának és a szembenállásnak a hevességét. A két elmélet között, ahogyan azt például Wickmann (1998) [257] cikkéből is láthatjuk alapvető világszemléleti különbség, illetve tudományról alkotott teljesen más kép húzódik.

Ezen a területen a 90-es évek elején kezdtem tájékozódni, s egyik első munkám az osztrák matematikadidaktikus Roland Fischer hatására, egy az ő két kollégájával közösen írt magyar nyelven megjelent cikk volt (Peschek-Schneider-Vancsó, 1995 [177]). Ebből itt csak néhány gondolatot szeretnék kiemelni, amelyek azt a tudományfelfogást mutatják be, amivel érthetőbb lesz a két (valójában, mint látni fogjuk három) nagy statisztikai koncepció. Fischer három korszakot különböztet meg:

Az első a középkori „hit társadalom”, ahol a transzcendens hit uralja a világot. Ennek fő képviselői a papok és az egyház, később egyházak.

A másodikban a felvilágosodással a hit szerepét átveszi a tudomány, amelynek képviselői a tudósok (ők lesznek az új papok). Ekkor a tudomány válik olyan „tökéletessé”, mint Isten volt a középkorban. Ma éljük a harmadik korszakot, amikor a tudomány mindhatóságába vetett hit elveszett, és az információ és a szabad döntés társadalmába érkeztünk. A tudomány csak hipotézisek, paradigmák együttese, s folyamatosan változik, az igazság (különösen az abszolút) kérdése nem tartozik a tudomány látókörébe. A tudomány elméleteket gyárt, s amelyek jobban írják le a jelenséget, azokat előnybe részesítjük, de nem kell igaznak gondolnunk. Ez más felfogás, mint a felvilágosodás idején az abszolút, objektív és az igazság letéteményesének tartott tudománykép. (Bővebben lásd Peschek-Schneider-Vancsó, 1995 [177]).

Magam is azon az álásponton vagyok, ami a matematika modern történetében alakult ki és erősödött meg, hogy a matematika sem abszolút tudomány. (Bár korábban sokak szerint az egyetlen tudomány volt, amely az abszolút igazságról szól, gondoljunk „a 2-szer 2 mindig 4” típusú abszolútnak gondolt „igazságokra”.) Hiszen minden tétele relatív, annak az aktuális axiómarendszernek a folyománya, amelyből kiindulunk. Ráadásul egyetlen rendszeren belül sem dönthető el a két legfontosabb kérdés az ellentmondásmentesség és a teljesség. Sőt az utóbbiról negatív ismeretünk van; Gödel tétele szerint minden olyan axiómarendszerben, amely legalább a természetes számokat tartalmazza, megfogalmazható olyan állítás, amely nem vezethető le, s így amelynek „igazságáról” az axiómarendszeren belül nem lehet nyilatkozni. Az ellentmondásmentesség is csak relatív, egy rendszerről csak egy bővebb rendszeren belül lehet nyilatkozni, tehát belső eszközökkel az ellentmondásmentesség sem dönthető el. Ezek a felismerések a matematikától is elvitatták az abszolút igazság letéteményese címet.

Ennek alapján mondhatjuk, hogy különböző matematikai modellek (sőt olykor matematikák, lásd euklideszi és Bolyai geometria) léteznek, s nem az a kérdés, hogy a „klasszikus statisztika” birtokolja-e az abszolút igazságot, vagy pedig a Bayes-statisztika, hanem az, hogy milyen szituációban melyik és miért alkalmasabb, mint modell a valóságos helyzet leírásra, s melyből lehet használhatóbb eredményeket kapni döntéseink megalapozásához.

Így tehát ennek a disszertációnak az alapfilozófiájához tartozik annak leszögezése, hogy a vita az igazságról bár lehet nagyon hasznos, mégis a didaktika szempontjából sokszor irreleváns.

Számomra az a fontos, hogy hogyan lehet a két modellt felépíteni, különbözőségeiket megérteni, és segítséget adni ahhoz, hogy el lehessen dönteni milyen helyzetekben célszerűbb egyiket vagy másikat alkalmazni. Matematikai szemmel nézve az izgalmas didaktikai kérdés az, hogy milyen fogalmak, összefüggések, eljárások szükségesek a két modell megértéséhez és alkalmazni tudásához. Mindebben alapvetően konstruktivista alapon állok, nem hiszem, hogy a fogalmaink java velünk született és csak platonista módon felidéznünk és emlékeznünk kell rájuk, inkább azt gondolom (éppen a legújabb kori kognitív pszichológiai kutatási eredmények alapján), hogy a tudás az agyban egy konstruktív építkezési folyamat eredménye, amelynek során olykor csak kisebb korrekciókat kell tennünk, olykor azonban teljes átalakítását igényli a már meglevő sémáinknak. Ilyeneket fogunk látni a következő fejezetekben a statisztikai állításokkal, következtetésekkel kapcsolatban.

Ezért mindkét elmélet alapfogalmait szeretném felépíteni a szükséges matematikai apparátus bemutatásával olykor saját eredmények, didaktikai szemmel nézve felfedezések közlésével, amelyek többnyire nem a matematikus, hanem a didaktikus, a tanár szemszögéből fontosak.

A matematika platonista felfogása szerint a matematika objektumai tőlünk függetlenül léteznek, hasonlóan a struktúrák és az összefüggéseik. Ilyenkor is kérdés természetesen, hogy milyen viszonyban vannak a világ más dolgaival, vajon miért lehet olyan jól alkalmazni a matematikát egyre több területen.

A konstruktivista felfogás szerint a matematika emberi teremtmény, az agyunkban létezik csupán, s fejlődése így folyamatosan az emberi változással egybekötött. Ezen felfogás azért sokkal rugalmasabb, mert nem vitatkozik olyan dolgokon, hogy az euklideszi vagy a Bolyai-geometria a helyes, hiszen nem létező, hanem konstruált dolgokról van szó. Világosan fogalmazza ezt meg maga Bolyai János is méltán híressé vált mondatával: „A semmiből egy új világot teremtettem." Éppen azért tartott szerintem olyan sokáig az áttörés, a Bolyai-Lobacsevszkij geometria elismerése a matematikában, mert a platonista szemlélet nagyon erős volt, a két rendszer egyszerre nem lehet „igaz", így választani kell. Az a gondolat, hogy egyszerűen két különböző geometria lehetséges, felfoghatatlannak tűnt, valószínűleg éppen ezért.

Ezt támasztja alá Freudenthal is egy cikkében, amit a klasszikus és a modern axiomatika megkülönböztetéséről írt. A görögök, mint mondja, biztosnak gondolt igazságot mondtak axiómának (a rész kisebb, mint az egész, egyenlőkből egyenlőket elvéve egyenlőket kapunk, két ponton keresztül egy és csak egy egyenes húzható stb.), amiket már nem tudtak visszavezetni még elemibb „igazságokra". A modern axiomatika egészen más alapokon épül fel. Itt már nem az igazságról van szó. Bármilyen axiómarendszert felállíthatok (természetesen minimális formális logikai követelményeket azért betartva), s utána vizsgálhatom, hogy mi vezethető le, azaz bizonyítható ebben a rendszerben. Az igazság nem kérdés többé, a levezethetőség lép a helyére. Ez sokkal absztraktabb gondolkodást jelent, nagyobb távolságot a fizikai világtól. (Olvasható: Czapáry E. 1981, [56] 141-145. oldalon.)

A témánkban is hasonló a helyzet. Két ellentétes felfogásról van szó, amelyek fogalmilag is eltérnek, filozófiájukban is mások. Abban viszont megszívlelendő a geometriai példa, hogy nem igazságot kell tenni két különböző rendszer között, hanem önmagukban vizsgálni őket, valamint az alkalmazásuk esetén kapott eredményeket összevetni azzal a szituációval, amelyben használni akartuk őket. Magam is törekedtem rá, hogy ahol lehet a példáimban adódó numerikus eredményeket, összevessem a tapasztalat eredményeivel.

1.5.13. Vancsó Ödön: A statisztikai következtetések elmélete kialakulásának állomásai

Részlet a Klasszikus és Bayes-statisztika a matematikadidaktikában című PhD dolgozatból (lásd Vancsó 2005 [238])

Bevezetés

Ebben a fejezetben áttekintem a téma történetének legfontosabb állomásait, azzal a céllal, hogy teljesen világossá tegyem a problémát, és a megoldására született különböző kísérleteket. Célom az, hogy az oktatás szempontjából tisztán látszódjék, egy problémának több lehetséges megközelítése van, és mindegyik modellnek vannak előnyei, de sajnos általában hátrányai is.

A mára két nagy táborrá vált klasszikus és bayesianus megközelítés, mint látni fogjuk valójában három vonal, csak ebből kettőt sajátos módon ötvöztek, éppen egy rosszul értelmezett oktatási célból. A két megközelítés vitájával nem szerették volna bizonytalanná tenni a tanulót. Ez gyakran előfordul az oktatásban, főleg fogalmi problémák esetén. Annak érdekében, hogy egy eljárást megtanítsanak, nem akarják terhelni a fogalmi, vagy az interpretációs nehézségekkel a tanulót. Ez véleményem szerint súlyos tévedés, ebben a dolgozatban éppen azt akarom megmutatni, hogy jelentős hasznon származhat a megértésből, szemben a puszta formalizmussá vált rituálénál. Gyakran azért történik mindez, hogy ne kelljen gondolkozni, pedig ez sajnos a matematikában (meggyőződésem szerint bármilyen más tudományban is) elkerülhetetlen. Erről több helyen lehet olvasni, én most a témánk szempontjából két forrást említenék meg: Gigerenzer (1993 [91]) és Krauss, Gigerenzer (2001 [135]). Mindkettőt még többször idézem majd a 2., 3. és 4. alfejezetekben is. (Az egész kérdéskörről egy átfogó olvasmány Gigerenzer 1989. egy teljes fejezete, [90] 70-122. o.)

A harmadik szál (Bayes) viszont olyan élesen elválik a másik kettőtől, hogy mára látványos különbség csak köztük van, Fisher, Neyman és Pearson szembenállása ma többnyire elhallgatott tény, mivel a „hibrid megoldás”, amelyet a klasszikus jelzővel illetnek a két gondolatkör (Fisher illetve Neyman és Person) összemosásából ered. Ez természetesen nem matematikai inkorrektség, ebben a tekintetben koherens a rendszer, csak a szülőatyák közötti véleménykülönbséget hallgatják el, amely elsősorban az értelmezési különbségekből ered (megjegyzem más céllal is születtek). Valójában azzal, ami ma az oktatásban történik sem Fisher sem Neyman és Pearson nem lennének maradéktalanul elégedettek, mármint hogy munkásságuk összemosódott egyetlen elméletté.

A dolgozat ezen fejezetében megpróbáljuk bemutatni először Bayes eredeti gondolatát, azután a klasszikus „hibrid megoldás” két forrását, azután magát a hibrid megoldást, végül a modern Bayes-statisztikát. Az ezután következő 4. fejezetben már csak a Neyman-Pearson féle felfogás szerint dolgozunk a klasszikus megoldásnál, míg a modern bayesianusokat követve mutatom majd be a Bayes-statisztika eredményeit.

1. A probléma felvetése és megoldása Thomas Bayes nyomán

A matematika, szorosabban véve a statisztika-valószínűségszámítás történetében először Thomas Bayes foglalkozott azzal az inverz kérdéssel, hogy miként lehet statisztikai adatok alapján ismeretlen valószínűséget becsülni. Az eredeti Bayes dolgozat halála után jelent meg (Bayes 1764 [28]). Én most két interpretációját mutatom be, az egyiket Richard von Mises (1931

[155]) könyve alapján. Érdemes lesz még ehhez hozzávenni J. Neyman egy fontos előadását (Neyman 1952 [160]). A másik munka H. Dinges és H. Rost matematikadidaktikai céllal írt könyve Dinges; Rost (1982 [63]), melyben a „distanzierte Realität" fogalmát használják a helyzet értelmezésére. Erre még visszatérek a 3. 4. alfejezetben.

Természetesen nagyon sok más cikk és könyv is foglalkozik a kérdéssel, akár történeti szempontból is, de mondanivalóm szempontjából ezek a források kiválóan megfeleltek.

A problémafelvetés és Bayes megoldása a legalaposabban von Mises fent említett könyvében olvasható:

PROBLÉMA: „Van egy urnasorozatunk, mindegyikben fekete és fehér vagy egyszerűen 0-val és 1-gyel jelölt egyforma golyók, különböző arányban keverve. Egy meghatározott, de ismeretlen összetételű urnából húzunk n-szer visszatevéssel (azaz az urna összetétele minden húzás előtt azonos), és tudjuk, hogy n_1-szer húztunk 1-est (fehéret). Ebből hogyan lehet visszakövetkeztetni azon ismeretlen urnának az összetételére, vagyis az 1-es húzás esélyére, amelyikből a húzássorozat történt?"

Azaz egy ismeretlen valószínűségre szeretnénk egy kísérletsorozat alapján visszakövetkeztetni. Bayes ezt a róla elnevezett tétel segítségével oldotta meg, mégpedig a szóba jövő urnákból egyforma valószínűséggel történő választás esetére végezve el a számítást. Természetesen más feltételezéssel is működik a gondolatmenet. Éppen Misesnél olvashatjuk annak bizonyítását, hogy határértékben, ha a húzások száma úgy tart a végtelenhez, hogy közben a kihúzott fehérek aránya állandó marad, akkor a kezdeti eloszlástól függetlenül (!) ugyanaz a valószínűségérték adódik az ismeretlen, becsülni kívánt valószínűségre.

Vizsgáljuk meg, hogyan következtet Bayes a keresett valószínűségre. Mivel az urna összetételét nem ismerjük, feltételezhetjük, hogy bármilyen 0 és 1 közötti racionális szám szóba jöhet a fehér esélyére. Azt, hogy melyik milyen eséllyel, azt a $v(x)$ ún. priori-valószínűségeloszlással, vagy ha x-et abszolút folytonosnak tekintjük (határeset), akkor sűrűségfüggvénnyel adjuk meg. A kísérlet utáni valószínűségeloszlást (sűrűségfüggvényt) $w(x)$-el jelöljük (von Misest követve). Írjuk fel a Bayes-tételt, hiszen azzal tudjuk „megcserélni" a feltételt az eseménnyel.

$$P(p = x|x_n = n_1) = \frac{P(x_n = n_1|p = x)P(p = x)}{P(x_n = n_1)}.$$

A nevezőt ebben az egyenlőségben a teljes valószínűség tétele alapján egy összegként, illetve folytonos esetben egy integrálként lehet megadni:

$$P(p = x|x_n = n_1) = \frac{P(x_n = n_1|p = x)P(p = x)}{\sum_x P(x_n = n_1|p = x)P(p = x)}.$$

Felhasználva, hogy a $P(p = x)$ valószínűségeket $v(x)$-el jelöltük, valamint a binomiális eloszlást beírva az ismételt visszatevéses húzások valószínűség eloszlásaként, végül pedig hogy a kísérlet eredménye melletti posteriori eloszlást pedig $w(x)$ jelöli, egyenlőségünk a következő alakot ölti:

$$w(x) = \frac{\binom{n}{n_1} x^{n_1}(1-x)^{n-n_1} \cdot v(x)}{\sum_x \binom{n}{n_1} x^{n_1}(1-x)^{n-n_1} \cdot v(x)},$$

vagy folytonos esetben

$$w(x) = \frac{\binom{n}{n_1} x^{n_1}(1-x)^{n-n_1} \cdot v(x)}{\int_0^1 \binom{n}{n_1} x^{n_1}(1-x)^{n-n_1} \cdot v(x)dx}.$$

Azonnal látszik, hogy a binomiális együttható, amelyik általában kellemetlenséget okoz a számolásnál, most kiesik, hiszen mind a számlálóban, mind a nevezőben szerepel.

Ha még először az egyenletes priori eloszlást választjuk, azaz $v(x)$ minden x-re egyenlő diszkrét esetben, vagy azonosan 1 a folytonos esetben, akkor a következő jóval egyszerűbb eredmény adódik:

$$w(x) = \frac{x^{n_1}(1-x)^{n-n_1}}{\sum_x x^{n_1}(1-x)^{n-n_1}},$$

illetve folytonos esetben:

$$w(x) = \frac{x^{n_1}(1-x)^{n-n_1}}{\int_0^1 x^{n_1}(1-x)^{n-n_1}dx}.$$

Felhasználva a parciális integrálást, a folytonos esetben a nevezőt ki lehet számítani, egy konstans érték adódik, amit például Wickmann (1991)-ben [256] olvashatunk:

$$\int_0^1 x^{n_1}(1-x)^{n-n_1}dx = \frac{n_1!(n-n_1)!}{(n+n_1)!},$$

amellyel végül is a posteriori eloszlásra egy ún. β-eloszlás adódik:

$$w(x) = \frac{(n+1)!}{n_1!(n-n_1)!} x^{n_1}(1-x)^{n-n_1}.$$

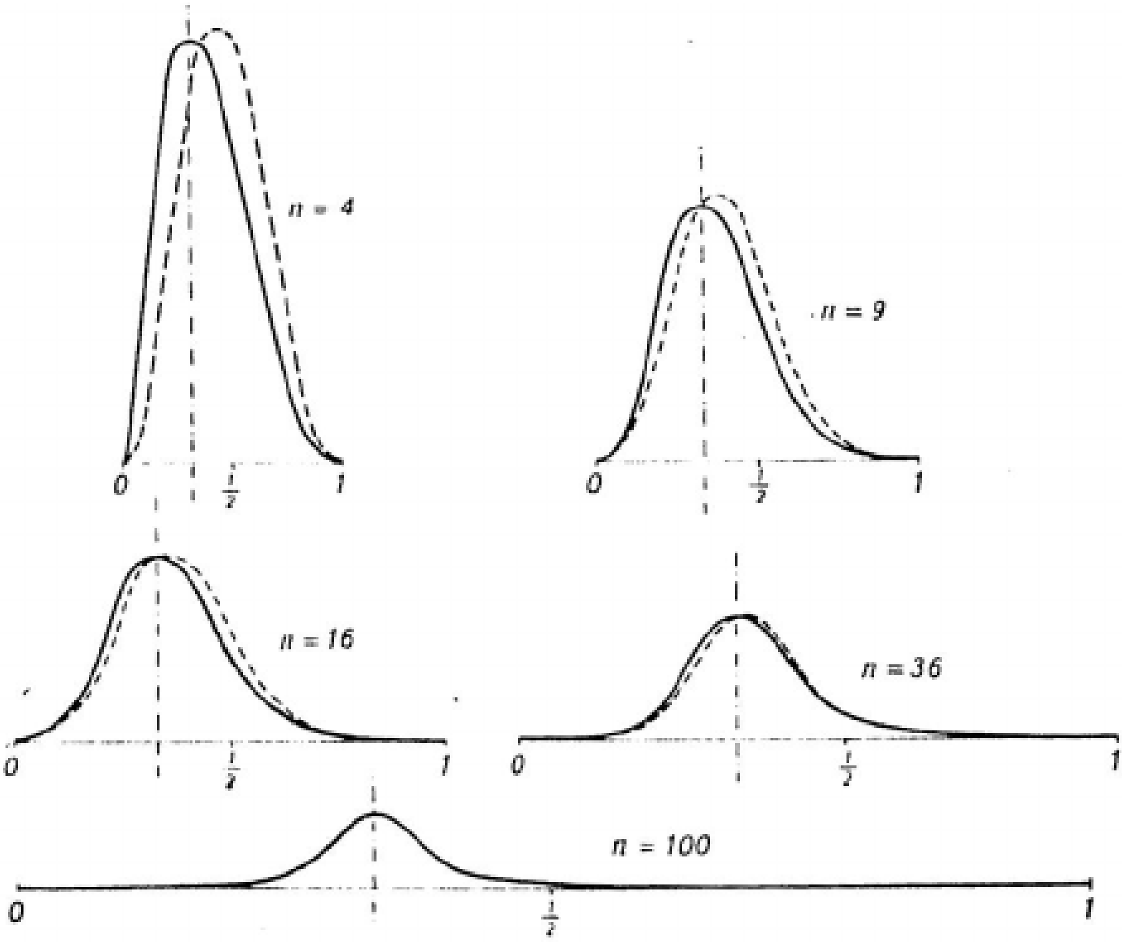
Ez a görbe növekvő n esetén egyre keskenyebb, bármilyen n_1 értéket is nézünk. Lásd az eloszlás néhány n értékre megadott görbéjét.

Két nagyon fontos matematikai tételt tárgyal Mises a könyvében. Először azt, hogy ha rögzített az n_1 és n aránya, és közben n tart a végtelenbe, akkor a priori $v(x)$-től függetlenül egy normális eloszláshoz konvergál a $w_n(x)$. Másodjára a nagy számok törvényének a Bayes feladatra adott változatát bizonyítja be.

A fejezet végén levő táblázatot a tanulságossága miatt átvettem, lásd (von Mises 1931 [155])-ben a 198. oldalon. Néhány jelölést módosítottam, így nem teljesen azonos a két táblázat.

Fogalmilag azonban egy nagyon fontos különbséget kell tennünk a majd később tárgyalandó Bayes-statisztika és a fenti ún. eredeti Bayes megoldás között. Thomas Bayes nagyon óvatosan fogalmazott, és egy olyan problémát vizsgált, ahol a priori-eloszlás egyenletes voltát garantálta a helyzet, tehát ő egyáltalán nem gondolkozott szubjektív valószínűségekben, lásd Dinges; Rost 1982 [63]. Megjegyzem, hogy azokban az időkben a szerencsejátékok vagy más véletlen mechanizmusok esetén általában az egyenletes eloszlás egy objektívnek tűnő feltételezés volt.

Gondolatmenete ezért a következő helyzetekben használható csak: Tegyük fel, hogy egy véletlen eljárással választunk ki egy urnát adottak közül. Ezután húzunk visszatevéssel, s arra vagyunk kíváncsiak, hogy vajon melyiket választottuk ki a szóba jövők közül. Ebben az esetben, tehát ha a kiválasztás egy valódi véletlen mechanizmussal történik, akkor van értelme



1.71. ábra. Néhány β-eloszlás ábrája

Bernoulli-problémakör Összeg és átlagképzés		Bayes problémakör Visszakövetkeztetés a megfigyelésből
1. Közvetlen megoldás (Newton formula) $w_n(x)=\binom{n}{x}p^x(1-p)^{n-x}$	n azonos kimenetel illetve egy kimenetel n-szeri megfigyelése	1. Közvetlen megoldás (T. Bayes) $w_n(x)=\text{konstans}\cdot x$ $v(x)\left[\left(\frac{x}{\alpha}\right)^{\alpha}\left(\frac{1-x}{1-\alpha}\right)^{1-\alpha}\right]^{n}$
2. Határátmenet (Laplace) $w_n(x)\to konst\cdot e^{-u^2}$ ha $n\to\infty$		2. Határátmenet (Laplace) $w_n(x)\to konst\cdot e^{-u^2}$ ha $n\to\infty$
3. Bernoulli-tétel $W'_n(p-\rho,\ p+\rho)\to 1$ ha $n\to\infty$ tetszőleges ρ pozitív szám esetén		3. Bayes-tétel $W_n(\alpha-\rho,\alpha+\rho)\to 1$ ha $n\to\infty$ tetszőleges ρ pozitív szám esetén
4. Nagy számok gyenge törvénye $W'_n(b'_n-\rho, b'_n+\rho)\to 1$ ha $n\to\infty$	n tetszőleges sokaság illetve egy sokaság n-szeri megfigyelése	4. A nagy számok második törvénye: $W_n(\alpha_x-\rho,\alpha_x+\rho)\to 1$ ha $n\to\infty$
5. Moivre-Laplace határeloszlás tétel $w_n(x)\to konst\cdot e^{-u^2}$ ha $n\to\infty$		5. Második határeloszlás tétel $w_n(x)\to konst\cdot e^{-u^2}$ ha $n\to\infty$

a priori-eloszlásnak, hiszen az éppen a véletlen mechanizmust tükrözi. Ekkor nincs semmilyen szubjektív elem a választásban. Bayes csak ilyen helyzetekben használta a később Laplace nyomán róla elnevezett tételt.

Ebben a („objektív”) felfogásban, a tudásunk illetve nem tudásunk mérésére a valószínűségfogalom nem használható. Ezért értelmetlen azt kérdezni, hogy milyen eséllyel választottuk az egyik urnát, ha azt nem egy véletlen mechanizmussal tettük.

A mai Bayes-statisztikusok azonban a valószínűség fogalmát jóval tágabban értelmezik, s így kicsit pongyolán azt is mondhatjuk, hogy maga Bayes nem volt bayesianus. Egyébként gondolatait Laplace terjesztette, bár már ő is kissé eltért az eredeti felfogástól, nála már vannak utalások információ hiányos helyzetben az egyenletes priori-eloszlás alkalmazására, lásd Dinges; Rost 1982. [63] 257-264. oldal.

2. A mai „klasszikus” matematikai statisztika kialakulása

A XX. századi történet a húszas-harmincas évekre koncentrálódik, akkor alakult ki az a fogalmi háttér – két egymással szintén szembenálló ágon – amelyre ma a klasszikus jelzőt használjuk.

Az egyik szál vezéralakja Sir Ronald Aymler Fisher angol tudós, aki bár kinevezett statisztika professzor nem volt életében, mégis az egyik legnagyobb hatású személyiség a matematikai statisztika történetében. A legfontosabb jellemzője, hogy ő természettudós is volt, (sőt alapvetően annak tartotta magát) és éppen a természettudományos igények miatt fordult a statisztika felé. Alapvetően tehát a motivációja nem tisztán matematikai. Ez egyik fontos oka lesz majd a másik szál alapvetően matematikus gondolkodóival kialakult ellentétnek. A szignifikancia-teszt kidolgozása tekinthető egyik fő eredményének az alapok lerakásában. Fisher elégedetlen volt az előbbi alfejezetben leírt Bayes-féle megoldással, mivel a számára elfogadhatatlan szubjektív priori-valószínűséget szerette volna eltüntetni az elméletből. Számára ez ellentmondásban volt a tudomány objektív, személytelen felfogásával. Érdekes módon azonban, főleg későbbi éveiben a „fiduciális-valószínűségek” fogalmával mégis tett egy lépést a bayesianus irányban (Fisher 1956 [77]). Koncepciójának bemutatásával kezdem majd ezt a részt.

A másik szál a Jerzy Neyman és Egon Pearson nevéhez köthető Fisherrel folytonos vitában álló elképzelés, amelyet a két szerző éppen a Fisher-féle szignifikancia-teszt teljesebb és koherensebb elméletté fejlesztése érdekében dolgozott ki. Itt fontos megjegyezni, hogy Neyman viszont a lengyel (és francia) iskolához tartozó ízig-vérig matematikus volt, aki általában a természettudományok iránt kisebb érdeklődést tanúsított, mint ellenlábasa Fisher. Ők ketten (Neyman és Pearson) is élesen szemben álltak azonban a harmadik iránnyal, a szintén akkortájt fejlődésnek induló Bayes-statisztikával, amelynek első modern megalapozása szintén a harmincas évekre tehető, elsősorban Bruno de Finetti olasz tudós munkássága révén.

2.1. A szignifikancia-teszt elmélete és kritikája

A koncepció lényege a következő: van egy hipotézisünk, legegyszerűbb esetben egy ismeretlen paraméter értékéről. A feladat az, hogy kísérleti módszerekkel szerzett adatok alapján eldöntsük, vajon a hipotézisünk megfelelő volt-e. Fisher első és legfontosabb ötlete a véletlenszerű mintavétel fogalmának bevezetése volt. Ezen nyugszik az egész elmélet, amelyet a „The Design of Experiments” című könyvében írt le (Fisher 1935 [76]). Mivel Fisher a valószínűség fogalmát csak véletlen jelenségek körében használja, ezért volt szüksége rá, hogy a véletlent játékba hozza. Ennek lényegi gondolata, hogy a hipotézis fennállásának (helyességének) a feltételezése mellett meghatározható egy olyan tartomány, ahová ekkor egy előírt, nagy valószínűséggel a kísérlet eredményének esnie kell. Amennyiben nem ez az eset áll fenn, akkor az eredményt szignifikánsnak mondjuk, s a hipotézist elvetjük. Fontos megjegyezni egy aszimmetriát (éppen ezt szeretné Neyman és Pearson korrigálni elméletével), nevezetesen, hogy ha az eredmény nem szignifikáns, akkor semmit sem tudunk mondani, azaz „értéktelennek” mondható az eredmény. Ezzel a módszerrel a hipotézis tarthatatlan voltát lehet, ahogy gyakran fogalmazni szokták „statisztikailag bizonyítani”, azonban a helyességére vonatkozóan nem mondhatunk semmit. Egy további probléma, hogy bár a hipotézis fennállásának a valószínűsége lenne érdekes, de ez a gyakorisági keretben értelmezhetetlen (noha kívánatos lenne, éppen ez a Bayes-módszer iránti érdeklődés alapja). Ha értelmezhető lenne, akkor sem erről szólna a szignifikancia-teszt. Itt éppen egy fordított kérdésre kapunk választ, nevezetesen ha a hipotézis igaz, akkor az eredmény mennyire valószínű vagy valószínűtlen. Az elméletben tehát az első fontos elem a hipotézis megfogalmazása, de fontos a másik elem, a szignifikancia-szint fogalma is. Fisher kezdetben mindig 5%-ról beszél, mint tradicionális értékről, amit olykor 1%-ra módosít. Semmi fogalmi, logikai vagy egyéb oka nincs, hogy ezt az értéket hol rögzítsük. Később Neyman és Pearson bevezeti a szignifikancia-szint helyett, az ún. elsőfajú hiba fogalmát, majd az elmélet teljessé tételéhez a másodfajú hibát is, amelyen a teszt erejének fogalma nyugszik. Ezeket a következő részben értelmezzük.

Fisher maga egyszerre akarja, ahogyan Gigerenzer fogalmaz Gigerenzer (1993 [91]), visszautasítani és megenni a bayesianus kekszet. Hiszen a szignifikancia-szint értelmezését, mint a hipotézis „valószínűségét” próbálja valahogyan értelmezni, ami azonban csak a bayesi-keretek között lehetséges. Krauss és Gigerenzer (2001 [135]) fogalmazza meg világosan a korai és a késői Fisher álláspontot a szignifikancia-szintről.

Korai Fisher (1935 [76]): A szignifikancia-szintet előre kell rögzíteni a teszt lefolytatása előtt („konvencionálisan” 5%). A szignifikancia-szint ezzel a teszt egy saját tulajdonsága, nem függ az adatoktól.

Késői Fisher (1956 [77]): Számoljuk ki a teszt elvégzése után a pontos szignifikancia-szintet az adatokból (P-érték). A szignifikancia-szint ezzel már nem a teszt előre rögzített sajátossága, hanem az adatok egy tulajdonsága, és így nem szükséges önkényesen egy rögzített konvenciót használni.

Érdemes lesz majd ezeket a harmadik állásponttal, Neyman és Pearson felfogásával egybevetni. A felsőoktatásban elterjedt didaktikai hibákról és hibás interpretációkról majd az utolsó alfejezetben beszélek még.

2.2. Neyman és Pearson behaviorista megoldása

Neyman és Pearson két fontos elemmel egészíti ki a Fisher-féle konstrukciót, miközben teljesen más filozófiai alapokra is helyezik azt.

Először is az aszimmetria feloldására bevezetik az alternatív hipotézis fogalmát. Tehát nem csak egy ún. nullhipotézist fogalmazunk meg, hanem egy vagy több ezzel szembenálló ún. alternatív hipotézist.

Ezután kétféle hiba-fogalmat definiálnak. Az ún. elsőfajú hiba a nullhipotézis helytelen (téves) elutasítása, amire akkor kerül sor, ha a hipotézis igaz, mi a kísérleti eredmények alapján mégis elvetjük azt. Vegyük észre, hogy ez éppen a Fisher-féle szignifikancia fogalmának a más megfogalmazása. Bevezetnek viszont egy másik hibafajtát az ún. másodfajú hibát, amit akkor követünk el, ha helytelenül megtartjuk a hipotézist, pedig az alternatív hipotézist kellene elfogadni. Ezt általában akkor tudjuk numerikusan számolni, ha van egy konkrét alternatív hipotézisünk (esetleg több, akár végtelen sok). Ezzel a lépéssel a hiányzó szimmetria felé is tettek egy jelentős lépést.

Tehát az új konstrukcióban van egy hipotézisünk (egyszerű vagy összetett) és egy (vagy több) riválisalternatív, vagy ellenhipotézisünk. A kísérlet eredményei alapján kell majd valahogyan ezek között döntenünk. A két hibát úgy interpretálják, mint a téves döntéseink valószínűségét, azaz a helyes hipotézis téves elvetésének, illetve a téves hipotézis helytelen elfogadását. Itt is a kísérlet előtt meg kell határozni ezeket a számokat. Tehát ezek a hibák a teszt sajátosságai, nem az adatoké. Ezekhez egy döntési szabályt rendelnek, az ún. tévedési költséget, azaz mikor melyikből származik nagyobb kár, a hipotézis téves elvetéséből vagy a hipotézis téves megtartásából. Ez tipikus amerikai mentalitás, Neyman és Pearson a második világháború kezdetekor az Egyesült Államokba emigrált.

A lényeg, hogy szemben a természettudós Fisherrel, aki az „igazságot” kereste, s ennek rendelte alá a statisztikai módszereit, addig Neyman és Pearson egy pragmatikus álláspontot foglalt el, amelyben nem az igazság, hanem a legkisebb kár, vagy a legnagyobb nyereség játssza a főszerepet. Nyilván a tömegtermelés világában, az iparban és a gazdaságban az elmélet gyorsan teret nyerhetett.

Itt jegyzem meg, hogy szerintem álláspontjuk kialakításában nagy szerepet játszhatott a matematikáról akkoriban alakuló modern kép is (lengyel, francia formalista iskola), mely szerint az egyes modellek igazságáról nem lehet beszélni; még ellent-mondás-mentességükről is csak egy átfogóbb elmélet keretei között. Szokás a Neyman-Pearson koncepciót még a „behaviorista” jelzővel illetni, hiszen a cselekvés számára kívánnak megfogalmazni döntési kritériumokat, amelyben az igazság nem játszik szerepet, hiszen az indifferens a haszon vagy a kár szempontjából.

Neyman fogalmi konstrukciója még a dolgozatom következő két fejezetében sokat szereplő konfidencia-intervallum, ahol pontosabban, α-konfidencia-intervallumról kell beszélnünk. Ez a következő gondolatmenettel született meg: Keresünk az ismeretlen paraméter értékeire egy olyan intervallumot, amelyet megbízhatónak tekintünk. Sajnos arról nem tudunk beszélni, hogy nagy valószínűséggel ebben a tartományban van a paraméterünk (hiszen ennek valójában szigorúan véve nincs is értelme, mivel általában, néhány speciális eset kivételével, a hipotézis vagy igaz, vagy hamis, nem a véletlentől függ. Ezért nem lehet hozzá gyakorisági megfontolásból valószínűséget rendelni, hiszen itt csak információ hiányról van szó, és nem egy valódi véletlen jelenségről.), csak arról, hogy ha ebből való az értéke, akkor a kísérlet eredménye nagy valószínűséggel hihető. Azaz valójában a konfidencia intervallum azon paraméterértékek összessége, amelyre nem szignifikáns az eredmény, azaz nem vethető el, hogy ennyi lenne a paraméter valódi értéke.

Szoros kapcsolatban van tehát a fogalom a Fisher-féle szignifikancia-teszttel, de annak egy más megfogalmazása. Az interpretációjuk is teljesen más. Fisher szerint a nem szignifikáns eredményből nem lehet következtetést levonni, hiszen ezzel nem a hipotézist igazoltuk, csupán az elvethetőségét nem sikerült igazolni a statisztikánkkal. Vagyis ez közömbös eredmény, semmilyen következtetést nem vonhatunk le.

Neyman mégis éppen azon értékek halmazát, amelyeket nem lehet elvetni, egy kitüntetett tartománynak nevezi, amelyre a konfidencia-intervallum elnevezést (Confidence interval) vezeti be lásd Neyman (1952 [160]) 194-229. oldalon az „Outline of the theory of confidence intervals” címmel tartott előadást 1937 április 9.-én. Ez az előadás követte az egy nappal korábbit, ahol a statisztikai becslés más módszereit mutatja be a klasszikus Bayes-, illetve a modern Bayes-módszert. Erre utaltam az 1. pont végén.

Azért lehet egyáltalán valószínűségekről beszélni, mert a minta véletlenszerű, s így a konfidencia-intervallumnak a módszerével számolt két határa szintén a véletlentől függ. Így van értelme arról beszélni, hogy ez a véletlen intervallum milyen eséllyel tartalmazza magát a paramétert. Pontosabban szólva milyen eséllyel fedi le a kapott véletlen intervallum a fixnek tekintett p értéket.

Azaz nem arról van szó, hogy a becsülni kívánt paraméter mekkora eséllyel esik egy rögzített intervallumba, hanem arról, hogy véletlen intervallumok milyen eséllyel fednek le egy bizonyos értéket.

A két irányzat szembenállása alapvetően eltérő világfelfogásukból, filozófiájukból valamint személyes ellentéteikből fakadt. Erről kitűnő elemzést olvashatunk W. Stute (1987 [210]) cikkében, ahol az is kiderül, hogy a döntő vita egy 1935. március 17.-i Neyman-előadáson robbant ki, valószínűleg egy félreértésből, amely aztán Fisher haláláig nem csitult. Bizonyítja ezt egy hosszú cikkből vett két idézet a két tudóstól, akiket megkértek, hogy fejtsék ki álláspontjukat.

„Véleményem szerint ... Neyman több száz évvel kiesett az időből ...

Hiszem, hogy a józan ész és a realizmus visszaállítható a matematikai statisztika tanításába.

A „másodfajú hiba” kifejezés bár a technikai zsargon ártalmatlan elemének tűnik, hasznos, mint indikátora egyfajta mentális zavarnak, amelyben létrejött.” (Fisher [76])

„Fisher korai munkái iránti csodálatom miatt különösen megrökönyödtem első reakcióin, amellyel rosszallását fejezte ki elképzeléseimről. Később ez a megrökönyödésem enyhült, amikor rájöttem, hogy Fisher hamis reprezentációinak offenzív karaktere van, és más tudósok véleményét egyszerűen nem tekinti kompetensnek. Alkalmanként ezek a tévedések fantasztikusak.” (Neyman [160])

Nagyon látszik, mennyire támadólag beszélnek egymásról.

Jól összefoglalja az angol statisztikai iskola álláspontját a következő mondat:
„Bár a vizsgálat középpontjában az adathalmaz és analízise áll, sosem szakítják el teljesen a szakmai hátterétől. Sir M. Kendall szerint a statisztika egyfajta meta-tudomány, amelynek módszereit a kívülről érkezőnek magának kell használnia. Ezzel különböztethető meg az angol iskola másoktól, ahol a statisztika a matematikai laborokban zajlik.” (Ezt alátámasztja Fisher munkássága is.)

Itt jegyzem meg, hogy a matematikai elméletnek el kell szakadnia attól a külső környezettől, amelyben létrejött. Ebben az „emancipációs folyamatban” Neyman szerepe elvitathatatlan, annak ellenére, hogy Fisher is komoly érdemeket szerzett, de éppen a túl erős természettudományos kötődése megakadályozta, hogy egy ponton túl elvonatkoztasson a konkrét helyzettől. Ebben hasonlít Newtonhoz, akinek matematikai érdemei is hasonlóan elvitathatatlanok a differenciál- és az integrálszámítás létrejöttében, de a matematikai elmélet megalapozása és mai formája jóval később Cauchy, Lagrange, Euler végül a XIX. század nagyjai Bolzano, Weierstrass, Dedekind és Cantor munkássága nyomán jött létre.

Az egész téma külön pikantériája, hogy ezt a szignifikancia-teszt módszert a matematikadidaktika kísérleti eredményeinek a kiértékeléséhez nagyon gyakran használják, így ez az a pont, ahol a kígyó a saját farkába harap. Ez egy statisztika-didaktikai munka, amelyben a statisztikai módszerek kritikus tárgyalása a fő téma. Fontos megjegyeznem azonban, hogy a fogalmi tisztázás és nem az „igazságtétel” a disszertáció célja, amely remélhetőleg a statisztika hazai didaktikáját is jelentősen gazdagíthatja, mindenekelőtt a felsőoktatási módszereket, illetve bizonyos előzetes középiskolai lépések megtételét is. Ezt az utolsó 5. fejezetben fogjuk áttekinteni.

2.3 A hibrid megoldás, amit ma klasszikusnak mondanak

A 3.2.1. és 3.2.2.-ben összefoglalt két forrásból alakult ki a Gigerenzer által hibridnek mondott „klasszikus statisztika”, amely ma a felsőoktatásban legalább 95%-ban van jelen, lásd pl. Moore (1997 [158]). Fisher gondolatai a negyvenes években váltak ismertté az USA-ban. Az első amerikai munka, amelyben a fogalmi zavarok megjelennek, Guilford kézikönyve. Itt Fisher felfogásában szerepel a szignifikancia-teszt, de tőle eltérően a szignifikancia-szint bayesiánus módon értelmezett, amit maga Fisher mindvégig mereven elutasított, azaz a hipotézis igaz voltának valószínűsége a szignifikancia-szint. Ezt a legkülönbözőbb módokon fogalmazza meg, idézek két ilyen a szövegben talált fordulatot:
„If the result comes out one way, the hypothesis is probably correct, if it comes out another way, the hypothesis is probably wrong” (156. oldal).

„Null hypothesis testing is said to give degrees of doubt such as „probable” or „very likely” a „more exact meaning” (156. oldal).

Guilford logikája konzekvensen se nem fisheri, se nem bayesiánus. Ez a logika nem egyedi, a mai leggyakoribb hiba a hipotézis teszt értelmezésekor ugyanez. A kutatók vacillálnak a bayesi vágyott értelmezés és a klasszikus fisheri között. Nem világos a különbözőség. Lásd az erről készített felmérésünket.

Neyman és Pearson munkássága az 50-es 60-as években vált ismertté. Hogyan reagálnak erre a tankönyvszerzők? Egy ügyes hibrid megoldást választanak. Tanítják a fisheri hipotézistesztet, mint a tudományos élet fontos eszközét, majd bevezetik a minőségellenőrzés és más ipari, technikai problémákon a Neyman-Pearson- gondolatot, az első és a másodfajú hibával. Sem az egyik, sem a másik oldalra nem állnak, két különböző helyzetben használható módszerként kezelik az ügyet. Úgy is fogalmazhatjuk, hogy a fisheri-logikát megkoronázzák a Neyman-Person-logikával. Ezekben az évtizedekben születik meg tehát a hibrid megoldás. Ennek lényege:

a) Elhallgatja a két szál szembenállását, s így a gyökereiket elvágja.

b) Úgy mutatja be ezt, mint a tudományos következtetés egy monolitikus (egységes) logikáját. Ezáltal nem választja szét a két felfogás különbözőségét, nevezetesen, hogy a fisheri hipotézis-teszt nem tartalmaz alternatív hipotézist, valamint a szignifikancia-szint és a teszt erejének (másodfajú hiba) értelmezése, mint hosszú szériák esetén a hibás döntések gyakorisága szintén teljesen idegen Fishertől. Ezzel szemben az ismételt kísérletek a hipotézis helyességének eldöntése érdekében idegenek a Neyman-Pearson felfogástól.

Gondoljuk végig, mi lenne a kívánatos. Akár egy hipotézisről, akár egy ismeretlen paraméter értékről van szó (gyakran éppen arra vonatkozik a hipotézis!), szeretnénk egy nagyon megbízható állítást kapni. Ezt a megbízhatóságot lehet szubjektíven értelmezni, ez a Bayes-statisztika útja, illetve lehet pragmatikusan értelmezni, mint Neyman és Pearson, ahol tömegszituációban egy korlát alatt marad a tévedésünk, ha sokszor hozunk hasonló szituációban ugyanolyan elv alapján döntést. Fisher valahol a kettő között áll, nem tekinti magát bayesiánusnak, mégis a hipotézis valószínűségét szeretné valahogyan mérhetővé tenni. Ez egy vágyálom, ahogyan pl. Gigerenzer fogalmaz, és a gyakorisági, szűkebb fogalmi keretben nem is lehetséges. Ott egyedül a Neyman-Pearson-féle futószalag szituációban alkalmazható módszer létezik, amelynek egyedi szituációkban nincsen relevanciája. A szimmetrikussá tett szignifikancia-teszt a klasszikus megoldás, amit ma a legtöbben használnak, persze a szituációtól függő „teszt-statisztikát” használva. Ennek didaktikai problémáiról, s a javaslatom szerinti megoldás lehetőségéről az utolsó 5. fejezetben lesz szó. Itt érintek majd magyar felsőoktatási jegyzeteket, könyveket is, ahol szintén nincs explicite kifejezve a két irányvonal különbözősége. Emellett tanulmányozok majd a témáról szóló három német és két osztrák középiskolai tankönyvfejezetet is.

Ezt az alfejezetet Gigerenzer egy pszichológiai metaforájával zárnám. Összefoglalása ez a metafora annak a zavarnak, amellyel a téma kutatói, főleg felhasználói, oktatói, tankönyvírói küszködnek. Egy fontos célja ennek a dolgozatnak, hogy végre tisztázzuk az alapkérdéseket.

Gigerenzer szerint a hibrid logika struktúrája a freudi – Id-Én-Felettes Én – mintájára a következőképpen fest:

A tudatalatti (Id), amely az ösztönökön át a fő hajtóerő, a vágyak fészke, nos ez a bayesianus felfogás, amelyben a vágyott kérdésre kapunk választ, hogy mekkora a hipotézis valószínűsége.

Az én (Ego) szerepét Fisher játssza, amely a mindennapi tevékenységet, s a szignifikancia-szint meghatározását a kísérlet után végzi. Ez az én kerüli a pontos előrejelzéseket a kutatási hipotézisről, és csak a hipotézis elvetését tekinti eredménynek. Az én az egyes eredményekről gazdag ismeretelméleti állításokat tesz. Viszont magára marad a bűnösség érzésével, illetve a szabályok megszegésének a szégyenével (lásd Guilford logikáját).

A felettes én (Superego) főszerepe a kontroll, adott adatokból a hipotézis valószínűségére vonatkozó állításokat ellenőrzi, folyamatosan követve a Neyman-Pearson-féle gyakorisági értelmezésű behaviorista „objektív" megoldást, amely nem engedi meg, hogy a hipotézis igaz vagy hamis voltának valószínűségéről beszéljünk.

3. A Bayes-gondolat újjáéledése és megalapozása

A modern Bayes-statisztika elsősorban Bruno de Finetti, Jimmy Savage, Dennis Lindley és társaik munkássága nyomán kezdett virágzani, s mára már konkurens elméletté vált, még akkor is, ha elterjedtsége messze alulmarad konkurense mellett. Igen jelentős viták folynak azonban arról, hogy az oktatásban (ezalatt elsősorban a felsőoktatást tekintve) helye lenne mindkettőnek. Az erről szóló nézeteket foglalom össze a 3.4. alfejezetben. Az ott megfogalmazott saját álláspontom illusztrációja lesz a disszertáció 4. és 5. fejezete.

Ennek az elméletnek az alapja a valószínűség fogalmának egy jóval általánosabb értelmezése, amellyel nem csak véletlen események esetén lehet dolgozni, hanem jóval általánosabban. A felfogás mögött a modern információelmélet mellett, a modern axiomatika is erősen jelen van. Ezt úgy értem, hogy a Kolmogorov-féle axiómarendszert egy pusztán szintaktikai rendszernek tekintjük, nem foglalkozunk sem a véletlennel, sem más tényleges valóságosnak vélt jelenséggel, hanem azt mondjuk, hogy ennek az axiómarendszernek minden olyan modellje egyenrangú, amelyben értelmezhetők az alapfogalmak és a rögzített axiómák. A véletlenen alapuló, és a relatív gyakorisággal operáló gyakorisági valószínűségfogalom éppen úgy modellje a Kolmogorov-axiómáknak, mint az „igazságos fogadás" eszméjén alapuló ún. szubjektív valószínűség, amely a Bayes-statisztikának az alapja. Megjegyzem, hogy a klasszikus és az iskolában gyakran primér és egyetlen valószínűség fogalomként szereplő Laplace-féle kombinatorikus modell is teljesíti az axiómákat, tehát ez is valószínűség.

A modern Bayes-statisztika szerint a Bayes-tétel azért használható olyan általánosan, mert bár különböző tartalmú valószínűségek szerepelnek benne, mégis ezek mindegyikének azonosak a műveleti szabályai, hiszen ugyanazon axiómákat teljesítik, így nincs akadálya, hogy egyetlen összefüggésben szerepeljenek. Valójában két világ közötti kapcsolat leírását kísérlik meg a Bayes tétellel. Van egy elképzelésünk egy valóságos helyzetről, amit ún. priori-valószínűségek formájában fejezünk ki. Itt a valószínűség az informáltságunk, tájékozottságunk egy fokmérője, semmi köze nem kell, hogy legyen valamilyen véletlen kísérlethez. Ezután jön a kísérleti eredmény, amely az eredeti elképzeléseinket megváltoztathatja, amit új posteriori-valószínűségekkel fejezünk ki. Természetesen ez egy folyamat lehet, hiszen újabb és újabb tapasztalatokkal folyamatosan változik a helyzetértékelésünk. Ebben az értelemben mondható, hogy az emberi tanulásnak, vagy megismerésnek egy modellje lehet a Bayes-statisztika, s talán éppen ez adja növekvő népszerűségét. Ebben az elméletben van értelme a hipotézis valószínűségéről beszélni, vagy hogy a keresett paraméter mekkora eséllyel esik egy kijelölt tartományba. Az ára viszont az, hogy a valószínűség fogalmát tágabban kell értelmezni.

Ezzel azonban nagyon sokan nem értenek egyet. A valószínűségszámítás nagyhatású képviselői közül W. Feller vagy A. Engel is azon az állásponton van, hogy a valószínűségszámításnak nem tárgya a szubjektív tudatállapot, vagy egy helyzet megítélése. Némiképpen árnyaltabban, de mégis ezen az állásponton van Dinges és Rost is, akiknek a véleményét még idézni fogom, mivel fontosnak találom.

A kérdésről két egymással szembenálló idézetet (átvéve Wickmann (1998)-ból [257]) ideírnék, hogy lássuk pontosan a két álláspontot. Az első W. Fellertől származik, s nevezetes könyvének (1968) bevezetőjében olvasható.

„The success of the modern mathematical theory of probability is bought at a prise: the theory is limited to one particular aspect of „chance". The intuitive notion of probability is connected with inductive reasoning and with judgements such as „Paul is probably a happy man", „Probably this book will be a failure", „Fermat's conjecture is probably false"... kicsit később így folytatja: „We may fairly lament that intuitive probability is insufficient for scientific purposes, but it is a historical fact."

Világosan látszik, hogy Feller a valószínűség fogalmát kizárólag véletlen tömegjelenségekre értelmezi, a köznapi „valószínű" kijelentést nem tartja elég „matematikainak" (ami itt az objektív szinonimája).

Ezzel szemben lássuk, hogyan fogalmazza meg álláspontját de Finetti (1981 [75]) a valószínűségről:

„Es exisiert keine objektive Wahrscheinlichkeit. Das Aufgeben abergläbischer Ideen über die Existenz von Phlogiston, Kosmischem Äther, absolutem Raum sowie absoluter Zeit ... von Feen und Hexen bildet einen wesentlichen Schritt auf dem Wege zum wissenschaftlichen Denken. Auch die Wahrscheinlichkeit ist, wenn man ihr so etwas wie eine objektive Existenz zuschreiben will, eine nicht minder irreführende Fehlauffassung, ein illusorischer Versuch, unsere wahren probabilistischen Überzeugungen zu extrovertieren oder zu konkretisieren."

Finetti tehát éppen a Feller által egyedül használható objektív valószínűség létezését tekinti egyenértékűnek a flogiszton elmélettel, az abszolút tér-idővel, vagy akár az éterrel. Azaz eliminálandó, pusztán tudati fikciónak tekinti.

Látható, hogy ebben a vitában a tudományról, a megismerésről alkotott álláspontok tisztázása nélkül, nemigen lehet megalapozott véleményt alkotni. Véleményem szerint Feller és mindazok, akik az ún. klasszikus (kanonizált, hivatalos, hiteles stb.) táborban vannak, a következő álláspontot képviselik:

1. Létezik objektív valóság, amelyik megismerhető, s ennek részét képezik a véletlen események, amelyeknek a valószínűsége szintén tőlünk független objektív létező. A tudomány feladata ennek a valóságnak a megismerése.

2. Létezik egy speciális mérési eljárás, amellyel relatív gyakoriságok sorozatán keresztül, ha nem is szokásos konvergenciát, de legalább mértékben való konvergenciát tudunk a modellben biztosítani. Ennek jelentése, ami a nagy számok törvényeiben fogalmazódik meg: A relatív gyakoriságok sorozata lényegében 1 valószínűséggel tart a „mérni kívánt" valószínűséghez. A probléma csak az, hogy míg a klasszikus mérési eljárásokban, az egyes lépésekben egyre pontosabban ismerjük meg a mérendő mennyiséget, addig itt mindig van egy bizonytalansági tényező, csak valószínűbb, hogy egy hosszabb sorozat relatív gyakorisága közelebb van a valószínűséghez, mint egy rövidebb. Lásd Vancsó

(1992 [235]), ahol erről bővebben lehet olvasni.

Az evvel szemben állók a következő állásponton vannak:

1. Az „objektív valóság” léte nem kérdés, mivel Kantot követve eleve csak a „Ding für uns”az érdekes. Tehát elméleteket alkotunk, amelyekkel azt az információhalmazt próbáljuk meg feldolgozni, amelyik a világból érkezik felénk. A világot az agyunkban megteremtjük (konstruktivizmus) azaz nem az objektív valóságról kell beszélni, hanem a bennünk létrejött világról.

2. A különböző modellek igazsága értelmetlen. Az alkalmazhatóság a kérdés, nem az igazság.

Végül szeretném összefoglalni Dinges és Rost véleményét a kérdésről, amelyet a könyvük II.3. 11.§-ában a 257-266. oldalon írnak le. Ennek lényege, hogy a tudatlanság (nem tudás) mértékére a valószínűség fogalmát nem tanácsolják használni. Általában azt fejtik ki, hogy a nemtudás túl hétköznapi és tisztázatlan fogalom ahhoz, hogy matematizálni lehessen . Egészen pontosan úgy fogalmaznak, hogy minden olyan elméletet, amelyben a nemtudást pozitív tényként akarják felhasználni, el kell vetni. Már Laplace-t is kritizálják, az „elegendő ok hiánya” elv használatáért, amivel az egyenlően valószínű kimeneteleket indokolni próbálta. Éppen a különböző részecskék statisztikai eloszlásai (Fermi-Dirac-, Bose-Einstein-, Boltzmann-eloszlás) mutatják, hogy mennyire nem elegendő a „nemtudás” érve az eloszlásokhoz.

A már említett „distanzierte Realität” eszméjét is itt hozzák fel. Eszerint két különböző síkon mennek a történetek. Van egy valódi sík (Sachebene) és egy modellsík (Modellebene), ahol gondolkozunk. A feladatok esetén mindig nagyon fontos a két sík távolságát megtartani, az értelmezések és átmenetek mindig jóval bonyolultabbak, és általában hibához vezet a keveredés. A matematika egyes régi területein már világosan kettéválik a két sík, de a statisztika illetve a valószínűségszámítás esetén éppen, mert annyira közel vagyunk a „tényekhez” nehezebb ez a távolságtartás és megkülönböztetés. Ennek lényege, hogy a matematika nem a valóságból közvetlenül absztrahálódik, hanem egy másik dimenzióban működik és szuverén, tehát önállóan működik, a valóságos kötöttségektől megszabadulva. Így a fogalmi konstrukciókat nem lehet közvetlenül az alkalmazásokban felhasználni, mint ahogy ottani észrevételeket sem feltétlenül lehet matematizálni.

Ezzel az elképzeléssel annyiban egyetértek, hogy magam is a matematikát szuverénnek tekintem, de nem látom be, hogy miért ne lehetne a meggyőződésem mértékeként is használni a valószínűséget. Ettől Dinges és Rost is óva int, én mégis lehetségesnek tartom.

1.5.14. Vancsó Ödön: A legnagyobb lottószám becslése egy adott húzás eredményének ismeretében

Részlet a Klasszikus és Bayes-statisztika a matematikadidaktikában című PhD dolgozatból (lásd Vancsó 2005 [238])

Tudjuk, hogy különböző országokban különböző lottójátékok vannak forgalomban. Minden játék közös lényege, hogy általában 1-től valameddig terjedő természetes számok közül kihúznak egymás után néhányat. Ezekre előre egy szelvényen lehet tippelni, s az eltalált számok számától függ a nyeremény. Mivel a telitalálat esélye igen kicsi, ezért többnyire igen nagy nyereményt kínálnak fel érte. Példaként Magyarországon két különböző lottójáték is van, az egyik a hatoslottó, ahol 1-től 45-ig terjedő számok közül húznak hatot. Az ötöslottón pedig 1-től 90-ig terjedő szá-mok közül húznak ötöt. Németországban például 49-ből húznak 6-ot, Hollandiában 36-ból ötöt. Ez a sokféleség veti fel a következő kérdést. Valaki egy külföldi ország-ban elolvassa az utolsó húzás eredményét, mondjuk a magyar ötöslottó esetén öt különböző számot. Azt szeretné megbecsülni, hogy vajon hány számból húztak, azaz a lehető legnagyobb kihúzható lottószám mekkora.

Itt is egy inverz kérdés van, nem azt kérdezzük, hogy milyen eséllyel húzunk ki különböző számokat az ismertnek vett lottón, hanem fordítva az eredmény ismeretében szeretnénk becsülni, hogy hány számból húztak.

1. A valószínűség-számítási modell

Jelöljük N-nel a legnagyobb ismeretlennek tekintet lottószámot, és x_1, x_2, x_3, x_4, x_5-tel a kihúzott öt számot, nagyság szerint rendezve. Nyilvánvalóan teljesül, hogy $N \geq x_5$. Sok különböző módszer lehetséges, amellyel a megadott öt számból a keresett N értékét becsülhetjük. Ezek között van egy módszer, amelyik az öt szám közül a legnagyobb alapján próbál következtetni. (Megjegyezzük, hogy ez a módszer tehető várhatóérték-hűvé, azaz torzítatlanná, emellett konzisztens és még effektív is, az-az a szórása minimális.) Ezt fogjuk először bemutatni, eddigi szokásunkhoz híven mind a Bayes megközelítéssel, mind a klasszikussal.

A direkt, valószínűségszámítási megközelítéssel kezdjük. Ismerve a legnagyobb kihúzható lottószám N értékét, mi a valószínűsége, hogy a maximum éppen x_5 lesz? Ez azt jelenti, hogy az összes lehetőség közül, amelyek száma: $\binom{N}{5}$ meg kell számolnunk azokat, ahol a maximum éppen x_5. Ez azt jelenti, hogy a másik négy számot $x_5 - 1$ szám közül kell kihúzni, hogy mindegyik kisebb legyen, mint x_5.. Tehát a klasszikus kombinatorikus valószínűségi modell szerint a keresett esemény-valószínűség:

$$\frac{\binom{x_5-1}{4}}{\binom{N}{5}}.$$

Látható, hogy ez rögzített x_5 mellett N-ben akkor maximális, ha a nevező minimális, ami pedig $N = x_5$ mellett lép fel.

Minket azonban más érdekel: ha N ismeretlen, akkor milyen következtetés vonható le x_5 ismeretéből.

2. A bayesianus-módszer

Bayes gondolatát felidézve először választani kell egy priori állapot-valószínűség eloszlást a szóba jövő N értékekre. Ha semmit sem tudunk, akkor ez egy egyenletes eloszlás lesz egy feltételezett M elképzelhető maximális értékig. Ha erről sem tudunk semmit, akkor vehetjük majd „az M tart a végtelenhez" határesetet. Ekkor a Bayes tételt használva, abból, hogy a maximális érték éppen x_5, kapjuk:

$$P(N = K|max = x_5) = \frac{P(max = x_5|N = K)P(N = K)}{\sum\limits_{J=x_5}^{M} P(max = x_5|N = J)P(N = J)},$$

ahonnan, mivel feltettük a priori-egyenletes állapotvalószínűségeket, vagyis hogy $P(N = J)$ értékek egyenlők, ezért mind a számláló mind a nevező minden tagjában megjelennek, s így egyszerűsíthetünk, azaz a

$$P(N = K|max = x_5) = \frac{P(max = x_5|N = K)}{\sum\limits_{J=x_5}^{M} P(max = x_5|N = J)} =$$

$$= \frac{\frac{\binom{x_5-1}{4}}{\binom{K}{5}}}{\sum\limits_{J=x_5}^{M} \frac{\binom{x_5-1}{4}}{\binom{J}{5}}} = \frac{1}{\binom{K}{5}} \cdot \frac{1}{\sum\limits_{J=x_5}^{M} \frac{1}{\binom{J}{5}}}$$

egyenlőséget kapjuk, amelyet egy posteriori állapot-valószínűség eloszlásnak tekintünk a szóba jövő $x_5, x_5 + 1, \cdots M$ értékeken.

Világosan látszik, hogy mivel a második, nevezőjében összeget tartalmazó szorzótényező állandó (csupán egy ún. normáló tényező, hogy eloszlást kapjunk), nem függ a K változótól. Az első tényező K növekedtével csökken, hiszen éppen a nevező növekszik, ezért az eloszlás monoton fogyó. Először szokásosan a pontbecslést nézzük.

2.1. A bayesianus pontbecslés Az utolsó monotonitási megjegyzés alapján a legvalószínűbb K érték éppen a $K = x_5$, mivel a posteriori állapot-valószínűség eloszlásnak ez a maximuma.

Ha a klasszikus módszert vesszük, ugyanezt kapjuk, hiszen a direkt esemény-valószínűség eloszlás maximuma is az x_5 érték volt. Tehát ismét megegyezik numerikusan a két eredmény, legalábbis a priori egyenletes állapot-valószínűség eloszlás esetén.

Az intervallum-becslésekre térve a következők adódnak.

2.2. Intervallum-becslés Bayes-módszerrel

Ahhoz, hogy egy pl. 0,95 valószínűségű legsűrűbb Bayes-tartományt határozzunk meg, ebből a posteriori-eloszlásból alakítsuk át a normáló tényezőt. Állításom szerint igaz a következő tétel, amelyet egy kicsit később fogok bizonyítani.

1.81. Tétel:

$$\sum_{J=x_5}^{M} \frac{1}{\binom{J}{5}} = \frac{5}{4}\left(\frac{1}{\binom{x_5-1}{4}} - \frac{1}{\binom{M}{4}}\right).$$

Mielőtt ezt bizonyítanám (és általánosítanám, hogy ne csak ötöslottóra működjön a számolás), nézzük meg, hogy esetünkben mit kapunk ebből. A posteriori-eloszlás így

$$P(N=K|max=x_5)=\frac{1}{\binom{K}{5}}\cdot\frac{1}{\sum\limits_{J=x_5}^{M}\frac{1}{\binom{J}{5}}}=\frac{1}{\binom{K}{5}}\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{\binom{x_5-1}{4}\binom{M}{4}}{\binom{M}{4}-\binom{x_5-1}{4}}$$

lesz, ahol K az adottnak vett x_5 és M között változik. Mivel monoton csökken az eloszlás x_5-től kezdve, ezért a legsűrűbb 0,95 Bayes-féle tartomány egy $[x_5; L]$ intervallum lesz, ahol L a

$$\sum_{K=x_5}^{L}\frac{1}{\binom{K}{5}}\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{\binom{x_5-1}{4}\binom{M}{4}}{\binom{M}{4}-\binom{x_5-1}{4}}\geq 0,95$$

egyenlőtlenséget kielégítő legkisebb érték.

Vizsgáljuk ezt meg négy esetben. 2004 januárjában négy egymás utáni héten $x_5=55,85,79,61$ volt a kihúzott legnagyobb lottószám.

További egyszerűsítésként szabaduljunk meg M értékétől, anélkül, hogy konkrétan megadnánk. Ebből a célból vizsgáljuk meg, mi történik, ha M tart a végtelenhez.

Ekkor az összeg tagjai harmadik szorzótényezőjének mind a számlálóját, mind a nevezőjét oszthatjuk $\binom{M}{4}$-gyel, s felhasználva, hogy M tart a végtelenhez azt kapjuk, hogy határesetben az a legkisebb L a megoldás, amelyre:

$$\sum_{K=x_5}^{L}\frac{1}{\binom{K}{5}}\cdot\frac{4}{5}\cdot\binom{x_5-1}{4}\geq 0,95,$$

azaz ismét használva a bizonyítandó formulát:

$$\frac{4}{5}\cdot\binom{x_5-1}{4}\sum_{K=x_5}^{L}\frac{1}{\binom{K}{5}}=\frac{4}{5}\cdot\binom{x_5-1}{4}\cdot\frac{5}{4}\left(\frac{1}{\binom{x_5-1}{4}}-\frac{1}{\binom{L}{4}}\right)=1-\frac{\binom{x_5-1}{4}}{\binom{L}{4}}\geq 0,95,$$

ahonnan adódik, hogy a

$$0,05\binom{L}{4}\geq\binom{x_5-1}{4}$$

egyenlőtlenséget kielégítő legkisebb L érték lesz a keresett intervallum felső határa. Ebből azt kapjuk, hogy az

$$L(L-1)(L-2)(L-3)\geq 20(x_5-1)(x_5-2)(x_5-3)(x_5-4)$$

egyenlőtlenségnek kell teljesülnie L-re.

Most rendre helyettesítsük be az 55, 85, 79 és 61 értékeket a jobboldalra x_5 helyére, s aztán a jobboldal negyedik gyöke körüli L értékeket egy zsebszámológéppel próbálgatva kapjuk, hogy az első esetben jó L érték a 115 (114 még kevés), a másodikban 179, a harmadikban 166, míg az utolsó esetben 128 adódik.

Azaz a keresett tartományok: $[55;115], [85;179], [79;166], [61;128]$.

Térjünk most vissza a kétszer is használt formulához.

Kétféle bizonyítást fogunk adni a következőkben a tételre, tehát a

$$\sum_{J=x_5}^{M} \frac{1}{\binom{J}{5}} = \frac{5}{4}\left(\frac{1}{\binom{x_5-1}{4}} - \frac{1}{\binom{M}{4}}\right).$$

egyenlőség igazolására.

Az első egy igazi trükkös megoldás, a második lényegében annak „gyalogos" változata, amelyben nem elővarázsoljuk a nyulat a kalapból, hanem megpróbáljuk végigszámolni, amit szükséges.

1. BIZONYÍTÁS (kombinatorikus): Először alkalmazunk egy átalakítást az összeg egy tagjára, amellyel két tag különbségeként írhatjuk fel azt.

$$\frac{1}{\binom{J}{5}} = \frac{5!}{J(J-1)\cdots(J-5+1)} = 3!\cdot 5\cdot \frac{4}{J(J-1)\cdots(J-5+1)} =$$

$$= 3!\cdot 5\cdot \frac{J-(J-5+1)}{J(J-1)\cdots(J-5+1)} =$$

$$= 3!\cdot 5\cdot\left(\frac{1}{(J-1)(J-2)\cdots(J-5+1)} - \frac{1}{J(J-1)\cdots(J-5+2)}\right)$$

Ezt alkalmazva először 5-től véve az összeget:

$$\sum_{k=5}^{M}\frac{1}{\binom{J}{5}} = 3!\cdot 5\cdot\left(\frac{1}{(5-1)(5-2)\cdots 1} - \frac{1}{M(M-1)\cdots(M-5+2)}\right) =$$

$$= \frac{5}{4}\cdot\left(\frac{4!}{4\cdot 3\cdot 2\cdot 1} - \frac{4!}{M(M-1)(M-2)(M-3)}\right) = \frac{5}{4}\left(1-\frac{1}{\binom{M}{4}}\right).$$

Ebből már könnyen adódik a kívánt összefüggés, hiszen a keresett összeget két összeg különbségeként írhatjuk fel:

$$\sum_{k=5}^{M}\frac{1}{\binom{J}{5}} = \sum_{J=5}^{M}\frac{1}{\binom{J}{5}} - \sum_{J=5}^{x_5-1}\frac{1}{\binom{J}{5}} = \frac{5}{4}\left(1-\frac{1}{\binom{M}{4}}\right) - \frac{5}{4}\left(1-\frac{1}{\binom{x_5-1}{4}}\right) = \frac{5}{4}\left(\frac{1}{\binom{x_5-1}{4}} - \frac{1}{\binom{M}{4}}\right).$$

Ezzel be is láttuk az állítást.

Ha nem ötös lottóról van szó, hanem n-es lottóról, ahol $n>1$ természetes szám, akkor a következőképpen járhatunk el általánosan:

$$\frac{1}{\binom{J}{n}} = \frac{n!}{J\cdot(J-1)\cdot\ldots\cdot(J-n+1)} = (n-2)!\cdot n\cdot\frac{n-1}{J\cdot(J-1)\cdot\ldots\cdot(J-n+1)} =$$

$$= (n-2)!\cdot n\cdot\frac{J-(J-n+1)}{J\cdot(J-1)\cdot\ldots\cdot(J-n+1)} =$$

$$= (n-2)! \cdot n \cdot \left(\frac{1}{(J-1)\cdot(J-2)\cdot\ldots\cdot(J-n+1)} - \frac{1}{J\cdot(J-1)\cdot\ldots\cdot(J-n+2)} \right).$$

Ezt felhasználva

$$\sum_{J=n}^{M} \frac{1}{\binom{J}{n}} = (n-2)! \cdot n \cdot \left(\frac{1}{(n-1)\cdot(n-2)\cdot\ldots\cdot 1} - \frac{1}{M\cdot(M-1)\cdot\ldots\cdot(M-N+2)} \right) =$$

$$= \frac{n}{n-1} \cdot \left(\frac{(n-1)!}{(n-1)\cdot(n-2)\cdot\ldots\cdot 1} - \frac{(n-1)!}{M\cdot(M-1)\cdot\ldots\cdot(M-n+2)} \right) = \frac{n}{n-1} \cdot \left(1 - \frac{1}{\binom{M}{n-1}} \right).$$

A keresett összeg ismét két összeg különbségeként jelenik meg, itt most x_n-nel jelölve az n húzott szám legnagyobbikát:

$$\sum_{J=x_n}^{M} \frac{1}{\binom{J}{n}} = \sum_{J=n}^{M} \frac{1}{\binom{J}{n}} - \sum_{J=n}^{x_n-1} \frac{1}{\binom{J}{n}} = \frac{n}{n-1} \cdot \left(1 - \frac{1}{\binom{M}{n-1}} \right) - \frac{n}{n-1} \cdot \left(1 - \frac{1}{\binom{x_n-1}{n-1}} \right) =$$

$$= \frac{n}{n-1} \cdot \left(\frac{1}{\binom{x_n-1}{n-1}} - \frac{1}{\binom{M}{n-1}} \right).$$

Ezzel lehet más lottókra is átvinni az itteni gondolatmenetet.

2. BIZONYÍTÁS (algebrai):

A parciális törtekre bontás módszerét szeretnénk most is felhasználni, mivel a nevezőkben egymás utáni számok szorzata van és remélhetjük, hogy a keletkező tagok jelentős része kiesik. Minden számláló 5!-sal egyenlő, azt kiemeljük, s marad az alábbi összeg:

$$\frac{1}{x_5(x_5-1)(x_5-2)(x_5-3)(x_5-4)} + \frac{1}{(x_5+1)x_5(x_5-1)(x_5-2)(x_5-3)} + \ldots$$

$$+ \frac{1}{M(M-1)(M-2)(M-3)(M-4)}$$

Ennek az összegnek egy általános tagját jelölje

$$\frac{1}{(u-2)(u-1)u(u+1)(u+2)},$$

hogy a szimmetriát kihasználva egyszerűbb eredményt kapjunk. Eszerint az u értékei: $x_5 - 2 \leq u \leq M - 2$. Ezt akarjuk öt tört összegére bontani:

$$\frac{1}{(u-2)(u-1)u(u+1)(u+2)} = \frac{a}{u-2} + \frac{b}{u-1} + \frac{c}{u} + \frac{d}{u+1} + \frac{e}{u+2},$$

ahol az a, b, c, d, e együtthatókat kell úgy meghatározni, hogy az egyenlőség minden u-ra fennálljon.

A jobboldalt közös nevezőre hozva a számláló a következő lesz:

$$a(u-1)u(u+1)(u+2)+b(u-2)u(u+1)(u+2)+c(u-2)(u-1)(u+1)(u+2)+$$
$$+d(u-2)(u-1)u(u+2)+e(u-2)(u-1)u(u+1)$$

Elvégezzük a beszorzásokat:

$$a(u^4+2u^3-u^2-2u)+b(u^4+u^3-4u^2-4u)+c(u^4-5u^2+4)+$$
$$+d(u^4-u^3-4u^2+4u)+e(u^4-2u^3-u^2+2u)$$

Ezeket u hatványai szerint csoportosítva kapjuk, hogy:

$$u^4(a+b+c+d+e)+u^3(2a+b-d-2e)+$$
$$+u^2(-a-4b-5c-4d-e)+u(-2a-4b+4d+2e)+4c.$$

Ennek a polinomnak kellene azonosan 1-nek lennie, tehát a következő egyenletrendszert kapjuk a keresett együtthatókra:

$$\begin{array}{rcrcrcrcrcl}
a & + & b & + & c & + & d & + & e & = & 0 \\
2a & + & b & & & - & d & - & 2e & = & 0 \\
a & + & 4b & + & 5c & + & 4d & + & e & = & 0 \\
-2a & - & 4b & & & + & 4d & + & 2e & = & 0 \\
 & & & & 4c & & & & & = & 1
\end{array}$$

Mivel az utolsó egyenletből c értéke azonnal adódik, ezért csak 4 ismeretlenes marad az egyenletrendszer, ha $c=\frac{1}{4}$-et beírjuk:

$$\begin{array}{rcrcrcrcl}
a & + & b & + & d & + & e & = & -\frac{1}{4} \\
2a & + & b & - & d & - & 2e & = & 0 \\
a & + & 4b & + & 4d & + & e & = & -\frac{5}{4} \\
-2a & - & 4b & + & 4d & + & 2e & = & 0
\end{array}$$

Ha most a harmadik és az első egyenlet különbségét vesszük, kiesik a és e, hasonlóan ha a másodikat és a negyediket összeadjuk. Ekkor a következő két egyenlet keletkezik:

$$3b + 3d = -1$$

$$-3b + 3d = 0$$

Ebből azonnal adódik, hogy $6d = -1$ és $6b = -1$, azaz mind b mind d egyenlő $-1/6$-dal. Ezeket visszaírva például az első és a második egyenletbe:

$$a + e - 1/3 - 1/4 = 1/12$$

$$2a - 2e = 0$$

ahonnan következik, hogy $4a = 1/6$; $4e = 1/6$, azaz mind a mind e egyenlő $1/24$-del.

Ezzel a következőt kaptuk:

$$\frac{1}{(u-2)(u-1)u(u+1)(u+2)} = \frac{1}{24(u-2)} - \frac{1}{6(u-1)} + \frac{1}{4u} - \frac{1}{6(u+1)} + \frac{1}{24(u+2)}.$$

Mivel az öt együttható összege 0, ezért néhány első és utolsó tagtól eltekintve az összeg tagjai kiesnek, ha az eredeti összeg tagjainak felírására használjuk a most kapott törteket:

$$\begin{array}{rrrrr}
\frac{1}{24(x_5-4)} & -\frac{1}{6(x_5-3)} & +\frac{1}{4(x_5-2)} & -\frac{1}{6(x_5-1)} & +\frac{1}{24x_5}+ \\
+\frac{1}{24(x_5-3)} & -\frac{1}{6(x_5-2)} & +\frac{1}{4(x_5-1)} & -\frac{1}{6x_5} & +\frac{1}{24(x_5+1)}+ \\
+\frac{1}{24(x_5-2)} & -\frac{1}{6(x_5-1)} & +\frac{1}{4x_5} & -\frac{1}{6(x_5+1)} & +\frac{1}{24(x_5+2)}+ \\
+\frac{1}{24(x_5-1)} & -\frac{1}{6x_5} & +\frac{1}{4(x_5+1)} & -\frac{1}{6(x_5+2)} & +\frac{1}{24(x_5+3)}+ \\
+\frac{1}{24x_5} & -\frac{1}{6(x_5+1)} & +\frac{1}{4(x_5+2)} & -\frac{1}{6(x_5+3)} & +\frac{1}{24(x_5+4)}+\ \dots
\end{array}$$

Az első tag megmarad, tehát $\frac{1}{24(x_5-4)}$, a következő két helyen szerepel, tehát összevonás után $-\frac{3}{24(x_5-3)}$ lesz.

A következő háromszor fordul elő, ezek összege: $\frac{3}{24(x_5-2)}$.

A következő négyszer, ezek összege: $-\frac{1}{24(x_5-1)}$, s utána már minden tag ötször az utolsó négyig, s azok összege mindig 0 lesz. Marad a végén, szimmetrikusan:

$$-\frac{1}{24(M-3)},\ \frac{3}{24(M-2)},\ -\frac{3}{24(M-1)} \text{ és végül } -\frac{1}{(M-4)}.$$

Az $\frac{1}{M-4}$-es tagból már öt van, azok kiejtik egymást az összegben. Tehát a keresett összeg:

$$\sum_{J=x_5}^{M} \binom{J}{5} = -\frac{5!}{24(x_5-4)} - \frac{3 \cdot 5!}{24(x_5-3)} + \frac{3 \cdot 5!}{24(x_5-2)} + \frac{5!}{24(x_5-1)} + \frac{5!}{24M} -$$

$$-\frac{3\cdot 5!}{24(M-1)}+\frac{3\cdot 5!}{24(M-2)}-\frac{5!}{24(M-3)}=$$

$$=5\left(-\frac{1}{x_5-4}+\frac{3}{x_5-3}-\frac{3}{x_5-2}+\frac{1}{x_5-1}+\frac{1}{M}-\frac{3}{M-1}+\frac{3}{M-2}-\frac{1}{M-3}\right)=$$

$$\frac{5}{4}\left(\frac{1}{\binom{x_5-1}{4}}-\frac{1}{\binom{M}{4}}\right).$$

Itt az utolsó egyenlőségnél az első négy és az utolsó négy törtet külön-külön közös nevezőre hozva kapjuk, hogy a számláló $24 = 4!$, míg a nevező a négy-négy szám szorzata, azaz éppen $\binom{x_5}{4}$ és $\binom{M}{4}$ reciproka.

Ezzel beláttuk az állítást.

Látható, hogy ez hosszadalmasabb, talán ezután érdemes megmutatni az elsőt, hiszen akkor lehet értékelni annak tömörségét és áttekinthetőségét.

Ez didaktikai szempontból megfontolandó, én a sorrendet ezúttal kivételesen matematikai szempontból határoztam meg.

Megjegyzem, hogy míg az első módszer viszonylag könnyen általánosítható (mint azt meg is mutattuk), ez a bizonyítás például a kilences lottóra elég nehézkes és számolásigényes lesz. Természetesen, ha az egyenletrendszert géppel oldjuk meg, az rövidít, de még utána is sok munkát jelent a törtek összegzésénél a szabályszerűség felfedezése. Kicsit hasonlít a jelenség ahhoz az analízis történetéből ismert ténynek, hogy a Newton-Leibniz tétel felfedezéséig minden pl. polinom-függvény integrálját csak a konkrét esetre kitalált technikával, többnyire szellemes trükkökkel sikerült megoldani, míg a tétellel egy mechanikus módszer adódott az általános megoldásra.

Ez a tétel gyakorlati jelentősége.

Nem egyenletes priori-eloszlásból indulva a helyzet sokkal nehezebb, ezzel nem is kívánok most foglalkozni.

3. A klasszikus módszer

A klasszikus gondolatmenet, amelyik megpróbálja elkerülni a szubjektívnek vélt állapot-valószínűséget a következőképpen halad.

3.1. Klasszikus pontbecslés

Pontbecslésnek azt az N értéket válasszuk, amelyikre ez az eredmény a legvalószínűbb. Erre az $N = x_5$ fog adódni, mivel a már meghatározott

$$\frac{\binom{x_5-1}{4}}{\binom{N}{5}}$$

direkt valószínűségek közül ez a maximális. Ez a becslés várható értékben nem adja majd meg a valódi értéket, ezért nem torzítatlan. Ugyanez igaz a Bayes-pontbecslésre is.

3.2. Klasszikus intervallumbecslés konfidencia-intervallum

Intervallum becslésként először egy becsült intervallumot határozunk meg. Azaz keresünk rögzített N mellett egy olyan intervallumot, ahová x_5 $(1-\alpha)$ valószínűséggel esni fog. Mivel a legvalószínűbb rögzített N mellett az $x_5 = N$, és innentől monoton fogy, ezért a becsült intervallum egy $[N(\alpha); N]$ típusú intervallum lesz, ahol a bal végpontot úgy kell meghatározni, hogy $N(\alpha)$ a lehető legnagyobb szám legyen (ekkor teljesül a becsült intervallum minimalitási tulajdonsága), amelyre még teljesül az alábbi egyenlőtlenség:

$$\sum_{K=N(\alpha)}^{N} \frac{\binom{K-1}{4}}{\binom{N}{5}} \geq 0,95.$$

A törtek nevezője ugyanaz, ezért csak a számláló értékeit kell összegezni. Ismert azonban, hogy

$$\sum_{K=5}^{N} \binom{K-1}{4} = \binom{N}{5},$$

és így az összeg:

$$\frac{\binom{N}{5} - \binom{N(\alpha)}{5}}{\binom{N}{5}} = 1 - \frac{\binom{N(\alpha)}{5}}{\binom{N}{5}}.$$

Eszerint a keresett $N(\alpha)$ a következő egyenlőtlenséget kell, hogy teljesítse:

$$\frac{\binom{N(\alpha)}{5}}{\binom{N}{5}} \leq 0,05.$$

Ebből kifejtve a binomiális együtthatókat a következő egyenlőtlenség adódik:

$$(*) \qquad N(\alpha)[N(\alpha) - 1] \ldots [N(\alpha) - 4] \leq 0,05 \cdot N[N-1] \ldots [N-4].$$

Ha most megfordítva $x_5 = N(\alpha)$ ismert, akkor a konfidencia intervallum egyszerűen meghatározható, csak most ebből az egyenlőtlenségből N a keresett. Ebben az esetben (*) következő formáját használhatjuk:

$$(**) \qquad 20x_5[x_5 - 1] \ldots [x_5 - 4] \leq N[N-1] \ldots [N-4].$$

N értékének a kiszámításához tehát egy ötödfokú egyenlet gyökét kellene meghatározni. Egy becslést kaphatunk abból, hogy a jobboldal közel N^5-en, tehát a baloldali ötödik gyöke körül kell kísérletezni, vagy egy grafikus kalkulátorral, esetleg számítógéppel dolgozni.

Már szerepelt, hogy 2004 januárjában négy egymás utáni héten $x_5 = 55, 85, 79, 61$ volt a kihúzott legnagyobb lottószám. Ezeket felhasználva a következő négy 0,95-konfidencia-intervallum adódik (**) közelítő megoldásából: [55;99], [85;155], [79;143], [61;110].

4. Összehasonlítás A Bayes-féle 0,95-intervallum (aszimptotikus) és a 0,95-konfidencia-intervallum viszonya

A Bayes-megoldás egyenleténél azt a legkisebb L értéket keressük, amelyre:

$$(A) \qquad 20(x_5 - 1)(x_5 - 2)(x_5 - 3)(x_5 - 4) \leq L(L-1)(L-2)(L-3)$$

teljesül. Ekkor a keresett 0,95-Bayes-tartomány becslés az $[x_5; L]$ intervallum. A klasszikus 0,95-konfidencia-intervallum esetén - mint fent láttuk - az intervallum felső határára adódó egyenlet a következő:

$$(B) \qquad 20x_5[x_5-1]...[x_5-4] \leq N[N-1]...[N-4].$$

Itt a becslés az $[x_5; N]$ intervallum.

Látható, hogy a két egyenlet között van egy lényeges eltérés, amiért numerikusan sem egyezhetnek meg, még ezen speciális priori-eloszlás esetén sem, ahol „M tart a végtelenbe".

A 0,95-konfidencia intervallum mindig szűkebb lesz, mivel (A) megoldása mindig nagyobb lesz, mint (B)-é. Ezt könnyen láthatjuk, ha felírjuk, hogy ha $N = L$ igaz volna, akkor mivel (A) miatt

$$20(x_5-1)(x_5-2)(x_5-3)(x_5-4) \leq L(L-1)(L-2)(L-3),$$

ezért biztosan teljesül (B), ha

$$N(N-1)(N-2)(N-3) \leq N(N-1)(N-2)(N-3)(N-4),$$

azaz $5 \leq N$, ami viszont biztos bőven teljesül, hiszen mivel 5 számot húznak az intervallum felső határa nagyobb, mint 5. Tehát a Bayes-tartomány mindenképpen bővebb lesz.

A konkrét 4 esetben ez jól látható:

0,95-Konfidencia-intervallum	0,95-Bayes-tartomány
$[55; 99]$	$[55; 115]$
$[85; 155]$	$[85; 179]$
$[79; 143]$	$[79; 166]$
$[61; 110]$	$[61; 128]$

5. Összevetés a tényleges eredményekkel a magyar lottó esetén 1957-től 2002-ig bezárólag

Azt vizsgáltam meg, hogy a 0,95-konfidencia intervallum, illetve a 0,95-Bayes-tartomány hányszor tartalmazta a 90-et, amelyről tudjuk, hogy nálunk a legnagyobb kihúzható szám az ötös lottón. Visszafelé gondolkozva meghatároztam azt a küszöb-értéket a maximális számra, amely mellett még a 90 benne van a kiszámított tartományunkban. Ez a klasszikus esetben azt jelenti, hogy a (B) egyenlőtlenségbe beírva az értéket adódik, hogy

$$20x_5[x_5-1]...[x_5-4] \leq 90 \cdot 89 \cdot 88 \cdot 87 \cdot 86.$$

Ezt kellene megoldani x_5-re.

Ha $x_5 = 50$, akkor még éppen teljesül az egyenlőtlenség, ha 49, akkor már nem 90 a legkisebb érték, amelyre fennáll az egyenlőtlenség, hanem a 89. Tehát 49 mellett már a 89 lesz a 0,95-konfidencia-intervallum felső határa. Azt kell tehát megnézni, hogy hányszor fordult elő eddig a húzások között, hogy a maximum legfeljebb 49. Ez a vizsgált eddigi 2218 húzás közül éppen 92-szer fordult elő, ami kb. 0,04148, azaz 4,15%. Ez elég jó egyezés a 95%-os megbízhatósággal, hiszen az esetek 95,85%-ában fedi az intervallum a 90-et.

A priori egyenletes eloszlás melletti 0,95-Bayes-tartomány esetén a tartalmazás, mivel az intervallum nagyobb, még magasabb százalékban fog teljesülni. Ekkor a másik a (B) egyenlőtlenséget vizsgáljuk. Vajon melyik az a legnagyobb x_5 érték, amikor még a 90 benne van az intervallumban. Erre adódik némi kísérletezéssel, hogy 43 adódik, akkor már 89 a felső határ. Ha 44 a maximum, akkor éppen 90 a határ, tehát azok az esetek a „rosszak", ahol legfeljebb 43 a maximum. Ez a 2218 esetből mindössze 53-szor nincs benne a 90 ebben az intervallumban, azaz nem 0,95, hanem az adatok 0,9761 azaz 97,61%-a beleesik.

A húzási eredmények azt mutatják, hogy a numerikus eredmény a valósággal egy kicsit jobb egyezést mutat a klasszikus esetben.

Ebből azért nagyon jelentős következtetést nem lehet levonni, különösen akkor, ha figyelembe vesszük, hogy „az M tart a végtelenhez" eset elég abszurd egy lottó esetén.

Ha feltesszük, hogy M legfeljebb 200 lehet, akkor más eredmény adódik, ami már közelebb lesz a valósághoz, ezt azonban helyhiány miatt nem írom le.

1.5.15. Vásárhelyi Éva: Mi jogosítja fel a didaktikust arra, hogy tudományos tevékenységnek tekintse azt, amit csinál, és mivel érheti el, hogy mások is annak tekintsék?

Az alábbi írás vitaindítóként született. A megvitatás aktualitását emelte a szememben az a dilemma, amely egy cikk lektorálása közben alakult ki bennem. A dilemmámat feloldottam, de nem nyugodtam meg. Közösen kellene egy alapnívót meghatározni, amelyet aztán egységesen tudunk képviselni, és amely a didaktikai kutatásban járatlanok eligazodását segíti. Ezek a gondolatok részben Deák Ervin egyik német nyelvű cikkében is megtalálhatók (Deák 1991 [60]).

1. Kérdések

- Mit jelent a matematikadidaktikai kutatás és melyek tudományos voltának belső kritériumai?
- Mit jelent az, hogy a matematikadidaktika interdiszciplináris tudomány?
- Mivel ismertetheti el magát a didaktikai kutatás tudományos kutatásként?
- Mi számít eredménynek?
- Mi egy matematikadidaktikai tétel?
- Mikor és milyen mértékben számít egy matematikadidaktikai tétel bizonyítottnak?
- Milyen bizonyítási módszereket fogadhatunk el tudományos indoklásnak?
- Mitől más egy elsősorban szakmai jellegű matematikadidaktikai eredmény, mint a matematikai? Egyáltalán milyen kapcsolatban van a szakdidaktika és a szaktudomány?
- Milyen egy tudományos szakdidaktikai cikk?

2. Válasz-kísérletek

2.1 Az általánosság követelménye

Alapvető tudományos kritériumnak tartom az általánosságra való törekvést. (Ez különbözteti meg számomra az esetleírást az esettanulmánytól.) Az általánosság jellege és mértéke tisztázandó, az ismérvek bővíthetők és bővítendők.

A matematikadidaktikai kutatás nem korlátozódhat (kizárólag) a szaktárgy oktatásának egyedi szituációjára vagy részletére, hanem ki kell terjednie a tanulók életkori sajátosságaira, a tantárgy tananyagának tartalmi vonatkozásaira, a tantervi követelményekkel való kapcsolatra, az iskolatípusra, különleges képzési célokra (általános, szak-, továbbképzés) is. Ez azt jelenti, hogy keresni és szisztematikusan vizsgálni kell olyan mélyebb elveket, tendenciákat, amelyek nem (vagy nem csak) felszínesen kötődnek a konkrét jelenségekhez.

A matematikadidaktika nem maradhat az iskolai oktatás napi problémáinak vizsgálatánál, hanem olyan előremutató javaslatokat is ki kell dolgoznia, amely egy alkalmas társadalmi szituációban tudományosan megalapozott javaslatként „kéznél van”.

Az általánossághoz elegendő feltétel már a hosszabb időre vonatkozó meggondolás, a fejlődési folyamat vizsgálata (koherencia követelménye szemben a rövidtávú, szétszabdalt „tanegységekkel”).

Magyarországon vannak értékes példák a pedagógiai gyakorlat és elmélet következetes összehangolására (pl. Varga Tamás életműve).

2.2 Interdisciplinaritás, a szakdidaktika és a szaktudomány viszonya

Az interdiszciplinaritás a matematikadidaktika alapvető ismérve és egyben lényeges megkülönböztetője a matematikai kutatásoktól.

A matematikadidaktikai kutatás egyik vonása az elméletek fejlődését és az elmélet és gyakorlat összehangolását illető történeti szemlélet, ami nemcsak az érdekességek, hanem a tanulságok beépítését is jelenti.

Az általánosságra való törekvés abban is megnyilvánul, hogy az adott kutatási téma történeti, nemzetközi, tudományközi vonatkozásait (eredményeit, elvárásait, módszereit – empirikus, hermeneutikus, deduktív, ...) is figyelembe kell venni.

A matematikadidaktikai kutatás a matematika teljes rendszerén belül értelmezhető és értékelhető, többnyire speciális matematikai ismereteket és szakértelmet igényel. A szaktudományhoz való viszony tisztázása a tanárképzés számára is fontos. Ez persze összefügg a matematikadidaktikai kutatás elismertségével.

Ugyanakkor tudjuk, hogy a matematikadidaktika egy adott kérdésre többféle választ is adhat (mint azok a társadalomtudományok általában, amelyeknek a módszereit és eredményeit felhasználja).

A matematikadidaktika, a matematika és a társadalom kapcsolatának vizsgálatához tekintsük az 1.72. ábrát.

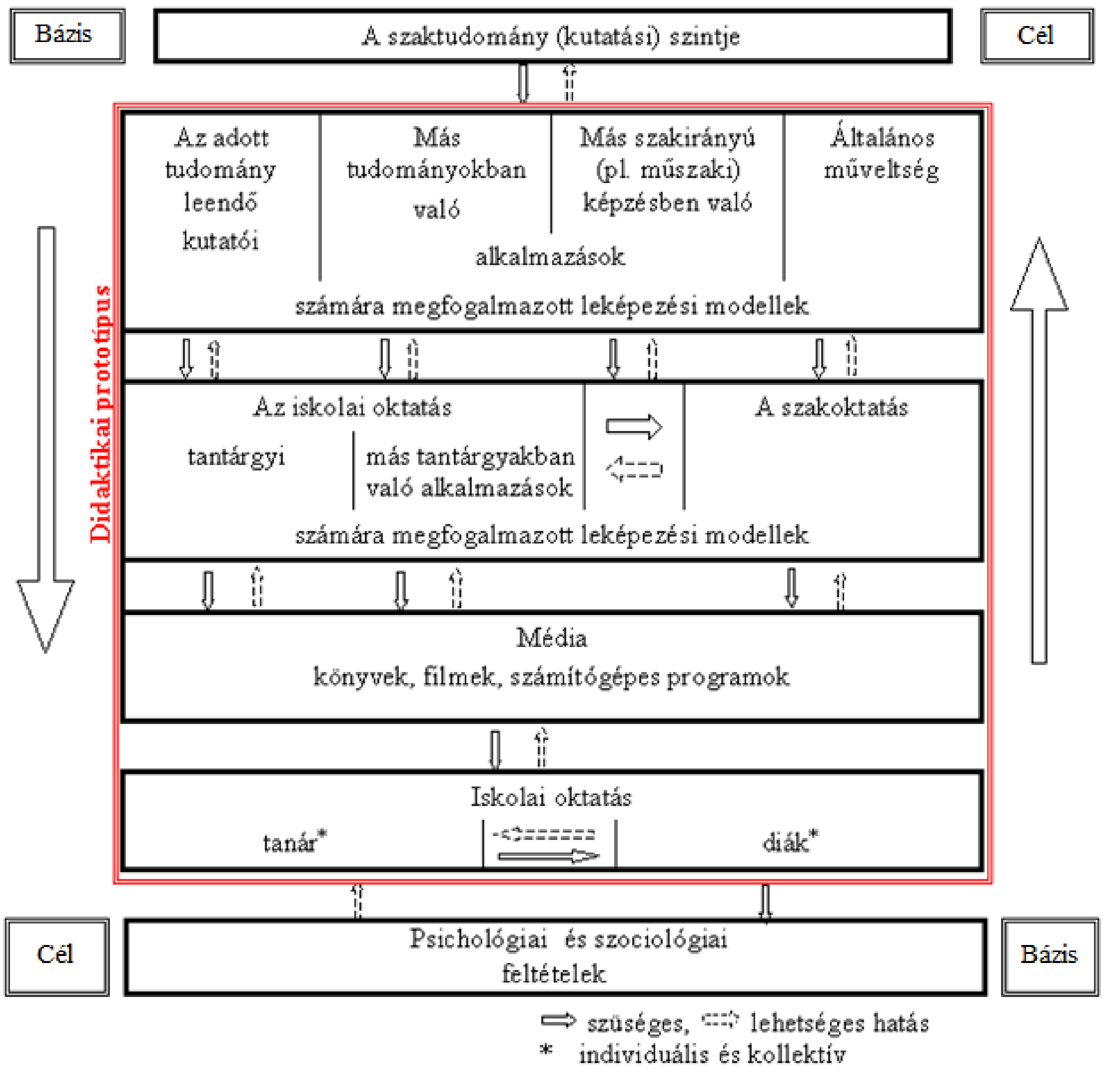
Az iskolai tanulást és tanítást meghatározó tényezők és ismeretek birtokában létrehozunk egy didaktikai prototípust, amely tükrözi a szaktudomány és az individuális és kollektív tanulás sajátos feltételeit leíró és értelmező társtudományok rendszerének (pszichológia, didaktika, szociológia, ...) megfelelő tartalmat és a társadalmi környezet közvetlen hatásait.

Egy didaktikai prototípus – szakmai, pszichológiai és szociológiai analízis alapján – megpróbálja összekapcsolni a tantárgy szakmai rendszerét és azokat a motivációs és funkciókat, amelyek a konkrét tananyag elsajátítását megkönnyítik.

Az ábrán a szituációnak megfelelő didaktikai prototípus elkészítésének transzformációs lépései láthatók, amely azt jelenti, hogy az adott szaktudomány rendszeréből kiindulva az egyéni és kollektív feltételek (oktatási formák, tradíciók, ...) analízise alapján az egyén feltételeinek megfelelő dinamikus sorozatokat (utakat) kell kidolgozni. (Az azonos szinteken és a különböző szintek közötti kölcsönhatásokat sem szabad elfelejteni.)

A tananyag tartalmi elrendezése – a matematika belső logikájának (a háttérben meghúzódó axiómarendszernek) megfelelően – gyakran többféleképpen is elrendezhető.

A szaktudomány szempontjából elfogadható elrendezések közül a célnak, pedagógiai tradíciónak, előismereteknek, ... megfelelően választjuk ki a felépítést, módszereket, oktatási segédletet, ..., azaz a didaktikai prototípust.



1.72. ábra. A tudomány – didaktikai prototípus – társadalom közötti kölcsönhatás

A didaktikai prototípus pedagógiai és pszichológiai szempontok alapján elrendezve tartalmazza a tananyag alapelemeit (fogalmak, tulajdonságok, tények, tapasztalatok, módszerek, kísérletek, eljárások, törvényszerűségek, összefüggések, szabályok és keresztkapcsolatok), a tanulói tevékenységeket, a tananyaghoz való viszonyt.

2.3. A matematikadidaktikai publikációkhoz

A matematikadidaktika tudományos legitimációjához elengedhetetlen, hogy a publikációk a tudományos közleményekkel szemben támasztott alapkövetelményeknek megfeleljenek.

A szempontok összegyűjtésében az egyedi eredményeket bemutató cikkekre szorítkozom, mivel a disszertációk, áttekintő-rendszerező tanulmányok nemzetközi összehasonlítás nélkül nem képzelhetők el, és ez automatikusan egy követelményszintet is magával hoz.

Egy tudományos közleménynek a matematikadidaktikai kutatás valamely területére vonatkozó új tudományos eredményt vagy régi elmélet empirikus megerősítését szolgáló megállapításokat (és persze azok bizonyítását) kell tartalmaznia.

A cikkek elé tartozik (a nemzetközi szokásnak megfelelően) egy (a publikáló ország nyelvén írott) absztrakt, amely tartalmazza, hogy

- kiknek szánják a szerzők a cikket,
- matematikadidaktikai szempontból összefoglalja a cikk témáját, a feldolgozás szempontjait (pl.: esettanulmány, problémamegoldási folyamat elemzése, problémamegoldó gondolkodás fejlesztése, stb).
- Ha több cikkből álló sorozatról van szó, akkor a mondanivaló megosztását és a cikkek szerkezetét.

Segíteni kell az olvasónak azzal, hogy elhelyezzük a témát a didaktikai kutatásban, ismertetjük az előzményeket és a cikkben alátámasztani kívánt módszertani megállapításokat.

Különösen fontos a fogalomrendszer tisztázása. Ez általában nehezebb feladat, mint a mondanivaló megfogalmazása, hiszen a matematikadidaktika fogalomalkotása nem olyan egységes, mint például a matematikáé. (Pl.: A „probléma” egész mást jelent az angolszász irodalomban, mint Magyarországon, ráadásul Magyarországon a tanulás közben fellépő nehézségeket és az önálló alkotást igénylő feladatokat is problémának mondjuk.)

A módszertani állításokat (is) irodalmi hivatkozásokkal, indoklásokkal, a mögötte meghúzódó elméleti alapállással együtt célszerű közölni. Itt a szerző, cím, kiadás, oldalszám megjelölése mellett arra is kell gondolni, hogy az idézett rész a környezetével együtt (nem is mindig egyértelműen értelmezhető), tehát a saját értelmezésünket is érdemes tudatni.

A magyar hagyományokhoz illő, a nemzetközi irodalomban megtalálható és gyakori téma az esettanulmány. Ehhez hozzátartozik

- a tervezés szakaszának leírása,
- a vizsgálandó probléma szakmai (pl. matematikai) elemzése, a megoldási utak ismertetése (irodalmi utalás részletesen leírás, he nem található meg megfelelő formában az irodalomban),

- a didaktikai elemzés: célkitűzés, módszertani tervezés (tudásfeltétel, életkori, tantervi feltételek, előzetes elvárások, utalás a megfelelő didaktikai irodalomra).

A fenti javaslatokat az induló didaktikai publikációkra általában gondolom, egy diákköri dolgozat vagy egyetlen cikk esetében elég lenne ezek valamelyikét figyelembe venni, mindezt azért, hogy a didaktikai állítás alátámasztást vagy cáfolatot kapjon.

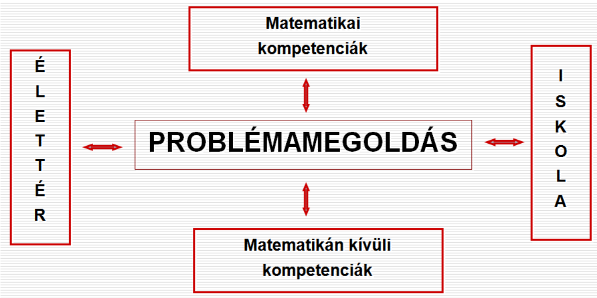
2. fejezet

Gondolkodási módszerek

A kerettanterv a „Gondolkodási és megismerési módszerek” témakörbe sorolja a halmazokkal, valamint a matematikai logika, a kombinatorika és a gráfok elemeivel való ismerkedést.

Ebben a példatárban (kerettantervtől eltérően) mi a gondolkodási módszerekhez soroljuk az analógiás gondolkodás megalapozását is.

Ezzel kifejezzük azt a nézetet, hogy a gondolkodási módszerek fejezetbe azok a tananyagrészek kerültek, amelyek a matematikatanítás eszközeivel hozzájárulhatnak bizonyos ismeretek, jártasságok, készségek, specifikus és nem specifikus kompetenciák fejlesztéséhez. A matematikai problémamegoldást tágabb környezetbe ágyazzuk.



2.1. Alapfeladatok és kompetenciák

2.1.1. A kerettanterv elvárásai

Alsó tagozat

– Halmazok összehasonlítása az elemek száma szerint. Halmazalkotás.

– Állítások igazságtartalmának eldöntése. Állítások megfogalmazása.

- Összehasonlítás, azonosítás, megkülönböztetés.
  Közös tulajdonság felismerése, megnevezése.
- Több, kevesebb, ugyannyi fogalmának helyes használata.
- Néhány elem sorba rendezése próbálgatással.
- Adott tulajdonságú elemek halmazba rendezése.
- Halmazba tartozó elemek közös tulajdonságainak felismerése, megnevezése.
- Annak eldöntése, hogy egy elem beletartozik-e egy adott halmazba.
- A változás értelmezése egyszerű matematikai tartalmú szövegben.
- Az összes eset megtalálása (próbálgatással).

Felső tagozat

- Halmazba rendezés adott tulajdonság alapján, részhalmaz felírása, felismerése.
- Két véges halmaz közös részének, két véges halmaz uniójának felírása, ábrázolása.
- Néhány elem kiválasztása adott szempont szerint.
- Néhány elem sorba rendezése különféle módszerekkel.
- Állítások igazságának eldöntésére, igaz és hamis állítások megfogalmazása.
- Összehasonlításhoz szükséges kifejezések helyes használata.
- Néhány elem összes sorrendjének felsorolása.
- Elemek halmazba rendezése több szempont alapján.
- Egyszerű állítások igaz vagy hamis voltának eldöntése, állítások tagadása.
- Állítások, feltételezések, választások világos, érthető közlésének képessége, szövegek értelmezése egyszerűbb esetekben.
- Kombinatorikai feladatok megoldása az összes eset szisztematikus összeszámlálásával.
- Fagráfok használata feladatmegoldások során.

Középiskola

- Halmazokkal kapcsolatos alapfogalmak ismerete, halmazok szemléltetése, halmazműveletek ismerete; számhalmazok ismerete.
- Értsék és jól használják a matematika logikában megtanult szakkifejezéseket a hétköznapi életben.

– Definíció, tétel felismerése, az állítás és a megfordításának felismerése; bizonyítás gondolatmenetének követése.

– Egyszerű leszámlálási feladatok megoldása, a megoldás gondolatmenetének rögzítése szóban, írásban.

– Gráffal kapcsolatos alapfogalmak ismerete. Alkalmazzák a gráfokról tanult ismereteiket gondolatmenet szemléltetésére, probléma megoldására.

– A kombinatorikai problémához illő módszer önálló megválasztása.

– A gráfok eszközjellegű használata problémamegoldásában.

– Bizonyított és nem bizonyított állítás közötti különbség megértése.

– Feltétel és következmény biztos felismerése a következtetésben.

– A szövegben található információk önálló kiválasztása, értékelése, rendezése problémamegoldás céljából.

– A szöveghez illő matematikai modell elkészítése.

– A tanulók a rendszerezett összeszámlálás, a tanult ismeretek segítségével tudjanak kombinatorikai problémákat jól megoldani

– A gráfok ne csak matematikai fogalomként szerepeljenek tudásukban, alkalmazzák ismereteiket a feladatmegoldásban is.

2.2. Vertikális és horizontális kapcsolatok

Tárgyak, személyek, dolgok összehasonlítása, válogatása, rendezése, csoportosítása, halmazok képzése közös tulajdonságok alapján, összességek alkotása adott feltétel szerint, személyekkel vagy tárgyakkal kapcsolatos jellemzők azonosítása, összegyűjtése, csoportosítása a képzés teljes tartamában és minden tantárgyban lehetséges. Törekedni kell arra, hogy egyszerű matematikai szakkifejezések (több, kevesebb, ugyanannyi, kisebb, nagyobb, egyenlő) és jelölésük (=, <, >) a többi tárgy keretében is helyesen történjen. Környezetismeretben tárgyak, élőlények összehasonlítása, csoportosítása különböző tulajdonságok alapján, pl. élőhely, táplálkozási mód stb., természeti jelenségekről tett igaz-hamis állítások. Testnevelés órán csoportok alakítása, sorban állás különböző szempontok szerint. Magyar órán szavak csoportosítása szótagszám szerint, néhány elem sorba rendezése próbálgatással.

2.2.1. A becslésekhez

A becslések több szempontból is nagyon fontosak. Például ellenőrzési módszer, kapcsolatot teremthet a kiszámolt élettelen érték és a valóság között. Akinek a tiszta matematika túl távoli, de hajlandó gondolkodni, ezen az úton eljuthat a matematikához. A gyengébbeknek meg a szokásostól kicsit eltérő gyakorlási lehetőség.

2.1. Feladat: *a) Szerkesszen feladatot a becslés gyakorlására a középiskola első éveiben!*
b) Elemezze a mi példánkat!

2.2. Példa: *Óravázlatrészlet*
Rákérdezzünk, majd felírjuk a táblára az éppen aktuális váltószámot, váltószámokat.
A tanulók most még ennek felhasználásával dolgozzanak.
Először megbecsülik a végeredményt 2 értékes jegyre és nagyságrendre (számológép nélkül, 3 mp alatt), néhány tanulói véleményt felírunk a táblára, majd kiszámítják zsebszámológéppel. Pl.:

$$\frac{\frac{1}{8}kg + 300gr}{23kg} =$$

$$6,27cm \cdot \frac{3}{52}m \cdot 3 \cdot 10^7 mm =$$

Kinek sikerült legjobban megközelíteni a helyes, két értékes jegyre kerekített végeredményt, beleértve a jó mértékegységet is, természetesen?
A számokat sorbarendezzük, ami maga is jó feladat, de a versenyt is könnyebb értékelni.
Ti is találjatok ki szöveget!
Pl. Milyen alakú lehet az a téglatest, aminek élei a második feladatban szerepelnek? Készítsetek vázlatot!

MEGJEGYZÉSEK A FELADATHOZ
A becslés rávezethet a feladat tartalmának alaposabb megértésére, a végén az ellenőrzést izgalmasabbá teszi, hiszen van mivel összehasonlítani a kiszámolt végeredményt.
A becslésnél szükségszerűek az eltérések, egészen nagy eltérések is adódhatnak. Remek alkalom a vitára, még a számítások előtt.
Kinek van igaza és miért? Hogyan lehetne ezt bizonyítani? Mi okozhatja a nagy eltéréseket?
Ez is egy lehetséges út a bizonyítások felé, módszer a bizonyítási igény felkeltésére.

2.2.2. A logikai feladatokhoz

2.3. Feladat: *Keresse meg, próbálja ki a Macigát című animációt.*
Fogalmazzon meg feladatokat és problémákat ezzel kapcsolatban.
Milyen változtatást javasolna a szerzőnek, hogy jobban tudja használni az animációt?

MEGJEGYZÉSEK A FELADATHOZ Melyik a nehezebb művelet, az ÉS vagy pedig a VAGY?
A mindennapi nyelvhasználathoz hogyan kapcsolódik a diszjunkció?
Soroljon fel olyan szituációkat, amelyekben érdemes vizsgálni a logikai műveleteket a tanulókkal!
Mi a logikai áramkörös tanítás előnye és hátránya?
Mire, hogyan használható a Macigát, ahol a logikai változók a folyóra épített gátak, pontosabban zsilipek?
Készítsen az ábra alapján logikai kifejezést!
Mikor és hogyan kezdené el tanítani a logikai műveletek jelölését, a logikai azonosságokat és átalakításokat?

2.1. ábra. Gátak (Bontovics bontovics2011)

2.2.3. Nyitott feladatok

A nyitott feladat vagy probléma elnevezést a szakirodalomban az úgynevezett zárt feladatok ellentéteként szokták gyakran említeni: azaz ha egy feladat nem zárt, akkor nyitott.

Egy feladat zárt, ha megadott kezdeti feltételek mellett keressük meghatározott kérdésekre a választ. Így a tankönyvekben, példatárakban szereplő feladatok többsége zártnak tekinthető. Egy feladat megoldása során valamilyen kezdeti állapotból (kiindulási feltételek) valamilyen végállapotba (a feltett kérdés megválaszolása) szeretnénk eljutni. Ha egy feladat esetében a kezdeti állapotból a végállapotba jutás módja nem adott közvetlenül, azaz nehézségbe ütközünk a megoldás során, akkor problémáról beszélünk. Egy feladat problémakarektere objektív és szubjektív tényezőktől is függ, hiszen ugyanaz a kérdésfelvetés lehet például a megoldó felkészültségétől függően nehéz probléma, vagy éppen rutinfeladat. A nyitott feladatok általában nem oldhatók meg rutinszerűen, így helyette a „nyitott probléma” elnevezés gyakran helytálló lehet, és valószínűleg ezért is használják így gyakran (ld. például Pehkonen 1995 [171]).

A nyitott feladatokat osztályozhatjuk a kezdeti és a végállapot zárt vagy nyitott volta szerint. Egy ilyen osztályozást ad Pehkonen (1995 [171]):

	A végállapot zárt pontosan meghatározott	A végállapot nyitott
A kezdő állapot zárt pontosan meghatározott	Zárt probléma	Nyitottvégű problémák Életből vett szituációk Problémamezők Problémavariációk
A kezdő állapot nyitott	Életből vett szituációk Problémavariációk	Életből vett szituációk Problémavariációk Projektek Problémafelvetés

2.1. táblázat. A nyitott feladatok osztályozása Pehkonen (1995 [171]) szerint

Nyitott feladatok és problémák részletesebb besorolását adja Blum, 1999 [33]. Ebben a besorolásban a „feladat" az egyszerű gyakorlófeladatokat jelenti, a „probléma" így nem feladat. Fontos különbség az előbbi értelmezéssel szemben, hogy Blum a kezdeti állapotból végállapotba jutás közötti „folyamatot" (megoldás) is figyelembe veszi, és amennyiben ez „többértelmű", szintén nyitott problémáról illetve feladatról van szó, még ha a kezdeti illetve végállapot zárt is. Nyitott feladatok osztályozásáról még számos további helyen lehet olvasni: Zimmermann 1991 [258], Buth 1995, Zech 1996, Hortobágyi 1997 [109], Ambrus G. 2004 [11].

Látható, hogy az egyes nyitott feladat típusok között nincs éles különbség. Az előbbiek alapján a továbbiakban nyitott feladatnak tekintjük a kezdetük, végük és a többféle megoldási út miatt idesorolható feladatokat.

Példák nyitott és zárt feladatokra

1. Adjunk meg öt olyan elsőfokú egyenletet amelynek gyöke 3!
   Ez egy nyitott kezdetű feladat, a kezdeti feltételek szabadon változtathatók, a végállapot adott.

2. Olyan különböző természetes számokat keresünk, amelyek reciprokának összege 1.

   a) Létezik-e kettő?
   b) Létezik-e három?
   c) Folytassuk!

   Ez egy nyitott végű feladat. Meghatározott kezdeti feltételekkel adott kérdések megválaszolásán túl megfogalmazása és megválaszolása is feladat.

3. Az 1, 1, 3, 4 számjegyek felhasználásával képezze az összes lehetséges háromjegyű számot! Mit kérdezne még ezzel a négy számjeggyel kapcsolatban? (Próbálja megválaszolni kérdéseit!)

4. Készítsen olyan oszthatósággal kapcsolatos feladatokat, amelyekben a következő számjegyek szerepelnek: 1, 2, 3, 4! Oldja is meg a feladatokat!

   Egy feladat esetében a kezdet és végállapot is lehet nyitott. Ebben az esetben gyakorlatilag egy szituáció adott, amiből feladato(ka)t kell fogalmazni.

5. Lehetőleg minél többféleképpen határozza meg a trapéz területét!

6. Adott téglalaphoz készítsen kétszeres oldalú téglalapot! Keressen több megoldást!

Az utóbbi két példa Blum értelmezése szerinti nyitott probléma.

2.4. Feladat: *A következő feladatok közül melyik nyitott és melyik zárt? Válaszát indokolja!*

a) Orosházán 2008 augusztus 20-án huszonöt méter hosszú kenyeret sütöttek, amit kétezer szeletre vágtak fel. Milyen széles volt egy-egy szelet?

b) *Egy akcióban kiderült, hogy az 1 literes tej és 1kg-os kenyér ára is 99-re végződik. Mennyi tej és kenyér ára lehet így összesen 595 Ft?*

c) *„Egy vödörben kb. 6,5 kg narancs van, a vödör ajándék. Az ára 999 Ft, azaz kb. 153,69 Ft/kg" olvashattuk a hirdetésben 2009 januárjában. Mi a megjegyzése ezzel kapcsolatban?*

d) *Az egyik joghurtfajtát négyes csomagokban is árulják. Egy színes matrica hirdeti a csomagon az árát: dobozonként csak 56 Ft. Ha két csomagot veszünk, mennyi az ára?*

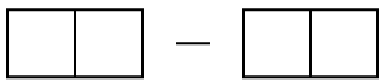
Egy kis matematikatörténeti kitérő

A nyitott feladatok mélyrehatóbb elemzése akkor kezdődött meg, amikor a problémamegoldó gondolkodás a matematikatanításban hangsúlyosabbá vált. Ez az időszak a hatvanas évektől számítható, amikor az előző évtized végén megjelenő „New Math" (Új Matek) irányzat hibái (pl. túlzott formalizmus, a műveletek oktatásának elhanyagolása) már kezdtek ismertté válni.

Az említett szélsőségek feloldására került előtérbe többek között a „problémamegoldás" mint tanítási irányzat, ami a matematikai gondolkodás tanítását tűzte ki célul.

Az „New Math" irányzatnak – akárcsak általában a többi tanítási koncepciónak – több változata létezik. Magyarországon a múlt század hatvanas éveiben kezdődött meg Varga Tamás vezetésével a „Komplex Matematikatanítási Kísérlet", amelynek keretében kidolgozott tanítási módszert Varga Tamás több helyen „Post – New Math" néven emlegeti, de ez az elnevezés nem terjedt el. Varga Tamás feladatai között igen gyakoriak a nyitott feladatok. A következő nem szokványos feladata (Varga, T. 1978) is ilyen:

Egy játékról van szó, amit Varga Tamás szerint 7 éves kortól kezdve lehet játszani. Négy helyre, véletlenszerűen megadott számjegyeket kell beírni úgy, hogy a két kétjegyű szám különbsége a lehető legnagyobb legyen. Az nyer, akié a legnagyobb ez a különbség. A számok egymás után jelennek meg, és sorban be is kell őket írni a választott helyre (négyzetbe).



2.2. ábra. A két kétjegyű szám

A számok előállíthatók például normál kocka vagy olyan kocka dobálásával, amelyen 0, 2, 4, 5, 7, 9 szerepelnek. A negyedik szám után a különbség dönti el, hogy ki nyert (többen is lehetnek).

A feladat könnyebb változata: kivonás helyett összeadás.

A feladat nehezebb változata: kettőnél többjegyű számokkal.

A gyerekek dolgozhatnak egyénileg, de csoportosan is: például egyvalaki előállítja a számokat, a többiek külön-külön beírják, vagy egyvalaki írja a saját csoportjának, amit a többiek együtt eldöntöttek, és a csoportok egymás között versenyeznek.

Varga Tamás szerint a játék túlmutat azon, hogy csupán a számolási készséget fejlessze, hiszen felhívja a figyelmet a helyiértékre, a kisebbítendő és a kivonandó eltérő szerepére a kivonásban, hozzájárul ezenkívül ahhoz is, hogy a tanulók gondolkodásuk fejlődése szempontjából fontos kérdésekkel foglalkozzanak, mint például:

– Mi a stratégia, (ami itt a következő jegy helyének célszerű megadását jelenti)

– Különbségtétel olyan lépések között, amelyeket később biztosan nem fognak megbánni (pl. a normál kockával előállított számok esetében a 6 beírása a kisebbítendőben a tízesek helyére) és amelyeket lehet, hogy később meg fogunk bánni (pl. az 5 beírása az előbbi helyre).

– Különbségtétel olyan lépések között, amelyeket később valószínűleg meg fognak bánni és amelyeket valószínűleg nem fognak megbánni. (Mi a helyzet az 5-tel a tízesek helyén?)

– Mit jelent a jobb és rosszabb stratégia? ...

Ez a néhány megjegyzés is ízelítőt ad abból, milyen sokrétűen felhasználhatók a nyitott feladatok a tanítás során.

A „nyitott közelítés" tanítási módszerét, melynek lényege nyitott végű problémák alkalmazása a matematika órán a „matematikai" vitakészség fejlesztése céljából, Japánban dolgozták ki a XX. század hetvenes éveiben. Ezzel egyidőben lettek népszerűek Angliában a kutatási, illetve matematikai vizsgálatokkal kapcsolatos feladatok a matematika tanításában. A nyolcvanas években már szerte a világon alkalmaztak különböző jellegű nyitott feladatokat. Néhány országban külön elnevezést is kapott az így kialakított tanítási módszer. Ilyen például Hollandiában a „realisztikus matematika" módszer.

2.2.4. A nyitott feladatok szerepe a matematikatanításban

A nyitott feladat a matematikai tevékenység és a tanulói tevékenység szempontjából is nyitott.

Nézzük meg mit jelent ez azon a példán, amikor az 1, 2, 3, 4 számjegyek felhasználásával kell az összes lehetséges háromjegyű számot képezni. „Mit kérdeznél még ezzel a négy számjeggyel kapcsolatban? Próbáld megválaszolni kérdéseidet!) esetében."

Néhány lehetséges „kérdés":

– Állítsa elő az összes lehetséges egy, két ... jegyű számot!

– Hány 4-gyel (3-mal, 5-tel stb.) osztható háromjegyű szám képezhető?

– Az 1 2 3 4 számok közé tégy műveleti jeleket és zárójeleket. Hányféle megoldást találtál? Milyen különböző számokat tudtál előállítani?

– Írjunk fel olyan egyenleteket, aminek 1234 a gyöke!

– Mennyit ér az 1234 az ötös, ... számrendszerben?

A matematikai tevékenység szempontjából egyrészt fontos, hogy kérdéseket is kell megfogalmazni, feladatokat kell készíteni. Ha a feladatok „készen érkeznének", nem kellene elgondolkodni azon, mi mindent lehet még kérdezni, mire elegendőek (és mire nem) az adatok, – mozgósítva ezzel korábban megismert témaköröket, feladattípusokat, a szaknyelv helyes használatát –. A nyitott feladatok révén tehát nemcsak matematikai ismereteket gyakorlunk, hanem más kompetenciákat is fejlesztünk. A matematika tanulása, a matematikához való viszony szempontjából fontos dolog történik: problémák, (lehetséges kérdések) felismerése, megfogalmazása, sejtések és megoldások készítése, esetleg problémakörök kifejtése. Azaz nemcsak megtanult és megértett tételek, összefüggések alkalmazásáról van szó, hanem az ismeretek rendszerezéséről, a matematika tudás építéséről, és ennek révén a matematikáról alkotott helyes kép alakításáról.

A tanulói tevékenység így a megoldáson kívül kiterjed a lehetséges kérdés(ek) „észrevételére", megfogalmazására esetleges továbbgondolására is. Ez feltétlenül többet jelent, mint a zárt „adott feladat megoldása" tevékenység, és elősegíti a tanulók aktívabb, és a tapasztalatok szerint általában lelkesebb, esetenként sikeresebb részvételét matematikai tevékenységekben.

A matematikaórán „használatos" feladatok megoldása gyakran bizonyos sémák szerint történik. Az egyik leggyakrabban használt általános séma:

„Ha szöveges feladatot kapunk, a megoldáshoz végezzünk valamilyen műveletsort a benne szereplő számokkal még akkor is, ha nem tudjuk, miért csináljuk; valamilyen eredményt csak kell kapnunk."

Az, hogy ez a séma egyes gyerekekben kialakul részben biztosan annak köszönhető, hogy a matematika órán leginkább típusfeladatok megoldása során nem (igazán) értett eljárásokat, tételeket alkalmaztak. Ilyen háttértudással nincs támpont mit is csináljanak a nemrutin feladatok esetében. Ennek kapcsán híresült el az ún. „kapitányfeladat", melynek egyik változata a következő:

Egy hajón 17 kecske és 11 juh található, hány éves a kapitány?

A gyerekek gyakran adják azt a választ, hogy 28, és azzal indokolják, hogy össze kellett adni a számokat, hiszen kivonva túl fiatal lenne a kapitány. Az már nem mindig zavarja őket, hogy a végzett műveletnek semmi köze a kérdezett életkorhoz.

A nyitott feladatok esetén hangsúlyt kap az, hogy a gyerekek átgondolják, miből mit lehet kiszámolni, illetve, hogy amit kiszámoltak az helyes és lehetséges-e. Ez mindenképpen segíti az „értelmes" feladatmegoldást.

2.2.5. Nyitott feladatok készítése

A téma jelenlegi aktualitását részben az adja, hogy a magyar tanulók nem voltak igazán eredményesek több hazai és nemzetközi felmérésben melyeken arról kellett számot adniuk, mennyire tudják alkalmazni a(z elvileg) megtanultakat. Az eredmények javítása céljából szükséges többek között a hagyományos „feladatkultúra" továbbfejlesztése is hiszen a hagyományosan általában zárt feladatok csak részben készíthetnek fel ilyen jellegű megmérettetésre. A cél persze valójában nem a felméréseken való sikeres szereplés, hanem a kor és ezzel összefüggésben az egyéni igényeknek megfelelő képzés matematikából is.

A) Nyitott feladatok tankönyvekben – tankönyvi feladatok nyitása

A mai magyar tankönyvekben is szerepelnek „nyitott feladatok", ha egyelőre általában nem is túl nagy számban.

Példák tankönyvi nyitott feladatokra:

1. Mely állítások igazak a következők közül?

    a) Minden 6-tal osztható szám osztható 3-mal is.

    b) Minden 3-mal osztható szám osztható 6-tal is.

    c) Minden 12-vel osztható szám osztható 24-gyel is.

d) Minden 100-zal osztható szám osztható 50-nel is.

e) Minden 60-nal osztható szám osztható 10-zel is.

f) Minden 60-nal osztható szám osztható 24-gyel is.

Fogalmazz meg néhány az előbbiekhez hasonló igaz állítást!

2. Három tyúk három nap alatt három tojást tojik. Mennyit tojik hat tyúk két nap alatt? Keressen többféle megoldást!

Az utóbbi feladat azonban más szempontból is érdekes. Gondoljuk meg, hogy a „többféle megoldás" keresése kétféleképpen is felfogható.

Az egyik lehetőség, hogy hagyományos arányossági feladat szerint gondolkodunk és így keresünk többféle megoldási lehetőséget:

1. 3 tyúk 3 nap alatt 3 tojás, 3 tyúk 1 nap alatt 1 tojás, stb.
2. 3 tyúk 3 nap alatt 3 tojás, 1 tyúk 3 nap alatt 1 tojás, stb.
3. 3 tyúk 3 nap alatt 3 tojás, 3 tyúk 2 nap alatt $3 \cdot \frac{2}{3}$ tojás, stb.

Ezekben az esetekben a tyúkoknál egyenletes, arányos „tojástermelést" tételeztünk fel. Így a 6 tyúk 2 nap alatt 4 tojást tojik.

A másik lehetőség az, hogy figyelembe vesszük, a tyúkok a valóságban nem így szoktak tojni. A vidéki emberek megfigyelése szerint tavasszal általában naponta tojnak a tyúkok, egyébként két-három naponta. (A nagy meleg és a nagy hideg negatívan befolyásolja a tyúkokat.) Ebből következik, hogy a feladat szerinti esemény nem tavasszal játszódik, és az is, hogy nem lehet egyértelműen megadni, hány tojást tojtak a tyúkok a kérdéses két nap alatt. Lehetséges, hogy egyet sem, és lehet az is, hogy hatot. Tekintsük ehhez a táblázat szerint az egymás utáni két napokat. (Az pedig láthatóan mindig teljesült, hogy három tyúk három nap alatt három tojást tojt.)

	1. nap	2. nap	3. nap	4. nap	5. nap	6. nap
Tyúk 1	−	−	+	−	−	+
Tyúk 2	−	−	+	−	−	+
Tyúk 3	−	−	+	−	−	+
Tyúk 4	−	−	+	−	−	+
Tyúk 5	−	−	+	−	−	+
Tyúk 6	−	−	+	−	−	+

2.2. táblázat. Az egyformán tojó tyúkok

A táblázat némi módosításával látható, hogy a hat tyúk két nap alatt 1 vagy öt tojást is tojhat.

Hasonlóan látható, hogy 2 és 4 illetve 3 tojást is tojhatnak. Így a hat tyúk esetében összesen hétféle eredmény lehetséges. (Arról nem tudunk, hogy egy tyúk két tojást tojna egy nap.)

	1. nap	2. nap	3. nap	4. nap	5. nap	6. nap
Tyúk 1	−	+	−	−	+	−
Tyúk 2	−	−	+	−	−	+
Tyúk 3	−	−	+	−	−	+
Tyúk 4	−	−	+	−	−	+
Tyúk 5	−	−	+	−	−	+
Tyúk 6	−	−	+	−	−	+

2.3. táblázat. A nem egyformán tojó tyúkok

Egy feladat azonban nemcsak önmagában lehet nyitott, hanem azzá is tehető. Ez fontos, hiszen a tankönyvekben, példatárakban fellelhető feladatok többsége zárt. Az egyik gyakran adódó lehetőség a nyitásra a feladat továbbgondolása, általánosítása. Elvileg minden feladat nyitható, de ez egyes esetekben erőltetettnek is tűnhet. Vannak azonban olyan feladatok, és nem is kevesen, amelyek szinte kínálják a nyitás lehetőségét.

B) Példák zárt feladatok nyitására – nyitott végű feladatok készítése adott feladatokból

1. A * helyére írj összeadás vagy kivonás jelet úgy, hogy az egyenlőség igaz legyen:

   a) $6 * 5 * 3 = 4$

   b) $8 * 3 * 4 * 9 = 16$

   c) $34 * 21 * 56 = 69$

   d) $154 * 54 * 9 = 91$

   Nyitás további kérdésekkel:

   Hányféle különböző eredményt kaphat az egyes esetekben, ha továbbra is csak a két műveleti jelet használja?

   Tegyen fel még kérdést a feladattal kapcsolatban és válaszolja is meg, ha tudja!

2. Egy gyertya magassága 1 óra alatt átlagosan 0,4 cm-t csökkent. Az égés folyamatát a következő egyenlettel írhatjuk le:

$$y = 24 - \frac{2}{5} \cdot x$$

   a) Magyarázza meg, hogy a hozzárendelésben melyik betű mit jelent! Mit jelentenek a képletben szereplő számok?

   b) Milyen hosszú még a gyertya 15 órai égetés után?

   c) Mennyi idő múlva fogy el a gyertya 10 cm-nyire?

   d) Mennyi idő múlva ég el teljesen a gyertya?

e) Ábrázolja a gyertya égését! Az x tengelyen 4 órának 1 cm, az y tengelyen pedig 2 cm gyertyahossznak 1 cm feleljen meg!

Nyitás további kérdésekkel:

Rajzolja le, milyen lehet ennek a gyertyának az alakja? Ismer másféle gyertyát is? Rajzoljon le néhány esetet, és vázolja mellette, milyen lehet az égés menetének grafikonja.

Próbáljon feltenni további kérdéseket?

Például: hogyan alakul a mindkét végén égetett gyertya égési folyamata? Biztosan elég-e egy hét alatt 10 cm-t a gyertya? Melyikre tudja a választ? Melyiket nem lehet megválaszolni? Például nem tudjuk, hogy nem aludt-e el a gyertya közben, illetve lehet, hogy „féloldalasan” égett ... A válaszban csak ideális esetben lehetünk biztosak.

3. Található-e olyan a, b különböző természetes szám, hogy $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}=1$?

   Hasonló a kérdés a, b, c esetében: $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=1$. Folytassuk a kérdezést!

   1. Lehetséges megoldás és folytatás:

   Ilyen a és b számok nem adhatók meg. Ha valamelyik tört $\frac{1}{2}$-nél kisebb lenne, a másiknak ennél nagyobbnak kellene lennie, ez utóbbi azonban nem lehetséges. Két egész szám reciprokának az összege csak úgy lehetne 1, ha mindkettő 2 lenne, de azt kizártuk, hogy egyformák legyenek.

   $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=1$ esetében a megoldás: $\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{6}=1$ más megoldás nincsen. (Miért?)
   $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}+\frac{1}{d}=1$ megoldása megadható például az előbbi megoldás felhasználásával: $\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{6}=1$ mindkét oldalát szorozzuk $\frac{1}{2}$-del, így $\frac{1}{4}+\frac{1}{6}+\frac{1}{12}=\frac{1}{2}$, amit az $\frac{1}{2}+\frac{1}{2}=1$ azonosságban az egyik $\frac{1}{2}$ helyére írunk. Egy megoldás tehát: $\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{6}+\frac{1}{12}=1$

   Ezzel a módszerrel akárhánytagú összeg esetében is tudunk megoldást találni az eredeti feltételek mellett.

   Ennek alapján megállapíthatjuk, hogy legalább három tag esetén mindig létezik adott tulajdonságú összeg.

   2. Lehetséges megoldás és folytatás:

   További kérdések lehetnek a három, illetve négytagú összeg esetében:

   a) Hány megoldás van a pozitív egészek körében az $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}+\frac{1}{d}=1$ egyenletnek?
      A nevezőket nagyság szerint vizsgálva belátható, hogy a 14 lehetséges esetből 6 valóban megoldás, ezeket félkövér betűk jelzik a 2.4 táblázatban.

   b) Van-e megoldás, ha az $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=1$ feladatnál ha az összeadás helyett kivonás is „állhat”?
      ($\frac{1}{a}+\frac{1}{b}-\frac{1}{c}=1$ nincs megoldás, $\frac{1}{a}-\frac{1}{b}-\frac{1}{c}=1$ nincs megoldás. Miért?)

2.5. Feladat: *Keressen példákat tankönyvekben nyitott feladatokra!*

a	**2**	**2**	**2**	**2**	2	**2**	**2**	2	2	2	3	3	3	4
b	**3**	**3**	**3**	**3**	3	**4**	**4**	4	5	6	3	3	4	4
c	**7**	**8**	**9**	**10**	12	**5**	**6**	8	5	6	4	6	4	4
d	**42**	**24**	**18**	**15**	12	**20**	**12**	8	10	6	12	6	6	4

2.4. táblázat. A lehetőségek és a megoldások

2.6. Feladat: *Készítsen nyitott kezdetű feladatokat tankönyvi feladatokhoz!*

2.7. Feladat: *Készítsen nyitott végű feladatokat tankönyvi feladatokhoz!*

C) Szituációs problémák – nyitott szituációk

Mint már tudjuk, az olyan feladatok esetében, amelyeknél sem a kiindulási feltételek sem a kérdések nem meghatározottak (nyitott) szituációkról beszélünk. Ilyen szituáció lehet „tiszta" matematikai, vagy valamilyen valóságközeli helyzet is. A szituáció feldolgozása jelenthet rövidebb, vagy hosszabb, más tantárgyakat is érintő feladatot. A nagyobb terjedelműek hosszabb időt igényelnek és más tantárgyak órái is bevonhatók. Rövidebb, főleg matematikai ismereteket igénylő ilyen jellegű feladatok a matematikaórán belül is kidolgozhatók. Példáink ilyenek.

A szituációs feladatoknak mindenképpen sajátja, hogy sokkal határozatlanabbak, mint „félig nyitott" (kezdeti vagy végállapot) rokonaik. Így a tanulók számára is szokatlanabbak, hiszen kevesebb a támpont, amin elindulhatnak. Általában várható, hogy eleinte nehezebben születnek a kérdések, ezért érdemes az elején néhány kérdés megfogalmazásával, a válaszok megbeszélésével segíteni.

Az is lehet, hogy a tanulók „leragadnak" egyfajta témánál, illetve kérdéstípusnál. Mindez arra figyelmeztet, szó sincs arról, hogy egy sereg adattal vagy egy számunkra érdekesnek tűnő kérdéskörrel a tanulókat magukra hagyhatjuk, várva a szép eredményeket. A gondos előkészítés, együttdolgozás és értékelés itt sem maradhat el.

D) „Tiszta" matematikai szituáció feldolgozása

2.8. Példa: *Egységnyi területű konvex négyszögek esetében vizsgáljuk meg:*

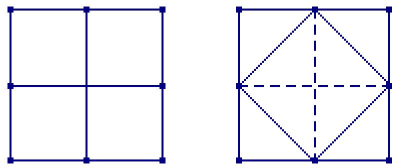
1. *a szemközti oldalak felező pontjainak összekötésével keletkező négy négyszög tulajdonságait és adjuk meg területüket*

2. *a szomszédos oldalak felező pontjainak összekötésével kapott (belső) négyszög tulajdonságait és adjuk meg a területét!*

Egy lehetséges kidolgozás

a) Négyzet

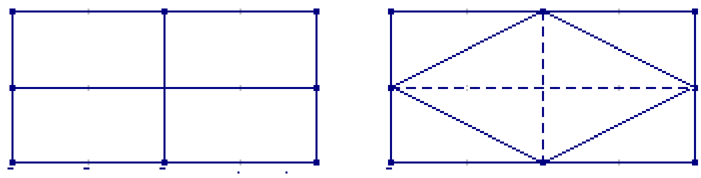
1. A szemközti pontokat összekötő egyenesekre a négyzet tengelyesen szimmetrikus, négy egybevágó kis négyszög keletkezik, így területük $\frac{1}{4}$.



2.3. ábra. A négyzet vizsgálata

2. A szomszédos oldalfelező pontokat összekötő szakaszok a 4 kis négyzet átlói. Ezek az átlók egymással derékszöget zárnak be. A belső négyszög oldalai és szögei tehát egyenlőek, azaz négyzetet kapunk. Mivel a kis négyzetek átlói szimmetriatengelyek, felezik a kis négyzetek területét. A belső négyzet területe négy darab fél kis négyzet területével egyenlő azaz $\frac{1}{2}$.

b) Téglalap

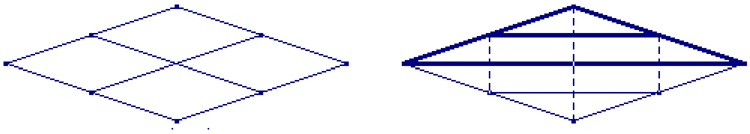


2.4. ábra. A téglalap vizsgálata

1. Mivel a téglalap is tengelyesen szimmetrikus a szemközti pontokat összekötő egyenesekre, így a keletkező négy négyszög egybevágó téglalap. Ezek hasonlóak az eredetihez, hiszen oldalaik feleakkorák. Ebből az is következik, hogy területük $\frac{1}{4}$.
2. A szomszédos oldalfelező pontokat összekötő szakaszok itt is a kapott kis téglalapok átlói, így egyenlő hosszúak. (Általában nem zárnak be derékszöget egymással, csak ha a kis téglalap négyzet.) A belső négyszög tehát rombusz. Ugyancsak a négyzet esetéhez hasonlóan indokolható, hogy ennek a területe $\frac{1}{2}$.

c) Rombusz

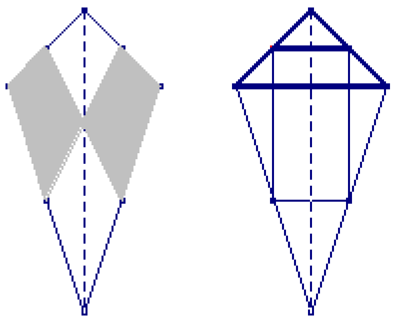
1. A szemközti felezőpontokat összekötő szakaszok párhuzamosak a megfelelő rombuszoldalakkal (egy-egy ilyen szakasz két olyan paralelogrammára osztja a rombuszt, melynek oldalai 1:2 arányúak). Négy egybevágó kis rombusz keletkezik, így területük $\frac{1}{4}$.
2. A szomszédos felezőpontokat összekötő szakaszok a megfelelő háromszögekben olyan középvonalak, amelyek a rombusz átlóival párhuzamosak. Így a belső négyszög



2.5. ábra. A rombusz vizsgálata

szemközti oldalai párhuzamosak és egyenlő hosszúak, azaz a négyszög paralelogramma. Mivel a rombusz átlói merőlegesek egymásra következik, hogy ez a paralelogramma téglalap. A téglalap oldalai az elmondottak miatt a rombusz átlóinak felével egyenlők, így a területe $\frac{1}{2}$.

d) Deltoid

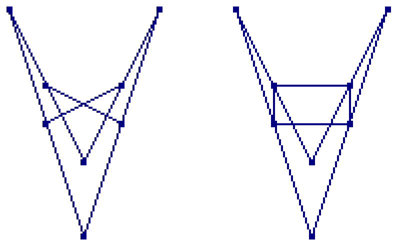


2.6. ábra. A deltoid vizsgálata

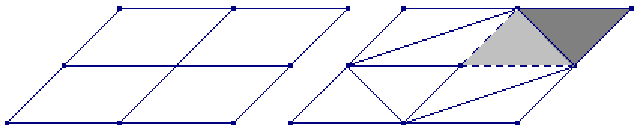
1. A szemközti oldalfelező pontokat összekötve, a tengelyes szimmetria miatt a keletkező négyszögek közül kettő egybevágó (rajzon jelölve), a másik kettő pedig deltoid. A két kisdeltoid területének összege egyenlő $\frac{1}{2}$-del (miért?). A két jelölt egybevágó négyszög területe egyenként $\frac{1}{4}$. Így a szemközti négyszögek területének összege $\frac{1}{2}$.
2. Hasonlóan a rombuszhoz: a szomszédos felezőpontokat összekötő szakaszok a megfelelő háromszögekben olyan középvonalak amelyek a deltoid átlóival párhuzamosak. Így a belső négyszög szemközti oldalai párhuzamosak és egyenlő hosszúak, azaz paralelogramma. Mivel a deltoid átlói merőlegesek egymásra következik, hogy ez a paralelogramma téglalap. A téglalap oldalai az elmondottak miatt a deltoid átlóinak felével egyenlők, így a területe $\frac{1}{2}$.

Gondoljunk arra az esetre is, amikor a deltoid nem konvex!

e) Paralelogramma



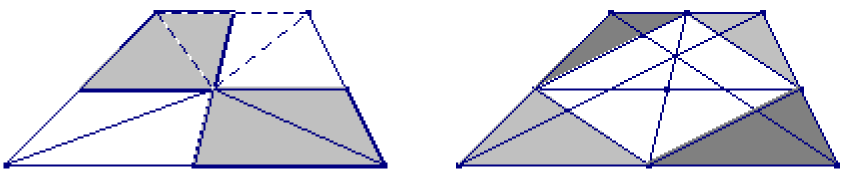
2.7. ábra. A konkáv deltoid vizsgálata



2.8. ábra. A paralelogramma vizsgálata

1. Hasonlóan a rombuszhoz: a szemközti pontokat összekötő szakaszok párhuzamosak a megfelelő paralelogrammaoldalakkal (egy-egy ilyen szakasz két olyan paralelogrammára osztja a paralelogrammát, melynek oldalai 1:2 arányúak). Ezért négy egybevágó kis paralelogramma keletkezik, így területük $\frac{1}{4}$.
2. Hasonlóan a rombusz és deltoid esetéhez: a szomszédos felezőpontokat összekötő szakaszok a megfelelő háromszögekben olyan középvonalak amelyek a paralelogramma átlóival párhuzamosak. Így a belső négyszög szemközti oldalai párhuzamosak és egyenlő hosszúak, ezért paralelogramma. A belső paralelogramma oldalai az a) pontban szereplő kis paralelogrammák átlói, így a terület négy fél kis paralelogramma területével egyenlő, azaz $\frac{1}{2}$.

f) Trapéz



2.9. ábra. A trapéz vizsgálata

1. A szárak felezőpontját összekötő szakasz párhuzamos az alapokkal, így a szemközti felezőpontok összekötésével kapott kis négyszögek trapézok. Ezek általában sem

egymáshoz sem az eredeti trapézhoz nem hasonlóak. Az összekötő szakaszok metszéspontját a csúcsokkal összekötve keletkező négy háromszögben a megfelelő kistrapéz oldalak súlyvonalak, így területfelezők. Ebből következik, hogy a szemközti kistrapézok területösszege $\frac{1}{2}$.

2. Hasonlóan a rombusz, deltoid és paralelogramma esetéhez: a szomszédos felezőpontokat összekötő szakaszok a megfelelő háromszögekben olyan középvonalak amelyek a trapéz átlóival párhuzamosak. Így a belső négyszög szemközti oldalai párhuzamosak és egyenlő hosszúak, ezért paralelogramma. A rajzon azonos színnel jelölt kis háromszögek területösszege a trapéz területének a negyede (miért?). Így a jelölt kisháromszögek területe $\frac{1}{2}$, amiből következik, hogy a belső négyszög területe is $\frac{1}{2}$.

Az előbbiek alapján megállapítható, hogy egy konvex négyszög szomszédos oldalfelezőpontjait összekötve paralelogrammát kapunk, amelynek területe fele a négyszög területének. A szemközti oldalfelezőpontokat összekötve az így keletkező négyszögek közül a csúcsukkal érintkező 2-2 kis négyszög területének összege fele a négyszög területének.

A közölt feldolgozáson kívül érdemes más utakat is átgondolni. Vizsgálhatjuk a probléma térbeli változatait is, amikor az oldalfelezőpont helyébe akár élfelező pont vagy lapközéppont kerülhet.

A feladat megoldása során a legspeciálisabb négyszögből kiindulva jutottunk el az általános esethez. Az egymásra épülő bizonyítások lehetővé tették, hogy végül olyan állításokat is megfogalmazzunk, amelyek minden (konvex) négyszög esetében teljesülnek.

Ennek a szituációs feladatnak a megoldása során a négyszögek tulajdonságait egymással összefüggésben alkalmaztuk, ami lényegesen több mintha különálló feladatokat oldottunk volna meg. Ez a módszer erősíti az összefüggő rendszerekben való gondolkodás illetve a rendszeres, szisztematikus vizsgálat módszerének képességét is. A matematikai ismeretek összefüggésekben való tanítása segíti ezeknek az ismereteknek más szituációkban való alkalmazását. Várható, hogy a négyzetből kiindulva a tanulók önállóan is hasonlóan sorra veszik a speciális négyszögeket.

Az általános megállapítás természetesen adódik az alkalmazott egymásra épülő vizsgálati módszerből.

E) Valóságközeli szituáció feldolgozása

A valóságközeli nyitott szituációkkal való munkát többféleképpen is lehet végezni. Egy lehetséges módszer az, hogy a tanár összeállít előre egy információkat tartalmazó lapot, és a tanulók ennek felhasználásával készítenek feladatokat egyénileg vagy csoportban, tanári segítséggel vagy anélkül.

2.9. Példa: *„Csokoládé”*

Jelen példánkban a „Csokoládé” startlap adatainak felhasználásával kell feladatokat készíteni és megoldani azokat.

A megadott információk felhasználásával készíthetünk például feladatlapot:

Általában elmondható, hogy a nyitott feladatok

Startlap „Csokoládé”

A csokoládé a következő anyagok keveréke: kakaómassza, kakaóvaj, vaj, tejpor, zsír, és cukor. 100g csokoládé összetétele körülbelül a következő:

	feketecsokoládé	tejcsokoládé	fehércsokoládé
kakaómassza	50g	25g	
kakaóvaj	10g	5g	20g
cukor	40g	50g	55g
tejpor		20g	25g

A csokoládéban nagyrészt cukor van. A cukortartalom százalékban:

tejcsokoládé	50%
fehércsokoládé	55%
csokoládéfagylalt	14%
csokoládéital	10%

Egy kilogramm csokoládé előállításához szükséges:
350g kakaóbab
200g kakaóvaj
500g porcukor

Ki mennyit kap?

A csokoládé árából a következők részesednek: kakaótermelők, kereskedők (kakaóbörze, nagykereskedők, kiskereskedők), csokoládégyár, csomagolóipar. Ha példaként egy 100g-os, 24 kiskockából álló csokoládét veszünk, nagyjából a következő elosztás érvényesül kiskockában számolva:

kakaótermelők	6,3
kereskedők	7,2
csokoládégyár	9,6
csomagolóipar	0,9

2.10. ábra. „Csokoládé” startlap

- jó lehetőséget adnak matematikán belüli és kívüli ismeretek összekapcsolására, ezen belül pl. megfelelő gyakorlófeladatok, gyakorlati élettel kapcsolatos vonatkozások kidolgozására
- elősegíthetik a tudatosabb feladatmegoldást

Feladatlap: Egy csokoládégyár akciója

Egy csokoládégyár a 100g-os táblacsokoládé termékeiből akciót hirdet. A kereskedők számára ez 10%-kal nagyobb hasznot jelent a korábbihoz képest, de szerződésben rögzítik, hogy a fogyasztói árnak 20 %-kal csökkennie kell.
Egy 100g-os, 24 kiskockából álló csokoládét alapul véve, nagyjából a következő elosztás érvényesül kiskockában számolva:

kakaótermelők	6,3
kereskedők	7,2
csokoládégyár	9,6
csomagolóipar	0,9

1. Számítsd ki, egy 185 Ft-os tábla esetében mennyit kaptak eddig és mennyit kapnak az akció során a kereskedők!
2. Mennyi a csoki kedvezményes ára?
3. Hány százalékkal csökken a gyár bevétele a csokoládé árából táblánként?
4. Te képviseled a gyárat: Szervezz egy másik akciót, végezd el a szükséges számításokat! Ha gondolod utána módosítsd az akciót és indokold meg, miért választottad ezeket a feltételeket.

2.11. ábra. „Csokoládé” feladatlap

- segítik a többszempontú, folyamatos ismétlést, az alapismeretek megszilárdítását
- nyitott tanulói tevékenységet lehetővé tevő tanulási szituációk megteremtését
- általában jól feldolgozhatók párban illetve csoportban
- segítik az egyéni, csoportok közötti differenciálást
- igényes, (általában) a tanulók számára is érdekes feladatokat jelentenek
- segítik a matematikáról alkotott helyes kép (nem lezárt kész ismerethalmaz, gondolkodásfejlesztés, alkalmazhatóság...) kialakítását.
- hatékonyan alkalmazhatók új témakör bevezetésénél, ismétlésnél.

Fontos megjegyezni, hogy nem a hagyományos feladatok helyettesítése a cél nyitott feladatok alkalmazásával, hanem a feladatkultúra gazdagítása.

Felvetődik természetesen az időhiány (tanári, tananyag elvégzése szempontjából) kérdése. A fejezetben szereplő példák, feladatok néhány ötletet adhatnak ahhoz, hogyan lehet nyitott feladatokat nem túl nagy időráfordítással, tanítási órákba, szakköri foglalkozásokba beépítve alkalmazni.

2.10. Feladat: *Tegye nyitottá a következő feladatot:*
Egy $9\,\frac{5}{8}m^2$ *alapterületű téglalap alakú konyha padlóját szeretnénk* $\frac{1}{16}m^2$*-es járólapokkal lefedni. A járólap darabja az egyik üzletben 62 Ft-ba kerül. Egy másik helyen 1000 Ft-ba kerül belőle* $1m^2$. *Melyik ajánlat előnyösebb? Mennyibe kerül így a konyha padlója?*

2.11. Feladat: *Ossza fel az óra számlapját úgy, hogy minden részben az összeg 15 legyen! Milyen óraszámlapokat ismer? Melyiken oldható meg a feladat? Hogyan?*

2.12. Feladat: *Szituáció: Van egy tábla csokoládé, ami 3x6 kis kockából áll. Készítsen/keressen ehhez a csokihoz feladatokat!*

MEGJEGYZÉSEK A FELADATHOZ: néhány ötlet a megoldáshoz

- A csokit kis kockákra akarjuk tördelni. Mi a szükséges tördelések minimális száma, ha nem szabad több, már letört csokidarabot egymásra helyezni és úgy együtt továbbtörni? Hogyan változik a válasz, ha változik a csokoládé mérete (kiskockák száma)?
- Számítsuk ki csokoládétáblánk területét és kerületét abban az esetben, ha 3 illetve 6 egység oldalhosszúságú téglalapnak tekintjük.
- Tegyük fel, hogy már feltördeltük a csokoládét és a kis kockákat visszatettük eredeti helyükre. Ketten a következő játékot játsszák: Egy lépésben egy vagy két egymásmelletti kockát szabad elvenni. (Egymásmellettinek azok számítanak, amelyeknek közös oldaluk van.) Az nyer, aki az utolsó ill. utolsó kettő kockát elveszi.

  Melyik játékosnak van nyerő stratégiája, és mi ez a stratégia?

  Hogyan változik a nyerőstratégia, ha változik a csokoládé oldalmérete?
- Az eredeti tábla csokoládéból elvettünk két átellenes kis sarokkockát. Lefedhető-e a visszamaradó rész 2x1-es „csokidominókkal”?

  Hogyan változik a válasz, ha változnak a csoki méretei?

2.13. Feladat: *Szituáció: Az idei évszám. Készítsen olyan feladatokat, amiben ez az évszám szerepel! (Ilyen tematikus feladatgyűjtésre jó segítség lehet Sztrókay, 1991, 1995.)*

2.3. Problémamegoldás

2.3.1. Az egyik heurisztikus stratégia – az analógia

A régi Középiskolai Matematikai Lapok, versenyek feladatait olvasgatva láthatjuk, hogy a matematikatanítás a konkrét ismeretek és készségek elsajátítása mellett heurisztikus gondolkodási, problémamegoldási stratégiák használatát is megcélozta. A heurisztikus stratégiák között központi szerepet játszik a különböző tudásterületek közötti transzfer, az analógiák felismerése, az analógiás következtetés. Ezek a gondolatmenetek, gondolkodási struktúrák igen gyakran (és nem mindig tudatosan) alkották a problémaorientált oktatás, a munkatankönyvek, feladatgyűjtemények, feladatsorozatok, a tanulóprogramok összeállításának bázisát.

Pólya György az analógiák keresését, felismerését a matematikai gondolkodás igen értékes részének tartja. Beszél tisztázott és bizonytalan analógiáról, ahol tisztázott, vagy felderített analógián a következőt érti: „Két rendszer analóg, ha megfelelő részeik világosan megfogalmazható kapcsolataikban megegyeznek.” Az analógiákkal kapcsolatosan Pólya a következőt tanácsolja: „ne hanyagoljuk el a bizonytalan analógiákat! De ha igazán hasznukat akarjuk venni, akkor próbáljuk meg tisztázni őket!”

Az analógiás gondolkodás nagyon közel áll a gyerekekhez (felnőttekhez is), hiszen az emberi megismerés alapvető építőköve. Ennek ellenére a matematikatanárok között nem ritka, hogy kerülik az analógiák direkt használatát a tanításban, mivel a gyerekek gondolkodásában inkább károsnak, mint hasznosnak érzik azt. Ennek oka feltehetőleg az, hogy a tisztázatlan analógiák sok esetben rossz következtetésekhez vezetnek. Például a következő – nem ritka – hibák mindegyike „analógiás gondolkodás” eredménye:

$$2(a+b) = 2a+2b \quad (a+b)^2 = a^2+b^2 \quad \sqrt{a+b} = \sqrt{a}+\sqrt{b}$$

Ezek a jelenségek állhatnak a hátterében annak is, hogy az analógiákat a tankönyvek és más módszertani segédanyagok is elég óvatosan kezelik. Pedig ezzel sokat veszít a tanítás. Például azt, hogy a lényegi analógiák megértése segítsen az „álanalógiák” elkerülésében. Pólya tanácsának megfelelően, az orvosság ezeknek a problémáknak az elkerülésére nem az, hogy kerüljük az analógiák használatát, hanem az, hogy tisztázzuk őket. Például azáltal, hogy több tapasztalatot biztosítunk a szorzás, összeadás, hatványozás és ezek inverzeinek valódi kapcsolatáról (lásd a műveletek rokonságáról szóló részt).

Az analógiák felismerésében, alkalmazásában rejlő fejlesztési lehetőségeket szerintünk ezen a területen sem használja eléggé az iskola. Az analógiától való idegenkedés csak árt a növekvő ismeretanyag – csökkenő idő küzdelemben, hiszen a saját ismeret strukturálásának ősi módszerét utasítja el. Igen sokszor csak nagyon alapos vizsgálat dönti el az intuitív szintű rokonságérzetről, hogy mélyebb törvényszerűség van-e a háttérben. A felszíni analógiára példa a lepke és a madár rokonsága, mert mindkettőnek van szárnya. A hagyományos kolomp vagy csengő rokonsága már erősebb, funkcionális analógiának mondjuk, mert mindkettő elláthatja a hangjelzés funkcióját. A Bohr féle atommodell és a bolygórendszer közötti párhuzamnál meg abban bízunk, hogy a bolygórendszert jól ismerjük, azt a keveset, amit az atomról tudunk ezzel összecsengőnek érezzük és a bolygók világából jósolunk, átvetítünk valamit az atomokra. Ez a valami lehet igaz, vagy hamis. Ha kiderül, hogy nem igaz a jóslat, az nem teszi hamissá, hibássá az analógiát. Hibát ott követnénk el, ha ellenőrzés nélkül elfogadnánk az atomokra egy analógiás következtetést, ami esetleg hamis állítás. Nem az analógiát kell tehát izolálni a gondolkodásunkból, mert nélküle számos kapcsolat lehetősége eszünkbe sem jutna, hanem azt a magatartást, hogy egy analógiás következtetést minden további nélkül hamisnak fogadunk el.

Van azonban az analógiát kerülőknek egy tanuláspszichológiai érve is:

A hibás összefüggések óhatatlanul megerősödnek a mutatós felszínes összerendezés által. A hibák magyarázata szépen megbújik a szövegben. A második, ... olvasás után már csak a hibás soron fut át a diák szeme, a szöveg rejtve marad. A táblára írt sorban bevésést segítő megkülönböztető szerepeltetés ajánlott. A fenti példánál maradva:

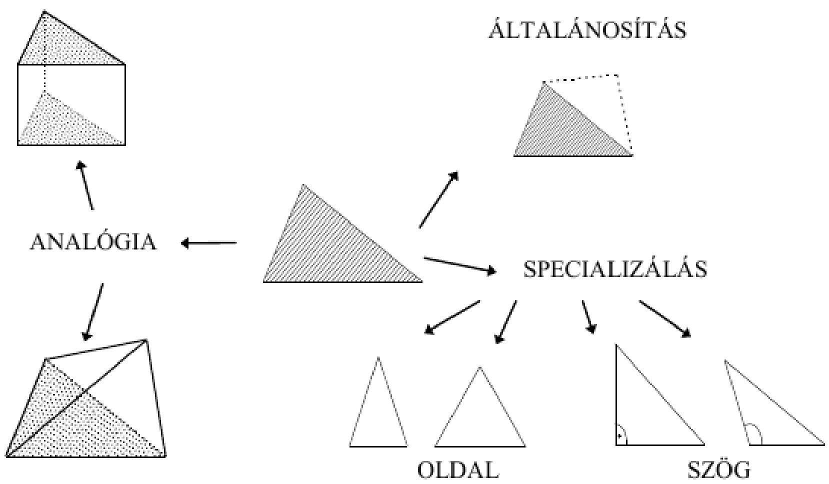
$$2(a+b) = 2a+2b \text{ de } (a+b)^2 = a^2+2ab+b^2 \text{ és } \sqrt{a+b} \text{ nem bontható fel}$$

De vajon mit is értsünk analógián? 1991-ben az első osztrák-magyar matematika-didaktikai találkozón megalakult egy analógia munkacsoport. Osztrák, magyar és német tanárok, matematikusok, matematika-didaktikával foglalkozó kutatók és pszichológusok, oktatásszervezésben tevékenykedő szakemberek 9 fős csapata határozta el, hogy példákat gyűjt sikeresen és kevésbé sikeresen alkalmazható analógián alapuló következtetésekre, keresi az analógiaépítés tanuláspszichológiailag megalapozott magyarázatát.

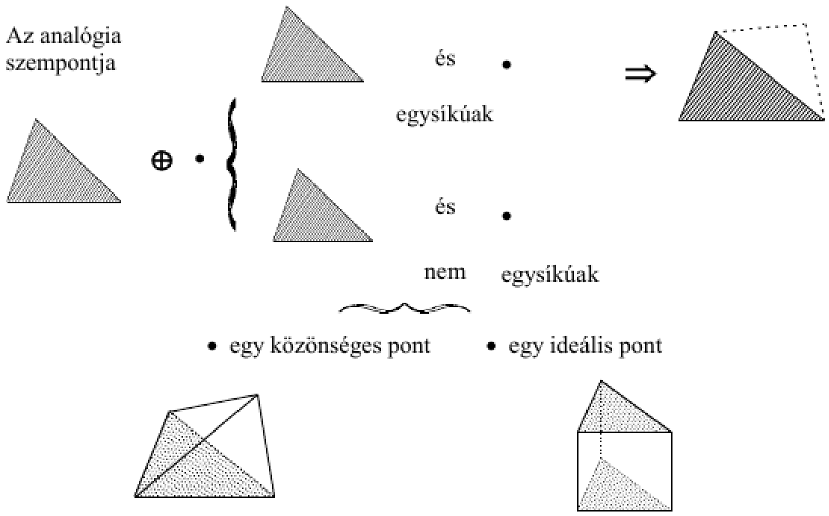
Az ANALÓGIA fogalmának megközelítése Pólya György nyomán

Pólya György két gondolkodási rendszert említ, amelyek a problémamegoldási folyamatban tudatosan alkalmazhatók a matematikai tartalom és matematikai gondolkodás közvetítésének eszközeként, az indukciót és az analógiát. Hatékonyságuk a matematikai modellalkotás és a matematika belső fejlődésével alátámasztható. Pólya György példái szépek, beleillenek a magyar matematikatanítás és tehetséggondozás hagyományaiba. A konkrét példákat olvasva mindenki úgy érzi, hogy érti mit takar például az „analógia". A tanítási-tanulási folyamat tudatos tervezésekor azonban ennél szabatosabb fogalomalkotásra van szükség, különösen, ha a matematikán kívüli ismeretszerzésre, a jelenségek matematikai modellezésére is ki akarjuk terjeszteni ezt a gondolkodásmódot.

A) PÓLYA PÉLDÁJA EUKLIDESZI ÉRTELEMBEN



B) UGYANAZON PÉLDA PROJEKTÍV ÉRTELEMBEN



Az A és B példákban azt kívánjuk érzékeltetni, hogy két dolog „analógiás” kapcsolata a szituációtól, tudásháttértől, az összevetés jellegétől, az összehasonlítás szempontjától függ. Az A) részben az összehasonlítás alaphalmaza az euklideszi tér. A háromszög analogonjai úgy keletkeznek, hogy hozzáveszünk egy, a háromszög síkján kívüli pontot, illetve a síkjával nem párhuzamos irányban eltoljuk. A két analogon a tetraéder és a háromszög alapú hasáb. Az analóg társ ugyan nem egyértelmű, de legalább „világos”, hogy mi a különbség az analogonkeresés, az általánosítás és a specializálás között. A B) pontban az ideális elemekkel bővített euklideszi tér (a projektív tér egy modellje) az alaphalmaz, a háromszög „rokonait” úgy kapjuk, hogy a háromszöglemez minden pontját összekötjük egy a háromszöglemezen kívüli ponttal. Ezáltal az általánosítás beleolvad az analogonkeresésbe, a kétféle korábbi analogon közötti különbség projektív értelemben eltűnik.

Az analógiaépítés tanuláspszichológiai megközelítése

Az analógia alapvető szerepét senki nem vitatja az alkalmazkodásban, megismerésben, de a részletes fogalmi tisztázás hiányzik. Ennek részben a tanulási folyamatok összetettsége, részben a túlságosan tág értelmezés az oka. Mi az analógiát a problémamegoldási stratégiák, gondolkodási struktúrák szempontjából vizsgáljuk. Az analógia fogalmának pontos meghatározása nélkül azonnal nehézségekbe ütközünk, amint konkrét példák helyett a különböző tudásterületek, élményanyagok közötti keresztkapcsolatok elemzésére, tudatos serkentésére törekszünk.

A tanár és diák ismeretei, a diák ismereteinek részterületei, stb. között sok-sok pozitív és negatív transzfert, analóg kapcsolatot lehet felfedezni. Az ismeretszerzés egyes szakaszaiban más és más lehet az egyezés mértéke az egyes tanulók, illetve a tanuló és a tanár számára. Gyakran alkalmazunk analóg meggondolásokat olyankor is, amikor egy (a tudomány, a tanár szempontjából) deduktív rendszer a tanulók számára analógiaként érzékeltethető. Beszélünk például a prototípus (pl. mintapélda) és a többi elem (pl.: gyakorló feladatok) közti analóg kapcsolatról. A prototípust a saját kategóriája jellegzetes képviselőjének tekintjük és a vizsgálatba bevont kör objektumain szerkezeti vagy funkcionális (esetleg részleges) egybeesést keresünk.

A matematika tanulását biztosan segítik (és nem kell attól tartani, hogy zavart keltenek) a Pólya által javasolt rendszerek közötti analógiák. Ezen a leszűkített területen az analógiát úgy tekinthetjük, mint egy ismert rendszernek egy részben ismeretlen rendszerre való „átültetését”, leképezését. A „felismert” kapcsolatokat kiterjesztjük (az ismertről az ismeretlenre vetítjük), ezáltal az ismeretlen rendszert „helytálló” és „nem helytálló” kapcsolatokkal ruházzuk fel. A részben ellenőrzött, részben rávetített kapcsolatok az ismeretlen rendszert heurisztikusan kezelhetővé teszik számunkra, hipotéziseket fogalmazhatunk meg, kidolgozhatjuk a célzott keresés és ellenőrzés stratégiáját.

Az itt célbavett analógiák alapja az „A viszonya B-hez olyan, mint C viszonya D-hez” séma (elsőrendű analógia), jelölésére elterjedt az A:B = C:B és az A:B::C:D szimbólum. Ezen a tetszetős egyszerű sémán belül azonban az egyes jelek a különböző konkrét esetekben sokféle tényleges tartalmat takarhatnak. A és B sokrétű kapcsolatban állhat egymással, ebből az összetartozásból, összerendezésből a helyzetnek és a szándéknak megfelelően valami, vagy valamik fontosabbá válnak. A és B „viszonya” egy halvány hasonlatosságérzettől egészen az összetartozás valamilyen elvont fogalmáig terjedhet.

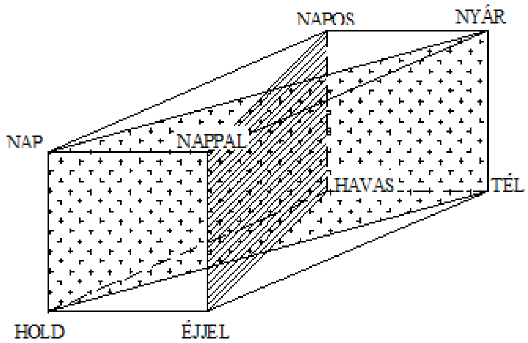
A fejlődési és intelligenciatesztek számos olyan feladványt tartalmaznak, amelyeket analógiaépítési és felismerési feladatnak tekinthetünk, mint például a

NAP : NAPPAL = HOLD : ... (I) vagy NAPOS : NYÁR = HAVAS: ... (II)

sémák kiegészítése. Vajon milyen gondolkodási stratégiát, járulékos ismereteket tételez fel egy ilyen feladat kitűzése? Valóban egyértelmű-e a megoldásuk?

Ha az A:B = C:B kapcsolatot matematikai arányosságként fogjuk fel, (amint azt az analógia szó jelentése sugallja), akkor a NAP : NAPPAL = HOLD : ... az aránypár átrendezésével nyert NAP : HOLD = NAPPAL : ... feladvány ugyanazt a megoldást kell, hogy szolgáltassa. Ez azonban a hagyományosan analógiának tekintett kapcsolatnak csak egy szűk körére teljesül.

Az (I) és (II) rendszereket egymással analógnak tekinthetjük, azaz az összevetés tagjai maguk is lehetnek analóg rendszerek. Az ilyeneket másodrendű analógiának nevezzük.

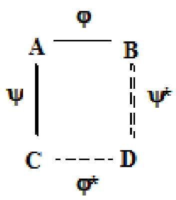


Ha feloldjuk a (I) és (II) analóg rendszereket, formálisan újabb „elsőrendű analógiákat” nyerhetünk azáltal, hogy a téglatest valamely élét (vagy lapátlóját) az egyik rendszernek, egy vele párhozamos élet (lapátlót) pedig a vele analóg rendszernek tekintünk. Azt persze nem tudhatjuk, hogy az így előálló analógiák értelmesek-e. A mi példánkon elvégzett próba mutatja, hogy a kiindulási rendszereinken belüli kapcsolatok nem egyenlő erősségűek. A kombinatorikus lehetőségek között adódnak „értelmes analógiák” még olyan estekben is, amikor a feltételezett kapcsolatok az eredeti rendszerben nem is szerepeltek (lapátlókat vetünk össze). Ugyanakkor találunk olyan esteket is, amikor az eredeti élek semmilyen használható kapcsolatot nem képviselnek.

NAP :	HOLD =	NAPPAL :	ÉJJEL	NAP :	NAPPAL =	HOLD :	...
NAP :	HOLD =	NYÁR :	TÉL	NAP :	NYÁR =	HOLD :	...
NAP :	NAPPAL =	NAPOS :	...	NAP :	NAPOS =	NAPPAL :	...
NAP :	HOLD =	NAPOS :	*HAVAS?*	NAP :	NAPOS =	HOLD :	...
NAPPAL :	ÉJJEL =	NYÁR :	TÉL	NAPPAL :	NYÁR =	ÉJJEL :	...
NAPPAL :	ÉJJEL =	NAPOS :	*HAVAS?*	NAPPAL :	NAPOS =	ÉJJEL :	...
NAPPAL :	ÉJJEL =	NAP :	HOLD	NAPPAL :	NAP =	ÉJJEL :	...
NAPOS :	HAVAS =	NYÁR :	TÉL	NAPOS :	NYÁR =	HAVAS :	...
NAP :	NAPOS =	ÉJJEL :	*TÉL?*	NAP :	ÉJJEL =	NAPOS :	...
...							

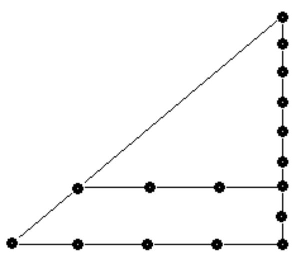
Az analógiaépítés matematikadidaktikai szempontból

Az összehasonlítás pontosabb leírását segíti, az analóg következtetés szerkezetét szemlélteti a következő diagram.



A, B és a köztük fennálló ϕ kapcsolatok(nak az összevetésnél számbavett része) alkotják az egyik rendszert; C, D és a részben ismeretlen ϕ^* kapcsolatok a másik rendszert. A két rendszer alkotóelemei közötti kapcsolatokat, vagy azoknak az összehasonlítás szempontjából lényeges részét ψ, illetve ψ^* jelzik. Az analóg következtetés a ψ és ψ^* kapcsolatok egyenlőségének feltételezése.

Az összevetés szempontjának megfogalmazása rendkívül fontos. Ennek hiányában igazából lehetetlen eldönteni, hogy egy analóg következtetés helyes, vagy helytelen. Vegyük például a „3 viszonya 6-hoz ugyanolyan, mint 4 viszonya x-hez” egyszerű feladatot. A $3 : 6 = 4 : x$ írásmód azt sugallja, hogy matematikai értelemben vett aránypárról van szó, ahol a leképezések arányt, osztást jelentenek. Ekkor a megoldás a „6 a 3 duplája, 4 megduplázva 8” okoskodás alapján $x = 8$.

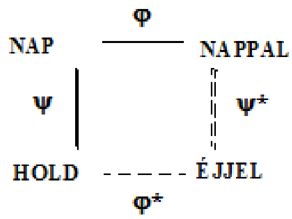


A kérdés vonatkozhat az ábrán látható $3a, 6b$ befogójú derékszögű háromszög nagyított képére, vagy annak a háromhatod értékű törtnek a nevezőjére, amelynek a számlálója 4.

A gondolatmenetet gyakran alkalmazzuk, de többnyire nem ilyen pontosan. A „3 viszonya 6-hoz ugyanolyan, mint 4 viszonya x-hez” szóbeli megjegyzés, vagy a $3 : 6 :: 4 : x$ alak nem egyértelműsíti a 3:6 kapcsolatot.

Teljesen jogos például a kapcsolat „6 hárommal több, mint 3” olvasata, amiből megoldásként 4 megnövelve 3-mal a 7 adódik. A tanítási gyakorlatban könnyű ilyen „félreértéseket” előidézni, hiszen egy ilyen egyszerű következtetést általában csak egy ujjmozdulattal jelzünk a táblai ábrán és a füzetbe egy mukk sem kerül.

Egy ausztriai és egy magyarországi tanítási kísérlet során kiderült, hogy az „A ugyanolyan viszonyban van B-vel, mint C a D-vel” analóg következtetés az egyértelműnek tekintett „NAP : NAPPAL mint HOLD : ...” tesztkérdésben sem nyilvánvaló. Még azok a kísérleti személyek is eltérően indokolnak, akik a feladat kitűzőjének szándéka szerinti (ÉJJEL) választ adják. Gyakori jelenség, hogy a párokat automatikusan átrendezhetőnek tekintik és az indoklás az átrendezett alakra vonatkozik.



Néhány indoklást idézünk:

- NAP és HOLD égitestek (ψ), NAPPAL és ÉJJEL napszakok (ψ^*). A Nap csak nappal látható tapasztalat alapján megelőlegezzük azt a megállapítást, hogy a Hold csak éjjel látható. Egyidejűség (ψ és ψ^* ugyanaz).
- NAP-HOLD és NAPPAL-ÉJJEL ellentétpárok.
- NAP és HOLD fényforrások NAPPAL, illetve ÉJJEL.

Az analóg következtetés eredményének értékelése ugyancsak szituációfüggő. (Vitatni akarjuk-e, hogy a Hold csak éjjel látható? Fényforrásnak akarjuk-e tekinteni a Holdat?)

A fogalomépítés és az analógia

Egy fogalom különböző reprezentációinak egységes fogalommá formálásánál, fogalmi rendszerek kialakításánál fontos szerepet játszanak az analógiák. Analógia útján tanulni azt jelenti, hogy egy új szituációban egy ismert, sikeresen megoldott „rokon” szituációt próbálunk felidézni, hogy az eredményes megoldási stratégiát rekonstruáljuk és a jelen helyzetre alkalmazzuk (asszimiláció).

Ha az ismert stratégia nem vezet eredményre, akkor újabb forrás után kell kutatni és kreatív módon újra kell szervezni az elemeket, kapcsolatokat és struktúrákat (akkomodáció).

A matematikai fogalomalkotás szempontjából nem valamilyen metafora, utalás játszik hasznos szerepet, hanem a rendszerek közötti analógia.

Példa: „Magyarország és Budapest viszonya olyan, mint Svájc és ... viszonya" Ebben az összehasonlításban az egyik ember azt tartja fontosnak, hogy Budapest Magyarország fővárosa, és Bernre gondol, a másik Budapestet Magyarország legnagyobb városaként ismeri és Zürich jut eszébe.

Az analógia a fogalomalkotás majd minden fázisában hasznos, néha nélkülözhetetlen:

- Összehasonlítás, közös vonások felismerése
- Ismert rendszerektől való elhatárolás, ellentétképzés (diszkrimináció)
- A különböző reprezentációs síkok (enaktív, ikonikus, szimbolikus) közötti transzfer (a függvény tulajdonságainak viszonya a grafikon tulajdonságaihoz)
- Asszimiláció, extenzív kategóriabővítés, ismert elemek azonos szinten való összekapcsolása, rendszerré szervezése.
- Akkomodáció, intenzív rendszerbővítés – a rendszer újrastrukturálása.

Vannak olyan analógiák, amelyek a dolog lényegi részét ragadják meg, majd a tudásháló fejlődésével erősebb kapcsolathoz, önálló felső fogalomhoz vezetnek (pl. vektor az irányított szakaszok ekvivalenciája alapján) és ezáltal el is vesztik az analógia jelleget. De vannak lényegi kapcsolatot jelző analógiák között olyanok is, amelyek az idők végezetéig különböző rendszerek strukturális kapcsolataira mutatnak rá és analógiák maradnak.

Mindegyik típusnak nagyon nagy a jelentősége a gyermeki megismerés szempontjából, mert az ismeretszerzés egy bizonyos fokán nincs a gyermeknek strukturált előismerete, hanem éppen az analógiák segítségével strukturálja. Nem axiomatikusan definiált, hanem lokálisan rendezett fogalmakkal dolgozik. Lehetne ugyan az iskolában is az euklideszi geometria szemléletes fogalmai helyett $\Re^n$ 0-, 1-, 2-, 3-dimenziós lineáris altereiként definiálni pontot, az egyenest, a síkot, a teret, csak ez ellentétes számos tanuláspszichológiai és pedagógiai elvvel (meg is próbálták, csak kudarcba fulladt).

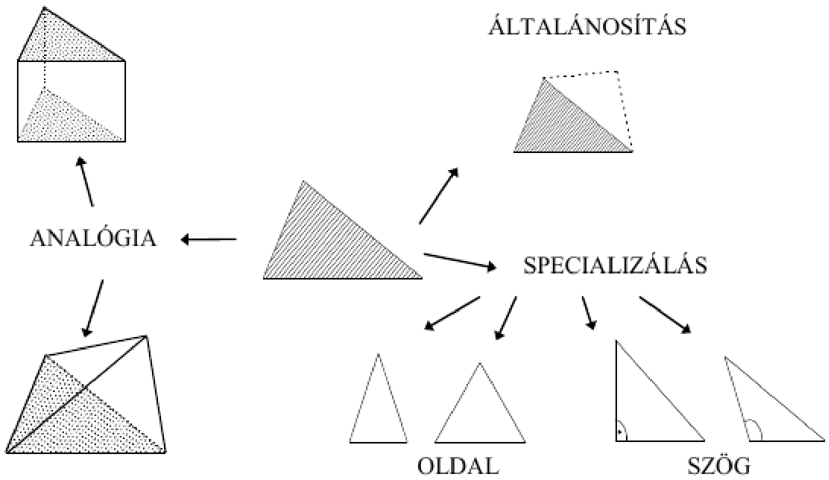
Analógiák az euklideszi geometriában

Pólya Györgytől idézzük a következő szép példákat:

„ ... egy háromszög a síkban, és egy tetraéder a térben analóg. A síkban két egyenes nem zárhat be véges alakzatot, de három már igen, egy háromszöget. A térben három sík nem zárhat be korlátos alakzatot, de négy már igen, egy tetraédert. A háromszögnek a síkhoz és a tetraédernek a térhez való viszonya ugyanaz, amennyiben mindegyiket a legkevesebb számú megfelelő elem zárja be. (A síkbeli egyenes térbeli megfelelőjének a síkot tekintjük.) A görög eredetű „analógia" szó egyik jelentése arány. És a 6 és 9 csakugyan analóg 10 és 15-höz, mert arányuk megegyezik:

$$6 : 9 = 10 : 15$$

Az arányosság, vagy a megfelelő részek arányainak megegyezése, amelyet geometriailag hasonló alakzatoknál tapasztalhatunk, az analógiának nagyon szuggesztív esete. Íme egy másik példa. Egy háromszöget és egy gúlát analóg alakzatnak tekinthetünk. Vegyünk egy egyenes szakaszt, illetve egy sokszöget. Kössük össze a szakasz minden pontját egy, a szakasz egyenesén kívül levő ponttal, így egy háromszöget kapunk. Ha pedig a sokszög síkján kívül rögzítünk egy pontot, és az adott sokszög minden pontját összekötjük ezzel a ponttal, akkor egy gúlát kapunk. Ugyanilyen módon vizsgálhatunk egy paralelogrammát és egy hasábot, mint analóg alakzatokat. Valóban, mozgassuk a szakaszt illetve a sokszöget önmagával párhuzamosan, olyan irányban természetesen, hogy a szakasz egyeneséből, illetve a sokszög síkjából kilépjünk, így egy paralelogrammát, illetve egy hasábot kapunk. Csábító gondolat, hogy az előbbi síkbeli és térbeli alakzatok közötti kapcsolatot aránnyal szemléltessük. Ha nem állunk ellen a csábításnak, a következő ábrát kapjuk. Itt a : és = jeleket nem a közönséges, megszökött értelemben kell tekinteni, a görög analógia szó eredei jelentése is változott az idők során: „arányosságról" „analógiára". Ez utóbbi példa még más szempontból is tanulságos. Az analógia, különösen a nem teljesen meghatározott analógia, nem feltétlen egyértelmű. Így például a sík- és térgeometriai alakzatokat összehasonlítva, előzőleg azt találtuk, hogy a háromszög és a tetraéder, majd a háromszög és a gúla analóg alakzatok. Mindkét analógia indokolt, a maga helyén értékes. Nincs egyetlen, kitüntetett analógia. A következő ábra azt szemlélteti, hogy egy háromszögből kiindulva általánosítással sokszöghöz, specializálással szabályos háromszöghöz, illetve analógiával különböző térbeli alakzatok juthatunk."



Saját példáinkat szisztematikusan elemezzük, hogy a kapcsolatok mélységére is rámutassunk. Először olyan analógiákat választunk, amelyek az egyenes, a sík és a tér közötti strukturális analógiára mutatnak rá. Ezek a geometriai térszemlélet fejlesztésében is segíthetnek. A példák általános és középiskolában egyaránt felhasználhatók. Némelyik olyan, hogy közvetlenül inkább tanári háttérismeretként fontos, többségük azonban közvetlenül bevihető a tanítási órákra.

A pont, az egyenes, a sík és a tér dimenziója

A geometria alapalakzatai (pont, egyenes, sík, tér; félegyenes, félsík, féltér) között sokféle analógiát találhatunk, amelyeket érdemes megfogalmazni, hiszen nem eseti párhuzamról van szó, hanem a geometria építkezésére mutatnak rá. Ezek alapja a szemléletes geometriai axiómákban fogalmazódnak meg (mi a Hajós-féle felépítés axiómáira támaszkodunk):

- egy pontnak nincs kiterjedése – 0 dimenziós
- két különböző pont pontosan egy egyenest határoz meg, egy kiterjedése van – 1 dimenziós;
- három nem egy egyenesre illeszkedő pont egy síkot határoz meg, két kiterjedése van – 2 dimenziós;
- a térnek van négy nem egy síkra illeszkedő pontja, három kiterjedése van – 3 dimenziós.

Az állítások struktúrája lényegében megegyezik, a különbség a kiemelt számokban van, amelyek a szóbanforgó alakzat kiterjedését, szabadsági fokát, dimenzióját adják meg. Az analógia abban írható le, hogy egy független pont hozzávétele eggyel növeli a dimenziót. Ezzel megnyitjuk az analógiás gondolkodást a 4., ... dimenzió felé, és kifejezzük azt a tényt is, hogy pl. az egyenes a síkban és a térben (is) van.

Pont, egyenes, sík, tér az elválasztási axiómákban

Az elválasztási axiómák képezik az alapját a határpont, határvonal, határfelület fogalmaknak. Ezekben fogalmazódik meg az alapalakzatok konvexitása is.

A síkra vonatkozó elválasztási axióma egy átfogalmazása:

- Egy egyenes a síkot két félsíkra bontja. Ez a félsíkok határegyenese.
- Két ugyanarra a félsíkra illeszkedő pont összekötő szakaszának minden pontja ugyanahhoz a félsíkhoz tartozik.
- A határegyenes elválasztja a két félsík pontjait, mivel két nem ugyanarra a félsíkra illeszkedő pont összekötő szakasza metszi, azaz belső pontként tartalmazza a határalakzat valamely pontját.

2.14. Feladat: *Fogalmazza meg az egyenesre illetve térre vonatkozó analóg axiómákat!*

MEGJEGYZÉSEK A FELADATHOZ:

Egy pont az egyenest két félegyenesre bontja. Ez a félegyenesek határpontja.	Egy egyenes a síkot két félsíkra bontja. Ez a félsíkok határegyenese.	Egy sík a teret két féltérre bontja. Ez a félterek határsíkja.

A következő mondatokban a félegyenes, félsík, féltér konvexitása fogalmazódik meg:

Két ugyanarra a félegyenesre illeszkedő pontot összekötő szakasz minden pontja ugyanahhoz a félegyeneshez tartozik.	Két ugyanarra a félsíkra illeszkedő pontot összekötő szakasz minden pontja ugyanahhoz a félsíkhoz tartozik.	Két ugyanarra a féltérre illeszkedő pontot összekötő szakasz minden pontja ugyanahhoz a féltérhez tartozik.

A következő mondatok a határ és az elválasztás fogalmakat alapozzák meg:

A határpont elválasztja a két félegyenes pontjait, mivel két nem ugyanarra a félegyenesre illeszkedő pont összekötő szakasza metszi, azaz belső pontként tartalmazza a határalakzat valamely pontját.	A határegyenes elválasztja a két félsík pontjait, mivel két nem ugyanarra a félsíkra illeszkedő pont összekötő szakasza metszi, azaz belső pontként tartalmazza a határalakzat valamely pontját.	A határegyenes elválasztja a két félsík pontjait, mivel két nem ugyanarra a féltérre illeszkedő pont összekötő szakasza metszi, azaz belső pontként tartalmazza a határalakzat valamely pontját.

A ponttól mért távolság

Adott ponttól adott távolságnál nem messzebb levő pontok összessége

- az egyenesen – egy dimenzióban – egy szakasz, amelynek az adott pont a felezőpontja. (Ez az 1- dimenziós kör éppen az analízisből jól ismert zárt intervallum, ϵ vagy δ ... sugarú zárt környezet.
- a síkon – két dimenzióban – egy körlap, amelynek a középpontja az adott pont. (2-dimenziós zárt környezet)
- a térben – három dimenzióban – egy gömb, amelynek a középpontja az adott pont. (3-dimenziós zárt környezet)

2.15. Feladat: *Mi a határa a fenti alakzatoknak?*

MEGJEGYZÉSEK A FELADATHOZ:

A fenti alakzatok határa a középponttól adott távolságra lévő pontok halmaza. Ez az egyenesen egy pontpár; a síkon egy körvonal; a térben egy gömbfelület.

Itt felvetődhet a dimenziószám nem egyszerű kérdése is, hiszen a gömbfelület térbeli alakzat, mégis 2 dimenziós. Hasonlóan a körvonal síkbeli alakzat, mégis 1 dimenziós, a pontpár pedig 0 dimenziós.

A szakasz, a kör és a gömb nagyon sok alapvető geometriai fogalom megalkotásában segít. Használhatjuk őket például a „nem végtelenbe nyúló” tulajdonság – a korlátosság – prototípusaiként.

2.16. Feladat: *Mi a határa a fenti alakzatoknak?*

MEGJEGYZÉSEK A FELADATHOZ:

Egy egyenes egy alakzata korlátos, ha van olyan szakasz, ami tartalmazza.

Egy sík egy alakzata korlátos, ha van olyan kör, ami tartalmazza.

A tér egy alakzata korlátos, ha van olyan gömb, ami tartalmazza. (Gömbbel persze mérhetjük 1- és 2-dimenziós alakzat korlátosságát is.)

Egy adott pont körüli adott sugarú környezet egyszerre jelentheti a szakasz, kör, gömb bármelyikét. A környezet általános fogalma segíthet abban is, hogy a vonal és a felület szavak tartalmát jobban lássuk. Ehhez azonban először a határ és elválasztás fogalmának tisztázására van szükség.

A határ és az elválasztás általános fogalma

Középiskolában, jó osztályban, fakultáción érdemes foglalkozni azzal a kérdéskörrel, mit értsünk egy alakzat belső vagy határpontja alatt, mi az alakzatra nézve külső pont.

Ezekről a fogalmakról a tanulóknak elég határozott, szemléleten alapuló elképzelésük van, ami általában meglehetősen pontatlan, de az iskolai anyag megértésében ez nem okoz konfliktust. A kérdéskör – tanári vezetéssel – tisztázható és alkalmas annak megmutatására, átélésére is, hogy mit jelent egy definíció megalkotása.

2.17. Feladat: *Adott egy síkbeli ponthalmaz, nevezzük A-nak. Mit tekintsünk az A alakzatra nézve határ-, belső, illetve külső pontnak?*

MEGJEGYZÉSEK A FELADATHOZ:

A külső pont olyan pont, amelynek van olyan környezete, amelynek egyetlen pontja sem tartozik hozzá a ponthalmazhoz. (elválasztható az alakzattól)

A belső pont olyan pont, amelynek van olyan környezete, amelynek minden pontja hozzátartozik a ponthalmazhoz. (nem választható el az alakzattól)

A határpont olyan pont, amelynek minden környezetében vannak az alakzathoz tartozó, és az alakzathoz hozzá nem tartozó pontjai is. (nem választható el az alakzattól)

2.18. Feladat: *Van-e olyan alakzat,*

a) amelynek nincsenek határpontjai?

b) amely nem tartalmazza a határpontjait?

c) amelynek nincsenek belső pontjai?

MEGJEGYZÉSEK A FELADATHOZ:

a)-hoz: Ilyen alakzatok például 1 dimenzióban az egyenes, 2 dimenzióban a sík, 3 dimenzióban a tér. A dimenzió nem tudálékosságból, vagy szószaporításból szerepel! Például az egyenesnek 2- és 3-dimenziós értelemben csak határpontjai vannak.

b)-hez: Ilyen alakzat például az olyan pontok halmaza, amelyek egy adott ponttól egy adott távolságnál közelebb vannak. Ez lehet egy nyilt intervallum 1 dimenzióban, nyitott kör 2 dimenzióban, nyitott gömb 3 dimenzióban. Ezeknek vannak határpontjai, csak nem tartoznak hozzá az alakzathoz. Magasabb dimenzióban viszont mindegyik pontjuk határpont.

c)-hez: Ilyen alakzat például a síkon egy egyenes, vagy egy körvonal.

Az összefüggőség fogalmához

Az alakzatok egy másik fontos, és könnyen definiálható tulajdonsága az összefüggőség.

2.19. Feladat: *Mint jelent az, hogy egy alakzat összefüggő?*

MEGJEGYZÉSEK A FELADATHOZ:

Ha egy alakzat olyan, hogy bármely két pontjának összekötő szakaszát is tartalmazza, akkor biztosan összefüggő, sőt konvex, hiszen konkáv alakzatokra ez nem teljesül. A konvex alakzatok speciális összefüggő alakzatok.

Azonban konkáv alakzat is lehet összefüggő, ezt jellemezhetjük úgy, hogy bármely pontjából bármely pontjába eljuthatunk szakaszok sorozatán keresztül, azaz, bármely két pontjához található őket összekötő töröttvonal, amely az alakzathoz tartozik.

A tartomány fogalmához

A tartomány szó többféle jelentésváltozáson ment át (közigazgatási és informatikai jelentés). Az iskolai matematika több területén is meghonosodott pl. értelmezési tartomány, szögtartomány, ... A matematikában a topológia használja legtöbbet, ott összefüggő nyílt (minden pontja belső pont) halmazt jelent. Ebben az értelemben a szögvonal nem tartozik a szögtartományhoz és számos értelmezési tartománynak nevezett halmaz nem tartomány.

Mi tartomány alatt egy csupa belső pontokból álló összefüggő ponthalmazt értünk.

A belső pont, külső pont, határpont fogalmak hozzásegítenek a vonal és felület, síkidom vagy síkbeli tartomány és térbeli test vagy térbeli tartomány szemléletes fogalmának pontosításához.

Egy síkbeli tartomány – tehát összefüggő és csupa belső pontokból álló, kétdimenziós ponthalmaz –határvonalának nevezhetjük határpontjainak halmazát.

Egy térbeli tartomány határfelületének nevezhetjük határpontjainak halmazát.

Az alapalakzatokra az axiómákban megfogalmazott elválasztási tulajdonságot általánosíthatjuk az így definiált határvonalra, határfelületre:

Egy síkbeli tartomány határvonala a síkot két tartományra bontja. Ez a tartományok határa.

Egy síkbeli tartomány határvonala elválasztja a két tartomány pontjait, mivel bármely két nem ugyanarra a tartományra illeszkedő pontot összekötő szakasz metszi, azaz belső pontként tartalmazza a határvonal valamely pontját.

2.20. Feladat: *Fogalmazza meg ezt a tulajdonságot felületekre is.*

Különböző dimenziójú alakzatok tulajdonságai közötti analógiák

Pólya György klasszikus példája a síkon, illetve a térben keletkező tartományok analógia segítségével való összeszámolására: A síkon legalább 3, a térben legalább 4 általános helyzetű pont kell ahhoz, hogy az őket összekötő egyenesek, illetve síkok 2-, illetve 3-dimenziós tartományt határozzanak meg. De ha már előállt egy tartomány, akkor mindjárt több is keletkezik.

2.21. Feladat: *Hány 2-dimenziós tartományt határoz meg 3 általános helyzetű pont a síkon és hány 3-dimenziós tartományt hoz létre 4 általános helyzetű sík a térben?*

MEGJEGYZÉSEK A FELADATHOZ:

A síkon keletkező tartományokat összeszámolhatjuk aszerint, hogy hány dimenziós szomszédságban állnak a keletkező korlátos tartománnyal, a háromszöggel. Van 3 szomszéd az oldalak (az oldalegyenesen 1-dimenziós tartomány) mentén és három csúcsszomszéd (0 dimenziós). Összesen 1+3+3=7 tartomány. Ezek különbözőek, mert legalább egy egyenes elválasztja őket.

A térben is keletkezik egy korlátos tartomány (tetraéder), ennek 4 lap-, 6 él- és 4 csúcsmenti szomszédja van: 1+4+6+4=15. Ezek is különbözőek, mert legalább egy sík elválasztja őket.

Ha már az elválasztásnál vagyunk, közvetlenül ennek alapján is számolhatnánk. Egy síkbeli tartományt legfeljebb 2 egyenes választhat el a korlátos tartománytól:

0 egyenes választja el: 1 ilyen van, éppen a korlátos tartomány.

1 egyenes választja el: 3 ilyen van, az oldalszomszédok.

2 egyenes választja el: 3 ilyen van, a csúcsbeli szomszédok.

A térben

0 sík választja el: 1 ilyen van, éppen a korlátos tartomány a tetraéder.

1 sík választja el: 4 ilyen van, a lapmenti szomszédok.

2 sík választja el: 6 ilyen van, az élmenti szomszédok.

2 sík választja el: 4 ilyen van, a csúcsbeli szomszédok.

Innen már csak a fantáziánktól és a türelmünktől függ, hogy még hány dimenziót próbálunk az analógia segítségével felfedezni, felfedeztetni.

2.22. Feladat: *Hány metszéspontja van maximálisan*
a) n egyenesnek a síkon;
b) n síknak a térben?

MEGJEGYZÉSEK A FELADATHOZ:
A legtöbb metszéspontot akkor kapjuk, ha bármely két egyenes metszi egymást és ezek különböző pontok. A metszéspontok maximális száma tehát $\binom{n}{2}$ és ez meg is valósítható, illetve ha bármely három sík egy pontban (én nem egyenesben) metszi egymást és ezek különböző pontok. A metszéspontok maximális száma tehát $\binom{n}{3}$. Ez a maximális szám el is érhető, de ennek belátásához már a sík és a tér különbözőségét is figyelembe kell venni (pl. 3 különböző síknak nemcsak közös pontja, hanem közös egyenese is lehet). Ha konstruálni akarunk maximális számú pontot előállító síkokat, akkor a síkok párhuzamosságán kívül a metszésvonalak párhuzamosságát is el kell kerülni (ugyanarra a síkra merőleges három sík).

2.23. Feladat: *Hány tartományra bontja maximálisan*
a) n különböző pont az egyenest;
b) n egyenes a síkot;
c) n sík a teret?

MEGJEGYZÉSEK A FELADATHOZ:
Az a) feladathoz
Egy pont 2 tartományra bont, a következő pont valamelyik tartományba esik, amit felbont, így minden pont egy-egy újabb tartományt hoz be. 1 volt az elején, a végére n+1 keletkezik.

A b) feladathoz
Akkor keletkezik legtöbb tartomány, ha bármely két egyenes különböző pontban metszi egymást.

0. egyenes: Kezdetben van 1 tartomány, az egész sík: 1 tartomány van.

1. egyenes: Az 1. egyenes ezt a számot megnöveli 1-gyel: +1 tartomány keletkezett.

2. egyenes: Ha a 2. egyenes metszi az 1.-t, akkor két új tartományt hoz létre: max. + 2 tartomány keletkezhet.

k. ($k > 2$) egyenes: A 3. egyenestől kezdve végig érvényes, hogy ha egy újabb egyenes hozzávételekor az új egyenes minden régit metsz és nem megy át egyik meglevő metszéspONTON sem, akkor a már letett mondjuk $k-1$ egyenes a k-adik egyenest maximálisan $k-1$ pontban metszi, ami az a) pont értelmében k darab 1-dimenziós tartományt hoz létre, amelyek mindegyike egy-egy 2-dimenziós tartományt vág ketté. A k-adik egyenes hozzávétele tehát k-val növeli a 2-dimenziós tartományok számát: max. + k darab tartomány keletkezett.

A 2-dimenziós tartományok száma maximálisan
0 darab egyenes esetén 1.
1 darab egyenes esetén $1 + 1 = 2$.
2 darab egyenes esetén max. $1 + 1 + 2 = 4$.
3 darab egyenes esetén max. $1 + 1 + 2 + 3 = 7$.
$n > 2$ darab egyenes esetén a keletkező tartományok maximális száma

$$1 + (1 + 2 + 3 + ... + n) = 1 + \frac{n \cdot (n+1)}{2} = 1 + \binom{n+1}{2}.$$

Nem csupán jó felső becslést adtunk, hanem azt is beláttuk, hogy elérhető.

A c) feladathoz

Már sejthető a stratégia, amely a darabszám és a dimenzió szerint is folytatható. Akkor keletkezik legtöbb tartomány, ha bármely 3 sík egyetlen, a többitől különböző pontban metszi egymást. Az előző feladatban beláttuk, hogy ez megvalósítható.

0. sík: Kezdetben van 1 tartomány, az egész tér: 1 tartomány van.

1. sík: Az 1. sík ezt a számot megnöveli 1-gyel: +1 tartomány keletkezik.

2. sík: Ha a 2. sík metszi az 1.-t, akkor 2 új tartományt hoz létre: max. + 2 tartomány keletkezik.

3. sík: Ha a 3. sík egyetlen pontban metszi az 1. és a 2. metszésvonalát, akkor 4 új tartományt hoz létre: max. + 4 tartomány keletkezik.

k. ($k > 3$) sík: A 4. síktól kezdve végig érvényes, hogy ha egy újabb sík hozzávételekor az új sík a régiek közül bármely kettőt egyetlen pontban metsz és nem megy át egyik meglevő metszésponton sem, akkor a már elhelyezett mondjuk $k-1$ sík a k-adik síkot maximálisan $k-1$ egyenesben metszi, ami az b) pont értelmében $1 + \frac{(k-1)\cdot(k)}{2}$ darab 2-dimenziós tartományt hoz létre, amelyek mindegyike egy-egy 3-dimenziós tartományt vág ketté. A k-adik sík hozzávétele tehát maximálisan $1 + \frac{(k-1)\cdot(k)}{2}$-val növeli a 3-dimenziós tartományok számát.

A 3-dimenziós tartományok száma maximálisan

0 darab sík esetén 1.

1 darab sík esetén 1 + 1 = 2.

2 darab sík esetén max. 1 + 1 + 2 = 4.

3 darab sík esetén max. 1 + 1 + 2 + 4 = 8.

$n > 3$ darab sík esetén a keletkező tartományok maximális száma

$$1 + 1 + 2 + 4 + 1 + \frac{(4-1)\cdot(4)}{2} + ... + 1 + \frac{(n-1)\cdot(n)}{2}.$$

Ezt az összeget is lehet szebb alakban írni, ha összegyűjtjük az $n+1$ darab 1-est és felhasználjuk, hogy a

$$1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + 3 \cdot 4 + ... + (n-1) \cdot n = 1 - 1 + 2^2 - 2 + 3^2 - 3 + ... + n^2 - n =$$
$$= \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} - \frac{n(n+1)}{2} = \frac{(n+1)n(n-1)}{3}.$$

Nem csupán jó felső becslést adtunk, hanem azt is beláttuk, hogy $n > 3$ esetén az

$$n + 1 + \frac{1}{2} \cdot \frac{(n+1)n(n-1)}{3} = n + 1 + \binom{n+1}{3}$$

maximum (elérhető).

A képleteinket kipróbálhatjuk 3 egyenes, illetve 4 sík esetére, hiszen azt az eredményt a mostani meggondolástól függetlenül nyertük.

A tanulókkal a feladat megoldását érdemes próbálgatással kezdeni, megszámolni a keletkezett részeket $n = 1, 2, \cdots$ esetén. A kapott adatokat táblázatba foglalva összefüggéseket fedeztethetünk fel, amelyek hozzásegíthetnek az általános megoldáshoz és esetleg további általánosításhoz.

A táblázatban szereplő eredmények binomiális együtthatóval való felírása világosan mutatja a dimenzióval való kapcsolatot. Ezeket a számokat meg is vastagítottuk. Ezeket az eredmény értékelésekor is be lehet írni.

A feladat külön szépsége, hogy a megoldásban összekapcsolódik az indukció és az analógia. Az egyes részfeladatok megoldása indukciós. Magasabb dimenzióban felhasználjuk az alacsonyabb dimenzióban kapott eredményt és az 1-, 2-, illetve 3-dimenzióban alkalmazott indukció analóg egymással annyira, hogy megoldási stratégia válhat belőle (egyet hozzáveszek és azon belül már kiismerem magam). Az indukció hátterében kombinatorikai meggondolás áll, amelyben az esetek megkülönböztetésének háttere az adott dimenzióra vonatkozó elválasztási axióma.

Szögtartomány és síksáv térbeli analogonjai

A síkban keletkező nem korlátos tartományok a közül a szögtartományok mellett a sávokról is láttuk, hogy érdemes velük alaposabban foglalkozni az iskolában.

A térben, síkok által határolt részek még kevesebb időt és figyelmet kapnak. Ennek oka lehet a téma nehézsége, vagy a térgeometriára jutó kevés idő (amit inkább számítási feladatok

	n pont az egyenesen	n egyenes a síkon	n pont a térben
n	**1**-dim. tartományok száma	**2**-dim. tartományok száma	**3**-dim. tartományok száma
0	1	1	1
1	2	$2 = 1 + 1$	$2 = 1 + 1$
2	$3 = 2 + 1$	$4 = 2 + 2$	$4 = 2 + 2$
3	$4 = 3 + 1$	$7 = 4 + 3 = 1 + \frac{3(3+1)}{2}$	$8 = 4 + 4$
4	$5 = 4 + 1$	$11 = 7 + 4 = 1 + \frac{4(4+1)}{2}$	$15 = 8 + 7 = 8 + \left(1 + \frac{3(3+1)}{2}\right)$
...	....	....	....
		ha $n \geq 2$	**ha $n \geq 3$**
n	$n + 1$	$1 + \frac{n(n+1)}{2}$	$8 + \left(1 + \frac{3\cdot 4}{2}\right) + \ldots + \left(1 + \frac{(n-1)n}{2}\right)$
	$\binom{n+1}{\mathbf{1}}$	$1 + \binom{n+1}{\mathbf{2}} = \binom{n+1}{\mathbf{0}} + \binom{n+1}{\mathbf{2}}$	$\mathrm{n} + 1 + \binom{n+1}{\mathbf{3}} = \binom{n+1}{\mathbf{1}} + \binom{n+1}{\mathbf{3}}$

megoldására használnak). Azt gondoljuk, hogy a térbeli fogalmak gondos megalapozására fordított idő megtérül, a geometriai számítások tanítása sikeresebb lesz tőle. Az időhiány ellen tudásszervezéssel lehet sikeresen küzdeni, és ebben a tér legalapvetőbb nem korlátos alakzatainak tanításakor is segít az analógia.

2.24. Feladat: *Milyen alakzatokat kaphatunk két féltér metszeteként?*

MEGJEGYZÉSEK A FELADATHOZ:
A metszetalakzatokat érdemes a féltereket határoló síkok helyzete szerint vizsgálni. Amennyiben a félterek határoló síkjai párhuzamosak, akkor két féltér metszete lehet üres, egy újabb féltér, vagy egy *térbeli sáv.*

Ha a féltereket határoló síkok metszik egymást, (de nem esnek egybe), akkor a két féltér metszete egy konvex lapszögtartományt határoz meg.

A következő táblázat jól mutatja a sík és a tér közötti analógiát a sávok és szögtartományok kapcsán.

A sík és a tér kapcsolatánál a különbségekre és azok kezelésére is érdemes kitérni. A térben egyszerre vannak jelen a 2-dimenziós és a 3-dimenziós szögtartományok. Attól, hogy egy 2-dimenziós alakzat valamilyen módon egy 3-dimenziós alakzathoz tartozik, még ugyanúgy kezeljük őket, mint a síkban, csak éppen a nevével is utalunk erre a beágyazott kapcsolatra: pl. egy poliéder síklapján vagy síkmetszetén levő kétdimenziós szögtartományt élszögnek nevezzük. A tér gazdagságát mutatja, hogy egy sík és egy egyenes *hajlásszöge* is fellép, beszélhetünk egy

Két **félsík** metszete, ha **határegyenesei** párhuzamosak, a félsíkok irányától függően • üres, • egy **félsík**, • egy **sáv**.	Két **féltér** metszete, amelyek **határsíkjai** párhuzamosak, a félterek irányától függően • üres, • egy **féltér**, • egy **térbeli sáv**, egy **réteg**.
Két olyan nyílt **félsík** metszete, amelyek **határegyenesei** metszik egymást egy konvex **szögtartomány**.	Két olyan nyílt **féltér** metszete, amelyek **határsíkjai** metszik egymást egy konvex **lapszögtartomány**.
Két (különböző) közös **kezdőpontú félegyenes** segítségével 3 osztályra bonthatjuk a **sík** pontjait: két **szögtartományra és a határvonalra.** Az osztályok közül legalább az egyik konvex (ha a **félegyenesek egyenessé** egészíti ki egymást, akkor mindhárom konvex).	Két (különböző) közös **határegyenesű félsík** segítségével 3 osztályra bonthatjuk a **tér** pontjait: két **lapszögtartományra és a határfelületre.** Az osztályok közül legalább az egyik konvex (ha a két **félsík** egy **síkká** egészíti ki egymást, akkor mindhárom konvex).

él és egy lap által *bezárt* szögről is, de két egyenes hajlásszöge is összetettebb, hiszen kitérő egyenesek is léteznek. Ezek fogalmilag az iskolai térgeometria legnehezebb részéhez tartoznak.

Találkoztunk már ilyesmivel, amikor alakzatok (pl. pont és kör) távolságát kellett definiálni.

Például egy sík és a sík egy pontjából induló félegyenes uniója valódi térbeli alakzat, jellemezni akarjuk a félegyenesnek a síkkal bezárt szögét. Olyan 3-dimenziós szögtartomány nincs, ami ezt jellemezné, 2-dimenziós meg nagyon is sok van. (Tekintsünk most el a merőleges állástól, mert azt a szöget könnyebb értelmezni.) A sík egyenesei és a félegyenes tartóegyenese között értelmeztük síkbeli értelemben hajlásszöget, csak ebből végtelen sok van. Ezek közül – a távolság definiálásához hasonlóan – a legkisebbet választjuk *az egyenes és a sík hajlásszögének*. Külön szépsége ennek az elvnek, hogy ezt a legkisebb szöget éppen a síkra vetett merőleges vetületével zárja be az egyenes.

A nem helytálló analógia, a túláltalánosítás elkerülése érdekében meg kell említeni, hogy két sík hajlásszögét nem a minimum-elv tünteti ki: míg két halmaz távolságánál az első halmaz minden pontjának a második halmaztól mért távolságai közül a legkisebbet választjuk, nem tehetjük, hogy az egyik sík összes egyenesének a másik síkkal bezárt hajlásszögei (minimumok a másik sík egyeneseivel bezárt szögekre nézve) a legkisebbet választjuk, mert ez nem a szöget, hanem a metszés tényét jellemezné minden metsző síkpár esetében. (A két sík metszésvonalának saját magával bezárt hajlásszöge $0°$.) A definíció szerint a két sík metszésvonalának tetszőleges pontjában a két sík mindegyikén belül merőlegest állítunk a metszésvonalra. Két metsző sík hajlásszögén az így kapott két egyenes hajlásszögét értjük. Ez azonban az egyenesenként definiált hajlásszögek maximuma: „Ha két egymást metsző sík egyikében egy egyenest veszünk fel, akkor ennek a másik síkkal alkotott hajlásszöge a két sík hajlásszögénél nagyobb nem lehet, és azzal egyenlő is csak akkor, ha a metszésvonalra merőleges egyenest vettünk fel."

A síkbeli szögtartománynak más tartomány is megfelelhet a térben

Egy poliéder csúcsában (vagy általában három olyan féltér metszeteként, amelyek határsíkjai közös ponttal igen, de közös egyenessel nem rendelkeznek) keletkeznek olyan 3-dimenziós tartományok, amelyeket tekinthetünk a síkbeli szögtartományokkal analóg térbeli alakzatnak is, ezek a szöglettartományok (szögletek, térszögek). Ezeknek a mérésével az iskola egyáltalán nem foglalkozik, sőt sok esetben említés nélkül maradnak. Pedig nagyon is jelen vannak akkor, amikor például hasábokkal, gúlákkal kapcsolatos feladatokat oldunk meg az iskolában, és talán sok gyerekben felmerül, hogy az egyszerű poliéderek csúcsainál keletkező szöglettartományok nagyságával miért nem foglalkozunk?

A síkbeli szögtartományok analógiájára definiálhatjuk a háromoldalú térszögleteket is:

Két nyílt **félsík** metszete, ha **határegyenesei** metszők, egy konvex **szögtartomány.**	**Három** nyílt **féltér** metszete, ha **határsíkjaik** metszők, de nincs közös egyenesük, egy **háromoldalú** konvex **szöglettartomány**.
A **szögtartományt két** közös **határ-pontú félegyenes** határolja. Ezek két **szögtartományra osztják a síkot**, melyek közül legalább az egyik konvex (ha a **két félegyenes** egy **egyenesbe** esik, akkor mindkét rész konvex)	A **szöglettartományt három** páronként közös **határ-félegyenesű szögtartomány** határolja. Ezek két részre osztják a **teret**, melyek közül legalább az egyik konvex (ha a **három szögtartomány** egy **síkba** esik, akkor mindkét rész konvex)

A szögtartományok és a szöglettartományok közötti analógiát a szögtartományok és lapszögek közötti analógiával összevetve azt látjuk, hogy itt nem csak az építkezéshez használt alapanyagokban van a különbség, hanem a felhasznált alakzatok számában is. A síkban 2, a térben 3 objektum kellett. (Ráadásul a térben 3-nál nagyobb oldalszámú szögleteket is értelmezhetnénk.)

2.25. Feladat: *Lehet-e egy ilyen szöglet nagyságát mérni és hogyan érdemes?*

MEGJEGYZÉSEK A FELADATHOZ:

A szöglettartományokkal való foglalkozásnak egy másik haszna az lehetne, hogy segíthetne a középiskolás diákoknak az ívhossz, általában a szögmérés megértésében.

A szöglet nagyságának a mérésére alkalmas módszer keresését indíthatjuk olyan szögletekkel, amelyeknek három, vagy legalább két határoló szöge 90°.

Mivel itt nem áll rendelkezésünkre skálázott szögmérő, arra kell ráérezni, hogy amint a szög esetében azt mérjük, hogy egy, a csúcs körül rajzolt teljes körnek hányadrészét vágja ki a középponti szög, itt azt kell valami módon kitalálni, hogy egy, a szöglet csúcsa körül felvett gömbnek hányadrészét vágja ki a középponti szöglet.

Az ívhossz tanítása azért is nehéz lehet sok gyereknek, mert számára nem tisztázódik ez a gondolat. Addig amíg skálázott szögmérővel mérnek, az egy technika, ami elsajátítható. Az ívhossz esetében nehézséget okozhat az, hogy egy tartományt egy hosszúsággal mérünk. Nem tisztázódik eléggé, hogy itt egy arányszámról van szó, mégpedig területek arányáról, ami történetesen megegyezik a megfelelő ívek arányával, és ami, egységsugarú kört választva a kivágott ív hosszával egyértelműen mérhető.

A három-derészögű szöglettartomány egy gömbnyolcadot vágja ki a gömbfelületből. Egy 45°, 90°, 90° fokos szöglet nagysága ennek a fele. Az egységgömb gömb felszíne 4π, ennek segítségével közvetlen mérőszámot rendelhetünk a háromélű térszögletekhez: $\frac{4\pi}{8} = \frac{\pi}{2}$, illetve $\frac{4\pi}{16} = \frac{\pi}{4}$.

A továbblépés többféle irányban is történhet.

A kiindulási példa éppen az egységgömbbe írt szabályos oktaéder egyik (gömbi) lapja. Mivel a szabályos testek szabályos mozaikot hoznak létre a gömbfelületen, ezzel a módszerrel a 3-oldalúakon kívül más térszögleteket is mérhetünk, hiszen tudjuk, hogy az egy-egy lapot kivágó térszögletre a gömbfelület hányadrésze jut.

A másik továbblépés a tetszőleges 3-oldalú konvex térszöglet mérése, a gömbháromszög területének kiszámítása.

Már a gömbi geometriáról szóló fejezetben is jeleztük, hogy a látókörbővítő analógia megmutatásának elsődleges célja, hogy az analógia visszafelé hasson, a térszöglet méréséhez használt gondolatmenet síkbeli őse jobban tudatosuljon, tisztázódjon:

A 3-oldalú szöglettartomány nagyságát az egységsugarú gömbből kivágott gömbfelület nagyságával mértük.

A szögtartomány nagyságát mérhetjük az egységsugarú körből kivágott körív nagyságával.

Sokszögek, körök és egyéb síkidomok megfelelői a térben

Az egyenesen a szakaszok, a síkon a sokszögek, a térben poliéderek belső ponttal rendelkező, korlátos alakzatok. Ezek rokonságát a definíciótól kezdve érdemes tudatosítani, A szakasz egy egyenes két pont által határolt része. A sokszögtartomány egy sík véges sok szakasz által határolt, korlátos része. A poliédertartományt a tér véges sok sokszögszögtartomány által határolt korlátos része.

Azt emeltük ki a definíciókból, hogy a struktúrájuk ugyanaz: a megelőző dimenzióban létrehozott elemeket használjuk az építkezésben. A 0-dimenziós alakzat alkotja az 1-dimenziós határát, az 1-dimenziós alakzatból a 2-dimenziós alakzat 1-dimenziós határa lesz, és a magával vitt 0-dimenziós határ a síkon is 0-dimenziós határ. (Ezt azzal biztosítjuk, hogy a sokszögvonal szakaszait nem csak úgy összedobáljuk és kész a sokszög, hanem olyan zárt töröttvonalat építünk belőlük, amelyeknek az előírt csatlakozási pontokon kívül nincs közös pontja (egyszerű sokszög). A sokszögtartományból lesznek a poliéder lapjai, a sokszögtartomány határalakzatai a poliédernek is megfelelő dimenziós határalakzatai (élei, csúcsai). Természetesen hozzátartoznak a definícióhoz a sokszögtartományok összerakási szabályai (teljes oldalban csatlakoznak, ...), de most arra szeretnénk a figyelmet irányítani, hogy ismét osztálybasorolást végeztünk 1-, 2- és 3-dimenzióban, az adott dimenzióban olyan korlátos tartományt definiáltunk, amelynek határalakzatát az előző dimenzió analóg alakzatai adják.

A síkban sokféle sokszög van, a térben sokféle poliéder van. A sokszögek és poliéderek között vannak olyanok, amelyek között az előzőeken túl is megállapíthatunk rokonságokat:

A négyzet közeli térbeli rokona a kocka.

A téglalap közeli térbeli rokona a téglatest.

A paralelogramma közeli térbeli rokona a paralelepipedon.

2.26. Feladat: *Fogalmazzon meg minél több olyan tulajdonságot, melyekben rámutat ezen alakzatok megfelelő részei közötti azonos struktúrákra!*

MEGJEGYZÉSEK A FELADATHOZ:

Felsorolunk néhány ilyen tulajdonságot, hátha gazdagodik a gyűjteménye.

A szabályos háromszögek és a szabályos tetraéder, a négyzet és a kocka, a szabályos ötszög és a dodekaéder kapcsolatsorban a négyzet és a kocka rokonsága más oldalról látszik. Itt azonban

A négyzet olyan téglalap, amelynek minden oldala egyenlő.	A kocka olyan téglatest, amelynek minden oldallapja egybevágó.
A téglalap olyan parallelogramma, amelynek minden szöge derékszög.	A téglatest olyan parallelepipedon, amelynek lapszögei derékszögek.
A parallelogramma szemközti oldalai párhuzamosak és egyenlők, átlói felezik egymást, szemközti szögei egyenlők, középpontosan szimmetrikus.	A parallelepipedon szemközti oldallapjai párhuzamosak és egybevágók, átlói felezik egymást, szemközti csúcsainál levő szögletei egybevágók, szemközti éleinél levő lapszögei egyenlők, középpontosan szimmetrikus.
A téglalap minden szöge derékszög, átlói egyenlő hosszúak. Két középvonalának egyenesére is szimmetrikus.	A téglatest minden lapszöge és minden élszöge derékszög, átlói egyenlő hosszúak. Három, a párhuzamos élek felezőpontjára illeszkedő síkra szimmetrikus, továbbá tengelyesen szimmetrikus három, másodrendben forgásszimmetrikus a párhuzamos oldalak középpontjai által meghatározott tengelyre.
A négyzet minden oldala egyenlő, szimmetrikus az átlók egyenesére is. Negyedrendben forgásszimmetrikus az átlók metszéspontjára.	A kocka minden oldallapja egybevágó, élei egyenlő hosszúak. Szimmetrikus az átlósíkokra, harmadrendben forgásszimmetrikus a testátlók egyeneseire, negyedrendben forgásszimmetrikus a párhuzamos oldalak középpontjai által meghatározott tengelyre.

meg kell állnunk, mert egyrészt hatszögekkel határolt szabályos test nem létezik, szabályos háromszögekkel határolt szabályos test pedig több is van, az ikozaéder is ilyen. Ami ezeknek az analógiáknak a korlátait leginkább mutatja, az, hogy míg szabályos sokszög végtelen sok van, addig szabályos test mindössze öt. Az analógiák keresése itt éppen a tér és a sík alapvető különbségére világít rá.
Az eddig érintett analógiákra emlékeztetünk a következő táblázatokban:

egyenes	sík	tér
félegyenes	félsík	féltér
szakasz	sokszög	poliéder
szakasz	körlap, körvonal	gömbtest, gömbfelület
szakasz	tartomány	test
félegyenes	szögtartomány	lapszögtartomány

töröttvonal, sokszögvonal	poliéder felület
határvonal	határfelület
körvonal	gömbfelület

egyenes	sáv	réteg
körvonal	körgyűrű	gömbkéreg?
szakasz	háromszög	tetraéder, gúla
szakasz	parallelogramma	hasáb

A táblázatok több érdekes dologra is rávilágítanak:

- Ugyanannak az alakzatnak többféle analógja lehet. Feltűnik, hogy egy alacsonyabb dimenziójú alakzatnak általában többféle analóg kiterjesztése is lehet egy magasabb dimenzióban.

- Azon síkbeli alakzatok térbeli analógjai, amelyek például a síkban analóg módon származtathatók, a térben is gyakran megtartják ezt az analógiát. Például a sáv és a réteg analógiája: mindkettő analóg módon származtatható félsíkok, illetve félterek metszeteként, de mindkettőt megkaphatjuk egy egyenestől, illetve egy síktól adott távolságnál nem messzebb lévő pontok halmazaként is. Tehát nem csak az alakzatok, hanem a származtatási módok is párhuzamba állíthatók.

- Fontos észrevétel, hogy a vonal és felület fogalmak hovatartozása dimenzió szempontjából nem egészen egyértelmű. A körvonal síkbeli alakzat, mégis egydimenziós. A gömbfelület térbeli alakzat, mégis kétdimenziós. Ezek nem könnyen definiálható fogalmak, de a sokszögvonal és a poliéderfelület analógiája segíthet. Ennél is fontosabb talán, hogy a vonal, felület és test fogalmak analógiájával kapcsolatban szerzett tapasztalatok hozzásegíthetnek a kerület, terület és térfogat fogalmak mélyebb megértéséhez.

Kerület, terület és térfogat

2.27. Feladat: *Általános iskolás gyerekek körében igen gyakori, hogy keverik a téglalap kerületének és területének kiszámítására vonatkozó képleteket. Mi lehet ennek az oka?*

MEGJEGYZÉSEK A FELADATHOZ:

A legkézenfekvőbb ok a szavak hasonló hangzása. Erre ráerősít az, hogy gyakran egymás mellett tűzik ki feladatként a téglalap kerületének és területének kiszámítását. Ezt még tovább nehezíti az, hogy, nézetünk szerint fölösleges, sőt káros módon, túl korán tanítanak képletet ezeknek a kiszámítására.

Zavaró lehet a köznapi szóhasználatból (még tanároknál, tankönyvíróknál is) átszivárgó jelentés, amelyben a szavakat nem a megfelelő mérőszámra, hanem arra a ponthalmazra használják, amelyet mérünk. Ha valóban a ponthalmazra gondolunk, akkor a kör kerületén helyett a körvonalon, a határvonalon, a peremen szerencsésebb szóhasználat, ugyanígy a kör területén helyett a körlemezen, a körben, a kör belsejében, a tartományban szerencsésebb szóhasználat.

A kör kerületének és területének képletét formálisan összekeverhetik azok, akiknek az algebrai kifejezések szerkezete és jelentése közötti kapcsolat ($2r$ és r^2 homályos. Az együtthatók és a kitevők keverése gyakori hiba a középiskolában is.

A következőkben felhívjuk a figyelmet néhány kulcsfontosságú gondolatra, amelyek ezen a területen hatékonyabb segítséget nyújthatnak, mint a képletekbe való behelyettesítés gyakorlása. Ez többek között azt jelenti, hogy kiemelünk néhány „kulcsképletet”, és néhány „kulcsstratégiát”, amelyek megkönnyítik a többi képlet megjegyzését, vagy akár feleslegessé is teszik.

Kerület

Tanács: a négyzet, a téglalap és általában a sokszögek kerületét ne képlettel tanítsuk!

Itt azt kell megérteni a tanulóknak, hogy a kerület a határvonal hossza, amely sokszögeknél a határvonalat alkotó szakaszok hosszának összege.

Éppen ezért nem is érdemes a téglalap kerületével a téglalap témaköréhez szigorúan kötődve foglalkozni. Mikor már tisztában vannak a téglalap alaptulajdonságaival, akkor sok egyéb kerületszámítási feladat között érdemes ennek a kerületét is kiszámolni.

A kör kerületének a képletét meg kell tanulni, de szükséges a képlet tanítását mérési tapasztalatokra alapozni.

Példa Osszunk ki korongokat, hengereket, amelyek körlapjának átmérőjét is, kerületét is (fonal segítségével) könnyen meg tudják mérni. A kapott adatokat gyűjtsük közös táblázatba, és elemezzük a táblázatot a tanulókkal. A munka folyhat egyéni, páros vagy kiscsoportos formában is.

átmérő	kerület	kerület : átmérő
...	...	...

A tárgyakat úgy érdemes összeválogatni, hogy az átmérő kétszeres, háromszoros, másfélszeres ... legyen, és adjunk időt arra, hogy a tanulók észrevegyék, hogy ezeknek a kerülete is körülbelül kétszeres, ...

Ezután, és csak ez után bíztassuk őket, hogy számolják ki – kalkulátorral – az összetartozó kerületek és átmérők arányát.

Beszéljünk a kapott eredményekről: mi lehet az oka, hogy a hányadosok olyan közel vannak egymáshoz, vajon, ha pontosan tudnánk mérni, akkor pontosan ugyanazt az arányszámot kapnánk-e?

Ezek a kérdések szépen előkészíthetik a π bevezetését.

Terület

A téglalap területének képlete – a kerületképlettel ellentétben – **alapvető, megtanulandó tudáselem**.

Nagyon fontos, hogy a képlet megismerése előtt sok-sok méréssel kapott tapasztalatot szerezzenek a tanulók. A képlet szemléletes tapasztalattal való megalapozottságát illetően nagyon nagy különbség lehet a képletet ismerő, jól alkalmazó tanulók között.

Mint a matematika sok más területére, a terület, térfogat tanítására is igaz, hogy akkor a leghatékonyabb, ha követi az absztrakt matematika felépítését, bizonyos részleteiben – amennyire ez lehetséges – meg is egyezik azzal. A következetesen és analóg módon bevezetett szakasz, terület és térfogatmérés egy-egy konkrét példa (tapasztalat) a mérték fogalmához.

A sokszögek területe témakör felépítése Hajós Györgynél és a magyar iskolai matematikában meglepően szoros a párhuzamot mutat:

Hajós György definíciója a sokszög területére

Minden sokszöghöz rendelhetünk egy valós számot, amelyet területnek nevezünk, s amely a következő tulajdonságokkal rendelkezik:

1. Minden sokszög területe pozitív szám.
2. Egybevágó sokszögek területe egyenlő.
3. Ha egy sokszöget két sokszögre bontunk, e kettő területének összege az eredeti sokszög területével egyenlő.
4. Az egységnégyzet területe 1.

Ezt a definíciót kiegészíti néhány fontos megjegyzéssel. (Ezeket a könnyebb hivatkozás kedvéért megbetűzve idézzük.)

a) Az utolsó megállapítás szerint a terület ismeretéhez a hosszegység ismeretére van szükség. Ha más hosszegységet, illetve területegységet választunk, akkor minden terület osztandó az újonnan területegységül választott sokszög területével.

   Ebből a megállapításból következik, hogy nem függ a területegység megválasztásától az olyan kijelentések helyessége, hogy két sokszög területe egyelő, hogy az egyik a másiknál kisebb vagy nagyobb, vagy hogy egy sokszög területe más sokszögek területének összege, különbsége, fele, kétszerese stb.

b) A 3. követelmény teljesüléséből nyomban következik, hogy ugyanaz akkor is áll, ha egy sokszöget n sokszögre bontunk fel, ahol n akármelyik természetes számot jelentheti.

c) Ha egy sokszög egy tőle különböző másikat tartalmaz, akkor területe a tartalmazotténál nagyobb, hiszen a tartalmazott sokszög területének , s a tartalmazott sokszög elhagyása után maradó sokszög területének összegével egyenlő.

Az iskolai felépítés

A területfogalom kialakítása az alsótagozaton a területek összehasonlításával kezdődik. Ha egy alakzat mozgatással, vagy mozgatással és darabolással egy másik alakzat belsejébe vihető, akkor a területe kisebb mint a másik alakzaté.

Eközben nem-verbálisanan (intuitív módon) építjük be a tanulók szemléletébe a területnek a definíció 2. és 3. pontjában megfogalmazott, valamint a b) és c) megjegyzésekben kifejtett tulajdonságait.

Az alsótagozatos területtanítás legfontosabb része a területek mérése, becslése egységnyi területekkel való lefedéssel. Ebben a munkában először olyan tapasztalatokhoz juttatjuk a gyerekeket, amelyek Hajós a) megjegyzésével kapcsolatosak. Tehát, hogy ugyanazzal az egységgel mérve egybevágó alakzatok területe egyenlő, kisebbé, kisebb; kétszer-, háromszor-, ...- akkora területegységgel mérve a kapott területérték fele, harmada, ... része az eredetinek.

Ezekhez az észrevételekhez nincsen szükség a 4. tulajdonságra, tehát mindegy, hogy milyen méretű és alakú alakzatot választunk területegységnek. Az egységnégyzetre akkor van szükségünk, ha számszerű összefüggést akarunk találni egy sokszög hosszúság mértékei és területmértéke között.

Amennyiben a téglalap oldalai a hosszegység egész számszorosai, akkor le tudjuk fedni egységnégyzetekkel a téglalapot. Az alsótagozatos gyerekeknek egyáltalán nem (sokszor a náluk idősebbeknek sem) magától értetődő, hogy egy n és k egység oldalú téglalap éppen $n \cdot k$ darab egységnégyzettel fedhető le.

Ez az észrevétel az elvont gondolkodásnak egy viszonylag magas szintjét igényli, a téglalap területképletének szabatos bizonyítása hasonló gondolatmenettel történik. (Az igazi nehézségét az okozza, hogy irracionális oldalhosszakra is bizonyítani kell a szabályt.)

Esetleírás

Egy ötödikes osztályban a gyerekek azt a feladatot kapták, hogy állapítsák meg néhány, egy $6 \cdot 7$, egy $3 \cdot 6$ és egy $3 \cdot 7$ egység oldalú téglalap területét. A gyerekeknek elegendő egységnégyzet állt rendelkezésére, ha azt igényelték. Először minden gyerek kérte az egységnégyzeteket. Voltak olyan gyerekek, akik kiraktak az egyik oldal mentén egy sort, azután a szomszédos oldal mentén egy oszlopot, és ezután szorzással számolták ki az eredményt. Voltak olyanok, akik elkezdték a kitöltést. Kiraktak két-három sort azután rájöttek a „trükkre" és szintén szorzással számoltak tovább. Az osztály maradék része kirakta az egész téglalapot, és összeszámolta a darabokat – vagy hibátlanul, vagy hibásan. Miután megbeszélték a megoldási módszereket, a gyerekek egy része nem kért kis négyzetet, csak vonalzóval megmérte a következő téglalap oldalait. Azok közül, akik korábban részben, vagy egészen kitöltéssel dolgoztak, most már nagyon sokan csak az oldalak mentén raktak ki egy L alakot, és ezután rögtön szorzással állapították meg az eredményt. Minden egyes téglalap esetén egyre többen számoltak szorzással. Azonban még a foglalkozás végén is volt néhány olyan gyerek, akik kirakással próbálkoztak.

2.28. Feladat: *Mi áll annak a hátterében, ha egy ötödikes gyerek többszöri kirakás után sem ismeri fel, hogy itt szorzással lehet számolni?*

MEGJEGYZÉSEK A FELADATHOZ:

Felsorolunk néhány okot, amelyek a háttérben meghúzódhatnak. Ezek bármelyike, vagy ezek közül több együttese felelős lehet a problémáért.

Nem tűnik fel a gyereknek a szabályszerűség, hogy minden sorban ugyanannyi elem ismétlődik,

– vagy azért, mert összevissza rakosgatja a négyzetlapocskákat,

– vagy azért, mert egyáltalán nem foglalkoztatja a dolog,

– vagy azért, mert a gondolkodása nem nyitott a szabályszerűségek észrevételére.

Nem érti, hogy a szorzás mire való.

Ebbe az utolsó, problémás kategóriába tartozó gyerekek meg tudják tanulni a téglalap területképletének használatát. Ha megelégszünk a képletek alkalmazásával és nem adunk ilyen feladatokat, talán nem is derül ki, hogy a terület vagy a szorzás alapvető tulajdonságaival nincsenek tisztában. A probléma nem a téglalap területének kiszámításában lesz, hanem például a terület-mértékegységek átváltásában, vagy – nagyon sok esetben – abban, hogy szöveges feladatokban nem ismerik fel, hogy mikor lehet, vagy kell szorozni.

A műveletek és kapcsolataik tapasztalati megalapozása történhet (bármelyik életkorban) egyre nehezedő szemléletes feladatokkal. Pl. Hány lába van 3 (7, 39, stb.) csirkének? Hány lapja (éle, csúcsa) van 2 kockának? Hány éle van 5 tetraédernek (egy focilabdának)?

A továbbiakban a sokszögek területképletének tanítása történhet az egyetemen tanult módon: téglalap területének kiszámítására vezetjük vissza a feladatot kiegészítésekkel és átdarabolásokkal.

Nagyon fontos, hogy a gyerekek az általános iskolában minél több olyan egyszerű területmeghatározási feladattal találkozzanak, amelyekben nem képletet kell használni, hanem visszavezethetik a téglalap területének kiszámítására.

Alkalmazhatjuk a képletet nem egész egységnyi oldalú téglalapokra is; számíthatjuk téglalapokra szétbontható alakzatok területét, téglalap kettévágásával kapható alakzat, a derékszögű háromszög, vagy a derékszögű trapéz, mindenféle rácssokszögek területét, stb.

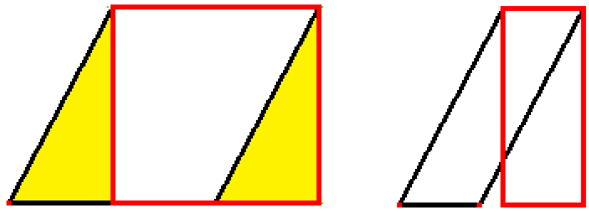
A téglalap területének ismeretében sok poliéder felszínét is ki tudjuk számolni. A téglatest felszínét, változatos, téglalapokkal határolt testek felszínét – ilyeneket lehet építeni pl. gyufásdobozból, a színesrúd készlet elemeiből, stb.

Ezek a feladatok a területfogalomról eddig szerzett ismereteket mozgósítják, elmélyítik, és emellett a gyerekek rendszerező és kombinatív készségét is fejlesztik. Éppen ezért feleslegesnek, sőt inkább előnytelennek tarjuk a téglatest felszínképletének tanítását. Legyen az megoldandó, végiggondolandó feladat, a téglalap területére megismert szabály alkalmazása.

Ide kapcsoljuk a téglatest térfogatának tanítását is, amit szintén megkönnyít, ha a téglalap területéről szemléletes tapasztalataik vannak. Ott egyforma rétegekre lehet bontani a téglatestet, amelyeket ugyanannyi egységkockával lehet kirakni, mint amennyi az egyik oldallap területe, és annyi rétegünk lesz, amennyi a harmadik oldalél hossza. Itt is érvényes, hogy további képletek tanítása előtt sok olyan egyszerű, vagy összetettebb feladatot oldjanak meg, amelyeket a téglatest térfogatának kiszámítására tudnak visszavezetni.

Hetedik osztályban kerülhet sor a további területképletek tanítására. Ezt érdemes, akárcsak az egyetemi felépítésben, azzal kezdeni, hogy megmutatjuk, hogy a paralelogramma területe az egyik oldal és a hozzátartozó magasság hosszának a szorzatával egyenlő.

Ennek bizonyítása sokféleképpen történhet. Tetszetős és elterjedt módszer, hogy átdarabolással azonos alapú és magasságú téglalapot hozunk létre.



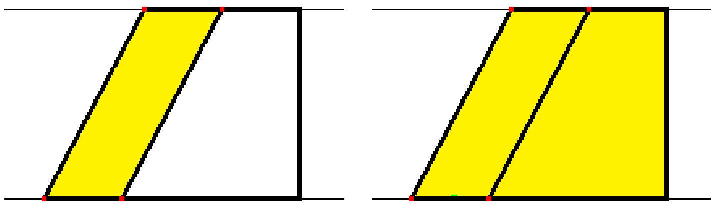
A bal oldali ábráról valóban jól leolvasható, hogy a sárga háromszöget levágjuk az egyik oldalról és átragasztjuk a másik oldalra és kész is a téglalap. Csakhogy ez nem működik (így) a jobb oldalon látható keskeny paralelogrammára. A szükséges hozzávétel, átdarabolás, elhagyás kombinációja már sokaknak nem olyan vonzó, és azt szokták javasolni, hogy akkor nézzük a másik oldalt, ott megy az előző eljárás.

2.29. Feladat: *Mi a probléma a fenti okoskodással?*

MEGJEGYZÉSEK A FELADATHOZ:

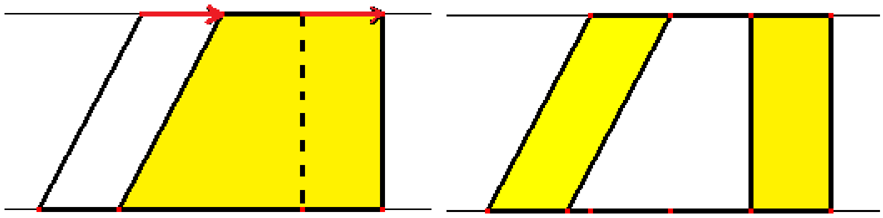
Az állítást bármely paralelogramma bármely oldalára és a hozzá tartozó magasságra akarjuk bizonyítani és nem a hosszabbik oldalra.

Hajós György olyan szemléletes bizonyítás adott, amely a hosszabbik oldal esetében ugyan kicsit összetettebb, mint az előző átdarabolásos bizonyítás, de egységesen alkalmazható minden paralelogrammára, és előkészíti a térbeli eset analógiás bizonyítását, amikor a papalelepipedonhoz konstruálunk vele egyenlő térfogatú téglatestet.



A paralelogramma kiválasztott szemközti oldalait meghosszabbítjuk és merőlegest állítunk rá úgy, hogy a merőlegesnek ne legyen közös pontja a paralelogrammával. A paralelogramma másik két oldalából az egyik és a merőlegesnek a sávba eső szakasza egy derékszögű trapézt vág ki a sávból (bal oldali ábra).

Ha ezt a trapézt egyesítjük a paralelogrammával, akkor is egy (nagyobb) derékszögű trapézt kapunk (jobb oldali ábra).

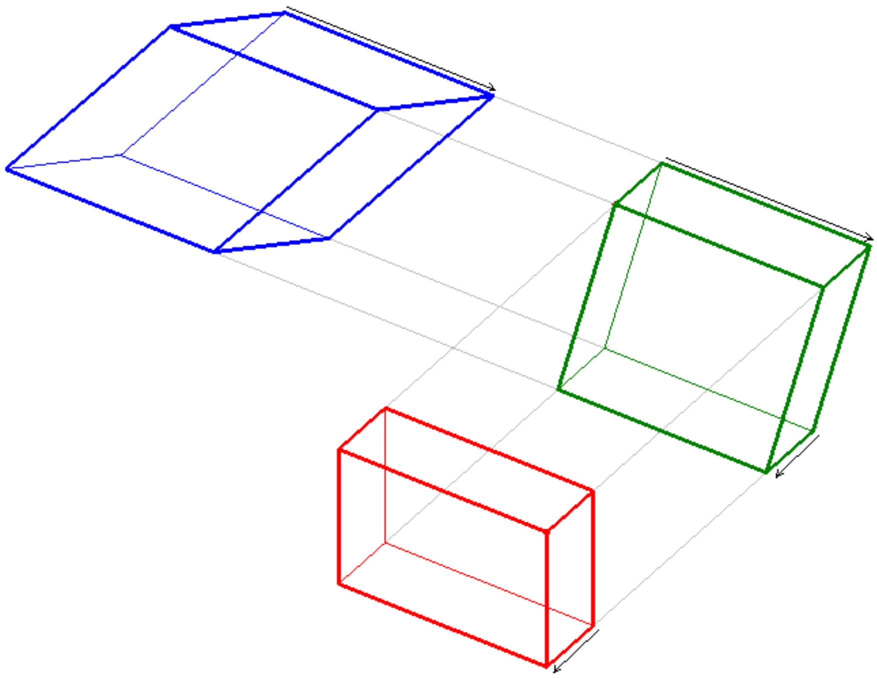


A nagyobbik trapézt eltoljuk párhuzamosan a paralelogramma kiválasztott oldalával (bal oldali ábra). A jobb oldali ábrán látható módon a két egybevágó nagy trapéz (eltoltak) egyike a paralelogrammából és a fehéren hagyott kis trapézból, a másik a kis trapézból és egy téglalapból áll. (A jobb oldali ábra két nagy trapézt ábrázol, de a kis trapézt mindkettő tartalmazza.)

2.30. Feladat: *Bizonyítsa be a térbeli analóg tételt: a paralelepipedon térfogata megegyezik egy azonos alapterületű és magasságú téglatest térfogatával, tehát a térfogata alapterület*magasság.*

MEGJEGYZÉSEK A FELADATHOZ:

A bizonyítás a síkbeli bizonyítás analógiájára elvégezhető, a következő ábráról olvasható le:



A kiindulási kék paralelepipedon dől jobbra is, meg hátra is. Most nem 2 párhuzamos oldalt, hanem 4 párhuzamos élt választunk ki és hosszabbítunk meg. Ezekre az élekre valahol – ahol már nem metszünk bele a kiindulási (kék) paralelepipedonba – merőleges síkot állítunk erre a négy élre és megkeressük a metszéspontokat. A metszetidom egy paralelogramma (két-két párhuzamos síkból metszettük ki). Ezt a paralelogrammát eltoljuk a bejelölt vektorral (a paralelepipedon ezen egyenesekre illeszkedő élével megegyező állású és hosszúságú, az irányítást úgy választjuk, hogy távolodjunk a paralelepipedontól).

Az is eltérés a síkbeli esethez képest, hogy most nem téglatest, hanem egy paralelogramma alapú egyenes hasáb keletkezett: A kék paralelepipedon és a hozzámetszett trapézokkal és paralelogrammákkal határolt test az eltolás miatt egybevágó ugyanezen test test és a zöld hasáb egyesítésével. A hozzávett test mindkettőben közös, így a paralelepipedon és a hasáb térfogata egyenlő.

Második lépésben az előzőt ismételjük, a hasáb alapparalelogrammájából csinálunk téglalapot.

A hasábból az éppen most kapott 4 párhuzamos élt választjuk ki és hosszabbítjuk meg, mert ezek már merőlegesek az előbb választott irányra. A kiválasztott élekre valahol – ahol már nem metszünk bele a hasábba – merőleges síkot állítunk és megkeressük a metszéspontokat. A metszetidom egy téglalap (mert egy olyan végtelen hasábot metszünk az élekre merőlegesen, amelynek lapjai merőlegesek egymásra). Ezt a téglalapot eltoljuk a bejelölt vektorral (a hasáb ezen egyenesekre illeszkedő élének megfelelő állásban és hosszban, az irányítást úgy választjuk, hogy távolodjunk a hasábtól).

A hasáb és a hozzámetszett trapézokkal és téglalapokkal határolt test az eltolás miatt egybevágó az ugyanezen test és a piros téglatest egyesítésével, a kiegészítő test mindkettőben közös, így a hasáb és a téglatest térfogata egyenlő.

Két lépésben beláttuk a tétel állítását.

Ez a bizonyítás szemléletes módon, modellekkel vagy aktív táblán animálva középiskolás osztályokban is tanítható.

2.31. Feladat: *Keressen analógiát a síkidomok és a testek magasságával kapcsolatban!*

MEGJEGYZÉSEK A FELADATHOZ: Egy hegyesszögű háromszögből kiindulva jó értelmezési tréning, ha a kiindulási háromszög magasságpontja és az egyik oldala által meghatározott (kis)háromszög magasságvonalaira és magasságpontjára kérdezünk rá. Dinamikus ábrán aztán elszakadhatunk a kiinduló feltételtől.

- A háromszögnek van magasságpontja. A tetraédernek mi lenne? Mikor van? (Merőleges kitérő élpárok)
- Adott párhuzamos egyenesek között egyenlő alapú háromszögekkel irányíthatjuk a figyelmet a magasságszakasz különböző elhelyezkedésére, de azonos hosszára.

  Adott párhuzamos rétegben egybevágó alapsokszögeket helyezni az egyik síkra és különböző csúcsokat választani a másik síkról.

  Pl.:Egy négyszögalapú gúla alaplapját a tanteremben a padló 4 sarka jelöli ki. Hol vegyük fel a plafonon az 5. csúcsot, hogy a gúla térfogata a legnagyobb legyen?
- Mi marad változatlanul

  a) az oldal hosszán és a magasságon, illetve

  b) az alaplap (vagy csak a területe) és a magasság megtartásán túl?

  Tapasztalatoktól függően kivágással, öntögetéssel, képlet átalakítással és a neki megfelelő átdarabolással, stb. sokoldalúan meg kell győződni a terület, illetve a térfogat állandóságáról.

2.32. Feladat: *Keressen analógiát a területképletek és a térfogatképletek között!*

MEGJEGYZÉSEK A FELADATHOZ:

Geometriai mértékek

- egy a szakasz hossza a (kezdetben érdemes a szakaszt és a hosszát megkülönböztetni)

- a oldalú négyzet területe a^2 (a hosszúságegységgel összehangolva)
- a oldalú kocka térfogata a^3 (a hosszúságegységgel összehangolva)

A méréskor fontos szerepet kap

- az *egységszakasz*

  egységszakaszokkal (és részeivel) fedjük le a mérendő szakaszt;

- az *egységnyi szélességű sáv* megfelelő darabja (csík, szalag)

  egységnyi szélességű sávval (és kisebb szélességű részeivel) fedjük le a mérendő téglalapot (voltaképpen egységszakasszal és részeivel mérjük a másik oldalt);

- az *egységnyi vastagságú réteg* megfelelő darabja

  egységnyi vastagságú réteggel (és vékonyabb részeivel) fedjük le a mérendő téglatestet, hasábot, hengert (voltaképpen egységszakasszal és részeivel mérjük a magasságszakaszt).

Pólyát György dimenzióanalógiájának megfelelően előállított alakzatok megfelelő dimenziós mértéke is párhuzamot mutat.

- a szakaszt leírja, bejárja egy pont, a szakasz hossza a
- a szakasz tartóegyeneséről lelépve, attól m távolságra eltolt szakasz súrol egy paralelogrammát, amelynek területe $a \cdot m$
- egy t területű paralelogramma síkjából kilépve, attól m távolságra eltolt paralelogramma súrol egy paralelepipedont, amelynek térfogata $t \cdot m$.

2.33. Feladat: *Keressen általánosítási lehetőséget a fenti példák mintájára.*

MEGJEGYZÉSEK A FELADATHOZ:

a) Hengerszerű testek térfogata alapterület x magasság

sokszög – hasáb; kör – henger, vagy általánosan valamilyen t területtel rendelkező síkidom a síkjából kilépő eltolás közben súrolja a *hengerszerű testet*

b) Kúpszerű testek térfogata (alapterület x magasság):3

háromszög – tetraéder; sokszög – gúla; kör – kúp, vagy általánosan valamilyen t területtel rendelkező síkidom pontjainak egy, a síkján kívüli pont összekötésével kapjuk a *kúpszerű testet*

c) Adott pont és a tőle r távolságra levő pontok összekötésével kapott alakzat megfelelő dimenziós mértéke:

- i hosszúságú, r sugarú ívhez tartozó körcikk területe: $i \cdot r{:}2$
- r sugarú k kerületű kör ($2r\pi$ ívhosszhoz tartozó körcikk) területe $i \cdot r{:}2 = r^2\pi$
- r sugarú f felszínű gömbsüveghez tartozó gömbcikk térfogata: $f \cdot r{:}3$
- r sugarú f felszínű gömb ($4r^2\pi$ felszínű gömbsüveghez tartozó gömbcikk) térfogata $f \cdot r{:}3 = 4r^3\pi{:}3$; gömbsüveg felszíne

2.3.2. Egy OKTV feladat, ahol több problémamegoldási stratégia felbukkan

2.34. Feladat: *Három hajótörött mindegyike egy-egy órát tölt (egyhuzamban) egy szigeten ma délután valamikor 5 és 9 óra között (véletlenszerűen). Ha hármuk közül pontosan kettő fél óránál hosszabb ideig egyszerre tartózkodik ott, akkor viszály tör ki. Mekkora a valószínűsége annak, hogy békében telik el a mai nap?*

(1995-96-os OKTV III. kategória – speciális matematika tantervű gimnáziumok számára, második (döntő) forduló 3. feladata)

MEGJEGYZÉSEK A FELADATHOZ

Mivel a feladat megoldása valóban nem nyilvánvaló, nagyon alkalmas arra, hogy a különböző reprezentációk és problémamegoldási stratégiák összjátékát megmutathassuk.

A lépéseink

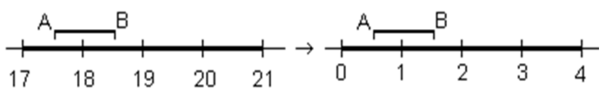
1. A matematikai modell keresése
2. A modellhez kötött vizsgálatok
   - Részekre bontás, részfeladat megoldása
   - A megoldás szemléltetése
   - A probléma megoldása
3. Más megoldás keresése
4. A megoldás elemzése, általánosítás

1. A matematikai modell keresése

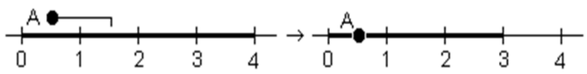
2.35. Feladat: *Próbálja jellemezni a H_1, H_2 vagy H_3 hajótörött megjelenését a barlangban.*

MEGJEGYZÉSEK A FELADATHOZ

Ábrázolhatjuk a hajótörött jelenlétét a számegyenesen egy AB intervallummal. A feladatot nem változtatja meg, ha nem a 17–21 óra közötti intervallumot ábrázoljuk, hanem a lehetséges megérkezéstől eltelt időt.



Geometriai valószínűséget akarunk használni, ezért az eseménytér olyan modelljét keressük, ahol minden kimenetelnek egyenlő az esélye. Ez nem teljesül az AB intervallum lehetséges pozícióira $A = 0$-tól $B = 4$-ig. Ha az AB intervallum helyett annak egy rögzített pontját (például az A kezdőpontot) használjuk a hajótörött pozíciójának jellemzésére, akkor a $[0; 3q]$ intervallum minden pontja egyenlő eséllyel jön szóba.



2.36. Feladat: *Próbálja jellemezni a H_1, H_2 és H_3 hajótöröttek együttes megjelenését a barlangban. Használjon geometriai szemléltetést.*

MEGJEGYZÉSEK A FELADATHOZ

Legyenek a H_1, H_2 és H_3 hajótöröttek érkezési időpontjai ebben a sorrendben egy pont koordinátái egy derékszögű koordinátarendszerben. Ekkor az eseménytér egy 3 egység oldalú kocka, amelynek egyik csúcsa az origó és egy-egy éle a koordinátatengelyek pozitív felére illeszkedik. Ennek a kockának minden pontja egyenlő eséllyel bekövetkező kimeneteleket reprezentál, tehát használhatjuk a térfogatot a valószínűség jellemzésére.

2. A modellhez kötött vizsgálatok

2.37. Feladat: *Fogalmazza meg a békés nap esélyének vizsgálatát a kocka segítségével.*

MEGJEGYZÉSEK A FELADATHOZ

Mivel egyenletes eloszlásról van szó, a valószínűség arányos a békés naphoz tartozó pontok által alkotott alakzat térfogatával. *Speciális helyzetek vizsgálatából* az a sejtésünk támad, hogy könnyebb dolgunk lesz, ha a komplementer eseményt, a viszályhoz tartozó pontok által alkotott alakzatot vizsgáljuk.

2.38. Feladat: *Válasszon ki kezelhetőnek látszó részproblémát és gondolja meg ennek viszonyát az egész problémával.*

MEGJEGYZÉSEK A FELADATHOZ

Két hajótörött között viszály támad, ha

- elég időt töltenek együtt – a kettejük jelenlétét leíró intervallumnak legalább 0,5 óra átfedése van;
- nem oldja fel a feszültséget a harmadik hajótörött – a kettejük jelenlétét leíró intervallumok metszetének nincs közös belső pontja a harmadik jelenlétét leíró intervallummal.

Az érkezés 6 különböző sorrendjének egyidejű vizsgálata helyett egy rögzített sorrendet vizsgálunk, azt a részproblémát választjuk, hogy H_1 érkezik először, majd H_2, és végül H_3.

A részprobléma két hasonlóan kezelhető részből áll, meg kell határozni A) a H_1 és H_2, illetve B) a H_2 és H_3 közötti viszályhoz tartozó pontok halmazát.
A eset: H_1 és H_2 közötti viszály

2.39. Feladat: *Jellemezze a H_1 és H_2 közötti viszályhoz tartozó pontok koordinátáit.*

MEGJEGYZÉSEK A FELADATHOZ

Legyen $P(x;y;z)$ igy ilyen pont. a) P egy 3 oldalhosszúságú kockában van, ezért a koordinátáira teljesülnek a

$$(1)\ \ 0 \le x \le 3,\quad (2)\ \ 0 \le y \le 3\ \text{ és }\ (3)\ \ 0 \le \mathrm{z} \le 3$$

egyenlőtlenségek. b) Az érkezési sorrendből következik, hogy

$$(4) \quad x \leq y \leq z.$$

A H_1 és H_2 jelenlétét kifejező intervallumoknak legalább 0,5 óra átfedése van, azaz H_2 legfeljebb egy fél órával H_1 után érkezhet:

$$(5) \quad y \leq x + 0,5.$$

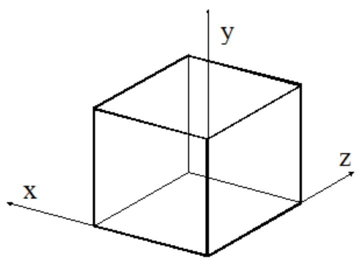
H_3 legalább egy fél óráig nincs jelen, miközben H_1 és H_2 egyszerre vannak a barlangban, tehát legalább fél órával H_2 után érkezik:

$$(6) \quad z > y + 0,5.$$

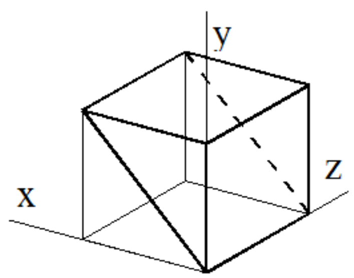
2.40. Feladat: *Szemléltesse az (1) ... (6) feltételek mindegyikének megfelelő pontokat.*

MEGJEGYZÉSEK A FELADATHOZ

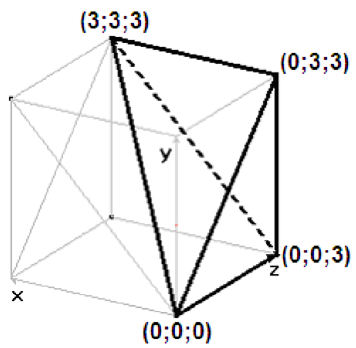
$0 \leq x \leq 3$ megoldása nem egy intervallum az x tengelyen, hanem egy párhuzamos sáv a térben. Így (1)-(3) megoldás egy 3 egység oldalú kocka.



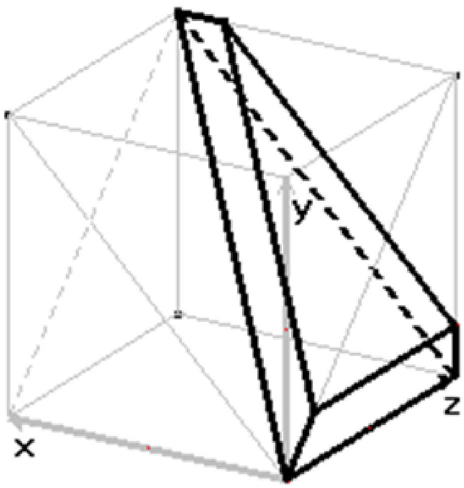
(4) első fele $x \leq y$, ezért elfelezzük a kockát az $x = y$ síkkal (ez az xz és yz koordinátasíkok szimmetriasíkja), és a felső prizmát tartjuk meg.



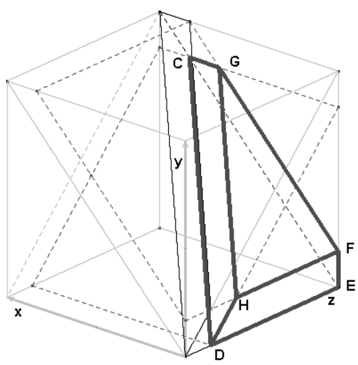
(4) második fele $y \leq z$ egy félteret ír le, amelynek határsíkja az xy és yz koordinátasíkok szimmetriasíkja. Ha ezzel vesszük a kocka metszetét, akkor az origót tartalmazó alsó prizma marad. A két prizma metszete egy tetraéder.



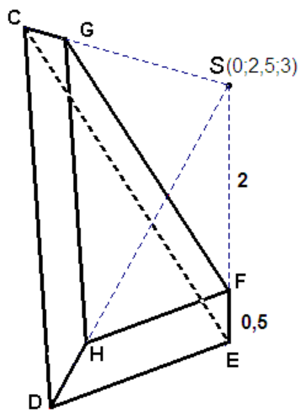
Most ezt a tetraédert csonkoljuk tovább, vesszük az (5) egyenletű féltérrel alkotott metszetét. Ez az $y = x$ síkkal párhuzamos metszést jelent, tehát csonka gúlát kapunk. A három új csúcs: (0;0,5;0,5), (0;0,5;3), (0,5;3;3).



Ennek a csonkagúlának a metszetét kell vennünk a (6) által leírt féltérrel. Most az $y = z$ síkkal párhuzamosan metszünk, az eredmény ismét csonkagúla.



Az (1)-(6) feltételeket kielégítő $CDEFGH$ háromszög alapú csonkagúla azoknak a pontoknak a halmaza, amelyek H_1 és H_2 közötti viszályhoz tartoznak.



Lap	A lapot tartalmazó sík	Csúcsok
$DEFH$	$x = 0$	$C(2,5; 2,5; 3)$
CDE	$y = x$	$D(0; 0; 0,5)$
$CEFG$	$z = 3$	$E(0; 0; 3)$
GHF	$y = x + 0,5$	$F(0; 0,5; 3)$
$CDHG$	$y = z - 0,5$	$G(2; 2,5; 3)$
		$H(0; 0,5; 1)$

2.41. Feladat: *Határozza meg a $CDEFGH$ test térfogatát elemi geometriai úton.*

MEGJEGYZÉSEK A FELADATHOZ

CG, DH és EF élek közös pontja $S(0; 2,5; 3)$, a CDE és GHF lapok párhuzamosak egymással, ami azt jelenti, hogy $SCDE$ és $SGHF$ hasonló tetraéderek.

A hasonlóság aránya

$$SF : SE = 2 : 2,5 = 0,8$$

. A térfogatuk aránya

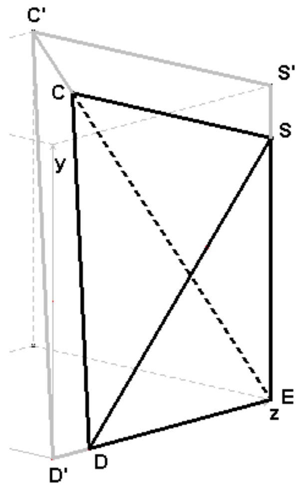
$$V_{SGHF} : V_{SCDE} = 0,8^3.$$

Ezért

$$V_{CDEGHF} = (1 - 0,8^3) \cdot V_{SCDE}.$$

V_{SCDE} meghatározásához tekintsük az E középpontú, 3:2,5 arányú hasonlóságot.

Az $ECDS$ tetraéder képe ennél a hasonlóságnál $EC'D'S'$. Az új pontok koordinátái $C'(3; 3; 3)$, $D'(0; 0; 0)$, $S'(0; 3; 3)$, azaz E, C', D', S' a kocka csúcsai.



Ezért

$$V_{EC'D'S'} = \frac{3^3}{6}.$$

A hasonlóság alapján

$$V_{EC'D'S'} = (\frac{3}{2,5})^3 \cdot V_{ECDS}.$$

Az $ECDS$ tetraéder térfogata

$$V_{ECDS} = (\frac{2,5}{3})^3 \cdot V_{EC'D'S'} = (\frac{2,5}{3})^3 \cdot \frac{3^3}{6} = \frac{2,5^3}{6}.$$

Ezt beírjuk a

$$V_{CDEGHF} = (1 - 0,8^3) \cdot V_{SCDE}$$

képletbe

$$V_{CDEGHF} = (1 - 0,8^3) \cdot \frac{2,5^3}{6} = \frac{61}{48}.$$

2.42. Feladat: *B) eset: Jellemezze a H_2 és H_3 közötti viszályhoz tartozó pontok koordinátáit.*

MEGJEGYZÉSEK A FELADATHOZ

Az A esethez hasonló meggondolással kapjuk, hogy (1), (2), (3) és (4) most is érvényes, (5) és (8) helyébe pedig

$$(7) \quad y > x + 0,5 \;(8) \quad z \leq y + 0,5$$

lép.

2.43. Feladat: *Gyakorlásképpen oldja meg a B) esetet és hasonlítsa össze az eredményt az A) eset eredményével.*

MEGJEGYZÉSEK A FELADATHOZ A $CDEFGH$ csonkakúppal egybevágó alakzatot kapunk, az eredmény most is $\frac{61}{48}$.

Ráadásul az A és B esetben talált testeknek nincs közös belső pontja, hiszen (5) és (7), illetve (6) és (8) kizárják egymást, az $z = y + 0,5$ sík elválasztja a két alakzat belső pontjait.

Ebből következik, hogy a rögzített $x \le y \le z$ érkezési sorrendben a viszályhoz tartozó pontok térfogata $2 \cdot \frac{61}{48}$.

A probléma megoldása

Ahelyett, hogy a hiányzó 5 esetben megoldanánk a feladatot, generáljuk a feladat és a kocka szimmetriáinak segítségével a megoldásokat. A H_1, H_2, H_3 hajótöröttek más érkezési sorrendjét szerepcserével valósítjuk meg. A 6 lehetséges érkezési sorrendet a $P(x, y, z)$ pont koordinátáinak 6 különböző nagyság szerinti sorrendje fejezi ki. Minden sorrendhez egy-egy bizonyos tetraéder tartozik a kockában, amelyeknek nincs közös belső pontjuk. Egy rögzített S_i, S_j, S_k esetére transzformálhatók az A) és B) esetben fellépő egyenlőtlenségek: az x helyére az i-edik, y helyére a j-edik, z helyére a k-adik koordináta kerül. Ezzel a kocka önmagára való leképezését állítjuk elő: $0°$, $120°$ vagy $230°$-os forgatás és síkra való tükrözés. (Az S^3 csoport elemei.)

A békés nap esélye

A viszályhoz tartozó kockarészek térfogata:

$$6 \cdot 2 \cdot \frac{61}{48} = \frac{61}{4}.$$

A viszály esélye:

$$\frac{61}{4} : 3^3 = \frac{61}{108}.$$

A békés nap esélye:

$$1 - \frac{61}{108} = \frac{47}{108}.$$

3. Egy másik megoldási út

Ez az út megtartja a geometriai valószínűséget és a szimmetriameggondolásokat, de a térfogat kiszámításához nem hasonlóságot, hanem integrálszámítást használ.

A a H_1 és H_2 közötti viszályhoz tartozó alakzat térfogatának kiszámítását vázoljuk. A feltételek most is

$$(1)\quad 0 \le x \le 3$$

$$(2)\quad 0 \le y \le 3$$

$$(3)\quad 0 \le z \le 3$$

$$(4)\quad x \le y \le z$$

$$(5)\quad y \le x + 0,5$$

$$(6)\quad z > y + 0,5$$

y a kitüntetett változó, e szerint integrálunk és ezzel fejezzük ki a másik két változót is.

Végigfuttatjuk y-t a $[0;3]$ intervallumon, és megvizsgáljuk, milyen hosszúságú x, illetve z intervallumok tartoznak az egyes y értékekhez.

A $z \geq y+0,5$ feltétel miatt szükségképpen $y < 2,5$.

Ha $0 \leq y \leq 0,5$, akkor $0 < x \leq y$ és $y+0,5 \leq z \leq 3$, azaz x egy y hosszúságú, z pedig egy $2,5-y$ hosszúságú intervallumban helyezkedhet el.

Ha pedig $0,5 < y < 2,5$, akkor $y-0,5 < x < y$ és $y+0,5 < z < 3$, azaz x egy 0,5 hosszúságú, z pedig egy $2,5-y$ hosszúságú intervallumban helyezkedhet el.

Így a viszály méretét az alábbi integrál szolgáltatja:

$$\int_0^{0,5} y(2,5-y)dy + \int_{0,5}^{2,5} 0,5(2,5-y)dy = \left[\frac{5u^2}{4} - \frac{u^3}{3}\right]_0^{0,5} + \left[\frac{5u}{4} - \frac{u^2}{4}\right]_{0,5}^{2,5} = \frac{61}{48}$$

A megoldás további része megegyezik az előző megoldással.

4. A megoldás értékelése, általánosítás Jelölje δ órában, hogy mennyi ideig tud két hajótörött viszály nélkül a barlangban maradni. A vizsgált feladatban $\delta = 0,5$ és ekkor $43,5\%$ a békés nap esélye. Ha $\delta = 1$, akkor biztosan béke van. Az is megmutatható (a békés pontok vizsgálatával), hogy $\delta = 0$ esetén is van $\frac{1}{27}$ esélye a békének.

Érdekes és megoldható feladat, hogy milyen δ esetén lesz 50% esélye a békének. ($\delta \approx 0,5476\%$.)

Az itt ismertetett technika alkalmas arra, hogy $\frac{1}{2} \leq \delta < 1$ értékekre paraméteresen meghatározzuk a béke esélyét. Ebből a képletből jött ki δ közelítő értéke a béke 50%-os esélyéhez.

3. fejezet

Számtan, algebra

A számfogalom kialakítása, számlálás, számok neve, műveletek értelmezése tárgyi tevékenységgel és szöveg alapján. Számolás (az éppen aktuális számkörben) fejben és írásban. Az alsó tagozaton nagyon fontos, hogy a szám- és műveletfogalom tapasztalati úton alakuljon ki.

3.1. Alapfeladatok és kompetenciák

3.1.1. A kerettanterv elvárásai

Alsó tagozat

- Számok írása, olvasása (100-as számkör). Helyi érték ismerete.
- Római számok írása, olvasása (I, V, X).
- Számok helye a számegyenesen. Számszomszédok értése. Természetes számok nagyság szerinti összehasonlítása.
- Számok képzése, bontása helyi érték szerint.
- Matematikai jelek: $+, -, \cdot, :, =, <, >, ()$ ismerete, használata.
- Összeadás, kivonás, szorzás, osztás szóban és írásban.
- Szorzótábla ismerete a százas számkörben.
- A műveletek sorrendjének ismerete.
- Szöveges feladat értelmezése, megjelenítése rajz segítségével, leírása számokkal.
- Páros és páratlan számok megkülönböztetése.
- Szimbólumok használata matematikai szöveg leírására, az ismeretlen szimbólum kiszámítása.

– Számtan, algebra

– Számok írása, olvasása. Helyi érték, alaki érték, valódi érték fogalma 10000 számkörben.

– Negatív számok a mindennapi életben (hőmérséklet, adósság).

– Törtek a mindennapi életben: $2, 3, 4, 10, 100$ nevezőjű törtek megnevezése, lejegyzése szöveggel, előállítása hajtogatással, nyírással, rajzzal, színezéssel.

– Természetes számok nagyság szerinti összehasonlítása tízezres számkörben.

– Mennyiségek közötti összefüggések észrevétele tevékenységekben.

– A matematika különböző területein az ésszerű becslés és a kerekítés alkalmazása.

– Fejben számolás százas számkörben.

– A szorzótábla biztos ismerete százas számkörben.

– Összeg, különbség, szorzat, hányados fogalmának ismerete. Műveletek tulajdonságainak, tagok, illetve tényezők felcserélhetőségének alkalmazása. Műveleti sorrend ismerete, alkalmazása.

– Négyjegyű számok összeadása, kivonása, szorzás és osztás egy- és kétjegyű, számmal írásban.

– Műveletek ellenőrzése.

– Szöveges feladat: a szöveg értelmezése, adatok kigyűjtése, megoldási terv, becslés, ellenőrzés, az eredmény realitásának vizsgálata.

– Többszörös, osztó, maradék fogalmának ismerete.

Felső tagozat

– Racionális számok írása, olvasása, összehasonlítása, ábrázolása számegyenesen.

– Ellentett, abszolút érték, reciprok felírása.

– Mérés, mértékegységek használata, átváltás egyszerű esetekben.

– A mindennapi életben felmerülő egyszerű arányossági feladatok megoldása következtetéssel, az egyenes arányosság értése, használata.

– Két-három műveletet tartalmazó műveletsor eredményének kiszámítása, a műveleti sorrendre vonatkozó szabályok ismerete, alkalmazása. Zárójelek alkalmazása.

– Szöveges feladatok megoldása következtetéssel, (szimbólumok segítségével összefüggések felírása a szöveges feladatok adatai között).

– Becslés, ellenőrzés segítségével a kapott eredmények helyességének megítélése.

- A százalék fogalmának ismerete, a százalékérték kiszámítása.
- Számok osztóinak, többszöröseinek felírása. Közös osztók, közös többszörösök kiválasztása. Oszthatósági szabályok $(2, 3, 5, 9, 10, 100)$ ismerete, alkalmazása.
- A hosszúság, terület, térfogat, űrtartalom, idő, tömeg szabványmértékegységeinek ismerete. Mértékegységek egyszerűbb átváltásai gyakorlati feladatokban. Algebrai kifejezések gyakorlati használata a terület, kerület, felszín és térfogat számítása során.
- Elsőfokú egyismeretlenes egyenletek, egyenlőtlenségek megoldása szabadon választott módszerrel.
- Biztos számolási ismeretek a racionális számkörben. A műveleti sorrendre, zárójelezésre vonatkozó szabályok ismerete, helyes alkalmazása. Az eredmény becslése, ellenőrzése., helyes és értelmes kerekítése.
- Mérés, mértékegység használata, átváltás. Egyenes arányosság, fordított arányosság.
- A százalékszámítás alapfogalmainak ismerete, a tanult összefüggések alkalmazása feladatmegoldás során.
- A legnagyobb közös osztó kiválasztása az összes osztóból, a legkisebb pozitív közös többszörös kiválasztása a többszörösök közül.
- Prímszám, összetett szám. Prímtényezős felbontás.
- Egyszerű algebrai egész kifejezések helyettesítési értéke. Összevonás. Többtagú kifejezés szorzása egytagúval.
- Négyzetre emelés, négyzetgyökvonás, hatványozás pozitív egész kitevők esetén.
- Elsőfokú egyenletek és egyenlőtlenségek. A matematikából és a mindennapi életből vett egyszerű szöveges feladatok megoldása következtetéssel, egyenlettel. Ellenőrzés. A megoldás ábrázolása számegyenesen.
- A betűkifejezések és az azokkal végzett műveletek alkalmazása matematikai, természettudományos és hétköznapi feladatok megoldásában.
- Számológép ésszerű használata a számolás megkönnyítésére.

Középiskola

- Egyszerű algebrai kifejezések használata, műveletek algebrai kifejezésekkel; a tanultak alkalmazása a matematikai problémák megoldásában (pl. modellalkotás szöveg alapján, egyenletek megoldása, képletek értelmezése); egész kitevőjű hatványok, azonosságok.
- Elsőfokú, másodfokú egyismeretlenes egyenlet megoldása; ilyen egyenletre vezető szöveges és gyakorlati feladatokhoz egyenletek felírása és azok megoldása, a megoldás önálló ellenőrzése.

– Elsőfokú és másodfokú (egyszerű) kétismeretlenes egyenletrendszer megoldása; ilyen egyenletrendszerre vezető szöveges és gyakorlati feladatokhoz az egyenletrendszer megadása, megoldása, a megoldás önálló ellenőrzése.

– Egyismeretlenes egyszerű másodfokú egyenlőtlenség megoldása.

– Az időszak végére elvárható a valós számkör biztos ismerete, e számkörben megismert műveletek gyakorlati és elvontabb feladatokban való alkalmazása.

– A tanulók képesek a matematikai szöveg értő olvasására, tankönyvek, keresőprogramok célirányos használatára, szövegekből a lényeg kiemelésére.

– A kiterjesztett gyök- és hatványfogalom ismerete.

– A logaritmus fogalmának ismerete.

– A gyök, a hatvány és a logaritmus azonosságainak alkalmazása konkrét esetekben probléma megoldása céljából.

– Egyszerű exponenciális és logaritmusos egyenletek felírása szöveg alapján, az egyenletek megoldása, önálló ellenőrzése.

– A mindennapok gyakorlatában szereplő feladatok megoldása a valós számkörben tanult új műveletek felhasználásával.

– Számológép értelmes használata a feladatmegoldásokban.

3.1.2. A számfogalom fejlesztése (6. tétel)

Műveleti modellek az egész számok körében, számkörbővítés, permanenciaelv.

Természetesen nem ismételjük meg a más tételekben már feldolgozott gondolatokat, csak utalunk rájuk.

A téma összetettségét jól kiemeli a Surányi Jánostól származó idézet: „ha valakit megkérdezünk mekkora a kerülete egy 1 cm oldalú négyzet csúcsain átmenő körnek, hamar megadja a választ: $\pi \cdot \sqrt{2}$ cm. Ha viszont azt kérdezzük mi az értelme ennek a szorzatnak, mit értünk azon, hogy a π-t és a $\sqrt{2}$-t összeszorozni, akkor általában csak egy definíció merül fel, ami azonban itt semmire sem használható: „a szorzandót annyiszor veszem összeadandóul, ahányszor a szorzó mutatja”. Mit jelent a π számú vagy a $\sqrt{2}$ számú összeadandó? Ennek bizony semmi értelme sincs.”

I. A téma helye és szerepe az iskolai matematikában.

A számfogalom fejlesztése végighúzódik egész iskolai tanításunkon az alsó tagozattól az érettségiig. Az egymásra épüléssel egyidejűleg szerteágazó kapcsolódásokkal köti össze a különböző iskolai témaköröket.

A tanítás különböző szintjein egyaránt fontos szempont, hogy támaszkodjunk a korábbi szinteken szerzett tapasztalatokra: a felső tagozaton építsünk az alsó tagozatból hozott ismeretekre, a középiskolában az általános iskolai ismeretekre. Az intuitív benyomásokat és a konkrét tevékenységek tapasztalatait felhasználva kell a fogalmi szintet felépíteni. (A 11. tervezés tétel alapján)

II. A számkör felépítésének elvi menete, kulcsfogalmai.

Pozitív egész számok, egész számok, racionális számok, valós számok értelmezése. Műveletek értelmezése, tulajdonságaik.

A pozitív egész számok bevezetése halmazokkal és axiómákkal. Számkörbővítés, műveletek értelmezése a bővített számkörökben (egész számok, racionális számok) a permanencia elv alapján. (Kapcsolódó témák: ellentett, abszolút érték, relációk, függvények, egyenlőtlenségek, oszthatóság, teljes indukció, algebrai struktúrák.)

Módszertani szempontok: a definíciók és tételek tartalmának szemléletes, konkrét tevékenységen alapuló modelljeinek ismerete.(1. definíciók és 2. bizonyítások tételek)

III. Bő vázlat *1. A pozitív egész számok*

Értelmezés: Absztrakció ekvivalens véges halmazok közös tulajdonságából. Számlálás: véges halmazok elemeit összepárosítjuk sorra a tőszámnevekkel. Mérések, mérőszámok. Pozitív egész számok írása, olvasása, számrendszerek.

Peano axiómák.

Módszertani megjegyzés: alsó tagozatos tevékenységekből tapasztalatgyűjtés halmazokkal, továbbszámlálással.

Műveletek.

Módszertani megjegyzés: az összeadás és a szorzás többféle modellel, konkrét példákban a megfelelő számkörben, már a legelejétől kezdve a tanult számkörben. (Összeadás: összesítés, hozzátevés, stb.; szorzás: rendezett elempárok pl. színezések, azonos tagokból álló összeg).

Összeadás: A + jel már az alsó tagozaton is többféle jelentéssel bír (hozzáadás, összeadás, előjel, ...). Az összeadás értelmezése és tulajdonságai a halmazok egyesítésének tulajdonságaira vezethetők vissza. A hozzáadás matematikai leírása a Peano axiómákra épül.

Szorzás: Az ismételt összeadásként és halmazok direkt szorzatával is értelmezhető és levezethetők a szorzás alaptulajdonságai is.

Összekapcsolva: $a + b = b + a$, $a \cdot b = b \cdot a$, $(a + b) + c = a + (b + c)$ és $(ab)c = a(bc)$ és $(a + b)c = ac + bc$, $a(b + c) = ab + ac$ mindkét irányban.

Kiterjesztés, teljes indukció: azonosságok kiterjeszthetők több tagra, illetve több tényezőre. Megállapodások: zárójelek használata, műveleti sorrend, „egytagú" összeg, „egytényezős" szorzat, ...

Pozitív egész kitevőjű hatványozás értelmezése, az alapazonosságok igazolása az összeadás és a szorzás azonosságainak alkalmazásával, kezdetben konkrét példákon. A hatványozás nem kommutatív, nem asszociatív, de például $(a \cdot b)^c = a^c \cdot b^c$.

2. A kivonás, mint a hozzáadás inverze

Az $a + x = b$ vagy a $b + y = a$ egyenletek megoldhatóságának vizsgálata a pozitív egész számok körében. Ha létezik ilyen x pozitív egész szám, akkor a $b - a$ szám a b és az a számok különbsége, ha létezik ilyen y pozitív egész szám, akkor az $a - b$ az a és b különbsége. A kettő közül legfeljebb az egyik létezik. Ha $a = b$, nem létezik, egyébként pontosan egy. A kivonás azonosságai konkrét tapasztalatok alapján.

Módszertani megjegyzés: konkrét példák, pl. mennyivel egészítettük ki, mennyivel több?, stb. kérdések felvetése a tanult számkörökben, szemléletes példák, játékok a kivonás azonosságaira a megfelelő számkörben, már a legelejétől kezdve.

3. Egyenlőtlenségek

A kivonás elvégezhetősége alapján bevezetjük az egyenlőtlenségeket.

Az $a < b$, vagy $b > a$, ha létezik olyan c pozitív egész szám, hogy $a + c = b$.

Az $a < b$, $a = b$, $a > b$ relációk tulajdonságai, trichotómia. (Kisebb egyenlő, nagyobb egyenlő, rendezés)

Monotonitás a pozitív egészek körében: $a < b \Leftrightarrow a + c < b + c$ és $a < b \Leftrightarrow ac < bc$.

4. A maradékos osztás, ismételt kivonás

Az osztás elvégezhetősége elvezet az oszthatósági relációhoz. Ha létezik olyan x pozitív egész szám, hogy $a \cdot x = b$, akkor azt mondjuk, hogy a osztója b-nek és $x = b : a$ a hányados.

Az osztás műveleti tulajdonságai. Számelméleti alapfogalmak (osztó, többszörös, oszthatósági szabályok, euklideszi algoritmus, lnko, lkkt, prím, ... , a prímekkel kapcsolatos érdekes kérdések).

A négy alapművelet a pozitív egész számok körében, számolás fejben, írásban és géppel.

Módszertani megjegyzés: konkrét kérdésekkel, szemléletes példákkal a megfelelő számkörben, már a legelejétől kezdve.

5. Egész számok, számkörbővítés

A 0 és az additív inverz bevezetése, az $a + x = a$ egyenlet megoldása legyen a 0, minden a pozitív egészre és legyen minden a-hoz a_-, amelyre $a + a_- = 0$.

Módszertani megjegyzés: a negatív szám bevezetése konkrét modellekkel, hőmérő, mélység,-magasság, adósság-vagyon, ellentett fogalma, abszolút érték fogalma. Minden egész számnak van ellentettje és abszolút értéke, a 0 ellentettje önmaga. Az $x \mapsto -x$ függvényt minden egészre értelmezzük.

Példa a permanencia-elv alkalmazására

A pozitív egészek körében szerepelt: ha a $b = a + c$, akkor $c = b - a$. Itt megmutatjuk, hogy $b + a_- = a + c + a_- = c + a + a_- = c + 0 = c$. Tehát $b - a = b + a_-$.

Módszertani megjegyzés: a tanításban hosszú ez az út. Jelölési problémák: előjel és műveleti jel használata. Az egész számok körében az összeadás és kivonás lehetséges eseteit konkrét példákon modellekkel tárgyalják. Az adósság-vagyon modell lényege, hogy minden egész szám sokféleképpen rakható ki „adósságcédulák” és „pénzérmék” együttesével, így az összeadás és kivonás művelete mindig elvégezhető hozzátevéssel és elvétellel. Ez az egész számok pozitív egész számpárokkal történő felépítését modellezi. Egyéb modellek, pl. „kisautós modell”, lépkedés a számegyenesen, stb.

Szorzás az egész számok körében

Az előjelszabályok a permanencia elv alapján értelmezhetők. A tanításban modellekkel, pl.: adósság vagyon modellel; vagy pl. úgy, hogy a cx függvény értelmezését kiterjesztjük minden egészre. A bővített számkörben a műveletek értelmezése az azonosságok érvénybe maradása alapján egy-két eset megmutatható.

Például megmutathatjuk, hogy $a \cdot 0 = 0$, minden egész a-ra. A nulla „$a + 0 = a$ minden a-ra” definíciójából a disztributivitás felhasználásával következik, hogy $a \cdot 0 = 0$ minden egész a-ra.

A szorzás előjel szabályai is megmutathatók az azonosságok értelmezési körének az egészekre történő kiterjesztésével. Például: $a \cdot b_- = (a \cdot b)_-$, mert $a \cdot b_- + a \cdot b = a(b_- + b) = a \cdot 0 = 0$. (Itt már felhasználtuk a 0 előzőleg megmutatott tulajdonságát.)

6. A törtek bevezetése, (a multiplikatív inverz értelmezése)

Az osztás elvégezhetősége érdekében új halmazzal bővítjük az egészek halmazát, egész számpárokból: Az $(a : b)$ számpárt vezetjük be, mint a $b \cdot x = a$ egyenlet megoldásának, $x = a : b$, akkor is, ha nincs ilyen x egész szám, de kizárva, hogy a számpár második eleme 0 legyen.

Módszertani megjegyzés: Jelölések, törtek szemléletes értelmezése többféleképpen (egyenlő részekre osztás, a szorzás különböző értelmezésének megfordításai.) Egyszerűsítés, bővítés, reciprok, műveletek törtekkel. Műveletek értelmezése a permanencia elv alapján. Az elvégezhető osztások eredményét azonosítjuk az egész számokkal.

7. A racionális számok értelmezése a törtek ekvivalenciaosztályaiként

Tizedestörtek, műveletek tizedestörtekkel, becslés, kerekítés, közelítés, számolás írásban és géppel. Véges és végtelen tizedes törtek. A végtelen szakaszos tizedes törtek (beleértve a végeseket is) és a racionális számok halmazának ekvivalenciája.

8. A valós számok

A valós számok értelmezése közelítések, határértékek segítségével, analízisbeli fogalmak alkalmazásával. Jelölések, elnevezések. Az alapazonosságok értelmezési körének kiterjesztése a műveletek monotonitásának megtartásával. Intervallumok. Gyakori előfordulások: függvények értelmezési tartománya és értékkészlete, egyenletek, geometriai mértékek, stb.

Módszertani megjegyzés: példák racionális és irracionális számokra – nemcsak a $\sqrt{2}$ vagy a π – tizedestörtekkel is. A műveletek elvégezhetősége, műveletek a racionális és irracionális számok között.

9. Számossági kérdések

A számosság fogalma. A természetes számok halmazának számossága, mint a megszámlálhatóan végtelen számosság. Sorbarendezhetőség. A racionális számok halmaza megszámlálható. Az irracionális számok halmaza nem megszámlálható. A valós számok halmaza nem megszámlálható. Számosságok rendezése (hatványhalmaz).

Irodalom Peller József: A számfogalom fejlesztésének szintjei az oktatási gyakorlatban. [173]

Kitekintő irodalom Surányi János: A számkör felépítése. [211]

3.1.3. Az algebrai struktúrák az iskolai tananyagban (7. tétel)

Természetes számok, egész számok gyűrűje, maradékosztályok, racionális számok, valós számok teste, szimmetriacsoportok, vektorterek.

Struktúrákról általában

Művelet, műveleti tulajdonságok, asszociativitás, kommutativitás, disztributivitás, egység, egységelem, inverz fogalma. Példákkal illusztrálva hol és milyen körülmények között bukkannak fel illetve szilárdulnak meg ezek a fogalmak az alap- és középfokú oktatásban. Félcsoport, csoport, gyűrű, test. A részstruktúra fogalma. Példa nem kommutatív struktúrára.

Természetes számok

A természetes számok axiomatikus rendszere – Peano-aritmetika. A természetes számok algebrai struktúrája. Műveletek a természetes számok körében. Hogyan bővül és szilárdul meg a természetes számok fogalma az alap- és középfokú oktatásban. Néhány szó a természetes számokról, mint számosságról. Példák arra, hogy milyen aritmetikai állítások általánosítása vezetnek strukturális tételekhez (pl. Euler-Fermat tétel és ciklikus csoportok elemeinek a rendje).

Egész számok gyűrűje

Műveletek és tulajdonságaik az egészek körében. Az egészek algebrai tulajdonsága. A természetes számok, az egész számok részstruktúrája. Szöveges feladat típusok, melyek segítik motiválni a negatív számok fogalmát. Egyenletekről, melyeknek megoldásai az egész számok halmazának a részhalmazai. Néhány szó az egész számokról, mint számosságról. Az egész számok ábrázolása a számegyenesen, didaktikai kérdések a nem korlátos halmazok megjelenítéséről. Az egész számok néhány nevezetes azonossága; pl. mely algebrai tulajdonságból következik a $(-1) \cdot (-1) = 1$?

Racionális számok teste

Műveletek és azok tulajdonságai a racionális számok körében. Testaxiómák teljesülése. A rendezett test fogalma és néhány következménye. A racionális számok mindenütt sűrű halmazt alkotnak.

Didaktikai kérdések, amelyek e halmaz számegyenesen való megjelenítéséből fakadnak. A racionális számok ekvivalens megfogalmazásai; (a, b) rendezett elempárokból álló halmaz, (ahol a és b egész számok és b különbözik nullától) és ezen a halmazon definiált műveletek.

Egyenletek, melyeknek megoldásainak a halmaza a racionális számok halmaza.

A racionális számok iskolai bevezetésének a fokozatai.

Feladatok, melyek motiválják a racionális számok bevezetését.

A valós számok teste

Műveletek és azok tulajdonságai a valós számok körében. A valós test axiómái testaxiómák. A valós számok halmaza az adott axiómákra rendezett testet alkotnak és ennek néhány következménye. Irracionális számok. Példa néhány irracionális számra az iskolai matematikában (pl. $\sqrt{2}$; $\log_2 3$, irracionalitása). Az irracionális számok halmaza mindenütt sűrű halmazt alkot. Racionális és irracionális számok összegének és szorzatának eredményének racionalitása, ill. irracionalitása. Valós számok megjelenítése végtelen tizedes tört alakban. E decimális törtek egyértelműsége. A racionális és irracionális számok karakterizációja a decimális törtek segítségével. Decimális törtek és végtelen sorok kapcsolata. A decimális törtekkel kapcsolatos didaktikai kérdések. A valós számok megjelenítése és a kontinuum fogalmának motiválása az iskolában. Egyenletek és megoldáshalmazaik; példa egyenletekre, melyek megoldásai nem valós számok. Mely testaxióma következménye ez?

Maradékosztályok

Maradékos osztás. Kongruencia reláció az egészek körében. Műveletek maradékosztályokban. Kongruenciák és velük való műveletek. Milyen struktúrát alkotnak, a modulus értékétől függően. Nevezetes tételek a kongruenciák körében. Ezek kapcsolata az iskolai számelmélet feladatokkal. Példa véges testre. Néhány feladat, amelyeknek megfogalmazása egyszerűbb a maradékosztályok nyelvén megfogalmazva.

Szimmetrikus csoportok

Egy n-elemű halmaz önmagára való leképezései. Permutációk, és ezek száma. A permutációk megjelenítése. Permutációk szorzata. Az n-edrendű szimmetrikus csoport. Inverzió fogalma. Páros, páratlan permutációk. Transzpozíció. Bármely permutáció transzpozíciók szorzata. Néhány iskolai-szakköri feladat, ahol ilyen típusú kérdés felmerül (pl. tizenötös játék; megoldhatatlan pozíciók a játékban).

Szabályos sokszögek szimmetriái. A sík kongruens leképezései és azok egymás utáni alkalmazásai. A síknak egy négyzetet fixen hagyó leképezéseinek a csoportja. A szabályos háromszöget fixen hagyó leképezései csoportjának a szorzótáblája. Példa nem kommutáló elemekre e csoportban. Milyen iskolai (pl. geometriai) feladatok kapcsolódnak e fenti csoportokhoz?

Vektorterek

A vektortér fogalmának geometriai háttere. Műveletek vektortérben. Példa vektorterekre (pl. valós test felett, a polinomok összeadására és skalárral való szorzására nézve, korlátos intervallumon Riemann integrálható valós függvények halmaza).

Alapvető fogalmak; lineáris kombináció, lineáris függetlenség, összefüggőség, generátorrendszer, bázis, véges dimenzió, vektortér altere. Véges dimenziós vektorterek izomorfiája.

Lineáris leképezések és mátrix reprezentációjuk. Néhány geometriai transzformáció, mint lineáris leképezés.

Euklidészi terek; skalárszorzat, a norma, távolság, és vektorok által bezárt szög meghatározása magasabb dimenzióban.

Geometriai feladatok vektorgeometriai megoldása a középiskolában; néhány egyszerűbb példa. Koordinátageometria feladatok és euklidészi terek (egyenesek hajlásszöge, pont és egyenes távolsága stb.)

Irodalom Korándi József – Török Judit: Számelmélet és algebra III. [129] 1-49; 87-96; 113-116.

Peller József – Megyesi László: Függvények elemi vizsgálata. Vektortér. [175]

Kitekintő irodalom a matematikai tartalom felelevenítéséhez

C. D. Bennett: Topspin és a szimmetrikus csoport. [30]

Cut the knot! természetes, egész, racionális és valós számokkal, szimmetria csoporttal foglalkozó oldalai. [55]

Freud Róbert: Lineáris algebra. [79]

Fried Ervin: Algebra I., Elemi és lineáris algebra. [82]

Fried K. Korándi J. Török J. Bevezetés a modern algebrába. [83]

Fuchs László: Algebra [85]

Gyarmati E.-Freud Róbert: Számelmélet. [96]

Kiss Emil: Bevezetés az algebrába. [124]

Laczkovich M. T.Sós Vera: Analízis. [138]

Sárközy A.: Számelmélet. [197]

Scharnitzky Viktor: Mátrixszámítás. [199]

Szabó Endre: Csoportelmélet. [213]

Szendrei János: Algebra és számelmélet. [215]

3.1.4. A rendezés fogalmához

3.1. Feladat: *Két gyerek kavicsokkal játszik. Minden gyerek kap négy kártyát és 20 kavicsot. A kavicsokat ráteszik a kártyákra, majd összehasonlítják a készletüket. Egyik gyerek minden egyes kártyáját összehasonlítják a másik gyerek minden egyes kártyájával. Az a kártya kap egy pontot, amelyiken több kavics található. Ha két kártyára ugyanannyi kavicsot tettek, akkor az nulla pontot ér. Amennyiben egy kártyán kevesebb kavics van mint egy másikon, akkor az -1 pontot kap. Hogyan kell szétosztani a kavicsokat, hogy a legnagyobb nyerési esélyünk legyen?*

Létezik-e legjobb készlet?

MEGJEGYZÉSEK A FELADATHOZ

Egy kártyára nem lehet túl sokat rakni, mert a következőkre túl kevés jutna. Ezért gyakran az 5,5,5,5 készletet választják. (Egy kártyát a kavicsok számával jellemzünk.) Nem nehéz ennél jobb készletet találni: a 6,6,6,2 például ilyen. Ennél a készletnél is tudunk jobbat: 7,7,4,2 jobb, mint 6,6,6,2, ...

Itt a tanulók rendszerint *„tovább javítanak"*. Kiinduláskor azt sejtik, hogy 5,5,5,5 a legjobb készlet, de amint az A és a B táblázat mutatja, a „legjobb készlet folyamatos javításával a legjobb készlethez jutunk vissza", amit a diákok meglepetéssel tapasztalnak.

Ez a feladat választási problémaként is megfogalmazható. Létezik olyan választási modell, amelyben mindig két preferenciasorrendet hasonlítunk össze. Az A táblázat egyes készletei tekinthetők például 2 jelöltre 4 funkció szerint leadott szavazatoknak. Minden jelölt 20 szavazatot kap más-más megoszlásban. A kieséses kiértékelésnél kapott pontok alapján az egyik jobb, mint másik, a harmadik ennél (is?) jobb, a negyedik jobb, mint a harmadik. Itt meg szoktak állni: a negyedik a győztes.

A készletek halmazán értelmeztünk egy „matematizálás" relációt. Ez nagyon emlékeztet a „$>, =, <$ rendezési relációra, két reláció közötti analógia alapján *ellenőrizetlenül* megelőlegezik az új relációnak a tranzitív tulajdonságot. Ennek a feltételezésnek a cáfolata a két példa az A és a B táblázatban.

A	KÉSZLET				JOBB	EGYFORMA	ROSSZABB
	5	5	5	5			
jobb					12	0	4
	6	6	6	2			
jobb					9	1	6
	7	7	4	2			
jobb					7	3	6
	8	4	4	4			
jobb					12	0	4
	5	5	5	5			

B	KÉSZLET				JOBB	EGYFORMA	ROSSZABB
jobb	5	5	5	5			
					12	0	4
	6	7	6	1			
jobb					8	2	6
	7	7	3	3			
jobb					10	0	6
	8	4	4	4			
jobb					12	0	6
	5	5	5	5			

3.1.5. Az algebrai azonosságok tanításához

3.2. Feladat: *Gondolja meg, hogy melyik reprezentációs szinten oldjuk meg az alábbi feladatokat:*

a) $632410 \cdot 632413 - 632411^2$

b) $\frac{2^15 \cdot 2^21}{8^11}$

c) $lg0,01$

d) $16^{1,75}$

e) $3^{log_9 16-1}$

(Pósa L. Összefoglalás, Calibra, 1999. [191] alapján)

Számpéldák, szemléltető modellek segítségével vezetjük be az azonosságokat.

Amikor már az ismert összefüggések rövidített megfogalmazását jelentik a képletek, akkor azok segítségével látszólag megoldhatatlan feladatok is egyszerűvé válnak. (Érdemes esetleg versenyt szervezni a zsebszámológépesek és az ésszel dolgozók között.)

3.1.6. Műveletek és műveleti azonosságok rokonsága

A műveletek között sok és sokféle rokonság van. A következő feladat az

(1) ismételt továbbszámlálás 1-gyel,

(2) ismételt hozzáadása ugyanannak a számnak,

(3) ismételt megszorzás ugyanazzal a számmal

fontos műveletekre vonatkozik. Ezek a műveletek fokozatosan épülnek egymásra, és így egy hierarchikus rendszert alkotnak.
Legyen n egy pozitív egész szám.

n hozzáadása	n-szer ismételt továbbszámlálás 1-gyel
n-nel való megszorzás	n-szer ismételt hozzáadása ugyanannak a számnak
n-edik hatványkitevőre emelés	n-szer ismételt megszorzás ugyanazzal a számmal

3.1. táblázat. Művelet ismételt eljárással

A kivonás, az osztás és a gyökvonás között hasonló kapcsolatok vannak, hiszen ezek az összeadás, szorzás és hatványozás inverz műveletei. Várható, hogy a műveleti azonosságok között is sokféle párhuzam mutatható ki egy olyan struktúrában, amelyben a következő műveletet a megelőzőből hasonló módon hozzuk létre.

3.3. Feladat: *Rokon azonosságok.*

a) Milyen összefüggés sejthető meg az $a^3 \cdot b^3 = (a \cdot b)^3$ azonosságból, ha minden egyes szorzást összeadásra cserélünk?

b) Bizonyítsa be az eredeti és a rokon azonosságot. Hasonlítsa össze a két bizonyítást.

c) Keressen más rokon azonosságokat.

MEGJEGYZÉSEK A FELADATHOZ:

Az $a^3 \cdot b^3 = (a \cdot b)^3$ azonosság csupa szorzással $(a \cdot a \cdot a) \cdot (b \cdot b \cdot b) = (a \cdot b) \cdot (a \cdot b) \cdot (a \cdot b)$ alakba írható. Ha ebben a szorzásokat összeadásra cseréljük, akkor $(a+a+a)+(b+b+b) = (a+b)+(a+b)+(a+b)$ adódik, ami $3a + 3b = 3(a + b)$ alakba írható.

Ugyanezt közvetlenül is megkaphatjuk, ha az eredeti azonosságban minden műveletet az őt „megelőző művelettel”, a harmadik hatványra emelést hárommal való szorzással, a szorzásokat összeadással helyettesítjük.

Mindkét bizonyítás azon múlik, hogy az azonosságokat vissza lehet vezetni csupán szorzást, illetve csupán összeadást tartalmazó alakra, majd felhasználjuk, hogy az összeadás is, meg a szorzás is kommutatív és asszociatív.

Az alábbi műveletek bizonyos értelemben inverz műveletnek tekinthetők.

n-szer ismételt	visszaszámlálás 1-gyel	n kivonása
a ismételt	kivonása	a-val való maradékos osztás

3.2. táblázat. Inverz művelet az eljárás inverzének ismétlésével

3.4. Feladat: *A rokon műveletek inverzei és azok rokonsága*

a) Próbálja meg az előbb felírt hierarchikus felépítést az inverz műveletekre is alkalmazni.

b) Milyen nevet adna a következő műveletnek: b-vel való ismételt osztás?

c) Hogyan lehet pontosan definiálni egy ilyen műveletet?

MEGJEGYZÉSEK A FELADATHOZ:

A válasz előtt gondoljuk meg, hogyan is lehet a maradékos osztást ismételt kivonásként definiálni: Például 50-et 8-cal maradékosan eloszthatunk úgy, hogy addig vonogatjuk ki belőle a 8-at, ameddig 8-nál kisebb pozitív maradékot nem kapunk. Ezt 6-szor tudjuk megtenni. Az $50 : 8$ osztás pontos eredménye 6.125. A 6 ennek az eredménynek az egészrésze.

Ennek mintájára osszuk el 50-et 2-vel: $50 : 2 = 25$; $25 : 2 = 12.5$; $12.5 : 2 = 6.25$; $6.25 : 2 = 3.125$, $3.125 : 2 = 1.0625$. Ez utóbbi már 2-nél kisebb. 50-et 2-vel ismételten osztva az 5-ödik osztásnál lett a maradék 2-nél kisebb.

Ezzel 50-nek a 2-es alapú logaritmusának egészrészét kerestük meg.

3.5. Feladat: *A következő képen egy 7. osztályosoknak szóló matematika tankönyvből mutatunk egy táblázatot. Készítsen a táblázat felhasználásával gyakorló feladatokat a műveletek rokonságának tudatosítására.*

Ha egy műveletsorban csak **összeadás** és **kivonás** szerepel, akkor azt **összegnek** hívhatjuk, mivel egy szám **kivonása** mindig helyettesíthető az **ellentettjének** a **hozzáadásával.**	Ha egy műveletsorban csak **szorzás** és **osztás** szerepel, akkor azt **szorzatnak** hívhatjuk, mivel egy számmal való **osztás** mindig helyettesíthető a **reciprokával** való szorzással.
0 hozzáadása nem változtatja meg az eredményt.	**1-gyel** való **szorzás** nem változtatja meg az eredményt.
Egy számnak és **ellentettjének** az **összege** mindig **0.**	Egy számnak és **reciprokának** a **szorzata** mindig **1.**
Egy szám nem változik meg, ha **hozzá is adjuk** és **ki is vonjuk** belőle ugyanazt a számot.	Egy szám nem változik meg, ha **meg is szorozzuk** és **el is osztjuk** ugyanazzal a számmal (nem 0).
Egy szám nem változik meg, ha egy számot és annak az **ellentettjét** is **hozzáadjuk.**	Egy szám nem változik meg, ha egy (nem 0) számmal és annak a **reciprokával** is **megszorozzuk.**
Ha egy műveletsorban csupa **összeadás** és **kivonás** van, akkor a műveletvégzés sorrendje tetszés szerint cserélgethető, csak arra kell ügyelnünk, hogy a számokat az előttük álló műveleti jellel együtt mozgassuk. Ilyenkor a műveletsort mindig kezdhetjük a **0 hozzáadásával.**	Ha egy műveletsorban csupa **szorzás** és **osztás** van, akkor a műveletvégzés sorrendje tetszés szerint cserélgethető, csak arra kell ügyelnünk, hogy a számokat az előttük álló műveleti jellel együtt mozgassuk. Ilyenkor a műveletsort mindig kezdhetjük az **1-gyel való szorzással.**
Ha egy csupa **összeadást** és **kivonást** tartalmazó műveletsorba zárójelet teszünk, többféle végeredményt is kaphatunk. Ha **+** jel után nyitunk egy zárójelet, akkor azt bárhol is zárjuk be, az **összeg** értéke nem változik.	Ha egy csupa **szorzást** és **osztást** tartalmazó műveletsorba zárójelet teszünk, többféle végeredményt is kaphatunk. Ha **·** jel után nyitunk egy zárójelet, akkor azt bárhol is zárjuk be, a **szorzat** értéke nem változik.
Ha egy csupa **összeadást** és **kivonást** tartalmazó műveletsorban zárójelek is vannak, akkor mindig átalakíthatjuk úgy a műveletsort, hogy ne legyenek benne zárójelek, de az értéke ugyanaz maradjon.	Ha egy csupa **szorzást** és **osztást** tartalmazó műveletsorban zárójelek is vannak, akkor mindig átalakíthatjuk úgy a műveletsort, hogy ne legyenek benne zárójelek, de az értéke ugyanaz maradjon.
Ha a zárójel előtt **+** jel áll, akkor a zárójelet a párjával együtt elhagyhatjuk.	Ha a zárójel előtt **·** jel áll, akkor a zárójelet a párjával együtt elhagyhatjuk.
Ha a zárójel előtt **–** jel áll, akkor a zárójel elhagyásával együtt meg kell változtatni a zárójelben szereplő műveleteket is. Az **hozzáadást kivonásra,** a **kivonást hozzáadásra** kell változtatni.	Ha a zárójel előtt **:** jel áll, akkor a zárójel elhagyásával együtt meg kell változtatni a zárójelben szereplő műveleteket is. Az **szorzást osztásra,** az **osztást szorzásra** kell változtatni.

3.1. ábra. Rokonságok. [218] 51. o.

3.2. Vertikális és horizontális kapcsolatok

3.2.1. Egyenlőtlenségek igazolása

A matematikában és a gyakorlati életben is gyakran alkalmazzuk a középértékeket. Pl.: Két sorba kapcsolt ellenállás a számtani közepüknek megfelelő két egyforma ellenállással helyettesíthető.

A harmonikus közepet az átlagsebesség kiszámítására használhatjuk, ha az adott sebességekkel ugyanakkora utakat tettünk meg. Az átlagos üzemanyagfelhasználást is harmonikus középpel számoljuk.

Az $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \ldots$ harmonikus sorban a másodiktól kezdve minden tag a két szomszédjának harmonikus közepe. (Ez a sor nem csupán a divergens sor prototípusa, hanem a pl. a zenében is fontos.)

Emlékeztető: Legyen a és b két valós szám, amelyekre $0 < a \leq b$. A két szám számtani közepe $A(a,b) = \frac{a+b}{2}$, mértani közepe $G(a,b) = \sqrt{ab}$ és harmonikus közepe $H(a,b) = \frac{2}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}}$.

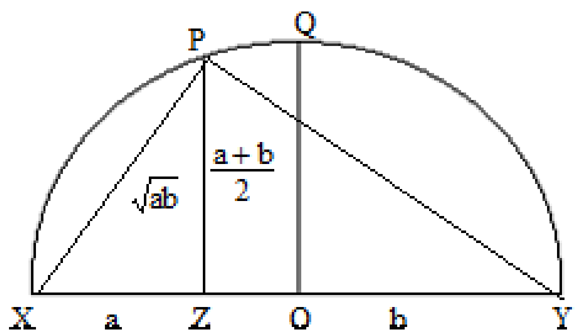
A számtani és a mértani közép viszonya

3.6. Feladat: *Igazolandó a $G(a,b) \leq A(a,b)$ egyenlőtlenség.*

MEGJEGYZÉSEK A FELADATHOZ:

A geometriai bizonyítás leolvasható az ábráról. Gyakori kijelentés. Ebben a formában azt jelentheti, hogy az olvasóra bízzuk a bizonyítást.

De általában nem az ábráról kell leolvasni a bizonyítást, hanem olvasás, gondolkodás közben ábrával szemléltetjük a kijelentéseket. Tankönyvi és osztálytermi körülmények között egyértelművé kell tenni, hogy pontosan mit is kell az ábráról leolvasni.



$XZ = a$, $ZY = b$, így $XO = OY = OQ = A(a,b)$.

Mivel P a körvonal egy pontja és PZ merőleges XY-ra, ezért XYP egy PZ magasságú derékszögű háromszög.

A magasságtétel alapján $PZ = G(a,b)$.

QO egy sugár, PZ pedig az egyik húr fele, így $PZ \leq QO$ teljesül és ez éppen a $G(a,b) \leq A(a,b)$ egyenlőtlenség.

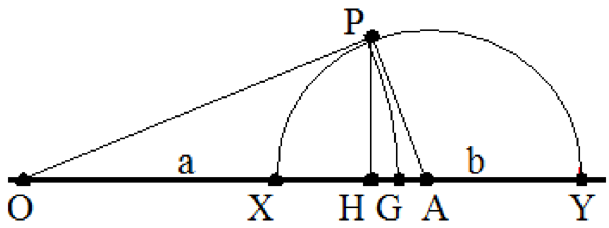
A harmonikus közép összehasonlítása a számtani és mértani középpel

3.7. Feladat: *Hova illeszthető be a harmonikus közép a $G(a,b) \leq A(a,b)$ egyenlőtlenségbe?*

MEGJEGYZÉSEK A FELADATHOZ:

Szavakkal is érdemes megfogalmazni a definíciót: a reciprokok számtani közepének reciproka.

Ha $a = b$, akkor az értékek egyenlők. Ha $a < b$, akkor elemi geometriai úton bizonyítunk: Egy O kezdőpontú félegyenesen $OX = a$ és $OY = b$ távolságra kijelöljük az X és az Y pontokat.



Jelölje A az XY szakasz felezőpontját, ekkor $OA = \frac{a+b}{2}$ (ezért nevezzük A-nak a pontot).

Az A középpontú, $\frac{b-a}{2}$ sugarú körívre illeszkednek az X és az Y pontok.

Pitagorasz tétele szerint az OP érintő hossza $\sqrt{ab} = G(a,b)$.

Ezt a szakaszt az O középpontú, OP sugarú kör segítségével felmérjük a félegyenesre. Az így kapott metszéspont joggal nevezhető G-nek. A H pont a P pontnak a félegyenesre eső merőleges vetülete. A H elnevezés jogossága az OAP és az OPH háromszögek hasonlóságából következik:

$$OH = \frac{OP \cdot OP}{OA} = \frac{G(a,b) \cdot G(a,b)}{A(a,b)} = \frac{ab}{\frac{a+b}{2}} = \frac{2ab}{a+b} = \frac{2}{\frac{1}{a} + \frac{1}{b}} = H(a,b).$$

Be kell még látni, hogy a pontok ábra szerinti sorrendje helyes. Az OAP háromszögben OAaz átfogó, OP pedig befogó.

Tehát: $OG = OP < OA$.

Az OPH háromszögre ugyanilyen meggondolásból kapjuk: $OH < OP = OG$.

A konstrukcióból következően X az OH szakasz egy belső pontja és Y az OA-n kívül van. Az $OXHGAY$ sorrendet és az

$$a < H(a,b) < G(a,b) < A(a,b) < b$$

egyenlőtlenségláncot kapjuk.

Megjegyzés:

Mellékeredményként a közepek között a következő összefüggést kaptuk:

$$\frac{G(a,b) \cdot G(a,b)}{A(a,b)} = H(a,b).$$

Hogyan lehet ezt szavakban kifejezni? Két pozitív szám mértani közepe egyben a harmonikus és a számtani közép mértani közepe:

$$G(a,b) = G(H(a,b), A(a,b)).$$

3.8. Feladat: *Gondolja végig az egyenlőtlenséglánc algebrai bizonyítását.*

MEGJEGYZÉSEK A FELADATHOZ:

Az egyenlőtlenséglánc balról jobbra haladva lépésről lépésre ekvivalens átalakításokkal igazolható.

1. Állítás: $a < b \Rightarrow a < H(a,b)$

Bizonyítás: $a < b$ mindkét oldalához b-t adunk: $a + b < 2b$, majd mindkét oldalt $\frac{a}{a+b}$-vel szorozzuk:

$$a < \frac{2ab}{a+b} = H(a,b)$$

2. Állítás: $a \leq b \Rightarrow H(a,b) \leq G(a,b)$.

Bizonyítás: Mivel $H(a,b) = \frac{2ab}{a+b}$, ezért bizonyítandó, hogy $\frac{2ab}{a+b} \leq \sqrt{ab}$. Mindkét oldal pozitív, ezért az egyenlőtlenség pontosan akkor teljesül, ha a négyzetekre is teljesül. A négyzetreemelés után mindkét oldalt $\frac{a^2+2ab+b^2}{ab}$-vel szorozva majd mindkét oldalból $4ab$-t kivonva a nyilvánvalóan igaz $0 \leq (a-b)^2$ egyenlőtlenséghez jutunk.

3. Állítás: $a \leq b \Rightarrow G(a,b) \leq A(a,b)$.

Bizonyítás: A $\sqrt{ab} \leq \frac{a+b}{2}$ egyenlőtlenség mindkét oldala pozitív, az egyenlőtlenség pontosan akkor teljesül, ha a négyzetekre is teljesül. Négyzetreemelés után 4-gyel szorozva és $4ab$-t kivonva a nyilvánvalóan igaz $0 \leq (a-b)^2$ egyenlőtlenséghez jutunk.

4. Állítás: $a \leq b \Rightarrow A(a,b) \leq b$.

Bizonyítás: Mindkét oldalt 2-vel osztva és mindkét oldalhoz $\frac{b}{2}$-t adva adódik az

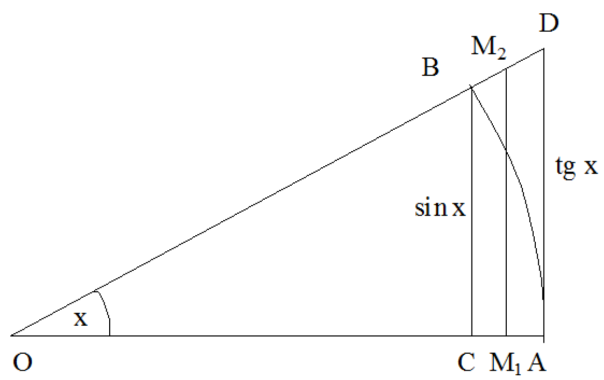
3.9. Feladat: *Alkalmazzuk mindezt egy másik egyenlőtlenség igazolásakor!*

Az elemi geometriából tudjuk, hogy egy hegyesszög ívmértéke a szinusz és a tangens értéke közé esik. Ha az x értékét el akarjuk helyezni a $[\sin x; \operatorname{tg} x]$ intervallumban, akkor tudnunk kell, hogy az intervallum felezőpontjától balra vagy jobbra van-e.

Mit gondol?

MEGJEGYZÉSEK A FELADATHOZ:

Vázlatot készítünk:



OAB körcikk az egységkörben, OCB egy $\sin x$, OAD pedig egy $\operatorname{tg} x$ befogójú derékszögű háromszög. Mivel BC párhuzamos DA-val, ezért $CADB$ egy derékszögű trapéz. A trapéz középvonala $\frac{\sin x+\operatorname{tg} x}{2}$ hosszúságú.

A szép ábrázolás nem sokat segít, mivel az M_1M_2 szakasz hossza az AB körív nagyságával optikailag nem összehasonlítható. Megpróbáljuk számolással igazolni, hogy x a $[\sin x; \operatorname{tg} x]$ intervallum bal felében található, azaz a

$$x < \frac{\sin x + \operatorname{tg} x}{2}.$$

I. Algebrai megoldás

Egyenlőtlenségek megoldásakor nemcsak ekvivalens átalakításokat hajthatunk végre, hanem becsléseket is végezhetünk: Ha az

$$x < \frac{\sin x + \operatorname{tg} x}{2}$$

egyenlőtlenséget sem igazolni, sem megcáfolni nem tudjuk, megpróbálhatunk „valamennyivel többet” bebizonyítani. Ehhez egy ismert egyenlőtlenséget szeretnénk felhasználni.

Mivel $\sin x$ és $\operatorname{tg} x$ harmonikus és mértani középe is legfeljebb akkora, mint a számtani középük, megpróbálunk ezek közül az egyikkel dolgozni. Az

$$x < \sqrt{\sin x \cdot \operatorname{tg} x} \leq \frac{\sin x + \operatorname{tg} x}{2}$$

egyenlőtlenség sem tűnik kellemesebbnek. Ha még nem vesztettük el a bátorságunkat, akkor megpróbálkozhatunk a harmonikus közép alkalmazásával. Ekvivalens átalakításokkal igazoljuk az

$$x < H(\sin x, \operatorname{tg} x) \;\; 0^\circ < x < 90^\circ$$

egyenlőtlenséget többszöri ekvivalens átalakítással:

$$H(\sin x, \operatorname{tg} x) = \frac{2}{\frac{1}{\sin x} + \frac{\cos x}{\sin x}} = \frac{2 \cdot \sin x}{1 + \cos x}.$$

A jobb oldalon álló kifejezés a félszögekre vonatkozó összefüggés alapján $2 \cdot \operatorname{tg} \frac{x}{2}$, ezzel egy új összefüggést kaptunk a harmonikus középre:

$$H(\sin x, \operatorname{tg} x) = \frac{2}{\frac{1}{\sin x} + \frac{1}{\operatorname{tg} x}} = 2 \cdot \operatorname{tg} \frac{x}{2}.$$

Ezt az összefüggést az egyenlőtlenségbe behelyettesítve kapjuk az $x < 2 \cdot \operatorname{tg} \frac{x}{2}$ egyenlőtlenséget, amelyet úgy olvashatunk, hogy $\frac{x}{2} < \operatorname{tg} \frac{x}{2}$, és ez hegyesszögekre igaz.

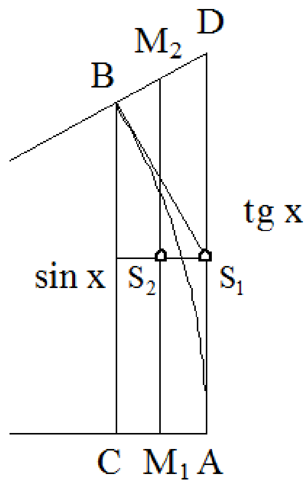
Mi következik ebből a kiindulási egyenlőtlenségre?

Tudjuk, hogy a $H(\sin x, \operatorname{tg} x) \leq A(\sin x, \operatorname{tg} x)$ egyenlőtlenség minden hegyesszögre fennáll. Ebből következik, hogy

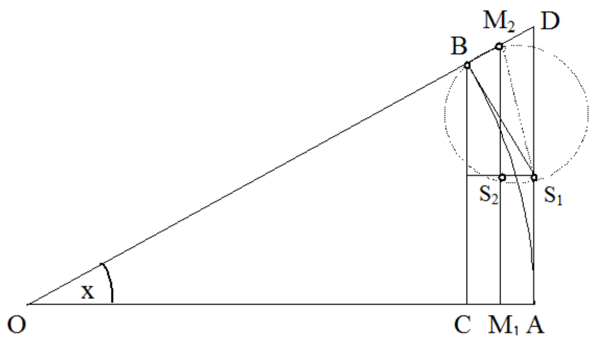
$$x < 2 \cdot \operatorname{tg} \frac{x}{2} = H(\sin x, \operatorname{tg} x) \leq A(\sin x, \operatorname{tg} x) = \frac{\sin x + \operatorname{tg} x}{2},$$

és ez éppen azt jelenti, hogy x a $[\sin x; \operatorname{tg} x]$ intervallum felezőpontjától balra fekszik.

II. Geometriai megoldás



Megrajzoljuk a körív B-beli érintőjét, ez az A pontbeli érintőt S_1 pontban metszi. Az AS_1B töröttvonal felső becslést ad az AB körívre. Meg akarjuk mutatni, hogy azM_1M_2 (a $CADB$ trapéz középvonala) hosszabb, mint az AS_1B töröttvonal. Az S_1 ponton át párhuzamost húzunk AC-vel. Ez a párhuzamos egyenes az M_1M_2 szakaszt az S_2 pontban metszi. Mivel AS_1 és S_2M_1 egy téglalap szemközti oldalai, ezért $AS_1 = S_2M_1$. Azért, hogy az S_2M_2 és az S_1M_2 szakaszokat könnyebben összehasonlíthassuk, vizsgáljuk az egész ábrát egy geometriai konstrukcióként.



Mivel BS_1 érintő, ezért M_2BS háromszög derékszögű és az S_1S_2 szakasz merőleges az M_1M_2 szakaszra.

Tapasztalatok:

az S_1M_2 szakasz a B és az S_2 pontokból 90° alatt látszik. Összehasonlítjuk az M_2BS_1 és az $M_2S_2S_1$ háromszögeket. (Ebben segít S_1M_2 szakasz Thalesz-köre.) S_2S_1 feleakkora, mint CA, BM_2 feleakkora, mint BD és BD nagyobb, mint CA. Tehát az S_2S_1 befogó kisebb a BM_2 befogónál; az M_2S_2 és az S_1B befogókra ennek az ellenkezője teljesül. Összefoglalva: A középvonal hosszabb a töröttvonalnál, a töröttvonal pedig hosszabb az ívnél, tehát a középvonal hosszabb az ívnél.

Következtetés:

Mivel $\sin x$ és $\operatorname{tg} x$ harmonikus közepe a középértékek egyenlőtlenségláncában az első helyen áll, így $\sin x$ és $\operatorname{tg} x$ minden közepére beláttuk, hogy nagyobb x-nél.

III. A megoldási utak összehasonlítása

Az első bizonyításban a harmonikus középpel becsültünk, a másodikban az AS_1B töröttvonallal. Az első bizonyításban mellékeredményként egy új formulát kaptunk a harmonikus középre:

$$H(\sin x, \operatorname{tg} x) = 2 \cdot \operatorname{tg} \frac{x}{2}.$$

A második bizonyításban a töröttvonal hossza $2 \cdot \operatorname{tg} \frac{x}{2}$. Ez azt jelenti, hogy tulajdonképpen ugyanazt a bizonyítást hajtottuk végre különböző módokon. Az utak összehasonlítása segített megérteni, hogy mi történt, és ahhoz az új felismeréshez vezetett, hogy a töröttvonal a kiindulási $\sin x$ és $\operatorname{tg} x$ szakaszok harmonikus közepe.

3.3. Problémamegoldás

3.3.1. A problémamegoldó gondolkodás fejlesztése, feladatorientált matematikaoktatás. (4. tétel)

Problémamegoldási stratégiák, heurisztikus elvek, algoritmikus gondolkodás. Feladattípusok, problémavariációk. (vázlat)

A probléma fogalmának többféle meghatározása; alapjai: ismert eszközök kombinációja ismeretlen kimenetelű kérdések megválaszolására, gondolkodás; eszközei a motiváció, szakismeret, kíváncsiság, szellemi rugalmasság, tudatosság, pontosság.

A problémamegoldási képesség fejlesztésének alapfeltételei – Claus szerint: ismeretszerzés, divergens gondolkodásra ösztönzés, rutinszerű gondolkodás visszaszorítása, kérdezés igényének kialakítása, problémafelvetés ösztönzése, szaknyelv fejlesztése, önálló gondolkodás igényének kialakítása, heurisztikus stratégiák kialakításának ösztönzése, reflexiók és diszkussziók ösztönzése.

A problémamegoldási folyamat modelljei (A Pólya-féle modell alapján):

1. a feladat megértése,
2. terv készítése,
3. a terv megvalósítása,
4. a megoldás vizsgálata.

(Pólya-modell, Pólya-modell kiegészítve, ismeretek, magatartási minták, Mason-féle modell, problémemegoldási séma)

A Pólya-féle modell finomítása, lépésekre bontása.

Problémamegoldási stratégiák, heurisztikus elvek, kontrollmódszerek, gyakorlati megvalósítás

Egy konkrét példán történő bemutatás:

(SAJÁT PÉLDA kell!)

Példa:

Oldjuk meg az

$$x^2 + 2y^2 + 3z^2 = 66$$

$$x + y + z = 11$$

egyenletrendszert!
Algebrai megoldás:

Vegyük észre, hogy a második egyenlet az elsőnek a 6-od része.

(Ismert eszköz, korábbi tapasztalat.)

Ebből kiindulva próbáljunk meg a két egyenlet alapján olyan szorzatalakot felírni, amely 0-val egyenlő – így következtethetünk a megoldásokra.

$$x^2 - 6x + 2y^2 - 6y + 3y^2 - 6z = 0.$$

Innen

$$x(x-6) + 2y(y-3) + 3z(z-2) = 0.$$

Több megoldási lehetőség is leolvasható ebből az alakból: $x = 6, y = 3, z = 2$, ami valóban megoldás, illetve ezek valamelyikét a többi ismeretlen 0 értékével kombinálva vagy maga az $x = y = z = 0$, amelyeknek viszont egyike sem megoldás.

(Heurisztikus gondolat, nincs rá garancia, hogy megoldást kapunk, illetve hogy minden megfelelő számhármas megoldás)

(Diszkusszió)

Van-e másik megoldás, és ha igen, azt hogyan kaphatjuk meg?

Mindegy, hogy mi az a másik (vagy több másik) megoldás, amit keresünk, felírhatjuk az ismeretleneket

$$6 + x_1, 3 + y_1, 2 + z_1$$

alakban. Ezekre a második egyenlet miatt

$$x_1 + y_1 + z_1 = 0.$$

Az elsőbe behelyettesítve pedig:

$$36 + 12x_1 + x_1^2 + 18 + 12y_1 + 2y_1{}^2 + 12 + 12z_1 + 3z_1{}^2 = 66,$$

amiből pedig – felhasználva az eddigieket – valóban következik, hogy nincs más megoldás.

Szisztematikus meggondolás, javítás:

Azt már láttuk, hogy arra kevés az esély, hogy egy szorzatot kapjunk a bal oldalon, míg a jobb oldalon nullát, de arra még lehet remény, hogy a bal oldalon valós kifejezések négyzetösszege (korábbi ismeretek), a jobb oldalon nulla szerepeljen. Ennek megfelelően csak akkor lehet nulla a bal oldali kifejezés, ha minden tag külön-külön nulla.

Mivel tudjuk, hogy a megoldás $x = 6, y = 3, z = 2$, ezért az $(x-6)^2 + (y-3)^2 + (z-2)^2$ kifejezés – vagy ehhez hasonló – lenne megfelelő. Hogyan érhető ez el? Mivel a konstans tagok összege itt $36 + 9 + 4 \neq 66$, illetve a kétszeres szorzatok sem használhatók $(-12x - 6y - 4z)$, jobb lenne, ha a négyzetek valamilyen pozitív szorzótényezővel szerepelnének.

(A pozitív együtthatókra azért lesz szükség, hogy valamely valós szám négyzeteként gondoljunk rá.)

Az a sejtésünk, hogy az 1, 2, 3 együtthatók alkalmasak lehetnek.

$$(x-6)^2+2(y-3)^2+3(z-2)^2=x^2+2y^2+3z^2-12(x+y+z)+36+18+12,$$

ami átalakítva

$$(x-6)^2+2(y-3)^2+3(z-2)^2=66-132+66=0,$$

ahogy arra számítottunk.

Geometriai interpretáció:

Az első egy origó középpontú ellipszoid egyenlete, a második egy síké. A metszetük ellipszis (speciálisan kör, illetve elfajuló esetben pont) lehet. A sík a koordinátatengelyeket a (0,0,11), (0,11,0), (11,0,0) pontokban metszi.

Jelen példában az ellipszoidot érinti a sík a (6;3;2) pontban.

Irodalom

Ambrus András: Bevezetés a matematika didaktikába. 1995. [2] 107-123.

Pólya György: A gondolkodás iskolája. [185]

Pólya György: A problémamegoldás iskolája I-II. [184],

A kidolgozás elsősorban a jegyzetre (Ambrus A. 1995 [2]) támaszkodik, mert a könyv alapként felhasználja a másik két említett irodalmat.

3.3.2. A tevékenységtől az általános megoldásig

Az algebra elemeinek tanításakor gyakori nehézség, hogy kevés kifejezési formát ismernek a tanulók. Több módszertani kutatás mutatta ki, hogy az érettségi dolgozatban elkövetett hibák hátterében meghúzódó hiányosságok az elemi algebra területére tartoznak. Megoldásként többen a mindhárom reprezentációs szintet használó, fokozatos absztrakciót javasolják.

Bemutatunk példaként egy sorozatot, amelynek feldolgozásával a szerény matematikai érdeklődésűek is problémamegoldási élményhez juthatnak. A vízöntögetés konkrét adatokkal könnyen végiggondolható és komoly eséllyel sikerhez vezet. Részmegoldás is lehetséges.

Ezek a tapasztalatok (analógiákon keresztül) egyfelől elvezetnek a matematikai modellhez (diofantikus egyenletek), másfelől a modell és a valóság kapcsolatának vizsgálatához is példaként szolgál (pl. negatív megoldások).

Mindez végezhető úgy, hogy a matematikai tartalomnak sem kell csorbát szenvednie. 7 problémát vizsgálunk, némelyiket több változatban.

3.10. Feladat: *Alapszituáció: Egy kiránduláson a leveshez pontosan 5 liter vizet akarunk hozni a forrástól. Csak egy 4 literes és egy 7 literes edényünk van. Hogyan oldható meg a probléma?*

Megoldási ötlet

A 4 literes edénnyel megtöltjük a 7 literes edényt. Ehhez kétszer megtöltjük a 4 literes edényt, másodszor 1 liter marad benne.

Kiürítjük a 7 literes edényt, beleöntjük az 1 liter maradékot és még 4 litert.

(Meg)lejegyezzük a sikeres eljárást: $4+4-7+4=5$.

3.11. Feladat: *Az alapszituáció gondosabb vizsgálata: Hány liter vizet tudunk egy 4 és egy 7 literes edény segítségével kimérni?*

Megoldási ötlet

Az előző megoldási ötletet alkalmazzuk és eredményünket rögzítjük.

ADAG (liter)	4 literes edény	7 literes edény
1	$4+4-7$	
2	$4+4-7$	$4+4-7$
3		$7-4$
4	4	
5		$4+4-7+4$
6	$4+4-7$	$4+4-7+4$
7		7

3.12. Feladat: *Az egybeesések és különbségek tisztázása: Hány liter vizet tudunk egy 3 és egy 9 literes edény segítségével kimérni?*

Megoldási ötlet

Az előző megoldási ötletet vizsgálva észrevesszük, hogy az eredménytábla 4 és 7 összegeit és különbségeit tartalmazza. Ezt a felfedezést a (4,7 és 3,9) analógia szemszögéből átvisszük és azt sejtjük, hogy 3, 6 és 9 liter mérhető ki.

3.13. Feladat: *Az alapszituáció általánosabb vizsgálata: Hány liter vizet tudunk egy a és egy b literes edény segítségével kimérni?*

Megoldási ötlet

A (4,7 és 3,9) analógiával nyert felfedezést átvisszük az új szituációra. Azt sejtjük, hogy az összegek és különbségek (tehát a legnagyobb közös osztó többszörösei) mérhetők ki.

3.14. Feladat: *Egy analóg szituáció: Hány vendéget tudunk egy* $4+1$ *és egy* $7+1$ *üléses autóval elszállítani, ha csak „telekocsi” indulhat?*

Megoldási ötlet

Szisztematikus próbálkozással az alábbi értékeket kapjuk

$$4, \quad 4+4=8, \quad 4+4+4=12, \quad 4+4+4+4=16, \cdots$$

$$7, \quad 7+7=14, \quad 7+7+7=21, \cdots$$

$$4+7=11, \quad 4+2\cdot 7=18, \quad 4+3\cdot 7=25, \cdots$$

$$2\cdot 4+7=15, \quad 2\cdot 4+2\cdot 7=22, \quad 2\cdot 4+3\cdot 7=29, \cdots$$

Ebből megsejthető a $4m+7n$ megoldásrendszer.

3.15. Feladat: *Még általánosabban próbálkozunk: Melyek a $4x + 7y = 5$ egyenlet egész megoldásai?*

Megoldási ötlet

Valamilyen megoldásunk már van, 5 liter vizet 4- és 7-literes edénnyel úgy mértünk ki, hogy háromszor megtöltöttük a 4-literes edényt és ebből a 12 literből 7 litert kiborítottunk, azaz $x = 3, y = -1$.

További megoldásokat keresve

5 liter	4 + 4 + 4 - 7
2 liter	(4 + 4 + 4 - 7) + 4 - 7
3 liter	((4 + 4 + 4 - 7) + 4 - 7) + 4 + 4 - 7
0 liter	(((4 + 4 + 4 - 7) + 4 - 7) + 4 + 4 - 7) + 4 - 7
0 + 5 liter	((((4 + 4 + 4 - 7) + 4 - 7) + 4 + 4 - 7) + 4 - 7) + (4 + 4 + 4 - 7)
...	
$k \cdot 0 + 5$ liter	$4(3 + 7k) + 7(-1 - 4k)$

3.16. Feladat: *Jó-e a sejtés?*

Megoldási ötlet

Végtelen sok $x = 3 + 7k$ és $y = -1 - 4k$, alakú megoldást találtunk, ahol k pozitív egész.

A kiindulási szituáció megoldása éppen a $k = 0$ eset realizációja.

Negatív k értékekre behelyettesítéssel ellenőrizhetjük a sejtést.

A megoldások alakja így: $x = 3 + 7k$ és $y = -1 - 4k$, k egész.

Megmutatandó még, hogy minden megoldást felsoroltunk.

Legyen x^*, y^* egy tetszőleges, és $x = 3, y = -1$ egy megtalált megoldás.

A $4x + 7y - 5 = 0$ egyenletbe behelyettesítve, egyenlővé téve és átrendezve $4(x^* - 3) = 7(-1 - y^*)$ adódik, tehát x^*, y^* is szerepel a felsoroltak között.

3.17. Feladat: *Az alapszituáció még általánosabb vizsgálata: Milyen c értékre oldható meg az $ax + by = c$ diofantikus egyenlet?*

Megoldási ötlet

Az alapszituáció megoldásainak összevetésből nyerhetjük a sejtést: Az egyenlet pontosan akkor oldható meg, ha a és b legnagyobb közös osztója osztja c-t.

A problémaközpontú tanítási módszer fontos állomása, hogy értékeljük a kapott eredményt, megnézzük, hogy mire jó, amit kaptunk.

3.18. Feladat: *Egy 8 literes edény tele van vízzel. Hogyan lehet a vizet egy 3 és egy 5 literes edény segítségével megfelezni?*

Megoldási ötlet

Úgy is értelmezhetjük a problémát, hogy egy 3 és egy 5 literes edény segítségével 4 liter vizet kell kimérni.

4. fejezet

Függvények, sorozatok

A kerettantervben „Összefüggések, függvények, sorozatok” címszó alatt található ez a témakör.

4.1. Feladat: *Keresse ki a NAT2012-ből a Függvények, sorozatok témáit és hasonlítsa össze a következő vázlatos összefoglalóval. Egyetért ezzel a tömörítéssel? Vannak olyan elemek, amelyekkel szívesen kibővítené ezt a vázlatot?*

4.1. Alapfeladatok és kompetenciák

4.1.1. A kerettanterv elvárásai

Alsó tagozat

- Növekvő és csökkenő számsorozatok szabályának felismerése, a sorozat folytatása.
- Számpárok közötti kapcsolatok felismerése.
- Szabályfelismerés, szabálykövetés. Növekvő és csökkenő számsorozatok felismerése, készítése.
- Összefüggések keresése az egyszerű sorozatok elemei között.
- A szabály megfogalmazása egyszerű formában, a hiányzó elemek pótlása.

Felső tagozat

- Tájékozódás a koordinátarendszerben: pont ábrázolása, adott pont koordinátáinak a leolvasása.
- Egyszerűbb grafikonok, elemzése.
- Egyszerű sorozatok folytatása adott szabály szerint, szabályok felismerése, megfogalmazása néhány tagjával elkezdett sorozat esetén.

– Megadott sorozatok folytatása adott szabály szerint.

– Az egyenes arányosság grafikonjának felismerése, a lineáris kapcsolatokról tanultak alkalmazása természettudományos feladatokban is.

– Grafikonok elemzései a tanult szempontok szerint, grafikonok készítése, grafikonokról adatokat leolvasása. Táblázatok adatainak kiolvasása, értelmezése, ábrázolása különböző típusú grafikonon.

Középiskola

– A függvény megadása, a szereplő halmazok ismerete (értelmezési tartomány, értékkészlet); valós függvény alaptulajdonságainak ismerete.

– A tanult alapfüggvények ismerete (tulajdonságok, grafikon).

– Egyszerű függvénytranszformációk végrehajtása.

– Valós folyamatok elemzése a folyamathoz tartozó függvény grafikonja alapján.

– Függvénymodell készítése lineáris kapcsolatokhoz; a meredekség.

– A tanulók tudják az elemi függvényeket ábrázolni koordináta-rendszerben, és a legfontosabb függvénytulajdonságokat meghatározni, nemcsak a matematika, hanem a természettudományos tárgyak megértése miatt, és különböző gyakorlati helyzetek leírásának érdekében is.

– Trigonometrikus függvények értelmezése, alkalmazása.

– Függvénytranszformációk végrehajtása.

– Exponenciális függvény és logaritmusfüggvény ismerete.

– Exponenciális folyamatok matematikai modelljének megértése.

– A számtani és a mértani sorozat összefüggéseinek ismerete, gyakorlati alkalmazások.

– Az új függvények ismerete és jellemzése kapcsán a tanulóknak legyen átfogó képük a függvénytulajdonságokról, azok felhasználhatóságáról.

4.1.2. Az analízis elemei az iskolai tananyagban. (9. tétel)

A függvényfogalom fejlesztési folyamata a kezdő foktól az érettségiig. Elemi függvényvizsgálat. Szélsőérték-feladatok megoldásának módszerei. Végtelen sorozatok, sorok. A határérték szemléletes fogalma.

A tételhez a többi fejezet anyagát is gondolja át, hiszen ezek tartalmi és módszertani szempontból is számos szállal kötődnek az analízishez (fogalomépítés, bizonyítás, reprezentáció, stb.).

1. **A függvények és sorozatok a tantervekben**

   A sorozatokat kisiskolás korban akkor is célszerű önállóan kezelni, ha később speciális függvényként gondoljuk felderíteni a tulajdonságaikat.

2. **Folyamatosan épülő fogalmak a sorozatokkal és a függvényekkel kapcsolatban**

   – Sorozatok, képzési szabályok, tulajdonságok

   – Nevezetes sorozatok

   – A függvény, mint kapcsolat, összefüggés. A függvény, mint objektum, amivel műveletek végezhetők.

   – A függvény menete, speciális tulajdonságok

   – A függvény zérushelyének és az egyenletek megoldásának kapcsolata

   – A függvény menetének az egyenletek és egyenlőtlenségek megoldásával való kapcsolata

   – Határérték, folytonosság, pl. a határértékfogalom szemléletes előkészítése.

   – A szélsőérték-vizsgálat módszerei (elemi módszerek, szemléletes megoldások, deriválás)

3. **Ismeretek átadása és a képességfejlesztés**

   a) A matematikai tudatosság fejlesztése a megsejthető és bizonyítható állítások által:
   – függvények megadási módjai (pl. szabadon választható-e az értelmezési tartomány; a Dirichlet függvény formulával egyszerűen definiálható, de csak utalásszerűen ábrázolható, stb.)
   – a függvény megadási módjai és a függvény tulajdonságainak kapcsolata

   b) Az analízis a problémamegoldás eszközeként
   – gyakorlati problémák matematikai modellezésére (újságcikkek grafikonjainak elemzése, adatgyűjtés, az adatok ábrázolása a különböző szakmákban)
   – matematikán belüli és matematikán kívüli problémák megfogalmazása és megoldása

   c) Az analízis problémamegoldás tárgyaként
   – bonyolultabb függvények ábrázolása;
   – a lehető legtágabb értelmezési tartomány megkeresése;
   – egyenletek, egyenlőtlenségek grafikus megoldása, közelítő megoldások
   – a függvénytranszformációk hatása az egyes tulajdonságokra (párosság, periodikusság, stb.)

4. **Egy téma részletes kidolgozása**

   A NAT és a kerettantervek alapján gondolja át egy kiválasztott iskolatípusban tanítandó analízisbeli ismereteket és azok kapcsolatrendszerét a matematika többi területével.

   A logaritmusfüggvény példáján az előbbiekben megmutattuk, hogy milyen sokrétű feladat az analízis elemeinek a tanítása.

   Próbáljon hasonlóan feldolgozni egy saját területet.

Az a), b) és c) szempontokon túl gondoljon a választott anyagrész legalább egy órájának megtervezésére, a lokális és globális célok kapcsolatára, preferenciákra, a továbbhaladás feltételeire és azok ellenőrzésére.

További szempontok lehetnek:
A téma legfontosabb fogalmai;
Bizonyítás iránti igény mélyítése;
Matematikatörténeti vonatkozások megismerése;
Az absztrakciós és szintetizáló képesség fejlesztése;
Az önellenőrzés igényének fejlesztése;
A matematikai versenyek szerepe a fogalmak építésében, a problémamegoldó gondolkodás fejlesztésében;
Néhány, a témához illeszkedő szép feladat;
A középiskolai és az egyetemi tananyag kapcsolatának kérdései.

Irodalom

Peller József – Megyesi László: Függvények elemi vizsgálata. Vektortér. [175]
Peller József: Exponenciális és logaritmusfüggvény, differenciálszámítás. [176]
Pálfalvi Józsefné: Matematika didaktikusan. [168] 62-87.
Deák Ervin: Végtelen sorok az iskolai matematikában. [61] 119-130.

4.1.3. Sorozatokkal vagy függvényekkel kezdjünk?

4.2. Feladat: *Elemezze a Folytasd a sorozatot: 2, 5, 8, 11, ..., ill. Fogalmazd meg a szabályt: 2, 3, 5, 8, 12, 17, ... típusú feladatok szerepét az alsó tagozaton.*

MEGJEGYZÉSEK A FELADATHOZ

A sorozatok folytatása gyakori és kedvelt feladat, holott matematikailag nem korrekt, mert egy sorozat néhány, de akár végtelen sok eleme sem határozza meg egyértelműen a sorozatot.

Lehet-e és hogyan – ennek ellenére – alkalmazni az ilyen feladatokat?

A tanulók könnyen elfogadják, hogy a végtelen sok folytatási lehetőség és „szabály" ellenére van ezeknek a feladatoknak egy kitüntetett megoldása, és mi azt keressük.

4.3. Feladat: *A sorozatok között a középiskolai tanításban a számtani és a mértani sorozatoknak kiemelt szerepe van. Mi ennek az oka? Milyen más szempontok szerint csoportosíthatók a sorozatok?*

MEGJEGYZÉSEK A FELADATHOZ

Igen sok szép feladat oldható meg a számtani, mértani sorozatok témában. Kár elfeledkezni a más sorozattípusokkal való játékról ($1,\ -\frac{1}{2},\ 1,\ -\frac{1}{3},\ 1,\ -\frac{1}{4},\ \dots$), a matematika különböző területeit összekötő Fibonacci sorozatról (aranymetszés).

A sorozatok tanítása során hozzájárulhatunk sok olyan fogalom szemléletes előkészítéséhez (prematematikai fogalmak, matematikai fogalmak előképei, csírái), amelyek újabb, vagy első definiálása később a függvényekkel kapcsolatban történik meg, pl. korlátosság, monotonitás. Erről bővebben lehet olvasni Víghné dr. Lencsés Ágnes (2013 [253]) írásában.

A sorozatok szerepe a matematikai analízisben nagyon jelentős és sokféle, még akkor is, ha a matematikatanulás kezdetén nagyon erősen felépítésfüggő. A függvényfogalomra építők speciális függvényekként tekintenek a sorozatokra. A sorozatpártiak a függvény határértékét és folytonosságát a sorozatok konvergenciájára építik. Nagyon lényeges, hogy tisztában legyünk azzal, hogy az éppen használt tankönyv szerzője milyen felépítést tartott szem előtt. A felépítések tervszerűtlen váltogatása fogalomzavart okozhat.

4.1.4. Függvények és grafikonok

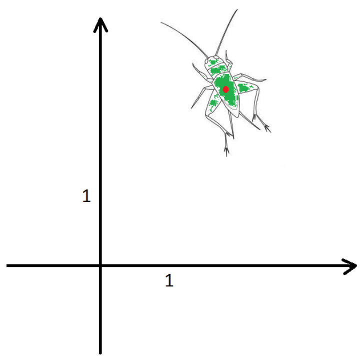
4.4. Feladat: *Miben látja a koordinátarendszerben való tájékozódás kezdeti nehézségét?*

MEGJEGYZÉSEK A FELADATHOZ

A pontábrázolásnál a lépések precíz leszámolásával kevés probléma szokott adódni. A negatív és tört koordináták esetében előfordulnak (elsősorban rendezési) tévesztések, ami nem a koordinátageometriai ismeretekkel kapcsolatos probléma, de a tisztázásra – mindig, így most is – nagy figyelmet kell fordítani.

A tengelyek szerepének felcserélését elkerülhetjük, ha a két tengelynek lényegesen különböző szerepet adunk, pl. az x koordináták a vízszintes mozgásra, vagy az idő múlására, az y koordináták pedig a függőleges mozgásra utalnak.

Példa: Mutasd meg, hogy melyik pontba jutott a szöcske, ha az origótól kettőt ugrott vízszintesen pozitív irányba és onnan hármat felfelé, és ott megkapaszkodott! Jelöljük „rövidítve" a helyét, (2;3)! Hol van most a szöcske, ha „röviden" kifejezve ezt az információt tudjuk: (8;3).



4.5. Feladat: *A matematikai órákon ábrázolt grafikonok és a hétköznapi életben szokásos grafikonok között jelentős különbségek vannak. Melyek ezek? Milyen következményei vannak a tanításra nézve?*

MEGJEGYZÉSEK A FELADATHOZ

A kereskedelmi és egyéb grafikonokban a tengelyeken különböző egységeket használnak, sokszor más-más mennyiséget ábrázolnak.

A tengelyek metszéspontja nem mindig a (0;0) koordinátájú pont.

A tengelyeken gyakran nem számok, hanem egyéb jelek szerepelnek, pl. fiú-lány, a hét napjai, az iskolai osztályzatok.

Érdemes megmutatni, hogy ezek a változatok általában a könnyebb olvashatóságot szolgálják, de az is előfordulhat, hogy manipulálni akarják az olvasót.

4.6. Feladat: *– Miért fontos a számpárok vizsgálata a függvényfogalom kialakítása során?*

– Miért fontos a hozzárendelés egyértelműségét vizsgálni?

– Miért kérdezzünk rá középiskolában az invertálhatóságra is?

MEGJEGYZÉSEK A FELADATHOZ

4.7. Példa: *Számpárok halmazait adjuk meg. Válasszuk ki ezek közül azokat, amelyek függvényeket adnak meg! A számpárok megadhatók grafikusan is.*

a) Felső tagozaton

(Sok hasonló feladat található a Mathbridge ([151]) programban, lásd a 4.1. ábra)

b) Középiskolában

– Függvények és az $(x; \pm\sqrt(x))$ reláció kapcsolatának vizsgálata a grafikus ábrázolás alapján.

– Adott függvények közül válasszuk ki az invertálhatókat!

Szempontok a válaszhoz:

A dolgok párosítása alapvető emberi-gyermeki gondolat, tehát erre építünk. A függvény-kapcsolat irányított kapcsolat, az A halmaz elemeihez rendeljük hozzá a B elemeit. Mivel a szóba jöhető függvények nagy része invertálható, illetve egyszerűen leszűkíthető invertálható függvénnyé, az irányítottságot lényegében az fejezi ki, hogy teljesül-e, hogy, a szokásos jelölésnek megfelelően, minden a-hoz egy és csak egy b van rendelve. Tehát rendezett számpárok egy adott halmazáról kell eldönteni, hogy függvény-e, annak megvizsgálásával, hogy kölcsönösen egyértelmű-e a hozzárendelés.

A függvények ábrázolásához, a legegyszerűbb függvényvizsgálathoz nélkülözhetetlen a szokásos jelölésnek megfelelően, x és y szerepének világos megkülönböztetése.

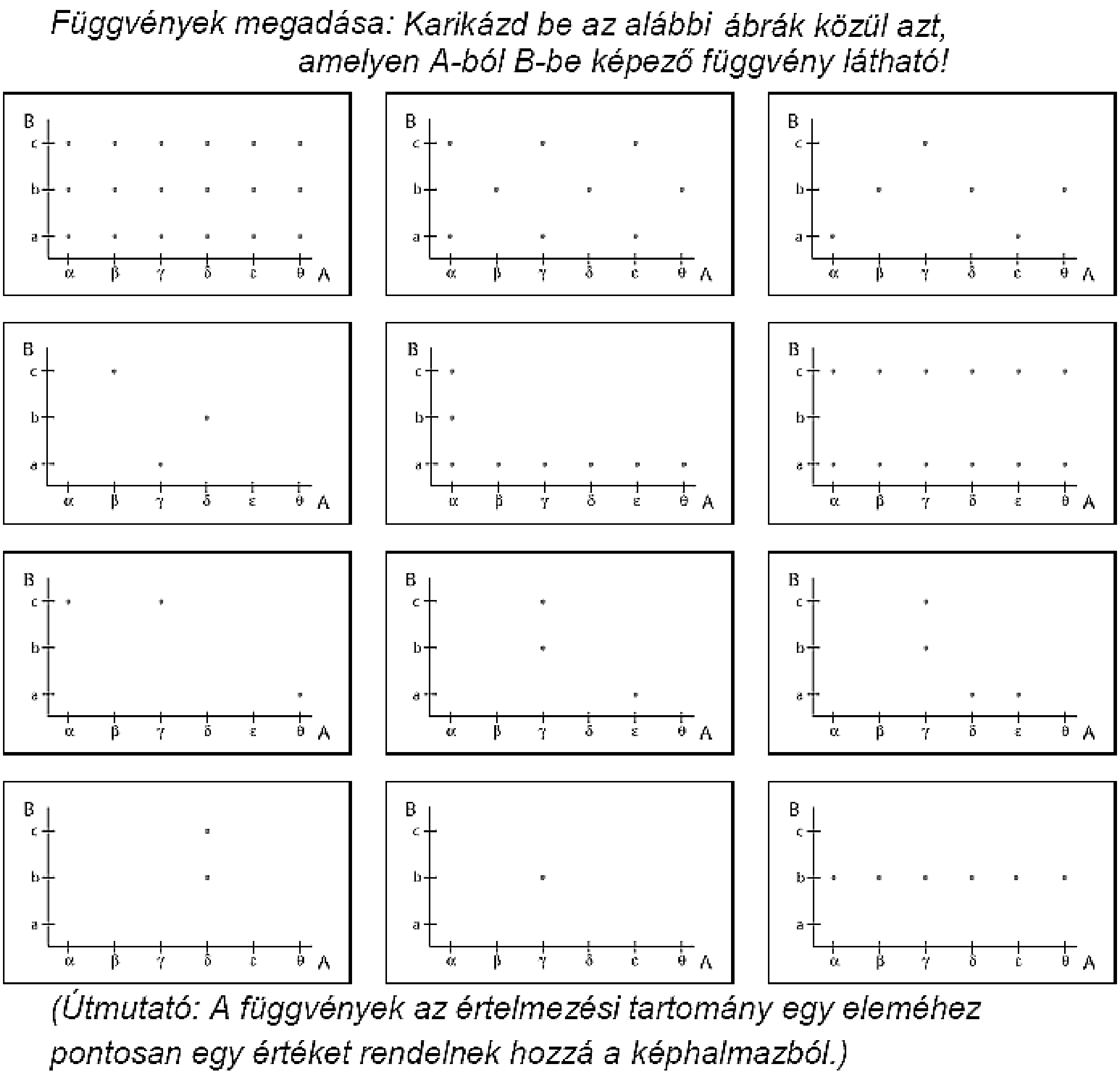
4.8. Feladat: *Adjon meg olyan köznyelvi kifejezéseket különböző szituációkban, amelyek a jelenséget leíró függvény növekedésére és csökkenésére, illetve maximumára és minimumára vonatkoznak.*

Állítsa párhuzamba a függvény és a grafikonja tulajdonságait leíró kifejezéseket! (pl. a grafikon emelkedik, a függvény nő)

MEGJEGYZÉSEK A FELADATHOZ

Példák:

- Lázgörbe elemzése;
- Egyenes vonalú egyenletes mozgás grafikonjának elemzése (irányváltás és pihenő is);
- Tetszőleges egyenes vonalú mozgás;
- Egyéb függvények grafikonjai.



4.1. ábra. Grafikusan megadott számpárok

4.1.5. Elemi függvények és transzformációik

4.9. Feladat: *A függvénytranszformációk végrehajtása sokszor még a felsőoktatásba bekerült tanulók számára is gondot okoz. Mi lehet ennek az oka?*

MEGJEGYZÉSEK A FELADATHOZ

Előfordulhat, hogy a pontok ábrázolásában lép fel bizonytalanság, illetve lehet az alapfüggvények ismerete hiányos.

E problémák kiküszöbölése után a függvények transzformációival közvetlenül összefüggő hibalehetőséget érdemes keresni.

A túl gyorsan megismert és betanult algoritmusok hibákat okozhatnak.

Szükséges, hogy a tanulók pontok koordinátájának behelyettesítésével ellenőrizni tudják megoldásaikat, képesek legyenek a görbék jellegzetes pontjait illetve természetesen maguknak a függvényeknek a jellegzetes tulajdonságait vizsgálni. Az algoritmus ebben az esetben is a már elsajátított ismeret összefoglalása legyen.

4.10. Feladat: *Azt tapasztalta, hogy a diákjai közül sokan nem tudnak logaritmikus alakban megadott valós számokat nagyság szerint rendezni.*

Például $lg1000$, $\log_{\frac{1}{2}} 1$ *és* $\log_3 \frac{1}{9}$.

Szeretné javítani a diákok eredményét. Hogyan oldja meg ezt a feladatot?

MEGJEGYZÉSEK A FELADATHOZ

Lehetséges hibaforrások

- A tanulmányok kezdetén a $lg1000$ még nem egy számot, hanem egy elvégzendő műveletet jelent.
- Alapvető probléma lehet, hogy vagy a jelölést, vagy magát a fogalmat sem értik még az egyes diákok. Ebben az esetben a logaritmus fogalmának építését újra kell kezdeni, valószínűleg vissza kell térni a hatványozás fogalmának vizsgálatához.
- Előfordulhat, hogy a logaritmus fogalmát már értik a tanulók, de tudásuk még kevés ahhoz, hogy alkalmazhassák azt, ebben az esetben érdemes a logaritmus függvényt különböző, 1-nél nagyobb, majd kisebb alapokkal megvizsgálni.

4.11. Feladat: *Azt tapasztalta, hogy a diákjai közül sokan a gyöktényezős alakban megadott másodfokú egyenlet gyökeit nem leolvassák, hanem elvégzik a szorzást, majd a megoldóképlet alkalmazásával helyesen megoldják azt. Van-e ilyenkor teendője?*

MEGJEGYZÉSEK A FELADATHOZ

Módszertani szempontból nem elfogadható a diákok védekezése, hogy hiszen helyesen számoltak.

Nem pusztán az a baj, hogy felesleges lépéseket végeznek el a tanulók, – bár az is időveszteség egy dolgozat, vagy egy házi feladat megírása közben, – hanem az, hogy alapvetően nem értik mit jelent az egyenlet gyökeinek megkeresése. A mindenható megoldóképlet bűvöletében elfelejtik, hogy egy szorzat akkor nulla, ha valamelyik tényezője nulla.

Érdemes még egyszerűbb, akár elsőfokú egyenlet gyökét keresni, ami fejben is könnyen kiszámolható.

Érdemes ábrázolni az $y = (x - x_1)(x - x_2)$ függvényt konkrét x_1, x_2 számokkal jól megválasztott x értékek segítségével. (Például az x_1, x_2 helyen, a számtani közepüknél, tőlük jobbra és balra.)

4.12. Feladat: *A tanulók számolással (négyzetre emeléssel, ...) keresik a* $\sin 2x = \sqrt{3}$ *egyenlet gyökét. Mi a probléma ezzel? Mi állhat a hiba hátterében?*

MEGJEGYZÉSEK A FELADATHOZ

A tanulóknak feltehetőleg nem jut eszébe, hogy $\sin x$ értékei nem lehetnek 1-nél nagyobbak.

Érdemes újból megvizsgálni a szög szinuszának jelentését, a függvény értelmezési tartományát, értékkészletét.

Előfordulhat, hogy a $\sqrt{3}$ közelítő értét nem ismerik, illetve nem tudják, mekkora számok az egynél nagyobb számok gyökei. Az is lehet, hogy a $sin 2x$ helyett $2 sin x$-re gondolnak.

4.1.6. A függvényfogalom építésének szakaszai

4.13. Feladat: *Ismertesse a függvényfogalom építésének szakaszait az általános iskola alsó tagozatától a gimnázium végéig a tankönyvek alapján.*

MEGJEGYZÉSEK A FELADATHOZ

- alsó tagozat: „gépes játék”, számokkal, a logikai készlet elemeivel.
- felső tagozat: lineáris függvények, fordított arányosság, geometriai transzformációk, koordinátarendszer, növekedés-csökkenés.
- gimnázium: a függvények többféle megadása, ábrázolása, elemi függvényvizsgálat, elemi függvények és néhány más függvény.

4.14. Feladat: *Ismertesse a függvényfogalom építésének hátterében álló reprezentációs elméleteket, mutassa meg konkrét példákon.*

MEGJEGYZÉSEK A FELADATHOZ

a) Tárgyi reprezentáció:

   - alsó tagozaton: elempárok alkotása pl. zoknikból, játékokból,

– felső tagozaton: a tanulók által mért, számolt mennyiségek ábrázolása grafikonon,

– gimnáziumban: pl. henger térfogata változásának mérése, számítása, ábrázolása rögzített sugár, illetve magasság esetén.

b) Képi reprezentáció:

– alsó tagozaton: elempárok képi ábrázolása,

– felső tagozaton és középiskolában: különböző diagramok (kör, oszlop, stb. átalakítása).

c) Szimbolikus reprezentáció:

– alsó és felső tagozaton: szavakkal megadott hozzárendelési szabályok megértése,

– gimnáziumban: bizonyos matematikai szimbólumok használata, függvények menetének leírása a grafikonjuk használata nélkül.

4.15. Feladat: *Vizsgálja a függvényfogalom fejlődését az absztrakt gondolkodás szempontjából.*

MEGJEGYZÉSEK A FELADATHOZ

Gondoljon olyan aspektusokra, hogy a függvény kezdetben a kapcsolat, összefüggés leírása, nem önálló (matematikai) objektum.

A fogalomépülés következő szintjén a függvény már objektum (is), amellyel műveletek végezhetők.

Javasoljuk, hogy olvassa el a Matematikadidaktikai szemelvénygyűjtemények közül Varga Tamás: A függvényfogalom előkészítése I. című gondolatébresztő írását (1.4.10. oldal).

4.16. Feladat: *A határértékfogalom előkészítésének lehetőségei az általános iskola felső tagozatán.*

MEGJEGYZÉSEK A FELADATHOZ

A határértékfogalom szemléletes előkészítését is szolgálja, ha nem megyünk el szót nélkül az $\frac{1}{3}$ tizedes tört alakjának kérdése mellett, hiszen egyrészt a későbbiekben a sorokhoz, az improprius integrálhoz vezet ez az út, másrészt a szigorúan növekedő, a határértékét soha el nem érő sorozat a kezdők számára a legjellegzetesebb határérték.

A kerekítés szabályainak vizsgálata, Mi a legkisebb és mi a legnagyobb valós szám, amit 5-re kerekítünk? Van legkisebb? Van legnagyobb?

Javasoljuk, hogy olvassa el a Matematikadidaktikai szemelvénygyűjtemények közül Péter Rózsa két gondolatébresztő írását (1.4.2,1.4.3).

4.17. Feladat: *Ismertesse a szélsőérték-vizsgálat módszereit (elemi módszerek, szemléletes megoldások, deriválás).*

MEGJEGYZÉSEK A FELADATHOZ

Véges elemszámú halmaz legkisebb és legnagyobb eleme

Végtelen halmazok legkisebb és legnagyobb eleme

A legfeljebb másodfokú függvények menetének vizsgálata

Polinomfüggvények vizsgálata elemi módszerekkel

Exponenciális, logaritmus és trigonometrikus függvények megismert tulajdonságainak összefoglalása

Grafikusan adott (formulával csak közelíthető) függvények tulajdonságainak megállapítása

Lokális és globális szélsőérték fogalma

A deriváláson alapuló szélsőérték vizsgálat, a deriválhatóság feltételének vizsgálata

A függvény menete és a derivált függvény viselkedése közötti kapcsolat

Többváltozós függvények szélsőértéke szemléletes úton

4.18. Feladat: *Hogyan valósítható meg a függvények, sorozatok téma tanítása során az ismeretszerzés és a képességfejlesztésnek az egysége?*

MEGJEGYZÉSEK A FELADATHOZ

Az analízis is hozzájárul a matematikai tudatosság fejlesztéséhez a megsejthető és bizonyítható állítások által:

– függvények megadási módjai (pl. szabadon választható-e az értelmezési tartomány; a Dirichlet függvény formulával egyszerűen definiálható, de csak utalásszerűen ábrázolható, stb.)

– a függvény és a függvény grafikonjának kapcsolata (a függvénytranszformációk hatása az egyes tulajdonságokra – páros-páratlan függvény, periodicitás, stb.)

4.19. Feladat: *Milyen elvek szerint lehet csoportosítani az egymásra épülő feladatokból álló feladatsorozatokat? Elemezze a következő feladatsorozat részletet. (Forrás: Pósa, L. 1999. [191] 65. o.)*

– Van-e olyan függvény, aminek pontosan egy felső korlátja van?

– Ki tudnál-e emelni egy felülről korlátos függvény végtelen sok felső korlátja közül egy olyat, amely valahogy más, mint a többi? Amilyenből csak egy van?

– Vizsgáld meg alulról korlátosság, felülről korlátosság, valamint korlátosság szempontjából az alábbi függvényeket! (egyszerű polinom függvények és trigonometrikus függvények vannak felsorolva.) Ahol képes vagy rá, keresd meg a legkisebb felső korlátot és a legnagyobb alsó korlátot is!

– Adj meg egy olyan függvényt ... (Korlátosságra, értelmezési tartományra, a maximum létezésre vonatkozó adatok)

MEGJEGYZÉSEK A FELADATHOZ

Ebben a feladatsorozatban a korlátosság, felső korlát és a legkisebb felső korlát fogalmával ismerkedhetnek a tanulók úgy, hogy a fogalom tartalmának egyre több részletére kell figyelniük.

A feladatsorozatok szerkesztésére vonatkozó módszertani tudnivalók olvashatók az ellenőrzés, értékelés fejezetben is.

4.20. Feladat: *Milyen speciális lehetőségek vannak az analízis tanítása során a problémamegoldás képességének fejlesztésére?*

MEGJEGYZÉSEK A FELADATHOZ

Az emelt szintű gimnáziumi képzésen kívül a közoktatásban viszonylag kevés lehetőség van olyan gondolkodtató példák feladására, mint pl.

– bonyolultabb függvények ábrázolása;
– a lehető legtágabb értelmezési tartomány megkeresése;
– egyenletek, egyenlőtlenségek grafikus megoldása, közelítő megoldások.

Jellemzőbb, hogy a fogalmak megértése, azok elképzelése jelent feladatot a diákoknak. Itt a feladatmegoldás mellett igen nagy szerepe van a beszélgetésnek.

4.21. Feladat: *Milyen bizonyítási feladatok adhatók a függvények, sorozatok témakörben?*

MEGJEGYZÉSEK A FELADATHOZ

4.22. Példa: *Vizsgáljuk a bizonyítás folyamatát egy konkrét példán: Az x^2 függvény páros.*
Az elvégzendő feladatok vázlatosan

a) az állítás értelmezése, szemléltetése,

b) az állításban szereplő fogalmak definiálása,

c) az x^2 fv eleget tesz-e a párosság követelményeinek az értelmezési tartományt illetőn? „Ha nem adunk meg értelmezési tartományt, akkor a lehető legbővebb halmazt tekintjük értelmezési tartománynak.” – konvenció jelentése,

d) az x^2 fv eleget tesz-e a párosság követelményeinek a hozzárendelési szabályt illetően,

e) az állítást beláttuk, általánosítás x^{2n}, analógiás gondolkodás, x^3 és általában a páratlan kitevők esete.

A feldolgozást segítő kérdések:
- Elhiszitek az állítást? Miért is kell bizonyítani?
- Nehéz ez a bizonyítás?
- Milyen lépésekből áll?
- Milyen definíciókat kellett felidézni?
Bár ennek az állításnak az igazolása technikailag nagyon egyszerű, alkalmas arra, hogy végiggondolják a tanulók az állítások igazolásának lépéseit, azt, hogy először meg kell ismerniük az állítás tartalmát, hipotézist kell felállítaniuk, amely szerint vagy elfogadják, vagy elvetik az állítást, el kell végezni a technikai lépéseket, majd elemezni kell a tapasztalatokat.

4.23. Feladat: *A következőkben egy téma részletes kidolgozását olvashatja el. Figyelje meg, milyen szempontokra szükséges kitérni az elemzés során.*

4.24. Példa: *A logaritmusfüggvény*

A logaritmus a gimnáziumi kerettanterv szerint (pl. olvasható a NTK honlapján) a 11. osztály tananyaga. Két fő terület részeként szerepel a tantervben:

a) algebra: a hatványozás kiterjesztése, és a hatványozás „másik" inverze, a logaritmus

b) függvények, sorozatok: exponenciális és logaritmus függvények

Mivel a tanterv feladatokat, követelményeket jelöl ki, a témák sorrendjét viszont nem köti meg, ezért az adott iskola hagyományain, az egyes tanárok döntésén múlik, hogy ezt a két részt időben közelítik egymáshoz, vagy más, e témarészeket elkülönítő logikát követnek. Ettől függetlenül szükséges a logaritmus fogalmát a tanárnak is, és később a diáknak is egységben látnia.

1. *A logaritmus tanításának céljai:*

   - *Az egyenletmegoldó és a függvényvizsgáló képességek fejlesztése szempontjából is nagy jelentőségű, hogy a tanulók változatos, a tapasztalati bázisukat szélesítő, a tanult fogalmakat (pl. egyenletmegoldás és a logikai műveletek, nyitott mondatok; a függvények értékkészlete és értelmezési tartománya, invertálás) sokoldalúan megjelenítő ismereteket szerezzenek*
   - *A matematikai és a matematikán kívüli alkalmazás miatt az egyetemeknek már az első éves anyagában a függvényeknek, ezen belül a logaritmus függvénynek kiemelkedő jelentősége van.*

2. *A logaritmus tanításának előzményei:*

   - *a negatív számokkal és a közönséges törtekkel végzendő műveletek, az egyenletmegoldási technikákból származó, általánosítható tapasztalatok a megoldáshalmazról, a koordináta-rendszer alkalmazáskész ismerete, a függvény és grafikonja, szoros kapcsolatuk és lényegi különbségük; az állítások és a definíciók világos megkülönböztetésének képessége;*
   - *a hatványozás, a geometriai vonatkozások miatt ezen belül a négyzetre emelés és a köbre emelés;*
   - *a magasabb kitevőjű hatványok a polinomok tanulása során, valamint a kombinatorikai alkalmazás miatt;*
   - *a négyzetgyök és köbgyökvonás;*
   - *a számelméleten belül elsősorban a tényezőkre bontás, a tanulók additív szemléletének elmozdítása abba az irányba, hogy a multiplikatív jelenségeket is képesek legyenek észrevenni.*

3. *A logaritmus tanításának története*

   Hagyományosan e témának lényegesen nagyobb szerepe volt. A számítógépek elterjedése előtt a logaritmusra nagy szükség volt a műszaki és tudományos életben a számítások elvégzéséhez, emiatt természetesebbnek tűnt, hogy a tanulók sok, a gyakorlati életben közvetlenül szükségesnél mélyebb ismeretet sajátítottak el. Ma már lényegében senki sem *használ logarlécet és logaritmus táblázatot, ezzel szemben a különböző tudományterületeken a logaritmus nagyon gyakran előfordul és egyre több diáknak lesz szüksége rá későbbi tanulmányai során.*

4. *A témához tartozó ismeretek: A NAT a tananyag tartalmi elemeit és a fejlesztési feladatokat egységben tárgyalja.*

FEJLESZTÉSI FELADATOK, TEVÉKENYSÉGEK	**TARTALOM**	**A TOVÁBBHALADÁS FELTÉTELEI**
Számtan, algebra (24 óra)		
Modell megtalálása a matematikán belüli problémánál.	Másodfokúra visszavezethető egyszerű egyenletek.	
A matematikai fogalom célszerű kiterjesztése, *a fogalmak általánosításánál a permanencia elv felhasználása.*	A hatványozás kiterjesztése pozitív alap esetén racionális kitevőkre. A hatványozás azonosságai és alkalmazásuk.	A hatványozás definíciója, műveletek, azonosságok ismerete egész kitevő esetén.
Bizonyítás iránti igény mélyítése. *Matematikatörténeti vonatkozások megismerése (könyvtár- és internethasználat).*	A logaritmus értelmezése. A logaritmus azonosságai.	A logaritmus fogalmának ismerete, azonosságainak alkalmazása egyszerűbb esetekben.
Az absztrakciós és szintetizáló képesség fejlesztése. Az önellenőrzés igényének fejlesztése.	A definíciókon és a megismert azonosságokon alapuló exponenciális, logaritmikus és trigonometrikus egyenletek.	Exponenciális, logaritmusos és trigonometrikus egyenlet egyszerű konkrét feladatokban.
Függvények, sorozatok (12 óra)		
A függvényfogalom fejlesztése. Összefüggések felismerése a matematika különböző területei között. A bizonyításra való törekvés fejlesztése.	A 2^x, a 10^x függvény, az exponenciális függvény vizsgálata, exponenciális folyamatok a természetben. A logaritmus függvény, mint az exponenciális függvény inverze.	
Számítógép használata a függvényvizsgálatokban és a transzformációkban.	A tanult függvények tulajdonságai (értelmezési-tartomány, értékkészlet, zérushely, szélsőérték, monotonitás, periodicitás, paritás). Függvény- transzformációk: $f(x) + c$; $f(x + c)$; $cf(x)$; $f(cx)$.	Az alapfüggvények ábrái és legfontosabb tulajdonságainak vizsgálata (értelmezési-tartomány, értékkészlet, zérushely, szélsőérték).

4.2. ábra. Feladatok a NAT alapján

A felépítés arra a téves következtetésre enged jutni, hogy a logaritmus fogalmára csak a matematika belső fejlődése miatt van szükség. Ezzel szemben fontos hangsúlyozni, hogy a gyakorlatban igen sokszor fordul elő, hogy egy mennyiség exponenciálisan függ egy másiktól.

Például a biztosan telitalálatos totó-szelvényhez szükséges szelvények száma a mérkőzések számának 3^n *exponenciális függvénye, ha pedig azt kérdezzük, hogy egy adott összeg hány meccs esetén elég a szükséges összes szelvény megvásárlásához, máris a logaritmus fogalmánál vagyunk. Hasonlóan szemléletes megközelítés, ha a sakkjáték feltalálójának jutalmára gondolunk: a mezők számától (exponenciálisan) függ a jutalom, és ha azt kérdezzük, hogy a jutalom adott értékét hányadik mezőnél érhetjük el, újra a logaritmus fogalmához érkezünk.*

A valóban gyakorlati példák már sokkal bonyolultabb összefüggésben jelentkeznek, például a valószínűségszámításban.

5. *Megjegyzések a téma legfontosabb fogalmainak tanításához*

   – *A hatványozás kiterjesztése pozitív alap esetén racionális kitevőkre. A logaritmus értelmezése*

     A szöveges feladatok lehetővé teszik, hogy a logaritmus fogalmát a tanulók számukra könnyen érthető szituációkban ismerjék meg, és a definíció és a jelölés már csak a tudottak összefoglalása.

   – *A logaritmus függvény, mint az exponenciális függvény inverze*

     Érdemes az inverz képzést a táblázatos megadással, a sorok felcserélésével és a függvény grafikonjának az $y = x$ egyenesre tükrözésével is megvizsgálni.

6. *Értékelés a NAT szerint*

   Az egyéni értékelés összegzésének összetevői:

   – *Különféle tevékenységi formákban mutatott aktivitás, a társakkal való együttműködés képessége alapján.*

   – *Előre kiadott témák közül tetszés szerint választott kérdéskör feldolgozása (képi, írásbeli, szóbeli) és ennek értékelése.*

   – *Vitaszituációkban való részvétel, vitakultúra, argumentációs képesség szintjének írásbeli, szóbeli értékelése.*

   – *Projektmunkában való részvétel (egyéni vagy csoportos) szóbeli, írásbeli értékelése.*

7. *Példák az egyes helyzetekhez illő feladatokra:*

   – *Képes-e a tanuló a felkínált tevékenységformák közül kiválasztani azokat, ahol ő különösen jó, pl. a grafikonok szép ábrázolása, és ahol azért kell aktívnak lennie, mert intenzív fejlődésre van szüksége, pl. a szöveges feladatok adatainak megjegyzése*

   – *A logaritmus felfedezése, a sok értékes jegyű számítások elvégzésére szolgáló régi algoritmusok*

   – *Más területről: A határérték-fogalom önálló definiálása, ellenpéldák keresése a kezdetleges definíciókra*

   – *Projekt-munka: valós adatok gyűjtése a különböző konstrukcióban felvett hitelek törlesztésére, a valódi adatok és az egyszerű matematikai modellek eltérésének elemzése*

8. *A matematikai versenyek szerepe a fogalmak építésében, a problémamegoldó gondolkodás fejlesztésében*

   Néhány, a témához illeszkedő szép feladat

   A középiskolai és az egyetemi tananyag kapcsolatának eddig nem érintett kérdései.

MEGJEGYZÉSEK A FELADATHOZ

Egy-egy témakör feldolgozásának fő szempontjai:

– A téma helye a kerettantervekben
– Egy választott anyagrész egy órájának megtervezése
– lokális és globális célok kapcsolata, preferenciák
– ellenőrző dolgozat feladatainak összeállítása, az értékelés fő szempontjainak bemutatása.

4.2. Vertikális és horizontális kapcsolatok

4.2.1. Tapasztalatgyűjtés a környező világból

4.25. Feladat: *A mértékegységváltás sok tanulónak komoly gondot okoz. Mutassa meg az absztrakt gondolkodási szinttel összefüggő nehézségeket!*

MEGJEGYZÉSEK A FELADATHOZ

A mértékegységek változatos elnevezése még a szabályos, tizedes átváltásokat is nehézzé teszi, a témakörben az egyéb számrendszerhez kapcsolódó feladatok tovább növelik a tanulók nehézségeit. Hagyományosan a különböző termékek tömegét (vagy a különböző textíliák hosszát) más-más mértékegységgel mérték. Lassan vált általánossá az egységes metrikus rendszer, hasonlóan lassú folyamat, amíg az egyes tanulóknál is lezajlik ez az absztrakciós folyamat.

4.26. Feladat: *A mérés, mértékegységek téma az iskolai tantervekben általában a geometriához kapcsolódik. Mutassa meg az analízishez való kapcsolódási pontokat!*

MEGJEGYZÉSEK A FELADATHOZ

Alsó tagozat: Megkérhetjük a tanulókat, hogy ismerjék meg, mutassák be az óra, a méterrúd, szabó-centi, a mérleg használatát. Végezzenek méréseket, a mérések eredményét ábrázolják grafikonon. Például 1 db, 2 db, 5 db, 10 db egyforma könyv (tankönyv) tömege, vagy a csoport egyes tagjai mennyi idő alatt lépkednek el a szemközti falig.

Felső tagozat: Megkérhetjük a tanulókat, hogy keressenek mérőeszközöket a lakásban és tágabb környezetükben: hőmérő, sebességmérő, gázóra, villanyóra. Végezzenek méréseket és számításokat, a kapott adatokat ábrázolják grafikonon, keressenek összefüggéseket az egyes mennyiségek között, adjanak meg függvényeket formulával, ábrázolják a formulával megadott függvényeket, hasonlítsák össze a tapasztalati és az „elméleti" adatokat. A tíz nevezőjű részekkel való közelítő mérés segíti a tizedes törtek, racionális számok fogalmának megalapozását.

Középiskola: Sok lehetőség van tapasztalati adatok gyűjtésére, azok elemzésére. Jó kapcsolódási lehetőségek vannak a statisztikai témákhoz és a méretes geometriai feladatokhoz. Például a henger térfogatának ábrázolása a sugár, illetve a magasság függvényében.

Emelt szint, illetve felsőoktatás: Az integrálszámítás alkalmazási lehetőségei a terület és a térfogatszámításban, kitekintés egyéb gyakorlati számítási-mérési feladatokra.

4.27. Feladat: *Gyűjtsön ötleteket iskolai körülmények között is megvalósítható projektekre különböző évfolyamok számára.*

– Milyen új feladatot jelent a tanulóknak a papír-ceruza matematikáról áttérni a szabadtéri feladatokra?

– Hogyan oldható meg ilyen keretek között a tanulók munkájának ellenőrzése és értékelése?

– Mutassa meg, hogy a szabadtéri feladatok hogyan kapcsolódnak a földrajz és a fizika tantárgyakhoz!

– Elemezzen néhány szokásos tankönyvi szöveges feladatot! Mely esetekben segítheti, és mely esetekben gazdagíthatja tovább a tanulók feladatait, ha a problémát szabadtéri körülmények között kell megoldaniuk?

MEGJEGYZÉSEK A FELADATHOZ Az analízis néhány nehéz fogalmának jobb megértését segíti, ha léptéket váltunk, és néhány problémát a valóságba ágyazva, a szabadban, az iskola környékén, vagy kirándulás keretében adódó szituációba helyezzük.

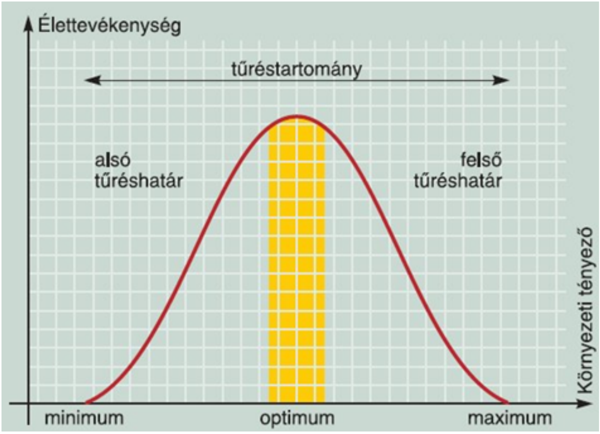
- Az exponenciális függvény ($a > 1$) gyors növekedését jobban láthatják a tanulók, ha valamely exponenciális függvény néhány helyettesítési értékét a szabadban, egy egyenes út mentén kell kijelölniük.
- A függvények menetének megfigyelését, az értelmezési tartomány megadásának jelentőségét kínálja, ha épületek sziluettjét függvényként kell a tanulóknak megadniuk. Egy-egy jellegzetes épületrész, tetőmegoldás látványáról vázlatot készítve, majd azt néhány vonallá leegyszerűsítve kereshetnek olyan egyszerű, sokszor csak lineáris függvényeket, amelyeket – az értelmezési tartomány tekintetbe vételével – közös koordinátarendszerben ábrázolva lekottázhatják a valóságot.
- A klasszikus trigonometriai feladatok is érdekesebbé válhatnak, ha torony magasságának meghatározása valódi torony adatait kéri, ahol a számításokhoz szükséges méréseket maguk a tanulók végezhetik el, és ahol a kapott eredményt több forrásból szerzett adatok segítségével (lelógatott kötél, műszaki adatok stb.) ellenőrizhetik.

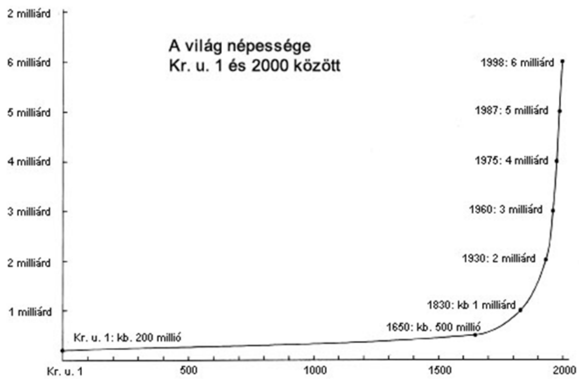
4.28. Feladat: *A tanulók a függvényt gyakran a formulával azonosítják. Mutassa meg az alábbi grafikonok segítségével, hogy a függvények formula nélkül is igen sok információt tartalmazhatnak, amelyek a függvény grafikonjáról leolvashatók.*

MEGJEGYZÉSEK A FELADATHOZ:

1. Tűréstartomány:

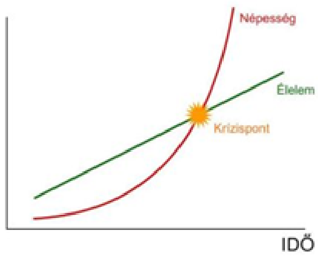
   Minden környezeti tényezőnek van egy minimum (alsó) és egy maximum (felső) értéke. A két érték közti szakasz a tűréstartomány. Ezen belül az élőlények számára legkedvezőbb szakaszt optimumnak nevezzük. Ettől távolodva mindkét irányba egyre kedvezőtlenebb a környezeti tényezők hatása. A minimum és a maximumpont közelében – a tűréshatároknál – az élőlények már nem szaporodnak, fejlődésük visszamarad, vegetálnak.





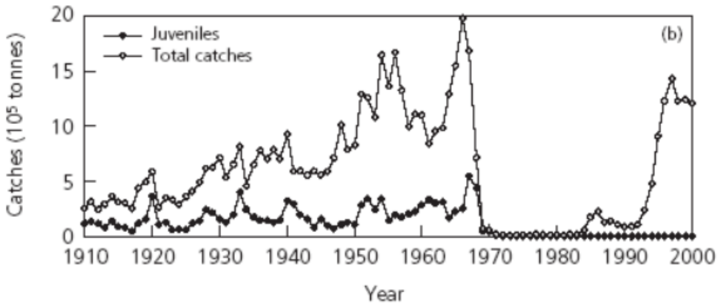
2. A Föld népessége

   Jelen pillanatban a világ népessége naponta 250 000 fővel nő, ami nagyjából egy Debrecen méretű városnak felel meg. Ezt a gyors növekedést már nagyon korán észrevette egy kivételes angol tudós Robert Malthus. 1798-ban kiadott Esszé a népességről című tanulmányában arra a következtetésre jutott, hogy a népesség exponenciálisan (mértani haladvány szerint) nő, míg az élelemtermelés csak egyenletesen (számtani haladvány szerint) növekszik, a 2. ábrán ennek a grafikus ábrázolása látható.



3. Herringek (Clupea harengus) norvégiai populációjának összeomlása

Az állomány 1970-ben drámaian lecsökkent, majd az óvintézkedések hatására rendkívül szépen visszanyerte korábbi méretét. A fiatalok lehalászását megtiltották, a legkisebb kifogható hal 25 cm-es.



4.2.2. Függvény-show

Fried Katalin készített egy függvény-show nevű programot. Egy rövidített változat az animációk közöt is megtekinthető: 7.11 A program az `http://dl.dropbox.com/u/100162898/modjegyzet/fv-show.pdf` címen érhető el.

Megtekintéséhez néhány szempontra hívjuk fel a figyelmet.

Tudjuk, hogy a függvényeket sokféleképpen lehet ábrázolni. Egyik-másik függvény grafikonjában hosszan gyönyörködünk.

Három függvényábrázolási módot választottunk:

– a derékszögű koordináta-rendszert;

– a párhuzamos koordináta-rendszert

– és a polár koordináta-rendszert.

Minden választott függvényt mind a három ábrázolási módban (ebben a sorrendben) megnézzük.

Minden függvénynek lesz olyan ábrázolási módja, amely érdekes lehet, de az is előfordulhat, hogy a három közül csak az egyik ilyen. Mégis izgalmas mindet megnézni.

Egy apró, a megértést segítő technikai információ:

A polár koordináta-rendszerben a negatív értékekhez tartozó pontokat a pozitív értékekhez tartozó pontok kirajzolásakor halvány szürkére változtattuk, hogy jobban elkülönüljenek egymástól.

1. A derékszögű koordináta-rendszerben történő ábrázolást jól ismerjük.

2. A párhuzamos koordináta-rendszerben a párhuzamosan felvett tengelyek egyikének pontjaiból vonalat húzunk a másik tengelyen a neki megfeleltetett ponthoz.

3. A polár koordináta-rendszerben az x változó értéke az origó körüli elfordulás mértékét, az $f(x)$ függvényérték az origótól mért távolságot adja meg.

A jobb élvezhetőség kedvéért nem feltétlenül ugyanazt az egységet használtuk az egyes ábrákhoz.

Az ábrázolt függvények, és néhány megjegyzés hozzájuk:

1. $f(x) = 3$

A polár koordináta-rendszerben láthatjuk: mindegyik függvényérték ugyanannyi, 3, minden pontnak az origótól mért távolsága 3.

2. $f(x) = x$
3. $f(x) = 2x$
4. $f(x) = x^2$
5. $f(x) = x^3$
6. $f(x) = \dfrac{1}{x}$
7. $f(x) = \dfrac{1}{x^2}$
8. $f(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$
9. $f(x) = e^x$
10. $\ln x$
11. $\sin x$
12. $\cos x$
13. $1 + \cos x$

Ennek függvény polárkoordinátás ábrája az ismert „szívgörbe” (cardiois vagy cardioid).

14. $\cos 4x$
15. $\sin 10x$

4.3. Problémamegoldás

4.29. Feladat: *Keressen szituációt, ahol az analízis eszközeivel tudja megoldani, vagy kényelmesebben tudja megoldani a problémát, mint egyéb, például algebrai módszerekkel! Gondolja meg, hogy a szituációt befolyásoló tényezők közül melyiket milyen egyszerűsítésekkel kell kezelni a különböző korú tanulók esetében?*

MEGJEGYZÉSEK A FELADATHOZ:

Gondolatébresztőnek felsorolunk néhány kiindulási szituációt.

1. Befér-e a bűvész botja a bőröndjébe?

2. Be tud-e a hajó kanyarodni a szűk csatornába?

3. Mennyit fusson a homokban és mennyit ússzon (ami pl. lassabb), ha a vízparttól bizonyos távolságra állva észrevesz a vízben egy fuldoklót?

4. Hova tegyük a megállót, ha azt két falu akarja használni, mind a két faluból meg kell építeni a bekötő utat, és ennek hosszát szeretnénk minimumra csökkenteni?

5. Milyen legyen a téglalap formájú ketrec oldalainak aránya, aminek egyik oldala a már meglévő épület fala, és szeretnénk a legkevesebb kerítéssel megoldani a feladatot?

4.30. Feladat: *Az általánosan megfogalmazott problémák megoldásához nem elég a szituációt ismerni, hanem gyakran mély matematikai háttérismeretre is szükség van. A feltételrendszer alkalmas megválasztásával a tanulók aktuális ismereteivel, pl. elemi úton is megoldható a probléma változata. Elemezze ebből a szempontból a következő feladatokat!*

1. Egy fogadósnak vannak foglalt és szabad szobái. Az egyszerűség kedvéért mindegyik szobának azonos az ára, és az ár nem függ a bentlakó személyek számától és az ott töltött éjszakák számától sem. Tapasztalati tény, ha n%-kal emelkedik az ár, akkor m foglalást lemondanak. Mennyivel érdemes az árat növelni, ha csak a pillanatnyi bevétel optimalizálására törekszünk?
2. Egy fogadóban 20 szoba van és egyenként 30 Euro az ára. Ha 5 Euroval növeli az árakat, 2 vendég lemondja a foglalást. Érdemes így változtatni?
3. Mikor éri el a sakkjáték feltalálójának fizetendő búzaszemek száma az 1 millió darabot (az ismert feltételek szerint)?
4. Tippeljük meg, hogy a 20. mezőn hány búzaszemnek kellene állnia?

4.3.1. Mit tudunk és mit tudhatunk meg egy függvényről?

Egy fontos függvényosztályra, a valós együtthatós polinomokra vonatkozik a következő probléma.

4.31. Feladat: *Legyen f olyan nemkonstans valós együtthatós polinom, amely minden x, y valós számra kielégíti az*

$$f(x)f(y) \leq f^2(\frac{x+y}{2})$$

egyenlőtlenséget.

Van-e a függvénynek valós gyöke? Ha van, akkor hány darab?

MEGJEGYZÉSEK A FELADATHOZ

Jól megmozgatjuk a polinomok viselkedésével kapcsolatos ismereteinket, hogy még többet megtudjunk erről a függvényről. Bár mi úgy írjuk le a megoldást, hogy ne legyen szükség ábrára, de az olvasáskor és tanítás közben is segít a gondolat szemléltetése egy-egy kis vázlaton.

a) Tapasztalatból tudjuk, hogy a páros és páratlan fokú polinomok viselkedése nagyon eltérő.

   Lehet-e páros fokú polinomról szó? Jól választott speciális értékekhez folyamodunk, nézzük az $x = -y$ helyettesítést! Az

   $$f(x)f(-x) \leq f^2(0)$$

   egyenlőtlenség páros fokra nem teljesül, mert páros fokú polinomra a bal oldal végtelenben vett határértéke végtelen.

   f tehát csak páratlan fokú polinom lehet. A páratlan fokú polinomnak van legalább egy valós gyöke, így már csak azt kell megnézni, hogy lehet-e több.

b) f és $-f$ gyökeinek száma megegyezik, ezért a pozitív főegyütthatójú páratlan fokú polinomokat vizsgáljuk.

c) Feltesszük, hogy az f függvénynek több gyöke van, ezek közül c a legkisebb és d a legnagyobb. A pozitív főegyütthatójú páratlan fokú polinom a legkisebb gyök előtt negatív, a legnagyobb után pozitív:

$f(x) < 0$, ha $x < c$ és $f(x) > 0$, ha $x > d$

d) Megpróbáljuk megállapítani f előjelét egy c és d közötti olyan u helyen, amely nem gyök.

Ha azt tesszük fel, hogy f az u-ban pozitív, akkor az $x = u$ értékhez úgy választunk d-nél nagyobb y értéket (ahol f pozitív, hogy d az xy szakasz felezópontja legyen, azaz tükrözzük u-t d-re: $y = 2d - u$. Ekkor

$$0 < f(x)f(y) \leq f^2(d) = 0$$

adódik, ami ellentmondás.

Ha pedig azt tesszük fel, hogy f az u-ban negatív, akkor az $y = u$ értékhez úgy választunk c-nél kisebb x értéket (ahol f negatív, hogy c az xy szakasz felezópontja legyen, azaz tükrözzük u-t c-re: $x = 2c - u$. Ekkor

$$0 < f(x)f(y) \leq f^2(c) = 0$$

adódik, ami ugyancsak ellentmondás.

Abból a feltevésből jutottunk ellentmondásra, hogy c és d két különböző gyöke f-nek.

Tehát f-nek egyetlen valós gyöke van.

4.3.2. Egy szélsőértékfeladat megoldásainak összehasonlítása

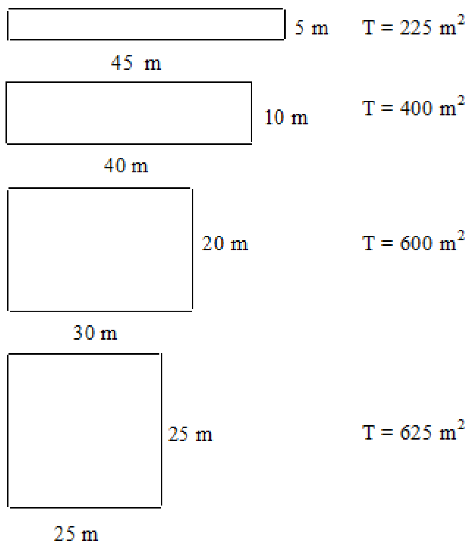
4.32. Feladat: *Gondolja át, hogy melyik megoldáshoz milyen előzetes tudás szükséges és mikor várható ez el a tanulóktól.*

Feladat: Valaki 100 méter drótkerítéssel egy téglalap alakú tyúkudvart akar elkeríteni. Hogyan válassza meg az oldalakat, hogy a alapterületű legyen a tyúkudvar? Mekkora ez a terület?

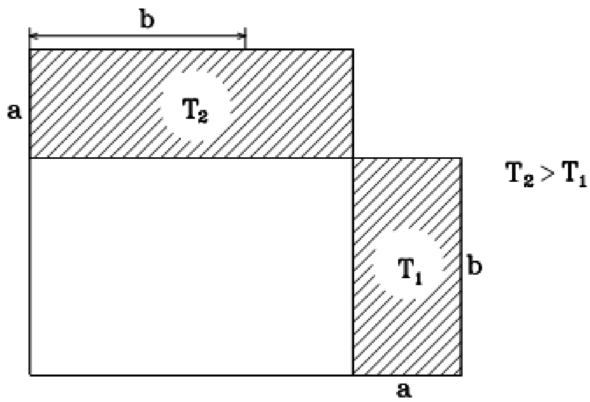
A feladat a Bürger–Fischer–Malle féle osztrák tankönyvsorozatban a differenciálszámítás alkalmazásának mintapéldája. A magyar matematikatanítás folklórjában a probléma számos változata, valamint sokféle elemi függvényvizsgálatra, elemi geometriai meggondolásokra alapuló megoldás ismert. Mondanivalónk kifejtéséhez alkalmas ez a legegyszerűbb változat is. Az elemzésben támaszkodunk Hortobágyi István cikkére (Hortobágyi, 1997. [109]). Az elemzés célja a szélsőértékkeresési stratégiák demonstrálása.

I. elemi geometriai megoldások Az első megoldás elve az, hogy egy (sejtés által) kitüntetett elemet a szóbajövő összes elemmel összehasonlítjuk. Ha a kiválasztott elem legalább akkora, mint a vetélytársak, akkor találtunk maximumot. A második és harmadik megoldásban olyan (konstans) felső korlátot keresünk, amely elérhető.

1. megoldás: Konkrét esetek vizsgálatával megsejtjük, hogy az adott kerületű téglalapok között a négyzetnek van legnagyobb területe.

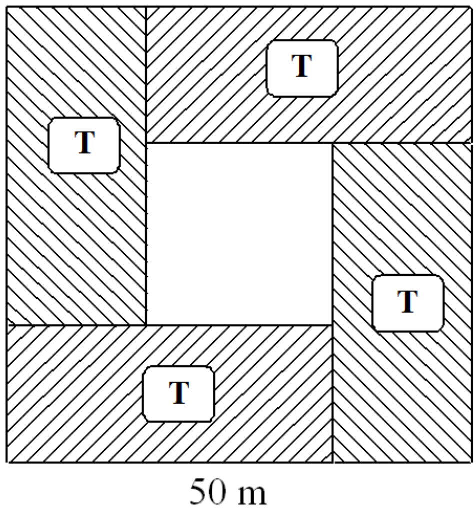


A sejtés igazolásához összehasonlítjuk a négyzet területét a téglalapok területével. Veszünk egy négyzetet és egy ugyanolyan kerületű téglalapot és az ábrának megfelelően ráhelyezzük. A két alakzat közös részét, a téglalapot az összehasonlításnál el is hagyhatjuk, csak a satírozott részeket kell vizsgálni.



Ha a téglalap egyik oldala a-val hosszabb, akkor a másik éppen a-val rövidebb, mint a négyzet oldala, hiszen az összeg egyenlő. Ebből következik, hogy az ábra szerinti elrendezés lehetséges és a téglalap lefedetlen részének T_1 területe kisebb, mint a négyzet kilógó részének T_2 területe.

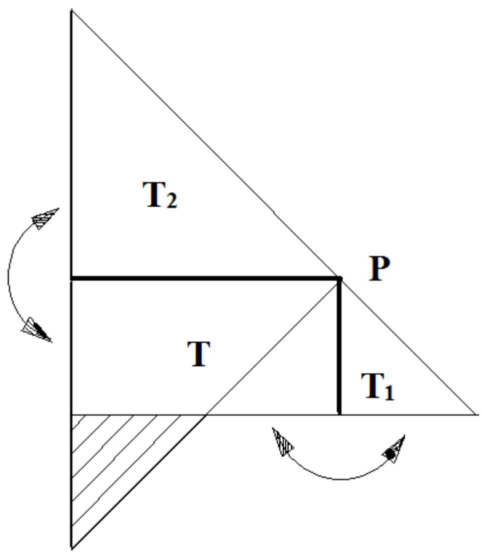
2. megoldás: Egy tanulótól származik az ábrán vázolt megoldás.



A megoldás ötlete, hogy négy téglalap összterületét felülről becsüljük a négyszeres területű nagy négyzettel. A négy téglalap akkor tölti ki a nagy négyzetet, ha oldalai egyenlők.

3. megoldás: A feladat egy változata 1996-ban az Arany Dániel verseny kezdő kategóriájában szerepelt:

Legyen adott egy egyenlőszárú derékszögű háromszög. A háromszögbe téglalapot írunk úgy, hogy egy-egy oldala a befogókra illeszkedik. Bizonyítandó, hogy a téglalap területe nem nagyobb a háromszög területének felénél.



Átdarabolással bizonyítható az állítás. Az átfogó egy P pontján át párhuzamost húzunk a befogókkal. Ezzel egy T területű téglalapra és két (T_1, illetve T_2 területű) háromszögre bontottuk a kiindulási háromszöget. Az ábra azt az estet mutatja, amikor P a felezőpontnál alacsonyabban van. Ekkor a T_1 területű háromszög fér bele a téglalapba és a T_2 területű háromszögnek meg van túllógó része. Ha P a felezőpont, akkor négyzetet kapunk, amelynek a területe pont a háromszög területének fele. Ha P a felezőpontnál magasabban van, akkor a T_2 területű háromszög fér bele a téglalapba és a T_1 területű háromszögnek meg van túllógó része.

Ismét egy felső becslést adunk, ezúttal a téglalap területének kétszeresére. Ez egyben egy feladat átfogalmazására és általánosítására is példa. (A versenyfeladat szempontjából se az egyenlőszárúság, se a derékszög nem lényeges.)

II. Megoldások egyenlőtlenséggel

Legyenek a téglalap oldalai a és b, ekkor a K kerületét és a T területét a $K = 2(a + b)$, $T = ab$ képletekkel írják le. A példa adataival a $T = a(50 - a)$ szorzat legnagyobb értékét keressük. Ha megsejtettük a maximumot, akkor az $a(50 - a) \leq 625$

- egyenlőtlenséget ekvivalens átalakítással $(x-25)^2 \geq 0$ alakra hozzuk, amiből a megoldás kiolvasható,
- a számtani és mértani középre vonatkozó egyenlőtlenséggel igazoljuk (a számtani közép konstans).

II. Megoldások függvénytulajdonságok felhasználásával

Az $f(x) = x(50 - x)$ másodfokú függvény maximumát keressük 0 és 50 közötti x értékekre.

a) Teljes négyzetté alakítással $f(x) = -(x - 25)^2 + 625$ alakra hozzuk. Ezen látszik, hogy akkor veszi fel a maximumát, ha a négyzetes tag 0, és ez az értelmezési tartományba esik. (Vagy grafikonra gondolva kiolvassuk a parabola tengelypontjának koordinátáit: (25;625).)

b) Az $f(x) = x(50-x)$ függvény zérushelyei $x_1 = 0$ és $x_2 = 50$, a tengelypont x koordinátája a zérushelyek számtani közepe.

c) Az első derivált $x = 25$ zérushelye benne van az értelmezési tartományban, a második derivált negatív, tehát az $x = 25$ helyen maximum van.

5. fejezet

Geometria

A geometria jelentősége a matematika és más tudományok történetében a nem-euklideszi geometria felfedezésével (Bolyai 1973. [36], Lobatchevsky 1951 [149].), a matematikán belüli megalapozással (Hilbert 1962 [106].) fémjelezhető.

Az axiomatikus felépítés a többi tudomány (pl. fizika) számára modellértékű.

5.1. Feladat: *Nézzen utána (legalább az interneten), hogy milyen tudományterületekkel van a modern geometriai kutatásoknak közvetlen kapcsolata.*

MEGJEGYZÉSEK A FELADATHOZ:

Az aktuális geometriai kutatások nem izoláltan, hanem más matematikai és nem matematikai diszciplínákkal összekapcsolva folynak (algebra, analízis, kombinatorika, informatika, kódoláselmélet, kriptográfia, komputergrafika, biológia, stb.).

A Pólya György (1967. [184], 1971. [185], 1988 [187]) nevéhez köthető problémaorientált matematikaoktatásban nehéz letagadni az elemi geometria jelentőségét, hiszen – viszonylag kevés ismeret birtokában – számos matematizálási lépés elvégzését teszi lehetővé. Egyszerű, természetes és intuitív kérdések vethetők fel, de a legtöbb esetben a megoldáshoz szükség van az egyéni ötletekre és kreativitásra. Már az elemi kérdéskörben is lehet megoldatlan (akár elvileg megoldhatatlan) problémát találni. A heterogén osztályok (többé-kevésbé minden osztály heterogén) számára lehetővé teszi az osztályon belüli ún. belső differenciálást (Herber 1983 [104].) az a tény, hogy egy egyszerűen megfogalmazott kérdéskör különböző nehézségű problémák egész sorát teszi vizsgálhatóvá (lásd például a körre tükrözés példáját 296. o.).

Az iskolai matematika számára nem kevésbé érdekes aspektus, hogy a geometria a matematika többi területéhez képest több verbális és nem verbális eszközzel rendelkezik, ami megkönnyíti a matematikai és a matematikáról való kommunikációt, a szemléltetést és a modellezést.

A geometriatanítás legfőbb céljai egy nemzetközi konferenciára készült tanulmány szerint (Villani et al. 1996 [255]):

– a környező világ leírása, megértése és értelmezése

– gazdag és változatos feladatkészlet biztosítása a tanulók számára

- megtanítani a diákokat sejtések megfogalmazására, bizonyítások készítésére, példák és ellenpéldák kitalálására
- eszközt teremteni más matematikai területeknek
- példa mutatása axiomatikus elméletre
- gazdagítani a tanulók matematikáról alkotott képét

Az egyetemi geometria felépítésében szigorú értelemben vett axiómarendszerrel dolgozunk. Az iskolai tanításban sokkal tágabb háttéraxiómarendszert használunk, mert több fogalmat alapfogalomként kezelünk.

5.1. Alapfeladatok és kompetenciák

5.1.1. A kerettanterv elvárásai

Alsó tagozat

- Vonalak (egyenes, görbe) ismerete.
- A test és a síkidom megkülönböztetése.
- Testek építése szabadon és megadott feltételek szerint.
- Tájékozódási képesség, irányok ismerete.
- A hosszúság, az űrtartalom, a tömeg és az idő mérése. A szabvány mértékegységek: cm, dm, m, cl, dl, l, dkg, kg, perc, óra, nap, hét, hónap, év. Átváltások szomszédos mértékegységek között. Mennyiségek közötti összefüggések felismerése. Mérőeszközök használata.
- Egyenesek kölcsönös helyzetének felismerése: metsző és párhuzamos egyenesek.
- A szabvány mértékegységek: mm, km, ml, cl, hl, g, t, másodperc. Átváltások szomszédos mértékegységek között.
- Hosszúság, távolság és idő mérése (egyszerű gyakorlati példák).
- Háromszög, négyzet, téglalap, sokszög létrehozása egyszerű módszerekkel, felismerésük, jellemzőik.
- Kör fogalmának tapasztalati ismerete.
- A test és a síkidom közötti különbség megértése.
- Kocka, téglatest, felismerése, létrehozása, jellemzői.
- Gömb felismerése.

- Tükrös alakzatok és tengelyes szimmetria előállítása hajtogatással, nyírással, rajzzal, színezéssel.
- Négyzet, téglalap kerülete.
- Négyzet, téglalap területének mérése különféle egységekkel, területlefedéssel.

Felső tagozat

- Térelemek, félegyenes, szakasz, szögtartomány, sík, fogalmának ismerete.
- A geometriai ismeretek segítségével a feltételeknek megfelelő ábrák pontos szerkesztése. A körző, vonalzó célszerű használata.
- Alapszerkesztések: pont és egyenes távolsága, két párhuzamos egyenes távolsága, szakaszfelező merőleges, szögfelező, szögmásolás, merőleges és párhuzamos egyenesek.
- Alakzatok tengelyese tükörképének szerkesztése, tengelyes szimmetria felismerése.
- A tanult síkbeli és térbeli alakzatok tulajdonságainak ismerete és alkalmazása feladatok megoldásában.
- Téglalap és a deltoid kerületének és területének kiszámítása.
- A téglatest felszínének és térfogatának kiszámítása.
- A tanult testek térfogatának ismeretében mindennapjainkban található testek térfogatának, űrmértékének meghatározása.
- A tanuló a geometriai ismeretek segítségével képes jó ábrákat készíteni, pontos szerkesztéseket végezni.
- Ismeri a tanult geometriai alakzatok tulajdonságait (háromszögek, négyszögek belső és külső szögeinek összege, nevezetes négyszögek szimmetriatulajdonságai), tudását alkalmazza a feladatok megoldásában.
- Tengelyes és középpontos tükörkép, eltolt alakzat képének szerkesztése. Kicsinyítés és nagyítás felismerése hétköznapi helyzetekben (szerkesztés nélkül).
- A Pitagorasz-tétel kimondása és alkalmazása számítási feladatokban.
- Háromszögek, speciális négyszögek és a kör kerületének, területének számítása feladatokban.
- A tanult testek (háromszög és négyszög alapú egyenes hasáb, forgáshenger) térfogatképleteinek ismeretében ki tudja számolni a mindennapjainkban előforduló testek térfogatát, űrmértékét.

Középiskola

- Térelemek ismerete; távolság és szög fogalma, mérése.
- Nevezetes ponthalmazok ismerete, szerkesztésük.
- A tanult egybevágósági és hasonlósági transzformációk és ezek tulajdonságainak ismerete.
- Egybevágó alakzatok, hasonló alakzatok; két egybevágó, illetve két hasonló alakzat több szempont szerinti összehasonlítása (pl. távolságok, szögek, kerület, terület, térfogat).
- Szimmetria ismerete, használata.
- Háromszögek tulajdonságainak ismerete (alaptulajdonságok, nevezetes vonalak, pontok, körök).
- Derékszögű háromszögre visszavezethető (gyakorlati) számítások elvégzése Pitagorasz-tétellel és a hegyesszögek szögfüggvényeivel; magasságtétel és befogótétel ismerete.
- Szimmetrikus négyszögek tulajdonságainak ismerete.
- Vektor fogalmának ismerete; három új művelet ismerete: vektorok összeadása, kivonása, vektor szorzása valós számmal; vektor felbontása, vektorkoordináták meghatározása adott bázisrendszerben.
- Kerület, terület, felszín és térfogat szemléletes fogalmának kialakulása, a jellemzők kiszámítása (képlet alapján); mértékegységek ismerete; valós síkbeli, illetve térbeli probléma geometriai modelljének megalkotása.
- A geometriai ismeretek bővülésével, a megismert geometriai transzformációk rendszerezettebb tárgyalása után fejlődött a tanulók dinamikus geometriai szemlélete, diszkussziós képessége.
- A háromszögekről tanult ismeretek bővülésével a tanulók képesek számítási feladatokat elvégezni, és ezeket gyakorlati problémák megoldásánál alkalmazni.
- A szerkesztési feladatok során törekednek az igényes, pontos munkavégzésre.
- Jártasság a háromszögek segítségével megoldható problémák önálló kezelésében.
- A tanult tételek pontos ismerete, alkalmazásuk feladatmegoldásokban.
- A valós problémákhoz geometriai modell alkotása.
- Hosszúság, szög, kerület, terület, felszín és térfogat kiszámítása.
- Két vektor skaláris szorzatának ismerete, alkalmazása.
- Vektorok a koordináta-rendszerben, helyvektor, vektorkoordináták ismerete, alkalmazása.
- A geometriai és algebrai ismeretek közötti összekapcsolódás elemeinek ismerete: távolság, szög számítása a koordináta-rendszerben, kör és egyenes egyenlete, geometriai feladatok algebrai megoldása.

5.1.2. A geometriai fogalmak fejlődése, fejlesztése

A geometriai fogalmak fejlődésének szintjei

A kicsi gyerekek gyökeresen máshogy látják a környezetünkben levő tárgyakat, mint a felnőttek. Látni is és a látványtól elszakadni is meg kell tanulni. A didaktikai kutatások azt igazolják, hogy ebben a tanulási folyamatban, a geometriai fogalmak fejlődésében egymásra épülő, ugyanakkor jól elkülöníthető szinteket lehet megfigyelni. Ezeknek a szinteknek a felismerése, leírása a Van Hiele nevű házaspár nevéhez fűződik, Van Hiele szinteknek is szokás nevezni ezeket. Itt a fogalmak fejlődési szintjeinek Clemens és Battista – a geometria didaktika két neves kutatója – által egy kicsit továbbfejlesztett változatát adjuk meg.

0. szint – felismerés előtti: A gyerekek érzékelik a formákat, de nem képesek különbséget tenni közöttük.
1. szint – vizuális: A gyerekek felismernek különböző formákat, és tulajdonságokat is, mentális képeket alkotnak róluk. Ezeket a formákat és tulajdonságokat egységes egészként érzékelik, és a jellemzésükhöz vizuális, képszerű leírásokat használnak. Például azt mondják, hogy egy forma az kör, mivel úgy néz ki, mint egy pénzérme.
2. szint – leíró, analitikus: A diákok külön tudják választani a formák egyes részleteit, azok tulajdonságait – például a négyzet oldalait, átlóit, a kör középpontját, ... - és ezen tulajdonságaik alapján azonosítják a formákat. Az alakzatokat egyrészt egészként, másrészt pedig tulajdonságaik együtteseként érzékelik.
3. szint – absztrakt, összefüggés felismerő: A diákok, tulajdonságaik alapján definiálják és osztályozzák a dolgokat. A tulajdonságok között összefüggéseket állapítanak meg. Megtanulnak különbséget tenni szükséges és elégséges feltételek között.
4. szint – formális dedukció: A diákok önálló bizonyításokat készítenek. Tételeket alkotnak és és ezeket formális, logikai következtetésekkel támasztják alá.
5. szint – szigor, matematikai: A diákok matematikai rendszerekkel kapcsolatosan is képesek formálisan érvelni. Érvelésük eredményeként képesek megalapozni, kidolgozni és összehasonlítani különböző (axiomatikus) rendszereket.

5.2. Feladat: *Idézzük a Sulinova kerettantervéből az első négy osztály geometria anyagának néhány hangsúlyos gondolatát. Döntse el, hogy az üresen hagyott helyeken hányadik Van Hiele szintű fogalmakról szól a megfelelő szöveg.*

„Kezdetben elsősorban a globális alakfelismerést, azonosítást, megkülönböztetést fejlesztjük (.... szint), a tulajdonságok kiemelése, megnevezése csak ezután következik. A geometriai tulajdonságokról szerzett tapasztalatokat csak hosszú érlelési idő után összegezzük (.... szint).”

MEGJEGYZÉSEK A FELADATHOZ:

A tanterv 1. osztályban a 0. szintről az 1. szintre való elmozdulást tűzi ki elsődleges célul. Másik célja a 2. szintre való fejlesztés fokozatos előkészítése. Az alsótagozat további éveiben a geometriatanítás egyik fő hangsúlya ez marad, a gyerekek eljuttatása a legegyszerűbb – mindennapi életben leggyakrabban előforduló formák – alakzatok 2. szinten való érzékelésére.

5.3. Feladat: *Idézzük a Sulinova kerettantervben a negyedik osztályos geometria anyag hangsúlyos gondolatait. Döntse el, hogy az üresen hagyott helyeken hányadik Van Hiele szintű fogalmakról szól a megfelelő szöveg.*

„A megismert geometriai tulajdonságok és relációk tudatosítása (térbeli, síkbeli és adott más felülethez tartozó alakzatok megkülönböztetése; görbült, szögletes; lyukas, lyuktalan; üreges, tömör; sokszög és nem sokszög; konvex, nem konvex; szimmetriák; alakzatok egybevágósága, hasonlósága (globális látványként) (.... szint). Lapok, élek csúcsok számlálása a megalkotott testeken; összefüggés keresése; lapok kölcsönös helyzete, (szomszédos, szemközti, metsző, merőleges, párhuzamos), egybevágósága; élek kölcsönös helyzete, egyenlőségük. Téglatest, kocka, gömb; alapvető tulajdonságaik. Síkidom, sokszög, háromszög, négyszög, ötszög ..., téglalap, négyzet, kör; alapvető tulajdonságaik. Oldalak, csúcsok, átlók, szög (mint alakzat), derékszög. Oldalak kölcsönös helyzete, egyenlősége; szögek összehasonlítása. Néhány alakzat felismerése, szakszerű megnevezése és jellemzése a tudatosított tulajdonságok és viszonyok alapján (téglatest, kocka, gömb, téglalap, négyzet, kör)" (.... szint).

MEGJEGYZÉSEK A FELADATHOZ:

A szöveg első része bizonyos tulajdonságok vizuális, globális látványként történő tudatosításáról szól, ez az 1. van Hiele szintnek felel meg. A szöveg második része már azt kívánja, hogy képesek legyenek részeire bontani az alakzatokat, és egyrészt egészként, másrészt pedig tulajdonságaik együtteseként érzékelni azokat. Ezek már a 2. van Hiele szinten mozgó feladatok.

Érdemes figyelmet szentelni ennek a felsorolásnak. Egyrészt azért, hogy tudatosodjon bennünk, hogy mindazon ismeretek, amelyeket a felsőtagozaton már egészen magától értetődőnek tekintünk, milyen komoly előkészítést kívánnak. Másrészt azért, hogy lássuk, hogyan lehet a lemaradt diákokat, a lassabban haladókat eljuttatni a 2. szintre, mielőtt magasabb szinten való munkára próbálnánk késztetni őket.

Amerikai kutatások szerint a diákok több mint 70 százaléka úgy kezdi a középiskolás (11-18 év) geometriai tanulmányait, hogy a fogalmi fejlődésnek az első, vagy annál is alacsonyabb szintjén áll (Battista, 1998).

5.4. Feladat: *Egy nemzetközi összehasonlító mérésről – METE – szóló doktori disszertációból való a következő szöveg (Török, J. 2007 [230]). Döntse el, hogy az üresen hagyott helyeken hányadik Van Hiele szintű fogalmakról van szó.*

Ábrák és rajzok használata alapvetően fontos segédeszközei a geometria tanításának. Segítenek abban, hogy a tanulók logikailag összetettebb feladatokat értsenek és oldjanak meg, mint a matematika más területein. Más területeken gyengén teljesítő, de jó vizuális képességekkel rendelkező tanulók is sikeresek lehetnek a geometriaórákon. Mindazonáltal az ábrák használata téves fogalmak kialakulásához is vezethet. Ha például egy háromszög egyenlőszárúnak látszik, a *gyerekek hajlamosak egyenlőszárúnak tekinteni akkor is, ha ez csak véletlen. Így ahelyett, hogy a logikus gondolkodást segítené, a rajz könnyen egy hamis gondolatmenet forrásává válhat. Az ilyen tanuló ebben a szituációban a .... szintre esett vissza. Ha el is érte a .... szintet, vagy akár még magasabb szintet is, még nincs ott otthon. Van Hiele szerint a .... szinten levő tanulók „nem a kép, hanem a kapcsolatok rendszere alapján ítélik meg az alakzatot. Ha egy ábra rajza pontatlan is (vagy torzul a számítógépen) az ilyen tanulók gondolkodása nem megy tévútra, ha biztosítjuk őket, hogy a rajzoló szándéka az volt, hogy az oldalak egyenlők legyenek" (Battista-Clemens, 1992).*

Alsina és társai (Alsina et al. 1987) szerint „a geometriai ismeretek megértésének és közlésmódjának két típusa különböztethető meg: az egyik megfelel a geometriai intuíciónak, vizuális természetű és közvetlen (kreatív és szubjektív), a másik a logikához kapcsolódik, verbális természetű és reflektív (elemző és objektív)". A geometria tanításának egyik célja e kétféle megértés összekapcsolása. Így a vizuális képek az intuíció és a kreativitás fontos forrásai maradnak, míg az indoklások a logikai elemzésen alapulnak. A .... Van Hiele szint elérése jelenti az indoklások teljes elszakadását a vizualitástól."

MEGJEGYZÉSEK A FELADATHOZ:

Az a tanuló, akit az ábra félrevezet az a 2., vagy még alacsonyabb van Hiele szintre esett vissza. Ha tud is dolgozni időnként a 3. vagy még magasabb szinten, nincs magabiztossága itt, a fogalmi fejlettsége (legfeljebb) a 2. szinten van. (Egyetemi, főiskolai diákok körében sem ismeretlen a jelenség.) A 3. szinten lévő tanulók már nem a képre, hanem a kapcsolatok rendszerére támaszkodnak. Ez az a szint, ahol a látványhoz, a „mintapéldányhoz" (vizuális prototípus) fokozatosan hozzáépülnek a fogalmak definíciói, azaz a fogalmakat a látványtól elszakadva, a tulajdonságaik alapján is képesek felfogni, osztályokba sorolni. A fogalmak 4. van Hiele szintjén megvalósul a vizualitástól való teljes elszakadás.

Az ábrák és a fogalmi gondolkodás fejlettségének kapcsolata

A 2. szintről a 3. szintre való átmenet a fogalmi fejlődésben kulcsfontosságú és szorosan kapcsolódik az ábrák használatához. Ábrák és rajzok használata alapvetően fontos segédeszközei a geometria tanításának. Segítenek abban, hogy a tanulók logikailag összetettebb feladatokat értsenek és oldjanak meg, mint a matematika más területein. Más területeken gyengén teljesítő, de jó vizuális képességekkel rendelkező tanulók is sikeresek lehetnek a geometriaórákon.

A nem megfelelően használt ábrák azonban hátráltathatják, sőt károsíthatják a fogalmi gondolkodás fejlődését.

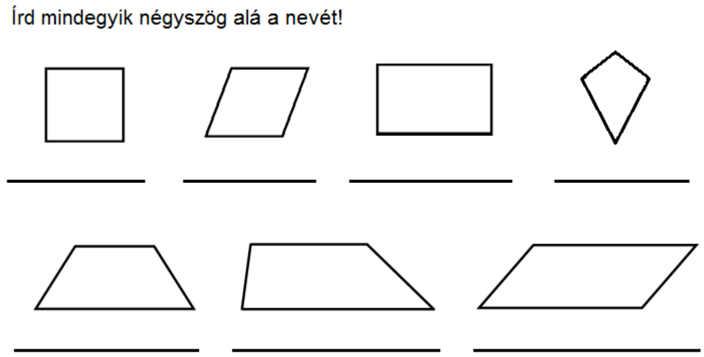
Sajnos azonban vannak a tanítási hagyományban olyan elemek, feladattípusok, ábra-rajzolási szokások, amelyek ezt az átmenetet inkább hátráltatják, mint segítik.

A következő feladat látszólag a 3. fogalmi szinten tesz fel kérdéseket, valójában azonban az alakzatok 1. szintű érzékelését erősíti.

5.5. Feladat: *Miért hibás a fogalmi gondolkodás fejlesztése szempontjából a következő ábrán látható feladat?*

MEGJEGYZÉSEK A(FELADATHOZ:

Két (meglehetősen gyakori) módszertani hibatípust is tartalmaz a példa.



5.1. ábra. Feladat: Írd mindegyik négyszög alá a nevét!

1. Ebben a feladatban a gyerekek egy sor négyszöget látnak, amelyeknek bizonyos oldalai párhuzamosnak és (vagy) egyenlőnek látszanak és (vagy) bizonyos szögei látszatra derékszögűek.
2. Ezeket a tulajdonságokat még inkább hangsúlyozza a feladat azáltal, hogy a négyszögeket egy speciális helyzetben ábrázolja, amelyben az alakzat néhány fontos részlete – oldala, átlója, szimmetriatengelye – a tankönyvoldal, (monitor, feladatlap) oldalával párhuzamos helyzetben áll.

A feladat azt kéri a gyerekektől, hogy nevezzék meg ezeket a négyszögeket, holott nem adja meg explicit módon az ábra készítőjének a szándékát. Így a gyerekektől azt várjuk, hogy a részletek figyelembe vételével, de mégis a látvány alapján válaszoljanak, ami a fogalomalkotás vizuális szintjén történő gondolkodást erősíti.

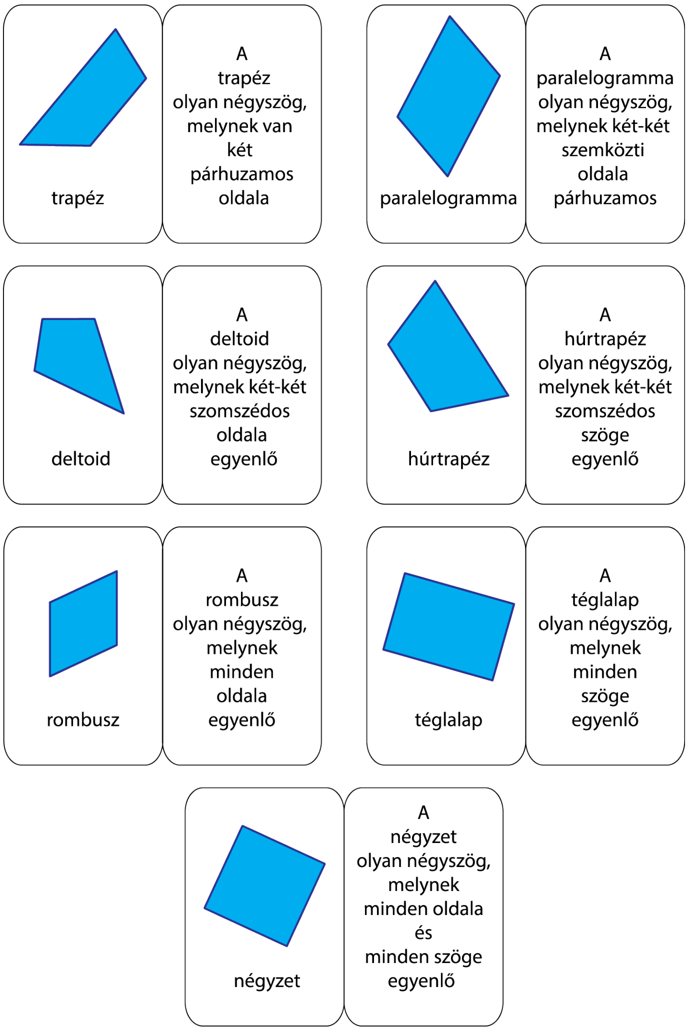
Az ilyen típusú feladatokkal, amelyek azt kérik a gyerekektől, hogy egy ábra alapján ismerjék fel, hogy az milyen geometriai alakzatot ábrázol, meglehetősen gyakran találkozhatunk a geometria-tanítási gyakorlatban. Ezek a feladatok károsak a fogalomfejlődés szempontjából, az okozott problémákat „fogalmi redukcionizmus”-nak nevezi a szakirodalom.

Kép, név és definiáló tulajdonság egymásra hatása, funkciója a fogalomalkotásban

A 2. szintről a 3. szintre történő átmenet nehézségét mutatja az is, hogy például a sokszögek osztályozása során a gyerekek hajlamosak a speciális sokszögekre mint elkülönülő típusokra gondolni. Sokuk számára nehéz elfogadni például, hogy a négyzet egy speciális téglalap, vagy speciális rombusz stb. A következő példa egy egyszerű eszközt mutat be, ami sokat segíthet ebben az átmenetben, így a fenti nehézség leküzdésében.

5.6. Példa: *Minden gyereknek van egy 7 kártyából álló készlete (5.2. ábra). A kártyák kétoldalú lapocskák, amelyek egyik oldalán egyfajta speciális négyszög neve felett annak egy mintapéldánya, vizuális prototípusa, másik oldalán pedig a definíciója szerepel.*

A foglalkozás során a gyerekeknek négyszögtulajdonságokat mondunk, nekik fel kell mutatni azokat a kártyákat, amelyekre szerintük fennáll a tulajdonság. Például, ha ezt kérjük:



5.2. ábra. A kártyakészlet

Mutass olyan négyszöget, amelynek átlói egyenlőek!

Erre a kérdésre mondjuk felmutatják a négyzetet, a téglalapot, akkor továbbkérdezünk: *Nincs több? Tud valaki még másik fajtát is mutatni, aminek biztosan egyenlők az átlói?*

Miután megtalálták a húrtrapézt, fontos újra kérdezni – *Nincs több?* – és így tovább, mindaddig, amíg meg nem győződnek róla, hogy minden lehetőséget megtaláltak.

Ezután folytathatjuk újabb, pl. ilyen kérdésekkel:
Mutass olyan négyszöget, amelynek vannak egyenlő oldalai.
Mutass olyan négyszöget, amelynek vannak egyenlő szögei.
Mutass olyan négyszöget, amelynek átlói merőlegesek egymásra.
Mutass olyan négyszöget, amelynek átlói felezik egymást.

Mutass olyan négyszöget, amelynek vannak párhuzamos oldalai.

...

Egy idő után egy másfajta kérdést teszünk fel:

Mutass paralelogrammát!

A gyerekek felmutatják a paralelogramma feliratú kártyájukat. A Nincs több? kérdésre magabiztosan válaszolják, hogy persze hogy nincs, hiszen a többinek mindnek más a neve. Ilyenkor ígérhetünk piros pontot, csokit, kalapemelést, ... annak, aki mégis talál másikat.

Szerencsés esetben lesz olyan gyerek, aki felmutatja a téglalapot, a rombuszt, vagy a négyzetet. Ebben az esetben kérjük meg őket, magyarázzák el, miért gondolják hogy ezeket paralelogrammának.

Ha nincs ilyen gyerek, kérjük meg őket fordítsák meg a paralelogramma kártyát, és olvassák el a hátoldalán a definíciót. Ezután az eredeti kérést természetes módon helyettesíti egy másik:

Mutass olyan négyszöget,melynek két-két szemközti oldala párhuzamos!

Világos, hogy a négyzet, a téglalap, a rombusz kártyái egyaránt jó példák.

A hatás a tapasztalatok szerint elég erőteljes. A kártyák segítségével a gyerekek komolyabb gond nélkül megértik és így elfogadják az olyan – első hallásra nehezen elfogadható állításokat, mint:

A négyzet téglalap is, paralelogramma is, trapéz is, rombusz is.

5.1.3. Az alakzat fogalmával kapcsolatos kérdések

5.7. Feladat: *Mit jelentenek ezek a szavak: alakzat; síkidom; térbeli test?*

MEGJEGYZÉSEK A FELADATHOZ:

Az alakzat egyszerűen pontokból álló halmazt jelent, a síkbeli – egy síkra illeszkedő – alakzatok, illetve térbeli – síkra nem illeszkedő – ponthalmazok; ezeket szokás síkidomoknak illetve térbeli testeknek is nevezni. A pont, sík, tér, halmaz szavak tovább nem definiált alapfogalmakat jelentenek.

Hogyan lehet az alakzatokat megadni?

A geometria tanításakor fontos, hogy tanárként tisztán lássuk erre a kérdésre a választ. A válaszadásban segít, ha ponthalmaznak tekintjük az alakzatokat.

Egy halmazt adott, ha bármely dologról eldönthető, hogy a halmazhoz tartozik-e. Egy halmazt megadhatunk (1) elemeinek felsorolásával (2) tulajdonsággal (3) már megadott halmazok között műveletekkel	Egy alakzat adott, ha bármely pontról eldönthető, hogy az alakzathoz tartozik-e. Egy alakzatot megadhatunk (1) pontjainak felsorolásával (2) tulajdonsággal (3) már megadott alakzatok közötti műveletekkel

5.1. táblázat. Halmaz és alakzat megadása

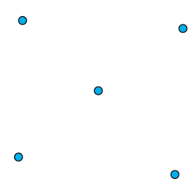
A geometriában bizonyos ponthalmazokat, és bizonyos tulajdonságokat alapfogalomnak választunk, nem definiáljuk őket. Ilyen definíció nélkül elfogadott ponthalmazok, alapalakzatok, a pont, az egyenes, a sík, a tér, a félegyenes, a szakasz, a félsík, a féltér. Ezek tulajdonságait axiómák rögzítik.

Alapfogalom a két pont távolsága is, ami függvény, amely a pontpárokhoz pozitív számokat rendel hozzá. Távolságok egyenlősége szintén axiomatikus szinten meghatározott tulajdonság. Ezek azok az alapvető építőköveink, amelyekből az alakzatainkat megalkotjuk.

(1) Alakzatok megadása pontjainak felsorolásával

Ezen a módon véges sok pontból álló alakzatokat tudunk megadni.

5.8. Példa: *Véges sok pontot megadhatunk koordinátáival vagy egyszerűen felrajzoljuk azokat.*



5.3. ábra. Véges sok pontból álló alakzat

(2) Alakzatok megadása tulajdonsággal – mértani helyek

Azokban a feladatokban, ahol egy mértani hely – egy tulajdonsággal megadott ponthalmaz – megkeresése a feladat, valójában egy predikátum – nyitott állítás, nyitott mondat – igazsághalmazának a megkeresése a cél.

Ezen feladatok megoldása tehát szoros analógiában áll az egyenletek, egyenlőtlenségek megoldásával, amint azt a koordinátageometriában is tapasztaljuk.

A távolságok segítségével sokféle fontos tulajdonságot lehet megfogalmazni, ezért ezt gyakran használjuk ponthalmazok megadásakor.

A tantervben a távolságokkal és a mértani helyekkel kapcsolatos minimumkövetelmények:
... pont és egyenes távolsága,
két párhuzamos egyenes távolsága,
szakaszfelező merőleges,
szögfelező, ...
Nevezetes ponthalmazok ismerete, ...

Ezekben a minimumkövetelményekben nem csak két pont távolságának, hanem pont és egyenes, illetve egyenes és egyenes távolságának ismeretére is szükség van.

A távolság általánosabb fogalmának, pont és alakzat, illetve alakzat és alakzat távolságának tanítása nem fogalmazódik meg direkt módon a tantervben és időhiányra hivatkozva sokszor ki is marad a tanításból.

Itt említjük, de számos más esetben is ez történik, *a megalapozásra kevesebb idő és energia marad. A hangsúly a célokra, a célismeretek begyakorlására helyeződik, amit lehet, hogy hatékonyabban és gyorsabban elérhetnénk, ha az alapokra több gondot fordítanánk.*

A következő példáink éppen a távolság fogalmának megalapozásához adnak segítséget.

Pont és alakzat távolsága

Az ilyen feladatokat általában könnyűnek és érdekesnek találják a gyerekek, ugyanakkor a szerzett tapasztalatok nagyon nagy segítséget jelenthetnek a távolsággal kapcsolatos mértani helyek meghatározásakor.

Hasonlóan jól fejleszthető a távolság-fogalom két alakzat távolságáról szóló feladatokkal is, de ezek a tantervi anyag szempontjából nem annyira alapvetőek.

A) Pont és véges sok pontból álló alakzat távolsága

Két pont távolságának mérése alsó-tagozatos anyag, ezt követi a felső-tagozaton pont és egyenes távolsága.

Az egyenestől való távolság fogalma nem könnyű, hiszen a pontot az egyenes pontjaival összekötő végtelen sok szakasz hosszát kell összehasonlítani, (kellene megmérni).

Érdemes tehát először egy pont távolságát véges sok pontból álló alakzatoktól méréssel meghatározni.

(Az ilyen feladatok a gyerekeknek sokkal természetesebbek, mint nekünk, akiket rászoktattak, hogy az alakzat valami összefüggő vonalat, vagy tartományt jelent.)

5.9. Példa: *A *-gal jelölt pontok Mókus elásott diótartalékainak a helyét jelölik. A +-szal jelölt pont Mókus pillanatnyi helyét mutatja, aki éppen nagyon éhes. Milyen messze van Mókus az ennivalótól (az ennivalókat jelző ponthalmaztól)?*

5.4. ábra. Mókus és a diókészlete

Ilyen és hasonló példák szemléletesen vezetnek el ahhoz a gondolathoz, hogy egy pont és egy alakzat távolságát két pont távolságára próbáljuk visszavezetni, a távolságot a pontot az alakzatnak a hozzá legközelebb fekvő ponttal összekötő szakasz hosszával mérjük.

Az 5.4. ábrát szándékosan úgy készítettük, hogy egyértelmű legyen a legrövidebb szakasz, de ha a tanulók korongokkal, mágnesekkel vagy dióval kísérletezhetnek, akkor nagyon hamar előkerül az egyenlő hosszú szakaszok közötti választás kérdése.

B) Két véges sok pontból álló alakzat távolsága

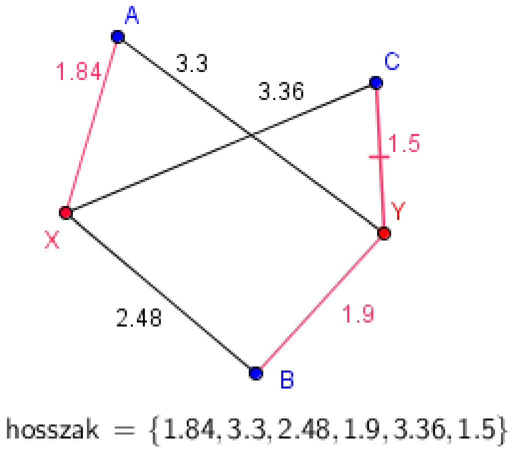
Az elv az, hogy megkeressük, hogy az egyik alakzat pontjai közül melyik van legközelebb a másik alakzathoz. A legközelebbi pont távolsága lesz a két alakzat távolsága.

Eközben nyilván minden olyan szakaszt megmérünk, amely különböző alakzatokhoz tartozó pontokat köt össze és a legrövidebb(ek) hossza a két alakzat távolsága.

5.10. Feladat: *Adott két alakzat. Az egyik két pontból áll, a másik három pontból. A három pont közül melyik van legközelebb a két pontból álló alakzathoz?*

Mennyi a két alakzat távolsága?

MEGJEGYZÉSEK A FELADATHOZ:



5.5. ábra. Két alakzat távolsága

Az 5.5. ábrán az A pont X-hez közelebb van, mint Y-hoz, A távolsága az X, Y alakzattól AX.

A B pont Y-hoz közelebb van, mint X-hez, B távolsága az X, Y alakzattól BY.

A C pont Y-hoz közelebb van, mint X-hez, C távolsága az X, Y alakzattól CY.

A három távolság közül CY a legkisebb.

Ha a különböző alakzatok (különböző színű) pontjait összekötő szakaszok listáját együtt nézzük, akkor is a CY szakasz adódik legrövidebbnek, ez 1,5 hosszúságegység.

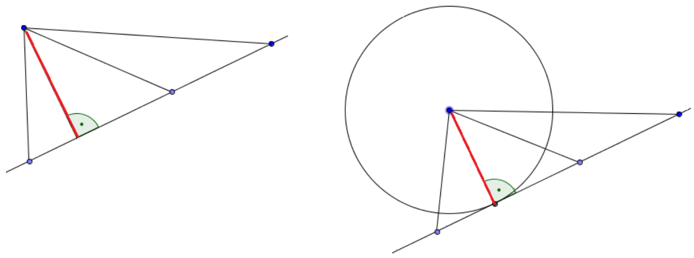
Az ilyen kísérlethez a korongoknál alkalmasabb az aktív tábla vagy egy dinamikus geometriai program, mert a helyváltoztatással egyidőben a távolságok is láthatók.

C) Pont és egyenes távolsága

Ennek tanításakor feltétlenül szükség van arra, hogy a gyerekek mérjenek, bőséges tapasztalatanyagot szerezzenek.

A legegyszerűbb, ha papíron mérik egy adott pont, és egy adott egyenes szabadon választott pontjai között a távolságokat, így keresik az egyenesnek az adott ponthoz lehető legközelebbi pontját.

Ez a tapasztalás még közvetlenebb, ha az udvaron, vagy tornateremben, ..., mérnek.



5.6. ábra. Pont és egyenes távolsága

Ezek az élmények megerősítik a fogalomnak azt a tartalmát, hogy a pont és egyenes távolsága a pontjaikat összekötő szakaszok közül a legrövidebb, és ehhez társul az az észrevétel, hogy ez éppen a pontból az egyenesre állított merőleges szakasz.

Igazolni például a pont körül írt körök segítségével lehet.

D) Pont és kör távolsága

5.11. Feladat: *Egy adott kör síkjában fekvő pontokhoz szerkessze meg*

a) a pontokat a körvonal pontjaival összekötő legrövidebb szakaszt! (Ennek a hossza a pontnak a körvonaltól mért távolsága.)

b) a pontokat a körlemez pontjaival összekötő legrövidebb szakaszt! (Ennek a hossza a pontnak a körlemeztől mért távolsága.)

MEGJEGYZÉSEK A FELADATHOZ:

A feladat a) részéhez Elég rövid kísérletezés után kialakul a sejtés:

A ponton át a középpontból induló félegyenest fektetünk, és ennek a félegyenesnek a körvonallal alkotott metszéspontjához vezet az adott pontból a legrövidebb szakasz.

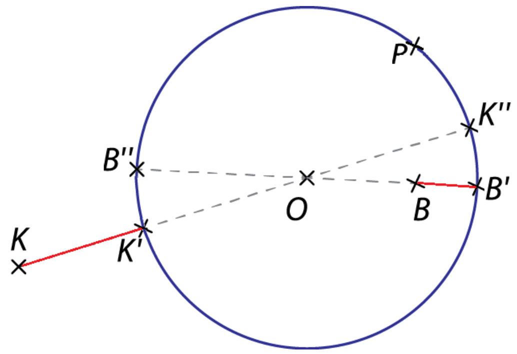
A mikor igazolni akarjuk a sejtést, úgy találjuk, hogy

- van olyan pont, amelyre azért nem tudjuk alkalmazni a szabályt, mert nem tudunk félegyenest húzni. Ez a kör középpontja. A kör középpontját a körvonal tetszőleges pontjával összekötő szakasz hossza éppen a sugár hossza. Bármelyik szakaszt tekinthetjük legrövidebbnek. Ebben az esetben tehát találtunk (más úton) legrövidebb szakaszt, méghozzá végtelen sokat.

- a kör síkjának többi pontján át egyértelműen húzható a középpontból induló félegyenes, de van olyan pont, ahol nem kapunk legrövidebb szakaszt, mert a körvonallal alkotott metszéspont maga a kiindulópont.

  Ezen a ponton elválik egymástól a körvonaltól való távolság és a legrövidebb szakasz megkeresésének feladata. A körvonal pontjaihoz nem találtunk legrövidebb szakaszt, de távolságot tudunk értelmezni.

  Minden alakzat esetében igaz, hogy az alakzathoz tartozó pontok 0 távolságra vannak az alakzatról, így a körvonal pontjainak is 0 a körvonaltól mért távolsága.



5.7. ábra. A körvonalhoz vezető legrövidebb szakasz

A fennmaradó pontok esetében működik a megsejtett eljárás, csak azt kell belátni, hogy valóban a legrövidebb szakaszhoz jutunk.

A bizonyítás gondolatmenetét a 5.7. ábra szemlélteti. Az adott kör középpontja O, a kör sugara r hosszúságú. Az általunk vizsgált pontok közül B a kör belsejében, K a körön kívül fekszik. Az OB félegyenes a kört a B' pontban, a kiegészítő félegyenes pedig a B'' pontban metszi a körvonalat. Hasonlóan, az OK félegyenes K'-ben, a kiegészítő félegyenes pedig B''-ben metszi a körvonalat.

A K külső pontot a kör egy tetszőleges, K''-től különböző P pontjával összekötve a háromszög-egyenlőtlenség alapján

$OP + PK > OK = OK' + K'K$, és $OK' = OP = r$,

tehát a tetszőlegesen választott P pontra $PK > KK'$.

Hasonlóan, a B belső pontra a kör egy tetszőleges, B''-től különböző P pontjával összekötve

$OB + BB' = OB' = r = OP < OB + BP$, tehát $BB' < BP$.

A feladat b) részéhez

A zárt körlemez pontjaihoz nem tartozik legrövidebb szakasz, de távolságot értelmezhetünk, a körlemezhez tartozó pontok távolsága a körlemeztől 0. A külső pontok körlemeztől mért távolsága megegyezik a körvonaltól mért távolsággal.

E) Ha nem létezik az összekötő szakaszok között legrövidebb

Véges, illetve zárt ponthalmazoknál a halmazhoz nem tartalmazó pontok esetén van az adott pontot az alakzat pontjaival összekötő szakaszok között legrövidebb (vannak legrövidebbek), így ennek a (ezeknek a közös) hosszával mérhetjük a távolságot.

De ha például egy külső pontnak egy nyílt körlemeztől való távolságát akarjuk mérni, akkor nincs legrövidebb az összekötő szakaszok között. A szakaszhosszaknak ekkor is van alsó határa és ez lesz a távolság, mivel a szakaszhosszak alulról korlátos halmazt alkotnak (0 pl. alsó korlát), tehát létezik az alsó határ.

Külső és határpontra az is teljesül, hogy a körvonaltól és a nyílt körlemeztől ugyanaz a távolságuk. Belső pontra a körvonaltól és a körlemeztől való távolság nyilván különböző.

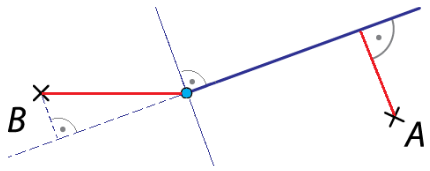
5.12. Feladat: *Hogyan mérjük egy pont távolságát* *a) egy félegyenestől?*

b) két közös kezdőpontú félegyenestől?

c) a két közös kezdőpontú félegyenes által határolt szögtartománytól?

MEGJEGYZÉSEK A FELADATHOZ:

A feladat a) részéhez



5.8. ábra. Pont és félegyenes távolsága

A félegyenes végpontjában a rá merőleges egyenes távolságmérés szempontjából két osztályba sorolja a sík pontjait.

A félegyenest tartalmazó félsík pontjainak merőleges vetülete a félegyenesre esik, ekkor a félegyenestől mért távolság megegyezik a félegyenes tartóegyenesétől mért távolsággal, tehát a pontból a félegyenesre bocsátott merőleges szakasz hossza a távolság. (Az 5.8. ábrán az A pont ilyen.)

A félegyenest nem tartalmazó félsík pontjainak merőleges vetülete a kiegészítő félegyenesre esik, ekkor a félegyenestől mért távolság a pontot a félegyenes kezdőpontjával összekötő szakasz hossza. (Az 5.8. ábrán a B pont ilyen.)

A feladat b) részéhez

A sík pontjait a két félegyenesből álló alakzattól való távolságmérés szempontjából feloszthatjuk aszerint, hogy egy-egy félegyenestől külön-külön hogyan mérjük a távolságát. Logikai szempontból lehet

A típusú, ha mindkét félegyenesnek a tartóegyenesétől mérünk,

B típusú, ha az elsőnek a tartóegyenesétől, a másodiknak a kezdőpontjától mérünk,

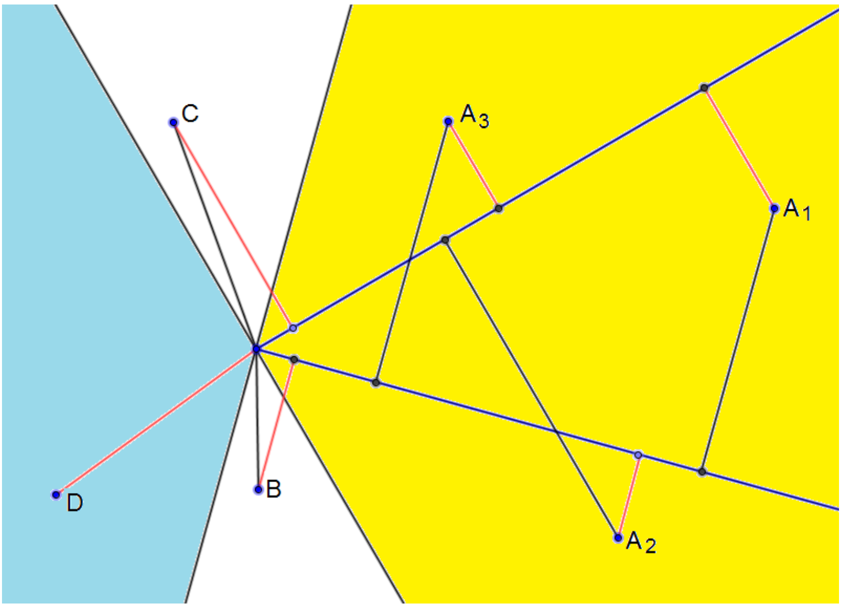
C típusú, ha az elsőnek a kezdőpontjától, a másodiknak a tartóegyenesétől mérünk,

D típusú, ha mindkettőnek a kezdőpontjától mérünk.

Közös kezdőpontú félegyenesek – szögvonal – esetén ezek az osztályok szögtartományok és azok határvonalai lesznek. A félegyenesek szögétől függően egyes osztályok kiürülhetnek (pl. egyenesszögnél).

Az 5.9. ábrán olyan esetet ábrázoltunk, amelyben egyik típus sem hiányzik.

Piros színnel jelöltük a szögvonaltól való távolságot adó szakaszokat. Érdemes megbeszélni, hogy a B és C típusnál a merőleges szakasz mindig rövidebb, mint a kezdőponttal összekötő szakasz. Az A típusnál a két merőleges szakaszt kell összehasonlítani, de az A_2 és A_3 típusnál mérés nélkül is tudható, hogy a valamelyik szögszárat metsző szakasz az elválasztás miatt hosszabb a másik merőlegesnél. Tényleges mérésre még A_1-nél sem lenne szükség, ha berajzolnánk a félegyenesek szimmetriatengelyét.



5.9. ábra. Szögvonaltól mért távolság

A kísérletezéshez (idősebb tanulók számára is) nagyon alkalmasak a fóliára rajzolt félegyenesek és félsíkok.

A feladat c) részéhez

A szögvonal két szögtartományt határoz meg (ha a két félegyenes nem esik egybe). Mindkét szögtartomány esetében igaz, hogy a szögtartománytól mért távolság belső és határpontokra 0, külső pontokra pedig megegyezik a szögvonaltól mért távolsággal.

Egy alakzattól adott távolságra levő pontok halmaza

Ebben a témakörben a tanterv a ponttól, illetve az egyenestől adott távolságra lévő pontok halmazának ismeretét kívánja meg.

Ennek tanításakor is többet ér a bőséges tapasztalatszerzés, mint a válasz gyors megfogalmazása.

5.13. Példa: *Jelölj ki a papírlapodon egy O pontot és adj meg egy távolságot. Válassz egy tetszőleges pontot a papírlapodon és színezd ki aszerint, hogy az adott távolságodhoz képest milyen messze van az O ponttól. Színezd pirosra, ha éppen olyan messze van, kékre, ha messzebb, zöldre, ha a választott távolságnál közelebb van O-hoz!*

Próbálj minél több piros pontot találni!

Hol helyezkednek el a piros pontok?

Hol helyezkedik el az összes piros pont?

Hasonló feladatot tűzhetünk ki az egyenestől adott távolságra levő pontokkal kapcsolatban is.

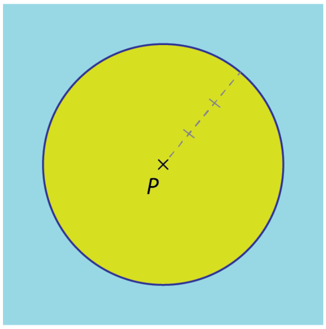
Ezek a feladatok is eljátszhatók a szabadban, utána persze a füzetben is meg kell jeleníteni a szerzett tapasztalatokat.

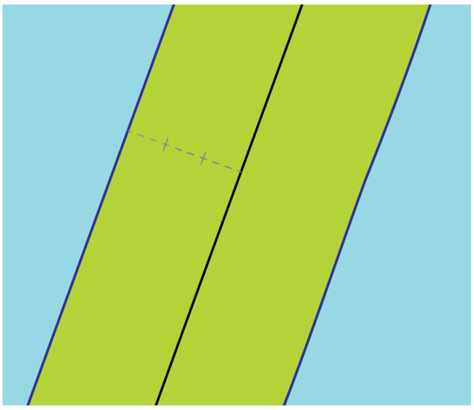
A feladat ilyen megfogalmazásának előnye, hogy könnyebb hozzálátni a feladat megoldásához, mintha rögtön az adott távolságra levő pontok összességének keresése lenne a feladat. A távolabb, vagy közelebb levő pontok beszínezése hatékonyan irányíthatja rá a gyerekek figyelmét arra, hogy hol kell az éppen adott távolságra levő pontokat keresni.

Arra is gondoljunk, hogy az egyenlőséggel (a síkhoz képest elenyészően) kevés pontról mondunk valamit, míg ezzel a módszerrel a sík összes pontjáról gyűjtjük az információt.

A tapasztalatszerzést követi az észrevételek megbeszélése, és a szerzett ismeretek rögzítése, majd a gyakorlás. A gyakorlást felhasználhatjuk arra, hogy a gyerekek átlátszó papíron készítsenek színes ábrákat, ponttól, egyenestől adott távolságra, annál közelebb, távolabb levő pontokról.

Érdemes a csoportmunka számára ilyen készleteket előkészíteni, pl. egy-egy 4 fős csoportban készüljön ábra egy ponttól 3cm, illetve 5 cm távolsággal, és ugyanígy egy egyenestől 3cm, illetve 5 cm távolsággal.





Ezek a tapasztalatok nagyon alkalmasak a gondolkodás fejlesztésére. Rájuk alapozva sokféle komoly gondolkodást igénylő feladat oldható meg manipulációval kísérve.

5.14. Példa: *Vegyél fel*

(a) egy A és egy B pontot,

(b) egy a egyenest és egy B pontot

(c) egy A pontot és egy b egyenest!

(d) egy a és egy b egyenest!

Keresd meg azokat a pontokat, amelyek az A ponttól vagy az a egyenestől 3 cm-nél közelebb vannak, a B ponthoz vagy a b egyeneshez képest pedig 5 cm-re, vagy annál távolabb vannak!

A példában szereplő kérdésfelvetések kezeléséhez mintaként interaktív feladatlapokat készítettünk. Ezeket nem tanulóknak, hanem tanároknak, tanárjelöltek számára gondolatébresztőnek szántuk. A tanulók számára – éppen a fogalmi megalapozásról mondottak értelmében

– továbbra is a fólia, átlátszó papír használatát tartjuk hasznosnak. A tanár a tapasztalatok összegzésénél természetesen használhat a mienkhez hasonló segédeszközöket.

Az átlátszó papíron elkészített ábrák egymásra helyezésével könnyebb megkeresni a (komplex) feltételnek megfelelő pontokat. Azoknak a tanulóknak is fejlődnek a távolsággal kapcsolatos elképzelései, akik statikus ábrán vagy verbálisan még nem kezelik biztonságosan a fogalmat.

Az átlátszó papír másik előnye, hogy egy feladat megoldása után a papírok elmozgatásával rögtön új feladatot nyernek. Az alakzatok mozgatásával sokféle lehetőséget meg tudnak vizsgálni, bíztathatjuk a gyerekeket újabb és újabb típusú megoldások keresésére.

A statikus feladat mozgásba lendül és ettől nemcsak érdekesebb lesz, hanem jobban be is vésődik (legalábbis a tevékenységhez kötődve). Talán átélhetik ezt az élményt, ha megnyitják az interaktív feladatlapot. A linkre kattintva a példa (a) részéhez, (b) részéhez, (c) részéhez, illetve a (d) részéhez készített interaktív feladatlaphoz ugorhat.

Közvetlenül a távolság fogalmán alapul a következő feladattípus. Ezek a feladatok egy kicsit szokatlanok, de fontosak és hasznosak, ugyanakkor nem nehezek, sőt a megoldásuk szórakoztató és inspirálják a diákokat, hogy maguk találjanak ki újabb feladatokat.

5.15. Példa: *A sík pontjainak színezése*

a) Vegyél fel két pontot egymástól két centiméter távolságra. Melyek azok a pontok, amelyek ettől a két pontból álló alakzattól 3 cm-nél közelebb, távolabb, éppen 3 cm-re vannak? Színezz!

b) Vegyél fel két egyenest, amelyek metszik egymást! Melyek azok a pontok, amelyek ettől a két egyenesből álló alakzattól 3 cm-nél közelebb, távolabb, éppen 3 cm-re vannak? Színezz!

c) Vegyél fel egy félegyenest! Melyek azok a pontok, amelyek ettől 3 cm-nél közelebb, távolabb, éppen 3 cm-re vannak? Színezz!

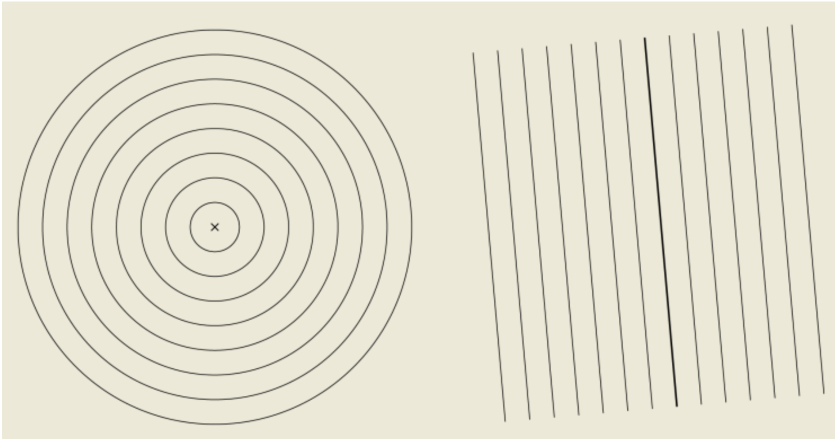
d) Szerkeszd meg egy egyenestől és egy pontból álló alakzattól 3 cm-re levő pontok halmazát! Változtasd a pont és az egyenes távolságát! Hogyan változik a ponthalmaz?

e) Vegyél fel két egymásra merőleges szakaszból álló alakzatot és egy távolságot! Szerkeszd meg a tőle adott távolságra levő pontok halmazát! Változtasd az alakzatok helyzetét!

Gyakorlásnak is jók, és igen hasznos eszköz készítésére is alkalmasak a következő feladatok:

5.16. Példa: *Milyen alakzat egy ponttól egész cm távolságra levő pontok halmaza?*
Milyen alakzat az egyenestől egész cm távolságra levő pontok halmaza?

Megoldás:



A fenti ábrákat több példányban átlátszó fóliára rajzolva (másolva vagy nyomtatva) jól használható kísérleti eszközt nyerünk távolságokról szóló mértani helyek kereséséhez. Érdemes a távolságnak megfelelően számozni a köröket, illetve az egyeneseket.

5.17. Példa: *1. Helyezz két körsort egymásra.*

a) Keress olyan pontokat, amelyek a két alapponttól egyenlő távolságra vannak!

b) Keress olyan pontokat, amelyeknek a két alapponttól vett távolságösszege egy adott érték, pl. 6 cm!

2. Helyezz két egyenessort egymásra.

a) Keress olyan pontokat, amelyek a két alapegyenestől egyenlő távolságra vannak!

b) Keress olyan pontokat, amelyeknek a két alapegyenestől vett távolságösszege egy adott érték, pl. 6 cm!

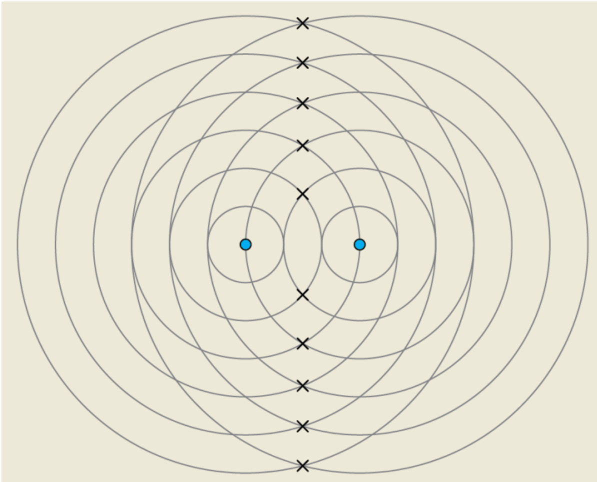
3. Helyezz egy körsort és egy egyenessort egymásra!

a) Keress olyan pontokat, amelyek a két alapalakzattól, a ponttól és az egyenestől egyenlő távolságra vannak!

b) Keress olyan pontokat, amelyeknek a két alapalakzattól, a ponttól és az egyenestől vett távolságösszege egy adott érték, pl. 6 cm!

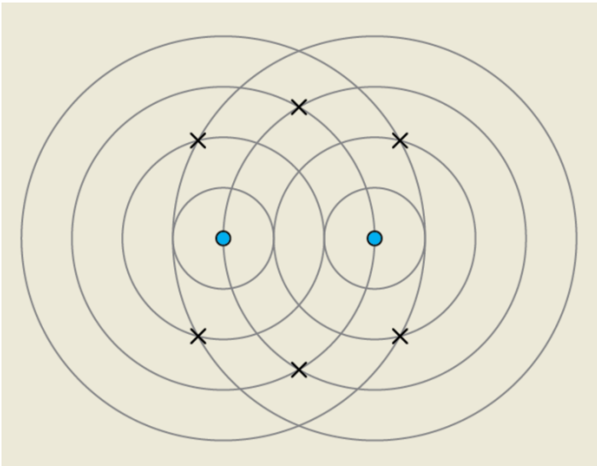
Megoldások:

Az 1.a) feladathoz: Az egyforma számozású körökre figyelünk.



Az összekötő szakasz felezőmerőlegesén elhelyezkedő pontokat kapunk.

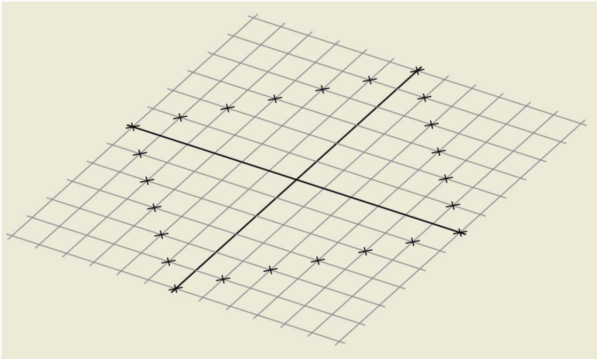
Az 1.b) feladathoz: azoknak a köröknek a metszéspontját keressük, amelyek számozásának összege 6.



Ha a pontok távolsága 6-nál kisebb, akkor egy ellipszisen elhelyezkedő pontokat kapunk (a két középpont a fókusz, a nagytengely 6).

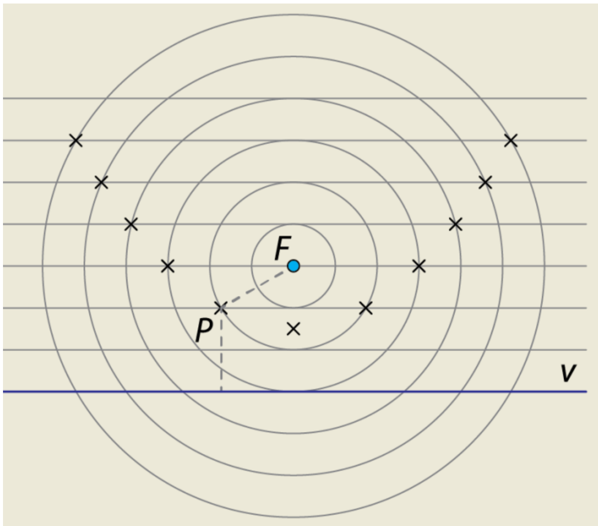
A 2.a) feladathoz: két párhuzamos egyenessort használunk, az egyenlő számozású egyenesek metszéspontját keressük. A kapott pontok a szögfelező egyeneseken vannak.

A 2.b) feladathoz: azoknak az egyeneseknek a metszéspontját keressük, amelyek számozásának öszege 6.



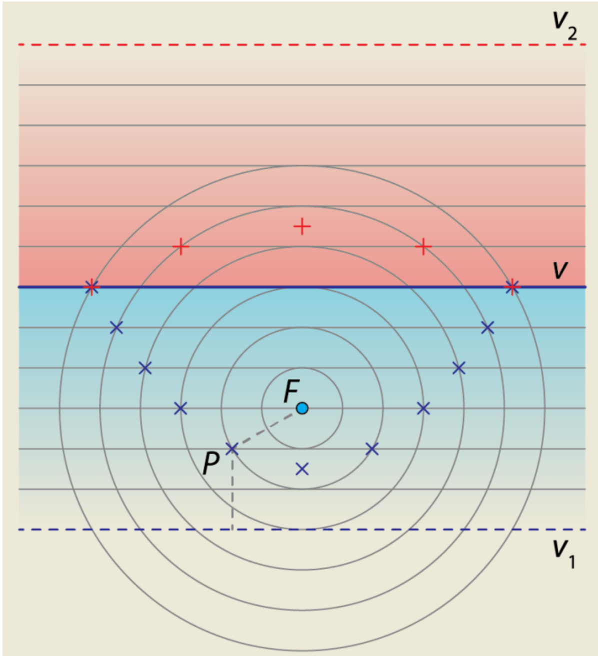
A kapott pontok egy olyan téglalap oldalain helyezkednek el, amelynek oldalai párhuzamosak a szögfelezőkkel. A téglalap félátlója 6.

A 3.a) feladathoz: az egyenlő számozású körök és egyenesek metszéspontját keressük.



A kapott pontok egy parabolán helyezkednek el, melynek fókusza a körök középpontja, vezéregyenese az alapegyenes.

A 3.b) feladathoz: Olyan pontokat kell keresni, amelyek az egyenestől egy kiválasztott távolságra vannak, a középponttól való távolság pedig 6-ra egészíti ki ezt.



Ha a pont és az egyenes távolsága kisebb, mint 6, akkor a pontok mindkét félsíkban egy-egy parabolán helyezkednek el, melyek az alapegyenesen metszik egymást. A fókuszuk közös, vezéregyeneseik pedig az alapegyenestől 6 távolságban haladó párhuzamosok. (A P pont távolsága v-től és F-től összesen 6. Ugyanígy a P pont távolsága v-től és pl. v_1-től összesen 6, tehát a P pont távolsága v_1-től és F-től ugyanannyi.)

Építkezés már meglévő alakzatokból

Alakzataink jelentős részét ezzel a módszerrel tudjuk megalkotni. Ebben kiemelkedő szerepe van az alapalakzatoknak, ezek szolgáltatják az alapanyagot többek között a sokszögfogalom megalkotásához – pl. a háromszögeket megkaphatjuk három félsík közös részeként.

Ez a megadási mód ritka az iskolai matematikatanításban, holott nagyon hasznos lehetne.

5.18. Feladat: *Egy sík összes félsíkjai között válogathatunk. Milyen újabb – az alapalakzatok között nem szereplő – alakzatot kaphatunk*

a) két félsík közös részeként?

b) három félsík közös részeként?

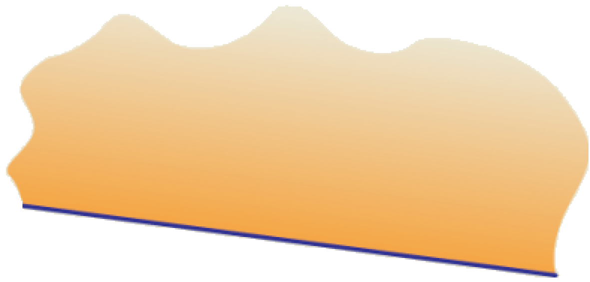
c) két félsík egyesítéseként?

d) három félsík egyesítéseként?

MEGJEGYZÉSEK A FELADATHOZ:

A félsíkok fontos alakzatok, többek között ezek a szögtartományok és a sokszögek alapépítőkövei. Érdemes velük többet foglalkozni az iskolában. Ehhez azonban szükséges, hogy megfelelő eszközöket adjunk a gyerekek kezébe.

Átlátszó, nem túl puha A4-es fóliából kivágott, félsíkot imitáló alakzat: a lap egyik hosszabbik, egyenes oldalát meghagyjuk, a többit görbe, szabálytalan vonallal helyettesítjük. Az egyenes oldal egy végtelenbe nyúló, geometriai egyenest jelképez, a szabálytalan, görbe vonalakkal azt jelezzük, hogy ott végtelenbe nyúló alakzatról van szó.



A feladat a) részéhez

Ilyen módon vagy „elfajuló” (0 illetve 1 dimenziós) alakzatot kapunk – üres halmazt vagy egyenest –, vagy pedig „tartományt” (2 dimenziós alakzatot) félsíkot, sávot, vagy szögtartományt. Vegyük észre, hogy ezeket a tartományokat „egyenesdarabok” (egyenes, félegyenes, szakasz) határolják, méghozzá legfeljebb kettő:

– a félsíkot egy egyenes
– a konvex szögtartományt két félegyenes
– a sávot két egyenes határolja.

A feladat b) részéhez

Három félsík közös része szintén lehet „elfajult”, vagy pedig „tartomány”, amelyet legfeljebb három egyenesdarab határol. Ez a közös rész vagy maga is alapalakzat, vagy pedig megkaphatjuk egy félsík és egy szögtartomány, illetve egy félsík és egy sáv metszeteként.

A feladat c) részéhez

Két félsík uniója lehet a teljes sík, egy félsík, vagy egy tetszőleges konkáv szögtartomány.

A feladat d) részéhez

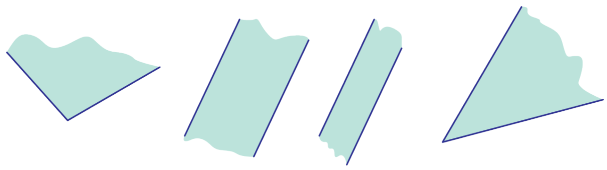
Három félsík uniójaként félsíkok és a teljes sík mellett olyan tartományokat kaphatunk, amelyeket legfeljebb három egyenesdarab határol, és amelyeknek minden szöge konkáv szög.

A két nem metsző egyenes által határolt tartomány, a sáv, az iskolában elhanyagolt alakzat, a tananyag nem foglalkozik vele, pedig a geometriatanításban nagyon sokat segíthet, ha bevezetjük és használjuk. A sávok az alakzatépítésnek legalább olyan fontos eszközei, mint a szögtartományok és mint a tér alapalakzatai.

5.19. Feladat: *Milyen tartományokat kaphatunk*
– két konvex szögtartomány,
– két sáv, illetve
– egy konvex szögtartomány és egy sáv metszeteként?

MEGJEGYZÉSEK A FELADATHOZ:

Ehhez a feladathoz is feltétlenül adjunk eszközt a gyerekek kezébe!



Válaszok:

- Két szögtartomány metszeteként olyan tartományokat kaphatunk, amelyeket legfeljebb négy egyenesdarab határol. Ha nincs közöttük félegyenes, akkor háromszöget vagy négyszöget kapunk, ha van, pontosan kettő félegyenes van a határán. Kaphatunk szögtartományt, illetve, más végtelenbe nyúló alakzatot, ha a határán van egy vagy két szakasz is.

- Egy szögtartomány és egy sáv metszeteként az előzővel megegyező típusú alakzatokat kaphatunk, azonban ezek közül azoknak, amelyeket négy egyenesdarab határol biztosan van két párhuzamos a határoló vonalai között. Tehát csak trapézokat kaphatunk a négyszögek közül ilyen módon.

- Két sáv metszeteként kapott tartomány vagy maga is sáv, ha a határoló egyenesek párhuzamosak, vagy paralelogramma, ha a sávok metszik egymást.

A szögek, illetve a sávok szélességének alkalmas megválasztásával minden háromszöget és négyszöget megkaphatunk.

Ezek közül a szimmetrikus háromszögek és négyszögek építésével a szimmetrikus alakzatokról szóló részben külön is foglalkozunk.

5.1.4. Transzformációk tanításának kérdései

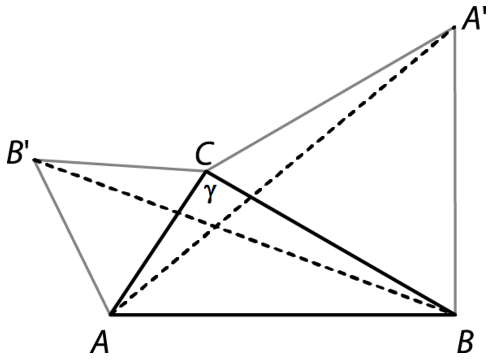
A következőkben elsősorban a sík egybevágósági transzformációival foglalkozunk. Annak eldöntésére, hogy két alakzat egybevágó-e alapvetően kétféle stratégiát kínálunk az iskolai tananyagban.

- Az egyik stratégia szerint a háromszögek egybevágóságának alapeseteit (vagy az ezekből levezethető, sokszögek, poliéderek egybevágóságára vonatkozó tételeket) felhasználva kell igazolni az egybevágóságot.

- A másik stratégia szerint olyan egybevágósági transzformációt keresésünk, ami egyik alakzatot a másokba viszi.

Példák a kétféle stratégia alkalmazására

5.20. Példa: *ACB' háromszög valamint BCA' háromszög egy ABC háromszög BC és AC oldalai fölé kifelé írt szabályos háromszögek. Bizonyítandó, hogy az AA' valamint a BB' szakaszok egyenlőek.*



Válaszok:

a) Egybevágósági alapesetekre alapozott indoklás:

ACB' háromszög valamint BCA' háromszög szabályos, tehát fennáll, hogy $A'C = BC$, illetve $B'C = AC$. Az $ACA'\angle = BCB'\angle = \gamma + 60°$, ezért az $AA'C$ háromszög egybevágó a $BB'C$ háromszöggel, hiszen két oldaluk és az általuk közbezárt szögek megegyeznek.

b) Transzformációra alapozott indoklás:

Mivel az ACB' háromszög valamint BCA' háromszög szabályosak háromszögek, ezért az AA' szakaszt a C pont körül $60°$-kal elforgatva az A' pont a B pontba, az A pont pedig a B' pontba kerül. Tehát az AA' szakasz képe éppen a BB' szakasz. Ezzel a gondolatmenettel azt is beláttuk, hogy ez a két szakasz egymással $60°$-ot zár be.

5.21. Feladat: *Melyik megoldási módot érzi közelebb magához?*

MEGJEGYZÉSEK A FELADATHOZ:

Próbálja meg fejleszteni magát a másik stratégiában is! Ebben segíthetnek a következő feladatok.

5.22. Feladat: *Bizonyítsa be kétféleképpen az alábbi állításokat!*

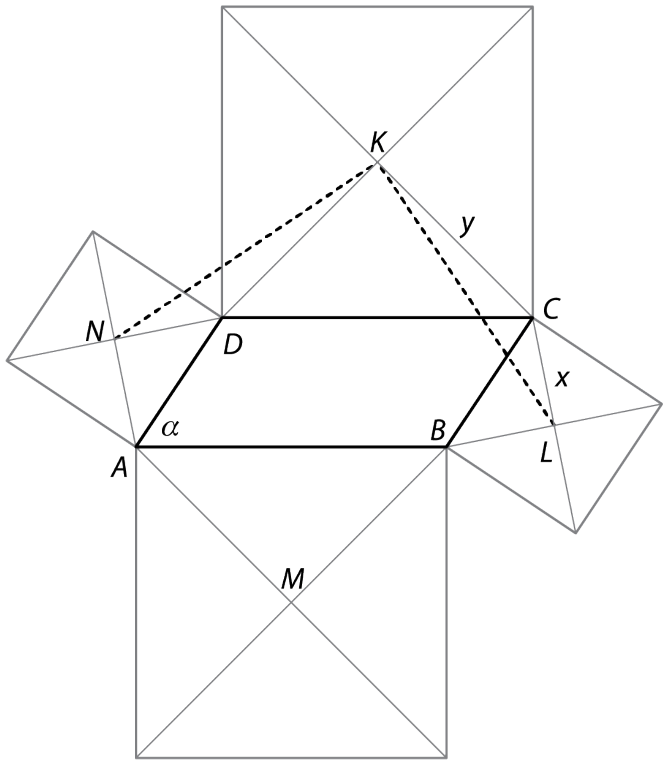
a) *Egy paralelogramma oldalaira kifelé négyzeteket rajzolunk. Bizonyítsa be, hogy a négyzetek középpontjai egy négyzetet feszítenek ki!*

b) *ACB' háromszög valamint BCA' háromszög egy ABC háromszög BC és AC oldalai fölé kifelé írt szabályos háromszögek. Nevezzük AB oldal felezőpontját F-nek, CB' illetve CA' oldalak felezőpontjait pedig X-nek illetve Y-nak. Bizonyítandó, hogy az XYF háromszög szabályos.*

c)* *Egy A csúcsú szög két különböző szárán felvesszük az X illetve az Y pontokat, úgy hogy $XA + YA = 2d$ fennálljon, ahol d egy előre távolság. Bizonyítandó, hogy X és Y tetszőleges megválasztása mellett az így nyert XY szakaszok felező-merőlegesei egy ponton mennek át.*

MEGJEGYZÉSEK A FELADATHOZ:

A feladat a) részéhez



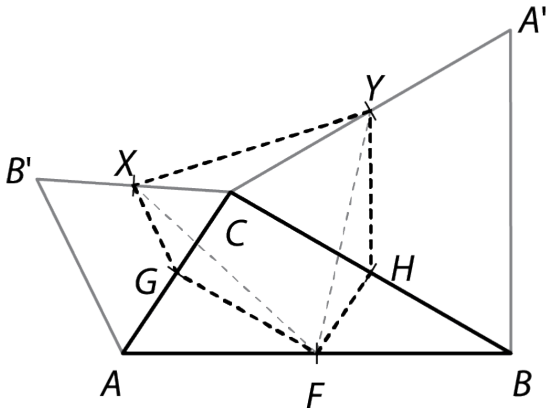
1. megoldás:

A paralelogramma szemközti oldalai egyenlőek, tehát a rájuk rajzolt négyzetek átlói is megegyeznek egymással, jelöljük ezeket $2x$ és $2y$-nal. A paralelogramma szemköztes szögei egyenlőek, nevezzük a kisebbik szöget α-nak. Azt mutatjuk meg, hogy az $NKLM$ négyszög bármelyik két szomszédos oldala egyenlő hosszú és merőleges. Válasszuk például a K csúcsban találkozó KL és NK oldalakat. Az NDK és KCL háromszögek egybevágóak – két oldaluk x és y, az általuk közbezárt, D illetve C csúcsú szög $\alpha + 2 \cdot 45°$. Tehát a harmadik oldaluk is egyenlő: $NK = KL$. A háromszögek azon szögei, amelyek a K csúcsban találkoznak, egyenlőek és egyirányúak. Egy-egy megfelelő száruk, DK illetve KC merőleges egymásra, mivel ezek a négyzet félátlói, így másik száruk, NK és KL is merőleges.

2. megoldás:

Megmutatjuk, hogy az $NKLM$ négyszög bármelyik két szomszédos oldala egyenlő hosszú és merőleges. Válasszuk például a K csúcsban találkozó KL és NK oldalakat. Forgassuk el az NDK háromszöget a K csúcs körül $90°$-kal, és figyeljük meg, hogy hová kerülnek az ND illetve az DK oldalak! A DK a KC szakaszra kerül, hiszen ezek egy négyzet félátlói, tehát a D pont a C-be kerül. Az ND képe tehát ND-re merőleges, C végpontú szakaszba megy át. (Ez csak a CL szakasz lehet, mert a KC szakasszal $90°$-nál nagyobb szöget kell bezárnia, mivel az NDK szög bizonyosan nagyobb, mint $90°$). Eszerint ND képe éppen a CL szakasz, azaz N pont képe L pont, amiből az állításunk következik.

A feladat b) részéhez



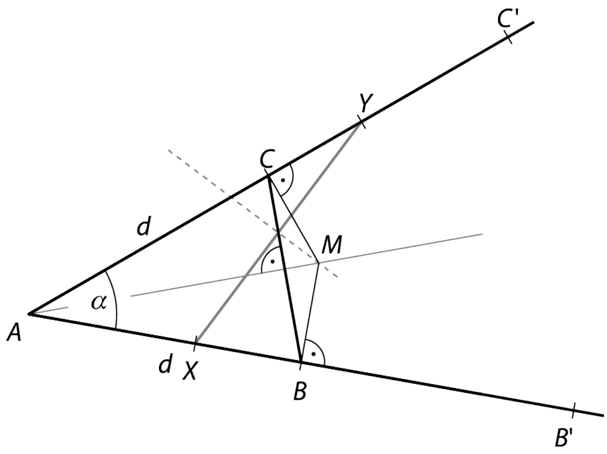
1. megoldás:

Jelölje az ábra szerint az AC és BC oldalak felezőpontjait G és H. Az előző feladat megoldásával rokon módon bizonyítható, hogy az XCY, YHF illetve FGX háromszögek egybevágóak, és ebből következően az XY, YF és FX oldalak is egyenlőek és $60°$-os szöget zárnak be.

2. megoldás:

Az előző feladat megoldásához hasonlóan belátható, hogy az XCY háromszöget egy X pont körüli (megfelelő irányú) $60°$-os forgatás az XFG háromszögbe, egy Y pont körüli (megfelelő irányú) $60°$-os forgatás pedig az FHY háromszögbe, amiből közvetlenül következik az állításunk.

A feladat c) részéhez



Legyenek B és C a szög szárán olyan pontok, amelyekre $BA = AC = d$. Nevezzük az AB félegyenes, illetve az AC félegyenes azon pontjait B'-nek, illetve C'-nek, amelyekre azon pontját, amelyre $B'A = C'A = 2d$. Tekintsünk először a speciális helyzeteket: mikor $X = B$ illetve $Y = C$, vagyis amikor az XAY háromszög egyenlő szárú, ekkor $XY = BC$ felező merőlegese éppen a szögfelező; mikor X és Y közül az egyik az A csúcsba, a másik pedig a B' illetve a

C' pontba esik, ekkor $XY = CC'$ illetve $XY = BB'$, ekkor XY felezőmerőlegesei éppen a B illetve C pontokban a szárakra állított merőlegesek.

Ezek valóban egy pontban metszik egymást, nevezzük ezt a pontot M-nek. M-re fennáll, hogy $MB = MC$, mivel M a CB felezőmerőlegesén van.

Vegyünk fel ezután az eddig megjelöltektől különböző, de amúgy tetszőleges XY pontokat. Mivel $XA + AY = BA + AC$, teljesülni kell annak, hogy $BX = YC$, hiszen a két töröttvonal többi része közös.

Azt kell belátnunk, hogy XY felezőmerőlegese áthalad az M ponton.

1. megoldás:

BXM háromszög egybevágó CYM háromszöggel, mivel két-két oldaluk és azok közbezárt szöge megegyezik: $BX = CY$, $MB = MC$, valamint $MBX\angle = MCY\angle = 90°$. Ebből következik, hogy $MX = MY$ azaz az M pont illeszkedik XY felezőmerőlegesére.

2. megoldás:

Forgassuk el az MBX töröttvonalat M körül úgy, hogy az MB szakasz az MC szakaszba jusson! ($180° - \alpha$ szöggel)! Ekkor a BX félegyenes a CY félegyenesbe kerül, mivel ezek az MB, illetve az MC szakaszokkal derékszöget zárnak be. $BX = CY$ miatt így az X pont az Y pontba kerül. Tehát $MX = MY$, amit bizonyítani akartunk.

5.23. Feladat: *Egybevágósági transzformációk*

a) *Mit nevezünk geometriai transzformációnak?*

b) *Milyen transzformációkat nevezünk egybevágósági transzformációknak, röviden egybevágóságoknak?*

c) *Mikor mondunk két alakzatot egybevágónak?*

MEGJEGYZÉSEK A FELADATHOZ:

a) A geometriai transzformációk ponthalmazok között értelmezett hozzárendelések. Azokat a transzformációkat, amelyek egy sík pontjait ugyanabba a síkba képezik, síkbeli transzformációknak nevezzük.

b) Az egybevágóságok távolságtartó transzformációk, tehát teljesül rájuk, hogy bármely két pont távolsága megegyezik a képeik távolságával.

c) Két alakzat egybevágó, ha van olyan távolságtartó transzformáció, amely egyiket a másikba viszi.

Egybevágósági transzformációk különféle megadási módjai

Egy síkbeli geometriai transzformációt általában olyan szabállyal adunk meg, amely különkülön a sík minden egyes pontjához egyértelműen hozzárendeli a sík valamely (nem feltétlenül különböző) pontját. Ezzel a módszerrel persze nem biztos, hogy távolságtartó transzformációt kapunk. Ha a saját tanulmányaikból az inverzióra gondolnak, akkor emlékezhetnek rá, hogy nem is olyan könnyű belátni, hogy például az inverzió szögtartó (Hajós 1971 [101] 355. oldal)

Amikor a tengelyes tükrözést ponttranszformációként végezzük, akkor a tengelyen levő pontok helyben maradnak, a sík többi pontjának a képéhez úgy jutunk, hogy a tengely hozzá legközelebbi pontjára tükrözzük. Ennek az egész síkra kiterjesztett eljárásnak a tulajdonságait (invariáns tulajdonságok: távolságtartás, illeszkedéstartás, szögtartás, stb.) gyanakodás nélkül hozzágondolják a gyerekek a tengelyes tükrözéshez.

A pszichológiában a *kontraszthatás* a fogalom fejlesztésének egy fontos módszere. Az induktívan épülő fogalom kialakulásában komoly segítség, ha nem csak példákat, hanem ellenpéldákat is mutatunk a fogalomra. Ezért fontos, hogy az egybevágósági transzformációk tanítása mellett találkozzanak a gyerekek más, nem szokványos transzformációval is.

Ilyen transzformációra vonatkoznak a következő példák, amelyek mentén a játékos felfedezéstől a mély matematikai vizsgálatig el lehet jutni.

Már a kezdeti kísérletezés is alkalmas a fogalomalkotás menetének megismerésére, a bizonyítási igény felkeltésére és a differenciálásra. Remélhetőleg az olvasó is talál felfedeznivalót a példákban.

Egy különleges transzformáció

5.24. Feladat: *Az egyenesre való tükrözés analógiájára definiálja és próbálja jellemezni a körre való tükrözést.*

MEGJEGYZÉSEK A FELADATHOZ:

A tükrözés tengelyét kicseréljük egy rögzített körre és – lehetőség szerint változatlanul – átvesszük a tengelyes tükrözés lépéseit:

a) A tengely *a kör* pontjai helyben maradnak.

b) A sík többi pontjának képéhez úgy jutunk, hogy a *körvonal* hozzá legközelebbi pontjára tükrözzük a kiválasztott pontot.

5.11. a) részében láttuk, hogy az egyenesen egy rajta kívüli ponthoz egyértelműen van legközelebbi pont és ezt a pontból az egyenesre állított merőleges metszéspontjaként kapjuk meg.

A pont és kör esetében ez már nem ilyen egyhangú, hiszen a középpontból végtelen sok merőlegest tudunk állítani a körvonalra. Ha a geometriai transzformációkat is függvénynek tekintjük (márpedig azt tesszük), akkor vagy külön szabályt kell a kör középpontjára alkalmazni, vagy ki kell zárni a középpontot az értelmezési tartományból.

Még ha a középponttól különböző ponttal van dolgunk, akkor is módosítani kell az eljárást, mert a pontból a körvonalra állított merőleges egyenes (átmérő egyenese) két pontban is metszi a kört, és a pontot tartalmazó félegyenesen van a legközelebbi pont. Ezt a félegyenest használjuk a legközelebbi pont megkereséséhez.

Az igazi kaland csak most kezdődik, fel kell deríteni ennek a transzformációnak a tulajdonságait.

Itt nagyon szétágazhatnak az egyéni megközelítések aszerint, hogy ki milyen eszköztárral akar nekilátni.

Mi most az iskolai megközelítéshez adunk ízelítőt, amelyben (manuálisan vagy dinamikus geometriai programmal) sok-sok pont képét ténylegesen előállítjuk. Szeredi Éva idéz egy ilyen tankönyvi feladatot (lásd 296. oldal).

5.25. Példa: *Adott egy O középpontú k kör. Legyen a sugara $r = 5$ egység. Egy tetszőleges, O-tól különböző P pont képét úgy kaphatjuk, hogy megkeressük a k kör P-hez legközelebbi pontját, nevezzük ezt T-nek, majd a PT meghosszabbítására T-től felmérjük a PT távolságot. Az így nyert P' pont a P pont képe. (Ezt a transzformációt nevezhetjük körre vonatkozó tükrözésnek is. Nem tévesztendő össze az inverzióval, amit szintén szokás körre tükrözésnek nevezni.)*

a) Vegyél fel a kör belsejében két pontot, A-t és B-t, majd szerkeszd meg a képüket! Kísérletezz más pontokkal is.

b) Próbáld megszerkeszteni az AB szakasz néhány pontjának a képét! Mit tudsz az AB szakasz képéről mondani? Sejtéseket is megfogalmazhatsz, nem csak olyan állításokat, amelyeket bizonyítani is tudsz!

c) Figyeld meg néhány egyenes minél több pontjának képét! Próbálkozz olyan egyenesekkel, amelyek távolsága az O ponttól 3 egység, 6 egység, 12 egység!

d) Az előző feladatok megoldása közben szerzett tapasztalatok alapján próbáld meg jellemezni ezt a transzformációt!

Miután a tanulók megértették a hozzárendelési szabályt, mint a függvényeknél általában, itt is beszélhetünk a lehető legtágabb halmazról, ahol ezt a szabályt értelmezni tudjuk. Meg kell beszélnünk, hogy miért maradt ki az O pont.

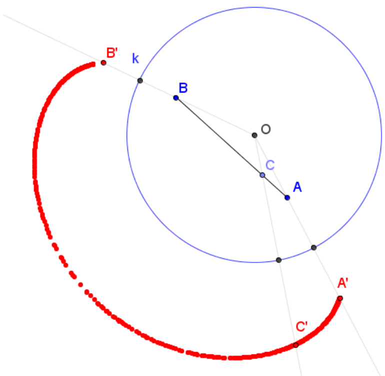
Ha az O pontra is alkalmaznánk ezt a szabályt, akkor a képe $2r$ sugarú, alapkörrel koncentrikus kör pontjai lennének, tehát a hozzárendelés nem lenne egyértelmű. Választhatnánk azt a megoldást, hogy az O ponthoz önkényesen rendelünk hozzá egy egyértelmű (nem biztos, hogy értelmes) képet, és választhatjuk azt is, hogy az O pontot kihagyjuk az értelmezési tartományból – transzformációnkat egy kilyukasztott síkon értelmezzük. A továbbiakban emellett maradunk. A definíciót kiegészítjük azzal, hogy a transzformáció értelmezési tartománya a kilyukasztott, O pontot nem tartalmazó sík.

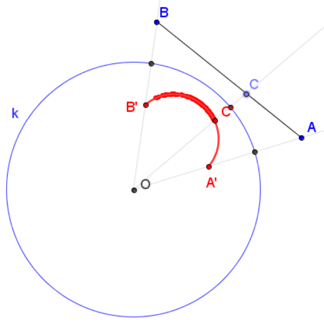
A transzformációval való ismerkedéshez készült animációhoz a linkre kattintva juthat el:7.53 animáció.

A példa a) része arra szolgál, hogy jártasságot szerezzenek a tanulók a képpont előállításában és megfigyeljék, hogy a belső pont kívülre képeződik le. Ezt be is tudják látni a tanulók, hiszen a körvonal egyik (korlátos) oldaláról a másik oldalra kerül a pont.

Azt is érdemes megbeszélni, hogy a képpontok az alapkörrel koncentrikus $2r$ sugarú kör belsejébe kerülnek.

A példa b) része azért érdekes, mert minden függvénynél felmerül a kérdés, hogy öszeköthetők-e az ábrázolt pontok. A dinamikus geometriai programoknál is külön ügyelni kell rá, hogy CSAK AZT KÖSSE ÖSSZE A PROGRAM, AMIT SZABAD.





Össze szabad kötni a képpontokat folytonos vonallal?

Mindig? Melyik pont okozhat gondot?

Ha a szakasz nem halad át a középponton, akkor a képe egy összefüggő zárt görbe. (Az is belátható, hogy folytonos.)

Az O ponton átmenő szakaszt ki kell lyukasztanunk, mert az O pontra nem értelmeztük a transzformációt.

Ha egy szakasz tartalmazza a középpontot, akkor szétszakad 2 szakaszra, mindkettő az egyik oldalról zárt, a másik oldalról nyílt.

A szakasz képének vizsgálatához készült feladatlap linkje: 7.54, a szétszakítás bizonyításához készültė: 7.55.

A példa c) része az egyenesek viselkedésére vonatkozik, amelynek feldolgozásában a tanulók által ismert eszközrendszer szerint érdemes differenciálni.

Azoknak a diákoknak, akiknek nem önálló cél a transzformáció megismerése, elegendő a középponton áthaladó egyenesről megmutatni, hogy a képpontok középponton áthaladó egyenest alkotnak. (A képek kitöltik a szakasz szakadásakor tapasztalt lyukat.)

Ennek megsejtéséhez a középponton áthaladó egyenes középpontból induló nyílt félegyeneseinek pontjait érdemes rendszerezve vizsgálni. (Például az interaktív feladatlapon: 7.56).

Igényesebb feldolgozásnál ennél több is bizonyítható nagyon egyszerűen:

Képzeljünk egy számegyenest az O ponton átmenő egyenesre úgy, hogy az O pont a 0 helyére kerüljön. x nem lehet nulla, mert az O pontra nincs értelmezve a transzformáció.

Ha a számegyenes negatív felén (balra) veszünk fel egy x pontot, akkor ehhez a ponthoz a kör pontjai közül a $-r$ pont van legközelebb. Mivel $-r$ az x és x' számtani közepe, $x' = -2r - x$. Ez azt jelenti, hogy miközben x befutja a negatív számokat, x' leírja a $-2r$ kezdőpontú, jobbra irányított nyílt félegyenest.

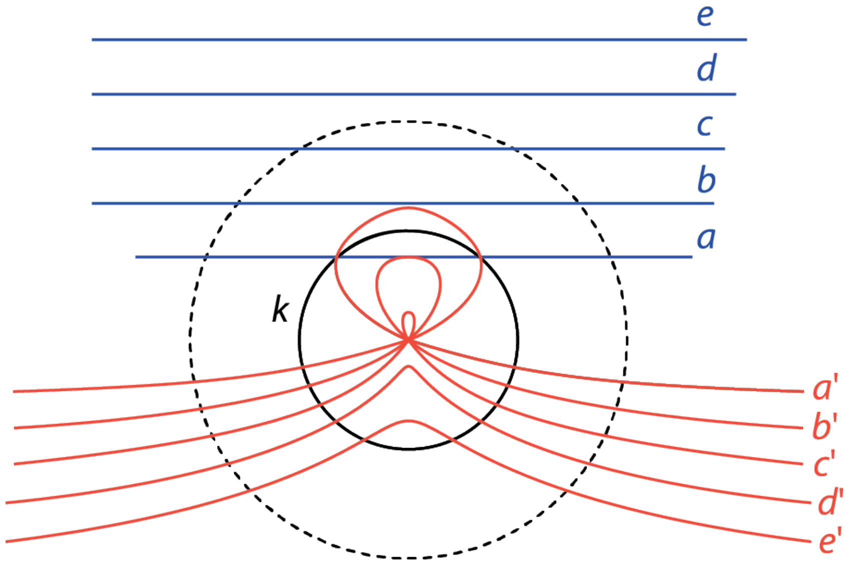
Ha pedig a számegyenes pozitív felén (jobbra) veszünk fel egy x pontot, akkor ehhez a ponthoz a kör pontjai közül az r pont van legközelebb. Mivel r az x és x' számtani közepe, $x' = 2r - x$. Ez azt jelenti, hogy miközben x befutja a pozitív számokat, x' leírja a $2r$ kezdőpontú, balra irányított nyílt félegyenest.

Ebből következik, hogy az egyenes minden pontja – az O is – előáll képként. Méghozzá $(-2r; 2r)$ nyílt intervallum pontjai pontosan kétszer, míg a többi pont pontosan egyszer.

Ha egy e egyenes nem halad át a középponton, akkor az e' kép egy folytonos síkgörbe. Ha még a leképezés, az egyenes és a kör közös szimmetriáját is figyelembe vesszük, akkor megállapíthatjuk, hogy az e' kép szimmetrikus az O-ból az e-re emelt merőlegesre. (A folytonosságot itt intuitív értelemben használjuk: a ceruza felemelése nélkül megrajzolható. Igényesebb feldolgozásnál többféle bizonyítás is adható.)

A példában javasolt egyenesek a képek szempontjából prototípus jellegűek (metszi a k kört, nem metszi a k-t, de metszi a k-val koncentrikus $2r$ sugarú kört, illetve mindkét körön kívül halad). Célszerű közös szimmetriatengelyű szakaszokat vizsgálni, majd kiterjeszteni teljes egyenessé.

Ha az egyenes 10 egységnél – az alapkör sugarának kétszeresénél közelebb – van az alapkör O középpontjához, akkor a kép egy „hurkolt alakzat". Az egyenes két pontja is az O pontba képeződik le.



Az egyenesek képének vizsgálatához készült feladatlapok linkje: 7.57 és 7.58.

Igényesebb feldolgozásnál meg lehet mutatni, hogy egy e egyenes e' képe a végtelenben aszimptotikusan közelíti az e egyenes O-ra vonatkozó középpontos tükörképét.

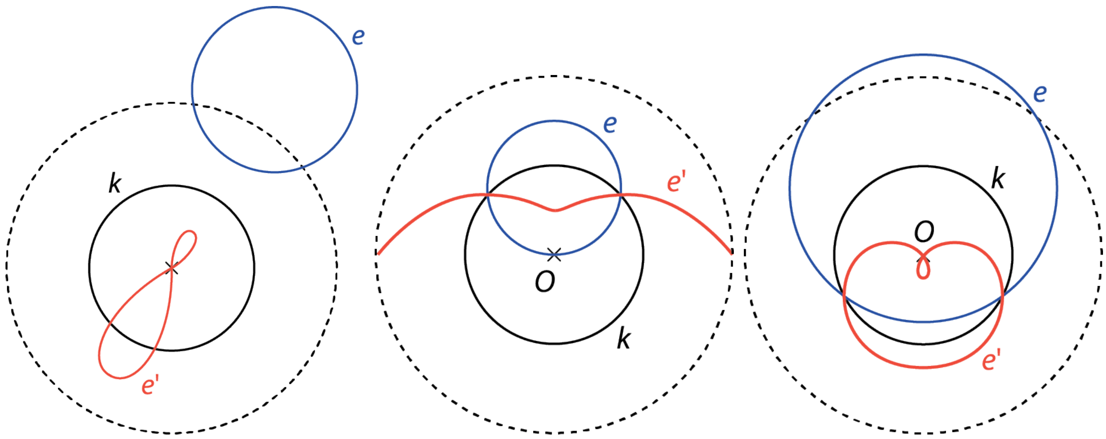
Egy lehetséges bizonyítási ötlet:

Jelölje az e egyenes, valamint a P pont O-ra vonatkozó középpontos tükörképét e_0, illetve P_0. Egy az alapkörön kívül eső P pont körre tükrözött P' képe és középpontosan tükrözött P_0 képe egyaránt az OP egyenesen helyezkedik el.

Mivel az OP félegyenes és az alapkör M metszéspontjára fennáll, hogy $OP = PM + r$, ahol r az alapkör sugara, ezért a képekre az teljesül, hogy $PP_0 = PP' + 2r$, azaz $P'P_0 = 2r$. Jelölje α az OP és e_k egyenesek hajlásszögét, ekkor P' távolsága az e_0 egyenestől $d(P', e_0) = 2r \sin\alpha$. Ha a P pont tart a végtelenbe, akkor az OP egyenes és az e_0 egyenes hajlásszöge szög 0-hoz tart, a távolság határértéke így konstansszor nulla. Ebből következik, hogy e' tetszőlegesen megközelíti az e_0 egyenest.

Ugyancsak igényesebb feldolgozásra javasoljuk a körök képének vizsgálatát. Akinek felkeltette ez a transzformáció az érdeklődését, úgyis megteszi.

A körök képének vizsgálatához készült feladatlap linkje: 7.59.



A példa d) része általában is fontos a függvényfogalom fejlesztése szempontjából. A tapasztalataink:

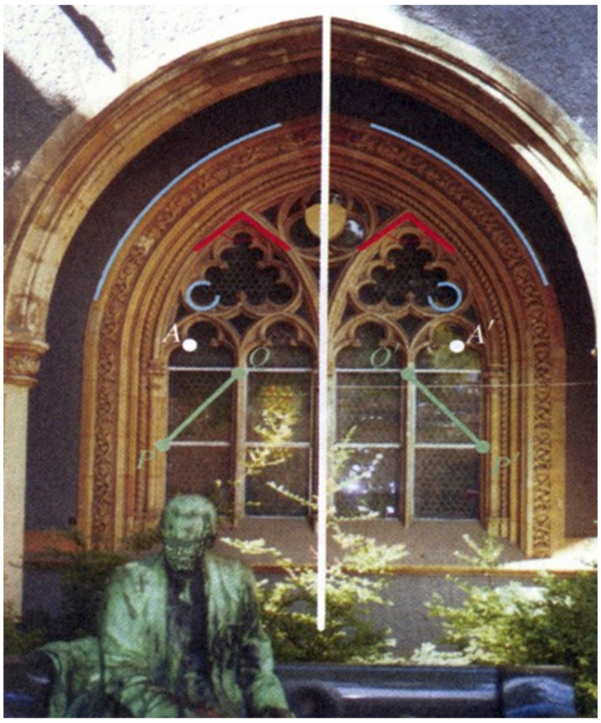
- Az értelmezési tartomány az O középponttól megfosztott lyukas sík.
- Mivel nem egyenestartó; ennek megfelelően nem is távolságtartó, tehát nem egybevágóság.
- Az értékkészlet a teljes sík.
- A transzformáció nem invertálható, mert például az alapkörrel koncentrikus, kétszeres sugarú kör minden pontja az O középpontba képeződik le.
  A sík összes pontját áttekintve: az O végtelen sokféleképpen áll elő képként, a 2r sugarú körre nézve külső pontok és a körvonal pontjai egyféleképpen állnak elő képként, a belső pontok kétféleképpen is előállnak. (Ezt az egyenesnél láttuk be, mivel minden O-tól különböző pont és a képe(i) tekinthető(k) O-n átmenő egyenes pontjainak.)
- Nem körtartó. Amennyiben a kör nem metszi a $2r$ sugarú kört és nem halad át az O középponton, akkor a körök képe egyszerű zárt görbe. Ha a kör metszi a $2r$ sugarú kört, akkor ennek a két metszéspontnak a képe egybeesik, „nyolcasformát” kapunk. Ha pedig a kör áthalad az O ponton, akkor olyan vonalat kapunk, amelynek két nyílt vége a $2r$ sugarú körre illeszkedik.

Bármely szinten szereznek a tanulók tapasztalatot erről a transzformációról, emlékezetes marad, hogy a pontonkénti hozzárendeléssel még nagyon keveset adtunk meg a transzformáció viselkedéséről.

Általában a transzformáció-tanításban, a fogalom kialakításában kulcsfontosságú, talán a legfontosabb, hogy fejlesszük az összetartozó részletek észrevételének, felismerésének képességét. Ennek hiánya lehet az egyik ok a transzformációktól való idegenkedés hátterében.

Fontos, tehát, hogy erre minél többféle lehetőséget biztosítsunk a tanításban. A következőkben több oldalról is rávilágítunk erre a kérdésre.

5.26. Példa: *(Az Apáczai Kiadó Matematika 7. osztályos tankönyv [218] 33. oldal.)*

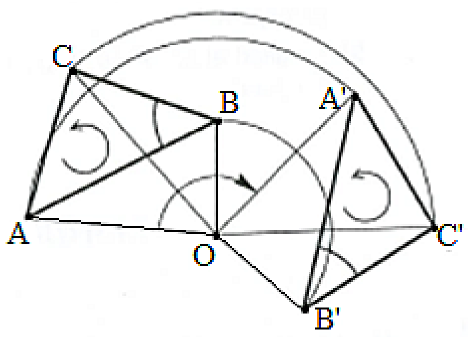


A képen egyforma színnel egyforma részleteket jelöltünk meg.
A képe A' és A' képe A
Ezt így jelöljük:
$A \to A'$ *és* $A' \to A$
A és A' egymásnak megfelelő pontok, röviden:
$A \leftrightarrow A'$
PQ és $P'Q'$ egymásnak megfelelő szakaszok, röviden:
$PQ \leftrightarrow P'Q'$ ...

Egybevágósági transzformációk különféle megadási módjai

Mint láttuk, a hozzárendelési szabállyal megadott transzformációk esetén nem magától értetődő, hogy összetartozó részleteik egybevágóak, tehát hogy fennáll rájuk a távolság és szögtartás tulajdonsága.

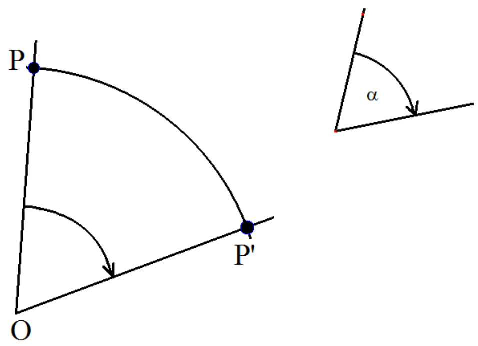
A geometriában a sík egybevágóságai esetén azonban létezik egy másik lehetőség is, a mozgatási utasítással történő megadás. Ekkor a sík – a kiválasztott alakzat – pontjának a képét a sík egy egyértelműen meghatározott mozgatásával kapjuk úgy, hogy a sík pontjai végeredményként az eredeti sík egy-egy (az eredetitől nem feltétlenül különböző) pontjába kerülnek. (Ez a gyakorlatban általában úgy történik, hogy a sík egy egy alakzatának pontjairól egy merev, átlátszó fólia segítségével másolatot készítünk, és ezt a másolatot mozgatjuk.) Egy pont, ponthalmaz, képe az a pont, ponthalmaz, ahová a mozgatás viszi.



A hozzárendelésnek ilyenfajta megadása esetén a gyerekek számára magától értetődő, hogy fennáll rá a távolság- és szögtartás tulajdonsága, mivel az eljárás összhangban van az alakzatok egymásra illeszthetőségén alapuló, intuitív egybevágóság fogalmukkal.

Az egybevágósági transzformációk különféle megadási módjai
A következőkben háromféle megadási módot mutatunk be a forgatás példáján illusztrálva. Mindhárom módszer alkalmas a sík bármely egybevágóságának a megadására.

Legyen adott egy O pont, a forgatás középpontja és egy O csúcsú α irányított szög.



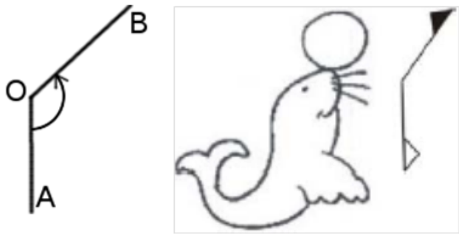
Egy tetszőleges P pont képe olyan P' pont, amelyre $OP = OP'$ és a POP' irányított szög egyenlő az α irányított szöggel.

Ennek megfelelően P' pont úgy szerkeszthető, hogy az OP félegyenesre felmérem az α irányított szöget. Ennek a szögnek a szárából az O körül OP sugárral rajzolt kör kimetszi a P' pontot.

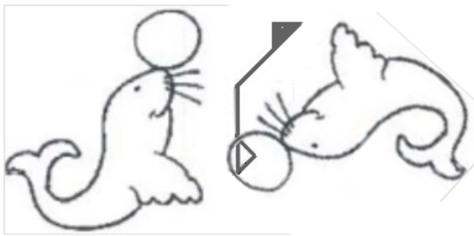
Ezt a megadási módot *pont-pont hozzárendelési szabály*nak nevezzük.

Egy alakzatot elforgathatunk O körül α irányított szöggel egy átlátszó papír mozgatásával is. Az átlátszó papírra átmásoljuk az elforgatandó alakzatot és az elforgatást megadó irányított szöget. Egy körző hegyét az O pontba szúrjuk, és a papírt addig forgatjuk, míg a mozgó szög kezdőszára a helyben maradó szög befejező szárára nem kerül. (Ha ezután az átlátszó papírra újra átmásoljuk az eredeti ábrát is, akkor azon együtt lesz az elmozgatással kapott kép és az eredeti rajz.) Ezt a megadási módot *kötött pálya mentén történő mozgatás*nak nevezzük.

Egy síkbeli egybevágósági transzformációt megadhatunk úgy is, hogy megmondjuk, hogy egy félsík határán egy félegyenessel milyen helyzetbe kerüljön. Az O körül α irányított szög segítségével egy zászlópárt értelmezünk. Ehhez először kijelölünk két félegyenest – legyenek ezek az irányított szögünk szárai – valamint az irányított szögünknek megfelelő irányban két, általuk határolt félsíkot. Ezeket a félegyenesek által határolt félsíkokat egy fehér illetve egy fekete zászlós mutató jelképezi, a fehér zászló tartozzon az irányított szög kezdő-, a fekete zászló pedig a befejező szárához. Ekkor az alakzat képét megkaphatjuk úgy, hogy a megadott



alakzatot átmásoljuk a fehér zászlóval jelzett mutatóval – együtt az átlátszó papírra, majd felemeljük a papírt és tetszőleges, (síkbeli vagy térbeli) pályán elmozgatva a másolatot, úgy tesszük le, hogy a fehér zászlójú mutató pontosan fedje a fekete zászlóját! (Ha ezután az átlátszó papírra újra átmásoljuk az eredeti ábrát is, akkor azon együtt lesz az elmozgatással kapott kép és az eredeti rajz.) Ezt a megadási módot *zászlós módszer*nek nevezzük.



5.27. Feladat: *Adja meg a tengelyes tükrözést és az eltolást az előzőekhez hasonlóan mind a háromféle módszerrel!*

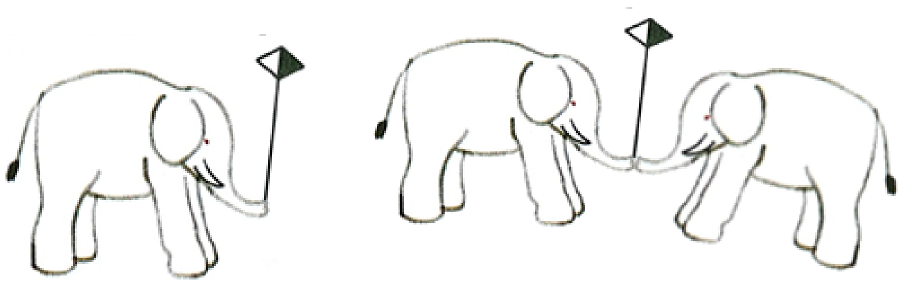
MEGJEGYZÉSEK A FELADATHOZ:
Tengelyes tükrözés

Meghatározható egy t egyenessel, a tengellyel.

a) Egy A pont képét megkaphatjuk úgy, hogy merőlegest állítunk az A pontból a tengelyre. Ez a tengelyt T pontban metszi. TA távolságot a tengely másik partján, a T pontból felmérjük a merőlegesre. Így jutunk az A' ponthoz. Az A' pontot az A pont képének nevezzük.

b) „... úgy is megkaphatjuk a tükörképet, hogy a tükrözés tengelye mentén ráhajtjuk a papiros rajzos felét a másikra, és ceruzánkat erősen megnyomva, még egyszer végigvezetjük a rajzon; így a papiros másik felére átvésődik bármelyik tükröznivaló egyenes és pont nyoma. Szabályszerű szerkesztésben persze sem tükröt, sem hajtogatást nem alkalmazhatunk."

c) A tengelyen kiválasztunk egy pontot és az egyik általa meghatározott félegyenest. A közös félegyenes által meghatározott egyik félsíkot jelöljük meg egy fehér, a másikat pedig egy fekete zászlós mutatóval.



Ekkor az alakzat képét megkaphatjuk a forgatásnál leírt módszerrel, egy átlátszó papír segítséget a fehér zászlónak a feketébe való mozgatásával.

Eltolás

Meghatározható egy irányított szakasszal.

a) Egy P pont képét megkaphatjuk úgy, hogy megszerkesztjük az adott irányított szakasszal párhuzamos és egyirányú, P kezdőpontú félegyenest, majd arra rámérjük az irányított szakasz hosszát. Ennek P' végpontja lesz P képe.

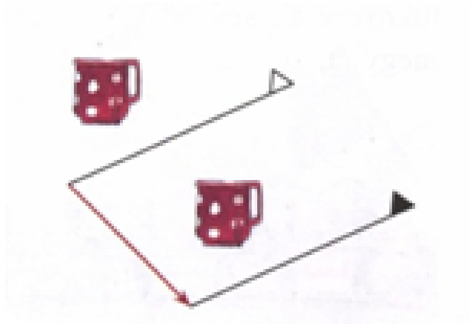
b) Az alakzatot átmásoljuk egy átlátszó papírra az irányított szakasszal együtt, majd az átlátszó papírt elcsúsztatjuk úgy, hogy a mozgó irányított szakasz kezdőpontja, mint egy sínen, végigcsússzon az eredetin, amíg annak a végpontjába nem ér. (Ha ezután az átlátszó papírra újra átmásoljuk az eredeti ábrát is, akkor azon együtt lesz az elmozgatással kapott kép és az eredeti rajz.)

c) Az eltolás megadhatjuk zászlók segítségével. Például a fehér zászló által jelzett félegyenes az irányított szakasz kezdőpontjából induló félegyenes, a fekete zászlóé pedig egy ezzel párhuzamos és egyirányú, az irányított szakasz végpontjából induló félegyenes legyen. A zászlók háromszögei pedig olyan félsíkokat határozzanak meg, amelyek közül az egyik tartalmazza a másikat (azonos irányítás).

Az alakzat képét ugyanazzal a módszerrel kaphatjuk, mint a forgatásnál.

A megadási módok elemzése

A különböző megadási módoknak más-más előnyei és hátrányai lehetnek. Mielőtt elemeznénk ezeket, fontos saját tapasztalatot szerezni ezek működéséről.



5.28. Feladat: *Vegyen fel egy négyszöget, egy O centrumot és egy irányított szöget, majd állítsa elő egy négyszög elforgatott képét mindhárom módszerrel. (Nem szükséges ugyanazon az ábrán dolgozni, és nincs jelentősége, hogy ugyanolyan négyszöget, ugyanazzal a forgatással transzformáljon.) Az első módszernél körzővel-vonalzóval dolgozzon, a második kettőhöz használjon átlátszó papírt.*

Ezután próbálja meg elemezni az egyes megadási módokat! Iránymutatásul megadunk néhány szempontot:

(1) Melyik megadási módot használják az általános és középiskolai tanításban?

(2) Melyik a leginkább alkalmas arra, hogy az egybevágósági transzformáció fontos tulajdonságait – távolság-, szög-, egyenestartás, ... – alátámassza, szemléletessé tegye a gyerekek számára?

(3) Melyikkel legkönnyebb előállítani egy alakzat képét?

(4) Melyik megadási módot tartja matematikai szempontból korrektnek, amelyiket nem?

(5) Melyik a leginkább alkalmas arra, hogy tapasztalatokat szerezzenek a transzformációról?

(6) Melyik megadási mód segít leginkább az összetartozó részletek keresésében? Adja meg a tengelyes tükrözést és az eltolást az előzőekhez hasonlóan mind a háromféle módszerrel!

MEGJEGYZÉSEK A FELADATHOZ:

(1) Melyik megadási módot használják az általános és középiskolai tanításban?

Az általános és középiskolai tanításban a hangsúly egyaránt a pontonként megadott hozzárendelési szabály tanításán van. Az általános iskolai tankönyvek mindegyikében, de több középiskolai tankönyvben is bemutatják a transzformációk mozgatással való megadását is, de általában csak kötött-pályás mozgatásként. A „zászlós módszert” egyelőre csak kevés tankönyvsorozat használja.

(2) Melyik a leginkább alkalmas arra, hogy az egybevágósági transzformáció fontos tulajdonságait – távolság-, szög-, egyenestartás, ... – alátámassza, szemléletessé tegye a gyerekek számára?

A mozgatással történő megadás azért szinte elengedhetetlen a tanításban, mert ez teszi a gyerekek számára magától értetődővé, hogy a transzformációra fennáll a távolság- és szögtartás tulajdonsága. A kép mozgatással való előállítása ugyanis összhangban van a kisgyerek intuitív egybevágóság fogalmával, ami az alakzatok egymásra illeszthetőségén alapul.

(3) Melyik megadási módot tartja matematikai szempontból korrektnek, amelyiket nem?

A mozgatásként megadott definíciók kevésbé látszanak precíznek. Ennek az az oka, hogy a hagyományosan használt „kötött-pályás mozgatások" valóban nehézkesek, megadásuk általában pontatlan, elsődlegesen illusztrációként használják azokat.

A zászlós módszer hátterében azonban egy matematikailag percíz fogalom, a geometriai mozgás fogalma áll. Egyetemi tankönyvében Hajós György olyan axiómarendszert használ, amelyben az egybevágóságot a mozgásra mint alapfogalomra alapozza. A zászlós módszer teljes összhangban van ezzel a precíz mozgásfogalommal, megfelel a mozgásról szóló axiómáknak. (A mozgás axiómáit megtalálja a kislexikonban).

Mivel ebben a módszerben csupán a kezdő és a véghelyzet számít, a transzformáció-összetételek tanítása lényegesen könnyebbé válik.

(4) Melyikkel legkönnyebb előállítani egy alakzat képét?

A zászlós módszerrel bonyolult, „szabálytalan" alakzatok képe is könnyen előállítható. A pont-pont hozzárendelés által adott euklideszi szerkesztési eljárás a legnehézkesebb. Csupán véges sok pont képe szerkeszthető meg közvetlenül, a pontokat vonalzóval, vagy körzővel összekötve egyenesek, körök képe is szerkeszthető.

(5) Melyik a leginkább alkalmas arra, hogy tapasztalatokat szerezzenek a transzformációról?

A zászlós módszerrel sokféle alakzat képe könnyen, gyorsan szerkeszthető. Ez azért is nagyon fontos, mert így akármeddig használhatjuk – a körzős vonalzós szerkesztés mellett – a kép előállítására. Így alkalmas arra, hogy bőséges, nem-verbális tapasztalatanyagot gyűjtsenek általa a gyerekek például a forgatásról is vagy akár az iskolában elhallgatott csúszástükrözésről is.

(6) Melyik megadási mód segít leginkább az összetartozó részletek felismerésében?

A gyerekek nagyon jók az összetartozó részletek megfigyelésében, ha erre lehetőséget biztosítunk nekik. Az a vizuális élményanyag, amelyet zászlós módszer használata során, sokféle alakzat és kép megfigyelésével szereznek, sokkal többet mond nekik a transzformációk működéséről, mint a szóban megfogalmazott szabályok. Ezért a ráfordított idő bőven megtérül a szimmetrikus alakzatok tanításában, a feladatmegoldások tanítása során.

Mivel pedig ez az eljárás nemcsak egyszerű és szemléletes, de matematikailag is korrekt, ezért a keletkező nem csupán verbális belső kép (concept image) hatékonyan támogatja a fogalom fejlődését egészen a dedukció legmagasabb szintjéig. A módszer maga után von további, kisebb-nagyobb változásokat is a fogalomépítésben, amit a kislexikonban egy táblázat tartalmaz.

A sík egybevágóságai

5.29. Feladat: *Tervezzen feladatot a sík összes egybevágósági transzformációjának zászlópárokkal való gyakoroltatásához.*

MEGJEGYZÉSEK A FELADATHOZ:

Érdemes egy-egy megadott alakzat mozgatással előállított képét is kérni. Ha azt akarja, hogy látható legyen a transzformált alakzaton, hogy mi történt vele, akkor ne olyan alakzatot adjon meg, amely az aktuális transzformációra szimmetrikus (pl. a tükrözés tengelye ne legyen az alakzat szimmetriatengelye).

Ugye nem felejtkezett el egyik egybevágósági transzformációról sem? Az nem baj, ha ugyanaz a transzformáció többször szerepel, de most fontos volt, hogy ne maradjon ki egy sem. A zászlós módszer kiváló lehetőséget teremt arra, hogy ellenőrizze magát. A zászlórúd maradhat helyben, eltolódhat párhuzamosan és elfordulhat. A zászló mutathat ugyanarra az oldalra és az ellenkező oldalra is. Ezek szerint lehetséges, hogy

a zászlórúd helyben marad, a zászló ugyanabba a félsíkba mutat – helybenhagyás

a zászlórúd helyben marad, a zászló a kiegészítő félsíkba mutat – tengelyes tükrözés

a zászlórúd elfordul, a zászló ugyanarra az oldalra mutat – forgatás (középpontos tükrözés)

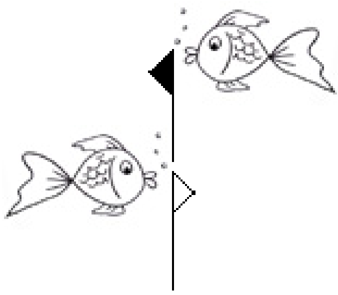
a zászlórúd elfordul, a zászló a kiegészítő félsíkba mutat – tengelyes tükrözés vagy csúszástükrözés

a zászlórúd párhuzamosan elmozdul, a zászló ugyanabba a félsíkba mutat – eltolás

a zászlórúd párhuzamosan elmozdul, a zászló a kiegészítő félsíkba mutat – tengelyes tükrözés vagy csúszástükrözés.

A csúszástükrözést érdemes egy kicsit vizsgálni. A kislexikonban is visszatérünk rá.

5.30. Feladat: *Mi a csúszástükrözés pont-pont hozzárendelési szabálya?*



MEGJEGYZÉSEK A FELADATHOZ:

A csúszástükrözést egy irányított szakasszal adjuk meg. Egy tetszőleges pont képét úgy kapjuk, hogy az irányított szakasz által meghatározott vektorral eltoljuk, majd az irányított szakasz egyenesére tükrözzük.

5.31. Feladat: *Az eltolás, tengelyes tükrözés, pont körüli forgatás egy kétdimenziós sík egybevágóságai. A mozgatással való előállításhoz azonban némelyik esetben ki kell lépni a térbe, tehát csak háromdimenziós mozgatással valósíthatók meg. Melyek ezek az egybevágóságok?*

MEGJEGYZÉSEK A FELADATHOZ:

A tengelyes tükrözés és a csúszástükrözés csak térbeli mozgatással valósítható meg.

A transzformációtulajdonságok tanítása

Mivel a távolság és szögtartás tulajdonságát a mozgatással történő megadásokra tudjuk alapozni, ezért érdemes az egybevágósági transzformációk tulajdonságait még a pontonkénti szabály megfogalmazása előtt bevezetni.

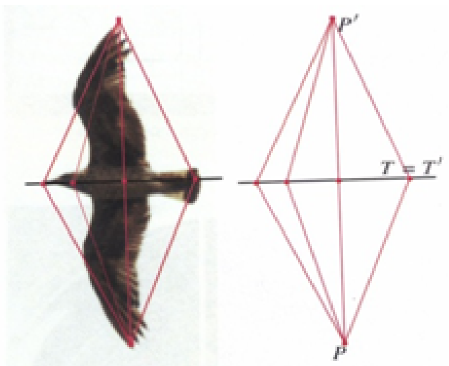
Ez a munka azonban csak akkor lesz hatékony, ha elérjük, hogy a gyerekek képesek legyenek a megfelelő részletekre figyelni. Ha azokat biztonságosan meg tudják találni, le tudják jegyezni, fel tudják következtetésekben használni, akkor nagyot léptünk az egybevágóságfogalmuk fejlesztésében. Ez egy olyan csomópont, amelyhez nagyon sok fontos fogalmat hozzá tudunk kapcsolni, illetve rá tudunk építeni.

Erre alapozva a transzformáció tulajdonságok kényelmesen összegyűjthetők.

Nézzünk meg néhány példát, hogyan történik ez a gyakorlatban:

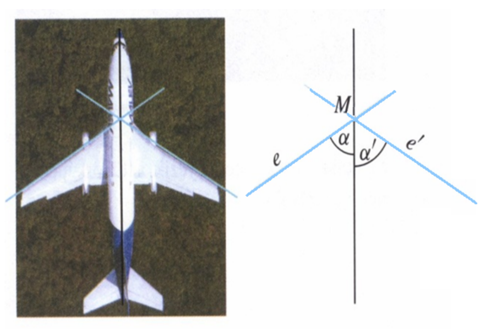
Az összetartozó részletek megfigyelésében a gyerekek nagyon jók, ha erre lehetőséget biztosítunk nekik. Hamar észreveszik, hogy egy pontot és tükörképét a tengely bármely pontjával összekötve egymásnak megfelelő szakaszokat kapunk, tehát ezek egyenlőek, illetve, hogy egyenesnek és képének a tengellyel bezárt szöge szintén összetartozó részletek, amelyek a mozgatás során fedésbe kerülnek, tehát ezek a szögek is egyenlőek.

Példa az Apáczai Kiadó Matematika 7. osztályos tankönyv I. kötetéből ([218] 34. o.) Mivel



a tengely pontjai helyben maradnak, ezért, ha P pont képe P', és T a tengely tetszőleges pontja, akkor PT és $P'T'$ egymásnak megfelelő szakaszok, vagyis egyenlőek. Pont és tükörképe a tengely bármely pontjától egyenlő távol vannak.

Példa az Apáczai Kiadó Matematika 7. osztályos tankönyv I. kötetéből ([218] 34. o.) Ha az e



egyenes metszi a tengelyt – M pontban –, akkor az e egyenes e' tükörképe is metszi a tengelyt, méghozzá ugyanabban az M pontban. Mivel az M pont képe önmaga, ezért az e egyenes és a t tengely hajlásszöge megegyezik az e' egyenes és t a tengely hajlásszögével, hiszen ezek egymás tükörképei. Egyenes és tükörképe ugyanolyan hajlásszöget zárnak be a tengellyel. A tengely tehát szögfelezője a kép és a tükörkép által bezárt szögnek.

Ha ezek az észrevételek beépülnek a gyerekek gondolkodásába, akkor nem fog nekik gondot okozni, hogy stratégiákat találjanak ki arra, hogyan szerkesszék meg körzővel-vonalzóval egy tetszőleges pont képét.

A következő két példa ilyen, gyerekek (nem is igazán jól teljesítő gyerekek) által kitalált szerkesztési stratégia egy P pont P' képének előállítására.

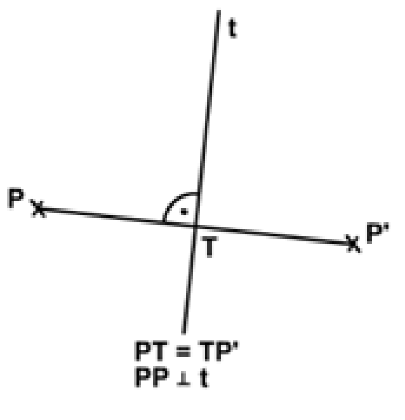
- Az egyik gyerek felvesz két pontot tetszőlegesen a tengelyen, A-t és B-t, és köríveket rajzol, A körül AP sugárral, B körül BP sugárral. A két körív metszéspontja lesz a P pont P' képe.
- A másik gyerek összeköti P-t a tengely egy tetszőleges A pontjával. Az AP szakasznak a tengellyel bezárt szögét átmásolja az A csúcstól a tengely másik palára. A kapott félegyenesre rámérve az AP távolságot megkapja a P pont P' képét.

Az előbb megfogalmazott észrevételek továbbvezetnek más fontos állításokhoz.

Kössük össze a pontot és a képét – P-t és P'-t (P ne illeszkedjen az egyenesre)! Az összekötő szakasz metszi a tengelyt egy pontban, amit az ábrán T-vel jelöltünk. Ha az ábrán megfelelő részleteket keresünk, és elég ügyesek vagyunk, akkor látjuk, hogy a P-től a tengelyig terjedő PT szakasz megfelel a P'-től a tengelyig tartó szakasznak, $P'T$-nek. Tehát a tengelynek feleznie kell a szakaszt.

A T csúcsnál elhelyezkedő egyik szögnek megfelel egy másik T csúcsú szög a tengely túloldalán, amellyel együtt egyenesszöget tesznek ki. Így mindkettőnek 90°-nak kell lennie. Tehát, egy tetszőleges pontot és tükörképét összekötő szakaszt a tengely merőlegesen felezi.

Példa az Apáczai Kiadó Matematika 7. osztályos tankönyv I. kötetéből ([218] 34. o.) Ezt



az állítást összevetve azzal, hogy pont és képe a tengely minden pontjától egyenlő távolságra van, eljutunk egy már korábbról is ismert, fontos tudnivalóhoz, miszerint egy szakasz felező merőlegesének minden pontja egyenlő távol van a szakasz végpontjaitól.

5.1.5. Szimmetrikus alakzatok

5.32. Feladat: *Mikor nevezünk egy alakzatot szimmetrikusnak?*

MEGJEGYZÉSEK A FELADATHOZ: Szimmetrikus alakzatokról valamilyen egybevágósági transzformációhoz kapcsolódva beszélünk.

A transzformáció megadása nélkül szimmetria alatt (tengelyes, vagy síkra vonatkozó) tükörszimmetriát értenek.

Geometriai értelemben akkor mondjuk, hogy egy geometriai alakzat szimmetrikus, ha van egy vagy több olyan (identitástól különböző) egybevágósági transzformáció, amely az alakzatot önmagába viszi.

5.33. Feladat: *A következő két részben (konktét-manipulatív szinten) tengelyes, illetve középpontosan szimmetrikus alakzatokat építünk és megfigyeljük a keletkező alakzatok szimmetriáit. Gondolja meg az A) és B) rész sorrendjét! Melyik mellett milyen érv szól?*

MEGJEGYZÉSEK A FELADATHOZ:

Szimmetrikus három- és négyszögeket akarunk építeni. Az építéshez szükség van egy szimmetriatengely, illetve szimmetriacentrum megadására, valamint könnyen mozgatható, pontokat jelképező pici tárgyakra. Használhatunk A3-as lapra rajzolt egyenest, és pici korongokat, vagy mágneses táblára rajzolt egyenest és táblai mágneseket, aktív táblán előre definiált alakzatokat, ahol a tanulók az ujjukkal KÖZVETLENÜL mozgathatják a pontot jelképező alakzatokat.

A szimmetriatengely megadásánál vigyázzunk arra, hogy az ne legyen speciális helyzetű – a papírlap vagy a tábla oldalaival párhuzamos, vagy éppen a papírlap átlója, ...

A tárgyak megválasztásánál vigyázzunk arra, hogy valóban reprezentálhassák a pontnak azt a tulajdonságát, amire ez a feladat irányul, nevezetesen, hogy a pont tengelyesen szimmetrikus. Akármilyen kedves is egy félrecsapott sipkájú (lapos) mágneses törpe, ebben a feladatban nem alkalmas pontnak. A nem elhanyagolható térbeli kiterjedésű gombok, stb. megválasztása előtt el kell dönteni, hogy a síkbeli tükörszimmetriát a térbeli tükörszimmetriából vagy térmozgásból származtatjuk. Egy mégoly szimmetrikus fél dió csak akkor megfelelő, ha síkszimmetria leszűkítésének gondoljuk a tengelyes szimmetriát. Ha a tengely körüli forgatással tükröznénk egy „pontimitátort" a tengelyre, akkor a pontot ábrázoló objektum megfordulna.

A középpontos szimmetriánál nem kell igen igényesen pontokat ábrázoló alakzatoz választani, hiszen a középpontos tükrözés a síkban is mozgás.

A megfigyeléseket összegzéséhez használhatjuk a tanulók csoportmunkában elkészített posztereit vagy animációt. Az animációt beállíthatjuk úgy, hogy mindig csak egy alakzatot lássunk, de úgy is, hogy az egyes alakzatok nyoma megmaradjon a képernyőn vagy az aktív táblán.

Megbeszélés közben érdemes néhány szóhasználatban megállapodni, hogy könnyebb legyen a tulajdonságokat megfogalmazni.

Az egyes feladatok végén érdemes tisztázni a középpontosan, tengelyesen szimmetrikus és az adott középpontra és az adott tengelyre szimmetrikus tulajdonságok közötti különbséget. Ez nem csupán a feladat megfordítása miatt (pl. adott szimmetriatengelyhez rá szimmetrikus alakzat készítése helyett adott tengelyesen szimmetrikus alakzat szimmetriatengelyének megkeresése) fontos, hanem a függvény- és grafikontulajdonságok pontos összerendezésénél is megtérül.

A gyerekeknek szóló feladatokat dőlt betűvel, a módszertani magyarázatot álló betűkkel írjuk.

A) Tengelyesen szimmetrikus alakzatok építése

5.34. Példa: *Rakj le a papírlapodra (vagy a táblára) egyetlen pontot úgy, hogy a keletkező (egy pontból álló) alakzat szimmetrikus legyen a megadott tengelyre!*

A megoldás elég könnyű, de mégis meglepő, fontos tanulsággal szolgál: a korongot a szimmetriatengelyre kell tenni, a tengelyen levő pont önmagának a tükörképe.

Ide kattintva az animációhoz ugorhat.

5.35. Példa: *Rakj le a papírlapodra (vagy a táblára) két korongot úgy, hogy a keletkező alakzat szimmetrikus legyen a megadott tengelyre.*

A két lényegesen különböző jó megoldás: mindkét korong kerülhet a tengelyre, vagy egymás tengelyes tükörképei.

Ide kattintva az animációhoz ugorhat.

5.36. Példa: *Rakj le a papírlapodra (vagy a táblára) három korongot úgy, hogy a keletkező alakzat szimmetrikus legyen a megadott tengelyre.*

Ide kattintva az animációhoz ugorhat.

Vagy mind a 3 pont a tengelyre kerül, vagy egy pont a tengelyen van, a másik kettő meg egymás tengelyes tükörképe. Ekkor a 3 pont egy szimmetrikus háromszög csúcsait alkotja. Ennek néhány tulajdonságát érdemes itt összegyűjteni.

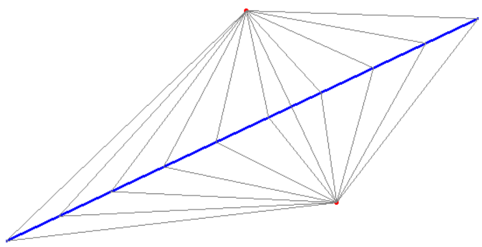
5.37. Példa: *Milyen tulajdonságai vannak egy szimmetrikus háromszögnek?*

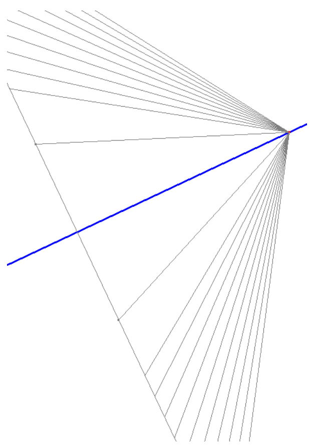
Ide kattintva az animációhoz ugorhat.

- A tengelyen levő pont a másik két ponttól egyenlő távol van, az összekötő szakaszok egyenlő hosszúak – egyenlő szárú háromszög;
- a tengely felezi a szárak szögét;
- az alapon fekvő két szög szintén egyenlő egymással;
- az alap merőleges a tengelyre; a tengely merőlegesen felezi az alapot, ...

5.38. Példa: *Változtasd a tengelyen levő pont helyzetét. Tedd először a másik két ponttól minél távolabbra, majd közelítsd lassan hozzájuk. A mozgó csúcs minden helyzetében képzeld el a három pont által meghatározott háromszöget! (Ha nehezen tudod elképzelni, akkor körül is kerítheted fonállal.)*

Figyeld meg, hogy hogyan változik a háromszög. Van-e közben olyan helyzet, amit különlegesnek találsz?





Az egyik ábrán a tengely és a szimmetrikus pontpár rögzített, a tengelyen levő csúcs mozgatható, a másik ábrán a tengelyen lévő csúcs rögzített, a szimmetrikus pontpár mozgatható, de csak a tengelyre merőlegesen.

Ide kattintva az 1. esethez készült animációhoz ugorhat.

Ide kattintva a 2. esethez készült animációhoz ugorhat.

Megfigyeljük, hogy a szárak szöge egyre nő, az alapon levő szögek pedig egyre kisebbek lesznek; a szárak egyre csökkennek; lesz egy olyan helyzet, mikor nem is kapunk háromszöget mert a három pont egy egyenesbe esik.

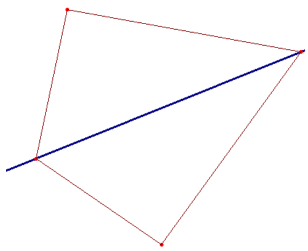
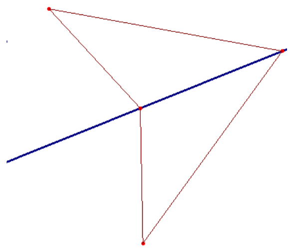
Ha még tovább mozgatjuk a pontot, akkor elkezd távolodni a rögzített pontoktól; lesz két olyan helyzet, amikor a háromszög három oldala megegyezik, szabályos háromszöget kapunk, aminek van másik két szimmetriatengelye is; ...

5.39. Példa: *Rakj le a papírlapodra (vagy a táblára) négy korongot úgy, hogy a keletkező alakzat szimmetrikus legyen a megadott tengelyre.*

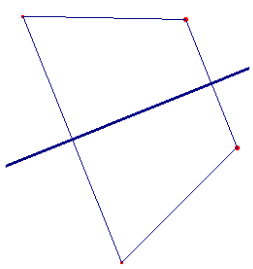
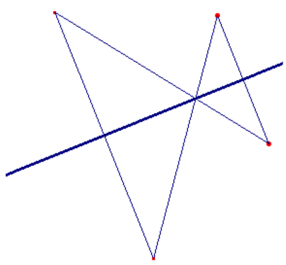
Ide kattintva az animációhoz ugorhat.

Ilyenkor a) mind a négy pont a tengelyre kerül; b) két pont a tengelyen van, a másik kettő pedig egymás tükörképe; c) két-két olyan pont van, amelyek szimmetrikus párt alkotnak.

Ha b) esetben összekötjük a csúcsokat, akkor deltoidot kapunk.

c) esetben is összekötjük a csúcsokat:

Ha ügyelünk arra, hogy a tengelyt csak akkor lépjük át, ha szimmetrikus pontokat kötünk össze, akkor *húrtrapéz*t kapunk.

Ezeket az alakzatokat is érdemes mozgatás közben megfigyelni.

Hogyan változnak az oldalak, szögek, ..., ha egy-egy pontot, vagy pontpárt mozgatunk?

Ide kattintva a b) esethez készült animációhoz ugorhat.

Ide kattintva a c) esethez készült animációhoz ugorhat.

Csoportmunkában például egy csoport egyetlen pont, a másik egy pontpár mozgatásakor figyeli meg a keletkező alakzatot. Megfigyeléseikről posztereket készíthetnek, amelyek segítségével elmagyarázzák a többi csoportnak, hogy mit tapasztaltak.

B) Középpontosan szimmetrikus alakzatok építése

Megfogalmazzuk középpontos szimmetriára az A) részben ismertetett feladatokat.

Rakj le a papírlapodra (vagy a táblára) egyetlen pontot úgy, hogy a keletkező (egy pontból álló) alakzat szimmetrikus legyen a megadott középpontra!

Egyetlen pontból álló alakzat úgy lehet a megadott középpontra szimmetrikus, hogy a pontot a középpontra rakjuk.

Rakj le a papírlapodra (vagy a táblára) két korongot úgy, hogy a keletkező alakzat szimmetrikus legyen a megadott középpontra.

Két pontból álló alakzat akkor lesz egy adott középpontra nézve szimmetrikus, ha a a két pont egymás tükörképe, vagyis, ha a középpont éppen az összekötő szakasz felezőpontja.

Rakj le a papírlapodra (vagy a táblára) három korongot úgy, hogy a keletkező alakzat szimmetrikus legyen a megadott középpontra.

Három pontot csak úgy tudunk letenni, hogy kettő egymás tükörképe a megadott középpontra nézve, a harmadik pedig egybeesik a középponttal. Mivel a középpont a szimmetrikus pontpárok szakaszát felezi, egy egyenesre kényszerül a három pont: nincs középpontosan szimmetrikus háromszög.

Rakj le a papírlapodra (vagy a táblára) négy korongot úgy, hogy a keletkező alakzat szimmetrikus legyen a megadott középpontra.

Négy pontot úgy tudunk az adott középpontra nézve szimmetrikusan elhelyezni, hogy kettő kettő egymás középpontos tükörképe. Ha ezek a párok nem egy egyenesre illeszkednek, akkor paralelogrammát határoznak meg. (Van olyan összekötés, hogy paralelogrammát kapunk.)

A paralelogrammákat is érdemes mozgatás közben megfigyelni (téglalap, rombusz, négyzet). Kiemeli a jellegzetességeket, ha az átlókat is berajzoljuk.

Tapasztalatok

Az itt leírt foglalkozás nem verbálisan is jól megalapozott komplex tanulást eredményezhet. Ennek során a gyerekek tevékenykednek, a kezük mozgásával is érzékelik az alakzatokat (enaktív reprezentáció), amelyek vizuálisan is megjelennek előttük (ikonikus reprezentáció), és amelyeknek a tulajdonságait később szavakban, jelölésekben is megfogalmazzák (szimbolikus reprezentáció).

A munkaformát illetően több lehetőség is van: – a legkevésbé hatékony módszer éppen az, amikor a tanár gyönyörű prezentációval villog a táblánál; – ugyancsak kevésbé hatékony, de egy fokkal jobb, ha gondosan előkészített interaktív feladatlapon egyedül dolgozik minden gyerek egy-egy számítógépen; – a konkrét manipulációs részt is csinálhatják a gyerekek önállóan, majd a tanár frontálisan, kérdve kifejtő formában összegezheti a tapasztalatokat; – a legjobb, ha páros vagy csoportmunkában teszik a felfedezéseket és egymás között megvitatják, ezt poszteren dokumentálják és elmesélik a többieknek (akik közül a tanár is egy).

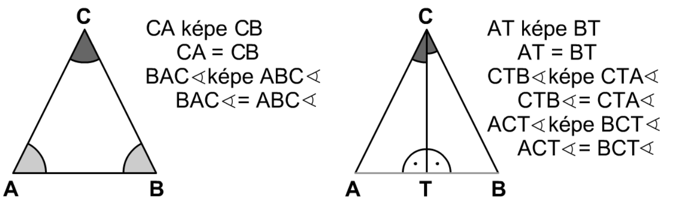
Egy ilyen foglalkozást érdemes azzal folytatni, hogy összegyűjtjük a megépített háromszögek illetve négyszögek tulajdonságait.

Szimmetrikus háromszögek és négyszögek tulajdonságai

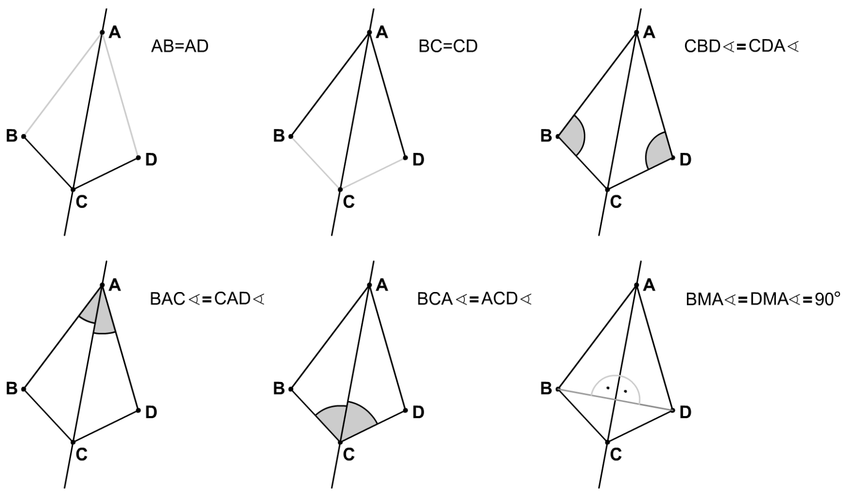
A szimmetrikus három és négyszögekről szóló állítások, tételek a geometriai bizonyítások legfontosabb alapanyagai közé tartoznak.

A transzformációk tanításáról szóló részben írtunk arról, hogy ebben a tapasztalatszerzésben sokat segíthet az átlátszó papír használata.

Amennyiben a gyerekeknek már van gyakorlatuk az összetartozó részletek keresésében, könnyen meg tudják fogalmaznia akár az egyenlőszárú háromszögek speciális tulajdonságait.

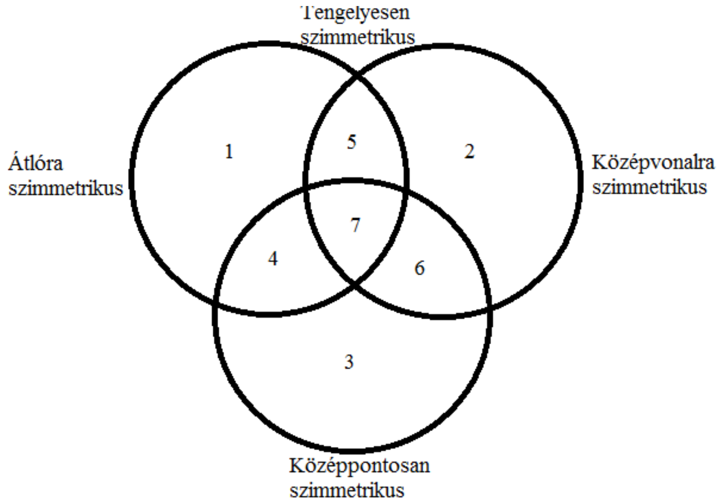


A szimmetrikus négyszögek vizsgálatában is nagyon hasznos. A deltoidokról mutatunk egy képsorozatot ennek illusztrálására.



Az előző példa szépen megvilágíthatja a gyerekek számára is, hogy a szimmetrikus négyszögek között jobban eligazodhatunk ha, tudjuk, hogy szimmetriatengelyük vagy szimmetriaközéppontjuk van. A tengelyesen szimmetrikus négyszögek más jellegzetességet hordoznak azok, amelyek átlóra szimmetrikusak, mint azok, amelyek középvonalra szimmetrikusak. Ha Venn diagramon ábrázoljuk az ismert négyszögtípusainkat, szép elrendezést kapunk, amiből sokféle párhuzamot lehet és érdemes kiolvasni. Módszertani oka van, hogy a tartományokat számozzuk és nem alakzatok nevét vagy sematikus ábráját írjuk bele: ez a rendszerezés most jön létre. Az elvileg lehetséges (esetleg üresen maradó) tartományok felderítése a cél. Nem korlátozódtunk eddig sem a konvex alakzatokra, most sem tesszük, de önátmetsző négyszöget nem akarunk vizsgálni. (Egyszerű, zárt töröttvonalra gondolunk.)

5.40. Feladat: *Jellemezze a számmal jelölt tartományokhoz tartozó négyszögeket!*



MEGJEGYZÉSEK A FELADATHOZ:

1 Olyan deltoidok, amelyeknek nem minden oldala egyenlő. 2 Olyan húrtrapézok, amelyeknek nem minden szöge egyenlő. 3 Olyan paralelogrammák, amelyeknek nem minden oldala és nem minden szöge egyenlő. 4 Olyan rombuszok, amelyeknek nem minden szöge egyenlő. 5 Nincs ilyen négyszög. 6 Olyan téglalapok, amelyeknek nem minden oldala egyenlő. 7 Négyzetek.

Mindegyik szimmetriatípushoz van olyan négyszögfajta, amelyik csak azzal az egyféle szimmetriával rendelkezik.

Van olyan négyszög is, ami mind a háromféle szimmetriával rendelkezik.

Kétféle szimmetriával rendelkező négyszögek azonban biztosan középpontosan szimmetrikusak és emellett vagy az egyik, vagy a másik fajta tengelyes szimmetriával rendelkeznek.

A kétféle tengelyes szimmetria kapcsolata egymáshoz képest más, mint a középpontos szimmetriához.

5.41. Feladat: *Miért nincs olyan négyszög, amely tengelyesen szimmetrikus valamelyik átlójára, és valamelyik középvonalára, de nem parallelogramma, azaz nem középpontosan szimmetrikus?*

MEGJEGYZÉSEK A FELADATHOZ:

Ennek a magyarázata az, hogy ha egy korlátos alakzatnak van két szimmetriatengelye, akkor azok metszik egymást, továbbá az alakzat a metszéspont körül a bezárt szög kétszeresével való elforgatással is önmagára képeződik le. Egy négyszög vagy másod-, vagy negyedrendű forgásszimmetriával rendelkezhet, a forgásszimmetrikus négyszögnek középpontos szimmetriája is van.

A halmazábrából tehát azt látjuk, hogy a kétféle tengelyes szimmetria egymáshoz való viszonya más, mint a középpontos szimmetriával való kapcsolatuk. Vizsgáljuk meg ezeket is közelebbről!

5.42. Feladat: *Hasonlítsa össze a deltoidok, a húrtrapézok és a parallelogrammák tulajdonságait! Próbálja ezek közül összepárosítani azokat, amelyeket valamilyen szempont szerint rokonnak érez!*

MEGJEGYZÉSEK A FELADATHOZ:

deltoid	*húrtrapéz*	*parallelogramma*	*egyenlőszárú háromszög*
két-két szomszédos oldala egyenlő	két-két szomszédos szöge egyenlő	két-két szemközti oldala és két-két szemközti szöge egyenlő	
van két egyenlő szemközti szöge	van két egyenlő szemközti oldala		van két egyenlő oldala és két egyenlő szöge
a szimmetriatengely felez két szemközti szöget	a szimmetriatengely felez két szemközti oldalt		a szimmetriatengely felez egy szöget és a vele szemközti oldalt
a szimmetria-átló merőlegesen felezi a másik átlót	a szimmetria-középvonal merőlegesen felezi a másik középvonalat	a szimmetria-centrum felezi az átlókat és a középvonalakat	

A párhuzamok látványosak. A deltoidok és a húrtrapézok tulajdonságait leíró szövegek csupán abban különböznek, hogy az oldal helyett szögre, illetve szög helyett oldalra vonatkozik. A parallelogramma tulajdonságai valamiféle egyesítései a deltoidok és a húrtrapézok tulajdonságainak: a szomszédosság helyét a szemközti, a szimmetriatengely helyét a szimmetriacentrum (két merőleges szimmetriatengely) veszi át. Az egyenlőszárú háromszögek a tengelyesen szimmetrikus négyszögekkel rokonok, ami nem csoda, hiszen elfajult deltoidnak és elfajult húrnégyszögnek egyaránt tekinthetők, szimmetriacentrumuk azonban nincs.

A többféle szimmetriával rendelkező négyszögek között természetesen folytatódnak, még szorosabbá válnak a párhuzamok:

rombusz	*téglalap*
minden oldala egyenlő	minden szöge egyenlő
szimmetrikus a két átlóra és a középpontra	szimmetrikus két középvonalra és a középpontra

A szabályos három- és négyszögek tulajdonságai közötti párhuzam mélyebb, a szabályos alakzatok definíciójából adódik. Továbbá megjelenik a páros és páratlan oldalszám miatt adódó különbség.

szabályos háromszög	*szabályos négyszög*
minden oldala és minden szöge egyenlő	minden oldala és minden szöge egyenlő
szimmetrikus három tengelyre, és harmadrendben forgásszimmetrikus	szimmetrikus négy tengelyre, és negyedrendben forgásszimmetrikus
nincs szimmetriacentruma	*van* szimmetriacentruma

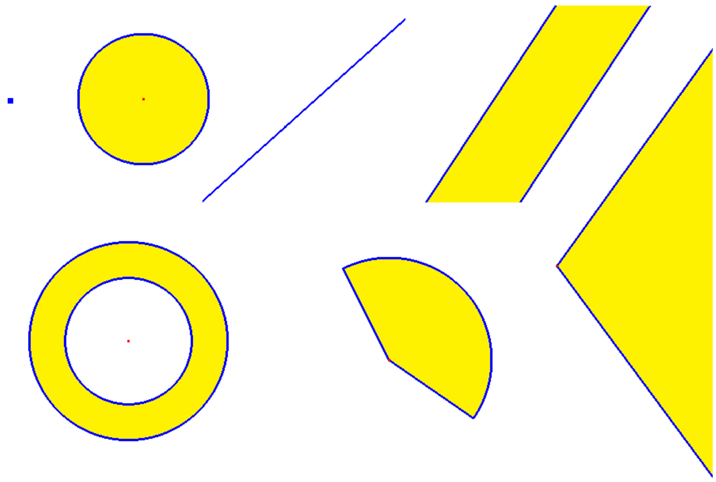
Építkezés szimmetrikus alakzatokból

A következőkben azt mutatjuk meg, hogyan lehet szimmetrikus építőelemekből új szimmetrikus alakzatokat építeni. Ehhez érdemes megvizsgálnunk ezeknek az építőelemeknek a szimmetriáit.

Egyszerű alakzatok szimmetriái

A tananyag általában nem foglalkozik, vagy nem foglalkozik eleget a legegyszerűbb alakzatok – pont, kör, egyenes, sáv, szögtartomány, körcikk, körgyűrű – szimmetriáival, pedig ezek megismerése sokat segíthet a geometriatanításban. Itt a sík egyszerű alakzataival fogunk foglalkozni, de hasonlóan elemezhetők a térbeli alakzatok szimmetriái is.

5.43. Feladat: *Állapítsa meg, hogy a következő alakzatok rendelkeznek-e tengelyes, illetve középpontos szimmetriával! Ha igen, adja meg a tengelyt illetve a szimmetriacentrumot! Ha végtelen sok van, akkor adjon meg néhányat.*



MEGJEGYZÉSEK A FELADATHOZ:

A pont és a kör a középpontján átmenő bármely egyenesre szimmetrikus, végtelen sok szimmetriatengelye van.

A egyenes és a párhuzamosok által bezárt sáv az egyenesre, illetve a sáv határegyenesére merőleges bármely egyenesre szimmetrikus, ezen kívül az egyenes maga, illetve a sáv középpárhuzamosa is szimmetriatengely. Ezeknek is végtelen sok szimmetriatengelye van.

A körgyűrű szimmetriák szempontjából a pont és a kör társa. Mértani hely szempontjából rokon a sávval is, hiszen az egyik egy körtől, a másik az egyenestől adott távolságra vagy annál közelebb levő pontok mértani helye.

Egy körcikk tengelyesen szimmetrikus a körív felezőpontját a középponttal összekötő egyenesre.

Egy szögtartomány tengelyesen szimmetrikus a szögfelezőjének az egyenesére.

Pontnak és körnek egyetlen szimmetriaközéppontja van, a pont maga, illetve a kör középpontja.

Egyenesnek és sávnak végtelen sok szimmetriacentruma van, ezek az egyenes pontjai, illetve a sáv középpárhuzamosának pontjai.

Szögtartománynak nincs szimmetriacentruma (kivéve a teljes szöget, ami maga a sík, és annak minden pontja szimmetriacentrum).

Tengelyesen vagy középpontosan szimmetrikus alakzatok építése tartományokból

A következő kérdések vizsgálatához szükséges eszközként merev fóliára rajzolt szimmetrikus alakzatokat (pont, kör, egyenes, sáv, körgyűrű, körcikk, szögtartomány) javasolunk, amelyeket könnyen egymásra lehet mozgatni és így az alakzatok egyesítésével létrehozott új alakzatot is tudjuk szemléltetni.

Kérdések:

- Igaz-e, hogy két tengelyesen szimmetrikus alakzat mindig elhelyezhető úgy, hogy az együttes alakzat, két alakzat uniója, szimmetrikus legyen?
- Igaz-e, hogy két tengelyesen szimmetrikus alakzat mindig elhelyezhető úgy, hogy a két alakzat uniója ne legyen szimmetrikus?
- Igaz-e, hogy két középpontosan szimmetrikus alakzat mindig elhelyezhető úgy, hogy az együttes alakzat, két alakzat uniója, szimmetrikus legyen?
- Igaz-e, hogy két középpontosan szimmetrikus alakzat mindig elhelyezhető úgy, hogy a két alakzat uniója ne legyen szimmetrikus?
- Igazak-e ezek az állítások két alakzat metszetére is? Mindegyik esethez adj példát, illetve ellenpéldát!

Ha két tengelyesen vagy középpontosan szimmetrikus alakzatot úgy helyezünk el, hogy tengelyük, illetve középpontjuk egymásra kerüljön, akkor a két alakzat egyesítése (és metszete is) tengelyesen illetve középpontosan szimmetrikus lesz.

Vannak olyan alakzatpárok, amelyeket bárhogyan helyezünk el, az együttes alakzat mindenképpen szimmetrikus lesz. Például:

- Mindenképpen tengelyesen szimmetrikus egy körből és egyenesből álló alakzat, mivel a kör középpontján áthaladó és az egyenesre merőleges egyenes mindkettőnek szimmetriatengelye.
- Mindenképpen szimmetrikus két párhuzamos sáv uniója és metszete is, hiszen, ha a sávok (határoló egyeneseik) párhuzamosak egymással, akkor tengelyesen szimmetrikus a metszet és az unió is, ha a sávok metszik egymást, akkor a középpárhuzamosok metszéspontja közös szimmetriacentruma a metszetnek és az uniónak is.

Az alakzatokról szóló részben láttuk, hogy sávok és szögtartományok metszeteként minden három- és négyszög előállítható. A következőkben az figyeljük meg, hogyan kaphatjuk meg a szimmetrikus három- és négyszögeket.

5.44. Feladat: *Építsen szimmetrikus három- és négyszögeket szögtartományok és sávok metszeteként!*

MEGJEGYZÉSEK A FELADATHOZ:

Ehhez a feladathoz is feltétlenül adjunk átlátszó, nem túl puha A4-es fóliából kivágott, szögtartományokat és sávokat imitáló alakzatokat (néhány jelzett szimmetriatengellyel) a tanulók kezébe.

Az ilyen típusú feladatoknak és foglalkozásoknak haszna, hogy a szimmetria tulajdonságokról a körzős-vonalzós módszernél sokkal mélyebb, vagy éppen azt megalapozó tapasztalatokat ad a tanulóknak. Másik fontos előny, hogy itt a tartományokra is a szokásosnál erősebb hangsúly helyeződik.

5.1.6. Szerkesztési feladatok

A mindennapi élet legkülönbözőbb területein használunk geometriai szerkesztéseket, oldunk meg szerkesztési feladatokat.

Egy szerkesztési feladat abban áll, hogy egy adott tulajdonságú alakzatot keresünk

- adott alakzatok (pontok, egyenesek, körök, ...) ismeretében,
- bizonyos előre rögzített eszközök felhasználásával és alkalmazási szabályok betartásával.

A szerkesztési feladat megoldása során

- el kell döntenünk, hogy az adott tulajdonságú célalakzat egyáltalán létezik-e, és pozitív válasz esetén
- ki kell dolgozni egy elméleti szerkesztési módot;
- meg kell vizsgálnunk, hogy a talált szerkesztés pontosan, vagy csak közelítő módon hajtható végre;
- ténylegesen el kell végezni a szerkesztési eljárást.

A szerkesztési feladatok megoldásának vezérfonala
vázlat - elemzés,
szerkesztés,
szerkesztés leírása,
szerkesztés helyességének igazolása,
megoldhatóság feltételeinek, megoldások számának vizsgálata.

Megjegyzés:

Ez a lista nem mechanikus követelmény, hanem a szükséges tennivalók áttekintése. Ha mereven ragaszkodunk hozzá, fennáll a veszélye, hogy a tanulók összefüggő gondolatláncát mesterkélten szétválasztjuk veszélye.

Az elméleti szerkesztési eljárás létezése és a rajzilag előállított alakzat pontossága egyaránt függ a felhasználható eszközök és szabályok rendszerétől. (Például szabályfüggő, hogy egy ellipszis minden pontját megrajzolhatjuk-e egy ellipszográf segítségével, vagy csak véges sok pontját tudjuk-e előállítani körző és vonalzó felhasználásával.)

Bár a technikai fejlődés a szerkesztési eszközök felsorolhatatlan tárát hozta és hozza létre, a körző és vonalzó használatára épülő, véges sok lépést megengedő euklideszi szerkesztés történeti szempontból különösen jelentős. Az euklideszi szerkesztés feladatainak rendszerező vizsgálata vezetett ugyanis az első olyan bizonyításokhoz, amelyek valaminek a létezését cáfolták.

A matematika története már a görögök idejéből őriz nevezetes nem szerkeszthető feladatokat, mint a kocka megkettőzése, a szögharmadolás, a kör négyszögesítése. Ugyanakkor az eszközök és szabályok megváltoztatásával rokon, analóg feladatok egész sora keletkezett amely a METAMATEMATIKA, a modern matematika egy ágának a megszületéséhez vezetett.

A szerkeszthetőség elméletének kutatásai egy érdekes eredményre vezettek, kiderült, hogy az euklideszi szerkesztésekben a körző és a vonalzó szerepe nem egészen szimmetrikus. Ha ugyanis úgy módosítjuk a játékszabályokat, hogy egy egyenes tényleges meghúzása helyett megelégszünk az egyenest meghatározó két pont megadásával, akkor a vonalzó elhagyható.

Megmutatható, hogy pontosan azok a szerkesztési feladatok oldhatók meg euklideszi értelemben, amelyek egyetlen körző használatával is megoldhatók. (Mohr, G. 1672. [157] és Mascheroni, L. 1797. [150]). Ugyanezen feladatok megoldásánál a körző csak akkor helyettesíthető egyetlen vonalzóval, ha adott egy körvonal és a kör középpontja is. (Poncelet, J. V. 1822 [189]. és Steiner, J. 1833. [208]) A körvonal szükségességét mi is természetesnek érezzük, és elődeink is úgy érezték, a középpont megadásának követelményén azonban számos nagy ember (köztük Napóleon is) elgondolkodott. Radamacher és Toeplitz bebizonyították, hogy **egy adott kör középpontja egyetlen vonalzóval nem szerkeszthető meg** (Radamacher, H. u. Toeplitz, O. 1933. [192]).

Egy szerkesztés lehetetlen voltát kevés diáknak áll módjában belátni, mert a bizonyítás eszközei messze belenyúlnak a magasabb matematikába, komoly algebrai ismereteket igényelnek. Ez a tény különleges módszertani értéket ad ennek a klasszikus példának.

Elemi geometriai ismeretekkel és módszerekkel megmutatható ugyanis, hogy egy matematikailag egyértelműen meghatározott, létező alakzat nem érhető el az adott eszköz és szabályrendszer segítségével.

A bizonyítás alapgondolata:

Tegyük fel, hogy – az állítással ellentétben – szerkeszthető a középpont.

Ez azt jelenti, hogy létezik egy olyan véges sok lépésből álló lineáris algoritmus (egyenesek húzásából álló szerkesztési előírás), amelynek eredményeként a kör középpontja, mint két egyenes (vagy mint egy egyenes és a megadott körvonal) metszéspontja áll elő.

Tekintsünk egy olyan ponttranszformációt, amely

– az adott kört egy körbe,

– a behúzott egyeneseket egyenesekbe,

– az adott körrel, illetve az egymással alkotott metszéspontokat a megfelelő képegyeneseknek a képkörrel, illetve egymással alkotott metszéspontjaiba viszi.

Ez a transzformáció a képegyeneseknek egy olyan rendszerét hozza létre, amelyen a képkör középpontja ugyanazon szerkesztési eljárással nyerhető, mint a kiindulási egyenesekből az alapkör középpontja.

Ahhoz, hogy az indirekt bizonyítást befejező ellentmondáshoz jussunk, elegendő egy olyan ponttranszformációt megadni, amely rendelkezik a fenti tulajdonságokkal, de az alapkör középpontját nem a képkör középpontjába viszi. Amennyiben ugyanis ilyen transzformációt találunk, akkor középpontként két különböző pont adódna, ami a középpont szerkeszthetőségére tett feltevésünk hamis voltát mutatja.

A keresett ponttranszformáció létezését különbözőképpen bizonyították.

- Hilbert analitikusan adott meg egy ilyen projektív transzformációt (Hilbert, D. 1962 [106]).
- Az ábrázoló geometriában olyan bizonyítások ismertek, amelyek középpontos vetítést (sztereografikus projekciót, perspektivikus ábrázolást) használnak.
- Mi a térgeometria egyszerű eszközeivel és a térbeli egybevágósági transzformációk tulajdonságaira alapozva megmutatjuk a ferde körkúp egy fontos tulajdonságát (lásd 525. oldal) és ennek alapján vázoljuk a keresett leképezés létezésének bizonyítását (lásd 527. oldal).

5.1.7. A tér elsődlegessége a síkkal szemben

A csecsemő születésétől kezdve a térben szerzi az ismereteit. Az első kézügyességfejlesztő játékok is egységben kezelik a testeket és a keresztmetszetüket, vetületüket adó síkidomokat. Nem véletlen, hogy az első lapozós mesekönyvek nem három dimenziót érzékeltető térhatású ábrák, hanem igazi térbeli konstrukciók, amellyel megszerezheti a gyermek azt a tapasztalatot, hogy „belevasaljuk" a síkba a teret.

Éppen ezért nem a gyermeki fejlődés természetes útja, hogy a mértan órán hirtelen lapos lesz a világ és jó sokáig az is marad.

A térgeometria mostoha sorsa nem csupán a tanítására fordított idő csekély arányában, hanem ennek életkor szerinti egyenetlen eloszlásában is megnyilvánul. Az elemi térélményekkel és a térbeli (mértani) testekkel jórészt a pre-matematikai szakaszban találkoznak, majd (komoly) képletek, számolások (felszín, térfogat) foglalkoznak ismét velük. Amíg a térgeometriai fogalmakkal látszólag nem történik semmi, azalatt a diákok személyisége, ismeretrendszere, igényszintje, matematikai szabatossága nagyon sokat fejlődik, ezért a folyamat rosszabb a semminél, *negatív.* A gyerekkori, szemléletes, mutogatós (játszótéri piros vödrös) szinten megrekedt, nem fejlesztett fogalmak kizáródnak az igényes matematikai tevékenységből. Sokszor még azoknál is hiányoznak az igényszintnek megfelelő gondolati és kommunikációs eszközök, akik jól látnak térben és még le is tudják rajzolni azt, amit elképzelnek.

Tanuláspszichológiai szempontból ezzel magyarázható, hogy sok (a matematika más területén jól teljesítő) fiatal miért idegenkedik a térgeometriától.

Ha a rendszerezett tanulás, a matematika építkezése éveken át meg is kívánja a síkgeometria előnyben részesítését, semmi nem indokolja a kizárólagosságát.

Lehet síkbeli transzformációt térbeli mozgatással létrehozni, kezelhetünk egy síkidomot egy háromdimenziós test síkmetszeteként vagy vetületeként.

A mozgatás, a körülöttünk levő világhoz jobban kötődő tevékenység haszna nem csupán abban van, hogy a térgeometria a gyerekkel együtt érik nagykorúvá, hanem abban is, hogy segíti a különböző agyfunkciók együttes működését, jót tesz a strukturált bevésésnek és a könnyebbé teszi a felidézést.

Ahogyan a műveletek és műveleti szabályok rokonságának felismerése elősegíti a műveletfogalom alaposabb megértését, ugyanez történhet geometriai fogalmakkal is.

5.45. Feladat: *Keressen olyan tananyagrészeket, ahol lehetőséget lát a sík és tér párhuzamos kezelésére. Gondolja meg, hogy mi mindent jelenthet például az $x = 1$ kifejezés.*

MEGJEGYZÉSEK A FELADATHOZ:

Például az $x = 1$ egyszerű kifejezés (szituációtól függően) azt jelenti, hogy:

- akármit is jelöl az x, már nem ismeretlen, hanem 1 az értéke;
- a számegyenes 1-es pontjáról van szó;
- a sík, vagy a tér egy olyan pontjáról van szó, amelynek 1 az első koordinátája;
- a sík, vagy a tér összes olyan pontjáról van szó, amelynek 1 az első koordinátája, azaz az x tengelyre az (1;0) vagy az (1;0;0) pontban merőleges egyenest, illetve síkot írtuk le.

Hasonlóan járhatunk el az alábbi kifejezésekkel is:

- $x^2 + y^2 = 1$ (kör vagy henger);
- $(\mathbf{a} - \mathbf{b})^2 = 1$ (két pont egységnyi távolságra van a síkban vagy a térben, az egyik ponttól egységnyi távolságra levő pontok összessége a síkban vagy a térben);
- $\mathbf{n}(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) = 0$ (síkbeli egyenes vagy térbeli sík egyenlete).

A szintetikus és analitikus, a síkbeli és térbeli, a geometrián belüli és a matematika más területei valamint a matematikán kívüli világ közötti kézenfekvő (vagy éppen nem kézenfekvő, de hasznos) kapcsolatrendszert is érdemes megszólítani.

A következő példákkal kedvet szeretnénk csinálni és ötletet adni a sík és tér összekapcsolásához. Nem mi találtuk ki, de szívesen átveszünk olyan példákat, amelyekben egy síkbeli probléma kezelhetőbbé válik, ha beágyazzuk a térbe, vagy éppen térbeli problémát oldunk meg síkmetszet, illetve alkalmas vetület segítségével. Bolyai például a hiperbolikus sík egyeneseire a párhuzamosság tranzitivitását a térbe kilépve bizonyította (Bolyai, 1973 [36]).

I. Sík és tér a pre-matematikai korszakban

5.46. Feladat: *Mit jelent a sík, az egyenes, a tér a pre-matematikai szakaszban (12 éves kor előtt)?*

MEGJEGYZÉSEK A FELADATHOZ:

Tapasztalatból tudom, hogy ingoványos területre érkeztünk. Volt rá példa, hogy a 12 éves diákjaim verbálisan vissza tudták adni az általam jól átgondolt definíciót, de a gondolatvilágukban nem hagyott nyomot. Már el tudták ismételni AZ EGYENES MINDEN IRÁNYBAN HATÁRTALANUL MEGHOSSZABBÍTHATÓ szóegyüttest, de arra kérdésre, hogy hány részre osztja az egyenest 6 pont azt válaszolták, hogy „attól függ, hogy a végére teszünk-e pontot". Vagy amikor a kitérő egyenest akartak kérdve kifejteni, akkor a kereszteződő utak problémáját felüljáróval, „felfelé görbe egyenes" konstrukcióval akarták megoldani.

Az alapfogalmakat nem definiáljuk, csak nevet adunk nekik és a térélményre alapozva leíró módon utalunk rájuk (tű hegye, kifeszített húr, ...). Itt nem matematikán belüli konstrukciókról van szó, hanem a valóságból eredő elvonatkoztatásokról. Az alakzatok pontokból állnak, de ezek még nem az axiomatikus felépítés PONTjai. Nagyon nagy lépés ebben a korban, hogy a pontot nem tartalmazó üres alakzatot is hozzávesszük a készletünkhöz.

Beszélünk síkról és térről. Ha a sík a tér része (márpedig az a természetes), akkor óhatatlanul előkerül a DIMENZIÓ kérdése is. Persze ez sem a Menger-Urysohn-féle absztrakt értelemben (Menger, 1928. [153]), hanem a tanulók tér- és mozgásélményére alapozva: a kockának van magassága, szélessége, a gödörnek van mélysége, a golyó gurul, az asztalon (nekem) jobbra és balra játékok fekszenek, a daru emelkedik felfelé és ereszkedik lefelé. A dimenzió intuitív szinten marad, amellyel a kiterjedést, illetve a szabadsági fokot jellemezzük. A pontnak nincs kiterjedése, az egyenesnek 1 van, ...

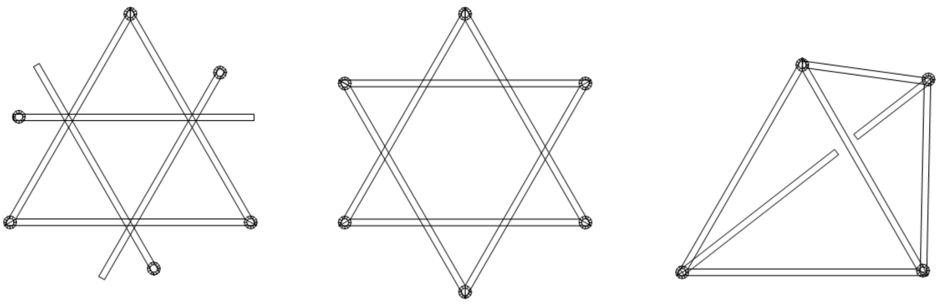
Tapasztalatom szerint az 1 dimenzió kimarad az iskolai tárgyalásból, 2 és 3 meg elkülönülve szerepel. Éppen ezért említem a következő konkrét-manuális tevékenységeket, amelyek bevezető feladatként szolgálhatnak a dimenzió fogalmának megértéséhez és egységes kezeléséhez.

Játék a gyufaszálakkal

A sík és tér közötti (észrevétlen) váltásra serkenthetjük a tanulókat például a következő játékkal:

- **A változat**: *6 gyufaszálból rakjál ki szabályos háromszögeket.*
- **B változat**: *6 gyufaszálból rakjál ki szabályos háromszögeket, ha csak a végpontjukban találkozhatnak a gyufaszálak.*
- **C változat**: *6 gyufaszálból rakjál ki 4 szabályos háromszöget, ha csak a végpontjukban találkozhatnak a gyufaszálak.*

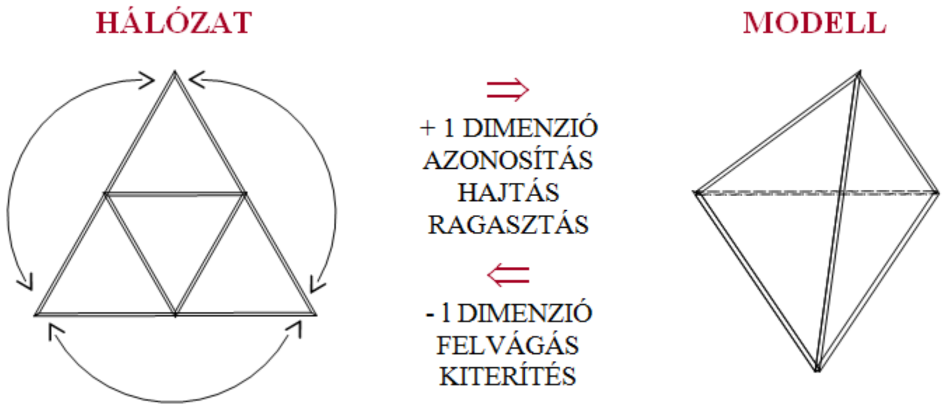
Az A és B változatnál általában a síkban maradnak a tanulók és vitatkoznak arról, hogy a nagy meg a kicsi háromszögek számítanak-e. A C változatnál úgy gondolják, hogy nem oldható meg, legalábbis a síkban maradva.



Testek építése – bontása

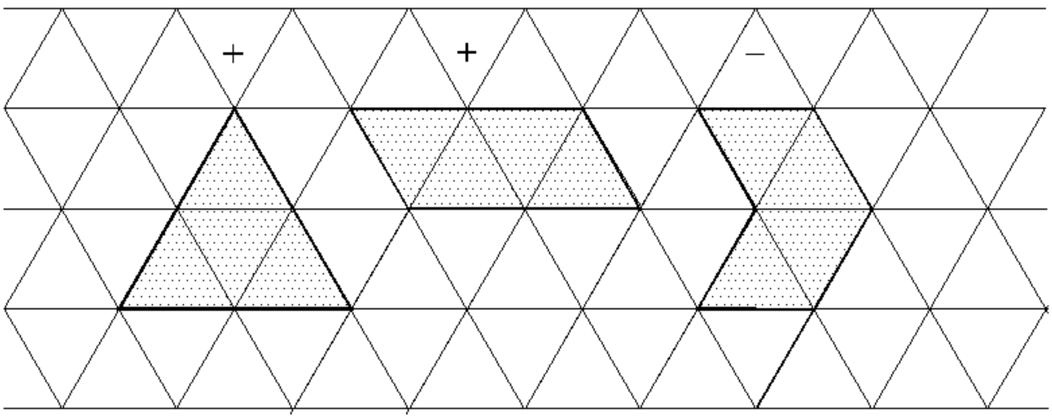
A dimenziók közötti mozgásra nagyon alkalmas a nyitható-csukható Polydron készlet, de már sokkal olcsóbb eszközökkel is nagyon értékes tapasztalatokat szerezhetünk.

Majdnem minden gyerek szívesen vágja ki testek (síkbeli) hálózatát és ragasztja össze (térbeli) modellé. Eközben (talán nem is tudatosan) számos matematikai tevékenységet (is) végez, pl. éleket és csúcsokat azonosít.



Már ezen a nagyon elemi szinten is szembesülhetnek megoldhatatlan feladattal.

- *4 egybevágó szabályos háromszögből építs olyan síkbeli alakzatokat, amelyben a háromszögek teljes oldallal csatlakoznak egymáshoz.*
- *Mindet megtaláltad? Keresd ki közülük azokat, amelyek egy tetraéder hálózatának tekinthetők.*

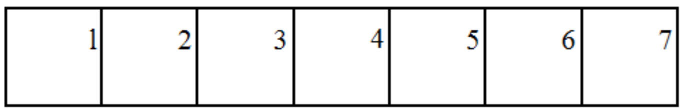


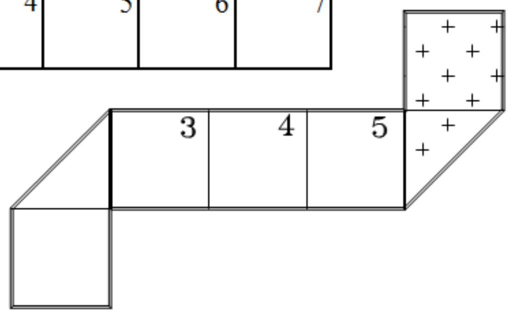
Ez és a kockára vonatkozó analóg feladat sokkal inkább mentális feladat, mint eszköz és kézügyesség kérdése. Mégis segít és munkára serkent, ha háromszög- vagy négyzetrácsos papírt és (vagy) háromszögeket és négyzeteket adunk, esetleg aktív táblás vagy dinamikus geometriai feladatlapon manipulálhatnak a tanulók.

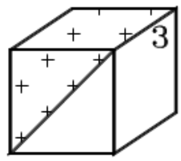
A hálózatokkal játszadozva problémamegoldás is előkerülhet.

Rendhagyó hálózat: *Hogyan lehet egy 1cm és 7 cm oldalhosszúságú téglalapból hajtogatással (vágás, tépés nélkül) egységélű kockát készíteni?*

Két probléma is adódik, egy négyzetet el kell dugni és kétszer is irányt kell váltani. Egy tanuló a következőképpen magyarázta el társainak a megoldását: „A felső és az alsó lapot mindenképpen el kell fordítani és a két befordulásnál egy-egy fél négyzetet el is dugunk. Csak arra kell vigyázni, hogy a csonka négyzetekből ki tudjunk rakni egy lapot. Ha a második és az utolsó előtti négyzeteket felezem, akkor meg tudom csinálni a kockát."







Még mindig a pre-matematikai szakaszban vagyunk?

Tekintsünk ezekre a hajtogatós, ragasztásos feladatokra a matematika szemszögéből. A testek hálózatával való játék egyfelől szép kombinatorikus feladatok kiindulópontja lehet, de nagyon gyorsan vezethet a matematika felsőbb régióiba is.

A modellezés közben végzett intellektuális tevékenység, az „azonosítás" az egyik fontos elrugaszkodási pont. Azt a tapasztalatot akarjuk általánosítani, hogy a hálózaton szereplő csúcsok közül legalább hármat azonosítani kell egymással, hogy térbeli csúcsot kapjunk, vagy legalább két sokszögoldalt, hogy él legyen belőle.

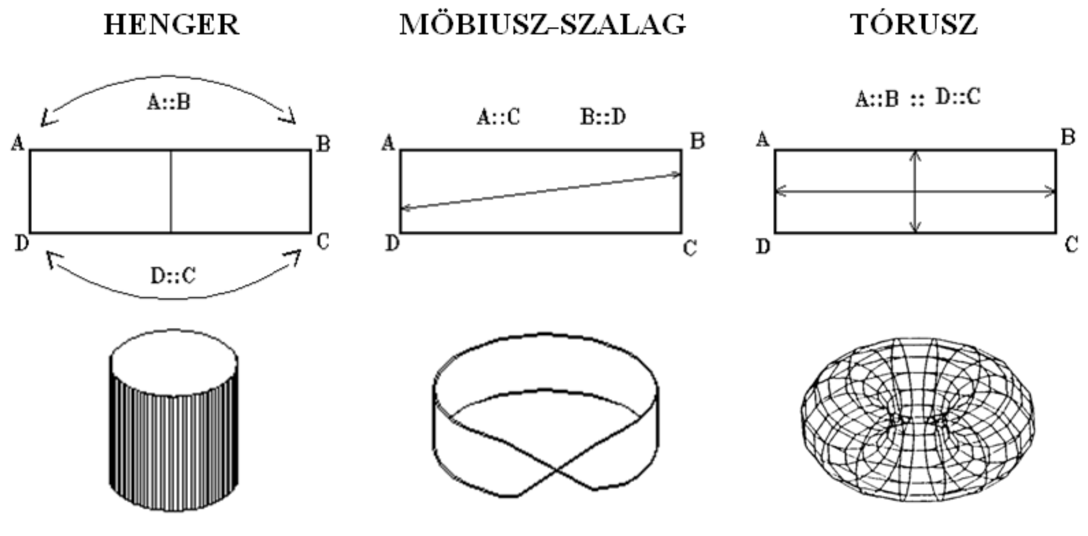
5.47. Feladat: *Legyen adott egy $ABCD$ téglalap. Azonosítsa a téglalap határpontjait (vagy azok egy részét) a megadott szabály szerint és jellemezze a kapott felületeket.*

a) *Azonosítsa a téglalap egyik szemközti oldalpárjának a velük párhuzamos középvonalra szimmetrikus pontjait.*

b) *Azonosítsa a téglalap egyik szemközti oldalpárjának a téglalap középpontjára szimmetrikus pontjait.*

c) *Azonosítsa a téglalap egy-egy szemközti oldalpárjának a velük párhuzamos középvonalra szimmetrikus pontjait.*

MEGJEGYZÉSEK A FELADATHOZ: A baloldali ábraegyüttes az a), a középső a b), a jobboldali pedig a c) feladathoz ad segítséget.



A másik elrugaszkodási pont az adott hálóhoz tartozó poliéder létezésének és egyértelműségének kérdése, amely a felületek belső geometriájával függ össze. A matematika olyan óriásai, mint Cauchy, A. D. Alexandrow és A. W. Pogorelov írtak a témához kapcsolódó cikkeket.

II. Egy középiskolai síkgeometriai feladat

5.48. Feladat: *A d'Alembert tétel*

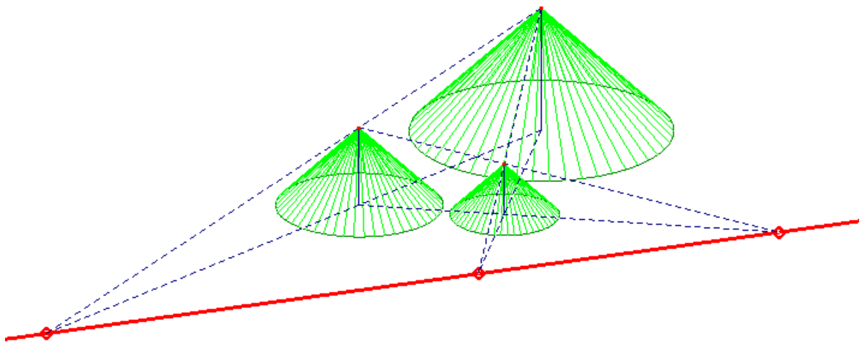
Három nem kongruens és nem koncentrikus kör páronként vett külső hasonlósági középpontjai egy egyenesen fekszenek. Ugyancsak egy egyenest alkot egy belső hasonlósági középpont két-két pár belső hasonlósági középpontjaival.

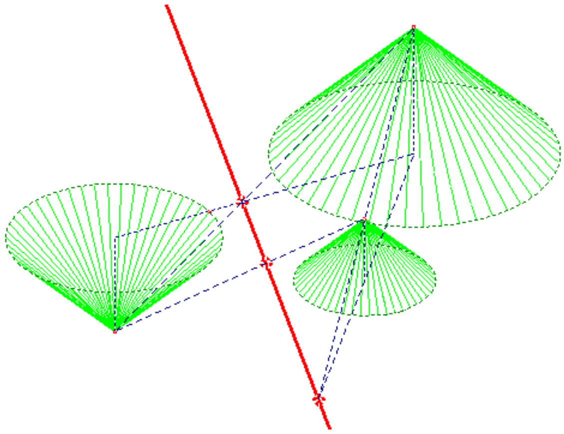
MEGJEGYZÉSEK A FELADATHOZ:

Nyilván ismernek többféle módszert az állítások igazolására (például a hasonlósági transzformációk egymásutánját használva), de mi most a csekély térgeometriai befektetés bőséges megtérülésére szeretnénk a figyelmet irányítani. Ez a bizonyítás Monge nevéhez fűződik.

Ha a körök középpontja egy egyenesen van, akkor nyilvánvalóan igaz az állítás.

Nem kollineáris középpontok esetében tekintsük a köröket 45°-os félnyílásszögű forgáskúpok alapköreinek. Az így kapott kúpok hasonlósági középpontja megegyezik a körök hasonlósági középpontjával. Mégpedig az alapsík ugyanazon oldalára állított kúpok esetében a körök külső (a felső ábra), ellentétes oldalon fekvő kúpok esetében a körök belső (alsó ábra) hasonlósági középpontjáról van szó. A kúpok hasonlósági pontjai illeszkednek a három csúcsai által meghatározott síkra és az alapsíkra is. A két sík metszésvonala egyenes, tehát a hasonlósági középpontok kollineárisak.





Azt is érdemes meggondolni, hogy

- a feltételek közül melyiknek mi a szerepe;
- miért nincs szó a 3 belső hasonlósági pontról;
- mi változik a bizonyításban, ha a kúp magassága nem a kör sugara;
- mi változik a bizonyításban, ha nem körökről, hanem homotetikus síkidomokról beszélünk;
- irányított körökkel (a ciklográfia nyelvén) mennyivel egyszerűbb lenne;
- ...

de nem erről a témáról írjuk ezt a könyvet.

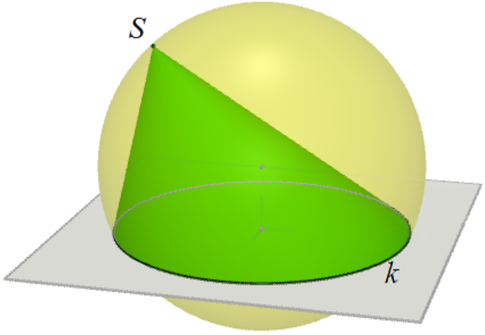
III. Problémamegoldás a sík és tér összekapcsolásával

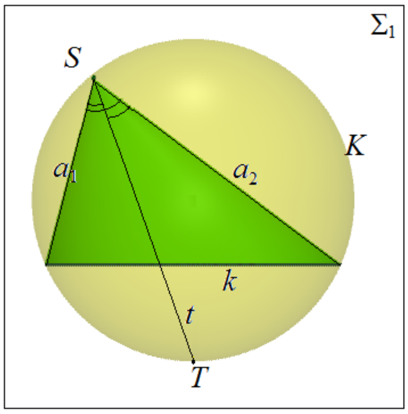
1.) A ferde körkúp egy érdekes tulajdonsága

A ferde körkúp palástjára írható olyan kör, amelynek síkja az alapkör síkjával nem párhuzamos.

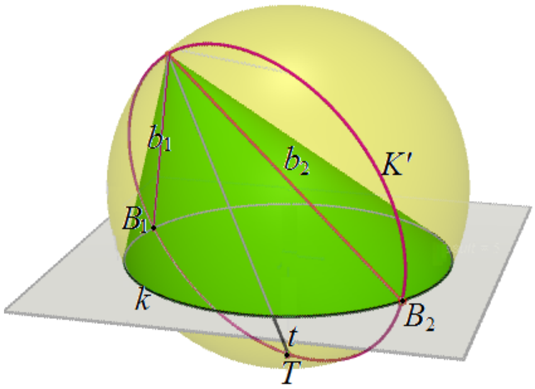
Legyen Σ_1 az S csúcsú, k vezérvonalú ferde körkúp, valamint a k kört és az S pontot tartalmazó gömbfelület közös szimmetriasíkja.

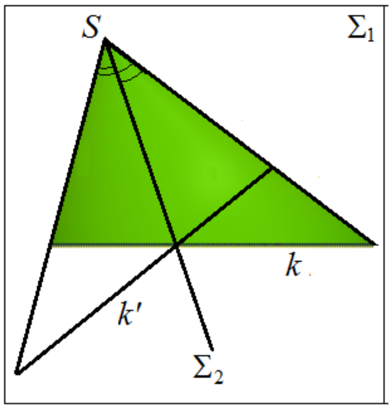
Az Σ_1 sík a kúpfelületből az a_1 és a_2 alkotókat, a gömbből egy K főkört metsz ki.





Az a_1 és a_2 alkotók t szögfelezője egyben felezi a K körnek az alkotók közé eső ívét is, így áthalad a k peremű gömbsapka T pólusán, középpontján is.





Fektessünk a t egyenesre egy másik síkot, amely a gömbfelületet egy K' körben, a kúpot pedig b_1 és b_2 alkotókban metszi. A b_1 alkotó a k és K' köröket ugyanazon B_1, a b_2 pedig B_2 pontban metszi. Mivel a k kör minden pontja gömbi és euklideszi értelemben is egyenlő távol van a T ponttól, a K' kör TB_1 és TB_2 (húrjai és így) ívei egyenlők, tehát t a b_1 és b_2 alkotók szögét is felezi.

Ezt a tényt úgy fogalmazhatjuk át, hogy a kúpfelületnek a t egyenesen átmenő síkkal alkotott metszetei t-re szimmetrikusak, ezért a t egyenest a kúpfelület tengelyének, szimmetriatengelyének is mondhatjuk.

Találtunk két olyan térbeli egybevágósági transzformációt, amely a kúpfelületet önmagába viszi, az egyik a Σ_1 síkra, a másik a t tengelyre vonatkozó tükrözés.

Az egyenesre való tükrözés előállítható két olyan síkra való tükrözés egymásutánjaként is, amelyek egymásra merőlegesek és metszésvonaluk az adott egyenes.

Mivel a t tengely a Σ_1 síkban fekszik, speciálisan úgy is megválaszthatjuk a t tükrözést helyettesítő két tükrözés síkjait, hogy az egyik maga a Σ_1 sík legyen, a másik pedig a Σ_1-re t-ben állított merőleges sík, a Σ_2.

A kúpfelület természetesen változatlan marad, ha egymás után mindkét tükrözést végrehajtjuk, azaz Σ_1-re, Σ_1-re és Σ_2-re egymás után tükrözünk. Mivel az S_1-re vonatkozó kétszeri tükrözés az egész teret helybenhagyja, ezt a két tükrözést elhagyhatjuk.

Eredményül azt kaptuk, hogy a kúpfelület magára az Σ_2 síkra is szimmetrikus. A kúpfelületre írt k kör Σ_2-re vonatkozó k' tükörképe tehát ugyancsak a kúpfelületre van írva, és mivel k síkja se nem párhuzamos Σ_2-vel, se nem merőleges rá, így k síkjától különböző állású síkban fekszik.

2.) Egy speciális transzformáció létezése
Létezik olyan ponttranszformációt, amely

- *az adott kört egy körbe,*
- *a behúzott egyeneseket egyenesekbe,*
- *az adott körrel, illetve az egymással alkotott metszéspontokat a megfelelő képegyeneseknek a képkörrel, illetve egymással alkotott metszéspontjaiba viszi.*
- *az adott kör középpontját nem a képkör középpontjába viszi.*

Legyen egy adott ferde körkúp csúcsa S, és legyenek k és k' a kúp palástjára írt különböző állású körök. A k kör síkját (alapsík) az S pontból vetítjük a k' kör síkjára (képsík).

Egy Q pont képe az SQ vetítősugárnak a képsíkkal alkotott metszéspontja áll elő, egy alapsíkbeli alakzat képét pedig a pontjaihoz húzott vetítősugarak összessége metszi ki a képsíkból.

A k kör vetítősugarai a kúp alkotói, így képe a k' kör.

Az alapsíkbeli egyenesek vetítősugarai egy síkot alkotnak, így képeik egyenesek lesznek, metsző egyenesek vetítősíkjainak közös egyenese (mint vetítősugár) a metszéspontot a képegyenesek metszéspontjára képezi le.

Hátra van még annak belátása, hogy a k kör középpontjának vetülete nem lehet a k'kör középpontja.

Ehhez tekintsük a kúpnak k-val és k'-vel közös szimmetriasíkjával alkotott metszetét.

A kimetszett körátmérők a kúp tengelyével (derékszögtől különböző) egyenlő szöget zárnak be, de nem párhuzamosak egymással, így felezőpontjaik a tengely (a metszetháromszögek szögfelezője) különböző partjára esnek, tehát nem lehet egyik a másik képe.

5.1.8. A többféle geometria kérdéséhez

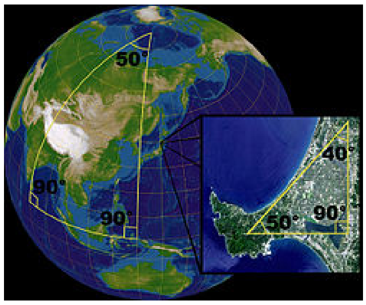
Nem gondoljuk a geometriák axiomatikus szétválasztását és a párhuzamos geometriák kezelését az iskolába vinni. Csupán a természetes környezetben oly gyakran előforduló alakzat (labda, gyümölcsök, szappanbuborék, csuklók, égitestek, szemgolyó) a gömb geometriai modelljének vizsgálatát javasoljuk.

Magunk is egy gömbszerű felületen élünk, amelyen gömbi koordináták szerint tájékozódunk.

A gömbfelület a 3 dimenziós tér része, amely így is sok érdekes vizsgálatra kínál alkalmat.

A gömbfelület (pl. a Lénárt-gömb) segítségével rögtön két geometriai rendszert is megismerhetnek a tanulók, aszerint, hogy mit nevezünk egyenesnek. Bár önmagában is nagyon érdekes, mégsem öncélú a gömbfelületen értelmezhető más geometriák vizsgálata. Az euklideszi geometria mibenlétét érti jobban az a tanuló, aki az euklídeszin kívül más rendszert is megismer, és ezt a gömbfelület esetében konkrét manipulációval teheti.

A tanulók fantáziáját Lénárt István a hagymaszeletelés technikájának változtatásával szokta ebbe az irányba terelni. Egy félbevágott hagymát szeletelhetjük narancsgerezdformán (forgásszimmetrikusan), de szeletelhetjük nagymamamódra, a vágódeszkára merőleges vágásokkal is. Az egyikkel gömbi főköröket vágunk, amelyekből a gömbi geometria egyenesei lesznek, a másikkal az egyenlítőre merőleges köröket, amelyek a hiperbolikus sík modelljében lesznek az egyenesek. Az euklideszi sík egyeneseit meg már ismerjük.



Felix Kleintől [125] származik a háromféle geometria és a kúpszeletek elnevezéseinek összekapcsolása, amely a kúpszelet ideális pontjainak száma és az egyeneshez külső pontból húzható párhuzamosok száma közötti analógiára utal. Ennek nyomán használjuk ezeket a jelzőket az Eukleidész (parabolikus), a Bolyai-Lobacsevszkij (hiperbolikus) és a Riemann (elliptikus) nevéhez kapcsolt geometriák megkülönböztetésére.

A 3 elemi síkgeometria sok közös tulajdonsággal rendelkezik, mindháromnak elemei a pontok és az egyenesek, és ezek tulajdonságaiban is van hasonlóság és sok eltérés is. A három elemi síkgeometriát szétválaszthatjuk háromszög szögösszegével, de kapcsolhatjuk a párhuzamosság fogalmához is.

- A parabolikus (euklideszi) geometriában a háromszög szögösszege 180°, egy egyeneshez egy külső pontból pontosan egy nem metsző egyenes húzható (párhuzamos).
- Az elliptikus geometriában a háromszög szögösszege nagyobb, mint 180°, nincsenek nem metsző egyenesek.
- A hiperbolikus geometriában a háromszög szögösszege kisebb, mint 180°, egy egyeneshez egy külső pontból végtelen sok nem metsző egyenes húzható. (A metszőket a nem metszőktől elválasztó két egyenes a párhuzamos.)

5.49. Feladat: *Az euklideszi síkgeometria tapasztalatainkból absztrakcióval keletkezett, vagy az euklideszi geometria egy axiomatikus rendszer, amelynek modellje a minden irányban végtelen kiterjedésűnek gondolt lap, pl. füzetlap?*

MEGJEGYZÉSEK A FELADATHOZ:

Történetiség és megismerés szerint a *keletkezés* az elsődleges, a matematika axiomatikus szemlélete szerint a síklap egy *modell.*

Lénárt István munkáiban a gömbi geometriára vonatkozó kezdő, haladó és intenzív szintű feladatokat, valamint módszertani ötleteket is talál. Ezekhez a feladatokhoz jól használható a rajzgömb, illetve speciális céloknak megfelelően más tárgyak, pl. pingpong labdák, narancsok.

5.50. Példa: *1. Mit tekinthetünk a gömbön egyenesnek?*

A gömbi geometrián belül az egyenes alapfogalom. Az euklideszi térben lévő gömbön egyenesnek a főkört tekinthetjük, a gömbnek és a gömb középpontján áthaladó síknak a metszésvonalát.

2. Hány részre bontja az egyeneseket 1, illetve 2 pont?

3. Van-e olyan háromszög a gömbi geometriában, aminek 3 derékszöge van? (Mit tekintünk – a gömbi geometrián belül értelmezve – két gömbi egyenes szögének?)

5.1.9. Geometriai fogalmak kialakítása és a geometriai térszemlélet fejlesztése (8. tétel)

A geometriai fogalmak fejlődésének szintjei. Szintetikus (elemi), koordináta- és vektorgeometria az általános és középiskolában. A térszemlélet fejlesztését szolgáló témakörök, módszerek és eszközök.

Megjegyzés: A többi tétel idevágó részeire is gondoljanak, itt csak a specialitásokra utalunk. Igyekezzenek saját példát keresni és azt végigkísérni a fogalomcsírától a pontos matematikai szintig.

1. A geometriatanítás céljai

   – a környező világ leírása, megértése és értelmezése

   – példa mutatása axiomatikus elméletre

   – gazdag és változatos feladatkészlet biztosítása a tanulók számára

   – megtanítani a diákokat sejtések megfogalmazására, bizonyítások készítésére, példák és ellenpéldák kitalálására

   – eszközt teremteni más matematikai területeknek

   – gazdagítani a tanulók matematikáról alkotott képét

2. A geometriai fogalmak fejlődésének szintjei

   Pierre és Diana Van Hiele szerint a geometriai gondolkodás fejlődése során a következő (egymásra épülő, de elkülöníthető) fogalmi szintek figyelhetők meg (részletesen lásd Hollai Mártánál [107]):

   Vizuális – látvány utáni megítélés

   Elemzés – pl. alakzatfajták osztályba sorolása az alkotórészek tulajdonságainak figyelembevételével

Informális dedukció – pl. a korábban felfedezett tulajdonságok kapcsolatrendszerének átlátása

Dedukció – tételek bizonyítása

Matematikai szigor – pl. tételek alkotása különböző axiómarendszerekben

A szintek a gyerekek korábbi tapasztalataitól és így a tanításuk során a fogalomépítést szolgáló módszerektől is erősen függenek. Példa: A sokszögek tanításának fogalmi vonatkozásai (részletesen lásd Török, J. 2007 [230])

A sokszögek osztályozása, Venn-diagramok, vizuális és nem vizuális szimmetriák

Körültekintően kell megválasztani, hogy az adott életkorban mit definiálunk, mert számos alapvető fogalmat igen nehéz definiálni.

Például általános iskolás korban sok egyszerű sokszöget ismernek, ki tudják ezeket választani a síkidomok közül, de a „sokszög" szabatos definíciója (pl. véges sok háromszög egyesítése vagy a zárt töröttvonalas) még túl nehéz számukra. Ugyanakkor könnyen definiálhatók és vizsgálhatók a speciális háromszög- és négyszögfajták.

Megérthetik a különbséget egy alakzat definíciója és egy már definiált alakzatról szóló egyéb igaz állítás között, vizsgálhatók logikai kapcsolatok, példa olyan igaz állításokra, melyek megfordítása nem igaz.

3. Szintetikus (elemi), koordináta- és vektorgeometria az általános és középiskolában.

   (részletesen célszerű a kerettanterv ([122]) és az ahhoz illeszkedő tankönyvsorozat alapján átnézni)

   A matematikai tartalom strukturálása különösen fontos a geometria tanítása során. A fogalomépítés folyamatában jelentős szerepet játszik az új ismeretek bevezetésének rendszere is és a problémamegoldásra vagy gyakorlásra szánt feladatok megválasztása is. Sokat segíthet a geometriai fogalmak megértésében, ha olyan tanulási környezetet teremtünk, amely gazdag nem csak a témakörön belüli, hanem a geometria különböző területei illetve a geometria és más témakörök közötti kapcsolatokban.

   Néhány matematikadidaktikai szempontból kulcsfontosságú fogalom
   Geometriai transzformációk
   – a transzformációk, mint függvények;
   – transzformációcsoport,
   – az erlangeni program
   Szögfüggvények és trigonometria
   Geometriai szerkesztések, a szerkeszthetőség kérdése
   Mérés és mértékek (távolság, terület, térfogat)
   a szakasz és szög mérése, kerület, felszín
   A szakaszfelező merőleges és a szögfelező közötti kapcsolat
   A tér ábrázolásai: a perspektíva geometriája, az ábrázoló geometria elemei
   A sík- és térgeometria kapcsolata
   – a túl korai szétválasztás problémái
   – síkgeometriai problémák megoldása a térben,

– térbeli problémák megoldása metszeten és vetületen
– analógiák és különbségek sík és tér között (pl. háromszög és tetraéder súlypontja, magasságpontja)
– analógiák és különbségek sík és gömb között
Euklidesz rendszere, egyszerűbb „más világok", pl. kutyageometria.
Néhány gyakori tanulói-tanári típushiba
– a négyzet nem téglalap (paralelogramma, trapéz ...)
– „általános" háromszög
– „egyenlőszárú trapéz", „szimmetrikus trapéz", „húrtrapéz" elnevezések
– „sztenderd" pozíció az egyes alakzatok ábrázolásában
– Egy táblán vagy feladatlapon ábrázolt négyszögről hogyan dönthetjük el, hogy pl. húrtrapéz-e (stb.) (nem úgy, hogy megmérjük vonalzóval a megfelelő szakaszok hosszát, még alacsony korosztályokban sem.)
Híres hibás bizonyítások (pl. minden háromszög szabályos)

4. A térszemlélet fejlesztését szolgáló témakörök, módszerek és eszközök A geometria tanítása során használunk

   - konkrét, megfogható alakzatokat, modelleket (műanyag, papír, stb), geometriai építőjátékokat, szöges táblát és más, akár hétköznapi eszközöket
   - átlátszó papírt, körzőt, vonalzót, ábrákat és rajzokat
   - Lénárt gömböt
   - dinamikus eszközöket (aktív tábla, számítógépes programok)

   Mindezek használata alapvetően fontos segédeszközei a geometria tanításának, de a modellhez kötött ismeret téves fogalmak kialakulásához is vezethet!

   A számítógépek jól alkalmazhatók szemléltetésre és tanulói kísérletekhez, tapasztalatszerzésre, összefüggések felfedezésére, sejtések kialakítására. A számítógép semmiképp nem pótolhatja teljesen a manipulatív eszközökkel, játékokkal, a hétköznapi élettel való kapcsolatok felderítésével szerezhető sokoldalú valódi tapasztalatokat.

Irodalom

Hollai Márta: A geometriai gondolkodás és a transzformációs szemlélet szintjei. [107]

Török Judit: Angol, belga, magyar és spanyol matematikatanítási hagyományok összehasonlítása. [230] 3-13.

Kerettantervek [122]

Kitekintő irodalom

Vásárhelyi Éva: A vizuális reprezentáció fontossága a matematikaoktatásban. [245]

Vásárhelyi Éva: A számítógép a matematikaoktatásban. Oktatási segédanyag. [244]

5.2. Vertikális és horizontális kapcsolatok

5.2.1. Tömegközéppont és nyomatékok a geometriában

Hraskó Andrásnak az ELTE 2011. november 23-i „Tanárklub”-ján elmondott előadása kibővített változatban. A legfrissebb változat elérhető az alábbi címen:

http://matek.fazekas.hu/portal/tanitasianyagok/Hrasko_Andras/termtud2011/tomeg/tomegkp.pdf

ALAPELVEK

A fizikában gyakran érdemes helyettesíteni egy tömegpontrendszert a tömegpontok tömegközéppontjába helyezett egyetlen, a tagok tömegének összegével megegyező tömeggel. Ezzel kapcsolatban érdemes megjegyezni az alábbi alapelveket:

I. alapelv

A tömegközéppontot megkaphatjuk úgy is, hogy a tömegpontrendszert részekre osztjuk, kiszámoljuk a részek tömegközéppontját és helyettesítő tömegét, majd meghatározzuk az így kapott rendszer tömegközéppontját. Bármely részekre osztásnál végül ugyanahhoz a tömegközépponthoz jutunk.

II. alapelv

Ha a C pontban γ kg, a B pontban β kg tömeg van, akkor tömegközéppontjuk a CB szakasznak az az A_1 pontja, amelyre $CA_1/A_1B = \beta/\gamma$ (másképp: az γCA_1, βBA_1 forgatónyomatékok kiegyenlítik egymást).

Megjegyzés

Vegyük észre, hogy a pontrendszer tömegközéppontja nem változik, ha benne minden egyes súly nagyságát megszorozzuk ugyanazzal a nullától különböző számmal.

Megfogalmazhatjuk az I., II. alapelvek egy olyan következményét, amelyet később széleskörűen alkalmazunk: *ha a rendszert két részre osztjuk, az egyik tömegközéppontja S_1, a másiké S_2, míg a teljes rendszer tömegközéppontja S, akkor S_1, S és S_2 egy egyenesen vannak.*

A II. alapelv vektorgeometriai analogonja az osztópont helyvektorára vonatkozó nevezetes tétel:

Osztópont helyvektora Ha a C pont helyvektora $\overrightarrow{C}$, a B ponté $\overrightarrow{B}$ és A_1 a BC egyenesen úgy helyezkedik el, hogy $CA_1/A_1B = \beta/\gamma$, akkor A helyvektora:

$$\overrightarrow{A_1} = \frac{\beta\overrightarrow{B} + \gamma\overrightarrow{C}}{\beta + \gamma}.$$

Itt tehát az $\overrightarrow{B}$, $\overrightarrow{C}$ vektorok „súlyozásával” kapjuk az $\overrightarrow{A_1}$ vektort. Fontos, hogy itt az CA_1/A_1B arányt és vele együtt β/γ arányt is előjelesen értelmezzük, tehát CA_1/A_1B pozitív, ha C-től A_1 ugyanabban az irányban van, mint A_1-től B – azaz A_1 a BC *szakaszon* van –, míg arány negatív ez a két irány különböző.

Az I. alapelv az alábbi vektoralgebrai azonossággal analóg:

$$\frac{\left(\sum_{i=1}^{I}\beta_i\overrightarrow{B}_i\right)+\left(\sum_{j=1}^{J}\gamma_j\overrightarrow{C}_j\right)}{\left(\sum_{i=1}^{I}\beta_i\right)+\left(\sum_{j=1}^{J}\gamma_j\right)}=\frac{\left(\sum_{i=1}^{I}\beta_i\right)\cdot\frac{\sum_{i=1}^{I}\beta_i\overrightarrow{B}_i}{\sum_{i=1}^{I}\beta_i}+\left(\sum_{j=1}^{J}\gamma_j\right)\cdot\frac{\sum_{j=1}^{J}\gamma_j\overrightarrow{C}_j}{\sum_{j=1}^{J}\gamma_j}}{\left(\sum_{i=1}^{I}\beta_i\right)+\left(\sum_{j=1}^{J}\gamma_j\right)},$$

ahol tehát $\overrightarrow{S}$ a bal oldalon feltüntetett vektor, míg

$$\overrightarrow{S}_1=\frac{\sum_{i=1}^{I}\beta_i\overrightarrow{B}_i}{\sum_{i=1}^{I}\beta_i}\qquad\qquad \overrightarrow{S}_2=\frac{\sum_{j=1}^{J}\gamma_j\overrightarrow{C}_j}{\sum_{j=1}^{J}\gamma_j}.$$

Negatív tömeget nem szokás értelmezni, de a vektorok együtthatói nyugodtan lehetnek negatív számok. Mivel az I., II. alapelvek vektorokkal is értelmezhetők így a későbbiekben negatív tömegekkel is számolni fogunk.

Ekkor előfordulhat az is, hogy néhány tömeg összege zérus. Ha például fent $\beta+\gamma=0$, akkor nem létezik olyan A_1 pont a BC egyenesen, amelyre $CA_1/A_1B=\beta/\gamma=-1$, de a CA_1/A_1B arány határértéke épp (-1), ha A_1 tart a végtelenbe az egyenesen bármelyik irányban. A vektoros megközelítésben is hasonlót látunk: a $\overrightarrow{B}-\overrightarrow{C}$ vektor párhuzamos a BC egyenessel, tehát annak „végtelen távoli pontja” felé mutat.

III. alapelv

A tömegpontrendszernek a tömegközépponton átmenő tengelyre vonatkozó forgatónyomatéka zérus.

IV. alapelv

A tömegpontrendszernek a t tengelyre vonatkozó tehetetlenségi nyomatéka

$$\Theta_t=m_1d_1^2+m_2d_2^2+\ldots+m_nd_n^2, \tag{5.1}$$

ahol n a tömegpontok számát, m_i az i-edik tömegpont tömegét, d_i pedig a tengelytől való távolságát jelöli.

V. alapelv *Steiner tétel*

Ha a t tengely átmegy a tömegpontrendszer súlypontján, az u tengely pedig párhuzamos t-vel és tőle d távolságban van, akkor

$$\Theta_u=\Theta_t+md^2,$$

ahol $m=m_1+m_2+\ldots+m_n$ a pontrendszer teljes tömegét jelöli.

Síkbeli pontrendszer esetén beszélhetünk a pontrendszernek egy adott pontra vonatkozó tehetetlenségi nyomatékáról. Ezen a nyomatékon az adott pontban az adott síkra merőleges tengelyre vonatkozó tehetetlenségi nyomatékot értjük.

VI. alapelv

A síkbeli pontrendszernek a súlypontjára vonatkozó tehetetlenségi nyomatéka így is számítható:

$$\Theta_S=\frac{1}{m}\cdot\sum_{1\le i<j\le n}m_im_jr_{ij}^2,$$

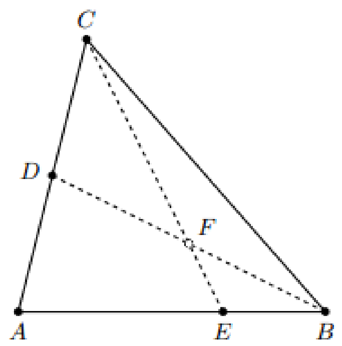
ahol n a tömegpontok számát, m_i az i-edik pont tömegét, m az össztömeget, r_{ij} az i-edik és j-edik tömegpont távolságát jelöli.

Megjegyezzük, hogy a síkbeli pontrendszer pontra vonatkozó tehetetlenségi nyomatéka az átlagos négyzetes eltéréshez rendkívül hasonló mennyiség. a súlypontra vonatkozó tehetetlenségi nyomaték a szórásnégyzettel rokon mennyiség. A fenti V., VI. alapelvek bizonyítása analóg a statisztika hasonló összefüggéseinek bizonyításával.

FELADATOK

1. feladat

Legyen az ABC háromszög AC oldalának felezőpontja D, továbbá messe a C-n és BD szakasz F felezőpontján átmenő egyenes az AB oldalt az E pontban! Milyen arányban osztja ketté E az AB oldalt?

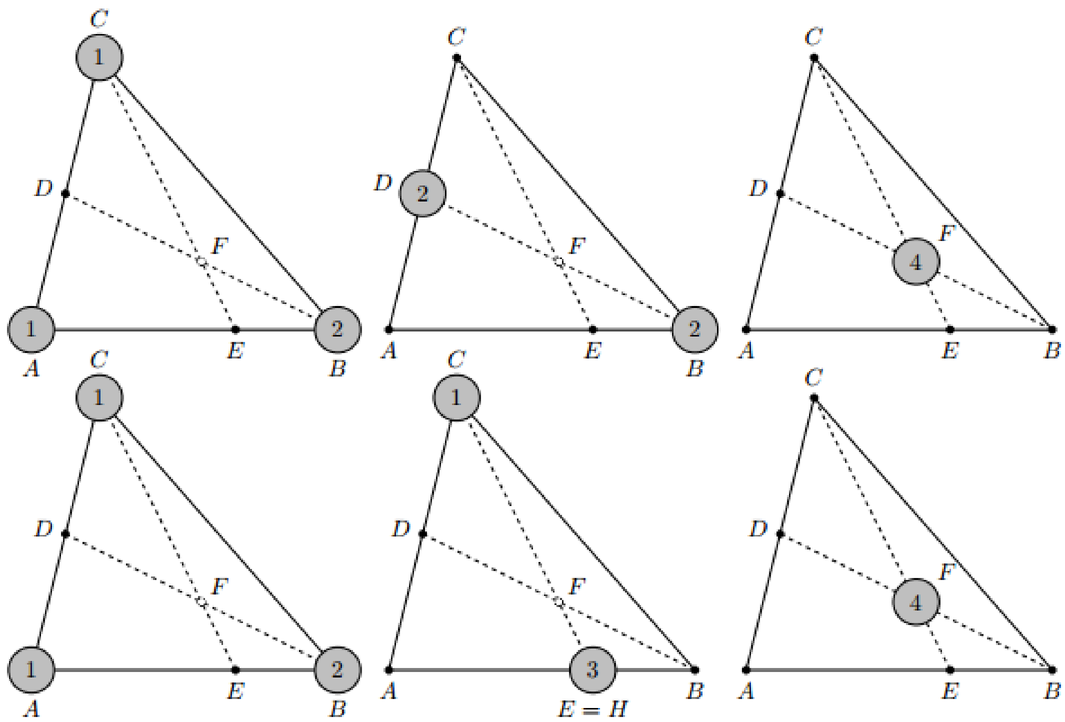


Megoldás

Tekintsük az $(A^1; C^1; B^2)$ tömegpontrendszert! Mivel $(A^1; C^1) \equiv D^2$ és $(D^2; B^2) \equiv F^4$, így vizsgált rendszerünk tömegközéppontja F.

Másrészt $(A^1; B^2) \equiv H^3$, ahol H az AB oldal B felőli harmadoló pontja. Így $(H^3; C^1) = F^4$, azaz F illeszkedik a CH egyenesre, azaz H is a CF egyenesre, tehát $H = E$.

A kérdezett arány: $AE/EB = 2/1$.



2. feladat *Nemzetközi Magyar Matematika Verseny 2007*
Az ABC háromszög belsejében felveszünk egy P pontot, majd összekötjük a három csúccsal. Az AP egyenes messe a szemközti (BC) oldalt az A_1 pontban. Hasonlóan legyenek B_1, C_1 a BM, CM egyenesek és a megfelelő csúcsokkal szemközti oldalak metszéspontjai. Tudjuk, hogy P felezi az AA_1 szakaszt. Bizonyítsuk be, hogy

$$\frac{AB_1}{B_1C} + \frac{AC_1}{C_1B} = 1!$$

Megoldás
Azt szeretnénk elérni, hogy az a háromszög csúcsaiba helyezett tömegekből álló rendszer tömegközéppontja a P pont legyen. Legyen $BA_1/A_1C = \gamma/\beta$. Ha a B pontba β, a C pontba γ kg tömeget teszünk, akkor ezt a rendszert az A_1 pontba helyezett $(\beta+\gamma)$ tömegű tömegpont helyettesítheti. Rakjunk az A pontba egy $(\beta+\gamma)$ kg-os tömeget! Így a három tömegpontból – $A(\beta+\gamma)$, $B(\beta)$, $C(\gamma)$ – álló rendszer tömegközéppontja P lesz.

Alkalmazzuk az I. alapelvet, számoljuk ki másképp a tömegközéppontot! A két pontból álló $A(\beta+\gamma)$, $B(\beta)$ rendszer tömegközéppontja az AB oldalnak az a C' pontja, amelyre $AC'/C'B = \beta/(\beta+\gamma)$. Mivel a teljes rendszer P tömegközéppontja a 2. alapelv szerint a $C'C$ szakaszon kell legyen, így a C' pont megegyezik a C_1 ponttal. Hasonló összefüggésre juthatunk az AC oldalon is. Így tehát:

$$\frac{AC_1}{C_1B} = \frac{\beta}{\beta+\gamma}, \qquad \frac{AB_1}{B_1C} = \frac{\gamma}{\beta+\gamma}, \qquad \Longrightarrow \qquad \frac{AC_1}{C_1B} + \frac{AB_1}{B_1C} = \frac{\beta}{\beta+\gamma} + \frac{\gamma}{\beta+\gamma} = 1.$$

3. feladat

Az $ABCD$ paralelogramma BC oldalának felezőpontja F, a CD oldal D-hez közelebbi harmadolópontja E, az EF egyenes az AC átlót a P, a BD átló meghosszabbítását a Q pontban metszi. Határozzuk meg az

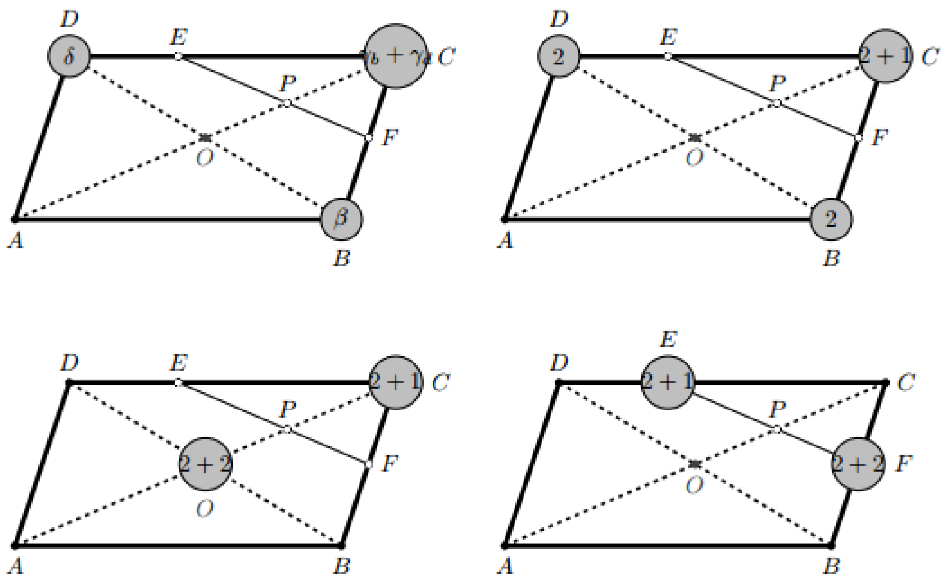
$$EP/PF, \qquad AP/PC, \qquad EQ/QF, \qquad DQ/QB$$

arányok értékét!

Megoldás

Először a P ponttal foglalkozunk, súlyokat helyezünk a B, C, D pontokba úgy, hogy a rendszer tömegközéppontja a P pontban legyen. Jelölje ezeket a tömegeket rendre β, γ és δ! A B, D csúcsokba egyenlő tömegeket helyezünk ($\beta = \delta$), hogy tömegközéppontjuk a paralelogramma O középpontjában legyen és így a teljes rendszer tömegközéppontja az OC átlóra essen. A C csúcsba helyezett tömeg két részből áll: $\gamma = \gamma_b + \gamma_d$. Az egyik rész ($\gamma_b$)egyenlő a B-be helyezett súllyal (β), így ezek tömegközéppontja F lesz, a másik rész (γ_d) fele akkora súlyú, mint a D-be helyezett tömeg (δ), hogy tömegközéppontjuk E legyen. A kívánt $\beta = \delta = \gamma_b = 2\gamma_d$ feltételnek tehát megfelel a (B^2, C^3, D^2) tömegpontrendszer, azaz

$$(B^2, C^3, D^2) \equiv P^7.$$



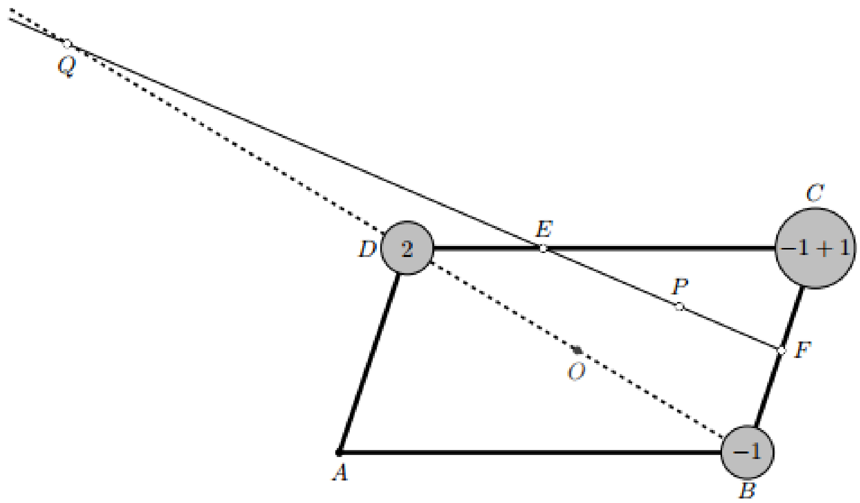
Mivel $(B^2, C^2) \equiv F^4$ és $(D^2, C^1) \equiv E^3$, így $EP/PF = \frac{4}{3}$.

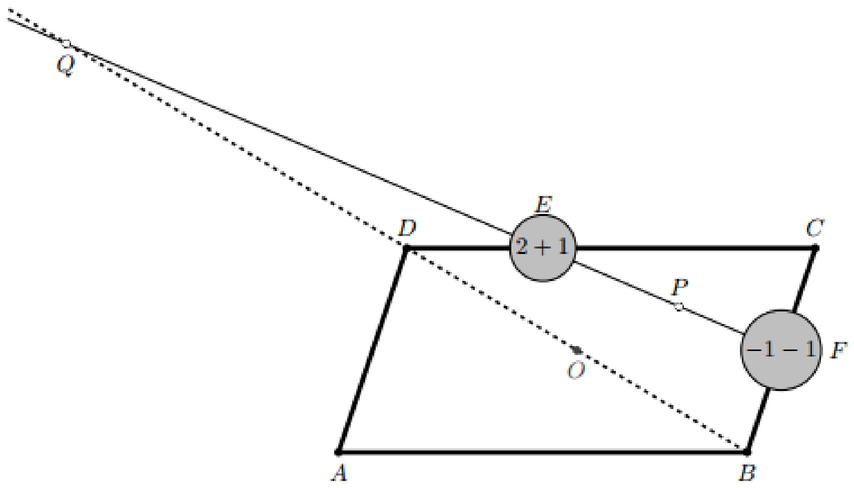
Másrészt $(B^2, D^2) \equiv O^4 \equiv (A^2, C^2)$, így $P^7 \equiv (B^2, C^3, D^2) \equiv (A^2, C^5)$, azaz $AP/PC = 5/2$.

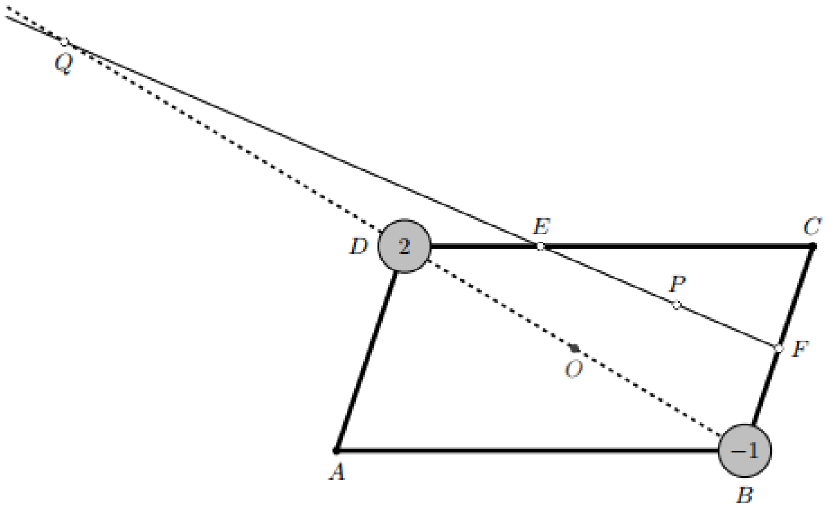
Most vizsgáljuk Q-t! Szeretnénk, hogy Q legyen a $(B^\beta, C^{\gamma_b+\gamma_d}, D^\delta)$ rendszer tömegközéppontja. Szeretnénk, hogy a tömegközéppont az EF egyenesen legyen, azaz $(B^\beta, C^{\gamma_b}) \equiv F^{\beta+\gamma_b})$ $(D^\delta, C^{\gamma_d}) \equiv E^{\delta+\gamma_d})$, tehát az ezekkel analóg $\beta = \gamma_b$, $\delta = 2\gamma_d$ feltételeket továbbra is meg akarjuk tartani.

Most még azt szeretnénk, hogy a tömegközéppont az BD átlóra is illeszkedjék, azaz C-ben összesen nulla súly legyen ($\gamma_b = -\gamma_d$). Megfelelő lesz a (B^{-1}, C^0, D^2) tömegpontrendszer, azaz

$$(B^{-1}, C^0, D^2) \equiv Q^1.$$







Mivel $(B^{-1}, C^{-1}) \equiv F^{-2}$ és $(D^2, C^1) \equiv E^3$, így $(F^{-2}, E^3) \equiv Q^1$, tehát $EQ/QF = -\frac{2}{3}$, ahol az előjel azt fejezi ki, hogy az $\overrightarrow{EQ}$, $\overrightarrow{QF}$ vektorok ellenkező irányításúak.

Másrészt $(B^{-1}, D^2) \equiv Q^1$, így $DQ/QB = -\frac{1}{2}$ az előzőhöz hasonló értelmű előjellel.

4. feladat

Adott az ABC háromszög és a P pont. Az AP, BC egyenesek metszéspontja A_1 és ehhez hasonlóan $B_1 = BP \cap CA$, $C_1 = CP \cap AB$.

Ismeretes, hogy

$$\frac{AB_1}{B_1C} = \frac{b_1}{b_2}, \qquad \frac{CA_1}{A_1B} = \frac{a_1}{a_2}.$$

Határozzuk meg a $\frac{BC_1}{C_1A}$ arányt!

Megoldás

Feltehetjük, hogy $AB_1 = b_1$,$B_1C = b_2$, $CA_1 = a_1$, $A_1B = a_2$ és legyen $BC_1 = c_1$, $C_1A = c_2$. Szeretnénk súlyokat helyezni a háromszög csúcsaiba úgy, hogy az $(A^\alpha B^\beta C^\gamma)$ rendszer tömegközéppontja P legyen. Ha az A-ba és C-be helyezett súlyokat úgy választjuk meg, hogy arányuk

$$\frac{\alpha}{\gamma} = \frac{b_2}{b_1} \tag{5.2}$$

legyen, akkor tömegközéppontjuk B_1 lesz, így a teljes rendszer tömegközéppontja a BB_1 egyenesen lesz. Ha még azt is elérjük, hogy a C-be és A-ba kerülő tömegek aránya

$$\frac{\gamma}{\beta} = \frac{a_2}{a_1} \tag{5.3}$$

legyen, akkor e kettő tömegközéppontja A_1-ben lesz, így a teljes rendszeré az AA_1 egyenesen, az előzőeket is figyelembe véve tehát P-ben.

A (5.2), (5.3) arányoknak egyszerre felelnek meg az

$$\alpha = b_2 a_2, \qquad \beta = b_1 a_1, \qquad \gamma = b_1 a_2 \tag{5.4}$$

súlyok.

Kezdjük most a tömegközéppont szerkesztését az A, B csúcsokba helyezett tömegekkel. Ezek tömegközéppontja az AB egyenes azon C_0 pontjában lesz, amelyre

$$\frac{\beta}{\alpha} = \frac{c_2}{c_1}, \tag{5.5}$$

azaz

$$\frac{b_1 a_1}{b_2 a_2} = \frac{c_2}{c_1}. \tag{5.6}$$

A teljes rendszer tömegközéppontja, azaz P a CC_0 egyenesre illeszkedik, ami csak úgy lehetséges, hogy $C_0 = C_1$, azaz a keresett arányn értéke

$$\frac{BC_1}{C_1A} = \frac{c_1}{c_2} = \frac{b_2 a_2}{b_1 a_1}. \tag{5.7}$$

A (5.6), (5.7) összefüggések az $a_1 b_1 c_1 = a_2 b_2 b_2$ alakba írhatók át. A feladat megoldása során lényegében bizonyítottuk az alábbi nevezetes összefüggést:

Ceva tétel

Ha A_1, B_1, C_1 az ABC háromszög BC, CA, AB oldalegyenesének tetszőleges pontjai, akkor az AA_1, BB_1, CC_1 egyenesek akkor és csakis akkor mennek át egy ponton, ha

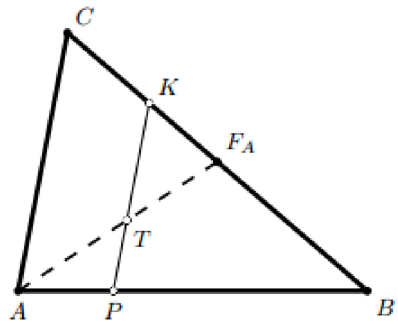
$$\frac{AB_1}{B_1C} \cdot \frac{CA_1}{A_1B} \cdot \frac{BC_1}{C_1A} = 1.$$

5. feladat

Adott az ABC háromszög. Egy AC-vel párhuzamos egyenes az AB oldalt P-ben, az AF_A súlyvonalat T-ben, a BC oldalt K-ban metszi. Határozzuk meg az AC oldal hosszát, ha tudjuk, hogy $PT = 3$, $TK = 5$!

Megoldás

Helyezzünk az A, B, C csúcsokba α, $\beta = \beta_a + \beta_c$, γ tömegeket úgy, hogy a rendszer tömegközéppontja T-ben legyen!



Ha elérjük, hogy az (A^α, B^{β_a}) alrendszer tömegközéppontja P, a (C^γ, B^{β_c}) alrendszer tömegközéppontja pedig K legyen, akkor a teljes rendszer tömegközéppontja a PK egyenesre kerül. Mivel $PK \| AC$, így valamely x valós számra

$$\frac{BP}{PA} = \frac{BK}{KC} = x, \tag{5.8}$$

azaz $\alpha = x\beta_a$, $\gamma = x\beta_c$. Szükséges még, hogy a tömegközéppont az A-ból induló súlyvonalra kerüljön, aminek $\gamma = \beta$, azaz $\beta_a + \beta_c = x\beta_c$, röviden

$$\frac{\beta_a}{\beta_c} = x - 1 \tag{5.9}$$

az algebrai feltétele. Így

$$(A^\alpha, B^{\beta_a}, C^\gamma) \equiv (P^{\beta_a(1+x)}, K^{\beta_c(1+x)}),$$

tehát a $\frac{KT}{TP} = \frac{5}{3}$ feltétel megfelelője a

$$\frac{\beta_a}{\beta_c} = \frac{5}{3} \tag{5.10}$$

reláció. A (5.9) összefüggést figyelembe véve kapjuk, hogy $x = \frac{8}{3}$, azaz az ACB, PKB háromszögek hasonlóságából (5.8) alapján

$$AC = \frac{AB}{PB}KP = KP\frac{AP + PB}{PB} = KP \cdot \left(1 + \frac{AP}{PB}\right) = KP\left(1 + \frac{1}{x}\right) = 8\left(1 + \frac{3}{8}\right) = 11.$$

A teljes megoldáshoz szükséges annak igazolása, hogy a megadott konfiguráció létezik. Ha $AC = 11$ és B tetszőleges, az AC egyenesre nem illeszkedő pont a síkon, és P az AB, K a CB oldalt osztja fel $3:8$ arányban, akkor a PK szakasz hossza 8 és a fenti súlyozás mutatja, hogy az AF_A súlyvonal $3:5$ arányban, tehát 3 és 5 egység hosszúságú részekre osztja fel.

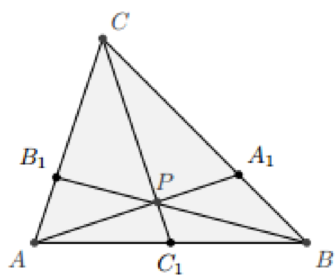
6. feladat (*Kömal*)
Adott az ABC háromszög. A háromszög belsejébe elhelyezkedő tetszőleges P pont esetén képezhetjük az

$$AP \cap BC = A_1, \qquad BP \cap CA = B_1, \qquad CP \cap BA = C_1$$

pontokat. Mely P pontra lesz az

$$\frac{A_1P}{A_1A} + \frac{B_1P}{B_1B} + \frac{C_1P}{C_1C}$$

összeg értéke maximális?



Megoldás

Ha P az $\left(A^{\alpha}; B^{\beta}; C^{\gamma}\right)$ súlyozott pontrendszer tömegközéppontja, akkor $\left(A^{\alpha}; B^{\beta}\right) \equiv C_1^{\alpha+\beta}$, így $\frac{A_1P}{AP} = \frac{\alpha}{\beta+\gamma}$, így

$$\frac{A_1P}{AA_1} = \frac{\alpha}{\alpha+\beta+\gamma}.$$

Ehhez hasonlóan kapjuk, hogy

$$\frac{B_1P}{BB_1} = \frac{\beta}{\alpha+\beta+\gamma}, \qquad \frac{C_1P}{CC_1} = \frac{\gamma}{\alpha+\beta+\gamma}$$

amiből azonnal következik, hogy a vizsgált arány értéke konstans, mindig 1.

7. feladat Mutassuk meg, hogy a súlyozás területekkel is megadható! Nevezetesen, ha $A^{\alpha}B^{\beta}C^{\gamma} = P^{\alpha+\beta+\gamma}$, akkor

$$\alpha : \beta : \gamma = T_{BPC} : T_{CPA} : T_{APB}.$$

(Ahogy a súlyok is kaphatnak különböző előjelet, úgy a háromszögek területe is a háromszög körüljárásának megfelelő előjellel értendő.)

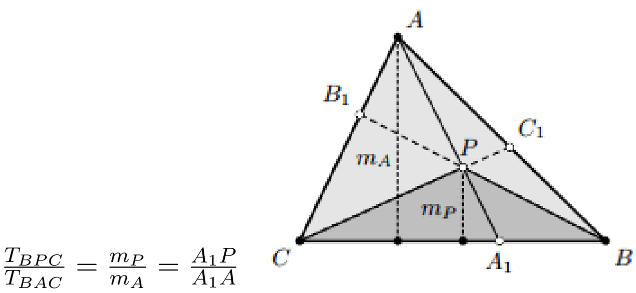
Megoldás

Ha $AP \cap BC = A_1$, akkor

$$\frac{T_{BPC}}{T_{BAC}} = \frac{A_1P}{A_1A} = \frac{\alpha}{\alpha+\beta+\gamma},$$

így

$$T_{BPC} : T_{CPA} : T_{APB} = \frac{T_{BPC}}{T_{BAC}} : \frac{T_{CPA}}{T_{CBA}} : \frac{T_{APB}}{T_{ACB}} = \alpha : \beta : \gamma.$$



Megjegyezzük, hogy az A_1 pont mindig létrejön, ha $\beta+\gamma \neq 0$, ellenben ha $\beta+\gamma \neq 0$, akkor nem jöhet létre, AP párhuzamos a BC egyenessel. Ha pedig $\alpha+\beta+\gamma = 0$ – és csak ekkor – a P pont nem lesz valódi pont, az AA_1, BB_1, CC_1 egyenesek ilyenkor párhuzamosak.

8. feladat

A háromszög AB, BC, CA oldalain úgy helyezkednek el a C_1, A_1, B_1 pontok, hogy az AA_1, BB_1, CC_1 szakaszok egy közös P ponton mennek át. Adott az AB_1C_1, BC_1A_1, CA_1B_1 háromszögek területe: T_A, T_B, T_C. Határozzuk meg az $A_1B_1C_1$ háromszög t területét!

Megoldás

Ha P, az $A^\alpha B^\beta C^\gamma$ tömegpontrendszer súlypontja és T az ABC háromszög területe, akkor a 7. feladat eredménye szerint az APB, BPC, CPA háromszögek területe rendre

$$\gamma\frac{T}{\alpha+\beta+\gamma}, \alpha\frac{T}{\alpha+\beta+\gamma}, \beta\frac{T}{\alpha+\beta+\gamma}.$$

Vizsgáljuk az A_1PB_1, B_1PC_1, C_1PA_1 háromszögek t_C, t_A, t_B területét is!

$$\frac{t_C}{T_{APB}} = \frac{PA_1 \cdot PB_1}{PA \cdot PB} = \frac{\alpha\beta}{(\gamma+\beta)(\gamma+\alpha)},$$

tehát

$$t_C = T\frac{\alpha\beta\gamma}{(\gamma+\beta)(\gamma+\alpha)(\alpha+\beta+\gamma)},$$

és ehhez hasonlóan

$$t_B = T\frac{\alpha\beta\gamma}{(\beta+\alpha)(\beta+\gamma)(\alpha+\beta+\gamma)},$$

$$t_A = T\frac{\alpha\beta\gamma}{(\alpha+\gamma)(\alpha+\beta)(\alpha+\beta+\gamma)}.$$

Vegyük észre, hogy $t = t_a + t_b + t_c$, azaz közös nevezőre hozás és egyszerűsítés után

$$t = 2T\frac{\alpha\beta\gamma}{(\alpha+\gamma)(\gamma+\beta)(\beta+\alpha)}. \tag{5.11}$$

Másrészt

$$\frac{T_C}{T} = \frac{CB_1 \cdot CA_1}{CA \cdot CB} = \frac{\alpha\beta}{(\gamma+\alpha)(\gamma+\beta)},$$

és ehhez hasonlóan adódik $\frac{T_B}{T}$ valamint $\frac{T_A}{T}$, tehát

$$T_A T_B T_C = T^3\left(\frac{\alpha\beta\gamma}{(\gamma+\alpha)(\alpha+\beta)(\beta+\gamma)}\right)^2. \tag{5.12}$$

A (5.11), (5.12) egyenletek összevetéséből

$$t^2 T = 4T_A T_B T_C. \tag{5.13}$$

Mivel $T = t + T_A + T_B + T_C$, így (5.13)-ből

$$t^2(t + T_A + T_B + T_C) = 4T_A T_B T_C,$$

azaz

$$t^3 + t^2(T_A + T_B + T_C) - 4T_A T_B T_C = 0. \tag{5.14}$$

Ha például T_A, T_B, T_C pozitív mennyiségek, akkor (5.14) gyökeinek szorzata – a $4T_A T_B T_C$ mennyiség – pozitív, így a gyökök közül egy vagy három pozitív. Másrészt a gyökök kéttényezős szorzatainak összege (5.14)-ben zérus, tehát nem lehet három pozitív gyök. Ezek szerint (5.14) egyetlen pozitív gyöke megadja az egyetlen lehetséges eredményt t-re.

9. feladat
Adott egy háromszög és egy egyenes. Hogyan súlyozzuk a háromszög csúcsait, hogy tömegközéppontjuk az egyenesre essen?

Megoldás
Egy súlyozáshoz tartozó tömegközéppont pontosan akkor esik az adott egyenesre, ha a súlyozott pontrendszernek az adott egyenesre vonatkozó forgatónyomatéka zérus. Ennek számbavételéhez jelöljük ki az egyenes egyik normálvektorát (elég egy az egyenesre merőleges irányítás rögzítése is) és jelölje d_A, d_B és d_C a háromszög egyes csúcsainak az adott egyenestől mért irányított távolságait! Az $(A^\alpha, B^\beta, C^\gamma)$ súlyozás akkor és csakis akkor megfelelő, ha

$$d_A \cdot \alpha + d_B \cdot \beta + d_C \cdot \gamma = 0. \tag{5.15}$$

Megjegyzés
Fordítsuk meg a kérdést! Adott az ABC háromszög és legyenek d_A, d_B, d_C tetszőleges valós számok, amelyek között van zérustól különböző. Igaz-e, hogy a (5.15) összefüggést kielégítő $(A^\alpha, B^\beta, C^\gamma)$ súlyozásokhoz tartozó tömegközéppontok egy egyenesen vannak?

A válasz igenlő, itt nem indokoljuk. Azonban abban a speciális esetben, amikor $d_A = d_B = d_C$, akkor mégsem valódi egyenest, hanem a sík „idális egyenesét” kapjuk. Ez a pontok tekintetében éppen az $\alpha + \beta + \gamma = 0$ esetnek felel meg, ekkor ugyanis az $A^\alpha B^\beta C^\gamma$ rendszer súlypontja nem valódi pont, hanem az egymással párhuzamos AA_1, BB_1, CC_1 egyenesek közös ideális pontja.

10. feladat *Menelaosz tétel*
Az ABC háromszög AB, BC, CA oldalegyenesein adott egy-egy pont: C_1, A_1 és B_1. Fejezzük ki az

$$AB_1, \qquad B_1C, \qquad CA_1, \qquad A_1B, \qquad BC_1, \qquad C_1A,$$

hosszakkal annak szükséges és elégséges feltételét, hogy az A_1, B_1, C_1 pontok egy egyenesre esnek.

Megoldás
Feltesszük, hogy az A_1, B_1, C_1 pontok egymástól különbözők és rendre az

$$(A^0, B^{\alpha_1}, C^{\alpha_2}), \qquad (A^{\beta_2}, B^0, C^{\beta_1}), \qquad (A^{\gamma_1}, B^{\gamma_2}, C^0)$$

súlyozáshoz tartozó tömegközéppontok.

Vizsgáljuk azt az esetet, hogy a pontok egy egyenesen vannak, amelynek egyenlete:

$$d_A \cdot \alpha + d_B \cdot \beta + d_C \cdot \gamma = 0, \tag{5.16}$$

tehát

$$\begin{array}{ccccccccc}
d_A \cdot 0 & + & d_B \cdot \alpha_1 & + & d_C \cdot \alpha_2 & = & 0 & \Longrightarrow & \frac{\alpha_2}{\alpha_1} = -\frac{d_B}{d_C}; \\
d_A \cdot \beta_2 & + & d_B \cdot 0 & + & d_C \cdot \beta_1 & = & 0 & \Longrightarrow & \frac{\beta_2}{\beta_1} = -\frac{d_C}{d_A}; \\
d_A \cdot \gamma_1 & + & d_B \cdot \gamma_2 & + & d_C \cdot 0 & = & 0 & \Longrightarrow & \frac{\gamma_2}{\gamma_1} = -\frac{d_A}{d_B}.
\end{array}$$

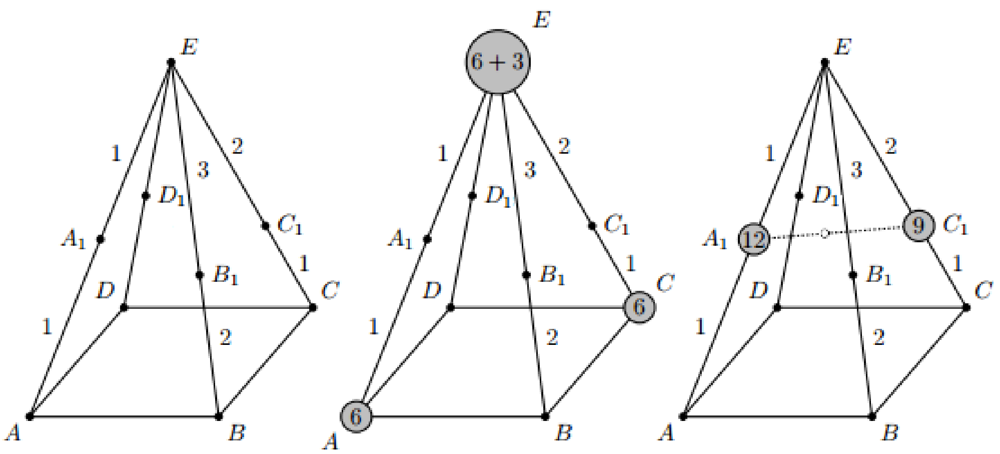
Mivel
$$\frac{\beta_2}{\beta_1} = \frac{AB_1}{B_1C}, \qquad \frac{\alpha_2}{\alpha_1} = \frac{CA_1}{A_1B}, \qquad \frac{\gamma_2}{\gamma_1} = \frac{BC_1}{C_1A},$$
így a fenti három jobb oldali összefüggés szorzata:
$$\left(-\frac{d_C}{d_A}\right) \cdot \left(-\frac{d_B}{d_C}\right) \cdot \left(-\frac{d_A}{d_B}\right) = \frac{\beta_2}{\beta_1} \cdot \frac{\alpha_2}{\alpha_1} \cdot \frac{\gamma_2}{\gamma_1},$$
azaz
$$-1 = \frac{AB_1}{B_1C}\frac{CA_1}{A_1B}\frac{BC_1}{C_1A}. \tag{5.17}$$
A (5.17) feltétel tehát szükséges ahhoz, hogy az A_1, B_1, C_1 pontok egy egyenesre essenek. Az Olvasóra hagyjuk annak igazolását, hogy elégséges is.

11. feladat

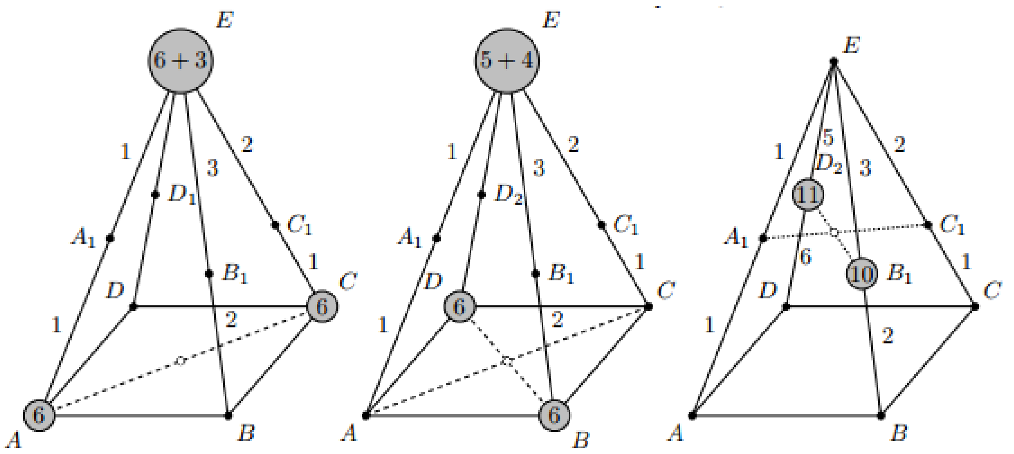
Az $ABCDE$ szabályos négyoldalú gúla alapja az $ABCD$ négyzet. Egy sík az A_1, B_1, C_1, D_1 pontokban metszi el a gúla EA, EB, EC, ED oldaléleit. Határozzuk meg az ED_1/D_1D arányt, ha
$$\frac{EA_1}{A_1A} = 1, \qquad \frac{EB_1}{B_1B} = \frac{3}{2}, \qquad \frac{EC_1}{C_1C} = \frac{2}{1}.$$

Megoldás

Tekintsük az $(A^6; C^6; E^9)$ tömegpontrendszert! Mivel
$$(A^6; E^6) \equiv A_1^{12} \quad \text{és} \quad (C^6; E^3) \equiv C_1^9,$$
így $(A^6; C^6, E^9)$ tömegközéppontja az A_1C_1 szakaszon van. Másrészt
$$(A^6; C^6) \equiv (B^6; D^6), \quad \text{így} \quad (A^6; C^6, E^9) \equiv (B^6; D^6; E^9).$$



A $(B^6; D^6, E^9)$ pontrendszert szétbontjuk a $(B^6; E^4)$, $(D^6; E^5)$ tömegpontrendszerekre. Tudjuk, hogy $(B^6; E^4) \equiv B_1^{10}$. Tekintsük azt a D_2 pontot, amelyre $(D^6; E^5) \equiv D_2^{11}$. Az eredeti tömegpontrendszer súlypontja a B_1D_2 szakaszra is illeszkedik, tehát a B_1D_2, A_1C_1 szakaszok metszők, azaz D_2 az $A_1B_1C_1$ pontokon átmenő síknak és az ED egyenesnek is pontja, tehát $D_2 = D_1$. A D_2 pont definíciója szerint $\frac{ED_1}{D_1D} = \frac{6}{5}$.



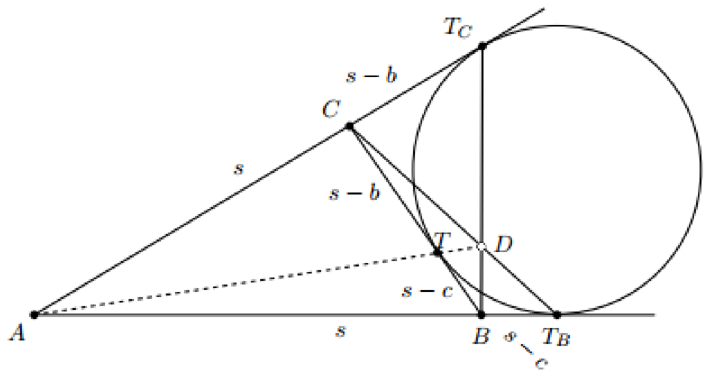
12. feladat (Balk M. B., Boltyánszkij V. G. [25])
Jelölje az ABC háromszög BC oldalához hozzáírt körnek az AB oldal meghosszabbítására, a BC oldalra illetve az AC oldal meghosszabbítására eső érintési pontját rendre T_B, T és T_C. Mutassuk meg, hogy a BT_C, CT_B egyenesek D metszéspontja illeszkedik az AT egyenesre!

I. megoldás

Felhasználjuk az alábbi összefüggéseket:

$$AT_B = AT_C = s, \qquad BT_B = BT = s - c, \qquad CT_C = CT = s - b,$$

ahol s a háromszög félkerületét jelöli.



Helyezzünk rendre

$$-(s-b)(s-c), \qquad s(s-b), \qquad s(s-c)$$

előjeles súlyokat az A, B, C pontokba! Az így kapott súlyozott pontrendszer D tömegközéppontja az AT egyenesen van, hiszen

$$\left(B^{s(s-b)}; C^{s(s-c)}\right) \equiv T^{as}.$$

Másrészt

$$\left(A^{-(s-b)(s-c)}; B^{s(s-b)}\right) \equiv T_B^{c(s-b)},$$

azaz D illeszkedik a CT_B egyenesre és

$$\left(A^{-(s-b)(s-c)}; C^{s(s-c)}\right) \equiv T_C^{b(s-c)}$$

miatt a BT_C egyenesre is. Az AT, CT_B, BT_C egyenesek tehát egy pontban metszik egymást, épp ezt kellett igazolnunk.

II. megoldás

Azt kell igazolni, hogy az AT, BT_C, CT_B egyenesek egy ponton mennek át. A Ceva-tétel pont erről a szituációról szól, csak kissé szokatlan, hogy a P pont a háromszögön kívül helyezkedik el. Mivel

$$\frac{AT_B}{T_BB} \cdot \frac{BT}{TC} \cdot \frac{CT_C}{T_CA} = \frac{s}{-(s-c)} \cdot \frac{s-c}{s-b} \cdot \frac{s-b}{-s} = 1,$$

így a Ceva-tétel szerint valóban egy ponton megy át az említett három egyenes.

III. megoldás

Egy körről és érintőiről szól a feladat. Alkalmazzuk az alábbi nevezetes tételt!

Brianchon tétel

Ha egy hatszögbe kúpszelet írható, akkor a hatszög szemköztes csúcsait összekötő egyenesek egy ponton mennek át.

Mostani hatszögünk kissé elfajult. Oldalegyenesei:

$$AC, \quad AC, \quad CB, \quad CB, \quad BA, \quad BA.$$

Ha egy érintő hatszög két szomszédos oldala egybeesik, akkor metszéspontjuknak azaz közös csúcsuknak az érintési pont tekintendő, ugyanis ha kissé elmozdítjuk az egyik érintőt, hogy egy közeli pontban érintsen, akkor a létrejövő metszéspont az érintési pontok közelében lesz. Így a csúcsok:

$$AC \cap AC = T_C, \quad AC \cap CB = C, \quad CB \cap CB = T, \quad CB \cap AB = B, \quad AB \cap AB = T_B, \quad AB \cap AC = A,$$

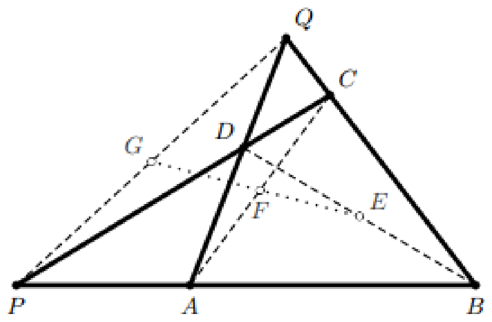
a szemköztes csúcsokat összekötő egyenesek pedig:

$$T_CB, \qquad CT_B, \qquad TA,$$

amelyek tehát a Ceva-tétel értelmében egy ponton mennek át.

13. feladat

Mutassuk meg, hogy ha az $ABCD$ négyszög AB, CD oldalegyenesei a P, a BC, DA oldalegyenesei a Q pontban metszik egymást, akkor a PQ szakasz felezőpontja illeszkedik az AC, BD átlók felezőpontjait összekötő egyenesre!



Megoldás

Először helyezzünk tömegeket a P, B, Q pontokba úgy, hogy tömegközéppontjuk D-ben legyen! Ha $BA = \alpha_1$, $AP = \alpha_2$, $BC = \gamma_1$, $CQ = \gamma_2$, akkor a

$$(P^{\alpha_1\gamma_2}, B^{\alpha_2\gamma_2}, Q^{\gamma_1\alpha_2}) \tag{5.18}$$

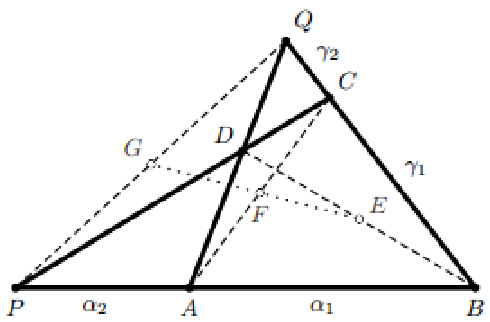
tömegpontrendszer megfelelő, hiszen

$$\frac{BA}{AP} = \frac{\alpha_1}{\alpha_2} = \frac{\alpha_1\gamma_2}{\alpha_2\gamma_2},$$

így a $(P^{\alpha_1\gamma_2}, B^{\alpha_2\gamma_2})$ alrendszer helyettesíthető egy A-ra helyezett tömeggel, tehát a teljes rendszer tömegközéppontja az AQ egyenesen lesz, míg

$$\frac{BC}{CQ} = \frac{\gamma_1}{\gamma_2} = \frac{\alpha_2\gamma_1}{\alpha_2\gamma_2},$$

így a $(Q^{\gamma_1\alpha_2}, B^{\alpha_2\gamma_2})$ alrendszer helyettesíthető egy C-re helyezett tömeggel, tehát a teljes rendszer tömegközéppontja egyúttal a CP egyenesen is rajta lesz.



Ha át akarjuk helyezni a rendszer tömegközéppontját a BD átló E felezőpontjába, akkor a B csúcsba még ugyanannyi tömeget teszünk, mint eddig összesen:

$$(P^{\alpha_1\gamma_2}, B^{2\alpha_2\gamma_2+\alpha_1\gamma_2+\gamma_1\alpha_2}, Q^{\gamma_1\alpha_2}) \equiv E^x. \tag{5.19}$$

Most súlyozzuk úgy a P, B, Q pontokat, hogy tömegközéppontjuk az AC szakasz F felezőpontjára essen! A

$$\left(P^{\alpha_1(\gamma_1+\gamma_2)}, B^{\alpha_2(\gamma_1+\gamma_2)+\gamma_2(\alpha_1+\alpha_2)}, Q^{\gamma_1(\alpha_1+\alpha_2)}\right) \tag{5.20}$$

súlyozás megfelelő, hiszen

$$\left(P^{\alpha_1(\gamma_1+\gamma_2)}, B^{\alpha_2(\gamma_1+\gamma_2)}\right) \equiv A^{(\alpha_1+\alpha_2)(\gamma_1+\gamma_2)},$$

míg

$$\left(Q^{\gamma_1(\alpha_1+\alpha_2)}, B^{\gamma_2(\alpha_1+\alpha_2)}\right) \equiv C^{(\alpha_1+\alpha_2)(\gamma_1+\gamma_2)},$$

így

$$\left(P^{\alpha_1(\gamma_1+\gamma_2)}, B^{\alpha_2(\gamma_1+\gamma_2)+\gamma_2(\alpha_1+\alpha_2)}, Q^{\gamma_1(\alpha_1+\alpha_2)}\right) \equiv F^y.$$

Ha most a (5.19) tömegpontrendszerben minden csúcsnál levesszük az ottani súlyból a (5.20) tömegpontrendszerben feltüntetett súlyt, akkor az (E^x, F^{-y}) súlyozással ekvivalens súlyozáshoz jutok, amelynek tömegközéppontja az EF egyenesen van. Ez a súlyozás konkrétan

$$\left(P^{\alpha_1\gamma_1}, B^0, Q^{\gamma_1\alpha_1}\right), \tag{5.21}$$

tehát tömegközéppontja a PQ szakasz G felezőpontja. Ezzel beláttuk, hogy E, F és G egy egyenesen vannak.

14. feladat
Fejezzük ki a háromszög körülírt és beírt köreinek sugaraival (R és r) a két kör középpontjának távolságát (d-t)!

Megoldás
Jelölje az ABC háromszög AB, BC, CA oldalainak hosszát szokásosan c, a és b! Tekintsük az (A^a, B^b, C^c) tömegpontrendszert! A szögfelező tétel szerint ennek a pontrendszernek a tömegközéppontja a háromszög beírt körének I középpontja! A tömegpontrendszernek a saját súlypontjára vonatkozó tehetetlenségi nyomatéka:

$$\Theta_I = \frac{1}{a+b+c}(abc^2 + bca^2 + cab^2) = abc, \tag{5.22}$$

míg a körülírt kör O középpontjára vonatkozó tehetetlenségi nyomatéka

$$\Theta_O = a \cdot OA^2 + b \cdot OB^2 + c \cdot OC^2 = (a+b+c)R^2. \tag{5.23}$$

Steiner tétele alapján a két tehetetlenségi nyomaték között az

$$\Theta_O = \Theta_I + (a+b+c)OI^2 \tag{5.24}$$

összefüggés áll fenn. Mivel $OI = d$, $abc = 2Rab\sin\gamma = 4RT$ és $(a+b+c) = 2T/r$, ahol T az ABC háromszög területe, így (5.22)-et és (5.23)-at (5.24)-ba írva kapjuk, hogy

$$(a+b+c)R^2 = abc + (a+b+c)d^2,$$

azaz

$$R^2 = \frac{abc}{(a+b+c)} + d^2,$$

így
$$R^2 - 2Rr = d^2. \tag{5.25}$$

15. feladat
Fejezzük ki a háromszög súlyvonalának hosszát az oldalakkal!

Megoldás

Tegyünk a háromszög mindhárom csúcsába egységnyi tömeget és számoljuk ki a rendszer súlypontra, majd az AB oldal F felezőpontjára vonatkozó tehetetlenségi nyomatékát!

A VI. alapelv szerint
$$\Theta_S = \frac{a^2+b^2+c^2}{3},$$
míg a IV. alapelv szerint
$$\Theta_F = FC^2 + FA^2 + FB^2 = s_c^2 + \left(\frac{c}{2}\right)^2 + \left(\frac{c}{2}\right)^2,$$
a Steiner-tétel szerint (V. alapelv) pedig
$$\Theta_F = \Theta_S + 3FS^2 = \Theta_S + 3\left(\frac{s_c}{3}\right)^2,$$
azaz
$$s_c^2 + \left(\frac{c}{2}\right)^2 + \left(\frac{c}{2}\right)^2 = \frac{a^2+b^2+c^2}{3} + 3\left(\frac{s_c}{3}\right)^2,$$
és ebből
$$s_c^2 = \frac{2a^2+2b^2-c^2}{4}.$$

16. feladat (*Stewart tétel*)
Jelölje a háromszög AB oldalát $\frac{p}{q}$ arányban osztó pontját F – azaz
$$\frac{AF}{FQ} = \frac{p}{q}.$$

Fejezzük ki az FC szakasz hosszát a háromszög oldalaival és a p, q mennyiségekkel!

Megoldás

Tekintsük az
$$\left(A^q, B^p, C^{p+q}\right)$$
súlyozott pontrendszert. Mivel a II. alapelv miatt $(A^q, B^p) = F^{p+q}$, így az I. alapelv miatt $(A^q, B^p, C^{p+q}) = S^{2p+2q}$, ahol S az FC szakasz felezőpontja.

Számoljuk ki a rendszer saját súlypontjára, majd az F pontra vonatkozó tehetetlenségi nyomatékát!

A VI. alapelv szerint
$$\Theta_S = \frac{p(p+q)a^2 + q(p+q)b^2 + pqc^2}{2(p+q)} = \frac{p}{2}a^2 + \frac{q}{2}b^2 + \frac{pq}{2(p+q)}c^2,$$

míg a IV. alapelv szerint

$$\Theta_F = (p+q)FC^2 + qFA^2 + pFB^2 = (p+q)FC^2 + q\left(\frac{pc}{p+q}\right)^2 + p\left(\frac{qc}{p+q}\right)^2 =$$

$$= (p+q)FC^2 + \frac{pq}{p+q}c^2,$$

a Steiner-tétel szerint (V. alapelv) pedig

$$\Theta_F = \Theta_S + 2(p+q)FS^2 = \Theta_S + 2(p+q)\left(\frac{FC}{2}\right)^2 = \Theta_S + \frac{p+q}{2}FC^2,$$

azaz

$$(p+q)FC^2 + \frac{pq}{p+q}c^2 = \frac{p}{2}a^2 + \frac{q}{2}b^2 + \frac{pq}{2(p+q)}c^2 + \frac{p+q}{2}FC^2,$$

és ebből

$$FC^2 = \frac{p}{p+q}a^2 + \frac{q}{p+q}b^2 - \frac{pq}{(p+q)^2}c^2.$$

Megjegyzés

A feladat megoldható az AFC, BFC háromszögek AC, BC oldalaira felírt koszinusztételekkel is, felhasználva, hogy $\cos AFC\angle + \cos BFC\angle = 0$.

17. feladat (*Németh Gergely diák javaslata*)
Messe az ABC nem egyenlő szárú háromszög A-nál illetve B-nél fekvő belső szögének szögfelező egyenese a szemköztes – BC, ill AC – oldalt az A_1, ill. B_1 pontban.

a) Mutassuk meg, hogy az ABC háromszög C csúcshoz tartozó külső szögfelezője és az A_1B_1 egyenes az AB oldalegyenesen metszik egymást!

b) Messe az A, B, C csúcshoz tartozó külső szögfelező a háromszög szemköztes oldalegyenesét – tehát rendre a BC, CA, AB egyenest – az A_2, B_2, C_2 pontban. Mutassuk meg, hogy az A_2, B_2, C_2 pontok egy egyenesen vannak!

Megoldás

a) Legyen $C_2 = A_1B_1 \cap AB$. Helyezzünk súlyokat az A, B, C pontokba úgy, hogy a rendszer tömegközéppontja C_2-ben legyen! Mivel $C_2 \in AB$, így a C csúcsra összességében nulla tömeget kell tenni. A szögfelező tétel szerint $\frac{AB_1}{B_1C} = \frac{c}{a}$, míg $\frac{BA_1}{A_1C} = \frac{c}{b}$, így $A^aC^c = B_1^{a+c}$ és $B^bC^c = A_1^{b+c}$. Ennek alapján megfelelő lesz a A^aB^{-b} tömegpontrendszer, hiszen

$$A^aB^{-b} = A^aB^{-b}C^{c-c} = A^aC^cB^{-b}C^{-c} = B_1^{a+c}A_1^{-b-c},$$

és így a tömegközéppont valóban az AB, A_1B_1 egyenesek C_2 metszéspontjában lesz.

Tekintsük még az A pontnak a C-ből induló külső szögfelezőre vonatkozó tükörképét, az A_3 pontot, valamint az AA_3 szakasz A_F felezőpontját, amely az említett külső szögfelezőre esik. Mivel $A_3C = b$ és $CB = a$, így

$$A^aB^{-b} = A^aA_3^{a-a}B^{-b} = A^aA_3^aB^{-b}A_3^{-a} = A_F^{2a}C^{-b-a},$$

tehát a pontrendszer C_2 tömegközéppontja valóban illeszkedik a C csúcshoz tartozó külső szögfelezőre.

b) Általánosan kezeljük a kérdést. Az is igaz, hogy ha AA_1, BB_1, CC_1 tetszőleges Ceva szakaszok – azaz $A_1 \in BC$, $B_1 \in CA$, $C_1 \in AB$ és AA_1, BB_1, CC_1 egy közös P pontban metszik egymást – és

$$C_2 = A_1B_1 \cap AB, \qquad B_2 = C_1A_1 \cap CA, \qquad A_2 = B_1C_1 \cap BC,$$

akkor A_2, B_2 és C_2 egy egyenesen vannak.

Ha $A^\alpha B^\beta C^\gamma = P^{\alpha+\beta+\gamma}$, akkor

$$A^\alpha B^\beta = C_1^{\alpha+\beta}, \qquad B^\beta C^\gamma = A_1^{\beta+\gamma}, \qquad C^\gamma A^\alpha = B_1^{\alpha+\gamma},$$

és így

$$A^\alpha B^{-\beta} = A^\alpha B^{-\beta} C^0 = A^\alpha C^\gamma B^{-\beta} C^{-\gamma} = B_1^{\alpha+\gamma} A_1^{-\beta-\gamma},$$

tehát a tömegközéppont az $AB \cap A_1B_1 = C_2$ pont: $A^\alpha B^{-\beta} = C_2^{\alpha-\beta}$. Ehhez hasonlóan juthatunk el a B_2, A_2 pontokhoz, az alábbi táblázat mutatja, hová mennyi súlyt tegyünk:

	A	B	C
A_2:	0	β	$-\gamma$
B_2:	$-\alpha$	0	γ
C_2:	α	$-\beta$	0

Látható, hogy az A_2, B_2, C_2 pontok mindegyike rajta van az

$$\frac{1}{\alpha}x + \frac{1}{\beta}y + \frac{1}{\gamma}z = 0 \tag{5.26}$$

egyenletű egyenesen, tehát mindegyikük olyan $A^x B^y C^z$ súlyozással kapható meg, amelyre fennáll a 5.26 reláció.

Megjegyzés: *Machó Bónis*

Ha csak azt akarjuk igazolni, hogy a külső szögfelezőknek a velük szemközti oldalegyenessel való metszéspontjaik egy egyenesen vannak, akkor hivatkozhatunk arra, hogy három kör páronkénti külső hasonlósági pontjai egy egyenesen vannak. Valóban, az AC oldalhoz hozzáírt körnek és az AB oldalhoz hozzáírt körnek a külső hasonlósági pontja a közös érintőjük – a BC oldalegyenes – és a centrálisuk – az A-nál fekvő szög külső szögfelezője – metszéspontja.

Megjegyzés

A b) feladatrész elején említett általános összefüggés a Desargues nevezetes tételéből is következik. Az ABC, $A_1B_1C_1$ háromszögek ugyanis pontra nézve – a P pontra nézve – perspektívek, így egyenesre nézve is azok, és ez épp a bizonyítandó állítást jelenti.

18. feladat

Az ABC háromszög oldalainak hossza: $AB = c$, $BC = a$, $CA = b$. A háromszöghöz rögzített $(x_A; x_B; x_C)$ baricentrikus koordinátarendszerben az ℓ egyenes egyenlete

$$\xi_A x_A + \xi_B x_B + \xi_C x_C = 0. \tag{5.27}$$

Honnan ismerhető fel, hogy ez az egyenes érinti a háromszög beírt körét? Írjunk fel egy olyan

$$P(\xi_A;\xi_B;\xi_C)=0 \tag{5.28}$$

összefüggést, amely pontosan akkor teljesül, ha az (5.27) egyenes érinti a beírt kört!

Megoldás

A k beírt kört érintő egyenes olyan háromszögeket alkot az eredeti háromszög két-két oldalával, amelynek beírt vagy hozzáírt köre a k kör. Ezért többször is szükségünk lesz az alábbi lemmára.

Lemma Az ABC háromszöghöz rögzített $(x_A;x_B;x_C)$ baricentrikus koordinátarendszerben az $I(i_A;i_B;i_C)$ pont akkor és csakis akkor középpontja az ABC háromszög beírt vagy hozzáírt körének, ha

$$\frac{i_A^2}{i_B^2}=\frac{BC^2}{CA^2},\qquad \frac{i_B^2}{i_C^2}=\frac{CA^2}{AB^2},\qquad \frac{i_C^2}{i_A^2}=\frac{AB^2}{BC^2}. \tag{5.29}$$

Valóban, a beírt kör középpontjának koordinátái a szokásos jelölésekkel $(a;b;c)$, míg a BC, CA, AB oldalakhoz hozzáírt körök középpontjai rendre

$$(-a;b;c),\qquad (a;-b;c),\qquad (a;b;-c),$$

és pont az ezekkel arányos számhármasok elégítik ki a (5.29) összefüggést.

Messe az ℓ egyenes a háromszög AC oldalegyenesét a $B_2(a;0;c_a)$, a BC oldalegyenest az $A_2(0;b;c_b)$ pontban, ahol (5.27)-nek megfelelően

$$\xi_a a+\xi_c c_a=0,\qquad \xi_b b+\xi_c c_b=0. \tag{5.30}$$

Mivel

$$I^{a+b+c}=A^aB^bC^c=B_2^{a+c_a}A_2^{b+c_b}C^{c-c_a-c_b}, \tag{5.31}$$

így a Lemma szerint csak azt kell ellenőrizni, hogy

$$\frac{(a+c_a)^2}{(b+c_b)^2}=\frac{A_2C^2}{CB_2^2},\qquad \frac{(b+c_b)^2}{(c-c_a-c_b)^2}=\frac{CB_2^2}{B_2A_2^2},\qquad \frac{(c-c_a-c_b)^2}{(a+c_a)^2}=\frac{B_2A_2^2}{A_2C^2}. \tag{5.32}$$

Mivel

$$\frac{CB_2}{CA}=\frac{a}{c_a+a},\qquad \frac{CA_2}{CB}=\frac{b}{c_b+b},$$

így

$$CB_2=\frac{ab}{c_a+a},\qquad CA_2=\frac{ab}{c_b+b}, \tag{5.33}$$

tehát (5.32) első egyenlete teljesül.

Az ABC háromszögre vonatkozó koszinusz tételből az $ACB\angle=\gamma$ szögre

$$2\cos\gamma=\frac{a^2+b^2-c^2}{ab}, \tag{5.34}$$

és így az A_2B_2C háromszögre vonatkozó

$$A_2B_2^2 = CB_2^2 + CA_2^2 - 2CB_2CA_2\cos\gamma$$

koszinusztételből

$$\left(\frac{(c_a+a)(c_b+b)}{ab}\right)^2 A_2B_2^2 = (c_b+b)^2 + (c_a+a)^2 - (c_b+b)(c_a+a)\frac{a^2+b^2-c^2}{ab}. \tag{5.35}$$

A (5.32) egyenletek szorzata azonosan teljesül, így elég közülük kettőt ellenőrizni. Mivel az elsőt igazoltuk, alább csak a harmadikra, a

$$(c-c_a-c_b)^2 = \frac{B_2A_2^2}{A_2C^2}(a+c_a)^2$$

relációra koncentrálunk. A (5.33) (5.35) összefüggéseket felhasználva a

$$(c-c_a-c_b)^2 = (c_b+b)^2 + (c_a+a)^2 - (c_b+b)(c_a+a)\frac{a^2+b^2-c^2}{ab}$$

összefüggéshez jutunk. Ebben felbontjuk a zárójelek és átrendezzük a c_a, c_b változók polinomjaként és leosztunk a mindenütt megjelenő $(a+b+c)$ tényezővel:

$$c_ac_b(a+b-c) - c_ab(a-b+c) - c_ba(-a+b+c) = 0. \tag{5.36}$$

A (5.30) relációk segítenek, hogy megkapjuk az ℓ egyenes együtthatóira vonatkozó összefüggést:

$$ab(a+b-c)\frac{\xi_a\xi_b}{\xi_c^2} + ab(a-b+c)\frac{\xi_a}{\xi_c} + ab(-a+b+c)\frac{\xi_b}{\xi_c} = 0,$$

azaz

$$(s-c)\xi_a\xi_b + (s-b)\xi_a\xi_c + (s-a)\xi_b\xi_c = 0, \tag{5.37}$$

vagy a kívánt összefüggés még egyszerűbben:

$$\frac{s-c}{\xi_c} + \frac{s-b}{\xi_b} + \frac{s-a}{\xi_a} = 0. \tag{5.38}$$

19. feladat (*Kömal, A. 568., 2012. szeptember*)
Adott az ABC háromszög, és a beírt körének középpontján átmenő ℓ egyenes. Jelölje A_1, B_1, illetve C_1 az A, a B, illetve a C pont ℓ-re vonatkozó tükörképét. Legyen az A_1, B_1 és C_1 pontokon át ℓ-lel húzott párhuzamosok metszéspontja a BC, CA és AB egyenesekkel rendre A_2, B_2, illetve C_2. Bizonyítsuk be, hogy

a) az A_2, B_2, C_2 pontok egy egyenesen vannak, és

b) ez az egyenes érinti a beírt kört!

Megoldás

Jelölje az ℓ egyenes előjeles távolságát az A, B, C pontoktól rendre α, β és γ, azaz legyen ℓ egyenlete az A, B, C pontokhoz rögzített baricentrikus koordinátarendszerben

$$\alpha x_A + \beta x_B + \gamma x_C = 0. \tag{5.39}$$

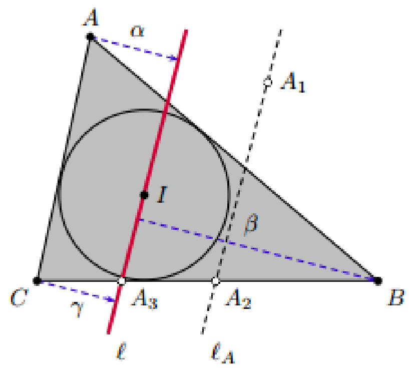
Tehát a (5.39) egyenes pontjai azok a pontok, amelyek olyan $A^{x_A}B^{x_B}C^{x_C}$ súlyozással adhatók meg, amely súlyokra teljesül a (5.39) reláció. A beírt kör I középpontja is illeszkedik ℓ-re, és I az $A^aB^bC^c$ tömegpontrendszer súlypontja, így

$$\alpha a + \beta b + \gamma c = 0. \tag{5.40}$$

I-ből kiindulva most cseréljük ki az A^a tömegpontot az A_1^{-a} tömegpontra! A tömegpontrendszernek az ℓ egyenesre vonatkozó forgatónyomatéka nem változott, tehát továbbra is zérus, az új tömegközéppont is ℓ-en van.

Cseréljük ki most az A_1^{-a} tömegpontot az A_2^{-a} tömegpontra! Ezzel sem változtattunk a ℓ-re vonatkozó forgatónyomatékon, de most már mindegyik tömegpontunk az AB egyenesen van, tehát a tömegközéppont az $A_3 = \ell \cap AB$ pont,

$$A_2^{-a}B^bC^c = A_3^{-a+b+c} \tag{5.41}$$



Szeretnénk kitalálni, hogy az A_2 pont hol helyezkedik el a BC egyenesen, tehát szeretnénk súlyokat tenni a B, C pontokra, hogy tömegközéppontjuk A_3 legyen. Először tegyünk úgy súlyokat B-re és C-re, hogy a tömegközéppont A_3-ban legyen és az össztömeg annyi legyen, mint az előbb: $(-a+b+c)$! A (5.39) egyenletből ismertek a B, C pontokból az ℓ tengelyhez tartozó erőkarok arányai $\frac{-\beta}{\gamma} = \frac{BA_3}{A_3C}$, így

$$B^{\frac{\gamma}{\gamma-\beta}(-a+b+c)}C^{\frac{-\beta}{\gamma-\beta}(-a+b+c)} = A_3^{-a+b+c} \tag{5.42}$$

A (5.41), (5.42) tömegpontrendszerek összevetéséből kapjuk, hogy

$$B^{\frac{\gamma}{\gamma-\beta}(-a+b+c)-b}C^{\frac{-\beta}{\gamma-\beta}(-a+b+c)-c} = A_2^{-a} \tag{5.43}$$

A $(\gamma-\beta)$ mennyiséggel átszorozva, a (5.40) összefüggést felhasználva, egyszerűsítés után kapjuk, hogy

$$B^{-\alpha-\gamma}C^{\alpha+\beta} = A_2^{\beta-\gamma} \tag{5.44}$$

Ehhez hasonlóan kaphatjuk az A, B, C pontok azon súlyozásait, amelyek tömegközéppontja a B_2 illetve a C_2 pont. Az eredményeket táblázatba foglaljuk össze:

	A	B	C
A_2:	0	$-\alpha-\gamma$	$\alpha+\beta$
B_2:	$\beta+\gamma$	0	$-\beta-\alpha$
C_2:	$-\gamma-\beta$	$\gamma+\alpha$	0

Látható, hogy az A_2, B_2, C_2 pontok mindegyike rajta van az

$$\frac{1}{\beta+\gamma}x+\frac{1}{\gamma+\alpha}y+\frac{1}{\alpha+\beta}z=0 \tag{5.45}$$

egyenletű egyenesen, tehát mindegyikük olyan $A^xB^yC^z$ súlyozással kapható meg, amelyre fennáll a (5.45) reláció.

b) A (5.45) egyenesről a 18. feladat eredménye, a (5.38) reláció alapján eldönthető, hogy érinti-e a beírt kört.

$$(s-a)(\beta+\gamma)+(s-b)(\gamma+\alpha)+(s-c)(\alpha+\beta)=\alpha(s-b+s-c)+\beta(s-c+s-a)+\gamma(s-a+s-b)=\alpha a+\beta b+\gamma c,$$

tehát a (5.40) összefüggés szerint az egyenes tényleg érinti a beírt kört.

Megjegyzés

Érdemes elolvasni a fenti Kömal A. 568. feladat Brianchon tételt használó frappáns megoldását a Kömal honlapján:

`http://www.komal.hu/verseny/feladat.cgi?a=feladat&f=A568&l=hu`

5.3. Problémamegoldás – Egy geometriai feladat megoldása és vizsgálata 7-11. osztályosok számára

A magyar matematikaoktatásban gyakran szerepelnek olyan problémák, amelyekhez több lehetséges megoldás is készül, de a megoldások elemzése elmarad. Pedig különösen is hasznos ezt egy feladat esetében például a következő szempontok alapján megtenni.

1. A matematikai tartalom és a probléma különböző megfogalmazásai közötti kapcsolat vizsgálata.
2. Különböző megoldási lehetőségek számbavétele a matematika különböző területeiről, amelynek során a különböző évfolyamokon meglevő előzetes ismereteket is figyelembe vesszük.
3. A probléma továbbgondolása különböző lehetséges irányokba.
4. Különböző lehetséges segédeszközök megadása és elemzése (hagyományos és elektronikus), amelyek a megoldás és a továbbgondolás során segítségünkre lehetnek.

A következőkben egy ilyen elemzést mutatunk be egy konkrét példán. A kiindulási probléma a Varga Tamás Verseny 2. fordulóján szerepelt 1992-ben, 7. osztályosoknak.

Szöveg 1a: Egy négyzet középpontja egy másik négyzet csúcsa. Mekkora a két négyzet közös részének területe, ha mindkét négyzet oldala 2 egységnyi?

5.3.1. Matematikai tartalom és megfogalmazás

Az eredeti matematikai tartalom többféleképpen megfogalmazható, az előbbiekben ismertetett szöveg (a továbbiakban Szöveg 1a) a lényegi tartalomra szorítkozik, és konkrét értékeket ad meg az oldalhosszakra. Más megfogalmazásban ehelyett megadható csupán a négyzetek oldalhosszainak egymáshoz való viszonya.

Szöveg 1b: Adott két egybevágó négyzet. Az első egyik csúcsával a másik középpontjába van erősítve. Mekkora a közös rész területe?

A probléma matematikai tartalmának különösebb változtatása nélkül megadható néhány további szövegváltozat is:

Szöveg 2: Egy a oldalú négyzet középpontjába egy b oldalú másik négyzet egyik csúcsát tűzzük. A második négyzet e pont körül el tud fordulni. Mekkora a közös rész területe?

Szöveg 3a: Adott két ugyanakkora négyzet üvegből, egy sárga és egy kék. A kék négyzet egyik csúcsával a sárga négyzet középpontjába van erősítve. Mekkora a zöld rész területe?

Szöveg 3b: Adott két egyforma nagyságú, négyzetalakú szűrő. Az egyik egy csúcsával a másik középpontjába van erősítve. A szűrőhatás jobb, ha két szűrő van egymáson. A négyzetek milyen helyzetében a legjobb a szűrőhatás?

Szöveg 4: Egy négyzet középpontja körül forog egy másik, a csúcspontjánál rögzített ugyanakkora négyzet. Mennyi annak a valószínűsége, hogy a közös rész éppen az álló négyzet negyede, ha a forgó négyzet éppen egy fordulatot tesz meg?

A szöveg 2 változatban a probléma tartalmilag és megfogalmazásban is nehezebb. A különböző oldalhosszak miatt paraméterekkel kell dolgozni, ami általában nehéz a tanulóknak.

A 1b tekinthető 2 egy speciális esetének is. Ebben az esetben egy nyitott kezdetű problémáról van szó. Amennyiben a tanulók gyakran oldanak meg ilyen feladatokat, felismerik az esetszétválasztás szükségességét, és egyre megszokottabbá válik számukra, hogy összefüggésekben, a problémákat jobban átlátva dolgozzanak.

A 3a és 3b változat valóságközeli helyzeteiben matematikai és valamennyi köznapi ismeret is szükséges.

Szöveg 4 a matematika különböző területeit, a geometriát és a valószínűségszámítást köti össze.

A különböző szövegváltozatok további összefüggésekre mutathatnak rá, és a tanulók számára is jól érzékelhetően mutatják be hogy a matematika különböző területeinek összekapcsolásán túl akár különböző matematikán kívüli helyzetek (itt üvegszínnel, illetve szűrőhatással kapcsolatos) is leírhatók ugyanolyan matematikai módszerrel.

Fontos megjegyezni, hogy egy feladat megfogalmazásával befolyásolhatjuk a feldolgozási módot és azt, hogy mit is gyakorlunk éppen a feladattal.

Különbözően megfogalmazott, ugyanazon vagy hasonló matematikai tartalmak kedvezően befolyásolhatják a tanulók matematikáról alkotott képét, és segítik a kapcsolat létrejöttét a matematika különböző területei valamint a matematika és a valóság között. Az egyes változatokban előforduló különböző szituációk hozzájárulhatnak az ismeretek valóságközeli helyzetekben való alkalmazásához, amely cél a tantervekben általában megfogalmazásra kerül, de a mindennapi iskolai gyakorlatban kevésbé szerepel. (vö. TIMSS, PISA, Csapó 1998 [53], Vári 2001 [242]).

Motiválóan hathat az is, ha a tanulók önállóan fogalmaznak meg szövegváltozatokat. A tanulók szívesen készítenek új szövegeket, még abban az esetben is, ha a matematika iránt kevésbé érdeklődnek.

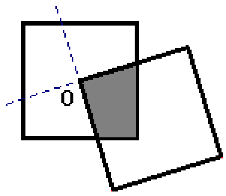
5.3.2. A feladat megoldási lehetőségei különböző évfolyamokon

A következő megoldások lényegesen eltérnek abban, hogy mennyi matematikai előismeretet, illetve készséget igényelnek. A megadott évfolyamok azt a korosztályt jelölik, ahol a felhasznált eszközöket tekintve először jöhet szóba az adott megoldás. A megoldások során látni fogjuk, hogy nem csupán más matematikai tartalomról van szó, hanem esetenként a hozzá tartozó szemlélet is eltérő. Például az első megoldásnál a dinamikus, transzformációszemlélet érvényesül, a második megoldásnál a megoldó az ábra egészét figyeli, átdarabol, a harmadik megoldásnál a vizsgálat tárgya a közös rész, annak alkalmas felbontása. Az első két megoldáshoz képest a harmadik statikusabb megközelítésről tanúskodik.

1. Megoldás: A négyzet negyedrendű forgásszimmetriája

Ha a forgó négyzet és így a közös rész is 90°-kal, 180°-kal, 270°-kal, illetve 360°-kal az álló négyzet O középpontja körül elfordul, akkor a négy rész az álló négyzetet teljesen lefedi. Így a közös rész mindig $\frac{1}{4}$ része az álló négyzetnek.

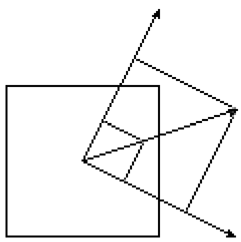
A forgó négyzet oldalainak meghosszabbításával ugyanilyen felbontás lehetséges. Ilyen ötlet a törtekkel való számolás során is előfordult.



5.10. ábra. A négyzet negyedrendű forgásszimmetriája

Az egység a négyzet. A négyzetet az ábrán látható módon elfeleztük. Ha a négyzetet hasonló módon az előzőre merőlegesen újra elfelezzük, négy egybevágó rész keletkezik.

Ezzel a módszerrel már a jelzett korosztály esetén meg lehet mutatni, hogy ha a forgó négyzet oldalát változtatjuk (szöveg 2), a közös rész az álló négyzetnek legfeljebb $\frac{1}{4}$ része.



5.11. ábra. Felső becslés a közös részre

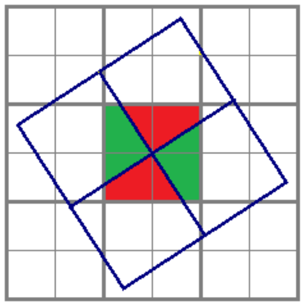
A forgó négyzet benne van a rajzon látható negyedsíkban. Ebből következik, hogy az álló négyzet $\frac{1}{4}$ része egy felső határ a közös részre. Ebből az látszik, hogy a maximum csak abban az esetben szorul vizsgálatra, ha a forgás során a közös rész sehol sem éri el az álló négyzet $\frac{1}{4}$ részét.

5.51. Feladat: *Gondolja meg, hogy milyen előismeretek birtokában várható el, érthető meg az 1. megoldás. Milyen életkorban, illetve hányadik osztályban rendelkeznek a tanulók ezekkel az előismeretekkel?*

MEGJEGYZÉSEK A FELADATHOZ:

A négyzet negyedrendű forgásszimmetriája, alakzatok egybevágó részekre bontása tulajdonképpen már 10-12 éves korban ismert. Ezek bizonyítás jellegű összerakása és a felső becslés 6-7. osztályban reális.

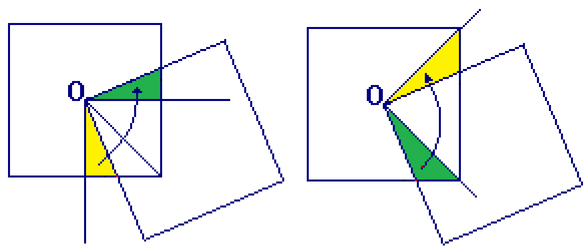
Az itt bemutatott módszer előnye, hogy akár egy négyzetrácsba is ágyazható a vizsgált alakzat, amivel megmutathatjuk, hogy ha az álló négyzet oldala 2 hosszúságegység, akkor annak a területe 4 területegység, a metszetidom területe pedig 1 területegység.



2. Megoldás: Átdarabolás speciális helyzetű metszetté

Pólya György problémamegoldási tanácsát követve speciális helyzeteket keresünk. Az egyik speciális helyzetben a forgó négyzet egy-egy oldala éppen az álló négyzet egy-egy középvonalára (középvonalas helyzet), a másikban az álló négyzet egy-egy átlójára illeszkedik (átlós helyzet). Mindkét helyzetben a négyzet negyedrésze a metszet.

Mivel két egyformán jól kezelhető speciális helyzetet találtunk, két változata is van ennek a bizonyítástípusnak: Az ábrán a speciális helyzetű metszetből kilógó rész zöld, a hiányzó rész sárga. A zöld és sárga háromszögeket negyedforgás viszi egymásba. (Megfelelő oldalaik merőlegesek és egyenlők.) Az általános helyzetű metszet átdarabolható mind a középvonalas, mind az átlós helyzetű metszetbe.



5.12. ábra. Átdarabolás speciális helyzetbe

5.52. Feladat: *Gondolja meg, hogy milyen előismeretek birtokában várható el, érthető meg a 2. megoldás. Milyen életkorban, illetve hányadik osztályban rendelkeznek a tanulók ezekkel az előismeretekkel?*

MEGJEGYZÉSEK A FELADATHOZ:

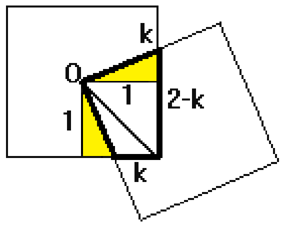
A szükséges ismeretek: tapasztalatok alakzatok felbontása terén, háromszögek egybevágóságának felismerése.

*Korosztály:*14-15 éves korosztálytól, 8-9. osztályban elvárható.

3. megoldás: Alkalmas részekre bontjuk a metszetet

A terület kiszámításához a közös részt felbontjuk olyan részekre, amelyek területét meg tudjuk határozni.

a) A metszetet azzal az átlójával bontjuk fel, amely az álló négyzet középpontját és csúcsát köti össze. Ha a forgó négyzet oldala az álló négyzetből (a csúcstól mérve) k szakaszt vág le, akkor a keletkező háromszögek egy-egy oldala $2-k$, illetve k, és az oldalhoz tartozó magasság mindkét esetben 1. (Ez a két kis sárga derékszögű háromszög egybevágóságából következik.)



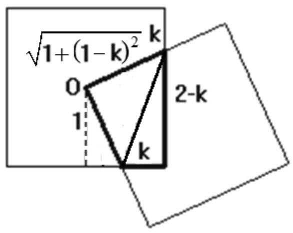
5.13. ábra. Az egyik átlóval felbontott metszet

A terület tehát valóban a négyzet területének negyede:

$$\frac{(2-k)\cdot 1}{2}+\frac{k\cdot 1}{2}=1.$$

b) **Feladat: Gondolja meg a bizonyítást úgy is, hogy a közös részként keletkező négyszöget a másik átlójával bontjuk fel!**

MEGJEGYZÉS A FELADATHOZ: Így két derékszögű háromszöget kapunk. Az egyik egyenlőszárú (pl. az előző ábra két sárga háromszögének összehasonlításából következően), a szár hosszát Pitagorasz tételével az 1, $1-k$ befogójú kis derékszögű háromszög átfogójaként kapjuk ($\sqrt{1+(1-k)^2}$, a másik háromszög befogói k és $2-k$.



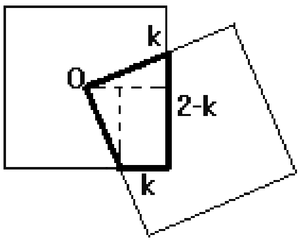
5.14. ábra. A másik átlóval felbontott metszet

A közös rész területe $\frac{(2-k)\cdot k}{2}+\frac{1+(1-k)^2}{2}=1$.

c) A metszetet felbontjuk két (egybevágó) derékszögű háromszögre és egy téglalapra. A téglalap oldalai k és 1, a háromszögek befogói $1-k$ és 1.

A közös rész területe:

$$2\cdot\frac{(1-k)\cdot 1}{2}+k\cdot 1=1.$$



5.15. ábra. Téglalap és két háromszög

5.53. Feladat: *Gondolja meg, hogy milyen előismeretek birtokában várható el, érthető meg a 3. megoldás. Milyen életkorban, illetve hányadik osztályban rendelkeznek a tanulók ezekkel az előismeretekkel? Hasonlítsa össze az a), b), c) változatok ötletigényét.*

MEGJEGYZÉSEK A FELADATHOZ:

A szükséges előismeretek: tapasztalatok alakzatok felbontása során, háromszögek területe, (négyzet forgásszimmetriája), Pitagorasz tétele, algebrai átalakítások. Korosztály: 14 - 15 év (8., 9. osztály)

Az a) és b) változat felbontás szempontjából kézenfekvő, de a)-ban egy tompaszögű háromszög magasságát kell megtalálni, b)-nél pedig egy lépéssel (a Pitagorasz-tétellel) több a befogó hosszának meghatározása. A c)-beli hármas felbontás megtérül, mert nagyon könnyű számolni a részek területét.

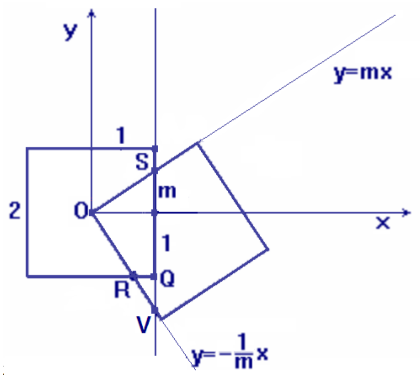
4. Megoldás: Merőleges egyenesek a koordinátarendszerben

A probléma a középiskolában koordinátamódszerekkel is vizsgálható. Jó példa arra, hogy a feladathoz alkalmasan választott koordinátarendszer előnyeit megmutassuk. Az elrendezés szimmetriája miatt érdemes az origót az álló négyzet középpontjába tenni, és a koordinátatengelyeket pedig annak oldalaival párhuzamosan felvenni. A forgó négyzet oldalegyenesei így az origón áthaladó egyenesek lesznek. Ezek közül bármelyiknek az m meredeksége jellemezheti a forgó négyzet helyzetét. A másik egyenes meredeksége így $-\frac{1}{m}$ a $0 < m \leq 1$ meredekségekre, $m = 0$ esetén pedig a másik oldalegyenes maga az y tengely. Látható, hogy ezzel a forgó négyzet minden lényegesen különböző helyzetét megadjuk. Mivel a speciális esetek számolás nélkül vizsgálhatók, elegendő a $0 < m < 1$ meredekségeket vizsgálni.

Az álló négyzet oldalegyeneseinek egyenletei $y = 1, x = 1, y = -1$, illetve $x = -1$. A forgó négyzet megfelelő oldalegyeneseinek egyenlete $y = mx$, illetve $y = -\frac{1}{m}x$. A kiválasztott módszerrel adható számos megoldásban a következő metszéspontok játszanak szerepet:

$S(1; m)$	$x = 1$ és $y = mx$ metszéspontja
$Q(1; -1)$	$x = 1$ és $y = -1$ metszéspontja
$V(1; -\frac{1}{m})$	$x = 1$ és $y = -\frac{1}{m}x$ metszéspontja
$R(m; -1)$	$y = -1$ és $y = -\frac{1}{m}x$ metszéspontja

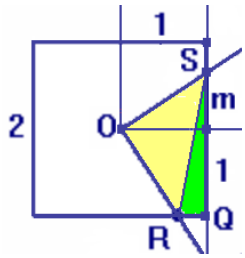
5.2. táblázat. Metszéspontok



5.16. ábra. A koordinátarendszerben

A közös rész területének meghatározása ismét olyan részek segítségével történik, amelyeknek könnyű kiszámítani a területét.

a) Az $ORQS$ négyszöget az RS átlóval két derékszögű háromszögre bontjuk, ezek ROS és RQS.



Az egyik háromszög befogói $OS = OR = \sqrt{1+m^2}$, a másiké $QS = 1+m$ és $QR = 1-m$ segítségével a derékszögű háromszögek területe:

$$t_{ROS} = \frac{OS^2}{2} = \frac{1+m^2}{2}$$

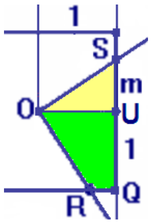
és

$$t_{RQS} = \frac{QR \cdot QS}{2} = \frac{(1-m)(1+m)}{2} = \frac{1-m^2}{2}.$$

A közös rész területe

$$t = t_{ROS} + t_{RQS} = \frac{1+m^2}{2} + \frac{1-m^2}{2} = 1.$$

b) Az $ORQS$ négyszöget az x tengely segítségével egy háromszögre és egy trapézra bontjuk. Az x tengely az SQ oldalt az $U(1;0)$ pontban metszi, tehát az $ORQS$ négyszög egy OUS derékszögű háromszögre és egy $ORQU$ derékszögű trapézra bomlik.



A háromszög területe

$$t_{OUS} = \frac{m}{2}.$$

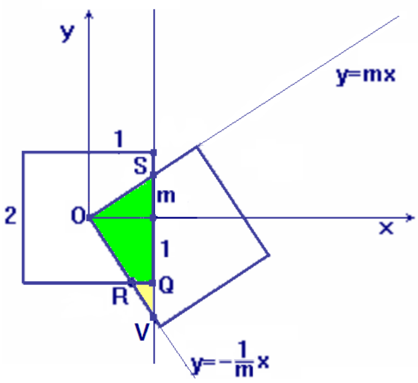
A trapéz területe

$$t_{ORQU} = \frac{(OU + RQ) \cdot UQ}{2} = \frac{(1 + 1 - m) \cdot 1}{2} = 1 - \frac{m}{2}.$$

A közös rész területe ezek összege

$$t = t_{OUS} + t_{ORQU} = 1.$$

c) Az $ORQS$ négyszöget az SOV és RQV derékszögű háromszögek különbségeként adjuk meg.



Az SOV derékszögű háromszög átfogója $SV = m + \frac{1}{m}$, a magassága 1. Ebből a területe

$$t_{SOV} = \frac{m + \frac{1}{m}}{2} = \frac{m^2 + 1}{2m}.$$

Az RQV háromszög területe hasonlósággal vagy közvetlenül a befogókból számítható: $RQ = 1 - m$ és $QV = \frac{1}{m} - 1$ felhasználásával

$$t_{RQV} = \frac{(1 - m)(\frac{1}{m} - 1)}{2} = \frac{(1 - m)^2}{2m} = \frac{m^2 - 2m + 1}{2m}.$$

Ebből az $ORQS$ négyszög területe:

$$t_{ORQS} = t_{SOV} - t_{RQV} = 1.$$

5.54. Feladat: *Gondolja meg, hogy milyen előismeretek birtokában várható el, érthető meg a 4. megoldás. Milyen életkorban, illetve hányadik osztályban rendelkeznek a tanulók ezekkel az előismeretekkel? Hasonlítsa össze az a), b), c) változatok ötletigényét.*

MEGJEGYZÉSEK A FELADATHOZ:

A szükséges előismeretek: pont koordinátái a koordinátarendszerben, origón átmenő egyenes egyenlete, egymásra merőleges egyenesek meredeksége közötti kapcsolat, derékszögű háromszög területe, trapéz területe, algebrai átalakítások, jártasság az átdarabolásban.

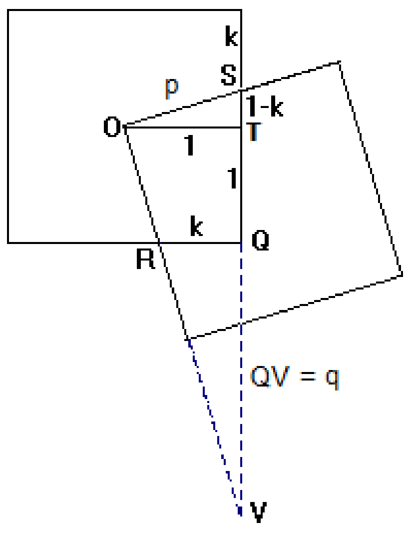
Korosztály: 16 - 17 év (10., 11. osztály). Ebben a korosztályban már az analitikus és szintetikus geometriai jellemzők közötti kétirányú mozgás, valamint a szabatos, egyértelmű leírás is követelmény.

Az a) változat lényegében a 2. megoldás b) változata, csak most a forgó négyzet egyik oldalegyenesének a meredeksége a paraméter, és a koordinátákból olvassuk ki a hosszakat. A koordinátageometriai módszerrel való ismerkedéskor érdemes összehasonlítani a szintetikus és analitikus geometriai meggondolásokat.

Az a) és b) változatok látszólagos előnye a c)-vel szemben, hogy a vizsgált (meglévő) alakzat felbontására épűl. A kiegészítés, a kiindulási (bázis) alakzaton kívüli kapcsolatok vizsgálata (beágyazás) már tudatosabb problémamegoldási stratégia, ami általában nem spontán, hanem gyakorlással, a módszer hatékonyságának megtapasztalásával alakul ki. Jelen esetben a szín, a teljes ábra segíthet abban, hogy a tanulók a kiterjesztésre figyeljenek. Mindenképpen nézőpontváltás szükséges: a forgó négyzetből vág le egy háromszöget az álló négyzet egy oldalegyenese.

5. Megoldás: Hasonlósággal

A közös részt az álló négyzet függőleges oldalegyenese által levágott SOV és az ebből a vízszintes oldalegyenes által levágott RQV derékszögű háromszögek különbségeként határozzuk meg.



Az SOV és RQV derékszögű háromszögek hasonlók, hisz egy hegyesszögük közös. Mindkét háromszög hasonló az SOT háromszöghöz, ahol T az O pont merőleges vetülete az SV oldalra.

A hasonlóság arányának négyzete a területek aránya. Ezeket a következő összefüggésekben foglalhatjuk össze:

(1) Az SOT háromszöget $\frac{p}{1-k}$ arányú hasonlóság viszi az SOV háromszögbe.

(2) Az SOT háromszöget $\frac{k}{1-k}$ arányú hasonlóság viszi az RQV háromszögbe.

(3) Az SOT háromszög területe $t_{SOT} = \frac{1-k}{2}$.

Az $ORQS$ négyszög területe ennek alapján

$$t_{ORQS} = t_{SOV} - t_{RQV} = t_{SOT} \cdot ((\frac{p}{1-k})^2 - (\frac{k}{1-k})^2) = t_{SOT} \cdot \frac{p^2 - k^2}{(1-k)^2}.$$

Ha az SOT háromszögre felírjuk a Pitagorasz-tételt, azt kapjuk, hogy $p^2 = 2 - 2k + k^2$.

Ezt és az SOT háromszög területére kapott eredményt visszaírjuk a $t_{ORQS} = t_{SOT} \cdot \frac{p^2-k^2}{(1-k)^2}$ képletbe:

$$t_{ORQS} = \frac{1-k}{2} \cdot \frac{2 - 2k + k^2 - k^2}{(1-k)^2} = 1.$$

A két négyzet közös részének területe tehát 1 területegység.

5.55. Feladat: *Gondolja meg, hogy milyen előismeretek birtokában várható el, érthető meg az 5. megoldás. Milyen életkorban, illetve hányadik osztályban rendelkeznek a tanulók ezekkel az előismeretekkel?*

MEGJEGYZÉSEK A FELADATHOZ:

A szükséges előismeretek: háromszögek hasonlósága, Pitagorasz-tétel, algebrai átalakítások.

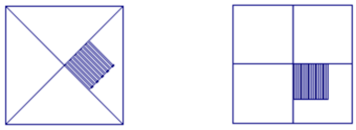
Korosztály: 16 - 18 év (10., 11., 12. osztály)

Az áttekinthetőség és rövidség kedvéért választottuk ezt a megoldást, amely közvetlenül a alkalmazza a terület kiszámításához a hasonlóságot. Tapasztalatból tudjuk, hogy nem ez a jellemző. Számos más eszközt, a hasonlóságon alapuló tételeket használhatunk a szereplő háromszögek területének kiszámítására (például a magasságtételt). Felhívjuk a figyelmet, hogy a különböző paraméterek bevezetése nagyon nagy különbségekhez vezet a számolási nehézségeket illetően, vagy éppen egészen más matematikai tartalom húzódik meg a háttérben. Egy ilyen példát mutatunk a későbbiekben ennek a feladatnak az analízis eszközeivel való vizsgálata közben.

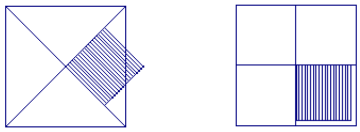
5.3.3. Továbbgondolás, általánosítás

Érdemes megvizsgálni a közös rész nagyságának alakulását amennyiben a két négyzet oldala nem egyenlő. Ha a forgó négyzet oldalának hossza az álló négyzeténél nagyobb, akkor a közös rész marad az álló négyzet területének negyede, hiszen minden meggondolásunk változatlanul érvényes ezekben az esetekben. Ha a forgó négyzet oldala az álló négyzeténél kisebb, akkor igen változatos helyzetek állnak elő. A rendszeres áttekintéshez válasszuk az álló négyzet oldalhosszát 2 cm-nek. Gondolatébresztőnek az átlós és a párhuzamos speciális helyzeteket használjuk. A következő eseteket érdemes megkülönböztetni:

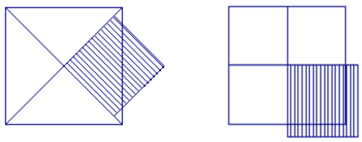
1. A forgó négyzet a forgás során mindig az álló négyzetben marad, így a közös rész a forgó négyzet területe.



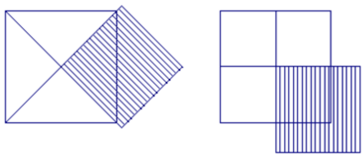
2. A forgó négyzet egy része a forgás során időnként az álló négyzeten kívülre kerül. Ebben az esetben a közös rész nagysága függ a négyzetek helyzetétől.



3. A forgó négyzet egy része a forgás során mindig az álló négyzeten kívülre kerül. Ebben az esetben a közös rész nagysága függ a négyzetek helyzetétől.



4. A forgó négyzet egy része a forgás során mindig az álló négyzeten kívülre kerül. De a közös rész nagysága mindig az álló négyzet negyedével egyenlő.



5.56. Feladat: *Gondolja meg, hogy milyen előismeretek, gondolkodási módszerek birtokában várható el, érthető meg a fenti rendszerezés. Milyen életkorban, illetve hányadik osztályban rendelkeznek a tanulók ezekkel a tapasztalatokkal?*

MEGJEGYZÉSEK A FELADATHOZ:

Többszörös nézőpontváltásra, dinamikus megközelítésre van szükség. Egy geometriai konfiguráció fontos és kevésbé fontos jellemzőit kell osztályozni.

Ezt a meggondolást elkezdhetjük a hetedik - nyolcadik osztályban. A kapott eredmények a további évfolyamokon pontosíthatók és kiegészíthetők. Segédeszközökkel irányíthatjuk a tanulók figyelmét. (Ezekre később visszatérünk.)

A közös rész területének paraméteres vizsgálata

Az álló négyzet oldalhosszát jelölje a, a forgó négyzetét b (a 2. szövegnek megfelelően). Az ilyen jellegű kérdésfeltevésnél fontos megtalálni a „lényegileg különböző eseteket”. Ennél a példánál megállapítható, hogy mindegyik helyzet elérhető abban az esetben ha az álló négyzet oldalát konstansnak tartjuk, miközben a forgó négyzet oldalát nullától tetszőleges nagyra növeljük.

A közös rész területének felső becslése

Az oldalhosszaktól és a négyzetek helyzetétől függetlenül a következők mondhatók a közös rész nagyságáról:

- Két síkidom közös részének területe nem lehet egyik alakzat területénél sem nagyobb, ezért a^2 (az álló négyzet területe) és b^2 (a forgó négyzet területe) egy-egy felső korlát a metszetidom területére.
- Az álló négyzet középpontjából induló, a forgó négyzet egy-egy oldalát tartalmazó félegyenesek olyan síknegyedet (derékszögű szögtartományt) zárnak közre, amely tartalmazza a forgó négyzetet, így a közös részt is, valamint az álló négyzet negyedrészét. Ezért $\frac{a^2}{4}$ is egy felső korlát a metszetidom területére.

A három becslés közül $b < \frac{a}{2}$ esetben b^2, $\frac{a}{2} < b$ esetben pedig $\frac{a^2}{4}$ a legjobb felső becslés.

5.57. Feladat: *Gondolja meg, hogy milyen előismeretek, gondolkodási módszerek birtokában várható el, érthető meg a fenti becslés. Milyen életkorban, illetve hányadik osztályban rendelkeznek a tanulók ezekkel a tapasztalatokkal?*

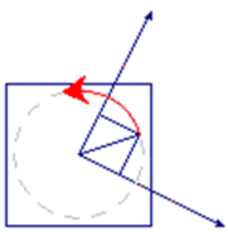
MEGJEGYZÉSEK A FELADATHOZ:

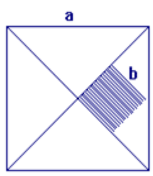
Több konfiguráció elemzésére, a paraméteres formában adott felső becslések összehasonlítására van szükség. Ehhez nem csupán az analízis elemeit és a geometriai meggondolást kell birtokolni, hanem össze is kell kapcsolni azokat.

Ez az összetett gondolkodás 10-12. osztályra alakítható ki.

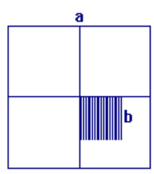
A közös rész területének pontosabb vizsgálata

1. A forgatás során a forgó négyzet összes csúcsa mindig az álló négyzet belsejében marad (1.a speciális helyzet) és ebben az esetben a közös rész maga a forgó négyzet (1.b speciális helyzet).





1.a speciális helyzet



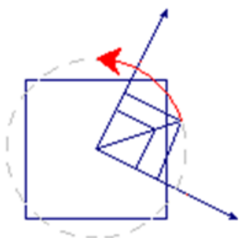
1.b speciális helyzet

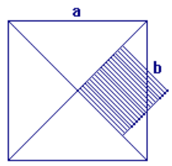
Ez akkor teljesül, ha a forgó négyzet legtávolabbi csúcsa sincs messzebb középponttól, mint az álló négyzet oldala, azaz az a forgó négyzet átlója nem nagyobb az álló négyzet oldalának felénél:

$$b\sqrt{2} \leq \frac{a}{2} \;\Leftrightarrow\; b \leq \frac{a\sqrt{2}}{4}.$$

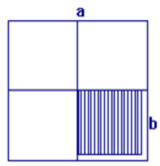
A $0 < b \leq \frac{a\sqrt{2}}{4}$ intervallumba eső oldalhossz esetén a metszet tetszőleges elforgatáskor maga a forgó négyzet, és területe állandó nagyságú b^2.

2. A forgatás során a forgó négyzet három csúcsa mindig az álló négyzet belsejében marad, de van olyan helyzet, amikor a negyedik csúcs kívül esik az álló négyzeten (2.a speciális helyzet). Ebben az esetben a közös rész változik, de van olyan helyzet, amikor a metszet maga a forgó négyzet (2.b speciális helyzet).





2.a speciális helyzet



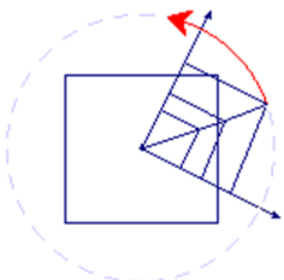
2.b speciális helyzet

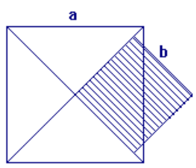
Ez akkor teljesül, ha a forgó négyzet legtávolabbi csúcsa messzebb van a középponttól, mint az álló négyzet oldalának fele, de az oldala nem hosszabb annál:

$$\frac{a\sqrt{2}}{4} < b \leq \frac{a}{2}.$$

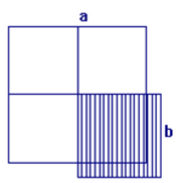
A fenti intervallumba eső b oldalhossz esetén a metszet elforgatáskor változik. Van olyan helyzet, amikor maga a forgó négyzet a metszet, azaz elérhető a terület b^2 maximális értéke.

3. A forgatás során a forgó négyzet egy csúcsa mindig az álló négyzeten kívül van, két másik csúcs bizonyos elforgatásnál az álló négyzet belsejébe esik (3.a speciális helyzet), de van olyan helyzet, amikor kívül esnek az álló négyzeten (3.b speciális helyzet). Ebben az esetben a közös rész változik, de van olyan helyzet, amikor a metszet az álló négyzet negyede.





3.a speciális helyzet



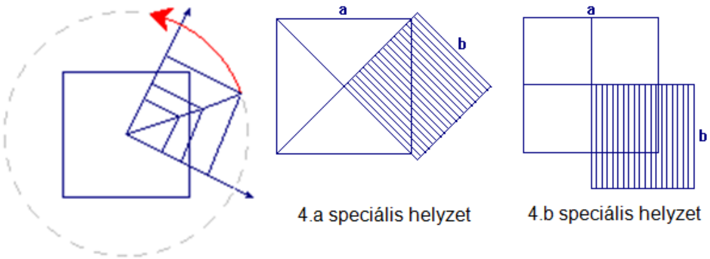
3.b speciális helyzet

Ez akkor teljesül, ha a forgó négyzet oldala hosszabb az álló négyzet oldalának felénél, de nem hosszabb, mint az álló négyzet átlójának felénél:

$$\frac{a}{2} < b \leq \frac{a\sqrt{2}}{2}.$$

A fenti intervallumba eső b oldalhossz esetén a metszet elforgatáskor változik. Van olyan helyzet, amikor az álló négyzet negyede, azaz elérhető a terület $\frac{a^2}{4}$ maximális értéke.

4. A forgatás során a forgó négyzet három csúcsa mindig az álló négyzeten kívül van.



4.a speciális helyzet   4.b speciális helyzet

Ez akkor teljesül, ha a forgó négyzet oldala hosszabb az álló négyzet átlójának felénél (4.a speciális helyzet):

$$\frac{a\sqrt{2}}{2} < b.$$

A fenti intervallumba eső b oldalhossz esetén a metszet elforgatáskor nem változik, az álló négyzet negyede, a terület $\frac{a^2}{4}$ (4.a és 4.b speciális helyzetek).

Összegzés: A végtelen sok lehetséges esetet négy osztályba soroltuk.

b	a metszet	maximum
$0 < b \leq \frac{a\sqrt{2}}{4}$	állandó	b^2
$\frac{a\sqrt{2}}{4} < b \leq \frac{a}{2}$	változik	b^2
$\frac{a}{2} < b \leq \frac{a\sqrt{2}}{2}$	változik	$\frac{a^2}{4}$
$\frac{a\sqrt{2}}{2} < b$	állandó	$\frac{a^2}{4}$

5.3. táblázat. Összegzés

5.58. Feladat: *Gondolja meg, hogy milyen előismeretek, gondolkodási módszerek birtokában várható el, érthető meg a fenti diszkusszió. Milyen életkorban, illetve hányadik osztályban rendelkeznek a tanulók ezekkel a tapasztalatokkal?*

MEGJEGYZÉSEK A FELADATHOZ:

A (paraméterfüggő) konfigurációk szisztematikus elemzésére, a tapasztalatok relációkban való kifejezésére van szükség.

Az alakzat elemzése (pl. speciális helyzetek segítségével) és annak analitikus jellemzése párhuzamosan, de végig következetesen külön szálon kezelendő, hogy az ötlet és a bizonyítás ne keveredjen.

10-12. osztályban várható el ilyen fegyelmezett gondolkodás.

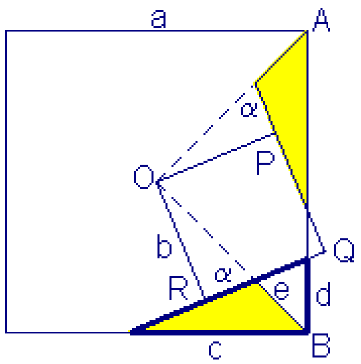
A közös rész területének vizsgálata az elforgatás szögének függvényében

A paraméter minden értékére meghatároztuk a metszet területének maximumát. Két intervallum is adódott, amelybe tartozó b értékek mellett a közös rész nagysága függ az elforgatás szögétől. Adódik a kérdés, hogy mekkora a legkisebb közös rész ezekben az esetekben.

A két eset közül most csak az egyik (az egyszerűbb) esettel foglalkozunk.

Mindenekelőtt megfelelő változó választására van szükségünk ahhoz, hogy ezzel a változóval és a paraméterekkel az O körüli forgatás függvényében írhassuk fel a közös rész területét.

Némi próbálkozás után az a szög bizonyult alkalmasnak, amelyet az álló négyzet OB átlója zár be a forgó négyzet RQ oldalával (ld. α az ábrán).



A közös rész területe mindaddig b^2, amíg a forgás során az OQ átló nem metszi az AB oldalt. Mivel Q pontosan akkor kerül az álló négyzeten kívülre, ha $\sin\alpha \cdot b\sqrt{2} > \frac{a}{2}$, ezért a területet a következő tartományban vizsgáljuk:

$$\alpha \in \left(\alpha_0 = \arcsin\frac{a\sqrt{2}}{4b}; 90°\right].$$

A közös rész területét átdarabolás után számítjuk ki. Ehhez összehasonlítjuk az AOB háromszöget a metszettel. A jelölt α szögű derékszögű háromszöget és a sárgára festett háromszögeket 90°-os forgatás viszi egymásba. Ebből következik, hogy a metszet és az álló négyzet negyedének különbsége a vastagon jelölt derékszögű háromszög. Az RQ oldal az OB félátlóból egy e szakaszt vág le, amelynek hossza a következőképpen számolható:

$$e = \frac{a\sqrt{2}}{2} - \frac{b}{\sin\alpha}.$$

A vastagon jelölt derékszögű háromszög c és d befogói egy-egy olyan háromszögnek az oldalai, amelynek e is oldala és a szögeiket ismerjük. Ezekre felírjuk a szinusztételt:

$$\frac{d}{e}=\frac{\sin\alpha}{\sin(135^\circ-\alpha)} \quad \text{és} \quad \frac{c}{e}=\frac{\sin\alpha}{\sin(\alpha-45^\circ)}.$$

Ebből ekvivalens átalakítással

$$\sin(135^\circ-\alpha)=\sin 135^\circ\cos\alpha-\sin\alpha\cos 135^\circ=\frac{1}{\sqrt{2}}(\cos\alpha+\sin\alpha)$$

$$\sin(\alpha-45^\circ)=\sin\alpha\cos 45^\circ-\cos\alpha\sin 45^\circ=\frac{1}{\sqrt{2}}(\sin\alpha-\cos\alpha)$$

és e behelyettesítésével kapjuk, hogy

$$d=\frac{a\sin\alpha-b\sqrt{2}}{\cos\alpha+\sin\alpha} \quad \text{és} \quad c=\frac{a\sin\alpha-b\sqrt{2}}{\sin\alpha-\cos\alpha}$$

és ebből a jelölt háromszög területe az α szög függvényében

$$f_0(\alpha)=\frac{cd}{2}=\frac{(a\sin\alpha-b\sqrt{2})^2}{-2\cos 2\alpha}.$$

Ebből következik, hogy a közös rész területe az

$$\alpha\in\left(\alpha_0=\arcsin\frac{a\sqrt{2}}{4b};90^\circ\right]$$

értelmezési tartományban α függvényeként

$$f(\alpha)=\frac{a^2}{4}-f_0(\alpha)$$

alakban adható meg.

Az f függvény pontosan akkor minimális, ha f_0 maximális.

f_0 maximumát deriválás segítségével határozzuk meg. Az α szerinti deriváltja:

$${f_0}'(\alpha)=-\frac{(a\sin\alpha-b\sqrt{2})\cdot\cos\alpha\cdot(a-2\sin\alpha\cdot b\sqrt{2})}{\cos^2 2\alpha}.$$

Mivel a vizsgált intervallumban $\sin\alpha\cdot b\sqrt{2}-\frac{a}{2}$ és $\cos^2 2\alpha$, $\cos\alpha$ pozitív, $a\sin\alpha-b\sqrt{2}$ pedig negatív. Ebből következik, hogy ezen a nyílt intervallumon a derivált pozitív, tehát a függvény szigorúan monoton növő. f_0 és f értelmezhető az $\alpha=90^\circ$ értékre is, és ebben a végpontban van szélsőértékük. A két négyzet közös részének területe tehát az átlós helyzetnek nevezett szimmetrikus állásban a legkisebb, az értéke $f(90^\circ)=\frac{a^2}{4}-\frac{(a-b\sqrt{2})^2}{2}$.

5.59. Feladat: *a) Milyen ábrával, konkrét értékkel mutatná meg a tanulóknak, hogy mit is jelent ez az eredmény? (Kontrollmódszerek)*

b) Gondolja meg, hogy milyen előismeretek, gondolkodási módszerek birtokában várható el, érthető meg a fenti megoldás. Milyen iskolatípusban, illetve hányadik osztályban rendelkeznek a tanulók ezekkel a tapasztalatokkal? Milyen módszert választana, ha a tanulók nem tanultak differenciálszámítást?

MEGJEGYZÉSEK A FELADATHOZ:
Előismeretek: Trigonometrikus függvények és ezek inverzei, szinusztétel, trigonometrikus azonosságok, algebrai átalakítások, differenciálszámítási alapismeretek. Szint: 17-18 éves korosztály (11. 12. évfolyam), általában fakultációs vagy speciális matematika osztályok.

Ha nem arra akarunk példát mutatni, hogy zárt intervallumon értelmezett szigorúan monoton függvény az intervallum végpontjában veszi fel a szélsőértékét, akkor például az átlóval bezárt szög helyett az x tengellyel bezárt szöget vezetjük be változónak, és ezáltal belső pontba kerül a szélsőérték. Ekkor a szélsőérték helyét az első derivált zérushelyének és jelváltásának segítségével állapítjuk meg.

Természetesen választhattunk volna számos más utat is (koordinátamódszer, trigonometriai megközelítés, stb.). Mindegyik útnak mások az előnyei és nehézségei. Ha például az osztály nem mozog magabiztosan a szögfüggvények körében, (vagy szóba sem jött a szögfüggvények deriválása), akkor változónak egy szakaszt választhatunk és a szögfüggvényeket a szakaszok arányával kerüljük meg.

A differenciálszámítással meghatározott szélsőértéket meg is sejthettük volna, és azok a tanulók, akik a középiskolában nem tanulnak differenciálszámítást, egyenlőtlenség igazolásával mutathatnák meg, hogy a sejtésünk igaz.

Ha pedig az előismereteik nem elegendőek hozzá, akkor a területet megfelelő programmal, animációval, stb. vizsgálhatják és így alkothatnak sejtést a szélsőértékre vonatkozóan.

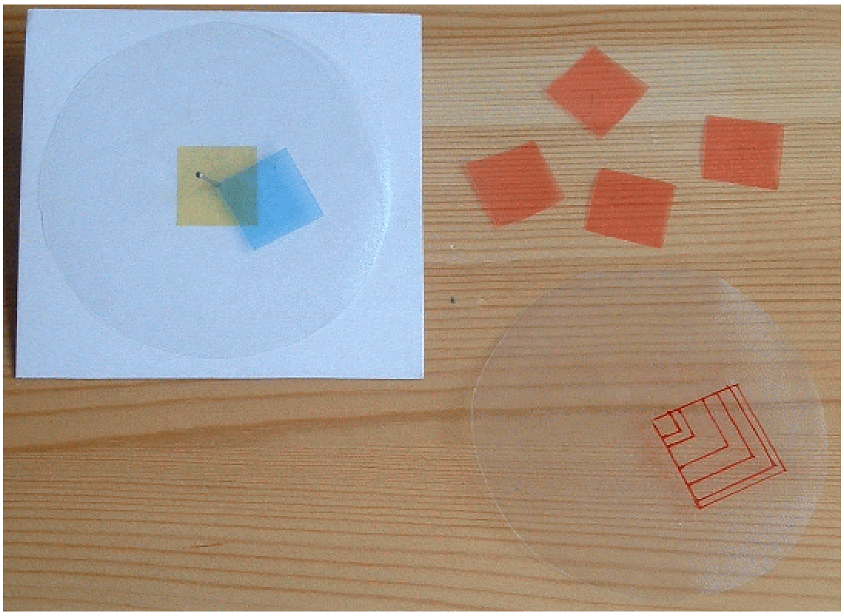
5.3.4. Segítő eszközök a probléma megoldásánál és továbbgondolásánál

A probléma megoldása egyáltalán nem könnyű. Amikor a tanár meggondolja, hogy a különböző évfolyamokon lehetséges megoldási utak közül melyiket választja, azt is eldöntheti, hogy ehhez milyen segítséget ad.

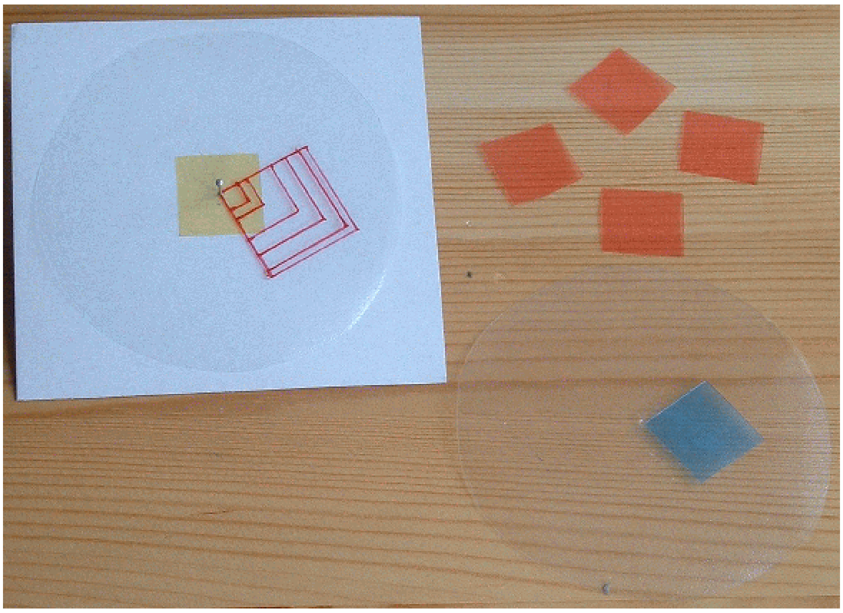
A segítség lehet egyszerűen egy kérdés, egy állítás, egy megoldási részlet. Konkrét meggondolásokhoz kapcsolódóan specifikus segítség, segédeszköz is adható.

A hagyományos modell

a) A sárga (első) négyzet egy fehér kartonnégyzeten van, a kék (második) négyzetet egy fóliakörre ragasztjuk. Ezt a kört egy gombostű segítségével a sárga négyzet középpontjában rögzítjük. Ennek segítségével a forgó négyzet az egyik csúcsa körül tud forogni.



b) A fóliából készült kör cserélhető és lemosható filccel lehet rá írni is. A további (a rajzon eredetileg piros) több kis négyzet a forgási szimmetriával kapcsolatos vizsgálatoknál lehet segítségünkre. A modellen például ezekből három úgy egymásmellé tehető, hogy a kék négyzettel együtt egy négyszer nagyobb négyzetet alkotnak.



Felhasznált anyagok: Karton, fóliák (átlátszó, sárga, kék, piros) filctollak, gombostű, ragasztó.

5.60. Feladat: *a) Gondolja meg, hogy a fenti szemléltetőeszközök melyik reprezentációs szinten segítik a fogalomalkotást.*

b) Melyik megoldást milyen kézzelfogható modell vagy ábra, stb. segítségével szeretné szemléltetni?

c) Melyiket tudná ezek közül elkészíteni, megrendelni, stb.

MEGJEGYZÉSEK A FELADATHOZ:

A modellek a konkrét-manipulatív (enaktív) és a képi szemléletes (ikonikus) síkon próbálnak segíteni.

A fenti modellek eszközigénye igen csekély, de gondolni kell rá előre, mert nincs mindig a tolltartónkban vagy a zsebünkben.

Érdemes olyan eszközöket használni, amely a tanulók önálló munkáját, gondolkodását serkentik. Nem a lecsiszolt kész megoldást, hanem gondolatébresztő esetek vizsgálatát érdemes sugallni.

Az iskola adottságaitól függően más-más anyagok kívánatosak (zománcos táblába nem tudunk gombostűt szúrni, stb.) Használhatunk fémépítőt, mágnest, gyurmaragasztót (blue-tech), ... amely nem hagy nyomot a környezeten. Ezek közül néhány tényleg beleillik a tanát tolltartójába, vagy legalábbis a fiókjába.

Vizsgálat a CABRI dinamikus geometria programmal

Az $f(\alpha)$, illetve $f_0(\alpha)$ függvények vizsgálatához megfelelő interaktív feladatlapok is használhatók, amelyeken az a és b paraméterek változásának hatása követhető. Mi itt egy CABRI II dinamikus geometriai programmal dolgoztunk és ennek alapján illusztráljuk a segédeszköz szerepét, de bármely dinamikus geometriai programmal, aktív táblával, stb. elérhető lényegében ugyanaz a matematikadidaktikai cél:

Azt szeretnénk, hogy a szoftver lehetőségeit kihasználva a tanulók maguk tudják változtatni a paramétereket és az α változót az

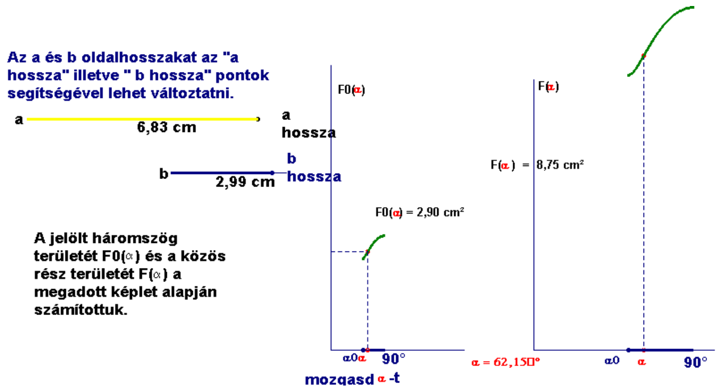
$$\alpha \in \left(\alpha_0 = \arcsin \frac{a\sqrt{2}}{4b}; 90^\circ\right)$$

értelmezési tartományban. Így megfigyelhetik a változtatás hatását a függvényértékre. A megfigyelés segíti őket abban, hogy sejtésüket megfogalmazzák a minimumhelyre vonatkozóan az adott tartományban.

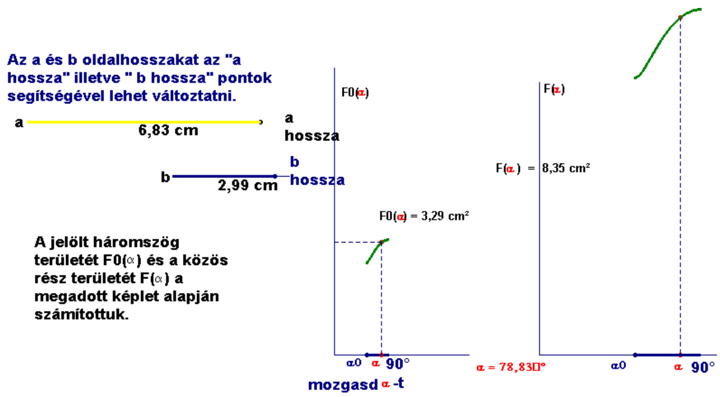
A következő képernyőkivágások segítségével mutatjuk be, hogyan segíthető a vizsgálat interaktív feladatlap segítségével. (CABRI feladatlap elérhető a következő címen:
http://dl.dropbox.com/u/100162898/ambrusg/AG_LEMEZ/funktion1.fig)

(A CABRI-ábrázolás egyik hátránya – például a GeoGebrával szemben –, hogy a függvény feliratozása és a feliratozás általában nehézkes, ezért például $F0(\alpha)$ és $F(\alpha)$ szerepel a képernyőn.)

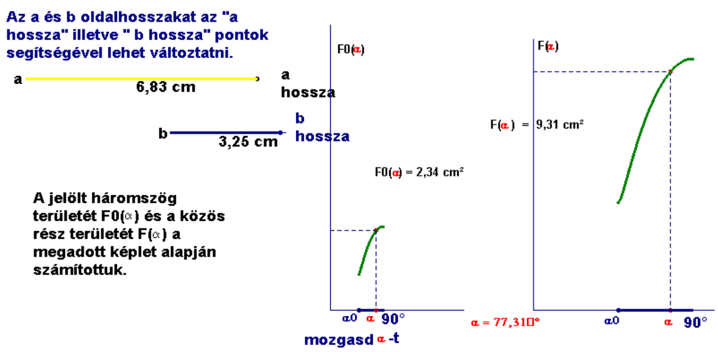
A tanulók az CABRI-val elkészített alakzatot készen kapják, az alakzat elkészítése nem várható el tőlük, de most az nem is cél. A kész ábra használatához már elegendő, ha elemi Windows és CABRI-ismeretekkel rendelkeznek (Ambrus G. 2003 [10]).



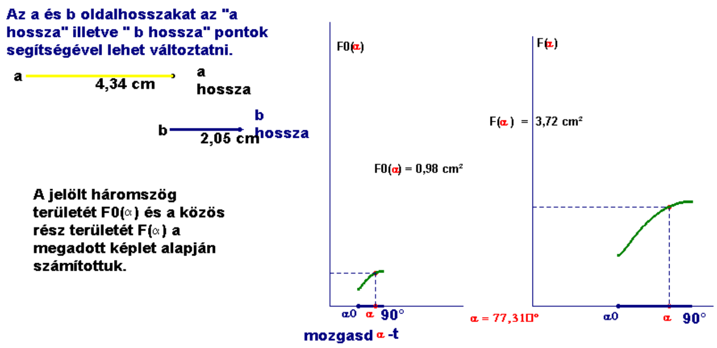
Az a és b hossza az ábrán olvasható módon változtatható. Konkrét a és b értékek esetén $F0(\alpha)$ függvény a megadott tartományban (vastagon jelzett szakasz az x tengelyen) vizsgálható.



Ha az α pont elmozdul (az x-tengely kijelölt szakaszán), akkor leolvasható az $F0(\alpha)$ és az $F(\alpha)$ függvények aktuális értéke, továbbá ábrázolja a program a grafikonokon a megfelelő pontokat.



Az a paraméter által meghatározott tartományban változtatható a b paraméter, ami hatással van a vizsgálatba bevonható α értékekre is: $\alpha 0$ (a balvégpont) is változik valamint a vastag szakasz hossza az x-tengelyen, és az $F0(\alpha)$ és az $F(\alpha)$ függvények aktuális értéke is.



Az a paraméter változtatása hatással van b vizsgálandó értékeire, a vastag szakasz az x-tengelyen változatlan marad, az $F0(\alpha)$ és az $F(\alpha)$ függvények értéke változik.

A vizsgálattól azt a sejtést várjuk, hogy az $F0(\alpha)$ függvénynek minden lehetséges paraméterérték esetén egy maximuma van (és így $F(\alpha)$-nak egy minimuma), és ezt az $\alpha = 90°$ helyen veszik fel.

5.61. Feladat: *Keressen az interneten olyan portált, ahol lehetőség van ezeknek a paraméteres függvényeknek az online vizsgálatára.*

MEGJEGYZÉSEK A FELADATHOZ:

Számos függvényábrázoló program, vagy komputeralgebrai rendszer kínálkozik. Az egyik igényes portál a Wolfram Mathematica Online.

Vannak más vizsgálati módszerek is, amelyek lehetővé teszik a szélsőérték meghatározását differenciálszámítás nélkül. Ilyen található egy másik példa kapcsán Schumann, H. és Vásárhelyi, É. 2002-es írásában [202], ahol egyúttal az említett módszerek is tárgyalásra kerültek.

Vizsgálat grafikus kalkulátorral

A grafikus kalkulátor segítségével – didaktikai szempontból nagyon fontos – kapcsolat létesíthető az egyváltozós függvények különböző reprezentációi között. A kalkulátorba beírható a függvény hozzárendelési szabálya, és az összetartozó értékpárok táblázatban és (vagy) grafikusan ábrázolhatók.

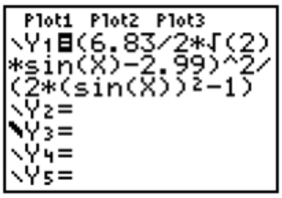
A vizsgálat célja most $F0(\alpha)$ függvény, konkrét a és b paraméterértékek melletti minimumhelyének meghatározása.

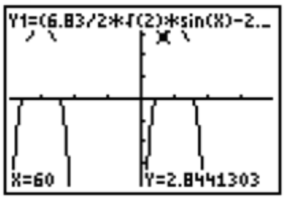
A következő képek a legegyszerűbb grafikus kalkulátor a TI-83 kijelzőjéről készült „kivágások”.

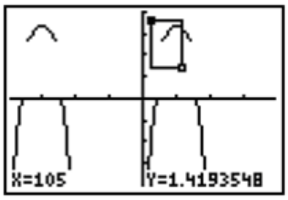
Ahhoz, hogy az itteni eredményeinket a korábbi képekkel összehasonlíthassuk, a következő paraméterértékeket választottuk: $a = 6,83$ cm és $b = 2,99$ cm. A változót (α szöggel való forgatás) a kalkulátoron X jelöli, és fokban mértük. A képletet a „TI-83-szerint” írtuk be és a kijelzőn a következő alakban jelent meg:

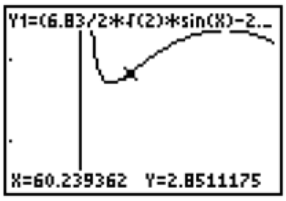
$$Y1 = (\frac{6,83}{2} \cdot \sqrt{2} \cdot \sin(x) - 2,99)^2 / (2 \cdot (\sin(x))^2 - 1)$$

A TI-83 egyik fontos funkciós lehetősége a „Zoombox”. Ennek segítségével egy függvény részleteit közelebbről is szemügyre vehetjük. Az $X = 45$ esetén nem kapunk függvényértéket: a negyedik (nagyított) kép ezen a helyen egy függőleges egyenest mutat.









A TRACE segítségével a függvény menetét vizsgálhatjuk. A ZOOM paranccsal a vizsgált tulajdonság szempontjából fontos hely környezete a felbontóképesség határáig nagyítható. Szinte minden grafikus kalkulátor rendelkezik olyan (numerikus vagy/és szimbolikus) szélsőérték meghatározáshoz használható algoritmussal, és kétváltozós függvények grafikus megjelenítésére is képesek. A TI-83 esetén csak a szélsőérték kiszámítása lehetséges. (BLACK-BOX-Módszer).

A differenciálszámítás a numerikus vizsgálatnál is használható (GREY-BOX-Módszer). (ld. ehhez a kétnyelvű CD, Fuchs, K.J. és Vásárhelyi, É. 2001. [84]) Kezdők esetén nem érdemes ezt a kiegészítő lehetőséget igénybe venni.

5.62. Feladat: *Nézzen utána, hogy milyen kalkulátor típusok milyen arányban használatosak az iskolákban. Készüljön fel a legfontosabb típusok használatára.*

MEGJEGYZÉSEK A FELADATHOZ:

Nagyon kevés grafikus kalkulátor van használatban. Az átlagos szolgáltatású zsebszámológépek közül érdemes kiválasztani egy olcsóbb, elterjedtebb típust, de szükséges ismernie igényesebb gépek működését is.

6. fejezet

Valószínűségszámítás, statisztika

Ebben a fejezetben célunk az, hogy összefoglaljuk és megvilágítsuk azokat a gondolkodási folyamatokat, eljárásokat, amelyek segíthetik a hallgatókat a feladatok megoldásában, azok megértésében. Nem azt tűztük ki célul, hogy nehezebbnél nehezebb feladatokat adjunk fel és oldjunk meg, hanem a saját gyakorlatunkból merítve, a felmerülő gondolkodási folyamatokra, a megoldási módszerek ismertetésére akarunk koncentrálni.

6.1. Alapfeladatok és kompetenciák

A valószínűségszámítási, statisztikai feladatok megoldása során fejlesztendő a diákok rendszerezőképessége. Az általános iskolai képzés végére a tanulók legyenek képesek adatsokaságot jellemezni, ábrákról adatsokaság jellemzőit leolvasni. Szisztematikus esetszámlálással tudják meghatározni egy adott esemény bekövetkezésének esélyét.

6.1.1. Valószínűségszámítás és matematikai statisztika az iskolai tananyagban. (10. tétel)

A véletlen esemény fogalma. Kombinatorikus és geometriai módszerek. Valószínűségszámítási szemléltetések (fa diagram, kettős fa diagram). Statisztika és valószínűségszámítás kapcsolata. Leíró statisztika alapvető céljai.

A valószínűségszámítás és matematikai statisztika tanítása az első négy osztályban folyó számolási-számítási, elemi gondolati, logikai kompetenciák megalapozása után, az ötödik osztályban kezdődik (tulajdonképpen már előbb is, véletlen a játékokban, adatgyűjtés, strigulázás a mindenkori tanterv függvényében már alsóban is szerepelhetnek). Természetesen az életkori sajátosságok figyelembevételével a gyakorlathoz és a mindennapi élethez kapcsolódó tevékenységekkel, feladatokkal kapcsolatban merülnek fel először azok az ismeretek, amelyek ehhez a témakörhöz tartoznak. A statisztika valamint a valószínűségszámítás felépítése egyre absztraktabb szinteken keresztül a 12. évfolyam végéig tart.
A téma az iskolai és az egyetemi tananyagban:

1. Az 5.-8. osztályban a tanulóknak az alábbi ismeretanyaggal kell találkozniuk:

   Adatok, gyűjtése a tanulók közvetlen környezetéből, illetve 7.-8.-ban egyéb forrásokból, azok rendszerezése, táblázatba foglalása, ábrázolása.

   Lényegtelen, hogy a gyerekek saját fél- vagy egyperces szívverésüket számlálják, vagy a tanterem előtt adott időegység alatt elhaladó piros autókat, vagy fehér libákat. A lényeg az, hogy saját maguk gyűjtsenek adatokat, azokat valamilyen logikus elrendezés szerint rögzítsék és az osztályban – a tanár vezetésével – közösen feldolgozzák. Ebben az időszakban jelenik meg a gyakoriság, a relatív gyakoriság, a rendezett halmaz, a rendezett minta, valamint a középértékekre jellemző mérőszámok, azaz az átlag, a medián és a módusz. Ezek kiszámítása csak kevés számú adat esetén feladat. A továbbhaladási feltételek szerves részét képezi az adatok megjelenítése grafikonok, diagramok segítségével. Fontos téma a grafikonokkal történő manipulációk megismerése.

   A tanárnak ennél az anyagrésznél lehetősége nyílik a nagyon mély tantárgyi koncentráció megvalósítására, hiszen a történelem, földrajz, biológia ... tantárgyakban számolatlanul sok lehetőség nyílik táblázatok, grafikonok statisztikák használatára és elemzésére. Az egyes oszlop-, vonal- vagy pontdiagramok készítése elemi feladat, később a százalékszámítás megjelenése után pedig kör- és szalagdiagramokat is kell készíteni. Lényeges elem, hogy ne a tanulókat hidegen hagyó (Ausztrália GDP-jének alakulása a 60-as években) adatokból, hanem az ő érdeklődésüket is felkeltő, életkori sajátosságaikhoz igazodó adatokkal dolgozzunk az órákon.

   (SAJÁT PÉLDA)

   A relatív gyakoriság alapos megismerése után a tanulók elemi példákon keresztül becslik, illetve kiszámítják egyes elemi események valószínűségeit (kockadobások, sorsolások, leszámlálásos feladatok).

   Hasznos olyan esteket választani, amelyeknél valami logikával ki tudjuk számolni a valószínűséget, s ezt összevethetjük a relatív gyakoriság alakulásával.

   (SAJÁT PÉLDA)

   Ezekhez a fogalmakhoz az első 4-5 valószínűségszámítás előadás anyaga kapcsolódik szervesen, amikor a valószínűség axiomatikus bevezetése után belátjuk, hogy a Bernoulli-törvény értelmében (a nagy számok törvényének valószínűségekre vonatkozó alakja) egy A esemény bekövetkezésének relatív gyakorisága sztochasztikusan konvergál az adott esemény $P(A)$ valószínűségéhez. A statisztika témakörben az egyetemi kurzusokon elhangzik a medián, a módusz és az átlag definíciója is, mint jellemző középértékek, sőt megismerkedünk a várható érték fogalmával és kiszámítási módjával is, kezdetben csak diszkrét valószínűségi változókra.

   Az elemi leszámlálásos feladatmegoldásokat kombinatorikus meggondolásokkal, illetve statisztikai döntésekkel támaszthatjuk alá.

   (SAJÁT PÉLDA).

2. A 9.-12. osztályban a tanulóknak az alábbi ismeretekkel kell találkozniuk:

Kezdetben, azaz a 9. osztályban csak az 5.-8. osztályban tanultak újragondolása, ismétlése és nagyobb adathalmazokra alkalmazása a feladat. Itt fontos szerepet kaphat a számítógép vagy a grafikus kalkulátor. Újra alkalmazzuk a mediánt, a móduszt és az átlagot, most már nem csak a számtani, hanem a súlyozott számtani közép esetében, valamint egyes esetekben megjelenik, mint jellemző érték a mértani közép.

Említhető a harmonikus és a négyzetes közép is. Ezek megjelennek az egyetemi tananyagban általánosan, mint a várható érték tetszőleges függvényei, illetve mint egy valószínűségi változó függvényének várható értékei. Ismétlésre kerül még a diagramkészítés és ezzel együtt a valószínűségek arányokkal, illetve százalékokkal történő megadása.

Módszertani szempontból ezeket a témaköröket is – mint minden hasonló esetben – a párhuzamosan futó tantárgyakkal, illetve a fiatalokat érintő-érdeklő adatokkal összefüggésben érdemes bemutatni.

(SAJÁT PÉLDA)

Ebben az évben, csakúgy, mint a korábbiakban, jelentős szerepe van a valószínűségi kísérletek végrehajtásának, azok valóságos kivitelezésének. Érdemes és tanulságos az egyes tanulók vagy tanulói csoportok eredményeinek összesítése, ahol a tanulók érezhetik, hogy eredményeikkel mennyire járulhatnak hozzá az osztály összességének eredményeihez, mekkora hatással vannak az átlagra.

(SAJÁT PÉLDA)

A 10.-11. osztályban bevezetésre kerül a terjedelem, majd az átlagtól való eltérés mérésének szükségessége, néhány ilyen mérőszám, köztük a szórás és megjelenik a valószínűségi kísérletek elvont végrehajtása, tehát amikor nem feltétlenül hajtunk végre kísérleteket, hanem azokat teoretikusan, idealizált körülmények között végezzük el. A tanulók megismerkednek a „klasszikus” valószínűségi modellel, tehát amikor minden elemi esemény (csak véges sok!) egyenlő valószínűséggel következik be. Ekkor alkalmazni lehet a valószínűség meghatározására a mindenki által jól ismert

$$\text{valószínűség} = \frac{\text{kedvező esetek száma}}{\text{összes esetek száma}}$$

formulát. Nem keverendő a hasonló relatív gyakoriság formulával.

Az egyes események valószínűségeinek meghatározása már nem csak leszámlálással, hanem kombinatorikus formulák segítségével is történhet. Sok-sok példán keresztül el kell sajátítani a binomiális eloszlásra vezető visszatevéses mintavételből származó egyes események valószínűségeinek kiszámítási módját. Ennek az eloszlásnak a fontossága a nagy számok törvényében csúcsosodik ki, mivel az egymásután végzett kísérletek modelljeként vezethető be.

Más eloszlások, mint az egyenletes, illetve a visszatevés nélküli mintavételezésből származó hipergeometriai eloszlás is megjelennek, illetve egyéb kombinatorikus úton kiszámítható valószínűségek.

Érdemes felhívni a figyelmet a feladatkitűzők által igen kedvelt „sztenderd” megoldási eljárásokra: ilyenek az egyes esetek osztályokba sorolása, párokba rendezése, valamint az esemény tagadásának (komplementerének) meghatározása.

(SAJÁT PÉLDA)

12. osztály: A szórás kiszámításának különböző módjai, azok értelmezése, különböző konkrét eloszlások esetén, valamint a binomiális (és a hipergeometriai) eloszlás szórása általános esetben (utóbbi csak kiegészítő anyag!). További kitekintésként megjelenhetnek a folytonos eloszlások közül a normális eloszlás, különösen akkor, ha más tárgyakhoz köthető grafikonokat is elemeznek az órákon.

(SAJÁT PÉLDA)

3. Az iskolai tananyag megalapozása az egyetemi előadásokon

   Az egyetemi előadások és gyakorlatok jelentős mennyiségű elméleti hátteret adnak diszkrét állapotterű stacionárius átmenet-valószínűségű Markov-láncokhoz, valamint egyéb folytonos eloszlású valószínűségi változókhoz. Részletesen tárgyalja az előadó és a gyakorlatvezető a következő eloszlásokat: karakterisztikus, egyenletes, binomiális, hipergeometriai, Poisson, negatív binomiális, illetve a folytonos eloszlások közül az egyenletes, exponenciális, gamma és normális eloszlásokat. Bevezetésre kerül a várható érték és a szórás elméleti fogalma, azok kiszámítási módjai és tulajdonságai. Része még az anyagnak a korreláció, a lineáris regresszió, a Markov-, Csebisev-egyenlőtlenség, a nagy számok gyenge törvényei, a Moivre-formula, valamint statisztikából a becsléselmélet és a hipotézisvizsgálat alapjai. Ezek – hasonlóan a többi egyetemi kurzushoz – azt szolgálják, hogy a tanárnak átfogóbb, mélyebben kiterjedő tudása legyen, amelynek magasságából jobban átlátja a tárgy struktúráját, felépítésének lépéseit.

Irodalom

Bognárné-Nemetz-Tusnády: Ismerkedés a véletlennel. [35]
Pálfalvi Józsefné: Matematika didaktikusan. [168] 148-166.
Vancsó Ödön (szerk.): Matematika kézikönyv. [240] 26. és 27. fejezet

Kitekintő irodalom

Vancsó Ödön: Lesz-e olyan pillanat, amikor minden táncos „halott”? [237]
Velkeyné Grétzy Alice - Vancsó Ödön: Hány üveg üdítőt kell átlagosan vennünk, hogy összegyűjtsük mind a 6 különböző kupont? [251]

6.1.2. A kerettanterv elvárásai

Alsó tagozat

– Adatokról megállapítások megfogalmazása.

– Tapasztalati adatok lejegyzése, táblázatba rendezése. Táblázat adatainak értelmezése.

– Adatgyűjtés, adatok lejegyzése, diagram leolvasása.

- Valószínűségi játékok, kísérletek értelmezése. Biztos, lehetetlen, lehet, de nem biztos tapasztalati ismerete.

Felső tagozat

- Egyszerű diagramok készítése, értelmezése, táblázatok olvasása.
- Néhány szám számtani közepének kiszámítása.
- Valószínűségi játékok, kísérletek során adatok tervszerű gyűjtése, rendezése, ábrázolása.
- Valószínűségi kísérletek eredményeinek értelmes lejegyzése, relatív gyakoriságok kiszámítása.
- Konkrét feladatok kapcsán a tanuló érti az esély, a valószínűség fogalmát, felismeri a biztos és a lehetetlen eseményt.
- Zsebszámológép célszerű használata statisztikai számításokban.
- Néhány kiemelkedő magyar matematikus nevének ismerete, esetenként kutatási területének, eredményének megnevezése.

Középiskola

- Adathalmaz rendezése megadott szempontok szerint, adat gyakoriságának és relatív gyakoriságának kiszámítása.
- Táblázat olvasása és készítése; diagramok olvasása és készítése.
- Adathalmaz móduszának, mediánjának, átlagának értelmezése, meghatározása.
- Véletlen esemény, biztos esemény, lehetetlen esemény, véletlen kísérlet, esély/valószínűség fogalmak ismerete, használata.
- Nagyszámú véletlen kísérlet kiértékelése, az előzetesen „jósolt" esélyek és a relatív gyakoriságok összevetése.
- Statisztikai mutatók használata adathalmaz elemzésében.
- A valószínűség matematikai fogalma.
- A valószínűség klasszikus kiszámítási módja.
- Mintavétel és valószínűség.
- A mindennapok gyakorlatában előforduló valószínűségi problémákat tudják értelmezni, kezelni.
- Megfelelő kritikával fogadják a statisztikai vizsgálatok eredményeit, lássák a vizsgálatok korlátait, érvényességi körét.

6.1.3. Leszámlálással (is) megoldható feladatok

Nagyon gyakran előfordul, hogy a diákok nem találnak rá arra a helyes, – esetleg nem is létező – kombinatorikus alakra, ami az adott feladathoz könnyen megadja a keresett esemény valószínűségét. Bizonyos esetekben ilyenkor célravezető arra bíztatni őket, hogy nosza, írják fel a lehetséges összes esetet, majd vizsgálják meg, hogy azok egyenlő valószínűségűek-e. Ha kiválogatják közülük a keresett eseménynek megfelelőket, akkor már meg is oldották a példát. Sokszor nagyságrendekkel könnyebben lehetett felíratni a hallgatókkal az eseteket, mint megkerestetni a logikai hibát valamely kombinatorikus formulában. A további általános megjegyzések helyett álljon itt néhány példa az esetek bemutatására.

6.1. Feladat: *Három kockát feldobunk. Mi a valószínűsége annak, hogy van köztük hatos, ha mindegyik dobás különböző.*

MEGJEGYZÉSEK A FELADATHOZ:

Gyakran előfordul, hogy egy csoporton belül több megoldást is hoznak a hallgatók. Ezek néha jók, néha kicsit tévesek, néha rosszak. Ilyenkor érdemes feltenni a kérdést a tanulóknak: „Fel tudnátok sorolni az összes lehetséges esetet?” A lustábbak zúgolódni szoktak, hogy – ne már, az iszonyú sok –, de mindig van aki neki áll. Ők nyernek. A táblán összesítve szépen rendezetten az alábbi számhármasok jelennek meg, félkövérrel szedve azok, amelyekben van hatos:

123	124	125	**126**	134	135	**136**	145	**146**	**156**
234	235	**236**	245	**246**	**256**	345	**346**	**356**	**456**

Ezek után kacagtatóan egyszerű megszámolni, hogy 10 esetben van hatos, az összesen 20 számhármas között. Ha még azt is hozzáteszi valaki, hogy mindegyik eset egyforma valószínűségű, akkor máris megkapjuk a keresett 1/2 valószínűséget.

Igen, a hallgatók fele tudja, hogy fel lehet írni a megoldást sokféleképpen kombinatorikusan is. A mellett, hogy őket megdicsérjük, az is célunk kell legyen, hogy azok számára is világosságot gyújtsunk, akik a feladatot nehezebben látják át.

A sztenderd hibás megoldások a következők szoktak lenni:

Kell dobnom egy hatost. Erre egy lehetőségem van. A következő dobásom ötféle, a harmadik pedig négyféle lehet, ez összesen $1 \cdot 5 \cdot 4 = 20$ lehetőség. Az összes lehetőség persze $6 \cdot 5 \cdot 4 = 120$, így a keresett valószínűség $\frac{20}{120} = \frac{1}{6}$.

Ilyenkor mindig érdemes a tanulókat megkérdezni, hogy mi az ő véleményük, hol a hiba? Mindig előkerül a jó válasz. Amit korábban lefelejtettek, az egy hármas szorzó. Az egyetlen hatos nem csak az első, hanem a második, illetve a harmadik helyen is előfordulhat, azaz a kijavított módon ők is a helyes eredményt kaphatják:

$$\frac{1 \cdot 5 \cdot 4 + 5 \cdot 1 \cdot 4 + 5 \cdot 4 \cdot 1}{120} = \frac{3 \cdot 20}{120} = \frac{1}{2}. \tag{6.1}$$

Nagyon gyakori hiba, hogy a tanuló keveri az egyes leszámlálási módokat. Egy ilyen megoldási módszer, ami gyakran előkerül, a következő. Válasszunk egy hatost és két különböző számot a maradék ötből. Erre $\binom{5}{2} = 10$ lehetőségünk van, ez lesz a kedvező esetek száma. Ugyanekkor a nevezőben az összes eset számánál sokan a $6 \cdot 5 \cdot 4 = 120$ formulával számolnak, amiből a hibás $\frac{10}{120} = \frac{1}{12}$ eredmény adódik. Persze ezt is könnyen lehet korrigálni, ha vagy a számlálót vagy a nevezőt módosítjuk. Most is célszerű a tanulókkal megkerestetni a hibát, mert tipikus, hogy a klasszikus

$$P = \frac{\#\{\text{kedvező esetek}\}}{\#\{\text{összes eset}\}}$$

formulában más és más logika alapján következtetnek a számlálóra és a nevezőre. Ha a számlálót javítanánk, akkor a már korábban ismertetett alakú törtet kapnánk, javítsuk hát most a nevezőt. Az összes eset száma $\binom{6}{3} = 20$, azaz a keresett valószínűség most is

$$\frac{\binom{5}{2}}{\binom{6}{3}} = \frac{10}{20} = \frac{1}{2}. \tag{6.2}$$

Egy másik hasonló jellegű feladat a következő:

6.2. Feladat: *A Mancehester United focicsapata kétkapus edzést tart. Az első csapat keretéből éppen 20 játékos van jelen, akik sorsolással két 10 fős csapatot alkotnak. Mi a valószínűsége, hogy Ryan Giggs és Wayne Rooney egy csapatba kerül? (A játékosok neve a kor előrehaladtával tetszőlegesen frissíthető.)*

MEGJEGYZÉSEK A FELADATHOZ:

A tanulók persze erre a feladatra is sokféle megoldást szoktak hozni. A két leggyakoribb a

$$\frac{\binom{10}{8}}{\binom{20}{10}}, \tag{6.3}$$

illetve a

$$\frac{2 \cdot \binom{10}{8}}{\binom{20}{10}} \tag{6.4}$$

volt. Hogyan döntsünk, ha elvi alapon egyik csoportnak sem sikerült meggyőznie a másikat és nem akarjuk hatalmi szóval eldönteni a dolgot. Lehetne most is megoldás az összes eset felírása? Teoretikusan igen, de gyakorlatilag nyilván nem. Az összes eset nagy száma miatt nem embernek való kihívás azok felírása. Hogyan lehetne egyszerűsíteni az életet? Oldjunk meg egy egyszerűbb problémát, ahol kisebbek a számok és gondolkodjunk analóg módon. Legyen például csak 4 ember, akik 2-2 fős csapatba szerveződnek véletlenül. Legyenek ők F, G, Q, R. (G = Giggs, R = Rooney) Írjuk fel az összes lehetséges 2-2 főből álló csapatpárt:

FG	QR
FQ	GR
FR	GQ

Látjuk hogy Giggs és Rooney a lehetséges 3 esetből egy esetben kerül egy párba, tehát ekkor a keresett valószínűség 1/3, ami megfelel a $\frac{2\cdot\binom{2}{0}}{\binom{4}{2}}$ formulának.

Ez alapján kijelenthetjük, hogy $\frac{2\cdot\binom{10}{8}}{\binom{20}{10}}$ a helyes válasz. Az esetek felsorolásából látszik, hogy módszertani szempontból inkább

$$\frac{\binom{10}{8}}{\binom{20}{10}/2} \tag{6.5}$$

alakba kellett volna inkább írni a megoldást, ha a két csapatot nem különböztetjük meg.

6.1.4. Lehetetlen és biztos események

Egy feladattal azt szerettem volna ellenőrizni, hogy a tanárok körében mennyire különül el a lehetetlen esemény és a kicsi, gyakorlatilag 0 valószínűségű esemény közötti különbség. Korábbi oktatási gyakorlataim során középiskolásoktól, de még egyetemi hallgatóktól is gyakran kaptam azt a tapasztalat szülte választ, hogy „ez már annyira kicsiny valószínűségű, hogy lehetetlen". Ez természetesen tökéletesen összhangban van a tapasztalati szinten levont következtetésekkel, de tanároktól illetve tanárnak készülő egyetemi hallgatóktól elvárható lenne az absztrakciónak az a foka, amely pontosabb megfogalmazást ad, érzékelteti a gyerekekkel a lehetetlen és a csekély valószínűségű esemény közötti különbséget. Némely tankönyvben vannak ugyan logikai feladatok és ezeket a tanulók is jól oldják meg, de a szóhasználatuk ennek ellenére következetlenségeket tartalmaz.

A konkrét példa egy Mendel szabály szerinti öröklődést tárgyaló feladat:

6.3. Feladat: *Volt egy csomó piros és sárga paradicsomunk. Ezeknek két generációját vizsgáltuk, és a következő eredményeket kaptuk.*

	első generáció	második generáció
I.	piros · piros	61 piros
II.	piros · piros	47 piros, 16 sárga
III.	piros · sárga	58 piros
IV.	sárga · sárga	64 sárga
V.	piros · sárga	33 piros, 36 sárga

Melyik szín a domináns fenotípus?

Melyek a lehetséges és mik a valószínű fenotípusok a táblázatban megadott 5 keresztezésben?

MEGJEGYZÉSEK A FELADATHOZ:

Az első alapvető probléma, ami a biológia feladatok kapcsán felmerül, hogy gyakran tisztázni kell a probléma megértéséhez szükséges körülményeket, fogalmakat. Habár minden érettségizett ember találkozott a feladatban szereplő öröklődéstani fogalmakkal, mégis szükséges volt az öröklődés Mendel által megfogalmazott szabályait és a témakör szóhasználatát feleleveníteni. Például a következő kérdések szoktak elhangzani:

- Az egyes sorokban más más utódokat kapunk-e?
- Ugyanaz a szabály érvényes mindegyik sorban?
- Lehet egy paradicsom egyik fele sárga a másik piros?

Megbeszéltük a domináns-recesszív öröklődés tulajdonságait, valamint a heterozigóta és homozigóta tulajdonságokat. Sokak szerint ez „nem is matematika”. További megbeszélés után felírtuk a táblára az öröklődési arányokat az egyes fenotípusok esetében. Tisztáztuk, hogy ha a domináns allél a sárga és a recesszív a piros (sztenderd módon a domináns allélt nagy- a recesszív allélt kisbetűvel jelöljük: S és p), akkor az első sor biztosan igaz, hiszen a keresztezési tábla alapján csak piros utódokat kaphatunk, azaz az első sor ebben az esetben biztos lenne. Valaki azt javasolta, hogy nézzük meg a negyedik sort, ahol két sárga paradicsomot kereszteztünk, és csak sárga utódokat kaptunk. Kapva kaptam az alkalmon és végigelemeztük a lehetséges szituációkat. Megállapítottuk, hogy csak a 4., 5. és 6. keresztezési tábla jöhet szóba és azt is sikerrel állapítottuk meg, hogy a 4. és az 5. tábla esetében az utódok mind sárgák lesznek. Némi rávezetés és számolgatás után azt mondták, hogy az utódok körülbelül negyede piros kellene legyen a 6. esetben, szóval ez lehetetlen. Gyakorlatilag igazuk volt, de szerencsére volt néhány ember a csoportban, akik azonnal fel tudták írni annak valószínűségét, hogy 64 sárga utód jön létre, ha mindkét szülő heterozigóta ($0,75^{64} \approx 10^{-8}$), ami nem nulla, azaz logikailag nincs jogunk kizárni ezt az esetet sem.

1.	p	p
p	pp	pp
p	pp	pp

2.	S	p
p	Sp	pp
p	Sp	pp

3.	S	S
p	Sp	Sp
p	Sp	Sp

4.	S	S
S	SS	SS
p	Sp	Sp

5.	S	S
S	SS	SS
S	SS	SS

6.	S	p
S	SS	Sp
p	Sp	pp

6.1. táblázat. Keresztezési táblák: a sárga (S) szín a domináns a piros (p) felett

Egy másik hallgató azt javasolta, hogy a második sor alapján döntsünk, mert ebben az esetben biztosan nem keletkezhetnek sárga utódok. Ezt az érvelést a többiek is hamar elfogadták, tehát elvethettük a sárga szín dominanciáját, azaz biztosak lehettünk abban, hogy a piros a domináns és sárga a recesszív tulajdonság.

A kezdeti nehézségek után már viszonylag gyorsan ment a feladat megbeszélése. Először a negyedik sorról állították, hogy akkor ez biztosan igaz, majd a második sorról állapították meg, hogy egyetlen eset van: mindkét szülő heterozigóta. Ezek voltak a sárga szín dominanciájának feltételezésénél tárgyalt sorok. Kicsivel később megszületett a válasz az ötödik sorra is. Ha az egyik szülő sárga és a másik piros, akkor csak a 3. és 4. keresztezési tábla lehetséges, de a

1.	P	P
P	PP	PP
P	PP	PP

2.	P	s
P	PP	Ps
P	PP	Ps

3.	s	s
P	Ps	Ps
P	Ps	Ps

4.	s	s
P	Ps	Ps
s	ss	ss

5.	s	s
s	ss	ss
s	ss	ss

6.	P	s
P	PP	Ps
s	Ps	ss

6.2. táblázat. Keresztezési táblák: a piros (P) szín domináns a sárga (s) felett

3. esetben csak piros utódokat kapnánk. Ezért ekkor az egyik szülő (ss), a másik (Ps) típusú. Már csak az első és a harmadik sor volt hátra, de nemsokára ezekre is születtek megoldások. „Az első esetben az 1., 2. és 6. táblák alapján jöhettek létre az utódok, és az első két esetben mind pirosak, ezek jók. A 6. tábla esetében azonban az utódok negyede sárga lenne, ez rossz.” A hallott mondatok tökéletesen tükrözik a gyakorlati szempontok érvényesülését és alapvetően igaz állítások. Kizárhatjuk-e a 6. tábla szerinti öröklődést? – kérdeztem. Most már rutinosan válaszoltak hogy nem, csak iciri-piciri a valószínűsége, azaz ha felteszem hogy mindkét szülő heterozigóta, akkor is csak $0,75^{61} \approx 2,4 \cdot 10^{-8}$ az esélye az utódok ilyen eloszlásának. Ebben az esetben tehát biztosat nem állíthatunk, csak azt hogy nagyon nagy valószínűséggel legalább az egyik szülő (PP) típusú allélekkel rendelkezik. Már csak a 3. sor volt hátra, ahol is megállapították, hogy az egyik szülő biztosan (ss) allélekkel, a másik pedig nagy valószínűséggel (PP) allélekkel rendelkezik, de nem zárhatjuk ki a (Ps) esetet sem, csak elhanyagolható az esélye. Összefoglalva a feladat végén mindenki láthatóan különbséget tudott tenni a közel 0 valószínűségű és a lehetetlen, illetve a közel 1 valószínűségű és a biztos esemény között. Matematikai logikai és valószínűségszámítási fogalmaik tisztábbak lettek, jobban tudtak figyelni saját állításaik megfogalmazására. Kifejezéseik precízebbek lettek, és különösen azt élvezték egy idő után, hogy ezt a biológia egy olyan területen tették, amelyről azt gondolták, hogy már réges-régen elfelejtették.

A hallgatók gyakran bonyolódnak bele a feltételes valószínűség csapdájába. A következő egyszerű feladatot három különböző módon is megoldjuk.

6.4. Feladat: *Egy városban ugyanannyi nő van mint férfi. Minden* 100 *férfi közül* 5 *és minden* 10000 *nő közül* 25 *színtévesztő. Ha a színtévesztők közül választunk egyet, akkor mi a valószínűsége, hogy az férfi?*

MEGJEGYZÉSEK A FELADATHOZ:

Rögtön három lehetséges megoldást mutatunk.

1. Megoldás:

Csak logikai úton végiggondolva. Ha ugyanannyi nő lakik a városban mint férfi, akkor vegyünk mindkét nemű lakosból ugyanannyit. Ekkor 20-szor annyi férfi lesz színtévesztő mint nő, azaz a keresett valószínűség $\frac{20}{21}$.

2. Megoldás:

Készítsünk kis táblázatot. Mivel a valószínűség nyilván nem függ a lakosság lélekszámától, tegyük fel, hogy 20000 ember lakik a városban. Közülük 10000 férfi és 10000 nő.

	férfi	nő	
színtévesztő	500	25	525
nem színtévesztő			
	10000	10000	20000

Töltsük ki a táblázatunk egyes sorait a megadott arányok segítségével. Észrevehetjük, hogy most nem is kell mindegyik sor, elég az első. A keresett valószínűség a konkrét számok alapján $\frac{500}{525} = \frac{20}{21}$.

3. Megoldás:

Kicsit rövidítsük a szöveget, jelöljük azt, hogy valaki férfi F-fel, azt hogy nő N-nel, azt hogy színtévesztő Sz-szel. A feladatban megadták a következő valószínűségeket:

$$P(F) = \frac{1}{2} \quad P(N) = \frac{1}{2} \quad P(Sz|F) = \frac{5}{100} \quad P(Sz|N) = \frac{25}{10000}$$

Keressük a $P(F|Sz)$ valószínűséget. A Bayes-tétel alapján

$$P(F|Sz) = \frac{P(Sz|F) \cdot P(F)}{P(Sz|F) \cdot P(F) + P(Sz|N) \cdot P(N)} = \frac{\frac{5}{100} \cdot \frac{1}{2}}{\frac{5}{100} \cdot \frac{1}{2} + \frac{25}{10000} \cdot \frac{1}{2}} = \frac{20}{21} \tag{6.6}$$

Ebben a feladatban egyszerű volt áttekinteni az eseteket. A következőben is csak egy kicsivel lesz nehezebb dolgunk.

6.5. Feladat: *Ma Magyarországon a felnőtt lakosság harmada dohányzik és a dohányosok $12,5\%$-a tüdőrákban hal meg. Ez az arány a teljes népességen belül mindössze 5%. Mennyi a valószínűsége, hogy egy nem dohányzó ember tüdőrákban hal meg? Ha Káin nem tüdőrákban halt meg, akkor mi a valószínűsége, hogy nem dohányzott?*

MEGJEGYZÉSEK A FELADATHOZ:

Ismét több megoldási út kínálkozik.

1. Megoldás: Van a feladatban harmad, nyolcad, huszad, tehát ha 600 fős alapsokaságot veszünk fel, akkor nagyot nem tévedhetünk. A megadott adatok alapján a táblázat kitöltve

Ezek alapján a válaszok

$$P(\text{egy nem dohányzó ember tüdőrákban hal meg}) = \frac{5}{400} = \frac{1}{80} = 0,0125$$

illetve

$$P(\text{nem dohányzott}|\text{nem tüdőrákban halt meg}) = \frac{395}{570} = \frac{79}{114} \approx 0,693.$$

	dohányzó	nem dohányzó	
tüdőrák	25	5	30
nem tüdőrák	175	395	570
	200	400	600

2. Megoldás: Értelem szerinti rövidítésekkel felírva, tudjuk hogy

$$P(D) = \frac{1}{3} \quad P(TR|D) = 0,125 \quad P(TR) = 0,05.$$

Ezek alapján

$$P(\overline{D}) = \frac{2}{3} \quad P(TR|D) = 0,125 \quad P(\overline{TR}) = 0,95$$

A teljes valószínűség tétele alapján

$$P(TR|D)P(D) + P(TR|\overline{D})P(\overline{D}) = P(TR) \tag{6.7}$$

behelyettesítve

$$\frac{1}{8} \cdot \frac{1}{3} + P(TR|\overline{D}) \cdot \frac{2}{3} = \frac{1}{20} \quad \Rightarrow \quad P(TR|\overline{D}) = \frac{1}{80} \tag{6.8}$$

Ezt az eredményt felhasználva, felírhatjuk, hogy $P(\overline{TR}|\overline{D}) = 1 - P(TR|\overline{D}) = \frac{79}{80}$. A Bayes-tétel alapján

$$P(\overline{D}|\overline{TR}) = \frac{P(\overline{TR}|\overline{D}) \cdot P(\overline{D})}{P(\overline{TR}|\overline{D}) \cdot P(\overline{D}) + P(\overline{TR}|D) \cdot P(D)} = \frac{\frac{79}{80} \cdot \frac{2}{3}}{\frac{79}{80} \cdot \frac{2}{3} + \frac{7}{8} \cdot \frac{1}{3}} = \frac{79}{114} \approx 0,693 \tag{6.9}$$

6.2. Vertikális és horizontális kapcsolatok

6.6. Feladat: *Káin és Ábel sorsot húznak, hogy ki írja meg a német fogalmazást, de csak egy dobókockájuk van kéznél. Nem lelkesedtek a feladatért, ezért Káin azt javasolta, hogy dobjanak fel egy kockát addig, amíg egyikük páros számot dob, és az menjen leckét írni. Már nyújtotta is a kockát Ábelnek, hogy kezdjen ő. Mekkora valószínűséggel megy Káin, illetve Ábel leckét írni?*

MEGJEGYZÉSEK A FELADATHOZ:

Arra gyorsan rá szoktak jönni a tanulók, hogy ez a kezdőnek előnytelen, hiszen már az első lépésben 1/2 annak valószínűsége, hogy neki kell leckét írnia. Pár perc alatt egy komplett mértani sort is felírnak:

$$P(\text{A kezdő veszít}) = \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2}\right)^3 + \left(\frac{1}{2}\right)^5 + \cdots = \frac{1}{2} \cdot \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{4^i} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{4}} = \frac{2}{3} \tag{6.10}$$

Ez egy minden szempontból elfogadható és tökéletes megoldás, amely sok más esetben is alkalmazható.

Jussunk el másképp is a megoldáshoz:

Jelöljük p-vel annak a valószínűségét, hogy a soron következő játékos veszít. Ekkor annak valószínűsége, hogy a másik veszít, nyilván $1-p$, mert könnyen látható, hogy a játék 0 valószínűséggel tart örökké. Nem tudjuk mekkora p, de felírhatunk rá egy egyenletet. Két eset van. Annak valószínűsége, hogy a soron következő játékos rögtön veszít $1/2$, ha viszont nem veszít, akkor a rákövetkező játékban nem ő a soron következő játékos, és akkor $1/2 \cdot (1-p)$ eséllyel veszít, ezért

$$p = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}(1-p) \qquad \Rightarrow \qquad p = \frac{2}{3} \tag{6.11}$$

Szemmel láthatóan ugyanarra az eredményre jutottunk mint az előbb, csak nem kellett végtelen mértani sort összegeznünk. Elég volt egy darab egyismeretlenes elsőfokú egyenletet megoldani.

Barátkozzunk tovább az ilyen jellegű feladatokkal.

6.7. Feladat: *Ábel az előző feladatban említett túlzott esély miatt másik javaslatot tett: Az menjen német leckét írni, aki először dob egyest vagy kettest, és kezdjen Káin! Mekkora valószínűséggel megy német leckét írni Káin, illetve Ábel?*

MEGJEGYZÉSEK A FELADATHOZ:

Az előző feladathoz teljesen hasonlóan felírhatjuk egy végtelen mértani sor segítségével, hogy a kezdő megy német leckét írni. A sor csak a kezdeti valószínűség miatti szimmetriáját veszíti el, de ettől még ugyanolyan jellegű marad.

$$P(\text{A kezdő veszít}) = \frac{1}{3} + \frac{1}{3}\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^2 + \frac{1}{3}\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^4 + \cdots =$$

$$= \frac{1}{3}\cdot\sum_{i=0}^{\infty}\left(\frac{4}{9}\right)^i = \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{1-\frac{4}{9}} = \frac{3}{5} = 0,6 \tag{6.12}$$

Ismételjük meg az előző feladat gondolatmenetét. Miben módosul? Nyilván csak a valószínűségek változnak, ha tehát most is p-vel jelöljük annak valószínűségét, hogy a kezdő gyerek megy leckét írni, akkor a

$$p = \frac{1}{3} + \frac{2}{3}(1-p) \qquad \Rightarrow \qquad p = \frac{3}{5} = 0,6 \tag{6.13}$$

Ez természetesen megegyezik a végtelen sor összegeként kapott eredménnyel.

Talán még jobban megérezhetjük a módszer erejét, ha tanulmányainkat felhasználva megpróbáljuk megoldani a következő nem egyszerű feladatot.

6.8. Feladat: *Egy-egy cédulára felírtuk az 1, 2, 3, illetve 4 számokat. Anna kihúz egy cédulát a négy közül, majd visszateszi a többi közé. Ezután Zsófi húz ki egy cédulát, utána visszateszi, majd ismét Anna következik, stb. A kihúzott számot mindig hozzáadják az addig kihúzott számok összegéhez. Az nyer, akinek a húzása után először lesz az összeg osztható 3-mal. mennyi a valószínűsége annak, hogy Anna nyer? (Az 1997-1998 évi matematika OKTV 4. feladat.)*

MEGJEGYZÉSEK A FELADATHOZ:

Amit az első próbálkozások után észrevehetünk, az az a sajnálatos tény, hogy a feladat készítői elrontották a korábbi feladatokban fennálló szimmetriát. Esélytelenné vált közönséges mértani sor segítségével felírni az egyes eseteket. ha tovább keresgélünk a tanult ismeretek között, akkor olyan dolgok kell hogy eszünkbe jussanak mint átmenetvalószínűségek, Markov-láncok stb. A három lehetséges maradék nyilván 0, 1 illetve 2, s ezek valószínűségei $P(m = 0) = \frac{1}{4}$, $P(m = 1) = \frac{2}{4}$ illetve $P(m = 2) = \frac{1}{4}$. Miután sokszor kell még hivatkoznunk rá, jelöljük az $(\frac{1}{4}; \frac{2}{4}; \frac{1}{4})$ sorvektort **m**-mel.

Jelölje továbbá a szokásoknak megfelelően az átmenetvalószínűség mátrixot

$$P = \begin{pmatrix} a_{00} & a_{01} & a_{02} \\ a_{10} & a_{11} & a_{12} \\ a_{20} & a_{21} & a_{22} \end{pmatrix},$$

ahol például a_{12} annak valószínűsége, hogy most az összeg maradéka 2, feltéve, hogy az előző maradék 1 volt. Ez úgy lehetséges, ha a soron következő lány éppen 1 maradékú számot tartalmazó cetlit húz, aminek a valószínűsége $\frac{1}{2}$. Hasonlóan sorra véve az egyes átmenetek valószínűségeit kapjuk a következő mátrixot:

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{2}{4} \\ \frac{2}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \end{pmatrix}.$$

Emlékezhetünk korábbról, vagy itt és most gyorsan meggondolhatjuk, hogyan lehet két lépés után eljutni az 1 maradékot adó esetből a 2 maradékú esetbe. Nyilván három lehetőség van, amelyek közül csak kettő lesz nem 0 valószínűségű. Az első lépés után kaphatunk 0, 1 vagy 2 maradékot és ezekből léphetünk tovább a 2 maradékot adó esetbe. A keresett valószínűség a teljes valószínűség tétele szerint

$$P(\text{két lépésben jutok 1-ről 2-re} = a_{10} \cdot a_{02} + a_{11} \cdot a_{12} + a_{12} \cdot a_{22}.$$

Ha minden esetet összegyűjtünk, akkor mátrix alakban is felírhatjuk, hogy két lépés után milyen valószínűséggel kapjuk az egyes maradékokat. Jelöljük ezt a mátrixot $P^{(2)}$-vel.

$$P^{(2)} = P^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{2}{4} \\ \frac{2}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{2}{4} \\ \frac{2}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ \frac{5}{16} & \frac{3}{16} & \frac{4}{16} \\ \frac{3}{16} & \frac{2}{16} & \frac{3}{16} \end{pmatrix}.$$

Annak a valószínűsége, hogy Anna az első lépésben győz $\frac{1}{4}$, hogy a harmadik lépésben győz, az az $\mathbf{m}P^2$ első eleme, hogy az ötödik lépésben győz az $\mathbf{m}P^4$ első eleme, azaz összesen

$$\mathbf{m}I + \mathbf{m}P^2 + \mathbf{m}P^4 + \cdots = \mathbf{m}(I + P^2 + P^4 + \dots) = \mathbf{m}(I - P^2)^{-1} \tag{6.14}$$

első eleme.

$$\mathbf{m}(I - P^2)^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & \frac{2}{4} & \frac{1}{4} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -\frac{5}{16} & \frac{13}{16} & -\frac{4}{16} \\ -\frac{3}{16} & -\frac{2}{16} & \frac{13}{16} \end{pmatrix}^{-1} =$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & \frac{2}{4} & \frac{1}{4} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{77}{161} & \frac{208}{161} & \frac{64}{161} \\ \frac{49}{161} & \frac{32}{161} & \frac{208}{161} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{13}{23} \\ \frac{16}{23} \\ \frac{12}{23} \end{pmatrix}.$$

Azaz annak a valószínűsége, hogy Anna nyer $\frac{13}{23}$.

Nyilvánvaló, hogy ha ez egy középiskolások számára kitűzött OKTV feladat volt, akkor nem az előbb látott, mátrixokkal teletűzdelt megoldást várták el tőlük. Mit tanultunk azonban az előző két feladatból? Ott két játékos esetén egyetlen ismeretlen bevezetése elegendő volt, most 3 játékos esetén kettőre lesz szükségünk. Mint a korábbi feladatokban, most is fel lehet írni egy megfelelő egyenletrendszert. Szinte változtatás nélkül közöljük a javítókulcsban megjelent mintamegoldást:

A játék 1 valószínűséggel véget ér véges sok lépésben, hiszen legfeljebb $(3/4)^n$ annak a valószínűsége, hogy a játék n lépésen belül még nem fejeződött be, és ez az érték 0-hoz tart, ha n tart a végtelenhez.

Tegyük fel, hogy egy adott pillanatban az addig kihúzott számok összege $3k+1$ alakú, és jelölje γ annak a valószínűségét, hogy ekkor a soron következő játékos fogja (valamikor majd) a játékot megnyerni. Hasonlóan jelölje δ egy $3k+2$ alakú összegről a soron következő játékos valamikori nyerési esélyét. (A γ és δ valószínűségek valóban léteznek: ha γ_n annak a valószínűsége, hogy a soron következő játékos legfeljebb n lépésben nyer, akkor γ_n monoton növő sorozat és a (monotonitás miatt szükségképpen létező) határértéke éppen γ.)

Egy $3k+1$ alakú összegről indulva $1/4$ valószínűséggel a (a 3-as cédulát húzva) lesz az összeg ismét $3k+1$ alakú, $1/2$ valószínűséggel lesz $3k+2$ alakú és $1/4$ valószínűséggel $3k$ alakú. Az első esetben a húzást végrehajtó játékos nyerési esélye a húzás után $1-\gamma$ lett (hiszen ezután a másik játékos következik, és az nyer γ valószínűséggel), a második esetben a nyerési esélye $1-\delta$ lett, a harmadik esetben pedig megnyerte a játékot. Innen a

$$\gamma = \frac{1}{4}(1-\gamma) + \frac{1}{2}(1-\delta) + \frac{1}{4} \cdot 1 \tag{6.15}$$

egyenlőséget kapjuk.

A $3k+2$ alakú összegről indulva ugyanígy a

$$\delta = \frac{1}{4}(1-\gamma) + \frac{1}{4}(1-\delta) + \frac{1}{2} \cdot 1 \tag{6.16}$$

összefüggés adódik.

A két egyenletből $\gamma = \frac{12}{23}, \delta = \frac{16}{23}$.

A kezdő lépésnél Anna $\frac{1}{4}$ valószínűséggel nyer azonnal, $\frac{1}{2}$ valószínűséggel húz 1-et vagy 4-et, amivel a nyerési esélye $1-\gamma$ lesz, és $\frac{1}{4}$ valószínűséggel húz 2-t, amivel a nyerési esélye $1-\delta$ lesz. Innen Anna nyerési esélye

$$\frac{1}{4} + \frac{1}{2}(1-\gamma) + \frac{1}{4}(1-\delta) = \frac{13}{23} \tag{6.17}$$

6.2.1. Átlag, várható érték

Minden középiskolában ki szoktak számolni 5-ös lottóval kapcsolatos feladatokat, mert közöttük sok viszonylag egyszerűen megfogalmazható és egyszerűen megválaszolható kérdés akad. Matematika tanár szakos hallgatóknak ugyanilyen okokból várható értékre vonatkozó feladatokat szoktunk feladni az 5-ös lottó témaköréből. Az egyik kérdés, amire mindenki pillanatok alatt válaszolni szokott az, hogy mennyi a kihúzott számok átlaga $(45,5)$. A húzás után a számokat nagyság szerint rendezik, és így teszik közzé. A második kérdés az szokott lenni, hogy mennyi a középső szám átlaga. Persze erre is sokan rávágják a helyes választ, $45,5$. Gyakran feladom, hogy nézzenek utána annak, mi az első, második, harmadik, negyedik, ötödik szám átlaga az eddigi húzások során. Letölthető táblázatok az eddigi húzásokról a következő címen találhatók:
http://www.szerencsejatek.hu/otoslotto

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
15,0565	29,9394	45,6992	60,6667	75,5992

6.3. táblázat. Az 5-ös lottón 2012.02.10-ig kihúzott legkisebb (x_1), ... legnagyobb (x_5) számok átlagai

Ezek után szoktam feladni azt a feladatot, hogy

6.9. Feladat: *Számítsuk ki az 5-ös lottón kihúzott számok maximumának várható értékét.*

MEGJEGYZÉSEK A FELADATHOZ:

Azon esetek száma, amikor a legnagyobb kihúzott szám k, $(5 \le k \le 90)$ éppen annyi, mint ahányféleképpen a nála kisebb $k-1$ szám közül négyet ki tudunk választani, ez pedig nyilván $\binom{k-1}{4}$. Így a keresett valószínűség korábbi jelöléseinkkel $P(x_5 = k) = \frac{\binom{k-1}{4}}{\binom{90}{5}}$. A feladatban kérdezett várható érték pedig

$$E = \sum_{k=5}^{90} k \cdot P(x_5 = k) = \sum_{k=5}^{90} k \cdot \frac{\binom{k-1}{4}}{\binom{90}{5}} \tag{6.18}$$

Alakítsuk át a kifejezést, ekkor

$$E = \sum_{k=5}^{90} k \cdot \frac{\binom{k-1}{4}}{\binom{90}{5}} = \sum_{k=5}^{90} \frac{5\binom{k}{5}}{\binom{90}{5}} = \frac{5\binom{91}{6}}{\binom{90}{5}} = 5\frac{91}{6} \approx 75,8333 \tag{6.19}$$

A kapott érték meglehetősen jól egyezik a táblázatban látható tapasztalati átlaggal.

6.10. Feladat: *Mennyi a (90-ből 5-ös) lottóhúzás második legnagyobb számának a várható értéke? [Várható érték: az összes lehetséges lottóhúzás mindegyikében kiválasztjuk a második legnagyobb számot, és ezeknek a számtani közepét képezzük (egy adott értéket természetesen „annyiszorosan" kell figyelembe venni, ahány lottóhúzásban ez az érték második legnagyobb számként fellép). (2001-2002 III. kategória: Speciális matematika tantervű gimnáziumok Első – iskolai – forduló 5. feladat.)*

MEGJEGYZÉSEK A FELADATHOZ:

Legyen $4 \le k \le 89$, és jelöljük h_k-val azoknak a lottóhúzásoknak a számát, ahol k a második legnagyobb szám. Mivel a legnagyobb számot ekkor $(90-k)$-féleképpen, a három legkisebb számot pedig $\binom{k-1}{3}$-féleképpen választhatjuk, ezért $h_k = (90-k)\binom{k-1}{3}$. Ennek alapján a keresett várható értéket E-vel jelölve

$$\begin{aligned}\binom{90}{5}E &= \sum_{k=4}^{89} k \cdot h_k = \\ &= \sum_{k=4}^{89} k(90-k)\binom{k-1}{3} = \sum_{k=4}^{89} k(91-(k+1))\binom{k-1}{3} = \\ &= 91\sum_{k=4}^{89} k\binom{k-1}{3} - \sum_{k=4}^{89}(k+1)k\binom{k-1}{3} = \\ &= 91\cdot 4\sum_{k=4}^{89}\binom{k}{4} - 5\cdot 4\sum_{k=4}^{89}\binom{k+1}{5} = \\ &= 4\cdot 91\cdot\binom{90}{5} - 4\cdot 5\cdot\binom{91}{6}\end{aligned}$$

Az első és az utolsó sort rendezve kapjuk, hogy

$$E = 4\cdot 91 - 4\cdot 5\frac{\binom{91}{6}}{\binom{90}{5}} = 4\cdot 91 - 4\cdot 5\cdot\frac{91}{6} = 4\cdot\frac{91}{6} \tag{6.20}$$

A számolás után kicsit elgondolkoztathatjuk a hallgatókat. Az előbb $5\cdot\dfrac{91}{6}$, most meg $4\cdot\dfrac{91}{6}$ jött ki. Nem lehetett volna gyorsabban megkapni ezeket az eredményeket? Hogyan helyezkedhetnek el az átlagok, hogyan kapták meg a középső számok átlagát?

A középső számok átlaga 45,5, amire a szimmetria miatt mindenki gyorsan rá szokott jönni. ezt írhatjuk akár $3\cdot\dfrac{91}{6}$ alakba is. Az elvi indoklás ezek után lehet például a következő. A kihúzott és nagyság szerint rendezett számok átlagai egyenletesen fognak elhelyezkedni az 1 és a 90 számok között, a végpontokat is beleértve. Ezért ezek az átlagok hat egyforma részre osztják az 1..90 halmazt, tehát minden részbe $15\frac{1}{6}$ szám kell essen, azaz az i-dik osztópont éppen $i\cdot\frac{91}{6}$.

6.3. Problémamegoldás

A középiskolákban szinte minden tanuló megszokja, hogy bizonyos rendezési tulajdonságok érvényben vannak a gyakran használt alaphalmazokon. Ilyen tulajdonság például a ($A < B$ és $B < C$) $\Rightarrow A < C$. Ebben az alfejezetben néhány olyan feladatot ismertetünk, amelyek ezt a megszokást próbálják megkérdőjelezni. Lássuk az elsőt.

6.11. Feladat: *Káinnak van három üres lapú dobókockája. Az elsőre felírja az 1, 4, 4, 4, 4, 4 számokat, a másodikra a 2, 2, 2, 5, 5, 5 számokat, a harmadikra pedig a 3, 3, 3, 3, 3, 6 számokat. A kockák közül Ábel választhat egyet, azután pedig Káin választ a maradék kettő közül. Mindketten dobnak a saját kockájukkal. Az megy német leckét írni, aki kisebbet dob. Kinek kedvez ez a játék?*

MEGJEGYZÉSEK A FELADATHOZ:

Számozzuk meg a kockákat, hogy kényelmesebben tudjunk róluk beszélni. Legyen

$$\text{I. kocka} = \{1, 4, 4, 4, 4, 4\}$$

$$\text{II. kocka} = \{2, 2, 2, 5, 5, 5\}$$

$$\text{III. kocka} = \{3, 3, 3, 3, 3, 6\}$$

Írjuk fel annak valószínűségét, hogy az I. kockával kisebbet dobunk mint a II. kockával. Az eseteket figyelembe véve

$$P(\text{I.} < \text{II.}) = \frac{1}{6} \cdot 1 + \frac{5}{6} \cdot \frac{3}{6} = \frac{21}{36} > \frac{1}{2}$$

Leszűrhetjük a következtetést, a II. kocka kicsivel „jobb” mint az I. kocka, azaz a kettő közül inkább azt érdemes választani.

Hasonlóan írhatjuk fel annak valószínűségét, hogy a II. kockával kisebbet dobunk, mint a III. kockával.

$$P(\text{II.} < \text{III.}) = \frac{1}{2} \cdot 1 + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{6} = \frac{7}{12} > \frac{1}{2}$$

A III. kocka „jobb” mint a II.

Már csak be kell zárnunk a kört. Írjuk fel a III. és az I. kocka párosát.

$$P(\text{III.} < \text{I.}) = \frac{5}{6} \cdot \frac{5}{6} = \frac{25}{36} > \frac{1}{2}$$

Itt van az, ami miatt az egészet végigszámoltuk. Bármely kockánál lehet „jobbat” választani, azaz Káin már megint undok volt. Hiába választ akármilyen kockát Ábel, Káin tud a maradék kettőből olyat választani, amelyikkel 1/2-nél nagyobb valószínűséggel nagyobbat dob mint Ábel.

Ez néhány hallgatónak meg szokta feküdni a gyomrát, ezért más, hasonló jellegű feladatot is meg szoktunk oldani az órákon.

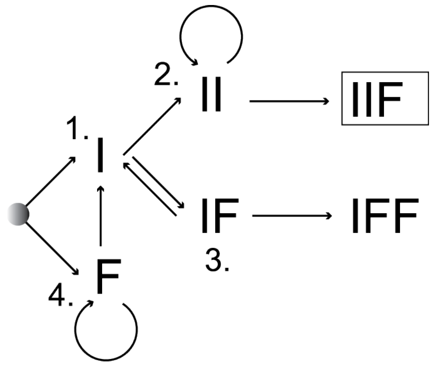
Ilyen például néhány fej-írás sorozat. Az egyik legkönnyebben végiggondolható eset a következő. Dobáljunk fel háromszor egymás után egy szabályos érmét. Mi lesz annak a valószínűsége, hogy az FFF sorozatot kapjuk? A válasz nyilvánvalóan 1/8. És mi a valószínűsége, hogy az IIF sorozatot kapjuk? Nyilván ez is 1/8, ugyanúgy ahogy tetszőleges rögzített három hosszúságú F-I sorozat valószínűsége.

Ilyenkor szoktam feltenni a kérdést a tanulóknak: Ha elkezdjük feldobálni az érmét, vajon melyik sorozat fog előbb felbukkanni? Miután kap az ember néhány választ, érdemes néhány dobássorozatot végigcsináltatni a tanulókkal. Pár perc alatt láthatják, hogy az egyik sorozat kezd elhúzni egy kicsit, mintha több IIF fordulna elő.

6.12. Feladat: *Készítsünk egy fej-írás (F-I) sorozatot, amíg az IIF vagy az IFF hármas meg nem jelenik. Határozzuk meg az egyes sorozatok előfordulásának a valószínűségét.*

MEGJEGYZÉSEK A FELADATHOZ:

Közösen szoktuk felrajzolni a lehetséges esetek ábráját, hogy mindenki egyformán követhesse az eseményeket. A kiindulási helyzetet szürke pötty jelöli, ahonnan egy-egy nyíl vezet az I illetve az F helyre, majd tovább. Az egyes nyilak a következő lehetséges helyzeteket jelölik. Mivel az érme szabályos, minden átmenet 1/2 valószínűségű. Jelöljük p_i-vel annak valószínűségét, hogy az i-dik állapotból indulva az IIF következik be.



6.1. ábra. Az IIF vagy az IFF sorozat fordul elő korábban?

Ekkor az alábbi egyenletrendszert írhatjuk fel.

$$
\begin{aligned}
p_1 &= \frac{1}{2}p_2 + \frac{1}{2}p_3 \\
p_2 &= \frac{1}{2}p_2 + \frac{1}{2} \cdot 1 \\
p_3 &= \frac{1}{2}p_1 + \frac{1}{2} \cdot 0 \\
p_4 &= \frac{1}{2}p_1 + \frac{1}{2}p_4
\end{aligned}
\tag{6.21}
$$

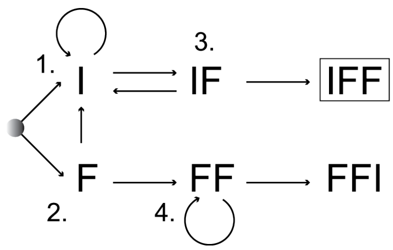
Az egyenletrendszert megoldva a $p_1 = \frac{2}{3}$, $p_2 = 1$, $p_3 = \frac{1}{3}$, $p_4 = \frac{2}{3}$ eredményeket kapjuk, amiből akár ránézésre, akár számolással ($\frac{1}{2}p_1 + \frac{1}{2}p_4 = \frac{2}{3}$) a $\frac{2}{3}$ eredményt kapjuk, azaz pont kétszer valószínűbb, hogy először az IIF jön ki, mint az IFF.

Hasonlítsuk most össze az IFF és az FFI sorozatokat is.

6.13. Feladat: *Készítsünk egy fej-írás (F-I) sorozatot, amíg az IFF vagy az FFI hármas meg nem jelenik. Határozzuk meg az egyes sorozatok előfordulásának a valószínűségét.*

MEGJEGYZÉSEK A FELADATHOZ:

Az előző feladathoz hasonlóan most is elkészíthetjük az egyes eseteket tartalmazó ábrát.



6.2. ábra. Az IFF vagy az FFI sorozat fordul elő korábban?

Ha p_i most annak valószínűségét jelöli, hogy az i-dik helyről indulva az IFF be jutunk, akkor a következő egyenletrendszert írhatjuk fel:

$$
\begin{aligned}
p_1 &= \frac{1}{2}p_1 + \frac{1}{2}p_3 \\
p_2 &= \frac{1}{2}p_1 + \frac{1}{2}p_4 \\
p_3 &= \frac{1}{2}p_1 + \frac{1}{2} \cdot 1 \\
p_4 &= \frac{1}{2}p_4 + \frac{1}{2} \cdot 0
\end{aligned}
\tag{6.22}
$$

Az egyenletrendszer megoldása helyett ésszel is meggondolhatunk egyes dolgokat, például $p_4 = 0$.

Akár logikai úton oldjuk meg, akár mechanikusan, azt kapjuk, hogy $p_1 = 1$, $p_2 = \frac{1}{2}$, $p_3 = 1$, $p_4 = 0$. Mivel $\frac{1}{2}p_1 + \frac{1}{2}p_2 = \frac{3}{4}$, ezért $\frac{3}{4}$ eséllyel az IFF-ben és $\frac{1}{4}$ eséllyel az FFI-ben kötünk ki. (Kihasználtuk, hogy annak valószínűsége, hogy a végtelenségig dobálunk az 0.)

Ha tovább folytatjuk a hármasok vizsgálatát, akkor láthatjuk, hogy az FFI és az FII aránya $\frac{2}{3} : \frac{1}{3}$, valamint az FII és az IIF aránya $\frac{3}{4} : \frac{1}{4}$. Ezzel azonban a kígyó a saját farkába harapott, hiszen

$$\text{IIF} \succ \text{IFF} \succ \text{FFI} \succ \text{FII} \succ \text{IIF}$$

Ezzel ezt a nem tranzitív példát befejeztük. Figyeljünk arra, hogy óvatosan fogalmazzunk meg állításokat, legyünk körültekintők. Felhívnám a figyelmet a módszer hatékonyságára, amellyel számtalan hasonló jellegű feladatot oldhatunk meg.

6.3.1. Öröklődés, biológia

A hallgatók már általában túl vannak a feltételes valószínűség és a Bayes-tétel megismerésén. Ennek ellenére nagyon gyakran fordul elő, hogy a matematika szakos hallgatók egy része nem mindig tud megbírkózni azzal a helyzettel, amikor egy biológia feladat kapcsán kell alkalmazni matematikai ismereteket. Ugyanakkor a biológia szakos hallgatók zöme elbír az ilyen típusú feladatokkal, mert már korábban hozzájuk szokott. Tekintsük a következő feladatot:

6.14. Feladat: *Autoszómás recesszív betegség öröklődését vizsgáljuk az alábbi családfán. Genotípusát tekintve egy személy lehet beteg (aa), egészséges hordozó (Aa), ill. egészséges, aki nem hordozza a hibás allélt (AA). Tudjuk, hogy az egészséges felnőtt lakosság 10%-a hordozó.*

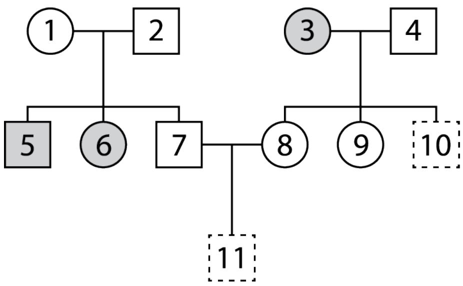
(a) Mi a valószínűsége annak, hogy a születendő (11) gyermek beteg (aa), hordozó (Aa), illetve nem hordozó (AA)?

(b) Mi lenne a valószínűsége annak, hogy (4) hordozó, ha még nem születtek volna gyermekei?

(c) Mi a valószínűsége annak, hogy (4) hordozó? (Annak ismeretében, hogy (3), aki beteg, két egészséges gyermeket szült neki.)

(d) Mi a valószínűsége annak, hogy (4) hordozó, ha két gyermek után újabb egészséges gyermeket szült neki (3)?

(e) Mi a valószínűsége annak, hogy (4) hordozó, ha harmadikként beteg gyermekük született?



6.3. ábra. Családfa diagram (a szürkével jelölt egyedek betegek, a szaggatott szélűek a még meg nem születettek)

MEGJEGYZÉSEK A FELADATHOZ:

Válaszoljuk meg sorban a kérdéseket. A válaszok során ki fogunk térni azokra a részekre, amik a tapasztalatunk szerint problémát okoztak a feladat megoldása során.

(a) Általában segít a hallgatóknak, ha nem biológiai, hanem logikai feladatként tekintenek a problémára. Mivel az (1)-es és a (2)-es párnak született beteg és egészséges gyermeke is, ezért mindketten hordozók. A (7)-es gyermek egészséges, tehát vagy AA vagy Aa alléleket hordoz. Felidézve a keresztezési táblát, ennek valószínűsége $P(7 \text{ hordozó}) = P(7 \text{ h}) = \frac{2}{3}$ és

	A	a
A	AA	Aa
a	aA	–

6.4. táblázat. Keresztezési tábla, ha tudjuk, hogy a gyermek egészséges.

$P(7 \text{ egészséges homozigóta}) = P(7 \text{ e}) = \frac{1}{3}$, mivel meg volt adva, hogy (7) nem beteg.

A (8)-as utód csak egészséges hordozó lehet, mert a (3)-as szülő beteg, tehát tőle csak a allélt kaphatott.

A születendő (11)-es gyerek beteg, ha mindkét szülő hordozó és tőlük a beteg a allélt örökli. Ennek valószínűsége

$$P(11 \text{ beteg}) = P(11 \text{ b}) = \frac{2}{3} \cdot 1 \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{6}$$

A születendő (11)-es gyerek hordozó, ha legalább az egyik szülő hordozó és tőle a beteg a allélt örökli. Erre két lehetőség van, (7) egészséges és (8) hordozó vagy (7) és (8) is hordozó.

$$P(11 \text{ hordozó}) = P(11 \text{ h}) = \frac{1}{3} \cdot 1 \cdot \frac{1}{2} + \frac{2}{3} \cdot 1 \cdot \frac{1}{2} = \frac{3}{6}$$

A születendő (11)-es gyerek egészséges, ha mindkét szülőtől az egészséges A allélt örökli. Erre két lehetőség van, (7) egészséges és (8) hordozó vagy (7) és (8) is hordozó.

$$P(11 \text{ hordozó}) = P(11 \text{ h}) = \frac{1}{3} \cdot 1 \cdot \frac{1}{2} + \frac{2}{3} \cdot 1 \cdot \frac{1}{4} = \frac{2}{6}$$

A feltételes valószínűségekkel történő felírást most mellőzzük.

(b) Ha feltesszük, hogy minden allél minden alléllel ugyanolyan eséllyel áll párba, akkor annak valószínűsége, hogy valaki beteg lesz p^2, hogy hordozó az $pq+qp = 2pq$ és hogy egészséges az q^2. Ekkor a

$$\text{beteg} : \text{hordozó} : \text{egészséges} = p^2 : 2pq : q^2$$

ahol p és q a megfelelő allélek gyakoriságát jelentik ($p + q = 1$). A hordozók aránya az egészségesek között

$$\frac{2pq}{2pq + q^2} = 0,1 \tag{6.23}$$

$$\frac{2p}{p+1} = 0,1 \tag{6.24}$$

$$p = \frac{1}{19} \tag{6.25}$$

amiből $2pq = P(\text{hordozó}) = \frac{36}{361} \approx \frac{1}{10}$

(c) Most is két lehetőség van. A (4)-es szülő lehet hordozó $\frac{1}{10}$, illetve egészséges $\frac{9}{10}$ valószínűséggel.

Ha a (4) szülő hordozó, akkor $\left(\frac{1}{2}\right)^2$ valószínűséggel lesz két egészséges gyermeke.

Ha a (4) szülő egészséges, akkor 1^2 valószínűséggel lesz két egészséges gyermeke.

Összesítve a (4)-es szülőnek $\frac{1}{10} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{9}{10} \cdot 1^2 = \frac{37}{40}$ valószínűséggel lesz két egészséges gyermeke. Ebből $\frac{1}{10} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{40}$ az az eset, ha a papa hordozó volt, tehát arány $\frac{\frac{1}{40}}{\frac{37}{40}} = \frac{1}{37}$.

Ezt felírjuk a Bayes-tétel segítségével is. A két egészséges gyermeket 2E-vel jelöljük.

$$P(h|2\text{E}) = \frac{P(2\text{E}|h) \cdot P(h)}{P(2\text{E}|h) \cdot P(h) + P(2\text{E}|e) \cdot P(e)} = \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^2 \cdot \frac{1}{10}}{\left(\frac{1}{2}\right)^2 \cdot \frac{1}{10} + 1^2 \cdot \frac{9}{10}} = \frac{1}{37}$$

(d) Az előző formula csak a számokban változik meg, azaz

$$P(h|3\text{E}) = \frac{P(3\text{E}|h) \cdot P(h)}{P(3\text{E}|h) \cdot P(h) + P(3\text{E}|e) \cdot P(e)} = \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^3 \cdot \frac{1}{10}}{\left(\frac{1}{2}\right)^3 \cdot \frac{1}{10} + 1^3 \cdot \frac{9}{10}} = \frac{1}{73}$$

(e) Ez a kérdés a beugrató feladatok közé tartozik, mert sajnos sokan elkezdenek számolgatni mindenféle feltételes valószínűséget. Szerencsére sokan fel is ocsúdnak és megadják a helyes választ. Ez ekkor biztos esemény, azaz a valószínűsége 1.

A másik téma, ami gyakran szóba kerül, az a biológusok által Hardy-Weinberg szabály néven ismeretes.

(lásd például `http://hu.wikipedia.org/wiki/Hardy-Weinberg-törvény`.)

Ez olyan ideális populációkra vonatkozik, amelyekben kizárjuk a mutációt és egy csomó egyéb, a valóságban esetleg fellépő hatást. Ekkor azt állítjuk, hogy egy populáción belül nemzedékről nemzedékre a relatív allélgyakoriság változatlan marad. Igazából könnyebb belátni mint gondolnánk.

Írjunk fel egy teljes keresztezési táblát. Az egyes allélpárok valószínűségei legyenek rendre p, q és r. Ekkor az a allél gyakorisága éppen $q + 2r$, mert a q valószínűségű hordozókban 1 darab, az r valószínűségű betegekben 2 darab van belőlük. A következő táblázat megadja az egyes utódokat és azok valószínűségeit.

Szedjük össze, hogy az a allél milyen gyakorisággal fordul elő a keresztezés után. Egyszer kell figyelembe venni az Aa típusú utódoknál és kétszer az aa típusúaknál. Soronként haladva

$$\frac{1}{2}pq + pr + \frac{1}{2}pq + \frac{1}{2}q^2 + \frac{1}{2}qr + 2\frac{1}{4}q^2 + 2\frac{1}{2}qr + pr + \frac{1}{2}qr + 2\frac{1}{2}qr + 2r^2 =$$

$$q^2 + qr + pq + 2qr + 2r^2 + 2pr = q(q + r + p) + 2r(q + r + p) = q + 2r$$

Ekkor persze a A allél gyakoriságára is automatikusan teljesül, hogy $2p + q$.

Sokkal gyorsabban célhoz érhettünk volna, ha közvetlenül az allélek gyakoriságát jelöljük p-vel (az A allél gyakorisága), illetve q-val (az a allél gyakorisága). Mivel feltételeztük, hogy minden párosodás véletlenszerű és független, valamint az egyes nemekben is ugyanezek az arányok, ezért az utódokban megjelenő allélek eloszlása a következő:

	AA (p)	Aa (q)	aa (r)	
	p^2	$\frac{1}{2}pq$	0	$\rightarrow$ AA
AA (p)	0	$\frac{1}{2}pq$	pr	$\rightarrow$ Aa
	0	0	0	$\rightarrow$ aa
	$\frac{1}{2}pq$	$\frac{1}{4}q^2$	0	$\rightarrow$ AA
Aa (q)	$\frac{1}{2}pq$	$\frac{1}{2}q^2$	$\frac{1}{2}qr$	$\rightarrow$ Aa
	0	$\frac{1}{4}q^2$	$\frac{1}{2}qr$	$\rightarrow$ aa
	0	0	0	$\rightarrow$ AA
aa (r)	pr	$\frac{1}{2}qr$	0	$\rightarrow$ Aa
	0	$\frac{1}{2}qr$	r^2	$\rightarrow$ aa

	A (p)	a (q)
A (p)	AA (p^2)	Aa (pq)
a (q)	Aa (pq)	aa (q^2)

Az AA csak A allélt adhat, az Aa pedig fele-fele arányban ad A és a allélt, ezért az A allél gyakorisága $p^2 + pq = p(p + q) = p$.

Így egy kicsit gyorsabb belátnia a tételt, csak ügyelni kell a megfogalmazásra. Jó ha a középiskolai tanárok teljesen tisztában vannak ezekkel a formulákkal, mert az elmúlt években minden biológia érettségiben szerepelt valamilyen öröklődéshez kapcsolódó logikai vagy valószínűségszámítási feladat.

6.3.2. Statisztikai következtetések

Sajnos a tanulók, sőt az egyetemi hallgatók egy része is úgy éli le az életét, hogy soha nem vett részt valódi statisztikai adatok gyűjtésében és azok értékelésében. Vannak ugyan tankönyvi példák ezekre, de a tanárok egy része kihagyja, mert időrablónak és feleslegesnek érzi, holott az elvégzett és elemzett kísérletek nagyban hozzájárulhatnak a gyerekek valószínűségről alkotott fogalmainak tisztázásához. Az elvi különbség tulajdonképpen a megközelítésben rejlik. Vannak olyanok, akik ragaszkodnak ahhoz, hogy a logikai és matematikai úton kapott valószínűségi értékeket támasszuk alá statisztikai adatokkal. A másik nézőpont szerint a statisztikai adatok maguk a valóság, tehát ez alapján kell felépítenünk az elméleti valószínűségszámítást. Itt és most nem óhajtunk lándzsát törni egyik nézet mellett vagy ellen sem. Az iskolai oktatásban mindkettőnek lehet szerepe az ismeretek értő elsajátítása során.

Az egyik tankönyv rajzszögek feldobálását javasolja, és annak megszámlálását, hogy hányszor esik heggyel felfelé, illetve lefelé a rajzszög. Egy másik könyv gyufaskatulyákat pöcköltet a gyerekekkel, és azt számoltatja velük, hogy hányszor és melyik oldalára esik a gyufaskatulya. Ezeket a feladatokat csak részben tartom szerencséseknek.

Közös és nagyon jól használható bennük az, hogy olyan összetett fizikai jelenség áll a hátterükben, amelyet nem lehet egyszerűen modellezni, így a valószínűségek meghatározására nem kínálkozik jobb mód, mint a kísérletek nagyszámú végrehajtása, az adatok összegyűjtése és azok elemzése.

Ugyanakkor ezeknek a kísérleteknek vajmi kevés közük van a gyakorlati élethez. Miért lennénk kíváncsiak a rajzszögek hullására? (Gyufaskatulyás pöckölgetésekre szoktak ugyan fogadásokat kötni, de nem igazán elterjedt.)

Sokkal szerencsésebbnek tartom, ha olyan valódi adatokat kell gyűjteni a gyerekeknek, amelyek valóban hasznosak lehetnek. Ilyenek például a forgalomszámláláshoz kapcsolódó adatok, amelynek az is szerencsés vonzata, hogy kiadható házi feladatnak, azaz az adatok gyűjtése nem vesz el időt az oly rövid tanórából, ahol aztán az összegyűjtött adatokat elemezhetjük. Lehet például feladat, hogy a gyerekek utazzanak végig egy buszon és számlálják meg az egyes megállókban le- illetve felszálló utasok számát. Ha több gyerek is utazik a vonalon, akkor már értékelhető adatsorokat kaphatunk. Városi környezetben meg is lehet fordítani a feladatot, egyetlen megállóban állva figyelhetjük a buszok követési idejét (összevethetjük a menetrendi adatokkal), és rögzíthetik a le- illetve felszálló utasok számát. Természetesen tetszőleges a gyerekeket érintő adatsorral lehet foglalkozni (a telefonálási gyakoriságoktól kezdve a letöltési szokásokig bármivel).

Statisztikai adatgyűjtések segíthetnek döntést hozni olyankkor is, ha valamely ismert jelenség leírására több különböző kombinatorikus modellt is ajánlanak a gyerekek. A legegyszerűbb és egyben leggyakoribb példa az, amikor két érmét feldobunk és azt vizsgáljuk, hogy mi a valószínűsége a két fej, két írás, egyfej egy írás eseményeknek. Meggyőző tud lenni, ha az osztály minden tanulója csak hússzor végzi is el a kísérletet és az adatokat közösen összesítjük.

Néhány tapasztalati sorozat a következő volt:

FF	FI	II
25	48	26
17	57	25
26	47	26

Egy másik ilyen gyakori probléma, hogy ha két kockát feldobok, akkor 21 vagy 36 eset lesz-e. Hosszú órákat töltöttem el az életemből azzal, hogy megpróbáltam elmagyarázni, a szemléletbeli eltéréseket és a „kényelmes” számolás felé vezetni a tanulókat. Ugyanakkor megfelelő (az előző példához képest jelentősen több) kísérletet végeztetve a csoporttal fel lehet ismertetni a kívánt összefüggéseket.

Néhány tapasztalati sorozat a következő volt (az adatok alapján látszik, hogy 120 dobás nem ad elegendő alapot az általunk kívánt következtetéshez):

A következő feladat kapcsán a statisztikai következtetéseket, azok logikáját ismételjük át. Azért tartom szükségesnek, mert a tanár szakos hallgatók tradicionálisan a félév utolsó két-három óráján találkoznak csak hasonló jellegű fogalmakkal és indoklásokkal, ami egyben azt is jelenti, hogy a gyakorlaton igen ritkán kerülnek szóba hasonló feladatok. Egyetlen példa alapján persze lehetetlen mindenre kitérni, de az alapvető fogalmakat áttekintjük.

	1	2	3	4	5	6
1	7	3	1	3	3	2
2	3	3	2	2	2	2
3	5	1	3	3	5	5
4	3	3	6	6	1	5
5	2	4	2	2	5	2
6	2	5	4	6	4	3

	1	2	3	4	5	6
1	2	4	4	4	2	2
2	5	5	3	1	6	0
3	1	3	5	2	2	2
4	3	1	2	4	3	5
5	4	2	5	4	2	5
6	6	6	3	3	5	4

6.15. Feladat: *Az egyik gimnázium 12a osztályának egyik felébe 13 gyerek járt. A 2002-es és a 2003-as tanulmányi átlagaikat táblázatba rendeztük. Állíthatjuk-e ez alapján, hogy javult a gyerekek tanulmányi eredménye? Ha igen, milyen valószínűséggel? Ha nem, miért nem? Mit állíthatunk biztosan?*

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
tavalyi átlag	3,9	3,8	2,1	2,1	3,0	3,1	2,7	2,1	4,8	2,6	2,6	3,3	2,2
idei átlag	4,8	3,6	3,0	3,5	2,5	4,1	3,6	3,9	4,1	3,2	4,2	2,5	4,1

MEGJEGYZÉSEK A FELADATHOZ:

Sokféle módon járhatunk el. Az egyik kézenfekvő dolog az lenne, ha gyerekről gyerekre végignéznénk a tanulmányi eredmény változását. Ha csak azt vizsgálnánk, hogy az egyes gyerekek eredménye romlott vagy javult, akkor elég lenne azt nézni, hogy a változás pozitív vagy negatív-e? Egészítsük ki a táblázatot két sorral. Az elsőbe a változást írjuk be, a másodikba csak annak előjelét.

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
tavalyi átlag	$3,9$	$3,8$	$2,1$	$2,1$	$3,0$	$3,1$	$2,7$	$2,1$	$4,8$	$2,6$	$2,6$	$3,3$	$2,2$
idei átlag	$4,8$	$3,6$	$3,0$	$3,5$	$2,5$	$4,1$	$3,6$	$3,9$	$4,1$	$3,2$	$4,2$	$2,5$	$4,1$
növekedés	$0,9$	$-0,2$	$0,9$	$1,4$	$-0,5$	$1,0$	$0,9$	$1,8$	$-0,7$	$0,6$	$1,6$	$-0,8$	$1,9$
előjele	$+$	$-$	$+$	$+$	$-$	$+$	$+$	$+$	$-$	$+$	$+$	$-$	$+$

Először vizsgáljuk meg mi annak a valószínűsége, hogy 9 gyerek javítson és 4 rontson? Az első kérdés ami felmerül az, hogy honnan vegyünk ilyen valószínűségeket? Az egyik lehetőség, hogy nagyszámú korábbi statisztikai adat elemzésére támaszkodhatunk. A másik lehetőség az, hogy valamilyen előzetes feltevéssel élünk, és ezen feltétel mellett számoljuk ki a valószínűségeket. Ha a feltétel mellett a most megfigyelt események bekövetkezése kicsiny valószínűségű, akkor a feltételt elvetjük, más szavakkal nem fogadjuk el. Ezt a kezdeti feltételt gyakran nullhipotézisnek nevezik és H^0-lal jelölik. Viszonylag kényelmesen számolható valószínűségeket kapunk, ha azt feltételezzük, hogy

H_0: A gyerekek tanulmányi eredménye ugyanolyan eséllyel javult mint romlott, azaz mindkét irányú változás valószínűsége $1/2$.

H_1: A gyerekek tanulmányi eredménye javult, azaz a valószínűség nagyobb mint $1/2$.

A szokásos eljárás az, hogy előre rögzítünk egy általában α-val jelölt valószínűséget: a mostani esetben és sok más példában is az $\alpha = 5\%$, vagy más szavakkal az $\alpha = 0,05$ értéket választjuk. Ha az adott H_0 feltétel mellett az adott minta bekövetkezésének valószínűsége a rögzített α-nál kisebb, akkor azt mondjuk, hogy ez olyan valószínűtlen esemény, hogy nyugodtan feltehetjük, hogy a feltétel hamis. Ezt úgy szokták mondani, hogy elvetjük a H_0 hipotézist, vagy ami ezzel egyenértékű, elfogadjuk a H_1 hipotézist.

Számoljunk. Hány gyereknek kellene javítani a 13 közül, hogy elvessük a H_0 hipotézist?

$P(13 \text{ gyerek javít})$	$\binom{13}{13} \cdot 0,5^{13} \cdot 0,5^{0}$	$\approx 0,000122$
$P(12 \text{ gyerek javít})$	$\binom{13}{12} \cdot 0,5^{12} \cdot 0,5^{1}$	$\approx 0,001587$
$P(11 \text{ gyerek javít})$	$\binom{13}{11} \cdot 0,5^{11} \cdot 0,5^{2}$	$\approx 0,009521$
$P(10 \text{ gyerek javít})$	$\binom{13}{10} \cdot 0,5^{10} \cdot 0,5^{3}$	$\approx 0,034912$
$P(9 \text{ gyerek javít})$	$\binom{13}{9} \cdot 0,5^{9} \cdot 0,5^{4}$	$\approx 0,087280$

A táblázatban a vonal feletti valószínűségek összege $0,046143$, a következő értéket is hozzáadva pedig már $0,133423$, ami sokkal több mint az elfogadási határnak állított 5%. Döntési stratégiánk tehát a következő. Ha a társaságban 13, 12, 11 vagy 10 gyerek javított, akkor elvetjük a H_0 hipotézist. Mivel a mi osztályunkban „csak" 9 gyerek javított, ezért el kell fogadnunk a feltételünket, azaz ezen vizsgálat és döntési eljárás alapján nem állíthatjuk, hogy jegyeik változásánál a véletlenen kívül más is befolyásolta volna a gyerekek jegyeinek csoportját. Tömörebben szólva el kell fogadnunk a H_0 hipotézist.

Az előző feltevés és teszt során egy csomó hasznos információt elhanyagoltunk, cserébe viszont egy könnyen számolható és könnyen ellenőrizhető kritériumot kaptunk.

Mi történne, ha nem csak a változások előjelét, hanem a nagyságát is figyelembe vennénk? Példánkban az átlagos változás $0,7$ volt. Természetesen feltesszük, hogy a gyerekek teljesítménye egymástól független volt, és a változás normális eloszlást követ. Hipotéziseink most a következők lesznek:

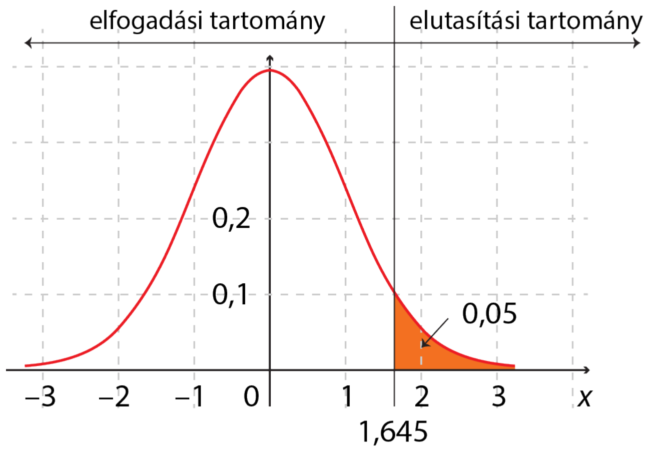
H_0: A gyerekek tanulmányi eredménye átlagosan nem változott. $(m = 0)$

H_1: A gyerekek tanulmányi eredménye átlagosan javult. $(m > 0)$

Az egyszerűség kedvéért maradjunk most is az $\alpha = 5\%$ elfogadási illetve elutasítási szintnél és az egyszerűbb számolás kedvéért tegyük fel, hogy ismert a teljes sokaság elméleti szórása, $\sigma = 1,2$.

Vizsgáljuk meg az átlag eloszlásának várható értékét és szórását. A H_0 hipotézis alapján $m = 0$, az átlag szórása pedig $\sigma_{\overline{x}} = \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = \frac{1{,}2}{\sqrt{13}} \approx 0,3328$. A normális eloszlás táblázata alapján az $\alpha = 5\%$-os szinthez az $x = 1,645$ tartozik. Ezek szerint, ha ennél nagyobb érték jön ki, akkor ennek valószínűsége kisebb mint 5%. Az adatokat sztenderdizálva

$$\frac{\overline{x} - 0}{\sigma_{\overline{x}}} = \frac{0,7 - 0}{0,3328} \approx 2,0339 > 1,645$$



6.4. ábra. Elfogadási és elutasítási tartomány sztenderd normális eloszlás esetén ($\alpha = 5\%$)

Ebből az következik, hogy most elutasítjuk a H_0 hipotézist. Azaz két különböző statisztika, két különböző becslés, két különböző döntést eredményez ugyanolyan hibavalószínűség mellett. Vigyáznunk kell, ha megfogalmazunk valamit. Arról és csak arról tudunk nyilatkozni, amit éppen kiszámoltunk, és még arról is csak bizonyos valószínűséggel.

Gyakori, a hallgatók által elkövetett hibák lehetnek a feladat megoldása során, hogy:

– Rosszul, vagy hibásan fogalmazunk meg feltételezéseket.

– Olyankor is ki akarunk számolni valamit egy korábban tanult teszt segítségével, ha annak feltételei nem teljesülnek.

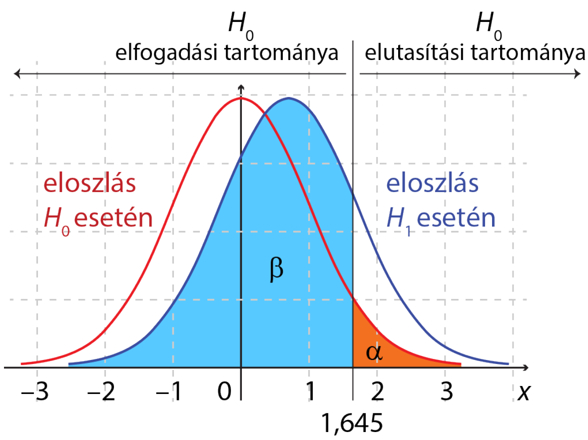
– A végrehajtás után hibás következtetésre jutunk.

– Olyan dolgot is állítunk, amiről a végrehajtott eljárás nem mond semmit.

Vizsgáljuk meg egy kicsit azt, ami minden előadássorozatban elhangzik, minden statisztika könyvben benne van, de mégis csak a hallgatók 50%-a érti meg és tudja alkalmazni. Milyen hibákat hordoz a döntési eljárásunk, milyen pontosak a következtetéseink?

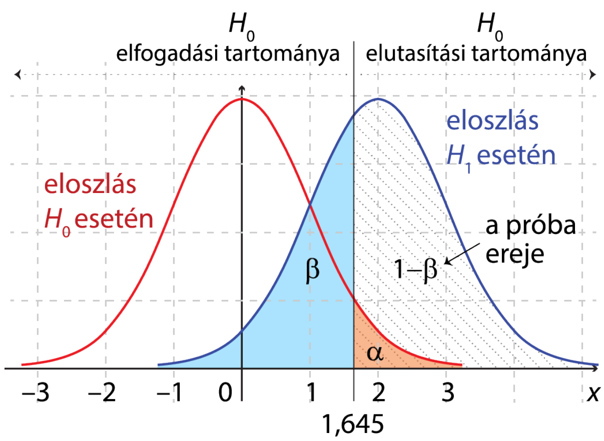
Előfordulhat, hogy ugyanilyen adatok mellett a H_0 hipotézis mégis fennáll. Ennek valószínűsége azonban korlátozott, ezt rögzítettük $\alpha = 0,05$-ban (elsőfajú hiba). Ezen kívül egy másik hibázási lehetőség is előfordulhat. Lehet, hogy a valóságban a H_1 hipotézis áll fenn, de most épp olyan adatokat kaptunk véletlenül, amelyek ezt nem támasztják alá. Ez is egy lehetséges hiba, amelynek nagyságát nem mindig ismerjük és általában β-val jelöljük (másodfajú hiba). Ezek leírása rengeteg helyen megtalálható, de sokan szokták a közösségi lapokon kezdeni, például:

http://hu.wikipedia.org/wiki/Els■fajú_és_másodfajú_hiba



6.5. ábra. Az α és a β hibavalószínűségek

Látható, hogy ha α nő, akkor β csökken és fordítva. A β valószínűség nagyságáról általában nincs közvetlen információnk, de nyilván szeretnénk, ha viszonylag kicsi lenne, illetve ha $1 - \beta$ nagy lenne. Ezt az $1 - \beta$ kifejezést a próba erejének hívjuk.



6.6. ábra. Az α és a β hibavalószínűségek

Célszerű a hallgatóknak két-három különböző grafikont is felrajzolni, és velük ábrázoltatni az $1 - \beta$ kifejezés változását a H_1 hipotézisben megfogalmazott átlag függvényében. Öt-hat különböző csoportra bontva a hallgatókat és velük különböző értékre végigszámolva, majd az eredményeiket összegezve szépen kirajzolódik a próba erejének görbéje.

7. fejezet

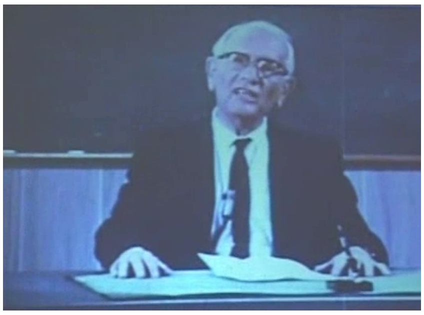
Animációk

7.1. Hang és mozgókép

A hangos melléklet következő két kis részlete nem túl jó minőségű, de fontos pillanatokat idéznek fel a matematika történetéből.

7.1 Animáció: *Pólya György tanári elvei*

Pólya Györgynek a tanításról vallott nézeteit ismerhetjük meg a következő részletben. A felvétel egy előadáson bemutatott vetítésről készült, de talán élvezhető.



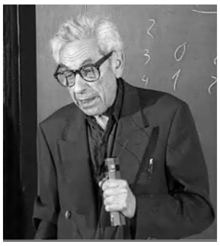
7.1. ábra. Pólya György tanári elvei

Az angol nyelvű videót a következő linkre kattintva indíthatja el:
avi/polya.avi)
A tartalom röviden:

1. *A tanítás lényege, hogy lehetőséget adjunk a diáknak ahhoz, hogy felfedezze magának a dolgokat.*
2. *Először sejts, és csak azután bizonyíts!*
3. *A befejezett matematika bizonyításokból áll, de a születő matematika sejtésekből.*

7.2 Animáció: *Erdős Pál bizonyít*

A matematikatörténeti érdekessége és a Pólya György által említett születő matematika bemutatása miatt adjuk közre Erdős Páltól a Gólyavári esték sorozatban elhangzott előadásának egy részletét, amelyen a Sylvester sejtést bizonyítja: Ha adott n pont a síkon, amelyek nincsenek egy egyenesen, akkor létezik olyan egyenes, amely pontosan két pontot tartalmaz ezek közül.



7.2. ábra. Erdős Pál bizonyít

(A videót a linkre kattintva indíthatja el
avi/erdos.avi)
A felvételt utólag egészítettük ki a szöveghez illő animált ábrákkal.

A születő matematika pillanataiba enged betekintést Erdős Pál következő rövid cikke:
http://www.renyi.hu/~p_erdos/1963-21.pdf

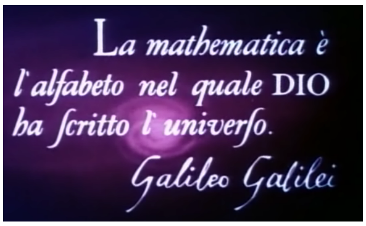
7.3 Animáció: *Árnyjáték didaktikai tanulsággal*

A szemünk fogadja a legtöbb jelzést a külvilágból, de ha a hallott jelek összhangban vannak azzal, amit látunk, sokkal teljesebb az élmény.

A következő kis animációban egy egyszerű árnyjátékban megelevenednek az állatok.
avi/arnyjatek.avi

7.4 Animáció: *Donald kacsa 1. kalandjai a matematika birodalmában*

Antonio Galilei szerint a matematika az az abc, amelyen Isten megírta a világegyetemet.



Ez a végkicengése Donald kacsa 1. kalandjának a matematika világában.
avi/korok.avi

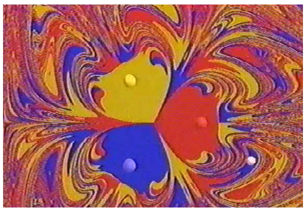
7.1. Feladat: *Gyűjtse össze, hogy milyen matematikai témákat érint ez a kis válogatás.*

7.5 Animáció: *Donald kacsa 2. kalandjai a matematika birodalmában*

Az aranymetszés gazdag lehetőséget nyújt a matematikán belüli és kívüli területekhez való kapcsolódásra.

Donald kacsa is ezzel ismerkedik a következő kis részletben
avi/otszog.avi *(Walt Disney Production)*

7.6 Animáció: *Antonio Vivaldi Négy évszak című művének Tavasz tétele mellett gyönyörködhetnek a fraktálokban.*



avi/fractal.avi

7.2. Feladat: *Melyek azok az anyagrészek, ahol szóba hozhatja a fraktálokat?*

7.2. Animált képsorok

Itt nem interaktív animációkat mutatunk be, amelyekben egy folyamat (akár beavatkozás nélkül) végigkövethető. Még ha nem interaktív animációról van szó, akkor is beavatkozásra bíztatjuk a felhasználót: a lejátszó szolgáltatásaitól függően megválaszthatja a lejátszás irányát és sebességét. A csúszka segítségével megkeresheti a fontos részleteket és ezekre figyelve többször is futtathatja az animációt. A legjellemzőbb kép kimerevítése lehetőséget ad az összefüggések megfigyelésére, rögzítésére.

A TTK módszertanos oktatói 20 évvel ezelőtt is törekedtek az oktatásban az akkori modern technika alkalmazására. Ma már ezek többsége elavult, mert a mai gépek túl gyorsan végigfutnak a képsorokon, és a felbontás sem ideális. Mindkét problémát orvosolhatjuk részben a lejátszó megfelelő beállításával. Abból a szériából is akad néhány, amely időtálló minőségű lett módszertani és technikai szempontból is, a mai napig használjuk az órákon.

A kevésbé sikerülteket folyamatosan igyekszünk lecserélni. Ezek mindegyike fontos didaktikai gondolatot vet fel, önök is próbálkozhatnak jobb megvalósítással.

7.2.1. Eszköz- és programhasználat segítése animációval

7.7 Animáció: *Egy feladat a Casio ClassPad grafikus kalkulátorra*
`avi/casio1.avi`

7.8 Animáció: *Egy másik feladat a Casio ClassPad grafikus kalkulátorra*
`avi/casio2.avi`

7.9 Animáció: *Bemutathatjuk a táblázatkezelő használatát a bruttó bevételből a nettó jövedelem kiszámítása közben.*
`avi/brutto.avi`

7.10 Animáció: *Hogyan állít elő egy táblázatkezelő egy Pascal-háromszöget?*
`avi/pascalhsz.avi`

7.2.2. Mozgások, folyamatok megjelenítése

7.11 Animáció: *Függvény-show*
`avi/fv-show.avi`

7.12 Animáció: *Bemutathatjuk a földgömböt forgás közben.*
`avi/globus.avi`

7.13 Animáció: *Az ingamozgás tanulmányozásához bemutathatunk egy ingaórát*
`avi/ingaora.avi`

7.14 Animáció: *A lézerrel való hegesztést.*
`avi/hegeszt.avi`

7.15 Animáció: *A hologram keletkezését.*
`avi/hologram.avi`

7.2.3. Geometriai alakzatok szemléltetése

7.16 Animáció: *A parabola érintői egy pontot tartalmaznak a parabolából, minden más pontjuk külső pont.*
`gif/parabola.gif`

Az animációk segítségével bemutathatunk alakzatokat és azok részeit.

7.17 Animáció: *Bemutathatjuk a gömb részeit*
`avi/gomb.avi`

7.18 Animáció: *Bemutathatjuk hengerszerű testeket*
`avi/altheng.avi`

7.19 Animáció: *Bemutathatjuk kúpszerű testeket*
`avi/altkup.avi`

7.20 Animáció: *Bemutathatjuk a csonkakúpot*
`avi/cskup2.avi`

7.2.4. Feladatok értelmezése és a megoldás szemléltetése

7.21 Animáció: *Egy a élű kockán kiválasztunk két szemközti lapot, és mindkét lap középpontját összekötjük a szemközti lapon lévő csúcspontokkal. Bizonyítsuk be, hogy az így nyert két gúla oldalélei páronként metszik egymást, és számítsuk ki a két gúla közös részének térfogatát!*

avi/gula.avi

7.22 Animáció: *Az R és r sugarú kör a C pontban kívülről érinti egymást. A körök egyik közös külső érintője az egyik kört az A, a másik kört a B pontban érinti. Bizonyítsuk be, hogy az ABC háromszög derékszögű! Fejezzük ki az ABC háromszög területét a körök sugarával!*

avi/ketkor.avi

7.23 Animáció: *Mely x valós számokra pozitív az $1 + \log_2 \sin x$ értéke?*

$$1 + \log_2 \sin x > 0$$

egyenlőtlenség pontosan akkor teljesül, ha

$$\sin x > \frac{1}{2}.$$

Ez utóbbinak a megoldását szemlélteti a következő animáció.

avi/logsin.avi

7.24 Animáció: *Adjuk meg a valós számoknak azt a legbővebb halmazát, amelyen az*

$$\frac{1}{\sqrt{|2\sin 2x - 1|}}$$

kifejezés értelmezhető! Állapítsuk meg az ezen a halmazon az adott kifejezéssel definiálható függvény értékkészletét!

A megoldás lépéseit szemlélteti az animáció.

avi/abssin.avi

7.25 Animáció: *Egy hatoldalú szabályos gúla alapéle 12, magassága 18. Mekkora a körülírt és a beírt gömb sugara?*

avi/hatold.avi

7.26 Animáció: *Egy szabályos négyoldalú gúla alapéle 12, magassága 6. Mekkora annak a kockának az éle, amelynek négy csúcsa a gúla alaplapján, másik négy csúcsa pedig a gúla oldalélein van?*

avi/szgula1.avi

7.27 Animáció: *Egy szabályos négyoldalú gúla minden éle egyenlő. A gúlába írt kocka alaplapja a gúla alaplapján van, fedőlapjának csúcsai pedig a gúla oldalélein. Hányszorosa a gúla térfogata a kocka térfogatának?*

avi/szgula2.avi

7.28 Animáció: *Egy egyenes körkúp alapkörének egyik húrja az alapkör középpontjától 1 egység távolságra van, és a hozzá tartozó középponti szög $120°$-os. Az adott húrra és a kúp csúcsára illeszkedő sík $30°$-os szöget zár be az alaplap síkjával. Számítsuk ki a kúp felszínét!*

avi/korkup.avi

7.2.5. Geometriai transzformációk szemléltetése

7.29 Animáció: *A síkra vonatkozó tükrözés*

Csodálatos élmény együtt megfigyelni egy tóban tükröződő képet és az eredeti objektumot a valóságban. Ez a szimmetria sok építészt, fotóst és filmes szakembert megihletett.

7.3. ábra. Egy szimmetrikus épület

20 évvel ezelőtt az akkori technikával mi is próbáltunk ilyen látványt létrehozni, egy tetraéder nézegeti magát a tükörben:
avi/stukor.avi.

Aki ezt túlélte, megérdemel egy igazi szép élményt is:
http://www.youtube.com/watch?v=C9OWUOqnZsc

7.3. Feladat: *El lehet-e síkszimmetrikusan helyezni két egybevágó pénzérmét?*

7.30 Animáció: *Tengely körüli forgatás*

Maradjunk a térben és forgassunk egy egyenes körül.
avi/tforg.avi

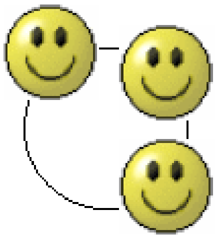
7.4. Feladat: *Milyen forgásszimmetriái vannak az ön esernyőjének?*

7.4. ábra. Az esernyő szimmetriája

7.31 Animáció: *Az eltolás egyszerre síkbeli és térbeli transzformáció.*

Nézzük meg az eltolás tulajdonságait.
avi/eltol.avi

7.5. Feladat: *Keressen olyan példákat, amikor körpályán mozog egy test, de nem elforgatással, hanem eltolással lehet rekonstruálni a mozgását.*

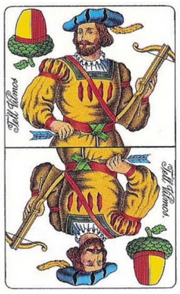


7.32 Animáció: *A középpontos tükrözés is definiálható egyszerre síkbeli és térbeli transzformációként, csak a síkon mozgás, a térben meg nem az.*

A középpontos tükrözés röviden.

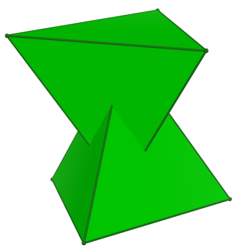
avi/ktukor.avi

7.6. Feladat: *Honnan tudja, hogy a kártyafigura síkbeli vagy térbeli centrális tükrözéssel állt elő?*



7.7. Feladat: *Keressen a természetben középpontosan szimmetrikus térbeli alakzatokat.*

Melyik szabályos test középpontosan szimmetrikus és melyik nem az?



7.33 Animáció: *Tengelyes tükrözés*

A tengelyes tükrözés mint térbeli transzformáció mozgás, a síkban nem az.

avi/tengtuk.avi

7.34 Animáció: *A pont körüli forgatás*

avi/pforg.avi

7.35 Animáció: *A pont körüli forgatás GEOGEBRÁVAL*

Sokkal jobb minőséggel és egyszerűbben készíthetők az animált gif állományok GEOGEBRA programmal.

gif/forg.gif

Erre még visszatérünk az interaktív animációknál.

7.36 Animáció: *Középpontos hasonlóság*

A középpontos hasonlóság is definiálható egyszerre térben és síkon.

avi/khason.avi

7.2.6. Szemléletes bizonyítások, bizonyítások szemléltetése

7.37 Animáció: *Az első n pozitív páratlan egész szám összege négyzetszám.*

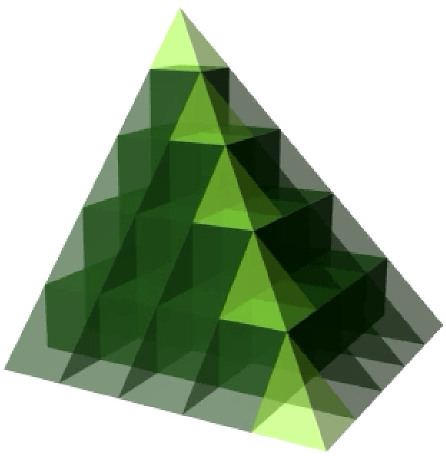
gif/ptlan.gif

7.8. Feladat: *Az első n pozitív páratlan egész szám összege négyzetszám. A bizonyítshoz készült animáció alapján rekonstruálja a bizonyítást.*

MEGJEGYZÉSEK A FELADATHOZ:

Az animáció a
http://dl.dropbox.com/u/100162898/vasar/szumma_n/szumma_n.html
címen a bizonyítási környezetbe ágyazva látható.

7.38 Animáció: *Az első n pozitív egész szám négyzetének összege*



Réteg			
I	0	0	1
II	1	2	1
III	2^2	2x2	1
IV	3^2	2x3	1
V	4^2	2x4	1
..			
n+1	n^2	2xn	1

avi/szumn2.avi

7.9. Feladat: *Az első n pozitív egész szám négyzetösszegének kiszámításához készült animáció alapján rekonstruálja a bizonyítást.*

MEGJEGYZÉSEK A FELADATHOZ:

Az animáció a
http://dl.dropbox.com/u/100162898/vasar/szumma_n/szumma_n.html
címen a bizonyítási környezetbe ágyazva látható.

Az animáció a tanulók számára nem pótolja a közvetlen tapasztalatszerzést. A konkrét testekkel végzett felfedezés összefoglalására, a tapasztalatok lejegyzésének tanulására alkalmas.

7.39 Animáció: *Egy térbeli mértani hely*

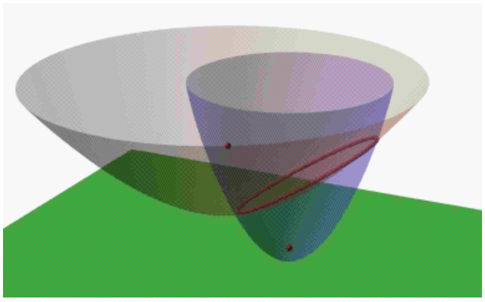
A következő síkbeli feladatból indulunk ki:

Adott egy e egyenes és az egyik partján két rá nem illeszkedő P, Q pont. Szerkesszünk az adott egyenest érintő és a két adott ponton átmenő kört. (Apolloniosz egyik feladata)

A térbeli feladatban egy adott sík egyik partján két rá nem illeszkedő P, Q ponthoz keressük az adott síkot érintő és a két adott ponton átmenő gömböket.

avi/parabolo.avi

7.10. Feladat: *Az animáció alapján rekonstruálja a bizonyítás ötletét.*



7.40 Animáció: *Egy térbeli mértani hely másként*

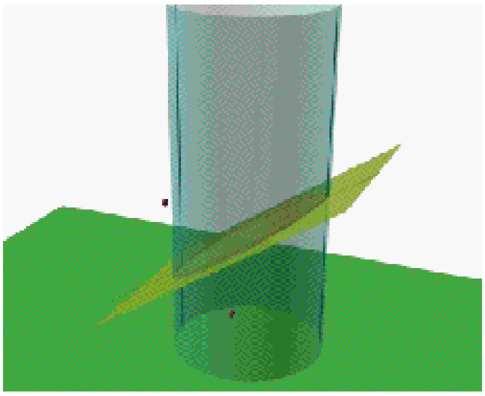
A következő síkbeli feladatból indulunk ki:

Adott egy e egyenes és az egyik partján két rá nem illeszkedő P, Q pont. Szerkesszünk az adott egyenest érintő és a két adott ponton átmenő kört. (Apolloniosz egyik feladata)

A térbeli feladatban egy adott sík egyik partján két rá nem illeszkedő P, Q ponthoz keressük az adott síkot érintő és a két adott ponton átmenő gömböket.

avi/apolter.avi

7.11. Feladat: *Az animáció alapján rekonstruálja a bizonyítás ötletét.*



MEGJEGYZÉSEK A FELADATHOZ:

Ezúttal nem a gömb középpontját, hanem az érintési pontot keressük.

Az animáció a
http://dl.dropbox.com/u/100162898/vasar/ap_fel/apoll.html
címen a bizonyítási környezetbe ágyazva látható.

7.3. Interaktív feladatlapok

Az interaktív feladatlapok többsége html formátumú weblap. A bejelentkező lapon rövid bevezetés jelenik meg, amely segítséget kíván nyújtani a feladatlap kezeléséhez és a kísérletezéshez.

A második egység maga az interaktív mező, amelyen kísérletezhet a tanuló.

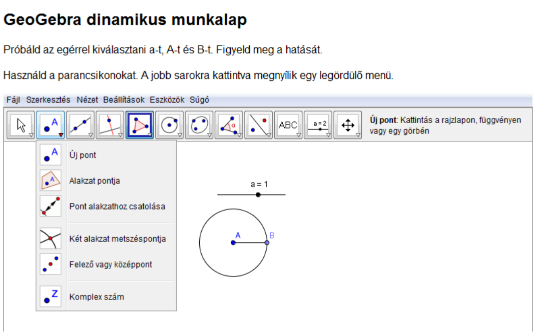
Az interaktív mező alatt találhatók a kísérletezés céljainak megfelelő feladatok és azok megoldási ötlete.

Az animációk ismertetésénél mutatunk egy-egy jellegzetes képet az animációból, amely sok diák számára az animáció megnyitása nélkül is ösztönző az önálló munkához. Mindenesetre tájék

7.3.1. Ismerkedés a dinamikus munkalapokkal

Először olyan animációt mutatunk be, amelyek 10-12 éves tanulók interaktív feladatlapokkal való ismerkedését és a geometriai tapasztalatszerzést szolgálják.

7.41 Animáció: *Dinamikus munkalap a GeoGebrával való ismerkedéshez.*

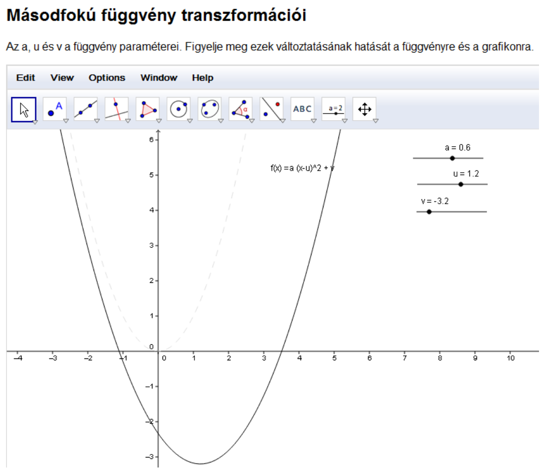


html/prgyak.html

Ha a weboldal véletlenül nem magyarul nyílna meg, akkor az Options legördülő menüben a Language soron választhatjuk ki a magyart. A jobb felső sarokban megjelenik a segítség a kiválasztott parancshoz.

7.42 Animáció: *Dinamikus munkalap a másodfokú függvény vizsgálatához.*

Nem csak geometriához jók az animációk, például a paraméteres másodfokú függvény vizsgálatára is alkalmas.



html/parammasodfv.html

7.43 Animáció: *Dinamikus munkalap a pont körüli forgatás vizsgálatához.*

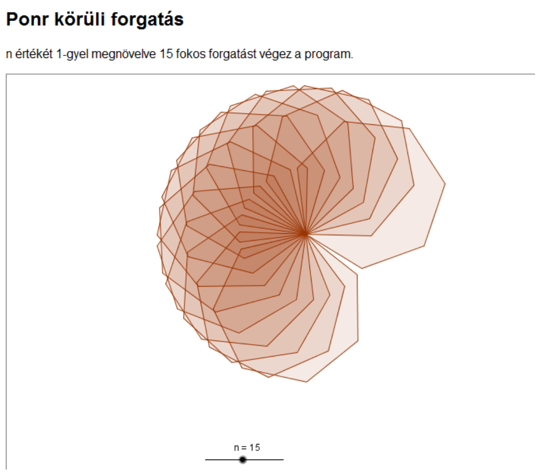
Hasonlítsa össze ugyanannak a szerkesztésnek a beavatkozás nélküli bemutatását

gif/forg.gif

és az interaktív feladatlapként közreadott

html/forg.html

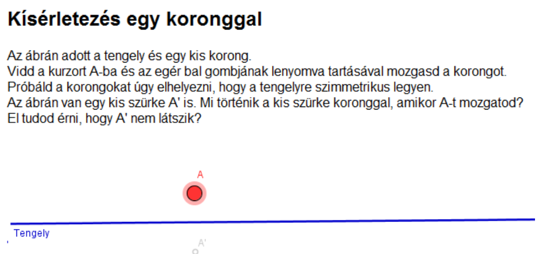
felhasználási módot.



7.3.2. Tengelyesen szimmetrikus alakzatok építése és vizsgálata

A következő animációkban látható a különbség a papír-ceruza kísérletek és az önálló feldolgozásra szánt interaktív feladatlap között. A valódi korong tologatása közben gyakran elég egy bíztató tanári pillantás a megoldás helyességének eldöntéséhez. A programba be kellett valami visszajelző eszközt építeni.

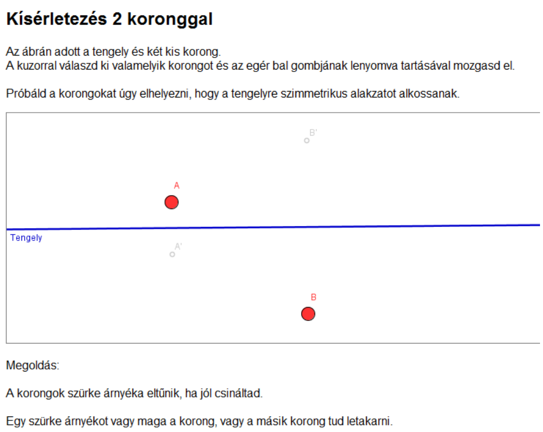
7.44 Animáció: *Tengelyesen szimmetrikus alakzat 1 pontból*



html/1korong.html

5.34. példa

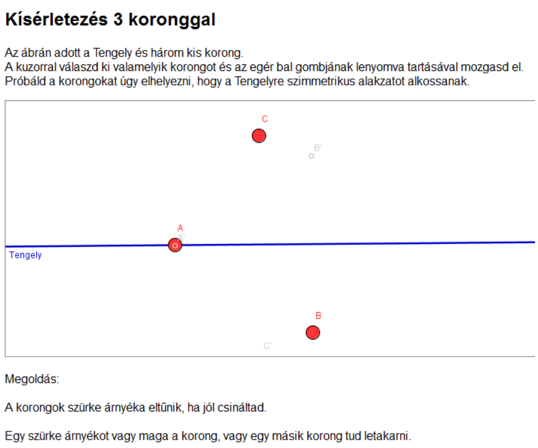
7.45 Animáció: *Tengelyesen szimmetrikus alakzat 2 pontból*



html/2korong.html

5.35. példa

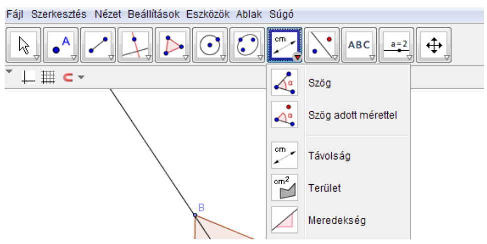
7.46 Animáció: *Tengelyesen szimmetrikus alakzat 3 pontból*



html/3korong.html

5.36. példa

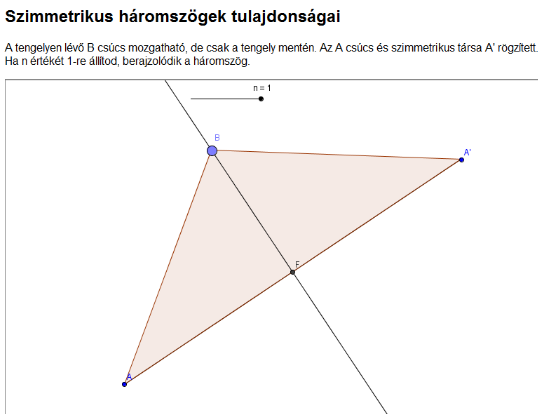
7.47 Animáció: *A feladatlapon megmérheted a szögeket, a távolságokat, ...*



html/tanuls.html

5.37. példa

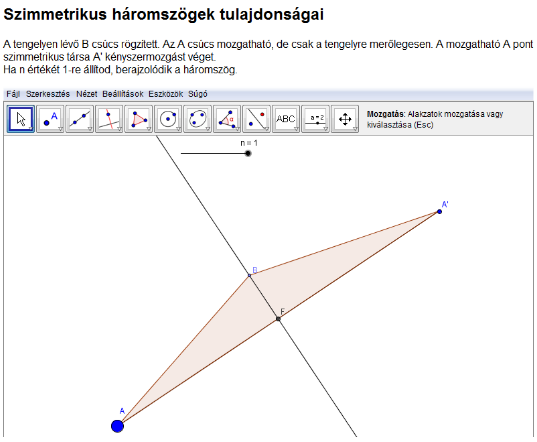
7.48 Animáció: *A tengely és a szimmetrikus pontpár rögzített, a tengelyen levő csúcs mozgatható.*



html/szhsza.html

5.38. példa

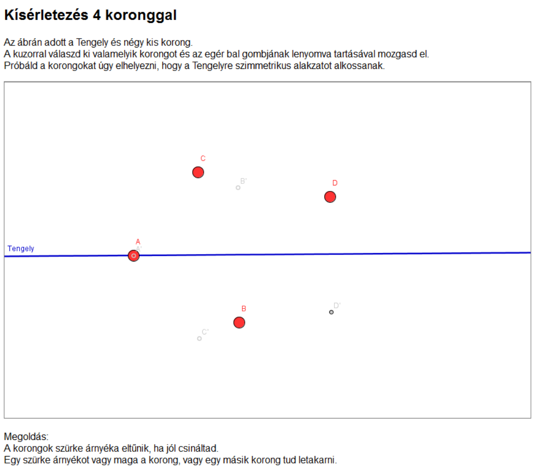
7.49 Animáció: *A tengelyen lévő csúcs rögzített, az egyik csúcs mozgatható, de csak a tengelyre merőlegesen. A mozgatható pont szimmetrikus társa kényszermozgást véget.*



html/szhszb.html

5.38. példa

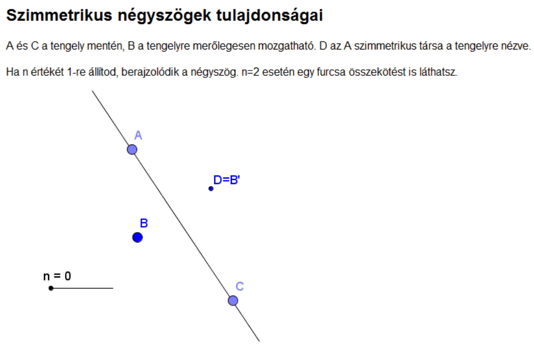
7.50 Animáció: *Tengelyesen szimmetrikus alakzat 4 pontból*



html/4korong.html

5.39. példa

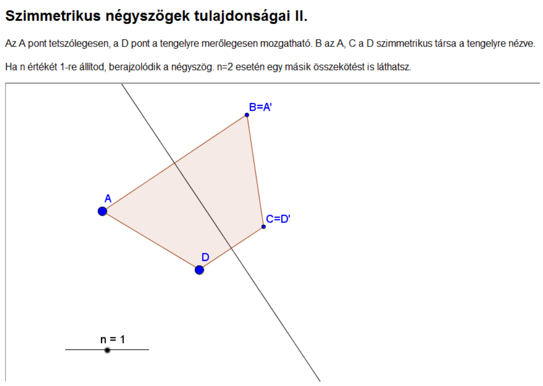
7.51 Animáció: *Két csúcs illeszkedik a tengelyre*



html/sznszb.html

5.39. példa

7.52 Animáció: *Két-két tengelyesen szimmetrikus pont*



html/sznszc.html

5.39. példa

7.3.3. Egy különleges transzformáció

7.53 Animáció: *Ismerkedés egy különleges transzformációval*

Az interaktív feladatlapot egy kis csalással készítettük el, hogy hangsúlyozzuk az O pont különlegességét: nem egy pontot, hanem egy kis környezetet hagytunk ki a síkból, mert egyetlen pontot kezdőnek nehéz eltalálni.

html/ktukr0.html

5.25. példához

7.54 Animáció: *A szakasz képének vizsgálata*

html/ktukr1.html

5.25. példához

7.55 Animáció: *A szakasz szétszakításának bizonyításához*

Be tudnád bizonyítani, hogy az O ponton átmenő szakasz nemcsak lyukas, hanem szét is szakad? A bizonyításban segít az interaktív feladatlap.

html/ktukr2.html

Vegyünk például egy átmérőt és induljunk el az átmérő egy-egy végpontjából befelé. A középpont különböző oldalán fekvő pontok képe olyan két különböző félegyenesre esik, amelyeket úgy kapunk, hogy kihagyjuk az átmérő egyeneséből az átmérőt. Az átmérő egyenesének az r és 2r sugarú körök közötti szakaszaira kerülnek a képek.

5.25. példához

7.56 Animáció: *Középponton átmenő egyenes képének vizsgálata*

html/ktukr3.html

5.25. példához

7.57 Animáció: *Középpontra nem illeszkedő egyenesek képének vizsgálata*

html/ktukr4a.html

5.25. példához

7.58 Animáció: *Egyenesek képének vizsgálata*

html/ktukr4b.html

5.25. példához

7.59 Animáció: *Körök képének vizsgálata*

html/ktukr5.html

5.25. példához

7.3.4. Távolságokra vonatkozó feladatok

7.60 Animáció: *Interaktív feladatlap az* A *és* B *pontoktól mért távolságok vizsgálatához*

Az A ponttól 3 egységnél kisebb és a B ponttól legalább 5 egységre levő pontokat keressük.

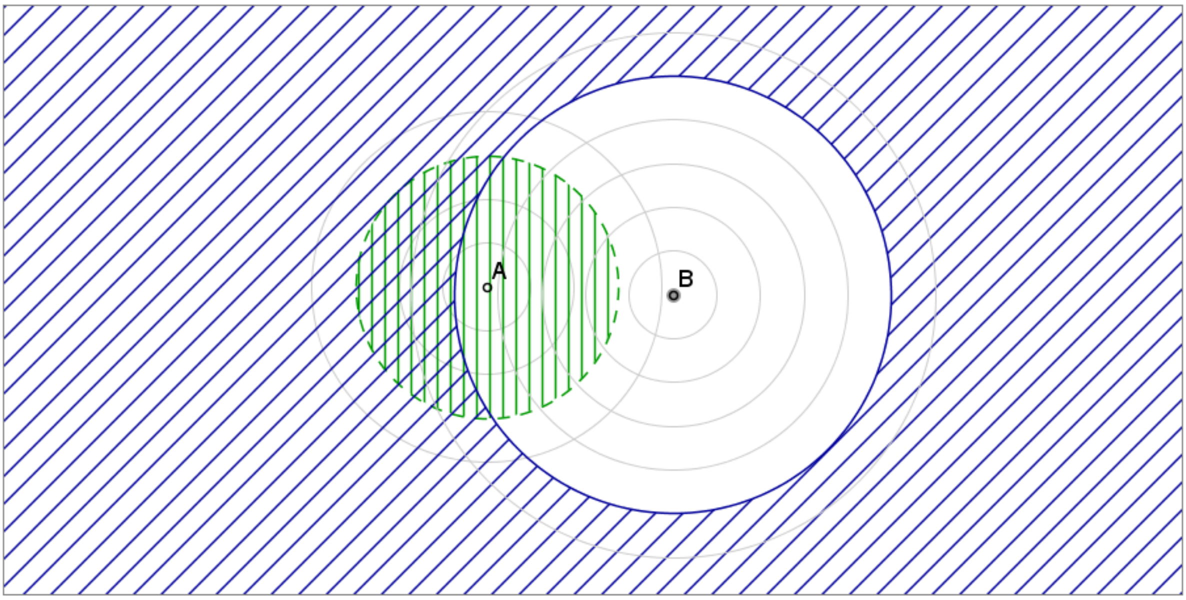
Az első feltételnek eleget tevő pontok zöldek, ezek az A középpontú, 3 egység sugarú kör belső pontjai.

A második feltételnek eleget tevők kékek, ezek a B középpontú, 5 egység sugarú körvonal pontjai és a körre nézve külső pontok.

Az A vagy a B pont mozgatása közben keress olyan pontokat, amelyek egyszerre zöldek és kékek, amelyek fehérek, … .

A kapcsolódó feladatokat az ábra alatt találod.

1. feladat: Keress olyan helyzetet, amikor nincs olyan pont, ami kék és zöld is! Milyen messze vannak egymástól az A és B pontok ebben a helyzetben?



7.5. ábra. Interaktív feladatlap `html/tavolsagok1a.html`

Megoldás: Ha az A középpontú, 3 egység sugarú kör a B középpontú, 5 egység sugarú kör belsejében van, akkor nincs olyan pont, ami kék és zöld is.

Ekkor A a B körül írt 2 egység sugarú zárt körlemez valamely pontja.

2. feladat: Milyen helyzetben van a lehető legtöbb olyan pont, ami kék és zöld is? Milyen messze vannak egymástól az A és B pontok ebben a helyzetben?

Megoldás: Ha az A középpontú, 3 egység sugarú kör a B középpontú, 5 egység sugarú körön kívül van, akkor minden zöld pont egyben kék is.

Ekkor AB hossza legalább 8.

3. feladat: Van-e olyan pont, amely egyik feltételnek sem tesz eleget?

Megoldás: Ilyen pont mindig van, mert a B középpontú, 5 egység sugarú kör nem fedhető le az A középpontú, 3 egység sugarú körrel.

A kimaradó pontok se nem kékek, se nem zöldek.

Ide kattintva a példához ugorhat.

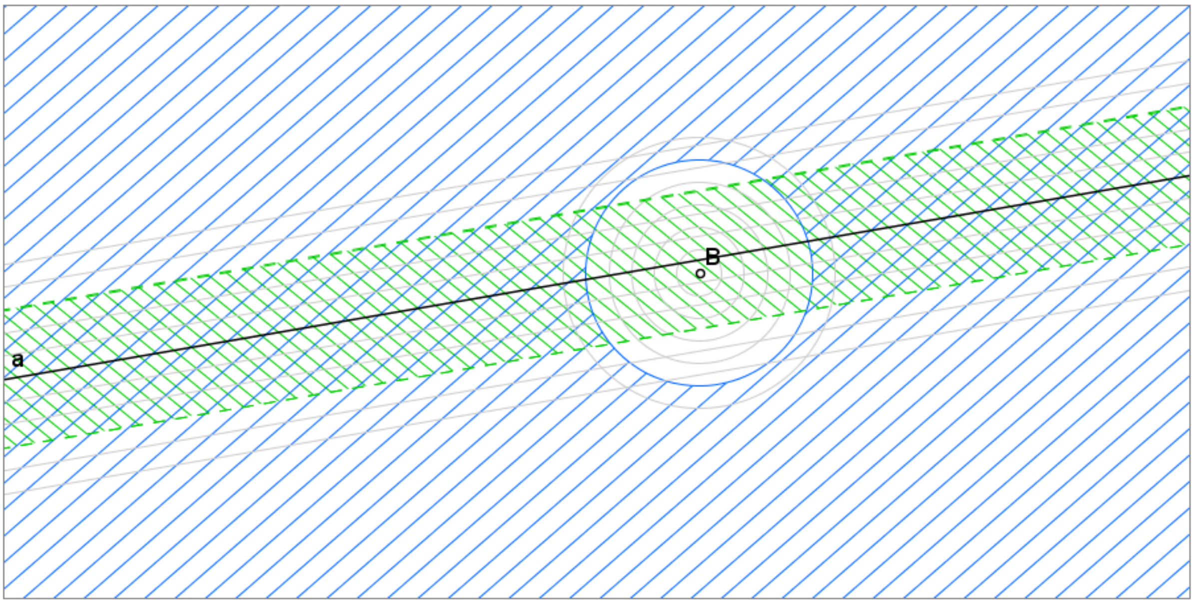
7.61 Animáció: *Egyenestől és ponttól mért távolságok vizsgálata* Az a egyenestől 3 egységnél kisebb és a B ponttól legalább 5 egységre levő pontokat keressük.

Az első feltételnek eleget tevő pontok zöldek, egy olyan párhuzamos sáv belső pontjai, amelynek középpárhuzamosa az a egyenes és szélessége 6 egység.

A második feltételnek eleget tevők kékek, ezek a B középpontú, 5 egység sugarú körvonal pontjai és a körre nézve külső pontok.

A B mozgatása közben keress olyan pontokat, amelyek egyszerre zöldek és kékek, amelyek fehérek, ...

A kapcsolódó feladatokat az ábra alatt találod.



7.6. ábra. Interaktív feladatlap http://dl.dropbox.com/u/100162898/modjegyzet/html/tavolsagok1b.html

1. feladat: Keress olyan helyzetet, amikor nincs olyan pont, ami kék és zöld is!

Megoldás: Nincs ilyen helyzet, a zöld sávnak és a kilyukasztott kék síknak mindig van közös pontja.

2. feladat: Milyen helyzetben van a lehető legtöbb olyan pont, ami kék és zöld is? Milyen messze van egymástól az a egyenes és a B pont ebben a helyzetben?

Megoldás: Akkor van legtöbb közös pontja a sávnak és a kilyukasztott síknak legtöbb közös pontja, ha a lyuk elkerüli a sávot. Ekkor a B pont az a egyenestől legalább 8 egység távolságban van.

3. feladat: Van-e olyan pont, amely egyik feltételnek sem tesz eleget?

Megoldás: Ilyen pont mindig van, mert a nem zöld pontok két olyan zárt félsíkot alkotnak, amelyek határa 6 egység távolságra van egymástól, a nem kék pontok egy 10 átmérőjű nyílt körlemezben vannak, és ennek mindig van közös pontja legalább az egyik félsíkkal.

Ide kattintva a példához ugorhat.

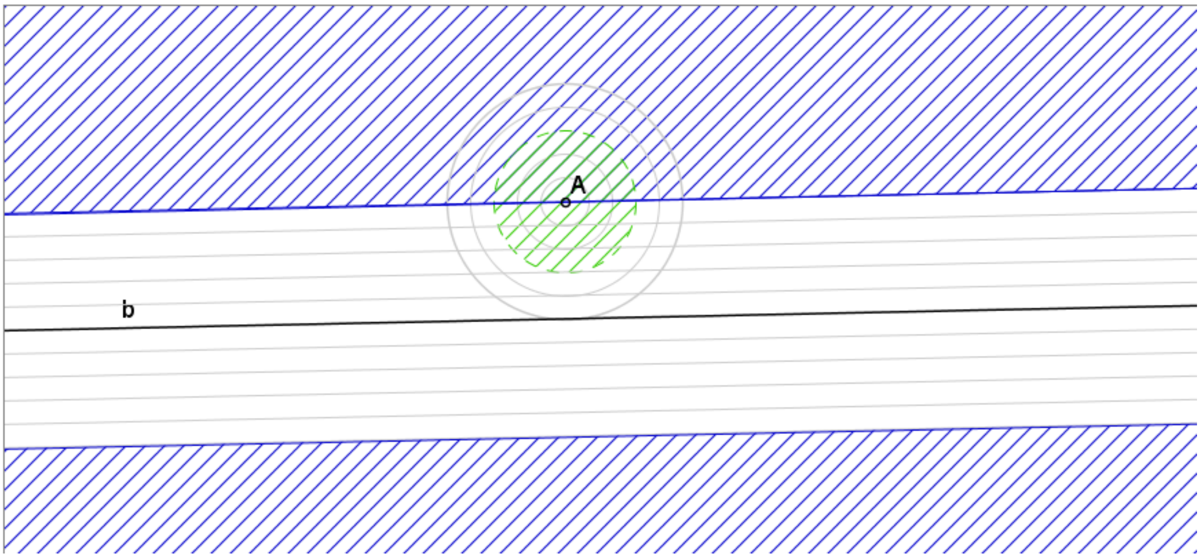
7.62 Animáció: *Ponttól és egyenestől mért távolságok vizsgálata*

Az A ponttól 3 egységnél kisebb és a b egyenestől legalább 5 egységre levő pontokat keressük.

Az első feltételnek eleget tevő pontok zöldek, ezek az A középpontú, 3 egység sugarú kör belső pontjai.

A második feltételnek eleget tevők kékek, ezek egy olyan 10 egység szélességű sáv határ- és külső pontjai, amelynek b a középpárhuzamosa. Az A pont mozgatása közben keress olyan pontokat, amelyek egyszerre zöldek és kékek, amelyek fehérek, … .

A kapcsolódó feladatokat az ábra alatt találod.



7.7. ábra. Interaktív feladatlap http://dl.dropbox.com/u/100162898/modjegyzet/html/tavolsagok1c.html

1. feladat: Keress olyan helyzetet, amikor nincs olyan pont, ami kék és zöld is! Milyen messze van ekkor az A pont a b egyenestől?

Megoldás: Ha az A középpontú, 3 egység sugarú kört a fehér sáv tartalmazza, akkor nincs ilyen pont. Ekkor az A pont a b egyenestől legfeljebb 2 egység távolságra van (olyan 4 szélességű sávban fekszik, amelynek b a középpárhuzamosa).

2. feladat: Milyen helyzetben van a lehető legtöbb olyan pont, ami kék és zöld is? Milyen messze van egymástól az A pont és a b egyenes ebben a helyzetben?

Megoldás: Ha az A középpontú, 3 egység sugarú körlemez a sávon kívül van, akkor az egész nyílt körlemez minden pontja (az első feltételt teljesítő összes pont) egyben teljesíti a második feltételt is. Ekkor az A pont a b egyenestől legalább 8 egység távolságra van.

3. feladat: Van-e olyan pont, amely egyik feltételnek sem tesz eleget?

Megoldás: Ilyen pont mindig van, mert a kis körlemez nem tudja lefedni a fehér sávot.

Ide kattintva a példához ugorhat.

7.63 Animáció: *Két egyenestől mért távolságok vizsgálata*

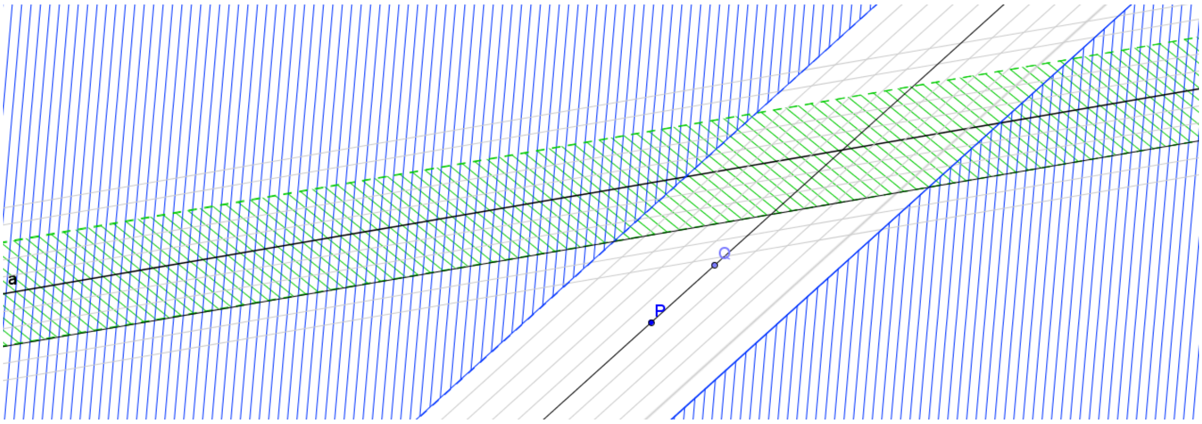
Az a egyenestől 3 egységnél kisebb és a b egyenestől legalább 5 egységre levő pontokat keressük.

Az első feltételnek eleget tevő pontok zöldek, ezek az ezek egy olyan 6 egység szélességű sáv belső pontjai, amelynek a a középpárhuzamosa.

A második feltételnek eleget tevő pontok kékek, ezek egy olyan 10 egység szélességű sáv határ- és külső pontjai, amelynek b a középpárhuzamosa.

A P pont mozgatásával a b egyenes helyét, a Q pont mozgatásával a b egyenes állását változtathatod. Keress olyan pontokat, amelyek egyszerre zöldek és kékek, amelyek fehérek, ...

A kapcsolódó feladatokat az ábra alatt találod.



7.8. ábra. Interaktív feladatlap `html/tavolsagok1d.html`

1. feladat: Keress olyan helyzetet, amikor nincs olyan pont, ami egyszerre kék és zöld is! Milyen helyzetű ekkor az a és a b egyenes?

Megoldás: Ha a b középpárhuzamosú 10 széllességű sáv tartalmazza az a középpárhuzamosú 6 szélességű sávot, akkor nincs egyszerre zöld és kék pont. Ekkor a és b párhuzamos, a távolságuk legfeljebb 2.

2. feladat: Milyen helyzetben van a lehető legtöbb olyan pont, ami egyszerre kék és zöld?

Megoldás: Ha a és b párhuzamosak és a távolságuk legalább 8 egység, akkor minden zöld pont egyben kék is.

3. feladat: Van-e mindig olyan pont, amely egyik feltételnek sem tesz eleget? *Megoldás: Mindig van ilyen pont, mert a zöld sáv nem tudja lefedni a fehér sávot.*

Ide kattintva a példához ugorhat.

7.3.5. Tudáspróba és gyakorló lapok

Végül néhány leegyszerűsített példát mutatunk a weblapon megvalósítható tudásmérésre. A teszt Kalló Bernát munkája, a gyakorló feladatlapokat Rózsahegyi Eszter készítette a HotPotatoes program segítségével.

7.64 Animáció: *A Bevezető matematika tárgy kritériumdolgozatának mintája*
html/ teszt. html

7.65 Animáció: *A fogalmak megfelelő használatát ellenőrző lyukas mondat feladattípus*
html/ lyukas. html

7.66 Animáció: *A fogalomhasználatot segítő kevert mondat típus.*
html/ kevert. html

7.67 Animáció: *Lehet egy kérdéssel több?*
html/ quiz. html

7.68 Animáció: *Összepárosítás*
html/puzzle.html

7.69 Animáció: *Keresztrejtvény*
html/kereszt.html

8. fejezet

Kislexikon

8.1. Matematika módszertani záróvizsga tételek matematikatanári mesterszakos hallgatóknak

Egy-egy tétel feldolgozásában nélkülözhetetlen szempont az érintett matematikai tartalmak biztos ismerete és pontos alkalmazása. A tételek kifejtésében az iskolai gyakorlatot és a módszertani elméleti alapelveket egységben kell megjeleníteni. Kívánatos, hogy a jelölt az érintett matematikai tartalmakat konkrét példákkal, az életkori sajátosságokat tekintetbe vevő alapfeladatokkal illusztrálja és térjen ki a várható nehézségekre.

Röviden javaslatot teszünk a tartalomra és a felhasználandó irodalomra. A kitekintő, ajánlott forrásokat külön megjelöljük. A vizsgán a tételsort használhatják, az irodalomjegyzéket nem.

1. **Fogalmak tanításának alapkérdései**

   A fogalmak tanításával kapcsolatos módszerek, eljárások, feladattípusok.

   Az 1. tétel vázlata

2. **Bizonyítások tanításának alapkérdései**

   Érvelési, indoklási, bizonyítási típusok. Tételek megsejtését szolgáló eljárások. Prematematikai indoklások, szemléletes utak és szemléletes bizonyítások, ezek átvezetése a precíz matematikai bizonyításba. Bizonyítási stratégiák.

   A 2. tétel vázlata

3. **A matematikatanulással kapcsolatos reprezentációs elméletek**

   Bruner reprezentációs elmélete, duálkód-elmélet, az emberi agy aszimmetriái. A belső és külső reprezentációk, ezek típusai, példák különböző matematikai területekről.

   A 3. tétel vázlata

4. **A problémamegoldó gondolkodás fejlesztése, feladatorientált matematikaoktatás**

   Problémamegoldási stratégiák, heurisztikus elvek, algoritmikus gondolkodás. Feladattípusok, problémavariációk.

   A 4. tétel vázlata

5. **Matematikai modellalkotás az oktatásban, alkalmazásorientált matematikaoktatás**

   Matematikán kívüli problémák matematikai modellezése, néhány alkalmazás ismerete.

   Az 5. tétel vázlata

6. **A számfogalom fejlesztése** Műveleti modellek az egész számok körében, számkörbővítés, permanenciaelv.

   A 6. tétel vázlata

7. **Az algebrai struktúrák az iskolai tananyagban**

   Természetes számok, egész számok gyűrűje, maradékosztályok, racionális számok, valós számok teste, szimmetriacsoportok, vektorterek.

   A 7 tétel vázlata

8. **Geometriai fogalmak kialakítása és a geometriai térszemlélet fejlesztése**

   A geometriai fogalmak fejlődésének szintjei. Szintetikus (elemi), koordináta- és vektorgeometria az általános és középiskolában. A térszemlélet fejlesztését szolgáló témakörök, módszerek és eszközök.

   A 8. tétel vázlata

9. **Az analízis elemei az iskolai tananyagban**

   A függvényfogalom fejlesztési folyamata a kezdő foktól az érettségiig. Elemi függvényvizsgálat. Szélsőérték-feladatok megoldásának módszerei. Végtelen sorozatok, sorok.
   A határérték szemléletes fogalma.

   A 9. tétel vázlata

10. **Valószínűségszámítás és matematikai statisztika az iskolai tananyagban**

    A véletlen fogalma. Kombinatorikus és geometriai módszerek. Valószínűségszámítási szemléltetések (fa diagram, kettős fa diagram). Statisztika és valószínűségszámítás kapcsolata. Leíró statisztika alapvető céljai.

A 10. tétel vázlata

11. **A tanítás tervezése**

    Matematikai tantervek, pedagógiai alapelvek, óratípusok, különböző munkaformák (kooperatív módszerek, projektív módszerek). Differenciált foglalkozások tervezése.

A 11. tétel vázlata

12. **Ellenőrzés, értékelés a matematikaoktatásban**

    Mérőlapok (diagnosztikus, formatív és szummativ), kompetenciamérések, vizsgák. Hazai és nemzetközi mérések.

A 12. tétel vázlata

8.2. Szómagyarázat

Néhány kifejezés matematikadidaktikai értelmezését gyújtjük össze

8.2.1. A mozgás axiómái

VII. A mozgás két pont összekötő szakaszát a két elmozgatott pont összekötő szakaszába, az egyenest egyenesbe, a síkot síkba viszi.

VIII. Egy és csak egy olyan térmozgás van, amely egy adott félsíkot és ennek határán adott félegyenest megadott helyzetbe, egy adott félsíkba és annak határán adott félegyenesbe visz át. (Ha a térmozgás nem változtatja meg egy félsík és egy ennek határán elhelyezkedő félegyenes helyzetét, akkor nem változtatja meg a tér egyetlen pontjáét sem.)

A mérésről szóló axiómák azokra az osztályokra vonatkoznak, amelyeket a mozgással egymásba átvihető pontpárok alkotnak. Ezeknek az osztályoknak mindegyikéhez hozzárendelhető egy-egy pozitív valós szám, amelyet az osztályba tartozó pontpárok távolságának mondunk, s amely rendelkezik az axiómákban kimondott tulajdonságokkal.

IX. Egy szakaszt bármely belső pontja két olyan szakaszra bont fel, amelyek hosszának összege az eredeti szakasz hossza. (Akkor is igaz, ha véges sok szakaszra való felbontásról van szó.)

X. Ha a hosszegység adott, akkor bármely A kezdőpontú félegyenesen egy és csak egy olyan B pont található, amelyre nézve az AB távolság egy adott pozitív valós szám.

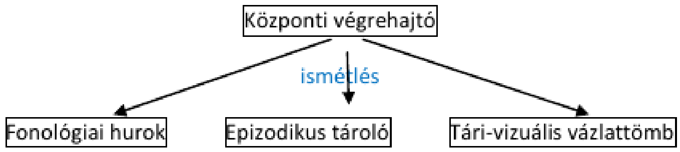
   (Hajós 1971 [101] 11. o.)

8.2.2. Kontraszthatás a tanuláspszichológiában

Azt a törvényszerűséget fejezi ki, hogy a fogalom tartalmát a még nem ismert példák számára nyitva hagyhatjuk, ha mutatunk a a fogalomhoz nem tartozó –, de rokon, összetéveszthető – példákat. A túláltalánosítás ellenszerének, diszkriminációnak is nevezik.

8.2.3. Geometriai térszemlélet

8.2.4. A munkamenória szerkezete



8.1. ábra. A munkamemória szerkezete Baddeley szerint

- Központi szabályozó – Kontrollált figyelem

  Funkciói: tervezési folyamatok, ellenőrző és döntési folyamatok megindítása és szabályozása, következtetések, nyelvi megértés, ismétlés segítségével az információk átvezetése a hosszú távú memóriába, kódolt információ megfejtése, áttérés egyik (rész)feladatról egy másikra.

- Fonológiai tár – belső beszéd

  Funkciói: Beszéd alapú információk tárolása (tárolás, fenntartás transzformálás), kiejtési eljárások, egységek ismétlése a közvetlen előhívása kimondás céljából.

- Epizodikus tár

  Funkciói: Ez a komponens különböző helyről érkező információkat integrál. Feltételezhetően kapcsolatban áll a hosszú távú emlékezettel és a szemantikai rendszerrel. Integrálja a beszédalapú és (vagy) vizuális információkat.

- Képi-téri tár – belső szem

  Funkciói: Specializálódott a téri és (vagy) képi kódolásra vizuális-képi információk tárolása, fenntartása, transzformálása, vizuális képzeleti feladatokra, téri, vizuális kereső feladatokra.

8.2.5. Prototípus

A „prototípus” szó egyszerre jelöli az (általános érvényű, tapasztalat- és kultúrafüggő) kritériumok, definiáló ill. karakterisztikus tulajdonságok és a tipikus képviselő, az ősminta (reprezentáns) által generált kognitív konstrukciót (fogalmat, koncepciót). Didaktikai jelentősége abban van, hogy

- A mintapéldákon alapuló fogalomalkotás lehetővé teszi az adott területen szerzett individuális tapasztalatok differenciált mozgósítását, és így (legalábbis részben, alapszinten), megnyitja az absztrakció útját a csekélyebb absztrakciós készséggel rendelkező személyek számára is.

- A mintapéldákon alapuló fogalomalkotás folyamán bizonyos (egyidejűleg több kategóriába besorolható) „hídelemek” segítségével létrehozhatók a különböző kategóriák közötti keresztkapcsolatok, a tudásháló építőkövei. Ennek során az adott kategória és a hídelemek tulajdonságai jobban tudatosulnak (pl. a négyszögek klasszifikációjánál a téglalap és a rombusz hídelemek a paralelogramma és a négyzet között).

- Egy adott kategória sokféle példán alapuló (külső) reprezentációján keresztül könnyebbé válik az egyéni (belső, akár emlékezetsegítő) reprezentáció kialakítása és a kapcsolatrendszer aktualizálása.

- Az azonosító séma (definíció) és a mintapéldák alapján való fogalomalkotás a gyakorlatban keverten lépnek fel. A jó mintapéldák statisztikai értelemben gyakrabban fordulnak elő: a hattyú mindkét értelemben jobban képviseli a madarakat, mint a pingvin vagy a strucc.

A mintapéldákon alapuló fogalomalkotás motivációs előnyei (személyre szabott választási lehetőség, szubjektív élményekhez való kapcsolás) mellett meg kell említeni a fellépő nehézségeket is:

a) Az „egységként” egymás mellé állított példákból létrehozandó kategória kiválasztási kritériumait, szervező szempontjait a fokozatos bővítése közben (analógia alapján) kell felfedezni. Kicsi gyerekeknél megfigyelhető, a „négyzet” tulajdonságainak részekre bontása nélkül nem egyesíthető a téglalap és a négyzet közös fogalommá. A centrális elem ugyan jó képviselője a kategóriának, de egyedül (megbontatlan egységként) nem alkalmas a kategória példákon keresztüli azonosítására.

b) A mintapéldákon alapuló fogalom tartalma függ a példák összetételétől, sorrendjétől és az egyidejűleg hozzájuk kapcsolt információktól. Könnyen lehet, hogy – előismeret és koncepció hiányában, téves vagy leegyszerűsítő elképzelés birtokában – olyan példák válnak ősmintává, amelyek nem terjeszthetők ki a létrehozandó kategóriává (széteső kategória, egyedi példák, strukturálatlan ismeretmorzsák). A szimmetrikus négyszögek példáján látható a kiindulási elem hatása: bár a négyzet a szimmetrikus négyszögek centrális eleme, nem generálja a szimmetrikus négyszögek osztályát.

8.2.6. Reprezentációk

A gondolkodáshoz és a kommunikáláshoz szükséges, hogy reprezentáljuk a fogalmakat. A pszichológia megkülönböztet külső - belső, valamint tárgyi, vizuális és szimbolikus reprezentációs szinteket.

A külső reprezentációk közvetlenül megfigyelhetők, míg a belsők nem, így azok minőségére csak a külső reprezentációkból következtethetünk. Egy fogalom belső reprezentációi, valamint külső és belső reprezentációi között kölcsönhatás van, mely szimulálható a külső reprezentációk közötti megfelelő kapcsolatok létrehozásával.

A belső reprezentációk közötti kapcsolat az ismeretek egy hálózatát adja, és ezek a kapcsolatok teszik lehetővé az egyik ismeretről a másik ismeretre való áttérést. A fogalmak mentális képét a tárgyi, képi és a szimbolikus reprezentációk rendszere alkotja. Ezek nem a külső reprezentációk másolatai, hanem az egyén alakítja ki saját tudása és tapasztalata alapján.

Egy elvet, fogalmat akkor értünk meg, ha annak belső reprezentációja a reprezentációs hálózatunk részévé válik. A megértés fokát a kapcsolatok száma, erőssége, stabilitása jellemzi. Tehát a megértés nem más, mint a fogalmak, elvek közötti kapcsolatok létrejötte.

Az oktatásban mindhárom reprezentációs mód - tárgyi, képi, szimbolikus - szerepet játszik. A tárgyi és vizuális reprezentációk nem csak a lassúbbak, a fiatalabbak számára hasznosak, hanem mindenkinek, és a teljes tanulási folyamat során.

R. W. Sperry, D. H. Hubel és T. N. Wiesel 1981-ben Nobel-díjat kaptak a két agyfélteke működésében megnyilvánuló aszimmetriák felfedezéséért. Ezen alapul a duál-kód elmélet is

8.2. ábra. Bélyeg a Nobel-díjhoz

(Paivio), mely szerint az információfeldolgozás során két rendszer szerint kódolunk, képi és verbális rendszerben. Míg a képi kódoló-rendszer konkrét tartalmak feldolgozását végzi, addig a verbális az absztrakt információkra koncentrál. Minél konkrétabb az információ, annál több lehetőség van a duális kódolásra.

Ha tehát ugyanannak a fogalomnak különböző reprezentációit használjuk, más-más agyfunkciókat szólítunk meg. A kérgestest (corpus callosum) nevű „híd” biztosítja összeköttetésüket.

8.2.7. Szemléletesség, szemléltetés

A szemlétesség elve

A matematika tanításában kétféle irányzattal találkozunk: az elvonatkoztatásra törekvéssel – amely megkísérli a sokféle anyagból a logikai szempontokat kimunkálni és azokat rendszeres összefüggésbe hozni –, és a másik irányzattal, a szemléletesség elvével.

A szemléletesség elve olyan oktatás követelményét fejezi ki, amely a lehetőségeknek megfelelően az érzéki észlelésre, a megfigyelésre támaszkodik, az ismeretek alapvető forrásául a valóság tárgyai és jelenségei, vagy azok ábrázolása szolgál. A szemléletesség elve ezek felhasználásának szükségességét és azt az elvárást fejezi ki, hogy az így elsajátított fogalmak megfeleljenek a valóságnak. A szemléletesség elvére támaszkodó ismeretszerzés fontos eszköze a tanulók megfigyelő-képessége és gondolkodása. A valódi tárgy, jelenség helyettesítése képekkel vagy szavakkal csak ekkor elegendő, ha van feleleveníthető élmény.

A szemléltetés

A szemléletesség elvének a gyakorlatban történő érvényesítése a szemléltetés. A szemléltetés az oktatás folyamatában tudatosan alkalmazott eljárás, amely egyaránt vonatkozik a pedagógus és a tanulók tevékenységére. Az oktatás folyamatában felhasznált eszközök (a szemléltető eszközök), vagy a valóság tárgyainak és jelenségeinek megfigyelése teszi lehetővé az érzéki észlelést. Ennek folyamatában a pedagógus – a gyermekek aktív részvétele mellett – érzékszerveikre hat, s ezzel elősegíti:

- a pontos és világos képzetek kialakítását a külvilág tárgyairól és jelenségeiről,
- a tárgyak és jelenségek összefüggéseinek és törvényszerűségeinek feltárását,
- a megalapozott általánosítást.

A szemléltetés biztosítja az érzéki megismerés és elvont gondolkodás szoros kapcsolatát, megkönnyíti a tanulók számára a tananyag mélyebb megértését, s ezáltal biztosítja az ismeretek tartós bevésését is. Már évekkel ezelőtt kísérletekkel igazolták, hogy a szemléltető eszközök alkalmazása fokozza az oktatás eredményességét, ha azok több érzékszerv számára hozzáférhetők. Éppen ezért törekszünk arra, hogy a szemléltetés során lehetőleg több érzékszervet foglalkoztassunk.

A szemléletes gondolkodásmód kialakításával lehetővé tudjuk tenni a matematika lényegébe való behatolást, annak egyszerűbb megértését. A szemléltetés ténye a közvetlen tanulási effektuson túl a tanulási kompetenciára is hat, legitimmé teszi a saját tapasztalat bevonását az ismeretszerzésbe.

8.2.8. Szerkesztési feladat

Egy szerkesztési feladat abban áll, hogy adott alakzatok (pontok, egyenesek, körök, ...) ismeretében, bizonyos előre rögzített eszközök felhasználásával és alkalmazási szabályok betartásával egy adott tulajdonságú alakzatot keresünk.

A szerkesztési feladat megoldása során el kell döntenünk, hogy az adott tulajdonságú célalakzat egyáltalán létezik-e, és pozitív válasz esetén ki kell dolgozni egy elméleti szerkesztési módot; meg kell vizsgálnunk, hogy a talált szerkesztés pontosan, vagy csak közelítő módon hajtható végre, és ténylegesen el kell végezni a szerkesztési eljárást.

A szerkesztési feladatok megoldásának vezérfonala: a vázlat – elemzés, szerkesztés, szerkesztés leírása, szerkesztés helyességének igazolása, megoldhatóság feltételeinek, megoldások számának vizsgálata.

Irodalomjegyzék

[1] Ács P. 1979. (Szerk.) A matematika tanítása. Tankönyvkiadó

[2] Ambrus A. 1995. Bevezetés a Matematikadidaktikába. Eötvös Kiadó, javított kiadás 2004.

[3] Ambrus A. 2008. A konkrét és vizuális reprezentációk használatának szükségessége az iskolai matematikaoktatásban. (angol nyelven) In: Képzés és gyakorlat Konstantin Filozófus Egyetem, Nyitra, 19-32.

[4] Ambrus A. A konkrét és vizuális reprezentációk használatának szükségessége az iskolai matematikaoktatásban.
http://dl.dropbox.com/u/100162898/ambrus/aarepr.pdf

[5] Ambrus A. Nemzetközi tendenciák a matematika oktatásában.
http://dl.dropbox.com/u/100162898/ambrus/tendenc.pdf

[6] Ambrus G. 1998. CABRI-Geometria, segítőtárs a geometria tanulásában, A Matematika Tanítása, 1998.5, 3–7.

[7] Ambrus G. 1999. Mire használjuk (és mire ne) a CABRI-geometriát, Matematikatanárképzés, Matematikatanár-továbbképzés, 1999. November, S. 55–62.

[8] Ambrus G. 2002. Valóságközeli matematikaoktatás tegnap és ma. Matematika Tanári Kincsestár, 2002, március 3–25.

[9] Ambrus G. 2002. Bővül a számkör – Közönséges törtek az 5. évfolyamon, In: Tanári Kincsestár, RAABE Tanácsadó és Kiadó Kft. május, 2.1, 1–30.

[10] Ambrus G. 2003. Üben in der Planung des Mathematikunterrichts, A gyakorlás a matematikatanítás tervezésében, Dissertation, Salzburgi Egyetem németül

[11] Ambrus G. 2004. Nyitott feladatok a matematikaórán, Tanári Kincsestár 2004, szeptember 1.1 1–26. RAABE Tanácsadó és Kiadó Kft

[12] Ambrus G. 2005. Über einen allgemeinen Übungsbegriff bei verschiedenen Unterrichtsmethoden in der Planung des Mathematikunterrichtes. Konsequenzen für die Übungsforschung (Egy általános gyakorlásfogalomról a matematikatanítás tervezésében külön-

böző tanítási módszerek esetén, következmények a gyakorláskutatás számára) németül In: TMCS, Debrecen, 2005.2, 1–26.

[13] Ambrus G. 2007. Valóságközeli matematika, munkafüzet. Műszaki Kiadó, Budapest 5–12.

[14] Ambrus G. 2007. Analyse von Lösungswegen und Erweiterungsmöglichkeiten eines Problems für die Klassen 7-11 (Egy probléma megoldási és általánosítási lehetőségei a 7-11 évfolyam számára) németül In: TMCS, Debrecen, 2007 5/1 231–249.

[15] Ambrus G. 2008. Hagyományos és problémaorientált feladatlapok az iskolai gyakorlatban. *Iskolakultúra* 2008/1, 78–92.

[16] Ambrus G. 2008. Projektek a matekórán, Tanári Kincsestár, RAABE Tanácsadó és Kiadó Kft. (2008 június) 1–32.

[17] Ambrus G., Vancsó, Ö. 2009. Modellierungs- und Anwendungsaufgaben im Unterricht und in der Lehreraus- und Fortbildung – Wirkungen eines Lehrerfortbildungskurses auf die Teilnehmer
http://www.mathematik.tu-dortmund.de/ieem/cms/media/BzMU/BzMU2009/Beitraege/AMBRUS_Gabriella_2009_Modellierungsaufgaben.pdf

[18] Ambrus G. 2012a. Titanic a Balatonon és más modellezési feladatok matematikából középiskolásoknak, Műszaki Kiadó, Budapest

[19] Ambrus G., Wagner, A. 2012b. Mivel is kezdjünk? Témaindító feladatokról a „tört szorzása törttel” anyagrész kapcsán In. A Matematika Tanítása, 2012/2 3-8.

[20] Ambrus G. 2012c. Entwicklung (auch) des problemlösenden Denkens von Lehramtsstudenten in den Wahlfachseminaren „Realitätsnahe Aufgaben”
http://www.mathematik.uni-dortmund.de/ieem/bzmu2012/files/BzMU12_0017_Ambrus.pdf

[21] Ambrus G. Gondolatok a valóságközeli matematikaoktatásról.
http://dl.dropbox.com/u/100162898/ag/ag_valosagkoz.pdf

[22] Ambrus G. Modellezési feladatok.
http://dl.dropbox.com/u/100162898/ag/ag_modellez.pdf

[23] Andrews, P. 2007. A magyar matematikaoktatás helyzete nemzetközi színtéren. Matematikatanár-képzés Matematikatanár-továbbképzés Nyitott Könyvműhely Budapest

[24] Bajomi, I. 1997. Az uniós oktatáspolitika, ÚPSZ 1997/10, 118.

[25] Balk, M. B.; Boltyánszkij, V. G. Geometria massz, Bibliotyecska Kvant, 61. kötet

[26] Balogh, L. 2004. Iskolai tehetséggondozás, Kossuth Egyetemi Kiadó, Debrecen

[27] Barzel, B., Holzäpfel, L., Leuders, T. Streit C. 2011. Mathematik unterrichten: Planen, durchführen, reflektieren, Cornelsen Scriptor, Berlin

[28] Bayes, T. 1764. An essay towards solving a problem int he doctrine of chances. Phil. Trans.,London, Vol. 53 (1763), 376-398, Vol. 54 (1764) 298-310.

[29] Beke M. 1909. Vezérkönyv a népiskolai számtani oktatáshoz, Magyar Kir. Tudományegyetemi Nyomda, Budapest

[30] Bennett, C. D. 2000. Topspin on the Symmetric Group, Math Horizons.
http://nyelv.fazekas.hu/fordpalyazat/include/docs/TopSpin_Dinh_Attila.pdf

[31] Berta, T. 2003. Combination of traditional and computer based tools in mathematicseducation, Journal ZDM , Issue Volume 35, Number 1 February, 2003.
http://matserv.pmmf.hu/anniv/cd_hun/prezentaciok/berta.pdf

[32] Egy cikk a BBC honlapjáról a kommunikációs keret kialakítása kérdéshez: Burns, J. School maths lessons: Pupils 'scared to ask for help'
http://www.bbc.co.uk/news/education-17258668

[33] Blum, W., Wiegand, B. 1999. Offene Probleme für den Mathematikunterricht – Kann man Schulbücher dafür nutzen? In. Beiträge zum Mathematikunterricht, Franzbecker Verlag

[34] Blum, W., Leiß, D. 2006. „Filling up"– The Problem of Independence-Preserving Teacher Interventions in Lessons with Demanding Modelling Tasks. I.: Bosch, M. (Ed.) CERME-4 –Proceedings of the Fourth Conference of the European Society for Research in Mathematics Education, Guixol

[35] Bognárné, Nemetz, T., Tusnády, G. 1980. Ismerkedés a véletlennel. Tankönyvkiadó, Budapest

[36] Bolyai, J. 1973. Appendix, Akadémiai Kiadó, Budapest

[37] Bontovics, I. 2011. Macigát (lásd a következő weblap Kutatás fülre kattintva)
http://bontovics.hu/index.php

[38] Borovcnik, M.; Engel, J.; Wickmann, D. eds. 2001. Anregungen zum Stochastikunterricht Verlag Franzbecker: Hildesheim, Berlin

[39] Brenyó M., Kárpáti A., Rajz, I. 1984. Kép, nyelv, zene, matematika, Bács-Kiskun megyei PI

[40] Brenyó, M., Brenyó, M. 2004. Szakköri feladatok matematikából, Tóth Könyvkereskedés és Kiadó Kft.

[41] Bruder, R., Collet C. 2011. Problemlösen lernen im Mathematikunterricht. Cornelsen Scriptor

[42] Bruner, J., Kenney, H. 1965. Representation and Mathematics Learning, Monographs of the Society for Research in Child Development, Vol. 30, No. 1, Mathematical Learning: Report of a Conference Sponsored by the Committee on Intellective Processes Research of the Social Science Research Council, 50-59.

[43] Bruner, J. S. 1968. Az oktatás folyamata. Tankönyvkiadó, Budapest

[44] Bruner, J. S. 1974. Új utak az oktatás elméletéhez. Gondolat Kiadó, Budapest

[45] Bruner, J. S. 1983. Child's Talk: Learning to Use Language, New York: Norton

[46] Bruner, J. S. 1991. The Narrative Construction of Reality, Critical Inquiry

[47] Egy cikk a kanadai oktatási minisztérium honlapjáról a kommunikációs keret kialakítása kérdéshez: Asking Effective Qestions.
http://www.edu.gov.on.ca/eng/literacynumeracy/inspire/research/CBS_AskingEffectiveQuestions.pdf

[48] Claus, H.J. 1989. Einführung in die Didaktik der Mathematik. Wiss. Buchges, Darmstadt, ISBN 3-534-08736-4.

[49] Cole, M., Wertsch, J. Beyond the Individual-Social Antimony in Discussions of Piaget and Vygotsky, University of California, é. n.

[50] Collier, C. P. 1976. Geometry for teachers. Houghton Mifflin Company, Boston.

[51] C. Neményi Eszter: A matematika tantárgy helyzete és fejlesztési feladatai.
http://www.oki.hu/oldal.php?tipus=cikk&kod=tantargyak-tobbek-matematika

[52] Csahóczi E., Halmos I., Novák L., Varga K. 1986. Matematika munkalapok, Általános iskola 7. osztály. Tankönyvkiadó, Budapest

[53] Csapó, B. 1998. Az iskolai tudás, Osiris Kiadó, Budapest

[54] Cser, A. 1963. A hazai matematikatnítás vázlatos története. in: Tantárgytörténeti taulmányok II. Tankönyvkiadó. Budapest

[55] Cut the knot! http://www.cut-the-knot.org/ctk/index.shtml

[56] Czapáry, E. 1981. Matematika didaktikai szemelvénygyűjtemény ELTE TTK

[57] Czeglédy, I. 1994. Matematika tantárgypedagógia I. Calibra, Budapest

[58] Davis, Ph. J., Hersh, R. 1984. A matematika élménye. Budapest, Műszaki Könyvkiadó

[59] Deák E. 1985. Tanári kézikönyv a Matematika I. Kiegészítő tankönyvhöz, Nemzeti Tankönyvkiadó

[60] Deák, E. 1991. Kleingruppenthema: „Mathematikdidaktik als Wissenschaft”. In: Parisot, K. J.: Konferenciakötet az 1. Osztrák-magyar Matematikadidaktikai konferenciáról. Abakus Verlag Salzburg

[61] Deák, E. 1999. Végtelen sorok az iskolai matematikában. Matematikatanár-képzés Matematikatanár-továbbképzés 5. Műszaki Kiadó, Budapest

[62] Deák, E. 2007. Ein grundsätzlich neuer didaktischer Zugang zu den numerischen unendlichen Reihen auf konstruktiv-genetischer Grundlage, GDM, Berlin, 2007.

[63] Dinges, H.; Rost, H. 1982. Prinzipien der Stochastik. Teubner Studienbücherei: Stuttgart

[64] Dobi, J. 1998. Megtanult és megértett matematikatudás. Csapó B. (szerk.): Az iskolai tudás Osiris, Budapest, 169–191.

[65] Eglesz I., Kovács Cs., Sztrókayné Földvári V. 1979. Matematika, Általános Iskola 5. („Kockás sorozat”). Tankönyvkiadó

[66] Eglesz, I., Kovács, Cs., Sztrókayné Földvári, V. 1979. Matematika, Általános Iskola 6. („Kockás sorozat”). Tankönyvkiadó

[67] Eglesz I., Kovács Cs., Radnainé Szendrei J., Sztrókayné Földvári V.: Matematika 5. Tanári kézikönyv, Tankönyvkiadó

[68] Eglesz I., Kovács Cs., Radnainé Szendrei J., Sztrókayné Földvári V.: Matematika 6. Tanári kézikönyv, Tankönyvkiadó

[69] Erdélyi, K. 2001. Interaktív feladatlapok a CABRI dinamikus geometriai programmal, szakdolgozat, ELTE TTK, Budapest

[70] Érettségi Követelmények.
www.oh.hu

[71] Euklidesz Elemek (Elements). Translation of Szabó Árpád (1983). Gondolat, Budapest

[72] Fauvel, J., van Maanen, J. 2000. The Role of the History of Mathematics in the Teaching and Learning of Mathematics Discussion. Document for an ICMI Study, 1997-2000, Kluwer, Boston

[73] Fábián M., Olasz T., Lajos J., Vidákovich T. Matematika kompetenciaterület
http://www.sulinet.hu/tanar/kompetenciateruletek/2_matematika/1_koncepcio/matematikai_kompetencia_fejlesztese.pdf

[74] Feller, W. 1968. Bevezetés a valószínűségelméletbe és alkalmazásaiba, Vol. I., Wiley

[75] de Finetti, B. 1981. Wahrscheinlichkeitstheorie, Oldenburg

[76] Fisher, R. A. 1935. Design of Experiments Oliver & Boyd: Edinburgh

[77] Fisher, R. A. 1956. Statistical methods and Scientific Inference Edinburgh

[78] Fitos, L., 1984. Analóg tételek és feladatok a sík- és térgeometriában, Tankönyvkiadó

[79] Freud, R. 2004. Lineáris algebra, ELTE Eötvös Kiadó, Budapest

[80] Freudenthal, H. 1968. 'Why to teach mathematics so as to be useful?', Educational Studies in Mathematics 1, 3-8.

[81] Freudenthal, H. 1991. China lectures, Revisiting Mathematics Education, Springer: New York, Berlin

[82] Fried, E. 2000. Algebra I., Elemi és lineáris algebra, Nemzeti Tankönyvkiadó, Budapest

[83] Fried, K., Korándi, J., Török, J. 2012. Bevezetés a modern algebrába. http://www.cs.elte.hu/~kfried/tamop-algebra3/Fried_Korandi_Torok-Bevezetes_a_modern_algebraba.pdf

[84] Fuchs, K.J., Vásárhelyi, É. 2001. Informatik mit dem TI-92 Plus und TI 89 (Informatika a TI-92 Plus und TI 89 grafikus kalkulátorral.) (kétnyelvű könyv és CD forrásprogramokkal), Budapest: T3–Hungary. http://dl.dropbox.com/u/100162898/vasar/ti89.html

[85] Fuchs, L. Algebra

[86] Gádor, E. 1971. A geometriai transzformációk tanítása az általános iskolában. Tanári segédkönyv. Tankönykiadó, Budapest

[87] Gallai, T., Péter, R. 1949. Matematika a középiskolák számára. Tankönyvkiadó Nemzeti Vállalat, 333-336.

[88] Gallai, T., Péter, R. 1952. Matematika a középiskolák I. osztálya számára. (Mathematics for the grade I of secondary schools). Tankönyvkiadó, Budapest

[89] Gerőcs, L., Orosz, Gy., Paróczay, J., Szászné Simon, J. 2010. Matematika gyakorló és érettségire felkészítő feladatgyűjtemény. Nemzeti Tankönyvkiadó

[90] Gigerenzer, G. (at all.) 1989. The empire of Chance Cambridge University Press

[91] Gigerenzer, G. 1993. The Superego, the Ego and the Id in Statistical Reasoning. in: A Hand-book for Data Analysis in the Behavioral Sciences Lawrence Erlbaum Publisher Hillsdale New York 311-339.

[92] Gorgorio, N., Planas, N. 2002. Teaching mathematics in multilingual classrooms. Educational studies in mathematics, vol. 47, 7-33.

[93] Gorgorio, N., Planas, N. 2005. Cultural distance and identities-in-construction within the multicultural mathematics classroom. Zentralblatt fur Didaktik der Mathematik, Analyses, No. 2, 64-71.

[94] Gray, E. M., Tall, D. O. 1994. Duality, Ambiguity and Flexibility in Successful Mathematical Thinking. In: Proceedings of PME-XV. vol. 2. Assisi, Italy

[95] Grigutsch, S.,Raatz, U., Törner, G. 1997. Einstellungen gegenüber Mathematik bei Mathematiklehrern, JMD, 19 (1) 3–45.

[96] Gyarmati, E., Freud, R. 1996. Számelmélet. Tankönyvkiadó, Budapest

[97] Hajdú, S., Andrási, T., Czeglédy, I., Czeglédy, I. 1994. Matematika 7. Calibra Kiadó, Budapest

[98] Hajnal, I. 1982. Matematika IV. (Fakultatív B változat) Nemzeti Tankönyvkiadó 432-435.

[99] Hajnal, I. 1986. Matematika a speciális matematika I. osztálya számára. Tankönyvkiadó, Budapest

[100] Hajnal, I., Pintér, F. 2001. Matematika III. (Fakultatív B változat) Nemzeti Tankönyvkiadó 406-411.

[101] Hajós, Gy. 1966. Bevezetés a geometriába, Tankönyvkiadó, Budapest Javított kiadás 1971.

[102] Halmos, M., Varga, T. 1978 Change in Mathematics Education since the late 1950's – Ideas and Realisation Hungary

[103] Halmos P. 1998. Egy matematikatörténeti unikum: Nicolas Bourbaki. *Természet Világa* III., (matematika) különszám, 111–114.

[104] Herber, H-J. 1983. Innere Differenzierung im Unterricht. Verlag W. Kohlhammer Stuttgart Berlin Köln Mainz

[105] Van den Heuvel, M., Panhuizen, 2002. Realistic Mathematics Education as work in progress, in F.L. Lin (ed.), Common Sense in Mathematics Education. Proceedings of 2001, BI Wissenschaftsverlag: Mannheim-Leipzig-Wien-Zürich

[106] Hilbert, D. 1962. Grundlagen der Geometrie. B. G. Teubner, Stuttgart

[107] Hollai, M. 1972. A geometriai gondolkodás és a transzformációs szemlélet szintjei. ELTE TTK, Szakmódszertani Közlemények, V.

[108] Hollenstein, A., Eggenberg, F. 1998. Materialien für Offene Situationen im Mathematikunterricht. Orell Füssli Verlag, Zürich

[109] Hortobágyi, I. 1997. Aufgabenlösen im problemlösungsorientierten Mathematikunterricht. In: Vásárhelyi, É. (ed.) Integrativer Unterricht in Mathematik. Abakus Salzburg

[110] Horvay, K., Pálmay, L. 1966. Matematika a gimnáziumok és szakközépiskolák I. osztálya számára. Tankönyvkiadó, Budapest

[111] Horvay, K. 1968. Geometriai transzformációk az általános és középiskolai tanításban. TTK Szakmódszertani Közlemények I. kötet

[112] Humenberger, J., Reichel, H.-Ch. 1995. Fundamentale Ideen der Angewandten Mathematik. BI Wissenschaftverlag, Mannheim-Leipzig- Wien-Zürich

[113] Iker, J. 1989. A matematikatanítás fejlődése. in: A matematika tanítása I. Szerkesztette: Ács Pál, Tankönyvkiadó, Budapest

[114] Imrecze Z., Sztrókayné Földvári V., Szeredi É. 1983. Matematika 8, („Kockás sorozat"). Tankönyvkiadó

[115] Jakab, A., Jakab, A., Pelle, B., Rados, M. 1980. Egerben a Ho Si Minh Tanárképző Főiskola Matematika Tanszékén végzett geometriatanítási kísérletek összegezése. In: Néhány hazai és külföldi kisérlet. Új utak a matematika tanításában I. Tankönykiadó, Budapest

[116] Kántor, S. 2009. Tudós matematikatanárok Hajdú, Szabolcs és Szolnok megye középiskoláiban, (1850-1948), Debrecen

[117] Kárpáti A. 2006. (szerk.) Esélyteremtés az oktatási informatika eszközeivel. Tanári kézikönyv a 12-14 éves korosztály tanításához. NTK.

[118] Kárpáti A. 2007. ICT and the Multigrade Teacher. The Hungarian NEMED Project. Multigrade Education: Past, Present and Future. Conference of NEMED (Network of Multigrade Schools in Education), University Politechnika, Bucharest

[119] Kárpáti A., Munkácsy, K. 2008. Mentorált innovació az összevont tanulócsoportos iskolákban – a Knowledge Practice Laboratory Projekt. Tanárképzők Konferenciája, Savaria Egyetem, Veszprém

[120] Kárteszi, F. 1966. Szemléletes geometria. Gondolat Kiadó, Budapest

[121] Kárteszi, F. 1972. A geometriatanítás korszerűsítéséről. Tankönykiadó, Budapest

[122] Kerettantervek az OFI és a sulinova honlapon
http://kerettanterv.ofi.hu/
Kerettanterv 1-4.évf (A és C típus)
http://www.sulinet.hu/tanar/kompetenciateruletek/2_matematika/2_tantervek/kerettantervek/kerettanterv_alsotagozat.pdf
Kerettanterv 5-8.évf (A és C típus)
http://www.sulinet.hu/tanar/kompetenciateruletek/2_matematika/2_tantervek/kerettantervek/kerettanterv_felsotagozat.pdf
Kerettanterv 9-12.évf (A és C típus)
http://www.sulinet.hu/tanar/kompetenciateruletek/2_matematika/2_tantervek/kerettantervek/kerettanterv_kozepiskola.pdf
Kerettanterv Szakiskola 9-10.évf. (A típus)
http://www.sulinet.hu/tanar/kompetenciateruletek/2_matematika/2_tantervek/kerettantervek/kerettanterv_szakiskola.pdf
Kerettanterv Kereszttantervi programcsomagok 3-12.évf. (B típus)
http://www.sulinet.hu/tanar/kompetenciateruletek/2_matematika/2_tantervek/kerettantervek/kerettanterv_matematika_b_3-12_evf.pdf

[123] Kertesi, G., Kézdi, G. 2005. Általános iskolai szegregáció, I., II. In: Közgazdasági Szemle. 2005. április, 317-355. p; 2005. május, 462-479.

[124] Kiss, E. 2007. Bevezetés az algebrába. Typotex, Budapest

[125] Klein, F. 1924. Elementarmathematik von höherem Standpunkt aus I-III. (3. kiadás) Springer, Berlin

[126] Klein, S. 1980. A komplex matematikatanítási módszer pszichológiai hatásvizsgálata. Akadémiai Kiadó, Budapest

[127] Kocsis, M., Marosvári, P., Molnár, Cs., Siposs, A. 2007. Matematika feladatgyűjtemény 12. osztályosoknak. Műszaki Kiadó, Budapest

[128] Kompetencia alapú kerettanterv és programcsomag. www.oh.hu és http://www.sulinet.hu/tart/cikk/S/0/35423/1

[129] Korándi, J., Török, J. 1997. Számelmélet és algebra III. (Absztrakt algebra) N.L.V. Nyomda Budapest

[130] Korándi, J. 2012. Matematika és a média kapcsolatának vizsgálata. PhD értekezés

[131] Kosztolányi, I. Projekttervezés. http://pihgy.hu/files/Kosztolányi%20István_%20Projekttervezés.doc http://dl.dropbox.com/u/100162898/pic/KorandiPhD.pdf

[132] Kosztolányi, J., Kovács, I., Pintér, K., Urbán, J., Vincze, I. 2005. Sokszínű matematika 11. Mozaik Kiadó, 38-62.

[133] Kovács, Cs., Sz. Földvári, V., Szeredi, É. 1980. Matematika, Általános Iskola 7. („Kockás sorozat”). Tankönyvkiadó, Budapest

[134] Kovács, Cs., Sz. Földvári, V., Szeredi, É. 1996. Matematika a hatosztályos gimnáziumok I. osztálya számára. Calibra Kiadó, Budapest

[135] Krauss, S., Gigerenzer, G. 2001. Statistisches Denken oder statistische Rituale: Was sollte man unterrichten? In: Borovcnik, M.; Engel, J.; Wickmann, D. eds.(2001): Anregungen zum Stochastikunterricht Verlag Franzbecker: Hildesheim, Berlin 53-62.

[136] Kronfellner, M., Kronfellner, J., Peschek, W. 1999. Angewandte Mathematik. öbv & hpt

[137] Kuhl, J. 1999. A Functional-Design Approach to Motivation and Self-Regulation: The Dynamics of Personality Systems Interactions in: M. Boekaerts, P.R. Pintrich - M. Zeidner (Eds.), Self-regulation: Directions and challenges for future research. Academic Press.

[138] Laczkovich M., T. Sós, V. 2005. AnalízisI., Nemzeti Tankönyvkiadó, Budapest

[139] Lakatos, I. 1998. Bizonyítások és cáfolatok. Typotex Kiadó

[140] De Lange, J. 1996. Using and Applying Mathematics in Education. in: A.J. Bishop, et al. (eds). International handbook of mathematics education, Part one. Kluwer Academic Publisher, 49-97.

[141] Leder, G. C., Pehkonen, E., Törner, G. (Eds.) 2002. Beliefs: A hidden variable in mathematics education? Dordrecht, The Netherlands: Kluwer Academic Publishers

[142] Lindner, F.W. 1808. Über die historisch-genetische Methode, Leipzig

[143] Malara, N. 1995. Didactical innovations in geometry through the use of computer: some results of a research on the plane isometries. In: ICMI Study, Perspectieves on the teaching of geometry for the 21st century, pre-proceeding for Catania Conference. University of Catania

[144] Malara, N. 2004. The Dialectics between Theory and Practice: Theoretical Issues and Practice Aspects from an Early Algebra Project. 2004. Plenary lecture at PME 27.

[145] Maróthi Gy. 1743. Arithemetica, vagy számvetésnek mestersége, mellyet írt és közönséges haszonra, főképen a Magyar Országon előfordulható dolgokra alkalmaztatván kiadott. - Debretzen: Margitai István. In: A matematika tanítása I. Szerkesztette: Ács Pál (1989), Tankönyvkiadó, Budapest

[146] Matematikatanár-képzés Matematikatanár-továbbképzés című kiadvány 1999. – 2007. évi kötetei

[147] Mogens, Niss 2003 http://mathstore.ac.uk/workshops/bamc2003/KjeldBMC.pdf

[148] Munkácsy K. 2012. Tehetséggondozás hátrányos helyzetű tanulók körében. http://ganymedes.lib.unideb.hu:8080/dea/bitstream/2437/152664/8/Munkacsy_phd_titkositott.pdf

[149] Lobatschewski, N. I. 1951. Geometriai vizsgálatok a párhuzamosok elméletének köréből, Akademiai Kiadó

[150] Mascheroni, L. 1797. Geometria del compasso.

[151] Mathbridge webes interaktív matematikai portál (angol, finn, holland, magyar, német, spanyol, ... nyelven) http://sziget.mine.nu:8080/mathbridge

[152] Meissner, H. 2001. Procepts in geometry. In: European Research in Mathematics Education II.

[153] Menger, K. 1928. Dimensionstheorie, Leipzig-Berlin

[154] Mihály, I. 2000. Vidéki környezet – vidéki iskolák, Van-e létjogosultságuk a kisiskoláknak? Új Pedagógiai Szemle, 2000/5, 65-72.

[155] von Mises, R. 1931. Wahrscheinlichkeitsrechnung, Franz Deuticke: Leipzig und Wien

[156] Mocznik F. 1868. Számítástan (Arithmetica) alsó gimnáziumok számára, Heckenast Nyomda

[157] Mohr, G. 1672. Euclides Danicus

[158] Moore D. S. 1997. Bayes for Beginners Some hesitate in: AMS Vol. 51, No. 3. 254-260.

[159] Nakahara 2008. Cultivating Mathematical Thinking through Representation (keynote paper2007.)

[160] Neyman, J. 1952. „Mathematical Statistics and Probability", Lectures and Conferences, U.S.D.A. Graduate School

[161] Nunes, T. and others 1993. Street Mathematics And School Mathematics, Cambridge University Press

[162] Orosz, Gy. 2007. A súlypontszerkesztési tétel, Tanári Kincsestár – Matematika, 2007. december, Raabe

[163] Orosz, Gy. 2008. A súlypontszerkesztési tétel alkalmazásai, Tanári Kincsestár – Matematika, 2008. március, Raabe

[164] Országos kompetenciamérés.
http://www.kompetenciameres.hu

[165] Padberg, F. 1995. Didaktik der Bruchrechnung, Spektrum Akademischer Verlag

[166] Paivio, A. 2006. Dual coding theory and education. Draft chapter for the conference on „Pathways to Literacy Achievement for High Poverty Children", University of Micchigan School of Education.

[167] Paivio, A. 2006. Mind and its evolution; A dual coding theoratical interpretation, Mahwah, NJ: Lawrence erlbaum Associates, Inc.

[168] Pálfalvi, Jné. 2000. Matematika didaktikusan. Typotex Kiadó Budapest URL: http://www.tankonyvtar.hu/ honlapon

[169] Pálfalvi, Jné., Szeredi É., Török J. 2005. A matematika tanulása. In: Tanuljunk, de hogyan? Az iskolai szaktárgyak tanulása. Szerkesztette: Katona András, Ládi László és Victor András. Nemzeti Tankönyvkiadó, Budapest

[170] Pálmay Lóránt: Búcsú Reiman Istvántól (2012. március 9.)
http://www.termeszetvilaga.hu/szamok/tv2012/tv1209/pl.pdf

[171] Pehkonen, E. 1995. Introduction: Use of open-ended problems. ZDM, 1995/2 55–57.

[172] Pelle, B., Jakab, A. 1972. Egy lépés a geometriatanításunk korszerűsítésének útján. In: Új utak a matematika tanításában 1. Tankönyvkiadó, Budapest.

[173] Peller, J. 1974. A számfogalom fejlesztésének szintjei az oktatási gyakorlatban. Tankönyvkiadó, Budapest

[174] Peller, J. 1980. Ponthalmazok, számhalmazok, polinomok, függvények, algebra Tankönyvkiadó Budapest

[175] Peller, J., Megyesi, L. 1982. Függvények elemi vizsgálata. Vektortér. „A tanulók matematikai tevékenységének tervezése és irányítása a középiskolában" sorozat, Tankönyvkiadó Budapest

[176] Peller, J. 1987. Exponenciális és logaritmusfüggvény, differenciálszámítás. „A tanulók matematikai tevékenységének tervezése és irányítása a középiskolában" sorozat, Nemzeti Tankönyvkiadó

[177] Peschek, W., Schneider, E., Vancsó, Ö. 1995. Úton a tudomány és képzés egy új felfogása felé. OKSZI Módszertani Lapok 2. évfolyam 3. szám

[178] Piaget, J. 1972. The principles of genetic epistemology. London: Routledge & Kegan Paul

[179] Piaget, J. 1980. Psychologie der Intelligenz. Stuttgart: Klett-Cotta

[180] Piaget, J. 1993. Az értelem pszichológiája (La psychologie de l'intelligence). Gondolat Kiadó, Budapest

[181] Piaget-Inhelder 1999. Gyermeklélektan, Budapest, Osiris

[182] Pinto, M. M. F., Tall , D. O. 2002. Building formal mathematics on visual imagery: a theory and a case study. For the Learning of Mathematics! 2002. 22 (1), 2-10.

[183] Pogáts, F. 1995. Varga Tamás matematikai versenyek, Typotex, Budapest

[184] Pólya, Gy. 1967-1968. A problémamegoldás iskolája I-II. Tankönyvkiadó Budapest

[185] Pólya, Gy. 1971. A gondolkodás iskolája, III. bővített kiadás, Gondolat Kiadó, Budapest

[186] Pólya, Gy. 1984. Matematikai módszerek a természettudományban, Gondolat Kiadó, Budapest

[187] Pólya, Gy. 1988. Indukció és analógia. A matematikai gondolkodás művészete I. Gondolat Kiadó, Budapest

[188] Pólya, Gy. 1989. A plauzíbilis következtetés (A matematikai gondolkodás művészete II.), Gondolat Kiadó, Budapest

[189] Poncelet, J. V. 1822. Traité des propriétés projectives des figures. Paris

[190] Pósa; L. 1995. Variációk egy témára, in Halmos-Pálfalvi (Szerk.): Matematikatanárképzés – matematikatanár-továbbképzés, Budapest, Calibra

[191] Pósa, L. 1999. Összefoglalás és a Megoldások kötet Matematikai Módszertani Kutatócsoport, Calibra könyvek, Műszaki Könyvkiadó

[192] Radamacher, H. u. Toeplitz, O. 1933. Von Zahlen und Figuren, Springer, Berlin

[193] Reiman, I. 1986. A geometria határterületei Gondolat Kiadó, Budapest

[194] Reiman, I. 1999. Geometria és határterületei, Szalay Könyvkiadó és Kereskedőház Kft.

[195] Rendes, B. - Fátrai, K. Kisiskolák pedagógiája, Bajai Tanítóképző EJF, jegyzet, é. n.

[196] Róka, S. 2000. 2000 feladat az elemi matematikából. Typotex

[197] Sárközy, A. 1976. Számelmélet. Bolyai-könyvek. Műszaki Könyvkiadó, Budapest

[198] Sáska, G. 2006. Európa oktatásügye, ahogy a Kárpát-medencéből látszik, Iskolakultúra

[199] Scharnitzky, V. 1998. Mátrixszámítás. Bolyai-könyvek. Műszaki Könyvkiadó, Budapest

[200] Schoenfeld, A.H. 1985. Mathematical Problem Solving. Academic Press, INC. London

[201] Schommer-Aikins, M. 2004. Explaining the epistemological belief system: Introducing the embedded systemic model and coordinated research approach. Educational Psychologist, 39 (1) 19–29.

[202] Schumann, H., Vásárhelyi, É. 2002. Geometriai szélsőértékfeladatok számítógépes vizsgálata. Computerunterstützte Behandlung geometrischer Extremwertaufgaben4. fejezet: Medienspezifische Methodenvielfalt bei der Behandlung einer Extremwertaufgabe. Kétnyelvű CD-ROM, T3 Hungary, Budapest
http://dl.dropbox.com/u/100162898/vasar/dinami.html

[203] Schweiger, F. 2006. Fundamental Ideas, fordította Rózsahegyi Eszter, kézirat

[204] Egy cikk Singapurból a kommunikációs keret kialakítása kérdéshez: Promote Student Questioning in Mathematics Lessons
http://math.nie.edu.sg/kywong/Promotestudentquestioning.pdf

[205] Sfard, A. 1987. Two conceptions of mathematical notions: operational and structural. In: Proceedings of PME-XIII. vol. 3. Montreal, Canada

[206] Skemp, R. R. 2005. A matematikatanulás pszichológiája. Edge Kiadó, Budapest

[207] Soós A. 1899. Paedagogiai kalauz, Kecskemét

[208] Steiner, J. 1833. Die geometrischen Konstruktionen, ausgeführt mittels der geraden Linie und eines festen Kreises. Berlin

[209] Stewart, I. 1992. Az eltűnt teve titka. Tudomány, 1992/8. 77–79.

[210] Stute, W. 1987. Der historische Streit zwischen R. A. Fisher und J. Neyman oder: Ein Sittengemälde aus der Blütezeit der englischen Schule für Statistik

[211] Surányi, J. 1974. A számkör felépítése. Útközben (középiskolai matematikatanítási kísérlet) 1. és 2. kötet MTA Matematikai Kutató Intézet Didaktikai Csoport Budapest http://dl.dropbox.com/u/100162898/pic/szemelv1.pdf

[212] Szabó, Á. 1997. A görög matematika, Budapest, Magyar Tudománytörténeti Intézet

[213] Szabó, E. 2007. Csoportelméleti kalandozások, Typotex

http://www.renyi.hu/~endre/csoportok-fizikusoknak/3.szakasz.xhtml

[214] Szabó, G. 2010. Tanmenetjavaslat a Színes matematika sorozat 3. osztályos elemeihez, NTK

[215] Szendrei, J. 1996. Algebra és számelmélet, Nemzeti Tankönyvkiadó, Budapest

[216] Szendrei, J. 2005. Gondolod, hogy egyre megy? Typotex

[217] Szénássy, B. 1970. A magyarországi matematika története (A legrégibb időktől a 20. század elejéig), Akadémiai Kiadó

[218] Szeredi É., Kovács Cs. 2003. Geometriai transzformációk. In: Csahóczi E., Csatár K., Kovács Cs., Morvai É., Széplaki G., Szeredi, É.: Matematika 7. osztály. Apáczai Kiadó, Celldömölk

[219] Szeredi, É., Kovács, Cs. 2004. Geometriai transzformációk. In: Csahóczi E., Csatár K., Kovács Cs., Morvai É., Széplaki G., Szeredi É.: Matematika 6. osztály. Apáczai Kiadó, Celldömölk

[220] Szeredi, É. 2011. Geometria mozgásban. Az egybevágósági transzformációk tanításának egy új módszere. http://dea.lib.unideb.hu/dea/bitstream/2437/122079/10/Szeredi-Eva-PhD-dolgozat_titkositott.pdf

[221] Sztrókay, V. 1998. Was alles kann man mit einer Tafel Schokolade – außer sie zu essen – beginnen? Mathematik in der Schule, 1998. Mai, (36. évf. 5.sz.) 263–275.

[222] Sztrókay, V., Ambrus A. 2000. Zur Behandlung der Bruchrechnung in Ungarn, In: Der Mathematikunterricht 2000/2 69-79.

[223] Takács, T. 2001. Gazdasági feladatok a középfokú matematikaoktatásban. *A Matematika Tanítása*, 2001/5., 11–17.

[224] Tall, D. O., Vinner, S. 1981. Concept image and concept definition in mathematics, with special reference to limits and continuity. Educational Studies in Mathematics, vol. 12.

[225] Tall, D. O. 1991. Advanced Mathematical Thinking. Kluwer Academic Publishers. Dordrecht, NL.

[226] Tall, D. O. 1995. The psychology of symbols and symbol manipulators: What are we doing right? Proceedings of the Seventh Annual International Conference on Technology in College Mathematics Teaching, Addison-Wesley.

[227] Thomas, J. 1997. Teaching Mathematics in a Multicultural Classroom: Lessons from Australia. In Multicultural and Gender Equity in the Mathematics Classroom, The Gift of Diversity. NCTM USA, 1997. 34-45.

[228] Tóth, B. 2010. Modellezési feladatok a matematikában. Szakdolgozat
http://www.cs.elte.hu/blobs/diplomamunkak/bsc_mattan/2010/toth_bettina.pdf

[229] Törner, G. 2002. Epistemologische Grundüberzeugungen- verborgene Variable beim Lehren und Lernen von Mathematik.-In. Der Mathematikunterricht, 48(4/5) S. 103–128.

[230] Török, J. 2007. Angol, belga, magyar és spanyol matematikatanítási hagyományok összehasonlítása.
http://dl.dropbox.com/u/100162898/torok/dissz.pdf

[231] Treffers, A. 1987. Three Dimensions. A Model of Goal and Theory Description in Mathematics Instruction – The Wiskobas Project, Reidel Publishing Company, Dordrecht, The Netherlands.

[232] Trosztnyikov, V.N. 1981. Konstruktív módszerek a matematikában Gondolat Kiadó, Budapest

[233] Tuveng, E. - Wold, A. H. 2005. The Collaboration of Teacher and Language-minority Children in Masking Comprehension Problems in the Language of Instruction: A Case Study in an Urban Norwegian School. Language and Education, 2005. 6. 513-536.

[234] USA, OM, Oktatási Staisztikai Hivatal jelentései, NAEP, é. n.
http://nces.ed.gov/nationsreportcard/

[235] Vancsó, Ö. 1992. Valószínűségszámítás és statisztika a középiskolában, Matematikatanár-továbbképzés az 1992. évi Varga Tamás Napok előadásai, Műszaki Kiadó, Budapest 63-73.

[236] Vancsó, Ö. (szerk.), 2002. Matematika 7-8 Műszaki Kiadó, Budapest

[237] Vancsó, Ö. 2003. Lesz-e olyan pillanat, amikor minden táncos „halott”? *KöMaL* október

[238] Vancsó, Ö. 2005. Klasszikus és Bayes-statisztika a matematikadidaktikában. PhD értekezés
http://dl.dropbox.com/u/100162898/vo/PhD_Vancso_Odon.pdf

[239] Vancsó, Ö. 2009. Matematikai modellezés nehézségei egy OKTV feladat kapcsán. *Matematika Tanítása* szeptember

[240] Vancsó, Ö. 2010. (szerk.) Matematika kézikönyv. Akadémiai Kiadó, Budapest

[241] Varga Tamás: Osztójáték az Élő matematika Tankönyvkiadó, Budapest, 1975. kötetből. Rövidített változat:
http://db.komal.hu/KomalHU/cikk.phtml?id=198801

[242] Vári, P. 2003. (szerk.) PISA-vizsgálat 2000, mintafeladatokkal. Műszaki Kiadó, Budapest

[243] Vásárhelyi, É. 1999. Combination of traditional and computer based tools as a strategy for problem solving. In: Creativity and Mathematics Education (Tagungsband), Münster, 1999. 163-166.

[244] Vásárhelyi, É. 2002. A számítógép a matematikaoktatásban. Oktatási segédanyag.
http://dl.dropbox.com/u/100162898/vasar/szgep.pdf

[245] Vásárhelyi, É. 2003. A vizuális reprezentáció fontossága a matematikaoktatásban. Oktatási segédanyag.
http://dl.dropbox.com/u/100162898/vasar/vizualis.html

[246] Vásárhelyi, É. 2006. Problem solving with the help of different representations. In: Learning in Europe, Jena

[247] Vásárhelyi, É. 2006b. Arbeitsblatt zur Begriffsbildung nach dem Unterrichtsmodell innere Differenzierung.
http://dl.dropbox.com/u/100162898/vasar/arbeitsb.html

[248] Vásárhelyi, É. 2007. Fogalomalkotás és reprezentációk
http://dl.dropbox.com/u/100162898/vasar/repr.pdf

[249] Vásárhelyi, É. 2008. Hintergrundtheorien des Unterrichtsmodells Innere. Differenzierung. Salzburg, egyetemi doktori dolgozat német nyelven

[250] Vásárhelyi, É. 2009. A magyar matematikai nevelés a nemzetközi összehasonlítások tükrében. Kiegészítő tanulmány az Oktatáskutató és Fejlesztő Intézet A matematika tantárgy helyzete a felső tagozaton és a középiskolában c. elemzéséhez http://www.ofi.hu/

[251] Velkeyné Grétzy, A., Vancsó, Ö. 2002. Hány üveg üdítőt kell átlagosan vennünk, hogy összegyűjtsük mind a 6 különböző kupont? Raabe tudástár

[252] Vezérkönyv 1859. az elemi számtanításban (szerző nélkül) Sárospatak

[253] Víghné dr. Lencsés, Á. 2013. Néhány gondolat a valós számsorozatok tanításáról.
http://ttk.pte.hu/mii/matematika/anyagok/lencses_agnes/hid_-_valos_szamsorozatok_tanitasa.pdf

[254] Vigotszkij, L. S. 1966. Gondolkodás és beszéd. Budapest

[255] Villani V. et al. 1996. Perspectives on the teaching of geometry fo the 21st century. Discussion Document for an ICMI study. The International Commission on Mathematical Instruction.

[256] Wickmann, D. 1991. Bayes-Statistik BI Verlag

[257] Wickmann, D. 1998. Zur Begriffsbildung im Stochastikunterricht JMD 19(1998)1, 46-80.

[258] Zimmermann, B. 1981. Versuch einer Analyse von Strömungen in der Mathematikdidaktik In: *ZDM*, 1981/1 44–53.